



**HAL**  
open science

# Test expérimental de l'universalité de la transition d'Anderson avec des atomes froids: Indépendance de l'exposant critique $\nu$ face aux détails microscopiques

Matthias Lopez

## ► To cite this version:

Matthias Lopez. Test expérimental de l'universalité de la transition d'Anderson avec des atomes froids: Indépendance de l'exposant critique  $\nu$  face aux détails microscopiques. Systèmes désordonnés et réseaux de neurones [cond-mat.dis-nn]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2010. Français. NNT: . tel-00764091

**HAL Id: tel-00764091**

**<https://theses.hal.science/tel-00764091>**

Submitted on 12 Dec 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE DE DOCTORAT

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE LILLE 1

École Doctorale Science de la Matière, du Rayonnement et de l'Environnement



pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN SCIENCES**

Dans la spécialité :

Optique et Lasers, Physico-Chimie, Atmosphère

soutenue le 21/11/2012 par

**MATTHIAS P. LOPEZ**

## **Test expérimental de l'universalité de la transition d'Anderson avec des atomes froids :**

Indépendance de l'exposant critique  $\nu$  face aux détails microscopiques

devant le jury :

---

M. STEPHAN DE BIÈVRE	.....	Président
M. BERTRAND GEORGEOT	.....	Rapporteur
M. GUILLAUME LABEYRIE	.....	Rapporteur
M. THOMAS BOURDEL	.....	Examineur
M. DOMINIQUE DELANDE	.....	Examineur
M. JEAN-CLAUDE GARREAU	.....	Co-directeur de thèse
M. PASCAL SZRIFTGISER	.....	Directeur de thèse



## Résumé

En physique du solide, l'étude des effets du désordre a mené à la découverte d'une transition de phase. A faible désordre le solide est conducteur. A fort désordre ce dernier devient isolant. Cette dernière porte le nom de "transition d'ANDERSON" ou encore de "transition métal-isolant". Elle peut être caractérisée par un exposant critique  $\nu$ . Il est prédit théoriquement que sa valeur est universelle, autrement dit, qu'elle n'est pas dépendante des détails microscopiques caractérisant le désordre, mais seulement des symétries satisfaites par le hamiltonien.

La réalisation expérimentale d'un tel système est délicate. Des effets de décohérence trop nombreux viennent fausser la mesure de l'exposant critique. Pour contourner ces difficultés, nous réalisons un rotateur frappé avec des atomes froids. La dynamique quantique de ce système est connue pour être la même que celle de l'électron dans un potentiel désordonné. Nous testons alors différents jeux de paramètres régissant le désordre microscopique, et montrons que l'exposant critique  $\nu$  en est indépendant. Ainsi nous prouvons expérimentalement l'universalité de la transition, ainsi que son appartenance à une classe d'universalité : l'ensemble gaussien orthogonal.

Nous détaillons par ailleurs un changement de taille dans le dispositif : la réalisation d'une onde stationnaire vertical et d'une détection vélocimétrique par temps de vol.

**Mots-clefs :** transition d'ANDERSON, rotateur frappé, universalité, chaos quantique, atomes froids, transport quantique, localisation, ondes de matières atomiques

## Abstract

In solid state physics, the study of the effects of disorder led to the discovery of a phase transition. For weak disorder, the solid is a conductor, whereas for strong disorder it becomes an insulator. This is known as the "ANDERSON transition" or as the "metal-insulator transition", and can be characterized by a critical exponent  $\nu$ . It is theoretically predicted that this exponent's value is universal, i.e., that it is not determined by the microscopic details, but only by the symmetries of the Hamiltonian.

The experimental realization of such a system in condensed matter is rather difficult. Decoherence effects cannot be neglected and affect the critical exponent's value. To circumvent this phenomenon, we use cold atoms to experimentally realize a kicked rotor. The quantum dynamics of such a system are known to mimic those of the solid state problem. We hence test different sets of parameters controlling the statistical properties of the disorder, and show that the critical exponent  $\nu$  is independent. We hereby prove the universality of the transition, and determine experimentally its universality class : the Gaussian Orthogonal Ensemble.

We will then detail an important change in the experimental setup : the installation of a vertical standing wave, and of a time-of-flight velocimetric detection.

**Keywords :** ANDERSON transition, kicked rotor, universality, quantum chaos, cold atoms, quantum transport, localization, atomic matter waves





# Remerciements

Située autout début de la thèse, cette page de remerciements fut cependant rédigée après la soutenance. Le plus dur est toujours laissé pour la fin : comment remercier tout le monde, sans omettre qui que ce soit ? C'est à cet exercice difficile que je vais me livrer, dans un style bien personnel...

Commençons par PASCAL SZRIFTGISER, mon directeur de thèse. De toi, en plus de tout ton savoir méthodologique et ta rigueur intellectuelle, j'ai appris qu'on avait pas besoin d'être un agneau dans la recherche. J'ai appris à prendre mon temps, à respecter ma hiérarchie (oui oui tu as réussi à me l'inculquer) et à travailler avec les autres. Pour tout cela, je ne saurais comment te remercier.

J'aimerais poursuivre avec JEAN-CLAUDE GARREAU, mon co-directeur de thèse. Je garderais toujours un souvenir ému de nos engueulades scientifiques. Nous savions ne pas être d'accord et pourtant, je sortais toujours enrichi de ces disputes. Ta patience, et ton savoir extensif ont toujours été source d'inspiration. Merci.

Dans cette équipe, je souhaite remercier JEAN-FRANÇOIS CLÉMENT. Tu as su, quand tu es arrivé sur la manip, guérir ma trichotillomanie naissante. Je te remercie d'avoir su cadrer mon esprit d'expérimentateur qui partait dans tous les sens et n'allait pas bien loin. J'ai par ailleurs pris beaucoup de plaisir à travailler avec toi. Aussi, je remercie RADU CHICIREANU, dont les intuitions nous ont été d'un grand secours dans le dispositif vertical et dont la présence est devenue indispensable.

Il me faut aussi remercier tout le personnel du laboratoire. Une énumération exhaustive m'exposerait au risque d'oublier quelqu'un. Je souhaite cependant faire une mention toute spéciale à l'Electronique et tous les lascars qui y travaillent. Sans votre expertise, une grande partie de ce travail aurait été beaucoup plus longue. En plus z'êtes trop cools !

Lors de ma soutenance je suis fier de pouvoir dire que j'ai eu un jury dont l'honnêteté et la rigueur scientifiques sont inattaquables. Pas tout le monde n'a cette chance. Merci à vous d'avoir accepté de venir des quatre coins de l'université et de la France.

Hors du laboratoire, un grand nombre de personnes m'ont épaulé dans les moments de découragement. Votre amitié et nos franches rigolades même dans les moments de disette scientifique m'ont aidé au-delà de ce que vous pouvez imaginer. Merci LÉNA, merci JÉRÔME et merci VINCENT T. Je tiens aussi à dire que rien ne m'amusa plus au cours de cette thèse que de jeter des objets contondants à la figure de VINCENT O., avec qui j'ai partagé un bureau un peu trop longtemps à son goût.

Enfin, merci Maman.





*Thème de l'Offrande Musicale. J.S. Bach*



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1. Du chaos classique à la transition d'Anderson avec un rotateur frappé</b>	<b>7</b>
1.1. Définition du chaos . . . . .	8
1.2. Rotateur Frappé Classique . . . . .	10
1.2.1. Application Standard de CHIRIKOV . . . . .	12
1.2.2. Portrait de phase . . . . .	13
1.3. Rotateur Frappé Quantique . . . . .	15
1.3.1. Bases théoriques . . . . .	15
1.3.2. Étude numérique . . . . .	17
1.3.3. Localisation dynamique . . . . .	21
1.4. Localisation d'ANDERSON . . . . .	23
1.4.1. Formulation originale . . . . .	23
1.4.2. Théorie d'échelle . . . . .	24
1.4.3. Exposant critique . . . . .	26
1.5. Universalité . . . . .	27
1.5.1. Symétries et classes d'universalité . . . . .	27
1.5.2. Classes d'universalité et milieux désordonnés : état de l'art. . . . .	28
1.6. Équivalence entre le problème d'ANDERSON et le Rotateur Frappé . . . . .	30
1.6.1. Rotateur frappé quasi-périodique . . . . .	30
1.6.2. Correspondances des deux modèles . . . . .	31
1.7. Théorie d'échelle à un paramètre appliqué au rotateur frappé . . . . .	33
1.7.1. Problématique du rotateur frappé . . . . .	35
1.7.2. Hypothèse forte . . . . .	36
1.7.3. Limites asymptotiques de la fonction d'échelle . . . . .	36
1.7.4. Détermination de l'exposant critique . . . . .	39
1.8. Conclusion . . . . .	39
<b>2. Dispositif expérimental horizontal</b>	<b>43</b>
2.1. Piégeage et refroidissement . . . . .	44
2.2. Un potentiel sinusoïdal pulsé avec un laser . . . . .	44
2.2.1. Principe . . . . .	44
2.2.2. Expérimentalement . . . . .	47
2.3. Vélocimétrie Raman . . . . .	50
2.3.1. Principe . . . . .	51
2.3.2. Expérimentalement . . . . .	53
2.4. Caractérisation, limitations et améliorations apportés au dispositif expérimental . . . . .	57
2.4.1. Piège magnéto-optique . . . . .	57

2.4.2.	Dispositif vélocimétrique Raman . . . . .	58
2.4.3.	Onde Stationnaire . . . . .	58
2.5.	Conclusion . . . . .	63
<b>3.</b>	<b>Démonstration expérimentale de l'universalité de la transition d'Anderson</b>	<b>65</b>
3.1.	Universalité avec un rotateur frappé . . . . .	66
3.1.1.	Universalité dans les milieux désordonnés . . . . .	66
3.1.2.	Espace des paramètres du rotateur frappé quasi-périodique . . . . .	67
3.2.	Mise en évidence expérimentale de la localisation dynamique . . . . .	68
3.3.	Deux comportements pour le rotateur frappé quasi-périodique . . . . .	69
3.4.	Comportement au point de la transition . . . . .	70
3.4.1.	Existence du comportement critique, signature de la transition de phase . . . . .	70
3.4.2.	Exposant critique . . . . .	72
3.5.	Preuve expérimentale de l'universalité de la transition d'ANDERSON . . . . .	73
3.5.1.	Les séquences dans l'espace des paramètres . . . . .	75
3.5.2.	Calcul de l'erreur sur l'exposant critique et méthode de <i>bootstrap</i> . . . . .	83
3.5.3.	Résumé des séquences . . . . .	83
3.6.	Effets de décohérence . . . . .	84
3.6.1.	Plusieurs types de décohérence . . . . .	84
3.6.2.	Conséquences sur la caractérisation de la transition d'ANDERSON . . . . .	86
3.6.3.	Première tentative d'observation de l' <i>absence de diffusion quan-</i> <i>tique à 2D</i> . . . . .	87
3.7.	Conclusion . . . . .	87
<b>4.</b>	<b>Développement du dispositif expérimental vertical</b>	<b>89</b>
4.1.	Introduction . . . . .	89
4.2.	Onde stationnaire verticale . . . . .	90
4.2.1.	Génération des deux faisceaux de l'onde stationnaire . . . . .	91
4.2.2.	Compensation active de phase . . . . .	93
4.2.3.	Modulation quadratique de phase . . . . .	93
4.2.4.	Bilan . . . . .	95
4.3.	Détection vélocimétrique par temps de vol . . . . .	95
4.3.1.	Principe de détection . . . . .	96
4.3.2.	Traitement mathématique . . . . .	96
4.3.3.	Simulation numérique . . . . .	98
4.3.4.	Expérimentalement . . . . .	103
4.4.	Premières données expérimentales . . . . .	104
4.4.1.	Temps de vol sans pulses . . . . .	104
4.4.2.	Temps de vol avec pulses . . . . .	106
4.4.3.	Saturation en énergie . . . . .	106
4.5.	Couplage à la gravitation . . . . .	107
4.6.	Bilan et perspectives . . . . .	109
	<b>Conclusion</b>	<b>111</b>
<b>A.</b>	<b>Équivalence du rotateur frappé avec le modèle des liaisons fortes</b>	<b>115</b>
A.1.	Théorème de Floquet . . . . .	115

A.2. Décomposition de l'opérateur d'évolution du rotateur frappé . . . . .	115
A.2.1. Reformulation dans l'espace des impulsions . . . . .	117
<b>B. Équivalence du rotateur frappé quasi-périodique avec le modèle d'Anderson tridimensionnel</b>	<b>121</b>
B.1. Hamiltonien du rotateur frappé 3D . . . . .	121
B.2. Équivalence des évolutions temporelles. . . . .	123
<b>C. Article publié dans <i>Physical Review Letters</i></b>	<b>125</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>131</b>





# Introduction

## Universalité dans les systèmes fortement corrélés

Comme beaucoup de travaux de thèse, celui-ci se trouve à l'intersection de plusieurs domaines – le titre en rend d'ailleurs bien compte. Ainsi avant toute chose il nous faut présenter le thème de l'universalité en physique.

L'universalité trouve ses racines dans l'étude des propriétés spectrales issues des collisions de noyaux lourds en physique des particules. Ces systèmes, de par l'espace réduit dans lequel cohabitent les neutrons et les protons, sont des systèmes dits « *fortement corrélés* ». Au fil de ces expériences, un certain nombre de propriétés ont été mises en évidence. La plus connue est la *répulsion en énergies des niveaux* : « deux niveaux d'énergies très voisines sont très improbables ». Notons que cette répulsion n'est pas imputable à la co-existence de plusieurs particules dans un espace réduit, mais au fait que les fonctions d'ondes décrivant ce système multi-particulaire se recouvrent spatialement, et ainsi ne peuvent avoir une énergie voisine<sup>1</sup>. A la place d'une étude analytique de cette répulsion, impossible du-fait de la complexité de ces systèmes, WIGNER eut l'idée novatrice d'en faire un traitement statistique [1]. Plutôt que de considérer l'ensemble des interactions entre les différents protons et neutrons du noyau, celui-ci remplace ces dernières par des valeurs aléatoires normalement distribuées, le tout en respectant un certain nombre de symétries imposées par les noyaux lourds. Le résultat, des plus surprenants, est que cet *ansatz* statistique conserve la répulsion des niveaux. La conclusion directe est que la répulsion ne dépend pas des détails microscopiques, mais seulement des symétries satisfaites par le système. C'est une ébauche de l'universalité.

Il faut attendre les travaux de DYSON pour saisir la portée de ce résultat. Celui-ci proposa une véritable théorie statistique des systèmes complexes, englobant naturellement les idées de WIGNER, mais en définissant plus précisément les symétries pertinentes [2]. Il définit trois ensembles, dits « *ensembles gaussiens* », suffisants à la caractérisation d'un grand nombre de problèmes. Selon les symétries satisfaites par le hamiltonien du problème, il range ce dernier dans un de ces trois ensembles. Il montre alors qu'un certain nombre de propriétés spectrales ne dépendent que de celui-ci. C'est l'aboutissement de l'idée que certaines propriétés des systèmes complexes ne dépendent que des symétries satisfaites par ce dernier. Une de ces propriétés est la répulsion des niveaux. Posons  $s = E_{n+1} - E_n$ , la différence d'énergie entre deux niveaux voisins. Cette quantité est alors associée à une densité de probabilité  $P$ , s'écrivant

---

1. On retrouve la même situation dans le potentiel harmonique, un système à une particule, ou encore dans le puit de potentiel infini.

comme

$$P(s) = As^{\tilde{\beta}} e^{-Bs^2},$$

où  $A$  et  $B$  sont des paramètres de normalisation. Le résultat principal est qu'à chaque ensemble gaussien est associée une valeur de  $\tilde{\beta}$  (entière et positive). N'existant que trois ensembles gaussiens, il n'y a que trois valeurs de  $\tilde{\beta}$  : 1, 2 et 4. C'est l'*universalité* et ces trois ensembles sont appelés *classes d'universalité*<sup>2</sup>.

Cependant, cette idée mit du temps à pénétrer d'autres domaines. En tête de file, le chaos quantique et les milieux désordonnés.

## Universalité et chaos quantique

Le chaos quantique est l'étude des systèmes quantiques dont les contre-parties classiques exhibent des comportements chaotiques (i.e. : une extrême sensibilité aux conditions initiales). Il existe deux systèmes paradigmatiques, le billard quantique et le rotateur frappé, dans lesquelles on retrouve ce concept d'universalité.

Si cette thèse porte principalement sur le rotateur frappé, les idées d'universalité ont d'abord pénétré le domaine via les billards avec l'article précurseur de BOHIGAS, GIANNONI et SCHMIT [4] : l'étude des propriétés des spectres d'énergies a montré, que de manière analogue aux systèmes complexes, les systèmes chaotiques exhibaient une répulsion en énergie dans la fonction  $P(s)$  qui était en parfait accord avec les prédictions issues des travaux de WIGNER et DYSON. On peut ainsi attribuer une classe d'universalité à un grand nombre de systèmes chaotiques, que ce soit en analysant les symétries satisfaites par ces derniers, ou en déterminant la valeur de  $\tilde{\beta}$  dans la répulsion des niveaux.

Le rotateur frappé, objet d'étude de cette thèse, entre dans le cadre du chaos quantique. Le comportement de celui-ci manifeste un phénomène interférentiel : la *localisation dynamique*. Dans l'espace des impulsions, au bout d'un certain temps, les fonctions d'onde cessent de diffuser et se localisent. Nous aurons l'occasion de voir que ce phénomène de localisation ne peut avoir lieu sans la répulsion des niveaux, dont l'universalité offre une caractérisation très élégante.

## Chaos quantique et milieux désordonnés

S'il est simple de comprendre les propriétés de conduction dans les milieux cristallins parfaits (travaux remontants à BLOCH [5]), l'étude des milieux cristallins désordonnés est bien plus complexe. Celle-ci est initiée par P.W. ANDERSON en 1958 qui, dans son article fondateur [6], montre que les fonctions d'onde des électrons, au lieu d'être délocalisées et de permettre la conduction électrique, se localisaient dans l'espace réel, et empêchaient toute forme de diffusion. Pour des systèmes tri-dimensionnels, il existe

---

2. En fait, il existe 10 classes d'universalité dont les ensembles gaussiens ne sont que trois représentants [3]. Leur étude n'est pas pertinente dans cette thèse, nous en feront donc abstraction.

un seuil de désordre à partir duquel la localisation se manifeste. Cette localisation se nomme « localisation d'ANDERSON ». Son hamiltonien s'impose rapidement comme paradigme pour l'étude des phénomènes d'absence de diffusion dans les milieux désordonnés.

Deux décennies plus tard, ABRAHAMS, ANDERSON, LICCIARDELLO et RAMAKRISHNAN (« *the Gang of Four* ») [7] prédisent, en introduisant une théorie d'échelle au problème, deux phénomènes : l'existence d'une transition de phase quantique en dimension 3 et l'absence de diffusion en dimension 2. Cette transition de phase, connue sous le nom de transition d'ANDERSON, sépare un état où les fonctions d'onde électroniques sont localisées d'un état où celles-ci sont délocalisées (on parle aussi de transition « métal-isolant »). Elle est caractérisée par un *exposant critique*  $\nu$ , dont la détermination précise est très pertinente dans le cadre de l'universalité. En effet la valeur de celle-ci ne dépend que de la classe d'universalité et de la dimensionalité du problème considéré, et non de ses détails microscopiques.

Expérimentalement, dans les semi-conducteurs, un certain nombre de phénomènes (décohérence dans les fonctions d'ondes ou encore la répulsion électronique) faussent la valeur de  $\nu$  mesurée en rapport aux prédictions théoriques. Les atomes froids permettent de s'affranchir de tels effets néfastes, et ont permis d'observer expérimentalement la localisation d'ANDERSON (dimension 1 : [8] et dimension 3 : [9, 10]). Cependant ils ne permettent pas encore de caractériser cette transition de phase dans l'espace réel.

Le lien entre les systèmes désordonnés et le chaos quantique fut établi lorsqu'une démonstration prouva que les états propres de l'opérateur d'évolution du rotateur frappé se comportaient de la même façon que les états propres du système d'ANDERSON [11, 12, 13] : la localisation dynamique est un équivalent dans l'espace des impulsions de la localisation d'ANDERSON dans l'espace des positions. On peut notamment observer, dans le rotateur frappé, une transition d'ANDERSON et faire une mesure de l'exposant critique  $\nu$  expérimentalement [14] et numériquement [15].

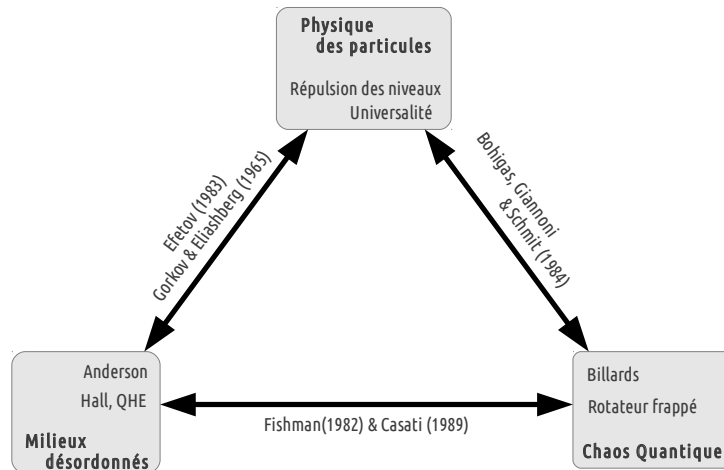
## Milieux désordonnés et systèmes fortement corrélés

Il est encore de nos jours, pertinent d'appliquer les techniques originellement adoptées par WIGNER et DYSON pour l'étude des spectres de noyaux lourds aux problèmes issus des systèmes désordonnés. Cependant le lien ne fut pas immédiatement apparent. Une première application des ensembles gaussiens fut proposée par GORKOV et ELIASHBERG en 1965 [16]. Une généralisation d'une telle approche fait appel à des outils super-symétriques [17], dont l'étude sort du cadre de cette thèse.

Nous utiliserons ainsi une voie annexe : pour caractériser l'universalité de la transition d'ANDERSON dans les milieux désordonnés, nous étudierons expérimentalement les propriétés du rotateur frappé (qui est son analogue dans l'espace des impulsions) et plus particulièrement la transition de phase s'y manifestant, dont l'exposant critique est égal à celui de la transition d'ANDERSON.

La valeur de cet exposant critique est loin d'être triviale et il n'existe pas (encore?) de relation analytique permettant un calcul en accord avec sa prédiction numérique.

En revanche nous savons que sa valeur ne dépend que de la dimensionalité du système et des symétries satisfaites par ce dernier. Ainsi, la valeur trouvée permet de ranger le système dans une *classe d'universalité*. C'est le but de cette thèse : ranger la transition d'ANDERSON dans une classe d'universalité. Nous ferons ceci avec une détermination expérimentale très précise de l'exposant critique avec un rotateur frappé. D'autre part, nous montrerons que cette exposant n'est pas dépendant des paramètres microscopiques du système. Ces deux éléments prouveront alors l'universalité du système et détermineront sa classe d'universalité.



## Plan de thèse

Nous commencerons dans la première partie, par établir un certain nombre de fondements théoriques. Nous aborderons en premier lieu les notions de chaos classique et les illustrerons grâce au rotateur frappé. Ce modèle, en plus d'être central dans cette thèse, est un outil naturel pour cette étude. Puis, nous étudierons le chaos quantique avec le même système et y exhiberons la *localisation dynamique*. Nous prendrons alors du recul pour aller vers les milieux désordonnés et étudierons le problème d'ANDERSON, de la localisation spatiale des fonctions d'onde, aux prédictions de la théorie d'échelle. Nous expliciterons alors le lien entre ces deux systèmes paradigmatiques et montrerons comment une théorie d'échelle modifiée, permet de remonter à l'exposant critique  $\nu$  caractérisant la transition d'ANDERSON.

Dans la seconde partie, nous détaillerons le dispositif expérimental en suivant un chemin linéaire. Après avoir (très) brièvement rappelé les principes de refroidissement et de piégeage, nous aborderons la mise en place de l'onde stationnaire pulsée, permettant de réaliser un rotateur frappé sur les atomes, nous caractériserons alors plusieurs aspects expérimentaux du potentiel optique généré, dont la profondeur des puits ou encore la qualité temporelle des pulses. Enfin, sera traité le principe de détection vélocimétrique. Celui-ci se basant sur des transitions stimulées à deux photons, nous établirons la condition de résonance nous permettant de remonter à la distribution en vitesse de l'atome. Au cours de cette partie nous expliciterons les améliorations

apportés au dispositif et en quoi ces dernières furent essentielles à la démonstration de l'universalité.

En troisième partie, nous analyserons en détail les résultats obtenus avec ce dispositif et démontrerons expérimentalement, sans ambiguïté et pour la première fois, l'universalité de la transition d'ANDERSON avec un rotateur frappé. Pour être plus précis, nous démontrerons que la valeur de l'exposant critique  $\nu$  trouvé ne dépend pas des détails microscopiques du système. Celle-ci nous permettra de ranger le rotateur frappé dans une classe d'universalité. Celui-ci étant équivalent au système d'ANDERSON, nous aurons par extension, la preuve expérimentale de l'universalité de la transition d'ANDERSON.

Dans la quatrième partie, nous détaillerons une évolution majeure du dispositif expérimental : le passage en vertical du potentiel optique sur les atomes. Nous verrons comment cette évolution résout un certain nombre des problèmes rencontrés chez son homologue horizontal. Nous montrerons également quelques résultats préliminaires avec ce système, dont les premiers signaux de localisation dynamique.



# 1. Du chaos classique à la transition d'Anderson avec un rotateur frappé

## Sommaire

---

<b>1.1. Définition du chaos</b>	<b>8</b>
<b>1.2. Rotateur Frappé Classique</b>	<b>10</b>
1.2.1. Application Standard de CHIRIKOV	12
1.2.2. Portrait de phase	13
<b>1.3. Rotateur Frappé Quantique</b>	<b>15</b>
1.3.1. Bases théoriques	15
1.3.2. Étude numérique	17
1.3.3. Localisation dynamique	21
<b>1.4. Localisation d'Anderson</b>	<b>23</b>
1.4.1. Formulation originale	23
1.4.2. Théorie d'échelle	24
1.4.3. Exposant critique	26
<b>1.5. Universalité</b>	<b>27</b>
1.5.1. Symétries et classes d'universalité	27
1.5.2. Classes d'universalité et milieux désordonnés : état de l'art.	28
<b>1.6. Équivalence entre le problème d'Anderson et le Rotateur Frappé</b>	<b>30</b>
1.6.1. Rotateur frappé quasi-périodique	30
1.6.2. Correspondances des deux modèles	31
<b>1.7. Théorie d'échelle à un paramètre appliqué au rotateur frappé</b>	<b>33</b>
1.7.1. Problématique du rotateur frappé	35
1.7.2. Hypothèse forte	36
1.7.3. Limites asymptotiques de la fonction d'échelle	36
1.7.4. Détermination de l'exposant critique	39
<b>1.8. Conclusion</b>	<b>39</b>

---

La transition métal-isolant générée par le désordre, communément appelée « transition d'ANDERSON », du papier séminal de P.W. ANDERSON [6] à la démonstration expérimentale de son universalité, possède une riche histoire. Traditionnellement, l'étude quantitative de la transition de phase est faite à l'aide de simulations numériques. L'étude analytique, malgré des modèles de plus en plus sophistiqués ne tient pas



compte d'un des ingrédients cruciaux des transitions de phase : les fluctuations gigantesques des fonctions d'onde au point de la transition. Quand aux études expérimentales dans les solides [18], les sources de décohérence (telle que l'interaction des électrons avec les phonons du réseau cristallin ou l'interaction répulsive entre électrons) ne permettent pas de remonter à l'exposant critique prédit par les simulations numériques.

Dans ce chapitre, nous montrons que dans un rotateur frappé<sup>1</sup> (appelé *kicked rotor* en anglais) on peut observer cette transition, affranchie des limitations rencontrées dans les milieux cristallins. Pour cela, nous commençons par présenter les principes généraux du chaos hamiltonien, puis comment un rotateur frappé, traité classiquement, répond à ces derniers. Nous procédons ensuite à une étude quantique de ce dernier, et illustrerons le phénomène de *localisation dynamique* s'y produisant.

Nous nous éloignerons alors temporairement du rotateur frappé pour présenter la transition d'ANDERSON. Nous commençons par le phénomène de localisation spatiale (*localisation d'ANDERSON*), puis introduisons les concepts qui lui sont désormais associés, tels que la transition de phase quantique, le comportement critique et la théorie d'échelle. Enfin nous finissons avec l'universalité de cette transition, le sujet au cœur de cette thèse, ainsi que le méthodologie permettant de remonter à l'exposant critique  $\nu$ , nécessaire à la caractérisation de l'universalité.

Nous faisons ensuite le lien entre ces deux paradigmes, et montrons via une subtile modification du rotateur frappé, leur équivalence, la manière dont leurs propriétés se rejoignent, et comment il est possible de démontrer expérimentalement l'universalité de la transition d'ANDERSON dans le contexte de ce rotateur frappé modifié. Nous passerons en revue les avantages expérimentaux d'une telle approche sur l'étude plus traditionnelle des solides cristallins désordonnés.

## 1.1. Définition du chaos

Un système chaotique, simplement défini, est un système dont l'évolution temporelle de ses trajectoires dans l'espace des phases est extrêmement sensible aux conditions initiales. Mais avant de pouvoir définir de manière non ambiguë ce concept, il nous faut passer en revue un certain nombres de définitions.

Commençons par distinguer les systèmes conservatifs des systèmes dissipatifs. Un système conservatif est un système dont le volume est conservé au cours du temps dans l'espace des phases. Considérons un système dynamique sur un vecteur de variables  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Son évolution est déterminée par un système d'équations de la forme  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$  :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(\mathbf{X}) \\ \dot{x}_2 &= F_2(\mathbf{X}) \\ \dots &= \dots \\ \dot{x}_n &= F_n(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

---

1. Il est aussi très courant que ce système porte le nom de *rotateur pulsé*. Ces deux appellations étant tout-à-fait équivalentes, j'ai pris le parti de choisir la plus « francophone » des deux.

La conservation du volume dans l'espace des phases implique que

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = 0. \quad (1.1)$$

Dans le cas contraire ( $\operatorname{div} \mathbf{F} \neq 0$ ), le système ne conserve pas le volume dans l'espace des phases, et est dit dissipatif. Ce critère, peu intuitif, peut être remplacé par le suivant : un système dont toutes les forces dérivent d'un potentiel est dit conservatif. Dans le cas contraire, si on ajoute par exemple une force de friction, le système est dissipatif. L'objet de cette thèse, le rotateur frappé, étant conservatif, nous ne discuterons pas de la dynamique dans l'espace des phases des systèmes dissipatifs.

Dans la classe des systèmes conservatifs, nous devons définir un autre critère : *l'intégrabilité*. Si le nombre de couples de variables canoniquement conjuguées  $N$  est inférieur ou égal au nombre de constantes du mouvement indépendantes du système  $M$  ( $N \leq M$ ) alors le système est dit *intégrable*. Dans le cas contraire, ( $N > M$ ), il est *non-intégrable*. Ce critère nous fournit un précieux renseignement, les systèmes intégrables exhibent une régularité sur toutes les trajectoires dans l'espace des phases. Il ne peut exister d'extrêmes sensibilités aux conditions initiales dans ce type de système.

Évidemment, ce type de système est de peu d'intérêt ici, et nous nous consacrerons aux systèmes non-intégrables (et plus particulièrement le rotateur frappé). Les systèmes non-intégrables sont-ils tous chaotiques ? On pensait une telle assertion vraie jusqu'à l'expérience numérique de FERMI, PASTA et ULAM [19, 20] en 1953. En effet, le résultat de celle-ci est l'existence de trajectoires régulières dans un système non-intégrable. Il faut attendre le théorème KAM (KOLMOGOROV-ARNOLD-MAUSER, conjecturé en 1954 et démontré en 1963) pour mieux comprendre l'apparition des trajectoires chaotiques dans l'espace des phases. Celui-ci nous indique la manière dont les trajectoires régulières sont détruites avec l'ajout progressif d'une perturbation détruisant une constante du mouvement. Il nous renseigne aussi sur la coexistence des trajectoires régulières avec les trajectoires chaotiques, expliquant les résultats surprenants de la simulation numérique sus-citée.

On peut désormais mettre en place un critère nous permettant de garder notre vision duale (régulière / chaotique), sans pour autant contredire le théorème KAM. Considérons deux conditions initiales proches  $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}_2$ , situées autour du point  $\mathbf{V}$ . Ces deux vecteurs sont initialement séparés d'une petite distance  $\delta_{\mathbf{V},0} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$  dans l'espace des phase. On fait alors évoluer ces deux « particules » dans le temps. On peut établir que cette distance  $\delta_{\mathbf{V},t}$  se comporte ainsi :

$$\delta_{\mathbf{V},t} = \sum_{i=1}^{2d} \delta_{i,0} e^{\lambda_i t} \hat{\mathbf{i}}_i,$$

où  $d$  est le nombre de paires de variables canoniquement conjuguées. Les nombres  $\lambda_i$  sont appelés *exposants de Lyapunov*. Dans le cadre des systèmes conservatifs, leur somme est nécessairement nulle :  $\sum_i \lambda_i = 0$ . Pour les trajectoire régulières il est naturel que  $\lambda_i = 0 \forall i$ . Les trajectoires chaotiques verront quant à elles une partie de leurs exposants prendre une valeur positive. La plus grande, suffisante à la caractérisation de la dynamique aux temps longs, est appelée *exposant maximal de Lyapunov* (Figure 1.1). Connaître cet exposant (nul ou positif), c'est connaître le caractère de la

dynamique : régulière ou chaotique. Nous n'avons ici pas contredit le théorème KAM, car nous avons défini ces exposants de manière *locale*. Ainsi, sur un portrait de phase, peuvent coexister des trajectoires chaotiques, dont l'exposant maximal de Lyapunov local est positif, avec des trajectoires régulières où cet exposant est nul. On notera que le chaos dérivant des systèmes conservatifs est aussi appelé dans la littérature *chaos hamiltonien*.



**Figure 1.1.:** Pour deux conditions initiales proches dans l'espace des phases, et sous réserve d'un comportement chaotique (où l'exposant de Lyapunov maximal est positif), la distance les séparant croît exponentiellement avec le temps.

Nous allons maintenant illustrer ces propos grâce au rotateur frappé, un modèle simple exhibant des trajectoires chaotiques avec une illustration du théorème KAM.

## 1.2. Rotateur Frappé Classique

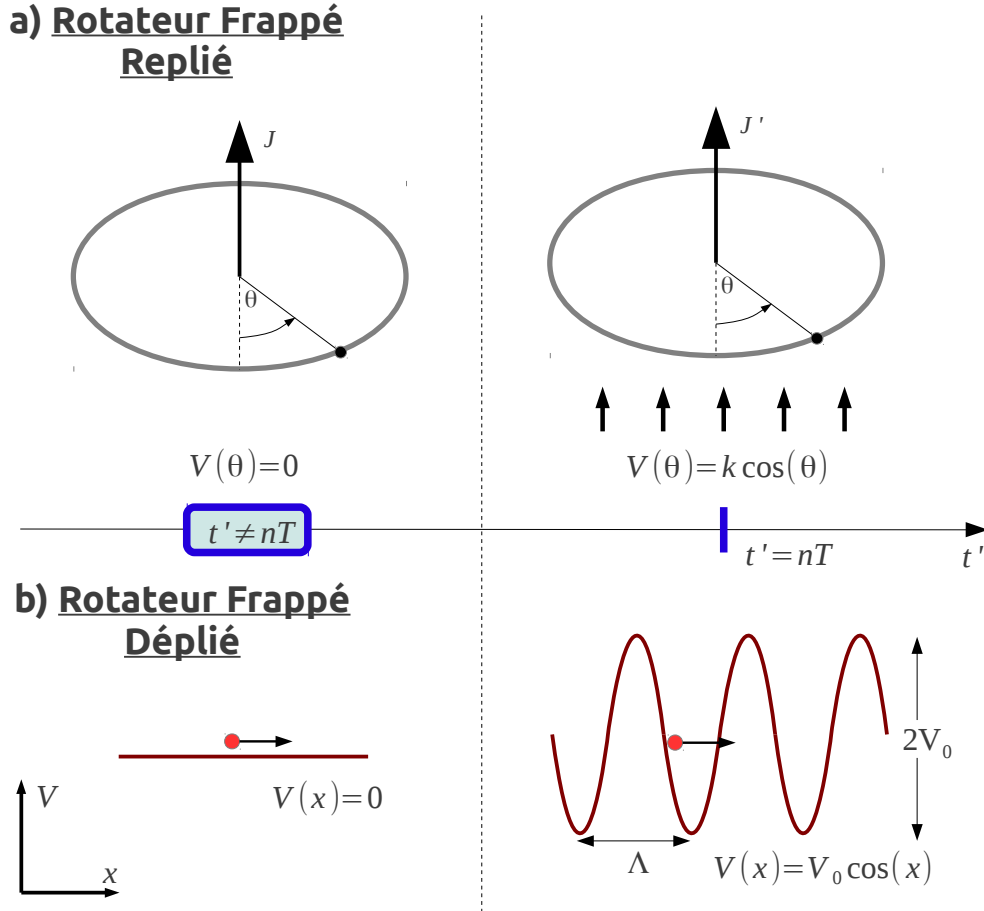
Le modèle original du rotateur frappé est une masselotte pouvant tourner autour d'une point fixe. Périodiquement, un « pulse », dont la force est dépendante de la position angulaire de la masselotte, est appliqué sur celle-ci, son moment cinétique change instantanément et l'angle de la masselotte évolue suivant ce moment cinétique jusqu'au prochain « pulse » (voir Figure 1.2.a). Son hamiltonien se formule alors ainsi :

$$H_1(t') = \frac{J^2}{2I} + V_0 \cos(\theta) \sum_n \delta\left(\frac{t'}{T} - n\right),$$

où  $J$  est le moment cinétique,  $I$  son moment d'inertie,  $\theta$  l'angle de la masselotte,  $T$  la période du forçage et  $t'$  le temps.

Nous allons maintenant « déplier » ce modèle (voir Figure 1.2.b). Pour cela nous considérons une particule de masse  $m$  pouvant évoluer librement sur un axe. Celle-ci est soumise à un potentiel sinusoidal de période spatiale  $\Lambda$ , pulsée avec une période  $T$  :

$$H_2(t') = \frac{P^2}{2m} + V_0 \cos\left(\frac{2\pi X}{\Lambda}\right) \sum_n \delta\left(\frac{t'}{T} - n\right).$$



**Figure 1.2.:** Deux visions du rotateur frappé classique : a) Modèle replié de la masselotte tournant autour d'un point fixe. b) Modèle déplié de la particule évoluant sur un axe.

Ces deux hamiltoniens sont équivalents. Par souci de simplicité pour la suite de l'exposé, ce dernier est réécrit avec les unités normalisées suivantes :

$$t = t'/T$$

$$x = 2\pi X/\Lambda$$

$$p = 2\pi TP/m\Lambda.$$

Ce qui nous fournit le hamiltonien normalisé suivant :

$$H(t) = \frac{p^2}{2} + K \cos(x) \sum_n \delta(t - n), \quad (1.2)$$

avec  $H(t) = \frac{4\pi^2 T^2}{m\Lambda^2} H_2(t)$  et  $K = \frac{4\pi^2 T^2}{m\Lambda^2} V_0$  appelée « paramètre de stochasticité ».

Initialement formulé par BORIS CHIRIKOV [21], le rotateur frappé s'est rapidement imposé comme un paradigme pour l'étude du chaos hamiltonien. Il suffit pour cela de constater qu'il n'existe qu'un seul degré de liberté associé au couple de variables canoniquement conjugués  $(x, p)$ , la conservation de l'énergie est quant à elle détruite par la dépendance en temps du hamiltonien. Ainsi nous avons un degré de liberté,

contre zéro constantes du mouvement, plaçant le rotateur frappé parmi les systèmes non-intégrables les plus simples. Nous allons à présent voir que sa dynamique est très facilement simulable et des plus riches, manifestant notamment un caractère chaotique.

### 1.2.1. Application Standard de Chirikov

Pour étudier la dynamique du rotateur pulsé, nous utilisons les équations de HAMILTON-JACOBI :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{aligned}$$

Ce qui amène à :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p \\ \dot{p} &= K \sin(x) \sum_n \delta(t - n). \end{aligned}$$

En intégrant sur une période  $t \in [n, n+1[$  où le pulse est appliqué au début on trouve :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \int_{n^-}^{(n+1)^-} p dt \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + \int_{n^-}^{(n+1)^-} K \sin(x) \sum_n \delta(t - n) dt \\ p_{n+1} &= p_n + K \sin(x_n). \end{aligned}$$

Soit les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + p_{n+1} \\ p_{n+1} &= p_n + K \sin(x_n). \end{cases} \quad (1.3)$$

Celles-ci, définies sur le couple  $(x, p)$ , sont connues sous le nom d'*application standard de CHIRIKOV* (notée  $f_C$ ). Elles permettent de déterminer l'évolution d'un point dans l'espace des phases d'une période à l'autre pour le rotateur frappé classique. On remarquera aussi que cette relation de récurrence est  $2\pi$ -périodique en  $x$  et en  $p$  :

$$\begin{aligned} (x_{n+1}, p_{n+1}) &= f_C(x_n, p_n) \\ &\Updownarrow \\ (x_{n+1} + k2\pi, p_{n+1} + j2\pi) &= f_C(x_n + k2\pi, p_n + j2\pi) \end{aligned}$$

pour  $\forall(k, j) \in \mathbb{Z}^2$ . Autrement dit, la dynamique temporelle d'un couple  $(x, p)$  est équivalente à celle de tout couple  $(x + k2\pi, p + j2\pi)$ , permettant ainsi de « replier » l'espace des phases sur lui-même.

### 1.2.2. Portrait de phase

Pour étudier l'évolution d'un tel système nous pourrions prendre une condition initiale, et regarder son évolution au cours du temps, puis recommencer. Cette approche ne donnerait pas une vue d'ensemble des propriétés du système. A celle-ci, nous lui préférons une vue *stroboscopique*, appelée *portrait de phase*.

Pour l'obtenir prenons une photo de l'ensemble des couples  $(x_n, p_n)$  au temps  $n$ . Puis, une période plus tard (celle du système), nous réitérons sur les couples  $(x_{n+1}, p_{n+1})$ . On superpose alors les deux photos, et on recommence, jusqu'à ce que le montage soit suffisamment dense. Cette approche permet de comprendre la dynamique globale du système en fonction des conditions initiales.

Voyons par exemple le cas où  $K = 0$ , où la dynamique est parfaitement régulière et correspond à la propagation libre (Figure 1.3). On voit très clairement que les particules parcourent l'espace des positions pour toute condition initiale  $p_0 \neq 0$ . La dynamique est clairement régulière, car l'énergie est conservée dans le temps ( $\partial_t H = 0$ ).

Augmentons progressivement le paramètre de stochasticité  $K$ . Nous allons maintenant illustrer le théorème KAM. A  $K = 0$ , les trajectoires sont régulières. En revanche, si  $K$  devient non-nul, nous détruisons une constante du mouvement : la conservation de l'énergie. Néanmoins, on s'aperçoit que pour une valeur de  $K$  faible (Figure 1.3  $K = 0.1$ ), les trajectoires ne sont pas encore chaotiques. Les trajectoires fermées sont des « *résonances* », celles en dehors sont très proche d'une propagation libre légèrement perturbée qu'on appelle « *propagation quasi-libre* ». On est encore loin d'un comportement chaotique sur l'ensemble des conditions initiales.

Augmentons encore  $K$  (Figure 1.4  $K = 1.0$ ). Des résonances supplémentaires apparaissent autour de la résonance centrale. Ces dernières se glissent entre les propagation quasi-libres. A la frontière de ces deux types de comportements émergent les trajectoires chaotiques, peuplant de manière dense ces zones.

Pour  $K = 2.0$  (Figure 1.4), les trajectoires quasi-libres ont disparu. Seuls demeurent l'îlot de stabilité central et deux petits îlots annexes. Le reste étant une zone chaotique. Ainsi, plus le paramètre de stochasticité  $K$  est augmenté, plus le volume dans l'espace des phases du chaos grandit.

En itérant la même démarche, on peut atteindre un portrait de phase entièrement chaotique pour  $K = 7.0$  (Figure 1.5), en passant au préalable par un portrait dans lequel demeurent les deux îlots de stabilités à  $K = 5.0$ ).

Ceci illustre le théorème KAM. En effet nous avons constaté qu'avant d'attendre un système « entièrement » chaotique, il a fallu augmenter de manière conséquente le paramètre de stochasticité  $K$  jusqu'à ce que le portrait de phase soit « entièrement » ergodique, autrement dit, qu'une particule puisse parcourir de manière équiprobable l'ensemble du portrait de phase au cours du temps. La mise entre parenthèses du

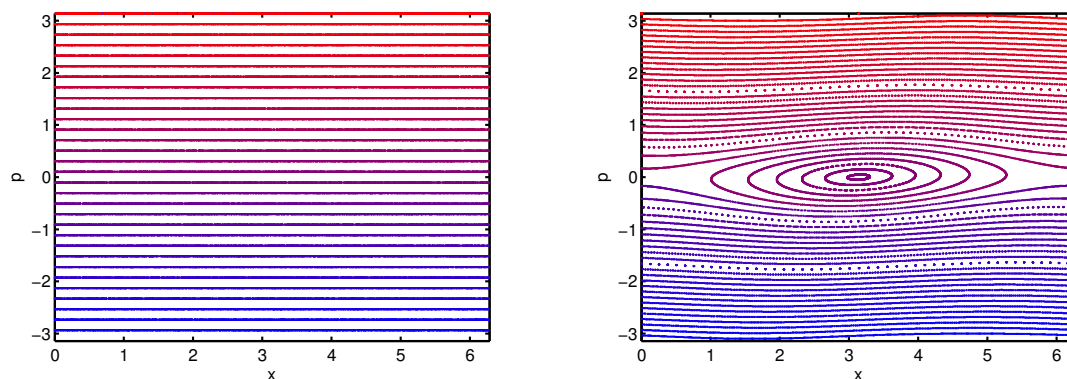


Figure 1.3.: Portraits de phase pour  $K = 0$  (à gauche) et  $K = 0.1$  (à droite)

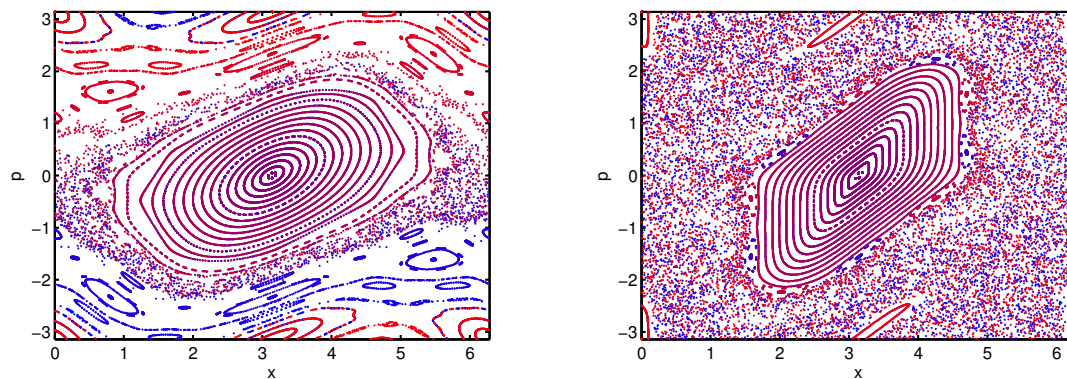


Figure 1.4.: Portraits de phase pour  $K = 1.0$  (à gauche) et  $K = 2.0$  (à droite)

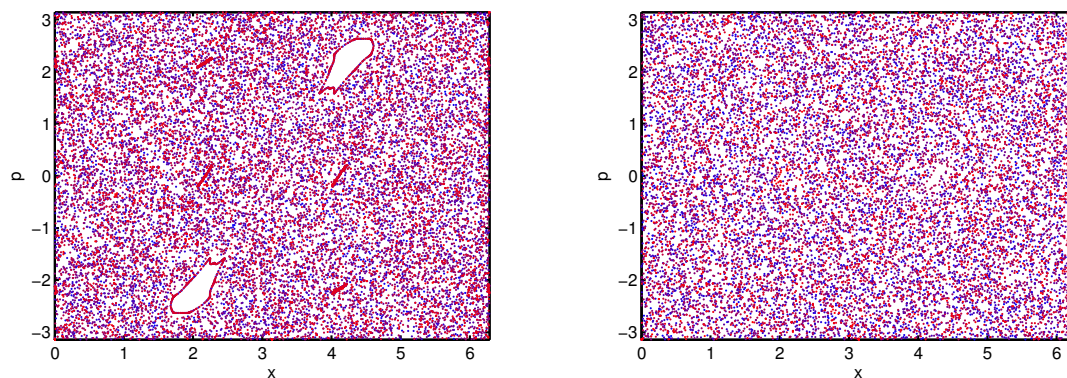


Figure 1.5.: Portraits de phase pour  $K = 5.0$  (à gauche) et  $K = 7.0$  (à droite)

terme « entièrement » n'est pas anodine. En effet, rien n'interdit à de minuscules îlots de se former à de grandes valeurs du paramètre de stochasticité  $K$ . Étant trop petits pour être vus, on peut en déduire qu'ils n'ont pas d'effet sur la dynamique globale du système.

**Bilan** En plus d'avoir une dynamique extrêmement riche, comme ont pu en témoigner les divers portraits de phase présentés, le rotateur frappé classique est un modèle chaotique très simple grâce à l'application standard de CHIRIKOV, le rendant idéal pour une étude classique de sa dynamique. Nous allons à présent montrer qu'il est aussi bien adapté à une étude quantique du chaos.

### 1.3. Rotateur Frappé Quantique

Traisons à présent de manière quantique le rotateur frappé. Cette approche permet en particulier d'exhiber le phénomène de *localisation dynamique*, que son homologue classique ne manifeste guère.

Aux échelles microscopiques auxquelles nous accédons expérimentalement, les particules ne peuvent plus être traitées de manière ponctuelle (où la position et l'impulsion sont clairement définies par le couple  $(x, p)$ ). Les relations d'incertitudes d'HEISENBERG ( $\Delta p \Delta x \geq \hbar/2$ ) nous interdisent en outre de connaître les deux simultanément, ce qui rend caduque l'utilisation du portrait de phase. Dans ce cadre, le système est décrit à l'aide d'une fonction d'onde  $|\Psi\rangle$ , dont la décomposition dans la base  $\{|\varphi_n\rangle\}$  diagonalisant le hamiltonien  $\hat{H}$  obéit à l'équation aux valeurs propres suivante :

$$\hat{H}|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle, \quad (1.4)$$

L'évolution temporelle de  $|\Psi\rangle$  est régie par l'équation de SCHRÖDINGER :

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle. \quad (1.5)$$

#### 1.3.1. Bases théoriques

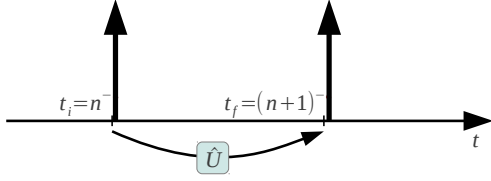
L'évolution de la fonction d'onde décrivant le rotateur frappé quantique (QKR) est soumise à l'équation de SCHRÖDINGER (Équation 1.5). En utilisant les unités normalisées pour le rotateur frappé, cette dernière se réécrit

$$i\tilde{\hbar} \frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle = \left[ \frac{\hat{p}^2}{2} + K \cos(\hat{x}) \sum_n \delta(t - n) \right] |\Psi(t)\rangle, \quad (1.6)$$

où  $\tilde{\hbar} = \frac{4\pi^2\hbar T}{m\Lambda^2}$  est la constante de PLANCK normalisée. La relation de commutation devient alors dans ces nouvelles unités

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\tilde{\hbar}. \quad (1.7)$$





**Figure 1.6.:** Illustration de l'opérateur d'évolution  $\hat{U}$ . Celui-ci fait évoluer le système d'une période, du temps  $t_i = n^-$  au temps  $t_f = (n+1)^-$ .

Notons une caractéristique intéressante du système : cette constante de PLANCK « effective » est ajustable expérimentalement en faisant varier la période  $T$  des pulses. En faisant tendre  $\hbar$  vers 0, on retrouve le comportement classique. En effet, si on augmente par exemple la période spatiale du réseau  $\Lambda$ , afin que celle-ci soit grande devant l'extension spatiale de la fonction d'onde, on retrouve alors un comportement classique. Cette para-

métrisation de la quantification permet l'étude de la transition du classique vers le quantique [22].

En résolvant l'Équation 1.6, on obtient :

$$|\Psi(t_2)\rangle = \underbrace{\mathcal{T} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} \hat{H}(t).dt\right)}_{\hat{U}(t_2, t_1)} |\Psi(t_1)\rangle, \quad (1.8)$$

où  $\mathcal{T}$  est l'opérateur d'ordination sur le temps. En effet, le hamiltonien  $H$  ayant une dépendance temporelle, il ne commute pas nécessairement avec lui-même pour des temps différents. Nous avons par ailleurs défini un opérateur d'évolution  $U(t_2, t_1)$  qui propage la fonction d'onde initialement dans un temps  $t_1$  au temps  $t_2$ . La périodicité en temps du hamiltonien  $H$  se translate naturellement sur l'opérateur  $U : U(t_2+n, t_1+n) = U(t_2, t_1)$ , ce qui nous autorise à poser  $U(t_2, t_1) = U(t_2 - t_1)$ . Ainsi, l'opérateur d'évolution sur une période est  $U(1)$ , que nous écrivons par souci de commodité  $U$  :

$$|\Psi(t+1)\rangle = U|\Psi(t)\rangle. \quad (1.9)$$

Cet opérateur doit maintenant être défini en phase (position du pulse dans la période). Par souci de consistance avec le reste de l'exposé, le temps initial  $t_i = n^-$  est choisi juste avant le pulse, le temps final  $t_f = (n+1)^-$  est quant à lui choisi à la fin de la propagation libre (juste avant le pulse suivant) (voir Figure 1.6). Ainsi :

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \hat{U}\left((n+1)^-, n^-\right) = \hat{U}\left((n+1)^-, n^- + \epsilon\right) \hat{U}\left(n^- + \epsilon, n^-\right) \\ &= \mathcal{T} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_{n^- + \epsilon}^{(n+1)^-} \left(\frac{\hat{p}^2}{2} + K \cos(\hat{x}) \sum_n \delta(t-n)\right) dt\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_{n^-}^{n^- + \epsilon} \left(\frac{\hat{p}^2}{2} + K \cos(\hat{x}) \sum_n \delta(t-n)\right) dt\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2(1-\epsilon)}{2}\right\} \times \mathcal{T} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hat{p}^2 \epsilon}{2}\right) + K \cos(\hat{x})\right\}. \end{aligned}$$

On peut alors s'affranchir de l'opérateur d'ordination  $\mathcal{T}$  en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0 :

$$\begin{aligned}\hat{U} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp \left\{ -\frac{i \hat{p}^2 (1 - \epsilon)}{\bar{k}} \right\} \times \mathcal{T} \exp \left\{ -\frac{i}{\bar{k}} \left( \frac{\hat{p}^2 \epsilon}{2} \right) + K \cos(\hat{x}) \right\} \\ &= \underbrace{\exp \left( -i \frac{\hat{p}^2}{2\bar{k}} \right)}_{\hat{U}_{prop}} \times \underbrace{\exp \left( -i \frac{K \cos(\hat{x})}{\bar{k}} \right)}_{\hat{U}_{kick}} \\ \hat{U} &= \hat{U}_{prop} \hat{U}_{kick}.\end{aligned}$$

L'opérateur d'évolution sur une période se décompose en deux événements successifs ayant chacun leur opérateur. En premier lieu le kick  $U_{kick}$ , et en second lieu  $U_{prop}$  la propagation libre. Pour  $n$  périodes, l'évolution de la fonction d'onde s'écrit comme  $n$  itérations de l'opérateur de propagation  $\hat{U}$  sur la fonction d'onde initiale  $|\Psi(0)\rangle$  :

$$|\Psi(n)\rangle = \underbrace{\hat{U} \dots \hat{U}}_{n \text{ fois}} |\Psi(0)\rangle = \hat{U}^n |\Psi(0)\rangle. \quad (1.10)$$

## 1.3.2. Étude numérique

### 1.3.2.1. Symétries spatiales et temporelles : conséquences numériques

L'étude numérique, de par les symétries du problème, est relativement simple. La première symétrie notable est la périodicité spatiale du potentiel  $K \cos(\hat{x})$ . Selon le théorème de BLOCH, il existe alors une quantité pour chaque particule qui se conserve : la *quasi-impulsion*, notée  $\beta\bar{k}$  dans nos unités. C'est ce qu'on a l'habitude d'appeler un bon nombre quantique, de plus  $\beta \in [0, 1[$ . Un état dans la base des impulsions  $|p\rangle$  s'écrit alors comme la somme de deux impulsions :  $|p\rangle = |m\bar{k} + \beta\bar{k}\rangle$ , que nous écriront par souci de commodité  $|m, \beta\rangle$ . Les valeurs propres de l'opérateur  $\hat{p}$  deviennent alors :

$$\hat{p}|m, \beta\rangle = (m + \beta)\bar{k}|m, \beta\rangle, \quad (1.11)$$

où  $m$  est un entier relatif. De plus en exprimant l'opérateur  $\hat{U}_{kick}$  dans la base  $|p\rangle$  en injectant la relation de JACOBI-ANGER, on peut illustrer le théorème de BLOCH :

$$\begin{aligned}\hat{U}_{kick}|m, \beta\rangle &= \exp \left( -i \frac{K \cos(\hat{x})}{\bar{k}} \right) |p, \beta\rangle \\ &= \sum_n J_n \left( \frac{K}{\bar{k}} \right) e^{-in\pi/2} e^{-inx} |m, \beta\rangle \\ &= \sum_n J_n \left( \frac{K}{\bar{k}} \right) e^{-in\pi/2} |m + n, \beta\rangle,\end{aligned}$$

où  $J_n$  sont les fonctions de BESSEL du premier type d'ordre  $n$ . L'opérateur de kick ne couple alors que les états séparés par un nombre entier  $n$ . La conséquence numérique offerte par l'application de ce théorème est une discrétisation immédiate de la base  $|p\rangle$ . En effet, la quasi-impulsion  $\beta\bar{k}$  se conservant au fil des pulses, les états sont séparés d'un nombre entier de  $\bar{k}$ , conséquence du théorème de BLOCH. En tronquant la base

de ses grandes impulsions, il devient évident qu'un traitement matriciel est des plus approprié pour l'étude de la dynamique du rotateur frappé.

La seconde symétrie du système est la périodicité en temps du hamiltonien. Le théorème de FLOQUET (équivalent à BLOCH en temps) indique que l'opérateur d'évolution  $U$  possède des valeurs propres  $e^{-i\omega}$  associées à ses vecteurs propres  $|\phi_\omega\rangle$ , dits états de FLOQUET :

$$\hat{U}|\phi_\omega\rangle = e^{-i\omega}|\phi_\omega\rangle, \quad (1.12)$$

où les  $\omega$  sont appelées *quasi-énergies*. Pour une quasi-impulsion  $\beta$  donnée, les états de FLOQUET forment une base complète de l'opérateur d'évolution  $\hat{U}$ . La conséquence est qu'une fois ce dernier diagonalisé, faire évoluer le système sur un nombre entier de périodes revient à multiplier les états de FLOQUET  $\{|\phi_\omega\rangle\}$  (états propres de l'opérateur d'évolution) par un facteur de phase, ce qui est très avantageux numériquement :

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \hat{U}^t|\Psi(0)\rangle \\ &= \hat{U}^t \sum_{\omega} |\phi_\omega\rangle \underbrace{\langle\phi_\omega|\Psi(0)\rangle}_{c_\omega} \\ &= \sum_{\omega} c_\omega \hat{U}^t |\phi_\omega\rangle \\ &= \sum_{\omega} c_\omega e^{-i\omega t} |\phi_\omega\rangle. \end{aligned} \quad (1.13)$$

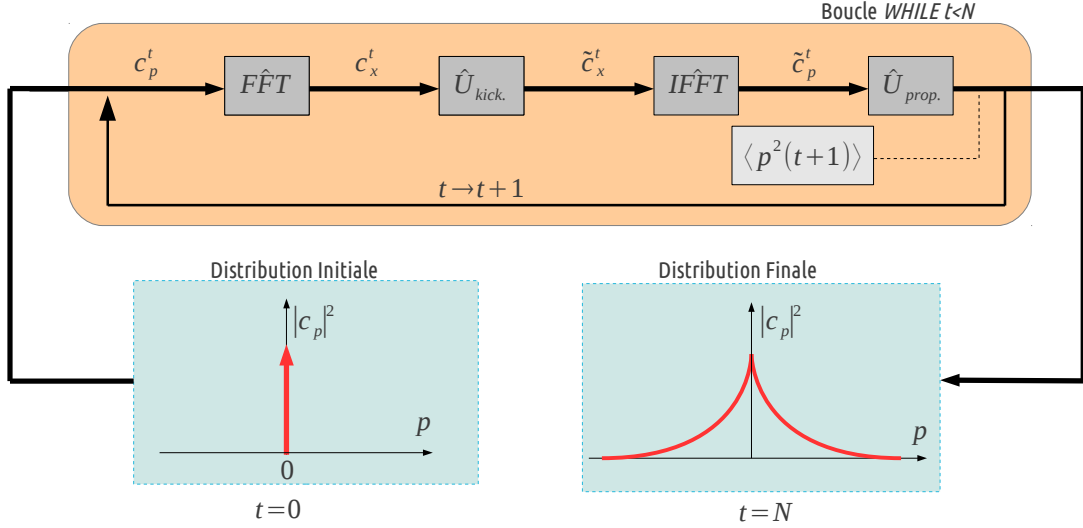
Ces deux symétries du système nous incitent grandement à diagonaliser l'opérateur  $\hat{U}$  dans la base des états de FLOQUET et de faire évoluer les phases de ces états en temps. Nous ne suivrons cependant pas ce chemin. La raison est la suivante : dans la suite nous serons amenés à considérer le modèle du rotateur frappé quasi-périodique. Celui-ci ne conservera pas la périodicité temporelle du hamiltonien (le paramètre de stochasticité  $K$  aura une amplitude variable au cours du temps), les états propres de l'opérateur d'évolution changeront à chaque pulse, ce qui implique numériquement de recalculer  $\hat{U}$  et de le re-diagonaliser l'opérateur. Les meilleurs algorithmes numériques de diagonalisation pour des matrices de taille  $N \times N$  s'effectue en  $\mathcal{O}(N^3)$  temps.

### 1.3.2.2. Méthode numérique implémentée

Il existe une méthode plus efficace. En effet, l'opérateur de kick  $\hat{U}_{kick}$  est diagonal dans la base  $|x\rangle$  et  $\hat{U}_{prop}$  l'est dans la base  $|p\rangle$ . Ainsi il est plus judicieux de passer d'une base à l'autre au fur et à mesure de l'évolution du système.

Numériquement, c'est un algorithme standard *FFT* (*Fast Fourier Transform*) qui est utilisé [23], dont temps de calcul croit bien plus lentement que pour la diagonalisation de  $\hat{U}$ , et est de  $\mathcal{O}(N \log N)$  par *FFT*.

On commence par décomposer l'état initial sur la base  $|p\rangle$ . Pour la simulation, nous considérons que cette distribution est ponctuelle et centrée en 0. La raison est que l'état initial n'est pas un état cohérent, mais une somme statistique d'états incohérents (qui serait mieux décrit par l'opérateur densité  $\hat{\rho}$ ). L'évolution temporelle de la densité de probabilité dans l'espace des impulsions  $p$  n'est pas dépendante de la



**Figure 1.7.:** Schéma de principe de la simulation numérique du rotateur frappé, basée sur un algorithme de Transformée de FOURIER Rapide ( $FFT$ ). La distribution finale est obtenue en moyennant sur les quasi-impulsions  $\beta$  (non représentées par souci de simplicité).

forme des conditions initiales (en l'absence d'états cohérents). La linéarité de l'équation de SCHRÖDINGER nous dit même que l'on peut traiter chaque condition initiale indépendamment.

Numériquement, il nous faut donc décomposer notre fonction d'onde sur une base discrète. Pour des raisons d'efficacité sur les algorithmes de  $FFT$ , nous en choisissons une dont le nombre d'éléments est une puissance entière de 2, noté  $n_{base}$ . Aussi, nous veillerons à la prendre suffisamment grande pour que les effets de bords ne viennent pas parasiter notre simulation.

L'algorithme que nous allons présenter tient compte de la conservation dans le temps de la quasi-impulsion  $\beta$ . Celle-ci est donc omise dans les notations par souci de clarté. Nous en tiendrons cependant compte dans l'**Étape 3** pour la valeur propre de l'opérateur  $\hat{U}_{prop}$ .

Écrivons l'état initial

$$|\Psi(t=0)\rangle = \sum_m c_m^{t=0} |m\rangle, \quad (1.14)$$

où  $c_m$  sont les amplitudes des états  $|m\rangle$ . L'algorithme se décompose alors en 4 étapes faisant évoluer le système sur une période. On itérera ces dernières  $N$  fois si on désire faire évoluer sur  $N$  périodes (voir Figure 1.7).

**Étape 1 : Transformée de Fourier :** L'état avant la première  $FFT$  est  $|\Psi(t)\rangle = c_m^t |m\rangle$ . En insérant la relation de fermeture  $\sum_x |x\rangle\langle x|$ , on trouve :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_x \underbrace{\sum_m \langle x|m\rangle c_m^t}_{c_x^t} |x\rangle \quad (1.15)$$

où  $c_x^t = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \sum_m e^{-imx} c_m^t$ . Ainsi  $c_x^t$  est la transformée de FOURIER de  $c_m^t$ . Numériquement, les valeurs de  $x$  sont comprises entre 0 et  $2\pi$ . Quand aux valeurs de  $m$  :  $m \in [-(n_{base} - 1), n_{base}]$ .

**Étape 2 : Opérateur de Pulse :** Ayant effectué la transformée de FOURIER  $|m\rangle \rightarrow |x\rangle$ , l'opérateur de pulse est donc diagonal :

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}(t)\rangle &= \hat{U}_{kick} |\Psi(t)\rangle && \text{où le «~» indique l'état après le pulse.} \\ &= e^{-iK \cos(\hat{x})/k} \sum_x c_x^t |x\rangle \\ &= \sum_x \underbrace{c_x^t e^{-iK \cos(x)/k}}_{\tilde{c}_x^t} |x\rangle \\ &= \sum_x \tilde{c}_x^t |x\rangle. \end{aligned}$$

Appliquer le kick dans la représentation en position revient à multiplier l'amplitude complexe  $c_x^t$  par  $e^{-iK \cos(x)/k}$ .

**Étape 3 : Transformée de Fourier inverse :** De la même façon que précédemment, pour appliquer l'opérateur de propagation libre qui est diagonal dans la base  $|p\rangle$ , il faut changer de base en insérant la relation de fermeture  $\sum_m |m\rangle\langle m|$  :

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = \sum_m \sum_x \underbrace{\langle m|x\rangle \tilde{c}_x^t}_{\tilde{c}_m^t} |m\rangle, \quad (1.16)$$

$$\text{où } \tilde{c}_m^t = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \sum_x e^{imx} \tilde{c}_x^t.$$

**Étape 4 : Opérateur de propagation libre** La fonction d'onde étant désormais dans la bonne base, on peut appliquer l'opérateur de propagation libre :

$$\begin{aligned} |\Psi(t+1)\rangle &= \hat{U}_{prop} |\tilde{\Psi}(t)\rangle \\ &= e^{-ip^2/k} \sum_m \tilde{c}_m^t |m\rangle \\ &= \sum_m \underbrace{\tilde{c}_m^t e^{-i(m+\beta)^2 k}}_{c_m^{t+1}} |m\rangle \\ &= \sum_m c_m^{t+1} |m\rangle. \end{aligned}$$

On calcule ici le moment d'ordre 2 de la distribution :

$$\langle m^2(t+1) \rangle = \sum_m m^2 |c_m^{t+1}|^2, \quad (1.17)$$

équivalent à la variance, étant donné que la distribution est centrée en zéro et donc de moyenne nulle. On revient alors à l'étape 1 si  $t < N$ .

Une fois cette évolution de la fonction d'onde pour une quasi-impulsion  $\beta$  établie. On recommence pour une quasi-impulsion  $\beta$  différente. En effet il est nécessaire, afin d'obtenir une distribution en impulsion et une évolution de  $\langle m^2(t) \rangle$  lisses, de moyenner ces deux dernières sur un nombre conséquent de  $\beta$  (typiquement 200).

### 1.3.3. Localisation dynamique

Dans le modèle du rotateur frappé classique, les particules diffusent :

$$\langle p^2 \rangle_{cl}(t) = D_{cl}t.$$

Dans son traitement quantique, la dynamique au temps longs est de tout autre nature (voir Figure 1.8). Aux temps courts ( $t \ll t_{loc}$ ), on retrouve la dynamique diffusive  $\langle p^2 \rangle(t) = D_{cl}t$ . Aux temps longs ( $t \gg t_{loc}$ ), on observe un gel de la diffusion classique, ce phénomène se manifeste par une saturation de l'énergie de la particule. Il y a ainsi la coexistence de deux régimes : aux temps courts on retrouve la dynamique classique avec une diffusion linéaire en  $t$ , et aux temps longs, un gel de cette dernière. Le temps de localisation  $t_{loc}$  est alors défini comme l'intersection asymptotique de ces deux comportements. On notera par ailleurs que selon [24],  $D_{cl} \sim t_{loc}$ . Ainsi plus le système est classiquement diffusif, plus le temps de localisation est long.

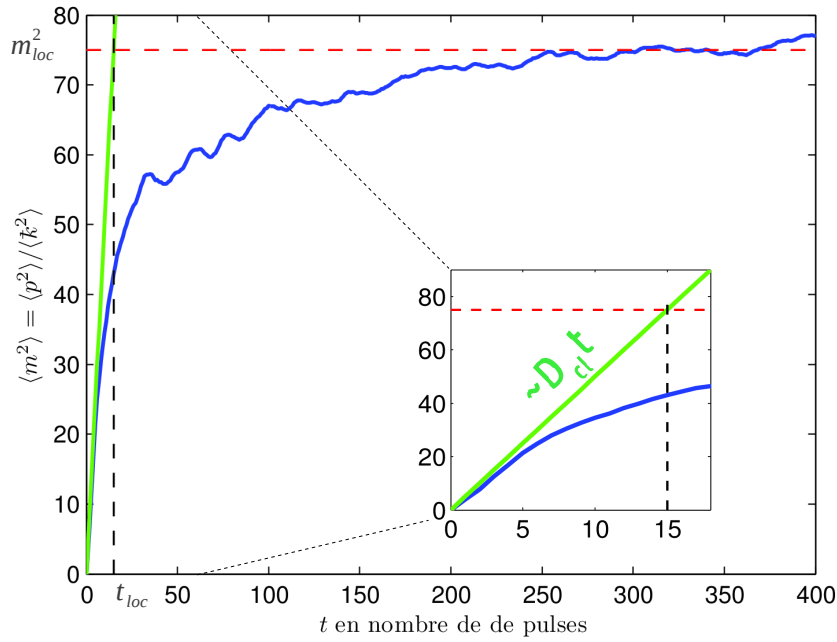
La forme des densités de probabilités de ces deux régimes diffèrent aussi. Dans la phase diffusive ( $t < t_{loc}$ ), celle-ci est naturellement gaussienne, alors que dans la phase de saturation, elle prend une forme exponentielle décroissante (voir Figure 1.9), pouvant être caractérisée par une *longueur de localisation*  $\lambda$  :

$$\lim_{t \gg t_{loc}} |c_p^t|^2 \sim e^{-|p|/\lambda}. \quad (1.18)$$

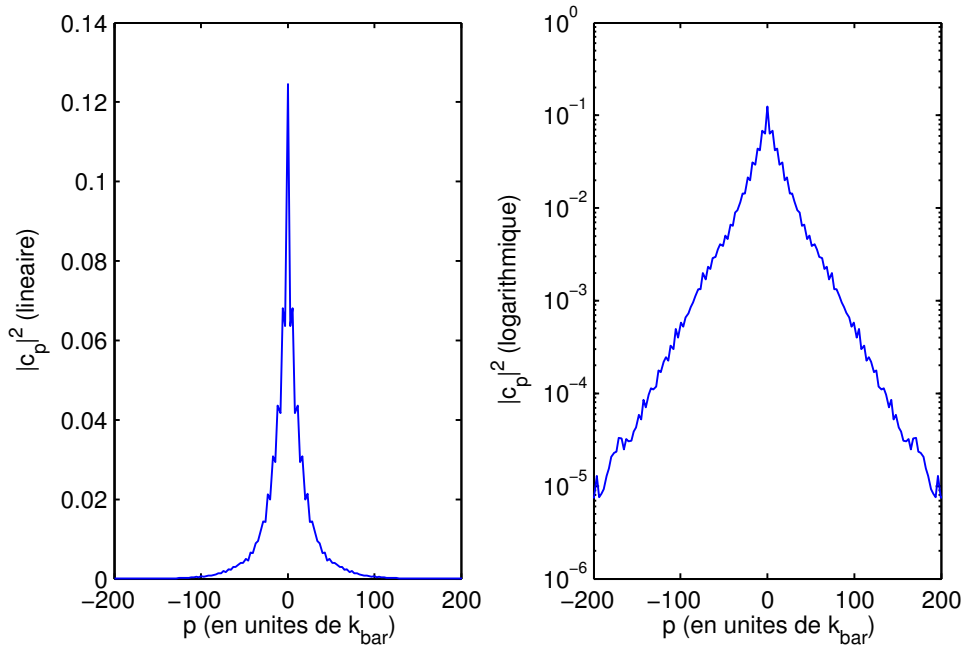
Cette saturation en énergie, ainsi que la forme exponentielle décroissante de la densité de probabilité, sont les deux signatures de la *localisation dynamique*. La raison de cette localisation est purement quantique. Reprenons l'Équation 1.13, et regardons, à la lumière de celle-ci, l'évolution de  $\langle p^2 \rangle(t)$  :

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle(t) &= \langle \Psi(0) | (U^\dagger)^t \hat{p}^2 U^t | \Psi(0) \rangle \\ &= \sum_{\omega, \omega'} c_{\omega'}^* c_\omega e^{-i(\omega - \omega')t} \langle \phi_{\omega'} | \hat{p}^2 | \phi_\omega \rangle \\ &= \sum_{\omega} |c_\omega|^2 \langle \phi_\omega | \hat{p}^2 | \phi_\omega \rangle + \sum_{\omega \neq \omega'} c_{\omega'}^* c_\omega e^{-i(\omega - \omega')t} \langle \phi_{\omega'} | \hat{p}^2 | \phi_\omega \rangle. \end{aligned}$$

Analysons le second terme de cette somme. Celui-ci ne peut contribuer significativement pour deux raisons. Dans le cas où ces deux états de FLOQUET se recouvrent spatialement ( $\int dp. |\langle \phi_{\omega'} | p \rangle| \cdot |\langle p | \phi_\omega \rangle| \neq 0$ ), alors les quasi-énergies manifestent une répulsion d'énergie (due à la nature chaotique du système)  $\omega' - \omega \neq 0$ . La contribution moyenne au cours du temps de cette somme est alors nulle et ne contribue pas sensiblement à la valeur de  $\langle p^2 \rangle(t)$ . L'autre possibilité est que le recouvrement entre la fonction d'onde initiale (fine et centrée en zéro) avec un état de FLOQUET soit nulle



**Figure 1.8.:** Évolution de l'énergie cinétique moyenne en unités adimensionnées  $\langle p^2 \rangle / \bar{k}^2$  au cours du temps  $t$ . Celle-ci atteint une limite supérieure au bout d'un temps défini comme  $t_{loc}$ . Simulation numérique pour  $K = 8$ , moyennée sur 2000 quasi-impulsions initiales  $\beta$  équi-réparties sur  $[0, 1]$ . Après une première phase de diffusion classique (dont le comportement asymptotique aux temps courts est tracé en vert), on observe un gel de la diffusion (limite asymptotique tracé en rouge), c'est la *localisation dynamique*.



**Figure 1.9.:** Distribution en impulsion d'un rotateur frappé quantique pour  $t = 500$ ,  $K = 8$ ,  $\bar{k} = 2.89$  et moyennée sur 2000 quasi-impulsions initiales  $\beta$ , représentée en échelle linéaire et logarithmique.

$\langle \phi_\omega | \Psi(0) \rangle = c_\omega = 0$ , les contributions de ces termes à la somme sont alors trivialement nulles. Ainsi cette somme ne participe pas significativement à  $\langle p^2 \rangle(t)$  pour des temps  $t > t_{loc}$  :

$$\langle p^2 \rangle(t) \simeq \sum_{\omega} |c_\omega|^2 \langle \phi_\omega | \hat{p}^2 | \phi_\omega \rangle, \quad (1.19)$$

et les états participant de manière significative à la localisation dynamique sont les états de FLOQUET peuplés par la fonction d'onde initiale. Les états de FLOQUET étant localisés dans l'espace des impulsions [25],  $\langle p^2 \rangle(t)$  tend vers une limite définie en accord avec l'Équation 1.18 égale à  $2\lambda^2$ .

En fait, la localisation des états de FLOQUET est loin d'être triviale. Il n'existe pas d'argument simple (hormis les simulations) en ce sens. Cependant nous montrerons que les états de FLOQUET sont les solutions d'un problème d'ANDERSON 1D dans l'espace des impulsions. Il est donc logique, suite à la démonstration séminale [6], que ces derniers soient aussi localisés dans cet espace.

## 1.4. Localisation d'Anderson

### 1.4.1. Formulation originale

Le problème de la diffusion des électrons dans un solide remonte à l'article de BLOCH de 1928 [5], qui initie l'étude de la théorie quantique des solides. Cette théorie permet de comprendre par exemple la nature isolante ou conductrice de différents matériaux, ou encore permet une approche fructueuse des semi-conducteurs. Dans le cas d'un potentiel périodique, où les distances inter-atomiques sont égales sur l'ensemble du système (autrement dit un cristal), les fonctions d'ondes électroniques sont délocalisés sous la forme d'onde de BLOCH sur l'ensemble du réseau cristallin. Les états propres du système sont alors séparés en deux groupes : la bande de valence et la bande de conduction. Pour un système avec plus d'un électron, ces deux bandes sont peuplées en suivant la loi d'exclusion de FERMI. Un cristal est dit conducteur si la bande de conduction est peuplée.

En 1958, P.W. ANDERSON s'intéresse au même problème mais dans un solide désordonné où des défauts sont introduits, tels qu'un changement ponctuel d'atome. Là où on s'attendrait à ce que les électrons diffusent sur les impuretés, il montra dans son article précurseur [6] qu'au lieu d'avoir un caractère délocalisé, les fonctions d'ondes se localisent à partir d'un certain degré de désordre microscopique, il n'y a alors plus de diffusion électronique, le solide est isolant. Ce phénomène, portant le nom de *localisation d'Anderson* est un phénomène interférentiel tout-à-fait générique dans les systèmes désordonnés et a pu être observé avec des ondes de matières [8, 26], des photons [27], et même des ondes sonores classiques [28].

Dans son modèle original ANDERSON utilise le hamiltonien suivant [6] :

$$\hat{H} = \sum_i \epsilon_i |i\rangle \langle i| + V \sum_{\langle i,j \rangle} |i\rangle \langle j|. \quad (1.20)$$

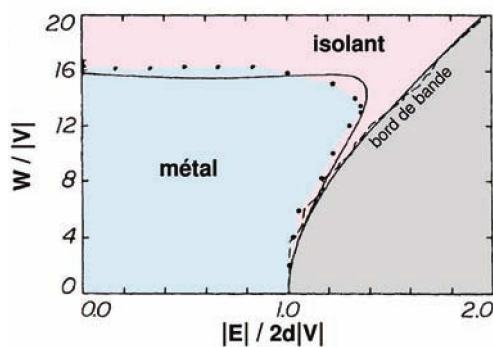


Les vecteurs  $|i\rangle$  sont les fonctions d'onde sur site du réseau,  $V$  est l'amplitude du couplage d'un site à l'autre par effet tunnel, et le terme  $\langle i, j \rangle$  est la sommation sur les plus proches voisins. ANDERSON introduit le désordre en prenant des énergies sur site  $\epsilon_i$  aléatoire. Dans le modèle original  $\epsilon_i \in [-W/2, W/2]$  et la probabilité est carrée  $P(\epsilon_i) = 1/W$ . Il caractérise aussi l'amplitude du désordre grâce au rapport  $W/V$ . Ce modèle, certes strict, n'est pas le seul à manifester la localisation des fonctions d'ondes. D'autres études ont introduit un désordre gaussien ou encore des probabilités de saut quantique non-limitées aux plus proches voisins. Elles exhibent toujours la localisation d'ANDERSON! Ce phénomène ne semble ainsi pas dépendre de la nature microscopique du désordre ou du couplage.

ANDERSON montre dans son modèle que pour un désordre  $W/V$  supérieur à une valeur critique  $(W/V)_c$ , il y a *absence de diffusion* : tout les états propres sont localisés. Il donne aussi une valeur pour ce paramètre ( $(W/V)_c \sim 15.8$ ), en deçà, le modèle exhibe des états diffusifs.

### 1.4.2. Théorie d'échelle

En deçà de cette valeur critique ( $(W/V)_c \sim 15.8$ ), existe-t-il des états localisés co-existant avec les états diffusifs? La réponse est donnée par SIR N. MOTT, et est affirmative. Il existe une frontière énergétique  $E_c$  séparant les états localisés des états délocalisés appelé *seuil de mobilité* (*mobility edge* en Anglais). Une illustration en est donnée sur la Figure 1.10). Ainsi pour un désordre constant inférieur à la valeur critique, il est possible d'observer la transition de phase en regardant l'énergie des états propres.



**Figure 1.10.:** Diagramme de phase du problème d'ANDERSON. En traits pointillés est tracée la frontière entre les états isolant et les états conducteurs, calculée numériquement. Le trait continu représente la prédiction de la théorie auto-consistante dont cette figure est adaptée [29]. Ainsi, pour un désordre d'amplitude  $W/V$  moyenne, il existe une frontière énergétique  $E_c$  appelée *mobility edge* séparant les états diffusifs des états isolants.

THOULESS pose en 1974 [30] les bases de la théorie d'échelle. Il propose de construire un hypercube de volume  $(2L)^d$  ( $d$  dimension du système et  $L$  la longueur en nombre de sites) à partir de cubes de taille  $L^d$ . Il fait alors la supposition suivante : la nature des états propres du solide de volume  $(2L)^d$  sont dictés par ceux de  $L^d$ . En effet, les états localisés restent localisés dans les briques  $L^d$  composant  $(2L)^d$ . Les états délocalisés quant à eux se recouvrent, et forment un nouvel ensemble d'états délocalisés.

En 1979, E. ABRAHAMS, P.W. ANDERSON, D.C. LICCIARDELLO et T.V. RAMAKRISHNAN [7] introduisent formellement la théorie d'échelle à un paramètre de la localisation, dont les deux prédictions majeures sont l'absence de diffusion pour  $d \leq 2$  et une transition de phase pour  $d \geq 3$ . L'hypothèse forte de la théorie d'échelle, est que proche de la transition, qu'elle soit énergétique via le seuil de mobilité ou fonction du désordre  $W/V$ , il n'y a qu'un seul paramètre pertinent dans la description du comportement critique de la conductivité (du côté métallique) et de la localisation (du côté isolant). Ce paramètre est la conductance adimensionnée

$$g(L) = \frac{2\hbar}{e^2} G(L), \quad (1.21)$$

fonction de l'échelle  $L$  du système, aussi appelée *nombre de Thouless*. Ce nombre peut aussi être interprété comme une description microscopique inverse du désordre  $g \sim V/W$ , petit pour un grand désordre (localisation) et grand pour un faible désordre (diffusion). Est alors introduite la dérivée logarithmique  $\beta$ , basée sur les travaux de CALLAN et SYMANZIK en théorie quantique des champs [31] :

$$\beta(g) = \frac{d \ln g}{d \ln L} = \frac{L}{g} \frac{dg}{dL}. \quad (1.22)$$

Cette fonction  $\beta(g)$  est croissante et continue. Continue car elle décrit la manière dont la conductance d'un système de taille *finie* évolue comme une fonction de l'échelle  $L$ . Croissante, car en diminuant  $g$ , on tend toujours vers un comportement localisé des fonctions d'ondes. Notons que le signe de cette fonction détermine de manière univoque le caractère du solide :

- $\beta(g) > 0 \implies \frac{dg}{dL} > 0$  : la conductance croît en augmentant la taille du système, le système sera conducteur.
- $\beta(g) < 0 \implies \frac{dg}{dL} < 0$  : la conductance décroît en augmentant la taille du système, le système sera isolant.

Nous allons maintenant voir les limites asymptotiques de la fonction  $\beta$ . Dans le cas d'une grande conductance  $g$ , on peut appliquer la loi d'OHM :

$$g(L) = \sigma L^{d-2} \implies \beta(g) = d - 2, \quad (1.23)$$

où  $\sigma$  est la conductivité ohmique classique adimensionnée. Pour une faible conductance  $g$ , celle-ci peut-être exprimée grâce aux propriétés de localisation exponentielles, comme

$$g(L) = g_a(d) e^{-L/\lambda} \implies \beta(g) = \ln \left( \frac{g}{g_a(d)} \right), \quad (1.24)$$

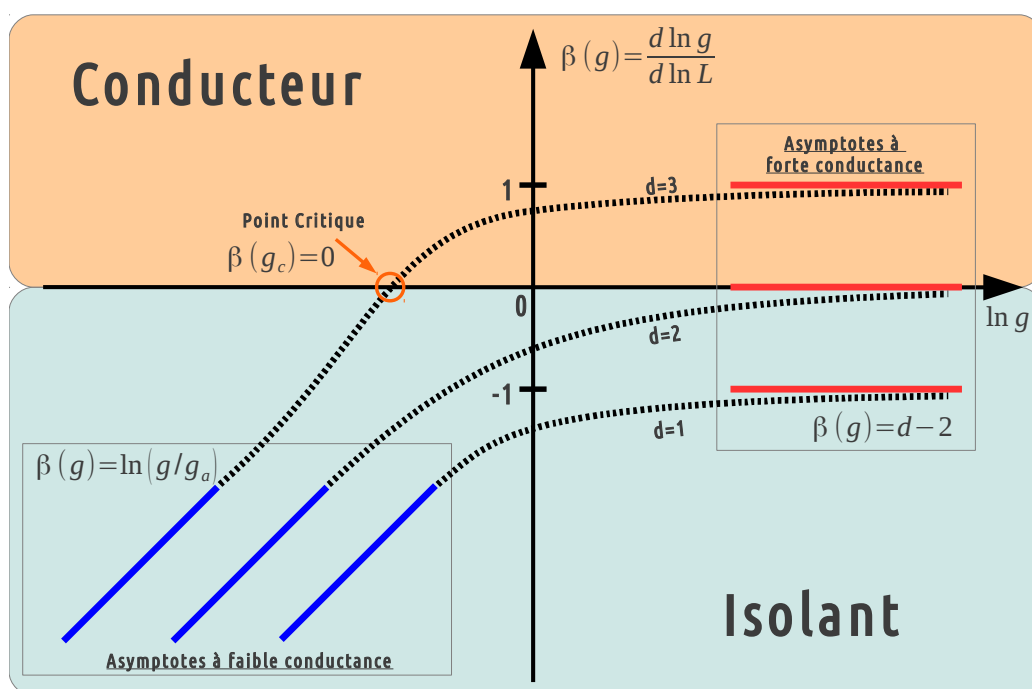
où  $\lambda$  est une longueur de localisation typique du système, et  $g_a(d)$  est une constante adimensionnée de l'ordre de 1.

On construit dès lors, la fonction d'échelle  $\beta(g)$  (Figure 1.11). La première chose remarquable est la prédiction d'une transition de phase pour  $d = 3$ , en effet un des comportements asymptotiques est positif ( $\beta(g \gg 1) = 1$ ) et l'autre est négatif ( $\beta(g \ll 1) = \ln(g/g_a)$ ). La fonction  $\beta(g)$  ayant été déterminée comme croissante et continue, il existe un *point critique*  $g_c$ , tel que  $\beta(g_c) = 0$ . C'est en ce point qu'a lieu

la transition de phase métal-isolant, dite *transition d'Anderson*. L'autre prédiction majeure de cette approche est l'absence de diffusion pour  $d \leq 2$ ,  $\beta(g)$  étant toujours négative.

Imaginons dans le cas  $d = 3$ , un point  $g$ , tel que la valeur  $\beta(g)$  soit positive mais arbitrairement proche de 0. Nous allons maintenant augmenter la taille du système de  $L$  à  $L + \Delta L$ . La fonction  $\beta(g)$  ayant été définie positive, la variation  $\Delta g$  est du même signe que  $\Delta L$ , autrement dit : la conductance augmente avec la taille. En itérant cette démarche,  $g$  tend vers une loi d'OHM classique  $g = \sigma L$ , le solide devient alors conducteur !

De manière équivalente, on montre que si  $\beta(g)$  est négative, alors l'augmentation de taille de l'échantillon fait tendre la conductance  $g$  vers 0 (isolant). C'est bien une transition de phase, dont le caractère macroscopique est défini par le signe de  $\beta(g)$ , fonction de la conductance microscopique  $g$ , elle-même dépendante du désordre  $W/V$ .



**Figure 1.11.:** Fonction échelle  $\beta(g)$  pour  $d = 1, 2, 3$ . On constate une transition de phase au point critique  $g_c$  pour  $d = 3$ .

### 1.4.3. Exposant critique

Lors d'une transition de phase du second ordre (où il n'existe pas de chaleur latente), certaines quantités physiques se comportent en loi de puissance avec un exposant dit *critique*. Dans le cas de la transition d'ANDERSON, on peut caractériser deux quantités physiques pertinentes au voisinage du point critique.

- la conductivité du côté conducteur  $\sigma \sim \left( \left( \frac{W}{V} \right)_c - \left( \frac{W}{V} \right) \right)^s$ , où  $s$  est l'exposant critique associé.
- la longueur de localisation du côté isolant  $\lambda \sim \left( \left( \frac{W}{V} \right) - \left( \frac{W}{V} \right)_c \right)^{-\nu}$ , où  $\nu$  est l'exposant critique associé.

On déduit de la loi de WEGNER  $s = (d - 2)\nu$  [32], que les deux exposants  $s$  et  $\nu$  sont égaux dans le cas d'une transition d'ANDERSON tridimensionnelle. On introduit alors un paramètre physique plus général : la longueur de corrélation  $\xi$ , connu pour diverger au point de la transition de phase. Dans le cas isolant, cette quantité est directement assimilable à la longueur de localisation  $\lambda$  ( $\xi \sim \lambda$ ). Du côté conducteur, la longueur de corrélation est inversement proportionnelle à la conductivité :  $\xi \sim 1/\sigma$ . On caractérise alors le comportement au voisinage du point critique :

$$\xi \sim \left| \left( \frac{W}{V} \right) - \left( \frac{W}{V} \right)_c \right|^{-\nu}. \quad (1.25)$$

C'est une *transition de phase quantique*, où seul le désordre microscopique  $W/V$  définit l'état macroscopique du solide.

Ainsi, le comportement du système au voisinage de la transition est régi par un unique exposant critique  $\nu$ . De manière analytique, on peut en faire une détermination en utilisant des méthodes diagrammatiques auto-consistantes [32, 33, 34, 35], qui nous renvoient  $\nu = 1$ . Ces outils restent néanmoins des approches perturbatives à  $d = 2 + \epsilon$  ( $d$  dimensions du système). En y incluant la diffusion anormale prédite au point de la transition par la théorie d'échelle à un paramètre [36], on trouve cependant  $\nu = 1.5$ .

Malgré cela, ces valeurs sont en deçà des prédictions des simulations numériques les plus sophistiquées [37, 15]. En effets, ces dernières renvoient un exposant critique  $\nu = 1.59 \pm 0.01$ . Cette différence est attribuée à une manifestation multi-fractale (existence de relations d'auto-similarités à différentes échelles) des fonctions d'ondes au point de la transition [3]. Celle-ci est observable du fait que ces méthodes, grâce à la résolution numérique de l'équation aux valeurs propres, ne font aucune présomption sur les fonctions d'ondes.

## 1.5. Universalité

L'origine du concept d'universalité remonte à l'étude des propriétés spectrales des noyaux atomiques complexes. Afin de comprendre la répulsion des niveaux d'énergie observée, WIGNER introduit un *ansatz* statistique [1] : les éléments de matrice du hamiltonien sont aléatoires et non-corrélés. Il montra ainsi que la caractérisation de ce comportement répulsif ne dépendait pas des détails microscopiques. Il faut attendre DYSON pour faire le lien avec la théorie des matrices aléatoires [2] et caractériser les symétries pertinentes. Les classes d'universalité que nous allons présenter portent ainsi le nom d'ensembles de WIGNER-DYSON (aussi appelées *ensembles gaussiens*). Nous allons ici faire un petit tour d'horizon des différentes classes d'universalité. Nous commencerons par présenter les manifestations de l'universalité sur la répulsion des niveaux d'énergies. Puis nous introduisons le lien avec la transition d'ANDERSON

### 1.5.1. Symétries et classes d'universalité

Commençons par distinguer deux symétries fondamentales :

- la symétrie par renversement du temps (*time reversal symmetry*, **TRS**)

– la symétrie par rotation de spin (*spin rotation symmetry*, **SRS**)

Le comportement du hamiltonien face à ces deux symétries, le projette dans une classe d'universalité (voir Tableau 1.1). Typiquement, la symétrie par renversement du temps est brisée avec l'ajout d'un champ magnétique externe. La symétrie par rotation de spin est quant à elle brisée par l'ajout d'un terme de couplage « spin-orbite » dans le hamiltonien.

	TRS	SRS
GOE	✓	✓
GUE	✗	✓ ou ✗
GSE	✓	✗

**Tableau 1.1.:** Ensembles gaussiens et symétries

	$\tilde{\beta}$
GOE	1
GUE	2
GSE	4

**Tableau 1.2.:** Ensembles gaussiens et symétries

On distingue alors trois classes d'universalité : l'ensemble gaussien orthogonal (**GOE**), l'ensemble gaussien unitaire (**GUE**) et l'ensemble gaussien symplectique (**GSE**). Selon les symétries que satisfait le hamiltonien considéré, on peut ranger celui-ci dans un de ces ensembles. A chaque ensemble on peut aussi associer un exposant  $\tilde{\beta}$  caractérisant le type de répulsion des niveaux d'énergies. Posons  $s = E_{n+1} - E_n$ , la différence d'énergie entre deux niveaux voisins. Cette quantité est alors associée à une densité de probabilité  $P$ , s'écrivant comme

$$P(s) = As^{\tilde{\beta}}e^{-Bs^2},$$

où  $A$  et  $B$  sont des paramètres de normalisation. On appelle communément cette densité de probabilité un *spectre de répulsion*. A chaque ensemble gaussien est associée une valeur de  $\tilde{\beta}$ . C'est un des résultats fondamentaux de l'universalité. On parle alors de répulsion linéaire pour  $\tilde{\beta} = 1$ , de répulsion quadratique pour  $\tilde{\beta} = 2$  et de répulsion quartique pour  $\tilde{\beta} = 4$  (voir Tableau 1.2).

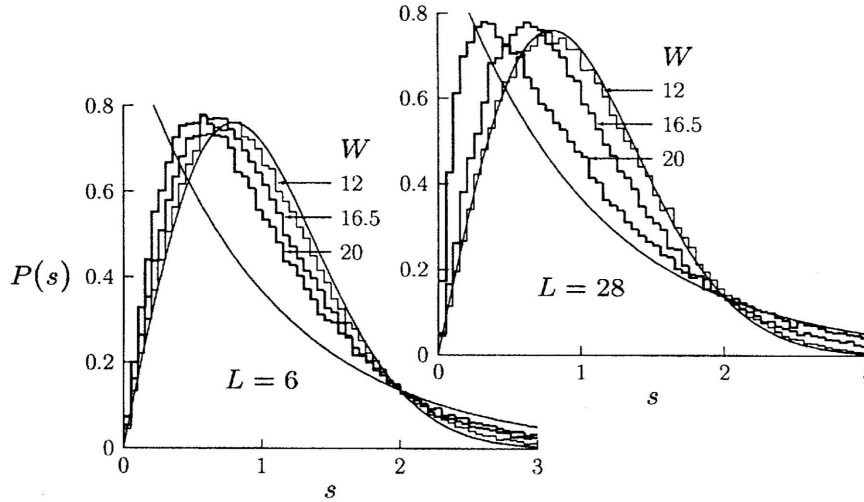
### 1.5.2. Classes d'universalité et milieux désordonnés : état de l'art.

Quel est alors le lien avec la transition d'ANDERSON ? On sait que du côté localisé, les états propres ne peuvent exhiber de répulsion d'énergie car ils ne se recouvrent pas. La densité de probabilité  $P(s)$  prend alors une forme Poissonienne :  $P(s) = e^{-s}$ . En revanche, les états diffusifs se recouvrant, ils manifestent cette répulsion pouvant être caractérisé par un ensemble gaussien et une valeur de  $\tilde{\beta}$  associée à son spectre de répulsion  $P(s) = As^{\tilde{\beta}}e^{-Bs^2}$ .

Au point critique  $W_c$ , le spectre observé est alors une hybridation des deux [38]. Proche d'une statistique de WIGNER-DYSON pour les faibles  $s$  et d'une statistique de POISSON pour les grandes valeurs de  $s$  (voir Figure 1.12). Mieux encore, une loi d'échelle peut être formulée [39], et il est montré qu'au voisinage du point critique un certain nombre de quantités dérivées de ces spectres se comportent en loi de puissance avec pour exposant critique  $\nu$ , le même que défini précédemment.

On peut par ailleurs noter que malgré une statistique Poissonienne, il existe une loi d'échelle entre la longueur de localisation  $\lambda$  et la classe d'universalité [40] :  $\lambda(\tilde{\beta}) = \tilde{\beta}\lambda(\tilde{\beta} = 1)$ .

Ainsi, si un système possède une transition de phase induite par le désordre (telle que la transition d'ANDERSON) alors celle-ci peut être associée à un exposant critique



**Figure 1.12.:** Statistiques  $P(s)$  pour différentes valeurs du désordre  $W$  ( $V = 1$ ) et pour deux tailles d'échantillons  $L$ . En traits continus sont représentés les deux distributions limites : celle de POISSON et celle du WIGNER-DYSON pour l'ensemble gaussien orthogonal ( $\tilde{\beta} = 1$ ). Figure adaptée de [38].

$\nu$  unique ne dépendant que de la dimensionnalité et de la classe d'universalité correspondante<sup>2</sup> (voir Tableau 1.3). La conséquence immédiate d'un tel classement, est que les exposants critiques ne dépendent alors pas des caractéristiques microscopiques (désordre ou couplage), mais seulement des symétries satisfaites par le hamiltonien. Cette invariance face aux détails microscopiques est une condition *sine qua non* pour établir l'universalité d'un système. La démontrer, revient à prouver que pour différentes réalisations du désordre et différents types de couplage entre sites, l'exposant critique  $\nu$  trouvé ne varie pas. Dans cette thèse, nous démontrons cette propriété expérimentalement pour la transition d'ANDERSON dans un rotateur frappé quasi-périodique.

Le hamiltonien du problème d'ANDERSON (Équation 1.20), est trivialement symétrique par rotation de spin (SRS) du fait que ce dernier ne dépend pas de la composante de spin de l'électron. La symétrie par renversement du temps est aussi préservée en l'absence de couplage à un champ magnétique. Le problème d'ANDERSON appartient ainsi à l'ensemble gaussien orthogonal (GOE), et l'exposant critique  $\nu$  prédit pour cette classe d'universalité vaut  $1.59 \pm 0.01$  [37].

Démontrer cette caractéristique revient à montrer que pour différentes réalisations du désordre et différents types de couplage entre sites, les exposants critiques caractérisant la transition ne varient pas. Dans cette thèse, pour la première fois, nous démontrons expérimentalement cette propriété pour la transition d'ANDERSON (appartenant à l'ensemble gaussien orthogonal).

En fait, il existe une grande variété de classe de symétries (10 au total) [3]. Aux trois

2. Cette prédiction est issue de considérations super-symétriques dans le cadre de la théorie quantique des champs appliquée aux systèmes désordonnés [17], dont l'étude sort du cadre de cette thèse. En revanche, on peut noter que celle-ci ne prédit pas des valeurs exactes pour les exposants critiques [41].

	2D	3D
<b>GOE</b>	$\chi$	$\nu = 1.59 \pm 0.01$ [37]
<b>GUE</b>	$\nu = 2.59 \pm 0.01$ [42]	$\nu = 1.43 \pm 0.04$ [43]
<b>GSE</b>	$\nu = 2.75 \pm 0.01$ [44]	$\nu = 1.36 \pm 0.01$ [45]

**Tableau 1.3.:** Exposants critiques  $\nu$  en fonction de la classe d'universalité et de la dimensionnalité. Historiquement, la transition de phase à 2D dans l'ensemble gaussien unitaire (GUE) la plus étudiée est la « transition de HALL quantique ». Aussi, on remarquera que l'ensemble gaussien orthogonal est le seul à ne pas manifester de transition à 2D, en accord bien sûr avec la théorie d'échelle à un paramètre [7].

que nous venons d'expliciter, nous pouvons rajouter trois ensembles dits « *chiral* » dont l'ajout d'une constante au hamiltonien change les états propres et quatre ensembles dits de « BOGOLIOBOV-DE GENNES » où est introduite une symétrie « *particule-trou* » supplémentaire. L'étude de ces symétries étant hors de portée du rotateur frappé, nous en ferons abstraction dans la suite de cette thèse.

Étudions à présent le lien entre le modèle d'ANDERSON et le rotateur frappé, et comment ce dernier peut sonder les propriétés d'universalité de l'ensemble orthogonal.

## 1.6. Équivalence entre le problème d'Anderson et le Rotateur Frappé

Nous allons ici montrer qu'un rotateur frappé quantique est équivalent à un problème d'ANDERSON, et ce de manière formelle. Mais avant de continuer, il est utile préciser que les spectres des systèmes chaotiques possède les propriétés de répulsion des niveaux, et sont caractérisés par l'exposant critique  $\tilde{\beta}$  dépendant de la classe d'universalité à laquelle ils appartiennent [4].

### 1.6.1. Rotateur frappé quasi-périodique

Introduisons un rotateur frappé légèrement modifié : le rotateur frappé quasi-périodique, dont le hamiltonien est

$$H_{qp} = \frac{p^2}{2} + K \cos(x)(1 + \varepsilon \cos(\omega_2 t) \cos(\omega_3 t)) \sum_n \delta(t - n). \quad (1.26)$$

Au rotateur frappé standard présenté précédemment (Équation 1.2), nous avons ajouté une modulation dans l'amplitude des kicks. L'amplitude de cette modulation est régie par le paramètre  $\varepsilon \in [0, 1]$ . Les fréquences  $\omega_2$  et  $\omega_3$  régissent quant à elles le rythme de cette variation au cours du temps. Si l'on pose  $\varepsilon = 0$ , on retrouve naturellement le hamiltonien du rotateur frappé standard.

Ce modèle exhibe une transition de phase quantique (dont l'origine, tout comme la transition d'ANDERSON, est liée à l'interférence des ondes de matières) avec une des phases manifestant une localisation dynamique, et l'autre une dynamique diffusive dans l'espace des impulsions  $|p\rangle$  (voir Figure 1.13). L'état localisé ou diffusif est

contrôlé par le jeu de paramètres  $(K, \varepsilon)$ . On notera que cette transition de phase n'existe que pour des valeurs  $(\pi, \bar{k}, \omega_2, \omega_3)$  incommensurables entre elles.

On peut dès à présent soupçonner un lien entre le rotateur frappé quasi-périodique et le modèle d'ANDERSON à 3 dimensions.

### 1.6.2. Correspondances des deux modèles

Une démonstration formelle de l'équivalence du rotateur frappé standard avec un modèle d'Anderson unidimensionnelle fut proposé par FISHMAN, GREMPEL et PRANGE en 1982 [12, 11]. Elle démontre en somme que la localisation dynamique est équivalente à la localisation d'ANDERSON et est due au même phénomène interférentiel. L'observation de la localisation dynamique de manière expérimentale par l'équipe de RAIZEN constitue ainsi la première observation de la localisation d'ANDERSON avec des ondes de matière [26]. En 1989, le rotateur frappé quasi-périodique fut démontré équivalent à un modèle d'ANDERSON tri-dimensionnel [13]. J'ai fait le choix de faire une démonstration plus détaillée de ces deux équivalences que le lecteur intéressé trouvera en Annexe A et en Annexe B. Nous allons cependant revenir sur le principe de cette dernière démonstration.

On commence par considérer un modèle de rotateur frappé différent des deux modèles présentés précédemment : le rotateur frappé 3D, dont le hamiltonien s'écrit

$$\hat{H}_{3D} = \frac{\hat{p}_1^2}{2} + \omega_2 \hat{p}_2 + \omega_3 \hat{p}_3 + K \cos(\hat{x}_1) (1 + \varepsilon \cos(\hat{x}_2) \cos(\hat{x}_3) \sum_n \delta(t - n)), \quad (1.27)$$

où  $(\hat{x}_1, \hat{p}_1)$ ,  $(\hat{x}_2, \hat{p}_2)$  et  $(\hat{x}_3, \hat{p}_3)$  sont les trois couples de variables canoniquement conjuguées. En définissant  $u^-$  et  $u^+$  comme étant le même état FLOQUET mais situé à des instants différents dans la période du système (avec  $u^-$  juste avant le pulse et  $u^+$  juste après), on peut montrer (voir Annexes A. et B.) qu'il existe un état défini comme  $\bar{u} = \frac{1}{2}(u^+ + u^-)$ , qui, écrit dans la base discrète des impulsions  $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^3$ , satisfait l'équation

$$\epsilon_{\mathbf{m}} \bar{u}_{\mathbf{m}} - \sum_{\mathbf{n} \neq 0} \hat{V}_{\mathbf{n}} \bar{u}_{\mathbf{m}-\mathbf{n}} = \hat{V}_0 \bar{u}_{\mathbf{m}}. \quad (1.28)$$

Cette équation correspond à un modèle de liaisons fortes anisotrope avec des profondeurs quasi-périodiques de sites  $\epsilon_{\mathbf{m}}$  définies ainsi :

$$\epsilon_{\mathbf{m}} = \tan \left\{ \frac{1}{2} \left[ \omega - \left( \frac{\bar{k} m_1^2}{2} + \omega_2 m_2 + \omega_3 m_3 \right) \right] \right\}, \quad (1.29)$$

où  $\omega$  est la quasi-énergie associée à l'état de FLOQUET ( $u^\pm$ ), et  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$  un vecteur dans l'espace des impulsions. Le critère d'incommensurabilité apparaît immédiatement, nous garantissant qu'il n'existe pas de périodicité dans le terme  $\epsilon_{\mathbf{m}}$ , assimilable au désordre tel qu'ANDERSON le définit dans son modèle dans l'espace réel (Équation 1.20). En effet, une telle périodicité dans  $\epsilon_{\mathbf{m}}$  détruirait l'équivalence entre ces deux modèles.



Le terme de couplage entre-sites  $\hat{V}_{\mathbf{n}}$  est défini de la sorte :

$$\hat{V}_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{x}=x_1, x_2, x_3} e^{-i\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}} \cdot \tan\left(\frac{K}{2k} \cos \hat{x}_1 (1 + \epsilon \cos \hat{x}_2 \cos \hat{x}_3)\right). \quad (1.30)$$

Strictement parlant, ce couplage n'est pas limité au plus proches voisins, mais comme il décroît exponentiellement vite à mesure que les sites couplés sont éloignés, nous restons bien dans le cadre d'un problème d'ANDERSON où la portée des couplages entre sites est limitée. Cette assertion est vraie dans la mesure où  $|K(1 + \epsilon)/2k| < \pi/2$ .

Ce modèle tridimensionnel de rotateur frappé étant équivalent à un modèle d'ANDERSON 3D pour n'importe quelles conditions initiales  $\Psi(t = 0)$ , on pose que celles-ci sont une « source plane » :

$$\Psi(t = 0) = \Xi(x_1, t = 0) \delta(x_2 - \varphi_2) \delta(x_3 - \varphi_3). \quad (1.31)$$

Soumis à celles-ci, on peut montrer (voir Annexe B.) que l'évolution de la fonction d'onde sur le couple  $(x_1, p_1)$  est régi par le hamiltonien

$$\hat{H}_{qp} = \frac{\hat{p}_1^2}{2} + K \cos(\hat{x}_1) (1 + \epsilon \cos(\omega_2 t) \cos(\omega_3 t)) \sum_n \delta(t - n). \quad (1.32)$$

La manifestation de la localisation d'Anderson étant multi-axiale, elle se manifeste nécessairement sur cet axe. Nous avons ainsi défini un modèle de rotateur frappé, le rotateur frappé quasi-périodique dont le comportement sur un axe dans l'espace des impulsions est parfaitement analogue au comportement dans l'espace réel d'un hamiltonien d'ANDERSON.

Dans le cadre de l'étude de la transition d'ANDERSON, les avantages de cette méthodologie sont multiples. Le premier est l'unidimensionnalité effective. Expérimentalement, nous verrons que le problème en est grandement simplifié. On peut aussi noter que cet avantage s'applique aux simulations numériques, où il est toujours plus simple de résoudre un problème à 1D qu'à 3D (ou plus). L'autre avantage est plus subtil : ce modèle exhibe une transition « propre ». Dans le cadre des solides désordonnés, les états propres du hamiltonien se répartissent de part et d'autre du seuil de mobilité  $E_c$  en fonction de leur énergie  $E$ , (certaines sont localisées, d'autres étendues) pour une réalisation du désordre  $W/V$ . Ainsi coexistent les états isolants avec les états conducteurs, ce qui rajoute une difficulté supplémentaire dans l'observation de la transition d'ANDERSON à 3 dimensions [9, 10]. Dans notre modèle, cette énergie  $E$  devient  $\hat{V}_0$ , une constante toujours nulle. Celle-ci n'est alors plus un paramètre pertinent pour franchir cette transition, il ne nous reste plus que le paramètre de désordre microscopique  $W/V$  pour caractériser cette dernière. Dans la Figure 1.10, cela revient à réduire la dimension de ce portrait de phase en supprimant la composante énergétique de ce dernier.

La correspondance entre ces deux modèles (rotateur frappé et problème d'ANDERSON) étant maintenant fermement établie, on peut affirmer qu'une transition de phase se manifeste dans le rotateur frappé quasi-périodique. L'Équation 1.29 nous montre que le rotateur quasi-périodique n'offre pas de contrôle sur le désordre sur site «  $W$  ». En revanche, l'Équation 1.30 indique que l'amplitude du couplage aux plus proches

voisins est contrôlée par le couple  $(K, \varepsilon)$ . On peut alors établir que :

$$\frac{W}{V} \sim \frac{Cste}{K} \quad \left( \text{ou} \sim \frac{Cste}{\varepsilon} \right). \quad (1.33)$$

Il n'est alors pas déraisonnable de prédire qu'à de grandes valeurs de  $K$  correspondent des petites valeurs de  $W/V$  et que le comportement doit être diffusif (et vice et versa). C'est bien ce qu'illustre la Figure 1.13 : pour de faibles valeurs du couple  $(K, \varepsilon)$ , on a bien une localisation dans l'espace des impulsions. A l'inverse, pour de grandes valeurs c'est une dynamique diffusif que manifeste ce rotateur frappé. On peut par ailleurs établir un portrait de phase, distinguant les états localisés des états conducteurs du rotateur frappé quasi-périodique (voir Figure 1.14).

La dimensionnalité de ce modèle est directement reliée au nombre de fréquences incommensurables dans le système, en faisant un modèle de choix pour l'étude de la transition d'ANDERSON à 4 dimensions (où il suffit de rajouter une fréquence de modulation) ou l'absence de diffusion à 2 dimensions (où il suffit de poser  $\omega_3 = 0$ ).

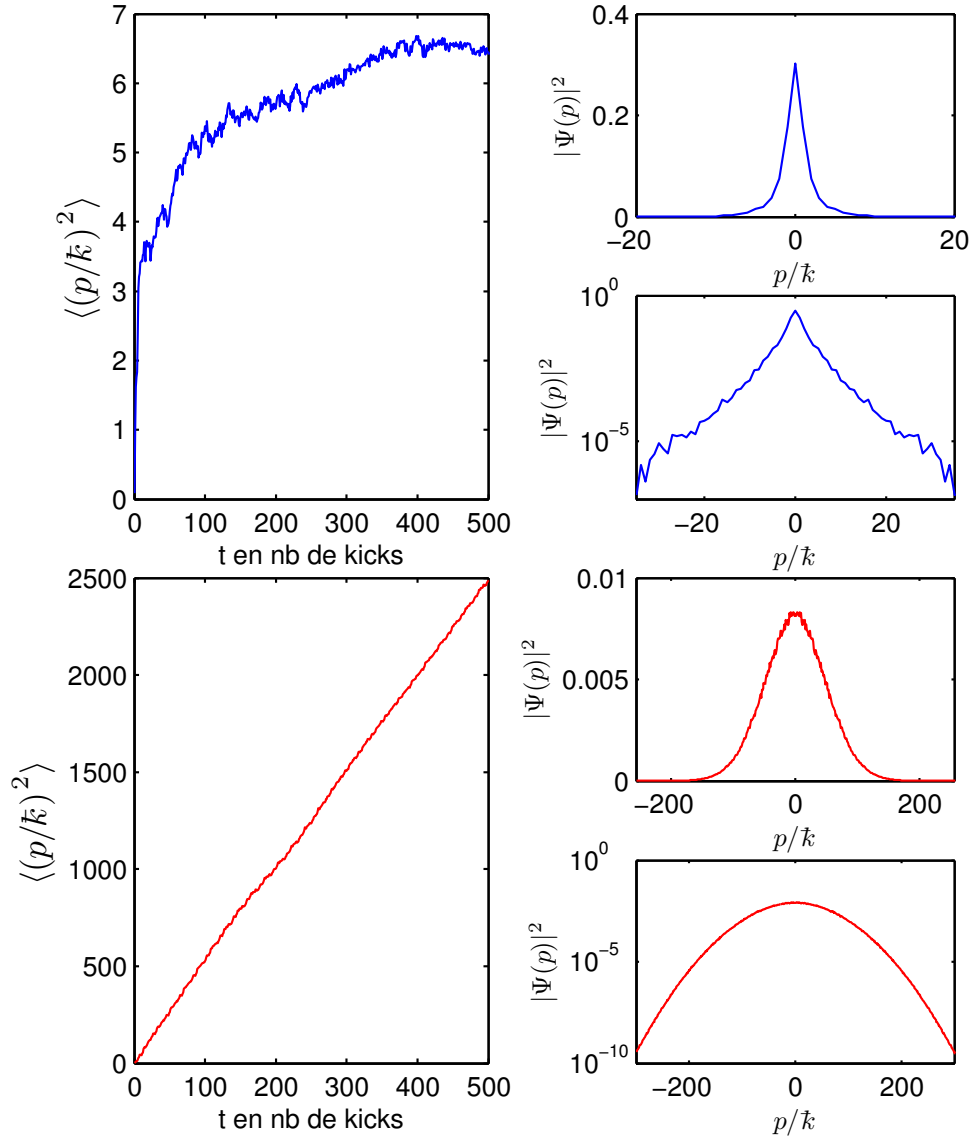
<i>Localisation d'ANDERSON</i>	<i>Localisation dynamique</i>
localisation dans l'espace réel	Localisation dans l'espace des impulsions
1 site = 1 point de d'espace	sites dans l'espace des impulsions séparés de $\bar{k}$
Dimensions spatiales	Nombres de fréquences incommensurables
1 réalisation du désordre	1 réalisation du « désordre »
= 1 ensemble « $W/V$ »	= 1 état de FLOQUET
Désordre contrôlé par le paramètre $W$	Désordre fixe
Couplage contrôlé par le paramètre $V$	Couplage contrôlé par les paramètre $K$ et $\varepsilon$
Localisation à fort désordre ou faible couplage	Localisation à faible couplage $K$
Diffusion à faible désordre ou fort couplage	Diffusion à fort couplage $K$
Longueur de localisation $\ll$ taille de l'échantillon	Temps de localisation $\ll$ temps d'observation
Isolant	Dynamique localisée
Conducteur	Dynamique diffusif

**Tableau 1.4.:** Tableau récapitulatif de l'équivalence entre la localisation dynamique et la localisation d'Anderson.

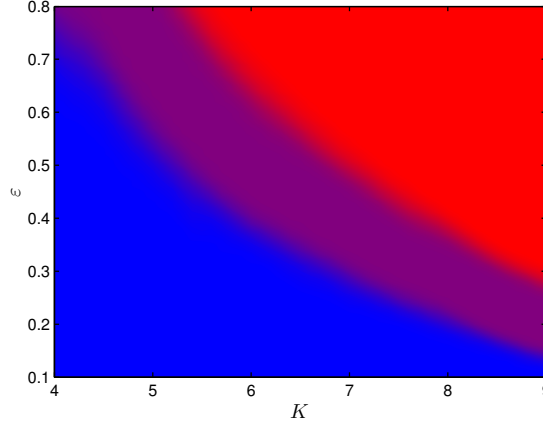
Un récapitulatif des propriétés de cette équivalence est proposé dans le Tableau 1.4.

## 1.7. Théorie d'échelle à un paramètre appliqué au rotateur frappé

Dans sa formulation originelle, la théorie d'échelle est introduite pour pouvoir calculer avec exactitude la valeurs des exposants critiques dans les solides désordonnés. En



**Figure 1.13.:** Comportement du rotateur frappé quasi-périodique pour deux couples  $(K, \varepsilon)$  avec  $\bar{k} = 2.89$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$  et  $\omega_3 = 2\pi\sqrt{13}$ . En bleu :  $(K = 4, \varepsilon = 0.1)$  on observe une dynamique localisée (saturation de  $\langle p^2/\bar{k}^2 \rangle$  et forme exponentielle décroissante de  $|\Psi(p)|^2$  figée). En rouge :  $(K = 9, \varepsilon = 0.8)$  on observe en revanche une dynamique diffusive dans l'espace des impulsions (comportement en  $\langle p^2/\bar{k}^2 \rangle \sim t$  et forme gaussienne de  $|\Psi(p)|^2$  dont la largeur croît en  $\sqrt{t}$ ).



**Figure 1.14.:** Portrait de phase du rotateur frappé quasi-périodique en fonction du couple  $(K, \varepsilon)$  pour  $\tilde{k} = 2.89$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$  et  $\omega_3 = 2\pi\sqrt{13}$ . En bleu, les états de FLOQUET sont localisés pour de faibles valeurs du couple  $(K, \varepsilon)$ . En rouge, ces états sont délocalisés pour de grandes valeurs du couple  $(K, \varepsilon)$ . En violet, on peut définir un ensemble de couple  $(K_c, \varepsilon_c)$ , telle que ces états ne sont caractérisés par aucun de ces deux comportements : c'est le comportement critique qui définit une frontière. On notera aussi que pour des temps de simulation infiniment longs, cette bande violette doit être d'épaisseur nulle.

effet, les limites en temps de calcul impliquent une limite dans la taille  $L$  des échantillons simulables. Or, il est connu que la longueur de corrélation  $\xi$  diverge au point de la transition. La théorie d'échelle à un paramètre fait une hypothèse forte mais très large : la valeur de la longueur de localisation  $\xi$  ne dépend que de  $\left(\frac{W}{V}\right) - \left(\frac{W}{V}\right)_c$  et obéit à une loi d'échelle en fonction de la taille  $L$  du système.

Dans cette partie nous abordons, comment cette théorie se translate au rotateur frappé quasi-périodique, et comment on peut en extraire l'exposant critique  $\nu$  de la transition.

### 1.7.1. Problématique du rotateur frappé

Là où la taille  $L$  des échantillons simulables impose une contrainte sur la détermination de l'exposant critique  $\nu$  dans les systèmes désordonnés, le rotateur frappé quasi-périodique en est affranchi grâce à son unidimensionnalité. Donc pourquoi introduire une théorie d'échelle? La difficulté du problème, originellement située sur la taille finie des échantillons simulables numériquement, est translatée sur le temps pour le rotateur frappé. Proche du point de transition  $K_c$ , le comportement localisé n'est pas discernable du comportement diffusif aux temps courts. Les temps nécessaires à cette distinction deviennent exponentiellement long à mesure que l'on s'approche de  $K_c$ . Or c'est autour de  $K_c$  que se manifeste la divergence universelle de  $\xi \sim |K - K_c|^{-\nu}$ , la longueur de corrélation. Sans autre hypothèse, une mesure fiable de l'exposant critique est difficile numériquement et fantaisiste expérimentalement. Cet ingrédient supplémentaire est la théorie d'échelle à un paramètre en temps (dit de « mise à l'échelle à temps fini » ou *Finite Time Scaling*) introduite par G. LEMARIÉ & D. DELANDE [46], que nous allons à présent détailler.

### 1.7.2. Hypothèse forte

On commence par normaliser la distance séparant deux sites d'impulsion voisins à 1 en définissant la variable  $\mathbf{p} = p/\bar{k}$ . L'hypothèse forte de la théorie d'échelle à un paramètre est d'introduire une fonction d'échelle  $F$ , originellement introduite dans le cadre de la théorie de la percolation [47], pour caractériser la dépendance en temps de  $\langle \mathbf{p}^2 \rangle$

$$\langle \mathbf{p}^2(t) \rangle = t^{k_1} F \left[ (K - K_c) t^{k_2} \right]. \quad (1.34)$$

Il est important de noter qu'aucune autre hypothèse plus forte que celle-ci n'est faite ou ne sera faite. Nous ne faisons aucune supposition sur la forme de  $F$  ou les valeurs de  $k_1$  et  $k_2$ .

### 1.7.3. Limites asymptotiques de la fonction d'échelle

Nous allons maintenant déduire les valeurs de  $k_1$  et  $k_2$  en construisant les limites de  $F(x)$ .

Pour  $K < K_c$  les fonctions d'ondes au temps longs sont localisées :  $\langle \mathbf{p}^2 \rangle \sim 2\lambda^2$  avec  $\lambda$  la longueur de localisation adimensionnée. Or, du côté localisé  $\lambda \sim \xi \sim (K_c - K)^{-\nu}$  d'où

$$\langle \mathbf{p}^2 \rangle \sim (K_c - K)^{-2\nu}. \quad (1.35)$$

Ce qui implique que pour  $x \rightarrow -\infty$ ,  $F(x) \rightarrow (-x)^{-2\nu}$ , ainsi

$$\langle \mathbf{p}^2 \rangle = t^{k_1} (K_c - K)^{-2\nu} t^{-2\nu k_2} = t^{k_1 - 2\nu k_2} (K_c - K)^{-2\nu}, \quad (1.36)$$

nous fournissant par identification  $k_1 - 2\nu k_2 = 0$ .

On réitère cette même démarche du coté diffusif de la transition pour  $K > K_c$ , où le coefficient de diffusion  $D$  se comporte en  $D \sim (K - K_c)^s$  :

$$\langle \mathbf{p}^2 \rangle \sim Dt \sim (K - K_c)^s t. \quad (1.37)$$

Ce qui implique que pour  $x \rightarrow +\infty$ ,  $F(x) \rightarrow x^s$ , ainsi

$$\langle \mathbf{p}^2 \rangle = t^{k_1} (K_c - K)^s t^{s k_2} = t^{k_1 + s k_2} (K_c - K)^s, \quad (1.38)$$

nous fournissant par identification  $k_1 + s k_2 = 1$ .

Ces deux relations sur  $k_1$  et  $k_2$  nous permettent de les écrire en fonction des exposants critiques  $s$  et  $\nu$  :

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{2\nu}{s + 2\nu} \\ k_2 &= \frac{1}{s + 2\nu}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

L'utilisation de la loi de WEGNER [32] ( $s = \nu$ , pour  $d = 3$ ) donne immédiatement

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{2}{3} \\ k_2 &= \frac{1}{3\nu}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Au final :

$$\langle \mathbf{p}^2 \rangle = t^{2/3} F \left[ (K - K_c) t^{1/3\nu} \right]. \quad (1.41)$$

On peut alors observer une des premières prédictions d'une telle hypothèse. Au point critique  $K = K_c$ , on a  $F(0) = Cste$ . Ainsi  $\langle \mathbf{p}^2 \rangle \sim t^{2/3}$ . On prédit une diffusion anormale au point de la transition, que l'on observe expérimentalement et numériquement. A noter qu'il est possible d'attribuer à cette diffusion anormale une dimension fractale [48].

On introduit une nouvelle fonction  $\Lambda(K, t) = \langle \mathbf{p}^2 \rangle / t^{2/3}$  par souci de commodité. Celle-ci est égale à  $F$ , on peut donc s'attendre à une pente nulle pour  $\Lambda(K_c, t)$ . Du côté localisé  $F(x \rightarrow -\infty) = (-x)^{-2\nu}$ , nous donne immédiatement la formule

$$\Lambda(K, t) = (K_c - K)^{-2\nu} t^{-2/3}, \quad (1.42)$$

dans laquelle on identifie la longueur de corrélation  $\xi(K) = |K - K_c|^{-\nu}$  :

$$\Lambda(K, t) = \left( \xi(K) t^{-1/3} \right)^2. \quad (1.43)$$

Du côté diffusif, la démarche est toujours la même.  $F(x \rightarrow +\infty) = x^\nu$  nous renvoie

$$\Lambda(K, t) = (K - K_c)^\nu t^{1/3}, \quad (1.44)$$

où on identifie  $\xi(K) = |K - K_c|^{-\nu}$  :

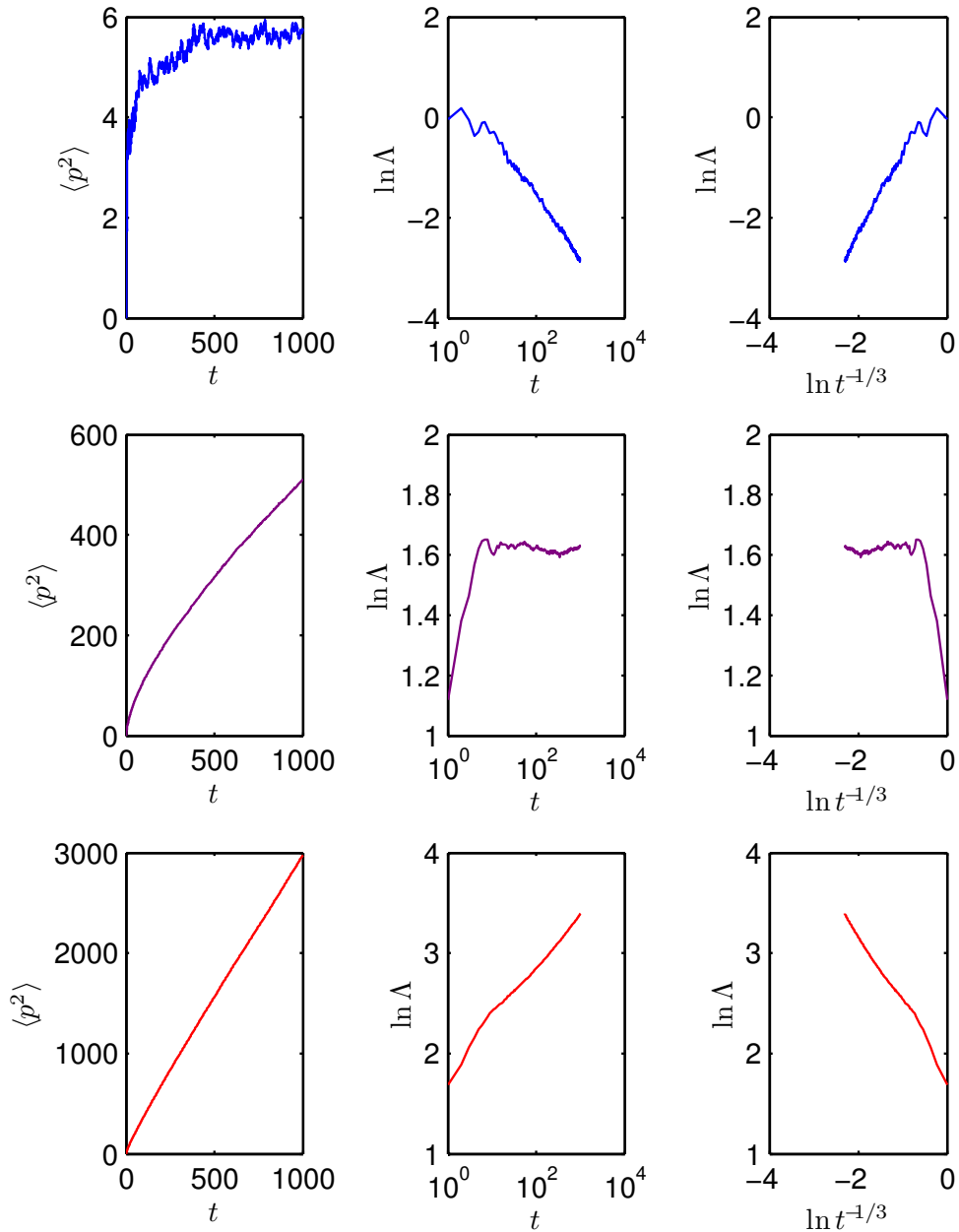
$$\Lambda(K, t) = \left( \xi(K) t^{-1/3} \right)^{-1}. \quad (1.45)$$

Ces dépendances asymptotiques nous incitent à introduire une nouvelle fonction d'échelle  $f$ , dont l'opérande est  $\xi(K) t^{-1/3}$ , telle que

$$\Lambda(K, t) = f \left( \xi(K) t^{-1/3} \right). \quad (1.46)$$

On remarque aussi que l'exposant critique est « translaté » dans l'opérande de  $f$  : précédemment sur le temps, il est désormais sur  $K$  via la longueur de corrélation  $\xi(K)$ . Cette réécriture donne un sens concret à la procédure de translation que nous allons bientôt détailler.

Il nous faut maintenant revoir, sous la lumière de la fonction  $\Lambda$ , les trois comportements du rotateur frappé quasi-périodique (Figure 1.15). La pente de la fonction  $\Lambda$  en fonction de  $t$  nous permet de voir immédiatement si nous sommes en présence d'un comportement localisé (pente négative), critique (pente nulle) ou diffusif (pente positive).



**Figure 1.15.:** Simulations numériques des 3 comportements typiques du rotateur frappé quasi-périodique : en bleu le comportement localisé pour ( $K = 4, \varepsilon = 0.1$ ), en violet le comportement critique pour ( $K = 6.4, \varepsilon = 0.44$ ) et en rouge le comportement diffusif pour ( $K = 9, \varepsilon = 0.8$ ). Toutes sont réalisées sur 1000 pulses et pour  $\bar{k} = 2.89$ .

### 1.7.4. Détermination de l'exposant critique

Le fonction  $f(x)$  étant monotone de chaque côté de la transition (croissante du côté localisée (Équation 1.43) et décroissante du côté diffusif (Équation 1.45)), on peut utiliser cette propriété pour obtenir la fonction  $\xi(K)$ . Considérons deux couples  $(K_1, t_1)$  et  $(K_2, t_2)$ . La monotonie de  $f$  nous indique que si  $\Lambda(K_1, t_1) = \Lambda(K_2, t_2)$ , alors  $\xi(K_1)t_1^{-1/3} = \xi(K_2)t_2^{-1/3}$ . C'est l'aboutissement de la théorie d'échelle à un paramètre. Ainsi, même si nous sommes limités en nombre de kicks, on peut reconstituer la fonction d'échelle  $f$  avec son paramètre d'échelle  $\xi(K)$ . On peut réécrire cette dernière équation comme :

$$\ln \xi(K_2) = \ln \xi(K_1) + \frac{1}{3} (\ln t_2 - \ln t_1). \quad (1.47)$$

Ainsi, si l'on connaît  $\xi(K_1)$ , on peut en déduire  $\xi(K_2)$  en opérant un décalage temporel. Rappelons que du côté localisé,  $\xi(K)$  n'est autre que la longueur de localisation. De proche en proche, on reconstitue la fonction  $\xi(K)$ , dont la divergence au point de la transition nous donne directement l'exposant critique.

Dans la pratique cela revient à superposer les différentes courbes  $\ln \Lambda(K, t)$  tracées en fonction de  $\ln t^{-1/3}$ , en opérant une translation sur le temps sur chacune d'entre elles (voir Figure 1.16). Cette translation correspond à  $\ln \xi(K)$ . On opère ensuite un ajustement sur les valeurs  $\xi(K)$  extraites avec la fonction

$$\xi_{fit}(K) = \frac{1}{\alpha |K - K_c|^\nu + \beta}, \quad (1.48)$$

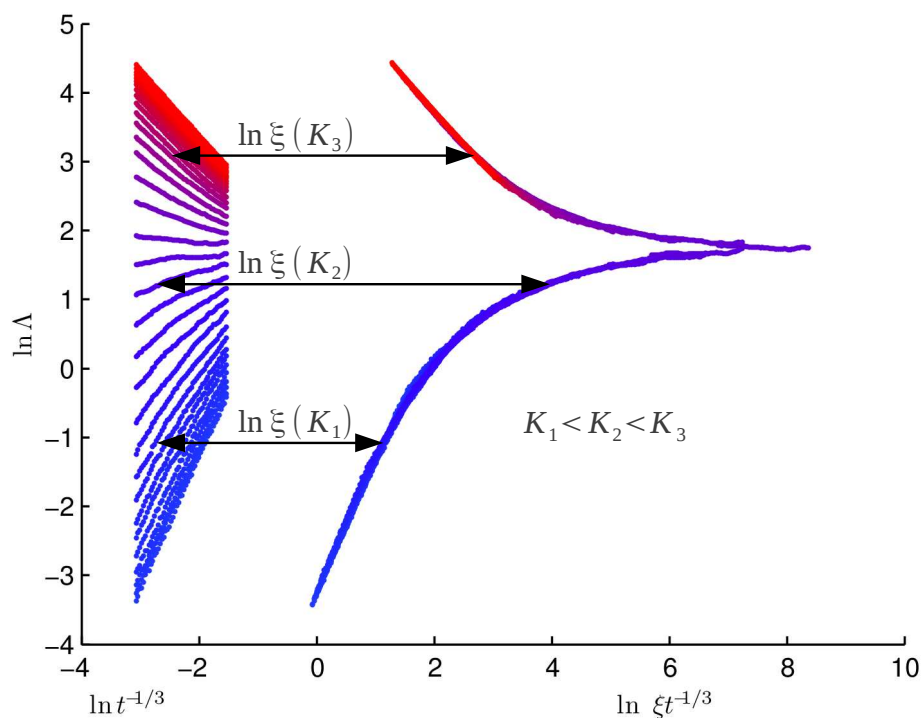
dans laquelle nous avons introduit  $\beta$ , un paramètre de coupure. En effet, au point critique,  $\xi$  est censée diverger, or nos données numériques comme expérimentales ne peuvent refléter ce comportement, de par le nombre limité de kicks ainsi que d'autres contraintes expérimentales que nous aborderons plus tard. Les paramètres extraits  $(\alpha, \beta, \nu)$  nous donnent alors la valeur de l'exposant critique  $\nu$  (voir Figure 1.17). On trouve ici  $\nu = 1.5$  à l'aide d'un petit programme simplifié développé en interne (les données présentées sont issus de simulations numériques, et l'algorithme utilisé ne permet pas d'extraire une erreur sur  $\nu$ ).

Cette technique de renormalisation, la mise à l'échelle à temps fini, sera utilisée pour déterminer à l'aide des données expérimentales l'exposant critique  $\nu$  pour différents paramètres du « désordre » et du couplage dans le chapitre 3. Le développement et l'exploitation de cette technique ont été effectués par notre collaborateur M. DOMINIQUE DELANDE du Laboratoire KASTLER-BROSSEL de l'Université PIERRE et MARIE CURIE, à Paris.

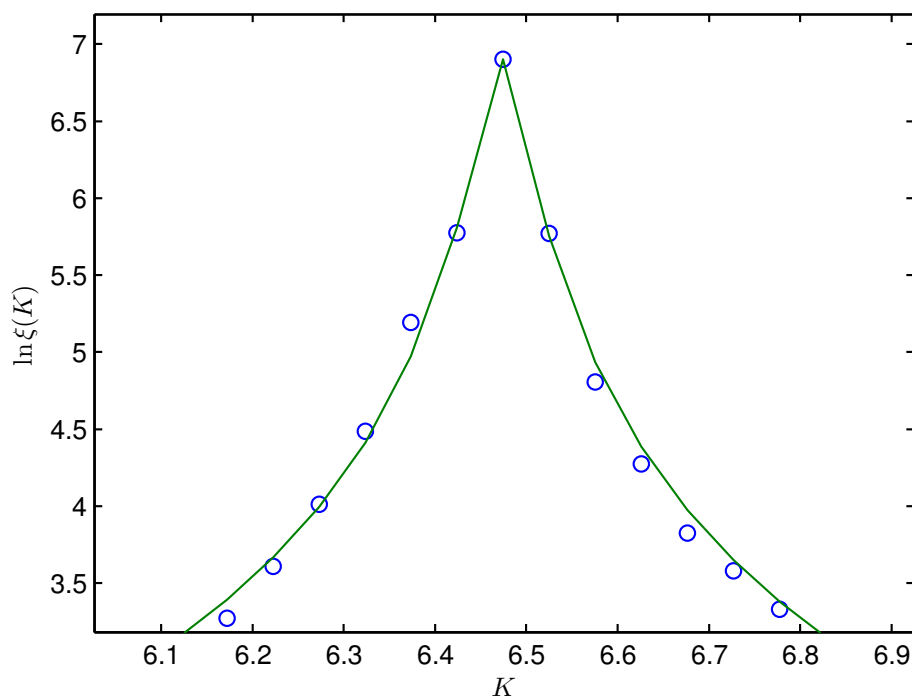
## 1.8. Conclusion

Nous avons montré dans cette partie comment l'étude d'un rotateur frappé modifié était des plus pertinentes dans le contexte de la détermination de l'exposant critique  $\nu$  de la transition de phase d'ANDERSON. D'une part l'assimilation de la *localisation*





**Figure 1.16.:** En commençant avec un jeu de courbes  $\ln \Lambda$  en fonction de  $\ln t^{-1/3}$ , on opère des translations horizontales. Celles-ci renvoient la fonction  $\ln \xi(K)$ .



**Figure 1.17.:** Un fit (en vert) sur les données  $\xi(K)$  en (cercles bleus) est effectué, et permet de remonter à l'exposant critique  $\nu = 1.5 \pm 0.1$ .

*dynamique* du rotateur frappé à la localisation d'ANDERSON nous a montré que ces deux systèmes sont intrinsèquement liés, que chaos et désordre sont les deux faces de la même médaille. En développant cette approche, nous avons été amené à introduire un rotateur frappé légèrement modifié, le *rotateur frappé quasi-périodique*, dont la dynamique dans l'espace des impulsions mime celle d'un modèle d'ANDERSON tridimensionnel dans l'espace des positions.

Malgré les limitations en nombre de kicks, une puissante technique, la « mise à l'échelle à temps fini » (*Finite Time Scaling*), nous permet de remonter à l'exposant critique  $\nu$  de la transition d'ANDERSON. En effet, de par leurs symétries partagées, ces deux systèmes exhibent nécessairement le même exposant, mais l'étude de ce rotateur frappé offre de grands avantages : unidimensionnalité, moindre coût en temps de calcul (numériquement) et non contraint aux phénomènes de décohérence présents de son homologue dans les milieux désordonnés (interaction électron-électron, électron-phonon ...etc.).

Pour déterminer l'appartenance du rotateur frappé quasi-périodique à une classe d'universalité, il faut déterminer l'exposant critique de la transition qu'il exhibe. En fonction de sa valeur on le range dans une classe d'universalité. Mais ce n'est pas suffisant. L'universalité d'un tel système sera démontrée lorsque nous auront prouvé que l'exposant critique est toujours le même lorsque nous altérons les propriétés microscopiques. L'équivalence entre le rotateur frappé quasi-périodique et le problème d'ANDERSON nous offre un très bon contrôle sur les caractéristiques microscopiques du système équivalent. Tout cela rend le paradigme du rotateur frappé idéal pour l'étude expérimentale des propriétés d'universalité de la transition d'ANDERSON.

Maintenant que les aspects théoriques sont fermement établis nous allons présenter le dispositif expérimental.



## 2. Dispositif expérimental horizontal

### Sommaire

---

<b>2.1. Piégeage et refroidissement</b> . . . . .	<b>44</b>
<b>2.2. Un potentiel sinusoïdal pulsé avec un laser</b> . . . . .	<b>44</b>
2.2.1. Principe . . . . .	44
2.2.2. Expérimentalement . . . . .	47
<b>2.3. Vélocimétrie Raman</b> . . . . .	<b>50</b>
2.3.1. Principe . . . . .	51
2.3.2. Expérimentalement . . . . .	53
<b>2.4. Caractérisation, limitations et améliorations apportés au dispositif expérimental</b> . . . . .	<b>57</b>
2.4.1. Piège magnéto-optique . . . . .	57
2.4.2. Dispositif vélocimétrique Raman. . . . .	58
2.4.3. Onde Stationnaire . . . . .	58
<b>2.5. Conclusion</b> . . . . .	<b>63</b>

---

Nous avons détaillé précédemment le rotateur frappé d'un point de vue théorique, et notamment, la manifestation de la localisation dynamique découlant de son traitement quantique. Nous allons maintenant en décrire la réalisation expérimentale.

La première proposition théorique d'expérience de localisation dynamique remonte à GRAHAM et SCHLAUTMANN en 1992 [49] Ils proposèrent d'observer la déflexion d'un nuage d'atomes par un potentiel périodique oscillant en phase, ce système étant connu pour manifester le phénomène de localisation dynamique. L'expérience a été réalisée par l'équipe de RAIZEN en 1994 [50], avec une détection par fluorescence. L'année suivante, toujours par la même équipe, ce système fût converti en un rotateur frappé (en pulsant l'onde stationnaire, plutôt qu'en la modulant en phase) conforme à l'application standard [26]. Ces deux expériences sont les premières observations *in-situ* (où le module de la fonction d'onde est directement observé) de la localisation dynamique, et par extension, de la localisation d'ANDERSON grâce à l'équivalence établie de ces deux modèles.

Nous commençons donc par présenter le principe de refroidissement et de piégeage pour l'atome de Césium permettant d'atteindre le régime quantique. Puis nous discutons le potentiel sinusoïdal pulsé. Sera enfin abordé le principe de détection : la vélocimétrie Raman, permettant de remonter à la distribution de probabilité en impulsion de la fonction d'onde.

Enfin, nous introduisons au cours de ce chapitre, les améliorations apportées au dispositif et en quoi celles-ci sont nécessaires à la démonstration expérimentale de l'universalité de la transition d'ANDERSON.

## 2.1. Piégeage et refroidissement

Les techniques de refroidissement et de piégeage à l'aide d'ondes lumineuses et de champs magnétiques sont maintenant bien connues [51, 52]. On part d'un gaz d'atomes de Césium à très faible pression dans une cellule ( $10^{-8}$  mbar). Ce gaz est alors refroidi et piégé à l'aide de la technique du piège magnéto-optique jusqu'à une température limite dite de Doppler,  $T_D = 125 \mu\text{K}$ . Puis, une température encore plus faible est atteinte en appliquant un refroidissement Sisyphé [53, 54, 55]. Le cycle de refroidissement pour le Césium est détaillé dans la Figure 2.1. La mise en place géométrique est décrite dans la Figure 2.2. On notera par ailleurs que ces processus de piégeage et de refroidissement durent entre 110 ms et 200 ms selon les paramètres choisis.

En sortie, le nuage possède une température  $T = 3.2 \mu\text{K}$  (nous en détaillerons la mesure une fois la méthode de vélocimétrie Raman présentée) et dont la largeur est estimée à 0.5 mm. Une telle température nous garantit un nuage suffisamment fin en impulsion devant les longueurs de localisation que l'on observera, en effet, la largeur à mi-hauteur est de l'ordre de  $8v_r$  ( $v_r$  : vitesse de recul), soit une largeur de 4 sites d'impulsions en unités normalisées (définies au chapitre 1).

## 2.2. Un potentiel sinusoïdal pulsé avec un laser

Nous avons abordé au cours du chapitre premier, le modèle théorique du rotateur frappé. Expérimentalement, sa mise en place consiste à créer un potentiel sinusoïdal sur les atomes, et à pouvoir l'allumer et l'éteindre suffisamment rapidement pour créer les pulses.

### 2.2.1. Principe

On considère la somme  $E$  de deux champs électriques  $E_1$  et  $E_2$ , contre-propageants et de même pulsation  $\omega_L$  :

$$E = (E_1 e^{ik_L X} + E_2 e^{-ik_L X}) e^{-i\omega_L t}, \quad (2.1)$$

où  $k_L (= \omega_L/c)$  est le nombre d'onde des champs d'amplitudes  $E_1$  et  $E_2$ .

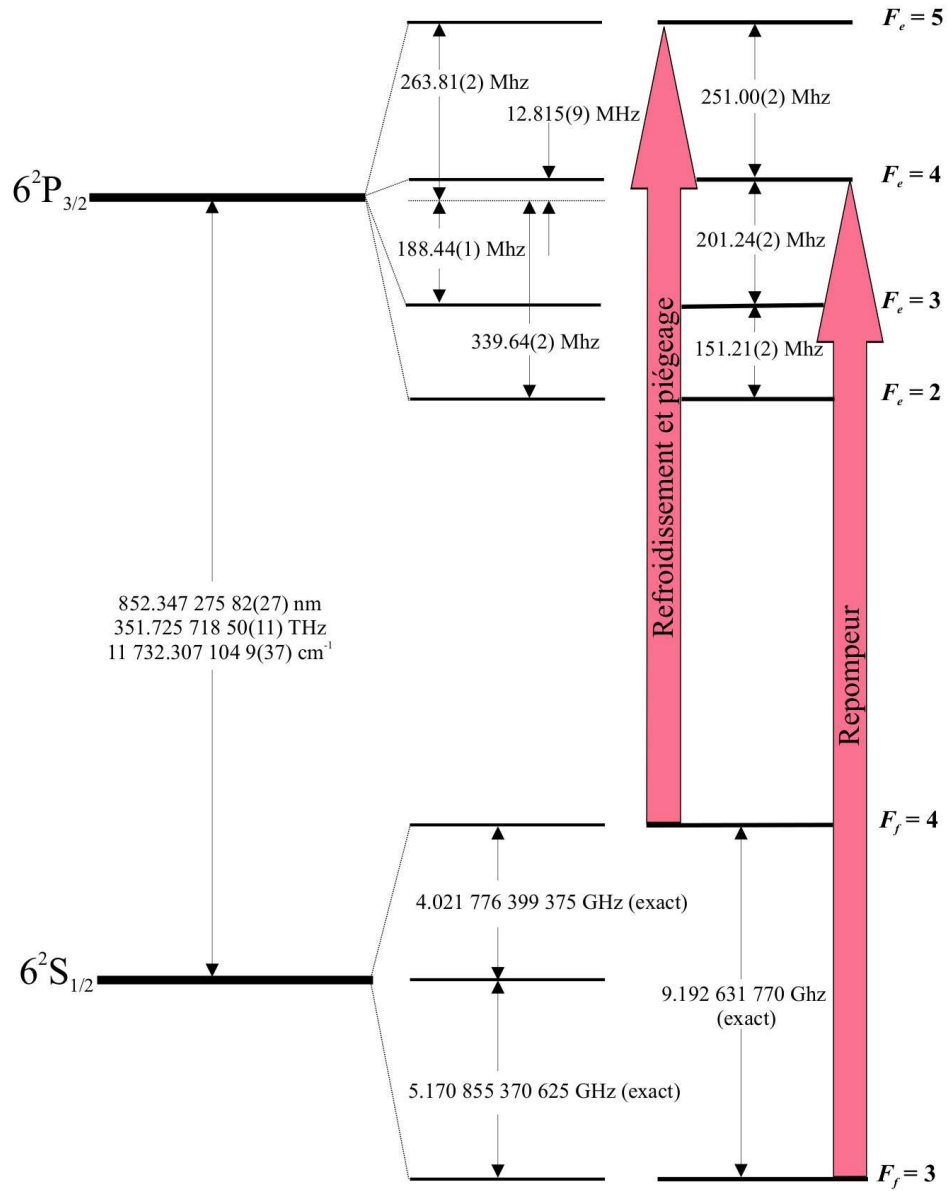
En posant  $E_0 = E_1 = E_2$ , on obtient

$$I(X) = |E|^2 = 2E_0^2 (\cos(2k_L X) + 1) = I_0 (\cos(2k_L X) + 1). \quad (2.2)$$

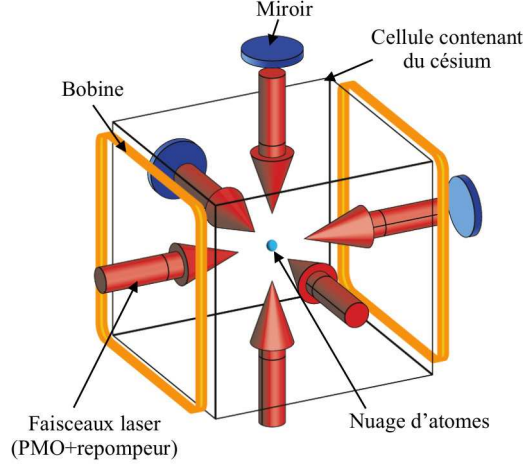
Dans le modèle de l'atome habillé, celui-ci voit ses niveaux d'énergie déplacés en présence d'un champ électrostatique, d'une constante  $V$ , proportionnelle à l'intensité du champ  $I$  :

$$V = \frac{\hbar\Omega_R^2}{8\delta_L} = \frac{1}{2} (\hbar\Gamma) \left( \frac{I}{I_s} \right) \left( \frac{\Gamma}{\delta_L} \right), \quad (2.3)$$

où  $\Omega = d.E_0/\hbar$  est la fréquence de Rabi (avec  $d$  moment dipolaire effectif de la transition  $D_2$  du Césium),  $\delta_L$  le désaccord du laser par rapport à la transition ( $D_2$  :



**Figure 2.1.:** Transition  $D_2$  de l'atome de Césium (adapté de [56]). Le faisceau piège est accordé sur la transition  $|F_g = 4\rangle \rightarrow |F_e = 5\rangle$  et le repompeur sur la transition  $|F_g = 3\rangle \rightarrow |F_e = 4\rangle$ . Attention aux différences d'échelles.



**Figure 2.2.:** Vue schématique du piège magnéto-optique. Les trois faisceaux sont rétro-réfléchis. A leur intersection se trouve le nuage de Césium. Intersection qui correspond aussi au zéro du gradient de champ magnétique généré par les bobines en configuration anti-Helmoltz.

$F_f = 4$ ),  $\Gamma (= 2\pi \cdot 5.234(13) \text{ MHz})$  la largeur naturelle de celle-ci,  $I_s$  l'intensité de saturation de la transition et enfin  $I$ , l'intensité du rayonnement. Notons que cette relation est valable dans la mesure où le désaccord  $\delta_L$  est grand devant la largeur de la transition  $D_2$  du Césium. La périodicité de l'intensité se retrouve alors dans le potentiel  $V = V(X)$  ressenti par les atomes :

$$V(X) = \frac{1}{2} \left( \frac{\hbar\Gamma^2}{\delta_L} \right) \left( \frac{I_0}{I_s} \right) \cos(2k_L X) = V_0 \cos(2k_L X). \quad (2.4)$$

Ainsi, la superposition de deux faisceaux contre-propageants de même fréquence (formant une onde stationnaire) largement désaccordés par rapport à la transition  $D_2$  du Césium, crée un potentiel sinusoïdal sur les atomes. Nous avons fait la moitié du travail, mais nous avons encore un peu de chemin à parcourir avant de retrouver le potentiel du rotateur frappé : cette onde stationnaire n'est pas encore « pulsée ».

Le pulse, pour en donner une définition, est l'allumage suivi de la coupure de l'onde stationnaire. Nous allons modéliser cela par une fonction porte  $\Pi_\tau$  de durée  $\tau$ , définie ainsi :

$$\Pi_\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (2.5)$$

On notera que son intégrale n'est pas normalisée à 1, mais égale à  $\tau$ . Ce choix permet d'introduire de manière formelle la durée finie du pulse à intensité constante. Pulser l'onde stationnaire dans le temps revient alors à multiplier le potentiel  $V(x)$  par un peigne de fonctions portes  $\Pi_\tau$  de période  $T$  :

$$V(X, t') = V_0 \cos(2k_L X) \sum_n \Pi_\tau(t' - nT). \quad (2.6)$$

La dynamique du centre de masse des atomes se retrouve soumise à l'hamiltonien réduit suivant :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + k \cos(\hat{x}) \sum_{n'} \Pi_\alpha(n - n'), \quad (2.7)$$

où l'impulsion et la position s'écrivent en unités réduites  $\hat{p} = \frac{2k_L T}{m} \hat{P}$  et  $\hat{x} = 2k_L \hat{X}$ , le temps devient  $t = t'/T$  et  $k = \frac{8\omega_r T^2}{\hbar} V_0$ . Nous avons introduit  $\omega_r (= 2\pi \cdot 2.06 \text{ kHz})$  qui correspond à l'énergie de recul  $\hbar\omega_r$  de l'atome après absorption (ou émission d'un photon) sur la transition  $D_2$ . Par ailleurs nous avons aussi introduit  $\alpha = \tau/T$ , la durée en unités normalisées du pulse. En définissant une fonction porte  $\tilde{\Pi}_\tau$  normalisé à 1, telle que  $\tilde{\Pi}_\tau = \Pi_\tau/\tau$ ,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + K \cos(\hat{x}) \sum_n \tilde{\Pi}_\alpha(t - n), \quad (2.8)$$

où  $K = \alpha k$  est le paramètre de stochasticité. Pour  $\alpha$  suffisant proche de 0,  $\tilde{\Pi}_\tau \longrightarrow \delta$ , l'hamiltonien s'approxime alors en

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + K \cos(\hat{x}) \sum_n \delta(t - n), \quad (2.9)$$

soit l'hamiltonien du rotateur frappé! L'approximation «  $\tilde{\Pi}_\tau \longrightarrow \delta$  » revient à négliger les effets de la durée finie du pulse, appelés « effets de boîte classique », sur lesquels nous reviendrons en fin de chapitre.

## 2.2.2. Expérimentalement

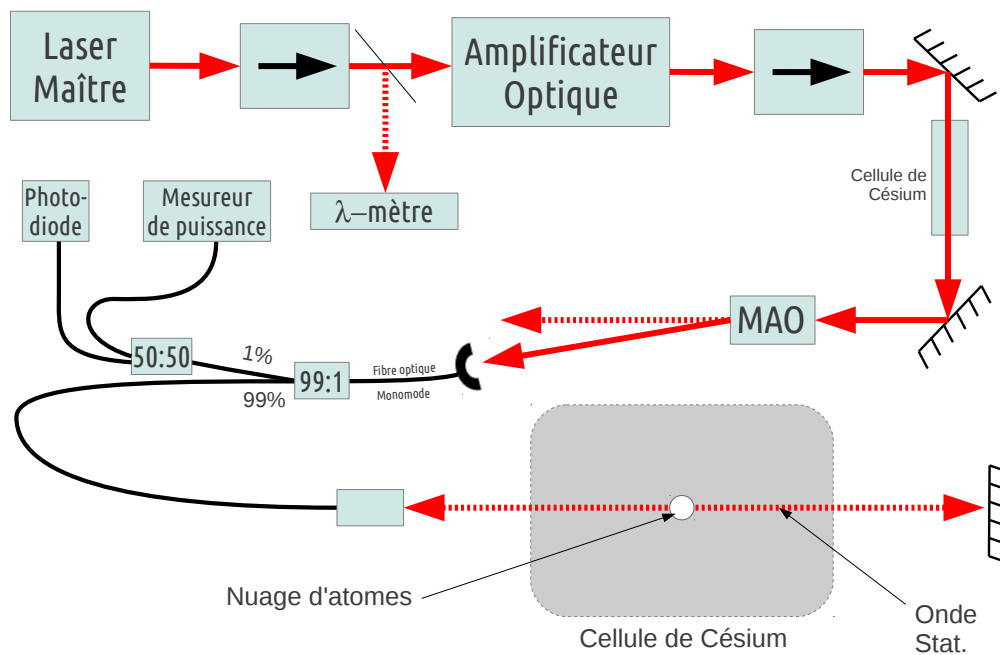
### 2.2.2.1. Onde Stationnaire...

Un schéma de principe est présenté dans la Figure 2.3. Pour obtenir suffisamment de puissance, une configuration *MOPA* (*Master Oscillator Power Amplifier*) est utilisée. Celle-ci consiste en deux lasers. Le premier est appelé « maître », et est généralement peu puissant (quelques dizaines de mW) et fin spectralement. Le second est un amplificateur optique (dit « esclave »), qui comme son nom l'indique, amplifie de manière cohérente le laser maître.

Ce type de montage permet d'allier la finesse spectrale d'une diode en cavité externe ou d'une diode DFB (*Distributed Feed-Back*) à la puissance de l'amplificateur. En sortie de celui-ci, le faisceau passe par un modulateur acoustique (MAO) dont la partie projetée sur le premier ordre de diffraction est injectée dans une fibre optique monomode.

Le modulateur acousto-optique est un cristal de  $TeO_2$  dans lequel des ondes acoustiques sont générées à l'aide d'un piézoélectrique situé sur une de ses extrémités. Leurs amplitudes et leurs périodes sont alors dictées par l'onde RF auquel est soumis ce piézoélectrique. La nature périodique du train d'ondes acoustiques induit une diffraction de Bragg sur le faisceau laser incident. Nous utilisons un modèle optimisé pour les





**Figure 2.3.:** Schéma du banc optique « MOPA », jusqu'au nuage de Césium.

ordres de diffraction  $\pm 1$  (Crystal Technology 3200-124). Ce dernier possède une efficacité selon la documentation technique de 70 %. Dans la pratique nous sommes montés à 80 %. L'intérêt de ce système est double. D'une part, le temps de montée de la puissance optique sur un ordre diffracté est de 10 ns. D'autre part, en contrôlant la puissance RF, l'intensité est contrôlée sur l'ordre choisi (+1 dans notre cas) et injectée dans la fibre optique.

Il faut noter qu'au préalable le faisceau a subi deux types de filtrage. Le premier filtre est une cellule de Césium. Celle-ci absorbe la composante en résonance avec le Césium issue de l'émission spontanée des lasers maître et esclave. Le deuxième filtrage est spatial, et est accompli par une fibre optique monomode : en injectant le faisceau dans celle-ci, seule la composante spatiale  $TEM_{00}$  du champ électrostatique est couplée dans la fibre. Ainsi en sortant de celle-ci, le profil du faisceau vu par le nuage d'atomes est parfaitement gaussien.

Une fois dans la fibre, on prélève 1% de la puissance optique pour faire deux mesures. La première, à l'aide d'un puissance-mètre, permet de remonter à la puissance optique sur les atomes. La seconde est une mesure temporelle avec une photodiode rapide d'une bande passante de 150 MHz, grâce à laquelle nous pouvons faire des contrôles tels que l'efficacité de l'injection dans la fibre optique ou les temps de montée des « pulses ».

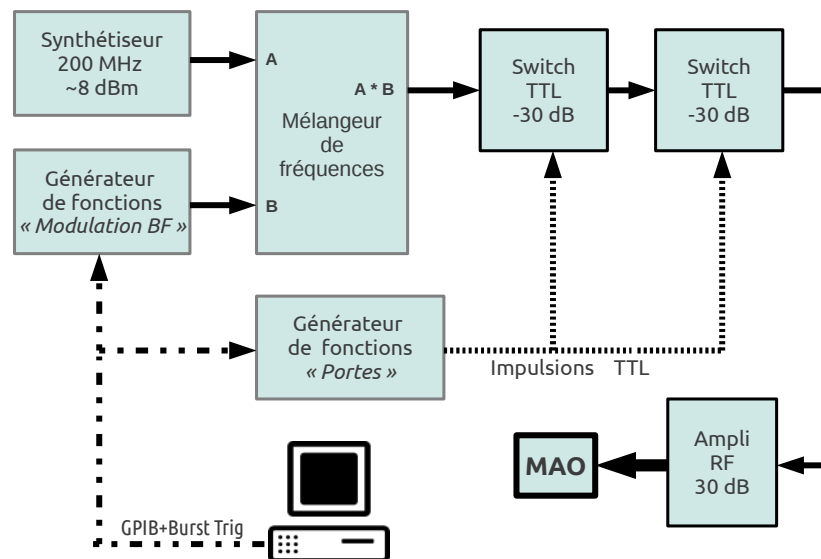
En sortie de fibre, le faisceau est collimaté sur le nuage d'atomes puis rétro-réfléchi sur ce dernier, créant ainsi l'onde stationnaire, dont nous contrôlons l'intensité avec la puissance RF sur le modulateur acousto-optique.

### 2.2.2.2. ...Pulsée

Créer une onde stationnaire n'est pas suffisant pour une réalisation expérimentale du rotateur frappé, il faut maintenant pouvoir l'allumer et l'éteindre avec des temps de commutation courts devant les durées typiques de pulses. Il faut de même pouvoir moduler la puissance diffractée (et donc injectée dans la fibre) de manière précise.

Un schéma de principe est proposé dans la Figure 2.4. Un signal RF à 200 MHz d'une puissance de  $\sim 8$  dBm est généré par un synthétiseur. Pour moduler lentement l'amplitude de celle-ci, on la mélange à une tension basse fréquence  $V_{mod}$  (entre 0 et 100 kHz, selon le type de rotateur réalisé) générée par un générateur basse fréquence (GBF, aussi appelé générateur de fonctions) Agilent 33220A. En sortie de ce mélange : l'onde RF possède une enveloppe lentement variable. Sont ensuite branchés deux commutateurs rapides (dits « switches ») dont le niveau d'atténuation total est de 60 dB et le temps de commutation est inférieur à 10 ns. Ceux-ci sont contrôlés par un train de d'impulsions TTL générés par un second GBF Agilent 33220A. L'onde RF ainsi conditionnée est alors amplifiée de +30 dB. Ainsi, selon la valeur de  $V_{mod}$  le modulateur acoustique voit jusqu'à 33 dBm, soit 2 W.

Nous avons donc deux GBF : l'un pour la modulation lente d'amplitude, l'autre pour la commutation rapide. Ceux-ci sont pilotés par norme GPIB (*General Purpose Interface Bus*) grâce à un ordinateur se chargeant de transmettre la fonction de modulation  $V_{mod}(t)$  et les paramètres de la séquence de pulses, tels que leur nombre, leur durée et leur fréquence. Le déclenchement des deux GBF est synchronisé sur une porte TTL issue de l'ordinateur, via les entrées dites « *Burst* » de ces deux derniers.

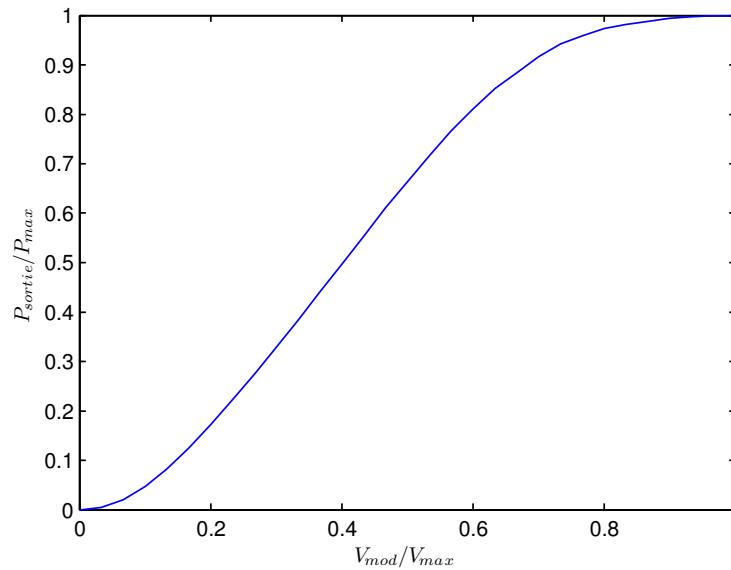


**Figure 2.4.:** Montage radio-fréquence du Modulateur Acousto-Optique (MAO).

**Calibrage de la modulation d'amplitude** On contrôle l'amplitude du pulse par une commande en tension  $V_{mod}(t)$  sur un mélangeur de fréquences. La puissance optique de l'onde stationnaire en sortie de fibre  $P_{sortie}$  n'est pas proportionnelle à la tension

de modulation  $V_{mod}$  insérée sur l'autre voie du mélangeur. Cette non-linéarité a deux causes principales : le mélangeur qui est un élément passif à base de diodes et le modulateur acousto-optique dont la diffraction sur l'ordre +1 n'est pas strictement proportionnelle à la puissance RF reçu.

Il faut établir une fonction de transfert  $T$  telle que  $P_{sortie} = T(V_{mod})$ . Pour calculer une telle fonction nous soumettons le mélangeur de fréquence à une série de tensions différentes et nous mesurons la puissance en sortie d'une des voies 0.5% de la fibre optique (voir Figure 2.5). Pour compléter, une interpolation linéaire est faite entre chacun de ces points. Étant donné le caractère régulier de cette courbe de calibration, des interpolations de types *spline* ou variantes plus complexes, ne sont pas nécessaires.



**Figure 2.5.:** Courbe de calibration typique. On représente la puissance en sortie de fibre optique  $P_{sortie}$  en fonction de la tension d'entrée sur le mélangeur  $V_{mod}$ . Le caractère monotone de cette courbe nous assure qu'il existe toujours une fonction inverse.

Au final, la fonction de modulation programmée dans le GBF est

$$V_{mod}(t) = V_{max} \cdot T^{-1} \left[ \frac{P_{max}}{(1 + \varepsilon)} (1 + \varepsilon \cos \omega_2 t \cos \omega_3 t) \right].$$

### 2.3. Vélocimétrie Raman

Une fois le train de pulses appliqué sur un nuage d'atomes suffisamment froid pour observer la dynamique quantique, nous avons besoin de mesurer sa distribution en impulsion. Pour cela il existe plusieurs techniques. La première, la plus courante, est une détection photographique : après avoir laissé diffuser dans l'espace le nuage, on le fait rayonner avec un faisceau résonant, une caméra CCD capte alors ce rayonnement et permet de remonter, via une dé-convolution, à la distribution en impulsion. La

seconde technique est la détection par temps de vol. Celle-ci a été historiquement introduite pour pouvoir accéder à la température du nuage une fois le piège coupé. Un faisceau sonde résonant est situé en aval du piège (quelques centimètres plus bas). Lors du passage des atomes dans celui-ci, ils absorbent une partie de l'intensité du faisceau. Celle-ci est mesurée par une photodiode qui donne, moyennant un peu d'analyse [57], la distribution en impulsion du nuage originel.

La première technique présentée, en apparence simple, a le désavantage de nécessiter un traitement d'image lourd pour pouvoir remonter à la distribution en impulsion. La seconde quant à elle, est limitée en résolution par la taille initial du nuage, l'épaisseur du faisceau sonde et la distance de la sonde au nuage. De plus, les pulses sont appliqués perpendiculairement au champ de gravitation terrestre. Leurs effets sur le nuage ne peuvent donc pas être perçus par la sonde.

Nous allons ici présenter une alternative à ces deux méthodes : la vélocimétrie Raman [58, 59], dont les principaux éléments sont donnés ci-dessous.

### 2.3.1. Principe

La vélocimétrie Raman est une transition stimulée à deux photons entre les niveaux hyperfins  $|F_f = 4\rangle$  et  $|F_f = 3\rangle$  du Césium, sélective en vitesse. Pour la réaliser, on applique de manière contre-propageante, deux faisceaux ( $R1$  et  $R2$ ) désaccordés entre eux d'une fréquence  $\omega_{mod} = \omega_{R1} - \omega_{R2}$  (voir Figure 2.6). Par ailleurs ces deux faisceaux sont fortement désaccordés par rapport à la transition  $D_2$ , minimisant ainsi la résonance des atomes avec celle-ci. Pour notre expérience ce désaccord  $\Delta$  est de l'ordre de 230 GHz.

Pour cette transition stimulée, les équations de la conservation de l'énergie et de la quantité d'impulsion s'écrivent (sous réserve de champ magnétique nul<sup>1</sup>) :

$$E_4 + \hbar\omega_{R1} + \frac{1}{2}m\mathbf{v}_f^2 = E_3 + \hbar\omega_{R2} + \frac{1}{2}m\mathbf{v}_i^2 \quad (2.10)$$

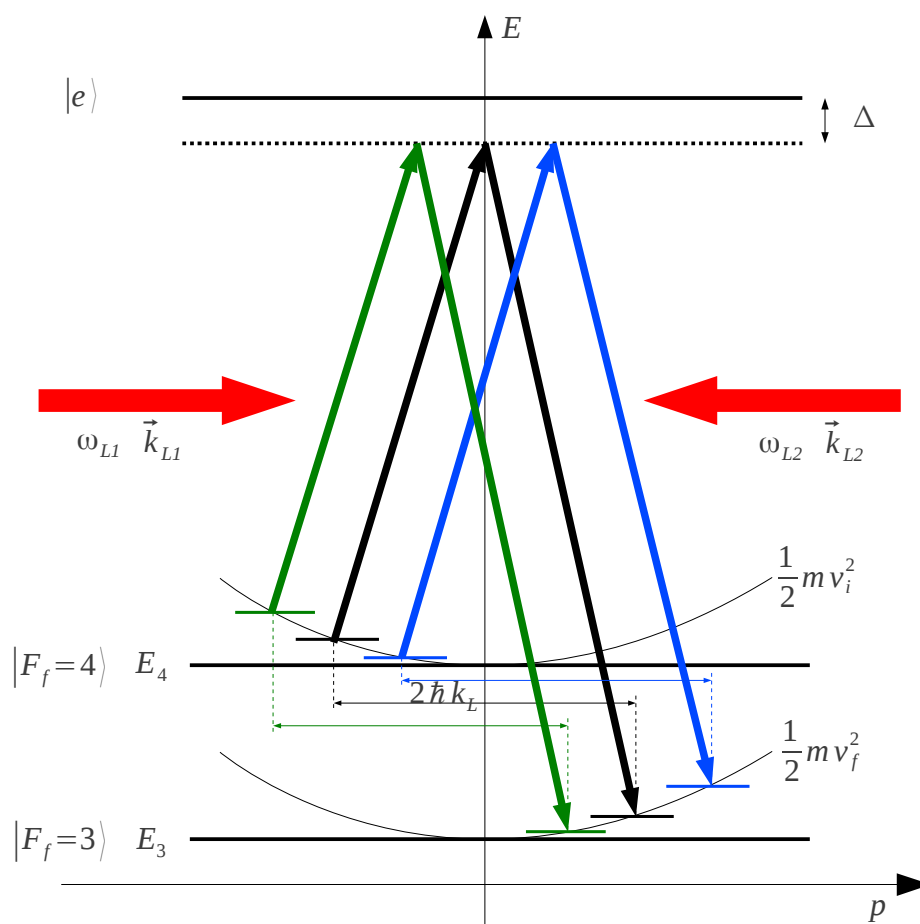
$$m\mathbf{v}_i + \hbar\mathbf{k}_{R1} = m\mathbf{v}_f + \hbar\mathbf{k}_{R2}, \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{k}_{R1,R2}$  sont les impulsions des photons issus de chaque laser,  $E_3$  et  $E_4$  sont respectivement les énergies des sous-niveaux hyper-fins  $|F_f = 3\rangle$  et  $|F_f = 4\rangle$  et  $\mathbf{v}_{i,f}$  la vitesse des atomes avant et après la transition. La quantité pour laquelle nous souhaitons trouver une relation est bien entendue  $\mathbf{v}_i$ .

Posons  $\delta = \omega_{mod} - \omega_{HF}$ , où  $\hbar\omega_{HF} = E_4 - E_3$  est la différence d'énergie entre les deux niveaux hyperfins du Césium. Un peu d'algèbre sur les équations de conservation nous

---

1. Avant de continuer, notons que tous les calculs ont été effectués sous la condition que les atomes ne sont soumis à aucun champ magnétique, dont la présence lèverait la dégénérescence des niveaux hyperfins  $|F_f = 3\rangle$  et  $|F_f = 4\rangle$ , et élargirait ainsi la condition de résonance : plusieurs vitesses  $v_i$  correspondraient à un unique  $\delta$ . Pour annuler cet effet néfaste, on utilise une paire de faisceaux co-propageants, dont la condition de résonance avec les atomes n'est plus sensible à la vitesse, mais seulement à la dégénérescence par effet Zeeman. On minimise alors la largeur du spectre acquis dans cette configuration en agissant sur les bobines de compensation du champ magnétique.



**Figure 2.6.:** Transition Raman stimulée vélocimétrique. Nous illustrons ici la dépendance de la vitesse  $v_i$  en fonction de la différence d'énergie entre les deux faisceaux Raman et l'énergie de la transition hyper-fine, autrement dit la quantité  $\delta = \omega_{R2} - \omega_{R1} - \omega_{HF}$ . En noir la transition stimulée pour  $\delta = 0$ , en vert  $\delta > 0$  et en bleu  $\delta < 0$ .

fournit :

$$\delta = (\mathbf{k}_{R2} - \mathbf{k}_{R1}) \cdot (\mathbf{v}_i - \frac{\hbar}{2m}(\mathbf{k}_{R1} - \mathbf{k}_{R2})). \quad (2.12)$$

En posant  $k_R = \|\mathbf{k}_{R1}\| \simeq \|\mathbf{k}_{R2}\|$ , et du fait que les deux faisceaux sont contre-propageants, on a alors :

$$\delta = -2k_R \left( v_i + \frac{\hbar k_R}{m} \right). \quad (2.13)$$

Autrement dit, nous avons établi une condition de résonance : seuls les atomes dans une classe de vitesse  $v_i$  sont susceptibles d'effectuer une transition stimulée pour  $\omega_{mod} = \omega_{HF} + \delta$ . Par exemple, pour  $\delta = 0$ , on a  $v_i = -v_R = -\hbar k_R/m$ , où  $v_R$  est la vitesse de recul liée à l'absorption (ou l'émission) d'un photon. On notera aussi qu'au cours de cette transition une impulsion valant  $2\hbar k_R$  est transférée à l'atome, soit, l'équivalent de deux vitesses de recul  $v_r$ .

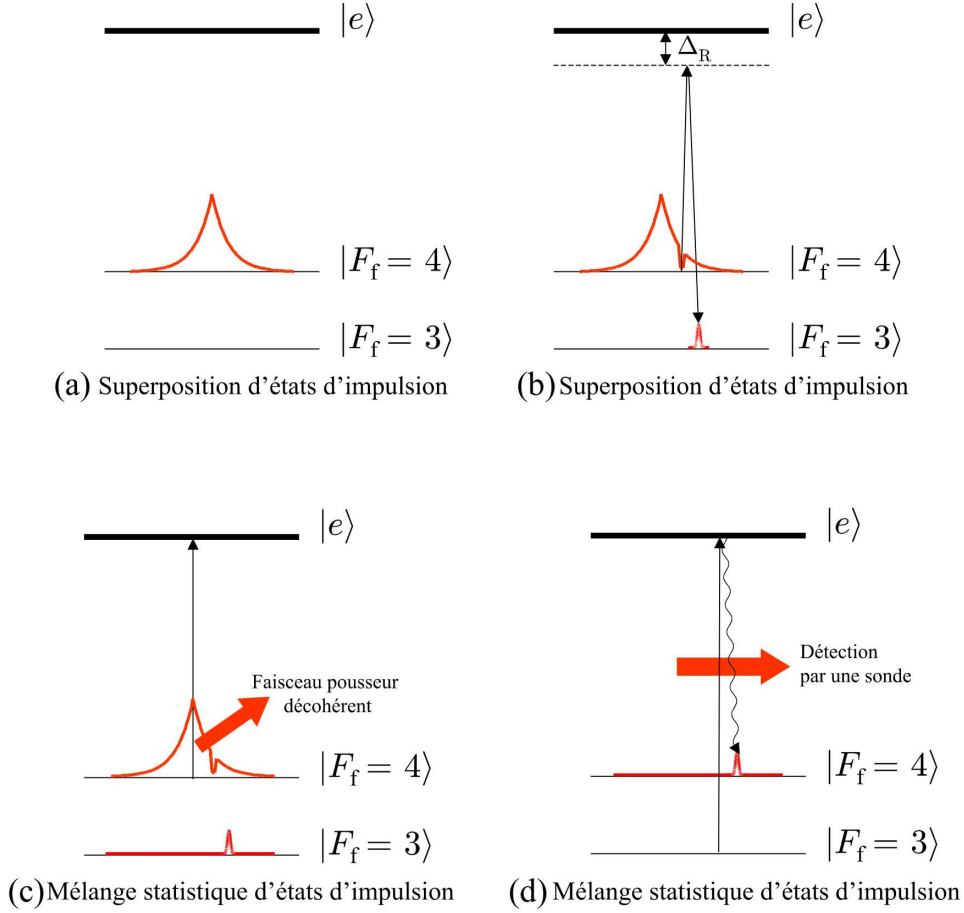
Nous avons donc amené une partie des atomes sur l'état  $|F_f = 3\rangle$ . A l'aide d'un faisceau dit « pousseur » à résonance avec les atomes restés sur  $|F_f = 4\rangle$ , ceux-ci sont expulsés de la zone de détection. Un allumage bref du repompeur ramène les atomes restant de  $|F_f = 3\rangle$  dans  $|F_f = 4\rangle$ . La sonde se charge de les détecter, et donne une valeur proportionnelle (via l'intégrale du temps de vol) au nombre d'atomes  $\Pi(v_i)$  dans la classe de vitesse  $v_i$ .

Pour une expérience donnée, nous ne pouvons mesurer qu'une population  $\Pi(v_i)$ , du fait que toute mesure brise la cohérence du système, (voir Figure 2.7). Pour en obtenir d'autres, il faut refaire la séquence « PMO + Pulses + Raman ». En itérant ce procédé suffisamment de fois on peut remonter à la distribution en impulsion du nuage à la sortie de la séquence de kicks.

### 2.3.2. Expérimentalement

Pour réaliser une vélocimétrie Raman nous avons besoin de deux faisceaux, très désaccordés de la transition ( $\sim 200$  GHz), et désaccordés entre-eux de  $\omega_{mod}$ . Ce dernier désaccord doit être extrêmement bien contrôlé (obtenir une précision de l'ordre de la vitesse de recul  $v_r$  nécessite une séparation en fréquence des deux bras dont l'incertitude est de l'ordre de 8 kHz), il n'est donc pas possible de se servir de sources indépendantes. Il y a deux raisons à cela. La première est qu'il est très difficile de maîtriser le désaccord des deux lasers à quelques kHz près. La seconde raison est que la largeur spectrale va de quelques centaines de kHz pour les diodes en cavité externes à quelques MHz pour les diodes DFB, soit bien plus large que l'énergie de recul  $\omega_r$ . Nous détaillons ici, la méthode utilisée pour la génération de ces deux faisceaux (Figure 2.8).

Un laser maître, dont on prélève une partie pour faire une mesure de longueur d'onde, est injecté dans un modulateur de phase fibré. Celui-ci a une propriété simple : l'indice du milieu dépend linéairement de la tension appliquée à ses bornes. La lumière en sortie n'aura pas la même phase selon la tension appliquée. En modulant cette dernière



**Figure 2.7.:** Schéma de principe de la séquence de détection vélocimétrique Raman. Une application des faisceaux Raman transfère de manière sélective en vitesse une partie des atomes sur l'état  $|F_f = 3\rangle$ , ceux restant sont expulsés de la zone de détection à l'aide du pousseur. On repompe dans l'état  $|F_f = 4\rangle$  les états ayant subi une transition Raman, dont on mesure le nombre à l'aide de la sonde.

à une fréquence  $\omega_{mod}$ , on a un champ électrique en sortie  $E_{mod}(t)$  fonction du champ électrique d'entrée  $E_0 e^{-i\omega_0 t}$  :

$$E_{mod}(t) = E_0 e^{-i(\omega_0 t - \alpha \sin(\omega_{mod} t))}, \quad (2.14)$$

où  $\omega_0$  est la fréquence du laser maître,  $\omega_{mod}$  devient la fréquence de modulation de la phase et  $\alpha$  l'amplitude de celle-ci.  $E_0$

En y injectant l'expansion de JACOBI-ANGER

$$e^{i\alpha \sin(\omega_{mod} t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) e^{in\omega_{mod} t}, \quad (2.15)$$

où  $J_n$  sont des fonctions de BESSEL du premier type, on trouve

$$E_{mod}(t) = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) e^{-i(\omega_0 - n\omega_{mod})t}. \quad (2.16)$$

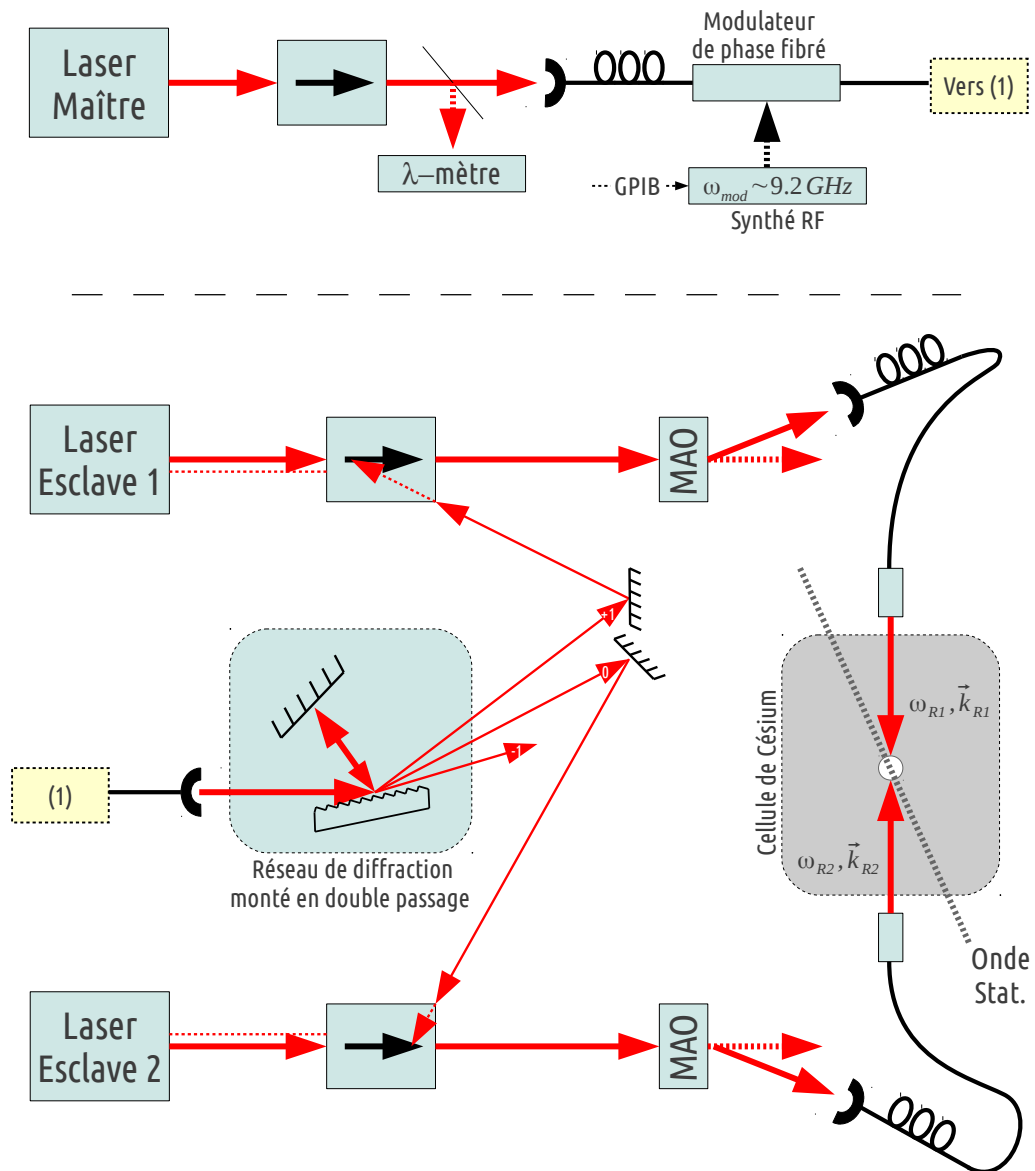


Figure 2.8.: Schéma du montage Raman

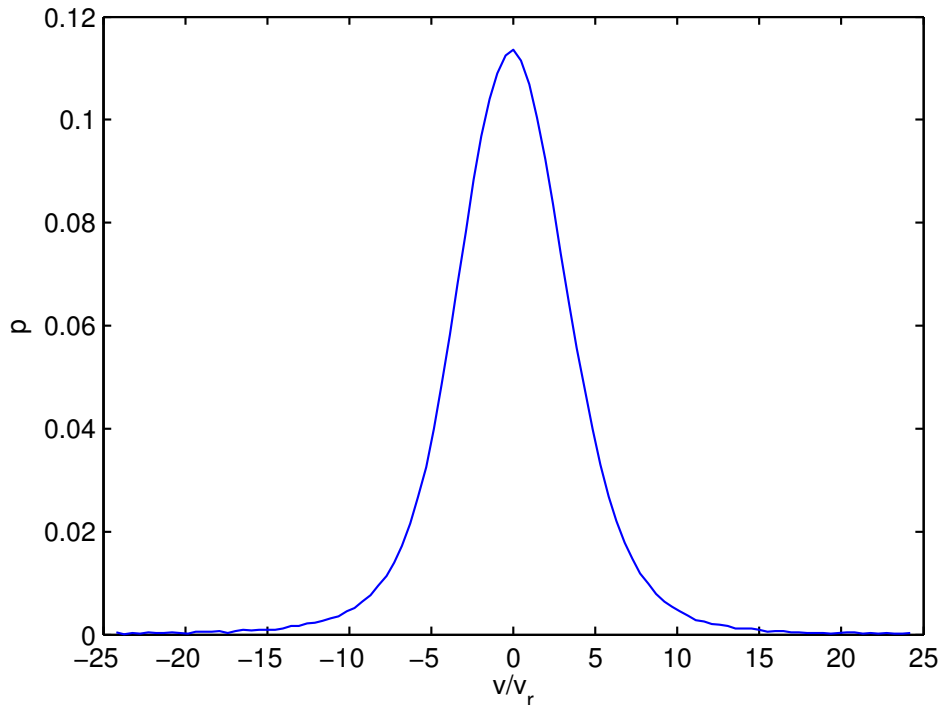


Nous avons donc créé des bandes latérales autour de la fréquence centrale  $\omega_0$ . Pour une valeur de  $\alpha \simeq 1.5$ , on peut négliger les ordres  $|n| \geq 2$ . On réduit alors à deux le nombre de bandes latérales, l'une ayant une fréquence  $\omega_0 - \omega_{mod}$  l'autre ayant  $\omega_0 + \omega_{mod}$ .

Cette fréquence  $\omega_{mod}/2\pi$  ( $\sim 9.2$  GHz) est fournie par un signal RF en sortie d'un synthétiseur HP ESG-1000A, contrôlé au dixième de hertz près. En sortie de fibre nous séparons spatialement ces 3 composantes à l'aide d'un réseau de diffraction monté en double passage. Nous prélevons alors deux ordres séparés de  $\omega_{mod}$  (typiquement 0 et +1), et les injectons chacun dans un laser esclave.

En sortie de ceux-ci, deux faisceaux dont les fréquences sont maintenant très précisément séparées de  $\omega_{mod}$ , passent par deux modulateurs acousto-optiques qui se chargent d'injecter le premier ordre de diffraction dans deux fibres optiques. Celles-ci sont alors amenées de part et d'autre de la cellule de Césium, et les faisceaux collimatés de manière contre-propagante sur le nuage.

On peut acquérir une distribution de vitesse à l'aide du dispositif Raman. Chaque mesure sur une classe de vitesse brisant la cohérence du système, il faut réitérer toute l'expérience pour chaque classe de vitesse. On construit alors la distribution de vitesse associée au nuage. Nous en présentons une en sortie de la phase de refroidissement sur la Figure 2.9. La température initiale de nuage  $T_i$  pouvant en être déduite, on trouve  $T_i = 3.2 \mu\text{K}$ . La même méthode sera utilisée pour les distributions de vitesse en sortie d'une phase de pulses.



**Figure 2.9.:** Distribution de vitesse à la fin de la phase de piégeage, acquise via le dispositif Raman. Le calcul du moment d'ordre 2,  $\langle v_r^2 \rangle \simeq 16v_r^2$ , nous permet de remonter à la température initiale  $T_i \simeq 3.2 \mu\text{K}$ .

## 2.4. Caractérisation, limitations et améliorations apportés au dispositif expérimental

L'observation de la transition d'ANDERSON est une tâche complexe en soit. Démontrer l'universalité de celle-ci consiste à franchir la transition d'ANDERSON pour plusieurs jeu de paramètres microscopiques  $(\omega_2, \omega_3, \vec{k})$  et de « trajectoires » différentes dans l'espace des paramètres  $(K, \varepsilon)$ .

Il nous faut donc être en mesure de refaire l'expérience [14, 46], autant de fois que de jeux de paramètres et montrer à chaque fois que l'exposant critique est sensiblement le même. L'expérience de J. CHABÉ étant déjà très délicate, en refaire une dizaine n'est simplement pas concevable. Nous avons donc beaucoup travaillé à l'automatisation et à la stabilité du dispositif expérimental, en effet, l'observation de l'universalité nécessite une stabilité supérieure à 24 heures (le temps nécessaire pour observer une transition d'ANDERSON avec le rotateur frappé et pouvoir en extraire un exposant critique digne de foi).

De plus, l'observation d'une transition d'ANDERSON nécessite une cohérence temporelle des atomes accrue. Nous avons cherché à améliorer celle-ci notamment en désaccordant davantage le faisceaux de l'onde stationnaire tout en augmentant sa puissance.

### 2.4.1. Piège magnéto-optique

#### 2.4.1.1. Laser Repompeur

Dans son ensemble le piège magnéto-optique n'a été que très peu modifié. Une des améliorations apportées est le changement du laser repompeur. Celui-ci était précédemment une diode en cavité externe. Suite à des soucis de stabilité, nous l'avons remplacé par une diode DFB (*Distributed FeedBack*) EagleYard Photonics de référence EYP-DFB-0852-00150. Celle-ci a l'avantage de ne pas avoir de saut de mode et une sensibilité aux vibrations acoustiques très réduite. Cependant leur finesse spectrale est plus grande (100 kHz pour une diode en cavité externe, contre quelques MHz pour cette DFB). Si cette caractéristique n'est pas gênante pour un repompeur, elle est en revanche néfaste pour un refroidissement. Cependant, les lasers maître et esclave du piégeage étant très stables, il n'y a pas eu lieu de les changer.

#### 2.4.1.2. Obturateurs mécaniques

Pour assurer une coupure parfaite du piégeage, nous utilisons un modulateur acousto-optique suivi d'un obturateur mécanique. Le premier a pour but de moduler en intensité le faisceau piège, et le second est de couper toute diffusion résiduelle de la lumière du MAO lorsque le piégeage doit être éteint. Ce faisceau, proche de la résonance avec les atomes, induirait une décohérence du système et rendrait l'observation de la localisation dynamique impossible. L'obturateur corrige ce phénomène. Aussi monté sur le repompeur, il permet la coupure de celui-ci.

Cet obturateur possède malheureusement quelques défauts. Le premier, mais pas le plus important, est un temps de coupure important (quelques centaines de microsecondes). Le second est une vibration induite sur la table. Cette dernière a deux conséquences néfastes, la première est de faire varier la position de réseau de diffraction à l'intérieur de la diode en cavité externe. L'asservissement de celle-ci n'étant pas instantané un petit délai est nécessaire pour qu'elle retrouve son point de fonctionnement optimal. L'autre conséquence, et probablement la plus pernicieuse, est la vibration induite sur le miroir de rétro-réflexion de l'onde stationnaire par l'obturateur. La localisation dynamique s'observe seulement si les quasi-impulsions  $\beta$  définies au chapitre précédent se conservent aux cours des kicks. Un déplacement de ce miroir induit un déphasage aléatoire du potentiel sinusoïdal, ce qui brise la périodicité temporelle du système, et de fait, la localisation dynamique<sup>2</sup>.

Ainsi nous avons remplacé ces obturateurs par des disques-durs modifiés. En partant du constat qu'une tête de lecture de disque dur est optimisée pour se déplacer vite, nous avons modifié ceux-ci pour en faire des obturateurs en asservissant la bobine sur un signal TTL. Le lecteur curieux en trouvera une explication plus détaillée dans la référence [60].

Les avantages de ceux-ci sont triples : vitesses d'obturation plus rapides ( $\sim 20 \mu\text{s}$ ), répétabilité des temps des coupures accrue et vibrations acoustiques induites estimées 20 fois plus faibles. Ce dernier permettant a priori une réduction du phénomène susmentionné.

### 2.4.2. Dispositif vélocimétrique Raman.

Précédemment, le laser maître était une diode en cavité externe, asservie sur une raie d'un résonateur PÉROT-FABRY. Ce dispositif, malgré une bonne finesse spectrale (un centaine de kHz), n'est pas stable sur des temps supérieurs à la dizaine d'heures, bien en deçà du temps requis à la mesure d'une transition d'ANDERSON. Cette instabilité a plusieurs conséquences, mais une seule cause réelle : les variations thermiques sur le résonateur qui décalent la fréquence d'asservissement du laser maître et à terme, causent un saut de mode du maître ou d'un des esclaves.

Le laser maître a donc été remplacé au profit d'une diode DFB (*Distributed FeedBack*), dont la fréquence est directement reliée à la température de la diode. L'asservissement de celle-ci étant très stable, les lasers esclaves ne sont plus soumis au risque de saut de mode. La durée de stabilité du Raman est allègrement propulsée à 24 heures (et très souvent plus) avec ce simple changement, contre quelques heures précédemment.

### 2.4.3. Onde Stationnaire

Cette dernière étant centrale au phénomène de localisation dynamique, nous avons beaucoup travaillé à l'amélioration de ses multiples facettes : sa puissance, son désaccord et la caractérisation des kicks.

---

2. Les états FLOQUET ont alors, de kick à kick, un taux de recouvrement non-nul, générant une diffusion dans l'espace des impulsions. Même faible, celle-ci peut perturber l'observation de la localisation dynamique.

### 2.4.3.1. Puissance et décohérence

En appliquant une onde stationnaire sur le nuage d'atomes, celui-ci est soumis à deux phénomènes : le potentiel sinusoïdal ressenti et la décohérence induite par fluorescence. Si le premier justifie l'onde stationnaire dans notre expérience, la décohérence est un phénomène que nous souhaitons minimiser. Là où l'interaction de l'onde stationnaire avec les atomes est un processus cohérent à deux photons, l'émission spontanée consiste en l'absorption puis l'émission dans une direction aléatoire d'un photon. En effectuant un tel processus, il se projette dans un état  $|p\rangle$  aléatoire (réduction du paquet d'onde) et perd la superposition d'états nécessaire à l'observation de la localisation dynamique. Ce phénomène se traduit par une diffusion dans l'espace des impulsions brisant le gel de l'énergie cinétique caractéristique de la localisation dynamique. Le taux de fluorescence  $\gamma_f$  peut s'écrire, pour un désaccord  $\delta$  grand devant la largeur naturelle de la transition  $\Gamma$ , comme

$$\gamma_f \sim \frac{I}{\delta^2}, \quad (2.17)$$

où  $I$  est l'intensité de l'onde stationnaire. Le désaccord est dans ce type d'expérience de l'ordre de la dizaine de GHz. La profondeur du potentiel  $V_0$  vu par les atomes s'écrit

$$V_0 \sim \frac{I}{\delta}. \quad (2.18)$$

Il est bien entendu possible d'augmenter cette profondeur en réduisant le désaccord du laser maître de l'onde stationnaire, mais on s'expose alors à des taux d'émission accrus. La seule façon d'augmenter la profondeur de ces puits est d'avoir davantage d'intensité lumineuse sur les atomes.

Le premier élément remplacé sur ce dispositif est le laser maître. De la même façon que le laser maître du Raman, celui-ci était asservi sur un résonateur PÉROT-FABRY, dont la diffusion des pics de résonance dans le temps faisait sauter de mode le laser maître, brisant tout contrôle sur le désaccord  $\delta$  et réduisant souvent à néant l'injection dans l'esclave.

Le remplacement au profit d'une diode DFB permet de conserver dans le temps un désaccord stable, et permet aussi un contrôle très précis de ce dernier grâce à la dépendance en température de la longueur d'onde. La plus grande puissance optique de ce type de diode (150 mW contre 15-20 mW pour la cavité externe) nous permet d'injecter l'amplificateur optique dans son régime de saturation, là où sa puissance en sortie est maximale. De plus, cette grande puissance autorise l'injection simultanée de deux amplificateurs optiques, dont l'utilité se révélera lorsque nous aborderons le montage en vertical. Ce changement de diode, ne nous permet pas *in-fine* de gagner beaucoup en puissance à la sortie de la fibre, mais sa stabilité géométrique (injection dans l'esclave) et temporelle (longueur d'onde en sortie très stable) nous permet de gagner en stabilité de manière très notable.

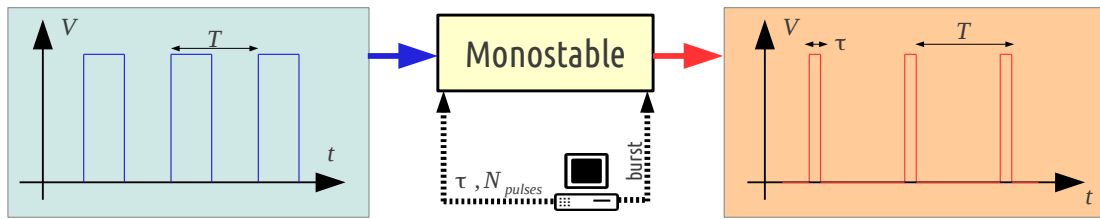
Pour obtenir un gain de puissance brut, il nous faut changer l'amplificateur optique au profit d'un modèle 1 W (contre 500mW précédemment) de chez EagleYard Photonics, le EYP-TPA-0850-01000. Ce type de diode étant fourni dans un format dit

« C-mount » (autrement dit : la diode est nue), il m'a fallu réaliser l'ensemble du conditionnement de la diode. Nous y avons apporté quelques nouveautés. Dans un souci de sécurité et de sauvegarde de la diode, nous avons couplé l'arrivée d'eau, servant à dissiper la chaleur du Pelletier, à l'alimentation en courant de ce dernier. Nous avons aussi remplacé les alimentations en courant de la diode et du Pelletier, conçues et réalisées en interne, par un système modulaire Thorlabs PRO8000.

En sortie de ce bloc nous avons eu la bonne surprise de mesurer une puissance de 1420 mW, soit près du triple. Au final ces améliorations nous ont permis d'effectuer les transitions d'ANDERSON avec un détuning confortable de 26 GHz, au lieu des 7.3 GHz précédents [14], avec une puissance vue par les atomes en sortie de fibre de 400 mW. Ce qui nous donne un taux de décohérence par fluorescence quatre fois moindre, estimé à 0.01 % par pulse.

### 2.4.3.2. Caractérisation en temps du train de pulses

Au cours de cette thèse nous avons aussi été amené à améliorer le système RF en charge des pulses. Précédemment, celui-ci était construit sur un monostable (voir Figure 2.10). Ce type de montage fut choisi à cause des limitations des GBF d'ancienne génération (Agilent 33120A), dont le rapport cyclique ne pouvait être inférieur à 10%.



**Figure 2.10.:** Principe d'un monostable. On soumet un signal de synchronisation TTL de période  $T$  à celui-ci, qui en sortie fournit un train d'impulsion dont le nombre  $N_{pulses}$  et la largeur  $\tau$  sont commandés par l'ordinateur.

Ce montage, du fait de son obsolescence et de ses défauts, a été remplacé au profit d'un générateur Agilent 33220A, dont les rapports cycliques possibles étaient suffisamment faibles pour garantir un contrôle adéquat sur les impulsions. On récupère ainsi directement le train d'impulsions en sortie du générateur sans passer par un monostable.

Une durée de pulse mal contrôlée, implique un bruit sur la valeur de  $K$  ressentie par les atomes. Un tel bruit n'est pas favorable à la localisation dynamique. Nous avons donc caractérisé plusieurs valeurs pertinentes afin de vérifier que le nouveau système RF améliorerait bien la qualité des pulses. L'ensemble des mesures ont été effectuées avec des pulses cadencés à 50 kHz, et d'une durée de 800 ns, par série de 1000 kicks. Les statistiques ont été effectuées à l'aide d'un oscilloscope LeCroy WaveRunner 6000A, dont la bande passante est de 2 GHz.

On commence ainsi par une analyse statistique de la qualité des pulses TTL en sortie du système monostable (Tableau 2.1). La première chose que l'on constate est que

les pulses sont plus longs que leur consigne. Ceux-ci sont à 827.46 ns au lieu de 800 ns (ce qui se répercute sur le rapport cyclique). De plus, les temps de montée et de descente sont relativement longs, leur somme représentant 50 ns, soit environ 7% du pulse. L'amplitude est quant à elle normale et correspond à un signal TTL adaptée 50  $\Omega$ .

	Largeur	Rapport cyclique	Tps. de montée	Tps. de chute	Amplitude
Moyenne	827.46 ns	4.13 %	26.78 ns	23.47 ns	2.30 V
Ecart-Type	1.69 ns	8.4 m%	999 ps	1.5 ns	121 $\mu$ V
Échantillons	11000	11000	11000	11000	60

**Tableau 2.1.:** Statistiques de train de pulses TTL à la sortie de l'ancien générateur de pulses basé sur le système monostable.

Pour constater une amélioration de la qualité du train de pulses avec le générateur de fonction Agilent 33220A, il nous faut ré-itérer la même démarche (Tableau 2.2 et Figure 2.11). Les améliorations sont immédiates. La largeur des pulses correspond bien à la consigne. Les variations de celle-ci sont deux ordres de grandeur plus faible que précédemment. Les temps de montée et de descente ont perdu un facteur 2 dans la foulée.

	Largeur	Rapport cyclique	Tps. de montée	Tps de chute	Amplitude
Moyenne	799.6677 ns	3.9983 %	12.438 ns	11.841 ns	2.41 V
Ecart-Type	296.3 ps	1.5 m%	744.3 ps	725.6 ps	84 $\mu$ V
Échantillons	1000000	1000000	1000000	1000000	1000

**Tableau 2.2.:** Statistiques de train de pulses TTL à la sortie du générateur de fonction Agilent 33220A.

Pour conclure, regardons la statistique des pulses en sortie de fibre optique (Figure 2.11 et Tableau 2.3).

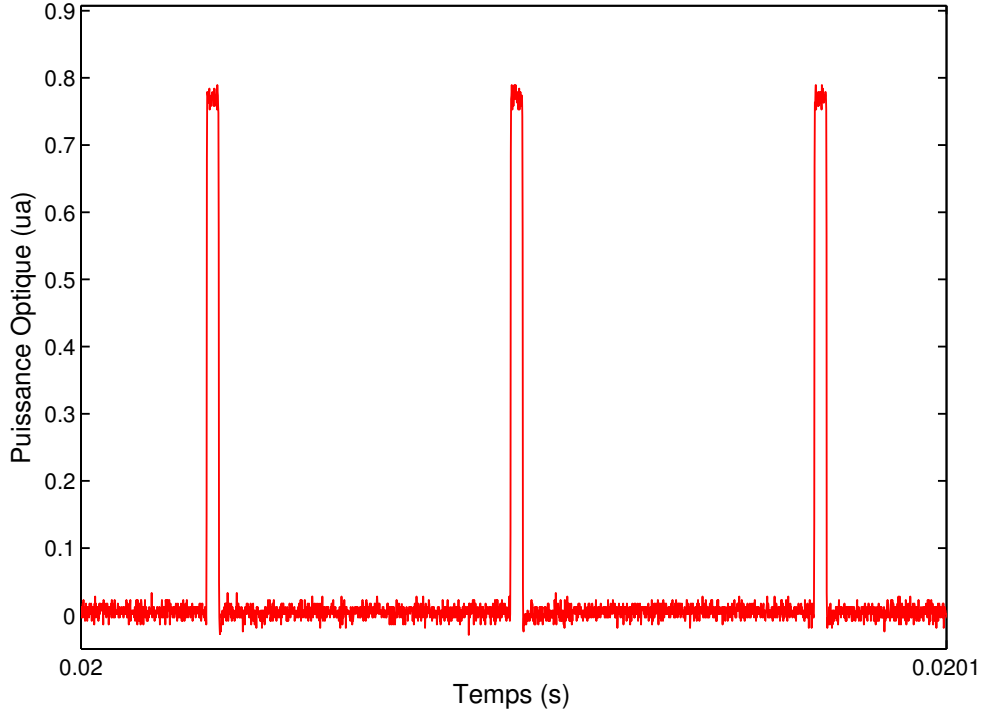
	Largeur	Amplitude	Tps. de montée	Période
Moyenne	797.517 ns	45.14 mV	14.602 ns	20.0000 $\mu$ s
Ecart-Type	215.49 ps	76.2 $\mu$ V	414.56 ps	175 ps
Échantillons	230000	230000	230000	230000

**Tableau 2.3.:** Statistiques du signal optique en sortie de fibre. A noter que le temps de montée ici, n'est pas véritablement lié au temps de montée du pulse TTL, mais plutôt aux caractéristiques techniques du modulateur acousto-optique et des commutateurs RF.

Les performances temporelles des kicks ont bien été améliorées. On peut ainsi faire l'assertion que le bruit induit sur  $K$  par des durée aléatoire de pulses est minimal et aborder sereinement la transition d'ANDERSON.

### 2.4.3.3. Boîte classique

Nous avons montré dans la sous-section 2.2.1, que le paramètre de stochasticité se comportait en  $K \sim V_0\alpha$  (où  $\alpha$  est la durée du pulse). Il serait alors tentant d'augmenter



**Figure 2.11.:** Intensité optique à la sortie de la fibre optique en fonction du temps, mesuré par une photodiode *Thorlabs* à très grande bande passante ( $f_{bw} = 1 \text{ GHz} \gg 1/T_{montée}$ ) : *DET02AFC*.

la durée du pulse pour augmenter la ce paramètre de stochasticité. Cette démarche ne tient malheureusement pas compte des effets dits de « *boite classique* ».

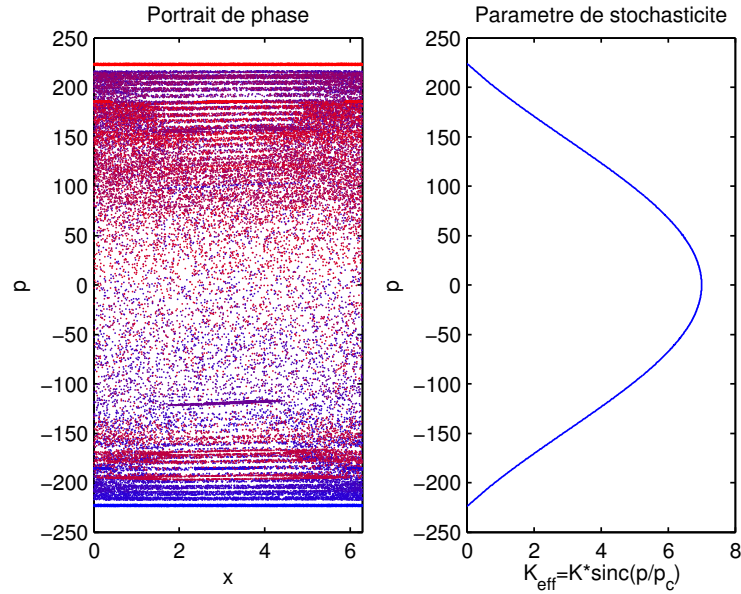
Considérons un pulse de durée finie  $\alpha$  en unités normalisés. Pour cette durée, il existe une classe d'impulsions  $p_c$  pour laquelle le pulse ne transfère pas de d'impulsion (ou d'énergie) à la particule considérée. Il suffit pour cela que la position finale  $x(\alpha)$  et la position initiale  $x(0)$  soient simplement décalées d'une constante  $2\pi$ , la période du réseau. Ainsi,

$$\int_0^\alpha p_c dt = p_c \alpha = 2\pi = x(\alpha) - x(0). \quad (2.19)$$

Pour cette classe de vitesse  $p_c$  (ainsi que pour ses multiples), l'impulsion transférée à l'atome est nulle. On peut en fait redéfinir le paramètre de stochasticité  $K$  en fonction de l'impulsion [61, 62], cette forme étant liée à la forme carrée de la fonction porte  $\tilde{\Pi}_\alpha$  :

$$K_{eff}(p) = K \frac{\sin(\pi p/p_c)}{\pi p/p_c} = K \text{sinc}(p/p_c). \quad (2.20)$$

On constate sur le portrait de phase associé (Figure 2.12) plusieurs phénomènes. Une barrière se forme pour  $p = \pm p_c$ , proche de ces valeurs le paramètre de stochasticité  $K_{eff}$  tombe à 0, empêchant la diffusion en impulsion. Se créent aussi des orbites périodiques pour les grandes valeurs de  $p$ . Celles-ci se justifient grâce aux faibles valeurs de  $K_{eff}$  associées. Enfin dernier phénomène, on observe que le coefficient de



**Figure 2.12.:** Portrait de phase d'un rotateur frappé avec une durée fini de pulse  $\tau = 800 \text{ ns}$ , une fréquence de kicks  $F = 36 \text{ kHz}$  (deux valeurs standards de l'expérience présenté). Dans ces conditions  $\alpha = 0.028$  et  $p_c = 224.4$ . Nous avons aussi choisi  $K = 7$ , ceci afin que les orbites périodiques apparaissent seulement sur les bords de la boîte classique.

diffusion classique  $D$  devient dépendant de l'impulsion, y compris dans le régime purement chaotique. Ce qui est parfaitement contraire à l'hypothèse ergodique que nous avons définie dans notre premier chapitre.

Expérimentalement, ces effets de boîte classique sont négligeables dès lors que les longueurs typiques dans l'espace des impulsions sont petites devant  $p_c$ . Nous nous en sommes assurés au cours des expériences de transition d'ANDERSON, en choisissant une durée de pulse de 800 ns et une fréquence de pulse de 36 kHz. Dans ces conditions  $p_c = 224.4$ , une valeur bien supérieur à toutes les largeurs des distributions de vitesse que nous avons mesuré.

## 2.5. Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons abordé la réalisation expérimentale d'un rotateur frappé, de la création d'un nuage suffisamment froid à la détection, en passant par l'onde stationnaire pulsée. Les améliorations apportées nous ont permis de gagner énormément en stabilité. D'une durée standard de 24 heures, nous avons ponctuellement réussi à faire tourner l'expérience sans intervention de notre part pendant 72 heures. Les sources de décohérences (connues) ont aussi été minimisées, qu'elles soient dues à de l'émission spontanée, à la variation aléatoire en phase de l'onde stationnaire, où encore à la durée des pulses.





# 3. Démonstration expérimentale de l'universalité de la transition d'Anderson

## Sommaire

---

<b>3.1. Universalité avec un rotateur frappé . . . . .</b>	<b>66</b>
3.1.1. Universalité dans les milieux désordonnés . . . . .	66
3.1.2. Espace des paramètres du rotateur frappé quasi-périodique	67
<b>3.2. Mise en évidence expérimentale de la localisation dynamique . . . . .</b>	<b>68</b>
<b>3.3. Deux comportements pour le rotateur frappé quasi-périodique</b>	<b>69</b>
<b>3.4. Comportement au point de la transition . . . . .</b>	<b>70</b>
3.4.1. Existence du comportement critique, signature de la transition de phase . . . . .	70
3.4.2. Exposant critique . . . . .	72
<b>3.5. Preuve expérimentale de l'universalité de la transition d'Anderson . . . . .</b>	<b>73</b>
3.5.1. Les séquences dans l'espace des paramètres . . . . .	75
3.5.2. Calcul de l'erreur sur l'exposant critique et méthode de <i>bootstrap</i> . . . . .	83
3.5.3. Résumé des séquences . . . . .	83
<b>3.6. Effets de décohérence . . . . .</b>	<b>84</b>
3.6.1. Plusieurs types de décohérence . . . . .	84
3.6.2. Conséquences sur la caractérisation de la transition d'ANDERSON	86
3.6.3. Première tentative d'observation de l' <i>absence de diffusion quantique à 2D</i> . . . . .	87
<b>3.7. Conclusion . . . . .</b>	<b>87</b>

---

Nous avons vu au cours des deux premiers chapitres, d'une part le cadre théorique dans lequel s'inscrit le concept d'universalité pour le rotateur frappé, et d'autre part le dispositif permettant de le réaliser expérimentalement. Dans ce chapitre nous nous consacrons à l'analyse des données expérimentales, et la preuve de l'universalité qu'elles fournissent.

Nous commençons par discuter plus précisément l'universalité de cette transition dans les milieux désordonnés en mettant en exergue les paramètres pertinents. Nous voyons ensuite comment cette universalité se manifeste dans le rotateur frappé quasi-périodique, ainsi que les liens qui unissent les différents paramètres de ces deux modèles.

Pour prouver cette universalité, nous commençons par démontrer expérimentalement, qu'une transition de phase a effectivement lieu dans notre rotateur frappé. Nous définissons ensuite la procédure expérimentale permettant la détermination de l'exposant critique en illustrant expérimentalement la technique dite de « mise à l'échelle à temps fini » (*Finite Time Scaling*).

Nous introduisons alors un ensemble de jeux de paramètres microscopiques différents, nommés « séquences », et montrons, grâce aux déterminations successives de l'exposant critique  $\nu$  que la transition d'ANDERSON est universelle. En effet, l'invariance de l'exposant critique issu de ces séquences en fournit la preuve : celui-ci ne dépend pas des détails microscopiques du système. La valeur et la faible erreur trouvées sur cet exposant critique nous permettent en plus de confirmer la classe d'universalité du rotateur frappé quasi-périodique : l'ensemble orthogonal gaussien.

Nous discutons alors les limitations d'un tel dispositif expérimental, et les illustrons par l'impossibilité d'observer l'*absence de diffusion en 2 dimensions* [7].

## 3.1. Universalité avec un rotateur frappé

### 3.1.1. Universalité dans les milieux désordonnés

Le modèle de liaisons fortes retenu historiquement pour la caractérisation de la transition d'ANDERSON est décrit par l'hamiltonien suivant :

$$\hat{H} = \sum_i \epsilon_i |i\rangle \langle i| + \sum_{\langle i,j \rangle} V |i\rangle \langle j|. \quad (3.1)$$

Le couplage  $V$  est limité au plus proches voisins (via le symbole  $\langle i, j \rangle$ ) et le désordre  $\epsilon_i \in [-W/2, W/2]$  est décrit avec une densité de probabilité carrée  $P(\epsilon_i) = 1/W$ . On peut par ailleurs caractériser l'amplitude du désordre avec le rapport  $W/V$ .

Montrer l'universalité dans un tel modèle consiste à prouver que pour un solide infiniment grand, l'exposant critique  $\nu$  caractérisant la transition de phase ne dépend pas des détails microscopiques, mais seulement des symétries satisfaites par le hamiltonien et le nombre de dimensions du système considéré.

Autrement dit, n'importe quelle réalisation du désordre  $\{\epsilon_i\}$  renvoie le même exposant critique  $\nu$ . Mieux encore, le fait de prendre par exemple un désordre gaussien ( $P(\epsilon_i) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-\epsilon_i^2/2\pi\sigma^2}$ ) ou un désordre lorentzien ( $P(\epsilon_i) = \epsilon_0/\pi(\epsilon_i^2 + \epsilon_0^2)$ ) à la place du désordre carrée, n'affecte pas la valeur de l'exposant critique  $\nu$  ! On peut aussi étendre le couplage  $V$  à des voisins plus éloignés sans pour autant l'affecter.

Numériquement, cela fut observé en 1999 par K. SLEVIN et T. OHTSUKI [37]. Expérimentalement, dans les milieux désordonnés, la détermination des exposants critiques est trop ambiguë pour pouvoir apporter une preuve de l'universalité. Les valeurs trouvées expérimentalement, allant de  $\nu = 0.5$  à  $\nu = 2$  [18, 63, 64], sont d'une part trop en désaccord avec la valeur numériquement prédite ( $\nu = 1.59$ ) et leur variance trop élevée pour venir contredire de manière formelle celle-ci. On attribue cette défaillance à plusieurs parasites expérimentaux : la décohérence due phonons, une détermination

basée sur des propriétés macroscopiques du système (conductance ou constante diélectrique) ou encore l'interaction répulsive entre les électrons (qui détruit la localisation). Ainsi malgré la formulation initiale du problème dans les milieux désordonnés, ceux-ci font pour l'instant de piètres candidats pour une observation propre de la transition d'ANDERSON.

Expérimentalement, à la vue des difficultés mentionnées pour l'obtention d'un exposant critique digne de foi dans les milieux cristallins, il n'est pas encore possible de démontrer cette universalité dans ces derniers. Nous allons à présent montrer que notre modèle de rotateur frappé équivalent au modèle d'ANDERSON, nous offre suffisamment de contrôle sur les détails microscopiques pour observer ladite universalité.

### 3.1.2. Espace des paramètres du rotateur frappé quasi-périodique

Nous avons eu l'occasion de voir dans le premier chapitre que les états  $\bar{u}_{\mathbf{m}} = \frac{u_{\mathbf{m}}^+ + u_{\mathbf{m}}^-}{2}$  (représentés dans l'espace des impulsions) sont, moyennant un peu d'algèbre, les états propres de l'équation de liaisons fortes suivante :

$$\epsilon_{\mathbf{m}} \bar{u}_{\mathbf{m}} - \sum_{\mathbf{n} \neq 0} V_{\mathbf{n}} \bar{u}_{\mathbf{m}-\mathbf{n}} = V_0 \bar{u}_{\mathbf{m}}, \quad (3.2)$$

où

$$\epsilon_{\mathbf{m}} = \tan \left\{ \frac{1}{2} \left[ \omega - \left( \frac{\bar{k} m_1^2}{2} + \omega_2 m_2 + \omega_3 m_3 \right) \right] \right\}, \quad (3.3)$$

est vue comme l'énergie par site d'impulsion  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ ,  $\omega$  est la quasi-énergie des états de FLOQUET associés à  $\bar{u}_{\mathbf{m}}$ , solution de l'Équation 3.2.

C'est dans ce terme que doit apparaître le désordre, or il est clair que ce terme est déterministe. Mais en posant que  $(\bar{k}, \omega_2, \omega_3, 2\pi)$  forment un quadruplet incommensurable, nous pouvons nous assurer qu'il n'y a pas de périodicité « spatiale ». On s'assure ainsi d'un désordre *pseudo-aléatoire*, pour lequel il n'existe pas de corrélation entre sites distants [12].

Cette réalisation du « désordre »  $\{\epsilon_{\mathbf{m}}\}$ , est dépendante de  $\omega$ , ce qui implique que chaque état de FLOQUET  $u_{\mathbf{m}}^{\pm}$  réalise un désordre  $\{\epsilon_{\mathbf{m}}\}$  différent dont  $\bar{u}_{\mathbf{m}}$  doit être solution. On peut aussi remarquer que ces réalisations ont une dépendance sur le triplet  $(\bar{k}, \omega_2, \omega_3)$ , qui contrôle en somme leurs détails microscopiques, triplet dont le rotateur frappé quasi-périodique nous offre le contrôle via les fréquences de modulation et la fréquence des pulses. A l'inverse de la quasi-énergie  $\omega$ , à laquelle il est impossible de remonter. On peut néanmoins considérer qu'elle prend ses valeurs dans un espace dense dans  $[0, 2\pi[$ .

Le couplage entre sites d'impulsion voisins  $V_{\mathbf{n}}$  est défini ainsi dans notre équivalence :

$$V_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}} \tan \left( \frac{K}{2\bar{k}} \cos x_1 (1 + \varepsilon \cos x_2 \cos x_3) \right). \quad (3.4)$$

On peut voir sans se soucier du calcul de cette transformée de FOURIER que la

portée et l'amplitude du couplage entre sites voisins sont contrôlées par le paramètre  $K$  (amplitude des kicks). Le paramètre  $\varepsilon$  (modulation d'amplitude des pulses) contrôle l'anisotropie du système. Ce couplage rentre aussi dans la catégorie des détails microscopiques. On remarquera qu'en posant  $\varepsilon = 0$ , le modèle équivalent d'ANDERSON (Équation 3.2) devient unidimensionnel et ses états propres sont tous localisés. De manière analogue, le rotateur frappé quasi-périodique perd son attribut « quasi-périodique » et ne manifeste que la localisation dynamique pour toute les valeurs de  $K$ .

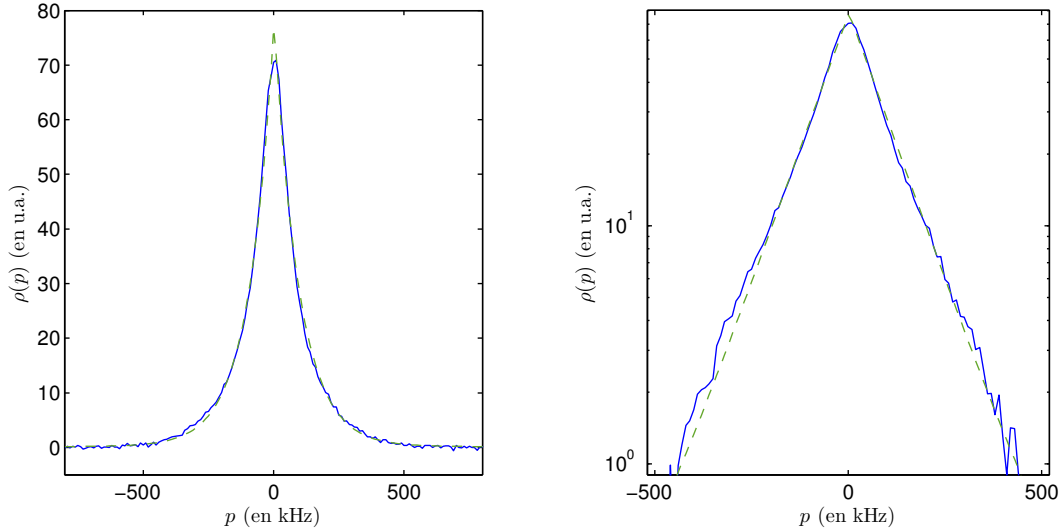
Propriété intéressante du système, l'énergie propre  $V_0$  du vecteur propre  $\bar{u}_{\mathbf{m}}$  est toujours nulle. Précédemment, il existait deux manières de franchir la transition : soit en faisant varier le désordre, soit en regardant l'énergie des fonctions propres (voir Figure 1.10). Désormais, tout les niveaux ayant la même énergie ( $E = 0$ ), la transition ne se franchit qu'avec le désordre  $W/V$ . Le concept de seuil de mobilité disparaît, et tout les états  $\bar{u}_{\mathbf{m}}$  sont soit diffusifs, soit localisés pour un paramètre de désordre  $W/V$  donné. En matière condensée, afin de franchir proprement la transition, il est nécessaire de sélectionner dans le spectre, les états propres qui ont une énergie très voisine de 0. Ce qui revient en somme à jeter une grande partie du calcul. Si cette sélection est faisable numériquement, ce concept devient beaucoup plus flou expérimentalement. Le rotateur en est affranchi numériquement et expérimentalement !

Le critère d'incommensurabilité sur le quadruplet  $(\bar{k}, \omega_2, \omega_3, 2\pi)$  nous interdit de franchir la transition en faisant varier les paramètres microscopique du désordre  $\epsilon_{\mathbf{m}}$  considéré. Il ne reste alors plus que le couplage  $V_{\mathbf{n}}$  entre sites voisins, dont le contrôle nous est donnée par le couple  $(K, \varepsilon)$  pour en définir l'amplitude.

Nous franchissons donc la transition en jouant sur le couple  $(K, \varepsilon)$ , nous permettant de commencer du côté localisé à faible couplage (couple  $(K, \varepsilon)$  petit) pour aller vers le domaine délocalisé à grand couplage (couple  $(K, \varepsilon)$  grand).

## 3.2. Mise en évidence expérimentale de la localisation dynamique

Dans le chapitre précédent, nous avons détaillé tout le dispositif expérimental, sans donner d'illustration expérimentale de la localisation dynamique. La vélocimétrie Raman nous permet de remonter au module de la fonction d'onde après avoir appliqué une séquence de pulses standard (sans modulation d'amplitude  $\varepsilon = 0$ ) (voir Figure 3.1). Cette figure nous montre ainsi clairement que la localisation dynamique se manifeste pour des valeurs accessibles par l'expérience. Le temps de localisation  $t_{loc}$  pour des rapports  $K/\bar{k}$  voisins de 3, est de l'ordre de la dizaine de pulses. Bien entendu, plus ce rapport croît, plus la longueur de localisation  $\lambda$  et le temps  $t_{loc}$  croissent. C'est pour cette raison, étant donnée la limitation en nombre de kicks du dispositif ( $\sim 200$ ) que nous veillerons à prendre des rapport suffisamment faibles afin d'avoir des temps de localisation toujours en deçà de la limite de pulses.

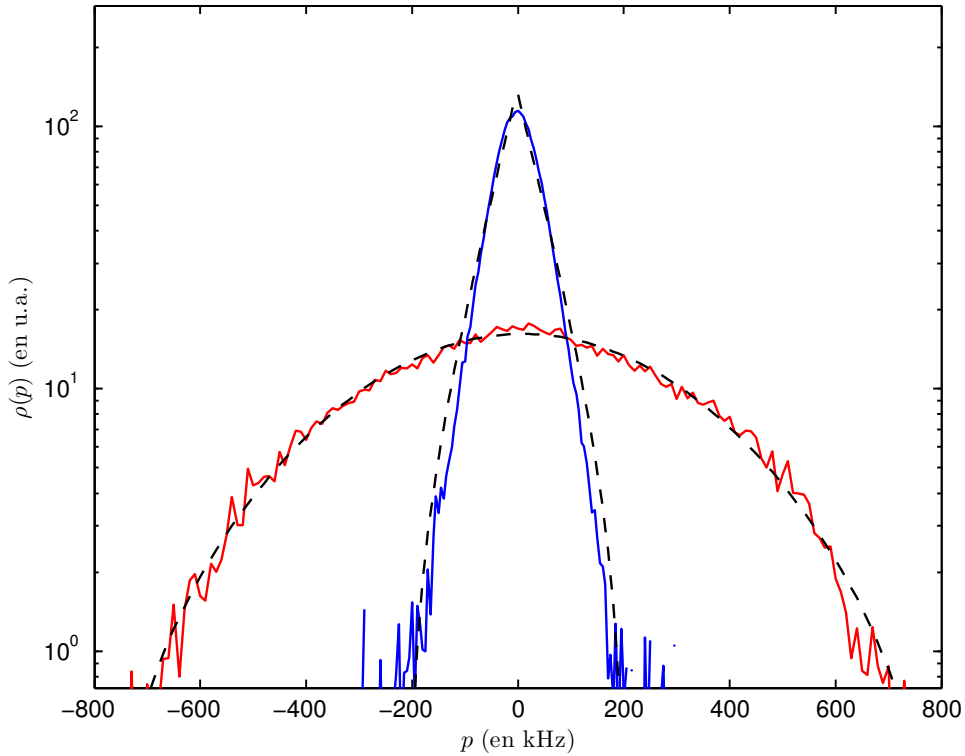


**Figure 3.1.:** Localisation dynamique d'un rotateur frappé quantique pour  $t = 100$ . Sont représentés les données expérimentales (trait continu bleu) et le fit (trait discontinu vert). Nous avons choisi  $K = 7$  et  $\tilde{k} = 2.89$ , la durée des pulses vaut quant à elle 800 ns, une durée standard pour laquelle les effets de boîte classique sont négligeables. Dû au principe de vélocimétrie Raman, l'unité de  $p$  est le kHz, on retiendra cependant que  $16.53 \text{ kHz (en unités "Raman")} \equiv 2\hbar k_L \text{ (S.I.)} \equiv \tilde{k} \text{ (en unités normalisées)} \equiv 1$  « site d'impulsion », avec  $k_L$  : nombre d'onde du laser de l'onde stationnaire, et  $\tilde{k}$  : constante de Planck normalisée. La représentation en échelle log, nous assure que nous sommes bien en présence d'une localisation dynamique, dont un ajustement avec une fonction de type  $e^{-|p|/\lambda}$  nous renvoie une longueur de localisation  $\lambda = 95.9 \text{ kHz}$ , soit  $5.8\tilde{k}$ . La présence de l'arrondi autour de la valeur maximal provient du fait que l'effet de localisation dynamique doit être convolué avec les conditions initiales de forme gaussienne.

### 3.3. Deux comportements pour le rotateur frappé quasi-périodique

Nous allons mettre en évidence l'existence de deux comportements pour le rotateur frappé quasi-périodique pour une réalisation des paramètres microscopiques  $(\tilde{k}, \omega_2, \omega_3)$ . Ceux-ci sont représentés sur la Figure 3.2. Nous avons choisi deux couples  $(K, \varepsilon)$  très éloignés l'un de l'autre. La raison est que les temps nécessaires à la détermination du comportement sont d'autant plus courts que le couple  $(K, \varepsilon)$  est loin de la transition. On a donc, en accord avec la théorie explicitée au chapitre premier, un temps de localisation court du côté localisé, et une diffusion immédiate du côté diffusif. Cela permet, au regard du « faible » nombre de kicks autorisé par le dispositif expérimental d'exhiber de manière claire ces deux comportements.

Cependant, l'existence de ces deux comportements ne prouve pas que nous sommes en présence d'un transition de phase, mais nous donne simplement une indication en ce sens. En effet, un changement de comportement peut être dû à un *cross-over*, où le phénomène dominant change avec la variation d'un paramètre et induit un changement de comportement du système, qu'il faut donc distinguer d'un changement de phase.



**Figure 3.2.:** Mise en évidence de deux comportements du rotateur frappé en fonction du couple  $(K, \varepsilon)$ . Ces données expérimentales ont été acquises pour  $\hbar = 3.46$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$  et  $\omega_3 = 2\pi\sqrt{13}$ . Le système est soumis dans les deux cas à 150 kicks. En bleu ( $K = 4, \varepsilon = 0.1$ ) et en rouge ( $K = 9, \varepsilon = 0.8$ ). Nous avons respectivement ajusté ces deux comportements à l'aide d'une exponentielle décroissante et d'une gaussienne en traçant le tout sur une échelle logarithmique pour distinguer clairement la forme gaussienne de la forme exponentielle.

Pour en donner une preuve irréfutable, il nous faudra prouver un comportement critique au point de la transition :  $\langle p^2 \rangle \sim t^{2/3}$ , signature de cette transition de phase.

### 3.4. Comportement au point de la transition

Nous avons vu dans le premier chapitre qu'au point critique, le moment d'ordre 2 de la distribution en impulsion  $\langle p^2 \rangle$  se comportait en  $\sim t^{2/3}$ . En ayant défini  $\Lambda(K, t) = \langle p^2 \rangle / t^{2/3}$ , cette dernière doit donc être constante au point critique.

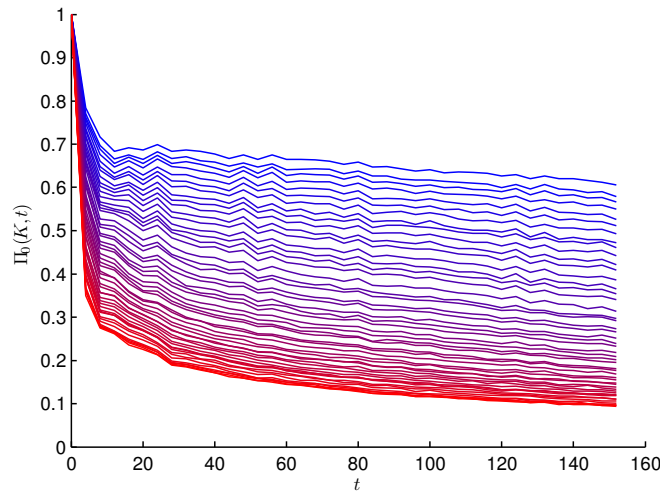
#### 3.4.1. Existence du comportement critique, signature de la transition de phase

Expérimentalement, il est tout-à-fait possible de mesurer  $\langle p^2 \rangle$ . Il faut pour cela faire des acquisitions successives pour différentes classes d'impulsions, et reconstituer la densité de probabilité  $|\Psi(\mathbf{p})|^2$ . Pour des raisons de temps, il est préférable de faire la

mesure de  $\Pi_0$ , le nombre d'atomes ayant une impulsion nulle. En effet la conservation du nombre de particules au cours des kicks implique que  $\langle \mathbf{p}^2 \rangle \sim \Pi_0^{-2}$ . Dans la pratique cela revient à définir une nouvelle fonction  $\Lambda_0$  :

$$\Lambda_0(K, t) = \frac{1}{\Pi_0^2(K, t)t^{2/3}}, \quad (3.5)$$

mesurable expérimentalement en ne considérant que le maximum de la distribution de vitesse. Un autre avantage d'une telle méthodologie (en plus du gain de temps) est que le bruit relatif au maximum de la distribution est plus faible. Pour observer une telle transition, et mettre en évidence l'existence du comportement critique il nous faut acquérir expérimentalement le courbe  $\Pi_0(K, t)$  pour des valeurs croissantes du couple  $(K, \varepsilon)$  (Figure 3.3). On constate que la valeur de  $\Pi_0(K, t)$  (malgré une

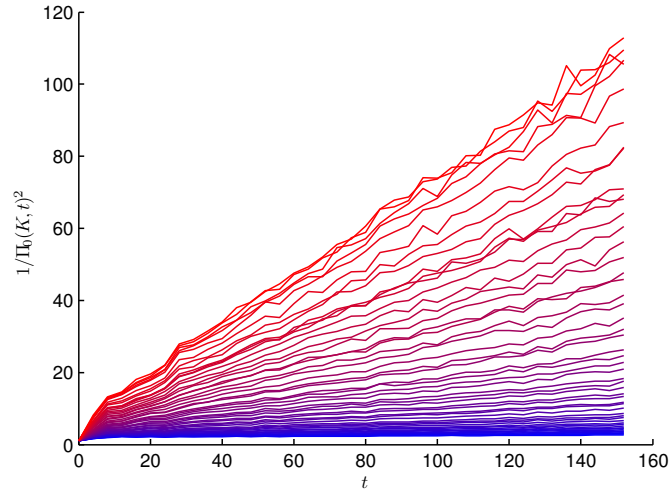


**Figure 3.3.:** Évolution du maximum de la distribution en impulsion  $\Pi_0$  en fonction du temps  $t$  pour différents couples  $(K, \varepsilon)$ , allant de  $(K = 3, \varepsilon = 0.1)$  en bleu à  $(K = 5.7, \varepsilon = 0.73)$  en rouge. Les paramètres choisis sont  $\hbar = 2.00$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$  et  $\omega_3 = 2\pi\sqrt{13}$ .

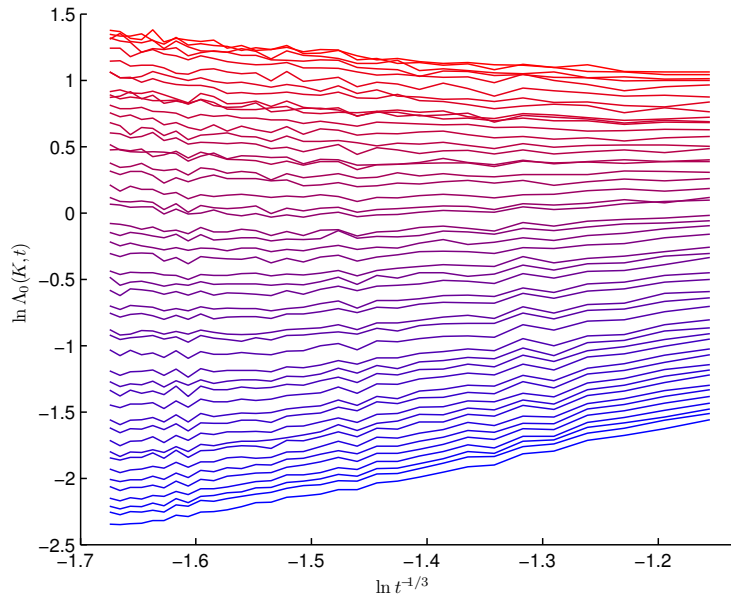
légère décroissance due aux effets de décohérence) tend à être constante aux temps longs pour de faibles valeurs de  $K$ , ce qui indique une localisation dynamique. On peut se convaincre du caractère diffusif aux grandes valeurs de  $K$  en regardant  $\Pi_0^{-2}$  (Figure 3.4).

En regardant la fonction  $\ln \Lambda_0(K, t)$  en fonction de  $t^{-1/3}$  issue de ces mêmes données (Figure 3.5), on voit bien qu'il existe une valeur unique de  $K$ , notée  $K_c$  où la pente de la fonction  $\ln \Lambda_0(K_c, t)$  change de signe. Ce changement de signe correspond à un changement de la caractéristique des fonctions d'ondes. Dans le cas où  $K < K_c$ , la pente de  $\ln \Lambda_0(K, t)$  en fonction de  $t^{-1/3}$  est positive. Pour les temps longs, la fonction d'onde tend vers un état localisé. Quand  $K > K_c$ , la pente est alors négative, ce qui implique un comportement délocalisé au temps longs. Ainsi, il existe une valeur unique de  $K_c$  séparant deux régimes fondamentalement différents. L'unicité de cette valeur se justifie par l'existence d'une unique courbe de pente nulle sur la Figure 3.5, ce qui est équivalent à l'existence d'un point de croisement sur la Figure 3.6. Pour des temps infiniment long, on peut attribuer à  $\Lambda_0$  le rôle de paramètre d'ordre : nul pour les états localisés, et infini pour les états délocalisés.





**Figure 3.4.:** Comportement temporel de  $1/\Pi_0^2(\sim \langle p^2 \rangle)$ . Les couleurs sont les mêmes que dans la Figure 3.3, ainsi que les paramètres microscopique  $(\bar{k}, \omega_2, \omega_3)$  choisis. Pour les grandes valeurs de  $K$  (en rouge), l'évolution de  $\Pi_0^{-2}$  en  $\sim t$  nous indique un comportement clairement diffusif.

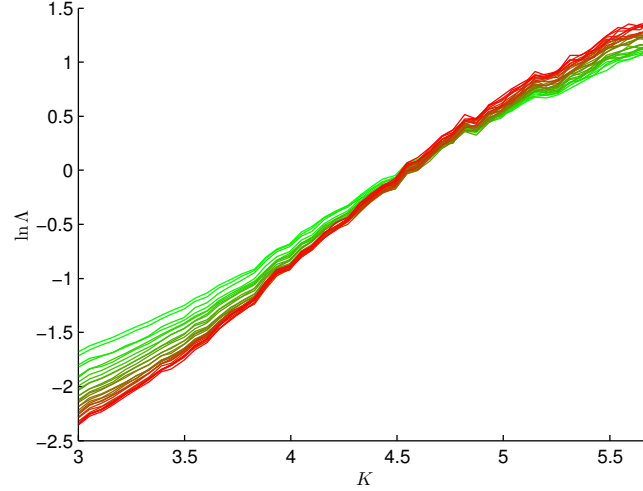


**Figure 3.5.:**  $\ln \Lambda_0$  en fonction de  $t^{-1/3}$  pour différentes valeurs de  $K$ . Les couleurs sont les mêmes que dans la Figure 3.3, ainsi que les paramètres microscopique  $(\bar{k}, \omega_2, \omega_3)$  choisis.

L'existence de ces deux régimes, séparés par une unique valeur  $K_c$ , est la signature d'une transition de phase.

### 3.4.2. Exposant critique

Pour ce jeu de paramètres microscopiques régissant le désordre ( $\bar{k} = 2, \omega_2 = 2\pi\sqrt{5}, \omega_3 = 2\pi\sqrt{13}$ ), la valeur de  $K_c$  est estimée à 4.69. Nous avons à présent suffisamment de



**Figure 3.6.:**  $\ln \Lambda_0$  en fonction de  $K$  pour  $t = 30$  (en vert)  $t = 150$  (en rouge). Les paramètres microscopique  $(\bar{k}, \omega_2, \omega_3)$  choisis sont les mêmes que dans Figure 3.3.

données pour extraire un exposant critique  $\nu$  de l'ensemble des courbes  $\ln \Lambda_0(K, t)$ . Pour cela, la procédure de *Finite Time Scaling* détaillée dans le chapitre premier est utilisée, nous permettant de reconstituer la fonction  $\xi(K)$ . Celle-ci est alors ajustée autour du point critique  $(0.8K_c, 1.2K_c)$  avec une fonction

$$\xi_{fit}(K) = 1/(\alpha|K - K_c|^\nu + \beta), \quad (3.6)$$

où un paramètre de coupure  $\beta$  est introduit pour prendre en compte le fait que même si cette fonction est censée tendre vers l'infini au point de la transition, la durée finie de l'expérience (150 kicks) ainsi que les effets de décohérence (étudiés plus bas) l'en empêche. Fitter autour du point critique, et non sur l'ensemble de la fonction est aussi pertinent, car le comportement critique en puissance  $\nu$  ne se manifeste qu'autour de ce dernier.

Au final, pour cette réalisation du désordre, ainsi que pour un « chemin » ( $K = 3, \varepsilon = 0.1$ )  $\rightarrow$  ( $K = 5.7, \varepsilon = 0.73$ ), on trouve  $\nu = 1.64 \pm 0.08$  grâce au fit  $\xi_{fit}(K)$  (Figure 3.11).

Cette exposant critique diffère significativement de la valeur renvoyée par la théorie auto-consistante ([29])  $\nu = 1$ , mais est parfaitement compatible avec la valeur communément admise pour l'ensemble orthogonal gaussien [37, 15] :  $\nu = 1.59$ .

### 3.5. Preuve expérimentale de l'universalité de la transition d'Anderson

Malgré le très bon accord de cet exposant critique avec les simulations numériques les plus avancées [37, 15] ( $\nu = 1.59 \pm 0.01$ ), nous n'avons pas encore démontré l'universalité de celui-ci. Pour cela nous allons varier les paramètres microscopiques.

Pour donner une preuve de celle-ci il faut itérer le même protocole, pour différentes valeurs du triplet  $(\bar{k}, \omega_2, \omega_3)$  responsable de la réalisation du désordre, et pour dif-

férents chemins dans l'espace des paramètres  $(K, \varepsilon)$  en charge de l'amplitude et de l'anisotropie du couplage entre sites.

Nous avons donc choisi plusieurs ensemble de ces paramètres (Tableau 3.1), pour démontrer l'invariance de cet exposant critique  $\nu$  face aux variation des propriétés statistique du désordre et à la variation du couplage. Nous avons aussi choisi des durées de pulses constantes  $\tau = 0.8 \mu\text{s}$  pour toutes ces séquences, exception faite du jeu de paramètres « I », où la durée du pulses est de  $0.96 \mu\text{s}$  (dont nous discutons l'intérêt ultérieurement). Le désaccord de l'onde stationnaire est aussi constant, et fixé à  $\delta_L = -26 \text{ GHz}$  tout le long de ces expériences, nous permettant de considérer comme négligeables les effets de décohérence induits par fluorescence sur la transition  $D_2$  de Césium.

Pour toutes les séquences sur les paramètres microscopiques, nous avons fait l'acquisition des courbes de  $\Pi_0(t)$  pour 50 couples  $(K, \varepsilon)$  différents et régulièrement espacés. Le nombre de kicks  $t$  allant de 0 à 180 par pas de 3. Chaque point est moyenné 50 fois. En plus de réduire le bruit sur les valeurs  $\Pi_0(t)$ , cela permet de définir une erreur statistique  $\Delta\Pi_0(t)$ , dont l'utilité est de pouvoir calculer l'incertitude sur l'exposant critique  $\nu$  à l'aide de la méthode de *bootstrap* détaillée ultérieurement.

Nous avons aussi appliqué la procédure de *mise à l'échelle à temps fini* entre 30 et 150 pulses. En deçà, le régime de localisation n'est pas encore atteint, au delà, les effets de décohérences deviennent trop importants.

	$k$	$\omega_2/2\pi$	$\omega_3/2\pi$	Chemin $(K, \varepsilon)$
A	2.89	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	$(4, 0.1) \rightarrow (8, 0.8)$
B	2.89	$\sqrt{7}$	$\sqrt{17}$	$(4, 0.1) \rightarrow (8, 0.8)$
C	2.89	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	$(3, 0.435) \rightarrow (10, 0.435)$
D	2.89	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	$(7.5, 0.1) \rightarrow (7.5, 0.73)$
E	2.00	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	$(3, 0.1) \rightarrow (5.7, 0.73)$
F	2.31	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	$(4, 0.1) \rightarrow (9, 0.8)$
G	2.47	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	$(4, 0.1) \rightarrow (9, 0.8)$
H	3.46	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	$(4, 0.1) \rightarrow (9, 0.8)$
I	3.46	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	$(4, 0.1) \rightarrow (9, 0.8)$

**Tableau 3.1.:** Ensemble des jeux de paramètres choisis dans le cadre de la démonstration expérimentale de l'universalité.

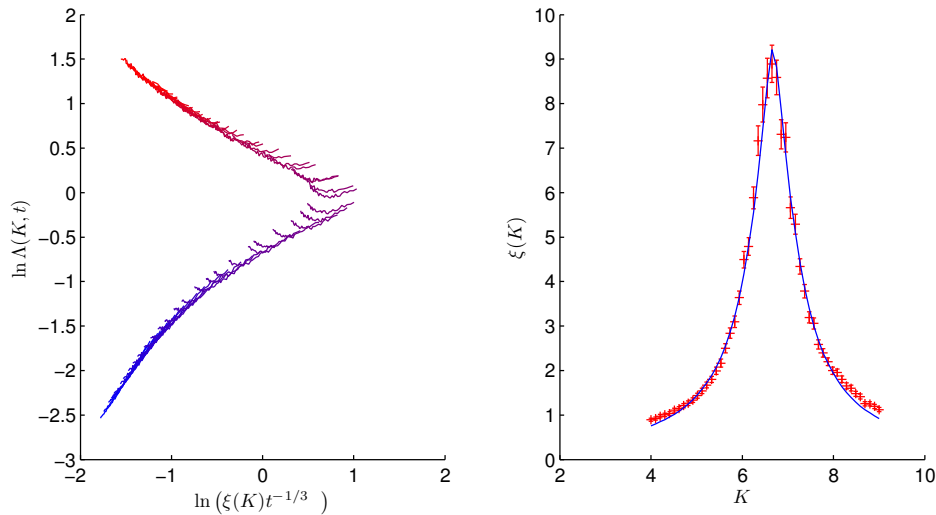
### 3.5.1. Les séquences dans l'espace des paramètres

#### 3.5.1.1. Séquence « A »

Le premier jeu de paramètres choisi est le jeu dit de référence. En effet, ce sont les mêmes paramètres microscopiques ( $\bar{k}, \omega_2, \omega_3$ ) et chemin dans l'espace ( $K, \varepsilon$ ) que pour la première observation expérimentale de la transition d'ANDERSON avec un rotateur frappé quasi-périodique [14]. La procédure de *Finite Time Scaling* renvoie un exposant critique  $\nu = 1.63 \pm 0.06$  avec, comme point critique,  $K_c = 6.67$ . Ce résultat est bien plus précis que celui publié précédemment ( $\nu = 1.4 \pm 0.3$ ). En effet la valeur de l'exposant critique est bien plus proche de celle des simulations numériques, et ce, avec une marge d'erreur réduite d'un ordre de grandeur. Ce résultat à lui seul, justifie les améliorations apportées au dispositif expérimental, et nous met sur la piste, grâce à la faible erreur associée, de la détermination de la classe d'universalité du rotateur frappé quasi-périodique.

$\bar{k}$	2.89
$\omega_2$	$\sqrt{5}$
$\omega_3$	$\sqrt{13}$
$(K, \varepsilon)$	(4, 0.1)
	$\rightarrow (8, 0.8)$

**Tableau 3.2.:** Paramètres de la séquence « A »



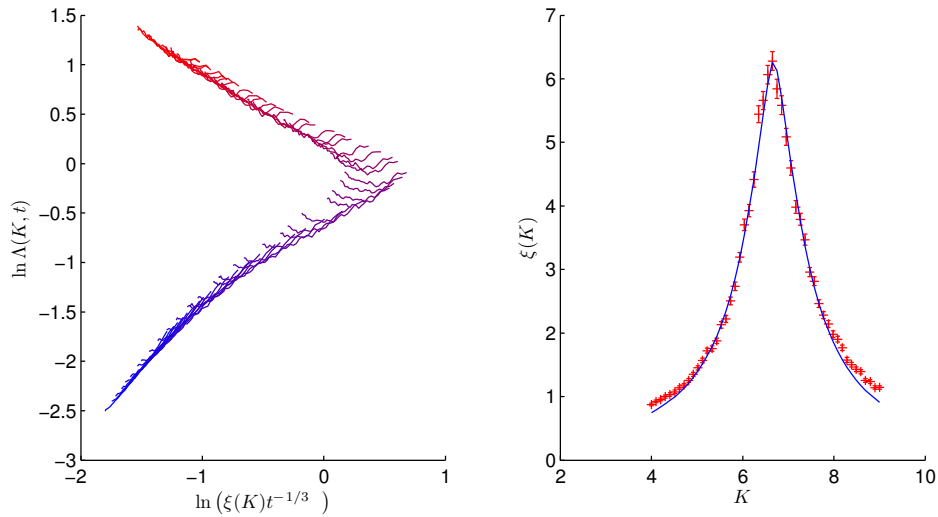
**Figure 3.7.:** Fonction d'échelle  $f$  reconstituée (à gauche) et fonction  $\xi(K)$  déduite pour la séquence « A ». Un fit (en bleu) permet, autour de la valeur critique  $K_c$  de retrouver l'exposant critique  $\nu$ .

### 3.5.1.2. Séquence « B »

Dans ce jeu de paramètres nous avons modifié, grâce à  $\omega_{2,3}$ , les propriétés statistiques du désordre sur les dimensions 2 et 3 (orthogonales à la dimension 1, celle étudiée via le rotateur frappé quasi-périodique). C'est une réalisation différente du désordre. La procédure de *Finite Time Scaling* nous donne  $\nu = 1.57 \pm 0.08$  et  $K_c = 6.68$ . L'exposant critique est toujours en très bon accord avec la valeur admise numériquement. A ce stade, même si l'universalité de nous est pas encore acquise, il n'est pas déraisonnable de dire que l'exposant critique ne dépend pas de l'anisotropie des propriétés statistiques de la réalisation du désordre.

$k$	2.89
$\omega_2$	$\sqrt{7}$
$\omega_3$	$\sqrt{17}$
$(K, \varepsilon)$	$(4, 0.1)$ $\rightarrow (8, 0.8)$

**Tableau 3.3.:** Paramètres de la séquence « B »



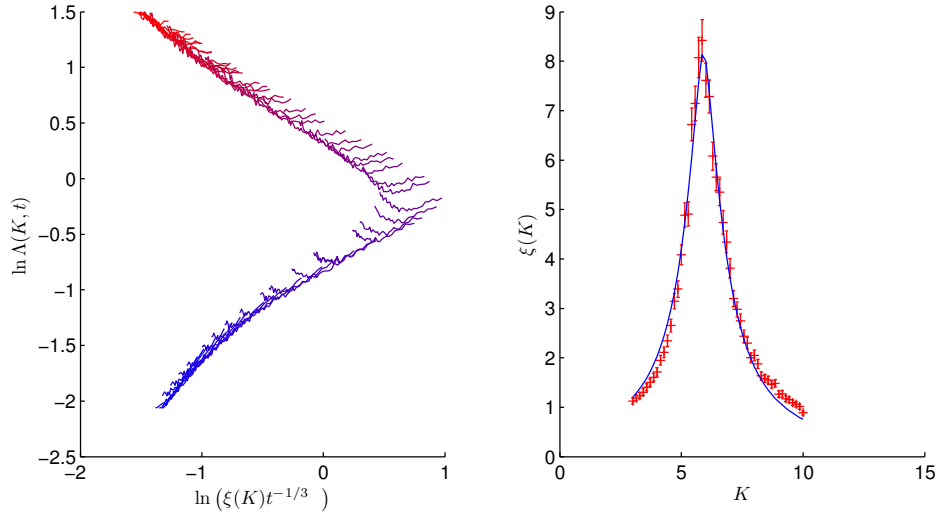
**Figure 3.8.:** Fonction d'échelle  $f$  reconstituée (à gauche) et fonction  $\xi(K)$  déduite pour la séquence « B ». Un fit (en bleu) permet, autour de la valeur critique  $K_c$  de retrouver l'exposant critique  $\nu$ .

### 3.5.1.3. Séquence « C »

Dans « A » et dans « B » nous augmentions simultanément les paramètres  $(K, \varepsilon)$ . Cela revenait à augmenter de paire le couplage avec l'anisotropie. Le but étant de franchir la transition de la manière la plus nette possible. Ici, la transition est franchie à anisotropie constante  $\varepsilon = 0.435$ . C'est donc une variation des détails microscopiques différente, pour laquelle la procédure de *Finite Time Scaling* nous permet d'obtenir  $\nu = 1.55 \pm 0.25$  et  $K_c = 5.91$ . La plus grande erreur autour de cette exposant critique peut se comprendre par le fait que la transition est plus « molle », en particulier à faible nombre de pulses, cela rend la reconstitution de la fonction d'échelle  $f$  plus bruitée. Bruit qui se transfère sur la fonction  $\xi(K)$  déduite, et donc sur la valeur de l'exposant critique  $\nu$ .

$k$	2.89
$\omega_2$	$\sqrt{5}$
$\omega_3$	$\sqrt{13}$
$(K, \varepsilon)$	(3, 0.435) → (10, 0.435)

**Tableau 3.4.:** Paramètres de la séquence « C »



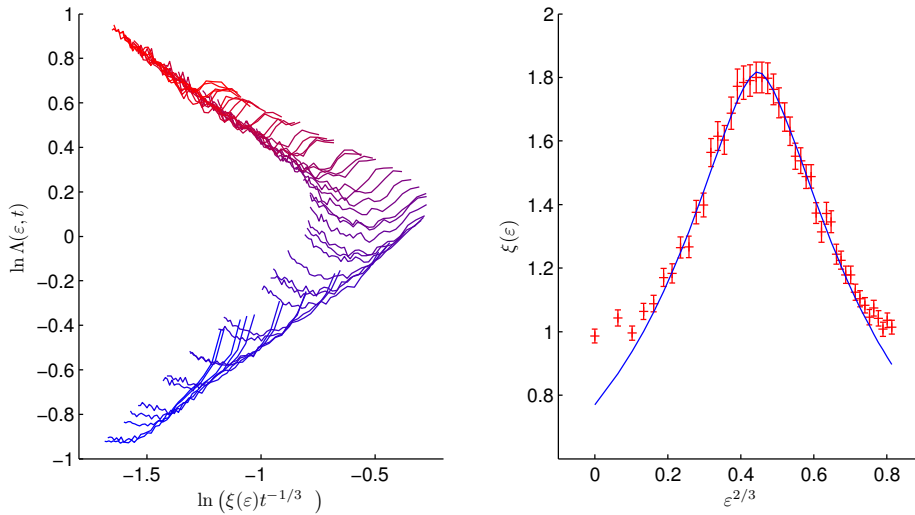
**Figure 3.9.:** Fonction d'échelle  $f$  reconstituée (à gauche) et fonction  $\xi(K)$  déduite pour la séquence « C ». Un fit (en bleu) permet, autour de la valeur critique  $K_c$  de retrouver l'exposant critique  $\nu$ .

### 3.5.1.4. Séquence « D »

A l'inverse de « C », nous maintenons ici le paramètre de couplage  $K$  constant et faisons varier la paramètre d'anisotropie  $\varepsilon$ . Les conséquences d'une telle approche sont les mêmes que dans « C » : une transition plus molle que nous renvoie grâce au *Finite Time Scaling* une valeur de l'exposant critique bruitée  $\nu = 1.67 \pm 0.18$ . Le paramètre critique devient dans ce cas l'anisotropie et prend pour valeur  $\varepsilon_c = 0.448$ . On notera aussi, que la procédure de *FTS*, précédemment définie pour  $K$  converge mieux pour  $\varepsilon^{2/3}$ . Cette particularité se comprend lors de l'étude de la théorie auto-consistante du rotateur frappé quasi-périodique. On peut néanmoins lui donner une interprétation plus intuitive : le paramètre d'anisotropie n'affectant que deux dimensions sur trois, il n'est pas déraisonnable qu'au voisinage de la transition le paramètre pertinent soit  $\varepsilon^{2/3}$  plutôt que  $\varepsilon$ .

$\bar{k}$	2.89
$\omega_2$	$\sqrt{5}$
$\omega_3$	$\sqrt{13}$
$(K, \varepsilon)$	$(7.5, 0.0)$ $\rightarrow (7.5, 0.8)$

**Tableau 3.5.:** Paramètres de la séquence « D »



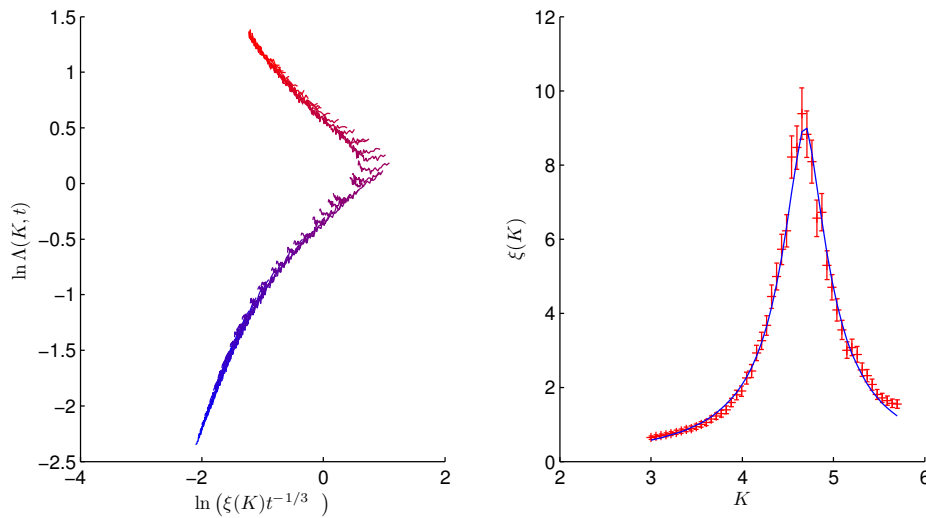
**Figure 3.10.:** Fonction d'échelle  $f$  reconstituée (à gauche) et fonction  $\xi(\varepsilon)$  déduite pour la séquence « D ». Un fit (en bleu) permet, autour de la valeur critique  $\varepsilon_c$  de retrouver l'exposant critique  $\nu$ .

### 3.5.1.5. Séquence « E »

Cette séquence est celle utilisée pour l'explication de la procédure expérimentale détaillée précédemment. On remarque d'ores et déjà, que la constante de PLANCK effective  $\bar{k}$  précédemment à 2.89 est passée à 2.00. On rappelle que ce paramètre peut-être associé à la quantité du problème (plus il est petit, plus le comportement du système peut être décrit classiquement). De plus ce dernier intervient dans le « désordre »  $\epsilon_m$  et le couplage  $W_n$ . Ce qui rend sa variation très pertinente dans le cas de l'étude de l'universalité. Le *F<sub>T</sub>S* nous conduit alors à  $\nu = 1.64 \pm 0.08$  et  $K_c = 4.69$ . L'abaissement notable du point de transition dans  $(K, \epsilon)$  se comprend en considérant le fait qu'à mesure que l'on se rapproche du régime classique en faisant tendre  $\bar{k}$  vers 0, la valeur de  $K_c$  tend elle aussi vers 0. En effet, le seul régime compatible avec un traitement classique est le régime diffusif. Cependant, et c'est en accord avec la prédiction numérique de l'universalité du rotateur frappé quasi-périodique, la valeur de l'exposant critique ne varie pas.

$\bar{k}$	2.00
$\omega_2$	$\sqrt{5}$
$\omega_3$	$\sqrt{13}$
$(K, \epsilon)$	(3, 0.1) → (5.7, 0.73)

**Tableau 3.6.:** Paramètres de la séquence « E »



**Figure 3.11.:** Fonction d'échelle  $f$  reconstituée (à gauche) et fonction  $\xi(K)$  déduite pour la séquence « E ». Un fit (en bleu) permet, autour de la valeur critique  $K_c$  de retrouver l'exposant critique  $\nu$ .

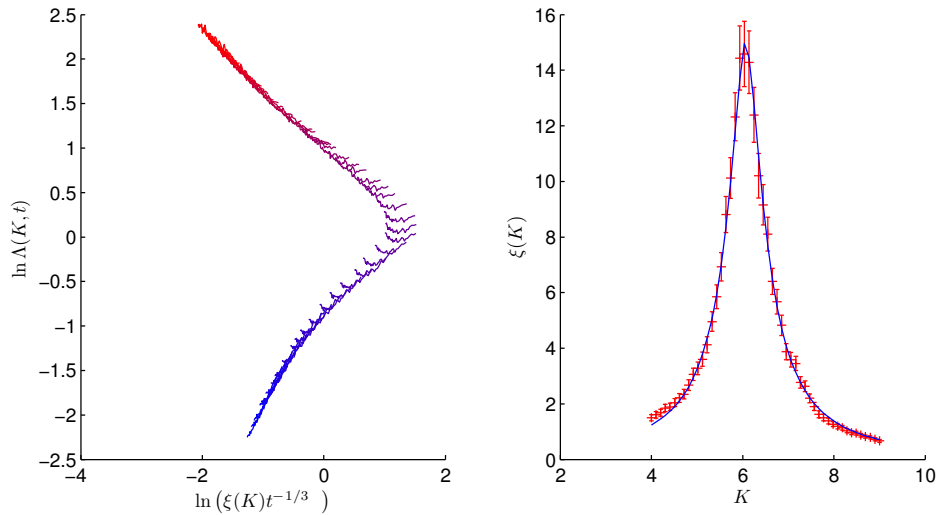


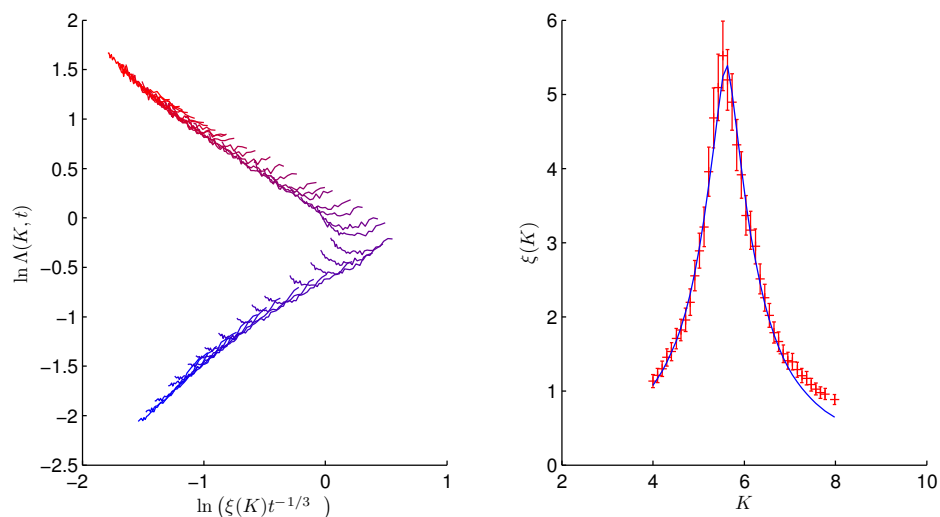
## 3.5.1.6. Séquences « F », « G » et « H »

$\bar{k}$	2.31	$\bar{k}$	2.47	$\bar{k}$	3.46
$\omega_2$	$\sqrt{5}$	$\omega_2$	$\sqrt{5}$	$\omega_2$	$\sqrt{5}$
$\omega_3$	$\sqrt{13}$	$\omega_3$	$\sqrt{13}$	$\omega_3$	$\sqrt{13}$
$(K, \varepsilon)$	(4, 0.1)	$(K, \varepsilon)$	(4, 0.1)	$(K, \varepsilon)$	(4, 0.1)
	$\rightarrow (9, 0.8)$		$\rightarrow (9, 0.8)$		$\rightarrow (9, 0.8)$

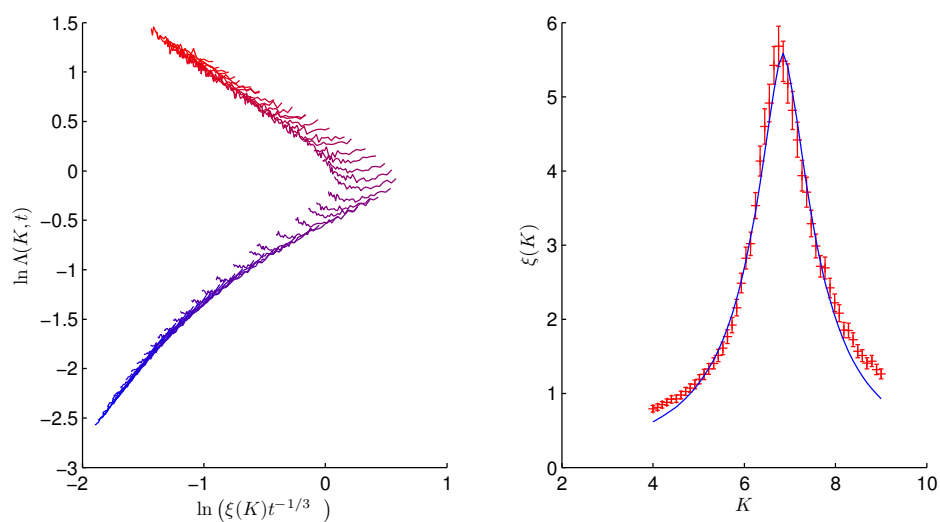
**Tableau 3.7.:** Paramètres des séquences (de gauche à droite) « F », « G » et « H »

De la même façon que pour « E », c'est une variation de  $\bar{k}$  qui est ici faite. Les conséquences sont bien entendu les mêmes, et la procédure de *FTS* nous donne  $\nu = 1.68 \pm 0.06$  pour « F »,  $\nu = 1.55 \pm 0.10$  pour « G » et  $\nu = 1.66 \pm 0.12$  pour « H ». Ces trois résultats sont une fois de plus en excellent accord avec les prédictions numériques, et pose le dernier jalon de la preuve expérimental de l'universalité de la transition d'ANDERSON.


**Figure 3.12.:** Fonction d'échelle  $f$  reconstituée (à gauche) et fonction  $\xi(K)$  déduite pour la séquence « F ». Un fit (en bleu) permet, autour de la valeur critique  $K_c$  de retrouver l'exposant critique  $\nu$ .



**Figure 3.13.:** Fonction d'échelle  $f$  reconstituée (à gauche) et fonction  $\xi(K)$  déduite pour la séquence « G ». Un fit (en bleu) permet, autour de la valeur critique  $K_c$  de retrouver l'exposant critique  $\nu$ .



**Figure 3.14.:** Fonction d'échelle  $f$  reconstituée (à gauche) et fonction  $\xi(K)$  déduite pour la séquence « H ». Un fit (en bleu) permet, autour de la valeur critique  $K_c$  de retrouver l'exposant critique  $\nu$ .

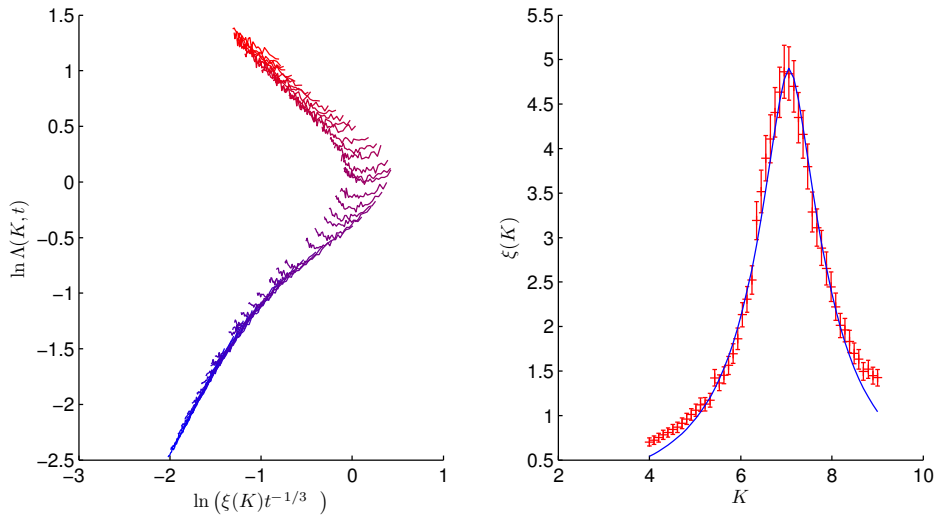
### 3.5.1.7. Séquence « I »

Les paramètres choisis, sont les mêmes que pour la séquence « H », les détails microscopiques restent inchangés. Nous avons en revanche changé la durée  $\tau$  du pulse. Pour toutes les autres séquences cette durée était de  $0.8 \mu\text{s}$ . Nous l'avons augmenté à  $0.96 \mu\text{s}$ , soit une augmentation non-négligeable de près de 25%. Cela a pour but d'éliminer tout doute sur un éventuel effet de boîte classique sur cette transition. La conclusion, à la vue de  $\nu = 1.70 \pm 0.12$  trouvé ici, est qu'il n'y a pas d'effet notable lors d'une diminution de la taille de la boîte classique. De plus cette nouvelle séquence nous permet de confirmer la répétabilité de l'expérience, via un point de transition  $K_c$  qui n'a que très peu varié.

On remarque aussi que l'erreur sur l'exposant critique est du même ordre que sur la séquence « H ». Cela est dû à leur grande valeur de  $k$ . En effet, dans ce régime, les longueurs de localisation sont plus courtes, et les coefficients de diffusion plus faibles. Même si leurs comportements critiques restent universels, la transition est plus « molle » et rend la caractérisation de  $\nu$  plus délicate.

$k$	3.46
$\omega_2$	$\sqrt{5}$
$\omega_3$	$\sqrt{13}$
$(K, \varepsilon)$	$(3, 0.1)$ $\rightarrow (5.7, 0.73)$

**Tableau 3.8.:** Paramètres de la séquence « I »



**Figure 3.15.:** Fonction d'échelle  $f$  reconstituée (à gauche) et fonction  $\xi(K)$  déduits pour la séquence « I ». Un fit (en bleu) permet, autour de la valeur critique  $K_c$  de retrouver l'exposant critique  $\nu$ .

### 3.5.2. Calcul de l'erreur sur l'exposant critique et méthode de *bootstrap*

Nous avons donné des erreurs sur les exposants critiques  $\nu$  trouvés pour chaque séquence. Nous détaillons à présent la méthode mise en place pour le calcul de celles-ci.

Une méthode « naïve » de calcul de l'erreur serait de répéter expérimentalement plusieurs fois chaque séquence, d'obtenir un ensemble de valeurs de  $\nu$  et d'en faire un traitement statistique. De par le temps nécessaire à une séquence ( $\sim 24$  heures), cette approche n'est pas viable. Nous allons montrer comment, en partant des erreurs  $\Delta\Pi_0(t)$ , on peut remonter à l'erreur  $\Delta\nu$ , via la méthode dite de *bootstrap*.

Pour chaque séquence du désordre, nous avons des courbes  $\Pi_0(K, t)$  pour 50 valeurs différentes de  $K$  (Figure 3.3). A celles-ci sont adjointes des erreurs statistiques  $\Delta\Pi_0(K, t)$ . On peut dès lors calculer l'erreur sur  $\Lambda_0(K, t) = \Pi_0^{-2}t^{-2/3}$  (en supposant  $\Delta t$  négligeable) :

$$\Delta\Lambda_0(K, t) = \frac{2}{\Pi_0^2(K, t)t^{2/3}} \frac{\Delta\Pi_0}{\Pi_0}. \quad (3.7)$$

Ou encore, du fait que nous nous servons des courbes de  $\ln \Lambda_0(K, t)$  (Figure 3.5) pour la procédure de *Finite Time Scaling*, calculer

$$\Delta \ln \Lambda_0(K, t) = 2 \frac{\Delta\Pi_0}{\Pi_0}. \quad (3.8)$$

La procédure de *bootstrap* est alors la suivante. On considère un générateur  $G(\sigma)$  de nombres aléatoires normalement distribués, centrés en zéro avec un écart-type  $\sigma$ . La densité de probabilité d'un tel générateur est donc  $P(x) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-x^2/2\sigma^2}$ .

Nous commençons par créer un nouvel ensemble «  $j$  » (dit échantillon *bootstrap*)  $\ln \Lambda_{0,j}(K, t)$  tel que.

$$\begin{aligned} \ln \Lambda_{0,j}(K, t) &= \ln \Lambda_0(K, t) + G[\Delta \ln \Lambda_0(K, t)] \\ &= \ln \Lambda_0(K, t) + G\left[2 \frac{\Delta\Pi_0}{\Pi_0}\right]. \end{aligned}$$

De cet ensemble nous extrayons un exposant critique  $\nu_j$  grâce à la méthode de mise à l'échelle à temps fini. On ré-itére jusqu'à avoir un ensemble satisfaisant de valeurs de  $\nu_j$ , dont le traitement nous renvoie via leur moyenne, l'exposant critique final  $\nu$ , ainsi que l'écart-type  $\Delta\nu$ .

### 3.5.3. Résumé des séquences

Nous avons ainsi réalisé 9 séquences différentes, dont nous proposons un résumé dans le tableau suivant :

Les valeurs trouvées se répartissent autour de l'exposant critique prédit dans les systèmes désordonnés [37]  $\nu = 1.59$ . Ce qui nous démontre, que les exposants critiques ne dépendent pas des détails microscopiques. Ceci est la preuve de l'universalité!

	A	B	C	D	E
$K_c$	6.67	6.68	5.91	$\varepsilon_c = 0.448$	4.69
$\nu$	$1.63 \pm 0.06$	$1.57 \pm 0.08$	$1.55 \pm 0.25$	$1.67 \pm 0.18$	$1.64 \pm 0.08$
	F	G	H	I	Moyenne
$K_c$	6.07	5.61	6.86	7.06	—
$\nu$	$1.68 \pm 0.06$	$1.55 \pm 0.10$	$1.66 \pm 0.12$	$1.70 \pm 0.12$	<b><math>1.63 \pm 0.05</math></b>

**Tableau 3.9.:** Résumé des résultats expérimentaux pour les différentes séquences de l'expérience

De plus l'erreur sur chacune de ces séquences permet d'exclure une éventuelle appartenance du rotateur frappé à l'ensemble unitaire ( $\nu = 1.43$ ) ou à l'ensemble symplectique ( $\nu = 1.36$ ). En prenant la moyenne de ces exposant critiques, on trouve  $\nu = 1.63 \pm 0.05$ . Cela place expérimentalement, pour la première fois, le rotateur frappé quasi-périodique dans la même classe d'universalité que le problème d'ANDERSON : l'ensemble gaussien orthogonal (GOE).

## 3.6. Effets de décohérence

Une rapide inspection des courbes  $\Pi_0(K, t)$  (Figure 3.3) nous indique que même dans le régime localisé (en bleu sur la Figure 3.3) où elles doivent être constantes, elles décroissent quand même. Cette pathologie est la manifestation de la décohérence. Les sources de décohérences étant multiples dans une telle expérience, nous allons tenter de les détailler plus précisément que dans le deuxième chapitre, et ce, à la lumière des résultats expérimentaux.

### 3.6.1. Plusieurs types de décohérence

**Décohérence par fluorescence** C'est le phénomène indésirable le plus fondamental. En effet, si la fréquence de l'onde stationnaire se rapproche de celle de la transition  $D_2$  du Césium, l'atome va passer sur un niveau excité et émettre un photon dans une direction aléatoire par effet de fluorescence, que l'on appelle « émission spontanée » par abus de langage .

Pour une expérience de rotateur frappé standard, nous avons regardé  $\Pi_0(t)$  pour deux valeurs du désaccord de l'onde stationnaire, une prise égale à  $-26$  GHz (la valeur standard dans nos séquences), l'autre 2 fois supérieure à  $-52$  GHz. Un effet à été constaté, la courbe à plus faible désaccord décroît plus vite, mais seulement de manière marginale, n'expliquant qu'une petite partie des effets de décohérence. Il faut chercher ailleurs.

**Décohérence par couplage avec la gravité terrestre** Nous abordons ici un effet de décohérence plus subtil. Notre modèle implique que l'onde stationnaire est parfaitement perpendiculaire à la gravité terrestre. Dans le cas contraire, il nous faut décrire le

problème avec un hamiltonien sensiblement différent. On pose  $\eta$  la différence d'angle entre une onde stationnaire parfaitement perpendiculaire à la gravitation terrestre, et une autre légèrement penchée. L'hamiltonien du rotateur frappé 1D devient alors

$$H_{nh} = \frac{p^2}{2} + K \cos \left( x + \frac{g_0}{2} t^2 \sin \eta \right) \sum_n \delta(t - n), \quad (3.9)$$

avec  $g_0$  une constante de gravité adimensionnée. Cet hamiltonien a perdu sa symétrie temporelle : dans le référentiel de l'atome, l'onde stationnaire se déplace de pulse à pulse avec la chute libre de ce dernier. D'un point de vue fondamental, les quasi-impulsions se mélangent et réduisent les effets de localisation dynamique. Cet effet se traduit par une diffusion, dont la décroissance des courbes  $\Pi_0(t)$  en est une manifestation.

Le réglage de l'horizontalité est, pour en dire le moins, délicat. Il faut regarder la décroissance des courbes de  $\Pi_0(t)$  et la minimiser en fonction de l'angle  $\eta$ . Numériquement [46], il est estimé que sa valeur doit être inférieure à  $0.1^\circ$ . Dans la pratique, une telle précision est atteinte, le minimum existe mais est toujours très décohérent. Ce qui tend à faire croire que l'horizontalité n'est pas la source majeure de décohérence dans notre système.

**Décohérence par bruit de phase de l'onde stationnaire** C'est à cet effet (dont il existe une étude théorique [65]) que nous attribuons la plus grande part de responsabilité dans l'effet de décohérence constaté. Les diodes en cavité externe, comme nous en avons fait mention au chapitre second, ont été remplacées par des diodes *DFB* dont la largeur spectrale  $\Delta f$  est de 5 MHz (à comparer aux 100-200 kHz des diodes en cavités externe). On peut alors définir une longueur de cohérence  $L_c = c_0/\Delta f \simeq 60$  m (où  $c_0$  est la vitesse de la lumière dans l'air).

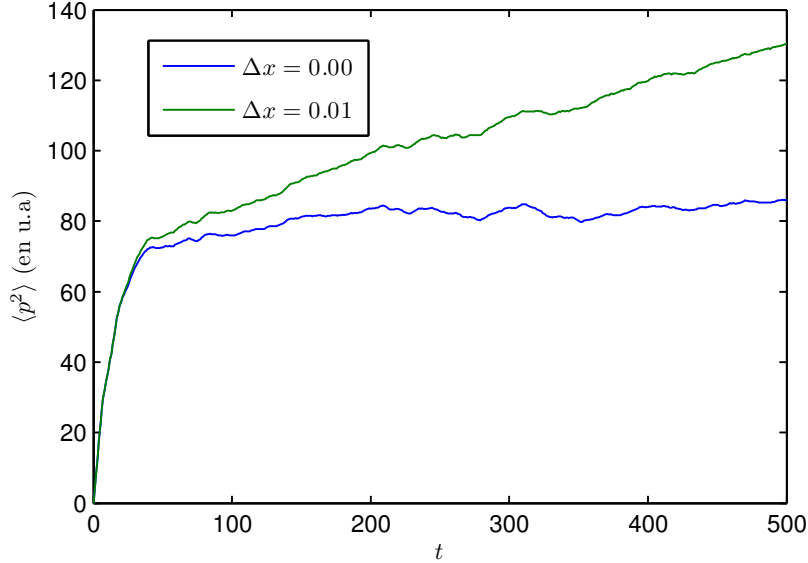
Devant la différence de marche  $\Delta L = 1$  m entre le faisceau aller et le faisceau retour rétro-réfléchi de l'onde stationnaire, cette longueur de cohérence  $\Delta L$  peut paraître grande, et ses effets négligeables. Il n'en est rien. Cette différence de marche induit dans la phase de l'onde stationnaire un bruit blanc, dont l'amplitude, même faible, participe majoritairement aux effets de décohérence observés.

Pour tenter d'en voir ses conséquences, on introduit un générateur de nombres aléatoires  $G_{\square}^t(y)$  distribués uniformément entre 0 et  $y$ . La variable  $t$  incluse dans ce dernier nous signifie simplement qu'à chaque pulse une nouvelle phase aléatoire doit être tirée. En introduisant cette dernière dans l'opérateur de pulse, on obtient l'hamiltonien modifié suivant pour un rotateur frappé 1D :

$$H_{\square} = \frac{p^2}{2} + K \cos \left( x + G_{\square}^t(2\pi\Delta x) \right) \sum_n \delta(t - n), \quad (3.10)$$

où nous avons introduit l'amplitude de bruit de phase  $\Delta x$ . On notera que si la phase change de pulse à pulse, ce modèle simpliste n'illustre pas le fait que durant le pulse (qui est de durée finie) la phase change aussi, du fait que le bruit blanc se manifeste à toutes les fréquences. Les effets restent malgré tout très importants, et montrent que pour de faibles valeurs de  $\Delta x$ , ce bruit de phase induit une diffusion dans l'espace des

impulsions (Figure 3.16). Pour des raisons géométriques dans le dispositif expérimental il est (encore) difficile de réduire cette distance  $\Delta L$ .



**Figure 3.16.:** Comportement de  $\langle p^2 \rangle(t)$  pour différentes valeurs de bruits de phase  $\Delta x$ . Nous avons pris  $K = 8$ , et moyenné sur 1000 quasi-impulsions initiales  $\beta$  différentes.

### 3.6.2. Conséquences sur la caractérisation de la transition d'Anderson

Les effets de décohérence perturbent naturellement l'observation de la transition d'ANDERSON. Ces effets, comme mentionné précédemment induisent un effet de diffusion, y compris du côté localisé. Dans la procédure de *Finite Time Scaling*, cela tend à décaler le point de transition  $K_c$  vers le bas.

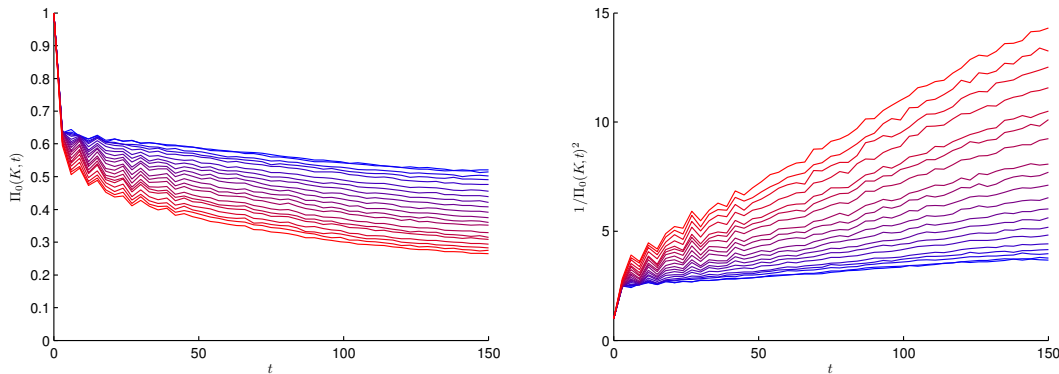
En plus de cela, les courbes  $\ln \Lambda_0$  s'incurvent légèrement (Figure 3.5), ce qui dans le *Finite Time Scaling*, rend la superposition des courbes plus « molle ». Cela réduit bien évidemment la divergence de la fonction  $\xi(K)$  déduite, et justifie d'autant plus l'introduction du paramètre de coupure  $\beta$ .

La décohérence induite, quelque-soit son origine, induit une incurvation des courbes  $\ln \Lambda_0$ . Pour un faible nombre de pulses ( $\sim 150$ ), cet effet n'est pas gênant pour une mesure correcte de l'exposant critique  $\nu$ . Pour un nombre supérieur de pulses, le comportement diffusif prendrait le pas sur toutes les courbes localisées, la transition de phase ne serait alors plus observée. Pour caractériser une transition d'ANDERSON quadri-dimensionnelle, sont estimés nécessaires 500 pulses. En l'état, une telle observation est au delà des limites du dispositif.

### 3.6.3. Première tentative d'observation de l'absence de diffusion quantique à 2D

On rappelle qu'à deux dimensions, la théorie ne prévoit pas de transition de phase dans le modèle d'ANDERSON [7], tous les états sont marginalement localisés : pour des temps suffisamment longs, tous les états tendent à se localiser mais avec une longueur de localisation  $\lambda$  croissant exponentiellement avec le désordre. Aucun état n'étant délocalisé, il ne peut exister de caractère diffusif persistant aux temps longs.

Le rotateur frappé quasi-périodique devient bi-dimensionnel en faisant passer  $\omega_3$  à zéro. Malgré la simplicité conceptuelle de l'expérience, il nous a été impossible d'observer cette absence de diffusion. Et cela pour une raison très simple : la décohérence induit un caractère diffusif *permanent* à la fonction  $\langle p^2(t) \rangle$  mesurée et empêche une observation franche de l'absence de diffusion quantique à 2 dimensions, comme en atteste la Figure 3.17.



**Figure 3.17.:** Données expérimentales pour  $\varepsilon = 0.0$  (en bleu) à  $\varepsilon = 0.4$  (en rouge) pour un rotateur frappé quasi-périodique bi-dimensionnel. Les paramètres choisis sont  $\tilde{k} = 5.47$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$  et  $K = 15$ .

Ainsi, en l'état, le dispositif ne permet pas l'observation de cette *absence de diffusion*, un phénomène théoriquement prédit et numériquement constaté. Pour observer celle-ci, il faut minimiser davantage les effets induisant une décohérence.

## 3.7. Conclusion

Grâce à cette expérience, nous avons montré deux propriétés fondamentales du rotateur frappé quasi-périodique. La première est l'universalité de la transition de phase ayant lieu dans le rotateur frappé quasi-périodique : l'exposant critique  $\nu$  est indépendant des paramètres microscopiques régissant le désordre et le couplage. Il prend une valeur constante. La seconde propriété que nous avons déterminée est la classe d'universalité à laquelle appartient cette transition. En effet, la valeur moyenne de l'exposant critique  $\nu$  place le rotateur frappé quasi-périodique dans la même classe d'universalité que le modèle d'ANDERSON dans l'espace réel [43] : *l'ensemble gaussien orthogonal*.



Enfin, ce travail représente la première détermination expérimentale, au delà de tout doute raisonnable, de la valeur de l'exposant critique  $\nu$  associée à l'ensemble orthogonal [66, 67], constituant en adjonction de la caractéristique d'universalité, la première preuve expérimentale de l'appartenance de la transition d'ANDERSON à cette classe d'universalité.

On notera aussi que la méthodologie employée, de l'acquisition des courbes  $\Pi_0(K, t)$  à la fonction  $\xi(K)$  n'est basée que sur une seule hypothèse : la théorie d'échelle à un paramètre. Dans la mesure où celle-ci n'est pas invalidée, l'exposant critique déduit ne peut donc être considéré que comme exact. L'excellent accord entre sa valeur expérimentalement trouvée ( $\nu = 1.63 \pm 0.05$ ) et la valeur prédite numériquement ( $\nu = 1.59 \pm 0.01$ ) [15], nous montre que les effets de décohérences n'ont finalement que peu d'impact sur cette valeur dans le cadre d'une transition tri-dimensionnelle.

En revanche, nous avons été immédiatement confrontés à ceux-ci lorsque nous avons souhaité caractériser ce problème à deux dimensions. Les effets de diffusion en découlant sont en contradiction directe avec les prédictions théoriques d'absence de diffusion à deux dimensions[7]. Nous avons donc été conduit à modifier en profondeur le dispositif expérimental en passant l'onde stationnaire d'une configuration horizontale à une configuration verticale que nous allons détailler dans le chapitre suivant.

# 4. Développement du dispositif expérimental vertical

## Sommaire

---

<b>4.1. Introduction</b>	<b>89</b>
<b>4.2. Onde stationnaire verticale</b>	<b>90</b>
4.2.1. Génération des deux faisceaux de l'onde stationnaire	91
4.2.2. Compensation active de phase	93
4.2.3. Modulation quadratique de phase	93
4.2.4. Bilan	95
<b>4.3. Détection vélocimétrique par temps de vol</b>	<b>95</b>
4.3.1. Principe de détection	96
4.3.2. Traitement mathématique	96
4.3.3. Simulation numérique	98
4.3.4. Expérimentalement	103
<b>4.4. Premières données expérimentales</b>	<b>104</b>
4.4.1. Temps de vol sans pulses	104
4.4.2. Temps de vol avec pulses	106
4.4.3. Saturation en énergie	106
<b>4.5. Couplage à la gravitation</b>	<b>107</b>
<b>4.6. Bilan et perspectives</b>	<b>109</b>

---

## 4.1. Introduction

Nous avons eu l'occasion de voir à la fin du chapitre précédent, que les défauts inhérents aux principes de la détection et de l'onde stationnaire imposent une limite à l'expérience. Au cours de cette thèse, après avoir obtenu les résultats sur l'universalité, je me suis attelé à la mise en place de la réalisation expérimentale du rotateur frappé vertical. Deux parties de cette expérience ont été radicalement modifiées, d'une part le dispositif générant l'onde stationnaire et d'autre part le système de détection vélocimétrique. Nous allons, dans ce chapitre détailler ces nouveautés et exhiber les premiers résultats expérimentaux.

L'idée fondamentale derrière la configuration verticale est rattachée à l'onde stationnaire. Avec son homologue horizontal, nous étions confrontés à plusieurs limites fondamentales, telles que le temps de passage du nuage dans le faisceau, le réglage de l'horizontalité de l'onde stationnaire par rapport à la gravité terrestre (afin d'éviter

tout couplage) fastidieux, ou encore la différence de chemin optique des deux bras générant l'onde stationnaire. Ces contraintes imposaient une limite effective sur le nombre de pulses applicables au système. Or, l'étude du problème d'ANDERSON en dimension 2 ou 4 en requiert bien davantage. Le passage en vertical règle très élégamment ces trois défauts. Nous verrons comment dans un premier temps.

Dans un second temps nous verront les changements apportés à la phase de détection vélocimétrique. Le dispositif Raman que nous avons utilisé jusqu'à présent, disposait de plusieurs avantages non négligeables : d'une part la possibilité de faire des mesures *sub-recul* [68] et d'autre part la possibilité de faire une sélection en vitesse sur le nuage initial [58, 59]. Seulement, le passage de l'onde stationnaire en vertical rend l'utilisation de ce dispositif beaucoup plus complexe. En plus d'être compliqué à mettre en place géométriquement, le pulse Raman serait appliqué sur des atomes en accélération, phénomène pour lequel il n'existe pas encore de traitement théorique. Dans le cadre de l'étude de la transition d'ANDERSON avec un rotateur frappé, les deux qualités de ce système ne sont plus pertinentes. Nous avons ainsi choisi d'implémenter une vélocimétrie par temps de vol.

Notons que la séquence de préparation du nuage à l'aide du piège magnéto-optique reste inchangée, nous ne traitons ici que les séquences de pulses et de détection.

## 4.2. Onde stationnaire verticale

Traiter le problème verticalement, signifie que le nuage doit être frappé par l'onde stationnaire dans la direction de la chute induite par la gravité terrestre. Ainsi, le premier avantage d'une onde stationnaire verticale est de ne plus être limité en nombre de pulses applicables au système du-fait que le nuage d'atomes suit l'onde stationnaire lors de sa chute. Considérons un faisceau ayant un col  $w_0 = 1.5$  mm, la longueur de RAYLEIGH associée est donc  $l_R = 16.59$  m. Pour une séquence de 1000 pulses, le nuage a parcouru une distance de  $\Delta z = 3.8$  mm, une distance négligeable devant longueur de RAYLEIGH. Alors que dans une configuration horizontale, le critère de comparaison n'est pas la longueur de RAYLEIGH mais le col  $w_0$ .

Les principaux facteurs limitant les nombres de pulses ne sont plus que la décohérence par effet de fluorescence (dont la probabilité est inversement proportionnel au désaccord  $\delta_L$  de l'onde stationnaire) et un couplage résiduel au champ de gravitation terrestre.

La chute du nuage implique de générer l'onde stationnaire à l'aide de deux faisceaux lasers indépendants en phase. Si on prenait un système où le faisceau retour est généré avec le faisceau aller à l'aide d'un miroir, le potentiel optique dans le référentiel du laboratoire serait immobile. Or, le nuage étant en chute libre, il verrait le potentiel accélérer. La solution choisie est de moduler la phase d'un des bras de l'onde stationnaire<sup>1</sup> quadratiquement, afin de suivre le nuage dans sa chute libre. Nous traitons ce problème en premier.

---

1. Nous continuerons d'utiliser le terme *onde stationnaire* malgré le fait qu'elle se déplace quadratiquement, car dans le référentiel des atomes, celle-ci reste immobile.

Vient ensuite la seconde difficulté. Celle-ci émerge du fait que les deux faisceaux suivent un chemin optique différent, dont une dizaine de mètres dans deux fibres optiques. Les variations d'indices générés par le bruit acoustique (dans la fibre mais aussi dans l'air), suffisent à faire dériver la phase en sortie d'une quantité non-négligeable devant  $2\pi$  et ce pour des temps comparables à la durée d'une séquence de pulses. Il nous faut alors introduire un système de compensation active de phase, dont nous traiterons la description en second.

Un récapitulatif diagrammatique est proposé sur la Figure 4.1.

### 4.2.1. Génération des deux faisceaux de l'onde stationnaire

Pour conserver la cohérence de phase entre les deux faisceaux, nous n'utilisons pas deux systèmes *MOPA* indépendants, mais partons d'un laser maître unique qui injectera deux amplificateurs optiques différents. La *DFB* utilisée pour ce dernier reste la même que précédemment. Nous avons ainsi rajouté un second amplificateur optique dont les caractéristiques sont calqués sur le premier. Le bénéfice du remplacement précédent de la diode en cavité externe par une diode *DFB* est alors immédiat : celle-ci possède suffisamment de puissance pour injecter ces deux amplificateurs dans leur régime de saturation.

A la sortie de laser maître, après un isolateur optique, le faisceau est séparé en deux à l'aide d'un cube polariseur. Les deux bras sont alors injectés dans les amplificateurs optiques. A la sortie de ceux-ci le chemin est le même : un isolateur optique et un modulateur acousto-optique pour générer les pulses en modulant l'injection dans la fibre.

Afin de pouvoir amener un des bras en haut de la cellule de Césium, nous avons monté une table optique en dessus de cette dernière, celle-ci est fixée sur un support construit à base de tiges profilées en aluminium. Nous l'avons ensuite usiné en perçant un trou en son centre afin que le faisceau laser descendant puisse passer.

A la sortie des deux fibres, les faisceaux sont collimatés et génèrent l'onde stationnaire verticale. Les deux collimateurs sont montés sur un support permettant de contrôler la direction du faisceau, lui même monté sur des platines de translations XYZ. Ces contrôles permettent de s'assurer d'une part d'un bon recouvrement des deux faisceaux lasers sur le piège, et d'autre part que l'onde stationnaire est bien verticale.

On peut d'ores et déjà noter la résolution d'un problème. Auparavant, dans la version horizontale du montage où l'onde stationnaire est obtenue par réflexion, les faisceaux aller et retour ont un chemin optique différent. Même si cette différence est petite devant la longueur de cohérence du laser (1m contre 60m), celle-ci induit une fluctuation en phase, faisant ainsi varier la phase du potentiel optique vu par les atomes. Nous avons vu (à la fin du chapitre 3) qu'une variation de l'ordre de 1% était déjà très néfaste à la localisation dynamique. Désormais, il est directement possible de jouer sur la longueur des deux chemins optiques (par exemple en raccourcissant ou en allongeant une des fibres optiques) pour les égaliser. La différence entre ces derniers est maintenant estimée à quelques centimètres. Nous ne sommes désormais plus victimes de la différence de chemins optiques propres au montage horizontal.

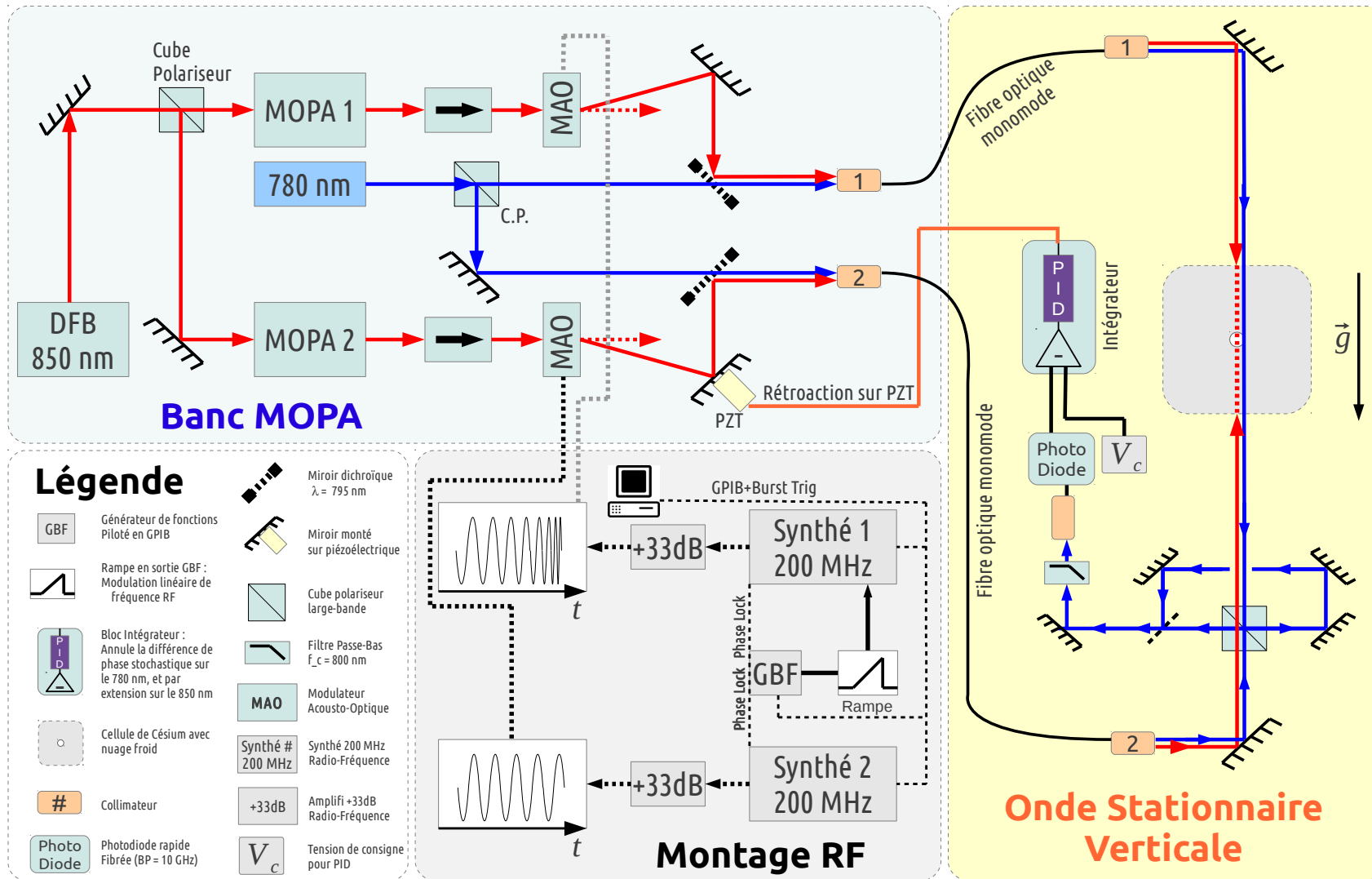


Figure 4.1.: Schéma du dispositif de l'onde stationnaire verticale

A ce stade, l'onde stationnaire générée est toujours soumise à de deux problèmes inhérents à sa configuration verticale : la variation stochastique de sa phase due aux chemins optiques différents induite par le bruit acoustique et le fait qu'elle ne suive pas le nuage d'atomes dans sa chute.

### 4.2.2. Compensation active de phase

Pour compenser ces variations de phase, nous allons faire un asservissement. Sur un faisceau allumé en permanence, il aurait suffi de prélever une petite partie des deux faisceaux, de les faire interférer et d'utiliser un tel signal pour rétroagir sur un piézoélectrique sur un des bras de l'onde stationnaire. Cette méthode, classique, n'est pas applicable lorsque le faisceau devant être asservi en phase est pulsé. En effet la bande passante du piézo-électrique utilisé est estimée à 2 kHz, soit un temps caractéristique d'asservissement de  $500 \mu\text{s}$ , bien supérieur à la durée d'un pulse ( $\sim 800 \text{ ns}$ ).

Pour contourner ce problème, nous avons besoin de deux faisceaux suivant les chemins optiques des deux bras de l'onde stationnaire, allumés en permanence, mais suffisamment désaccordés pour ne pas interagir avec le nuage. Nous avons choisi une source à 780 nm. Hormis le faible coût de ce type de diode, ce choix est motivé par le fait que les fibres optiques utilisées restent monomode à cette longueur d'onde, et le fait qu'il existe des miroirs dichroïques qui sont réfléchissants à 850 nm et transparents à 780 nm. Ces derniers permettant l'insertion des faisceaux à 780 nm dans les chemins optiques à 850 nm.

Il est nécessaire de faire cette insertion après les modulateurs acousto-optiques. Si celle-ci est faite en amont de ces derniers, alors ce faisceau « secondaire » serait pulsé de la même façon que ceux créant l'onde stationnaire...

En sortie de fibres, on sépare ces faisceaux secondaires des faisceaux de l'onde stationnaire à l'aide d'un cube polariseur (pour être certain que les polarisations du 780 nm et du 850 nm soient bien orthogonales, nous avons placé des lames d'ondes  $\lambda/2$  et  $\lambda/4$  en amont de l'insertion des faisceaux à 780 nm). On réalise alors un interféromètre, dont le signal nous permet de rétro-agir sur un piézo-électrique, sur lequel est monté un miroir. Cela permet de faire varier la longueur d'un des bras et de compenser activement les variations stochastiques de phase

### 4.2.3. Modulation quadratique de phase

Nous venons de compenser le phénomène de fluctuations de phase stochastiques. Dans les conditions actuelles, le nuage d'atomes est soumis à un potentiel périodique dont la phase est stable en temps dans le référentiel du laboratoire. Or la gravitation induit une chute libre du nuage. Celui-ci voit alors le potentiel périodique accélérer en phase.

Une telle accélération est néfaste car d'un kick à l'autre, les états de FLOQUET changent, se recouvrent, et induisent une diffusion dans l'espace des impulsions. Nous allons ici montrer comment on compense ce phénomène.

Considérons le champ électrique suivant :

$$E(z, t) = E_0 \left[ e^{-ik_L z + i\varphi_1(t)} + e^{ik_L z + i\varphi_2(t)} \right], \quad (4.1)$$

où  $k_L$  est le nombre d'onde du laser maître générant les deux faisceaux de l'onde stationnaire,  $\varphi_1(t)$  et  $\varphi_2(t)$  sont les phases induites sur ces faisceaux à l'aide des modulateurs acousto-optiques et  $E_0$  l'amplitude de ces champs électriques. Un peu d'algèbre et un peu de physique nous amènent au résultat suivant (très proche de celui dérivé dans le chapitre 2), le potentiel  $V_L$  dans le référentiel du laboratoire

$$V_L(z, t) = V_0 \cos(2k_L z + (\varphi_2(t) - \varphi_1(t))). \quad (4.2)$$

En revanche, les atomes ne voient pas la même chose. L'accélération générée par la gravité  $g$ , introduit une accélération verticale du potentiel. Vu par les atomes, ce dernier se réécrit en effet comme

$$V_A(z, t) = V_0 \cos\left(2k_L z + (\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) + 2k_L \cdot \frac{1}{2}gt^2\right), \quad (4.3)$$

où le temps initial  $t = 0$  est le moment où les atomes sont libérés du piège et commencent à chuter. C'est ici que nous pouvons voir que l'introduction des phases  $\varphi_1(t)$  et  $\varphi_2(t)$  n'est pas anodine. Nous allons montrer comment ces phases permettent de compenser la chute libre des atomes. Individuellement elles s'écrivent

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \omega_{RF}t + \varphi_c(t) \\ \varphi_2(t) &= \omega_{RF}t, \end{aligned}$$

où  $\omega_{RF} = 2\pi \cdot 200$  MHz, la fréquence de l'onde radio-fréquence permettant la diffraction dans les modulateurs acousto-optiques, et  $\varphi_c(t)$  est une fonction de phase arbitraire. Afin que les atomes ne voient pas le potentiel accélérer, il faut fixer

$$(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) + k_L gt^2 = 0, \quad (4.4)$$

ce qui nous amène à

$$\varphi_c(t) = k_L gt^2. \quad (4.5)$$

La pulsation correspondant à ce signal est donc

$$\omega_c(t) = \frac{d\varphi_c(t)}{dt} = 2k_L gt. \quad (4.6)$$

Dans la pratique, cela revient à moduler la fréquence de l'onde RF de l'un des modulateurs acousto-optiques avec une rampe de pente  $2k_L g$ . Celle-ci est générée par un GBF, et est introduite dans le synthétiseur (ces derniers offrant la modulation en fréquence). De plus, pour être sûr que les porteuses de pulsations  $\omega_L$  s'annulent, ces synthétiseurs sont synchronisés sur la même horloge interne (voir Figure 4.1).

Tentons à présent de donner une valeur maximale à la fréquence pouvant être appliquée à ce système. En effet, une augmentation (ou diminution) de la fréquence RF dans le modulateur acousto-optique fait varier l'angle de diffraction, et peut éventuel-

lement dégrader la qualité de l'injection dans la fibre optique. Prenons, une expérience durant 4 ms (typiquement 150 pulses), on obtient alors  $\omega_c(t = 4 \text{ ms}) = 2\pi \cdot 92.1 \text{ kHz}$ . Soit une fréquence maximale très faible comparée à la fréquence de la porteuse de l'onde RF ( $\sim 200 \text{ MHz}$ ). Des mesures expérimentales ne permettent pas de constater une dégradation de l'injection dans la fibre optique pour cet ordre de grandeur. Pour commencer à observer celle-ci, il faut monter à des modulations de fréquence de  $\pm 1 \text{ MHz}$  d'amplitude. Cela indique que l'expérience peut monter à 1500 pulses sans avoir à craindre une perte de puissance de l'onde stationnaire.

Grâce à la chute du nuage suivant le faisceau, nous sommes passé d'une expérience dont le nombre de pulses était limité à 150 à cause du temps de passage des atomes dans l'onde stationnaire, à une limite estimée de 1500 pulses. La longueur de RAYLEIGH étant très grande devant la distance parcourue par les atomes pendant leur chute, la limite sur la qualité de l'injection dans la fibre est alors la seule imposée par des contraintes géométriques. Soit un facteur 10 gagné sur le dispositif horizontal.

#### 4.2.4. Bilan

Nous avons présenté le dispositif de l'onde stationnaire verticale. Les deux problèmes inhérents, la variation stochastique de phase et accélération quadratique de la phase du potentiel périodique, ont été quantifiés et sont désormais contrôlés expérimentalement. J'ai pris le parti de présenter le dispositif de détection avant d'illustrer expérimentalement ces deux phénomènes à la fin de ce chapitre.

### 4.3. Détection vélocimétrique par temps de vol

La méthode de détection vélocimétrique utilisée jusqu'à présent est la vélocimétrie Raman. En vertical, cela nous a semblé très délicat à implanter, de plus, appliquer le pulse Raman sur des atomes en accélération est beaucoup plus délicat à traiter et à notre connaissance, l'étude d'une telle transition stimulée n'existe pas. Enfin, la vélocimétrie Raman nous soumet toujours au même problème : on ne peut acquérir qu'une classe de vitesse par séquence de pulses.

Une autre technique est l'imagerie par absorption. Elle possède cependant le défaut d'être relativement lourde et coûteuse à mettre en place, et nécessite un traitement d'image gourmand en temps de calcul. Elle n'est donc pas adaptée à nos expériences, où de nombreuses courbes doivent être acquises pour en tirer de pertinentes conclusions.

A ces deux méthodes nous préférons une détection par temps de vol. L'onde stationnaire étant appliquée dans la même direction que la gravité, le profil de vitesse peut être obtenu en regardant la forme du temps de vol : à chaque temps d'arrivée peut être associé une classe de vitesse. Nous verrons ici un traitement mathématique du problème. Puis des simulations nous permettront de quantifier la résolution d'un tel système et nous montrerons qu'expérimentalement, un tel système satisfait les besoins du rotateur frappé.



### 4.3.1. Principe de détection

Le principe de détection est résumé sur la Figure 4.2. Un nuage d'atomes ayant une distribution de vitesse donnée tombe dans une sonde (un laser à résonance avec les transition  $D_2$  du Césium) dont la largeur est faible devant la distance séparant le nuage de celle-ci. On acquiert alors le profil de temps de vol, dont la forme est directement reliée à la distribution en vitesse initiale du nuage.

### 4.3.2. Traitement mathématique

Considérons une particule évoluant sur l'axe vertical  $\mathbf{e}_z$ . Au temps initial  $t_0 = 0$  considéré comme la fin du dernier pulse<sup>2</sup>, la particule possède une vitesse  $v$  et une position  $x_0$ . Les équations de NEWTON permettent nous donnent :

$$\ddot{z} = -g, \quad \dot{z} = -gt + v \quad \text{et} \quad z = -1/2gt^2 + vt + z_0, \quad (4.7)$$

avec  $g$  la constante de gravitation terrestre. On définit alors le temps d'arrivée  $t_a$  de l'atome dans la sonde dont la position par rapport au nuage est  $L_0$  :

$$L_0 = -1/2gt_a^2 + vt_a + z_0. \quad (4.8)$$

En résolvant, on obtient comme solution physique ( $t_a > 0$ )

$$t_a = \frac{v + \sqrt{v^2 + 2g(z_0 - L_0)}}{g}, \quad (4.9)$$

qui se transforme en :

$$v = \frac{1}{2}gt_a + \frac{L_0 - z_0}{t_a}. \quad (4.10)$$

Cette équation nous permet d'associer une vitesse  $v$  à chaque temps d'arrivée  $t_a$ . On peut alors détailler  $v$ . En effet, celui-ci doit contenir plusieurs termes. Le premier est l'accumulation de vitesse dû à la chute libre de la particule pendant le temps  $T_{delay}$  séparant la fin de la phase Sisyphe et la fin du dernier pulse (voir Figure 4.2). Le second est la vitesse que la particule acquiert suite aux pulses qui lui sont appliqués. On écrit donc

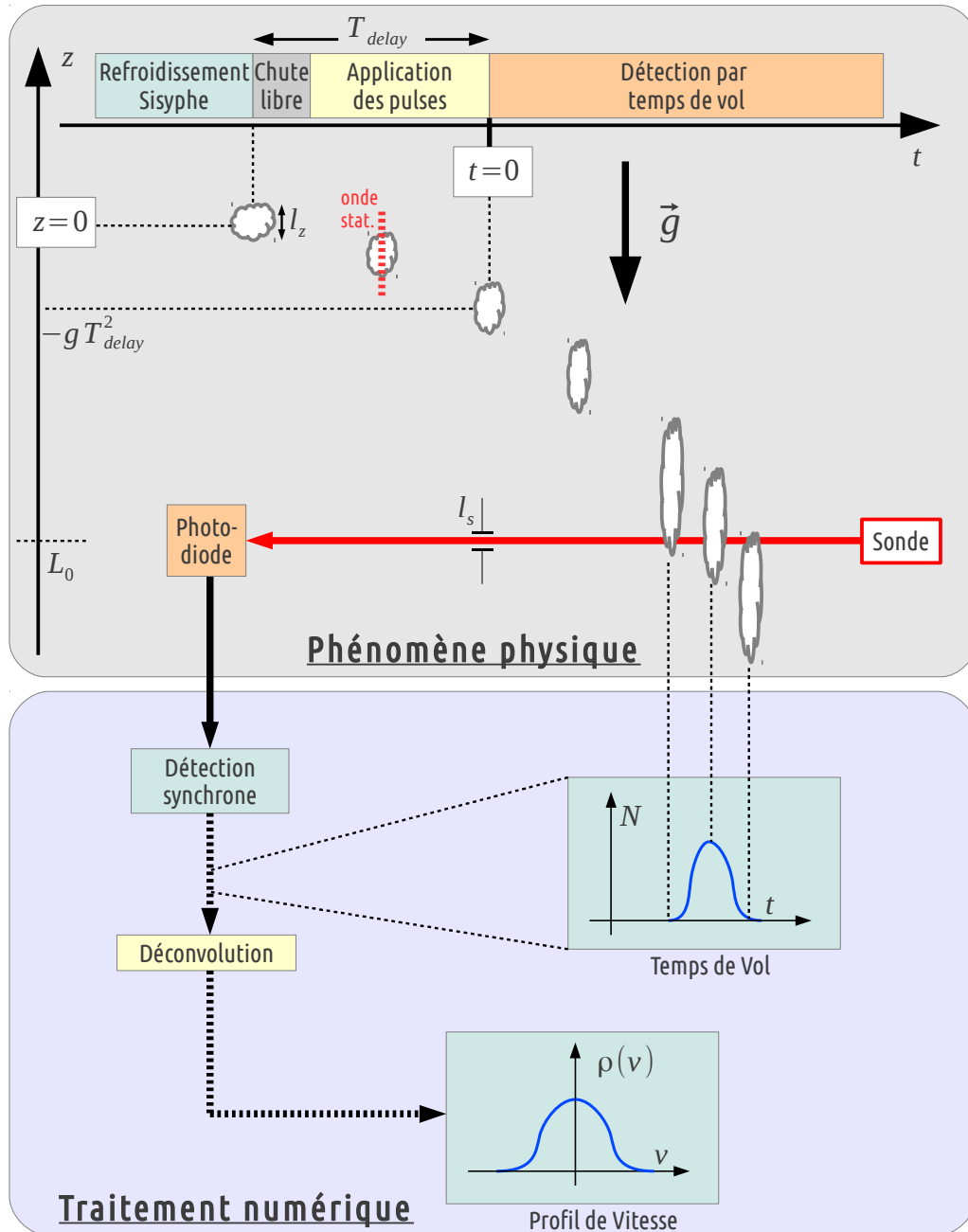
$$v = \underbrace{-gT_{delay}}_{\text{chute libre}} + \underbrace{v_{QKR}}_{\text{pulses}}. \quad (4.11)$$

Un raisonnement similaire nous permet d'expliciter la position  $z_0$ ,

$$z_0 = -\frac{1}{2}gT_{delay}^2. \quad (4.12)$$

---

2. Attention, le dernier pulse ne correspond pas au début de la chute. Celle-ci s'amorce à la fin de la phase Sisyphe.



**Figure 4.2.:** Schéma en temps en position récapitulatif du principe de détection par temps de vol.

Nous avons ici considéré que la position initiale (après la phase Sisyphe) de la particule vaut 0, cela revient à dire que le nuage est ponctuel. Cette approximation doit être faite, car un signal de temps de vol ne permet de remonter au profil de vitesse que si la position initiale est connue et est la même pour toutes les particules. Muni de ces deux relations, l'Équation 4.10 devient

$$v_{QKR} = gT_{delay} + \frac{1}{2}gt_a + \frac{L_0 + \frac{1}{2}gT_{delay}^2}{t_a}. \quad (4.13)$$

Ainsi chaque temps d'arrivée  $t_a$  peut être associé à une vitesse  $v_{QKR}$  issue du rotateur frappé quantique. C'est cette équation que nous utiliserons pour traiter les signaux de temps de vol expérimentaux. Nous appellerons, même si c'est un abus de langage, le procédé de passer du temps de vol à la distribution de vitesse initiale une *déconvolution*<sup>3</sup>.

### 4.3.3. Simulation numérique

Avant de réaliser le montage expérimental, j'ai fait des simulations numériques permettant de valider numériquement la détection par temps de vol. La méthode implémentée est détaillée ici.

Nous allons diviser notre algorithme en deux parties. Dans la première, nous allons générer le signal de temps de vol. Ce dernier doit intrinsèquement tenir compte de la taille finie du nuage (en position et vitesse), la distance nuage-sonde et la taille finie de la sonde. A l'aide de ce signal de temps de vol généré, nous allons dans la seconde partie appliquer naïvement l'Équation 4.13. A ce stade le but est alors de comparer de profil de vitesse que nous avons arbitrairement choisi pour notre nuage avec le profil obtenu suite à la déconvolution du temps de vol.

#### 4.3.3.1. Génération du signal de temps de vol

On commence par considérer un ensemble de particules  $\{i\}$  ayant pour conditions initiales  $(v_i, x_i)$ . Les vitesses  $v_i$  et les positions  $x_i$  sont tirées sur des distributions normales dont les densités de probabilité s'écrivent comme

$$P_v(v_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l_v} e^{-v_i^2/2l_v^2} \quad (4.14)$$

et

$$P_z(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l_z} e^{-z_i^2/2l_z^2}, \quad (4.15)$$

où  $l_v$  et  $l_z$  sont les écarts types, que nous appelons respectivement largeur en vitesse et largeur en position du nuage. Rappelons que dans le cadre de distributions normales :

---

3. En effet, en posant  $C = \rho * h$  (où  $C$  est le temps de vol,  $\rho$  le profil de vitesse initial,  $h$  l'action du dispositif expérimental et  $*$  le produit de convolution), la fonction résolvante  $h^{-1}$  n'existe pas. Déconvoluer en trouvant la résolvante  $h^{-1}$  est ainsi absurde.

$$\langle v^2 \rangle_{P_v} = l_v^2 \quad \text{et} \quad \langle z^2 \rangle_{P_z} = l_x^2. \quad (4.16)$$

Expérimentalement, à la fin de la phase Sisyphé, on a  $l_v \sim 4v_r$  (où  $v_r$  est la vitesse de recul lié à l'absorption ou l'émission d'un photon par l'atome de Césium) et  $l_z \sim 0.5$  mm. Nous allons à présent introduire une sonde de largeur finie. Pour cela, nous considérerons qu'elle possède un profil carré<sup>4</sup> de largeur  $l_s$  et se situe à  $L_0$ . Ainsi, vue par les atomes, la sonde commence à  $L_0 - l_s/2$  et se termine à  $L_0 + l_s/2$  lors de leur chute libre. On définit donc le temps d'entrée  $t_e^{(i)}$  et de sortie  $t_s^{(i)}$  pour toutes les particules :

$$t_e^{(i)} = \frac{v_i + \sqrt{v_i^2 + 2g \left( z_i - \left( L_0 + \frac{l_s}{2} \right) \right)}}{g} \quad (4.17)$$

et

$$t_s^{(i)} = \frac{v_i + \sqrt{v_i^2 + 2g \left( z_i - \left( L_0 - \frac{l_s}{2} \right) \right)}}{g}. \quad (4.18)$$

On discrétise ensuite le temps  $t$  par pas de durée  $\Delta t$  :  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ . A chaque temps  $t_n$  on compte alors le nombre  $N_n$  de particules qui satisfont la relation

$$t_e^{(i)} \leq t_n < t_s^{(i)}. \quad (4.19)$$

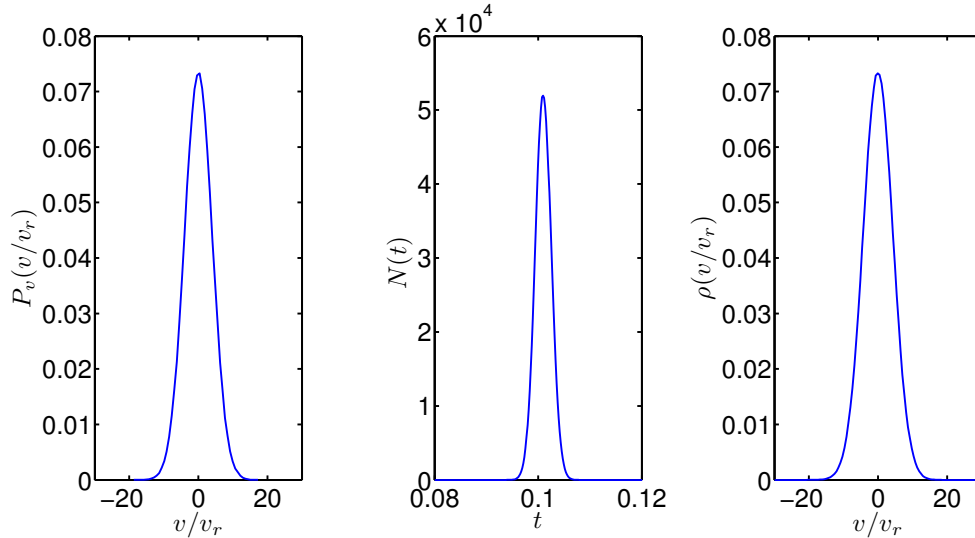
Le graphe des points  $(t_n, N_n)$  nous donne alors le profil de temps de vol. Nous avons ainsi tenu compte des quatre effets pertinents : la taille de la distribution initiale du nuage en vitesse  $l_v$  et en position  $l_z$ , la distance nuage-piège  $L_0$  et la taille finie de la sonde  $l_s$ . Il est à noter que le  $T_{delay}$  défini précédemment est ici ramené à zéro, pour des raisons de simplicité.

#### 4.3.3.2. Distribution de vitesse finale

On utilise l'Équation 4.13, nous permettant de remonter à la distribution de vitesse espérée. Afin d'illustrer cette procédure nous l'avons appliquée à un nuage ayant des conditions initiales réalistes expérimentalement :  $l_v = 4v_r$  ( $\cong 3.2 \mu\text{K}$ ),  $l_x = 0.5$  mm,  $L_0 = -5$  cm et  $l_s = 1$  mm. Un résumé des courbes obtenues est proposé dans la Figure 4.3. La largeur  $\sigma$  de la densité de probabilité  $\rho$  obtenue par déconvolution du temps de vol est supérieure à  $l_v$ . On attribue cette accroissement aux tailles initiales du nuage et de la sonde finies.

---

4. Ce sont des considérations numériques qui nous pousse à négliger le profil gaussien pour un profil carré. Il n'est cependant pas déraisonnable d'affirmer que les temps de vol observés serait comparables si une sonde gaussienne de largeur équivalente avait été considérée.



**Figure 4.3.:** A gauche, la distribution  $P_v$  imposée à la simulation (avec un écart-type  $l_v = 4v_r$ ). Au centre, le signal de temps de vol  $N(t)$  obtenu en considérant une taille de sonde finie  $l_s = 1$  mm. A droite, la distribution déduite du signal de temps de vol. L'écart-type  $\sigma$  sur celle-ci vaut  $\sigma = 4.31v_r$ .

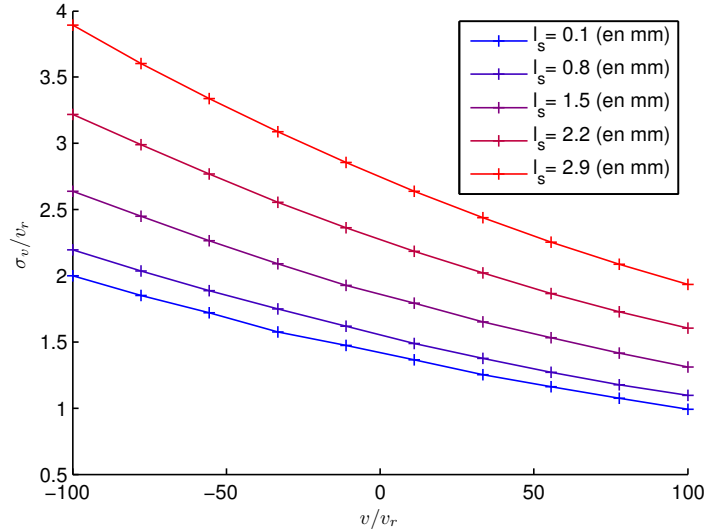
#### 4.3.3.3. Résolution escomptée

Nous avons vu qu'un tel système nous permet de remonter avec une bonne précision à la distribution initiale de vitesse du nuage. La question est maintenant de quantifier sa résolution. Pour cela, nous allons considérer des distributions de vitesses initiales « impulsives » (c.a.d. infiniment fine :  $l_v = 0$ ) centrées en  $v$ . On itère alors le même procédé, nous permettant de calculer la largeur  $\sigma_v$  de la distribution post-déconvolution. Nous allons étudier celle-ci en faisant varier les trois paramètres fondamentaux du temps de vol : la taille de la sonde  $l_s$ , la taille du nuage  $l_x$ , et la distance nuage-sonde  $L_0$

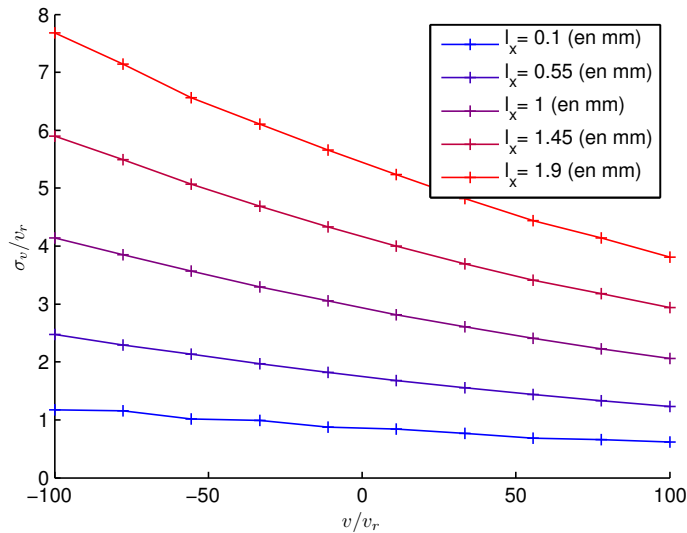
On commence par considérer cette variance pour des tailles de sonde  $l_s$  différentes et des paramètres standards (Figure 4.4). Les courbes obtenues sont toutes décroissantes. La raison en est plutôt simple, les particules partant avec une vitesse positive (vers le haut) mettent davantage de temps à parvenir à la sonde, ce qui augmente la résolution en temps de la vitesse. On constate aussi que plus la sonde est large, plus la résolution est médiocre.

En faisant varier la taille initiale du nuage  $l_x$ , les courbes obtenues ont qualitativement le même comportement, mais la résolution est plus sensible à la taille du nuage (voir Figure 4.5).

Enfin, on regarde la résolution en fonction de la distance nuage-sonde  $L_0$  (voir Figure 4.6). Il n'est alors pas surprenant de remarquer que plus la sonde est proche du nuage, moins bonne est la résolution. De plus, la dépendance de  $\sigma_v$  en vitesse est accrue.



**Figure 4.4.:** Résolution  $\sigma_v$  pour différentes tailles de sonde. Les paramètres choisis sont standards :  $l_x = 0.5$  mm et  $L_0 = -5$  cm

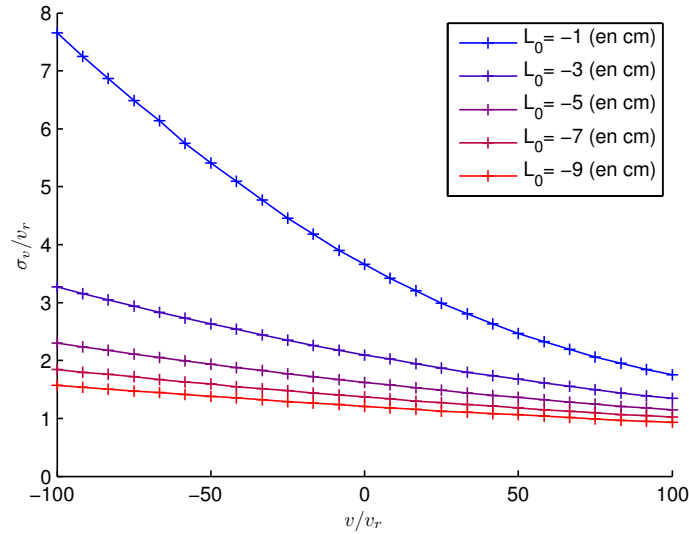


**Figure 4.5.:** Résolution  $\sigma_v$  pour différentes tailles initiales du nuage. Les paramètres choisis sont standards :  $l_s = 1.0$  mm et  $L_0 = -5$  cm

#### 4.3.3.4. Temps de passage

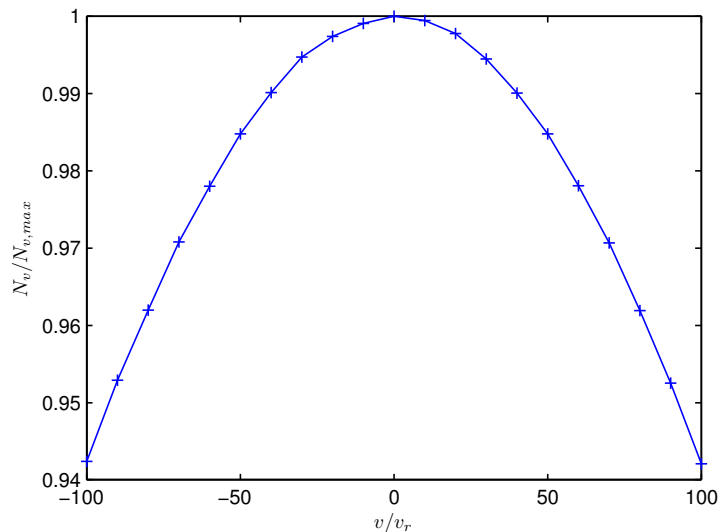
Nous venons de montrer que la résolution  $\sigma_v$  était dépendante de la vitesse (en plus des autres paramètres) et de l'ordre de  $2v_r$ . Or, lorsque nous considérons un nuage ayant une distribution initiale en vitesse gaussienne de largeur  $l_v = 4v_r$ , nous trouvons en sortie, une largeur de  $\sigma = 4.31v_r$  (sous-section 4.3.3.2). Soit un accroissement bien inférieur au  $\sigma_v \sim 2v_r$  obtenu dans les réponses impulsionnelles. L'explication est liée aux temps de passage du nuage dans la sonde.

En considérant qu'un atome cycle sur la transition  $D_2$  induite par la sonde un nombre de fois proportionnel au temps de passage dans la sonde, les atomes ayant une grande



**Figure 4.6.:** Résolution  $\sigma_v$  pour différentes distances nuage-sonde  $L_0$ . Les paramètres choisis sont standards :  $l_s = 1.0$  mm et  $l_x = 0.5$  mm

vitesse seront moins détectés. Ainsi les contributions des atomes ayant une grande vitesse sont moindres et tendent à réduire la variance des distributions obtenues. On pose  $N_v$ , l'amplitude du signal détecté pour une classe de vitesse  $v$ . Numériquement, on l'obtient en intégrant  $C(t)$  (voir Figure 4.7). Il est alors clair que pour de grandes vitesses  $v$ , l'amplitude du signal décroît, et induit une diminution sur la largeur des profils  $\rho(v)$  obtenus.

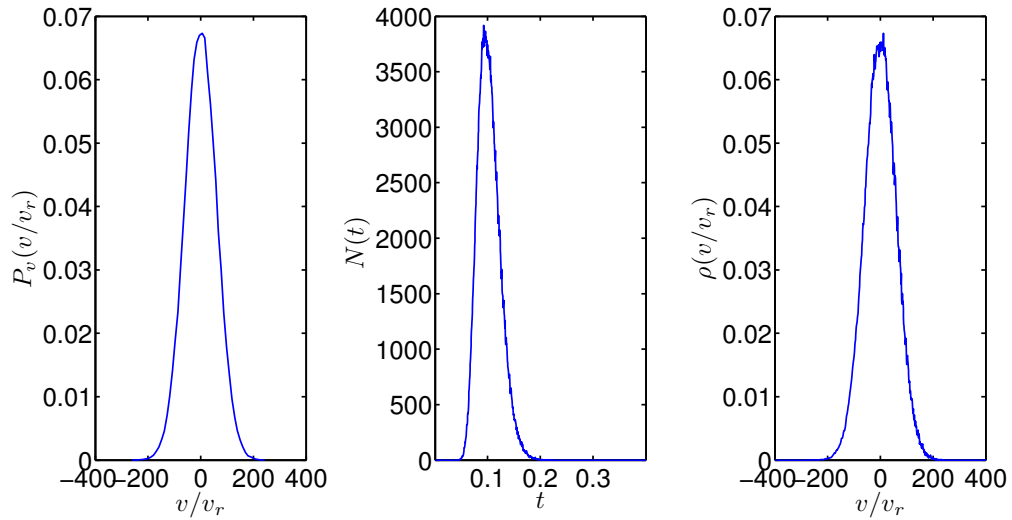


**Figure 4.7.:** Nombre d'atomes  $N_v$  détecté pour une classe de vitesse  $v$ . Les conditions sont standards :  $l_s = 1$  mm,  $l_x = 0.5$  mm,  $L_0 = -5$  cm.

### 4.3.3.5. Bilan

Nous venons de caractériser numériquement la vélocimétrie par temps de vol. Sur les profils  $\rho(v)$  obtenus par déconvolution, on peut s'attendre à une résolution  $\sigma_v \sim 2v_r$ , soit dans l'espace des impulsions à la distance séparant deux sites. Ainsi la résolution est de l'ordre du site. Si cette dernière n'est pas trop sensible à la position de la sonde ou à sa largeur, la taille initiale du nuage semble critique et doit rester en deçà du millimètre, au delà la résolution est trop dégradée.

Le temps de passage du nuage dans la sonde, implique un léger tassement sur les ailes des profils obtenus. Nous avons vu que cela tendait à faire baisser les écart-types  $\sigma$ . Mais pour des distributions excessivement larges (par exemple : avec  $l_v = 60v_r$  on trouve  $\sigma = 60.02v_r$ , voir Figure 4.8), cette baisse de l'écart-type semble bornée par  $l_v$ .



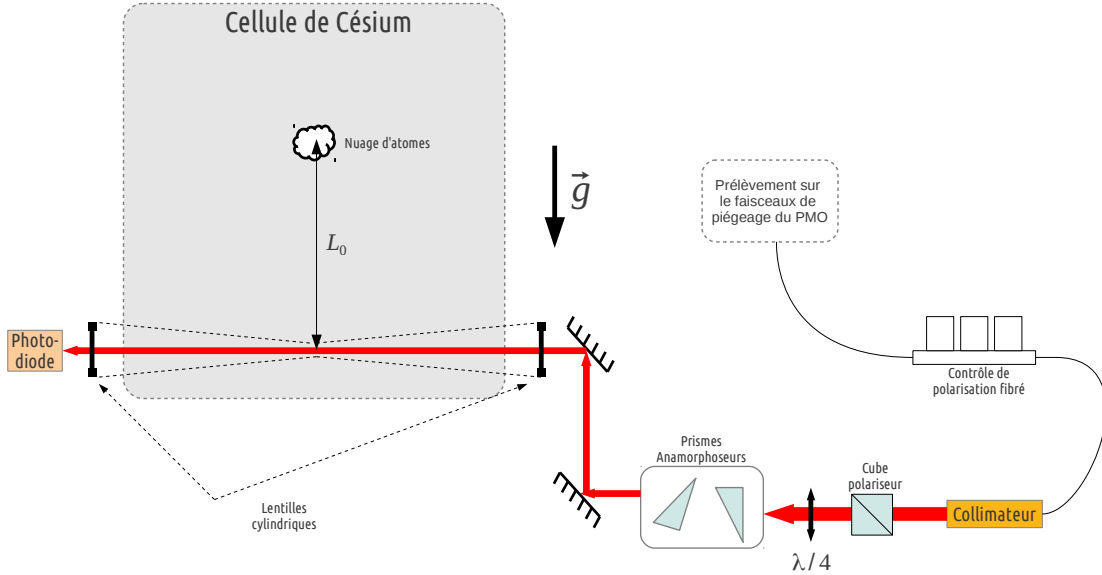
**Figure 4.8.:** A gauche, la distribution  $P_v$  imposée à la simulation (avec un écart-type  $l_x = 60v_r$ ). Au centre, le signal de temps de vol  $N(t)$  obtenu en considérant une taille de sonde finie  $l_s = 1$  mm. A droite, la distribution déduite du signal de temps de vol. L'écart-type  $\sigma$  sur celle-ci vaut  $\sigma = 60.02v_r$ .

### 4.3.4. Expérimentalement

La mise en place expérimentale de la vélocimétrie par temps de vol est moins délicate que celle de la vélocimétrie Raman. Il suffit dans un premier temps d'abaisser la sonde afin de la placer à une distance de 5 centimètres du piège magnéto-optique. Dans un second temps il est nécessaire de l'élargir. En effet, les atomes acquiert une vitesse sur l'axe  $\mathbf{e}_z$ , mais ils diffusent aussi sur les axes  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$  à cause de leur température initiale. Afin d'être certain que tout les atomes soient détectés par la sonde, celle-ci doit avoir une largeur transverse suffisante. Les atomes ayant mis le plus de temps à être détectés sont ceux ayant le plus diffusé sur les axes orthogonaux à la direction de chute. Ainsi, si  $l_{x,y} = 4v_r$  et  $t_a = 0.3$  s, alors la distance parcourue sur les axes  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$  vaut  $\Delta x = \Delta y = l_{x,y}t_a = 0.42$  cm. Pour obtenir ce profil elliptique, nous avons utilisé



une paire de prismes anamorphoseurs couplée à une paire de lentilles cylindriques, dont le point focal est sur l'axe de chute des atomes, garantissant une épaisseur (sur  $e_z$ ) de sonde faible tout en s'assurant qu'elle est suffisamment large ( $\sim 1$  cm) pour ne pas perdre d'atomes par diffusion transverse (voir Figure 4.9).



**Figure 4.9.:** Schéma de la détection par temps de vol.

Afin de s'assurer que la sonde ne travaille pas dans le régime de saturation (ou l'absorption de photon issus de celle-ci n'est plus proportionnelle au nombre d'atomes), un contrôle de polarisation fibré est introduit. Celui-ci, grâce au cube polariseur en sortie de fibre, réalise en robinet optique permettant de doser la puissance (et donc l'intensité) de la sonde sur les atomes.

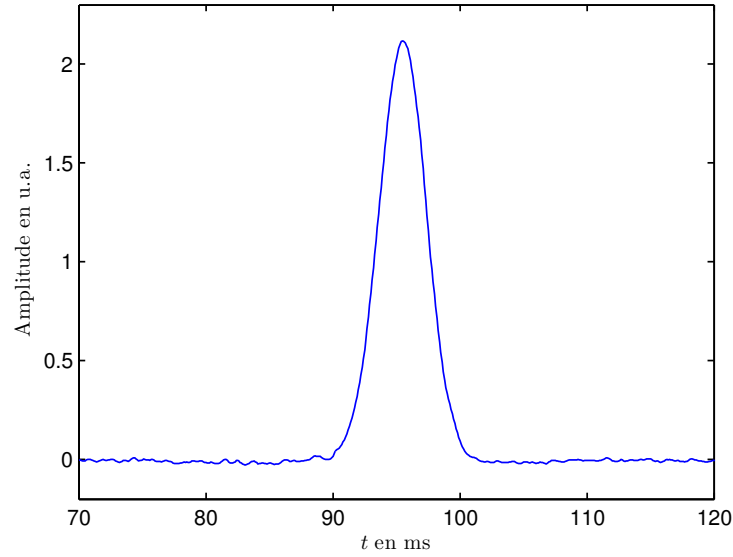
Le signal en sortie de photodiode est alors numérisé et déconvolué. Un tel procédé permet l'acquisition de toute une distribution de vitesse avec une seule séquence de pulses, là où il fallait réitérer toute cette séquence pour n'obtenir l'amplitude que d'une classe de vitesse avec le dispositif Raman.

Nous allons à présent exhiber quelques données issues de ce nouveau dispositif expérimental.

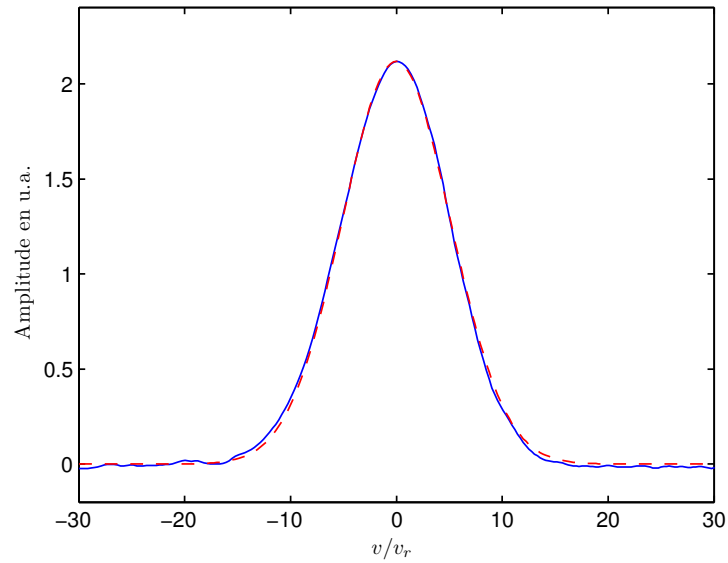
## 4.4. Premières données expérimentales

### 4.4.1. Temps de vol sans pulses

Un premier temps de vol (voir Figure 4.10) nous permet de mesurer distance sonde-nuage  $L_0 = -gt_{max}^2/2 = -4.5$  cm. En plus de celle-ci, on peut à l'aide de la déconvolution détaillée précédemment, remonter à la température initiale  $T_i = 5.15 \mu\text{K}$  du nuage (voir Figure 4.11).



**Figure 4.10.:** Temps de vol d'un nuage, sans application de pulses, acquis grâce au nouveau dispositif vélocimétrique. Le maximum est situé à  $t_{max} = 95.5$  ms, d'où  $L_0 = -4.5$  cm.



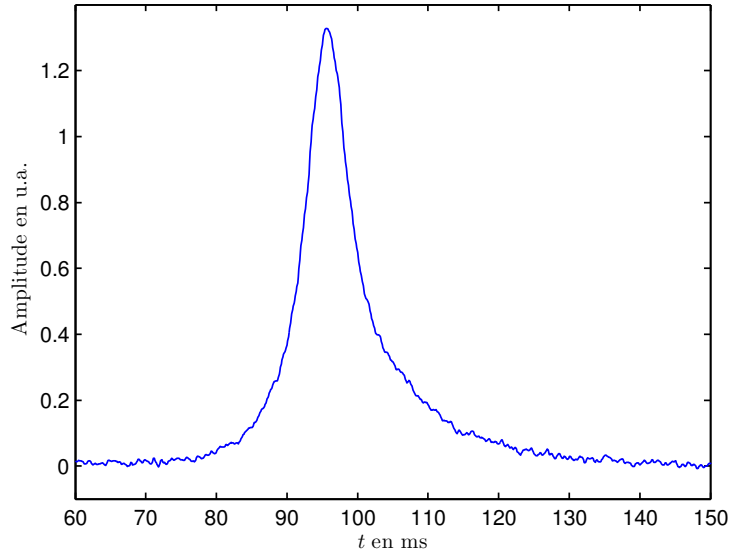
**Figure 4.11.:** Distribution en vitesse issue de la déconvolution (en bleu). On obtient tout naturellement un profil gaussien, dont le calcul du moment d'ordre 2 nous donne  $\sigma^2 = \langle v^2 \rangle = 26.01v_r^2$ , auquel on peut associer la température initiale  $T_i = 5.15 \mu\text{K}$ .

Nous avons trouvé une température initiale dans le montage horizontal valant  $3.2 \mu\text{K}$ . La température que nous déduisons ici du temps de vol est sensiblement plus élevée. Cependant, cela correspond davantage à une baisse de la résolution du dispositif vélocimétrique, qu'à un accroissement réel de la température initiale. Aussi, celle-ci peut être vue comme une borne supérieure. Cet accroissement, supérieur à celui prédit par nos simulations, nous incite à croire que nous avons sous-estimé la taille du nuage, cette dernière ayant de lourdes conséquences sur la résolution du dispositif

(voir Figure 4.5).

#### 4.4.2. Temps de vol avec pulses

Le but d'un tel dispositif étant d'observer la localisation dynamique, nous montrons ici un temps de vol dont la déconvolution nous renvoie bien une distribution exponentielle décroissante, signature du phénomène observé.

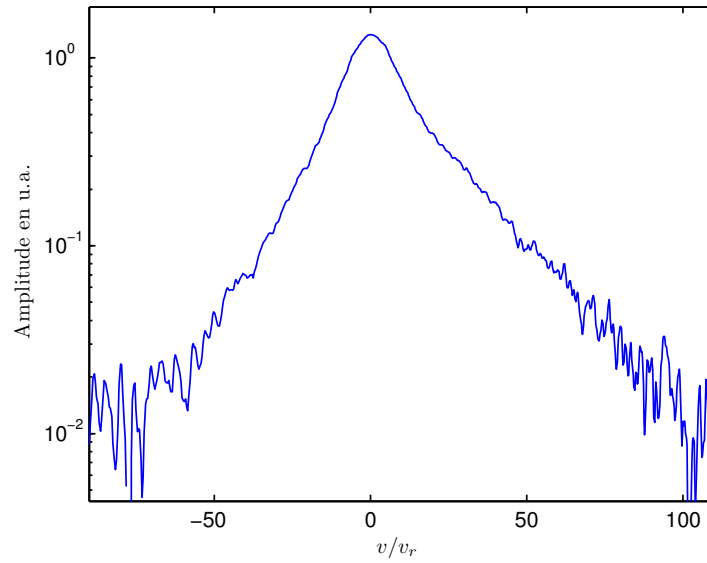


**Figure 4.12.:** Temps de vol pour un nuage ayant été soumis à une séquence pulses. Le nombre de pulses est de 150, ayant chacun une durée de  $0.3 \mu\text{s}$ . La valeur de  $K$  est estimée à 9.

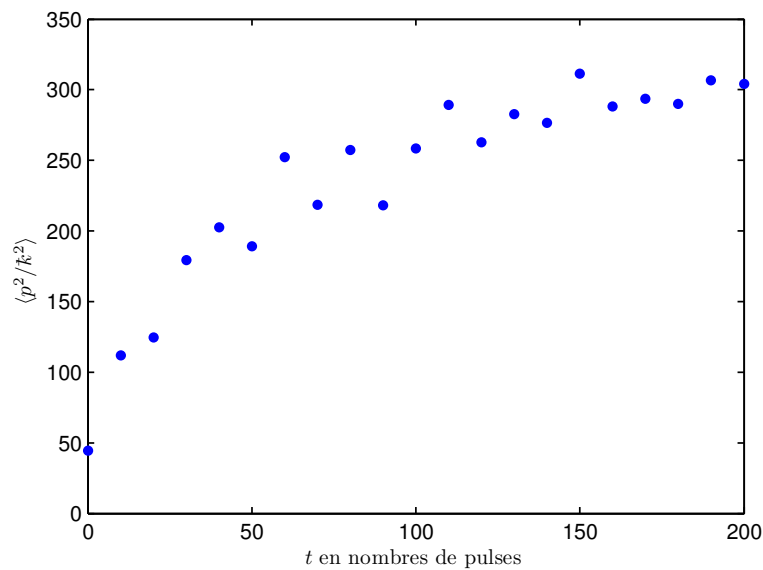
On constate la présence d'un problème de taille : l'asymétrie évidente des ailes de la distribution. La cause est, à ce stade, encore mal définie, mais de nombreuses simulations numériques sur le rotateur frappé ne semblent pas incriminer ce dernier. Il s'agirait plutôt d'une déformation liée à la détection. En effet, on peut par exemple supposer que les atomes arrivant en premier sont plus concentrés (du fait qu'ils ont moins diffusés sur les axes transverses) dans l'espace et créent un effet d'ombre, le signal généré par la photodiode de la sonde est alors atténué. Cette hypothèse à ce stade n'a pas encore été confirmée.

#### 4.4.3. Saturation en énergie

La localisation dynamique se caractérise par une saturation en énergie :  $\langle p^2(t) \rangle$  converge vers une constante pour des temps suffisamment longs. Nous avons donc regardé le comportement du moment d'ordre 2 pour des distributions à nombre de pulses croissant (voir Figure 4.14). Ces données confirment que nous sommes bien en présence de localisation dynamique. Subsiste une légère diffusion, dont l'origine n'a pas encore été clairement identifiée. Nous avons d'ailleurs acquis des données pour des nombres de pulses bien plus important, où celle-ci est encore plus visible.



**Figure 4.13.:** Distribution en vitesse issue de la déconvolution associée aux données de la Figure 4.12. Une telle distribution nous permet de voir qu'à l'aide du procédé de déconvolution, nous avons 20 dB de dynamique sur le signal en sortie.



**Figure 4.14.:** Évolution de  $\langle p^2 \rangle$  en fonction du nombre de pulses, avec  $K = 9.8$ .

## 4.5. Couplage à la gravitation

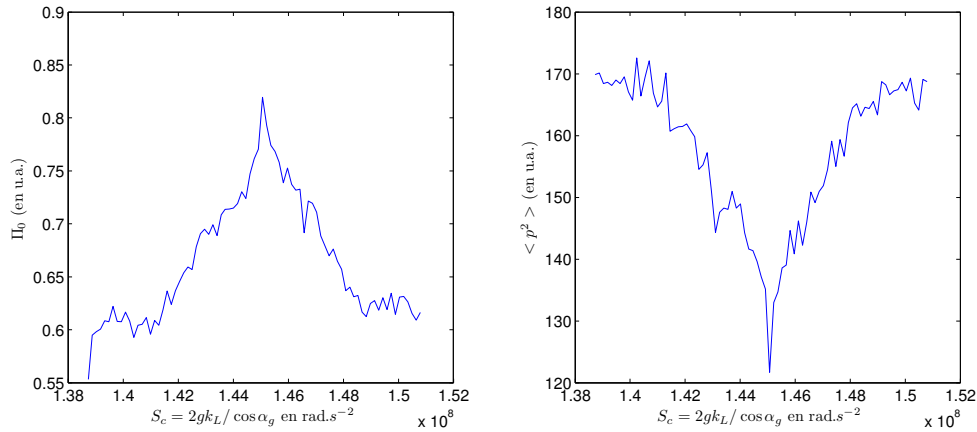
Bien entendu, afin d'observer une localisation dynamique « propre », nous avons minimisé le couplage à la gravité terrestre. En effet, il n'est pas raisonnable de croire que notre onde stationnaire est parfaitement alignée au champ de gravitation terrestre. Cependant, ce nouveau dispositif permet de compenser cette dernière très simplement : le réglage est désormais effectué sur un des paramètres de l'onde stationnaire, et non plus sur une vis micrométrique.

En considérant que l'onde stationnaire forme un angle  $\alpha_g$  avec la gravité, la fonction de modulation de fréquence de l'un des bras de l'onde stationnaire  $\omega_c(t)$  devient :

$$\omega_c(t) = \frac{d\varphi_c(t)}{dt} = \frac{2k_L g}{\cos \alpha_g} \times t = S_c \times t, \quad (4.20)$$

où  $S_c$  est la pente de cette rampe de fréquence. Pour un angle  $\alpha_g$  nul on retrouve naturellement l'Équation 4.6.

Ainsi, la minimisation du couplage avec la gravité n'est plus un réglage géométrique, mais se fait en réglant, directement sur le synthétiseur, la pente de la fonction de modulation  $\omega_c(t)$ . Pour faire ceci de manière efficace, on regarde la valeur de  $\langle p^2 \rangle$  à temps constant en faisant varier la pente  $S_c$  de la rampe de fréquence. Le point  $S_{c,min}$  où la valeur de  $\langle p^2 \rangle$  est minimale correspond naturellement au minimum de décohérence induite par couplage à la gravité, et donc le point où celle-ci est le mieux compensée (voir Figure 4.15). Ce réglage ne dépendant que d'un paramètre (la pente  $S_c$ ) contrôlé par l'ordinateur, on itère la mesure pour des pas  $\Delta S_c$ . Une telle procédure est automatisable et présente un gain de temps non négligeable.



**Figure 4.15.:** Comportement de  $\Pi_0$  et de  $\langle p^2 \rangle$  à temps fini  $t_f = 150$ . Les paramètres choisis sont  $K = 8$  et  $\bar{k} = 2.89$ . On rappelle que  $\Pi_0$  est une quantité proportionnelle au nombre d'atomes de vitesse nulle.

Nous sommes ainsi remontés à l'angle  $\alpha_g$  propre au jeu de données exhibé dans la Figure 4.15 :  $\alpha_g = 4.7^\circ$ . L'erreur  $\Delta\alpha_g$  peut être directement calculée à partir de l'Équation 4.20 :

$$\Delta\alpha_g = \frac{1}{\tan \alpha_g} \frac{\Delta S_c}{S_{c,min}}. \quad (4.21)$$

Pour cette série de données on trouve  $\Delta\alpha_g = 0.7^\circ$ . Notons que si l'angle  $\alpha_g$  est parfaitement connu (où on aurait par exemple réglé la verticalité à l'aide d'un miroir liquide), alors ce dispositif devient un gravimètre quantique, avec une erreur  $\Delta g = \Delta S_c / 2k_L$ .

## 4.6. Bilan et perspectives

L'expérience a été radicalement changée sur deux de ses volets principaux. L'onde stationnaire, précédemment horizontale, est désormais verticale et résout un certain nombre de problèmes géométriques, tels que le temps de passage du nuage ou encore le couplage à la gravitation terrestre. La détection, si elle a perdu en résolution, permet une acquisition beaucoup plus rapide des données.

**Rapidité d'acquisition améliorée** Les transitions de phase quantique pourront désormais être observés directement sur le module de la fonction d'onde, plutôt que sur la valeur de la composante de vitesse nulle  $\Pi_0$ . Aussi, les faibles niveaux de bruits en amplitude de ces signaux permettent de faire moins de moyennage. Aussi, l'acquisition d'une distribution complète en impulsion ne nécessite qu'une seule expérience, alors que le Raman imposait de réitérer une centaine de fois cette dernière. On peut désormais mesurer directement le moment d'ordre 2 :  $\langle p^2 \rangle$

**Limite repoussée en nombre de pulses** La limite technique en nombre de pulses a été repoussée, d'une expérience limitée à 150~200 pulses à cause de temps de passage du nuage dans l'onde stationnaire, nous sommes passé à ~1500 grâce au dispositif vertical. Bien sûr ce nombre est toujours limité par la décohérence.

**Effets de décohérence réduits** Les différences de chemins optiques des deux bras de l'onde stationnaire, propres au montage horizontal, sont désormais compensé à quelques centimètre près. Les fluctuations de phase du potentiel optique due à ces différences peuvent désormais être considérées comme négligeables. Le couplage à la gravité terrestre est désormais plus rapide à minimiser, et peut être fait de manière automatique.

**Problèmes restants** L'asymétrie observée sur les distributions obtenues n'est pas encore bien expliquée. Le seul effet de décohérence qui semble à ce stade rester est la décohérence par effets de fluorescence. Limite fondamentale pouvant être repoussée en augmentant la puissance des amplificateurs optiques dans les montages *MOPA*.



# Conclusion

## Bilan des résultats obtenus sur l'universalité

Au cours de cette thèse, nous avons prouvé de manière expérimentale que le rotateur frappé appartenait à la même classe d'universalité que le problème d'ANDERSON : l'*ensemble gaussien orthogonal*. Pour le démontrer nous avons du exhiber deux caractéristiques. La première est l'invariance de l'exposant critique face aux détails microscopiques. La seconde est une détermination suffisamment précise de celui-ci permettant de placer le rotateur frappé, sans ambiguïté, dans cette classe d'universalité. C'est désormais chose faite.

La précision obtenue sur la valeur de cette exposant critique est, à ce jour et à notre connaissance, la plus précise obtenue expérimentalement pour l'*ensemble gaussien orthogonal* :  $\nu = 1.63 \pm 0.05$ . Cet excellent accord avec la prédiction numérique la plus poussée ( $\nu = 1.59 \pm 0.01$ ) confirme que le rotateur frappé est un excellent système pour l'étude expérimentale de l'universalité des transitions de phase quantique.

Durant tout cet exposé, j'ai implicitement considéré que la transition observée dans le rotateur frappé quasi-périodique était une transition d'ANDERSON. La véracité de cette assertion est encore aujourd'hui une question ouverte. En effet, l'Équation 3.4, liant le couplage du modèle d'ANDERSON à l'intensité des pulses, perd toute validité pour  $K(1 + \varepsilon)/2k \geq \pi/2$ . Est-ce physique ? Non, l'expérience nous montre que dans le cas unidimensionnel ( $\varepsilon = 0$ ) on observe toujours des phénomènes de localisation dynamique, y compris lorsque  $K/2k \geq \pi/2$ . Cela met en exergue les limites de notre équivalence « rotateur frappé - modèle d'ANDERSON ». L'existence d'une transition de phase dans le rotateur frappé, dont l'exposant critique  $\nu$  (désormais démontré universel) est le même que pour la transition d'ANDERSON est un résultat, qui sous la lumière de cette contradiction, devient pour le moins surprenant et renforce d'autant plus le concept d'une universalité transverse au chaos quantique et aux systèmes désordonnés.

Mais quid des autres ensembles gaussiens ?

## Evolution du dispositif expérimental

D'un point de vue expérimental, un certain nombre de difficultés liées à l'horizontalité de l'onde stationnaire limitaient les perspectives d'une telle configuration : profil gaussien de l'intensité, couplage à la gravité terrestre ...etc. Nous n'avons ainsi pu observer l'*absence de diffusion quantique à 2 dimensions* prédite par la bande des quatre [7]. Le passage en vertical fut motivé par ces limitations.



Nous avons activement travaillé à ce passage en vertical. Les résultats acquis, encore au stade préliminaire, sont très encourageants et donne un second souffle à notre expérience. A terme nous devrions être capable de travailler à 1000 pulses sans souci. Dans ce régime, explorer une transition de phase quadri-dimensionnelle n'est pas exclu, et permettrait de répondre à un certain nombre de question sur la dimension critique supérieur  $d_+$  de la transition d'ANDERSON. Aussi, il serait aussi très interessant de pouvoir étudier les effets des interactions dans le rotateur frappé. Ceci est réalisable dans un condensat de BOSE-EINSTEIN dans lequel ces interactions sont contrôlables avec des résonances de FESHBACH.

Mais quid des autres ensembles gaussiens ?

## Ensembles symplectique et unitaire

Le rotateur frappé, tel que nous l'avons défini, est un excellent système pour l'étude de l'ensemble gaussien orthogonal – nos résultats en attestent. Cependant il existe des rotateurs frappés dont les symétries permettent de changer de classe d'universalité. TRAHA, BLÜMEL et SMILANSKY propose un rotateur permettant pour des choix de paramètres différents de changer de classe d'universalité [69]. Il existe cepedant un modèle plus simple pour la l'ensemble unitaire que nous allons brièvement présenter.

### Unitaire

Pour placer un système dans l'ensemble gaussien unitaire il faut briser la symétrie par renversement du temps. Dans les solides ceci est accompli en ajoutant un champ magnétique. Dans un rotateur frappé, c'est encore plus simple. Considérons le hamiltonien suivant

$$\hat{H}_{\text{GUE}} = \frac{\hat{p}^2}{2} + K \cos(\hat{x}) \sum_n \delta(t - 2n) + K \cos(\hat{x} + \varphi) \sum_n \delta(t - 2n + 1).$$

Ce dernier est un rotateur frappé dans lequel le potentiel est déphasé de  $\varphi$  un pulse sur deux. Ceci permet de briser la symétrie par renversement du temps. Prédire que l'on observera une transition de phase avec le même exposant critique que celui prédit par l'ensemble gaussien unitaire est hautement spéculatif, car il n'existe pas (encore ?) de démonstration analogue à celle de CASATI [13] pour cet hamiltonien. Cependant, il n'est pas déraisonnable de faire vérifier avec un rotateur frappé le comportement en loi d'échelle de la longueur de localisation  $\lambda$  [40, 70] :

$$\lambda(\tilde{\beta}) = \tilde{\beta} \lambda(\tilde{\beta} = 1),$$

où  $\tilde{\beta}$  est l'exposant caractérisant la répulsion des niveaux propres à l'ensemble considéré. En posant  $\varphi = 0$  nous retrouvons le rotateur frappé usuel, qui appartient à l'ensemble gaussien orthogonal. Mais si l'on change  $\varphi$ , alors la symétrie par renversement du temps est brisée, et la longueur de localisation  $\lambda$  doit être doublée. Le passage en vertical de l'onde stationnaire permet de contrôler cette phase, en agissant sur l'onde radio-fréquence de l'onde des modulateurs acousto-optique.

Une autre piste, avancée par le groupe de BEENACKER [71], permettrait d'explorer la transition de HALL dans un rotateur frappé. L'équivalence est mieux établie que pour le modèle précédent, mais la réalisation expérimentale d'un tel dispositif est beaucoup plus subtile.

### **...et symplectique ?**

Un autre modèle de rotateur frappé proposé par SHARF [72] permet d'explorer l'ensemble gaussien symplectique. Sa réalisation expérimentale est pour le moins compliquée et nécessiterait d'ajouter une composante de spin effectif à nos atomes de Césium. Ceci est réalisable expérimentalement [73, 74], mais la robustesse d'un tel procédé dans le cas d'un rotateur frappé doit encore être étudiée.

## **Perspectives**

Ainsi le rotateur frappé est un système de choix pour étudier les phénomènes universels dans les classes d'universalité de WIGNER-DYSON (les ensembles gaussiens) et il reste encore de nombreuses expériences dans ce domaine à faire. De plus l'équivalence établie par CASATI et FISHMAN [11, 12, 13] permet de simuler des transitions de phases à des dimensions supérieures à 3, permettant de trancher expérimentalement les questions de dimension critique supérieure. Il peut aussi être intéressant d'étudier les effets d'une interaction inter-atomique dans le rotateur frappé. La localisation dynamique sera-t-elle détruite ? Des phénomènes d'universalité persisteront-ils ?



# A. Équivalence du rotateur frappé avec le modèle des liaisons fortes

## A.1. Théorème de Floquet

Soit  $U(t)$  un opérateur  $\tau$ -périodique, tel que  $U(t) = U(t + \tau)$ . Le théorème de FLOQUET nous indique que les fonctions propres  $\Psi_\omega(t)$ , indexées sur  $\omega$  de l'opérateur  $U(t)$  peuvent s'écrire :

$$\Psi_\omega(t) = e^{-i\omega t} u_\omega(t), \quad \text{avec } u_\omega(t + \tau) = u_\omega(t). \quad (\text{A.1})$$

où  $u_\omega$  est un état de FLOQUET et  $\omega$  la quasi-énergie qui lui est associée.

## A.2. Décomposition de l'opérateur d'évolution du rotateur frappé

Considérons à présent l'hamiltonien en unités réduites du rotateur frappé :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + K \cos(\hat{x}) \sum_n (t - n). \quad (\text{A.2})$$

A partir de cette équation, nous pouvons définir son opérateur d'évolution sur une période (celle-ci étant égale à 1 en unités réduites) :

$$\hat{U}(1) = \hat{U} = e^{-i/\hbar \int_0^1 \hat{H}.dt}. \quad (\text{A.3})$$

En appliquant cet opérateur d'évolution sur une des fonctions propres, et en injectant le théorème de FLOQUET :

$$\begin{aligned} \hat{U}\Psi_\omega(t) &= \Psi_\omega(t + 1) \\ \hat{U}e^{-i\omega t}u_\omega(t) &= e^{-i\omega(t+1)}u_\omega(t + 1) \\ \hat{U}u_\omega(t) &= e^{-i\omega}u_\omega(t). \end{aligned}$$

Les états de FLOQUET  $u_\omega$  sont donc les états propres de l'opérateur de  $\hat{U}$  auxquels sont associées les valeurs propres  $e^{-i\omega}$ .

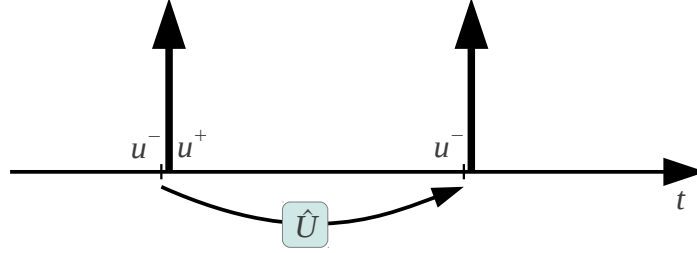
Il nous faut maintenant définir notre opérateur d'évolution plus rigoureusement. Nous savons qu'il se décompose en deux parties :

**Le pulse :**  $\hat{U}_{kick} = e^{-iK \cos(\hat{x})/k}$ .

**La propagation :**  $\hat{U}_{prop} = e^{-i\hat{p}^2/2k}$ .

Ainsi  $\hat{U}$  s'écrit, en choisissant arbitrairement la position de  $\hat{U}_{kick}$  dans le temps, ce qui revient à définir une phase dans la stroboscopie de l'évolution :

$$\hat{U} \left( = e^{-\frac{i}{k} \int_0^1 \hat{H}.dt} \right) = e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2k}} e^{-i\frac{K \cos(\hat{x})}{k}}. \quad (\text{A.4})$$



**Figure A.1.:** Notations utilisées :  $u^-$  état de FLOQUET avant le pulse,  $u^+$  état de FLOQUET après le pulse.

Appliquons désormais le théorème de FLOQUET à notre opérateur d'évolution en utilisant nos nouvelles notations définies dans la Figure A.1 :

$$\begin{aligned} \hat{U}u^-(x) &= e^{-i\omega}u^-(x) \\ e^{-i\hat{p}^2/2k} e^{-iK \cos(\hat{x}^2)/k}u^-(x) &= e^{-i\omega}u^-(x) \end{aligned}$$

Il est ici utile de remarquer que nous appliquons notre théorème de FLOQUET sur l'état  $u^-$ , en appliquant d'abord l'opérateur de pulse, puis l'opérateur de propagation libre. Nous aurions tout aussi bien pu considérer l'état  $u^+$  et inverser nos deux opérateurs. Nous avons, par souci de simplicité, omis l'indexation de  $u^{+,-}$  sur la quasi-énergie  $\omega$ .

Nous allons maintenant réécrire notre opérateur de pulse sous une forme plus comode :

$$e^{-i\frac{K \cos(\hat{x})}{2k}} = \frac{1 - iV(\hat{x})}{1 + iV(\hat{x})}, \quad \text{avec } V(\hat{x}) = \tan\left(\frac{K \cos(\hat{x})}{2k}\right). \quad (\text{A.5})$$

En appliquant l'opérateur de pulse sur l'état  $u^-$ , on obtient  $u^+$  :

$$e^{-i\frac{K \cos(\hat{x})}{2k}} u^- = u^+. \quad (\text{A.6})$$

Avec notre nouvelle écriture :

$$\frac{1 - iV(\hat{x})}{1 + iV(\hat{x})} u^- = u^+, \quad (\text{A.7})$$

que l'on peut inverser trivialement :

$$\frac{1 + iV(\hat{x})}{1 - iV(\hat{x})} u^+ = u^-. \quad (\text{A.8})$$

On introduit désormais une nouvelle notation :  $\bar{u} = (u^+ + u^-)/2$ . Cette moyenne peut sembler étrange à première vue, mais dans l'espace des impulsions,  $u^+$  et  $u^-$  sont égaux à un facteur de phase près. Nous verrons plus tard que seule la dynamique dans l'espace des impulsions est pertinente.

En injectant l'Équation A.7 dans cette moyenne :

$$\frac{u^+ + u^-}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - iV(\hat{x})}{1 + iV(\hat{x})} u^- + u^- \right) = \bar{u}, \quad (\text{A.9})$$

on trouve :

$$u^- = [1 + iV(\hat{x})] \bar{u}. \quad (\text{A.10})$$

De la même façon, en injectant l'Équation A.7 dans cette moyenne, on obtient :

$$u^+ = [1 - iV(\hat{x})] \bar{u}. \quad (\text{A.11})$$

### A.2.1. Reformulation dans l'espace des impulsions

Nous devons maintenant réécrire nos différents vecteurs et opérateurs, initialement formulé dans la base des position  $x$  pour plus de commodité, dans la base des impulsions :

$$u^+(x) = \sum_m u_m^+ e^{imx} \quad (\text{A.12})$$

$$u^-(x) = \sum_m u_m^- e^{imx} \quad (\text{A.13})$$

$$\bar{u}(x) = \sum_m \bar{u}_m e^{imx} \quad (\text{A.14})$$

$$V(\hat{x}) = \sum_m V_m e^{imx}. \quad (\text{A.15})$$

Nous injectons maintenant ces projections dans l'espace de FOURIER, dans l'Équation A.10 :

$$\begin{aligned} \sum_m u_m^- e^{imx} &= \sum_m \bar{u}_m e^{imx} + i \sum_{m,n} V_n \bar{u}_m e^{i(m+n)x} \\ &= \sum_m \bar{u}_m e^{imx} + i \sum_{m,n} V_{m-n} \bar{u}_n e^{imx}. \end{aligned}$$

De la même façon, avec l'Équation A.11, on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_m u_m^+ e^{imx} &= \sum_m \bar{u}_m e^{imx} - i \sum_{m,n} V_n \bar{u}_m e^{i(m+n)x} \\ &= \sum_m \bar{u}_m e^{imx} - i \sum_{m,n} V_{m-n} \bar{u}_n e^{imx}. \end{aligned}$$

Chaque terme dans l'expansion de Fourier devant être égal, on en déduit :

$$u_m^- = \bar{u}_m + i \sum_n V_{m-n} \bar{u}_n \quad (\text{A.16})$$

$$u_m^+ = \bar{u}_m - i \sum_n V_{m-n} \bar{u}_n. \quad (\text{A.17})$$

Reconsidérons maintenant l'équation au valeurs propres de l'opérateur d'évolution,

$$e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2k}} e^{-i\frac{K \cos(\hat{x})}{k}} u^-(x) = e^{-i\omega} u^-(x). \quad (\text{A.18})$$

Nous savons que  $e^{-iK \cos(x)/k} u^- = u^+$ , l'équation sus-mentionnée devient :

$$e^{i\omega} e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2k}} u^+(x) = u^-(x). \quad (\text{A.19})$$

A partir de cette équation, nous pouvons naturellement injecter la décomposition dans l'espace de Fourier de  $u^+$  et  $u^-$ , mais comme l'opérateur de propagation est diagonal dans l'espace des impulsions, nous pouvons écrire :

$$e^{i\omega} e^{-i\frac{\hbar m^2}{2}} u_m^+ = u_m^-. \quad (\text{A.20})$$

Pour plus de simplicité, posons  $u_m = \bar{u}_m$  et  $E_m = \omega - \frac{\hbar m^2}{2}$ . On utilise alors les relations (Équation A.16) et (Équation A.17) pour pouvoir formuler ce qui deviendra sous peu notre modèle des liaisons fortes :

$$e^{iE_m} \left( u_m - i \sum_n V_{m-n} u_n \right) = \left( u_m + i \sum_n V_{m-n} u_n \right). \quad (\text{A.21})$$

Un petit peu d'algèbre nous conduit à réécrire cette équation sous la forme :

$$\epsilon_m u_m - \sum_n V_{m-n} u_n = 0, \text{ avec } \epsilon_m = \tan \left( \frac{E_m}{2} \right). \quad (\text{A.22})$$

Un glissement d'indice nous donne alors :

$$\epsilon_m u_m - \sum_{n \neq 0} V_n u_{m-n} = V_0 u_m. \quad (\text{A.23})$$

Nous reconnaissons immédiatement le modèle des liaisons fortes (*tight-binding model*), et plus précisément le modèle d'ANDERSON, où les énergies par site sont aléatoires. En effet,  $\epsilon_m$  prend des valeurs aléatoire, ou du moins quasi-aléatoires, dans le sens où même si elles sont déterministes, on ne retrouve pas de périodicité dans celles-ci :

$$\epsilon_m = \tan \left[ \frac{1}{2} \left( \omega - \frac{\hbar m^2}{2} \right) \right]. \quad (\text{A.24})$$

Les termes  $V_n$  ( $n \neq 0$ ) représentent les termes de sauts, ou encore le couplage aux sites voisins. A grande distance,  $V_n$  décroît exponentiellement vite. Le terme  $V_0$  représente

l'énergie total et est toujours nul.

Il est aussi très important de noter que chaque état de FLOQUET réalise un modèle de liaisons fortes dont la distribution des énergies par site est une réalisation du désordre  $\epsilon_m$  différente obéissant aux mêmes propriétés statistiques.





# B. Équivalence du rotateur frappé quasi-périodique avec le modèle d'Anderson tridimensionnel

## Avant de commencer

Cette démonstration fut publiée dans deux articles originellement [11, 12]. Ces dérivations étant pour le moins succinctes, j'en propose une version plus détaillée. Celle-ci est subtile et se décompose en 2 parties :

- Nous commencerons par montrer l'équivalence entre le modèle d'Anderson 3D et un hamiltonien analogue à celui du rotateur frappé quasi-périodique : le rotateur frappé périodique 3D. Cette partie étant très voisine dans sa démarche de celle faites en Annexe A, nous serons donc plus concis dans la dérivation de cette analogie.
- Puis, nous montrerons pourquoi les évolutions temporelles de nos deux modèles de rotateur frappé sont intimement liées. C'est cette partie qui est au cœur de la démonstration. Elle demeure relativement simple.

Du plus, nous avons pris le parti de la faire à 3 dimensions par souci de clarté. Les dimensions inférieures et supérieures se démontrent exactement de la même manière.

## B.1. Hamiltonien du rotateur frappé 3D

Considérons l'hamiltonien suivant

$$H_{3D} = \frac{p_1^2}{2} + \omega_2 p_2 + \omega_2 p_3 + K \cos x_1 (1 + \epsilon \cos x_2 \cos x_3) \sum_n \delta(t - n). \quad (\text{B.1})$$

Celui-ci possède une dynamique classique bien chaotique [75] sur les trois couples de variable  $\{x_i, p_i\}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Considérons son opérateur d'évolution quantique sur une période

$$\begin{aligned} \hat{U}_{3D} &= e^{-i/k(\hat{p}_1^2/2 + \omega_2 \hat{p}_2 + \omega_2 \hat{p}_3)} e^{-iK/k \cos \hat{x}_1 (1 + \epsilon \cos \hat{x}_2 \cos \hat{x}_3)} \\ \hat{U}_{3D} &= e^{-iK(\hat{\mathbf{p}})} e^{-iW(\hat{\mathbf{x}})}. \end{aligned}$$

On pose alors :

$$e^{-iW(\hat{\mathbf{x}})} = \frac{1 - iV(\hat{\mathbf{x}})}{1 + iV(\hat{\mathbf{x}})} \quad \text{avec} \quad V(\hat{\mathbf{x}}) = \tan \left( \frac{K}{2k} \cos \hat{x}_1 (1 + \epsilon \cos \hat{x}_2 \cos \hat{x}_3) \right). \quad (\text{B.2})$$

Cet hamiltonien  $H_{3D}$  étant périodique en temps, le théorème de FLOQUET s'applique, et en utilisant les mêmes conventions que dans l'Annexe A, on peut écrire

$$\begin{aligned} \hat{U}_{3D}u^- &= e^{-i\omega}u^- \\ e^{-iK(\hat{\mathbf{p}})}\underbrace{e^{-iW(\hat{\mathbf{x}})}u^-}_{=u^+} &= e^{-i\omega}u^- \\ e^{-iK(\hat{\mathbf{p}})}u^+ &= e^{-i\omega}u^-. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Un peu l'algèbre nous amène alors à :

$$\begin{cases} u^- &= (1 + iV(\hat{\mathbf{x}}))u \\ u^+ &= (1 - iV(\hat{\mathbf{x}}))u \end{cases} \quad \text{avec} \quad u = \frac{u^+ + u^-}{2}. \quad (\text{B.4})$$

La périodicité de l'hamiltonien en  $x_1, x_2$  et  $x_3$  nous indique qu'il peut être indexé sur  $\mathbb{N}^3$ , ainsi que ses fonctions propres :

$$\begin{cases} u^+(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{m}} u_{\mathbf{m}}^+ e^{i\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}} \\ u^-(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{m}} u_{\mathbf{m}}^- e^{i\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}} \\ u(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{m}} u_{\mathbf{m}} e^{i\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}} \\ V(\hat{\mathbf{x}}) &= \sum_{\mathbf{m}} \hat{V}_{\mathbf{m}} e^{i\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}} \end{cases}. \quad (\text{B.5})$$

En les injectant dans Équation B.4 on dérive aisément que :

$$\begin{cases} u_{\mathbf{m}}^- &= u_{\mathbf{m}} + i \sum_{\mathbf{n}} \hat{V}_{\mathbf{m}-\mathbf{n}} u_{\mathbf{n}} \\ u_{\mathbf{m}}^+ &= u_{\mathbf{m}} - i \sum_{\mathbf{n}} \hat{V}_{\mathbf{m}-\mathbf{n}} u_{\mathbf{n}} \end{cases}. \quad (\text{B.6})$$

On utilise alors cette forme dans l'espace des impulsion dans Équation B.3 :

$$\begin{aligned} e^{-iK(\hat{\mathbf{p}})+i\omega}u_{\mathbf{m}}^+ &= u_{\mathbf{m}}^- \\ e^{i(\omega-K(\mathbf{m}))}u_{\mathbf{m}}^+ &= u_{\mathbf{m}}^- \\ e^{i(\omega-K(\mathbf{m}))} \left\{ u_{\mathbf{m}} - i \sum_{\mathbf{n}} \hat{V}_{\mathbf{m}-\mathbf{n}} u_{\mathbf{n}} \right\} &= u_{\mathbf{m}} + i \sum_{\mathbf{n}} \hat{V}_{\mathbf{m}-\mathbf{n}} u_{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

On pose  $E_{\mathbf{m}} = \omega - K(\mathbf{m})$ , et on continue

$$\begin{aligned} e^{iE_{\mathbf{m}}} \left\{ u_{\mathbf{m}} - i \sum_{\mathbf{n}} \hat{V}_{\mathbf{m}-\mathbf{n}} u_{\mathbf{n}} \right\} &= u_{\mathbf{m}} + i \sum_{\mathbf{n}} \hat{V}_{\mathbf{m}-\mathbf{n}} u_{\mathbf{n}} \\ e^{iE_{\mathbf{m}}/2} \left\{ u_{\mathbf{m}} - i \sum_{\mathbf{n}} \hat{V}_{\mathbf{m}-\mathbf{n}} u_{\mathbf{n}} \right\} &= e^{-iE_{\mathbf{m}}/2} \left\{ u_{\mathbf{m}} + i \sum_{\mathbf{n}} \hat{V}_{\mathbf{m}-\mathbf{n}} u_{\mathbf{n}} \right\} \\ u_{\mathbf{m}} (e^{iE_{\mathbf{m}}/2} - e^{-iE_{\mathbf{m}}/2}) &= i \sum_{\mathbf{n}} \hat{V}_{\mathbf{m}-\mathbf{n}} u_{\mathbf{n}} (e^{iE_{\mathbf{m}}/2} + e^{-iE_{\mathbf{m}}/2}) \\ u_{\mathbf{m}} 2i \sin(E_{\mathbf{m}}/2) &= \sum_{\mathbf{n}} \hat{V}_{\mathbf{m}-\mathbf{n}} u_{\mathbf{n}} 2i \cos(E_{\mathbf{m}}/2) \end{aligned}$$

$$u_{\mathbf{m}} \tan(E_{\mathbf{m}}/2) - \sum_{\mathbf{n}} \hat{V}_{\mathbf{m}-\mathbf{n}} u_{\mathbf{n}} = 0.$$

On définit  $\epsilon_{\mathbf{m}} = \tan(E_{\mathbf{m}}/2)$  et on effectue un judicieux glissement d'indice :

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mathbf{m}} u_{\mathbf{m}} - \sum_{\mathbf{n}} \hat{V}_{\mathbf{n}} u_{\mathbf{m}-\mathbf{n}} &= 0 \\ \epsilon_{\mathbf{m}} u_{\mathbf{m}} - \sum_{\mathbf{n} \neq 0} \hat{V}_{\mathbf{n}} u_{\mathbf{m}-\mathbf{n}} &= \hat{V}_0 u_{\mathbf{m}}. \end{aligned}$$

On identifie alors immédiatement le modèle des liaisons fortes, mais dans l'espace réciproque. On voit aussi que  $\epsilon_{\mathbf{m}} = \tan \left\{ \frac{1}{2} \left[ \omega - \left( \frac{k m_1^2}{2} + \omega_2 m_2 + \omega_3 m_3 \right) \right] \right\}$  représente les énergies sur sites aléatoires du modèle d'ANDERSON. On peut aussi démontrer que le terme de saut quantique  $\hat{V}_{\mathbf{n}}$  tend exponentiellement vite vers 0 pour  $|\mathbf{n}|$  grand. Le modèle d'ANDERSON analogue est ainsi un modèle anisotrope dans 2 directions.

Mais revenons sur nos énergies  $\epsilon_{\mathbf{m}}$ . Pour s'assurer du caractère aléatoire de ces énergies, nous devons poser une condition : le quadruplet  $(\omega_2, \omega_3, \bar{k}, \pi)$  doit être incommensurable. C'est uniquement sous cette condition que notre modèle des liaisons fortes équivalent ne possède pas de périodicité « spatiale » en  $\mathbf{m}$ .

Avant de continuer, il est important de noter que cette équivalence est valable quelles que soient les conditions initiales !

## B.2. Équivalence des évolutions temporelles.

Souvenons-nous que notre hamiltonien du rotateur frappé périodique s'écrit :

$$H_{qp} = \frac{p_1^2}{2} + K \cos x_1 (1 + \varepsilon \cos \omega_2 t \cos \omega_3 t) \sum_n \delta(t - n).$$

Nous allons montrer dans cette partie que l'opérateur d'évolution de  $H_{3D}$  sur l'axe  $(x_1, p_1)$  est exactement celui de  $H_{qp}$  sous une certaine condition initiale.

Considérons l'opérateur d'évolution sur une période de  $H_{3D}$  :

$$U_{3D}^1 = e^{-i/\bar{k} \int_0^1 H(t) \cdot dt} = e^{-i/\bar{k} (p_1^2/2 + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3)} e^{-iK/\bar{k} \cos x_1 (1 + \varepsilon \cos x_2 \cos x_3)}. \quad (\text{B.7})$$

Ce dernier fait évoluer la fonction d'onde  $\Psi$  dans le temps :

$$\Psi(t) = U_{3D}^t \Psi(t=0). \quad (\text{B.8})$$

On pose ici notre étape clé. En effet, nous allons considérer un état initial particulier : la « source plane ». Que l'on écrit

$$\Psi(t=0) = \Xi(x_1, t=0) \delta(x_2 - \varphi_2) \delta(x_3 - \varphi_3). \quad (\text{B.9})$$

En l'injectant dans Équation B.8 :

$$\begin{aligned}
 \Psi(t) &= \left\{ e^{-i/k(p_1^2/2 + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3)} e^{-iK/k \cos x_1 (1 + \varepsilon \cos x_2 \cos x_3)} \right\}^t \\
 &\quad \times \Xi(x_1, t = 0) \delta(x_2 - \varphi_2) \delta(x_3 - \varphi_3) \\
 \Psi(t) &= \left\{ e^{-i/k(p_1^2/2)} e^{-iK/k \cos x_1 (1 + \varepsilon \cos x_2 \cos x_3)} \right\}^t \Xi(x_1, t = 0) \\
 &\quad \times e^{-\frac{i}{k} \cdot \omega_2 p_2 t} \delta(x_2 - \varphi_2) \times e^{-\frac{i}{k} \cdot \omega_3 p_3 t} \delta(x_3 - \varphi_3).
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

On reconnaît immédiatement les opérateurs de translation  $e^{-\frac{i}{k} \cdot \omega_2 p_2 t}$  et  $e^{-\frac{i}{k} \cdot \omega_3 p_3 t}$ . On obtient alors

$$\begin{aligned}
 \Psi(t) &= \left\{ e^{-i/k(p_1^2/2)} e^{-iK/k \cos x_1 (1 + \varepsilon \cos x_2 \cos x_3)} \right\}^t \\
 &\quad \times \Xi(x_1, t = 0) \delta(x_2 - \varphi_2 - \omega_2 t) \delta(x_3 - \varphi_3 - \omega_3 t).
 \end{aligned}$$

Les opérateurs  $\delta$  imposent alors  $x_2 = \omega_2 t + \varphi_2$  et  $x_3 = \omega_3 t + \varphi_3$ . Notre Équation B.10 devient donc en choisissant les phases  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  arbitrairement nulles :

$$\begin{aligned}
 \Psi(t) &= \left\{ e^{-i/k(p_1^2/2)} e^{-iK/k \cos x_1 (1 + \varepsilon \cos(\omega_2 t) \cos(\omega_3 t))} \right\}^t \Xi(x_1, t = 0) \\
 \Psi(t) &= U_{qp}^t \Xi(x_1, t = 0).
 \end{aligned}$$

Nous reconnaissons donc l'opérateur d'évolution sur une période  $U_{qp}^1$  de l'hamiltonien du kicked rotor quasi-périodique.

Nous venons de démontrer que sous une certaine condition initiale, le rotateur frappé 3D se comporte exactement comme un rotateur frappé quasi-périodique. Mais avant cela, nous avons montré que le rotateur frappé 3D était équivalent à un modèle d'Anderson anisotrope. La démonstration a été effectuée en dimension 3. Elle est naturellement généralisable à toutes les dimensions  $d \geq 2$ .

## C. Article publié dans *Physical Review Letters*

Les résultats sur l'universalité de la transition d'ANDERSON ont fait l'objet d'une publication dans le journal *Physical Review Letters*, reproduite ici. Les conventions utilisées sont les mêmes que dans l'ensemble du manuscrit.

## Experimental Test of Universality of the Anderson Transition

Matthias Lopez,<sup>1</sup> Jean-François Clément,<sup>1</sup> Pascal Sziftgiser,<sup>1</sup> Jean Claude Garreau,<sup>1</sup> and Dominique Delande<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, Université Lille 1 Sciences et Technologies, CNRS; F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France\*

<sup>2</sup>Laboratoire Kastler-Brossel, UPMC-Paris 6, ENS, CNRS; 4 Place Jussieu, F-75005 Paris, France

(Received 2 August 2011; published 29 February 2012)

We experimentally test the universality of the Anderson three dimensional metal-insulator transition, using a quasiperiodic atomic kicked rotor. Nine sets of parameters controlling the microscopic details have been tested. Our observation indicates that the transition is of second order, with a critical exponent independent of the microscopic details; the average value  $1.63 \pm 0.05$  agrees very well with the numerically predicted value  $\nu = 1.58$ .

DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.095701

PACS numbers: 64.70.Tg, 03.75.-b, 05.45.Mt, 72.15.Rn

In the presence of a disordered potential, the classical diffusive transport of a particle can be inhibited by quantum interference among the various paths where the particle is multiply scattered by disorder, a puzzling phenomenon known as Anderson localization [1]. The dimensionality of the system plays a major role, which can be understood qualitatively from the scaling theory of localization [2]. In dimension  $d = 3$  and above, there is a delocalized-localized (or metal-insulator in solid-state physics language) transition—known as the Anderson transition. There is numerical evidence substantiating the fact that this is a continuous second order transition, although it was argued in [3], based on a field-theory framework, that it is not possible to exhibit an explicit order parameter for the Anderson transition and that consequently the transition could be of a different type. This point is not yet settled, but the experimental results discussed below as well as the numerical results on the quasiperiodic kicked rotor [4,5] are all fully compatible with a second order quantum phase transition, and we will adopt this framework in the rest of this Letter. An energy “mobility edge”  $E_c$ , which is a decreasing function of disorder, separates localized motion at low energy from diffusive motion at high energy. On the localized side, the localization length  $\xi$  diverges algebraically  $\xi(E) \propto (E_c - E)^{-\nu}$ , with  $\nu$ , the critical exponent of the transition. On the diffusive side, the diffusion constant vanishes like  $D(E) \propto (E - E_c)^s$  with, according to the scaling theory,  $s = (d - 2)\nu$  [2,6]. A key prediction of the scaling theory is that the critical exponents are *universal*, that is, they do not depend on the microscopic details of the system, such as the correlation functions of the disorder, the dispersion relation of the particles, etc. Numerical experiments on simple models [4,7,8], such as the tight-binding Anderson model, have confirmed this universality, with a nontrivial value of the critical exponent around  $\nu = 1.58$  for spinless time-reversal invariant 3-dimensional (3D) systems [9]. However, there is a huge lack of experimental results: first, to determine whether the scaling theory of localization is a

valid description and, second, if the answer is positive, to measure the value of the critical exponent with a sufficient accuracy for testing whether its value is universal when various experimental parameters are varied. It is the aim of this Letter to present such experimental results.

Anderson localization is due to interference between long multiple scattering paths and is thus very sensitive to any mechanism destroying the phase coherence of the wave function, making its experimental observation and characterization very difficult [10]. In the context of electronic transport in disordered samples, electron-electron interaction is sufficiently important to partly invalidate the one-body Anderson scenario, leading to a critical exponent close to unity [11]. Experiments on the integer quantum Hall effect showed clear evidence of a scaling behavior, although the precise value of the critical exponent is still under debate [12]. In a slightly different context, Anderson localization of acoustic [13] and electromagnetic [14–16] waves has been experimentally observed. The critical exponent for the 3D Anderson transition, estimated in [17], is  $\nu \approx 0.5$ , markedly different from 1.58. Several reasons may explain such a disagreement: First, there is no direct measurement of the localization length in the samples, but only an indirect one based on the very small fraction of “localized” photons trapped for a long time inside the medium; therefore, spurious effects such as absorption or photons trapped at the surface of scattering particles may strongly spoil the measurement. Second, the localization length that is measured is always comparable—never much smaller—than the medium size, making finite-size effects extremely important. Third, the parameter controlling the disorder is the transport mean free path  $\ell^*$ , itself measured indirectly via the coherent backscattering of the medium, using a model valid only in the diffusive regime. The fact that the transition supposedly takes place at  $k\ell^* = 4.2$ , while a value around unity is expected, also raises some doubts on the method.

Cold atomic gases are conceptually simple systems, where important parameters can be controlled and phase

coherence of the wave function preserved over long times. The interplay between quantum interference and interaction leads to quantum phase transitions, where the concept of universality also plays an important role, as, e.g., in the recent study of the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition for the two-dimensional Bose gas [18].

For the one-body Anderson localization physics to be observed, atom-atom interaction is reduced to a minimum, either by using dilute cold gases, or by using a Feshbach resonance [19]. Direct observation of Anderson localization of atomic matter waves *in a one-dimensional* disordered [20] or quasiperiodic [21] potential has been reported, the disordered potential being created by the effective interaction with a detuned laser beam with a random spatial profile (speckle). Very recently, observations of the Anderson localization in 3D atomic gases have been claimed [22,23]. However, the interpretation of both results involves heuristic assumptions, and a better understanding is needed before the observation of a mobility edge can be asserted.

This difficulty prompted the use of a slightly different system, where the disordered potential is replaced by classical chaotic dynamics. In the kicked rotor, a paradigmatic system of quantum chaos, quantum mechanical interference tends to suppress the classical chaotic diffusion, and to induce a phenomenon originally called *dynamical localization*, later discovered to be an analog of 1D Anderson localization *in momentum space* by mapping the kicked rotor onto a quasirandom 1D Anderson model [24,25]. The experimental realization of the kicked rotor with laser-cooled atoms interacting with a pulsed standing wave allowed the first experimental observation of Anderson localization in 1D with atomic matter waves [26]. In order to observe the Anderson *transition*, however, an analog of the 3D Anderson model is needed [27,28]. Here, we focus on the so-called “quasiperiodic kicked rotor” in which three incommensurate frequencies are used to generate the 3D character [29], and shown in [30] to be strictly equivalent to an anisotropic 3D Anderson model, a fact further confirmed by a low-energy effective field theory [25]. Meticulous numerical experiments [4] have shown the universality of the critical exponent for this system,  $\nu = 1.58 \pm 0.02$ , in excellent agreement with values found in the literature for the Anderson model [7].

An experiment based on this system has characterized the Anderson metal-insulator transition [31], with the first experimental determination of the critical exponent  $\nu = 1.4 \pm 0.3$  with a limited accuracy and no test of its universality. The experimental setup, described in detail in [30], consists of laser-cooled cesium atoms interacting with a pulsed far-detuned standing wave (wave number  $k_L = 7.4 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$  and maximum one-way intensity 180 mW). The amplitude of the kicks is modulated with two frequencies  $\omega_2$  and  $\omega_3$ . The Hamiltonian reads

$$H = \frac{p^2}{2} + K \cos x [1 + \varepsilon \cos(\omega_2 t) \cos(\omega_3 t)] \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - n), \quad (1)$$

where time is measured in units of the kicking period  $T_1$ , space in units of  $(2k_L)^{-1}$ , momentum in units of  $2\hbar k_L/\bar{k}$ , with  $\bar{k} = 4\hbar k_L^2 T_1/M$  ( $M$  is the atom mass) playing the role of an effective Planck constant ( $[x, p] = i\bar{k}$ ) and  $K$  is the average kick amplitude. The kicks are short enough (duration  $\tau = 0.8 \mu\text{s}$ ) compared to the atom dynamics to be considered as Dirac delta functions. If  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $\pi$ , and  $\bar{k}$  are incommensurate, this 1D quasiperiodic kicked rotor has a 3D Anderson metal-insulator transition, displaying localization *in momentum space*. Compared to [30,31], the signal to noise ratio and the stability of the experiment have been greatly improved. Atomic momentum is measured by Raman stimulated transitions. The previous Raman frequency generation setup used direct current modulation of a master laser diode to drive the Raman slave lasers [32]. This system has been replaced by a fibered phase modulator driven at 9.2 GHz. Moreover, 3 (of 4) master diode lasers working with an external cavity setup have been replaced by distributed feedback lasers, extending the experiment stability from a few hours to several days. These improvements led to much better experimental signals, making the determination of the critical exponent much more accurate and reliable, opening the possibility to test its universality.

A Sisyphus-cooling-boosted magneto-optical trap prepares an initial thermal state of FWHM  $4 \times 2\hbar k_L$ , much narrower than the final (localized or diffusive) momentum distribution, and—by time-reversal symmetry— $\langle p(t) \rangle$  remains zero at all time  $t$ . We can directly monitor the dynamics rather than rely on “bulk” quantities such as the conductance, itself related to the diffusion constant. A good quantity characterizing the dynamics is  $\langle p^2(t) \rangle$ . For practical and historical reasons, the atomic momentum  $P$  is measured in units of two recoil momenta  $\mathfrak{p} = P/2\hbar k_L$ . In the diffusive regime,  $\langle \mathfrak{p}^2(t) \rangle$  increases linearly with time; in the localized regime, it saturates at long times to a value proportional to the square of the localization length. In [30], it was shown that, in order to characterize the Anderson transition, one should measure

$$\Lambda(t) = \langle \mathfrak{p}^2(t) \rangle t^{-2/3}. \quad (2)$$

$\Lambda(t)$  scales like  $t^{-2/3}$  in the localized regime, like  $t^{1/3}$  in the diffusive regime and is *constant* in the critical intermediate regime. By measuring  $\Lambda(t)$ , one has, thus, a direct access to the state of the system.  $K$  is a control parameter playing the role of the energy in the Anderson model. The critical value  $K_c$  is a mobility edge separating a localized regime at low  $K$  from a diffusive regime at large  $K$ . The critical exponent  $\nu$  can be determined from the algebraic divergence  $1/(K_c - K)^\nu$  of the localization length near the critical point. For fixed  $\bar{k}$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ , one can also chose a



path in the  $(K, \varepsilon)$  plane which crosses the critical line “perpendicularly,” i.e., faster, which improves the accuracy on the critical exponent. Rather than measuring the full momentum distribution to obtain  $\langle p^2(t) \rangle$ , we measure the atomic population in the zero-momentum class  $\Pi_0(t)$ . As shown in [33],  $\langle p^2(t) \rangle$  is, by conservation of the number of atoms, proportional to  $\Pi_0^{-2}(t)$ . The precise proportionality factor depends on the shape of the momentum distribution, which has been shown experimentally [33] to vary smoothly across the transition. The quantity measured experimentally,  $\Lambda_{\text{expt}}(K, t) = \Pi_0^{-2}(K, t)t^{-2/3}$ , has the same critical point and the same critical exponent than  $\Lambda(t)$ . In the simplest experiment, parameters  $k, \omega_2, \omega_3, \varepsilon$  are fixed and  $\Pi_0(K, t)$  recorded for several values of the control parameter  $K$ , from which  $\Lambda_{\text{expt}}(K, t)$  is obtained.

As one cannot pursue the experiment for arbitrary long times, making the distinction between the true critical point where  $\Lambda_{\text{expt}}(K_c, t)$  is a constant and a neighboring point of a small positive (localized) or small negative (diffusive) slope is difficult. To circumvent this, we use the finite-time scaling procedure explained in [30], which is a simple extension to the time domain of the finite-size scaling method used in solid-state physics [34,35]. We assume that there exists a scaling function  $F$  such that

$$\Lambda_{\text{expt}}(K, t) = F(\xi(K)t^{-1/3}), \quad (3)$$

where  $\xi(K)$  is an unknown function to be determined. The idea, described in detail in [30] is that  $\xi(K)$  should be chosen so that  $F(\xi(K)t^{-1/3})$  is a continuous function, safe for the divergence at the critical point, with two distinct localized and diffusive branches. In order to do so, we try to collapse the various experimental curves  $\Lambda_{\text{expt}}(K, t)$ , corresponding to each value of  $K$ , in a single curve, the various  $\xi(K)$  associated with the localization length on the localized branch—being free fitting parameters. A typical scaling function is shown in Fig. 1 and the corresponding

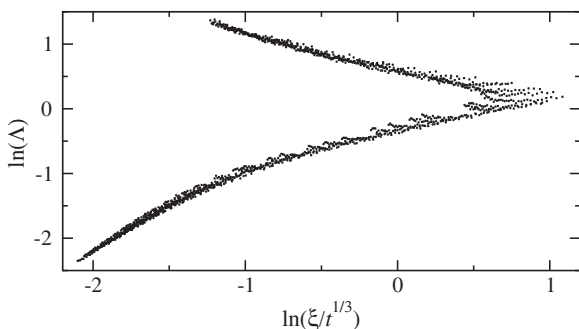


FIG. 1. Scaling function constructed from the experimental data measured on the quasiperiodic kicked rotor (set E of Table I). The tip on the right side indicates the critical point of the Anderson transition, the diffusive (respectively, localized) regime is the upper (respectively, lower) branch. The dispersion of the points is an indication of the uncertainty on the measured data, on a double logarithmic scale.

fit parameter function  $\xi$  is shown in Fig. 2. A comparison with our previously published data, e.g., Fig. 3(c) in [31], shows a dramatic improvement in the quality of the measurements. Each point  $\Lambda_{\text{expt}}(K, t)$  results from independent experiments, making the statistical errors rather easy to evaluate. We checked that the dispersion of points around the scaling function in Fig. 1 is of the order of  $\Delta(\ln\Lambda) \approx 0.05$ , limited by the experimental uncertainties, the  $\chi^2$  per degree of freedom of the fit being typically slightly smaller than 1, which implies that our experimental results do not show any significant deviation from the one-parameter scaling theory of localization.

From finite-time measurements, it is impossible to extract a truly diverging  $\xi(K)$ . Several spurious phenomena [30] are responsible for the observed cutoff: The dominant one is the finite duration of the experiment. Several sources of decoherence, such as spontaneous emission, collisions between atoms, residual effect of gravity because the laser beams are not perfectly horizontal, and the inhomogeneity related to the Gaussian intensity profile of the standing wave, contribute to the cutoff. We have increased the phase coherence time up to 200–300 kick periods, in agreement with theoretical calculations [30]. In order to reduce uncontrolled systematic effects, we chose to use the same time interval—from 30 to 150 kicks—for the analysis of all experimental data. The finite duration is also responsible for systematic effects: It tends to slightly underestimate  $K_c$ , but does not seem to shift significantly the critical exponent. Using a different interval, 30–120 kicks, produces  $\nu$  values not differing by more than 0.05.

A typical  $\xi(K)$  curve, Fig. 2, displays a clear “divergence” near the critical point (increased by more than 1

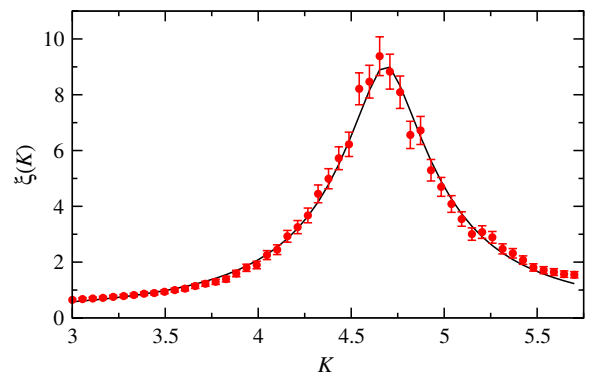


FIG. 2 (color online). Red points with error bars: Characteristic length  $\xi(K)$  constructed from the experimental data (set E of Table I). At low  $K$  (localized regime), it is proportional to the localization length. At large  $K$  (diffusive regime), it is inversely proportional to the diffusion constant. The divergence near  $K_c = 4.69$  is a signature of a second order phase transition. The phenomena limiting this divergence (cf. text) are taken into account by a fit including a cutoff parameter, Eq. (4), shown as a solid curve, from which the critical exponent  $\nu$  is extracted.

TABLE I. The 9 sets of parameters used,  $\hbar$ ,  $\omega_2$ , and  $\omega_3$ , control the microscopic details of the disorder;  $K$  controls the amplitude and  $\epsilon$  the anisotropy of the hopping coefficients. The critical point  $K_c$  depends on the various parameters but the critical exponent is *universal*. The weighted mean of the critical exponent is  $\nu = 1.63 \pm 0.05$ . The duration of the kicks is  $\tau = 0.8 \mu\text{s}$  for sets A–H, and  $\tau = 0.96 \mu\text{s}$  for set I.

	$\hbar$	$\frac{\omega_2}{2\pi}$	$\frac{\omega_3}{2\pi}$	Path in $(K, \epsilon)$	$K_c$	$\nu$
A	2.89	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	4, 0.1 $\rightarrow$ 8, 0.8	6.67	$1.63 \pm 0.06$
B	2.89	$\sqrt{7}$	$\sqrt{17}$	4, 0.1 $\rightarrow$ 8, 0.8	6.68	$1.57 \pm 0.08$
C	2.89	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	3, 0.435 $\rightarrow$ 10, 0.435	5.91	$1.55 \pm 0.25$
D	2.89	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	7.5, 0 $\rightarrow$ 7.5, 0.73	$\epsilon_c = 0.448$	$1.67 \pm 0.18$
E	2.00	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	3, 0.1 $\rightarrow$ 5.7, 0.73	4.69	$1.64 \pm 0.08$
F	2.31	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	4, 0.1 $\rightarrow$ 9, 0.8	6.07	$1.68 \pm 0.06$
G	2.47	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	4, 0.1 $\rightarrow$ 9, 0.8	5.61	$1.55 \pm 0.10$
H	3.46	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	4, 0.1 $\rightarrow$ 9, 0.8	6.86	$1.66 \pm 0.12$
I	3.46	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	4, 0.1 $\rightarrow$ 9, 0.8	7.06	$1.70 \pm 0.12$

order of magnitude with respect to [31]). It is itself fitted to extract the position of the critical point  $K_c$  and the critical exponent  $\nu$ , using the following formula:

$$1/\xi(K) = \alpha|K - K_c|^\nu + \beta, \quad (4)$$

where  $\beta$  is a cutoff parameter taking into account the various limitations discussed above. As seen in Fig. 2 the fit is excellent. The fitting parameter  $\nu$  depends on the range of  $K$  where the fit is performed. A too small range produces a large uncertainty in  $\nu$  while the quality of the fit deteriorates for a too large range. To avoid any bias, we have fitted all data sets in the interval  $[0.8K_c, 1.2K_c]$ , for which the  $\chi^2$  per degree of freedom is of the order of 1. The uncertainties are calculated using a bootstrap method starting from the raw experimental data and their error bars, ending with the determination of  $\nu$  through the construction of the scaling function. For the data sets presented, no statistically significant anomaly has been detected, another proof of the validity of the scaling theory in our experiment. The statistical uncertainty on  $K_c$  is very small, at most few  $10^{-2}$ , but the finite duration of the experiment is responsible for a systematic shift toward low  $K$  (see above).

In order to test the universality of the critical exponent, we have chosen a “reference” set of parameters, noted A in Table I, which has the same parameters used in [31]. We then modified the  $\omega_2$  and  $\omega_3$  frequencies for set B. We also modified the path in the  $(K, \epsilon)$  plane, either by changing  $K$  only (set C) or  $\epsilon$  only (set D). In these two situations, the crossing of the critical regime is slower, making the accuracy on  $\nu$  significantly worse. Further, we modified the kicking period  $T_1$ , which affects the effective Planck’s constant  $\hbar$ . Several smaller  $\hbar$  values were used in sets E, F, and G. A larger value of  $\hbar$  was used in sets H and I, the difference between these two sets being the duration of the laser pulses. The fact that very close values of  $K_c$  and the same critical exponent are obtained is a strong indication that our experimental system is well described by the model Hamiltonian, Eq. (1).

The final results are given in Table I and plotted with their error bars (1 standard deviation) in Fig. 3. They unambiguously demonstrate the universality of the localized-diffusive transition in the quasiperiodic kicked rotor. Moreover, all numerical values are compatible (within 2 standard deviations) with the best numerical determinations of  $\nu = 1.58 \pm 0.02$ , both for the kicked rotor and the Anderson model. They all markedly differ from the value 1 predicted by the self-consistent theory of localization [36]. The later theory is an attempt to justify the scaling properties using a microscopic approach: It is qualitatively correct and gives simple physical pictures. For example, it has been used to successfully predict the momentum distribution at the critical point [33]. However, it lacks a key ingredient: At criticality, the wave functions display very large fluctuations which can be characterized by a multifractal spectrum [9,37,38]. Huge fluctuations are known to affect critical exponents of thermodynamic phase transitions; it is thus no surprise that they also affect the Anderson transition. While quantum phase transitions are usually considered for the ground state of the system, it must be emphasized that the Anderson transition deals

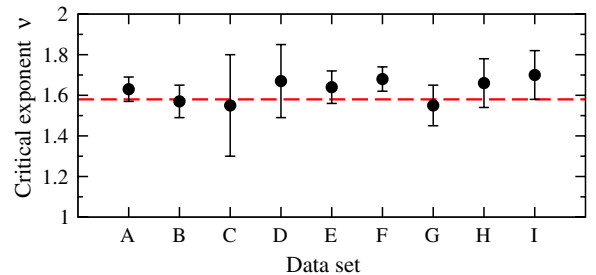


FIG. 3 (color online). Experimental test of the universality of the metal-insulator transition. The critical exponent  $\nu$ , measured for 9 different sets of parameters A–I (see Table I), is universal, i.e., independent of the microscopic details. The error bars indicate 1 standard deviation, measured using the experimental uncertainties and a bootstrap technique. The dashed line is the commonly accepted value  $\nu = 1.58$ .

with excited states in the vicinity of the mobility edge, displaying much richer properties. Especially, ultracold atomic gases open the way to experimental studies of the interplay of disorder, interference, and interactions.

We thank G. Lemarié for useful discussions, and R. Holliger for help with the experiments.

---

\*www.phlam.univ-lille1.fr/atfr/cq

- [1] P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
- [2] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673 (1979).
- [3] K. Efetov, *Supersymmetry in Disorder and Chaos* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [4] G. Lemarié, B. Grémaud, and D. Delande, *Europhys. Lett.* **87**, 37007 (2009).
- [5] D. L. Shepelyansky, [arXiv:1102.4450](https://arxiv.org/abs/1102.4450).
- [6] F. Wegner, *Z. Phys. B* **25**, 327 (1976).
- [7] K. Slevin and T. Ohtsuki, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 382 (1999).
- [8] F. Milde, R. A. Römer, M. Schreiber, and V. Uski, *Eur. Phys. J. B* **15**, 685 (2000).
- [9] F. Evers and A. D. Mirlin, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1355 (2008).
- [10] M. Janssen, *Phys. Rep.* **295**, 1 (1998).
- [11] S. Katsumoto, F. Komori, N. Sano, and S. Kobayashi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **56**, 2259 (1987).
- [12] H. P. Wei, D. C. Tsui, M. A. Paalanen, and A. M. M. Pruisken, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1294 (1988).
- [13] H. Hu, A. Strybulevych, J. H. Page, S. E. Skipetrov, and B. A. van Tiggelen, *Nature Phys.* **4**, 945 (2008).
- [14] A. A. Chabanov, M. Stoytchev, and A. Z. Genack, *Nature (London)* **404**, 850 (2000).
- [15] D. S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini, *Nature (London)* **390**, 671 (1997).
- [16] M. Störzer, P. Gross, C. M. Aegerter, and G. Maret, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 063904 (2006).
- [17] C. M. Aegerter, M. Störzer, and G. Maret, *Europhys. Lett.* **75**, 562 (2006).
- [18] C. L. Hung, X. Zhang, N. Gemelke, and C. Chin, *Nature (London)* **470**, 236 (2011).
- [19] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1225 (2010).
- [20] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer, and A. Aspect, *Nature (London)* **453**, 891 (2008).
- [21] G. Roati, C. d'Errico, L. Fallani, M. Fattori, C. Fort, M. Zaccanti, G. Modugno, M. Modugno, and M. Inguscio, *Nature (London)* **453**, 895 (2008).
- [22] S. S. Kondov, W. R. McGehee, J. J. Zirbel, and B. DeMarco, *Science* **334**, 66 (2011).
- [23] F. Jendrzejewski, A. Bernard, K. Mueller, P. Cheinet, V. Josse, M. Piraud, L. Pezzé, L. Sanchez-Palencia, A. Aspect, and P. Bouyer, [arXiv:1108.0137](https://arxiv.org/abs/1108.0137).
- [24] S. Fishman, D. R. Grempel, and R. E. Prange, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 509 (1982).
- [25] C. Tian, A. Altland, and M. Garst, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 074101 (2011).
- [26] F. L. Moore, J. C. Robinson, C. Bharucha, P. E. Williams, and M. G. Raizen, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2974 (1994).
- [27] J. Wang and A. M. García-García, *Phys. Rev. E* **79**, 036206 (2009).
- [28] A. M. García-García, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 076404 (2008).
- [29] G. Casati, I. Guarneri, and D. L. Shepelyansky, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 345 (1989).
- [30] G. Lemarié, J. Chabé, P. Szriftgiser, J. C. Garreau, B. Grémaud, and D. Delande, *Phys. Rev. A* **80**, 043626 (2009).
- [31] J. Chabé, G. Lemarié, B. Grémaud, D. Delande, P. Szriftgiser, and J. C. Garreau, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 255702 (2008).
- [32] J. Ringot, Y. Lecoq, J. Garreau, and P. Szriftgiser, *Eur. Phys. J. D* **7**, 285 (1999).
- [33] G. Lemarié, H. Lignier, D. Delande, P. Szriftgiser, and J. C. Garreau, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 090601 (2010).
- [34] A. MacKinnon and B. Kramer, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1546 (1981).
- [35] J. L. Pichard and G. Sarma, *J. Phys. C* **14**, L127 (1981).
- [36] D. Vollhardt and P. Wölfle, in *Electronic Phase Transitions*, edited by W. Hanke and Yu. V. Kopayev (Elsevier, New York, 1992), pp. 1–78.
- [37] J. Martin, I. García-Mata, O. Giraud, and B. Georgeot, *Phys. Rev. E* **82**, 046206 (2010).
- [38] S. Faez, A. Strybulevych, J. H. Page, A. Lagendijk, and B. A. van Tiggelen, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 155703 (2009).

# Bibliographie

- [1] E. Wigner, “On a class of analytic functions from the quantum theory of collisions,” *Annals of Mathematics*, vol. 53, no. 1, pp. 36–67, 1951.
- [2] F. Dyson, “Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems. I,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 3, no. 1, p. 140, 1962.
- [3] F. Evers and A. Mirlin, “Anderson transitions,” vol. 80, no. December, pp. 1355–1417, 2008.
- [4] O. Bohigas, M. Giannoni, and C. Schmit, “Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws,” *Physical Review Letters*, vol. 52, no. 1, pp. 1–4, 1984.
- [5] F. Blöch, “Über die Quantenmechanik des Elektronen in Kristallgittern,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 52, p. 555, 1928.
- [6] P. Anderson, “Absence of diffusion in certain random lattices,” *Physical Review*, vol. 109, no. 5, p. 1492, 1958.
- [7] E. Abrahams, P. Anderson, D. Licciardello, and T. Ramakrishnan, “Scaling theory of localization : Absence of quantum diffusion in two dimensions,” *Physical Review Letters*, vol. 42, no. 10, pp. 673–676, 1979.
- [8] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer, and A. Aspect, “Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder.,” *Nature*, vol. 453, pp. 891–4, June 2008.
- [9] F. Jendrzejewski, A. Bernard, K. Müller, P. Cheinet, V. Josse, M. Piraud, L. Pezzé, L. Sanchez-Palencia, A. Aspect, and P. Bouyer, “Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential,” *Nature Physics*, vol. 8, pp. 398–403, Mar. 2012.
- [10] S. S. Kondov, W. R. McGehee, J. J. Zirbel, and B. DeMarco, “Three-dimensional Anderson localization of ultracold matter.,” *Science*, vol. 334, pp. 66–8, Oct. 2011.
- [11] S. Fishman, D. Grempel, and R. Prange, “Chaos, quantum recurrences, and Anderson localization,” *Physical Review Letters*, vol. 49, no. 8, pp. 509–512, 1982.
- [12] D. Grempel, R. Prange, and S. Fishman, “Quantum dynamics of a nonintegrable system,” *Physical Review A*, vol. 29, no. 4, pp. 1639–1647, 1984.
- [13] G. Casati, I. Guarneri, and D. Shepelyansky, “Anderson transition in a one-dimensional system with three incommensurate frequencies,” *Physical Review Letters*, vol. 62, no. 4, pp. 345–348, 1989.
- [14] J. Chabé, G. Lemarié, B. Grémaud, D. Delande, P. Szriftgiser, and J. Garreau, “Experimental Observation of the Anderson Metal-Insulator Transition with Atomic Matter Waves,” *Physical Review Letters*, vol. 101, pp. 1–4, Dec. 2008.

- [15] G. Lemarié, B. Grémaud, and D. Delande, “Universality of the Anderson transition with the quasiperiodic kicked rotor,” *Europhysics Letters*, vol. 87, p. 37007, Aug. 2009.
- [16] L. Gorkov and G. Eliashberg, “Minute metallic particles in an electromagnetic field,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 21, no. 940, 1965.
- [17] K. Efetov, “Supersymmetry and theory of disordered metals,” *Advances in Physics*, vol. 32, no. 1, p. 53, 1983.
- [18] S. Katsumoto, F. Komori, N. Sano, and S. Kobayashi, “Fine Tuning of Metal-Insulator Transition in AlO, 3GaO, 7As using Persistent Photoconductivity,” *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 56, no. 7, pp. 2259–2262, 1987.
- [19] E. Fermi, J. Pasta, and S. Ulam, “Studies of nonlinear problems,” *LASL Report LA-1940*, vol. 5, pp. 977–988, 1955.
- [20] G. Berman and F. Izrailev, “The Fermi-Pasta-Ulam problem : fifty years of progress,” *Chaos (Woodbury, N.Y.)*, vol. 15, p. 15104, Mar. 2005.
- [21] B. Chirikov, “A universal instability of many-dimensional Oscillator System,” *Physics Reports*, vol. 52, pp. 263–379, 1979.
- [22] T. Bhattacharya, S. Habib, K. Jacobs, and K. Shizume, “ $\delta$ -function-kicked rotor : Momentum diffusion and the quantum-classical boundary,” *Physical Review A*, vol. 65, pp. 1–7, Feb. 2002.
- [23] J. Cooley and J. Tukey, “An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series,” *Mathematical Computing*, pp. 297–301, 1965.
- [24] B. Chirikov, F. Izrailev, and D. Shepelyansky, “Dynamical Stochasticity in Classical and Quantum Mechanics,” *Mathematical Physics Reviews*, vol. 2, p. 209, 1981.
- [25] G. Casati, I. Guarneri, and F. Izrailev, “Scaling behavior of localization in quantum chaos,” *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 1, 1990.
- [26] F. Moore, J. Robinson, C. Bharucha, B. Sundaram, and M. Raizen, “Atom optics realization of the quantum delta-kicked rotor,” *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 25, pp. 4598–4601, 1995.
- [27] D. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini, “Localization of light in a disordered medium,” *Nature*, vol. 390, pp. 671–673, Dec. 1997.
- [28] H. Hu, A. Strybulevych, J. H. Page, S. E. Skipetrov, and B. a. van Tiggelen, “Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network,” *Nature Physics*, vol. 4, pp. 945–948, Oct. 2008.
- [29] J. Kroha and T. Kopp, “Self-consistent theory of Anderson localization for the tight-binding model with site-diagonal disorder,” *Physical Review B*, vol. 41, no. 1, pp. 888–891, 1990.
- [30] D. Thouless, “Electrons in disordered systems and the theory of localization,” *Physics Reports*, vol. 13, p. 93, 1974.
- [31] M. Peskin and D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley, 1995.
- [32] F. Wegner, “Electrons in disordered systems. Scaling near the mobility edge,” *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, vol. B25, pp. 327–337, 1976.

- 
- [33] F. Wegner, “Inverse participation ratio in  $2 + \epsilon$  dimensions,” *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, vol. 214, pp. 209–214, 1980.
- [34] F. Hikami, “Isomorphism and the  $\beta$ -function of the non-linear  $\sigma$  model in symmetric spaces,” *Nuclear Physics B*, vol. 215, p. 555, 1983.
- [35] D. Vollhardt and P. Wolfle, “Anderson Localization in  $d < 2$  Dimensions : A Self-Consistent Diagrammatic Theory,” *Physical Review Letters*, vol. 45, p. 842, 1980.
- [36] A. García-García, “Semiclassical Theory of the Anderson Transition,” *Physical Review Letters*, vol. 100, pp. 1–4, Feb. 2008.
- [37] K. Slevin and T. Ohtsuki, “Corrections to scaling at the Anderson transition,” *Physical Review Letters*, vol. 78, pp. 382–385, Jan. 1999.
- [38] I. K. Zharekeshev and B. Kramer, “Scaling of the level statistics at the disordered-induced metal-insulator transition,” *Physical Review B*, vol. 51, no. 23, p. 17239, 1995.
- [39] B. Shklovskii, B. Shapiro, B. Sears, P. Lambrianides, and H. Shore, “Statistics of spectra of disordered systems near the metal-insulator transition,” *Physical Review B*, vol. 47, no. 17, p. 11487, 1993.
- [40] J. Pichard, M. Sanquer, and K. Slevin, “Broken symmetries and localization lengths in Anderson insulators : Theory and experiment,” *Physical Review Letters*, vol. 65, no. 14, pp. 1812–1815, 1990.
- [41] W. Bernreuther and F. Wegner, “Four-loop-order  $\beta$  function for two-dimensional nonlinear sigma models,” *Physical Review Letters*, no. September, pp. 1383–1385, 1986.
- [42] K. Slevin and T. Ohtsuki, “Critical exponent for the quantum Hall transition,” *Physical Review B*, vol. 80, pp. 1–4, July 2009.
- [43] K. Slevin, “The Anderson transition : time reversal symmetry and universality,” *Physical Review Letters*, vol. 4083, no. 1, pp. 4083–4086, 1997.
- [44] Y. Asada, K. Slevin, and T. Ohtsuki, “Numerical estimation of the  $\beta$  function in two-dimensional systems with spin-orbit coupling,” *Physical Review B*, vol. 70, pp. 1–6, July 2004.
- [45] Y. Asada and K. Slevin, “Anderson transition in the three dimensional symplectic universality class,” *J. Phys. Soc. Jpn. Suppl.*, vol. 74, no. Supplement, pp. 238–241, 2004.
- [46] G. Lemarié, J. Chabé, P. Szriftgiser, J. Garreau, B. Grémaud, and D. Delande, “Observation of the Anderson metal-insulator transition with atomic matter waves : Theory and experiment,” *Physical Review A*, vol. 80, pp. 1–17, Oct. 2009.
- [47] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction to percolation theory*. Taylor & Francis Ltd, 1994.
- [48] T. Ohtsuki and T. Kawarabayashi, “Anomalous diffusion at the Anderson transitions,” *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 66, no. 2, p. 314, 1997.
- [49] R. Graham and M. Schlautmann, “Dynamical localization of atomic-beam deflection by a modulated standing light wave,” *Physical Review A*, vol. 45, no. 1, pp. 19–22, 1992.

- [50] F. Moore, J. Robinson, C. Bharucha, P. Williams, and M. Raizen, “Observation of dynamical localization in atomic momentum transfer : A new testing ground for quantum chaos,” *Physical Review Letters*, vol. 73, no. 22, pp. 2974–2977, 1994.
- [51] L. Guidoni and P. Verkerk, “Optical lattices : cold atoms ordered by light,” *Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics*, vol. 1, p. R23, 1999.
- [52] H. Metcalf and P. v.d. Straten, *Laser Cooling and Trapping*. Springer Verlag, 1999.
- [53] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, “Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models,” *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 6, p. 2023, Nov. 1989.
- [54] P. Lett, N. Watts, C. Westbrook, and W. Phillips, “Observation of Atoms Cooled below the Doppler Limit,” *Physical Review Letters*, vol. 61, no. 2, pp. 169–173, 1988.
- [55] P. Ungar, D. Weiss, E. Riis, and S. Chu, “Optical molasses and multilevel atoms : theory,” *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 6, p. 2058, Nov. 1989.
- [56] D. Steck, “Cesium D Line Data,” *available online at <http://steck.us>*, 2010.
- [57] I. Yavin, M. Weel, A. Andreyuk, and A. Kumarakrishnan, “A calculation of the time-of-flight distribution of trapped atoms,” *American Journal of Physics*, vol. 70, no. July 2001, p. 149, 2002.
- [58] M. Kasevich and S. Chu, “Laser cooling below a photon recoil with three-level atoms,” *Physical Review Letters*, vol. 69, no. 12, pp. 1741–1744, 1992.
- [59] K. Moler, D. Weiss, M. Kasevich, and S. Chu, “Theoretical analysis of velocity-selective Raman transitions,” *Physical Review A*, vol. 45, no. 1, pp. 342–348, 1992.
- [60] L. P. Maguire, S. Szilagy, and R. E. Scholten, “High performance laser shutter using a hard disk drive voice-coil actuator,” *Review of Scientific Instruments*, vol. 75, no. 9, p. 3077, 2004.
- [61] B. Klappauf, W. Oskay, and D. Steck, “Quantum chaos with cesium atoms : pushing the boundaries,” *Physica D*, vol. 131, pp. 78–89, 1999.
- [62] P. Jones, M. Goonasekera, H. Saunders-Singer, and D. Meacher, “Shifting the boundaries : Pulse-shape effects in the atom-optics kicked rotor,” *Europhysics Letters*, vol. 67, pp. 928–933, Sept. 2004.
- [63] S. Katsumoto, F. Komori, N. Sano, and S. Kobayashi, “Dielectric Constant Measurement near the Metal-Insulator Transition in  $\text{Al}_0.3\text{Ga}_0.7\text{As}$ ,” *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 58, no. 3, pp. 791–794, 1989.
- [64] C. Aegerter, M. Störzer, and G. Maret, “Experimental determination of critical exponents in Anderson localisation of light,” *Europhysics Letters*, vol. 75, pp. 562–568, Aug. 2006.
- [65] E. Ott, T. J. Antonsen, and J. Hanson, “Effect of Noise on Time-Dependent Quantum Chaos,” *Physical Review Letters*, vol. 53, no. 23, pp. 2187–2190, 1984.
- [66] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos*. Springer Verlag, 1991.
- [67] H. Stöckmann, *Quantum Chaos : An Introduction*. New York : Cambridge University Press, 1999.

- 
- [68] J. Chabé, H. Lignier, P. Szriftgiser, and J. Garreau, “Improving Raman velocimetry of laser-cooled cesium atoms by spin-polarization,” *Optics Communications*, vol. 274, pp. 254–259, June 2007.
- [69] M. Traha, R. Blümel, and U. Smilansky, “Symmetry breaking and localization in quantum chaotic systems,” *Physical Review E*, vol. 48, no. 3, p. 1764, 1993.
- [70] R. Blümel and U. Smilansky, “Symmetry breaking and localization in quantum chaotic systems,” *Physical Review Letters*, no. 2, pp. 217–220, 1992.
- [71] J. Dahlhaus, J. Edge, J. Tworzydło, and C. Beenakker, “Quantum Hall effect in a one-dimensional dynamical system,” *Physical Review B*, vol. 84, pp. 1–8, Sept. 2011.
- [72] R. Scharf, “Kicked rotator for a spin-1/2 particle,” *Journal of Physics A : Mathematical and General*, p. 4223, 1989.
- [73] M. Karski, L. Förster, J.-M. Choi, A. Steffen, W. Alt, D. Meschede, and A. Widera, “Quantum walk in position space with single optically trapped atoms,” *Science (New York, N.Y.)*, vol. 325, pp. 174–7, July 2009.
- [74] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, “Many-body physics with ultracold gases,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 80, pp. 885–964, July 2008.
- [75] G. Lemarié, D. Delande, J. Garreau, and P. Szriftgiser, “Classical diffusive dynamics for the quasiperiodic kicked rotor,” *Journal of Modern Optics*, vol. 57, pp. 1922–1927, Nov. 2010.



