HAL open science

Construction de (phi,gamma)-modules en caractéristique p

Mathieu Vienney

To cite this version:

Mathieu Vienney. Construction de (phi,gamma)-modules en caractéristique p. Mathématiques générales [math.GM]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2012. Français. NNT : 2012ENSL0759 . tel-00763785

HAL Id: tel-00763785

https://theses.hal.science/tel-00763785v1

Submitted on 11 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON - UNIVERSITÉ DE LYON

THÈSE

en vue d'obtenir le grade de

Docteur de l'École Normale Supérieure de Lyon - Université de Lyon -

Spécialité : **Mathématiques**

préparée au laboratoire **Unité de Mathématiques Pures et Appliquées**

dans le cadre de l'École Doctorale **Informatique et Mathématiques**

présentée et soutenue publiquement
par

Mathieu Vienney

le 6 novembre 2012

Titre:
Construction de (φ, Γ)-modules en caractéristique p

Directeur de thèse: **Laurent Berger**

Après avis de MM. Toby Gee et Vytautas Paškūnas

Jury

M. Berger Laurent,	Directeur de thèse
M. Colmez Pierre,	Membre
M. Paškūnas Vytautas,	Rapporteur
M. Schraen Benjamin,	Membre
Mme. Vignéras Marie-France,	Présidente du jury

Résumé

Cette thèse est constituée de deux parties indépendantes, étudiant deux aspects de la théorie des (φ, Γ)-modules en caractéristique p.
La première partie porte sur l'étude de la réduction modulo p des représentations cristallines irréductibles de dimension deux. Nous donnons, pour des poids $k \leq p^2$, un calcul explicite de $\overline{V}_{k,a_p}$ pour a_p dans un disque fermé centré en zéro, généralisant ainsi des résultats déjà connus pour $k \leq 2p$.
En particulier, nous calculons le plus grand rayon possible pour ce disque, et montrons que dans certains cas, la réduction qui est constante à l'intérieur du disque change sur son bord.
Dans la seconde partie, nous nous intéressons aux représentations d'un sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur un corps de caractéristique p, et en particulier à celles qui sont lisses, irréductibles et admettent un caractère central. Une méthode pour construire de telles représentations à partir de (φ, Γ)-modules irréductibles a été décrite par Colmez dans sa construction de la correspondance de Langlands p-adique. Après avoir donné un cadre un peu plus général dans lequel la construction de Colmez fonctionne encore, nous classifions les représentations irréductibles du Borel, prouvant que la construction précédente permet d'obtenir toutes les représentations de dimension infinie.
Lorsque le corps des coefficients est fini, ou algébriquement clos, nous disposons d'une interprétation galoisienne des (φ, Γ)-modules irréductibles, et la classification précédente permet alors d'obtenir une correspondance entre ces représentations du Borel et des représentations galoisiennes modulaires.

Abstract

This thesis is made of two independent parts, dealing with two different aspects of characteristic p (φ, Γ)-modules.
In the first part we study the reduction modulo p of 2-dimensional irreducible crystalline representations. For weights $k \leq p^2$, we give an explicit description of $\overline{V}_{k,a_p}$ for a_p belonging to a closed disk centered at zero, generalizing results already known for $k \leq 2p$. We explicitely compute the biggest possible radius for this disk, and prove that in some cases, the reduction which is constant on the interior of the disk is different for a_p belonging to the border of the disk.
In the second part, we study the smooth, irreducible representations of a Borel subgroup of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ over a field of characteristic p and admitting a central character. One way of constructing such representations from irreducible (φ, Γ)-modules was described by Colmez in his construction of the p-adic Langlands correspondence. After giving a more general framework for Colmez's construction, we classify the irreducible representations of the Borel subgroup, proving that the previous construction already gives all the infinite dimensional representations.
When the coefficient field is finite, Fontaine's equivalence combined with the previous classification gives a correspondence between these representations of a Borel subgroup of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ and modular galois representations.

Table des matières

Résumé iii
Abstract iv
Table des matières v

Introduction **1**
1 Réduction des représentations cristallines 2
2 Représentations modulaires de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ 6

1 Rappels sur les représentations galoisiennes et les (φ, Γ)-modules **11**
1 Théorie de Galois 11
2 Représentations galoisiennes 12
3 (φ, Γ)-modules et représentations galoisiennes : la théorie de Fontaine 14
3.1 Anneaux de caractéristique p et corps des normes 15
3.2 Anneaux de caractéristique nulle 16
3.3 (φ, Γ)-modules en caractéristique p 17
3.4 (φ, Γ)-modules en caractéristique nulle 18
3.5 (φ, Γ)-modules à coefficients 19
3.6 Représentations de hauteur finie 19
3.7 (φ, Γ)-modules irréductibles en caractéristique p 20

2 Sur la réduction des représentations cristallines de dimension 2 **23**
1 Théorie de Hodge p-adique 23
1.1 Représentations de Hodge-Tate 23
1.2 Formalisme des représentations admissibles 24
1.3 Le corps $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ et les représentations de de Rham 25
1.4 L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et les représentations cristallines 27
1.5 Représentations cristallines et φ-modules filtrés 28
1.6 Modules de Wach 30
2 La théorie des pentes de Kedlaya 31
3 Réduction des représentations cristallines de dimension 2 37
4 La méthode de Berger-Li-Zhu 40
5 Le calcul de la valuation de convergence 43
6 Le calcul de $\overline{V}_{k,a_p}$ lorsque $v_p(a_p) = r$ et $k \leq p^2$ 46
6.1 Un critère de réductibilité 46
6.2 Calcul de la réduction dans le cas où $p+1$ divise $k-1$ 50
6.2.1 Si $m = l$ 50
6.2.2 Si $m = l+1$ et $k \neq p^2$ 50
6.2.3 Si $k = p^2$ 51
6.3 Calcul de la réduction dans le cas où $p+1$ ne divise pas $k-1$ 51

6.3.1 Si $\binom{k-1}{m} \neq 0$ modulo p 51
6.3.2 Si $\binom{k-1}{m} = 0$ modulo p 52
6.3.2.1 Si $k = m(p+1)$ 52
6.3.2.2 Si $k \neq m(p+1)$ 52
6.4 Les cas où $\overline{V}_{k,a_p}$ est irréductible 52
6.5 Récapitulatif 54
7 Quelques résultats sur $\overline{T}_{k,a_p}$ 56
7.1 Rappels sur la théorie de Kummer 56
7.2 Cocycles et extensions 57
7.3 Détermination de l'application de Kummer en termes de (φ, Γ)-modules 58
7.4 Application à l'étude de $\overline{T}_{k,a_p}$ 59
8 Les limites de la méthode de Berger-Li-Zhu 60
8.1 Le cas où c n'est pas une unité. 61
8.2 Le cas où c est une unité. 62

3 Représentations modulaires d'un sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ 67
1 Rappels et préliminaires sur les représentations de groupes localement profinis 67
1.1 Représentations lisses 67
1.2 Induites compactes 69
1.3 Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ en caractéristique p 70
2 Dual des représentations lisses 72
2.1 Espaces linéairement compacts et espaces de prodimension finie 72
2.2 Dualité entre espaces discrets et espaces de prodimension finie 76
2.3 Dualité pour les représentations 78
2.4 Actions de groupes profinis 80
2.5 Le lemme de Nakayama topologique 81
3 (ψ, Γ)-modules et (φ, Γ)-modules 82
3.1 (φ, Γ)-modules en caractéristique p 83
3.2 ψ-modules et φ-modules 84
3.3 Des φ-modules aux ψ-modules : $D^\sharp$ et $D^\natural$ 86
3.4 Des ψ-modules aux φ-modules : reconstruction de φ 89
3.5 L'action de Γ : (φ, Γ)-modules et (ψ, Γ)-modules 91
3.6 Dualité pour les (φ, Γ)-modules 93
3.6.1 Dual de Tate d'un (φ, Γ)-module et résidus 93
3.6.2 Dual topologique d'un (φ, Γ)-module 94
3.6.3 Orthogonalité et réseaux 95
3.7 D^+, D^{++}, D^{nr} et les (φ, Γ)-modules irréductibles 95
4 Représentations lisses de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ 100
4.1 Description vectorielle des n-blocs 104
4.2 Représentations de présentation finie 105
4.3 Description explicite de certaines représentations 106
5 Représentations de la forme $\Omega_\chi(D)$ 115
5.1 Construction de représentations de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ 115
5.2 Représentations associées à des (φ, Γ)-modules 118
5.2.1 Le cas des (φ, Γ)-modules irréductibles de dimension 1 118

5.2.2 Le cas des (φ, Γ)-modules de dimension supérieure à 2 119
6 Classification des représentations irréductibles et conséquences 121
6.1 (ψ, Γ)-modules et représentations irréductibles de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ . . . 121
6.1.1 P^+-modules de représentations du Borel 122
6.1.2 $k[\![\pi]\!]\{\phi\}$-modules admissibles 125
6.1.3 Représentations de dimension infinie de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ . . . 126
6.2 Classification des représentations lisses irréductibles de B . . . 127
6.3 Non admissibilité des représentations de dimension infinie . . . 128
6.4 Caractère central des représentations irréductibles 130

Bibliographie **133**

Index **136**

Index des notations **137**

Introduction

La géométrie algébrique fournit de nombreux exemples d'actions du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur des espaces vectoriels p-adiques. Par exemple le module de Tate $T_p(E)$ d'une courbe elliptique E définie sur $\mathbf{Q}$, ou les groupes de cohomologie étale $H^i(X, \mathbf{Q}_p)$ d'une variété X propre et lisse sur $\mathbf{Q}$ sont munis de telles actions.

Soit $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbf{Q}}_p)$ une telle représentation. Fixons un groupe de décomposition $D_p \simeq \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ au dessus de p, et considérons $\rho_{|D_p} : D_p \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbf{Q}}_p)$. Il s'agit alors d'une représentation galoisienne p-adique.
L'étude de telles représentations s'avère très différente de celle des représentations ℓ-adiques, avec $\ell \neq p$. En effet, si les topologies de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et de $\overline{\mathbf{Q}_\ell}$ sont «incompatibles», ce n'est pas le cas des topologies de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et de $\overline{\mathbf{Q}}_p$. Ainsi, si la théorie des représentations ℓ-adiques est essentiellement de nature algébrique, celle des représentation p-adiques est plutôt analytique, et il existe beaucoup plus de telles représentations.

Un outil central dans l'étude des représentations galoisiennes p-adiques est la théorie des (φ, Γ)-modules, introduits par Fontaine dans [Fon90]. Il s'agit de modules libres de type fini sur des anneaux de séries, munis d'un Frobenius φ et d'une action semi-linéaire continue de Γ, le quotient de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ par le noyau du caractère cyclotomique p-adique $\chi_{\mathrm{cycl}} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{Z}_p^\times$. De plus, on demande à l'action de Γ de commuter à φ. On dispose alors de foncteurs $V \mapsto \mathbf{D}(V)$, qui à une représentation p-adique (respectivement modulo p) associent un (φ, Γ)-module sur un anneau de caractéristique nulle (resp. de caractéristique p). Ces foncteurs sont en fait des équivalences de catégories entre la catégorie des représentations p-adiques (respectivement modulo p) de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et la catégorie des (φ, Γ)-modules étales sur un certain corps de caractéristique nulle (resp. la catégorie des (φ, Γ)-modules sur un certain corps de caractéristique p).

La théorie de Hodge p-adique, initiée par Tate dans les années 60 et développée par Fontaine et de nombreux autres auteurs dans les années 80 permet de faire un premier tri dans les représentations galoisiennes p-adiques. On introduit ainsi différentes catégories de représentations galoisiennes, qui sont les catégories des représentations cristallines, semi-stables, de de Rham et de Hodge-Tate. Chacune de ces catégories est alors une sous-catégorie pleine de la suivante. Cette classification permet également de caractériser, au moins conjecturalement la composante locale en p des représentations «provenant de la géométrie».
Le lien entre (φ, Γ)-modules et théorie de Hodge p-adique a été étudié, dans le cas des représentations cristallines, par Berger dans [Ber04]. Il y est décrit une équi-

valence de catégories entre la catégorie des représentations cristallines, et celle des modules de Wach, qui sont des sous-modules des (φ, Γ)-modules.

Une autre approche dans l'étude des représentations galoisiennes, développée initialement par Langlands, est de relier les représentations de groupes de Galois p-adiques avec celles de groupes réductifs p-adiques. La philosophie générale du programme de Langlands est de mettre en bijection des classes d'isomorphisme de représentations de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ avec des classes d'isomorphisme de représentations de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$. Par exemple, pour $n = 1$, une telle bijection est fournie par la théorie du corps de classes.
Pour $\ell \neq p$, de telles correspondances entre des représentations ℓ-adiques de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et des représentations ℓ-adiques de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$ sont connues depuis la fin des années 1990 et les travaux de Harris-Taylor et Henniart.
Pour $\ell = p$, il s'agit du programme de Langlands p-adique, initié par Breuil au début des années 2000. Dans [Bre03a], Breuil définit une bijection entre certaines classes d'isomorphisme de représentations modulo p de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et certaines classes d'isomorphisme de représentations modulo p de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ de dimension 2.
Une correspondance entre des représentations p-adiques de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur des espaces de Banach, permettant de retrouver la correspondance précédente par réduction modulo p, fut ensuite conjecturée par Breuil d'abord pour les représentations cristallines puis pour les représentations semi-stables.
Par la suite, des travaux de Berger, Breuil, Colmez et Paškūnas ont permis d'établir que cette correspondance avait les propriétés attendues. Leurs travaux utilisent intensivement l'équivalence de Fontaine entre représentations galoisiennes et (φ, Γ)-modules.

Les résultats de cette thèse forment deux parties indépendantes, qui sont les chapitres 2 et 3 du présent manuscrit. Le chapitre 1 contient les définitions et les rappels sur les (φ, Γ)-modules nécessaires au deux chapitres suivants.

1 Réduction des représentations cristallines

Dans le chapitre 2, nous nous intéressons au calcul de la réduction modulo p des représentations cristallines de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$. Par les travaux de Fontaine et l'équivalence entre représentations cristallines et φ-modules filtrés faiblement admissibles, il est possible de décrire toutes les représentations cristallines irréductibles de dimension 2 : à torsion par un caractère près, elles sont paramétrées par un entier $k \geq 2$ et un entier p-adique $a_p \in \mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}$, et on note V_{k,a_p} la représentation correspondante. Plus précisément, si L est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ telle que $a_p \in L$, le φ-module filtré associé à V_{k,a_p} est $D_{k,a_p} = Le_1 \oplus Le_2$, avec

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = p^{k-1}e_2 \\ \varphi(e_2) = -e_1 + a_p e_2 \end{cases} \quad \text{et } \mathrm{Fil}^i D_{k,a_p} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \geq k \\ Le_1 \text{ si } 1 \leq i \leq k-1 \\ D_{k,a_p} \text{ si } i \leq 0. \end{cases}$$

Si T est un réseau de V_{k,a_p} stable sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, alors sa réduction

modulo p, notée $\overline{T}$, est une représentation modulo p de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, dont la semi-simplifiée ne dépend pas du réseau T, par le principe de Brauer-Nesbitt. On note $\overline{V}_{k,a_p}$ cette représentation.

Le problème qui nous intéresse est de décrire $\overline{V}_{k,a_p}$ en fonction de k et de a_p. Les motivations à l'étude de telles représentations sont diverses, citons par exemple le fait que sous certains hypothèses (rappelées à la section 3), la représentation galoisienne locale associée à une forme modulaire est cristalline, et l'étude de sa réduction modulo p possède alors un intérêt en vue de la conjecture de modularité de Serre.
Notons $\omega : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{F}_p^\times$ le caractère cyclotomique modulo p, μ_λ le caractère non ramifié de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ qui associe λ aux Frobenius géométriques, et $\omega_n : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_{p^n}) \to \mathbf{F}_p^\times$ un caractère fondamental de Serre de niveau n. Soit alors $\mathrm{ind}(\omega_n^h)$ l'unique représentation $\mathbf{F}_p$-linéaire, de dimension n, semi-simple, de déterminant ω^h et dont la restriction à l'inertie est isomorphe à $\omega_n^h \oplus \omega_n^{ph} \oplus \cdots \oplus \omega_n^{p^{n-1}h}$.
Les représentations $\overline{\mathbf{F}}_p$-linéaires, semi-simples et de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ sont de deux types : ce sont les sommes de deux caractères ou les $\mathrm{ind}(\omega_2^h) \otimes \mu_\lambda$.

Seuls des résultats partiels sont connus sur $\overline{V}_{k,a_p}$, et ont été obtenus essentiellement de deux façons : soit en utilisant la correspondance de Langlands locale p-adique (c'est l'approche de Breuil ([BB05]) et Buzzard-Gee ([BG09],[BG12])), soit par des techniques purement galoisiennes utilisant les (φ, Γ)-modules et leur raffinement dans le cas des représentations cristallines : les modules de Wach. Il s'agit là de l'approche développée par Berger, Li et Zhu dans [BLZ04], et c'est cette méthode que nous cherchons à exploiter un peu plus afin d'améliorer les résultats connus.
À l'heure actuelle, nous ne connaissons totalement $\overline{V}_{k,a_p}$ que pour $k \leq 2p+1$ ([BLZ04],[BB05],[Ber10b]), pour $v_p(a_p) > \left\lfloor \frac{k-2}{p-1} \right\rfloor$ ([BLZ04]) ou pour $0 < v_p(a_p) < 1$ ([BG09],[BG12]). Pour une synthèse des différents résultats connus, le lecteur pourra se reporter à la section 3.
Des travaux en cours de rédaction de Yamashita et Yasuda ([YY12]) déterminent $\overline{V}_{k,a_p}$ pour $k \leq \frac{p^2+1}{2}$ et presque toutes les valeurs de a_p.

La méthode de Berger, Li et Zhu consiste en la construction, pour un poids k fixé, d'une famille analytique $\mathbf{D}_k(X)$ de (φ, Γ)-modules étales, définie sur un voisinage p-adique de 0, telle que pour a_p dans ce voisinage de 0, $\mathbf{D}_k(a_p)$ soit isomorphe au (φ, Γ)-module associé à V_{k,a_p}. L'étude de ces (φ, Γ)-modules permet ensuite de calculer $\overline{V}_{k,a_p}$.
Cette construction passe par l'introduction de deux séries $\lambda_+, \lambda_- \in 1 + \pi\mathbf{Q}_p[\![\pi]\!]$, et le voisinage de 0 où est définie cette famille de (φ, Γ)-modules est la boule centrée en 0 et de rayon p^{-r}, avec r le plus petit entier tel que

$$p^r \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{k-1} (\text{modulo } \pi^{k-1}) \in \mathbf{Z}_p[\![\pi]\!].$$

Nous appelons valuation de convergence cet entier r, dépendant de k, et il est montré dans [BLZ04] que si $v_p(a_p) > r$, alors $\overline{V}_{k,a_p} \simeq \overline{V}_{k,0}$. Cette dernière représentation dépend de k, mais est parfaitement connue, ce qui permet de déterminer totalement $\overline{V}_{k,a_p}$ pour des valeurs de a_p proches de 0. De plus, Berger, Li et Zhu donnent une

borne sur r : si on note $m = \left\lfloor \frac{k-2}{p-1} \right\rfloor$, alors $r \leq m$.

Pour des poids $k \leq p$, la méthode de [BLZ04] permet de répondre totalement à la question posée, puisque la valuation de convergence est nulle, de sorte que pour tout a_p dans $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}$, $\overline{V}_{k,a_p} = \overline{V}_{k,0}$. Dans la section 6, nous déterminons explicitement la valuation de convergence pour des poids k inférieurs à p^2. Nous y montrons alors que la borne de [BLZ04] est presque toujours optimale :

Proposition. *Pour $k \leq p^2$, $r = m$ si et seulement si $v_p\left(\binom{k-1}{m}\right) = 0$. Si $v_p\left(\binom{k-1}{m}\right) > 0$, alors $r = m - 1$.*

Pour des poids k supérieurs à p^2, le calcul de la valuation de convergence semble demander plus d'efforts, et nous ne connaissons pas de formule générale pour exprimer r en fonction de k.

Si la méthode de [BLZ04] permet de déterminer $\overline{V}_{k,a_p}$ pour a_p à l'intérieur du disque de convergence, elle permet également de construire un (φ, Γ)-module isomorphe à $\mathbf{D}(V_{k,a_p})$ lorsque $v_p(a_p) = r$. Plus précisément, nous disposons du module de Wach d'un réseau T_{k,a_p} de V_{k,a_p}, tel que, dans une bonne base, la matrice du Frobenius φ de ce module de Wach soit donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q^{k-1} & \overline{a_p z} \end{pmatrix}, \text{ où } q = \frac{\varphi(\pi)}{\pi} \text{ et } z = \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{k-1} \text{ modulo } \pi^{k-1}.$$

Il suffit alors de réduire ce module de Wach modulo p pour en déduire le (φ, Γ)-module associé à $\overline{T}_{k,a_p}$, et après semi-simplification, le (φ, Γ)-module associé à $\overline{V}_{k,a_p}$. Puisque nous connaissons complètement la classification des représentations modulo p, semi-simples de dimension 2, ainsi qu'une description de leurs (φ, Γ)-modules, il est possible d'en déduire $\overline{V}_{k,a_p}$.

Afin de déterminer $\overline{V}_{k,a_p}$, il reste à identifier la classe d'isomorphisme des (φ, Γ)-modules de caractéristique p ainsi obtenus. Nous utilisons à cette fin la théorie des polygones de Newton de Kedlaya (rappelée dans la section 2) pour des anneaux de polynômes non commutatifs. En appliquant les résultats de Kedlaya à des polynômes de degré 2 issus de l'action de φ sur $\overline{T}_{k,a_p}$, nous donnons un critère permettant de déterminer s'il existe des droites stables par φ dans le (φ, Γ)-module de $\overline{T}_{k,a_p}$. Il est possible de raffiner un peu ce critère afin d'obtenir directement l'existence ou non de sous (φ, Γ)-modules de dimension 1, ce qui permet déjà de savoir si $\overline{V}_{k,a_p}$ est réductible ou non, et dans le cas réductible, d'obtenir immédiatemment $\overline{V}_{k,a_p}$. Le critère en question est détaillé dans la section 6.1, et son énoncé précis fait l'objet de la proposition 2.6.3.

Dans les cas où $\overline{V}_{k,a_p}$ est irréductible, nous appliquons de nouveau la théorie des polygones de Newton de Kedlaya au φ-module $\mathbf{D}(\overline{T}_{k,a_p})$, ce qui ne permet pas totalement de déterminer $\overline{V}_{k,a_p}$, puisqu'il reste alors deux candidats possibles. Ceci n'a rien de surprenant car les deux (φ, Γ)-modules correspondants sont isomorphes en tant que φ-modules, et il faut utiliser l'action de Γ afin de déterminer totalement $\overline{V}_{k,a_p}$. Ces calculs font l'objet de la section 6.4. Nous y montrons que lorsque $\overline{V}_{k,a_p}$ est irréductible pour a_p sur le bord du disque de convergence, alors c'était déjà le cas

pour a_p à l'intérieur du disque, et $\overline{V}_{k,a_p}$ ne change pas : c'est la même représentation irréductible pour tout a_p dans le disque de convergence fermé.
L'ensemble des résultats obtenus est synthétisé dans le théorème 2.6.9, dont l'énoncé est le suivant :

Théorème. *Soit $2 \leq k \leq p^2 - 1$, $a_p \in \mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}_p}}$, et soit $m = \left\lfloor \frac{k-2}{p-1} \right\rfloor$. Alors :*

1. *si $k - 1 = l(p+1)$,*
   (a) *si $v_p(a_p) > l$, alors*
$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \mu_{\sqrt{-1}} & 0 \\ 0 & \mu_{-\sqrt{-1}} \end{pmatrix} \otimes \omega^l$$
   (b) *si $v_p(a_p) = l$, alors*
$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega^l \mu_\lambda & 0 \\ 0 & \omega^l \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda^2 + \frac{\overline{a_p}}{p^l}\lambda + 1 = 0.$$
2. *si $p+1$ ne divise pas $k-1$,*
   (a) *si $\binom{k-1}{m} \neq 0$ modulo p, alors $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$ si $v_p(a_p) > m$ et*
      i. *si $k - 1 > m(p+1)$ et $v_p(a_p) = m$, alors $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$,*
      ii. *si $k - 1 < m(p+1)$, et $v_p(a_p) = m$, alors*
$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega^m \mu_\lambda & 0 \\ 0 & \omega^{k-1-m} \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda = \overline{\left(\frac{a_p}{p^m}\right)} \binom{k-1}{m}.$$
   (b) *si $\binom{k-1}{m} = 0$ modulo p, alors $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$ lorsque $v_p(a_p) > m - 1$ et*
      i. *si $k = m(p+1)$ et $v_p(a_p) = m - 1$, alors*
$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega^m \mu_\lambda & 0 \\ 0 & \omega^{m-1} \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda = \overline{\left(\frac{a_p}{p^{m-1}}\right)}.$$
      ii. *si $k \neq m(p+1)$ et $v_p(a_p) = m - 1$, alors $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$.*

Enfin, si $k = p^2$, alors $\overline{V}_{k,a_p} = \left(\begin{smallmatrix} \mu_{\sqrt{-1}} & 0 \\ 0 & \mu_{-\sqrt{-1}} \end{smallmatrix}\right)$ pour $v_p(a_p) \geq p$.

Il apparaît notamment que la réduction ne change pas toujours sur le bord du disque de convergence, et peut être la même sur le bord du disque et à l'intérieur du disque. De plus, si la réduction change sur le bord, alors deux cas peuvent se produire :
- soit $\overline{V}_{k,a_p}$ est réductible à l'intérieur du disque, et reste réductible sur le bord
- soit $\overline{V}_{k,a_p}$ est irréductible à l'intérieur du disque, et devient réductible sur le bord.

De plus, les calculs de Breuil dans le cas $k = 2p + 1$ prouvent que r n'est pas toujours le rayon du plus grand disque ouvert centré en 0 tel que $\overline{V}_{k,a_p}$ soit constante pour a_p à l'intérieur de ce disque.

Dans la section 7, nous donnons quelques informations supplémentaires sur le réseau $\overline{T}_{k,a_p}$ construit précédemment, et précisons (lorsque cela a un sens) s'il s'agit

d'une extension peu ramifiée ou très ramifiée.

La méthode de [BLZ04] utilisée pour calculer $\overline{V}_{k,a_p}$ est basée sur le fait qu'il est possible de construire explicitement le module de Wach d'un réseau de V_{k,a_p}. Le module de Wach ainsi construit possède une base adaptée à la filtration, qui permet d'identifier le φ-module filtré associé à celui de V_{k,a_p}. Nous prouvons dans la section 8 que cela n'arrive que pour a_p dans le disque de convergence. De manière précise, l'énoncé suivant est celui de la proposition 2.8.7 :

Proposition. *Soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, $k \geq 2$ et $a_p \in \mathcal{O}_L$ tels qu'il existe un réseau de $V^*_{k,a_p} = V_{k,a_p} \otimes \chi_{\mathrm{cycl}}^{1-k}$ dont le module de Wach possède une base dans laquelle la matrice de φ est de la forme*

$$M = \mathrm{Mat}\varphi = \begin{pmatrix} q^{k-1}a & b \\ q^{k-1}c & d \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d \in \mathcal{O}_L[\![\pi]\!]$. Alors soit $v_p(a_p) = 0$, soit $v_p(a_p) \geq r(k)$.

2 Représentations modulaires de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$

Dans le chapitre 3, nous classifions les représentations k-linéaires lisses irréductibles de $\mathrm{B} = \mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$, le sous-groupe de Borel standard de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, lorsque k est un corps de caractéristique p.

Afin de construire la correspondance de Langlands locale p-adique, Colmez ([Col10b]) a décrit un moyen d'associer une représentation de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ à un (φ, Γ)-module. Sa construction fonctionne aussi bien pour des (φ, Γ)-modules de torsion que pour des (φ, Γ)-modules de caractéristique nulle, mais seul le cas des (φ, Γ)-modules en caractéristique p nous intéresse ici.

Si k est un corps fini et D est un (φ, Γ)-module sur $k(\!(\pi)\!)$, il existe un opérateur $\psi : D \to D$, qui à $x = \sum_{k=0}^{p-1}(1+\pi)^k\varphi(x_k)$ associe x_0. Cet opérateur ψ est un inverse à gauche de φ et il existe un réseau de D, noté $D^\natural$, qui est stable par ψ, sur lequel ψ est surjectif et qui est minimal pour ces deux conditions.
Pour tout caractère lisse $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k^\times$, Colmez a défini une action de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur l'ensemble

$$\varprojlim_{\psi} D^\natural = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}} : \psi(x_{n+1}) = x_n\},$$

de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot x\right)_n &= \chi^{-1}(t)x_n, \\
\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^j \end{pmatrix} \cdot x\right)_n &= x_{n-j} = \psi^j(x_n) \text{ si } n \geq j, \\
\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot x\right)_n &= \gamma_{a^{-1}}(x_n) \text{ où } \chi_{\mathrm{cycl}}(\gamma_a) = a, \\
\left(\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x\right)_n &= \psi^j((1+\pi)^{p^{n+j}z}x_{n+j}) \text{ si } n+j \geq -v_p(z).
\end{aligned}$$

Avec l'action contragrédiente de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$, $\Omega_\chi(D) = (\varprojlim_\psi D^\natural)^* := \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\varprojlim_\psi D^\natural, k)$ devient une représentation lisse irréductible de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$, de caractère central χ.

L'idée de Colmez est alors de «recoller» deux telles représentations de sous-groupes de Borel de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ afin d'obtenir une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ tout entier. En général, la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ainsi obtenue est trop grosse. On ne peut en extraire une représentation possédant les propriétés attendues de la correspondance de Langlands locale p-adique (c'est-à-dire admissible au sens de Schneider-Teitelbaum) que dans le cas de (φ, Γ)-modules de dimension 2.
En revanche, la construction que nous venons de décrire permet d'associer des représentations irréductibles de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ à des (φ, Γ)-modules irréductibles de toutes dimensions, et pas uniquement de dimension 2, ce qui permet de construire une infinité de représentations lisses irréductibles de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$. Il est alors naturel de se demander s'il en existe d'autres, ou si toutes (du moins toutes les représentations de dimension infinie, puisque $\Omega_\chi(D)$ est toujours de dimension infinie) sont obtenues par cette construction.

Cette question a déjà été étudiée par Schneider et Vignéras dans [SV08] pour des représentations de torsion d'un sous-groupe de Borel d'un groupe réductif p-adique quelconque. Il y est alors prouvé qu'à partir de telles représentations, il est possible de construire des «(φ, Γ)-modules généralisés», qui ne vérifient pas nécessairement une hypothèse de finitude.
La nouveauté dans ce qui suit est d'utiliser des résultats d'Emerton [Eme11], afin de prouver que ces (φ, Γ)-modules sont bien de dimension finie dans le cas de représentations modulo p de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Dans la section 2, nous rappelons la notion d'espace de prodimension finie (ou espace linéairement compact) introduite par Lefschetz, ainsi qu'une dualité semblable à la dualité de Pontryagin $V \mapsto V^*$ entre ces espaces et les k-espaces vectoriels topologiques discrets. Cette dualité s'étend en une une dualité entre les représentations k-linéaires lisses d'un groupe topologique et les représentations k-linéaires de prodimension finie du même groupe. Ceci nous permet par la suite de travailler avec un corps k de caractéristique p quelconque, et pas nécessairement fini.

La notion de (φ, Γ)-module sur $k(\!(\pi)\!)$ possède un intérêt particulier lorsque k est fini puisqu'on dispose alors de l'équivalence de Fontaine et donc d'une interprétation en termes de représentations galoisiennes.
Si k n'est pas fini nous pouvons définir des actions k-linéaires de φ et Γ sur $k(\!(\pi)\!)$, prolongeant celles de $\mathbf{F}_p(\!(\pi)\!)$. On obtient alors une notion de (φ, Γ)-module sur $k(\!(\pi)\!)$, généralisant celle de (φ, Γ)-module sur $\mathbf{F}_p(\!(\pi)\!)$. Cette notion présente un intérêt tout particulier si k est algébriquement clos, puisqu'il est prouvé dans [BV12] qu'on dispose d'une bijection entre les (φ, Γ)-modules irréductibles sur $k(\!(\pi)\!)$ et les représentations k-linéaires irréductibles du groupe de Weil de $\mathbf{Q}_p$.
Si D est un (φ, Γ)-module sur $k(\!(\pi)\!)$, il est possible de définir un opérateur $\psi : D \to D$, inverse à gauche de φ, de la manière habituelle. Comme dans le cas d'un corps fini, nous prouvons à la section 3 l'existence de deux réseaux de D, notés $D^\sharp$ et $D^\natural$, stables par ψ, sur lesquels ψ est surjectif, et qui sont respectivement le plus grand et

le plus petit réseau de D avec cette propriété. Les preuves sont très similaires à celles de Colmez (à ceci près que dans [Col10b] elles sont généralement données pour des (φ, Γ)-modules de torsion sur un anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ de caractéristique nulle) lorsque celles-ci ne font pas appel à l'équivalence de Fontaine.
Tous ces résultats permettent d'étendre à moindre coût la construction de Colmez en une application $(D, \chi) \mapsto \Omega_\chi(D^\natural)$ qui, à un caractère lisse de $\mathbf{Q}_p^\times$ et un (φ, Γ)-module irréductible sur $k(\!(\pi)\!)$, associe une représentation lisse irréductible de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ de caractère central χ.

Nous prouvons qu'en fait toutes les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$, de dimension infinie et admettant un caractère central sont de la forme $\Omega_\chi(D^\natural)$.
Appelons (ψ, Γ)-module un $k[\![\pi]\!]$-module M de type fini muni d'une action semi-linéaire de Γ, et d'un opérateur k-linéaire $\psi : M \to M$ tel que $\psi(\varphi(\lambda)x) = \lambda\psi(x)$, commutant à l'action de Γ.
Par exemple, si D est un (φ, Γ)-module, alors $D^\sharp$ et $D^\natural$ sont deux (ψ, Γ)-modules qui sont libres sur $k[\![\pi]\!]$. De plus, si D est irréductible en tant que (φ, Γ)-module, alors $D^\natural$ est irréductible en tant que (ψ, Γ)-module.
Étant donné un (ψ, Γ)-module M, il est possible sous certaines hypothèses de construire un opérateur φ sur $D \otimes_{k[\![\pi]\!]} k(\!(\pi)\!)$, qui dans le cas où M est un réseau d'un (φ, Γ)-module correspond bien à l'opérateur φ de départ. L'énoncé suivant découle de la proposition 3.3.24 :

Proposition. *Si M est un (ψ, Γ)-module libre sur $k[\![\pi]\!]$, irréductible, tel que $\psi \neq 0$, alors il existe une unique structure de (φ, Γ)-module sur $D := M \otimes_{k[\![\pi]\!]} k(\!(\pi)\!)$, tel que $M = D^\natural$.*

Si Π est une représentation k-linéaire lisse irréductible de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ admettant un caractère central χ, nous souhaitons prouver qu'il existe un (φ, Γ)-module D sur $k(\!(\pi)\!)$, irréductible, tel que $\Pi = \Omega_\chi(D^\natural)$.
Puisque la donnée d'un (φ, Γ)-module irréductible est équivalente à celle d'un (ψ, Γ)-module irréductible par ce qui précède, il suffit de construire un (ψ, Γ)-module irréductible à partir de Π.
Pour cela, nous utilisons l'action de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$, et plus particulièrement du sous-monoïde $P^+ = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p - \{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Si V est un sous k-espace vectoriel de Π stable sous l'action de P^+, alors son dual V^* est stable sous l'action de $P^- = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & \mathbf{Z}_p - \{0\} \end{smallmatrix}\right)$. Or, sur V^*, nous pouvons utiliser l'action de P^- pour définir une structure de $k[\![\pi]\!] = k[\![\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]\!]$-module, ainsi qu'un opérateur $\psi : V^* \to V^*$ défini par $\psi(v) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right) \cdot v$ et une action de Γ définie par $\gamma \cdot v = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \chi_{\mathrm{cycl}}(\gamma) \end{smallmatrix}\right) \cdot v$.
Les actions de ψ et Γ ainsi définies commutent, et on a bien $\psi(\varphi(\lambda)x) = \lambda\psi(x)$. Ainsi, lorsque V^* est un $k[\![\pi]\!]$-module de type fini, il est muni d'une structure de (ψ, Γ)-module.
Mais V^* est de type fini sur $k[\![\pi]\!]$ si et seulement si $V^*/\pi V^*$ est un k-espace vectoriel de dimension finie (c'est le corollaire 3.2.33). Par définition de la structure de $k[\![\pi]\!]$-module de V^*, $V^*/\pi V^*$ est l'ensemble des coinvariants de V sous $N = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Mais la dualité $V \mapsto V^*$ fait correspondre les invariants de V sous N avec les coinvariants de V^* sous N. Ainsi, lorsque V est un sous-k-espace vectoriel de Π, stable par P^+, et tel que V^N soit de dimension finie, alors V^* est un (ψ, Γ)-module.

Nous prouvons dans la section 6.1.1 que si Π est une représentation lisse irréductible de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$, de dimension infinie, admettant un caractère central χ, et telle qu'il existe un sous-k-espace vectoriel W vérifiant les conditions précédentes, alors il existe un (ψ, Γ)-module D_0, libre sur $k[\![\pi]\!]$, irréductible, qui est un sous-quotient de W^*, tel que

$$\Pi \simeq \Omega_\chi(D_0).$$

Afin de prouver que toute représentation Π irréductible et de dimension infinie est de la forme $\Omega_\chi(D^\natural)$, il reste à prouver que Π admet un sous-k-espace vectoriel stable par P^+ et dont les invariants sous N sont de dimension finie sur k.
Or Π est un quotient d'une induite compacte $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$, où $K = \mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$, Z est le centre de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ et σ est un caractère lisse de KZ. Soit $(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+ \subset \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ l'ensemble des $[g], g \in P^+$, et Π^+ l'image de $(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+$ par la surjection $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma \twoheadrightarrow \Pi$. Alors Π^+ est un sous-k-espace vectoriel de Π, stable par P^+, et en utilisant la théorie des $k[\![\pi]\!]\,\{\phi\}$-modules admissibles d'Emerton ([Eme11]), on prouve que les invariants sous N de Π^+ forment un k-espace vectoriel de dimension finie.

En regroupant tous les résultats énoncés précédemment, on en déduit un théorème de classification des représentations irréductibles de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ (c'est le théorème 3.6.11) :

Théorème. *Pour tout caractère lisse $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k^\times$, l'application $D \mapsto \Omega_\chi(D^\natural)$ induit une bijection des classes d'isomorphisme de (φ, Γ)-modules irréductibles sur $k(\!(\pi)\!)$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations k-linéaires lisses irréductibles de dimension infinie de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ de caractère central χ.*

Dans le cas où le corps k est fini, nous disposons d'une interprétation en termes de représentations galoisiennes. Si V est une représentation k-linéaire irréductible de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, on note $\Omega_\chi(V) := \Omega_\chi(\mathbf{D}(W)^\natural)$, et alors l'énoncé suivant est le théorème 3.6.13 :

Théorème. *Soit k un corps fini de caractéristique p. Alors pour tout caractère lisse $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k^\times$, l'application $V \mapsto \Omega_\chi(V)$ induit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations k-linéaires irréductibles et de dimension finie de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations k-linéaires lisses irréductibles de dimension infinie de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ de caractère central χ.*

De même, lorsque k est algébriquement clos, grâce à la bijection de [BV12] entre (φ, Γ)-modules irréductibles et représentations irréductibles du groupe de Weil de $\mathbf{Q}_p$, on dispose d'une interprétation galoisienne (c'est le théorème 3.6.15) :

Théorème. *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p. Alors pour tout caractère lisse $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k^\times$, l'application $W \mapsto \Omega_\chi(W)$ induit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations k-linéaires irréductibles de dimension finie du groupe de Weil de $\mathbf{Q}_p$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations k-linéaires lisses irréductibles de dimension finie de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$, de caractère central χ.*

Dans la section 5.2, nous donnons une description explicite de certaines représentations $\Omega_\chi(D^\natural)$ comme quotients d'induites à support compact de caractères.

Si σ_1, σ_2 sont deux caractères de $\mathbf{Q}_p^\times$, avec $\sigma_2(p) = 1$, soit $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2$ le caractère de KZ défini par

$$\sigma\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \sigma_1(a)\sigma_2(d).$$

Pour $b \in \mathrm{B}$, notons $[g] \in \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ la fonction $[g] : \mathrm{B} \to k^\times$ définie par $[g](h) = \sigma(hg)$ si $h \in \mathrm{KZ}\, g^{-1}$ et $[g](h) = 0$ sinon. Pour $\lambda \in k^\times$, soit $S(\lambda, \sigma)$ la sous-$\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$-représentation de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ engendrée par

$$\lambda\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}\right] + \sum_{j=0}^{p-1}\left[\begin{pmatrix} 1 & -jp^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right],$$

et soit $\Pi(\lambda, \sigma)$ le quotient $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma / S(\lambda, \sigma)$.

Proposition. *Soit k un corps fini de caractéristique p, $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k^\times$, $\lambda \in k^\times$ et $h \in \{0, \ldots, p-2\}$. Alors en notant $D = \mathbf{D}(\omega^h \mu_\lambda)$, on a un isomorphisme*

$$\Omega_\chi(D^\natural) \simeq \Pi(\lambda\chi(p^{-1}), \chi\omega^{-h} \otimes \omega^h).$$

De même au théorème 3.5.14, nous donnons une description explicite des représentations $\Omega_\chi(D)$ pour certains (φ, Γ)-modules irréductibles D de dimension supérieure ou égale à 2. Soit $n \geq 2$, $1 \leq h \leq p^{n-1} - 1$, $\lambda \in k^\times$, et $\sigma : \mathrm{KZ} \to k^\times$ un caractère lisse de KZ. On note $S_n(h, \lambda, \sigma)$ la sous-$\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$-représentation de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ engendrée par

$$\lambda\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix}\right] + \sum_{j=0}^{p^n-1}\binom{j}{h(p-1)}\left[\begin{pmatrix} 1 & -jp^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right].$$

Notons alors $\Pi_n(h, \lambda, \sigma)$ le quotient $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma / S_n(h, \lambda, \sigma)$. Dans le cas où le corps des coefficients est fini, le théorème 3.5.14 s'énonce alors de la sorte :

Proposition. *Soit k un corps fini de caractéristique p, $n \geq 2$, et $1 \leq h \leq p^{n-1} - 1$ tel qu'il n'existe pas d'entier d diviseur strict de n tel que h soit multiple de $\frac{p^n-1}{p^d-1}$. Pour $\lambda \in k^\times$ et $s \in \{0, \ldots, p-2\}$, notons $D = \mathbf{D}(\mathrm{ind}(\omega_n^h)) \otimes \mu_\lambda \omega^s$. Alors pour $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k^\times$, on dispose d'un isomorphisme*

$$\Omega_\chi(D^\natural) \simeq \Pi_n(h, (-1)^{n-1}\lambda^{-n}, \chi\omega^{-s} \otimes \omega^s).$$

Lorsque k est algébriquement clos ou fini, ceci nous permet de décrire toutes les représentations de dimension infinie de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$, prouvant ainsi que toutes possèdent une présentation finie : ce sont des quotients d'induites $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ par un sous-espace engendré en tant que $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$-représentation par un nombre fini d'éléments.

Enfin, le théorème 3.6.19 prouve qu'aucune des représentations de la forme $\Omega_\chi(D^\natural)$ n'est admissible, ce qui grâce au théorème de classification des représentations de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ permet de prouver que les seules représentations lisses admissibles de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ sont les représentations de dimension finie.

Chapitre 1

Rappels sur les représentations galoisiennes et les (φ, Γ)-modules

Nous rappelons dans ce chapitre un certain nombre de résultats, et en profitons pour fixer les notations qui nous seront utiles par la suite. Tous les résultats de cette partie sont classiques.

1 Théorie de Galois

Soit p un nombre premier, et $\mathbf{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques, muni de sa valuation v_p normalisée par $v_p(p) = 1$, $\mathbf{Z}_p = \{x \in \mathbf{Q}_p : v_p(x) \geq 0\}$ son anneau d'entiers et $\mathfrak{m}_{\mathbf{Z}_p} = p\mathbf{Z}_p$ son idéal maximal. Si L est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on note $\mathcal{O}_L$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{m}_L$ son idéal maximal et $k_L = \mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_L$ son corps résiduel.
On fixe une fois pour toutes une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{C}_p$ sa complétion, et on note $\overline{\mathbf{Z}_p}$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ les anneaux d'entiers respectifs de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ et $\mathbf{C}_p$.
On note $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ le groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$, qui s'identifie à un sous-groupe de décomposition en p de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$.
Soit $\mu_n = \left\{x \in \overline{\mathbf{Q}}_p : x^n = 1\right\}$ le groupe des racines n-ièmes de l'unité de $\overline{\mathbf{Q}}_p$, et $\mu_{p^\infty} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mu_{p^n}$. Fixons une fois pour toutes une suite compatible de racines primitives p^n-ièmes de l'unité, c'est-à-dire $\varepsilon^{(0)} = 1$ et $\varepsilon^{(n)} \in \mu_{p^n}$ avec $\varepsilon^{(1)} \neq 1$ et $(\varepsilon^{(n+1)})^p = \varepsilon^{(n)}$. Soit alors $F_n = \mathbf{Q}_p(\varepsilon^{(n)})$ et $F_\infty = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n$: c'est une extension abélienne totalement ramifiée de $\mathbf{Q}_p$, et on note $\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_\infty)$ son groupe de Galois.
Le caractère cyclotomique de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est l'unique caractère $\chi_{\mathrm{cycl}} : \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^\times$ tel que

$$g(\zeta) = \zeta^{\chi_{\mathrm{cycl}}(g)}, \forall \zeta \in \mu_{p^\infty}, \forall g \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}.$$

On note $\omega : \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{F}_p^\times$ le caractère cyclotomique modulo p, c'est-à-dire la réduction modulo p de χ_{cycl}.
Le noyau de χ_{cycl} est $\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_\infty)$, et donc par surjectivité du caractère cyclotomique, on obtient un isomorphisme $\Gamma := \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q}_p) \simeq \mathbf{Z}_p^\times$. Si $a \in \mathbf{Z}_p^\times$, on note γ_a l'élément de Γ correspondant à a via cet isomorphisme. Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on note H_K le noyau de $\chi_{\mathrm{cycl}} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K) \to \mathbf{Z}_p^\times$, c'est-à-dire $\mathrm{H}_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K) \cap \mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}$.

Soit $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$: c'est l'extension de $\mathbf{Q}_p$ engendrée par les μ_n, pour n premier à p.
Soit $\mathrm{Frob}_p \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}_p}/\mathbf{F}_p)$ le Frobenius arithmétique, c'est à dire l'application $x \mapsto x^p$.
On dispose d'un morphisme $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}_p}/\mathbf{F}_p)$ donné par $g \mapsto \mathrm{Frob}_p^{-\deg(g)}$, avec $\deg(g) \in \widehat{\mathbf{Z}}$. Le sous-groupe d'inertie $\mathcal{I}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}})$ est le noyau de ce morphisme, et on dispose d'une suite exacte courte :

$$0 \to \mathcal{I}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \widehat{\mathbf{Z}} \to 0,$$

ainsi que d'un isomorphisme $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}/\mathbf{Q}_p) \simeq \widehat{\mathbf{Z}} = \varprojlim_n \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Cet isomorphisme peut s'expliciter de la manière suivante : pour chaque entier n, il existe une unique extension $\mathbf{Q}_{p^n}/\mathbf{Q}_p$ non ramifiée de degré n, avec $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_{p^n}/\mathbf{Q}_p) = \mathrm{Gal}(\mathbf{F}_{p^n}/\mathbf{F}_p) = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Alors $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{Q}_{p^n}$, de sorte que $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}/\mathbf{Q}_p) = \varprojlim_n \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
On appelle groupe de Weil et on note $\mathcal{W}_{\mathbf{Q}_p}$ le sous-groupe de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$

$$\mathcal{W}_{\mathbf{Q}_p} = \left\{ g \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p} : \deg(g) \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Par la théorie du corps de classes local, l'extension abélienne maximale de $\mathbf{Q}_p$ est $\mathbf{Q}_p^{ab} = \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}} \cdot F_\infty$, et puisque $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}} \cap F_\infty = \mathbf{Q}_p$, on a

$$\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{ab}/\mathbf{Q}_p) = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}/\mathbf{Q}_p) \times \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q}_p) = \widehat{\mathbf{Z}} \times \mathbf{Z}_p^\times.$$

Notons qu'avec les choix faits précédemment, cet isomorphisme est normalisé de manière à envoyer les uniformisantes sur les Frobenius géométriques.

De même, on dispose d'un isomorphisme $\mathcal{W}_{\mathbf{Q}_p}^{ab} \simeq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_p^\times \simeq \mathbf{Q}_p^\times$.

2 Représentations galoisiennes

Une représentation p-adique de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action continue de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ou de manière équivalente, un morphisme continu $\rho : \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$. Si L est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, alors il est pertinent de s'intéresser également à des représentations L-linéaires de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, c'est-à-dire des L-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action continue de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$.
Comme d'habitude, une représentation est dite irréductible si elle ne contient pas de sous-représentation stricte non triviale. On dit que V est absolument irréductible si $V \otimes_L \overline{\mathbf{Q}}_p$ est irréductible. La proposition suivante montre que l'étude des représentations $V \otimes_L \overline{\mathbf{Q}}_p$ se ramène en fait à l'étude des représentations L-linéaires, pour L extension finie de $\mathbf{Q}_p$.

Proposition 1.2.1 ([BM02, Lemme 2.2.1.1])**.** *Soit $\rho : \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbf{Q}}_p)$ une représentation continue de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Alors il existe une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$ telle que l'image de ρ soit incluse dans $\mathrm{GL}_n(L)$.*

Démonstration. Si L est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, alors $\mathrm{GL}_n(L)$ est un fermé de $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbf{Q}}_p)$, et par continuité de ρ, $\rho^{-1}(\mathrm{GL}_n(L))$ est un fermé de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et $G_{\mathbf{Q}_p} = \bigcup_L \rho^{-1}(\mathrm{GL}_n(L))$. Les extensions finies de $\mathbf{Q}_p$ formant un ensemble dénombrable, $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est une union dénombrable de fermés. Comme $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est compact, c'est un espace de

Baire, et donc $\bigcup_L \mathrm{Int}\left(\rho^{-1}\left(\mathrm{GL}_n(L)\right)\right)$ est un ouvert dense de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Par définition de la topologie de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, il existe donc une extension finie F de $\mathbf{Q}_p$, qu'on peut supposer galoisienne quitte à l'agrandir, telle que $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F) \subset \bigcup_L \mathrm{Int}\left(\rho^{-1}\left(\mathrm{GL}_n(L)\right)\right)$. Mais $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F)$ est compact, et il suffit donc d'un nombre fini d'ouverts pour le recouvrir, de sorte qu'il existe une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$ telle que $\rho(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F)) \subset \mathrm{GL}_n(L)$. Puisque $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)/\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F) = \mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)$ est fini, quitte à agrandir un peu L, on peut supposer que $\rho(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}) \subset \mathrm{GL}_n(L)$. □

Si $\eta : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{Q}_p^\times$ est un caractère continu de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on note $\mathbf{Q}_p(\eta)$ la représentation de dimension 1 sur $\mathbf{Q}_p$, de base e, et telle que $g \cdot e = \eta(g)e, \forall g \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. De plus, si $n \in \mathbf{Z}$, on note $\mathbf{Q}_p(n) = \mathbf{Q}_p(\chi_{\mathrm{cycl}}^n)$, et pour toute représentation V, on note $V(n) = V \otimes \chi_{\mathrm{cycl}}^n = V \otimes \mathbf{Q}_p(n)$.
Si V est une représentation L-linéaire, on note V^* la représentation duale dont l'espace sous-jacent est $\mathrm{Hom}_L(V, L)$ muni de l'action

$$(g \cdot f)(v) = f(g^{-1} \cdot v), \forall g \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, \forall f \in \mathrm{Hom}_L(V, L), \forall v \in V.$$

Une représentation est dite non ramifiée si $\mathcal{I}_{\mathbf{Q}_p}$ est inclus dans son noyau, de sorte qu'elle se factorise en une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)/\mathcal{I}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}/\mathbf{Q}_p) \simeq \widehat{\mathbf{Z}}$. En particulier, un caractère non ramifié $\eta : \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \overline{\mathbf{Q}}_p^\times$ est uniquement déterminé par l'image d'un générateur de $\widehat{\mathbf{Z}}$. Pour $\lambda \in \overline{\mathbf{Z}_p}^\times$, on note μ_λ le caractère non ramifié qui envoie $g \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\lambda^{-\deg(g)}$.

Si V est une représentation L-linéaire de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on appelle réseau de V un sous $\mathcal{O}_L$-module T de V, de type fini, stable sous l'action de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et tel que $T \otimes_{\mathcal{O}_L} L = V$, où $\mathcal{O}_L$ dénote l'anneau des entiers de L.

Proposition 1.2.2. *Toute représentation L-linéaire de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ admet un réseau.*

Démonstration. Notons $\rho : \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}(V)$ le morphisme continu définissant l'action de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Soit Λ_0 un sous-$\mathcal{O}_L$-module de type fini de V tel que $\Lambda_0 \otimes_{\mathcal{O}_L} L = V$. Alors $\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_L}(\Lambda_0)$ est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{Aut}_L(V)$, et donc sa préimage $\mathrm{G}_0 = \rho^{-1}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_L}(\Lambda_0))$ est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et par conséquent d'indice fini car $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est compact. La somme

$$\sum_{\gamma \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p} / \mathrm{G}_0} \rho(\gamma)\Lambda_0$$

est alors stable par $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et est donc un réseau de V. □

En particulier, si T est un réseau de V, il est possible de réduire T modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}_L$, c'est-à-dire de considérer la représentation $\overline{T} = T \otimes_{\mathcal{O}_L} k_L$, qui est une représentation k_L-linéaire de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. On parle aussi de représentation modulo p ou de représentation modulaire. On note $k_L(n) := k_L(\omega^n)$.
Une représentation $\rho : \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbf{F}_p})$ est d'image compacte dans $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbf{F}_p})$ qui est discret. Elle est donc finie, et il existe $m \in \mathbf{N}$ telle que ρ se factorise en $\bar{\rho} : G_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_{p^m})$.

Les réductions modulo p de deux réseaux d'une même représentation V n'ont a priori pas de raison d'être comparables. Toutefois, la proposition suivante prouve que leur semi-simplifiées (c'est-à-dire la somme directe de leurs facteurs de Jordan-Hölder) sont isomorphes :

Proposition 1.2.3 (Principe de Brauer-Nesbitt)**.** *Soit V une représentation L-linéaire de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et T_1, T_2 deux réseaux de V. Alors les représentations modulaires*

$$(T_1 \otimes_{\mathcal{O}_L} k_L)^{ss} \text{ et } (T_2 \otimes_{\mathcal{O}_L} k_L)^{ss}$$

sont isomorphes. On note $\overline{V}$ la représentation semi-simplifiée de la réduction d'un réseau de V.

La proposition suivante, aussi appelée lemme de Ribet (c'est la proposition 4.2 de [Rib76]) montre que même dans le cas de représentations irréductibles de rang 2, il existe des réseaux dont les réductions ne sont pas isomorphes avant semi-simplification.

Proposition 1.2.4. *Soit V une représentation L-linéaire de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, irréductible, telle que $\overline{V}$ soit somme directe de deux caractères $\chi_1, \chi_2 : \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p} \to k_L^\times$. Alors il existe un réseau T de V tel que $\overline{T}$ soit une extension non triviale de χ_1 par χ_2.*

Remarque 1.2.5. Dans la proposition précédente, χ_1 et χ_2 jouent des rôles symétriques, de sorte que si $\chi_1 \neq \chi_2$, alors il existe un réseau dont la réduction est une extension non triviale de χ_1 par χ_2 mais aussi un réseau dont la réduction est une extension non triviale de χ_2 par χ_1. Ces deux réseaux ne peuvent donc pas être isomorphes, alors que les semi-simplifiées de leurs réductions le sont, conformément au principe de Brauer-Nesbitt.

3 (φ, Γ)-modules et représentations galoisiennes : la théorie de Fontaine

Fontaine a établi dans [Fon90] une stratégie très féconde pour étudier les représentations p-adiques de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, consistant à décrire les représentations galoisiennes à l'aide de structures d'algèbre (semi)-linéaire : les (φ, Γ)-modules. Il existe à la fois une théorie modulo p pour l'étude des représentations modulaires, et une théorie en caractéristique nulle pour l'étude des représentations p-adiques, et ces deux constructions sont «compatibles à la réduction modulo p» en un sens que nous détaillerons plus tard.
L'article original de Fontaine utilise pour les différents anneaux des notations différentes de celles utilisées actuellement par la plupart des auteurs. Celles que nous utilisons ici sont par exemple celles de Colmez et Berger. Il n'existe pas à l'heure actuelle de référence exhaustive sur le sujet, on pourra par exemple consulter l'article de Berger [Ber04], les livres en préparation de Fontaine et Ouyang [FO09], de Berger [Ber10a], ou encore les notes de cours de Brinon et Conrad [BC09].

Par souci de simplicité, et puisqu'il s'agit du seul cas dont nous aurons besoin dans la suite, nous n'expliquons que le cas de représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, mais

les constructions en jeu sont bien plus générales et s'appliquent également aux représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K)$, pour K extension finie de $\mathbf{Q}_p$, bien qu'il faille alors un peu plus de formalisme.

3.1 Anneaux de caractéristique p et corps des normes

Nous rappelons dans cette section la construction d'un certain nombre d'anneaux, souvent appelés anneaux de périodes ou anneaux de Fontaine.

Soit $\mathbf{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$, et $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ son anneau d'entiers. Soit alors $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ l'ensemble

$$\widetilde{\mathbf{E}}^+ := \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p} = \left\{ (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots) \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}^{\mathbf{N}} : (x^{(n+1)})^p = x^{(n)} \right\}.$$

On peut le munir d'une structure d'anneau de la manière suivante : si $(x^{(i)}), (y^{(i)})$ sont deux éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$, on pose :

$$(xy)^{(i)} = x^{(i)} y^{(i)} \text{ et } (x+y)^{(i)} = \lim_{j \to \infty} (x^{(i+j)} + y^{(i+j)})^{p^j}.$$

L'anneau $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ est alors un anneau parfait de caractéristique p, et $\mathrm{val}_{\mathbf{E}}(x) := v_p(x^{(0)})$ est une valuation pour laquelle il est complet.
Soit ε l'élément de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ défini par $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_n$, où les $\varepsilon^{(n)}$ sont les racines de l'unité définies précédemment. On note alors $\overline{\pi} = \varepsilon - 1$, de sorte que

$$\mathrm{val}_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) = \lim_{n \to \infty} v_p((\varepsilon^{(n)} - 1)^{p^n}) = \frac{p}{p-1}.$$

On pose $\widetilde{\mathbf{E}} := \widetilde{\mathbf{E}}^+[\overline{\pi}^{-1}]$, et il est possible de montrer que $\widetilde{\mathbf{E}}$ est un corps, isomorphe à la complétion de la clôture algébrique de $\mathbf{F}_p(\!(\overline{\pi})\!)$ dans $\widetilde{\mathbf{E}}$.
Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ agit sur $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$, donnant une action continue de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\widetilde{\mathbf{E}}$. Enfin, on note φ l'endomorphisme $x \mapsto x^p$ de $\widetilde{\mathbf{E}}$.

Soit $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$ le sous-corps des points fixes de $\widetilde{\mathbf{E}}$ sous $\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}$: $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p} = \widetilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}}$. Il contient $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p} := \mathbf{F}_p(\!(\overline{\pi})\!)$ car $\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}$ fixe $\overline{\pi}$. On pose également $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}^{sep} \subset \widetilde{\mathbf{E}}$ la clôture séparable de $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$. Pour K extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on note $\mathbf{E}_K = \mathbf{E}^{\mathrm{H}_K}$. C'est une extension finie de $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$, qui ne dépend en fait que de $K_\infty = K \cdot F_\infty$, et on a bien $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{E}^H$.

On dispose alors d'un isomorphisme entre $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p})$ et $\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}$. Ce résultat est assez surpenant : le groupe de Galois du corps local $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$, de caractéristique p, est isomorphe au groupe de Galois d'une extension totalement ramifiée de corps locaux de caractéristique nulle. Il s'agit là d'un cas particulier de la théorie du corps de normes de Fontaine et Wintenberger ([FW79],[Win83]). Explicitons un peu plus cette construction : soit $\mathcal{N}_{\mathbf{Q}_p}$ l'ensemble $\varprojlim_n F_n$, où les applications de transition sont les applications norme N_{F_{n+1}/F_n}, de sorte que $\mathcal{N}_{\mathbf{Q}_p}$ est l'ensemble des suites $(x_0, x_1, \dots)$ avec $x_n \in F_n$ et $N_{F_{n+1}/F_n}(x_{n+1}) = x_n$. On peut définir une structure d'anneau sur $\mathcal{N}_{\mathbf{Q}_p}$ en posant

$$(xy)_i = (x_i y_i) \text{ et } (x+y)_i = \lim_{j \to \infty} N_{K_{i+j}/K_i}(x_{i+j} + y_{i+j}).$$

Alors $\mathcal{N}_{\mathbf{Q}_p}$ est un corps, qu'on appelle corps des normes de $F_\infty/\mathbf{Q}_p$, et dont on montre que le groupe de Galois absolu est isomorphe à $\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}$.
D'un autre côté, une étude fine de la ramification permet de prouver que les applications de norme N_{F_{n+1}/F_n} sont «proches» de l'élévation à la puissance p, permettant de définir un morphisme de $\mathcal{N}_{\mathbf{Q}_p}$ dans $\widetilde{\mathbf{E}}$ en envoyant $(x_n) \in \mathcal{N}_{\mathbf{Q}_p}$ sur l'élément $(y^{(n)})$ de $\widetilde{\mathbf{E}}$ défini par

$$y^{(n)} = \lim_{m\to\infty} x_{n+m}^{p^m}.$$

Cette application est en fait un isomorphisme entre $\mathcal{N}_{\mathbf{Q}_p}$ et $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$, et donc les deux groupes de Galois $\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\mathcal{N}_{\mathbf{Q}_p}^{sep}/\mathcal{N}_{\mathbf{Q}_p})$ et $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p})$ sont isomorphes.
La construction de Fontaine-Wintenberger fonctionne dans un cadre beaucoup plus général que celui de l'extension $F_\infty/\mathbf{Q}_p$, ce qui est nécessaire lorsqu'on étudie des représentations p-adiques de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K)$ avec K extension finie de $\mathbf{Q}_p$.

3.2 Anneaux de caractéristique nulle

Puisque $\widetilde{\mathbf{E}}$ est un corps parfait de caractéristique p, il est possible de construire l'anneau des vecteurs de Witt de $\widetilde{\mathbf{E}}$. Notons $\widetilde{\mathbf{A}} = W(\widetilde{\mathbf{E}})$ cet anneau, et $\widetilde{\mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{A}}[1/p]$ son corps des fractions. On note comme d'habitude $[x] \in \widetilde{\mathbf{A}}$ le relêvement de Teichmüller d'un élément x de $\widetilde{\mathbf{E}}$, de sorte que

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [x_n]p^n, x_n \in \widetilde{\mathbf{E}} \right\} \text{ et } \widetilde{\mathbf{B}} = \left\{ \sum_{n\gg-\infty}^{+\infty} [x_n]p^n, x_n \in \widetilde{\mathbf{E}} \right\}.$$

Par construction, $\widetilde{\mathbf{A}}$ est un anneau local d'idéal maximal $p\widetilde{\mathbf{A}}$, et de corps résiduel $\widetilde{\mathbf{E}}$.

Puisque $\widetilde{\mathbf{A}}$ est un anneau de vecteurs de Witt, il est complet pour sa topologie p-adique. Mais $\widetilde{\mathbf{E}}$ étant valué, il existe une autre topologie pour laquelle $\widetilde{\mathbf{A}}$ est complet. Il s'agit de la topologie faible, qui fait de l'application $\sum_{n\in\mathbf{N}}[x_n]p^n \mapsto (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un homéomorphisme de $\widetilde{\mathbf{A}}$ sur $\widetilde{\mathbf{E}}^{\mathbf{N}}$ muni de la topologie produit. De plus, cette topologie permet de munir $\widetilde{\mathbf{B}} = \bigcup_n p^{-n}\widetilde{\mathbf{A}}$ de la topologie limite inductive de la topologie faible de $\widetilde{\mathbf{A}}$.

Le corps $\widetilde{\mathbf{B}}$ est muni d'un morphisme de Frobenius $\varphi : \widetilde{\mathbf{B}} \to \widetilde{\mathbf{B}}$, déduit de celui de $\widetilde{\mathbf{E}}$ par fonctorialité des vecteurs de Witt. Il est également muni d'une action continue de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui prolonge celle de $\widetilde{\mathbf{E}}$, avec $g \cdot [x] = [g \cdot x]$. De plus, cette action commute à φ. Notons π l'élément de $\widetilde{\mathbf{A}}$ défini par $\pi = [\varepsilon] - 1$, de sorte que la réduction modulo p de π est $\overline{\pi} = \varepsilon - 1 \in \widetilde{\mathbf{E}}$. Il est alors aisé de vérifier que les actions de φ et $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur π sont données par

$$\varphi(\pi) = (1+\pi)^p - 1 \text{ et } g \cdot \pi = (1+\pi)^{\chi_{\mathrm{cycl}}(g)} - 1.$$

Si k est un corps de caractéristique p, on appelle anneau de Cohen de k un anneau A, de valuation discrète, complet, d'idéal maximal pA et de corps résiduel k. Il existe toujours un anneau de Cohen de k, unique à isomorphisme près, mais en général cet isomorphisme n'est pas unique. Dans le cas où k est parfait, l'anneau des vecteurs de Witt de k est un anneau de Cohen de k, unique à unique isomorphisme près.

Détaillons ici la construction d'un anneau de Cohen de $\mathbf{E}$.

Soit $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ la complétion p-adique de $\mathbf{Z}_p[\![\pi]\!][1/\pi]$ à l'intérieur de $\widetilde{\mathbf{A}}$. De manière équivalente,

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p} = \left\{ \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n \pi^n : a_n \in \mathbf{Z}_p \text{ et } \lim_{n\to\infty} a_{-n} = 0 \right\}.$$

Alors $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}[1/p]$ est un corps local de corps résiduel $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}/p\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$.

Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, alors il existe une unique extension finie non ramifiée $\mathbf{B}_K/\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}$ contenue dans $\widetilde{\mathbf{B}}$ et de corps résiduel $\mathbf{E}_K$. Soit alors $\mathbf{B}$ la complétion p-adique de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}$ à l'intérieur de $\widetilde{\mathbf{B}}$, et $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{A}}$, de sorte que $\mathbf{A}/p\mathbf{A} = \mathbf{E}$. Le corps $\mathbf{B}$ est stable sous φ et sous l'action de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. De plus, $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{B}^{\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}}$.

On dispose alors d'un analogue du théorème 90 de Hilbert : $H^1(\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{A}) = \{0\}$ et si $d \geq 1$, $H^1_{cont}(\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}, \mathrm{GL}_d(\mathbf{A})) = \{0\}$, les cocycles étant continus pour la topologie p-adique de $\mathbf{A}$.

3.3 (φ, Γ)-modules en caractéristique p

Si V est une représentation $\mathbf{F}_p$-linéaire de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, $\mathbf{E} \otimes_{\mathbf{F}_p} V$ est une représentation semi-linéaire de $\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}$. Mais par le théorème 90 de Hilbert, $H^1(\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}, \mathrm{GL}_d(\mathbf{E})) = \{0\}$, de sorte que toute représentation semi-linéaire de $\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}$ est isomorphe à $\mathbf{E}^d$. En particulier c'est le cas de $\mathbf{E} \otimes_{\mathbf{F}_p} V$.
Si on pose $\mathbf{D}(V) = (\mathbf{E} \otimes_{\mathbf{F}_p} V)^{\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}}$, alors $\mathbf{D}(V)$ est un $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$-espace vectoriel de dimension d, muni d'une action semi-linéaire de $\Gamma = \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p} / \mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}$. De plus, $\mathbf{D}(W)$ est muni d'un endomorphisme φ, semi-linéaire, provenant de $\varphi \otimes \mathrm{id}_V$. Comme φ commute à l'action de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathbf{E}$, φ commute à l'action de Γ sur $\mathbf{D}(V)$.

Définition 1.3.1. On appelle (φ, Γ)-module sur $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{F}_p(\!(\pi)\!)$ un espace vectoriel D de dimension finie d sur $\mathbf{F}_p(\!(\pi)\!)$, muni d'une application semi-linéaire $\varphi : D \to D$, telle que $\mathrm{Mat}(\varphi) \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{F}_p(\!(\pi)\!))$ et d'une action semi-linéaire continue de Γ, commutant à celle de φ.

Ainsi, le foncteur $V \mapsto \mathbf{D}(V)$ est défini sur la catégorie des représentations $\mathbf{F}_p$-linéaires et à valeurs dans celle des (φ, Γ)-modules sur $\mathbf{F}_p(\!(\pi)\!)$. Inversement, si D est un (φ, Γ)-module de dimension d sur $\mathbf{F}_p(\!(\pi)\!)$, alors $\mathbf{E} \otimes_{\mathbf{F}_p(\!(\pi)\!)} D$ est muni d'une application semi-linéaire $\varphi := \varphi_{\mathbf{E}} \otimes \varphi_D$, et Fontaine a prouvé qu'il existe alors une base formée d'invariants sous φ. Par conséquent $\mathbf{V}(D) = (\mathbf{E} \otimes_{\mathbf{F}_p(\!(\pi)\!)} D)^{\varphi=1}$ est un $\mathbf{E}^{\varphi=1} = \mathbf{F}_p$-espace vectoriel de rang d, muni d'une action linéaire de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, héritée de l'action de Γ sur D et de celle de $\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathbf{E}$. On vérifie que $\mathbf{D}(\mathbf{V}(D)) \simeq D$ et $\mathbf{V}(\mathbf{D}(V)) \simeq V$, et que ces constructions sont fonctorielles, établissant le théorème suivant, qui est un premier cas de l'équivalence de catégories de Fontaine :

Théorème 1.3.2 (Équivalence de Fontaine pour les représentations modulo p)**.** *Les foncteurs $V \mapsto \mathbf{D}(V)$ et $D \mapsto \mathbf{V}(D)$ réalisent une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations $\mathbf{F}_p$-linéaires de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et la catégorie des (φ, Γ)-modules sur $\mathbf{F}_p(\!(\pi)\!)$. De plus, ces foncteurs sont exacts, préservent la dimension et sont compatibles au produit tensoriel.*

3.4 (φ, Γ)-modules en caractéristique nulle

Les mêmes méthodes que précédemment permettent de traiter le cas des représentations de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$ (resp. $\mathbf{Q}_p$), à condition de remplacer $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$ par $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ (resp. $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}$).

On appelle représentation $\mathbf{Z}_p$-linéaire de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ un module libre de rang fini sur $\mathbf{Z}_p$, muni d'une action linéaire continue de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, par exemple un réseau d'une représentation p-adique[1]. Un (φ, Γ)-module sur $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ est un $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$-module libre de type fini, muni d'un endomorphisme φ, semi-linéaire et tel que $\mathrm{Mat}(\varphi) \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p})$, et d'une action semi-linéaire continue de Γ commutant à φ.

De la même manière que précédemment, on associe à une $\mathbf{Z}_p$-représentation V de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ le (φ, Γ)-module $\mathbf{D}(V) := (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}}$, qui est de même rang que V car $H^1_{cont}(\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}, \mathrm{GL}_d(\mathbf{A})) = \{0\}$. Inversement, si D est un (φ, Γ)-module de rang d sur $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$, en utilisant le fait que $\mathbf{A}$ soit complet pour la topologie p-adique et que $\mathbf{A}/p\mathbf{A} = \mathbf{E}$ soit séparablement clos, il est possible de montrer que $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}} D$ possède une base formée d'élément fixés par φ. Ainsi $\mathbf{T}(D) := (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}} D)^{\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}}$ est un $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}} = \mathbf{Z}_p$-module libre de rang d muni d'une action linéaire continue de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ héritée de l'action de Γ sur D et de celle de $\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathbf{A}$.
Les deux foncteurs $T \mapsto \mathbf{D}(T)$ et $D \mapsto \mathbf{T}(D)$ sont alors quasi-inverses l'un de l'autre, et on a l'équivalence de Fontaine suivante :

Théorème 1.3.3 (Équivalence de Fontaine pour les $\mathbf{Z}_p$-représentations)**.** *Les deux foncteurs $T \mapsto \mathbf{D}(T)$ et $D \mapsto \mathbf{T}(D)$ réalisent une équivalence entre la catégorie des $\mathbf{Z}_p$-représentations de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et la catégorie des (φ, Γ)-modules sur $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$. De plus ces foncteurs sont exacts, préservent le rang et le produit tensoriel.*

De plus, puisque $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}/p\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$, cette équivalence de catégorie est compatible à la réduction modulo p : si T est une $\mathbf{Z}_p$-représentation de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors

$$\mathbf{D}(T) \otimes_{\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{D}(T \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p).$$

Enfin, il est possible d'en déduire une équivalence de catégories similaire pour les représentations p-adiques de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Pour cela, il faudra tout de même restreindre la catégorie de (φ, Γ)-modules que l'on considère.

Définition 1.3.4. On appelle (φ, Γ)-module sur $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}$ un $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}$-espace vectoriel de dimension d, muni d'un endomorphisme semi-linéaire φ tel que $\mathrm{Mat}(\varphi) \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p})$ et d'une action continue et semi-linéaire de Γ commutant à celle de φ.
Un (φ, Γ)-module D est dit étale s'il existe une base de D dans laquelle $\mathrm{Mat}(\varphi) \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p})$. De manière équivalente, un (φ, Γ)-module sur $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}$ est étale si et seulement si il existe un (φ, Γ)-module D_0 sur $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ tel que $D \simeq \mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p} \otimes_{\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}} D_0$.

Si V est une représentation p-adique de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension d, alors il existe un réseau T de V, et d'après ce qui précède, $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V$ est isomorphe à $\mathbf{A}^d$ en tant que représentation semi-linéaire de $\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}$. Alors $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V \simeq \mathbf{B}^d$, et donc $\mathbf{D}(V) :=$

1. Il s'agit d'ailleurs du seul cas puisque si T est une représentation $\mathbf{Z}_p$-linéaire, alors T est un réseau de $T \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$.

$(\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}}$ est un (φ, Γ)-module de rang d sur $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{B}^{\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}}$. De plus, on a $\mathbf{D}(V) = \mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p} \otimes_{\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}} \mathbf{D}(T)$, et donc $\mathbf{D}(V)$ est un (φ, Γ)-module étale.
Si D est un (φ, Γ)-module étale de dimension d, alors en utilisant l'équivalence entre $\mathbf{Z}_p$-représentations de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et (φ, Γ)-modules sur $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$, on prouve que $\mathbf{V}(D) := (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}} D)^{\varphi=1}$ est une représentation p-adique de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension d, et les foncteurs $V \mapsto \mathbf{D}(V)$ et $D \mapsto \mathbf{V}(D)$ sont quasi-inverses l'un de l'autre.

Théorème 1.3.5 (Équivalence de Fontaine pour les représentations p-adiques)**.** *Les foncteurs $V \mapsto \mathbf{D}(V)$ et $D \mapsto \mathbf{V}(D)$ réalisent une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations p-adiques de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et celle des (φ, Γ)-modules étales sur $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}$. De plus, ces foncteurs sont exacts, préservent la dimension et sont compatibles au produit tensoriel.*

L'intérêt des (φ, Γ)-modules est que l'étude des représentations galoisiennes est ramenée à celle d'objets dont l'étude relève de l'algèbre (semi-)linéaire. En particulier, pour se donner un (φ, Γ)-module, il suffit de se donner deux matrices $P = \mathrm{Mat}(\varphi)$ et $Q = \mathrm{Mat}(\gamma)$ où γ est un générateur de $\Gamma = \mathbf{Z}_p^\times$ (qui est procyclique dès que $p \neq 2$) telles que

$$P\varphi(Q) = Q\gamma(P).$$

Notons toutefois qu'en pratique il n'est pas facile de construire de telles matrices.

3.5 (φ, Γ)-modules à coefficients

Comme expliqué précédemment, nous pouvons être amenés à considérer des représentations de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à coefficients dans une extension finie de $\mathbf{F}_p$ ou de $\mathbf{Q}_p$. Dans ce cas il est possible de modifier un peu la définition des (φ, Γ)-modules afin d'obtenir des équivalences similaires à celles que nous venons de rappeler.

Si k_L est un corps fini de caractéristique p et V est une représentation k_L-linéaire de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension d, alors V est également une représentation $\mathbf{F}_p$-linéaire de dimension $[k_L : \mathbf{F}_p]d$, munie d'une structure k_L-linéaire. Alors $\mathbf{D}(V)$ est un $\mathbf{F}_p(\!(\pi)\!)$-espace vectoriel de dimension $[k_L : \mathbf{F}_p]d$, muni d'une structure k_L-linéaire : c'est un (φ, Γ)-module sur $k_L(\!(\pi)\!)$, où les actions de φ et Γ sur $k_L(\!(\pi)\!)$ sont k_L-linéaires et prolongent celles sur $\mathbf{F}_p(\!(\pi)\!)$. Ainsi, les foncteurs $V \mapsto \mathbf{D}(V)$ et $D \mapsto \mathbf{V}(D)$ réalisent une équivalence de catégorie entre la catégorie des représentations k_L-linéaires de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et celle des (φ, Γ)-modules sur $k_L(\!(\pi)\!)$.

De la même manière si L est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, alors on prolonge les actions de φ et Γ à $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ et $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}$ en les faisant agir trivialement sur L. On a alors deux foncteurs quasi-inverses $T \mapsto \mathbf{D}(T)$ et $D \mapsto \mathbf{T}(D)$ qui réalisent une équivalence de catégorie entre représentations $\mathcal{O}_L$-linéaires de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et (φ, Γ)-modules sur $\mathcal{O}_L \otimes \mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$, et de même on dispose d'une équivalence de catégories entre les représentation L-linéaires de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et les (φ, Γ)-modules étales sur $L \otimes \mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}$.

3.6 Représentations de hauteur finie

Les (φ, Γ)-modules sont définis sur des anneaux de séries dont la manipulation peut s'avérer délicate en raison de la présence d'éventuels dénominateurs en π. On

appelle représentation de hauteur finie une représentation dont le (φ, Γ)-module ne possède pas de dénominateurs. De manière précise, posons $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^+ = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^+$, et $\mathbf{B}^+ = \mathbf{A}^+[1/p]$.
On note alors $\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p} = (\mathbf{A}^+)^{\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}}$ et $\mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p} = (\mathbf{B}^+)^{\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}} = \mathbf{A}^+_K[1/p]$, de sorte que $\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{Z}_p[\![\pi]\!]$ et $\mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{Z}_p[\![\pi]\!][1/p]$.

Définition 1.3.6. Si V est une représentation p-adique de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on pose

$$\mathbf{D}^+(V) = (\mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}}.$$

On dit que V est de hauteur finie si $\mathbf{D}(V)$ possède une base sur $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}$ formée d'élément de $\mathbf{D}^+(V)$.

Si V est de hauteur finie et T est un réseau de V, alors $\mathbf{D}^+(T) = (\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}}$ est un $\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}$-module libre de rang $\dim V$, et il contient une base de $\mathbf{D}(T)$ sur $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$, cf [Fon90, B.1.4.2].

3.7 (φ, Γ)-modules irréductibles en caractéristique p

Si k est un corps fini de caractéristique p, nous savons décrire toutes les représentations k-linéaires irréductibles de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, et expliciter leurs (φ, Γ)-modules.

Le cas le plus simple est celui des représentations de dimension un : une telle représentation est de la forme $V = \omega^r \mu_\lambda$, avec $\lambda \in k^\times$. Alors son (φ, Γ)-module $\mathbf{D}(V)$ possède une base e, dans laquelle les actions de φ et Γ sont données par :

$$\varphi(e) = \lambda e \text{ et } \gamma(e) = \omega^r(\gamma)e.$$

Si n est un entier supérieur ou égal à un, on définit un caractère ω_n de $\mathcal{I}_{\mathbf{Q}_p}$ comme suit. Commençons par choisir $\pi_n \in \overline{\mathbf{Q}_p}$ une racine $(p^n - 1)$-ième de p, et pour $g \in \mathcal{I}_{\mathbf{Q}_p}$, posons

$$\omega_n(g) = \frac{\overline{g(\pi_n)}}{\pi_n} \in \mu_{p^n-1}(\overline{\mathbf{Z}_p}) \mapsto \overline{\mathbf{F}_p}^\times.$$

Cette définition ne dépend pas du choix de π_n, mais dépend par contre du choix d'un plongement $\mu_{p^n-1}(\overline{\mathbf{Z}_p}) \hookrightarrow \overline{\mathbf{F}_p}^\times$. Les différents plongements possibles donnent alors $\omega_n, \omega_n^p, \ldots, \omega_n^{p^{(n-1)}}$, ce qui ne sera pas important pour la suite, et nous fixons donc une fois pour toutes un tel plongement et donc ω_n. Un tel caractère est appelé caractère fondamental de Serre de niveau n, et a été introduit par Serre dans [Ser72]. De plus il est clair sur la définition qu'un caractère fondamental de niveau n peut se prolonger en un caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_{p^n})$, et on a $\omega_1 = \omega_n^{(p^n-1)/(p-1)} = \omega$ le caractère cyclotomique usuel.

Définition 1.3.7. Si $1 \leq h \leq p^n - 1$, h est dit primitif s'il n'est pas multiple d'un $\frac{p^n-1}{p^d-1}$ pour d diviseur strict de n.

Lemme 1.3.8. *Si $1 \leq h \leq p^{n-1} - 1$, et $e_{n-1} \ldots e_1 e_0$ est le développement en base p de h, alors h est primitif si et seulement l'application $i \mapsto e_i$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\{0, \ldots, p-1\}$ n'admet pas de période strictement inférieure à n.*

Démonstration. Remarquons juste que $\frac{p^n-1}{p^d-1} = \sum_{i=0}^{n/d-1} p^i$, et que donc si $1 \leq k \leq p^d - 1$, alors le développement en base p de $k\frac{p^n-1}{p^d-1}$ est celui de k répété n/d fois. En particulier, il est périodique de période d.

Inversement, si le développement de h est périodique de période d, alors en notant $k = e_0 + pe_1 + \cdots + p^{d-1}e_{d-1}$, alors $h = k\frac{p^n-1}{p^d-1}$. □

Si $1 \leq h \leq p^n - 1$ est primitif, alors les caractères $\omega_n^h, \ldots, \omega_n^{p^{n-1}h}$ sont deux à deux distincts, de sorte que $\mathrm{ind}_{G_{\mathbf{Q}_{p^n}}}^{G_{\mathbf{Q}_p}} \omega_n^h$ est une représentation irréductible de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$. Sa restriction au sous-groupe d'inertie est alors $\bigoplus_{i=0}^{n-1} \omega_n^{p^i h}$, et son déterminant est ω^h multiplié par un caractère non ramifié. On note alors $\mathrm{ind}(\omega_n^h)$ la tordue de cette représentation par un caractère non ramifié choisi de sorte que le déterminant de $\mathrm{ind}(\omega_n^h)$ soit ω^h. Notons que cette définition est indépendante du choix du caractère fondamental de niveau n. Ces représentations décrivent alors toutes les représentations absolument irréductibles de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ (une preuve se trouve par exemple dans [Ber10c, corollaire 2.1.5]).

Proposition 1.3.9. *Si k est un corps fini de caractéristique p, une représentation k-linéaire absolument irréductible de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ est isomorphe à $\mathrm{ind}(\omega_n^h) \otimes \mu_\lambda$, avec $1 \leq h \leq p^n - 2$ primitif et $\lambda \in \overline{\mathbf{F}_p}^\times$ tel que $\lambda^n \in k^\times$. De plus, $\mathrm{ind}(\omega_n^h) \otimes \mu_\lambda$ ne dépend que de λ^n, et pas de λ.*

Berger a également décrit les (φ, Γ)-modules qu'on obtenait de la sorte :

Proposition 1.3.10 ([Ber10c, théorème 2.1.6])**.** *Soit $n \geq 2$ et $1 \leq h \leq p^n - 2$ primitif. Alors le (φ, Γ)-module $\mathbf{D}(\mathrm{ind}(\omega_n^h))$ est défini sur $\mathbf{F}_p(\!(\pi)\!)$ et possède une base $e_0, \ldots, e_{n-1}$ dans laquelle $\gamma(e_j) = \left(\frac{\omega(\gamma)\pi}{\gamma(\pi)}\right)^{hp^j(p-1)/(p^n-1)}$ si $\gamma \in \Gamma$, $\varphi(e_j) = e_{j+1}$ si $0 \leq j \leq n-2$ et $\varphi(e_{n-1}) = (-1)^{n-1}\pi^{-h(p-1)}e_0$.*

Chapitre 2

Sur la réduction des représentations cristallines de dimension 2

1 Théorie de Hodge p-adique

En toute généralité, l'étude des représentations galoisiennes p-adiques peut être très complexe. Initiée par Serre et Tate, puis développée par Fontaine et de nombreux autres auteurs, la théorie de Hodge p-adique a pour but de classifier ces représentations en différentes catégories : les représentations de de Rham, semi-stables, cristallines, etc.
Les motivations de Fontaine et son école étaient de pouvoir caractériser la composante locale des représentations provenant de la géométrie algébrique, essentiellement les représentations obtenues en considérant la cohomologie étale des variétés propres et lisses sur un corps p-adique. Une telle caractérisation est encore essentiellement conjecturale à l'heure actuelle : c'est l'objet de la conjecture de Fontaine-Mazur.
Nous ne rappelons ici que les constructions dont nous aurons besoin par la suite, qui concernent principalement les représentations cristallines, le détail des constructions en jeu peut se trouver par exemple dans [Fon94a], ou sous une forme plus moderne dans [BC09].

1.1 Représentations de Hodge-Tate

Le groupe $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit continument sur $\mathbf{C}_p$, et si V est une représentation p-adique de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors $\mathbf{C}_p \otimes V$ est une représentation semi-linéaire de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de même dimension que V.
Les représentations semi-linéaires de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ ont d'abord été étudiées par Serre et Tate, dans le but d'étudier les représentations p-adiques provenant de variétés abéliennes à bonne réduction sur un corps p-adique.

Si W est une représentation semi-linéaire de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et $q \in \mathbf{Z}$, notons

$$W\{q\} = W(q)^{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}} \simeq \left\{ w \in W : g(w) = \chi_{\mathrm{cycl}}(g)^{-q} w, \forall g \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p} \right\}.$$

$W\{q\}$ est un sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de $W(q)$, mais n'est pas canoniquement un sous-espace de W, l'isomorphisme précédent dépendant d'un choix d'une base de $\mathbf{Z}_p(1)$. De plus, $W\{q\}$ ne contient pas de $\mathbf{C}_p$-droite.

On dispose d'un morphisme $\mathbf{Q}_p$-linéaire et $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$-équivariant :

$$\mathbf{Q}_p(-q) \otimes_{\mathbf{Q}_p} W\{q\} \hookrightarrow \mathbf{Q}_p(-q) \otimes_{\mathbf{C}_p} W(q) \simeq W$$

et donc, après extension des scalaires à $\mathbf{C}_p$, on dispose d'une application

$$\mathbf{C}_p(-q) \otimes_{\mathbf{Q}_p} W\{q\} \to W.$$

Il est facile de prouver que l'application

$$\zeta_W : \bigoplus_q (\mathbf{C}_p(-q) \otimes_{\mathbf{Q}_p} W\{q\}) \to W$$

est injective. En particulier les $W\{q\}$ sont tous de dimension finie, presque tous nuls, et $\sum \dim_{\mathbf{Q}_p} W\{q\} \leq \dim_{\mathbf{C}_p} W$, avec égalité si et seulement si ζ_W est un isomorphisme.

Définition 2.1.1. Soit V une représentation p-adique de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et $W = \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ la représentation semi-linéaire de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ associée. On dit que V est une représentation de Hodge-Tate, si ζ_W est un isomorphisme. On appelle alors poids de Hodge-Tate de V les entiers q tels que $W\{q\}$ soit non nul, et on appelle multiplicité du poids q la dimension sur $\mathbf{Q}_p$ de $W\{q\}$.

En particulier, si V est une représentation de Hodge-Tate, de poids $q_1, \ldots, q_r$, de multiplicités respectives $h_1, \ldots, h_r$, alors il existe un isomorphisme (non canonique) de représentations semi-linéaires de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$:

$$\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbf{C}_p(-q_i)^{h_i}.$$

Toutes les représentations p-adiques provenant de la géométrie sont des représentations de Hodge-Tate, bien que la réciproque ne soit pas vraie.

1.2 Formalisme des représentations admissibles

Afin de classifier les représentations p-adiques, Fontaine a mis au point une stratégie utilisant différents anneaux de périodes $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}, \mathbf{B}_{\mathrm{st}}, \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$, dont nous rappelerons brièvement les constructions et les principales propriétés. Bien que ces anneaux soient différents, il existe un même formalisme utile pour classifier les représentations.

Soit B une $\mathbf{Q}_p$-algèbre munie d'une action linéaire de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de corps des fractions C (qui est également muni d'une action linéaire de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ telle que :

(A1) les invariants sous $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ forment un corps, noté E,

(A2) $C^{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}} = B^{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}$,

(A3) tout élément non nul $b \in B$ tel que la $\mathbf{Q}_p$-droite engendrée par b soit stable sous $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est une unité de B.

Si V est une représentation p-adique de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors on pose $\mathbf{D}_B(V) = (B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}$, où $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit sur les deux côtés du produit tensoriel. Ainsi, $\mathbf{D}_B(V)$ est un E-espace vectoriel, qui vient avec une application canonique

$$\alpha_V : B \otimes_E \mathbf{D}_B(V) \to B \otimes_E (B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) \to (B \otimes_E B) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \to B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V.$$

Cette application est B-linéaire et $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$-équivariante, où $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit trivialement sur $\mathbf{D}_B(V)$. De plus, α_V est toujours injective, de sorte que $\dim_E \mathbf{D}_B(V) \leq \dim_{\mathbf{Q}_p} V$, avec égalité si et seulement si α_V est un isomorphisme.

Définition 2.1.2. Une représentation p-adique V de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est dite B-admissible si α_V est un isomorphisme, c'est-à-dire si $\dim_E \mathbf{D}_B(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$.

On peut prouver que $V \mapsto \mathbf{D}_B(V)$ est exact, qu'une sous-représentation ou un quotient d'une représentation B-admissible est encore B-admissible, et que le produit tensoriel de deux représentations B-admissibles est encore admissible, avec $\mathbf{D}_B(V_1 \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_2) = \mathbf{D}_B(V_1) \otimes_E \mathbf{D}_B(V_2)$.
En revanche, il n'est pas toujours vrai qu'une extension de deux représentations admissibles le soit encore.

Exemple 2.1.3. Soit $\mathbf{B}_{\mathrm{HT}} = \bigoplus_q \mathbf{C}_p(q)$, où la multiplication est définie par les applications naturelles $\mathbf{C}_p(q) \otimes \mathbf{C}_p(q') \simeq C_p(q+q')$. Alors $\mathbf{B}_{\mathrm{HT}}$ vérifie toutes les hypothèse précédentes, et une représentation V est $\mathbf{B}_{\mathrm{HT}}$-admissible si et seulement si elle est de Hodge-Tate.

L'intérêt du formalisme des représentations admissibles est que lorsque B est muni de structures additionnelles (une filtration, un endomorphisme φ, etc), alors $\mathbf{D}_B(V)$ est un E-espace vectoriel muni de ces structures additionelles, et donc l'étude des représentations B-admissibles peut se faire via l'étude des $\mathbf{D}_B(V)$, étude qui relève plutôt de l'algèbre linéaire.

1.3 Le corps $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ et les représentations de de Rham

Rappelons que l'on a défini précédemment $\widetilde{\mathbf{A}}$ comme étant l'anneau des vecteurs de Witt de $\widetilde{\mathbf{E}}$. Soit alors $\theta : \widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ le morphisme défini par

$$\theta\left(\sum_{i\in\mathbf{N}} p^i[x_i]\right) = \sum_{i\in\mathbf{N}} p^i x_i^{(0)}.$$

Il s'étend naturellement en un morphisme surjectif $\theta : \widetilde{\mathbf{B}}^+ \to \mathbf{C}_p$. Toutefois, θ n'est pas injectif, par exemple car $\theta(\pi) = \theta([\varepsilon]-1) = 1-1 = 0$.
Il est toutefois possible de montrer que le noyau de $\theta : \widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ est principal. Un générateur en est construit de la façon suivante : soit $\varepsilon_1 = (\varepsilon^{(1)}, \dots)$, de sorte que $\varepsilon_1^p = \varepsilon$, et soit $\omega = \frac{[\varepsilon]-1}{[\varepsilon_1]-1}$. Alors

$$\theta(\omega) = \frac{\varepsilon_1^p - 1}{\varepsilon - 1} = 1 + \varepsilon^{(1)} + \cdots + \varepsilon_1^{(p-1)} = 0,$$

de sorte que $\omega \in \mathrm{Ker}\theta$, et il est en fait possible de prouver que $\mathrm{Ker}(\theta) = (\omega)$.

On définit alors $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ comme étant le complété séparé de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ pour la topologie $\ker(\theta)$-adique :

$$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ := \varprojlim_h \widetilde{\mathbf{B}}^+/\ker(\theta)^h.$$

L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est un anneau de valuation discrète, complet et de corps résiduel $\mathbf{C}_p$. De plus il est naturellement muni d'une action de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et d'une application $\theta : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to \mathbf{C}_p$. Tout élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ d'image non nulle par θ est inversible dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, et en particulier le noyau de $\theta : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to \mathbf{C}_p$ est principal, engendré par $[\varepsilon] - 1$. Soit t l'élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ défini par

$$t = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}([\varepsilon] - 1)^k}{k}.$$

Nous pouvons penser à t comme étant un logarithme de $[\varepsilon]$. En particulier, on peut prouver que l'action de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur t est donnée par $g(t) = \chi_{\mathrm{cycl}}(g)t, \forall g \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$.
L'élément t est alors tel que $t/([\varepsilon] - 1)$ est une unité de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, de sorte que le noyau de $\theta : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to \mathbf{C}_p$ est également engendré par t. Tout élément $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ peut s'écrire de manière unique $x = t^h x_0$, avec $x_0 \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ tel que $\theta(x_0) \neq 0$, de sorte que $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[1/t]$ est un corps. Sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, on met la filtration $\mathrm{Fil}^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = t^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, et en vertu des formules décrivant l'action de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur t, cette filtration est stable sous $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Disons quelques mots de la topologie de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, qui ne possède pas de topologie p-adique. Si $h \geq 1$, alors on définit une valuation v_h sur $\widetilde{\mathbf{B}}^+/\ker(\theta)^h$ comme suit : il existe une application $\widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \widetilde{\mathbf{B}}^+/\ker(\theta)^h$ et on pose alors

$$v_h(x) = \sup\left\{n \in \mathbf{Z} : p^{-n}x \in \mathrm{Im}(\widetilde{\mathbf{A}}^+)\right\},$$

ce qui définit bien une valuation. En fait, $\ker(\theta)^h$ est un sous-espace fermé de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$, qui est un espace de Banach pour sa topologie p-adique, et la norme définie par v_h est équivalente à la norme quotient. En particulier, $\widetilde{\mathbf{B}}^+/\ker(\theta)^h$ est un espace de Banach, et on met sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ = \varprojlim_h \widetilde{\mathbf{B}}^+/\ker(\theta)^h$ la topologie de la limite projective, qui en fait un espace de Fréchet. La topologie sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \bigcup_n t^{-n}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est alors la topologie de la limite inductive.

L'action de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ est continue pour cette topologie, et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}} = \mathbf{Q}_p$.

Par ce qui a été dit précédemment, et car $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ est un corps, il vérifie les hypothèses $(A1 - A3)$ de la section 1.2, de sorte qu'il est possible de parler de représentations $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$-admissibles : de telles représentations sont appelées représentations de de Rham, et en particulier, on peut prouver que ce sont des représentations de Hodge-Tate. Faltings a prouvé que toutes les représentations provenant de la géométrie (plus précisément, la cohomologie étale p-adique d'une variété propre et lisse sur une extension finie de $\mathbf{Q}_p$) sont de de Rham.

1.4 L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et les représentations cristallines

L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ que nous venons d'introduire est en un certain sens trop gros, par exemple il n'existe pas de prolongement naturel de $\varphi : \widetilde{\mathbf{B}}^+ \to \widetilde{\mathbf{B}}^+$ à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, notamment car $\ker\theta \subset \widetilde{\mathbf{B}}^+$ n'est pas stable par φ. En effet, si $\tilde{p}$ est un élément de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ tel que $\tilde{p}^{(0)} = p$, alors $\theta([\tilde{p}^{1/p}] - p) \neq 0$, et donc par ce qui a été dit précédemment, $[\tilde{p}^{1/p}] - p$ est inversible dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, avec $1/([\tilde{p}^{1/p}] - p) \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Mais si $\varphi : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ prolonge $\varphi : \widetilde{\mathbf{B}}^+ \to \widetilde{\mathbf{B}}^+$, alors $\varphi(1/([\tilde{p}^{1/p}] - p)) = 1/([\tilde{p}] - p) \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Or $\theta([\tilde{p}] - p) = 0$, et donc $1/([\tilde{p}] - p)) \notin \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.
Pour pallier à ce problème, Fontaine a introduit dans [Fon94a] un sous-anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+$ de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, formé de limites de suites de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ satisfaisant certaines conditions de croissance.
Rappelons qu'un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ peut s'écrire (de manière non nécessairement unique) $\sum_{n\in\mathbf{N}} x_n\omega^n$, avec $x_n \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. On pose alors

$$\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+ := \left\{ x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ : x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{\omega^n}{n!}, \text{ avec } x_n \to 0 \text{ dans } \widetilde{\mathbf{B}}^+ \right\}.$$

Il est possible (voir [Fon94a] pour les détails) de munir $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+$ d'un morphisme φ qui prolonge celui de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$. En particulier, l'élément $t \in \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+$ vérifie $\varphi(t) = pt$. Si l'on pense à t comme à un logarithme de $[\varepsilon]$, alorsLà encore, il faudrait connaître les détails de la construction de φ pour le prouver rigoureusement, mais une bonne heuristique est que $t = \log([\varepsilon])$, $\varphi([\varepsilon]) = [\varepsilon]^p$ et donc $\log([\varepsilon]^p) = p\log([\varepsilon])$. De plus, l'endomorphisme $\varphi : \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+ \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+$ est injectif et commute à l'action de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$.
On pose $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} := \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+[1/t]$ Il s'agit d'un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, muni d'un Frobenius φ et d'une action de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui commute à φ. De plus, il hérite de la filtration de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$:

$$\mathrm{Fil}^i\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} = \mathrm{Fil}^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \cap \mathbf{B}_{\mathrm{cris}},$$

pour laquelle $(\mathrm{Fil}^0\mathbf{B}_{\mathrm{cris}})^{\varphi=1} = \mathbf{Q}_p$.

De plus, $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ vérifie toutes les hypothèses de la section 1.2. En effet, c'est une $\mathbf{Q}_p$-algèbre topologique munie d'une action linéaire de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. On appelle alors représentation cristalline une représentation $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$-admissible, et si V est une représentation p-adique de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on note

$$\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}},$$

de sorte que V est cristalline si et seulement si $\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$. En particulier, il est aisé de voir qu'une représentation cristalline est de de Rham, et donc de Hodge-Tate. En effet, puisque $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, on a

$$\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \leq \dim_{\mathbf{Q}_p}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}} \leq \dim_{\mathbf{Q}_p} V,$$

et donc si $\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$, alors $\dim_{\mathbf{Q}_p}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}} = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$.

Les représentations cristallines ont été introduites pour étudier les représentations provenant de la géométrie algébrique. Ainsi, elles fournissent par exemple un critère pour déterminer à quelle condition une variété abélienne A sur $\mathbf{Q}_p$ possède bonne réduction : c'est le cas si et seulement si son module de Tate $V_p(A)$ est une représentation cristalline de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (critère de Coleman-Iovita). De nombreuses autres représentations provenant de la géométrie sont en fait cristallines, c'est par exemple le cas des représentations associées à des formes modulaires, comme nous le verrons à la section 3.

1.5 Représentations cristallines et φ-modules filtrés

Sur l'anneau $\mathbf{B}_{\text{cris}}$, nous disposons d'un endomorphisme φ et d'une filtration, que nous pouvons utiliser afin d'enrichir un peu la structure de $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$.
Sur $\mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, on définit un endomorphisme φ par $\varphi(b \otimes v) = \varphi(b) \otimes v$, qui commute alors à l'action de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Il est également possible de munir $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ d'une filtration en posant

$$\mathrm{Fil}^i(\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)) = (\mathrm{Fil}^i \mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}.$$

Il s'agit alors d'une filtration par des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie, séparée et exhaustive. De plus, lorsque V est cristalline, les poids de Hodge-Tate sont exactement les opposés des entiers i tels que $\mathrm{Fil}^i \mathbf{D}_{\text{cris}}(V) \neq \mathrm{Fil}^{i+1} \mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$. Enfin, si i est un poids de Hodge-Tate de V, alors la multiplicité de i est la dimension sur $\mathbf{Q}_p$ de $\mathrm{gr}^{-i} \mathbf{D}_{\text{cris}}(V) := \mathrm{Fil}^{-i} \mathbf{D}_{\text{cris}}(V) / \mathrm{Fil}^{-i+1} \mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$.

Définition 2.1.4. On appelle φ-module filtré sur $\mathbf{Q}_p$ un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel D de dimension finie muni d'une application linéaire φ et d'une filtration décroissante par des sous-$\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels $\mathrm{Fil}^i D$, séparée et exhaustive, c'est-à-dire tels que $\mathrm{Fil}^i D = D$ pour $i \ll 0$ et $\mathrm{Fil}^i D = \{0\}$ pour $i \gg 0$.

Remarque 2.1.5. On ne demande pas de condition de compatibilité entre φ et la filtration sur D, notamment la filtration n'a pas de raison d'être stable par φ, ce qui en général n'est pas le cas pour le φ-module filtré $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ associé à une représentation cristalline V.

Le foncteur $V \mapsto \mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ est donc un foncteur tensoriel exact de la catégorie des représentations cristallines de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dans celle des φ-modules filtrés sur $\mathbf{Q}_p$, qui préserve la dimension. Il n'est pas essentiellement surjectif, mais il est tout de même possible de décrire son image essentielle.

Si D est un φ-module filtré de dimension un, et si d en est une base, soit $\lambda \in \mathbf{Q}_p$ tel que $\varphi(d) = \lambda d$. On pose alors $t_N(D) = v_p(\lambda)$, et $t_H(D) = \max\left\{i \in \mathbf{Z} : \mathrm{Fil}^i D = D\right\}$. Si D est un φ-module filtré de dimension supérieure, alors $\det D$ est un φ-module filtré de dimension un, où la filtration sur $\det D$ est celle déduite de la filtration sur $D \otimes \cdots \otimes D$, la filtration sur un produit tensoriel étant celle définie par

$$\mathrm{Fil}^i(D_1 \otimes D_2) = \sum_{i_1+i_2=i} (\mathrm{Fil}^{i_1} D_1) \otimes (\mathrm{Fil}^{i_2} D_2).$$

Ainsi, $\det D$ est un φ-module filtré de dimension un, et on pose $t_N(D) := t_N(\det D)$ et $t_H(D) := t_H(\det D)$.

Définition 2.1.6. Un φ-module filtré D est dit faiblement admissible si :
- φ est bijectif,
- $t_N(D) = t_H(D)$,
- pour tout sous-objet D' (c'est-à-dire un sous-espace vectoriel stable par φ et muni de la filtration induite) de D, $t_H(D') \leq t_N(D')$.

Si V est une représentation p-adique de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors Fontaine a prouvé dans [Fon94b] que $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ est un φ-module filtré faiblement admissible, et on appelle φ-module filtré admissible un φ-module filtré D tel qu'il existe une représentation

cristalline V telle que $D \simeq \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. Cette terminologie, qui est la terminologie originelle de Fontaine a été rendue osbolète par le théorème suivant prouvé par Colmez et Fontaine dans [CF00] :

Théorème 2.1.7 (Faiblement admissible implique admissible)**.** *Un φ-module filtré faiblement admissible est admissible. En particulier, le foncteur $V \mapsto \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est une équivalence de catégories entre représentations p-adiques cristallines et φ-modules filtrés faiblement admissibles. De plus, un quasi-inverse au foncteur $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}$ est donné par $D \mapsto \mathbf{V}_{\mathrm{cris}}(D) = \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} D)^{\varphi=1}$.*

Remarque 2.1.8. Si D est un φ-module filtré faiblement admissible, alors $\mathrm{Hom}_{\varphi,\mathrm{Fil}}(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}, D)$ est une représentation galoisienne, isomorphe à $\mathbf{V}(D)^*$.

Comme il est beaucoup plus facile de manipuler des φ-modules que des représentations galoisiennes, cette équivalence de catégories permet de travailler plus facilement avec les représentations cristallines.

Nous aurons par la suite besoin de manipuler des L-représentations cristallines de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, où L est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$: si V est une représentation L-linéaire de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on dit que V est cristalline si elle l'est en tant que représentation $\mathbf{Q}_p$-linéaire. Dans ce cas, $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est en fait un L-espace vectoriel, avec une filtration par des sous-L-espaces vectoriels et φ est L-linéaire : c'est un φ-module filtré sur L. Il s'agit encore d'un φ-module filtré faiblement admissible (c'est-à-dire admissible en tant que φ-module filtré sur $\mathbf{Q}_p$), et le théorème de Colmez-Fontaine s'étend en une équivalence de catégories préservant la dimension entre représentations L-linéaires cristallines et φ-modules filtrés faiblement admissibles à coefficients dans L (voir [BM02, Corollaire 3.1.1.3]).

Remarque 2.1.9. On pourrait également considérer des φ-modules filtrés à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$, mais il n'est pas difficile de voir qu'un tel objet est toujours obtenu par extension des scalaires d'un φ-module filtré à coefficients dans L, avec L extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Ce résultat fait écho à la proposition 1.2.1 côté galoisien.

Il est aisé de décrire les caractères cristallins de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, c'est-à-dire les représentations cristallines de dimension un : ce sont les produits d'une puissance entière du caractère cyclotomique par un caractère non ramifié. En particulier, les $\overline{\mathbf{Q}}_p(n)$ sont des représentations cristallines. De plus, si $\eta = \chi_{\mathrm{cycl}}^n \mu_\lambda$, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\overline{\mathbf{Q}}_p(\eta)) = \overline{\mathbf{Q}}_p e$ avec

$$\varphi(e) = \lambda^{-1} p^{-n} e \text{ et } \mathrm{Fil}^i \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\overline{\mathbf{Q}}_p(\eta)) = \begin{cases} 0 \text{ si } i > -n \\ \overline{\mathbf{Q}}_p e \text{ si } i \leq -n. \end{cases}$$

Dans la suite nous nous intéresserons plus particulièrement aux représentations cristallines absolument irréductibles de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension 2. La remarque 2.1.9 permet de se ramener à une classification des φ-modules filtrés faiblement admissibles à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$, irréductibles et de dimension 2. Ceci a été fait par Breuil et Mézard dans [BM02, 3.1.2].
Il y est montré que si D est un φ-module filtré faiblement admissible, irréductible, de dimension 2 tel que les poids de Hodge-Tate de $\mathbf{V}_{\mathrm{cris}}(D)$ soient 0 et $-(k-1)$, avec $k \geq 1$ (ce qu'on peut toujours supposer quitte à tordre par une puissance de

χ_{cycl}, puisque les $\mathbf{Q}_p(n)$ sont cristallines) alors $k \geq 2$ et il existe une base e_1, e_2 de D, $\mu \in \overline{\mathbf{Z}_p}^{\times}$ et $\nu \in \mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}_p}}$ tels que

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = p^{k-1}\mu e_2 \\ \varphi(e_2) = -e_1 + \nu e_2 \end{cases} \quad \text{et } \mathrm{Fil}^i D = \begin{cases} D \text{ si } i \leq 0 \\ \overline{\mathbf{Q}}_p e_1 \text{ si } 1 \leq i \leq k-1 \\ 0 \text{ si } i \geq k-1. \end{cases}$$

Quitte à tordre par un caractère non ramifié, on peut supposer que $\mu = 1$.

Pour $k \geq 2$ et $a_p \in \overline{\mathbf{Z}_p}$, on note D_{k,a_p} le φ-module filtré [1] de dimension deux de base e_1, e_2 sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$, défini par

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = p^{k-1} e_2 \\ \varphi(e_2) = -e_1 + a_p e_2 \end{cases} \quad \text{et } \mathrm{Fil}^i D_{k,a_p} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \geq k \\ \overline{\mathbf{Q}}_p e_1 \text{ si } 1 \leq i \leq k-1 \\ D_{k,a_p} \text{ si } i \leq 0. \end{cases}$$

On note $V_{k,a_p} = \mathrm{Hom}_{\varphi,\mathrm{Fil}}(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}, D_{k,a_p})$ la représentation cristalline telle que $D_{k,a_p} = \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V^*_{k,a_p})$. Remarquons qu'alors $V^*_{k,a_p} = V_{k,a_p}(1-k)$.
Par ce qui vient d'être dit, on a prouvé la proposition suivante :

Proposition 2.1.10. *Les représentations $\overline{\mathbf{Q}}_p$-linéaires de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, cristallines, irréductibles, de dimension 2, sont exactement les $V_{k,a_p} \otimes \chi$, pour $k \geq 2, a_p \in \mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}_p}}$ et χ caractère cristallin de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$.*

Remarque 2.1.11. La définition que nous avons donnée de V_{k,a_p} autorise a_p à être une unité p-adique. Dans ce cas, V_{k,a_p} n'est plus irréductible. Il est montré dans [BM02], section 3.1.2 et proposition 4.1.1, que V_{k,a_p} est réductible non scindée, et que $\overline{V}_{k,a_p} = \omega^{k-1}\mu_{\overline{a_p}^{-1}} \oplus \mu_{\overline{a_p}}$.

1.6 Modules de Wach

Afin d'étudier les représentations cristallines, nous disposons de deux types d'objets d'algèbre linéaire : les φ-modules filtrés admissibles et les (φ, Γ)-modules. Il est naturel de se demander s'il existe un lien entre ces deux objets, et si le fait qu'une représentation soit ou non cristalline puisse se lire sur son (φ, Γ)-module. Une réponse affirmative à été apportée par des travaux de Wach ([Wac96]), complétés plus tard par Colmez ([Col99]), puis par Berger ([Ber04]).
Rappelons que $\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{Z}_p[\![\pi]\!]$ et que $\mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{Z}_p[\![\pi]\!][1/p]$. Dans la suite, on note q l'élément de $\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}$ défini par $q = \frac{\varphi(\pi)}{\pi} = p + \cdots + \pi^{p-1}$.

Le point de départ est un théorème de Colmez, qui affirme que toute représentation cristalline est de hauteur finie, résultat qui avait déjà été prouvé par Wach en utilisant les résultats de Fontaine-Lafaille si les poids de Hodge-Tate de la représentation appartenaient tous à un intervalle de longueur $p-1$.
Ainsi, si T est un réseau d'une représentation cristalline V, alors $\mathbf{D}(T) = \mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p} \otimes_{\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}}$

1. La notation a_p vient du fait que de telles représentations sont les représentations associées à des formes modulaires, ne dépendant que du p-ième coefficient du q-développement de f.

$\mathbf{D}^+(T)$.

Berger a montré dans [Ber04] qu'en précisant une construction déjà faite par Wach, on pouvait trouver dans le (φ, Γ)-module d'une représentation cristalline un $\mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p}$-module possèdant de bonne propriétés, l'intérêt d'un tel objet étant qu'il est bien plus facile à manipuler qu'un (φ, Γ)-module, de par l'absence de dénominateurs en π. Plus précisément, si V est une représentation L-linéaire de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à poids de Hodge-Tate dans $[a, b]$, alors V est cristalline si et seulement si il existe un $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p}$-module $\mathbf{N}(V)$ inclus dans $\mathbf{D}(V)$ tel que

- $\mathbf{N}(V)$ est libre sur $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p}$, de rang $\dim_L V$,
- $\mathbf{N}(V)$ est stable sous l'action de Γ, et cette action est triviale sur $\mathbf{N}(V)/\pi\mathbf{N}(V)$,
- $\varphi(\pi^b\mathbf{N}(V)) \subset \pi^b\mathbf{N}(V)$ et $\pi^b\mathbf{N}(V)/\varphi^*(\pi^b\mathbf{N}(V))$ est tué par q^{b-a}.

Un module vérifiant ces propriétés est appelé module de Wach sur $\mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes_{\mathbf{Q}_p} L$, à poids dans $[a, b]$, et est unique lorsqu'il existe.
De plus, le foncteur $V \mapsto \mathbf{N}(V)$ est une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations cristallines et celle des modules de Wach sur $\mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes_{\mathbf{Q}_p} L$, et cette équivalence préserve les poids.

Si V est une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate dans $[a, b]$, et si T est un réseau de V, alors $\mathbf{N}(T) = \mathbf{D}(T) \cap \mathbf{N}(V)$ est un $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}$-module libre de rang $\dim_L V$ vérifiant les mêmes propriétés que $\mathbf{N}(T)$: on dit que $\mathbf{N}(T)$ est un module de Wach sur $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}$, et c'est l'unique sous-$\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}$-module de $\mathbf{N}(V)$ vérifiant ces propriétés. De plus, l'application $T \mapsto \mathbf{N}(T)$ est une bijection entre les réseaux de V et les modules de Wach sur $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}$ inclus dans $\mathbf{N}(V)$.

Berger a prouvé le résultat suivant, qui montre que le φ-module filtré d'une représentation cristalline est encodé dans son module de Wach.

Proposition 2.1.12 ([Ber04, Corollaire III.4.5])**.** *Si V est une représentation cristalline de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et si on munit $\mathbf{N}(V)$ de la filtration*

$$\mathrm{Fil}^i\mathbf{N}(V) = \left\{x \in \mathbf{N}(V) : \varphi(x) \in q^i\mathbf{N}(V)\right\},$$

alors les φ-modules filtrés $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et $\mathbf{N}(V)/\pi\mathbf{N}(V)$ sont isomorphes.

2 La théorie des pentes de Kedlaya

Dans [Ked08], Kedlaya a développé une théorie des polygones de Newton pour des anneaux de polynômes tordus par un Frobenius sur un corps de caractéristique positive, qui nous permettront par la suite d'avoir un critère simple pour savoir si une représentation modulo p est réductible ou non. La plupart des résultats de cette partie sont dûs à Kedlaya.

Dans toute cette partie, on se fixe un corps k de caractéristique p, et on note $F = k(\!(\pi^{\mathbf{Q}})\!)$ l'anneau des séries de Hahn sur k, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{Q} \to k$ à support bien ordonné. On note $a = \sum_{r \in \mathbf{Q}} a_r \pi^r$ un élément de F. Alors F possède une structure de corps une fois muni de l'addition composante par

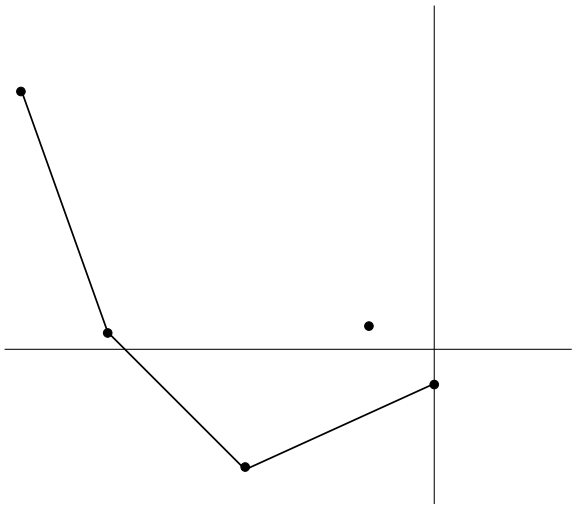

FIGURE 2.1 – Polygone de Newton d'un polynôme à cinq monômes

composante et du produit de convolution

$$\left(\sum_q a_q \pi^q\right)\left(\sum_r b_r \pi^r\right) = \sum_{s\in\mathbf{Q}}\left(\sum_{q+r=s} a_q b_r\right)\pi^s.$$

On munit F de la valuation π-adique, c'est à dire celle qui envoie a sur $v_F(a) = \min\{r \in \mathbf{Q} : a_r \neq 0\}$, et F est complet pour cette valuation.

Soit ϕ un automorphisme de F de la forme $\phi(\sum a_r\pi^r) = \sum a_r \pi^{qr}$, avec q rationnel supérieur ou égal à 1, de sorte que $v_F(\phi(a)) = qv_F(a)$.

Soit $F\{T\}$ l'anneau des polynômes sur F tordus par ϕ, c'est-à-dire tels que $Ta = \phi(a)T$. Il est alors bien connu que $F\{T\}$ est muni d'une division euclidienne à droite :

Proposition 2.2.1 (Ore)**.** *Soient $P, Q \in F\{T\}$. Alors il existe un unique couple $(Q_1, R) \in F\{T\}^2$ tel que $P = Q_1Q + R$, avec $\deg R < \deg Q$.*

Définition 2.2.2. Pour $i \in \mathbf{N}$, on pose $[i] = \sum_{j=0}^{i-1} q^j$, de sorte que $[0] = 0, [1] = 1$ et $[i+j] = [i] + q^i[j]$. Si $P = \sum_{i\in\mathbf{N}} a_iT^i \in F\{T\}$, on définit le polygone de Newton homogène de P comme étant l'enveloppe convexe inférieure de l'ensemble des points

$$\{(-[i], v_F(a_i)), i \in \mathbf{N}\}.$$

On appelle alors pentes (homogènes) de P les pentes du polygone de Newton de P.

Remarque 2.2.3. Multiplier P à gauche par un élément de F de fait que décaler le polygone vers le haut ou vers le bas, mais ne change pas l'ensemble de ses pentes.

Cette définition est plus pratique pour les calculs, mais il existe également une autre normalisation des polygones de Newton :

Définition 2.2.4. Soient $P = \sum_{i\in\mathbf{N}} a_i T^i \in F\{T\}$ non nul, et $z \in F$. On appelle polygone de Newton inhomogène de (P, z) l'enveloppe convexe inférieure de l'ensemble des points

$$\left\{(-q^i, v_F(a_i)), i \in \mathbf{N}\right\} \cup \{(0, v_F(z))\}.$$

Remarque 2.2.5. Les pentes du polygone de Newton inhomogène qui ne contiennent pas le point $\{0, v_F(z)\}$ sont égales à $(q-1)^{-1}$ fois la pente correspondante du polygone de Newton homogène de P. En particulier les pentes inhomogènes de $(P, 0)$ sont les pentes homogènes de P divisées [2] par $q-1$.

Comme dans le cas des polygone des Newton «classiques», il existe un lien entre les pentes du polygone de P et les valuations des éléments x de F tels que $P(\phi)(x) = 0$. Le résultat suivant est dû à Kedlaya (proposition 2.5.7 de [Ked08]).

Proposition 2.2.6. *Soient $P(T) \in F\{T\}$ non nul et $z \in F$. Si $r \in \mathbf{Q}$ est une pente du polygone de Newton inhomogène de (P, z), alors il existe $x \in F$ avec $v_F(x) = r$ et $P(\phi)(x) = z$.*

Ce résultat très général nous intéressera uniquement dans le cas $z = 0$, nous garantissant l'existence d'une solution de valuation r à $P(\phi)(x) = 0$ dès que l'une des pentes de P est égale à r . Toutefois, il serait intéressant d'avoir une réciproque : si $P(\phi)(x) = 0$ avec $v_F(x) = r$, est-ce qu'une pente de P est égale à r ?

En réalité, nous n'aurons besoin d'une telle réciproque que dans le cas où P est de degré 2, nous ne donnons donc la preuve que dans ce cas-là (mais un tel résultat doit être valable dans un cadre bien moins restrictif).
Soit donc $P \in F\{T\}$ de degré 2, et $x \in F$ tel que $P(\phi)(x) = 0$. Par le lemme de division euclidienne à droite, on peut écrire $P = (aT-1)(bT-1)$ où $b = \frac{x}{\phi(x)}$ et $a \in F$. Il s'agit alors de montrer que $v_F(x)$ est une pente inhomogène de P. Notons que $v_F(x)(q-1) = -v_F(b)$ est bien la pente de $bT-1$. Avec les notations précédentes, on a $P = (aT-1)(bT-1) = a\phi(b)T^2 - (a+b)T + 1$, et pour calculer les pentes, il nous faut différencier plusieurs cas :

- si $v_F(a) < v_F(b)$, alors les points dont on prend l'enveloppe convexe sont

$$(-(q+1), v_F(a) + qv_F(b)); (-1, v_F(a)) \text{ et } (0,0).$$

  Le polygone de Newton possède donc deux pentes qui sont $-v_F(b)$ et $-v_F(a)$.
- Si $v_F(b) < v_F(a)$, alors on considère l'enveloppe convexe de $(-(q+1), v_F(a) + qv_F(b)); (-1, v_F(b))$ et $(0,0)$. Là encore, le polygone possède deux pentes qui sont

$$\frac{v_F(a) + (q-1)v_F(b)}{-q} \text{ et } -v_F(b).$$

- si $v_F(b) = v_F(a)$, alors le polygone est l'enveloppe convexe de

$$(-(q+1), v_F(a) + qv_F(b)); (-1, v_F(a+b)) \text{ et } (0,0).$$

  Dans ce cas, le polygone ne possède qu'une seule pente, qui est égale à $-v_F(a) = -v_F(b)$.

2. Et non multipliées par $q-1$ comme affirmé dans la définition 2.5.6 de [Ked08].

Dans tous les cas, on a bien prouvé que $v_F(x)(q-1) = -v_F(b)$ était une pente homogène de P, et donc $v_F(x)$ est une pente inhomogène de P.

En combinant ce résultat avec celui de Kedlaya, on obtient la proposition suivante :

Proposition 2.2.7. *Si $P \in F\{T\}$ est de degré 2, alors il existe $x \in F$ de valuation r vérifiant $P(\phi)(x) = 0$ si et seulement si r est une pente (inhomogène) de P.*

Les pentes homogènes sont surtout utiles pour faire des calculs, mais le lien entre pentes et valuations est plus clair avec les pentes inhomogènes (qui rappelons-le ne diffèrent des précédentes que par multiplication par la constante $(q-1)^{-1}$). Dans toute la suite, lorsqu'il sera question de pentes de polygones de Newton sans plus de précision, cela désignera les pentes inhomogènes.

Les polygones de Newton permettent également d'obtenir d'autres informations sur les polynômes non-commutatifs de $F\{T\}$, nous montrons ici comment obtenir un critère d'irréductibilité, annoncé dans [Ked08, Corollary 2.4.6].
Soit F un corps muni d'un endomorphisme ϕ et d'une valuation v_F pour laquelle F est complet et telle que $v_F(\phi(x)) = qv_F(x)$, pour tout $x \in F$, avec $q > 1$. On pourra par exemple prendre pour F le corps des séries de Hahn comme précédemment, mais aussi un corps de séries de Laurent $k(\!(\pi)\!)$ muni de la valuation π-adique.
Considérons l'ensemble des polynômes de Laurent non-commutatifs $F\{T^{\pm 1}\}$. Contrairement à $F\{T\}$, ce n'est pas nécessairement un anneau car ϕ n'est pas toujours inversible, de sorte que la multiplication à gauche par T^{-1} n'est pas toujours définie. En revanche, il est possible de multiplier à droite un élément de $F\{T\}$ par un élément de $F\{T^{\pm 1}\}$.

Définition 2.2.8. our $i \in \mathbf{Z}$, on pose $[i] = \frac{q^i-1}{q-1}$. Ainsi, $[-1] = -\frac{1}{q}$, et la formule $[i+j] = [i] + q^i[j]$ reste toujours valable pour $i, j \in \mathbf{Z}$.

Si $0 \neq P = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i T^i \in F\{T^{\pm 1}\}$, et $r \in \mathbf{R}$, on pose

$$v_r(P) = \min_i(v_F(a_i) + r[i]).$$

On pose $v_r(0) = +\infty$. On définit comme précédemment le polygone de Newton de P comme étant la frontière de l'enveloppe convexe de l'ensemble des points

$$\mathcal{E}_P = \{(-[i], v_F(a_i)), i \in \mathbf{Z}\}.$$

v_r n'est pas une valuation, mais vérifie tout de même l'inégalité ultramétrique

$$v_r(P+Q) \geq \min(v_r(P), v_r(Q)).$$

Nous rencontrerons un peu plus tard (lemme 2.2.10) d'autres propriétés de v_r. On dit que $r \in \mathbf{R}$ est une pente du polygone de Newton de P (ou de manière abrégée une pente de P) si le polygone de Newton de P possède un segment de pente r.
La fonction v_r représente la plus petite distance (algébrique) entre les points de $\mathcal{E}_P$ et la droite d'équation $y = rx$. Pour des raisons de convexité, il est en fait possible de se limiter aux seuls points formant les sommets du polygone de Newton. On peut aussi interpréter $v_r(P)$ comme la plus grande ordonnée b telle que tous les points du polygone de Newton de P soient au dessus de la droite d'équation $y = rx + b$. Un réel r est une pente du polygone de Newton de P si et seulement si le minimum définissant $v_r(P)$ est atteint en au moins deux points.

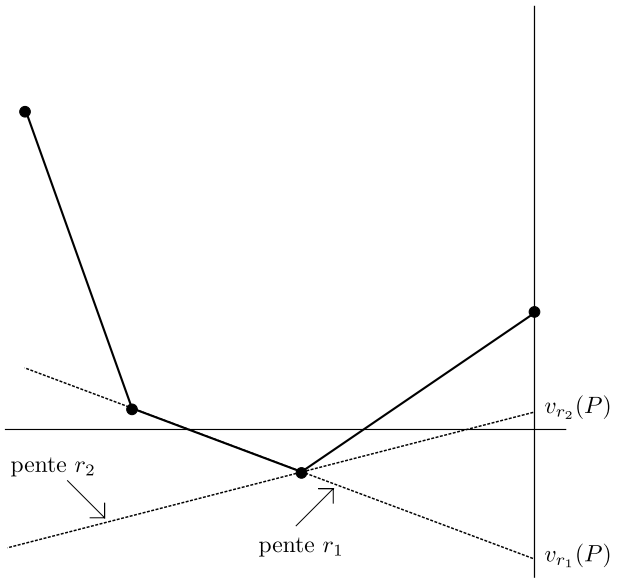

FIGURE 2.2 – r_1 est une pente du polygone, r_2 ne l'est pas

Remarque 2.2.9. Il est difficile de décrire de manière générale la forme du polygone de Newton d'un produit de polynômes en fonction des polygones de Newton de chacun des facteurs, mais on peut tout de même le faire dans quelques cas simples :

- multiplier à gauche $P \in F\{T\}$ par un élément de F ne fait que décaler l'ensemble des points de $\mathcal{E}_P$ par la valuation de cette constante. En particulier, ça ne change pas la forme du polygone, ni l'ensemble de ses pentes.
- La multiplication à droite par un monôme de la forme $T^n, n \in \mathbf{N}$ ne fait pas que décaler le polygone vers la gauche, elle a aussi pour effet de multiplier les pentes par q^{-n}.
- La multiplication à droite par $T^{-n}, n \in \mathbf{N}$ a l'effet inverse : elle multiplie les pentes par q^n.

Le lemme suivant, essentiellement dû à Kedlaya ([Ked08] 2.4.3) nous permet toutefois d'obtenir des informations sur les pentes d'un produit, au moins dans quelques cas.

Lemme 2.2.10 (Kedlaya)**.** *Soient $P \in F\{T\}$, $Q \in F\{T^{-1}\}$, et $r \in \mathbf{R}$ tels que $v_r(Q) \geq 0$. Alors $v_r(PQ) \geq v_r(P) + v_r(Q)$.*

Démonstration. Notons $P = \sum_{i\geq 0} a_i T^i$ et $Q = \sum_{j\leq 0} b_j T^j$. Alors

$$PQ = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i \phi^i(b_j) \right) T^k.$$

$$\begin{aligned} \text{Or } v_F(a_i\phi^i(b_j)) + [i+j]r &= v_F(a_i) + q^i v_F(b_j) + [i]r + q^i[j]r \\ &= (v_F(a_i) + [i]r) + q^i(v_F(b_j) + [j]r) \geq v_r(P) + q^i v_r(Q). \end{aligned}$$

Puisque $q > 1$, $i \geq 0$, ce dernier terme est supérieur ou égal à $v_r(P) + v_r(Q)$, et donc si $v_r(Q) \geq 0$, alors

$$v_F(a_i\phi^i(b_j)) + [i+j]r \geq v_r(P) + v_r(Q).$$

Mais puisque $v_F\left(\sum_{i+j=k} a_i\phi^i(b_j)\right) \geq \inf\{v_F(a_i\phi^i(b_j))\}$, on en déduit que

$$v_r(PQ) \geq v_r(P) + v_r(Q).$$

□

Proposition 2.2.11. *Soit $R \in F\{T^{\pm 1}\}$, et soit $r \in \mathbf{R}$ tel que $v_r(R-1) > 0$. Alors il existe $P \in F\{T\}$ et $Q \in F\{T^{-1}\}$ de coefficient constant 1 tels que $R = PQ$. De plus, on a $\deg_T(P) = \deg_T(R)$ et $\deg_{T^{-1}}(Q) = \deg_{T^{-1}}(R)$.*

Démonstration. On va construire P et Q comme limites de suites $(P_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(Q_i)_{i\in\mathbf{N}}$. Posons $P_0 = Q_0 = 1$, et une fois P_i et Q_i construits, notons $R - P_iQ_i = \sum_{j\in\mathbf{Z}} b_j^i T^j$. On pose alors

$$P_{i+1} = P_i + \sum_{j\geq 0} b_j^i T^j \text{ et } Q_{i+1} = Q_i + \sum_{j<0} b_j^i T^j,$$

et nous allons prouver par récurrence que $v_r(R - P_iQ_i) \geq iv_r(R-1)$. On a :

$$\begin{aligned}
R - P_{i+1}Q_{i+1} &= R - \left(P_i + \sum_{j\geq 0} b_j^i T^j\right)\left(Q_i + \sum_{j<0} b_j^i T^j\right) \\
&= \sum_{j\geq 0} b_j^i T^j + \sum_{j<0} b_j^i T^j - \left(\sum_{j\geq 0} b_j^i T^j\right) Q_i - P_i\left(\sum_{j<0} b_j^i T^j\right) - \left(\sum_{i\geq 0} b_j^i T^j\right)\left(\sum_{i<0} b_j^i T^j\right) \\
&= (1-P_i)\left(\sum_{j<0} b_j^i T^j\right) + \left(\sum_{j\geq 0} b_j^i T^j\right)(1-Q_i) - \left(\sum_{j\geq 0} b_j^i T^j\right)\left(\sum_{j<0} b_j^i T^j\right).
\end{aligned}$$

Naturellement, on a

$$v_r\left(\sum_{j\geq 0} b_j^i T^j\right) \geq v_r\left(\sum_{j\in\mathbf{Z}} b_j^i T^j\right) = v_r(R - P_iQ_i),$$

et de même, $v_r(\sum_{j<0} b_j^i T^j) \geq v_r(R - P_iQ_i)$.
On en déduit que

$$v_r\left(\left(\sum_{j\geq 0} b_j^i T^j\right)\left(\sum_{j<0} b_j^i T^j\right)\right) \geq 2v_r(R - P_iQ_i).$$

Mais

$$v_r((1-P_i)(\sum_{j<0} b_j^i T^j)) \geq v_r(1-P_i) + v_r(\sum_{j<0} b_j^i T^j) \geq v_r(R - P_iQ_i) + v_r(R-1).$$

De même, on majore $v_r\left(\left(\sum_{j\geq 0} b_j^i T^j\right)(1-Q_i)\right)$, et ainsi,

$$v_r(R - P_{i+1}Q_{i+1}) \geq \inf(v_r(R - P_iQ_i) + v_r(R-1), 2v_r(R - P_iQ_i)) \geq (i+1)v_r(R-1).$$

Au passage, on a alors $v_r(1-P_{i+1}) = v_r(1-P_i-\sum_{j\geq 0} b_j^i T^j) \geq v_r(R-1)$ (et de même $v_r(1-Q_{i+1}) \geq v_r(R-1)$), ce qui permet d'appliquer le principe de récurrence. Ainsi, $(R-P_iQ_i)_i$ tend vers 0, et donc $(P_i)_i$ et $(Q_i)_i$ possèdent deux limites $P \in F\{T\}$ et $Q \in F\{T^{-1}\}$ vérifiant $R = PQ$.
La construction montre que Q est de coefficient constant 1 puisqu'il s'agit du coefficient constant de Q_0.
De plus, le coefficient constant de P est $b = 1 + \sum_{i\in\mathbf{N}} b_0^i$.
Or, $v_F(b_0^i) \geq v_r\left(\sum_{j\in\mathbf{Z}} b_j^i T^j\right) \geq iv_r(R-1)$. On en déduit donc que $v_F(b) = 0$. En particulier, $b \neq 0$.
De là, on en déduit aisément que $\deg_T P = \deg_T R$ et $\deg_{T^{-1}} Q = \deg_{T^{-1}} R$. □

Proposition 2.2.12. *Soit $P \in F\{T\}$, irréductible. Alors le polygone de Newton de P possède une seule pente.*

Démonstration. Soit $P = \sum_j a_j T^j \in F\{T\}$, dont le polygone de Newton possède au moins deux pentes. Alors soit $-[i]$ la plus grande abscisse d'un point de rupture du polygone de Newton. En particulier, $i > 0$ et $a_i \neq 0$.
Considérons alors $R = PT^{-i} \in F\{T^{\pm 1}\}$. Le polygone de Newton de R possède un point de rupture d'abscisse zéro. De plus, le coefficient constant de R est a_i et est donc non nul.
Soit $\pi \in F$ tel que $v_F(\pi) > 0$ et notons alors $R' = \frac{1+\pi}{a_i} R$. Le coefficient constant de R' est $1+\pi$, et puisque la multiplication à gauche par une constante ne fait décaler le polygone de Newton vers le haut ou le bas, le polygone de R' possède encore deux pentes. Soit alors r la plus grande pente de la partie du polygone de Newton située à gauche de l'axe des ordonnées. Comme le coefficient constant de R' est $1+\pi$, celui de $R'-1$ est π. Or, $\mathcal{E}_R$, l'ensemble des points dont l'enveloppe convexe est le polygone de Newton de R ne diffère de $\mathcal{E}_{R'-1}$ que par le point associé à leur coefficient constant. Ainsi le polygone de Newton de $R'-1$ est situé au dessus de celui de R', et donc $v_r(R'-1) > 0$.
On peut donc appliquer la proposition précédente pour en déduire que $R' = Q_1Q_2$, avec $Q_1 \in F\{T\}$, $\deg_T Q_1 = \deg_T R' = \deg_T P - i$, $Q_2 \in F\{T^{-1}\}$, de coefficient constant 1 et $\deg_{T^{-1}} Q_2 = \deg_{T^{-1}} R' = -i$.
On en déduit que $P = (\frac{a_i}{1+\pi} Q_1)(Q_2 T^i)$, avec Q_1 et Q_2 non constants, et donc P n'est pas irréductible dans $F\{T\}$. □

Ce résultat est par exemple utilisé dans [BV12, Proposition 2.6] afin de construire la représentation du groupe de Weil associée à un (φ, Γ)-module irréductible sur $k(\!(\pi)\!)$.

3 Réduction des représentations cristallines de dimension 2

Pour de nombreuses raisons, les représentations cristallines de dimension 2 sont des objets dont l'étude mérite d'être approfondie.
Une raison naïve est qu'il s'agit des représentations les plus faciles à manipuler et à décrire grâce à leur description en termes de φ-modules filtrés, et dont l'étude ne soit pas triviale. Malgré tout, l'étude leur réduction modulo p montre que ce ne sont

pas des objets aussi simples, puisqu'on ne connait cette réduction que dans certains cas. Les quelques résultats connus, bien que très partiels font apparaître une combinatoire compliquée, et laissent à penser qu'un résultat déterminant la réduction de toutes les représentations cristallines de dimension deux serait nécessairement d'énoncé complexe.

De manière moins terre-à-terre, les représentations cristallines de dimension 2 possèdent un intérêt en vue de la correspondance de Langlands locale p-adique, puisque c'est par leur étude que Breuil a initié la quête d'une telle correspondance dans [Bre03b]. De plus, ces représentations sont Zariski-denses dans l'espace rigide analytique associé à l'anneau des déformations universelles d'une représentation modulaire de dimension 2 ([Nak11]), de sorte qu'une correspondance de Langlands pour ces représentations s'étend par continuité en une correspondance de Langlands pour toutes les représentations galoisiennes de dimension 2 ([Col10a]).

Une motivation plus ancienne est le fait que ces représentations cristallines apparaissent naturellement dans l'étude des représentations galoisiennes globales associées à des formes modulaires, comme nous l'expliquons brièvement ici.

Soit $f = \sum_n a_n q^n$ une forme modulaire parabolique sur $\Gamma_1(N)$, de poids $k \geq 2$, de caractère ψ, propre pour les opérateurs de Hecke T_l, et telle que $T_l(f) = a_l f$. Alors, pour p premier, Deligne a associé à f, par des méthodes géométriques, une représentation

$$\rho_f : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Q}}_p).$$

En identifiant un groupe de décomposition au dessus de p à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, la restriction de ρ_f à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ est une représentation p-adique de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, et si N est premier à p et $v_p(a_p) > 0$, alors

$$(\rho_f)_{|\,\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)} = V_{k,a_p\psi^{1/2}(p)} \otimes \psi^{1/2}.$$

Pour un panorama des résultats connus sur cette représentation, on pourra par exemple consulter l'introduction de [BG09].

Il est alors intéressant d'essayer de déterminer la réduction modulo p de $(\rho_f)_{|\,\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)}$. Le cas où f est ordinaire en p ne pose pas de problèmes, puisqu'alors V_{k,a_p} est déjà réductible, et donc il en est de même pour $\overline{V}_{k,a_p}$. Nous nous intéressons donc dans la suite au cas où $v_p(a_p) > 0$.

Dans [BLZ04], il est montré que lorsque a_p est suffisamment proche de 0, alors $\overline{V}_{k,a_p} = \overline{V}_{k,0}$. De manière précise, pour $v_p(a_p) \geq \left\lfloor \frac{k-2}{p-1} \right\rfloor$, $\overline{V}_{k,a_p} = \overline{V}_{k,0}$.
Ce résultat détermine entièrement $\overline{V}_{k,a_p}$ lorsque $k \leq p$, car alors $\left\lfloor \frac{k-2}{p-1} \right\rfloor = 0$.

Pour $p+1 \leq k \leq 2p-1$, des résultats non publiés de Breuil et Berger ([BB05]) décrivent $\overline{V}_{k,a_p}$ pour tout a_p dans $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}$. Ici, les résultats de Berger-Li-Zhu ne suffisent plus car $\left\lfloor \frac{k-2}{p-1} \right\rfloor = 1$. Si la méthode de [BLZ04] peut s'étendre au cas où $v_p(a_p) = 1$, elle ne fonctionne plus pour $0 < v_p(a_p) < 1$, et les méthodes employées par Berger

et Breuil font alors appel à la correspondance de Langlands p-adique.
Il est alors prouvé que pour $p+2 \leq k \leq 2p-1$, $\overline{V}_{k,a_p}$ est toujours irréductible pour $0 < v_p(a_p) < 1$, et réductible pour $v_p(a_p) = 1$.

Dès lors, il était tentant de conjecturer que le fait que $\overline{V}_{k,a_p}$ soit réductible ou non ne dépendait que de la valuation de a_p, même si dans le cas réductible, on savait que la réduction dépendait de la valeur exacte de a_p.
Le premier résultat véritablement surprenant est alors un calcul non publié de Breuil, énoncé dans [Ber10b], utilisant une fois encore la correspondance de Langlands et qui traite le cas où $k = 2p+1$ et $p \neq 2$. Le résultat est le suivant :

Proposition 2.3.1. *Pour $k = 2p+1$ et $p \neq 2$:*

1. *si $v_p(a_p^2 + p) < 3/2$, alors $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^2)$,*
2. *si $v_p(a_p^2 + p) \geq 3/2$, alors*

$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \omega\mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \text{ où } \lambda^2 - \frac{\overline{a_p^2 + p}}{2pa_p}\lambda + 1 = 0.$$

Ainsi, il existe deux disques fermés centrés en $\pm\sqrt{-p}$ à l'intérieur desquels $\overline{V}_{k,a_p}$ est réductible, et en dehors desquels $\overline{V}_{k,a_p}$ est toujours égale à $\mathrm{ind}(\omega_2^2)$.

Ces calculs ont été le point de départ des calculs de Buzzard et Gee ([BG09], [BG12]) qui, en utilisant des méthodes similaires à celles de Breuil, déterminent $\overline{V}_{k,a_p}$ lorsque $0 < v_p(a_p) < 1$ et ce quel que soit le poids k. Leur résultat est le suivant :

Théorème 2.3.2 ([BG12, Theorem A])**.** *Soit $k \geq 2$, $[k-2]$ le reste de la division euclidienne de $k-2$ par $p-1$ et soit $a_p \in \overline{\mathbf{Z}_p}$ avec $0 < v_p(a_p) < 1$. Alors $\overline{V}_{k,a_p}$ est irréductible, égale à $\mathrm{ind}(\omega_2^{[k-2]+1})$, sauf dans le cas où $k \equiv 3$ modulo $p-1$ et*

$$v_p(k-3) + 1 + v_p(a_p) < v_p(a_p^2 - (k-2)p),$$

auquel cas $\overline{V}_{k,a_p}$ est réductible et

$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \mu_\lambda\omega & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}}\omega \end{pmatrix} \text{ où } \lambda^2 - \frac{\overline{(k-2)p - a_p^2}}{a_p p(k-3)}\lambda + 1 = 0.$$

Des calculs récents de Yamashita et Yasuda ([YY12]) déterminent entièrement (ou du moins pour presque toutes les valeurs de a_p) les réductions $\overline{V}_{k,a_p}$ pour $k \leq \frac{p^2+1}{2}$ en n'utilisant que des techniques de (φ, Γ)-modules.

Enfin, citons les résultats de Berger ([Ber11b]) qui prouvent que, à poids fixé, les réductions $\overline{V}_{k,a_p}$ sont les mêmes pour des valeurs proches de a_p (avec une borne explicite, cf le théorème A de [Ber11b]).
De même, il est prouvé ([Ber11b, Theorem B]) que à a_p fixé, l'application $k \mapsto \overline{V}_{k,a_p}$ est localement constante lorsque k varie dans $\varprojlim_n \mathbf{Z}/p^{n-1}(p-1)\mathbf{Z}$.

Dans tout ce qui suit, nous essayons d'étendre au maximum les méthodes de Berger-Li-Zhu afin de déterminer le rayon maximal du disque ouvert centré en 0 à l'intérieur duquel la méthode de [BLZ04] s'applique toujours de sorte que $\overline{V}_{k,a_p} = \overline{V}_{k,0}$ et de déterminer si la réduction change ou non sur le bord de ce disque, que nous appelons disque de convergence.

4 La méthode de Berger-Li-Zhu

Dans [BLZ04], Berger, Li et Zhu construisent les modules de Wach associés aux représentations V^*_{k,a_p} pour a_p «petit», puis les utilisent pour calculer la réduction modulo p de V_{k,a_p}. Nous rappelons ici les éléments clés de cette construction.

Dans toute la suite, nous notons k un entier supérieur ou égal à 2 et L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, qu'on supposera toujours suffisamment grande pour que $a_p \in L$ et $\sqrt{-1} \in L$.

Pour $n \geq 1$, on pose $q_n = \varphi^{n-1}(\varphi(\pi)/\pi)$, et en particulier $q_1 = q = \varphi(\pi)/\pi$. On définit alors deux séries dans $1 + \pi\mathbf{Q}_p[\![\pi]\!]$ par : $\lambda_+ = \prod_{n\geq 0} \frac{\varphi^{2n+1}(q)}{p} = \frac{q_2}{p} \times \frac{q_4}{p} \times \frac{q_6}{p} \times \ldots$ et $\lambda_- = \prod_{n\geq 0} \frac{\varphi^{2n}(q)}{p} = \frac{q_1}{p} \times \frac{q_3}{p} \times \frac{q_5}{p} \times \ldots$

En particulier, on a $\varphi(\lambda_-) = \lambda_+$ et $\varphi(\lambda_+) = \lambda_- p/q$.

Notons $p^l(\lambda_-/\lambda_+)^{k-1} = \sum_{i\geq 0} z_{l,i}\pi^i$, $z_{(l)} = z_{l,0} + z_{l,1}\pi + \cdots + z_{l,k-2}\pi^{k-2}$ sa réduction modulo π^{k-1}, et $z = z_{(0)}$.

Définition 2.4.1. On note $r(k)$ (et quand il n'y a pas de confusion possible sur k, on note r) le plus petit entier positif l tel que $z_{(l)} \in \mathbf{Z}_p[\pi]$. On appelle r la valuation de convergence, et on note alors $z = z_{(r)}$. De manière équivalente,

$$r(k) = -\inf\{v_p(z_{0,i}), i = 0, \ldots, k-2\}.$$

Il est prouvé dans [BLZ04, Proposition 3.1.1.(4)] que $r(k) \leq \lfloor (k-2)/(p-1) \rfloor$, et nous chercherons dans la suite à calculer plus précisément la valeur de r.

Soit $P(X) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ q^{k-1} & Xz \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbf{Z}_p[\![X, \pi]\!])$. Par approximations successives, on prouve ([BLZ04, Proposition 3.1.3]) que pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe une unique matrice $G_\gamma(X) \in \mathrm{Id} + \pi M(2, \mathbf{Z}_p[\![\pi, X]\!])$ telle que

$$P(X)\varphi(G_\gamma(X)) = G_\gamma(X)\gamma(P(X)).$$

De plus, cette matrice $\mathrm{G}_\gamma(X)$ vérifie

$$G_\gamma(X) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\lambda_+}{\gamma(\lambda_+)}\right)^{k-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_-}{\gamma(\lambda_-)}\right)^{k-1} \end{pmatrix} \text{ modulo } \pi^{k-1}M_2(\mathbf{Z}_p[\![\pi, X]\!])$$

$$\text{et } G_\gamma(0) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\lambda_+}{\gamma(\lambda_+)}\right)^{k-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_-}{\gamma(\lambda_-)}\right)^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha \in \mathfrak{m}_L$, alors les matrices $P(\alpha)$ et $G_\gamma(\alpha)$ sont à coefficients dans $\mathcal{O}_L[\![\pi]\!]$. De plus, si $\alpha \in \mathfrak{m}_L$ et $\gamma, \eta \in \Gamma$, alors

$$G_{\gamma\eta}(\alpha) = G_\gamma(\alpha)\gamma(G_\eta(\alpha)) \text{ et } P(\alpha)\varphi(G_\gamma(\alpha)) = G_\gamma(\alpha)\gamma(P(\alpha)).$$

Ces relations permettent d'utiliser les matrices $P(\alpha)$ et $G_\gamma(\alpha)$ pour définir un module de Wach sur $\mathcal{O}_L[\![\pi]\!]$: soit $\mathbf{N}_k(\alpha)$ le $\mathcal{O}_L$-module libre de base (e_1, e_2). Sur $\mathbf{N}_k(\alpha)$, on définit un endomorphisme semi-linéaire φ et une action semi-linéaire de Γ dont les matrices dans la base (e_1, e_2) sont $P(\alpha)$ et $G_\gamma(\alpha)$ pour $\gamma \in \Gamma$, et on peut vérifier qu'alors $\mathbf{N}_k(\alpha)$ est un module de Wach sur $\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes \mathcal{O}_L$.

Proposition 2.4.2 ([BLZ04, Proposition 3.2.4])**.** *Si $\alpha \in \mathfrak{m}_L$, posons $a_p = p^r\alpha$. Alors le φ-module filtré $L \otimes_{\mathcal{O}_L} (\mathbf{N}_k(\alpha)/\pi\mathbf{N}_k(\alpha))$ est isomorphe au φ-module filtré D_{k,a_p} décrit précédemment, de sorte que $L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathbf{N}_k(\alpha) = \mathbf{N}(V^*_{k,a_p})$. On note alors T_{k,a_p} le réseau de V_{k,a_p} tel que $\mathbf{N}_k(\alpha) = \mathbf{N}(T^*_{k,a_p})$.*

La combinaison des deux résultats suivants permet de décrire $\overline{V}_{k,a_p}$ dans le cas où a_p est «à l'intérieur du disque de convergence».

Proposition 2.4.3 ([BLZ04, Theorem 4.1.1])**.** *Si $v_p(a_p) > r$, alors les deux représentations modulaires $T_{k,a_p} \otimes_{\mathcal{O}_L} k_L$ et $T_{k,0} \otimes_{\mathcal{O}_L} k_L$ sont isomorphes.*

Remarque 2.4.4. Ce résultat est en fait prouvé dans [BLZ04] pour $v_p(a_p) > m$, avec $m = \left\lfloor \frac{k-2}{p-1} \right\rfloor$, et non $v_p(a_p) > r$. Les preuves restent toutefois valables, l'essentiel étant que $a_p(\lambda_-/\lambda_+)^{k-1}$ modulo $k-1$ soit à coefficients dans $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}_p}}$ (cf la remarque 4.1.2 de [BLZ04]).

Proposition 2.4.5. *On a*

1. *si $p+1 \not| k-1$, alors $\overline{V}_{k,0} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$,*
2. *si $p+1 | k-1$, alors*

$$\overline{V}_{k,0} = \begin{pmatrix} \mu_{\sqrt{-1}} & 0 \\ 0 & \mu_{-\sqrt{-1}} \end{pmatrix} \otimes \omega^{(k-1)/(p+1)}.$$

Démonstration. Ce résultat est déjà prouvé dans [Bre03b] ; mais nous en donnons une autre preuve, plus similaire aux techniques que nous utiliserons par la suite, à base de (φ, Γ)-modules en caractéristique p. Pour cela, nous utilisons le module de Wach de $V^*_{k,0}$, qui est $\mathbf{N}_k(0) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$. Nous savons qu'il possède une base (e, f) dans laquelle la matrice de φ est $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ q^{k-1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Sa réduction modulo p est donc $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ \pi^{(k-1)(p-1)} & 0 \end{smallmatrix}\right)$, et par construction, nous savons que la réduction de l'action de $\gamma \in \Gamma$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\lambda_+}{\gamma(\lambda_+)}\right)^{k-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_-}{\gamma(\lambda_-)}\right)^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Or, modulo p on a

$$\frac{q}{\gamma(q)} = \left(\frac{\pi}{\gamma(\pi)}\right)^{p-1} = \left(\frac{\omega(\gamma)\pi}{\gamma(\pi)}\right)^{p-1} \text{ et } \varphi^n\left(\frac{q}{\gamma(q)}\right) = \left(\frac{\omega(\gamma)\pi}{\gamma(\pi)}\right)^{p^n(p-1)}.$$

Puisque $\frac{\lambda_+}{\gamma(\lambda_+)} = \prod_{n\geq 0} \varphi^{2n+1}\left(\frac{q}{\gamma(q)}\right)$, alors

$$\frac{\lambda_+}{\gamma(\lambda_+)} = \left(\frac{\omega(\gamma)\pi}{\gamma(\pi)}\right)^{(p-1)(1+p^2+\dots)} = \left(\frac{\omega(\gamma)\pi}{\gamma(\pi)}\right)^{-(p-1)/(p^2-1)}$$

On en déduit que

$$\left(\frac{\lambda_+}{\gamma(\lambda_+)}\right)^{k-1} = \left(\frac{\omega(\gamma)\pi}{\gamma(\pi)}\right)^{\frac{-(k-1)p}{p+1}}.$$

Dans le cas où $p+1$ ne divise pas $k-1$, alors prenons comme base du (φ,Γ)-module $\mathbf{D}(\overline{T}_{k,0}) = (\mathbf{N}_k(0)\otimes_{\mathcal{O}_L} k_L)\otimes_{k_L[\![\pi]\!]} k_L(\!(\pi)\!)$ la base formée de $e_0=\pi^{-(k-1)}e$ et $e_1=\varphi(e_0)$. On a $\varphi(e_1)=-\pi^{-(k-1)(p-1)}e_0$ et en notant $f_\gamma(\pi)=\frac{\omega(\gamma)\pi}{\gamma(\pi)}$ on a

$$\begin{aligned}\gamma(e_0) &= \gamma(\pi)^{-(k-1)}\left(\frac{\omega(\gamma)\pi}{\gamma(\pi)}\right)^{\frac{-p(k-1)}{p+1}} e\\ &= \gamma(\pi)^{-(k-1)} f_\gamma(\pi)^{\frac{k-1}{p+1}}\omega(\gamma)^{-(k-1)}\pi^{-(k-1)}\gamma(\pi)^{k-1}e\\ &= \omega(\gamma)^{-(k-1)} f_\gamma(\pi)^{\frac{k-1}{p+1}} e_0\end{aligned}$$

et $\gamma(e_1)=\varphi(\gamma(e_0))=\omega(\gamma)^{-(k-1)}f_\gamma(\pi)^{\frac{(k-1)}{p+1}p}e_1$. Ainsi, par la proposition 1.3.10 on a $\overline{T}_{k,0}=\mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$, et alors puisque $\overline{T}_{k,0}$ est irréductible, $\overline{V}_{k,0}$ aussi et $\overline{V}^*_{k,0}=\mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})\otimes\omega^{1-k}$. Puisque $V^*_{k,0}=V_{k,0}(1-k)$, on a bien $\overline{V}_{k,0}=\mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$.

Dans le cas où $p+1$ divise $k-1$, fixons $\sqrt{-1}$ une racine[3] de -1 et considérons

$$e_0=-\pi^{-p\frac{k-1}{p+1}}e+\sqrt{-1}\pi^{\frac{k-1}{p+1}}f.$$

On a alors $\varphi(e_0)=\sqrt{-1}e_0$ et

$$\gamma(e_0)=-\gamma(\pi)^{\frac{-p(k-1)}{p+1}}f_\gamma(\pi)^{\frac{-p(k-1)}{p+1}}e+\sqrt{-1}\gamma(\pi)^{\frac{-(k-1)}{p+1}}f_\gamma(\pi)^{\frac{-(k-1)}{p+1}}f=\omega(\gamma)^{\frac{-(k-1)}{p+1}}e_0.$$

De même, on peut trouver[4] e_1 tel que $\varphi(e_1)=-\sqrt{-1}e_1$ et $\gamma(e_1)=\omega(\gamma)^{\frac{-(k-1)}{p+1}}e_1$, de sorte que

$$\overline{V}^*_{k,0}=\begin{pmatrix}\mu_{\sqrt{-1}} & 0\\ 0 & \mu_{-\sqrt{-1}}\end{pmatrix}\otimes\omega^{-\frac{k-1}{p+1}} \text{ et donc } \overline{V}_{k,0}=\overline{V}^*_{k,0}\otimes\omega^{k-1}=\begin{pmatrix}\mu_{\sqrt{-1}} & 0\\ 0 & \mu_{-\sqrt{-1}}\end{pmatrix}\otimes\omega^{\frac{k-1}{p+1}}.$$

□

Dans la suite, nous allons nous intéresser à un calcul plus précis de la valuation de convergence, pour laquelle nous n'avons pour l'instant qu'une majoration, mais également au calcul de la réduction modulo p de V_{k,a_p} lorsque a_p est sur le bord du disque de convergence, c'est-à-dire lorsque $v_p(a_p)=r$.

Dans ce cas, la méthode décrite plus haut ne fonctionne pas telle quelle, puisque les séries définissant les matrices $G_\gamma(a_p/p^r)$ ne convergent pas nécessairement. Toutefois, en posant $\beta=a_p(\lambda_-/\lambda_+)^{k-1}$ modulo π^{k-1}, et

$$P=\begin{pmatrix}0 & -1\\ q^{k-1} & \beta\end{pmatrix}$$

alors on peut montrer de la même manière que précédemment (c'est l'objet de la proposition 2.1.2 de [BB05]) qu'il existe tout de même une unique matrice $G_\gamma\in$

3. Quitte à agrandir L

4. Même si ici ce n'est pas nécessaire, puisque nous avons trouvé une sous-représentation de $\overline{V}^*_{k,0}$, qui est semi-simple et dont nous connaissons le déterminant.

$M_2(\mathcal{O}_L[\![\pi]\!])$, telle que $P\varphi(G_\gamma) = G_\gamma\gamma(P)$ et congrue à

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\lambda_+}{\gamma(\lambda_+)}\right)^{k-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_-}{\gamma(\lambda_-)}\right)^{k-1} \end{pmatrix} \text{ modulo } \pi^{k-1}M_2(\mathcal{O}_L[\![\pi]\!]).$$

De même, on montre que le module de Wach $\mathbf{N}_k(a_p/p^r)$ défini par P et G_γ est celui d'un réseau de V^*_{k,a_p}.

5 Le calcul de la valuation de convergence

Dans cette partie, nous cherchons à calculer précisément r, au moins pour certaines valeurs de k. Pour cela, il nous faut connaître précisément les valuations p-adiques des coefficients de $\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{k-1}$ modulo π^{k-1}. En effet, par définition r est l'opposé de la plus petite valuation des coefficients de degré strictement inférieur à $k-1$ de $(\lambda_-/\lambda_+)^{k-1}$. Notons $m = \lfloor \frac{k-2}{p-1} \rfloor$ la borne donnée dans [BLZ04] de sorte que $r \leq m$.

Rappelons que

$$\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{k-1} = \left(\frac{(q_1/p).(q_3/p).(q_5/p)\dots}{(q_2/p).(q_4/p)\dots}\right)^{k-1}.$$

Nous savons que $q_1(0) = q(0) = p$, que $q_1 \equiv \pi^{k-1}$ modulo p, et que pour $n \geq 2$, $q_n(0) = p$ et $q_n \equiv \pi^{(p-1)p^{n-1}}$ modulo p. Ainsi, pour $k \leq p$, on peut déjà affirmer que $r = 0$, puisque chacun des termes du produit (modulo π^{k-1}) est entier.
Les premiers pas vers le calcul exact de r ont été effectués par Hanfeng Li dans une série de courriels envoyés à Laurent Berger en octobre 2003.

Remarquons que $q = \frac{\varphi(\pi)}{\pi} = \frac{(1+\pi)^p-1}{\pi} = p(1+P_1(\pi)) + \pi^{p-1}$, avec $P_1 \in X\mathbf{Z}_p[X]$. Par récurrence, on prouve que $q_n = p(1+P_n(\pi^p)) + p^2Q_n(\pi) + \pi^{p^{n-1}(p-1)}$, avec $P_n, Q_n \in \mathbf{Z}_p[X]$ et $P_n(0) = 0$.
Ainsi, on a $\frac{q_{2n+1}}{p} = 1 + P_{2n+1}(\pi^p) + pQ_{2n+1}(\pi) + \frac{\pi^{p^{2n}(p-1)}}{p}$ et

$$\frac{p}{q_{2n}} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\left(P_{2n}(\pi^p) + pQ_{2n}(\pi) + \frac{\pi^{p^{2n-1}(p-1)}}{p}\right)^i.$$

Si l'on note $\frac{p}{q_{2n}} = \sum_i d_{2n,i}\pi^i$, alors la formule précédente prouve que pour $jp^{2n-1}(p-1) \leq i < (j+1)p^{2n-1}(p-1)$, on a $v_p(d_{2n,i}) \geq -j$. En particulier, si $jp(p-1) \leq i < (j+1)p(p-1)$, alors $v_p(d_{2n,i}) \geq -j$.

Notons c_i les coefficients de $\frac{\lambda_-}{\lambda_+}$, de sorte que $\frac{\lambda_-}{\lambda_+} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\pi^i$.
Puisque tous les q_{2n+1}/p et p/q_{2n} sont dans $1 + \pi\mathbf{Q}_p[\![\pi]\!]$, il est clair que $c_0 = 1$. Ensuite, les estimations donnée précédemment permettent de voir que :

- $v_p(c_i) \geq 1$ si $1 \leq i \leq p-2$,
- $c_{p-1} \in \frac{1}{p} + \mathbf{Z}_p$,

– $v_p(c_i) \geq 0$ si $p \leq i \leq 2(p-1)$,
– $v_p(c_i) \geq -1$ si $2p-1 \leq i < p(p-1)$,
– $v_p(c_i) \geq -j$ si $jp(p-1) \leq i < (j+1)p(p-1)$.

Alors $\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{k-1} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i \pi^i\right)^{k-1} = \sum_{i=0}^{\infty} z_i \pi^i$. En identifiant les coefficients, on a

$$z_i = \sum_{\substack{i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_{k-1} \\ i_1 + \cdots + i_{k-1} = i}} B_{i_1,\ldots,i_{k-1}} c_{i_1} \cdots c_{i_{k-1}},$$

où $B_{i_1,\ldots,i_{k-1}}$ est le produit de coefficients binomiaux suivant : si on note j_s le nombre d'entiers τ tels que i_τ soit égal à s, alors

$$B_i = \binom{k-1}{j_0}\binom{k-1-j_0}{j_1}\cdots\binom{k-1-j_0-\cdots-j_{i-1}}{j_i}.$$

Dans la suite, si $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_{k-1})$ est une partition (ordonnée) de i, on note $B_{\underline{i}} = B_{i_1,\ldots,i_{k-1}}$, $c_{\underline{i}} = c_{i_1} \cdots c_{i_{k-1}}$. On note $s_{\underline{i}}$ le nombre de α tels que $i_\alpha > 2(p-1)$ et $t_{\underline{i}}$ le nombre de α tels que $i_\alpha = p-1$.

Il a été prouvé dans [BLZ04] que $r \leq m$, autrement dit que $v_p(z_i) \geq -m$ pour $i \in \{0, \ldots, k-2\}$. Il est facile de retrouver cette borne avec les estimations sur les c_i données précédemment. En effet, m est le quotient de la division euclidienne de $k-2$ par $p-1$, et $v_p(c_j) \geq 0$ si $j < p-1$, de sorte que pour $i \leq p-2$ et $\underline{i}$ une partition de i, $v_p(c_{\underline{i}}) \geq -m$.

Dans la suite nous ne nous intéressons qu'au cas où $k \leq p^2$. Dans ce cas, pour $i \leq k-2$ et $\underline{i}$ une partition de i, les termes de valuation négative de $c_{\underline{i}}$ proviennent de c_{p-1} ou des c_j pour $k-2 \geq j > 2(p-1)$. Les estimations données précédemment sur c_j permettent alors d'affirmer que chacun de ces termes est de valuation supérieure ou égale à -1.

Proposition 2.5.1. *Pour $k \leq p^2$, si $\binom{k-1}{m} \in \mathbf{Z}_p^\times$, alors $r = m$ et $\overline{p^m z} \in \binom{k-1}{m}\pi^{m(p-1)} + \pi^{m(p-1)+1}\mathbf{F}_p[\pi]$.*

Démonstration. Commençons par remarquer que si $i < m(p-1)$, alors $v_p(z_i) \geq -m+1$. En effet si $\underline{i}$ est une partition de i, si $s_{\underline{i}}$ est nul, on a $t_{\underline{i}} \leq m-1$, et donc $v_p(c_{\underline{i}}) \geq -t_{\underline{i}} \geq -m+1$. Si $s_{\underline{i}}$ est non nul, alors $t_{\underline{i}} \leq m-1-2s$, et donc $v_p(c_{\underline{i}}) \geq -(m-1-2s) - s \geq -m+1$.

Montrons que $z_{m(p-1)} \in \binom{k-1}{m}\frac{1}{p^m} + \frac{1}{p^{m-1}}\mathbf{Z}_p$, ce qui suffit à prouver les deux affirmations de l'énoncé, puisqu'on sait déjà que $r \leq m$.
Soit $\underline{i}$ une partition de $m(p-1)$.
Si $\underline{i} = (0, \ldots, 0, p-1, \ldots, p-1)$, alors $B_{\underline{i}} = \binom{k-1}{m}$ et donc $B_{\underline{i}} c_{\underline{i}} \in \binom{k-1}{m}\frac{1}{p^m} + \frac{1}{p^{m+1}}\mathbf{Z}_p$.
Si $\underline{i} \neq (0, \ldots, 0, p-1, \ldots, p-1)$, on a $t_{\underline{i}} < m$ et même $t_{\underline{i}} + 2s_{\underline{i}} < m$, de sorte que $v_p(c_{\underline{i}}) \geq -t_{\underline{i}} - s_{\underline{i}} > -m$.
Ceci prouve bien que $z_{m(p-1)} \in \binom{k-1}{m}\frac{1}{p^m} + \frac{1}{p^{m-1}}\mathbf{Z}_p$. □

Remarque 2.5.2. Ce résultat était déjà connu de Li ([Li]).

Proposition 2.5.3. *Pour $k \leq p^2$, si $\binom{k-1}{m} \in p\mathbf{Z}_p$ et $\binom{k-1}{m-1} \in p\mathbf{Z}_p$, alors $r = m-1$, et $\overline{p^{m-1}z} \in \frac{\binom{k-1}{m}}{p}\pi^{m(p-1)} + \pi^{m(p-1)+1}\mathbf{F}_p[\pi]$.*

Démonstration. Puisque $k \leq p^2$, on a $0 \leq v_p\left(\binom{k-1}{m}\right) \leq 1$. Donc si $\binom{k-1}{m} \in p\mathbf{Z}_p$, c'est que $v_p\left(\binom{k-1}{m}\right) = 1$.

Commençons par prouver que pour $i < m(p-1)$, $v_p(z_i) \geq -m+2$. Soit donc $\underline{i}$ une partition de i.
Si $s_{\underline{i}} > 0$, alors $t_{\underline{i}} < m-2s-1$, de sorte que $v_p(c_{\underline{i}}) \geq -(m-2s-1)-s \geq -m+2$.
Si $s_{\underline{i}} = 0$, alors $t_{\underline{i}} \leq m-1$. Dans le cas où $s_{\underline{i}} \leq m-2$, alors $v_p(c_{\underline{i}}) \geq -(m-2)$. Par contre, si $s_{\underline{i}} = m-1$, alors $v_p(c_{\underline{i}}) \geq -(m-1)$, mais alors $B_{\underline{i}}$ est multiple de $\binom{k-1}{m-1}$, et donc $v_p(B_{\underline{i}}c_{\underline{i}}) \geq -(m-1)+1 = -m+2$.

À présent, prouvons que pour $i > m(p-1)$, $v_p(z_i) \geq -m+1$.
Soit donc $\underline{i}$ une partition de i. Si $s_{\underline{i}} > 0$, alors $t_{\underline{i}} \leq m-2s_{\underline{i}}$, de sorte que $v_p(c_{\underline{i}}) \geq -(m-2s)-s \geq -m+1$.
Si $s_{\underline{i}} = 0$, $t_{\underline{i}} \leq m$. Dans le cas où $t_{\underline{i}} \leq m-1$, alors $v_p(c_{\underline{i}}) \geq -(m-1)$. Et si $t_{\underline{i}} = m-1$, alors $B_{\underline{i}}$ est multiple de $\binom{k-1}{m}$ et donc $v_p(B_{\underline{i}}c_{\underline{i}}) \geq -m+1$.

Il reste à prouver que $z_{m(p-1)} \in \binom{k-1}{m}\frac{1}{p^m} + \frac{1}{p^{m-2}}\mathbf{Z}_p$.
Soit $\underline{i}$ une partition de $m(p-1)$. Si $\underline{i} = (0,\ldots,0,p-1,\ldots,p-1)$, alors $B_{\underline{i}} = \binom{k-1}{m}$ et $c_{\underline{i}} \in \frac{1}{p^m} + \frac{1}{p^{m-1}}\mathbf{Z}_p$.
Si $\underline{i} \neq (0,\ldots,0,p-1,\ldots,p-1)$:
- si $s_{\underline{i}} > 0$, alors $t_{\underline{i}} < m-2s$, de sorte que $v_p(c_{\underline{i}}) > -(m-2s)+s \geq -m+1$, donc $v_p(c_{\underline{i}}) \geq -m+2$.
- si $s_{\underline{i}} = 0$ et $t_{\underline{i}} \leq m-2$, on a $v_p(c_{\underline{i}}) \geq -t_{\underline{i}} \geq -m+2$.
- si $t_{\underline{i}} = m-1$, alors $B_{\underline{i}}$ est multiple de $\binom{k-1}{m}$, de sorte que $v_p(B_{\underline{i}}) \geq 1$. On en déduit que $v_p(B_{\underline{i}}c_{\underline{i}}) \geq -(m-1)+1 = -m+2$.

□

Reste un dernier cas à traiter pour compléter le calcul de r pour $k \leq p^2$:

Proposition 2.5.4. *Pour $k \leq p^2$, si on a $\binom{k-1}{m} \in p\mathbf{Z}_p$ et $\binom{k-1}{m-1} \in \mathbf{Z}_p^\times$, alors $r = m-1$ et $\overline{p^{m-1}z} \in \binom{k-1}{m-1}\pi^{(m-1)(p-1)} + \pi^{(m-1)(p-1)+1}\mathbf{F}_p[X]$.*

Démonstration. Si $i < (m-1)(p-1)$, alors on prouve aisément que $v_p(z_i) \geq -m+2$.
Si $i > (m-1)(p-1)$, soit $\underline{i}$ une partition de i. Si $t_{\underline{i}} = m$, alors $B_{\underline{i}}$ est multiple de $\binom{k-1}{m}$, de sorte que $v_p(B_{\underline{i}}c_{\underline{i}}) \geq -m+1$. Si $t_{\underline{i}} < m$, alors on $t_{\underline{i}} + 2s_{\underline{i}} \leq m$ et donc $v_p(c_{\underline{i}}) \geq -m+1$.

Il reste à prouver que $z_{(m-1)(p-1)} \in \binom{k-1}{m-1}\frac{1}{p^{m-1}} + \frac{1}{p^{m-2}}\mathbf{Z}_p$. La preuve est la même que dans la proposition 2.5.1, en changeant m en $m-1$. □

Remarque 2.5.5. En particulier, nous avons prouvé que pour $k \leq p^2$, on a $r = m$ si $v_p\left(\binom{k-1}{m}\right) = 0$ et $r = m-1$ si $v_p\left(\binom{k-1}{m}\right) = 1$.
Il serait tentant de conjecturer par exemple que $r = m - v_p\left(\binom{k-1}{m}\right)$, mais malheureusement des calculs informatiques montrent qu'une telle formule n'est pas valable en toute généralité, des contre-exemples se trouvent déjà pour $p^2 < k < p^3$.

6 Le calcul de $\overline{V}_{k,a_p}$ lorsque $v_p(a_p) = r$ et $k \leq p^2$

Lorsque $k \leq p^2$, nous avons expliqué comment calculer précisément la valuation de convergence dans la section précédente, et le résultat de Berger, Li et Zhu nous permet d'en déduire $\overline{V}_{k,a_p}$ lorsque $v_p(a_p) > r$. Lorsque $v_p(a_p) = r$, ce résultat n'est plus valable, mais nous disposons tout de même d'un module de Wach pour $\overline{T}^*_{k,a_p}$, que l'on peut étudier afin de calculer la semi-simplifiée de sa réduction modulo p, et donc d'en déduire $\overline{V}_{k,a_p}$.

6.1 Un critère de réductibilité

Le (φ, Γ)-module associé à $\overline{V}^*_{k,a_p}$ est donné par la semi-simplification de la réduction modulo p du module de Wach construit précédemment :
$\mathbf{D}(\overline{T}^*_{k,a_p}) = (\mathbf{N}_k(a_p/p^r) \otimes_{\mathcal{O}_L} k_L) \otimes_{k_L[\![\pi]\!]} k_L(\!(\pi)\!)$. La première étape est donc de décrire l'action de φ sur ce (φ, Γ)-module de caractéristique p. Rappelons que le module de Wach $\mathbf{N}(T^*_{k,a_p}) = \mathbf{N}_k(a_p/p^r)$ a été défini comme étant un module libre de base (e, f), et que la matrice de φ dans cette base est $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ q^{k-1} & a_p z \end{smallmatrix}\right)$.

En réduisant modulo p, on obtient une base (qu'on note toujours (e, f)) de $\mathbf{N}(\overline{T}^*_{k,a_p})$, et la matrice de φ dans cette base est alors donnée par $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ \pi^{(k-1)(p-1)} & \overline{a_p z} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2(k_L(\!(\pi)\!))$. Notons que le calcul de $\overline{a_p z}$, qui est trivial lorsque $v_p(a_p) > r$ (puisque $\overline{a_p z} = 0$) n'est plus aussi simple lorsque $v_p(a_p) = r$, et que c'est là une des raisons pour lesquelles nous nous sommes restreints à $k \leq p^2$. Pour des poids plus grands, le calcul serait toujours possible à a_p fixé, mais il est plus compliqué de donner des formules générales.

Nous nous attachons à présent à déterminer si la représentation $\overline{V}_{k,a_p}$ est irréductible ou non. Si elle est réductible, alors il doit exister un sous (φ, Γ)-module de rang un de $\mathbf{D}(\overline{T}^*_{k,a_p})$, de base δ, et isomorphe à $\mathbf{D}(\mu_\lambda \omega^h)$, pour $\lambda \in k_L^\times$ et $h \in \{1, \ldots, p-1\}$. Notons $\delta = \alpha e + \beta f$. On doit alors avoir $\varphi(\delta) = \lambda\delta$, ce qui signifie que α et β doivent vérifier :

$$\begin{cases} \lambda\alpha = -\varphi(\beta) \\ \lambda\beta = \varphi(\alpha)\pi^{(p-1)(k-1)} + \overline{a_p z}\varphi(\beta). \end{cases} \tag{6.1.1}$$

On peut même ramener ce système à une unique équation satisfaite par $\beta \in k_L(\!(\pi)\!)$, à savoir

$$\lambda\beta = -\frac{1}{\lambda}\varphi^2(\beta)\pi^{(k-1)(p-1)} + \varphi(\beta)\overline{a_p z}.$$

Il est alors possible d'utiliser la théorie des pentes de Kedlaya pour $F = k_L(\!(\pi)\!)$ et $\phi = \varphi$. Le résultat 2.2.7 s'applique au polynôme $P_\lambda = \lambda - \overline{a_p z}T + \frac{1}{\lambda}\pi^{(k-1)(p-1)}T^2$, et l'équation $P_\lambda(\varphi)(\beta) = 0$ possède une solution de valuation entière si et seulement si l'une des pentes du polygone de Newton de P_λ est entière. Remarquons que les pentes de P_λ ne dépendent pas de $\lambda \in k_L$, puisque seules les valuations des coefficients de P interviennent dans la définition des pentes, et non leurs valeurs exactes. Si on note $P = P_1$ l'un de ces polynômes, les pentes de P_1 sont donc les mêmes que celles de tous les P_λ.
Les résultats de la section 2 fournissent une solution β de pente entière à l'équation

$P(\varphi)(\beta) = 0$, mais a priori dans $k_L(\!(\pi^{\mathbf{Q}})\!)$, et pas nécessairement dans $k_L(\!(\pi)\!)$. Toutefois, le polynôme P_λ étant à coefficients dans $k_L(\!(\pi)\!)$, il est possible d'améliorer ce résultat comme suit :

Lemme 2.6.1. *Notons z_0 le coefficient du terme de plus bas degré de $\overline{a_p z}$.*

1. *Si le polynôme P possède deux pentes distinctes et que* ***la plus grande pente*** *est $r \in \mathbf{Z}$, alors l'équation $P_\lambda(\varphi)(\beta) = 0$ possède des solutions β dans $k_L(\!(\pi)\!)$, de valuation r, si et seulement si $\lambda = \frac{1}{z_0}$.*
2. *Si le polynôme P possède deux pentes distinctes, et que* ***la plus petite pente*** *est $r \in \mathbf{Z}$, alors l'équation $P_\lambda(\varphi)(\beta) = 0$ possède des solutions β dans $k_L(\!(\pi)\!)$, de valuation r, si et seulement si $\lambda = \frac{1}{z_0}$.*
3. *Si P possède une seule pente $r \in \mathbf{Z}$ et que les trois points du polygone de Newton ne sont pas alignés, alors l'équation $P_\lambda(\varphi)(\beta) = 0$ possède des solutions β dans $k_L(\!(\pi)\!)$, de valuation r, si et seulement si λ est une racine carrée de -1.*
4. *Si P possède une seule pente $r \in \mathbf{Z}$ et que les trois points du polygone de Newton sont alignés, alors l'équation $P_\lambda(\varphi)(\beta) = 0$ possède des solutions $\beta \in k_L(\!(\pi)\!)$ si et seulement si $\lambda^2 - z_0\lambda + 1 = 0$.*

Dans tous les cas, lorsque l'ensemble des solutions de $P_\lambda(\varphi)(\beta) = 0$ dans $k_L(\!(\pi)\!)$ et vérifiant $v_\pi(\beta) = r$ est non vide, alors c'est un k_L-espace vectoriel de dimension 1.

Démonstration. Dans chacun des cas, il s'agit d'identifier quels sont les points du polygone de Newton qui sont reliés par un segment de pente entière r, et dans le cas où une solution existe, d'identifier les coefficients de plus bas degré de l'équation $P_\lambda(\varphi)(\beta) = 0$. Commençons par montrer que les λ annoncés sont bien les seuls pour lesquels une solution $\beta \in k_L(\!(\pi)\!)$ avec $v_\pi(\beta) = r$ peut exister.

- Dans le premier cas, si on a $P_\lambda(\varphi)(\beta) = 0$, avec $v_\pi(\beta) = r$, alors $v_\pi(\varphi(\beta)\overline{a_p z}) = v_\pi(\lambda\beta) < v_\pi(\varphi^2(\beta)\pi^{(k-1)(p-1)})$. Donc en comparant les termes de plus bas degré de $\lambda\beta$ et $\varphi(\beta)\overline{a_p z}$, nécessairement $\frac{1}{\lambda} = z_0$.
- Dans le second cas, on a $v_\pi(\frac{1}{\lambda}\varphi^2(\beta)\pi^{(k-1)(p-1)}) = v_\pi(\varphi(\beta)\overline{a_p z}) < v_\pi(\lambda\beta)$, et donc $\lambda = \frac{1}{z_0}$.
- Dans le troisième cas, on a $v_\pi(\lambda\beta) = v_\pi(\frac{1}{\lambda}\varphi^2(\beta)\pi^{(k-1)(p-1)}) < v_\pi(\varphi(\beta)\overline{a_p z})$, et donc $\lambda + \frac{1}{\lambda} = 0$, de sorte que λ est une racine carrée de -1.
- Enfin, dans le cas où les trois points sont alignés, les valuations des trois termes sont égales, et en comparant les termes de plus bas degré de l'équation $P_\lambda(\varphi)(\beta) = 0$, on obtient $\lambda^2 - z_0\lambda + 1 = 0$.

Nous avons ici prouvé que seules ces valeurs de λ pouvaient donner lieu à des solutions qui sont des séries de Laurent (et non pas des séries de Hahn comme prévu par le théorème de Kedlaya).
Il reste donc à prouver que de telles solutions existent. Nous n'en donnons la preuve que dans le premier cas, la preuve étant essentiellement la même dans chacun des autres cas.

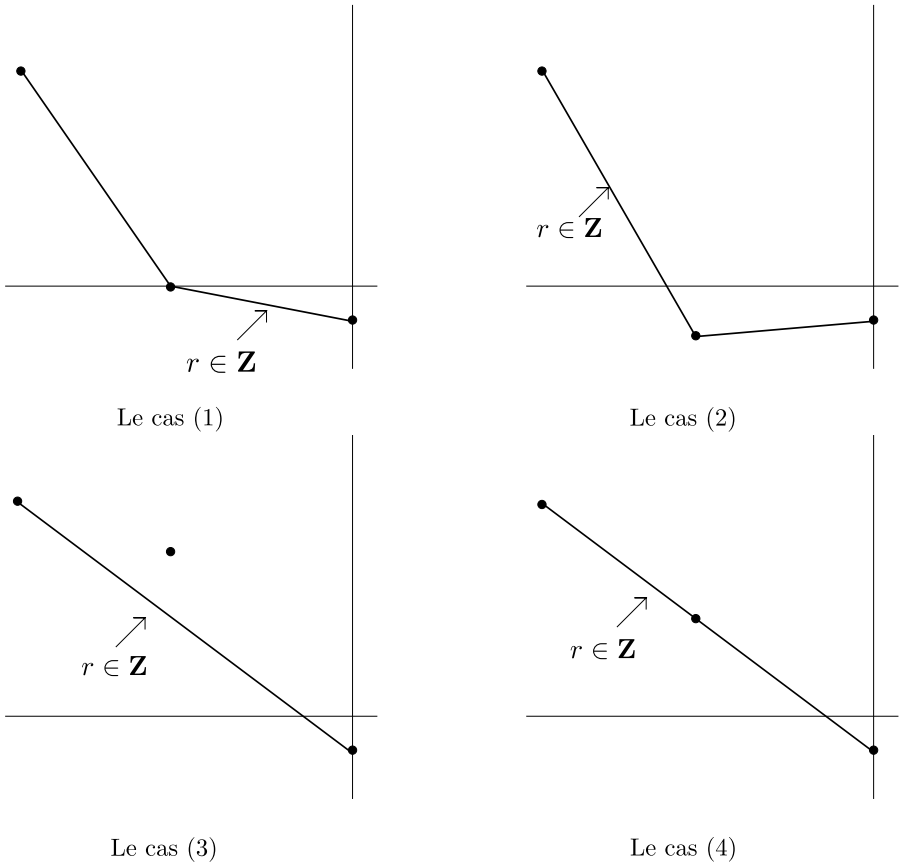

FIGURE 2.3 – Les différents cas de figure du lemme 2.6.1

Écrivons donc $\beta = \sum_{i=r}^{\infty} \beta_i \pi^i$ une éventuelle solution avec $\beta_r \neq 0$. Alors $P_\lambda(\varphi)(\beta) = 0$ s'écrit

$$\sum_{i=r}^{\infty} \lambda \beta_i \pi^i = -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=r}^{\infty} \beta_i \pi^{p^2 i + (k-1)(p-1)} + \overline{a_p z} \sum_{i=r}^{\infty} \beta_i \pi^{pi}.$$

Si $i > r$, puisque $p^2 i + (k-1)(p-1) > i$ et $pi + v_\pi(\overline{a_p z}) > i$, alors β_i est une combinaison linéaire des β_j, pour $j < i$. Ainsi le choix de β_r impose tous les autres β_i, prouvant à la fois l'existence d'une solution et l'assertion sur la dimension de l'espace des telles solutions. □

Notons que l'existence d'un $\beta \in k_L(\!(\pi)\!)$ solution de $P_\lambda(\varphi)(\beta) = 0$ permet immédiatement de construire un élément δ de $\mathbf{D}(\overline{T}^*_{k,a_p})$ tel que $\varphi(\delta) = \lambda\delta$: il suffit de prendre $\delta = -\frac{1}{\lambda}\varphi(\beta)e + \beta f$. Dans le cas où un tel élément δ existe, il reste encore à prouver que $k_L(\!(\pi)\!) \cdot \delta$ est bien un sous-(φ, Γ)-module de $\mathbf{D}(\overline{T}^*_{k,a_p})$, c'est à dire que l'action de Γ laisse la droite $k_L(\!(\pi)\!) \cdot \delta$ stable.

Lemme 2.6.2. *Soient k, a_p comme précédemment, $\lambda \in k_L$ et $n \in \mathbf{Z}$. Supposons que l'ensemble des éléments $\delta = \alpha e + \beta f$ de $\overline{T}^*_{k,a_p}$ solutions de $\varphi(\delta) = \lambda\delta$ avec $v_\pi(\beta) = n$ soit un k_L-espace vectoriel de dimension 1. Alors $k_L(\!(\pi)\!).\delta$ est un sous (φ, Γ)-module de $\mathbf{D}(\overline{T}^*_{k,a_p})$, isomorphe à $\mathbf{D}(\omega^n \mu_\lambda)$.*

Démonstration. Puisqu'on sait déjà que $\varphi(\delta) = \lambda\delta$, il reste à prouver que $k(\!(\pi)\!) \cdot \delta$ est stable sous l'action de Γ. On sait que pour $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(e) - \left(\frac{\lambda_+}{\gamma(\lambda_+)}\right)^{k-1} e$ et $\gamma(f) - \left(\frac{\lambda_-}{\gamma(\lambda_-)}\right)^{k-1} f$ sont tous deux dans $\pi^{k-1}(k_L[[\pi]]e \oplus k_L[[\pi]].f)$.
Soit donc $\delta = x\pi^{pn}e + y\pi^n f$, avec $x, y \in k_L[[\pi]]^\times$. Alors $\gamma(\delta) = x'\pi^{pn}e + y'\pi^n f$, avec

$$x' \equiv \gamma(x)\frac{\gamma(\pi^{pn})}{\pi^{pn}}\left(\frac{\lambda_+}{\gamma(\lambda_+)}\right)^{k-1} \equiv x\omega(\gamma)^n \bmod \pi$$

et

$$y' \equiv \gamma(x)\frac{\gamma(\pi^{n})}{\pi^{n}}\left(\frac{\lambda_-}{\gamma(\lambda_-)}\right)^{k-1} \equiv y\omega(\gamma)^n \bmod \pi.$$

Mais $\varphi(\gamma(\delta)) = \gamma(\varphi(\delta)) = \lambda\gamma(\delta)$. Or, par hypothèse sur la dimension de l'espace des solutions, et puisque $y' \equiv \omega(\gamma)^n y \bmod \pi$, ceci impose $\gamma(\delta) = \omega(\gamma)^n\delta$, ce qui achève de prouver le résultat. □

Combinant tous ces résultats, nous disposons d'un critère de réductibilité qui nous sera très utile par la suite :

Proposition 2.6.3. *Soient $k \in \mathbf{N}$ et $a_p \in \overline{\mathbf{Z}_p}$ avec $v_p(a_p) = r(k)$. Alors $\overline{V}_{k,a_p}$ est réductible si et seulement si l'une des pentes de P est entière. De plus, si $n \in \mathbf{Z}$ est une pente entière, $\lambda \in k_L^\times$ est tel que $P_\lambda(\varphi)(\beta) = 0$ possède des solutions non nulles de valuation n, alors*

$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \mu_{\lambda^{-1}}\omega^{-n} & 0 \\ 0 & \mu_\lambda\omega^{k-1-n} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Il s'agit de combiner les résultats 2.2.7, 2.6.1 et 2.6.2 pour voir que la représentation modulaire $\overline{T}^*_{k,a_p}$ est réductible si et seulement si l'une des pentes de P est entière. Dans le cas où elle est bien réductible, la preuve nous en donne un sous (φ, Γ)-module, isomorphe à $\mu_\lambda\omega^n$. Mais alors on peut déterminer entièrement $\overline{V}^*_{k,a_p}$ qui en est la semi-simplifiée, et de déterminant ω^{1-k}. Enfin, en dualisant [5] on retrouve l'expression annoncée pour $\overline{V}_{k,a_p}$. □

Dans le cas où $\overline{V}_{k,a_p}$ est réductible, nous la connaissons intégralement grâce à la proposition 2.6.3. Par contre, si $\overline{V}_{k,a_p}$ est irréductible, nous ne connaissons a priori que son déterminant, et nous reviendrons sur la détermination totale de $\overline{V}_{k,a_p}$ à la section 6.4.

Remarquons que la méthode proposée afin de calculer la réduction au bord du disque de convergence est algorithmique. En effet, pour une valeur donnée de k, il n'y a aucune difficulté à calculer le rayon du disque de convergence en tronquant à un ordre suffisamment élevé les produits infinis définissant λ_+ et λ_-.
Ce calcul fournit en même temps $\overline{z} \in \mathbf{F}_p[\pi]$, et pour a_p sur le bord du disque de convergence, il est possible de calculer les pentes du polygone P. Si aucune des pentes n'est entière, alors nous pouvons conclure à l'irréductibilité de $\overline{V}_{k,a_p}$, mais la méthode que nous proposons par la suite pour déterminer $\overline{V}_{k,a_p}$ dans le cas où $k \leq p^2$ ne permet pas de conclure pour k quelconque. Par contre, si P possède des pentes entières, alors le lemme 2.6.1 et la proposition 2.6.3 permettent d'expliciter entièrement $\overline{V}_{k,a_p}$.

5. Ce qui ici se ramène à tensoriser par ω^{k-1}.

6.2 Calcul de la réduction dans le cas où $p+1$ divise $k-1$

Nous nous plaçons toujours dans le cadre où $k \leq p^2$ et où $v_p(a_p) = r(k)$, avec en prime l'hypothèse que $p+1$ divise $k-1$ (i.e. pour $k = p+2, 2p+3, 3p+4, \ldots, (p-1)(p+1)+1 = p^2$).
La première étape est le calcul de r, et de $\overline{a_p z}$ pour $v_p(a_p) = r$.

Notons $k-1 = l(p+1)$. On a alors $m = \left\lfloor \frac{k-2}{p-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{lp+l-1}{p-1} \right\rfloor \geq l$. Si $m \geq l+2$, alors $lp+l-1 \geq (l+2)(p-1) = lp+2p-l-2$ et donc $2p \leq 2l+1$. Or $p \leq l$ n'est pas possible car $k \leq p^2$ et $2p = 2l+1$ est impossible par parité. Les seuls cas possibles sont donc $m = l$ ou $m = l+1$, le premier cas correspondant à $2l < p$ et le second à $p \leq 2l$.

6.2.1 Si $m = l$

Alors

$$\binom{k-1}{m} = \binom{k-1}{l} = \frac{(lp+l)\ldots(lp+l-l+1)}{l!} \equiv 1 \mod p.$$

Ainsi par la proposition 2.5.1, on peut déjà affirmer que $r = m$, et que $\overline{a_p z} \in \overline{\left(\frac{a_p}{p^m}\right)}\pi^{m(p-1)} + \pi^{m(p-1)+1}\overline{\mathbf{F}}_p[\pi]$. Alors le polynôme P vaut $1 - \overline{a_p z}T + \pi^{(k-1)(p-1)}T^2$. Son polygone de Newton possède une seule pente qui est égale à $-l$, et les trois points du polygone sont alignés.
Par l'assertion (4) du lemme 2.6.1 et la proposition 2.6.3 nous concluons que

$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega^l \mu_{\lambda^{-1}} & 0 \\ 0 & \omega^{k-1-l}\mu_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^l \mu_\lambda & 0 \\ 0 & \omega^l \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix}$$

où λ est une racine de l'équation $\lambda^2 + \overline{\left(\frac{a_p}{p^l}\right)}\lambda + 1 = 0$.

Remarque 2.6.4. Dans le cas où les deux racines de l'équation $\lambda^2 + \overline{\left(\frac{a_p}{p^l}\right)}\lambda + 1 = 0$ sont distinctes, alors on a directement deux sous-(φ, Γ)-modules distincts de $\mathbf{D}(\overline{T}^*_{k,a_p})$: la réduction modulo p de T_{k,a_p} est déjà semi-simple.

6.2.2 Si $m = l+1$ et $k \neq p^2$

Comme expliqué précédemment, ce cas correspond à $2l > p$. On a alors

$$\binom{k-1}{m} = \binom{k-1}{l+1} = \frac{(lp+l)\ldots(lp+l-l-1+1)}{(l+1)!} \equiv 0 \mod p$$

ce qui permet déjà d'affirmer que $r = l$. De plus $\binom{k-1}{l} \equiv 1 \mod p$, et donc par la proposition 2.5.4, $\overline{a_p z} = \frac{\overline{a_p}}{p^l}\pi^{l(p-1)} + \star$, $\star \in \pi^{l(p-1)+1}k_L[\pi]$. Ainsi, même si $\overline{a_p z}$ n'est pas exactement le même que dans le cas où $m = l$, on peut en tirer les mêmes informations car le polygone de Newton de P possède les mêmes pentes, ce qui nous suffit pour conclure :

$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega^l \mu_\lambda & 0 \\ 0 & \omega^l \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix}$$

où λ vérifie $\lambda^2 + \overline{\left(\frac{a_p}{p^l}\right)}\lambda + 1 = 0$.

La remarque 2.6.4 est encore valable dans le cas où les racines de ce polynôme sont distinctes.

6.2.3 Si $k = p^2$

Ce cas est un peu particulier car $m = p$ alors que tous les autres cas que nous avons traités vérifient $m < p$. Ici, on a $\binom{k-1}{m} = \frac{(p^2-1)\dots(p^2-p)}{p!} = 1$ modulo p. On en déduit (grâce à la proposition 2.5.1) que le rayon est égal à p, et que pour $v_p(a_p) = p$, $\overline{a_p z} \in \pi^{p(p-1)} + \pi^{p(p-1)+1} k_L[\pi]$. Le polygone de Newton de P ne possède alors qu'une seule pente $-(p-1)$, et le troisième point est situé au dessus des deux autres. On peut donc appliquer la proposition 2.6.3 pour en déduire que :

$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \mu_\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix}$$

où $\lambda^2 = -1$.

Remarque 2.6.5. Si $p \neq 2$, il existe deux racines distinctes de -1, et alors la représentation $\overline{T}_{k,a_p}$ est déjà semi-simple.

6.3 Calcul de la réduction dans le cas où $p+1$ ne divise pas $k-1$

Le même principe s'applique toujours : la première étape étant de voir si $\binom{k-1}{m}$ est nul ou non modulo p pour en déduire le rayon. Une fois le rayon connu, il faut expliciter $\overline{a_p z}$ afin de mener les calculs plus loin et savoir si le polygone de Newton de P possède des pentes entières.

6.3.1 Si $\binom{k-1}{m} \neq 0$ modulo p

Alors dans ce cas, par la proposition 2.5.1, on a $r = m$, et $\overline{a_p z} \in \overline{\left(\frac{a_p}{p^m}\right)}\binom{k-1}{m}\pi^{m(p-1)} + \pi^{m(p-1)+1} k_L[\pi]$. Les pentes de P sont alors :

- $-\frac{k-1}{p+1} \notin \mathbf{Z}$ si $k-1 < m(p+1)$,
- $-\frac{k-1-m}{p}$ et $-m$ si $k-1 > m(p+1)$, et ces deux pentes sont distinctes.

Dans le premier cas, on conclut immédiatement à l'irréductibilité de $\overline{V}_{k,a_p}$. Nous verrons plus tard (section 6.4) comment déterminer quelle est cette représentation irréductible. Dans le second cas, nous avons déjà une pente entière $-m$, à laquelle nous pouvons appliquer la proposition 2.6.3 pour en déduire que

$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \mu_\lambda \omega^m & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \omega^{k-1-m} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda = \overline{\left(\frac{a_p}{p^m}\right)}\binom{k-1}{m}.$$

Remarque 2.6.6. Si $k-1 \equiv m$ modulo p, alors la seconde pente est également entière et les deux pentes sont distinctes. On en déduit que $\overline{T}_{k,a_p}$ est déjà semi-simple.

6.3.2 Si $\binom{k-1}{m} = 0$ modulo p

Dans ce cas, on peut conclure que la valuation de convergence est $r = m - 1$, mais pour $v_p(a_p) = m - 1$, le calcul de $\overline{a_p z}$ est un peu plus complexe, et il va de nouveau falloir distinguer deux cas suivant que $k = m(p+1)$ ou non.

6.3.2.1 Si $k = m(p+1)$ Cette condition est en fait équivalente à $k \equiv m$ modulo p. En effet, si $k \equiv m$, en écrivant $k = m(p-1) + b$, $2 \leq b \leq p$, on obtient $b \equiv 2m$ modulo p, et donc $b = 2m$ ou $b + p = 2m$, puisque $0 \leq m \leq p$. Le premier cas équivaut à $k = m(p+1)$, alors que le second équivaut à $k - 1 = (m-1)(p+1)$, ce qui est impossible ici par hypothèse.

Ainsi, $\binom{k-1}{m-1} = 1$ modulo p, et alors par la proposition 2.5.4, $\overline{a_p z} \in \overline{\left(\frac{a_p}{p^{m-1}}\right)}\pi^{(m-1)(p-1)} + \pi^{(m-1)(p-1)+1}k_L[\pi]$. Les pentes de P sont alors $-(m-1)$ et $-m$. On en déduit que

$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega^m \mu_\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}}\omega^{m-1} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda = \overline{\left(\frac{a_p}{p^{m-1}}\right)}.$$

Remarque 2.6.7. De plus, les deux pentes étant distinctes, on a comme à la remarque 2.6.6 le fait que $\overline{T}_{k,a_p}$ est déjà extension triviale de deux caractères.

6.3.2.2 Si $k \neq m(p+1)$ Dans ce cas, on a $\binom{k-1}{m-1} = \binom{k-1}{m} \times \frac{m}{k-m}$ avec $m < p$ et $k - m \neq 0$ modulo p. Donc on a également $\binom{k-1}{m-1} = 0$ modulo p. Par la proposition 2.5.3, on a alors $\overline{a_p z} \in \overline{\left(\frac{a_p}{p^{m-1}}\right)}\overline{\left(\frac{\binom{k-1}{m}}{p}\right)}\pi^{m(p-1)} + \pi^{m(p-1)+1}k_L[\pi]$.

Alors P est l'enveloppe convexe des points $(-1, 0); (-p, m(p-1))$ et $(-p^2, (k-1)(p-1))$. La pente du segment joignant les deux point extrémaux est $-\frac{k-1}{p+1}$ alors que celle joignant les deux premiers points est $-m$. Aussi, P possède deux pentes distinctes si et seulement si $-\frac{k-1}{p+1} > -m$.
Mais alors $k - m > mp + 1$, et comme $k - 1 < (m+1)(p-1) + 1 = mp + p - m$, le produit $(k-1)\ldots(k-m)$ est non nul modulo p. Il en est alors de même pour $\binom{k-1}{m}$, ce qui contredit nos hypothèses. Ceci prouve donc que P possède toujours une seule pente : $-\frac{k-1}{p+1} \notin \mathbf{Z}$, et donc $\overline{V}_{k,a_p}$ est irréductible.

6.4 Les cas où $\overline{V}_{k,a_p}$ est irréductible

Nous avons pu conclure à plusieurs reprises à l'irréductibilité de $\overline{V}_{k,a_p}$. Or, les représentations modulaires irréductibles de dimension 2 sont bien connues : elles ont été décrites à la proposition 1.3.9, et ce sont les $\mathrm{ind}(\omega_2^h) \otimes \mu_\lambda$; pour $1 \leq h \leq p^2 - 2$ primitif et $\lambda \in k_L^\times$. Puisqu'on sait que le déterminant de $\overline{V}^*_{k,a_p}$ est $\omega^{-(k-1)}$, $\overline{V}^*_{k,a_p}$ est donc de la forme $\mathrm{ind}(\omega_2^h)$, et il s'agit ici de déterminer h. Nous allons prouver qu'en fait $h = -(k-1)$.

Comme le déterminant de $\mathrm{ind}(\omega_2^h)$ est ω^h, on peut déjà affirmer que $h = -(k-1)$ modulo $p - 1$, puisque le déterminant de $\overline{V}^*_{k,a_p}$ est $\omega^{-(k-1)}$.

La description du (φ, Γ)-module de $\mathrm{ind}(\omega_2^h)$ donnée à la proposition 1.3.10 prouve que dans $\mathbf{D}(\mathrm{ind}(\omega_2^h))$, il existe un élément x non nul tel que $\varphi^2(x) = \pi^{-h(p-1)}x$.

Notre première étape sera donc de chercher quelles sont les éventuelles valeurs de h pour lesquelles il existe $x \in \mathbf{D}(\overline{T}^*_{k,a_p})$ tel que $\varphi^2(x) = \pi^{-h(p-1)}x$. Soit $x = \alpha e + \beta f$ un tel élément. Alors :

$$\varphi^2(\alpha e + \beta f) = \varphi^2(\alpha)(-q_2^{k-1}e + \overline{a_p z}q_2^{k-1}f) + \varphi^2(\beta)(-\varphi(\overline{a_p z})e - q^{k-1}f + \overline{a_p z}\varphi(\overline{a_p z})f).$$

Et donc

$$\begin{cases} -\pi^{h(p-1)}\alpha = -q_2^{k-1}\varphi^2(\alpha) - \varphi^2(\beta)\varphi(\overline{a_p z}) \\ -\pi^{-h(p-1)}\beta = \varphi^2(\alpha)\overline{a_p z}q_2^{k-1} - \varphi^2(\beta)q^{k-1} + \varphi^2(\beta)\overline{a_p z}\varphi(\overline{a_p z}). \end{cases}$$

On en déduit $\overline{a_p z}\pi^{-h(p-1)}\alpha = -\pi^{-h(p-1)}\beta + \varphi^2(\beta)q^{k-1}$ et donc

$$\varphi^2(\alpha) = -\frac{\varphi^2(\beta)}{\varphi^2(\overline{a_p z})} + \frac{\varphi^4(\beta)}{\varphi^2(\overline{a_p z})}q_3^{k-1}\pi^{hp^2(p-1)} \tag{6.4.1}$$

qu'on peut utiliser pour en déduire une seule équation vérifiée par β :

$$\beta + \varphi^2(\beta)\left(\overline{a_p z}\varphi(\overline{a_p z})\pi^{h(p-1)} - q^{k-1}\pi^{h(p-1)} - q_2^{k-1}\frac{\overline{a_p z}}{\varphi^2(\overline{a_p z})}\pi^{h(p-1)}\right) \\ - \varphi^4(\beta)\left(q_2^{k-1}q_3^{k-1}\frac{\overline{a_p z}}{\varphi^2(\overline{a_p z})}\pi^{h(p^2+1)(p-1)}\right) = 0.$$

Une fois de plus nous pouvons utiliser la théorie des pentes de Kedlaya : s'il existe $x = \alpha e + \beta f$ vérifiant $\varphi^2(x) = \pi^{-h(p-1)}x$, alors β est une solution de valuation entière de l'équation $Q(\phi)(\beta) = 0$ avec $\phi = \varphi^2$ (et donc $q = p^2$ dans les notations de la section 2) et

$$Q = 1 + \left(\overline{a_p z}\varphi(\overline{a_p z})\pi^{h(p-1)} - q^{k-1}\pi^{h(p-1)} - q_2^{k-1}\frac{\overline{a_p z}}{\varphi^2(\overline{a_p z})}\pi^{h(p-1)}\right)T \\ - \left(q_2^{k-1}q_3^{k-1}\frac{\overline{a_p z}}{\varphi^2(\overline{a_p z})}\pi^{h(p^2+1)(p-1)}\right)T^2.$$

Ainsi, une des pentes de Q doit être entière, et nous devons donc calculer ces pentes, qui dépendent de k. Les deux cas où nous savons que $\overline{V}_{k,a_p}$ est irréductible sont ceux où $k-1$ n'est pas divisible par $p+1$ et

- $\binom{k-1}{m} \neq 0$ et $k-1 < m(p+1)$,
- $\binom{k-1}{m} = 0$ et $k \neq m(p+1)$.

Dans le second cas, nous avons également $k-1 < m(p+1)$: en effet, si $k-1 = m(p-1)+b$, le fait que $\binom{k-1}{m} = 0$ modulo p implique que $b \leq 2m$, et donc $k-1 \leq m(p+1)$. Enfin, dans les deux cas nous avons déjà calculé $\overline{a_p z}$, qui est de valuation $m(p-1)$.

Alors les pentes de Q sont : $\frac{m(p^2-1)-h-p(k-1)}{p+1}$ et $\frac{-(k-1)-h}{p+1}$, et nous avons réduit le problème à la détermination des valeurs de h telles que l'une de ces pentes soit entière. Il est évident que $h = k-1$ est une solution possible, et nous souhaitons montrer que c'est la seule possible.

Mais puisque $\mathrm{ind}(\omega_2^h) \simeq \mathrm{ind}(\omega_2^{ph})$, dans le cas où la première pente est entière, quitte à changer h en ph, on peut supposer que la seconde pente est entière, et on

en déduit que $h \equiv -(k-1)$ modulo $p+1$.

Afin de prouver que $h = k-1$, nous disposons déjà d'une congruence modulo $p-1$ et d'une congruence modulo $p+1$, obtenues en regardant uniquement le déterminant et l'action de φ sur $\mathbf{D}(\mathrm{ind}(\omega_2^h))$. Toutefois, ceci ne suffit pas à obtenir h de manière unique, sans surprise car par exemple $\mathbf{D}(\mathrm{ind}(\omega_2^{k-1}))$ et $\mathbf{D}\left(\mathrm{ind}\left(\omega_2^{k-1+(p+1)(p-1)/2}\right)\right)$ ont même déterminant et même φ-module sous-jacent. Il reste encore à exploiter ce que l'on sait sur l'action de Γ.

Or, dans $\mathbf{D}(\mathrm{ind}(\omega_2^h))$, non seulement il existe un élément x non nul tel que $\varphi^2(x) = -\pi^{-h(p-1)}x$, mais en plus l'un de ces tels éléments doit vérifier $\gamma(x) = \left(\frac{\omega(\gamma)\pi}{\gamma(\pi)}\right)^{\frac{h}{p+1}}$.

Nous savons par les rappels de [BLZ04] effectués à la section 4 que la matrice de $\gamma \in \Gamma$ dans la base (e, f) est

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\lambda_+}{\gamma(\lambda_+)}\right)^{k-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_-}{\gamma(\lambda_-)}\right)^{k-1} \end{pmatrix} \text{ modulo } \pi^{k-1}.$$

Supposons donc que $r = \frac{-h-(k-1)}{p+1} \in \mathbf{Z}$ soit une pente entière de Q, et soit $x = \alpha e + \beta f$ dans $\mathbf{D}(\overline{T}^*_{k,a_p})$ vérifiant $\varphi^2(x) = -\pi^{-h(p-1)}x$, avec $\beta \in k_L(\!(\pi)\!)$ de valuation r. Dans ce cas, d'après l'égalité (6.4.1), la valuation de α est alors $r' = p^2r - m(p-1) + h(p-1) \leq r$. Comme nous ne connaissons l'action de γ que modulo π^{k-1}, nous allons donc travailler sur la composante en e (puisque $v_\pi(\alpha) \leq v_\pi(\beta)$). On peut sans restriction supposer que $\alpha = \pi^{r'} + \sum_{i>r'} \alpha_i \pi^i$. Alors la composante suivant e de $\gamma(x)$ est $\omega(\gamma)^{r'} + \pi^{r'+1}\star, \star \in k_L[\![\pi]\!]$. Mais si $\gamma(x) = \left(\frac{\omega(\gamma)\pi}{\gamma(\pi)}\right)^{\frac{h}{p+1}} x$, ceci impose $\omega(\gamma)^{r'} = 1$, pour tout $\gamma \in \Gamma$. Or $r' = r$ modulo $p-1$, et donc $r = 0$ modulo $p-1$. On en déduit que $h = -(k-1)$ modulo p^2-1, et donc $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$. Nous avons donc finalement prouvé le résultat suivant :

Théorème 2.6.8. *Soit $k \geq 2$ tel que $p+1$ ne divise pas $k-1$.*

1. *Si $\binom{k-1}{m} \not\equiv 0$ $[p]$ et $k-1 < m(p+1)$, alors $r(k) = m$, et pour $v_p(a_p) = m$, $\overline{V}_{k,a_p} \simeq \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$.*
2. *Si $\binom{k-1}{m} \equiv 0$ $[p]$ et si $k \neq m(p+1)$, alors $r(k) = m-1$, et pour $v_p(a_p) = m-1$, $\overline{V}_{k,a_p} \simeq \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$.*

6.5 Récapitulatif

Résumons ici les résultats obtenus dans la section précédente.

Théorème 2.6.9. *Soit $2 \leq k \leq p^2-1$, $a_p \in \overline{\mathbf{Z}_p}$, et soit $m = \left\lfloor \frac{k-2}{p-1} \right\rfloor$. Alors :*

1. *si $k-1 = l(p+1)$,*
   (a) *si $v_p(a_p) > l$, alors*

$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \mu_{\sqrt{-1}} & 0 \\ 0 & \mu_{-\sqrt{-1}} \end{pmatrix} \otimes \omega^l$$

(b) si $v_p(a_p) = l$, alors

$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega^l \mu_\lambda & 0 \\ 0 & \omega^l \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda^2 + \overline{\left(\frac{a_p}{p^l}\right)}\lambda + 1 = 0.$$

2. si $p+1$ ne divise pas $k-1$,

(a) si $\binom{k-1}{m} \neq 0$ modulo p, alors $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$ si $v_p(a_p) > m$ et

i. si $k-1 > m(p+1)$ et $v_p(a_p) = m$, alors $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$,

ii. si $k-1 < m(p+1)$, et $v_p(a_p) = m$, alors

$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega^m \mu_\lambda & 0 \\ 0 & \omega^{k-1-m} \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda = \overline{\left(\frac{a_p}{p^m}\right)}\binom{k-1}{m}.$$

(b) si $\binom{k-1}{m} = 0$ modulo p, alors $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$ lorsque $v_p(a_p) > m-1$ et

i. si $k = m(p+1)$ et $v_p(a_p) = m-1$, alors

$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega^m \mu_\lambda & 0 \\ 0 & \omega^{m-1} \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda = \overline{\left(\frac{a_p}{p^{m-1}}\right)}.$$

ii. si $k \neq m(p+1)$ et $v_p(a_p) = m-1$, alors $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$.

Enfin, si $k = p^2$, alors $\overline{V}_{k,a_p} = \left(\begin{smallmatrix} \mu_{\sqrt{-1}} & 0 \\ 0 & \mu_{-\sqrt{-1}} \end{smallmatrix}\right)$ pour $v_p(a_p) \geq p$.

Tous ces cas apparaissent bien pour k compris entre $2p$ et p^2 (nous laissons de côté les cas où $k \leq 2p-1$, puisque le résultat de [BB05] traite déjà tous les cas). Par exemple, pour des valeurs de p suffisamment grandes :

- Si $m = 2$, c'est-à-dire pour $2p \leq k \leq 3p-2$:
  - si $k = 2p$, alors $\binom{k-1}{m} \neq 0$ et $k-1 < m(p+1)$,
  - si $k = 2p+1$, alors $\binom{k-1}{m} = 0$,
  - si $k = 2p+2$, alors $k = m(p+1)$,
  - si $k = 2p+3$, alors $k-1 = m(p+1)$,
  - si $k \in \{2p+4, \ldots, 3p-2\}$, alors $\binom{k-1}{m} \neq 0$ et $k-1 > m(p+1)$.
- Si $m = 3$, c'est-à-dire $3p-1 \leq k \leq 4p-3$:
  - si $k \in \{3p-1, 3p-2, 3p\}$, alors $\binom{k-1}{m} \neq 0$ et $k-1 < m(p+1)$,
  - si $k \in \{3p+1, 3p+2\}$, alors $\binom{k-1}{m} = 0$,
  - si $k = 3p+3$, alors $k = m(p+1)$,
  - si $k = 3p+4$, alors $k-1 = m(p+1)$,
  - si $k \in \{3p+5, \ldots, 4p-3\}$, alors $\binom{k-1}{m} \neq 0$ et $k-1 > m(p+1)$.
- Si $m = p-1$, c'est-à-dire $p^2-2p+3 \leq k \leq p^2-p+1$, alors $\binom{k-1}{m} = 0$.
- Si $m = p$, alors $\binom{k-1}{m} \neq 0$ et $k-1 < m(p+1)$.

Les résultats que nous venons d'énoncer prouvent que $\overline{V}_{k,a_p}$ n'est pas forcément la même sur le bord du disque qu'à l'intérieur du disque de convergence : dans certains cas elle reste la même, dans d'autres elle change.
Dans l'intervalle $1 \leq k \leq p^2$, lorsque la réduction change sur le bord du disque de convergence, deux cas de figure sont possibles :

– soit $\overline{V}_{k,a_p}$ est déjà réductible à l'intérieur du disque, et reste réductible sur le bord,
– soit $\overline{V}_{k,a_p}$ est irréductible à l'intérieur du disque, et devient réductible sur le bord.

Dans ces deux cas, la réduction n'est pas constante sur le bord du disque de convergence (mais reste localement constante), et dépend de a_p, et pas uniquement de $v_p(a_p)$.

Enfin, notons que les résultats de Breuil dans le cas où $k = 2p+1$ prouvent que la méthode de Berger-Li-Zhu ne fournit pas toujours le plus grand disque centré en 0 à l'intérieur duquel $\overline{V}_{k,a_p}$ est constante. En effet, les calculs de Breuil prouvent que $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$ pour $v_p(a_p) > 1/2$ alors que la valuation de convergence de la méthode de Berger-Li-Zhu est égale à 1.

7 Quelques résultats sur $\overline{T}_{k,a_p}$

Par construction, la représentation $\overline{V}_{k,a_p}$ est semi-simple, et nous avons remarqué que c'est parfois également le cas de $\overline{T}_{k,a_p}$, le réseau de V_{k,a_p} à partir duquel nous calculons la réduction. Notons bien que par le lemme de Ribet, dans le cas où $\overline{V}_{k,a_p}$ est réductible, les réseaux de V_{k,a_p} ne sont pas tous extension des mêmes caractères. Les résultats qui suivent ne s'appliquent donc qu'à T_{k,a_p}, le réseau contruit grâce au module de Wach précédemment décrit.

Dans certains cas où $\overline{T}_{k,a_p}$ n'est pas semi-simple, la théorie de Kummer nous permet d'obtenir quelques informations supplémentaires, sans toutefois nous permettre de déterminer exactement $\overline{T}_{k,a_p}$. La méthode que nous proposons possède tout de même l'avantage de donner un résultat indépendant du réseau que nous réduisons, à condition que celui-ci soit extension des mêmes caractères que $\overline{T}_{k,a_p}$.

Nous nous limitons en pratique à l'étude des représentations qui sont extension de k_L par $k_L(\omega)$. En effet, si $\chi : \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p} \to k_L^\times$ est un caractère, alors $\mathrm{Ext}^1(k_L, k_L(\chi)) = H^1(\mathbf{Q}_p, k_L(\chi))$ est de dimension un, sauf si $\chi = \omega$, auquel cas $\mathrm{Ext}^1(k_L, k_L(1)) = H^1(\mathbf{Q}_p, k_L(1))$ est de dimension deux sur k_L. Alors il est possible de distinguer un peu plus subtilement les extensions possibles de k_L par $k_L(1)$ (alors que pour $\chi \neq \omega$, la seule véritable distinction étant entre extension scindée ou extension non scindée).

7.1 Rappels sur la théorie de Kummer

Pour tout $n \geq 1$, on dispose de la suite exacte courte suivante

$$0 \longrightarrow \mu_{p^n} \longrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_p^\times \xrightarrow{p^n} \overline{\mathbf{Q}}_p^\times \longrightarrow 0$$

qui induit la suite exacte longue de cohomologie

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{Q}_p^\times \xrightarrow{p^n} \mathbf{Q}_p^\times \longrightarrow H^1(\mathbf{Q}_p, \mu_{p^n}) \longrightarrow H^1(\mathbf{Q}_p, \overline{\mathbf{Q}}_p^\times).$$

Ainsi, on dispose pour tout n d'une application $\mathbf{Q}_p^\times \to H^1(\mathbf{Q}_p, \mu_{p^n})$, qui en passant à la limite donne lieu à une application

$$\mathbf{Q}_p^\times \to H^1(\mathbf{Q}_p, \varprojlim \mu_{p^n}) = H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Z}_p(1)).$$

De plus, $H^1(\mathbf{Q}_p, \overline{\mathbf{Q}}_p^\times) = 0$ par le théorème 90 de Hilbert, de sorte qu'on dispose d'un isomorphisme $H^1(\mathbf{Q}_p, \mu_p) \simeq \mathbf{Q}_p^\times/(\mathbf{Q}_p^\times)^p$. De plus, en tant que $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$-module, $\mu_p \simeq \mathbf{F}_p(1)$, d'où un isomorphisme $\mathbf{Q}_p^\times/(\mathbf{Q}_p^\times)^p \simeq H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{F}_p(1))$, appelé application de Kummer.
En outre, $\mathbf{Q}_p^\times/(\mathbf{Q}_p^\times)^p = \langle p\rangle \times \langle 1+p\rangle = \mathbf{F}_p \times \mathbf{F}_p$ car p et $1+p$ sont tous deux d'ordre p et indépendants dans le quotient.

En tensorisant par k_L, on obtient un isomorphisme explicite : $k_L^2 \to H^1(\mathbf{Q}_p, k_L(1))$.

Définition 2.7.1. Un cocycle non nul de $Z^1(\mathbf{Q}_p, k_L(1))$ est dit peu ramifié si son image par l'application de Kummer est dans $\{0\} \times k_L$. Dans le cas contraire, il est dit très ramifié.

7.2 Cocycles et extensions

Soit V une représentation p-adique de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ telle que $\overline{V} = \left(\begin{smallmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Soient T_1 et T_2 deux réseaux de V, de sorte que $\overline{T_1}^{ss} = \overline{T_2}^{ss} = \overline{V}$. On a alors $\overline{T}_i = \left(\begin{smallmatrix} \omega & c_i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, où c_1, c_2 sont des 1-cocycles à valeurs dans $\mathbf{F}_p(1) = \mathbf{F}_p(1)$.
On peut en outre supposer (grâce au lemme de Ribet) que $\overline{T}_1$ et $\overline{T}_2$ ne sont pas semi-simples, de sorte que c_1, c_2 sont tous deux non nuls.

Proposition 2.7.2. *Sous les hypothèse précédentes, les classes de c_1 et c_2 dans $H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{F}_p(1))$ sont colinéaires.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe des bases (e_1, e_2) de T_1 et (f_1, f_2) de T_2 telles que dans les bases $(\overline{e}_1, \overline{e}_2)$ et $(\overline{f}_1, \overline{f}_2)$ on aie $\overline{T}_i = \left(\begin{smallmatrix} \omega & c_i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Quitte à échanger T_1 et T_2, à les multiplier par une puissance de p et à changer les bases (autant d'opérations qui ne changent pas les classes des cocycles dans $H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{F}_p(1))$), on peut supposer que $T_1 \subset T_2$, $e_1 = f_1$, et que $e_2 = \alpha f_1 + \beta f_2$, avec $\beta \in \mathbf{Z}_p^\times$ et $\alpha \in p\mathbf{Z}_p$.
Dans ces nouvelles bases, l'action de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur T_i est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \chi_{\mathrm{cycl}} + pa_1^i & [c_i] + pa_2^i \\ pa_3^i & 1 + pa_4^i \end{pmatrix} \text{ avec } a_j^i : \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p.$$

Alors la composante en e_1 de $g(e_2)$ est $[c_1(g)] + pa_2^1(g)$.
Un calcul dans T_2 donne

$$g(e_2) = g(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha((\chi_{\mathrm{cycl}}(g) + pa_2^1(g))f_1 + pa_3^2(g)f_2) + \beta(([c_2(g)] + pa_2^2(g))f_1 + (1 + pa_4^2(g))f_2).$$

On en déduit

$$\alpha(\chi_{\mathrm{cycl}}(g) + pa_1^2(g)) + \beta([c_2(g)] + pa_2^2(g)) = [c_1(g)] + pa_2^1(g)$$

ce qui après réduction modulo p donne $c_1(g) = \overline{\beta} c_2(g)$. □

Puisque $H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{F}_p(1))$ est de dimension 2 sur $\mathbf{F}_p$, dans l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{Ext}^1(\mathbf{F}_p, \mathbf{F}_p(1))$ il y a $p+1$ classes d'extensions de la représentation triviale par $\mathbf{F}_p(1)$: la classe de l'extension triviale, une classe correspondant aux extensions peu ramifiées, les $p-1$ autres correspondant aux extensions très ramifiées.
Notons que le fait que la réduction d'un réseau soit peu ou très ramifiée ne dépend que de la représentation p-adique V, et pas d'un réseau extension de $\mathbf{Z}_p$ par $\mathbf{Z}_p(1)$ de V par la proposition précédente.

7.3 Détermination de l'application de Kummer en termes de (φ, Γ)-modules

Dans cette partie, nous cherchons un critère permettant de déterminer si un (φ, Γ)-module sur $k_L(\!(\pi)\!)$, extension non triviale de $k_L(\!(\pi)\!)$ par $\mathbf{D}(k_L(1))$ correspond à une extension peu ramifiée ou très ramifiée. Nous utilisons à cette fin des résultats de Benois et de Colmez.

Colmez a construit dans [Col10a, Proposition VII.3.7], pour tout couple $(\alpha, \beta) \in k_L^2$, un (φ, Γ)-module $\mathbf{D}_{\alpha,\beta} = k_L(\!(\pi)\!)e_1 \oplus k_L(\!(\pi)\!)e_2$ extension de $\mathbf{D}(k_L)$ par $\mathbf{D}(k_L(1))$, tel que les actions de φ et Γ sont données par :

$$\varphi(e_1) = e_1, \varphi(e_2) = e_2 + x_{\alpha,\beta}e_1, \gamma(e_1) = \omega(\gamma)e_1, \gamma(e_2) = e_2 + \tau_0(\gamma)y_{\alpha,\beta}e_1$$

avec $\tau_0(\gamma) = \frac{p-1}{p}\log(\chi_{\mathrm{cycl}}(\gamma)) \in \mathbf{Z}_p^\times, y_{\alpha,\beta} \in \frac{\alpha}{\pi}k_L[\![\pi]\!]$ et $x_{\alpha,\beta} \in k_L(\!(\pi)\!)$. Il prouve alors que l'application $(\alpha, \beta) \mapsto \mathbf{D}_{\alpha,\beta}$ est un isomorphisme entre k_L^2 et $\mathrm{Ext}^1(k_L, k_L(1))$. Nous allons ici étudier le lien entre cette application et l'application de Kummer.

Soit $C = C(\mathbf{Z}_p(1))$ le complexe de Herr associé à $\mathbf{Z}_p(1)$, donné par :

$$0 \to \mathbf{D}(\mathbf{Z}_p(1)) \to \mathbf{D}(\mathbf{Z}_p(1)) \oplus \mathbf{D}(\mathbf{Z}_p(1)) \to \mathbf{D}(\mathbf{Z}_p(1)) \to 0$$

où les deux flèches du milieu sont données par

$$\alpha \mapsto ((\varphi - 1)\alpha, (\gamma - 1)\alpha) \text{ et } (\alpha_1, \alpha_2) \mapsto (\gamma - 1)\alpha_1 + (1 - \varphi)\alpha_2,$$

avec γ un générateur de Γ. Herr a prouvé dans [Her98] que la cohomologie de ce complexe est isomorphe à la cohomologie galoisienne de $\mathbf{Z}_p(1)$.
De plus, la réduction modulo p de ce complexe fournit un isomorphisme entre la cohomologie du complexe de Herr associé à $\mathbf{D}(\mathbf{F}_p(1))$ et la cohomologie galoisienne de $\mathbf{F}_p(1)$.

À une extension de $\mathbf{F}_p$ par $\mathbf{F}_p(1)$ correspond un élément de la cohomologie du complexe de Herr de $\mathbf{F}_p(1)$, qui est défini de la manière suivante : si l'extension est telle que

$$\mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}(\gamma) = \begin{pmatrix} \omega(\gamma) & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors on lui associe $cl(f, g) \in H^1(C(\mathbf{F}_p(1)))$. On vérifie aisément que cette application est bien définie, c'est-à-dire qu'un changement de base de modifie le cocycle que d'un cobord, et donc ne change pas la classe dans la cohomologie.
De même, il est aisé de vérifier que le résidu en 0 de y ne dépend que du choix d'un représentant de $cl(x, y)$.

Pour la suite, nous avons besoin de résultats de Benois ([Ben00]) sur l'application de Kummer en caractéristique nulle, que nous rappelons ici.
Soit $R = 1 + (p, \pi)\mathbf{Z}_p[\![\pi]\!]$, l l'application $l : F(\pi) \in R \mapsto \left(1 - \frac{\varphi}{p}\right)\log(F(\pi))$ et $\tau = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$. On note ε une base de $\mathbf{D}(\mathbf{Z}_p(1))$ et D l'opérateur $D = (1 + \pi)\frac{d}{d\pi}$.

Lemme 2.7.3 ([Ben00, Lemme 2.1.3])**.** *Soit $F(\pi) \in R$ et $f(\pi) = l(F(\pi))$. Alors pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un unique $a_{F,\gamma}(\pi) \in \mathbf{Z}_p[\![\pi]\!]$ tel que :*

– $(\varphi - 1)(a_{F,\gamma}(\pi)\varepsilon) = (\gamma - 1)(f(\pi)\tau\varepsilon)$,
– $a_{F,\gamma}(\pi) \equiv (1 - \chi_{\mathrm{cycl}}(\gamma))D(\log F(\pi))$ *modulo* π.

Proposition 2.7.4 ([Ben00, Proposition 2.1.5]). *Soit* $\iota : R \longrightarrow H^1(C)$ *le morphisme* $F(\pi) \mapsto cl(f(\pi)\tau\cdot\varepsilon, a_{F,\gamma}(\pi)\cdot\varepsilon)$ *où* $f(\pi) = l(F(\pi))$, *et soit* $\rho : F \mapsto F(0)$ *le morphisme d'évaluation en zéro. Alors le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "-\iota"] \arrow[d, "\rho"'] & H^1(C) \arrow[d, "h^1"] \\ \mathbf{Q}_p^\times \arrow[r, "\delta"] & H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Z}_p(1)) \end{tikzcd}$$

où h^1 *est l'isomorphisme de Herr en degré* 1 *et* δ *est l'application de Kummer.*

Nous utilisons ce résultat ainsi que celui de Colmez décrit plus haut pour en déduire le résultat suivant :

Proposition 2.7.5. *Soit* V *une représentation* p*-adique de dimension* 2 *de* $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ *telle que la réduction d'un réseau de* V *soit une extension non triviale de* $\mathbf{F}_p$ *par* $\mathbf{F}_p(1)$, *pour laquelle la matrice d'un générateur* γ *de* Γ *est donnée par* $\left(\begin{smallmatrix} \omega & y \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. *Alors cette extension est peu ramifiée si et seulement si le résidu de* y *en* 0 *est nul.*

Démonstration. Partant d'un élément peu ramifié non nul $(0, b) \in \mathbf{F}_p^2 = \langle p\rangle \times \langle 1 + p\rangle = \mathbf{Q}_p^\times/(\mathbf{Q}_p^\times)^p$, on peut le relever dans $\mathbf{Q}_p^\times$ en $(1+p)^b$. Puisque ρ est l'évaluation en zéro, on peut le relever dans R par la série constante $F(\pi) = (1+p)^{[b]}$, où $[b]$ désigne le relêvement de Teichmuller de b. Alors $l(F(\pi)) = f(\pi) = -[b]\frac{p-1}{p}\log(1 + p)$, et $a_{F,\gamma}(\pi) \equiv 0$ modulo π.
Ainsi, $(h^1)^{-1}(F(\pi)) = cl(f(\pi)\tau \cdot \varepsilon, a_{F,\gamma}(\pi) \cdot \varepsilon)$. En réduisant modulo p, l'image réciproque par $\overline{h}^1$ de $(0, b) \in \mathbf{F}_p^2 \simeq H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{F}_p(1))$ est donc un élément $cl(x, y)$ avec y de résidu nul.
Le résultat de Colmez permet de conclure par cardinalité puisqu'il y a exactement $p - 1$ extensions non triviales telles que le résidu de y soit nul. □

Là encore, ce résultat reste valable après tensorisation par k_L.

7.4 Application à l'étude de $\overline{T}_{k,a_p}$

Ce qui a été dit précédemment peut être utilisé afin d'étudier un peu plus finement le réseau $\overline{T}_{k,a_p}$, lorsque cela a un sens que de parler d'extension peu ou très ramifiée. C'est le cas lorsque $\overline{T}^*_{k,a_p} = \left(\begin{smallmatrix} \omega^{r+1} & \star \\ 0 & \omega^r \end{smallmatrix}\right) \otimes \mu_{\lambda_{\pm 1}}$.

Par les calculs de la section 6 ceci ne se produit que dans deux cas :
– si $k = m(p + 1)$, $v_p(a_p) = m - 1$ et $\lambda = \pm 1$, mais par la remarque 2.6.7, $\overline{T}_{k,a_p}$ est semi-simple, donc nous excluons ce cas.
– si $k - 1 = m(p + 1) + 1$, $v_p(a_p) = m$ et $\overline{\left(\frac{a_p}{p^m}\right)} = \pm 1$.

Nous nous plaçons donc dans le second cas. Alors en reprenant les notations de la section 6, nous avons un sous-(φ, Γ)-module de $\mathbf{D}(\overline{T}^*_{k,a_p})$ dont une base est $\delta = \frac{x}{\pi^{pm}}e + \frac{y}{\pi^m}f$, avec $x = \alpha\pi^{pm}$ et $y = \beta\pi^m$, et donc $x, y \in k_L[\![\pi]\!]$.

On peut alors prendre $\left(\delta, \frac{e}{y\pi^{pm+1}}\right)$ comme base de $\mathbf{D}(\overline{T}^*_{k,a_p})$. Dans cette base, on a bien évidemment $\gamma(\delta) = \omega^{-m}\delta$, mais aussi

$$\gamma\left(\frac{e}{y\pi^{pm+1}}\right) = \frac{1}{\gamma(y)\gamma(\pi)^{pm+1}}\left(\frac{\lambda_+}{\gamma(\lambda_+)}\right)^{k-1} + \frac{1}{\gamma(y)\gamma(\pi)^{pm+1}}\pi^{k-1}\star$$

avec $\star \in k_L[\![\pi]\!]e \oplus k_L[\![\pi]\!]f$.
La composante en f est donc de la forme $\frac{1}{\gamma(y)\gamma(\pi)^{mp+1}}\pi^{k-1}\star$.
Or, puisque $m \geq 1$, $\gamma\left(\frac{e}{y\pi^{pm+1}}\right) = \omega^{m-k-1}(\gamma)\cdot e + \star\cdot f$, avec $\star \in \pi^{k-1-mp-1}k_L[\![\pi]\!]$.
Toujours dans la même base de $\mathbf{D}(\overline{T}^*_{k,a_p})$, on peut donc écrire

$$Mat(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda & \star_1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ et } Mat(\gamma) = \begin{pmatrix} \omega(\gamma)^{-m} & \pi^{k-1-mp-1}\star_2 \\ 0 & \omega(\gamma)^{m-k-1} \end{pmatrix}.$$

Après torsion par $\omega^{m+1}\mu_\lambda$, on obtient une extension du (φ,Γ)-module trivial par celui de $k_L(1)$, extension dont la classe dans la cohomologie du complexe de Herr est donnée par $cl(\star_1, \pi^{k-1-mp-1}\star_2)$. Par la proposition 2.7.5, cette extension est peu ramifiée. On a donc prouvé le résultat suivant :

Proposition 2.7.6. *Si $k-1 = m(p+1)+1$, $v_p(a_p) = m$ et $\lambda = \overline{\left(\frac{a_p}{p^m}\right)} = \pm 1$, alors*

$$\overline{T}^*_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega & \star \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \mu_\lambda\omega^{-m-1}$$

où $\star$ est non-trivial et peu ramifié.

Remarque 2.7.7. On retrouve là le résultat du théorème 2.2.5 de [BB05] qui traite le cas $k = p+3$.

8 Les limites de la méthode de Berger-Li-Zhu

La méthode que nous avons utilisée pour déterminer $\overline{V}_{k,a_p}$ repose sur le fait qu'il est possible de construire un module de Wach d'un réseau de V^*_{k,a_p} sur lequel l'action de φ est suffisamment compatible avec la filtration pour simplifier des calculs. En particulier, le fait qu'il existe une base du module de Wach telle que la première colonne de la matrice de φ dans cette base soit à coefficients dans $q^{k-1}\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}$ facilite grandement les calculs. Il est donc légitime de se demander s'il existe toujours une telle base. La réponse est négative, et nous prouvons qu'essentiellement, cela n'arrive que dans les cas que nous avons traités précédemment, c'est-à-dire pour $v_p(a_p) \geq r(k)$, ou si a_p est une unité p-adique.

Dans tout ce qui suit, s'il n'y a pas d'ambiguïté, on note x_i les coefficients d'un élément $x \in \mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes L$. Commençons par un lemme facile mais que nous utiliserons à plusieurs reprises par la suite :

Lemme 2.8.1. *Soit $x \in \mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}$. Alors x est divisible par π si et seulement si $\varphi(x)$ est divisible par q.*

Démonstration. Rappelons que $\varphi(\pi) = q\pi$. Alors, si $x = \pi b$, $\varphi(x) = \varphi(\pi)\varphi(b) = q\pi\varphi(b)$.
Inversement, si $x_0 \neq 0$, alors $\varphi(x) = x_0 + q(\pi x_1 + \dots)$ n'est pas divisible par q. □

Soit donc $k \geq 2$, $a_p \in \overline{\mathbf{Z}_p}$, et L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ telle que $a_p \in \mathcal{O}_L$, et supposons que le module de Wach $\mathbf{N}_k$ d'un réseau de V_{k,a_p} possède une base (e, f) sur $\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes \mathcal{O}_L$ telle que la matrice de φ dans cette base soit

$$M = \mathrm{Mat}\varphi = \begin{pmatrix} q^{k-1}a & b \\ q^{k-1}c & d \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes \mathcal{O}_L$.

Puisque $\det(V_{k,a_p}) = \omega^{k-1}$, et que le déterminant de la matrice de φ est bien défini à multiplication par un élément de $1 + \pi(\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes \mathcal{O}_L)$ près, le déterminant de M est $q^{k-1} \times \tau$, avec $\tau \in 1 + \pi\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes \mathcal{O}_L$. C'est donc que $ad - bc \in 1 + \pi(\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes \mathcal{O}_L)$. Comme l'anneau $\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes \mathcal{O}_L$ est local, d'idéal maximal $(\mathfrak{m}_L, \pi)$, le coefficient constant de $ad - bc$ est donc dans $\mathcal{O}_L^\times$. On en déduit également que soit a soit c est une unité de $\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes \mathcal{O}_L$.

Nous allons prouver que :
- si c est une unité, alors $v_p(a_p) \geq r(k)$, où $r(k)$ désigne la valuation de convergence,
- si c n'est pas une unité (et donc a est une unité), alors $a_p \in \mathcal{O}_L^\times \subset \overline{\mathbf{Z}_p}^\times$, et donc comme expliqué à la remarque 2.1.11, V_{k,a_p} est réductible, et $\overline{V}_{k,a_p}$ est égale à $\mu_{\overline{a_p}} \oplus \mu_{\overline{a_p}^{-1}}\omega^{k-1}$.

8.1 Le cas où c n'est pas une unité.

Supposons que c ne soit pas inversible dans $\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes \mathcal{O}_L$. En particulier, par ce qui a été dit précédemment, a est une unité.
Alors $\left(\frac{\varphi(e)}{q^{k-1}}, f\right)$ est une base de $\mathbf{N}_k$, car

$$\frac{\varphi(e)}{q^{k-1}} = ae + cf$$

possède (dans la base (e, f)) une composante en e qui est une unité.

Dans cette nouvelle base,

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= be + df \\ &= \frac{b}{a}\frac{\varphi(e)}{q^{k-1}} + \lambda f \text{ avec } \lambda \in \mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes \mathcal{O}_L \\ &= be + \frac{b}{a}f + \lambda f. \end{aligned}$$

On en déduit que $d = \frac{b}{a}c + \lambda$, et donc que $\lambda = -\frac{1}{a}(ad - bc)$. De même,

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{\varphi(e)}{q^{k-1}}\right) &= \varphi(ae + cf) \\ &= \varphi(a)\left(q^{k-1}ae + q^{k-1}cf\right) + \varphi(c)\left(be + df\right). \end{aligned}$$

La composante en e de $\varphi\left(\frac{\varphi(e)}{q^{k-1}}\right)$ est donc $\varphi(a)q^{k-1}a+\varphi(c)b$. Donc

$$\varphi\left(\frac{\varphi(e)}{q^{k-1}}\right)=\left(\varphi(a)q^{k-1}+\varphi(c)\frac{b}{a}\right)\frac{\varphi(e)}{q^{k-1}}+\mu f,\ \text{avec } \mu\in\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}\otimes\mathcal{O}_L.$$

Mais alors

$$\varphi(c)d+\varphi(a)q^{k-1}c=\varphi(a)cq^{k-1}+\varphi(c)c\frac{b}{a}+\nu.$$

On en déduit que $\nu=\varphi(c)\left(d-c\frac{b}{a}\right)$.

Nous avons donc prouvé que dans la base $\left(\frac{\varphi(e)}{q^{k-1}},f\right)$, la matrice de φ est

$$M'=\begin{pmatrix}\varphi(a)q^{k-1}+\varphi(c)\frac{b}{a} & \frac{b}{a}\\ \varphi(c)\left(d-\frac{b}{a}\right) & -\frac{1}{a}(ad-bc)\end{pmatrix}.$$

Sa trace est $\varphi(a)q^{k-1}+\varphi(c)\frac{b}{a}-\frac{1}{a}(ad-bc)$. Modulo π, elle est donc égale à $a_0p^{k-1}-d_0$. Puisque $ad-bc$ est une unité, et que c ne l'est pas, d est également une unité de $\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}\otimes\mathcal{O}_L$, de sorte que $d_0\in\mathcal{O}_L^\times$. Ainsi,

$$(\mathrm{tr}M'\ (\text{ modulo } \pi))\in\mathcal{O}_L^\times.$$

Or, cette trace est égale à a_p. On en déduit comme annoncé que $a_p\in\mathcal{O}_L^\times$.

Remarque 2.8.2. Le résultat obtenu porte sur a_p, et donc sur V_{k,a_p}, et pas seulement sur le réseau dont $\mathbf{N}_k$ était le module de Wach.

8.2 Le cas où c est une unité.

Si c est une unité de $\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}\otimes\mathcal{O}_L$, alors $\left(e,\frac{\varphi(e)}{q^{k-1}}\right)$ est une base de $\mathbf{N}_k$, car la composante en f de $\frac{\varphi(e)}{q^{k-1}}$ est c.

Dans cette base, la matrice de φ est de la forme $\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ q^{k-1} & \nu\end{pmatrix}$, avec $\lambda,\nu\in\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}\otimes\mathcal{O}_L$. Puisque la trace de cette matrice est la même que celle du Frobenius de D_{k,a_p}, le coefficient constant de ν est a_p. En particulier, ν est inversible dans $\mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p}\otimes L$, mais pas nécessairement dans $\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}\otimes\mathcal{O}_L$. De plus, comme le déterminant de la matrice de φ est $-q^{k-1}\lambda$, on en en déduit que $\lambda\in-1+\pi(\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}\otimes\mathcal{O}_L)$.

Lemme 2.8.3. *Pour tout $\alpha\in1+\pi(\mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p}\otimes L)$, il existe un unique $x\in1+\pi(\mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p}\otimes L)$ tel que $\varphi^2(x)=\alpha x$.*

Démonstration. Notons $a=\sum_i a_i\pi^i$ et $x=\sum_j x_j\pi^j$. Alors on cherche x tel que

$$\sum_n x_n\pi^{p^{2n}}=\sum_n\sum_{i+j=n}a_ix_j\pi^n.$$

L'existence et l'unicité sont immédiates en remarquant que x_i est une combinaison linéaire des x_j, pour $j<i$. □

Soit donc $\delta \in \mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes \mathcal{O}_L$ tel que $\varphi^2(\delta) = -\lambda^{-1}\delta$.
Alors $\left(\delta e, \frac{\varphi(\delta e)}{q^{k-1}}\right)$ est une base de $\mathbf{N}_k$, dans laquelle la matrice de φ est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\varphi^2(\delta)\lambda}{\delta} \\ q^{k-1} & \frac{\varphi^2(\delta)}{\delta}\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q^{k-1} & \nu' \end{pmatrix} \text{ avec } \nu' \text{ unité de } \mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes L.$$

Nous notons désormais (e', f') cette nouvelle base de $\mathbf{N}_k$.

Pour $\gamma \in \Gamma$, notons $Q_\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ la matrice de l'action de γ dans la base (e', f').
La relation $P\varphi(Q_\gamma) = Q_\gamma\gamma(P)$ s'écrit alors

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -\varphi(a_3) & -\varphi(a_4) \\ q^{k-1}\varphi(a_1) + \nu'\varphi(a_3) & q^{k-1}\varphi(a_2) + \nu'\varphi(a_4) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q^{k-1} & \nu' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi(a_1) & \varphi(a_2) \\ \varphi(a_3) & \varphi(a_4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \gamma(q)^{k-1} & \gamma(\nu') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2\gamma(q)^{k-1} & -a_1 + a_2\gamma(\nu') \\ a_4\gamma(q)^{k-1} & -a_3 + a_4\gamma(\nu') \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On en déduit le système d'équations

$$\begin{cases} -\varphi(a_3) = a_2\gamma(q)^{k-1} & \text{(8.2.1a)} \\ -\varphi(a_4) = -a_1 + a_2\gamma(\nu') & \text{(8.2.1b)} \\ q^{k-1}\varphi(a_1) + \nu'\varphi(a_3) = a_4\gamma(q)^{k-1} & \text{(8.2.1c)} \\ q^{k-1}\varphi(a_2) + \nu'\varphi(a_4) = -a_3 + a_4\gamma(\nu'). & \text{(8.2.1d)} \end{cases}$$

De l'équation (8.2.1a), on déduit que $\varphi(a_3)$ est divisible par q^{k-1} (car q divise $\gamma(q)$), et donc par le lemme 2.8.1, que $a_3 \equiv 0$ modulo π^{k-1}. Ainsi, $a_2 \equiv 0$ modulo π^{k-1}.
Ceci implique alors, par l'équation (8.2.1b) que $\varphi(a_4) \equiv a_1$ modulo π^{k-1}.
Par l'équation (8.2.1d), on déduit que $\nu'\varphi(a_4) \equiv a_4\gamma(\nu')$ modulo π^{k-1}, et donc

$$\nu' a_1 = a_4\gamma(\nu') \text{ modulo } \pi^{k-1}.$$

Puisque par hypothèse ν' est une unité de $\mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes L$, on a alors

$$\frac{\nu'}{\gamma(\nu')} = \frac{a_4}{a_1}.$$

On en déduit que $\varphi\left(\frac{\nu'}{\gamma(\nu')}\right) = \frac{\varphi(a_4)}{\varphi(a_1)}$, et donc

$$\varphi\left(\frac{\nu'}{\gamma(\nu')}\right)\frac{\nu'}{\gamma(\nu')} = \frac{q^{k-1}}{\gamma(q)^{k-1}}.$$

Notons qu'il est bien possible de diviser (dans $\mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes L$) par a_1 dans l'équation précédente, car a_2, a_3 étant nuls modulo π, a_1 et a_4 doivent être des unités.

Lemme 2.8.4. *Quel que soit $a \in 1+\pi(\mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes L)$, l'équation $x\varphi(x) = a$ possède une unique solution x unitaire dans $\mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes L$ (resp. $(\mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes L)/\pi^n$).*

Démonstration. Écrivons $a = \sum_{i\geq 0} a_i\pi^i$, et de même, $x = \sum_{j\geq 0} x_j\pi^j$. Alors $\varphi(x) = \sum_{j\geq 0} x_j\pi^{p^j}$, et donc

$$\left(\sum_{j\geq 0} x_j\pi^j\right)\left(\sum_{k\geq 0} x_k\pi^{p^k}\right) = \sum_{i\geq 0}\left(\sum_{j+p^k=i} x_jx_k\right)\pi^i = \sum_{i=0} a_i\pi^i.$$

Ainsi, chaque x_i est uniquement déterminé par les a_j et les x_j, pour $j < i$. On en déduit à la fois l'existence et l'unicité de la solution. □

Corollaire 2.8.5. *L'équation $x\varphi(x) = \frac{q^{k-1}}{\gamma(q)^{k-1}}$ possède une unique solution unitaire dans $\mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes L$ (respectivement $(\mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes L)/\pi^n$), égale à $\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{k-1}\left(\frac{\gamma(\lambda_+)}{\gamma(\lambda_-)}\right)^{k-1}$, (resp. $\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{k-1}\left(\frac{\gamma(\lambda_+)}{\gamma(\lambda_-)}\right)^{k-1}$ mod π^n).*

Démonstration. Pour l'existence et l'unicité, il suffit d'appliquer le lemme précédent avec $a = \frac{q^{k-1}}{\gamma(q)^{k-1}}$. Pour la valeur exacte, il suffit de remarquer que

$$\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{k-1}\left(\frac{\gamma(\lambda_+)}{\gamma(\lambda_-)}\right)^{k-1}\varphi\left(\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{k-1}\left(\frac{\gamma(\lambda_+)}{\gamma(\lambda_-)}\right)^{k-1}\right) = \frac{q^{k-1}}{\gamma(q)^{k-1}}.$$

□

Puisque $\frac{\nu'}{\gamma(\nu')}$ est unitaire et vérifie $\frac{\nu'}{\gamma(\nu')}\varphi\left(\frac{\nu'}{\gamma(\nu')}\right) = \frac{q^{k-1}}{\gamma(q)^{k-1}}$ modulo π^{k-1}, on en déduit que $\frac{\nu'}{\gamma(\nu')} = \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{k-1}\left(\frac{\gamma(\lambda_+)}{\gamma(\lambda_-)}\right)^{k-1}$ modulo π^{k-1}.
On prouve de manière analogue au lemme 2.8.4 le résultat suivant :

Lemme 2.8.6. *Pour tout $a \in 1+\pi(\mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes L)/\pi^n$, et tout $x_0 \in \mathcal{O}_L^\times$, l'équation $x = a\gamma(x)$ possède une unique solution x de coefficient constant x_0 dans $(\mathbf{B}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes L)/\pi^n$.*

Mais nous connaissons l'unique solution unitaire à l'équation précédente, puisque

$$\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{k-1} = \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{k-1}\left(\frac{\gamma(\lambda_+)}{\gamma(\lambda_-)}\right)^{k-1}\left(\frac{\gamma(\lambda_-)}{\gamma(\lambda_+)}\right)^{k-1}.$$

Comme le coefficient constant de ν' est égal à a_p, on a donc

$$\nu' = a_p\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{k-1} \text{ modulo } \pi^{k-1}.$$

Mais puisque $\nu' \in \mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes \mathcal{O}_L$, on en déduit que

$$a_p\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{k-1} \text{ modulo } \pi^{k-1} \in \mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes \mathcal{O}_L = \mathcal{O}_L[\![\pi]\!].$$

Ceci est exactement la définition de $v_p(a_p) \geq r(k)$: a_p appartient au disque de convergence fermé.

Finalement, nous avons prouvé le résultat suivant :

Proposition 2.8.7. *Soit $k \geq 2$ et $a_p \in \mathcal{O}_L$ tels qu'il existe un réseau de V^*_{k,a_p} dont le module de Wach possède une base dans laquelle la matrice de φ est de la forme*

$$M = \mathrm{Mat}\varphi = \begin{pmatrix} q^{k-1}a & b \\ q^{k-1}c & d \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p} \otimes \mathcal{O}_L$. Alors soit $v_p(a_p) = 0$, soit $v_p(a_p) \geq r(k)$.

Par conséquent, la limitation sur $v_p(a_p)$ qui marque la limite de la méthode que nous avons utilisée semble être une limite naturelle, et on peut s'attendre à ce que le calcul des $\overline{V}_{k,a_p}$ pour a_p hors du disque de convergence soit de nature différente.

Chapitre 3

Représentations modulaires d'un sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Nous nous intéressons dans cette partie aux représentations lisses irréductibles d'un sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur un corps de caractéristique p. En particulier, nous démontrons un théorème de classification de telles représentations en termes de (φ, Γ)-modules, ce qui mène pour les corps finis ou algébriquement clos à une intepretation galoisienne.

1 Rappels et préliminaires sur les représentations de groupes localement profinis

1.1 Représentations lisses

Si G est un groupe localement profini, on appelle représentation k-linéaire de G un morphisme de groupes $G \to \mathrm{Aut}_k(V)$ où V est un k-espace vectoriel. La représentation $\pi : G \to \mathrm{Aut}_k(V)$ est dite lisse si pour tout $v \in V$, $\mathrm{Stab}_G(v) = \{g \in G : g \cdot v = v\}$ est un sous-groupe ouvert de G.

Proposition 3.1.1. *$\pi : G \to \mathrm{Aut}_G(V)$ est lisse si et seulement si $G \times V \to V$: $(g, v) \mapsto \pi(g)(v)$ est continue lorsque V est muni de la topologie discrète.*

Démonstration. Supposons que l'action de G sur V soit continue lorsque V est muni de la topologie discrète. Alors l'image réciproque de v par l'application $(g, v) \mapsto g \cdot v$ est un ouvert de $G \times V$ qui contient $(1, v)$, et donc doit en contenir un voisinage ouvert. Par définition de la topologie produit, elle contient un ensemble de la forme $G_v \times \{v\}$, avec G_v sous-groupe ouvert compact de G, et alors ce sous-groupe stabilise v, ce qui prouve que la représentation est lisse.
Inversement, supposons que π soit une représentation lisse de G, et soit H un sous-groupe ouvert compact fixant 0. Alors $H \times \{0\}$ est un ouvert de $G \times V$ qui est dans l'image réciproque de 0 par l'application $(g, v) \mapsto g \cdot v$, et donc l'action est continue si V est muni de la topologie discrète. □

En particulier, si π est une représentation lisse, on a $V = \bigcup_H V^H$ où l'union porte sur tous les sous-groupes ouverts de G et V^H désigne les invariants sous H.

La représentation π est dite admissible si de plus V^H est un k-espace vectoriel de dimension finie pour tout sous-groupe ouvert compact H.

Rappelons le résultat classique suivant :

Proposition 3.1.2. *Soit V un espace vectoriel sur k un corps de caractéristique p, et G un pro-p-groupe agissant de manière lisse sur V. Alors il existe $v \in V$ non nul, fixe sous l'action de G.*

Démonstration. Il est classique qu'un p-groupe agissant linéairement sur un k-espace vectoriel de dimension finie possède toujours un point fixe (voir [Ser78, Proposition 26]).
Soit donc $v \in V$ non nul. Par lissité de l'action de G, le stabilisateur $\mathrm{Stab}(v)$ est un sous-groupe ouvert de G, et donc est d'indice fini. Ceci prouve que la sous-G-représentation W de V engendrée par v est de dimension finie sur k.
Soit alors $(w_1, \ldots, w_n)$ une base de W sur k, et $H = \bigcap_i \mathrm{Stab}(v_i)$. C'est un sous-groupe d'indice fini de G, qui agit trivialement sur W. Ainsi, G agit sur W à travers G/H, qui est un p-groupe fini. Si $w \in W$ est un point fixe non nul pour cette action, alors $w \in W^G \subset V^G$. □

Nous aurons besoin par la suite de connaître les représentations lisses irréductibles et de dimension finie de $\mathbf{Z}_p^\times$, elles sont classées par le résultat suivant :

Proposition 3.1.3. *Soit k un corps de caractéristique p et $\rho : \mathbf{Z}_p^\times \to \mathrm{Aut}_k(V)$ une représentation lisse, irréductible, de dimension finie de $\mathbf{Z}_p^\times$. Alors V est de dimension 1, et ρ est entièrement déterminée par l'image d'une racine primitive $(p-1)$-ième de l'unité.*

Démonstration. Commençons par remarquer que $\mathbf{Z}_p^\times = \mu_{p-1}(\mathbf{Q}_p) \times (1+p\mathbf{Z}_p)$. Puisque $1 + p\mathbf{Z}_p$ est un pro-p-groupe, $V^{1+p\mathbf{Z}_p} \neq \{0\}$, et puisque $\mathbf{Z}_p^\times$ est abélien, $V^{1+p\mathbf{Z}_p}$ est une sous-représentation de V, donc si V est irréductible, $V^{1+p\mathbf{Z}_p} = V$, et l'action de $\mathbf{Z}_p^\times$ se factorise en une action de $\mu_{p-1}(\mathbf{Q}_p)$.
Puisque $\mu_{p-1}(\mathbf{Q}_p)$ est un groupe abélien fini d'ordre premier à p, ses représentations irréductibles sont toutes des caractères, et on en déduit que V est de dimension 1, et que ρ est entièrement déterminée par l'image d'un générateur de $\mu_{p-1}(\mathbf{Q}_p)$. □

On note $\omega : \mathbf{Z}_p^\times \to \mathbf{F}_p^\times \subset k^\times$ le caractère qui à $x \in \mathbf{Z}_p^\times$ associe sa réduction modulo p. La proposition précédente prouve qu'un caractère lisse de $\mathbf{Z}_p^\times$ est une puissance de ω. De manière plus précise, si χ est un caractère lisse de $\mathbf{Z}_p^\times$, alors il existe un unique $r \in \{0, \ldots, p-2\}$ tel que $\chi = \omega^r$. De même, si $\lambda \in k^\times$, on note $\mu_\lambda : \mathbf{Q}_p^\times \to k^\times$ le caractère $x \mapsto \lambda^{v_p(x)}$.

Remarque 3.1.4. Ces notations sont cohérentes avec les notations du chapitre 1 et l'isomorphisme du corps de classes : $\mathcal{W}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \simeq \mathbf{Q}_p^\times$.

Proposition 3.1.5. *Soit $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k^\times$ un caractère lisse de $\mathbf{Q}_p^\times$. Alors il existe $\lambda \in k^\times$ et $r \in \{0, \ldots, p-2\}$, uniquement déterminés, tels que $\chi = \omega^r \mu_\lambda$.*

Démonstration. Si on note $\lambda = \chi(p)$, alors le résultat découle immédiatement de la proposition 3.1.3. □

De même, on peut classifier les représentations irréductibles de $\mathbf{Q}_p^\times$:

Proposition 3.1.6. *Soit $\rho : \mathbf{Q}_p^\times \to \mathrm{Aut}_k(V)$ une représentation lisse irréductible de $\mathbf{Q}_p^\times$. Alors V est de dimension finie, et il existe $f \in \mathrm{Aut}_k(V)$, et $r \in \{0, \ldots, p-2\}$ tels que*

$$\rho\left(p^n x_0\right) \cdot v = \omega^r(x_0) f^n(v), \forall n \in \mathbf{Z}, \forall x_0 \in \mathbf{Z}_p^\times, \forall v \in V.$$

Démonstration. Puisque $1 + p\mathbf{Z}_p$ est un pro-p-groupe, $V^{1+p\mathbf{Z}_p}$ n'est pas réduit à 0. Or par commutativité de $\mathbf{Q}_p^\times$, il s'agit d'une sous-représentation de V, et donc $V = V^{1+p\mathbf{Z}_p}$: $1 + p\mathbf{Z}_p$ agit trivialement. Ainsi, $\mathbf{Z}_p^\times$ agit sur V via $\mathbf{Z}_p^\times/(1+p\mathbf{Z}_p)$, et si $g \in \mathbf{Z}_p^\times$, alors g^{p-1} agit trivialement, de sorte que $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbf{F}_p^\times} V^{g=\lambda}$, et donc $V = \bigoplus_{r=1}^{p-1} V_{\omega^r}$, où l'action de $\mathbf{Z}_p^\times$ sur V_{ω^r} est scalaire, donnée par ω^r.
Mais V_{ω^r} est alors une sous-représentation de V, et par irréductibilité, il existe r tel que $V = V_{\omega^r}$.
Alors $V(\omega^{-r})$ est une représentation irréductible de $\mathbf{Q}_p^\times/\mathbf{Z}_p^\times = \mathbf{Z}$, et par conséquent est un quotient irréductible de $k[X, X^{-1}]$ et donc est de dimension finie.
On a alors le résultat annoncé, f étant l'endomorphisme de V correspondant à l'action de p. □

1.2 Induites compactes

Si G est un groupe localement profini, H un sous-groupe ouvert de G et $\sigma : H \to \mathrm{Aut}_k(V)$ une représentation lisse de H, on note $\mathrm{ind}_H^G \sigma$ l'induite compacte de σ.
Plus précisément, $\mathrm{ind}_H^G \sigma$ est l'espace des fonctions $f : G \to V$, à support compact modulo H, telles que :
- $f(hg) = \sigma(h) f(g), \forall h \in H, \forall g \in G$,
- il existe un sous-groupe ouvert compact K de G (dépendant de f) tel que $f(gx) = f(g), \forall g \in G, \forall x \in K$.

On munit $\mathrm{ind}_H^G \sigma$ d'une action de G par $(g \cdot f)(x) = f(xg)$, et alors $\mathrm{ind}_H^G \sigma$ est une représentation lisse de G.
Si $v \in V$ et $g \in G$, on note $[g, v]$ l'élément de $\mathrm{ind}_H^G \sigma$ défini par

$$[g, v](x) = \begin{cases} \sigma(xg)(v) & \text{si } x \in Hg^{-1} \\ 0 & \text{si } x \notin Hg^{-1}. \end{cases}$$

Alors il est aisé de voir que tout élément de $\mathrm{ind}_H^G \sigma$ s'écrit comme combinaison linéaire de telles fonctions. De plus, on a
- $g[g', v] = [gg', v], \forall g, g' \in G, \forall v \in V$
- $[gh, v] = [g, \sigma(h)(v)], \forall g \in G, \forall h \in H, \forall v \in V$.

Dans le cas où σ est un caractère lisse de H, on note $[g]$ au lieu de $[g, 1]$, et alors les $[g]$, pour g parcourant un système de représentants de G/H forment une base de $\mathrm{ind}_H^G \sigma$.

Proposition 3.1.7 (Réciprocité de Frobenius)**.** *Soit H un sous-groupe ouvert de G, σ une représentation lisse de H et π une représentation lisse de G. Alors il existe un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_H^G \sigma, \pi) \underset{\sim}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_H(\sigma, \pi_{|H}).$$

Démonstration. Nous ne donnons pas tous les détails, pour cela, on pourra par exemple se reporter à [BL94], mais nous contentons de donner explicitement les isomorphismes, ce qui nous sera utile par la suite.
Si $\Phi \in \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_H^G \sigma, \pi)$, alors on lui associe l'application $\phi : \sigma \to \pi$ définie par $\phi(v) = \Phi([1, v])$.
Inversement, si $\phi \in \mathrm{Hom}_H(\sigma, \pi_{|H})$, on lui associe $\Phi : \mathrm{ind}_H^G \sigma \to \pi$ définie par

$$\Phi(f) = \sum_{x \in H \backslash G} \pi(x^{-1})\phi(f(x)).$$

On peut alors montrer que ces deux applications sont inverses l'une de l'autre, d'où le résultat. □

1.3 Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ en caractéristique p

La théorie des représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur un corps de caractéristique ℓ, $\ell \neq p$ est bien connue, on pourra par exemple consulter [BH06] pour le cas de la caractéristique nulle et [Vig96] pour ℓ premier différent de p.
En caractéristique p, bien que la situtation soit différente, des résultats de Barthel-Livné ([BL94]) et Breuil ([Bre03a]) ont permis de donner une classification complète des représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, au moins dans le cas où le corps des coefficients est algébriquement clos. Nous rappelons ici cette classification.

Notons $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, $\mathrm{K}_G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ un sous-groupe compact maximal de G, B le sous-groupe de Borel de G formé des matrices triangulaires supérieures et $\mathrm{Z} = \mathbf{Q}_p^\times \cdot \mathrm{Id}$ le centre de G . Jusqu'à la fin de la section 1.3, nous ne considérons que le cas d'un corps k de caractéristique p et algébriquement clos.

Si $r \geq 0$, alors $\mathrm{Sym}^r k^2$ s'identifie à l'espace des polynômes homogènes de degré r en deux variables X et Y, et il est muni d'une action de K_G définie par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot X^j Y^{r-j} = (aX + cY)^j (bX + dY)^{r-j}.$$

On étend par inflation cette action à $\mathrm{K}_G\,\mathrm{Z}$ en faisant agir $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)$ trivialement. Barthel et Livné prouvent alors que les $\mathrm{Sym}^r k^2 \otimes \det^m$, avec $0 \leq r \leq p-1$ et $0 \leq m \leq p-1$ décrivent l'ensemble des représentations lisses irréductibles de dimension finie de K_G.
Soit $\mathcal{H}(\mathrm{K_G\,Z}, \mathrm{ind}_{\mathrm{K_G\,Z}}^{\mathrm{G}} \mathrm{Sym}^r k^2) = \mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{ind}_{\mathrm{K_G\,Z}}^{\mathrm{G}} \mathrm{Sym}^r k^2)$ l'algèbre de Hecke de $\mathrm{ind}_{\mathrm{K_G\,Z}}^{\mathrm{G}} \mathrm{Sym}^r k^2$.
Il est possible d'interpréter $\mathcal{H}(\mathrm{K_G\,Z}, \mathrm{ind}_{\mathrm{K_G\,Z}}^{\mathrm{G}} \mathrm{Sym}^r k^2)$ comme un espace de fonctions sur l'ensemble des doubles classes $\mathrm{K_G\,Z} \backslash \mathrm{G} / \mathrm{K_G}$. Le produit de deux telles fonctions est alors un produit de convolution. Barthel et Livné prouvent l'existence d'un opérateur $T \in \mathcal{H}(\mathrm{K_G\,Z}, \mathrm{ind}_{\mathrm{K_G\,Z}}^{\mathrm{G}} \mathrm{Sym}^r k^2)$, correspondant à la double classe $\mathrm{K_G\,Z}\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathrm{K_G}$ tel que l'algèbre de Hecke soit l'algèbre des polynômes en T : $\mathcal{H}(\mathrm{K_G\,Z}, \mathrm{ind}_{\mathrm{K_G\,Z}}^{\mathrm{G}} \mathrm{Sym}^r k^2) = k[T]$.
Pour $\lambda \in k^\times$, $0 \leq r \leq p-1$ et $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k^\times$ un caractère lisse, on note $\pi(\lambda, r, \chi)$ la représentation lisse

$$\pi(r, \lambda, \chi) := \frac{\mathrm{ind}_{\mathrm{K_G\,Z}}^{\mathrm{G}} \mathrm{Sym}^r k^2}{(T - \lambda)} \otimes (\chi \circ \det).$$

Barthel et Livné ont alors démontré les résultats suivants :

Proposition 3.1.8. *1. Si $\lambda \neq 0$ et $(r, \lambda) \notin \{(0, \pm 1), (p-1, \pm 1)\}$, alors $\pi(r, \lambda, \chi)$ est irréductible, et est isomorphe à la tordue par un caractère d'une induite parabolique (induction à* G *d'un caractère d'un sous-groupe de Borel). En particulier $\pi(r, \lambda, 1) \simeq \mathrm{ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\mu_\lambda \otimes \mu_{\lambda^{-1}}\omega^r)$.*

2. L'induite parabolique $\mathrm{ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}1$ se décompose en

$$0 \to 1 \to \mathrm{ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}1 \to \mathrm{St} \to 0$$

où St *est une représentation irréductible de* G.

3. Un quotient irréductible de $\pi(r, 0, \chi)$ n'est pas quotient d'une induite parabolique.

Les $\pi(r, \lambda, \chi)$ irréductibles, avec $\lambda \neq 0$ sont appelées séries principales , St est appelée représentation de Steinberg ou représentation spéciale, et les quotients irréductibles de $\pi(r, 0, \chi)$ sont appelées représentations supersingulières. Ces derniers sont exactement les représentations supercuspidales, c'est-à-dire les représentations qui ne sont pas sous-quotients d'induites paraboliques.
Tous les résultats énoncés jusqu'à présent restent valables si l'on remplace $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ par $\mathrm{GL}_2(F)$, où F est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Mais certains phénomènes sont propres à $\mathbf{Q}_p$: Breuil a prouvé ([Bre03a]) que les $\pi(r, 0, \chi)$ étaient irréductibles, classifiant ainsi les représentations supersingulières.
Dès que $F \neq \mathbf{Q}_p$, ces résultats ne sont plus valables, et il existe beaucoup plus de supersingulières (cf. [BP12]), même dans le cas où $[F : \mathbf{Q}_p] = 2$.

Des résultats de Barthel et Livné, couplés au résultat précédent de Breuil permettent alors d'énoncer une classification complète des représentations irréductibles de G :

Théorème 3.1.9. *Une représentation lisse irréductible de* G*, admettant un caractère central, est, à isomorphisme près, d'un des quatre types suivants :*

- *une représentation de dimension un : $\chi \circ \det$, où $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k^\times$ est un caractère lisse,*
- *une tordue de la Steinberg : $\mathrm{St} \circ \chi$,*
- *une série principale : $\pi(r, \lambda, \chi)$, avec $\lambda \neq 0$ et $(r, \lambda) \notin \{(0, \pm 1), (p-1, \pm 1)\}$,*
- *une supersingulière $\pi(r, 0, \chi)$, $0 \leq r \leq p-1$.*

De plus, il n'existe pas d'isomorphismes entre ces différentes catégories, et les seuls entrelacements non triviaux sont :

- *Si $\lambda \neq 0$ et $(r, \lambda) \notin \{(0, \pm 1), (p-1, \pm 1)\}$, alors $\pi(r, \lambda, \chi) \simeq \pi(r, -\lambda, \chi\mu_{-1})$.*
- *Si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq \pm 1$, alors $\pi(0, \lambda, \chi) \simeq \pi(p-1, \lambda, \chi)$.*
- *$\pi(r, 0, \chi) \simeq \pi(r, 0, \chi\mu_{-1}) \simeq \pi(p-1-r, 0, \chi\omega^r) \simeq \pi(p-1-r, 0, \chi\omega^r\mu_{-1})$.*

En particulier, les seules représentations de dimension finie sont les caractères, et toutes les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sont de présentation finie (au sens de [Hu12]), et admissibles.
Berger a prouvé dans [Ber11a], en utilisant cette classification, que toute représentation lisse irréductible de G admet un caractère central, et donc est d'un des types

précédents.

Enfin, à partir de cette classification, Breuil a proposé dans [Bre03b] une correspondance de Langlands semi-simple , mettant en bijection certaines représentations semi-simples de G avec les représentations semi-simples de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$. De manière précise : si on note $[p-3-r]$ l'unique entier dans $\{0,\dots,p-2\}$ congru à $p-3-r$ modulo $p-1$, alors la correspondance de Breuil est la suivante : pour $r \in \{0,\dots,p-1\}$, $\lambda \in \overline{\mathbf{F}_p}$ et $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to \overline{\mathbf{F}_p}^\times$ un caractère lisse,

– Si $\lambda = 0$,

$$\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1}) \otimes \chi \longleftrightarrow \frac{\mathrm{ind}_{\mathrm{K_G\,Z}}^{\mathrm{G}} \mathrm{Sym}^r \overline{\mathbf{F}_p}^2}{(T)} \otimes \chi.$$

– Si $\lambda \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} \omega_{r+1}\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \otimes \chi \leftrightarrow \left(\frac{\mathrm{ind}_{\mathrm{K_G\,Z}}^{\mathrm{G}} \mathrm{Sym}^r \overline{\mathbf{F}_p}^2}{(T-\lambda)} \right)^{\mathrm{ss}} \otimes \chi \oplus \left(\frac{\mathrm{ind}_{\mathrm{K_G\,Z}}^{\mathrm{G}} \mathrm{Sym}^{[p-3-r]} \overline{\mathbf{F}_p}^2}{(T-\lambda^{-1})} \right)^{\mathrm{ss}} \otimes \chi.$$

En particulier, cette correspondance associe les représentations supersingulières aux représentations irréductibles de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$. Cette correspondance est à la base du développement du programme de Langlands p-adique, et en particulier, la correspondance de Langlands p-adique est compatible avec la correspondance semi-simple de Breuil.

La connaissance des représentations irréductibles de G permet de construire des représentations de B par restriction, et Berger a prouvé, via la correspondance de Langlands p-adique, que la plupart des représentations obtenues étaient encore irréductibles en tant que représentations du Borel :

Proposition 3.1.10 ([Ber10b, Théorème B])**.** *Soit* Π *une représentation lisse irréductible de* G.

– *Si* Π *est un caractère, une série spéciale ou une supersingulière, alors sa restriction à* B *est encore irréductible.*
– *Si* Π *est une série principale isomorphe à* $\mathrm{ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}\sigma_1 \otimes \sigma_2$*, alors sa restriction à* B *est de longueur* 2 *est possède* $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ *comme sous-représentation.*

Notons que ce résultat a été également prouvé par Paškūnas dans [Paš07] uniquement avec des outils de théorie des représentations.

2 Dual des représentations lisses

Dans toute cette partie, nous considérons k un corps quelconque muni de la topologie discrète. Les résultats des sections 2.1 et 2.2 ont été prouvés par Lefschetz dans [Lef42].

2.1 Espaces linéairement compacts et espaces de prodimension finie

On note $\mathsf{EV}_{\mathrm{disc}}(k)$ la catégorie dont les objets sont les k-espaces vectoriels discrets et les morphismes sont les applications k-linéaires.

On note $\mathsf{EV}_{\mathrm{pdf}}(k)$ la catégorie dont les objets sont les k-espaces vectoriels de prodimension finie , c'est-à-dire limite projective de k-espaces vectoriels discrets de dimension finie. Les morphismes de $\mathsf{EV}_{\mathrm{pdf}}(k)$ sont les applications k-linéaires continues.

Définition 3.2.1. Un k-espace vectoriel V est appelé k-espace vectoriel topologique si c'est un groupe topologique abélien tel que
- V est un espace topologique séparé,
- l'application $k \times V \to V : (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ est continue.

On dit que la topologie de E est linéaire si 0 possède une base de voisinages formée de sous-espaces vectoriels de E, de sorte que tout point de E possède une base de voisinages formée de sous-espaces affines de E.

Exemple 3.2.2.
1. Si $V \in \mathsf{EV}_{\mathrm{disc}}(k)$, alors V est un k-espace vectoriel topologique, dont la topologie est linéaire.
2. Un k-espace vectoriel topologique de dimension finie possède une topologie linéaire si et seulement si il est discret (voir la preuve de la proposition 3.2.9).

Lemme 3.2.3. *Dans un espace vectoriel topologique V dont la topologie est linéaire, un sous-espace vectoriel W qui est un voisinage de 0 est à la fois ouvert et fermé.*

Démonstration. Si $x \in W$, alors $x + W \subset W$ et donc W est un voisinage de x. Ainsi W est un voisinage de chacun de ses points, ce qui prouve que W est ouvert.
Si $x \notin W$, alors $(x + W) \cap W = \emptyset$, et donc le complémentaire de W est ouvert, ce qui prouve que W est fermé. □

Lemme 3.2.4. *Si $V \in \mathsf{EV}_{\mathrm{pdf}}(k)$, alors V est séparé, et donc est un k-espace vectoriel topologique.*

Démonstration. Notons $V = \varprojlim_{i \in I} V_i \subset \prod_{i \in I} V_i$, avec les V_i de dimension finie, et soient $x = (x_i)_{i \in I} \neq y = (y_i)_{i \in I}$.
En particulier, il existe $i_0 \in I$ tel que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$, et alors $V_x = \prod_{i \neq i_0} V_i \times \{x_{i_0}\}$ (resp. $V_y = \prod_{i \neq i_0} V_i \times \{y_{i_0}\}$) est un voisinage ouvert de x (resp. y) et $V_x \cap V_y = \emptyset$. □

Rappelons qu'un espace topologique séparé X est compact si et seulement si tout filtre $\mathcal{F}$ sur X possède un point d'adhérence (c'est-à-dire un point dans l'adhérence de tout élément de $\mathcal{F}$). Dans les espaces vectoriels topologiques munis d'une topologie linéaire, il existe une notion semblable, plus faible que la compacité, introduite par Lefschetz dans [Lef42] :

Définition 3.2.5. Soit E un k-espace vectoriel topologique muni d'une topologie linéaire. Un sous-espace affine F de E est dit linéairement compact si tout filtre $\mathcal{F}$ de F qui possède une base de filtre formée de sous-espaces affines possède un point adhérent.

Remarque 3.2.6. Il est évident que si E est un espace vectoriel topologique linéaire compact, alors il est linéairement compact.

La proposition suivante montre qu'il existe pour les espaces linéairement compacts une caractéristation analogue à la propriété de Borel-Lebesgue pour les espaces compacts.

Proposition 3.2.7. *Un espace topologique E muni d'une topologie linéaire est linéairement compact si et seulement si pour toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de sous-espaces affines fermés de E telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, il existe une sous-famille finie d'intersection vide.*

Démonstration. Supposons que E soit linéairement compact, que $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces affines fermés d'intersection vide, et que toute sous-famille finie soit d'intersection non vide. Alors les $(F_i)_{i\in I}$ engendrent un filtre sur E sans point adhérent, puisqu'un tel point serait dans tous les F_i, qui sont fermés.
Inversement, si E n'est pas linéairement compact, il existe un filtre $\mathcal{F}$ sans point d'adhérence, avec une base de filtre $(F_i)_{i\in I}$ formée de sous-espaces affines. Alors la famille $(\bar{F}_i)_{i\in I}$ est d'intersection vide, bien que toute sous-famille finie soit d'intersection non vide. □

Le complémentaire d'un sous-espace affine fermé n'étant pas en général un sous-espace affine ouvert, il n'existe pas de résultat analogue pour les recouvrements par des sous-espaces affines ouverts.

Les espaces linéairement compacts partagent de nombreuses propriété avec les espaces compacts, les preuves connues dans le cas compact se transposant aisément.

Proposition 3.2.8. *Soient E, F deux espaces vectoriels topologiques munis d'une topologie linéaire, alors :*

1. *tout sous-espace linéairement compact de E est fermé,*
2. *si E est linéairement compact, tout sous-espace affine fermé de E est encore linéairement compact,*
3. *si E est linéairement compact, et $f : E \to F$ est une application linéaire continue, alors* $\mathrm{Im} f$ *est linéairement compact,*
4. *si E est linéairement compact et F est un sous-espace vectoriel fermé de E, alors le quotient E/F est encore linéairement compact,*
5. *un produit d'espaces linéairement compacts est linéairement compact.*

Démonstration. Soit E' un sous-espace linéairement compact de E, et x_0 un point de l'adhérence de E'. Alors, si $(V_i)_{i\in I}$ est le filtre des voisinages de x_0, $(F_i \cap E')_{i\in I}$ est un filtre sur E', qui ne peut avoir que x_0 comme point d'adhérence, puisque E' est séparé.
Mais, la topologie de E étant linéaire, ce filtre possède une base formée de sous-espaces affines de E', et donc possède un point d'adhérence dans E', ce qui prouve que x_0 est dans E', et donc prouve le point 1).

Pour 2), soit E' un sous-espace affine fermé de E. Alors si les $(F_i)_{i\in I}$ forment une famille de sous-espaces affines fermés de E' d'intersection vide, ce sont encore des sous-espaces affines fermés de E, et donc il en existe une sous-famille finie d'intersection vide.

Passons à 3) : si $\mathcal{F} = (F_i)_{i\in I}$ est un filtre sur $f(E)$ dont une base est formée de sous-espaces affines, alors la famille $(f^{-1}(F_i))_{i\in I}$ engendre un filtre sur E vérifiant la

même propriété, et qui doit donc posséder un point d'adhérence x_0. $f(x_0)$ est alors adhérent au filtre de départ $\mathcal{F}$, et donc $f(E)$ est linéairement compact.

4) est une application directe de 3), et la preuve de 5) est la même que celle du théorème de Tychonov. Ces preuves se trouvent par exemple dans [Köt69] 10.9. □

Il est facile de caractériser les espaces discrets linéairement compacts :

Proposition 3.2.9. *Un espace vectoriel topologique V muni d'une topologie linéaire est linéairement compact et discret si et seulement si il est de dimension finie.*

Démonstration. Soit V linéairement compact et discret, et supposons V de dimension infinie. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de V. Soit $A_i = e_i + \mathrm{Vect}(e_j, j \neq i)$: c'est un sous-espace affine fermé de V. Alors l'intersection des A_i est vide, bien que l'intersection d'un nombre fini de A_i, notons les $A_{i_0}, \dots, A_{i_n}$, ne soit jamais vide : elle contient $e_{i_0} + \cdots + e_{i_n}$. D'où une contradiction : V est de dimension finie.

Inversement, si V est de dimension finie, alors il doit être discret. En effet, puisque V est séparé, il existe $W \subset V$ un sous-espace vectoriel ouvert non réduit à 0. Mais alors W doit aussi possèder un sous-espace vectoriel ouvert strict, et par récurrence sur la dimension de cet ouvert, on en déduit que $\{0\}$ est ouvert, donc que V est discret.
Il est alors clair que V est linéairement compact, par exemple car c'est un produit de copies de k, qui est linéairement compact. □

Puisqu'un produit d'espaces linéairement compacts est linéairement compact, alors une limite projective d'espaces linéairement compacts, avec des applications de transition linéaires continues, est linéairement compacte (pour la topologie de la limite projective). En particulier, puisque les espaces de dimension finie sont linéairement compacts, une limite projective d'espaces de dimension finie (c'est-à-dire un espace de prodimension finie) est toujours linéairement compacte.

Proposition 3.2.10. *Si V est un espace linéairement compact, et si $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel de V ouvert, alors W est de codimension finie. Inversement, si W est fermé et de codimension finie, alors W est ouvert.*

Démonstration. Si W est ouvert, alors il est fermé par la proposition 3.2.3, et par définition de la topologie quotient, $\{0\}$ est ouvert dans V/W, qui est linéairement compact car W est fermé. Mais alors V/W est discret et linéairement compact : il est de dimension finie, et donc W est de codimension finie.

Réciproquement, si W est fermé et de codimension finie, alors V/W est de dimension finie, et donc discret (il est séparé car W est fermé). On en déduit que W est ouvert comme image réciproque de 0 par la projection canonique $V \to V/W$. □

Les lemmes techniques suivants nous seront nécessaires par la suite :

Lemme 3.2.11. *Soit $\theta : \{X_i, \varphi_{ij}, I\} \to \left\{X'_i, \varphi'_{ij}, I\right\}$ un morphisme de systèmes projectifs d'espaces linéairement compacts tel que chaque $\theta_i : X_i \to X'_i$ soit linéaire surjectif. Alors $\varprojlim \theta : \varprojlim X_i \to \varprojlim X'_i$ est surjective.*

Démonstration. Soit $(x'_i) \in \varprojlim X'_i$, et $\tilde{X}_i = \theta_i^{-1}(x'_i) \subset X_i$. Alors $\tilde{X}_i$ est un sous-espace affine fermé de X_i, et donc est linéairement compact. De plus, si $i \leq j, \varphi_{ij}(\tilde{X}_i) \subset \tilde{X}_j$. Donc $(\tilde{X}_i, \varphi_{ij})$ est un système projectif de sous-espaces vectoriels linéairement

compacts non vides, de sorte que $\varprojlim \tilde{X}_i \neq \emptyset$. Soit donc $(x_i) \in \varprojlim \tilde{X}_i \subset \varprojlim X_i$. Alors $\varprojlim \theta((x_i)) = (x'_i)$. □

Corollaire 3.2.12. *Soit $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ un système projectif d'espaces linéairement compacts. Supposons que $\{\varphi : X \to X_i\}$ soit un système compatible d'applications linéaires continues surjectives. Alors l'application déduite par propriété universelle $\theta : X \to \varprojlim X_i$ est surjective.*

Démonstration. On applique le lemme précédent au système constant (X, id, I). Alors on en déduit une application surjective $\theta : X = \varprojlim X \to \varprojlim X_i$. □

Proposition 3.2.13. *Si V est un k-espace vectoriel linéairement compact dont une base $\mathcal{B}$ de voisinages de 0 est formée de sous-espaces vectoriels ouverts, alors*

$$V = \varprojlim_{W \in \mathcal{B}} V/W.$$

Démonstration. La base $\mathcal{B}$ est ordonnée par anti-inclusion, et les morphismes $\psi_V : V \to V/W$ forment un système compatible d'épimorphismes, et donc par la propriété universelle des limites projectives, il existe un morphisme continu $\psi : V \to \varprojlim_W V/W$. On souhaite prouver que ψ est un isomorphisme topologique.
Par le lemme 3.2.11, ψ est surjectif. Montrons que ψ est injectif : soit $x \in V$ tel que $\psi(x) = 0$. Alors, quel que soit $W \in \mathcal{B}$, $x \in W$. Mais puisque V est séparé, $\bigcap_{W \in \mathcal{B}} W = \{0\}$, et donc $x = 0$. Comme V est linéairement compact, on en déduit que ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques. □

Corollaire 3.2.14. *Si V est un k-espace vectoriel linéairement compact, alors $V \in \mathsf{EV}_{\mathrm{pdf}}(k)$.*

Démonstration. Par définition d'une topologie linéaire, et par la proposition 3.2.10, V possède une base $\mathcal{B}$ de voisinages de 0 formée de sous-espaces vectoriels de codimension finie, la proposition précédente permet alors de conclure. □

Corollaire 3.2.15. *Un k-espace vectoriel topologique est linéairement compact si et seulement si il est de prodimension finie.*

Remarque 3.2.16. Dans le cas où k est fini, les espaces linéairement compacts sont exactement les k-espaces vectoriels topologiques.

2.2 Dualité entre espaces discrets et espaces de prodimension finie

Lefschetz a généralisé dans [Lef42] la dualité de Pontryagin en une dualité entre les espaces discrets et les espaces de prodimension finie (ou de manière équivalente les espaces linéairement compacts), nous redonnons ici la preuve de cette dualité.

Si V est un espace vectoriel topologique sur k on note $V^* = \mathrm{Hom}_{cont}(V, k)$ l'ensemble des formes k-linéaires continues sur V. On le munit d'une structure de k-espace vectoriel topologique en prenant comme base de voisinages de 0 les orthogonaux des sous-espaces vectoriels linéairement compacts. Notons qu'il est facile de voir qu'une telle topologie est séparée : si f et g sont deux formes linéaires distinctes

sur V, soit $v \in V$ tel que $f(v) \neq g(v)$. Alors $f + (k \cdot v)^\perp$ et $g + (k \cdot v)^\perp$ sont des voisinages de f et g tels que $(f + (k \cdot v)^\perp) \cap (g + (k \cdot v)^\perp) = \emptyset$.
Puisqu'un espace vectoriel topologique de dimension finie est discret, il est évident que si V est de dimension finie, alors $V \simeq V^*$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques, donnant un premier cas de dualité entre espaces discrets et espaces de prodimension finie.

Proposition 3.2.17. *Si $V \in \mathsf{EV}_{\mathrm{disc}}(k)$, alors son dual V^* est de prodimension finie.*

Démonstration. V étant discret, toutes les formes linéaires sur V sont continues. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de V. On définit une forme linéaire $u_i \in V^*$ par $u_i(e_i) = 1$ et $u_i(e_j) = 0$ si $i \neq j$.
Il est bien connu que V^* est isomorphe en tant que k-espace vectoriel à $\prod_{i \in I} k.u_i$.
Mais une base de voisinages ouverts de 0 dans V^* est donnée par l'ensemble des

$$U_{v_1,\ldots,v_n} = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)^\perp, v_1, \ldots, v_n \in V.$$

Ainsi, la topologie sur V^* coïncide avec la topologie produit sur $\prod_{i \in I} k.u_i$, chacun des $k.u_i$ étant muni de la topologie discrète. Ainsi, l'isomorphisme $V^* \simeq \prod_{i \in I} k.u_i$ est un isomorphisme de k-espaces vectoriels topologiques.
Mais comme un produit d'espaces linéairement compacts est linéairement compact, V^* est linéairement compact, et donc de prodimension finie. □

Inversement, nous allons prouver que si V est de prodimension finie, alors son dual est discret. Nous allons même prouver un résultat un peu plus précis :

Proposition 3.2.18. *Soit $\{W_i, \varphi_{ij}, I\}$ un système projectif d'espaces de prodimension finie, et soit $V = \varprojlim_I W_i$. Alors $V^* = \varinjlim_I W_i^*$.*

Démonstration. Notons $\varphi_i : V \to W_i$ la projection canonique. Soit $f : V \to k$ une forme linéaire continue sur V. Alors il existe j tel que f se factorise à travers W_j : il existe une application linéaire continue $f_j : W_j \to k$ telle que $f = f_j \circ \varphi_j$. Définissons

$$\Phi : V^* \to \varinjlim W_i^*$$

par $\Phi(f) = \tilde{f}_j$, où $\tilde{f}_j$ est l'élément de $\varinjlim W_i^*$ représenté par f_j. L'application Φ est bien définie car si f se factorise aussi à travers W_k, $f = f_k \circ \varphi_k$, et on vérifie aisément que $\tilde{f}_j = \tilde{f}_k$. Alors clairement Φ est un morphisme surjectif. Il est aussi injectif car si $\Phi(f) = \tilde{f}_j = 0$, alors $f = f_r \circ \varphi_r = 0$, pour $r \geq j$.
Puisque V est linéairement compact, $\{0\}$ est un voisinage ouvert de 0, de sorte que V^* est discret. Le même raisonnement prouve que les W_i^* sont dicrets. Ainsi, V^* est $\varinjlim W_i^*$ sont tous deux discrets, et Φ est donc un isomorphisme topologique. □

De même, il est possible de prouver un résultat semblable pour les espaces discrets :

Proposition 3.2.19. *Soit $\{V_i, \varphi_{ij}, I\}$ un système inductif d'espaces discrets de dimension finie, et $V = \varinjlim_I V_i$. Alors*

$$V^* = \varprojlim_{i \in I} V_i^*.$$

Démonstration. Notons $\varphi_i : V_i \to V$ le morphisme canonique, et soit $f : V \to k$ une forme linéaire, et soit $f_j = f \circ \varphi_j : V_j \to k$. Alors $(f_j)_j \in \varprojlim V_i^*$. L'application $\Psi : V^* \to \varprojlim_j V_j^*$ définie par $f \mapsto (f_j)_j$ est clairement un isomorphisme de k-espaces vectoriels. Nous allons montrer qu'en fait c'est un homéomorphisme, et puisque V^* est linéairement compact, il suffit de prouver qu'il est continu.
Mais si on note $\rho_j : \varprojlim V_i^* \to V_j^*$ la projection canonique, alors Ψ est surjective si et seulement si $\rho_j \circ \Psi$ l'est, quel que soit $j \in I$. Puisque les V_i sont de dimension finie, les V_i^* sont discrets, donc il suffit de vérifier que $(\rho_j \circ \Psi)^{-1}(\{0\})$ est ouvert, ce qui est bien le cas par définition de la topologie sur V^*. □

De tous ces résultats, on déduit le résultat suivant (prouvé par Lefschetz dans [Lef42, 28.2]) :

Théorème 3.2.20. *Les foncteurs*

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{EV}_{\mathrm{disc}}(k) \to \mathsf{EV}_{\mathrm{pdf}}(k) & \qquad & \mathsf{EV}_{\mathrm{pdf}}(k) \to \mathsf{EV}_{\mathrm{disc}}(k) \\ V \mapsto V^* & & W \mapsto W^* \end{array}$$

sont deux anti-équivalences de catégories quasi-inverses.

Remarque 3.2.21. Dans [Lef42], cette dualité est prouvé dans un cadre plus général et fournit une dualité de la catégorie k-espaces vectoriels localement linéairement compacts dans elle même, qui se restreint en la dualité énoncée ci-dessus.

2.3 Dualité pour les représentations

Les résultats de la section précédente s'étendent en une dualité entre les représentations lisses d'un groupe localement profini G, et les représentations de prodimension finie du même groupe.
De manière plus précise, si G est un groupe topologique, on note $\mathsf{EV}^G_{\mathrm{disc}}(k)$ la catégorie des représentations k-linéaires lisses de G, et $\mathsf{EV}^G_{\mathrm{pdf}}(k)$ la catégorie des espaces vectoriels de prodimension finie munis d'une action linéaire continue de G.
Si $V \in \mathsf{EV}^G_{\mathrm{disc}}(k)$ ou $V \in \mathsf{EV}^G_{\mathrm{pdf}}(k)$, on définit une action continue de G sur V^* par $g.f(v) = f(g^{-1}v)$. On obtient alors l'équivalence de catégories suivante :

Proposition 3.2.22. *Les foncteurs $V \mapsto V^*$ réalisent une anti-équivalence de catégorie entre $\mathsf{EV}^G_{\mathrm{disc}}(k)$ et $\mathsf{EV}^G_{\mathrm{pdf}}(k)$.*

Démonstration. En vertu de l'équivalence 3.2.20, tout ce qu'il reste à vérifier est la continuité des actions.
Soit donc V un espace vectoriel de prodimension finie muni d'une action continue de G, et soit $f \in V^*$. Alors, l'application $G \times V \to k : (g, x) \mapsto f(gx - x)$ est continue, donc son noyau est ouvert. Il contient alors $H \times W$, où H est un sous-groupe ouvert de G et W un sous-espace vectoriel ouvert de V, qui est donc de codimension finie. Soient donc $x_1, \ldots, x_n \in V$ tels que $V = W \oplus kx_1 \oplus \cdots \oplus kx_n$.
Pour chaque i, par continuité de l'action de G, il existe un sous-groupe ouvert H_i de G tel que $f(gx_i - x_i) = 0$ si $g \in H_i$. Soit $H = H \cap H_1 \cdots \cap H_n$: c'est encore un sous-groupe ouvert de G, et si $x \in V$, et $h \in H$, $f(gx - x) = 0$, et donc $f \in (V^*)^H$:

la représentation V^* est bien lisse.

Inversement, soit V une représentation lisse de G, et soit $f \in V^*$. Considérons un voisinage ouvert W de f, qu'on peut supposer être égal à $\{g \in V^* : g_{|W_1} = f_{|W_1}\}$, avec W_1 un sous-espace vectoriel de dimension finie de V.
Alors soit $v_1, \ldots, v_n$ une base de W_1, et pour chaque i, soit H_i un sous-groupe ouvert de G tel que $v_i \in V^{H_i}$. Alors, pour $h \in H = \bigcap H_i$, et $g \in W$, $h.g \in W$ car $(h.g)(v) = g(h^{-1}v) = g(v) = f(v)$ pour $v \in W_1$. □

De plus, cette équivalence de catégories préserve les représentations topologiquement irréductibles, comme le prouve la proposition suivante. Notons que dans le cas où V est discret, les représentations topologiquement irréductibles se confondent avec les représentations irréductibles puisque toute sous-représentation de V est fermée.

Proposition 3.2.23. *Si $V \in \mathsf{EV}^G_{\mathrm{disc}}(k)$ ou $V \in \mathsf{EV}^G_{\mathrm{pdf}}(k)$ est topologiquement irréductible, alors V^* est également topologiquement irréductible.*

Démonstration. Soit W un sous-espace fermé de V^* stable sous l'action de G, et soit alors $W^\perp = \{v \in V : f(v) = 0, \forall f \in W\}$ $W^\perp$ est alors un sous-espace fermé de V, stable sous l'action de G. De plus, $(W^\perp)^* \simeq V^*/W$, et donc par le théorème 3.2.20, $W^\perp = (V^*/W)^*$.
V étant topologiquement irréductible, on a $W^\perp = \{0\}$, et alors $W = V^*$, ou $W^\perp = V$, et alors $W = \{0\}$. □

Soit H un sous-groupe fermé de G, topologiquement de type fini. Si V est une k-représentation lisse de G, ou une k-représentation de prodimension finie, alors on note $V(H)$ le sous-espace vectoriel de V engendré par les $h \cdot v - v$, pour $h \in H$ et $v \in V$. On note alors $V_H = V/V(H)$ l'espace des coinvariants : c'est le plus grand quotient de V sur lequel H agit trivialement.
On note comme d'habitude $V^H \subset V$ l'ensemble des invariants sous H. Par continuité de l'action de G sur V, V^H est un sous-espace fermé de V.

Proposition 3.2.24. *Si $V \in \mathsf{EV}^G_{\mathrm{disc}}(k)$ ou $\mathsf{EV}^G_{\mathrm{pdf}}(k)$, et si H est un sous-groupe fermé de G, topologiquement de type fini, alors $V(H)$ est fermé.*

Démonstration. Dans le cas où V est une représentation lisse de G, il n'y a rien à prouver puisque tout sous-ensemble de V est fermé.
Dans le cas où $V \in \mathsf{EV}^G_{\mathrm{pdf}}(k)$, alors considérons un sous-ensemble fini X d'éléments de H engendrant un sous-groupe dense H' de H (un tel ensemble existe puisque H est topologiquement de type fini). Alors pour $h \in X$, le sous-espace vectoriel $(h-1) \cdot V$ est fermé car V est linéairement compact, et son image par l'application linéaire continue $x \mapsto (h-1) \cdot x$ est aussi linéairement compacte, donc fermée. Ainsi, $\sum_{g \in X} (g-1) \cdot V$ est fermé.
Mais alors $V(H') = \sum_{g \in X} (g-1) \cdot V$ car si $h_1, \ldots, h_n \in X$, $v \in V$, alors

$$h_1 \ldots h_n.v - v = h_1 \cdot (h_2 \ldots h_n v) - h_2 \ldots h_n \cdot v + \cdots - v$$

et donc $h_1 \ldots h_n v - v \in V(H')$.
Pour $v \in V$, l'image de H' par l'application $g \mapsto (g-1) \cdot v$ est dans $V(H')$ qui est

fermé. Par densité de H' dans H et par continuité de l'action de H sur V, l'image de H par $g \mapsto (g-1)\cdot v$ est donc également dans $V(H')$, de sorte que $V(H) \subset V(H')$. L'inclusion réciproque est évidente, et donc $V(H) = V(H')$ est fermé. □

Proposition 3.2.25. *Si $V \in \mathsf{EV}^G_{\mathrm{disc}}(k)$ ou $\mathsf{EV}^G_{\mathrm{pdf}}(k)$, alors*

$$(V^H)^* = (V^*)_H \text{ et } (V/V^H)^* = (V^*)(H).$$

Démonstration. La preuve est la même dans les deux cas, donc nous les traitons en même temps.
$f \in V^*$ s'annule sur $V(H)$ si et seulement si f est invariante par H, donc $(V^*)^H = (V_H)^*$.
Si l'on remplace V par V^*, on obtient $V^H = ((V^*)_H)^*$ et donc en dualisant $(V^H)^* = (V^*)_H$. Puisqu'on a la suite exacte

$$0 \to (V/V^H)^* \to V^* \to (V^H)^* \to 0$$

on en déduit que $(V/V^H)^* = (V^*)(H)$. □

2.4 Actions de groupes profinis

Soit $G = \varprojlim_N G/N$ un groupe profini (où la limite projective est prise sur l'ensemble des sous-groupes ouverts distingués de G), et k un corps muni de la topologie discrète. On appelle algèbre de groupe complétée et on note $k[\![G]\!]$ la limite projective des algèbres de groupes finis $k[G/N]$, où N parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts distingués de G :

$$k[\![G]\!] = \varprojlim_N k[G/N],$$

chacun des $k[G/N]$ étant muni de la topologie discrète. En particulier, $k[\![G]\!]$ est un k-espace vectoriel de prodimension finie. Remarquons que $k[G]$ est naturellement plongé dans $k[\![G]\!]$.

Définition 3.2.26. On appelle $k[\![G]\!]$-module topologique un k-espace vectoriel topologique V muni d'une structure de $k[\![G]\!]$-module tel que l'application

$$\begin{aligned} k[\![G]\!] \times V &\to V \\ (\lambda, v) &\mapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

soit continue.

Lemme 3.2.27. *Soit $V \in \mathsf{EV}^G_{\mathrm{pdf}}(k)$ une représentation de prodimension finie de G. Alors V est limite projective de représentations de dimension finie de G.*

Démonstration. Puisque la topologie de V est linéaire, V possède une base de voisinages de 0 formée de sous-espaces vectoriels ouverts. Nous allons prouver que si $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel ouvert, alors il contient un sous-espace vectoriel ouvert stable par G.
Par continuité de l'action de G sur V, pour tout $g \in G$, il existe un voisinage ouvert U_g de g et un sous-espace vectoriel ouvert $W_g \subset V$ tel que $U_g \cdot W_g \subset W$.

Les U_g pour g parcourant G forment alors un recouvrement de G, qui est compact car profini. Donc il existe $g_1, \ldots, g_n$ tels que $\bigcup_{i=1}^n U_{g_i} = G$. Soit $W' = \bigcap_{i=1}^n W_{g_i}$. C'est un sous-espace vectoriel ouvert de V, et $G \cdot W' \subset W$.
Soit alors W'' l'adhérence des combinaisons linéaires de translatés sous G d'éléments de W', c'est-à-dire de l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_i g_i \cdot w_i$ avec $g_i \in G, w_i \in W'$. C'est un sous-espace vectoriel ouvert de W, stable par G par construction.
Ainsi, par la proposition 3.2.13, $V = \varprojlim_G V/W$, la limite portant sur tous les sous-espaces vectoriels ouverts stables par G. □

Remarque 3.2.28. Au passage, ceci prouve que les représentations de prodimension finie et topologiquement irréductibles de G sont de dimension finie, puisqu'il doit exister une base de voisinages formée de sous-représentations de dimension finie.

On a alors un lien naturel entre les représentations k-linéaires de G et les $k[\![G]\!]$-modules, au moins sous certaines hypothèses :

Proposition 3.2.29. *Soient G un groupe profini et $V \in \mathsf{EV}^G_{\mathrm{disc}}(k)$. Alors V est naturellement un $k[\![G]\!]$-module topologique.*

Démonstration. Soit $v \in V$, et soit N un sous-groupe ouvert de G, tel que $v \in V^N$. Alors pour tout sous-groupe ouvert N' de G il existe une application $k[G/(N \cap N')] \to V$ définie par $\overline{g} \mapsto g \cdot v$.
Puisque les $N \cap N'$ forment une famille cofinale de l'ensemble des sous-groupes ouverts de G, cela défini bien une application $k[\![G]\!] \to V$, qui muni V d'une structure de $k[\![G]\!]$-module, et il n'y a aucune difficulté à voir que cette action est continue. □

Proposition 3.2.30. *Soient G un groupe profini et $V \in \mathsf{EV}^G_{\mathrm{pdf}}(k)$ une représentation de prodimension finie de G. Alors V est naturellement un $k[\![G]\!]$-module topologique.*

Démonstration. Comme expliqué précédemment, V est une limite projective de représentations de dimension finie : $V = \varprojlim_i V_i$ où les V_i sont des représentations lisses de dimension finie de G.
Or, chacune de ces représentations est un $k[\![G]\!]$-module par la proposition précédente, ce qui permet de munir V d'une structure de $k[\![G]\!]$-module topologique. □

2.5 Le lemme de Nakayama topologique

Nous prouvons ici un lemme de Nakayama topologique pour les représentations de prodimension finie, analogue à celui qu'on obtient dans le cas des représentations profinies (voir par exemple [BH97]).

Proposition 3.2.31. *Soit Λ une k-algèbre topologique commutative compacte et I un idéal de Λ, avec $I^n \to 0$. Soit V un k-espace vectoriel de prodimension finie muni d'une structure de Λ-module topologique. Si $I.V = 0$, alors $V = 0$.*

Démonstration. Supposons au contraire que V ne soit pas réduit à l'élément neutre, et soit U un sous-espace vectoriel ouvert de V, avec $U \neq V$. Par continuité de l'action de Λ, il existe un sous-espace vectoriel ouvert W de V et $k \in \mathbf{N}$ tels que $I^k \cdot W \subset U$. Mais W étant ouvert, il est de codimension finie. Soit alors $v_1, \ldots, v_n$ une base d'un supplémentaire de W. Pour chaque i, il existe k_i tel que $I^{k_i} \cdot v_i \in U$. Soit donc $k = \max\{k, k_1, \ldots, k_n\}$. On a alors $I^k \cdot V \subset U$. Mais puisque $I \cdot V = V$, par récurrence on montre que $I^k \cdot V = V$, et donc $V \subset U$, ce qui est absurde. □

Remarque 3.2.32. Bien que ce ne soit pas évident, le fait que la topologie de V soit linéaire est nécessaire dans la preuve (i.e, un espace vectoriel topologique compact ne suffit pas), car en règle générale on peut juste affirmer l'existence d'un ouvert W_x de V tel que $\{a.w, a \in I^n, w \in W_x\} \subset W$. Il faut donc un moyen de pouvoir prendre pour W un ouvert stable par addition, ce qui était par exemple le cas si V était profini.

Corollaire 3.2.33. *Sous les hypothèses précédentes, V/IV est un Λ/I-module de type fini si et seulement si V est un Λ-module de type fini.*

Démonstration. Il est évident que si V est un Λ-module de type fini, alors V/IV est un Λ/I-module de type fini. Inversement, si V/IV est de type fini sur Λ/I, soient $v_1, \ldots, v_n$ des relèvements à V de générateurs de V/IV. Posons $W = \Lambda v_1 + \cdots + \Lambda v_n$. Puisque W est l'image continue d'un compact par une application continue, il est fermé, et donc V/W est linéairement compact. On peut donc appliquer la proposition précédente à V/W, qui vérifie alors $I(V/W) = (IV + W)/W = V/W$, et donc $V/W = 0$ et $V = W$ est de type fini sur Λ. □

En pratique, nous appliquerons souvent ce résultat dans le cas où k est un corps de caractéristique p, et V est une représentation k-linéaire de prodimension finie de $\mathbf{Z}_p$, de sorte que V est alors un $k[\![\mathbf{Z}_p]\!] \simeq k[\![\pi]\!]$-module.
Le corollaire nous dit alors que $V/\pi V$ est un k-espace-vectoriel de dimension finie si et seulement si V est un $k[\![\pi]\!]$-module de type fini.

3 (ψ, Γ)-modules et (φ, Γ)-modules

Dans tout ce qui suit et jusqu'à la fin du chapitre 3, sauf mention explicite du contraire, k est un corps de caractéristique p, non nécessairement fini.

Nous introduisons ici les (φ, Γ)-modules sur $k(\!(\pi)\!)$, en imitant la définition de Fontaine. Nous étudions en particulier l'opérateur ψ, et construisons les réseaux $D^\sharp$ et $D^\natural$ de Colmez, et montrons comment reconstruire φ à partir de la donnée de ψ.

À l'exception de ceux des sections 3.4 et 3.5, les résultats de cette partie ne sont pas originaux, mais dûs à Colmez, au moins dans le cas d'un corps fini, ce qui en pratique ne change pas grand-chose. Nous redonnons quand même ces preuves pour deux raisons. La première est que les preuves de Colmez sont données dans le cas de (φ, Γ)-modules de caractéristique nulle, et bien que la plupart du temps elles se ramènent par dévissage à travailler avec des objets de torsion, elles sont souvent plus longues que celles que nous donnons ici. La seconde raison est que parfois (en particulier pour la preuve du théorème 3.3.50) les résultats de Colmez utilisent l'équivalence entre (φ, Γ)-modules et représentations galoisiennes, dont nous ne disposons que si k est fini.

3.1 (φ, Γ)-modules en caractéristique p

Soit $k(\!(\pi)\!)$ le corps des séries de Laurent à coefficients dans k, et soit φ l'endomorphisme de $k(\!(\pi)\!)$ défini par

$$\varphi\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n\pi^n\right) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n\pi^{pn}.$$

On définit une action k-linéaire continue de Γ sur $k(\!(\pi)\!)$ en posant

$$\gamma\cdot\pi = (1+\pi)^{\chi_{\mathrm{cycl}}(\gamma)} - 1.$$

Si D est un espace vectoriel de dimension finie sur $k(\!(\pi)\!)$, on appelle réseau de D un sous $k[\![\pi]\!]$-module de type fini de D de rang égal à la dimension de D sur $k(\!(\pi)\!)$. Si M, N sont deux réseaux de D, alors il existe deux entiers a et b tels que $\pi^a N \subset M \subset \pi^b N$ car $k[\![\pi]\!]$ est un anneau de valuation discrète. En particulier, si M et N sont deux réseaux tels que $N \subset M$, alors M/N est un k-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 3.3.1. On appelle φ-module sur $k(\!(\pi)\!)$ un $k(\!(\pi)\!)$-espace vectoriel D de dimension finie d muni d'une application $\varphi : D \to D$, semi-linéaire par rapport à $\varphi : k(\!(\pi)\!) \to k(\!(\pi)\!)$, et telle que la matrice de φ dans une base soit dans $\mathrm{GL}_d(k(\!(\pi)\!))$.

C'est un résultat classique que, quelle que soit la base de D choisie, la matrice de φ dans cette base est dans $\mathrm{GL}_d(k(\!(\pi)\!))$.

Il est en fait possible d'enrichir la notion de φ-module en celle de (φ, Γ)-module, en imitant la définition donnée par Fontaine dans le cas d'un corps de coefficients fini.

Définition 3.3.2. On appelle (φ, Γ)-module sur $k(\!(\pi)\!)$ un φ-module muni d'une action semi-linéaire continue de Γ, commutant à celle de φ.

Exemple 3.3.3. Soit D un $k(\!(\pi)\!)$-espace vectoriel de dimension 1, de base e, $\lambda \in k^\times$ et $r \in \mathbf{Z}$. Alors on peut munir D d'une structure de (φ, Γ)-module en posant $\varphi(e) = \lambda e$ et $\gamma_a(e) = \omega(a)^r e$ (où comme précédemment, γ_a est l'unique élément de Γ tel que $\chi_{\mathrm{cycl}}(\gamma_a) = a$). On note $D_{\lambda,r}$ ce (φ, Γ)-module. Il s'agit en fait des seuls exemples de (φ, Γ)-modules de dimension 1, comme le prouve la proposition suivante.

Proposition 3.3.4. *Soit D un (φ, Γ)-module de dimension 1. Alors il existe $\lambda \in k^\times$ et $r \in \{0, \ldots, p-2\}$ tel que $D \simeq D_{\lambda,r}$.*

Démonstration. Soit e une base de D, et soit $h(\pi) \neq 0$ tel que $\varphi(e) = h(\pi)e$. Écrivons $h(\pi) = \lambda\pi^b f(\pi)$, avec $\lambda \in k^\times, a \in \mathbf{Z}$ et $f \in 1 + \pi k[\![\pi]\!]$.
Pour $g(\pi) \in k[\![\pi]\!]$, on a $\varphi(g(\pi)e) = \frac{\varphi(g(\pi))}{g(\pi)} h(\pi)(g(\pi)e)$. Alors, si $g(\pi) = \prod_{i=1}^{\infty} \varphi^i(f(\pi))$, on a

$$\frac{g(\pi)}{\varphi(g(\pi))} = \frac{1}{f(\pi)}.$$

Quitte à changer e en $g(\pi)e$, on peut donc supposer que $\varphi(e) = \lambda\pi^a e$, avec $a \in \mathbf{Z}$. Et quitte à changer encore e en $\pi^b e$, où b est le quotient de la division euclidienne de a par $p-1$, il est même possible de supposer $0 \leq a \leq p-1$.
Soit alors γ tel que $\chi_{\mathrm{cycl}}(\gamma) = 1+p$, et soit $l(\pi) \in k[\![\pi]\!]$ tel que $\gamma(e) = l(\pi)e$. Alors $\varphi(l(\pi))\pi^a e = \varphi(\gamma(e)) = \gamma(\varphi(e)) = ((1+\pi)^{1+p} - 1)^a l(\pi)e$, ce qui implique alors que $a = 0$ et l est scalaire. Cela suffit à conclure. □

Des (φ, Γ)-modules irréductibles de dimension plus grande peuvent également être obtenus par extension des scalaires de (φ, Γ)-modules sur $\mathbf{F}_p(\!(\pi)\!)$ qui proviennent de représentations galoisiennes irréductibles via l'équivalence de catégories de Fontaine. En particulier, Berger a donné dans [Ber10c] une description explicite du (φ, Γ)-module $\mathbf{D}(\mathrm{ind}(\omega_n^h))$.

Proposition 3.3.5 ([Ber10c, théorème 2.1.6])**.** *Soit $n \geq 2$ et $1 \leq h \leq p^n - 2$ primitif. Alors le (φ, Γ)-module $\mathbf{D}(\mathrm{ind}(\omega_n^h))$ est défini sur $\mathbf{F}_p(\!(\pi)\!)$ et possède une base $e_0, \ldots, e_{n-1}$ dans laquelle $\gamma(e_j) = \left(\frac{\omega(\gamma)\pi}{\gamma(\pi)}\right)^{hp^j(p-1)/(p^n-1)}$ si $\gamma \in \Gamma$, $\varphi(e_j) = e_{j+1}$ si $0 \leq j \leq n-2$ et $\varphi(e_{n-1}) = (-1)^{n-1}\pi^{-h(p-1)}e_0$.*

Pour tout corps k de caractéristique p, il est possible de définir un (φ, Γ)-module de dimension n, qu'on note $D(\mathrm{ind}(\omega_n^h))_k$ (ou $D(\mathrm{ind}(\omega_n^h))$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps k) de la même manière, c'est-à-dire muni d'une base $e_0, \ldots, e_{n-1}$ dans laquelle les matrices de φ et γ sont les mêmes que celles définies dans la proposition. Nous verrons plus tard (corollaire 3.3.52) que ce (φ, Γ)-module est toujours irréductible.

Enfin, notons que dans le cas où k est algébriquement clos, l'équivalence de catégories de Fontaine se généralise en une bijection entre (φ, Γ)-modules irréductibles et représentations irréductibles du groupe de Weil $W_{\mathbf{Q}_p}$, comme prouvé dans [BV12, Theorem B]. Toutefois, cette bijection ne jouit pas d'aussi bonnes propriétés que celle de Fontaine, en particulier elle ne s'étend pas aux objets non irréductibles. Dans le cas d'un corps fini, on retrouve exactement l'équivalence de Fontaine, toute représentation de dimension finie du groupe de Weil pouvant s'étendre à une représentation du groupe de Galois tout entier.

De plus, on peut prouver ([BV12, Proposition 2.2]) que toute représentation irréductible de dimension n de $\mathcal{W}_{\mathbf{Q}_p}$ est de la forme $(k \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathrm{ind}(\omega_n^h)) \otimes \mu_\lambda$, pour $h \in \mathbf{Z}$ et $\lambda \in k^\times$. Ce résultat permet d'affirmer que si k est algébriquement clos, alors tout (φ, Γ)-module irréductible sur $k(\!(\pi)\!)$ est d'un des types décrits précédemment.

3.2 ψ-modules et φ-modules

Sur $k(\!(\pi)\!)$, un inverse à gauche de φ est construit de la manière suivante : $1, (1+\pi), \ldots, (1+\pi)^{p-1}$ forment une base de $k(\!(\pi)\!)$ sur $\varphi(k(\!(\pi)\!)) = k(\!(\pi^p)\!)$, de sorte que chaque élément x de $k(\!(\pi)\!)$ s'écrit de manière unique

$$x = \sum_{i=0}^{p-1} (1+\pi)^i \varphi(x_i), \text{ avec } x_i \in k(\!(\pi)\!).$$

On pose alors $\psi(x) = x_0$ Un calcul facile permet de montrer que $\psi(\pi^{pm+r}) = (-1)^r \pi^m$ si $0 \leq r \leq p-1$. En particulier, $\psi(\pi) = 1$, $\psi(\pi^{-1}) = \pi^{-1}$, et $\psi : k[\![\pi]\!] \to k[\![\pi]\!]$

est surjectif.
Cette construction se généralise au cas d'un φ-module :

Définition 3.3.6. Soit D un φ-module sur $k(\!(\pi)\!)$. Alors tout élément $x \in D$ s'écrit de manière unique

$$x = \sum_{i=0}^{p-1} (1+\pi)^i \varphi(x_i), \text{ avec } x_i \in D.$$

On définit alors une application $\psi : D \to D$ par $\psi(x) = x_0$.

Proposition 3.3.7. *Soit D un φ-module, et $\psi : D \to D$ l'application précédemment définie. Alors :*

i) ψ est k-linéaire,

ii) $\psi(\lambda\varphi(x)) = \psi(\lambda)x, \forall \lambda \in k(\!(\pi)\!), \forall x \in D$,

iii) $\psi(\varphi(\lambda)x) = \lambda\psi(x)$.

Démonstration. Le point i) est trivial. Soit $\lambda = \sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^i\varphi(\lambda_i) \in k(\!(\pi)\!)$ et $x \in D$. Alors $\lambda\varphi(x) = \sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^i\varphi(\lambda_i x)$, et donc $\psi(\lambda\varphi(x)) = \lambda_0 x = \psi(\lambda)x$, ce qui prouve le point ii).
Enfin, si $x = \sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^i\varphi(x_i) \in D$, alors $\varphi(\lambda)x = \sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^i\varphi(\lambda x_i)$, de sorte que $\psi(\varphi(\lambda)x) = \lambda x_0 = \lambda\psi(x)$. □

Colmez a prouvé dans [Col10b] que si D est un φ-module, alors il existe à l'intérieur de D des $k[\![\pi]\!]$-réseaux stables par ψ, ce qui nous conduit à la définition suivante :

Définition 3.3.8. On appelle ψ-module un $k[\![\pi]\!]$-module de type fini M muni d'une application additive $\psi : M \to M$ telle que $\psi(\varphi(\lambda)\cdot x) = \lambda\psi(x), \forall \lambda \in k[\![\pi]\!], \forall x \in M$. Le ψ-module M est dit
- surjectif si $\psi : M \to M$ est surjectif,
- non dégénéré si $\operatorname{Ker}\psi$ ne contient pas de sous-$k[\![\pi]\!]$-module non nul, c'est-à-dire que si $\psi(\lambda\cdot x) = 0, \forall \lambda \in k[\![\pi]\!]$, alors $x = 0$,
- irréductible s'il ne contient pas de sous-ψ-module distinct de M ou $\{0\}$,
- libre s'il s'agit d'un $k[\![\pi]\!]$-module libre.

Remarque 3.3.9.
1. Si M_{tors} est l'ensemble des éléments de torsion de M, alors M_{tors} est stable par ψ puisque $\lambda\psi(x) = \psi(\varphi(\lambda\cdot x))$. Ainsi, si M est irréductible et n'est pas de torsion, alors il est nécessairement sans torsion, et donc libre.
2. Si M est un ψ-module irréductible qui n'est pas de torsion, alors il se doit d'être non dégénéré puisqu'un sous-$k[\![\pi]\!]$-module inclus dans le noyau serait un sous-ψ-module de M.
3. Si D est un φ-module, tout ψ-module inclus dans D (où ψ est l'opérateur inverse à gauche de φ introduit précédemment) est non dégénéré. En effet, si $k[\![\pi]\!]x \subset \operatorname{Ker}\psi$ avec $x = \sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^i\varphi(x_i)$, alors $\psi((1+\pi)^{-i}x) = 0 = x_i$, $\forall i$, et donc $x = 0$.

3.3 Des φ-modules aux ψ-modules : $D^\sharp$ et $D^\natural$

Dans le cas où D est un φ-module de dimension d, alors les résultats de Colmez prouvent l'existence de deux ψ-modules libres de rang d, surjectifs, notés $D^\natural$ et $D^\sharp$ qui sont respectivement le plus petit et le plus grand sous-ψ-module surjectif de rang d de D. Redonnons ici les détails de la construction de ces deux ψ-modules.

Lemme 3.3.10. *Soit D un φ-module sur $k(\!(\pi)\!)$. Alors il existe des réseaux N_0 et N_1 de D tels que*

$$\varphi(N_0) \subset \pi N_0 \subset N_1 \subset \varphi(N_1).$$

Démonstration. Soit $e_1, \ldots, e_d$ une base de D. Alors $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_d)$ est également une base de D, donc il existe des matrices $A = (a_{ij})_{i,j}$ et $B = (b_{ij})_{i,j}$ de $\mathrm{GL}_d(k(\!(\pi)\!))$ telles que

$$e_i = \sum_{j=1}^{d} b_{ij}\varphi(e_j) \text{ et } \varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{d} a_{ij}e_j.$$

Soit $n \geq 1$ tel que $\left(\frac{\varphi(\pi)}{\pi}\right)^n A$ et $\left(\frac{\varphi(\pi)}{\pi}\right)^n B$ soient à coefficients dans l'idéal maximal $\pi k[\![\pi]\!]$ de $k[\![\pi]\!]$. Notons alors N_0 le $k[\![\pi]\!]$-module engendré par les $\pi^n e_i$ et N_1 le $k[\![\pi]\!]$-module engendré par les $\pi^{-n}e_i$. On a alors $\varphi(N_0) \subset \pi N_0$ puisque

$$\varphi(\pi^n e_i) = \varphi(\pi)^n \varphi(e_i) = \varphi(\pi)^n \sum_{j=1}^{d} a_{ij}e_j = \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\varphi(\pi)}{\pi}\right)^n a_{ij}\pi^n e_{ij} \in \pi N_0.$$

De même, $N_1 \subset \varphi(N_1)$ puisque

$$\pi^{-n}e_i = \pi^{-n}\sum_{j=1}^{d} b_{ij}\varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{d} b_{ij}\left(\frac{\varphi(\pi)}{\pi}\right)^n \varphi(\pi^{-n}e_j).$$

De plus, puisque $n \geq 1$, il est évident que $\pi N_0 \subset N_1$. □

Lemme 3.3.11. *Soit D un φ-module sur $k(\!(\pi)\!)$ et M un réseau de D.*

i) Si $\varphi(M) \subset M$, alors $M \subset \psi(M)$.

ii) Si le $k[\![\pi]\!]$-module engendré par $\varphi(M)$ contient M, alors $\psi(M) \subset M$.

iii) Si $\psi(M) \subset M$, alors $\psi(\pi^{-1}M) \subset \pi^{-1}M$, et pour tout $x \in D$, il existe $n(x) \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geq n(x), \psi^n(x) \in \pi^{-1}M$.

Démonstration. Le point i) est clair puisque $\psi(\varphi(x)) = x$.
Pour le point ii), si $e_1, \ldots, e_d$ est une base de M sur $k[\![\pi]\!]$, alors, pour tout $x \in M$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in k[\![\pi]\!]$ tels que $x = \lambda_1\varphi(e_1) + \cdots + \lambda_d\varphi(e_d)$, et alors $\psi(x) = \psi(\lambda_1)e_1 + \cdots + \psi(\lambda_d)e_d$, ce qui prouve que $\psi(x) \in M$.
Enfin pour iii), on a $\psi(\varphi^i(\pi^{-1})x) = \varphi^{i-1}(\pi^{-1})\psi(x)$, donc si $\psi(M) \subset M$, on a $\psi(\varphi^i(\pi^{-1})x) \in \varphi^{i-1}(\pi^{-1})M$. Mais alors $\psi(\pi^{-1}M) \subset \psi(\varphi(\pi^{-1})M) \subset \pi^{-1}M$, et on conclut en remarquant que si $x \in D$, alors il existe $n(x) \in \mathbf{N}$ tel que $x \in \varphi^n(\pi)^{-1}M$. □

Proposition 3.3.12. *Il existe un unique réseau $D^\sharp$ de D qui soit un ψ-module surjectif tel que pour tout $x \in D$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\psi^n(x) \in D^\sharp$.*

Démonstration. Soient N_0, N_1 deux réseaux comme dans le lemme 3.3.10. Soit alors $M_n = \psi^n(N_0)$: c'est un sous-$k[\![\pi]\!]$-module de D. Si $x \in N_0$, alors $\psi^n(x) = \psi^{n+1}(\varphi(x))$, avec $\varphi(x) \in N_0$, de sorte que $(M_n)_n$ est une suite croissante de réseaux de D. De plus, $N_0 \subset N_1$, et puisque $N_1 \subset \varphi(N_1)$, une récurrence utilisant le point ii) du lemme précédent permet de montrer que $M_n \subset N_1$. Mais N_1 est noethérien car c'est un module libre de type fini sur $k[\![\pi]\!]$ qui est noethérien, de sorte que la suite $(M_n)_n$ stationne en un réseau M_∞ tel que $\psi(M_\infty) = M_\infty$.
Posons alors $M'_n = \psi^n(\pi^{-1}M_\infty)$. Par le point iii) du lemme précédent, $(M'_n)_n$ est une suite décroissante de réseaux de D, contenant M_∞. Mais $\pi^{-1}M_\infty/M_\infty$ est artinien, donc cette suite est stationnaire. Notons M'_∞ sa limite, elle vérifie $\psi(M'_\infty) = M'_\infty$ par construction.
De plus, si $x \in D$, par le point iii) du lemme précédent, il existe $n(x) \in \mathbf{N}$ tel que $\psi^n(x) \in \pi^{-1}M_\infty$ pour $n \geq n(x)$. Soit m tel que $M'_m = M'_\infty$. Alors $\psi^{m+n}(x) \in M'_\infty$ pour $n \geq n(x)$, et donc M'_∞ vérifie bien les propriétés requises pour $D^\sharp$.
Passons à l'unicité, et supposons que M_1 et M_2 vérifient tous les deux les propriétés de l'énoncé. Alors $M_1 + M_2$ les vérifie aussi, et donc quitte à remplacer M_1 par $M_1 + M_2$, on peut supposer que $M_2 \subset M_1$. Alors l'application induite par ψ sur le quotient M_1/M_2 est k-linéaire, surjective, et nilpotente par la propriété de $D^\sharp$. Puisque M_1/M_2 est un k-espace vectoriel de dimension finie, cela implique que $M_1 = M_2$. □

Corollaire 3.3.13. *Si $x \in D$, il existe un réseau de D contenant tous les $\psi^n(x)$, pour $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. Par la proposition précédente, il existe $l_0 \in \mathbf{N}$ (dépendant de x) tel que $\psi^l(x) \in D^\sharp$ si $l \geq l_0$. Alors le $k[\![\pi]\!]$-module engendré par $D^\sharp$ et les $\psi^l(x)$, $l \leq l_0$, est un réseau de D qui vérifie la propriété annoncée. □

On en déduit que $D^\sharp$ est le plus grand réseau de D qui soit un ψ-module surjectif :

Proposition 3.3.14. *Si N est un réseau de D stable par ψ et tel que ψ induise une surjection de N sur lui-même, alors $N \subset D^\sharp$ et $D^\sharp/N$ est annulé par π.*

Démonstration. Si $\psi(N) = N$, alors $N + D^\sharp$ vérifie les mêmes propriétés que $D^\sharp$, et donc $N + D^\sharp = D^\sharp$, d'où on déduit que $N \subset D^\sharp$. Enfin,les arguments permettant de construire $D^\sharp$ à partir de M_∞ comme dans la proposition 3.3.12 montrent que si N est un réseau vérifiant $N = \psi(N)$, alors la suite $\psi^n(\pi^{-1}N)$ est décroissante et de limite $D^\sharp$, de sorte que $D^\sharp \subset \pi^{-1}N$. □

De même que $D^\sharp$ est le plus grand réseau de D qui soit un ψ-module surjectif, nous allons montrer l'existence d'un plus petit réseau vérifiant la même propriété, et c'est celui-ci qui nous intéressera dans la suite (5.1) lorsqu'il s'agira de construire des représentations irréductibles de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Proposition 3.3.15. *Si M est un réseau de D stable par ψ et inclus dans $D^\sharp$, alors $\psi : M \to M$ est surjectif et $D^\sharp/M$ est un k-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à la dimension de D sur $k(\!(\pi)\!)$.*

Démonstration. Puisque $D^\sharp$ et M (resp. $\psi(M)$) sont deux réseaux de D, alors $D^\sharp/M$ (resp. $D^\sharp/\psi(M)$) est un k-espace vectoriel de dimension finie. ψ induit une surjection de $D^\sharp/M$ sur $D^\sharp/\psi(M)$, et puisque $\psi(M) \subset M$, la composée de $D^\sharp/\psi(M) \to$

$D^\sharp/M$ induite par l'identité et de $\psi : D^\sharp/M \to D^\sharp/\psi(M)$ est également surjective, mais puisque $D^\sharp/\psi(M)$ est de dimension finie, c'est une bijection, de sorte que $D^\sharp/\psi(M) \to D^\sharp/M$ est injective et donc $\psi(M) = M$.
Alors $D^\sharp/M$ est annulé par π, et on en déduit aisément que la dimension sur k de $D^\sharp/M$ est inférieure ou égale au rang sur $k[\![\pi]\!]$ de $D^\sharp$, lui-même égal à la dimension sur $k(\!(\pi)\!)$ de D. □

Corollaire 3.3.16. *L'ensemble des réseaux de D stables par ψ et inclus dans $D^\sharp$ possède un plus petit élément $D^\natural$ qui est un ψ-module surjectif.*

Démonstration. Notons $D^\natural$ l'intersection de tous les réseaux stables par ψ et inclus dans $D^\sharp$. Si $(M_n)_n$ est une suite décroissante de réseaux stables par ψ contenus dans $D^\sharp$, alors $(D^\sharp/M_n)_n$ est une suite croissante de k-espaces vectoriels de dimension inférieure ou égale à $\dim_{k(\!(\pi)\!)} D$, elle est donc stationnaire, et la suite $(M_n)_n$ aussi. Ceci prouve bien que $D^\natural$ est un réseau de D, stable par ψ, et donc par la proposition précédente, $\psi : D^\natural \to D^\natural$ est surjectif. □

Les deux réseaux $D^\sharp$ et $D^\natural$ se comportent bien par morphismes :

Proposition 3.3.17. *Soit $f : D_1 \to D_2$ un morphisme de φ-modules. Alors :*
i) $f(D_1^\sharp) \subset D_2^\sharp$,
ii) $f(D_1^\natural) \subset D_2^\natural$.

Démonstration. Pour le point i), $f(D_1^\sharp)$ est un sous-module libre de D_2, sur lequel ψ est surjectif. Alors $f(D_1^\sharp) + D_2^\sharp$ est un réseau de D_2, vérifiant les propriétés de la proposition 3.3.12, et donc $f(D_1^\sharp) + D_2^\sharp = D_2^\sharp$, de sorte que $f(D_1^\sharp) \subset D_2^\sharp$.
Pour ii), on a déjà $f(D_1^\natural) \subset f(D_1^\sharp) \subset D_2^\sharp$. Soit M l'image inverse de $D_2^\natural$ dans $D_1^\natural$. Puisque $D_2^\sharp/D_2^\natural$ est un k-espace vectoriel de dimension finie et que $D_1^\natural$ est un réseau de D_1, on en déduit que M est un réseau de D_1. Mais M est stable par ψ, donc contient $D_1^\natural$, de sorte que $f(D_1^\natural) \subset D_2^\natural$. □

Proposition 3.3.18. *Si $P \in k[X]$ est non nul, alors l'inclusion $D^\sharp \subset D$ induit un isomorphisme $D^\sharp/P(\psi)D^\sharp \simeq D/P(\psi)D$.*

Démonstration. Puisque ψ est surjectif de D (respectivement $D^\sharp$) dans lui-même, on peut supposer que P est de coefficient constant non nul et unitaire.
Pour $n \in \mathbf{N}$, écrivons $X = PQ_n + X^n R_n$. Alors si $x \in D$, $x = z_n + P(\psi)y_n$, avec $z_n = R_n(\psi)\psi^n(x)$ et $y_n = Q_n(\psi)(x)$.
Par le corollaire 3.3.13, il existe un réseau M de D qui contient tous les $\psi^n(x), n \in \mathbf{N}$, et donc tous les z_n, y_n.
Par compacité de M, on peut extraire de $(z_n, y_n)_n$ une suite qui converge vers $(z, y) \in D^2$, avec $x = z + P(\psi)(y)$. Pour $n \gg 0$, $\psi^n(x) \in D^\sharp$, de sorte que $z_n \in D^\sharp$. On en déduit que $z \in D^\sharp$.
Ceci suffit à prouver que $D^\sharp/P(\psi)D^\sharp \to D/P(\psi)D$ est surjective.

Si $x \in D^\sharp \cap P(\psi)D$, soit $y \in D$ tel que $x = P(\psi)(y)$. Si $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$, soit $M' = D^\sharp + k[\![\pi]\!]y + \cdots + k[\![\pi]\!]\psi^{d-1}(y)$. C'est un réseau de D, stable par ψ car $P(\psi)y \in D^\sharp$. De plus, c'est un ψ-module surjectif car si $z \in D^\sharp$ est tel que $\psi^d(z) = x$, alors on a

$$y = -\frac{1}{a_0}\psi\left(a_1 y + a_2\psi(y) + \cdots + \psi^{d-1}(y) - z\right).$$

Mais $D^\sharp$ étant le plus grand sous-ψ-module surjectif de D, et comme $D^\sharp \subset M'$, on a une égalité $D = M'$. Par conséquent, $y \in D^\sharp$, et $x \in P(\psi)D^\sharp$, de sorte que $D^\sharp/P(\psi)D^\sharp \to D/P(\psi)D$ est injectif. □

Lemme 3.3.19. *Si $P \in k[X]$ est non nul, alors on a les inclusions*

$$\pi D^\sharp \subset P(\psi)D^\sharp \subset D^\sharp.$$

Démonstration. Comme $D^\sharp$ est stable par ψ, l'inclusion $P(\psi)D^\sharp \subset D^\sharp$ est immédiate.
Pour la seconde inclusion, $\psi : D^\sharp \to D^\sharp$ étant surjectif, on peut supposer que $P(0) \neq 0$. Soit alors $(b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ la suite d'éléments de k définie par

$$X^{\deg P} P(1/X) \left(\sum_{i\in\mathbf{N}} b_i X^i \right) = 1.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\varphi(\varphi^n(\pi)D^\sharp) = \varphi^{n+1}(\pi)\varphi(D^\sharp)$ soit inclus dans $\pi\varphi^n(\pi)D^\sharp$. Soit $x \in D^\sharp$ et $y \in D^\sharp$ tel que $\psi(y) = x$. On a alors $\pi x = \psi^n(\varphi^n(\pi)y)$. La série

$$\sum_{i\in\mathbf{N}} b_i \varphi^{i+\deg P}(\varphi^n(\pi)y)$$

converge alors dans $D^\sharp$, et sa somme z vérifie $P(\psi)z = \varphi^n(\pi)y$. On a donc $\pi x = P(\psi)\psi^n(z)$, ce qui permet de conclure. □

Lemme 3.3.20. *Si $P \in k[X]$ est non nul, alors $P(\psi)D$ est fermé dans D.*

Démonstration. Une fois de plus, on peut supposer que P possède un coefficient constant non nul. Par le lemme précédent, $P(\psi)D$ contient $\pi D^\sharp$, donc est ouvert. $P(\psi)D$ est un sous-k-espace vectoriel ouvert de D, il est donc fermé par le lemme 3.2.3. □

3.4 Des ψ-modules aux φ-modules : reconstruction de φ

La question suivante est naturelle : étant donné un ψ-module M, est-il possible de munir $M \otimes_{k[\![\pi]\!]} k(\!(\pi)\!)$ d'une structure de φ-module telle que $M = (M \otimes_{k[\![\pi]\!]} k(\!(\pi)\!))^\sharp$? Ce n'est pas vrai pour tout ψ-module, mais les conditions à imposer à un ψ-module pour que ce soit vrai sont faciles à énoncer.

Si M est un ψ-module libre, alors il existe un unique prolongement de ψ à $M \otimes_{k[\![\pi]\!]} k(\!(\pi)\!)$ vérifiant les mêmes propriétés que ψ. En effet, si $x \in M \otimes_{k[\![\pi]\!]} k(\!(\pi)\!)$, alors il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\pi^{p^n} x \in M$, et on pose alors $\psi(x) = \pi^{-p^{n-1}}\psi(\pi^{p^n}x)$. Il n'y a pas de difficultés à vérifier que cette définition ne dépend pas de n tel que $\pi^{p^n} x \in M$.

Dans le cas où M est un ψ-module libre non dégénéré et surjectif, il est alors possible de reconstruire un opérateur φ :

Proposition 3.3.21. *Soit M un ψ-module libre, surjectif et non dégénéré. Alors il est possible de munir $D = M \otimes_{k[\![\pi]\!]} k(\!(\pi)\!)$ d'une structure de φ-module telle que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ et $\psi(\lambda \cdot \varphi(x)) = \lambda\psi(x)$. De plus, un tel $\varphi : D \to D$ est unique.*

Démonstration. Soit $\tilde{D} = D \otimes_{\varphi, k(\!(\pi)\!)} k(\!(\pi)\!)$, c'est-à-dire le $k(\!(\pi)\!)$-espace vectoriel dont le groupe additif sous-jacent est D, mais tel que la multiplication par un élément de $k(\!(\pi)\!)$ soit définie par $\lambda \cdot x = \varphi(\lambda)x$. Si on note d la dimension de D (qui est égale au rang de M sur $k[\![\pi]\!]$), alors la dimension de $\tilde{D}$ est pd.
ψ est alors une application $k(\!(\pi)\!)$-linéaire de $\tilde{D}$ dans D, toujours surjective. Pour $j \in \{0, \ldots, p-2\}$, notons $\psi_j : \tilde{D} \to D$ l'application $k(\!(\pi)\!)$-linéaire $x \mapsto \psi((1+\pi)^{-j}x)$. Elle est surjective, et donc son noyau est de dimension $pd - d = (p-1)d$. Soit $N = \bigcap_{i=1}^{p-1} \operatorname{Ker} \psi_j$. C'est un sous-espace vectoriel de $\tilde{D}$ de dimension au moins $pd - (p-1)d = d$. Mais puisque M est non dégénéré, $\psi : N \to D$ est injective car un élément de son noyau engendrerait une $k(\!(\pi)\!)$-droite de D incluse dans $\operatorname{Ker} \psi$, et on en déduit que N est de dimension d, et que $\psi : N \to D$ est bijective.
Soit alors $\varphi : D \to N \subset D$ l'inverse de ψ. C'est une application semi-linéaire et telle que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_D$ par construction.
Il reste à vérifier que l'image d'une base de D par φ est encore une base de D. Puisque l'image d'une base de D est une base de $N \subset \tilde{D}$, il suffit de vérifier qu'une base de N est une base de D. Soit donc $e_1, \ldots, e_d$ une telle base, et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in k(\!(\pi)\!)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{d} \lambda_i e_i = 0 \text{ dans } D.$$

Écrivons $\lambda_i = \sum_{j=0}^{p-1} (1+\pi)^j \varphi(\lambda_{i,j})$, avec $\lambda_{i,j} \in k(\!(\pi)\!)$, de sorte que

$$\sum_{j=0}^{p-1} (1+\pi)^j \left(\sum_{i=1}^{d} \varphi(\lambda_{i,j}) e_i \right) = 0. \tag{3.4.1}$$

En appliquant ψ à cette équation, on obtient $\sum_{i=1}^{d} \lambda_{i,0} \psi(e_i) = 0$, et puisque les $\psi(e_i)$ forment une base de D (car les e_i forment une base de N et que $\psi : N \to D$ est linéaire, bijective), cela implique $\lambda_{i,0} = 0, \forall i$.
De même, en appliquant ψ_j à l'équation (3.4.1), on obtient $\sum_{i=1}^{d} \lambda_{i,j} \psi(e_i) = 0$, ce qui implique $\lambda_{i,j} = 0$. On en déduit que les λ_i sont nécessairement nuls, et donc que $e_1, \ldots, e_d$ est une base de D. Ceci achève de prouver que φ munit bien D d'une structure φ-module.
Reste à voir que $\psi(\lambda\varphi(x)) = \psi(\lambda)x$, ce qu'il suffit de vérifier en prenant pour x les éléments $e_1, \ldots, e_d$ d'une base de N. Mais alors soit $\lambda = \sum_{i=0}^{p-1} (1+\pi)^i \varphi(\lambda_i)$. On a $\psi(\lambda\varphi(e_i)) = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \psi((1+\pi)^i \varphi(e_i)) = \lambda_0 e_i = \psi(\lambda) e_i$.

Passons à l'unicité : si φ vérifie les conditions de l'énoncé, alors $x \in D$ est dans l'image de φ si et seulement si $\psi((1+\pi)^{-i}x) = 0$, pour $i = 1, \ldots, p-1$. Ceci prouve déjà que $\mathrm{Im}\varphi$ est uniquement déterminé par ψ. Si φ_1, φ_2 vérifient tous deux les conditions de l'énoncé, alors pour $x \in D$, il existe $y \in D$ tel que $\varphi_1(x) = \varphi_2(y)$, et en appliquant ψ à cette égalité, on obtient $x = y$, de sorte que $\varphi_1 = \varphi_2$. □

Corollaire 3.3.22. *Si M est un ψ-module irréductible qui n'est pas de torsion, alors il existe une unique structure de φ-module sur $M \otimes_{k[\![\pi]\!]} k(\!(\pi)\!)$ compatible à ψ.*

Démonstration. Par la remarque 3.3.9, M est libre, surjectif et non-dégénéré, de sorte que les hypothèses de la proposition s'appliquent. □

Puisque M est un ψ-module surjectif, il est évident que $D^\natural \subset M \subset D^\sharp$. De plus, s'il n'existe aucun réseau de D strictement plus grand que M qui soit un ψ-module surjectif, alors de manière évidente, $M = D^\sharp$. De même, s'il n'existe aucun réseau de D strictement inclus dans M stable par ψ, alors $M = D^\natural$.

Lemme 3.3.23. *Soit D un ψ-module libre et surjectif. Si D' est un sous-ψ-module de D, de même rang, alors $\pi \cdot D \subset D' \subset D$.*

Démonstration. Il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\pi^n D \subset D'$. Or, si $\pi^{p^n} D \subset D'$, en appliquant ψ, on obtient $\pi^{p^{n-1}} D \subset \psi(D') \subset D'$. En itérant, on obtient $\pi \cdot D \subset D'$. □

3.5 L'action de Γ : (φ, Γ)-modules et (ψ, Γ)-modules

En pratique, tous les φ-modules que nous considérerons dans la suite seront munis de structures de (φ, Γ)-modules. Si D est un (φ, Γ)-module, alors l'opérateur ψ défini en utilisant le φ-module sous-jacent commute avec l'action de Γ. En effet, soit $a \in \mathbf{Z}_p^\times$, et $x \in D$. Alors, si $x = \sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^i \varphi(x_i)$, on a $\psi(\gamma_a(x)) = \sum_{i=0}^{p-1} \psi((1+\pi)^{ai}\varphi(\gamma_a(x_i))$. Mais en notant $ai = b_i + pc_i$, avec $b_i \in \{0, \ldots, p-1\}$, cette égalité se réécrit

$$\psi(\gamma_a(x)) = \gamma_a(x_0) + \sum_{i=1}^{p-1}(1+\pi)^{c_i}\psi((1+\pi)^{b_i}\varphi(\gamma_a(x_i))),$$

où les $b_i, i = 1, \ldots, p-1$ prennent les valeurs $1, \ldots, p-1$, de sorte que

$$\psi(\gamma_a(x)) = \gamma_a(x_0) = \gamma_a(\psi(x)).$$

Les ψ-modules $D^\sharp$ et $D^\natural$ que nous avons défini précédemment ne sont définis qu'en utilisant l'action de φ, mais sont en fait stables sous l'action de Γ. En effet, si M est un réseau de D, alors $\gamma_a(M)$ est également un réseau de D, et si M est un ψ-module surjectif, alors il en est de même de $\gamma_a(M)$. En particulier, $\gamma_a(D^\sharp)$ est un ψ-module surjectif qui est un réseau de D, et donc $\gamma_a(D^\sharp) \subset D^\sharp$. En appliquant $\gamma_{a^{-1}}$, on obtient finalement $D^\sharp = \gamma_a(D^\sharp)$.
De même,

$$\gamma_a(D^\natural) = \bigcap_{\substack{M \text{ stable par } \psi \\ M \subset D^\sharp}} \gamma_a(M) = \bigcap_{\substack{M \text{ stable par } \psi \\ M \subset D^\sharp}} M = D^\natural.$$

Ceci nous conduit à la définition évidente de (ψ, Γ)-module : un (ψ, Γ)-module est un ψ-module muni d'une action semi-linéaire de Γ, commutant à ψ. Un (ψ, Γ)-module est dit surjectif (resp. non dégénéré) si le ψ-module sous-jacent l'est. On appelle (ψ, Γ)-module irréductible un (ψ, Γ)-module qui ne possède pas de sous-(ψ, Γ)-module non trivial.

Comme précédemment, nous pouvons remarquer qu'un (ψ, Γ)-module M irréductible qui n'est pas de torsion est nécessairement libre, puisque les éléments de torsion en forment un sous-(ψ, Γ)-module. Il est également surjectif car $\mathrm{Im}\psi$ est un sous-(ψ, Γ)-module de M. Enfin, il est non dégénéré car $M' = \{x \in M : k[\![\pi]\!] \cdot x \in \mathrm{Ker}\,\psi\}$ est également un sous-ψ-module, qui est stable sous l'action de Γ. En effet, si $\gamma \in \Gamma, x \in M'$ et $\lambda \in k[\![\pi]\!]$, alors

$$\psi(\lambda\gamma(x)) = \psi(\gamma(\gamma^{-1}(\lambda)x)) = \gamma(\psi(\gamma^{-1}(\lambda)x)) = 0$$

et donc $\gamma(x) \in M'$.

Proposition 3.3.24. *Si M est un (ψ, Γ)-module libre, surjectif et non dégénéré, alors il existe une unique structure de (φ, Γ)-module sur $D := M \otimes_{k[\![\pi]\!]} k(\!(\pi)\!)$, compatible à la structure de (ψ, Γ)-module.*

Démonstration. La preuve est essentiellement la même que celle de la proposition 3.3.21 puisque la définition de φ ne dépend que de ψ, et pas de l'action de Γ. Il s'agit donc de s'assurer que ψ et Γ commutent, par exemple sur N (tel que défini dans la preuve de la proposition 3.3.21), puisque par semi-linéarité de φ et de Γ, il en est alors de même sur D tout entier.
Prouvons donc que N est stable sous Γ. Rappelons que $N = \bigcap_{j=1}^{p-1} \operatorname{Ker} \psi_j$. Soit $x \in N$ et $a \in \mathbf{Z}_p^\times$. Alors si comme précédemment on écrit $ai = b_i + pc_i$, avec $b_i \in \{0, \ldots, p-2\}$, on a

$$\psi((1+\pi)^{-i}\gamma_{a^{-1}}(x)) = \gamma_{a^{-1}}\psi((1+\pi)^{-ai}x) = \gamma_{a^{-1}}\left((1+\pi)^{-c_i}\psi((1+\pi)^{-b_i}x)\right) = 0.$$

N est donc stable sous Γ, et ψ commutant à Γ, par définition de φ, φ commute également à Γ. □

Proposition 3.3.25. *Si D est un (ψ, Γ)-module irréductible qui n'est pas de torsion, alors $D \otimes_{k[\![\pi]\!]} k(\!(\pi)\!)$ est un (φ, Γ)-module irréductible.*

Démonstration. Supposons au contraire que $D' := D \otimes_{k[\![\pi]\!]} k(\!(\pi)\!)$ ne soit pas irréductible. Alors il exite un sous (φ, Γ)-module D_1 de D', de dimension strictement inférieure à celle de D'.
Dans ce cas, $D_1^\natural \subset (D')^\natural \subset D$. D étant un (ψ, Γ)-module irréductible, ces trois inclusions doivent être des égalités, car $D_1^\natural \neq 0$. Or, $D_1^\natural$ est de rang sur $k[\![\pi]\!]$ égal à la dimension de D_1 sur $k(\!(\pi)\!)$, alors que D est de rang égal à la dimension de D', d'où une contradiction.
On en déduit que D' est bien un (φ, Γ)-module irréductible. □

La réciproque est également vraie :

Proposition 3.3.26. *Si D est un (φ, Γ)-module irréductible, alors $D^\natural$ est un (ψ, Γ)-module irréductible.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un sous-(ψ, Γ)-module M non nul inclus strictement dans $D^\natural$. Puisque $D^\natural$ est l'intersection de tous les réseaux ψ-stables inclus dans $D^\sharp$, nécessairement M est de rang strictement inférieur à la dimension de D.
Soit alors M' un sous-(ψ, Γ)-module non nul de M de rang minimal, de sorte que $\psi(M')$ est de même rang que M', et donc il existe n_0 tel que $\pi^{n_0}M' \subset \psi(M')$. Puisque $\psi(M') \subset M'$, le point iii) du lemme 3.3.11 permet de prouver que $\psi(\pi^{-1}M') \subset \pi^{-1}M'$.
Soit alors $M'_n = \psi^n(\pi^{-1}M')$. C'est une suite décroissante de sous-(ψ, Γ)-modules de D, de même rang que M' et contenant $\pi^{n_0}M'$: elle est donc stationnaire, notons M'_∞ sa limite. Par construction, $M'_\infty = \psi(M'_\infty)$, et puisque M'_∞ est un sous-ψ-module de D, il est non dégénéré. Il est donc possible de munir $M'_\infty \otimes k(\!(\pi)\!) = M' \otimes k(\!(\pi)\!)$ d'une structure de (φ, Γ)-module, qui en fait un sous-(φ, Γ)-module de D, d'où une contradiction. □

Dans le cas des (φ, Γ)-modules de dimension supérieure ou égale à 2 que nous connaissons, il est possible d'en donner un réseau stable par ψ sur lequel ψ est surjectif, autrement dit un réseau M tel que $D^\natural \subset M \subset D^\sharp$.
Soit donc $n \geq 2$, $1 \leq h \leq p^n - 2$ primitif et $D(\mathrm{ind}(\omega_n^h)) \otimes D_{\lambda,s}$, muni de la base $e_0, \ldots, e_{n-1}$ comme définie à la section 3.1. Alors le résultat suivant est le lemme 2.2.1 de [Ber10c], dont la preuve est donnée pour k corps fini, mais qui reste valable pour tout corps de caractéristique p.

Proposition 3.3.27. *Si $f_i = \pi^{h_j} e_j$ et $\alpha \in k(\!(\pi)\!)$, alors on a*

$$\psi(\alpha(\pi) f_j) = \begin{cases} \lambda^{-1}\psi(\alpha(\pi)\pi^{i_{n-j}}) f_{j-1} \text{ si } j \geq 1 \\ \lambda^{-1}(-1)^{n-1}\psi(\alpha(\pi)\pi^{i_0}) f_{n-1} \text{ si } j = 0. \end{cases}$$

3.6 Dualité pour les (φ, Γ)-modules

3.6.1 Dual de Tate d'un (φ, Γ)-module et résidus

Le k-espace vectoriel $\Omega^1_{k(\!(\pi)\!)}$ des différentielles de $k(\!(\pi)\!)$ est de dimension 1, engendré au choix par $d\pi$ ou $\frac{d\pi}{1+\pi}$. On le munit d'une structure de (φ, Γ)-module en posant

$$\gamma_a\left(\frac{d\pi}{1+\pi}\right) = a\frac{d\pi}{1+\pi} \text{ et } \varphi\left(\frac{d\pi}{1+\pi}\right) = \frac{d\pi}{1+\pi},$$

de sorte que $\Omega^1_{k(\!(\pi)\!)}$ est isomorphe à $k(\omega)$.

Définition 3.3.28. Soit D un (φ, Γ)-module sur $k(\!(\pi)\!)$. On définit son dual de Tate $\check{D}$ par

$$\check{D} = \mathrm{Hom}_{k(\!(\pi)\!)}(D, \Omega^1_{k(\!(\pi)\!)}).$$

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'accouplement naturel $\check{D} \times D \to \Omega^1_{k(\!(\pi)\!)}$. On munit alors $\check{D}$ d'une structure de (φ, Γ)-module en posant

$$\gamma(\langle x, y \rangle) = \langle (\gamma(x), \gamma(y) \rangle \text{ et } \varphi(\langle x, y \rangle) = \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle.$$

$\check{D}$ est alors isomorphe à D en tant que (φ, Γ)-module.

Proposition 3.3.29. *Si $f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n \pi^n \in k(\!(\pi)\!)$, on définit le résidu de la forme différentielle $f d\pi$ en posant* $\mathrm{res}_0(f d\pi) = a_{-1}$.
Alors si $f \in k(\!(\pi)\!)$, on a :
- $\mathrm{res}_0\left(\gamma_a(f)\frac{d\pi}{1+\pi}\right) = a^{-1}\mathrm{res}_0\left(\frac{d\pi}{1+\pi}\right)$,
- *De même, on a* $\mathrm{res}_0\left(\psi(f)\frac{d\pi}{1+\pi}\right) = \mathrm{res}_0\left(\varphi(f)\frac{d\pi}{1+\pi}\right) = \mathrm{res}_0\left(f\frac{d\pi}{1+\pi}\right)$.

Démonstration. C'est la proposition I.1.2 de [Col10b]. □

Définition 3.3.30. Si D est un (φ, Γ)-module, on définit un accouplement k-bilinéaire $\check{D} \times D \to k$ en posant $\{x, y\} = \mathrm{res}_0(\langle (\gamma_{-1} \cdot x, y \rangle)$.

Proposition 3.3.31. *Si $x \in \check{D}$ et $y \in D$, alors $\left\{(1+\pi)^b x, (1+\pi)^b y\right\} = \{x, y\}$ si $b \in \mathbf{Z}_p$,*

$$\{\varphi(x), \varphi(y)\} = \{x, y\} \text{ et } \{\gamma(x), \gamma(y)\} = \{x, y\}.$$

Démonstration. On a $\langle\gamma_{-1}((1+\pi)^b x),(1+\pi)^b y\rangle = \langle(1+\pi)^{-b}\gamma_{-1}(x),\left(1+\pi\right)^b y\rangle = \langle\gamma_{-1}\cdot x, y\rangle$.
Pour la seconde formule, on a $\langle\gamma_{-1}(\varphi(x)),\varphi(y)\rangle = \langle\varphi(\gamma_{-1}(x)),\varphi(y)\rangle = \varphi(\langle\gamma_{-1}(x),y\rangle)$.
On conclut en se rappelant que $\varphi\left(\frac{d\pi}{1+\pi}\right) = \frac{d\pi}{1+\pi}$ et la seconde formule de la proposition 3.3.29.
Enfin, on a $\langle\gamma_{-1}(\gamma_a(\gamma_{-1}(x)),\gamma_a(y)\rangle = \gamma_a(\langle\gamma_{-1}(x)y\rangle)$. En utilisant les formules de la proposition 3.3.29, et le fait que $\gamma_a\left(\frac{d\pi}{1+\pi}\right) = a\frac{d\pi}{1+\pi}$, on obtient la dernière formule. □

Proposition 3.3.32. *Si $x \in \check{D}$ et $y \in D$, alors $\psi(\langle\varphi(x),y\rangle) = \langle x,\psi(y)\rangle$.*

Démonstration. Écrivons $y = \sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^i\varphi(y_i)$, de sorte que

$$\langle\varphi(x),y\rangle = \sum_{i=0}^{p-1}(1+\pi)^i\langle\varphi(x),\varphi(y_i)\rangle = \sum_{i=0}^{p-1}\varphi(\langle x,y_i\rangle) = \langle x,\psi(y)\rangle.$$

□

Corollaire 3.3.33. *Les opérateurs φ et ψ sont adjoints : on a*

$$\{x,\psi(y)\} = \{\varphi(x),y\} \text{ et } \{\psi(x),y\} = \{x,\varphi(y)\}.$$

Démonstration. Prouvons la première formule, la preuve de la seconde étant identique.

$$\{x,\psi(y)\} = \mathrm{res}_0(\langle\gamma_{-1}(x),\psi(y)\rangle) = \mathrm{res}_0(\psi(\langle\varphi(\gamma_{-1}(x)),y\rangle)).$$

Mais par les formules rappelées précédemment, ce dernier terme est précisément égal à $\mathrm{res}_0(\langle\varphi(\gamma_{-1}(x)),y\rangle) = \{\varphi(x),y\}$. □

3.6.2 Dual topologique d'un (φ,Γ)-module

Notons $D^* := \mathrm{Hom}_{cont}(D,k)$ le dual de Pontryagin de D, qui est localement linéairement compact puisque D est un k-espace vectoriel localement linéairement compact.

Lemme 3.3.34. *L'application qui à $x \in k(\!(\pi)\!)$ associe la forme linéaire $y \mapsto \mathrm{res}_0\left(xy\frac{d\pi}{1+\pi}\right)$ est un isomorphisme de $k(\!(\pi)\!)$ sur $k(\!(\pi)\!)^*$.*

Démonstration. Si $f : k(\!(\pi)\!) \to k$ est une forme linéaire continue, puisque k est discret, il existe $m_0 \in \mathbf{N}$ tel que $f(\pi^m) = 0$ si $m \geq m_0$. Ainsi, la série $(1+\pi)\left(\sum_{m\in\mathbf{Z}}\pi^{-m-1}f(\pi^m)\right)$ converge $k(\!(\pi)\!)$ vers un élément y.
Il est alors clair que y est l'unique élément de $k(\!(\pi)\!)$ vérifiant $\mathrm{res}_0\left(\pi^m y\frac{d\pi}{1+\pi}\right) = f(\pi^m)$ pour tout $m \in \mathbf{Z}$. Par continuité et k-linéarité, c'est aussi l'unique élément de $k(\!(\pi)\!)$ vérifiant $\mathrm{res}_0\left(xy\frac{d\pi}{1+\pi}\right) = f(x)$, pour tout $x \in k(\!(\pi)\!)$. □

Corollaire 3.3.35. *Si D est un (φ,Γ)-module sur $k(\!(\pi)\!)$, alors l'application $\iota : x \mapsto (y \mapsto \{x,y\})$ induit un isomorphisme de k-espaces vectoriels de $\check{D}$ sur D^*.*

Corollaire 3.3.36. *$\{\cdot,\cdot\}$ est une dualité parfaite entre D et $\check{D}$.*

Proposition 3.3.37. *Si $P \in k[X]$ est non nul, alors ι induit des isomorphismes*

$$D^{P(\psi)=0} \simeq (\check{D}/P(\varphi)\check{D})^* \text{ et } D/P(\psi)D \simeq (\check{D}^{P(\varphi)=0})^*.$$

Démonstration. En utilisant ι^{-1}, on peut identifier $(\check{D}/P(\varphi)\check{D})^*$ au sous-ensemble des éléments $x \in D$ tels que $\{P(\varphi)y, x\} = 0$, pour tout $y \in \check{D}$. Mais puisque $\{P(\varphi)y, x\} = \{y, P(\psi)x\}$, cet ensemble est aussi l'ensemble des éléments $x \in D$ tels que $\{y, P(\psi)x\} = 0$, pour tout $y \in D$. La dualité $\{\cdot, \cdot\}$ étant parfaite, c'est donc $D^{P(\psi)=0}$.
Pour la seconde inclusion, notons que $(\check{D}^{P(\varphi)=0})^*$ est le quotient de D par l'orthogonal de $\check{D}^{P(\varphi)=0}$. Or, $P(\varphi)$ a pour adjoint $P(\psi)$, donc l'orthogonal de $\check{D}^{P(\varphi)=0}$ est l'adhérence de $P(\psi)D$. Mais $P(\psi)D$ est déjà fermé par le lemme 3.3, ce qui permet de conclure. □

3.6.3 Orthogonalité et réseaux

Définition 3.3.38. Si M est un réseau de D, on note $M^\perp$ le sous-k-espace vectoriel de D

$$M^\perp = \left\{x \in \check{D} : \{x, y\} = 0, \forall y \in D\right\}.$$

Lemme 3.3.39. *Si M est un réseau de D, alors $M^\perp$ est un réseau de $\check{D}$ tel que $(M^\perp)^\perp = M$.*

Démonstration. Soit $f_1, \ldots, f_d$ une base de D. M étant un réseau de D, il existe deux entiers $a \geq b$ tels que

$$\bigoplus_{i=1}^{d} \pi^a k[\![\pi]\!] f_i \subset M \subset \bigoplus_{i=1}^{d} \pi^b k[\![\pi]\!] f_i.$$

Soit $\check{f}_i \in \check{D}$ l'élément qui envoie f_i sur $\frac{d\pi}{1+\pi}$ et f_j sur 0 si $j \neq i$. Alors les $\check{f}_i$ forment une base de $\check{D}$.
De plus, on a $\mathrm{res}_0\left(xy\frac{d\pi}{1+\pi}\right) = 0$ pour tout $y \in k[\![\pi]\!]$ si et seulement si $x \in k[\![\pi]\!]$, de sorte que

$$\bigoplus_{i=1}^{d} \pi^{-b} k[\![\pi]\!] \check{f}_i \subset M^\perp \subset \bigoplus_{i=1}^{d} \pi^{-a} k[\![\pi]\!] \check{f}_i.$$

Si $\lambda \in k[\![\pi]\!]$, alors $\{x, \lambda y\} = \{\gamma_{-1}(\lambda)x, y\}$, de sorte que $M^\perp$ est un $k[\![\pi]\!]$-module, et donc par les inclusions qui précèdent, c'est un réseau de $\check{D}$.

□

Lemme 3.3.40. *Si $M_1 \subset M_2$ sont deux réseaux de D, alors*

$$\dim_k(M_1^\perp / M_2^\perp) = \dim_k(M_2/M_1).$$

Démonstration. C'est une conséquence du fait que $\{\cdot, \cdot\}$ est une dualité parfaite. □

3.7 D^+, D^{++}, D^{nr} et les (φ, Γ)-modules irréductibles

Définition 3.3.41. Si D est un (φ, Γ)-module sur $k(\!(\pi)\!)$, on définit trois sous-k-espaces vectoriels de D de la manière suivante :
- $D^+ := \{x \in D$ tels que $(\varphi^n(x))_n$ soit bornée$\}$,
- $D^{++} := \{x \in D$ tels que $\varphi^n(x) \to 0\}$,
- $D^{\mathrm{nr}} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \varphi^n(D)$.

Il est évident que $\pi D^+ \subset D^{++} \subset D^+$, et que D^+ est le plus grand réseau de D stable par φ.

Lemme 3.3.42. *Si D est un (φ, Γ)-module sur $k(\!(\pi)\!)$, alors D^+ et D^{++} sont deux réseaux de D tels que $\pi D^+ \subset D^{++}$ et*

1. $D^{\mathrm{nr}} \subset D^+$.
2. $D^{\mathrm{nr}} \cap D^{++} = \{0\}$.

Démonstration. Puisque $\pi D^+ \subset D^{++} \subset D^+$, il suffit de prouver que D^{++} est un réseau pour montrer que c'est également le cas de D^+. Mais soient N_0, N_1 des réseaux comme dans le lemme 3.3.10. Alors $\varphi^n(N_0) \subset \varphi^n(\pi)N_0$, et donc $N_0 \subset D^{++}$, puisque $\varphi^n(\pi) \to 0$.
Si $n \in \mathbf{N}$, soient $b_{i,j,n} \in k[\![\pi]\!]$ tels que $\pi^{n_1} e_i = \sum_{j=1}^d b_{i,j,n}\varphi^n(\pi^{n_1} e_j)$. Si $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i \in D^{++}$ est tel que $\varphi^n(x) = \sum_{j=1}^d x_{i,n}\pi^{n_1} e_j$, alors $\varphi^n(x_i) = \sum_{j=1}^d b_{i,j,n} x_{j,n}$, et la suite $\varphi^n(x_i)$ est bornée, de sorte que $x_i \in k[\![\pi]\!]$, et donc $x \in N_1$.
Nous avons donc prouvé que $N_0 \subset D^{++} \subset N_1$, et donc D^{++} est un réseau.

Pour prouver les points i) et ii), D^{nr} étant stable par φ par définition, il suffit de prouver qu'il est de dimension finie.
Pour cela, nous allons prouver que l'application $D^{\mathrm{nr}} \otimes_k k(\!(\pi)\!) \to D$ est injective.
Soient $v_1, \ldots, v_n \in D^{\mathrm{nr}}$ des éléments k-linéairement indépendants, et supposons qu'ils ne soient pas linéairement indépendants sur $k(\!(\pi)\!)$.
Soit alors $\sum \lambda_i v_i$ une relation de dépendance linéaire telle que $\sharp\{i : \lambda_i \neq 0\}$ soit minimal. On peut supposer sans restriction que $\lambda_1 = 1$, de sorte que

$$v_1 = -\sum_{i \geq 2} \lambda_i v_i. \tag{3.7.1}$$

Pour tout $j \in \mathbf{N}$, soit $v_i^{(j)} \in D$ tel que $v_i = \varphi^j(v_i^{(j)})$. En appliquant ψ^j à la relation précédente, on obtient

$$v_1^{(j)} = -\sum_{i \geq 2} \psi^j(\lambda_i) v_i^{(j)}.$$

Puis en appliquant φ^j

$$v_1 = -\sum_{i \geq 2} \varphi^j \circ \psi^j(\lambda_i) v_i,$$

de sorte que

$$\sum_{i \geq 2} \lambda_i v_i = \sum_{i \geq 2} \varphi^j \circ \psi^j(\lambda_i) v_i.$$

Par minimalité de la relation linéaire, on en déduit que $\lambda_i = \varphi^j \circ \psi^j(\lambda_i)$, et donc que chacun des λ_i est dans $\varphi^j(k(\!(\pi)\!))$.
Donc pour tout $i \geq 2$, $\lambda_i \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \varphi^j(k(\!(\pi)\!)) = k$. La relation (3.7.1) est donc une relation de dépendance k-linéaire, ce qui est contraire à l'hypothèse que nous avons faite sur les v_i. On en déduit que D^{nr} est bien un k-espace vectoriel de dimension finie.

□

Proposition 3.3.43. *Si D est un (φ, Γ)-module sur $k(\!(\pi)\!)$, alors $D^+ = D^{++} \oplus D^{\mathrm{nr}}$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\pi^n D^+$ est stable par φ car D^+ est stable par φ et $\varphi^n(\pi) \in \pi^n k[\![\pi]\!]$.
$D^+/\pi^n D^+$ est un k-espace vectoriel de dimension finie, $\varphi : D^+/\pi^n D^+ \to D^+\pi^n D^+$ induit une décomposition

$$D^+/\pi^n D^+ = D^+_{n,nil} \oplus D^+_{n,inv},$$

où φ est nilpotent sur $D^+_{n,nil}$ et inversible sur $D^+_{n,inv}$.
Alors $D^+ = \varprojlim_n D^+/\pi^n D^+ = \varprojlim_n D^+_{n,nil} \oplus \varprojlim_n D^+_{n,inv}$.
Il est clair que $\varprojlim_n D^+_{n,nil} = D^{++}$, et que $\varprojlim_n D^+_{n,inv} \subset D^{\mathrm{nr}}$. Puisque $D^{\mathrm{nr}} \cap D^{++} = \{0\}$, on a bien la décomposition recherchée : $D^+ = D^{++} \oplus D^{\mathrm{nr}}$. □

Proposition 3.3.44. *Si D est un (φ, Γ)-module sur $k(\!(\pi)\!)$, alors on a les inclusions de réseaux*

$$D^{++} \subset D^+ \subset D^\natural \subset D^\sharp.$$

Démonstration. La seule inclusion qui reste à prouver est $D^+ \subset D^\natural$.
Soit donc $x \in D^+$, de sorte que $\pi\varphi(x) \in D^{++}$, et donc $\varphi^n(\pi\varphi(x)) \in D^\natural$ pour n suffisamment grand car $D^\natural$ est un voisinage ouvert de 0.
On en déduit que $y = \psi^{n+1}(\varphi^n(\pi\varphi(x)))$ est également dans $D^\natural$ pour n suffisamment grand. Mais $y = \psi(\pi\varphi(x)) = \psi(\pi)x = -x$, et donc $x \in D^\natural$. □

Lemme 3.3.45. *Si $P \in k[X]$ est non nul, alors $D^{++} \subset P(\psi)D^{++}$.*

Démonstration. On peut supposer sans restriction que P est unitaire, et écrivons alors $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{d-1}X^{d-1} + X^d$.
Soit alors $(b_i)_i$ la suite d'éléments de k telle que

$$(1 + a_{d-1}X + \cdots + X^d)\left(\sum_{i\in\mathbf{N}} b_i X^i\right) = 1.$$

Soit $\Phi = \varphi^n \sum_{i\in\mathbf{N}} b_i \varphi^i$: c'est un opérateur qui est bien défini sur D^{++}. Si on écrit $P(\psi) = \psi^n(1 + a_{d-1}\varphi + \cdots + a_0\varphi^n)$, on voit que $P(\psi)$ est un inverse à gauche de Φ, et donc que $D^{++} \subset P(\psi)D^{++}$. □

Proposition 3.3.46. *Si $P \in k[X]$ est non nul, alors $P(\psi)$ induit une surjection de $D^\natural$ sur lui-même.*

Démonstration. Notons M l'image de $D^\sharp$ par $P(\psi)$. C'est un sous-module compact de $D^\natural$ sur lequel ψ est surjectif puisque ψ commute à $P(\psi)$ et $\psi : D^\natural \to D^\natural$ est surjectif. Par le lemme 3.3.45, M contient D^{++}, et est donc un réseau de D. Mais $D^\natural$ étant le plus petit réseau de D stable par ψ, on en déduit que $M = D^\natural$. □

Proposition 3.3.47. *Soit D un (φ, Γ)-module sur $k(\!(\pi)\!)$. Alors dans la dualité entre $\check{D}$ et D, l'orthogonal de $D^\natural$ est $\check{D}^+$ et celui de $D^\sharp$ est $\check{D}^{++}$.*

Démonstration. $(D^\natural)^\perp$ est un réseau de $\check{D}$, et puisque $D^\natural$ est stable par ψ, $(D^\natural)^\perp$ est stable par φ, et donc inclus dans $\check{D}^+$.
Soient $x \in \check{D}^{++}$ et $y \in D^\sharp$. Puisque $\psi : D^\sharp \to D^\sharp$ est surjectif, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $y_n \in D^\sharp$ tel que $y = \psi^n(y_n$. Ainsi, $\{x, y\} = \{x, \psi^n(y_n)\} = \{\varphi^n(x), y_n\}$. Mais

les y_n sont dans le compact $D^\sharp$ et $\varphi^n(x) \to 0$, de sorte que en passant à la limite $\{x, y\} = 0$. On en déduit que :

$$\check{D}^{++} \subset (D^\sharp)^\perp \subset (D^\natural)^\perp \subset \check{D}^+,$$

et donc les inégalités

$$\dim_k D^\sharp/D^\natural = \dim_k \left((D^\natural)^\perp/(D^\sharp)^\perp\right) \leq \dim_k(\check{D}^+/\check{D}^{++}) = \dim_k \check{D}^{\mathrm{nr}}.$$

Soit $P \in k[X]$, unitaire qui annule φ sur le k-espace vectoriel de dimension finie $\check{D}^{\mathrm{nr}} = \check{D}^+/\check{D}^{++}$. Par les inclusions précédentes, $P(\varphi)$ annule aussi $(D^\natural)^\perp/(D^\sharp)^\perp$.
Par dualité, $P(\psi)$ annule $D^\sharp/D^\natural$, et puisque $P(\psi)$ est surjectif sur $D^\natural$ par la proposition 3.3.47, on a $D^\natural = P(\psi)D^\sharp$.
Ainsi, $D^\sharp/D^\natural = D^\sharp/P(\psi)D^\sharp$. Par la proposition 3.3.18, $D^\sharp/P(\psi)D^\sharp$ est isomorphe à $D/P(\psi)D$, qui par la proposition 3.3.37 est le dual de $\check{D}^{P(\varphi)=0}$. Ce dernier ensemble contient $\check{D}^{\mathrm{nr}}$ par définition de P.
On a donc $\dim_k D^\sharp/D^\natural \geq \dim_k \check{D}^{\mathrm{nr}}$, ce qui prouve que les inégalités ci-dessus sont en fait des égalités, et qu'il en est de même des inclusions $\check{D}^{++} \subset (D^\sharp)^\perp$ et $(D^\natural)^\perp \subset \check{D}^+$. □

Corollaire 3.3.48. *$D^\sharp, D^\natural$ et $D^\sharp/D^\natural$ sont les duaux respectifs de $\check{D}/\check{D}^{++}, \check{D}/\check{D}^+$ et $\check{D}^{\mathrm{nr}}$.*

Le résultat suivant, qui est le corollaire II.5.21 de [Col10b], montre que dans le cas où k est un corps fini et D est un (φ, Γ)-module irréductible de dimension supérieure ou égale à deux, alors il n'existe qu'un seul (ψ, Γ)-module surjectif dans D.

Théorème 3.3.49. *Si k est un corps fini, et si D est un (φ, Γ)-module sur $k(\!(\pi)\!)$, irréductible et de dimension supérieure ou égale à 2, alors $D^\sharp = D^\natural$.*

La preuve de Colmez utilise notamment le fait que $D^\sharp/D^\natural = D^{\mathrm{nr}}$, mais également l'équivalence de catégories de Fontaine, et donc n'est plus valable pour k corps de caractéristique p quelconque.

Notons que ce résultat n'est plus vrai dans le cas où D est de dimension 1. Rappelons (proposition 3.3.4) qu'un (φ, Γ)-module de dimension 1 est de la forme $D = k(\!(\pi)\!) \cdot e$, avec $\varphi(e) = \lambda e, \lambda \in k^\times$ et $\gamma(e) = \omega^h e, h \in \mathbf{Z}$.
Dans ce cas, l'opérateur ψ est donné par $\psi(\mu e) = \lambda^{-1}\psi(\mu)e$, et on a alors deux ψ-modules surjectifs dans D, qui sont :

$$D^\sharp = \pi^{-1}k[\![\pi]\!]e \text{ et } D^\natural = k[\![\pi]\!]e.$$

Théorème 3.3.50. *Si k est algébriquement clos et si D est un (φ, Γ)-module irréductible de dimension supérieure ou égale à 2 sur $k(\!(\pi)\!)$, alors $D^\sharp = D^\natural$.*

Démonstration. $D^\sharp/D^\natural$ est le dual de $\check{D}^{\mathrm{nr}}$.
Or, $\check{D}^{\mathrm{nr}}$ est stable par φ et de dimension finie sur k. Donc il existe une valeur propre $\lambda \in k^\times$ pour φ. Notons D_1 le sous-espace propre associé. Puisque φ et Γ commutent, D_1 est stable sous Γ, et donc le $k(\!(\pi)\!)$-espace vectoriel D' engendré par D_1 est un sous-(φ, Γ)-module de $\check{D}$.
Mais $\check{D}$ étant irréductible, $D' = \{0\}$ ou $D' = \check{D}$.
Le second cas est impossible, car alors $\check{D}$ posséderait une base formée d'éléments de D_1 dans laquelle la matrice de φ serait $\lambda\,\mathrm{Id}$. Mais alors

$$\lambda\,\mathrm{Id}\,\varphi(\mathrm{Mat}(\gamma)) = \mathrm{Mat}(\gamma) \cdot \gamma(\lambda\,\mathrm{Id}) = \lambda \mathrm{Mat}(\gamma), \forall \gamma \in \Gamma,$$

de sorte que l'action de Γ est alors scalaire. Mais alors D_1 est stable par Γ, et l'action de γ possède donc un vecteur propre x. Le sous-$k(\!(\pi)\!)$-module de D engendré par x est alors un sous-(φ, Γ)-module de $\check{D}$ de dimension 1, ce qui est impossible si D est irréductible de dimension supérieure ou égale à 2.
Donc $D' = \{0\}$, et alors $D^\sharp/D^\natural = 0$, soit $D^\sharp = D^\natural$. □

Corollaire 3.3.51. *Si k est fini ou algébriquement clos, alors avec les notations précédentes :*

1. *$D(\mathrm{ind}(\omega_n^h))$ est un (φ, Γ)-module irréductible,*
2. *$(D(\mathrm{ind}(\omega_n^h)) \otimes D_{\lambda,s})^\sharp = \bigoplus_{j=0}^{n-1} k[\![\pi]\!] \cdot f_j$.*

Démonstration. Dans les deux cas, $D(\mathrm{ind}(\omega_n^h)) \otimes D_{\lambda,s}$ est un (φ, Γ)-module irréductible. En effet dans le cas d'un corps fini il s'agit du (φ, Γ)-module associé à la représentation galoisienne $\mathrm{ind}(\omega_n^h)$, et dans le cas d'un corps algébriquement clos, il s'agit du (φ, Γ)-module associé à la représentation du groupe de Weil $\mathrm{ind}(\omega_n^h)$.
Ainsi, par les théorèmes 3.3.49 et 3.3.50, dans les deux cas il n'existe qu'un seul réseau de $D(\mathrm{ind}(\omega_n^h)) \otimes D_{\lambda,s}$ qui soit un ψ-module surjectif. Mais nous avons prouvé à la proposition 3.3.27 que $\bigoplus_{j=0}^{n-1} k[\![\pi]\!] \cdot f_j$ est un tel réseau.
On en déduit donc que

$$(D(\mathrm{ind}(\omega_n^h)) \otimes D_{\lambda,s})^\sharp = (D(\mathrm{ind}(\omega_n^h)) \otimes D_{\lambda,s})^\natural = \bigoplus_{j=0}^{n-1} k[\![\pi]\!] \cdot f_j.$$

□

Corollaire 3.3.52. *Pour tout corps k de caractéristique p, $D(\mathrm{ind}(\omega_n^h))_k$ est un (φ, Γ)-module irréductible sur $k(\!(\pi)\!)$.*

Démonstration. Nous savons que le résultat est vrai pour k algébriquement clos par le corollaire précédent. Si k n'est pas algébriquement clos, et que $D(\mathrm{ind}(\omega_n^h))$ est réductible sur $k(\!(\pi)\!)$, alors l'extension des scalaires à $\overline{k}(\!(\pi)\!)$ est également réductible. Mais il s'agit alors de $D(\mathrm{ind}(\omega_n^h))_{\overline{k}}$, dont nous venons de prouver qu'il était irréductible sur $\overline{k}(\!(\pi)\!)$. Par conséquent, $D(\mathrm{ind}(\omega_n^h))_k$ est un (φ, Γ)-module irréductible sur $k(\!(\pi)\!)$. □

4 Représentations lisses de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$

Soit $\mathrm{B} = \mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ le sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ formé des matrices triangulaires supérieures. On note $\mathrm{K} = \mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$, et $\mathrm{Z} = \mathbf{Q}_p^\times \mathrm{Id}$ le centre de B, formé des matrices scalaires. On note également $\mathrm{N} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\mathrm{N}_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

On note $A = \{a_1 p^{-1} + \cdots + a_n p^{-n}, 0 \leq a_i \leq p-1\}$ un système de représentants de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$. Pour $\beta \in A$ et $\delta \in \mathbf{Z}$, posons $g_{\beta,\delta} := \left(\begin{smallmatrix} 1 & \beta \\ 0 & p^\delta \end{smallmatrix}\right)$. Alors les $g_{\beta,\delta}$ fournissent un système de représentants de $\mathrm{B} \,/\, \mathrm{KZ}$:

Lemme 3.4.1. *On a* $\mathrm{B} = \coprod_{\beta \in A, \delta \in \mathbf{Z}} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & p^\delta \end{pmatrix} \cdot \mathrm{KZ}$.

Démonstration. Soit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{B}$. Alors on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 p^{v_p(a)} & b \\ 0 & c_0 p^{v_p(c)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & bp^{-v_p(a)} c_0^{-1} - x \\ 0 & p^{v_p(c) - v_p(a)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & x c_0 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{v_p(a)} & 0 \\ 0 & p^{v_p(a)} \end{pmatrix}$$

avec $a_0, c_0 \in \mathbf{Z}_p^\times$. Il est toujours possible de choisir $x \in \mathbf{Z}_p$ de sorte que $bp^{-v_p(a)} c_0^{-1} - x$ soit dans A, et donc $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \in \bigcup_{\beta \in A, \delta \in \mathbf{Z}} \left(\begin{smallmatrix} 1 & \beta \\ 0 & p^\delta \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathrm{KZ}$. Il n'y a pas de problème à voir que l'union est disjointe. □

Remarque 3.4.2. Ce système de représentants est également un système de représentants de $\mathrm{G} \,/\, \mathrm{K}_\mathrm{G} \mathrm{Z}$, de sorte que nous pourrons l'identifier à l'ensemble des sommets de l'arbre de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

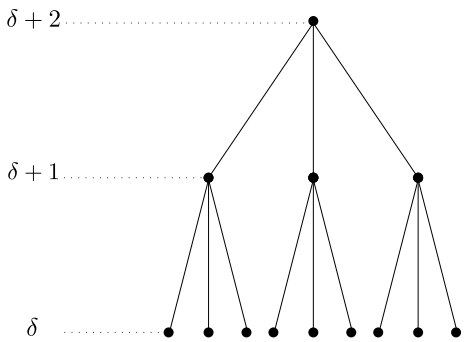

FIGURE 3.1 – L'arbre de $\mathrm{B} \,/\, \mathrm{KZ}$

Notons qu'il s'agit ici des conventions de [Ber10c], différentes de celles utilisées par exemple par Breuil dans le cas de GL_2.

Nous nous intéresserons dans la suite aux représentations lisses irréductibles de B. Commençons par les plus simples d'entre elles, à savoir les caractères, qu'il est aisé de décrire :

Proposition 3.4.3. *Soit* $\chi : \mathrm{B} \to k^\times$ *un caractère lisse de* $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$. *Alors* $\chi\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)\right) = \chi_1(a)\chi_2(c)$, *où* χ_1, χ_2 *sont des caractères lisses de* $\mathbf{Q}_p^\times$.

Démonstration. Commençons par montrer que le sous-groupe dérivé de B est le groupe $\mathrm{N} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Il est facile de voir que $\mathrm{D(B)} \subset \mathrm{N}$ en regardant les coefficients diagonaux des commutateurs. Pour l'inclusion réciproque, notons que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & c(a-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors χ se factorise en un caractère lisse de $\mathrm{B}/\mathrm{N} \simeq \mathbf{Q}_p^\times \times \mathbf{Q}_p^\times$, et donc est de la forme $\mathbf{Q}_p^\times \times \mathbf{Q}_p^\times \to k^\times$. □

De plus, en caractéristique p, les caractères lisses de $\mathbf{Q}_p^\times$ sont connus par la proposition 3.1.5.

Le même type de raisonnement permet de décrire les représentations lisses de dimension finie de B.

Proposition 3.4.4. *Soit V une représentation k-linéaire lisse irréductible et de dimension finie de* B. *Alors il existe deux automorphismes f, g de V, commutant entre eux, et deux caractères χ_1, χ_2 de $\mathbf{F}_p^\times$ tels que*

$$\begin{pmatrix} p^n a_0 & b \\ 0 & p^m c_0 \end{pmatrix} \cdot v = \chi_1(\overline{a_0})\chi_2(\overline{c_0}) f^n \circ g^m(v), \forall v \in V$$

si $m, n \in \mathbf{Z}, a_0, c_0 \in \mathbf{Z}_p^\times, b \in \mathbf{Q}_p$.

Démonstration. Soit $v_1, \ldots, v_n$ une base de V, et pour chaque i, soit K_i un sous-groupe ouvert compact de B stabilisant v_i. Si on pose $K = \bigcap_{i=1}^n K_i$, alors K stabilise V tout entier, et est encore un sous-groupe ouvert compact de B. En particulier, il existe $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \neq \mathrm{Id}$ dans K. Mais le sous-groupe distingué de B engendré par cette matrice est alors N tout entier, de sorte que V se factorise en une représentation de $\mathrm{B}/\mathrm{N} = \mathbf{Q}_p^\times \times \mathbf{Q}_p^\times = p^{\mathbf{Z}} \times \mathbf{Z}_p^\times \times p^{\mathbf{Z}} \times \mathbf{Z}_p^\times$.
Notons f et g les deux endomorphismes de V correspondant aux actions respectives de $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)$.
La preuve de la proposition 3.1.3 prouve qu'une représentation lisse de dimension finie de $\mathbf{Z}_p^\times$ est en fait une représentation de $\mu_{p-1}(\mathbf{Q}_p) = \mathbf{F}_p^\times$, de sorte que V restreinte à $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est en fait somme de caractères, et de même pour V restreinte à $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_p^\times \end{smallmatrix}\right)$.
Si χ_1 est un caractère de $\mathbf{F}_p^\times$ tel que $\left(V^{\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=\chi_1}\right) \neq 0$, alors il est évident que $V = V^{\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=\chi_1}$ par irréductibilité de V.
On conclut de même manière pour l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_p^\times \end{smallmatrix}\right)$. □

Corollaire 3.4.5. *Si k est algébriquement clos, les représentations k-linéaires lisses irréductibles et de dimension finie de* B *sont les caractères.*

Démonstration. Si V est une telle représentation, soient f et g les deux endomorphismes de V correspondant à l'action de $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)$. Ces deux endomorphismes sont alors simultanément trigonalisables, et soit $v \in V$ un vecteur propre commun à f et g. Par la proposition précédente, $k \cdot v$ est stable par B et donc est une sous-représentation de V. Par irréductibilité de V, $V = k \cdot v$ est de dimension un. □

Si σ_1, σ_2 sont deux caractères lisses de $\mathbf{Q}_p^\times$ dans $k^\times$, alors $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2 : \mathrm{KZ} \to k^\times$ défini par $\sigma\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)\right) = \sigma_1(a)\sigma_2(c)$ est un caractère lisse de KZ, et tout caractère lisse de KZ est de cette forme.

Soit alors $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ l'induite à support compact de σ. Par ce qui a été dit à la section 1.2 et le lemme 3.4.1, une base de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ est donnée par les $[g_{\beta,\delta}], \delta \in \mathbf{Z}, \beta \in A$.

Les induites $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ sont d'une grande importance dans ce qui suit puisque toute représentation de B, lisse irréductible, et à caractère central est un quotient d'une telle induite, comme l'indique la proposition suivante (c'est le théorème 1.2.3 de [Ber10c]).

Proposition 3.4.6. *Soit* Π *une représentation lisse irréductible à caractère central de* B. *Alors il existe un caractère lisse* $\sigma : \mathrm{KZ} \to k^\times$ *tel que* Π *soit un quotient de* $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$.

Démonstration. Considérons I_1 le pro-p-groupe $\begin{pmatrix} 1+p\mathbf{Z}_p & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1+p\mathbf{Z}_p \end{pmatrix}$. Puisque Π est lisse, on a $\Pi^{\mathrm{I}_1} \neq 0$. Mais I_1 est le noyau du morphisme $\mathrm{K} \to \mathbf{F}_p^\times \times \mathbf{F}_p^\times$ qui à $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)$ associe $(\overline{a}, \overline{c})$, de sorte que I_1 est un sous-groupe distingué de B, et $\mathrm{K} / \mathrm{I}_1 \simeq \mathbf{F}_p^\times \times \mathbf{F}_p^\times$. Ainsi, Π^{I_1} est une représentation de $\mathrm{K} / \mathrm{I}_1$.
Mais comme $\mathbf{F}_p^\times \times \mathbf{F}_p^\times$ est un groupe fini de cardinal premier à la caractéristique de k, $\Pi = \bigoplus_\eta \Pi^{\mathrm{K}=\eta}$ est la somme de ses composantes isotypiques. Puisque par hypothèse Z agit sur Π par un caractère, il existe donc un caractère $\sigma : \mathrm{KZ} \to k^\times$ et un élément non nul $v \in \Pi$ tel que KZ agit sur v via σ.
Par réciprocité de Frobenius (3.1.7), il existe donc un morphisme B-équivariant non nul $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma \to \Pi$, qui est nécessairement surjectif par irréductibilité de Π. □

Remarque 3.4.7.
1. Il n'y a pas unicité du caractère σ : on peut avoir des entrelacements non triviaux entre des quotients de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ pour différents σ.
2. Si $\lambda \in k^\times$, alors $\sigma_1\mu_\lambda \otimes \sigma_2\mu_\lambda^{-1}$ et $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ définissent les mêmes caractères de KZ (alors que ce sont deux caractères distincts de B si $\lambda \neq 1$), de sorte que $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma_1 \otimes \sigma_2 = \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma_1\mu_\lambda \otimes \sigma_2\mu_\lambda^{-1}$.
   Ainsi, quitte à changer σ_1 en $\sigma_1\mu_\lambda$ et σ_2 en $\sigma_2\mu_\lambda^{-1}$, nous pourrons toujours supposer que $\sigma_2(p) = 1$, ce que nous ferons toujours dans la suite.

Notons ici une différence importante avec le cas des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$: l'opérateur T qui engendre l'agèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathrm{K_G\,Z}, \mathrm{ind}_{\mathrm{K_G\,Z}}^{\mathrm{G}} \mathrm{Sym}^r k^2)$ possède un analogue dans le cas de l'algèbre de Hecke de B : $\mathcal{H}(\mathrm{KZ}, \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma) = \mathrm{End}_{\mathrm{B}}(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)$. C'est l'opérateur que nous notons encore T, et qui est défini par

$$T([g]) = \left[g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}\right] + \sum_{j=0}^{p-1}\left[g\begin{pmatrix} 1 & p^{-1}j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right].$$

Malheureusement, contrairement au cas de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, $\mathcal{H}(\mathrm{KZ}, \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)$ n'est pas l'algèbre des polynômes en T. En effet, on définit deux opérateurs T_+ et T_- de $\mathcal{H}(\mathrm{KZ}, \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)$ par

$$T_+([g]) = \sum_{j=0}^{p-1}\left[g\begin{pmatrix} 1 & p^{-1}j \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix}\right] \text{ et } T_-([g]) = \left[g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}\right].$$

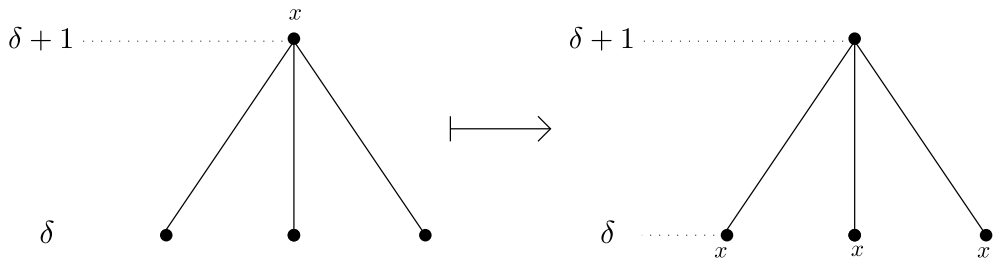

FIGURE 3.2 – T_+

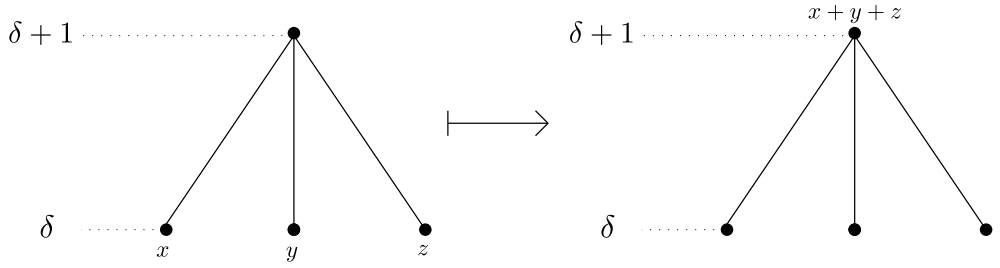

FIGURE 3.3 – T_-

Alors on a $T = T_+ + T_-$, et $T_- \circ T_+ = 0$ alors que $T_+ \circ T_- \neq 0$, de sorte que $\mathcal{H}(\mathrm{KZ}, \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)$ n'est pas commutative.
Toutefois, il est possible de montrer que $\mathcal{H}(\mathrm{KZ}, \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)$ est la k-algèbre engendrée par T_+ et T_-.

Si un élément f de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ s'écrit $f = \sum_{\beta,\delta} \lambda_{\beta,\delta}[g_{\beta,\delta}]$, on appelle support de f l'ensemble (fini) des $g_{\beta,\delta}$ tels que $\lambda_{\beta,\delta} \neq 0$. On appelle l'entier δ la hauteur de $g_{\beta,\delta}$, et un élément de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ est dit à support en niveaux $n_1, \ldots, n_k$ si tous les éléments de son support sont de hauteur dans $\{n_1, \ldots, n_k\}$.
Si f est à support en niveaux $\{n_1, \ldots, n_k\}$, alors $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right) \cdot f$ (respectivement $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot f$) est à support en niveaux $\{n_1+1, \ldots, n_k+1\}$ (resp. $\{n_1-1, \ldots, n_k-1\}$), donc quitte à translater par une puissance de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)$ (resp. $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$), il est toujours possible de supposer qu'un élément est à support en niveaux positifs (resp. négatifs).

Pour $n \in \mathbf{N}$, on appelle n-bloc de niveau δ un ensemble de la forme

$$\{g_{\beta - jp^{-n}, \delta}, j = 0, \ldots, p^n - 1\},$$

et n-bloc initial de niveau δ le n-bloc pour lequel $\beta = 0$.

Notons $\tau_n = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -p^{-n} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de sorte que $\tau_n^j = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -jp^{-n} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et rappelons le lemme suivant dû à Berger, dont nous aurons besoin par la suite afin de prouver l'irréductibilité de certaines représentations :

Lemme 3.4.8 ([Ber10c, lemme 1.2.4])**.** *Soit* Π *une représentation lisse de* B*,* v *un élément non nul de* $\Pi^{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$ *et* $k \geq 0$*. Alors l'un des* p^k *éléments*

$$v_l = \sum_{j=0}^{p^k-1} \binom{j}{l} \tau_k^j(v), 0 \leq l \leq p^k - 1$$

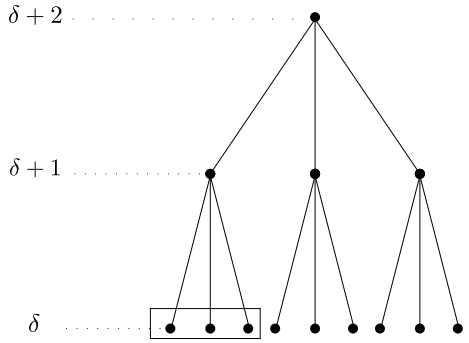

FIGURE 3.4 – Un 1-bloc

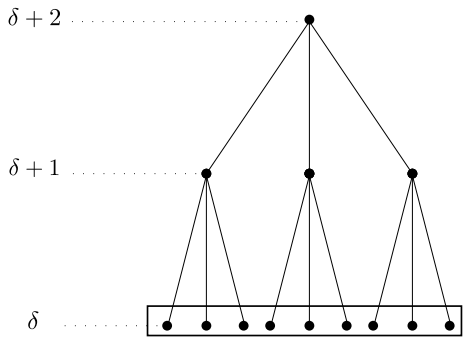

FIGURE 3.5 – Un 2-bloc

est non nul et fixé par τ_k.

4.1 Description vectorielle des n-blocs

Si n est un entier positif, soit V_n l'espace vectoriel de dimension p^n des suites finies $(x_0, \ldots, x_{p^n-1})$, avec $x_i \in k$. Si $0 \leq k \leq p^n - 1$ soit $v_{k,n} \in V_n$ défini par

$$v_{k,n} = \left(\binom{0}{k}, \binom{1}{k}, \ldots, \binom{p^n-1}{k} \right),$$

et soit $V_{k,n}$ le sous-espace vectoriel de V_n engendré par $v_{0,n}, \ldots, v_{k-1,n}$. Par [Ber10c, lemme 1.1.3], c'est un sous-espace de dimension k de V_n.
$V_{1,n}$ est l'espace des suites constantes, et on voit facilement (en regardant les $v_{k,n}, 0 \leq k \leq p^n - 1$) que $V_{p^n-1,n}$ est formé de suites de somme nulle. Mais puisque l'ensemble des suites de somme nulle est un hyperplan de V_n, un argument de dimension permet de prouver que $V_{p^n-1,n}$ est exactement l'ensemble des suites de somme nulle.

De plus, puisque $\binom{i+p^n}{k} = \binom{i}{k}$, on peut indifféremment indicer les éléments de V_n par les éléments de $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ ou par ceux de $\{0, \ldots, p^n - 1\}$.
On note $\Delta_n : V_n \to V_n$ l'application définie par $(\Delta_n x)_j = x_{j-1} - x_j$. $\Delta_n = T_n - \mathrm{Id}$ où T_n est l'opérateur de shift : $(T_n x)_j = x_{j-1}$. Alors $\Delta_n^{p^n} = (T_n - \mathrm{Id})^{p^n} = T_n^{p^n} - \mathrm{Id} = 0$, alors que $\Delta_n^{p^n-1} \neq 0$, donc Δ_n est nilpotent d'indice p^n.
On en déduit que les $\mathrm{Ker}(\Delta_n^k), 0 \leq k \leq p^n$ sont les seuls sous-espaces de V_n stables par Δ_n.

Lemme 3.4.9 ([Ber10c, lemme 1.1.4])**.** *Si $0 \leq k + l \leq p^n$, alors on a une suite exacte*

$$0 \to V_{k,n} \to V_{k+l,n} \overset{\Delta^k}{\to} V_{l,n} \to 0.$$

De plus, $\Delta^k(x) \in V_{l,n}$ si et seulement si $x \in V_{l+k,n}$.

L'intérêt de ces espaces V_n est que si un élément f de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ possède un support en niveau δ inclus dans le n-bloc de β, il est possible de représenter ce support par un élément de V_n, en identifiant $(x_0, \ldots, x_{p^n-1})$ à

$$\sum_{j=0}^{p^n-1} x_j \left[\begin{pmatrix} 1 & \beta - jp^{-n} \\ 0 & p^\delta \end{pmatrix} \right].$$

Il est également possible de voir un $(n+1)$-bloc comme une union de p n-blocs. Si $v_0 = (v_0^j)_j, v_1, \ldots, v_{p-1}$ sont des n-blocs, on note $[v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}]$ le $(n+1)$-bloc $(w_0, \ldots, w_{p^{n+1}-1})$ tel que $w_{pi+j} = v_j^i$.

Remarque 3.4.10. On prendra garde au fait que l'écriture d'un n-bloc comme un $n+1$-bloc ne consiste pas simplement à ajouter des zéros à la fin du n-bloc, mais plutôt à intercaler des zéros : on a un plongement canonique ι_n de V_n dans V_{n+1} défini par

$$(\iota_n(v))_i = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq 0 \bmod p \\ v_{i/p} \text{ sinon.} \end{cases}$$

C'est ce plongement qui permet de voir les n-blocs comme des $(n+1)$-blocs.

En particulier, lorsque $\delta \leq 0$, alors le support en niveau δ de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot f$ est l'image par $T_{-\delta}$ du support en niveau δ de f. Et de même, le support en niveau δ de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot f - f$ est l'image de celui de f par $\Delta_{-\delta}$.
Remarquons que ceci n'est plus valable pour les niveaux positifs, puisque si f est un élément de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ à support en niveaux positifs, alors l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur f est triviale.

Si $a \in \mathbf{Z}_p$, nous définissons $\mu_a : V_n \to V_n$ par $(\mu_a(v))_i = v_{ai}$ et on dispose alors du résultat suivant :

Lemme 3.4.11 ([Ber10c, lemme 1.1.5])**.** *Si $a \in \mathbf{Z}_p^\times$, alors $\mu_a(v_{k,n}) - \overline{a}^k v_{k,n} \in V_{k,n}$, de sorte que si $v \in V_{k+1,n}$, alors $\mu_a(v) \in V_{k+1,n}$.*

Lemme 3.4.12 ([Ber10c, lemme 1.1.6])**.** *Soit $v \in V_{k,n}$ et $0 \leq i \leq p-1$. Alors la suite y de V_{n-1} définie par $y_j = x_{pi+j}$ est dans $V_{\lfloor (k-1)/p \rfloor + 1, n-1}$.*

Terminons par un lemme technique qui nous sera utile par la suite :

Lemme 3.4.13. *Soit $x \in V_n$ non nul. Alors $k \cdot (1, \ldots, 1) \subset \mathrm{Vect}(x, T_n(x), \ldots, T_n^{p^n-1}(x))$.*

Démonstration. Puisque Δ_n est nilpotent, il existe k tel que $\Delta_n^k(x) = 0$ et $\Delta_n^{k-1}(x) \neq 0$. Mais alors $\Delta_n^{k-1}(x) \in V_{1,n} = k \cdot (1, \ldots, 1)$. Puisque $\Delta_n = T_n - \mathrm{Id}$, on obtient bien le résultat cherché. □

4.2 Représentations de présentation finie

Notons qu'il sera intéressant de savoir décrire une représentation lisse irréductible comme un quotient explicite d'une induite, notamment afin de savoir si l'espace par lequel on quotiente est «gros».

Définition 3.4.14. Une représentation lisse Π de B est dite de présentation finie s'il existe une représentation lisse irréductible σ de KZ et une surjection B-équivariante $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma \twoheadrightarrow \Pi$ dont le noyau est de type fini en tant que $k[\mathrm{B}]$-module.

Remarque 3.4.15. On prendra garde au fait qu'il n'y a a priori aucune raison pour qu'une représentation irréductible de B soit de présentation finie, bien que ce soit toujours un $k[\mathrm{B}]$-module de type fini (et même engendré par un seul élément).

Dans le cas des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Hu a prouvé ([Hu12, Proposition 4.4]) que si une représentation lisse π admet une présentation finie, alors pour toute représentation de dimension finie W de $\mathrm{K}_G\,\mathrm{Z}$ et toute surjection $\mathrm{ind}_{\mathrm{K}_G\,\mathrm{Z}}^{G} W \twoheadrightarrow \pi$, le noyau de cette surjection est un $k[G]$-module de type fini.
Nous ne savons pas si un tel résultat est vrai dans le cas des représentations de B. La définition que nous donnons d'une représentation de présentation finie est donc plutôt celle d'une représentation admettant une présentation de type fini.

4.3 Description explicite de certaines représentations

Il est possible de décrire explicitement certains caractères de B comme quotient d'une induite. Soit $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2$ un caractère lisse de B tel que $\sigma_2(p) = 1$, et soit $\Theta : \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma \to k(\sigma)$ le morphisme défini par réciprocité de Frobenius, c'est-à-dire

$$\sum_{\beta\in A,\delta\in\mathbf{Z}} \lambda_{\beta,\delta}[g_{\beta,\delta}] \mapsto \sum_{\beta\in A,\delta\in\mathbf{Z}} \lambda_{\beta,\delta}.$$

Θ est un morphisme B-équivariant et surjectif. Son noyau R_0 est formé de l'ensemble des éléments dont la somme des coefficients $\lambda_{\beta,\delta}$ est nulle, de sorte que

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma/\,\mathrm{R}_0 \simeq k(\sigma).$$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Rappelons que si $1 \leq h \leq p^n - 2$, on dit que h est primitif s'il n'existe pas d'entier $d < n$ tel que h soit un multiple de $\frac{p^n-1}{p^d-1}$. Si $i_{n-1}\dots i_1 i_0$ est le développement en base p de $h(p-1)$, on note $h_k = i_{n-k} + pi_{n-k} + \cdots + p^{k-1}i_{n-1}$, de sorte que $h_k = ph_{k-1} + i_{n-k}$, $h_0 = 0$ et $h_n = h(p-1)$.

Nous construisons à présent des représentations irréductibles de B comme quotients explicites de certaines induites. Ces représentations généralisent celles qui sont construites dans la première partie de [Ber10c], et la méthode de preuve est exactement la même que celle qui conduit au théorème 1.3.8 du même article, nous nous affranchissons juste des restrictions sur les valeurs en p des caractères σ_1 et σ_2, ainsi que de la finitude de k.

Si $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2$ est un caractère lisse de KZ, $n \geq 1$ et $0 \leq l \leq p^n - 1$, on définit $w_{l,n} \in \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ comme étant l'élément

$$w_{l,n} = \sum_{j=0}^{p^n-1} \binom{j}{l} \left[\begin{pmatrix} 1 & -jp^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right],$$

de sorte que le n-bloc initial de $w_{l,n}$ est $v_{l,n}$.

Définition 3.4.16. Soit $n \geq 2$, $1 \leq h \leq p^{n-1} - 1$ et $\lambda \in k^\times$. On définit alors $S_n(h,\lambda,\sigma)$ comme étant la sous-B-représentation de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ engendrée par

$$\varphi_n(h,\lambda,\sigma) = \lambda \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix}\right] + w_{h(p-1),n}.$$

On pose alors $\Pi_n(h,\lambda,\sigma) := \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma/S_n(h,\lambda,\sigma)$.

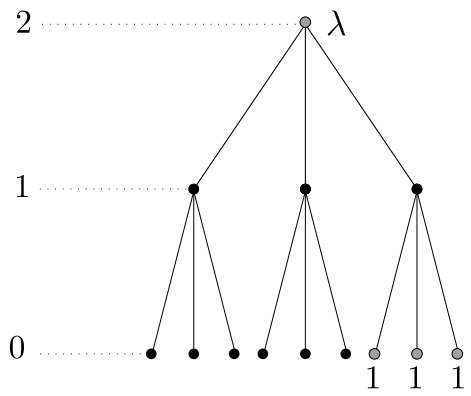

FIGURE 3.6 – $\varphi_2(1, p-1, \sigma)$

Un certain nombre de résultats techniques vont être nécessaires afin de prouver l'irréductibilité des représentations $\Pi_n(h, \lambda, \sigma)$.

Si $f = \sum_{\beta \in A} \sum_{\delta \in \mathbf{Z}} \alpha(\beta, \delta)[g_{\beta,\delta}]$, alors pour $0 \leq i \leq n-1$, on pose

$$f_i = \sum_{\substack{\beta \in A \\ \delta \equiv i \bmod n}} \alpha(\beta, \delta)[g_{\beta,\delta}],$$

de sorte que $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1}$.

Lemme 3.4.17. *Si $f \in \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$, alors $f \in S_n(h, \lambda, \sigma)$ si et seulement si $f_i \in S_n(h, \lambda, \sigma)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.*

Démonstration. Il est clair que si tous les f_i sont dans $S_n(h, \lambda, \sigma)$, alors f aussi, il s'agit donc de prouver l'autre implication. Soit donc $f \in S_n(h, \lambda, \sigma)$. Puisque $S_n(h, \lambda, \sigma)$ est engendré par $\varphi_n(h, \lambda, \sigma)$ dont le support est porté uniquement en niveaux 0 et n, on peut écrire

$$f = \sum_j \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ 0 & d_j \end{pmatrix} \cdot \varphi_n(h, \lambda, \sigma),$$

et alors

$$f_i = \sum_{v_p(d_j) - v_p(a_j) \equiv i \bmod n} \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ 0 & d_j \end{pmatrix} \in S_n(h, \lambda, \sigma).$$

□

Lemme 3.4.18. *Si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{KZ}$, alors*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot w_{l,n} = \sigma_1(a)\sigma_2(d) \sum_{j=0}^{p^n-1} \binom{jda^{-1}}{l} \left[\begin{pmatrix} 1 & -jp^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

De plus, le n-bloc initial de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & jp^{-n} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w_{l,n} - w_{l,n}$ est dans $V_{l,n}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot w_{l,n} &= \sum_{j=0}^{p^n-1} \binom{j}{l} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -jp^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{p^n-1} \binom{j}{l} \left[\begin{pmatrix} 1 & -jp^{-n}ad^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right] \\ &= \sigma_1(a)\sigma_2(d) \sum_{j=0}^{p^n-1} \binom{jda^{-1}}{l} \left[\begin{pmatrix} 1 & -p^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].\end{aligned}$$

De plus, l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & jp^{-n} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - \mathrm{Id}$ sur le n-bloc initial de $w_{l,n}$ correspond à celle de $(\mathrm{Id} + \Delta_n)^j - \mathrm{Id}$, et donc à une combinaison linéaire de $\Delta_n^k, 1 \leq k \leq j$. Mais puisque $\Delta_n^k(v_{l,n}) \in V_{l,n}$ pour $k \geq 1$, on en déduit que le n-bloc initial de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & jp^{-n} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w_{l,n} - w_{l,n}$ est bien dans $V_{l,n}$ comme annoncé. □

Notons $\mathrm{B}^+ = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{B} : v_p(d) \geq v_p(a) \right\}$.

Lemme 3.4.19. *Si $f \in S_n(h, \lambda, \sigma)$ est à support en niveaux positifs, alors f est une combinaison linéaire de B^+-translatés de $\varphi_n(h, \lambda, \sigma)$.*

Démonstration. Notons $\mathrm{B}^0 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{B} : v_p(a) = v_p(d) \right\}$ et commençons par montrer qu'une combinaison linéaire de B^0-translatés de $\varphi_n(h, \lambda, \sigma)$ nulle en niveau zéro est nulle.
Si $\sum_{i \in I} \lambda_i \left(\begin{smallmatrix} a_i & b_i \\ 0 & d_i \end{smallmatrix}\right) \cdot \varphi_n(h, \lambda, \sigma)$ est une telle combinaison linéaire, alors en utilisant l'action de Z, et quitte à changer les λ_i, on peut supposer que $d_i = 1$. Dans ce cas, les termes indicés par i_1 et i_2 contribuent au même n-bloc de niveau zéro si et seulement si $i_1 - i_2 \in p^{-n}\mathbf{Z}_p$ car

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -jp^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} a & -ajp^{-n} + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

On peut donc supposer que $\left(\begin{smallmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p & p^{-n}\mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = S$, et on s'intéresse au n-bloc initial. Mais si $g \in S$, par le lemme 3.4.18, le n-bloc initial de $g \cdot \varphi_n(h, \lambda, \sigma)$ est $\sigma_1(a)\mu_{a^{-1}d}(v_{h(p-1),n}) - \sigma_1(a)v_{h(p-1),n}$. Or, par le lemme 3.4.11,

$$\mu_{a^{-1}d}(v_{h(p-1),n}) - v_{h(p-1),n} = \mu_{a^{-1}d}(v_{h(p-1),n}) - (a^{-1}d)^{h(p-1)}v_{h(p-1),n} \in V_{h(p-1),n}.$$

Puisque $V_{h(p-1)+1,n} = V_{h(p-1),n} \oplus kv_{h(p-1),n}$, le n-bloc initial de $g \cdot \varphi_n(h, \lambda, \sigma)$ est donc $x + \lambda v_{h(p-1),n}$ avec $x \in V_{h(p-1),n}$. On en déduit que dans $g \cdot \varphi_n(h, \lambda, \sigma)$, le coefficient de $\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^n \end{smallmatrix}\right)\right]$ est le même que celui de $w_{h(p-1),n}$, et donc qu'il en est de même dans une combinaion linéaire de B^0-translatés de $\varphi_n(h, \lambda, \sigma)$: une telle combinaison linéaire nulle en niveau zéro est identiquement nulle.

Un élément de B s'écrit $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^n \end{smallmatrix}\right) b^0$, avec $b^0 \in \mathrm{B}^0$ et $n \in \mathbf{Z}$. Donc si

$$f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \sum_{i \in I_n} \lambda_i \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^n \end{smallmatrix}\right) b_i \varphi_n(h, \lambda, \sigma)$$

est à support en niveaux positifs, alors $\min\{n \in \mathbf{Z} : I_n \neq \emptyset\} \geq 0$, ce qui finit de prouver le lemme. □

Lemme 3.4.20. *Si $f \in S_n(h, \lambda, \sigma)$ est à support en niveaux positifs, alors pour $1 \leq k \leq n$, les k-blocs de niveau zéro de f sont dans $V_{h_k+1,k}$.*

Démonstration. Par le lemme précédent, il suffit de montrer que si $b \in \mathrm{B}^+$, alors les k-blocs de niveau zéro de $b \cdot w_{h(p-1),n}$ sont dans $V_{h_k+1,k}$.
Si $b = \mathrm{Id}$, alors le n-bloc initial de $w_{h(p-1),n} = w_{h_n,n}$ est $v_{h_n,n} \in V_{h_n+1,n}$.
Puisque $\lfloor h_k/p \rfloor = h_{k-1}$, le lemme 3.4.12 implique que les $(k-1)$-blocs sont dans $V_{h_{k-1}+1,k-1}$, et une récurrence immédiate permet de conclure.

Les formules du lemme 3.4.18 et le lemme 3.4.11 appliqué avec $a^{-1}d \in \mathbf{Z}_p^\times$ prouvent que le n-bloc initial de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot w_{h_n,n}$ où $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{KZ}$ est dans $V_{h_n+1,n}$, ce qui permet de se ramener au cas précédent.

Enfin, il reste à considérer le cas de $g_{\beta,\delta} \cdot w_{h_n,n}$, où l'on peut supposer $\delta = 0$ (sinon le support en niveau zéro est nul, et il n'y a rien à montrer). Mais alors son support est juste celui de $w_{h_n,n}$ décalé de β, et on se ramène alors aux cas précédents. □

Corollaire 3.4.21. *La représentation $\Pi_n(h, \lambda, \sigma)$ n'est pas triviale.*

Démonstration. Le lemme précédent permet de montrer que Id n'est pas dans $S_n(h, \lambda, \sigma)$ puisque son n-bloc initial de niveau zéro n'est pas dans $V_{h_n+1,n}$, et donc $S_n(h, \lambda, \sigma) \neq \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}} \sigma$. □

Lemme 3.4.22. *i) Si le support de $f \in S_n(h, \lambda, \sigma)$ est contenu dans un seul k-bloc avec $0 \leq k \leq n$, alors ce support est dans $V_{h_k,k}$.*

ii) Pour $0 \leq l \leq h_k - 1$, $w_{l,k} \in S_n(h, \lambda, \sigma)$.

Démonstration. Si $k = n$, commençons par remarquer que l'ensemble des n-blocs possibles est stable par Δ_n, qui correspond à l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -p^{-n} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - \mathrm{Id}$. En conséquence, l'ensemble des n-blocs possibles est l'un des $V_{l,n}$. Ensuite, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -p^{-n} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\varphi_n(h, \lambda, \sigma) - \varphi_n(h, \lambda, \sigma)$ est à support dans le n-bloc initial de niveau zéro, et son support est $\Delta_n(v_{h_n,n}) = v_{h_n-1,n}$. Puisque l'ensemble des n-blocs possibles est stable par Δ_n (qui correspond à l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -p^{-n} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - \mathrm{Id}$), on obtient donc tout $V_{h_n,n}$.
En revanche, il n'est pas possible d'obtenir tout $V_{h_n+1,n}$, car alors on aurait $w_{h(p-1),n} \in S_n(h, \lambda, \sigma)$, et donc $\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^n \end{smallmatrix}\right)\right] \in S_n(h, \lambda, \sigma)$. Mais $\Pi_n(h, \lambda, \sigma) \neq 0$ par le corollaire 3.4.21.

Si $v_{l,k}$ est le support dans un k-bloc d'un élément $f \in S_n(h, \lambda, \sigma)$, alors quitte à décaler par une puissance de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)$, on peut supposer que le support est en niveau zéro. Et quitte à décaler par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ il est également possible de supposer qu'il s'agit du k-bloc initial. Alors, pour $0 \leq m \leq p-1$, le $(k+1)$-bloc initial de

$$\sum_{i=0}^{p-1} \binom{i}{m} \begin{pmatrix} 1 & -ip^{k-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f$$

est $\left[\binom{0}{m} v_{l,k}, \ldots, \binom{p-1}{m} v_{l,k}\right]$. Mais puisque $\binom{j}{l}\binom{i}{m} = \binom{pj+i}{pl+m}$, c'est exactement $v_{pl+m,k+1}$. En particulier, si on avait $w_{h_k,k} \in S_n(h, \lambda, \sigma)$, on aurait aussi $w_{h_{k+1},k+1} \in S_n(h, \lambda, \sigma)$. Dans ce cas, une récurrence nous conduirait à $w_{h_n,n} \in S_n(h, \lambda, \sigma)$, ce qui est impossible. Ceci achève de prouver le i).

Pour le point ii), nous l'avons déjà prouvé pour $k = n$. Supposons que $w_{l,k+1} \in S_n(h, \lambda, \sigma)$ pour $0 \leq l \leq h_{k+1} - 1$. Alors tous les $\left[\binom{0}{m} v_{l,k}, \ldots, \binom{p-1}{m} v_{l,k}\right]$ sont des $(k+1)$-blocs d'éléments de $S_n(h, \lambda, \sigma)$ pour $pl+m \leq h_{k+1}-1$. En prenant $m = p-1$ et $l \leq h_k - 1$, on obtient $w_{l,k} \in S_n(h, \lambda, \sigma)$, et une récurrence descendante permet de conclure. □

Lemme 3.4.23. *Si le support de $g \in S_n(h, \lambda, \sigma)$ est en niveaux $0, \ldots, n-1$, alors les $(n+1)$-blocs de niveau 0 de g sont de la forme*

$$[\mu_0 v_{h_n,n} + x_0, \ldots, \mu_{p-1} v_{h_n,n} + x_{p-1}],$$

avec $x_i \in V_{h_n,n}$ et $(\mu_0, \ldots, \mu_{p-1}) \in V_{h_1+1,1}$.

Démonstration. Par le lemme 3.4.17, on peut supposer que g est à support uniquement en niveau zéro et par le lemme 3.4.20, les n-blocs de g sont dans $V_{h_n+1,n}$, et donc peuvent être écrits sous la forme $\mu_i v_{h_n,n} + x_i$, avec $\mu_i \in k$ et $x_i \in V_{h_n-1,n}$. Puisque les $w_{l,n}$ sont dans $S_n(h, \lambda, \sigma)$ si $0 \leq l \leq h_n - 1$, on peut en retrancher une combinaison linéaire de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$-translatés, de manière à obtenir un g' tel que les x_i soient nuls et les μ_i soient inchangés.
En soustrayant une combinaison linéaire bien choisie de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$-translatés de $\varphi_n(h, \lambda, \sigma)$, on obtient un élément de $S_n(h, \lambda, \sigma)$ dont le support est contenu en niveau n, et dont les 1-blocs sont $-\lambda(\mu_0, \ldots, \mu_{p-1})$. Mais alors par le lemme 3.4.20, on a $(\mu_0, \ldots, \mu_{p-1}) \in V_{h_1+1,1}$. □

Lemme 3.4.24. *Si le support de $f \in \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}} \sigma$ est en niveaux $0, \ldots, n-1$, et si $\tau_{n+1}(f) - f \in S_n(h, \lambda, \sigma)$, alors les n-blocs de niveau 0 de f sont dans $V_{h_n+1,n}$.*

Démonstration. Le lemme 3.4.23 s'applique à $\tau_{n+1}(f) - f$, et alors les $(n+1)$-blocs de $\tau_{n+1}(f) - f$ en niveau zéro sont de la forme $[\mu_0 v_{h_n,n} + x_0, \ldots, \mu_{p-1} v_{h_n,n} + x_{p-1}]$n avec $x_i \in V_{h_n,n}$ et $(\mu_0, \ldots, \mu_{p-1}) \in V_{h_1+1,1}$.
Si $f = \sum \alpha(\beta, \delta)[g_{\beta,\delta}]$, alors le coefficient de $[g_{\beta,0}]$ dans $\tau_{n+1}(f) - f$ est $\alpha(\beta + p^{n-1}, 0) - \alpha(\beta, 0)$, donc le n-bloc de niveau 0 de β est donné par le tableau suivant (où l'on note $\alpha(k)$ pour $\alpha(\beta + k, 0)$) :

$$\begin{array}{cccc}
\alpha\left(\frac{1}{p^{n+1}}\right) - \alpha(0) & \alpha\left(\frac{1}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^n}\right) - \alpha\left(\frac{1}{p^n}\right) & \ldots & \alpha\left(\frac{1}{p^{n+1}} + \frac{p^n-1}{p^n}\right) - \alpha\left(\frac{p^n-1}{p^n}\right) \\
\alpha\left(\frac{2}{p^{n+1}}\right) - \alpha\left(\frac{1}{p^{n+1}}\right) & \alpha\left(\frac{2}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^n}\right) - \alpha\left(\frac{1}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^n}\right) & \ldots & \alpha\left(\frac{2}{p^{n+1}} + \frac{p^n-1}{p^n}\right) - \alpha\left(\frac{1}{p^{n+1}} + \frac{p^n-1}{p^n}\right) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\alpha\left(\frac{p}{p^{n+1}}\right) - \alpha\left(\frac{p-1}{p^{n+1}}\right) & \alpha\left(\frac{p}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^n}\right) - \alpha\left(\frac{p-1}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^n}\right) & \ldots & \alpha\left(\frac{p}{p^{n+1}} + \frac{p^n-1}{p^n}\right) - \alpha\left(\frac{p-1}{p^{n+1}} + \frac{p^n-1}{p^n}\right)
\end{array}$$

Soient alors $y_0, \ldots, y_{p-1}$ les n-blocs du $(n+1)$-bloc de f que nous considérons. En sommant les lignes du tableau ci-dessus, on obtient

$$\alpha\left(\beta + \frac{1}{p^n}\right) - \alpha(\beta), \alpha\left(\beta + \frac{2}{p^n}\right) - \alpha\left(\beta + \frac{1}{p^n}\right), \ldots, \alpha(\beta) - \alpha\left(\beta + \frac{p^n - 1}{p^n}\right).$$

Or, il s'agit exactement de $\Delta_n(y_0)$, donc

$$\Delta_n(y_0) = \sum_{i=0}^{p-1} (\mu_i v_{h_n,n} + x_i) = \sum_{i=0}^{p-1} x_i \in V_{h_n,n},$$

puisque $(\mu_0, \ldots, \mu_{p-1}) \in V_{h_1+1,1} \subset V_{p-1,1}$, ce qui implique $\sum_{i=0}^{p-1} x_i = 0$. Mais si $\Delta_n(y_0) \in V_{h_n,n}$, alors $y_0 \in V_{h_n+1,n}$ par le lemme 3.4.9. En appliquant le même raisonnement à $\tau_{n+1}^j(f) - f$, qui est encore dans $S_n(h, \lambda, \sigma)$, on prouve que $y_j \in V_{h_n+1,n}$. □

Corollaire 3.4.25. *Si le support de $f \in \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ est en niveaux $0, \ldots, n-1$, que son support en niveau zéro est inclus dans un seul n-bloc et que $\tau_n(f) - f \in S_n(h, \lambda, \sigma)$, alors le n-bloc de f en niveau zéro est dans $V_{h_n+1,n}$.*

Démonstration. Le lemme 3.4.23 appliqué) $\tau_n(f) - f$ permet de voir que le n-bloc de $\tau_n(f) - f$ est de la forme $\mu_0 v_{h_n,n} + x_0$, avec $x_0 \in V_{h_n,n}$ et $(\mu_0, 0, \ldots, 0) \in V_{h_1+1,1}$, ce qui impose $\mu_0 = 0$ car $V_{h_1+1,1} \subset V_{p-1,1}$.
Si l'on note y le n-bloc de f, alors le n-bloc de $\tau_n(f) - f$ est $\Delta_n(y)$, de sorte que $\Delta_n(y) \in V_{h_n,n}$, et donc par le lemme 3.4.9, $y \in V_{h_n+1,n}$. □

Lemme 3.4.26. *Si h est primitif et si le développement en base p de $h(p-1)$ est périodique de période d divisant strictement n, alors h_d n'est pas divisible par $p-1$.*

Démonstration. En effet, puisque le développement de $h(p-1)$ est périodique, il est égal à $h_d \frac{p^n-1}{p^d-1}$, et si on avait $p-1|h_d$, alors h serait divisible par $\frac{p^n-1}{p^d-1}$. □

Nous pouvons alors enfin prouver l'irréductibilité des représentations $\Pi_n(h, \lambda, \sigma)$, au moins sous certains conditions.

Théorème 3.4.27. *Soit $n \geq 2$, $1 \leq h \leq p^{n-1} - 1$ primitif et $\lambda \in k^\times$. Alors $\Pi_n(h, \lambda, \sigma)$ est une représentation irréductible de* B.

Démonstration. Nous allons prouver que si $f \in \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ n'est pas dans $S_n(h, \lambda, \sigma)$, alors il existe une combinaison linéaire de B-translatés de f qui est égale à [Id] modulo $S_n(h, \lambda, \sigma)$. Soit donc f tel que $\overline{f} \neq 0$.

Le support de f est fini, il existe donc $a \in \mathbf{Z}$ tel qu'il soit en niveaux supérieurs ou égaux à a. Comme le support de $\varphi_n(h, \lambda, \sigma)$ en niveau n est formé d'un seul élément, on peut, quitte à retrancher une combinaison linéaire de translatés de $\varphi_n(h, \lambda, \sigma)$, supposer que le support de a est en niveaux $a, \ldots, a+n-1$, puis, quitte à multiplier par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-a} \end{smallmatrix}\right)$ supposer que le support de f est en niveaux $0, \ldots, n-1$.
En particulier, puisque son support est en niveaux positifs, on a alors $f \in (\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$.
Soient $s_1, \ldots, s_{n-1}$ des entiers tels que le support de f en niveau i soit dans le s_i-bloc initial de niveau i.
Par le lemme 3.4.8, appliqué avec $k = n+1$, on peut remplacer f par l'un des $\sum_{j=0}^{p^{n+1}-1} \binom{j}{l} \tau_{n+1}^j(f)$, de sorte que $\tau_{n+1}(f) - f \in S_n(h, \lambda, \sigma)$.
Puisque $\tau_{n+1}^j\left(\begin{smallmatrix} 1 & \beta \\ 0 & p^i \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \beta - jp^{-(n+1)+i} \\ 0 & p^i \end{smallmatrix}\right)$, alors le support en niveau i de ce nouveau f est inclus dans le $\max(s_i, n+1-i)$-bloc initial. Par le lemme 3.4.24, puisque les n-blocs de niveau zéro de f sont dans $V_{h_n+1,n}$, il existe $g \in S_n(h, \lambda, \sigma)$, combinaison linéaire de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$-translatés de $\varphi_n(h, \lambda, \sigma)$ et des $w_{l,n}, 0 \leq l \leq h_n - 1$, tel que f et g possèdent les mêmes blocs en niveau zéro. Il est alors possible de remplacer f par $f' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{smallmatrix}\right)(f - g)$. Alors le support en niveau j de f' est inclus dans le $\max(s_{j+1}, n-j)$ pour $0 \leq j \leq n-2$. Pour son support en niveau $n-1$, remarquons qu'il provient uniquement des coefficients de niveau n de g. Or, puisque $\varphi_n(h, \lambda, \sigma)$ a son support dans le n-bloc initial de niveau zéro et le 1-bloc initial de niveau n, par construction de g, le support en niveau $n-1$ de f' est inclus dans le $\max(s_0 - n, 1)$-bloc initial.

Par construction, f' vérifie $\tau_n(f') - f' \in S_n(h,\lambda,\sigma)$. En effet,

$$\begin{aligned}\tau_n(f') - f' &= \begin{pmatrix}1 & -p^{-n}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p^{-1}\end{pmatrix}(f-g) - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p^{-1}\end{pmatrix}(f-g)\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p^{-1}\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1 & -p^{-n-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}f - f\right) + \star, \text{ où } \star \in S_n(h,\lambda,\sigma)\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p^{-1}\end{pmatrix}(\tau_{n+1}(f) - f) + \star\end{aligned}$$

et $\tau_{n+1}(f) - f \in S_n(h,\lambda,\sigma)$ par construction. Comme de plus, le support de niveau j de f' est inclus dans le $(n-j)$-bloc initial pour $0 \leq j \leq n-1$, on peut appliquer le corollaire 3.4.25, ce qui prouve que le n-bloc de niveau zéro de f' est dans $V_{h_n+1,n}$. Il existe alors un élément $g \in S_n(h,\lambda,\sigma)$, combinaison linéaire de $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Q}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$-translatés de $\varphi_n(h,\lambda,\sigma)$ et des $w_{l,n}, 0 \leq l \leq h_n - 1$, tel que les supports de niveau zéro de f' et g coïncident. On peut alors remplacer f' par $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & p^{-1}\end{smallmatrix}\right)(f'-g)$, et le support en niveau j de ce nouveau f' est alors contenu dans le $(n-j-1)$-bloc initial, pour $0 \leq j \leq n-1$.

Pour les mêmes raisons que précédemment, $\tau_{n-1}(f') - f'$ est un élément de $S_n(h,\lambda,\sigma)$ dont le support de niveau j est inclus dans le $(n-j-1)$-bloc initial pour $0 \leq j \leq n-1$. Par le lemme 3.4.17, chacun de ses blocs doit être déjà dans $S_n(h,\lambda,\sigma)$, et par le lemme 3.4.22, le bloc de niveau $n-j-1$ doit être dans $V_{h_j,j}$. Or, le bloc de niveau $n-j-1$ de $\tau_{n-1}(f') - f'$ est l'image par Δ_j du bloc de même niveau de f' car

$$\begin{pmatrix}1 & -p^{n-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & p^{n-j-1}\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}1 & \beta - p^{-j}\\ 0 & p^{n-j-1}\end{pmatrix}\right].$$

Par le lemme 3.4.9, le bloc de niveau $n-j-1$ de f' est donc dans $V_{h_j+1,j}$. Par le lemme 3.4.22, on peut donc soustraire à f' une combinaison linéaire d'éléments de $S_n(h,\lambda,\sigma)$ et supposer que le bloc de niveau $n-j-1$ de f' est un multiple x_j de $v_{h_j,j}$.
Si $0 \leq m \leq p-1$, soit U_m l'opérateur défini par $U_m(f) = \sum_{i=0}^{p-1}\binom{i}{m}\tau_n^i(f)$.
En niveau $n-j-1$, $U_m(f')$ à un support inclus dans $(j+1)$-bloc initial. Or, le $(j+1)$-bloc correspondant à $v_{h_j,j}$ a pour k-ième coefficient 0 si k n'est pas divisible par p et $\binom{k/p}{h_j}$ si $j \equiv 0$ modulo p. Notons $a_{j,k}$ ce coefficient. Comme

$$\begin{pmatrix}1 & -ip^{-n}\\ 0 & p^{n-j-1}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & p^{n-j-1}\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}1 & \beta - ip^{-(j+1)}\\ 0 & p^{n-j-1}\end{pmatrix}\right]$$

le k-ième coefficient du $(j+1)$-bloc de niveau $n-j-1$ de $U_m(f')$ est $\sum_{i=0}^{p-1}\binom{i}{m}a_{j,-i}$. Il n'y a donc qu'une seule valeur de i pour laquelle $a_{j,k-i}$ est non nul : celle pour laquelle $i-k$ est multiple de p. Mais alors

$$\binom{i}{m}a_{j,k-i} = \binom{i}{m}\binom{(k-i)/p}{h_j} = \binom{p(k-i)/p+i}{ph_j+m} = \binom{k}{ph_j+m}.$$

Or, $h_{j+1} = ph_j + i_{n-j-1}$, et donc le coefficient que l'on vient de calculer est égal à $\binom{k}{h_{j+1}-i_{n-j-1}+m}$, de sorte que le $(j+1)$-bloc de niveau $n-j-1$ de $U_m(f')$ est

$v_{h_{j+1}-i_{n-j-1}+m,j+1}$.

Si l'on choisit m comme étant égal au maximum de l'ensemble des i_{n-j-1} tels que $x_j \neq 0$, alors $U_m(f')$ a pour support des $(j+1)$-blocs de niveau $n-j-1$, non tous nuls, et tels que si $i_{n-j-1} < m$, alors le bloc de niveau $n-j-1$ est nul.
Ceci nous permet donc, en remplaçant f' par $U_m(f')$, de diminuer le nombre de blocs non nuls, à moins que $m = i_{n-k-1}$ pour tous ces blocs. Dans ce cas, il est alors possible de diminuer le niveau de f' grâce à l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{smallmatrix}\right)$, sauf si f' possède un bloc de niveau zéro, auquel cas on commence par retrancher à f' une combinaison linéaire de translatés de $\varphi_n(h,\lambda,\sigma)$ de même support de niveau zéro que f' (ce qui est possible car le n-bloc de niveau zéro de f' est un multiple de $v_{h_n,n}$ par les calculs qui précèdent), avant de diminuer le niveau.
On vérifie aisément que le nouveau f' est toujours tel que $\tau_{n-1}(f') - f' \in_n (h,\lambda,\sigma)$ et à support de niveau $n-j-1$ inclus dans le j-bloc initial, et donc qu'il est possible de continuer à répéter cette procédure (remplacer f' par $U_m(f')$ puis diminuer le niveau), ce qui a pour effet de diminuer le nombre de blocs non nuls, tout en continuant à garder un élément qui est équivalent modulo $S_n(h,\lambda,\sigma)$ à une combinaison linéaire de translatés de f. Par conséquent, le nombre de blocs non nuls va finir par stationner.

Par construction, cela signifie que l'application $r \mapsto i_r$ est périodique, de période d divisant n, et en choisissant bien l'étape à laquelle on arrête le processus précédent, on peut supposer que les blocs non nuls de f' sont exactement en niveau $n-1-ld, 0 \leq (n/d)-1$.
Si $d < n$, alors h_d n'est pas divisible par $p-1$ par 3.4.26. Si a est un élément de $\mathbf{Z}_p^\times$ tel que $\overline{a}$ soit un générateur de $\mathbf{F}_p^\times$, alors $\mu_a(v_{l,k}) - a^l v_{l,k} \in V_{l,k}$ par le lemme 3.4.11. Ceci implique que $\sigma_2(a^{-1})\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) f' - f'$ possède au moins un bloc non nul de moins : celui de niveau $n-1$, qui devient $\mu_a(v_{0,0}) - v_{0,0} = 0$. De plus, cet élément est non nul car le bloc de niveau $n-1-d$ est non nul : c'est $\mu_a(v_{h_d,d}) - v_{h_d,d}$, qui est non nul car $\mu_a(v_{h,d,d}) - a^{h_d} v_{h_d,d} \in V_{h_d,d}$ et $a^{h_d} \neq 1$.
De nouveau les conditions sont réunies pour appliquer le même procédé que précédemment (remplacer f' par $U_m(f')$ et diminuer le niveau), de sorte qu'il est toujours possible de se ramener au cas où un seul bloc est non nul (c'est-à-dire $d = n$).
Alors f' est un élément à support porté uniquement en niveau $n-1$, et même à support dans le 0-bloc initial de niveau $n-1$. De la là il est aisé de se ramener à [Id], ce qui achève de prouver qu'il existe bien une combinaison linéaire de B-translatés de f équivalente à [Id] modulo $S_n(h,\lambda,\sigma)$: la représentation $\Pi_n(h,\lambda,\sigma)$ est bien irréductible. □

Nous verrons plus tard (théoreme 3.5.11) que ces représentations proviennent en fait, via la construction de Colmez, de (φ,Γ)-modules irréductibles de dimension supérieure ou égale à 2.
Construisons à présent d'autres quotients irréductibles de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$, dont nous prouverons par la suite qu'ils proviennent de (φ,Γ)-modules de dimension 1.

Soit donc $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2$ un caractère lisse de KZ tel que $\sigma_2(p) = 1$, et $\lambda \in k^\times$.

Notons $S(\lambda,\sigma)$ la sous-B-représentation de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ engendrée par

$$w = \lambda^{-1}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}\right] + \sum_{j=0}^{p-1}\left[\begin{pmatrix}1 & -jp^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right].$$

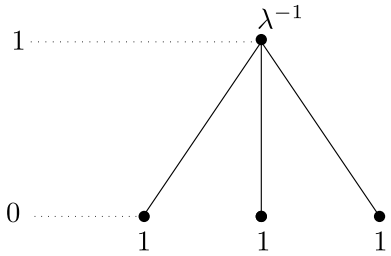

FIGURE 3.7 – w

Lemme 3.4.28. *Un élément de $S(\lambda,\sigma)$ à support en un seul niveau est nécessairement nul.*

Démonstration. Soit $f \in S(\lambda,\sigma)$ à support en niveau n, et notons

$$f = \sum_{\delta\in\mathbf{Z}}\sum_{\beta\in A}\lambda_{\beta,\delta}g_{\beta,\delta}\cdot w,$$

avec $I \subset \mathbf{Z}$ et $A_\delta \subset A$, tels que les $\lambda_{\beta,\delta} \neq 0$. Une telle écriture est toujours possible car si $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix} \in \mathrm{KZ}$, alors

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & p^\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\cdot w &= \lambda^{-1}\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & p^\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}\right] + \sum_{j=0}^{p-1}\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & p^\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & -jp^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\\
&= \lambda^{-1}\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & p^\delta\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & bp\\ 0 & c\end{pmatrix}\right]\\
&+ \sum_{j=0}^{p-1}\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & p^\delta\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & -jp^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & -jp^{-1}(a-c)+b\\ 0 & c\end{pmatrix}\right]\\
&= \sigma_1(a)\sigma_2(c)g_{\beta,\delta}\cdot w.
\end{aligned}$$

Notons que

$$\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & p^\delta\end{pmatrix}\sum_{j=0}^{p-1}\left[\begin{pmatrix}1 & -jp^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right] \text{ et } \begin{pmatrix}1 & \beta'\\ 0 & p^\delta\end{pmatrix}\sum_{j=0}^{p-1}\left[\begin{pmatrix}1 & -jp^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]$$

sont à supports disjoints si $\beta-\beta' \notin \{0,\dots,-(p-1)p^{-1}\}$ et égaux sinon.
On peut donc supposer que

$$f = \sum_{\delta\in I}\sum_{\beta\in\mathbf{Q}_p/p^{-1}\mathbf{Z}_p}\lambda_{\beta,\delta}\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & p^\delta\end{pmatrix}\cdot w$$

où pour tout $\delta \in I$, il existe β tel que $\lambda_{\beta,\delta} \neq 0$.
Si $f \neq 0$, alors I est non vide, et notons i_0 (resp. i_1) son plus petit (resp. plus grand) élément. Puisque f est à support en niveau n, alors $i_0 = i_1 = n$. Mais si le support en niveau $n+1$ de $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & p^n \end{pmatrix} \cdot w$ est nul, alors son support en niveau n est nul également, et donc $f = 0$. □

Proposition 3.4.29. *La représentation* $\Pi(\lambda, \sigma) := \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}} \sigma / S(\lambda, \sigma)$ *est une représentation irréductible non triviale de* $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Démonstration. Commençons par remarquer que $\Pi(\lambda, \sigma) \neq 0$, ce qui est évident car $[\mathrm{Id}] \notin S(\lambda, \sigma)$ par le lemme précédent.
Pour montrer que $\Pi(\lambda, \sigma)$ est irréductible, nous allons prouver que si $\overline{f}$ est un élément non nul de $\Pi(\lambda, \sigma)$, alors il existe une combinaison linéaire de B-translatés de f qui est égale à $[\mathrm{Id}]$ modulo $S(\lambda, \sigma)$.
Soit donc f un élément de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}} \sigma$ d'image non nulle dans $\Pi(\lambda, \sigma)$. On peut supposer que f est à support en niveaux $a, a+1, \ldots, a+r$. Quitte à retrancher à f une combinaison linéaire de $g_{\beta,\delta} \cdot w$, on peut supposer que f est à support en un seul niveau a.
Le support de f est fini : soit $n \in \mathbf{N}$ tel que ce support soit inclus dans le n-bloc initial de niveau a, et identifions ce support à un élément de V_n. L'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^{-n-a} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur f correspond alors à l'action de τ_n sur son support, et le lemme 3.4.13 permet de trouver une combinaison linéaire de B-translatés de f égale à

$$\sum_{j=0}^{p^n-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & -jp^{-n} \\ 0 & p^a \end{pmatrix} \right].$$

Cette combinaison linéaire ne peut être dans $S(\lambda, \sigma)$ car elle est à support en un seul niveau. Mais alors, en y ajoutant $\sum_{j=0}^{p^{n-1}-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & -jp^{-n} \\ 0 & p^a \end{smallmatrix}\right) \cdot w$, on obtient un élément dont le support est non nul et inclus dans le $(n-1)$-bloc de niveau $a-1$.
Une récurrence descendante sur n permet alors de se ramener à un élément qui est une combinaison linéaire de translatés de f dont le support est contenu en un seul niveau modulo $S(\lambda, \sigma)$, ce qui achève de prouver l'irréductibilité de $\Pi(\lambda, \sigma)$. □

5 Représentations de la forme $\Omega_\chi(D)$

5.1 Construction de représentations de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$

Colmez a décrit dans [Col10b] un moyen de construire des représentations lisses de B à partir (ψ, Γ)-modules. Nous rappelons ici cette construction.

Soit D un (ψ, Γ)-module libre sur $k[\![\pi]\!]$, et soit alors $\varprojlim_\psi D$ le k-espace vectoriel (noté $D \boxtimes \mathbf{Z}_p$ par Colmez) défini par :

$$\varprojlim_\psi D = \{(x_n)_{n \in \mathbf{N}} : \psi(x_{n+1}) = x_n\}.$$

Remarque 3.5.1. Notons que pour déterminer entièrement un élément $(x_n)_n$ de $\varprojlim_\psi D$ il suffit de connaître x_n pour n suffisamment grand. Pour cette raison, on

voit qu'on peut également identifier $\varprojlim_\psi D$ avec l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ telles que $\psi(x_{n+1}) = x_n$.

On munit $\varprojlim_\psi D$ de la topologie de la limite projective, de sorte que $\varprojlim_\psi D$ est un k-espace vectoriel de prodimension finie. Nous allons définir une action de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur $\varprojlim_\psi D$. Pour cela, commençons par remarquer que tout élément $g \in \mathrm{B}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$g = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $t \in \mathbf{Q}_p^\times, j \in \mathbf{Z}, a \in \mathbf{Z}_p^\times$ et $z \in \mathbf{Q}_p$. Si $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k^\times$ est un caractère lisse de $\mathbf{Q}_p^\times$, l'action de B sur $x \in \varprojlim_\psi D$ est alors définie par

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot x\right)_n &= \chi^{-1}(t)x_n, \\
\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^j \end{pmatrix} \cdot x\right)_n &= x_{n-j} = \psi^j(x_n) \text{ si } n \geq j, \\
\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot x\right)_n &= \gamma_{a^{-1}}(x_n) \text{ où } \chi_{\mathrm{cycl}}(\gamma_a) = a, \\
\left(\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x\right)_n &= \psi^j((1+\pi)^{p^{n+j}z} x_{n+j}) \text{ si } n + j \geq -v_p(z).
\end{aligned}$$

On vérifie que ceci définit bien une action du groupe B (voir par exemple la proposition III.1.1 de [Col10b]), et que cette action est continue puisque celles de ψ, Γ et χ le sont.

Remarque 3.5.2. Notons que Colmez construit en fait des représentations du groupe $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & \mathbf{Q}_p^\times \end{smallmatrix}\right)$. Ici, on y ajoute un caractère central, et donc une action de Z qui en fait une représentation de B.

Ainsi, $\varprojlim_\psi D$ est une représentation de prodimension finie de B, et donc $\Omega_\chi(D) := (\varprojlim_\psi D)^*$ est une représentation lisse de B, dont le caractère central est χ.

Remarque 3.5.3. Si il existe une ambiguïté sur le corps de définition, on note $\Omega_\chi^k(D)$ au lieu de $\Omega_\chi(D)$.
Notons que si E est une extension de k et D un (ψ, Γ)-module sur $k[\![\pi]\!]$, alors

$$\Omega_\chi^k(D) \otimes_k E = \Omega_\chi^E(D \otimes_k E).$$

Soit pr_j la j-ième projection $\varprojlim_\psi D \to D$, qui à $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ associe x_j. Si M est un sous-k-espace vectoriel de $\varprojlim_\psi D$, on note M_j l'image de M par pr_j. Le lemme suivant est alors analogue au lemme III.3.6 de [Col10b].

Lemme 3.5.4. *Si M est un sous-espace fermé de $\varprojlim_\psi D$ stable par* B*, alors :*

i) $M_0 = M_k$, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

ii) M_0 *est un sous* $k[\![\pi]\!]$*-module de* D *stable par* ψ *et* Γ*,*

iii) $M = \varprojlim_\psi M_0$.

Démonstration. Si $x_0 \in M_0$, soit $x \in \varprojlim_\psi D$ tel que $\mathrm{pr}_0(x) = x_0$. Alors $\mathrm{pr}_j\left(\left(\begin{smallmatrix} p^j & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot x\right) = x_0$, ce qui prouve le i).
Il est évident que M_0 est un sous-$k[\![\pi]\!]$-module, stable par ψ car $\mathrm{pr}_0\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right) \cdot x\right) = \psi(x_0)$, et par Γ car $\mathrm{pr}_0\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \cdot x\right) = \gamma_{a^{-1}}(x_0)$.
Enfin, il est clair que $M \subset \varprojlim_\psi M_0$, et il reste donc à prouver l'inclusion réciproque. Soit $z = (z_n)_n \in \varprojlim_\psi M_0$. Si $k \in \mathbf{N}$, il existe $u^{(k)} = (u_n^{(k)})_n \in M$ tel que $u_k^{(k)} = z_k$ car $M_0 = M_k$. Mais par définition de la topologie de $\varprojlim_\psi D$, qui est la topologie de la limite projective, on a $(u^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ qui tend vers z. Puisque M est fermé dans $\varprojlim_\psi D$, c'est donc que $z \in M$ et donc $M = \varprojlim_\psi M_0$. □

Proposition 3.5.5. *Si* D *est un* (ψ, Γ)*-module irréductible, alors* $\Omega_\chi(D)$ *est une représentation lisse irréductible de* B.

Démonstration. Puisque le dual d'une représentation de prodimension finie topologiquement irréductible est une représentation lisse irréductible par la proposition 3.2.23, il suffit de vérifier que $\varprojlim_\psi D$ est le seul sous-espace fermé non nul et stable sous B. Mais par le lemme précédent, une telle sous-représentation fermée serait de la forme $\varprojlim_\psi D'$, où D' est un sous-(ψ, Γ)-module non nul de D. Par irréductibilité de D, $D' = D$ et donc $\varprojlim_\psi D' = \varprojlim_\psi D$. □

Remarque 3.5.6. En particulier, si D est un (φ, Γ)-module irréductible, alors $D^\natural$ est un (ψ, Γ)-module irréductible par la proposition 3.3.26, de sorte que $\Omega_\chi(D^\natural)$ est une représentation lisse irréductible de B.

Le résultat suivant permet de dire à quelle condition deux telles représentations de B sont isomorphes, c'est essentiellement la proposition 1.2.3 de [Ber10b].

Proposition 3.5.7. *Si* D_1, D_2 *sont deux* (ψ, Γ)*-modules irréductibles et si* χ_1, χ_2 *sont deux caractères lisses de* $\mathbf{Q}_p^\times$ *tels que* $\Omega_{\chi_1}(D_1) \simeq \Omega_{\chi_2}(D_2)$*, alors* $\chi_1 = \chi_2$ *et* $D_1 \simeq D_2$.

Démonstration. L'égalité des caractères est immédiate puisque que χ_i est le caractère central de $\Omega_{\chi_i}(D_i)$. Il s'agit donc de montrer que si $\Omega_\chi(D_1) \simeq \Omega_\chi(D_2)$, alors $D_1 \simeq D_2$.
Notons $f : \varprojlim_\psi D_1 \to \varprojlim_\psi D_2$ un isomorphisme B-équivariant, et soit $g := \mathrm{pr}_0 \circ f : \varprojlim_\psi D_1 \to D_2$. Alors $g(v)$ ne dépend que de v_0. En effet, pour $n \geq 1$, soit K_n l'ensemble des éléments de $\varprojlim_\psi D_1$ dont les images par $\mathrm{pr}_0, \ldots, \mathrm{pr}_{n-1}$ sont nulles. C'est un sous $k[\![\pi]\!]$-module de $\varprojlim_\psi D_1$, stable par ψ et Γ et tel que $\psi(K_n) = K_{n+1}$. L'image de K_n par g est donc un sous-(ψ, Γ)-module de D_2. Par irréductibilité de D_2, soit $g(K_n) = 0$, soit $g(K_n) = D_2$. Mais $\psi(g(K_n)) = g(K_{n+1})$, alors que $g(K_n) = 0$ pour n suffisamment grand, par continuité de g. On en déduit que $g(K_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$, et en particulier que si $v_0 = 0$, alors $g(v) = 0$, ce qui achève de prouver que $g(v)$ ne dépend que de v_0.
Ainsi, il est possible de définir une application $h : D_1 \to D_2$ en posant $h(v) = g(\tilde{v})$,

où $\tilde{v}$ est n'importe quel élément de $\varprojlim_\psi D_1$ dont l'image par pr_0 est v. Cette application est un morphisme de (ψ, Γ)-modules, et est non nulle car f est non nulle. C'est donc un isomorphisme de (ψ, Γ)-modules par irréductibilité de D_1 et D_2. $\square$

Définition 3.5.8. Si D est un (φ, Γ)-module irréductible sur $k(\!(\pi)\!)$, et χ un caractère lisse de $\mathbf{Q}_p^\times$, on note $\Omega_\chi(D)$ la représentation lisse irréductible de B définie par $\Omega_\chi(D) := \Omega_\chi(D^\natural)$.
Si k est un corps fini et V est une représentation k-linéaire irréductible de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ on pose $\Omega_\chi(V) := \Omega_\chi(\mathbf{D}(V))$
De même, si k est algébriquement clos et W est une représentation k-linéaire irréductible de $\mathcal{W}_{\mathbf{Q}_p}$, on pose $\Omega_\chi(W) := \omega_\chi(\mathbf{D}(W))$

5.2 Représentations associées à des (φ, Γ)-modules

À présent que nous disposons du foncteur $D \mapsto \Omega_\chi(D)$, qui permet d'associer à un (φ, Γ)-module irréductible une représentation lisse irréductible de B, nous pouvons essayer de décrire explicitement les représentations obtenues comme quotients d'induites $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$. Nous le faisons ici pour les (φ, Γ)-modules irréductibles que nous connaissons, ce qui dans le cas où k est un corps fini ou un corps algébriquement clos, permet en fait de décrire toutes les représentations de B associées à des représentations galoisiennes irréductibles.

5.2.1 Le cas des (φ, Γ)-modules irréductibles de dimension 1

La proposition 3.3.4 nous permet de décrire tous les (φ, Γ)-modules de dimension 1 : ce sont les $D_{\lambda,h}$, avec $\lambda \in k^\times$ et $h \in \{0, \dots, p-2\}$. Soit donc e une base de $D_{\lambda,h}$ sur $k(\!(\pi)\!)$, telle que $\varphi(e) = \lambda e$ et $\gamma(e) = \omega^h(\gamma)e$. Alors $D_{\lambda,h}^\sharp = \pi^{-1}k[\![\pi]\!]e$ et $D^\natural = k[\![\pi]\!]e$, avec $\psi(\alpha(\pi) \cdot e) = \lambda^{-1}\psi(\alpha(\pi)) \cdot e$.
Soit $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k^\times$ un caractère lisse, et soit $\Omega_\chi(D_{\lambda,h})$ la représentation irréductible de B associée au (ψ, Γ)-module irréductible $D_{\lambda,h}^\natural$.

Soit θ_0 la forme linéaire sur $D_{\lambda,h}^\natural$ définie par $\theta_0(\alpha(\pi)e) = \alpha(0)$. On définit alors une forme linéaire θ sur $\varprojlim_\psi D_{\lambda,h}^\natural$ en associant à $y = (y_0, y_1, \dots)$, $\theta(y) := \theta_0(y_0)$.

Lemme 3.5.9. *Si* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{KZ}$, *alors* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \theta = \chi(a)\omega^h(a^{-1}d)\theta$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \theta\right)(y) &= \theta\left(\begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1}d^{-1} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} \cdot y\right) \\
&= \theta\left(\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -bd^{-1} \\ 0 & ad^{-1} \end{pmatrix} \cdot y\right) \\
&= \chi(a)\omega^h(a^{-1}d)\theta(y).
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 3.5.10. *La forme linéaire θ est annulée par*

$$w = \lambda^{-1}\chi(p)\mathrm{Id} - \sum_{j=0}^{p-1} \begin{pmatrix} p & -j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. En utilisant la définition de l'action de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur $\varprojlim_\psi D^\natural_{\lambda,h}$, on obtient

$$\left(\lambda^{-1}\chi(p)\theta - \sum_{j=0}^{p-1} \begin{pmatrix} p & -j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \theta\right)(y) = \lambda^{-1}\chi(p)\theta_0(y_0) - \chi(p)\theta_0 \circ \psi\left(\sum_{j=0}^{p-1}(1+\pi)^j y_0\right)$$

Notons $y_0 = \alpha(\pi)\cdot e$, avec $\alpha = \sum_{n\geq 0}\alpha_n\pi^n \in k[\![\pi]\!]$. Alors $\theta_0(y_0) = \alpha_0$, et

$$\begin{aligned}\theta_0\left(\psi\left(\sum_{j=0}^{p-1}(1+\pi)^j\alpha\right)\right) &= \theta_0(\psi(\pi^{p-1}\alpha)) = \lambda^{-1}\psi(\pi^{p-1}\alpha)(0) \\ &= \lambda^{-1}\alpha_0(-1)^{p-1} \text{ car } \psi(\pi^{pm+r}) = (-1)^r\pi^m.\end{aligned}$$

□

Nous pouvons alors décrire la réprésentation du Borel obtenue en terme des représentations introduites précédemment :

Théorème 3.5.11. *Si $\lambda \in k^\times$ et $h \in \{0,\dots,p-2\}$, alors $\Omega_\chi(D_{\lambda,h}) \simeq \Pi(\lambda\chi(p^{-1}),\sigma)$, avec $\sigma = \chi\omega^{-h}\otimes\omega^h$.*

Démonstration. On sait déjà par le lemme 3.5.9 et la réciprocité de Frobenius que $\Omega_\chi(D_{\lambda,h})$ est un quotient de $\mathrm{ind}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{KZ}}\sigma$, via l'application $\mathrm{ind}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{KZ}}\sigma \to \Omega_\chi(D_{\lambda,h})$ définie par

$$\sum_{\beta,\delta}\alpha(\beta,\delta)[g_{\beta,\delta}] \mapsto \sum_{\beta,\delta}\alpha(\beta,\delta)g_{\beta,\delta}\cdot\theta.$$

Cette application est surjective car non nulle et car $\Omega_\chi(D^\natural_{\lambda,h})$ est irréductible. La proposition 3.5.10 permet d'affirmer que son noyau contient w, et donc $S(\lambda\chi(p^{-1}),\sigma)$. Nous obtenons ainsi une application non triviale $\Pi(\lambda\chi(p^{-1}),\sigma) \to \Omega_\chi(D^\natural_{\lambda,h})$, et comme $\Pi(\lambda\chi(p^{-1}),\sigma)$ est irréductible par la proposition 3.4.29, cette application est un isomorphisme.

□

5.2.2 Le cas des (φ,Γ)-modules de dimension supérieure à 2

Soient $n \geq 1$, $1 \leq h \leq p^{n-1}-1$ un entier primitif, $\lambda \in k^\times$ et $s \in \{0,\dots,p-2\}$. Alors on dispose du (φ,Γ)-module irréductible $D = D(\mathrm{ind}(\omega_n^h))\otimes D_{\lambda,s}$, et nous avons donné la description explicite de $D^\natural$ dans une base $(f_0,\dots,f_{n-1})$ à la proposition 3.3.27. Si $\delta = \mu_\tau\omega^r$ est un caractère lisse de $\mathbf{Q}_p^\times$, considérons la représentation $\Omega_\delta(D) = \left(\varprojlim_\psi D^\natural\right)^*$. Sur $D^\natural$, on définit une forme linéaire θ_0 par

$$\theta_0 : \alpha_0(\pi)f_0 + \dots \alpha_{n-1}(\pi)f_{n-1} \mapsto \alpha_0(0).$$

On définit alors une forme linéaire θ sur $\varprojlim_\psi D^\natural$ par

$$\theta(y) = \theta_0(y_0) \text{ si } y = (y_0, y_1, \dots).$$

Lemme 3.5.12. *Si* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{KZ}$, *alors* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \theta = \delta(a)\omega^s(a^{-1}d)$.

Démonstration. La preuve est la même que pour le lemme 3.5.9. □

Proposition 3.5.13. *La forme linéaire* θ *est annulée par*

$$(-1)^{n-1}\lambda^{-n}\tau^n \cdot \mathrm{Id} - \sum_{j=0}^{p^n-1} \binom{j}{h(p-1)} \begin{pmatrix} p^n & -j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Si $y = (y_0, y_1, \dots) \in \varprojlim_{\psi} D^\natural$, alors on a

$$\begin{aligned}
&\left((-1)^{n-1}\lambda^{-n}\tau^n\theta - \sum_{j=0}^{p^n-1} \binom{j}{h(p-1)} \begin{pmatrix} p^n & -j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \theta\right)(y) \\
&\quad = (-1)^{n-1}\lambda^{-n}\tau^n\theta_0(y_0) - \sum_{j=0}^{p^n-1} \binom{j}{h(p-1)} \theta\left(\begin{pmatrix} p^{-n} & -jp^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot y\right) \\
&\quad = (-1)^{n-1}\lambda^{-n}\tau^n\theta_0(y_0) - \tau^n \sum_{j=0}^{p^n-1} \binom{j}{h(p-1)} \theta\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y\right) \\
&\quad = (-1)^{n-1}\lambda^{-n}\tau^n\theta_0(y_0) - \tau^n\theta_0 \circ \psi^n \left(\sum_{j=0}^{p^n-1} \binom{j}{h(p-1)} (1+\pi)^j y_0\right).
\end{aligned}$$

Par les formules de la proposition 3.3.27, il est évident que si $y_0 = \alpha_i(\pi)f_i$, avec $1 \leq i \leq n-1$, alors cette somme est nulle. Nous pouvons donc supposer que $y_0 = \alpha_0(\pi)f_0$. Par le lemme 1.1.2 de [Ber10c], on a

$$\sum_{j=0}^{p^n-1} \binom{j}{h(p-1)} (1+\pi)^j \in \pi^{p^n-h_n-1} + \pi^{p^n-h_n}k[\![\pi]\!].$$

Or, pour $1 \leq k \leq n$, on a $p^k - h_k + i_{n-k} = p(p^{k-1} - h_{k-1})$, de sorte que grâce aux formules de la proposition 3.3.27, on a, modulo $\pi D^\natural$,

$$\begin{aligned}
\psi^n\left(\sum_{j=0}^{p^n-1} \binom{j}{h(p-1)} (1+\pi)^j \alpha_0(\pi) f_0\right) &= \psi^n(\pi^{p^n-h_n-1}\alpha_0(0)f_0) \\
&= \psi^{n-1}((-1)^{n-1}\lambda^{-1}\psi(\pi^{p^n-h_n+i_0-1})\alpha_0(0)f_{n-1}) \\
&= \lambda^{-1}(-1)^{n-1}\psi^{n-1}((-1)^{p-1}\pi^{p^{n-1}-h_{n-1}-1}f_{n-1}) \\
&= \cdots = (-1)^{n-1}\lambda^{-n}\alpha_0(0)f_0.
\end{aligned}$$

Ceci suffit à établir la proposition. □

Théorème 3.5.14. *Soient* D *et* δ *comme précédemment. Alors*

$$\Omega_\delta(D) \simeq \Pi_n(h, (-1)^{n-1}\lambda^{-n}, \omega^{r-s}\mu_\tau \otimes \omega^s).$$

Démonstration. Par le lemme 3.5.12 on a un morphisme KZ-équivariant $\sigma = \omega^{r-s}\mu_\tau \otimes \omega^s \to \Omega_\delta(D)_{|\mathrm{KZ}}$, et par réciprocité de Frobenius 3.1.7, on a donc un morphisme B-équivariant $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma \to \Omega_\delta(D)$ donné par

$$\sum_{\beta,\delta} \alpha(\beta,\delta)[g_{\beta,\delta}] \mapsto \sum_{\beta,\delta} \alpha(\beta,\delta) g_{\beta,\delta} \cdot \theta.$$

Ce morphisme est surjectif, car il est non nul et car $\Omega_\delta(D)$ est irréductible.
De plus, par la proposition 3.5.13, son noyau contient

$$(-1)^{n-1}\lambda^{-n}\tau^n[\mathrm{Id}] - \sum_{j=0}^{p^n-1} \binom{j}{h(p-1)} \left[\begin{pmatrix} p^n & -j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right].$$

Donc en multipliant par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^n \end{smallmatrix}\right)$, on voit que

$$(-1)^{n-1}\lambda^{-n}\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^n \end{smallmatrix}\right] - \sum_{j=0}^{p^n-1} \binom{j}{h(p-1)} \left[\begin{pmatrix} 1 & -jp^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right],$$

est contenu dans le noyau, et donc c'est également le cas de $S_n(h,(-1)^{n-1}\lambda^{-n},\sigma)$, et on a donc un morphisme surjectif $\Pi_n(h,(-1)^{n-1}\lambda^{-n},\sigma) \to \Omega_\delta(D)$. Comme $\Pi_n(h,(-1)^{n-1}\lambda^{-n},\sigma)$ est irréductible par le théorème 3.4.27, il s'agit d'un isomorphisme. □

Corollaire 3.5.15. *La* B*-représentation* $\Omega_\delta(D)$ *est de présentation finie.*

Remarque 3.5.16. En fait on a même prouvé un résultat plus fort, puisque le noyau de la surjection B-équivariante $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma \twoheadrightarrow \Omega_\delta(D)$ est toujours engendré par un seul élément.

Enfin, il est possible de réinterpréter ce résultat dans l'autre sens, ce qui permet de décrire les représentations $\Pi_n(h,\lambda,\sigma)$ en termes de (φ,Γ)-modules.

Corollaire 3.5.17. *Soit* $n \geq 2$, $h \leq p^{n-1}-1$ *primitif,* $\lambda \in k^\times$ *et* $\sigma = \omega^a\mu_\tau \otimes \omega^b$ *un caractère de* KZ.
Soit $\mu \in k^\times$ *une racine* n*-ième de* $(-1)^{n-1}\lambda^{-1}$ *:* $\mu^n = (-1)^{n-1}\lambda^{-1}$. *Alors*

$$\Pi_n(h,\lambda,\sigma) \simeq \Omega_\chi(D)$$

avec $\chi = \mu_\tau\omega^{a+b}$ *et* $D = D(\mathrm{ind}(\omega_n^h)) \otimes D_{\mu,b}$.

6 Classification des représentations irréductibles et conséquences

6.1 (ψ,Γ)-modules et représentations irréductibles de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$

Dans cette section, nous prouvons que toute représentation lisse irréductible de B, admettant un caractère central χ est de la forme $\Omega_\chi(D^\natural)$, où D est un (φ,Γ)-module irréductible sur $k(\!(\pi)\!)$.
Pour cela, nous commençons par utiliser l'action de $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p-\{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ afin de construire

un (ψ, Γ)-module M irréductible, non nécessairement de type fini sur $k[\![\pi]\!]$, puis utilisons des résultats d'Emerton pour prouver sa finitude.
À l'aide du résultat 3.3.24, nous en déduisons l'existence d'un (φ, Γ)-module D tel que $M = D^\natural$, et lorsque nous disposons d'une interprétation galoisienne des (φ, Γ)-modules, en déduisons un lien entre représentations lisses irréductibles de B et représentations galoisiennes.

6.1.1 P^+-modules de représentations du Borel

Soient $P^+ = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p - \{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $P^- = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & \mathbf{Z}_p - \{0\} \end{smallmatrix}\right)$ deux sous-monoïdes compacts de B. Notons que $(P^+)^{-1}\,\mathrm{Z} = P^-\,\mathrm{Z}$, alors que $(P^+)^{-1} \neq P^-$.

Définition 3.6.1. Si $V \in \mathsf{EV}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{pdf}}(k)$, on appelle P^--module de Π un sous-k-espace vectoriel de V stable sous l'action de P^-. De même, on définit un P^+-module de $V \in \mathsf{EV}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{disc}}(k)$ comme étant un sous k-espace vectoriel de V stable par P^+.

Un P^--module est naturellement muni d'une structure de $k[\![N_0]\!] = k[\![\pi]\!]$-module (proposition 3.2.30), qui identifie l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ à la multiplication par $(1+\pi)$.
De plus, si V est un P^--module, alors l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)$ définit un opérateur $\psi : V \to V$ par $\psi(v) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right) \cdot v$. On a alors

$$\psi((1+\pi)^p \cdot v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & p \end{pmatrix} \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \cdot v = (1+\pi) \cdot \psi(v).$$

On en déduit sans difficulté que $\psi(\varphi(\lambda).v) = \lambda.\psi(v), \forall v \in V, \forall \lambda \in k[\![\pi]\!]$.
De même, on définit une action de Γ via $\gamma_a(v) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \cdot v$. Cette action est alors semi-linéaire car

$$\gamma_a((1+\pi) \cdot v) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v = (1+\pi)^a (\gamma_a(v)).$$

Enfin, l'action de Γ commute à ψ :

$$\psi(\gamma_a(v)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \cdot v = \gamma_a(\psi(v)).$$

Ainsi, un P^--module qui est de type fini sur $k[\![\pi]\!]$ est naturellement un (ψ, Γ)-module.

Lemme 3.6.2. *Soit Π une représentation lisse de B et D un (ψ, Γ)-module tel qu'on aie un plongement $B_2(\mathbf{Q}_p)$-équivariant non nul $f : \Pi^* \hookrightarrow \varprojlim_\psi D$. Alors, il existe un sous-(ψ, Γ)-module surjectif $D' \subset D$ et un plongement $B_2(\mathbf{Q}_p)$-équivariant non nul : $\Pi^* \hookrightarrow \varprojlim_\psi D'$.*

Démonstration. Notons comme précédemment $\mathrm{pr}_k : \varprojlim_\psi D \to D$ la projection qui à $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ associe x_k. On note alors $D_k = \mathrm{pr}_k(\mathrm{Im}\Pi^*)$. Alors, pour tout k, $D_k = D_0$. En effet, si $(x_n)_n \in \mathrm{Im}\Pi^*$, alors $(y_n)_n = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^k \end{smallmatrix}\right) \cdot (x_n)_n$ est aussi dans $\mathrm{Im}\Pi^*$, et $y_0 = \psi^k(y_k) = x_k$. Ainsi, $D_k \subset D_0$. Pour la réciproque, il suffit d'utiliser l'action de $\left(\begin{smallmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

De plus, on en déduit que D_0 est stable par ψ et Γ, et que $\psi : D_0 \to D_0$ est surjectif.

Nous souhaitons prouver que $\mathrm{Im}\Pi^* = \varprojlim_\psi D_0$. On a déjà l'inclusion évidente $\mathrm{Im}\Pi^* \subset \varprojlim_\psi D_0$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un élément de $\varprojlim_\psi D_0$. Puisque pour tout k, $D_k = D_0$, il existe $(y_n^{(k)}) \in \mathrm{Im}\Pi^*$ tel que $y_k^{(k)} = x_k$. Mais alors, par définition de la topologie de $\varprojlim_\psi D$ (qui est la restriction de la topologie produit), cela signifie que $(y_n^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers (x_n) dans $\varprojlim_\psi D$.
Comme $\mathrm{Im}\Pi^*$ est l'image par une application k-linéaire continue d'un espace linéairement compact, il est fermé et on en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dans $\mathrm{Im}\Pi^*$, ce qui conclut. □

À présent, considérons Π une représentation k-linéaire lisse irréductible de $B_2(\mathbf{Q}_p)$ possèdant un caractère central, et soit V un P^+-module de Π, tel que V^{N_0} soit un k-espace vectoriel de dimension finie.
Alors V^* est muni d'une structure de P^--module grâce à l'action du caractère central de Π (pour une représentation sans caractère central, on n'aurait a priori qu'une action de $(P^+)^{-1}$, et pas de P^-).
Par la proposition 3.2.25, V^{N_0} est le dual des coinvariants de V^*, et donc $(V^*)_{N_0}$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.
V^* étant muni d'une action continue de N_0, c'est un $k[\![N_0]\!] \simeq k[\![\pi]\!]$-module par la propostion 3.2.30. Par le corollaire 3.2.33, V^* est un $k[\![\pi]\!]$-module de type fini si et seulement si $V^*/\pi V^*$ est un k-espace vectoriel de dimension finie. Or, sous l'action de N_0, πV^* s'identifie à $V^*(N_0)$ car $\pi x = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)x - x$, et donc $V^*/\pi V^*$ s'identifie à l'espace des coinvariants $(V^*)_{N_0}$. Ainsi, grâce aux hypothèses sur V, V^* est un $k[\![\pi]\!]$-module de type fini.

On note V^*_{tors} le sous-$k[\![\pi]\!]$-module des éléments de torsion de V^*, de sorte que V^*/V^*_{tors} est un $k[\![\pi]\!]$-module libre de rang fini.

Puisque V est un sous-k-espace vectoriel de Π, on a l'application naturelle de restriction $\Pi^* \to V^*$, qui est P^--équivariante. On peut alors la prolonger en une application non nulle et $B_2(\mathbf{Q}_p)$-équivariante : $\Pi^* \to \varprojlim_\psi V^*$. Si l'image de cette application est incluse dans $\varprojlim_\psi V^*_{\mathrm{tors}} \subset \varprojlim_\psi V^*$, alors on a une injection $\Pi^* \hookrightarrow \varprojlim_\psi V^*_{\mathrm{tors}}$ car Π^* est topologiquement irréductible. Par le lemme 3.6.2, on peut supposer qu'il existe un sous-(ψ,Γ)-module surjectif D de V^*_{tors} tel que $\Pi^* \hookrightarrow \varprojlim_\psi D$ soit non nul. Mais comme V^* est un $k[\![\pi]\!]$-module de type fini, V^*_{tors} est un k-espace vectoriel de dimension finie, et donc il en est de même de $\varprojlim_\psi D \simeq D$ car ψ est k-linéaire et surjective. On en conclut que Π^* et donc Π sont de dimension finie.

Au contraire, si $\mathrm{Im}(\Pi^* \to \varprojlim_\psi V^*) \not\subset \varprojlim_\psi V^*_{\mathrm{tors}}$, alors on a un morphisme non nul et $B_2(\mathbf{Q}_p)$-équivariant : $\Pi^* \to \varprojlim_\psi D$, où $D = V^*/V^*_{\mathrm{tors}}$ est un (ψ,Γ)-module libre.

Proposition 3.6.3. *Soit* Π *une représentation* k*-linéaire lisse irréductible de* $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$*,* D_0 *un* (ψ,Γ)*-module libre et surjectif, et* f *un morphisme non nul* $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$*-équivariant* $\Pi^* \to \varprojlim_\psi D_0$.

Alors, soit Π *est de dimension finie, soit il existe un sous-quotient* D *de* D_0*, irréductible, tel que*

$$\Pi \simeq (\varprojlim_{\psi} D)^*.$$

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence sur le rang de D_0.

Si D_0 est irréductible, alors l'image de Π^* dans $\varprojlim_{\psi} D_0$ est fermée (par linéaire compacité de Π^*), non réduite à 0, et stable par $B_2(\mathbf{Q}_p)$. Par le lemme 3.5.4 on a alors $\mathrm{Im}\Pi^* = \varprojlim_{\psi}(\mathrm{Im}\Pi^*)_0$, avec $(\mathrm{Im}\Pi^*)_0$ un sous-(ψ, Γ)-module de D_0, et alors $(\mathrm{Im}\Pi^*)_0 = D_0$. Ceci impose alors $\mathrm{Im}\Pi^* \simeq \varprojlim_{\psi} D_0$, mais puisque Π est irréductible, Π^* est topologiquement irréductible et le morphisme $\Pi^* \to \varprojlim_{\psi} D_0$ est alors injectif car non nul : c'est un isomorphisme $B_2(\mathbf{Q}_p)$-équivariant.

Si D_0 n'est pas irréductible, soit D_0' un sous-objet de D_0 stable par ψ et Γ. On a alors deux cas possibles :

- Si D_0' est de rang strictement inférieur à celui de D_0, ou bien l'application $\Pi^* \to \varprojlim_{\psi} D_0'$ est non nulle, et alors le lemme 3.6.2 permet de remplacer D_0' par un sous-(ψ, Γ)-module de rang inférieur à celui de D_0, ou bien $\Pi^* \to \varprojlim_{\psi} D_0'$ est nulle, auquel cas nous disposons d'un morphisme non nul $\Pi^* \to \varprojlim_{\psi}(D_0/D_0')$. Dans ce second cas, posons $D_0'' = D_0/D_0'$. Alors il se peut que le morphisme $\Pi^* \to \varprojlim_{\psi} D_0''$ soit à valeurs dans $\varprojlim_{\psi}(D_0'')_{\mathrm{tors}}$, auquel cas on en déduit comme précédemment que Π est de dimension finie. Dans le cas contraire, il existe un morphisme non nul $\Pi^* \to \varprojlim_{\psi}(D_0'')/(D_0'')_{\mathrm{tors}}$, qui est libre et de rang strictement inférieur à celui de D_0. En appliquant le lemme 3.6.2, on est donc ramenés à un morphisme $\Pi^* \to \varprojlim D_0'''$, avec D_0''' libre, surjectif et de rang strictement inférieur à celui de D_0.
- Si D_0' est de même rang que D_0, commençons par utiliser le lemme 3.6.2 afin de remplacer D_0' par un sous-(ψ, Γ)-module surjectif D_0''. Par les mêmes arguments que précédemment, on peut se ramener à D_0'' libre.
  Le cas où le (ψ, Γ)-module libre obtenu est de rang inférieur strictement à celui de D_0 vient d'être traité. Supposons donc que D_0'' est de même rang que D_0. Alors par le lemme 3.3.23, D_0'' contient $\pi D_0'$. Mais comme $D_0'/\pi D_0'$ est un k-espace vectoriel de dimension finie, il n'existe pas de suite strictement décroissante de sous-(ψ, Γ)-modules de D_0' de même rang que D_0'.
  Donc en répétant le même procédé, soit on finit par aboutir à un (ψ, Γ)-module libre irréductible de rang égal au rang de D_0', auquel cas nous pouvons conclure ; soit on est ramenés à un sous-(ψ, Γ)-module de rang strictement plus petit, qu'on peut supposer surjectif par le lemme 3.6.2 et alors l'hypothèse de récurrence nous permet de conclure.

□

Corollaire 3.6.4. *Soit* Π *une représentation lisse irréductible de* B*, de caractère central* χ *telle qu'il existe un* P^+*-module* V *de* Π *tel que* V^{N_0} *soit un* k*-espace vectoriel de dimension finie. Alors soit* Π *est de dimension finie, soit il existe un* (ψ, Γ)*-module* D *libre et irréductible tel que* $\Pi \simeq \Omega_\chi(D)$.

6.1.2 $k[\![\pi]\!]\{\phi\}$-modules admissibles

Emerton a introduit dans [Eme11] un anneau de polynômes non commutatifs sur l'algèbre d'Iwasawa $k[\![\mathbf{Z}_p]\!] = k[\![\pi]\!]$, et prouvé qu'il était cohérent. L'étude de certains modules (les modules admissibles) sur cet anneau permet entre autres l'étude des représentations lisses de $\mathrm{GL}_2(E)$, pour E extension finie non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$. En particulier, Emerton retrouve ainsi la classification de Barthel et Livné des représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (voir la partie 5 de [Eme11]). Tous les résultats de cette section sont dûs à Emerton.

Définition 3.6.5. On note $k[\![\pi]\!]\{\phi\}$ l'anneau des polynômes non commutatifs en ϕ à coefficients dans $k[\![\pi]\!]$, où la multiplication est définie par $\phi \cdot a = \varphi(a) \cdot \phi$.

$k[\![\pi]\!]\{\phi\}$ n'est pas un anneau noethérien, mais par [Eme11, Prop. 1.3.], c'est un anneau cohérent, c'est-à-dire tout sous-$k[\![\pi]\!]\{\phi\}$-module de type fini d'un $k[\![\pi]\!]\{\phi\}$-module de présentation finie est encore de présentation finie. De plus, si M est un $k[\![\pi]\!]\{\phi\}$-module à gauche, alors $\mathrm{Tor}_\bullet^{k[\![\pi]\!]}(k, M)$ peut être muni d'une structure naturelle de $k[\phi]$-module (où ici $k[\phi]$ désigne l'anneau des polynômes usuels en ϕ puisque φ agit trivialement sur k). Ceci découle du résultat suivant :

Proposition 3.6.6 ([Eme11, lemme 2.1])**.** *Il existe un isomorphisme k-linéaire canonique de δ-foncteurs*

$$\mathrm{Tor}_\bullet^{k[\![\pi]\!]\{\phi\}}(k[\phi], -) \simeq \mathrm{Tor}_\bullet^{k[\![\pi]\!]}(k, -).$$

Ici, puisque $k[\![\pi]\!]$ est un anneau de valuation discrète, il est de dimension projective 1, et en particulier $\mathrm{Tor}_i^{k[\![\pi]\!]}(-,-) = 0$ pour $i \geq 2$. De plus, si M est un $k[\![\pi]\!]$-module, il est aisé de décrire explicitement $\mathrm{Tor}_i(k, M)$: on a $\mathrm{Tor}_0^{k[\![\pi]\!]}(k, M) = M/\pi M$ et $\mathrm{Tor}_1^{k[\![\pi]\!]}(k, M) = M[\pi] := \{m \in M : \pi \cdot m = 0\}$.
De plus, la structure de $k[\phi]$-module sur $\mathrm{Tor}_0^{k[\![\pi]\!]\{\phi\}}(k, M) = M/\pi M$ est uniquement caractérisée par l'action de ϕ, qui est donnée par

$$m \bmod \pi M \mapsto \phi.m \bmod \pi M$$

alors que l'action de ϕ sur $\mathrm{Tor}_1^{k[\![\pi]\!]}(k, M) \simeq M[\pi]$ est donnée par

$$m \mapsto \frac{\varphi(\pi)}{\pi}\phi \cdot m.$$

Notons que $\frac{\varphi(\pi)}{\pi}$ est bien un élément de $k[\![\pi]\!]$ et que $\pi \cdot \frac{\varphi(\pi)}{\pi}\phi \cdot m = \varphi(\pi)\phi \cdot m = \phi \cdot (\pi \cdot m) = 0$, de sorte que $\frac{\varphi(\pi)}{\pi}\phi \cdot m$ est bien dans $M[\pi]$.

Définition 3.6.7. Un $k[\![\pi]\!]$-module est dit admissible si M est un $k[\![\pi]\!]$-module de torsion et si $M[\pi]$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.

Emerton a prouvé le critère d'admissibilité suivant :

Proposition 3.6.8 ([Eme11, proposition 3.5])**.** *Soit M un $k[\![\pi]\!]\{\phi\}$-module de type fini qui est un $k[\![\pi]\!]$-module de torsion. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *M est un $k[\![\pi]\!]$-module admissible ;*
- *le quotient $M/\pi M$ est de dimension finie sur k ;*
- *le quotient $M/\pi M$ est de torsion sur $k[\phi]$.*

6.1.3 Représentations de dimension infinie de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$

À présent, considérons Π un quotient de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$, où $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2$ est un caractère lisse de KZ, tel que $\sigma_2(p) = 1$. Il existe alors un P^+-module standard de Π, à savoir l'image des éléments de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ à support dans P^+.
Notons $(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+$ l'ensemble des éléments de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$ à support dans P^+. Tout élément de $(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+$ s'écrit alors de manière unique

$$\sum_{\delta\in\mathbf{N}} \sum_{\substack{\beta\in A\\ v_p(\beta)\geq -n}} \lambda_{\beta,-\delta}\left[\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & p^{-\delta}\end{pmatrix}\right].$$

Soit R le noyau de la surjection $\Pi \twoheadrightarrow \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$, de sorte que $\Pi = \mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma/R$. On note $R^+ = R\cap(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+$, et Π^+ l'image de $(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+$ par la surjection $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma \twoheadrightarrow \Pi$. Alors, en tant que P^+-module, $\Pi^+ \simeq (\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+/R^+$.

Π^+ est un $k[\![\pi]\!]\{\phi\}$-module à gauche, où l'action de π correspond comme d'habitude à celle de $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, et l'action de ϕ est celle de $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Notons que puisque Π est lisse, Π^+ (et plus généralement tout sous $k[\![\pi]\!]\{\phi\}$-module de Π) est de $k[\![\pi]\!]$-torsion : pour tout $x \in \Pi^+$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $x \in \Pi^{\left(\begin{smallmatrix}1&p^n\mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)}$. En particulier, $\pi^{p^n}\cdot x = \left(\begin{smallmatrix}1&p^n\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot x - \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot x = 0$.

Lemme 3.6.9. *L'application* $\Theta^+ : (\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+ \to k[\phi]$ *définie par*

$$\sum_{\delta\geq 0} \sum_{\substack{\beta\in A\\ v_p(\beta)\geq -\delta}} \lambda_{\beta,-\delta}[g_{\beta,-\delta}] \mapsto \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\substack{\beta\in A\\ v_p(\beta)\geq -n}} \lambda_{\beta,-n}\right)\phi^n$$

induit un isomorphisme de $k[\![\pi]\!]\{\phi\}$*-modules de* $(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+/\pi(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+ \to k[\phi]$.

Démonstration. Il est aisé de vérifier que cette application est un morphisme de $k[\![\pi]\!]\{\phi\}$-modules. De plus, son noyau est formé des éléments tels que pour chaque $\delta \geq 0$, $\sum_{\beta\in A}\lambda_{\beta,-\delta} = 0$, c'est-à-dire (avec les notations de la section 4.1) des éléments dont le support en niveau $-\delta$ est dans $V_{p^\delta-1,\delta}$. Mais $V_{p^\delta-1,\delta}$ est l'image de V_δ par Δ_δ. Nous avons vu à la section 4.1 que l'action de $\pi = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ sur les éléments de $(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+$ correspondait à l'action de Δ_δ en niveau $-\delta$. Ainsi, $f \in \operatorname{Ker}\Theta^+$ si et seulement si $f \in \pi(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+$.
Il est clair que Θ^+ est surjective, et donc qu'on a l'isomorphisme annoncé. □

Proposition 3.6.10. *Si* Π *n'a pas de quotient isomorphe à* σ*, alors* Π^+ *est un* $k[\![\pi]\!]\{\phi\}$*-module admissible.*

Démonstration. Par la proposition 3.6.8, puisque Π^+ est de $k[\![\pi]\!]$-torsion, il s'agit de montrer que Π^+ est de type fini sur $k[\![\pi]\!]\{\phi\}$, et que $\Pi^+/\pi\Pi^+$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.
Notons que $(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+$ est de type fini sur $k[\![\pi]\!]\{\phi\}$, engendré par $\left[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right]$ car

$$\begin{aligned}\left[\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & p^{-\delta}\end{pmatrix}\right] &= \sigma_1^{-\delta}(p)\left[\begin{pmatrix}p^\delta & p^\delta\beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right] = \sigma_1^{-\delta}(p)\begin{pmatrix}1 & p^\delta\beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p^\delta & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\\ &= \sigma_1^{-\delta}(p)(1+\pi)^{p^\delta\beta}\phi^\delta\left(\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\right).\end{aligned}$$

Ainsi, Π^+ qui est un quotient de $(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+$ est également de type fini sur $k[\![\pi]\!]\{\phi\}$. Pour voir que $\Pi^+/\pi\Pi^+$ est un k-espace vectoriel de dimension finie, considérons la suite exacte courte de $k[\![\pi]\!]\{\phi\}$-modules

$$0 \to R^+ \to (\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+ \to \Pi^+ \to 0.$$

On en déduit la suite exacte de $k[\phi]$-modules suivante :

$$R^+/\pi R^+ \to (\mathrm{ind}_{KZ}^{B}\sigma)^+/\pi(\mathrm{ind}_{KZ}^{B}\sigma)^+ \to \Pi^+/\pi\Pi^+ \to 0.$$

Si $\pi R^+ \subset \pi(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+$, alors tous les éléments de R^+ sont dans le sous-espace noté R_0 dans la partie 4.3. Mais pour tout $x \in R$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^n \end{smallmatrix}\right) \cdot x \in R^+$, donc $R \subset R_0$, ce qui n'est pas possible puisque $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma/R_0 \simeq \sigma$ et qu'on a supposé que Π ne possèdait pas de quotient isomorphe à σ.
On en déduit que $\Pi^+/\pi\Pi^+$ est un quotient strict de $(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+/\pi(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+ \simeq k[\phi]$. En particulier, c'est un k-espace vectoriel de dimension finie. □

6.2 Classification des représentations lisses irréductibles de B

En combinant tous les résultats précédents, nous obtenons le résultat de classification suivant :

Théorème 3.6.11. *Pour tout caractère lisse $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k^\times$, l'application $D \mapsto \Omega_\chi(D^\natural)$ induit une bijection des classes d'isomorphisme de (φ, Γ)-modules irréductibles sur $k(\!(\pi)\!)$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations k-linéaires lisses irréductibles de dimension infinie de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ de caractère central χ.*

Démonstration. Il a déjà été prouvé à la proposition 3.5.5 que si D est un (φ, Γ)-module irréductible sur $k(\!(\pi)\!)$, alors $\Omega_\chi(D^\natural)$ est irréductible, et il est clair qu'il s'agit d'un représentation de dimension infinie.
Inversement, soit Π une représentation lisse irréductible de dimension infinie de B admettant un caractère central. Alors par la proposition 3.6.10, Π^+ est admissible, et donc son dual est un k-espace vectoriel linéairement compact muni d'une structure de $k[\![\pi]\!]$-module. Mais puisque les invariants sous N_0 de Π^+ sont de dimension finie sur k (par admissibilité de Π^+), alors les coinvariants de $(\Pi^+)^*$ sous N_0 sont également de dimension finie, ce qui revient à dire que $(\Pi^+)^*/\pi(\Pi^+)^*$ est un k-espace vectoriel de dimension finie. Par le corollaire 3.2.33, cela implique alors que $(\Pi^+)^*$ est un $k[\![\pi]\!]$-module de type fini, et donc un (ψ, Γ)-module.
Par construction, il existe un morphisme non nul B-équivariant $\Pi^* \to \varprojlim_\psi (\Pi^+)^*$. Par la proposition 3.6.3, il existe donc un (ψ, Γ)-module irréductible D_0 tel que $\Pi^* \simeq \varprojlim_\psi D_0$.
Mais par la proposition 3.3.24, il existe alors une unique structure de (φ, Γ)-module irréductible sur $D_0 \otimes_{k[\![\pi]\!]} k(\!(\pi)\!)$ telle que $D_0 = (D_0 \otimes_{k[\![\pi]\!]} k(\!(\pi)\!))^\natural$, ce qui termine la preuve. □

Remarque 3.6.12. Ce résultat est à mettre en contraste avec le cas de la caractéristique $\ell \neq p$. En effet, la donnée d'une représentation de B admettant un caractère central est équivalente à celle d'une représentation irréductible du sous-groupe mirabolique de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, c'est-à-dire de $P = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^\times & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et d'un caractère lisse.

Or, si K est un corps de caractéristique $\ell \neq p$, il n'existe, à isomorphisme près, qu'une seule représentation K-linéaire, lisse et irréductible de P de dimension infinie. La preuve se trouve par exemple dans le chapitre 3.8 de [BH06] pour des représentations à coefficients complexes. Cette preuve n'utilise que l'existence d'une mesure de Haar sur $\mathbf{Q}_p$, et peut donc s'adapter à n'importe quel corps K de caractéristique $\ell \neq p$, car il existe alors une mesure de Haar sur $\mathbf{Q}_p$ à valeurs dans K par [Vig96, 2.4].

Si k est un corps fini de caractéristique p, on peut utiliser l'équivalence de catégories de Fontaine pour affiner ce résultat.

Théorème 3.6.13. *Soit k un corps fini de caractéristique p. Alors pour tout caractère lisse $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k^\times$, l'application $V \mapsto \Omega_\chi(V)$ induit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations k-linéaires irréductibles et de dimension finie de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations k-linéaires lisses irréductibles de dimension infinie de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ de caractère central χ.*

Démonstration. Le résultat découle immédiatemment de l'équivalence de Fontaine 1.3.2 et du théorème précédent. □

Remarque 3.6.14. Ce théorème reste valable dans le cas où $k = \overline{\mathbf{F}_p}$ car alors un (φ, Γ)-module de dimension finie sur $\overline{\mathbf{F}_p}(\!(\pi)\!)$ provient en fait par extension des scalaires d'un (φ, Γ)-module sur $E(\!(\pi)\!)$, où E est une extension finie de $\mathbf{F}_p$.

Dans le cas où k est algébriquement clos, on peut combiner ce résultat au théorème B de [BV12] pour obtenir le résultat suivant (qui est le théorème A' de [BV12]) :

Théorème 3.6.15. *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p. Alors pour tout caractère lisse $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k^\times$, l'application $W \mapsto \Omega_\chi(W)$ induit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations k-linéaires irréductibles de dimension finie du groupe de Weil de $\mathbf{Q}_p$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations k-linéaires lisses irréductibles de dimension finie de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$, de caractère central χ.*

Démonstration. Le théorème B de [BV12] nous donne une bijection entre les classes d'isomorphisme de (φ, Γ)-modules irréductibles sur $k(\!(\pi)\!)$ et les classes d'isomorphisme de représentations k-linéaires irréductibles du groupe de Weil de $\mathbf{Q}_p$, ce qui combiné au théorème 3.6.11 donne bien le résultat annoncé. □

6.3 Non admissibilité des représentations de dimension infinie

Il est évident que les représentations de dimension finie de B sont admissibles, nous prouvons ici que ce sont les seules. Ce résultat est à comparer au cas des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, où la classification de Barthel-Livné et Breuil permet de voir que toutes les représentations lisses irréductibles à caractère central de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sont admissibles.
Les résultats de Berger ([Ber11a]) prouvent même qu'on peut peut se passer de l'hypothèse sur le caractère central : toute représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

est admissible.

Commençons par quelques lemmes précisant un peu plus l'action de Γ. Dans la suite, si $\gamma \in \Gamma$, on note $n(\gamma)$ le plus petit entier $n \in \mathbf{N}$ tel que $\chi_{\mathrm{cycl}}(\gamma) \in 1 + p^n \mathbf{Z}_p$, c'est-à-dire $n(\gamma) = v_p(\chi_{\mathrm{cycl}}(\gamma) - 1)$.

Lemme 3.6.16. *Soit $\gamma \in \Gamma$ tel que $n(\gamma) \geq 1$. Alors $(\gamma - 1)(\pi) \in \pi^{p^{n(\gamma)}} k[\![\pi]\!]$.*

Démonstration. Si $n(\gamma) \geq 1$, alors $n(\gamma) = 1 + p^{n(\gamma)} u$, avec $u \in \mathbf{Z}_p^\times$, et on a

$$(\gamma - 1)(\pi) = (1+\pi)^{1+p^{n(\gamma)}u} - 1 - \pi = (1+\pi)\varphi^{n(\gamma)}((1+\pi)^u - 1) \in \pi^{n(\gamma)} k[\![\pi]\!].$$

□

Lemme 3.6.17. *Si D est un (φ, Γ)-module, alors il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que si $n(\gamma) \geq m$, alors*

$$(\gamma - 1)(D^\natural) \subset \pi^p D^\natural.$$

Démonstration. Soit $e_1, \ldots, e_d$ une base de $D^\natural$. Par continuité de l'action de Γ, il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que si $n(\gamma) \geq n_1$, alors $(\gamma - 1)(e_i) \in \pi^p D^\natural$.
Soit alors $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i$ un élément de $D^\natural$. On a alors

$$(\gamma - 1)(x) = \sum_{i=1}^d ((\gamma - 1)x_i) \cdot e_i + \sum_{i=1}^d \gamma(x_i)((\gamma - 1)(e_i)).$$

La première somme est dans $\pi^p D^\natural$ dès que $n(\gamma) \geq 1$ par le lemme 3.6.16. La seconde est dans $\pi^p D^\natural$ si $n \geq n_1$ par définition de n_1. Donc $m = \max(1, n_1)$ convient. □

Lemme 3.6.18. *Si D est un (φ, Γ)-module, alors* $\mathrm{Ker}\psi \cap (D^\natural \backslash \pi^p D^\natural) \neq \emptyset$.

Démonstration. Soit x un élément non nul de D. Alors $\varphi(x) \neq 0$, et il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $\pi^{pn}\varphi(x) \in D^\natural - \pi^p D^\natural$. Alors $(1+\pi)\pi^{pn}\varphi(x) = (1+\pi)\varphi(\pi^n x) \in \mathrm{Ker}\psi \cap (D^\natural \backslash \pi^p D^\natural)$. □

Proposition 3.6.19. *Soit D un (φ, Γ)-module et $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k^\times$ un caractère lisse. Alors $\Omega_\chi(D)$ n'est pas admissible.*

Démonstration. Soit m comme dans le lemme précédent. Nous allons prouver que les invariants de $\Omega_\chi(D)$ sous le sous-groupe ouvert compact de B, $I_m = \left(\begin{smallmatrix} 1+p^m\mathbf{Z}_p & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1+p^m\mathbf{Z}_p \end{smallmatrix}\right)$ ne sont pas de dimension finie sur k.
Rappelons que par le lemme 3.2.25, $(\Omega_\chi(D)^{I_m})^*$ est égal à $(\varprojlim_\psi D^\natural)_{I_m}$, qui lui-même est le quotient de $\varprojlim_\psi$ par $(\varprojlim_\psi (D^\natural))(I_m)$. Donc pour prouver que $\Omega_\chi(D)^{I_m}$ n'est pas de dimension finie, il suffit de prouver qu'il en est de même de ce quotient.
Le groupe I_m est un pro-p-groupe, topologiquement de type fini, engendré par $\left(\begin{smallmatrix} 1+p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+p^m \end{smallmatrix}\right)$. La preuve de la proposition 3.2.24 montre alors que

$$(\varprojlim_\psi D^\natural)(I_m) =$$

$$\mathrm{Vect}_k\left(\left(\left(\begin{smallmatrix} 1+p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot \varprojlim_\psi D^\natural, \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot \varprojlim_\psi D^\natural, \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+p^m \end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot \varprojlim_\psi D^\natural\right).$$

Puisque $1+p^m\mathbf{Z}_p$ est dans le noyau de χ, $\left(\begin{smallmatrix}1+p^m & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ agit trivialement sur $\varprojlim_\psi D^\natural$, et donc

$$\left(\left(\begin{smallmatrix}1+p^m & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot\varprojlim_\psi D^\natural=0.$$

L'action de $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ est facile à décrire, et on a

$$\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot(x_n)_{n\in\mathbf{N}}=\left(\pi^{p^n}x_n\right)_{n\in\mathbf{N}},$$

de sorte que

$$\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot\varprojlim_\psi D^\natural=\varprojlim_{\psi,n}\pi^{p^n}D^\natural.$$

Enfin, si $\gamma_m\in\Gamma$ est tel que $\chi_{\mathrm{cycl}}(\gamma_m)=(1+p^m)^{-1}$, notons $V_m=(\gamma_m-1)(D^\natural)$. Alors $\psi:V_m\to V_m$ est surjectif, de sorte que

$$\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1+p^m\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot\varprojlim_\psi D^\natural=\varprojlim_\psi V_m.$$

Notons alors $V_{m,n}=\mathrm{Vect}_k(\pi^nD^\natural,V_m)\subset\pi^pD^\natural$, de sorte que

$$(\varprojlim_\psi D^\natural)(I_m)=\varprojlim_{\psi,n}V_{m,n}.$$

Puisque $\psi:V_{m,n+1}\to V_{m,n}$ est surjectif, la condition de Mittag-Leffler est vérifiée, et donc les coinvariants de $\varprojlim_\psi D^\natural$ sous I_m sont donnés par

$$(\varprojlim_\psi D^\natural)/(\varprojlim_{\psi,n}V_{m,n})=\varprojlim_{\psi,n}D^\natural/V_{m,n}.$$

Il nous reste donc à montrer que ces coinvariants forment un k-espace vectoriel de dimension infinie.
Mais si $x\in D^\natural\backslash\pi^pD^\natural$ est un élément de $\mathrm{Ker}\psi$, dont l'existence est assurée par le lemme 3.6.18, alors quel que soit $n\geq 1$, l'image $\overline{x}_n$ de x dans $D^\natural/V_{m,n}$ est non nulle, et donc une famille infinie et libre d'éléments de $\varprojlim_{\psi,n}D^\natural/V_{m,n}$ est donnée par les $(0,\dots,0,\overline{x}_n,\dots)$.

□

Corollaire 3.6.20. *Soit* Π *une représentation lisse irréductible et à caractère central de* B. *Alors* Π *est admissible si et seulement si elle est de dimension finie.*

Démonstration. Il est évident que les représentations de dimension finie sont admissibles. Si Π est de dimension infinie, alors le théorème 3.6.11 montre l'existence d'un (φ,Γ)-module D tel que $\Pi\simeq\Omega_\chi(D)$, où χ est le caractère central de Π, et la proposition 3.6.19 permet de conclure que Π n'est pas admissible. □

6.4 Caractère central des représentations irréductibles

À l'instar des résultats de [Ber11a], nous montrons ici comment utiliser le théorème de classification des représentations lisses irréductibles à caractère central sur un corps quelconque afin de prouver que sur un corps algébriquement clos, toute

représentation lisse irréductible de B possède nécessairement un caractère central.

Soit donc k un corps algébriquement clos de caractéristique p, et Π une représentation k-linéaire lisse irréductible de B.
Le pro-p-groupe $(1+\mathrm{p}\mathbf{Z}_\mathrm{p})\cdot\mathrm{Id}$ possède des points fixes non triviaux, et puisque $(1+\mathrm{p}\mathbf{Z}_\mathrm{p})\cdot\mathrm{Id}\subset\mathrm{Z}$, l'ensemble de ces points fixes forme une sous-représentation de Π. Donc par irréductibilité de Π, $(1+p\mathbf{Z}_p)\cdot\mathrm{Id}$ agit trivialement sur Π.
Si $g\in\mathbf{Z}_p^\times\cdot\mathrm{Id}$, alors $g^{p-1}\in(1+p\mathbf{Z}_p)\cdot\mathrm{Id}$, de sorte que $\Pi=\bigoplus_{\lambda^{p-1}=1}\Pi^{g=\lambda\cdot\mathrm{Id}}$. Mais encore une fois, puisque $g\in\mathrm{Z}$ et par irréductibilité de Π, les éléments de $\mathbf{Z}_p^\times\cdot\mathrm{Id}$ agissent par des scalaires : il existe un caractère $\mathbf{Z}_p^\times\to k^\times$ par lequel agit $\mathbf{Z}_p^\times\cdot\mathrm{Id}$. Un tel caractère est nécessairement de la forme ω^r, $r\in\{0,\dots,p-2\}$. Quitte à tordre Π par ω^{-r}, on peut donc supposer que $\mathbf{Z}_p^\times\cdot\mathrm{Id}$ agit trivialement sur Π.

Soit $f=\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&p\end{smallmatrix}\right)$. Pour tout polynôme non nul $Q(X)\in k[X]$, le noyau et l'image de $Q(f):\Pi\to\Pi$ forment des sous-représentations de Π. Si le noyau de $Q(f)$ n'est pas réduit à zéro, alors f admet un vecteur propre $\lambda\in k$, de sorte que $\Pi=\Pi^{f=\lambda\cdot\mathrm{Id}}$, et ainsi l'action de $\mathrm{Z}=\mathbf{Q}_p^\times\cdot\mathrm{Id}=p^{\mathbf{Z}}\times\mathbf{Z}_p^\times\cdot\mathrm{Id}$ se fait par un caractère : Π admet un caractère central.
Si pour tous les polynômes non nuls $Q\in k[X]$, $\operatorname{Ker}Q(f)=\{0\}$, alors $Q(f):\Pi\to\Pi$ est bijectif, de sorte que Π peut être muni d'une structure de $k(X)$-espace vectoriel. Dans ce cas, Π est une représentation $k(X)$-linéaire, lisse (puisqu'elle l'est en tant que représentation k-linéaire), irréductible. De plus, Π admet alors un caractère central : il s'agit de μ_X.

Par le théorème 3.6.11, Π est donc de la forme $\Omega_{\mu_X}(D)$, pour D un (φ,Γ)-module irréductible sur $k(X)(\!(\pi)\!)$, ou est de dimension finie sur $k(X)$.
Dans le cas où Π est de dimension finie sur $k(X)$, par la proposition 3.4.3, il existe deux endomorphismes f et g du $k(X)$-espace vectoriel Π et deux entiers $r,s\in\{0,\dots,p-2\}$ tels que

$$\begin{pmatrix}p^na_0&b\\0&p^mc_0\end{pmatrix}\cdot v=\omega^r(a_0)\omega^s(c_0)f^n\circ g^m(v),\forall v\in\Pi.$$

Soit alors $(e_1,\dots,e_d)$ une base du $k(X)$-espace vectoriel Π, et S l'ensemble infini des éléments de k qui ne sont pas pôles de coefficients de f et de g dans cette base. Pour $\lambda\in S$, le morphisme d'évaluation en λ fournit un quotient de la représentation k-linéaire Π, de caractère central μ_λ. Pour $\lambda\neq\lambda'$, les deux représentations obtenues ne sont pas isomorphes, ce qui contredit l'irréductibilité de Π en tant que représentation k-linéaire.

Supposons alors qu'il existe un (φ,Γ)-module D, irréductible sur $k(X)(\!(\pi)\!)$ tel que $\Pi=\Omega_{\mu_X}^{k(X)}(D)$. Alors $\Pi\otimes_{k(X)}\overline{k(X)}=\Omega_{\mu_X}^{\overline{k(X)}}(D\otimes_{k(X)}\overline{k(X)})$, où $D\otimes_{k(X)}\overline{k(X)}$ est un (φ,Γ)-module sur $\overline{k(X)}(\!(\pi)\!)$. Soit D_0 un sous-(φ,Γ)-module irréductible de $D\otimes_{k(X)}\overline{k(X)}$. Puisque $\overline{k(X)}$ est algébriquement clos, nous connaissons les (φ,Γ)-modules irréductibles sur $\overline{k(X)}(\!(\pi)\!)$, et à torsion par un caractère non ramifié près, ils sont définis sur $\mathbf{F}_p(\!(\pi)\!)$: il existe $\lambda\in\overline{k(X)}$ et D_0' un (φ,Γ)-module irréductible sur $\mathbf{F}_p(\!(\pi)\!)$ tel que

$$D_0=(D_0'\otimes D_{\lambda,0})\otimes_{k(X)}\overline{k(X)}.$$

Soit E une extension finie de $k(X)$ telle que $(\Pi \otimes_{k(X)} E)^{\mathrm{ss}}$ soit de la forme

$$(\Pi \otimes_{k(X)} E)^{\mathrm{ss}} = \bigoplus_{i=1}^{n} \Omega^E_{\mu_X}((D_i \otimes_{\mathbf{F}_p} E) \otimes D_{\lambda_i,0}) = \bigoplus_{i=1}^{n} \Omega^E_{\mu_X}((D_i \otimes E)) \otimes \mu_{\lambda_i}$$

où les D_i sont des (φ, Γ)-modules irréductibles sur $\mathbf{F}_p(\!(\pi)\!)$ et les λ_i sont des éléments de E. En tant que représentation k-linéaire, $(\Pi \otimes_{k(X)} E)^{\mathrm{ss}} = \Pi^{[E:k(X)]}$, et en particulier est de longueur finie.
Mais pour chaque premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_E[X, 1/X, \lambda_1, 1/\lambda_1]$, l'évaluation en $\mathfrak{p}$ fournit un sous-quotient de $(\Pi \otimes E)^{\mathrm{ss}}$, et deux tels sous-quotients ne peuvent être isomorphes puisqu'ils ont des caractères centraux distincts.

Nous venons donc de prouver le résultat suivant :

Proposition 3.6.21. *Sur un corps algébriquement clos, toute représentation lisse irréductible de* B *possède un caractère central.*

Corollaire 3.6.22. *Soit k un corps algébriquement clos, et Π une représentation k-linéaire lisse, irréductible de* B*. Alors Π admet un caractère central χ. De plus, si Π est de dimension infinie sur k, il existe un (φ, Γ)-module D, irréductible sur $k(\!(\pi)\!)$ tel que $\Pi \simeq \Omega_\chi(D)$.*

Bibliographie

[BH97] P. N. Balister et S. Howson, *Note on Nakayama's lemma for compact Λ-modules*, Asian J. Math. **1** (1997), no. 2, 224–229.

[BL94] L. Barthel et R. Livné, *Irreducible modular representations of* GL_2 *of a local field*, Duke Math. J. **75** (1994), no. 2, 261–292.

[Ben00] Denis Benois, *On Iwasawa theory of crystalline representations*, Duke Math. J. **104** (2000), no. 2, 211–267.

[Ber04] Laurent Berger, *Limites de représentations cristallines*, Compos. Math. **140** (2004), no. 6, 1473–1498.

[Ber10a] ———, *Galois representations and* (φ, Γ)*-modules*, 2010, En cours de rédaction. Disponible sur `http://perso.ens-lyon.fr/laurent.berger/ihp2010.php`.

[Ber10b] ———, *Représentations modulaires de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *et représentations galoisiennes de dimension 2*, Astérisque **330** (2010), 263–279.

[Ber10c] ———, *On some modular representations of the Borel subgroup of* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Compos. Math. **146** (2010), no. 1, 58–80.

[BB10] Laurent Berger et Christophe Breuil, *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque **330** (2010), 155–211.

[BB05] ———, *Sur la réduction des représentations cristallines de dimension* 2 *en poids moyen* (2005), Non publié. Disponible à `http://perso.ens-lyon.fr/laurent.berger/autrestextes/poidsmoyens.pdf`.

[BLZ04] Laurent Berger, Hanfeng Li, et Hui June Zhu, *Construction of some families of 2-dimensional crystalline representations*, Math. Ann. **329** (2004), no. 2, 365–377.

[Ber11a] Laurent Berger, *Central characters for smooth irreducible modular representations of* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (2011), Prépublication.
Disponible à `http://perso.ens-lyon.fr/laurent.berger/publications.php`.

[Ber11b] ———, *Local constancy for the reduction mod p of* 2*-dimensional crystalline representations*, Bull. Lond. Math. Soc. (2011), Advance access.

[Ber04] ———, *An introduction to the theory of p-adic representations*, Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, pp. 255–292.

[BV12] Laurent Berger et Mathieu Vienney, *Irreducible modular representations of the Borel subgroup of* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (2012), Prépublication.

[Bre03a] Christophe Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$*. I*, Compositio Math. **138** (2003), no. 2, 165–188.

[Bre03b] ———, *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$*. II*, J. Inst. Math. Jussieu **2** (2003), no. 1, 23–58.

[BM02] Christophe Breuil et Ariane Mézard, *Multiplicités modulaires et représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ *et de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ *en* $l = p$, Duke Math. J. **115** (2002), no. 2, 205–310. Avec un appendice de Guy Henniart.

[BP12] Christophe Breuil et Vytautas Paškūnas, *Towards a modulo p Langlands correspondence for* GL_2, Mem. Amer. Math. Soc. **216** (2012).

[BC09] Olivier Brinon et Brian Conrad, *CMI Summer School notes on p-adic Hodge theory*, 2009, Non publié.

[BH06] Colin J. Bushnell et Guy Henniart, *The local Langlands conjecture for* GL(2), Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 335, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[BG09] Kevin Buzzard et Toby Gee, *Explicit reduction modulo p of certain two-dimensional crystalline representations*, Int. Math. Res. Not. IMRN **12** (2009), 2303–2317.

[BG12] ———, *Explicit reduction modulo p of certain two-dimensional crystalline representations II* (2012). Disponible à `http://arxiv.org/abs/1204.1565`.

[Col10a] Pierre Colmez, *Représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *et* (ϕ, Γ)*-modules*, Astérisque **330** (2010), 281–509.

[Col10b] ———, (φ, Γ)*-modules et représentations du mirabolique de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque **330** (2010), 61–153.

[Col99] ———, *Représentations cristallines et représentations de hauteur finie*, J. Reine Angew. Math. **514** (1999), 119–143.

[CF00] Pierre Colmez et Jean-Marc Fontaine, *Construction des représentations p-adiques semi-stables*, Invent. Math. **140** (2000), no. 1, 1–43.

[Eme11] Matthew Emerton, *On a class of coherent rings, with applications to the smooth representation theory of* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *in characteristic p* (2011), Prépublication. Disponible à `http://www.math.uchicago.edu/~emerton/preprints.html`.

[Fon90] Jean-Marc Fontaine, *Représentations p-adiques des corps locaux. I*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 249–309.

[Fon94a] ———, *Le corps des périodes p-adiques*, Astérisque **223** (1994), 59–111. With an appendix by Pierre Colmez; Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[Fon94b] ———, *Représentations p-adiques semi-stables*, Astérisque **223** (1994), 113–184.

[FO09] Jean-Marc Fontaine et Yi Ouyang, *Theory of p-adic galois representations*, 2009, En préparation. Disponible à `http://staff.ustc.edu.cn/~yiouyang/galoisrep.pdf`.

[FW79] Jean-Marc Fontaine et Jean-Pierre Wintenberger, *Le "corps des normes" de certaines extensions algébriques de corps locaux*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **288** (1979), no. 6, A367–A370.

[Her98] Laurent Herr, *Sur la cohomologie galoisienne des corps p-adiques*, Bull. Soc. Math. France **126** (1998), no. 4, 563–600.

[Hu12] Yongquan Hu, *Diagrammes canoniques et représentations modulo p de* $\mathrm{GL}_2(F)$, J. Inst. Math. Jussieu **11** (2012), no. 1, 67–118.

[Ked08] Kiran S. Kedlaya, *Slope filtrations for relative Frobenius*, Astérisque **319** (2008), 259–301. Représentations p-adiques de groupes p-adiques. I. Représentations galoisiennes et (φ, Γ)-modules.

[Köt69] Gottfried Köthe, *Topological vector spaces. I*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 159, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[Li] Hanfeng Li. Courriel à Laurent Berger daté du 24 octobre 2003.

[Lef42] Solomon Lefschetz, *Algebraic Topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 27, American Mathematical Society, New York, 1942.

[Nak11] Kentaro Nakamura, *Zariski density of crystalline representations for any p-adic field* (2011). Disponible à `http://arxiv.org/abs/1104.1760`.

[Paš07] Vytautas Paškūnas, *On the restriction of representations of* $\mathrm{GL}_2(F)$ *to a Borel subgroup*, Compos. Math. **143** (2007), no. 6, 1533–1544.

[RZ10] Luis Ribes et Pavel Zalesskii, *Profinite groups*, 2nd ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 40, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[Rib76] Kenneth A. Ribet, *A modular construction of unramified p-extensions of* $\mathbf{Q}(\mu_p)$, Invent. Math. **34** (1976), no. 3, 151–162.

[Ser72] Jean-Pierre Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. Math. **15** (1972), no. 4, 259–331.

[Ser78] ———, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris, 1978.

[SV08] Peter Schneider et Marie-France Vignéras, *A functor from smooth* $\mathfrak{o}$*-torsion representations to* (φ, Γ)*-modules* (2008), Prépublication.
Disponible à `http://www.math.jussieu.fr/~vigneras/functor.pdf`.

[Vig96] Marie-France Vignéras, *Représentations* l*-modulaires d'un groupe réductif* p*-adique avec* $l \neq p$, Progress in Mathematics, vol. 137, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.

[Vig] ———, *Admissibilité des représentations* p*-adiques et lemme de Nakayama*, Non publié.
Disponible à `http://www.math.jussieu.fr/~vigneras/lang.pdf`.

[Wac96] Nathalie Wach, *Représentations* p*-adiques potentiellement cristallines*, Bull. Soc. Math. France **124** (1996), no. 3, 375–400.

[Win83] Jean-Pierre Wintenberger, *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **16** (1983), no. 1, 59–89.

[YY12] Go Yamashita et Seidai Yasuda, *Reduction of two dimensional crystalline representations and Hypergeometric polynomials* (2012), En préparation.

Index

(ψ, Γ)-module, 91
P^+-module, 122
P^--module, 122
$k[\![G]\!]$-module topologique, 80
$k[\![\pi]\!]$-module
  admissible, 125
(φ, Γ)-module
  sur $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}$, 18
    étale, 18
  sur $k(\!(\pi)\!)$, 83
ψ-module, 85
  irréductible, 85
  libre, 85
  non dégénéré, 85
  surjectif, 85
φ-module
  filtré, 28
    admissible, 28
    faiblement admissible, 28
  sur $k(\!(\pi)\!)$, 83
n-bloc, 103
  initial, 103

algèbre de groupe complétée, 80

coinvariants, 79
corps des normes, 15
correspondance de Langlands semi-simple
    modulo p, 72

espace vectoriel topologique, 73
  à topologie linéaire, 73
  de prodimension finie, 73
  dual, 76
  linéairement compact, 73

Frobenius
  réciprocité, 69

lemme de Nakayama topologique, 81

module de Wach, 31

pente
  voir polygone de Newton 32
poids de Hodge-Tate, 24
polygone de Newton
  homogène, 32
  inhomogène, 33
primitif, 106

réseau
  d'un espace vectoriel sur $k(\!(\pi)\!)$, 83
  d'une représentation p-adique, 13
représentation
  admissible, 68
  de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$
    classification des irréductibles, 71
    de la série principale, 71
    supersingulière, 71
  de présentation finie, 105
  galoisienne
    B-admissible, 25
    L-linéaire, 12
    p-adique, 12
    cristalline, 27
    de De Rham, 26
    de Hodge-Tate, 24
    irréductible, 12
    modulo p, 13
  lisse, 67

support
  d'un élément de $\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma$, 103
  en niveaux $n_1, \ldots, n_k$, 103

topologie linéaire
  voir espace vectoriel topologique 73

valuation de convergence, 40

Index des notations

$(\mathrm{ind}_{\mathrm{KZ}}^{\mathrm{B}}\sigma)^+$ 126
$[g, v]$ 69
$[g]$ 69
$[i], i \in \mathbf{Z}$ P 34
B sous-groupe de Borel standard de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ 70
$\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ 27
$\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+$ 27
$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ 26
$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ 26
Z centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ 70
$\check{D}$ dual de Tate d'un (φ, Γ)-module 93
χ_{cycl} caractère cyclotomique 11
$\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}$ 27
deg 12
Δ_n 104
$\mathsf{EV}_{\mathrm{disc}}(k)$ 72
$\mathsf{EV}_{\mathrm{pdf}}(k)$ 73
$\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ groupe de Galois 11
$\mathrm{H}_{\mathbf{Q}_p}$ 11
ind induite compacte 69
K 100
K_G 70
λ_+ 40
λ_- 40
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 93
$\mathcal{W}_{\mathbf{Q}_p}$ groupe de Weil 12
Frob_p frobenius arithmétique 12
μ_a , ... 105
μ_λ 13
ω caractère cyclotomique modulo p 11

$\Omega^1_{k(\!(\pi)\!)}$ 93
$\Omega_\chi(D)$ D un (ψ,Γ)-module 116
$\Omega_\chi(D)$ D un (φ,Γ)-module irréductible 118
$\Omega_\chi(V)$ 118
$\Omega_\chi(W)$ 118
$\Pi(\lambda,\sigma)$ 115
$\pi(r,\lambda,\chi)$ 70
ψ 84
$\mathrm{res}_0(fd\pi)$ résidu d'une forme différentielle 93
$k[\![G]\!]$ algèbre de groupe complétée de G 80
$\sigma_1\otimes\sigma_2$ 102
$k(\!(\pi^{\mathbf{Q}})\!)$ corps des séries de Hahn 31
$k(\!(\pi)\!)$ corps des séries de Laurent 83
τ_n , ... 103
φ 83
$\varphi_n(h,\lambda,\sigma)$ 106
$\varprojlim_\psi D$ 115
$\{\cdot,\cdot\}$ 93
$D(\mathrm{ind}(\omega_n^h))_k$ 84
D^+ 95
$D^\natural$, ... 88
$D^\sharp$ 86
D^{++} 95
D^{nr} 95
$D_{\lambda,r}$ 83
D_{k,a_p} 30
F_∞ 11
G $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ 70
M_{tors} ensemble des éléments de torsion de M 85
$S(\lambda,\sigma)$ 114
$S_n(h,\lambda,\sigma)$ 106
T_n 104
T_{k,a_p} 41
$V(H)$ 79
V^* dual d'un espace vectoriel topologique 76
V^H invariants de V sous H 79
V_H coinvariants de V sous H 79

V_n 104
$v_r(P)$ 34
V_{k,a_p} 30
$V_{k,n}$ 104
$v_{k,n}$ 104
$W^{\perp}$ 79
$w_{l,n}$ 106