



HAL
open science

Contribution à la notion d'autosimilarité et à l'étude des trajectoires de champs aléatoires.

Céline Lacaux

► **To cite this version:**

Céline Lacaux. Contribution à la notion d'autosimilarité et à l'étude des trajectoires de champs aléatoires.. Probabilités [math.PR]. Université de Lorraine, 2012. tel-00764398

HAL Id: tel-00764398

<https://theses.hal.science/tel-00764398>

Submitted on 14 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉMOIRE

présenté par

Céline LACAUX

en vue de l'obtention de

l'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

de l'Université de Lorraine

Discipline : **Mathématiques Appliquées**Spécialité : **Probabilités et Statistique****Contribution à la notion d'autosimilarité
et à l'étude des trajectoires de champs aléatoires**

Soutenue le 6 décembre 2012 à 10 h 30

à l'Institut Élie Cartan

Composition du jury

Jean-Marc BARDET	Université Paris 1	Président
Serge COHEN	Université Paul Sabatier, Toulouse	Examinateur
Anne ESTRADE	Université Paris Descartes	Rapporteur
Stéphane JAFFARD	Université Paris-Est, Créteil Val-de-Marne	Rapporteur
Ivan NOURDIN	Université de Lorraine, Nancy	Examinateur
Anne PHILIPPE	Université de Nantes	Examinatrice
Gennady SAMORODNISTKY	Université de Cornell, Ithaca	Rapporteur
Samy TINDEL	Université de Lorraine, Nancy	Parrain scientifique

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Anne Estrade, Stéphane Jaffard et Gennady Samorodnitsky qui m'ont fait le plaisir d'accepter de rapporter mon habilitation. Je suis ravie d'avoir soumis mon travail à leur expertise, tous étant dans leur domaine de recherche respectif des personnes que j'estime. Je regrette de ne pas avoir trouvé une date de soutenance permettant de les réunir tous les trois. J'espère avoir prochainement l'occasion de remercier de vive voix Gennady Samorodnitsky, qui est donc le grand absent et qui n'aura pas eu la chance (espérons que tous jugent ainsi) de déguster le pot fait maison et de découvrir le fameux Tariquet.

La procédure à Nancy veut qu'avant d'être transmis aux rapporteurs, le dossier d'habilitation soit expertisé par un local, en l'occurrence Ivan Nourdin, mais aussi par un extérieur, en l'occurrence Jean-Marc Bardet. En général, les noms de ces pré-rapporteurs ne sont pas dévoilés. . . Mais mon *parrain scientifique* Samy Tindel a vendu la mèche et j'en suis ravie. Je suis très touchée qu'Ivan et Jean-Marc aient accepté ce travail de pré-rapporteur, travail essentiel qui m'a permis de passer la première étape du processus d'habilitation nancéien.

Serge Cohen ayant été mon directeur de thèse, je souhaitais qu'il participe à ma soutenance d'habilitation. Je le remercie d'avoir accepté de venir sur Nancy dans une période assez chargée pour lui.

Je suis ravie qu'Anne Philippe ait accepté de faire partie de mon jury. Je la remercie pour avoir bien voulu traverser d'ouest en est la France afin de participer à la dernière étape du processus d'habilitation nancéien, étape tout aussi importante que la première.

Pour terminer mes remerciements au jury, il est évident que je remercie Samy Tindel non seulement pour avoir vendu la mèche concernant mes pré-rapporteurs mais aussi pour avoir accepté de jouer le rôle de *parrain scientifique*. La lettre qu'il a écrite pour accompagner mon dossier d'habilitation m'a beaucoup touchée. Je le remercie aussi pour avoir pensé à mon nom quand il a monté l'équipe INRIA *BIology, Genetic and Statistics* (acronyme BIGS). Enfin, j'en profite pour lui dire qu'il est sans nul doute un de mes collaborateurs préférés !

Je souhaite à présent remercier tous mes collaborateurs, ceux avec lesquels nos travaux ont donné lieu à publication comme ceux avec lesquels les discussions n'ont pas abouties ou sont gardées dans un coin de nos têtes en espérant un jour trouver une solution à nos questions ! J'adresse donc un grand merci à Hermine Biermé, Fabrice Baudoin, Serge Cohen, Fabrice Gamboa, Jacques Istas, Michel Ledoux, Jean-Michel Loubes, Renaud Marty, Aurélie Muller-Gueudin, Radu Ranta, Nicolas Savy, Hans-Peter Scheffler, Samy Tindel, Magalie Thomassin, Joseph Vives, Laura Vinckenbosch et Yimin Xiao. J'ai aussi une pensée pour Tiphaine Obara, la première étudiante que j'ai encadrée en master 2 avec Samy et Magalie sur notre projet autour de la thérapie photodynamique en cancérologie. J'espère qu'un jour elle rejoindra ma liste de collaborateurs.

Les conditions de travail à Nancy sont plus qu'excellentes à l'IECN comme à l'École des Mines. À l'IECN, tout est facilité par des assistantes ultra-compétentes, sur lesquelles nous pouvons toujours compter. Je remercie tout particulièrement Laurence, Hélène et

Nathalie qui se sont occupées des missions des membres de mon jury. Côté INRIA, je souhaite adresser un merci à Sophie. Enfin, à l'IECN, Didier et Bernard, les ingénieurs informaticiens, sont d'une aide très précieuse. En particulier merci à Didier pour avoir lancé certains programmes ayant permis d'illustrer ce mémoire sur son propre ordinateur.

À l'École des Mines, le personnel administratif est bien heureusement tout aussi compétent qu'à l'IECN! Je tiens tout particulièrement à remercier Françoise, assistante de notre département *Génie Industriel et Mathématiques Appliquées*, sans laquelle nous serions parfois bien perdus! Je remercie aussi Sophie pour son aide précieuse dans les démarches administratives mais aussi pour l'organisation du Noël de l'école, évènement source de joie pour tous les enfants du personnel! Bien évidemment, j'adresse un grand merci à Ulrike même si parfois elle téléphone après 22h pour évoquer la recherche de stage d'un élève!! Et puis, merci à Thierry, qui imprime en dernière minute, toujours avec le sourire, les documents de cours ou encore les mémoires d'HDR. Enfin, je remercie tous les membres du secrétariat général, de la DAEC, de la DAI, de la scolarité et de la direction de l'école.

À présent, voici un petit paragraphe pour remercier bon nombres d'enseignants et/ou chercheurs nancéiens membres ou non de l'IECN et non cités précédemment. Mes premiers remerciements vont à Yves qui m'a tout appris sur SAS. Je souhaite aussi remercier Sandie pour toutes nos discussions enflammées qui rappellent avec plaisir le sud. Xavier, lui, mérite un merci de ma part simplement car nous nous entendons à merveille. Merci à Denis avec lequel j'ai le plaisir de partager cette année la responsabilité de certains cours. Côté École des Mines, j'ai aussi une pensée pour Bart, Christophe, Ingrid, Jean-Louis, Frédéric, Samuel, Wahiba et Yannick des collègues (anciens ou non) forts sympathiques. Côté purement IECN, merci à Vladimir un connaisseur en rugby, au duo Pierre et Bernard qui rend les groupes de travail plus qu'intéressants, à Aline avec laquelle j'ai partagé de très bons moments dans notre bureau, à Takéo qui m'a merveilleusement suppléé à l'École des Mines pendant mes congés, à Angelo, à Antoine L., à Nicolas, à Olivier, à Régine, . . . Et bien sûr, j'adresse un énorme merci à ma grande amie Madalina qui m'a permis de m'intégrer rapidement au laboratoire et est toujours présente en cas de coup dur.

Enfin, j'apprécie la confiance qu'Antoine H. me témoigne en me confiant diverses responsabilités aux Mines. Je souhaite le remercier pour sa bonne humeur, sa patience communicative mais aussi pour avoir servi de cobaye le lundi en testant certaines préparations pour le pot de mon habilitation!

Je tiens aussi à remercier les membres (anciens ou non) du CEREMADE et du MAP 5 qui m'ont accueillie respectivement pour mon année d'ATER et pour une année de délégation. En particulier, j'ai une pensée pour Ivan, Arnaud, Jean-Michel, Céline, José et Filipe pour le CEREMADE et pour Annie, Anne E., Frédéric, Hermine, Yves et Servane pour le MAP 5. Enfin, pour en terminer avec les remerciements plus ou moins professionnels, merci à tous les membres des projets auxquels j'ai participé ou participe ainsi qu'à Erwan et Anne E.-L. mes compères au CNU.

Merci à *Nono et tatie Anne* pour tous les bons moments passés en leur compagnie sur Nancy comme sur Toulouse et pour leur voiture qui nous a été plus qu'utile en mai 2010! Merci à Aurélia notamment pour nos virées parisiennes.

Mes derniers remerciements, mais non les moindres, vont à ma famille. Merci à mes parents pour leur soutien sans faille; merci à eux ainsi qu'aux parents de Reno pour les longs trajets qu'ils accomplissent simplement pour que je participe à une conférence, un séminaire ou une réunion CNU. J'ai aussi une affectueuse pensée pour mon petit frère Frédéric. Enfin, j'adresse un grand et tendre merci à Reno dont la patience est parfois mise à rude épreuve, et à mon merveilleux Gauthier.

Table des matières

Remerciements	3
Introduction	7
1 De l'autosimilarité classique à l'autosimilarité matricielle locale	11
1.1 Autosimilarité classique	11
1.2 Autosimilarité locale asymptotique	13
1.2.1 Champs euclidiens	13
1.2.2 Généralisation aux champs indexés par une variété riemannienne . .	14
1.3 Autosimilarité matricielle	16
1.3.1 Définition	16
1.3.2 Coordonnées polaires par rapport à une matrice	18
1.4 Autosimilarité matricielle locale asymptotique	19
2 Modèles (multi)-fractionnaires du second ordre	21
2.1 Champs multifractionnaires harmonisables de type Lévy	21
2.1.1 Le modèle	21
2.1.2 Comparaison avec le champ brownien multifractionnaire	22
2.1.3 Autre approche pour introduire le modèle	26
2.2 Une généralisation des champs de Lévy fractionnaires	26
2.3 Champs multifractionnaires de type draps	29
2.3.1 Introduction	29
2.3.2 Champ gaussien défini par un principe d'invariance	30
2.3.3 Autosimilarité locale des accroissements	31
2.3.4 Exposants de Hölder et multi-Hölder	33
2.3.5 Extension aux modèles stables	34
2.4 Champs gaussiens anisotropes : étude des excursions	34
3 Séries « shot-noises » : simulation et module de continuité	39
3.1 Séries « shot noises » simples	39
3.1.1 Vitesse de convergence presque sûre	39
3.1.2 Vitesse de convergence absolue	41
3.1.3 Contrôle uniforme en α	42
3.2 Simulation de champs infiniment divisibles	43
3.2.1 Construction de la mesure aléatoire Λ	43
3.2.2 Approximation par une série type « shot noises »	44
3.2.3 Partie gaussienne	46
3.2.4 Modèles harmonisables	47
3.2.5 Avantages/Inconvénients	48
3.3 Régularité des champs stables	49
3.3.1 Séries de LePage	49
3.3.2 Modèles à autosimilarité matricielle	50

3.3.3	Modèles harmonisables à autosimilarité matricielle locale	52
3.3.4	Séries conditionnellement sous-gaussiennes	54
4	Autour des statistiques	57
4.1	Estimation et champs de Lévy multifractionnaires	57
4.1.1	Variations quadratiques généralisées	57
4.1.2	Estimation via des coefficients d'ondelettes	59
4.2	Normalité asymptotique locale (LAN)	62
4.3	Algorithme de débruitage	64
5	Perspectives de recherche	69
5.1	Champs à autosimilarité matricielle locale ou non	69
5.1.1	Propriétés des champs tangents	69
5.1.2	Estimation et simulation	70
5.1.3	Les modèles stables	71
5.1.4	Champs anisotropes de type Lévy	71
5.2	Champs vérifiant un principe d'invariance	72
5.2.1	Modèles gaussiens	72
5.2.2	Modèles stables et séries « shot noises »	73
5.2.3	Généralisations	73
5.3	Champs indexés par une variété	74
5.4	La propriété LAN	75
5.5	Intégrale stochastique	75
5.6	Transport de la lumière	76
	Listes de publications et travaux	77
	Bibliographie	78

Introduction

Afin d'étudier un phénomène réel, il est essentiel d'essayer de l'approcher au mieux par un modèle mathématique. Ainsi, dans l'idée de modéliser des phénomènes à longue dépendance, B. Mandelbrot et J. Van Ness ont introduit le mouvement brownien fractionnaire $\{B_H(t); t \in \mathbb{R}\}$ dans [MVN68]. Ce modèle, implicitement défini dans [Kol40], est à un facteur multiplicatif près le seul processus gaussien centré autosimilaire d'ordre H ayant des accroissements stationnaires. Son paramètre d'autosimilarité $H \in]0, 1[$, appelé paramètre de Hurst, donne sa loi mais aussi la régularité de ses trajectoires. De plus, le mouvement brownien fractionnaire permet de modéliser des phénomènes irréguliers et est limite d'un principe d'invariance, ce qui est très satisfaisant pour les physiciens notamment. Dès lors, il est utilisé dans de nombreux domaines dont l'hydrologie, l'écologie, la mécanique des fluides ou encore la finance. Ceci étant, le mouvement brownien fractionnaire, ou sa généralisation le champ brownien fractionnaire $\{B_H(x); x \in \mathbb{R}^d\}$, n'est pas adapté pour la modélisation de phénomènes non homogènes. Par suite, dans l'idée de modéliser des phénomènes dont l'irrégularité des trajectoires varie ou des phénomènes anisotropes, de nombreux champs autosimilaires ou presque ont été introduits. L'introduction de ces champs a conduit à l'évolution de la notion d'autosimilarité car ces champs peuvent ne ressembler que localement à un champ autosimilaire ou satisfaire une propriété d'autosimilarité de type anisotrope.

La plupart de mes travaux de recherche s'insèrent dans ces développements. J'ai notamment été amenée à introduire de nouvelles notions d'autosimilarité et je m'intéresse aux propriétés de régularité des modèles, à leur simulation et l'estimation des paramètres qui les caractérisent.

De 2006 à 2009, j'ai été membre du projet ANR *Géométrie Stochastique et Autosimilarité* (acronyme GDSA) dont le coordinateur était Fabrice Baudoin (Purdue, USA). Ce projet a été pour moi l'occasion de découvrir les variétés et d'entamer une collaboration avec Jacques Istas (LJK, Grenoble) qui a donné lieu à [IL12]. Même si certaines données (comme les données géostatistiques) vivent clairement sur une variété (la sphère en l'occurrence), peu de travaux autour de champs de type fractionnaires ou multifractionnaires indexés par une variété non euclidienne existent. La notion d'autosimilarité locale, que nous avons introduit dans [IL12], pour les champs indexés par les variétés donne un cadre pour définir la notion de champ fractionnaire ou multifractionnaire indexé par une variété quelconque. Cette propriété d'autosimilarité généralise celle définie par [BJR97, PLV95] pour des champs indexés par un espace euclidien.

À peu près à la même période, le projet ANR MIPOMODIM (acronyme de *Milieux Poreux, Modèles, Images*), coordonné par Anne Estrade (MAP5, Université Paris Descartes), s'intéressait lui à la modélisation de milieux poreux et ce essentiellement à l'aide de modèles anisotropes. Les projets GDSA et MIPOMODIM ayant des intérêts communs, plusieurs collaborations entre les membres de ces projets se sont naturellement nouées. En particulier, mon premier travail [BL09] avec Hermine Biermé (MAP5, Université Paris Descartes), membre du projet ANR MIPOMODIM, s'intéresse aux propriétés de champs stables anisotropes. De plus, profitant de ces deux projets ANR, nous avons pu financer la venue de Yimin Xiao (Michigan, USA) en 2009 pour un mois en France. Avec Hermine

Biermé et Yimin Xiao, nous avons alors entamer une collaboration sur les modèles gaussiens anisotropes (cf. [BLX09]).

En parallèle de mes activités de recherche autour de la notion d'autosimilarité, j'ai intégré la jeune équipe projet INRIA *Biology Genetics and Statistics* (dont l'acronyme est BIGS). L'essentiel des activités de l'équipe est tourné vers les applications en médecine et plus particulièrement en cancérologie. En particulier, je participe à deux projets pluridisciplinaires en collaboration avec le CRAN (acronyme de *Centre de Recherche en Automatique de Nancy*). Le premier projet a donné lieu à la prépublication [LMGRT12] portant sur un algorithme de débruitage par seuillage itératif. Le second projet, qui a débuté l'an dernier, porte sur le transport de la lumière. Notre but principal est d'aider les médecins à mettre en place une thérapie photodynamique pour traiter une tumeur au cerveau. De plus, dans le cadre de ce projet, nous venons d'obtenir le projet exploratoire pluridisciplinaire Bio-Maths-Info (PEPS-BMI) OPTIQUE-PDT (acronyme de *mOdélisation et oPTimisation de l'Irradiance dans les tissus biologiques hétérogènes traités par Thérapie PhotoDynamique interstitielle*). Ce projet PEPS, projet porté par Magalie Thomassin (CRAN), comprend des membres du CRAN, de BIGS mais aussi du Centre Alexis Vautrin (centre de lutte contre le cancer de Lorraine) et de l'Unité 703 de l'INSERM (Lille). Enfin, avec Magalie Thomassin et Samy Tindel (IECN, responsable de BIGS), nous avons encadré Tiphaine Obara en stage de Master 2 sur la première partie du projet et nous encadrerons une post-doctorante dès octobre (post-doctorat financé par INRIA).

Enfin, en 2010-2011, j'ai obtenu un an de délégation au sein du MAP5 à l'Université Paris Descartes. Cette délégation m'a permis d'avancer sur mes travaux communs avec Hermine Biermé. Nous avons en particulier terminé l'article [BLS11] sur les modèles localement à autosimilarité matricielle. Nous avons aussi entamé deux autres projets. Le premier projet porte sur l'étude de champs définis par une série conditionnellement sous-gaussiennes (travail en cours de rédaction [BL12]). Le second projet concerne le problème crucial de l'estimation du paramètre d'autosimilarité d'un champ à autosimilarité matricielle. Ces travaux s'insèrent dans le projet ANR MATAIM (acronyme de *Modèles Anisotropes de Textures. Applications à l'Imagerie Médicale*), projet ANR coordonné par Frédéric Richard (LATP, Marseille) et dont Hermine Biermé et moi-même sommes membres. En particulier, un des objectifs est d'aider au diagnostic de l'ostéoporose en proposant des modèles pour les radiographies du calcaneum. Nous pouvons compter sur l'INSERM U 658 (Orléans) qui est partie prenante dans le projet ANR MATAIM pour les données réelles (c'est-à-dire les radiographies).

La caractéristique principale des modèles que j'ai étudiés étant leur propriété d'autosimilarité, j'ai décidé de consacrer le premier chapitre de ce mémoire à toutes les notions d'autosimilarité que j'ai pu rencontrer depuis mes débuts dans la recherche. Le chapitre suit plus ou moins l'ordre chronologique d'apparition de ces diverses notions. Il commence bien sûr par la notion classique d'autosimilarité satisfaite par le mouvement brownien fractionnaire. Cette propriété étant souvent trop rigide, elle a ensuite été relaxée par [BJR97, PLV95]. Ces travaux sont à l'origine de la notion d'autosimilarité que nous avons introduite avec Jacques Istas (LJK, Grenoble) pour les champs indexés par des variétés. Le chapitre se poursuit par les versions anisotropes d'autosimilarité : autosimilarité matricielle et autosimilarité matricielle locale asymptotique. J'ai introduit cette dernière notion d'autosimilarité en collaboration avec Hermine Biermé (MAP5, Université Paris Descartes) et Hans-Peter Scheffler (Université de Siegen, Allemagne) dans l'idée de pouvoir modéliser des phénomènes dont les propriétés d'anisotropie sont susceptibles d'évoluer le long des trajectoires.

Le deuxième chapitre introduit tous les modèles du second ordre que j'ai étudiés. En particulier, il présente mes travaux de thèse [Lac04b, Lac05] portant sur des champs non gaussiens du second ordre. Suite à mes travaux récents, il existe plusieurs pistes pour généraliser les résultats issus de ma thèse, pistes qui seront données dans le chapitre de perspectives qui conclut ce mémoire. De plus, ce deuxième chapitre présente aussi les résultats obtenus dans [LM11] avec Renaud Marty (IECN) sur des champs définis par un principe d'invariance. En particulier, nous établissons que les champs étudiés ressemblent localement à des draps browniens fractionnaires. Enfin le chapitre se termine par l'étude des dimensions de Hausdorff des ensembles d'excursions d'un champ gaussien anisotrope. L'étude de ces dimensions a été menée en collaboration avec Hermine Biermé (MAP5, Université Paris Descartes) et Yimin Xiao (Michigan, USA) dans [BLX09].

Le troisième chapitre présente tous les résultats que j'ai obtenus sur les séries « shot noises ». Ces séries m'ont tout d'abord permis de proposer une méthode de simulation pour les champs de Lévy multifractionnaires dans [Lac04c]. Par la suite, avec Michel Ledoux (Institut de Mathématiques de Toulouse) et Serge Cohen (Institut de Mathématiques de Toulouse), nous avons adapté cette méthode à une classe très générale de champs infiniment divisibles dans [CLL08]. Les techniques que nous avons employées sont très différentes de mon premier papier sur la méthode. De plus, en collaboration avec Hermine Biermé (MAP5, Université Paris Descartes), à l'aide de ces séries, nous avons réussi à obtenir une borne précise du module de continuité de champs α -stables harmonisables à autosimilarité matricielle dans [BL09]. Nous avons aussi établi que ces modèles (contrairement à ceux définis par une moyenne mobile) ont les mêmes propriétés de régularité que les modèles gaussiens. Nous avons ensuite, avec Hans-Peter Scheffler (Université de Siegen, Allemagne), généralisé ce travail pour obtenir des champs anisotropes de type multifractionnaire dans [BLS11]. La fin du chapitre présente succinctement le papier [BL12] qui est en cours d'écriture. Dans ce papier, avec Hermine Biermé, nous reprenons la méthode utilisée dans nos travaux [BL09, BLS11] dans le cadre de séries conditionnellement sous-gaussiennes et donnons un critère général pour étudier la régularité de champs pouvant se représenter à l'aide d'une telle série. En particulier, nous pouvons appliquer ce critère à l'étude de champs stables ou multi-stables.

En vue de valider un modèle sur des données réelles, il est essentiel de pouvoir estimer de façon efficace les paramètres du modèle. J'étudie donc des estimateurs pour les modèles que j'ai étudiés. Le chapitre 4, qui s'intéresse à mes travaux orientés vers la statistique, débute par la présentation des résultats obtenus dans [Lac04b] pour l'estimation de la fonction multifractionnaire d'un champ de Lévy ainsi que ceux établis en collaboration avec Jean-Michel Loubes (Institut de Mathématiques de Toulouse) dans [LL07] pour des processus fractionnaires. Le travail [Lac04b] s'intéresse à un estimateur basé sur les variations quadratiques alors que [LL07] propose d'estimer le paramètre de Hurst à l'aide des coefficients d'ondelettes du signal modélisé. Dans le cadre du mouvement brownien fractionnaire, ces deux types d'estimateurs, obtenus en filtrant différemment le champ modélisant les données, étaient déjà bien connus.

De plus, il est intéressant de construire des estimateurs optimaux, c'est-à-dire atteignant au moins asymptotiquement la borne de Cramér-Rao. Les modèles paramétriques satisfaisant la propriété dite LAN (acronyme de *Local Asymptotic Normality*) fournissent un cadre très agréable pour la construction de ces estimateurs. En quelque sorte, dans un modèle LAN, nous pouvons quantifier l'optimalité d'un estimateur en comparant ses performances au second ordre (c'est-à-dire en terme de variance) avec ses performances dans un modèle gaussien bien plus simple. En collaboration avec Serge Cohen, Fabrice Gamboa

et Jean-Michel Loubes (tous trois membres de l'Institut de Mathématiques de Toulouse), j'ai établi cette propriété dans [CGLL11], pour une famille de modèles contenant en particulier les modèles ARFIMA. De plus, nous avons aussi pu en déduire que le mouvement brownien fractionnaire est un modèle LAN.

Enfin, la dernière partie du chapitre présente un travail [LMGRT12] en collaboration avec Aurélie Muller-Gueudin (IECN, BIGS), Samy Tindel (IECN, BIGS) et Radu Ranta (CRAN). Ce travail porte sur un algorithme de débruitage par seuillage itératif utilisé pour nettoyer des signaux d'électrocardiogramme.

Le dernier chapitre de ce mémoire présente, de façon non exhaustive, quelques pistes de recherche en lien direct avec les travaux présentés ainsi que le projet en collaboration avec le CRAN sur le transport de lumière et l'application en photothérapie.

Chapitre 1

De l'autosimilarité classique à l'autosimilarité matricielle locale

Mes travaux de recherche portent essentiellement sur des champs aléatoires vérifiant une propriété d'autosimilarité globale, locale et/ou prenant en compte l'anisotropie du champ proposé comme modèle. Ce premier chapitre introduit toutes les notions d'autosimilarité que j'ai pu rencontrer ou définir. Il me permet d'expliquer ce qui a conduit à définir ces diverses notions d'autosimilarité mais aussi d'introduire quelques notations utiles dans la suite de ce mémoire. Je mentionne au fur et à mesure mes travaux liés à ces notions et le chapitre du mémoire dans lequel ils seront plus précisément présentés.

En particulier, ce chapitre présente mon papier [IL12], en collaboration avec Jacques Istas (LJK, Grenoble). Dans ce papier, nous étendons la notion d'autosimilarité locale aux champs indexés par des variétés pour pouvoir modéliser, par exemple, des données naturellement indexées par une sphère (données géostatistiques). Enfin, je présente aussi dans ce chapitre quelques résultats sur l'autosimilarité matricielle issus de mes travaux [BL09, BLS11]. Les autres résultats de ces papiers (portant sur la régularité des modèles étudiés) seront eux présentés dans le chapitre 3 de ce mémoire.

1.1 Autosimilarité classique

Rappelons qu'un champ $\{X(x); x \in \mathbb{R}^d\}$ est autosimilaire d'ordre H si

$$\forall \varepsilon > 0, \left\{ X(\varepsilon x); x \in \mathbb{R}^d \right\} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \varepsilon^H \left\{ X(x); x \in \mathbb{R}^d \right\} \quad (1.1)$$

où (\mathcal{L}) désigne l'égalité en loi. Le champ autosimilaire le plus connu est sans nul doute le champ brownien fractionnaire $B_H = \{B_H(x); x \in \mathbb{R}^d\}$, encore appelé mouvement brownien fractionnaire quand $d = 1$. Pour être plus précise, à une constante de multiplication près, B_H est l'unique champ gaussien réel centré isotrope à accroissements stationnaires et auto-similaire d'ordre $H \in]0, 1]$. Le champ brownien fractionnaire B_H dit standard, c'est-à-dire tel que

$$\text{Var} B_H(t) = \|t\|^{2H},$$

a l'avantage d'être un modèle dont la loi est caractérisée par un seul paramètre, en l'occurrence l'ordre d'autosimilarité H .

L'ordre d'autosimilarité H d'un champ X est souvent lié à la régularité de ses trajectoires. Considérons, par exemple, un champ gaussien X qui est à accroissements stationnaires et qui satisfait (1.1). Le champ X étant gaussien stationnaire, son variogramme v , qui vérifie

$$v(u) = \mathbb{E} \left([X(u) - X(0)]^2 \right) = \mathbb{E} \left([X(x+u) - X(x)]^2 \right),$$

caractérise sa loi. De plus, la régularité des trajectoires de X est donnée par le comportement du variogramme v en $u = 0$. Notons par ailleurs que la propriété d'autosimilarité vérifiée par X signifie que son variogramme v est une fonction H -homogène, c'est-à-dire que

$$v(u) = \|u\|^{2H} v\left(\frac{u}{\|u\|}\right), \forall u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

À condition que v soit continu et ne s'annule pas sur la sphère \mathbb{S}_{d-1} de \mathbb{R}^d , son comportement en 0, et donc la régularité des trajectoires de X , est prescrit par le paramètre H car

$$c_1 \|u\|^{2H} \leq v(u) \leq c_2 \|u\|^{2H}$$

avec $0 < c_1 < c_2 < +\infty$. En identifiant X à une de ses modifications continues, ce contrôle de v permet d'affirmer que l'exposant de Hölder ponctuel en x

$$H_x(x) = \sup \left\{ \gamma > 0, \lim_{y \rightarrow 0} \frac{X(x+y) - X(x)}{\|y\|^\gamma} = 0 \right\}$$

est presque sûrement égal au paramètre d'autosimilarité H . En d'autres termes, l'exposant H donne la rugosité des trajectoires de X : plus H est petit, plus les trajectoires de X sont irrégulières. La figure 1.1 illustre ce point pour un champ brownien fractionnaire B_H défini sur \mathbb{R}^2 . Elle est obtenue en utilisant un code Matlab qui implémente la méthode de simulation proposée par [Ste02], code que j'ai réalisé pendant ma thèse en collaboration avec Hermine Biermé (MAP5, Université Paris Descartes) et Aurélia Fraysse (L2S, Supélec).

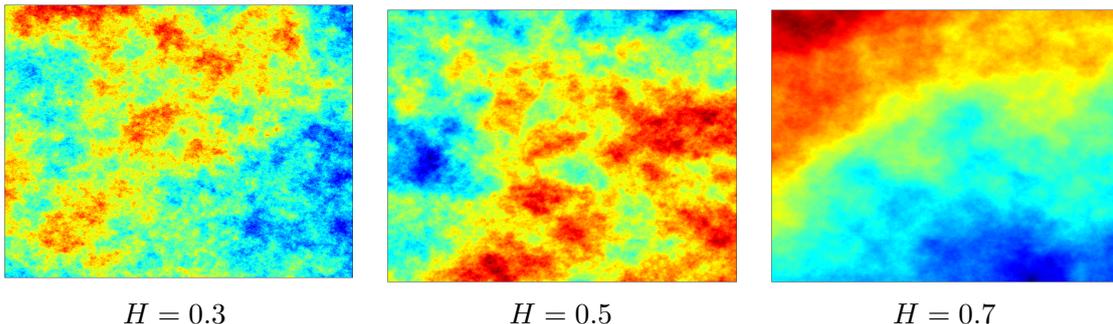


FIGURE 1.1: Simulation exacte de champs browniens fractionnaires $B_H = \{B_H(x); x \in \mathbb{R}^2\}$ à partir de la méthode proposée par [Ste02].

La simplicité et le lien avec la rugosité des trajectoires expliquent en partie la popularité des modèles autosimilaires et plus particulièrement celle des champs browniens fractionnaires. Nous pouvons toutefois citer deux inconvénients qui ont motivé la généralisation de la notion d'autosimilarité classique (1.1).

Tout d'abord, pour obtenir un champ X dont la régularité varie avec la position, c'est-à-dire tel que l'exposant de Hölder ponctuel $H_x(x)$ dépend effectivement du point x , la propriété d'autosimilarité (1.1) est en général trop forte car elle porte sur tout le champ. Afin de palier à ce problème, [BJR97, PLV95] ont introduit une notion d'autosimilarité locale, que je présente dans le paragraphe 1.2.1 ci-après et que j'ai généralisée en collaboration avec Jacques Istas dans [IL12] au cadre de champs indexés par une variété (cf. paragraphe 1.2.2).

De plus, la propriété d'autosimilarité (1.1) ne révèle pas l'éventuelle anisotropie du modèle X . Par exemple, pour un champ gaussien continu X à accroissements stationnaires

qui satisfait (1.1), l'exposant directionnel ponctuel de Hölder

$$H_X(x, \theta) = \sup \left\{ \gamma > 0, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X(x + t\theta) - X(x)}{|t|^\gamma} = 0 \right\}$$

en x dans la direction θ est presque sûrement égal à H et donc ne dépend pas de la direction θ . Afin de palier à ce problème, [BMS07] a proposé une notion d'autosimilarité par rapport à une matrice (cf. paragraphe 1.3). Cette propriété étant globale, j'ai introduit, en collaboration avec Hermine Biermé et Hans-Peter Scheffler, une version locale dans [BLS11] (cf. paragraphe 1.4).

En général, les modèles que j'ai étudiés ne vérifient pas la propriété globale d'autosimilarité (1.1) mais l'une des versions affaiblies mentionnées ci-dessus et présentées dans la suite de ce chapitre. Toutefois, en collaboration avec Serge Cohen, Fabrice Gamboa et Jean-Michel Loubes, j'ai établi dans [CGLL11] la propriété LAN (acronyme de *Local Asymptotic Normality*) pour le mouvement brownien fractionnaire qui lui satisfait bien (1.1). Ce travail sera présenté dans le chapitre 4.

1.2 Autosimilarité locale asymptotique

1.2.1 Champs euclidiens

Afin de modéliser les phénomènes dont la régularité ponctuelle (ou locale) varie, [BJR97, PLV95] ont introduit un modèle gaussien, appelé mouvement brownien multifractionnaire, qui généralise le mouvement brownien fractionnaire. Leur idée consiste à remplacer dans l'une des représentations intégrales du mouvement brownien fractionnaire l'indice de Hurst H par une fonction h variant le long des trajectoires. Plus précisément, [BJR97] définit le champ brownien fractionnaire B_H par sa représentation harmonisable, c'est-à-dire par

$$B_H(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{H+d/2}} \widehat{W}(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

avec \widehat{W} une certaine mesure gaussienne complexe, et remplace dans l'intégrale le paramètre H par $h(x)$. Pour définir un mouvement brownien multifractionnaire, [PLV95] procède de même mais en considérant une représentation moyenne mobile (et non harmonisable) du mouvement brownien fractionnaire B_H .

En procédant ainsi, si la fonction h n'est pas constante, les processus obtenus par [BJR97, PLV95] ne sont plus à accroissements stationnaires et ne satisfont plus la propriété d'autosimilarité (1.1). Néanmoins ils satisfont la version locale suivante.

Définition 1.2.1. *Un champ $\{X(x); x \in \mathbb{R}^d\}$ est dit localement asymptotiquement autosimilaire d'ordre $h(x_0)$ au point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ si*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left\{ \frac{X(x_0 + \varepsilon u) - X(x_0)}{\varepsilon^{h(x_0)}}; u \in \mathbb{R}^d \right\} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \left\{ Z_{x_0}(u); u \in \mathbb{R}^d \right\} \quad (1.2)$$

avec Z_{x_0} un champ non dégénéré (c'est-à-dire presque sûrement non identiquement nul).

Notons d'ores et déjà que cette propriété d'autosimilarité généralise bien la propriété d'autosimilarité classique (1.1). Un champ X autosimilaire d'ordre H est effectivement localement asymptotiquement autosimilaire d'ordre H en $x_0 = 0$.

D'autre part, la propriété d'autosimilarité asymptotique locale dit simplement qu'autour de x_0 , le champ X ressemble à un champ Z_{x_0} autosimilaire d'ordre $h(x_0)$:

$$X(x_0 + \varepsilon u) - X(x_0) \stackrel{(\mathcal{L})}{\asymp} \varepsilon^{h(x_0)} Z_{x_0}(u) \stackrel{(\mathcal{L})}{=} Z_{x_0}(\varepsilon u).$$

Au cours de ces dernières années, les articles introduisant et/ou étudiant des champs vérifiant la propriété (1.2) se sont multipliés. Nous pouvons, sans être exhaustifs, citer [BJR97, PLV95, BCI02, ALV00, ST04, FLGLV09] ainsi que mes travaux de recherche [Lac04b, Lac04c, Lac05, LM11] qui sont présentés dans le chapitre 2 de ce mémoire.

Pour terminer, précisons qu'en général (1.2) est à comprendre au sens de la convergence des lois fini-dimensionnelles. Ceci étant, si le champ X est continu, il est classique de demander une convergence en loi dans l'espace des fonctions continues muni de la topologie de la convergence uniforme. Dans ce cas, [Fal02] montre que si (1.2) est vérifiée en tout point x_0 , alors pour presque tous les points x_0 , le champ tangent Z_{x_0} est à accroissements stationnaires. Les champs autosimilaires à accroissements stationnaires jouent donc un rôle important et même essentiel dans l'étude de la propriété d'autosimilarité locale asymptotique.

1.2.2 Généralisation aux champs indexés par une variété riemannienne

Les champs autosimilaires ou localement autosimilaires décrits précédemment permettent de modéliser bon nombre de phénomènes aléatoires que l'on peut indexer par le temps (par exemple, en finance) ou plus généralement par l'espace euclidien \mathbb{R}^d (par exemple, en radiologie). Maintenant, il existe des données naturellement indexées par une variété non euclidienne telles les données géostatistiques. Très peu de champs de type fractionnaire ont été introduits pour modéliser ces données. Nous pouvons citer les travaux de [Ist05, Ist06] qui donnent une notion faible de champs fractionnaires. Ceci étant, jusqu'à [IL12], un travail en collaboration avec Jacques Istas, aucune version d'autosimilarité pour des champs indexés par des variétés n'avait été proposée.

Afin de définir l'analogue de la propriété (1.2) pour des champs indexés par une variété riemannienne \mathcal{M} , le problème est qu'en général l'addition n'est pas définie. L'idée est alors d'interpréter géométriquement le point $x_0 + \varepsilon u$ de \mathbb{R}^d . Les géodésiques de \mathbb{R}^d étant les segments, ce point $x_0 + \varepsilon u$ peut être défini comme étant le point du segment $[x_0, x_0 + u]$ à distance $\varepsilon\|u\|$ de x_0 . En d'autres termes,

$$x_0 + \varepsilon u = \exp_{x_0}(\varepsilon u)$$

avec \exp_{x_0} l'exponentielle au point x_0 . Nous basant sur cette interprétation, sur une variété riemannienne \mathcal{M} de dimension d , dans [IL12], nous proposons de définir un champ localement asymptotiquement autosimilaire au point M_0 en remplaçant dans (1.2) le point x_0 par M_0 et le point $x_0 + \varepsilon u$ par

$$M_0 + \varepsilon u := \exp_{M_0}(\varepsilon u)$$

avec \exp_{M_0} l'exponentielle au point M_0 et $u \in T_{M_0}\mathcal{M} \cong \mathbb{R}^d$. Nous avons toutefois restreint l'espace dans lequel vit u de sorte à assurer que $M_0 + \varepsilon u$ soit bien défini pour tout $\varepsilon \leq 1$. Ainsi, $\delta > 0$ est choisi tel que l'exponentielle \exp_{M_0} est un difféomorphisme de la boule euclidienne $B(0, \delta)$ du plan tangent $T_{M_0}\mathcal{M}$ sur un voisinage $\mathcal{V}(M_0)$ de M_0 . Ce paramètre δ est choisi petit de sorte à avoir l'unicité de la géodésique entre tout point $M \in \mathcal{V}(M_0)$ et le point M_0 . Au final, un champ $X = (X(M))_{M \in \mathcal{M}}$ est localement asymptotiquement autosimilaire d'ordre $h(M_0)$ au point M_0 si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left\{ \frac{X(M_0 + \varepsilon u) - X(M_0)}{\varepsilon^{h(M_0)}}; u \in B(0, \delta) \right\} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \left\{ Z_{M_0}(u); u \in B(0, \delta) \right\} \quad (1.3)$$

avec Z_{M_0} un champ non dégénéré.

Une question naturelle est alors : pour quelles valeurs de $h(M_0)$, peut-on construire un champ localement asymptotiquement autosimilaire d'ordre $h(M_0)$ en M_0 ? Nous aidant fortement des résultats de [ST94] sur l'existence de champs autosimilaires à accroissements stationnaires, nous avons pu donner les valeurs possibles pour $h(M_0)$ sous une hypothèse de stationnarité faible pour X . En particulier, si le champ tangent Z_{M_0} est gaussien, alors il s'agit d'un champ brownien fractionnaire d'indice $h(M_0) \in]0, 1]$. Dans le cas où le champ Z_{M_0} est α -stable (avec $\alpha < 2$), nous savons simplement que le paramètre $h(M_0) \in]0, \max(1, 1/\alpha)[$. Finalement, ceci revient à étendre les résultats connus dans le cadre euclidien aux champs indexés par des variétés.

Nous avons aussi illustré la propriété (1.3) par le champ brownien fractionnaire indexé par une variété (cf. [Ist05]) et des champs gaussiens ou stables de type moyenne mobile. Concentrons-nous ici sur les exemples définis par une moyenne mobile.

Fixons $\alpha \in (0, 2]$ et considérons $W_{\alpha, \mathcal{M}}$ une mesure aléatoire α -stable réelle de mesure de contrôle la mesure uniforme $\sigma_{\mathcal{M}}$ sur la variété \mathcal{M} . Nous étudions alors le champ X défini par

$$X(M) = \int_{\mathcal{M}} d(M, M')^{H-d/\alpha} f(d(M, M')) W_{\alpha, \mathcal{M}}(dM'), \quad M \in \mathcal{M}$$

avec $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction \mathcal{C}^1 telle que $f(0) = 1$ et

$$\int_{\mathcal{M}} d(M, M')^{\alpha H-d} |f(d(M, M'))|^\alpha d\sigma(M') < +\infty.$$

Cette dernière condition assure que X est bien défini. Les autres conditions sur f assurent que f ne joue pas sur les singularités du noyau

$$M' \mapsto d(M, M')^{H-d/\alpha} f(d(M, M'))$$

que l'on intègre pour définir X . Le passage en carte exponentielle permet de se convaincre que le choix de f est dicté par le comportement du jacobien de l'exponentielle \exp_M . Nous avons donc dû être plus précis sur le choix de cette fonction f . De plus, afin de pouvoir appliquer rigoureusement le théorème de convergence dominée, nous nous sommes concentrés sur le cas où \mathcal{M} est soit une sphère soit un espace hyperbolique, et ce même si formellement la propriété d'autosimilarité locale (1.3) semble être vérifiée sur toute variété \mathcal{M} .

Avant de donner le comportement asymptotique de X autour du point M_0 , expliquons notre démarche pour l'obtenir. Nous avons tout d'abord introduit le champ annexe

$$Y(M_1, M_2) = \int_{\mathcal{M}} d(M_1, M')^{H-d/\alpha} f(d(M_2, M')) W_{\alpha, \mathcal{M}}(dM'), \quad M_1, M_2 \in \mathcal{M}$$

qui est tel que $X(M) = Y(M, M)$. Dans mes travaux, introduire un tel champ annexe obtenu en séparant les dépendances en M du noyau définissant X s'est toujours avéré très utile. Cette tactique est inspirée de [ALV00]. Ensuite, pour obtenir le comportement de

$$\begin{aligned} X(M_0 + \varepsilon u) - X(M_0) &= (Y(M_0 + \varepsilon u, M_0) - Y(M_0, M_0)) \\ &\quad + (Y(M_0 + \varepsilon u, M_0 + \varepsilon u) - Y(M_0 + \varepsilon u, M_0)), \end{aligned}$$

le point clef est de comparer les comportements de Y en ses variables M_1 et M_2 . Nous n'avons pas étudié la régularité des trajectoires de Y car nous n'avons besoin que d'un comportement en loi.

Si $H < 1$, le comportement de X en M_0 est donné par celui de Y en sa première variable, c'est-à-dire que les accroissements selon la variable M_2 sont négligeables. Finalement, nous

montrons que le champ X est localement autosimilaire d'ordre H en M_0 et que son champ tangent Z_{M_0} en M_0 est le champ α -stable défini par

$$Z_{M_0}(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\|u - x\|^{H-d/\alpha} - \|x\|^{H-d/\alpha} \right) W_{\alpha, \mathbb{R}^d}(dx).$$

En particulier, si $\alpha = 2$, comme attendu, Z_{M_0} est simplement un champ brownien fractionnaire d'indice H (indexé par la boule $B(0, \delta)$).

Si $H > 1$, le comportement de X autour de M_0 est donné par celui de Y en sa seconde variable. Dans ce cas, le champ X est localement autosimilaire d'ordre 1 en M_0 et le champ tangent est une forme linéaire aléatoire, c'est-à-dire que

$$Z_{M_0}(u) = \langle u, S_\alpha \rangle$$

avec S_α une variable aléatoire connue.

Dans le cas critique $H = 1$, les contrôles établis ne permettent pas de ramener le comportement de X à celui de Y en l'une ou l'autre de ses variables. Les contributions sont du même ordre et ce cas reste encore un problème ouvert.

En remplaçant l'indice H dans la définition de X par $h(M)$ avec $h : \mathcal{M} \rightarrow]0, +\infty[$ une fonction \mathcal{C}^1 , nous obtenons aussi la propriété (1.3) pour le modèle multifractionnaire

$$X(M) = \int_{\mathcal{M}} d(M, M')^{h(M)-d/\alpha} f(d(M, M')) W_{\alpha, \mathcal{M}}(dM'), \quad M \in \mathcal{M}.$$

En particulier, si $h(M_0) < 1$, l'indice d'autosimilarité locale asymptotique au point M_0 est égal à $h(M_0)$ et dépend effectivement du point M_0 .

1.3 Autosimilarité matricielle

1.3.1 Définition

L'autosimilarité classique (1.1) tout comme l'autosimilarité locale (1.2) ne prend pas en compte la nature éventuellement anisotrope du phénomène modélisé. Parmi les premiers modèles fractionnaires anisotropes introduits, nous pouvons citer [Kam96, ALP02, BE03]. Le drap brownien fractionnaire étudié dans [Kam96, ALP02] n'est pas à accroissements stationnaires mais à accroissements rectangulaires stationnaires. Son avantage est que sa régularité varie selon les directions mais son défaut est qu'il s'annule sur les axes et donc leur fait jouer un rôle très particulier. Les modèles proposés dans [BE03] sont eux à accroissements stationnaires et localement asymptotiquement autosimilaires au sens de [BJR97]. Ceci étant, leurs exposants de Hölder ponctuels ne révèlent pas leur anisotropie, c'est-à-dire ne varient pas avec les directions.



FIGURE 1.2: Coupes de roches

Dans l'idée de modéliser des coupes de roches, coupes sur lesquelles apparaissent clairement une direction privilégiée correspondant à l'écoulement des eaux (voir figure 1.2),

[BMS07] propose de remplacer la propriété d'autosimilarité classique (1.1) par une propriété d'autosimilarité caractérisée par une matrice.

Une approche assez similaire a été considérée dans [LS85] pour modéliser des phénomènes atmosphériques. D'autre part, nous pouvons d'ores et déjà citer plusieurs travaux [PBA⁺06, RBMS08, BRB09] encourageants pour la modélisation de phénomènes anisotropes par des champs (gaussiens ou non) à autosimilarité matricielle (modélisation de matériaux, de radiographies des os). Enfin, les premières simulations (cf. figure 1.3) fournies par Hans-Peter Scheffler de champs à autosimilarité matricielle laissent aussi penser que ces champs peuvent être utilisés pour modéliser les coupes de roches. D'autres simulations sont données dans [CV11a].

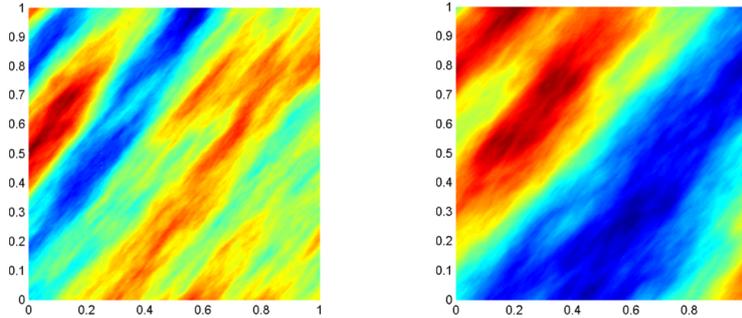


FIGURE 1.3: Simulation de champs à autosimilarité matricielle.

Pour être plus précise, au sens de [BMS07], un champ $X = \{X(x); x \in \mathbb{R}^d\}$ est dit à autosimilarité matricielle d'ordre $E \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ si

$$\forall c > 0, \left\{ X(c^E x); x \in \mathbb{R}^d \right\} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} c \left\{ X(x); x \in \mathbb{R}^d \right\} \quad (1.4)$$

où $c^E = \exp(E \ln c)$ est l'exponentielle de la matrice $(\ln c)E$.

Comparaison avec l'autosimilarité classique (1.1)

- Bien sûr les champs autosimilaires d'ordre H sont des exemples de champs à autosimilarité matricielle d'ordre $E = \text{Id}/H$.
- Dans le cas particulier où $E = \text{diag}(1/H_1, 1/H_2)$, la propriété d'autosimilarité matricielle d'ordre E s'écrit

$$\forall c > 0, \left\{ X(c^{1/H_1} x_1, c^{1/H_2} x_2); (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} c \left\{ X(x_1, x_2); (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

En comparant alors à l'autosimilarité classique, nous constatons que l'autosimilarité matricielle permet des changements d'échelle d'ordres différents selon l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. En pratique, cela signifie qu'en zoomant de façon non homogène, au facteur d'échelle c près, nous devons observer une invariance en loi sur le phénomène modélisé.

- De plus, l'autosimilarité matricielle permet d'introduire des directions privilégiées selon lesquelles X est autosimilaire : si u est vecteur propre de E associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}^*$,

$$\{X(\varepsilon t u); t \in \mathbb{R}\} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \varepsilon^{1/\lambda} \{X(t u); t \in \mathbb{R}\}.$$

Pour un champ gaussien à autosimilarité matricielle d'ordre E et à accroissements stationnaires, la régularité ponctuelle peut alors dépendre de la direction. En effet, si u est vecteur propre de E associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, cette régularité est donnée par $1/\lambda$.

Comme modèle vérifiant (1.4), nous pouvons citer le drap fractionnaire α -stable harmonisable d'ordre $H = (H_1, \dots, H_d) \in (0, 1)^d$ défini par

$$\tilde{B}_H(x) = \Re \int_{\mathbb{R}^2} \prod_{j=1}^d \frac{e^{ix_j \xi_j} - 1}{|\xi_j|^{H_j+1/\alpha}} W_\alpha(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

avec W_α une mesure α -stable complexe isotrope. Dans ce mémoire, nous rencontrerons à nouveau ce modèle (au moins pour $\alpha = 2$) lors de la présentation de l'article [LM11] (cf. chapitre 2). Ce champ, introduit par [Kam96, ALP02] pour $\alpha = 2$ et [Xia09] pour $\alpha < 2$, est effectivement autosimilaire pour la matrice diagonale

$$E = \text{diag}\left(\frac{1}{dH_1}, \dots, \frac{1}{dH_d}\right)$$

mais est nul sur les axes et n'est pas à accroissements stationnaires. L'article [BMS07] se focalise lui sur des modèles à accroissements stationnaires et introduit une très grande classe de champs stables ou gaussiens vérifiant la propriété d'autosimilarité matricielle pour une matrice E en général non diagonale. Ceci étant, les auteurs n'ont étudié que la régularité des modèles gaussiens, se basant sur l'étude de leur variogramme. Dans [BL09], en collaboration avec Hermine Biermé, nous avons généralisé les résultats de [BMS07] au cadre de champs α -stables harmonisables. Ce travail sera présenté dans le chapitre 3. Dans un second travail [BLX09], présenté dans le chapitre 2, j'ai étudié, en collaboration avec Hermine Biermé et Yimin Xiao, les dimensions d'Hausdorff d'images inverses dans le cadre gaussien.

1.3.2 Coordonnées polaires par rapport à une matrice

Dans mes travaux [BL09, BLS11], comme dans tous les travaux portant sur des champs à autosimilarité matricielle ou presque, un point important est de représenter les éléments de \mathbb{R}^d en coordonnées polaires par rapport à E et non en coordonnées polaires classiques.

Afin de pouvoir définir ces coordonnées, nous supposons que les parties réelles des valeurs propres de E sont strictement positives. Alors selon [MS01], il existe une norme $\|\cdot\|_E$ dépendant de E telle que l'application

$$\Psi_E : (r, \theta) \mapsto r^E \theta$$

est un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{S}_E$, avec $\mathcal{S}_E = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_E = 1\}$ la sphère unité pour la norme $\|\cdot\|_E$, sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, les coordonnées polaires de x par rapport à E sont alors

$$(\tau_E(x), \ell_E(x)) = \Psi_E^{-1}(x).$$

La partie $\tau_E(x)$ est à interpréter comme la partie radiale de x par rapport à E et $\ell_E(x)$ comme sa partie angulaire.

Considérons pour l'instant un champ X gaussien à accroissements stationnaires vérifiant la propriété d'autosimilarité matricielle (1.4). Cette propriété d'autosimilarité se traduit ainsi sur le variogramme v de X :

$$v(x) = \mathbb{E}\left((X(x) - X(0))^2\right) = \tau_E(x)^2 v(\ell_E(x)).$$

Dès lors, comme pour les champs autosimilaires, si le variogramme v est continu et ne s'annule pas sur \mathcal{S}_E (ce qui est le cas des modèles gaussiens proposés par [BMS07]),

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, c_1 \tau_E(x)^2 \leq v(x) \leq c_2 \tau_E(x)^2, \quad (1.5)$$

avec $\tau_E(0) = 0$ par convention. Il est alors clair que la régularité des trajectoires du champ gaussien X est donnée par celle de la partie radiale τ_E en 0. Dans [BL09], nous constatons que cela est aussi le cas pour les champs α -stables harmonisables ($\alpha < 2$) introduits par [BMS07]. Il est donc très important de comparer de façon très précise τ_E avec la norme euclidienne. Dans [BL09], nous améliorons les contrôles (contrôle global et directionnels) établis dans [BMS07].

Pour être plus précise, considérons W_1, \dots, W_p les p espaces E -invariants associés à la décomposition de Jordan de la matrice E . Chaque espace W_j est associé à une valeur propre λ_j de E . Pour tout $1 \leq j \leq p$, supposons que $H_j = 1/\Re(\lambda_j) > 1$. Alors, dans [BL09], nous montrons que pour tout $r \in (0, 1)$,

$$\forall u \in W_j \setminus \{0\} \cap B(0, r), c_1 \|u\|^{H_j} |\log \|u\||^{-(l_j-1)H_j} \leq \tau_E(u) \leq c_2 \|u\|^{H_j} |\log \|u\||^{(l_j-1)H_j}$$

avec $0 < l_j \leq d$ et c_1, c_2 des constantes. Partant de ces inégalités, nous obtenons bien sûr un contrôle du comportement global de τ_E : pour tout $u \in B(0, r)$,

$$c_1 \|u\|^{\overline{H}} |\log \|u\||^{-(l-1)\overline{H}} \leq \tau_E(u) \leq c_2 \|u\|^{\underline{H}} |\log \|u\||^{(l-1)\underline{H}}$$

avec $0 < l \leq d$, $\overline{H} = \max_{1 \leq j \leq p} H_j$ et $\underline{H} = \min_{1 \leq j \leq p} H_j$.

Ces deux résultats sont utiles pour obtenir la régularité höldérienne des champs harmonisables stables à autosimilarité matricielle (cf. chapitre 3), mais aussi pour étudier les excursions des champs gaussiens à autosimilarité matricielle (cf. chapitre 2, paragraphe 2.4).

1.4 Autosimilarité matricielle locale asymptotique

Les propriétés d'anisotropie ainsi que de régularité des trajectoires des modèles à accroissements stationnaires proposés dans [BMS07] ne varient pas avec la position x . Afin d'introduire des modèles plus flexibles, c'est-à-dire avec des propriétés locales variant d'une position à une autre, avec Hermine Biermé et Hans-Peter Scheffler, nous avons introduit une version locale de la notion d'autosimilarité matricielle. La démarche et les motivations sont analogues à celles de [BJR97, PLV95] qui ont proposé la version locale de l'autosimilarité classique.

Définition 1.4.1. *Un champ $\{X(x); x \in \mathbb{R}^d\}$ est dit localement asymptotiquement autosimilaire d'ordre $E(x_0) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ au point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ si*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left\{ \frac{X(x_0 + \varepsilon^{E(x_0)}u) - X(x_0)}{\varepsilon}; u \in \mathbb{R}^d \right\} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \left\{ Z_{x_0}(u); u \in \mathbb{R}^d \right\} \quad (1.6)$$

avec Z_{x_0} un champ non dégénéré (c'est-à-dire presque sûrement non identiquement nul).

En d'autres termes, autour du point x_0 , le champ X ressemble à un champ à autosimilarité matricielle d'ordre $E(x_0)$:

$$X(x_0 + \varepsilon^{E(x_0)}u) - X(x_0) \stackrel{(\mathcal{L})}{\asymp} \varepsilon Z_{x_0}(u) \stackrel{(\mathcal{L})}{=} Z_{x_0}(\varepsilon^{E(x_0)}u).$$

Comparaison avec les autres notions d'autosimilarité

- Tout d'abord, un champ à autosimilarité matricielle est localement asymptotiquement à autosimilarité matricielle en $x_0 = 0$.
- De plus, tout champ localement asymptotiquement autosimilaire d'ordre $h(x_0)$ en x_0 est aussi localement asymptotiquement à autosimilarité matricielle en x_0 d'ordre $E(x_0) = \text{Id}/h(x_0)$.

Ainsi, la notion d'autosimilarité matricielle locale généralise les notions d'autosimilarité considérées précédemment sur \mathbb{R}^d .

Nous avons illustré la propriété (1.6) dans [BLS11]. De plus, quitte à considérer un accroissement différent, certains modèles de [LM11], papier en collaboration avec Renaud Marty, vérifient aussi ce type de propriété.

Remarque sur les coordonnées polaires par rapport à E

Dans l'étude des champs localement à autosimilarité matricielle, dans [BLS11], nous considérons la famille des parties polaires et radiales

$$\tau_{E(x)}, \quad \ell_{E(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Fixant un compact $K \subset \mathbb{R}^d$, un point essentiel est l'obtention de contrôles uniformes en x pour la famille $\{\tau_{E(x)}; x \in K\}$ en fonction de la norme euclidienne. Afin de nous en sortir, nous avons dû préciser le choix de la norme $\|\cdot\|_E$ de sorte à assurer la continuité en E .

Chapitre 2

Modèles (multi)-fractionnaires du second ordre

Les champs localement autosimilaires, tel le champ brownien multifractionnaire, peuvent être utilisés pour modéliser des phénomènes naturels dont la régularité ponctuelle varie. Ceci étant, nous pouvons toujours nous demander si un modèle gaussien est adapté ou non. La section 2.1 introduit les travaux que j'ai effectués dans ma thèse sur de tels modèles non gaussiens mais admettant des moments du second ordre. Les techniques employées sont assez différentes de celles utilisées dans le cadre gaussien.

Les sections suivantes présentent les travaux [LM11, BLX09] effectués après ma thèse. Dans [LM11], nous nous intéressons à des champs gaussiens définis par un principe d'invariance et étudions leurs propriétés d'autosimilarité locale ainsi que la régularité ponctuelle de leurs trajectoires. Ces champs sont des modèles de type drap et nous avons en particulier défini un exposant de Hölder basé sur la régularité des accroissements rectangulaires. Dans [BLX09], nous nous sommes concentrés sur la géométrie de champs gaussiens anisotropes en étudiant leurs ensembles d'excursions.

2.1 Champs multifractionnaires harmonisables de type Lévy

2.1.1 Le modèle

Rappelons qu'un champ brownien multifractionnaire se représente sous la forme harmonisable suivante :

$$B_h(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{h(x)+d/2}} \widehat{W}(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

où \widehat{W} est la transformée de Fourier d'une mesure de Wiener W . Pour définir un champ multifractionnaire dit de Lévy, nous remplaçons simplement la mesure \widehat{W} par une *mesure de Lévy* $L(d\xi)$ au sens de [BCI02]. La mesure L a été appelée *mesure de Lévy* par les auteurs de [BCI02] car en dimension $d = 1$, $\{L([0, t]); t \in \mathbb{R}_+\}$ est un processus de Lévy à valeurs complexes, c'est-à-dire un processus issu de 0, continu en probabilité et à accroissements stationnaires et indépendants.

Pour être plus précise, suivant [BCI02], la mesure L s'écrit

$$L = a\widehat{W} + bM \tag{2.1}$$

avec M une mesure indépendante \widehat{W} et construite à l'aide d'une mesure aléatoire de Poisson N sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{C}$ d'intensité

$$n(d\xi, dz) = d\xi\nu(dz).$$

La mesure ν est supposée invariante par rotation et telle que

$$\forall p \geq 2, \int_{\mathbb{C}} |z|^p \nu(dz) < +\infty. \quad (2.2)$$

Comme ν admet un moment d'ordre 2, nous pouvons définir la mesure aléatoire M par

$$M(A) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{C}} (\mathbf{1}_A(\xi)z + \mathbf{1}_{-A}(\xi)z) (N - n)(d\xi, dz)$$

pour tout borélien A de mesure de Lebesgue finie.

Dès lors, pour toute fonction $h : \mathbb{R}^d \rightarrow]0, 1[$ localement β -höldérienne, le champ

$$X_h = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{C}} \frac{e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{d/2+h(x)}} L(d\xi); x \in \mathbb{R}^d \right\}$$

est bien défini et appelé champ de Lévy multifractionnaire. La classe des champs de Lévy multifractionnaires inclut le champ brownien multifractionnaire (cas $b = 0$ dans (2.1)) ainsi que les champs de Lévy harmonisables fractionnaires définis dans [BCI02] (cas d'une fonction h constante). Finalement, le premier modèle que j'ai considéré a été construit en combinant l'idée de [BJR97, PLV95] pour définir le mouvement brownien multifractionnaire (i.e. remplacer l'indice de Hurst H d'un mouvement brownien fractionnaire par une fonction h) et l'idée proposée par [BCI02] pour obtenir des champs fractionnaires non gaussiens du second ordre (à savoir remplacer la mesure \widehat{W} par la mesure L).

2.1.2 Comparaison avec le champ brownien multifractionnaire

Un champ de Lévy multifractionnaire X_h est certes un modèle du second ordre mais il n'a en général que peu de moments. En effet sous l'hypothèse (2.2) sur les moments de ν , l'ordre maximum d'intégrabilité en ξ du noyau

$$f(x, \xi) = \frac{e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{d/2+h(x)}}$$

donne le nombre de moments de la variable $X_h(x)$ (cf. [Lac04a], Proposition 1.3.4). Ainsi, les champs de Lévy multifractionnaires sont très différents des champs gaussiens. Néanmoins, j'ai établi dans [Lac04b] que les champs de Lévy multifractionnaires ont quelques propriétés communes avec le champ brownien multifractionnaire : régularité ponctuelle et autosimilarité locale. Le théorème suivant, qui regroupe les propositions 3.6 et 3.7 de [Lac04b] énonce plus précisément ces deux propriétés.

Théorème 2.1.1.

1. Le champ de Lévy multifractionnaire X_h admet une modification X_h^* dont les trajectoires sont continues sur \mathbb{R}^d . De plus pour tout compact K , le champ X_h^* est H -höldérien pour tout $H < \min(\min_K h, \beta)$.
2. Fixons $x \in \mathbb{R}^d$ et supposons que $h(x) < \beta$. Alors, au point $x \in \mathbb{R}^d$, en tant que champ continu, le champ X_h^* est localement asymptotiquement autosimilaire d'indice $h(x)$ avec un champ brownien fractionnaire d'indice $h(x)$ comme champ tangent. Plus précisément, munissant l'espace des fonctions continues de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left\{ \frac{X_h^*(x + \varepsilon u) - X_h^*(x)}{\varepsilon^{h(x)}}; u \in \mathbb{R}^d \right\} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} C_x \left\{ B_{h(x)}(u); u \in \mathbb{R}^d \right\} \quad (2.3)$$

avec $B_{h(x)}$ un champ brownien fractionnaire standard d'indice $h(x)$ et $C_x \in \mathbb{R}_+^*$ une constante connue.

Pour démontrer ce théorème, nous ne pouvons pas utiliser les mêmes techniques que pour le champ brownien multifractionnaire car le champ X_h n'est pas gaussien. L'étude des propriétés ci-dessus ne peut donc pas être ramenée à celle du variogramme ou de la structure de covariance de X_h . De plus, vu le peu de moments que possède X_h , pour obtenir ne serait-ce qu'une faible régularité pour les trajectoires, nous ne pouvons pas appliquer le critère de Kolmogorov. La propriété de tension pour établir la propriété d'autosimilarité locale (2.3) au sens des champs continus est aussi plus délicate à obtenir que dans le cadre gaussien (essentiellement car le champ X_h possède peu de moments).

Démarche pour étudier la régularité

Afin de contourner le problème j'ai soustrait au noyau f le début de son développement limité, mais seulement au voisinage de 0, de sorte à construire un nouveau champ $X_{h,1}$ admettant des moments de tout ordre. Pour être plus précise, j'ai fixé un entier $K \geq d/2$ et posé

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, X_{h,1}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\langle x, \xi \rangle} - P_K(i\langle x, \xi \rangle) \mathbf{1}_{\|\xi\| \leq 1}}{\|\xi\|^{h(x)+d/2}} L(d\xi)$$

avec

$$P_K(t) = \sum_{n=1}^K \frac{t^n}{n!}.$$

Choisir $K \geq d/2$ assure que le noyau définissant $X_{h,1}(x)$ est dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p > 0$ et donc que le champ $X_{h,1}$ a des moments de tout ordre. Dès lors, en étudiant les moments des accroissements de $X_{h,1}$, j'ai pu appliquer le lemme de Kolmogorov et obtenir l'existence d'une modification $X_{h,1}^*$ dont les trajectoires sont localement höldériennes.

Pour étudier la régularité de X_h , je me suis donc ensuite intéressée au champ

$$X_{h,2} = X_h - X_{h,1}.$$

Bien sûr, ce champ $X_{h,2}$ n'a pas suffisamment de moments pour utiliser le critère de Kolmogorov! Son étude est toutefois plus simple que celle de X_h car $P_K(i\langle x, \xi \rangle)$ est un polynôme en x . En développant ce polynôme en x , j'ai pu ramener l'étude de la régularité de $X_{h,2}$ à celle des processus Y_k définis par

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, K\}^d, \forall t \in]0, 1[, Y_k(t) = \int_{\|\xi\| \leq 1} \frac{\prod_{j=1}^d \xi_j^{k_j}}{\|\xi\|^{t+d/2}} L(d\xi).$$

Chaque Y_k étant un processus, c'est-à-dire une famille indexée par un intervalle et non un sous-ensemble de \mathbb{R}^d avec $d \geq 2$, un critère basé sur les moments d'ordre 2 des accroissements (simple et double) m'a permis d'établir l'existence d'une modification \mathcal{C}^1 de Y_k . Au vu de l'expression de $X_{h,2}$ en fonction des Y_k , il est alors clair que $X_{h,2}$ admet une modification $X_{h,2}^*$ localement β -höldérienne sur \mathbb{R}^d .

La décomposition de X_h en

$$X_h = X_{h,1} + X_{h,2} \tag{2.4}$$

m'a donc permis d'obtenir une majoration, qui s'est avérée très précise, de la régularité höldérienne du champ X_h . Ce genre de démarche a été utilisée dans le cas $h \equiv H$, i.e. pour les champs de Lévy fractionnaires étudiés dans [BCI02]. La décomposition proposée par [BCI02] consiste à soustraire au noyau f le début de son développement limité sur un voisinage de 0 dépendant de x . Si j'avais utilisé la décomposition de [BCI02] dans mon cadre plus général, le champ $X_{h,2}$ aurait dépendu du paramètre x à travers le voisinage choisi et la fonction h . Son étude ne se serait alors pas ramenée à celle de plusieurs processus (unidimensionnels) et je n'aurais pas su conclure! Même dans le cas fractionnaire, la

décomposition présentée ci-dessus me semble plus pratique que celle initialement proposée par [BCI02].

Démarche pour étudier l'autosimilarité locale.

Pour étudier l'autosimilarité locale (2.3), il faut dans un premier temps établir la convergence des lois fini-dimensionnelles. La démonstration proposée dans l'article [Lac04b] a été simplifiée dans ma thèse en introduisant le champ annexe

$$X(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{d/2+t}} L(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t \in]0, 1[, \quad (2.5)$$

obtenu en séparant les dépendances en la variable x du noyau qui définit X_h . Notant que $X_h(x) = X(x, h(x))$, pour étudier les variations de X_h , nous nous ramenons (comme [ALV00]) à étudier celles de X en chacune de ses variables.

Sous l'hypothèse $h(x) < \beta$, la variation de X en sa seconde variable est négligeable, et finalement la convergence des lois fini-dimensionnelles est donnée par le comportement du champ $\{X(u, h(x)); u \in \mathbb{R}^d\}$ au point x , qui est un champ de Lévy fractionnaire d'ordre $h(x)$. Ce champ ayant déjà été étudié dans [BCI02], cette démarche nous évite quelques calculs.

Pour établir la tension et obtenir la convergence dans l'espace des fonctions continues, la difficulté est qu'une fois encore nous ne pouvons pas simplement appliquer les critères basés sur les moments de X_h . Par chance, la décomposition proposée (2.4) nous permet de contourner le problème. Sous l'hypothèse $h(x) < \beta$, le champ $X_{h,2}^*$ étant plus régulier que le champ $X_{h,1}^*$, j'ai pu aisément établir qu'il suffisait d'avoir la tension en remplaçant X_h^* par $X_{h,1}^*$. Et bien sûr, la tension pour $X_{h,1}^*$ se déduit de l'étude des moments de ses accroissements.

Commentaires et conséquences du théorème 2.3.

- Toutes les propriétés étant locales, l'assertion 1. du théorème 2.1.1 reste vraie en remplaçant β par la régularité höldérienne critique

$$\beta_K = \sup \left\{ \gamma > 0 / \sup_{u,v \in K} \frac{|h(u) - h(v)|}{\|u - v\|^\gamma} < +\infty \right\}$$

de h sur le compact K . De même, l'assertion 2. est vraie en remplaçant β par l'exposant de Hölder ponctuel $H_h(x)$ de la fonction h au point x .

- Dans le cas où $h(x) > H_h(x)$, sous une hypothèse asymptotique sur h au voisinage de x , j'ai aussi établi que X_h est localement asymptotiquement autosimilaire au point x d'ordre $H_h(x)$ à condition que $x \neq 0$. Ce calcul m'a conduit à traiter à part le cas $x = 0$. En fait, la propriété (2.3) est vraie en $x = 0$ sans hypothèse sur $h(0)$ (essentiellement car $X_h(0) = 0$). Ainsi, en 0, le modèle ressemble toujours à un champ brownien fractionnaire d'ordre $H = h(0)$.

Intéressons-nous à présent à l'exposant ponctuel de Hölder $H_{X_h^*}$ de la modification X_h^* . L'assertion 1. du théorème précédent combinée à la remarque précédente nous donne une minoration de cet exposant. La majoration se déduit de l'autosimilarité locale (2.3).

Corollaire 2.1.2. *Presque sûrement pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$H_{X_h^*}(x) \geq \min(h(x), H_h(x)).$$

Si $h(x) < H_h(x)$, alors, presque sûrement, $H_{X_h^}(x) = h(x)$.*

Ainsi, comme pour le mouvement brownien multifractionnaire, la régularité höldérienne ponctuelle des champs de Lévy est caractérisée par la fonction multifractionnaire h . Comme attendu cette régularité peut varier : plus $h(x)$ est petit plus les trajectoires de X_h^* sont irrégulières autour de x . Les figures 2.1 et 2.2 illustrent cette dernière remarque. Elles ont été obtenues en implémentant la méthode de simulation que j'ai proposée dans [Lac04c]. Cette méthode étant très proche de celle que nous avons par la suite étudiée avec Michel Ledoux et Serge Cohen dans [CLL08] (cf. paragraphe 3.2 du chapitre 3), je ne la décris pas.

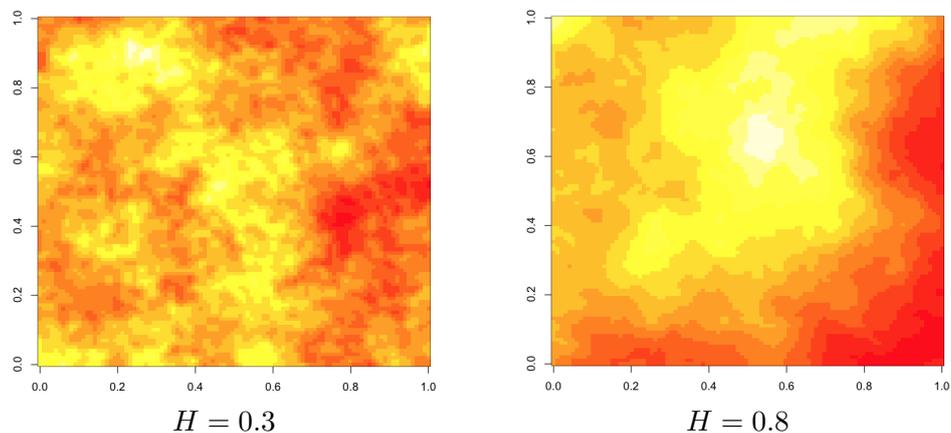


FIGURE 2.1: Champ de Lévy fractionnaire X_H associé à ν la mesure uniforme sur $\mathcal{C}(0, 1)$.

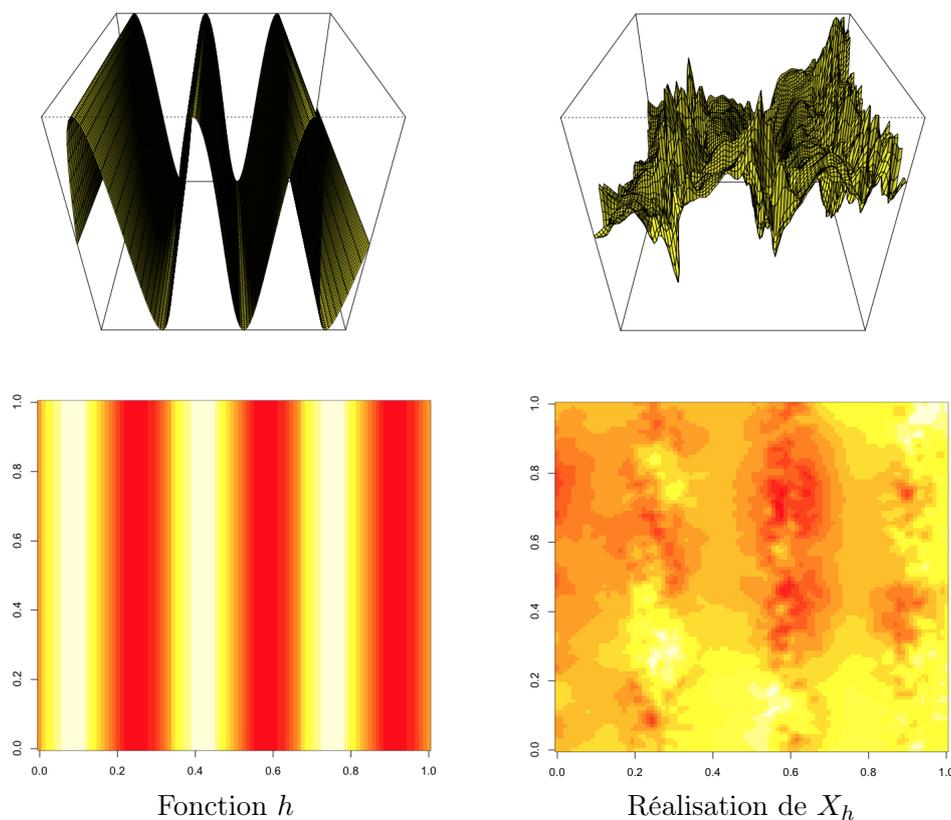


FIGURE 2.2: Champ de Lévy multifractionnaire X_h associé à ν la mesure uniforme sur $\mathcal{C}(0, 1)$.

Mes codes étant implémentés en Matlab, pour obtenir une figure dans les cas où $\nu(\mathbb{C}) = +\infty$ ou $d \geq 2$, le temps de calcul peut être très important. Sébastien Dejean et Serge Cohen (cf. [CD05]) les ont implémentés en R et C et ont créé le package FracSim. Les figures 2.1 et 2.2 ont été obtenues grâce à leurs codes.

Pour terminer, notons que le corollaire 2.1.2 ne permet pas de dire si un champ de Lévy est un champ aléatoire multifractal. Pour conclure, il faut établir que presque sûrement

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, H_{X_h^*}(x) = h(x).$$

La difficulté consiste à minorer l'exposant $H_{X_h^*}(x)$ par $h(x)$ sur un ensemble presque sûr ne dépendant pas de x . Ce problème n'est pas trivial même dans le cadre de champs gaussiens. L'article [Aya12] exhibe un champ gaussien pour lequel nous ne pouvons pas échanger le *pour tout* x et le presque sûr. Ceci étant, [HLV09] donne des conditions sur les frontières 2-microlocales permettant d'effectuer cet échange. Les conditions de [HLV09] étant satisfaites par le mouvement brownien multifractionnaire, nous pouvons espérer obtenir le même résultat pour les champs de Lévy multifractionnaires.

2.1.3 Autre approche pour introduire le modèle

La construction telle que proposée par [BCI02] assure que si A est symétrique, $L(A)$ est une variable aléatoire réelle. Ceci étant, la mesure L n'est pas une mesure aléatoire au sens classique du terme, c'est-à-dire une mesure *independently scattered*. Ayant par la suite travaillé sur les mesures α -stables complexes, je me suis rendue compte qu'une autre approche pour définir X_h était possible. Il s'agit de remplacer la mesure \tilde{W} par une mesure gaussienne complexe isotrope \tilde{W} et M par \tilde{M} définie par :

$$\tilde{M}(A) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{C}} \mathbf{1}_A(\xi) z(N-n)(d\xi, dz)$$

pour tout borélien A de mesure de Lebesgue finie. Les mesures \tilde{W} et \tilde{M} sont alors des mesures aléatoires au sens classique. En les supposant indépendantes et en posant

$$\tilde{L} = a\tilde{W} + b\tilde{M},$$

nous pouvons vérifier que

$$\left\{ X_h(x); x \in \mathbb{R}^d \right\} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \left\{ \Re \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{C}} \frac{e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{d/2+h(x)}} \tilde{L}(d\xi); x \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

L'avantage de cette deuxième démarche pour introduire le modèle X_h est qu'elle est proche de celle utilisée pour la définition des champs harmonisables α -stables. Enfin, en modifiant un tout petit peu la définition de \tilde{M} , nous pouvons relaxer l'hypothèse (2.2) et inclure dans la construction les champs harmonisables α -stables. Cette dernière remarque n'est pas très utile pour ce chapitre. Néanmoins, elle est essentielle pour proposer une méthode de simulation commune pour les champs dit de Lévy et les champs stables (cf. chapitre 3).

2.2 Une généralisation des champs de Lévy fractionnaires

Dans une seconde partie de ma thèse, je me suis plus particulièrement intéressée à la propriété d'autosimilarité locale asymptotique. Je me suis demandée si il était possible de construire un champ (non trivial) dont le type de champ tangent était tantôt un champ

gaussien tantôt un champ non gaussien. On peut bien sûr définir un tel champ par une combinaison linéaire de champs autosimilaires de nature différente mais je souhaitais un modèle moins trivial. Pour construire le modèle, je suis partie du résultat suivant de [BCI02] : pour un bon choix de mesure de Lévy L , un champ de Lévy fractionnaire ressemble à grande échelle à un modèle stable et à petite échelle à un brownien fractionnaire. Pour mon problème, il m'a fallu transformer le comportement à grande échelle en un comportement à petite échelle autour d'un point x_0 ($x_0 = 0$ dans la suite).

Reprenant la construction d'un champ de Lévy fractionnaire, j'ai considéré

$$X_H(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{d/2+H}} L_x(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

avec L_x une mesure de Lévy, sans partie gaussienne, associée à une mesure de Poisson N_x . Afin de contrôler le comportement en x , et m'inspirant du résultat de [BCI02], j'ai défini la mesure N_x en tronquant une mesure de Poisson N sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{C}$ d'intensité

$$n(d\xi, dz) = \frac{1}{|z|^{1+\alpha}} dz d\xi \quad \text{avec } \alpha \in]0, 2[.$$

Cette mesure N permet de construire une mesure α -stable isotrope W_α (cf. [ST94] par exemple) mais pas une mesure de Lévy au sens de [BCI02]. L'idée de départ était de considérer

$$N_x = \mathbf{1}_{[-1,1]}(\|x\||z|) N$$

dont l'intensité

$$n_x(d\xi, dz) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(\|x\||z|) n(d\xi, dz)$$

converge vers celle de N lorsque $x \rightarrow 0$. Mais, la non-régularité en x de la troncation utilisée posant quelques petits soucis, il est plus simple de remplacer l'indicatrice par une fonction ψ régulière à support compact.

De plus, dans la définition de $X_H(x)$, x apparaissant dans l'exponentielle et dans la mesure L_x , une sorte de compensation s'opère par homogénéité de N . Plus précisément, avec le choix proposé pour N_x ,

$$X_H(\varepsilon u) \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \varepsilon^{H+d/2-d/\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\langle u, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{d/2+H}} L_{\varepsilon^{1-d/\alpha}u}(d\xi).$$

Pour que X_H ait comme champ tangent en $x_0 = 0$ un champ stable, cette égalité en loi suggère d'imposer la convergence de $L_{\varepsilon^{1-d/\alpha}u}$ (et non de $L_{\varepsilon u}$) vers W_α quand $\varepsilon \rightarrow 0$, ou encore celle de l'intensité $n_{\varepsilon^{1-d/\alpha}u}$ vers n .

Toutes ces considérations m'ont alors conduite à plutôt poser

$$N_x = \psi\left(\|x\|^\beta z\right) N$$

avec ψ une fonction à support compact égale à 1 sur $[-1/2, 1/2]$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Le paramètre β contrôle la troncation de N et permet d'avoir ou non un modèle ressemblant à un champ stable en $x_0 = 0$. J'ai dans ma thèse étudié le comportement de X_H pour toutes les valeurs de β . Comme dans l'article [Lac05], le théorème suivant se concentre, pour l'étude en 0, sur le cas qui a motivé l'introduction du modèle X_H .

Théorème 2.2.1.

1. En tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, le champ X_H est localement asymptotiquement autosimilaire d'ordre H et admet un brownien fractionnaire comme champ tangent.
2. Supposons $\beta > d/\alpha$. Posons $\tilde{H} = H + d/2 - d/\alpha$. Si $\tilde{H} > 0$, alors, en $x = 0$, le champ X_H est localement asymptotiquement autosimilaire d'ordre \tilde{H} et le champ tangent en $x = 0$ est un champ α -stable harmonisable fractionnaire d'ordre \tilde{H} .

La condition $\tilde{H} > 0$ assure que le champ limite est bien défini. Sans celle-ci, je ne sais pas si le modèle est localement asymptotiquement autosimilaire.

Démarche employée

Tout d'abord, insistons sur le fait que le théorème précédent ne s'intéresse qu'à la convergence des lois fini-dimensionnelles.

En $x = 0$, au contrôle près de la fonction caractéristique des lois fini-dimensionnelles, l'éléments clefs sont ceux qui m'ont conduit à la définition du modèle, c'est-à-dire l'homogénéité de la mesure N et un choix de β assurant la disparition dans l'asymptotique de la troncation. Après avoir utilisé l'homogénéité de N , il s'agit d'assurer la convergence de $n_{\varepsilon^{1-d/(\alpha\beta)}u}$ vers n , ce qui revient bien à supposer $\beta > d/\alpha$.

Pour établir le théorème précédent en $x \neq 0$, j'ai considéré le champ annexe

$$Y_H(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{C}} \Re \left(\frac{e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{d/2+H}} z \right) \psi(yz) N(d\xi, dz), \quad x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}_+^*$$

tel que $X_{H,\beta}(x) = Y_H(x, \|x\|^\beta)$. En montrant que le comportement de Y_H en sa seconde variable est négligeable, la première partie du théorème découle de la propriété d'autosimilarité locale vérifiée par le champ de Lévy fractionnaire $Y_H(\cdot, \|x\|^\beta)$.

Régularité höldérienne

- Suivant mon travail [Lac04b], j'ai établi que $X_{H,\beta}$ admet une modification localement höldérienne sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ d'indice H' pour tout $H' < H$.
- L'étude de la régularité en $x = 0$ reste un problème ouvert. Si $\beta > d/\alpha$, la propriété d'autosimilarité locale en $x = 0$ nous permet d'affirmer que

$$H_{X_{H,\beta}}(0) \leq \tilde{H} < H \quad \text{presque sûrement.}$$

La conjecture est que le champ $X_{H,\beta}$ a le même exposant ponctuel que son champ tangent en 0, c'est-à-dire d'après [KM91] pour $d = 1$ ou [BL09] pour $d \geq 2$,

$$H_{X_{H,\beta}}(0) = \tilde{H} \quad \text{presque sûrement.}$$

Il se peut que l'étude de la régularité puisse être menée grâce à un développement analogue à ceux utilisés pour l'étude de la régularité de champs stables [KM91, BL09, BLS11] (cf. chapitre 3 de ce mémoire). Maintenant, la dépendance dans le noyau de ψ en la variable z paraît délicate à gérer même en appliquant ces techniques.

Commentaires sur les autres jeux de paramètres

- Dans le cas critique $\beta = d/\alpha$, le champ est autosimilaire d'indice $H + d/2 - d/\alpha$. En particulier, si cet indice d'autosimilarité est strictement négatif (ce qui est possible), le champ $X_{H,\beta}$ n'est pas continu en 0.
- Dans le cas $\beta < d/\alpha$, asymptotiquement, la troncation de N ne disparaît pas. Le modèle $X_{H,\beta}$ est alors localement autosimilaire en 0 d'indice $H - \beta(1 - \alpha/2)$ et admet pour champ tangent un champ gaussien $W_{H,\beta}$ dont les accroissements ne sont pas stationnaires. Le travail [Fal02] établit que pour un champ continu localement asymptotiquement autosimilaire en tout point (dans l'espace des fonctions continues), les champs tangents sont en presque tout x à accroissements stationnaires. Dans le cas où $H - \beta(1 - \alpha/2) > 0$ avec $\beta < d/\alpha$, il se peut que le modèle proposé $X_{H,\beta}$ illustre ce résultat. Mais la régularité en 0 n'étant pas établie, ceci n'est qu'une conjecture !

2.3 Champs multifractionnaires de type draps

Ce paragraphe présente le travail [LM11] effectué en collaboration avec Renaud Marty (IECN). La plupart des champs étudiés étant gaussiens, les résultats présentés découlent de l'étude de certaines structures de covariance. Même si la démarche est classique, les preuves sont techniques car les structures de covariance rencontrées ne sont pas simples. Je ne crois pas utile dans ce mémoire d'expliquer comment nous menons les calculs. Il me semble plus intéressant de présenter le contexte de ce travail, commenter les résultats obtenus et introduire des généralisations.

2.3.1 Introduction

Une des forces du modèle fourni par le mouvement brownien fractionnaire est qu'il satisfait un principe d'invariance, ce qui est satisfaisant en vue d'applications en physique notamment. Maintenant, comme nous l'avons déjà mentionné, ce processus a certaines caractéristiques qui limitent son champ d'application. Dès lors, pour convaincre la communauté d'utiliser un autre modèle stochastique, il peut être très utile d'établir que ce modèle est limite d'un principe d'invariance.

Rappelons tout d'abord le principe d'invariance satisfait par le mouvement brownien fractionnaire, ce qui nous permettra d'introduire la problématique abordée par [LM11]. Considérons une suite gaussienne stationnaire centrée

$$\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$$

ainsi que la suite de processus

$$S_H^N = \left\{ \frac{1}{N^H} \sum_{n=1}^{[Nt]} X_n; t \in \mathbb{R}_+ \right\}, N \in \mathbb{N}^*$$

avec $H \in \mathbb{R}$ et $[y]$ la partie entière de $y \in \mathbb{R}$. Admettons pour l'instant que la suite de processus gaussiens centrés $\{S_H^N; N \in \mathbb{N}^*\}$ converge en loi vers un processus S_H quand $N \rightarrow +\infty$. La suite $\{X_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ étant gaussienne stationnaire, il est assez simple d'établir que le variogramme de S_H est donné par

$$\forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}([S_H(t) - S_H(s)]^2) = |t - s|^{2H} \mathbb{E}(S_H(1)^2).$$

Au vu de son variogramme, S_H ne peut être que le mouvement brownien fractionnaire d'indice H et nécessairement $H \in]0, 1[$. Sous une hypothèse de longue ou faible dépendance pour la suite X_n , [ST94] montre que le mouvement brownien fractionnaire satisfait bien ce principe d'invariance.

Une question naturelle est de se demander comment généraliser ce principe d'invariance pour obtenir un champ limite multifractionnaire. [CM08] s'est attaqué à ce problème en proposant de remplacer la suite $\{X_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ par un champ gaussien centré

$$X = \{X_n(H); H \in]0, 1[, n \in \mathbb{N}\}$$

stationnaire en n et le processus S_h^N par le processus

$$S_h^N = \left\{ \sum_{n=1}^{[Nt]} \frac{X_n(h(n/N))}{N^{h(n/N)}}; t \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Mais [CM08] suppose que $h > 1/2$ (dans le cas $h \equiv H$, [CM08] se place alors sous l'hypothèse de longue dépendance de [ST94]). Avec Renaud Marty, notre premier but était

de trouver un processus S_h pour lequel le principe d'invariance a lieu même si h prend ses valeurs dans tout l'intervalle $]0, 1[$. Ensuite, nous avons décidé de chercher un principe d'invariance pour des champs $\{S_h(t); t \in \mathbb{R}_+^d\}$ avec a priori $d \geq 2$. Le paragraphe suivant présente nos hypothèses et le champ limite S_h dont nous avons ensuite étudié les propriétés d'autosimilarité et de régularité.

2.3.2 Champ gaussien défini par un principe d'invariance

Afin de simplifier la présentation mais sans la présenter pour les processus ($d = 1$), je suppose ici $d = 2$. Il est clair qu'il existe plusieurs façons de généraliser la sommation pour passer en dimension $d \geq 2$. Nous nous sommes concentrés sur le cas où

$$S_h^N = \left\{ \sum_{n_1=1}^{[Nt_1]} \sum_{n_2=1}^{[Nt_2]} \frac{X_n(h(n/N))}{N^{r(h(n/N))}}; t \in \mathbb{R}_+^2 \right\} \quad (2.6)$$

avec r une fonction et

$$X = \{X_n(H); H \in]0, 1[^2, n \in \mathbb{N}^2\}$$

un champ gaussien centré stationnaire en n . Le choix de r assure la convergence en loi de S_h^N .

Pour chaque H , la famille $\{X_n(H); n \in \mathbb{N}^2\}$ étant stationnaire, nous pouvons la représenter à l'aide d'une mesure spectrale que nous supposons de densité g_H :

$$\{X_n(H); n \in \mathbb{N}^2\} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle n, \xi \rangle} g_H(\xi) \widehat{W}(d\xi); n \in \mathbb{N}^2 \right\}$$

avec \widehat{W}_H la transformée de Fourier d'une mesure gaussienne réelle. Maintenant, dans notre étude, il est essentiel de contrôler les moments de X et pour cela de lier les mesures \widehat{W}_H les unes aux autres. Pour être à peine plus précise, nous construisons ces mesures à partir d'une famille de draps browniens corrélés. Au final, vu notre construction, la structure de covariance de X est donnée par

$$\mathbb{E}(X_n(H)X_m(K)) = C(H, K) \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle n-m, \xi \rangle} g_H(\xi) \overline{g_K(\xi)} d\xi.$$

Il est clair que le choix de g_H joue sur le choix pour la normalisation $N^{r(h/N)}$ dans la définition (2.6) de S_h^N . Les propriétés du champ limite S_h dépendent aussi du choix de g_H . Nous avons dans un premier temps pris

$$g_H(\xi) = a(H, \xi) \prod_{j=1}^2 \frac{\exp(i\xi_j) - 1}{|\xi_j|^{1/2+H_j}}$$

avec a régulière et $H_j \in]0, 1[$. Même pour ce choix particulier, obtenir la limite des covariances

$$\mathbb{E}(S_h^N(t)S_h^N(s)),$$

et donc le principe d'invariance suivant, est assez technique.

Théorème 2.3.1. *Supposons que $t \mapsto h(t) = (h_1(t_1), h_2(t_2))$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^2 . Sous une hypothèse sur a , la suite de champs*

$$S_h^N = \left\{ \sum_{n_1=1}^{[Nt_1]} \sum_{n_2=1}^{[Nt_2]} \frac{X_n(h(n/N))}{N^{h_1(n/N)+h_2(n/N)}}; t \in \mathbb{R}_+^2 \right\}$$

converge en loi (au sens des marginales fini-dimensionnelles) vers un champ gaussien S_h centré de fonction de covariance donnée par

$$\mathbb{E}(S_h(t)S_h(s)) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} e^{i\langle y, \theta - \sigma \rangle} f(h(\theta), h(\sigma), \xi) d\theta_1 d\theta_2 d\sigma_1 d\sigma_2 \right) d\xi$$

$$\text{avec } f(H, K, \xi) = a(0, H)a(0, K)C(H, K) \prod_{j=1}^2 |\xi_j|^{1-H_j-K_j}.$$

Si $h \equiv H$, vu le choix pour g_H , S_H est un drap brownien fractionnaire, champ introduit dans [Kam96, ALP02] et à autosimilarité matricielle d'ordre $E = \text{diag}\left(\frac{1}{2H_1}, \frac{1}{2H_2}\right)$.

De plus, si $d = 1$, si $C \equiv 1$ et si $\widehat{W}_H = \widehat{W}$,

$$S_h \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \left\{ \mathfrak{R} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{W}(d\xi) \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} a(0, h(\theta)) e^{i\langle \xi, \theta \rangle} \prod_{j=1}^d |\xi_j|^{1/2-h_j(\theta_j)} d\theta_1 d\theta_2 \right); t \in \mathbb{R}_+^2 \right\}$$

est le bruit blanc fractionnaire intégré de [Sly07]. Enfin, si $d = 1$ et $h > 1/2$, nos hypothèses impliquent celles de [CM08].

Nous pouvons choisir pour h une fonction \mathcal{C}^1 quelconque (c'est-à-dire des fonctions h_j dépendant de t et non seulement t_j) ou choisir d'autres types de fonctions g_H , essentiellement des fonctions définies par

$$g_H(x) = c(H, x)f_H(x)$$

avec f_H homogène d'ordre $r(H)$. Ici r correspond à la normalisation $N^{r(h(n/N))}$ dans la définition de S_h^N (dans notre exemple $r(H) = H_1 + H_2$). Il faut quand même s'assurer d'avoir un contrôle en H uniforme sur un compact pour écrire rigoureusement la preuve (car celle-ci utilise le théorème de convergence dominée). Le souci rencontré sous ces hypothèses plus générales n'est pas vraiment de montrer le principe d'invariance mais d'étudier les propriétés de régularité et d'autosimilarité du champ limite.

2.3.3 Autosimilarité locale des accroissements

Le champ S_h étant défini comme généralisation d'un principe d'invariance satisfait par un drap brownien fractionnaire, nous nous attendions à ce qu'il hérite localement des propriétés d'autosimilarité du drap. Ce paragraphe regroupe ces propriétés et ici B_H désigne systématiquement un mouvement brownien fractionnaire d'indice H .

Autosimilarité locale asymptotique directionnelle

Notons (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 . En montrant la convergence des covariances

$$\varepsilon^{-2h_j(t_j)} \mathbb{E}[(S_h(t + \varepsilon u e_j) - S_h(t))(S_h(t + \varepsilon v e_j) - S_h(t))], \quad (2.7)$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0_+$, nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left\{ \varepsilon^{-h_j(t_j)} (S_h(t + \varepsilon u e_j) - S_h(t)), u \in \mathbb{R}_+ \right\} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} D_j(t) \left\{ B_{h_j(t_j)}(u), u \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

avec $D_j(t)$ une constante. À condition que cette constante soit non nulle, le champ S_h est donc localement asymptotiquement autosimilaire dans la direction e_j d'ordre $h_j(t_j)$ en t . En d'autres termes, sous des conditions sur D_1 et D_2 , en tout t , S_h ressemble localement

dans chaque direction à un mouvement brownien fractionnaire mais d'indices différents.

Autosimilarité locale asymptotique pour les accroissements rectangulaires

Les accroissements rectangulaires

$$\Delta S_h(u, v) = S_h(u) - S_h(u_1, v_2) - S_h(v_1, u_2) + S_h(v), \quad u, v \in \mathbb{R}^2$$

de S_h ressemblent localement à un drap brownien fractionnaire. Plus précisément, avec $\varepsilon * w = (\varepsilon_1 w_1, \varepsilon_2 w_2)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_{\mathbb{R}_+^2}} \left\{ \frac{\Delta S_h(t, t + \varepsilon * u)}{\varepsilon_1^{h_1(t_1)} \varepsilon_2^{h_2(t_2)}}; u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}_+^2 \right\} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} D(t) \tilde{B}_{h(t)},$$

avec $\tilde{B}_{h(t)}$ un drap brownien fractionnaire d'indice $h(t) \in]0, 1[$ et $D(t) \neq 0$ une constante. En particulier, le processus $\{\Delta S_h(t, s); s \in \mathbb{R}^2\}$ est localement asymptotiquement à autosimilarité matricielle au point t d'ordre

$$E(t) = \text{diag} \left(\frac{1}{2h_1(t_1)}, \frac{1}{2h_2(t_2)} \right)$$

au sens de [BLS11], papier en collaboration avec Hermine Biermé et Hans-Peter Scheffler (cf. section 1.4 du chapitre 1).

Autosimilarité locale asymptotique globale

Nous n'avons pas abordé cette question dans la version actuelle du papier [LM11] mais nous pouvons aussi nous demander si le champ S_h est localement asymptotiquement autosimilaire au sens de [BJR97, PLV95]. J'aurai pu évoquer ce point en même temps que les propriétés d'autosimilarité locale directionnelles. Profitant des propriétés déjà établies et remarquant que

$$\begin{aligned} S_h(t + \varepsilon u) - S_h(t) &= \Delta S(t, t + \varepsilon u) + (S_h(t_1 + \varepsilon_1 u_1, t_2) - S_h(t)) \\ &\quad + (S_h(t_1, t_2 + \varepsilon_2 u_2) - S_h(t)), \end{aligned}$$

nous avons :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left\{ \frac{S_h(t + \varepsilon u) - S_h(t)}{\varepsilon^{\min(h_1(t_1), h_2(t_2))}}; u \in \mathbb{R}_+^2 \right\} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} Z_t \quad (2.8)$$

dès que $h_1(t_1) \neq h_2(t_2)$. Si $h_1(t_1) < h_2(t_2)$, le champ Z_t est donné par

$$Z_t(u_1, u_2) = D_1(t) B_{h_1(t_1)}(u_1), \quad u \in \mathbb{R}_+^2,$$

et ne dépend donc que de la première direction u_1 . Le cas $h_2(t_2) < h_1(t_1)$ est analogue. Ainsi, toujours sous des conditions de non-nullité de $D_1(t)$ ou $D_2(t)$, si $h_1(t_1) \neq h_2(t_2)$, S_h est localement asymptotiquement autosimilaire en t d'ordre $\min(h_1(t_1), h_2(t_2))$.

Le cas $h_1(t_1) = h_2(t_2)$ est plus délicat à traiter, l'ordre de grandeur des accroissements directionnels étant le même. Il faudrait étudier les corrélations entre les deux types d'accroissements pour conclure. Je pense que ces accroissements sont asymptotiquement non corrélés et donc que pour $h_1(t_1) = h_2(t_2)$, (2.8) reste vraie avec

$$Z_t(u_1, u_2) = D_1(t) B_{h_1(t_1)}(u_1) + D_2(t) B_{h_2(t_2)}(u_2)$$

avec $B_{h_1(t_1)}$ et $B_{h_2(t_2)}$ indépendants.

Pour terminer, S_h doit être localement asymptotiquement à autosimilarité matricielle (cf. paragraphe 1.4 du chapitre 1) au moins en t tel que $(D_1(t), D_2(t)) \neq 0$. Plus précisément, je pense que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left\{ \frac{S_h(t + \varepsilon \tilde{E}(t) u) - S_h(t)}{\varepsilon}; u \in \mathbb{R}_+^2 \right\} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{D_1(t) B_{h_1(t_1)}(u_1) + D_2(t) B_{h_2(t_2)}(u_2); u \in \mathbb{R}_+^2\}$$

avec $B_{h_1(t_1)}$ et $B_{h_2(t_2)}$ deux mouvements browniens fractionnaires indépendants et

$$\tilde{E}(t) = \text{diag}\left(\frac{1}{h_1(t_1)}, \frac{1}{h_2(t_2)}\right) = 2E(t).$$

Les propriétés d'autosimilarité asymptotique locale (globale ou directionnelles) satisfaites par S_h peuvent toutes être vues comme des conséquences de cette propriété matricielle.

2.3.4 Exposants de Hölder et multi-Hölder

Les propriétés d'autosimilarité asymptotique locale directionnelles nous permettent de majorer les exposants ponctuels de Hölder. Les minoration s'obtiennent à l'aide du critère de Kolmogorov. Au final, pour la plupart des points $t \in \mathbb{R}_+^2$, presque sûrement

- $H_{S_h}(t, e_1) = h_1(t_1)$
- $H_{S_h}(t, e_2) = h_2(t_2)$
- et donc $H_{S_h}(t) = \min(h_1(t_1), h_2(t_2))$.

Notons qu'il faut traiter séparément le cas $t_1 = 0$ car alors

$$S_h(t + \varepsilon e_2) - S_h(t) = 0 \quad (\text{donc } H_{S_h}(t, e_2) = +\infty)$$

et le champ n'est pas localement asymptotiquement autosimilaire en t dans la direction e_2 . De même, il faut considérer séparément le cas $t_2 = 0$. Dans les deux cas, comme l'accroissement

$$S_h(t + s) - S_h(t) = S_h(t + s) = \Delta S_h(0, t + s)$$

pour obtenir la régularité ponctuelle en t , nous nous intéressons à celle des accroissements rectangulaires. Un analogue du critère de Kolmogorov donné par [FP75] permet d'établir que presque sûrement

$$|\Delta S_h(u, v)| \leq C |u_1 - v_1|^{h_1(t_1) - \varepsilon} |u_2 - v_2|^{h_2(t_2) - \varepsilon}$$

pour tout $u, v \in [0, T]^2$ et $\varepsilon > 0$ petit. En combinant avec la propriété d'autosimilarité locale satisfaite par les accroissements rectangulaires, nous constatons que

$$H_{S_h}(t) = \begin{cases} h_1(0) & \text{si } t_1 = 0 \text{ et } t_2 \neq 0 \\ h_2(0) & \text{si } t_1 \neq 0 \text{ et } t_2 = 0 \\ h_1(0) + h_2(0) & \text{si } t_1 = t_2 = 0. \end{cases}$$

Cet exposant dépend donc du nombre de coordonnées nulles du point t .

Pour certains points t , les exposants ci-dessus ne permettent pas de retrouver tous les $h_j(t_j)$. En fait en dimension $d = 2$, on note essentiellement ce problème en $t = 0$ car les deux exposants directionnels sont infinis. En dimension $d \geq 3$, tous les points admettant au moins deux coordonnées nulles sont concernés. Nous avons introduit un nouvel exposant appelé exposant multi-Hölder qui lui s'intéresse à la régularité ponctuelle des accroissements rectangulaires.

Définition 2.3.2. *L'exposant multi-Hölder d'une fonction φ en $t \in \mathbb{R}^2$ est le seul couple (H_1, H_2) tel que*

$$(i) \text{ pour tout } \alpha \in]0, H_1[\times]0, H_2[\text{ , } \lim_{s \rightarrow t} \frac{\Delta \varphi(t, s)}{\prod_{j=1}^d |t_j - s_j|^{\alpha_j}} = 0$$

$$(ii) \text{ et pour tout } \alpha \in \mathbb{R}_+^d \text{ tel que } \alpha_1 > H_1 \text{ ou } \alpha_2 > H_2, \limsup_{s \rightarrow t} \frac{|\Delta \varphi(t, s)|}{\prod_{j=1}^d |t_j - s_j|^{\alpha_j}} = +\infty.$$

Bien sûr pour notre modèle, cet exposant est $h(t) = (h_1(t_1), \dots, h_d(t_d))$ presque sûrement.

2.3.5 Extension aux modèles stables

Nous avons étendu une partie des résultats à un champ

$$X = \left\{ X_n(H); n \in \mathbb{N}^d, H \in]0, 1[^d \right\}$$

α -stable stationnaire en n . Le problème pour définir la suite comme dans le cas gaussien est que la démarche pour construire les mesures \widehat{W}_H ne peut pas être reproduite. Nous avons simplement pris comme exemple

$$X_n(H) = \Re \int_{\mathbb{R}^d} a(H, \xi) e^{i\langle n, \xi \rangle} \prod_{j=1}^d \frac{\exp(i\xi_j) - 1}{|\xi_j|^{1/\alpha + H_j}} W_\alpha(d\xi)$$

avec W_α une mesure aléatoire α -stable isotrope (cf. [ST94] par exemple). Adaptant l'étude de la covariance faite dans le cas gaussien à celle de la transformée de Fourier des champs S_h^N , nous obtenons leur convergence, quand $N \rightarrow +\infty$, vers le champ stable

$$S_h = \left\{ \Re \left(\int_{\mathbb{R}^d} W_\alpha(d\xi) \int_{\prod_{j=1}^d [0, t_j]} a(0, h(\theta)) e^{i\langle \xi, \theta \rangle} \prod_{j=1}^d |\xi_j|^{1-1/\alpha - h_j(\theta_j)} d\theta \right); t \in \mathbb{R}_+^d \right\}.$$

En particulier, en prenant $h \equiv H$, nous constatons que le drap brownien fractionnaire harmonisable α -stable, introduit dans [Xia09], satisfait un principe d'invariance. Ce point est assez satisfaisant pour promouvoir ce champ stable qui a des trajectoires localement höldériennes (contrairement aux champs stables de type moyenne mobile) comme modèle non gaussien fractionnaire.

L'étude des propriétés d'autosimilarité asymptotique locale peut aussi être adaptée. Par contre, celle de la régularité ne peut pas être menée comme dans le cas gaussien. Nous verrons dans le chapitre 3 une méthode pour étudier la régularité des trajectoires d'un champ stable. Il faudrait voir si elle peut s'appliquer à notre modèle S_h .

Pour terminer, insistons sur le fait que dans le cadre stable, la mesure W_α ne dépend pas du paramètre H . En fait, le souci est de définir des mesures $\{W_{\alpha, H}; H \in]0, 1[^d\}$ de sorte à pouvoir donner les fonctions caractéristiques des champs X et S_h^N .

2.4 Champs gaussiens anisotropes : étude des excursions

Le travail [BLX09] présenté dans cette section est une collaboration avec Hermine Biermé (Université Paris Descartes) et Yimin Xiao (Université du Michigan, USA). Ce travail a été facilité par les projets ANR *Géométrie Différentielle Stochastique et Autosimilarité* (acronyme GDSA, projet porté par Fabrice Baudoin) et *Milieux Poreux : Modèles et Images* (acronyme MIPOMODIM, projet porté par Anne Estrade). En effet, ces deux projets ont permis de financer la venue de Yimin Xiao pendant un mois en France et donc d'entamer avec lui plusieurs travaux dont celui présenté ici.

Lorsque l'on étudie un champ aléatoire $\{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}$ à valeurs dans \mathbb{R}^p , il est naturel de s'intéresser à ses propriétés géométriques et plus particulièrement

- à l'image $X(I)$,
- au graphe $\text{Gr}X(I) = \{(t, X(t)) : t \in I\}$ sur I ,
- aux lignes de niveau $X^{-1}(\{x\}) \cap I$, ou encore aux ensembles d'excursion $X^{-1}(F) \cap I$.

Pour avoir une idée de la taille de ces ensembles, il est classique de s'intéresser à leur dimension de Hausdorff. Certaines de ces dimensions ont été étudiées pour le modèle isotrope qu'est le champ brownien fractionnaire (voir [Kah85, MP87], par exemple) ou encore pour certains champs anisotropes comme le drap brownien fractionnaire dans [AX05] ou les solutions d'un système d'équations stochastiques de la chaleur dans [DKN07]. Les résultats sur ces modèles particuliers montrent que la structure géométrique des champs anisotropes est bien plus complexe que celles des champs isotropes. En particulier, certaines dimensions ne dépendent pas de tout le paramètre $H = (H_1, \dots, H_d)$ qui caractérise l'anisotropie du modèle, paramètre qui donne en général la régularité dans certaines directions ou encore l'ordre d'autosimilarité *anisotrope* du modèle. Dans [Xia09], Yimin Xiao a proposé un jeu d'hypothèses assez général et obtenu non seulement des résultats de régularité pour X mais aussi les dimensions de l'image, des lignes de niveau et du graphe. Dans la continuité de ce papier, nous avons étudié la dimension de Hausdorff

$$\dim_{\mathcal{H}} X^{-1}(F) \cap I$$

de l'ensemble d'excursion de F sur I pour

$$X = (X_1, \dots, X_p)$$

un champ à valeurs dans \mathbb{R}^p avec X_1, \dots, X_p des champs gaussiens indépendants de même loi qu'un certain champ X_0 .

Discussions des hypothèses sur X_0 et ingrédients de preuve

Afin d'énoncer nos hypothèses, nous considérons la distance ρ définie par

$$\rho(s, t) = \sum_{j=1}^d |s_j - t_j|^{H_j}$$

avec $H_1, \dots, H_d \in]0, 1[$. Cette métrique va en quelque sorte caractériser le comportement anisotrope de notre champ X_0 et donc de X . Nous pouvons toujours supposer, sans perte de généralité, que

$$H_1 \leq \dots \leq H_d.$$

De plus, par stabilité par union dénombrable de la dimension d'Hausdorff, nous pouvons aussi supposer que I est un pavé compact de \mathbb{R}^d .

Nous devons bien sûr avoir une idée du comportement anisotrope du champ X_0 , c'est-à-dire imposer en quelque sorte que le paramètre $H = (H_1, \dots, H_d) \in]0, 1[^d$ détermine ou presque l'anisotropie de X_0 . Ce champ étant gaussien, cela revient à contrôler son variogramme. Notre première hypothèse est donc la suivante :

(H1) Il existe deux constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\left| \begin{array}{l} c_1 \rho(s, t)^2 \leq \mathbb{E}[(X_0(s) - X_0(t))^2] \leq c_2 \rho(s, t)^2, \quad \forall s, t \in I. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Revenant à la définition de la dimension de Hausdorff, pour majorer la dimension de Hausdorff

$$\dim_{\mathcal{H}} X^{-1}(F) \cap I,$$

nous construisons des recouvrements $(R_n)_n$ de $X^{-1}(F) \cap I$. Ces recouvrements sont bien sûr construits à partir de recouvrements de F et de sorte à tenir compte du paramètre d'anisotropie H . La difficulté est alors de contrôler le nombre N de R_n rencontrant effectivement $X^{-1}(F) \cap I$. Pour pouvoir majorer l'espérance de N , nous avons étudié la probabilité d'atteinte

$$\mathbb{P} \left\{ \inf_{s \in B_\rho(t,r) \cap I} \|X(s) - x\| \leq r \right\}$$

de la boule $B_\rho(t,r) = \{s \in \mathbb{R}^d : \rho(t,s) \leq r\}$ en fonction de son rayon r . Pour contrôler cette probabilité, nous avons introduit le processus

$$Z(t,r) = \sup_{s \in B_\rho(t,r) \cap I} |\mathbb{E}[X_0(s) - \mathbb{E}(X_0(s)|X_0(t))]|$$

qui est indépendant de $X_0(t)$. Nous arrivons alors à contrôler la probabilité d'atteinte par l'espérance de Z et utilisons ensuite le théorème de Dudley pour majorer $\mathbb{E}(Z(t,r))$ en fonction de r . Ceci étant, pour procéder ainsi, nous avons dû minorer la variance de X_0 sur I . Ceci nous a donc conduit à notre seconde hypothèse :

(H2) Il existe $c_3 \in \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall t \in I, \mathbb{E}[X_0(t)^2] \geq c_3.$$

Sous **(H1)**, qui implique la continuité de $t \mapsto \mathbb{E}[X_0(t)^2]$, l'hypothèse **(H2)** signifie simplement que le champ X_0 ne s'annule pas sur le compact I . La plupart des modèles que nous considérons sont nuls en 0 mais satisfont notre hypothèse pour tout pavé $I = [\varepsilon_0, b]^d$ avec $\varepsilon_0 > 0$. Ceci étant, nos résultats concernant les dimensions de Hausdorff sont vrais pour tout pavé I (même ceux rencontrant 0) par stabilité par union dénombrable de la dimension de Hausdorff.

Pour minorer la dimension de Hausdorff

$$\dim_{\mathcal{H}} X^{-1}(F) \cap I,$$

les deux hypothèses précédentes ne nous ont pas suffi. Le problème dans cette étude est la complexité de la structure de covariance de X_0 . Classiquement, l'étude de la régularité des trajectoires, de celles des temps locaux ou encore de la probabilité d'une petite boule est facilitée par les propriétés de non-déterminisme local. En particulier, il s'agit d'un élément clef dans les travaux [Xia09, MP87] que nous généralisons en partie. Nous avons donc aussi fait une hypothèse de non-déterminisme local. Il existe plusieurs types de non-déterminisme local, la version initiale étant introduite dans [Ber73]. Dans [BLX09], nous nous contentons d'une hypothèse portant sur deux points. Notre dernière hypothèse est plus précisément :

(H3) Il existe une constante $c_4 \in \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall s, t \in I, \text{Var}(X_0(t)|X_0(s)) \geq c_4 \rho(s,t)^2.$$

Il faut noter que sous l'hypothèse **(H3)**, la première inégalité dans (2.9) est automatiquement vérifiée. Précisons enfin que la preuve de la minoration repose sur la théorie du

potentiel. Il s'agit de construire des suites de mesures aléatoires $(\mu_{n,\varepsilon})_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant, avec probabilité positive, faiblement vers une mesure μ_ε dont le support est inclus dans $X^{-1}(F) \cap I$ et pour laquelle

$$\mathcal{E}_{\beta-\delta}(\mu_\varepsilon) = \mathbb{E} \int_I \int_I \frac{1}{\|s-t\|^{\beta-de}} \mu_\varepsilon(ds) \mu_\varepsilon(dt) < +\infty$$

avec β la valeur attendue pour la dimension de Hausdorff $\dim_{\mathcal{H}} X^{-1}(F) \cap I$. Autrement dit, l'énergie d'ordre $\beta - de$ de la mesure μ_ε est finie. Nos hypothèses permettent de vérifier que la convergence faible a bien lieu sur un ensemble de probabilité positive. Pour conclure sur la dimension d'Hausdorff qui nous intéresse nous suivons ensuite des arguments de [Kah85].

Le théorème suivant regroupe les résultats les plus importants que nous avons établis dans [BLX09]. Il s'applique en particulier au champ brownien fractionnaire, au drap brownien fractionnaire mais aussi à tout champ gaussien X_0 à accroissements stationnaires et tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \left\{ X(\varepsilon^E x); x \in \mathbb{R}^d \right\} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \varepsilon \left\{ X(x); x \in \mathbb{R}^d \right\} \quad \text{avec } E = \text{diag}(1/H_1, \dots, 1/H_d).$$

Enfin en appliquant ce théorème aux solutions d'un système non linéaire d'équations stochastiques de la chaleur, nous avons aussi généralisé certains résultats de [DKN07].

Théorème 2.4.1. *Supposons que les hypothèses (H1), (H2) et (H3) sont vérifiées. Posons*

$$Q = \sum_{j=1}^d \frac{1}{H_j} \quad \text{et} \quad \beta_k = \sum_{j=1}^k \frac{H_k}{H_j} + d - k - H_k(p - \dim F).$$

1. Si $\dim_{\mathcal{H}} F < p - Q$, alors $X^{-1}(F) \cap I = \emptyset$.
2. Si $\dim_{\mathcal{H}} F = p - Q$, alors presque sûrement, $X^{-1}(F) \cap I = \emptyset$ ou $\dim_{\mathcal{H}} X^{-1}(F) \cap I = 0$.
3. Supposons à présent $\dim_{\mathcal{H}} F > p - Q$. Alors, $\mathbb{P}(X^{-1}(F) \cap I) > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, avec probabilité positive,

$$\min_{1 \leq k \leq d} \beta_k - \varepsilon \leq \dim_{\mathcal{H}} X^{-1}(F) \cap I \leq \min_{1 \leq k \leq d} \beta_k. \quad (2.10)$$

De plus, si $\dim_{\mathcal{H}} F = 0$ (et $p > Q$), alors,

$$\dim_{\mathcal{H}} X^{-1}(F) \cap I = \min_{1 \leq k \leq d} \beta_k \quad \text{avec probabilité positive.}$$

Cette égalité reste vraie pour $\dim_{\mathcal{H}} F > p - Q$ sous une hypothèse supplémentaire (\mathcal{S}) liée à la géométrie de F (voir [BLX09]).

Quelques commentaires sur ce théorème

- En particulier si $F = \{x\}$, avec probabilité positive, presque sûrement

$$\dim_{\mathcal{H}} X^{-1}(F) \cap I = \min_{1 \leq k \leq d} \left\{ \sum_{j=1}^k \frac{H_k}{H_j} + N - k - H_k d \right\}.$$

Ce résultat sur les lignes de niveau a déjà été établi dans [AX05, WX07] pour des modèles précis et dans [Xia09] sous nos hypothèses (mais avec des arguments un peu différents).

- Dans l'équation (2.10), la majoration de la dimension de Hausdorff est vraie presque sûrement. De plus, sans l'hypothèse supplémentaire (\mathcal{S}) de [BLX09], la minoration n'a lieu a priori que sur un ensemble dépendant du choix de ε . Cette condition (\mathcal{S}) ressemble à celle du lemme de Frostman et est en particulier vérifiée par les compacts F tels que

$$\exists c > 0, \forall \gamma \in]0, \dim F[, \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam} B_n)^\gamma : F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right\} \geq c$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des recouvrements $\{B_n, n \geq 1\}$ de F par des boules. Cette condition donne finalement une information supplémentaire sur la géométrie de l'ensemble F .

Enfin, nous pouvons relaxer les hypothèses **(H1)** et **(H2)** afin d'inclure tous les champs à accroissements stationnaires à autosimilarité matricielle d'ordre E avec E diagonalisable. Pour vérifier que ces champs vérifient ce nouveau jeu d'hypothèses, l'idée est d'utiliser les contrôles que nous avons donnés pour la partie radiale τ_E par rapport à une matrice dans [BL09] (contrôles présentés dans le paragraphe 1.3.2 du chapitre 1).

Chapitre 3

Séries « shot-noises » : simulation et module de continuité

Souhaitant simuler les champs de Lévy multifractionnaires que j'avais étudiés, je me suis penchée sur la littérature portant sur la simulation des processus de Lévy. Pour proposer une méthode de simulation dans [Lac04c], les papiers [Ros90, Ros01, AR01] sont ceux qui m'ont aidée. Ils proposent des méthodes basées sur des développements en séries « shot noises » généralisées. Par la suite, en collaboration avec Serge Cohen et Michel Ledoux, dans [CLL08], j'ai étendu la méthode à une classe bien plus grande de champs aléatoires.

En faisant la bibliographie sur les séries « shot noises », j'ai pu constater que ces séries étaient aussi utiles pour étudier des propriétés des trajectoires de champs stables. Elles ont permis de donner des conditions nécessaires ou suffisantes de continuité de ces champs ou encore des conditions pour que leurs trajectoires soient bornées (cf. [ST94, LT11]). Et finalement, dans le cas de processus α -stables harmonisables, [KM91] s'en sert pour donner un module de continuité assez précis des trajectoires. Dans [BL09, BLS11], nous généralisons ce travail à des champs α -stables plus complexes.

Le chapitre se conclut par une présentation rapide de [BL12].

3.1 Séries « shot noises » simples

Fixons $\alpha \in]0, 2[$ et considérons T_n le $n^{\text{ème}}$ temps de saut d'un processus de Poisson d'intensité 1 et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires symétriques. Sous l'hypothèse d'indépendance entre les suites $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la variable

$$\sum_{n=1}^{+\infty} T_n^{-1/\alpha} W_n \tag{3.1}$$

est bien définie presque sûrement et est de loi symétrique α -stable dès que $W_n \in L^\alpha$ (cf. [LT11, ST94] par exemple). Pour l'étude de l'erreur commise dans la méthode de simulation proposée dans [CLL08], un des éléments clefs a été d'établir des vitesses de convergence pour ces séries.

3.1.1 Vitesse de convergence presque sûre

L'hypothèse clef pour obtenir une vitesse de convergence est de supposer que W_n est un peu plus que α -intégrable.

Théorème 3.1.1. *Considérons $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite indépendante de la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |Y_n| \leq CT_n^{-1/\alpha}$$

avec C une constante et $\alpha \in]0, 2[$. Si $W_n \in L^r$ avec $r > \alpha$ alors, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n W_n$ converge presque sûrement et pour tout $\varepsilon \in]0, 1/\alpha - 1/\min(r, 2)[$,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} N^\varepsilon \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} Y_n W_n \right| < +\infty \quad \text{presque sûrement.} \quad (3.2)$$

Idées de la démonstration et comparaison avec [Lac04c].

Une démarche classique consiste à contrôler la queue de distribution

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} Y_n W_n \right| > t \right)$$

pour établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P} \left(\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} Y_n W_n \right| > N^{-\varepsilon} \right) < +\infty \quad (3.3)$$

et ensuite conclure en appliquant le lemme de Borel-Cantelli. Dans le papier [Lac04c], j'ai procédé ainsi pour un choix particulier de Y_n et des variables W_n intégrables à tout ordre. En utilisant simplement l'inégalité de Markov pour contrôler la queue de distribution, j'ai pu m'en sortir en étudiant la décroissance en N des moments

$$\mathbb{E} \left(\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} Y_n W_n \right|^p \right), \quad p \geq 2$$

puis en choisissant p grand afin d'en déduire (3.3). Les éléments clés pour contrôler ces moments sont le principe de contraction pour les suites de variables symétriques (cf. [LT11] par exemple) et les inégalités de Khintchine. De plus, l'hypothèse $W_n \in L^p$ est essentielle. Sous les hypothèses du théorème 3.1.1, la démarche de [Lac04c] ne permet pas d'établir (3.3) car $p \leq r$ ne peut pas être choisi suffisamment grand. Nous n'avons donc pas pu simplement suivre les idées de mon travail [Lac04c].

Nous avons tout d'abord introduit les ensembles

$$\Omega_M = \left\{ \sup_{n \geq 1} n^{-1/r} |W_n| \leq M \right\}$$

pour $M > 0$, sur lesquels la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ bien normalisée est bornée. Le choix de la normalisation en $n^{1/r}$, ou encore le choix de Ω_M , découle de l'existence du moment d'ordre r pour W_n et de l'inégalité de Markov. Ce choix de Ω_M n'est pas bien sûr pas anodin : il a été fait de sorte que

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\Omega_M) = 1,$$

ce qui permet de n'avoir à établir (3.2) que presque sûrement sur chaque Ω_M .

Certes sur Ω_M , les variables $W_n = W_n \mathbf{1}_{|W_n| \leq Mn^{1/r}}$ sont bornées mais en général, le comportement en n du moment

$$\mathbb{E} \left(\left| W_n \mathbf{1}_{|W_n| \leq Mn^{1/r}} \right|^p \right)$$

est tel que la démarche de [Lac04c] ne permet pas d'appliquer le lemme de Borel-Cantelli. Nous avons donc dû procéder autrement pour contrôler

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} Y_n W_n \mathbf{1}_{|W_n| \leq M n^{1/r}}\right| > N^{-\varepsilon}\right).$$

Tout d'abord comme dans [Lac04c], le principe de contraction pour les suites symétriques de variables aléatoires nous permet de nous ramener au cas $Y_n = T_n^{-1/\alpha}$. Ensuite comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_n}{n} = 1 \quad \text{presque sûrement,}$$

l'idée intuitive est de remplacer $T_n^{-1/\alpha}$ par $n^{-1/\alpha}$. L'avantage par rapport au problème initial est qu'alors les poids devant les W_n sont déterministes. Ce n'est pas aussi simple car il faut tenir compte de la concentration de T_n mais on s'en sort en remplaçant T_n par An avec A grand. Finalement, nous avons ramené le problème initial au contrôle de

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} n^{-1/\alpha} W_n \mathbf{1}_{|W_n| \leq M n^{1/r}}\right| > t N^{-\varepsilon}\right) \text{ avec } t \geq 0.$$

L'inégalité de Markov exponentielle permet d'écrire que pour $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} n^{-1/\alpha} W_n \mathbf{1}_{|W_n| \leq M n^{1/r}}\right| > t N^{-\varepsilon}\right) \leq e^{-\lambda t N^{-\varepsilon}} \prod_{n=N+1}^{+\infty} \mathbb{E}\left(e^{\lambda n^{-1/\alpha} W_n \mathbf{1}_{|W_n| \leq M n^{1/r}}}\right).$$

La suite de la démonstration consiste à obtenir une estimée de la transformée de Laplace de $W_n \mathbf{1}_{|W_n| \leq M n^{1/r}}$ en la développant en série. Finalement, la conclusion est obtenue en optimisant la majoration obtenue en λ et en appliquant le lemme de Borel-Cantelli.

Optimalité du résultat

Nous n'avons pas établi l'optimalité de la vitesse de convergence obtenue. Ceci étant si les variables W_n sont de carré intégrable, il est possible de vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N^{2/\alpha-1} \mathbb{E}\left(\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} T_n^{-1/\alpha} W_n\right|^2\right) = \frac{\alpha \mathbb{E}(W_1^2)}{2-\alpha}.$$

Bien sûr ceci ne permet pas de dire, même dans le cas $r \geq 2$, que la vitesse de convergence presque sûre que nous donnons est optimale mais le laisse seulement présager.

3.1.2 Vitesse de convergence absolue

Pour obtenir les vitesses de convergence de la méthode de simulation que nous avons proposée dans [CLL08], nous avons aussi eu besoin d'obtenir une vitesse de convergence absolue pour les séries « shot noises » du type (3.1) mais sans l'hypothèse de symétrie des W_n . Nous devons supposer $\alpha < 1$ car sinon ces séries ne convergent pas absolument (essentiellement car $T_n^{-1/\alpha} \sim n^{-1/\alpha}$).

Théorème 3.1.2. *Considérons $(\tilde{W}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. Supposons que $(\tilde{W}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est indépendante de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Si $\alpha \in]0, 1[$ et si $\tilde{W}_n \in L^r$ avec $r > \alpha$, alors, pour tout $\varepsilon \in]0, 1/\alpha - 1/\min(r, 1)[$,*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} N^\varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} T_n^{-1/\alpha} |\tilde{W}_n| < +\infty \quad \text{presque sûrement.}$$

Nous avons pu adapter la démonstration du théorème 3.1.1 en remplaçant bien sûr

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} Y_n W_n \right| \quad \text{par} \quad \sum_{n=N+1}^{+\infty} T_n^{-1/\alpha} |\tilde{W}_n|.$$

Le fait de considérer une série de variables positives rend inutile l'application du principe de contraction pour la dominer (ce qui est bienvenu vu que les hypothèses de ce principe ne sont pas satisfaites ici). Même si les variables \tilde{W}_n ne sont pas symétriques, nous pouvons contrôler leur transformée de Laplace et finalement suivre la démonstration de 3.1.1. L'hypothèse $\alpha < 1$ qui assure la convergence absolue est la clef pour obtenir un contrôle suffisant de ces transformées de Laplace et pouvoir ensuite appliquer le lemme de Borel-Cantelli comme dans la preuve du théorème 3.1.1.

Optimalité du résultat

Prenons $\tilde{W}_n = 1$. Dans ce cas, $\tilde{W}_n \in L^r$ pour tout $r > 0$ et presque sûrement,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} T_n^{-1/\alpha} |\tilde{W}_n| \sim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{(\alpha - 1)N^{1/\alpha - 1}}.$$

Cet exemple tout simple montre qu'au mieux la borne donnée sur ε dans le théorème précédent est atteinte.

3.1.3 Contrôle uniforme en α

Cette partie est issue du travail [BL12] qui est en cours de rédaction et dans lequel nous nous intéressons à des modules de continuité et des vitesses de convergence uniforme pour des séries conditionnellement sous-gaussiennes. Dans ce travail, nous avons, en particulier, obtenu une vitesse de convergence uniforme pour les séries « shot noises » du type (3.1). Ce résultat permet de compléter [CLL08] car il donne une vitesse de convergence uniforme pour la méthode de simulation proposée. À vrai dire dans [CLL08], nous n'avions donné cette vitesse que pour des modèles fractionnaires et ne l'avions pas pour les modèles multifractionnaires.

Théorème 3.1.3. *Considérons pour tout $\alpha \in]0, 2[$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$, la somme partielle*

$$S_N(\alpha) = \sum_{n=1}^N T_n^{-1/\alpha} W_n.$$

Fixons $[a, b] \subset]0, 2[$ et supposons que $W_n \in L^r$ avec $r > b$.

1. Alors, presque sûrement, S_N converge uniformément sur $[a, b]$ vers S .
2. De plus, pour tout $\varepsilon \in]0, 1/b - 1/\min(r, 2)[$, presque sûrement,

$$\sup_{N \in \mathbb{N}^*} \sup_{\alpha \in [a, b]} N^\varepsilon |S(\alpha) - S_N(\alpha)| < +\infty.$$

Sous les hypothèses du théorème précédent, pour chaque $\alpha \in [a, b]$, $S_N(\alpha)$ converge presque sûrement quand $N \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire que

$$S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n^{-1/\alpha} W_n$$

est bien définie presque sûrement. Le théorème 3.1.1 nous permet d'affirmer que $S_N(\alpha)$ converge vers $S(\alpha)$ au moins à la vitesse N^ε pour $\varepsilon \in]0, 1/b - 1/\min(r, 2)[$. Pour montrer

que la convergence uniforme a lieu et ce au moins à la même vitesse, nous donnons un contrôle des variations des restes $R_N = S - S_N$ sur $[a, b]$ en N . Pour être plus précise, nous montrons que pour tout $\varepsilon \in]0, 1/b - 1/\min(r, 2)[$, presque sûrement

$$\forall N \geq 1, \forall \alpha, \alpha' \in [a, b], |R_N(\alpha) - R_N(\alpha')| \leq CN^\varepsilon |\alpha - \alpha'| \sqrt{|\log |\alpha - \alpha'|||}.$$

En particulier, la suite des restes $(R_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0 à la vitesse N^ε , ce qui nous suffit pour conclure. Maintenant, établir ce contrôle sur le module de continuité de R_N n'est pas simple. Dans le cas qui nous intéresse, [BL12] permet de ramener le problème du contrôle de R_N à celui de

$$\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |T_n^{-1/\alpha} - T_n^{-1/\alpha'}|^2 W_n^2 \right)^{1/2}$$

en appliquant des inégalités de Lévy à la suite symétrique $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Ensuite, il suffit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis et le théorème 3.1.2 pour conclure.

3.2 Simulation de champs infiniment divisibles

Dans [CLL08], je me suis intéressée, avec Serge Cohen et Michel Ledoux, à la simulation de champs aléatoires s'écrivant sous la forme

$$X^f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi) \Lambda(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (3.4)$$

pour mesure $\Lambda(d\xi)$ une mesure aléatoire réelle symétrique. Nous souhaitons pouvoir prendre pour Λ une mesure α -stable réelle mais aussi une mesure aléatoire de Lévy réelle au sens de [BCI04] (définition analogue aux mesures complexes introduites dans le chapitre 2). Nous avons donc proposé une définition pour Λ permettant de regrouper ces deux notions de mesures.

La méthode de simulation proposée dans [CLL08] et présentée ci-après est clairement la même que celle que j'ai proposée pendant ma thèse dans [Lac04c] pour les champs de Lévy multifractionnaires harmonisables. La différence essentielle entre [CLL08] et [Lac04c] est la méthode employée pour obtenir les vitesses de convergence. En effet, dans le cadre de [CLL08], les vitesses de convergence sont plus délicates à obtenir et découlent des théorèmes 3.1.1, 3.1.2 et 3.1.3.

3.2.1 Construction de la mesure aléatoire Λ

Comme dans le chapitre 2, la mesure Λ est construite à partir d'une mesure aléatoire de Poisson N sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ d'intensité

$$n(d\xi, dv) = d\xi \nu(dv)$$

avec $\nu(dv)$ une mesure de Lévy symétrique non nulle. Ainsi, ν est σ -finie et telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \min(|v|^2, 1) \nu(dv) < +\infty. \quad (3.5)$$

Nous pouvons alors définir la mesure aléatoire réelle Λ sur \mathbb{R}^d en posant

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(\xi) \Lambda(d\xi) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} g(\xi) v \left(N(d\xi, dv) - \max(|g(\xi)v|, 1)^{-1} n(d\xi, dv) \right)$$

pour toute fonction borélienne $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} \min(|g(\xi)v|^2, 1) n(d\xi, dv) < +\infty.$$

Bien sûr pour que le modèle X^f soit bien défini par (3.4), nous supposons que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} \min(|f(x, \xi)v|^2, 1) n(d\xi, dv) < +\infty. \quad (3.6)$$

3.2.2 Approximation par une série type « shot noises »

Supposons dans un premier temps que

$$0 < \nu(\mathbb{R}) < +\infty.$$

Dans ce cas, la mesure Λ n'est rien d'autre qu'une mesure aléatoire de Lévy réelle au sens de [BCI04].

Approximation proposée

Suivant mon papier [Lac04c], nous avons introduit un champ Y^f défini par une série « shot noises » généralisée et ayant même loi que le champ X^f . Plus précisément, Y^f s'écrit sous la forme :

$$Y^f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_f(x, T_n, Z_n), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

avec $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. indépendante de la suite des temps de sauts $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Le choix de la fonction H_f et de la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est facilité par l'article [Ros90]. En effet, sous réserve que la série définissant Y^f converge ponctuellement presque sûrement, cet article donne la fonction caractéristique, donc la loi, des marginales de Y^f . Au vu de la forme de cette fonction caractéristique, nous avons choisi :

- pour $Z_n = (U_n, V_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, des variables à valeurs dans $\mathbb{S}_{d-1} \times \mathbb{R}$ de loi

$$\lambda(du, dv) = \frac{\sigma_{d-1}(du)\nu(dv)}{\nu(\mathbb{R})}$$

avec σ_{d-1} la loi uniforme sur la sphère unité \mathbb{S}_{d-1} de \mathbb{R}^d ,

- et pour H_f la fonction définie par

$$H_f(x, r, (u, v)) = f\left(x, \left(\frac{r}{c_d \nu(\mathbb{R})}\right)^{1/d} u\right) v$$

avec c_d le volume de la boule unité de \mathbb{R}^d .

Bien sûr, d'autres choix pour la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et la fonction H_f peuvent convenir. Le choix fait a l'avantage de ne pas dépendre de la forme de la mesure ν . Précisons que sous nos hypothèses, [Ros90] permet aussi de vérifier que la série Y^f converge ponctuellement presque sûrement et que

$$\left\{ X^f(x); x \in \mathbb{R}^d \right\} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \left\{ Y^f(x); x \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Pour obtenir cette égalité, il s'agit simplement de montrer qu'une certaine mesure Q_f (définie en fonction de H_f et de la loi de Z_1) est une mesure de Lévy sur \mathbb{R} , c'est-à-dire vérifie

$$\int_{\mathbb{R}} \min(|y|^2, 1) Q_f(dy) < +\infty.$$

Pour notre choix, ceci découle assez facilement de l'hypothèse (3.6) sur le noyau f .

Finalement, nous proposons d'approcher X^f par

$$Y_N^f(x) = \sum_{n=1}^N f\left(x, \left(\frac{T_n}{c_d \nu(\mathbb{R})}\right)^{1/d} U_n\right) V_n, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Vitesses de convergence et contrôle de l'erreur

- Fixons $x \in \mathbb{R}^d$. Vu le théorème 3.1.1, pour donner une vitesse de convergence presque sûre de $Y_N^f(x)$ quand $N \rightarrow +\infty$, il suffit de supposer que la fonction $\xi \mapsto f(x, \xi)$ décroît assez vite en ξ .
- Pour donner une vitesse de convergence uniforme de $(Y_N^f)_{N \in \mathbb{N}^*}$ sur un compact K , nous avons dû imposer une condition plus précise sur le comportement asymptotique de f . En fait, nous supposons que pour $x \in K$ et $\xi \neq 0$,

$$\left| f(x, \xi) - \sum_{j=1}^{p-1} \frac{a_j(x) b_j(\xi/\|\xi\|)}{\|\xi\|^{\beta_j}} \right| \leq \frac{b_p(\xi/\|\xi\|)}{\|\xi\|^{\beta_p}} \quad (3.7)$$

avec a_j , $j = 1, \dots, p-1$, des fonctions continues et $(\beta_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille croissante telle que $\beta_1 > d/2$ et $\beta_p > d$. Pour $1 \leq j \leq p-1$, comme $d/\beta_j \in]0, 2[$, le théorème 3.1.1 permet d'obtenir une vitesse de convergence pour la série

$$\sum_{n=1}^N T_n^{-\beta_j/d} b_j(U_n) V_n,$$

série correspondant au $j^{\text{ème}}$ terme du développement de f . Le théorème 3.1.2 donne lui une vitesse de convergence pour

$$\sum_{n=1}^N T_n^{-\beta_p/d} b_p(U_n) |V_n|,$$

avec $d/\beta_p \in]0, 1[$. Regroupant ces vitesses, sous des hypothèses d'intégrabilité pour V_n et $b_j(U_n)$, nous obtenons une vitesse de convergence uniforme pour notre méthode de simulation.

Il est à noter que nous supposons que les coefficients β_j ne dépendent pas de x . Dans le cas d'un noyau f associé à un champ multifractionnaire, ceci n'est, en général, pas vérifié. Le théorème 3.1.3, obtenu dans le papier en cours de rédaction [BL12], permet de relaxer les hypothèses de [CLL08] en autorisant β_j à dépendre de x .

- Pour terminer, nous donnons aussi un contrôle de l'erreur dans un espace L^r avec $r > \alpha$. La preuve s'établit en suivant des idées de [Lac04c].

Simulations numériques Nous avons illustré cette méthode en simulant un champ de Lévy moyenne mobile, c'est-à-dire en choisissant comme noyau

$$f(x, \xi) := f_H(x, \xi) = \|x - \xi\|^{H-d/2} - \|\xi\|^{H-d/2}.$$

Au vu de sa définition Y^{f_H} est \mathcal{C}^∞ sauf aux points aléatoires

$$x_n = \left(\frac{T_n}{c_d \nu(\mathbb{R})}\right)^{1/d} U_n.$$

L'article [BCI04] annonce que le champ X^{f_H} est presque sûrement non borné si $H < d/2$. Ceci se vérifie sur Y^{f_H} puisque dans ce cas Y^{f_H} explose en chaque point x_n . Dans le cas où $H > d/2$, la régularité höldérienne critique de Y^{f_H} est donnée par la régularité aux points x_n et est donc égale à $H - d/2$. Nous retrouvons encore une fois, grâce à la série, le comportement des trajectoires donné dans [BCI04]. Utiliser la série Y^{f_H} aurait pu être une bonne idée pour étudier la régularité de X^{f_H} .

La figure ci-après donne quelques illustrations de Y^{f_H} pour ν la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

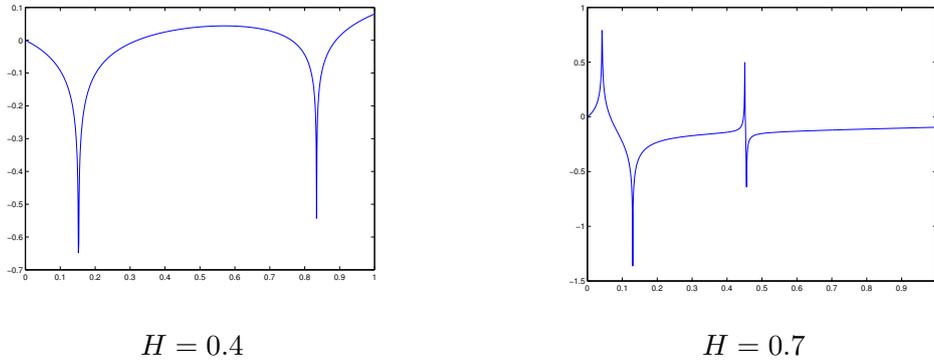


FIGURE 3.1: Exemples de réalisations de Y^{f_H} .

Par souci de concision, nous n'avons donné qu'un exemple fractionnaire dans [CLL08]. Maintenant, nous pouvons aussi appliquer nos résultats pour le noyau

$$f(x, \xi) := f_h(x, \xi) = \|x - \xi\|^{h(x)-d/2} - \|\xi\|^{h(x)-d/2}$$

avec $h : \mathbb{R}^d \rightarrow]0, 1[$ une fonction au moins localement höldérienne. Pour obtenir une vitesse de convergence ponctuelle de $Y^{f_h}(x)$, on peut alors utiliser les résultats de [CLL08]. Le théorème 3.1.3, issu de [BL12], permet d'obtenir une vitesse de convergence sur un compact K en N^ε pour $\varepsilon \in]0, (1 - \max_K h)/d[$.

3.2.3 Partie gaussienne

Supposons à présent que $\nu(\mathbb{R}) = +\infty$, ce qui est le cas lorsque Λ est une mesure aléatoire α -stable. Dans ce cas, nous nous inspirons de [AR01] qui s'intéresse à la simulation des processus de Lévy. Nous décomposons la mesure Λ sous la forme

$$\Lambda = \Lambda_{1,\varepsilon} + \Lambda_{2,\varepsilon}$$

avec $\Lambda_{1,\varepsilon}$ et $\Lambda_{2,\varepsilon}$ deux mesures aléatoires indépendantes. Suivant le paragraphe 3.2.1, les mesures $\Lambda_{\varepsilon,1}$ et $\Lambda_{\varepsilon,2}$ sont respectivement construites à partir des mesures de Poisson $\mathbf{1}_{|v|>\varepsilon}N$ et $\mathbf{1}_{|v|\leq\varepsilon}N$. L'hypothèse (3.5) sur ν nous permet d'affirmer que l'intensité

$$\nu_{1,\varepsilon} = \mathbf{1}_{|v|>\varepsilon}\nu.$$

de la mesure de Poisson $\mathbf{1}_{|v|>\varepsilon}N$ est de masse finie. Par suite, nous pouvons approcher

$$X_{\varepsilon,1}^f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi) \Lambda_{\varepsilon,1}(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

par une série « shot noises » généralisée. Il nous reste alors à approcher le champ

$$X_{\varepsilon,2}^f = X^f - X_{\varepsilon,1}^f = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi) \Lambda_{\varepsilon,2}(d\xi); x \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Nous aidant de [AR01], sous une condition sur le comportement de

$$\sigma(\varepsilon) = \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |v|^2 \nu(dv) \right)^{1/2}$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0_+$, nous avons

$$\frac{\Lambda_{\varepsilon,2}}{\sigma(\varepsilon)} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0_+]{(\mathcal{L})} W$$

avec W une mesure gaussienne réelle. Nous en déduisons que bien normalisé, $X_{\varepsilon,2}^f$ se comporte comme un champ gaussien lorsque $\varepsilon \rightarrow 0_+$. Simuler un champ gaussien étant en général plus simple, nous avons approché $X_{\varepsilon,2}^f$ par

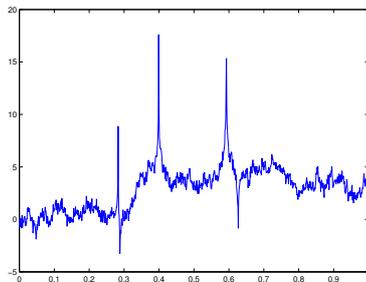
$$\left\{ \sigma(\varepsilon) \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi) W(d\xi); x \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Mentionnons que cette démarche suppose bien sûr que le champ ci-dessus est bien défini, ce qui nous a conduit à restreindre le choix du noyau f en imposant

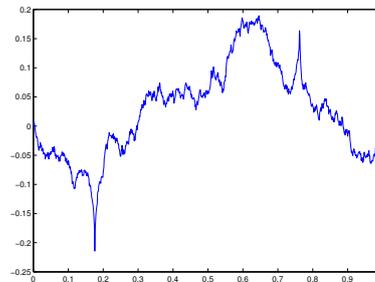
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, f(x, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

L'erreur commise pour la simulation de $X_{\varepsilon,2}^f$ est contrôlée par une inégalité de Berry-Esseen (erreur marginale par marginale).

Les champs $X_{\varepsilon,1}^f$ et $X_{\varepsilon,2}^f$ étant indépendants, nous simulons de façon indépendante la partie série « shot noises » généralisée et le champ gaussien approchant $X_{\varepsilon,2}^f$. La méthode proposée a été implémentée pour simuler divers champs fractionnaires ou multifractionnaires stables. La figure suivante, obtenue par cette méthode de simulation, présente des trajectoires de champs stables de type moyenne mobile. D'autres exemples sont données dans [CLL08].



$H = 0.4$



$H = 0.7$

FIGURE 3.2: Processus α -stables de type moyenne mobile avec $\alpha = 1.5$.

3.2.4 Modèles harmonisables

Les résultats donnés dans les sections précédentes pour une mesure aléatoire Λ réelle peuvent se généraliser à des mesures complexes. Pour être plus précise, nous pouvons considérer une mesure aléatoire complexe définie à l'aide d'une mesure de Poisson N sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{C}$ d'intensité

$$n(d\xi, dz) = d\xi \nu(dz)$$

avec $\nu(dz)$ une mesure invariante par rotation et telle que

$$\int_{\mathbb{C}} \min(|z|^2, 1) \nu(dz) < +\infty.$$

En particulier, si ν admet des moments de tout ordre $p \geq 2$, la mesure Λ est une mesure de Lévy complexe. Pour être plus précise, nous retrouvons exactement la représentation alternative proposée dans le paragraphe 2.1.3 du chapitre 2. Nous incluons ainsi dans les modèles simulés les champs de Lévy multifractionnaires et des champs stables.

Pour illustrer le cadre complexe, dans [CLL08], nous avons simplement présenter la méthode (analogue au cas réel) pour simuler un champ α -stable harmonisable fractionnaire

$$X_H(x) = \Re \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{H+d/\alpha}} \Lambda(d\xi)$$

avec Λ une mesure α -stable isotrope, ce qui correspond à prendre

$$\nu(dz) = \frac{1}{|z|^{1+\alpha}} dz.$$

Il faut noter que le noyau choisi ne peut pas être développé de sorte à appliquer les résultats de [CLL08] pour obtenir la convergence uniforme de la série utilisée dans la simulation. Pour établir la convergence uniforme, nous pouvons procéder comme dans [Lac04c] en montrant qu'une certaine mesure est une mesure de Lévy sur l'espace des fonctions continues. Maintenant, ceci suppose de vérifier que le champ étudié est continu (à une modification près).

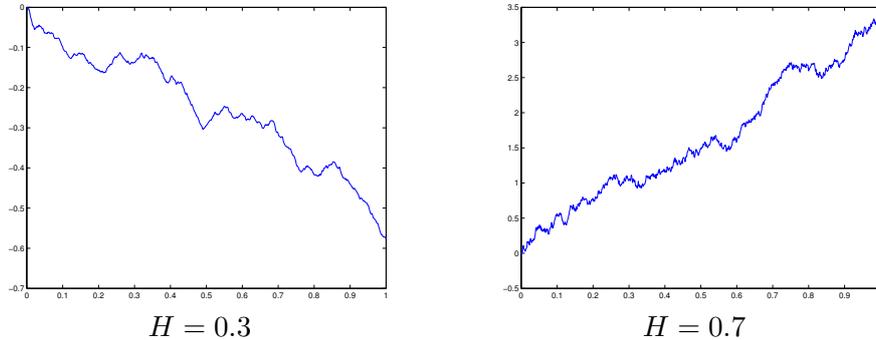


FIGURE 3.3: Exemple de champs α -stable harmonisables

3.2.5 Avantages/Inconvénients

Commençons par les points négatifs! La vitesse de la méthode de simulation proposée dépend fortement de la régularité de f et peut être très lente. Dans les exemples donnés, elle se dégrade avec la dimension d . Enfin, choisir la troncature ε n'est pas évident. En effet, au vu des contrôles d'erreurs établis, plus on choisit ε petit, plus le nombre de termes N dans la partie série doit être choisi grand pour obtenir une erreur globale faible. Numériquement, cela pose quelques problèmes.

Pour les champs stables, on pourrait aussi proposer une méthode de simulation basée sur le développement en série de LePage (voir section suivante). L'avantage de ce développement est que la vitesse de dépend pas de la dimension d mais du paramètre de stabilité.

Ceci étant, ces séries ne sont adaptées qu'au cas stable. L'avantage indéniable de notre méthode est qu'elle permet de simuler une plus grande classe de modèles vu qu'elle s'applique à des mesures Λ très générales. Enfin, cette méthode, même si elle peut être lente, est très simple à implémenter et est parallélisable.

3.3 Régularité des champs stables

Cette partie portant essentiellement sur des champs α -stables symétriques, rappelons avant tout que la loi d'une variable aléatoire α -stable symétrique Y est caractérisée par son paramètre d'échelle $\|Y\|_\alpha^\alpha$. De plus, la fonction caractéristique d'une variable α -stable réelle Y est donnée par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{E}\left(e^{i\lambda Y}\right) = e^{-|\lambda|^\alpha \|Y\|_\alpha^\alpha}$$

Si $\alpha = 2$, le paramètre d'échelle $\|Y\|_\alpha^\alpha$ est, à un coefficient multiplicatif près, la variance de la variable gaussienne Y .

Lorsque l'on étudie un champ gaussien $\{X(x); x \in \mathbb{R}^d\}$, il est bien connu que l'on peut obtenir un module de continuité ou encore sa régularité höldérienne en étudiant le comportement de son variogramme. Sorti du cadre gaussien, les choses ne sont pas aussi simples. Si X est un champ stable d'indice $\alpha \in]0, 2[$, nous pouvons alors étudier le comportement du paramètre d'échelle

$$\|X(x) - X(y)\|_\alpha,$$

analogue du variogramme, mais le lien avec la régularité de X n'est pas aussi clair que dans le cadre gaussien. Dans [BL09, BLS11], nous inspirant de [KM91], nous avons ramené l'étude de la régularité de champs stables à autosimilarité matricielle globale ou locale à celle d'un champ gaussien. L'idée essentielle est de représenter les lois stables par une série de LePage conditionnellement gaussienne. Notons que l'article [KM91] se focalise sur le cas $d = 1$ et qu'en dimension $d \geq 2$, nous avons dû gérer l'anisotropie de nos modèles et leur côté multifractionnaire dans [BLS11]. Précisons que l'idée du développement en série de LePage est aussi utilisée par [DS11] pour étudier le module de continuité des champs α -stables harmonisables multifractionnaires (cas particulier des modèles que nous considérons dans [BLS11]) et par [Xia10] pour celui de certains champs α -stables à accroissements stationnaires où à accroissements rectangulaires stationnaires.

Après avoir présenté les papiers [BL09, BLS11], cette partie se conclut par une généralisation [BL12] à des champs se représentant sous la forme d'une série conditionnellement sous-gaussienne.

3.3.1 Séries de LePage

Fixons $\alpha \in]0, 2[$ et considérons une mesure aléatoire α -stable complexe isotrope W_α . Alors, pour tout $h \in L^\alpha(\mathbb{R}^d)$, la variable aléatoire α -stable complexe

$$W_\alpha(h) := \int_{\mathbb{R}^d} h(\xi) W_\alpha(d\xi),$$

peut se représenter sous la forme d'une série dite de LePage. Nous en déduisons alors une représentation en série de LePage de tout champ α -stable

$$X_\alpha^f(x) = \Re \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi) W_\alpha(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (3.8)$$

associé à un noyau f déterministe tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, f(x, \cdot) \in L^\alpha(\mathbb{R}^d).$$

Afin de donner cette représentation, nous considérons trois suites indépendantes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que

- T_n est le $n^{\text{ème}}$ temps de saut de Poisson,
- les variables aléatoires ξ_n sont i.i.d. de loi $\mu(d\xi) = m(\xi)d\xi$ équivalente à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d ,
- et les variables aléatoires g_n sont i.i.d. isotropes telles que $0 < \mathbb{E}(|g_n|^\alpha) < +\infty$.

Pour chaque $h \in L^\alpha(\mathbb{R}^d)$, la série de LePage

$$\sum_n T_n^{-1/\alpha} h(\xi_n) m(\xi_n)^{-1/\alpha} g_n$$

converge presque sûrement vers une variable de même loi que l'intégrale stochastique $c_\alpha W_\alpha(h)$. En particulier, quitte à changer c_α , la loi limite ne dépend ni du choix de g_n et ni de celui de la densité m . Dès lors, quel que soit le choix de g_n et de m ,

$$X_\alpha^f \stackrel{(\mathcal{L})}{=} c_\alpha Z_\alpha^f$$

avec

$$Z_\alpha^f(x) = \Re \sum_{n=1}^{+\infty} T_n^{-1/\alpha} f(x, \xi_n) m(\xi_n)^{-1/\alpha} g_n, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (3.9)$$

Pour étudier la régularité de X_α^f , nous commençons par étudier celle de la version Z_α^f définie par une série de LePage. Comme nous l'avons déjà remarqué, nous avons une large possibilité de choix pour g_n et pour la densité m . Dans [BL09, BLS11], suivant [KM91], nous avons pris pour g_n des variables aléatoires gaussiennes. Le choix de m est lui lié au comportement anisotrope du modèle.

3.3.2 Modèles à autosimilarité matricielle

Dans [BL09], notre but était de compléter le papier [BMS07] qui introduit des modèles gaussiens et stables mais n'étudie leur propriété de régularité que dans le cas gaussien. Dans le cadre gaussien, nous améliorons [BMS07] en donnant une majoration du module de continuité.

Champs harmonisables

Dans un premier temps, intéressons-nous aux champs harmonisables introduits par [BMS07]. Nous fixons donc une matrice $E \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que

$$\min_{\lambda \in \text{Sp} E} \Re(\lambda) > 1$$

et une fonction $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ ne s'annulant qu'en $x = 0$ et étant E^t -homogène, c'est-à-dire telle que

$$\forall c > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \psi(c^{E^t} \xi) = c\psi(\xi).$$

Nous considérons alors le champ X_α^f défini par (3.8) avec

$$f(x, \xi) = \left(e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1 \right) \psi(\xi)^{-1 - \text{trace}(E)/\alpha} \quad (3.10)$$

et Z_α^f défini par (3.9) en choisissant des variables g_n de loi gaussienne (comme le fait [KM91]). Les champs X_α^f et Z_α^f sont alors autosimilaires d'ordre E au sens de la propriété (1.4) donnée dans le chapitre 1. Dès lors, ces champs sont a priori anisotropes et en utilisant la propriété d'autosimilarité matricielle, nous constatons que

$$c_1 \tau_E(x - y) \leq \left\| X_\alpha^f(x) - X_\alpha^f(y) \right\|_\alpha = c_\alpha \left\| Z_\alpha^f(x) - Z_\alpha^f(y) \right\|_\alpha \leq c_2 \tau_E(x - y). \quad (3.11)$$

Autrement dit, les paramètres d'échelle des accroissements de X_α^f , ou encore de Z_α^f , se comportent comme la partie radiale τ_E des coordonnées polaires par rapport à E . Dans le cadre gaussien, (3.11) suffit pour dire que la régularité höldérienne est donnée par celle de τ_E au voisinage de 0. Dans le cas stable ($\alpha < 2$), nous ne pouvons pas conclure directement mais il est clair que τ_E joue un rôle important vu qu'elle contrôle l'anisotropie du modèle.

Vu notre choix pour g_n , conditionnellement à la suite $(\xi_n, T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, Z_α^f est un champ gaussien réel centré dont le variogramme est donné par

$$v(x, y | (\xi_n, T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) = c \sum_{n=1}^{+\infty} T_n^{-2/\alpha} |f(x, \xi_n) - f(y, \xi_n)|^2 m(\xi_n)^{-2/\alpha}$$

avec $c = \mathbb{E}(|g_1|^2)/2$. En nous inspirant de la preuve du lemme de Kolmogorov-Centsov et de [KM91], nous arrivons à ramener le contrôle de Z_α^f (ou encore de X_α^f) à celui du variogramme v . Pour y arriver, nous commençons par contrôler les accroissements sur une sous-suite des dyadiques choisie de façon à tenir compte de l'anisotropie de Z_α^f . En d'autres termes, cette suite est construite à l'aide de τ_E . Pour construire cette suite mais aussi pour dénombrer certains ensembles, comparer τ_E avec la norme euclidienne nous a été très utile (résultats donnés dans le paragraphe 1.3 du chapitre 1).

Dès lors, la dernière étape consiste à contrôler le variogramme v en fonction de τ_E . Plus précisément, nous montrons que

$$v(x, y | (\xi_n, T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) \leq \tau_E(x - y)^2 |\log \tau_E(x - y)|^{2/\alpha + 2\varepsilon}$$

pour $\|x - y\|$ petit. Établir ce contrôle de v est assez délicat ; sans entrer dans les détails, utiliser le changement de variables dans une intégrale en coordonnées polaires par rapport à τ_{E^t} est pratique et le bon choix de m pour s'en sortir est

$$m(\xi) = \frac{c_\eta}{\tau_{E^t}(\xi)^{\text{trace}(E)} |\log \tau_{E^t}(\xi)|^{1+\eta}}$$

avec $\eta > 0$ un paramètre voué à être choisi très petit et c_η une constante choisie de sorte à ce que m soit une densité. Le choix de la forme de m est lié au comportement asymptotique du noyau déterministe f quand $\|\xi\| \rightarrow +\infty$. Bien sûr nous choisissons m de sorte à obtenir le meilleur contrôle possible du module de continuité avec la démarche employée.

En suivant la démarche que nous venons d'esquisser pour le choix de m ci-dessus, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.3.1. *Il existe une modification \tilde{X}_α^f de X_α^f telle que presque sûrement*

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\substack{x, y \in K \\ 0 < \|x - y\| \leq \delta}} \frac{|\tilde{X}_\alpha^f(x) - \tilde{X}_\alpha^f(y)|}{\tau_E(x - y) |\log \tau_E(x - y)|^{1/\alpha + 1/2 + \varepsilon}} = 0.$$

Nous pouvons comparer ce théorème avec les résultats obtenus par la suite par [Xia10]. La majoration proposée par [Xia10] s'exprime en fonction de la norme euclidienne et ne tient donc pas compte de l'anisotropie de X_α^f contrairement à celle proposée dans le théorème précédent. De plus, même lorsque τ_E est la norme euclidienne, le résultat de [Xia09] est moins précis (la différence portant simplement sur la puissance du logarithme). Notons toutefois que [Xia10] utilise moins d'information que nous sur la nature du champ étudié : son résultat découle d'un critère général établi pour des champs a priori ni stables ni gaussiens.

Remarque 3.3.2. *Nous obtenons le même résultat pour un champ gaussien à autosimilarité matricielle d'ordre E en remplaçant $1/\alpha$ par 0 dans la normalisation. D'autres résultats sur la régularité des modèles gaussiens à autosimilarité matricielle sont établis dans [CV11b].*

Le théorème précédent, combiné avec les comparaisons entre τ_E et la norme euclidienne (cf. paragraphe 1.3 du chapitre 1), permet de minorer les exposants critiques de Hölder (directionnels ou non) des trajectoires de X_α^f . En utilisant le contrôle (3.11) des paramètres d'échelles, nous constatons que ces minoration sont optimales. Nous retrouvons alors les résultats établis dans le cas gaussien par [BMS07]. Nous donnons les exposants directionnels en tout point ; ces exposants varient avec la direction mais pas avec la position x . En fait, comme dans le cas gaussien, les valeurs sont liées à la décomposition de Jordan de la matrice E . En particulier,

- l'exposant critique de Hölder de \tilde{X}_α^f sur un pavé est presque sûrement $\frac{1}{\max_{\lambda \in \text{Sp} E} \Re \lambda}$;
- et si $u \in \mathbb{S}_{d-1}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre réelle $\lambda = 1/H_j$, sur un pavé, l'exposant critique de \tilde{X}_α^f dans la direction u est presque sûrement H_j .

Nous obtenons aussi les dimensions de boîtes et de Hausdorff du graphe de \tilde{X}_α^f sur n'importe quel pavé. Comme on pouvait s'y attendre, elles ne dépendent que de l'exposant de Hölder critique. Pour être plus précise,

$$\dim_{\mathcal{H}} \text{Gr} \tilde{X}_\alpha^f(K) = \dim_{\mathcal{B}} \text{Gr} \tilde{X}_\alpha^f(K) = d + 1 - \frac{1}{\max_{\lambda \in \text{Sp} E} \Re \lambda} \quad \text{presque sûrement.}$$

Champs définis par un noyau moyenne mobile

Dans [BL09], avec Hermine Biermé, j'ai aussi étudié les champs α -stables définis par une représentation moyenne mobile dans [BMS07]. Dans le cas gaussien, ces champs ont alors le même type de variogramme que les champs gaussiens harmonisables et donc les mêmes propriétés de régularité. Dans le cas stable $\alpha < 2$, le comportement est radicalement différent. En exagérant un peu, lorsque l'on intègre un noyau déterministe $f(x, \cdot)$ contre une mesure stable non gaussienne, le champ obtenu ne peut pas être plus régulier que le noyau. Le noyau moyenne mobile explosant si $d \geq 2$, nous montrons que si $d \geq 2$, les champs α -stables ($\alpha < 2$) définis par une moyenne mobile sont non bornés presque sûrement sur toute boule de \mathbb{R}^d .

3.3.3 Modèles harmonisables à autosimilarité matricielle locale

Les modèles à autosimilarité matricielle définis dans [BMS07] étant à accroissements stationnaires, il n'est pas étonnant que leur régularité ponctuelle soit la même le long des trajectoires. Afin d'avoir plus de flexibilité dans le modèle, nous avons dans [BLS11] défini des champs dont cette régularité peut varier non seulement selon la direction mais aussi le long des trajectoires. Nous inspirant de [BJR97, PLV95] qui ont introduit le mouvement brownien multifractionnaire, nous avons remplacé dans le noyau harmonisable (3.10) la matrice E par une fonction

$$x \mapsto E(x).$$

Dans (3.10) la fonction ψ étant E^t -homogène, elle dépend en quelque sorte de la matrice E . Nous avons donc aussi remplacé ψ par une fonction $E(x)^t$ -homogène ψ_x . Finalement, nous étudions le modèle

$$X_\alpha^f(x) = \Re \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi) W_\alpha(dx), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

avec

$$f(x, \xi) = \left(e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1 \right) \psi_x(\xi)^{-1 - \text{trace}(E(x))/\alpha}.$$

Bien évidemment, $E(x)$ et ψ_x satisfont les hypothèses nécessaires pour définir les champs à autosimilarité matricielle (c'est-à-dire les hypothèses données dans le paragraphe 3.3.2).

Afin d'étudier la régularité de X_α^f en un point x_0 , nous avons été amenés à faire plusieurs hypothèses supplémentaires. Ces hypothèses sont à peu près les suivantes :

- la fonction E est localement lipschitzienne,
- la fonction $(x, \xi) \mapsto \psi_x(\xi)$ est localement lipschitzienne sauf en $\xi = 0$
- et les matrices $E(x)$ et $E(y)$ commutent pour $x, y \in B(x_0, r_0)$.

Les deux premières hypothèses assurent que les variations en x dues aux fonctions E et ψ sont négligeables dans l'étude de la régularité de X_α^f . Nous pouvons sans doute les relaxer en supposant les fonctions E et ψ localement höldériennes. Dans ce cas, comme observé pour le mouvement brownien multifractionnaire, leur régularité höldérienne jouera un rôle dans celle de X_α^f .

La dernière hypothèse nous permet de contrôler les espaces propres de $E(x)$ pour x proche de x_0 .

Avant tout, nous avons proposé un bon nombre de choix possible pour le couple de fonctions (E, ψ) . Ensuite, pour étudier la régularité de X_α^f , nous avons, comme dans le cas E constant, introduit le champ Z_α^f associé à X_α^f par (3.9). Comme précédemment, nous avons pris pour g_n des variables aléatoires gaussiennes et avons ramené notre étude à celle du variogramme conditionnel

$$v(x, y | (\xi_n, T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) = c \sum_{n=1}^{+\infty} T_n^{-2/\alpha} |f(x, \xi_n) - f(y, \xi_n)|^2 m(\xi_n)^{-2/\alpha}.$$

L'idée est alors de séparer les dépendances du noyau f en la variable x en introduisant la fonction annexe

$$h(w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}, \xi) = \left(e^{i\langle w^{(1)}, \xi \rangle} - 1 \right) \psi_{w^{(2)}}(\xi)^{-1 - \text{trace}(E(w^{(3)}))/\alpha}.$$

Le variogramme v est alors défini en faisant varier d'un coup les trois variables $w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}$. Nous pouvons le majorer à partir de ceux que l'on définit en ne faisant varier qu'une seule de ces variables. Cette tactique revient en fait à introduire un champ annexe

$$Y_\alpha^h(w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}) = \Re \sum_{n=1}^{+\infty} T_n^{-1/\alpha} h(w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}, \xi_n) m(\xi_n)^{-1/\alpha} g_n$$

et à étudier son comportement en chacune de ses coordonnées. Les variations en $w^{(2)}$ et $w^{(3)}$ correspondent à des variations de la matrice E et de la fonction ψ . Sous nos hypothèses de régularité des fonctions E et ψ , elles sont négligeables. Dès lors, l'étude du variogramme conditionnel v se ramène à celle de

$$v_3(x, y | (\xi_n, T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n^{-2/\alpha} \left| e^{i\langle x, \xi \rangle} - e^{i\langle y, \xi \rangle} \right|^2 \psi_y(\xi)^{-2 - 2\text{trace}E(y)/\alpha} m(\xi_n)^{-2/\alpha}.$$

Il s'agit du variogramme conditionnel associé à un champ harmonisable α -stable à autosimilarité matricielle d'ordre $E(y)$. Pour une certaine fonction m construite à l'aide de $E(y)$, nous avons contrôlé ce variogramme dans [BL09]. Mais y n'étant pas ici une valeur figée et dans la définition de Z_α^f , m ne pouvant pas varier, nous ne pouvons pas appliquer [BL09]. Comme $x, y \in B(x_0, r)$ et que nous étudions la régularité de X_α^f , nous avons défini m par

$$m(\xi) = \frac{c_\eta}{\tau_{E^t(x_0)}(\xi)^{\text{trace}(E(x_0))} \left| \log \tau_{E^t(x_0)}(\xi) \right|^{1+\eta}}.$$

Afin de contourner le fait que la fonction m n'est pas définie à partir de $E(y)$, nous avons comparé $\tau_{E(x_0)}$ avec $\tau_{E(y)}$, uniformément en y . Nous avons alors établi le contrôle suivant du module de continuité de X_α^f .

Théorème 3.3.3. *Soit $T \subset \mathbb{R}^d$ un pavé d'intérieur non vide. Alors, il existe une modification \tilde{X}_α^f de X_α^f sur T telle que pour tout $x_0 \in T$ et tout $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{\gamma \downarrow 0} \sup_{x, y \in B(x_0, \gamma)} \frac{|\tilde{X}_\alpha^f(x) - \tilde{X}_\alpha^f(y)|}{\tau_{E(x_0)}(x - y)^{1-\varepsilon}} = 0.$$

Dans le cas où $E \equiv E(x_0)$ est constante et ψ_x ne dépend pas de x , le théorème précédent est moins précis que celui que nous avons établi dans [BL09]. La perte de précision est due à la comparaison entre $\tau_{E(x)}$ et $\tau_{E(x_0)}$.

Précisons aussi qu'en dimension $d = 1$, [DS11] s'intéresse au module de continuité d'un champ α -stable harmonisable multifractionnaire X_α^f (cas $E = 1/h(x)$). Cet article se focalise sur la régularité sur un intervalle quelconque, c'est-à-dire ne localise pas l'étude autour de x_0 .

Comme dans [BL09] (cas E constant), les comparaisons de $\tau_{E(x_0)}$ avec la norme euclidienne et le théorème ci-dessus donnent des minoration des exposants de Hölder directionnels et globaux. Pour établir que ces minoration sont optimales, nous étudions les paramètres d'échelles

$$\left\| X_\alpha^f(x) - X_\alpha^f(y) \right\|_\alpha$$

et contrôlons uniformément en u les parties radiales $\tau_{E(u)}$ en fonction de la norme euclidienne. Procédant ainsi, nous obtenons en particulier les résultats suivants :

- l'exposant ponctuel de Hölder de \tilde{X}_α^f en x_0 est presque sûrement $\frac{1}{\max_{\lambda \in \mathbb{S}^{d-1}} \mathfrak{R}\lambda}$;
- si $u \in \mathbb{S}_{d-1}$ est un vecteur propre de $E(x_0)$ associé à la valeur propre réelle $\lambda(x_0)$, l'exposant ponctuel de Hölder de \tilde{X}_α^f dans la direction u est presque sûrement $1/\lambda_j(x_0)$.

Comme dans le cas du mouvement brownien multifractionnaire ou encore des champs de Lévy multifractionnaires, ces exposants dépendent de la position x_0 . Mais ici, comme attendu, ils dépendent aussi de la direction u .

Pour terminer, nous nous sommes intéressés aux propriétés d'autosimilarité vérifiées par le champ X_α^f . En général, ce champ n'est pas à autosimilarité matricielle mais est tel que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left\{ \frac{X_\alpha^f(x_0 + \varepsilon E(x_0)) - X_\alpha^f(x_0)}{\varepsilon}; u \in \mathbb{R}^d \right\} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \left\{ Y_\alpha(u); u \in \mathbb{R}^d \right\}$$

avec Y_α un champ harmonisable α -stable à autosimilarité matricielle d'ordre $E(x_0)$. Cette constatation nous a alors conduits à introduire la notion d'autosimilarité matricielle asymptotique locale (voir chapitre 1).

3.3.4 Séries conditionnellement sous-gaussiennes

Le papier [BL12] présenté dans ce paragraphe étant en cours de rédaction, je ne peux que l'évoquer brièvement et donner son origine.

En travaillant sur les champs présentés dans le paragraphe précédent, nous avons regretté de devoir à nouveau introduire toutes les notations sur les séries de LePage et reprendre la preuve quasi-entièrement pour établir l'existence d'une modification continue et contrôler son module de continuité. Pour éviter à l'avenir d'avoir à procéder ainsi pour

d'autres modèles X_α^f , avec Hermine Biermé, nous donnons dans [BL12] une condition sur le noyau f permettant de bien dominer le variogramme conditionnel introduit dans la méthode. Nous avons rapidement constaté que notre démarche pouvait être généralisée pour étudier un champ S défini par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} V_n(x)g_n, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

avec $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indépendantes telles que

- les champs V_n sont i.i.d. et $\sum_{n=1}^{+\infty} |V_n(x)|^2 < +\infty$ presque sûrement.
- les variables aléatoires g_n sont indépendantes complexes sous-gaussiennes pour un même paramètre, c'est-à-dire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \mathbb{E}\left(e^{\Re(\bar{z}g_n)}\right) \leq e^{c|z|^2/2}.$$

Ces conditions assurent la convergence presque sûre de la série $\sum_n V_n(x)g_n$. Nous nous sommes tout d'abord posé les questions suivantes :

- cette série converge-t-elle uniformément en x ?
- peut-on donner une majoration du module de continuité de S ?
- peut-on donner une vitesse de convergence pour la série $\sum_n V_n g_n$?

Utilisant notamment les idées de nos papiers [BL09, BLS11], avec Hermine Biermé, nous avons pu répondre positivement aux deux questions précédentes en supposant avoir un contrôle de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |V_n(x) - V_n(y)|^2$$

pour $x, y \in B(x_0, r)$. Cette série est, conditionnellement à $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, un paramètre de sous-gaussianité de la variable $S(x) - S(y)$. Il s'agit ainsi de l'analogie du variogramme conditionnel que nous introduisons dans [BL09, BLS11].

Afin d'obtenir la convergence uniforme de la série, nous n'avons pas seulement étudié la régularité de S . Nous avons tout d'abord établi une borne uniforme en N du module de continuité des sommes partielles

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N V_n(x)g_n, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Pour établir cette majoration, nous n'avons pas simplement suivi la démarche de [BL09, BLS11]. La différence essentielle réside en l'utilisation des inégalités de Lévy pour les suites symétriques de variables aléatoires. La majoration obtenue permet d'établir une propriété d'équicontinuité pour $(S_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ et d'en déduire sa convergence uniforme sur une boule de rayon aléatoire. Enfin, cette majoration étant uniforme en N , elle reste vraie pour la limite S . Ainsi, nous obtenons un contrôle du module de continuité de S .

Pour répondre à la dernière question, il suffit de se donner non seulement un contrôle en x, y mais aussi une vitesse de convergence pour le reste de la série des carrés, c'est-à-dire pour

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |V_n(x) - V_n(y)|^2.$$

Nos résultats nous permettent en particulier d'étudier les séries de LePage

$$S(\alpha, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n^{-1/\alpha} W_n(x)$$

avec $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite symétrique de champs aléatoires i.i.d. Il faut alors prendre pour $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de Rademacher. Utilisant les résultats de convergence que j'ai obtenus dans [CLL08] en collaboration avec Michel Ledoux et Serge Cohen, nous arrivons à proposer une hypothèse sur les moments de V_n pour vérifier nos hypothèses sur

$$V_n(\alpha, x) = T_n^{-1/\alpha} W_n(x).$$

Au final, nous obtenons une régularité de S en (α, x) ainsi que la proposition 3.1.3. En appliquant ces résultats, nous pouvons étudier les champs α -stables comme des champs multi-stables (champs introduits dans [FLGLV09, LGLV12]).

Chapitre 4

Autour des statistiques

Ce chapitre regroupe mes travaux plus orientés vers les statistiques. En modélisation, il est en particulier essentiel de pouvoir déterminer les paramètres caractérisant le modèle utilisé à partir des données observées. Ainsi, je me suis attaquée aux problèmes d'estimation des paramètres des modèles que j'ai étudiés. La première partie de ce chapitre présente les estimateurs proposés dans [Lac04b] et [LL07] pour les champs de Lévy présentés dans le chapitre 2 de ce mémoire.

La seconde partie de ce chapitre présente [CGLL11], papier dans lequel nous nous intéressons à la propriété LAN (acronyme de *Local Asymptotic Normality*) pour certaines suites stationnaires et pour le mouvement brownien fractionnaire. L'avantage de cette propriété est qu'elle fournit un cadre pour établir l'optimalité de certains estimateurs ou de tests.

La dernière partie présente [LMGRT12] dans lequel nous étudions un algorithme de débruitage. Il s'agit d'un travail avec Samy Tindel, Aurélie Muller, tous deux membres de l'équipe Projet INRIA BIGS et de l'IECN, et Radu Ranta qui est membre du CRAN (Centre de Recherche en Automatique de Nancy).

4.1 Estimation et champs de Lévy multifractionnaires

Pour estimer le paramètre de Hurst H d'un mouvement brownien fractionnaire, il existe de nombreuses méthodes. Nous pouvons en particulier citer [AFTV03, Bar02, BLMS00, DVA98] pour les estimateurs basés sur les coefficients d'ondelettes et [IL97, KW97] pour les estimateurs basés sur les variations quadratiques. D'autres références sont données dans les deux études [Bar02, Coe01]. En ce qui concerne l'estimation du mouvement brownien multifractionnaire, il existe un peu moins de littérature. Nous pouvons citer les estimateurs basés sur les variations quadratiques généralisées [BCI98] ou encore un estimateur IRS plus récemment étudié dans [BS12, BFG]. Suivant l'idée de localiser les variations quadratiques, j'ai tout d'abord proposé un estimateur pour les champs de Lévy multifractionnaires dans [Lac04b]. Par la suite, en collaboration avec Jean-Michel Loubes, j'ai proposé un estimateur basé sur les coefficients d'ondelettes.

4.1.1 Variations quadratiques généralisées

Considérons X_h un champ de Lévy multifractionnaire, au sens du chapitre 2. Ainsi,

$$X_h(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{h(x)+d/2}} L(d\xi)$$

avec h une fonction localement β -höldérienne et L une mesure aléatoire de Lévy non nulle. Afin de simplifier un peu la présentation, je suppose que $d = 2$ mais la méthode d'estimation proposée convient pour tout $d \geq 1$.

Supposons que l'on observe des données modélisées par X_h sur une grille discrète de $[0, 1]^2$ de pas de discrétisation $1/N$. En d'autres termes, nous observons une réalisation de

$$X_h \left(\frac{k_1}{N}, \frac{k_2}{N} \right) \quad \text{pour } 0 \leq k_1, k_2 \leq N = 2^n$$

et nous cherchons à estimer la fonction h sur $[0, 1]$. Suivant [BCI98] qui s'intéresse à l'estimation de h pour le mouvement brownien multifractionnaire ($d = 1$ et $L = \widehat{W}$), j'ai proposé d'estimer h en localisant un estimateur basé sur les variations quadratiques généralisées. Dans le cas $h \equiv H$, la localisation n'est pas nécessaire et la consistance de l'estimateur a été établie dans [BCI02].

Afin de procéder ainsi, j'ai considéré un filtre $a = (a_0, \dots, a_K)$ d'ordre $r \geq 1$ c'est-à-dire tel que

$$\forall 1 \leq j \leq r-1, \sum_{k=1}^K k^j a_k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^K k^r a_k \neq 0.$$

Les variations quadratiques généralisées localisées sont alors construites à partir des accroissements

$$\Delta X \left(\frac{p_1}{N}, \frac{p_2}{N} \right) = \sum_{k_1=0}^K \sum_{k_2=0}^K a_{k_1} a_{k_2} X_h \left(\frac{k_1 + p_1}{N}, \frac{k_2 + p_2}{N} \right),$$

qui sont tout simplement obtenus en filtrant le champ X_h par a . En particulier, pour $a = (1, -1)$, cet accroissement est un accroissement rectangulaire de X_h . Finalement pour le filtre a , la variation quadratique considérée est

$$V_{\varepsilon, N}(x) = \sum_{(p_1, p_2) \in \mathcal{V}_{\varepsilon, N}(x)} \left(\Delta X \left(\frac{p_1}{N}, \frac{p_2}{N} \right) \right)^2$$

avec

$$\mathcal{V}_{\varepsilon, N}(x) = \left\{ p \in \mathbb{Z}^2, \max_{1 \leq j \leq d} \left| \frac{p_j}{N} - x_j \right| < \varepsilon \right\}.$$

Définissant de même la variation quadratique $V_{\varepsilon, N/2}$ (ici N est pair), j'ai proposé d'estimer $h(x)$ par

$$\widehat{h}_N(x) = \frac{1}{2} \text{Log}_2 \left(\frac{V_{N^{-\alpha}, N/2}(x)}{V_{N^{-\alpha}, N}(x)} \right) + d.$$

Dans l'étude de la convergence de \widehat{h}_N que j'ai menée dans [Lac04b], l'idée essentielle est d'introduire le champ annexe

$$Y(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{y+d/2}} L(d\xi) \quad x \in \mathbb{R}^d, y \in]0, 1[.$$

J'ai alors comparé la variation quadratique localisée $V_{\varepsilon, N}(x)$ à

$$W_{\varepsilon, N}(x) = \sum_{p \in \mathcal{V}_{\varepsilon, N}(x)} \left[\sum_{k_1=0}^K \sum_{k_2=0}^K a_{k_1} a_{k_2} Y \left(\frac{k_1 + p_1}{N}, \frac{k_2 + p_2}{N}, h \left(\frac{p_1}{N}, \frac{p_2}{N} \right) \right) \right]^2.$$

Autrement dit, dans chaque accroissement obtenu par le filtre a , j'ai figé la valeur de la seconde variable de Y . En étudiant ensuite la variance et l'espérance de $W_{\varepsilon, N}(x)$, j'ai établi la consistance forte de $\widehat{h}_N(x)$, c'est-à-dire

$$\widehat{h}_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} h(x) \quad \text{presque sûrement}$$

mais à condition que $h < \beta$. Pour être honnête, en dimension $d = 1$ je n'obtiens que la convergence faible (l'ordre asymptotique de la variance ne me permettant pas d'utiliser le lemme de Borel-Cantelli).

Une étude de la vitesse de convergence montre qu'il semble optimal de choisir $\alpha = d/(d + 2\beta)$ et qu'alors

$$\widehat{h}_N(x) = h(x) + O_{\mathbb{P}}\left(N^{\min(\beta-h(x), \gamma)} \ln N\right), \quad \forall \gamma < \alpha\beta.$$

4.1.2 Estimation via des coefficients d'ondelettes

Le paragraphe précédent s'intéresse aux estimateurs basés sur les variations quadratiques. Mais il est aussi classique d'estimer la régularité d'un signal X à partir de ses coefficients d'ondelettes. Il s'agit finalement de filtrer le processus $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ non plus par un filtre discret a mais au moyen d'une ondelette ψ . Avec Jean-Michel Loubes, nous avons étudié un tel estimateur [LL07] pour un champ de Lévy fractionnaire.

Considérons X_H un processus de Lévy fractionnaire, c'est-à-dire

$$X_H(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H+1/2}} L(d\xi)$$

avec L une mesure aléatoire de Lévy sur \mathbb{R} au sens de [BCI02] (cf. chapitre 2). Nous considérons aussi ψ une fonction non nulle \mathcal{C}^1 à support compact et telle que

$$\forall m = 0, \dots, r-1, \int_{\mathbb{R}} t^m \psi(t) dt = 0 \quad \text{avec } r \geq 2.$$

Cette condition est comparable à celle sur le filtre a dans le paragraphe précédent. Comme nous supposons qu'en pratique X_H est observé sur une grille discrète de $[0, 1]$, la fonction ψ est choisie à support dans $[0, 1]$. Nous considérons alors les coefficients filtrés

$$w_{jk} = 2^{j/2} \int_0^1 X_H(t) \psi(2^j t - k) dt = 2^{-j/2} \int_0^1 X_H\left(\frac{u+k}{2^j}\right) \psi(u) du$$

avec $j \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq 2^j - 1$.

Estimation pour un processus observé en temps continu

En supposant observer toute la trajectoire de X_H sur $[0, 1]$, nous avons établi la consistance de l'estimateur

$$\widehat{H}_J = \frac{-1}{2J} \log_2 \left(\sum_{k=0}^{2^J-1} w_{Jk}^2 \right),$$

c'est-à-dire que

$$\widehat{H}_J \xrightarrow{J \rightarrow +\infty} H, \quad \text{presque sûrement.}$$

Il est facile de voir que pour établir ce résultat, il suffit de montrer que

$$\widetilde{V}_J = 2^{2JH} \sum_{k=0}^{2^J-1} w_{Jk}^2$$

converge presque sûrement vers $C_H \neq 0$. Remarquons que \widetilde{V}_J est finalement un analogue de la variation quadratique généralisée (les accroissements obtenus par le filtre discret a sont remplacés par les coefficients w_{jk}). Pour montrer sa convergence presque sûre, nous avons établi que

$$\mathbb{E}\left(\widetilde{V}_J\right) = C_H \quad \text{et} \quad \lim_{J \rightarrow +\infty} 2^J \text{Var} \widetilde{V}_J = D_H > 0.$$

Comme le moment d'ordre 1 de ψ est nul, nous avons pu vérifier que

$$w_{jk} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\overline{\psi_{jk}(\xi)}}{|\xi|^{H+1/2}} L(d\xi)$$

avec $\widehat{\psi}$ la transformée de Fourier de ψ . Nous avons aussi vérifié que cette suite est stationnaire en k à j fixé, ce qui prouve que la moyenne $\mathbb{E}(\widetilde{V}_J)$ est bien constante.

Utilisant [BCI02], nous avons une expression de $\text{Var}\widetilde{V}_J$ en fonction de $\widehat{\psi}$. À partir de là pour obtenir un équivalent de cette variance, l'essentiel est que l'hypothèse sur les moments de ψ nous permet de contrôler sa transformée de Fourier au voisinage de 0. Plus précisément, nous savons que

$$\widehat{\psi}(\xi) = O(|\xi|^2).$$

Ce comportement en 0 de $\widehat{\psi}$ nous permet d'appliquer des intégrations par parties pour obtenir l'ordre de grandeur de chacun des termes apparaissant dans l'expression de $\text{Var}\widetilde{V}_J$, ce qui est nous suffit pour conclure.

Ayant aussi établi que les coefficients w_{jk} se comportent, asymptotiquement en j , comme ceux issus d'un modèle gaussien, nous avons l'espoir de pouvoir établir un théorème de la centrale limite pour \widehat{H}_J . Malheureusement, nous n'avons pas réussi à contourner le fait que le processus initial X_H n'est pas gaussien.

Estimation pour un processus observé en temps discret

En pratique, nous observons

$$X_H\left(\frac{\ell}{N}\right), \quad 0 \leq \ell \leq N$$

et pas la trajectoire complète du processus X_H . Nous ne pouvons donc pas calculer les coefficients w_{jk} . Cependant, nous pouvons les approcher par

$$w_{jk}^n = \frac{1}{2^{j/2}n} \sum_{p=1}^n X_H\left(\frac{p+nk}{2^j n}\right) \psi\left(\frac{p}{n}\right)$$

avec $n = n(N)$ choisi de sorte à pouvoir calculer w_{jk}^n à partir des données. Nous proposons alors d'estimer H par

$$\widehat{H}_{J,N} = \frac{-1}{2^J} \log_2 \left(\sum_{k=0}^{2^J-1} (w_{Jk}^n)^2 \right).$$

Pour avoir la consistance, il suffit de choisir n et N de sorte à ce que l'erreur commise en approchant \widetilde{V}_J par

$$2^{2JH} \sum_{k=0}^{2^J-1} (w_{Jk}^n)^2$$

soit négligeable. L'évaluation de cette erreur, nous a permis de montrer que

$$\widehat{H}_{J,2^{2J}} \xrightarrow{J \rightarrow +\infty} H \text{ presque sûrement}$$

en choisissant $N = 2^{2J}$ comme pas de discrétisation du processus et $n = \sqrt{N} = 2^J$ comme pas pour approcher les coefficients w_{jk} .

Estimation pour un processus bruité observé en temps discret

En pratique les données observées sont souvent obtenues avec un bruit qui n'est pas dû au fait qu'elles proviennent d'un phénomène aléatoire. Il faut donc modéliser les données observées non pas par X_H mais par

$$X_H + R$$

avec R un bruit aléatoire. Nous nous sommes donc demandés si l'estimateur proposé convenait sous cette hypothèse. Pour être plus précise, nous avons supposé observer

$$Y_H \left(\frac{\ell}{N} \right) = X_H \left(\frac{\ell}{N} \right) + \sigma_N \varepsilon_\ell, \ell = 0, \dots, N,$$

avec ε_ℓ des variables aléatoires i.i.d. gaussiennes centrées réduites. Le bruit est bien sûr supposé indépendant du processus X_H . Finalement remplacer X_H par Y_H dans $\hat{H}_{J,2^J}$ revient à remplacer les coefficients w_{jk}^n par des coefficients bruités

$$w_{jk}^n + r_{jk}^n$$

avec

$$r_{jk}^n \sim \mathcal{N} \left(0, \frac{\sigma_N^2}{2^J n^2} \sum_{p=1}^n \psi \left(\frac{p}{n} \right)^2 \right).$$

Pour que l'estimateur $\hat{H}_{J,2^J}$ reste consistant en remplaçant X_H par Y_H dans sa définition, il faut faire en sorte que la variance de r_{jk}^n soit suffisamment petite. Remarquant que cette variance est en fait de l'ordre de $\frac{\sigma_N^2}{2^J n^2}$, nous avons réussi à établir la consistance en supposant que $\sigma_N = O(N^{-1/2})$.

Illustrations numériques

La figure ci-après est issue de l'article [LL07]. Elle illustre la convergence de l'estimateur en présence de bruit. La fonction ψ est construite à partir d'une ondelette de Daubechies.

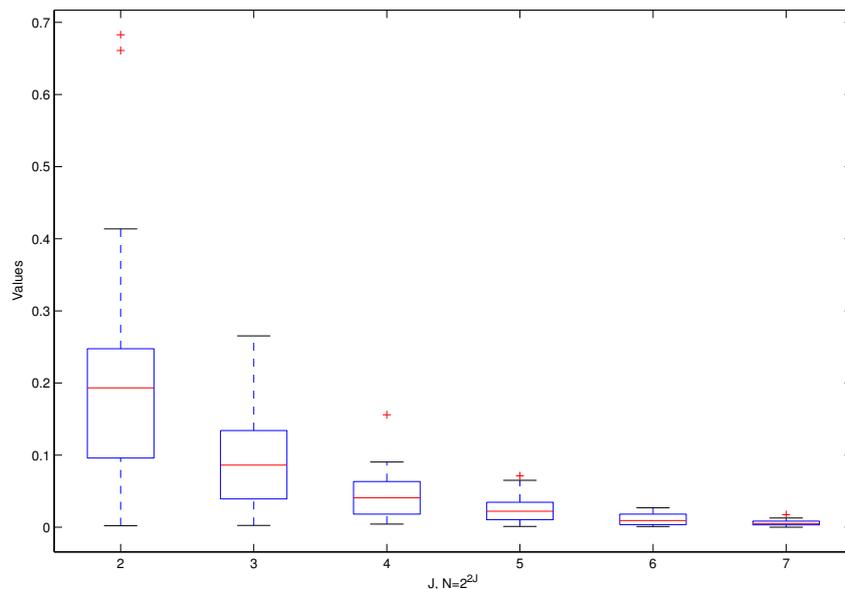


FIGURE 4.1: Erreur commise en présence de bruit pour $H = 0.4$

4.2 Normalité asymptotique locale (LAN)

Lorsque l'on modélise des données réelles par un modèle paramétrique $\{\mathbb{P}_{n,\theta}; \theta \in \Theta\}$, il est important de savoir construire un estimateur le plus précis possible $\hat{\theta}_n$ de la vraie valeur θ_0 du paramètre à partir des données observées. Cet estimateur doit être efficace, c'est-à-dire de variance la plus petite possible ou encore optimal au sens de Cramér-Rao, ou au moins asymptotiquement efficace. Les modèles LAN (local asymptotic normality) sont un très bon cadre pour construire de tels estimateurs (l'exemple classique étant le maximum de vraisemblance). L'idée de cette propriété, introduite initialement par A. Wald [Wal43] puis développée et popularisée par L. Le Cam [LC60], est d'approcher le modèle par un modèle gaussien plus simple, au moins autour de θ_0 :

$$\{\mathbb{P}_{n,\theta}; \theta \in \mathcal{V}(\theta_0)\} \approx \{\mathbb{Q}_n; \theta \in \mathcal{V}(\theta_0)\} \quad \text{où } \mathbb{Q}_n = \mathcal{N}(m_{\theta,n}, \Sigma_{\theta,n}).$$

Le modèle simplifié $\{\mathbb{Q}_n; \theta \in \mathcal{V}(\theta_0)\}$ doit être choisi le plus simple possible mais contenir autant d'information que le modèle initial sur le paramètre θ . Le modèle initial hérite alors, en général, des propriétés asymptotiques du modèle simplifié. En particulier, prouver qu'un modèle est LAN permet de quantifier l'optimalité d'un estimateur en comparant ses performances au second ordre (i.e en termes de variance) dans le modèle initial et dans le modèle gaussien plus simple $\{\mathbb{Q}_n; \theta \in \mathcal{V}(\theta_0)\}$. De plus, la théorie de L. Le Cam (cf. par exemple [vdV98]) sur les modèles LAN permet aussi la construction de tests optimaux (s'appuyant sur des propriétés de contiguïté).

Dans [CGLL11], avec Serge Cohen, Fabrice Gamboa et Jean-Michel Loubes, j'ai établi la propriété LAN pour un modèle associé à une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ stationnaire. Nous avons en particulier pu appliquer nos résultats aux séries ARFIMA. Ils nous permettent aussi d'obtenir la propriété LAN pour le mouvement brownien fractionnaire, qui lui n'est pas stationnaire.

Avant d'énoncer le résultat principal de notre travail, précisons un peu les notations. Nous considérons $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite stationnaire de variables aléatoires gaussiennes centrées. Toutes les variables aléatoires X_n ont alors pour loi la loi \mathbb{P}_θ paramétrisée par $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$. De plus, la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ étant stationnaire, elle admet une mesure spectrale μ_θ que nous supposons être de densité f_θ . Autrement dit, sous \mathbb{P}_θ ,

$$\mathbb{E}(X_n X_{n+k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ikx) f_\theta(x) dx = c_k(f_\theta).$$

En pratique, les données observées sont modélisées par $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. La loi de ce vecteur est notée \mathbb{P}_θ^n . Sous certaines hypothèses sur la densité spectrale, nous montrons que le modèle est alors LAN. Plus précisément, il satisfait le théorème suivant.

Théorème 4.2.1. *Fixons $\theta_0 \in \dot{\Theta}$. Sous des hypothèses de régularité sur f_θ et de contrôle uniforme en θ certaines dérivées partielles de f_θ , sous $\mathbb{P}_{\theta_0}^n$*

$$\log \frac{d\mathbb{P}_{\theta_0+t/\sqrt{n}}^n}{d\mathbb{P}_{\theta_0}^n} = \langle t, Z_n \rangle - \frac{1}{2} t^* I(\theta_0) t + \psi_{\theta_0}(t, n)$$

où

- $I(\theta)$ est l'information de Fisher du modèle, c'est-à-dire que

$$I(\theta) = \frac{1}{4\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \log f_\theta(x)}{\partial \theta_k} \frac{\partial \log f_\theta(x)}{\partial \theta_j} dx \right)_{1 \leq k, j \leq m},$$

- Z_n ne dépend pas t et converge en loi, sous $\mathbb{P}_{\theta_0}^n$ vers un vecteur gaussien centré G de matrice de covariance $I(\theta_0)$,

- et pour tout compact K ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in K} |\psi_{\theta_0}(t, n)| = 0 \quad \mathbb{P}_{\theta_0}^n \text{-presque sûrement.}$$

Nos hypothèses sont à quelque chose près celles sous lesquelles [LRR11a, LRR11b] étudient les propriétés asymptotiques du maximum de vraisemblance d'une suite gaussienne centrée. Nous devons simplement imposer une condition de régularité supplémentaire sur la dérivée partielle d'ordre 3 en θ de la densité spectrale f_θ .

En particulier, nous supposons que pour tout compact $\Theta^* \subset \Theta$ et tout $\delta > 0$,

$$c_{1,\delta,\Theta^*} |x|^{-\alpha(\theta)+\delta} \leq f_\theta(x) \leq c_{2,\delta,\Theta^*} |x|^{-\alpha(\theta)-\delta}$$

avec $\alpha : \Theta \rightarrow (-\infty, 1)$ une fonction continue. En fait, la fonction α permet de contrôler le comportement de la densité spectrale f_θ et de ses dérivées.

Dans notre étude les matrices de Toeplitz

$$T_n(g) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)x} f(x) dx \right)_{1 \leq k, j \leq n}$$

pour g une fonction symétrique réelle intégrable jouent un rôle essentiel car la matrice de covariance du vecteur gaussien \mathbf{X}_n est simplement

$$\frac{1}{2\pi} T_n(f_\theta).$$

Profitant du fait que \mathbf{X}_n est gaussien centré, nous pouvons tout d'abord écrire que

$$\log \frac{d\mathbb{P}_{\theta_0+t/\sqrt{n}}^n}{d\mathbb{P}_{\theta_0}^n}(\mathbf{x}_n) = F_n \left(\theta_0 + \frac{t}{\sqrt{n}} \right)$$

avec

$$F_n(\theta) = \pi \langle \mathbf{x}_n, [T_n(f_{\theta_0})^{-1} - T_n(f_\theta)^{-1}] \mathbf{x}_n \rangle + \frac{1}{2} \log \det [T_n(f_\theta)^{-1} T_n(f_{\theta_0})].$$

Nos hypothèses sur la régularité de f_θ , nous autorisent à effectuer un développement limité à l'ordre 2 de F_n . Il s'agit alors pour nous d'établir que

- $Z_n = \nabla F_n(\theta_0)/\sqrt{n}$, le terme d'ordre 1, converge en loi, sous $\mathbb{P}_{\theta_0}^n$, vers $G \sim \mathcal{N}(0, I(\theta_0))$,
- la hessienne $\nabla^2 F_n(\theta_0)/n$ converge $\mathbb{P}_{\theta_0}^n$ -presque sûrement vers $-I(\theta_0)$
- et, $\mathbb{P}_{\theta_0}^n$ -presque sûrement, le reste $R_{n,\theta_0}(t)$ converge uniformément sur tout compact vers 0.

La convergence de Z_n s'obtient en utilisant le théorème de Lindeberg. Pour pouvoir appliquer ce théorème, il faut tout d'abord se ramener à une série de variables aléatoires i.i.d. Ici, sous $\mathbb{P}_{\theta_0}^n$,

$$\langle u, \nabla F_n(\theta_0) \rangle \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n}^u (\chi_{j,n} - 1),$$

avec $\chi_{j,n}$ des variables aléatoires i.i.d. de loi du χ^2 et $\lambda_{j,n}^u$ les valeurs propres d'une certaine matrice

$$\frac{1}{2} T_n(f_{\theta_0})^{-1/2} T_n(g_{\theta_0}^u) T_n(f_{\theta_0})^{-1/2}.$$

Afin de vérifier les conditions du théorème de Lindeberg, les éléments clés sont le contrôle donné dans [LRR11a, LRR11b, Dah89] sur les normes des matrices

$$T_n(f_\theta)^{1/2} T_n(g_\theta)^{-1/2}$$

ainsi que les résultats de [LRR11a, LRR11b] sur le comportement asymptotique des traces de

$$\prod_{\ell=1}^p (T_n(f_\theta))^{-1} T_n(g_{\theta,\ell}).$$

Pour établir la convergence de la hessienne $\nabla^2 F_n(\theta_0)$, nous établissons la convergence de sa moyenne et étudions la variance de chacun de ses termes. Les résultats de [LRR11a, LRR11b, Dah89] sont encore les ingrédients essentiels pour l'étude.

Le reste $R_{n,\theta_0}(t)$ pouvant être contrôlé à l'aide de la dérivée d'ordre 3 de F_θ , nous avons besoin dans notre preuve d'une condition sur la dérivée d'ordre 3 de la densité spectrale f_θ . Dans [LRR11a, LRR11b], cette condition n'est pas supposée simplement car les auteurs n'ont pas eu besoin de dériver f_θ à l'ordre 3 pour leur étude du maximum de vraisemblance. Finalement, pour contrôler ce terme de reste, le point important est que les résultats de [LRR11a, LRR11b, Dah89] sont uniformes en θ , dû à l'uniformité en θ des hypothèses sur la densité spectrale.

Application

Concentrons-nous ici sur l'application au mouvement brownien fractionnaire $(B_H(t))_{t \in \mathbb{R}}$ qui n'est plus un champ stationnaire. La loi de B_H est alors entièrement caractérisée par le paramètre H et la normalisation choisie, c'est-à-dire le paramètre

$$\sigma^2 = \mathbb{E}(B_H(1)^2).$$

Nous pouvons alors considérer la suite gaussienne stationnaire $(X_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$\forall n \geq 1, \quad X_n = B_H(n) - B_H(n-1).$$

Cette suite est appelée bruit blanc fractionnaire et sa densité spectrale est donnée par

$$f_{\sigma^2, H}(x) = \frac{\sigma^2 |e^{ix} - 1|^2}{C^2(H)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|x + 2k\pi|^{2H+1}}, \quad x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\},$$

avec C une fonction connue. Nous pouvons alors vérifier que la densité spectrale $f_{\sigma^2, H}$ satisfait nos hypothèses sur $\Theta =]0, 1[\times \mathbb{R}_+^*$ en prenant $\alpha(H, \sigma^2) = 2H - 1$. Nous savons donc, vu le résultat principal du papier, que le modèle du bruit blanc fractionnaire est LAN. Un tout petit changement de variable, nous permet alors d'établir la propriété LAN pour le brownien fractionnaire lui-même, c'est-à-dire pour

$$\mathbf{B}_n = \{B_H(1), \dots, B_H(n)\}.$$

La matrice de Fisher apparaissant dans cette propriété LAN est celle du bruit blanc fractionnaire, c'est-à-dire qu'elle est donnée par $f_{\sigma^2, H}$.

4.3 Algorithme de débruitage

Cette section présente le travail [LMGRT12] en collaboration avec Aurélie Muller-Guedin, Samy Tindel et Radu Ranta. Il s'agit d'une collaboration pluridisciplinaire, Radu étant membre du Centre de Recherche en Automatique de Nancy. Ce travail est aussi, quant au sujet, relié aux activités de l'équipe projet INRIA *BIology Genetics and Statistics* dont Samy, Aurélie et moi-même sommes membres. Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à un algorithme de débruitage par seuillage itératif en ondelettes qu'utilise Radu notamment pour nettoyer des signaux obtenus par un électrocardiogramme.

Précisons un peu l'algorithme auquel nous nous sommes intéressés ainsi que les problématiques étudiées. Nous supposons observer un signal bruité

$$z = x + w,$$

avec x le vrai signal et w le bruit. En pratique, pour approcher le signal réel x , il est classique de considérer les coefficients d'ondelettes du signal bruité et de ne garder que ceux qui sont grands. L'idée est que le signal x est parcimonieux, c'est-à-dire qu'il possède peu de coefficients d'ondelettes grands et que ceux-ci suffisent pour en proposer une bonne estimation. Les petits coefficients d'ondelettes de z sont alors considérés comme étant ceux du bruit w . En pratique x est alors approché par

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} \alpha_{j_0 k} \mathbf{1}_{\{|\alpha_{j_0 k}| \geq \tau\}} \phi_{j_0 k}(t) + \sum_{j=j_0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} \beta_{jk} \mathbf{1}_{\{|\beta_{jk}| \geq \tau\}} \psi_{jk}(t),$$

où

- ϕ est l'ondelette père et ψ l'ondelette mère,
- $\phi_{j_0, k}$ et ψ_{jk} sont obtenues en dilatant et translatant les ondelettes ϕ et ψ :

$$\phi_{j_0 k}(t) = 2^{j_0/2} \phi(2^{j_0} t - k) \quad \text{et} \quad \psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$$

- les coefficients α_{jk} et β_{jk} sont les coefficients d'ondelettes du signal bruité z
- τ est un seuil à déterminer (seuil qui peut dépendre de l'échelle j),
- J est l'échelle maximale considérée pour reconstruire le signal x .

Il existe plusieurs façon de choisir le seuil τ . L'algorithme dit de débruitage par seuillage itératif en ondelettes consiste à séparer le signal x et le bruit w de façon itérative. Pour simplifier un peu les notations, identifions les signaux à leurs coefficients d'ondelettes respectifs et renommons

$$y(1), \dots, y(N)$$

les coefficients d'ondelettes d'un signal y entrant en jeu pour la reconstruction (en d'autres termes, il s'agit des coefficients $\alpha_{j_0 k}$ et β_{jk} pour $j_0 \leq j \leq J$ et $0 \leq k \leq 2^j - 1$ correspondant au signal y). L'algorithme est alors le suivant :

- **Initialisation** : Poser $\hat{w}_0(q) = z(q)$ et $\hat{x}_0(q) = 0$ pour tout $1 \leq q \leq N$.
- **Étape $k + 1$** :
 - Calculer $\hat{\sigma}_k^2 = \frac{\|\hat{w}_k\|^2}{N}$
 - Poser $T_{k+1} = F \hat{\sigma}_k$, avec F un paramètre à choisir
 - Pour tout $0 \leq q \leq N$, poser

$$\begin{cases} \Delta \hat{x}_{k+1}(q) = \hat{w}_k(q) \mathbf{1}_{\{|\hat{w}_k(q)| \geq T_{k+1}\}} \\ \hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \Delta \hat{x}_{k+1}, \quad \hat{w}_{k+1} = \hat{w}_k - \Delta \hat{x}_{k+1}. \end{cases}$$

- Arrêter la procédure lorsque $\|\hat{w}_k\|^2 - \|\hat{w}_{k+1}\|^2 \leq \varepsilon$.

Suivant [RHLDW03, RHLDW05], cet algorithme peut être ramené à un problème de point fixe. Pour être plus précise, nous pouvons formuler l'algorithme ainsi :

- **Initialisation** : Poser $T_0 = +\infty$.
- Poser $T_{k+1} = f_N(T_k)$, avec

$$f_N(t) = \frac{F}{\sqrt{N}} \sqrt{\sum_{q \leq N} z^2(q) \mathbf{1}_{\{|z(q)| < t\}}}$$

Il est alors clair que si cet algorithme converge, T_p converge vers un point fixe T_f de f_N . La boucle est alors arrêtée pour k tel que $T_{k+1} = T_f$ et on pose

$$\hat{x}(q) = z(q) \mathbf{1}_{\{|z(q)| \geq T_f\}}.$$

Le but est de choisir F de sorte que $T_f > 0$ car sinon le vrai signal x est estimé par le signal bruité z , ce qui n'est pas très satisfaisant.

Pour poursuivre ma présentation, je dois à présent préciser nos hypothèses sur le signal x et le bruit w . Tout d'abord nous supposons que x et w sont indépendants. Nous supposons aussi que les coefficients d'ondelettes $\{x(q); q \leq N\}$ sont i.i.d de loi gaussienne généralisée de densité $p_{\sigma,u}$ donnée par

$$p_{\sigma,u}(t) = \frac{\alpha}{\sigma} e^{-\frac{|\beta t|^u}{\sigma^u}}, \quad \text{avec} \quad \beta = \left(\frac{\Gamma(3/u)}{\Gamma(1/u)} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\beta u}{2\Gamma(1/u)}.$$

Les coefficients d'ondelettes $\{w(q), q \leq N\}$ sont eux supposés i.i.d. de loi gaussienne centrée de variance σ_w^2 .

Grâce à des simulations numériques, [RHLDW05] montrent que

$$F \geq \sqrt{\frac{3\Gamma(1/u)}{u}} (ue)^{1/u},$$

avec Γ la fonction Gamma, convient. Mais Radu souhaitait savoir si le paramètre F pouvait être choisi plus petit. Et par la suite nous nous sommes demandés comment la suite $(T_n)_n$ se concentre autour de la valeur limite T_f quand la taille N de l'échantillon tend vers l'infini.

Sous nos hypothèses, en utilisant la loi des grands nombres, nous savons que la fonction $g_N : t \mapsto f_N^2(\sqrt{t})$ converge presque sûrement vers

$$g_{\sigma,u,w} : t \mapsto 2F^2 \int_0^{\sqrt{t}} y^2 p_{\sigma,u} * p_w(y) dy.$$

Dès lors, il est naturel de penser que pour N grand, le point fixe T_f^2 de g_N sera proche d'un point fixe de $g_{\sigma,u,w}$. De plus, comme le bruit w est petit, il paraît finalement logique que T_f^2 soit proche de l'un des points fixes de

$$g_{\sigma,u} : t \mapsto 2F^2 \int_0^{\sqrt{t}} y^2 p_{\sigma,u}(y) dy.$$

Nous avons tout d'abord étudié les points fixes de $g_{\sigma,u}$ et contrôlé l'écart avec T_f . Finalement, nous obtenons une valeur critique F_c liée à l'existence ou non d'un point fixe non nul pour $g_{\sigma,u}$. Cette valeur F_c est solution d'un système d'équations que nous ne savons pas résoudre explicitement mais Mathematica donne une solution approchée. Précisons que le système d'équations satisfait par F_c s'obtient par des arguments plus qu'élémentaires.

Nous étudions ensuite la concentration de la suite $(T_n^2)_n$. L'idée est tout d'abord de comparer la suite aléatoire $(T_n^2)_n$ à la dynamique déterministe

$$u_{n+1} = g_{\sigma,u,w}(u_n), \quad u_0 = +\infty.$$

Pour cela nous devons contrôler les erreurs

$$\varepsilon_{p,N} = T_{p+1}^2 - u_{p+1} = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N (F^2 z(q)^2 \mathbf{1}_{\{z(q) < T_p\}} - g_{\sigma,u,w}(T_p^2)).$$

Si T_p était déterministe, ce contrôle serait simplement donné par le théorème central limite vu que $g_{\sigma,u,w}(T_p^2)$ serait la moyenne des variables i.i.d.

$$F^2 z(q)^2 \mathbf{1}_{\{z(q) < T_p\}}, \quad 1 \leq q \leq N.$$

Ici comme T_p est aléatoire nous avons besoin d'un contrôle uniforme. L'idée clef est d'utiliser les processus empiriques et les classes de Vapnik-Chervonenkis.

À partir de ce contrôle, nous arrivons en particulier à montrer que pour $F > F_c$,

$$\mathbb{P}\left(|T_n^2 - t_{\sigma,w}^*| \geq N^{-\alpha/2}\right) \leq Ae^{-\tilde{\gamma}N^{[(1-\alpha)\eta u]/2}}.$$

pour $n = n(N) \sim \alpha \ln(N)$, $\alpha \in]0, 1[$ et $t_{\sigma,w}^* \neq 0$ un certain point fixe de $g_{\sigma,u,w}$.

Enfin, si $F < F_c$, nous montrons que la suite $(T_n)_n$ converge vers 0 avec une probabilité très grande.

Numériquement, nous avons considéré les seuils donnés par $F = 0.5F_c$ et $F = 1.5F_c$. Nous avons comparé l'algorithme obtenu avec ces choix pour F avec les algorithmes de débruitage classiques : seuillage universel et seuillage *SURE* (acronyme de Stein Unbiased Risk Estimator). Comme nos résultats conviennent aussi pour des bruits non gaussiens, nous avons testé plusieurs types de bruit. À vrai dire, l'algorithme semble mieux fonctionner pour des bruits non gaussiens. Sur les simulations exactes, l'algorithme n'est pas le meilleur au sens du signal ratio/bruit mais se comporte quand même bien. Je ne donne ici que les résultats sur les signaux d'ECG simulés et bruités.

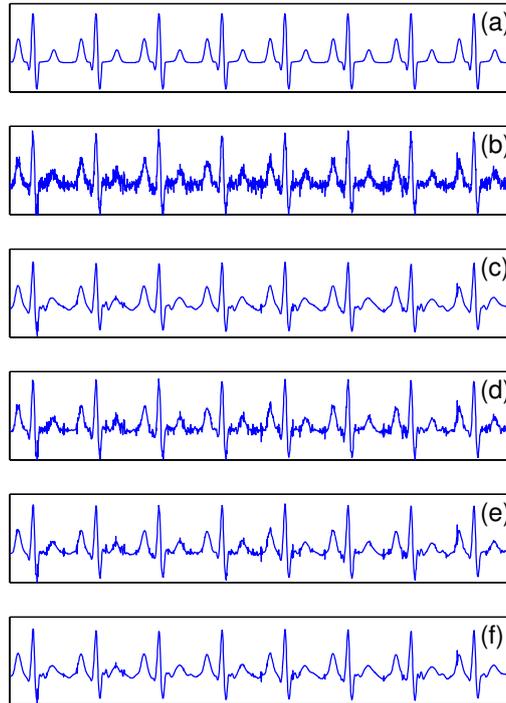


FIGURE 4.2: (a) signal x (b) signal bruité (Bruit Laplacien, SNR=3); (c) Seuillage universel (SNR=5.7, ECG : SNR=4.8); (d) Seuillage *SURE* (SNR=5.9, ECG : SNR=5.4); (e) Seuillage avec $T_{0.5,z}$ (SNR=6.8, ECG : SNR=5.9); (f) Seuillage avec $T_{1.5,z}$ (SNR=6.4, ECG : SNR=5.2)

Chapitre 5

Perspectives de recherche

Ce chapitre présente quelques pistes de recherche en continuité avec les travaux présentés dans ce mémoire ainsi qu'une nouvelle thématique de recherche (cf. Section 5.6).

5.1 Champs à autosimilarité matricielle locale ou non

5.1.1 Propriétés des champs tangents

Les travaux [Fal03, Fal02] montrent que lorsqu'un champ est localement asymptotiquement autosimilaire en tout point au sens des processus continus ou càdlàg, les champs tangents ne peuvent pas être totalement quelconques. Plus précisément, en la plupart des points, les champs tangents sont à accroissements stationnaires. En particulier si le modèle initial est gaussien, cela implique qu'en presque tous les points le modèle ressemble à un mouvement brownien fractionnaire.

J'aimerais reprendre les travaux [Fal03, Fal02] pour voir s'ils se généralisent aux champs localement asymptotiquement à autosimilarité matricielle. La difficulté est sans doute de tenir compte de l'anisotropie de la propriété et du fait que cette anisotropie varie d'un point à l'autre.

En appliquant [Fal02], nous pouvons d'ores et déjà donner une propriété encourageante pour un champ X continu à autosimilarité matricielle locale d'ordre E en tout point x (insistons sur le fait que la matrice E ne dépend pas de x). Notons alors Z_x le champ tangent à X au point x et considérons le processus ligne

$$Y_\theta = \{X(t\theta); t \in \mathbb{R}\}$$

pour $\theta \in \mathbb{S}_{d-1}$ un vecteur propre de la matrice E associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors,

$$\left\{ \frac{Y_\theta(t_0 + \varepsilon^\lambda s) - Y_\theta(t_0)}{\varepsilon}; s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \frac{X(t_0\theta + \varepsilon^E s\theta) - X_\theta(t_0\theta)}{\varepsilon}; s \in \mathbb{R} \right\}$$

car $\varepsilon^\lambda u\theta = \varepsilon^E(u\theta)$. De la propriété d'autosimilarité locale satisfaite par X , nous déduisons que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{Y_\theta(t_0 + \varepsilon^\lambda s) - Y_\theta(t_0)}{\varepsilon}; s \in \mathbb{R} \right\} = \{Z_{t_0\theta}(s\theta); s \in \mathbb{R}\}.$$

En d'autres termes, sauf si $Z_{t_0\theta}$ est nul selon l'axe θ , Y_θ est localement asymptotiquement autosimilaire en tout t_0 d'ordre $1/\lambda$. Ceci étant vrai pour tout t_0 , en considérant des propriétés d'autosimilarité locale dans l'espace des fonctions continues, pour presque tout t_0 , le processus $Z_{t_0\theta}$ est à accroissements stationnaires dans la direction θ . En d'autres termes, pour presque tout x , Z_x est à accroissements stationnaires dans la direction θ . Ce

petit raisonnement est certes encourageant mais ne prouve pas le résultat attendu à savoir : pour presque tout x , Z_x est à accroissements stationnaires.

Dans le cas où E dépend effectivement de x , je supposerai volontiers dans un premier temps, comme dans [BLS11], que les matrices $E(x)$ et $E(y)$ commutent pour x, y dans un voisinage d'un point x_0 .

Intéressons-nous à présent à une deuxième piste de recherche sur les champs tangents. Dans ma thèse, j'ai proposé un modèle localement asymptotiquement autosimilaire au sens de [BJR97] dont le champ tangent en 0 est radicalement différent de celui en $x \neq 0$ (cf. chapitre 2). Plus précisément, en 0 le champ tangent est un champ stable alors qu'en tous les autres points il s'agit d'un champ gaussien. Naturellement, je me demande si en se donnant une famille $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ de points, il est possible de construire un modèle localement asymptotiquement autosimilaire en imposant la nature du champ en $x \in \mathcal{D}$. À vrai dire, je ne sais pour l'instant répondre que si \mathcal{D} est au plus dénombrable et sans point d'accumulation (et en ne considérant que des champs tangents stables ou gaussiens). En particulier, si \mathcal{D} est un ensemble de Cantor, je n'ai pas réussi à construire un tel modèle. Dans le problème initial, ni la nature de \mathcal{D} ni la régularité du champ X construit ne sont précisées. En supposant que X satisfait les hypothèses de [Fal02], j'imagine qu'il est impossible que la nature du champ tangent change très souvent. En particulier, je me demande si dans ce cas, \mathcal{D} est de mesure nulle ou non.

5.1.2 Estimation et simulation

Le projet décrit dans cette section s'insère dans le projet ANR MATAIM et a aussi trait aux thématiques principales de l'équipe projet INRIA BIGS.

L'ostéoporose est caractérisée par une perte de densité osseuse ainsi qu'une altération de la micro-architecture des os. L'équipe INSERM U658 (Orléans, France) a déjà mis au point en collaboration avec le laboratoire PRISME (Orléans) une méthode basée sur l'analyse multifractale.

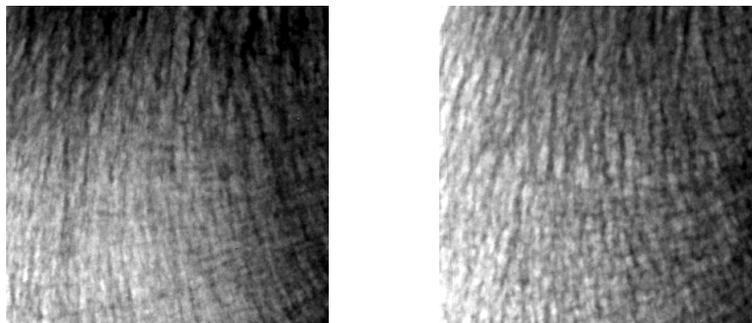


FIGURE 5.1: Images extraites de radiographies du calcaneum (partie d'intérêt)

Pour être plus précise, la méthode consiste à extraire des lignes des radiographies et à modéliser chacune d'entre elles par un mouvement brownien fractionnaire. Les résultats de cette méthode combinée avec un examen de densitométrie sont encourageants. Ceci étant, cette méthode ne tient pas compte de la corrélation entre les lignes extraites. Le drap brownien fractionnaire a aussi été proposé pour modéliser les radiographies. Le défaut de ce modèle est qu'il est nul sur les axes et leur fait donc jouer un rôle particulier. Enfin, les résultats de [BRB09] eux encouragent à proposer une modélisation des radiographies du calcaneum par un modèle à autosimilarité matricielle. Afin de valider le modèle, avec Hermine Biermé, nous nous sommes attaquées au problème crucial de l'estimation de la matrice d'autosimilarité E du modèle. Dans le cas où E est diagonalisable, les résultats

de régularité directionnelles établis dans [BMS07] permettent d'estimer les valeurs propres de la matrice E en utilisant des variations quadratiques le long des vecteurs propres. Pour déterminer les vecteurs propres, nous pensons utiliser une tactique proche de [CGPP06].

Une fois les résultats théoriques établis, il nous faudra tester sur des simulations théoriques nos estimateurs. Le souci actuel est que l'on ne connaît pas l'erreur commise par les techniques de simulation existantes des champs à autosimilarité matricielle considérés. Évaluer cette erreur ou développer d'autres méthodes de simulation est donc primordial afin de pouvoir interpréter correctement les résultats numériques que nous obtiendrons sur l'estimation.

La dernière étape consiste à valider le modèle sur des données réelles, c'est-à-dire sur les radiographies du calcaneus fournies par l'équipe INSERM U658 (Orléans). Il faudra déterminer si le modèle permet bien de discriminer les patients ostéoporotiques des patients sains.

5.1.3 Les modèles stables

Dans la lignée du paragraphe précédent, il serait bien de savoir estimer la matrice d'autosimilarité d'un champ stable. À vrai dire il serait même plus intéressant d'arriver à estimer de façon conjointe cette matrice et l'indice de stabilité α du champ.

Dans [BLX09], avec Hermine Biermé et Yimin Xiao, nous nous sommes intéressés aux ensembles d'excursion d'un champ anisotrope gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^p . Les hypothèses essentielles reposent sur le comportement du variogramme et une propriété de non-déterminisme local. En collaboration avec Hermine Biermé, je souhaite étendre les résultats de [BLX09] au cadre de champs stables et plus particulièrement à ceux satisfaisant une propriété d'autosimilarité matricielle. La difficulté première est d'évaluer une probabilité d'atteinte. Dans [BLX09], pour contrôler cette probabilité, nous avons profité de l'indépendance entre les variables

$$U \quad \text{et} \quad U - \mathbb{E}(U|V)$$

lorsque (U, V) est un vecteur gaussien. Dans le cadre de champs stables, nous devons trouver une nouvelle idée. Nous essayons de voir si la représentation des champs stables en séries de LePage conditionnellement gaussiennes peut permettre de contourner la difficulté.

5.1.4 Champs anisotropes de type Lévy

Considérons un champ gaussien à autosimilarité matricielle

$$X(x) = \Re \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1 \right) \psi(\xi)^{-1 - \text{trace}(E)/2} W(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

avec ψ une fonction E^t -homogène et W une mesure gaussienne isotrope complexe. Au vu des mes travaux, il est logique d'envisager de remplacer la mesure W par une mesure de Lévy (en utilisant plutôt l'approche du paragraphe 2.1.3) et donc d'étudier le champ

$$Y(x) = \Re \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1 \right) \psi(\xi)^{-1 - \text{trace}(E)/2} L(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Ce champ est à accroissements stationnaires mais ne vérifie plus la propriété d'autosimilarité matricielle. Ceci étant au vu des résultats de [BCI02], il est naturel d'envisager que le champ Y est localement asymptotiquement à autosimilarité matricielle d'ordre E en chaque point x . De plus, son champ tangent en x doit être un champ gaussien à autosimilarité matricielle et accroissements stationnaires. À vrai dire, il faut sans doute simplement

reprendre [BCI02, Lac04b] et [BMS07] et voir si l'on peut bien combiner leurs idées. Il s'agit de voir si les contrôles proposés dans [BCI02, Lac04b] peuvent être généralisés à des champs anisotropes. La clef est sans doute comme dans [BMS07] d'utiliser, pour dominer les moments considérés, des représentations en coordonnées polaires par rapport à E ou E^t .

Il me semble que ce travail serait un bon moyen de faire découvrir à la fois les champs anisotropes et les champs à autosimilarité locale à un étudiant.

Pour ce premier modèle Y , les exposants de Hölder ponctuels devraient varier avec la direction mais pas le long des trajectoires. Afin d'obtenir un modèle plus général, il est possible de remplacer non seulement W par L mais aussi le couple (ψ, E) par une famille $\{\psi_x, E(x); x \in \mathbb{R}^d\}$. L'idée est alors d'étudier

$$\tilde{Z}(x) = \mathfrak{R} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1 \right) \psi_x(\xi)^{-1 - \text{trace}(E(x))/2} L(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Les modèles gaussiens que j'ai étudiés avec Hermine Biermé et Hans-Peter Scheffler dans [BLS11] sont bien sûr obtenus pour $L = W$. De plus, il vaut mieux, au moins dans un premier temps, se placer sous les mêmes hypothèses que [BLS11] pour étudier \tilde{Z} .

Pour obtenir la régularité de \tilde{Z} , l'idée naturelle est de combiner les travaux [BLS11, Lac04b]. Suivant [Lac04b], nous pouvons introduire

$$\tilde{Z}_2(x) = \mathfrak{R} \int_{B(0,1)} P_K(i\langle x, \xi \rangle) \psi_x(\xi)^{-1 - \text{trace}(E(x))/2} L(d\xi)$$

avec P_K un polynôme de degré K grand. Comme dans l'étude menée par [Lac04b], la régularité du champ $\tilde{Z} - \tilde{Z}_2$ doit pouvoir s'étudier à partir de ses moments. La difficulté réside donc sans doute dans l'étude de \tilde{Z}_2 . Dans [Lac04b], les fonctions E et ψ_x dépendent de façon très simple de x :

$$\psi_x(\xi) = \|\xi\|^{h(x)} \quad \text{et} \quad E(x) = \text{Id}/h(x).$$

Finalement, ψ_x et E ne dépendent de x que via une valeur réelle $h(x)$. Dans le cadre de [Lac04b], cette remarque, combinée avec le fait que P_K est un polynôme, m'a permis de ramener l'étude de \tilde{Z}_2 à celle de plusieurs processus. L'avantage indéniable est que l'étude de processus (modèle indexé par \mathbb{R}) est plus simple que celles de champs indexés par \mathbb{R}^d avec $d \geq 2$. Dans le cadre général, c'est-à-dire sans précision sur la forme E et la forme ψ , il faut trouver une autre idée. La généralisation de [Lac04b] n'est donc pas immédiate.

5.2 Champs vérifiant un principe d'invariance

5.2.1 Modèles gaussiens

Considérons

$$X_n(H) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle n, \xi \rangle} g_H(\xi) \widehat{W}_H(d\xi),$$

avec \widehat{W}_H , $H \in]0, 1[^d$, des mesures corrélées telles que

$$\mathbb{E}(X_n(H) X_m(K)) = C(H, K) \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle n-m, \xi \rangle} g_H(\xi) \overline{g_K(\xi)} d\xi.$$

Définissons alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$S_h^N = \left\{ \sum_{n_1=1}^{[Nt_1]} \cdots \sum_{n_d=1}^{[Nt_d]} \frac{X_n(h(n/N))}{N^{r(h(t/N))}}, t \in \mathbb{R}_+^d \right\}.$$

Rappelons que dans [LM11] nous avons étudié le comportement de S_h^N et sa limite S_h (lorsqu'elle existe) pour

$$g_H(\xi) = a(H, \xi) \prod_{j=1}^d \frac{\exp(i\xi_j) - 1}{|\xi_j|^{1/2+H_j}}$$

avec a régulière et $H_j \in]0, 1[$. Nous savons déjà que nous pouvons généraliser le principe d'invariance à d'autres fonctions g_H . Mais il est bien sûr naturel de se demander quelle est la plus faible hypothèse à faire sur g_H . De plus, j'aimerais étudier la régularité et les propriétés d'autosimilarité du champ limite S_h pour d'autres fonctions g_H . J'apprécierais d'avoir un cadre assez général même si les propriétés de régularité de S_h seront intimement liées au comportement asymptotique de g_H .

Par ailleurs, pour le choix particulier de g_H ci-dessus, nous avons établi que

$$\forall s, t \in [0, T]^{2d}, \mathbb{E}([S_h(t) - S_h(s)]^2) \leq C \left(\sum_{i=1}^d |s_i - t_i|^{h_j(\min(t_j, s_j))} \right)^2.$$

Ce contrôle du variogramme de S_h nous permet de donner une majoration du module de continuité de S_h . Il serait bien de minorer ce variogramme et de déterminer si le champ S_h satisfait une propriété de non-déterminisme local ou non. En particulier, nous pourrions alors étudier les dimensions de Hausdorff des ensembles d'excursion, nous basant sur [BLX09]. Le champ S_h étant multifractionnaire, les hypothèses que j'ai présentées dans le chapitre 2 ne seront sans doute pas vérifiées car la minoration et la majoration du variogramme sont contrôlées par le même paramètre $H \in]0, 1[^d$. Ceci étant, en se plaçant autour d'un point x_0 , nous pouvons espérer contrôler le variogramme de S_h à l'aide de l'exposant $h(x_0)$ et établir la version faible des hypothèses de [BLX09].

La minoration du variogramme et de la propriété de non-déterminisme local permettent aussi d'établir l'existence de temps locaux ainsi que quelques unes de leurs propriétés (cf. par exemple [AX05, BDG07, AWX08, ASX11]).

5.2.2 Modèles stables et séries « shot noises »

Supposons à présent que le champ $X = \{X_n(H); n \in \mathbb{N}^d, H \in]0, 1[^d\}$ est α -stable. Dans le chapitre 2, nous avons évoqué le principe d'invariance établi dans [LM11] dans le cas où

$$X_n(H) = \Re \int_{\mathbb{R}^d} a(H, \xi) e^{i\langle n, \xi \rangle} \prod_{j=1}^d \frac{\exp(i\xi_j) - 1}{|\xi_j|^{1/\alpha+H_j}} W_\alpha(d\xi)$$

avec W_α une mesure α -stable isotrope. Nous n'avons pas mené l'étude de la régularité des trajectoires du champ limite $S_{\alpha,h}$ car celle-ci ne peut pas se mener comme dans le cas gaussien. Le champ $S_{\alpha,h}$ possède sans doute les mêmes exposants ponctuels de Hölder que le modèle gaussien. Pour établir ceci, il doit être possible de s'inspirer des travaux [BL09, BLS11, BL12] présentés dans le chapitre 3 et de [KM91]. Ces travaux ne s'intéressant qu'aux accroissements simples, il faut les adapter pour pouvoir étudier les accroissements rectangulaires $\Delta S_{\alpha,h}(t, s)$.

5.2.3 Généralisations

Une première généralisation consiste à remplacer dans la définition du champ $X = \{X_n(H); n \in \mathbb{N}^d, H \in]0, 1[^d\}$ la mesure W_H non pas par une mesure α -stable mais par une mesure aléatoire complexe de Lévy L au sens de [BCI02] ou de la section 2.1.3 du chapitre 2. Notons bien que dans cette première piste de recherche L ne dépend pas du paramètre H .

La construction d'une mesure aléatoire complexe de Lévy permet de connaître la fonction caractéristique des champs

$$S_h^N = \left\{ \sum_{n_1=1}^{[Nt_1]} \cdots \sum_{n_d=1}^{[Nt_d]} \frac{X_n(h(n/N))}{N^{\tau(h(t/N))}}, t \in \mathbb{R}_+^d \right\}.$$

En étudiant cette fonction caractéristique et au vu du cas stable (ou encore du cas gaussien avec \widehat{W}_H ne dépendant pas de H), je m'attends à obtenir la convergence de S_h^N , quand $N \rightarrow +\infty$, vers

$$S_h = \left\{ \Re \left(\int_{\mathbb{R}^d} W_\alpha(d\xi) \int_{[0,t]} a(0, h(\theta)) e^{i\langle \xi, \theta \rangle} \prod_{j=1}^d |\xi_j|^{1/2-h_j(\theta_j)} d\theta \right); t \in \mathbb{R}_+^d \right\}.$$

Dans un second temps, nous pouvons envisager le cas où la mesure L dépend du paramètre H . Pour pouvoir mener à bien l'étude, il faut construire $\{L_H; H \in]0, 1[^d\}$ de sorte à pouvoir donner puis étudier la fonction caractéristique des champs S_h^N considérés. Nous inspirant de la construction proposée dans [Lac05], nous pouvons par exemple considérer la famille de mesures de Lévy $\{L_H; H \in]0, 1[^d\}$ associée aux mesures de Poisson

$$N_H(d\xi, dz) = \psi(H, z)N(d\xi, dz), \quad H \in]0, 1[^d.$$

Nous connaissons alors une expression pour la fonction caractéristique du champ X (défini en remplaçant L par L_H). Nous pouvons alors tenter d'étudier celle de S_h^N pour déterminer si elle converge dans $N \rightarrow +\infty$. Vu la complexité de la fonction caractéristique et le fait que le comportement de ψ va jouer un rôle, il faudrait étudier tout d'abord le cas $h \equiv H$ avant de poursuivre dans cette voie.

Dans les principes d'invariances évoqués jusqu'ici, tous les modèles limites s'annulent sur les axes et sont à accroissements rectangulaires stationnaires. Ces propriétés proviennent du fait que $S_h^N(t)$ est obtenu en sommant sur une grille du pavé $[0, [Nt_1]] \times [0, [Nt_2]]$. Il serait bien d'arriver à proposer des principes d'invariance pour des modèles fractionnaires non nuls sur les axes et éventuellement à accroissements stationnaires.

5.3 Champs indexés par une variété

Considérons un champ fractionnaire $\{X_H(M); M \in \mathcal{M}\}$ indexé par une variété riemannienne \mathcal{M} . Nous pouvons en particulier considérer l'un des modèles proposés dans [IL12] (cf. chapitre 1). Si nous souhaitons pouvoir utiliser l'un de ces champs pour modéliser des données réelles, il est primordial de proposer un estimateur du paramètre H . Ce problème a été évoqué dans le chapitre 4 pour des champs indexés par \mathbb{R}^d . Comme dans le cadre euclidien, les données ne peuvent pas être observées sur toute la variété. Par conséquent, pour construire un estimateur, nous ne pouvons utiliser qu'une réalisation de

$$X_H(M), \quad M \in \mathcal{D} \quad \text{où} \quad \text{card}\mathcal{D} = N.$$

S'inspirant de [IL97], nous pouvons proposer un estimateur basé sur des variations quadratiques de X_H , c'est-à-dire sur

$$\sum_{M \in \mathcal{D}} (\Delta X_H(M))^2$$

avec $\Delta X_H(M)$ un accroissement obtenu en filtrant les données par un filtre discret a . Plusieurs choses sont bien sûr à préciser : la forme de la discrétisation de la grille et la

bonne façon de définir $\Delta X_H(M)$. Dans le cas euclidien, les grilles sont souvent régulières (pas de discrétisation constant) mais il n'est pas évident de traduire ce choix sur une variété. Admettons que l'on discrétise régulièrement selon des géodésiques, certaines régions de la variété ne contiendront peut-être que peu de points de \mathcal{D} .

Bien sûr proposer un estimateur n'est pas tout. Pour qu'il soit intéressant, il faut qu'il soit consistant et il serait bien qu'il soit asymptotiquement normal.

5.4 La propriété LAN

Établir qu'un modèle est LAN est très intéressant notamment pour quantifier l'optimalité d'estimateurs ou de tests. Mon travail [CGLL11], en collaboration avec Serge Cohen, Fabrice Gamboa et Jean-Michel Loubes, ne s'intéresse qu'au cas où les données sont modélisées par une suite stationnaire

$$X_n, n \in \mathbb{N}.$$

Il serait bien de le généraliser au cadre de données sur \mathbb{N}^2 (voire \mathbb{N}^p), c'est-à-dire aux suites gaussiennes stationnaires

$$X_{n_1, n_2}, (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2.$$

Supposons que cette suite est associée à une densité spectrale f_θ avec $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ et notons \mathbb{P}_θ^n la loi

$$\{X_{k_1, k_2}; 1 \leq k_1, k_2 \leq n\}.$$

La première chose est de bien ordonner les variables X_{k_1, k_2} de façon ensuite à construire un vecteur gaussien dont la matrice de covariance est Toeplitz par blocs. De plus, il faut bien sûr ensuite reprendre les résultats de [Dah89, LRR11a, LRR11b] que nous avons utilisés pour les adapter au cadre des matrices Toeplitz par blocs. Enfin, il faut adapter les hypothèses de [CGLL11] au cadre bivarié. Plusieurs approches sont possibles. Nous pouvons par exemple remplacer la valeur absolue qui contrôle la densité spectrale dans [CGLL11] par la norme euclidienne. Dans ce cas, la propriété LAN obtenue devrait conduire à établir la propriété LAN pour le champ brownien fractionnaire. Ceci étant, afin d'obtenir des propriétés LAN pour des modèles fractionnaires anisotropes, il serait bien d'arriver à mener l'étude sous des hypothèses autorisant des densités spectrales f_θ dont le comportement dépend des directions.

5.5 Intégrale stochastique

En collaboration avec Nicolas Savy (Institut de Mathématiques de Toulouse) et Josep Vives (Université de Barcelone), j'essaie de définir une intégrale anticipative par rapport à un processus de Lévy filtré, c'est-à-dire par rapport à un processus du type

$$X_t^K = \int_0^t K(t, s) dX_s$$

avec $(X_s)_{s \geq 0}$ un processus de Lévy et K un noyau déterministe. De telles intégrales ont été définies dans le cas où X est un mouvement brownien ou un processus de Lévy à sauts purs par une approche chaotique ([Nua95, SUV07]), par une approche gradient stochastique ([Üst95]) et en définissant une \mathcal{S} -transform ([Ben03, BM08]). Dans un premier temps, on pourrait penser qu'il s'agit juste de combiner l'intégrale pour le mouvement brownien et celle pour le processus de Poisson à sauts purs. Mais, en fait les choses ne sont pas si simples : il existe notamment des problèmes de cohérence des domaines de définition de ces intégrales. Par ailleurs, il n'est pas clair que les différentes approches donnent la même intégrale.

5.6 Transport de la lumière

Cette dernière partie présente un projet en collaboration avec Magalie Thomassin (CRAN) et Samy Tindel (IECN, BIGS). Nous avons co-encadré Tiphaine Obara pour son stage de master 2 et co-encadrerons à partir d'octobre une post-doctorante sur le sujet. Enfin, nous venons d'obtenir un projet PEPS BMI (porté par Magalie Thomassin) et nous pouvons compter sur l'expérience du Centre Alexis Vautrin (centre de lutte contre le cancer de Nancy) concernant la thérapie photodynamique interstitielle.

La thérapie photodynamique est un traitement médical utilisé notamment contre certains cancers. Elle utilise un agent photosensibilisant activé par un rayon lumineux de puissance et de longueur d'onde appropriées. La lumière provient bien sûr d'une fibre optique implantée dans une zone en général proche du volume tumoral. L'agent photosensibilisant réagit alors avec l'oxygène pour produire des molécules cytotoxiques qui s'attaquent aux cellules cancéreuses environnantes. L'efficacité du traitement de la cellule dépend de la quantité de lumière reçue par celle-ci. A priori, les cellules saines ne sont détruites que si la quantité de lumière qu'elles reçoivent est importante. Afin de contrôler la thérapie, un des premiers objectifs est donc de modéliser, et si possible de contrôler, la distribution de la lumière reçue par le volume tumoral. Il s'agit d'un problème finalement assez complexe en raison notamment de l'hétérogénéité des tissus et des cellules tumorales.

Pour être plus précise, nous nous intéressons au cas d'une tumeur au cerveau. Pour l'instant, nous supposons qu'une seule fibre optique est implantée et qu'elle arrive directement dans la tumeur. La propagation de la lumière à travers un milieu est généralement modélisée par l'équation de transfert radiatif. Il existe plusieurs travaux sur cette équation mais tous sont très coûteux en temps notamment pour des milieux 3D. Nous souhaitons donc en particulier proposer une méthode efficace pour évaluer la quantité de lumière reçue par chaque cellule qui soit plus rapide que les techniques connues. Nous proposons d'adapter des algorithmes mis au point dans le domaine de la synthèse d'images [VG97] au contexte de la propagation de lumière dans les tissus.

Nous modélisons le transport de lumière $L(x, y)$ de x vers y par une équation de la forme

$$L(x, y) = L_e(x, y) + AL(x, y), \quad (5.1)$$

où A représente un certain opérateur intégral sur la région D qui nous intéresse. L'opérateur A étant de petite norme, nous pouvons développer en série $(I - A)^{-1}$. Ce développement nous permet d'interpréter $L(x, y)$ comme étant une espérance sous une mesure ν portant sur l'espace $\Omega = \cup_{n \geq 0} D^n$. Cet espace est certes compliqué, mais il est possible de normaliser ν et de simuler la loi obtenue. Maintenant, nous souhaitons approcher ν par un algorithme de Métropolis. Le stage de master 2 que nous avons encadré a permis de bien avancer sur cette première partie du projet, mais il reste quelques points théoriques à améliorer (vitesse de convergence de l'algorithme, contrôle de l'erreur) et à tester numériquement l'algorithme.

Il nous faut ensuite supposer que la source de lumière n'est pas implantée directement dans la tumeur, ce qui change bien sûr l'équation du transport. Dans ce cas il faut tenir compte de l'hétérogénéité du milieu et des lois de réfraction. Par ailleurs, il nous faut aussi envisager d'implanter plusieurs fibres optiques. L'objectif du projet est bien sûr d'aider les médecins à déterminer le nombre et le positionnement de la ou des fibres pour garantir une irradiance de la lumière optimale et suffisante pour atteindre tout le volume tumoral à traiter. Enfin, nous souhaitons pouvoir aussi les aider à choisir le type de fibre optique le mieux adapté pour le traitement, ce qui suppose en particulier de proposer des estimateurs pour les paramètres optiques des tissus.

Liste des publications

Articles dans des revues avec comité de lecture

- [1] C. Lacaux. Real harmonizable multifractional Lévy motions. *Ann. Inst. Poincaré, Probab. Statist.*, 40(3) :259–277, 2004.
- [2] C. Lacaux. Series representation and simulation of multifractional Lévy motions. *Adv. Appl. Probab.*, 36(1) :171–197, 2004.
- [3] C. Lacaux. Fields with exceptional tangent fields. *J. Theoret. Probab.*, 18(2) :481–497, 2005.
- [4] C. Lacaux et J.-M. Loubes. Hurst exponent estimation of fractional Lévy Motions. *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* 3 :143–164, 2007.
- [5] S. Cohen, C. Lacaux et M. Ledoux. A general framework for simulation of fractional fields. *Stochastic Process. Appl.*, 118(9) :1489–1517, 2008.
- [6] H. Biermé et C. Lacaux. Hölder regularity for operator scaling stable random fields. *Stochastic Process. Appl.*, 119(7) :2222–2248, 2009.
- [7] H. Biermé, C. Lacaux et Y. Xiao. Hitting probabilities and the Hausdorff dimension of the inverse images of anisotropic gaussian random fields. *Bull. London Math. Soc.*, 41(2) :253–273, 2009.
- [8] H. Biermé, C. Lacaux, et H.P. Scheffler. Multi-operator scaling random fields. *Stochastic Process. Appl.* 121(11) : 2642–2677, 2011.
- [9] J. Istas et C. Lacaux. On locally self-similar fractional random fields indexed by a manifold. À paraître dans *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes*.

Prépublications

- [10] C. Lacaux et R. Marty. From invariance principles to a class of multifractional fields related to fractional sheets, 2011.
- [11] S. Cohen, F. Gamboa, C. Lacaux et J.M. Loubes. LAN property for some fractional type Brownian motion, 2011.
- [12] C. Lacaux, A. Muller, R. Ranta et S. Tindel. Convergence and performance of the peeling wavelet denoising algorithm, 2012.

Articles en préparation

- [13] H. Biermé et C. Lacaux. Modulus of continuity of some conditionally sub-Gaussian fields. Application to stable random fields.

Bibliographie

- [AFTV03] P. Abry, P. Flandrin, M. S. Taqqu, and D. Veitch. Self-similarity and long-range dependence through the wavelet lens. In *Theory and applications of long-range dependence*, pages 527–556. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.
- [ALP02] A. Ayache, S. Leger, and M. Pontier. Drap brownien fractionnaire. *Potential Anal.*, 17(1) :31–43, 2002.
- [ALV00] A. Ayache and J. Lévy Véhel. The generalized multifractional Brownian motion. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 3(1-2) :7–18, 2000. 19th “Rencontres Franco-Belges de Statisticiens” (Marseille, 1998).
- [AR01] S. Asmussen and J. Rosiński. Approximations of small jumps of Lévy processes with a view towards simulation. *J. Appl. Probab.*, 38(2) :482–493, 2001.
- [ASX11] A. Ayache, N.-R. Shieh, and Y. Xiao. Multiparameter multifractional Brownian motion : local nondeterminism and joint continuity of the local times. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 47(4) :1029–1054, 2011.
- [AWX08] A. Ayache, D. Wu, and Y. Xiao. Joint continuity of the local times of fractional Brownian sheets. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 44(4) :727–748, 2008.
- [AX05] A. Ayache and Y. Xiao. Asymptotic properties and Hausdorff dimensions of fractional Brownian sheets. *J. Fourier Anal. Appl.*, 11(4) :407–439, 2005.
- [Aya12] A. Ayache. Continuous Gaussian multifractional processes with random pointwise Hölder regularity. *J. Theoret. Probab.*, 2012. DOI 10.1007/s10959-012-0418-3.
- [Bar02] J.-M. Bardet. Statistical study of the wavelet analysis of fractional Brownian motion. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 48(4) :991–999, 2002.
- [BCI98] A. Benassi, S. Cohen, and J. Istas. Identifying the multifractional function of a Gaussian process. *Statistic and Probability Letters*, 39 :337–345, 1998.
- [BCI02] A. Benassi, S. Cohen, and J. Istas. Identification and properties of real harmonizable fractional Lévy motions. *Bernoulli*, 8(1) :97–115, 2002.
- [BCI04] A. Benassi, S. Cohen, and J. Istas. On roughness indices for fractional fields. *Bernoulli*, 10(2) :357–373, 2004.
- [BDG07] B. Boufoussi, M. Dozzi, and R. Guerbaz. Sample path properties of the local time of multifractional Brownian motion. *Bernoulli*, 13(3) :849–867, 2007.
- [BE03] A. Bonami and A. Estrade. Anisotropic analysis of some Gaussian models. *J. Fourier Anal. Appl.*, 9(3) :215–236, 2003.
- [Ben03] C. Bender. An S -transform approach to integration with respect to a fractional Brownian motion. *Bernoulli*, 9(6) :955–983, 2003.
- [Ber73] S.M. Berman. Local nondeterminism and local times of Gaussian processes. *Indiana Univ. Math.*, 23 :69–94, 1973.

- [BFG] P. R. Bertrand, M. Fhima, and A. Guillin. Local estimation of the Hurst index of multifractional Brownian motion by Increment Ratio Statistic method. *ESAIM : Probability and Statistics*. doi :10.1051/ps/2011154.
- [BJR97] A. Benassi, S. Jaffard, and D. Roux. Gaussian processes and pseudodifferential elliptic operators. *Revista Matemática Iberoamericana*, 13(1) :19–89, 1997.
- [BL09] H. Biermé and C. Lacaux. Hölder regularity for operator scaling stable random fields. *Stoch. Proc. Appl.*, 119(7) :2222–2248, 2009.
- [BL12] H. Biermé and C. Lacaux. Modulus of continuity of some conditionnally sub-Gaussian fields. Application to stable random fields. En préparation, 2012.
- [BLMS00] J.M. Bardet, G. Lang, E. Moulines, and P. Soulier. Wavelet estimator of long-range dependent processes. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 3(1-2) :85–99, 2000.
- [BLS11] H. Biermé, C. Lacaux, and H.-P. Scheffler. Multi-operator scaling random fields. *Stoch. Proc. Appl.*, 121(11) :2642–2677, 2011.
- [BLX09] H. Biermé, C. Lacaux, and Y. Xiao. Hitting probabilities and the Hausdorff dimension of the inverse images of anisotropic Gaussian random fields. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 41(2) :253–273, 2009.
- [BM08] C. Bender and T. Marquardt. Stochastic calculus for convoluted Lévy processes. *Bernoulli*, 14(2), 2008.
- [BMS07] H. Biermé, M. M. Meerschaert, and H. P. Scheffler. Operator scaling stable random fields. *Stoch. Proc. Appl.*, 117(3) :312–332, 2007.
- [BRB09] H. Biermé, F. Richard, and C. L. Benhamou. Parametric estimation for Gaussian operator scaling random fields and anisotropy analysis of bone radiograph textures. In *Proc. of the Int. Conf. MICCAI'09, London, UK*, 2009.
- [BS12] J.-M. Bardet and D. Surgailis. Nonparametric estimation of the local Hurst function of multifractional Gaussian processes. Preprint, 2012.
- [CD05] S. Cohen and S. Déjean. FracSim : An R package to simulate multifractional Lévy motions. *Journal of Statistical Software*, 14(18), 2005.
- [CGLL11] S. Cohen, F. Gamboa, C. Lacaux, and J.-M. Loubes. LAN property for some fractional type Brownian motion. Preprint available at <http://www.iecn.u-nancy.fr/~lacaux/Publications.html>, 2011.
- [CGPP06] S. Cohen, X. Guyon, O. Perrin, and M. Pontier. Singularity functions for fractional processes and application to fractional Brownian sheet. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 42(2) :187–205, 2006.
- [CLL08] S. Cohen, C. Lacaux, and M. Ledoux. A general framework for simulation of fractional fields. *Stoch. Proc. Appl.*, 118(9) :1489–1517, 2008.
- [CM08] S. Cohen and R. Marty. Invariance principle, multifractional Gaussian processes and long-range dependence. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 44(3) :475–489, 2008.
- [Coe01] J.-F. Coeurjolly. Estimating the parameters of a fractional Brownian motion by discrete variations of its sample paths. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 4(2) :199–227, 2001.
- [CV11a] M. Clausel and B. Vedel. Explicit construction of operator scaling Gaussian random fields. *Fractals*, 19(1) :101–111, 2011.

- [CV11b] M. Clausel and B. Vedel. Two optimality results about sample paths properties of operator scaling Gaussian random fields in anisotropic Besov spaces. Preprint, 2011.
- [Dah89] R. Dahlhaus. Efficient parameter estimation for self-similar processes. *Ann. Statist.*, 17(4) :1749–1766, 1989.
- [DKN07] R. C. Dalang, D. Khoshnevisan, and E. Nualart. Hitting probabilities for systems of non-linear stochastic heat equations with additive noise. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 3 :231–271, 2007.
- [DS11] M. Dozzi and G. Shevchenko. Real harmonizable multifractional stable process and its local properties. *SPA.*, 121(7) :1509–1523, 2011.
- [DVA98] L. Delbeke and W. Van Assche. A wavelet based estimator for the parameter of self-similarity of fractional Brownian motion. In *3rd International Conference on Approximation and Optimization in the Caribbean (Puebla, 1995)*, volume 24 of *Aportaciones Mat. Comun.*, pages 65–76. Soc. Mat. Mexicana, México, 1998.
- [Fal02] K. J. Falconer. Tangent fields and the local structure of random fields. *J. Theoret. Probab.*, 15(3) :731–750, 2002.
- [Fal03] K. J. Falconer. The local structure of random processes. *J. London Math. Soc. (2)*, 67(3) :657–672, 2003.
- [FLGLV09] K. J. Falconer, R. Le Guével, and J. Lévy Véhel. Localizable moving average symmetric stable and multistable processes. *Stoch. Models*, 25(4) :648–672, 2009.
- [FP75] D. Feyel and A. De La Pradelle. Faisceaux d’espaces de Sobolev et principes du minimum. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 25(1) :127–149, 1975.
- [HLV09] E. Herbin and J. Lévy-Véhel. Stochastic 2-microlocal analysis. *Stoch. Proc. Appl.*, 119(7) :2277–2311, 2009.
- [IL97] J. Istas and G. Lang. Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of a Gaussian process. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Statist.*, 33(4) :407–436, 1997.
- [IL12] J. Istas and C. Lacaux. On locally self-similar fractional random fields indexed by a manifold. 2012. to appear in *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes : formerly Stochastics and Stochastics Reports*, DOI :10.1080/17442508.2012.654609.
- [Ist05] J. Istas. Spherical and hyperbolic fractional Brownian motion. *Elec. Comm. Probab.*, 10 :254–262, 2005.
- [Ist06] J. Istas. On fractional stable fields indexed by metric spaces. *Elec. Comm. Probab.*, 11 :242–251, 2006.
- [Kah85] J.-P. Kahane. *Some random series of functions*, volume 5 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1985.
- [Kam96] A. Kamont. On the fractional anisotropic Wiener field. *Probab. Math. Statist.*, 16(1) :85–98, 1996.
- [KM91] N. Kôno and M. Maejima. Hölder continuity of sample paths of some self-similar stable processes. *Tokyo J. Math.*, 14(1), 1991.
- [Kol40] A. N. Kolmogorov. Wienerische Spiralen und einige andere interessante Kurven in Hilbertsche Raum. *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS*, 26 :115–118, 1940.

- [KW97] J.T. Kent and A.T.A Wood. Estimating the fractal dimension of a locally self-similar Gaussian process by using increments. *J. R. Stat. Soc. Ser. B*, 59 :679–699, 1997.
- [Lac04a] C. Lacaux. *Champs de Lévy multifractionnaires*. PhD thesis, Université Paul Sabatier (Toulouse), <http://www.iecn.u-nancy.fr/~lacaux/Publications.html>, 2004.
- [Lac04b] C. Lacaux. Real harmonizable multifractional Lévy motions. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Statist.*, 40(3) :259–277, 2004.
- [Lac04c] C. Lacaux. Series representation and simulation of multifractional Lévy motions. *Adv. in Appl. Probab.*, 36(1) :171–197, 2004.
- [Lac05] C. Lacaux. Fields with exceptional tangent fields. *J. Theoret. Probab.*, 18(2) :481–497, 2005.
- [LC60] L. Le Cam. Locally asymptotically normal families of distributions. Certain approximations to families of distributions and their use in the theory of estimation and testing hypotheses. *Univ. californica Publ. Statist.*, 3 :37–98, 1960.
- [LGLV12] R. Le Guével and J. Lévy Véhel. A Ferguson-Klass-LePage series representation of multistable multifractional processes and related processes. 2012. To appear in Bernoulli.
- [LL07] C. Lacaux and J.-M. Loubes. Hurst exponent estimation of fractional Lévy motion. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 3 :143–164, 2007.
- [LM11] C. Lacaux and R. Marty. From invariance principles to a class of multifractional fields related to fractional sheets. Preprint available at <http://www.iecn.u-nancy.fr/~lacaux/Publications.html>, 2011.
- [LMGRT12] C. Lacaux, A. Muller-Guedin, R. Ranta, and S. Tindel. Convergence and performance of the peeling wavelet denoising algorithm. Preprint available at <http://www.iecn.u-nancy.fr/~lacaux/Publications.html>, 2012.
- [LRR11a] O. Lieberman, R. Rosemarin, and J. Rousseau. Asymptotic theory for maximum likelihood estimation of the memory parameter in stationary Gaussian processes. *Econometric Theory*, FirstView :1–14, 2011. <http://dx.doi.org/10.1017/S0266466611000399>.
- [LRR11b] O. Lieberman, R. Rosemarin, and J. Rousseau. Asymptotic theory for maximum likelihood estimation of the memory parameter in stationary Gaussian processes (full version). 2011. Available at <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-006414741>.
- [LS85] J. Lovejoy and D. Schertzer. Generalized scale invariance in the atmosphere and fractal models of rain. *Water Resour. Res.*, 21 :1233–1250, 1985.
- [LT11] M. Ledoux and M. Talagrand. *Probability in Banach spaces*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2011. Isoperimetry and processes, Reprint of the 1991 edition.
- [MP87] D. Monrad and L. D. Pitt. Local nondeterminism and Hausdorff dimension. In *Seminar on stochastic processes, 1986 (Charlottesville, Va., 1986)*, volume 13 of *Progr. Probab. Statist.*, pages 163–189. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987.
- [MS01] M. M. Meerschaert and H. P. Scheffler. *Limit distributions for sums of independent random vectors*. Wiley Series in Probability and Statistics : Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 2001. Heavy tails in theory and practice.

- [MVN68] B. Mandelbrot and J. Van Ness. Fractional Brownian motion, fractional noises and applications. *Siam Review*, 10 :422–437, 1968.
- [Nua95] D. Nualart. *The Malliavin calculus and related topics*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1995.
- [PBA⁺06] L. Ponson, D. Bonamy, H. Auradou, G. Mourot, E. Bouchaud, C. Guillot, and J. Hulin. Anisotropic self-affine properties of experimental fracture surfaces. *International Journal of Fracture*, 140 :27–37, 2006.
- [PLV95] R. F. Peltier and J. Lévy Véhel. Multifractional Brownian motion : definition and preliminary results. available on <http://hal.archives-ouvertes.fr/inria-00074045>, 1995.
- [RBMS08] D. M. Reeves, D.A. Benson, M. M. Meerschaert, and H.-P. Scheffler. Transport of conservative solutes in simulated fracture networks : 2. ensemble solute transport and the correspondence to operator-stable limit distributions. *Water Resour. Res.*, 44, 2008.
- [RHLDW03] R. Ranta, C. Heinrich, V. Louis-Dorr, and D. Wolf. Interpretation and improvement of an iterative wavelet-based denoising method. *IEEE Signal Processing Letters*, 10 :239–241, 2003.
- [RHLDW05] R. Ranta, C. Heinrich, V. Louis-Dorr, and D. Wolf. Iterative wavelet-based denoising methods and robust outlier detection. *IEEE Signal Processing Letters*, 12 :557–560, 2005.
- [Ros90] J. Rosiński. On series representations of infinitely divisible random vectors. *Ann. Probab.*, 18(1) :405–430, 1990.
- [Ros01] J. Rosiński. Series representations of Lévy processes from the perspective of point processes. In *Lévy processes*, pages 401–415. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.
- [Sly07] A. Sly. Integrated fractional white noise as an alternative to multifractional Brownian motion. *J. Appl. Probab.*, 44(2) :393–408, 2007.
- [ST94] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu. *Stable non-Gaussian random processes*. Chapman & Hall, New York, 1994. Stochastic models with infinite variance.
- [ST04] S. Stoev and M. S. Taqqu. Stochastic properties of the linear multifractional stable motion. *Adv. in Appl. Probab.*, 36(4) :1085–1115, 2004.
- [Ste02] M. L. Stein. Fast and exact simulation of fractional Brownian surfaces. *J. Comput. Graph. Statist.*, 11(3) :587–599, 2002.
- [SUV07] J.L. Solé, F. Utzet, and J. Vives. Canonical Lévy process and Malliavin calculus. *Stoch. Proc. Appl.*, 117(2) :165–187, 2007.
- [Üst95] A.S. Üstünel. *An introduction to analysis on Wiener space*, volume 1610 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [vdV98] A. W. van der Vaart. *Asymptotic statistics*, volume 3 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [VG97] E. Veach and L. J. Guibas. Metropolis light transport. In *Proc. of the 24th Annual Conference on Computer Graphics (SIGGRAPH'97), Los Angeles, USA*, pages 65–76, 1997.
- [Wal43] A. Wald. Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 54 :426–482, 1943.
- [WX07] D. Wu and Y. Xiao. Geometric properties of fractional Brownian sheets. *J. Fourier Anal. Appl.*, 13(1) :1–37, 2007.

- [Xia09] Y. Xiao. Sample path properties of anisotropic Gaussian random fields. In *A minicourse on stochastic partial differential equations*, volume 1962 of *Lecture Notes in Math.*, pages 145–212. Springer, Berlin, 2009.
- [Xia10] Y. Xiao. Uniform modulus of continuity of random fields. *Monatsh. Math.*, 159(1-2) :163–184, 2010.