



**HAL**  
open science

# MODELISATION DES COMPOSANTS ELECTROMAGNETIQUES HAUTE FREQUENCE PAR LA METHODEDESELEMENTSFUHS

Fabiano Luiz Santos Garcia

► **To cite this version:**

Fabiano Luiz Santos Garcia. MODELISATION DES COMPOSANTS ELECTROMAGNETIQUES HAUTE FREQUENCE PAR LA METHODEDESELEMENTSFUHS. Energie électrique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1999. Français. NNT: . tel-00764553

**HAL Id: tel-00764553**

**<https://theses.hal.science/tel-00764553>**

Submitted on 13 Dec 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



TS85

# THESE

Présentée par

**Fabiano Luiz Santos GARCIA**

( Ingénieur de l'Universidade Federal de Santa Catarina )

Pour obtenir le titre de **DOCTEUR**

**DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

(Arrêté ministériel du 30 mars 1992)

Spécialité : Génie Electrique

\*\*\*\*\*

## **MODELISATION DES COMPOSANTS ELECTROMAGNETIQUES HAUTE FREQUENCE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

\*\*\*\*\*

Soutenue le 16 septembre 1999 devant le jury composé de :

**M. FELIACHI**  
**A. NICOLET**  
**J.P. KERADEC**  
**G. MEUNIER**  
**H. SAOTOME**

Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur

Thèse préparée au sein du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble



# THESE

Présentée par

**Fabiano Luiz Santos GARCIA**

( Ingénieur de l'Universidade Federal de Santa Catarina )

Pour obtenir le titre de **DOCTEUR**

**DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

(Arrêté ministériel du 30 mars 1992)

Spécialité : Génie Electrique

\*\*\*\*\*

## **MODELISATION DES COMPOSANTS ELECTROMAGNETIQUES HAUTE FREQUENCE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

\*\*\*\*\*

Soutenue le 16 septembre 1999 devant le jury composé de :

**M. FELIACHI  
A. NICOLET  
J.P. KERADEC  
G. MEUNIER  
H. SAOTOME**

Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur

Thèse préparée au sein du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble



## REMERCIEMENTS

J'adresse mes sincères remerciements, tout d'abord à Gérard MEUNIER, Professeur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble – INPG, Directeur Adjoint du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble – LEG et mon directeur de thèse. Pendant ces quatre années passées ensemble il a été pour moi professeur et surtout un ami. Je conserverai un très bon souvenir de nos discussions, de sa façon de chercher des nouvelles solutions et de toujours m'avoir encouragé pendant ces années de recherche au labo.

Je remercie également les membres de mon jury de thèse :

Monsieur FELIACHI Mouloud, Professeur au GE44/LRTI CRTT à Saint-Nazaire, qui a accepté de cumuler la charge de président et de rapporteur.

Monsieur NICOLET André, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille III qui a également accepté d'être rapporteur de ce mémoire.

Monsieur SAOTOME Hideo, Professeur à l'Université de Shiba au Japon, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de participer à ce jury.

Monsieur KERADEC Jean-Pierre, Professeur à l'IUT de Génie Electrique de Grenoble, pour toutes les discussions et sa collaboration pendant mon travail de thèse.

Mes remerciements sont également adressés à Jean-Louis COULOMB, Professeur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, ancien responsable de la Formation Doctoral en Génie Electrique à l'INPG et actuel chef de l'Equipe de Modélisation du LEG, pour m'avoir accepté au sein de cette « grande » équipe.

Je tiens aussi à remercier Jean-Claude SABONNADIÈRE et Jean-Pierre ROGNON, respectivement l'ancien et l'actuel Directeur du LEG, pour m'avoir accueilli au laboratoire, me permettant ainsi de travailler dans de très bonnes conditions morales et matérielles.

Je remercie également le gouvernement brésilien qui a soutenu financièrement cette thèse au travers d'une bourse du CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

Je voudrais aussi remercier tous les professeurs, chercheurs, thésards, ingénieurs et techniciens du LEG qui m'ont soutenu avec leur savoir-faire, qui m'ont aidé à résoudre des multiples problèmes informatiques et avec lesquels il a été très agréable de travailler.

Je remercie très chaleureusement ma femme Alessandra, pour sa patience et préoccupation. Merci à elle pour son soutien pendant ces quatre années qui, parfois, n'ont pas été très faciles.

Enfin, un grand merci à mes parents pour leur confiance et leur encouragement pendant mes études.

*A Alessandra,*

*et à mes parents*



## **Sommaire**



<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>13</b>
<b>CHAPITRE I – LES PROPRIETES COMPLEXES DES FERRITES EN HAUTE FREQUENCE</b>	
<b>I. INTRODUCTION .....</b>	<b>19</b>
<b>II. LES FERRITES .....</b>	<b>21</b>
II.1. LES FERRITES "DOUX" .....	23
II.2. UNE FABRICATION DIFFICILE .....	24
II.3. APPLICATION À L'ELECTRONIQUE DE PUISSANCE .....	25
<b>III. LA PERMEABILITE COMPLEXE .....</b>	<b>27</b>
III.1. DÉFINITION DE LA PERMÉABILITÉ COMPLEXE .....	27
III.2. PERTES DANS LES MATÉRIAUX MAGNÉTIQUES .....	31
<b>IV. LIMITES DES METHODES DE CARACTERISATION CLASSIQUES .....</b>	<b>33</b>
<b>V. CONCLUSION.....</b>	<b>37</b>
 <b>CHAPITRE II - L'ANALYSE DU CHAMP MAGNETIQUE</b>	
<b>I. INTRODUCTION .....</b>	<b>35</b>
<b>II. LES EQUATIONS DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE.....</b>	<b>36</b>
<b>III. LES MODELES DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE .....</b>	<b>38</b>
III.1. LES MODÈLES DYNAMIQUES GÉNÉRAUX 3D.....	38
<i>III.1.1. Modèle électrodynamique.....</i>	<i>39</i>
<i>III.1.2. Modèle magnétodynamique.....</i>	<i>41</i>
III.1.2.1. Les potentiels du type électrique.....	42
III.1.2.2. Les potentiels du type magnétique.....	45
III.2 LES PROBLÈMES BIDIMENSIONNELS .....	47
<i>III.2.1. Trois types de régions.....</i>	<i>48</i>
<i>III.2.2. Les problèmes axisymétriques.....</i>	<i>51</i>
<b>IV. COUPLAGE AVEC LES EQUATIONS DE CIRCUIT .....</b>	<b>54</b>
IV.1. LES MÉTHODES DE COUPLAGE ET D'ANALYSE DU CIRCUIT ÉLECTRIQUE .....	54
<i>IV.1.1 Couplage indirect et direct.....</i>	<i>55</i>
<i>IV.1.2. Méthodes d'analyse des circuits électriques.....</i>	<i>56</i>
IV.2 COUPLAGE DANS LE CAS D'UN INDUCTEUR MASSIF.....	58

IV.2.1. Cas bidimensionnelle cartésien .....	58
IV.2.2 Cas de la symétrie axiale.....	61
<b>V. VALIDATION SUR UN « CAS D'ECOLE » .....</b>	<b>63</b>
V.1. CALCULS ANALYTIQUE DE LA RÉSISTANCE ET DE L'INDUCTANCE .....	65
V.2. SPIRE MASSIVE ALIMENTÉE EN TENSION.....	66
V.3. EN RÉGIME SINUSOÏDAL PERMANENT .....	68
V.4. RÉSULTATS .....	68
<b>VI. CONCLUSION .....</b>	<b>70</b>
 <b>CHAPITRE III - L'ETUDE D'UN ECHANTILLON TORIQUE DE FERRITE</b>	
<b>I. INTRODUCTION .....</b>	<b>67</b>
<b>II. UNE METHODE DE CARACTERISATION DES FERRITES.....</b>	<b>68</b>
II.1. DESCRIPTION DU PROBLÈME.....	69
II.2 LE CALCUL ANALYTIQUES DES IMPÉDANCES ZB ET ZE.....	70
<b>III. VALIDATION DU MODELE ANALITYQUE PAR MEF.....</b>	<b>72</b>
<b>IV. L'IMPEDANCE MAGNETIQUE – ZB.....</b>	<b>74</b>
IV.1. LE CALCUL DE ZB PAR ÉLÉMENTS FINIS .....	74
IV.1.1. Analyse avec la formulation Champ Magnétique - Axisymétrique .....	74
IV.1.2. Conclusion pour le calcul de ZB.....	77
IV.2. DÉROULEMENT DU TORE.....	78
IV.3. L'INFLUENCE DE LA HAUTEUR .....	81
IV.4. L'INFLUENCE ET L'INTÉRÊT DE LA MÉTALLISATION.....	83
IV.5. L'APPROCHE TRIDIMENSIONNELLE .....	84
IV.5.1. La géométrie 3D étudiée.....	85
IV.5.2. Le tore de ferrite avec métallisation .....	87
IV.5.3. La comparaison entre les simulations 3D et 2D.....	88
<b>V. LE CALCUL DE ZE - L'IMPÉDANCE ÉLECTRIQUE.....</b>	<b>89</b>
V.1. ANALYSE ÉLECTRODYNAMIQUE – FORMULATION BIDIMENSIONNELLE .....	89
V.2. ANALYSE EN UTILISANT LA FORMULATION CHAMP MAGNÉTIQUE - AXISYMÉTRIQUE.....	91
V.3. CONCLUSION POUR LE CALCUL DE ZE .....	95
<b>V. CONCLUSION.....</b>	<b>97</b>

## CHAPITRE IV - LES COUPLAGES ELECTRIQUES MAGNETIQUES DANS LES COMPOSANTS BOBINES

<b>I. INTRODUCTION</b> .....	<b>97</b>
<b>II. CAS D'UNE INDUCTANCE SIMPLE</b> .....	<b>98</b>
II.1. LA MESURE.....	98
II.2 . UNE REPRÉSENTATION ÉQUIVALENTE .....	99
II.3. L'ÉVALUATION DES CONSTANTES .....	100
<b>III. LES MODELES ELECTROSTATIQUES POUR EVALUER ANALYTIQUEMENT LES CAPACITES PARASITES</b> .....	<b>102</b>
III.1. LE MODÈLE PLAN .....	102
III.1.1. Une étude analytique.....	103
III.1.2. Bobinage "continu" ou "discontinu".....	103
III.1.3. Bobinage en couches ou en galettes .....	104
III.2. LE MODÈLE PAVÉ .....	106
<b>IV. MODELISATION ELEMENTS FINIS BIDIMENSIONNELLE</b> .....	<b>109</b>
IV.1. LE CAS ÉLECTROSTATIQUE.....	109
IV.1.1. Bobinage continu ou discontinu .....	110
IV.1.2. Bobinage en couches ou en galettes .....	111
IV.1.3. Le répartition des potentiels .....	112
IV.2. LE CAS MAGNÉTODYNAMIQUE .....	113
IV.2.1. Les travaux récents.....	114
IV.2.1. Les hypothèses de la formulation.....	119
IV.2.2. La formulation axisymétrique.....	120
IV.2.3. L'étude d'une bobine.....	121
<b>V. CALCUL DE L'IMPEDANCE EQUIVALENTE <math>Z_{EQ}</math> D'UNE BOBINE</b> .....	<b>124</b>
<b>VI. CONCLUSION</b> .....	<b>127</b>
 <b>CONCLUSION GENERALE</b> .....	 <b>131</b>
 <b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b> .....	 <b>135</b>



## **Introduction Générale**



De plus en plus les dispositifs électromagnétiques sont soumis à des excitations en hautes fréquences. Ces conditions de fonctionnement contribuent au développement d'effets indésirables dans les circuits magnétiques et les parties bobinées (effets capacitifs inter spires et pertes dans les conducteurs et matériaux magnétiques, etc.).

La modélisation des dispositifs en haute fréquence, nécessite une résolution complète des équations des champs magnétique et électrique (équations de Maxwell) tenant compte en particulier des courants de déplacement. La modélisation de cette interaction magnétique – électrique, doit alors permettre de mieux appréhender le fonctionnement réel de ces dispositifs électromagnétiques. L'utilisation de méthodes numériques puissantes permettent d'aider à une meilleure compréhension des phénomènes qui apparaissent en haute fréquence.

La méthode numérique choisie pour la modélisation est la méthode des éléments finis. Il s'agit d'une méthode très utilisée dans le domaine de calcul du champ électromagnétique. Ses applications principales sont aussi diverses que la modélisation de dispositifs électrotechniques (tels que les contacteurs ou les machines électriques) et de dispositifs destinés aux hyperfréquences (tels que les guides d'onde ou les cavités). Les premiers logiciels, qui sont apparus à la fin des années 60, étaient limités à des études bidimensionnelles. Depuis le début des années 80, des logiciels permettant une modélisation de dispositifs tridimensionnels se sont développés. Leurs domaines d'application sont encore en pleine évolution. Si, au début, ces logiciels ne s'intéressaient qu'à des études statiques, les principales recherches sont aujourd'hui menées sur des régimes dynamiques ou même transitoires couplés avec les équations de circuit électrique.

Outre l'étude des effets capacitifs (composants bobinés), les problèmes d'interactions magnétiques – électriques en haute fréquence concernent la caractérisation des matériaux magnétiques. Les ferrites, par exemple, ont leurs propriétés physiques très généralement décrites par leur seule perméabilité complexe, mais des études récentes [Blache-95, Fouassier-98] permettent de mettre en avant l'incidence des propriétés diélectriques de ces matériaux. Cette influence est en effet non négligeable à partir de quelques dizaines de kHz.

L'objectif de ce travail de recherche est d'étudier les effets d'interaction magnétique – électrique dans les composants électromagnétiques et de développer des méthodes numériques spécifiques destinées à la modélisation des systèmes complets des équations électromagnétiques.

La présentation du travail a été structurée en 4 chapitres.

Le premier chapitre présente les propriétés physiques complexes des ferrites en haute fréquence. Les ferrites « doux », les problèmes liés à leur fabrication ainsi que les applications de ces matériaux seront abordés.

La perméabilité et la permittivité complexes seront définies pour ces matériaux ainsi que les expressions pour représenter les pertes. Nous montrerons les limites des méthodes de caractérisation classiques.

Les données fournies par les constructeurs de ferrites, basées sur une approche magnétostatique, sont insuffisantes pour représenter correctement et complètement le comportement du matériau, particulièrement au-delà de quelques centaines de kHz. Pour remédier à ces manquements, nous présentons, dans le chapitre III, une nouvelle méthode de caractérisation de ces matériaux.

Le deuxième chapitre rappelle les bases de la modélisation électromagnétique, les équations de Maxwell et les différents modèles rencontrés dans la pratique, notamment l'électrodynamique et le magnétodynamique. Les formulations générales 3D seront réécrites avec des propriétés physiques complexes suivant deux approches: les formulations du type « électrique » et les formulations du type « magnétique ».

Une hypothèse bidimensionnelle cartésienne et l'autre axisymétrique seront appliquées à la formulation en potentiel vecteur magnétique et à un cas particulier de la formulation en champ magnétique. Nous montrerons ensuite comment réaliser le couplage des équations électromagnétiques avec les équations de circuit. En particulier pour la prise en compte des conducteurs massifs en 2D cartésien et axisymétrique.

Le troisième chapitre présente la validation, par la méthode des éléments finis, d'une méthode originale de caractérisation des ferrites [Fouassier-98]. L'idée directrice de cette démarche y est présentée, ainsi que les précautions expérimentales à respecter dans les mesures à effectuer et les modèles analytiques mis en jeu pour déduire les paramètres recherchés. Les hypothèses utilisées pour les modèles analytiques seront validées à l'aide des formulations éléments finis en 2D et 3D. Les calculs des profils de champ à l'intérieur d'un échantillon torique de ferrite en 2D et 3D, permettent aussi de déterminer le domaine de validité de cette approche analytique (l'influence de la hauteur et d'une métallisation sur les faces du tore, les répartition des spires, etc.).

Finalement, au cours du quatrième chapitre, les interactions magnétiques électriques et les problèmes des capacités parasites seront présentés. La représentation d'une inductance simple par différents circuits équivalents est tout d'abord présentée. Dans le cas électrostatique, les bobinages en continu – discontinu, en couche ou en galette et les répartitions des potentiels seront étudiés. En magnétodynamique, une analyse plus complète des équations de Maxwell

sera nécessaire. Quelques études récentes sur les effets des interactions magnétiques électriques en haute fréquence seront présentés. Enfin, une formulation 2D axisymétrique couplée avec les équations de circuit est mise en œuvre pour résoudre un problème de capacité parasite dans les bobines axisymétriques haute fréquence.



## **Chapitre I**

### **Les propriétés physiques des ferrites en haute fréquence**



## I. INTRODUCTION

Contrairement aux matériaux ferromagnétiques, les ferrites au manganèse-zinc, très utilisés pour réaliser les composants de convertisseurs statiques, sont bien représentés par de modèles linéaires. L'expérience montre en effet que, tant que l'induction maximum n'est pas trop proche de la saturation, la perméabilité effective de ces matériaux varie assez peu avec l'amplitude de l'excitation appliquée.

Les propriétés linéaires des ferrites sont très généralement décrites par leur seule perméabilité complexe  $\bar{\mu}$ . Parfois, la résistivité continue  $\rho$  vient compléter les données précédents. La détermination de la perméabilité repose, de façon standard, sur une théorie magnétostatique peu adaptée en haute fréquence.

L'influence des propriétés diélectriques de ces matériaux dès quelques dizaines de kHz, est non négligeable, car aux courants de conduction s'ajoutent des courants de déplacement importants. La permittivité réelle élevée peut entraîner, à des fréquences relativement basses pour des ferrites de grandes dimensions, un renforcement du champ au cœur du matériau, et donc une saturation locale ou des pertes supplémentaires, non prévisibles à l'aide des données standards. La prise en compte de la résistivité (partie imaginaire de la permittivité) ne permet pas à elle seule, de parvenir à une estimation réaliste des pertes. Seule la prise en compte de la perméabilité complexe mène à des prévisions fiables.

La modélisation du comportement linéaire des matériaux homogènes et isotropes utilisés en régime harmonique passe donc par la connaissance des deux grandeurs complexes qui les caractérisent :  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\epsilon}$ . Le préalable indispensable à toute prévision est donc l'estimation de ces grandeurs physiques complexes, à la fréquence de travail.

Dans ce chapitre est présenté le matériau magnétique ferrite et ses caractéristiques physiques complexes, les limites des méthodes de caractérisation classiques, et l'importance d'une caractérisation basée sur le couple  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\epsilon}$  pour une étude en régime harmonique haute fréquence.

## II. LES FERRITES

Les ferrites sont des oxydes magnétiques qui ont été découverts au début du siècle. Cependant, il a fallu attendre la publication, en 1948, des travaux de Louis Néel sur le ferrimagnétisme (par opposition au ferromagnétisme) pour comprendre leur fonctionnement.

Ces travaux, qui lui ont valu le prix Nobel de Physique en 1970, décrivent les propriétés magnétiques statiques de ces matériaux, et notamment leur aimantation à saturation et leur température de transition. Par la suite, on trouva de nombreuses applications de ces nouveaux matériaux, notamment en haute fréquence, car leur résistivité électrique élevée, caractéristique de la plupart des oxydes facilitait leur emploi dans ce domaine. [Fouassier-98]

Les ferrites "doux" sont constitués de petits cristaux d'une taille typique de 10 à 20  $\mu\text{m}$  [Snelling]. A l'intérieur de ces cristaux, pour une température inférieure à la température de Curie, se forment des domaines baptisés « domaines de Weiss » dans lesquels les moments magnétiques élémentaires sont déjà alignés [Talbot-93, Berdai-93]. L'excitation magnétique  $\vec{H}$  générée par un bobinage proche déplace et aligne progressivement, en fonction de son amplitude, les domaines suivant la direction imposée par  $\vec{H}$ .

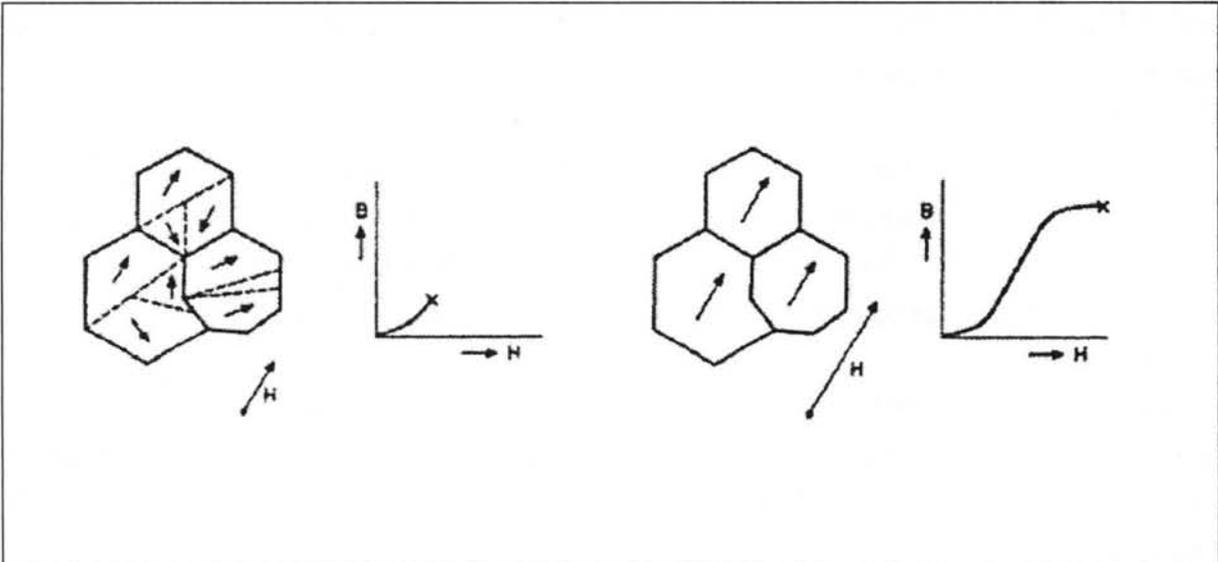


Fig. 1.1 : Alignement des domaines suivant les champs d'excitation

Si le bobinage est parcouru par un courant alternatif, l'excitation magnétique  $\vec{H}$  et l'induction  $\vec{B}$  décrivent un cycle d'hystérésis assez semblable à celui des matériaux ferromagnétiques (Fig. 1.2).

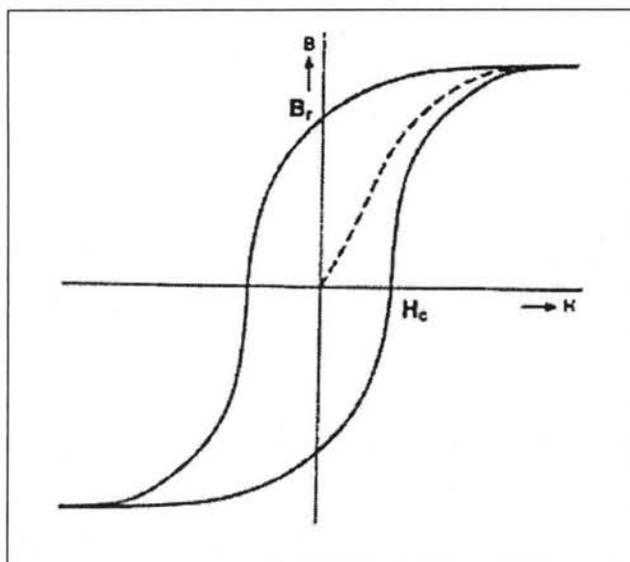


Fig. 1.2 : Courbe d'hystérésis

On définit en particulier un champ coercitif  $\vec{H}_c$  et une induction rémanente au repos  $\vec{B}_r$ . De l'aire de cette courbe d'hystérésis on déduit les pertes pendant un cycle du matériau [Lousseau-96]. On les divise généralement en trois catégories : les pertes par hystérésis, les pertes par courant de Foucault et les pertes par relaxation [Hess-93, Saotome-97]. En pratique la distinction entre ces trois types de pertes se fonde sur l'hypothèse que la première est proportionnelle à la fréquence et la seconde à son carré.

Les pertes par courants de Foucault sont dues aux courants induits circulant dans le matériau sous l'effet du champ électromoteur. Ces courants créent un champ qui s'oppose au champ magnétique qui les a engendrés [O'Kelly-72]. Ces pertes dépendent essentiellement de la résistivité du matériau et augmentent avec la fréquence. Les pertes par relaxation (ou encore pertes par résonance ferromagnétique), dues aux mécanismes de rotation et de déplacement des parois des domaines, sont également très présentes à fréquence élevée.

### II.1. Les ferrites "doux"

Outre leur résistivité et leur perméabilité, le paramètre qui caractérise les ferrites est l'aimantation à saturation  $M_s$ , qui peut varier de 150 à 600 mT. Plus l'aimantation peut se déplacer facilement sous l'action d'un faible champ magnétique extérieur, plus le matériau est "doux" et sa perméabilité est élevée. Par opposition on appelle ferrite "dur" un ferrite difficile à aimanter, présentant un champ coercitif et une induction rémanente élevés [Fouassier-98].

Les ferrites "doux", dont nous parlons ici, permettent de couvrir des fréquences de fonctionnement allant de quelques kHz à quelques centaines de MHz et sont utilisés dans des domaines comme la conversion d'énergie ou le traitement de signal. Ils se présentent sous

l'aspect de noyaux solides dont les formes sont standardisées, les plus connus étant sans doute les tores, les noyaux E et dérivés, les pots RM ou FP et, les planars. Gris, sombres ou noirs, ils sont très durs et très cassants. Ce sont des céramiques chimiquement inertes que l'on peut considérer comme isotropes et homogènes. En revanche, leur composition exacte et leur mode de fabrication ne sont pas connus du public, car ils font partie du savoir-faire de chaque fabricant. Chacun d'eux en a plus d'une dizaine dans son catalogue et les propose sous diverses références telles que 3F3 chez Philips, 505 chez Sagem, N67 chez Siemens ou T9 chez TPC...

L'appellation ferrite "doux" recouvre ainsi une variété importante de composés dont la formule générique est  $MeFe_2O_4$ , où Me représente des métaux de transition comme le manganèse (Mn), le zinc (Zn), le nickel (Ni), le cobalt (Co), le cuivre (Cu), le fer (Fe), ou encore des éléments comme le magnésium (Mg) ou le lithium (Li). Ces oxydes sont caractérisés par un comportement magnétique en dessous d'une température, baptisée « température de Néel », dépendant de leur composition [Fouassier-98].

Les deux types de ferrites doux les plus utilisés se distinguent par leurs fréquences d'utilisation. Les ferrites MnZn sont destinés principalement à un fonctionnement de puissance de 10 kHz à 1 MHz (et même jusqu'à 3 MHz pour les dernières évolutions de matériaux intégrant certains additifs). Leur formule générique est  $Mn_xZn_yFe_2Fe_2O_4$  avec  $x + y + z = 1$ , le réglage des coefficients x, y et z étant l'un des paramètres qui déterminent la plage de fréquence. Leurs aimantations sont parmi les plus élevées (jusqu'à 0,6 T) mais leurs résistivités électriques restent parmi les plus faibles (inférieures ou égales à quelques  $\Omega m$ ).

Les ferrites NiZn, de formule  $Ni_xZn_{1-x}Fe_2O_4$ , couvrent la gamme de fréquences de 1 MHz à 500 MHz. Les aimantations à saturation sont plus modestes (inférieures à 450 mT) mais leurs résistivités électriques sont nettement plus élevées (jusqu'à 105  $\Omega m$ ), ce qui en fait de ces matériaux très adaptés aux hautes et très hautes fréquences [Lebourgeois-97]. Leur perméabilité initiale peut être comprise entre 10 et 1000.

## **II.2. Une fabrication difficile**

Les moyens d'élaboration des ferrites sont les mêmes pour toutes les familles (spinelles, grenats, hexaferrites...). Ce sont des procédés d'élaboration de poudres, suivis d'une étape de cuisson à haute température appelée « frittage ».

Les matières premières utilisées pour produire des ferrites "doux" sont les oxydes ou les carbonates de métaux :  $Fe_2O_4$ ,  $Mn_3O_4$ , NiO, ZnO... Après mélange des poudres suivant les proportions de la recette du fabricant et du matériau voulu, l'ensemble est préfritté à plus de

1000°C, ce qui le transforme déjà en ferrite. Le solide obtenu est alors rebroyé pour obtenir une taille de grain précise.

Ces grains sont ensuite mélangés à un liant organique pour assurer leur cohésion avant cuisson, ainsi qu'à certains additifs plus ou moins secrets comme de l'oxyde de calcium ou de la silice. Ces additifs sont, entre autres, destinés à augmenter la résistivité entre grains. Le tout est alors mis en forme pour constituer une pièce, le plus souvent par pressage. Cette pièce est ensuite portée à haute température, entre 1200°C et 1500°C, pour souder les grains entre eux. Au cours de ce frittage, les surfaces se rétractent de 10 à 20% par rapport à la forme précédente, ce qui fait quelquefois apparaître des fissures et rend difficile la maîtrise des dimensions finales de la pièce. La dispersion obtenue est, typiquement, de l'ordre de 2% [Fouassier-98].

La montée en température et la composition de l'atmosphère pendant le frittage influent également sur la microstructure et la composition chimique du ferrite final. La précision du suivi de ces paramètres influe, de manière importante, sur les performances magnétiques. Les développements en cours visent essentiellement à maîtriser, le plus précisément possible, le retrait, ce qui est primordial pour la miniaturisation des noyaux [Hebdo-98]. Cette maîtrise réduirait les opérations d'usinage destinées à rattraper les écarts de forme.

### **II.3. Application à l'Electronique de Puissance**

Chaque fabricant décline sa gamme de ferrites en une vingtaine de variétés, optimisées principalement pour une plage de fréquence et un mode de fonctionnement donnés. Pour les utilisations de l'Electronique de Puissance [Microspire-97], nous ne retiendrons que les ferrites de type MnZn et NiZn.

Les ferrites de type MnZn sont caractérisés par l'induction à saturation (la plus élevée des ferrites, jusqu'à 0,6 T), mais aussi par une résistivité électrique de l'ordre de 1  $\Omega\text{m}$ , qui ne leur permet pas de monter très haut en fréquence. Leur perméabilité initiale est relativement élevée; elle varie, suivant la fréquence maximum d'utilisation visée, de 15000 pour les matériaux de fréquence faible à 1000 et moins pour les fréquences élevées, avec des pointes à 23000 pour des matériaux de laboratoire. Une perméabilité élevée constitue parfois un atout.

Elle permet, par exemple, de réduire le nombre de spires des bobinages et, en conséquence, les pertes dans les conducteurs, la question principale étant l'optimisation des pertes dans l'ensemble du composant. Il faut noter, pour relativiser ces valeurs, que les perméabilités initiales sont spécifiées, dans les catalogues, avec une précision de 25 à 30% pour les noyaux sans entrefer [Fouassier-98].

Les principales applications des ferrites MnZn peuvent se classer en deux catégories :

- Des applications fort niveau ou de puissance, où le ferrite est destiné à transférer ou à stocker de l'énergie sous forme magnétique. Les transformateurs et inductances d'alimentation à découpage et des convertisseurs entrent dans cette catégorie.
- Des applications bas niveau, où l'induction du ferrite ne dépasse pas quelques centièmes de l'aimantation à saturation. C'est le cas des composants utilisés pour filtrer ou transmettre un signal.

Actuellement, l'essentiel de la production mondiale est destiné aux alimentations qui fonctionnent entre 30 et 100 kHz. Les ferrites de puissance sont optimisés au fur et à mesure de l'évolution des applications et des autres composants (les actifs, comme les transistors). Cette optimisation est surtout en fonction de la gamme de fréquence, mais elle tient compte également de la température et de l'induction de fonctionnement. Il faut signaler que, lorsqu'on utilise un ferrite de puissance à haute fréquence, on diminue son induction de fonctionnement : à 100 kHz, les inductions de fonctionnement sont situées aux alentours de 200 mT, alors qu'à 1 MHz, on les choisit autour de 50 mT [Lebourgeois-97].

Concernant le filtrage, en électronique de puissance on distingue le filtrage en ligne et le filtrage en mode commun. C'est ce dernier qui nécessite de très fortes impédances et donc des matériaux haute perméabilité (10000, voire plus).

Par rapport aux ferrites du type NiZn, eux, sont caractérisés par des résistivités qui atteignent 106  $\Omega\text{m}$ . C'est la raison pour laquelle ils sont adaptés à des fonctionnements à fréquences élevées, de 1 MHz à 500 MHz. Cependant, leur induction maximum est limitée à 0,45 T et leur perméabilité initiale ne varie qu'entre 1000 et 10. Leurs applications principales en bande HF, VHF et UHF concernent les transformateurs de puissance large bande, les coupleurs et les inductances de choc pour les applications fort niveau. Dans les domaines bas niveau, on les exploite pour réaliser des inductances à fort coefficient de surtension pour le filtrage et les barreaux d'antennes . Dans tous les cas ils sont destinés à accroître la compacité des appareils en diminuant les volumes des composants inductifs [Lebourgeois-97].

### III. LA PERMEABILITE COMPLEXE

Dans l'hypothèse d'un comportement linéaire, le principal inconvénient lié à l'utilisation du couple de valeurs réelles ( $\rho$ ,  $\mu$ ) pour caractériser un matériau magnétique conducteur, vient du fait que les propriétés hystérétiques du matériau ne sont pas prises en compte. En régime sinusoïdal, l'utilisation d'une perméabilité complexe introduit un déphasage entre l'excitation

$\vec{H}$  et l'induction  $\vec{B}$ . Dans ces conditions, le cycle  $\vec{B}(\vec{H})$  est elliptique. Sa surface non nulle permet de rendre compte des pertes, tout en conservant l'hypothèse de linéarité. Cette approche n'interdit pas la prise en compte d'une résistivité, si bien que les pertes par hystérésis et par courants de Foucault, peuvent être étudiées simultanément.

### III.1. Définition de la perméabilité complexe

Qu'il s'agisse d'effet microscopique où d'effet macroscopique, le régime magnétodynamique se caractérise par un déphasage temporel entre l'induction  $\vec{B}$  et le champ d'excitation  $\vec{H}$ . Une façon d'introduire ce déphasage en régime harmonique est de lier ces grandeurs par une perméabilité complexe.

En utilisant la notation complexe, l'excitation et l'induction s'écrivent respectivement :

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{j\omega t} \quad (1.1)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{j(\omega t - \varphi)} \quad (1.2)$$

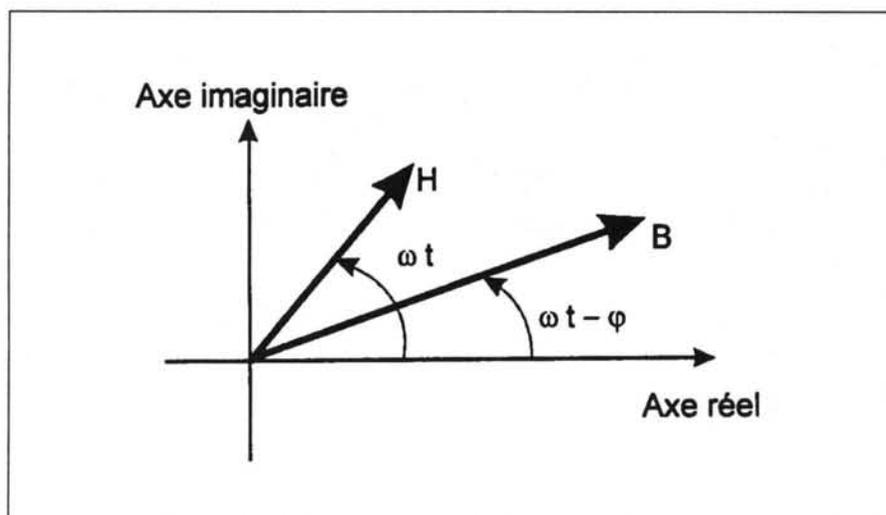


Fig. 1.4 : Déphasage entre  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$

La perméabilité complexe est définie par :

$$\vec{B} = \vec{\mu} \vec{H} \quad (1.3)$$

Elle peut s'écrire sous forme d'un module et d'une phase

$$\vec{\mu} = \mu e^{-j\varphi} \quad (1.4)$$

ou sous forme d'une partie réelle et d'une partie imaginaire:

$$\bar{\mu} = \mu_0 (\mu' - j\mu'') \quad (1.5)$$

Ainsi, la perméabilité d'un matériau homogène et isotrope est un nombre complexe  $\mu$  qui peut varier avec la fréquence. Bien entendu, cette grandeur peut également dépendre des paramètres qui déterminent l'état physique du matériau (température, pression,...).

Pour caractériser le fonctionnement linéaire d'un matériau magnétique doux, les fournisseurs de ferrites donnent les deux composantes  $\mu'$  et  $\mu''$  de sa perméabilité relative à la fréquence de travail.

La perméabilité complexe est largement utilisée pour caractériser expérimentalement le comportement des matériaux en fréquence. Les deux composantes de la perméabilité sont tracées en fonction de la fréquence.

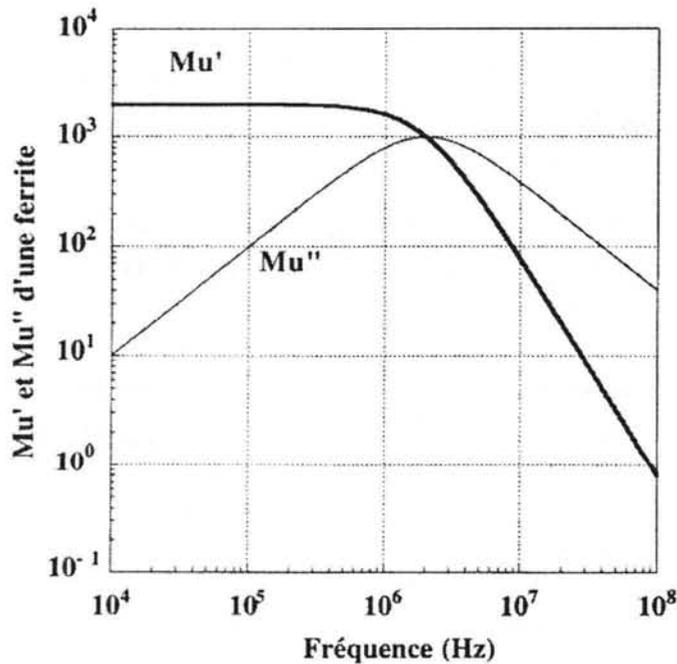


Fig. 1.5 : Perméabilité magnétique en fonction de la fréquence

Ce type de courbe est une donnée standard dans le cas des ferrites doux : l'augmentation de la partie imaginaire est l'image de l'augmentation des courants induits qui diminuent la section efficace du matériau. La chute de la partie réelle donne la limite d'utilisation en fréquence du matériau.

Utiliser une perméabilité complexe pour représenter le comportement magnétique d'un

matériau suppose l'acceptation d'une loi approchée pour décrire le comportement de ce matériau.

Cette loi était une dépendance linéaire, cela implique une simplification considérable de la forme du cycle d'hystérésis, qui se justifie aux bas champs, mais s'éloigne rapidement de la réalité dès que l'on sort de la zone de linéarité du matériau.

C'est donc par cette ellipse (Fig. 1.6) que nous allons approcher le cycle d'hystérésis réel. Selon les matériaux et les situations étudiées, cette approximation peut s'avérer suffisante ou au contraire, trop grossière. Cependant, un point demeure certain : la perméabilité complexe est la manière la plus simple de tenir compte des pertes magnétiques, et aussi, la plus économique en calcul.

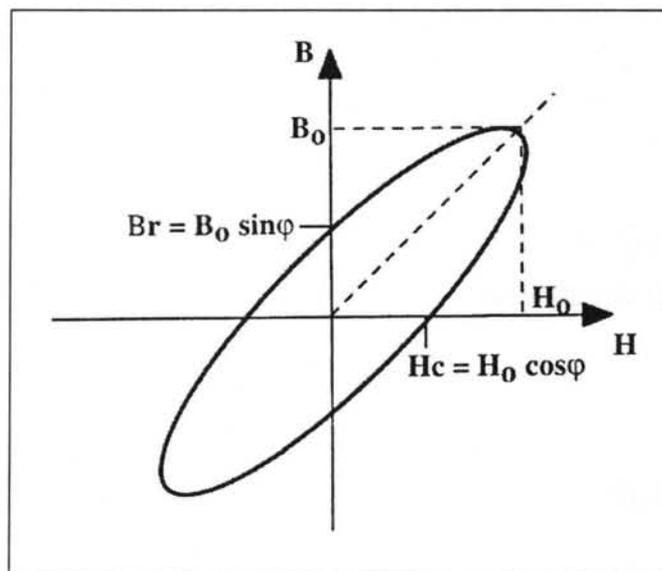


Fig. 1.6 Cycle d'hystérésis lié à la perméabilité complexe

Notons enfin que la perméabilité complexe n'a de sens que dans un milieu continu isotrope et homogène. Les équations de Maxwell appliquées à l'optique exploitent de telles grandeurs [Keradec-94/2], mais elles cessent d'être applicables dès que les longueurs d'ondes impliquées sont du même ordre que la taille des inhomogénéités (rayons X). Il faut donc s'attendre à des limitations semblables lors de l'emploi de la perméabilité complexe.

L'ensemble du raisonnement conduit ici avec la perméabilité complexe s'applique également à la permittivité. Avec les mêmes hypothèses concernant la linéarité, la permittivité complexe  $\bar{\epsilon}$ , peut être définie par :

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_0 (\epsilon' - j\epsilon'') \quad (1.6)$$

et elle permet une modélisation des pertes diélectriques. La valeur de  $\varepsilon'$  correspond à la permittivité réelle et  $\varepsilon''$  est associé aux pertes diélectriques. L'angle de perte  $\delta$  est défini par:

$$\tan \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \quad (1.7)$$

### III.2. Pertes dans les matériaux magnétiques

En régime dynamique, la puissance traversant une surface fermée  $S$  est égale au flux de vecteur Poynting  $\vec{S}_p$  à travers cette surface, soit:

$$P = -\oint_S \vec{S}_p \cdot d\vec{S} = - \int_V \text{div} \vec{S}_p \, dV \quad (1.9)$$

En régime sinusoïdal on obtient la représentation de  $\vec{S}_p$  sur une période en partant des composantes complexes des champs :

$$\vec{S}_p = \vec{E} \times \vec{H}^*$$

où \* = complexe conjugué

En développant la divergence de  $\vec{S}_p$ , on obtient:

$$\text{div} \vec{S}_p = \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \vec{H}^* \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H}^* \quad (1.10)$$

Le modèle mathématique régissant le comportement électromagnétique du matériau en régime harmonique est issu des équations de Maxwell, auxquelles sont associées les lois de comportement du milieu supposé linéaire, homogène et isotrope. Ces équations se résument ainsi :

$$\text{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{\mu} \vec{H} \quad (1.11)$$

et

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} = \frac{\vec{E}}{\rho} + j\omega \vec{D} = j\omega \vec{\epsilon} \vec{E} \quad (1.12)$$

$$\text{et la loi constitutive du matériau: } \vec{B} = \bar{\mu} \vec{H} \quad (1.13)$$

On peut maintenant lier la divergence de  $\vec{S}_p$  aux grandeurs caractéristiques du matériau :  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{S}_p &= \vec{H}^* \cdot (-j\omega \bar{\mu} \vec{H}) - \vec{E} \cdot (j\omega \bar{\varepsilon} \vec{E})^* \\ &= -j\omega \left( \bar{\mu} |\vec{H}|^2 - \bar{\varepsilon}^* |\vec{E}|^2 \right) \end{aligned}$$

En remplaçant alors  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\varepsilon}$  par leurs expressions complexes :

$$\text{div} \vec{S}_p = -\omega (\mu'' |\vec{H}|^2 + \varepsilon'' |\vec{E}|^2) - j\omega (\mu' |\vec{H}|^2 - \varepsilon' |\vec{E}|^2) \quad (1.14)$$

La puissance complexe fournie au système s'exprime alors comme suit :

$$P = - \int \text{div} \vec{S}_p \, dV = \omega \int (\mu'' |\vec{H}|^2 + \varepsilon'' |\vec{E}|^2) \, dV + j\omega \int (\mu' |\vec{H}|^2 - \varepsilon' |\vec{E}|^2) \, dV \quad (1.15)$$

La partie réelle de cette puissance (puissance active) est la partie dissipée, alors que la partie imaginaire (puissance réactive) est une partie échangée alternativement et temporairement stockée par le système sous forme d'énergie interne.

$$P_a = (\text{Re}) P = \omega \int (\mu'' |\vec{H}|^2 + \varepsilon'' |\vec{E}|^2) \, dV$$

$$P_r = (\text{Im}) P = \omega \int (\mu' |\vec{H}|^2 - \varepsilon' |\vec{E}|^2) \, dV$$

#### IV. LIMITES DES METHODES DE CARACTERISATION CLASSIQUES

Plusieurs observations expérimentales [Blache-95/2], suggèrent que les méthodes de caractérisation utilisées actuellement par les fournisseurs de ferrites sont insuffisantes pour représenter correctement et complètement le comportement du matériau, particulièrement au-delà de quelques dizaines de kHz.

Dès que l'on admet l'existence de courants de conduction et /ou de déplacement dans un matériau, les méthodes habituelles de caractérisation, basées sur la magnétostatique [Goldfarb-87, Thottuvelil-90, Gradzki-91, Peuzin-96], peuvent être remises en cause. Si des effets de peau interviennent, les mesures traditionnelles ne donnent plus, pour la valeur de l'induction  $\vec{B}$  (et donc pour celle de la perméabilité  $\mu$ ), qu'une moyenne spatiale et la relation  $\phi = B \cdot S$ , exploitée durant les caractérisations courantes, n'est plus valable.

Cette remarque, déjà applicable à un matériau conducteur lorsque les effets de peau interviennent, est plus pertinente encore dans le cas des ferrites car la permittivité élevée facilite la circulation du courant de déplacement.

Une étude critique des méthodes de caractérisation des matériaux magnétiques utilisées par les constructeurs a été menée au Laboratoire au cours de précédents travaux relatifs à des fontes [Blache-95/2]. Il a été montré que la connaissance du couple réel ( $\mu, \rho$ ), souvent le seul pris en compte au cours de la modélisation, est insuffisante pour traduire correctement le comportement d'un matériau magnétique conducteur. Il est apparu, en outre, que la caractérisation standard devenait fautive à partir de fréquences parfois très basses, pour lesquelles l'épaisseur de peau devenait plus petite que les dimensions transversales du circuit.

La ventilation des pertes qui en était déduite, hystérésis et courants de Foucault, reposait plus sur un à priori théorique que sur une évidence expérimentale. Il faut donc tenir compte à la fois d'une perméabilité complexe  $\bar{\mu}$  et d'une résistivité  $\rho$ , ainsi que de la variation de ces paramètres avec la fréquence. L'introduction de la perméabilité complexe permet, en régime linéaire, d'approcher le cycle d'hystérésis réel par une ellipse de même surface (Fig.1.2).

La même critique s'applique à la caractérisation des ferrites haute fréquence. Ces derniers ne sont caractérisés, que par leur perméabilité complexe et, éventuellement, leur résistivité en continu (Fig.1.3). Ces caractérisations basées sur l'hypothèse magnétostatique ( $\phi = \vec{B} \cdot S$ ), ne prennent pas en compte le creusement de l'induction, résultant des courants qui circulent en haute fréquence. Les paramètres  $\mu's$  et  $\mu"s$  (avec "s" comme "statique") ne sont donc pas des paramètres purement magnétiques, puisqu'ils incluent cet effet.

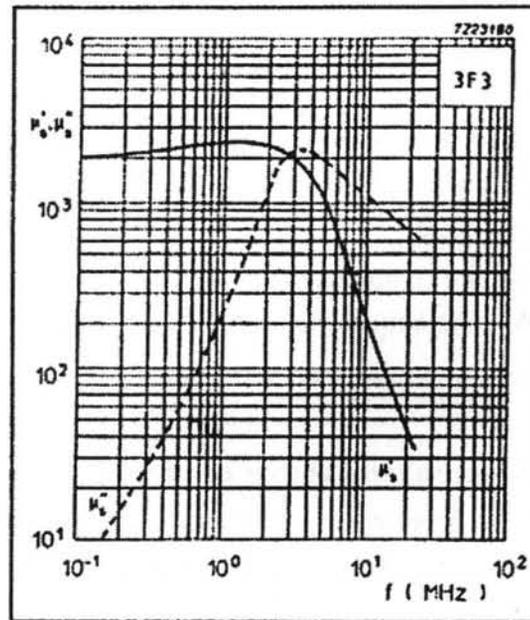


Fig. 1.3 : Perméabilité complexe du 3F3 (Philips) (avec  $\rho_{Dc} = 1 \text{ ohm m}$ )

On a coutume d'admettre que le ferrite est un isolant électrique, si bien que la plupart du temps on ne parle que de ses propriétés magnétiques. Une telle description s'avère pourtant insuffisante pour expliquer certains phénomènes constatés en pratique. Par exemple, le noyau ferrite de certains transformateurs très haute tension (plusieurs kV) est souvent relié à la masse par les fabricants de matériel dans le but d'assurer la sécurité des personnes (un courant peut circuler à travers le noyau !). Pour réaliser un transformateur d'intensité haute fréquence, il faut veiller à ne pas plaquer les spires sur le noyau ferrite car des courants capacitifs peuvent alors circuler entre les spires et le noyau, qui se comporte comme un matériau conducteur. Ceci amène un effet de shunt capacitif de l'enroulement et un abaissement de la fréquence de coupure haute du transformateur. Donc, on peut penser à un phénomène de conduction des ferrites [Fouassier-98].

## V. CONCLUSION

La connaissance du comportement des ferrites utilisées dans les composants haute fréquence a progressé nettement grâce à une nouvelle approche des méthodes de caractérisation des matériaux magnétiques.

L'introduction d'une permittivité complexe est indispensable pour bien représenter le comportement des matériaux magnétiques. Le couple  $(\bar{\mu}, \bar{\epsilon})$ , permet de calculer, de façon bien plus réaliste, les pertes en haute fréquence.

Contrairement aux méthodes normalisées encore en vigueur, la méthode proposée dans le chapitre III est basée sur la mesure de deux impédances (électrique et magnétique) complémentaires. Elle permet d'accéder, à toute fréquence, aux données perméabilité et permittivité complexes en utilisant que des relations analytiques simples.

## Chapitre II

### L'analyse du Champ Magnétique



## I. INTRODUCTION

Dans l'étude des champs électromagnétiques, plusieurs modèles mathématiques et numériques sont destinés à déterminer leurs répartitions dans les dispositifs électrotechniques. En partant des équations de Maxwell, différents modèles, statiques ou dynamiques 2D ou 3D, généralement simplifiés par quelques hypothèses, sont adaptés aux méthodes numériques.

Très vite la modélisation des systèmes électrotechniques a fait apparaître la nécessité de coupler les équations magnétiques avec les équations de circuits électriques. Durant ces dix dernières années, de nombreuses recherches ont été menées dans ce sens. La plupart d'entre elles concernent des dispositifs comprenant des inducteurs massifs ou bobinés, reliés à des circuits comportant des composants commandés (transistors, thyristors) ou non-linéaires (diodes) et dont l'évolution au cours du temps est recherchée.

La première partie de ce chapitre résume les équations de Maxwell et leurs relations constitutives. La deuxième partie présente les modèles électromagnétiques statiques et dynamiques, avec ses formulations correspondantes. Ensuite, dans la troisième partie du chapitre, la méthode de couplage avec les équations de circuit électrique est exposée. Les méthodes de couplage et d'analyse de circuit sont choisies.

Finalement, la dernière partie présente quelques aspects pratiques de la réalisation du couplage « équations de circuit - équations électromagnétiques », dans le cas d'un inducteur massif.

## II. LES EQUATIONS DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Les équations de Maxwell constituent un système d'équations aux dérivées partielles que régissent les phénomènes électromagnétiques classiques. Le champ électrique  $\vec{E}$ , l'induction électrique  $\vec{D}$ , l'induction magnétique  $\vec{B}$  et le champ magnétique  $\vec{H}$ , caractérisent le champ électromagnétique [Bastos-89]:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{div}\vec{D} = \rho \quad (2.4)$$

$\vec{J}$  est la densité de courant de conduction et  $\rho$ , la densité de volume de la charge électrique.

L'équation (2.1) est la généralisation de la loi d'Ampère et l'équation (2.2) est appelée la loi de Faraday. Elles constituent les équations dites d'évolution, alors que les équations (2.3) et (2.4) constituent celles dites de conservation [Bastos-89].

Les équations (2.1-2.4) ne sont pas suffisantes pour déterminer le champ électromagnétique et il convient d'ajouter les lois de comportement établissant des relations de dépendance entre les couples  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$ ,  $\vec{J}$  et  $\vec{E}$ ; ces relations expriment les propriétés de matériaux. Il s'agit de:

$$\vec{J} = \|\sigma\| \vec{E} \quad (2.5)$$

$$\vec{D} = \|\varepsilon\| \vec{E} \quad (2.6)$$

$$\vec{B} = \|\mu\| \vec{H} \quad (2.7)$$

où  $\|\varepsilon\|$  est le tenseur de la permittivité électrique,  $\|\mu\|$  le tenseur de la perméabilité magnétique et  $\|\sigma\|$  le tenseur de la conductivité électrique.

Dans les cas les plus simples, les coefficients  $\varepsilon$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  sont des constantes scalaires. Plus généralement, ils dépendent de la position du point considéré (pour un matériau linéaire isotrope), d'une anisotropie du matériau (cas dans lequel les coefficients deviennent alors des tenseurs associés à des formes bilinéaires positives) et souvent de l'intensité du champ local, par exemple,  $\mu = \mu(\vec{H})$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(\vec{E})$  et  $\sigma = \sigma(\vec{E})$ .

Un cas particulier est celui constitué par les aimants permanents, qui sont caractérisés par l'induction rémanente. Lorsque le champ magnétique appliqué à un tel matériau s'annule, il subsiste une induction dite rémanente, notée  $\vec{B}_r$ . Pour ce type de matériau, la relation (2.7) est exprimé par:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r \quad (2.8)$$

Dans l'interface entre les matériaux avec propriétés constitutives différents, lors du passage d'un milieu à un autre, les grandeurs subissent des discontinuités et les conditions suivantes sur les vecteurs du champ électromagnétique sont vérifiées :

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \vec{n} = \vec{J}_s \quad (2.9)$$

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n} = 0 \quad (2.10)$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.11)$$

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \rho \quad (2.12)$$

ou  $\vec{B}_1, \vec{H}_1, \vec{E}_1, \vec{D}_1$  et  $\vec{B}_2, \vec{H}_2, \vec{E}_2, \vec{D}_2$  sont les grandeurs physiques de part et l'autre de l'interface,  $\rho$  est une densité surfacique de charge sur l'interface,  $\vec{J}_s$  est une densité de courant surfacique et  $\vec{n}$  la normale associée à l'interface.

Les équations expriment que les composantes tangentielles du champ électrique et celle normale de l'induction magnétique sont continues, et que les composantes tangentielles du champ magnétique et normale de l'induction électrique sont discontinues par la présence respectives d'un courant surfacique et des charges électriques.

### III. LES MODELES DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

A partir d'ici quelques simplifications doivent être prises en compte avant de présenter les modèles électromagnétiques. Par la suite, on considère les modèles en régime dynamique et les milieux homogènes, isotropes et linéaires. La perméabilité et la permittivité des matériaux magnétiques seront considérées complexes ( $\vec{\mu}, \vec{\epsilon}$ ) et suivent les relations (1.5) et (1.6) conformément à ce qui a été montré dans le chapitre précédent.

Nous ne pouvons pas résoudre directement les équations précédentes (2.1 – 2.8). D'une part nous souhaitons réduire le nombre d'inconnues, d'autre part certaines des composantes des grandeurs physiques sont fortement discontinues aux frontières entre les matériaux de propriétés différentes. Dans le contexte des éléments finis nodaux nous utilisons le plus souvent des potentiels de différents types, continus, à partir desquels la valeur du champ peut être dérivée. En fonction de la signification physique des potentiels nous distinguons deux groupes de formulations: les formulations à potentiels du type électrique et les formulations à potentiels du type magnétique. Les potentiels du type électrique sont le potentiel scalaire électrique et le potentiel vecteur magnétique. Le potentiel scalaire magnétique et le potentiel vecteur électrique sont du type magnétique.

### **III.1. Les modèles dynamiques généraux 3D**

Le traitement des régimes variables dans le temps doit se faire, dans le cas général, en utilisant une méthode "pas à pas" dans le temps. Dans le cadre de la méthode des éléments finis, cela se traduit par un grand nombre de résolutions (une à chaque pas de temps) et donc par un temps de résolution généralement très long. Pour cette raison, il est intéressant de considérer le cas particulier du régime permanent sinusoïdal lorsque les sources d'excitation sont elles-mêmes sinusoïdales et que les matériaux ont un comportement linéaire.

En effet, dans ce cas, la solution pourra être obtenue par une seule résolution en utilisant la notation complexe [Meunier-92].

Lorsque les alimentations sont sinusoïdales et les matériaux linéaires, le formalisme complexe consiste à considérer toute grandeur, en fonction du temps, comme étant la partie réelle d'une grandeur complexe.

Si la grandeur est de la forme:

$$A(x, t) = Am(x) \cos[\omega t + \varphi(x)] \quad (2.13)$$

avec  $Am$  l'amplitude,  $\varphi(x)$  la phase et  $\omega$  la pulsation d'alimentation,

on lui associe une grandeur complexe, appelée phaseur, d'expression:

$$A = Am(x) e^{j\varphi(x)} \quad (2.14)$$

La grandeur physique peut être retrouvée en prenant la partie réelle de (2.14).

Le régime sinusoïdal établi, peut être déterminé en résolvant le système complexe résultant de la substitution des grandeurs en fonction de temps par les phaseurs associés. Conformément à la relation de définition, l'opérateur de dérivée temporelle  $\frac{\partial}{\partial t}$  se transforme en un facteur  $j\omega$ , où  $j$  représente l'unité imaginaire.

### III.1.1. Modèle électrodynamique

Le modèle présenté a comme objectif de modéliser un dispositif qui prend en considération deux phénomènes physiques: les courants de conduction et les courants de déplacement. La similitude des deux grandeurs a été trouvée par Maxwell en supposant qu'elles sont toutes les deux sources d'un champ magnétique  $\vec{H}$  et donc, dans un régime sinusoïdal, s'écrit :

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{J} + j\omega\vec{D} \quad (2.15)$$

où  $\vec{J}$  est la densité de courant de conduction et  $\vec{D}$  l'induction ou le déplacement électrique. A partir de (2.1), une densité de courant total  $\vec{J}_T$  peut être dérivée telle que :

$$\vec{J}_T = \vec{J} + \vec{J}_D \quad (2.16)$$

La densité de courant de déplacement  $\vec{J}_D$  fait intervenir un aspect temporel dans la modélisation puisque :

$$\vec{J}_D = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = j\omega\vec{D} \quad (2.17)$$

Dans le cas d'une étude en régime harmonique, il est possible de tenir compte de la variation de la permittivité complexe donné par la relation (1.6) en fonction de la fréquence. Un tel changement de domaine n'est cependant possible que si la linéarité du problème physique est assurée.

Si le modèle électrodynamique est placé dans un domaine fréquentiel, la densité de courant total complexe  $\vec{J}_T$  est définie par :

$$\vec{J}_T = \sigma\vec{E} + j\omega\vec{D} = j\omega\bar{\epsilon}\vec{E} \quad (2.18)$$

La partie imaginaire de la permittivité peut être interprétée comme une conductivité dépendante de la pulsation ( $\sigma = \omega\epsilon_0\epsilon''$  et  $\epsilon = \epsilon_0\epsilon'$ ) et finalement :

$$\vec{J}_T = (\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E} \quad (2.19)$$

Grâce à ces restrictions fréquentielles et que  $\text{rot}\vec{E} = 0$ , on peut alors supposer que le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire électrique  $V$ :

$$\vec{E} = -\text{grad}V \quad (2.21)$$

Puis, en considérant la divergence de (2.15)

$$\text{div}(\text{rot}\vec{H}) = \text{div}J_T = \text{div}((\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E}) = 0 \quad (2.22)$$

on obtient avec (2.21) l'équation à résoudre pour le modèle électrodynamique :

$$\text{div}((\sigma + j\omega\epsilon)\text{grad}V) = 0 \quad (2.23)$$

Cette équation présente une conductivité complexe qui dépend de la pulsation. Cependant, elle est valable dans le milieu conducteur et dans le milieu diélectrique.

### III.1.2. Modèle magnétodynamique

La magnétodynamique consiste en une étude des phénomènes électromagnétiques couplés, en régime dynamique. Typiquement, un problème magnétodynamique est décrit par des inducteurs (dans lesquels circulent des courants variables en fonction du temps et dans lesquels aucun courant de Foucault n'est supposé se développer), ainsi que par des régions composées des matériaux magnétiques saturables ou non-saturables, des conducteurs où peuvent circuler de courants induits et enfin par une boîte d'air englobante.

Pour une modélisation de tous les phénomènes électriques et magnétiques à basse et à haute fréquence, un modèle intégrant toutes les équations de Maxwell est indispensable. Dans le cas de l'étude des composants en fréquence élevée, une seule simplification est adoptée. Elle concerne la variation temporaire des grandeurs qui est supposée sinusoïdale. Cela permet de mener une étude harmonique [Morweiser-92].

Dans le cadre de ce modèle magnétodynamique, quelques formulations ont été développées et ont été utiles dans différents domaines de la modélisation. Une des formulations les plus générales est celle du type électrique, comme la formulation A-V qui repose sur le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  et le potentiel scalaire électrique  $V$ . Elle permet en particulier un couplage aisé entre le domaine d'étude traité par la méthode numérique et les circuits

d'alimentations. En réalité elle ne pose pas de problème de connexité comme les formulations du type magnétique (Ex : formulation  $\vec{T} \Phi$ ). Cependant ces dernières connaissent désormais un fort développement en raison de leur caractère économique et des résultats qu'elles engendrent.

### III.1.2.1. Les potentiels du type électrique

La relation  $\text{div } \vec{B} = 0$  est vérifiée lorsque nous dérivons la densité du flux magnétique d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$  tel que :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (2.24)$$

quel que soit le champ vectoriel  $\vec{A}$ , car  $\text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0, \forall \vec{A}$ .

Le potentiel vecteur est défini au gradient d'une fonction scalaire  $f$  près. Si  $\vec{A}$  est tel que

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}(f) \quad (2.25)$$

$\vec{A}'$  est aussi solution, car  $\text{rot}(\text{grad } f) = 0, \forall f$ . Afin d'assurer l'unicité de la solution en potentiel, il faut donc imposer une contrainte supplémentaire, une condition de jauge. Les deux jauges les plus utilisées sont les jauges de Coulomb [3-4] ( $\text{div } \vec{A} = 0$ ) et de Lorentz [3-5] ( $\text{div } \vec{A} = -\sigma\mu V$ ).

#### Formulation pour les régions non conductrices :

Dans un matériau non conducteur électrique ( $\sigma = 0$ ), la relation  $\text{rot } \vec{H} = 0$  s'écrit en termes du potentiel :

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\bar{\mu}} \text{rot } \vec{A} \right) = 0 \quad (2.26)$$

où  $\bar{\mu}$  est la perméabilité complexe donné par la relation (1.5).

La composante normale de l'induction magnétique est continue aux interfaces, lorsque les composantes tangentielles du potentiel vecteur sont identiques. A l'interface où la perméabilité passe de  $\bar{\mu}_1$  à  $\bar{\mu}_2$ , la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique doit être assurée, soit en terme du potentiel :

$$\left(\frac{1}{\mu_1} \text{rot} \vec{A}\right) \times n = \left(\frac{1}{\mu_2} \text{rot} \vec{A}\right) \times n \quad (2.27)$$

où  $n$  est un vecteur normal à l'interface.

A cette équation, nous ajoutons la jauge de Coulomb sous forme d'un terme de pénalité :

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) + \text{grad} (v_p \text{div} \vec{A}) = 0 \quad (2.28)$$

où  $v_p$  est le terme de pénalité donné par  $\frac{1}{\mu}$

Cette équation admet une solution unique, à condition d'imposer de conditions aux limites adéquates.

#### Formulation pour les régions conductrices :

Les champs électriques et magnétiques sont couplés mutuellement par l'équation :

$$\text{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (2.29)$$

Il est cependant possible d'introduire un potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  tel que :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (2.30)$$

En remplaçant (2.30) dans (2.29) on obtient l'expression du champ électrique  $\vec{E}$  :

$$\vec{E} + j\omega \vec{A} = -\text{grad} V \quad (2.31)$$

En conservant la notion de densité totale de courant telle qu'elle est définie pour le modèle électrodynamique, on s'aperçoit que cette densité de courant a deux contributions de différentes natures. Elle est donnée par :

$$\vec{J}_T = (\sigma + j\omega \varepsilon) \vec{E} = -(\sigma + j\omega \varepsilon) (\text{grad} V + j\omega \vec{A})$$

Une partie vient d'un gradient du potentiel électrique et une autre de la présence d'un champ magnétique variable.

Puisque le potentiel vecteur magnétique et le potentiel scalaire électrique sont couplés (formulation  $\vec{A} - V$ ), ils doivent être calculés dans un seul système d'équations à dérivées partielles. Ce système dérive donc, des équations (2.15) et (2.29). On obtient finalement :

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot}\vec{A}\right) + (\sigma + j\omega \varepsilon)(\text{grad}V + j\omega \vec{A}) = 0 \quad (2.32)$$

$$\text{div}\left(-(\sigma + j\omega \varepsilon)(\text{grad}V + j\omega \vec{A})\right) = 0 \quad (2.33)$$

Pour assurer l'unicité du potentiel vecteur  $\vec{A}$  la jauge de Coulomb [Morwaiser-97] ( $\text{div}\vec{A} = 0$ ) est intégrée ce qui modifie (2.32) en :

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot}\vec{A}\right) + \text{grad}\left(\nu_p \text{div}\vec{A}\right) + (\sigma + j\omega \varepsilon)(\text{grad}V + j\omega \vec{A}) = 0 \quad (2.34)$$

Outre ce système d'équations, les champs électriques et magnétiques doivent aussi remplir les conditions d'interface respectives entre deux matériaux de différentes propriétés électriques et magnétiques.

### III.1.2.2. Les potentiels du type magnétique

#### Formulation dans les régions non conductrices :

Dans les régions non conductrices la densité du courant est nulle. Le rotationnel du champ magnétique est nul lorsqu'il est dérivé d'un potentiel  $\Phi$  tel que :

$$\vec{H} = -\text{grad}\Phi \quad (2.35)$$

L'équation à résoudre assure que  $\text{div}\vec{B} = 0$  :

$$\text{div}(-\mu \text{grad}\Phi) = 0 \quad (2.36)$$

#### Formulation pour les matériaux conducteurs :

Dans les régions conductrices il faut résoudre simultanément les problèmes du champ magnétique et du champ électrocinétique. Un champ de densité de courant sans divergence peut être dérivé d'un potentiel vecteur électrique  $\vec{T}$  tel que [3-10] :

$$\vec{J} = \text{rot} \vec{T} \quad (2.37)$$

Considérer  $\vec{T}$  comme variable d'état permet de calculer le courant dans un conducteur placé dans un champ magnétique. La relation entre le champ électrique et l'induction magnétique est établie par :

$$\text{rot} \left( \left( \frac{1}{\sigma + j\omega \varepsilon} \right) \text{rot} \vec{T} \right) = -j\omega \vec{B} \quad (2.38)$$

La relation  $\text{rot} \vec{H} = \vec{J}$  montre que le potentiel vecteur électrique et le champ magnétique sont identiques à un gradient près. En posant le gradient du potentiel scalaire magnétique nous avons:

$$\vec{H} = \vec{T} - \text{grad} \Phi \quad (2.39)$$

La loi de Faraday (2.2) donne l'équation à résoudre:

$$\text{rot} \left( \left( \frac{1}{\sigma + j\omega \varepsilon} \right) \text{rot} \vec{T} \right) + j\omega \bar{\mu} \vec{T} - j\omega \bar{\mu} \text{grad} \Phi = 0 \quad (2.40)$$

Pour déterminer les potentiels  $\vec{T}$  et  $\Phi$ , la deuxième équation à résoudre est obtenue à partir de l'équation de conservation,  $\text{div} \vec{B} = 0$  :

$$\text{div} (\bar{\mu} \vec{T} - \bar{\mu} \text{grad} \Phi) = 0 \quad (2.41)$$

De plus, il est nécessaire d'associer à ces équations des conditions aux limites appropriées et d'assurer les conditions de passage entre deux milieux de propriétés différentes. Si les potentiels  $\vec{T}$  et  $\Phi$  sont continus, les continuités de la composante normale de la densité du courant et de la composante tangentielle du champ magnétique, sont immédiates. Par contre, il faut assurer les continuités des composantes tangentielle et normale respectivement du champ électrique et de l'induction magnétique

$$\left( \left( \frac{1}{\sigma_1 + j\omega \varepsilon_1} \right) \text{rot} \vec{T}_1 \right) - \left( \left( \frac{1}{\sigma_2 + j\omega \varepsilon_2} \right) \text{rot} \vec{T}_2 \right) \times \vec{n} = 0 \quad (2.42)$$

$$(\bar{\mu}_1 (\vec{T}_1 - \text{grad} \Phi_1)) - (\bar{\mu}_2 (\vec{T}_2 - \text{grad} \Phi_2)) \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.43)$$

ainsi que la condition  $\vec{J} \cdot \vec{n} = 0$  à la surface d'une région conductrice en contact avec une région isolante, qui peut être assurée par:

$$\vec{T} \times \vec{n} = 0 \quad (2.44)$$

Pour rendre le couple de solution  $(\vec{T} - \Phi)$  unique, il faut fixer la divergence du potentiel  $\vec{T}$ . L'équivalent de la jauge de Coulomb ( $\text{div} \vec{T} = 0$ ) est introduit de la même façon que pour la formulation  $(\vec{A} - V)$  en ajoutant à l'équation (2.40) le terme de pénalité  $-\text{grad} \left[ \left( \frac{1}{\sigma_p} \right) \text{div} \vec{T} \right]$ , où  $\sigma_p$  est la conductivité de pénalité. Le système final à résoudre (formulation  $\vec{T} - \Phi$ ) s'écrit:

$$\text{rot} \left( \left( \frac{1}{\sigma + j\omega \varepsilon} \right) \text{rot} \vec{T} \right) - \text{grad} \left( \left( \frac{1}{\sigma_p} \right) \text{div} \vec{T} \right) + j\omega \bar{\mu} \vec{T} - j\omega \bar{\mu} \text{grad} \Phi = 0 \quad (2.45)$$

$$\text{div} (\bar{\mu} \vec{T} - \bar{\mu} \text{grad} \Phi) = 0 \quad (2.46)$$

### III.2 Les problèmes bidimensionnels

Dans ces types de problèmes, nous nous plaçons dans une hypothèse bidimensionnelle, c'est à dire dans un des deux cas suivants:

- Le cas d'un problème infiniment long suivant une direction (z) et où la densité de courant  $\vec{J}_T$  et donc le champ électrique  $\vec{E}$  n'ont qu'une composante suivant cette direction. Le champ magnétique lui n'a que deux composantes suivant (x) et (y), dans un plan perpendiculaire à  $\vec{J}_T$ .

Avec ces hypothèses le potentiel vecteur  $\vec{A}$  n'a qu'une composante suivant (z). Nous appelons ce cas 2D cartésien. La longueur du domaine d'étude est notée L.

- Le cas d'un problème à symétrie de révolution (r,θ,z) où la densité de courant  $\vec{J}_T$  et le champ électrique  $\vec{E}$  n'ont qu'une composante suivant θ. Le champ magnétique n'a que deux composantes suivant (r) et (z).  $\vec{A}$  n'a alors qu'une composante suivant θ. C'est le cas axisymétrique qui est traité dans un plan (r-z).

#### **III.2.1. Trois types de régions**

La densité de courant  $J_T$  va s'exprimer ou se calculer de manière différente suivant la région physique. Aussi en 2D nous pouvons considérer trois types de région :

a - des régions isolantes ( $\sigma = 0$ ). Dans ce cas aussi l'équation (2.26) est valable

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) = 0 \quad (2.47)$$

b- des régions conductrices bobinées. Dans ce cas, la densité de courant peut être considérée comme une donnée du problème car sa répartition dans l'espace ne dépend que du mode de bobinage et des courants  $I$  traversant les brins conducteurs de chaque bobine. Par conséquent si ces courants sont fournis, la densité de courant  $\vec{J}_T$  peut être connue en tout point de l'espace et le champ magnétique peut être déterminé en résolvant l'équation:

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) = \vec{J}_T \quad (2.48)$$

Notons que la conductivité n'intervient pas dans cette équation et que nous sommes dans un cas analogue au cas magnétostatique (les courants de Foucault ne sont pas pris en compte). Bien entendu, si les bobines sont alimentés en tension, il faut résoudre des équations supplémentaires qui couplent les champs électriques et magnétiques.

Dans l'hypothèse bidimensionnelle, chaque région conductrice bobinée est parcourue par un courant  $I_k$  perpendiculaire au plan d'étude et dont la surface d'intersection avec ce plan est nommée  $S_k$ . La densité de courant peut alors s'exprimer sous la forme

$$J = \left( \frac{N_s}{S_k} \right) \cdot I_k \quad (2.49)$$

c- des régions conductrices massives. Dans ce cas la répartition de la densité de courant est non uniforme et déterminée par la prise en compte de l'équation  $\text{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{B}$ . En remarquant que  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$  et les équations (2.31) et (2.32) sont valides

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} - \text{grad}V$$

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) + (\sigma + j\omega \varepsilon) (\text{grad}V + j\omega \vec{A}) = 0 \quad (2.50)$$

Le terme  $(\sigma + j\omega\epsilon)(\text{grad}V + j\omega\vec{A})$  qui est homogène à un courant n'est pas connu à priori. Cependant dans le cas 2D cartésien  $\text{grad} V$  qui n'a qu'une composante suivant « z » est constant sur chaque région conductrice [Meunier-90]. Il faut noter que d'une région conductrice à l'autre la valeur de  $\text{grad} V$  est différente même si ces régions appartiennent au même circuit. Dans l'hypothèse axisymétrique c'est «  $r.\text{Grad}V$  » qui est constant sur une région.

L'étude des trois types de régions nous permet de dégager un certain nombre de conclusions importantes :

- La modélisation des régions conductrices bobinées (équation (2.48)) se fera naturellement si l'on impose, comme terme source, une densité de courant. L'alimentation en courant ne nécessite que la connaissance de la géométrie de la bobine et de la fonction de remplissage. Par contre si l'on désire une alimentation en tension il est nécessaire d'introduire une équation supplémentaire de couplage.

-La résolution de l'équation destinée aux régions conductrices massives (équation (2.50)) ne permet de traiter que les problèmes où l'on connaît la tension appliquée sur chaque région. L'introduction d'équations supplémentaires est nécessaire afin de permettre :

- une alimentation en courant

- l'alimentation d'une bobine massive en tension. En effet dans ce cas, chaque région (définissant une portion de la bobine) est soumise à une tension qui n'est pas connue à priori.

### Formulation magnétodynamique en Champ Magnétique ( $\vec{H}$ )

On présente ici, un cas particulier en 2D, de la formulation Champ Magnétique. Cette formulation a été adaptée pour traiter des problèmes bidimensionnels cartésiens et axisymétriques.

Puisque la perméabilité complexe et la permittivité complexe sont données par les relations suivantes (cf. Chapitre I):

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon} &= \epsilon' - j\epsilon'' \\ \bar{\mu} &= \mu' - j\mu''\end{aligned}$$

les équations (2.1), (2.5) et (2.7) s'écrivent:

$$\text{rot}\vec{H} = j\omega\vec{\epsilon}\vec{E} = (\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E}$$

$$\vec{B} = \vec{\mu}\vec{H}$$

$$\text{rot}\vec{E} = -j\omega\vec{\mu}\vec{H} \quad (2.51)$$

donc, le champ électrique  $\vec{E}$  peut être défini par

$$\vec{E} = \left( \frac{1}{\sigma + j\omega\epsilon} \right) \text{rot}\vec{H} \quad (2.52)$$

en remplaçant le champ électrique  $\vec{E}$  dans l'équation (2.51) par la relation (2.52), elle devient :

$$\text{rot} \left( \left( \frac{1}{\sigma + j\omega\epsilon} \right) \text{rot}\vec{H} \right) + j\omega\vec{\mu}\vec{H} = 0 \quad (2.53)$$

qui est l'équation à résoudre.

### III.2.2. Les problèmes axisymétriques

Pour les applications en électrotechnique, il y a plusieurs structures qui possèdent une symétrie de révolution, comme par exemple, les solénoïdes en général (les bobines, etc.).

Dans la plupart des problèmes traités, une approximation géométrique de la réalité tridimensionnelle par des modèles bidimensionnels est valable, par contre dans le cas du solénoïde, par exemple, elle ne correspond pas à la situation réelle. Ces types de problèmes sont en réalité tridimensionnels.

Mais s'il existe une symétrie axiale ou de révolution dans la structure, ce problème peut être étudié comme bidimensionnel par les modèles déjà montrés. Quelques adaptations dans les formulations numériques sont donc nécessaires.

Dans ces cas, appelés axisymétriques, les problèmes sont étudiés dans le plan de coupe  $\mathbf{P}$  ( $r-z$ ), montré par la figure II.1, en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

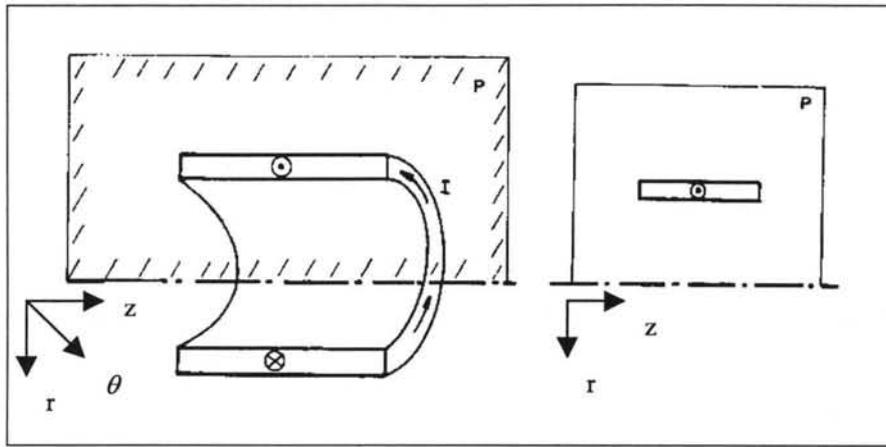


Fig.II.1 : Modèle axisymétrique

Les modèles et les formulations présentés peuvent être placés dans une hypothèse bidimensionnelle axisymétrique, où la densité de courant  $\vec{J}$  et le champ électrique  $\vec{E}$  n'ont qu'une composante suivant  $\theta$ . Le champ magnétique  $\vec{H}$  n'a que deux composantes suivant  $r$  et  $z$ . Le potentiel vecteur  $\vec{A}$ , n'a alors qu'une composante suivant  $\theta$ .

L'équation (2.15) peut s'écrire:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_T \quad (2.54)$$

avec

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A},$$

où dans un système de coordonnées cylindriques

$$\vec{B}_r = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \quad \text{et} \quad \vec{B}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \vec{A})$$

Où  $\vec{A}$  n'a qu'une composante dans la direction  $\theta$ , idem pour  $\vec{J}_T$ . Dans ces conditions, l'équation (2.54) peut être écrite :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \vec{B}_r \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu} \vec{B}_z \right) = \vec{J}_T$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \vec{A}) \right] = \vec{J}_T$$

et

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{A}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1/\bar{\mu} \bar{A}}{r} \right) = -\bar{J}_r \quad (2.55)$$

Les deux premiers termes de l'équation ci-dessus sont analogues aux termes trouvés pour l'équation (2.54) en coordonnées cartésiennes si  $r = y$  et  $z = x$ .

Pour éliminer le terme  $\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1/\bar{\mu} \bar{A}}{r} \right)$  dans l'équation (2.55), le potentiel vecteur  $\bar{A}$  est remplacé par  $\bar{A}^*$  tel que :

$$\bar{A}^* = r\bar{A}$$

L'équation (2.55) donc, assume la forme

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1/\bar{\mu}}{r} \frac{\partial \bar{A}^*}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1/\bar{\mu}}{r} \frac{\partial \bar{A}^*}{\partial r} - \bar{J}_r = 0 \quad (2.56)$$

A partir d'ici, le problème peut être résolu de façon similaire à celui traité en coordonnées cartésiennes 2D.

Les mêmes analogies peuvent être faites pour les autres formulations cartésiennes, comme par exemple la formulation champ magnétique ( $\vec{H}$ ). L'équation (2.53) s'écrit en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , donc,

$$\text{rot} \frac{1}{r} \left( \left( \frac{1}{\sigma + j\omega \epsilon} \right) \text{rot} \vec{H}^* \right) + j\omega \bar{\mu} \frac{\vec{H}^*}{r} = 0 \quad (2.57)$$

où  $\vec{H}^* = r\vec{H}$

#### IV. COUPLAGE AVEC LES EQUATIONS DE CIRCUIT

La plupart des dispositifs électrotechniques sont alimentés en tension, le courant qui en résulte dépend du flux magnétique créé à travers les inducteurs. Or, les formulations qui ont été présentées au début du chapitre imposent la connaissance de la densité de courant dans les inducteurs. Ainsi, il s'avère nécessaire de coupler le calcul électromagnétique avec les équations du circuit électrique d'alimentation.

Par ailleurs, les circuits d'alimentation peuvent être complexes, comportant des composants passifs linéaires (résistances, condensateurs ou inductances), des composants passifs non

linéaires ou commandés (diodes, transistors), et des composants actifs (source de tension ou de courant). Les inconnues du système électrique, différentes selon la méthode d'analyse choisie, seront rajoutées aux inconnues issues de l'application de la méthode des éléments finis [Golovanov-97].

### **IV.1. Les méthodes de couplage et d'analyse du circuit électrique**

Au niveau des méthodes de couplage, plusieurs méthodes ont été proposées. La technique de rebouclage souvent utilisée jusqu'à présent, car facile à implanter, présente l'inconvénient de nécessiter un temps de calcul important. Une formulation dite intégro différentielle, mise en œuvre par [Faucheux-89] [Jagut-88] [Konrad-81] [Shen-85], a l'avantage de produire un système à résoudre qui est toujours bien conditionné. Son principal inconvénient est que la matrice est "pleine", ce qui demande une plus grande place mémoire et un temps de calcul encore très long comme le montre [Lindfors-88].

Une autre méthode consiste à résoudre simultanément les équations électriques et magnétiques [Arkbio-87] [Kladas-87] [Mesa-85] [Meunier-88] [Vassent-90].

#### ***IV.1.1 Couplage indirect et direct***

Dans la méthode couplage indirect, les deux systèmes, électromagnétique et électrique sont résolus successivement, la solution de l'un étant injectée dans l'autre [Williamson-85]. Les itérations sont arrêtées lorsque la précision demandée est atteinte.

L'avantage principal de cette méthode est que l'analyse du circuit électrique peut être faite avec des logiciels spécialisés (par exemple SPICE). D'autre part, l'implantation pratique du couplage nécessite peu de modifications du « code éléments finis ». Enfin, le conditionnement de la matrice n'est pas modifié par le couplage.

Bien qu'attrayante par sa simplicité, cette méthode présente néanmoins un gros inconvénient: pour atteindre la précision désirée, plusieurs itérations doivent être effectuées.

Dans le couplage direct, le système électromagnétique et le système électrique sont résolus simultanément. Les inconnues électriques sont soit éliminées (cas de la méthode dite intégro-différentielle) soit rajoutées au système élément finis (cas de la méthode dite de résolution simultanée).

La méthode intégro-différentielle a prouvé son efficacité pour des problèmes 2D [Brunelli83], [Conrad-81], [Shen-85], [Meunier-88]. Les courants électriques dans les inducteurs sont

exprimés à l'aide du système électrique et ensuite introduits dans le système électromagnétique.

Cette méthode a été appliquée avec succès sur une large variété de formulations: formulations en potentiel vecteur magnétique nodale ou d'arête [Dreher-93], [Dreher-95], [Bouissou-94-1], formulation en potentiel scalaire réduit [Leonard-92], formulation T Omega [Bouissou-94-2]. La méthode présente l'avantage de conserver le caractère creux de la matrice du système.

Au sein de l'équipe Modélisation du LEG, la méthode de la résolution simultanée a été choisie, vu la large expérience et le nombre de ses travaux publiés sur le sujet.

La méthode sera appliquée sur la formulation en potentiel vecteur magnétique 2D et axisymétrique, sur les éléments nodaux, avec le souci de préserver le caractère compatible de la formulation.

#### ***IV.1.2. Méthodes d'analyse des circuits électriques***

Le circuit électrique d'alimentation des dispositifs électrotechniques peut être complexe, comportant des résistances, des inductances et des condensateurs. Dans la plupart, les machines électriques sont souvent alimentées par des circuits électroniques de commutation, (onduleurs ou hacheurs), comportant des composants commandés (transistors, thyristors) et des composants non-linéaires (diodes).

L'analyse topologique du circuit électrique consiste à déterminer les courants dans les composants, les tensions aux bornes et les potentiels électriques nodaux, à l'aide des théorèmes de Kirchoff. Cette analyse aboutit toujours à un système d'équations intégral différentielles.

Pour analyser les circuits électriques à l'aide des théorèmes de Kirchoff, les analyses par rapport aux courants ou tensions peuvent être utilisées.

Pour l'analyse par rapport aux courants, il existe la *méthode des courants de mailles*, laquelle nécessite la connaissance des mailles fondamentales du circuit et la mise en œuvre des algorithmes pour la détermination des mailles indépendantes sont nécessaires, et la *méthode des charges électriques* laquelle est basée sur l'introduction d'une charge électrique de maille.

Pour l'analyse par rapport aux tensions, il existe la *méthode des potentiels nodaux*, où la dimension du système peut être réduite, si au lieu de garder comme inconnues toutes les

tensions de branches, on introduit le potentiel nodal électrique comme nouvelle inconnue, et *la méthode des potentiels nodaux intégrés*, basée sur la définition d'un potentiel nodal intégré dans le temps  $\Psi$  [Golovanov-97].

Le choix de la méthode d'analyse du circuit électrique répond à deux exigences: faciliter la description du circuit pour l'utilisateur et réduire le temps de calcul.

Les logiciels existants sur le marché se distinguent en ce qui concerne la méthode d'analyse choisie. Ainsi, FLUX2D [Lombard-92] utilise la méthode des courants de mailles, MV2DYN [Brisset-95] est basé sur la méthode des potentiels nodaux, MSC/EMAS [Brauer-91] et MV3DYN [Perfin-94], [Dreher-94], [Golovanov-97] utilisent la méthode des potentiels nodaux intégrés.

Comme il a été déjà souligné, les méthodes des courants de mailles et des charges nécessitent la connaissance des mailles fondamentales du circuit. Les éventuelles modifications de la topologie du circuit (fermeture ou ouverture des interrupteurs) vont entraîner la modification des mailles et par conséquent, la reconstruction de la matrice symbolique du système. De plus, après la résolution du système, une nouvelle multiplication matricielle est nécessaire pour retrouver les courants de branche.

Les méthodes de potentiels nodaux et potentiels nodaux intégrés sont plus adaptées pour l'analyse de circuits électriques complexes, ne nécessitant pas d'algorithmes particuliers à mettre en œuvre. Parmi les deux méthodes en potentiel nodal, la dernière semble plus cohérente avec le couplage des équations électromagnétiques équations de circuit envisagé. En effet, le flux dans l'inducteur va être directement donné par la différence des potentiels nodaux intégrés aux bornes électriques de celui-ci.

Bien que nous ayons implanté deux méthodes: la méthode des courants de mailles et la méthode des potentiels nodaux intégrés dans le temps, nous avons particulièrement apprécié l'élégance et la simplicité de la dernière. C'est cette méthode qui a été finalement retenue.

Cette méthode est généralement utilisée en 3D (MV3DYN [Perfin-94], [Dreher-94], [Golovanov-97] ), donc nous l'avons adaptée pour traiter aussi de problèmes 2D cartésien et axisymétriques.

Par la suite, seront présentés quelques aspects pratiques de la formulation couplée avec les équations de circuit développée.

## IV.2 Couplage dans le cas d'un inducteur massif

Un inducteur filaire a généralement plusieurs spires, dans lesquelles la densité de courant dans la section transversale est considérée constante. Par conséquent, les courants induits dans chaque fil sont négligés. Les couplages avec les équations de circuit dans le cas d'un inducteur filaire peuvent être bien vérifiés dans [Dreher-93], [Dreher-95], [Lombard-92], et [Golovanov-97].

Un inducteur massif est un conducteur électrique où les courants induits ne peuvent pas être négligés et ils doivent être pris en compte. Le couplage avec les équations de circuit seront appliqués dans le cas bidimensionnel cartésien et axisymétrique.

### *IV.2.1. Cas bidimensionnelle cartésien*

L'équation du champ magnétique en terme de potentiel vecteur dans un régime harmonique sinusoïdal s'écrit :

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) + \sigma (j\omega \vec{A} + \text{grad}V) = 0 \quad (2.58)$$

où  $\text{grad}V$  représente le gradient de potentiel électrique dans les conducteurs et il n'est généralement pas connu. Dans le cas bidimensionnel cartésien, nous pouvons le définir sur chaque conducteur.

Les conducteurs sont représentés par des surfaces orientées. Dans le conducteur massif, le courant  $I$  circule de  $\Psi_1$  vers  $\Psi_2$ . Si l'on considère  $I > 0$  et si  $\Psi_1 > \Psi_2$ , donc on peut dire que :

Si le courant  $I$  est selon la direction du vecteur unitaire normal  $\vec{k}$  (Fig.II.2), le  $\text{grad}V$  peut être défini par la relation suivante [Golovanov-96]:

$$\text{grad}V = \frac{1}{L} \left( \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \right) = j\omega \frac{(\Psi_2 - \Psi_1)}{L}$$

où

$\vec{k}$  = Le vecteur unitaire normal du plan considéré;

$L$  = La longueur du conducteur massif.

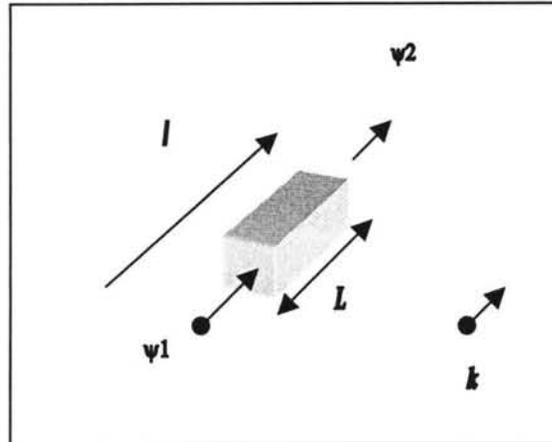


Fig.II.2 : Le conducteur massif

Dans chaque région  $k$ , la densité de courant est donnée par les relations:

$$I = \int_{\Omega_k} \vec{J}_T \cdot d\Omega_k \quad \text{et} \quad \vec{J}_T = -\sigma (j\omega \vec{A} + \text{grad}V) \quad (2.59)$$

La relation suivante peut être intégrée dans chaque région  $k$  conductrice où  $\text{grad}V = j\omega \frac{(\Psi_2 - \Psi_1)}{L}$  est constant:

$$I = \int_{\Omega_k} \vec{J}_T \cdot d\Omega_k = \int_{\Omega_k} -j\omega\sigma \vec{A} \cdot d\Omega_k - \int_{\Omega_k} j\omega\sigma \frac{(\Psi_2 - \Psi_1)}{L} d\Omega_k$$

donc, le courant  $I$  est défini par :

$$I = -j\omega \int_{\Omega_k} \sigma \vec{A} \cdot d\Omega_k - \int_{\Omega_k} j\omega\sigma \frac{(\Psi_2 - \Psi_1)}{L} d\Omega_k \quad (2.60)$$

où  $I$  est le courant qui traverse le conducteur  $k$ .

#### La Méthode des éléments finis

Afin de résoudre les équations (2.58) et (2.60) nous utilisons la méthode des éléments finis. Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est approximé à l'aide de fonctions de forme classiques :

$$\vec{A} = \sum \alpha_i A_i$$

En appliquant la méthode de Galerkin [Golovanov-97] dans l'équations (2.58) et (2.60) avec des fonctions de projection ( $W_i$ ) et des fonctions de forme identiques ( $\alpha_i$ ), nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\int_{\Omega_k} \text{rot} W_i \cdot \vec{H} \, d\Omega_k + j\omega \int_{\Omega_k} \alpha_i \sigma \vec{A} \, d\Omega_k + j\omega \int_{\Omega_k} \alpha_i \sigma \frac{(\Psi_2 - \Psi_1)}{L} \, d\Omega_k = 0$$

$$[S][A] + [G]j\omega[A] - [C][\Delta\Psi] = 0$$

où :

$$[S] = L \int_{\Omega_k} \text{rot} W_i \cdot \frac{1}{\mu} \text{rot} W_j \, d\Omega_k$$

$$[G] = L \cdot j\omega \int_{\Omega_k} \sigma \alpha_i \alpha_j \, d\Omega_k$$

$$[C] = j\omega \int_{\Omega_k} \sigma \alpha_i \, d\Omega_k$$

avec  $\Delta\Psi_k = -L(\text{grad}V)$ , où  $L$  est la longueur (suivant la direction perpendiculaire au plan d'étude) du domaine trouvé par éléments finis.

Pour l'équation (2.60)

$$-j\omega \int_{\Omega_k} \sigma \vec{A} \, d\Omega_k - j\omega \int_{\Omega_k} \sigma \frac{(\Psi_2 - \Psi_1)}{L} \, d\Omega_k$$

$$-[C]^T j\omega[A] - [R]^{-1} [\Delta\Psi] = 0$$

où :

$$[C]^T = -j\omega \int_{\Omega_k} \sigma \alpha_j \, d\Omega_k$$

$$[R]^{-1} = -j\omega \int_{\Omega_k} \frac{\sigma}{L} \, d\Omega_k$$

Le système matriciel symétrique à résoudre peut être écrit par:

$$\begin{bmatrix} L(\text{rot} W_i \text{vrot} W_j + j\omega \int \sigma \alpha_i \alpha_j) & -j\omega \int \sigma \alpha_i & j\omega \int \sigma \alpha_i \\ -j\omega \int \sigma \alpha_j & -j\omega \int \frac{\sigma}{L} & j\omega \int \frac{\sigma}{L} \\ j\omega \int \sigma \alpha_j & j\omega \int \frac{\sigma}{L} & -j\omega \int \frac{\sigma}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### IV.2.2 Cas de la symétrie axiale

En coordonnées cylindriques l'équation (2.50) donc, assume la forme :

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1/\mu}{r} \frac{\partial \vec{A}^*}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1/\mu}{r} \frac{\partial \vec{A}^*}{\partial r} - \vec{J}_T = 0 \quad (2.61)$$

Dans chaque conducteur, la densité de courant est donnée par les relations:

$$I = \int_{\Omega_k} \vec{J}_T d\Omega_k = \int_{\Omega_k} -j\omega \sigma \vec{A} d\Omega_k - r \text{Grad}V \int_{\Omega_k} \frac{\sigma}{r} d\Omega_k$$

ou  $r \text{Grad}V = j\omega \frac{(\Psi_2 - \Psi_1)}{2\pi r}$  est constant, et le courant  $I$  traversant le conducteur  $k$  est défini

par :

$$I = -j\omega \int_{\Omega_k} \frac{\sigma}{r} \vec{A}^* d\Omega_k - \int_{\Omega_k} j\omega \frac{\sigma}{2\pi r} (\Psi_2 - \Psi_1) d\Omega_k \quad (2.62)$$

#### La méthode des éléments finis

Pour l'utilisation de la méthode des éléments finis en axisymétrie, les équations (2.61) et (2.62) sont projetées sur le plan  $r$ - $z$  ( $dS = dr dz$ ) avec des fonctions de projection  $\alpha_i$  (méthode de Galerkin). En interpolant la variable  $A^*$  avec des fonctions de forme  $\alpha_i$  :

$$\vec{A}^* = \sum \alpha_i A_i^*$$

Pour l'équation (2.61),

$$\frac{1}{r} \int_{\Omega_k} \text{rot}W_i \cdot \vec{H} d\Omega_k + j\omega \int_{\Omega_k} \alpha_i \frac{\sigma}{r} \vec{A}^* d\Omega_k + j\omega \int_{\Omega_k} \alpha_i \frac{\sigma}{2\pi r} (\Psi_2 - \Psi_1) d\Omega_k = 0$$

$$[S^*][A^*] + [G^*]j\omega[A^*] - [C^*][\Delta\Psi^*] = 0$$

où :

$$[S^*] = \frac{2\pi}{r} \int_{\Omega_k} \text{rot}W_i \cdot \frac{1}{\mu} \text{rot}W_j d\Omega_k$$

$$[G^*] = \frac{2\pi}{r} \cdot j\omega \int_{\Omega_k} \sigma \alpha_i \alpha_j d\Omega_k$$

$$[C^*] = j\omega \int_{\Omega_k} \frac{\sigma}{r} \alpha_i d\Omega_k$$

et pour l'équation (2.62),

$$-j\omega \int_{\Omega_k} \frac{\sigma}{r} \vec{A}^* d\Omega_k - j\omega \int_{\Omega_k} \frac{\sigma}{2\pi r} (\Psi_2 - \Psi_1) d\Omega_k$$

$$-[C^*]^T j\omega [A^*] - [R^*]^{-1} [\Delta\Psi^*] = 0$$

où :

$$[C^*]^T = j\omega \int_{\Omega_k} \frac{\sigma}{r} \alpha_j d\Omega_k$$

$$[R^*]^{-1} = j\omega \int_{\Omega_k} \frac{\sigma}{2\pi r} d\Omega_k$$

Le système matriciel symétrique finalement s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \frac{2\pi}{r} \left( \int rot W_i \frac{1}{\mu} rot W_j + j\omega \int \sigma \alpha_i \alpha_j \right) & -j\omega \int \frac{\sigma}{r} \alpha_i & j\omega \int \frac{\sigma}{r} \alpha_i \\ -j\omega \int \frac{\sigma}{r} \alpha_j & j\omega \int \frac{\sigma}{2\pi r} & -j\omega \int \frac{\sigma}{2\pi r} \\ j\omega \int \frac{\sigma}{r} \alpha_j & -j\omega \int \frac{\sigma}{2\pi r} & j\omega \int \frac{\sigma}{2\pi r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## V. VALIDATION SUR UN « CAS D'ECOLE »

Afin de valider la formulation développée, une simulation d'un « cas d'école » a été réalisée par trois méthodes différentes : la première, analytique, ensuite en utilisant la méthode de courants de mailles [Lombard-92] du logiciel FLUX2D, et finalement avec la formulation développée, implémentée dans le logiciel FLUX3D.

Le dispositif proposé est une spire de forme rectangulaire et de section circulaire. La géométrie est la suivante :

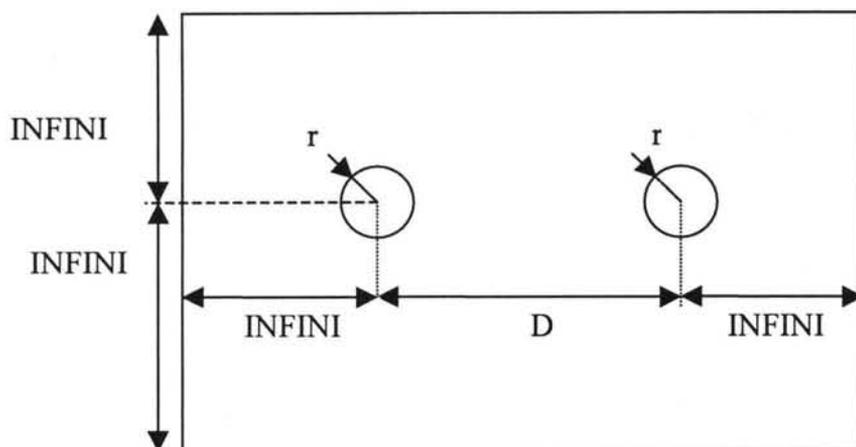


Figure 2.3 : géométrie du "cas d'école"

Les paramètres caractéristiques sont :

$r$  : rayon de la spire

$D$  : distance entre les axes des deux brins de la spire.

INFINI : paramètre définissant les limites du domaine éléments finis étudiés.

Nous supposons que la frontière "infinie" est placée suffisamment loin pour qu'on puisse appliquer des conditions de Dirichlet avec une valeur de potentiel nulle.

Les deux fils sont supposés infiniment longs. Pratiquement, nous avons fixé la longueur  $L$  à un mètre (pour les calculs de tension par exemple). Pour que les hypothèses du 2D soient valides, il faut que la distance  $D$  reste "petite" devant la longueur  $L$ .

Nous nous intéressons aux grandeurs électriques qui caractérisent cette spire : sa résistance globale et son inductance propre.

### V.1. Calculs analytique de la résistance et de l'inductance

Nous allons calculer la résistance dite "continue" du conducteur en supposant que sa résistivité soit constante. En effet cette résistance ne tient pas compte des courants de Foucault. La valeur de la résistance est donnée par la formule classique :

$$R = \rho \frac{\ell}{S}$$

où

$\rho$  = résistivité du conducteur

$\ell$  = longueur du conducteur

$S$  : surface du conducteur

Dans le cas de la spire étudiée, en tenant compte de l'ensemble des conducteurs :

$$R = \rho \cdot \frac{(2D + 2L)}{\pi r^2}$$

où  $\rho$  en  $\Omega \cdot m$ ,  $D$ ,  $L$  et  $r$  en mètre.

Nous pouvons remarquer que dans le cas de courants de Foucault, la section par laquelle le courant passe est réduite. Donc la résistance dynamique est toujours supérieure à la résistance en "continu".

Pour l'inductance, il est possible de trouver dans la littérature [40] des formulaires :

$$L = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \left[ 1 + 4 \ln \left( \frac{D}{r} \right) \right]$$

Nous allons montrer comment nous pouvons étudier cette spire alimentée, d'une part en tension, d'autre part en courant. Pour mener cette étude, nous avons utilisé des sources sinusoïdales et nous observons le régime permanent.

## V.2. Spire massive alimentée en tension

Le schéma électrique est le suivant :

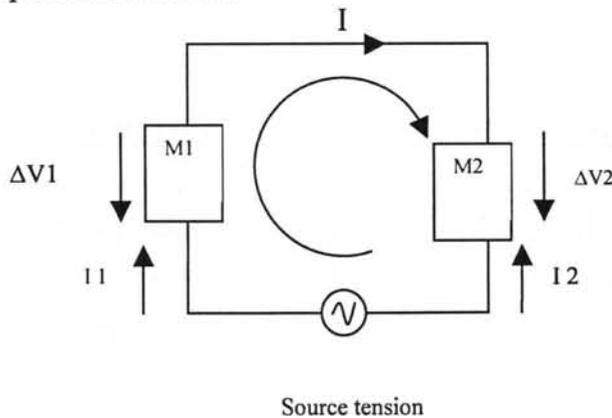


Figure 2.4 : schéma électrique

La distance  $D$  étant très petite devant la profondeur, nous pouvons alors négliger la chute de tension liée aux connexions entre les deux spires. Donc si la source délivre une tension  $U$  comme indiqué sur le schéma électrique, chaque partie de la spire est soumise à la tension, par raison 2 de symétrie. Du fait des conventions de signe, les tensions sont en fait opposées :

$$U = \Delta V_1 - \Delta V_2$$

donc

$$\Delta V_1 = \frac{U}{2} \quad \Delta V_2 = -\frac{U}{2}$$

Nous avons noté ci-dessous, les caractéristiques des régions modélisées ainsi que les résultats obtenus à l'aide du logiciel FLUX2D (la méthode des courants de mailles) et FLUX3D (la méthode des potentiels nodaux intégrés) comparés aux valeurs analytiques calculées:

### *Propriétés géométriques*

$$r = 1 \text{ mm}$$

$$D = 10 \text{ mm}$$

$$\text{INFINI} = 50 \text{ mm}$$

### *Propriétés physiques*

$$\text{Air : } \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ S.I.}$$

$$\text{spire 1 : } \rho_1 = 1,85 \times 10^{-8} \Omega m$$

$$\Delta V_1 = 0,05 V$$

$$\text{spire 2 : } \rho_2 = 1,85 \times 10^{-8} \Omega m$$

$$\Delta V_2 = -0,05 V$$

### *Résultats analytiques*

A la fréquence de 50 Hz de notre étude et vu les dimensions du dispositif, nous pouvons considérer que l'effet de peau est négligeable. Par conséquent le conducteur massif se comportera comme un fil en continu dont nous pouvons déterminer la résistance et l'inductance.

$$R_1 = R_2 = \rho \cdot \frac{l}{S} = 5,88 \times 10^{-3} \Omega$$

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left[ 1 + 4 \ln \left( \frac{10}{1} \right) \right]$$

$$L = 1,02 \mu H \quad L_1 = L_2 = \frac{L}{2} = 0,51 \mu H$$

### V.3. En régime sinusoïdal permanent

Nous avons réalisé deux études : l'une à 50 Hz et l'autre à 1000 Hz. Dans l'étude à 50Hz, les dimensions permettent de négliger l'effet de peau et le fil se comporte comme un conducteur bobiné dont nous pouvons calculer analytiquement les valeurs caractéristiques (résistance et inductance).

$$U = RI + j\omega LI$$

$$U = RI + j\omega LI \Rightarrow I = \frac{U}{(R + j\omega L)} \quad U = 0,1 (V) \Rightarrow I = 8,47e^{-j1,55} (A)$$

### V.4. Résultats

Dans le tableau ci-dessous, les grandeurs complexes sont données en module et phase.

$$U = 0,1 (V)$$

Méthode utilisée Valeurs comparées	Analytique	Flux2D – courant des mailles	Flux3D – potentiel nodaux intégrés
$I_1$ (en A)	8,47 -1,55°	8,48 -1,55°	8,48 -1,55°
$I_2$ (en A)	8,47 178,45°	8,48 178,45°	8,48 178,46°
$L_1$ (en $\mu H$ )	0,507	0,51	0,511
$L_2$ (en $\mu H$ )	0,507	0,51	0,511

Nous constatons une bonne corrélation entre les résultats obtenus par les méthodes numérique et analytique.

En revanche, à 1000 Hz, nous observons des courants de Foucault importants. Le calcul analytique n'est plus valable comme le montre le tableau ci-dessous.

	Flux2D - courant des mailles	Flux3D – potentiels nodaux intégrés
$I_1$ (en A)	7,46 -28,4°	7,52 -28,9°
$I_2$ (en A)	7,46 -151,6°	7,52 -151,8°
$L_1$ (en $\mu H$ )	0,506	0,507
$L_2$ (en $\mu H$ )	0,506	0,507
$R_1$ (en $m\Omega$ )	5,9	5,84
$R_2$ (en $m\Omega$ )	5,9	5,84

Nous constatons que la résistance apparente est légèrement plus grande que dans le cas précédent, ce qui est normal car la surface traversée par le courant diminue. D'autre part, nous nous apercevons que dans le même temps la valeur de l'inductance a diminué.

Il n'y a pas de grands écarts dans les résultats numériques trouvés par les deux méthodes, FLUX2D (équations des mailles) et FLUX3D (Potentiels nodaux intégrés dans le temps). On peut dire que la méthode d'analyse des circuits (potentiels nodaux intégrés) a été bien adaptée pour l'analyse des circuits électriques dans la formulation 2D développée.

## VI. CONCLUSION

Après avoir présenté les bases de la modélisation en électrotechnique (les équations de Maxwell), les différents modèles électromagnétiques rencontrés dans la pratique: statiques et dynamiques ont été exposés. Liées à ces modèles, les formulations mathématiques utilisées ont été simplifiées, pour mieux s'adapter aux méthodes numériques.

Le couplage avec les équations de circuit électrique vient s'imposer comme une nécessité dans les méthodes de modélisation classiques. Parmi les méthodes de couplage et d'analyse existantes, nous avons choisi les plus appropriées. Quelques aspects pratiques de la réalisation du couplage avec les équations électromagnétiques ont été présentés.

Enfin, la méthode de couplage a été adaptée pour la formulation potentiel vecteur magnétique, avec les éléments nodaux, dans les cas bidimensionnel et axisymétrique d'un conducteur massif.

Une application de la formulation dans un « cas d'école » de deux conducteurs massifs a été réalisé pour valider la méthode d'analyse des circuits électriques.

## **Chapitre III**

### **L'étude d'un échantillon torique de ferrite**



## I. INTRODUCTION

L'étude du comportement linéaire des composants bobinés est d'une grande importance pratique. Les propriétés linéaires des ferrites sont aujourd'hui spécifiées par leur perméabilité complexe, la déduction de cette grandeur reposant sur des modèles magnétostatiques.

En magnétodynamique, des courants de conduction et / ou de déplacement peuvent circuler dans ces matériaux, donc, plusieurs observations expérimentales suggèrent ainsi que les méthodes de caractérisation utilisées habituellement par les fournisseurs de ferrites sont insuffisantes pour représenter correctement le comportement linéaire du matériau, par la seule perméabilité complexe. Une considération plus réaliste doit faire appel également à la permittivité complexe.

Récemment, une nouvelle méthode de caractérisation des ferrites, basée sur la mesure de deux grandeurs complexes et visant à caractériser le couple  $(\bar{\mu}, \bar{\epsilon})$  a été développée au sein du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble - LEG. La méthode est fondée sur un modèle analytique, le matériau étant considéré linéaire, homogène et isotrope.

Dans ce chapitre le principe de cette nouvelle méthode de caractérisation est montré. Ce travail a été réalisé dans le cadre de la thèse de Patrick FOUASSIER (équipe d'Electronique de Puissance). Notre travail a consisté à valider le modèle analytique et ses limites d'utilisation à l'aide des formulations éléments finis : la formulation Champ Magnétique et évaluer la formulation Electrodynamique en 2D et la formulation T Omega en 3D. Les comparaisons entre les valeurs expérimentales et les valeurs simulées par éléments finis sont également présentés.

## II. UNE METHODE DE CARACTERISATION DES FERRITES

Pour déduire, à chaque fréquence, les deux grandeurs complexes  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\varepsilon}$  qui caractérisent un matériau ferrite, il est nécessaire de disposer de deux mesures complexes complémentaires. Il a été choisi de réaliser les deux mesures suivantes : la première - ZB - de nature inductive (inductance d'un bobinage de n spires de fil isolé autour du noyau), et la seconde - ZE - de nature résistive ou capacitive (impédance entre les deux faces parallèles du tore). On utilise des tores de section rectangulaire, dont les faces parallèles sont métallisées pour permettre la mesure de l'impédance électrique apparaissant entre ces bornes. L'analyseur d'impédance utilisé pour ces mesures (HP4194A) permet de couvrir la gamme 100 Hz - 40 MHz.

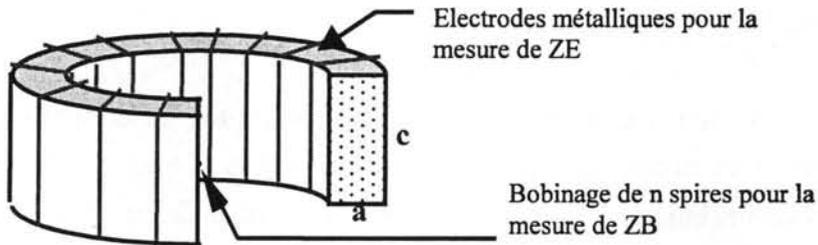


Fig.III.1 : Exemple d'un échantillon torique en ferrite pour la mesure de ZB et de ZE

Le choix de ces deux mesures (Fig.III.1) a été guidé par le fait que, la mesure habituelle d'inductance dépendant principalement de la perméabilité, il fallait naturellement lui adjoindre une mesure de type capacitive, plutôt liée à la permittivité. Un argument supplémentaire en faveur de ce choix concerne la répartition de l'énergie électromagnétique dans le noyau pour chacun des cas : il paraît évident que l'énergie magnétique stockée lors de la mesure d'inductance (ZB) est nettement prépondérante (par rapport à l'énergie électrostatique), et que l'inverse est vrai lors de l'autre mesure (ZE).

Le couple  $(\bar{\mu}, \bar{\varepsilon})$  se déduit du jeu de mesures (ZB, ZE) en exploitant un modèle analytique qui suppose que les champs présentent certaines symétries et qui exploite des approximations :

$$\begin{cases} ZB = f(\bar{\mu}, \bar{\varepsilon}) \\ ZE = g(\bar{\mu}, \bar{\varepsilon}) \end{cases} \quad \text{approximations} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \bar{\mu} = h_1(ZB, ZE) \\ \bar{\varepsilon} = h_2(ZB, ZE) \end{cases}$$

Ce modèle doit fidèlement respecter la configuration de mesure. On essaye de le conserver aussi simple que possible pour que l'inversion des relations qui, initialement, donnent ZB et ZE en fonction de  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\varepsilon}$  soit réalisable. Le jeu de mesures initial constitue le point de départ de la méthode. Il faut soigneusement noter les conditions dans lesquelles elles sont effectuées pour fixer correctement les conditions aux limites à imposer au modèle ainsi que sa dimension [Fouassier-98].

Pour des raisons de simplicité expérimentale et de conformité aux hypothèses des développements analytiques, le choix se porte sur la gamme des tores à section rectangulaire. Les matériaux sélectionnés sont des ferrites au MnZn des fournisseurs Philips (3F3, 3C85) [Philips-98] et Siemens (N27) [Siemens-91]. Leur perméabilité initiale  $\mu_i$  est de l'ordre de 2000 et leur résistivité de quelques  $\Omega.m$ . Ils sont très souvent utilisés pour la fabrication de composants bobinés destinés à l'Electronique de Puissance. L'étude d'autres tores au MnZn ou au NiZn a été envisagée parce qu'ils présentent des résistivités différentes, soit très faible ( $0,5 \Omega.m$  pour le Philips 3E5 -  $\mu_i = 10000$ ), soit très forte ( $105 \Omega.m$  pour le Philips 4All -  $\mu_i = 700$ ) [Philips-98].

Ces tores, généralement enrobés en usine d'une mince couche de polyamide, doivent être décapés sur leurs faces parallèles afin de mettre la ferrite à nu. Les deux faces sont ensuite recouvertes d'électrodes métalliques afin d'assurer un bon contact électrique, indispensable à la mesure de ZE (surfaces équipotentielles).

### II.1. Description du problème

Le problème consiste à caractériser un matériau magnétique (ferrite) supposé linéaire, isotrope et homogène. Un tore déroulé de section rectangulaire d'épaisseur  $a$ , de hauteur  $c$  et de périmètre moyen  $b$  est considéré (Fig. III.2), dont  $b$  et  $c \gg a$ .

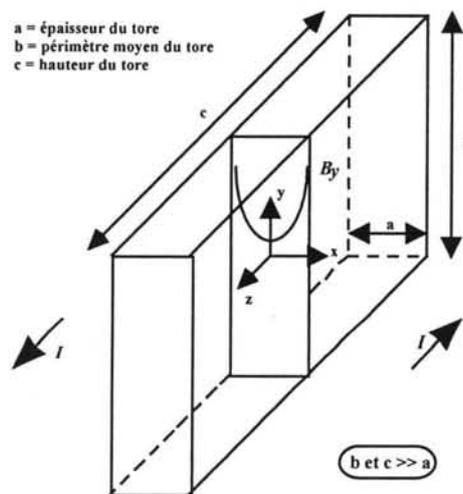


Fig. III.2 : Le tore déroulé

Les faces parallèles du tore sont recouvertes, chacune, par un plan métallique parfaitement conducteur, permettant la mesure de son impédance électrique ZE. Un bobinage de  $n$  spires enroulé autour de ce noyau permet de relever l'impédance magnétique ZB. Dans un premier temps, le modèle analytique utilisé à établir les expressions de ZB et ZE en fonction de  $\bar{\mu}$ ,  $\bar{\epsilon}$

et des dimensions, sera validé et, ensuite, l'influence de la métallisation sur le calcul de ZB sera étudiée.

Afin de valider le modèle analytique, 2 hypothèses doivent être examinées en détail :

1 – La possibilité de déroulement du tore de ferrite. Nous supposons que le fait de dérouler le tore pour le rendre parallélépipédique modifie peu les résultats. En axisymétrie, adoptant naturellement des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , nous admettons que les champs ne varient que suivant  $r$ .

2 – La hauteur du tore de ferrite n'intervient pas dans le calcul de ZB et ZE, ce qui donne la possibilité d'utiliser un modèle 1D analytique.

## II.2 Le calcul analytiques des impédances ZB et ZE

A partir du moment où les hypothèses suivantes sont conservées :

- ⇒ Le tore est déroulé ;
- ⇒ La hauteur n'a pas d'influence;
- ⇒ Le bobinage, uniformément réparti, est assimilable à une nappe de courant de densité superficielle pour le calcul de ZB ;
- ⇒ Un jeu de coupelles métalliques amène le courant de telle manière à ne pas avoir de champ à l'extérieur du matériau (ZE).

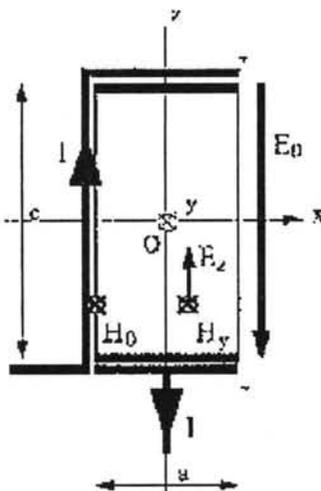


Fig.III.3 : Géométrie du modèle analytique pour ZE

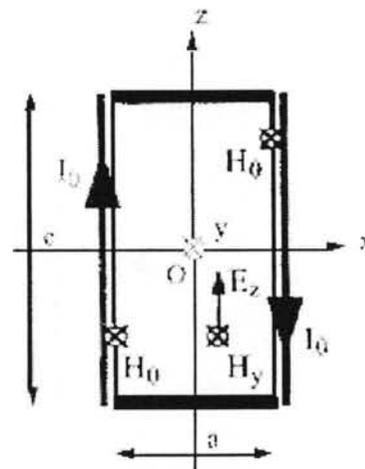


Fig.III.4 : Géométrie du modèle analytique pour ZB

Les dispositifs présentés aux Fig.III.3 et Fig.III.4, peuvent être modélisés pour relier les champs magnétique  $\vec{H}$  et électrique  $\vec{E}$ , à l'intérieur du tore, aux propriétés physiques complexes  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\varepsilon}$  du matériau, en fonction des dimensions, et des ses excitations.

Le développement analytique des modèles, bien montré en [Fouassier-98], résulte en quatre expressions qui relient  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\varepsilon}$  à ZE et ZB.

$$ZB = 2j \frac{c}{b} n^2 Z_C \tan(\theta) \quad (3.1)$$

$$ZE = \frac{1}{j} \frac{c}{b} Z_C \frac{1}{\tan(2\theta)} \quad (3.2)$$

$$Z_C = \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{\bar{\varepsilon}}} \quad (3.3)$$

$$\theta = \omega \sqrt{\bar{\mu} \bar{\varepsilon}} \frac{a}{2} \quad (3.4)$$

L'inversion des expressions peut exprimer  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\varepsilon}$  en fonction de ZB et ZE.

$$\bar{\mu} = \frac{2}{a\omega} \theta Z_C \quad (3.5)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{a\omega} \frac{\theta}{Z_C} \quad (3.6)$$

Les expressions trouvés (3.1),(3.2),(3.3) et (3.4), permettent de relier les valeurs mesurés (ZE et ZB), aux propriétés physiques complexes ( $\bar{\mu}, \bar{\varepsilon}$ ) d'un matériau magnétique (ferrite).

### III. VALIDATION DU MODELE ANALITYQUE PAR MEF

Pour valider le modèle analytique utilisé dans la déduction du couple ( $\bar{\mu}, \bar{\varepsilon}$ ) on a besoin d'abord d'analyser les hypothèses précédemment appliquées. Pour cela, on utilisera la Méthode des Elément Finis (MEF), et plus précisément, les modèles électrodynamiques et magnétodynamiques avec les formulations 2D, axisymétrique et 3D (cf. Chapitre II).

La possibilité de déroulement du tore de ferrite sera vérifiée en axisymétrique, adoptant naturellement des coordonnées cylindriques ( $r, \theta, z$ ), où une étude sur la relation épaisseur / rayon moyen du tore par rapport au flux magnétique calculé sera réalisée.

Ensuite, nous aborderons l'influence de la hauteur du tore et aussi le intérêt de la métallisation (plans métalliques).

Une étude tridimensionnelle (formulation T-Omega), sera nécessaire pour vérifier l'influence de la répartition des spires dans un modèle magnétodynamique 3D et aussi, comparer celui-ci avec la formulation axisymétrique utilisée .

Finalement, afin de vérifier les expressions analytiques, des simulations par éléments finis peuvent être basées sur le schéma ci-dessous.

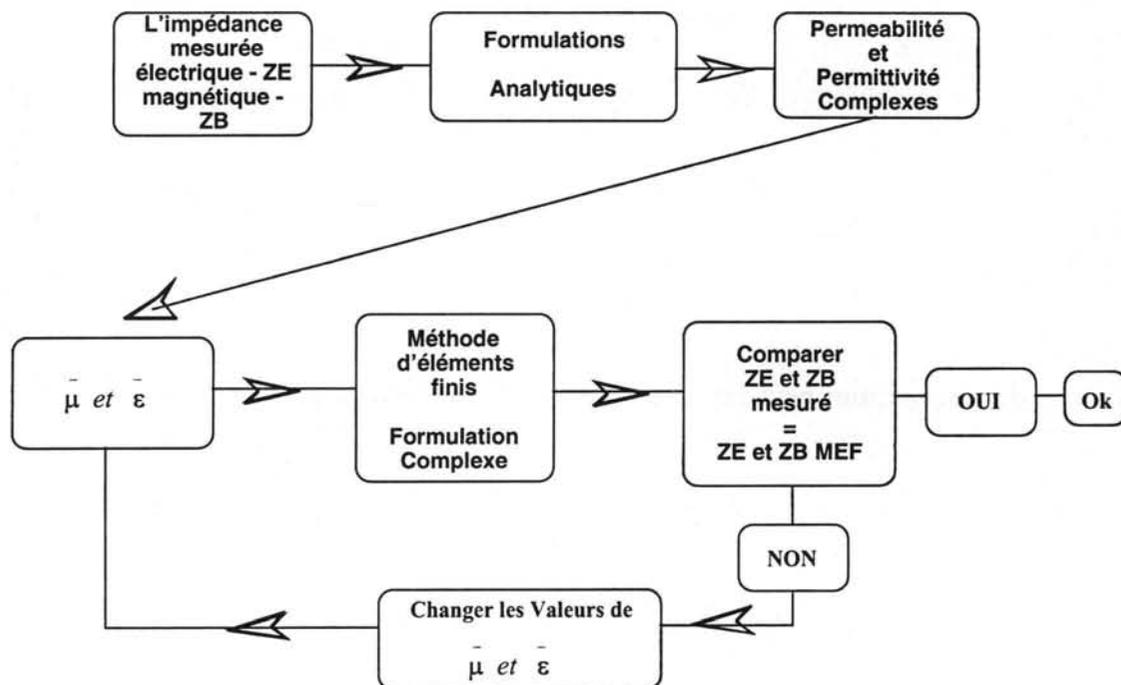


Fig. III.5 : Schéma de validation des expressions analytiques

A partir de valeurs de ZE et ZB mesurés, pour des échantillons de ferrite (N27), les expressions (3.5) et (3.6) seront utilisées pour trouver les valeurs respectives de  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\epsilon}$  pour une gamme de fréquence de 100 Hz à 1 MHz.

Ces valeurs de  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\epsilon}$  seront utilisées dans les simulations par éléments finis avec l'objectif de retrouver les mêmes valeurs d'impédances mesurées (ZE et ZB).

Les valeurs  $(\bar{\mu}, \bar{\epsilon})$  seront calculées analytiquement et appliquées dans les simulations. Pour retrouver ZE deux formulations différentes seront utilisées. La première, électrodynamique 2D, et la deuxième, une formulation champ magnétique axisymétrique qui considère l'accouplement magnétique électrique. Cette deuxième formulation sera utilisée aussi pour le calcul de ZB.

Le tableau III.1, montre les valeurs de la perméabilité et de la permittivité complexes calculées analytiquement par les équations (3.5) et (3.6) à partir des valeurs de ZE et ZB trouvées expérimentalement (mesure).

Fréquence (Hz)	$\mu'$	$\mu''$	$\varepsilon'$	$\varepsilon''$
1k	$4,416 \times 10^3$	181,019	$1,194 \times 10^5$	$7,382 \times 10^6$
10k	$4,395 \times 10^3$	31,634	$1,044 \times 10^5$	$7,567 \times 10^5$
30k	$4,399 \times 10^3$	31,815	$9,718 \times 10^4$	$2,620 \times 10^5$
100k	$4,454 \times 10^3$	75,720	$8,414 \times 10^4$	$9,058 \times 10^4$
300k	$4,863 \times 10^3$	636,445	$7,35 \times 10^4$	$4,776 \times 10^4$
1M	$3,368 \times 10^3$	$3,539 \times 10^3$	$3,585 \times 10^4$	$4,608 \times 10^4$

Tableau III.1 :Les valeurs de la perméabilité et de la permittivité complexe

Le tableau III.2, montre les valeurs de la conductivité électrique utilisée pour ces simulations.

Fréquence (Hz)	$\sigma = \omega \varepsilon_0 \varepsilon''$	Fréquence (Hz)	$\sigma = \omega \varepsilon_0 \varepsilon''$
1k	0,41048	300k	0,796725
10k	0,42077	1M	2,56233
30k	0,437064		
100k	0,50368		

Tableau III.2 :Les valeurs de sigma pour quelques fréquences

## IV. L'IMPEDANCE MAGNETIQUE – ZB

Avant d'étudier la possibilité de déroulement du tore, l'influence de la hauteur, de la métallisation et de la répartition des spires, nous avons calculé l'impédance magnétique ZB, d'un échantillon de ferrite des dimensions définies, pour évaluer les erreurs entre les résultats analytiques et éléments finis.

### IV.1. Le calcul de ZB par éléments finis

Afin de calculer les impédances magnétiques ZB par la méthode des éléments finis et ensuite, les comparer avec les valeurs mesurées, nous avons utilisé la formulation Champ Magnétique.

#### IV.1.1. Analyse avec la formulation Champ Magnétique - Axisymétrique

Le modèle utilisé pour la simulation (Figure III.6) a une hauteur ( $c$ ) de 11,5 mm et l'épaisseur ( $a$ ) de 5,5 mm.

Pour la modélisation, le champ magnétique  $H$  à l'extérieur de la lame, est considéré comme nul (pas de fuite). Le champ magnétique  $H$ , ne varie que dans la lame de ferrite.

La condition au limite ( $H_0$ ) exprimé sur le bord de la ferrite (Figure III.6), est du au courant  $I$  qui entoure l'échantillon.

Ainsi, en axisymétrie nous avons (Théorème d'Ampère), sur n'importe quelle point du contour la relation :

$$H_0 = \frac{nI}{2\pi} = rH \quad (3.7)$$

où

$n$  = le nombre de spires

$I$  = la courant imposé

Et puisque l'inconnue choisie est  $rH$  nous avons donc:

$$H_0 = \frac{nI}{2\pi} = rH$$

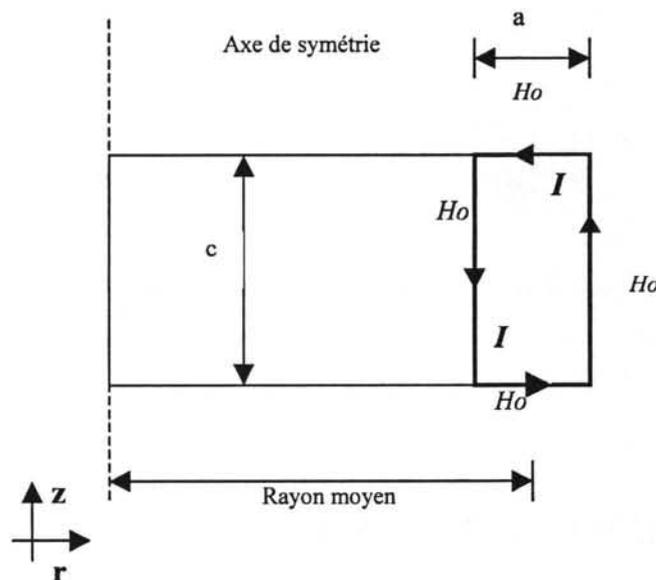


Fig.III.6 : Les conditions aux limite pour les modélisations (géométrie axisymétrique)

A partir des résultats de la modélisation avec le modèle magnétodynamique, les valeurs de l'impédance ZB peuvent être trouvées à partir du calcul du flux magnétique.

Le flux magnétique  $\phi$  est donné par :

$$\phi = \int \bar{\mu} \bar{H} dS$$

où  $\bar{H}$  est le champ magnétique imposé, et finalement ZB peut être calculé par

$$ZB = j\omega \phi \frac{n^2}{I} \quad (3.9)$$

Le tableau III.11, montre les valeurs de l'impédance ZB (module et phase) mesurées expérimentalement et calculées par la formulation Champ Magnétique, pour les fréquences données.

ZB - Flux3D				
Fréquence	Module	Phase	Module Mesure	Phase Mesure
1k	0,697583	87,652	0,69	87,65
10k	6,68761	89,58	6,74	89,56
30k	20,0815	89,58	20,21	89,51
100k	67,7976	89,04	70,01	88,73
300k	224,333	82,617	238,44	80,62
1M	690,57	31,41	668,92	26,03
(Hz)	( $\Omega$ )	( $^\circ$ )	( $\Omega$ )	( $^\circ$ )

Tableau III.11 : Les valeurs de l'impédance ZB calculés par FLUX3D

Les courbes comparatives entre les modules de l'impédance ZB pour la formulation Champ Magnétique et les valeurs mesurées sont montrées ci-dessous (Fig.III.7).

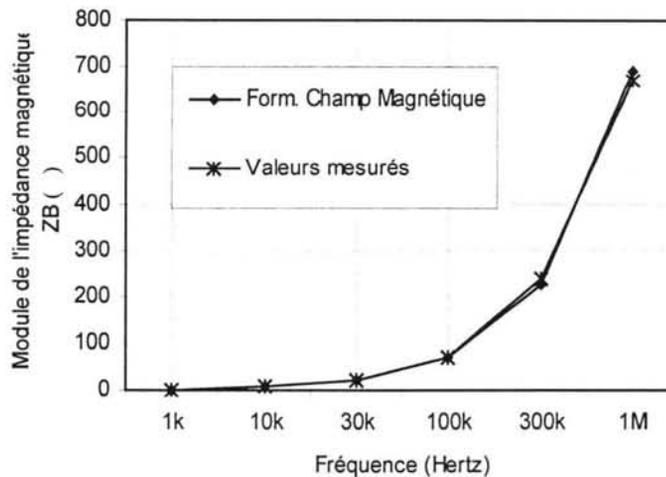


Fig.III.7 : Le module de ZB ( $\Omega$ )

La Fig.III.8, montre les courbes comparatives entre les phases de l'impédance ZB calculées par la formulation Champ Magnétique et les valeurs de ZB mesurées.

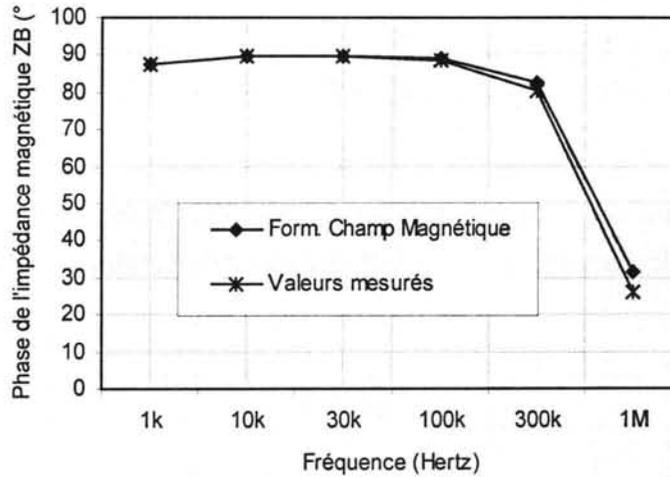


Fig.III.8 : La phase de ZB (°)

#### IV.1.2. Conclusion pour le calcul de ZB

Les courbes de l'impédance magnétique (module et phase) tracées pour le modèle présenté ont une bonne concordance par rapport aux valeurs expérimentales.

Malgré cette bonne concordance, une petite différence a été observée à la fréquence de 1 M Hz. L'explication probable à cette différence repose sur les hypothèses considérées pendant la simulation, comme la possibilité de déroulement du tore, par exemple. L'existence, dans ce modèle, d'une relation  $c/a$  ( $c$  = hauteur du tore et  $a$  = l'épaisseur du tore) petite peut contribuer aussi aux écarts trouvés. Donc la hauteur du tore peut avoir un rôle important dans ce type de calcul.

A la suite, la possibilité de déroulement du tore, l'influence de la hauteur, de la métallisation et de la répartition des spires seront étudiées.

### IV.2. Déroulement du tore

En magnétostatique, pour déduire  $\mu$ , nous mesurons l'inductance d'un tore de section rectangulaire (largeur  $a$ , hauteur  $c$ ). Nous supposons pour cela que l'induction  $B$  est uniforme sur la section de l'échantillon et que la longueur moyenne ( $l_{moy}$ ) de celui-ci vaut  $2\pi$  fois son

rayon moyenne ( $r_{moy}$ ); cela revient à assimiler le tore à une lame à faces parallèles de même section et de longueur  $l_{moy}$ . Evaluons l'erreur introduite par cette approximation.

Dans le calcul habituel, si  $n$  spires sont bobinées autour d'un tore de section  $S$ , on a :

$$\phi = nBS = n\mu HS$$

Par ailleurs, le théorème d'Ampère nous indique aussi, pour un courant  $I$  dans l'inductance :

$$H_{moy} = \frac{nI}{2\pi r_{moy}} = \frac{nI}{l_{moy}}$$

En notant  $L$  l'inductance de cette bobine,  $\mu$  se déduit de  $L$ ,  $n$  et des dimensions parmi lesquelles on fait apparaître la longueur de la ligne de flux moyenne :

$$L = \frac{\phi}{I} = n\mu \frac{n}{l_{moy}} S \quad \text{soit} \quad \mu = \frac{l_{moy}}{S} \frac{L}{n^2}$$

Dans le calcul sans approximation, le théorème d'Ampère conduit à :

$$H(r) = \frac{nI}{2\pi r}$$

Et donc :

$$\phi = n \int_{\min}^{\max} B(r) c dr = \mu c \frac{n^2 I}{2\pi r} \int_{\min}^{\max} \frac{dr}{r} = \mu c \frac{n^2 I}{2\pi r} \ln\left(\frac{r_{\max}}{r_{\min}}\right)$$

où  $\mu$  se déduit, comme précédemment, en formant le rapport  $L$  :

$$\mu = \frac{2\pi L}{c n^2} \frac{1}{\ln\left(\frac{r_{moy} + \frac{a}{2}}{r_{moy} - \frac{a}{2}}\right)}$$

On peut faire apparaître les variables géométriques précédentes,  $l_{moy}$  et  $S$ , ainsi qu'un terme correctif qui ne dépend que du rapport  $x = \frac{a}{2r_{moy}}$  :

$$\mu = \frac{l_{\text{moy}} L}{S n^2} \frac{x}{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = \frac{l_{\text{moy}} L}{S n^2} \left[ 1 - \frac{1}{12} \left(\frac{a}{r_{\text{moy}}}\right)^2 - \frac{1}{180} \left(\frac{a}{r_{\text{moy}}}\right)^4 + \dots \right]$$

Le développement limité ci-dessous a été utilisé [Spiegel-74] :

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \quad \text{avec } x \ll 1, \text{ ce qui est le cas pour } a \ll r_{\text{moy}}$$

En définitive, l'erreur commise à cause de l'approximation du tore a été donnée par le premier terme du développement. Pour un échantillon représentatif des dimensions étudiées ( $a = 5,75$  mm,  $c = 11$  mm et  $r_{\text{moy}} = 27,25$  mm), on trouve le premier terme correctif égal à  $-3,71 \times 10^{-3}$ , alors que le second vaut  $-1,10 \times 10^{-5}$ . On peut donc estimer que cette erreur est inférieure à 0,4% [Fouassier-98].

En magnétodynamique, puisque la déformation exploitée conserve le périmètre de la section et la longueur moyenne, l'erreur introduite devrait être faible également.

Afin de comparer les valeurs de flux magnétique et les profils du champ magnétique dans un tore et sa lame équivalente, une modélisation électromagnétique par éléments finis a été réalisée en utilisant la formulation Champ Magnétique ( $H$ ) 2D cartésien et axisymétrique.

Compte tenu des symétries, seul le quart supérieur droit du tore en coupe, ainsi que la moitié supérieure de la lame sont représentés. Les caractéristiques du matériau adoptées pour ce calcul,  $\bar{\mu} = \mu_0 (24 - j 330)$  et  $\bar{\epsilon} = \epsilon_0 (920 - j 9900)$ , ont été évaluées sur le ferrite N27 de Siemens à 10 MHz [Siemens-91].

Pour la modélisation le champ magnétique  $H$ , à l'extérieur de la lame, est considéré comme nul (pas de fuite). Le champ magnétique  $H$ , ne varie que dans la lame de ferrite (Figure III.6)

Les profils du champ magnétique dans chaque cas sont montrés dans les figures suivantes. Le champ est plus intense dans les régions claires, et plus faible dans les régions foncées. La présence de courants induits est importante, puisque le champ est plaqué sur les deux bords pour le modèle 2D-plan (Fig.III.7.(a)), ou sur le bord intérieur pour le modèle 2D-axisymétrique, avec une décroissance vers l'extérieur (Fig. III.7.(b)).

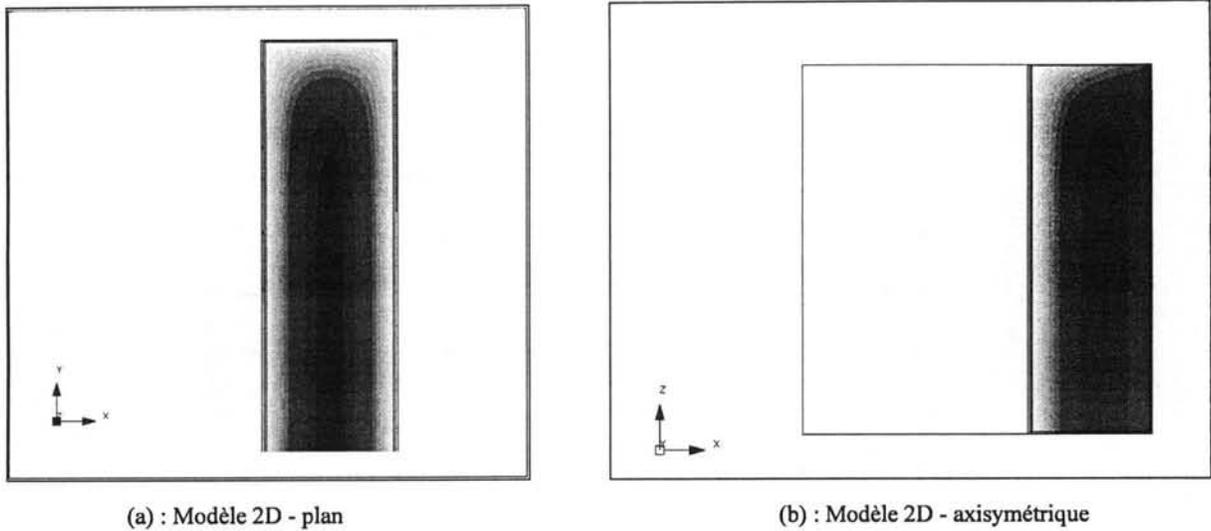


Fig.III.7 : Les profils du champ magnétique

Après, le flux magnétique  $\phi$  peut être calculé dans chacun des cas par,

$$\phi = \int \bar{\mu} \vec{H} dS \quad (3.8)$$

Pour un courant total de 10 Aeff à 10MHz, et avec les dimensions évoquées précédemment, le flux magnétique relatif à chacun des cas est reporté dans le tableau III.1. L'écart relatif entre les deux valeurs n'est que de 1,6% et il sera encore plus faible vers les basses fréquences où les courants induits sont moindres.

Cela justifie, a posteriori, que le déroulement du tore n'introduit que des erreurs minimales dans le calcul de ZB.

Formulation Champ Magnétique	2D axisymétrique (tore)	2D cartésien (lame)
Module Flux Magnétique (Wb)	0,314 x10 <sup>-5</sup>	0,309 x10 <sup>-5</sup>

Tableau III.3: Comparaison du flux magnétique dans le tore et sa lame équivalente

Pour être plus précis, on peut étudier l'influence du rapport  $a/r_{\text{moy}}$  sur le flux calculé en simulation 2D-axisymétrique (Fig. III.6). Lorsque ce rapport est inférieur à 0,8 le flux devient à 1% près, égal à celui obtenu pour la lame à faces parallèles équivalentes [Garcia-98/1, Garcia-98/2] (Fig. III.9). C'est le cas des tores utilisés en pratique, pour lesquels le rayon moyen est au moins deux fois plus grand que l'épaisseur.

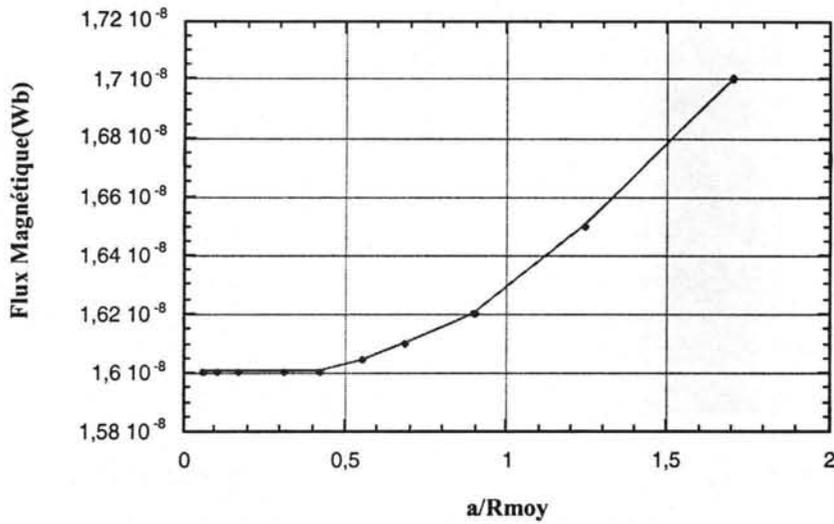


Fig. III.9: Le rapport  $a/R_{moy}$

### IV.3. L'influence de la hauteur

Afin de vérifier l'influence de la hauteur d'un tore de ferrite par rapport à la variation du champ  $H$ , quelques simulations ont été réalisées, où la relation  $c/a$  (hauteur / épaisseur) varie. La courbe ci-dessous présente l'atténuation du champ magnétique  $H_y$  selon la coordonnée  $x$  pour différentes hauteurs  $c$  fixées (Fig.III.10). Il est également comparé les variations de  $H_y$  entre les solutions 2D et 1D.

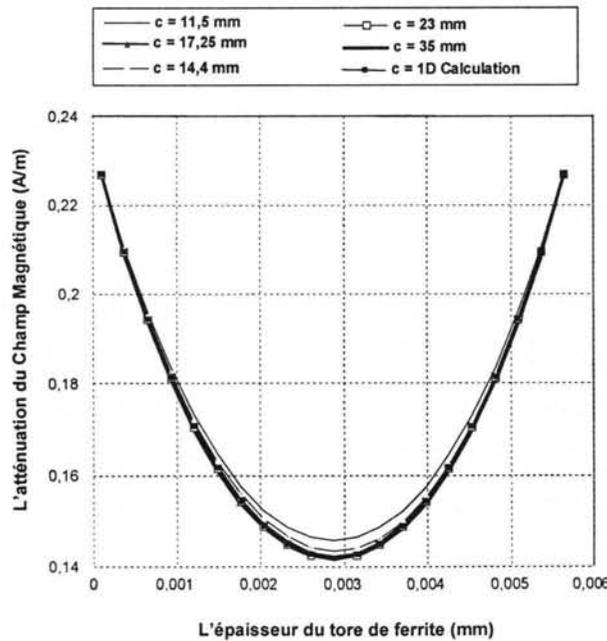


Fig. III.10 : L'atténuation du champ  $H$  selon l'épaisseur  $a$

Les variations de  $H_y$  suivant  $x$  montrent bien que les profils 2D du champ convergent vers celui du modèle 1D. Cette conclusion peut être chiffrée de façon plus quantitative si l'on s'intéresse au calcul du flux à travers une section de la lame.

	Module du flux (en Wb)
Calcul analytique 2D	$2,681 \times 10^{-8}$
Simulation 2D cartésien	$2,67 \times 10^{-8}$
Simulation 2D axisymétrique	$2,72 \times 10^{-8}$

Tableau III.4 : Comparaison calcul / simulation pour le flux (relation  $c/a = 2$ )

Les trois résultats présentés sont très proches (écart relatif inférieur à 1,5%). La comparaison avec la simulation en axisymétrique permet de valider l'hypothèse du tore déroulé. En effet, puisque l'écart est minime à 10 MHz, là où les profils sont nettement creusés en raison de la présence de courants induits importants, cette hypothèse sera d'autant plus vraie pour les fréquences inférieures.

Le tableau ci-dessous indique l'écart relatif entre les flux calculés à partir des modèles 2D et 1D. Dès que le rapport  $c/a$  est supérieur à 10, l'utilisation du modèle 1D s'avère suffisante [Fouassier-98].

$c/a$	2	4	10	20
$\Phi_{2D}$	$9,917 \times 10^{-10} - j 2,679 \times 10^{-8}$	$1,587 \times 10^{-9} - j 5,085 \times 10^{-8}$	$3,369 \times 10^{-9} - j 1,229 \times 10^{-7}$	$6,351 \times 10^{-9} - j 2,433 \times 10^{-7}$
$ \Phi_{2D} $	$2,681 \times 10^{-8}$	$5,087 \times 10^{-8}$	$1,230 \times 10^{-7}$	$2,434 \times 10^{-7}$
$\Phi_{1D}$	$5,960 \times 10^{-10} - j 2,406 \times 10^{-8}$	$1,192 \times 10^{-9} - j 4,812 \times 10^{-8}$	$2,980 \times 10^{-9} - j 1,203 \times 10^{-7}$	$5,960 \times 10^{-9} - j 2,406 \times 10^{-7}$
$ \Phi_{1D} $	$2,407 \times 10^{-8}$	$4,814 \times 10^{-8}$	$1,203 \times 10^{-7}$	$2,407 \times 10^{-7}$
Ecart	10,77%	5,53%	2,17%	1,11%

Tableau III.5 : Comparaison des flux (en Wb) 2D et 1D en fonction du rapport  $c/a$

Cette étude permet de tracer l'influence de la hauteur sur le flux magnétique dans le matériau (Fig. III.11). A 10 MHz, lorsque le rapport  $c/a$  devient supérieur à 10, le modèle 1D (hauteur infinie) convient bien (écart inférieur à 2%) [Garcia-98/1, Garcia-98/2]. C'est cependant rarement le cas en pratique dans la mesure où les tores étudiés présentent généralement une épaisseur et une hauteur de dimensions comparables.

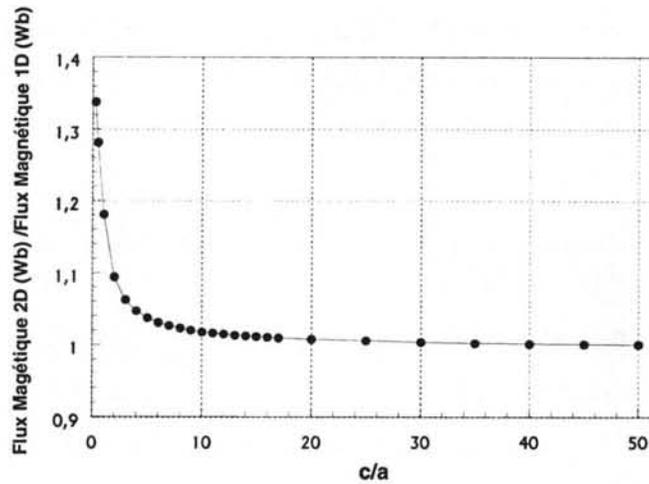


Fig.III.11 : rapport c/a et flux magnétique 1D/2D à 10Mhz

#### IV.4. L'influence et l'intérêt de la métallisation

Dans la définition du problème, les faces parallèles du tore sont considérées recouvertes, chacune, par un plan métallique parfaitement conducteur permettant une bonne mesure de son impédance électrique ZE [Fouassier-98].

Afin de connaître l'influence de cette métallisation dans le calcul de ZB, une simulation par éléments finis (Fig. III.12) a été réalisée où les métallisations sont définies comme des couches minces d'aluminium, d'épaisseur 2  $\mu\text{m}$  et de conductivité  $\sigma = 35,5 \cdot 10^8 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ .

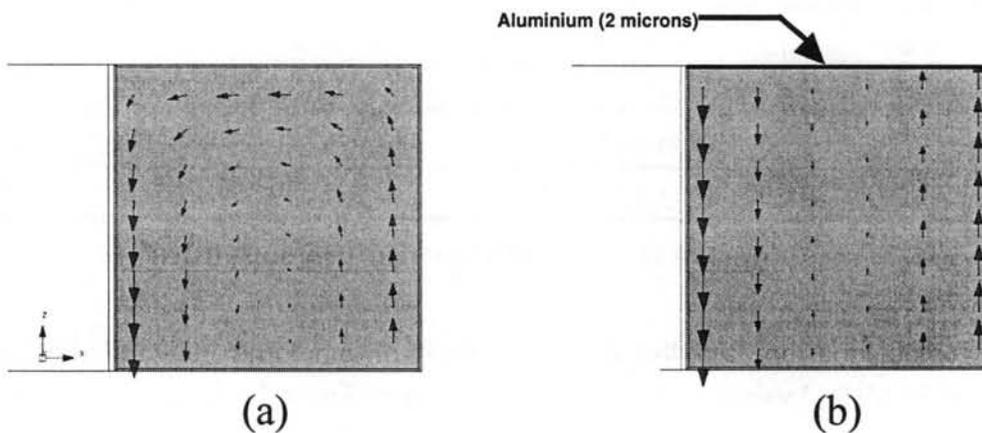


Fig.III.12 : L'influence de la métallisation sur les courants induits (ZB)

Les caractéristiques physiques de la ferrite utilisée sont données par  $\bar{\mu} = \mu_0 (24 - j 330)$  et  $\bar{\epsilon} = \epsilon_0 (920 - j 9900)$  [Plonus-78, Garcia-98/1, Garcia98/2].

Compte tenu des symétries, seule la partie supérieure de la section de droite est représentée pour modéliser le tore. La taille des flèches est directement proportionnelle à l'intensité du champ électrique. On voit que celui-ci est plaqué le long des faces latérales (courants de Foucault importants), et que son intensité maximale est atteinte sur le côté intérieur du tore.

En l'absence de toute métallisation (Fig.III.11.(a)), les lignes de champ tournent et se referment dans la section du tore, de façon évanescence vers le cœur du matériau. En présence d'aluminium (Fig.III.11.(b)), elles choisissent le chemin le plus conducteur. Dans ce dernier cas, toutes les lignes de champ sont parallèles à l'axe du tore et, semble-t-il, la longueur des vecteurs est constante sur une ligne de courant. L'étude peut donc se ramener à celle d'un modèle unidimensionnel, où le champ n'intervient plus que la coordonnée suivant l'épaisseur.

A titre indicatif le tableau III.6 compare le flux obtenu, avec et sans la présence de la métallisation avec l'aluminium, en exploitant une représentation respectivement 1D et 2D-axisymétrique.

	Simulation 2D axisymétrique sans métallisation (tore)	Simulation 2D axisymétrique avec métallisation (tore)	Modèle 1D (lame infinie)
$\Phi$	$0,314 \times 10^{-5}$	$0,312 \times 10^{-5}$	$0,309 \times 10^{-8}$

Tableau III.6 : Comparaison calcul / simulation pour le flux avec métallisation

L'écart est de l'ordre inférieur à 0,3%. L'étude 1D (tore déroulé, pas d'influence de la hauteur avec métallisation) peut donc être utilisée, avec une très bonne approximation, pour modéliser le tore. La simulation permet également d'assurer que la composante du champ électrique dans la direction radiale (simulation axisymétrique) est nulle en tout point de la lame, ce qui est en conformité avec l'allure du champ électrique tracé (Fig.III.12(b)).

L'épaisseur de la couche de métal n'est pas critique. La métallisation réalisée en pratique (1-2  $\mu\text{m}$ ) est largement suffisante. L'étude de la répartition des courants de Foucault montre que les lignes de champ cessent d'être perpendiculaires aux surfaces métalliques seulement si l'épaisseur du métal est divisée par 1000; ceci est essentiellement lié à la résistivité élevée du ferrite.

#### **IV.5. L'approche tridimensionnelle**

Le modèle analytique de tore déroulé, auparavant utilisé, faute d'une meilleure méthode d'approximation, est en fait un modèle 1D, qui impose sûrement, certaines erreurs de calcul sur le flux magnétique, en comparaison avec le tore réel.

C'est pour cela que ce problème est traité ici en trois dimensions, à l'aide de Flux3D. Cette modélisation est possible actuellement, à l'occasion de l'introduction de la perméabilité et de la permittivité complexes dans la méthode des éléments finis [Tudorachi-96].

Une étude tridimensionnelle à l'aide de Flux3D, a été réalisée, dont la géométrie est présentée dans la figure III.13. Le même tore, mais déroulé, en 3D (Fig.III.14), a été modélisé, pour pouvoir faire une comparaison entre les erreurs de calcul concernant le flux magnétique le long du tore entre les deux cas.

Une des hypothèses pour le modèle analytique dit que le bobinage uniformément réparti, est assimilable à une nappe de courant de densité superficielle pour le calcul de  $ZB$ , donc, avec ces modélisations tridimensionnelles les résultats trouvés en 2D axisymétrique (le calcul du flux magnétique) pourront aussi être comparés avec les résultats 3D .

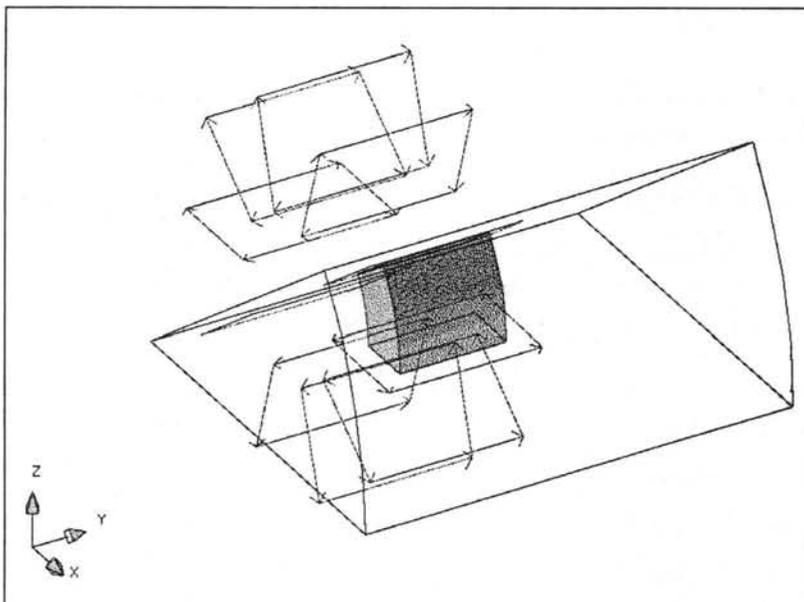


Fig. III.13 : Géométrie utilisée pour la modélisation d'un tore réel en 3D

#### IV.5.1. La géométrie 3D étudiée

La géométrie étudiée en Flux3D est simplifiée en tenant compte de toutes les symétries existantes pour augmenter l'efficacité concernant la taille mémoire requise de l'ordinateur et le temps de calcul. Seulement un dixième du tore, a été étudié, plus exactement la partie qui se trouve entre deux spires successives. La géométrie est caractérisée par: le rayon intérieur du tore  $r_{int} = 10,75$  mm, le rayon extérieur  $r_{ext} = 16,5$  mm, hauteur  $h = 11,5$  mm.

Cette étude a été faite pour un tore de ferrite caractérisé par:  $\rho = 1,3$  ( $\Omega.m$ ),  $\mu' = 24$ ,  $\mu'' = -330$ .

Les dix spires sont alimentées par un courant sinusoïdal de valeur crête 1A chacune, à la fréquence de 10 MHz.

Nous avons utilisé la formulation  $T\Phi$  pour la ferrite où il y a des courants induits et, dans la boîte d'air qui entoure le tore, la formulation en Potentiel Réduit [Tudorachi-96] a été appliquée.

Des contraintes surfaciques de symétrie normale ont été imposées pour les surfaces de la boîte d'air et du tore, qui sont dans les mêmes plans avec les deux spires. Pour les autres surfaces de la boîte d'air, des contraintes de symétrie tangentielle ont été imposées.

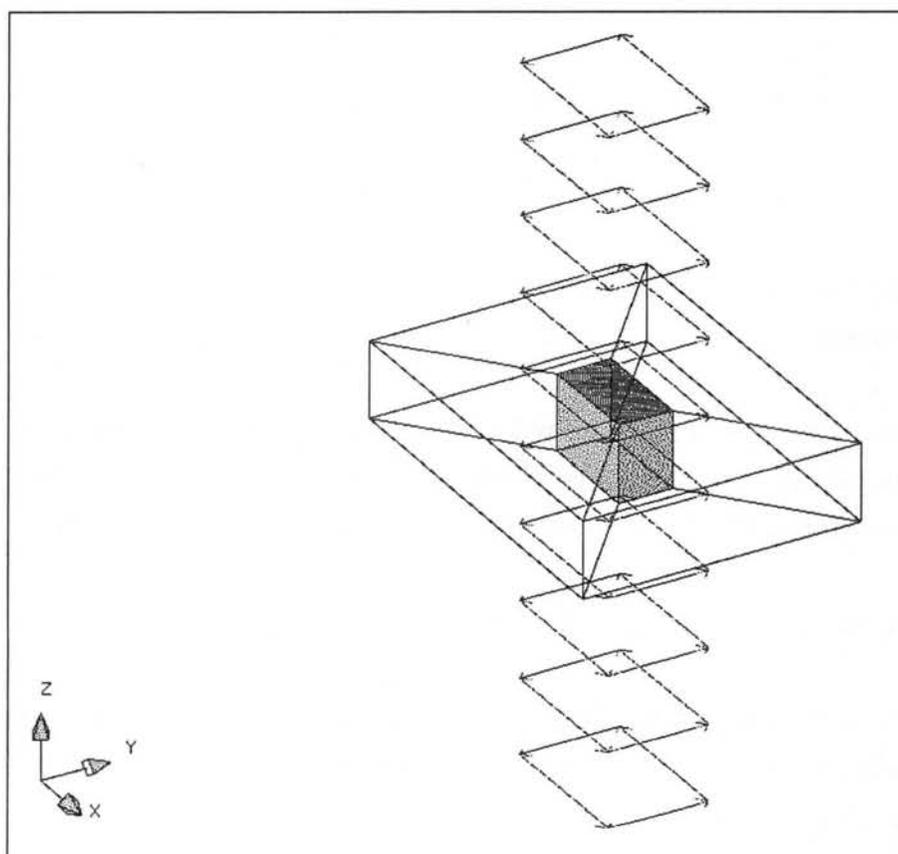


Fig. III.14 : Géométrie utilisée pour la modélisation d'un tore déroulé en 3D

Les valeurs du module du flux magnétique le long du tore sont montrées dans le tableau suivant.

Module Flux	Tore réel	Tore déroulé
(Wb)	$0,315 \times 10^{-5}$	$0,307 \times 10^{-5}$

Tableau III.7 : Module du flux magnétique

Ce que nous intéresse ici, c'est la différence entre le module du flux magnétique le long du tore pour le cas du tore réel et le tore déroulé. Ces erreurs sont: 2,54% .

#### IV.5.2. Le tore de ferrite avec métallisation

Les mêmes géométries (Fig.III.12) et (Fig.III.13), ont été étudiées en ajoutant deux plaques très minces d'argent en forme de couronnes circulaires au-dessous et au-dessus du tore. L'épaisseur des plaques d'argent est de 0.1 mm. Les caractéristiques de l'argent sont:  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma = 10000 \Omega^{-1}m^{-1}$ . La fréquence des courants qui passent par les dix spires est la même, 10 MHz. Les valeurs crêtes des courants sinusoïdales sont les mêmes 1A.

Les valeurs du module de flux magnétique le long du tore avec les plaques d'argent sont reportées dans le tableau suivant.

Module Flux	Tore réel	Tore déroulé
(Wb)	$0,310 \times 10^{-5}$	$0,300 \times 10^{-5}$

Tableau III.8 : Module du flux magnétique avec métallisation

Les erreurs entre le flux magnétique le long du tore pour les cas du tore réel et du tore déroulé exprimées en pourcentage sont de 3,22%

Les écarts trouvés dans les simulations précédentes (tore réel et déroulé) sont d'ordre de 3%. Nous pouvons constater que l'approximation géométrique de dérouler le tore peut être utilisée mais elle intervient peu dans le calcul du flux magnétique trouvé au long du tore.

#### IV.5.3. La comparaison entre les simulations 3D et 2D

Nous comparons maintenant les formulations Champ Magnétique en 2D et axisymétrique avec la formulation T-Omega ( $T \Phi$ ) en 3D, appliquées au modèle du tore réel (Fig.III.12) et au tore déroulé (Fig.III.13).

Les valeurs du module du flux magnétique obtenues par les deux formulations à chaque cas sont montrées ci-dessous:

Module Flux	Tore réel – 3D	Tore réel – 2D axi
(Wb)	$0,315 \times 10^{-5}$	$0,314 \times 10^{-5}$

Tableau III.9 : Module du flux magnétique pour le tore réel 3D et 2D axisymétrique

Module Flux	Tore déroulé – 3D	Tore déroulé – 2D plan
(Wb)	$0,307 \times 10^{-5}$	$0,309 \times 10^{-5}$

Tableau III.10 : Module du flux magnétique pour le tore déroulé 3D et 2D plan

### L'introduction de la plaque d'aluminium

Nous avons fait des simulations avec la même géométrie en ajoutant deux plaques très minces d'aluminium au-dessous et au-dessus du tore. Les caractéristiques de l'aluminium sont:

L'épaisseur des plaques:  $2 \times 10^{-3}$  (mm)

conductivité:  $35,5 \times 10^6$  ( $\Omega \cdot m$ )<sup>-1</sup>

Les valeurs du module du flux magnétique obtenues par les deux formulations sont montrés ci-dessous:

Module Flux	Tore réel 3D	2D axisymétrique
(Wb)	$0,318 \times 10^{-5}$	$0,312 \times 10^{-5}$

Tableau III.11 : Module du flux magnétique

Les simulation réalisées montrent q'une formulation 2D axisymétrique donne de bons résultats en comparaison avec une autre formulation tridimensionnelle. Les valeurs des flux magnétiques calculées par la formulation axisymétrique sont relativement proches par rapport à celles trouvées en 3D .

En 3D, la représentation de la répartition des spires (Fig.III.13), lesquelles ne sont pas très proches du tore de ferrite, intervient peu dans le calcul du flux magnétique. L'hypothèse utilisée pour la simulation axisymétrique, où le bobinage uniformément réparti est assimilable à une nappe de courant de densité superficielle, a été vérifiée et peut être bien utilisée.

## V. LE CALCUL DE ZE - L'impédance électrique

Pour calculer l'impédance électrique ZE par éléments finis, deux types de simulation seront réalisés. La première, basée sur un modèle bidimensionnel cartésien, utilisera une formulation électrodynamique. Cette formulation, décrite par l'expression (3.10), ne considère pas les phénomènes magnétiques et les résultats trouvés pourront être comparés avec la deuxième simulation.

Dans cette deuxième simulation, basée maintenant sur un modèle axisymétrique, une formulation qui considère les phénomènes de couplage électrique magnétique sera utilisée, la formulation Champ Magnétique ( $H$ ).

Le calcul de ZE par les deux formulations et aussi la comparaison des résultats seront présentes ensuite.

### V.1. Analyse Électrodynamique – Formulation bidimensionnelle

Dans cette simulation, un modèle cartésien 2D a été utilisé (Fig.III.15). La figure montre une lame de ferrite d'épaisseur 5,75 mm et d'une hauteur de 11,5 mm. Une différence de potentiel  $U = (V1 - V2)$  de 10 mV a été imposée entre les deux extrémités de la lame et l'on considère qu'il y a seulement une occurrence du champ dans l'intérieur.

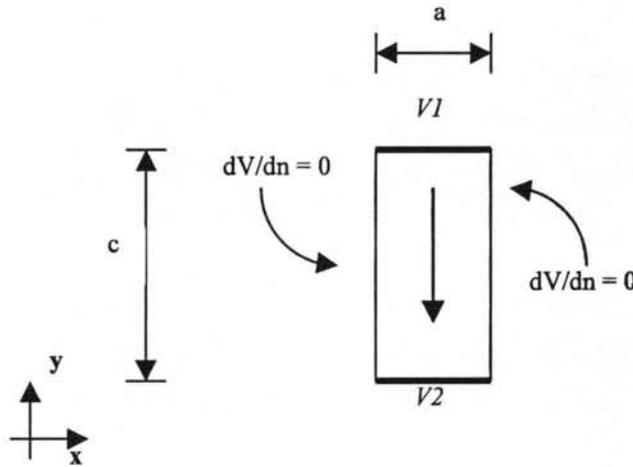


Fig.III.15 : Le modèle pour l'analyse électrodynamique

L'équation qui doit être résolue par éléments finis est :  $div((\sigma + j\omega \varepsilon) gradV) = 0$  (3.10)

A partir des résultats de la modélisation avec le modèle électrodynamique, la valeur de l'impédance ZE peut être trouvée à partir de la puissance apparente dissipée.

Avec une impédance Z quelconque, on peut définir la puissance apparente correspondante S par

$$S = UI^* = ZI^2 \quad (3.11)$$

où U est la différence de potentiel appliquée aux bornes de la plaque et I le courant qui le traverse. A partir de ces grandeurs, on peut également retrouver l'impédance Z de l'élément, car :

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{S}{I^2} = \frac{U^2}{S} \quad (3.12)$$

En ce qui concerne le modèle continu, la puissance  $S$  est obtenue de la manière suivante [Morweiser-93] :

$$S = \int_{\Omega} -\text{grad}V \cdot \vec{J}^* d\Omega \quad (3.13)$$

En effet si

$$\text{div}(V \cdot \vec{J}^*) = V \cdot \text{div} \vec{J}^* + \text{grad}V \cdot \vec{J}^*$$

et donc

$$\begin{aligned} S &= \int_{\Omega} -\text{div}(V \cdot \vec{J}^*) d\Omega + \int_{\Omega} V \cdot \text{div} \vec{J}^* d\Omega \\ &= \oint_{\Gamma} -(V \cdot \vec{J}^*) \cdot \vec{n} d\Gamma \\ &= V_2 \int_{\Gamma_2} \vec{J}_n^* d\Gamma - V_1 \int_{\Gamma_1} \vec{J}_n^* d\Gamma \\ &= (V_2 - V_1) \cdot I^* = U \cdot I^* \end{aligned}$$

Finalement la puissance  $S$  s'exprime en électrodynamique ( $\vec{E} = -\text{grad}V$ ) :

$$S = \int_{\Omega} (\sigma + j\omega \varepsilon) \vec{E}^2 d\Omega \quad (3.14)$$

Ainsi, les valeurs des ZE peuvent être déterminées en calculant (3.12).

## V.2. Analyse en utilisant la formulation Champ Magnétique - Axisymétrique

La formulation champ magnétique considère un accouplement magnétique électrique et le modèle de la Fig.III.16 a été utilisé dans la simulation. Pour analyser le même phénomène précédent (électrodynamique), mais en utilisant une formulation en champ magnétique, quelques considérations doivent être appliquées. Dans cette formulation la conditions aux limite à imposer n'est plus une différence de potentiel, mais, un champ magnétique. C'est pour cela que, si la lame est considérée extrêmement longue (influence de la métallisation) et

si le courant est imposée vers la même direction que dans le cas électrodynamique, les conditions aux limite à imposer sur le champ magnétique sont celles présentées à la Fig.III.16. Elle représente ainsi l'imposition d'un courant total  $I$  traversant la ferrite.

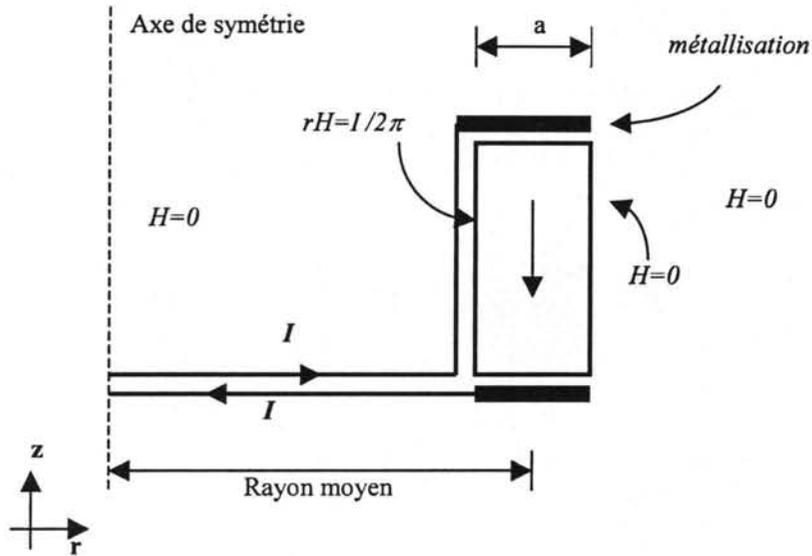


Fig.III.16 : Le modèle pour l'analyse avec la formulation champ magnétique

Dans ce cas l'équation résolue par éléments finis est:

$$\text{rot} \frac{1}{r} \left( \left( \frac{1}{\sigma + j\omega \varepsilon} \right) \text{rot} \vec{H}^* \right) + j\omega \bar{\mu} \frac{\vec{H}^*}{r} = 0 \quad (3.15)$$

où  $\vec{H}^* = r\vec{H}$

Quand la formulation champ magnétique est utilisée, l'expression (3.14) ne peut plus être utilisée pour calculer la puissance  $S$  parce que  $\vec{E} \neq -\text{grad}V$ .

$$\vec{E} = -\text{grad}V - j\omega \vec{A}$$

Dans ce cas, la puissance  $S$  peut être calculée soit si on reprend l'expression  $S = \int_{\Omega} -\text{grad}V \cdot \vec{J}^* d\Omega$ , qui est valable puisque la démonstration (3.13) ne fait aucune hypothèse,

$$-\text{grad}V = \vec{E} + j\omega \vec{A}$$

$$S = \int_{\Omega} (\vec{E} - j\omega \vec{A}) \cdot \vec{J}^* d\Omega = \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J}^* d\Omega - \int_{\Omega} (j\omega \vec{A}) \cdot \vec{J}^* d\Omega$$

et si  $\int_{\Omega} \vec{A} \cdot \vec{J}^* d\Omega = \int_{\Omega} \vec{B} \cdot \vec{H}^* d\Omega$  donc,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J}^* d\Omega - \int_{\Omega} (j\omega \vec{B} \cdot \vec{H}^*) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \vec{E} (\sigma + j\omega \epsilon) \cdot \vec{E}^* d\Omega - \int_{\Omega} j\omega \vec{B} (\mu' - j\mu'') H^* d\Omega \end{aligned} \quad (3.17)$$

Une autre façon de calculer  $S$  consiste à utiliser :

$$\begin{aligned} S &= \int_{\Omega} \text{div} (\vec{E} \times \vec{H}) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} + \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \text{div} (\vec{E} \times \vec{H}) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{H} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\Omega \end{aligned}$$

et finalement

$$\frac{1}{T} \int_0^T S dt = \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J}^* d\Omega - \int_{\Omega} (j\omega \vec{B} \cdot \vec{H}^*) d\Omega$$

et les valeurs de ZE peuvent être facilement calculés en utilisant l'expression (3.12).

Le tableau III.12, montre les valeurs de l'impédances électriques mesurées expérimentalement (ZE - Mesure), trouvées avec la formulation Électrodynamique (ZE - Formulation Électrodynamique) et quand la formulation Champ Magnétique (ZE - Formulation Champ Magnétique) a été utilisée, pour la gamme des fréquences données.

F	ZE – Formulation Électrodynamique		ZE – Formulation Champ Magnétique		ZE – Mesure	
	Module	Phase	Module	Phase	Module	Phase
1k	56,9121	-0,9447	56,068	-0,94453	55,87	-0,92
10k	55,006	-7,859	55,538	-7,85805	54,70	-7,83
30k	50,1135	-20,3595	52,0192	-20,35070	49,94	-20,28
100k	33,979	-42,9027	33,632	-42,8733	33,00	-42,59
300k	15,9703	-57,0002	13,804	-56,88	15,04	-56,06
1M	7,1956	-37,8958	6,429	-29,543	8,02	-37,03
(Hz)	( $\Omega$ )	( $^\circ$ )	( $\Omega$ )	( $^\circ$ )	( $\Omega$ )	( $^\circ$ )

Tableau III.12 : L'impédance ZE pour chaque fréquence

Les courbes comparatives entre les modules de l'impédance électrique ZE pour chaque formulation et aussi pour les valeurs mesurées expérimentalement sont montrées ci-dessous (Fig.III.17).

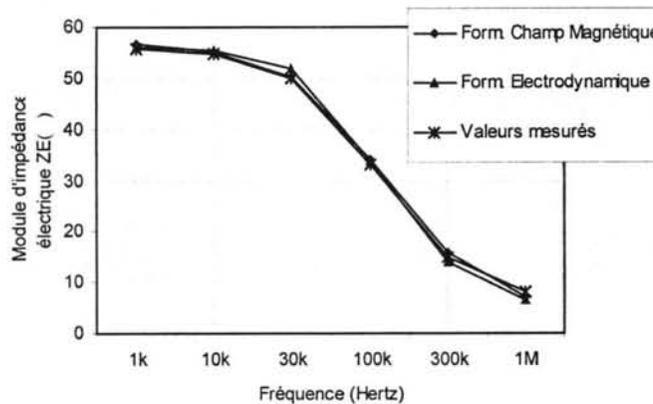


Fig.III.17 : Les modules de ZE en fonction des les fréquences

La Fig.III.18 montre les courbes comparatives entre les phases de l'impédance électrique ZE pour chaque formulation et aussi pour les valeurs mesurées expérimentalement.

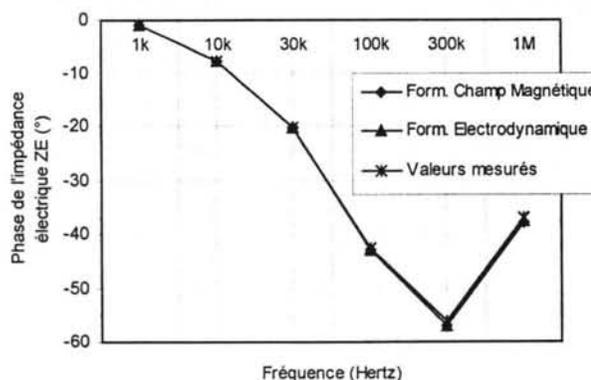


Fig.III.18 : Les phases de ZE en fonction des les fréquences

### **V.3. Conclusion pour le calcul de ZE**

Les résultats présentés dans les trois courbes de la Fig.III.17 et de la Fig.III.18, pour les modèles étudiés, ont une bonne concordance.

Il y a une différence entre les courbes qui peuvent être expliquées par :

- 1- La simulation électrodynamique 2D, n'admet pas un couplage magnétique électrique, et il y a une influence magnétique quand nous augmentons la fréquence ;
- 2- Au moment de la réalisation des mesures, les plaques métalliques ont été placées sur le tore de ferrite et, pendant la simulation par éléments finis, les plaques métalliques ont été négligées ;
- 3- Enfin il peut exister un phénomène de propagation en fréquence élevée, phénomène qui a été négligé avec les calculs tels qu'ils ont été imposés.

## V. CONCLUSION

Une nouvelle méthode de caractérisation des ferrites, basée sur deux mesures expérimentales (l'impédance magnétique ZB et l'impédance électrique ZE) a été proposée. Pour cela, quelques hypothèses ont été réalisées avec l'objectif de valider le modèle analytique (matériau supposé linéaire, homogène et isotrope).

Un schéma a été représenté dans la Fig.III.10, et donne une idée de la manière de retrouver par éléments finis, les valeurs de ZB et ZE expérimentaux à partir des valeurs du couple  $(\bar{\mu}, \bar{\epsilon})$  calculé analytiquement.

La possibilité de déroulement du tore de ferrite, l'influence de la hauteur et de la métallisation utilisée dans la mesure de ZE, ont été vérifiées par simulation, en utilisant deux formulations par éléments finis, la formulations Champ Magnétique et la formulation Electrodynamique.

Une étude numérique a été menée pour savoir quel rapport de dimensions devait posséder l'échantillon pour pouvoir être représenté par un modèle unidimensionnel plus simple. Ensuite, le cas particulier d'un tore dont les surfaces parallèles ont été métallisées, la simulation par éléments finis démontrent que le champ électromagnétique ne dépend que de l'épaisseur seule du matériau et donc, une étude unidimensionnelle peut être considérée valable.

Et finalement, une étude tridimensionnelle a été réalisée pour confirmer toutes les hypothèses concernant l'utilisation du modèle analytique proposé.

Tous ces développements ont été étudiés et formalisés pour répondre au besoin de posséder un modèle analytique précis, capable de représenter fidèlement le comportement électromagnétique complet d'un matériau magnétique sur une large plage de fréquence.

## **Chapitre IV**

### **La modélisation d'effets capacitifs dans les modèles électromagnétiques**



## I. INTRODUCTION

Depuis quelques années, en particulier en raison de l'accroissement des fréquences de travail des convertisseurs, la connaissance fine du comportement des composants bobinés est devenue une question de tout premier plan. Les progrès réalisés dans la compréhension des phénomènes physiques qui se développent au sein de ces composants et la possibilité de disposer d'un support de représentation des connaissances acquises sont, à notre sens, les deux conditions indispensables à l'amélioration des ensembles intégrant de tels composants.

Ces composants bobinés peuvent être représentés par des circuits équivalents qui doivent permettre de prendre en compte aussi bien le comportement magnétique qu'électrostatique du composant et, aboutir en plus, à une représentation convenable des pertes.

En haute fréquence ces composants bobinés présentent des effets capacitifs inter spires non négligeables et doivent être pris en compte non seulement pour l'analyse des harmoniques qui en résultent, mais aussi pour la conception des blindages dans la norme de la compatibilité électromagnétique et pour l'étude du vieillissement des matériaux diélectriques.

Traditionnellement, les problèmes électrostatiques et magnétiques sont étudiés séparément. Un modèle électrostatique est simple à employer mais exclut toute interaction magnétique - électrique qui devient non négligeable en haute fréquence. Une étude complète nécessite alors une résolution couplée des équations du champ magnétique et électrique.

L'objectif de ce chapitre est de montrer comment étudier les phénomènes d'interaction électrique magnétique dans le cadre d'une formulation éléments finis. Les résultats, appliqués au calcul de capacités parasites seront comparés aux méthodes d'analyses traditionnelles .

Tout d'abord le cas d'une inductance simple est présenté et nous montrons qu'une même cellule, constituée d'une inductance et d'une résistance en parallèle, permet la représentation de différents types de pertes. Ensuite nous montrons qu'au-delà de la première fréquence de résonance, les composants bobinés ont un comportement capacitif [Laveuve-90]. Il devient alors nécessaire de compléter le circuit équivalent par des capacités « parasites ».

Finalement, un modèle complet 2D est proposé dans le cadre de l'étude des bobines axisymétriques. Cette formulation, couplée avec les équations de circuit, est basée sur l'hypothèse que le courant de conduction et le courant de déplacement peuvent être étudiés séparément. Une étude comparant le calcul analytique et le calcul par éléments finis d'une impédance est finalement présenté.

## II. CAS D'UNE INDUCTANCE SIMPLE

### II.1. La mesure

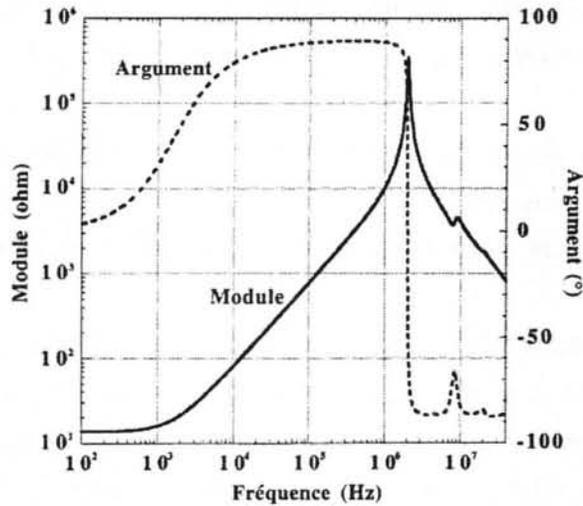


Figure 4.1 : Module et argument de l'impédance d'une inductance de 1,3 mH. Courbes mesurées

C'est le composant bobiné le plus élémentaire. Cependant, même lorsqu'il reste linéaire, son comportement est loin d'être idéal. Pour illustrer ce point, des mesures de l'impédance d'une inductance de 1,3 mH, ont été réalisées, entre 100 Hz et 40 MHz, à l'aide d'un pont de mesure d'impédance (HP 4194 A). Le diagramme de Bode de l'impédance mesurée est présenté dans la figure 4.1 [Blache-95].

### II.2 . Une représentation équivalente

Il est aisé de constater (figure 4.1) qu'en basse fréquence, « l'inductance » est en fait une résistance et qu'en haute fréquence, c'est une capacité. Cela nécessite, en termes de circuit équivalent, l'ajout de résistances et de capacités, à l'inductance idéale de départ. Les circuits présentés figure 4.2 sont des solutions possibles.

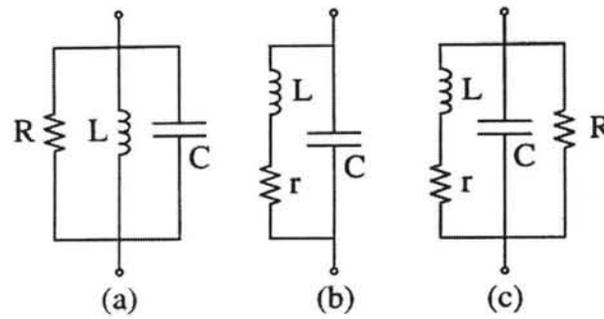


Figure 4.2 : Circuits équivalents utilisés pour représenter une inductance

Les deux premières représentations (4.2a, 4.2b) sont très répandues et certains analyseurs d'impédance fournissent automatiquement les valeurs des trois éléments du circuit qui procurent le meilleur accord modèle-expérience.

En comparant le diagramme de Bode de l'impédance mesurée (figure 4.1) avec ceux obtenus par le calcul pour les deux premiers circuits équivalents (4.2a, 4.2b), nous constatons que les courbes simulées (figure 4.3) sont différentes de celle mesurée : en basse fréquence pour le circuit 4.2a et à la fréquence de résonance pour le circuit 4.2b. Le circuit 4.2c regroupe les avantages des deux précédents: le diagramme de Bode de son impédance (figure 4.4) coïncide précisément avec celui mesuré et ce, du continu jusqu'à plus d'une décade au-delà de la fréquence de résonance.

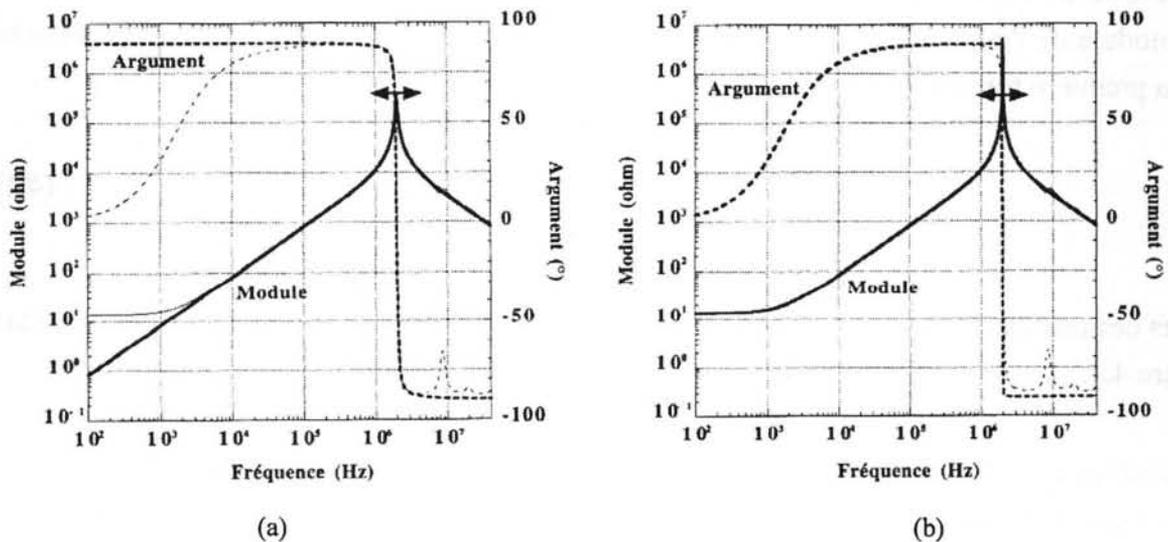


Figure 4.3 : Module de l'impédance mesuré (trait fin) et calculé en utilisant les circuits équivalents (a) et (b) de la figure 4.2 (trait gras)

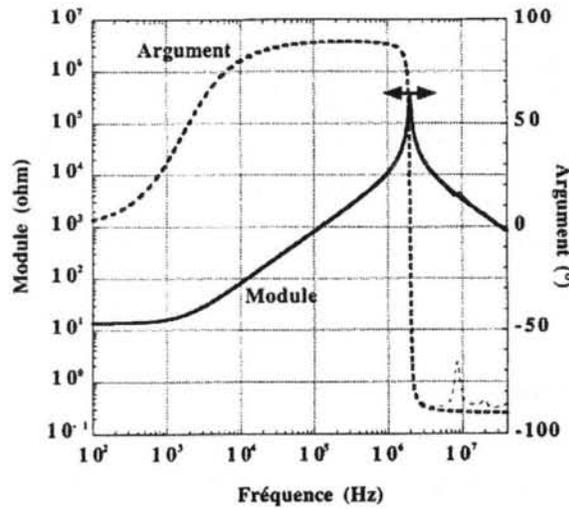


Figure 4.4 : Module de l'impédance mesuré (trait fin) et calculé en utilisant le circuit équivalent (c) de la figure 4.2 (trait gras)

### II.3. L'évaluation des constantes

En partant de la mesure, une méthode simple permet d'obtenir la valeur des composants du circuit équivalent (4.2c). En effet, « r » est donnée par la limite basse du module de l'impédance en basse fréquence. Il est intéressant de noter que cette valeur peut être aussi obtenue en utilisant la représentation Ls-Rs (inductance série - résistance série) directement accessible sur le pont de mesure d'impédance (HP 4194 A) [Blache-95]. Avec la même représentation, la valeur de  $L$  est également obtenue.  $R$  est ajustée pour donner la bonne valeur du module de l'impédance à la résonance.  $L$  étant connue,  $C$  est calculée grâce à l'expression de la première fréquence de résonance :

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (4.1)$$

Tous ces résultats sont résumés sur le diagramme de Bode asymptotique du module, présenté figure 4.4.

En pratique, les résistances séries et parallèles sont d'égale importance, même si, dans certains cas, l'une ou l'autre peut être négligée. La résistance parallèle peut en particulier intervenir bien avant la fréquence de résonance, à des fréquences où la capacité peut être négligée.

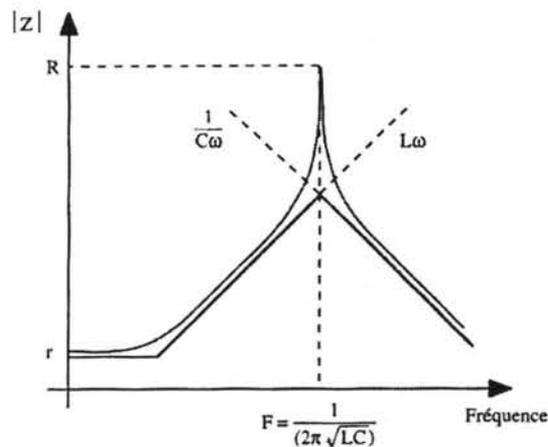


Figure 4.4 : Diagramme de Bode asymptotique du module d'une inductance

Une étude électrostatique s'avérait donc nécessaire, afin d'expliquer les phénomènes observés, de les quantifier et d'en déduire des règles de bobinage simples, qui permettent de diminuer les capacités parasites [Blache 95]. Dans ce chapitre, nous allons donc nous intéresser tout d'abord à l'étude électrostatique et ensuite à une étude complète, c'est à dire, magnétodynamique.

### III. LES MODELES ELECTROSTATIQUES POUR EVALUER ANALYTIQUEMENT LES CAPACITES PARASITES

L'approche utilisée pour déterminer les constantes électrostatiques du circuit équivalent est basée sur l'évaluation globale de l'énergie électrostatique stockée au sein du composant, accessible grâce à des mesures externes [Blache-95]. A ce titre, cette approche peut être qualifiée d'approche "macroscopique", la connaissance de la géométrie interne du composant n'étant pas requise. A l'opposé, l'étude de l'origine des capacités parasites nécessite un intérêt plus grand à cette géométrie interne. Nous qualifions donc ce type d'approche de "microscopique", et nous proposons deux modèles analytiques simples qui vont permettre de tenir compte de cette géométrie.

#### III.1. Le modèle plan

Dans le but d'évaluer l'énergie électrostatique stockée entre deux couches de spires, nous supposons, dans un premier temps, que les tensions aux bornes de toutes les spires d'une même couche sont identiques. Ainsi, le potentiel varie linéairement d'une extrémité à l'autre de cette couche. Cette observation est à la base d'un modèle simple (figure 4.6), que nous

appelons "modèle plan", et qui nous permet d'étudier le couplage électrostatique de deux couches de spires se faisant face.

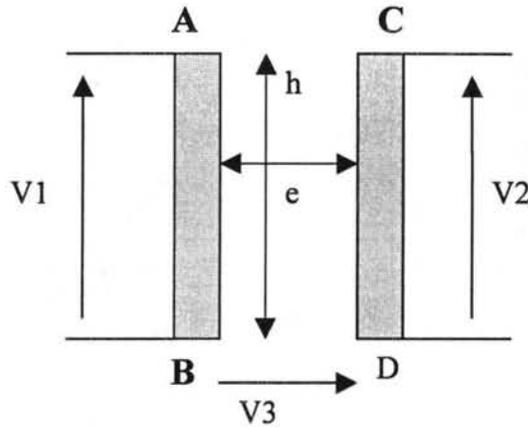


Figure 4.6 : Modèle plan utilisé pour l'étude analytique du couplage capacitif de deux couches de spires

### III.1.1. Une étude analytique

L'étude analytique de ce modèle permet d'exprimer l'énergie électrostatique  $W$  en fonction des tensions  $V1$  à  $V3$ . Tant que " $e$ " est très inférieure à " $h$ ", et dans la mesure où chaque enroulement n'est constitué que d'une seule couche, nous pouvons admettre que l'énergie  $W$  est stockée essentiellement dans le parallélépipède de section ABCD. En notant  $C_0$  la capacité du condensateur de même section et de longueur  $l$  (longueur moyenne d'une spire), nous obtenons pour  $W$  :

$$W = \frac{1}{2} C_0 \left[ \frac{1}{3} V_1^2 + \frac{1}{3} V_2^2 + V_3^2 - \frac{2}{3} V_1 V_2 - V_1 V_3 + V_2 V_3 \right]$$

$$C_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{hl}{e} \quad (4.2)$$

### III.1.2. Bobinage "continu" ou "discontinu"

Un autre intérêt du modèle plan est l'étude de l'incidence du mode de bobinage sur la valeur de la capacité parallèle d'un enroulement. Il existe en effet deux façons de bobiner une inductance multicouches. Soit le fil est bobiné de façon "continue", c'est à dire qu'il va alternativement d'un côté de l'enroulement à l'autre lorsqu'on change de couche (figure 4.7a),

soit il est bobiné de façon "discontinue", c'est à dire que toutes les couches sont bobinées dans la même direction, puis reliées l'une à l'autre par une connexion transversale (figure 4.7b).

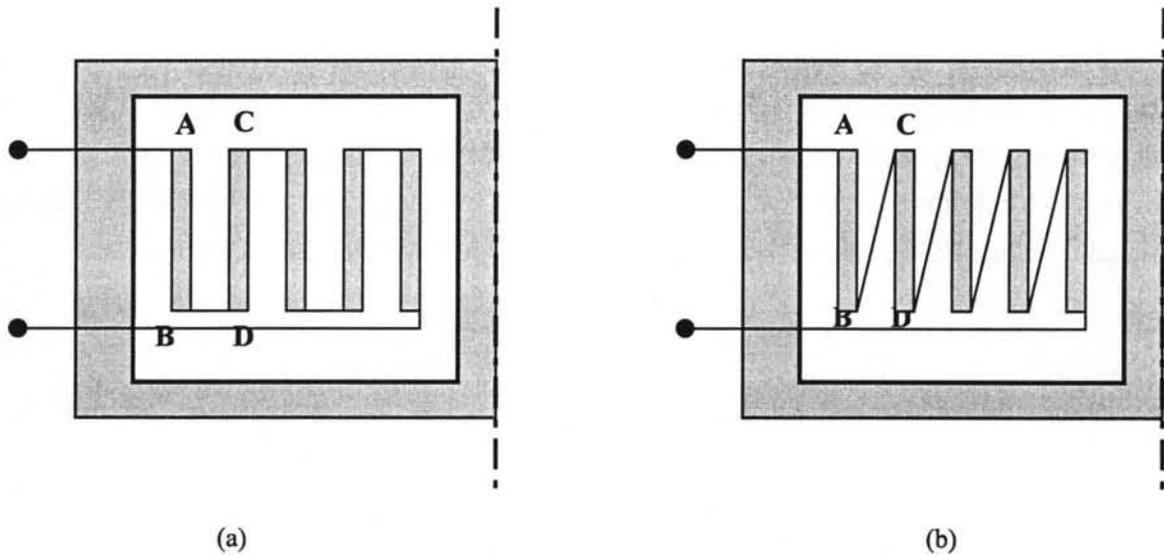


Figure 4.7 : Comparaison des deux modes de bobinage. Bobinage continu (a) et bobinage discontinu (b)

En notant  $V$  la tension aux bornes d'une couche, nous pouvons évaluer l'énergie électrostatique  $W$  stockée entre deux couches successives.

Pour le bobinage continu :  $V_1 = V$  ;  $V_2 = -V$  ;  $V_3 = 0$

$W'$  se déduit alors de la relation (1) :

$$W' = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} C_0 \right) V^2 \quad (4.3)$$

Pareillement, pour le bobinage discontinu :  $V_1 = V$  ;  $V_2 = V$  ;  $V_3 = -V$

D'après (1), nous obtenons :

$$W'' = \frac{1}{2} C_0 V^2 \quad (4.4)$$

Ainsi, la capacité parallèle existante entre les deux couches diminue de 25 % lorsque nous passons du mode de bobinage continu au mode de bobinage discontinu. En pratique, même si cette diminution n'atteint pas tout à fait les 25 % théoriques, ce mode de bobinage s'avère réellement avantageux [Blache-95].

### III.1.3. Bobinage en couches ou en galettes

En utilisant toujours le modèle plan, nous pouvons trouver une autre façon de diminuer la capacité parallèle d'un bobinage. Supposons que l'enroulement remplit une fenêtre rectangulaire de hauteur  $H$  supérieure à sa largeur  $L$ . Nous allons montrer qu'il est préférable de ranger les spires parallèlement au plus petit côté de la fenêtre (de dimension  $L$ ).

Dans la fenêtre définie ci-dessous, les fils peuvent être bobinés soit en "couches" parallèles au grand côté (figure 4.8a), soit en "galettes" parallèles au petit côté (figure 4.8b).

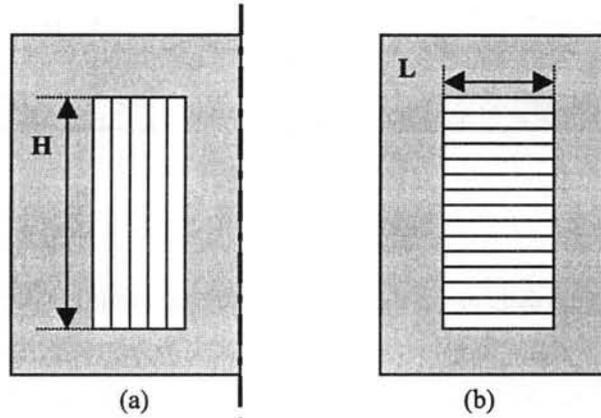


Figure 4.8 : Comparaison des deux orientations possibles pour le bobinage dans une fenêtre rectangulaire : en couches (a) ou en galettes (b)

Les termes de "couches" et de "galettes" sont utilisés pour abrégier, en supposant que la dimension  $H$  de la fenêtre est parallèle à la jambe centrale. Pour effectuer une comparaison valable de ces deux dispositifs, nous supposons que les fils sont identiques et que leurs répartitions dans l'espace sont les mêmes dans les deux cas. Dans ces conditions, seule la répartition des potentiels change d'un mode de bobinage à l'autre.

Pour évaluer l'énergie électrostatique  $W_E$  stockée, nous supposons que, dans les deux cas, le mode de bobinage est discontinu. Notons  $l$  la longueur moyenne d'une spire,  $V_b$  la tension totale aux bornes de la bobine,  $D$  le pas séparant deux fils voisins et  $e$  l'espace libre entre ces mêmes fils ( $e < D$ ). Le bobinage en couche (a) possède  $L/D$  couches soumises chacune à une tension  $V = V_b \frac{D}{L}$  et la capacité intercouche vaut  $C_0 = \epsilon_0 \epsilon_r L \frac{H}{e}$ , si bien que  $W_E$  peut s'écrire, d'après la relation (4) :

$$W_E = \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \frac{l H}{e} \cdot \left( V_b \frac{D}{L} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \frac{l H}{L} \cdot \frac{D}{e} \cdot V_b^2 \quad (4.5)$$

Par ailleurs, l'expression de l'énergie électrostatique en fonction de la capacité parallèle  $C_p$  s'écrit :

$$W_E = \frac{1}{2} C_p V_b^2 \quad (4.6)$$

En comparant ces deux expressions (5) et (6), nous déduisons directement la valeur de  $C_p$  :

$$C_p = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{l H}{L} \cdot \frac{D}{e} \quad (4.7)$$

Le même raisonnement appliqué au bobinage en galettes (b) conduit à une expression similaire, moyennant la permutation de  $L$  et  $H$ . Ainsi, lorsque  $H > L$ , le bobinage en galettes permet théoriquement de diviser par un rapport  $(H/L)^2$ , la capacité résultante d'un bobinage classique en couches.

Ce résultat paraît logique. En effet, pour que les capacités soient minimales, il faut que l'énergie électrostatique stockée soit minimale. Or l'énergie électrostatique, qui occupe le même volume dans les deux cas, est proportionnelle au carré du champ électrique. Ce dernier résultant de l'application du potentiel  $V_b$  sur une longueur  $H$  dans un cas, et sur une largeur  $L$  dans l'autre, nous parvenons immédiatement à la même conclusion.

### III.2. Le modèle pavé

Alors que le modèle plan fait appel à une représentation simplifiée des couches de spires, le modèle pavé s'appuie, lui, sur une description géométrique un peu plus fine : il tient compte, de façon approximative, de la forme des conducteurs. Ceux-ci sont supposés répartis de façon régulière (figure 4.9) dans la fenêtre de bobinage. L'énergie électrostatique totale est évaluée en additionnant les énergies stockées entre conducteurs, se faisant face uniquement. Cela implique que les capacités entre conducteurs non face à face soient négligées et que celles existantes entre les conducteurs du pourtour de la fenêtre et des matériaux extérieurs soient supposées nulles. Il suffit donc de définir deux capacités uniquement :  $C_H$ , la capacité horizontale entre deux fils, et  $C_V$ , la capacité verticale.

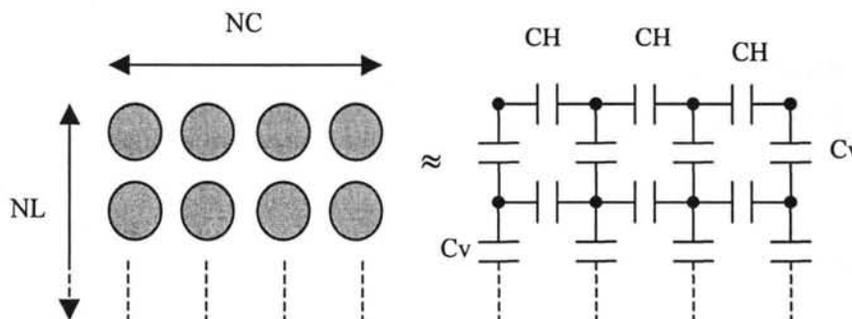


Figure 4.9 : Modèle pavé : les fils sont disposés suivant un maillage régulier dans la fenêtre de bobinage

Nous pouvons définir  $W_E$ , l'énergie électrostatique stockée dans le bobinage, par :

$$W_E = \frac{1}{2} C_p V_b^2 \quad (4.8)$$

$C_p$  représente la capacité parallèle de la bobine et  $V_b$ , la tension sur ces bornes. En définissant  $N_C$  et  $N_L$ , le nombre de colonnes et de lignes (figure 4.9), et en notant  $\Delta V$  la tension aux bornes d'une spire, nous pouvons encore écrire que :

$$V_b = N_C N_L \Delta V \quad (4.9)$$

Localement, l'énergie électrostatique stockée dépend du carré des différences de potentiel entre spires voisines, c'est à dire que cette énergie est en fonction de l'ordre dans laquelle sont disposées les spires dans la fenêtre. A titre d'exemple, dans le cas d'un bobinage continu en couches, nous obtenons [Blache-95]:

$$W_E' = \frac{1}{2} (N_C - 1) \frac{(4N_L^2 - 1)N_L}{3} C_H (\Delta V)^2 + \frac{1}{2} N_C (N_L - 1) C_V (\Delta V)^2 \quad (4.10)$$

A partir des relations (4.8) et (4.9), nous en déduisons la valeur de  $C_p$  :

$$C_p = \frac{(N_C - 1) (4N_L^2 - 1)}{N_C^2 N_L} C_H + \frac{(N_L - 1)}{N_L^2} C_V \quad (4.11)$$

Notons que ces expressions sont obtenues en utilisant l'identité suivante :

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3} \quad (4.12)$$

( $n$  termes)

Si le bobinage est réalisé en continu et en galettes, la nouvelle valeur de  $C_p$  est obtenue en permutant  $N_L$  et  $N_C$ , ainsi que  $C_H$  et  $C_V$ , dans la relation (4.11).

Dans un exemple, si l'on considère  $C_H = C_V = C$ ,  $N_L = 100$  et  $N_C = 10$ , on peut obtenir  $C_p$  pour différents types de bobinages comme montre le tableau suivant :

Type de bobinage	Couche et continue	Couche et discontinue	Galette et continue	Galette et discontinue
$C_H = C_V = C$ $N_L = 100$ $N_C = 10$	$12C_H + \frac{99}{100000}C_V$ $= 12 C$	$9C_H + \frac{99}{100000}C_V$ $= 9 C$	$\frac{9}{10000}C_H + \frac{13167}{100000}C_V$ $= 0,13C$	$\frac{9}{10000}C_H + \frac{99}{1000}C_V$ $= 0,1 C$

Tableau 4.2 : Calcul de Cp pour différents types de bobinages

Ainsi, dans cet exemple, pour un nombre suffisant de spires et en supposant  $C_V$  égale à  $C_H$ , le modèle confirme le bien fondé des règles de bobinages utilisées: facteur 4/3 et rapport  $\left(\frac{N_C}{N_L}\right)^2$  gagnés respectivement grâce au mode discontinu et au bobinage parallèle au plus petit côté. Ce modèle offre en outre la possibilité d'introduire, pour  $C_V$  et  $C_H$ , des expressions tenant compte de la géométrie du bobinage et de la présence des isolants. Ainsi, il devient possible d'optimiser le rapport  $\left(\frac{C_V}{C_H}\right)$  (en insérant, par exemple, des isolants entre couches), de tester des distributions de potentiels très irrégulières, ou même, d'essayer des pavages différents (fils méplats, hexagonaux, etc...).

Pour conclure, ce modèle introduit suffisamment de degrés de liberté qui permettent la comparaison réaliste de diverses solutions technologiques. Les prévisions quantitatives sont certes approximatives, mais elle s'obtiennent rapidement à l'aide de calculs simples [Blache-95].

#### IV. MODELISATION ELEMENTS FINIS BIDIMENSIONNELLE

L'utilisation d'un logiciel de calcul basé sur les éléments finis pour évaluer les capacités parasites d'un composant bobiné n'est pas une innovation [Collins 90]. Il nous a cependant semblé intéressant de confronter les prévisions d'un tel outil, à celles des calculs analytiques précédents. Nous proposons donc de modéliser, grâce au logiciel de calcul éléments finis FLUX2D et FLUX3D [CEDRAT 94], différents types de bobinages.

##### IV.1. Le cas électrostatique

Nous avons démontré précédemment qu'en électrostatique, la position de chaque conducteur constituant le bobinage a de l'importance, car pour minimiser l'énergie électrostatique stockée, il faut minimiser les différences de potentiel existantes entre conducteurs voisins. La capacité parasite d'un composant bobiné a des origines multiples : capacité entre enroulements, entre

couches d'un même enroulement, entre spires d'une même couche, entre enroulements et noyau, etc...

Nous avons choisi de faire porter la modélisation sur une inductance qui comporte 3 x 2 spires disposées en couches ou en galettes. La répartition des spires est parfaitement connue et suffisamment régulière pour être facilement introduite dans le logiciel FLUX3D .

#### IV.1.1. Bobinage continu ou discontinu

Dans un problème d'électrostatique, l'inconnue recherchée est le potentiel scalaire  $V$ . Le logiciel FLUX3D permet de calculer cette inconnue en tout point de l'espace. Selon la répartition de ce potentiel, dans le cas des inductances utilisées, il y a une différence entre bobinage continu ou discontinu. La représentation du potentiel et les conditions aux limites sont montrés par la figure 4.10.

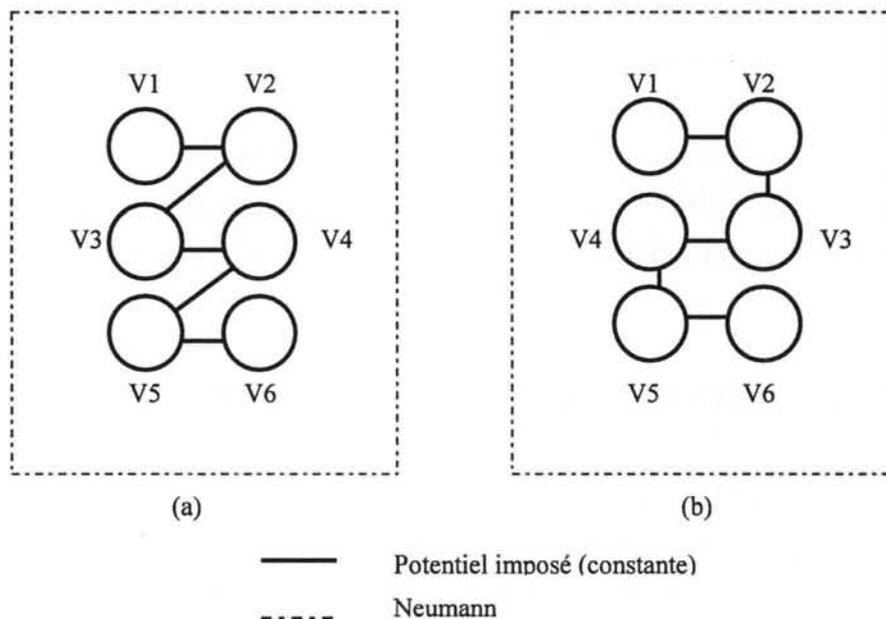


Figure 4.10 : Géométrie utilisée, conditions aux limites et répartition des potentiels dans le cas d'un bobinage continu (a) ou discontinu (b) en galettes

Notons que nous avons opté, dans les deux cas de figure, pour le bobinage en galettes qui nous permet de ne représenter que 3 spires de l'inductance.

Si nous fixons arbitrairement la différence de potentiel existant entre deux spires consécutives à 1 V, l'utilisation d'une condition aux limites de type Dirichlet (potentiel constant) sur le contour de chaque fil, permet de simuler la répartition du potentiel au sein de l'enroulement. Nous pouvons ainsi, uniquement en modifiant la valeur des potentiels affectés à chaque fil,

simuler le bobinage continu ou discontinu (figure 4.7). Le calcul de l'énergie électrostatique totale de l'enroulement se déduit ensuite de l'énergie élémentaire stockée entre chaque galette. Nous avons effectué ce calcul dans le cas d'une géométrie plane (inductance "déroulée") ou axisymétrique. L'écart obtenu dans un cas puis dans l'autre sur la valeur de l'énergie électrostatique, est très inférieur à 1 %.

Connaissant la valeur de l'énergie totale stockée et de la tension aux bornes de l'enroulement (identique pour le bobinage continu ou discontinu), il est facile d'en déduire la valeur de la capacité parallèle totale, grâce à l'équation (4.8).

#### IV.1.2. Bobinage en couches ou en galettes

Dans le cas du bobinage en couches, pour permettre de mieux visualiser la répartition du champ électrique dans la bobine, on a décidé de représenter la géométrie complète, bien que cela ne soit pas absolument nécessaire pour le calcul de la capacité totale. Comme précédemment, la répartition des potentiels pour chaque type de bobinage s'effectue par le biais des conditions aux limites imposées sur le contour de chaque fil (figure 4.11).

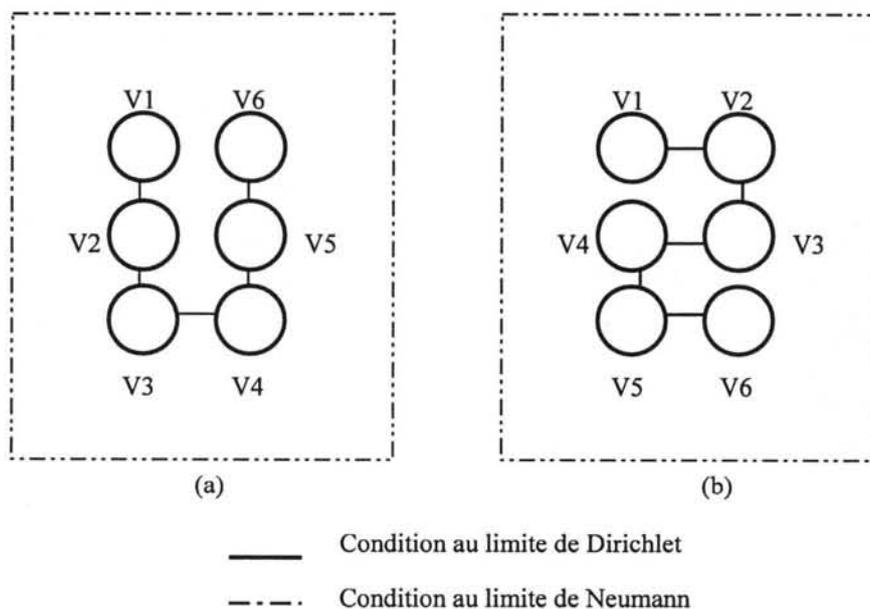


Figure 4.11 : Géométrie utilisée et répartition des potentiels dans le cas du bobinage continu en couches (a) ou en galettes (b)

Pour pouvoir effectuer une comparaison entre les deux prototypes réalisés, nous avons choisi dans les deux cas, le mode de bobinage continu.

### IV.1.3. Le répartition des potentiels

Grâce à la dernière géométrie présentée, nous pouvons visualiser la répartition des potentiels dans la bobine (figure 4.12).

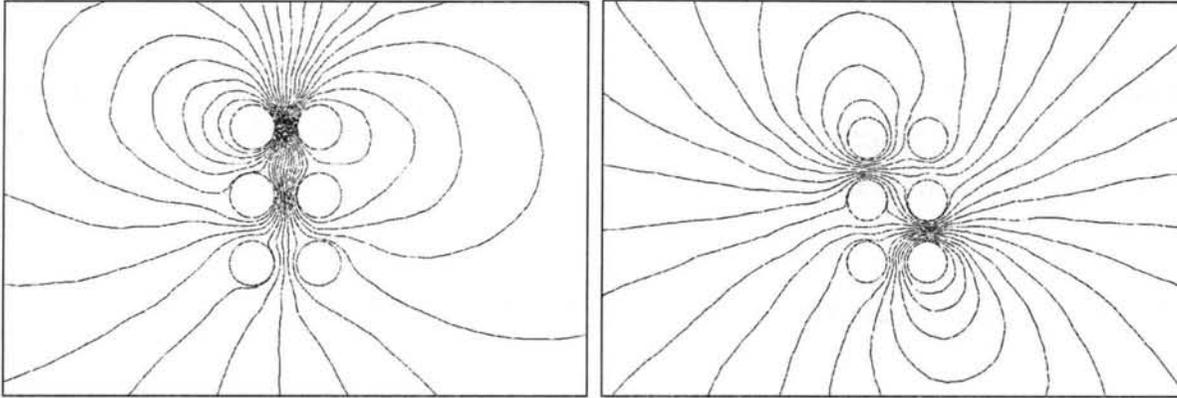


Figure 4.12 : Carte des isolines du potentiel  $V$  pour le bobinage continu en couches (a) ou en galettes (b)

Nous observons sur cette carte que la répartition des potentiels peut être rapprochée de celle obtenue avec des "condensateur équivalents" plans dont les armatures sont, selon le cas, disposées suivant le petit ou le grand côté de la fenêtre de bobinage (figure 4.13).

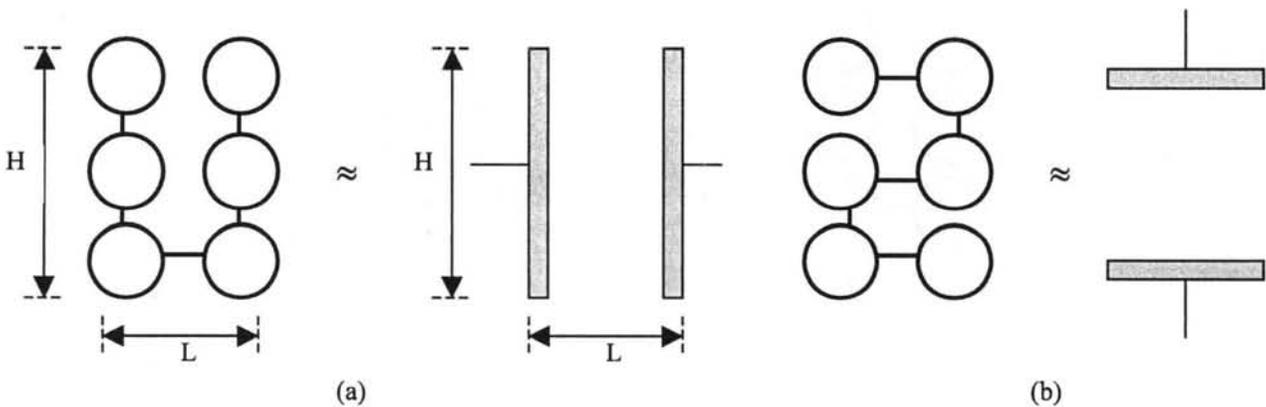


Figure 4.13 : Condensateurs "équivalents" permettant d'obtenir la même répartition des potentiels

Pour que cette équivalence soit valide, il faut encore que le potentiel varie linéairement tout au long de chaque armature. Dans ces conditions, nous mettons encore une fois en évidence l'importance du rapport  $H/L$  dans l'expression de l'énergie électrostatique stockée : il est en effet clair que l'énergie stockée par le condensateur (a) (bobinage en couches) ne peut être que

supérieure à celle stockée par le condensateur (b) (bobinage en galettes) si la tension appliquée à chaque condensateur est identique.

Le cas étudié ici est un cas idéal simple : les spires sont uniformément réparties, il n'y a pas de pièces conductrices à proximité (noyau ou écrans), le nombre de spires est peu élevé. Il n'en demeure pas moins que la distance séparant les fils est difficile à connaître avec précision.

## **IV.2. Le cas magnétodynamique**

Dans le cas du calcul des capacités parasites en magnétodynamique, il semble nécessaire de conserver le système de Maxwell complet, en sachant que parfois il est habituel de réduire les équations de Maxwell en un système plus simple comme l'électrostatique par exemple. Ce système complet doit aussi prendre en compte les phénomènes de propagation d'ondes. Même dans le cas d'une géométrie bidimensionnelle, les simplifications possibles sont loin d'être aussi claires que dans le problème des courants induits par exemple (Quoique justifier l'oubli des effets capacitifs ne soit pas si simple) [Nicolet-97].

Traditionnellement, la détermination des capacités parasites (inter spires) dans les bobines est effectuée par le calcul du champ électrique en statique, en imposant à chaque spire une fraction de tension connue selon le sens et l'ordre du bobinage. Ce modèle est simple à mettre en œuvre mais exclut toute interaction magnétique - électrique qui devient non négligeable en haute fréquence.

Différents travaux ont été présentés sur les applications de l'interaction électrique magnétique, et à partir desquels différentes méthodes ont été développées. Les approches analytiques et expérimentales [Laveuve-91], et par éléments finis [Vandelac-88] ont été réalisées en étudiant séparément les phénomènes électriques et magnétiques.

### ***IV.2.1. Les travaux récents***

Récemment ont été développés des travaux de recherche qui prennent en compte les interactions magnétiques électriques, et qui ont étudié la prise en compte simultanée de ces types de phénomènes.

Une étude tridimensionnelle a été proposée par [Morweiser-93]. Cette étude montre que la méthode des éléments finis peut être adaptée pour parvenir à une modélisation de composants

passifs. Trois modèles physiques sont utilisés afin de décrire les différents phénomènes qui peuvent avoir une influence importante sur le fonctionnement du composant.

Le modèle électrostatique permet d'analyser en détail les phénomènes capacitifs d'un composant. Ainsi, nous pouvons déterminer les capacités des différentes parties d'un composant en tenant compte de la géométrie exacte du dispositif. Cela peut être nécessaire lorsque les effets de bord ou de couplage prennent de l'importance. Ce modèle est donc particulièrement intéressant pour des composants où les éléments capacitifs possèdent une géométrie très complexe.

Afin de compléter la modélisation électrique, il devient nécessaire d'élargir le modèle électrostatique pour intégrer les propriétés conductrices (modèle électrodynamique). Il permet, jusqu'à une certaine fréquence, de déterminer les paramètres d'un schéma équivalent électrique sous forme de résistances et capacités. Au cas où ce schéma serait difficile à établir, on pourrait même directement calculer des fonctions de transfert ou des impédances en fonction de la fréquence.

Pour la modélisation à des fréquences élevées, l'influence du champ magnétique sur le fonctionnement du composant n'est plus négligeable. Un modèle magnétique devient nécessaire afin de tenir compte de l'inductance d'un composant. Cependant, une telle modélisation s'avère relativement coûteuse pour les géométries typiques des composants passifs. Des structures minces comme les électrodes provoquent un maillage très important du domaine d'étude. Ainsi pour des géométries complexes, la modélisation reste encore très difficile. Pour des condensateurs simples, le calcul d'inductance permet de compléter le schéma équivalent. Il est alors valable pour une plus grande gamme de fréquences.

Cette étude a montré que la modélisation avec la méthode des éléments finis est bien adaptée pour une caractérisation électrique des composants passifs. En utilisant une technique appropriée, des résultats de bonne qualité peuvent être obtenus. Cependant, une modélisation à des fréquences élevées pose encore certaines difficultés. Si la validité du modèle utilisé a pu être vérifiée pour des condensateurs simples, son application à des géométries complexes est encore limitée par la puissance des moyens informatiques.

Une formulation proposée par [Charpentier-96] est basée sur une division particulière du domaine tridimensionnel permettant un calcul 2D. Cette formulation permet la prise en compte des phénomènes d'interactions électromagnétiques, des courants de déplacement, et permet la résolution simultanée des équations du champ magnétique et électrique. Une considération géométrique est nécessaire pour utiliser cette formulation: les dispositifs

électromagnétiques utilisés doivent avoir une symétrie de translation suivant l'axe « z ». La formulation est basée dans le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  et scalaire électrique  $V$ .

Pour modéliser les effets capacitifs dans un composant bobiné, par exemple, le potentiel vecteur est considéré parallèle au axe « z ». Cette hypothèse est correcte si le courant de conduction est considéré au direction au long du conducteur et le courant de déplacement dans le plan (x,y).

Le champ électrique peut être décomposé en deux vecteurs orthogonaux :

$$\vec{E} = \vec{E}_z + \vec{E}_{xy}$$

$\vec{E}_z$  est la composante le long de l'axe de translation donné par :

$$\vec{E}_z = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial z}$$

Et  $\vec{E}_{xy}$  est la composante dans le plan (x,y). Si les composants  $A_x$  et  $A_y$  du potentiel vecteur magnétique sont négligées :

$$\vec{E}_{xy} = -\text{grad}V_{xy}$$

L'équation  $\text{div}D = \rho$  dans le plan (x,y) s'écrit :

$$-\text{div}(\text{grad}V)_{xy} = \rho$$

En dehors des conducteurs la densité de charge  $\rho$  est nulle. Dans les conducteurs, où les coefficient  $\tau = \epsilon / \sigma$ , appelé temps de relaxation transversal, est trop petit, la densité de charge  $\rho$  peut être considéré comme nulle aussi. Alors, chaque conducteur peut être considéré comme un domaine équipotentiel dans le plan (x,y).

Le potentiel d'un conducteur n'est pas constant le long de l'axe « z », donc l'axe « z » doit être subdivisé en sections. Chaque section correspond à un plan (x,y) perpendiculaire à « z ».

Deux types de courants de déplacement doivent être considérés, l'un dû au champ  $\vec{E}_z$  ( $Jd_z$ ) et l'autre dû au champ  $\vec{E}_{xy}$  ( $Jd_{xy}$ ).

La composante  $Jd_z$  est suivant l'axe « z » et le potentiel vecteur créé par elle demeure suivant cet axe. La composante  $Jd_{xy}$  crée un champ magnétique dans la direction de « z ». Puisque la composante de l'induction est parallèle à l'axe du conducteur, elle n'induit aucun flux dans le conducteur, ni une différence de potentiel due à la variation du flux. Nous pouvons alors négliger l'influence de cette composante sur le comportement global du dispositif et ne pas le prendre en considération.

Dans ce cas le champ magnétique a deux composantes et le potentiel vecteur seulement une suivant le long de l'axe « z » .

Les hypothèses utilisées par cette formulation :

1. le potentiel vecteur  $\vec{A}$  a une seule composante le long de l'axe de translation « z »
2. les densités de charge sont nulles ;
3. le potentiel vecteur  $\vec{A}$  et le scalaire  $V$  sont constantes le long de « z » dans une section.

Une analyse des effets capacitifs dans les inductances bobinées pour une géométrie bidimensionnelle a été proposée par [Nicolet-97]. Le modèle est ensuite simplifié pour introduire une discrétisation « éléments finis transversaux - circuit équivalent longitudinal » puis un circuit équivalent total.

Le modèle proposé par [Nicolet-97] peut être considéré comme une combinaison de la magnétodynamique et des ondes TM. Le système bidimensionnel est constitué de conducteurs parallèles à un axe, où « z » est la coordonnée longitudinale associée à la direction commune des conducteurs, et « x, y » les coordonnées dans un plan transversal perpendiculaire à la direction de « z ».

Il est assez difficile d'établir les conditions aux limites à partir de la considération du bobinage étudié, donc des simplifications de ce modèle sont proposées pour la modélisation numérique.

Les hypothèses sont imposées de façon à réussir la résolution des différents problèmes transversaux et enfin discrétiser le problème suivant l'axe « z ». On obtient de cette manière une suite de problèmes transversaux (tranches transversales) plans électrostatiques (potentiels fixés sur les frontières) et électromagnétiques (magnétodynamiques si on considère  $\varepsilon = 0$ ) en conservant les courants dans les tranches.

Les problèmes transversaux sont mis en équation à l'aide de la méthode des éléments finis et sont ensuite aisément connectés entre eux par des équations de circuit qui prennent en compte

la succession des tranches, l'interconnexion des différents conducteurs et d'éventuels circuits extérieurs.

Une approche encore plus simplifiée décrit en [Nicolet-97], consiste à chercher un schéma équivalent. Dans le cas d'un problème à deux conducteurs, la résolution d'un problème électrostatique transversal permet de calculer la capacité transversale ( $C_T$ ) et la résistance transversale ( $R_T$ ).

On peut donc se contenter de la résolution d'un seul problème électrostatique et remplacer l'ensemble des problèmes électrostatiques par des éléments  $R_T$   $C_T$  équivalents.

Dans le cas des problèmes électromagnétiques, si l'on néglige  $\varepsilon$ , on peut également déduire un circuit  $R_Z$   $L_Z$  longitudinal équivalent à partir d'un seul problème magnétodynamique. Ici les éléments dépendent de la fréquence en raison de l'effet pelliculaire. On peut réintroduire un effet capacitif longitudinal en remplaçant  $R_Z$  par  $R_Z (1 + j\varepsilon/\omega\sigma)$ . La figure 4.14 montre une cellule équivalente à une tranche de problème à deux conducteurs.

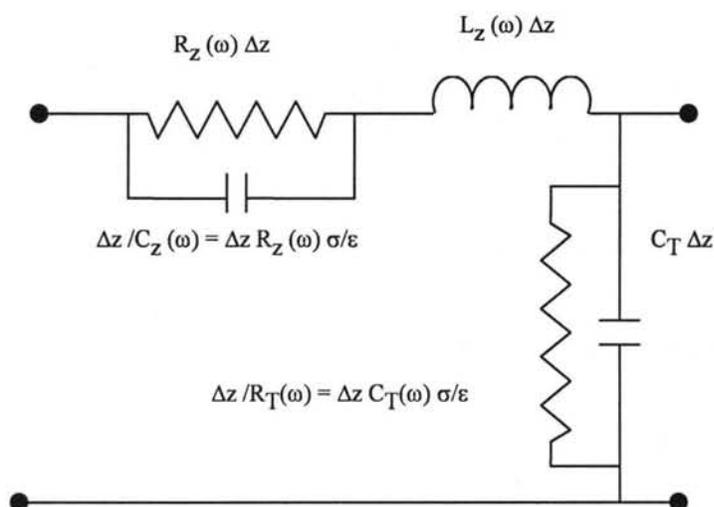


Figure 4.14: Cellule équivalente à une tranche  $\Delta z$

Cette approche se généralise au cas d'un nombre quelconque de conducteurs en utilisant des impédances matricielles équivalentes. A partir de deux problèmes plans (un électrostatique et un magnétodynamique) un modèle de ligne équivalente qui intègre les effets capacitifs peut être établi.

Dans [Ren-97], une formulation magnétodynamique axisymétrique en haute fréquence incluant le courant de déplacement a été présentée. Elle permet d'étudier les interactions magnétique et électrique dans les bobines et la formulation est basée sur l'hypothèse que le courant de déplacement est faible devant le courant de conduction dans le conducteur.

Dans le même esprit nous avons développé une nouvelle formulation 2D axisymétrique par éléments finis couplé avec les équations de circuit. L'objectif est de pouvoir vérifier l'interaction magnétique électrique en résolvant un seul problème et étudier les effets capacitifs des bobines utilisées en haute fréquence.

#### IV.2.1. Les hypothèses de la formulation

Cette formulation est basée sur l'hypothèse que le courant de déplacement peut être séparé du courant de conduction. Les deux courants peuvent alors être étudiés dans les deux directions en quadrature: le plan (r-z) d'une part, la direction le long des conducteurs (direction azimutale) d'autre part.

Nous appliquons notre formulation au calcul du champ électromagnétique dans une bobine ayant une structure axisymétrique. La bobine est composée de  $n$  spires aux bornes desquelles on applique une tension sinusoïdale d'amplitude  $U$ . En négligeant les charges électriques, les équations du champ à résoudre sont:

$$\text{rot}\vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \quad (4.13)$$

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} = (\sigma + j\omega \varepsilon) \vec{E} \quad (4.14)$$

où  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $\varepsilon$  sont respectivement la perméabilité, la conductivité et la permittivité.

L'équation (4.14) implique la loi de conservation de courants,

$$\text{div}(\vec{J} + j\omega \vec{D}) = 0$$

L'équation (4.13) permet d'exprimer le champ électrique et par les potentiels vecteur  $\vec{A}$  et scalaire  $V$ :

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} - \text{grad}V$$

Afin d'aboutir à la formulation, les suivantes considérations sont prises:

1. Dans une bobine axisymétrique, on considère le courant  $J$  n'a qu'une composante le long des conducteurs (direction azimutale);
2. Dans la direction azimutale le courant de déplacement  $j\omega \vec{D}$ , très faible devant le courant de conduction est négligé;
3. Seul le courant de déplacement  $j\omega \vec{D}$  dans le plan (r-z) est pris en compte ( $\sigma = 0$ );

4. Il n'existe pas d'accumulation de charges dans les conducteurs. Le potentiel électrique est alors constant sur une section d'un conducteur ;

#### IV.2.2. La formulation axisymétrique

A partir des hypothèses, nous pouvons séparer le courant de déplacement du courant de conduction. Dans chaque conducteur, (cf. Chapitre III), la densité de courant est donnée par les relations:

$$I = \int_{\Omega_k} \vec{J}_T d\Omega_k = \int_{\Omega_k} -j\omega \sigma \vec{A} d\Omega_k - r \text{Grad} V \int_{\Omega_k} \frac{\sigma}{r} d\Omega_k$$

où  $r \text{Grad} V = j\omega \frac{(\Psi_2 - \Psi_1)}{2\pi r}$  est constant, et le courant que traverse le conducteur est défini

par :

$$I = -j\omega \int_{\Omega_k} \frac{\sigma}{r} \vec{A}^* d\Omega_k - \int_{\Omega_k} j\omega \frac{\sigma}{2\pi r} (\Psi_2 - \Psi_1) d\Omega_k \quad (4.16)$$

Par contre dans le plan (r-z), le courant de déplacement n'est pas négligé et l'équation  $\text{div}(\vec{J} + j\omega \vec{D}) = 0$  conduit à

$$\text{div}(j\omega \varepsilon \text{grad} V) = 0$$

et si  $V = j\omega \Psi$ , où  $\Psi$  est le potentiel intégré dans le temps,

$$\text{div}(\omega^2 \varepsilon \text{grad} \Psi) = 0$$

La discrétisation de l'ensemble des contributions des courants, conduit au système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{2\pi}{r} \left( \int \text{rot} W_i \nu \text{rot} W_j + j\omega \int \sigma \alpha_i \alpha_j \right) & 0 & -j\omega \int \frac{\sigma}{r} \alpha_i & j\omega \int \frac{\sigma}{r} \alpha_i \\ 0 & - \int_{\Omega-\Sigma\Omega_i} \text{grad} \alpha_i \varepsilon \omega^2 \text{grad} \alpha_j & 0 & 0 \\ -j\omega \int \frac{\sigma}{r} \alpha_j & 0 & -j\omega \int \frac{\sigma}{2\pi r} & j\omega \int \frac{\sigma}{2\pi r} \\ j\omega \int \frac{\sigma}{r} \alpha_j & 0 & j\omega \int \frac{\sigma}{2\pi r} & -j\omega \int \frac{\sigma}{2\pi r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \Psi \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}$$

**IV.2.3. L'étude d'une bobine**

Une bobine axisymétrique de la figure 4.15 est étudiée par la présente formulation. Le bobinage est continu en couche et les conditions aux limites utilisées pendant la simulation sont montrées dans la figure 4.16.

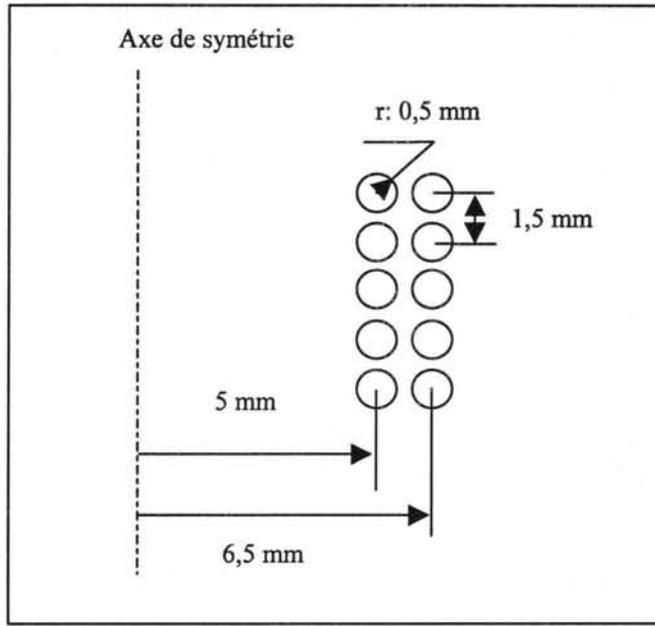
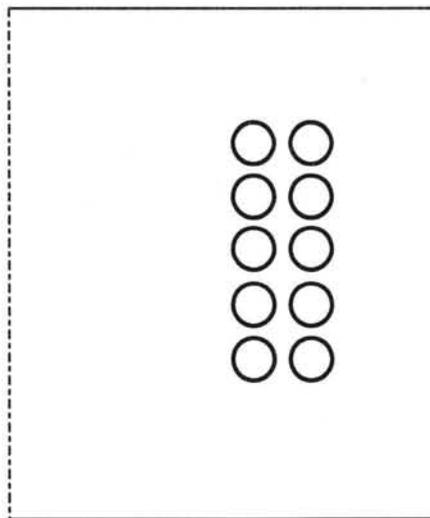
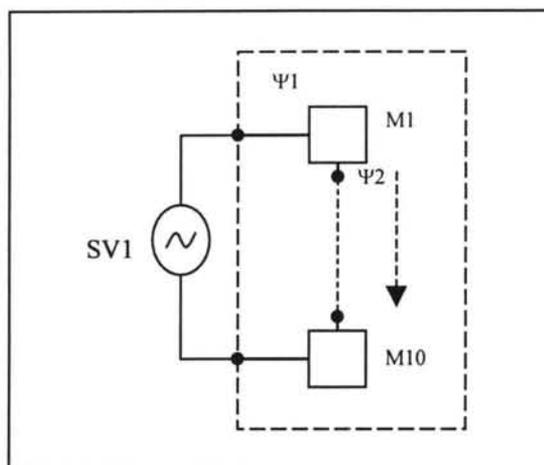


Figure 4.15 : Géométrie axisymétrique utilisée dans le cas d'un bobinage continu en couche



- Dirichlet (les valeurs de  $\Delta\Psi$  du circuit électrique)
- Neumann
- Axe de symétrie

Figure 4.16 : Conditions aux limites utilisées dans la simulation



SV1 : source de tension

M1 à M10 : composants massifs du circuit électrique

$\Delta\Psi = \Psi_2 - \Psi_1$  : Tension sur chaque composant du circuit

Figure 4.17 : Circuit électrique utilisé dans la simulation de la bobine axisymétrique

La figure 4.17 montre le circuit électrique utilisé dans la simulation. Les figures 4.18 et 4.19 montrent respectivement la répartition des flux magnétiques et les lignes équipotentiels électriques dans le plan (r-z) lorsqu'une tension de 10 volts (SV1) à 50kHz est appliquée aux bornes de la bobine.

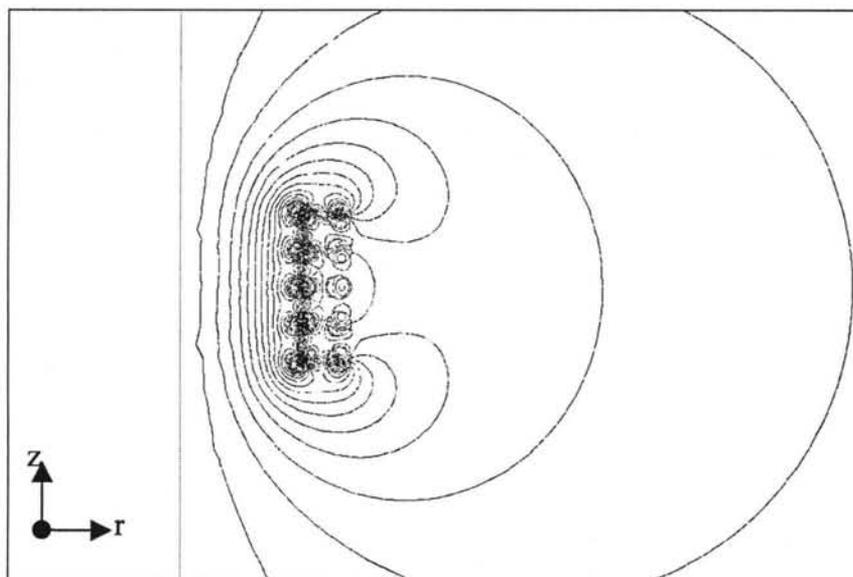


Figure 4.18 : Flux magnétiques (partie réelle)

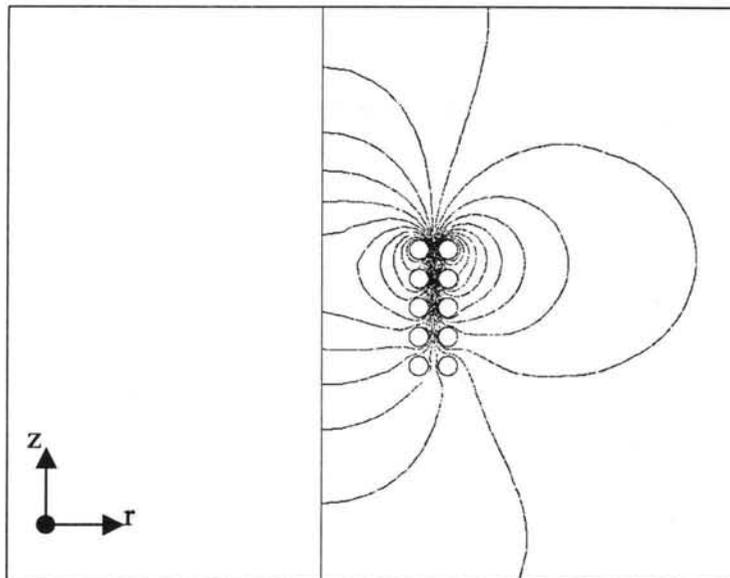


Figure 4.19 : Lignes équipotentielles électriques (partie réelle).

## V. CALCUL DE L'IMPEDANCE EQUIVALENTE $Z_{eq}$ D'UNE BOBINE

Pour continuer à valider la formulation, une analyse comparative entre deux méthodes de calcul d'impédance équivalente a été proposée.

L'objectif est de calculer l'impédance en fonction de la fréquence d'une géométrie comme celle de la figure 4.20, en utilisant une formulation « découplée », c'est à dire, traiter le problème magnétique et électrique séparément ; et après calculer l'impédance en utilisant la formulation complète.

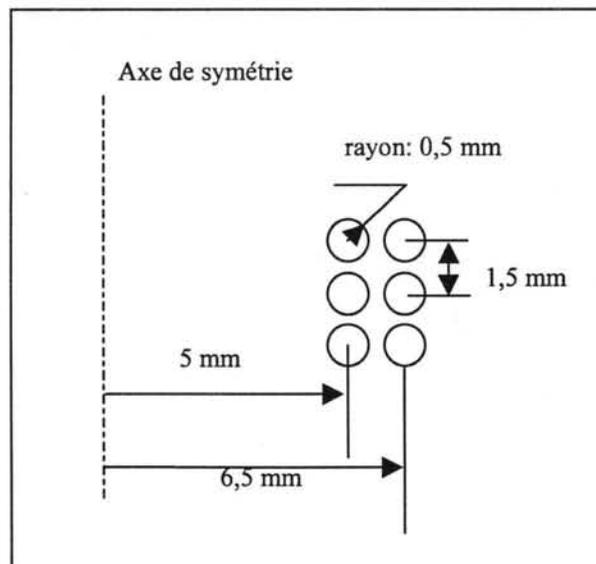


Figure 4.20 : Géométrie d'une bobine 3x2 spires

L'impédance équivalente d'une bobine (comme de la figure précédente), peut être définie par un circuit équivalent. Il est aisé de constater qu'en basse fréquence, la "bobine" est en fait une résistance et qu'en haute fréquence, c'est une capacité. Cela nécessite, en terme de circuit équivalent, l'ajout de résistances et de capacités, à l'inductance. Le circuit équivalent est représenté par la figure 4.21.

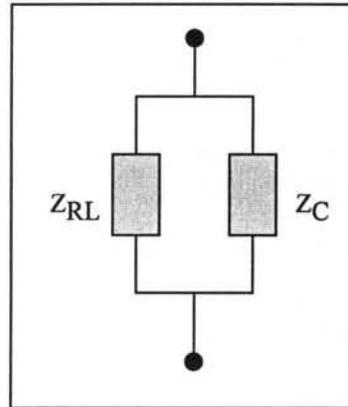


Figure 4.21 : Le circuit équivalent

$$Z_{RL} = R + j\omega L \quad (4.17)$$

$$Z_c = \frac{1}{j\omega C} \quad Z_{eq} = \frac{Z_{RL} \cdot Z_C}{Z_{RL} + Z_C}$$

où  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $Z_{eq}$  sont la résistance, l'inductance, la capacitance et l'impédance équivalent respectivement.

La premier partie du calcul consiste à trouver les valeurs de  $R, L$  et  $C$  pour compléter le circuit équivalent.

Pour calculer la résistance  $R$ , si on suppose :

$$\ell = \text{longueur} = 1 \text{ (m)}$$

$$S = \text{surface de chaque spire} = 7,85398 \times 10^{-7} \text{ (m}^2\text{)}$$

$$\rho = \text{résistivité} = 1,85 \times 10^{-8} \text{ (\Omega.m)}$$

La résistance peut être calculé par la relation suivante :

$$R = \rho \frac{\ell}{S}$$

Résistance électrique	Calcul analytique
$R \text{ (}\Omega\text{)}$	$141,1 \times 10^{-3}$

Ensuite, pour calculer la capacitance, une étude électrostatique par éléments finis a été réalisée, et l'énergie électrostatique  $W_e$  peut être calculée par :

$$W_e = \frac{1}{2} \int \epsilon \vec{E}^2 d\Omega \quad \text{et} \quad W_e = \frac{1}{2} CV^2$$

d'où le valeur de la capacitance  $C$  peut être calculé et donnée par :

	Calcul électrostatique
L'énergie électrostatique $W_e$ ( J )	0,12054x10 <sup>-10</sup>
Capacitance $C$ ( F )	2,418x10 <sup>-11</sup>

Et finalement, pour le valeur de l'inductance  $L$ , on a réalisé une simulation magnétostatique et on a obtenu :

L'inductance	Calcul magnétostatique
$L$ ( H )	2,202075x10 <sup>-5</sup>

Avec les valeurs de  $R, L$  et  $C$ , trouvées, on peut calculer, par les expressions (4.17),  $Z_{RL}$ ,  $Z_C$  et  $Z_{eq}$  et tracer la courbe du module de l'impédance équivalente par rapport la fréquence (figure 4.22) calculée avec l'équation 4.17.

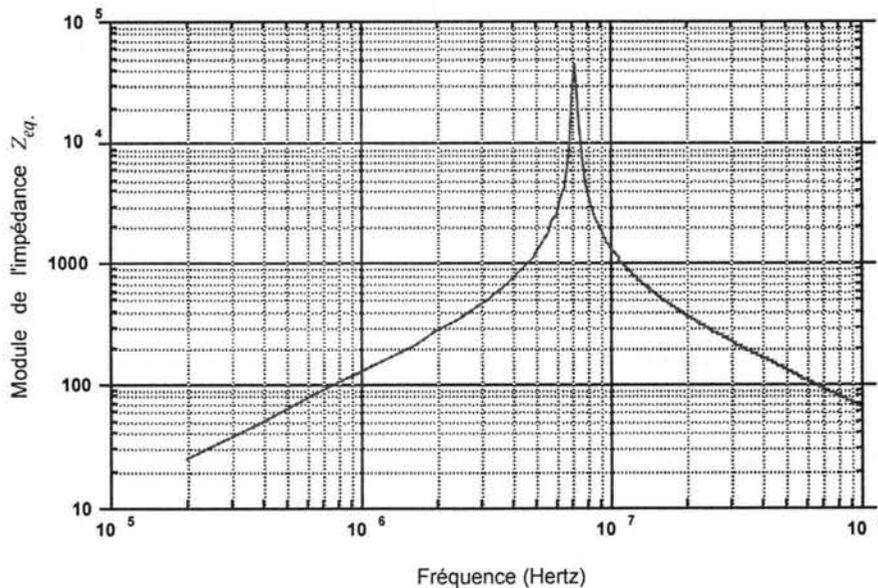


Figure 4.22 : Courbe du module de l'impédance équivalente en fonction de la fréquence

L'expression de la première fréquence de résonance donne la valeur de  $f_c$  :

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 7,128 \times 10^6 \text{ (Hertz)}$$

Pour la deuxième partie, afin de comparer les valeurs de l'impédance équivalente  $Z_{eq}$ , on a simulé par éléments finis le même problème (figure 4.20), avec la formulation complète, c'est à dire, les interactions électriques et magnétiques ont été considérées au même temps pendant les simulations.

L'impédance équivalente  $Z_{eq}$  peut être déterminée en partant de l'expression de la puissance  $S$ . En sachant que  $S$  est donné par l'expression

$$S = U \cdot I^* = \int_{\Omega} -\text{grad}V \cdot \vec{J}^* d\Omega$$

et que le domaine d'étude peut être divisé en deux sur-domaines, où le premier correspond à la partie du conducteur massif  $\Omega_{cond}$  et le deuxième, les courants de déplacements dans l'air  $\Omega_e$ , l'expression de la puissance  $S$  s'écrit :

$$\begin{aligned} S = U \cdot I^* &= \int_{\Omega_{cond}} -\text{grad}V(-j\omega\sigma A^* - \sigma \text{grad}V^*) d\Omega + \int_{\Omega_e} \text{grad}V(j\omega\epsilon) \text{grad}V d\Omega \\ &= \int_{\Omega_{cond}} \sigma \text{grad}^2 V d\Omega + \int_{\Omega_{cond}} j\omega\sigma \vec{A}^* \text{grad}V^* d\Omega + \int_{\Omega_e} \vec{E} \cdot \vec{J} d\Omega \end{aligned} \quad (4.18)$$

où les deux premiers termes de l'expression représentent l'influence de la résistance  $R$  et de l'inductance  $L$ , et la troisième terme de l'expression (4.18), la contribution de la capacité  $C$ .

Finalement l'expression pour trouver l'impédance équivalente  $Z_{eq}$  s'écrit :

$$Z_{eq} = \frac{U^2}{S} = R + jX$$

$$R = \text{Re} \left\{ \frac{U^2}{S} \right\} \quad X = \text{Im} \left\{ \frac{U^2}{S} \right\}$$

Le tableau ci-dessous montre les valeurs du module de l'impédance  $Z_{eq}$  trouvées après la simulation par éléments finis. Les valeurs en gras dans le tableau ci-dessous sont les plus proches de la fréquence de coupure.

Fréquence (M Hertz)	Module de $Z_{eq}$ ( $\Omega$ ) analytique	Module de $Z_{eq}$ ( $\Omega$ ) éléments finis
1	129,00	127,14
1,4	184,00	180,53
2	275,00	268,48
2,4	343,70	333,585
3	462,90	470,60
3,4	558,80	575,93
4	741,30	712,52
4,4	902,50	979,09
5	1250,00	1187,96
5,4	1609,00	1516,67
6	2613,00	2411,95
6,4	4191,00	3753,79
7	24900,00	16213,02
7,2	45,10x10 <sup>3</sup>	48,32x10 <sup>3</sup>
7,4	12,10x10 <sup>3</sup>	14,76x10 <sup>3</sup>
7,8	5018,00	5087,94
8	3913,00	4013,98
8,4	2744,00	2807,34
9	1923,00	1932,72
9,4	1615,00	1543,85
10	1102,00	897,334

Tableau 4.2 : Les modules de l'impédance équivalente calculés analytiquement et par éléments finis.

La figure 4.23, montre la courbe analytique du module de  $Z_{eq}$  en fonction de la fréquence, et quelques points superposées (valeurs de  $Z_{eq}$ ) calculés par la formulation à éléments finis.

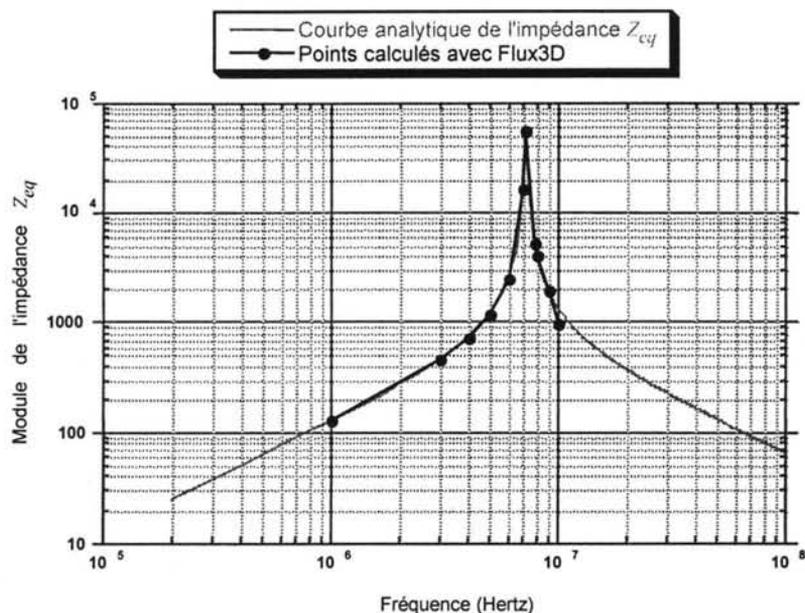


Figure 4.23 : La courbe analytique du module de  $Z_{eq}$  et les points trouvés par la formulation par éléments finis

Si l'on trace une courbe à partir des points trouvés par la formulation par éléments finis, le comportement de cette courbe donne un résultat presque identique à la courbe analytique. On vérifie que l'impédance a un comportement résistif quand on monte en fréquence, jusqu'au moment où les effets capacitifs commencent à apparaître, ce qui est conforme le diagramme de Bode asymptotique du module d'une inductance, montré dans la figure 4.5 au début du chapitre.

Par rapport aux écarts relatifs aux valeurs de l'impédance équivalente présentées dans le tableau 4.2, il y a une différence qui peut être expliquée car :

- les résultats analytiques sont basés sur le calcul des composants d'un circuit équivalent et si il y a des différences dans la détermination de ces composants, les écarts sont cumulables et peuvent provoquer de grosses différences.

Le tableau ci-dessous compare la valeur de la capacité obtenue par deux différents types de simulation, l'une électrostatique et l'autre magnétodynamique.

Type de simulation	Electrostatique	Magnétodynamique
Energie électrostatique ( J )	$0,12054 \times 10^{-10}$	$0,1233 \times 10^{-10}$
Capacitance ( F )	$2,4108 \times 10^{-11}$	$2,467 \times 10^{-11}$

Tableau 4.3: Valeurs de la capacitance et de l'énergie électrostatique calculées par deux types de simulations

Les écarts entre les valeurs obtenues par les deux simulations ne sont pas très grands, mais peuvent contribuer dans la différence de tracé de la courbe montré dans la figure 4.23.

## VI. CONCLUSION

L'approche analytique développé dans ce chapitre s'appuie sur une représentation simplifiée de la géométrie d'un composant bobiné et a considéré le domaine d'étude électrostatique. Cette étude électrostatique, a permis d'établir des modèles analytiques pour calculer des capacités parasites.

L'utilisation de la méthode des éléments finis peut réaliser une analyse plus complète et considérer aussi, dans une formulation magnétodynamique par exemple, les problèmes couplés magnétiques – électriques importantes quand ces composants sont soumis à des hautes fréquences.

Une étude complète tridimensionnelle a été propose par [Morwaiser-93], mais une telle modélisation s'avère relativement coûteuse pour les géométries typiques des composants utilisés en haute fréquence. Des structures minces provoquent un maillage très important du domaine d'étude. Ainsi pour des géométries complexes, la modélisation reste encore très difficile.

[Charpentier-96] et [Nicolet-97], ont opté pour adapter la géométrie tridimensionnelle. Leurs méthodes sont basées sur une division particulière du domaine tridimensionnel laquelle permette un calcul 2D en utilisant de « problèmes transversaux ».

[Ren-97] a travaillé sur une hypothèse axisymétrique pour traiter des problèmes de capacités parasites dans les composants bobines et dans le même esprit nous avons développé une formulation 2D axisymétrique couplé avec les équations de circuit électrique.

Dans un domaine magnétodynamique, une formulation axisymétrique en tenant compte du courant de déplacement a été présentée. Le système algébrique obtenu est symétrique et cette formulation a permis d'étudier les interactions magnétique - électrique dans les bobines axisymétriques.

Une comparaison entre l'application de la formulation éléments finis et un calcul analytique basé sur un schéma équivalent d'un composant bobiné a été réalisé pour aider à la validation de cette formulation.



## **Conclusion Générale**



Les travaux présentés dans ce mémoire ont permis, d'acquérir une meilleure connaissance du comportement des composants électromagnétiques en haute fréquence soit au niveau des matériaux magnétique, soit au niveau des méthodes d'analyses numériques des interactions électriques magnétiques.

En vue de répondre à l'absence de données complètes et réalistes de la part des fournisseurs, la connaissance du comportement des ferrites MnZn qui équipent les noyaux des composants haute fréquence a progressé nettement grâce à l'apport d'une nouvelle méthode de caractérisation des matériaux magnétiques. Contrairement aux méthodes normalisées, cette méthode, basée sur la mesure de deux impédances électriques complémentaires, permet d'accéder, à toute fréquence, aux données perméabilité et permittivité complexes au moyen de relations analytiques simples (modèles analytiques), et ce, sans faire aucune hypothèse sur les variations fréquentielles des paramètres recherchés.

Les propriétés physiques des ferrites sont généralement décrites par leur seule perméabilité complexe. L'exploitation de une nouvelle méthode de caractérisation permet de mettre en avant l'incidence des propriétés diélectriques de ces matériaux. Cette influence est en effet non négligeable dès quelques dizaines de kHz, où aux courants de conduction s'ajoutent des courants de déplacement.

L'utilisation de la méthode des éléments finis a permis de valider toutes les hypothèses utilisée pour les modèles analytiques d'un tore de ferrite. La possibilité de déroulement du tore de ferrite, l'influence de la hauteur, et de la métallisation, ont été vérifiées par simulation en utilisant deux formulations, la formulation Champ Magnétique et l'Electrodynamique.

En ce qui concerne les formulations par éléments finis, les différents modèles rencontrés dans la pratique, notamment l'électrodynamique et la magnétodynamique ont été présentés. Les formulations générales en 3D ont été réécrites avec des propriétés physiques complexes, à l'aide de deux types de potentiel: le potentiel électrique et magnétique. Une hypothèse bidimensionnelle cartésienne et l'autre axisymétrique ont été appliquées à la formulation en potentiel vecteur et à un cas particulier de la formulation champ magnétique.

Ensuite pour la mise en équation du circuit électrique d'alimentation, la méthode des potentiels électriques intégrés dans le temps a été utilisée. Cette méthode généralement utilisée en 3D (MV3DYN [Perfin-94], [Dreher-94], [Golovanov-97] emploie la méthode des potentiels nodaux intégrés), a été adaptée pour un problème d'un conducteur bobiné massif 2D et axisymétrique.

Enfin les problèmes des capacités parasites liés aux effets des interactions électriques en haute fréquence ont été présentés. La représentation d'une inductance simple par différents circuits équivalents et les modèles électrostatiques (plan et pavé) pour évaluer analytiquement les capacités parasites ont été décrites.

Pour la modélisation à des fréquences élevées, l'influence du champ magnétique sur le fonctionnement du composant n'est plus négligeable. Un modèle magnétique devient nécessaire afin de tenir compte de l'inductance d'un composant.

Traditionnellement, les problèmes électrostatiques et magnétiques sont étudiés séparément. Ce modèle est simple à employer mais exclut toute interaction magnétique - électrique qui devient non négligeable en haute fréquence et des études complètes nécessitent alors une résolution des équations du champ magnétique en tenant compte du courant de déplacement.

Récemment, plusieurs études sur les effets des interactions magnétiques électriques en haute fréquence ont été réalisées. Chaque méthode a comme particularité la nécessité des approximations, dans la plupart des cas géométriques, par rapport au problème qui est essentiellement tridimensionnel.

Nous avons montré que la modélisation par la méthode des éléments finis utilisant la formulation axisymétrique couplée avec les équations de circuit électrique est bien adaptée pour une caractérisation électromagnétique des composants bobinés. En utilisant des modèles et des formulations appropriées, des résultats de bonne qualité peuvent être obtenus.

Cependant, une modélisation à des fréquences élevées pose encore certaines difficultés. Si la validité du modèle utilisé a pu être vérifiée pour des géométries simples en 2D, son application à des géométries tridimensionnelles complexes est encore limitée par la puissance des moyens informatiques.

Par ailleurs, l'adaptation d'autres modèles électriques - magnétiques sont à poursuivre afin de vérifier leur performance pour la modélisation des composants électromagnétiques en haute fréquence.

## **Références Bibliographiques**



- [Arkbio-87] ARKBIO A., "Analysis of induction motors based on the numerical solution of the magnetic field and circuit equations", Helsinki 1987, Acta Polytechnica Scandinavica, Electrical Engineering Series, N° . 59, 97 p.
- [Bastos-89] BASTOS J. P. A., *Eletromagnetismo e Calculo de Campos*, Florianopolis, Ed. da UFSC, 1989.
- [Berdai-93] BERDAI M. N., "Contribution à la modélisation du comportement dynamique des matériaux magnétiques Proposition d'un modèle", Thèse de Doctorat, décembre 1993, Université des Sciences et Technologies, Lille.
- [Blache-94] BLACHE F., KERADEC J.P., COGITORE B., "Stray Capacities of Two.Winding Transformers : Equivalent Circuit, Measurements, Calculation and Lowering", IEEE IAS'94, October 1994, Denver, Colorado, Proceedings, pp. 1211-1217.
- [Blache-95/1] BLACHE F., KERADEC J.P, SCHANEN J. L., "Improving Electronic Simulation Accuracy by using New Equivalent Circuits for Wound Components", EPE'95, September 1995, Séville, Spain, Proceedings, vol. 2, pp. 813-818.
- [Blache-95] BLACHE F., "Modélisation électronique et électromagnétique d'un transformateur haute fréquence à circuit magnétique en fonte", Thèse de Doctorat, INPG, LEG, Grenoble, décembre 1995.
- [Bleaney-76] B.I. BLEANEY, BLEANEY B., *Electricity and Magnetism*, Third Edition, University Press, Oxford, 1976.
- [Bossavit-93] BOSSAVIT A., *Electromagnétisme en vue de la modélisation*, chapitre 4, la limite  $\epsilon = 0$ , Springer -Verlag, Paris, 1993.
- [Bouissou-94/1] BOUISSOU S., PIRIOU F., KIENY C., TONNEAU G., "Numerical Simulation of a Power Transformer using 3D Finite Element Method Coupled to Circuit Equation", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 30, No. 5, pp. 3224-3227, September 1994.
- [Bouissou-94/2] BOUISSOU S., PIRIOU F., "Study of 3D Formulations to Model Electromagnetic Devices", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 30, No.5, pp. 3228-3231, September 1994.
- [Brauer-91] BRAUER J., MACNEAL B.E., LARKIN L.A., OVERBYE V.D., "New method for modelling electronic circuits coupled with 3D electromagnetic finite element models", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 27, No. 5, pp. 4085-4088, 1991.

- [Brisset-95] BRISSET S., "Outil et méthodologie pour la conception des moteurs à reluctance variable à double saillance", Thèse de doctorat, Université Lille, janvier 1995.
- [Brunelli-83] BRUNELLI B., CASADEI D., REGGIANI U., SENA G., "Transient and SteadyState Behaviour of Solid Rotor Induction Machines", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. MAG-19, No. 6, pp. 2650-2654, 1983
- [Carron-90] CARRON DE LA MORRINAIS G., "Contribution à la modélisation des phénomènes magnétodynamiques en trois dimensions", Thèse de Docteur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1990.
- [Cedrat-93] CEDRAT, *Analyse tridimensionnelle des dispositifs électriques et magnétiques par la méthode des éléments finis*, Notice d'utilisation FLUX3D, novembre 1993, CEDRAT SA, ZIRST . 38240 Meylan, France.
- [Charpentier-96] J.F. CHARPENTIER J. F., LEFEVRE Y., AND LAJOIE-MAZENC M., "A 2D finite element formulation for the study of the high frequency behaviour of wound component ", *IEEE Transactions on Magnetics*. Vol.32, No.3, 1996, pp.1026-1034
- [Coulomb-81] COULOMB J.L., "Analyse tridimensionnelle des champs électriques et magnétiques par la méthode des éléments finis", Thèse de doctorat, I.N.P.Grenoble, juin 1981.
- [Coulomb-85] COULOMB J. L., MEUNIER G., SABONNADIÈRE J.C., "Energy Methods for the Evaluation of Global Quantities and Integral Parameters in a Finite Element Analysis of Electromagnetic Devices ", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. MAG-21, No. 5, Septembre 1985.
- [Coulomb-85] JCOULOMB J. L., SABONNADIÈRE J.C., *CAO en électrotechnique*, Hermes, Paris, 1985.
- [Coulomb-97] COULOMB J.L., ZGAINSKI F.X., MARECHAL Y., "A Pyramidal Element to link Hexaedral, Prismatic and Tetrahedral Edge Finite Elements ", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 33, No. 2, pp. 1362-1365, March 1997.
- [Dreher-93] DREHER T., MEUNIER G., " 3D Modeling of electromagnetic coil fed by alternating voltage sources", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 20, No. 2, March 1993.
- [Dreher-94] DREHER T., "Couplage de la méthode des éléments finis tridimensionnels avec une méthode d'analyse du circuit électrique: application à la modélisation des machines électriques tournantes", Thèse de doctorat, I.N.P. Grenoble, octobre 1994.

- [Dreher-95] DREHER T., MEUNIER G., "3D Line Current Model of Coils and External Circuits", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 31, No. 3, pp. 1853-1856, May 1995.
- [Faucheux-89] FAUCHEUX P., "Couplages d'équations électriques dans FLUXLAB", rapport de DEA, Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, 1989.
- [Fouassier-96] FOUASSIER P., KERADEC J.P., COGITORE, B., "Vers une nouvelle méthode de caractérisation haute fréquence des ferrites", EPF 96, décembre 1996, Grenoble, Proceedings, pp. 257-262.
- [Fouassier-97/1] FOUASSIER P., KERADEC J.P., BLACHE F., GARCIA F.L.S., "Une nouvelle méthode de caractérisation des matériaux magnétiques : Etude des fondements analytiques", NUMELEC'97, mars 1997, Lyon, Proceedings, pp. 134-135.
- [Fouassier-98/1] FOUASSIER P., KERADEC J.P., "An Original New Method to Better Characterize Ferrite Materials used in Power Electronic Applications", *Journal de Physique IV*, 1998, SMM' 13 Proceedings, Grenoble, France, vol. 8, pp. 449-452.
- [Fouassier-98/2] FOUASSIER P., GARCIA F.L.S., KERADEC J.P., MEUNIER G., "Improving Characterization of MnZn Ferrite Materials - Part I : A New Method Accounting for Permittivity Effects", IEEE CEFC'98, June 1998, Tucson, Arizona, USA, Proceedings, p. 7.
- [Fouassier-98/3] FOUASSIER P., COGITORE B., KERADEC J.P., "Modélisation haute fréquence des transformateurs : De la recherche aux applications industrielles", EPF' 98, décembre 1998, Belfort, Proceedings.
- [Fouassier-98] FOUASSIER, P., "Modélisation électrique des composants magnétiques haute fréquence : prise en compte de la température et caractérisation des ferrites", Thèse de doctorat, I.N.P.Grenoble, octobre, 1998
- [Garcia-97] GARCIA F.L.S. "Compatibilité Électromagnétique - L'Étude de Composants Haute Fréquence", Journée Jeunes Chercheurs 97, Grenoble, 1997.
- [Garcia-98/1] GARCIA F.L.S., MEUNIER G, FOUASSIER P., KERADEC J.P., "One-Dimensional Model Treatment of a 3D Magneto-Dynamic Problem by the Finite Element Method", EMF' 98, May 1998, Marseille, France, Proceedings.
- [Garcia-98/2] GARCIA F.L.S., FOUASSIER P., MEUNIER G., KERADEC J.P., "Improving Characterization of MnZn Ferrite Materials - Part II : The 1D-Analytical Model Validation by Finite Element Method

- Simulations”, IEEE CEFC'98, June 1998, Tucson, Arizona, USA, Proceedings, p. 403.
- [Garcia-99] GARCIA F.L.S., LECONTE V., MEUNIER G. “Magneto-dynamic Formulation to Solve Capacitive Effects Problems in the Axi-Symmetric Coil”, ( résumé submit au COMPUMAG'99, Saporu, Japon, 1999).
- [Goldfarb-87] GOLDFARB R. B , BUSSEY H. E., “Method for Measuring Complex Permeability at Radio frequencies”, Rev. Sci. Instrum., April 1987, no. 58 (4), pp. 624-627.
- [Golovanov-96] GOLOVANOV C., COULOMB J.L., MARECHAL, “3-D Magnetostatic Field Computation using Edge Elements: Analysis of Different Method to Improve the Convergence of the ICCG Solver”, Proc. of the Third International Workshop on Electric and Magnetic Fields, Liège Belgium), 6-9 May 1996, pp.113-117
- [Golovanov-97] GOLOVANOV, C., “Développement de formulations éléments finis 3D en potentiel vecteur magnétique : application à la simulation de dispositifs électromagnétiques en mouvement”, Thèse de doctorat, I.N.P.Grenoble, octobre, 1997.
- [Gradzki-91] GRADZKI P.M., LEE F.C., “High Frequency Core Loss Characterization Technique based on Impedance Measurement”, BEPC' 91, 1991, Proceedings, pp. 108-115.
- [Hebdo-98] HUMBERT E., *Les ferrites : Stratégiques mais méconnus*, Electronique International Hebdo, avril 1998, n° 305, pp. 19-24.
- [Hess-93] HESS J., “Measurement and Calculation Techniques for Power Losses of Ferrites from kHz to MHz Range”, PCIM' 93, 1993, Proceedings, pp. 327-344.
- [Hewlett-89] HEWLETT PACKARD, *HP4194A - Impedance / Gain Phase Analyzer Operational Manual*, April 1989.
- [Jagut-88] JAGUT Y., “Méthode de résolution des équations du champ magnétodynamique”, rapport de DEA, Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, 1988.
- [Kéradec-92] KERADEC J.P., COGITORE B., LAVEUVE E., “Des circuits à constantes localisées pour représenter les transformateurs haute fréquence”, RGE, mai 1992, N° 5, pp. 36-47.
- [Kéradec-94] KERADEC J.P., COGITORE B., LAVEUVE E., BENSOM M., “Des schémas équivalents pour les circuits couplés multi enroulements”, *Journal de Physique III*, avril 1994, N° 4, pp. 751-773.
- [Kéradec-96/1] KERADEC J.P., COGITORE B., BLACHE F., “Power Transfer in a Two Winding Transformer : From I.D Propagation to an Equivalent

- Circuit", *IEEE Transactions on Magnetics*, January 1996, vol. 32, No. 1, pp. 274-280.
- [Kladas-87] KLADAS A., PIRIOU F., RAZEK A. "Résolution simultanée des équations magnétiques et électriques dans les systèmes électromagnétiques", in Colloque SEE, Gif-sur-Yvette, 13 mars 1987, pp 63-69.
- [Konrad-81] KONRAD A., "The numerical solution of steady-state skin effect problems - an integro differential approach", *IEEE Transactions on Magnetics.*, vol MAG-17, 1981.
- [Laveuve-90] LAVEUVE E., KERADEC J.P., LAPPAS F., "Un obstacle à la montée en fréquence : Les éléments bobinés", EPF'90, octobre 1990, Toulouse, Proceedings, pp. 115-119.
- [Laveuve-91/2] LAVEUVE E., "Modélisation des transformateurs des convertisseurs haute fréquence", Thèse de Doctorat, septembre 1991, INPG, LEG, Grenoble.
- [Laveuve-91] LAVEUVE E., KERADEC J.P., AND MEUNIER G., "Influence of induced currents in conductors on leakage and losses in a transformers", *Electric Machine and Power Systems*, vol. 19, pp. 55-68, 1991 .
- [Lebourgeois-97] LEBOURGEOIS R., *Les ferrites faibles pertes pour l'Electronique de Puissance*, La revue 3E.I, SEE, septembre 1997, N°. 10, pp. 13-29.
- [Leonard-92] LEONARD P.J., RODGER D., "Modelling voltage forced coils using the reduced scalar potential method", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 28, No. 2, pp. 1615-1618, March 1992.
- [Lindfors-88] LINDFORS H., LUOMI J., "A general method for the numerical solution of coupled magnetic field and circuit equations", Proc. of the Int. Conf on Electrical Machines, pp 141-146, 1988,
- [Lombard-92] LOMBARD P. AND MEUNIER G., "A general method for electric and magnetic coupled problems in 2D magnetodynamics domain", *IEEE Transactions on Magnetics.*, vol. 28, pp, 1291-1294, March 1992.
- [Lombard-92] LOMBARD P., "Couplage des équations électriques et magnétiques", Thèse de doctorat, I.N.P. Grenoble, septembre 1992.
- [Mesa-85] MESA F., *Méthodes d'études des circuits électriques*, Eyrolles, pp 189-228, 1985.
- [Meunier-86] MEUNIER G. AND COULOMB J.L., "Solution of 3D Eddy Currents and Electrical Circuit Combined Problems", Eddy Current Seminar, Oxford, Mars 1986

- [Meunier-88] MEUNIER G., SCHEN D., COULOMB J.L., "Modelisation of 2D and axisymmetric magnetodynamic domain by the finite element method", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol MAG-24 N1, pp 166-169, 1988.
- [Microsim-96] MICROSIM CORPORATION, *Microsim PSpice'MD & Basics, Circuit Analysis Software User's Guide*, version 7.1, October 1996, USA.
- [Microspire-97] MICROSPIRE SA *Transformers, Inductors, Filters*, Catalogue 1997, Illange, France, 47 p.
- [Morwaiser-93] MORWEISER W., "La modélisation électromagnétique de composants passifs intégrés", Thèse de doctorat, I.N.P. Grenoble, novembre, 1993.
- [Morweiser-92] MORWEISER W., MEUNIER G., SALZE H., "An Iterative Finite Element Method Using a Scalar Potential to Calculate the Electrical Equivalent Circuit Parameters of Multilayer Ceramic Capacitors", *Proceedings of IGTE - Symposium, Graz*, 1992.
- [Morweiser-93] MORWEISER W., MEUNIER G., "Computer-Aided Design of Passive Multilayer Components Using Electromagnetic Field Computation", *Proceedings of CARTS, Europe, Genève*, 1993.
- [Morweiser-93] MORWEISER W., MEUNIER G., "The Characterization of Passive Multilayer Devices by Electromagnetic Field Computation", *COMPUMAG, Miami*, 1993 (à publier dans *IEEE Transactions on Magnetics*)
- [Nakata-82] NAKATA T., TAKAHASHI N., "Direct finite element analysis of flux and current distribution under specified conditions", *IEEE Transactions on Magnetics.*, Vol. MAG-18, pp 325-330, 1982.
- [Nicolet-96] NICOLET, A., "Une approche élémentaire du calcul de la capacité parasite apparente d'un bobinage constitué de lignes parallèles", octobre, 1996.
- [Nicolet-97] NICOLET A., DELINCE F., "Implicit Runge-Kutta Methods for Transient Magnetic Field Computation", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 32, No. 3, pp. 1405-1408, May 1996.
- [O'Kelly-72] O'KELLY D., "Flux Penetration in a Ferromagnetic Material Including Hysteresis and Eddy Current Effects", *J. Phys. D : Appl. Phys.*, vol. 5, 1972.
- [Peuzin-96] PEUZIN J.C., "Caractérisation radiofréquence et hyperfréquence des matériaux magnétiques", *Journées Nationales d'Etudes*, mai 1996, Clubs CRIN / SEE, Grenoble, pp. 55-60.
- [Philips-98] PHILIPS Data Handbook . *Soft Ferrites Book MA01*, Philips Components, Magnetic Products, 1998.

- [Piriou-88] PIRIOU F., RAZEK A., "Coupling of saturated electromagnetic systems to non-linear power electronic devices", *IEEE Transactions on Magnetics.*, vol. MAG-24, N 1, pp 274-277, 1988.
- [Plonus-78] PLONUS M.A., *Applied Electromagnetics Intemational Student Edition*, McGraw.Hill Kogakusha, Ltd., 1978, 615 p.
- [Ren-88] REN Z., VERITE J.C., "Application of a new edge element in 3D eddy currents computation", Beijing Int. Symposium on Electromagnetic Field, China.Beijing, october 1988.
- [Ren-96] REN Z., "Auto-gauging of vector potential by iterative solver-numerical evidence", *Proceedings of the Third International Workshop on Electrical and Magnetical Fields*, Liège, Belgium, 6-9 May 1996.
- [Ren-96] REN Z., RAZEK A., "Computation of 3-D electromagnetic field using differential forms based elements and dual formulation", *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Nenvorks, Devices and Fields*, Vol. 9, pp. 81-98, 1996.
- [Ren-97] REN Z., "Influence of trie RHS on the convergence behaviour of trie curlcurl equation", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 32, No.3, pp. 655658, 1996.
- [Ren-97] REN Z., "Formulation axisymétrique pour l'étude des interactions magnétique – électrique dans les bobines utilisées en haute fréquence", *Numelec 97*, 230-231, mars, 1997.
- [Saotome-97] SAOTOME H., SAKAKI Y., "Iron Loss Analysis of Mn-Zn Ferrite Cores", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 33, no. 1, January 1997, pp. 728-734.
- [Shen-85] SHEN D., MEUNIER G., COULOMB J.L, SABONNADIÈRE J.C., "Solution of magnetic fields and electrical circuits combined problems", *IEEE Transactions on Magnetics.*, vol. MAG-21, N6, pp 22882291, 1985.
- [Shen-85] SHEN D., MEUNIER G., COULOMB, J.L. , "Solutionof magnetic fields and elecUical circuits combined problems", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. MAG-21 No. 6, pp. 2288-2291, 1985
- [Siemens-91] SIEMENS Ferrites and Accessories - Data Book Siemens Matsushita Components, 1990/91.
- [Snelling-91] SNELLING, E. C., *Soft Ferrites. Properties and Applications*, 2nd Edition, Borough Green, Sevenoaks, England, Butterworths, 1991,363 p.
- [Stranton-41] STRATON J. A., *Electromagnetic theory*, McGrow-Hill Book Company, New York 1941.

- [Talbot-93] TALBOT P., "Introduction à l'étude des matériaux magnétiques composites", Thèse de Doctorat, février 1993, Université de Bretagne Occidentale, Brest.
- [Thottuvelil-90] THOTTUVELIL V. J., WILSON T. G., OIVEN H. A., High-Frequency Measurement Techniques for Magnetic Cores, *IEEE Transactions on Magnetics*, January 1990, vol. 5, no. 1, pp. 41-53.
- [Vandelac-88] VANDELAC J. P., AND ZIOGAS P. D., "A novel approach for minimising high frequency transformers copper losses". *IEEE Trans. On Power Electronics*, vol. 3, pp. 266-277, July 1988.
- [Vassent-90] VASSENT E., MEUNIER G., FOGGIA A. "Simulation of induction machine operation using complex magnetodynamic finite elements method coupled with the circuits equations", IEEE, International Conference of CEFC, Toronto, 21-25 october 1990.
- [Williamson-85] WILLIAMSON S., BEGG M.C, "Analysis of cage induction motors- A combined fields and circuits approach", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. MAG-21, No. 6, pp. 2396-2399, November 1985.
- [Zienkiewicz-89] ZIENKIEWICZ O.C., *The finite element method*, 4<sup>o</sup>. ed., Vol. I, MacGraw HT, London, 1989.



## MODELISATION DES COMPOSANTS ELECTROMAGNETIQUES HAUTE FREQUENCE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

En vue de répondre à l'absence de données complètes et réalistes de la part des fournisseurs, la connaissance du comportement des ferrites MnZn qui équipent les noyaux des composants haute fréquence a progressé nettement grâce à l'apport d'une nouvelle méthode de caractérisation des matériaux magnétiques. Contrairement aux méthodes normalisées, cette méthode, basée sur la mesure de deux impédances électriques complémentaires, permet d'accéder, à toute fréquence, aux données perméabilité et permittivité complexes.

En ce qui concerne les formulations par éléments finis, les formulations générales en 3D ont été réécrites avec des propriétés physiques complexes, à l'aide de deux types de potentiel: le potentiel électrique et magnétique. Les hypothèses bidimensionnelles cartésienne et axisymétrique sont aussi utilisées. Le couplage avec les équations du circuit électrique d'alimentation est réalisé par la méthode des potentiels électriques intégrés dans le temps. Cette méthode généralement utilisée en 3D est adaptée pour les problèmes 2D.

Les problèmes des capacités parasites liés aux effets des interactions électriques en haute fréquence sont aussi présentés. Pour la modélisation à des fréquences élevées, l'influence du champ magnétique sur le fonctionnement du composant n'est plus négligeable. Un modèle magnétique devient nécessaire afin de tenir compte de l'inductance d'un composant.

Plusieurs études récentes sur les effets des interactions magnétiques électriques en haute fréquence sont montrées. Chaque méthode a comme particularité la nécessité des approximations, dans la plupart des cas géométriques, par rapport au problème qui est essentiellement tridimensionnel.

Une modélisation par la méthode des éléments finis utilisant la formulation axisymétrique couplée avec les équations de circuit électrique est proposée et bien adaptée pour une caractérisation électromagnétique des composants bobinés.

### *Mots clés*

Calcul de champ électromagnétique, haute fréquence, éléments finis, capacité parasite, couplage équations de circuit et formulations 2D et 3D

## ELECTROMAGNETICS HIGH FREQUENCY COMPONENTS MODELISATION BY THE FINITE ELEMENT METHOD

In order to answer the absence of complete and realistic data on behalf of the industry, the knowledge of the behaviour of MnZn ferrite's which equip the cores of the components high frequency clearly progressed thanks to the contribution of a new method of characterisation of magnetic materials. Contrary to the standardised methods, this method, based on the measure of two complementary electric impedance, makes it possible to reach, at any frequency, the data permeability and permittivity complexes by means of simple analytical relations.

With regard to the formulations by finite elements, the general formulations in 3D were rewritten with complex physical properties, using two types of potential: electric and magnetic potential. The two-dimensional cartesian and axe-symmetric hypotheses are also used. The coupling with the equations of the electric circuit of feeding is carried out by the method of the electric potentials integrated in time. This method generally used in 3D is adapted for the problems 2D.

The problems of the stray capacities related to the effects of the electric interactions in high frequency are also presented. For modelling at raised frequencies, the influence of the magnetic field on the operation of the component is not negligible any more. A magnetic model becomes necessary in order to take account of the inductance of a component.

Several recent studies on the effects of the electric magnetic interactions in high frequency are shown. Each method has like characteristic the need for the approximations, in the majority of the geometrical cases, compared to the problem which is primarily three-dimensional.

A modelling by the finite element method using the axe-symmetric formulation coupled with the equations of electric circuit is proposed and adapted for an electromagnetic characterisation of the wound components.

### *Keywords*

Electromagnetic field, high frequency, finite elements, stray capacity, coupling equations of circuit and 2D and 3D formulations