



**HAL**  
open science

# Etude mathématique et numérique de modèles homogénéisés de métamatériaux

Pierre-Henri Cocquet

► **To cite this version:**

Pierre-Henri Cocquet. Etude mathématique et numérique de modèles homogénéisés de métamatériaux. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2012. Français. NNT: . tel-00764174

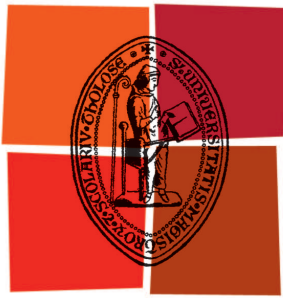
**HAL Id: tel-00764174**

**<https://theses.hal.science/tel-00764174>**

Submitted on 12 Dec 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université  
de Toulouse

# THÈSE

## En vue de l'obtention du DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

**Délivré par :**

Université Toulouse III Paul Sabatier

**Discipline ou spécialité :**

Mathématiques appliquées

---

**Présentée et soutenue par**

Pierre-Henri COCQUET

le 7 décembre 2012

**Titre :**

Étude mathématique et numérique de modèles homogénéisés de métamatériaux.

---

**École doctorale :**

Mathématiques Informatique Télécommunications (MITT)

**Unité de recherche :**

Institut de Mathématiques UMR 5219

**Directeurs de thèse :**

Abderrahmane BENDALI

Vincent MOUYSSET

IMT, INSA Toulouse

M2SN, ONERA Centre de Toulouse

**Rapporteurs :**

Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA

Eric BONNETIER

Directeur de Recherche, UMA, ENSTA

Professeur, Université Joseph Fourier, Grenoble

**Membres du jury :**

Bruno DESPRÉS

Jean-Pierre RAYMOND

Sébastien TORDEUX

Professeur, JLL Université Paris 6

Professeur, IMT Université Toulouse III Paul Sabatier

Maitre de conférences, LMA Université de Pau



---

## Remerciements

---

Mes tout premiers remerciements vont naturellement à mes trois directeurs de thèse pour leur encadrement irréprochable : Vincent Mouysset, Abderrahmane Bendali et Pierre Mazet. Ils m'ont proposé des axes de recherche riches et passionnants qui vont m'occuper l'esprit encore quelques années. Ils m'ont de plus laissé la liberté et l'autonomie de les traiter selon mes envies et mes goûts.

Un grand merci à Vincent pour m'avoir accueilli dans son bureau et dirigé pendant ces trois ans avec une grande disponibilité, répondu à mes questions avec pédagogie et aussi pour toutes les discussions extrêmement enrichissantes (aussi bien mathématiques, numériques que cinématographiques !) que nous avons partagées.

Je voudrais exprimer maintenant toute ma gratitude à Abderrahmane qui a accepté de reprendre la direction après le départ en retraite de Pierre, pour son implication dans la thèse, ses nombreux conseils et pour m'avoir fait découvrir les joies des équations aux dérivées partielles avec petit paramètre et celles des développements asymptotiques.

Enfin, je remercie Pierre pour toutes les discussions que nous avons eues concernant les mathématiques, leurs liens avec la physique ou sur d'autres sujets n'ayant absolument aucun lien avec ce qui précède.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Eric Bonnetier qui ont accepté de rapporter ce manuscrit, pour le temps qu'ils ont consacré ainsi que pour les remarques qu'ils ont pu formuler le concernant. Merci aussi à Bruno Després, Jean-Pierre Raymond et Sébastien Tordeux pour leur participation au jury.

Un grand merci à toute l'équipe du M2SN : François, Guillaume, Nathalie, Patricia et Sébastien pour leur accueil amical et chaleureux. Je tiens plus précisément à remercier Patricia pour la relecture de certains de mes transparents et pour toutes les discussions, sur des sujets aussi divers que variés (la sécurité sociale par exemple...), que nous avons eues. Enfin, je voudrais remercier Sébastien pour tous ces échanges qui se terminaient bien souvent par : « bon faudrait retourner bosser... »

Je voudrais maintenant saluer les thésards de l'Onera et de l'IMT pour tous les bons moments passés ensemble. Plus précisément, je tiens à remercier : Sébastien, Steven, Alain, Yann, Dimitri, Jean-Baptiste, Jean-Christophe et Émilie.

Merci aussi aux amis proches : Olivier, Clément, Franswag, Bastien, Nicolas (les deux !), Amélie, Emilie, Sevy, Clémence, Florent, Loic et Ambre pour toutes les soirées et

---

week-ends passés ensemble à manger de la bonne viande ou des pizzas maison, à faire des jeux de société, etc, etc ...

Je voudrais maintenant remercier ma famille : Eric, Dominique, mes trois soeurs Gwendoline, Clio et Héloïse, mon (récent) petit frère Luis, Arnaud et ma petite nièce Charlie pour leur soutien, leurs encouragements (chacun à sa manière), leurs conseils et tous les moments agréables passés ensemble (et aussi ceux à venir). Merci aussi à Brigitte pour m'avoir accueilli pendant quelques temps chez elle. J'en profite du coup pour remercier la belle famille : Nadège, Elian et Petit-frère (Jean-Baptiste).

Enfin (le meilleur pour la fin), un grand merci à Céline qui m'a supporté pendant ces trois années, m'a encouragé et réconforté dans les moments les plus difficiles. Ce document te doit beaucoup!

---

---

# Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>1 Présentation générale du contexte et de la problématique</b>	<b>21</b>
1.1 Les métamatériaux	22
1.1.1 Quelques applications envisagées pour les métamatériaux	22
1.1.2 Quelques exemples de métamatériaux décrits dans la littérature	27
1.1.3 Remarques sur les exemples précédents	32
1.2 Rappels sur les systèmes de Friedrichs	33
1.2.1 Théorèmes de traces	34
1.2.2 Résultats d'existence et d'unicité pour des milieux classiques	35
1.2.3 Applications à certains systèmes de propagation d'ondes	37
1.3 Étude et approximation numérique des métamatériaux : état de l'art partiel	43
1.3.1 Étude de la modélisation des métamatériaux : équations d'ordre 2	43
1.3.1.1 La $\mathbb{T}$ -coercivité	43
1.3.1.2 Les travaux de P. Fernandez et M. Raffetto	45
1.3.2 Travaux sur l'approximation numérique : équations d'ordre 2	47
1.3.2.1 Méthodes numériques basées sur la $\mathbb{T}$ -coercivité	47
1.3.2.2 Méthodes numériques basées sur les travaux de Fernandez et <i>al.</i>	48
1.4 Homogénéisations appliquées aux métamatériaux	49
1.4.1 Homogénéisation périodique par convergence double échelle	50
1.4.1.1 Résultats généraux	50
1.4.1.2 Application à l'homogénéisation d'un réseau périodique de petites inclusions	51
1.4.2 Exemple d'homogénéisation non-périodique : résultats d'A.G. Ramm	54
<b>I Modélisation mathématique et approximation numérique de modèles homogénéisés de métamatériaux</b>	<b>59</b>
<b>2 Etude du caractère bien posé de modèles homogénéisés de métamatériaux</b>	<b>61</b>
2.1 Cadre mathématique général	62
2.2 Résultats d'existence et d'unicité pour l'électromagnétisme et l'optique	67
2.2.1 Métamatériaux électromagnétiques à indice scalaire	67
2.2.1.1 Démonstration du théorème 2.7	68
2.2.1.2 Démonstration des lemmes 2.8, 2.9 et 2.10	71

---

2.2.2	Métamatériaux électromagnétiques à indice tensoriel . . . . .	73
2.2.2.1	Démonstration du théorème 2.14 . . . . .	75
2.2.2.2	Démonstration du lemme 2.15 . . . . .	77
2.3	Résultats d'existence et d'unicité pour l'acoustique . . . . .	79
2.3.1	Métamatériaux acoustiques à indices scalaires . . . . .	79
2.3.1.1	Démonstration du théorème 2.17 . . . . .	80
2.3.1.2	Démonstration du corollaire 2.19 . . . . .	83
2.3.2	Métamatériaux acoustiques à indice tensoriel . . . . .	84
2.3.2.1	Démonstration du théorème 2.21 . . . . .	85
2.3.2.2	Démonstration du lemme 2.23 . . . . .	87
2.4	Résultats d'existence et d'unicité pour l'élasticité linéaire . . . . .	88
2.4.1	Métamatériaux élastiques à indices scalaires . . . . .	88
2.4.1.1	Démonstration du théorème 2.26 . . . . .	89
2.4.1.2	Démonstration du corollaire 2.28 . . . . .	91
2.4.2	Métamatériaux élastiques à indice tensoriel . . . . .	91
2.4.2.1	Démonstration du théorème 2.30 . . . . .	92
2.5	Etude de quelques exemples . . . . .	93
2.5.1	Réseau périodique de Split-Ring-Resonator (SRR) . . . . .	94
2.5.2	Métamatériau chiral basé sur un modèle de type « $\Omega$ -particle resonator » . . . . .	95
2.5.3	Un métamatériau bi-anisotropique . . . . .	95
2.5.4	Métamatériau acoustique ayant un indice de réfraction négatif . . . . .	96
2.5.5	Perfectly-Matched-Layers : Invisibilité approchée pour l'acoustique . . . . .	97
2.5.6	Un métamatériau pour l'élasticité linéaire . . . . .	99
<b>3</b>	<b>Approximation numérique de modèles homogénéisés de métamatériaux</b> . . . . .	<b>101</b>
3.1	Schéma Éléments Finis usuel . . . . .	102
3.1.1	Présentation du schéma . . . . .	103
3.1.2	Tests numériques . . . . .	104
3.1.2.1	Un milieu classique . . . . .	104
3.1.2.2	Un métamatériau pour lequel le schéma EF est valide . . . . .	109
3.1.2.3	Un métamatériau constant par morceaux : contre-exemple de la validité des éléments finis . . . . .	110
3.1.2.4	Un métamatériau lipschitzien . . . . .	112
3.2	Un schéma éléments finis adapté : le schéma EF-AL . . . . .	114
3.2.1	Présentation du schéma EF-AL . . . . .	115
3.2.2	Convergence du schéma EF-AL . . . . .	116
3.2.3	Applications au système de l'acoustique . . . . .	118
3.2.3.1	Discrétisation . . . . .	118
3.2.3.2	Validation sur le milieu classique . . . . .	120
3.2.3.3	Validation sur le métamatériau constant par morceaux . . . . .	120
3.2.3.4	Validation sur le métamatériau lipschitzien . . . . .	123
3.3	Etude numérique du schéma Galerkin Discontinu . . . . .	124
3.3.1	Présentation du schéma . . . . .	124
3.3.2	Tests numériques . . . . .	127
3.3.2.1	Un milieu classique . . . . .	127
3.3.2.2	Un métamatériau constant par morceaux . . . . .	129
3.3.2.3	Un métamatériau lipschitzien . . . . .	131

3.3.2.4	Bilan	131
<b>II Diffraction multiple par N petits obstacles et application à l'homogénéisation non-périodique formelle de milieux faiblement denses</b>		<b>137</b>
<b>4</b>	<b>Diffraction multiple par N petits obstacles</b>	<b>139</b>
4.1	Diffraction par N petites boules caractérisées par une condition d'impédance	140
4.1.1	Existence et unicité	140
4.1.2	Stabilité uniforme	143
4.2	Méthode des développements asymptotiques raccordés	146
4.2.1	Forme générale des champs externes	148
4.2.2	Forme générale des champs internes	149
4.2.3	Existence et unicité du développement asymptotique à tout ordre	151
4.2.3.1	Principe de la preuve de l'existence et l'unicité du développement à tout ordre	154
4.2.3.2	Démonstration de l'existence et l'unicité du développement à tout ordre	155
4.2.4	Estimations d'erreurs : justification du développement formel	161
4.2.4.1	L'approximation globalement valide	161
4.2.4.2	Estimations d'erreurs	162
4.3	Cas d'obstacles caractérisés par un indice de réfraction	169
4.3.1	Diffraction par N boules caractérisées par des indices de réfraction	169
4.3.1.1	Existence et unicité	170
4.3.1.2	Stabilité uniforme	170
4.3.2	Forme générale des champs externes et internes	172
4.3.3	Existence, unicité du développement asymptotique à tout ordre et estimations d'erreur	173
<b>5</b>	<b>Homogénéisation non-périodique formelle de métamatériaux acoustiques faiblement denses</b>	<b>177</b>
5.1	Détermination explicite du développement asymptotique jusqu'à l'ordre 3	178
5.1.1	Cas de petits obstacles caractérisés par une condition aux limites d'impédance	179
5.1.2	Cas de petits obstacles caractérisés par un indice de réfraction	188
5.2	Rappels sur l'approximation de Born	195
5.3	Obtention du métamatériau homogénéisé	196
5.3.1	Cas de petits obstacles caractérisés par une condition aux limites d'impédance	197
5.3.2	Cas de petits obstacles caractérisés par un indice de réfraction	199
5.4	Validité de la méthode d'homogénéisation formelle	201
<b>Conclusions et perspectives</b>		<b>203</b>
<b>A</b>	<b>Annexe</b>	<b>209</b>
A.1	Rappels sur la théorie de Fredholm analytique	209
A.1.1	Familles holomorphes d'opérateurs	210
A.1.2	Alternatives de Fredholm analytiques	211
A.2	Démonstration du lemme de Ramm	212





---

## Table des figures

---

1.1	Rayon lumineux traversant un milieu à indices négatifs [16]	23
1.2	Principe d'une super-lentille [78]	24
1.3	Cape d'invisibilité parfaite [43]	25
1.5	Dispositif expérimental et performance d'une cape d'invisibilité pour les micro-ondes en 2D [89]	26
1.6	Métamatériau créé à partir d'un réseau périodique de Split-Ring-Resonators et de tiges métalliques [90]	27
1.7	Résonateurs de type $\Omega$ -particle et paramètres homogénéisés [94]	29
1.8	Split-Ring-Resonator bi-anisotropique et paramètres homogénéisés [53]	30
1.9	Métamatériau acoustique créé à partir d'un réseau périodique tubes troués [57]	31
1.10	Métamatériau élastique créé à partir de sphères concentriques et paramètres homogénéisés [95]	32
1.11	Schéma de la structure diffractante et de la cellule de base [16]	52
2.1	Idée principale des démonstrations d'existence et d'unicité	63
2.2	Milieu PML dans de l'air	98
3.1	Graphe des solutions exactes	106
3.2	Exemple de maillage de $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$	107
3.3	Transformation de $\hat{T}$ vers $T$	108
3.4	Erreur $L^2$ des éléments finis pour le matériau classique	109
3.5	Erreur $L^2$ des éléments finis pour le métamatériau constant	110
3.6	Géométrie et paramètres d'un métamatériau constant par morceaux	111
3.7	Erreur $L^2$ des éléments finis pour le métamatériau constant par morceaux	111
3.8	Solutions numériques calculées par éléments finis, lorsque $h = h_{\min}$ , pour le métamatériau constant par morceaux	112
3.9	Représentation des indices lipschitziens lorsque $\omega = 1$ .	113
3.10	Erreur $L^2$ des éléments finis pour le métamatériau lipschitzien	113
3.11	Solutions numériques calculées, lorsque $h = h_{\min}$ , par éléments finis pour le métamatériau lipschitzien	114
3.12	Notations pour les éléments de Raviart-Thomas	119
3.13	Erreur $L^2$ du schéma AL pour le milieu classique	120
3.14	Erreur $L^2$ du schéma AL pour le métamatériau constant par morceaux	121
3.15	Solutions numériques obtenues le schéma EF-AL, lorsque $h = h_{\min}$ , pour un métamatériau constant	122
3.16	Erreur $L^2$ du schéma AL pour le métamatériau lipschitzien	123

---

---

3.17	Exemple de maillage non-conforme . . . . .	125
3.18	Erreur $L^2$ du schéma GD- $Q^1$ pour le milieu classique . . . . .	127
3.19	Solutions numériques obtenues avec du GD $Q^1$ , lorsque $h = h_{\min}$ , pour le milieu classique . . . . .	128
3.20	Erreur $L^2$ du schéma GD- $Q^2$ pour le milieu classique . . . . .	129
3.21	Solutions numériques obtenues avec du GD $Q^2$ , lorsque $h = h_{\min}$ , pour le milieu classique . . . . .	130
3.22	Erreur $L^2$ du schéma GD $Q^1$ pour le métamatériau constant par morceaux . . . . .	131
3.23	Solutions numériques obtenues avec du GD $Q^1$ , lorsque $h = h_{\min}$ , pour un métamatériau constant par morceaux . . . . .	132
3.24	Solutions numériques obtenues avec du GD $Q^1$ , lorsque $h = h_0$ , pour un métamatériau constant par morceaux . . . . .	133
3.25	Erreur $L^2$ du schéma GD $Q^2$ pour le métamatériau constant par morceaux . . . . .	134
3.26	Solutions numériques obtenues avec du GD $Q^2$ , lorsque $h = h_{\min}$ , pour un métamatériau constant par morceaux . . . . .	135
3.27	Erreur $L^2$ du schéma GD $Q^1$ pour le métamatériau lipschitzien . . . . .	136
3.28	Erreur $L^2$ du schéma GD $Q^2$ pour le métamatériau lipschitzien . . . . .	136
4.1	Problème de diffraction multiple . . . . .	141
4.2	Problème de diffraction multiple tronqué . . . . .	141
4.3	Idée générale des développements asymptotiques raccordés . . . . .	147
4.4	Fonction de troncature utilisée pour l'approximation globalement valide . . . . .	162
5.1	Paramètre homogénéisé en fonction de $\kappa$ pour une répartition périodique de petits obstacles mous. . . . .	199
5.2	Paramètre homogénéisé en fonction de $\kappa$ pour une répartition périodique de petits obstacles d'indice $n_j^\delta = (2 + 0.001i)/\delta$ . . . . .	201

---

---

# Introduction

---

Les métamatériaux sont des milieux dont le comportement physique vis-à-vis des ondes diffère de celui des matériaux naturels. De tels milieux possèdent par exemple des paramètres physiques (selon la phénoménologie étudiée : indices de permittivité, de perméabilité, de réfraction, module de masse, coefficients de Lamé, . . .) de parties réelles négatives, des paramètres fortement variables voir même singuliers en espace, ou encore des impédances infinies. Ils ont été introduits pour la première fois en 1968 par V.G. Veselago [92] dans une étude théorique sur la propagation d'ondes électromagnétiques dans des matériaux possédant des indices de permittivités et de perméabilités simultanément négatifs. En remarquant que le vecteur de Poynting changeait son orientation il nomme ces matériaux « Left-Handed-Materials » (*LHM* ou encore « matériaux main-gauche »). Il dégage aussi de son étude certaines propriétés « exotiques » de ces milieux comme par exemple l'inversion de l'effet Doppler ou encore l'inversion de l'effet de radiation Vavilov-Cerenkov.

C'est aux alentours des années 2000 qu'un intérêt réel pour les *LHM* est né avec l'une des premières réalisations, proposée par J.B. Pendry [76], de « matériau main-gauche ». Cette dernière utilise l'association de deux matériaux précédemment réalisés. Le premier [75] est basé sur un réseau périodique de fibres parallèles et présente, au delà d'une certaine fréquence de coupure, une perméabilité de partie réelle négative. Le second [77] est, sur certaines plages de fréquences, un milieu avec une perméabilité de partie réelle négative dont la réalisation se base sur un réseau périodique d'anneaux fendus. L'association de ces deux structures engendre alors [76] un réseau périodique de « Split-Ring-Resonator » (SRR) qui, pour certaines fréquences, peut être vu comme un milieu équivalent dont les indices de permittivité et de perméabilité sont simultanément négatifs. C'est à l'issue de cette découverte que J.B. Pendry décide de rebaptiser les *LHM* « métamatériaux ». Notons finalement que des métamatériaux ont aussi été réalisés en électromagnétisme [53], en optique [94], acoustique [57] ou encore en élasticité linéaire [31].

Les comportements exotiques des métamatériaux permettent d'envisager de nombreuses applications potentielles. Une des premières, proposée par J.B. Pendry, concerne l'utilisation d'un milieu dont les indices de permittivité et de perméabilité sont tous les deux négatifs. L'indice de réfraction d'une telle structure est alors négatif et peut être utilisé [79] pour la création d'une « super-lentille » permettant de passer outre la limite de résolution des lentilles usuelles. Une autre application emblématique des métamatériaux consiste en la mise au point de dispositifs d'invisibilité (appelée aussi « cloaking ») pour les ondes électromagnétiques ou bien acoustiques [27, 41, 80, 46]. Leur principe repose sur des

---

transformations d'espaces singulières permettant de créer des milieux dont les paramètres physiques sont fortement anisotropes, voir même singuliers, qui dévient les ondes de toute une partie de l'espace. Enfin, d'autres applications telles que la « focalisation sonore » [44], ou encore le contrôle de la lumière via des cristaux photoniques [61], peuvent être trouvées dans [63, 97].

Au vu des caractéristiques physiques des métamatériaux et des applications visées, plusieurs questions se posent naturellement :

*Modélisation des métamatériaux* : De par leurs propriétés exotiques, la modélisation physique ou bien mathématique des métamatériaux sort du cadre habituel d'étude. Par exemple, d'un point de vue physique, lorsqu'un LHM est inclus dans un milieu usuel, l'énergie totale du système étudié n'a pas de signe précis ce qui ne permet plus de prendre en compte la causalité [54, 92]. D'un point de vue mathématique, la modélisation « correcte » des métamatériaux est difficile du fait de la présence de paramètres physiques négatifs ou bien singuliers. En effet, les méthodes usuelles permettant d'établir l'existence et l'unicité de solutions aux problèmes modélisant les phénomènes acoustiques, élastiques ou électromagnétiques utilisent toutes la positivité et le caractère borné des paramètres physiques du matériau considéré.

*Simulation numérique des métamatériaux* : La simulation numérique de la propagation d'ondes dans les métamatériaux souffre des mêmes difficultés et problèmes que ceux liés à leur modélisation [18, 74, 73]. En effet, les questions en lien avec la convergence et la stabilité des schémas numériques classiques (Éléments Finis, Différences Finies, Volumes Finis, Galerkin Discontinu...) permettant d'approximer les solutions des problèmes mentionnés précédemment ne sont établies, *a priori*, que dans le cas de paramètres physiques positifs et bornés.

*Réalisation des métamatériaux* : Ce troisième point concerne la réalisation effective des métamatériaux. N'existant pas à l'état de nature, ils sont pour la plupart créés à partir d'assemblages de petits composants eux mêmes constitués de milieux classiques. Ce dernier peut en fait être considéré comme un milieu équivalent pour des longueurs d'ondes grandes devant l'espacement de ses constituants [12, 13, 14, 34, 45, 90, 51, 76, 77, 82, 94]. De ce fait, le comportement exotique des métamatériaux a lieu uniquement à une échelle macroscopique (ou encore « homogénéisée ») et leurs paramètres physiques sont fictifs au sens où ce sont ceux d'un milieu équivalent. La principale difficulté liée à la fabrication des métamatériaux réside ainsi dans l'obtention des paramètres physiques équivalents et la pertinence physique ou bien mathématique de ces derniers (en lien avec leur modélisation).

## Modélisation « correcte » des métamatériaux

Un des premiers travaux concernant l'étude de l'existence et l'unicité de solutions pour des équations aux dérivées partielles en présence de métamatériaux a été réalisé dans [8]. Les auteurs montrent qu'un problème de transmission scalaire d'ordre 2 entre un milieu à indice négatif et un matériau « positif », tous deux possédant des paramètres physiques scalaires et constants en espace, est bien posé au sens de Fredholm (l'unicité du problème entraîne son caractère bien posé). Pour ce faire, ils utilisent des méthodes empruntées au domaine des équations intégrales imposant de ce fait certaines conditions sur les valeurs des paramètres physiques et sur la géométrie de l'interface entre les deux

milieux. D'autres travaux d'A.S. Bonnet-Ben-Dhia et *al.* [7], C.M. Zwölf [98] et L. Chesnel et *al.* [9] ont ensuite été menés dans le but d'étendre l'étude précédente au cas de milieux possédant des paramètres dépendant de la variable d'espace. Ils ont introduit à cet effet la méthode de la «  $\mathbb{T}$ -coercivité ». Elle consiste à utiliser, dans la formulation variationnelle associée au problème considéré, des fonctions tests dans l'image d'un opérateur continu et bijectif  $\mathbb{T}$ . Ils ont ainsi démontré le caractère bien posé pour des contrastes (le ratio des paramètres physiques des deux matériaux) en dehors d'un certain intervalle borné de  $\mathbb{R}$ . Ce dernier peut de plus être réduit avec des bornes explicites uniquement dépendantes de la géométrie de l'interface en se restreignant à l'étude du caractère Fredholm du problème. Le cas d'interfaces non régulières a aussi été traité [9, 8, 7, 10] et un « intervalle critique » défini comme les valeurs du contraste pour lesquelles le problème ne relève plus de l'alternative de Fredholm a été mis en évidence. Son étude a été réalisée dans [11] pour des d'interfaces particulières. Enfin, cette méthode a été appliquée sur les équations de Maxwell 2D en polarisation T.M (Transverse Magnétique) et T.E (Transverse Electrique) [10] où des résultats similaires ont été obtenus.

Une remarque générale sur les résultats précédents est qu'ils dépendent de la géométrie de l'interface. En effet, le caractère bien posé est démontré pour toutes interfaces et pour des contrastes en dehors d'un intervalle dont les bornes, hormis pour certaines géométries d'interfaces, sont inconnues. Le caractère Fredholm du problème est, quant à lui, démontré pour des contrastes en dehors d'un intervalle dépendant seulement de la géométrie de l'interface mais, pour ces cas là, il existe un noyau de dimension finie qui est indéterminé.

Les résultats présentés ci-dessus s'appliquent sur des problèmes scalaires d'ordre 2. Pour des systèmes d'équations, des résultats traitants de l'existence et de l'unicité de solutions pour des équations de Maxwell en présence de métamatériaux ont été démontrés par P. Fernandes et *al.* dans [37, 38]. Ils commencent par réécrire ce système comme une équation d'ordre 2 dont l'inconnue est le champ électrique. Ils étudient alors ce problème pour des métamatériaux diélectriques ou encore bi-anisotropiques et démontrent qu'il est bien posé sous des hypothèses descriptives et phénoménologiques permettant d'utiliser le lemme de Lax-Milgram.

Les hypothèses introduites entraînent cependant que ces résultats ne s'appliquent que pour des milieux diélectriques dont les indices de permittivité et de perméabilité ne sont pas simultanément négatifs. Pour les matériaux bi-anisotropiques, ils s'appliquent dès lors que le milieu vérifie la restriction précédente ainsi que des relations de compatibilité entre les signes des parties réelles et imaginaires de ses autres paramètres physiques. Plus précisément, leurs parties imaginaires doivent être strictement positive dans les zones où soit la permittivité soit la perméabilité est de partie réelle négative et vice-versa. Pour finir, un exemple de métamatériau bi-anisotropique issu de la littérature ne rentrant pas dans le cadre d'application de ces résultats est donné dans [37].

## Simulation numérique des métamatériaux

La simulation numérique des équations aux dérivées partielles dépend de la nature du problème que l'on souhaite approximer. Plus précisément, la présence de métamatériaux donne lieu à des problèmes « non-classiques » qui sont, de ce fait, hors du champ d'application des méthodes d'approximations numériques usuelles. Ainsi elles ne sont *a priori*

plus valides pour ces cas là. Par exemple, des travaux menés dans [18, 74, 73] par G. Oliveri et *al.* montrent, sur des exemples, que la précision et la validité des résultats numériques obtenus via des simulateurs du commerce pour l'électromagnétisme peuvent être mises en doute lorsqu'ils sont utilisés en présence de matériaux pour lesquels la validité de ce schéma n'est pas démontrée, comme par exemple les métamatériaux. Les travaux d'analyse numérique pour l'approximation des phénomènes physiques des métamatériaux sont ainsi étroitement liés aux études théoriques précédentes ne serait-ce que pour étudier numériquement un problème bien posé en existence et en unicité.

Commençons par donner les travaux numériques associés à la méthode de la  $\mathbb{T}$ -coercivité. Un problème de transmission scalaire d'ordre 2 entre milieux « classiques » et milieux à indices réels négatifs a tout d'abord été approximé dans [72] par une méthode d'éléments finis usuelle. Les auteurs se placent sous des hypothèses compatibles avec l'utilisation de la  $\mathbb{T}$ -coercivité sur une géométrie d'interface particulière et démontrent la convergence de l'approximation ainsi qu'une analyse d'erreur a posteriori pour des maillages réguliers. Des travaux ont ensuite été réalisés par L. Chesnel et P. Ciarlet Jr. dans [21] dans le but d'étendre les résultats précédents. Ils se placent, une fois de plus, dans le cadre d'application de la  $\mathbb{T}$ -coercivité afin d'approximer un problème bien posé puis discrétisent sa formulation variationnelle. Pour ce faire, ils imposent des contraintes sur le maillage utilisé telles que la stabilité de l'espace d'approximation par l'action de  $\mathbb{T}$  ou encore la locale  $\mathbb{T}$ -conformité imposant des symétries sur le maillage. Dans un second temps et afin de considérer des maillages généraux, un terme de dissipation  $\gamma$  est ajouté dans la définition des paramètres du matériau considéré. Il est alors démontré qu'un bon choix de  $\gamma$  (dépendant du pas de maillage) permet d'approximer la solution du problème non-perturbé par une approximation numérique de la solution du problème avec dissipation. Ces méthodes numériques sont toutes basées sur la méthode de la  $\mathbb{T}$ -coercivité et ont donc les mêmes limitations et difficultés d'utilisation que cette dernière.

Des travaux de simulations numériques associées aux résultats de P. Fernandez et *al.* ont été réalisés dans [37, 38] par ces mêmes auteurs. Il y est montré que l'approximation numérique des équations de Maxwell avec des éléments d'arêtes de Nédélec, écrites en tant que système d'ordre 2, en présence de métamatériaux diélectriques ou bi-anisotropiques est réalisable. Ils supposent pour cela que les hypothèses autorisant l'utilisation du lemme de Lax-Milgram, et assurant le caractère bien posé du système, sont vérifiées. Cette méthode numérique est ainsi limitée à l'étude de métamatériaux spécifiques.

Enfin, bien que tout les résultats précédemment cités concernent des problèmes écrits en régime harmonique, notons la possibilité d'études temporelles de certains modèles homogénéisés de métamatériaux telles que celles réalisées par J. Li dans [58, 59, 60]. Ces dernières sont basées sur des relèvements par transformée de Laplace inverse des indices de permittivité et de perméabilité du métamatériau considéré. Cela a pour conséquence l'ajout d'équations différentielles sur les courants présents en tant que seconds membres dans les équations de Maxwell. Avec cette méthode, J. Li étudie les plasma *NIM* (Negative Index Material) [58] ou encore des métamatériaux de type Debye ou Lorentz [59, 60] tous constants en espace. Dans chacun de ces travaux, l'existence et l'unicité de solutions et la convergence du schéma Éléments Finis avec des éléments d'arêtes de Nédélec sont démontrés.

## Problématique de l'homogénéisation

Les métamatériaux en tant que milieux physiques, étant des milieux dont les caractéristiques physiques diffèrent de celles des matériaux classiques, n'existent pas à l'état naturel. Ils sont ainsi, pour la plupart, construits à partir d'assemblages de petits « patches » de milieux usuels qui se décrivent comme un matériau équivalent pour des longueurs d'ondes grandes devant l'espacement des petits composants. Les paramètres physiques des métamatériaux ne vivent donc qu'à une échelle macroscopique ou encore « homogénéisée ». Citons par exemple le réseau de SRR de Pendry [76] réalisé à partir d'un réseau périodique de tiges et d'anneaux fendus qui présente, pour certaines fréquences, des indices de permittivité et de perméabilité simultanément négatifs. D'autres exemples peuvent être trouvés dans la littérature [12, 13, 14, 34, 45, 90, 51, 76, 77, 82, 94]. Le calcul effectif des paramètres physiques du milieu équivalent fait principalement appel à des techniques d'homogénéisation.

Une première classe de méthodes d'homogénéisation concerne des assemblages périodiques de petits patches.

Citons, pour commencer, des méthodes [53, 97, 82, 91, 94] utilisées principalement en électromagnétisme qui déterminent le milieu équivalent en utilisant des moyennes sur chaque petite cellule du réseau entre les champs et les inductions. Cependant, bien qu'elles soient physiquement valables, ces homogénéisations par moyennes ne sont pas toujours mathématiquement justifiées.

Donnons maintenant la technique basée sur des développements par ondes de Bloch [12]. Son principe consiste à considérer un milieu infini pûrement périodique et à faire tendre la période vers zéro dans le développement en ondes de Bloch de la solution du problème étudié. Le métamatériau homogénéisé est alors obtenu en identifiant le problème vérifié par la limite de la solution.

Il y a, enfin, la convergence à double échelle [2, 71, 13, 14, 15, 45, 34]. Cette méthode semble, actuellement, être une des plus utilisées pour ces problèmes. C'est une notion de convergence faible qui permet de capturer les oscillations d'une structure périodique lorsque le pas du réseau tend vers zéro. Il est alors possible de justifier rigoureusement ce passage à la limite et d'obtenir un problème homogénéisé à partir duquel on peut déterminer les paramètres physiques du milieu équivalent. Son intérêt par rapport à l'homogénéisation par ondes de Bloch réside dans le fait que la convergence à double-échelle permet de considérer des réseaux périodiques finis.

Les méthodes de dérivation des paramètres du milieu équivalent présentées ci-dessus concernent des répartitions périodiques de petits objets. Les milieux homogénéisés obtenus à partir d'assemblages périodiques ont des paramètres physiques constants en la variable d'espace. Ainsi ils ne permettent pas de réaliser certaines applications telles qu'un dispositif d'invisibilité qui nécessite des matériaux fortement anisotropiques voir même singuliers et donc dépendant de la variable d'espace. C'est pourquoi nous présentons maintenant quelques résultats d'homogénéisation non-périodique.

Commençons par les travaux de G.W. Milton [68]. Ces derniers portent sur la réalisation de métamatériaux possédant des paramètres physiques prescrits. Il démontre que l'on peut créer, pour une pulsation fixée, un métamatériau possédant des tenseurs de permittivité et de perméabilité donnés par n'importe quelle matrice symétrique réelle constante en



la variable d'espace. Il postule, pour ce faire, l'existence de deux métamatériaux ayant des comportements particuliers pour la pulsation considérée. Le premier est supposé caractérisé par un tenseur de permittivité symétrique défini positif ainsi qu'un tenseur de perméabilité possédant exactement une valeur propre négative. Le second possède un tenseur de permittivité symétrique ayant une unique valeur propre négative ainsi qu'un tenseur de perméabilité symétrique défini positif. Il procède ensuite par stratification pour obtenir le milieu équivalent.

Mentionnons enfin les travaux d'A.G. Ramm [83, 84, 85]. Ces derniers portent sur la diffraction d'ondes acoustiques par un grand nombre de petits obstacles caractérisés par une condition aux limites d'impédance sous l'hypothèse que le nombre de « particules » tend vers l'infini lorsque leur taille caractéristique tend vers zéro. A partir d'une représentation intégrale particulière de la solution du problème de diffraction multiple et un passage à la limite, il donne l'indice de réfraction du matériau dans lequel tous les petits objets ont été implantés. Il montre aussi, sous certaines hypothèses physiquement raisonnables, que cette méthode d'« homogénéisation » permet de créer un milieu dont l'indice de réfraction est prescrit et dépendant de la variable d'espace. L'extension de cette méthode a été réalisée dans [86] où il est démontré qu'un milieu d'indice de réfraction (donné dans ce cas par la racine du produit des indices de permittivité et de perméabilité) matriciel et dépendant de la variable d'espace prescrit peut être réalisé. L'analyse se fait, tout comme pour le cas de l'équation de Helmholtz, avec l'aide d'une représentation intégrale du champ électrique solution d'un système de Maxwell écrit à l'ordre 2.

## Objectifs et plan du manuscript

Le premier objectif de cette thèse est d'étudier l'existence et l'unicité de solution pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, tels que des systèmes de Friedrichs (équations de Maxwell, système de l'acoustique ou encore de l'élasticité linéaire), en présence de métamatériaux obtenus par homogénéisation, inclus dans un milieu classique, dont les paramètres physiques dépendent de la fréquence comme des fractions rationnelles. Nous nous focaliserons en particulier, contrairement aux travaux mentionnés précédemment qui considèrent uniquement des milieux constants en fréquences, sur une approche globale en fréquence.

Cette approche est motivée par V.G. Veselago [92] qui, dans son étude théorique des milieux à indices de permittivité (notés  $\varepsilon$ ) et de perméabilité négatifs (notés  $\mu$ ), note dans un premier temps que l'énergie totale associée aux équations de Maxwell en présence de *LHM* est négative. Il en déduit alors, afin de respecter la causalité [54, 96], que les indices de permittivité et de perméabilité de ce type de milieux doivent nécessairement dépendre de la pulsation  $\omega$  (et donc aussi de la fréquence  $\mathbf{f} = \omega/(2\pi)$ ). Il conclut de plus son étude en présentant certaines formes possibles pour les  $\varepsilon$ ,  $\mu$  des « milieux main-gauche ». Ils peuvent ainsi être matriciels (par exemple dans des substances gyrotropiques), dépendre de  $\omega$  comme des fractions rationnelles et enfin ne peuvent être négatifs qu'au voisinage de certaines pulsations. Remarquons enfin que ce type de comportement se retrouve dans la grande majorité des réalisations pratiques par assemblages de petits composants ou des obtentions théoriques par homogénéisation de métamatériaux issues de la littérature [12, 13, 14, 34, 45, 90, 51, 76, 77, 82, 94].

Nous essaierons ainsi d'imposer des hypothèses sur le métamatériau qui sont au maximum

proches des observations de V.G. Veselago, elles-mêmes en accord avec des exemples de métamatériaux homogénéisés décrits dans la littérature. L'outil principal utilisé dans les démonstrations de nos résultats est la théorie de Fredholm analytique [52]. En effet, la dépendance en la fréquence des paramètres physiques permet en fait de les considérer comme des fonctions holomorphes de la variable de Laplace  $p = i\omega + \eta$  sur un ouvert du plan complexe.

Le second objectif de ce mémoire concerne la simulation numérique de la propagation d'ondes en présence de métamatériaux obtenus par homogénéisation dépendant de la fréquence et vérifiant les hypothèses assurant le caractère bien posé des problèmes associés. Notons tout d'abord que la convergence des schémas numériques classiques (Éléments Finis, Galerkin Discontinu,...) est principalement assurée par la positivité des paramètres physiques et non par le caractère bien posé du problème continu. Nous allons ainsi nous intéresser à la validité des éléments finis et/ou du galerkin discontinu en présence de métamatériaux sans savoir s'ils sont convergents en présence de tels milieux exotiques. Le but suivant sera alors de proposer un schéma numérique adapté au métamatériaux pour lequel la convergence est assurée dès lors que le système que l'on cherche à approximer est bien posé. Nous utiliserons à cet effet des idées issues de [4] pour l'approximation numérique, par un schéma de type éléments finis, de systèmes du premier ordre de type systèmes de Friedrichs.

Le troisième et dernier but de ce mémoire est en lien avec l'homogénéisation et plus précisément la manière de réaliser les métamatériaux. Comme annoncé précédemment, remarquons tout d'abord qu'une des applications phares envisagée pour ces milieux exotiques est la cape d'invisibilité. Cette dernière fait appel à des matériaux dont les paramètres physiques dépendent de la variable d'espace de manière fortement anisotrope et ainsi ne peuvent pas être obtenus par les techniques usuelles d'homogénéisations périodiques. En effet, à cause de la périodicité des petits composants, elles engendrent des milieux indépendants de la variable d'espace. De tels milieux doivent ainsi, *a priori*, être réalisés via des méthodes d'homogénéisation non-périodique telles que la méthode d'A.G. Ramm qui permet de créer des métamatériaux acoustiques possédant un indice de réfraction prescrit dépendant de la variable d'espace. Cependant, les méthodes utilisées par A.G. Ramm ne permettent pas de prendre en compte les phénomènes de couches limites [26] au voisinage des petits objets constituant le milieu homogénéisé. Cette dernière est de plus restreinte au cas de petits obstacles caractérisés par des conditions aux limites d'impédances particulières. Enfin notons que l'extension de la méthode de Ramm à l'électromagnétisme semble délicate [86]. En effet, pour les équations de Maxwell, elle permet d'obtenir un matériau dont l'indice de réfraction est arbitraire et peut être matriciel. Par contre elle ne permet pas d'obtenir un milieu dont les indices de permittivité et de perméabilité sont prescrits. Cela semble être principalement dû au fait que l'analyse est réalisée à l'aide d'une représentation intégrale du champ électrique solution d'un système de Maxwell écrit à l'ordre 2.

Ainsi, le dernier objectif de cette thèse est en lien avec une méthode d'homogénéisation de métamatériaux possédant un effet exotique voulu. Nous étudierons à cet effet le problème de diffraction intervenant dans la méthode de Ramm sans utiliser de représentation intégrale de la solution. Une méthode différente permettant de considérer des petits obstacles caractérisés par une condition aux limites d'impédance ou encore par un indice de réfraction plus généraux sera ainsi employée et l'apparition de couches limites, qui sont à

l'origine de problèmes de perturbations singulières [26], sera donc prise en considération. C'est dans cette optique que la méthode des développements asymptotiques raccordés [26, 5, 32, 50, 64] est utilisée. Elle permet en effet de décrire de manière commode à la fois le champ interne à chaque couche limite entourant les petits objets et le champ diffracté par l'ensemble de tous les petits obstacles.

## Plan du manuscrit

On présente maintenant le plan du manuscrit qui se divise en cinq chapitres.

**Chapitre 1 :** Nous commencerons ce mémoire en présentant les métamatériaux à travers quelques unes de leurs applications et des exemples d'homogénéisations décrits dans la littérature. Nous rappellerons ensuite des résultats concernant le caractère bien posé de certains systèmes d'ordre 1 que sont les systèmes de Friedrichs. Ces derniers seront utiles pour la suite et permettent d'étudier à la fois les équations de Maxwell et les systèmes de l'acoustique et de l'élasticité linéaire en présence de milieux classiques. Les difficultés liées à l'étude du caractère bien posé et à l'approximation numérique de problèmes d'ordre 2 modélisant la propagation d'ondes dans les métamatériaux sont ensuite présentées à travers la méthode de la T-coercivité et les travaux de P. Fernandez et *al.* Un exemple de métamatériau homogénéisé obtenu à l'aide de la convergence à double échelle sera alors donné. Pour finir, on présentera la méthode d'A.G. Ramm concernant l'homogénéisation non-périodique de métamatériaux pour l'acoustique.

**Chapitre 2 :** Le second chapitre traitera de l'existence et de l'unicité des équations de Maxwell, du système de l'acoustique et de celui de l'élasticité linéaire en présence de métamatériaux obtenus par homogénéisation vérifiant des hypothèses issues des remarques de V.G. Veselago. Nous commencerons par donner un cadre mathématique général permettant de décrire le schéma global des démonstrations des résultats du chapitre. Ce schéma sera ensuite appliqué au cas de l'électromagnétisme en considérant les équations de Maxwell. Cela permettra de démontrer un premier résultat d'existence et d'unicité pour ce système en présence de métamatériaux bi-anisotropiques ou chiraux scalaires. Un résultat pour des milieux dont les paramètres physiques sont tensoriels, qui vérifient une hypothèse supplémentaire, sera ensuite établi. La même méthodologie sera appliquée aux systèmes de l'acoustique et de l'élasticité linéaire en présence de métamatériaux homogénéisés et nous donnerons ainsi des résultats d'existence et d'unicité pour chacun d'eux. Nous terminerons enfin ce chapitre par l'application de nos résultats sur des exemples de métamatériaux obtenus par homogénéisation issus de la littérature.

**Chapitre 3 :** Le troisième chapitre concernera la simulation numérique de problèmes modélisant la propagation d'ondes en présence de métamatériaux. On considérera tout d'abord des cas tests pour lesquels une solution exacte est connue et nous donnerons des exemples de métamatériaux théoriques dont la solution numérique obtenue avec le schéma éléments finis pour l'équation de Helmholtz (système de l'acoustique écrit à l'ordre 2) semble diverger de la solution explicite. Ces exemples permettront de mettre en avant la difficulté de validation des résultats de simulation numérique par éléments finis pour certains métamatériaux. Cela motivera l'introduction d'un schéma de type élément finis

---

particulier, dû à A.K. Aziz et S. Leventhal [4] et appelé par la suite schéma EF-AL. Ce schéma permet d'approximer des systèmes de Friedrichs en présence de métamatériaux appartenant au cadre introduit au chapitre 2. Nous montrerons, sous ces hypothèses, sa convergence. Des validations numériques sur le système de l'acoustique pour les mêmes cas tests que ceux réalisés pour l'étude des éléments finis seront présentées. Enfin, à défaut de démonstration de convergence, nous ferons une étude numérique du schéma galerkin discontinu pour l'approximation du système de l'acoustique en présence des exemples de métamatériaux précédents afin de se faire une idée concernant sa validité.

**Chapitre 4 :** Le quatrième chapitre sera dédié à l'analyse asymptotique d'un problème de diffraction d'une onde plane par un nombre fini de petites boules en vue de reprendre, avec une méthode différente prenant en compte l'apparition de couches limites au voisinage des obstacles, les travaux d'A.G. Ramm. Nous commencerons par supposer que les petits obstacles sont caractérisés par une condition aux limites d'impédance telle que celle intervenant dans la méthode de Ramm bien que des impédances plus générales pourront être considérées. Ce choix permettra par la suite de comparer nos résultats avec ceux de Ramm. Un résultat d'existence, d'unicité et de stabilité uniforme (en la taille caractéristique des petits obstacles) pour le problème de diffraction multiple modélisé par une équation de Helmholtz sera tout d'abord démontré. En suivant alors la méthode des développements asymptotiques raccordés, nous donnerons les formes générales des champs externe et internes aux couches limites entourant chaque petit objet. L'existence et l'unicité du développement asymptotique à tout ordre sera ensuite prouvée. Des estimations d'erreurs entre la solution du problème de diffraction et son approximation seront alors établies. Cela permettra de valider l'approche formelle des développements asymptotiques raccordés. Enfin, le chapitre conclura par l'adaptation de la méthode au cas de petits obstacles caractérisés par des indices de réfractions. La même méthodologie sera alors utilisée et des résultats similaires seront démontrés.

**Chapitre 5 :** Le dernier chapitre de cette thèse sera consacré à l'application des résultats du chapitre 4 à une méthode d'homogénéisation non-périodique, formelle, de métamatériaux acoustiques possédant des indices de réfractions prescrits dépendants de la variable d'espace. Nous commencerons par déterminer, de manière explicite, les quatre premiers termes du développement asymptotique raccordé de la solution du problème de diffraction par un nombre fini de petits obstacles caractérisés par une condition aux limites d'impédance et un indice de réfractions spécifique. L'approximation de Born d'un problème de diffraction par un obstacle caractérisé par un indice de réfraction sera rappelée. Ensuite nous ferons tendre le nombre de petits obstacles vers l'infini en supposant, comme dans la méthode de Ramm, que leur taille caractéristique tend vers zéro et que leur répartition asymptotique est fixée par une certaine fonction, dans l'approximation externe du champ diffracté calculée par développements asymptotiques raccordés. L'indice de réfraction homogénéisé sera alors dérivé en comparant l'approximation obtenue après passage formel à la limite avec une approximation de Born d'un problème de diffraction bien choisi. On montrera, pour des répartitions particulières, que des métamatériaux acoustiques, non-constants en la variable d'espace, peuvent être réalisés avec cette méthode d'homogénéisation non-périodique formelle.

---



---

# Présentation générale du contexte et de la problématique

---

L'objectif de cette thèse est l'étude de la propagation d'ondes dans les métamatériaux obtenus par homogénéisation. Nous commençons donc ce chapitre par présenter les métamatériaux vus comme milieux équivalents et quelques unes de leurs applications parmi les plus importantes. On donne ensuite des exemples, issus de la littérature, de réalisations de ces milieux exotiques pour l'électromagnétisme, l'acoustique et l'élasticité.

Nous présentons ensuite les résultats principaux concernant les systèmes de Friedrichs stationnaires, en présence de milieux classiques, qui permettent de traiter dans un même cadre les systèmes d'équations modélisant la propagation d'ondes dans un milieu général. Nous particularisons ensuite ces résultats aux cas de l'électromagnétisme, de l'acoustique et de l'élasticité linéaire.

La présence de métamatériaux dans les problèmes de propagation d'ondes entraîne une perte de coercivité des coefficients intervenant dans ces derniers. Ainsi, l'étude du caractère bien posé et de l'approximation numérique de ces problèmes est difficile du fait que les méthodes usuelles ne sont plus applicables. La troisième partie de ce chapitre introduit alors certains des travaux précédemment réalisés afin de remédier à cette perte de coercivité. On présente à cet effet la méthode de la  $\mathbb{T}$ -coercivité [9, 7, 10] et les travaux de P. Fernandez et M. Raffetto [37, 38].

La dernière partie de ce chapitre présente les principales méthodes d'homogénéisation utilisées pour réaliser des métamatériaux. Nous donnons à cet effet la méthode d'homogénéisation périodique basée sur la convergence double-échelle puis la méthode de Ramm qui est une méthode d'homogénéisation non-périodique permettant de fabriquer des métamatériaux acoustiques dont les caractéristiques physiques dépendent de la variable d'espace.

Nous utilisons, dans toute la suite, les notations standards concernant les espaces

---

de Lebesgue  $L^p$ , de Sobolev  $H^s$ , de distributions  $\mathcal{D}'$ , de fonctions  $k$  fois différentiables (respectivement à support compact)  $\mathcal{C}^k$  (respectivement  $\mathcal{C}_c^k$ ) et enfin les fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact  $\mathcal{D}$ . Enfin, nous notons  $\mathcal{F}(\cdot, \cdot)$  un espace de fonctions ou de distributions avec les conventions suivantes :  $\mathcal{F}$  est l'une des classes fonctionnelles précédentes, le premier argument désignera le domaine sur lequel sont définis les éléments de la classe considérée, le second argument désigne un espace de dimension finie lorsque les éléments de la classe fonctionnelle sont à valeurs vectorielles. Ce dernier est omis lorsque les éléments sont à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

## 1.1 Les métamatériaux

Les métamatériaux sont des milieux artificiels donnant lieu à des comportements exotiques par comparaison avec les matériaux usuels [97]. Ils ont par exemple des paramètres physiques (selon le cas : indice de permittivité, de perméabilité, de réfraction, module de masse, coefficients de Lamé, . . .) de partie réelle négative ou encore des paramètres fortement variables voir même singuliers en espace. Cependant, de tels milieux n'existant pas à l'état naturel, ils sont en général formés à partir d'assemblages périodiques de petits « patches » composés de matériaux usuels [12, 13, 14, 34, 45, 90, 51, 76, 77, 82, 94]. Le métamatériau ainsi formé peut être vu comme un matériau homogène lorsque le pas du réseau est à la fois grand devant la taille caractéristique des ses petits constituants et petit devant la longueur d'onde. Dans ces conditions, les paramètres du milieu équivalent sont alors obtenus via des méthodes d'homogénéisation et peuvent vérifier les propriétés précédemment présentées. De ce fait, les caractéristiques physiques d'un métamatériau sont fictives au sens où elles ne sont valables qu'à une échelle macroscopique (ou encore homogénéisée).

Nous donnons ici quelques applications des métamatériaux et des réalisations, issues de la littérature, de ces milieux exotiques en électromagnétisme, acoustique et élasticité linéaire.

### 1.1.1 Quelques applications envisagées pour les métamatériaux

Du fait de leurs paramètres physiques différent de ceux des milieux usuels, les applications envisagées pour les métamatériaux sont nombreuses [97]. Nous allons en détailler deux parmi les principales : la super-lentille et le dispositif d'invisibilité (appelé aussi « cloaking »).

#### Application à l'imagerie : la « super-lentille »

L'idée d'utiliser des milieux à indices négatifs pour créer des dispositifs possédant des propriétés de réfraction inhabituelles a été dégagée pour la première fois par V.G. Veselago en 1968 dans [92]. Il considère pour cela un milieu électromagnétique dont les indices de permittivité (noté  $\varepsilon$ ) et de perméabilité (noté  $\mu$ ) relatifs sont tous les deux négatifs qu'il

plongé dans du vide caractérisé par  $\varepsilon_{\text{vide}} = \mu_{\text{vide}} = 1$ . Ensuite, en utilisant les lois de Snell-Descartes qui décrivent le comportement d'un rayon lumineux à l'interface entre deux milieux, il montre que l'indice de réfraction  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  d'un tel matériau est négatif. Il en déduit de plus que lors du passage d'un milieu à indice positif vers un autre à indice négatif (et inversement), les rayons incidents et réfractés se retrouvent du même côté que la normale au plan d'incidence. Ce phénomène est appelé *réfraction négative*. La comparaison avec les milieux classiques est donnée par la figure 1.1.

Il peut sembler surprenant qu'un milieu d'indice négatif soit obtenu à partir d'un matériau possédant des indices de permittivité et de perméabilité simultanément négatifs. Cela est, en fait, dû à un choix de détermination de la racine carrée basé sur des considérations physiques [79].

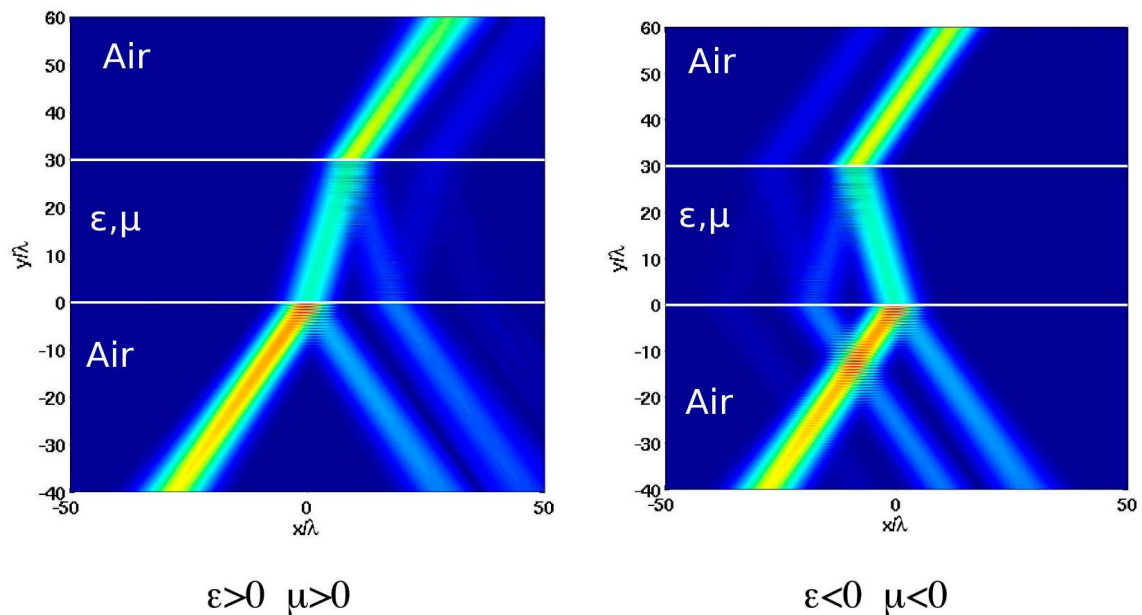


FIG. 1.1: Rayon lumineux traversant un milieu à indices négatifs [16]

L'application de la réfraction négative à l'imagerie est motivée par le dépassement de la limite maximale de résolution d'une lentille usuelle, appelée limite de Rayleigh. Cette dernière affirme qu'une lentille conventionnelle ne peut pas voir des objets deux fois plus petits que la longueur d'onde de la lumière utilisée pour les illuminer. Cette limite de résolution est en fait due à la présence d'ondes évanescentes qui décroissent exponentiellement vite dans la lentille et qui ne peuvent donc pas être utilisées pour former l'image. Au début des années 2000 J.B. Pendry approfondit les travaux de Veselago [79] en étudiant les coefficients de transmission et de réflexion d'une lame à faces parallèles constituée d'un milieu d'indice de réfraction  $n = -1$  plongée dans du vide. Il démontre qu'un tel matériau focalise la partie évanescente des ondes qui ne sont donc plus atténuées par le processus de transmission et contribuent ainsi à la formation d'une image parfaite. Cela justifie le terme « super-lentille ». Le principe de la super-lentille est décrit dans la figure 1.2 issue de [78] où on peut voir que les rayons lumineux ainsi que les ondes évanescentes sont focalisées sur le même point image donnant, de ce fait, une image dont



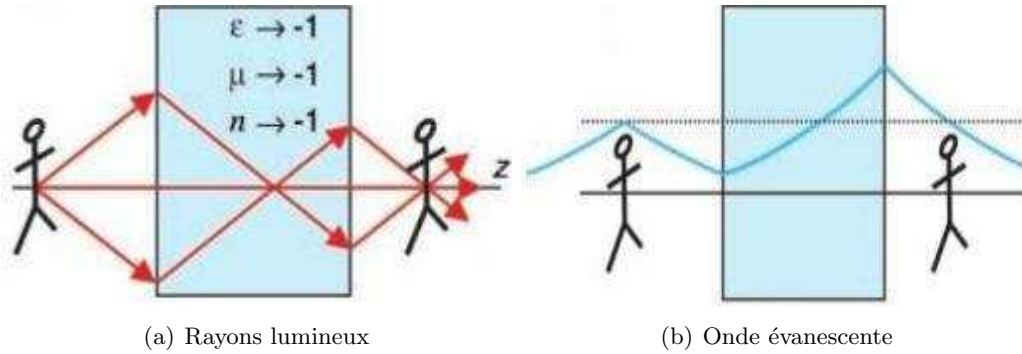


FIG. 1.2: Principe d'une super-lentille [78]

la résolution est maximale.

En pratique la résolution accessible par un dispositif de super-lentille réalisé à partir d'un milieu à indice négatif est finie. Cela est principalement dû à la présence de pertes (parties imaginaires) sur les indices dans les métamatériaux. En outre, il a été démontré dans [66] qu'un milieu possédant un indice de réfraction égal à  $-1$  ne peut pas exister et ainsi une super-lentille au sens de Pendry ne peut être fabriquée. Il existe toutefois des réalisations expérimentales de dispositifs de super lentilles « approchées » qui permettent de dépasser, pour certaines longueurs d'ondes, la limite de résolution classique. Citons par exemple [40] où la limite de Rayleigh a été dépassée dans la gamme de fréquences des micro-ondes ou encore [36] où elle a été franchie pour des fréquences optiques (la fréquence est liée à la pulsation par  $\omega = 2\pi f$  qui est liée à la longueur d'onde par la formule  $\lambda = cf$ , où  $c$  désigne la célérité de l'onde). Enfin, citons [35] où une super-lentille a été réalisée à partir de cristaux photoniques. Cette dernière permet d'outrepasser la limite de Rayleigh pour des objets dits sous-longueur d'onde (appelés aussi sub- $\lambda$ , ce sont des objets de dimension caractéristique de l'ordre de  $\lambda/10$ ).

### La cape d'invisibilité et le « cloaking »

Une autre application envisagée pour les métamatériaux est la cape d'invisibilité (ce phénomène et aussi appelé « cloaking ») et a été proposée pour la première fois dans [80]. Cette dernière utilise des milieux avec des paramètres physiques fortement hétérogènes voire même singuliers en la variable d'espace et impose aux ondes de contourner toute une partie de l'espace (voir figure 1.3). Ainsi, un objet inclus dans la partie de l'espace déviant les ondes devient invisible aux ondes considérées pour tout observateur extérieur. Pour les ondes électromagnétiques, l'obtention théorique d'un tel milieu est basée sur l'invariance des équations de Maxwell par transformations d'espaces (appelées aussi transformations optiques). Plus précisément, si l'on fait un changement de variables sur les champs intervenant dans les équations de Maxwell, les nouveaux champs vérifieront le même type d'équations mais avec des indices de permittivité et de perméabilité différents. Le même comportement est aussi vrai pour le système de l'acoustique.

Supposons maintenant que l'on souhaite « cacher » un objet positionné dans  $\mathcal{B}(0, 1)$  (voir figure 1.4), où  $\mathcal{B}(0, r)$  désigne la boule de centre 0 et de rayon  $r > 0$ . Afin d'obtenir les

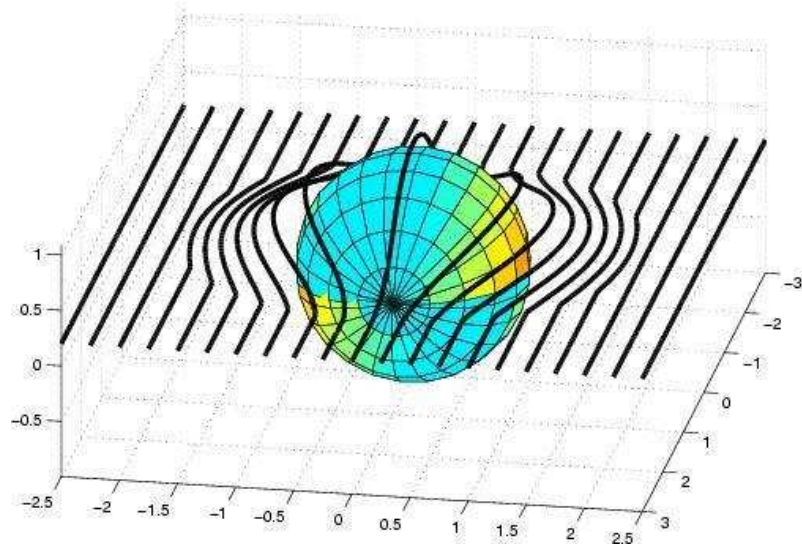


FIG. 1.3: Cape d'invisibilité parfaite [43]

paramètres du milieu réalisant la cape d'invisibilité, on utilise un changement de variable étirant l'origine  $0 \in \mathbb{R}^3$  pour transformer  $\mathcal{B}(0, 2) \setminus \{0\}$  en  $\mathcal{B}(0, 2) \setminus \mathcal{B}(0, 1)$ . Les paramètres du nouveau milieu présent dans l'anneau (la cape d'invisibilité) sont alors déterminés à partir du jacobien du changement de variables qui est singulier en espace. Cette construction est détaillée dans [89, 22, 27, 46, 41] et la proposition de réaliser une cape d'invisibilité approchée avec des matériaux dont les paramètres sont non-singuliers a été faite dans [42].

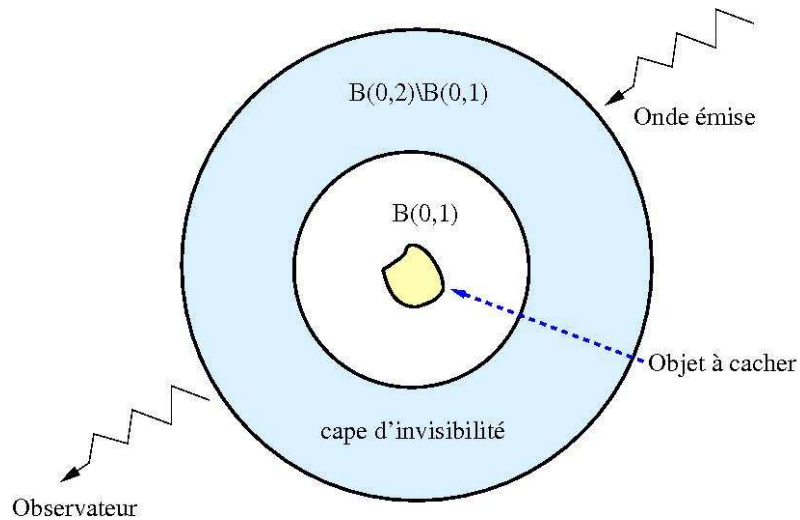
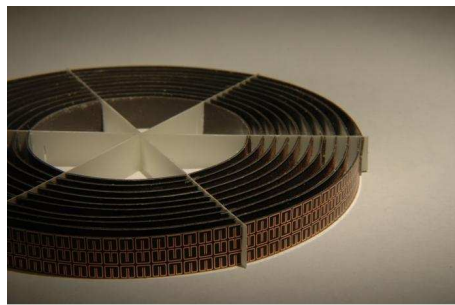


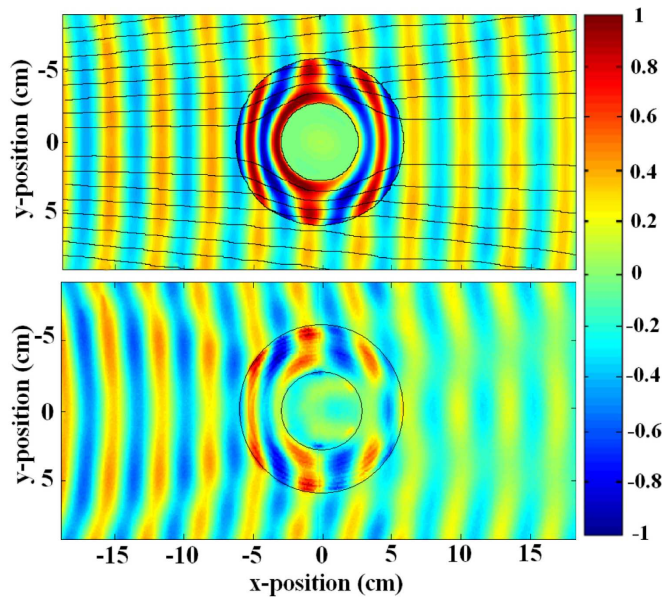
FIG. 1.4:

Cependant, la fabrication d'une cape d'invisibilité parfaite est difficile du fait de la forte anisotropie et des singularités des paramètres physiques des matériaux qui devraient

la composer. Des réalisations expérimentales ont été néanmoins produites dans [89] où une cape d'invisibilité en 2D pour les micro-ondes à base de métamatériaux a été réalisée. Le dispositif et les résultats expérimentaux obtenus sont représentés dans la figure 1.5. Cette dernière décrit le résultat obtenu en envoyant une onde plane sur la cape d'invisibilité parfaite (figure du haut) puis sur le dispositif expérimental. Ce sont de plus les isolignes du champ qui sont représentées. On peut remarquer que les d'ondes à droite de la cape expérimentale sont presque semblables à celles issues de la cape idéale. Ainsi un observateur ne distingue que faiblement la présence de la cape et de la même manière, l'objet qui y est inclus.



(a) Dispositif expérimental d'une cape d'invisibilité



(b) Performances d'une cape d'invisibilité parfaite (en haut) versus la cape expérimentale (en bas)

FIG. 1.5: Dispositif expérimental et performance d'une cape d'invisibilité pour les micro-ondes en 2D [89]

### 1.1.2 Quelques exemples de métamatériaux décrits dans la littérature

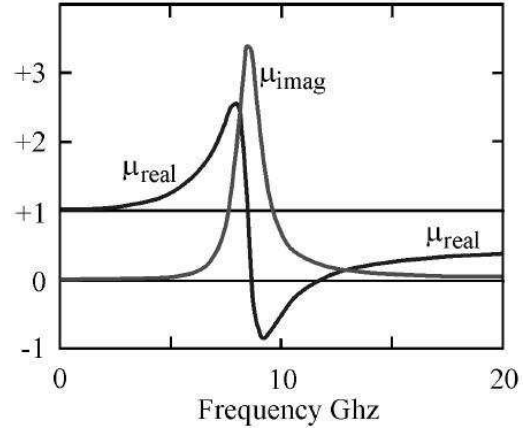
Cette section présente des exemples de réalisations de métamatériaux issus de la littérature ainsi que leurs paramètres homogénéisés. On présente ainsi des métamatériaux obtenus par homogénéisation pour l'électromagnétisme, l'acoustique et l'élasticité linéaire. D'autres exemples peuvent de plus être trouvés dans [12, 13, 14, 16, 31].

#### Métamatériau pour les micro-ondes : un réseau périodique de « Split-Ring-Resonators »

Un des premiers exemples de métamatériaux homogénéisés découvert est le réseau périodique d'anneaux fendus et de tiges introduit en 2000 par D.R. Smith dans [90]. Cette réalisation est basée sur des travaux de J.B. Pendry [77, 76] et le dispositif est représenté dans la figure 1.6. Il est appelé « Split-Ring-Resonator » (noté SRR).



(a) Réseau périodique de SRR et de tiges



(b) Perméabilité homogénéisée [75]

FIG. 1.6: Métamatériau créé à partir d'un réseau périodique de Split-Ring-Resonators et de tiges métalliques [90]

La diffraction des ondes électromagnétiques en présence de ce matériau est décrite, dans [90], par les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} p\varepsilon(p, x)e(p, x) - \nabla \times h(p, x) = -j(x), & \text{dans } \Omega, \\ p\mu(p, x)h(p, x) + \nabla \times e(p, x) = -m(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

où, pour  $\Psi \in \mathcal{D}'(\Omega)^3$ ,  $\nabla \times$  est l'opérateur rotationnel :

$$\nabla \times \Psi = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix}.$$

Dans l'équation (1.1)  $e$  désigne le champ électrique,  $h$  le champ magnétique,  $\varepsilon$  est la permittivité du matériau,  $\mu$  sa perméabilité,  $j$  et  $m$  sont respectivement les courants

électriques et magnétiques et  $p = i\omega + \eta$  est la variable de Laplace où  $\omega$  est la pulsation. Finalement  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  contenant le réseau périodique. Les paramètres du milieu homogène équivalent sont calculés dans [90] par :

$$\begin{cases} \varepsilon(p, x) = \left(1 + \frac{\omega_G^2}{p^2}\right), \\ \mu(p, x) = \left(1 + \frac{Fp^2}{-p^2 - \omega_0^2 + p\Gamma}\right), \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $\omega_G > 0$  est la pulsation plasma de l'or et  $\omega_0$ ,  $\Gamma$  et  $F$  sont des constantes positives dépendantes de la géométrie du réseau et des caractéristiques physiques de ses petites inclusions. On peut voir, à partir de la figure 1.6 b) et de la formule (1.2), que le caractère exotique du métamatériau intervient sur une plage de fréquences localisée autour d'un pôle de  $\mu$  au voisinage de 10Ghz. En effet, au voisinage de cette fréquence, les parties réelles de  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont simultanément négatives [90].

## Métamatériau chiral pour l'infrarouge

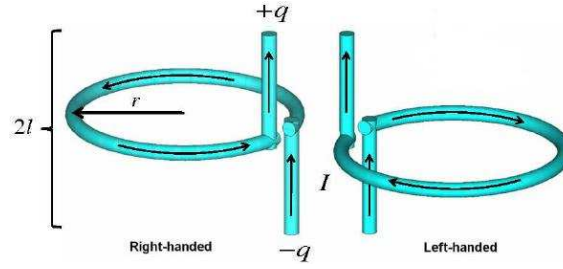
En 2010, R. Zhao et *al.* [94] ont construit un métamatériau valable pour des fréquences appartenant au domaine de l'infrarouge. Ce dernier est réalisé à partir d'un modèle de type «  $\Omega$ -particle resonator » et la géométrie des petites inclusions est représentée par la figure 1.7. Les phénomènes électromagnétiques liés à un milieu chiral sont modélisés par les équations de Maxwell-Drude-Born-Fedorov :

$$\begin{cases} p\varepsilon(p, x)e(p, x) + p\beta(p, x)\varepsilon(p, x)\nabla \times e(p, x) \\ \quad - \nabla \times h(p, x) = -j(x), \text{ dans } \Omega, \\ p\mu(p, x)h(p, x) + p\beta(p, x)\mu(p, x)\nabla \times h(p, x) \\ \quad + \nabla \times e(p, x) = -m(x), \text{ dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

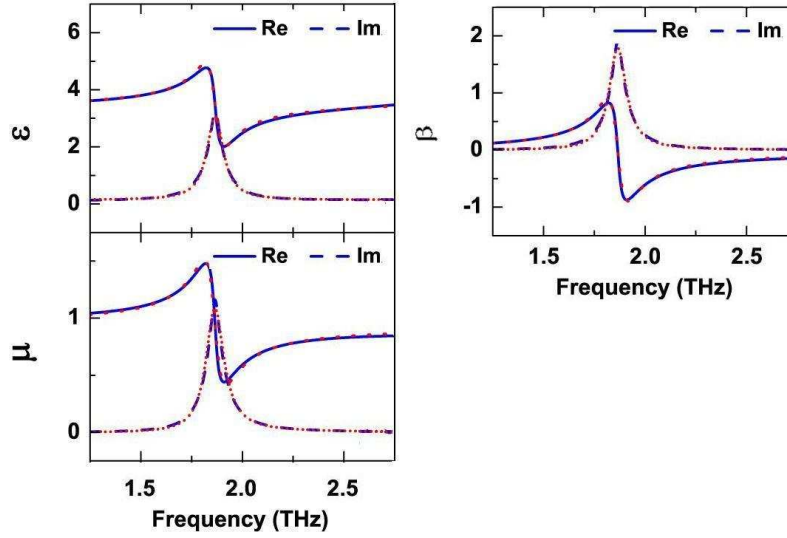
où  $\beta$  est la chiralité du matériau inclus dans  $\Omega$ . Les paramètres du milieu homogénéisé réalisé dans [94] sont alors obtenus en supposant que le réseau est contenu dans un milieu hôte caractérisé par des indices de permittivités et de perméabilités  $\varepsilon_b$ ,  $\mu_b$  tous deux réels et positifs. Les paramètres du milieu homogénéisé obtenus dans [94] sont les suivants :

$$\begin{cases} \varepsilon(p, x) = \varepsilon_b + \frac{\Omega_\varepsilon \omega_0^2}{\omega_0^2 + p^2 - p\gamma}, \\ \mu(p, x) = \mu_b - \frac{\Omega_\mu p^2}{\omega_0^2 + p^2 - p\gamma}, \\ \beta(p, x) = \frac{\Omega_\beta p}{i(\omega_0^2 + p^2 - p\gamma)}, \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $\omega_0$ ,  $\gamma$  et  $\Omega_{\varepsilon, \mu, \beta}$  sont des constantes strictement positives définies à partir de la géométrie des inclusions composant le réseau. À partir de la figure 1.7 et des formules 1.4, on peut voir que le comportement exotique du milieu réalisé dans [94] est localisé en fréquence. En effet, les parties réelles des indices de permittivité, de perméabilité et de chiralité deviennent négatives au voisinage de 1.75Thz. Cette fréquence est de plus proche d'un pôle commun à ces trois indices.



(a) Géométrie des petits « patches »



(b) Courbes des indices homogénéisés

FIG. 1.7: Résonateurs de type  $\Omega$ -particle et paramètres homogénéisés [94]

## Métamatériau bi-anisotrope pour l'optique

C.E. Kriegler et *al.* ont construit dans [53] en 2010 un métamatériau bi-anisotrope valable pour des fréquences appartenant au domaine du visible. Le comportement physique d'un tel milieu est modélisé par les équations de Maxwell suivantes :

$$\begin{cases} p\varepsilon(p, x)e(p, x) + p\xi(p, x)h(p, x) - \nabla \times h(p, x) = -j(x), & \text{dans } \Omega, \\ p\mu(p, x)h(p, x) + p\zeta(p, x)e(p, x) + \nabla \times e(p, x) = -m(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.5)$$

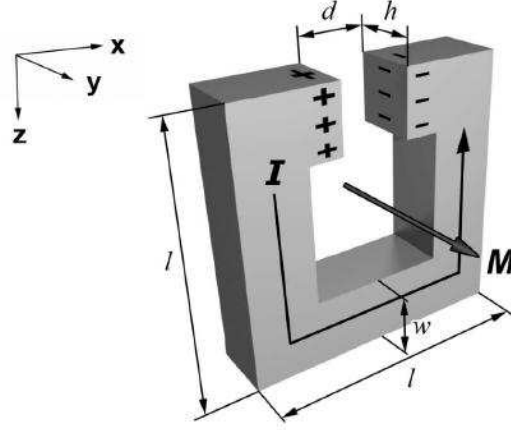
où  $\xi$  et  $\zeta$  sont appelées constantes de couplage et, pour le milieu homogénéisé issu de [53], sont données ci-dessous :

$$\begin{cases} \varepsilon(p) = 1 + \left(\frac{dc_0}{l^2}\right)^2 \frac{F}{\omega_{LC}^2 + p^2 - p\gamma}, \\ \mu(p, \cdot) = 1 - \frac{Fp^2}{\omega_{LC}^2 + p^2 - p\gamma}, \\ \xi(p) = i \frac{dc_0}{l^2} \frac{Fp}{\omega_{LC}^2 + p^2 - p\gamma}, \\ \zeta(p, \cdot) = -i \frac{dc_0}{l^2} \frac{Fp}{\omega_{LC}^2 + p^2 - p\gamma}. \end{cases} \quad (1.6)$$

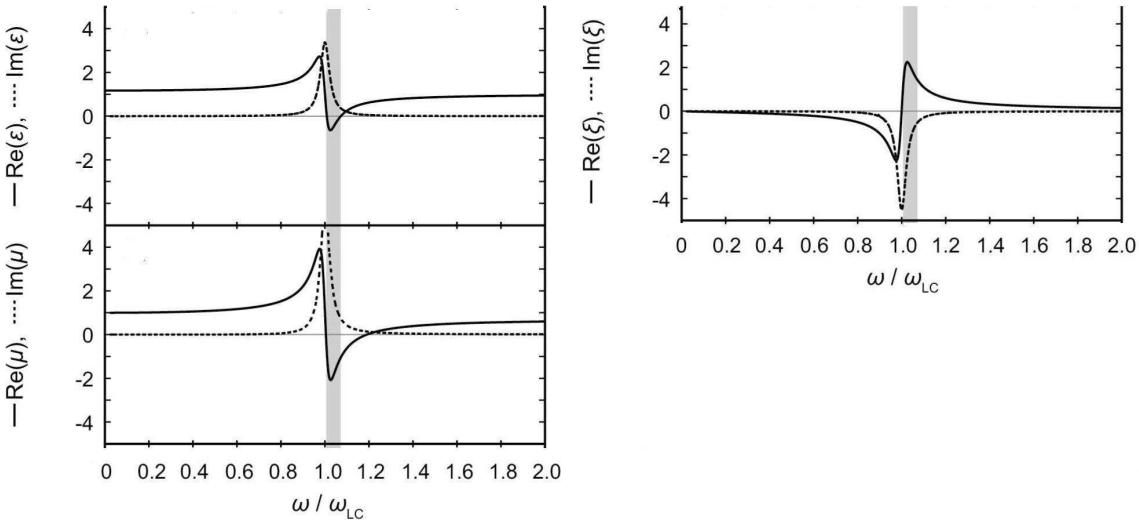
où  $l$  et  $d$  sont des constantes positives définies à partir des paramètres du réseau,  $c_0$  est la célérité de la lumière dans le vide,  $F$  est le taux de remplissage des SRR dans le milieu



ambiant,  $\gamma > 0$  est l'amortissement et enfin  $\omega_{LC} > 0$  est la pulsation de résonance d'un circuit  $LC$ . La géométrie de l'inclusion est représentée dans la figure 1.8. Aux vues de la



(a) SRR bi-anisotropique



(b) Courbes des indices homogénéisés

FIG. 1.8: Split-Ring-Resonator bi-anisotropique et paramètres homogénéisés [53]

figure 1.8 et des formules (1.6), on peut remarquer que les parties réelles des indices  $\varepsilon$ ,  $\mu$  et  $\xi$  du métamatériau bi-anisotropique deviennent négatives autour  $\omega = \omega_{LC}$  (soit autour de la fréquence  $f = \omega_{LC}/2\pi$ ). Ainsi, une fois de plus, le comportement exotique du métamatériau est localisé en fréquence au voisinage d'un pôle de ses paramètres physiques.

## Un métamatériau acoustique

Certains métamatériaux ont aussi été étudiés pour les ondes acoustiques dans le but de couvrir des applications telles que la super-lentille acoustique [44] ou encore le « cloaking » [46, 22, 27]. On présente ici le métamatériau acoustique obtenu dans [57]. Ce der-

nier est construit à partir d'un réseau périodique de petits tubes cylindriques troués (voir figure 1.9). Les équations modélisant ce milieu sont données à partir du système de l'acous-

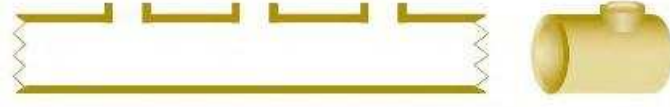


FIG. 1.9: Métamatériau acoustique créé à partir d'un réseau périodique tubes troués [57]

tique :

$$\begin{cases} p\Gamma(p, x)u(p, x) - \nabla\rho(p, x) = f_1(x), & \text{dans } \Omega, \\ pn(p, x)\rho(p, x) - \operatorname{div}(u(p, x)) = f_2(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.7)$$

où, pour  $\Psi \in \mathcal{D}'(\Omega)^3$  l'opérateur  $\operatorname{div}$  est la divergence définie par  $\operatorname{div}\Psi = \sum_{j=1}^3 \partial_j \Psi_j$ ,  $u$  désigne un champ de vitesse,  $\rho$  un champ de pression,  $\Gamma$  est le module de masse du matériau,  $n$  son indice de réfraction et  $f = (f_1, f_2)$  est un terme source. Les paramètres homogénéisés calculés dans [57] sont donnés ci-dessous :

$$\Gamma(p, x) = \vartheta, \quad n(p, x) = B^{-1} \left( 1 - \frac{\omega_{sh}^2}{\gamma p - p^2} \right), \quad (1.8)$$

où  $\gamma$  est le terme de d'amortissement,  $\vartheta = 1.21 \text{ kg/m}^3$ ,  $B = 1.42 \times 10^5 \text{ Pa}$  est le module de masse de l'air et  $\omega_{sh} > 0$  est une constante physique définie dans [57]. A partir des formules (1.8), on peut remarquer que l'indice de réfraction  $n$  est de partie réelle négative pour toutes pulsations inférieure à  $\omega_{sh}$ . De ce fait, le comportement négatif du milieu décrit par les paramètres physiques (1.8) est, une fois encore, localisé autour de certaines fréquences.

## Un métamatériau élastique

Les métamatériaux élastiques [31, 95] possèdent, par exemple, des densités et/ou des modules de masses négatifs. Ces derniers permettent de plus d'envisager de nouvelles applications [63] telles que des guides pour les ondes élastiques, des filtres mécaniques, des isolateurs de vibrations ou encore du « cloaking » pour les ondes sismiques [47].

Nous présentons maintenant le milieu obtenu dans [95]. Les équations modélisant la propagation d'ondes élastiques dans un milieu sont données ci-dessous [25] :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mu(p, x)\nabla u_j(p, x)) + \partial_j(\lambda(p, x) + \mu(p, x))\operatorname{div}(u(p, x)) \\ -p^2 u_j(p, x) = f(x), & \text{dans } \Omega, \text{ pour } j = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (1.9)$$

où  $u$  désigne le déplacement du solide,  $\lambda, \mu$  sont les coefficients de Lamé du matériau,  $f$  est un terme source donné par une force exercée sur le solide.

Le métamatériau réalisé dans [95] est représenté dans la figure 1.10. Il consiste en un milieu composite constitué de trois sphères de rayon  $r_j$  incluses dans un milieu hôte sphérique de rayon  $r_3 = r_2/\phi^{1/3}$ , où  $\phi$  désigne le taux de remplissage des sphères dans le composite. Chacune des trois régions est supposée être un matériau élastique caractérisé



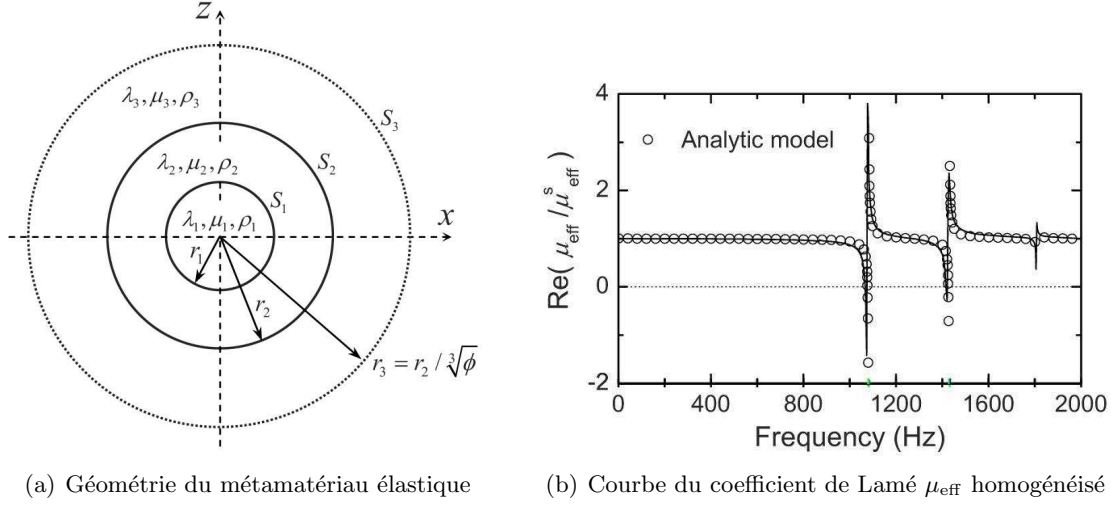


FIG. 1.10: Métamatériau élastique créé à partir de sphères concentriques et paramètres homogénéisés [95]

par des coefficients de Lamé  $\lambda_j$  et  $\mu_j$  et une densité de masse  $D_j$ , ou  $j = 1, 2, 3$  représente chaque sphère. On montre alors dans [95] que ce milieu composite peut être vu comme un milieu homogène possédant un coefficient de Lamé  $\mu_{\text{eff}}$  négatif, une densité de masse  $D_{\text{eff}}$  et un module de masse  $\kappa_{\text{eff}}$  négatif. Les paramètres du milieu homogénéisé équivalent sont ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\text{eff}}(p) = \mu_3 + \frac{(\mu_1 - \mu_2)r_1^2 (u'_{r,2}(r_1) + 3u'_{\theta,2}(r_1)) + (\mu_2 - \mu_3)r_2^2 (u'_{r,2}(r_2) + 3u'_{\theta,2}(r_2))}{r_3^2 (u'_{r,2}(r_3) + 3u'_{\theta,2}(r_3))}, \\ \lambda_{\text{eff}}(p) = \kappa_{\text{eff}}(p) - \frac{2}{3}\mu_{\text{eff}}(p), \\ \kappa_{\text{eff}}(p) = \kappa_3 + \frac{r_1(\kappa_1 - \kappa_2)E_0^{13}(s, r_1)c_0^{(1)} + r_2(\kappa_2 - \kappa_3) (E_0^{11}(h, r_2)a_0^{(3)} + E_0^{13}(h, r_2))}{r_3 (E_0^{11}(h, r_3)a_0^{(3)} + E_0^{13}(h, r_3))}, \end{array} \right. \quad (1.10)$$

où  $E_{ij}^k$  et  $u'_{r,\theta,l}$  dépendent de  $p$  et des fonctions de Bessel et de Hankel sphériques de première espèce (voir l'appendice de [95]). A partir de la figure 1.10 b) ou des formules (1.10), on peut noter que le coefficients de Lamé  $\mu_{\text{eff}}$  présente des pôles et fréquence et devient négatif au voisinage de ces derniers.

### 1.1.3 Remarques sur les exemples précédents

On a présenté, dans la section 1.1.2, des réalisations de métamatériaux homogénéisés issus de la littérature. Une observation commune à chacun de ces exemples est que le comportement exotique des métamatériaux est localisé sur des plages de fréquences et,

plus précisément, au voisinage de certains pôles des paramètres physiques du milieu. Ces remarques ont aussi été formulées par V.G. Veselago dans son papier [92] de 1968 qui concernait l'étude théorique de la propagation d'ondes dans des milieux à indices de permittivité et de perméabilité simultanément négatifs.

Les métamatériaux sont, pour la plupart, obtenus à partir de réseaux périodiques de petits « patches » de matériaux usuels (voir section 1.1.2). Leurs indices sont de plus ceux obtenus lorsque ce dernier peut être considéré comme un milieu homogène ce qui correspond au cas de longueurs d'ondes grandes devant le pas du réseau. Ainsi, les comportements exotiques des métamatériaux sont liés à des effets macroscopiques et ne vivent donc qu'à une échelle « homogénéisée ». De plus, pour dériver les paramètres homogénéisés d'un métamatériau, il faut faire appel à des méthodes d'homogénéisation. Notons enfin que, pour que le milieu homogénéisé soit valable d'un point de vue de la physique, il doit (au minimum) être compatible avec les observations précédentes.

## 1.2 Rappels sur les systèmes de Friedrichs

Un des objectifs de cette thèse est d'étudier les différents problèmes de propagation d'ondes dans des métamatériaux tels que ceux introduits dans la section 1.1.2. Pour ce faire, nous allons utiliser la théorie des systèmes de Friedrichs qui permet de traiter dans un même cadre les équations modélisant la propagation d'ondes électromagnétiques, acoustiques ou encore élastiques dans des milieux usuels.

Cette section donne alors des rappels concernant cette classe particulière de systèmes d'équations aux dérivées partielles. Dans la suite,  $\Omega$  désigne un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et de normale unitaire sortante  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ . On se donne, dans  $\Omega$ , un système d'opérateurs aux dérivées partielles du premier ordre défini dans  $\Omega$  par :

$$\mathbb{L} = K(x) + \sum_{j=1}^d A_j(x) \partial_j,$$

où  $\partial_j$  désigne la dérivée partielle par rapport à la  $j$ -ème coordonnée. On suppose de plus, tout au long de cette section que les quantités apparaissant ci-dessus vérifient :

$$\begin{aligned} K &\in L^\infty(\Omega, \text{Hom}(\mathbb{C}^k)), \\ A_j^* &= A_j \in \text{Lip}(\overline{\Omega}, \text{Hom}(\mathbb{C}^k)), \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

où l'ensemble  $\text{Hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^l)$  désigne l'ensemble des applications linéaires de  $\mathbb{C}^k$  dans  $\mathbb{C}^l$  et  $\text{Hom}(\mathbb{C}^k) := \text{Hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k)$ . L'application identité de  $\mathbb{C}^k$  est notée  $\mathbb{I}_k \in \text{Hom}(\mathbb{C}^k)$ . Pour  $X$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\text{Lip}(X)$  est l'ensemble des applications uniformément lipschitziennes sur  $X$  muni de la norme usuelle en faisant un espace de Banach :

$$\|u\|_{\text{Lip}(X)} = \sup_{x \in X} |u(x)| + \sup_{x, y \in X, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|}.$$

Pour  $f$  dans  $L^2(\Omega)^k$ , on considère le système de Friedrichs suivant

$$\begin{aligned} &\text{trouver } u \text{ tel que :} \\ &\begin{cases} \mathbb{L}u = f, \\ + \text{Conditions aux limites sur } \partial\Omega. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Dans la suite, nous allons étudier le problème (1.11) posé sur le domaine borné  $\Omega$ . Afin de spécifier les conditions aux limites utilisées, nous avons tout d'abord besoin de résultats de traces pour des fonctions appartenant aux espaces fonctionnels naturels associés à l'opérateur  $\mathbb{L}$ . C'est l'objet de la première partie de cette section. Nous rappelons ensuite un théorème d'existence et d'unicité pour cette classe de systèmes valable uniquement pour des milieux classiques. On particularise enfin ce dernier aux cas des équations de Maxwell, de l'acoustique et de l'élasticité linéaire.

### 1.2.1 Théorèmes de traces

Soit la formule d'intégration par parties suivante :

$$\int_{\Omega} \langle \mathbb{L}u, \bar{v} \rangle dx = \int_{\Omega} \langle u, \overline{\mathbb{L}^{\sharp}v} \rangle dx + \int_{\partial\Omega} \langle A_{\nu}(x)u, \bar{v} \rangle d\sigma, \quad (1.12)$$

où  $\mathbb{L}^{\sharp}v = K^*(x)v - \sum_{j=1}^n \partial_j (A_j(x)v)$  est l'adjoint formel de  $\mathbb{L}$  et  $A_{\nu}(x) = \sum_{j=1}^n A_j(x)\nu_j$  pour  $x \in \partial\Omega$ . Pour tout  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , on note  $\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^n u_j v_j$  le produit scalaire usuel et  $|u| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$  sa norme associée. Le produit hermitien entre deux vecteurs  $u, v \in \mathbb{C}^n$  est alors donné par  $\langle u, \bar{v} \rangle$ . Remarquons tout d'abord que la formule de Stokes précédente est valable pour tout  $u, v \in H^1(\Omega)$ . Cependant, pour définir de « bonnes » conditions aux limites, nous avons besoin que la formule (1.12) soit valable pour  $u$  et  $v$  moins régulières. Considérons à cet effet les espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathbb{L}} &= \left\{ u \in L^2(\Omega)^k \mid \mathbb{L}u \in L^2(\Omega)^k \right\}, \\ \mathcal{H}_{\mathbb{L}^{\sharp}} &= \left\{ u \in L^2(\Omega)^k \mid \mathbb{L}^{\sharp}u \in L^2(\Omega)^k \right\}, \end{aligned}$$

où  $\mathbb{L}u$  et  $\mathbb{L}^{\sharp}u$  sont définis au sens des distributions. On munit respectivement  $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$  et  $\mathcal{H}_{\mathbb{L}^{\sharp}}$  des topologies définies par les normes du graphe  $\|u\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{L}}} = \left( \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbb{L}u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$  et  $\|u\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{L}^{\sharp}}} = \left( \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbb{L}^{\sharp}u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$ . Ce sont alors des espaces de Hilbert et l'ensemble  $\mathcal{C}_c^1(\bar{\Omega}, \mathbb{C}^k)$  est dense dans chacun d'eux [87]. Cela permet de démontrer le théorème suivant qui donne un sens aux traces  $A_{\nu}(x)u|_{\partial\Omega}$  pour  $u$  dans  $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$  ou bien dans  $\mathcal{H}_{\mathbb{L}^{\sharp}}$ .

**Théorème 1.1** ([87], théorème 1). *L'application*

$$u \in \mathcal{C}_c^1(\bar{\Omega}, \mathbb{C}^k) \longmapsto A_{\nu}(x)u|_{\partial\Omega},$$

*admet une unique extension en une application linéaire continue de  $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$  ou  $\mathcal{H}_{\mathbb{L}^{\sharp}}$  dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ .*

Le résultat précédent n'est cependant toujours pas suffisant. En effet, on ne peut pas prendre  $(u, v) \in \mathcal{H}_{\mathbb{L}} \times \mathcal{H}_{\mathbb{L}^{\sharp}}$  dans (1.12) car aucune information concernant la régularité de  $\langle A_{\nu}(x)u, v \rangle|_{\partial\Omega}$  n'est connue lorsque  $(u, v) \in \mathcal{H}_{\mathbb{L}} \times \mathcal{H}_{\mathbb{L}^{\sharp}}$ . Il admet toutefois l'extension suivante

**Théorème 1.2** ([87], théorème 2). *L'application*

$$(u, v) \in \mathcal{C}_c^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^k) \times \mathcal{C}_c^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^k) \longmapsto \langle A_\nu(x)u, v \rangle|_{\partial\Omega}$$

*s'étend en une application bilinéaire continue de  $\mathcal{H}_{\mathbb{L}} \times \mathcal{H}_{\mathbb{L}^\#}$  dans  $\mathcal{Lip}(\partial\Omega)'$ . Cette extension est de plus unique. Enfin, la formule (1.12) est valable pour  $(u, v) \in \mathcal{H}_{\mathbb{L}} \times \mathcal{H}_{\mathbb{L}^\#}$ .*

Le résultat ci-dessus permet d'interpréter  $\int_{\partial\Omega} \langle A_\nu(x)u, \bar{v} \rangle d\sigma$ , comme l'action de la distribution  $\langle A_\nu(x)u, \bar{v} \rangle|_{\partial\Omega} \in \mathcal{Lip}(\partial\Omega)' \subset \mathcal{D}'(\partial\Omega)$  contre la fonction test lipschitzienne constante 1. Notons finalement que le théorème 1.2 donne un sens à la formule d'intégration par parties (1.12) pour  $(u, v) \in \mathcal{H}_{\mathbb{L}} \times \mathcal{H}_{\mathbb{L}^\#}$ .

### 1.2.2 Résultats d'existence et d'unicité pour des milieux classiques

Nous sommes intéressé par la résolution du problème (1.11) en domaine borné. On suppose que les conditions limites sont décrites par des opérateurs linéaires des composante de  $u$ . Soit donc, en tout point  $x$  de  $\partial\Omega$ , une application linéaire  $N(x) \in \text{Hom}(\mathbb{C}^k)$  lipschitzienne en  $x$ . On impose alors que  $u(x) \in \ker(N(x))$  pour tout  $x \in \partial\Omega$ . Le système de Friedrich à résoudre devient ainsi le suivant :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } u \in \mathcal{H}_{\mathbb{L}} \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} \mathbb{L}u = f, \text{ dans } \Omega, \\ u(x) \in \ker N(x), \text{ } x \in \partial\Omega. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Remarquons tout d'abord que résoudre l'équation (1.13) revient à inverser l'opérateur  $\mathbb{L}$  sur son domaine défini par l'ensemble suivant :

$$\mathcal{D}(\mathbb{L}) = \{u \in \mathcal{H}_{\mathbb{L}} \mid u(x) \in \ker N(x), \forall x \in \partial\Omega\},$$

où les conditions aux limites sont définies dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  par le théorème 1.1. Nous avons tout d'abord le résultat suivant qui permet l'approximation des éléments de  $\mathcal{D}(\mathbb{L})$  par des fonctions régulières.

**Théorème 1.3** (faible=fort, [87], théorème 4). *On suppose que le rang de la matrice  $A_\nu = \sum_{j=1}^d A_j(x)\nu_j$  est constant sur chaque composante connexe de la frontière  $\partial\Omega$  (on dit dans ce cas que  $\partial\Omega$  est de multiplicité constante) et que  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$ . Alors il existe une suite  $(u_k)_k \subset \mathcal{C}_c^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^k)$  vérifiant  $u_k(x)|_{\partial\Omega} \in \ker N(x)$  pour  $x \in \partial\Omega$  et telle que  $u_k \longmapsto u$  dans  $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$ . Le même résultat reste vrai lorsqu'on remplace  $\mathbb{L}$  par son adjoint  $\mathbb{L}^* = \mathbb{L}^\#$  de domaine  $\mathcal{D}(\mathbb{L}^*) = \left\{v \in \mathcal{H}_{\mathbb{L}^\#} \mid v|_{\partial\Omega} \in (A_\nu \ker(N(x)))^\perp\right\}$ .*

*De plus, si  $u \in \mathcal{H}_{\mathbb{L}}$  et  $f = \mathbb{L}u$ . Alors  $u(x) \in \ker N(x)$  pour  $x \in \partial\Omega$  si et seulement si pour tout  $v \in \mathcal{Lip}(\overline{\Omega})$  tel que  $v(x) \in N^*(x) = (A_\nu \ker(N(x)))^\perp$ ,  $x \in \partial\Omega$ , on a :*

$$\int_{\Omega} \langle u, \overline{\mathbb{L}^*v} \rangle dx = \int_{\Omega} \langle f, \bar{v} \rangle. \quad (1.14)$$

Le théorème 1.3 permet de démontrer que l'ensemble  $\mathcal{D}(\mathbb{L})$  est dense dans  $L^2(\Omega)^k$ . On obtient ainsi que l'opérateur non-borné  $(\mathbb{L}, \mathcal{D}(\mathbb{L}))$  est un opérateur fermé de  $L^2(\Omega)^k$  à domaine dense. Il en est de même pour son adjoint  $(\mathbb{L}^*, \mathcal{D}(\mathbb{L}^*))$ . Enfin, ce résultat assure que toute solution faible de l'équation  $\mathbb{L}u = f$ , pour  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$  est aussi une solution forte et permet de prendre, en raisonnant par densité,  $u = v \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$  dans la formule d'intégration par parties (1.12). Il reste cependant à montrer qu'un des deux problèmes (1.13) ou (1.14) est bien posé. Pour ce faire, on introduit les conditions aux limites maximales positives (appelées aussi maximales monotones).

**Définition 1.4** ([87]). *Les conditions aux limites définies par  $N(x)$  sont dites maximales positives lorsqu'elles vérifient :*

- Pour tout  $x \in \partial\Omega$ , pour tout  $u(x) \in \ker N(x)$ ,  $\langle A_\nu(x)u(x), \overline{u(x)} \rangle \geq 0$ .
- $\dim \ker N(x) = \#\{\text{valeurs propres } \geq 0 \text{ de } A_\nu(x) \text{ comptées avec leur multiplicité}\}$ .

On a alors le résultat suivant :

**Théorème 1.5** ([87], théorème 5). *Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :*

1.  $K \in L^\infty(\Omega, \text{Hom}(\mathbb{C}^k))$ ,
2.  $A_j^* = A_j \in \mathcal{Lip}(\overline{\Omega}, \text{Hom}(\mathbb{C}^k))$  pour  $j = 1, \dots, d$ ,
3.  $\partial\Omega$  est de multiplicité constante,
4.  $N(x) \in \mathcal{Lip}(\partial\Omega, \text{Hom}(\mathbb{C}^k))$  et les conditions aux limites définies par  $N$  sont maximales positives.
5.  $Z(x) = \frac{1}{2}(K(x) + K(x)^*) - \sum_{j=1}^n \partial_j A_j(x)$  est comparable à l'identité. c'est-à-dire :

$$\forall u \in \mathbb{C}^k, \text{ pour presque tout } x \in \Omega, \langle Z(x)u, \bar{u} \rangle \geq \alpha |u|^2, \text{ avec } \alpha > 0.$$

Alors, le système

trouver  $u \in \mathcal{H}_\mathbb{L}$  tel que :

$$\begin{cases} \mathbb{L}u := \left( K(x) + \sum_{j=1}^d A_j(x) \partial_j \right) u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u(x) \in N(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

admet une solution et une seule pour tout  $f$  dans  $L^2(\Omega)^k$  vérifiant :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Démonstration rapide.** Soient  $u$  et  $v$  appartenant à  $H^1(\Omega)$ . Une formule de Stokes donne alors :

$$\begin{cases} \mathcal{R}e(\mathbb{L}u, \bar{u})_{L^2(\Omega)} = (Zu, \bar{u})_{L^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} \langle A_\nu(x)u, \bar{u} \rangle d\sigma, \\ \mathcal{R}e(\mathbb{L}^*v, \bar{v})_{L^2(\Omega)} = (Zv, \bar{v})_{L^2(\Omega)} - \int_{\partial\Omega} \langle A_\nu(x)v, \bar{v} \rangle d\sigma, \end{cases} \quad (1.15)$$

où  $(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \langle u, v \rangle dx$ . Soit maintenant  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$ . Par le théorème 1.3, il existe  $(u_k)_k \subset \mathcal{C}_c^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^k)$  vérifiant  $u_k(x)|_{\partial\Omega} \in N(x)$  pour  $x \in \partial\Omega$  et telle que  $u_k \rightarrow u$  dans  $\mathcal{H}_\mathbb{L}$ . Alors  $\langle A_\nu(\cdot)u_k, u_k \rangle \geq 0$  par positivité des conditions aux limites. Le fait que  $\langle A_\nu u_k, u_k \rangle \rightarrow \langle A_\nu u, u \rangle$  dans  $\mathcal{Lip}(\partial\Omega)'$  et le théorème 1.2 impliquent alors que la distribution  $\langle A_\nu(\cdot)u, u \rangle$

est positive. De plus la première formule de (1.15) est valable pour tout  $k$  et donc un passage à la limite entraîne qu'elle reste vraie pour  $u$  dans  $\mathcal{D}(\mathbb{L})$ . La coercivité de  $Z$  et une inégalité de Cauchy-Schwartz entraînent alors :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|\mathbb{L}u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{L}), \quad (1.16)$$

ce qui donne l'injectivité de l'opérateur  $(\mathbb{L}, \mathcal{D}(\mathbb{L}))$ .

Les conditions aux limites maximales positives entraînent que les conditions aux limites adjointes vérifient  $\langle A_{\nu}(x)v(x), v(x) \rangle \leq 0$  pour tout  $v(x) \in (A_{\nu}\ker(N(x)))^{\perp}$ . Par densité, on peut prendre  $v \in \mathcal{D}(\mathbb{L}^*)$  dans la seconde formule de (1.15). Il vient alors

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|\mathbb{L}^*u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{L}^*), \quad (1.17)$$

Ainsi  $(\mathbb{L}^*, \mathcal{D}(\mathbb{L}^*))$  est injectif. Les deux inégalités précédentes montrent que  $(\mathbb{L}, \mathcal{D}(\mathbb{L}))$  et son adjoint sont aussi des opérateurs à images fermées. De ce fait, on a  $\mathcal{R}(\mathbb{L}) = \mathcal{R}(\mathbb{L}^*) = \mathcal{N}(\mathbb{L}^*)^{\perp} = L^2(\Omega)^k$  [52], où  $\mathcal{N}(\mathbb{L}^*)$  désigne le noyau de l'opérateur non-borné fermé  $(\mathbb{L}^*, \mathcal{D}(\mathbb{L}^*))$  et  $\mathcal{R}(\mathbb{L})$  est l'image de  $(\mathbb{L}, \mathcal{D}(\mathbb{L}))$ . L'opérateur  $(\mathbb{L}, \mathcal{D}(\mathbb{L}))$  est donc surjectif et injectif et, par suite, bijectif. ■

**Remarque 1.6** (Remarque fondamentale). *L'hypothèse fondamentale assurant le caractère bien posé du système de Friedrichs (1.13) est la coercivité de la matrice*

$$Z(x) = \frac{1}{2} (K(x) + K(x)^*) - \sum_{j=1}^n \partial_j A_j(x).$$

*Elle permet en effet de démontrer les inégalités (1.16) et (1.17). Ces dernières assurent que les opérateurs  $(\mathbb{L}, \mathcal{D}(\mathbb{L}))$  et son adjoint sont tout deux des opérateurs injectifs à images fermées. Ces propriétés impliquent que l'opérateur  $(\mathbb{L}, \mathcal{D}(\mathbb{L}))$  est inversible et donc que le système de Friedrichs (1.13) est bien posé.*

*Lorsque des métamatériaux sont inclus dans  $\Omega$  (par exemple des SRR homogénéisés (1.2)), la matrice  $Z$  n'est plus coercive. On ne peut alors plus dériver les inégalités (1.16) et (1.17). De ce fait, la démonstration du théorème 1.5 ne s'étend pas au cas des métamatériaux.*

### 1.2.3 Applications à certains systèmes de propagation d'ondes

Nous allons maintenant appliquer les résultats présentés dans la section précédente au cas des équations de Maxwell, de l'acoustique ou encore celles de l'élasticité linéaire. L'objectif n'est pas de redémontrer les théorèmes d'existence et d'unicité relatifs à chacun de ces systèmes mais de les présenter sous une forme compatible avec le théorème 1.5 pour introduire le travail réalisé au chapitre suivant.

#### Système de Maxwell

Les trois systèmes (1.1), (1.5) et (1.3) peuvent être traités ensemble. Tout d'abord, notons que les équations de Maxwell (1.1) sont un cas particulier de (1.5) où nous avons

imposé  $\xi = \zeta = 0$  et de (1.3) lorsque  $\beta = 0$ . Les systèmes (1.5) et (1.3) sont eux aussi équivalents. En effet, en supprimant la dépendance en  $(p, x)$  pour plus de lisibilité, on peut réécrire le système (1.3) comme suit :

$$\begin{cases} \nabla \times h = p\varepsilon e + p\beta\varepsilon\nabla \times e + j, \\ \nabla \times e = -m - p\mu h - p\beta\mu\nabla \times h. \end{cases}$$

En reportant alors la première équation dans la seconde ainsi que la seconde dans la première, on obtient :

$$\begin{cases} p\varepsilon e + p\beta\varepsilon(-m - p\mu h - p\beta\mu\nabla \times h) - \nabla \times h = -j, \\ p\mu h + p\beta\mu(p\varepsilon e + p\beta\varepsilon\nabla \times e + j) + \nabla \times e = -m. \end{cases}$$

Finalement, en regroupant les calculs précédents, on arrive à :

$$\begin{cases} (\mathbb{I}_3 + p^2\beta\varepsilon\beta\mu)^{-1}(p\varepsilon e - p^2\beta\varepsilon\mu h) - \nabla \times h = -\tilde{j}, \\ (\mathbb{I}_3 + p^2\beta\mu\beta\varepsilon)^{-1}(p\mu h + p^2\beta\mu\varepsilon e) + \nabla \times e = -\tilde{m}, \end{cases}$$

qui correspond à (1.5) avec des constantes de couplages particulières.

Le fait que (1.5) peut être réécrit sous la forme d'un système de Drude-Born-Fedorov (1.3) se montre de la même manière.

Mettons maintenant les équations (1.1), (1.5) et (1.3) sous la forme de systèmes de Friedrichs (1.13). Pour cela, remarquons que la partie principale de chacun d'eux est donnée par l'opérateur suivant :

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0\mathbb{I}_3 & -\nabla \times \\ \nabla \times & 0\mathbb{I}_3 \end{pmatrix}.$$

En notant  $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1,\dots,3}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $[x \times]$  l'application linéaire définie via le produit vectoriel par

$$[x \times] : y \longmapsto x \times y,$$

on obtient :

$$\mathbb{M} = \sum_{j=1}^3 \mathcal{M}_j \partial_j, \text{ avec } \mathcal{M}_j = \begin{pmatrix} 0\mathbb{I}_3 & -[\mathbf{e}_j \times] \\ [\mathbf{e}_j \times] & 0\mathbb{I}_3 \end{pmatrix}.$$

Soit  $u = (e, h)$  l'inconnue des équations de Maxwell, les conditions aux limites que nous considérerons par la suite seront limitées à celles de type impédance. Elles peuvent s'écrire sous la forme  $u(x) \in \ker N(x)$  avec

$$N(x)u := \boldsymbol{\nu}(x) \times (e(p, x) + \Lambda(x)(\boldsymbol{\nu}(x) \times h(p, x))).$$

Notons que, par le théorème 1.1, les traces tangentielles sur  $\partial\Omega$  des champs  $(e, h) \in H(\text{curl}, \Omega)^2$  vérifient  $(\boldsymbol{\nu} \times e|_{\partial\Omega}, \boldsymbol{\nu} \times h|_{\partial\Omega}) \in H^{-1/2}(\partial\Omega)^2$ . Nous supposons de plus que l'impédance vérifie  $\Lambda : \partial\Omega \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^3)$  avec  $\Lambda \in \mathcal{L}ip(\partial\Omega, \text{Hom}(\mathbb{C}^3))$  et enfin qu'elle satisfait la condition de positivité suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}^3, \forall x \in \partial\Omega, \text{Re} \langle \Lambda(x)z, \bar{z} \rangle \geq 0.$$

**Remarque 1.7.** La condition aux limites d'impédance, lorsque  $\Lambda \neq 0$ , décrit une interface avec un matériau absorbant une partie des ondes.

Dans le contexte de la diffraction d'une onde électromagnétique en espace libre, elle correspond à une approximation d'ordre 1/2 de la condition de radiation de Silver-Müller [3] :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| \left( h(x) \times \frac{x}{|x|} - e(x) \right) = 0.$$

Cette dernière, utilisée pour fermer les équations de Maxwell, décrit une onde sphérique décroissant à l'infini.

Lorsque  $\Lambda = 0$ , on obtient  $\nu \times e|_{\partial\Omega} = 0$  correspondant à la modélisation d'un obstacle électrique parfaitement conducteur.

Les trois systèmes modélisant la propagation d'ondes électromagnétiques peuvent alors être écrits sous la forme du système de Friedrichs suivant qui fournit ainsi un cadre commun pour leur étude :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } u \in \mathcal{H}_{\mathbb{M}} \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} (K(p, x) + \mathbb{M}) u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u(x) \in \ker N(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.18)$$

où  $f = (-j, -m)$  et l'opérateur de multiplication,  $K(p, x)$ , est défini dans le cas du milieu diélectrique (1.1) par :

$$K(p, x) = \begin{pmatrix} p\varepsilon(p, x) & 0\mathbb{I}_3 \\ 0\mathbb{I}_3 & p\mu(p, x) \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

dans le cas de matériaux bi-anisotropiques (1.5) par :

$$K(p, x) = \begin{pmatrix} p\varepsilon(p, x) & p\xi(p, x) \\ p\zeta(p, x) & p\mu(p, x) \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

et enfin pour les milieux chiraux (1.3) par :

$$K(p, x) = \begin{pmatrix} p\widetilde{M}(p, x)\varepsilon(p, x) & p^2\widetilde{M}(p, x)\beta(p, x)\varepsilon(p, x)\mu(p, x) \\ -p^2\beta(p, x)\varepsilon(p, x)\mu(p, x)M(p, x) & p\mu(p, x)M(p, x) \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

avec  $M = (\mathbb{I}_3 + p^2\beta\mu\beta\varepsilon)^{-1}$  et  $\widetilde{M} = (\mathbb{I}_3 + p^2\beta\varepsilon\beta\mu)^{-1}$ .

En utilisant les résultats de la section 1.2.2, nous avons le résultat suivant :

**Théorème 1.8.** *Supposons, pour un certain  $p_0 \in \mathbb{C}$ , que :*

1.  $K(p_0, \cdot)$  appartient à  $L^\infty(\Omega, \text{Hom}(\mathbb{C}^3))$ .
2. Il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que  $\text{Re} \langle K(p_0, x)X, \overline{X} \rangle \geq \alpha|X|^2$ , pour tout  $X \in \mathbb{C}^6$  et pour presque tout  $x$  dans  $\Omega$ .

Alors, pour tout  $f \in L^2(\Omega)^6$ , le système (1.18) admet une unique solution, pour  $p = p_0$ , qui est de plus continue par rapport au second membre.

**Démonstration.** On va appliquer le théorème 1.5 au système (1.18). Premièrement, en notant  $M_\nu = \sum_{j=1}^3 M_j \nu_j$ , un calcul montre que  $\det(M_\nu) = 0$  et donc  $\partial\Omega$  est de multiplicité



constante. Le fait que  $\Lambda \in \mathcal{L}ip(\partial\Omega, \text{Hom}(\mathbb{C}^3))$  montre que  $N(x)$  dépend lui aussi de façon lipschitzienne de  $x \in \partial\Omega$ . De plus, pour tout  $u(x) = (e(x), h(x)) \in \ker N(x)$ , on a :

$$\langle M_{\nu}u(x), \overline{u(x)} \rangle = 2\mathcal{R}e \langle \Lambda(x)(\nu \times h), \overline{\nu \times h} \rangle \geq 0.$$

Enfin  $\dim(\ker N(x)) = 4$  et le spectre de  $M_{\nu}$  est  $\{-1, 0, +1\}$ , où toutes les valeurs propres sont de multiplicité 2. On obtient ainsi que les conditions aux limites définies par  $N(x)$  sont maximales positives. Le théorème 1.5 montre alors que l'opérateur non-borné fermé  $(\mathbb{M}, \mathcal{D}(\mathbb{M}))$  est maximal monotone sur le domaine

$$\mathcal{D}(\mathbb{M}) = \{u = (e, h) \in (H(\text{curl}, \Omega))^2 \mid u(x) \in \ker N(x), x \in \partial\Omega\}.$$

L'opérateur de multiplication  $K(p_0, x)$ , étant à la fois coercif et borné, il s'ensuit que l'opérateur  $K(p_0, x) + \mathbb{M}$  est inversible sur  $\mathcal{D}(\mathbb{M})$  et donc que (1.18) admet une unique solution continue par rapport au second membre. ■

## Système de l'acoustique

Nous formulons un résultat équivalent pour le système (1.7). Dans un premier temps, la partie principale du système de l'acoustique est donnée par :

$$\mathbb{W} = \begin{pmatrix} 0\mathbb{I}_3 & -\nabla \\ -\text{div} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en notant les vecteurs  $\{e_j\}_{j=1,2,3}$  de la base canonique en vecteurs colonnes, il vient :

$$\mathbb{W} = \sum_{j=1}^3 \mathcal{W}_j \partial_j, \text{ avec } \mathcal{W}_j = \begin{pmatrix} 0\mathbb{I}_3 & -\mathbf{e}_j \\ -\mathbf{e}_j^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant  $U = (u, \rho)$ . Comme précédemment, les conditions aux limites que nous considérons dans la suite sont de type impédance et sont de la forme  $U(x) \in \ker N(x)$  avec

$$N(x)U = \rho(p, x) + \lambda(x) \langle u(p, x), \nu \rangle.$$

Le théorème 1.1, les traces normales sur  $\partial\Omega$  de  $u \in H(\text{div}, \Omega)$  vérifient  $\langle u, \nu \rangle|_{\partial\Omega} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  et donc les conditions aux limites sont écrites dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ . On suppose enfin que l'impédance  $\lambda : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est telle que  $\lambda \in \mathcal{L}ip(\partial\Omega, \mathbb{C})$  et vérifie  $\mathcal{R}e(\lambda) \geq 0$ .

On peut maintenant réécrire (1.7) sous la forme d'un système de Friedrichs :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } U \in \mathcal{H}_{\mathbb{W}} \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} (K(p, x) + \mathbb{W})U = f, \text{ dans } \Omega, \\ U(x) \in \ker N(x), x \in \partial\Omega, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.22)$$

où  $K(p, x)$  est un opérateur de multiplication donné par

$$K(p, x) = \begin{pmatrix} p\Gamma(p, x) & 0 \\ 0 & pn(p, x) \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

On a alors le résultat suivant qui établit le caractère bien posé du système (1.22) en présence de milieux classiques.

**Théorème 1.9.** *Supposons, pour un certain  $p_0 \in \mathbb{C}$ , que :*

1.  $K(p_0, \cdot) \in L^\infty(\Omega, \text{Hom}(\mathbb{C}^4))$ .
2. *Il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\text{Re} \langle K(p_0, x)X, \overline{X} \rangle \geq \alpha |X|^2$ , pour tout  $X \in \mathbb{C}^4$  et pour presque tout  $x$  dans  $\Omega$ .*

*Alors, pour tout  $f \in L^2(\Omega)^4$ , le système (1.22) admet une unique solution, pour  $p = p_0$ , qui est de plus continue par rapport au second membre.*

**Démonstration.** On va utiliser le théorème 1.5. Dans un premier temps,  $\det(W_\nu) = 0$ , où  $W_\nu = \sum_{j=1}^3 W_j \partial_j$  et donc  $\partial\Omega$  est de multiplicité constante. L'application  $\lambda$  étant lipschitzienne, il en est de même pour  $N(x)$ . De plus, pour tout  $U(x) = (u(x), \rho(x)) \in \ker N(x)$  et pour tout  $x \in \partial\Omega$ , on a :

$$\langle W_\nu U(x), \overline{U(x)} \rangle = 2\text{Re}(\lambda(x)) |\langle \nu, u \rangle|^2 \geq 0,$$

ce qui montre que les conditions aux limites sont positives. Par le calcul, on montre que le spectre de  $W_\nu$  est donné par  $\{-1, 0, 1\}$ , où 0 est de multiplicité 2, et  $\dim(\ker N(x)) = 3$  entraînant que les conditions aux limites sont aussi maximales. Finalement, le théorème 1.5 implique que l'opérateur  $(\mathbb{W}, \mathcal{D}(\mathbb{W}))$  est maximal monotone où

$$\mathcal{D}(\mathbb{W}) = \{U = (u, \rho) \in H(\text{div}, \Omega) \times H^1(\Omega) \mid U(x) \in \ker N(x), x \in \partial\Omega\}.$$

L'opérateur de multiplication  $K(p_0, x)$  étant à la fois coercif et borné, il s'ensuit que l'opérateur  $K(p_0, x) + \mathbb{W}$  est inversible sur  $\mathcal{D}(\mathbb{W})$ . Le système de Friedrich (1.22) admet donc une solution unique continue par rapport au second membre. ■

## Système de l'élasticité linéaire

On commence par réécrire l'équation (1.9) comme un système du premier ordre. Introduisons à cet effet les nouvelles inconnues :

$$\begin{cases} v_j = \mu(p, x) \nabla u_j, & j = 1, 2, 3, \\ w = (\lambda(p, x) + \mu(p, x)) \text{div} u. \end{cases}$$

Les conditions aux limites utilisées, pour  $j = 1, 2, 3$ , pour le système d'ordre 2 sont [25] :

$$\langle (\mu(p, x) \nabla u_j)|_{\partial\Omega}, \nu \rangle + \nu_j (\lambda(p, x) + \mu(p, x))|_{\partial\Omega} \text{div}(u)|_{\partial\Omega} - (\Lambda(x) u_j)|_{\partial\Omega} = 0, \text{ sur } \partial\Omega,$$

où  $\Lambda \in \mathcal{Lip}(\partial\Omega, \mathbb{C})$  est une impédance vérifiant  $\text{Re}(\Lambda) \geq 0$ . On obtient alors le système suivant :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } \Pi \in H(\text{div}, \Omega)^3 \times H^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} p^2 u_j - \text{div}(v_j) - \partial_j w = -f, & \text{dans } \Omega, \\ \mu^{-1}(p, x) v_j - \nabla u_j = 0, & j = 1, 2, 3, \text{ dans } \Omega, \\ (\lambda(p, x) + \mu(p, x))^{-1} w - \text{div}(u) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \langle v_j(x), \nu \rangle + \nu_j w(x) - \Lambda(x) u_j(x) = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.24)$$

où  $\Pi = (v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3, w)$ . Soit alors l'opérateur

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\nabla & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\nabla & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nabla & 0 \\ -\operatorname{div} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_1 \\ 0 & -\operatorname{div} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_2 \\ 0 & 0 & -\operatorname{div} & 0 & 0 & 0 & -\partial_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_1 & -\partial_2 & -\partial_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut réécrire les conditions aux limites sous la forme  $\Pi \in \ker N(x)$  avec

$$N(x)\Pi = \begin{pmatrix} \langle v_1(x), \boldsymbol{\nu} \rangle + \boldsymbol{\nu}_1 w(x) - \Lambda u_1(x) \\ \langle v_2(x), \boldsymbol{\nu} \rangle + \boldsymbol{\nu}_2 w(x) - \Lambda u_2(x) \\ \langle v_3(x), \boldsymbol{\nu} \rangle + \boldsymbol{\nu}_3 w(x) - \Lambda u_3(x) \end{pmatrix}, \quad x \in \partial\Omega,$$

où, par le théorème 1.1, les traces sont dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ . Le problème (1.24) peut maintenant être réécrit sous la forme du système de Friedrich suivant :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } \Pi = (v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3, w) \in \mathcal{H}_{\mathbb{E}}, \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} (K(p, x) + \mathbb{E})\Pi = F, \text{ dans } \Omega, \\ \Pi \in \ker(N(x)), \text{ sur } x \in \partial\Omega, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.25)$$

où  $F \in L^2(\Omega)^{13}$  et  $K(p, x)$  est l'opérateur de multiplication donné par :

$$K(p, x) = \begin{pmatrix} \mu(p, x)^{-1}\mathbb{I}_3 & 0\mathbb{I}_3 & 0\mathbb{I}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0\mathbb{I}_3 & \mu(p, x)^{-1}\mathbb{I}_3 & 0\mathbb{I}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0\mathbb{I}_3 & 0\mathbb{I}_3 & \mu(p, x)^{-1}\mathbb{I}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda(p, x) + \mu(p, x))^{-1} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

On a alors le résultat suivant qui établit le caractère bien posé du système de Friedrichs (1.24) dans le cas de milieux usuels.

**Théorème 1.10.** *Supposons, pour un certain  $p_0 \in \mathbb{C}$  que :*

1.  $K(p_0, \cdot) \in L^\infty(\Omega, \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{13}))$ .
2. Il existe  $\alpha > 0$  telle que  $\operatorname{Re} \langle K(p_0, x)X, \overline{X} \rangle \geq \alpha|X|^2$ , pour tout  $X \in \mathbb{C}^{13}$  et pour presque tout  $x$  dans  $\Omega$ .

Alors, pour tout  $F \in L^2(\Omega)^{13}$ , le système (1.22) admet une unique solution, pour  $p = p_0$  qui est de plus continue par rapport au second membre.

**Démonstration.** On reprend les preuves des théorèmes 1.8 et 1.9. Ainsi, par le théorème 1.5, l'opérateur  $(\mathbb{E}, \mathcal{D}(\mathbb{E}))$  est maximal monotone, où

$$\mathcal{D}(\mathbb{E}) = \{ \Pi \in H(\operatorname{div}, \Omega)^3 \times H^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega) \mid \Pi|_{\partial\Omega} \in \ker(N(x)) \}.$$

On termine alors la démonstration en utilisant le fait que l'opérateur de multiplication  $K(p_0, x)$  est à la fois coercif et borné. ■

## 1.3 Étude et approximation numérique des métamatériaux : état de l'art partiel

On rappelle qu'un des objectifs de cette thèse est l'étude mathématique de problèmes, de type systèmes de Friedrichs, modélisant la propagation d'ondes dans les métamatériaux obtenus par homogénéisation. La section précédente donnait des résultats d'existence et d'unicité, pour des systèmes d'équations du premier ordre, qui ne sont *a priori* plus valables lorsque les milieux considérés sont des métamatériaux (voir remarque 1.6). De nouvelles méthodes ont alors été mises au point afin d'étudier la propagation d'ondes dans les métamatériaux. Ainsi, nous présentons ici certains des travaux précédemment réalisés concernant l'étude du caractère bien posé et l'approximation numérique des métamatériaux dont la modélisation fait appel à des équations aux dérivées partielles d'ordre 2.

### 1.3.1 Étude de la modélisation des métamatériaux : équations d'ordre 2

On présente ici des méthodes introduites pour traiter le cas de milieux dont les paramètres physiques ne sont plus coercifs. Les deux principales sont la méthode dite de la  $\mathbb{T}$ -coercivité étudiée dans [9, 7, 10, 98] et les résultats de P. Fernandez et *al.* [37, 38]. Ces dernières correspondent chacune à un cadre bien précis.

**Remarque 1.11.** *Il existe d'autres types de métamatériaux tels que ceux possédant des paramètres singuliers en espace. L'exemple typique est la cape d'invisibilité [42, 43] (voir section 1.1.1).*

*Pour ce type de milieux, l'hypothèse concernant le caractère borné en  $x$  des coefficients du matériau n'est plus satisfaite. Le théorème 1.5 ne s'applique donc plus. Citons à cet effet les travaux issus de [41] qui, pour réaliser l'étude des équations de Maxwell ou de Helmholtz en présence d'un tel milieu, ont introduit une nouvelle définition de solutions faibles basée sur des espaces de type  $L^2$  à poids. Cela a permis aux auteurs d'obtenir des solutions d'énergie finie [41] pour chacun de ces problèmes.*

#### 1.3.1.1 La $\mathbb{T}$ -coercivité

Cette méthode concerne les problèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2. Afin de la présenter, nous considérons le problème modèle consistant à réécrire le système de l'acoustique (1.7) comme une équation scalaire d'ordre 2 et à ne considérer que sa partie principale :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } \rho \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} \operatorname{div}(\sigma \nabla \rho) = f, & \text{dans } \Omega, \\ \rho = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.27)$$

où  $f$  est un terme source appartenant à  $H^{-1}(\Omega)$  et  $\sigma = 1/\Gamma \in L^\infty(\Omega)$  est l'inverse du module de masse du matériau inclu dans  $\Omega$ . Une formulation variationnelle équivalente

à (1.27) est donnée ci-dessous :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } \rho \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \forall \psi \in H_0^1(\Omega) : \\ & \int_{\Omega} \langle \sigma \nabla \rho, \overline{\nabla \psi} \rangle dx = \langle -f, \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

où  $\langle -f, \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}$  est un crochet de dualité désignant l'action de  $f$  sur  $\psi$ . En présence de milieux classiques,  $\sigma$  vérifie  $\sigma(x) \geq \alpha > 0$ , pour presque tout  $x$  dans  $\Omega$ . La forme bilinéaire  $a(\rho, \psi) := \int_{\Omega} \langle \sigma \nabla \rho, \overline{\nabla \psi} \rangle dx$  est donc coercive sur  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  et le lemme de Lax-Milgram permet d'obtenir l'inversibilité de l'opérateur  $u \in H_0^1(\Omega) \mapsto \operatorname{div}(\sigma \nabla u) \in H^{-1}(\Omega)$ .

Supposons maintenant que  $\Omega$  soit donné par l'union de deux ouverts  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  contenant respectivement un milieu classique (avec  $\sigma_+$  coercif) et un métamatériau (avec  $\sigma_- < 0$ ). Alors, dans ce cas,  $\sigma(x) = \sigma_{\pm}$ , pour  $x \in \Omega_{\pm}$ , change de signe et l'argument précédent ne fonctionne plus. C'est pour contourner cette difficulté que la méthode de la  $\mathbb{T}$ -coercivité a été introduite. Son principe repose sur la définition suivante :

**Définition 1.12** ([98]). *Soit  $(u, v) \mapsto a(u, v)$  une forme bilinéaire continue sur  $V \times V$ , où  $V$  est un espace de Hilbert dont la norme associée au produit scalaire est  $\|\cdot\|_V$ . Soit de plus un opérateur borné et bijectif  $\mathbb{T} : V \rightarrow V$ . On dit que  $a$  est  $\mathbb{T}$ -coercive lorsque :*

$$\exists \alpha > 0, \text{ tel que } \forall \psi \in V, |a(\psi, \mathbb{T}\psi)| \geq \alpha \|\psi\|_V^2.$$

Pour un tel opérateur  $\mathbb{T}$ , le problème (1.28) peut alors être réécrit avec des fonctions test prises dans l'image de ce dernier :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } \rho \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \forall \psi \in H_0^1(\Omega) : \\ & a(\rho, \mathbb{T}\psi) = \langle -f, \mathbb{T}\psi \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Remarquons que le problème (1.29) admet une unique solution si la forme  $a$  est  $\mathbb{T}$ -coercive. Les problèmes (1.29) et (1.28) sont de plus équivalents du fait que  $\mathbb{T}$  est une bijection de  $H_0^1(\Omega)$ . Ainsi, le problème initial (1.28) est bien posé dès lors que la forme bilinéaire est  $\mathbb{T}$ -coercive. Néanmoins, la principale difficulté de cette méthode réside dans la construction effective d'un opérateur  $\mathbb{T}$ . Le résultat suivant donne l'existence et d'unicité pour (1.27) en présence de milieux à indice constant.

**Théorème 1.13** ([9], théorème 1.1). *Soit  $\Sigma = (\partial\Omega_+ \cup \partial\Omega_-) \setminus \partial\Omega$  l'interface entre les deux milieux. Considérons les ensembles d'opérateurs suivants :*

$$\mathcal{B}_{\pm} = \left\{ \mathbb{B}_{\pm} : V_{\pm} \rightarrow V_{\mp} \mid \mathbb{B}_{\pm} \text{ est continu, } (\mathbb{B}_{\pm} v_{\pm})|_{\Sigma} = (v_{\pm})|_{\Sigma}, \forall v_{\pm} \in V_{\pm} \right\},$$

où  $V_{\pm} = \{v|_{\Omega_{\pm}} \mid v \in H_0^1(\Omega)\}$ . Soit de plus les opérateurs  $\mathbb{T}_{\pm} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  définis par :

$$\mathbb{T}_+ v = \begin{cases} v_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ -v_- + 2\mathbb{B}_+ v_+ & \text{dans } \Omega_- \end{cases}; \quad \mathbb{T}_- v = \begin{cases} v_+ - 2\mathbb{B}_- v_- & \text{dans } \Omega_+ \\ -v_- & \text{dans } \Omega_- \end{cases},$$

où  $v_{\pm} = v|_{\Omega_{\pm}}$  pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Supposons enfin que le ratio  $\kappa_{\sigma} = \sigma_-/\sigma_+$  (appelé aussi contraste) vérifie  $\kappa_{\sigma} \notin \left[ - \left( \inf_{\mathbb{B}_+ \in \mathcal{B}_+} \|\mathbb{B}_+\|^2 \right)^{-1}, - \inf_{\mathbb{B}_- \in \mathcal{B}_-} \|\mathbb{B}_-\|^2 \right]$  où  $\|\mathbb{B}_{\pm}\|$  est la norme usuelle d'opérateur.

Alors les opérateurs  $\mathbb{T}_\pm$  sont des isomorphismes de  $H_0^1(\Omega)$  et la forme bilinéaire  $a$  est à la fois  $\mathbb{T}_+$  et  $\mathbb{T}_-$ -coercive. L'opérateur  $u \in H_0^1(\Omega) \mapsto \operatorname{div}(\sigma \nabla u) \in H^{-1}(\Omega)$  est ainsi un isomorphisme et le problème (1.27) est bien posé.

On donne maintenant un autre résultat qui, sous des hypothèses moins restrictives sur le contraste, assure le caractère Fredholm du problème (1.27).

**Théorème 1.14** ([9], théorème 3.3). *Supposons que l'interface  $\Sigma$  soit régulière et que  $\kappa_\sigma \neq -1$ . Alors l'opérateur  $A : u \in H_0^1(\Omega) \mapsto \operatorname{div}(\sigma \nabla u) \in H^{-1}(\Omega)$  est Fredholm d'indice 0 ce qui signifie que  $\dim(\mathcal{N}(A)) = \dim(H^{-1}(\Omega)/\mathcal{R}(A)) < \infty$  et son image  $\mathcal{R}(A)$  est fermée. Par conséquent le problème (1.27) relève de l'alternative de Fredholm.*

L'étude de milieux possédant des paramètres physiques dépendants de  $x$  peut être réalisée de la même manière [9, 98]. Notons que le théorème 1.13 assure le caractère bien posé de (1.27) dès que le contraste n'appartient pas à un certain intervalle qui dépend de la norme d'opérateurs associés à l'interface entre les deux milieux. Il ne peut donc pas toujours être déterminé explicitement. Cet intervalle peut en fait être réduit [9, 7, 10, 98] en imposant des conditions plus faibles sur le contraste. Ces dernières dépendent alors uniquement de la géométrie de l'interface et ainsi ce nouvel intervalle peut être déterminé plus facilement. Cependant, pour les contrastes vérifiant ces conditions, seul le caractère Fredholm de (1.27) (unicité de la solution entraînant son existence) est démontré.

L'ensemble des valeurs de contraste pour lesquelles le problème n'est pas Fredholm est appelé *intervalle critique*. Pour certains exemples, cet ensemble de valeurs critiques est égal à celui intervenant dans le théorème 1.13. Dans ces cas là, l'étude des phénomènes liés à des contrastes critiques a ensuite été menée dans [11]. Il y est démontré, que le caractère Fredholm de (1.27) est préservé dès lors que la solution est cherchée dans certains espaces de Sobolev à poids prenant en compte les singularités des solutions.

**Remarque 1.15.** *Les résultats obtenus à partir de la méthode de la  $\mathbb{T}$ -coercivité ne concernent que des équations aux dérivées partielles d'ordre 2. De plus, dans certains cas, seul le caractère Fredholm peut être établi pour ces problèmes.*

### 1.3.1.2 Les travaux de P. Fernandez et M. Raffetto

Nous présentons ici les travaux de P. Fernandez et M. Raffetto issus de [37, 38]. Ces derniers concernent l'étude du caractère bien posé d'équations de Maxwell, écrits sous la forme d'un système d'ordre 2, en présence de métamatériaux diélectriques (1.1) ou bi-anisotropiques (1.5). Pour simplifier les notations, nous présentons uniquement les résultats qui concernent des milieux diélectriques [38] inclus dans un domaine délimité par une paroi parfaitement conductrice (le champ électrique vérifie  $n \times e|_{\partial\Omega} = 0$ ). En éliminant le champ magnétique dans (1.1), on obtient le système d'ordre 2 suivant :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } e \in H(\operatorname{curl}, \Omega) \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} \nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times e \right) + p^2 \varepsilon e = f, & \text{dans } \Omega \\ n \times e = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.30)$$

où  $f$  est un terme source appartenant à  $L^2(\Omega)^3$ . La méthode introduite par P. Fernandez et M. Raffetto s'appuie dans un premier temps sur une formulation variationnelle associée à (1.30) :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } e \in H(\text{curl}, \Omega) \text{ tel que } \forall \Psi \in H(\text{curl}, \Omega) : \\ & a(e, \Psi) := \int_{\Omega} \left\langle \frac{1}{\mu} \nabla \times e, \overline{\nabla \times \Psi} \right\rangle + p^2 \langle \varepsilon e, \overline{\Psi} \rangle dx = \int_{\Omega} \langle f, \overline{\Psi} \rangle dx. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Ils introduisent ensuite des hypothèses phénoménologiques sur les indices de permittivité et de perméabilité du matériau inclus dans  $\Omega$  qui leur permettent d'utiliser le lemme de Lax-Milgram pour montrer le caractère bien posé de (1.31).

**Hypothèses 1.16** ([38]). *Pour le système (1.31) on suppose que :*

(HF1)  $p = i\omega$  avec  $\omega > 0$ .

(HF2) *Il existe  $m$  ouverts  $\Omega_l$  à frontière lipschitzienne tels que  $\Omega = \bigcup_{l=1}^m \overline{\Omega_l}$  et de plus  $\varepsilon|_{\Omega_l}, \mu|_{\Omega_l} \in C^0(\Omega_l, \text{Hom}(\mathbb{C}^3))$  pour tout  $l$ .*

(HF3) *Pour tout  $l \in M = \{1, \dots, m\}$ , pour tout  $x \in \Omega_l$ , on a :*

$$\left\langle \frac{\mu(x)^* - \mu(x)}{2i} X, \overline{X} \right\rangle \geq 0 \text{ et } \left\langle \frac{\varepsilon(x)^* - \varepsilon(x)}{2i} X, \overline{X} \right\rangle \geq 0, \quad \forall X \in \mathbb{C}^3$$

(HF4) *Une des deux assertions suivantes est vérifiée  $\{J_{\mu p} = M \setminus J_{\mu l} \text{ et } J_{\varepsilon n} = M \setminus J_{\varepsilon l}\}$  ou  $\{J_{\mu n} = M \setminus J_{\mu l} \text{ et } J_{\varepsilon p} = M \setminus J_{\varepsilon l}\}$  avec pour  $\vartheta \in \{\varepsilon, \mu\}$  :*

$$\begin{aligned} J_{\vartheta l} &= \left\{ l \in M \mid \exists \alpha > 0, \left\langle \frac{\vartheta(x)^* - \vartheta(x)}{2i} X, \overline{X} \right\rangle \geq \alpha |X|^2, \forall x \in \Omega_l \text{ et } \forall X \in \mathbb{C}^3 \right\}, \\ J_{\vartheta p} &= \left\{ l \in M \setminus J_{\vartheta l} \mid \exists \alpha > 0, \left\langle \frac{\vartheta(x)^* + \vartheta(x)}{2} X, \overline{X} \right\rangle \geq \alpha |X|^2, \forall x \in \Omega_l \text{ et } \forall X \in \mathbb{C}^3 \right\}, \\ J_{\vartheta n} &= \left\{ l \in M \setminus J_{\vartheta l} \mid \exists \gamma < 0, \left\langle \frac{\vartheta(x)^* + \vartheta(x)}{2} X, \overline{X} \right\rangle \leq \gamma |X|^2, \forall x \in \Omega_l \text{ et } \forall X \in \mathbb{C}^3 \right\}. \end{aligned}$$

*Les ensembles  $J_{\vartheta l}$ ,  $J_{\vartheta p}$  et  $J_{\vartheta n}$  correspondent, respectivement, à des milieux  $\vartheta$ -à pertes,  $\vartheta$ -positifs et  $\vartheta$ -négatifs.*

On a alors le résultat suivant

**Théorème 1.17** ([38], théorème 4). *Supposons que les hypothèses (1.16) soient vérifiées. Alors la forme bilinéaire  $a$  est continue et est coercive sur  $H(\text{curl}, \Omega) \times H(\text{curl}, \Omega)$  :*

$$\exists \alpha > 0, \quad \alpha \|\Psi\|_{H(\text{curl}, \Omega)}^2 \leq |a(\Psi, \Psi)|, \quad \forall \Psi \in H(\text{curl}, \Omega).$$

Le théorème 1.17 et le lemme de Lax-Milgram montrent que le problème (1.31), équivalent au problème (1.30), est bien posé.

Concernant les hypothèses (1.16), les trois premières sont naturellement vérifiées par des milieux physiques. La troisième signifie que l'on considère des matériaux à pertes et la quatrième permet de prendre en compte la présence de métamatériaux. Le théorème 1.17 s'applique alors pour des métamatériaux tels que  $\{J_{\mu p} = M \setminus J_{\mu l} \text{ et } J_{\varepsilon n} = M \setminus J_{\varepsilon l}\}$  ou  $\{J_{\mu n} = M \setminus J_{\mu l} \text{ et } J_{\varepsilon p} = M \setminus J_{\varepsilon l}\}$ . Ces résultats s'appliquent donc à des matériaux qui

sont  $\varepsilon$ -positifs et  $\mu$ -négatifs dans les régions de  $\Omega$  où le milieu n'est pas à pertes. Ils s'appliquent aussi à des matériaux vérifiant l'assertion précédente en remplaçant « positif » par « négatif ». Il existe ainsi des milieux pour lesquels ces hypothèses ne sont pas vérifiées. Par exemple, un milieu possédant des indices simultanément négatif ne rentre pas dans le cadre d'application du théorème 1.17.

Finalement, notons que le théorème 1.17 a été étendu dans [37] au cas de métamatériaux bi-anisotropique sous des hypothèses similaires à (1.16) et souffre, de ce fait, des mêmes limitations.

**Remarque 1.18.** *Les résultats obtenus par P. Fernandez et al. dans [37, 38] permettent d'étudier le cas d'équations de Maxwell, écrites comme un système d'ordre 2, en présence de métamatériaux diélectriques et bi-anisotropiques dont les paramètres physiques vérifient certaines hypothèses phénoménologiques. Ces dernières entraînent que certains exemples (voir ci-dessus et [37] section 6) de métamatériaux issus de la littérature ne peuvent pas être étudiés avec ces résultats.*

### 1.3.2 Travaux sur l'approximation numérique : équations d'ordre 2

La question de la simulation numérique des métamatériaux est, tout comme leur étude mathématique, difficile du fait que les méthodes d'approximations classiques (éléments finis, galerkin discontinu,  $\dots$ ), utilisées pour les milieux usuels, ne sont *a priori* plus valables. Citons par exemple les résultats de Raffetto et al sur les performances des codes commerciaux de résolution numérique des équations de l'électromagnétisme [18, 74, 73]. Ces travaux présentent en particulier des cas où l'utilisation d'une approche classique pour résoudre un problème comportant des métamatériaux donne lieu à des instabilités numériques. Cela peut être dû aussi bien au schéma d'approximation qu'au fait que le problème approximé ne possède pas une unique solution.

Notons que les arguments permettant d'assurer l'existence d'une solution numérique et la convergence du schéma sont, pour la plupart, empruntés aux démonstrations d'existence et d'unicité de solution au problème continu. Ainsi, on présente maintenant quelques travaux précédemment réalisés en lien avec la simulation numérique des métamatériaux qui sont basés sur les résultats d'existence et d'unicité présentés dans la section précédente.

#### 1.3.2.1 Méthodes numériques basées sur la $\mathbb{T}$ -coercivité

Dans le cas de l'étude des métamatériaux par  $\mathbb{T}$ -coercivité. Une méthode numérique, utilisant le problème variationnel coercif équivalent (1.29), a été proposée dans [21]. Ils considèrent pour cela une triangulation  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$ , où  $h$  est la taille caractéristique du maillage, telle que :

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, T \subset \Omega_+ \text{ ou } T \subset \Omega_-,$$

ainsi que l'espace d'approximation polynomial donné par :

$$\mathcal{V}_h = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v|_T \in \mathbb{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$



où  $\mathbb{P}_1(T)$  est l'ensemble des polynômes de degré 1 sur  $T$ . Nous pouvons alors définir le problème discret associé à l'équation (1.28).

$$\begin{aligned} & \text{trouver } \rho_h \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que pour tout } \psi_h \in \mathcal{V}_h : \\ & a(\rho_h, \psi_h) = \langle -f, \psi_h \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Les résultats de convergence suivants ont alors été démontrés.

**Théorème 1.19.** *On suppose que l'unique solution de (1.28) est dans  $H^2(\Omega)$ .*

**1)** ([21], corollaire 1) *Si  $a$  est  $\mathbb{T}$ -coercive et  $T\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}_h$  (maillage  $T$ -conforme), on a l'estimation d'erreur  $\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Ch \|f\|_{H^{-1}}$ .*

**2)** ([21], proposition 3) *Soient  $\mathbb{T}_{\pm,h}^{\text{loc}}$  des opérateurs locaux dépendant du maillage où :*

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{+,h}^{\text{loc}} v &= \begin{cases} v_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ -v_- + 2I_h(\chi)R_+v_+ & \text{dans } \Omega_- \end{cases}, \\ \mathbb{T}_{-,h}^{\text{loc}} v &= \begin{cases} v_+ - 2I_h(\chi)R_-v_- & \text{dans } \Omega_+ \\ -v_- & \text{dans } \Omega_- \end{cases}, \end{aligned}$$

où  $I_h(\chi) = \sum_{j=1}^n \chi(a_j) \varphi_j$ . Les points  $\{a_i\}_{i=1}^n$  sont les noeuds du maillage,  $\varphi \in \mathcal{V}_h$  sont les fonctions de bases vérifiant  $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$  (delta de Kronecker) et enfin  $\chi \in C^\infty(\bar{\Omega}, [0, 1])$  est une fonction de troncature telle que  $\chi = 1$  dans un voisinage de  $\partial\Omega_+ \cup \partial\Omega_-$ .

Alors si  $a$  est  $\mathbb{T}_{\pm}$  coercive et  $\mathbb{T}_{\pm,h}^{\text{loc}} \mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}_h$  (maillage localement  $\mathbb{T}$ -conforme) on a, pour  $h$  assez petit,  $\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Ch \|f\|_{H^{-1}}$ .

**3)** ([21], section 5) *Soit  $u^\gamma$  solution de (1.28) avec  $\sigma$  remplacée par  $\sigma^\gamma = \sigma(1 + \text{isign}(\sigma)\gamma)$  pour  $\gamma > 0$  et  $u_h^\gamma$  son approximation éléments finis. Alors, pour  $\gamma \sim \sqrt{h}$  et  $h$  assez petit, on a l'estimation d'erreur  $\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\sqrt{h} \|f\|_{H^{-1}}$ .*

Les démonstrations des points **1)** et **2)** du théorème 1.19 utilisent fortement la  $\mathbb{T}$ -coercivité de la forme bilinéaire  $a$ . Le point **3)** utilise la coercivité, pour tout  $\gamma > 0$ , de la forme bilinéaire obtenue en remplaçant  $\sigma$  par  $\sigma^\gamma$ ) et le fait que le problème limite, obtenu lorsque  $\gamma \rightarrow 0^+$ , est  $\mathbb{T}$ -coercif. Ainsi les arguments permettant d'établir ces résultats numériques sont les mêmes que ceux utilisés pour l'étude du caractère bien posé du problème continu (1.28). Ils sont, de ce fait, soumis aux mêmes limitations que celles des théorèmes 1.13 et 1.14 (voir remarque 1.15).

### 1.3.2.2 Méthodes numériques basées sur les travaux de Fernandez et al.

Une autre méthode numérique, dans le cas des équations de Maxwell, a été mise au point par P. Fernandez et M. Raffetto suite à leurs travaux portant sur l'existence et l'unicité de solution (voir théorème 1.17) pour ce type de problème. Ainsi, l'approximation numérique des équations de Maxwell, écrites comme un système d'ordre 2 (voir (1.30) et (1.31) pour leur formulation variationnelle), en présence de métamatériaux, a été réalisée dans [37, 38]. Celle-ci se base sur les hypothèses 1.16 qui assurent que la résolution numérique est relative à un problème bien posé. L'espace d'approximation utilisé correspond aux éléments d'arêtes de Nédélec [33].

$$\mathcal{V}_h = \{ \Psi \in L^2(\Omega)^3 \mid \Psi|_T \in \mathbb{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h \text{ et } [n_F \times \Psi]_F = 0, \forall F \in \mathcal{F}_h \},$$

où  $\mathcal{T}_h$  désigne une triangulation de  $\Omega$  composée de tétraèdres de taille caractéristique  $h$ ,  $\mathcal{F}_h$  est l'ensemble des faces du maillage et  $[n_F \times \Psi]_F$  est le saut de la composante tangentielle de  $\Psi$  à travers la face  $F$ . Le problème discret est le suivant.

$$\begin{aligned} & \text{trouver } e_h \in \mathcal{V}_h \text{ tel que pour tout } \Psi_h \in \mathcal{V}_h : \\ & a(e_h, \Psi_h) := \int_{\Omega} \left\langle \frac{1}{\mu} \nabla \times e_h, \overline{\nabla \times \Psi_h} \right\rangle + p^2 \langle \varepsilon e_h, \overline{\Psi_h} \rangle dx = \int_{\Omega} \langle f, \Psi_h \rangle dx. \end{aligned} \quad (1.33)$$

On peut alors obtenir le résultat de convergence suivant.

**Théorème 1.20** ([37], théorème 7). *Supposons que l'unique solution,  $e$ , de (1.30) soit dans  $H^1(\Omega)^3$  avec  $\nabla \times e \in H^1(\Omega)^3$ . Soit de plus  $e_h$  l'unique solution du problème (1.31). On a alors l'estimation d'erreur  $\|e - e_h\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \leq Ch \|f\|_{L^2(\Omega)}$ .*

La démonstration du théorème 1.20 est basée sur la coercivité de la forme bilinéaire  $a$ , assurée par les hypothèses 1.16, ainsi que sur les propriétés d'approximation des éléments d'arêtes de Nédélec. On retrouve ainsi les résultats de convergence classiques des éléments finis pour certains types de métamatériaux. Cependant, le cadre d'application du résultat de convergence ci-dessus est le même que celui du théorème 1.17 et, de ce fait, souffre des mêmes limitations que ce dernier (voir remarque 1.18).

## 1.4 Homogénéisations appliquées aux métamatériaux

Comme présenté en section 1.1, les métamatériaux sont généralement des milieux créés à partir d'assemblages de petits composants, constitués de matériaux naturels, qui peuvent être considérés comme des milieux équivalents pour des longueurs d'ondes grandes devant l'espacement des petites inclusions. La dérivation des paramètres du milieu équivalent fait donc appel à des techniques issues de l'homogénéisation.

Le principe général de ces méthodes peut être illustré comme suit : supposons que l'ensemble des petits composants soit inclus dans  $\Omega$  et que la propagation d'onde dans ce milieu est modélisée par un opérateur aux dérivées partielles

$$\mathbb{L}_\delta = K_\delta + \mathbb{D},$$

où  $K_\delta$  est un opérateur de multiplication,  $\mathbb{D}$  un opérateur de différentiation et  $\delta$  désigne un système de paramètres du réseau (taille, espacement des inclusions, ...). Alors, pour un terme source  $f$ , le comportement physique du matériau est modélisé par le problème suivant :

$$\mathbb{L}_\delta u_\delta = f, \text{ dans } \Omega. \quad (1.34)$$

Le milieu homogénéisé est alors déduit en cherchant une limite (en un sens à définir) lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . En supposant que  $u_\delta$  converge vers  $u_0$  (en un certain sens) et que la suite d'opérateurs  $\mathbb{L}_\delta$  tend vers un opérateur limite  $\mathbb{L}_0$  (une fois de plus en un sens à préciser), il vient :

$$\mathbb{L}_0 u_0 = f, \text{ dans } \Omega.$$

L'opérateur  $\mathbb{L}_0$  porte alors toute l'information du milieu homogénéisé et en particulier ses paramètres physiques. Par exemple si, après passage à la limite, on obtient  $\mathbb{L}_0 = K_0 + \mathbb{D}$  les paramètres du milieu homogénéisé sont alors donnés par  $K_0$ . La principale difficulté de toute méthode d'homogénéisation est de trouver la forme de l'opérateur limite et aussi de justifier le passage à la limite. Il y a de plus plusieurs méthodes d'homogénéisation possible pour un même problème.

Parmi toutes les méthodes d'homogénéisation existantes, nous allons en présenter deux dans la suite de cette section. Ces dernières sont particulièrement bien adaptées à l'obtention de métamatériaux homogénéisés. Elles permettent de plus, contrairement aux méthodes d'homogénéisation par moyenne [53, 97, 82, 91, 94] largement utilisées en électromagnétisme, de justifier mathématiquement la dérivation du milieu homogénéisé. La première méthode présentée concerne le cas de réseaux périodiques de petits « patchs » pour lesquels la convergence double échelle [13, 14, 16] est la méthode la plus utilisée. La seconde classe concerne un exemple d'homogénéisation non-périodique décrit à partir des résultats d'A.G. Ramm [83, 84, 85].

### 1.4.1 Homogénéisation périodique par convergence double échelle

La convergence double échelle est une méthode récente introduite en 1989 par N.Nguetseng [71] et par G. Allaire [2] en 1992. Elle se place usuellement dans un cadre périodique et permet de donner un cadre rigoureux à la méthode des développements asymptotiques à deux échelles. Le point de départ de cette dernière est l'anzatz suivant pour la solution  $u_\delta$  de (1.34) en présence d'un milieu périodique dont le pas du réseau et de l'ordre de  $\delta$  :

$$(**) \quad u_\delta(x) = u_0(x, x/\delta) + \delta u_1(x, x/\delta) + \delta^2 u_2(x, x/\delta) + \dots,$$

où les fonctions  $u_l(x, y)$  sont périodiques en  $y$ . L'insertion du développement ci-dessus dans l'équation (1.34) et l'identification formelle selon les termes de même puissance de  $\delta$  donne alors lieu à une série d'équations emboîtées dont la résolution fournit les  $u_l(x, y)$ . Le premier terme  $u_0$  permet, en général, de deviner la forme de l'opérateur limite  $\mathbb{L}_0$  et ainsi de trouver le milieu homogénéisé. La convergence à double échelle permet en fait de donner un sens à la convergence, lorsque  $\delta$  tend vers 0, de  $u_\delta(x)$  vers  $u_0(x, x/\delta)$  et, par suite, au milieu homogénéisé obtenu.

Nous rappelons maintenant les résultats principaux concernant la convergence double échelle. Un exemple issu de [16] montrant l'application de ces résultats à l'homogénéisation de métamatériaux est ensuite présenté.

#### 1.4.1.1 Résultats généraux

Nous commençons par introduire quelques notations :  $Y = [0, 1]^d$  est le cube unité de  $\mathbb{R}^d$ ,  $C_{\#}^\infty(Y)$ ,  $L_{\#}^2(Y)$  désigne l'ensemble des fonctions infiniment différentiables, respectivement  $L^2$ , périodiques de période  $Y$ . On a la définition suivante.

**Définition 1.21** ([2, 71]). Soit  $(u_\delta)_{\delta>0}$  une suite de fonctions de  $L^2(\Omega)$ . On dit que  $u_\delta$  converge double échelle vers  $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$  si pour tout  $\varphi$  telle que  $\varphi(\cdot, y) \in C^\infty(\Omega)$  et  $\varphi(x, \cdot) \in C^\infty(Y)$ , on a :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\delta(x) \varphi(x, x/\delta) dx = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy.$$

Cette notion de convergence permet de donner un sens à la convergence de  $u_\delta$  vers le premier terme de son développement donné par  $x \mapsto u_0(x, x/\delta)$ . Tout d'abord, nous donnons un résultat qui lie la limite à double échelle d'une suite avec sa limite faible.

**Théorème 1.22** ([16], p.44 proposition 2.14). Soit  $(u_\delta)_\delta > 0$  une suite bornée de fonctions de  $L^2(\Omega)$  convergeant double échelle vers  $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ . Alors  $u_\delta$  converge faiblement vers  $\int_Y u_0(x, y) dy$  dans  $L^2(\Omega)$ .

Le théorème précédent montre que la limite double échelle d'une suite contient plus d'information que sa limite faible dans  $L^2$ . En effet, elle capte des informations concernant les oscillations de la suite  $u_\delta$  tandis que sa limite faible ne décrit que son comportement en moyenne.

Le théorème fondamental concernant la convergence double échelle est le résultat de compacité suivant.

**Théorème 1.23** ([16], p.42 théorème 2.39). Soit  $(u_\delta)_\delta > 0$  une suite bornée de fonctions de  $L^2(\Omega)$ . Alors on peut extraire de  $(u_\delta)_\delta > 0$  une sous-suite qui converge double échelle vers un certain  $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ .

Les théorèmes 1.22 et 1.23 constituent les briques de base de l'homogénéisation de milieux périodiques par convergence double échelle. Le point de départ est une estimation *a priori*, uniforme par rapport au petit paramètre, de la solution  $u_\delta$  du problème considéré. Le théorème 1.23 affirme alors que la suite  $(u_\delta)_\delta$  admet une limite double échelle. Les coefficients homogénéisés sont ensuite obtenus en étudiant les propriétés fines de cette limite et en appliquant le théorème 1.22. Cela permet en fait de comparer la limite faible de  $u_\delta$  avec la limite à double échelle et ainsi de dériver des relations constitutives définissant le milieu homogénéisé.

La convergence double échelle permet de justifier rigoureusement la dérivation des paramètres homogénéisés pour une répartition périodique de petits « patches ». Dans la mesure où les métamatériaux sont, pour la plupart, réalisés à partir de ce type de procédé (voir section 1.1.2), cette méthode d'homogénéisation est naturellement appliquée aux métamatériaux. Des exemples peuvent de plus être trouvés dans [13, 14, 16, 45, 34, 15].

#### 1.4.1.2 Application à l'homogénéisation d'un réseau périodique de petites inclusions

Nous allons présenter l'homogénéisation d'un métamatériau réalisé à partir d'un réseau périodique de petites inclusions, notées  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ , issu de [15] ou de [16]. Dans

ces études,  $\Sigma$  est un compact connexe, strictement inclus dans  $Y$ , tel que  $Y \setminus \Sigma$  soit simplement connexe. L'ensemble des petites inclusions, noté  $\Sigma_\delta$ , est supposé inclu dans  $\Omega$  et est défini par la périodisation dans les trois directions de l'ensemble  $\delta\Sigma \subset \delta Y$  :

$$\Sigma_\delta = \bigcup_{k \in I_\delta} \delta(k + \Sigma), \quad I_\delta = \{k \in \mathbb{Z}^3 \mid \delta(k + \Sigma) \subset \Omega\}.$$

Les caractéristiques des matériaux considérés inclus dans  $\Sigma_\delta$  et dans  $\Omega \setminus \Sigma_\delta$  sont données par :

$$\varepsilon_\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \\ \varepsilon_e & \text{pour } x \in \Omega \setminus \Sigma_\delta, \\ \varepsilon_r/\delta^2 & \text{pour } x \in \Sigma_\delta, \end{cases} \quad \mu_\delta(x) = 1, \text{ pour } x \in \mathbb{R}^3,$$

où  $\mathcal{I}m(\varepsilon_r) > 0$  et  $\varepsilon_e \in \mathbb{R}^+$ . Un récapitulatif du dispositif est donné par la figure 1.11. Afin

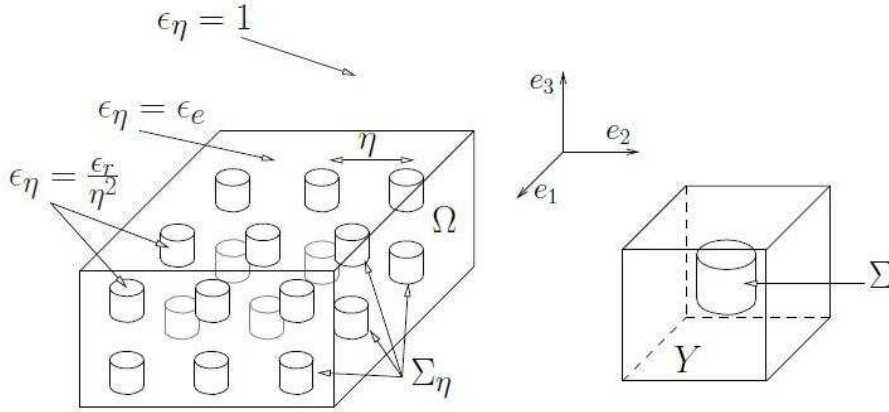


FIG. 1.11: Schéma de la structure diffractante et de la cellule de base [16]

d'obtenir le milieu homogénéisé, on considère un problème de diffraction, en espace libre, d'une onde plane par l'ensemble de toutes les petites inclusions. Ce dernier est décrit par les équations de Maxwell (1.1) dans  $\mathbb{R}^3$ , prises en absorption-limite, pour lesquelles les conditions aux limites sont remplacées par les conditions de radiations de Silver-Müller [24] :

$$\begin{cases} i\omega\varepsilon_\delta(x)e_\delta - \nabla \times h_\delta = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ i\omega\mu_\delta(x)h_\delta + \nabla \times e_\delta = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| \left( h \times \frac{x}{|x|} - e \right) = 0, \end{cases} \quad (1.35)$$

où  $(e_{\text{inc}}, h_{\text{inc}})$  est un champ incident vérifiant les équations de Maxwell (1.1) dans le vide. Le champs électromagnétique  $(e_\delta, h_\delta)$  est aussi appelé « champ total ». Les théorèmes d'existence et d'unicité pour ce type de problème de diffraction peuvent être trouvés dans [16, 17, 24]. Le résultat d'homogénéisation suivant a de plus été obtenu :

**Théorème 1.24** ([15, 16]). *Le champ électromagnétique  $(e_\delta, h_\delta)$  solution de (1.35) converge faiblement dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)$  vers  $(e^{(m)}, h^{(m)})$ . Les champs de vecteurs  $(e^{(m)}, h^{(m)})$  vérifient le problème de Maxwell suivant :*

$$\begin{cases} i\omega\varepsilon(x)e^{(m)} - \nabla \times h^{(m)} = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ i\omega\mu(w, x)h^{(m)} + \nabla \times e^{(m)} = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| \left( h \times \frac{x}{|x|} - e \right) = 0, \end{cases} \quad (1.36)$$

où  $\varepsilon(x) = \varepsilon^{\text{eff}}$  et  $\mu(\omega, x) = \mu^{\text{eff}}(\omega)$  pour  $x \in \Omega$  et  $\varepsilon(x) = \mu(x) = 1$  pour  $x$  dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ . Les paramètres homogénéisés sont de plus donnés par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kl}^{\text{eff}} &= \varepsilon_e \int_Y (\mathbf{e}_k + \nabla \chi_k) (\mathbf{e}_l + \nabla \chi_l), \quad k, l = 1, 2, 3, \\ \mu_{k,l}^{\text{eff}} &= 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon_r}{\lambda_n - \varepsilon_r} \left( \int_Y \langle W_n(y), \mathbf{e}_k \rangle dy \right) \left( \int_Y \langle W_n(y), \mathbf{e}_l \rangle dy \right), \end{aligned}$$

Les fonctions  $\chi_k$  et  $W_n$  et les scalaires  $\lambda_n$  sont définis à partir de problèmes aux limites posés sur la cellule unité  $Y$ . Les fonctions  $\chi_k$  vérifient :

$$\chi_k \in H_{\#}^1(Y), \quad \Delta_y \chi_k = 0 \text{ dans } Y \setminus \Sigma, \quad \chi_k = -y_k \text{ dans } \Sigma.$$

Les couples  $(W_n, \lambda_n)$  sont des solutions du problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{aligned} &\text{trouver } (W_n, \lambda_n) \in X_0 \times \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall v \in X_0 : \\ &\int_{\Sigma} \langle \nabla \times W_n, \nabla \times v \rangle dx + \int_Y \text{div}(W_n) \text{div}(v) dx = \lambda_n \int_Y \langle W_n, v \rangle, \end{aligned}$$

où  $X_0 = \left\{ v \in H_{\#}^1(Y) \mid v|_{Y \setminus \Sigma} = \nabla \psi \text{ pour } \psi \in H_{\#}^1(Y) \right\}$ .

En fait, les paramètres du milieu homogénéisé sont déduits grâce à la théorie de la convergence à double échelle et, plus précisément, avec l'aide du théorème 1.22. Il faut ainsi identifier la limite double échelle de  $(e_{\delta}, h_{\delta})$ . Pour cela, on a le :

**Théorème 1.25** ([16]). *La limite à double échelle du champ électromagnétique solution de (1.35) est donnée par :*

$$\begin{aligned} e_0(x, y) &= \sum_{k=1}^3 e_k^{(m)}(x) (\mathbf{e}_k + \nabla \chi_k(y)), \\ h_0(x, y) &= \sum_{k=1}^3 h_k^{(m)}(x) \left( \mathbf{e}_k + \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \mathbf{e}_k, W_n(y) \rangle \frac{\varepsilon_r}{\lambda_n - \varepsilon_r} W_n(y) \right), \end{aligned}$$

où les  $(e_k^{(m)}, h_k^{(m)})$  sont les composantes d'un champ de vecteurs totalement déterminé par l'équation (1.36) décrivant le comportement macroscopique de  $(e_{\delta}, h_{\delta})$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ .

Le théorème 1.22 permet de caractériser la limite faible d'une suite à partir de sa limite double échelle par la relation  $e_{\delta} \rightharpoonup \tilde{e}(x) = \int_Y e_0(x, y) dy$ . On peut alors montrer que  $(\tilde{e}(x), \tilde{h}(x)) = (e^{(m)}(x), h^{(m)}(x))$  pour  $x \notin \Omega$ . En utilisant de plus les définitions des limites à double échelle, on obtient que  $(\tilde{e}(x), \tilde{h}(x)) = (\varepsilon^{\text{eff}} e^{(m)}(x), \mu^{\text{eff}} h^{(m)}(x))$  pour tout  $x$  dans  $\Omega$  où les paramètres homogénéisés sont définis ci-dessus (voir [15, 16] pour plus de détails).

**Remarque 1.26.** *Les paramètres physiques des métamatériaux obtenus par convergence double échelle dépendent de solutions de problèmes aux limites posés sur la cellule unité  $Y$  (voir par exemple [13, 14, 45, 34] et ci-dessus). Ainsi, si cette géométrie est trop complexe,*

les paramètres équivalents ne peuvent pas être calculés explicitement mais seulement à partir de simulations numériques (voir par exemple le chapitre 6 de [16]).

La principale limitation de l'homogénéisation périodique réside dans le fait que les paramètres physiques homogénéisés, bien que dépendant de la pulsation  $\omega$ , sont constants par morceaux en la variable d'espace  $x$ . Cela est dû à la périodicité des petites inclusions composant le milieu homogénéisé. Ainsi, certains matériaux possédant des indices dépendant fortement de  $x$ , tels que ceux nécessaires pour la cape d'invisibilité [41, 42, 80, 89], ne peuvent pas être obtenus par homogénéisation périodique.

### 1.4.2 Exemple d'homogénéisation non-périodique : résultats d'A.G. Ramm

Contrairement à l'homogénéisation par convergence double échelle, la méthode de Ramm est une méthode d'homogénéisation non-périodique qui permet de réaliser des méta-matériaux acoustiques possédant des indices de réfraction dépendant de la variable d'espace [83, 84, 85]. Son principe repose sur l'étude d'un problème de diffraction d'une onde plane par plusieurs petits obstacles caractérisés par une condition aux limites d'impédance et sur une hypothèse concernant la répartition asymptotique des petits objets. Cette dernière implique que le nombre d'obstacles croît vers l'infini lorsque leur taille caractéristique, notée  $\delta > 0$ , tend vers 0. Ainsi, lorsque  $\delta$  tend vers 0, le domaine dans lequel tout les petits objets sont inclus, en contient une infinité et peut être décrit par un indice de réfraction effectif.

Pour simplifier la présentation, nous supposons que les petits obstacles sont  $N$  boules incluses dans  $\Omega$ , toutes de même rayon  $\delta > 0$ , et de centres respectifs  $\{c_j\}_{j=1}^N$ . Ces dernières sont notées  $\mathcal{B}_j^\delta$  et  $\mathbf{n}_j$  est la normale unitaire sortante à  $\partial\mathcal{B}_j^\delta$ . Le problème de diffraction s'écrit comme un problème aux limites, en domaine extérieur, donné par l'équation de Helmholtz :

$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2) u_\delta = 0, & \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathcal{B}_j^\delta, \\ \partial_{\mathbf{n}_j} u_\delta = \alpha_j^\delta u_\delta, & \text{sur } \partial\mathcal{B}_j^\delta = \mathcal{S}_j^\delta, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - i\kappa) (u_\delta - u_{\text{inc}}) = 0, \end{cases} \quad (1.37)$$

où  $u_\delta$  est le champ total,  $\kappa$  est le nombre d'onde,  $\alpha_j^\delta$  est l'impédance caractérisant le matériau inclu dans  $\mathcal{B}_j^\delta$  et  $u_{\text{inc}}(x) = e^{i\kappa\langle d, x \rangle}$  est un champ incident dont la direction de propagation est donnée par  $d$  appartenant à la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . Enfin la condition à l'infini est la condition de radiation de Sommerfeld [24, 17]. Conformément aux hypothèses sous lesquelles sont établis les résultats d'A.G. Ramm, on considère des impédances de la forme suivante :

$$\alpha_j^\delta = \frac{\gamma_j}{\delta}, \quad \gamma_j \in \mathbb{C}.$$

**Remarque 1.27.** *Les hypothèses introduites ici sont équivalentes à celles des techniques d'homogénéisation par convergence double échelle. En effet, dans les deux cas, le nombre de petites inclusions tend vers l'infini lorsque leur taille caractéristique tend vers 0. De plus, les matériaux inclus dans les petits obstacles possèdent des paramètres physiques « forts ». Ils sont en  $1/\delta^2$  pour l'homogénéisation par convergence double échelle et de l'ordre de  $1/\delta$  pour la méthode de Ramm.*



Le point de départ de la méthode de Ramm est l'existence d'une représentation intégrale de la solution de (1.37).

**Théorème 1.28** ([83]). *Supposons que  $\text{Im}(\gamma_j) \leq 0$ . Alors le problème (1.37) admet une unique solution. Il existe de plus  $b_j \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_j^\delta, \mathbb{C})$  tels que cette solution s'écrit sous la forme suivante :*

$$u_\delta(x) = u_{\text{inc}}(x) + \sum_{j=1}^N \int_{\mathcal{S}_j^\delta} \phi(x, y) b_j(y) d\sigma(y), \quad (1.38)$$

$$\text{avec } \phi(x, y) = \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}.$$

La fonction  $\phi(x, y)$  est le noyau de Green de l'équation de Helmholtz vérifiant  $\Delta\phi(\cdot, y) + \kappa^2\phi(\cdot, y) = -\delta_y$  où  $\delta_y$  est la masse de Dirac de support le point  $y$ . Elle vérifie aussi la condition de radiation de Sommerfield. L'établissement de la formule (1.38) se fait alors en la reportant la formulation intégrale du champ total dans les conditions aux limites d'impédance. Cela donne lieu à un système d'équations intégrales sur  $\cup_{j=1}^N \mathcal{S}_j^\delta = \partial(\mathbb{R}^3 \setminus \cup_{j=1}^N \mathcal{B}_j^\delta)$  satisfait par le vecteur  $(b_1, \dots, b_N)$  dont le caractère bien posé relève de l'alternative de Fredholm. La preuve s'obtient ensuite en utilisant l'unicité de (1.37) qui repose sur le lemme de Rellich suivant (voir lemme 2.11 de [24] ou lemme 1 p.74 de [17]).

**Lemme 1.29.** *Soit  $D$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  et  $u$  vérifiant :*

$$\begin{cases} \Delta u + \kappa^2 u = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}, \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 d\sigma = 0. \end{cases}$$

*Alors  $u = 0$  dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ .*

Afin de trouver un milieu homogénéisé, on impose une condition sur la répartition de l'ensemble des petits obstacles définie à partir d'une fonction continue  $R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Pour tout sous-domaine  $X$  de  $\Omega$ , le nombre de petits objets inclus dans  $X$  est alors supposé vérifier :

$$\mathcal{N}(X) = \text{Card} \{k \in \{1, \dots, N\} / \mathcal{B}_k(\delta) \subset X\} = \left( \frac{1}{\delta} \int_X R(y) dy \right) \left( 1 + o_{\delta \rightarrow 0}(1) \right). \quad (1.39)$$

L'hypothèse ci-dessus implique que  $\Omega$  se remplit d'une infinité de boules de taille  $\delta$  lorsque  $\delta$  tend vers 0. Elle impose de plus aux petits obstacles d'être éloignés (relativement à  $\delta$ ) les uns des autres. En effet, en notant  $d$  la distance minimale centre-à-centre de deux boules et en utilisant le fait que  $\mathcal{N}(\Omega) = O(1/\delta)$  on obtient que  $d = O(\delta^{1/3})$  qui est infiniment grand par rapport à  $\delta$ .

**Remarque 1.30.** *L'hypothèse (1.39) fait appel à des fonctions de répartitions  $R$  quelconques. Elle n'impose donc pas la périodicité des  $\mathcal{B}_j^\delta$ . C'est pourquoi cette méthode d'homogénéisation peut être qualifiée de non-périodique.*

Pour déterminer l'indice de réfraction équivalent du milieu contenant tout les petits objets, il faut faire tendre  $\delta$  vers 0 dans la formule (1.38) en utilisant l'hypothèse (1.39)



sur la répartition. Avant cela, en utilisant le système d'équations intégrales vérifiés par les  $b_j$  ainsi que la forme spécifique des impédances, on a un premier développement de la solution de (1.37).

**Lemme 1.31** ([83]). *Pour tout  $x$  tel que  $|x - c_j| \geq d$ , pour tout  $j = 1, \dots, N$ , on a :*

$$u_\delta(x) = u_{\text{inc}}(x) - \delta \sum_{j=1}^N \phi(x, c_j) 4\pi \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} u_\delta(c_j) + O_{\delta \rightarrow 0} \left( \max \left( \frac{\delta}{d}, \kappa \delta \right) \right).$$

Le point clé de la méthode de Ramm est un résultat permettant de transformer les sommes sur  $j = 1, \dots, N$  en des intégrales sur  $\Omega$  :

**Lemme 1.32** ([83], lemme 3). *Soit  $\psi$  une fonction continue sur  $\Omega$  telle qu'il existe un voisinage où  $\psi$  est absolument intégrable ( par exemple, on a une estimation de la forme  $|\psi(y)| \leq C/|y - y_0|^\alpha$  pour un certain  $y_0 \in \Omega$  et pour  $\alpha < 3$ ). Supposons enfin que l'hypothèse (1.39) sur la répartition asymptotique des  $\mathcal{B}_j^\delta$  soit satisfaite. On a alors :*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \sum_{j=1}^{N(\Omega)} \psi(c_j) = \int_{\Omega} \psi(y) R(y) dy.$$

On a maintenant le résultat d'homogénéisation suivant.

**Théorème 1.33** ([83], théorème 1). *Supposons que la condition (1.39) soit satisfaite et que  $\gamma_j = h(c_j)$  pour tout  $j = 1, \dots, N$  pour une certaine fonction  $h$  continue sur  $\Omega$ . Alors  $u_\delta$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}^3$  vers  $\tilde{u}$  vérifiant l'équation de Helmholtz suivante :*

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} + \kappa^2 n_{\text{hom}}(\kappa, x) \tilde{u} = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - i\kappa) [u_\delta - u_{\text{inc}}] = 0, \end{cases} ,$$

où  $n_{\text{hom}}(\kappa, x) = 1 - 4\pi \frac{R(x)h(x)}{1 + h(x)}$  pour  $x \in \Omega$  et  $n_{\text{hom}}(\kappa, x) = 1$  sinon.

**Démonstration rapide.** En utilisant successivement les lemmes 1.31 et 1.32 et en faisant tendre  $\delta$  vers 0, on obtient que  $\tilde{u}$  vérifie l'équation intégrale suivante :

$$\tilde{u}(x) = u_{\text{inc}}(x) - \int_{\Omega} \phi(x, y) 4\pi \frac{h(y)}{1 + h(y)} R(y) \tilde{u}(y) dy.$$

Il suffit maintenant d'appliquer l'opérateur  $\Delta + \kappa^2$  à l'équation ci-dessus pour trouver l'indice homogénéisé. La condition de Sommerfeld et l'unicité de  $\tilde{u}$  sont récupérées en étudiant l'opérateur intégral faiblement singulier  $v \mapsto \int_{\Omega} \phi(x, y) 4\pi \frac{h(y)}{1 + h(y)} R(y) v(y) dy$  (voir [69]). ■

Le théorème 1.33 montre que l'indice de réfraction homogénéisé du milieu dans lequel une infinité de petits obstacles ont été implantés suivant la loi (1.39) est donné par

$$n_{\text{hom}}(\kappa, x) = 1 - 4\pi \frac{R(x)h(x)}{1 + h(x)}.$$

Cet indice dépend de  $x$  et, en jouant sur les paramètres  $R$  et  $h$ , on peut alors créer des matériaux ayant des indices de réfraction à parties réelles négatives et donc ainsi des métamatériaux. Des exemples de distributions produisant des milieux exotiques sont donnés dans [83, 84, 85].

**Remarque 1.34.** *Les résultats obtenus par A.G. Ramm concernant l'homogénéisation non-périodique sont très importants. En effet, les milieux obtenus possèdent des paramètres physiques dépendant de la variable d'espace  $x$  et de la pulsation  $\omega$  (car  $\kappa = \omega/c_0$  où  $c_0$  est, dans le cas de l'acoustique, la célérité du son dans le vide) dont les parties réelles peuvent être négatives pour certains  $\omega$ . Ainsi des métamatériaux acoustiques dont les paramètres dépendent de  $x$  et dont les propriétés sont compatibles avec les prédictions de V.G. Veselago [92] sont réalisables à partir d'assemblages non-périodiques de petits obstacles caractérisés par des impédances particulières.*



## **Première partie**

# **Modélisation mathématique et approximation numérique de modèles homogénéisés de métamatériaux**

---



---

## Etude du caractère bien posé de modèles homogénéisés de métamatériaux

---

Rappelons tout d'abord que la principale difficulté liée à l'étude du caractère bien posé de problèmes en présence de métamatériaux est la perte de coercivité des paramètres physiques du milieu considéré. Ainsi le théorème général 1.5 ne s'applique plus. Il en est de même pour la plupart des méthodes classiques et des travaux concernant le caractère bien posé d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2 en présence de métamatériaux ont été réalisés. Cela a amené au développement de nouvelles méthodes telles que celles présentées à la section 1.3.1.

Le but de ce chapitre est alors l'étude de l'existence et de l'unicité de solutions pour des problèmes, de type systèmes de Friedrichs (voir section 1.2.2), modélisant la propagation d'ondes en présence de métamatériaux homogénéisés tels que ceux présentés dans la section (1.1). Plus précisément on se focalise sur la résolution des problèmes issus de la modélisation des phénomènes électromagnétiques (équations de Maxwell (1.18)), acoustiques (système (1.7)) et élastiques (système (1.25)).

Dans la première partie, on introduit un cadre général d'étude pour le caractère bien posé des trois systèmes de Friedrichs précédemment cités lorsque des métamatériaux sont considérés. Nous présentons plusieurs hypothèses permettant d'étudier le cas de milieux dont les paramètres physiques sont scalaires. Une hypothèse supplémentaire est donnée pour le cas des matériaux à indices tensoriels.

La seconde section développe le cadre général précédent pour obtenir les résultats d'existence et d'unicité obtenus pour les équations de l'électromagnétisme en présence de métamatériaux. On commence par les milieux dont les indices de permittivité, de perméabilité et dont les constantes de couplages ou la chiralité sont scalaires. Le cas des métamatériaux à paramètres tensoriels est ensuite traité.

Les deux sections suivantes étudient respectivement les systèmes de l'acoustiques et de l'élasticité linéaire. Comme pour l'électromagnétisme, des résultats portant sur le caractère

---

bien posé de ces systèmes sont présentés. Les milieux scalaires puis les matériaux à indices tensoriels sont traités.

Pour finir, afin de justifier ces développements généraux, nous appliquons les résultats de cette étude à quelques exemples déjà introduits dans la section 1.1.2.

## 2.1 Cadre mathématique général

Les résultats présentés dans la suite de ce chapitre concernent le caractère bien posé de certains systèmes de Friedrichs modélisant la propagation d'ondes en présence de métamatériaux homogénéisés. L'objectif de cette section est de donner une présentation synthétique de la formulation des résultats obtenus dans les sections suivantes. Considérons à cet effet le système de Friedrichs suivant :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } u \in \mathcal{H}_{\mathbb{S}} \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} K(p, x)u + \mathbb{S}u(p, x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(p, x) \in \ker N(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

où  $K(p, x) \in \text{Hom}(\mathbb{C}^k)$  est un tenseur contenant les caractéristiques physiques du matériau inclus dans  $\Omega$ ,  $f \in L^2(\Omega)^k$  est un terme source,  $\mathbb{S} = \sum_{j=1}^d \mathcal{S}_j \partial_j$ , où  $\mathcal{S}_j^* = \mathcal{S}_j$ , est un opérateur différentiel du premier ordre et  $u(x)$  désigne une quantité physique inconnue. Les ensembles  $\mathcal{H}_{\mathbb{S}}$  et  $\mathcal{D}(\mathbb{S})$  (le domaine de  $\mathbb{S}$ ) ont déjà été introduits dans la section 1.2.2. Enfin, on suppose que  $N(x) \in \text{Hom}(\mathbb{C}^k)$ ,  $N \in \mathcal{L}ip(\partial\Omega, \text{Hom}(\mathbb{C}^k))$  et que les hypothèses du théorème 1.5 sont satisfaites. L'opérateur  $(\mathbb{S}, \mathcal{D}(\mathbb{S}))$  est ainsi maximal monotone. Par conséquent, lorsque l'opérateur de multiplication  $K$  est coercif (un tel milieu est dit « classique »), le système 2.1 admet une unique solution continue par rapport au second membre  $f$ .

L'argument précédent n'est cependant plus valable lorsqu'un métamatériau est inclus dans  $\Omega$ . Notons tout d'abord, suite à des remarques de V.G. Veselago [92] valables aussi pour des exemples de réalisations de métamatériaux issus de la littérature (voir section 1.1.2), que les paramètres physiques des métamatériaux obtenus par homogénéisation dépendent de la pulsation  $\omega$  comme des fractions rationnelles. Il existe aussi des pulsations pour lesquelles le milieu se comporte comme un matériau classique. Les indices des métamatériaux homogénéisés, donnés ici par  $K(p, x)$ , peuvent donc être considérés comme des fonctions holomorphes, sur un domaine  $D_0 \subset \mathbb{C}$ , de la variable de Laplace  $p = i\omega + \eta$  et sont de plus coercives pour un certain  $p_0 = i\omega_0 + \eta_0$ . Le problème (2.1) est alors bien posé pour  $p = p_0$ .

L'idée générale des démonstrations de ce chapitre repose sur le fait d'étendre le caractère bien posé de (2.1) de  $p_0$  à d'autre  $p$  appartenant au domaine d'holomorphicité de  $K(p, x)$ . L'outil central est la théorie de Fredholm analytique dont le théorème A.7 (voir Annexe A.1), qui requiert de la compacité sur la résolvante de l'opérateur que l'on cherche à inverser, représente le résultat principal utilisé dans la suite. La figure 2.1 représente le schéma de la démonstration. On commence par se placer au voisinage d'une pulsation  $\omega_0$  pour laquelle le milieu se comporte comme un milieu classique. L'holomorphicité des paramètres physiques assure alors que le problème reste bien posé dans un voisinage de

$p_0 = i\omega_0 + \eta_0$ . L'holomorphie de  $K(p) + \mathbb{S}$ , la théorie de Fredholm analytique et des arguments supplémentaires qui seront explicités dans la suite permettent ensuite d'étendre le caractère bien posé de  $p_0$  vers d'autres points du domaine d'holomorphie des indices homogénéisés. Cela assure que le problème est bien posé pour des pulsations pour lesquelles le milieu se comporte comme un métamatériau.

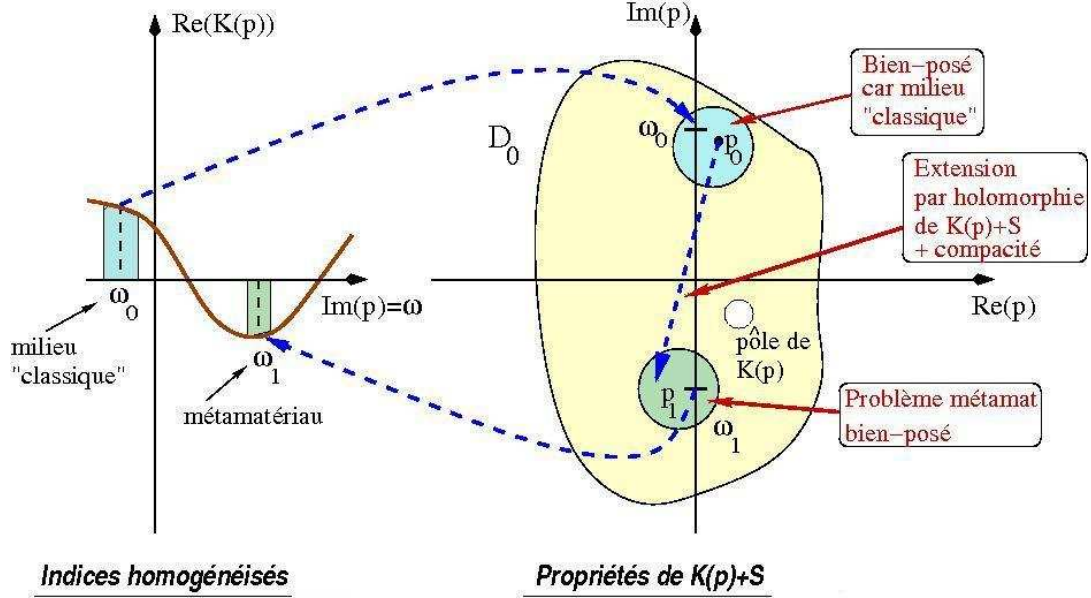


FIG. 2.1: Idée principale des démonstrations d'existence et d'unicité

En accord avec ce qui précède, nous considérons maintenant des matériaux qui vérifient les hypothèses suivantes :

**Hypothèses 2.1** (Hypothèses générales sur le métamatériau).

- (H1) L'application  $p \in D_0 \mapsto K(p, x) \in \text{Hom}(\mathbb{C}^k)$  est holomorphe pour presque tout  $x \in \Omega$ , où  $D_0$  est un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ .
- (H2) L'application  $x \in \Omega \mapsto K(p, x) \in \text{Hom}(\mathbb{C}^k)$  appartient à  $L^\infty(\Omega)$  (ou  $\mathcal{L}ip(\Omega)$  fonction du cas étudié) pour tout  $p \in D_0$  et  $K(p, x)^{-1}$  existe pour presque tout  $x \in \Omega$ .
- (H3) Il existe  $p_0$  dans  $D_0$  tel que  $K(p_0, \cdot)$  est coercif.

Les hypothèses ci-dessus représentent la base de notre étude du système (2.1) en présence de métamatériaux obtenus par homogénéisation. La première, (H1), décrit la dépendance en la pulsation (et donc de manière équivalente en la fréquence) des paramètres physiques des métamatériaux. Pour le cas de paramètres admettant des pôles  $\{p_j\}_{j=1}^M$ , on peut toujours considérer un sous-domaine de  $D_0$  sur lequel (H1) est vérifiée. Ce sont en effet des fonctions holomorphes sur  $\tilde{D}_0 = D_0 \setminus \left( \cup_{j=1}^M \mathcal{B}(p_j, \delta) \right)$  pour  $\delta > 0$  fixé. L'hypothèse (H2) peut être expliquée par le fait que les métamatériaux homogénéisés sont, en général, inclus dans un milieu classique. Enfin, (H3) signifie que le milieu considéré se comporte comme un matériau classique pour  $p_0$ .

Nous donnons maintenant la forme générale des résultats présentés dans la suite



ainsi qu'une ébauche de démonstration. On commence par le cas de matériaux dont les paramètres physiques sont scalaires ( $K(p, x)$  est donc une matrice diagonale par blocs).

**Théorème 2.2** (Paramètres physiques scalaires). *Supposons que les hypothèses 2.1 soient vérifiées. Alors le problème (2.1) admet une unique solution pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S \subset D_0$  est un sous-ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$ . Cette solution est de plus continue par rapport aux données et l'application  $p \in D_0 \setminus S \mapsto u \in L^2(\Omega)^k$  est holomorphe.*

**Ébauche générale des démonstrations.** Premièrement, pour les systèmes de Friedrichs étudiés ici, il existe un opérateur différentiel du premier ordre  $\mathbb{Q}$  tel que

$$\mathbb{Q}\mathbb{S}\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad (2.2)$$

où  $\ker(\mathbb{S}) = \left\{ u \in L^2(\Omega)^k \mid \mathbb{S}u = 0, \mathcal{D}'(\Omega) \right\}$ . L'opérateur fermé  $(\mathbb{S}, \mathcal{D}(\mathbb{S}))$  possède donc un noyau de dimension infini (il contient par exemple  $\mathbb{Q}(\mathcal{C}_c^\infty(\Omega))$ ) et, par conséquent, la résolvante de l'opérateur  $\mathbb{S}$  n'est pas compacte. La principale difficulté, en plus de la perte de coercivité de  $K(p)$  pour certains  $p$ , vient alors du fait que l'utilisation de la théorie de Fredholm analytique requiert de la compacité.

Néanmoins, on suppose (et on vérifiera) que l'opérateur  $(\mathbb{S}, \mathcal{D}(\mathbb{S}))$  vérifie des inégalités de coercivité [65], de Majda, de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{S}) \cap \left\{ u \in L^2(\Omega)^k \mid \mathbb{Q}u \in L^2(\Omega) \right\}, \\ \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\{ \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbb{S}u\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbb{Q}u\|_{L^2(\Omega)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

L'inégalité (2.3) mesure le « défaut » de compacité de l'injection  $\mathcal{D}(\mathbb{S}) \subset L^2(\Omega)^k$ . En effet, pour récupérer de la compacité sur la résolvante de  $(\mathbb{S}, \mathcal{D}(\mathbb{S}))$ , nous devons contrôler  $\mathbb{Q}u$  pour  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$ . Pour cela on utilise une décomposition orthogonale de  $L^2(\Omega)^k$  définie à partir d'une décomposition de Hodge [28, 17] adaptée au système considéré :

$$L^2(\Omega)^k = \mathcal{R} \oplus \mathcal{R}^\perp, \quad (2.4)$$

où  $\mathcal{R}$  est un sous-espace vectoriel de  $L^2(\Omega)^k$  vérifiant les propriétés suivantes :

- (i)  $\mathcal{R} \subset \ker(\mathbb{S})$ ,
- (ii)  $\text{Im}(\mathbb{S}) \subset \mathcal{R}^\perp$ ,
- (iii)  $\mathcal{R}^\perp \subset \ker(\mathbb{Q})$ .

Les noyaux ci-dessus sont des noyaux distributionnels. De plus,  $\mathbb{S}^* = \mathbb{S}$  au sens des distributions et ainsi les hypothèses (i) et (ii) sont *a priori* redondantes. Enfin, on note respectivement  $P_{\mathcal{R}} : L^2(\Omega)^k \rightarrow \mathcal{R}$  et  $P_{\mathcal{R}^\perp} : L^2(\Omega)^k \rightarrow \mathcal{R}^\perp$  les projections orthogonales associées à la décomposition de Hodge.

Nous donnons maintenant les étapes principales de l'ébauche de démonstration du théorème. Afin de prendre en compte la non-compacité de la résolvante de l'opérateur  $\mathbb{S}$ , on commence par réécrire le problème (2.1) en un système équivalent dont les inconnues sont  $P_{\mathcal{R}}u$  (la projection sur le noyau de  $\mathbb{S}$ ) et  $P_{\mathcal{R}^\perp}u$  (la projection sur l'orthogonal du noyau de  $\mathbb{S}$ ).

La seconde étape consiste à résoudre le problème associé à la composante du noyau. Cette tâche est délicate dans ce cadre général du fait que  $K(p, \cdot)$  n'est pas nécessairement coercif

pour tout  $p \in D_0$ . Pour ce faire, nous avons besoin de plus d'informations concernant la structure de l'ensemble  $\mathcal{R}$  et donc de spécifier la physique considérée. Plus précisément, le système (2.1) doit être particularisé à la situation d'étude.

La troisième étape a pour but d'obtenir un problème vérifié par la composante orthogonale. La dernière étape a pour objectif la résolution de ce dernier. Cela fait alors appel à la théorie de Fredholm analytique.

### I - REFORMULATION DE (2.1) EN 2 SYSTÈMES COUPLÉS.

Par les hypothèses (i) et (ii), on a que  $P_{\mathcal{R}}\mathbb{S} = 0$  et  $\mathbb{S}P_{\mathcal{R}} = 0$  au sens des distributions. En projetant le système (2.1), on obtient alors le problème équivalent :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } u = P_{\mathcal{R}}u + P_{\mathcal{R}^\perp}u \in \mathcal{D}(\mathbb{S}) \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} P_{\mathcal{R}^\perp}K(p, \cdot)(P_{\mathcal{R}}u + P_{\mathcal{R}^\perp}u) + P_{\mathcal{R}^\perp}\mathbb{S}P_{\mathcal{R}^\perp}u = P_{\mathcal{R}^\perp}f, & \text{dans } \Omega, \\ P_{\mathcal{R}}K(p, \cdot)(P_{\mathcal{R}}u + P_{\mathcal{R}^\perp}u) = P_{\mathcal{R}}f, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5)$$

### II - TRAITEMENT DE LA PROJECTION SUR $\mathcal{R}$ .

La seconde équation de (2.5) permet d'exprimer  $P_{\mathcal{R}}u$  en fonction de  $P_{\mathcal{R}^\perp}u$ . Pour ce faire, on doit inverser l'opérateur  $P_{\mathcal{R}}K(p, \cdot)P_{\mathcal{R}}$  sur  $\mathcal{R}$ . Ce point nécessite plus d'informations concernant la décomposition de Hodge utilisée ainsi que sur le problème étudié. Toutefois, afin d'achever l'ébauche de la démonstration, on suppose que cet inverse existe et que l'application

$$p \in D_0 \mapsto (P_{\mathcal{R}}K(p, \cdot)P_{\mathcal{R}})^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{R}),$$

est holomorphe.

### III - ECRITURE D'UN PROBLÈME VÉRIFIÉ PAR LA PROJECTION SUR $\mathcal{R}^\perp$ .

À partir du résultat du II, nous pouvons réécrire la seconde équation de (2.5) comme suit :

$$P_{\mathcal{R}}u = (P_{\mathcal{R}}K(p, \cdot)P_{\mathcal{R}})^{-1} (P_{\mathcal{R}}f - P_{\mathcal{R}}K(p, \cdot)P_{\mathcal{R}^\perp}u).$$

En reportant ce qui précède dans la première équation de (2.5) il vient que  $P_{\mathcal{R}^\perp}u$  vérifie le problème suivant :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } P_{\mathcal{R}^\perp}u \in \mathcal{D}(\mathbb{S}) \cap \mathcal{R}^\perp \text{ tel que :} \\ & B(p)P_{\mathcal{R}^\perp}u + P_{\mathcal{R}^\perp}\mathbb{S}P_{\mathcal{R}^\perp}u = P_{\mathcal{R}^\perp}f - P_{\mathcal{R}^\perp}K(p, \cdot)P_{\mathcal{R}}(P_{\mathcal{R}}K(p, \cdot)P_{\mathcal{R}})^{-1}P_{\mathcal{R}}f, \end{aligned} \quad (2.6)$$

où  $B(p) \in \mathcal{B}(\mathcal{R}^\perp)$  est un opérateur borné donné par :

$$B(p) := P_{\mathcal{R}^\perp}K(p, \cdot)P_{\mathcal{R}^\perp} - P_{\mathcal{R}^\perp}K(p, \cdot)P_{\mathcal{R}}(P_{\mathcal{R}}K(p, \cdot)P_{\mathcal{R}})^{-1}(P_{\mathcal{R}}K(p, \cdot)P_{\mathcal{R}^\perp}u).$$

Enfin, (H2) et l'holomorphie de  $(P_{\mathcal{R}}K(p, \cdot)P_{\mathcal{R}})^{-1}$  entraînent que l'application

$$p \in D_0 \mapsto B(p) \in \mathcal{B}(\mathcal{R}^\perp),$$

est holomorphe.

### IV - RÉOLUTION FINALE PAR THÉORIE DE FREDHOLM ANALYTIQUE.

Nous résolvons maintenant le problème (2.6). Notons tout d'abord que les hypothèses (i) et (ii) et le fait que  $\mathbb{I} = P_{\mathcal{R}} + P_{\mathcal{R}^\perp}$  montrent que  $P_{\mathcal{R}^\perp} \mathbb{S} P_{\mathcal{R}^\perp} = \mathbb{S}$ . Par (iii), on a que  $\mathbb{Q} P_{\mathcal{R}^\perp} = 0$ . L'inégalité de Majda (2.3) entraîne alors l'estimation suivante :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\{ \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbb{S}v\|_{L^2(\Omega)} \right\}, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{S}) \cap \mathcal{R}^\perp.$$

Ainsi, la résolvante de la famille holomorphe sur  $D_0$  (par les hypothèses (H1) et (H2) de 2.1) d'opérateurs  $(\mathbb{F}(p), \mathcal{D}(\mathbb{S}) \cap \mathcal{R}^\perp)$ , où

$$\mathbb{F}(p) := B(p)P_{\mathcal{R}^\perp} + P_{\mathcal{R}^\perp} \mathbb{S} P_{\mathcal{R}^\perp},$$

est compacte pour tout  $p \in D_0$ . La maximale monotonie de l'opérateur  $(\mathbb{S}, \mathcal{D}(\mathbb{S}))$  et le fait que l'opérateur  $\mathcal{B}(p)$  est borné sur  $\mathcal{R}^\perp$  entraînent de plus que l'ensemble résolvant de  $(\mathbb{F}(p), \mathcal{D}(\mathbb{S}) \cap \mathcal{R}^\perp)$  est non-vide pour tout  $p \in D_0$ .

On peut maintenant résoudre le problème (2.6) avec l'alternative de Fredholm analytique. Nous devons pour cela trouver un  $p_0 \in D_0$  pour lequel l'opérateur  $\mathbb{F}(p_0)$  est inversible. Par l'hypothèse (H3), le problème (2.1) est bien posé. L'équivalence entre le problème (2.1) et son projeté (2.5) assure que ce dernier admet un unique solution pour  $p = p_0$ . Il en est donc de même pour le problème (2.6) ce qui entraîne que l'opérateur  $(\mathbb{F}(p_0), \mathcal{D}(\mathbb{S}) \cap \mathcal{R}^\perp)$  est inversible. On obtient alors l'existence et l'unicité de  $P_{\mathcal{R}^\perp} u(p, \cdot)$  pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S$  est un ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$ .

Nous avons de plus dépendance continue de la solution par rapport au second membre  $f$  car les opérateurs  $(P_{\mathcal{R}} K(p, \cdot) P_{\mathcal{R}})^{-1}$  et  $\mathbb{F}(p)^{-1}$  sont bornés sur  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}^\perp$  respectivement. Enfin, les applications  $p \in D_0 \mapsto (P_{\mathcal{R}} K(p, \cdot) P_{\mathcal{R}})^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$  et  $p \in D_0 \setminus S \mapsto \mathbb{F}(p)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{R}^\perp)$  sont holomorphes. Ainsi, l'application  $p \in D_0 \setminus S \mapsto u \in L^2(\Omega)^k$  est holomorphe et l'ébauche de démonstration est terminée. ■

Le principal point bloquant de la démonstration est l'inversion sur  $\mathcal{R}$  de l'opérateur  $P_{\mathcal{R}} K(p, \cdot) P_{\mathcal{R}}$  dans ce cadre général. Pour les milieux dont les paramètres sont scalaires, les hypothèses 2.1 et la spécification des inégalités de Majda (2.3) et de la décomposition de Hodge (2.4) au système physique considéré sont suffisantes pour démontrer un résultat similaire au théorème 2.2 pour les équations de Maxwell, le système de l'acoustique et celui de l'élasticité linéaire.

Pour le cas de matériaux possédant des paramètres non-scalaires, la difficulté vient du fait que les systèmes d'équations aux dérivées partielles correspondants ne possèdent pas toujours les mêmes propriétés spectrales. Par exemple, les équations de Maxwell en présence de milieux chiraux (1.3) possèdent du spectre essentiel proche de zéro sur l'axe imaginaire existe tandis que ce comportement n'a pas lieu pour des milieux dont les paramètres physiques sont scalaires [55]. Ainsi, pour traiter ce type de cas, nous ajoutons l'hypothèse :

**Hypothèses 2.3** (Hypothèse générale pour le cas de paramètres physiques non-scalaires).

(H4) Il existe  $a : \mathbb{C} \times \Omega \mapsto a(p, x) \in \mathbb{C}$ , holomorphe sur  $D_0$  pour tout  $x \in \Omega$ , tel que  $a(p, \cdot) \in \mathcal{Lip}(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$  pour tout  $p \in D_0$  et vérifiant de plus que  $K(p, x)a(p, x)$  est coercive pour tout  $p \in D_0$  et pour presque tout  $x \in \Omega$ .

On donne alors un autre type de résultat, pour les milieux dont les paramètres sont tensoriels.

**Théorème 2.4** (Paramètres physiques tensoriels). *Supposons que les hypothèses 2.1 et 2.3 soient vérifiées. Alors le problème (2.1) admet une unique solution pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S \subset D_0$  est un sous-ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$ . Cette solution est de plus continue par rapport aux données et l'application  $p \in D_0 \setminus S \mapsto u \in L^2(\Omega)^k$  est holomorphe.*

Les grandes lignes de la démonstration sont les mêmes que celles du théorème 2.2. En revanche, la principale difficulté liée à ce cadre général reste toujours l'obtention de la composante de  $u$  appartenant au noyau de l'opérateur  $\mathbb{S}$ .

## 2.2 Résultats d'existence et d'unicité pour l'électromagnétisme et l'optique

Nous présentons ici des résultats concernant le caractère bien posé des équations de Maxwell (1.18) en présence de métamatériaux obtenus par homogénéisation. En accord avec la section 2.1, nous présentons deux types de théorèmes. Le premier (théorème 2.7) permet de traiter les milieux bi-anisotropiques ou chiraux possédant des paramètres physiques scalaires vérifiant des hypothèses comparables à 2.1. Le second (théorème 2.14) permet de traiter le cas de matériaux tensoriels modulo la formulation d'hypothèses complémentaires.

### 2.2.1 Métamatériaux électromagnétiques à indice scalaire

On commence par formuler les hypothèses 2.1 nécessaires à l'étude de la propagation d'ondes électromagnétiques en présence de métamatériaux à indices scalaires.

**Hypothèses 2.5** (Métamatériaux bi-anisotropiques scalaires (1.5)).

- (B1)  $\varepsilon(p, x), \mu(p, x), \xi(p, x)$  et  $\zeta(p, x)$  sont holomorphes pour tout  $p \in D_0$  et pour presque tout  $x \in \Omega$ .
- (B2)  $\varepsilon(p, x), \mu(p, x), \xi(p, x)$  et  $\zeta(p, x)$  sont lipschitziens sur  $\Omega$  pour tout  $p \in D_0$  et de plus,  $\varepsilon(p, x)\mu(p, x) - \xi(p, x)\zeta(p, x) \neq 0$  pour presque tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $p \in D_0$ .
- (B3) Il existe  $p_0$  dans  $D_0$  et  $\alpha > 0$  tels que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} (\langle p_0 \varepsilon(p_0, x) X, \bar{X} \rangle + \langle p_0 \mu(p_0, x) Y, \bar{Y} \rangle + \langle p_0 \xi(p_0, x) Y, \bar{X} \rangle) \\ & + \operatorname{Re} (\langle p_0 \zeta(p_0, x) X, \bar{Y} \rangle) \geq \alpha (|X|^2 + |Y|^2), \end{aligned}$$

pour presque tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $X, Y \in \mathbb{C}^3$ .

**Hypothèses 2.6** (Métamatériaux chiraux scalaires (1.3)).

- (C1)  $\varepsilon(p, x), \mu(p, x)$  et  $\beta(p, x)$  sont holomorphes sur  $D_0$  pour presque tout  $x \in \Omega$ .
- (C2)  $\varepsilon(p, x), \mu(p, x)$  et  $\beta(p, x)$  sont lipschitziens sur  $\Omega$  pour tout  $p \in D_0$ . De plus

$$p^2 \varepsilon(p, x) \mu(p, x) M(p, x) \neq 0,$$

pour presque tout  $x \in \Omega$  avec  $M(p, x) = (1 + p^2 \beta(p, x)^2 \varepsilon(p, x) \mu(p, x))^{-1}$ .

(C3) Il existe  $p_0$  dans  $D_0$  et  $\alpha > 0$  tels que, pour presque tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $X, Y \in \mathbb{C}^3$ , on ait :

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ \langle p_0 \varepsilon(p_0, x) M(p_0, x) X, \bar{X} \rangle + \langle p_0 \mu(p_0, x) M(p_0, x) Y, \bar{Y} \rangle \right\} \\ & + \operatorname{Re} \left\{ \langle p_0^2 \beta(p_0, x) \varepsilon(p_0, x) \mu(p_0, x) M(p_0, x) Y, \bar{X} \rangle \right\} \\ & - \operatorname{Re} \left\{ \langle p_0^2 \beta(p_0, x) \varepsilon(p_0, x) \mu(p_0, x) M(p_0, x) X, \bar{Y} \rangle \right\} \geq \alpha (|X|^2 + |Y|^2). \end{aligned}$$

Le premier résultat d'existence et d'unicité présenté dans ce chapitre, valable aussi bien pour des milieux chiraux ou bi-anisotropiques, est donné par le théorème suivant.

**Théorème 2.7.** Soient  $(j, m) \in H(\operatorname{div}, \Omega)^2$  et supposons que les hypothèses 2.5 (respectivement 2.6) soient vérifiées. Alors les équations de Maxwell (1.5) (respectivement (1.3)) sont bien posées pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S$  est un ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$ . La solution  $(e(p, \cdot), h(p, \cdot))$  est de plus continue par rapport aux termes sources et vérifie :

$$\left\| \begin{pmatrix} e(p, \cdot) \\ h(p, \cdot) \end{pmatrix} \right\|_{L^2(\Omega)^6} \leq C(p) \left\{ \left\| \begin{pmatrix} j \\ m \end{pmatrix} \right\|_{L^2(\Omega)^6} + \left\| \begin{pmatrix} \operatorname{div}(j) \\ \operatorname{div}(m) \end{pmatrix} \right\|_{L^2(\Omega)^2} \right\},$$

où  $C(p) > 0$  est une constante. Enfin, l'application  $p \in D_0 \setminus S \mapsto (e(p, \cdot), h(p, \cdot)) \in L^2(\Omega)^6$  est holomorphe.

La démonstration du théorème 2.7 est donnée en section 2.2.1.1. Elle fait de plus appel à des résultats intermédiaires dont les démonstrations peuvent être trouvées en section 2.2.1.2.

### 2.2.1.1 Démonstration du théorème 2.7

On commence par réécrire les équations de Maxwell en présence de milieux bi-anisotropiques (1.5) (où (1.3) pour des milieux chiraux) comme un système de Friedrichs (1.18) :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } u = (e, h) \in \mathcal{H}_{\mathbb{M}} \text{ tels que :} \\ & \begin{cases} K(p, x)u(p, x) + \mathbb{M}u(p, x) = f(x), & x \in \Omega, \\ \boldsymbol{\nu}(x) \times (e(p, x) + \Lambda(x)(\boldsymbol{\nu}(x) \times h(p, x))) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.7)$$

où  $f = (-j, -m) \in H(\operatorname{div}, \Omega)^2$ ,  $\Lambda \in \mathcal{L}ip(\partial\Omega, \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^3))$  est une impédance vérifiant  $\operatorname{Re} \langle \Lambda(x)z, \bar{z} \rangle \geq 0$  pour tout  $(z, x) \in \mathbb{C} \times \partial\Omega$  et  $\mathbb{M}$  est l'opérateur non-borné définie par :

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla \times \\ \nabla \times & 0 \end{pmatrix},$$

de domaine  $\mathcal{D}(\mathbb{M})$  où :

$$\mathcal{D}(\mathbb{M}) = \{(e, h) \in (H(\operatorname{curl}, \Omega))^2 \mid \boldsymbol{\nu}(x) \times (e|_{\partial\Omega} + \Lambda(x)(\boldsymbol{\nu}(x) \times h|_{\partial\Omega})) = 0, x \in \partial\Omega\}.$$

Remarquons, par le théorème 1.8, que l'opérateur  $(\mathbb{M}, \mathcal{D}(\mathbb{M}))$  est maximal monotone.

L'opérateur de multiplication intervenant dans les équations de Maxwell (2.7) est donné par (1.20) pour les milieux bi-anisotropiques et par (1.21) pour des matériaux chiraux. Afin de traiter simultanément ces deux cas, on note :

$$K(p, x) = \begin{pmatrix} K_{11}(p, x)\mathbb{I}_3 & K_{12}(p, x)\mathbb{I}_3 \\ K_{21}(p, x)\mathbb{I}_3 & K_{22}(p, x)\mathbb{I}_3 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Soit l'opérateur  $\mathbb{Q}$  donné par :

$$\mathbb{Q} \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{div}(e) \\ \operatorname{div}(h) \end{pmatrix}.$$

C'est un opérateur différentiel du premier ordre vérifiant, au sens des distributions,  $\mathbb{Q}\mathbb{M} = 0$ . Au lieu d'utiliser une décomposition de Hodge comme dans la section 2.1, nous allons « elliptiser » [55, 81] le système (2.7). Le principe de cette procédure est de prendre en compte le noyau de  $\mathbb{M}$  avec l'aide de l'opérateur  $\mathbb{Q}$  en reformulant le problème (2.7) en un système équivalent qui est à résolvante compacte. On va maintenant suivre les étapes présentées dans la section 2.1.

#### I - REFORMULATION DE (2.7) EN UN PROBLÈME ÉQUIVALENT.

Tout d'abord, l'hypothèse (B2) permet d'appliquer l'opérateur différentiel  $\mathbb{Q}$  sur l'équation (2.7). Ainsi, en utilisant la formule  $\operatorname{div}(K_{kl}e) = K_{kl}\operatorname{div}(e) + \langle \nabla K_{kl}(p, x), e \rangle$  pour tout  $k, l$ , il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}f &= \mathbb{Q}K(p, x)u + \mathbb{Q}\mathbb{M}u \\ &= Z(p, x)u + \tilde{K}(p, x)\mathbb{Q}u. \end{aligned}$$

où  $\tilde{K}(p, x) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^2)$  et  $Z(p, x) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^6, \mathbb{C}^2)$  sont définis par :

$$\begin{aligned} \tilde{K}(p, x) &= \begin{pmatrix} K_{11}(p, x) & K_{12}(p, x) \\ K_{21}(p, x) & K_{22}(p, x) \end{pmatrix}, \\ Z(p, x) : \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \langle \nabla K_{11}(p, x), e \rangle + \langle \nabla K_{12}(p, x), h \rangle \\ \langle \nabla K_{21}(p, x), e \rangle + \langle \nabla K_{22}(p, x), h \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les équations de Maxwell sont transformées en un système elliptique en ajoutant de nouvelles inconnues  $\varphi$  et  $\psi$ , dont on montrera plus tard qu'elles sont nulles, au système (2.1). En suivant [55] ou [81], on obtient :

$$\begin{aligned} &\text{trouver } (e, h, \varphi, \psi) \in \mathcal{D}(\mathbb{M}) \cap (H(\operatorname{div}, \Omega))^2 \times H_0^1(\Omega)^2 \text{ tels que :} \\ &\left\{ \begin{aligned} (K(p, x) + \mathbb{M}) \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla \varphi \\ \nabla \psi \end{pmatrix} &= f, \quad x \in \Omega, \\ \tilde{K}(p, x)^{-1}Z(p, x) \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} + \mathbb{Q} \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} \\ &\quad + \tilde{K}(p, x)^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \tilde{K}(p, x)^{-1}\mathbb{Q}f, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \right. \quad (2.9) \end{aligned}$$

Par (2.8) et comme  $\det(K(p, x)) = \det(\tilde{K}(p, x))^3$ , on obtient que  $\tilde{K}(p, x)$  est inversible par (B2) et l'écriture de l'équation ci-dessus est justifiée. Afin de faire le lien entre (2.9)

et les systèmes de Friedrichs, nous introduisons l'opérateur différentiel :

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla \times & \nabla & 0 \\ \nabla \times & 0 & 0 & \nabla \\ \operatorname{div} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{div} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de domaine :

$$\mathcal{D}(\mathbb{T}) = \left\{ U \in (H(\operatorname{curl}, \Omega) \cap H(\operatorname{div}, \Omega))^2 \times H^1(\Omega)^2 \mid U(x)|_{\partial\Omega} \in \ker(\tilde{N}(x)) \right\},$$

où  $U = (e, h, \varphi, \psi)^T$ . Les conditions aux limites sont données à partir de l'application linéaire  $\tilde{N} : \partial\Omega \rightarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^8, \mathbb{C}^5)$  définie par :

$$\tilde{N}(x)U(x) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu} \times e(x) + \boldsymbol{\nu} \times \Lambda(x)(\boldsymbol{\nu} \times h(x)) \\ \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}, \text{ pour } x \in \partial\Omega.$$

Notons que  $\tilde{N} \in \mathcal{L}ip(\partial\Omega, \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^8, \mathbb{C}^5))$  par la régularité imposée sur l'impédance  $\Lambda$ . L'extension elliptique du système de Maxwell (2.9) peut ainsi être réécrite sous la forme plus compacte suivante :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } U = (e, h, \varphi, \psi)^T \in \mathcal{H}_{\mathbb{T}} \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} (\tilde{K}(p, x) + \mathbb{T})U(p, x) = F(p, x), & x \in \Omega, \\ U(p, x) \in \ker(\tilde{N}(x)), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.10)$$

où, par (B1) et le théorème de Rademacher,  $\tilde{K}(p, \cdot) \in L^\infty(\Omega, \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^8))$ . De plus, par (B1) et (B2),  $F(p, \cdot) := (f, \tilde{K}(p, \cdot)^{-1}\mathbb{Q}f)^T \in L^2(\Omega)^8$  est holomorphe pour  $p \in D_0$ .

**Lemme 2.8.** *Supposons que  $F(p, \cdot) = (f, \tilde{K}(p, \cdot)^{-1}\mathbb{Q}f)^T$  pour  $f \in (H(\operatorname{div}, \Omega))^2$  et que  $U = (e, h, \varphi, \psi)^T \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$  soit une solution de (2.10). On a alors :*

- 1)  $\varphi = \psi = 0$ ,
- 2)  $u = (e, h) \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$  vérifie les équations de Maxwell (2.7).

Le lemme 2.8 montre que la résolution de (2.7) se ramène à celle de son système elliptisé (2.10) pour un second membre particulier. Le lemme qui suit donne quelques propriétés utiles de l'opérateur  $\mathbb{T}$ .

**Lemme 2.9.** *L'opérateur  $(\mathbb{T}, \mathcal{D}(\mathbb{T}))$  est maximal monotone à résolvante compacte.*

La partie principale du problème elliptisé (2.10) est à résolvante compacte. Nous n'avons donc pas besoin de traiter les étapes II et III de l'ébauche de démonstration présentée dans la section 2.1. On passe ainsi immédiatement à l'étape IV de la preuve.

#### IV - RÉOLUTION PAR THÉORIE DE FREDHOLM ANALYTIQUE.

L'opérateur de multiplication  $\tilde{K}(p, \cdot)$  appartient à  $L^\infty(\Omega)$  pour tout  $p$  dans  $D_0$ . Le lemme 2.9 montre alors que l'ensemble résolvant de  $(\tilde{K}(p, \cdot) + \mathbb{T}, \mathcal{D}(\mathbb{T}))$  est non-vidé pour

tout  $p \in D_0$ . La famille holomorphe (par les hypothèses (B1) et (B2)) d'opérateurs fermés  $\left(\tilde{K}(p, \cdot) + \mathbb{T}, \mathcal{D}(\mathbb{T})\right)_{p \in D_0}$  est de plus à résolvante compacte pour tout  $p$ .

Ainsi, résoudre (2.9) revient à inverser une famille holomorphe d'opérateurs fermés à résolvante compacte et nous pouvons donc utiliser l'alternative de Fredholm analytique (théorème A.7). Pour lever cette alternative, il ne reste plus qu'à trouver une valeur de  $p \in D_0$  pour laquelle le système (2.10) est bien posé.

**Lemme 2.10.** *L'opérateur  $\left(\tilde{K}(p_0, \cdot) + \mathbb{T}, \mathcal{D}(\mathbb{T})\right)$ , pour  $p_0$  vérifiant (B3) (respectivement (C3)), est inversible. De plus, on a :*

$$\left(\tilde{K}(p_0, \cdot) + \mathbb{T}\right)^{-1} \in \mathcal{B}(L^2(\Omega)^8, \mathcal{D}(\mathbb{T})).$$

Le lemme 2.10 et l'alternative de Fredholm analytique (théorème A.7) montrent que la famille holomorphe, sur  $D_0$ , d'opérateurs  $\left(\tilde{K}(p, \cdot) + \mathbb{T}, \mathcal{D}(\mathbb{T})\right)$  est inversible pour  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S$  est un sous-ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$ . Le système (2.10) est alors bien posé pour tout  $p \in D_0 \setminus S$ . De plus, par (B1) et (B2) (respectivement (C1) et (C2)), les applications  $p \in D_0 \mapsto \left(\tilde{K}(p, \cdot) + \mathbb{T}\right) \in \mathcal{B}(\mathcal{D}(\mathbb{T}), L^2(\Omega)^8)$  et  $p \in D_0 \mapsto F(p) \in L^2(\Omega)^8$  sont holomorphes. Par suite, le théorème A.5 assure que l'application  $U : p \in D_0 \setminus S \mapsto U(p, \cdot) := \left(\tilde{K}(p, \cdot) + \mathbb{T}\right)^{-1} F(p, \cdot) \in L^2(\Omega)^8$  est holomorphe. On a de plus l'existence d'une constante  $C(p) > 0$  telle que :

$$\|U(p, \cdot)\|_{L^2(\Omega)^8} \leq C(p) \|F(p, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Enfin, le lemme 2.8 entraîne que l'estimation précédente se réduit à :

$$\|e(p, \cdot)\|_{L^2(\Omega)^3} + \|h(p, \cdot)\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C(p) \left\{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbb{Q}f\|_{L^2(\Omega)} \right\},$$

et que l'application  $p \in D_0 \setminus S \mapsto u(p, \cdot) \in L^2(\Omega)^6$ , où  $u(p, \cdot)$  vérifie (2.7), est holomorphe, terminant ainsi la preuve.

### 2.2.1.2 Démonstration des lemmes 2.8, 2.9 et 2.10

**Démonstration du lemme 2.8.** On suit la démonstration du théorème 4.2 de [55]. En appliquant l'opérateur  $\mathbb{Q}$  à la première équation de (2.9), il vient :

$$\begin{pmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} = \mathbb{Q}f - \mathbb{Q} \left( K(p, \cdot) \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} \right).$$

Les applications linéaires  $\tilde{K}(p, x)$  et  $Z(p, x)$  sont données à partir de la relation  $\mathbb{Q}K(p, x)u = Z(p, x)u + \tilde{K}(p, x)\mathbb{Q}u$ ; ce qui montre que la seconde équation de (2.9) peut être écrite comme suit :

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \mathbb{Q}f - \mathbb{Q} \left( K(p, \cdot) \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} \right).$$



Par conséquent,  $\varphi$  et  $\psi$  vérifient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \text{trouver } \vartheta \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \Delta\vartheta - \vartheta = 0, \text{ dans } \Omega, \end{aligned}$$

où  $\vartheta \in \{\varphi, \psi\}$ . La fonction nulle est l'unique solution de l'équation ci-dessus ce qui achève la démonstration du lemme. ■

**Démonstration du lemme 2.9.** Tout d'abord, remarquons qu'il existe trois matrices symétriques réelles  $T_j \in \text{Hom}(\mathbb{C}^8)$  telles que  $\mathbb{T} = \sum_{j=1}^3 T_j \partial_j$  avec :

$$T_j = \begin{pmatrix} 0\mathbb{I}_3 & -[\mathbf{e}_j \times] & \mathbf{e}_j & 0 \\ [\mathbf{e}_j \times] & 0\mathbb{I}_3 & 0 & \mathbf{e}_j \\ \mathbf{e}_j^T & 0\mathbb{I}_3 & 0 & 0 \\ 0\mathbb{I}_3 & \mathbf{e}_j^T & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où  $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1,2,3}$  sont les vecteurs (écrits en colonnes) de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Pour montrer que l'opérateur  $(\mathbb{T}, \mathcal{D}(\mathbb{T}))$  est maximal monotone, on utilise le théorème 1.5. Soit, dans un premier temps,  $\mathbb{T}_\nu = \sum_{j=1}^3 T_j \nu_j$  où  $\nu$  est la normale unitaire sortante à  $\partial\Omega$ . Par le calcul on obtient

$$\det(\mathbb{T}_\nu) = (\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2)^4 > 0.$$

La frontière  $\partial\Omega$  est donc de multiplicité constante pour  $\mathbb{T}$ .

Soit maintenant  $U(x) = (e, h, \varphi, \psi)^T \in \ker(\tilde{N}(x))$ . La définition de  $\tilde{N}(x)$ , l'antisymétrie de la matrice du produit vectoriel  $[\nu \times]$ , et la positivité de  $\Lambda$  entraînent :

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T}_\nu(x)U(x), \overline{U(x)} \rangle &= \langle \nu, e \rangle \overline{\varphi} + \langle \nu, h \rangle \overline{\psi} + \langle \nu, \bar{e} \rangle \varphi + \langle \nu, \bar{h} \rangle \psi - \langle \nu \times h, \bar{e} \rangle + \langle \nu \times e, \bar{h} \rangle \\ &= 2\mathcal{R}e \langle \nu \times e, \bar{h} \rangle = -2\mathcal{R}e \langle \nu \times \Lambda(x)(\nu \times h), \bar{h} \rangle \\ &= 2\mathcal{R}e \langle \Lambda(x)(\nu \times h), \overline{\nu \times h} \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Les conditions aux limites sont donc positives. Enfin, le spectre de  $\mathbb{T}_\nu$  est  $\{-1, +1\}$  où chaque valeur propre est de multiplicité 4. Comme  $\dim(\ker(\tilde{N}(x))) = 4$ , les conditions aux limites sont aussi maximales. Le théorème 1.5 assure alors que l'opérateur  $(\mathbb{T}, \mathcal{D}(\mathbb{T}))$  est maximal monotone.

Maintenant, les résultats de [65] (théorème 1 page 62) montrent qu'on a, pour tout  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{M}) \cap (H(\text{div}, \Omega))^2$ , l'inégalité :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)^6} \leq C \left\{ \|u\|_{L^2(\Omega)^6} + \|\mathbb{M}u\|_{L^2(\Omega)^6} + \|\mathbb{Q}u\|_{L^2(\Omega)^6} \right\}, \quad C > 0.$$

Ainsi, l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  étant compacte, il s'ensuit que l'injection de  $\mathcal{D}(\mathbb{M})$  dans  $L^2(\Omega)^6$  est elle aussi compacte. Il en est donc de même pour l'injection de  $\mathcal{D}(\mathbb{T})$  dans  $L^2(\Omega)^8$ . Par conséquent, la résolvante de  $(\mathbb{T}, \mathcal{D}(\mathbb{T}))$  est compacte. ■

**Démonstration du lemme 2.10.** Tout d'abord, notons que l'inversion de l'opérateur  $(\tilde{K}(p_0, \cdot) + \mathbb{T})$  sur  $\mathcal{D}(\mathbb{T})$  se réduit à résoudre le problème :

$$\begin{aligned} \text{trouver } U = (e, h, \varphi, \psi)^T \in \mathcal{H}_{\mathbb{T}} \text{ tel que :} \\ \begin{cases} (\tilde{K}(p_0, x) + \mathbb{T})U(p, x) = G, & x \in \Omega, \\ U(p, x) \in \ker(\tilde{N}(x)), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.11)$$

où  $G$  appartient à  $L^2(\Omega)^8$ . Le lemme 2.9 donne l'existence d'un  $\alpha > 0$  dans l'ensemble résolvant de  $(\mathbb{T}, \mathcal{D}(\mathbb{T}))$ . Ainsi (2.11) est équivalent à résoudre :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } U \in L^2(\Omega)^8 \text{ tel que :} \\ & \left( \mathbb{I}_8 + (\alpha \mathbb{I}_8 + \mathbb{T})^{-1} \left( \tilde{K}(p_0, \cdot) - \alpha \mathbb{I}_8 \right) \right) U = \tilde{G}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

où  $\tilde{G} = (\alpha \mathbb{I}_8 + \mathbb{T})^{-1} G$ . Le fait que  $\tilde{K}(p_0, x)$  soit borné et la compacité de la résolvante de  $(\alpha \mathbb{I}_8 + \mathbb{T})^{-1}$  montrent que  $(\alpha \mathbb{I}_8 + \mathbb{T})^{-1} \left( \tilde{K}(p_0, \cdot) - \alpha \mathbb{I}_8 \right)$  définit un opérateur compact de  $L^2(\Omega)^8$ . L'alternative de Fredholm assure alors que le problème (2.12) est bien posé si l'opérateur

$$\left( \mathbb{I}_8 + (\alpha \mathbb{I}_8 + \mathbb{T})^{-1} \left( \tilde{K}(p_0, \cdot) - \alpha \mathbb{I}_8 \right) \right) \in \mathcal{B}(L^2(\Omega)^8),$$

est injectif. Posons donc  $\tilde{G} = 0$  dans (2.12). L'opérateur  $(\alpha \mathbb{I}_8 + \mathbb{T})^{-1} : L^2(\Omega)^8 \mapsto \mathcal{D}(\mathbb{T})$  étant borné il suit que  $U$  solution de (2.12) appartient à  $\mathcal{D}(\mathbb{T})$  et vérifie l'équation (2.11) avec un second membre nul. En appliquant maintenant le lemme 2.8, il vient

$$U = (e, h, \varphi, \psi)^T = (e, h, 0, 0)^T \in \mathcal{D}(\mathbb{M}) \times H_0^1(\Omega)^2,$$

où  $(e, h)$  est solution de (2.7) pour  $p = p_0$ . L'hypothèse (B3) (respectivement (C3)) et la maximale monotonie de  $(\mathbb{M}, \mathcal{D}(\mathbb{M}))$  entraînent enfin que  $(e, h) = (0, 0)$ . Cela conclut la démonstration. ■

## 2.2.2 Métamatériaux électromagnétiques à indice tensoriel

Au chapitre 1, nous avons présenté des exemples de métamatériaux dont les indices sont tensoriels. Le but de cette section est de traiter ce type de cas et les hypothèses correspondantes sont ci-dessous :

**Hypothèses 2.11** (Métamatériaux bi-anisotropiques tensoriels (1.5)).

(BT1)  $\varepsilon(p, x), \mu(p, x), \xi(p, x)$  et  $\zeta(p, x)$  (qui sont des matrices  $3 \times 3$ ) sont holomorphes pour tout  $p \in D_0$  et pour presque tout  $x \in \Omega$ .

(BT2)  $\varepsilon(p, x), \mu(p, x), \xi(p, x)$  et  $\zeta(p, x)$  sont dans  $L^\infty(\Omega)$  pour tout  $p \in D_0$ . De plus,  $\det(\varepsilon(p, x)\mu(p, x) - \xi(p, x)\zeta(p, x)) \neq 0$  pour presque tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $p \in D_0$ .

(BT3) Il existe  $p_0 \in D_0$  et  $\alpha > 0$  tels que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \{ \langle p_0 \varepsilon(p_0, x) X, \bar{X} \rangle + \langle p_0 \mu(p_0, x) Y, \bar{Y} \rangle + \langle p_0 \xi(p_0, x) Y, \bar{X} \rangle \} \\ & + \operatorname{Re} \{ \langle p_0 \zeta(p_0, x) X, \bar{Y} \rangle \} \geq \alpha (|X|^2 + |Y|^2), \end{aligned}$$

pour presque tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $X, Y \in \mathbb{C}^3$ .

(BT4) Il existe une fonction  $a : \mathbb{C} \times \Omega \mapsto a(p, x) \in \mathbb{C}$ , lipschitzienne sur  $\bar{\Omega}$ , holomorphe sur  $D_0$  et une constante  $\alpha > 0$  telles que :

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \{ \langle p \varepsilon(p, x) a(p, x) X, \bar{X} \rangle + \langle p \mu(p, x) a(p, x) Y, \bar{Y} \rangle \} \\ & + \operatorname{Re} \{ \langle p \xi(p, x) a(p, x) Y, \bar{X} \rangle + \langle p \zeta(p, x) a(p, x) X, \bar{Y} \rangle \} \geq \alpha (|X|^2 + |Y|^2), \end{aligned}$$

pour presque tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $(p, X, Y) \in D_0 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ .

**Hypothèses 2.12** (Métamatériaux diélectriques tensoriels (1.1)). *Supposons que les hypothèses (BT1), (BT2) et (BT3) sont vérifiées et remplaçons (BT4) par :*

(DT4) *Les constantes de couplages  $\xi$  et  $\zeta$  sont nulles et il existe deux fonctions  $a_\varepsilon, a_\mu : \mathbb{C} \times \Omega \mapsto a_\varepsilon(p, x), a_\mu(p, x) \in \mathbb{C}$  toutes deux lipschitziennes sur  $\bar{\Omega}$  et holomorphes sur  $D_0$  telles que :*

$$\operatorname{Re} \left\{ \langle p\vartheta(p, x)a_\vartheta(p, x)X, \bar{X} \rangle \right\} \geq \alpha|X|^2, \text{ avec } \vartheta \in \{\varepsilon, \mu\}, \alpha > 0,$$

pour presque tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $(p, X, Y) \in D_0 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ .

**Hypothèses 2.13** (Métamatériaux chiraux tensoriels (1.3)).

(CT1)  $\varepsilon(p, x), \mu(p, x)$  et  $\beta(p, x)$  sont holomorphes sur  $D_0$  pour presque tout  $x \in \Omega$ .

(CT2)  $\varepsilon(p, x), \mu(p, x)$  et  $\beta(p, x)$  appartiennent à  $L^\infty(\Omega)$  pour tout  $p \in D_0$ . De plus

$$\det [p^2\varepsilon(p, x)\mu(p, x)] \det \widetilde{\mathcal{M}} \neq 0,$$

pour presque tout  $x \in \Omega$ , où  $\widetilde{\mathcal{M}}(p, x) = (\mathbb{I}_3 + p^2\beta(p, x)\varepsilon(p, x)\beta(p, x)\mu(p, x))^{-1}$ .

(CT3) Il existe  $p_0 \in D_0$  et  $\alpha > 0$  tels que l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ \langle p_0\widetilde{\mathcal{M}}(p_0, x)\varepsilon(p_0, x)X, \bar{X} \rangle + \langle p_0\mathcal{M}(p_0, x)\mu(p_0, x)Y, \bar{Y} \rangle \right\} \\ & + \operatorname{Re} \left\{ \langle p_0^2\beta(p_0, x)\varepsilon(p_0, x)\mathcal{M}(p_0, x)\mu(p_0, x)Y, \bar{X} \rangle \right\} \\ & - \operatorname{Re} \left\{ \langle p_0^2\widetilde{\mathcal{M}}(p_0, x)\beta(p_0, x)\mu(p_0, x)\varepsilon(p_0, x)X, \bar{Y} \rangle \right\} \geq \alpha(|X|^2 + |Y|^2), \end{aligned}$$

pour presque tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $X, Y \in \mathbb{C}^3$ .

(CT4) Il existe une fonction  $a : \mathbb{C} \times \Omega \mapsto a(p, x) \in \mathbb{C}$ , lipschitzienne sur  $\bar{\Omega}$  et holomorphe sur  $D_0$  et  $\alpha > 0$ , une constante, telles que :

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ \langle pa(p, x)\widetilde{\mathcal{M}}(p, x)\varepsilon(p, x)X, \bar{X} \rangle + \langle pa(p, x)\mathcal{M}(p, x)\mu(p, x)Y, \bar{Y} \rangle \right\} \\ & + \operatorname{Re} \left\{ \langle p^2a(p, x)\beta(p, x)\varepsilon(p, x)\mathcal{M}(p, x)\mu(p, x)Y, \bar{X} \rangle \right\} \\ & - \operatorname{Re} \left\{ \langle p^2a(p, x)\widetilde{\mathcal{M}}(p, x)\beta(p, x)\mu(p, x)\varepsilon(p, x)X, \bar{Y} \rangle \right\} \geq \alpha(|X|^2 + |Y|^2), \end{aligned}$$

pour presque tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $(p, X, Y) \in D_0 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ . Ci-dessus, on a noté  $\mathcal{M}(p, x) = (\mathbb{I}_3 + p^2\beta(p, x)\mu(p, x)\beta(p, x)\varepsilon(p, x))^{-1}$ .

Nous avons alors le résultat suivant.

**Théorème 2.14.** *Supposons que les hypothèses 2.11 (respectivement 2.12 ou 2.13) soient vérifiées. Alors, pour tout  $(j, m) \in L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3$  les équations de Maxwell (1.5) (respectivement (1.1) ou (1.3)) admettent une unique solution pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S \subset D_0$  est un sous-ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$ . La solution est de plus continue par rapport aux termes sources :*

$$\forall p \in D_0 \setminus S, \left\| \begin{pmatrix} e(p, \cdot) \\ h(p, \cdot) \end{pmatrix} \right\|_{L^2(\Omega)^6} \leq C(p) \left\| \begin{pmatrix} j \\ m \end{pmatrix} \right\|_{L^2(\Omega)^6},$$

où  $C(p) > 0$  est une constante. Enfin l'application  $p \in D_0 \setminus S \mapsto (e(p, \cdot), h(p, \cdot)) \in L^2(\Omega)^6$  est holomorphe.

La démonstration du théorème 2.14 est donnée dans une section à part (voir section 2.2.2.1) et utilise des lemmes intermédiaires. Les preuves de ces derniers sont réalisées dans la section 2.2.2.2.

### 2.2.2.1 Démonstration du théorème 2.14

Nous nous contentons de résoudre le système (1.5) pour un opérateur de multiplication  $K(p, x)$  vérifiant les hypothèses (BT1), (BT2), (BT3) et (BT4) ou (DT4). Le cas de métamatériaux vérifiant (CT1), (CT2), (CT3) et (CT4) peut être fait exactement de la même manière. La démonstration suit le schéma présenté dans la section 2.1.

#### I - REFORMULATION DE (2.7) EN 2 SYSTÈMES COUPLÉS.

Soit la décomposition de Hodge [28] suivante :

$$L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3 = (H(\operatorname{div}0, \Omega))^2 \oplus \operatorname{grad}(H_0^1(\Omega))^2, \quad (2.13)$$

où  $H(\operatorname{div}0, \Omega) = \{v \in L^2(\Omega)^3 \mid \operatorname{div}v = 0\}$ . Soient  $P_0 : L^2(\Omega)^6 \rightarrow H(\operatorname{div}0, \Omega)^2$  et  $P_\nabla : L^2(\Omega)^6 \rightarrow \operatorname{grad}(H_0^1(\Omega))^2$  les projections orthogonales associées à (2.13). Remarquons que  $P_\nabla \mathbb{M}u = 0$  pour tout  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$ . Cela provient du fait que  $\mathbb{Q}\mathbb{M} = 0$  et donc  $\mathbb{M}u \in H(\operatorname{div}0, \Omega)^2 = (\operatorname{grad}H_0^1(\Omega))^2^\perp$  par (2.13). Ainsi, en projetant le système (2.7), il vient :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } u = P_0u + P_\nabla u \in \mathcal{D}(\mathbb{M}) \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} P_0K(p, \cdot)(P_0u + P_\nabla u) + P_0\mathbb{M}P_0u = P_0f, \\ P_\nabla K(p, \cdot)(P_\nabla u + P_0u) = P_\nabla f. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

#### II - TRAITEMENT DE LA PROJECTION SUR $\operatorname{grad}(H_0^1(\Omega))^2$ .

La seconde équation de (2.14) permet d'exprimer  $P_\nabla u$ , qui vérifie  $\mathbb{M}P_\nabla u = 0$ , en fonction de  $P_0u$ . Cela est effectué dans le lemme ci-dessous :

**Lemme 2.15.** *Supposons que les hypothèses (B1), (B2), (B3) et (BT4) ou (DT4) soient vérifiées. Alors l'opérateur  $P_\nabla K(p, \cdot)P_\nabla \in \mathcal{B}(\operatorname{grad}(H_0^1(\Omega))^2)$  est inversible, à inverse borné, pour tout  $p \in D_0 \setminus S_0$  où  $S_0$  est un ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$ . De plus, l'application*

$$p \in D_0 \setminus S_0 \mapsto (P_\nabla K(p, \cdot)P_\nabla)^{-1} \in \mathcal{B}(\operatorname{grad}(H_0^1(\Omega))^2),$$

*est holomorphe.*

La démonstration du lemme étant technique, elle est donnée à la suite de la preuve du théorème dans la section 2.2.2.2.

#### III - ECRITURE D'UN PROBLÈME VÉRIFIÉ PAR LA PROJECTION SUR $H(\operatorname{div}0, \Omega)^2$ .

Par le lemme 2.15, on peut réécrire la seconde équation de (2.14) comme suit :

$$P_\nabla u = (P_\nabla K(p, \cdot)P_\nabla)^{-1} [P_\nabla f - P_\nabla K(p, \cdot)P_0u].$$

En reportant cette expression dans la première équation de (2.14) il vient que, pour trouver  $P_0u$ , on doit résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } P_0u \in \mathcal{D}(\mathbb{M}) \cap H(\operatorname{div}0, \Omega)^2 \text{ tel que :} \\ & B(p, \cdot)P_0u + P_0\mathbb{M}P_0u = \tilde{f}(p). \end{aligned} \quad (2.15)$$

où le second membre est défini, pour tout  $p$  dans  $D_0 \setminus S_0$ , par :

$$\tilde{f}(p, \cdot) = P_0 f - P_0 K(p, \cdot) P_{\nabla} (P_{\nabla} K(p, \cdot) P_{\nabla})^{-1} P_{\nabla} f \in H(\operatorname{div} 0, \Omega)^2,$$

et  $B(p)$  est un opérateur borné donné par :

$$B(p, \cdot) = P_0 K(p, \cdot) P_0 - P_0 K(p, \cdot) P_{\nabla} (P_{\nabla} K(p, \cdot) P_{\nabla})^{-1} P_{\nabla} K(p, \cdot) P_0 \in \mathcal{B}(H(\operatorname{div} 0, \Omega)^2).$$

#### IV - RÉOLUTION FINALE PAR THÉORIE DE FREDHOLM ANALYTIQUE.

Suite aux hypothèses (BT1), (BT2) et le lemme 2.15,  $\tilde{f}(p)$  et  $B(p)$  définissent des applications holomorphes sur  $D_0$  à valeur dans  $H(\operatorname{div} 0, \Omega)^2$  et dans  $\mathcal{B}(H(\operatorname{div} 0, \Omega)^2)$  respectivement.

Soit maintenant  $\tilde{\mathbb{M}}$  la restriction de  $\mathbb{M}$  à l'ensemble  $(H(\operatorname{div} 0, \Omega))^2$ . Ainsi, trouver  $P_0 u$  solution de (2.15) revient à inverser la famille holomorphe sur  $D_0$  (par (BT1) et (BT2)) d'opérateurs fermés de  $(H(\operatorname{div} 0, \Omega))^2$  ci-dessous

$$\left( B(p, \cdot) + \tilde{\mathbb{M}}, (H(\operatorname{div} 0, \Omega))^2 \cap \mathcal{D}(\mathbb{M}) \right).$$

Afin de récupérer de la compacité sur la résolvante de  $\tilde{\mathbb{M}}$ , on considère l'inégalité de Majda [65] suivante :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{M}) \cap (H(\operatorname{div}, \Omega))^2, \\ \|u\|_{H^1(\Omega)^6} \leq C \left\{ \|u\|_{L^2(\Omega)^6} + \|\mathbb{M}u\|_{L^2(\Omega)^6} + \|\mathbb{Q}u\|_{L^2(\Omega)^6} \right\}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

L'inégalité (2.16), la compacité de l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ , et la maximale monotonie de  $(\mathbb{M}, \mathcal{D}(\mathbb{M}))$  entraînent que  $\left( B(p, \cdot) + \tilde{\mathbb{M}}, (H(\operatorname{div} 0, \Omega))^2 \cap \mathcal{D}(\mathbb{M}) \right)$  est holomorphe sur  $D_0 \setminus S_0$  et possède une résolvante compacte ainsi qu'un ensemble résolvant non-vide pour tout  $p \in D_0 \setminus S_0$ . Par (BT3), il existe  $p_0$  tel que  $K(p_0, x)$  est coercif pour presque tout  $x \in \Omega$ . De ce fait, l'équation (2.7) est bien posée pour  $p = p_0$ . Les deux problèmes (2.7) et (2.15) étant équivalents, il suit que  $B(p_0, \cdot) + \tilde{\mathbb{M}}$  est inversible sur  $(H(\operatorname{div} 0, \Omega))^2 \cap \mathcal{D}(\mathbb{M})$ . Enfin, en utilisant le théorème A.7 (alternative de Fredholm analytique), il vient que  $B(p, \cdot) + \tilde{\mathbb{M}}$  est inversible sur  $(H(\operatorname{div} 0, \Omega))^2 \cap \mathcal{D}(\mathbb{M})$  pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  avec  $S = S_0 \cup S_1$ , où  $S_1$  est un sous-ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0 \setminus S_0$ .

Remarquons que l'opérateur  $\left( B(p, \cdot) + \tilde{\mathbb{M}} \right)^{-1}$  est un élément de  $\mathcal{B}(H(\operatorname{div} 0, \Omega)^2)$  et que l'application  $p \in D_0 \setminus S \mapsto \left( B(p, \cdot) + \tilde{\mathbb{M}} \right)^{-1}$  est holomorphe. Il en est donc de même pour l'application  $p \mapsto P_0 u(p, \cdot)$ . Le lemme 2.15 montre que l'application  $p \mapsto P_{\nabla} u(p, \cdot)$  est holomorphe et ainsi l'application  $p \in D_0 \setminus S \mapsto u(p, \cdot) = P_{\nabla} u(p, \cdot) + P_0 u(p, \cdot) \in L^2(\Omega)^6$  est elle aussi holomorphe.

Finalement, en utilisant le fait que les inverses des opérateurs  $B(p, \cdot) + \tilde{\mathbb{M}}$  et  $P_{\nabla} K(p, \cdot) P_{\nabla}$  sont bornés, on obtient que la solution de (2.7) est continue par rapport aux termes sources :

$$\|u(p, \cdot)\|_{L^2(\Omega)^6} \leq \|P_{\nabla} u(p, \cdot)\|_{L^2(\Omega)^6} + \|P_0 u(p, \cdot)\|_{L^2(\Omega)^6} \leq C(p) \|f\|_{L^2(\Omega)^6},$$

où  $C(p) > 0$  est une constante.

### 2.2.2.2 Démonstration du lemme 2.15

Nous commençons par démontrer le lemme lorsque les hypothèses (BT1), (BT2), (BT3) et (BT4) sont vérifiées. Le cas particulier où (DT4) au lieu de (BT4) est vérifiée est traité ensuite.

#### Cas des milieux bi-anisotropiques vérifiant les hypothèses (2.11).

L'inversion, sur  $\text{grad}(H_0^1(\Omega))^2$ , de l'opérateur  $P_{\nabla}K(p, \cdot)P_{\nabla}$  se ramène à résoudre le problème :

$$\begin{aligned} \text{trouver } \varphi \in H_0^1(\Omega)^2 \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega)^2 : \\ \int_{\Omega} \langle K(p, x)\mathbb{G}\varphi, \overline{\mathbb{G}v} \rangle dx = \langle h, v \rangle_{H^{-1}(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega)^2}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

où  $h$  est un élément de  $H^{-1}(\Omega)^2$  et  $\mathbb{G}\varphi = (-\nabla\varphi_1, -\nabla\varphi_2)^T$  pour  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T \in H_0^1(\Omega)^2$ . L'équation (2.17) est équivalente à une équation aux dérivées partielles du second ordre :

$$\begin{aligned} \text{trouver } \varphi \in H_0^1(\Omega)^2 \text{ tel que :} \\ -\mathbb{Q}(K(p, \cdot)\mathbb{G}\varphi(p, x)) = h. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Remarquons que la partie principale de l'opérateur à inverser pour résoudre (2.18) peut ne pas être coercive pour certains  $p \in D_0$ . C'est pourquoi nous introduisons le changement d'inconnue :

$$\varphi(p, \cdot) = a(p, \cdot)\psi(p, \cdot), \quad (2.19)$$

où  $a$  est donnée par (BT4). En reportant (2.19) dans (2.18), il vient

$$\begin{aligned} \text{trouver } \psi \in H_0^1(\Omega)^2 \text{ tel que :} \\ \mathbb{S}(p)\psi := -\mathbb{Q}K(p, x) \left( a(p, x)\mathbb{G}\psi(p, x) + \begin{pmatrix} \psi_1(p, x)\nabla a(p, x) \\ \psi_2(p, x)\nabla a(p, x) \end{pmatrix} \right) = h. \end{aligned} \quad (2.20)$$

L'hypothèse (BT4) assure alors que l'opérateur de multiplication  $a(p, \cdot)K(p, \cdot)$  est coercif pour tout  $p \in D_0$  impliquant que la partie principale de (2.20) est coercive. L'application  $a(p, \cdot)$  est de plus holomorphe sur  $D_0$  pour presque tout  $x \in \Omega$  et lipschitzienne sur  $\overline{\Omega}$  pour tout  $p \in D_0$ . Le théorème de Rademacher assure donc que  $\nabla a(p, \cdot) \in L^\infty(\Omega)$ . Ainsi, la famille (en  $p \in D_0$ ) d'opérateurs  $\mathbb{S}(p) : H_0^1(\Omega)^2 \rightarrow H^{-1}(\Omega)^2$  est une famille holomorphe d'opérateurs fermés de  $H^{-1}(\Omega)^2$ .

Supposons maintenant qu'il existe un élément  $\lambda$  appartenant à l'ensemble résolvant de  $(\mathbb{S}(p), H_0^1(\Omega)^2)$ . L'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$  étant compacte, il suit que la résolvante de  $\mathbb{S}(p)$  définit un opérateur compact de  $H^{-1}(\Omega)^2$ . Par conséquent, résoudre (2.20) revient à inverser une famille holomorphe (par (BT1) et (BT2)) d'opérateurs fermés à résolvante compacte. Cela peut être fait à l'aide du théorème A.7.

Il ne reste donc plus qu'à prouver que l'ensemble résolvant de  $(\mathbb{S}(p), H_0^1(\Omega)^2)$  est non-vide pour tout  $p \in D_0$  et à trouver un élément de  $D_0$  pour lequel le problème (2.20) est bien posé.

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $A_p(\psi, v)$  la forme bilinéaire définie, pour tout  $\psi, v \in H_0^1(\Omega)^2$ , par :

$$A_p(\psi, v) = \int_{\Omega} \langle K(p, x) a(p, x) \mathbb{G}\psi, \overline{\mathbb{G}v} \rangle + \left\langle K(p, x) \begin{pmatrix} \psi_1(p, x) \nabla a(p, x) \\ \psi_2(p, x) \nabla a(p, x) \end{pmatrix}, \overline{\mathbb{G}v} \right\rangle dx.$$

Par (BT4) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A_p(\psi, \psi)) + \operatorname{Re}(\lambda) \int_{\Omega} |\psi|^2 dx &\geq \alpha \|\mathbb{G}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \operatorname{Re}(\lambda) \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - 2 \|K(p, \cdot) \mathbb{G}a(p, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\mathbb{G}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

L'inégalité d'Young  $ab \leq \xi a^2/2 + b^2/(2\xi)$  appliquée au terme  $\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\mathbb{G}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2$  avec  $\xi = \alpha / \left(2 \|K(p, \cdot) \mathbb{G}a(p, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}\right)$  entraîne alors :

$$\begin{aligned} \|\mathbb{G}\psi\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{\alpha}{4 \|K(p, \cdot) \mathbb{G}a(p, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}} \|\mathbb{G}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\|K(p, \cdot) \mathbb{G}a(p, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}}{\alpha} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

En regroupant les calculs ci-dessus, on obtient enfin l'estimation :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A_p(\psi, \psi)) + \operatorname{Re}(\lambda) \int_{\Omega} |\psi|^2 dx &\geq \left( \operatorname{Re}(\lambda) - \frac{\|K(p, \cdot) \mathbb{G}a(p, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{\alpha} \right) \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \|\mathbb{G}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  possédant une partie réelle assez grande, le lemme de Lax-Milgram entraîne que l'opérateur  $(\mathbb{S}(p) + \lambda)$  est inversible sur  $H_0^1(\Omega)$  et ainsi l'ensemble résolvant de  $(\mathbb{S}(p), H_0^1(\Omega)^2)$  est non-vide pour tout  $p \in D_0$ .

Il reste donc à trouver un élément de  $D_0$  tel que (2.20) soit bien posée. En prenant le  $p_0$  défini par l'hypothèse (BT3), il vient que l'équation (2.17) est bien posée. Le changement d'inconnue inverse (2.19) implique alors que (2.20) admet une unique solution pour  $p = p_0$ . La famille holomorphe d'opérateurs fermés  $(\mathbb{S}(p), H_0^1(\Omega)^2)$  est donc inversible pour tout  $p \in D_0 \setminus S_0$  où  $S_0$  est un sous-ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$ .

Enfin, l'opérateur  $\mathbb{S}(p)^{-1}$  appartient à  $\mathcal{B}(H^{-1}(\Omega)^2, H_0^1(\Omega)^2)$  est holomorphe sur  $D_0 \setminus S_0$  par le théorème A.5 qui s'applique car l'application  $p \in D_0 \mapsto \mathbb{S}(p) \in \mathcal{B}(H_0^1(\Omega)^2, H^{-1}(\Omega)^2)$  est holomorphe par (BT1) et (BT2).

Par ce qui précède, les problèmes (2.20) et (2.17) sont équivalents. Ainsi le caractère bien posé de (2.20) entraîne l'inversibilité de l'opérateur  $P_{\nabla} K(p, \cdot) P_{\nabla}$  sur  $(\operatorname{grad}(H_0^1(\Omega)))^2$  pour tout  $p \in D_0 \setminus S_0$ . Le théorème du graphe fermé montre alors que

$$(P_{\nabla} K(p, \cdot) P_{\nabla})^{-1} \in \mathcal{B}(\operatorname{grad}(H_0^1(\Omega))^2).$$

Enfin,  $p \in D_0 \setminus S_0 \mapsto (P_{\nabla} K(p, \cdot) P_{\nabla})^{-1} \in \mathcal{B}(\operatorname{grad}(H_0^1(\Omega))^2)$  est holomorphe par le théorème A.5 et le fait que l'application  $p \in D_0 \mapsto P_{\nabla} K(p, \cdot) P_{\nabla} \in \mathcal{B}(\operatorname{grad}(H_0^1(\Omega))^2)$  est holomorphe par (BT1) et (BT2).

### Cas des milieux diélectriques vérifiant les hypothèses (2.12).

On suppose que (DT4) est vérifiée au lieu de (BT4), l'opérateur de multiplication  $K(p, x)$  est la matrice (1.19) qui est diagonale par blocs avec  $K(p, x) = p \operatorname{diag} [\varepsilon(p, x), \mu(p, x)]$ . De ce fait, l'équation (2.17) est réduite à :

$$\begin{aligned} \text{trouver } \varphi \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\operatorname{div}(p\vartheta(p, x)\nabla\varphi_\vartheta) = h_\vartheta, \end{aligned}$$

où  $h_\vartheta \in H^{-1}(\Omega)$  et  $\vartheta \in \{\varepsilon, \mu\}$ . Les parties principales des opérateurs ci-dessus n'étant pas coercives pour tout  $p$ , nous introduisons les changements d'inconnues

$$\varphi_\vartheta(p, \cdot) = a_\vartheta(p, \cdot)\psi_\vartheta(p, \cdot),$$

où les fonctions  $a_\vartheta$  sont données dans (DT4). On obtient alors :

$$\begin{aligned} \text{trouver } \psi \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\operatorname{div}(p\vartheta(p, x)a_\vartheta(p, x)\nabla\psi_\vartheta(p, x)) - \operatorname{div}(p\vartheta(p, x)\psi_\vartheta(p, x)\nabla a_\vartheta(p, x)) = h_\vartheta, \text{ dans } \Omega. \end{aligned}$$

A partir de là, l'existence et l'unicité des  $\psi_\vartheta$  peuvent être démontrées exactement comme ci-dessus. Il faut toutefois appliquer deux fois le théorème A.7 (une fois pour  $\vartheta = \varepsilon$  et une autre pour  $\vartheta = \mu$ ).

## 2.3 Résultats d'existence et d'unicité pour l'acoustique

On présente maintenant des résultats d'existence et d'unicité pour le système de l'acoustique (1.7) en présence de métamatériaux homogénéisés. On commence par donner un théorème ainsi qu'un corollaire permettant de traiter la cas de matériaux à paramètres physiques scalaires. Le cas de milieux dont les indices sont tensoriels est ensuite étudié.

### 2.3.1 Métamatériaux acoustiques à indices scalaires

Nous considérons ici le système de l'acoustique (1.7) en présence de métamatériaux caractérisés par des modules de masses scalaires et vérifiant les hypothèses suivantes :

**Hypothèses 2.16** (Métamatériaux acoustiques scalaires).

- (A1)  $\Gamma(p, x)$  et  $n(p, x)$  sont holomorphes sur  $D_0$  pour presque tout  $x \in \Omega$ .
- (A2)  $(\Gamma(p, x), n(p, x)) \in \mathcal{L}ip(\overline{\Omega}, \mathbb{C}) \times L^\infty(\Omega)$  sont inversibles pour tout  $p \in D_0$ .
- (A3) Il existe  $p_0 \in D_0$  et  $\alpha > 0$  tels que :

$$\operatorname{Re} \{ \langle p_0 \Gamma(p_0, x) X, \overline{X} \rangle \} + |z|^2 \operatorname{Re}(p_0 n(p_0, x)) \geq \alpha(|X|^2 + |z|^2),$$

pour tout  $(X, z) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}$  et pour presque tout  $x \in \Omega$ .

Nous avons le résultat suivant.



**Théorème 2.17.** *Supposons que les hypothèses 2.16 soient vérifiées et que*

$$\Gamma(p, x) = 1, \quad \forall (p, x) \in D_0 \times \partial\Omega.$$

*Alors, pour tout  $f \in L^2(\Omega)^4$ , l'équation (1.7) est bien posée pour tout  $p \in D_0 \setminus (S \cup \{0\})$  où  $S \subset D_0$  est un sous-ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$ . La solution  $p \in D_0 \setminus S \mapsto (u(p, \cdot), \rho(p, \cdot)) \in L^2(\Omega)^4$  est de plus holomorphe et continue par rapport aux termes sources :*

$$\left\| \begin{pmatrix} u(p, \cdot) \\ \rho(p, \cdot) \end{pmatrix} \right\|_{L^2(\Omega)^4} \leq C(p) \|f\|_{L^2(\Omega)^4},$$

où  $C(p) > 0$  est une constante.

**Remarque 2.18.** *Concernant l'hypothèse  $\Gamma|_{\partial\Omega} = 1$ . Cette valeur est liée au choix des conditions aux limites sur  $\partial\Omega$  qui interviennent dans la décomposition de Hodge utilisée pour démontrer le théorème 2.17. On peut remplacer 1 par n'importe quelle constante  $C$  réelle positive. Dans ce cas, les nouvelles inconnues  $(v, \rho)$  vérifient la condition aux limites :*

$$\rho(p, x) + \lambda(x) \langle Cv(p, x), \nu \rangle = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

*Nous devons alors résoudre le problème (2.21) où le domaine  $\mathcal{D}(\mathbb{W})$  de l'opérateur  $\mathbb{W}$  est remplacé par l'ensemble :*

$$\tilde{\mathcal{D}}(\mathbb{W}) = \{(v, \rho) \in H(\operatorname{div}, \Omega) \times H^1(\Omega) \mid \rho(x) + C\lambda(x) \langle u(x), \nu \rangle = 0, \quad x \in \partial\Omega\}.$$

*La démonstration est alors exactement la même car l'opérateur  $(\mathbb{W}, \tilde{\mathcal{D}}(\mathbb{W}))$  est maximal monotone.*

*Notons finalement que cette hypothèse est physique dans la mesure où le métamatériau est supposé inclus dans un milieu classique vérifiant  $\Gamma(p, \cdot)|_{\partial\Omega} > 0$  pour tout  $p$ .*

Pour des milieux à indices scalaires dont les paramètres ne vérifient pas de condition additionnelle sur  $\partial\Omega$ , nous avons le corollaire (plus restrictif) qui suit.

**Corollaire 2.19.** *Supposons que  $\Gamma(p, x) \in \mathbb{C}$  pour tout  $(p, x) \in D_0 \times \Omega$ ,  $\Gamma(p, \cdot) \in \mathcal{Lip}(\Omega)$  et que les points (A1), (A2) et (A3) de l'hypothèse 2.16 soient vérifiées. Supposons de plus que l'impédance définissant les conditions aux limites vérifie  $\lambda = 0$  (conditions de Dirichlet). On a alors les mêmes conclusions que celles du théorème 2.17.*

Les démonstrations du théorème 2.17 et du corollaire 2.19 sont données, respectivement, dans les sections 2.3.1.1 et 2.3.1.2.

### 2.3.1.1 Démonstration du théorème 2.17

Nous suivons une fois de plus les lignes directrices introduites dans la section 2.1. On commence ainsi par réécrire le système de l'acoustique (1.7) dans le formalisme des

systèmes de Friedrichs :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } (u, \rho) \in \mathcal{H}_{\mathbb{W}} \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} (K(p, x) + \mathbb{W}) \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} = f(x), & x \in \Omega, \\ \rho(p, x) + \lambda(x) \langle u(p, x), \boldsymbol{\nu} \rangle = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.21)$$

où  $f \in L^2(\Omega)^4$  et  $K(p, x)$  est donné dans (1.23). L'opérateur  $\mathbb{W}$  est défini par  $\mathbb{W} = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & -\nabla \\ -\text{div} & 0 \end{pmatrix}$  et son domaine par :

$$\mathcal{D}(\mathbb{W}) = \{(u, \rho) \in H(\text{div}, \Omega) \times H^1(\Omega) \mid \rho(x) + \lambda(x) \langle u(x), \boldsymbol{\nu} \rangle = 0, x \in \partial\Omega\},$$

où l'impédance  $\lambda$  vérifie  $\mathcal{R}e(\lambda) \geq 0$ . Remarquons enfin, par le théorème 1.9, que l'opérateur  $(\mathbb{W}, \mathcal{D}(\mathbb{W}))$  est maximal monotone.

### I - REFORMULATION DE (2.21) EN 2 SYSTÈMES COUPLÉS.

Considérons tout d'abord le changement d'inconnue

$$u = a(p, \cdot)v \text{ avec } a(p, x) = (\Gamma(p, x))^{-1}.$$

Comme  $\Gamma(p, \cdot) \in \mathcal{L}ip(\bar{\Omega})$  et  $\Gamma(p, \cdot)|_{\partial\Omega} = 1$  pour tout  $p \in D_0$ , il vient  $(v, \rho) \in \mathcal{D}(\mathbb{W})$ . Les nouvelles inconnues vérifient donc l'équation :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } (v, \rho) \in \mathcal{D}(\mathbb{W}) \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} pv(p, x) - \nabla\rho(p, x) = f_1(x), & \text{pour } x \in \Omega, \\ a^{-1}(p, x)pn(p, x)\rho(p, x) + a(p, x)^{-1} \langle \nabla a(p, x), v(p, x) \rangle \\ \quad - \text{div}(v(p, x)) = a^{-1}(p, x)f_2(x), & \text{pour } x \in \Omega. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Comme  $\Gamma(p, \cdot) \in \mathcal{L}ip(\bar{\Omega})$  est inversible pour tout  $p \in D_0$ , le théorème de Rademacher montre que  $\nabla a(p, x)$  appartient à  $L^\infty(\Omega)$  et donc l'équation (2.22) peut encore se mettre sous la forme du système de Friedrichs (2.21) où l'opérateur de multiplication est défini ci-dessous :

$$\tilde{K}(p, x) = \begin{pmatrix} p\mathbb{I}_3 & 0 \\ a^{-1}(p, x) \langle \nabla a(p, x), \mathbb{I} \rangle & pa^{-1}(p, x)n(p, x) \end{pmatrix} \in L^\infty(\Omega, \text{Hom}(\mathbb{C}^4)).$$

Notons, par (A1), que  $\tilde{K}(p, x)$  est holomorphe sur  $D_0$  pour presque tout  $x$  de  $\Omega$ .

Considérons maintenant la décomposition de Hodge (voir [17] p. 54, théorème 10) suivante :

$$L^2(\Omega)^3 = \text{grad}H^1(\Omega) \oplus (\nabla \times \tilde{V}), \quad (2.23)$$

où  $\tilde{V} = \{\Psi \in H(\text{curl}, \Omega) \mid \text{div}\Psi = 0, \boldsymbol{\nu} \times \Psi|_{\partial\Omega} = 0\}$ . On a donc la décomposition orthogonale de  $L^2(\Omega)^4$  ci-dessous :

$$L^2(\Omega)^4 = (\text{grad}H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)) \oplus (\nabla \times \tilde{V} \times \{0\}).$$

Soient  $P_0 : L^2(\Omega)^6 \rightarrow \nabla \times \tilde{V}$  et  $P_\nabla : L^2(\Omega)^6 \rightarrow \text{grad}H^1(\Omega)$  les projections orthogonales associées à (2.23). Notons que  $\text{div}\nabla \times \Phi = 0$  pour tout  $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{C}^3)$  d'où on tire, pour

tout  $\phi \in H^1(\Omega)$ , que  $P_0 \nabla \Phi = 0$ . En projetant l'équation vectorielle de (2.21) il vient alors le système équivalent :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } (v, \rho) = (P_0 v + P_{\nabla} v, \rho) \in \mathcal{D}(\mathbb{W}) \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} p P_0 v = P_0 f_1, & x \in \Omega, \\ p P_{\nabla} v - \nabla \rho = P_{\nabla} f_1, & x \in \Omega, \\ a^{-1}(p, x) p n(p, x) \rho(p, x) + a(p, x)^{-1} \langle \nabla a(p, x), v(p, x) \rangle \\ \quad - \operatorname{div}(P_{\nabla} v) = a^{-1}(p, x) f_2(x), & x \in \Omega. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.24)$$

## II - TRAITEMENT DE LA PROJECTION SUR $\left( (\nabla \times \tilde{V}) \times \{0\} \right)$ .

À partir de la décomposition  $(v, \rho) = (P_{\nabla} v, \rho) + (P_0 v, 0)$  et le fait que  $(P_0 v, 0) \in (\nabla \times \tilde{V}) \times \{0\}$  on remarque que  $\mathbb{W}(P_0 v, 0)^T = 0$ . On va alors chercher à exprimer cette partie du noyau de  $\mathbb{W}$  en fonction de  $P_{\nabla} v$ . Pour ce faire il suffit d'utiliser la première équation de (2.24) :

$$P_0 v = \frac{1}{p} P_0 f_1.$$

## III - PROBLÈME VÉRIFIÉ PAR LA PROJECTION SUR $(\operatorname{grad} H^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ .

La composante  $P_{\nabla} v$  vérifie le système suivant :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } (P_{\nabla} v, \rho) \in \{(w, \rho) \in \mathcal{D}(\mathbb{W}) \mid w \in \operatorname{grad} H^1(\Omega)^3\} \text{ tel que :} \\ & \left( B(p, \cdot) + \tilde{\mathbb{W}} \right) \begin{pmatrix} P_{\nabla} v \\ \rho \end{pmatrix} = g, \end{aligned} \quad (2.25)$$

où  $\tilde{\mathbb{W}} = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & -\nabla \\ -\operatorname{div} P_{\nabla} & 0 \end{pmatrix}$  est un opérateur fermé de domaine

$$\mathcal{D}(\tilde{\mathbb{W}}) = \{(v, \rho) \in \mathcal{D}(\mathbb{W}) \mid v \in \operatorname{grad} H^1(\Omega)^3\}.$$

Le second membre,  $g \in \operatorname{grad} H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , est de plus donné par

$$g(p) = \begin{pmatrix} P_{\nabla} f_1 \\ a(p)^{-1} f_2 - a(p)^{-1} \langle \nabla a(p), \frac{1}{p} P_0 f_1 \rangle \end{pmatrix}.$$

Enfin, l'opérateur de multiplication  $B(p) \in \mathcal{B}(L^2(\Omega)^4)$  est défini ci-dessous :

$$B(p) = \begin{pmatrix} p P_{\nabla} & 0 \\ a(p)^{-1} \langle \nabla a(p), \mathbb{I} \rangle & a(p)^{-1} p n(p) \end{pmatrix}.$$

## IV - RÉOLUTION FINALE PAR THÉORIE DE FREDHOLM ANALYTIQUE.

Considérons l'inégalité de Majda [65] :

$$\begin{aligned} & \forall (u, \rho) \in \mathcal{D}(\mathbb{W}) \cap (H(\operatorname{curl}, \Omega) \times L^2(\Omega)), \\ & \left\| \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\|_{H^1(\Omega)^4} \leq C \left( \left\| \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\|_{L^2(\Omega)^4} + \left\| \mathbb{W} \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\|_{L^2(\Omega)^4} + \|\nabla \times u\|_{L^2(\Omega)^3} \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Alors, comme  $\nabla \times \nabla \varphi = 0$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ , l'inégalité (2.26) montre que la résolvente de l'opérateur  $(\widetilde{\mathbb{W}}, \mathcal{D}(\widetilde{\mathbb{W}}))$  est compacte. De plus, les hypothèses (A1) et (A2) entraînent que les fonctions  $p \in D_0 \setminus \{0\} \mapsto B(p) \in \mathcal{B}(L^2(\Omega)^4)$  et  $p \in D_0 \setminus \{0\} \mapsto g(p) \in \text{grad}H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  sont holomorphes. Ainsi, résoudre (2.25) revient à inverser la famille holomorphe, sur  $p \in D_0 \setminus \{0\}$ , d'opérateurs fermés, à résolvente compacte, donnée par  $(B(p, \cdot) + \widetilde{\mathbb{W}}, \mathcal{D}(\widetilde{\mathbb{W}}))$ .

La maximale monotonie de  $(\mathbb{W}, \mathcal{D}(\mathbb{W}))$  et l'équivalence entre (2.21) et le problème projeté (2.24) assurent que l'ensemble résolvant de cette famille holomorphe est non-vidé pour tout  $p \in D_0 \setminus \{0\}$ . Nous pouvons ainsi utiliser la théorie de Fredholm analytique (théorème A.7).

Par (A3), il existe  $p_0 \in D_0 \setminus \{0\}$  tel que  $K(p_0, \cdot)$  est coercif. Le problème (2.21) est donc bien posé. L'équivalence entre les problèmes (2.21) et (2.24) implique alors l'inversibilité de  $B(p_0, \cdot) + \widetilde{\mathbb{W}}$  sur son domaine  $\mathcal{D}(\widetilde{\mathbb{W}})$ . Ainsi, l'opérateur  $B(p, \cdot) + \widetilde{\mathbb{W}}$  est inversible sur  $\mathcal{D}(\widetilde{\mathbb{W}})$  pour tout  $p \in (D_0 \setminus \{0\}) \setminus S$  où  $S$  est un sous-ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0 \setminus \{0\}$ .

Remarquons enfin, par le théorème A.5, que l'application

$$p \in D_0 \setminus (S \cup \{0\}) \mapsto \left( B(p, \cdot) + \widetilde{\mathbb{W}} \right)^{-1} \in \mathcal{B}(\text{grad}H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)),$$

est holomorphe. Il en est ainsi de même pour

$$p \in D_0 \setminus (S \cup \{0\}) \mapsto (v(p), \rho(p)) = (P_\nabla v(p) + P_0 v(p), \rho(p)) \in L^2(\Omega)^4.$$

En utilisant maintenant le changement inverse d'inconnue  $u(p, \cdot) = a(p, \cdot)v(p, \cdot)$  et le fait que  $\Gamma(p, \cdot) \in \mathcal{L}ip(\overline{\Omega})$  on obtient l'estimation :

$$\forall p \in D_0 \setminus (S \cup \{0\}), \left\| \begin{pmatrix} u(p, \cdot) \\ \rho(p, \cdot) \end{pmatrix} \right\|_{L^2(\Omega)^4} \leq C(p) \|f\|_{L^2(\Omega)^4},$$

où  $C(p) > 0$  est une constante.

### 2.3.1.2 Démonstration du corollaire 2.19

Le fait que  $\lambda = 0$  entraîne que l'on n'a pas besoin d'imposer  $\Gamma(p, \cdot)|_{\partial\Omega} = 1$ , pour tout  $p \in D_0$ . Cette condition permet en fait de conserver les propriétés de l'opérateur  $(\mathbb{W}, \mathcal{D}(\mathbb{W}))$  après avoir fait le changement d'inconnue  $u = a(p, \cdot)v$  avec  $a(p, x) = \Gamma(p, x)^{-1}$ . En effet, le couple  $(\rho, v)$  vérifie alors la condition limite :

$$\rho(p, x) + \lambda(x) \langle a(p, x)v(p, x), \nu \rangle = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Lorsque  $\lambda = 0$ ,  $(\rho, v)$  vérifie  $\rho|_{\partial\Omega} = 0$  qui est encore une condition maximale positive pour  $\mathbb{W}$  qui ne fait plus intervenir les valeurs de la fonction  $a(p, \cdot)$  sur le bord.

### 2.3.2 Métamatériaux acoustiques à indice tensoriel

Nous résolvons ici le système de l'acoustique (1.7) en présence de métamatériaux caractérisés par des modules de masses pouvant être tensoriels et vérifiant les hypothèses suivantes :

**Hypothèses 2.20** (Métamatériaux acoustiques tensoriels).

(AT1)  $\Gamma(p, x)$  et  $n(p, x)$  sont holomorphes sur  $D_0$  pour presque tout  $x \in \Omega$ .

(AT2)  $(\Gamma(p, x), n(p, x)) \in L^\infty(\Omega, \text{Hom}(\mathbb{C}^3)) \times L^\infty(\Omega)$  et sont inversibles pour tout  $p \in D_0$ .

(AT3) Il existe  $p_0 \in D_0$  et  $\alpha > 0$  tels que :

$$\mathcal{R}e \{ \langle p_0 \Gamma(p_0, x) X, \bar{X} \rangle \} + |z|^2 \mathcal{R}e(p_0 n(p_0, x)) \geq \alpha(|X|^2 + |z|^2),$$

pour tout  $(X, z) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}$  et pour presque tout  $x \in \Omega$ .

(AT4) Il existe  $a : \mathbb{C} \times \Omega \mapsto \mathbb{C}$ , lipschitzienne sur  $\Omega$  et holomorphe sur  $D_0$  telle que :

$$\mathcal{R}e \langle \Gamma(p, x) a(p, x) X, \bar{X} \rangle \geq \alpha |X|^2,$$

pour presque tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $(p, X) \in D_0 \times \mathbb{C}^3$ . Cette fonction vérifie de plus  $a(p, \cdot)|_{\partial\Omega} = 1$  pour tout  $p \in D_0$ .

Nous avons le résultat suivant.

**Théorème 2.21.** *Supposons que les hypothèses 2.20 soient vérifiées. Alors, pour tout  $f \in L^2(\Omega)^4$ , l'équation (1.7) est bien posée pour tout  $p \in D_0 \setminus (S \cup \{0\})$  où  $S \subset D_0$  est un sous-ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$ . La solution  $p \in D_0 \setminus S \mapsto (u(p, \cdot), \rho(p, \cdot)) \in L^2(\Omega)^4$  est de plus holomorphe et continue par rapport aux termes sources :*

$$\left\| \begin{pmatrix} u(p, \cdot) \\ \rho(p, \cdot) \end{pmatrix} \right\|_{L^2(\Omega)^4} \leq C(p) \|f\|_{L^2(\Omega)^4},$$

où  $C(p) > 0$  est une constante.

La démonstration du théorème 2.21 est donnée dans la section 2.3.2.1. Elle fait appel à des résultats intermédiaires démontrés dans la section 2.3.2.2.

**Remarque 2.22.**

1. Sur l'hypothèse  $a|_{\partial\Omega} = 1$ . On peut en fait remplacer 1 par n'importe quelle constante  $C$  réelle positive (voir aussi la remarque 2.18).
2. L'hypothèse la plus générale sur la fonction  $a(p, x)$  sous laquelle le théorème 2.21 reste vrai est :  $a(p, \cdot)|_{\partial\Omega}$  est indépendant de  $p$  et

$$\mathcal{R}e(a(p, x)\lambda(x)) \geq 0, \quad \forall (p, x) \in D_0 \times \partial\Omega.$$

3. Lorsque  $\lambda = 0$ , on n'a plus besoin d'hypothèses sur la trace sur  $\partial\Omega$  de la fonction  $a(p, x)$ .

### 2.3.2.1 Démonstration du théorème 2.21

Tout comme pour le cas scalaire, nous allons suivre la présentation donnée en section 2.1. On reprend les notations de la démonstration du théorème 2.17 pour les applications  $P_0$ ,  $P_\nabla$  et pour l'espace  $\tilde{V}$ .

#### I - REFORMULATION DE (2.21) EN 2 SYSTÈMES COUPLÉS.

Soit le changement d'inconnue

$$u = a(p, \cdot)v,$$

où  $a(p, x)$  est donné dans (AT4). L'hypothèse  $a(p, \cdot)|_{\partial\Omega} = 1$  et le fait que  $a(p, \cdot) \in \mathcal{L}ip(\bar{\Omega})$  entraînent alors que  $(v, \rho) \in \mathcal{D}(\mathbb{W})$ . Les nouvelles inconnues vérifient de plus le système :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } (v, \rho) \in \mathcal{D}(\mathbb{W}) \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} p\Gamma(p, \cdot)a(p, x)v(p, x) - \nabla\rho(p, x) = f_1(x), & \text{pour } x \in \Omega, \\ a^{-1}(p, x)pn(p, x)\rho(p, x) + a(p, x)^{-1} \langle \nabla a(p, x), v(p, x) \rangle \\ \quad - \operatorname{div}(v(p, x)) = a^{-1}(p, x)f_2(x), & \text{pour } x \in \Omega. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Remarquons, par (AT4) et le théorème de Rademacher, que  $\nabla a(p, x)$  appartient à  $L^\infty(\Omega)$  et donc l'équation (2.27) peut encore se mettre sous la forme d'un système de Friedrichs (2.21) avec l'opérateur de multiplication :

$$\tilde{K}(p, x) = \begin{pmatrix} p\Gamma(p, x)a(p, x) & 0 \\ a^{-1}(p, x) \langle \nabla a(p, x), \mathbb{I} \rangle & pa^{-1}(p, x)n(p, x) \end{pmatrix} \in L^\infty(\Omega, \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^4)).$$

Par (AT1),  $\tilde{K}(p, x)$  est holomorphe sur  $D_0$  pour presque tout  $x$  de  $\Omega$ .

On utilise maintenant la décomposition de Hodge (2.23). En projetant l'équation vectorielle de (2.21), il vient le système équivalent :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } (v, \rho) = (P_0v + P_\nabla v, \rho) \in \mathcal{D}(\mathbb{W}) \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} P_0p\Gamma(p, x)a(p, x)P_0v + P_0p\Gamma(p, x)a(p, x)P_\nabla v = P_0f_1, & x \in \Omega, \\ P_\nabla p\Gamma(p, x)a(p, x)P_\nabla v + P_\nabla p\Gamma(p, x)a(p, x)P_0v - \nabla\rho = P_\nabla f_1, & x \in \Omega, \\ a^{-1}(p, x)pn(p, x)\rho(p, x) + a(p, x)^{-1} \langle \nabla a(p, x), v(p, x) \rangle \\ \quad - \operatorname{div}(P_\nabla v) = a^{-1}(p, x)f_2(x), & x \in \Omega. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.28)$$

#### II - TRAITEMENT DE LA PROJECTION SUR $\left( (\nabla \times \tilde{V}) \times \{0\} \right)$ .

Pour trouver  $P_0v$  en fonction de  $P_\nabla v$ , nous avons le lemme suivant.

**Lemme 2.23.** *L'opérateur  $P_0p\Gamma(p, \cdot)a(p, \cdot)P_0 \in \mathcal{B}(\nabla \times \tilde{V})$  est inversible, à inverse borné, pour tout  $p \in D_0 \setminus \{0\}$  et l'application  $p \in D_0 \setminus \{0\} \mapsto (P_0p\Gamma(p, \cdot)a(p, \cdot)P_0)^{-1} \in \mathcal{B}(\nabla \times \tilde{V})$  est holomorphe.*

#### III - PROBLÈME VÉRIFIÉ PAR LA PROJECTION SUR $(\operatorname{grad}H^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ .

Par le lemme 2.23, on peut réécrire la première équation de (2.28) comme suit :

$$P_0 v = (P_0 p \Gamma(p, \cdot) a(p, \cdot) P_0)^{-1} (P_0 f_1 - P_0 p \Gamma(p, \cdot) a(p, \cdot) P_\nabla v), \quad \forall p \in D_0 \setminus \{0\}.$$

En reportant  $P_0 v$  dans (2.28), on obtient le problème :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } (w, \rho) \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathbb{W}}) \text{ tel que :} \\ & \left( B(p, \cdot) + \widetilde{\mathbb{W}} \right) \begin{pmatrix} w \\ \rho \end{pmatrix} = g, \end{aligned} \quad (2.29)$$

où  $w = P_\nabla v$  et  $\widetilde{\mathbb{W}} = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & -\nabla \\ -\text{div} P_\nabla & 0 \end{pmatrix}$  est un opérateur fermé de domaine  $\mathcal{D}(\widetilde{\mathbb{W}}) = \{(v, \rho) \in \mathcal{D}(\mathbb{W}) \mid v \in \text{grad} H^1(\Omega)^3\}$ . Le second membre,  $g \in \text{grad} H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , est de plus donné par

$$g(p) = \begin{pmatrix} P_\nabla f_1 - P_\nabla p \Gamma(p) a(p) P_0 (P_0 p \Gamma(p) a(p) P_0)^{-1} P_0 f_1 \\ a(p)^{-1} f_2 - a(p)^{-1} \left\langle \nabla a(p), (P_0 p \Gamma(p) a(p) P_0)^{-1} P_0 f_1 \right\rangle \end{pmatrix}.$$

Enfin, l'opérateur de multiplication  $B(p) \in \mathcal{B}(L^2(\Omega)^4)$  est défini ci-dessous :

$$B(p) = \begin{pmatrix} P_\nabla p \Gamma(p) a(p) P_\nabla - P_\nabla p \Gamma(p) a(p) P_0 (P_0 p \Gamma(p) a(p) P_0)^{-1} P_0 p \Gamma(p) a(p) P_\nabla & 0 \\ a(p)^{-1} \left\langle \nabla a(p), \mathbb{I} - (P_0 p \Gamma(p) a(p) P_0)^{-1} P_0 p \Gamma(p) a(p) P_\nabla \mathbb{I} \right\rangle & a(p)^{-1} p n(p) \end{pmatrix}.$$

#### IV - RÉOLUTION FINALE PAR THÉORIE DE FREDHOLM ANALYTIQUE.

L'inégalité de Majda (2.26) montre que la résolvante de l'opérateur  $(\widetilde{\mathbb{W}}, \mathcal{D}(\widetilde{\mathbb{W}}))$  est compacte. Les hypothèses (AT1) et (AT2) ainsi que lemme 2.23 entraînent que les fonctions  $p \in D_0 \setminus \{0\} \mapsto B(p) \in \mathcal{B}(L^2(\Omega)^4)$  et  $p \in D_0 \setminus \{0\} \mapsto g(p) \in \text{grad} H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  sont holomorphes. Ainsi, résoudre (2.29) revient à inverser la famille holomorphe, sur  $D_0 \setminus \{0\}$ , d'opérateurs fermés, à résolvante compacte, donnée par  $(B(p, \cdot) + \widetilde{\mathbb{W}}, \mathcal{D}(\widetilde{\mathbb{W}}))$ .

L'inversibilité de l'opérateur  $B(p, \cdot) + \widetilde{\mathbb{W}}$  sur  $\mathcal{D}(\widetilde{\mathbb{W}})$  pour tout  $p \in (D_0 \setminus \{0\}) \setminus S$  où  $S$  est un sous-ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0 \setminus \{0\}$  se démontre de la même manière que dans le cas des milieux scalaires (voir démonstration du théorème 2.17).

Enfin, remarquons que l'application

$$p \in D_0 \setminus (S \cup \{0\}) \longmapsto \left( B(p, \cdot) + \widetilde{\mathbb{W}} \right)^{-1} \in \mathcal{B}(\text{grad} H^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$$

est holomorphe. Le lemme 2.23 montre que l'application  $p \in D_0 \setminus S \mapsto (P_0 v(p), \rho(p)) \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathbb{W}})$  est holomorphe et il en est ainsi de même pour

$$p \in D_0 \setminus (S \cup \{0\}) \longmapsto (v(p), \rho(p)) = (P_\nabla v(p) + P_0 v(p), \rho(p)) \in L^2(\Omega)^4.$$

En utilisant maintenant le changement inverse d'inconnue  $u(p, \cdot) = a(p, \cdot) v(p, \cdot)$  et le fait que  $a(p, \cdot) \in \mathcal{L}ip(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ , on obtient l'estimation :

$$\forall p \in D_0 \setminus (S \cup \{0\}), \quad \left\| \begin{pmatrix} u(p, \cdot) \\ \rho(p, \cdot) \end{pmatrix} \right\|_{L^2(\Omega)^4} \leq C(p) \|f\|_{L^2(\Omega)^4},$$

où  $C(p) > 0$  est une constante.

### 2.3.2.2 Démonstration du lemme 2.23

Le reste de la section est dédié à la démonstration du lemme ci-dessus. Nous commençons par donner un résultat intermédiaire dont la démonstration peut aussi être trouvée dans [39].

**Lemme 2.24.** *Il existe une constante  $C > 0$  dépendante uniquement de  $\Omega$  telle que :*

$$\|\Phi\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C \|\nabla \times \Phi\|_{L^2(\Omega)^3}, \text{ pour tout } \Phi \in \tilde{V}. \quad (2.30)$$

**Démonstration.** L'inégalité (2.30) est établie par contradiction. Soit donc  $(\Phi_n)_n \subset \tilde{V}$  une suite vérifiant  $\|\Phi_n\|_{L^2(\Omega)^3} = 1$  et  $\|\nabla \times \Phi_n\|_{L^2(\Omega)^3} \leq 1/n$ . Considérons l'inégalité suivante [28, 65] :

$$\|\Phi\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C \left\{ \|\Phi\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\nabla \times \Phi\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\operatorname{div}(\Phi)\|_{L^2(\Omega)} \right\}, \forall \Phi \in \tilde{V}. \quad (2.31)$$

L'inégalité (2.31) montre que  $(\Phi_n)_n$  est bornée dans  $H^1$  et donc admet une sous-suite fortement convergente dans  $L^2(\Omega)^3$  vers  $\Phi_0 \in H^1(\Omega)^3$ . Comme  $\Phi_n \in \tilde{V}$ , pour tout  $n$ , il suit  $\operatorname{div}\Phi_0 = 0$  au sens des distributions et  $\nu \times \Phi_0|_{\partial\Omega} = 0$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3$ . De plus,  $\|\nabla \times \Phi_n\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \frac{1}{n}$  d'où il vient  $\nabla \times \Phi_0 = 0$ . Considérons maintenant la décomposition de Hodge ([28] p.353) :

$$L^2(\Omega)^3 = H_0(\operatorname{curl}0, \Omega) \oplus H(\operatorname{div}0, \Omega),$$

où  $H_0(\operatorname{curl}0, \Omega) = \{v \in L^2(\Omega)^3 \mid \nabla \times v = 0, \text{ dans } \Omega, \nu \times v = 0, \text{ sur } \partial\Omega\}$ . On en déduit ainsi que  $\Phi_0$  appartient à la fois à  $H_0(\operatorname{curl}0, \Omega)$  et à  $H(\operatorname{div}0, \Omega)$  impliquant  $\Phi_0 = 0$  et contredisant le fait que  $\|\Phi_0\|_{L^2(\Omega)^3} = 1$ . ■

**Démonstration du lemme 2.23.** L'inversion de  $P_0 p \Gamma(p) a(p) P_0$  sur  $\nabla \times \tilde{V}$  revient à résoudre :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } \Phi \in \tilde{V} \text{ tel que pour tout } \Psi \in \tilde{V} : \\ & \int_{\Omega} \langle p \Gamma(p) a(p) \nabla \times \Phi, \overline{\nabla \times \Psi} \rangle dx = \langle h, \Psi \rangle_{\tilde{V}' \times \tilde{V}}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

où  $h$  appartient à  $\tilde{V}'$  (l'ensemble des formes linéaires sur  $\tilde{V}$ ). Une intégration par parties, en utilisant les conditions aux limites, entraîne que  $\Phi$  est solution du problème aux limites :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } \Phi \in \tilde{V} \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} \nabla \times \Gamma(p, x) a(p, x) \nabla \times \Phi = \frac{h}{p} \text{ sur } \Omega & . \\ \nu \times \Phi|_{\partial\Omega} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \end{aligned}$$

L'inégalité (2.31) assure que l'ensemble  $\tilde{V}$  est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni de la norme  $H^1(\Omega)^3$ . La coercivité de la forme bilinéaire issue de (2.32) est alors une conséquence du lemme 2.24. Le lemme de Lax-Milgram et (AT4) entraînent alors que (2.32) est bien posé. On obtient donc l'inversibilité de  $P_0 p \Gamma(p) a(p) P_0$ , pour tout  $p \in D_0 \setminus \{0\}$ , sur  $\nabla \times \tilde{V}$  grâce à l'hypothèse (A4). Enfin, l'holomorphie de  $p \in D_0 \mapsto (P_0 p \Gamma(p) a(p) P_0)^{-1} \in \mathcal{B}(\nabla \times \tilde{V})$  provient des hypothèses (AT1) et (AT2) et du théorème A.5. ■



## 2.4 Résultats d'existence et d'unicité pour l'élasticité linéaire

On présente ici des résultats d'existence et d'unicité pour l'élasticité linéaire (1.24) lorsque des métamatériaux homogénéisés sont considérés. Comme pour l'électromagnétisme et l'acoustique, on donne tout d'abord des résultats concernant les milieux à paramètres physiques scalaires (section 2.4.1) et ensuite pour ceux dont les indices sont tensoriels (section 2.4.2).

### 2.4.1 Métamatériaux élastiques à indices scalaires

Pour étudier le problème (1.24) en présence de métamatériaux homogénéisés à paramètres physiques scalaires, les hypothèses suivantes sont considérées :

**Hypothèses 2.25** (Métamatériaux élastiques scalaires).

(E1)  $\mu(p, x)^{-1}$  et  $(\lambda(p, x) + \mu(p, x))^{-1}$  sont holomorphes sur  $D_0$  pour presque tout  $x \in \Omega$ .

(E2)  $(\mu(p, x)^{-1}, (\lambda(p, x) + \mu(p, x))^{-1}) \in \mathcal{L}ip(\overline{\Omega}, \mathbb{C}) \times L^\infty(\Omega)$  pour tout  $p \in D_0$ .

(E3) Il existe  $p_0$  dans  $D_0$  et  $\alpha > 0$  tels que :

$$\begin{aligned} & \Re \{ \langle p_0^2 X, \overline{X} \rangle + \Re \langle \mu^{-1}(p_0, x) Y, \overline{Y} \rangle \} \\ & + \Re (\lambda(p_0, x) + \mu(p_0, x))^{-1} |z|^2 \geq \alpha (|X|^2 + |Y|^2 + |z|^2), \end{aligned}$$

pour presque tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $(X, Y, z) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}$ .

Nous avons alors le résultat suivant :

**Théorème 2.26.** *Supposons que les hypothèses 2.25 soient vérifiées et que :*

$$\mu(p, x) = 1, \quad \forall (p, x) \in D_0 \times \partial\Omega.$$

Alors, pour tout  $F \in L^2(\Omega)^{13}$ , l'équation (1.24) admet une unique solution pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S \subset D_0$  est un sous-ensemble discret, localement fini et éventuellement vide. La solution est de plus continue par rapport au second membre et l'application  $p \in D_0 \setminus S \mapsto (v(p, \cdot), u(p, \cdot), w(p, \cdot)) \in L^2(\Omega)^{13}$  est holomorphe.

**Remarque 2.27.** *La remarque 2.18 est aussi valable pour l'élasticité linéaire. Ainsi, concernant l'hypothèse  $\Gamma|_{\partial\Omega} = 1$ , on peut en fait remplacer 1 par n'importe quelle constante  $C$  réelle positive.*

Comme pour le système de l'acoustique avec le corollaire 2.19, nous pouvons ignorer l'hypothèse sur les traces sur  $\partial\Omega$  de  $\mu(p, \cdot)$  en restreignant les conditions aux limites :

**Corollaire 2.28.** *Supposons que les hypothèses (E1), (E2) et (E3) issues de 2.25 soient vérifiées. Supposons de plus que l'impédance définissant les conditions aux limites vérifie  $\Lambda = 0$  (conditions de Dirichlet). On a alors la même conclusion que celle du théorème 2.26.*

Les preuves du théorème 2.26 et du corollaire 2.28 sont données, respectivement, dans les sections 2.4.1.1 et 2.4.1.2.

### 2.4.1.1 Démonstration du théorème 2.26

Le système de l'élasticité linéaire (1.9) se met sous la forme d'un système de Friedrichs (voir aussi (1.25)) :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } \Pi = (v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3, w) \in \mathcal{H}_{\mathbb{E}}, \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} (K(p, x) + \mathbb{E}) \Pi = F, \text{ dans } \Omega, \\ \langle (w_j)|_{\partial\Omega}, \boldsymbol{\nu} \rangle + \boldsymbol{\nu}_j \gamma|_{\partial\Omega} - (\Lambda(x)u_j)|_{\partial\Omega} = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.33)$$

où  $F \in L^2(\Omega)^{13}$  est un second membre,  $K(p, x)$  est un opérateur de multiplication, diagonal par blocs, donné par (1.26). Enfin, l'opérateur  $\mathbb{E}$  est défini par

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nabla & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla & 0 \\ \text{div} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_1 \\ 0 & \text{div} & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_2 \\ 0 & 0 & \text{div} & 0 & 0 & 0 & \partial_3 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 & 0 \end{pmatrix},$$

et admet pour domaine l'ensemble :

$$\mathcal{D}(\mathbb{E}) = \{ \Pi \in H(\text{div}, \Omega)^3 \times H^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega) \mid \Pi|_{\partial\Omega} \in \ker(N(x)) \}.$$

où  $N(x)$  est l'application linéaire définissant les conditions aux limites. Remarquons, par le théorème 1.10, que l'opérateur  $(\mathbb{E}, \mathcal{D}(\mathbb{E}))$  est maximal monotone et ainsi le système (2.33) est bien posé pour  $p = p_0$ . À partir de maintenant, nous suivons la démonstration du théorème 2.21 et donc le plan annoncé dans la section 2.1.

#### I - REFORMULATION DE (2.33) EN 2 SYSTÈMES COUPLÉS.

On commence par effectuer les changements d'inconnues :

$$\begin{cases} v_j = \mu(p, \cdot) X_j, \quad j = 1, 2, 3, \\ w = \mu(p, \cdot) \tilde{w}. \end{cases}$$

Le fait que  $\mu(p, \cdot)|_{\partial\Omega} = 1$  et que  $\mu(p, \cdot) \in \mathcal{L}ip(\overline{\Omega})$  pour tout  $p \in D_0$  entraînent que les nouvelles inconnues  $(X, u, \tilde{w})$  appartiennent à  $\mathcal{D}(\mathbb{E})$ . Elles vérifient de plus le problème suivant :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } (X, u, \tilde{w}) \in \mathcal{D}(\mathbb{E}) \text{ tels que :} \\ & \begin{cases} X_j - \nabla u_j = g_j, \text{ dans } \Omega, \text{ pour } j = 1, 2, 3, \\ p^2 \mu(p, x)^{-1} u_j - \mu(p, x)^{-1} \langle \nabla \mu(p, x), X_j \rangle - (\mu(p, x)^{-1} \partial_j \mu(p, x)) \tilde{w} \\ \quad - \text{div}(X_j) - \partial_j \tilde{w} = -\mu(p, x)^{-1} f_j, \text{ dans } \Omega, \\ (\lambda(p, x) + \mu(p, x))^{-1} \mu(p, x) \tilde{w} - \text{div}(u) = h, \text{ dans } \Omega. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Le théorème de Rademacher et la régularité en  $x$  de  $\mu(p, \cdot)$  montrent que  $\nabla \mu(p, \cdot) \in L^\infty(\Omega)$  et ainsi le problème (2.34) peut encore se mettre sous la forme du système de

Friedrichs (2.33) avec l'opérateur de multiplication suivant :

$$\tilde{K}(p, x) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 & 0\mathbb{I}_3 & 0\mathbb{I}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0\mathbb{I}_3 & \mathbb{I}_3 & 0\mathbb{I}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0\mathbb{I}_3 & 0\mathbb{I}_3 & \mathbb{I}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R(p, x) & 0 & 0 & p^2\mu(p)^{-1} & 0 & 0 & -\mu(p)^{-1}\partial_1\mu(p) \\ 0 & R(p, x) & 0 & 0 & p^2\mu(p)^{-1} & 0 & -\mu(p)^{-1}\partial_2\mu(p) \\ 0 & 0 & R(p, x) & 0 & 0 & p^2\mu(p)^{-1} & -\mu(p)^{-1}\partial_3\mu(p) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda(p) + \mu(p))^{-1}\mu(p) \end{pmatrix}$$

où  $R(p, x) : X \in \mathbb{C}^3 \mapsto (-\mu(p, x)^{-1} \langle \nabla \mu(p, x), X \rangle) \in \mathbb{C}$ .

En partant de la décomposition de Hodge (2.23), on obtient la décomposition orthogonale de  $L^2(\Omega)^{13}$  qui suit :

$$L^2(\Omega)^{13} = \left( (\nabla \times \tilde{V})^4 \times \{0\}^4 \right) \oplus \left( (\text{grad}H^1(\Omega))^4 \times L^2(\Omega)^4 \right). \quad (2.35)$$

On réutilise les notations de la démonstration du théorème 2.21. En projetant maintenant le problème (2.34), il vient :

trouver  $(X, u, \tilde{w}) \in \mathcal{D}(\mathbb{E})$  tels que :

$$\begin{cases} P_0X_j = P_0g_j, \text{ dans } \Omega, \text{ pour } j = 1, 2, 3, \\ P_\nabla X_j - \nabla u_j = P_\nabla g_j, \text{ dans } \Omega, \text{ pour } j = 1, 2, 3, \\ p^2\mu(p, x)^{-1}u_j - \mu(p, x)^{-1} \langle \nabla \mu(p, x), P_0X_j + P_\nabla X_j \rangle \\ \quad - (\mu(p, x)^{-1}\partial_j\mu(p, x)) \tilde{w} - \text{div}(X_j) - \partial_j\tilde{w} = -\mu(p, x)^{-1}f_j, \text{ dans } \Omega, \\ (\lambda(p, x) + \mu(p, x))^{-1}\mu(p, x)\tilde{w} - \text{div}(u) = h, \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.36)$$

## II - TRAITEMENT DE LA PROJECTION SUR $(\nabla \times \tilde{V})^3 \times \{0\}^4$ .

Le vecteur  $(P_0X_1, P_0X_2, P_0X_3, 0, 0, 0, 0)$  est dans le noyau de  $\mathbb{E}$  et on peut l'obtenir facilement à partir du problème (2.36). En effet :

$$P_0X_j = P_0g_j.$$

## III - PROBLÈME VÉRIFIÉ PAR LA PROJECTION SUR $((\text{grad}H^1(\Omega))^4 \times L^2(\Omega)^4)$ .

La composante vivant dans l'orthogonal du noyau de  $\mathbb{E}$  est  $(P_\nabla X, u, \tilde{w})$  et elle vérifie de plus le problème :

$$\begin{aligned} \text{trouver } \tilde{\Pi} = (P_\nabla X_1, P_\nabla X_2, P_\nabla X_3, u_1, u_2, u_3, \tilde{w}) \in \mathcal{D}(\tilde{\mathbb{E}}), \text{ tel que :} \\ (B(p, \cdot) + \tilde{\mathbb{E}}) \tilde{\Pi} = \tilde{F}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

où le second membre vaut

$$\tilde{F}(p) = \begin{pmatrix} P_{\nabla}g \\ -\mu(p, \cdot)f + R(p, \cdot)P_0g \\ h \end{pmatrix} \in (\text{grad}H^1(\Omega))^3 \times L^2(\Omega)^4.$$

L'opérateur  $B(p, \cdot)$  est défini à partir de l'opérateur de multiplication  $\tilde{K}(p, \cdot)$  comme sa restriction à l'ensemble  $(\text{grad}H^1(\Omega))^3 \times L^2(\Omega)^4$ . C'est donc un opérateur borné et holomorphe sur  $D_0$  (par (E1) et (E2)). Enfin  $\tilde{\mathbb{E}}$  est l'opérateur défini par :

$$\tilde{\mathbb{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nabla & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla & 0 \\ \text{div}P_{\nabla} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_1 \\ 0 & \text{div}P_{\nabla} & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_2 \\ 0 & 0 & \text{div}P_{\nabla} & 0 & 0 & 0 & \partial_3 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 & 0 \end{pmatrix},$$

ayant pour domaine  $\mathcal{D}(\tilde{\mathbb{E}}) = \mathcal{D}(\mathbb{E}) \cap ((\text{grad}H^1(\Omega))^3 \times L^2(\Omega)^4)$ .

#### IV - RÉOLUTION FINALE PAR THÉORIE DE FREDHOLM ANALYTIQUE.

En reprenant la construction du théorème 2.7, on considère l'inégalité de Majda [65] suivante :

$$\begin{aligned} \forall \Pi = (v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3, \tilde{w}) \in \mathcal{D}(\mathbb{E}) \cap (H(\text{curl}, \Omega))^3 \times L^2(\Omega)^4, \\ \|\Pi\|_{H^1(\Omega)^{13}} \leq C \left( \|\Pi\|_{L^2(\Omega)^{13}} + \|\mathbb{E}\Pi\|_{L^2(\Omega)^{13}} + \sum_{j=1}^3 \|\nabla \times v_j\|_{L^2(\Omega)^3} \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Par l'inégalité ci-dessus, la résolvante de  $(\tilde{\mathbb{E}}, \mathcal{D}(\tilde{\mathbb{E}}))$  est compacte. Comme  $(\mathbb{E}, \mathcal{D}(\mathbb{E}))$  est maximal monotone et  $B(p, \cdot)$  est un opérateur borné de  $(\text{grad}H^1(\Omega))^3 \times L^2(\Omega)^4$  pour tout  $p \in D_0$ , il suit que l'ensemble résolvant de  $B(p) + \tilde{\mathbb{E}}$  est non vide pour tout  $p \in D_0$ . De ce fait, résoudre (2.37) revient à inverser une famille holomorphe d'opérateurs fermés à résolvante compacte. La fin de la démonstration utilise alors la théorie de Fredholm analytique (A.7) et est similaire à celle du théorème 2.21.

##### 2.4.1.2 Démonstration du corollaire 2.28

Il suffit de reprendre la démonstration du théorème 2.26 et de remarquer que la condition  $\mu(p, \cdot)|_{\partial\Omega} = C$ ,  $\forall p \in D_0$ ,  $C \in \mathbb{R}^+$ , n'est pas nécessaire lorsque des conditions de Dirichlet sont considérées.

##### 2.4.2 Métamatériaux élastiques à indice tensoriel

Pour étudier le système (1.24) en présence de métamatériaux homogénéisés à indices tensoriel, on a les hypothèses suivantes :

**Hypothèses 2.29** (Métamatériaux élastiques tensoriels).

(ET1)  $\mu(p, x)^{-1}$  et  $(\lambda(p, x) + \mu(p, x))^{-1}$  sont holomorphes sur  $D_0$  pour presque tout  $x \in \Omega$ .

(ET2)  $\mu(p, x)^{-1}$  et  $(\lambda(p, x) + \mu(p, x))^{-1}$  appartiennent à  $L^\infty(\Omega)$  pour tout  $p \in D_0$ .

(ET3) Il existe  $p_0$  dans  $D_0$  et  $\alpha > 0$  tels que :

$$\begin{aligned} & \mathcal{Re} \{ \langle p_0^2 X, \bar{X} \rangle + \mathcal{Re} \langle \mu^{-1}(p_0, x) Y, \bar{Y} \rangle \} \\ & + \mathcal{Re} (\lambda(p_0, x) + \mu(p_0, x))^{-1} |z|^2 \geq \alpha (|X|^2 + |Y|^2 + |z|^2), \end{aligned}$$

pour tout  $(X, Y, z) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}$  et pour presque tout  $x \in \Omega$ .

(ET4) Il existe  $\alpha > 0$  et une fonction  $a : \mathbb{C} \times \Omega \mapsto \mathbb{C}$ , lipschitzienne sur  $\Omega$ , holomorphe sur  $D_0$  et vérifiant  $a(p, \cdot)|_{\partial\Omega} = 1$ , telle que

$$\mathcal{Re} (\langle \mu(p, x)^{-1} a(p, x) X, \bar{X} \rangle) \geq \alpha |X|^2,$$

pour presque tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $(X, p) \in \mathbb{C}^3 \times D_0$ .

Nous avons alors le résultat suivant :

**Théorème 2.30.** *Supposons que les hypothèses 2.29 soient vérifiées. Alors, pour tout  $F \in L^2(\Omega)^{13}$ , l'équation (1.24) admet une unique solution pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S \subset D_0$  est un sous-ensemble discret, localement fini et éventuellement vide. La solution est de plus continue par rapport au second membre et l'application  $p \in D_0 \setminus S \mapsto (v(p, \cdot), u(p, \cdot), w(p, \cdot)) \in L^2(\Omega)^{13}$  est holomorphe.*

**Remarque 2.31.** *La remarque 2.22 concernant l'hypothèse  $a(p, \cdot)|_{\partial\Omega} = 1$  est aussi valable pour le théorème (2.30).*

### 2.4.2.1 Démonstration du théorème 2.30

Nous reprenons le schéma de démonstration décrit dans la section (2.1).

#### I - REFORMULATION DE (2.33) EN 2 SYSTÈMES COUPLÉS.

On commence par effectuer les changements d'inconnues suivants :

$$\begin{cases} v_j = a(p, \cdot) X_j, & j = 1, 2, 3, \\ w = a(p, \cdot) \tilde{w}, \end{cases}$$

où  $a(p, x)$  est défini à partir de l'hypothèse (AT4). Le fait que  $a(p, \cdot)|_{\partial\Omega} = 1$  et  $a(p, \cdot) \in \mathcal{Lip}(\bar{\Omega})$  pour tout  $p \in D_0$  entraînent que les nouvelles inconnues vérifient  $(X, u, \tilde{w}) \in \mathcal{D}(\mathbb{E})$ . Elles sont de plus solutions du problème :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } (X, u, \tilde{w}) \in \mathcal{D}(\mathbb{E}) \text{ tels que :} \\ & \begin{cases} \mu(p, x)^{-1} a(p, x) X_j - \nabla u_j = g_j, & \text{dans } \Omega, \text{ pour } j = 1, 2, 3, \\ p^2 a(p, x)^{-1} u_j - a(p, x)^{-1} \langle \nabla a(p, x), X_j \rangle - (a(p, x)^{-1} \partial_j a(p, x)) \tilde{w} \\ \quad - \operatorname{div}(X_j) - \partial_j \tilde{w} = -a(p, x)^{-1} f_j, & \text{dans } \Omega, \\ (\lambda(p, x) + \mu(p, x))^{-1} a(p, x) \tilde{w} - \operatorname{div}(u) = h, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.39)$$

On projette alors le système (2.39) selon la décomposition de Hodge (2.35). On obtient le problème suivant :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } (X, u, \tilde{w}) \in \mathcal{D}(\mathbb{E}) \text{ tels que :} \\ & \begin{cases} P_0\mu(p, x)^{-1}a(p, x)P_0X_j + P_0\mu(p, x)^{-1}a(p, x)P_{\nabla}X_j = P_0g_j, \text{ dans } \Omega, \\ P_{\nabla}\mu(p, x)^{-1}a(p, x)P_{\nabla}X_j + P_{\nabla}\mu(p, x)^{-1}a(p, x)P_0X_j - \nabla u_j = P_{\nabla}g_j, \\ p^2a(p, x)^{-1}u_j - a(p, x)^{-1}\langle \nabla a(p, x), P_0X_j + P_{\nabla}X_j \rangle \\ \quad - (a(p, x)^{-1}\partial_j a(p, x))\tilde{w} - \operatorname{div}(P_{\nabla}X_j) - \partial_j\tilde{w} = -a(p, x)^{-1}f_j, \\ (\lambda(p, x) + \mu(p, x))^{-1}a(p, x)\tilde{w} - \operatorname{div}(u) = h, \text{ dans } \Omega. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.40)$$

### II - TRAITEMENT DE LA PROJECTION SUR $(\nabla \times \tilde{V})^3 \times \{0\}^4$ .

En reprenant la démonstration du lemme 2.23 et en utilisant l'hypothèse (ET4), il vient :

$$P_0X_j = (P_0\mu(p, \cdot)^{-1}a(p, \cdot)P_0)^{-1} \{-P_0\mu(p, \cdot)^{-1}a(p, \cdot)P_{\nabla}X_j + P_0g_j\}, \text{ pour } j = 1, 2, 3.$$

Enfin, l'application  $p \in D_0 \mapsto (P_0\mu(p, \cdot)^{-1}a(p, \cdot)P_0)^{-1} \in \mathcal{B}(\nabla \times \tilde{V})$  est holomorphe.

### III - PROBLÈME VÉRIFIÉ PAR LA PROJECTION SUR $((\operatorname{grad}H^1(\Omega))^4 \times L^2(\Omega)^4)$ .

La projection sur  $(\operatorname{grad}H^1(\Omega))^4 \times L^2(\Omega)^4$  vérifie le problème :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } \tilde{\Pi} = (P_{\nabla}X_1, P_{\nabla}X_2, P_{\nabla}X_3, u_1, u_2, u_3, \gamma) \in \mathcal{D}(\tilde{\mathbb{E}}), \text{ tel que :} \\ & (B(p, \cdot) + \tilde{\mathbb{E}})\tilde{\Pi} = \tilde{F}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

où  $\tilde{F} \in (\operatorname{grad}H^1(\Omega))^3 \times L^2(\Omega)^4$  est le second membre donné par

$$\tilde{F}(p) = \begin{pmatrix} P_{\nabla}g - P_{\nabla}\mu(p, \cdot)^{-1}a(p, \cdot)P_0 (P_0\mu(p, \cdot)^{-1}a(p, \cdot)P_0)^{-1} P_0g \\ -a(p, \cdot)^{-1}f + a(p, \cdot)^{-1}\langle \nabla a(p, \cdot), (P_0\mu(p, \cdot)^{-1}a(p, \cdot)P_0)^{-1} P_0g \rangle \\ h \end{pmatrix}.$$

L'opérateur  $B(p, \cdot)$  est un opérateur borné de  $(\operatorname{grad}(H^1(\Omega)))^3 \times L^2(\Omega)^4$  qui, par (ET1) et (ET2), est de plus holomorphe sur  $D_0$ .

### IV - RÉOLUTION FINALE PAR THÉORIE DE FREDHOLM ANALYTIQUE.

La fin de la démonstration est similaire à l'étape 4 de celle du théorème 2.26.

## 2.5 Etude de quelques exemples

Cette section est consacrée à l'illustration des résultats présentés dans ce chapitre sur quelques exemples, issus de la littérature, dont la plupart ont été introduits dans

la section 1.1.2. Nous commençons par les appliquer à l'étude des équations de Maxwell en présence d'un réseau périodique de Split-Ring-Resonators (SRR) (section 2.5.1), d'un métamatériau chiral construit à partir d'un réseau de «  $\Omega$ -particle resonator » (section 2.5.2) et d'un métamatériau bi-anisotropique (section 2.5.3). Des exemples pour le système de l'acoustique donnés par un métamatériau ayant un indice de réfraction négatif ainsi que par des conditions aux limites absorbantes de type PML (Perfectly-Matched-Layer) sont ensuite traités respectivement dans les sections 2.5.4 et 2.5.5. Un dernier exemple est donné par un métamatériau élastique ayant une densité de masse et un coefficient de Lamé  $\mu$  négatifs (section 2.5.6).

### 2.5.1 Réseau périodique de Split-Ring-Resonator (SRR)

Considérons un réseau périodique de SRR inclus dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , un ouvert connexe borné de frontière de classe  $C^1$ . Les paramètres du milieu homogénéisé sont donnés par (1.2). Le théorème 2.7 est alors utilisé pour étudier le système (1.1)-(1.2). Les hypothèses 2.5 doivent ainsi être vérifiées :

(B1) :  $\varepsilon$  et  $\mu$  donnés par (1.2) dépendent de  $p$  comme des fractions rationnelles et sont donc holomorphes sur  $D_0 = \mathbb{C} \setminus Z$  où  $Z$  est l'ensemble des zéros de leurs dénominateurs :

$$Z = \left\{ \frac{\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}, 0, \frac{\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} \right\},$$

où nous avons choisi la détermination de la racine carrée complexe telle que  $\sqrt{y} = i\sqrt{-y}$  pour tout  $y \in \mathbb{R}^-$ .

(B2) : Les coefficients  $\varepsilon$  et  $\mu$  ne dépendent pas de  $x$  et définissent donc des applications lipschitziennes sur  $\Omega$ .

(B3) : Soit  $g : p \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto -p^2 - \omega_0^2 + p\Gamma \in \mathbb{R}$ . Alors  $g$  atteint son maximum en  $p_0 = \Gamma/2$ . Comme  $g(p_0) > 0$  il suit la validation de (B3).

Le théorème 2.7 assure alors que les équations de Maxwell en présence d'un réseau de SRR homogénéisé (1.1)-(1.2) sont bien posées pour tout  $f \in H(\text{div}, \Omega)^2$  et pour tout  $p$  dans  $D_0 \setminus \tilde{S}$  où  $\tilde{S}$  est un ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$ .

**Remarque 2.32.** *Le théorème 2.14 peut aussi s'appliquer pour étudier le problème (1.1)-(1.2). Il faut dans ce cas vérifier les hypothèses 2.12. La vérification des trois premières est similaire à (B1), (B2) et (B3) et uniquement (DT4) reste à être validée. Il suffit pour cela de prendre  $a_\vartheta(p, x) = \vartheta(p, x)$  pour  $\vartheta \in \{\varepsilon^{-1}, \mu^{-1}\}$  et  $D_0 = \mathbb{C} \setminus Z$ . Le théorème 2.14 entraîne alors l'existence et l'unicité d'une solution pour (1.1)-(1.2), pour tout  $f \in L^2(\Omega)^6$  et pour tout  $p$  dans  $D_0 \setminus S$  où  $S$  est un ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$ .*

*Finalement, notons que  $S$  peut être différent de  $\tilde{S}$ . Cela provient du fait que les théorèmes 2.14 et 2.7 assurent le caractère bien posé des équations de Maxwell en présence de métamatériaux obtenus par homogénéisation pour des classes de seconds membres différentes.*

### 2.5.2 Métamatériau chiral basé sur un modèle de type « $\Omega$ -particle resonator »

Nous étudions maintenant un métamatériau construit à partir d'un modèle de type «  $\Omega$ -particle resonator » inclus dans  $\Omega$ . Les caractéristiques du milieu homogénéisé sont données dans (1.4). L'étude du système (1.3)-(1.4) se fait en appliquant, une fois de plus, le théorème 2.7. Il faut ainsi vérifier les hypothèses 2.6 :

- (C1) : La permittivité, la perméabilité et la chiralité définies par (1.4) sont des fractions rationnelles en  $p$ . L'hypothèse (C1) est donc vérifiée sur  $\mathbb{C} \setminus Z$  pour  $Z = \{(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})/2\}$ .
- (C2) : Les coefficients  $\varepsilon$ ,  $\mu$  et  $\beta$  sont indépendants de  $x$  et donc lipschitziens sur  $\bar{\Omega}$ . La fonction  $p^2\varepsilon(p, x)\mu(p, x)M(p, x)$  est non-nulle pour tout  $p \notin Z \cup \{p_j, j = 1 \cdots 5\}$ , où  $(p_j)_j$  désigne l'ensemble des zéros de cette fonction. Les valeurs explicites des  $\Omega_{\varepsilon, \mu, \beta}$  et  $\varepsilon_b, \mu_b$  données dans [94] et quelques calculs conduisent à :

$$\begin{cases} p_1 = 0,05146743450 - 1.909033734i, \\ p_2 = 0,05146743450 + 1.909033734i, \\ p_3 = 0,05498575999 - 1.927011242i, \\ p_4 = 0,05498575999 + 1.927011242i, \\ p_5 = 0. \end{cases}$$

- (C3) : Nous utilisons la matrice  $K(p)$  donnée par (2.8). En remarquant que l'hypothèse (C3) revient à vérifier la coercivité de  $K(p)$ , nous calculons ses valeurs propres :

$$\sigma(K(p)) = \left\{ \frac{\varepsilon(p) + \mu(p) - \sqrt{\varepsilon(p)^2 - 2\varepsilon(p)\mu(p) + \mu(p)^2 - 4\varepsilon(p)^2\mu(p)^2p^2\beta(p)^2p}}{2 + 2p^2\varepsilon(p)\mu(p)\beta(p)}, \frac{\varepsilon(p) + \mu(p) + \sqrt{\varepsilon(p)^2 - 2\varepsilon(p)\mu(p) + \mu(p)^2 - 4\varepsilon(p)^2\mu(p)^2p^2\beta(p)^2p}}{2 + 2p^2\varepsilon(p)\mu(p)\beta(p)} \right\},$$

chacunes étant de multiplicité 3. Ainsi le spectre de  $K(1) = K(1)^*$  est

$$\sigma(K(1)) = \{0.9536351793, 3.444237487\} \subset \mathbb{R}_+^*,$$

et donc  $K(p_0)$  est coercive pour  $p_0 = 1$ .

Le théorème 2.7 s'applique alors et affirme que les équations de Maxwell (1.3) en présence d'un métamatériau chiral construit à partir d'un modèle de type «  $\Omega$ -particle resonator » (1.4) sont bien posées pour tout  $f \in H(\text{div}, \Omega)^2$  et pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S$  un ensemble exceptionnel de points de  $D_0$ .

### 2.5.3 Un métamatériau bi-anisotropique

Considérons maintenant un métamatériau construit à partir d'un réseau composé de Split-Ring-Resonator bi-anisotropiques introduit dans [53]. Les paramètres physiques d'un tel milieu sont définis dans (1.6) et le théorème 2.7 est utilisé pour étudier le système (1.5)-(1.6). Les hypothèses 2.5 doivent donc être vérifiées :



(B1) : Les paramètres physiques donnés dans (1.6) dépendent de  $p$  comme des fractions rationnelles. Ils sont donc holomorphes sur  $\mathbb{C}$  privé de l'ensemble des pôles de leurs dénominateurs. Plus précisément, leur domaine commun d'holomorphic est :

$$D_0 = \mathbb{C} \setminus Z \text{ avec } Z = \left\{ \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_{LC}^2}}{2} \right\}.$$

(B2) : Les coefficients  $\varepsilon(p, x)$ ,  $\mu(p, x)$ ,  $\xi(p, x)$  et  $\zeta(p, x)$  sont trivialement lipschitziens sur  $\Omega$  pour tout  $p \in \mathbb{C} \setminus Z$ . Il reste à montrer que  $\varepsilon(p, x)\mu(p, x) - \xi(p, x)\zeta(p, x)$  est différent de zéro sur un sous-ensemble de  $D_0$ . On peut calculer les zéros en  $p$  de cette fonction en utilisant les valeurs explicites de  $dc_0/l^2 = 0.75\omega_{LC}$ ,  $F = 0.3$  et  $\gamma = 0.05\omega_{LC}$  (voir figure 2 de [53]). Cette fonction est ainsi non-nulle pour tout  $p \in D_0 := \mathbb{C} \setminus (Z \cup \{p_i, i = 1 \dots 5\})$  où :

$$\begin{cases} p_1 = (0.1522392099 + 1.128302032i)\omega_{LC}, \\ p_2 = (-0.09152492420 + 1.131232555i)\omega_{LC}, \\ p_3 = (-0.09152492420 - 1.131232555i)\omega_{LC}, \\ p_4 = (0.1522392099 + 1.128302032i)\omega_{LC}, \\ p_5 = 0. \end{cases}$$

(B3) : Il faut trouver  $p_0 \in D_0$  tel que la contrainte de coercivité imposée par (B3) soit satisfaite. Cela se ramène à trouver  $p_0$  pour lequel l'opérateur de multiplication  $K(p)$  (2.8) soit coercif en  $p_0$ . Des calculs montrent que le spectre de cette matrice est :

$$\sigma(K(p, \cdot)) = \left\{ \left( \varepsilon(p) + \mu(p, \cdot) - \sqrt{(\varepsilon(p))^2 - 2\mu(p)\varepsilon(p) + \mu(p)^2 + 4\xi(p)^2} \right) \frac{p}{2}, \right. \\ \left. \left( \varepsilon(p) + \mu(p) + \sqrt{(\varepsilon(p))^2 - 2\mu(p, \cdot)\varepsilon(p) + \mu(p)^2 + 4\xi(p)^2} \right) \frac{p}{2} \right\},$$

où chacune des valeurs propres est de multiplicité 3. Ainsi, pour  $p_0 = \omega_{LC}$ , on a  $K(\omega_{LC}) = K(\omega_{LC})^*$  et de plus

$$\sigma(K(\omega_{LC})) = \{0.7997334285\omega_{LC}, 1.132958880\omega_{LC}\} \subset \mathbb{R}^{+*}.$$

$K(\omega_{LC})$  est donc coercive.

Le théorème 2.7 montre alors l'existence et l'unicité d'une solution aux équations de Maxwell (1.5) en présence d'un réseau périodique de SRR bi-anisotropiques (1.6) pour tout  $f \in (H(\text{div}, \Omega))^2$  et pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S$  est un ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$ .

#### 2.5.4 Métamatériau acoustique ayant un indice de réfraction négatif

Étudions maintenant le cas d'un métamatériau acoustique créé à partir de petits tubes troués comme représenté dans la figure 1.9. Le comportement d'un tel milieu est modélisé par le système de l'acoustique (1.7) avec les paramètres physiques issus de (1.8). Nous utilisons le théorème 2.17 et donc les hypothèses 2.20 doivent être vérifiées :

- (A1) : Les paramètres physiques donnés par (1.8) sont holomorphes sur  $D_0 = \mathbb{C} \setminus \{0, \gamma\}$ .  
 (A2) : Les quantités  $\Gamma$  et  $n$  ne dépendent pas de  $x$  et sont inversibles pour tout  $(x, p) \in \Omega \times D_0$ .  
 (A3) : Pour  $p_0 \in \mathbb{R}^+$  suffisamment grand, il vient  $p_0 B^{-1} \left(1 - \frac{\omega_{sh}^2}{\gamma p_0 - p_0^2}\right) > 0$  et l'hypothèse est ainsi vérifiée.

Le théorème 2.17 assure alors que le système (1.7)-(1.8) admet une unique solution continue par rapport à tout second membre  $f \in L^2(\Omega)^4$  pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S$  est un ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$ .

### 2.5.5 Perfectly-Matched-Layers : Invisibilité approchée pour l'acoustique

Les matériaux permettant de réaliser une cape d'invisibilité parfaite possède des paramètres physiques singuliers en espace (voir la section 1.1.1 et/ou [41, 80, 89, 22, 27]). Afin de passer outre cette difficulté, des milieux dont les paramètres sont à la fois bornés et coercifs et réalisant de l'invisibilité dite approchée ont été récemment proposés [42]. Cependant, la plupart des milieux théoriques introduits à cet effet ne dépendent pas de la pulsation comme des fractions rationnelles et ainsi ne sont pas des métamatériaux au sens de V.G. Veselago [92]. C'est pourquoi nous introduisons maintenant le milieu fictif PML (Perfectly-Matched-Layers). En effet, ce dernier est défini à partir de conditions aux limites absorbantes et ainsi fournit un milieu d'invisibilité approchée car il absorbe fortement les ondes diffractées. On peut se reporter à cet effet à [56] pour l'application à l'invisibilité en « back-scattering ». En vue des propriétés « exotiques » du matériau PML, nous le considérons ici comme un métamatériau en un sens étendu. Nous allons donc appliquer nos résultats au système de l'acoustique (1.7) en présence d'un tel milieu.

Introduisons tout d'abord la construction du milieu PML basée sur un plongement complexe de  $\mathbb{R}^3$  [56]. Soit donc  $\Theta$  un ouvert convexe de  $\Omega$  de frontière de classe  $\mathcal{C}^3$  dont la normale unitaire sortante est  $\mathbf{n}_\Theta$ . L'ouvert  $\Theta$  étant convexe, il existe, pour tout  $x \in \Omega$ , un unique  $\eta_x \in \partial\Theta$  tel que  $h = \text{dist}(x, \partial\Theta) = |x - \eta_x|$  et  $x = \eta_x + h\mathbf{n}_\Theta(\eta_x)$ . Soit  $\sigma \in C^3(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$  tel que  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \sigma(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \sigma'(s) = +\infty$  et  $\sigma(0) = \sigma'(0_+) = 0$ . La formulation complexe des PML est alors obtenue en utilisant l'invariance par transformations d'espace du système de l'acoustique et le changement de variables suivant :

$$\tilde{x} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \quad x \longmapsto \tilde{x}(x) = x + \frac{\sigma(h)\mathbf{n}_\Theta(\eta_x)}{p}. \quad (2.42)$$

Soit enfin  $J(p, x) = \nabla \tilde{x}(p, x)$  le jacobien du changement de variable, nous supposons que (2.42) définit un difféomorphisme pour tout  $(p, x) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \Omega$ . La justification précise de ce fait se trouve dans [56]. Le système de l'acoustique en présence de PML est ainsi (1.7) où l'opérateur de multiplication est défini par (1.23) pour les paramètres physiques :

$$p\Gamma(p, x) = \sqrt{\det(g(p, x))} g(p, x)^{-1}, \quad pn(p, x) = p^2 \det(g(p, x)), \quad (2.43)$$

où  $g(p, x) = (J(p, x)^T J(p, x))^{-1}$ . On suppose de plus que le milieu PML inclus dans  $\Theta$  est ancré dans  $\Omega$  contenant de l'air comme représenté par la figure 2.2. Ainsi, pour tout  $x \in \Omega \setminus \Theta$  on a  $\tilde{x}(x) = \mathbb{I}$  et donc  $\Gamma(p, x) = \mathbb{I}_3$  et  $n(p, x) = 1$  pour tout  $p$  dans

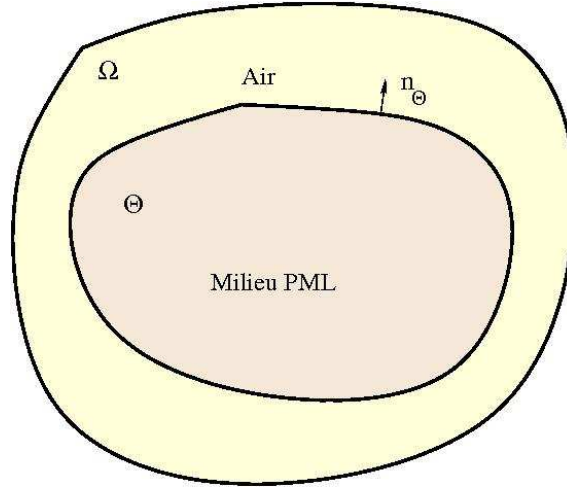


FIG. 2.2: Milieu PML dans de l'air

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Remarquons enfin que l'application  $x \in \Omega \mapsto \Gamma(p, x) \in \text{Hom}(\mathbb{C}^3)$  est (au moins) lipschitzienne pour tout  $p$  en vertu des hypothèses sur  $\Theta$  et  $\sigma$ .

Nous montrons maintenant le caractère bien posé de (1.7)-(1.23)-(2.43) en appliquant le théorème 2.21. Les hypothèses 2.20 doivent donc être vérifiées :

- (A1) : L'application  $p \in D_0 = \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto g(p, x) \in \text{Hom}(\mathbb{C}^3)$  est holomorphe pour presque tout  $x$  dans  $\Omega$ . Il en est de même pour  $p \mapsto \Gamma(p, x)$  et  $p \mapsto n(p, x)$ .
- (A2) :  $g(p, x)$  est inversible pour tout  $p \in D_0$  et pour presque tout  $x \in \Omega$ . De plus,  $g(p, \cdot)$  et  $g(p, \cdot)^{-1}$  sont bornées sur  $\Omega$  car  $\sigma$  est de classe  $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ , ne s'annule jamais et le changement de variables  $x \mapsto \tilde{x}(x)$  (2.42) est, par hypothèse, un difféomorphisme.
- (A3) : La matrice  $g(p_0)$  est coercive pour  $p_0 = 1$ . Il en est donc de même pour l'application  $(X, z) \mapsto |z|^2 \mathcal{R}e(n(1, x)) + \mathcal{R}e \{ \langle \Gamma(1, x)X, \overline{X} \rangle \}$ .
- (A4) : Soit  $a(p, x) = \left( \sqrt{\det(g(p, x))} \right)^{-1}$ . Alors, par hypothèse,  $a(p, x)$  est holomorphe sur  $D_0$  et lipschitzienne sur  $\Omega$ . Comme les PML sont incluses dans de l'air, on a  $a(p, \cdot)|_{\partial\Omega} = 1$ . De plus  $\langle \Gamma(p, x)a(p, x)X, \overline{X} \rangle = |J(p, x)X|^2$  et ainsi (A4) est satisfaite car l'application  $x \mapsto \tilde{x}(x)$  est un difféomorphisme.

Le système (1.7)-(1.23)-(2.43) est alors bien posé par le théorème 2.21 pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S$  est un ensemble exceptionnel de points de  $D_0$ .

**Remarque 2.33.** Les équations de Maxwell (1.1) en présence de PML sont aussi bien posées. En effet, en utilisant l'invariance par transformations d'espace des équations de Maxwell et le changement de variables (2.42), on obtient que le milieu PML est caractérisé par les paramètres physiques :

$$p\varepsilon(p, x) = p\mu(p, x) = \frac{g(p, x)}{\sqrt{\det(g(p, x))}}. \quad (2.44)$$

Pour cela nous utilisons le théorème 2.14 et les hypothèses 2.12 doivent donc être vérifiées. Remarquons tout d'abord que les hypothèses (BT1), (BT2) et (BT3) ont déjà été validées lors de la vérification de (A1), (A2) et (A3). Pour (DT4), on prend  $a_\varepsilon(p, x) = a_\mu(p, x) = \sqrt{\det(g(p, x))}$ . Ainsi les équations de Maxwell (1.1)-(2.44) en présence de PML sont bien

posées pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S$  est un ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

### 2.5.6 Un métamatériau pour l'élasticité linéaire

Le dernier exemple étudié est un métamatériau homogénéisé pour l'élasticité linéaire possédant un coefficient de Lamé  $\mu(p)$  négatif. Il a été introduit dans [95] et est décrit dans 1.1.2. Ses paramètres physiques sont donnés dans (1.10). Nous utilisons maintenant le corollaire 2.28 et devons alors vérifier les hypothèses 2.29 :

- (E1) : L'holomorphie de  $\mu_{\text{eff}}(p)$  et  $\lambda_{\text{eff}}(p)$  est assurée par l'holomorphie des fonctions de Hankel et de Bessel sphériques de première espèce. Les définitions et propriétés de ces fonctions spéciales peuvent être trouvées dans [1]. Les coefficients de Lamé et par suite  $\mu(p, x)^{-1}$  et  $(\lambda(p, x) + \mu(p, x))^{-1}$  sont holomorphes sur  $D_0 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
- (E2) : Les paramètres du métamatériau homogénéisé (1.10) ne dépendent pas de  $x \in \Omega$  et possèdent ainsi la régularité requise.
- (E3) : Les figures 4 et 6 issues de [95] (ou encore la figure 1.10) montrent que, pour  $p_0 = 1$ , les coefficients  $\mu_{\text{eff}}$  et  $\lambda_{\text{eff}}$  sont des constantes strictement positives.

Le corollaire 2.28 montre alors, pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S$  un ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$ , que le système (1.25)-(1.26)-(1.10) admet une unique solution continue par rapport au terme source.



---

## Approximation numérique de modèles homogénéisés de métamatériaux

---

Les métamatériaux sont, pour la plupart, obtenus à partir d'une homogénéisation réalisée autour de certaines fréquences donnant lieu à des milieux « volumiques ». Nous sommes donc amenés à travailler en régime harmonique. De ce fait, une manière naturelle de simuler les problèmes modélisant la propagation d'ondes dans les métamatériaux est d'utiliser un schéma de type éléments finis volumique. Rappelons à cet effet que P. Fernandez et *al.* ont formulé dans [18, 74, 73] certaines remarques concernant la convergence du schéma éléments finis pour l'approximation des équations de Maxwell écrites comme un système d'ordre 2. Ces travaux fournissent des exemples où l'approche classique, appliquée à l'étude des métamatériaux, donne lieu à des instabilités numériques. Enfin, ils permettent de montrer l'importance de la coercivité des paramètres physiques pour la simulation numérique. Cependant, lorsque des métamatériaux sont considérés, les paramètres physiques perdent leur coercivité. Ainsi, l'approximation numérique de ce type de milieux souffre des mêmes difficultés que celles liées à l'étude de leur modélisation mathématique. La validité des méthodes numériques classiques utilisées pour l'approximation de ces problèmes peut donc être mise en doute lorsque des métamatériaux sont considérés. Le but de ce chapitre est l'étude de l'approximation numérique de modèles homogénéisés de métamatériaux.

La première section est dédiée à l'étude numérique du schéma éléments finis pour l'équation de Helmholtz. Cette dernière correspond au système de l'acoustique réécrit à l'ordre 2. Nous commençons par rappeler un résultat de convergence valable seulement pour des milieux classiques, ou encore coercifs. Nous présentons ensuite des exemples de métamatériaux théoriques pour lesquels une solution exacte peut être calculée. On montre alors que la solution numérique obtenue avec le schéma éléments finis ne converge pas vers cette solution exacte. Cela fournit des contre-exemples de la validité des éléments finis pour l'approximation numérique de métamatériaux dont la modélisation donne lieu à un problème d'ordre 2.

---

Concernant l'approximation numérique de systèmes du premier ordre rentrant dans le cadre introduit au chapitre 2 (cela permet de considérer des métamatériaux conduisant à un problème bien posé), on propose un schéma numérique de type éléments finis adapté à la présence de métamatériau. Ce dernier est appelé par la suite schéma EF-AL. La deuxième section est alors dédiée à l'étude de ce schéma. On commence par donner un résultat de convergence valable dès que le problème considéré est bien posé. On présente enfin des simulations numériques du système de l'acoustique sur les cas tests précédents pour lesquels le schéma éléments finis classique n'était plus valable afin de valider numériquement le résultat de convergence démontré précédemment.

Nous avons introduit le schéma EF-AL en réponse au contre-exemple montrant la non-validité des éléments finis pour l'approximation numérique des métamatériaux. Ce schéma était utilisé pour le système d'ordre 1 contrairement aux éléments finis pour l'équation de Helmholtz. Ainsi, nous nous intéressons dans la dernière partie, à titre de comparaison, à un schéma adapté aux systèmes d'ordre 1 : le galerkin discontinu (GD). La dernière partie de ce chapitre concerne alors l'étude numérique du schéma GD pour l'approximation des métamatériaux homogénéisés. Nous commençons par rappeler un résultat de convergence valable uniquement pour des milieux usuels. L'application de ce schéma aux exemples précédemment mentionnés est ensuite présentée. Ces derniers montrent que le GD semble rester convergent sur ces cas là. Nous n'avons, cependant, aucune démonstration confirmant ce comportement.

### 3.1 Schéma Éléments Finis usuel

On commence par réécrire le système de l'acoustique avec des conditions aux limites de Dirichlet (1.7) comme une équation aux dérivées partielles d'ordre 2. Il suffit, pour cela, de reporter la première équation de (1.7) dans la seconde. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } \rho \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ & \begin{cases} \operatorname{div}(\sigma(p, x)\nabla\rho) - p^2n(p, x)\rho = g, & \text{pour } x \in \Omega, \\ \rho|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

où  $\sigma = (\Gamma)^{-1}$  et  $g = -f_2 - \operatorname{div}(\sigma f_1) \in H^{-1}(\Omega)$ . Une formulation faible pour (3.1) est maintenant obtenue en multipliant l'équation (3.1) par des fonctions tests  $v \in H_0^1(\Omega)$  et en intégrant par parties. Il vient alors :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } \rho \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega) : \\ & a(\rho, v) = l(v), \end{aligned} \quad (3.2)$$

où

$$a(\rho, v) := \int_{\Omega} \langle \sigma(p, x)\nabla\rho, \overline{\nabla v} \rangle + p^2n(p, x)\rho\bar{v}dx$$

est une forme sesquilinéaire sur  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  et  $l$  est une forme linéaire sur  $H_0^1(\Omega)$  définie ci-dessous

$$l(v) = - \int_{\Omega} g\bar{v}dx.$$

Dans la suite de cette section on présente le schéma éléments finis pour le problème de Helmholtz. On rappelle tout d'abord un théorème concernant la convergence de ce schéma lorsque l'on traite le cas de milieux classiques. Des contres exemples de la validité des éléments finis pour l'approximation numérique des métamatériaux sont alors proposés.

### 3.1.1 Présentation du schéma

La méthode des éléments finis permet d'approximer numériquement le problème (3.2). On se donne pour cela une famille  $\{\mathcal{V}_h\}_{h>0}$  d'espaces de dimension finie vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_h \subset H_0^1(\Omega), \forall h > 0, \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \exists (\tilde{v}_h)_{h>0} \in \mathcal{V}_h \text{ tel que } \lim_{h \rightarrow 0} \|v - \tilde{v}_h\|_{H_0^1(\Omega)} = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

Nous rappelons alors, pour le cas de milieux classiques, le résultat de convergence suivant [33].

**Théorème 3.1.** *Supposons que  $\Gamma(p_0, \cdot)$  et  $p_0^2 n(p_0)$  soient coercifs pour un certain  $p_0$ . Alors :*

1) le problème

$$a(\rho_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h,$$

admet une unique solution pour tout  $h > 0$ .

2) On a, pour  $C > 0$  une constante indépendante de  $h$ , l'estimation d'erreur

$$\|\rho - \rho_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \in \mathcal{V}_h} \|\rho - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

3)  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\rho - \rho_h\|_{H_0^1(\Omega)} = 0, \quad \forall p \in D_0 \setminus S$ .

**Démonstration rapide.** Par hypothèse, la forme bilinéaire  $a$  est coercive sur  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ . Le problème discret admet alors trivialement une unique solution.

Comme  $\mathcal{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$ , on obtient que  $a(\rho - \rho_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h$ , et donc :

$$a(\rho - \rho_h, \rho - \rho_h) = a(\rho - \rho_h, \rho - v_h), \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h.$$

Par hypothèse,  $p_0^2 n(p_0)$  et  $\Gamma(p_0, \cdot)$  sont coercifs. Il en est donc de même pour  $\sigma = (\Gamma(p_0))^{-1}$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne alors :

$$\alpha \|\rho - \rho_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M \|\rho - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h, \quad (3.4)$$

où  $\alpha > 0$  est la constante de coercivité de  $a$  et  $M$  sa constante de continuité. De l'inégalité (3.4) on tire l'estimation :

$$\|\rho - \rho_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in \mathcal{V}_h} \|\rho - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}$$

L'inégalité précédente et les propriétés d'approximations de  $\mathcal{V}_h$  entraînent enfin :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\rho - \rho_h\|_{H_0^1(\Omega)} = 0, \quad \forall p \in D_0 \setminus S.$$

On a donc démontré la convergence de  $\rho_h$  vers  $\rho$  ce qui achève la démonstration. ■



**Remarque 3.2.** Par le 2) du théorème 3.1, l'ordre de convergence des éléments fini est donné implicitement par  $\inf_{v_h \in \mathcal{V}_h} \|\rho - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}$ .

Un des ingrédients essentiels de la démonstration du théorème 3.1 est l'inégalité (3.4). Cette dernière provient de la coercivité de  $\Gamma(p_0, \cdot)$  et de  $p_0^2 n(p_0, \cdot)$ . Dans le cas où des métamatériaux sont inclus dans  $\Omega$ , on perd cette coercivité. Ainsi la convergence du schéma éléments finis pour l'approximation des métamatériaux n'est plus assurée par le théorème 3.1. On propose, ci-après, des exemples de métamatériaux théoriques pour lesquels une solution exacte peut être calculée et dont la solution numérique obtenue par éléments finis diverge de cette dernière.

### 3.1.2 Tests numériques

Afin d'étudier l'approximation numérique des métamatériaux avec le schéma éléments finis, on suppose que  $\Omega$  contient un milieu caractérisé par un module de masse  $\Gamma$  et un indice de réfraction  $n$ . On présente maintenant les différents cas tests que nous allons approximer dans la suite de ce chapitre. On donne ensuite les seconds membres ainsi que les solutions explicites associées. Nous présentons alors l'espace d'approximation utilisé et les résultats numériques obtenus.

#### 3.1.2.1 Un milieu classique

Soit  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ . Le matériau est supposé inclus dans le disque de centre  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et de rayon  $\frac{2}{3}$ , noté  $D$ . En particulier, on a :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right\}.$$

Les paramètres du milieu sont donnés par :

$$\Gamma(p, x) = \begin{cases} 1 + p \times 10^{-5}, & \forall x \in \Omega \setminus D \\ 5 + 3p \times 10^{-5}, & \forall x \in \overline{D} \end{cases}, \quad (3.5)$$

$$n(p, x) = \frac{1}{3}. \quad \forall x \in \Omega,$$

## Second membre et solutions explicites

On se donne maintenant un second membre particulier pour lequel une solution au problème (1.7) peut être calculée explicitement.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \operatorname{div}(p\Gamma(p)u_{\text{ex}}) - \nabla\rho_{\text{ex}} \\ pn(p)\rho_{\text{ex}} - \operatorname{div}(u_{\text{ex}}) \end{pmatrix}, \\ \rho_{\text{ex}}(x, y) &= x(1-x)y(1-y) [3i\cos(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)], \\ u_{\text{ex}}(x, y) &= \begin{pmatrix} ixy^2 + 2x^2 \\ ix^2y + 2y^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les graphes des solutions explicites sont représentés dans la figure 3.1. Nous avons choisi comme solution exacte les fonctions  $(u_{\text{ex}}, \rho_{\text{ex}})$  ci-dessus car elles vérifient la condition à la limite. De plus, bien qu'elles soient régulières, leurs approximations numériques par un espace de dimension fini composé de polynômes va obligatoirement présenter un résidu.

## Définition du maillage

Afin de définir l'espace d'approximation  $\mathcal{V}_h$ , on commence par considérer un maillage de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  donné par une triangulation  $\mathcal{T}_h$  composée de triangles non-dégénérés. Nous avons ainsi  $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$  où l'intérieur de  $T$  est disjoint de l'intérieur de  $\tilde{T}$  dès lors que  $T$  est distinct de  $\tilde{T}$ . On suppose de plus que le maillage est conforme. Cela signifie que l'intersection de deux mailles distinctes est soit vide, soit un sommet, soit une face. Enfin, afin d'éviter certains problèmes techniques, on suppose que le maillage est régulier au sens de Ciarlet [33] :

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \frac{\operatorname{diam}(T)}{p_T} \leq h,$$

où  $\operatorname{diam}(T)$  est le diamètre de  $T$  et  $p_T$  est le diamètre du cercle inscrit dans  $T$ . Un exemple de tel maillage, pour le cas étudié, est représenté dans la figure 3.2.

## L'espace d'approximation éléments finis

Nous allons approximer le problème (3.2) avec des éléments  $\mathbb{P}_1$ . Ces derniers sont des éléments de l'espace vectoriel suivant :

$$\mathcal{V}_{h,EF} = \{v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \mid v|_{\partial\Omega} = 0, v|_T \in \mathbb{P}_1, \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

où  $\mathbb{P}_1 = \operatorname{Vect}\{1, x, y\}$  désigne l'ensemble des polynômes de degré au plus 1. En suivant [33], on a la caractérisation suivante de cet espace d'approximation :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{h,EF} &= \operatorname{Vect}\{\phi_m \mid m = 1, \dots, n_S\}, \\ \phi_m(S_n) &= \delta_{mn}, \quad 1 \leq m, n \leq n_S, \end{aligned}$$

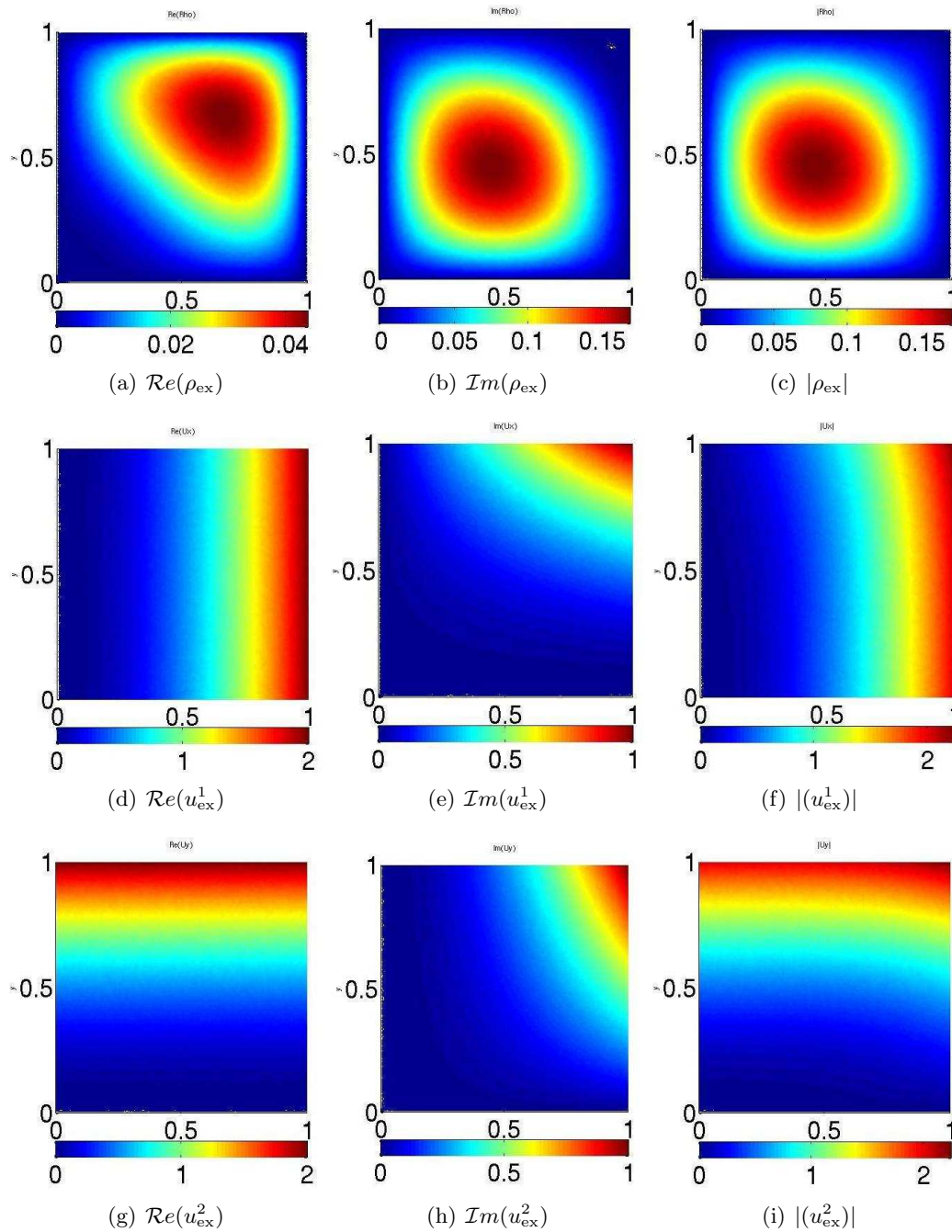
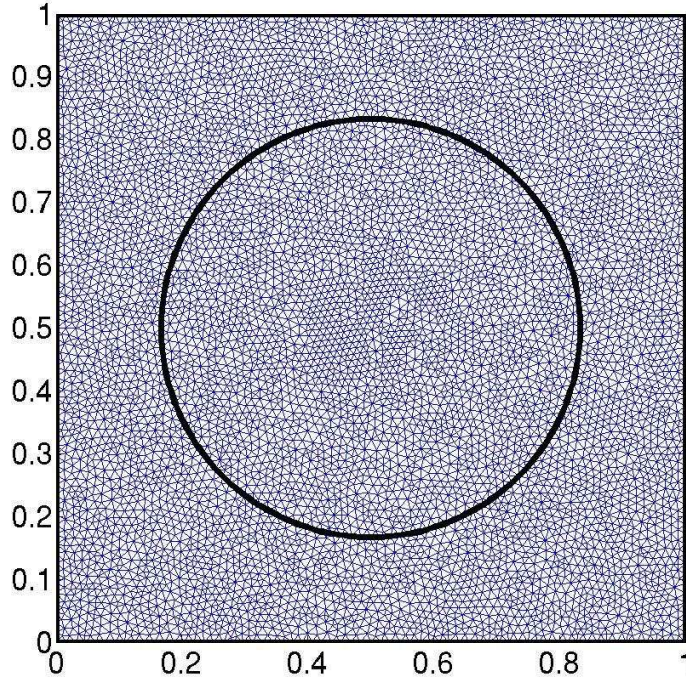


FIG. 3.1: Graphe des solutions exactes

FIG. 3.2: Exemple de maillage de  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ 

où  $\delta_{mn}$  est le delta de Kronecker et  $\{S_j\}_{j=1,\dots,n_S}$  désigne l'ensemble des sommets de  $\mathcal{T}_h$ . Les  $\phi_m$  sont appelées fonctions de base. Pour les construire explicitement, nous procédons comme dans [33]. Considérons  $T \in \mathcal{T}_h$  un triangle de sommets  $S_j = (x_j, y_j)$  et  $\hat{T}$  le triangle rectangle unité dont les sommets sont  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$ . Les fonctions de bases associées à  $\hat{T}$  sont, pour tout  $(\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{T}$ , définies par :

$$\widehat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) = 1 - \hat{x} - \hat{y}, \quad \widehat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}, \quad \widehat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}.$$

Soit la transformation affine bijective suivante permettant de passer de  $T$  à  $\hat{T}$  (voir figure 3.3) :

$$\varphi^T : (\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{T} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 - x_1)\hat{x} + (x_3 - x_1)\hat{y} \\ y_1 + (y_2 - y_1)\hat{x} + (y_3 - y_1)\hat{y} \end{pmatrix} \in T.$$

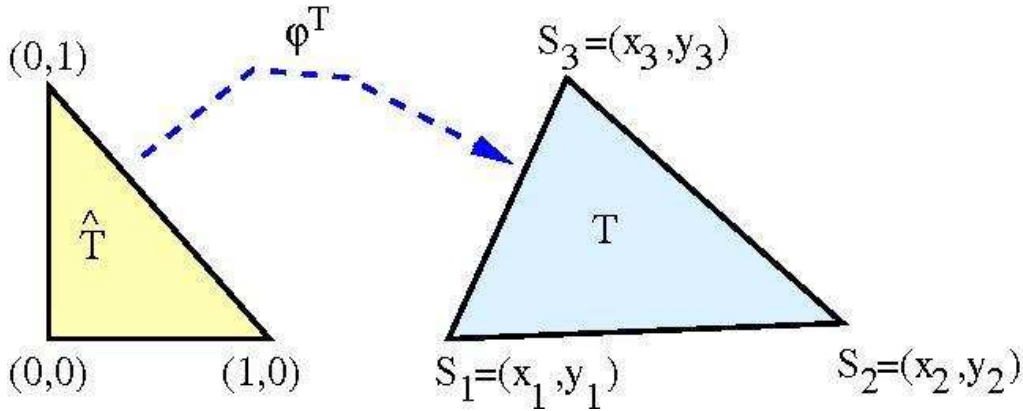
Les fonctions de bases sur  $T$  sont alors données par la formule  $\phi_j^T = \widehat{\phi}_j \circ (\varphi^T)^{-1}$ .

Finalement, on rappelle que l'espace  $\mathcal{V}_{h,EF}$  vérifie :

**Proposition 3.3** ([33], p.69 théorème 3.26). *Nous avons la propriété d'approximation suivante [33] :*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \exists \tilde{v}_h \in \mathcal{V}_{h,EF} \text{ tel que } \|v - \tilde{v}_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Ch \|v\|_{H^2(\Omega)}, \quad C > 0.$$

La proposition 3.3 et le théorème 3.1 démontrent la convergence de l'approximation éléments finis pour le cas des matériaux classiques. La remarque 3.2 permet de plus d'affirmer que l'ordre de convergence de la méthode est 1.

FIG. 3.3: Transformation de  $\hat{T}$  vers  $T$ 

### Résultats numériques

Dans toute la suite, l'erreur est calculée sur des maillages, conformes et réguliers, de  $\Omega$  de plus en plus fin. Pour chaque maillage  $\mathcal{T}$ , le paramètre  $h$  est donné par :

$$h = \frac{\max_{T \in \mathcal{T}} r_T}{2},$$

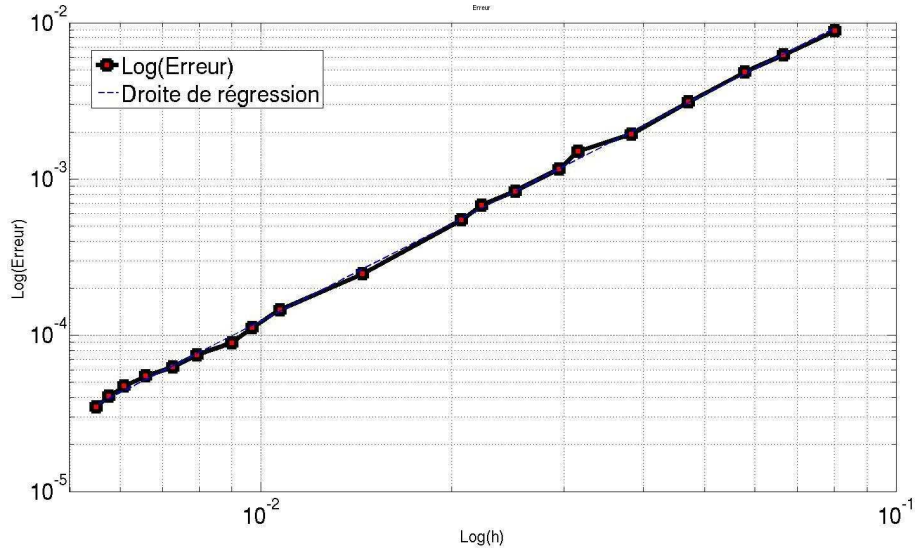
où  $r_T$  est le rayon du cercle inscrit au triangle  $T$ . Nous représentons toujours l'erreur non-normalisée

$$\text{Erreur} = \|\text{Sol}_{\text{ex}} - \text{Sol}_{\text{num}}\|_{L^2(\Omega)}.$$

De plus, afin de calculer ces erreurs, nous avons utilisé une formule d'intégration numérique donnée à partir des points de quadrature de Gauss-Lobatto [33]. Enfin, nous avons pris un nombre suffisant de points de quadrature pour que l'erreur engendrée par la formule d'intégration approchée ne pollue pas l'erreur du schéma.

On présente maintenant le résultat de la simulation par éléments finis du problème (3.2) en présence du milieu classique (3.5) lorsque  $p = i\omega$  pour  $\omega = 1$ .

La courbe d'erreur est représentée par la figure 3.4. La pente de la droite de régression est 2.0739. Notons que cela est plus que l'ordre estimé à partir de la proposition 3.3 et du théorème 3.1 qui annoncent que la méthode est d'ordre 1. Ce phénomène bien connu [33] est appelé *super-convergence* des éléments finis. Il est de plus principalement dû à la régularité du maillage.

FIG. 3.4: Erreur  $L^2$  des éléments finis pour le matériau classique

### 3.1.2.2 Un métamatériau pour lequel le schéma EF est valide

On suppose que  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  et que le métamatériau est inclus dans  $D$ . Les paramètres physiques du métamatériau considéré sont donnés par :

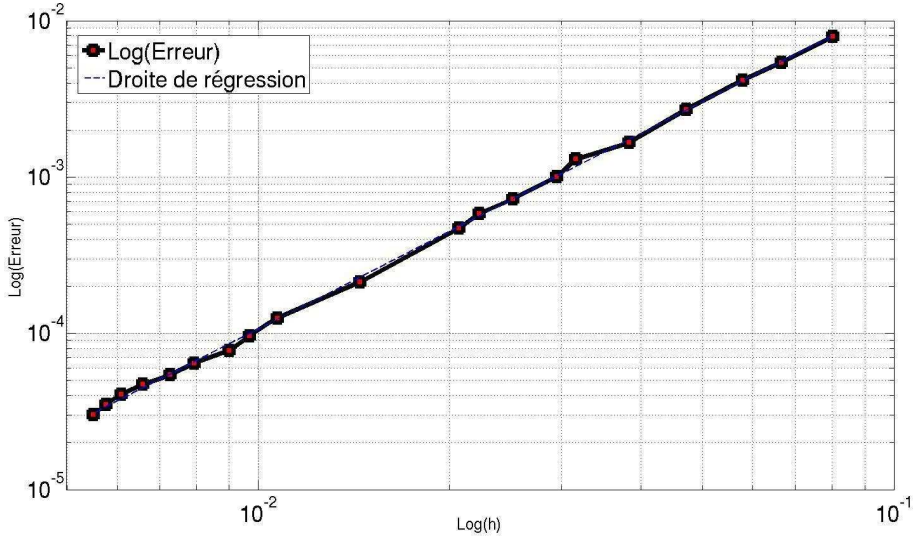
$$\Gamma(p, x) = \begin{cases} 1, & \forall x \in \Omega \setminus D \\ -5, & \forall x \in \overline{D} \end{cases}, \quad (3.7)$$

$$n(p, x) = \begin{cases} 1, & \forall x \in \Omega \setminus D \\ -3, & \forall x \in \overline{D}. \end{cases}$$

Nous reprenons maintenant le second membre et la solution explicite correspondante (3.6). Les hypothèses sur le maillage ainsi que l'espace d'approximation utilisé sont les mêmes que sur le cas test précédent. Notons cependant que le théorème 3.1 ne s'applique pas car  $\Gamma$  n'est pas coercif. On donne maintenant les résultats numériques obtenus sur ce cas test.

L'erreur obtenue pour l'approximation par éléments finis du problème (3.2) en présence du métamatériau (3.7) lorsque  $p = i\omega$  pour  $\omega = 1$  est représentée dans la figure 3.5. La pente de la droite de régression est 2.0792 soit, une fois encore, plus que l'ordre annoncé par le théorème 3.1. Nous avons ainsi un exemple de métamatériaux pour lequel le schéma éléments finis se comporte comme pour le cas d'un milieu usuel.



FIG. 3.5: Erreur  $L^2$  des éléments finis pour le métamatériau constant

### 3.1.2.3 Un métamatériau constant par morceaux : contre-exemple de la validité des éléments finis

Une fois encore  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  et le métamatériau est inclus dans  $D$ . Il possède de plus les paramètres physiques suivants :

$$\Gamma(p, x) = \begin{cases} 1 + p \times 10^{-5}, & \forall x \in \Omega \setminus D \\ -1 + 3p \times 10^{-5}, & \forall x \in \bar{D} \end{cases}, \quad (3.8)$$

$$n(p, x) = 1. \quad \forall x \in \Omega.$$

La géométrie ainsi que les caractéristiques du matériau sont représentés dans la figure 3.6.

On reprend le second membre et la solution exacte correspondante donnée par (3.6). Nous faisons aussi de même pour le maillage et l'espace d'approximation utilisé. Nous approximations maintenant le problème (3.1), en présence du métamatériau (3.8), lorsque  $p = i\omega$  pour  $\omega = 1$  par éléments finis avec des polynômes de degré 1 sur chaque triangles.

Les résultats numériques obtenus sont représentés dans la figure 3.8 pour la solution numérique pour le maillage le plus fin et 3.7 pour l'erreur  $L^2$  entre la solution réelle et son approximation. La pente de la droite de régression est 1.0212. La conclusion est alors plutôt visuelle. En effet, bien que la droite de régression soit décroissante, la courbe d'erreur oscille énormément. Cela empêche de conclure quant à la convergence du schéma numérique. Cette observation se confirme en comparant la figure 3.1 donnant le graphe des solutions explicites avec 3.8 représentant la solution de (3.1)-(3.8) calculée par éléments finis lorsque  $h = h_{\min}$ . On a ainsi exhibé un exemple de métamatériau constant par morceaux pour lequel le schéma éléments finis usuel semble ne pas converger.

**Remarque 3.4.** *N'ayant pas montré l'unicité de la solution au problème (3.1)-(3.8),*

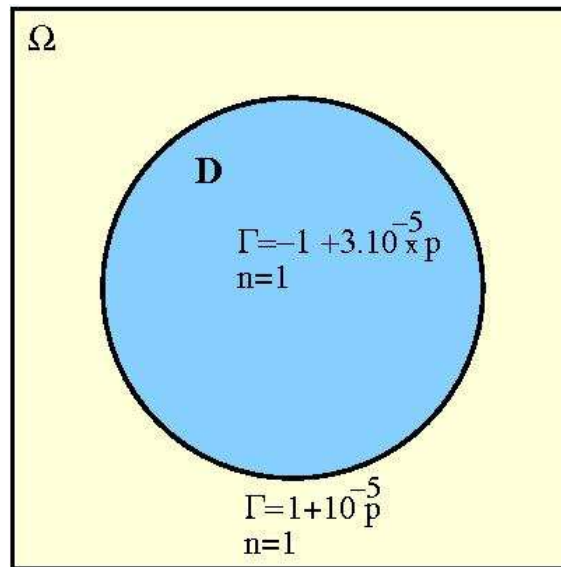
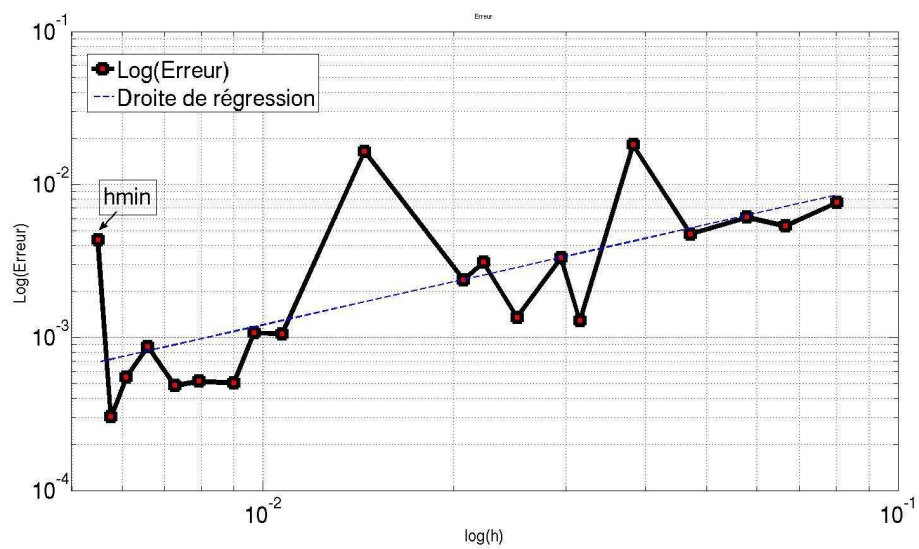


FIG. 3.6: Géométrie et paramètres d'un métamatériau constant par morceaux

FIG. 3.7: Erreur  $L^2$  des éléments finis pour le métamatériau constant par morceaux



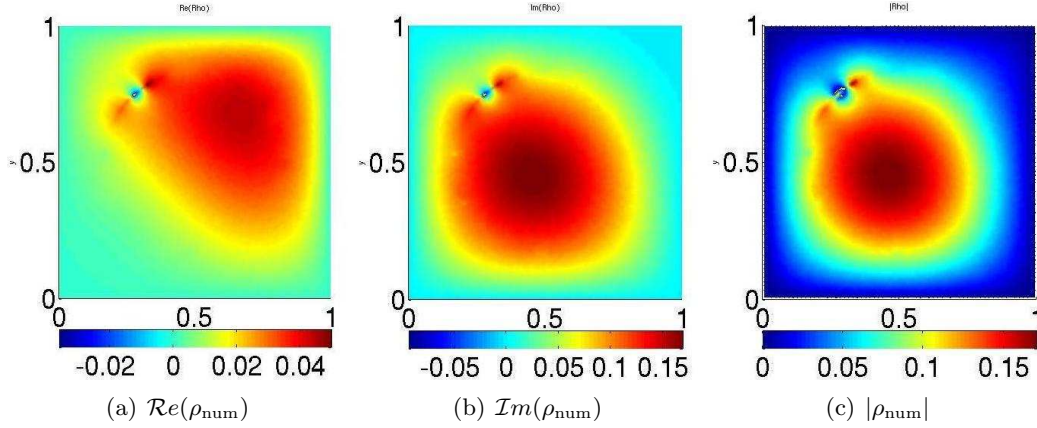


FIG. 3.8: Solutions numériques calculées par éléments finis, lorsque  $h = h_{\min}$ , pour le métamatériau constant par morceaux

*nous ne pouvons pas conclure réellement à la non-convergence du schéma mais plutôt à l'apparition de résultats numériques pouvant induire une erreur sans autre analyse.*

### 3.1.2.4 Un métamatériau lipschitzien

Le domaine  $\Omega$  est le carré unité de  $\mathbb{R}^2$  soit  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ . Le métamatériau est maintenant supposé inclus dans l'ensemble (non-convexe) suivant :

$$\mathcal{O} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) := \left( 8\left(y - \frac{1}{3}\right) - 28.8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \right)^2 - \left(1 - 9\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right)^2 < 0 \right\}.$$

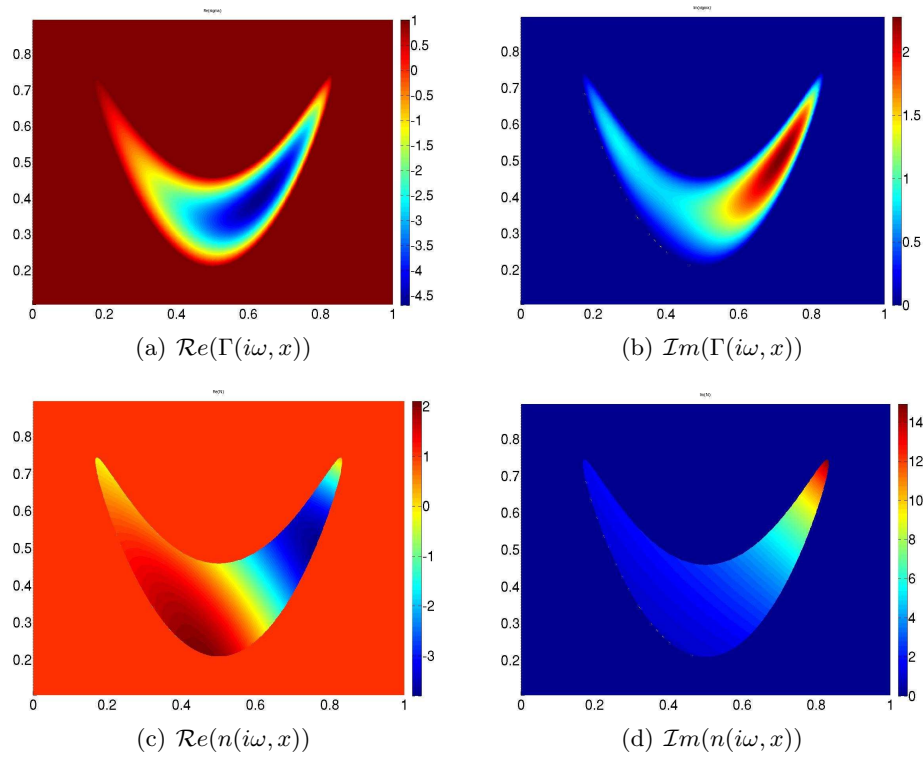
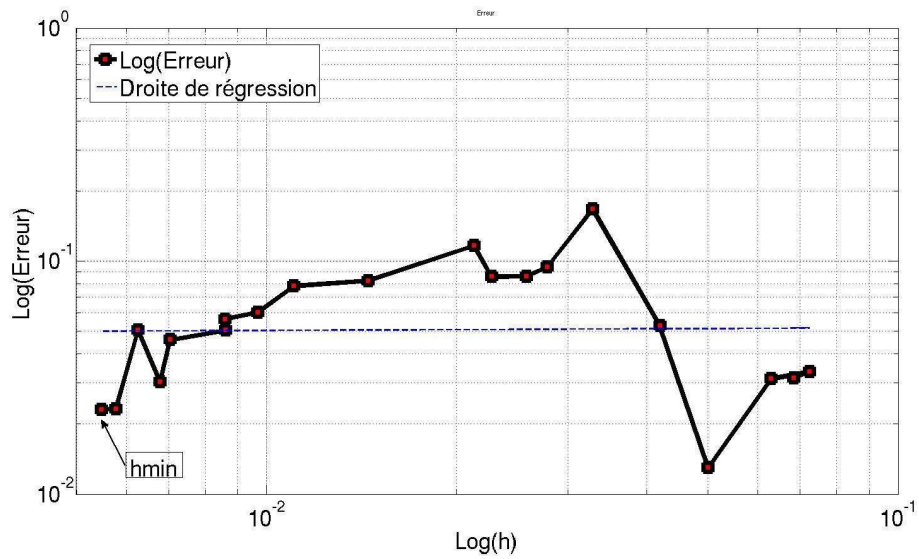
Les indices du métamatériaux sont :

$$p\Gamma(p, x) = \begin{cases} p, & \forall x \in \Omega \setminus \mathcal{O}, \\ p + pf(x, y) (10p(-x^4 - y^3) + 1 + 10x^2 + 7xy), & \forall x \in \overline{\mathcal{O}}, \end{cases} \quad (3.9)$$

$$pn(p, x) = \begin{cases} p, & \forall x \in \Omega \setminus \mathcal{O}, \\ p \left( 7xye^{x^2+y^2} p + 5x \cos(3\pi\sqrt{x+y^2}) \right), & \forall x \in \overline{\mathcal{O}}. \end{cases}$$

Notons que les parties réelles du milieu sont négatives pour  $p = i\omega$  avec  $\omega = 1$  (voir figure 3.9).

Une fois encore, nous reprenons le données issues de (3.6) ainsi que le même maillage et espace d'approximation que pour les cas tests précédents. Nous approximos maintenant par éléments finis la solution de (1.7)-(3.9) lorsque  $p = i\omega$  pour  $\omega = 1$ . Le résultat numérique obtenu avec le schéma éléments finis et des polynômes de degré 1 est alors représenté, lorsque  $h = h_{\min}$ , par la figure 3.11 pour l'approximation numérique et 3.10 pour l'erreur. La conclusion est, une fois de plus, visuelle. Cette fois-ci la courbe d'erreur ne semble pas décroître avec le raffinement de maillage. Cette observation se confirme avec

FIG. 3.9: Représentation des indices lipschitziens lorsque  $\omega = 1$ .FIG. 3.10: Erreur  $L^2$  des éléments finis pour le métamatériau lipschitzien

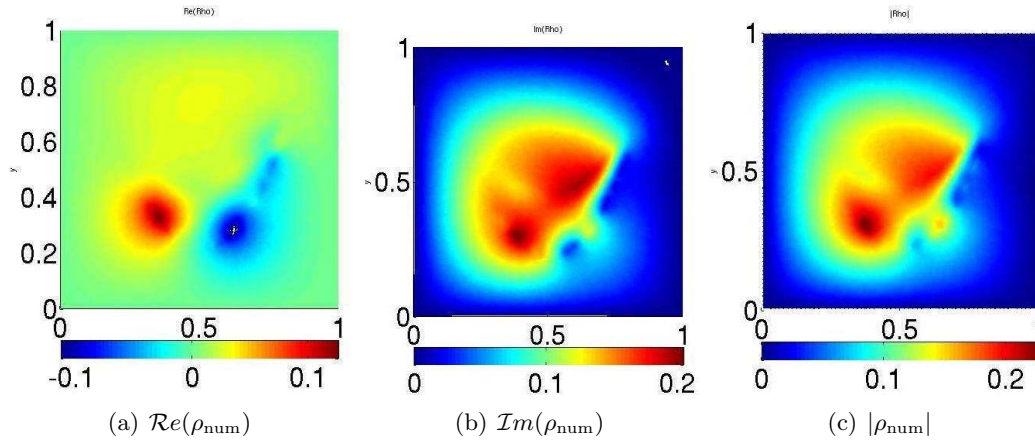


FIG. 3.11: Solutions numériques calculées, lorsque  $h = h_{\min}$ , par éléments finis pour le métamatériau lipschitzien

la comparaison des figures 3.1 et 3.11, où la solution numérique est celle obtenue pour  $h = h_{\min}$ . Le schéma éléments finis ne semble donc pas converger sur l'exemple de métamatériau lipschitzien possédant les paramètres physiques décrits dans (3.9).

### 3.2 Un schéma éléments finis adapté : le schéma EF-AL

Nous avons présenté, dans la section précédente, des métamatériaux théoriques pour lesquels le schéma éléments finis usuel donne des résultats *a priori* non-convergents. Or, si on considère ces exemples sous la forme de systèmes d'ordre 1, les résultats du chapitre 2 permettent de démontrer que ces problèmes sont bien-posés (cela est démontré dans la suite avec les propositions 3.11 et 3.12). Cela motive l'introduction d'un autre schéma numérique dont le but est d'approximer les uniques solutions de certains systèmes de Friedrichs en présence de métamatériaux obtenus par homogénéisation. Ce schéma, appelé dans la suite *schéma EF-AL*, est basé sur des idées de A.K. Aziz et S. Leventhal publiées dans [4]. C'est un schéma de type éléments finis. Son principal atout est que sa convergence est assurée dès lors que le problème aux limites considéré est bien posé.

Cette section présente dans un premier temps le schéma EF-AL. Nous donnons ensuite un résultat de convergence pour ce schéma valable dès que le problème considéré est bien posé. Nous présentons enfin des validations numériques sur le système de l'acoustique (1.22) en reprenant les cas test introduits en section 3.1.2.

### 3.2.1 Présentation du schéma EF-AL

Nous considérons ici un opérateur différentiel du premier ordre, à coefficients constants, de type système de Friedrichs donné par

$$\mathbb{L} = K(p, x) + \sum_{j=1}^d A_j \partial_j,$$

dont le domaine  $\mathcal{D}(\mathbb{L})$  est défini ci-dessous :

$$\mathcal{D}(\mathbb{L}) = \left\{ u \in L^2(\Omega)^k \left| \sum_{j=1}^d A_j \partial_j u \in L^2(\Omega), u(x) \in \ker(N(x)) \quad \forall x \in \partial\Omega \right. \right\},$$

où les conditions aux limites données par  $N$  sont supposées maximales positives au sens de la définition 1.4.

Le schéma EF-AL est basé sur la discrétisation de la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } u \in \mathcal{D}(\mathbb{L}) \text{ tel que pour tout } v \in \mathcal{D}(\mathbb{L}) : \\ & A_p(u, v) := \int_{\Omega} \langle \mathbb{L}u, \overline{\mathbb{L}v} \rangle dx = \int_{\Omega} \langle f, \overline{\mathbb{L}v} \rangle dx, \end{aligned} \quad (3.10)$$

où  $f \in L^2(\Omega)^k$  est un terme source. On suppose maintenant que le problème

$$\begin{aligned} & \text{trouver } u \in \mathcal{D}(\mathbb{L}) \text{ tel que :} \\ & \mathbb{L}u = f, \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \quad (3.11)$$

est bien posé. Par conséquent, l'opérateur  $\mathbb{L} : \mathcal{D}(\mathbb{L}) \rightarrow L^2(\Omega)^k$  est un isomorphisme et les problèmes (3.10) et (3.11) sont équivalents. Afin de discrétiser la formulation variationnelle (3.10), nous introduisons une famille d'espaces de dimension finie, notés  $\mathcal{V}_h$ , tels que  $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{D}(\mathbb{L})$ . On a tout d'abord le :

**Lemme 3.5.** *Supposons que le problème (3.11) soit bien posé. Alors :*

$$\dim(\mathcal{V}_h) = \dim(\mathbb{L}\mathcal{V}_h).$$

**Démonstration.** Soit  $h > 0$  fixé et  $\{\phi_j\}_{j=1, \dots, m}$  une base de  $\mathcal{V}_h$ . Soit les fonctions suivantes

$$\psi_j = \mathbb{L}\phi_j.$$

Alors tout  $\psi_h \in \mathbb{L}\mathcal{V}_h$  s'écrit comme une combinaison linéaire des  $\psi_j$ .

Il ne reste donc plus qu'à prouver que la famille  $\{\psi_j\}_{j=1, \dots, m}$  est libre. Considérons donc  $\{\lambda_j\}_{j=1, \dots, m} \subset \mathbb{C}$  des scalaires tels que  $\sum_{j=1}^m \lambda_j \psi_j = 0$ . Par définition des  $\psi_j$  et par linéarité de l'opérateur  $\mathbb{L}$ , il suit :

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j \psi_j = \mathbb{L} \left( \sum_{j=1}^m \lambda_j \phi_j \right) = 0.$$

Comme  $\phi_j \in \mathcal{V}_h \subset \mathcal{D}(\mathbb{L})$ , l'unicité de la solution du problème (3.11) entraîne que

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j \phi_j = 0.$$

Ainsi, la famille  $\{\phi_j\}_{j=1,\dots,m}$  étant une base de  $\mathcal{V}_h$ , il vient  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$  ce qui termine la démonstration. ■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'existence et l'unicité d'une solution au problème discretisé :

**Proposition 3.6.** *Supposons que le problème (3.11) soit bien posé et considérons le problème discret suivant :*

$$\begin{aligned} & \text{trouver } u_h \in \mathcal{V}_h \text{ tel que pour tout } v \in \mathcal{V}_h : \\ & A_p(u_h, v_h) = \int_{\Omega} \langle f, \overline{\mathbb{L}v_h} \rangle dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Alors il existe un unique  $u_h \in \mathcal{V}_h$  solution du problème discret (3.12).

**Démonstration.** Le problème discret (3.12) est équivalent à l'inversion de la matrice  $A_h = (A_p(\phi_{h,j}, \phi_{h,l}))$  où  $(\phi_{h,j})_j$  est une base de  $\mathcal{V}_h$ . Le lemme 3.5 assure que la matrice  $A_h$  est une matrice carrée. Elle est donc inversible si elle est injective.

Soit donc  $u_h \in \mathcal{V}_h$  tel que  $A_h u_h = 0$ . Comme  $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{D}(\mathbb{L})$ , il suit que  $u_h$  vérifie (3.11) avec pour second membre  $f = 0$ . Le caractère bien posé de ce problème entraîne alors  $u_h = 0$  ce qui termine la démonstration. ■

### 3.2.2 Convergence du schéma EF-AL

Nous étudions ici la convergence du schéma EF-AL. On a le résultat suivant :

**Théorème 3.7.** *Supposons que le problème (3.11) soit bien posé pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S$  est un sous-ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$  (voir chapitre 2 pour les hypothèses nécessaires). Soit  $(\mathcal{V}_h)_h$  une famille d'espaces d'approximation de dimensions finies telle que :*

$$\begin{cases} \mathcal{V}_h \subset \mathcal{D}(\mathbb{L}), \quad \forall h > 0, \\ \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{L}), \quad \exists \tilde{v}_h \in \mathcal{V}_h \text{ tel que } \lim_{h \rightarrow 0} \|v - \tilde{v}_h\|_{\mathcal{D}(\mathbb{L})} = 0. \end{cases}$$

Alors, en considérant  $u_h(p, \cdot)$  la solution du problème discrétisé (dont l'existence et l'unicité est assurée par le lemme 3.6), on a :

1) l'estimation d'erreur suivante :

$$\|u(p, \cdot) - u_h(p, \cdot)\|_{L^2(\Omega)^k} \leq C \inf_{v_h \in \mathcal{V}_h} \|u - v_h\|_{\mathcal{D}(\mathbb{L})}, \quad \forall p \in D_0 \setminus S,$$

où  $C > 0$  est une constante indépendante de  $h$ ,

2) et  $\lim_{h \rightarrow 0} \|u(p, \cdot) - u_h(p, \cdot)\|_{L^2(\Omega)^k} = 0$ .

**Démonstration.** Soit  $p \in D_0 \setminus S$  fixé. On considère  $u_h \in \mathcal{V}_h$  l'unique solution du problème discrétisé (3.11) dont l'existence et l'unicité sont assurées par le lemme 3.6. Comme  $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{D}(\mathbb{L})$ , il vient :

$$A_p(u, v_h) = A_p(u_h, v_h), \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h.$$

Comme  $v_h - u_h \in \mathcal{V}_h$ , on obtient :

$$A_p(u - u_h, v_h - u_h) = 0, \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h.$$

En remarquant alors que  $v_h - u_h = (v_h - u) + (u - u_h)$ , il suit :

$$\|\mathbb{L}(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)^k}^2 = A_p(u - u_h, u - u_h) = A_p(u - u_h, u - v_h), \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h.$$

Enfin, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le membre de droite de l'inégalité ci-dessus, on obtient :

$$\|\mathbb{L}(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)^k} \leq \|\mathbb{L}(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)^k}, \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h.$$

Pour démontrer l'estimation d'erreur, il ne reste donc plus qu'à obtenir des bornes inférieures et supérieures sur  $\|\mathbb{L}v\|_{L^2(\Omega)^k}$  pour tout  $v \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$ .

La borne supérieure découle simplement du caractère borné de l'opérateur de multiplication  $K(p, \cdot)$ . En effet, il existe une constante  $M > 0$  telle que l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$\|\mathbb{L}u\|_{L^2(\Omega)^k} \leq M \|u\|_{\mathcal{D}(\mathbb{L})}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{L}).$$

Pour minorer la norme de  $\mathbb{L}v$ , on utilise le fait que le problème (3.11) admette une unique solution continue par rapport aux termes sources. Ainsi l'opérateur  $\mathbb{L} : \mathcal{D}(\mathbb{L}) \rightarrow L^2(\Omega)^k$  est inversible à inverse borné. On en déduit alors l'existence d'une constante  $\alpha > 0$  telle que :

$$\alpha \|u\|_{L^2(\Omega)^k} \leq \|\mathbb{L}u\|_{L^2(\Omega)^k}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{L}).$$

Par suite, il vient l'estimation d'erreur suivante :

$$\|u(p, \cdot) - u_h(p, \cdot)\|_{L^2(\Omega)^k} \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in \mathcal{V}_h} \|u - v_h\|_{\mathcal{D}(\mathbb{L})}, \quad \forall p \in D_0 \setminus S.$$

En considérant maintenant  $\tilde{u}_h$  le projeté de  $u$  sur  $\mathcal{V}_h$  et en utilisant les propriétés d'approximations des  $\mathcal{V}_h$ , on a finalement :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)^k} \leq \frac{M}{\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \|u - \tilde{u}_h\|_{\mathcal{D}(\mathbb{L})} = 0,$$

ce qui achève la démonstration. ■

### Remarque 3.8.

1. L'hypothèse fondamentale du théorème 3.7 est le caractère bien posé de (3.11). Nous avons ainsi besoin des résultats démontrés au chapitre 2 pour approximer numériquement le système (3.11) avec le schéma EF-AL lorsque des métamatériaux sont considérés.

2. L'ordre de convergence du schéma EF-AL est donné par  $\inf_{v_h \in \mathcal{V}_h} \|u - v_h\|_{\mathcal{D}(\mathbb{L})}$  (voir le 2) du théorème 3.7 ou encore la remarque 3.2 pour le cas du schéma éléments finis usuel).
3. Le théorème 3.7 assure la convergence du schéma EF-AL pour le système de Friedrich 3.11 en présence de métamatériaux homogénéisés dès lors qu'il admet une unique solution continue par rapport aux données. Le caractère bien posé de ce type de systèmes a été étudié au chapitre 2 où des résultats d'existence et d'unicité ont été démontrés pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  avec  $S$  un ensemble exceptionnel de points de  $D_0$ . Ainsi, la convergence du schéma EF-AL a lieu pour tout  $p$  dans  $D_0$  sauf pour un certain ensemble inconnu de pulsations. Cependant, lors des expériences numériques, nous devons fixer un  $p = p_1 \in D_0$  et la question de savoir si  $p_1$  appartient à l'ensemble  $S$  ou non est, malheureusement, difficilement résoluble. Par contre, les fréquences singulières ne sont que des points dans le plan complexe et ainsi la probabilité de sélectionner l'un d'eux est nulle.

### 3.2.3 Applications au système de l'acoustique

On présente ici des applications du schéma EF-AL à l'approximation numérique du système de l'acoustique (1.22) en présence des cas tests présentés dans la section 3.1.2. Nous commençons ainsi par définir l'espace d'approximation utilisé. On donne ensuite les résultats numériques.

#### 3.2.3.1 Discrétisation

Afin de définir l'espace d'approximation, on considère  $\mathcal{T}_h$  un maillage régulier et conforme de  $\Omega$ . L'hypothèse fondamentale du théorème 3.7 est que l'espace d'approximation utilisé est inclu dans le domaine de l'opérateur que l'on cherche à approximer. Ainsi, pour approcher les solutions de (1.7), nous devons trouver  $\mathcal{V}_h$  vérifiant :

$$\mathcal{V}_h \subset \mathcal{D}(\mathbb{W}) := \{(\rho, u) \in H^1(\Omega) \times H(\operatorname{div}, \Omega) \mid \rho|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

L'approximation de  $\rho \in H_0^1(\Omega)$  peut se faire avec l'espace  $\mathcal{V}_{h,EF}$  qui consiste en des éléments  $\mathbb{P}_1$  classiques. Concernant l'inconnue  $u \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ , des éléments spécifiques doivent être introduits. Ce sont les éléments de Raviart-Thomas [33] qui sont définis comme suit :

$$\mathcal{V}_{h,RT} = \{u \in L^2(\Omega)^2 \mid u|_T \in \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1, [\langle \nu_F, u \rangle] = 0, \forall F \in \partial T, \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

où  $\nu_F$  est une normale unitaire à la face  $F$  et  $[\langle \nu_F, u \rangle]$  désigne le saut de la composante normale de  $u$  sur la face  $F$ .

Notons que la conditions sur les composantes normales des sauts entraîne que  $\mathcal{V}_{h,RT}$  est un sous-espace de  $H(\operatorname{div}, \Omega)$ . Considérons maintenant  $\{F_j\}_{j=1, \dots, n_F} \subset \mathcal{F}_h$  l'ensemble des faces du maillage  $\mathcal{T}_h$ . Une base de  $\mathcal{V}_{h,RT}$  est donnée ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{h,RT} &= \operatorname{Vect} \{R_m \mid m = 1, \dots, n_F\}, \\ \int_{F_l} \langle R_m, \nu_{F_l} \rangle ds &= \delta_{lm}, \quad 1 \leq l, m \leq n_F. \end{aligned}$$

**Remarque 3.9.** *Le signe du delta de Kronecker intervenant dans relation définissant les fonctions de base dépend de l'orientation de la normale. Pour avoir le signe +, on a supposé que tous les triangles sont orientés de la même manière [33].*

Une fois de plus ces fonctions de base peuvent être calculées explicitement. On reprend les notations de la section 3.1.2 et on passe alors par le triangle rectangle  $\widehat{T}$  pour lequel on a :

$$\widehat{R}_1(\widehat{x}, \widehat{y}) = (\widehat{x}, \widehat{y}), \quad \widehat{R}_2(\widehat{x}, \widehat{y}) = (\widehat{x}, \widehat{y}) - (0, 1), \quad \widehat{R}_3(\widehat{x}, \widehat{y}) = (\widehat{x}, \widehat{y}) - (1, 0).$$

On obtient ainsi les fonctions de bases sur  $T$ , de sommets  $\{S_l\}_{l=1,2,3}$  et de faces  $\{F_j\}_{j=1,2,3}$ , qui sont données par  $R_j^T(x, y) = \frac{1}{\text{meas}(F_j)} \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \widetilde{S}_j \right)$ , où  $\widetilde{S}_j$  est le sommet opposé à  $F_j$  (voir figure 3.12).

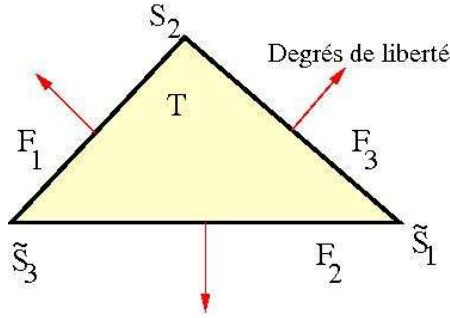


FIG. 3.12: Notations pour les éléments de Raviart-Thomas

On considère maintenant l'espace d'approximation suivant pour la simulation numérique, avec le schéma EF-AL, du système de l'acoustique (1.22) :

$$\mathcal{V}_{h,AL} = \{(u_h, \rho_h) \mid u_h \in \mathcal{V}_{h,RT} \text{ et } \rho_h \in \mathcal{V}_{h,EF}\}.$$

Ce dernier vérifie de plus la propriété ci-dessous.

**Proposition 3.10** ([33], p.89 théorème 4.11). *L'espace  $\mathcal{V}_{h,AL}$  la propriété d'approximation suivante*

$$\forall (u, \rho) \in \mathcal{D}^2(\mathbb{W}), \exists (\widetilde{u}_h, \widetilde{\rho}_h) \in \mathcal{V}_{h,AL} \text{ tel que } \left\| \begin{pmatrix} u - \widetilde{u}_h \\ \rho - \widetilde{\rho}_h \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{D}(\mathbb{W})} \leq Ch \left\| \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{D}^2(\mathbb{W})},$$

où  $C > 0$  est une constante et

$$\mathcal{D}^s(\mathbb{W}) := \{v \in \mathcal{D}(\mathbb{W}) \mid v \in H^s(\Omega) \text{ et } \mathbb{W}v \in H^s(\Omega)\}.$$

Le théorème 3.7 et la proposition 3.10 montrent la convergence du schéma EF-AL pour l'espace d'approximation défini par  $\mathcal{V}_{h,AL}$ , dès lors que le problème étudié est bien posé.

L'ordre de convergence est de plus donné par le 1) du théorème 3.7. Le schéma EF-AL est ainsi d'ordre 1.



### 3.2.3.2 Validation sur le milieu classique

On reprend ici la cas test donné par la matériau classique dont les paramètres physiques sont décrits dans (3.5). On approxime alors le problème (1.7)-(3.5) avec le schéma EF-AL dans l'espace d'approximation donné par  $\mathcal{V}_{h,AL}$ . La courbe d'erreur est représentée dans la figure 3.13 et la pente de la droite de régression vaut 1.6161. Le schéma EF-AL est donc convergent avec un ordre de convergence comparable à celui annoncé dans le théorème 3.7.

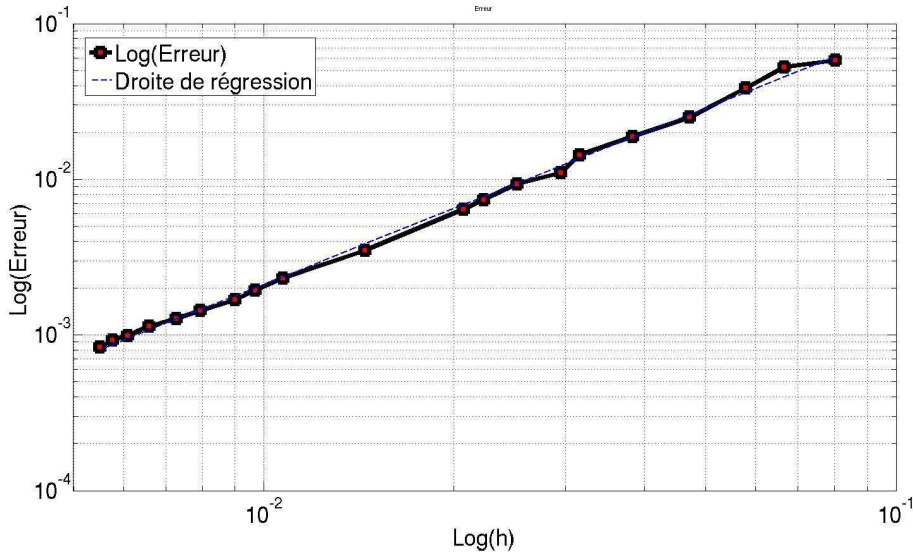


FIG. 3.13: Erreur  $L^2$  du schéma AL pour le milieu classique

### 3.2.3.3 Validation sur le métamatériau constant par morceaux

Nous reprenons le cas test (3.6) avec la géométrie représentée par la figure 3.6 et les paramètres physiques (3.8).

Afin d'appliquer le théorème 3.7, on examine tout d'abord le caractère bien posé de (1.7)-(3.8).

**Proposition 3.11.** *Le système (1.7)-(3.8) admet une unique solution, continue par rapport à tout second membre  $f \in L^2(\Omega)^4$ , pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S$  est un ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$ .*

**Démonstration.** On utilise le théorème 2.21. Il suffit, pour cela, de vérifier les hypothèses 2.20 :

(A1) : L'application  $p \in D_0 \mapsto (\Gamma(p, x), n(p, x)) \in \mathbb{C}^2$  est clairement holomorphe sur  $D_0 := \mathbb{C} \setminus \{0\}$  pour presque tout  $x \in \Omega$ .

(A2) : L'application  $x \in \Omega \mapsto (\Gamma(p, x), n(p, x)) \in \mathbb{C}^2$  est bornée pour tout  $p \in D_0$  et inversible pour presque tout  $x \in \Omega$ .

(A3) : Soit  $p_0 = 10^5/2$ . Alors, pour tout  $(X, z) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}$  et pour presque tout  $x \in \Omega$ , on a

$$\operatorname{Re} \langle p_0 \Gamma(p_0, x) X, \bar{X} \rangle + |z|^2 \operatorname{Re}(p_0 n(p_0, x)) \geq (|X|^2 + |z|^2).$$

Ainsi l'hypothèse (A3) est satisfaite.

(A4) : En vertu de la remarque 2.22, nous devons simplement trouver une fonction  $a : (p, x) \mapsto a(p, x) \in \mathbb{C}$ , holomorphe sur  $D_0$  et lipschitzienne sur  $\bar{\Omega}$  telle que  $\operatorname{Re} \langle \Gamma(p, x) a(p, x) X, \bar{X} \rangle \geq \alpha |X|^2$ , pour tout  $X \in \mathbb{C}^3$ . Il suffit en fait de prendre  $a(p, x) = -ip$  et de remarquer,  $\Gamma$  et  $a$  étant scalaires, que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle -ip \Gamma(p, x) X, \bar{X} \rangle = \\ |X|^2 \begin{cases} \operatorname{Re}(-i)(1 + 10^{-5}\eta) - 10^{-5}\omega \operatorname{Im}(-i), & x \in \Omega \setminus D \\ \operatorname{Re}(-i)(-1 + 3 \times 10^{-5}\eta) - 3 \times 10^{-5}\omega \operatorname{Im}(-i), & x \in D \end{cases} \end{aligned}$$

où  $p = i\omega + \eta$ . Il suffit maintenant de restreindre l'ensemble des  $p$  au domaine  $D_0 = \{p = i\omega + \eta \in \mathbb{C}^* \mid \omega > 0\}$ .

Le théorème 2.21 peut maintenant être appliqué ce qui démontre la proposition. ■

On approxime maintenant la solution de (1.7)-(3.8), lorsque  $p = i\omega$  pour  $\omega = 1$ , avec l'espace  $\mathcal{V}_{h,AL}$ . L'erreur  $L^2$  est représentée dans la figure 3.14 et la solution numérique, calculée pour  $h = h_{\min}$  dans la figure 3.15. Conformément aux résultats annoncés au théorème 3.7, le schéma EF-AL est convergent en présence de métamatériaux dès lors que le problème considéré est bien posé.

La pente de la droite de régression vaut 0.7968. Nous avons donc un ordre de convergence comparable à celui attendu qui est de 1. La différence provenant peut-être du manque de régularité des coefficients du métamatériau.

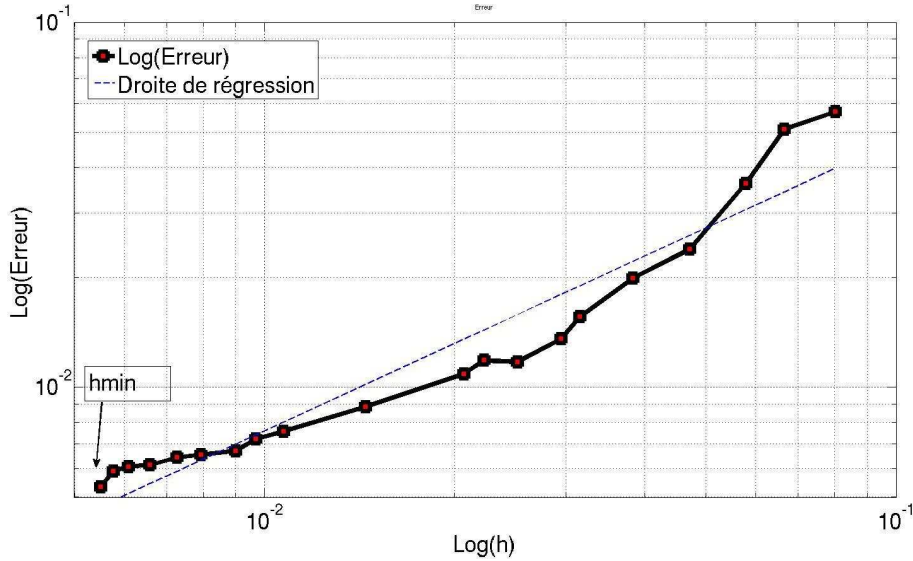


FIG. 3.14: Erreur  $L^2$  du schéma AL pour le métamatériau constant par morceaux

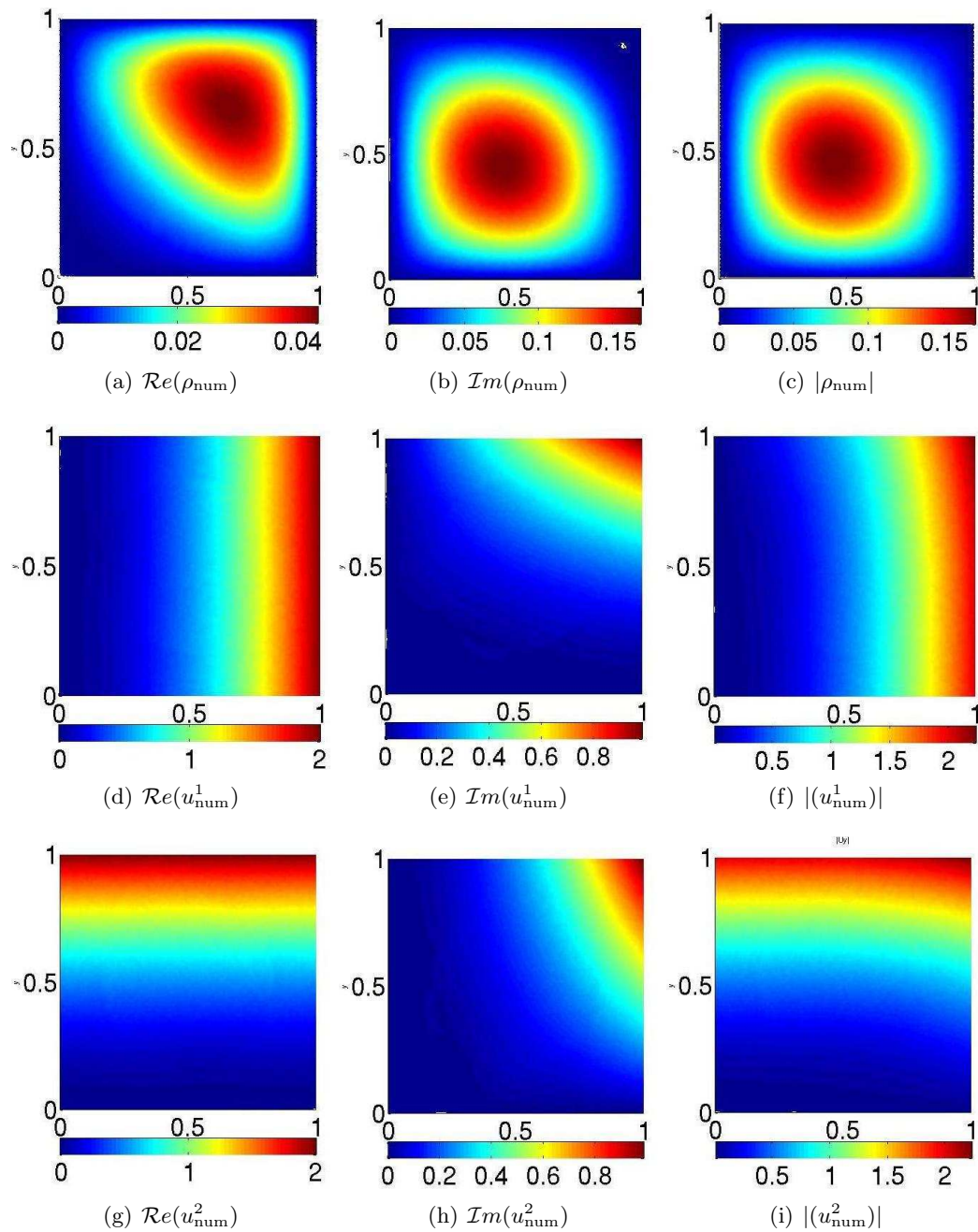


FIG. 3.15: Solutions numériques obtenues le schéma EF-AL, lorsque  $h = h_{\min}$ , pour un métamatériau constant

### 3.2.3.4 Validation sur le métamatériau lipschitzien

Nous reprenons le cas test (3.6) avec les paramètres physiques donnés par (3.9). On étudie dans un premier temps la caractère bien posé du problème (1.7), (3.9) avec l'aide des résultats démontrés au chapitre 2.

**Proposition 3.12.** *Le système (1.7), (3.9) admet une unique solution, continue par rapport à tout second membre  $f \in L^2(\Omega)^4$ , pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S$  est un ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$ .*

**Démonstration.** On utilise le corollaire 2.19. Les hypothèses (A1), (A2) et (A3) provenant de 2.20 doivent ainsi être vérifiées :

- (A1) : L'application  $p \in D_0 \mapsto (\Gamma(p, x), n(p, x)) \in \mathbb{C}^2$  est polynomiale en  $p$  et donc est holomorphe sur  $D_0 := \mathbb{C}$  pour presque tout  $x \in \Omega$ .
- (A2) : L'application  $x \in \Omega \mapsto (\Gamma(p, x), n(p, x)) \in \mathbb{C}^2$  est bornée pour tout  $p \in D_0$  et  $\Gamma(p, x)$  est inversible pour presque tout  $x \in \Omega$ . De plus,  $\Gamma(p, \cdot) \in \text{Lip}(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$  pour tout  $p \in \mathbb{C}$  car le bord  $\partial\mathcal{O}$  est défini par l'équation  $f(x, y) = 0$ .
- (A3) : Soit  $p_0 = 5$ . Alors, pour tout  $(X, z) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}$  et pour presque tout  $x \in \Omega$ ,  $5\Gamma(5, x)$  et  $5n(5, x)$  sont tout les deux réels et strictement positifs et donc l'hypothèse (A3) est satisfaite.

Le corollaire 2.19 achève alors la démonstration de la proposition. ■

On approxime maintenant le problème (1.7)-(3.9) avec le schéma EF-AL et l'espace  $\mathcal{V}_{h,AL}$  pour  $p = i\omega$  avec  $\omega = 1$ .

L'erreur  $L^2$  entre la solution de (1.7) et son approximation est représentée par la figure 3.16. La pente de la droite de régression est 1.5166 et, ainsi, l'ordre de convergence est légèrement meilleur que celui fournit par le théorème 3.7.

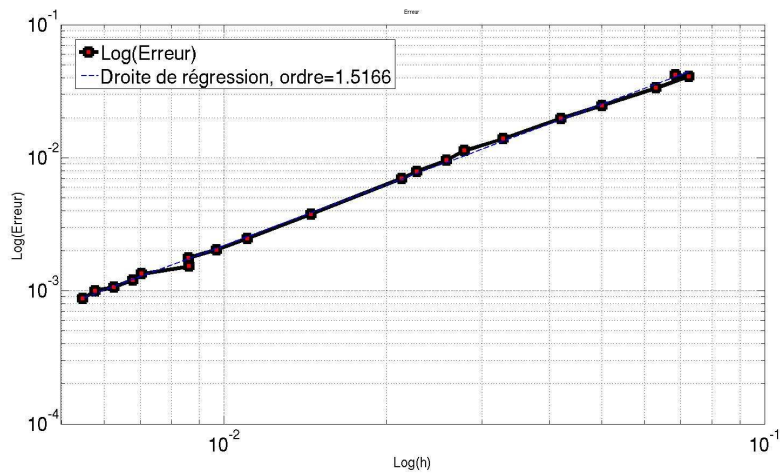


FIG. 3.16: Erreur  $L^2$  du schéma AL pour le métamatériau lipschitzien

### 3.3 Etude numérique du schéma Galerkin Discontinu

Le schéma Galerkin Discontinu (noté souvent GD) est un schéma numérique d'ordre élevé. Un de ses principaux intérêts réside dans la très grande souplesse de sa mise en pratique [30, 49]. En effet, contrairement aux méthodes de type éléments finis, le schéma GD autorise la considération de maillages non-nécessairement réguliers et/ou conformes. De plus, les fonctions de bases ne sont pas soumises à une condition d'appartenance au domaine de la partie principale l'opérateur que l'on souhaite approximer. Enfin, tout comme le schéma EF-AL, il est extrêmement bien adapté à l'approximation numérique de problèmes du premier ordre tels que les systèmes de Friedrichs [49, 30].

Cependant, comme pour le cas du schéma éléments finis, l'étude de la convergence et de la stabilité du schéma GD n'a été réalisée que pour le cas des matériaux classiques. Nous commençons cette section par rappeler les principes de bases du schéma galerkin discontinu ainsi qu'un résultat de convergence valable uniquement pour les milieux classiques. Une introduction plus complète et plus détaillée peut être trouvée dans [30]. Ensuite, n'ayant à l'heure actuelle aucune démonstration de la validité du schéma GD en présence de métamatériaux obtenus par homogénéisation, nous allons proposer une étude numérique en reprenant les cas tests pour lesquels les éléments finis n'étaient pas convergent.

#### 3.3.1 Présentation du schéma

Nous commençons par considérer un maillage  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$  (supposé ici être un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$ ) dont l'ensemble des bords des éléments de  $\mathcal{T}_h$  est noté  $\mathcal{F}_h$ . On suppose qu'il vérifie les hypothèses suivantes :

1.  $\bar{\Omega} = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} \bar{T}$ ,
2.  $\text{Int}(T \cap \tilde{T}) = \emptyset$  pour tout élément  $T \neq \tilde{T}$ ,
3. si  $F \in \mathcal{F}_h$  (l'ensemble des faces du maillage) vérifie  $F \subset \partial\Omega$  alors il existe un unique  $T \in \mathcal{T}_h$  tel que  $\text{Int}(F \cap \partial T) \neq \emptyset$ ,
4. si  $F \not\subset \partial\Omega$  alors il existe uniquement deux éléments distincts  $T, \tilde{T} \in \mathcal{T}_h$  tels que  $F = \partial T \cap \partial \tilde{T}$ .

On associe maintenant à chaque face  $F \in \mathcal{F}_h$  une définition unique de la normale, notée  $\nu_F$ , en imposant la convention suivante :

1. Si  $\text{Int}(F \cap \partial\Omega) \neq \emptyset$  alors  $\nu_F = \nu|_F$  ce qui correspond à la restriction à la face de la normale unitaire sortante à  $\partial\Omega$ .
2. Si  $\text{Int}(F \cap \partial\Omega) = \emptyset$ ,  $\nu_F$  est alors fixée arbitrairement selon la convention suivante :

$$\nu_F = \pm \mathbf{n}, \text{ dans } T, \quad \nu_F = \mp \mathbf{n} \text{ dans } \tilde{T},$$

où  $F = \partial T \cap \partial \tilde{T}$  et  $\mathbf{n}$  est un vecteur normal unitaire à  $F$ .

Les limites à droite, à gauche et les sauts associés à une face sont alors définis comme suit :

$$v(x)^\pm = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} v(x \pm \delta \nu_F)$$

$$[v(x)] = v(x)^+ - v(x)^-.$$

Notons que, contrairement aux maillages éléments finis utilisés précédemment, aucune restriction n'interdit *a priori* le placement de sommets sur le bord d'un élément. Par exemple, la configuration représentée dans la figure 3.17 n'est pas autorisée par les méthodes éléments finis mais est valable pour le galerkin discontinu. Un tel maillage est appelé *non-conforme*.

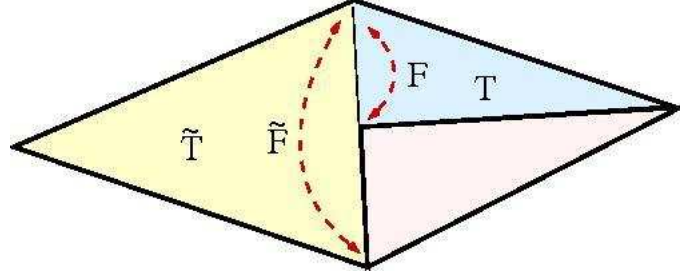


FIG. 3.17: Exemple de maillage non-conforme

Le schéma galerkin discontinu pour le système (3.11) est maintenant défini à partir de la formulation variationnelle suivante [49] :

$$\begin{aligned}
& \text{trouver } u \in L^2(\Omega)^k \text{ tel que pour tout } v \in L^2(\Omega)^k : \\
& \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \left\langle K(p, x)u + \sum_{j=1}^d A_j \partial_j u, \bar{v} \right\rangle dx \\
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_h, F \subset \partial\Omega} \int_F \langle N(x)u, \bar{v}(x)^- \rangle ds \\
& - \sum_{F \in \mathcal{F}_h, F \not\subset \partial\Omega} \int_F \langle \tilde{N}(-\boldsymbol{\nu}_F)[-u(x)], \bar{v}(x)^+ \rangle ds \\
& - \sum_{F \in \mathcal{F}_h, F \not\subset \partial\Omega} \int_F \langle \tilde{N}(\boldsymbol{\nu}_F)[u(x)], \bar{v}(x)^- \rangle ds = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \langle f, \bar{v} \rangle dx.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Les termes

$$\int_F \langle \tilde{N}(\pm \boldsymbol{\nu}_F)[\pm u(x)], \bar{v}(x)^\mp \rangle ds, \quad \tilde{N}(\boldsymbol{\nu}) \in \text{Hom}(\mathbb{C}^k),$$

sont appelés flux. En imposant des conditions sur les flux, nous obtenons l'équivalence entre (3.13) et le système de Friedrichs (3.11).

**Théorème 3.13.** Soit  $f \in L^2(\Omega)^k$ . Supposons que

$$\ker \left( \sum_{j=1}^d A_j \boldsymbol{\nu}_j \right) = \ker \left( \tilde{N}(\boldsymbol{\nu}) \right) \cap \ker \left( \tilde{N}(-\boldsymbol{\nu}) \right).$$

Alors les problèmes (3.13) et (3.11) sont équivalents.

**Démonstration.** Le fait que (3.11) entraîne (3.13) est évident car tous les termes de sauts sont nuls. En effet, tout  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$  vérifie  $\sum_{j=1}^d A_j \partial_j u \in L^2(\Omega)$  ce qui implique que  $\sum_{j=1}^d A_j \boldsymbol{\nu}_F [u] = 0$  (conditions de Rankine-Hugoniot) sur chaque face  $F \in \mathcal{F}_h$ .

Supposons maintenant que (3.13) soit vérifiée. Alors, en prenant des fonctions régulières à support compact dans chaque ouvert  $\text{Int}T$  pour  $T \in \mathcal{T}_h$ , il suit que  $u$  est solution du  $K(p, x)u + \sum_{j=1}^d A_j \partial_j u = f$ , au sens des distributions, dans  $T$ . Comme  $u$  et  $f$  sont toutes deux dans  $L^2(\Omega)^k$ , il vient que  $\sum_{j=1}^d A_j \partial_j u \in L^2(T)$  pour tout élément de  $\mathcal{T}_h$ . En considérant maintenant des fonctions régulières à support compact dans  $\bar{T}$ , on obtient que  $u$  vérifie de plus  $\tilde{N}(\pm \nu_F)[u] = 0$  sur chaque  $F \in \partial T$  vérifiant  $F \not\subseteq \partial\Omega$  et  $N(x)u(x) = 0$  pour tout  $F \subset \partial\Omega$ . Par hypothèse sur les flux, il vient  $\sum_{j=1}^d A_j \nu_F[u] = 0$  sur chaque  $F \not\subseteq \partial\Omega$  et de ce fait  $\sum_{j=1}^d A_j \partial_j u \in L^2(\Omega)$ . La fonction  $u$  est donc solution de (3.11). ■

**Remarque 3.14.** *Un exemple de flux utilisé dans la suite et vérifiant l'hypothèse du théorème 3.13 est donné par le flux totalement décentré :*

$$\tilde{N}(\nu) = \left( \sum_{j=1}^d A_j \nu_j \right)^{-}.$$

Ci-dessus, comme  $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^k)$  est une matrice symétrique, elle se décompose en  $A = P^*DP$  où  $D$  est une matrice diagonale réelle. On a alors noté  $A^- = P^* \inf(D, 0)P$  et  $A^+ = P^* \sup(D, 0)P$ . Nous utilisons uniquement ce type de flux dans la suite.

Afin de discrétiser la formulation variationnelle (3.13) on introduit l'espace d'approximation suivant :

$$\mathcal{V}_{h,m} = \{v \mid v|_T \in \mathcal{Q}^m(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3.14)$$

où

$$\mathcal{Q}^m(T) = \left\{ \sum_{l_1, \dots, l_d=0}^m \alpha_{l_1, \dots, l_d} x_1^{l_1} \dots x_d^{l_d} \mid (x_1, \dots, x_d) \in T \text{ et } \alpha_{l_1, \dots, l_d} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Une base de cet espace vectoriel est donnée, localement sur chaque  $T \in \mathcal{T}_h$ , par la famille  $\{x_1^{l_1} \dots x_d^{l_d}; l_j \in \{0, \dots, k\}\}$ . Nous avons alors, en présence de milieux classiques et avec des flux totalement décentrés, le résultat de convergence suivant [49, 30] :

**Théorème 3.15.** *Supposons que  $K(p, \cdot) \in L^\infty(\Omega, \text{Hom}(\mathbb{C}^k))$  soit coercive pour tout  $p \in D_0$  et que les flux soient donnés par les flux totalement décentrés. Supposons enfin que la solution  $u$  de (3.11) soit dans  $H^{m+1}(\Omega)^k$ . Alors il existe un unique  $u_h \in \mathcal{V}_{h,m}$  solution de la formulation variationnelle (3.13) où  $L^2(\Omega)^k$  est remplacé par  $\mathcal{V}_{h,m}$ . On a de plus l'estimation de convergence suivante :*

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)^k} \leq Ch^{m+\frac{1}{2}} \|u\|_{H^{m+1}(\Omega)^k},$$

où  $C > 0$  est une constante indépendante de  $h$ .

La démonstration du théorème 3.15 utilise fortement la coercivité de l'opérateur de multiplication  $K(p, \cdot)$ . Ainsi ce théorème n'est, *a priori*, plus valable pour l'approximation numérique des métamatériaux obtenus par homogénéisation.

A l'heure actuelle, nous n'avons pas réussi à étendre cette démonstration aux cas de



métamatériaux homogénéisés satisfaisant les hypothèses du chapitre 2 qui entraînent le caractère bien posé de (3.11). De ce fait, nous décrivons maintenant des tests numériques afin d'essayer de valider numériquement le galerkin discontinu pour la simulation numérique de modèles homogénéisés de métamatériaux. On reprend à cet effet les cas tests introduits dans la section 3.1.2.

### 3.3.2 Tests numériques

Les mêmes cas tests que ceux utilisés pour les éléments finis ou encore le schéma EF-AL sont repris pour l'étude numérique du GD. On suppose alors que la dimension d'espace  $d = 2$ . Nous allons de plus considérer des approximations numériques des solutions de (1.7) dans  $\mathcal{V}_{h,m}$  (3.14), pour  $m = 1, 2$ , avec des flux complètement décentrés.

#### 3.3.2.1 Un milieu classique

On présente ici les résultats de l'approximation numérique, avec une méthode de type GD, du problème (1.7)-(3.5). Le matériau considéré étant classique, le théorème 3.15 s'applique et affirme que le schéma galerkin discontinu est convergent avec un ordre en  $m + 1/2$ .

L'erreur obtenue pour de la simulation numérique pour des éléments  $Q^1$  est représentée dans la figure 3.18. La pente de la droite de régression vaut 1.9572. Cela est donc légèrement supérieur à l'ordre annoncé par le théorème 3.15. Les solutions calculées numériquement sur le maillage le plus fin sont données dans la figure 3.19.

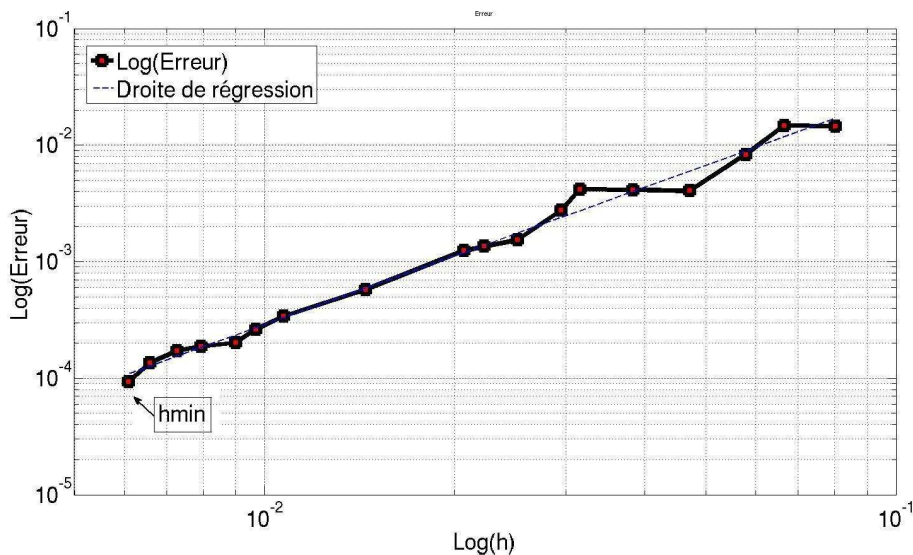


FIG. 3.18: Erreur  $L^2$  du schéma GD- $Q^1$  pour le milieu classique

L'erreur obtenue pour de la simulation numérique avec des éléments  $Q^2$  est donnée dans la figure 3.20. La pente de la droite de régression vaut 2.9967 ce qui est, une fois encore,



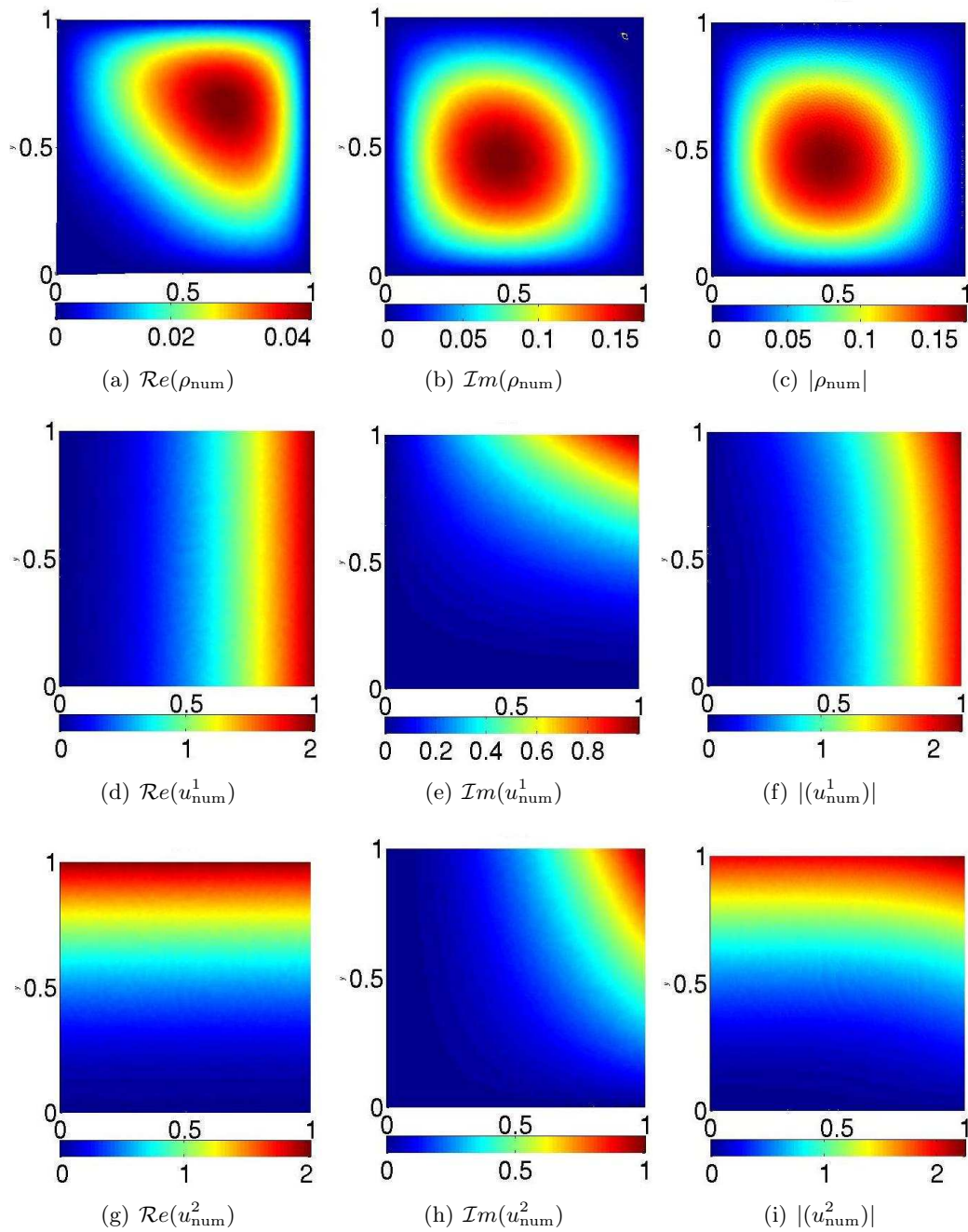


FIG. 3.19: Solutions numériques obtenues avec du GD  $Q^1$ , lorsque  $h = h_{\min}$ , pour le milieu classique

supérieur à l'ordre annoncé par le théorème 3.15. Les solutions calculées numériquement sur le maillage le plus fin sont données dans la figure 3.21.

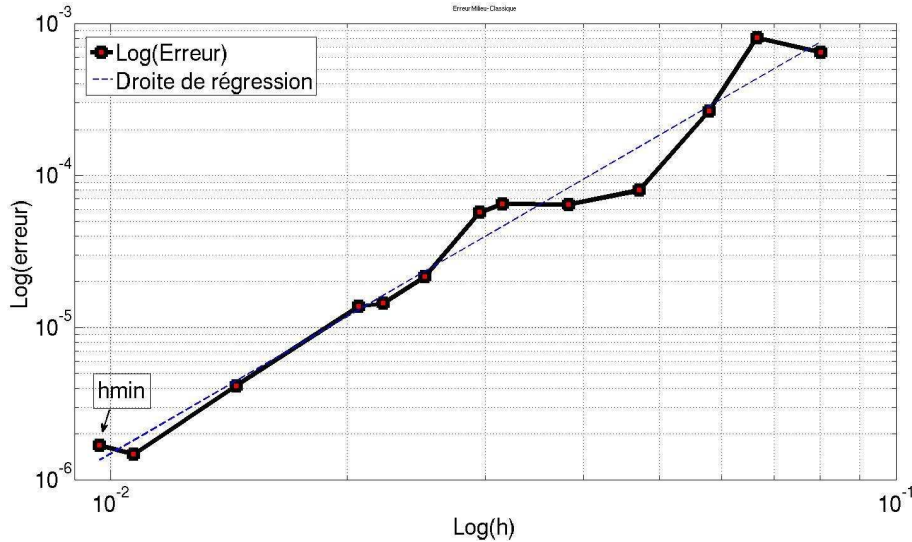


FIG. 3.20: Erreur  $L^2$  du schéma GD- $Q^2$  pour le milieu classique

### 3.3.2.2 Un métamatériau constant par morceaux

On reprend le cas test du système de l'acoustique (1.7) en présence du métamatériau caractérisé par les paramètres (3.8). La proposition 3.11 assure que ce problème est bien posé.

Les résultats numériques obtenus, lorsque  $p = i\omega$  avec  $\omega = 1$ , avec des éléments  $\mathcal{Q}_1$  sont représentés dans la figure 3.22 pour la courbe d'erreur  $L^2$  et par la figure 3.23 pour les solutions numériques. La pente de la droite de régression vaut 1.5701 ce qui est l'ordre de convergence annoncé par le théorème 3.15 dans le cas de milieux classiques.

Notons que l'ordre de convergence est inférieur à celui obtenu numériquement lors de l'approximation d'un milieu classique qui est proche de 2. On distingue de plus la présence du métamatériau sur les solutions numériques. Notons aussi que la courbe d'erreur présente quelques oscillations. Les solutions numériques obtenues pour le pic en  $h = h_0$  sont représentées dans la figure 3.24. Ces dernières diffèrent énormément

Ainsi, bien que le schéma GD- $Q^1$  semble approximer correctement le métamatériau caractérisé par (3.8), la présence d'un tel milieu exotique affecte clairement les performances du schéma numérique.

Les résultats obtenus avec des éléments  $\mathcal{Q}^2$  sont représentés par la figure 3.25 pour l'erreur  $L^2$  et par la figure 3.26 pour les solutions numériques. La pente de la droite de régression est de 2.2786 ce qui est légèrement plus bas que l'ordre de convergence annoncé par le théorème 3.15 pour des milieux classiques. Ainsi, bien que la présence du métamatériau affecte quelque peu les performances du schéma GD- $Q^2$  avec des flux totalement décentrés, nous pouvons conclure qu'il est convergent sur cet exemple.

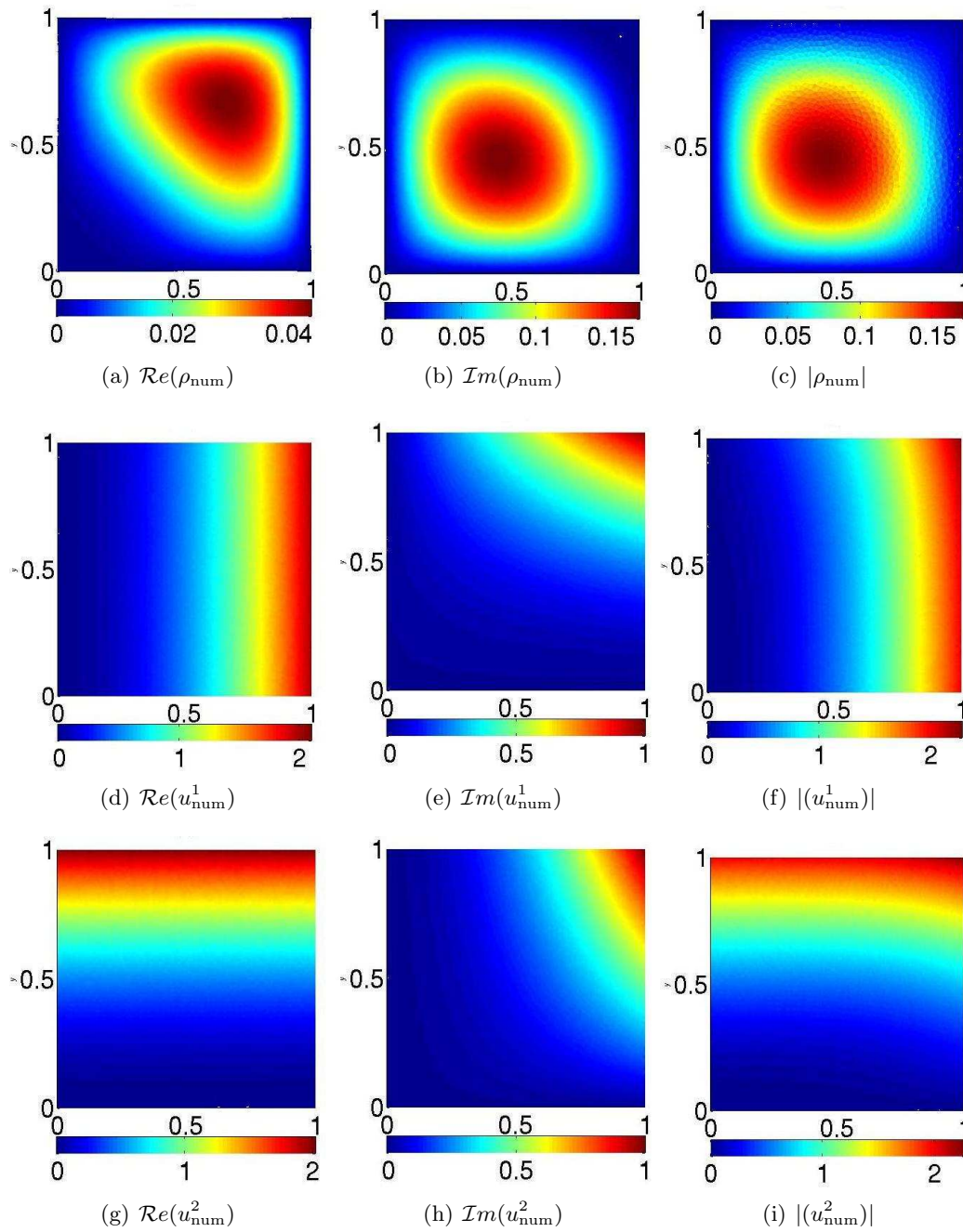


FIG. 3.21: Solutions numériques obtenues avec du GD  $\mathcal{Q}^2$ , lorsque  $h = h_{\min}$ , pour le milieu classique

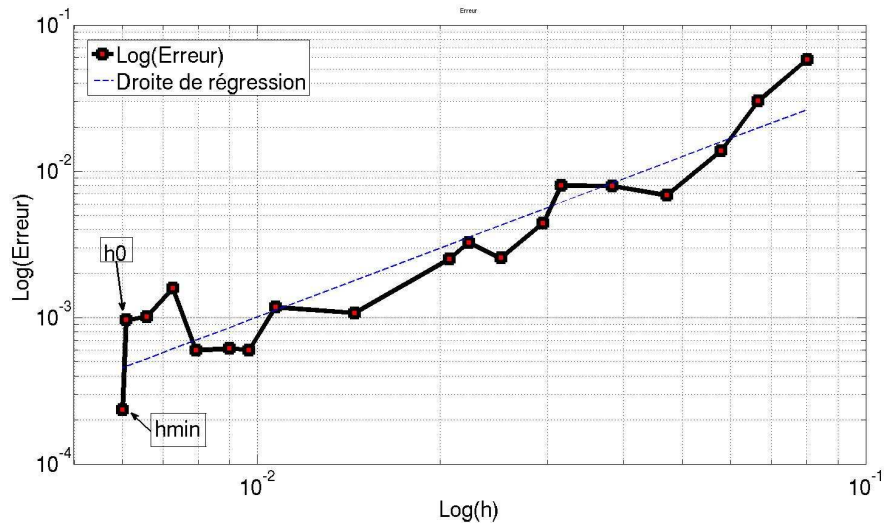


FIG. 3.22: Erreur  $L^2$  du schéma GD  $Q^1$  pour le métamatériau constant par morceaux

### 3.3.2.3 Un métamatériau lipschitzien

On reprend maintenant le cas test avec le métamatériau lipschitzien dont les paramètres physiques sont définis en (3.9). On rappelle que ce problème est bien posé par la proposition 3.12.

Les solutions numériques obtenues, lorsque  $p = i\omega$  pour  $\omega = 1$ , avec des éléments  $Q^1$  sont semblables à celles de la figure 3.1 et ne sont donc pas représentées ici. La courbe d'erreur est quand à elle donnée dans la figure 3.27. La pente de la droite de régression vaut 1.8639. Pour l'erreur obtenue avec des éléments  $Q^2$ , nous avons la figure 3.28 et la pente de la droite de régression est égale à 2.7488.

Pour ces deux cas, l'ordre de convergence est comparable à celui estimé par le théorème 3.15 pour des milieux classiques. Nous pouvons alors conclure quand à la convergence du schéma GD- $Q^k$ , avec  $k = 1, 2$  et des flux totalement décentrés, en présence du métamatériau lipschitzien dont les paramètres sont définis en (3.9).

### 3.3.2.4 Bilan

Les résultats numériques obtenus avec le schéma GD pour des flux totalement décentrés et des éléments  $Q^k$ ,  $k = 1, 2$ , présentés dans cette section montrent que les courbes d'erreurs sont toutes décroissantes. Ainsi, même si visuellement nous avons obtenu des effets « étranges » (voir par exemples les figures 3.22 et 3.24), le schéma galerkin discontinu semble convergent, lorsque des métamatériaux sont considérés. De plus, les ordres de convergence sont comparables à ceux des milieux usuels.

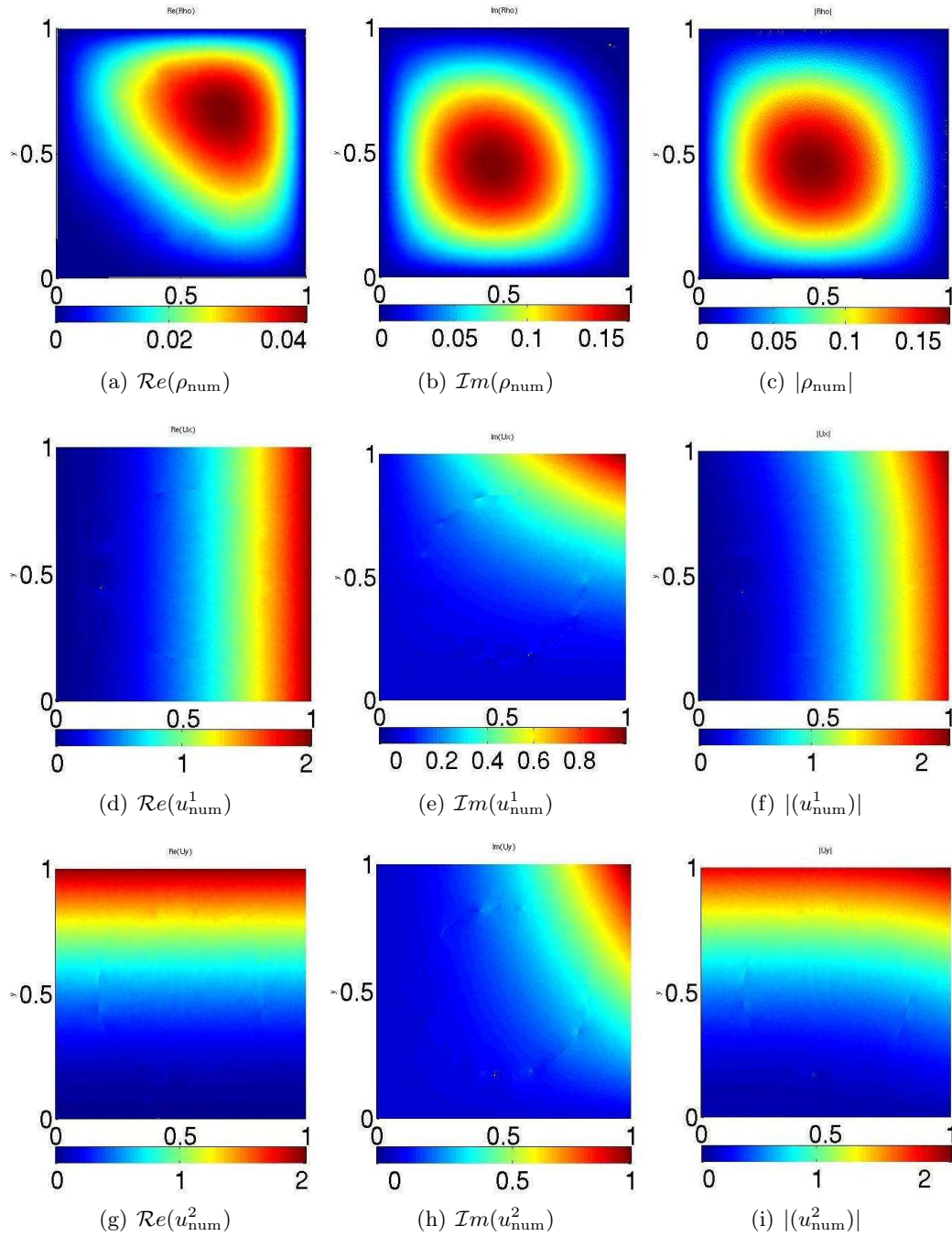


FIG. 3.23: Solutions numériques obtenues avec du GD  $\mathcal{Q}^1$ , lorsque  $h = h_{\min}$ , pour un métamatériau constant par morceaux



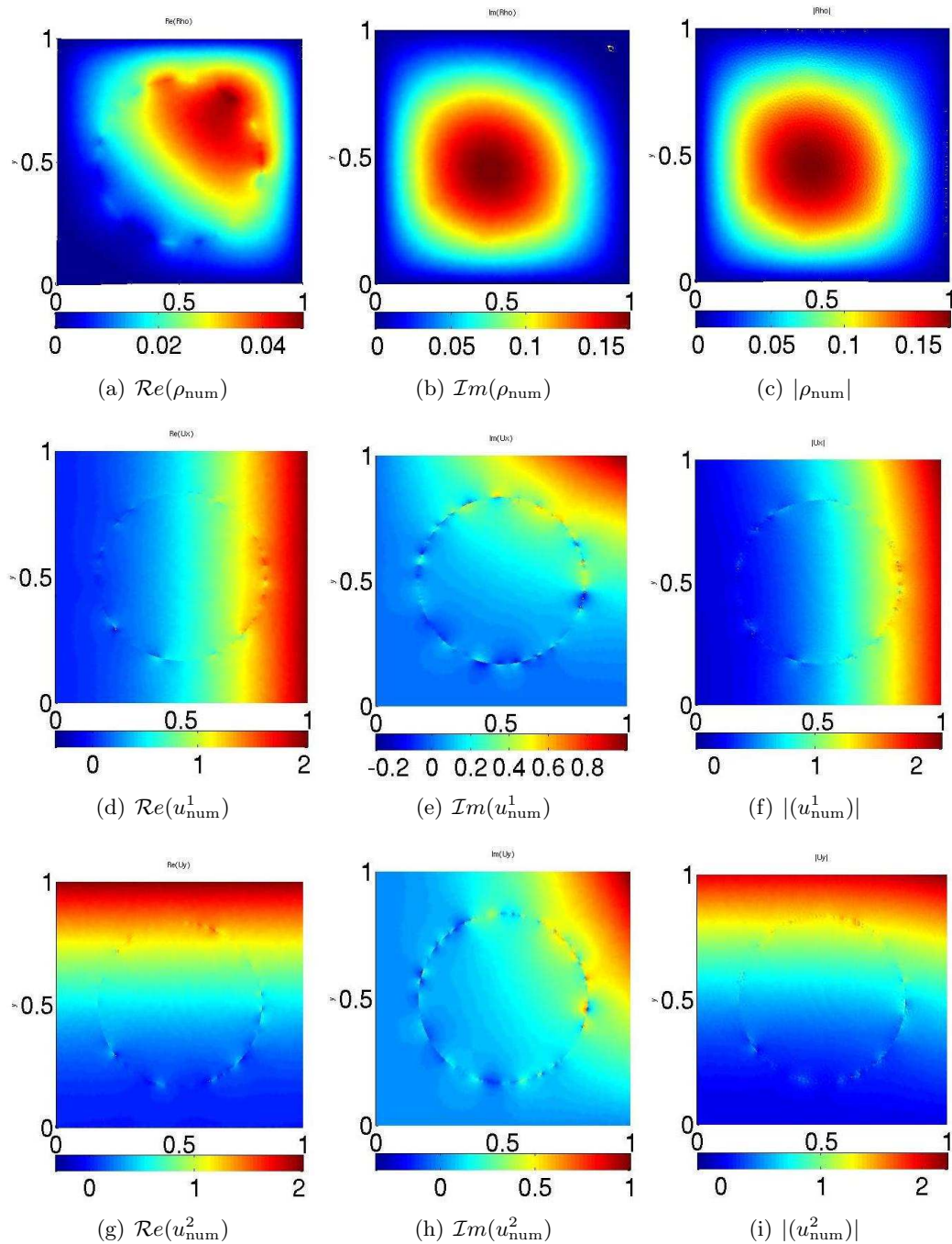


FIG. 3.24: Solutions numériques obtenues avec du GD  $\mathcal{Q}^1$ , lorsque  $h = h_0$ , pour un métamatériau constant par morceaux

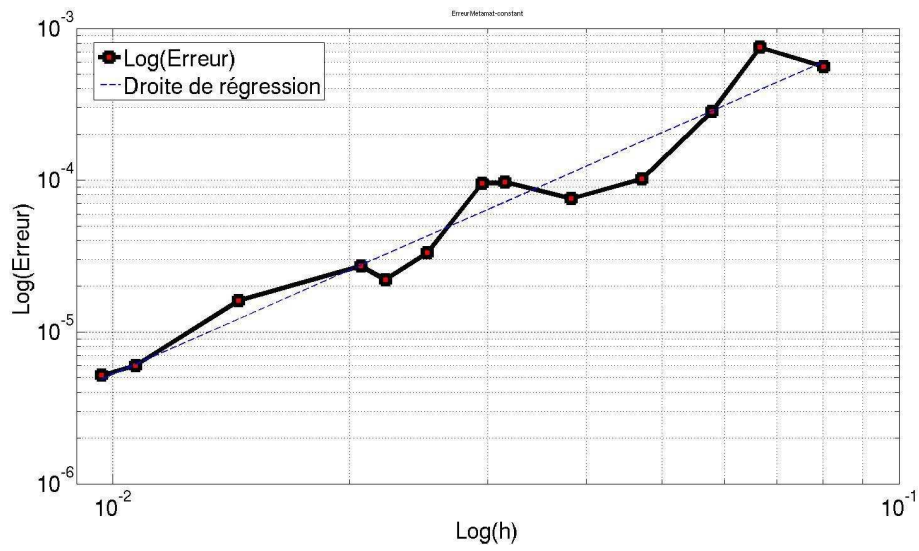


FIG. 3.25: Erreur  $L^2$  du schéma GD  $Q^2$  pour le métamatériau constant par morceaux

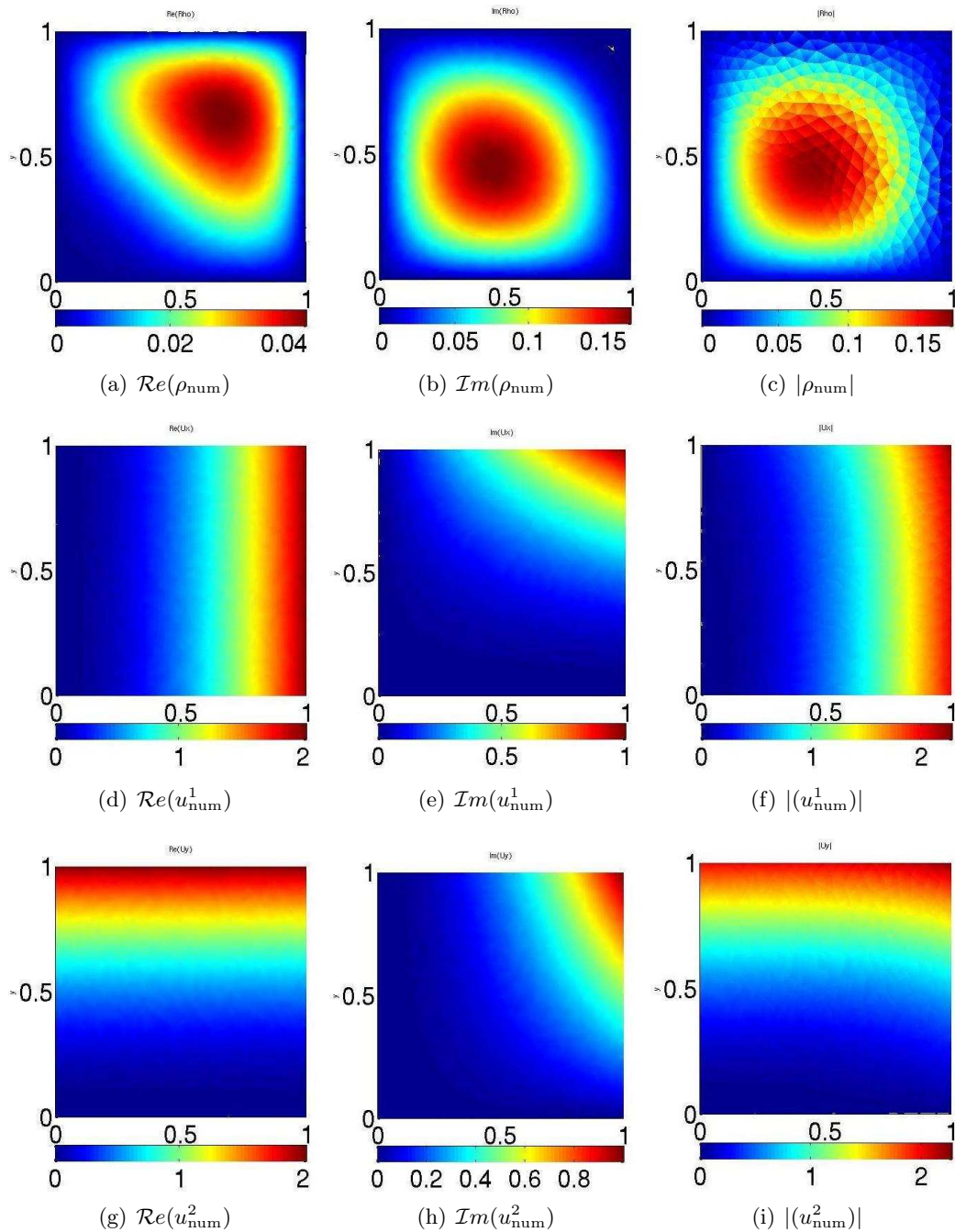


FIG. 3.26: Solutions numériques obtenues avec du GD  $Q^2$ , lorsque  $h = h_{\min}$ , pour un métamatériau constant par morceaux



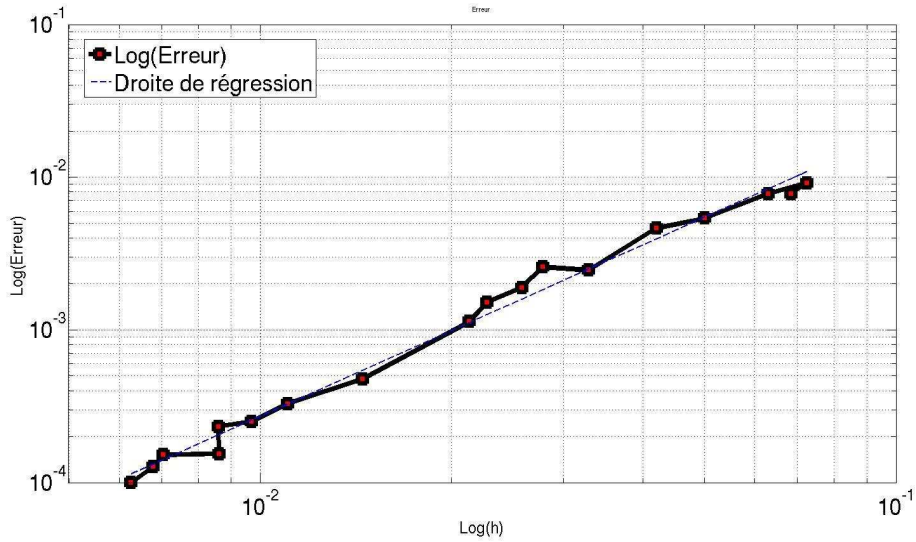


FIG. 3.27: Erreur  $L^2$  du schéma GD  $Q^1$  pour le métamatériau lipschitzien

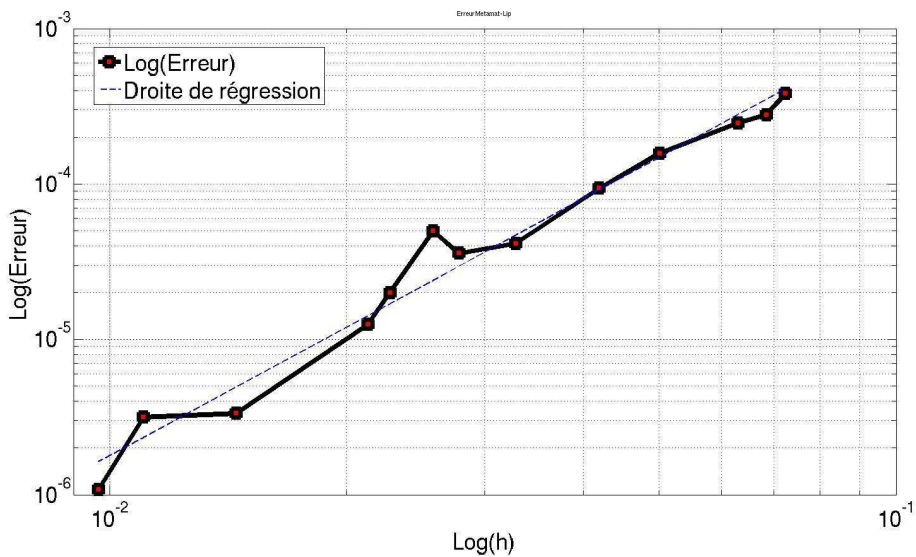


FIG. 3.28: Erreur  $L^2$  du schéma GD  $Q^2$  pour le métamatériau lipschitzien

## **Deuxième partie**

# **Diffraction multiple par $N$ petits obstacles et application à l'homogénéisation non-périodique formelle de milieux faiblement denses**

---



---

## Diffraction multiple par $N$ petits obstacles

---

Nous avons introduit au chapitre 1 les résultats d'A.G. Ramm en rapport avec l'homogénéisation non-périodique de métamatériaux pour l'acoustique. Ces derniers se basent sur la résolution, par des techniques d'équations intégrales, d'un problème de diffraction d'une onde plane par  $N$  obstacles caractérisés par une condition aux limites d'impédance. Le milieu homogénéisé était ensuite obtenu en supposant une certaine répartition asymptotique sur l'ensemble des petits objets impliquant que leur nombre tendait vers l'infini lorsque leur taille caractéristique convergeait vers zéro. Dans ce chapitre les calculs de Ramm sont repris via une autre approche qui permet de préciser les phénomènes de couche limite apparaissant au voisinage des petits obstacles.

Au cours de ce chapitre, nous étudions l'asymptotique d'un problème de diffraction multiple par un nombre fini  $N$  de petits obstacles. Nous utilisons pour cela la méthode des développements asymptotiques raccordés [5, 23, 26, 32, 50]. Cette dernière permet de séparer le comportement du champ dans la proximité immédiate de chacun des obstacles du comportement d'ensemble du champ. Cette méthode repose sur l'introduction d'un champ interne qui permet de prendre en compte l'apparition d'une couche limite au voisinage de chacun des petits obstacles et d'un champ externe qui décrit le comportement global du champ à l'extérieur de ces derniers. Elle est basée sur l'écriture de conditions de raccord permettant de lier les champs internes et externe et de les déterminer de manière unique. Elle permet, dans un premier temps, d'obtenir formellement les développements asymptotiques des champs internes et externe. Les développements obtenus *a priori* sont ensuite justifiés par des estimations d'erreur.

Soient  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$  et  $\{c_j\}_{j=1}^N$  un ensemble fini de points de  $\Omega$ . On se donne, pour chaque  $c_j$ , une boule de rayon  $\delta$  notée  $B_j^\delta$ . Ces boules correspondent aux  $N$  petits obstacles, où  $\delta > 0$  est le petit paramètre destiné à tendre vers 0. Le problème de diffraction est modélisé par une équation de Helmholtz dont le terme source est un champ incident. Ce dernier est défini par une onde plane  $u_{\text{inc}}(x) = e^{i\kappa(x,d)}$  où  $d \in \mathbb{R}^3$  est un vecteur unitaire indiquant la direction où les  $B_j^\delta$  sont illuminées et où  $\kappa$  est le nombre d'onde.

---

Nous commençons ce chapitre en supposant que les matériaux constituant les  $N$  petits objets sont caractérisés par une condition aux limites d'impédance. Nous traitons ensuite plus rapidement le cas où les petits objets sont caractérisés par un indice de réfraction. Nous construisons, pour chacun de ces cas, une approximation de la solution à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés. La validation rigoureuse des développements asymptotiques est alors obtenue en établissant des estimations d'erreurs. L'étude est réalisée pour des impédances et des indices de réfraction particuliers. Cela permet de simplifier l'exposé sans perte réelle de généralité et de comparer nos résultats avec ceux obtenus par la méthode de Ramm. Les paramètres physiques spécifiques sont introduits dans la suite.

## 4.1 Diffraction par N petites boules caractérisées par une condition d'impédance

Supposons que les propriétés physiques des petits obstacles  $\mathcal{B}_j^\delta$  soient caractérisées par une condition aux limites d'impédance. On considère alors le problème de diffraction multiple suivant (voir figure 4.1) :

$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2)u_\delta(x) = 0, & \mathbb{R}^3 \setminus \cup_{j=1}^N \overline{\mathcal{B}_j^\delta}, \\ \partial_{\mathbf{n}_j} u_\delta = \alpha_j^\delta u_\delta, & \mathcal{S}_j^\delta = \partial \mathcal{B}_j^\delta, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - i\kappa)(u_\delta - u_{\text{inc}}) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $\alpha_j^\delta$  désigne l'impédance équivalente de  $\mathcal{B}_j^\delta$  et  $\mathbf{n}_j$  est la normale unitaire à la sphère  $\mathcal{S}_j^\delta$ , centrée en  $c_j$  et de rayon  $\delta$ . Concernant l'orientation de la normale, on impose qu'elle est extérieure à  $\mathcal{B}_j^\delta$  et donc intérieure au domaine  $\mathbb{R}^3 \setminus \cup_{j=1}^N \overline{\mathcal{B}_j^\delta}$ . Remarquons que les petits objets seront des obstacles « durs » (sound hard scatterers) lorsque  $\alpha_j = 0$ ; ce qui correspond à une condition aux limites de Neumann tandis que les petits objets correspondront à des obstacles « mous » (sound soft scatterers) lorsque  $\alpha_j$  tend vers  $+\infty$ , ce qui revient à imposer une condition aux limites de Dirichlet.

Avant d'étudier le comportement asymptotique de la solution de (4.1), pour  $\delta$  tendant vers 0, nous établissons l'existence et l'unicité de  $u_\delta$  ainsi que sa stabilité (ou encore la dépendance de la solution par rapport au terme source) relativement à un second membre général qui inclut en particulier le champ incident.

### 4.1.1 Existence et unicité

L'unicité est obtenue par des arguments classiques basés sur le lemme de Rellich [24, 19] et, plus particulièrement, sur la condition suivante :

$$\text{Im } \alpha_j^\delta \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

La condition donnée ci-dessus exprime le fait que les petits obstacles sont constitués de matériaux qui absorbent l'énergie.

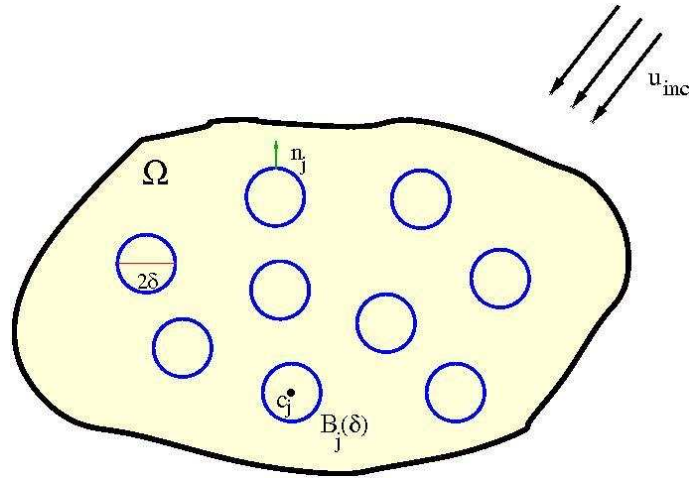


FIG. 4.1: Problème de diffraction multiple

Pour l'existence d'une solution au problème (4.1), une approche standard consiste à introduire une frontière fictive (voir figure 4.2) afin de tronquer le domaine non-borné et de prendre en compte la partie non-bornée via un opérateur de Steklov-Poincaré de type Dirichlet-to-Neumann (DtN) (voir par exemple [6] où cette réduction est détaillée pour des problèmes similaires). Nous montrons brièvement la construction d'un tel opérateur.

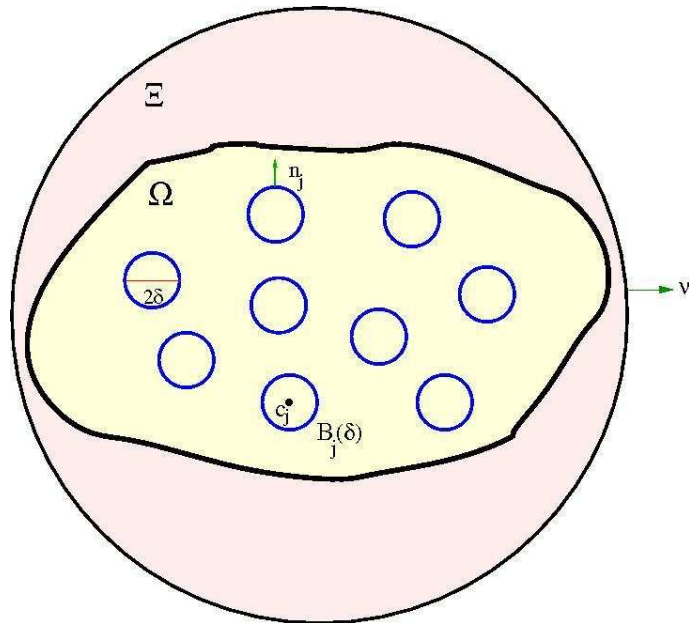


FIG. 4.2: Problème de diffraction multiple tronqué

Soit  $\Xi$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$  contenant  $\Omega$  dont la normale unitaire sortante est  $\nu$ . On suppose de plus que sa frontière  $\partial\Xi$  est, au moins, de classe  $C^2$ . Pour tout  $\phi$  dans  $H^{1/2}(\partial\Xi)$ , on note  $v$  la solution du problème aux limites suivant dont l'existence et l'unicité peuvent

être démontrées, par exemple, par le procédé d'absorption-limite (voir [93]) :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Xi}) \text{ tel que } \theta v \in H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Xi}), \forall \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \\ & \begin{cases} (\Delta + \kappa^2) v = 0, \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Xi}, \\ v = \phi, \text{ sur } \partial\Xi, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - i\kappa) v = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

L'opérateur DtN est alors défini par  $T\phi = -\partial_{\nu} v \in H^{-1/2}(\partial\Xi)$ . On remplace ainsi le problème (4.1) par un problème équivalent posé avec une condition aux limites sur  $\partial\Xi$  :

$$\partial_{\nu} u_{\delta} + T u_{\delta} = \partial_{\nu} u_{\text{inc}} + T u_{\text{inc}}, \text{ sur } \partial\Xi,$$

appelée condition transparente. Cela permet maintenant de considérer le problème de diffraction comme un problème en domaine borné. Les propriétés de cet opérateur, utiles pour la suite, sont listées ci-dessous.

**Lemme 4.1.** *Soit  $\phi$  dans  $H^{1/2}(\partial\Xi)$  et  $\varphi_0 \in H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Xi})$  l'unique solution du problème coercif suivant :*

$$\Delta \varphi_0 - \varphi_0 = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Xi} \text{ et } \varphi_0 = \phi \text{ sur } \partial\Xi. \quad (4.3)$$

*Considérons maintenant l'opérateur  $T_0\phi = -\partial_{\nu}\varphi_0$ . Alors  $T_0$  définit un opérateur à la fois borné et coercif :*

$$\begin{aligned} T_0 & \in \mathcal{B}(H^{1/2}(\partial\Xi), H^{-1/2}(\partial\Xi)), \\ \langle T_0\phi, \bar{\phi} \rangle_{H^{-1/2} \times H^{1/2}} & \geq C \|\phi\|_{H^{1/2}(\partial\Xi)}, \quad C > 0, \quad \forall \phi \in H^{1/2}(\partial\Xi). \end{aligned}$$

*De plus, l'opérateur  $T - T_0 : H^{1/2}(\partial\Xi) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Xi)$  est compact.*

**Démonstration.** Le fait que  $T_0$  soit un opérateur borné est évident en utilisant l'existence, l'unicité et la régularité de  $\varphi_0$ . En multipliant l'équation (4.3) par  $\varphi_0$  et en effectuant une intégration par partie assez technique [93] prenant en compte le fait que le domaine  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Xi}$  est non borné, il vient :

$$\langle -\partial_{\nu}\varphi, \bar{\varphi} \rangle_{H^{-1/2} \times H^{1/2}} - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Xi}} |\nabla \varphi_0|^2 + |\varphi_0|^2 dx = 0.$$

En utilisant alors la définition de  $T_0$  et  $\varphi_0 = \phi$ , on obtient :

$$\langle T_0\phi, \bar{\phi} \rangle_{H^{-1/2} \times H^{1/2}} = \langle -\partial_{\nu}\varphi_0, \bar{\varphi}_0 \rangle_{H^{-1/2} \times H^{1/2}} = \|\varphi_0\|_{H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Xi})} \geq C \|\phi\|_{H^{1/2}(\partial\Xi)}, \quad C > 0,$$

où la dernière inégalité découle de la continuité de l'opérateur trace. Ainsi l'opérateur  $T_0$  est coercif.

Soit maintenant  $v$  l'unique solution de (4.2) et  $\psi = v - \varphi_0$ . Alors  $\psi = 0$  sur  $\partial\Xi$  et vérifie  $(\Delta + \kappa^2)\psi = -(1 + \kappa^2)\varphi_0$ . Comme  $\varphi_0$  appartient à  $H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Xi})$  et que  $\partial\Xi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , les théorèmes de régularité elliptique montrent que  $\psi$  est dans  $H^3(V)$  pour  $V$  un voisinage de  $\partial\Xi$  inclus dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Xi}$ . La fonction  $\partial_{\nu}\psi$  appartient alors à  $H^{3/2}(\partial\Xi)$  qui s'injecte de manière compacte dans  $H^{1/2}(\partial\Xi)$  [20] établissant ainsi la compacité de l'opérateur  $T - T_0$ . ■

Considérons maintenant le domaine borné  $\Xi_\delta = \Xi \setminus \bigcup_{j=1}^N \overline{\mathcal{B}_j^\delta}$ . En utilisant l'opérateur DtN, on peut réécrire (4.1) dans  $\Xi_\delta$  :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_\delta \in H^1(\Xi_\delta) \text{ tel que} \\ (\Delta + \kappa^2)u_\delta(x) = 0, \text{ dans } \Xi_\delta, \\ \partial_{\mathbf{n}_j} u_\delta = \alpha_j^\delta u_\delta, \text{ sur } \mathcal{S}_j^\delta, \\ \partial_\nu u_\delta + T u_\delta = \partial_\nu u_{\text{inc}} + T u_{\text{inc}}, \text{ sur } \partial\Xi. \end{cases} \quad (4.4)$$

Une formulation variationnelle pour (4.4) est obtenue en multipliant l'équation par  $v \in H^1(\Xi_\delta)$ , en intégrant par parties et en utilisant les conditions aux limites. Ainsi (4.4) est équivalent à résoudre la formulation faible suivante :

$$\begin{aligned} \text{trouver } u_\delta \in H^1(\Xi_\delta) \forall v \in H^1(\Xi_\delta) : \\ a_\delta(u_\delta, v) = l_\delta(v), \end{aligned} \quad (4.5)$$

où

$$a_\delta(u_\delta, v) = \int_{\Xi_\delta} \langle \nabla u_\delta, \overline{\nabla v} \rangle - \kappa^2 u_\delta \overline{v} \, dx + \langle T u_\delta, \overline{v} \rangle_{H^{-1/2} \times H^{1/2}} + \sum_{j=1}^N \alpha_j^\delta \int_{\mathcal{S}_j^\delta} u_\delta \overline{v} \, d\sigma$$

est une forme sesquilinéaire définie sur  $H^1(\Xi_\delta) \times H^1(\Xi_\delta)$ . Le second membre  $l_\delta$ , qui peut être une forme linéaire continue générale sur  $H^1(\Xi_\delta)$  (cet ensemble est noté  $(H^1(\Xi_\delta))'$ ), est ici donné à partir du champ incident, et est défini par :

$$l_\delta(\varphi) = \int_{\partial\Xi} (\partial_\nu u_{\text{inc}} + T u_{\text{inc}}) \varphi \, d\sigma.$$

On a alors le résultat suivant assurant que le problème de diffraction posé en domaine tronqué est bien posé.

**Théorème 4.2.** *Supposons que les impédances vérifient  $\text{Im } \alpha_j^\delta \leq 0$ . Alors le problème de diffraction (4.5) admet une unique solution pour tout  $l_\delta \in (H^1(\Xi_\delta))'$  et tout  $\delta > 0$ .*

**Démonstration.** Par le lemme 4.1, la compacité des injections  $H^{1/2}(\partial\Xi) \subset L^2(\partial\Xi)$  et  $H^1(\Xi_\delta) \subset L^2(\Xi_\delta)$ , il est facile de voir que le problème (4.5) relève de l'alternative de Fredholm. L'équivalence entre (4.5) et (4.1) ainsi que l'unicité de ce dernier, assurée par le lemme de Rellich, permet alors d'achever la démonstration. ■

#### 4.1.2 Stabilité uniforme

Nous examinons maintenant la stabilité de la solution de (4.4) par rapport au second membre, dépendant ici du champ incident, lorsque  $\delta$  tend vers zéro. On considère pour cela des impédances  $\alpha_j^\delta$  particulières. Cela permet d'éviter certaines difficultés techniques sans restreindre la généralité des résultats. Nous commençons par établir un résultat qui ne couvre pas le cas des obstacles « mous » ou « durs » inclus dans  $\Omega$ .



**Théorème 4.3.** *Supposons que les impédances  $\alpha_j^\delta$  sont de la forme*

$$\alpha_j^\delta = \gamma_j f(\delta), \quad \gamma_j \in \mathbb{C},$$

où  $f$  est une fonction réelle telle que  $f(\delta) > 0$  pour  $\delta > 0$  et  $\text{Im} \gamma_j < 0$ . Alors le problème (4.4) admet une unique solution  $u_\delta$  pour tout  $l_\delta \in (H^1(\Xi_\delta))'$  et il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\delta$  et de  $l_\delta$  telle que :

$$\|u_\delta\|_{H^1(\Xi_\delta)} \leq C \|l_\delta\|_{(H^1(\Xi_\delta))'}.$$

**Démonstration.** L'estimation de stabilité est établie par contradiction en démontrant que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|u\|_{H^1(\Xi_\delta)} \leq C \sup_{\|v\|_{H^1(\Xi_\delta)}=1} |a_\delta(u, v)|,$$

où  $C > 0$  est une constante indépendante de  $\delta$ . On suppose ainsi qu'il existe des suites  $\delta_n > 0$  et  $(u_{\delta_n})_n \subset H^1(\Xi_{\delta_n})$  vérifiant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$ ,  $\|u_{\delta_n}\|_{H^1(\Xi_{\delta_n})} = 1$  et telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|v\|_{H^1(\Xi_{\delta_n})}=1} |a_{\delta_n}(u_{\delta_n}, v)| = 0. \quad (4.6)$$

Considérons  $\tilde{u}_n$  le prolongement de  $u_{\delta_n}$  à  $\Xi$  tout entier. L'existence d'un tel prolongement, assuré par [67], vérifiant l'estimation de stabilité suivante :

$$\|u_{\delta_n}\|_{H^1(\Xi_{\delta_n})} \leq \|\tilde{u}_n\|_{H^1(\Xi)} \leq C \|u_{\delta_n}\|_{H^1(\Xi_{\delta_n})}, \quad (4.7)$$

où  $C > 0$  ne dépend pas de  $\delta$  est fondamentale. Ainsi, la suite  $(\tilde{u}_n)_n \subset H^1(\Xi)$  est bornée et donc admet une sous-suite faiblement convergente dans  $H^1(\Xi)$  qui converge fortement dans  $L^2(\Xi)$  vers  $u_0 \in H^1(\Xi)$ . On va montrer que  $u_0 = 0$ ; ce qui nous conduira à la contradiction recherchée.

Considérons dans un premier temps  $\mathcal{Z}_0$  l'ensemble des fonctions  $H^1$  nulles au voisinages de chacun des  $\{c_j\}$ . Cet ensemble est dense dans  $H^1(\Xi)$  [50]. De plus, comme  $H^1(\Xi) \subset H^1(\Xi_{\delta_n})$ , on a  $\mathcal{Z}_0 \subset H^1(\Xi_{\delta_n})$  et donc (4.6) reste valable si on remplace  $H^1(\Xi_{\delta_n})$  par  $\mathcal{Z}_0$ . Par définition de  $\mathcal{Z}_0$  et par le fait que  $\delta_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient, pour tout  $v \in \mathcal{Z}_0$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_j^{\delta_n} \int_{S_j^{\delta_n}} \tilde{u}_n \bar{v} d\sigma = 0.$$

Sachant que  $\tilde{u}_n$  converge faiblement vers  $u_0$ , on obtient :

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{\delta_n}(\tilde{u}_n, v) = \int_{\Xi_\delta} \langle \nabla u_0, \overline{\nabla v} \rangle - \kappa^2 u_0 \bar{v} dx + \langle T u_0, \bar{v} \rangle_{H^{-1/2} \times H^{1/2}}, \quad \forall v \in \mathcal{Z}_0.$$

La densité de  $\mathcal{Z}_0$  dans  $H^1(\Xi)$  montre alors que l'égalité précédente est vérifiée pour tout  $v \in H^1(\Xi)$ ;  $u_0$  vérifie ainsi :

$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2)u_0 = 0, & \text{dans } \Xi, \\ \partial_\nu u_0 + T u_0 = 0, & \text{sur } \partial\Xi. \end{cases}$$

La fonction  $u_0$  peut ainsi être prolongée en une fonction vérifiant l'équation de Helmholtz et la condition de radiation dans tout l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Le lemme de Rellich assure alors que  $u_0 = 0$ . De ce fait toute la suite  $(\tilde{u}_n)_n$  converge fortement vers zéro dans  $L^2(\Xi)$ .

Afin d'obtenir la contradiction, il reste à montrer que  $\|\nabla\tilde{u}_n\|_{L^2(\Xi)}$  converge aussi vers 0. Pour cela, nous commençons par prendre la partie imaginaire de  $a_{\delta_n}(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n)$  :

$$\mathcal{I}m a_{\delta_n}(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n) = \mathcal{I}m \left\langle T\tilde{u}_n, \overline{\tilde{u}_n} \right\rangle_{H^{-1/2} \times H^{1/2}} + \sum_{j=1}^N \mathcal{I}m \left( \alpha_j^{\delta_n} \right) \int_{\mathcal{S}_j^{\delta_n}} |\tilde{u}_n|^2 d\sigma.$$

Par le lemme 4.1, on sait que l'opérateur DtN s'écrit sous la forme  $T = T_0 + T - T_0$  avec  $T_0$  un opérateur positif au sens  $\langle T_0\varphi, \overline{\varphi} \rangle_{H^{-1/2} \times H^{1/2}} \geq 0$  et  $T - T_0$  compact dans  $H^{-1/2}(\partial\Xi)$ . Sachant que  $\tilde{u}_n$  converge faiblement vers zéro dans  $H^1(\Xi)$ , on a ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{I}m \left\langle T\tilde{u}_n, \overline{\tilde{u}_n} \right\rangle_{H^{-1/2} \times H^{1/2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{I}m \left\langle (T - T_0)\tilde{u}_n, \overline{\tilde{u}_n} \right\rangle_{H^{-1/2} \times H^{1/2}} = 0.$$

De (4.6), on déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N \mathcal{I}m \left( \alpha_j^{\delta_n} \right) \int_{\mathcal{S}_j^{\delta_n}} |\tilde{u}_n|^2 d\sigma = 0.$$

De plus, comme  $\alpha_j^{\delta} = \gamma_j f(\delta)$  avec  $\mathcal{I}m \gamma_j < 0$ , il s'ensuit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\delta_n) \int_{\mathcal{S}_j^{\delta_n}} |\tilde{u}_n|^2 d\sigma = 0. \quad (4.8)$$

Maintenant, la continuité de l'opérateur de prolongement (4.7) et la coercivité de  $T_0$  entraînent :

$$\|\nabla\tilde{u}_n\|_{L^2(\Xi)}^2 \leq C \left\{ \|\nabla\tilde{u}_n\|_{L^2(\Xi_{\delta_n})}^2 + \left\langle T_0\tilde{u}_n, \overline{\tilde{u}_n} \right\rangle_{H^{-1/2} \times H^{1/2}} \right\}$$

Finalement, comme  $\tilde{u}_n$  converge fortement vers 0 dans  $L^2(\Xi)$ , l'hypothèse (4.6) et la propriété (4.8) impliquent :

$$\begin{aligned} \|\nabla\tilde{u}_n\|_{L^2(\Xi)}^2 &\leq C \mathcal{R}e \left\{ a_{\delta_n}(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n) + \kappa^2 \|\tilde{u}_n\|_{L^2(\Xi)} + \sum_{j=1}^N \gamma_j f(\delta_n) \int_{\mathcal{S}_j^{\delta_n}} |\tilde{u}_n|^2 d\sigma \right\} \\ &+ C \mathcal{R}e \left\{ \int_{\partial\Xi} (T_0 - T)\tilde{u}_n \overline{\tilde{u}_n} d\sigma \right\}. \end{aligned}$$

La convergence vers zéro lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  du second membre ci-dessus contredit alors le fait que

$$1 = \|u_{\delta_n}\|_{H^1(\Xi_{\delta_n})} \leq \|\tilde{u}_n\|_{H^1(\Xi)} \longrightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

et achève la démonstration. ■

**Remarque 4.4.** *Le théorème 4.3 assure la stabilité uniforme en  $\delta$  vis à vis du second membre de la solution du problème (4.4) équivalent au problème de diffraction (4.1) dès que l'impédance de chaque obstacle est de la forme*

$$\alpha_j^{\delta} = \gamma_j f(\delta) \text{ avec } \mathcal{I}m \gamma_j < 0,$$

où  $f$  est une fonction vérifiant  $f(\delta) > 0$  pour  $\delta > 0$ . Cette stabilité est l'outil de base pour établir les estimations d'erreur entre la solution réelle et son approximation construite par la méthode des développements asymptotiques raccordés.

Remarquons que pour les petits obstacles « durs » (conditions aux limites de Neumann) ou « mous » (conditions aux limites de Dirichlet) les hypothèses du théorème 4.3 ne sont pas satisfaites. Cependant la stabilité reste vraie pour ces cas là. En effet il n'y a pas de termes de bord sur  $\mathcal{S}_j^\delta$  intervenant dans la formulation variationnelle (4.5). De ce fait, la propriété (4.8) est trivialement vérifiée et la preuve peut se faire exactement de la même manière.

Dans la suite, nous utiliserons des impédances de la forme suivante :

$$\alpha_j^\delta = \gamma_j f(\delta) = \frac{\gamma_j}{\delta}, \quad \text{Im } \gamma_j < 0. \quad (4.9)$$

Ce choix permettra de comparer les résultats que nous obtenons avec ceux de la méthode de Ramm et aussi de simplifier la présentation de l'analyse asymptotique du problème (4.1).

## 4.2 Méthode des développements asymptotiques raccordés

Nous introduisons maintenant la méthode des développements asymptotiques raccordés [26, 5, 32, 50] pour étudier l'équation (4.1) en présence de petits obstacles. L'idée générale de la méthode est décrite dans la figure 4.3. La construction de cette dernière repose sur l'introduction d'un champ, dit lointain, décrivant le comportement global du champ diffracté par les petits objets et d'un champ proche défini à l'intérieur de la couche limite entourant chacun d'entre eux. Le champ lointain est obtenu en postulant que la solution du problème de diffraction admet le développement suivant :

$$u_\delta(x) = \sum_{k=0}^m \delta^k u_k(x) + \underset{\delta \rightarrow 0}{o}(\delta^m), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \cup_{j=1}^N \{c_j\}. \quad (4.10)$$

Ce développement est habituellement appelé champ externe lorsque que l'on travaille avec les développements asymptotiques raccordés. Le champ proche, appelé aussi champ interne, correspond quant à lui à un zoom de la solution sur chaque  $\mathcal{B}_j^\delta$  et est exprimé par rapport aux variables rapides  $X = (x - c_j)/\delta$ . Ces dernières peuvent être écrites en coordonnées sphériques  $X = (R, \Theta) = (|x - c_j|/\delta, (x - c_j)/|x - c_j|)$ . Ainsi, en suivant l'approche générale de la méthode des développements asymptotiques raccordés, on suppose que le champ au voisinage des petits obstacles admet le développement suivant :

$$u_\delta \left( \frac{x - c_j}{\delta} \right) = \Pi_\delta^{(j)}(X) = \sum_{k=0}^m \delta^k \Pi_k^{(j)}(R, \Theta) + \underset{\delta \rightarrow 0}{o}(\delta^m). \quad (4.11)$$

Remarquons que les coordonnées  $X$  ou  $(R, \Theta)$  dépendent de  $j$  et donc du petit obstacle considéré. Cependant, afin d'alléger les notations, nous allons laisser cette dépendance implicite. En appelant les champs interne et externe respectivement champ proche et

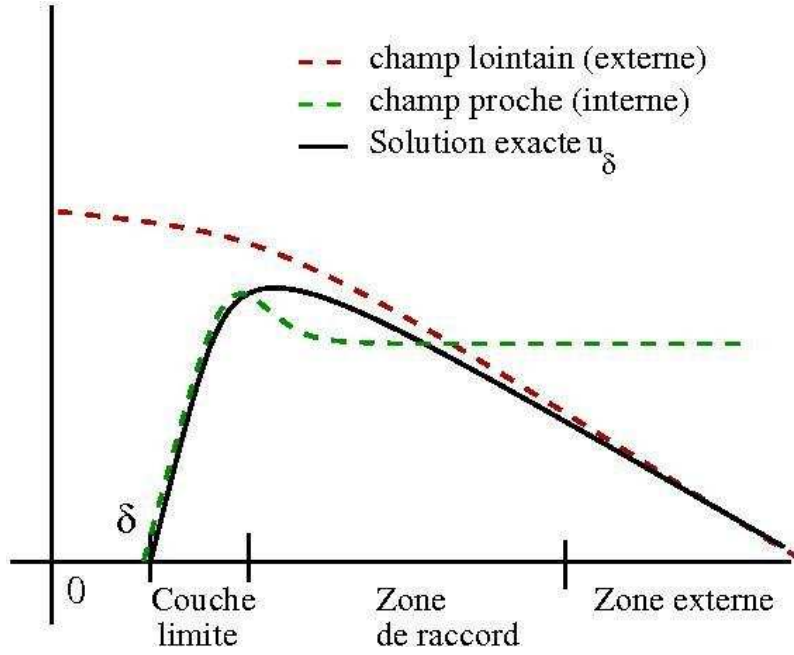


FIG. 4.3: Idée générale des développements asymptotiques raccordés

champ lointain, nous adaptons une terminologie classique des problèmes de diffraction. Dans la suite, l'une ou l'autre de ces appellations est utilisée.

Les conditions de raccord permettent de lier les développements des champs interne et externe et ainsi de les déterminer complètement. Ces conditions expriment le fait, connu aussi sous le nom de principe de Van Dyke, que les développements (4.10) et (4.11) correspondent à une même fonction. En fait, la définition précise de ces conditions dépend du problème étudié (voir par exemple [26, 5, 32, 50]). Pour le problème de diffraction étudié ici, nous allons suivre [5]. Les conditions de raccord sont définies comme suit.

- On commence par considérer un développement externe tronqué exprimé en variables rapides :

$$u_{m,\delta}(c_j + \delta R\Theta) := \sum_{l=0}^m \delta^l u_l(c_j + \delta R\Theta).$$

Cette fonction est alors développée en puissances de  $\delta$  et ensuite tronquée pour obtenir :

$$\sum_{l=0}^m \delta^l u_l(c_j + \delta R\Theta) = \sum_{l=0}^m \delta^l \mathbf{U}_{m,l}^{(j)}(R, \Theta) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^m). \quad (4.12)$$

- Les conditions de raccord sont alors définies comme suit :

$$\mathbf{U}_{m,k}^{(j)} - \Pi_k^{(j)} = o_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R^{m-k}} \right), \quad \forall j = 1, \dots, N. \quad (4.13)$$

Remarquons que le fait de supposer un développement de  $u_{m,\delta}(c_j + \delta R_j \Theta_j)$  de la forme (4.12) impose un ordre de singularité fini des champs externes aux voisinages des  $\{c_j\}_{j=1}^N$ . Ce comportement sera discuté plus en détail dans la suite.

La suite de cette section est dédiée à la détermination des coefficients des champs externe et interne définis respectivement par (4.10) et (4.11). Les coefficients du champ externe ne posent pas de problème particulier et on démontre qu'ils sont définis à partir d'un nombre fini de multipôles donnés par des produits de fonctions de Hankel sphériques de première espèce par les harmoniques sphériques correspondantes. La principale difficulté réside dans la détermination des coefficients du champ interne qui fait intervenir des équations de Laplace emboîtées (voir [23] pour un problème similaire en 2D). Nous démontrons ensuite que le développement existe à tout ordre. Nous présentons enfin des estimations d'erreur permettant de valider la construction formelle des développements asymptotiques.

Dans la suite, nous utilisons des multipôles ou fonction d'onde sphériques qui sont des solutions de l'équation d'Helmholtz particulières s'exprimant à l'aide des fonctions spéciales et des harmoniques sphériques. Ainsi, on notera  $h_n^{(1)}$  les fonctions de Hankel sphériques d'ordre  $n$  de première espèce,  $j_n$  les fonctions de Bessel sphériques et  $y_n$  les fonctions de Neumann sphériques. Enfin  $Y_n^m$ , pour  $|m| \leq 2n + 1$  désigne les  $2n + 1$  harmoniques sphériques d'ordre  $n$ . Les définitions et propriétés de chacune de ces fonctions peuvent être trouvées dans [48, 1]. Plus précisément, on a :

$$j_n(z) = 2^n z^n \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^l (l+k)!}{l!(2l+2n+1)!} z^{2l}, \quad (4.14)$$

$$h_n^{(1)}(z) = \frac{e^{iz}}{iz} \sum_{l=0}^n \frac{i^{l-n} (n+l)!}{2^l l!(n-l)!} \frac{1}{z^l}, \quad (4.15)$$

$$iy_n(z) = h_n^{(1)}(z) - j_n(z),$$

$$Y_n^m(\Theta) = Y_n^m(\theta, \varphi) = \left( (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right)^{1/2} P_n^m(\cos(\theta)) e^{im\varphi}, \quad (4.16)$$

où  $P_n^m(t) = (-1)^m (1-t^2)^{m/2} \partial_t^m P_n(t)$  sont des fonctions définies à partir des polynômes de Legendre donnés par :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \partial_t^n (t^2 - 1)^n.$$

### 4.2.1 Forme générale des champs externes

Dans cette section, on montre que la détermination des champs externes<sup>1</sup> se ramène à fixer un nombre fini de constantes. En insérant le développement (4.10) dans le problème (4.1) et en identifiant les termes de même puissance de  $\delta$ , il vient :

$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2)u_k(x) = 0, & \mathbb{R}^3 \setminus \cup_{j=1}^N \{c_j\}, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - i\kappa) (u_k - \xi_k^0 u_{\text{inc}}) = 0, \end{cases} \quad (4.17)$$

<sup>1</sup>Par abus de langage commode, on désigne par champs externes ou internes les différents termes des développements respectifs des champs externe et interne.

où  $\xi_k^0 = 1$  si  $k = 0$  et 0 sinon. Les conditions de raccord (4.13) considérées ici imposent que  $u_k$  ne peut avoir qu'un ordre de singularité fini au voisinage de chaque  $c_j$ . Plus précisément, les champs externes vérifient la condition suivante :

$$\exists(m_j, M_j, \rho_j) \in [0, +\infty[\times\mathbb{R}_+^2 \text{ tels que } |x - c_j|^{m_j}|u_k(x)| \leq M_j \text{ pour } |x - c_j| \leq \rho_j.$$

Le résultat suivant est fondamental. En effet, il donne une caractérisation complète des solutions de (4.17) en termes de multipôles localisés en chaque  $c_j$ .

**Théorème 4.5.** *Soit  $u_k$  une solution de (4.17) possédant un ordre de singularité fini au voisinage de chaque  $c_j$ . Alors*

$$u_k(x) = \xi_k^0 u_{\text{inc}}(x) + \sum_{j=1}^N \sum_{n \geq 0} h_n^{(1)}(\kappa|x - c_j|) Y_{n,k}^{(j)} \left( \frac{x - c_j}{|x - c_j|} \right), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \cup_{j=1}^N \{c_j\},$$

où  $Y_{n,k}^{(j)}$  est une combinaison linéaire d'harmoniques sphériques d'ordre  $n$  indéterminées. De plus, les séries ci-dessus ne possèdent qu'un nombre fini de termes non nuls.

**Démonstration.** Par séparation de variables au voisinage de  $c_j$ , on obtient :

$$u_k(x) - \xi_k^0 u_{\text{inc}}(x) = \sum_{n \geq 0} \left( j_n(\kappa|x - c_j|) Y_{n,k}^{(j),1} \left( \frac{x - c_j}{|x - c_j|} \right) + y_n(\kappa|x - c_j|) Y_{n,k}^{(j),2} \left( \frac{x - c_j}{|x - c_j|} \right) \right),$$

où  $Y_{n,k}^{(j),l}$  ( $l = 1, 2$ ) sont deux familles d'harmoniques sphériques d'ordre  $n$ . Le fait que l'on cherche des solutions avec un ordre fini de singularité implique que seulement un nombre fini de  $Y_{n,k}^{(j),2}$  est non nul. La série associée aux  $Y_{n,k}^{(j),1}$  est de plus uniformément convergente sur toute boule centrée en  $c_j$  de rayon assez petit. Considérons maintenant la fonction suivante :

$$v(x) = u_k(x) - \xi_k^0 u_{\text{inc}}(x) - \sum_{j=1}^N \sum_{n \geq 0} Y_{n,k}^{(j),2} \left( \frac{x - c_j}{|x - c_j|} \right) h_n^{(1)}(\kappa|x - c_j|).$$

Cette fonction est régulière sur tout  $\mathbb{R}^3$  et vérifie l'équation de Helmholtz ainsi que la condition de radiation de Sommerfeld. Le lemme de Rellich (voir par exemple [24]) assure que  $v = 0$  ce qui achève la preuve du théorème. ■

Ce lemme réduit clairement la détermination de chaque terme d'ordre  $k$  du champ externe à un nombre fini d'harmoniques sphériques et donc à un nombre fini de constantes.

## 4.2.2 Forme générale des champs internes

Nous dérivons maintenant la forme générale des différents termes du développement du champ interne. On procède de la même manière que pour les coefficients du champ externe et donc on insère (4.11) dans (4.1). Ainsi, en utilisant que  $\Delta_x = \delta^{-2} \Delta_X$  et en

identifiant les termes de même puissance de  $\delta$ , nous obtenons les équations vérifiées par les différents termes du développement du champ interne :

$$\Delta \Pi_k^{(j)}(R, \Theta) + \kappa^2 \Pi_{k-2}^{(j)}(R, \Theta) = 0, \quad \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1, \quad (4.18)$$

où  $\Pi_{-2}^{(j)} = \Pi_{-1}^{(j)} = 0$  et où l'indice  $(j)$  réfère implicitement à la couche limite entourant la boule  $\mathcal{B}_j^\delta$ . Ci-dessus,  $\mathcal{B}_1$  désigne la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . En reportant maintenant le développement (4.11) dans la condition aux limites d'impédance et en utilisant que  $\partial_{\mathbf{n}_j} = \delta^{-1} \partial_R$  ainsi que l'hypothèse (4.9), il vient :

$$\sum_{k=0}^m \delta^k \partial_R \Pi_k^{(j)} = \delta \frac{\gamma_j}{\delta} \sum_{k=0}^m \delta^k \Pi_k^{(j)} + \underset{\delta \rightarrow 0}{o}(\delta^m), \quad \text{sur } \partial \mathcal{B}_1.$$

Ainsi les champs internes vérifient la condition aux limites :

$$\partial_R \Pi_k^{(j)} = \gamma_j \Pi_k^{(j)}, \quad \text{pour } R = 1. \quad (4.19)$$

Nous sommes maintenant en mesure d'obtenir les expressions générales des champs internes. Nous commençons par traiter l'équation (4.18). Les conditions aux limites seront examinées plus tard. Remarquons que de telles équations de Laplace emboîtées ont déjà été étudiées en 2D dans [23]. Cependant, à cause des difficultés inhérentes à l'équation des ondes en dimension paire, ces équations sont plus simples à résoudre en dimension 3.

Dans un premier temps et grâce à la géométrie sphérique des petits obstacles, nous pouvons faire une séparation de variables et chercher des solutions sous la forme suivante :

$$\Pi_k^{(j)}(R, \Theta) = \sum_{n \geq 0} P_{n,k}^{(j)}(R) \sum_{|m| \leq n} \alpha_{n,k}^{m,(j)} Y_n^m(\Theta).$$

Le laplacien en coordonnées sphériques est donné par

$$\Delta = \frac{1}{R^2} \partial_R (R^2 \partial_R) + \frac{1}{R^2} \Delta_{\mathcal{S}}$$

où  $\Delta_{\mathcal{S}}$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère unité. Les harmoniques sphériques vérifiant  $\Delta_{\mathcal{S}} Y_n^m = -n(n+1) Y_n^m$  et formant un système linéairement indépendant, les équations de Laplace emboîtées (4.18) se réduisent à :

$$\mathbf{L}_n P_{n,k}^{(j)} = -\kappa^2 R^2 P_{n,k-2}^{(j)}, \quad (4.20)$$

où  $\mathbf{L}_n$  est l'opérateur différentiel défini par

$$\mathbf{L}_n = \partial_R (R^2 \partial_R) - n(n+1).$$

Le lemme suivant permet de réduire la résolution à la détermination d'un nombre fini de constantes.

**Lemme 4.6.** *Toute solution de (4.18) admet le développement suivant :*

$$\Pi_k^{(j)}(R, \Theta) = \sum_{n \geq 0} \sum_{|m| \leq n} \left\{ \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} c_{l,n,k}^{m,(j)} R^{-(n+1)+2l} + d_{l,n,k}^{m,(j)} R^{n+2l} \right\} Y_n^m(\Theta),$$

où les  $2(\lfloor k/2 \rfloor + 1)$  constantes  $c_{l,n,k}^{(j)}$  et  $d_{l,n,k}^{(j)}$  sont inconnues et  $\lfloor k/2 \rfloor$  désigne la partie entière de  $k/2$ .

**Démonstration.** On commence par faire une séparation de variables ; ce qui réduit la détermination de  $\Pi_k^{(j)}$  à celle de  $P_{n,k}^{(j)}$  vérifiant (4.20). Remarquons que l'opérateur  $\mathbf{L}_n$  s'écrit sous la forme suivante

$$\mathbf{L}_n = (R\partial_R)^2 + (R\partial_R) - n(n+1).$$

La relation  $(R\partial_R)^p R^\alpha = \alpha^p R^\alpha$  entraîne alors que  $\mathbf{L}_n R^\alpha = (\alpha - n)(\alpha + n + 1)R^\alpha$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ainsi les fonctions  $R^{-(n+1)}$  et  $R^n$  constituent un système fondamental de solutions pour l'équation différentielle (4.20). La preuve se termine ensuite par une simple récurrence. ■

Les expressions des différents termes du développement du champ interne peuvent être réduites de manière plus conséquente en utilisant les conditions aux limites (4.19). Par exemple, pour les deux premiers champs internes qui vérifient  $\Delta\Pi_k^{(j)} = 0$  et  $\partial_R\Pi_k^{(j)} = \gamma_j\Pi_k^{(j)}$  pour  $R = 1$ . Le lemme 4.6 et le fait que la somme sur  $l$  se réduit au terme  $l = 0$  montrent alors que :

$$\Pi_k^{(j)}(R, \Theta) = \sum_{n \geq 0} \sum_{|m| \leq n} \left\{ R^n + \frac{n - \gamma_j}{n + 1 + \gamma_j} \frac{1}{R^{n+1}} \right\} d_{0,n,k}^{m,(j)} Y_n^m(\Theta), \quad k = 0, 1,$$

où les  $d_{0,n,k}^{m,(j)}$  sont des constantes inconnues qui seront déterminées par la suite en utilisant le raccord.

### 4.2.3 Existence et unicité du développement asymptotique à tout ordre

Nous établissons, dans cette section, l'existence et l'unicité des développements asymptotiques raccordés, à tout ordre, de la solution de (4.1). Nous allons en fait démontrer le résultat suivant.

**Théorème 4.7.** *Les couples champ externe et champ interne  $(u_k, \Pi_k^{(j)})$  sont déterminés de manière unique pour tout  $k \in \mathbb{N}$  par les équations (4.17), (4.18) et (4.19) dès lors qu'ils vérifient les conditions de raccord (4.12) et (4.13).*

La démonstration s'effectue par récurrence en supposant que le théorème est vrai jusqu'à l'ordre  $k$  et que les différents termes du développement vérifient les hypothèses suivantes :

**Hypothèses 4.8.** *Les champs externes et champs internes vérifiant respectivement les équations (4.17) et (4.18), (4.19) ainsi que les règles de raccord (4.13), (4.12) existent et sont uniques jusqu'à l'ordre  $k$ .*

**Hypothèses 4.9.** *Les coefficients du champ interne  $\Pi_l^{(j)}(R, \Theta)$ , pour  $l = 0, \dots, k$ , ne dépendent que des  $2l + 1$  premières harmoniques sphériques et son développement en puissances de  $R$  ne possède pas de termes en  $R^\gamma$  pour  $\gamma > l$  et  $\gamma < -(l + 1)$ .*



**Remarque 4.10.** L'hypothèse de récurrence 4.9 est extrêmement utile dans la suite pour établir des estimations d'erreur. Elle affirme en fait que les champs internes ne dépendent que d'un nombre fini d'harmoniques sphériques. Cela est dû au fait que la géométrie des obstacles est simple entraînant ainsi que le développement sous-variationnel (termes en puissances négatives de  $R$ ) est fini.

En revanche, le nombre fini de puissances positives de  $R$  provient uniquement de l'ordre fini de la singularité des champs externes. Seule cette dernière propriété resterait donc valable pour des obstacles de forme générale.

Avant de passer à la démonstration du théorème 4.7, nous établissons certaines propriétés générales utiles pour la suite. Tout d'abord, les fonctions de raccord  $\mathbf{U}_{m,l}^{(j)}(R, \Theta)$  vérifient des équations de Laplace emboîtées.

**Lemme 4.11.** Soit  $m$  un entier et  $l \in \{0, \dots, m\}$ . Alors les fonctions de raccord vérifient :

$$\Delta \mathbf{U}_{m,l}^{(j)}(R, \Theta) = -\kappa^2 \mathbf{U}_{m,l-2}^{(j)}(R, \Theta), \quad \forall R \geq 1, \quad \forall \Theta \in \mathcal{S}^2,$$

où  $\mathbf{U}_{m,l-2}^{(j)} = 0$  si  $l-2 < 0$  et  $\mathcal{S}^2$  est la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ .

**Démonstration.** Rappelons que  $u_{m,\delta}(x) = \sum_{l=0}^m \delta^l u_l(x)$ . Les fonctions de raccord sont alors définies à l'aide de l'identification suivante :

$$u_{m,\delta}(c_j + \delta R \Theta) = \sum_{l=0}^m \delta^l \mathbf{U}_{m,l}^{(j)}(R, \Theta) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^m).$$

On donne maintenant la formule de Gegenbauer [48] :

$$u_{\text{inc}}(c_j + \delta R \Theta) = u_{\text{inc}}(c_j) e^{i\kappa \delta R \langle d, \Theta \rangle} = u_{\text{inc}}(c_j) \sum_{n \geq 0} j_n(\kappa \delta R) i^n (2n+1) P_n(\langle d, \Theta \rangle), \quad (4.21)$$

où  $P_n$  sont les polynômes de Legendre [48, 1]) qui peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$P_n(\langle s_1, s_2 \rangle) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{|m| \leq n} Y_n^{-m}(s_1) Y_n^m(s_2), \quad \forall (s_1, s_2) \in \mathcal{S}^2.$$

On donne aussi les formules de translation pour les solutions de l'équation de Helmholtz [48] :

$$h_n(s+t) Y_n^m \left( \frac{s+t}{|s+t|} \right) = \sum_{n' \geq 0} \sum_{|m'| \leq n'} C_{n',n}^{m',m}(t) j_n(|s|) Y_{n'}^{m'}(\hat{s}), \quad \text{si } |s| < |t|,$$

où  $\hat{s} = s/|s|$  et où les constantes  $C_{n',n}^{m',m}(t)$  peuvent être déterminées explicitement. Ici, les formules de translation sont utilisées avec  $s = \delta R \Theta$  et  $t = c_j - c_l$  pour  $l \neq j$ . De ce fait,  $|s| < |t|$  car  $\delta$  est petit. Ainsi, le théorème 4.5, les formules de translation, de Gegenbauer (4.21) et les définitions des fonctions de Bessel (4.14) et de Hankel (4.15) avec des séries entières [1], montrent l'existence des fonctions  $\mathbf{U}_{m,l}^{(j)}$ .

De plus,  $u_{m,\delta}(c_j + \delta R \Theta) - \sum_{l=0}^m \delta^l \mathbf{U}_{m,l}^{(j)}(R, \Theta)$  est donné par le reste d'une série de fonctions de la variable rapide  $X = (R, \Theta) = (x - c_j)/\delta$  qui est régulière et converge uniformément,

ainsi que ses dérivées, sur tout compact de  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1$ . Par conséquent, comme  $\delta^2 \Delta_x = \Delta_X$ , en dérivant l'égalité ci-dessus, il vient :

$$\delta^2 \Delta_x u_{m,\delta}(c_j + \delta R\Theta) = \sum_{l=0}^m \delta^l \Delta_X \mathbf{U}_{m,l}^{(j)}(R, \Theta) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^m).$$

Les champs externes vérifiant l'équation de Helmholtz  $\Delta_x u_k = -\kappa^2 u_k$  sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \cup_{j=1}^N \{c_j\}$ , il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \delta^2 \Delta_x u_{m,\delta}(c_j + \delta R\Theta) &= -\kappa^2 \delta^2 u_{m,\delta}(c_j + \delta R\Theta) = -\kappa^2 \delta^2 \sum_{l=0}^m \delta^l \mathbf{U}_{m,l}^{(j)}(R, \Theta) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^{m+2}) \\ &= -\kappa^2 \sum_{l=2}^{m+2} \delta^l \mathbf{U}_{m,l-2}^{(j)}(R, \Theta) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^{m+2}) \end{aligned}$$

La comparaison des deux égalités précédentes entraîne :

$$\sum_{l=0}^m \delta^l \Delta_X \mathbf{U}_{m,l}^{(j)}(R, \Theta) = -\kappa^2 \sum_{l=2}^m \delta^l \mathbf{U}_{m,l-2}^{(j)}(R, \Theta) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^m),$$

et ainsi en identifiant les termes de même puissance de  $\delta$ , on obtient que les fonctions de raccord vérifient des équations de Laplace emboîtées. ■

On donne maintenant des relations de compatibilité sur les coefficients intervenant dans le développement en harmoniques sphériques de  $\mathbf{U}_{k,l}^{(j)} - \Pi_l^{(j)}$  lorsque les hypothèses de récurrence sont vérifiées.

**Lemme 4.12.** *Supposons que les hypothèses 4.8 et 4.9 soient satisfaites. Soit  $\varphi_{k,l} = \mathbf{U}_{k,l}^{(j)} - \Pi_l^{(j)}$  avec  $l = 0, \dots, k$ . Alors*

$$\varphi_{k,l} = \frac{1}{R^{(k+1)-l}} \sum_{\gamma=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} C_{k,l,\gamma} \mathcal{Y}_{2\gamma+k-l,l}(\Theta) + o_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R^{k+1-l}} \right),$$

où les constantes  $C_{k,l,\gamma}$  sont connues et  $\mathcal{Y}_{\nu,l}(\Theta)$  est une combinaison linéaire d'harmoniques sphériques de degré  $\nu$  dont les coefficients sont eux aussi connus. De plus, on a la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} C_{k,l,\gamma} \mathcal{Y}_{2\gamma+k-l,l}(\Theta) &= -\frac{\kappa^2}{2\gamma \{2(l-k-\gamma)-1\}} C_{k,l-2,\gamma-1} \mathcal{Y}_{2\gamma+k-l,l-2}(\Theta), \\ \forall l \in \{0, \dots, k\} \text{ et } \forall \gamma \in \{1, \dots, \lfloor l/2 \rfloor\}. \end{aligned}$$

**Démonstration.** Par le lemme 4.11 et comme  $\Pi_l^{(j)}$  vérifie des équations de Laplace emboîtées, il vient :

$$\Delta \varphi_{k,l} = -\kappa^2 \varphi_{k,l-2}, \text{ sur } \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1.$$

Le lemme 4.6 et les hypothèses 4.8 et 4.9 assurent alors que  $\varphi_{k,l}$  admet le développement suivant :

$$\varphi_{k,l} = \sum_{n=0}^l \sum_{|m| \leq n} \left\{ \sum_{\gamma=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} c_{\gamma,n,l}^{m,(j)} R^{-(n+1)+2\gamma} + d_{\gamma,n,l}^{m,(j)} R^{n+2\gamma} \right\} Y_n^m(\Theta),$$

où, par les hypothèses de récurrence, toutes les constantes sont déterminées. Les conditions de raccord (4.13) et la représentation ci-dessus imposent que  $\varphi_{k,l} = o_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R^{k-l}} \right)$  qui est en fait un  $O_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R^{k+1-l}} \right)$  et donc  $\varphi_{k,l}$  est égal à son terme en  $R^{l-(k+1)}$  plus des termes en  $o_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R^{k+1-l}} \right)$  (qui sont explicites). Pour le déterminer, considérons  $n$  et  $\gamma$  tels que  $-(n+1) + 2\gamma = -(k+1) + l$ . L'ordre de l'harmonique sphérique correspondante est alors  $n = 2\gamma + k - l$  et donc le terme en  $R^{l-(k+1)}$  intervenant dans la représentation de  $\varphi_{k,l}$  est donné par  $R^{-(k+1)+l} \sum_{\gamma=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} C_{k,l,\gamma} \mathcal{Y}_{2\gamma+k-l,l}(\Theta)$ , où  $\mathcal{Y}_{\nu,l}(\Theta)$  est une combinaison linéaire d'harmoniques sphériques de degré  $\nu$  dont les constantes, ainsi que les  $C_{k,l,\gamma}$ , sont totalement déterminées grâce à l'hypothèse de récurrence. Cela démontre la première partie du lemme.

Pour déterminer la relation de récurrence sur les  $C_{k,l,\gamma} \mathcal{Y}_{\nu,l}(\Theta)$ , nous utilisons l'équation de Laplace emboîtée vérifiée par les  $\varphi_{k,l}$ . Ainsi, en la multipliant par  $R^2$  et en utilisant l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques, il vient :

$$\begin{aligned} R^2 \Delta \varphi_{k,l} &= \{(R\partial_R)^2 + (R\partial_R) + \Delta_S\} \varphi_{k,l} \\ &= \frac{1}{R^{(k+1)-l}} \sum_{\gamma=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} 2\gamma(2(l-\gamma-k)-1) C_{k,l,\gamma} \mathcal{Y}_{2\gamma+k-l,l}(\Theta) + o_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R^{k+1-l}} \right), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé que les harmoniques sphériques vérifient  $\Delta_S Y_n^m(\Theta) = -n(n+1) Y_n^m(\Theta)$  et l'identité  $(R\partial_R)^\nu R^p = p^\nu R^p$ . De même, on a :

$$\begin{aligned} -\kappa^2 R^2 \varphi_{k,l-2} &= \frac{-\kappa^2 R^2}{R^{k+1-l+2}} \sum_{\gamma=0}^{\lfloor (l-2)/2 \rfloor} C_{k,l-2,\gamma} \mathcal{Y}_{2(\gamma+1)+k-l,l-2}(\Theta) + R^2 o_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R^{k+1-l+2}} \right) \\ &= \frac{-\kappa^2}{R^{k+1-l}} \sum_{\gamma'=1}^{\lfloor l/2 \rfloor} C_{k,l-2,\gamma'-1} \mathcal{Y}_{2\gamma'+k-l,l-2}(\Theta) + o_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R^{k+1-l}} \right), \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du changement d'indice  $\gamma' = \gamma + 1$ . La relation de récurrence est alors obtenue en utilisant la relation  $\Delta_X \varphi_{k,l} = -\kappa^2 \varphi_{k,l-2}$ . ■

#### 4.2.3.1 Principe de la preuve de l'existence et l'unicité du développement à tout ordre

Nous décrivons maintenant le principe de la démonstration (assez technique) de l'existence et l'unicité des développements asymptotiques raccordés à tout ordre. Comme nous l'avons évoqué ci-dessus, la preuve s'effectue par récurrence en montrant que les hypothèses 4.8 et 4.9 sont vérifiées à tout ordre. Le schéma est le suivant : on établit d'abord que le champ externe d'ordre  $k+1$  existe de manière unique. On procède ensuite de même pour le champ interne d'ordre  $k+1$ .

La détermination de  $u_{k+1}$  utilise le théorème 4.5 qui la réduit à celle de  $k+1$  combinaisons linéaires d'harmoniques sphériques de degré allant de 0 à  $k$ . L'étape suivante est la dérivation d'une relation de récurrence entre les fonctions de raccord  $\mathbf{U}_{k+1,l}^{(j)}$  et  $\mathbf{U}_{k,l}^{(j)}$

pour  $l = 0, \dots, k$ . Les conditions de raccord et l'hypothèse de récurrence permettent alors de déterminer  $u_{k+1}$  de manière unique.

La détermination des champs internes d'ordre  $k + 1$ ,  $\Pi_{k+1}^{(j)}$ , est obtenue par une méthode variationnelle. On introduit à cet effet l'espace de Beppo-Levi [70] pour la résolution du problème associé à  $\Pi_{k+1}^{(j)}$ .

#### 4.2.3.2 Démonstration de l'existence et l'unicité du développement à tout ordre

La démonstration se déroule en plusieurs étapes. On vérifie tout d'abord que les hypothèses 4.8 et 4.9 sont vérifiées à l'ordre 0. On montre ensuite l'existence et l'unicité de  $u_{k+1}$  puis celle de  $\Pi_{k+1}^{(j)}$ .

##### I - INITIALISATION : DÉTERMINATION DES TERMES D'ORDRE 0.

En utilisant que  $h_n^{(1)}(z) \sim C_n/z^{n+1}$  lorsque  $z \rightarrow 0$  (voir (4.15)) et le théorème 4.5, on obtient que le terme d'ordre 0 reste borné au voisinage de chaque  $c_j$ . On en déduit alors que  $u_0 = u_{\text{inc}}$ .

Pour obtenir le coefficient d'ordre 0 du champ proche, on commence par calculer la première fonction de raccord (4.12). Un développement de Taylor entraîne alors :

$$u_0(c_j + \delta R\Theta) = u_{\text{inc}}(c_j) + \underset{\delta \rightarrow 0}{o}(1) = \mathbf{U}_{0,0}^{(j)}(R, \Theta) + \underset{\delta \rightarrow 0}{o}(1).$$

Le lemme 4.6 assure que le coefficient d'ordre 0 du champ interne admet le développement suivant :

$$\Pi_0^{(j)}(R, \Theta) = \sum_{n \geq 0} \sum_{|m| \leq n} \left( R^n + \frac{n - \gamma_j}{n + 1 + \gamma_j} \frac{1}{R^{n+1}} \right) d_{k,n}^{(j),m} Y_n^m(\Theta).$$

Les conditions de raccord (4.13) impliquent alors que  $\Pi_0^{(j)}$  ne dépend que de l'harmonique sphérique d'ordre zéro  $Y_0^0 = 1$  et de plus :

$$\Pi_0^{(j)}(R, \Theta) = \left( 1 - \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} \frac{1}{R} \right) u_{\text{inc}}(c_j). \quad (4.22)$$

Les termes  $u_0$  et  $\Pi_0^{(j)}$  vérifient bien les hypothèses 4.8 et 4.9 ce qui achève la détermination du développement asymptotique à l'ordre zéro.

##### II - INDUCTION : EXISTENCE ET UNICITÉ DU CHAMP EXTERNE D'ORDRE $k + 1$

Nous commençons par déterminer le champs externe d'ordre  $k + 1$ . Le théorème 4.5 et le comportement en zéro des fonctions de Hankel sphériques (4.15) montrent qu'il s'exprime comme suit :

$$u_{k+1}(x) = \sum_{l=1}^N \sum_{\gamma=0}^k h_\gamma(\kappa|x - c_l|) \mathcal{H}_{\gamma,k+1}^{(l)}(\Theta),$$

où  $\mathcal{H}_{l,k+1}^{(j)}(\Theta)$  est une combinaison linéaire d'harmoniques sphériques d'ordre  $l$  dont les coefficients ne sont pas encore déterminés.

La détermination de  $u_{k+1}$  n'utilise que le développement jusqu'à l'ordre  $k$  en  $\delta$  de  $u_{k+1,\delta}$ . Nous donnons alors le résultat suivant qui permet de lier les coefficients inconnus avec les fonctions de raccord d'ordre  $k$  et celles d'ordre  $k+1$ .

**Lemme 4.13.** *Pour tout  $j = 1, \dots, N$  et pour tout  $l = 0, \dots, k$ , nous avons la formule suivante :*

$$\mathbf{U}_{k+1,l}^{(j)}(R, \Theta) = \mathbf{U}_{k,l}^{(j)}(R, \Theta) + \frac{1}{R^{k+1-l}} \sum_{t=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} N_{2t+k-l,t} \mathcal{H}_{2t+k-l,k+1}^{(j)}(\Theta),$$

où les constantes  $N_{n,\gamma}$  sont données par le développement en série des fonctions de Neumann :

$$iy_n(\kappa z) = i \frac{(-1)^{n+1} \sqrt{\pi}}{2^n z^{n+1}} \sum_{\gamma \geq 0} \frac{(-1)^{\gamma} 4^{n-\gamma} \kappa^{2\gamma-(n+1)}}{\Gamma(\gamma+1) \Gamma(\frac{1}{2} - n - \gamma)} z^{2\gamma} = \sum_{\gamma \geq 0} N_{n,\gamma} z^{2\gamma-(n+1)}.$$

**Démonstration.** Soit  $l$  un entier compris entre 0 et  $k$ . Les fonctions de raccord d'ordre  $k+1$  sont définies par

$$u_{\delta,k+1}(c_j + \delta R \Theta) = \sum_{l=0}^k \delta^l \mathbf{U}_{k+1,l}^{(j)}(R, \Theta) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^k).$$

Par la décomposition  $u_{\delta,k+1} = u_{\delta,k} + \delta^{k+1} u_{k+1}$  et la définition des  $\mathbf{U}_{k,l}^{(j)}$  il ne reste plus qu'à calculer les termes en  $\delta^l$  de  $\delta^{k+1} u_{k+1}(c_j + \delta R \Theta)$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . Pour cela, on rappelle que les fonctions de Hankel sphériques sont définies par  $h_n^{(1)} = j_n + iy_n$  (voir [1]). La formule (4.14) montre que  $j_n(z) \sim C_n z^n$  lorsque  $z \rightarrow 0$  et ainsi il vient :

$$\begin{aligned} \delta^{k+1} u_{k+1}(c_j + \delta R \Theta) &= \delta^{k+1} \sum_{\gamma=0}^k h_{\gamma}(\kappa \delta R) \mathcal{H}_{\gamma,k+1}^{(j)}(\Theta) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^k) \\ &= \delta^{k+1} \sum_{\gamma=0}^k iy_{\gamma}(\kappa \delta R) \mathcal{H}_{\gamma,k+1}^{(j)}(\Theta) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^k). \end{aligned}$$

Le développement en série entière de  $y_n(\kappa z)$  dans l'égalité ci-dessus donne alors :

$$\delta^{k+1} u_{k+1}(c_j + \delta R \Theta) = \delta^{k+1} \sum_{\gamma=0}^k \left( \sum_{\nu \geq 0} N_{\gamma,\nu} (\delta R)^{2\nu-(\gamma+1)} \right) \mathcal{H}_{\gamma,k+1}^{(j)}(\Theta) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^k).$$

Considérons le changement d'indice  $t = \nu$  et  $l = 2\nu - (\gamma + 1) + (k + 1) = 2\nu + k - \gamma$  pour  $\gamma \in \{0, \dots, k\}$ . Alors  $t \in \{0, \dots, \lfloor l/2 \rfloor\}$  et en ne gardant que les termes d'ordre inférieur à  $\delta^k$  il vient :

$$\delta^{k+1} u_{k+1}(c_j + \delta R \Theta) = \sum_{l=0}^k \frac{\delta^l}{R^{k+1-l}} \sum_{t=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} N_{2t+k-l,t} \mathcal{H}_{2t+k-l,k+1}^{(j)}(\Theta) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^k).$$

En regroupant les termes ci-dessus, on obtient la relation recherchée :

$$\mathbf{U}_{k+1,l}^{(j)}(R, \Theta) = \mathbf{U}_{k,l}^{(j)}(R, \Theta) + \frac{1}{R^{k+1-l}} \sum_{t=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} N_{2t+k-l,t} \mathcal{H}_{2t+k-l,k+1}^{(j)}(\Theta).$$

■

Nous donnons maintenant un résultat, utile pour la suite, concernant une relation de récurrence sur les constantes intervenant dans le développement en série entière des fonctions de Neumann.

**Lemme 4.14.** *Les constantes  $(N_{n,\gamma})_{n,\gamma \geq 0}$  définie par le développement en série entière des fonctions de Neumann  $iy_n(\kappa z)$  vérifient la relation de récurrence suivante :*

$$N_{n,\gamma} = -\frac{\kappa^2}{2\gamma(2(\gamma-n)-1)} N_{n,\gamma-1}, \quad N_{n,0} = -\sqrt{\pi} \frac{(-1)^{n+1} \kappa^{-(n+1)} 2^n}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)}.$$

**Démonstration.** La démonstration peut s'effectuer via l'expression explicite des  $N_{n,\gamma}$ . On a choisi ici d'utiliser le fait que les fonctions de Neumann vérifient une équation de Helmholtz.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $m$  vérifiant  $|m| \leq n$ . Alors le multipôle  $iy_n(\kappa R)Y_n^m(\Theta)$  vérifie l'équation de Helmholtz. Ainsi, en utilisant l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques, il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= R^2 (\Delta + \kappa^2) iy_n(\kappa R)Y_n^m(\Theta) = R^2 (\Delta + \kappa^2) Y_n^m(\Theta) \left\{ \sum_{\gamma \geq 0} N_{n,\gamma} R^{2\gamma-(n+1)} \right\} \\ &= Y_n^m(\Theta) \sum_{\gamma \geq 0} N_{n,\gamma} (2\gamma - (n+1) + n+1) (2\gamma - (n+1) - n) R^{2\gamma-(n+1)} \\ &\quad + Y_n^m(\Theta) \sum_{\gamma \geq 0} \kappa^2 N_{n,\gamma} R^{2\gamma-(n+1)+2} \\ &= Y_n^m(\Theta) \sum_{\gamma \geq 1} (N_{n,\gamma} 2\gamma(2(\gamma-n)-1) + \kappa^2 N_{n,\gamma-1}) R^{2\gamma-(n+1)}, \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du changement d'indice  $\gamma' = \gamma + 1$ . La démonstration se termine alors en utilisant le fait que le second membre est nul. ■

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer  $u_{k+1}$  de manière unique.

**Lemme 4.15.** *Le champ lointain d'ordre  $k+1$  existe et est unique.*

**Démonstration.** Nous devons déterminer les harmoniques sphériques  $\mathcal{H}_{l,k+1}^{(j)}(\Theta)$  constituant le développement de  $u_{k+1}$  pour  $l \in \{0, \dots, k\}$ . Le lemme 4.13 et les conditions de raccord entraînent :

$$\left( \mathbf{U}_{k,l}^{(j)} - \Pi_l^{(j)} \right) + \frac{1}{R^{k+1-l}} \sum_{t=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} N_{2t+k-l,t} \mathcal{H}_{2t+k-l,k+1}^{(j)}(\Theta) = \underset{R \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{R^{k+1-l}} \right).$$

Le lemme 4.12 assure que

$$\left(\mathbf{U}_{k,l}^{(j)} - \Pi_l^{(j)}\right) = \varphi_{k,l} = \frac{1}{R^{(k+1)-l}} \sum_{\gamma=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} C_{k,l,\gamma} \mathcal{Y}_{2\gamma+k-l,l}(\Theta) + o_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R^{k+1-l}} \right).$$

Les harmoniques sphériques du champ externe  $u_{k+1}$  vérifient ainsi les relations suivantes :

$$\sum_{t=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} N_{2t+k-l,t} \mathcal{H}_{2t+k-l,k+1}^{(j)}(\Theta) = - \sum_{\gamma=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} C_{k,l,\gamma} \mathcal{Y}_{2\gamma+k-l,l}(\Theta), \quad l = 0, \dots, k;$$

d'où on obtient :

$$\mathcal{H}_{2\gamma+k-l,k+1}^{(j)}(\Theta) = - \frac{C_{k,l,\gamma}}{N_{2\gamma+k-l,\gamma}} \mathcal{Y}_{2\gamma+k-l,l}(\Theta), \quad \forall l = 0, \dots, k \quad \forall \gamma = 0, \dots, \lfloor l/2 \rfloor.$$

Les relations précédentes sur-déterminent les  $\mathcal{H}_{l,k+1}^{(j)}(\Theta)$ . En effet,  $\nu = 2\gamma + k - l$  peut prendre plusieurs fois la même valeur pour des  $l$  et des  $\gamma$  différents.

Les quantités  $-\frac{C_{k,l,\gamma}}{N_{2\gamma+k-l,\gamma}} \mathcal{Y}_{2\gamma+k-l,l}(\Theta)$  vérifient cependant des relations de compatibilité impliquant qu'elles sont égales dès que  $\nu = \nu' = 2\gamma' + k - l'$ . Ces relations sont en fait démontrées dans les lemmes 4.14 et 4.12. Il suit ainsi que les  $\mathcal{H}_{\nu,k+1}^{(j)}(\Theta)$  sont déterminées de manière unique par la relation précédente et il en est donc de même pour le champ externe  $u_{k+1}$ . Ceci achève la démonstration. ■

### III - INDUCTION : EXISTENCE ET UNICITÉ DES CHAMPS INTERNES D'ORDRE $k + 1$

Pour terminer la démonstration du théorème 4.7, il ne reste plus qu'à montrer l'existence et l'unicité du champ interne d'ordre  $k + 1$ . Il vérifie l'équation suivante :

$$\begin{cases} \Delta \Pi_{k+1}^{(j)}(R, \Theta) = -\kappa^2 \Pi_{k-1}^{(j)}(R, \Theta), \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1, \\ \partial_R \Pi_{k+1}^{(j)}(R, \Theta) = \gamma_j \Pi_{k+1}^{(j)}(R, \Theta), \text{ pour } R = 1, \\ \Pi_{k+1}^{(j)}(R, \Theta) - \mathbf{U}_{k+1,k+1}^{(j)}(R, \Theta) = o_{R \rightarrow +\infty}(1). \end{cases}$$

En posant  $\Phi = \Pi_{k+1}^{(j)}(R, \Theta) - \mathbf{U}_{k+1,k+1}^{(j)}$ , il vient :

$$\begin{cases} \Delta \Phi(R, \Theta) = F, \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1, \\ \partial_R \Phi(R, \Theta) = \gamma_j \Phi(R, \Theta) + g, \text{ pour } R = 1, \\ \Phi(R, \Theta) = o_{R \rightarrow +\infty}(1), \end{cases} \quad (4.23)$$

où

$$\begin{cases} g = -\partial_R \mathbf{U}_{k+1,k+1}^{(j)}(1, \Theta) + \gamma_j \mathbf{U}_{k+1,k+1}^{(j)}(1, \Theta), \\ F = -\kappa^2 \Pi_{k-1}^{(j)}(R, \Theta) - \Delta \mathbf{U}_{k+1,k+1}^{(j)}(R, \Theta). \end{cases}$$

On introduit maintenant l'espace de Beppo-Levi [29], noté BL, qui est défini comme l'adhérence des fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1)$ , pour la norme suivante :

$$\|u\|_{\text{BL}} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1} |\nabla u|^2 dx}.$$

On a de plus la caractérisation suivante [70] :

$$\text{BL} = \left\{ \Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1) \mid (1 + |x|^2)^{-1/2} \Phi \text{ et } \nabla \Phi \in L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1) \right\}.$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire suivant :

$$(\Phi, \Psi)_{\text{BL}} = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1} \langle \nabla \Phi, \overline{\nabla \Psi} \rangle dx.$$

car BL ne contient pas les constantes. On peut alors donner une formulation variationnelle pour (4.23) dans BL :

$$\text{trouver } \Phi \in \text{BL} \text{ tel que } \forall \Psi \in \text{BL} : \quad (4.24)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1} \langle \nabla \Phi, \overline{\nabla \Psi} \rangle dx + \gamma_j \int_{\partial \mathcal{B}_1} \Phi \overline{\Psi} d\sigma = \int_{\partial \mathcal{B}_1} g \overline{\Psi} d\sigma - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1} F \overline{\Psi} dx.$$

Nous établissons tout d'abord la coercivité de la forme sesquilinéaire intervenant dans le problème (4.24).

**Lemme 4.16.** *Soit*

$$a(\Phi, \Psi) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1} \langle \nabla \Phi, \overline{\nabla \Psi} \rangle dx + \gamma_j \int_{\partial \mathcal{B}_1} \Phi \overline{\Psi} d\sigma$$

*une forme sesquilinéaire. Soit  $\theta \in ]0, \pi[$  tel que  $\gamma_j = -|\gamma_j|e^{i\theta}$  (on rappelle que  $\text{Im } \gamma_j < 0$ ). Alors  $a$  est à la fois continue et coercive sur  $\text{BL} \times \text{BL}$  :*

$$|a(\Phi, \Phi)| \geq \sin(\theta/2) \|\Phi\|_{\text{BL}}^2.$$

**Démonstration.** La continuité de  $a$  découle simplement du fait que BL est inclus dans  $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1)$  et des théorèmes de traces. Maintenant, soient  $\Phi \in \text{BL}$  et  $\Psi = \Phi e^{i\theta/2}$ . Alors, il vient :

$$a(\Phi, \Psi) = e^{-i\theta/2} \|\Phi\|_{\text{BL}}^2 - |\gamma_j| e^{i\theta/2} \|\Phi\|_{L^2(\mathcal{S}_j^\delta)}^2.$$

Ainsi  $\text{Im } a(\Phi, \Psi) = -\sin(\theta/2) \left( \|\Phi\|_{\text{BL}}^2 + |\gamma_j| \|\Phi\|_{L^2(\mathcal{S}_j^\delta)}^2 \right)$  ce qui entraîne enfin :

$$\left| a(\Phi, e^{i\theta/2} \Phi) \right| = |a(\Phi, \Phi)| \geq |\text{Im } a(\Phi, \Psi)| \geq \sin(\theta/2) \|\Phi\|_{\text{BL}}^2.$$

■

Nous pouvons maintenant établir l'existence et l'unicité du champ interne d'ordre  $k + 1$ .

**Lemme 4.17.** *Le champ interne d'ordre  $k + 1$  existe, est unique et vérifie :*

$$\Pi_{k+1}^{(j)}(R, \Theta) = \sum_{n=0}^{k+1} \sum_{|m| \leq n} \left\{ \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} c_{l,n,k}^{m,(j)} R^{-(n+1)+2l} + d_{l,n,k}^{m,(j)} R^{n+2l} \right\} Y_n^m(\Theta),$$

*où il n'y a pas de termes de la forme  $R^\gamma$  pour  $\gamma > k$  et  $\gamma < -(k + 1)$ .*



**Démonstration.** Le lemme 4.11, l'hypothèse 4.8 et les règles de raccord (4.13) montrent que :

$$F = \kappa^2 \left( \mathbf{U}_{k+1,k-1}^{(j)}(R, \Theta) - \Pi_{k-1}^{(j)}(R, \Theta) \right) = \underset{R \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{R^2} \right) = \underset{R \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{1}{R^3} \right),$$

où la dernière égalité découle du lemme 4.6. Ainsi en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et un passage en coordonnées sphériques nous obtenons, pour tout  $\Psi \in \text{BL}$ , l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1} |F \bar{\Psi}| dX &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1} |F (1 + |X|^2)^{1/2} \bar{\Psi} (1 + |X|^2)^{-1/2}| dX \\ &\leq C \left\{ \int_1^{+\infty} \left| \frac{1}{R^3} \right|^2 (1 + R^2) R^2 dR \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1} \frac{|\Psi|^2}{1 + |X|^2} dX \right\}^{1/2} \\ &\leq C \|\Psi\|_{\text{BL}}. \end{aligned}$$

Le second membre est donc bien une forme linéaire continue sur BL et l'équation (4.24) a un sens. Le lemme 4.16 et le lemme de Lax-Milgram permettent alors de conclure quant à l'existence et à l'unicité de  $\Pi_{k+1}^{(j)}$ .

Il reste à montrer que  $\Pi_{k+1}^{(j)}$  vérifie l'hypothèse 4.9. Il suffit pour cela d'utiliser que, après une séparation de variables, la partie radiale de  $\Pi_{k+1}^{(j)}$  vérifie (voir 4.20)

$$\mathbf{L}_n P_{n,k+1}^{(j)} = -\kappa^2 R^2 P_{n,k-1}^{(j)}.$$

L'hypothèse de récurrence induit que  $\Pi_{k-1}^{(j)}$  ne dépend que des  $2(k-1) + 1$  premières harmoniques sphériques et ne comportent pas de termes de la forme  $R^\gamma$  pour  $\gamma > k-1$  et  $\gamma < -(k-1+1)$ . On rappelle de plus que l'opérateur  $\mathbf{L}_n$  vérifie la propriété suivante :

$$\mathbf{L}_n R^\gamma = (\gamma - n)(\gamma + n + 1) R^\gamma.$$

Ainsi, comme  $\Pi_{k+1}^{(j)}$  vérifie la condition aux limites d'impédance, il peut s'exprimer comme une somme de deux termes. Le premier relève de l'équation de Laplace avec  $\Pi_{k-1}^{(j)}$  comme second membre tandis que le second vérifie l'équation de Laplace homogène avec condition aux limites d'impédances. Plus précisément, on a la formule suivante :

$$\begin{aligned} \Pi_{k+1}^{(j)}(R, \Theta) &= \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{|m| \leq n} \left\{ \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} c_{l,n,k+1}^{m,(j)} R^{-(n+1)+2l} + d_{l,n,k+1}^{m,(j)} R^{n+2l} \right\} Y_n^m(\Theta) \\ &\quad + \sum_{n \geq k} \sum_{|m| \leq n} \left\{ R^n + \frac{n - \gamma_j}{n + 1 + \gamma_j} \frac{1}{R^{n+1}} \right\} d_{n,l}^{k+1,(j)} Y_n^m(\Theta), \end{aligned}$$

où il n'y a pas de termes de la forme  $R^\gamma$  pour  $\gamma > (k-1)+2 = k+1$  et  $\gamma < -(k-1+1)-2 = -k-2$  pour  $n = 0, \dots, k-1$  et où toutes les constantes ci-dessus sont déterminées. Le lemme 4.13 montre que  $\mathbf{U}_{k+1,k+1}^{(j)}$  ne dépend que des  $2(k+1) + 1$  premières harmoniques sphériques. Ainsi les conditions de raccord  $\Pi_{k+1}^{(j)}(R, \Theta) - \mathbf{U}_{k+1,k+1}^{(j)}(R, \Theta) = o_{R \rightarrow +\infty}(1)$

entraînent que  $d_{n,l}^{k+1,(j)} = 0$  pour tout  $n \geq k + 2$  et achève la démonstration. ■

Le théorème 4.7 assure l'existence du développement asymptotique de la solution de (4.1) à tout ordre. Ce résultat est surtout utile dans la suite pour établir que les estimations d'erreur entre le champ et son développement asymptotique sont optimales.

**Remarque 4.18.** *Dans la preuve du lemme 4.17 nous avons utilisé que la partie imaginaire des impédances est négative. Cela ne nous permet donc pas a priori de traiter le cas d'obstacles « mous » ou « durs ».*

*Pour les conditions aux limites de Dirichlet, il n'y a aucun changement à faire dans la démonstration car les termes de bord disparaissent. Toutefois, lorsqu'on impose des conditions aux limites de Neumann, on peut s'attendre à n'avoir l'existence et l'unicité qu'à une constante près. Cependant, comme l'espace de Beppo-Levi ne contient pas les constantes (contrairement à la dimension 2), l'opérateur  $\nabla$  agissant sur BL est injectif et il n'y a ainsi aucun changement à apporter à la preuve.*

#### 4.2.4 Estimations d'erreurs : justification du développement formel

Les sections précédentes ont permis de démontrer que le développement asymptotique existait de manière unique à tout ordre. Dans cette section, nous allons démontrer des estimations d'erreur afin de valider les développements externe (4.10) et interne (4.11). Pour cela, on suit l'approche de [50, 5]. Elle consiste à introduire une approximation globalement valide, avec l'aide de fonctions de troncature, pour la solution du problème de diffraction.

##### 4.2.4.1 L'approximation globalement valide

Aucun des développements internes ou externes ne peut réaliser une approximation de  $u_\delta$  dans tout  $\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathcal{B}_j^\delta$ . Nous pouvons cependant construire une approximation globalement valide par une combinaison convexe adéquate de ces deux développements. Considérons pour cela une fonction de troncature  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$  définie à partir de la fonction  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact donnée ci-dessous (voir aussi figure 4.4) vérifiant :

$$\chi(r) = \begin{cases} 1, & r \leq 1 \\ 0, & r \geq 2, \end{cases}$$

et  $\chi'(r) \leq 0$  pour tout  $r$ . Une approximation globalement valide, notée  $\tilde{u}_{m,\delta}$ , de  $u_\delta$  solution de (4.1) peut ainsi être définie comme suit :

$$\tilde{u}_{m,\delta}(x) = \left( 1 - \sum_{j=1}^N \chi_\delta^{(j)}(x) \right) \left\{ \sum_{k=0}^m \delta^k u_k(x) \right\} + \sum_{j=1}^N \chi_\delta^{(j)}(x) \left\{ \sum_{k=0}^m \delta^k \Pi_k^{(j)} \left( \frac{|x - c_j|}{\delta}, \Theta \right) \right\},$$

où  $\chi_\delta^{(j)}(x) = \chi(|x - c_j|/\sqrt{\delta})$ . Remarquons que  $\tilde{u}_{m,\delta}$  est égale au champ externe loin des petits obstacles tandis qu'elle coïncide avec le champ interne dans un voisinage « asymp-

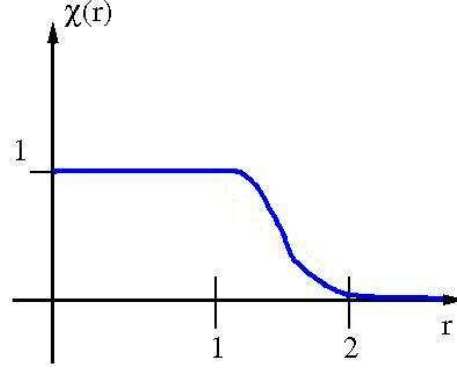


FIG. 4.4: Fonction de troncature utilisée pour l'approximation globalement valide

totique » de chacun des petits objets. Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{m,\delta}(x) &= \sum_{k=0}^m \delta^k u_k(x), \quad \min_{j=1,\dots,N} |x - c_j| \geq 2\sqrt{\delta}, \\ \tilde{u}_{m,\delta}(x) &= \sum_{k=0}^m \delta^k \Pi_k^{(j)} \left( \frac{|x - c_j|}{\delta}, \Theta \right), \quad \delta < |x - c_j| \leq \sqrt{\delta}, \quad j = 1, \dots, N.\end{aligned}$$

C'est uniquement dans les zones de raccord

$$\mathcal{M}_\delta^{(j)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{\delta} < |x - c_j| \leq 2\sqrt{\delta} \right\},$$

que les deux développements précédents contribuent simultanément à l'approximation de  $u_\delta$ .

#### 4.2.4.2 Estimations d'erreurs

Une manière naturelle d'obtenir une estimation d'erreur entre  $u_\delta$  et  $\tilde{u}_{m,\delta}$  est d'utiliser le résultat de stabilité 4.3 puis d'estimer le résidu relatif à  $\tilde{u}_{m,\delta} - u_\delta$ . Soit  $\mathbf{e}_{\delta,m} = u_\delta - \tilde{u}_{m,\delta}$  l'erreur. En la reportant dans (4.4), il vient :

$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2)\mathbf{e}_{\delta,m} = (\Delta + \kappa^2)\tilde{u}_{m,\delta}, & \text{dans } \Xi_\delta, \\ \partial_{\mathbf{n}_j} \mathbf{e}_{\delta,m} = \alpha_j^\delta \mathbf{e}_{\delta,m}, & \text{sur } \mathcal{S}_j^\delta, \\ \partial_\nu \mathbf{e}_{\delta,m} + T \mathbf{e}_{\delta,m} = 0, & \text{sur } \partial\Xi \end{cases}. \quad (4.25)$$

Le résultat de stabilité entraîne alors l'existence d'une constante  $C > 0$  indépendante de  $\delta$  telle que :

$$\| \mathbf{e}_{\delta,m} \|_{H^1(\Xi_\delta)} \leq C \| (\Delta + \kappa^2)\tilde{u}_{m,\delta} \|_{L^2(\Xi_\delta)} \quad \text{avec } \Xi_\delta = \Xi \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathcal{B}_j^\delta.$$

On réduit ainsi l'estimation d'erreur à celle du résidu  $\|(\Delta + \kappa^2)\tilde{u}_{m,\delta}\|_{L^2(\Xi_\delta)}$ . Avant d'exprimer explicitement ce terme, on rappelle la formule suivante valable pour  $f, g$  assez régulières :

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
(\Delta + \kappa^2)\tilde{u}_{m,\delta} &= \left(1 - \sum_{j=1}^N \chi_\delta^{(j)}(x)\right) \left\{ \sum_{k=0}^m \delta^k (\Delta + \kappa^2) u_k(x) \right\} \\
&+ \left( \sum_{j=1}^N \chi_\delta^{(j)}(x) \right) \left\{ \sum_{k=0}^m \delta^k (\Delta + \kappa^2) \Pi_k^{(j)} \left( \frac{|x - c_j|}{\delta}, \Theta \right) \right\} \\
&+ \sum_{j=1}^N \Delta \chi_\delta^{(j)}(x) \left\{ \sum_{k=0}^m \left( \Pi_k^{(j)} \left( \frac{|x - c_j|}{\delta}, \Theta \right) - u_k(x) \right) \right\} \\
&+ 2 \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{k=0}^m \left\langle \nabla \chi_\delta^{(j)}(x), \nabla \left( \Pi_k^{(j)} \left( \frac{|x - c_j|}{\delta}, \Theta \right) - u_k(x) \right) \right\rangle \right\}.
\end{aligned}$$

Les champs externes vérifient l'équation de Helmholtz sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \cup_{j=1}^N \{c_j\}$  et les champs internes sont solutions d'équations de Laplace emboîtées. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
(\Delta + \kappa^2)\tilde{u}_{m,\delta} &= \kappa^2 \sum_{j=1}^N \chi_\delta^{(j)}(x) \sum_{k=0}^m \delta^k \left( \Pi_k^{(j)} \left( \frac{|x - c_j|}{\delta}, \Theta \right) - \frac{1}{\delta^2} \Pi_{k-2}^{(j)} \left( \frac{|x - c_j|}{\delta}, \Theta \right) \right) \\
&+ \sum_{j=1}^N \Delta \chi_\delta^{(j)}(x) \left\{ \sum_{k=0}^m \delta^k \left( \Pi_k^{(j)} \left( \frac{|x - c_j|}{\delta}, \Theta \right) - u_k(x) \right) \right\} \\
&+ 2 \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{k=0}^m \delta^k \left\langle \nabla \chi_\delta^{(j)}(x), \nabla \left( \Pi_k^{(j)} \left( \frac{|x - c_j|}{\delta}, \Theta \right) - u_k(x) \right) \right\rangle \right\}
\end{aligned}$$

où  $\Pi_{-2}^{(j)} = \Pi_{-1}^{(j)} = 0$ . Le premier terme ci-dessus est appelé « erreur interne », le second et le troisième « erreur de raccord ». Pour obtenir une borne sur  $\|\mathbf{e}_{\delta,m}\|_{H^1(\Xi_\delta)}$ , nous allons estimer ces termes un par un.

### Borne sur l'erreur interne

On a le résultat suivant :

**Lemme 4.19.** *L'erreur interne vérifie :*

$$\sum_{j=1}^N \left\| \chi_\delta^{(j)} \left\{ \sum_{k=0}^m \delta^k \left( \Pi_k^{(j)} - \frac{1}{\delta^2} \Pi_{k-2}^{(j)} \right) \right\} \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} \leq C \delta^{\frac{1}{4} + \frac{m}{2}},$$

où  $C > 0$  est une constante indépendante de  $\delta$ .

**Démonstration.** En réorganisant la somme intervenant dans l'erreur interne, il vient :

$$\sum_{k=0}^m \delta^k \left( \Pi_k^{(j)} - \frac{1}{\delta^2} \Pi_{k-2}^{(j)} \right) = \sum_{k=0}^m \delta^k \Pi_k^{(j)} - \sum_{k=0}^{m-2} \delta^k \Pi_k^{(j)} = \delta^m \Pi_m^{(j)} + \delta^{m-1} \Pi_{m-1}^{(j)}.$$

Une inégalité triangulaire entraîne alors :

$$\left\| \chi_\delta^{(j)} \left\{ \sum_{k=0}^m \delta^k \left( \Pi_k^{(j)} - \frac{1}{\delta^2} \Pi_{k-2}^{(j)} \right) \right\} \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} \leq C \sum_{l=m-1}^m \delta^l \left\| \Pi_l^{(j)} \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})},$$

où  $C = C(\chi) = \|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}$ . En utilisant que les harmoniques sphériques sont bornées sur la sphère unité et qu'il n'y pas de terme de la forme  $R^\gamma$  pour  $\gamma > k$  et  $\gamma < -(k+1)$  dans les champs internes d'ordre  $m-1$  et  $m$  par le lemme 4.17, il vient :

$$\delta^k \left\| \Pi_k^{(j)} \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} \leq C \delta^k \sum_{\nu=-(k+1)}^k \|R^\nu\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})}, \text{ pour } k = m-1, m. \quad (4.26)$$

Un passage en coordonnées sphériques et une intégration explicite montrent, pour tout  $\gamma \in \mathbb{N}$ , que :

$$\|R^\gamma\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} = \left\{ \int_1^{\frac{2}{\sqrt{\delta}}} \int_{S^2} |R^\gamma|^2 \delta^3 R^2 d\Theta dR \right\}^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\pi} \delta^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{1}{2\gamma+3} \left( 2^{3+2\gamma} \delta^{-\frac{3}{2}-\gamma} - 1 \right) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

On obtient ainsi l'estimation suivante :

$$\|R^\nu\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} \leq C \begin{cases} \delta^{\frac{3}{2}}, & \text{if } \frac{3}{2} + \nu < 0, \\ \delta^{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}-\frac{\nu}{2}}, & \text{if } \frac{3}{2} + \nu \geq 0 \end{cases}$$

En remarquant que pour  $\nu = -(k+1), \dots, -2$  nous avons  $\nu + \frac{3}{2} < 0$  et en scindant la somme intervenant dans (4.26) il suit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=m-1}^m \delta^k \left\| \Pi_k^{(j)} \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} &\leq C \sum_{k=m-1}^m \delta^k \left( \sum_{\nu=-(k+1)}^{-2} + \sum_{\nu=-1}^k \right) \|R^\nu\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} \\ &\leq C \sum_{k=m-1}^m \left\{ \delta^{k+\frac{3}{2}} + \delta^k \sum_{\nu=-1}^k \delta^{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}-\frac{\nu}{2}} \right\} \\ &\leq C \sum_{k=m-1}^m \left\{ \delta^{k+\frac{3}{2}} + \delta^{k+\frac{5}{4}} + \delta^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}} \right\} \leq C \delta^{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Le regroupement des estimations précédentes termine alors la démonstration. ■

## Borne sur l'erreur de raccord

**Lemme 4.20.** *L'erreur de raccord vérifie :*

$$\sum_{j=1}^N \left\| \Delta \chi_\delta^{(j)} \left\{ \sum_{k=0}^m \delta^k \left( \Pi_k^{(j)} - u_k \right) \right\} \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} \leq NC \delta^{\frac{1}{4}+\frac{m}{2}}$$

où  $C$  est une constante strictement positive indépendante de  $\delta$ .

**Démonstration.** Soit  $j$  un entier de  $\{1, \dots, N\}$  fixé. Comme  $\chi_\delta^{(j)}(x)$  dépend seulement de  $r_j = |x - c_j|$ , il vient :

$$\begin{aligned} \Delta \chi_\delta^{(j)}(x) &= \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}^2 \chi \left( \frac{|x - c_j|}{\sqrt{\delta}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} \frac{x_i - c_j}{|x - c_j|} \partial_{r_j} \chi \left( \frac{|x - c_j|}{\sqrt{\delta}} \right) \\ &= \frac{1}{\delta} \partial_{r_j}^2 \chi \left( \frac{|x - c_j|}{\sqrt{\delta}} \right) + \frac{2}{r_j \sqrt{\delta}} \partial_{r_j} \chi \left( \frac{|x - c_j|}{\sqrt{\delta}} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, comme  $\frac{\sqrt{\delta}}{r_j} \leq 1$  pour tout  $x \in \mathcal{M}_\delta^{(j)}$ , on a :

$$\left\| \Delta \chi_\delta^{(j)} \left\{ \sum_{k=0}^m \delta^k \left( \Pi_k^{(j)} - u_k \right) \right\} \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} \leq \frac{C(\chi)}{\delta} \left\| \sum_{k=0}^m \delta^k \left( \Pi_k^{(j)} - u_k \right) \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})},$$

où  $C(\chi)$  dépend uniquement de la norme  $L^\infty$  de  $\chi$  et de ses dérivées jusqu'à l'ordre 2. Nous allons maintenant utiliser les règles de raccord (4.13) afin d'estimer les termes ci-dessus. Tout d'abord, à l'aide d'une inégalité triangulaire, on déduit :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^m \delta^k \left( \Pi_k^{(j)} - u_k \right) \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} &\leq \left\| \sum_{k=0}^m \delta^k \left( \Pi_k^{(j)} - \mathbf{U}_{m,k}^{(j)} \right) \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} \\ &\quad + \left\| \sum_{k=0}^m \delta^k \left( u_k - \mathbf{U}_{m,k}^{(j)} \right) \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})}, \end{aligned}$$

où les fonctions de raccord sont exprimées en variables rapides  $X = (x - c_j)/\delta$ . Un changement de variables en coordonnées sphériques entraîne :

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{k=0}^m \delta^k \left( \Pi_k^{(j)} - \mathbf{U}_{m,k}^{(j)} \right) \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})}^2 \\ &= \int_{\mathcal{M}_\delta^{(j)}} \left| \sum_{k=0}^m \delta^k \left( \Pi_k^{(j)} \left( \frac{|x - c_j|}{\delta}, \Theta \right) - \mathbf{U}_{m,k}^{(j)} \left( \frac{|x - c_j|}{\delta}, \Theta \right) \right) \right|^2 dx \\ &= \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{2}{\sqrt{\delta}}} \int_{\mathcal{S}^2} \left| \sum_{k=0}^m \delta^k \left( \Pi_k^{(j)}(R, \Theta) - \mathbf{U}_{m,k}^{(j)}(R, \Theta) \right) \right|^2 \delta^3 R^2 d\Theta dR. \end{aligned}$$

En utilisant maintenant les règles de raccord et le lemme 4.12, il vient  $\mathbf{U}_{m,k}^{(j)} - \Pi_k^{(j)} = O_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R^{m-k}} \right) = O_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R^{m-k+1}} \right)$ , d'où on déduit :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^m \delta^k \left( \Pi_k^{(j)} - \mathbf{U}_{m,k}^{(j)} \right) \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} &\leq C \sum_{k=0}^m \delta^{k+\frac{3}{2}} \left\{ \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{2}{\sqrt{\delta}}} \left| \frac{1}{R^{m-k+1}} \right|^2 R^2 dR \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \sum_{k=0}^3 \delta^{k+\frac{3}{2}} \left( \delta^{2m-2k-1} \right)^{\frac{1}{4}} \leq C \delta^{\frac{3}{2}+\frac{5}{4}} \sum_{k=0}^m \sqrt{\delta^k} \\ &\leq C \left\{ \frac{1 - \sqrt{\delta}^{m+1}}{1 - \sqrt{\delta}} \right\} \delta^{\frac{m}{2}+\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

Les fonctions de raccord sont données par la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^m \delta^l u_k(c_j + \delta R\Theta) - \sum_{k=0}^m \delta^l \mathbf{U}_{m,l}^{(j)}(R, \Theta) = \underset{\delta \rightarrow 0}{o}(\delta^n) = \underset{\delta \rightarrow 0}{O}(\delta^{m+1}).$$

Ainsi, un changement de variables en coordonnées sphériques sous l'intégrale entraîne :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^m \delta^k (u_k - \mathbf{U}_{m,k}^{(j)}) \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} &\leq C \delta^{\frac{3}{2}+m+1} \left\{ \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{2}{\sqrt{\delta}}} R^2 dR \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \delta^{m+1+\frac{3}{2}} \delta^{-\frac{3}{4}} = C \delta^{m+1+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Finalement, en regroupant toutes les estimations précédentes, il vient :

$$\left\| \Delta \chi_\delta^{(j)} \sum_{k=0}^m \delta^k (\Pi_k^{(j)} - u_k) \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} \leq C \left\{ \delta^{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}} \frac{1 - \sqrt{\delta}^{m+1}}{1 - \sqrt{\delta}} + \delta^{m+\frac{1}{2}} \right\} \leq C \delta^{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}},$$

où  $C > 0$  dépend de  $\chi$  et de  $N$  mais est indépendante de  $\delta$ . ■

Pour l'estimation du troisième terme, nous avons le lemme suivant :

**Lemme 4.21.** *Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\delta$  telle que :*

$$\sum_{j=1}^N \left\| \sum_{k=0}^m \delta^k \langle \nabla \chi_\delta^{(j)}, \nabla (\Pi_k^{(j)} - u_k) \rangle \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} \leq CN \delta^{\frac{1}{4}+\frac{m}{2}}.$$

**Démonstration.** Soit  $j \in \{1, \dots, N\}$  un entier fixé. Tout d'abord, en remarquant que  $\chi_\delta^{(j)}(x)$  ne dépend que de  $r_j = |x - c_j|$  il vient :

$$\nabla \chi_\delta^{(j)}(x) = \nabla \chi \left( \frac{|x - c_j|}{\sqrt{\delta}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \partial_{r_j} \chi \left( \frac{|x - c_j|}{\sqrt{\delta}} \right) e_{r_j},$$

où  $e_{r_j} = (x - c_j)/|x - c_j|$ . Par conséquent, comme  $\partial_{r_j} = \frac{1}{\delta} \partial_R$ , il vient :

$$\begin{aligned} &\left\langle \nabla \chi_\delta^{(j)}(x), \nabla \left( \Pi_k^{(j)} \left( \frac{|x - c_j|}{\delta}, \Theta \right) - u_k(x) \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\delta \sqrt{\delta}} \partial_{r_j} \chi \left( \frac{|x - c_j|}{\sqrt{\delta}} \right) \partial_R \left( \Pi_k^{(j)} \left( \frac{|x - c_j|}{\delta}, \Theta \right) - u_k(x) \right), \end{aligned}$$

qui donne l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^m \delta^k \langle \nabla \chi_\delta^{(j)}, \nabla (\Pi_k^{(j)} - u_k) \rangle \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} &\leq \frac{C(\chi)}{\delta^{\frac{3}{2}}} \left\| \sum_{k=0}^m \delta^k \partial_R (\Pi_k^{(j)} - u_k) \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} \\ &\leq \frac{C(\chi)}{\delta^{\frac{3}{2}}} \left\| \sum_{k=0}^m \delta^k \partial_R (\Pi_k^{(j)} - \mathbf{U}_{m,k}^{(j)}) \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} \\ &\quad + \frac{C(\chi)}{\delta^{\frac{3}{2}}} \left\| \sum_{k=0}^m \delta^k \partial_R (u_k - \mathbf{U}_{m,k}^{(j)}) \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})}, \end{aligned}$$

où  $C(\chi)$  est une constante strictement positive, indépendante de  $\delta$ , mais dépendante de la norme  $L^\infty$  de  $\chi$  et de ses dérivées premières.

Nous devons maintenant borner les dérivées des fonctions de raccord. En utilisant que  $\partial_R = \delta \partial_{|x|}$  et en reprenant la preuve du lemme 4.11, on obtient :

$$\partial_R \left\{ \sum_{k=0}^m \delta^k u_k(c_j + \delta R \Theta) - \sum_{k=0}^m \delta^k \mathbf{U}_{m,k}^{(j)}(R, \Theta) \right\} = O_{\delta \rightarrow 0}(\delta^{m+1}).$$

Un passage en coordonnées sphériques et l'estimation précédente entraînent alors :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^m \delta^k \partial_R \left( \Pi_k^{(j)} - \mathbf{U}_{m,k}^{(j)} \right) \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} &\leq C \sum_{k=0}^m \delta^{k+\frac{3}{2}} \left\{ \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{2}{\sqrt{\delta}}} \left| \frac{1}{R^{m-k+2}} \right|^2 R^2 dR \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \sum_{k=0}^m \delta^{k+\frac{3}{2}} \left( \delta^{2m-2k+1} \right)^{\frac{1}{4}} \leq C \delta^{\frac{m}{2} + \frac{7}{4}}. \end{aligned}$$

Pour borner les dérivées des règles de raccord, on utilise le lemme 4.12 qui montre que la fonction  $\mathbf{U}_{m,k}^{(j)} - \Pi_k^{(j)}$  vérifie une équation de Laplace avec une condition à l'infini donnée les règles de raccord (4.13). On peut ainsi dériver les règles de raccord :

$$\partial_R \left( \mathbf{U}_{m,k}^{(j)} - \Pi_k^{(j)} \right) = O_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R^{m-k+2}} \right).$$

On obtient alors :

$$\left\| \sum_{k=0}^m \delta^k \partial_R \left( u_k - \mathbf{U}_{m,k}^{(j)} \right) \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} \leq C \delta^{\frac{3}{2} + m + 1} \left\{ \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{2}{\sqrt{\delta}}} R^2 dR \right\}^{\frac{1}{2}} \leq C \delta^{m + \frac{7}{4}}.$$

En regroupant toutes les estimations précédentes, il vient :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^m \delta^k \left\langle \nabla \chi_\delta^{(j)}, \nabla \left( \Pi_k^{(j)} - u_k \right) \right\rangle \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} &\leq C \frac{C(\chi)}{\delta^{\frac{3}{2}}} \left( \left\{ \frac{1 - \sqrt{\delta}^{m+1}}{1 - \sqrt{\delta}} \right\} \delta^{\frac{3}{2} + \frac{7}{4}} + \delta^{m + \frac{7}{4}} \right) \\ &\leq C \delta^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

où  $C > 0$  ne dépend pas de  $\delta$ . ■

Le regroupement des bornes des termes d'erreur interne et externe (voir les 3 lemmes ci-dessus) entraîne le résultat suivant :

**Théorème 4.22.** *Soit  $\tilde{u}_{m,\delta}$  l'approximation globalement valide de  $u_\delta$  solution du problème de diffraction (4.1). Alors, pour  $\delta \rightarrow 0$ , on a l'estimation d'erreur suivante :*

$$\|u_\delta - \tilde{u}_{m,\delta}\|_{H^1(\Xi_\delta)} \leq C \delta^{\frac{1}{4} + \frac{m}{2}},$$

où  $C > 0$  est une constante indépendante de  $\delta$  mais dépendant de  $N$ , le nombre total de petits obstacles.



L'estimation d'erreur précédente peut être raffinée, afin d'obtenir des estimations optimales, en considérant seulement l'erreur entre les champs externes et  $u_\delta$ .

**Théorème 4.23.** *Soit  $\mathcal{F}_\rho = \Xi_\delta \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathcal{B}_j^\rho = \Xi \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathcal{B}_j^\rho$  où  $\mathcal{B}_j^\rho$  est la boule de centre  $c_j$  et de rayon  $\rho > 0$  où  $\rho$  est suffisamment petit de telle sorte que  $\mathcal{B}_j^\rho$  ne contienne aucun  $c_l$  mis à part  $c_j$ . Alors on a l'estimation optimale suivante :*

$$\|u_\delta - u_{m,\delta}\|_{H^1(\mathcal{F}_\rho)} \leq C_\rho \delta^{m+1},$$

où  $C_\rho > 0$  ne dépend pas de  $\delta$  et  $u_{m,\delta}(x) = \sum_{k=0}^m \delta^k u_k(x)$  où les  $u_k$  sont les coefficients du champ externe.

**Démonstration.** Tout d'abord, pour tout  $x \in \mathcal{F}_\rho$ , on a  $u_{m,\delta} = \tilde{u}_{m,\delta}$  où  $\tilde{u}_{m,\delta}$  est l'approximation globalement valide de  $u_\delta$  solution de (4.1). Considérons  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $p \geq m$  et vérifiant  $\frac{p}{2} + \frac{1}{4} \geq (m+1)$ . Le théorème 4.22 entraîne alors :

$$\|u_\delta - \tilde{u}_{p,\delta}\|_{H^1(\Xi_\delta)} \leq C \delta^{\frac{1}{4} + \frac{p}{2}} \leq C \delta^{m+1}.$$

Une inégalité triangulaire montre alors :

$$\|u_\delta - u_{m,\delta}\|_{H^1(\mathcal{F}_\rho)} \leq \|u_\delta - \tilde{u}_{p,\delta}\|_{H^1(\Xi_\delta)} + \sum_{l=m+1}^p \delta^l \|u_l\|_{H^1(\mathcal{F}_\rho)}.$$

Par le théorème 4.5 les  $u_l$  appartiennent à  $H^1(\mathcal{F}_\rho)$  et ainsi l'estimation précédente achève la démonstration. ■

Les résultats d'erreurs ci-dessus permettent de valider les développements (4.10), pour le champ externe, et (4.11) pour le champ interne. Cela justifie ainsi l'approche formelle de la méthode des développements asymptotiques raccordés.

Le théorème 4.23 montre que les coefficients du champ externe fournissent une bonne approximation de la solution du problème (4.1). En utilisant les calculs explicites des coefficients du champ externe qui seront réalisés au chapitre 5 (voir section 5.1), on obtient que :

$$u_{1,\delta}(x) = u_{\text{inc}}(x) + \delta \sum_{j=1}^N h_0^{(1)}(\kappa|x - c_j|) Y_{0,1}^{(j)},$$

où  $Y_{0,1}^{(j)} = -i\kappa\gamma_j u_{\text{inc}}(c_j)/(1 + \gamma_j)$ . Ainsi, on peut voir qu'une approximation du premier ordre du champ diffracté par  $N$  petits objets est donnée par le champ obtenu en négligeant les interactions des boules entre elles. Cette approximation peut de plus être interprétée comme une approximation de Born (voir [24] pour la définition) d'un problème de diffraction dont le terme source est donné par le champ incident.

En fait, l'estimation d'erreur 4.23 montre que l'on dispose d'une approximation plus fine du champ en considérant les coefficients d'ordres supérieurs du champ externe. En effet, en utilisant l'expression de  $u_2$  (voir (5.7)), on obtient l'approximation d'ordre 2 suivante :

$$u_{2,\delta}(x) = u_{1,\delta}(x) + \delta^2 \sum_{j=1}^N h_0^{(1)}(\kappa|x - c_j|) \frac{\kappa}{i} \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} \left( Y_{0,1}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(l)} \right).$$

On peut alors voir apparaître des termes de la forme  $h_0^{(1)}(\kappa|x - c_j|) \sum_{l \neq j}$  qui peuvent être interprétés comme une approximation (de Born) du champ diffracté par la boule  $\mathcal{B}_j^\delta$  dont le terme source est donné par l'ensemble des rayonnements des autres boules. On obtient ainsi des termes correspondant aux interactions mutuelles des petits obstacles.

**Remarque 4.24.** *Il peut sembler étonnant de retrouver une approximation de type Born dans le développement en champs externes à l'ordre 1 de  $u_\delta$ . En effet, ces approximations ne sont valables que pour des objets assez éloignés les uns des autres et donc sous une hypothèse de type  $\kappa\delta \rightarrow 0$  (voir [24] p.185). Toutefois, dans l'estimation d'erreur 4.22, le terme résiduel est donné par  $\delta^2 u_2$  dont on peut voir, a posteriori, que c'est un  $O(\kappa^2 \delta^2)$ . De la même manière on peut remarquer que  $\delta u_1 = O(\kappa\delta)$  et  $\delta^3 u_3 = O(\kappa^3 \delta^3)$  (voir (5.8)). Ces comportements semblent suggérer que la constante  $C_\rho$  intervenant dans le théorème 4.22 serait un  $O(\kappa^{m+1})$  et donc que le résidu tendrait vers zéro lorsque  $(\kappa\delta)$  est petit. On pourrait ainsi envisager de faire l'étude asymptotique avec  $\kappa\delta$  comme petit paramètre. Cela permettrait de dire que les objets sont petits par rapport à la longueur d'onde. Toutefois, puisque le nombre d'onde est fixé, on pourrait faire le changement de variable  $x \rightarrow \kappa x$ . On obtiendrait alors un problème de la forme (4.1) mais avec  $\kappa = 1$  et des boules de rayon  $\kappa\delta$ . En faisant alors les mêmes hypothèses sur la dépendance en  $\kappa\delta$  des impédances, on aurait des développements et des estimations d'erreur en puissances de  $\kappa\delta$  avec des constantes pouvant être indépendantes de  $\kappa$ .*

## 4.3 Cas d'obstacles caractérisés par un indice de réfraction

La section précédente étudiait l'asymptotique d'un problème de diffraction par  $N$  petits obstacles caractérisés par une condition d'impédance dépendant de la taille caractéristique, notée  $\delta$ , des petits objets. Nous allons maintenant étudier le cas de petits objets caractérisés par des indices de réfraction, eux aussi dépendant de  $\delta$ . La présentation est ici plus rapide dans la mesure des résultats établis dans la section précédente s'appliquent directement au cas considéré ici. Les changements à effectuer sont simplement donnés à chaque fois qu'ils sont nécessaires.

### 4.3.1 Diffraction par $N$ boules caractérisées par des indices de réfraction

Supposons que les matériaux inclus dans les petits obstacles  $\mathcal{B}_j^\delta \subset \Omega$ , pour  $j = 1, \dots, N$ , sont caractérisés par des indices de réfraction  $n_j^\delta$ . Le problème de diffraction par tous ces objets est alors donné par :

$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2 n^\delta(x)^2) u_\delta(x) = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - i\kappa) (u_\delta - u_{\text{inc}}) = 0, \end{cases} \quad (4.27)$$

où  $n^\delta(x) = 1$  pour  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathcal{B}_j^\delta$  et  $n^\delta(x) = n_j^\delta$  lorsque  $x \in \mathcal{B}_j^\delta$ .

Nous allons étudier le comportement de la solution de (4.27), lorsque  $\delta$  tend vers 0, en utilisant une fois de plus la méthode des développements asymptotiques raccordés. Avant

cela, il nous faut établir l'existence, l'unicité ainsi que la stabilité (uniforme en  $\delta$ ) de la solution du problème de diffraction ci-dessus.

#### 4.3.1.1 Existence et unicité

L'unicité de la solution du problème de diffraction (4.27) se démontre à l'aide du lemme de Rellich en supposant que :

$$\mathcal{I}m(n_j^\delta)^2 \geq 0.$$

Pour l'existence, nous introduisons une frontière fictive, afin de ramener l'équation (4.27) sur un domaine borné, avec l'aide d'un opérateur Dirichlet-to-Neumann (DtN) (4.2). On obtient ainsi le problème équivalent suivant :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } u_\delta \in H^1(\Xi) \text{ tel que} \\ & \begin{cases} (\Delta + \kappa^2 n^\delta(x)^2)u_\delta(x) = 0, & \text{dans } \Xi, \\ \partial_r u_\delta + T u_\delta = \partial_r u_{\text{inc}} + T u_{\text{inc}}, & \text{sur } \partial\Xi \end{cases} \end{aligned} \quad (4.28)$$

On a alors le résultat :

**Théorème 4.25.** *Supposons que  $\mathcal{I}m(n_j^\delta)^2 \geq 0$ . Alors le problème (4.28), équivalent à (4.27), possède une unique solution.*

**Démonstration.** En multipliant l'équation (4.28) par des fonctions test  $v \in H^1(X)$  on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } u_\delta \in H^1(\Xi) \text{ tel que } \forall v \in H^1(\Xi) : \\ & a_\delta(u_\delta, v) = l_\delta(v) \end{aligned} \quad (4.29)$$

où

$$a_\delta(u_\delta, v) = \int_{\Xi} \langle \nabla u_\delta, \overline{\nabla v} \rangle - \kappa^2 n^\delta(x)^2 u_\delta \bar{v} \, dx + \int_{\partial\Xi} T u_\delta \bar{v} d\sigma,$$

est une forme sesquilinéaire sur  $H^1(\Xi) \times H^1(\Xi)$ . L'application  $l_\delta \in (H^1(\Xi))'$  est définie par

$$l_\delta(\varphi) = \int_{\partial\Xi} (\partial_r u_{\text{inc}} + T u_{\text{inc}}) \varphi d\sigma.$$

Le lemme 4.1 montre que l'opérateur DtN vérifie  $T = T_0 + K : H^{1/2}(\partial\Xi) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Xi)$  où  $K$  est un opérateur compact et  $T_0$  est coercif. La compacité de l'injection  $H^1(\Xi) \subset L^2(\Xi)$  entraîne que le terme  $-\int_{\Xi} (1 + \kappa^2 n^\delta(x)^2) u \bar{v} \, dx$  est une perturbation compacte. Ainsi, la résolution de (4.29) relève de l'alternative de Fredholm. On lève alors cette alternative en utilisant l'unicité, assurée par le lemme de Rellich, de la solution de (4.27). ■

#### 4.3.1.2 Stabilité uniforme

Nous donnons maintenant un résultat de stabilité uniforme en  $\delta$  pour la solution de (4.27). La démonstration d'un tel résultat suppose une forme particulière pour les indices de réfraction considérés.

**Théorème 4.26.** *Supposons que les indices de réfraction vérifient  $\text{Im}(n_j^\delta)^2 > 0$  et :*

$$n_j^\delta = \gamma_j f(\delta), \quad \gamma_j \in \mathbb{C},$$

où  $f$  est une fonction vérifiant  $f(\delta) > 0$  lorsque  $\delta > 0$ . Alors l'équation (4.27) admet une unique solution pour tout  $l_\delta \in (H^1(\Xi_\delta))'$  et il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\delta$  et de  $l_\delta$  telle que :

$$\|u_\delta\|_{H^1(\Xi)} \leq C \|l_\delta\|_{(H^1(\Xi))'}.$$

**Démonstration.** On reprend le schéma de la preuve du théorème 4.3. Supposons donc qu'il existe des suites  $\delta_n > 0$  et  $(u_{\delta_n})_n \subset H^1(\Xi)$  vérifiant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$ ,  $\|u_{\delta_n}\|_{H^1(\Xi)} = 1$  et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|v\|_{H^1(\Xi)}=1} |a_{\delta_n}(u_{\delta_n}, v)| = 0. \quad (4.30)$$

La suite  $u_{\delta_n}$  étant bornée dans  $H^1(\Xi)$ , elle admet une sous-suite fortement convergente dans  $L^2(\Xi)$ . Considérons maintenant  $\mathcal{Z}_0$ , l'ensemble des fonctions  $H^1$  nulles au voisinage des  $\{c_j\}$ . Le fait que  $\mathcal{Z}_0 \subset H^1(\Xi)$  entraîne que la propriété (4.30) reste vraie pour des fonctions de  $\mathcal{Z}_0$ . Pour  $n$  assez grand, on a de plus :

$$\sum_{j=1}^N \int_{\mathcal{B}_j^{\delta_n}} (n_j^\delta)^2 u_{\delta_n} \psi dx = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{Z}_0.$$

Ainsi, en notant  $u_0$  la limite de  $u_{\delta_n}$ , il vient :

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{\delta_n}(\tilde{u}_n, v) = \int_{\Xi} \langle \nabla u_0, \overline{\nabla v} \rangle - \kappa^2 u_0 \bar{v} dx + \int_{\partial \Xi} T u_0 \bar{v} d\sigma.$$

La densité de  $\mathcal{Z}_0$  dans  $H^1(\Xi)$  montre alors que l'égalité précédente a lieu pour tout  $v \in H^1(\Xi)$  impliquant que  $u_0$  vérifie l'équation de Helmholtz et la condition de radiation de Sommerfeld. Ainsi  $u_0 = 0$  dans  $\Xi$  et il ne reste plus qu'à montrer que  $u_{\delta_n}$  converge fortement vers 0 dans  $H^1(\Xi)$  pour finir la preuve. Avant cela, en prenant la partie imaginaire de  $a_{\delta_n}(u_{\delta_n}, u_{\delta_n})$ , il vient :

$$\text{Im} a_{\delta_n}(u_{\delta_n}, u_{\delta_n}) = -\kappa^2 \sum_{j=1}^N \int_{\mathcal{B}_j^{\delta_n}} \text{Im}(n_j^\delta)^2 |u_{\delta_n}|^2 dx + \text{Im} \int_{\partial \Xi} T u_{\delta_n} \overline{u_{\delta_n}} d\sigma.$$

Le lemme 4.1 assure que l'opérateur DtN se décompose sous la forme  $T = T_0 + (T - T_0)$  où  $T_0$  est coercif et  $(T - T_0)$  est compact. Ainsi, en utilisant (4.30), un passage à la limite, et la forme spécifique des indices  $(n_j^\delta)^2 = \gamma_j^2 f(\delta)^2$ , on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\delta_n) \int_{\mathcal{B}_j^{\delta_n}} |u_{\delta_n}|^2 dx = 0, \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Enfin, la coercivité de  $T_0$  entraîne :

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{\delta_n}\|_{H^1(\Xi)}^2 &\leq C \mathcal{R}e \left\{ \|\nabla \tilde{u}_n\|_{H^1(\Xi)}^2 + \int_{\partial \Xi} T_0 [u_{\delta_n}] \overline{u_{\delta_n}} d\sigma \right\} \\ &\leq C \left\{ \mathcal{R}e(a_{\delta_n}(u_{\delta_n}, u_{\delta_n})) + \kappa^2 \sum_{j=1}^N \int_{\mathcal{B}_j^{\delta_n}} \gamma_j^2 f(\delta_n)^2 |u_{\delta_n}|^2 dx \right\} \\ &\quad + C \kappa^2 \int_{X \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathcal{B}_j^{\delta_n}} |u_{\delta_n}|^2 dx + \mathcal{R}e \left\{ \int_{\partial \Xi} (T_0 - T) [u_{\delta_n}] \overline{u_{\delta_n}} d\sigma \right\}, \end{aligned}$$

où  $C > 0$  est une constante indépendante de  $\delta$ . De plus, comme  $u_{\delta_n}$  converge vers 0 fortement dans  $L^2(\Xi)$ , le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraîne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \kappa^2 \int_{X \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathcal{B}_j^{\delta_n}} |u_{\delta_n}|^2 dx = 0.$$

Enfin, la compacité de  $T - T_0$  et (4.30) impliquent que  $\|\nabla u_{\delta_n}\|_{H^1(\Xi)}^2$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini et terminent la démonstration. ■

Dans la suite et afin de faire les calculs du développement explicitement, nous supposons que les indices de réfraction sont de la forme suivante :

$$n_j^\delta = \frac{\gamma_j}{\delta}, \quad \text{Im } \gamma_j^2 > 0. \quad (4.31)$$

**Remarque 4.27.** *Les indices de réfraction de la forme (4.31) sont du même ordre de grandeur que les impédances considérées précédemment (4.9). Ce choix permet en fait d'appliquer les résultats précédents à l'étude de l'asymptotique du problème (4.27) en présence de milieux caractérisés par des indices de réfraction donnés par (4.31).*

### 4.3.2 Forme générale des champs externes et internes

Les champs lointains sont définis à partir du développement (4.10) et les champs proches par (4.11). La détermination des champs externes se fait exactement de la même manière que pour le cas de petits obstacles caractérisés par des conditions d'impédance. Ils sont ainsi donnés par le théorème 4.5. Les champs internes sont cependant différents. En effet, en reportant (4.11) dans (4.28), on obtient :

$$\sum_{k=0}^m \frac{1}{\delta^2} \Delta \Pi_k^{(j)}(R, \Theta) + \kappa^2 n_\delta(x) \Pi_k^{(j)}(R, \Theta) = 0, \quad \mathbb{R}^3.$$

En utilisant la forme spécifique des indices de réfraction (4.31) et en identifiant les termes de même puissance de  $\delta$ , il suit que les champs proches  $\Pi_k^{(j)}$  vérifient le problème de transmission suivant :

$$\begin{cases} \Delta \Pi_k^{(j),+} = -\kappa^2 \Pi_{k-2}^{(j),+}, & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1, \\ \Delta \Pi_k^{(j),-} + \kappa^2 \gamma_j^2 \Pi_k^{(j),-} = 0, & \text{dans } \mathcal{B}_1, \\ \partial_R \Pi_k^{(j),+} = \partial_R \Pi_k^{(j),-}, & \text{pour } R = 1 \\ \Pi_k^{(j),+} = \Pi_k^{(j),-}, & \text{pour } R = 1 \end{cases} \quad (4.32)$$

La partie extérieure des champs proches vérifie des équations de Laplace emboîtées et leurs expressions générales peuvent ainsi être obtenues par le lemme 4.6. La partie interne est quant à elle déterminée par séparation de variables. Les propriétés des fonctions de Bessel sphériques [1] entraînent alors que  $\Pi_k^{(j),-}$  est donné par un certain nombre de constantes en facteur d'harmoniques sphériques :

$$\Pi_k^{(j),-}(R, \Theta) = \sum_{n \geq 0} \sum_{|m| \leq n} \gamma_{n,k}^{(j),m} j_n(\kappa \gamma_j R) Y_n^m(\Theta), \quad (4.33)$$

où les  $\gamma_{n,k}^{(j),m}$  sont à déterminer par les conditions de transmission. Les conditions de raccord sont maintenant données par :

$$\mathbf{U}_{m,k}^{(j)} - \Pi_k^{(j),+} = o_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R^{m-k}} \right), \quad \forall j = 1, \dots, N, \quad (4.34)$$

où les  $\mathbf{U}_{m,k}^{(j)}$  sont les fonctions de raccord (4.12).

### 4.3.3 Existence, unicité du développement asymptotique à tout ordre et estimations d'erreur

Nous donnons ici les résultats concernant l'existence et l'unicité du développement asymptotique construit par développements asymptotiques raccordés ainsi que des estimations d'erreur.

#### Existence et unicité du développement

Nous avons le résultat suivant :

**Théorème 4.28.** *Les couples champs externes et champs internes, notés  $(u_k, \Pi_k^{(j)})$ , sont déterminés de manière unique pour tout  $k \in \mathbb{N}$  par les équations (4.17) et (4.32) dès lors qu'ils vérifient les conditions de raccord (4.34), (4.12).*

De manière identique au cas de petits objets caractérisés par une condition aux limites d'impédance, la démonstration s'effectue par récurrence en supposant que l'hypothèse suivante est vérifiée :

**Hypothèses 4.29.** *Les champs externes et champs internes vérifiant respectivement les équations (4.17) et (4.32) ainsi que les règles de raccord (4.34), (4.12) existent et sont uniques jusqu'à l'ordre  $k$ .*

*Les champs internes  $\Pi_l^{(j),+}(R, \Theta)$ , pour  $l = 0, \dots, k$ , ne dépendent que des  $2l + 1$  premières harmoniques sphériques et ils ne possèdent pas de termes en  $R^\gamma$  pour  $\gamma > l$  et  $\gamma < -(l + 1)$ .*

Vérifions tout d'abord que l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour l'ordre 0. Le champ externe d'ordre 0 est donné par  $u_0 = u_{\text{inc}}$  et la première fonction de raccord par  $\mathbf{U}_{0,0}^{(j)}(R, \Theta) = u_{\text{inc}}(c_j)$ . Le champ proche vérifie  $\Delta \Pi_0^{(j),+} = 0$  et donc le lemme 4.6 entraîne :

$$\Pi_0^{(j),+}(R, \Theta) = \sum_{n \geq 0} \sum_{|m| \leq n} \left( \alpha_{n,0}^{(j),m} R^n + \frac{\beta_{n,0}^{(j),m}}{R^{n+1}} \right) Y_n^m(\Theta).$$

Les règles de raccord (4.34) impose alors  $\alpha_{0,0}^{(j),0} = u_{\text{inc}}(c_j)$  et  $\Pi_0^{(j),+}$  ne dépend que de l'harmonique sphérique d'ordre 0 soit  $\Pi_0^{(j),+}(R, \Theta) = \left( u_{\text{inc}}(c_j) + \frac{\beta_{0,0}^{(j),m}}{R} \right)$ . Les constantes

restantes (4.33) sont maintenant déterminées par les conditions de transmission :

$$\begin{cases} \gamma_{n,k}^{m,(j)} = 0, \quad \forall n > 0, \\ u_{\text{inc}}(c_j) + \beta_{0,0}^{(j),0} = j_0(\kappa\gamma_j)\gamma_{0,0}^{(j),0}, \\ -\beta_{0,0}^{(j),0} = \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)\gamma_{0,0}^{(j),0}. \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire fournit l'expression du champ interne d'ordre 0 :

$$\begin{aligned} \Pi_0^{(j),+}(R, \Theta) &= \left(1 - \frac{1}{R} \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}\right) u_{\text{inc}}(c_j), \\ \Pi_0^{(j),-}(R, \Theta) &= u_{\text{inc}}(c_j) \frac{j_0(\kappa\gamma_j R)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

La démonstration du théorème 4.28 suit alors exactement les mêmes lignes directrices que celles du théorème 4.7. En effet, les champs externes ont les mêmes propriétés car issus du théorème 4.5 et le raccord est obtenu par identification avec la partie extérieure des champs internes qui vérifient des équations de Laplace emboîtées. Ainsi, l'existence du champ externe d'ordre  $k+1$  peut être établie à partir des lemmes 4.11 4.13 4.12 et 4.14. L'unique différence se situe au niveau de l'existence et l'unicité des champs internes d'ordre  $k+1$  pour lesquels la condition d'impédance est remplacée par des conditions de transmission. Dans ce cas, en notant  $\Phi = \Pi_{k+1}^{(j),+} - \mathbf{U}_{k+1,k+1}^{(j)}$ , on réduit l'existence et l'unicité de  $\Pi_{k+1}^{(j),+}$  à la résolution du problème suivant :

$$\begin{aligned} &\text{trouver } (\Phi, \Pi_{k+1}^{(j),-}) \in BL \times H^1(\mathcal{B}_1) \text{ tel que :} \\ &\begin{cases} \Delta\Phi = -\kappa^2 (\Pi_{k-1}^{(j),+} - \mathbf{U}_{k+1,k-1}^{(j)}), \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1, \\ \Phi = o_{R \rightarrow +\infty}(1), \\ \Delta\Pi_{k+1}^{(j),-} + \kappa^2 \gamma_j^2 \Pi_{k+1}^{(j),-} = 0, \text{ dans } \mathcal{B}_1, \\ \partial_R \Phi + \partial_R \mathbf{U}_{k+1,k+1}^{(j)} = \partial_R \Pi_{k+1}^{(j),-}, \text{ pour } R = 1, \\ \Pi_{k+1}^{(j),+} + \mathbf{U}_{k+1,k+1}^{(j)} = \Pi_{k+1}^{(j),-}, \text{ pour } R = 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.36)$$

où le second membre est obtenu en utilisant le lemme 4.11 et BL désigne l'espace de Beppo-Levi. Remarquons que l'unicité du problème découle de l'hypothèse  $\text{Im } \gamma_j^2 > 0$ . L'alternative de Fredholm assure alors que le problème (4.36) est bien posé.

## Estimations d'erreur

Les estimations d'erreur entre la solution de (4.27) et son développement asymptotique, dont l'existence et l'unicité sont assurées par le théorème 4.28, sont établies de la même manière que pour les petits obstacles caractérisés par des conditions d'impédance. Il y a toutefois quelques changements à effectuer. Rappelons qu'une approximation globalement valide de  $u_{m,\delta}$  est définie comme suit :

$$\tilde{u}_{m,\delta}(x) = \left(1 - \sum_{j=1}^N \chi_\delta^{(j)}(x)\right) \left\{ \sum_{k=0}^m \delta^k u_k(x) \right\} + \sum_{j=1}^N \chi_\delta^{(j)}(x) \left\{ \sum_{k=0}^m \delta^k \Pi_k^{(j)} \left( \frac{|x - c_j|}{\delta}, \Theta \right) \right\},$$

où  $\chi_\delta^{(j)}(x) = \chi\left(\frac{|x - c_j|}{\sqrt{\delta}}\right)$  où  $\chi$  est la fonction de troncature décrite dans la figure 4.4. On a de plus :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{m,\delta}(x) &= \sum_{k=0}^m \delta^k u_k(x), \quad \max_{j=1,\dots,N} |x - c_j| \geq 2\sqrt{\delta}, \\ \tilde{u}_{m,\delta}(x) &= \sum_{k=0}^m \delta^k \Pi_k^{(j),+} \left( \frac{|x - c_j|}{\delta}, \Theta \right), \quad \delta \leq |x - c_j| \leq \sqrt{\delta}, \quad j = 1, \dots, N, \\ \tilde{u}_{m,\delta}(x) &= \sum_{k=0}^m \delta^k \Pi_k^{(j),-} \left( \frac{|x - c_j|}{\delta}, \Theta \right), \quad |x - c_j| \leq \delta, \quad j = 1, \dots, N,\end{aligned}$$

Ainsi, l'unique différence se situe dans l'estimation de l'erreur interne qui doit être établie sur  $\mathcal{M}_\delta^{(j)} = \left\{ x \in \Xi \mid |x - c_j| \leq 2\sqrt{\delta} \right\}$  et non plus sur  $\left\{ x \in \Xi_\delta \mid \delta < |x - c_j| \leq 2\sqrt{\delta} \right\}$ . L'ensemble  $\mathcal{M}_\delta^{(j)}$  peut se décomposer comme  $\mathcal{M}_\delta^{(j)} = \mathcal{B}_\delta \cup \mathcal{B}_{2\sqrt{\delta}} \setminus \mathcal{B}_\delta$  et  $\Pi_l^{(j)}$  vaut  $\Pi_l^{(j),+}$  sur  $\mathcal{B}_{2\sqrt{\delta}} \setminus \mathcal{B}_\delta$  et  $\Pi_l^{(j),-}$  sur  $\mathcal{B}_\delta$ . La partie intérieure des champs proches est donnée par une somme finie de fonctions de Bessel sphériques (voir (4.33)) et donc est bornée sur  $\mathcal{B}_\delta$ . La partie externe vérifie des équations de Laplace emboîtées, ne dépend que des  $2l + 1$  premières harmoniques sphériques et ne possède pas de termes en  $R^\gamma$  pour  $\gamma > k + 1$  et  $\gamma < -k$  dans sa décomposition (voir le lemme 4.17 pour le cas des impédances). Ainsi, les  $\Pi_l^{(j),+}$  ont les mêmes propriétés que les champs proches du cas d'obstacles caractérisés par des conditions d'impédance et son estimation peut se faire par le lemme 4.19. Pour résumer l'erreur interne vérifie :

$$\sum_{j=1}^N \left\| \chi_\delta^{(j)} \left\{ \sum_{k=0}^m \delta^k \left( \Pi_k^{(j)} - \frac{1}{\delta^2} \Pi_{k-2}^{(j)} \right) \right\} \right\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta^{(j)})} \leq C \delta^{\frac{1}{4} + \frac{m}{2}}.$$

En remarquant maintenant que les propriétés des champs externes et des composantes extérieures des champs internes sont les mêmes que dans le cas d'objets caractérisés par une condition d'impédances, on peut démontrer l'estimation d'erreur suivante.

**Théorème 4.30.** *Soit  $\tilde{u}_{m,\delta}$  l'approximation globalement valide de  $u_\delta$ , solution de (4.27). Alors, pour  $\delta \rightarrow 0$ , on a l'estimation suivante :*

$$\|u_\delta - \tilde{u}_{m,\delta}\|_{H^1(\Xi)} \leq C \delta^{\frac{1}{4} + \frac{m}{2}},$$

où  $C > 0$  est une constante, indépendante de  $\delta$ , mais pouvant dépendre de  $N$ , le nombre total de petits obstacles.

Comme pour le cas des impédances, l'estimation d'erreur précédente peut être raffinée.

**Théorème 4.31.** *Soit  $\mathcal{F}_\rho = \Xi \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathcal{B}_j(\rho)$  où  $\rho > 0$  est suffisamment petit pour que  $\mathcal{B}_j(\rho)$  ne contienne aucun  $c_l$  mis à part  $c_j$ . Alors, on a l'estimation d'erreur optimale :*

$$\|u_\delta - u_{m,\delta}\|_{H^1(\mathcal{F}_\rho)} \leq C_\rho \delta^{m+1},$$

où  $C_\rho > 0$  ne dépend pas de  $\delta$  et  $u_{m,\delta}(x) = \sum_{k=0}^m \delta^k u_k(x)$  où les  $u_k$  sont les coefficients du champ externe.



La démonstration est identique à celle du théorème 4.23 et ce résultat permet de valider les développements supposés pour les champs externes (4.10) et pour les champs internes (4.11).

---

---

## Homogénéisation non-périodique formelle de métamatériaux acoustiques faiblement denses

---

Au chapitre 4, nous avons établi rigoureusement l'existence et l'unicité d'une approximation, construite par développements asymptotiques raccordés, du champ diffracté par un nombre fini ( $N$ ) de petits obstacles caractérisés soit par une condition aux limites d'impédance soit par un indice de réfraction. Nous allons maintenant calculer explicitement les trois premiers termes du développement puis les utiliser pour obtenir les caractéristiques d'un matériau effectif correspondant aux petits objets. Pour cela on suppose, tout comme A.G. Ramm, qu'ils sont répartis suivant une loi impliquant que leur nombre croît indéfiniment lorsque leur taille tend vers 0.

Considérons maintenant un ensemble de petites boules  $\mathcal{B}_j^\delta$ , centrées en  $c_j$  et toutes de même rayon  $\delta$ . On suppose que leur répartition asymptotique est décrite par une fonction  $R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ , où  $\Omega$  est un ouvert connexe borné de  $\mathbb{R}^3$  contenant toutes ces petites boules. On impose ainsi, pour tout sous-domaine  $\Upsilon \subset \Omega$ , que le nombre de petits objets inclus dans  $\Upsilon$  vérifie :

$$\mathcal{N}(\Upsilon) = \text{Card} \left\{ k \in \{1, \dots, N\} / \mathcal{B}_k^\delta \subset \Upsilon \right\} = \left( \frac{1}{\delta} \int_{\Upsilon} R(y) dy \right) (1 + o_{\delta \rightarrow 0}(1)). \quad (5.1)$$

Remarquons que le nombre de  $\mathcal{B}_j^\delta$  contenus dans chaque ouvert connexe  $\Upsilon$  pour lequel  $\int_{\Upsilon} R(y) dy > 0$  croît vers l'infini comme  $O(1/\delta)$ . Ainsi, lorsque  $\delta$  tend vers 0,  $N = \mathcal{N}(\Omega)$  croît vers l'infini et  $\Omega$  devient rempli d'une infinité de petits obstacles et son comportement, vis-à-vis de la diffraction de l'onde acoustique, peut alors être caractérisé par un milieu équivalent. Notons de plus que l'hypothèse (5.1) permet de considérer des répartitions non-périodiques de petits objets justifiant ainsi que l'on se réfère à cette méthode comme une méthode d'homogénéisation non-périodique. Le cas périodique peut toutefois être traité comme un cas particulier. Supposons en effet que l'ensemble des petits objets soit disposé

---

périodiquement dans  $\Omega$  avec une période  $\eta$ . Les obstacles étant des boules de rayon  $\delta$ , on obtient que le nombre total de petits objets est :

$$N_{\text{per}} = \mathcal{N}(\Omega) = O\left(\frac{\text{meas}(\Omega)}{(2\delta + \eta)^3}\right),$$

où  $\text{meas}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dx$  est le volume de  $\Omega$ . L'hypothèse (5.1) entraîne alors que  $\eta = \delta^{\frac{1}{3}}$  et  $R = 1$ . Une autre conséquence de (5.1) est que les petits constituants doivent être éloignés les uns des autres. En effet, si l'on note  $d$  la plus petite distance entre deux obstacles, on obtient que  $d = O(\delta^{\frac{1}{3}})$  qui, pour  $\delta$  assez petit, est très grand devant  $\delta$ . Cela justifie la présence du terme « milieux faiblement denses » dans le titre de ce chapitre. Cela peut aussi être compris en regardant le taux de remplissage des petits objets dans  $\Omega$  dont la formule est ci-dessous :

$$\text{Taux de remplissage} = \frac{\text{Volume rempli par les boules}}{\text{Volume total}} = O(N\delta^3) = O(\delta^2).$$

Le taux de remplissage tend ainsi vers 0 avec  $\delta$ . Finalement notons que ce taux de remplissage vaut 1 dans le cas d'homogénéisations périodiques par convergence double échelle comme celle présentée dans la section 1.4.1. Dans ces cas là, l'espacement entre les petits constituants est généralement de l'ordre de leur taille.

On va, dans ce chapitre, dériver les paramètres du milieu effectif obtenu par homogénéisation du domaine contenant les petits obstacles. On commence pour cela par calculer explicitement les trois premiers termes des développements asymptotiques raccordés correspondant aux problèmes de diffraction par tous les petits obstacles caractérisés soit par une condition aux limites d'impédance soit par un indice de réfraction. La dérivation est basée sur l'approximation de Born que nous rappelons dans la suite. La dernière section est dédiée à la dérivation des paramètres effectifs.

Notons que l'obtention du milieu homogénéisé va utiliser une approximation, obtenue par développements asymptotiques raccordés, du champ diffracté par un nombre fini  $N$  de petits obstacles. Ainsi, la validité de cette approximation lorsque l'hypothèse (5.1) est vérifiée n'est pas claire. On peut par exemple remarquer que la constante intervenant dans les estimations d'erreur (voir théorème 4.23) peut dépendre de  $N$ . Ainsi, les passages à la limite ci-dessous ne sont pas tous rigoureusement justifiés. C'est en ce sens que cette méthode d'homogénéisation est, en l'état, seulement « formelle ». En fait, comme nous le verrons à la fin de ce chapitre, l'indice effectif que nous dérivons, pour le cas de petits obstacles caractérisés par une condition aux limite d'impédance, est le même que celui obtenu par A.G. Ramm [84] (voir aussi 1.4.2). Bien qu'obtenu de façon formelle, plusieurs arguments dont celui-ci plaident en faveur de la fiabilité de cette approche pour obtenir un milieu homogénéisé effectif.

## 5.1 Détermination explicite du développement asymptotique jusqu'à l'ordre 3

Nous calculons maintenant explicitement les trois premiers termes des développements asymptotiques raccordés des solutions de (4.1) pour des impédances de la forme (4.9) ainsi

que pour celles du problème de diffraction (4.27) pour des indices de réfraction donnés par (4.31). Pour ce faire, on utilise le théorème 4.5 et le lemme 4.6.

### 5.1.1 Cas de petits obstacles caractérisés par une condition aux limites d'impédance

Les termes d'ordre zéro ont déjà été calculés pour initialiser la récurrence ayant permis d'établir l'existence et l'unicité des développements asymptotiques à tout ordre. Le champ externe d'ordre 0 est donné par  $u_0 = u_{\text{inc}}$  et les champs externes par (4.22).

#### Détermination des termes d'ordre 1

L'estimation  $h_n^{(1)}(z) \sim C_n/z^{n+1}$  valable lorsque  $z \rightarrow 0$  qui provient de (4.15) et le théorème 4.5 entraînent que la détermination de  $u_1$  se ramène à celle de  $N$  constantes :

$$u_1(x) = \sum_{j=1}^N h_0(\kappa|x - c_j|)Y_{0,1}^{(j)}.$$

Dans le cas contraire, il y aurait des termes en  $\delta^{-1}$  se qui empêcherait de faire le raccord. Nous devons maintenant calculer les fonctions de raccord  $\mathbf{U}_{1,l}^{(j)}$ . Pour cela, on a le lemme suivant.

**Lemme 5.1.** *Les fonctions de raccords d'ordre 1 sont données par :*

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{1,0}^{(j)}(R, \Theta) &= u_{\text{inc}}(c_j) - \frac{i}{\kappa R} Y_{0,1}^{(j)}, \\ \mathbf{U}_{1,1}^{(j)}(R, \Theta) &= R \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle + Y_{0,1}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(l)}. \end{aligned}$$

**Démonstration.** On développe  $u_{1,\delta}(c_j + \delta R\Theta) = (u_{\text{inc}} + \delta u_1)(c_j + \delta R\Theta)$  par rapport à  $\delta$ . L'expression explicite des fonctions de Hankel (4.15) montre que  $h_0^{(1)}(z) = \frac{1}{iz} + 1 + o_{z \rightarrow 0}(z)$ . Il vient donc :

$$\begin{aligned} u_{1,\delta}(c_j + \delta R\Theta) &= \left( u_{\text{inc}}(c_j) - \frac{i}{\kappa R} Y_{0,1}^{(j)} \right) \\ &\quad + \delta \left( R \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle + Y_{0,1}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(l)} \right) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta), \end{aligned}$$

où  $r_{lj} = |c_j - c_l|$  est la distance séparant  $c_j$  de  $c_l$ . Ceci donne directement les fonctions de raccord. ■

Les conditions de raccord (4.13) imposent  $\Pi_0^{(j)} - \mathbf{U}_{1,0}^{(j)} = o_{R \rightarrow +\infty}(R^{-1})$ . Comme  $\Pi_0^{(j)} = \left(1 - \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} \frac{1}{R}\right) u_{\text{inc}}(c_j)$  (voir (4.22)), il vient :

$$Y_{0,1}^{(j)} = -i\kappa \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} u_{\text{inc}}(c_j). \quad (5.2)$$

Le champ externe d'ordre 1 est ainsi totalement déterminé :

$$u_1(x) = \sum_{j=1}^N h_0^{(1)}(\kappa|x - c_j|) \left( -i\kappa \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} u_{\text{inc}}(c_j) \right). \quad (5.3)$$

Le lemme 4.6 ramène la détermination du champ interne d'ordre 1 :

$$\Pi_1^{(j)}(R, \Theta) = \sum_{n \geq 0} \sum_{|m| \leq n} \left( R^n + \frac{n - \gamma_j}{n + 1 + \gamma_j} \frac{1}{R^{n+1}} \right) d_{0,n,1}^{m,(j)} Y_n^m(\Theta),$$

à celle des constantes  $d_{0,n,1}^{m,(j)}$ . De la même manière en utilisant la fonction de raccord  $\mathbf{U}_{1,1}^{(j)}$ , le fait que  $\langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle$  admet un développement en harmoniques sphériques d'ordre 1 et la condition de raccord  $\Pi_1^{(j)} - \mathbf{U}_{1,1}^{(j)} = o_{R \rightarrow +\infty}(1)$  il vient que  $\Pi_1^{(j)}(R, \Theta)$  est donné par :

$$\begin{aligned} \Pi_1^{(j)}(R, \Theta) &= \left( 1 - \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} \frac{1}{R} \right) \left( Y_{0,1}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(l)} \right) \\ &\quad + \left( R + \frac{1 - \gamma_j}{2 + \gamma_j} \frac{1}{R^2} \right) \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Le développement asymptotique d'ordre 1 est ainsi calculé explicitement.

## Détermination des termes d'ordre 2

L'estimation  $h_n^{(1)}(z) \sim C_n/z^{n+1}$  lorsque  $z \rightarrow 0$  entraîne une fois de plus que  $u_2$  est de la forme suivante :

$$u_2(x) = \sum_{j=1}^N \sum_{n=0,1} h_n^{(1)}(\kappa|x - c_j|) Y_{n,2}^{(j)} \left( \frac{x - c_j}{|x - c_j|} \right).$$

On va maintenant calculer les fonctions de raccord (4.12). Pour cela, nous développons  $u_{2,\delta}(c_j + \delta R\Theta) = (u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2)(c_j + \delta R\Theta)$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . Afin de rendre le processus de raccord plus simple, il est nécessaire de développer  $u_{2,\delta}(c_j + \delta R\Theta)$  dans la base des harmoniques sphériques. Pour ce faire, on utilise d'une part les formules de translation, à la base de la méthode multipôle rapide [48], pour les solutions de l'équation de Helmholtz et d'autre part la formule de Gegenbauer [48]. On obtient ainsi :

**Lemme 5.2.** *Les fonctions de raccords sont données par :*

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,0}^{(j)}(R, \Theta) &= u_{\text{inc}}(c_j) - \frac{i}{\kappa R} Y_{0,1}^{(j)} - \frac{i}{(\kappa R)^2} Y_{1,2}^{(j)}(\Theta), \\ \mathbf{U}_{2,1}^{(j)}(R, \Theta) &= i\kappa R P_1(\langle d, \Theta \rangle) u_{\text{inc}}(c_j) + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(l)} - \frac{i}{\kappa R} Y_{0,2}^{(j)} + Y_{0,1}^{(j)}, \\ \mathbf{U}_{2,2}^{(j)}(R, \Theta) &= -u_{\text{inc}}(c_j) \left( \frac{(\kappa R)^2}{6} + \frac{(\kappa R)^2}{3} P_2(\langle d, \Theta \rangle) \right) + \frac{i\kappa R}{2} Y_{0,1}^{(j)} + Y_{0,2}^{(j)} - \frac{i}{2} Y_{1,2}^{(j)}(\Theta) \\ &\quad + \sum_{l \neq j} \left( i\kappa R Y_{0,1}^{(l)} h_1^{(1)}(\kappa r_{lj}) P_1(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle) + \sum_{0 \leq n \leq 1} h_n^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{n,2}^{(l)}(\widehat{c_j - c_l}) \right). \end{aligned}$$

**Démonstration.** Dans un premier temps, en développant le coefficient d'ordre 1 du champ externe (5.3) et le champ incident  $u_0 = u_{\text{inc}}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} u_{2,\delta}(c_j + \delta R\Theta) &= u_{\text{inc}}(c_j + \delta R\Theta) + \delta Y_{0,1}^{(j)} h_0^{(1)}(\kappa\delta R) + \delta^2 \sum_{0 \leq n \leq 1} h_n^{(1)}(\kappa\delta R) Y_{n,2}^{(j)}(\Theta) \\ &\quad + \sum_{l \neq j} \delta Y_{0,1}^{(l)} h_0^{(1)}(\kappa|c_j - c_l + \delta R\Theta|) \\ &\quad + \sum_{l \neq j} \delta^2 \sum_{0 \leq n \leq 1} h_n^{(1)}(\kappa|c_j - c_l + \delta R\Theta|) Y_{n,2}^{(l)} \left( \frac{c_j - c_l + \delta R\Theta}{|c_j - c_l + \delta R\Theta|} \right). \end{aligned}$$

Afin de calculer les fonctions de raccord, nous développons chacun des termes ci-dessus dans la base des harmoniques sphériques. Le champ incident se développe alors, par les formules (4.21) et (4.14) jusqu'à l'ordre 2 comme suit :

$$\begin{aligned} u_{\text{inc}}(c_j + \delta R\Theta) &= u_{\text{inc}}(c_j) \left\{ \left( 1 - \frac{(\kappa\delta R)^2}{6} \right) + 3i \left( \frac{\kappa\delta R}{3} \right) P_1(\langle d, \Theta \rangle) \right\} \\ &\quad - 5u_{\text{inc}}(c_j) \frac{(\kappa\delta R)^2}{15} P_2(\langle d, \Theta \rangle) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^2). \end{aligned}$$

Les fonctions de Hankel  $h_0^{(1)}(\kappa|c_j - c_l + \delta R\Theta|)$  peuvent aussi être développées dans cette base. On utilise pour cela les formules de translation [48]. Pour celles concernant  $h_0^{(1)}$ , on a :

$$h_0^{(1)}(\kappa|c_j - c_l + \delta R\Theta|) = \sum_{n \geq 0} j_n(\kappa\delta R)(2n+1)h_n(\kappa r_{lj})P_n(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle), \quad (5.5)$$

où  $r_{lj} = |c_j - c_l|$  et  $\widehat{c_j - c_l} = \frac{c_j - c_l}{|c_j - c_l|}$  est la projection radiale de  $(c_j - c_l)$  sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . On obtient ainsi le développement suivant :

$$h_0^{(1)}(\kappa|c_j - c_l + \delta R\Theta|) = h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) \left( 1 - \frac{(\kappa\delta R)^2}{6} \right) + h_1^{(1)}(\kappa r_{lj}) P_1(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle) (i\kappa\delta R) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta).$$

En utilisant maintenant (4.15), il vient :

$$h_0^{(1)}(\kappa\delta R) = -\frac{i}{\kappa\delta R} + 1 + \frac{i\kappa\delta R}{2} + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta), \quad h_1^{(1)}(\kappa\delta R) = -\frac{i}{(\kappa\delta R)^2} - \frac{i}{2} - \frac{\kappa\delta R}{3} + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta).$$

La preuve s'achève alors en regroupant tous les calculs précédents. ■

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer le développement asymptotique d'ordre 2. En partant de la définition de  $\mathbf{U}_{2,0}^{(j)}$  et de l'expression explicite de  $\Pi_0^{(j)}$  (4.22), il vient :

$$\mathbf{U}_{2,0}^{(j)}(R, \Theta) = \Pi_0^{(j)}(R, \Theta) - \frac{i}{(\kappa R)^2} Y_{1,2}^{(j)}(\Theta).$$

Les conditions de raccord (4.13) entraînent alors que  $\mathbf{U}_{2,0}^{(j)}(R, \Theta) - \Pi_0^{(j)}(R, \Theta) = o_{R \rightarrow \infty}(R^{-2})$ , d'où on en déduit  $Y_{1,2}^{(j)}(\Theta) = 0$ . En calculant maintenant  $\mathbf{U}_{2,1}^{(j)}(R, \Theta) - \Pi_1^{(j)}(R, \Theta)$  et en négligeant les termes de l'ordre de  $o_{R \rightarrow \infty}(R^{-1})$ , on obtient :

$$\mathbf{U}_{1,2}^{(j)}(R, \Theta) - \Pi_1^{(j)}(R, \Theta) = -\frac{i}{\kappa R} Y_{0,2}^{(j)} + \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} \frac{1}{R} \left( Y_{0,1}^1 + \sum_{l \neq j} h_0^1(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(l)} \right).$$

Les règles de raccord (4.13) imposent que  $\mathbf{U}_{2,1}^{(j)}(R, \Theta) - \Pi_1^{(j)}(R, \Theta) = o_{R \rightarrow 0}(R^{-1})$  ce qui donne :

$$Y_{0,2}^{(j)} = \frac{\kappa}{i} \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} \left( Y_{0,1}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(l)} \right). \quad (5.6)$$

Le champ externe d'ordre 2 est alors totalement déterminé par :

$$u_2(x) = \sum_{j=1}^N h_0^{(1)}(\kappa |x - c_j|) Y_{0,2}^{(j)}. \quad (5.7)$$

La détermination du coefficient d'ordre 2 du champ interne est faite dans le lemme ci-dessous.

**Lemme 5.3.** *Le champ interne d'ordre 2 est donné par :*

$$\begin{aligned} \Pi_2^{(j)}(R, \Theta) &= - \left( R^2 + \frac{2 - \gamma_j}{3 + \gamma_j} \frac{1}{R^3} \right) \frac{\kappa^2}{3} u_{\text{inc}}(c_j) P_2(\langle d, \Theta \rangle) + R \left( \frac{\kappa^2 \gamma_j}{1 + \gamma_j} \frac{u_{\text{inc}}(c_j)}{2} \right) \\ &+ \left( R + \frac{1 - \gamma_j}{2 + \gamma_j} \frac{1}{R^2} \right) i \kappa \sum_{l \neq j} Y_{0,1}^{(l)} h_1^{(1)}(\kappa r_{lj}) P_1(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle) \\ &+ Y_{0,2}^{(j)} + \sum_{l \neq j} Y_{0,2}^{(l)} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) - \frac{\kappa^2 R^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{6} \\ &- \frac{1}{R} \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} \left( Y_{0,2}^{(j)} + \sum_{l \neq j} Y_{0,2}^{(l)} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) + \frac{\kappa^2 \gamma_j}{1 + \gamma_j} \frac{u_{\text{inc}}(c_j)}{2} - \frac{\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{6} \right) \\ &+ \frac{1}{R} \frac{1}{1 + \gamma_j} \left( \frac{\kappa^2 \gamma_j}{1 + \gamma_j} \frac{u_{\text{inc}}(c_j)}{2} - \frac{\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{3} \right). \end{aligned}$$

**Démonstration.** Le lemme 4.6 montre que le coefficient interne d'ordre 2 admet le développement en harmoniques sphériques suivant :

$$\Pi_2^{(j)}(R, \theta) = \sum_{n \geq 0} \sum_{|m| \leq n} \left( \sum_{l=0}^1 c_{n,l,2}^m R^{-(n+1)+2l} + d_{n,l,2}^m R^{n+2l} \right) Y_n^m(\Theta),$$

où la dépendance en  $j$  des constantes est omise pour alléger les notations. Nous allons déterminer les constantes inconnues en procédant par une identification selon les harmoniques sphériques. Premièrement, comme  $\Pi_2^{(j)}$  vérifie l'équation (4.18) et  $\Pi_0^{(j)}$  est donné par (4.22) on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 \left( \sum_{l=0}^1 c_{0,l,2}^0 R^{-1+2l} + d_{0,l,2}^0 R^{2l} \right) &= -\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j) R^2 + \kappa^2 \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} u_{\text{inc}}(c_j) R, \\ \mathbf{L}_n \left( \sum_{l=0}^1 c_{n,l}^m R^{-(n+1)+2l} + d_{n,l}^m R^{2l+n} \right) &= 0, \quad \forall n \geq 1, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{L}_n = (R\partial_R)^2 + R\partial_R - n(n+1)$  et la partie radiale de  $R^2\Delta$ . La relation  $\mathbf{L}_n R^\alpha = (\alpha - n)(\alpha + n + 1)R^\alpha$  entraîne alors :

$$\begin{aligned} \Pi_2^{(j)}(R, \theta) &= \sum_{n \geq 1} \sum_{|m| \leq n} \left( c_n^m R^{-(n+1)} + d_n^m R^n \right) Y_n^m(\Theta) \\ &\quad + \left( c_{0,0,2}^0 R^{-1} + d_{0,0,2}^0 \right) + R \left( \frac{\kappa^2 \gamma_j}{1 + \gamma_j} \frac{u_{\text{inc}}(c_j)}{2} \right) - \frac{\kappa^2 R^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{6}. \end{aligned}$$

Les conditions aux limites (4.19) entraînent, pour les harmoniques sphériques d'ordre 0, que :

$$-c_{0,0,2}^0 + \kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j) \left( \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \gamma_j \left\{ c_{0,0,2}^0 + d_{0,0,2}^0 + \kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j) \left( \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) \right\}$$

Finalement, comme il n'y a pas d'harmoniques sphériques d'ordre supérieur à zéro dans le  $\Pi_0^{(j)}$ , on obtient les conditions suivantes :

$$nc_{0,n,2}^m - (n+1)d_{0,n,2}^m = \gamma_j(c_{0,n,2}^m + d_{0,n,2}^m), \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } |m| \leq n.$$

Pour déterminer les dernières constantes inconnues on utilise la condition de raccord  $\mathbf{U}_{2,2}^{(j)}(R, \Theta) - \Pi_2^{(j)}(R, \Theta) = o_{R \rightarrow +\infty}(1)$ . En négligeant les termes de l'ordre de  $o_{R \rightarrow +\infty}(1)$ , il vient :

$$\begin{aligned} \Pi_2^{(j)}(R, \Theta) &= \sum_{n \geq 2} \sum_{|m| \leq n} R^n d_n^m Y_n^m(\Theta) + \frac{\kappa^2 \gamma_j}{1 + \gamma_j} \frac{R u_{\text{inc}}(c_j)}{2} - \frac{\kappa^2 R^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{6} \\ &\quad + R \sum_{|m| \leq 1} d_1^m Y_1^m(\Theta) + d_{0,0}^0 + o_{R \rightarrow +\infty}(1). \end{aligned}$$

En utilisant la définition (5.2) de la fonction de raccord  $\mathbf{U}_{2,2}^{(j)}(R, \Theta)$ , on peut voir, après quelques calculs, que :

$$\begin{aligned} d_{0,n,0}^m &= 0, \text{ pour } n \geq 3 \text{ et } \forall |m| \leq n, \quad d_{0,0,2}^0 = Y_{0,2}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,2}^{(l)} \\ \sum_{|m| \leq 1} d_{0,1,2}^m Y_1^m(\Theta) &= \sum_{l \neq j} i \kappa Y_{0,1}^{(l)} h_1^{(1)}(\kappa r_{lj}) P_1 \left( \langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle \right), \\ \sum_{|m| \leq 2} d_{0,2,2}^m Y_2^m(\Theta) &= -\frac{\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{3} P_2(\langle d, \Theta \rangle), \end{aligned}$$

où les  $Y_{0,l}^{(j)}$  sont définis par (5.2) pour  $l = 1$  et par (5.6) pour  $l = 2$ . La démonstration est alors achevée en regroupant tous les calculs précédents. ■

### Détermination des termes d'ordre 3

Nous poursuivons le calcul du développement asymptotique raccordé de la solution de (4.1). Une fois encore le théorème 4.5 et la formule (4.15) entraînent que le champ



externe d'ordre 3 admet la représentation suivante :

$$u_3(x) = \sum_{j=1}^N \sum_{n=0,1,2} h_n^{(1)}(\kappa|x - c_j|) Y_{n,3}^{(j)} \left( \frac{x - c_j}{|x - c_j|} \right),$$

où les combinaisons linéaires d'harmoniques sphériques  $Y_{n,3}^{(j)}$  ont des coefficients inconnus qui seront déterminés par le raccord (4.13). Ainsi nous commençons par le calcul des fonctions de raccords  $U_{3,k}^{(j)}$ .

**Lemme 5.4.** *Les fonctions de raccord d'ordre 3 sont données par :*

$$U_{3,0}^{(j)}(R, \Theta) = u_{\text{inc}}(c_j) - \frac{i}{\kappa R} Y_{0,1}^{(j)} - \frac{3i}{(\kappa R)^3} Y_{2,3}^{(j)}(\Theta),$$

$$\begin{aligned} U_{3,1}^{(j)}(R, \Theta) &= i\kappa R u_{\text{inc}}(c_j) P_1(\langle d, \Theta \rangle) + Y_{0,1}^{(j)} + \sum_{l \neq j} Y_{0,1}^l h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) \\ &\quad - \frac{i}{\kappa R} Y_{0,2}^{(j)} - \frac{i}{(\kappa R)^2} Y_{1,3}^{(j)}(\Theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{3,2}^{(j)}(R, \Theta) &= -u_{\text{inc}}(c_j) \frac{(\kappa R)^2}{3} \left( \frac{1}{2} + P_2(\langle d, \Theta \rangle) \right) + \frac{i\kappa R}{2} Y_{0,1}^{(j)} - \frac{i}{2\kappa R} Y_{2,3}^{(j)}(\Theta) + Y_{0,2}^{(j)} \\ &\quad + \sum_{l \neq j} i\kappa R h_1(\kappa r_{lj}) P_1(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle) Y_{0,1}^{(l)} + Y_{0,2}^{(l)} h_0(\kappa r_{lj}) - \frac{i}{\kappa R} Y_{0,3}^{(j)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{3,3}^{(j)}(R, \Theta) &= u_{\text{inc}}(c_j) \left( -\frac{i(\kappa R)^3}{15} P_3(\langle d, \Theta \rangle) - i\frac{(\kappa R)^3}{10} P_1(\langle d, \Theta \rangle) \right) - \frac{(\kappa R)^2}{6} Y_{0,1}^{(j)} \\ &\quad + Y_{0,3}^{(j)} - \frac{i}{2} Y_{1,3}(\Theta) + i\frac{\kappa R}{2} Y_{0,2}^{(j)} \\ &\quad + \sum_{l \neq j} Y_{0,1}^{(l)} \left( -\frac{(\kappa R)^2}{6} h_0^{(j)}(\kappa r_{lj}) - \frac{(\kappa R)^2}{3} h_2(\kappa r_{lj}) P_2(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle) \right) \\ &\quad + \sum_{l \neq j} \left( Y_{0,2}^{(l)} i\kappa R h_1^{(1)}(\kappa r_{lj}) P_1(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle) + \sum_{n=0}^2 h_n(\kappa r_{lj}) Y_{n,3}^{(j)}(\widehat{c_j - c_l}) \right). \end{aligned}$$

**Démonstration.** Nous devons développer  $u_{3,\delta}(c_j + \delta R\Theta) = \sum_{k=0}^3 u_k(c_j + \delta R\Theta)$  en puissances de  $\delta$  jusqu'à l'ordre 3. En utilisant les formules explicites des 3 premiers champs externes ((5.3) pour l'ordre 1 et (5.7) pour l'ordre 2), on obtient :

$$\begin{aligned} u_{3,\delta}(c_j + \delta R\Theta) &= u_{\text{inc}}(c_j + \delta R\Theta) + \delta Y_{0,1}^{(j)} h_0^{(1)}(\kappa\delta R) + \delta^2 h_0^{(1)}(\kappa\delta R) Y_{0,2}^{(j)} \\ &\quad + \delta^3 \sum_{0 \leq n \leq 2} h_n^{(1)}(\kappa\delta R) Y_{n,3}^{(j)}(\Theta) \\ &\quad + \sum_{l \neq j} \delta Y_{0,1}^{(l)} h_0^{(1)}(\kappa|c_j - c_l + \delta R\Theta|) + \delta^2 Y_{0,2}^{(l)} h_0^{(1)}(\kappa|c_j - c_l + \delta R\Theta|) \\ &\quad + \sum_{l \neq j} \delta^3 \sum_{0 \leq n \leq 2} h_n^{(1)}(\kappa|c_j - c_l + \delta R\Theta|) Y_{n,3}^{(l)} \left( \frac{c_j - c_l + \delta R\Theta}{|c_j - c_l + \delta R\Theta|} \right). \end{aligned}$$

La formule de Gegenbauer (4.21) donne :

$$\begin{aligned} u_{\text{inc}}(c_j + \delta R\Theta) &= u_{\text{inc}}(c_j) \left\{ \left( 1 - \frac{(\kappa\delta R)^2}{6} \right) + 3i \left( \frac{\kappa\delta R}{3} \right) P_1(\langle d, \Theta \rangle) \right\} \\ &\quad + u_{\text{inc}}(c_j) \left( -5 \frac{(\kappa\delta R)^2}{15} P_2(\langle d, \Theta \rangle) - i \frac{(\kappa\delta R)^3}{15} P_3(\langle d, \Theta \rangle) \right) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^3), \end{aligned}$$

Afin de développer  $h_0^{(1)}(\kappa|c_j - c_l + \delta R\Theta|)$  par rapport à  $\delta$  jusqu'à l'ordre 2, on utilise les formules de translation (5.5) :

$$\begin{aligned} h_0^{(1)}(\kappa|c_j - c_l + \delta R\Theta|) &= h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) \left( 1 - \frac{(\kappa\delta R)^2}{6} \right) + h_1^{(1)}(\kappa r_{lj}) P_1(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle) i\kappa\delta R \\ &\quad + h_2^{(j)}(\kappa r_{lj}) P_2(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle) \left( -\frac{(\kappa\delta R)^2}{3} \right) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^2), \end{aligned}$$

Les fonctions  $h_n^{(1)}(\kappa|c_j - c_l + \delta R\Theta|) Y_{n,3}^{(l)}((c_j - c_l + \delta R\Theta)/|c_j - c_l + \delta R\Theta|)$  étant régulières au voisinage de  $c_j$  pour  $n = 0, 1, 2$ , un développement de Taylor donne directement :

$$\delta^3 h_n^{(1)}(\kappa|c_j - c_l + \delta R\Theta|) Y_{n,3}^{(l)} \left( \frac{c_j - c_l + \delta R\Theta}{|c_j - c_l + \delta R\Theta|} \right) = \delta^3 h_n^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{n,3}^{(l)}(\widehat{c_j - c_l}) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^3).$$

Enfin, la formule (4.15) pour les fonctions de Hankel sphériques et un développement de Taylor montrent que :

$$\begin{aligned} h_0^{(1)}(\kappa\delta R) &= -\frac{i}{\kappa\delta R} + 1 + \frac{i\kappa\delta R}{2} - \frac{(\kappa\delta R)^2}{6} + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^2), \\ h_1^{(1)}(\kappa\delta R) &= -\frac{i}{(\kappa\delta R)^2} - \frac{i}{2} - \frac{\kappa\delta R}{3} + i \frac{(\kappa\delta R)^2}{8} + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^2), \\ h_2^{(1)}(\kappa\delta R) &= -\frac{3i}{(\kappa\delta R)^3} - \frac{i}{2\kappa\delta R} - i \frac{\kappa\delta R}{8} + \frac{(\kappa\delta R)^2}{15} + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^2). \end{aligned}$$

La démonstration se termine alors en regroupant tous les calculs précédents. ■

Nous déterminons maintenant le champ externe d'ordre 3. Premièrement, on a la formule  $\mathbf{U}_{3,0}^{(j)}(R, \Theta) = \Pi_0^{(j)}(R, \Theta) - 3i(\kappa R)^{-3} Y_{2,3}^{(j)}(\Theta)$ . Les conditions de raccord (4.13) données par  $\mathbf{U}_{3,0}^{(j)}(R, \Theta) - \Pi_0^{(j)}(R) = o_{R \rightarrow +\infty}(R^{-3})$  imposent alors  $Y_{2,3}^{(j)}(\Theta) = 0$ . Les règles de raccord d'ordre 1 sont  $\mathbf{U}_{3,1}^{(j)}(R, \Theta) - \Pi_1^{(j)}(R, \Theta) = o_{R \rightarrow +\infty}(R^{-2})$ . En utilisant alors la définition de  $Y_{0,2}^{(j)}$  (5.6) et l'expression du champ interne d'ordre 1 (5.4), il vient :

$$\Pi_1^{(j)}(R, \Theta) = \mathbf{U}_{3,1}^{(j)}(R, \Theta) + \frac{1}{R^2} \left( \frac{i}{\kappa^2} Y_{1,3}(\Theta) + \frac{1 - \gamma_j}{2 + \gamma_j} \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle \right).$$

L'égalité précédente entraîne alors :

$$Y_{1,3}(\Theta) = -\frac{\kappa^2}{i} \frac{1 - \gamma_j}{2 + \gamma_j} \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle.$$

Les règles de raccord d'ordre 2 sont  $\mathbf{U}_{2,3}^{(j)}(R, \Theta) - \Pi_2^{(j)}(R, \Theta) = o_{R \rightarrow +\infty}(R^{-1})$ . L'expression explicite de  $\Pi_2^{(j)}(R, \Theta)$  (voir lemme 5.3) entraîne :

$$\begin{aligned} \Pi_2^{(j)}(R, \Theta) &= \mathbf{U}_{2,3}^{(j)}(R, \Theta) + o_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{i}{\kappa R} Y_{0,3}^{(j)} + \frac{1}{R} \frac{\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{1 + \gamma_j} \left( \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &\quad - \frac{1}{R} \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} \left( Y_{0,2}^{(j)} + \sum_{l \neq j} Y_{0,2}^{(l)} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) + \frac{\kappa^2 \gamma_j}{1 + \gamma_j} \frac{u_{\text{inc}}(c_j)}{2} - \frac{\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{6} \right). \end{aligned}$$

L'harmonique sphérique d'ordre 0 du champ externe d'ordre 3 est ainsi donnée par :

$$\begin{aligned} Y_{0,3}^{(j)} &= -i\kappa \left( \frac{-1}{1 + \gamma_j} \left( \frac{\kappa^2 \gamma_j}{1 + \gamma_j} \frac{u_{\text{inc}}(c_j)}{2} - \frac{\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{3} \right) \right) \\ &\quad - i\kappa \left( \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} \left( Y_{0,2}^{(j)} + \sum_{l \neq j} Y_{0,2}^{(l)} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) + \frac{\kappa^2 \gamma_j}{1 + \gamma_j} \frac{u_{\text{inc}}(c_j)}{2} - \frac{\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{6} \right) \right). \end{aligned}$$

Le champ externe d'ordre 3 est enfin déterminé :

$$\begin{aligned} u_3(x) &= \sum_{j=1}^N -h_1^{(1)}(\kappa|x - c_j|) \frac{\kappa^2}{i} \frac{1 - \gamma_j}{2 + \gamma_j} \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle \\ &\quad + h_0^{(1)}(\kappa|x - c_j|) - i\kappa \left( \frac{-1}{1 + \gamma_j} \left( \frac{\kappa^2 \gamma_j}{1 + \gamma_j} \frac{u_{\text{inc}}(c_j)}{2} - \frac{\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{3} \right) \right) \quad (5.8) \\ &\quad - i\kappa \left( \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} \left( Y_{0,2}^{(j)} + \sum_{l \neq j} Y_{0,2}^{(l)} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) + \frac{\kappa^2 \gamma_j}{1 + \gamma_j} \frac{u_{\text{inc}}(c_j)}{2} - \frac{\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{6} \right) \right). \end{aligned}$$

Afin de déterminer le champ interne d'ordre 3, on utilise le lemme 4.6 ainsi que l'expression explicite de  $\Pi_1^{(j)}$  (5.4). Nous obtenons de cette manière le lemme suivant :

**Lemme 5.5.** *Le champ externe d'ordre 3 est :*

$$\begin{aligned} \Pi_3^{(j)}(R, \Theta) &= - \left( R^3 + \frac{3 - \gamma_j}{3 + 1 + \gamma_j} \frac{1}{R^4} \right) \frac{i\kappa^3}{15} P_3(\langle d, \Theta \rangle) \\ &\quad - \left( R^2 + \frac{2 - \gamma_j}{3 + \gamma_j} \frac{1}{R^3} \right) \frac{\kappa^2}{3} \sum_{l \neq j} h_2(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(j)} P_2(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle) \\ &\quad + \left( R + \frac{1 - \gamma_j}{2 + \gamma_j} \frac{1}{R^2} \right) i\kappa \sum_{l \neq j} h_1(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(j)} P_1(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle) \\ &\quad + \left\{ \frac{11 - \gamma_j}{22 + \gamma_j} - R^3 \frac{1}{10} - \frac{1}{R^2} \frac{1}{2 + \gamma_j} \left( \frac{11 - 4\gamma_j - \gamma_j^2}{2} \frac{1}{10(2 + \gamma_j)} \right) \right\} \kappa^2 \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle \\ &\quad + \left( 1 - \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} \frac{1}{R} \right) \left\{ Y_{0,3}^{(j)} + \sum_{l \neq j} \sum_{0 \leq n \leq 1} h_n^{(j)}(\kappa r_{lj}) Y_{n,2}^{(j)}(\widehat{c_j - c_l}) \right\} \\ &\quad + Ri\kappa Y_{0,2}^{(j)} \frac{1}{2} - \frac{\kappa^2 R^2}{6} \left( Y_{0,1}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(l)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{R} \frac{1}{1 + \gamma_j} \left[ \left( \frac{\gamma_j - 1}{1 + \gamma_j} i\kappa Y_{0,2}^{(j)} \frac{1}{2} \right) - \frac{\gamma_j - 2}{1 + \gamma_j} \frac{\kappa^2}{6} \left( Y_{0,1}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(l)} \right) \right]. \end{aligned}$$

**Démonstration.** Le lemme 4.6 donne :

$$\Pi_3^{(j)}(R, \theta) = \sum_{n \geq 0} \sum_{|m| \leq n} \left( \sum_{l=0}^1 c_{n,l}^m R^{-(n+1)+2l} + d_{n,l}^m R^{n+2l} \right) Y_n^m(\Theta).$$

Nous déterminons les constantes inconnues en travaillant harmonique sphérique par harmonique sphérique. Le terme  $\Pi_3^{(j)}$  vérifie  $\Delta \Pi_3^{(j)} = -\kappa^2 \Pi_1^{(j)}$  et  $\Pi_1^{(j)}$  ne dépend que des harmoniques sphériques d'ordre au plus 1. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 \left\{ \sum_{l=0}^1 c_{0,l}^0 R^{2l-1} + d_{0,l}^0 R^{2l} \right\} &= -\kappa^2 R^2 \left( Y_{0,1}^{(j)} + \sum_{l \neq j} Y_{0,1}^{(l)} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) - \frac{1}{R} \frac{i}{\kappa} Y_{0,2}^{(j)} \right), \\ \mathbf{L}_1 \left\{ \sum_{|m| \leq 1} Y_n^m(\Theta) \sum_{l=0}^1 \frac{c_{1,l}^m}{R^{2-2l}} + d_{1,l}^m R^{2l+1} \right\} &= -\kappa^2 R^2 \left( R + \frac{1-\gamma_j}{2+\gamma_j} \frac{1}{R^2} \right) \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle, \\ \mathbf{L}_n \left\{ \sum_{|m| \leq n} \left( \sum_{l=0}^1 c_{n,l}^m R^{-(n+1)+2l} + d_{n,l}^m R^{n+2l} \right) Y_n^m(\Theta) \right\} &= 0, \quad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

En comparant les termes de même puissance de  $R$  et en utilisant l'identité  $\mathbf{L}_n R^\alpha = (\alpha-n)(\alpha+n+1)R^\alpha$  il vient que  $c_{0,1}^0 = -\frac{i}{2} Y_{0,2}^{(j)}$  et  $d_{0,1}^0 = -\frac{\kappa^2}{6} \left( Y_{0,1}^{(j)} + \sum_{l \neq j} Y_{0,1}^{(l)} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) \right)$ . En procédant de même pour  $n=1$ , il vient

$$\sum_{|m| \leq 1} Y_1^m(\Theta) c_{1,1}^m = \frac{\kappa^2}{2} \frac{1-\gamma_j}{2+\gamma_j} \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle, \quad \sum_{|m| \leq 1} Y_1^m(\Theta) d_{1,1}^m = -\frac{\kappa^2}{10} \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle,$$

et  $c_{n,1}^m = d_{n,1}^m = 0$  pour tout  $n \geq 2$ . Nous prenons maintenant en compte la condition limite (4.19) :

$$\begin{aligned} -c_{0,0}^0 + c_{0,1}^0 + 2d_{0,1}^0 &= \gamma_j \left( \sum_{l=0}^1 c_{0,l}^0 + d_{0,l}^0 \right), \\ \sum_{|m| \leq 1} Y_n^m(\Theta) \sum_{l=0}^1 (2l-2)c_{1,l}^m + d_{1,l}^m (2l+1)R^{2l+1} &= \gamma_j \sum_{|m| \leq 1} Y_n^m(\Theta) \sum_{l=0}^1 c_{1,l}^m + d_{1,l}^m, \\ \sum_{|m| \leq 2} (-3c_2^m + 2d_2^m) Y_2^m(\Theta) &= \gamma_j \sum_{|m| \leq 2} (c_2^m + d_2^m) Y_2^m(\Theta), \\ nc_n^m - (n+1)d_n^m &= \gamma_j (c_n^m + d_n^m), \quad \text{pour } n \geq 3 \text{ et } |m| \leq n, \end{aligned}$$

où la dépendance en  $l$  des  $c_{n,l}^m$ ,  $d_{n,l}^m$  est supprimée de la notation lorsque  $n \geq 3$  car les seules constantes non nulles sont pour  $l=0$ . La détermination des constantes inconnues restantes utilise les règles de raccord. À l'ordre 3, elles sont données par  $\mathbf{U}_{3,3}^{(j)}(R, \Theta) - \Pi_3^{(j)}(R, \Theta) = o_{R \rightarrow +\infty}(1)$ . En négligeant les termes de la forme  $R^\gamma$  pour  $\gamma < 0$  dans  $\Pi_3^{(j)}$  il suit :

$$\begin{aligned} \Pi_3^{(j)}(R, \Theta) &= \sum_{n \geq 3} \sum_{|m| \leq n} R^n d_n^m Y_n^m(\Theta) + R^2 \sum_{|m| \leq 2} d_2^m Y_2^m(\Theta) + R \sum_{|m| \leq 1} d_1^m Y_1^m(\Theta) \\ &\quad + \frac{\kappa^2}{2} \frac{1-\gamma_j}{2+\gamma_j} \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle - R^3 \frac{\kappa^2}{10} \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle + d_{0,0}^0 + R i \kappa Y_{0,2}^{(j)} \frac{1}{2} \\ &\quad - \frac{\kappa^2 R^2}{6} \left( Y_{0,1}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(l)} \right) + o_{R \rightarrow +\infty}(1). \end{aligned}$$

L'expression de  $\mathbf{U}_{3,3}^{(j)}(R, \Theta)$  montre enfin :

$$\begin{aligned} \Pi_3^{(j)}(R, \Theta) &= \mathbf{U}_{3,3}^{(j)}(R, \Theta) + \underset{R \rightarrow +\infty}{o}(1) + \sum_{n \geq 4} \sum_{|m| \leq n} R^n d_n^m Y_n^m(\Theta) \\ &+ R^3 \left( \sum_{|m| \leq 3} d_3^m Y_3^m(\Theta) + \frac{i\kappa^3}{15} P_3(\langle d, \Theta \rangle) \right) \\ &+ R^2 \left( \sum_{|m| \leq 2} d_2^m Y_2^m(\Theta) + \frac{\kappa^2}{3} \sum_{l \neq j} h_2(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(j)} P_2(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle) \right) \\ &+ R \left( \sum_{|m| \leq 1} d_1^m Y_1^m(\Theta) - i\kappa \sum_{l \neq j} h_1(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(j)} P_1(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle) \right) \\ &+ 1 \left( d_{0,0}^0 - Y_{0,3}^{(j)} - \sum_{l \neq j} \sum_{0 \leq n \leq 1} h_n^{(j)}(\kappa r_{lj}) Y_{n,2}^{(j)}(\widehat{c_j - c_j}) \right). \end{aligned}$$

On obtient ainsi explicitement les constantes suivantes :

$$\begin{aligned} d_n^m &= 0, \quad \forall n \geq 4 \text{ et pour tout } |m| \leq n, \\ \sum_{|m| \leq 3} d_3^m Y_3^m(\Theta) &= -\frac{i\kappa^3}{15} P_3(\langle d, \Theta \rangle), \\ \sum_{|m| \leq 2} d_2^m Y_2^m(\Theta) &= -\frac{\kappa^2}{3} \sum_{l \neq j} h_2(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(j)} P_2(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle), \\ \sum_{|m| \leq 1} d_1^m Y_1^m(\Theta) &= i\kappa \sum_{l \neq j} h_1(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(j)} P_1(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle), \\ d_{0,0}^0 &= Y_{0,3}^{(j)} + \sum_{l \neq j} \sum_{0 \leq n \leq 1} h_n^{(j)}(\kappa r_{lj}) Y_{n,2}^{(j)}(\widehat{c_j - c_j}), \end{aligned}$$

qui déterminent le champ interne d'ordre 3. ■

### 5.1.2 Cas de petits obstacles caractérisés par un indice de réfraction

Les termes d'ordre zéro ont déjà été calculés. Le champ externe d'ordre 0 est, une fois de plus,  $u_0 = u_{\text{inc}}$ . Les champs externes ont été calculés dans (4.35).

#### Détermination des termes d'ordre 1

Pour les mêmes raisons que précédemment, le champ externe d'ordre 1 est déterminé par  $N$  constantes :

$$u_1(x) = \sum_{j=1}^N h_0^{(1)}(\kappa|x - c_j|) Y_{0,1}^{(j)}.$$

Les fonctions de raccord sont calculées dans le lemme 5.1. La première condition de raccord  $\mathbf{U}_{1,0}^{(j)} - \Pi_0^{(j),+} = o_{R \rightarrow +\infty}(R^{-1})$  et l'expression explicite de  $\Pi_0^{(j),+}$  entraînent

$$u_1(x) = \sum_{j=1}^N h_0^{(1)}(\kappa|x - c_j|) \frac{\kappa}{i} \frac{\kappa \gamma_j j_0'(\kappa \gamma_j)}{j_0(\kappa \gamma_j) + \kappa \gamma_j j_0'(\kappa \gamma_j)} u_{\text{inc}}(c_j). \quad (5.9)$$

La détermination du champ interne d'ordre 1 est effectuée dans le lemme ci-dessous :

**Lemme 5.6.** *Le champ proche d'ordre 1 est donné par l'expression suivante :*

$$\begin{aligned} \Pi_1^{(j),+}(R, \Theta) &= \left(1 - \frac{1}{R} \frac{\kappa \gamma_j j_0'(\kappa \gamma_j)}{j_0(\kappa \gamma_j) + \kappa \gamma_j j_0'(\kappa \gamma_j)}\right) \left\{ Y_{0,1}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(l)} \right\} \\ &+ \left( R + \frac{1}{R^2} \frac{j_1(\kappa \gamma_j) - \kappa \gamma_j j_1'(\kappa \gamma_j)}{2j_1(\kappa \gamma_j) + \kappa \gamma_j j_1'(\kappa \gamma_j)} \right) \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle, \\ \Pi_1^{(j),-}(R, \Theta) &= \left\{ Y_{0,1}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(l)} \right\} \frac{j_0(\kappa \gamma_j R)}{j_0(\kappa \gamma_j) + \kappa \gamma_j j_0'(\kappa \gamma_j)} \\ &+ \frac{3 \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle}{2j_1(\kappa \gamma_j) + \kappa \gamma_j j_1'(\kappa \gamma_j)} j_1(\kappa \gamma_j R). \end{aligned}$$

**Démonstration.**  $\Pi_1^{(j),+}$  vérifie une équation de Laplace sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1$ . Les conditions de raccord (4.34) et le fait que  $\mathbf{U}_{1,0}^{(j)}$  ne dépende que des harmoniques sphériques d'ordre au plus 1 entraîne :

$$\Pi_1^{(j),+}(R, \Theta) = \sum_{n=0}^1 \sum_{|m| \leq n} \left( \alpha_{n,1}^{(j),m} R^n + \frac{\beta_{n,1}^{(j),m}}{R^{n+1}} \right) Y_n^m(\Theta).$$

Rappelons que  $\mathbf{U}_{1,1}^{(j)}(R, \Theta) = R \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle + Y_{0,1}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(l)}$ . Ainsi,  $\alpha_{0,1}^{(j),0} = Y_{0,1}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(l)}$  et  $\sum_{|m| \leq 1} \alpha_{1,1}^{(j),m} Y_1^m(\Theta) = \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle$ . Les constantes restantes sont maintenant déterminées par les conditions de transmission (4.32). Pour l'harmonique sphérique d'ordre 0, il vient :

$$\begin{cases} \alpha_{0,1}^{(j),0} + \beta_{0,1}^{(j),0} = j_0(\kappa \gamma_j) \gamma_{0,1}^{(j),0}, \\ -\beta_{0,1}^{(j),1} = \kappa \gamma_j j_0'(\kappa \gamma_j) \gamma_{0,1}^{(j),0}. \end{cases}$$

et ainsi

$$\gamma_{0,1}^{(j),0} = \frac{\alpha_{0,1}^{(j),0}}{j_0(\kappa \gamma_j) + \kappa \gamma_j j_0'(\kappa \gamma_j)}, \quad \beta_{0,1}^{(j),0} = -\frac{\kappa \gamma_j j_0'(\kappa \gamma_j) \alpha_{0,1}^{(j),0}}{j_0(\kappa \gamma_j) + \kappa \gamma_j j_0'(\kappa \gamma_j)}.$$

Pour les harmoniques sphériques de degré 1, nous devons résoudre, pour  $|m| \leq 1$ , le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}^{(j),m} + \beta_{1,1}^{(j),m} = j_1(\kappa \gamma_j) \gamma_{1,1}^{(j),m}, \\ \alpha_{1,1}^{(j),m} - 2\beta_{1,1}^{(j),m} = \kappa \gamma_j j_1'(\kappa \gamma_j) \gamma_{1,1}^{(j),m}. \end{cases}$$

On obtient alors

$$\gamma_{1,1}^{(j),m} = \frac{3\alpha_{1,1}^{(j),m}}{2j_1(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_1'(\kappa\gamma_j)}, \quad \beta_{1,1}^{(j),m} = -\alpha_{1,1}^{(j),m} + j_1(\kappa\gamma_j)\gamma_{1,1}^{(j),m}.$$

Le regroupement de tout les calculs précédents permet de terminer la preuve. ■

## Détermination des termes d'ordre 2

Le champ externe d'ordre 2 est de la forme suivante :

$$u_2(x) = \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^1 h_n(\kappa|x - c_j|) Y_{n,2}^{(j)}(\Theta),$$

où  $Y_{n,2}^{(j)}(\Theta)$  sont des combinaisons linéaires d'harmoniques sphériques de degré  $n$  que l'on va déterminer via le raccord. Les fonctions de raccords sont données dans le lemme 5.2. Ainsi, en utilisant (4.35), il suit  $\mathbf{U}_{2,0}^{(j)} - \Pi_0^{(j),+} = o_{R \rightarrow +\infty}(R^{-2}) = -i(\kappa R)^{-2} Y_{1,2}^{(j)}(\Theta)$  et ainsi  $Y_{1,2}^{(j)} = 0$ . L'expression de  $\Pi_1^{(j),+}$  donnée par le lemme (5.6) et celle de  $\mathbf{U}_{2,1}^{(j)}$  entraînent :

$$\mathbf{U}_{2,1}^{(j)} - \Pi_1^{(j),+} = \frac{1}{R} \left( \frac{i}{\kappa} Y_{0,2}^{(j)} - \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \left\{ Y_{0,1}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(l)} \right\} \right).$$

Les conditions de raccord montrent alors :

$$u_2(x) = \sum_{j=1}^N h_0(\kappa|x - c_j|) \frac{\kappa}{i} \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \left( Y_{0,1}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(l)} \right), \quad (5.10)$$

et ainsi le champ externe d'ordre 2 est totalement déterminé. Pour le champ interne d'ordre 2, on a le résultat suivant :

**Lemme 5.7.** *Le champ interne d'ordre 2 est :*

$$\begin{aligned} & \Pi_2^{(j),+}(R, \Theta) \\ &= - \left( R^2 + \frac{1}{R^3} \left\{ \frac{2j_2(\kappa\gamma_j) - \kappa\gamma_j j_2'(\kappa\gamma_j)}{3j_2(\kappa\gamma_j) + (\kappa\gamma_j) j_2'(\kappa\gamma_j)} \right\} \right) \left( \frac{\kappa^2}{3} u_{\text{inc}}(c_j) P_2(\langle d, \Theta \rangle) \right) \\ &+ \left( R + \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{j_1(\kappa\gamma_j) - \kappa\gamma_j j_1'(\kappa\gamma_j)}{2j_1(\kappa\gamma_j) + (\kappa\gamma_j) j_1'(\kappa\gamma_j)} \right\} \right) \left( i\kappa \sum_{l \neq j} Y_{0,1}^l h_1^{(1)}(\kappa r_{lj}) P_1(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle) \right) \\ &+ \left( 1 - \frac{1}{R} \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \right) \left( Y_{0,2}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,2}^{(l)} \right) \\ &+ \frac{1}{R} \left( -\frac{\kappa^2}{3} u_{\text{inc}}(c_j) + \frac{\kappa^2}{2} u_{\text{inc}}(c_j) \left( \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \right) \right) \\ &- \frac{1}{R} \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \left( -\frac{\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{3} + \frac{\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{2} \left( \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \right) \right) \\ &- \frac{\kappa^2 R^2}{6} u_{\text{inc}}(c_j) + \frac{\kappa^2 R}{2} u_{\text{inc}}(c_j) \left( \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_2^{(j),-}(R, \Theta) &= -\frac{5\kappa^2}{3} \frac{u_{\text{inc}}(c_j)}{3j_2(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_2'(\kappa\gamma_j)} j_2(\kappa\gamma_j R) P_2(\langle d, \Theta \rangle) \\
 &+ \frac{3j_1(\kappa\gamma_j R)}{2j_1(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_1'(\kappa\gamma_j)} \left( i\kappa \sum_{l \neq j} Y_{0,1}^l h_1^{(1)}(\kappa r_{lj}) P_1(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle) \right) \\
 &+ \frac{j_0(\kappa\gamma_j R)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \left( Y_{0,2}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,2}^{(l)} \right) \\
 &+ \frac{j_0(\kappa\gamma_j R)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \left( -\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j)/2 + \frac{\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j) \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \right).
 \end{aligned}$$

**Démonstration.** Le terme  $\Pi_2^{(j),+}$  vérifie l'équation de Laplace  $\Delta \Pi_2^{(j),+} = -\kappa^2 \Pi_0^{(j),+}$ . L'expression explicite de  $\Pi_0^{j,+}$  le lemme 4.6 ainsi que les calculs du début de la démonstration du lemme 5.3 entraînent :

$$\begin{aligned}
 \Pi_2^{(j),+}(R, \Theta) &= -\frac{\kappa^2 R^2}{6} u_{\text{inc}}(c_j) + \frac{\kappa^2 R}{2} u_{\text{inc}}(c_j) \left( \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \right) \\
 &+ \sum_{n=0}^2 \sum_{|m| \leq n} \left( \alpha_{n,2}^{(j),m} R^n + \frac{\beta_{n,2}^{(j),m}}{R^{n+1}} \right) Y_n^m(\Theta).
 \end{aligned}$$

En utilisant maintenant les règles de raccord et la fonction de raccord  $\mathbf{U}_{2,2}^{(j)}$  calculée dans le lemme 5.2, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \alpha_{0,2}^{(j),0} &= Y_{0,2}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,2}^{(l)}, \\
 \sum_{|m| \leq 1} \alpha_{1,2}^{(j),m} Y_1^m(\Theta) &= \sum_{l \neq j} i\kappa Y_{0,1}^{(l)} h_1^{(1)}(\kappa r_{lj}) P_1(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle), \\
 \sum_{|m| \leq 2} \alpha_{2,2}^{(j),m} Y_2^m(\Theta) &= -\frac{\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{3} P_2(\langle d, \Theta \rangle).
 \end{aligned}$$

Pour déterminer les  $\beta_{n,2}^{(j),m}$  et les constantes de la partie interne du champ proche 4.33, on utilise les conditions de transmission. Pour les harmoniques sphériques d'ordre 2, nous devons résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_{2,2}^{(j),m} + \beta_{2,2}^{(j),m} = j_2(\kappa\gamma_j) \gamma_{2,2}^{(j),m}, \\ 2\alpha_{2,2}^{(j),m} - 3\beta_{2,2}^{(j),m} = \kappa\gamma_j j_2'(\kappa\gamma_j) \gamma_{2,2}^{(j),m}. \end{cases}$$

On obtient alors

$$\gamma_{2,2}^{(j),m} = \frac{5\alpha_{2,2}^{(j),m}}{3j_2(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_2'(\kappa\gamma_j)}, \quad \beta_{2,2}^{(j),m} = j_2(\kappa\gamma_j) \gamma_{2,2}^{(j),m} - \alpha_{2,2}^{(j),m}.$$

Pour les harmoniques sphériques de degré 1, il vient :

$$\begin{cases} \alpha_{1,2}^{(j),m} + \beta_{1,2}^{(j),m} = j_1(\kappa\gamma_j) \gamma_{1,2}^{(j),m}, \\ \alpha_{1,2}^{(j),m} - 2\beta_{1,2}^{(j),m} = \kappa\gamma_j j_1'(\kappa\gamma_j) \gamma_{1,2}^{(j),m}, \end{cases}$$



et ainsi

$$\gamma_{1,2}^{(j),m} = \frac{3\alpha_{1,2}^{(j),m}}{2j_1(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_1'(\kappa\gamma_j)}, \quad \beta_{2,2}^{(j),m} = j_2(\kappa\gamma_j)\gamma_{1,2}^{(j),m} - \alpha_{1,2}^{(j),m}.$$

Enfin, pour l'harmonique sphérique d'ordre 0, les conditions de transmission entraînent :

$$\begin{cases} \alpha_{0,2}^{(j),0} + \beta_{0,2}^{(j),0} - \frac{\kappa^2}{6}u_{\text{inc}}(c_j) + \frac{\kappa^2}{2}u_{\text{inc}}(c_j) \left( \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \right) = j_0(\kappa\gamma_j)\gamma_{0,2}^{(j),0}, \\ -\beta_{0,2}^{(j),0} - \frac{\kappa^2}{3}u_{\text{inc}}(c_j) + \frac{\kappa^2}{2}u_{\text{inc}}(c_j) \left( \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \right) = \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)\gamma_{0,2}^{(j),0}, \end{cases}$$

et donc

$$\begin{aligned} \gamma_{0,2}^{(j),0} &= \frac{1}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} (Y_{0,2}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,2}^{(l)}) \\ &\quad - \frac{\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{2} + \kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j) \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}. \end{aligned}$$

La preuve se termine alors en regroupant tout les calculs ci-dessus. ■

### Détermination des termes d'ordre 3

Le champ externe d'ordre 3 est donné par :

$$u_3(x) = \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^2 h_n^{(1)}(\kappa|x - c_j|) Y_{n,3}^{(j)}(\Theta).$$

Afin de le déterminer, nous utilisons les fonctions de raccords calculées dans le lemme 5.4. L'expression explicite de  $\Pi_0^{(j),+}$  (4.35) entraîne que  $\mathbf{U}_{3,0}^{(j)} = \Pi_0^{(j),+} - 3i(\kappa R)^{-3} Y_{2,3}^{(j)}(\Theta)$  et ainsi les conditions de raccord  $\mathbf{U}_{3,0}^{(j)} - \Pi_0^{(j),+} = o_{R \rightarrow +\infty}(R^{-3})$  impliquent  $Y_{2,3}^{(j)}(\Theta) = 0$ . En utilisant maintenant l'expression explicite du  $\Pi_1^{(j),+}$  (voir lemme 5.6), il vient :

$$\mathbf{U}_{3,1}^{(j)} = \Pi_1^{(j),+} - \frac{1}{R^2} \left( \frac{i}{\kappa^2} Y_{1,3}^{(j)}(\Theta) + \frac{j_1(\kappa\gamma_j) - \kappa\gamma_j j_1'(\kappa\gamma_j)}{2j_1(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_1'(\kappa\gamma_j)} \right) \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle.$$

Les conditions de raccord  $\mathbf{U}_{3,1}^{(j)} - \Pi_1^{(j),+} = o_{R \rightarrow +\infty}(R^{-2})$  imposent alors

$$Y_{1,3}^{(j)}(\Theta) = -\frac{\kappa^2}{i} \frac{j_1(\kappa\gamma_j) - \kappa\gamma_j j_1'(\kappa\gamma_j)}{2j_1(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_1'(\kappa\gamma_j)} \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle.$$

Le lemme 5.7 donnant l'expression des champs internes d'ordre 2 montre enfin :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{3,1}^{(j)} &= \frac{i}{\kappa R} Y_{0,3}^{(j)} + \Pi_2^{(j),+} + o_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R} \right) \\ &\quad + \frac{1}{R} \left( -\frac{\kappa^2}{3} u_{\text{inc}}(c_j) + \frac{\kappa^2}{2} u_{\text{inc}}(c_j) \left( \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{R} \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \left( Y_{0,2}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,2}^{(l)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{R} \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \left( -\frac{\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{3} + \frac{\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{2} \left( \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \right) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, la condition de raccord  $\mathbf{U}_{3,2}^{(j)} - \Pi_2^{(j),+} = o_{R \rightarrow +\infty}(R^{-1})$  permet de déterminer la constante restante dans le champ externe d'ordre 3 :

$$\begin{aligned} Y_{0,3}^{(j)} &= \frac{\kappa}{i} \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} [Y_{0,2}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,2}^{(l)} \\ &\quad - \frac{\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{3} + \frac{\kappa^2 u_{\text{inc}}(c_j)}{2} \left( \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \right)] \\ &\quad - \left( -\frac{\kappa^2}{3} u_{\text{inc}}(c_j) + \frac{\kappa^2}{2} u_{\text{inc}}(c_j) \left( \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \right) \right). \end{aligned}$$

Le champ externe est alors complètement déterminé par le développement suivant :

$$\begin{aligned} u_3(x) &= - \sum_{j=1}^N h_1^{(1)}(\kappa|x - c_j|) \frac{\kappa^2}{i} \frac{j_1(\kappa\gamma_j) - \kappa\gamma_j j_1'(\kappa\gamma_j)}{2j_1(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_1'(\kappa\gamma_j)} \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle \quad (5.11) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N h_0^{(1)}(\kappa|x - c_j|) Y_{0,3}^{(j)}. \end{aligned}$$

Pour les champs internes, on a le lemme suivant :

**Lemme 5.8.** *La partie extérieure du champ interne d'ordre 3 admet la représentation suivante :*

$$\begin{aligned} \Pi_3^{(j),+}(R, \Theta) &= \sum_{n=2}^3 \sum_{|m| \leq n} \left( \alpha_{n,3}^{(j),m} R^n + \frac{\beta_{n,3}^{(j),m}}{R^{n+1}} \right) Y_n^m \\ &\quad + \sum_{n=0}^1 \sum_{|m| \leq n} \left\{ c_{n,l,3}^{(j),m} R^{-(n+1)+2l} + d_{n,l,3}^{(j),m} R^{n+2l} \right\} Y_n^m(\Theta), \end{aligned}$$

$$\sum_{|m| \leq 3} \alpha_{3,3}^{(j),m} Y_3^m(\Theta) = -\frac{i\kappa^3}{15} P_3(\langle d, \Theta \rangle),$$

$$\sum_{|m| \leq 2} \alpha_{2,3}^{(j),m} Y_2^m(\Theta) = -\frac{\kappa^2}{3} \sum_{l \neq j} h_2(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(j)} P_2(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle),$$

$$\sum_{|m| \leq 1} d_{1,0,3}^{(j),m} Y_1^m(\Theta) = i\kappa \sum_{l \neq j} h_1(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(j)} P_1(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle),$$

$$d_{0,0,3}^{(j),0} = Y_{0,3}^{(j)} + \sum_{l \neq j} \sum_{0 \leq n \leq 1} h_n^{(j)}(\kappa r_{lj}) Y_{n,2}^{(j)} \widehat{c_j - c_l},$$

$$c_{0,1,3}^{(j),0} = \frac{\kappa^2}{2} \left( \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \right) \left\{ Y_{0,1} + \sum_{l \neq j} Y_{0,1}^{(l)} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) \right\},$$

$$d_{0,1,3}^{(j),0} = -\frac{\kappa^2}{6} \left\{ Y_{0,1} + \sum_{l \neq j} Y_{0,1}^{(l)} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) \right\},$$

$$\begin{aligned}
\sum_{|m|\leq 1} c_{1,1,3}^{(j),m} Y_1^m(\Theta) &= \frac{\kappa^2}{2} \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle \left\{ \frac{j_1(\kappa\gamma_j) - \kappa\gamma_j j_1'(\kappa\gamma_j)}{2j_1(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_1'(\kappa\gamma_j)} \right\}, \\
\sum_{|m|\leq 1} d_{1,1,3}^{(j),m} Y_1^m(\Theta) &= -\frac{\kappa^2}{10} \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle, \\
\sum_{|m|\leq 3} \beta_{3,3}^{(j),m} Y_3^m(\Theta) &= -\left\{ \frac{3j_3(\kappa\gamma_j) - \kappa\gamma_j j_3'(\kappa\gamma_j)}{4j_3(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_3'(\kappa\gamma_j)} \right\} \frac{i\kappa^3}{15} P_3(\langle d, \Theta \rangle), \\
\sum_{|m|\leq 2} \beta_{2,3}^{(j),m} Y_2^m(\Theta) &= -\frac{2j_2(\kappa\gamma_j) - \kappa\gamma_j j_2'(\kappa\gamma_j)}{3j_2(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_2'(\kappa\gamma_j)} \frac{\kappa^2}{3} \sum_{l \neq j} h_2(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(j)} P_2(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{1,0,3}^{(j),m} &= -\left( d_{1,0,3}^{(j),m} + c_{1,1,3}^{(j),m} + d_{1,1,3}^{(j),m} \right) + j_1(\kappa\gamma_j) \left( \frac{3d_{1,0,3}^{(j),m} + 5d_{1,1,3}^{(j),m} + 2c_{1,1,3}^{(j),m}}{2j_1(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_1'(\kappa\gamma_j)} \right), \\
c_{0,0,3}^{(j),0} &= -\left( d_{0,0,3}^{(j),0} + c_{0,1,3}^{(j),0} + d_{0,1,3}^{(j),0} \right) + j_0(\kappa\gamma_j) \left( \frac{2c_{0,1,3}^{(j),0} + 3d_{0,1,3}^{(j),0} + d_{0,0,3}^{(j),0}}{j_0(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)} \right),
\end{aligned}$$

La partie intérieure du champ interne est :

$$\begin{aligned}
&\Pi_3^{(j),-}(R, \Theta) \\
&= \frac{j_3(\kappa\gamma_j R)}{\kappa\gamma_j j_3'(\kappa\gamma_j) + 4j_3(\kappa\gamma_j)} \left\{ -\frac{7i\kappa^3}{15} u_{\text{inc}}(c_j) P_3(\langle d, \Theta \rangle) \right\} \\
&+ \frac{j_2(\kappa\gamma_j R)}{\kappa\gamma_j j_2'(\kappa\gamma_j) + 3j_2(\kappa\gamma_j)} \left\{ -\frac{5i\kappa^2}{3} \sum_{l \neq j} Y_{0,1}^{(l)} P_2(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle) \right\} \\
&+ \frac{j_1(\kappa\gamma_j R)}{\kappa\gamma_j j_1'(\kappa\gamma_j) + 2j_1(\kappa\gamma_j)} \left\{ i\kappa \sum_{l \neq j} Y_{0,2}^{(j)} h_1^{(1)}(\kappa r_{lj}) P_1(\langle \widehat{c_j - c_l}, \Theta \rangle) \right\} \\
&+ \langle \nabla u_{\text{inc}}(c_j), \Theta \rangle \frac{j_1(\kappa\gamma_j R)}{\kappa\gamma_j j_1'(\kappa\gamma_j) + 2j_1(\kappa\gamma_j)} \left\{ -\frac{\kappa^2}{5} + \kappa^2 \left[ \frac{j_1(\kappa\gamma_j) - \kappa\gamma_j j_1'(\kappa\gamma_j)}{2j_1(\kappa\gamma_j) + \kappa\gamma_j j_1'(\kappa\gamma_j)} \right] \right\} \\
&+ \frac{j_0(\kappa\gamma_j R)}{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j) + j_0(\kappa\gamma_j)} \left( \left\{ Y_{0,3}^{(j)} + \sum_{n=0}^1 \sum_{l \neq j} h_n^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{n,3}^{(j)}(\Theta) \right\} \right) \\
&+ \left( Y_{0,1}^{(j)} + \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa r_{lj}) Y_{0,1}^{(l)} \right) \left\{ -\frac{\kappa^2}{2} + \kappa^2 \left[ \frac{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j)}{\kappa\gamma_j j_0'(\kappa\gamma_j) + j_0(\kappa\gamma_j)} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

**Démonstration.** La partie extérieure du champ interne vérifie  $\Delta \Pi_3^{(j),+} = -\kappa^2 \Pi_1^{(j),+}$ . Remarquons de plus qu'il n'y a pas d'harmonique sphérique de degré supérieur à 1 dans le terme  $\Pi_1^{(j),+}$  et de degré supérieur à 3 dans  $\mathbf{U}_{3,3}^{(j)}$  (voir lemme 5.4). Ainsi, les règles de

raccord  $\Pi_3^{(j),+} - \mathbf{U}_{3,3}^{(j)} = o_{R \rightarrow +\infty}(1)$  et le lemme 4.6 entraînent :

$$\begin{aligned} \Pi_3^{(j),+}(R, \Theta) &= \sum_{n=2}^3 \sum_{|m| \leq n} \left( \alpha_{n,3}^{(j),m} R^n + \frac{\beta_{n,3}^{(j),m}}{R^{n+1}} \right) Y_n^m \\ &\quad + \sum_{n=0}^1 \sum_{|m| \leq n} \left\{ c_{n,l,3}^{(j),m} R^{-(n+1)+2l} + d_{n,l,3}^{(j),m} R^{n+2l} \right\} Y_n^m(\Theta). \end{aligned}$$

Les constantes sont maintenant déterminées en utilisant  $\Delta \Pi_3^{(j),+} = -\kappa^2 \Pi_1^{(j),+}$ , le raccord avec  $\mathbf{U}_{3,3}^{(j)}$  et enfin les conditions de transmission (4.32). Les calculs étant similaires à ceux du lemme 5.5, ils ne sont pas détaillés. ■

## 5.2 Rappels sur l'approximation de Born

Nous rappelons ici la construction de l'approximation de Born. Considérons ainsi un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ , noté  $\Omega$ , rempli d'un matériau caractérisé par un indice de réfraction  $n_0(x)$ . Soit maintenant  $\tilde{u}$  la solution du problème de diffraction suivant :

$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2 n_0^2(x)) \tilde{u}(x) = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - i\kappa) (\tilde{u} - u_{\text{inc}}) = 0, \end{cases} \quad (5.12)$$

où  $n_0(x) = 1$  lorsque  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ . Remarquons que le fait que le problème (5.12) soit bien posé est assuré par lemme de Rellich et le théorème 4.25 dès lors que  $\mathcal{I}m(n_0^2) \geq 0$ .

Considérons maintenant  $v = \tilde{u} - u_{\text{inc}}$ . Alors  $v$  est l'unique solution sortante de l'équation de Helmholtz suivante :

$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2)v(x) = \kappa^2(1 - n_0^2(x))\tilde{u}(x), & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - i\kappa) [v] = 0. \end{cases}$$

Ainsi, en notant  $\phi(x) = -\frac{e^{i\kappa|x|}}{4\pi|x|}$  le noyau de Green de l'opérateur de Helmholtz vérifiant la condition de radiation de Sommerfeld, il vient :

$$v(x) = \tilde{u}(x) - u_{\text{inc}}(x) = \int_{\Omega} \phi(x-y) \kappa^2 (1 - n_0^2(y)) \tilde{u}(y) dy. \quad (5.13)$$

Soit maintenant  $\mathbb{K}$  l'opérateur intégral suivant :

$$\mathbb{K}f(x) = \int_{\Omega} \phi(x-y) \kappa^2 (1 - n_0^2(y)) f(y) dy, \quad \forall f \in L^2(\Omega).$$

L'approximation de Born du problème de diffraction (5.12) est alors obtenue en remplaçant  $\tilde{u}$  par  $u_{\text{inc}}$  dans la dernière égalité de (5.13). Cela donne :

$$\tilde{u}(x) \approx u_{\text{inc}}(x) + \mathbb{K}u_{\text{inc}}(x).$$

Nous pouvons maintenant répéter cette procédure en reportant l'approximation de Born d'ordre 1 (5.14) dans la représentation (5.13). On obtient de cette façon des approximations de Born d'ordre  $n$  :

$$\tilde{u}(x) \approx u_{\text{inc}}(x) + \sum_{l=1}^n \mathbb{K}^l u_{\text{inc}}(x), \quad (5.14)$$

où  $\mathbb{K}^l$  est la composée  $l$ -ème de l'opérateur  $\mathbb{K}$ .

**Remarque 5.9.** Une justification de cette approximation est donnée ci-dessous. Tout d'abord remarquons que l'opérateur intégral  $\mathbb{K}$  est un opérateur à noyau faiblement singulier. Il définit ainsi un opérateur borné de  $L^2(\Omega)$  (voir par exemple [69]) et sa norme d'opérateur vérifie l'estimation suivante :

$$\|\mathbb{K}\|_{\mathcal{B}(L^2(\Omega))} = \sup_{u \in L^2(\Omega), u \neq \{0\}} \frac{\|\mathbb{K}u\|_{L^2(\Omega)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \leq \frac{\kappa^2}{4\pi} \|1 - n_0^2\|_{L^\infty(\Omega)} \frac{\text{meas}(\mathcal{S}_1) \text{diam}(\Omega)^2}{2} := \tilde{C},$$

où  $\text{diam}(\Omega)$  est le sup des distances entre deux points de  $\Omega$  (appelé aussi diamètre) et  $\text{meas}(\mathcal{S}_1)$  désigne l'aire de la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . Ainsi, lorsque la constante  $\tilde{C}$  est strictement plus petite que 1, la série de Neumann de l'opérateur  $\mathbb{K}$  converge. En particulier, la solution de (5.12) est :

$$\tilde{u}(x) = (\mathbb{I} + \mathbb{K})^{-1} u_{\text{inc}}(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} \mathbb{K}^l u_{\text{inc}}(x), \quad \forall x \in \Omega$$

Ainsi, les approximations de Born d'ordre  $n$  (5.14) apparaissent comme une troncature de rang  $n$  d'une série de Neumann.

### 5.3 Obtention du métamatériau homogénéisé

Nous présentons tout d'abord les outils fondamentaux permettant d'étudier la limite, lorsque  $\delta \rightarrow 0$  de l'approximation construite par développements asymptotiques raccordés des solutions de (4.1) et de (4.27) lorsque les petits objets vérifient (5.1). Le lemme 1.32 ne permet pas de passer à la limite dans des sommes multiples sur l'ensemble des petits objets comme celles intervenant dans l'approximation construite par développement asymptotiques raccordés de la solution de (4.1) et de (4.27) (voir section 5.1)). Pour ces cas là nous avons le lemme suivant.

**Lemme 5.10.** Supposons que (5.1) soit vérifiée et soient  $\varphi, \psi$  des fonctions continues sur  $\Omega$  faiblement singulières en 0 :

$$|\varphi(y)| \leq \frac{C}{|y - y_0|^\alpha}, \quad \text{pour } y \text{ proche de } y_0, \quad \alpha < 3,$$

$$|\psi(y)| \leq \frac{C}{|y|^\beta}, \quad \text{avec } \beta < 3.$$

On a alors la limite suivante :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^2 \sum_{j=1}^N \varphi(c_j) \left\{ \sum_{l=1, l \neq j}^N \psi(c_l - c_j) \right\} = \int_{\Omega} \varphi(y) R(y) \left\{ \int_{\Omega} R(z) \psi(y - z) dz \right\} dy.$$

**Démonstration.** Le lemme 1.32 appliqué à la double somme ci-dessus entraîne :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^2 \sum_{j=1}^N \varphi(c_j) \left\{ \sum_{l=1, l \neq j}^N \psi(c_l - c_j) \right\} = \int_{\Omega \times \Omega} R(y) \varphi(y) R(z) \psi(y - z) dz dy.$$

De plus, comme  $|\psi(y - z)| \leq C|y - z|^{-\alpha}$  avec  $\alpha < 3$  (idem pour  $\varphi$ ) et  $R$  est une fonction bornée sur  $\bar{\Omega}$ , l'intégrale  $\int_{\Omega} \varphi(y) R(y) \left\{ \int_{\Omega} R(z) \psi(y - z) dz \right\} dy$  est sommable ; ce qui achève la démonstration. ■

Le lemme 5.10 peut bien évidemment se généraliser au cas de sommes multiples quelconques.

### 5.3.1 Cas de petits obstacles caractérisés par une condition aux limites d'impédance

Le théorème 4.22 assure qu'une bonne approximation de la solution de (4.1) est donnée à partir des champs externes calculés par développements asymptotiques raccordés. Plus précisément, on a  $u_{\delta, m}(x) = \sum_{l=0}^m \delta^l u_l(x) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^m)$ , où  $u_l$  sont les coefficients du champs externe donné, jusqu'à l'ordre 3, par (5.3)-(5.2)-(5.7),(5.8) avec  $u_0 = u_{\text{inc}}$ . Nous allons maintenant utiliser l'hypothèse (5.1) et le lemme 5.10 afin de dégager de  $u_{\delta, 3}(x)$  une partie homogène qui porte en elle toute l'information du milieu contenant l'ensemble des petits objets. Rappelons tout d'abord que (5.1) entraîne que le nombre total de petits obstacles vérifie  $N = \mathcal{N}(\Omega) = O_{\delta \rightarrow 0}(1/\delta)$ . Ainsi, en utilisant les formules explicites des 3 premiers champs externes, il vient :

$$\begin{aligned} \delta u_1(x) &= \delta \frac{\kappa}{i} \sum_{j=1}^N h_0^{(1)}(\kappa|x - c_j|) \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} u_{\text{inc}}(c_j) + O_{\delta \rightarrow 0}(\delta), \\ \delta^2 u_2(x) &= \delta^2 \left( \frac{\kappa}{i} \right)^2 \sum_{j=1}^N h_0^{(1)}(\kappa|x - c_j|) \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} \sum_{l \neq j}^N h_0^{(1)}(\kappa|c_l - c_j|) \frac{\gamma_l}{1 + \gamma_l} u_{\text{inc}}(c_l) + O_{\delta \rightarrow 0}(\delta), \\ \delta^3 u_3(x) &= \delta^3 \left( \frac{\kappa}{i} \right)^3 \sum_{j=1}^N h_0^{(1)}(\kappa|x - c_j|) \frac{\gamma_j}{1 + \gamma_j} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{l \neq j}^N h_0^{(1)}(\kappa|c_l - c_j|) \frac{\gamma_l}{1 + \gamma_l} \sum_{\mu \neq l}^N h_0^{(1)}(\kappa|c_l - c_\mu|) \frac{\gamma_\mu}{1 + \gamma_\mu} u_{\text{inc}}(c_\mu) \right\} + O_{\delta \rightarrow 0}(\delta). \end{aligned}$$

Le lemme 5.10 et les estimations précédentes entraînent alors, après un passage à la limite quand  $\delta \rightarrow 0$ , que :

$$\begin{aligned} \delta^k u_l(x) &= \left( \frac{\kappa}{i} \right)^k \int_{\Omega} \int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} u_{\text{inc}}(y_k) \prod_{l=2}^k \left( R(y_l) \frac{\gamma(y_l)}{1 + \gamma(y_l)} h_0^{(1)}(\kappa|y_l - y_{l-1}|) \right) \\ &\quad R(y_1) \frac{\gamma(y_1)}{1 + \gamma(y_1)} h_0^{(1)}(\kappa|x - y_1|) dy_1 \cdots dy_k + O_{\delta \rightarrow 0}(\delta) \\ &= \tilde{\mathbb{K}}^l u_{\text{inc}}(x) + O_{\delta \rightarrow 0}(\delta), \end{aligned}$$

où  $\gamma$  est une fonction continue sur  $\Omega$  vérifiant  $\gamma(c_k) = \gamma_k$  pour tout  $k = 1, \dots, +\infty$  et  $\tilde{\mathbb{K}}^k v(x)$  est la composée  $k$ -ème de l'opérateur integral suivant :

$$\tilde{\mathbb{K}}v(x) = \frac{\kappa}{i} \int_{\Omega} R(y) \frac{\gamma(y)}{1 + \gamma(y)} h_0^{(1)}(\kappa|x - y|) dy.$$

Le théorème 4.23 montre alors que la solution du problème de diffraction (4.1) lorsque l'ensemble des petits objets vérifie (5.1) est approximé comme suit :

$$u_{\delta}(x) = \sum_{l=0}^3 \delta^l u_l(x) + \underset{\delta \rightarrow 0}{O}(C_N \delta^4) = \sum_{l=0}^3 \tilde{\mathbb{K}}^l [u_{\text{inc}}](x) + \underset{\delta \rightarrow 0}{O}(C_N \delta^4) + \underset{\delta \rightarrow 0}{O}(\delta),$$

où  $C_N$  est une constante dépendante de  $N$  et donc, par l'hypothèse (5.1), aussi de  $\delta$ . La difficulté majeure ici est que nous n'avons aucune information concernant le comportement de  $C_N$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$  laissant ce processus d'homogénéisation formel. Nous allons toutefois obtenir un coefficient homogénéisé pour le milieu contenant tout les petits obstacles via des arguments physiques et, plus précisément, en interprétant la formule précédente avec une approximation de Born (5.14). Rappelons que la première fonction de Hankel sphérique de première espèce est, par (4.15),  $h_0^{(1)}(z) = e^{iz}/iz$ . Il vient ainsi :

$$\tilde{\mathbb{K}}v(x) = \int_{\Omega} 4\pi R(y) \frac{\gamma(y)}{1 + \gamma(y)} \phi(x - y) dy. \quad (5.15)$$

Le terme  $\sum_{l=0}^3 \tilde{\mathbb{K}}^l u_{\text{inc}}(x)$  peut alors être considéré comme l'approximation de Born d'ordre 3 (5.14) de la solution de (5.12) où  $n_0 = n_{\text{hom}}$  est l'indice de réfraction du milieu contenant tout les petits obstacles. Ainsi, en imposant l'égalité des opérateurs intégraux  $\mathbb{K}$  et  $\tilde{\mathbb{K}}$ , il vient :

$$\kappa^2(1 - n_{\text{hom}}(x)^2) = 4\pi R(x) \frac{\gamma(x)}{1 + \gamma(x)}, \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

On obtient alors l'indice de réfraction homogénéisé :

$$n_{\text{hom}}(x)^2 = 1 - \frac{4\pi}{\kappa^2} \frac{R(x)\gamma(x)}{1 + \gamma(x)}, \text{ pour tout } x \in \Omega. \quad (5.16)$$

Notons tout d'abord que cet indice est le même que celui obtenu par A.G. Ramm [84] (voir aussi 1.4.2). Les quantités  $R$  et  $\gamma$  dépendent seulement des données et sont donc des paramètres que l'on peut choisir à notre convenance. L'unique hypothèse est que les parties imaginaires des impédances sont supposées négatives. Cela permet d'assurer le caractère bien posé de (4.1). Cela impose  $\mathcal{I}m \gamma(x) \leq 0$  pour tout  $x$  dans  $\Omega$ . De plus, un calcul montre, pour tout  $x \in \Omega$ , que :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}m n_{\text{hom}}(x)^2 &= -\frac{4\pi}{\kappa^2} R(x) \mathcal{I}m \left( \frac{\gamma(x)}{1 + \gamma(x)} \right) \\ &= -\frac{4\pi}{\kappa^2} R(x) \mathcal{I}m \left( \frac{\gamma(x)}{|1 + \gamma(x)|^2} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

De ce fait, la partie réelle du matériau homogénéisé peut être choisie arbitrairement et dépendre de  $x$ . Des métamatériaux acoustiques sont ainsi réalisables via cette méthode d'homogénéisation formelle de milieux faiblement denses. Considérons par exemple le cas de petits obstacles « mous » (conditions de Dirichlet ou encore  $\gamma \rightarrow +\infty$ ) répartis de

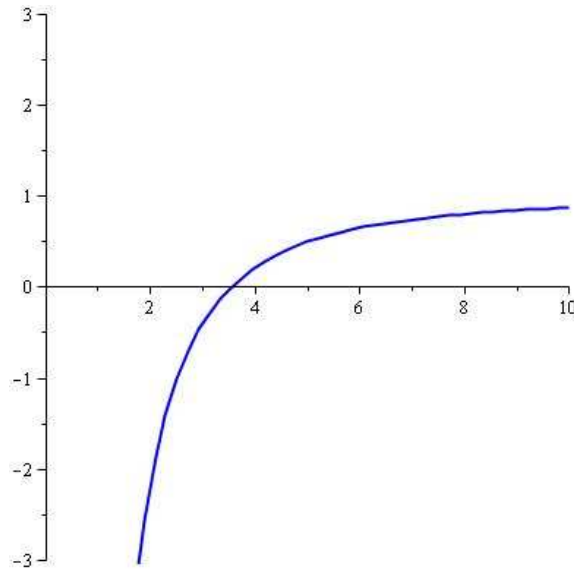


FIG. 5.1: Paramètre homogénéisé en fonction de  $\kappa$  pour une répartition périodique de petits obstacles mous.

manière périodique de période  $(\delta/R_0)^{1/3}$  où  $R_0 > 0$ . Pour ce cas là, on obtient que la fonction de répartition  $R$  est constante avec  $R = R_0$ . Dans ce cas, le milieu homogénéisé est caractérisé par l'indice de réfraction suivant :

$$n_{\text{per}}(x)^2 = 1 - \frac{4\pi R_0}{\kappa^2}, \quad x \in \Omega.$$

Cette fonction est représentée dans la figure 5.1. Il est alors facile de voir que  $n_{\text{per}}^2$  est réel et négatif pour tout  $\kappa < 2\sqrt{\pi R_0}$ . En termes de longueur d'onde (on rappelle que  $\lambda = 2\pi/\kappa$ ), on obtient que le comportement exotique de ce milieu se produit lorsque

$$\lambda > \sqrt{\frac{\pi}{R_0}},$$

ce qui correspond à des longueurs d'ondes assez grandes.

**Remarque 5.11.** *La formule (5.1) induit que le paramètre  $R_0$  est homogène à l'inverse du carré d'une longueur. Ainsi, l'indice homogénéisé est un nombre sans dimension.*

### 5.3.2 Cas de petits obstacles caractérisés par un indice de réfraction

Nous allons maintenant déterminer l'indice de réfraction homogénéisé du milieu rempli de petits obstacles caractérisés, cette fois-ci, par un indice de réfraction de la forme (4.31). Une fois de plus, nous allons faire tendre  $\delta$  vers zéro dans l'approximation externe de la solution de (4.27). Les trois premiers champs externes sont donnés par (5.9),(5.10),(5.11)



et  $u_0 = u_{\text{inc}}$ . Ainsi, en utilisant l'hypothèse (5.1), il vient :

$$\begin{aligned} \delta u_1(x) &= \delta \frac{\kappa}{i} \sum_{j=1}^N h_0^{(1)}(\kappa|x - c_j|) Y^{(j)} u_{\text{inc}}(c_j) + \underset{\delta \rightarrow 0}{O}(\delta), \\ \delta^2 u_2(x) &= \delta^2 \left(\frac{\kappa}{i}\right)^2 \sum_{j=1}^N h_0^{(1)}(\kappa|x - c_j|) Y^{(j)} \left( \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa|c_l - c_j|) Y^{(l)} u_{\text{inc}}(c_l) \right) + \underset{\delta \rightarrow 0}{O}(\delta), \\ \delta^3 u_3(x) &= \delta^3 \left(\frac{\kappa}{i}\right)^2 \sum_{j=1}^N h_0^{(1)}(\kappa|x - c_j|) Y^{(j)} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{l \neq j} h_0^{(1)}(\kappa|c_l - c_j|) Y^{(l)} \left( \sum_{\mu \neq l} h_0^{(1)}(\kappa|c_l - c_\mu|) Y^{(\mu)} u_{\text{inc}}(c_\mu) \right) \right\} + \underset{\delta \rightarrow 0}{O}(\delta), \end{aligned}$$

où  $Y^{(j)} = Y(\gamma_j) = \frac{\kappa \gamma_j j_0'(\kappa \gamma_j)}{j_0(\kappa \gamma_j) + \kappa \gamma_j j_0'(\kappa \gamma_j)}$ . En passant alors à la limite  $\delta \rightarrow 0$  et en utilisant le lemme 5.10, il vient :

$$\begin{aligned} \delta^k u_l(x) &= \left(\frac{\kappa}{i}\right)^k \int_{\Omega} \int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} u_{\text{inc}}(y_k) \prod_{l=2}^k \left( R(y_l) Y(\gamma(y_l)) h_0^{(1)}(\kappa|y_l - y_{l-1}|) \right) \\ &\quad R(y_1) Y(\gamma(y_1)) h_0^{(1)}(\kappa|x - y_1|) dy_1 \cdots dy_k + \underset{\delta \rightarrow 0}{O}(\delta) \\ &= \widehat{\mathbb{K}}^l u_{\text{inc}}(x) + \underset{\delta \rightarrow 0}{O}(\delta), \end{aligned}$$

où  $\gamma$  est une fonction continue sur  $\Omega$  telle que  $\gamma(c_k) = \gamma_k$  pour tout  $k = 1, \dots, +\infty$  et  $\widehat{\mathbb{K}}^k v(x)$  est défini à partir de l'opérateur integral suivant :

$$\widehat{\mathbb{K}} v(x) = \frac{\kappa}{i} \int_{\Omega} R(y) \frac{\kappa \gamma(y) j_0'(\kappa \gamma(y))}{j_0(\kappa \gamma(y)) + \kappa \gamma(y) j_0'(\kappa \gamma(y))} h_0^{(1)}(\kappa|x - y|) dy.$$

Nous pouvons alors utiliser l'approximation de Born d'ordre 3 (5.14) et comparer les opérateurs intégraux  $\mathbb{K}$  et  $\widehat{\mathbb{K}}$  pour obtenir le coefficient homogénéisé suivant :

$$n_{\text{hom}}(x)^2 = 1 - \frac{4\pi R(x)}{\kappa^2} \frac{\kappa \gamma(x) j_0'(\kappa \gamma(x))}{j_0(\kappa \gamma(x)) + \kappa \gamma(x) j_0'(\kappa \gamma(x))}, \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Cette formule peut de plus être simplifiée en utilisant l'expression explicite de fonctions de Bessel sphériques (4.14) qui est  $j_0(z) = \sin(z)/z$ . On obtient ainsi :

$$n_{\text{hom}}(x)^2 = 1 - \frac{4\pi R(x)}{\kappa^2} \left( 1 - \frac{\tan(\kappa \gamma(x))}{\kappa \gamma(x)} \right), \text{ pour tout } x \in \Omega. \quad (5.17)$$

Une fois de plus, les paramètres  $R$  et  $\gamma$  sont presque arbitraires car, par le théorème 4.26, la seule condition imposée est que les indices de réfraction  $n_j^\delta = \gamma_j/\delta$  de chaque petit obstacles  $\mathcal{B}_j^\delta$  vérifie  $\text{Im} \gamma_j^2 > 0$ . Ainsi, des métamatériaux peuvent encore une fois être réalisés avec cette méthode. On peut considérer par exemple une répartition périodique ( $R = 1$ ) de petits obstacles  $\mathcal{B}_j^\delta$  dont les indices de réfraction sont tous donnés par

$$n_j^\delta = \frac{2 + 0.001i}{\delta}.$$

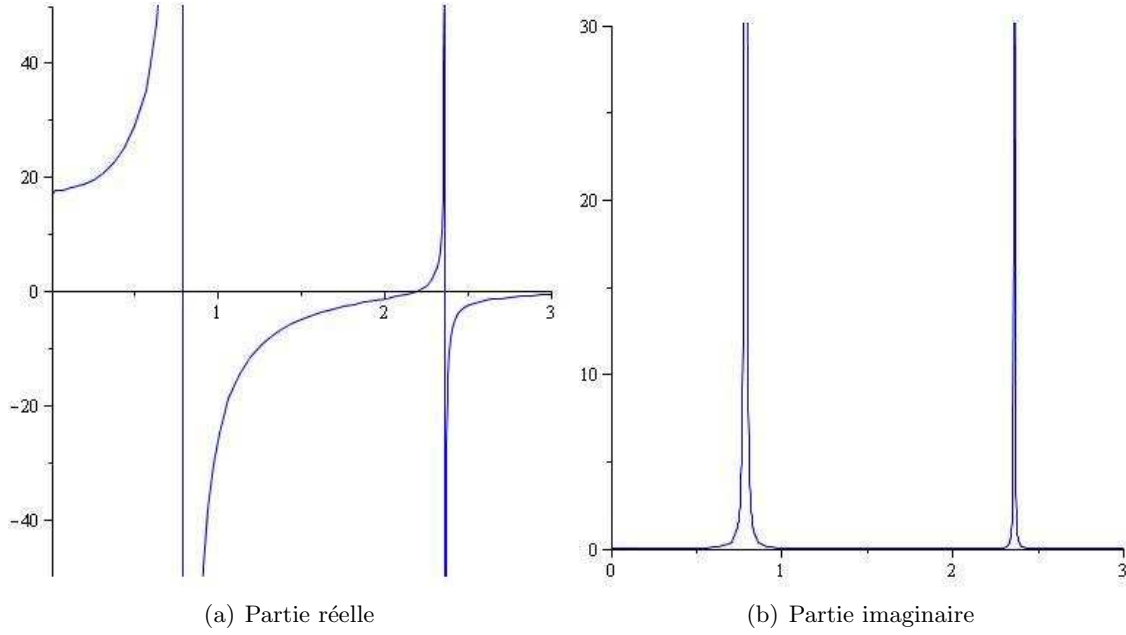


FIG. 5.2: Paramètre homogénéisé en fonction de  $\kappa$  pour une répartition périodique de petits obstacles d'indice  $n_j^\delta = (2 + 0.001i)/\delta$ .

L'indice homogénéisé est alors donné par la formule suivante :

$$n_{\text{per}}^2(x) = 1 - \frac{4\pi}{\kappa^2} \left( 1 - \frac{\tan((2 + 0.001i)\kappa)}{(2 + 0.001i)\kappa} \right), \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Nous pouvons de plus vérifier que  $\text{Im } n_{\text{per}}(x)^2 < 0$  pour tout  $x$  dans  $\Omega$ . Il suffit pour cela d'utiliser la formule suivante :

$$\tan z = \frac{\tan a + i \text{th } b}{1 - i(\tan a) \text{th } b}, \quad \forall z = a + ib,$$

où  $\text{th}$  est la fonction tangente hyperbolique. Des calculs donnent alors explicitement les parties réelles et imaginaires de l'indice homogénéisé :

$$\begin{aligned} \text{Re } n_{\text{per}}^2 &= 1 - \frac{4\pi}{\kappa^2} + \frac{4\pi}{\kappa^2} \left( \frac{\kappa a \tan(\kappa a) (1 - \text{th}^2(\kappa b)) + \kappa b \text{th}(\kappa b) (1 + \tan^2(\kappa a))}{\kappa^2 |z_0|^2 (1 + \tan^2 a \text{th}^2 b)} \right), \\ \text{Im } n_{\text{per}}^2 &= \frac{4\pi}{\kappa^2} \left( \frac{\kappa a \text{th}(\kappa b) (1 + \tan^2(\kappa a)) - \kappa b \tan(\kappa a) (1 - \text{th}^2(\kappa b))}{\kappa^2 |z_0|^2 (1 + \tan^2 a \text{th}^2 b)} \right), \end{aligned}$$

où  $z_0 = 2 + 0.001i = a + ib$ . Les fonctions de  $\kappa > 0$  ci-dessus sont représentées dans la figure 5.2 qui permet de voir (numériquement) que  $\text{Im } n_{\text{per}}^2 > 0$  dans  $\Omega$ .

## 5.4 Validité de la méthode d'homogénéisation formelle

Les paramètres homogénéisés (5.16) (caractérisation des obstacles par des conditions d'impédances) et (5.17) (cas d'obstacles caractérisés par des indices de réfractons) ont

été obtenus à partir d'un passage à la limite formel sur l'approximation, construite par développements asymptotiques raccordés, de la solution  $u_\delta$  du problème de diffraction. Quelques arguments supplémentaires plaident néanmoins en faveur de cette approche.

Tout d'abord, d'un point de vue de la validité physique, remarquons que les indices de réfraction obtenus via cette méthode d'homogénéisation non-périodique formelle dépendent de la pulsation (car  $\kappa = \omega/v_p$  où  $v_p$  est la vitesse de phase), admettent des pôles en  $\kappa$  et ne sont négatifs que pour des pulsations dans un ensemble borné. Ils vérifient ainsi le comportement prédit par V.G. Veselago [92] qui est aussi satisfait par la majeure partie des métamatériaux, obtenus par homogénéisation, de la littérature (voir 1.1.2). De plus, lorsque l'on considère une répartition périodique (cela revient à prendre  $R = 1$  dans (5.1)) de  $\mathcal{B}_j^\delta$  toutes composées du même matériau, l'indice de réfraction homogénéisé du milieu contenant l'ensemble des petits objets ne dépend pas de la variable d'espace. Ainsi, il semblerait que le moyen de créer des métamatériaux dont les paramètres dépendent de  $x$  réside à la fois dans la non-périodicité des petits obstacles et dans le fait qu'ils sont constitués de matériaux différents.

Les différentes approximations du champ diffracté aux ordres 0, 1, 2 et 3 donnent respectivement les approximations de Born à l'ordre 0, 1, 2 et 3 d'un problème de diffraction correspondant à un milieu caractérisé par un indice de réfraction. C'est cet indice qui donne les caractéristiques effectives du milieu homogénéisé. Enfin, le fait de retrouver des termes de l'approximation de Born est plutôt encourageant dans la mesure où cette dernière correspond à la troncature d'une série de Neumann définissant  $u_\delta$ .

---

# Conclusions et perspectives

---

L'objectif de cette thèse était l'étude, à la fois mathématique et numérique, de modèles homogénéisés de métamatériaux. On présente ici des conclusions ainsi que quelques perspectives pour ce travail.

## Conclusions

Nous avons débuté ce mémoire par l'étude de l'existence et de l'unicité de solutions pour les problèmes d'équations aux dérivées partielles modélisant la propagation d'ondes électromagnétiques, acoustiques ou encore élastiques dans les métamatériaux homogénéisés. La principale difficulté provenait de la perte de coercivité, sur certaines plages de fréquences, des opérateurs de multiplications intervenant dans chacun de ces problèmes. Nous avons considéré une classe spécifique de métamatériaux qui vérifiaient des hypothèses descriptives et phénoménologiques compatibles avec des exemples de réalisations issus de la littérature et certaines remarques de V.G. Veselago. On a donc travaillé avec des métamatériaux dont les paramètres dépendaient de la fréquence comme des fractions rationnelles et, pour au moins une fréquence, correspondaient à ceux d'un milieu usuel. Nous avons ainsi pu les considérer comme des fonctions holomorphes (ou méromorphes), de la variable de Laplace  $p$ , sur un domaine du plan complexe qui, pour un certain  $p_0$ , étaient coercifs.

Sous de telles hypothèses, nous avons établi que les problèmes mentionnés ci-dessus étaient bien posés pour tout  $p$  hormis un ensemble discret localement fini et éventuellement vide du domaine d'holomorphie des paramètres physiques du métamatériau. Nous avons enfin appliqué nos résultats sur des exemples de métamatériaux homogénéisés issus de la littérature.

La suite de cette thèse a concerné l'approximation numérique de problèmes modélisant la propagation d'ondes dans les métamatériaux homogénéisés. Nous avons commencé par présenter des résultats numériques sur l'équation de Helmholtz avec conditions aux limites de Dirichlet sur des cas tests donnés par des métamatériaux théoriques pour lesquels une solution explicite pouvait être calculée. On a alors montré que la solution obtenue numériquement avec le schéma éléments finis usuels pouvait diverger de cette solution explicite. Ces résultats numériques ont permis de mettre en évidence le risque d'interprétations des résultats de simulation numérique par éléments finis pour l'approximation des métamatériaux dont la modélisation faisait appel à un problème d'ordre 2.

---

En réponse aux contre-exemples mentionnés ci-dessus, nous avons proposé un schéma numérique adapté à l'approximation numérique des systèmes d'ordre 1 tels que les systèmes de l'électromagnétisme, de l'acoustique ou de l'élasticité linéaire. Ce dernier, appelé schéma EF-AL, était un schéma numérique de type éléments finis. Nous avons de plus montré sa convergence dès lors que le problème considéré était bien posé. Les métamatériaux vérifiant les hypothèses introduites au chapitre 2 donnent ainsi lieu à des problèmes dont la solution peut être approchée numériquement par ce schéma. Des validations numériques du schéma EF-AL ont ensuite été présentées sur les cas tests précédents pour lesquels les éléments finis usuels n'étaient plus valables.

Nous avons achevé la partie sur l'approximation numérique des métamatériaux par une étude numérique du schéma galerkin discontinu avec des flux totalement décentrés et des éléments  $Q^k$  sur les mêmes cas tests que précédemment. Nous avons pu observer numériquement que le schéma GD semblait convergent sur ces cas là et donc en conclure qu'il était, *a priori*, valable pour l'approximation numérique de modèles homogénéisés de métamatériaux.

La troisième partie concernait l'étude d'un problème de diffraction multiple par un nombre fini de petits obstacles sphériques. Le but était de mieux comprendre l'asymptotique de ce problème intervenant dans la méthode de Ramm qui permet d'obtenir des métamatériaux acoustiques dont les paramètres physiques dépendent de la variable d'espace. On a utilisé la méthode des développements asymptotiques raccordés afin de construire une approximation de la solution du problème de diffraction. Cette dernière était basée sur l'introduction d'un champ externe prenant en compte le comportement global du champ à l'extérieur des petits objets et d'un champ interne à chaque couche limite entourant les obstacles et décrivant le comportement du champ à l'intérieur de ces dernières.

On a montré l'existence du développement asymptotique raccordé à tout ordre. On a enfin justifié cette approche formelle en établissant des estimations d'erreurs entre le champ solution du problème de diffraction et son développement. Toute cette étude a de plus été réalisée pour des petits obstacles caractérisés par une condition aux limites d'impédance puis par un indice de réfraction.

La dernière partie de ce mémoire décrivait une méthode d'homogénéisation non-périodique formelle de milieux faiblement denses. On a considéré pour cela un ensemble de petits obstacles dont la répartition asymptotique était donnée à partir d'une certaine fonction. Cette dernière impliquait que le nombre de petits objets diffractant tendait vers l'infini lorsque leur taille caractéristique convergait vers zéro tout en restant relativement éloignés les uns des autres. Elle permettait, de plus, de considérer des répartitions non-périodiques de petits obstacles.

Nous sommes ensuite passé formellement à la limite, avec l'aide d'un lemme de Ramm, dans les développements externes aux couches limites calculés par développement asymptotique raccordés pour des petits objets caractérisés soit par une condition aux limites d'impédance soit par un indice de réfraction. En comparant la limite obtenue avec une approximation de Born de la solution d'un problème de diffraction bien choisi, nous avons dérivé un indice de réfraction homogénéisé pour le milieu contenant l'ensemble des petits objets. Nous avons ensuite donné des exemples de répartitions pour lesquelles des milieux exotiques pouvaient être réalisés avec cette méthode. Enfin, nous avons pu mettre en évidence plusieurs aspects et propriétés qui permettent de poser comme conjecture la

validité de cette approche permettant d'obtenir les paramètres d'un milieu homogénéisé par un passage à la limite formel.

## Perspectives

Nous donnons maintenant quelques suites directes et des perspectives possibles de ce travail.

Tout d'abord, concernant l'existence et l'unicité de solutions pour des systèmes de Friedrichs en présence de métamatériaux homogénéisés, nous avons démontré deux types de résultats. Le premier concerne des milieux dont les paramètres physiques sont lipschitziens en espace et scalaire tandis que le second permet de traiter le cas de matériaux à indices tensoriels  $L^\infty$  vérifiant une hypothèse supplémentaire (voir par exemple l'hypothèse (H4) de 2.3). Cette dernière n'est pas toujours facile à vérifier. Par exemple, un milieu composé d'un matériau classique contenant un métamatériau, tous les deux non-dissipatifs, ne satisfait pas cette condition. Ainsi, une première perspective serait d'étudier si les systèmes de Friedrichs, en présence de métamatériaux dont les paramètres physiques sont  $L^\infty$  et ne vérifient plus la contrainte induite par l'hypothèse additionnelle, sont bien posés. Une première piste serait alors d'étudier ces problèmes, dans le cas de milieux constants par morceaux, en elliptisant (voir théorème 2.7) le problème de transmission associé. Cela semble difficile car le processus d'elliptisation n'est *a priori* possible que pour des milieux lipschitziens mais permettrait de reformuler ces équations comme des systèmes équivalents dont la résolvante est compacte. On pourrait ainsi établir qu'ils sont bien posés avec l'aide de la théorie de Fredholm analytique.

Une deuxième perspective est liée à la simulation numérique des métamatériaux. Au chapitre 3, nous avons réalisé une étude numérique du schéma galerkin discontinu avec des flux totalement décentrés et des éléments  $\mathcal{Q}^k$ . On a constaté que ce schéma était convergent en présence de certains exemples de métamatériaux. Cependant nous n'avons à l'heure actuelle aucune validation rigoureuse de ce comportement. Ainsi, une autre perspective serait l'étude (mathématique) du schéma GD pour l'approximation numérique des métamatériaux. Une première piste serait d'utiliser le fait que l'on travaille avec des métamatériaux dont les paramètres physiques dépendent de la variable de Laplace  $p$  comme des fonctions holomorphes et qui sont de plus coercifs pour un certain  $p_0$ . Ainsi, le problème discret admet une unique solution pour  $p = p_0$ . La dépendance holomorphe et le fait que l'on soit en dimension fini montrent alors l'existence et l'unicité d'une solution discrete pour tout  $p$  hormis un ensemble discret, localement fini et éventuellement vide du domaine d'holomorphie. La principale difficulté provient, en revanche, du fait que l'on ait besoin de conditions inf-sup uniformes sur la forme bilinéaire discrète pour assurer la convergence du schéma [30]. Cependant, bien que l'on ait une condition inf-sup sur le problème discret (car il est bien posé), il pourrait arriver que la constante intervenant dans ces inégalités dépende de la taille caractéristique du maillage  $h$  ce qui empêcherait de conclure. Il faudrait ainsi être capable d'estimer les variations de cette constante en fonction de  $h$  pour déterminer si le schéma GD est valable pour l'approximation numérique des modèles homogénéisés de métamatériaux.

Concernant la méthode d'homogénéisation non-périodique formelle introduite au chapitre 5 pour l'acoustique, une suite directe consisterait en la validation du milieu homogénéisé. On pourrait, dans un premier temps, comparer les résultats numériques obtenus à partir de la diffraction d'une onde plane par le matériau homogénéisé avec ceux de la diffraction par un nombre fini d'objets lorsque ce dernier devient de plus en plus grand. Une autre idée serait d'essayer d'estimer plus précisément la constante de stabilité intervenant dans les théorèmes 4.3 et 4.26. En effet, cette dernière intervient dans les estimations d'erreurs entre le champ et son développement asymptotique raccordé et dépend du nombre de petit objet de manière non-triviale. Cela empêche de justifier complètement les passages à la limite utilisés pour dériver l'indice de réfraction du milieu homogénéisé.

Une seconde suite possible serait d'étendre les résultats obtenus aux cas des ondes électromagnétiques afin de proposer une méthode d'homogénéisation non-périodique permettant de réaliser des métamatériaux dont les indices de permittivité et de perméabilité dépendent de la variable d'espace. Il faudrait donc commencer par étudier l'asymptotique d'un problème de diffraction, décrit à partir des équations de Maxwell, par un nombre fini de petits obstacles. La technique des développements asymptotiques raccordés semble plutôt bien adaptée à ce type de système d'équations. Par exemple, les calculs des champs externes et internes aux couches limites devraient se faire sans trop de difficulté en considérant des développements des champs dans la base des harmoniques sphériques vectorielles (voir [24] pour les définitions). En revanche, comme pour le cas des ondes acoustiques, les principaux points bloquants devraient être l'estimation de stabilité uniforme, l'existence du développement à tout ordre et les estimations d'erreurs. Il faudra enfin être capable de faire tendre le nombre de petits objets vers l'infini et de dériver des paramètres homogénéisés ce qui semble, pour le moment, difficile.

Nous donnons enfin quelques perspectives à plus long terme.

On pourrait s'intéresser au traitement de problèmes inverses afin de définir, ou de dériver, des métamatériaux possédant un comportement prescrit comme par exemple une cape d'invisibilité ou encore le milieu PML dont on sait qu'il réalise de l'invisibilité en « back-scattering ». Pour cela, nous pourrions nous donner au préalable un ensemble de petits objets (non forcément identiques) et essayer de déterminer, par résolution d'un problème inverse, les paramètres de l'assemblage (espacement, taille caractéristique,...) pour lequel le milieu réalise au mieux l'effet voulu à partir de la connaissance de la solution d'une équation aux dérivées partielles. Ainsi, avec la connaissance des champs électromagnétique diffractés par une structure ayant l'effet recherché, il serait possible d'obtenir les indices de permittivité et de perméabilité du matériau...

Dans un second temps, nous pourrions faire de même en considérant cette fois-ci des distributions de métamatériaux et donner des caractéristiques locales pour produire les « bons effets ».

On pourrait aussi, en vu d'obtenir un milieu homogénéisé dépendant de la variable d'espace, effectuer l'analyse asymptotique du problème de diffraction par un nombre fini de petite boules en se basant sur la formulation intégrale de la solution proposée par A.G. Ramm. On pourrait par exemple essayer d'écrire une parametrix de cet opérateur à partir d'un développement selon des puissances de  $\delta$  (la taille des petits objets) en symboles homogènes. Cela permettrait d'écrire symboliquement un inverse modulo un

---

reste (a priori donné par des opérateurs régularisants) qui donnerait les premiers termes du développement de la solution en puissances de  $\delta$ . On obtiendrait ainsi un développement asymptotique de la solution que l'on pourrait comparer avec celui obtenu par asymptotique raccordés.

---







---

## Annexe

---

Dans ces annexes, on rappelle des résultats classiques concernant la théorie de Fredholm analytique. On donne aussi la démonstration du lemme de Ramm [1.32](#).

### A.1 Rappels sur la théorie de Fredholm analytique

Nous rappelons ici certains résultats classiques de la théorie de Fredholm analytique. Ces derniers sont utiles pour établir si les systèmes d'équations aux dérivées partielles relatives à des matériaux homogénéisés sont bien posés.

Considérons  $X$  et  $Y$  des espaces de Banach et  $D_0$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ . Dans la suite  $\mathcal{B}(X, Y)$  désigne l'ensemble des opérateurs bornés de  $X$  dans  $Y$  et  $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$ . Alors  $\mathcal{B}(X, Y)$  est un espace de Banach pour la norme suivante :

$$\|\mathbb{T}\|_{\mathcal{B}(X, Y)} = \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|\mathbb{T}u\|_Y}{\|u\|_X}.$$

L'ensemble des opérateurs fermés de  $X$  dans  $Y$  est, quant à lui, noté  $C(X, Y)$  avec  $C(X) := C(X, X)$ . Pour tout  $\mathbb{T} \in C(X)$ , l'ensemble  $\mathcal{D}(\mathbb{T})$  est le domaine de l'opérateur  $\mathbb{T}$  et  $\mathbb{I} \in \mathcal{B}(X)$  est l'application identité. Enfin,  $(\mathbb{T}, \mathcal{D}(\mathbb{T}))$  désigne le couple composé de l'opérateur fermé et de son domaine. Nous commençons par rappeler ce qu'est la résolvante d'un opérateur fermé.

**Définition A.1.** Soit  $\mathbb{T} \in C(X)$  un opérateur fermé de  $X$  et  $z \in \mathbb{C}$ . Alors  $z$  appartient à l'ensemble résolvant de  $\mathbb{T}$ , noté  $\text{Res}(\mathbb{T})$ , lorsque  $\mathbb{T} - z\mathbb{I}$  est inversible. On note alors  $R$  l'application  $R(\cdot, \mathbb{T}) : z \in \text{Res}(\mathbb{T}) \mapsto R(z, \mathbb{T}) = (\mathbb{T} - z\mathbb{I})^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ . Cette dernière est appelée résolvante de  $\mathbb{T}$ .

Remarquons que l'image de la résolvante est  $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ . L'opérateur  $\mathbb{T}$  étant fermé, il suit que l'ensemble  $\mathcal{D}(\mathbb{T})$  muni de la norme du graphe  $\|u\|_{\mathcal{D}(\mathbb{T})} = \|u\|_X + \|\mathbb{T}u\|_X$  est un espace

---

de Banach. De plus l'injection de  $\mathcal{D}(\mathbb{T})$  dans  $X$  est continue. Ainsi, la résolvante d'un opérateur fermé vérifie  $R(z, \mathbb{T}) \in \mathcal{B}(X, \mathcal{D}(\mathbb{T}))$  pour tout  $z$  dans l'ensemble résolvant. Elle vérifie de plus la propriété suivante.

**Proposition A.2** ([52] p.187). *Soit  $\mathbb{T}$  un opérateur fermé de  $X$  et  $R(., T)$  sa résolvante. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- *Il existe  $z_0 \in \text{Res}(\mathbb{T})$  tel que  $R(z_0, \mathbb{T})$  est compacte.*
- *$R(z, \mathbb{T})$  est compacte pour tout  $z \in \text{Res}(\mathbb{T})$ .*

La proposition précédente permet en fait de parler de résolvante compacte d'un opérateur fermé sans avoir à spécifier le point de l'ensemble résolvant pour lequel elle est évaluée.

### A.1.1 Familles holomorphes d'opérateurs

Rappelons maintenant les définitions concernant les familles holomorphes d'opérateurs. Pour les opérateurs bornés, on a naturellement :

**Définition A.3.** *Soit  $\mathbb{T} : p \in D_0 \mapsto \mathbb{T}(p) \in \mathcal{B}(X, Y)$  une famille d'opérateurs bornés. On dit que  $\mathbb{T}(p)$  est holomorphe lorsque l'application :*

$$p \in D_0 \mapsto \langle g, \mathbb{T}(p)u \rangle \in \mathbb{C},$$

*est holomorphe pour tout  $u \in X$  et pour tout  $g \in Y'$  (le dual de  $Y$ ).*

Pour les familles d'opérateurs fermés, nous avons :

**Définition A.4** ([52] p.366). *Soit  $\mathbb{T} : p \in D_0 \mapsto \mathbb{T}(p) \in C(X, Y)$  une famille d'opérateurs fermés définie sur un voisinage de  $p_0 \in D_0$ . On dit que  $\mathbb{T}(p)$  est holomorphe (au sens généralisé) en  $p_0$  s'il existe un troisième espace de Banach  $Z$  et deux familles holomorphes, dans un voisinage de  $p_0$ , d'opérateurs bornés  $\mathbb{U}(p) \in \mathcal{B}(Z, X)$  et  $\mathbb{V}(p) \in \mathcal{B}(Z, Y)$  tels que :*

$$\begin{cases} \mathbb{U}(p) : Z \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{T}(p)) \text{ est injectif,} \\ \mathbb{T}(p)\mathbb{U}(p) = \mathbb{V}(p). \end{cases}$$

*Enfin,  $\mathbb{T}(p)$  est dite holomorphe sur  $D_0$  lorsqu'il est holomorphe pour tout  $p \in D_0$ .*

La définition A.4 n'est pas très commode à employer suite à la dépendance en  $p$  du domaine des opérateurs. Pour des familles d'opérateurs fermés dont le domaine  $\mathcal{D}(\mathbb{T}(p)) = \mathcal{D}(\mathbb{T}(p_0))$  est indépendant de  $p$ , elle se réduit, en fait, à la définition A.3. En effet, comme  $\mathbb{T}(p) \in C(X)$ , il suit  $\mathbb{T}(p) \in \mathcal{B}(\mathcal{D}(\mathbb{T}(p_0)), X)$  et la définition A.3 peut être utilisée pour étudier l'holomorphie de telles familles. Dans ce manuscrit, seulement ce type de familles holomorphes d'opérateurs est considérée.

Nous donnons pour finir un résultat qui permet d'étudier l'holomorphie de l'inverse d'une famille holomorphe d'opérateurs.

**Théorème A.5** ([52] p.365). *Soit  $\mathbb{T} : p \in D_0 \mapsto \mathbb{T}(p) \in \mathcal{B}(X, Y)$  une famille holomorphe d'opérateurs telle que  $\mathbb{T}(p_0)^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$  existe pour un certain  $p_0 \in D_0$ . Alors, pour  $|p - p_0|$  assez petit,  $\mathbb{T}(p)^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$  existe et est holomorphe dans un voisinage de  $p_0$ .*

**Démonstration.** Soit  $p \in D_0$ . En utilisant l'inversibilité de  $\mathbb{T}(p_0)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{T}(p) &= \mathbb{T}(p_0) + (\mathbb{T}(p) - \mathbb{T}(p_0)) \\ &= (\mathbb{I} + (\mathbb{T}(p) - \mathbb{T}(p_0))\mathbb{T}(p_0)^{-1})\mathbb{T}(p_0).\end{aligned}$$

En posant  $\mathbb{A}(p) = (\mathbb{T}(p) - \mathbb{T}(p_0))\mathbb{T}(p_0)^{-1} \in \mathcal{B}(Y)$  on montre que  $\mathbb{I} + \mathbb{A}(p)$  s'inverse pour  $p$  proche de  $p_0$ . Par l'holomorphie de  $\mathbb{T}(p)$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $|p - p_0| < \eta$  entraîne  $\|\mathbb{T}(p) - \mathbb{T}(p_0)\|_{\mathcal{B}(X, Y)} < \|\mathbb{T}(p_0)\|_{\mathcal{B}(X, Y)}$  et donc  $\|\mathbb{A}(p)\|_{\mathcal{B}(Y)} < 1$ . Ainsi, la série de Neumann de l'opérateur  $\mathbb{I} + \mathbb{A}(p)$  converge en norme d'opérateur et  $(\mathbb{I} + \mathbb{A}(p))^{-1} \in \mathcal{B}(Y)$  existe pour tout  $p$  assez proche de  $p_0$ . L'inversibilité de  $\mathbb{T}(p)$  pour  $p$  proche de  $p_0$  s'en suit.

Il reste à montrer l'holomorphie de  $\mathbb{T}(p)$ . On a la formule suivante :

$$\frac{\mathbb{T}(p_0 + h)^{-1} - \mathbb{T}(p_0)^{-1}}{h} = \mathbb{T}(p_0 + h)^{-1} \frac{\mathbb{T}(p_0) - \mathbb{T}(p_0 + h)}{h} \mathbb{T}(p_0)^{-1}.$$

En faisant alors tendre  $h$  vers 0 et en utilisant l'holomorphie de  $\mathbb{T}(p)$ , il vient :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{T}(p_0 + h)^{-1} - \mathbb{T}(p_0)^{-1}}{h} = -\mathbb{T}(p_0)^{-1} \mathbb{T}'(p_0) \mathbb{T}(p_0)^{-1},$$

L'application  $p \mapsto \mathbb{T}(p)^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$  est donc holomorphe pour  $p$  suffisamment proche de  $p_0$ .

Ci-dessus  $\mathbb{T}'(p_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (\mathbb{T}(p_0 + h) - \mathbb{T}(p_0)) / h$  est la dérivée, en  $p_0$ , de l'application  $p \in D_0 \mapsto \mathbb{T}(p) \in \mathcal{B}(X, Y)$ . La limite précédente est de plus une limite forte dans l'espace de Banach  $\mathcal{B}(X, Y)$ . ■

### A.1.2 Alternatives de Fredholm analytiques

La théorie de Fredholm analytique fournit des conditions menant à l'inversibilité d'une famille holomorphe d'opérateurs. L'alternative de Fredholm analytique classique est donnée par le théorème suivant :

**Théorème A.6** ([52] p.370, théorème 1.9). *Soit  $\mathbb{T} : p \in D_0 \mapsto \mathcal{B}(X)$  une famille holomorphe d'opérateurs bornés telles que  $\mathbb{T}(p)$  est compact pour tout  $p \in D_0$ . Nous avons alors l'alternative :*

- a)  $(\mathbb{I} - \mathbb{T}(p))^{-1}$  n'existe pour aucun  $p$  de  $D_0$ .
- b)  $(\mathbb{I} - \mathbb{T}(p))^{-1}$  existe pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S$  est un ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$ .

Le résultat précédent établit l'inversibilité de famille holomorphe d'opérateurs de la forme  $\mathbb{I} - \mathbb{T}(p)$  où  $\mathbb{T}(p)$  est compact pour tout  $p$ . Nous sommes cependant intéressés par l'inversibilité de  $\mathbb{T}(p)$ . On présente à cet effet le corollaire suivant :

**Théorème A.7** ([52] p.371, théorème 1.10). *Soit  $\mathbb{T}(p)$  une famille holomorphe (au sens généralisé) d'opérateurs fermés de  $X$  dont l'ensemble résolvant est non-vide et la résolvante est compacte pour tout  $p \in D_0$ . Nous avons alors l'alternative :*

- a)  $\mathbb{T}(p)^{-1}$  n'existe pour aucun  $p$  dans  $D_0$ .
- b)  $\mathbb{T}(p)^{-1}$  existe pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S$  est un ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de  $D_0$ .

Avant de donner la preuve, considérons  $\mathbb{T}(p)$  une famille holomorphe d'opérateurs fermés à résolvante compacte pour tout  $p \in D_0$ . Supposons de plus que  $\mathbb{T}(p_0)$  soit inversible pour un certain  $p_0$ , alors le théorème A.7 entraîne que  $\mathbb{T}(p_0)^{-1}$  existe pour tout  $p \in D_0 \setminus S$  où  $S$  est un ensemble discret de valeurs. Ainsi, l'inversibilité, pour tout  $p \in D_0$ , d'une famille holomorphe d'opérateurs fermés à résolvante compacte se ramène à son inversion pour un unique  $p$  de  $D_0$ .

**Démonstration du théorème A.7.** Soit  $p_0$  dans  $D_0$ . Il existe  $z_0 \neq 0$  appartenant à  $P(\mathbb{T}(p_0))$ . L'holomorphie au sens généralisé de  $\mathbb{T}(p)$  donne alors que  $z_0 \in P(\mathbb{T}(p))$  et que l'opérateur  $-z_0 R(z_0, \mathbb{T}(p))$  est à la fois compact et holomorphe (au sens de la définition A.3) pour tout  $p$  dans un voisinage de  $p_0$ . En utilisant la relation

$$R(z_0, \mathbb{T}(p)) (\mathbb{T} - z_0 \mathbb{I}) = \mathbb{I},$$

on obtient l'identité :

$$\mathbb{T}(p)^{-1} = \{\mathbb{I} - (-z_0)R(z_0, \mathbb{T}(p))\}^{-1} R(z_0, \mathbb{T}(p)).$$

Le théorème A.6 appliqué à la famille holomorphe d'opérateurs bornés  $-z_0 R(z_0, \mathbb{T}(p))$  démontre alors le résultat au moins dans un voisinage de  $p_0$ . Le fait que  $p_0$  soit un élément arbitraire de  $D_0$  entraîne que le résultat est vrai dans tout  $D_0$ . ■

## A.2 Démonstration du lemme de Ramm

Nous donnons ci-dessous la démonstration du lemme de Ramm 1.32 car elle permet de comprendre comment passer d'un nombre fini de petits obstacles à un nombre infini.

**Lemme A.8.** *Soit  $\varphi$  une fonction continue sur  $\Omega$  avec une exception possible en  $y_0$  au voisinage duquel elle reste absolument intégrable. Elle peut, par exemple, vérifier une estimation du type  $|\varphi(y)| \leq C/|y - y_0|^\alpha$ ,  $\alpha < 3$ . Supposons que (5.1) soit vérifiée. On a alors la limite suivante :*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \sum_{j=1}^{\mathcal{N}(\Omega)} \varphi(c_j) = \int_{\Omega} \varphi(y) R(y) dy$$

**Démonstration.** Nous commençons par démontrer le lemme pour une fonction  $\varphi$  continue sur  $\bar{\Omega}$ . Considérons une partition de  $\Omega$  par  $M$  petits cubes disjoints, notés par  $\{\mathcal{C}_l\}_{l=1}^M$ , tels que

$$\limsup_{M \rightarrow +\infty} (\text{diam}(\mathcal{C}_M)) = 0. \tag{A.1}$$

Soit maintenant  $y_l \in \mathcal{C}_l$  un point arbitraire et  $\mathcal{E} = \{(j, l) \mid \mathcal{B}_j(\delta) \subset \mathcal{C}_l\}$ . La continuité de  $\varphi$  entraîne alors :

$$\sup_{(j,l) \in \mathcal{E}} |\varphi(c_j) - \varphi(y_l)| < \epsilon_M \rightarrow 0, \text{ lorsque } M \rightarrow +\infty.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \sum_{j=1}^{\mathcal{N}(\Omega)} \varphi(c_j) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{l=1}^M \delta \sum_{\mathcal{B}_j(\delta) \subset \mathcal{C}_l} \varphi(c_j) \\ &= \sum_{l=1}^M (\varphi(y_l) + O(\epsilon_M)) \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \sum_{\mathcal{B}_j(\delta) \subset \mathcal{C}_l} 1. \end{aligned}$$

L'hypothèse (5.1) imposant la répartition asymptotique de l'ensemble des petits objets montre que :

$$\delta \sum_{\mathcal{B}_j(\delta) \subset \mathcal{C}_l} 1 = \text{Card} \{k \in \{1, \dots, N\} \mid \mathcal{B}_k(\delta) \subset \mathcal{C}_l\} = \delta \left( \frac{1}{\delta} \int_{\mathcal{C}_l} R(y) dy \right) (1 + o_{\delta \rightarrow 0}(1)).$$

Ainsi il vient :

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \sum_{j=1}^{\mathcal{N}(\Omega)} \varphi(c_j) &= \sum_{l=1}^M (\varphi(y_l) + O(\epsilon_M)) \left( \int_{\mathcal{C}_l} R(y) dy \right) \\ &= \sum_{l=1}^M (\varphi(y_l) + O(\epsilon_M)) (R(y_l) + O(\tilde{\epsilon}_l)) \text{meas}(\mathcal{C}_l) \\ &= \sum_{l=1}^M \text{meas}(\mathcal{C}_l) (\varphi(y_l) R(y_l) + \varphi(y_l) O(\tilde{\epsilon}_l) + O(\epsilon_M) R(y_l) + O(\epsilon_M) O(\tilde{\epsilon}_l)), \end{aligned}$$

où  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \sup_{l=1, \dots, M} \tilde{\epsilon}_l = 0$  par continuité de  $R$  et par (A.1). Ci-dessus, on a noté  $\text{meas}(\mathcal{C}_l) = \int_{\mathcal{C}_l} 1 dx$ . En utilisant alors (A.1), en faisant tendre  $M$  vers  $+\infty$  et la définition d'une somme de Riemann, il suit :

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \sum_{j=1}^{\mathcal{N}(\Omega)} \varphi(c_j) = \int_{\Omega} \phi(y) R(y) dy.$$

Lorsque  $\varphi$  est singulière au voisinage d'un  $y_0$  dans lequel elle est absolument intégrable, il suffit de reprendre la démonstration en remplaçant  $\Omega$  par  $\Omega \setminus \mathcal{B}(y_0, \eta)$ , où  $\eta > 0$  est petit. On obtient alors :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \sum_{\substack{j=1 \\ c_j \notin \mathcal{B}(y_0, \eta)}}^{\mathcal{N}(\Omega)} \varphi(c_j) = \int_{\Omega \setminus \mathcal{B}(y_0, \eta)} \varphi(y) R(y) dy. \quad (\text{A.2})$$

La fonction  $\phi$  vérifiant  $|\varphi(y)| \leq C|y - y_0|^{-\alpha}$  pour  $\alpha < 3$ , il vient, après un passage en coordonnées sphériques, l'estimation :

$$\sup_{0 \leq \eta < \eta_0} \int_{\Omega \setminus \mathcal{B}(y_0, \eta)} \phi(y) R(y) dy \leq C \text{meas}(\mathcal{S}_1) \|R\|_{L^\infty(\Omega)} \frac{\eta_0^{3-\alpha}}{3-\alpha}, \quad C > 0.$$

Ainsi la formule du lemme peut être comprise comme la limite du terme de gauche de (A.2) lorsque  $\eta \rightarrow 0$ . L'existence de cette limite est, quant à elle, assurée par l'estimation ci-dessus. ■

---

---

## Bibliographie

---

- [1] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover publications, 1964.
  - [2] G. Allaire, *Homogenization and two-scale convergence*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, vol. 23, no. 6, pages 1482–1518, 1992.
  - [3] X. Antoine, *Conditions de radiation sur le bord*, Thèse de l’université de Pau et des pays de l’Adour, 1997.
  - [4] A.K. Aziz, S. Leventhal, *Finite element approximation for first order systems*, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 15, no. 6, pages 1103–1111, 1978.
  - [5] A. Bendali, A. Makhlouf, S. Tordeux, *Justification of the Cavity Model in the Numerical Simulation of Patch Antennas by the Method of Matched Asymptotic Expansions*, Multiscale Modeling and Simulation : A SIAM Interdisciplinary Journal, vol. 8, no. 5, pages 1902–1922, 2010.
  - [6] A. Bendali, K. Lemrabet, *Asymptotic Analysis of the Scattering of a Time-Harmonic Wave by a Perfectly Conducting Metal Coated with a Thin Dielectric Shell*, Asymptotic Analysis, vol. 57, pages 199–227, 2008.
  - [7] A.S. Bonnet-Ben Dhia, P. Ciarlet Jr., C.M. Zwölf, *Time harmonic wave diffraction problems in materials with sign-shifting coefficients*, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 234, no. 6, pages 1912–1919, 2010.
  - [8] A.S. Bonnet-Ben Dhia, M. Dauge, K. Ramdani, *Analyse spectrale et singularités d’un problème de transmission non coercif*, Comptes-Rendus à l’Académie des Sciences Série I, vol. 328, no. 8, pages 717–720, 1999.
  - [9] A.S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, P. Ciarlet Jr., *T-coercivity for scalar interface problems between dielectrics and metamaterials*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, vol. 46, pages 1363–1387, 2012.
  - [10] A.S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, P. Ciarlet Jr., *Two-dimensional Maxwell’s equations with sign-changing coefficients*, soumis, 2012.
  - [11] A.S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, X. Claeys, *Radiation condition for a non-smooth interface between a dielectric and a metamaterial*, à paraître dans Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2012.
  - [12] A. Bossavit, *Homogenization of Split-Ring Arrays, Seen as the Exploitation of Translational Symmetry*, Metamaterials and Plasmonics : Fundamentals, Modelling, Applications, Springer Netherlands, pages 77–90, 2009.
-



- 
- [13] G. Bouchitte, C. Bourel, D. Felbacq, *Homogenization of the 3D Maxwell system near resonances and artificial magnetism*, Comptes-Rendus à l'Académie des Sciences Série I, vol. 347, Issues 9-10, pages 571–576, 2009.
- [14] G. Bouchitte, B. Schweizer, *Homogenization of Maxwell's equations in a split ring geometry*, SIAM Multiscale Modeling and Simulation, vol. 8, no. 3, pages 717–750, 2010.
- [15] G. Bouchitte, C. Bourel, D. Felbacq, *Homogenization of the 3D Maxwell system near resonances and artificial magnetism*, Comptes Rendus Mathématiques, vol. 347, no. 9, pages 571–576, 2009.
- [16] C. Bourel, *Étude mathématique et numérique de cristaux photoniques fortement contrastés*, Thèse de l'université du sud Toulon-Var, 2010.
- [17] M. Cessenat, *Mathematical Methods in Electromagnetism : Linear theory and applications*, World Scientific Singapore and River Edge, 1996.
- [18] G. Cevini, G. Oliveri, M. Raffetto, *Further comments on the performances of finite element simulators for the solution of electromagnetic problems involving metamaterials*, Microwave and Optical Technology Letters, vol. 48, no. 12, pages 2524–2530, 2006.
- [19] S.N. Chandler-Wilde, A.T. Peplow, *A boundary integral equation formulation for the Helmholtz equation in a locally perturbed half-plane*, ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 85, pages 79–88, 2005.
- [20] J. Chazarain, A. Piriou, *An Introduction to the Theory of Linear Partial Differential Equations*, North Holland, vol. 14, 1982.
- [21] L. Chesnel, P. Ciarlet Jr., *T-coercivity and continuous Galerkin methods : application to transmission problems with sign changing coefficients*, soumis, 2011.
- [22] H. Chena, C.T. Chan, *Acoustic cloaking in three dimensions using acoustic metamaterials*, Applied Physics Letters, vol. 91, no. 18, pages 183518, 2007.
- [23] X. Claeys, H Haddar, P. Joly, *Etude d'un problème modèle pour la diffraction par des fils minces par développements asymptotiques raccordés Cas 2D*, Rapport de recherche INRIA, no. 5839, 2006.
- [24] D.L. Colton, R. Kress, *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Applied Mathematical Sciences, Springer Verlag, no. 93, 1998.
- [25] M. Costabel, E. Stephan, *Integral equations for transmission problems in elasticity*, Journal of Integral Equations and Applications, vol. 2, pages 211–223, 1990.
- [26] J. Cousteix, J. Mauss, *Asymptotic analysis and boundary layers*, Springer-Verlag, New-York, 2007.
- [27] S.A. Cummer, D. Schurig, *One path to acoustic cloaking*, New Journal of Physics, vol. 9, pages 45–53, 2007.
- [28] R. Dautray, J.L. Lions, *Analyse mathématiques et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Tome 5, Masson, 1988.
- [29] J. Deny, J.L. Lions, *Les espaces du type de Beppo Levi*, Annales de l'Institut Fourier, vol. 5, p. 305–370, 1953.
- [30] D. A. Di Pietro, A. Ern, *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*, SMAI Mathématiques et Applications, Springer, vol. 69, 2012.
-

- 
- [31] Y. Ding, Z. Liu, C. Qiu, J. Shi, *Metamaterial with Simultaneously Negative Bulk Modulus and Mass Density*, Physical review letter, vol. 99, no. 9, pages 93904, 2007.
- [32] W. Eckhaus, *Matched asymptotic expansions and singular perturbations*, vol. 6 of North-Holland Mathematics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam and London, 1973.
- [33] A. Ern, *Aide-mémoire des éléments finis*, Hachette, 2005.
- [34] D. Felbacq, G. Bouchitté, *Left-Handed media and homogenization of photonic crystals*, Optics letters, vol. 30, no. 10, pages 1189–1191, 2004.
- [35] N. Fabre, L. Lalouat, B. Cluzel, X. Mélique, D. Lippens, F. De Fornel, O. Vanbésien, *Optical Near-Field Microscopy of Light Focusing through a Photonic Crystal Flat Lens*, Physical Review Letters, vol. 101, no. 7, pages 073901, 2008.
- [36] N. Fang, H. Lee, C. Sun, X. Zhang, *Sub-diffraction-limited optical imaging with a silver superlens*, Science, vol. 308, no. 5721, pages 534–537, 2005.
- [37] P. Fernandes, M. Raffetto, *Well posedness and finite element approximability of time-harmonic electromagnetic boundary value problems involving bianisotropic materials and metamaterials*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, vol. 19, no. 12, pages 2299–2335, 2009.
- [38] P. Fernandes, M. Raffetto, *Existence, uniqueness and finite element approximation of the solution of time-harmonic electromagnetic boundary value problems involving metamaterials*, The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, vol. 24, no. 4, pages 1450-1469, 2005.
- [39] K.O. Friedrich, *Differential forms on Riemannian manifolds*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 8, no. 4, pages 551-590, 1955.
- [40] A. Grbic, G.V. Eleftheriades, *Overcoming the diffraction limit with a planar left-handed transmission-line lens*, Physical Review Letters, vol. 92, no. 11, pages 117403, 2004.
- [41] A. Greenleaf, Y. Kurylev, M. Lassas, G. Uhlmann, *Cloaking Devices, Electromagnetic Wormholes and Transformation Optics*, SIAM Review, vol. 51, pages 3–33, 2009.
- [42] A. Greenleaf, Y. Kurylev, M. Lassas, G. Uhlmann, *Isotropic transformation optics : approximate acoustic and quantum cloaking*, New Journal of Physics, vol. 10, pages 115024, 2008.
- [43] A. Greenleaf, Y. Kurylev, M. Lassas, G. Uhlmann, *Invisibility and Inverse Problems*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 46, pages 55-97, 2009.
- [44] S. Guenneau, A.B. Movchan, G. Petursson, S.A. Ramakrishna, *Acoustic metamaterials for sound focussing and confinement*, New Journal of Physics, vol. 9, pages 399, 2007
- [45] S. Guenneau, F. Zolla, *Homogenization of 3D finite chiral photonic crystals*, Science-Direct, Physica B, vol. 394, pages 145–147, 2007.
- [46] S. Guenneau, S.A. Ramakrishna, S. Enoch, G. Tayed, B. Gralak, *Cloaking and imaging effects in plasmonic checkerboards of negative epsilon and mu and dielectric photonic crystal checkerboards*, Photonics and nanostructures-Fundamentals and Applications, vol. 5, pages 63–72, 2007.
- [47] S. Guenneau, M. Brun, A.B. Movchan, *Achieving control of in-plane elastic wave*, Applied Physical letters, vol. 94, no. 6, 2009.
-

- 
- [48] N.A. Gumerov, R. Duraiswami, *Fast multipole methods for the Helmholtz equation in three dimensions*, Elsevier Science, 2004.
- [49] P. Helluy, S. Dayma, *Convergence d'une approximation discontinue des systèmes du premier ordre*, Comptes-Rendus à l'académie des Sciences, Série I, vol. 319, no. 12, pages 1331–1335, 1994.
- [50] P. Joly, S. Tordeux, *Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots I : The asymptotic expansion*, Multiscale Modeling and Simulation, vol. 5, pages 304–336, 2007.
- [51] B. Kanté, S.N. Burokur, F. Gadot, A. De Lustrac, *Metamaterials for optical and radio communications*, Comptes Rendus Physique, vol. 9, no. 1, pages 31–40, 2008.
- [52] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Classics in mathematics, Springer, 2-ème edition, 1995.
- [53] C.E. Kriegler, M.S. Rill, S. Linden, M. Wegener, *Bianisotropic photonic metamaterials*, IEEE Selected Topics in Quantum Electronics, vol. 16, no. 2, pages 367–375, 2010.
- [54] L.D. Landau, E.M. Lipschitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, Editions MIR, 1960.
- [55] M. Lassas, *The essential spectrum of non-selfadjoint Maxwell operator in a bounded domain*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 224, page 201–217, 1998.
- [56] M. Lassas, J. Liukkonen, E. Somersalo, *Complex riemannian metric and absorbing boundary conditions*, Journal de Mathematique Pures et Appliquées, vol. 7, no. 80, pages 739–768, 2001.
- [57] S.H. Lee, C.M. Park, Y.M. Seo, Z.G. Wang, C.K. Kim, *Acoustic metamaterial with negative modulus*, Journal of Physics : Condensed Matter, vol. 21, no. 21, pages 175704, 2009.
- [58] J. Li, Y. Chen, V. Elander, *Mathematical and numerical study of wave propagation in negative-index materials*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 197, no. 45, pages 3976–3987, 2008.
- [59] J. Li, *Finite element study of the Lorentz model in metamaterials*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 200, no. 5, pages 626–637, 2010.
- [60] J.Li, A. Wood, *Finite element analysis for wave propagation in double negative metamaterials*, Journal of Scientific Computing , vol.32, no.2, pages 263-286, 2007.
- [61] S. Lin, J.G. Fleming, D.L. Hetherington, B.K. Smith, R. Biswas, K.M. Ho, M.M. Sigalas, W. Zubrzycki, S.R. Kurtz, J. Bur, *A three-dimensional photonic crystal operating at infrared wavelengths*, Nature, vol. 394, no. 6690, pages 251–253, 1998.
- [62] I. V. Lindell and A. H. Sihvola, *Negative definite media, a class of bianisotropic metamaterials*, Microwave and optical technology letters, vol. 48, no. 3, pages 602–606, 2006.
- [63] A.P. Liu, R. Zhu, X.N. Liu, G.K. Hu, G.L. Huang, *Multi-displacement microstructure continuum modeling of anisotropic elastic metamaterials*, Wave motion, vol. 49, pages 411–426, 2012.
- [64] A. Makhlof, *Justification et amélioration de modèles d'antenne patch par la méthode des développements asymptotiques raccordés*, Thèse de l'université de Toulouse, 2008.
-

- 
- [65] A.J. Majda, *Coercive inequalities for nonelliptic symmetric systems*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 28, pages 1119–1133, 1975.
- [66] D. Maystre, S. Enoch, *Perfect lenses made with left-handed materials : Alice's mirror ?*, Journal of the Optical Society of America A, vol. 21, no. 1, pages 122–133, 2004.
- [67] V.G. Maz'ya, S.V. Poborchi, *Extension of functions in Sobolev spaces on parameter dependent domains*, Mathematische Nachrichten, vol. 178, number 1, pages 5–41, 1996.
- [68] G.W. Milton, *Realizability of metamaterials with prescribed electric permittivity and magnetic permeability tensors*, New Journal of Physics, vol. 12, pages 033035, 2010.
- [69] S.G. Mikhailin, *Mathematical physics, an advanced course*, North-Holland Publishing company, 1970.
- [70] J.C. Nedelec, J. Planchard, *Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème extérieur dans  $\mathbb{R}^3$* , Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle, vol. 7, no. 3, pages 105–129, 1973.
- [71] G. Nguetseng, *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, vol. 20, no. 3, pages 608–623, 1989.
- [72] S. Nicaise, J. Venel, *A posteriori error estimates for a finite element approximation of transmission problems with sign changing coefficients*, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 235, no. 14, pages 4272–4282, 2011.
- [73] G. Oliveri, M. Raffetto, *A Warning About Metamaterials for Users of Frequency-Domain Numerical Simulators*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 56, no. 3, pages 792–798, 2008.
- [74] G. Oliveri, M. Raffetto, *An assessment by a commercial software of the accuracy of electromagnetic finite element simulators in the presence of metamaterials*, The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, vol. 27, no. 6, pages. 1260–1272, 2008.
- [75] J.B. Pendry, A.T. Holden, W.J. Stewart, I. Youngs, *Extremely-Low-Frequency Plasmons in Metallic Mesostructures*, Physical Review Letter, vol. 76, pages 4773-6, 1996.
- [76] J.B. Pendry, *Intense Focusing Of Light Using Metals*, Photonic Crystals and Light Localization in the 21st Century, Springer, pages 329–349, 2001.
- [77] J.B. Pendry, A.J. Holden, D.J. Robbins, W.J. Stewart, *Magnetism from Conductors and Enhanced Non-Linear Phenomena*, IEEE transactions on microwave theory and techniques, vol. 47, pages 2075–2084, 1999.
- [78] D.R. Smith, J.B. Pendry, M.C.K. Wiltshire, *Metamaterials and Negative Refractive Index*, Science, vol. 305, pages 788–792, 2004.
- [79] J.B. Pendry, *Negative refraction makes a perfect lens*, Physical Review letters, vol. 85, no. 18, pages 3966–3969, 2000.
- [80] J.B. Pendry, D. Schurig, D.R. Smith, *Controlling electromagnetic fields*, Science, vol. 312, no. 5781, pages 1780–1782, 2006.
- [81] R. Picard, *On a structural observation in generalized electromagnetic theory*, Journal of Mathematical Analysis and Application, vol. 110, pages 247–264, 1985.
-

- 
- [82] I.E. Psarobas, *Effective-medium description of dielectric-chiral photonic crystals*, Optics communications, vol. 162, no. 1, pages 21–25, 1999.
- [83] A.G. Ramm, *Many-body wave scattering by small bodies and applications*, Journal of mathematical physics, vol. 48, no. 10, pages 1–29, 2007.
- [84] A.G. Ramm, *Wave scattering by many small particles embedded in a medium*, Physical letter A, vol. 372, no. 17, pages 3064–3070, 2008.
- [85] A.G. Ramm, *Preparing materials with a desired refraction coefficient*, Nonlinear analysis, vol. 71, no. 12, pages 186–190, 2008.
- [86] A.G. Ramm, *Electromagnetic wave scattering by many small bodies and creating materials with a desired refraction coefficient*, Progress In Electromagnetics Research, vol. 13, pages 203–215, 2010.
- [87] J. Rauch, *Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity*, Transaction of the American Mathematical society, vol. 291, no. 1, pages 167–187, 1985.
- [88] J.R. Schulenberger, C.H. Wilcox, *The limiting absorption principle and spectral theory for steady-state wave propagation in inhomogeneous anisotropic media*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 41, no. 1, pages 46–65, 1971.
- [89] D. Schurig, J.J. Mock, B.J. Justice, S.A. Cummer, J.B. and Pendry, A.F. Starr, D.R. Smith, *Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies*, Science, vol. 314, no. 5801, pages 977–980, 2006.
- [90] D.R. Smith, W.J. Padilla, D.C. Vier, S.C. Nemat-Nasser, S. Schultz, *Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity*, physical review letters, vol. 84, no. 18, pages 4184–4187, 2000.
- [91] D.R. Smith, J.B. Pendry, *Homogenization of metamaterials by field averaging*, Journal of the Optical Society of America B, vol. 23, no. 3, pages 391–403, 2006.
- [92] V.G. Veselago, *The electrodynamics of substance with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$* , Soviet Physics USPEKHI, vol. 10, no. 4, pages 509–514, 1968.
- [93] C.H. Wilcox, *Scattering theory for the d'Alembert equation in exterior domains*, vol. 442, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [94] R. Zhao, T. Koschny, C.M. Soukoulis, *Chiral metamaterials : retrieval of the effective parameters with and without substrate*, Optics Express, vol. 18, no. 14, pages 14553–14567, 2010.
- [95] X. Zhou, G. Hu, *Analytic model of elastic metamaterials with local resonances*, Physical Review B, vol. 79, 2009.
- [96] R.W. Ziolkowski, E. Heyman, *Wave propagation in media having negative permittivity and permeability*, Physical review E, vol. 64, no. 5, pages 056625, 2001.
- [97] R.W. Ziolkowski and N. Engheta, *Special issue on metamaterials*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 51, no. 10, pages 2546–2549, 2003.
- [98] C.M. Zwölf, *Méthodes variationnelles pour la modélisation des problèmes de transmissions d'onde électromagnétique entre diélectrique et méta-matériau*, Thèse de l'université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, 2007.
-