HAL
open science

Structures élastiques comportant une fine couche d'hétérogénéités : étude asymptotique et numérique.

Sofiane Hendili

To cite this version:

Sofiane Hendili. Structures élastiques comportant une fine couche d'hétérogénéités : étude asymptotique et numérique.. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2012. Français. NNT : . tel-00765018

HAL Id: tel-00765018

https://theses.hal.science/tel-00765018

Submitted on 14 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER II

Spécialité : MÉCANIQUE ET GÉNIE CIVIL
École Doctorale : INFORMATIONS, STRUCTURES ET SYSTÈMES

Présentée par

Sofiane HENDILI

Sujet de la thèse :

STRUCTURES ÉLASTIQUES COMPORTANT UNE FINE COUCHE D'HÉTÉROGÉNÉITÉS : ÉTUDE ASYMPTOTIQUE ET NUMÉRIQUE

Soutenue le 4 Juillet 2012 devant le jury composé de :

M. Patrick LE TALLEC	Président
M. Jean-Jacques MARIGO	Rapporteur
M. Yann MONERIE	Rapporteur
M. Giuseppe GEYMONAT	Examinateur
M. Franck JOURDAN	Examinateur
Mme Françoise KRASUCKI	Directrice de Thèse
Mme Marina VIDRASCU	Co-directrice de Thèse

Cette thèse est le fruit d'un travail d'équipe, impliquant différents acteurs, et réalisé dans un environnement formidable. Cette expérience a été enrichissante et épanouissante, tant sur le plan scientifique que sur le plan humain.

Je tiens tout d'abord à remercier ma femme, qui a été présente à tous les instants et sur qui j'ai pu compter et me reposer continuellement, mes parents, pour leur soutien et leur amour inconditionnels, ainsi que ma soeur et mon frère, pour leurs perpétuels encouragements.

Plus que des remerciements, je souhaite féliciter mes deux directrices de thèse pour leur travail. Elles ont fait preuve de responsabilité, de sérieux, d'engagement, de disponibilité, et surtout d'une très grande générosité. J'ai un profond respect pour elles.

Je tiens également à remercier "Pippo" qui m'a inondé de son immense savoir et m'a marqué par son enthousiasme et sa bonne humeur.

Un Grand merci aux membres du jury. Merci d'avoir porté intérêt à mon travail.

Je remercie Mr Rémi Carles, de l'I3M, et Mr Dominique Chapelle, de l'I.N.R.I.A., qui m'ont chaleureusement accueilli au sein de leur équipe respective, ACSIOM et MACS. Merci également à Bernadette et Maryse qui sont toujours disponibles pour les doctorants, leur aide m'a été très précieuse.

Merci aux membres du projet A.N.R Epsilon pour ces moments agréables que nous avons partagés lors des réunions Montpelliériennes et Parisiennes.

Merci aux "jeunes" du bâtiment 9 et du bâtiment 16 pour ces instants de détente si précieux. Une pensée particulière pour mes "co-bureau" : Annabelle (honneur aux dames), Youssri, Pierre, Matthieu et Asven. Une pensée également pour Anabelle B. pour nos nombreuses parties de Squash, et pour Marc, Jérémie et Julien pour nos parties de billard.

Merci Mr "Victor" pour ta bonne humeur et pour ces nombreux moments partagés. Merci pour ton amitié.

Titre : Structures élastiques comportant une fine couche d'hétérogénéités : étude asymptotique et numérique.

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'étude de l'influence d'une fine couche hétérogène sur le comportement élastique linéaire d'une structure tridimensionnelle. Deux types d'hétérogénéités sont pris en compte : des cavités et des inclusions élastiques. Une étude complémentaire, dans le cas d'inclusions de grande rigidité, a été réalisée en considérant un problème de conduction thermique.
Une analyse formelle par la méthode des développements asymptotiques raccordés conduit à un problème d'interface qui caractérise le comportement macroscopique de la structure. Le comportement microscopique de la couche est lui déterminé sur une cellule de base. Le modèle asymptotique obtenu est ensuite implémenté dans un code éléments finis. Une étude numérique permet de valider les résultats de l'analyse asymptotique.

Mots clés : développements asymptotiques raccordés, couche hétérogène, méthode de décomposition de domaines.

Title : Elastic structures with a thin layer of heterogeneities : asymptotic and numerical study.

Abstract : This thesis is devoted to the study of the influence of a thin heterogeneous layer on the linear elastic behavior of a three-dimensional structure. Two types of heterogeneties are considered : cavities and elastic inclusions. For inclusions of high rigidty a further study was performed in the case of a heat conduction problem.
A formal analysis using the matched asymptotic expansions method leads to an interface problem which characterizes the macroscopic behavior of the structure. The microscopic behavior of the layer is determined in a basic cell. The asymptotic model obtained is then implemented in a finite element software. A numerical study is used to validate the results of the asymptotic analysis.

Keywords : matched asymptotic expansions, heterogeneous layer, domain decomposition method.

Table des matières

Introduction **3**

1 Préliminaires **5**
1.1 Généralités en élasticité linéaire 5
1.1.1 Cadre général 5
1.1.1.1 Déformations 5
1.1.1.2 Contraintes et lois de comportement 6
1.1.2 Formulations mathématiques 7
1.1.2.1 Classification des données d'un problème 7
1.1.2.2 Formulations classiques (ou locales) 8
1.1.2.3 Formulations variationnelles des différents problèmes . 11
1.2 Méthode de décomposition de domaines 14
1.3 Méthodes asymptotiques 15
1.3.1 Généralités 15
1.3.2 Méthode des développements asymptotiques raccordés 17

I Etude asymptotique **21**

2 Introduction de l'étude asymptotique **22**
2.1 Position du problème 23
2.2 Etude asymptotique du problème $(P^\varepsilon, \varepsilon \to 0)$: principales étapes 25
2.3 Plan de l'étude asymptotique 30

3 Inclusions élastiques **32**
3.1 Equations aux différents ordres 32
3.2 Approximations intérieure et extérieure de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ pour $p \geq 0$ 35
3.2.1 Comportement asymptotique de $\boldsymbol{v}^0$ et $\boldsymbol{\tau}^0$ lorsque $y_1 \to \pm\infty$ 35
3.2.2 Approximation extérieure à l'ordre $i = 0$ 37
3.2.3 Comportement asymptotique de $\boldsymbol{v}^1$ lorsque $y_1 \to \pm\infty$ 38
3.2.4 Approximation extérieure à l'ordre $i = 1$ 43
3.3 Conclusions 47

4 Cavités **49**

5 Inclusions de grande rigidité dans le cas scalaire **64**
5.1 Approximations intérieure et extérieure d'ordre 0 et 1 dans le cas $p = -1$. 64
5.1.1 Approximation extérieure d'ordre 0 64
5.1.2 Approximation extérieure à l'ordre $i = 1$ 67
5.1.2.1 Comportement asymptotique de v^1 lorsque $y_1 \to \pm\infty$. 67
5.1.3 Calcul de $[u^1]_\omega$ et $[\boldsymbol{s}^1\boldsymbol{e}_1]_\omega$ 69
5.2 Conclusions 72

II Etude numérique **74**

6 Rappels et notations **76**
6.1 Approximation des solutions : méthode des éléments finis 76
6.2 Notations utilisées pour l'implémentation 77
6.3 Méthode de décomposition de domaines : formulation discrète 81

7 Implémentation et validation du modèle asymptotique dans le cas des cavités et des inclusions élastiques **83**
7.1 Implémentation du modèle asymptotique 84
7.1.1 Calcul des coefficients $[\boldsymbol{V}^{ij}]^\infty$ et $\int_Y \boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$ 84
7.1.2 Calcul de $\boldsymbol{u}^1$ et $\boldsymbol{\sigma}^1$ 86
7.1.2.1 Implémentation 88
7.1.3 Calcul de $\boldsymbol{v}^1$ et $\boldsymbol{\tau}^0$ 89
7.1.3.1 Calcul des coordonnées microscopiques 89
7.1.3.2 Reconstruction de $\boldsymbol{v}^1$ 90
7.1.3.3 Reconstruction de $\boldsymbol{\tau}^0$ 90
7.2 Validation du modèle asymptotique 91
7.2.1 Problème asymptotique 91
7.2.2 Robustesse du calcul des coefficients $[\boldsymbol{V}^{ij}]^\infty$ et $\int_{Y^\star} \boldsymbol{T}^{ij} d\boldsymbol{y}$ 93
7.2.3 Validation : échelle macroscopique 97
7.2.4 Validation : échelle microscopique 100

Conclusion **106**

Introduction

Ce travail de thèse est consacré à l'étude de l'influence d'une fine couche d'hétérogénéités sur le comportement d'une structure élastique tridimensionnelle. L'étude numérique du comportement mécanique de ce type de structure devient très coûteuse lorsque l'épaisseur de la couche est très inférieure aux dimensions globales de la structure. L'objectif est de concevoir puis d'implémenter un algorithme efficace et robuste pour résoudre ce type de problème. Cet algorithme est obtenu grâce à une analyse asymptotique.

Dans plusieurs domaines de l'ingénierie, la prise de décision s'appuie fortement sur la simulation numérique. Dans un travail de dimensionnement par exemple, il est souvent nécessaire d'entreprendre une étude numérique paramétrique sur les propriétés géométriques et mécaniques de la structure étudiée. Dans le cas présent, une telle étude paramétrique sur les propriétés des hétérogénéités est très coûteuse. La simulation numérique sur une station de travail est par conséquent fortement limitée, malgré les avancées considérables en puissance de calcul. Une solution est d'étudier un modèle mathématique, équivalent au modèle de départ, défini sur une géométrie simplifiée où la couche est remplacée par une surface (cf. Figure 1) ; on parlera alors de modèle simplifié. Ce modèle équivalent est un problème d'interface où l'influence des hétérogénéités sur le comportement global de la structure apparaît à travers des conditions de transmission non homogènes.

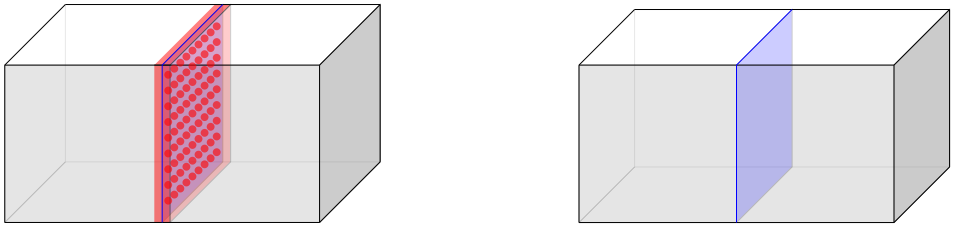


FIGURE 1 – Simplification de la géométrie

Les méthodes asymptotiques sont des outils bien adaptés à ce type de modélisation. En effet, si on considère que la géométrie simplifiée est obtenue en négligeant l'épaisseur de la couche par rapport aux autres dimensions, alors la solution du modèle simplifié est, d'un certain point de vue, la "limite" de la solution du problème d'origine lorsque l'épaisseur de la couche tend vers zéro.
Ce type d'approche, basée sur l'analyse asymptotique, a déjà été envisagé dans le cas où la couche est formée d'un matériau homogène. Parmi ces nombreuses études on notera celles de *Geymonat et al.* [20], *Licht et Michaille* [28] et *Suquet* [38], dans le cas des couches

molles, et celles de *Bessoud et al.* [8], *Bessoud et al.* [9] et *Caillerie* [10], dans le cas des couches rigides.
Dans les travaux de *Abdelmoula et al.* [2], le cas d'une fine couche élastique de même rigidité que celle de la structure a été étudié par la méthode des développements asymptotiques raccordés. Les résultats de cette étude montrent que l'influence de la couche n'apparaît pas au premier ordre du développement asymptotique (ordre i=0). A cet ordre, la couche est remplacée par une interface parfaite. Au second ordre du développement asymptotique, l'interface est imparfaite : le déplacement et le vecteur contrainte sont discontinus le long de cette interface. Dans *Lebon et Rizzoni* [25], des résultats similaires ont été obtenus en étudiant le problème par Γ-convergence.
Pour le cas qui nous intéresse, à savoir celui des couches élastiques hétérogènes, les contributions sont moins nombreuses que dans le cas des couches homogènes. Parmi les premières contributions on notera celles de *Nguetseng et Sanchez-Palencia* [30] et *Sanchez-Palencia* [35] dans l'étude du comportement élastique d'une structure contenant des petites cavités distribuées périodiquement au voisinage d'une surface. Ces travaux ont été repris par *Abdelmoula et Marigo* [3], dans l'étude d'un matériau composite dont la matrice est périodiquement fissurée le long d'une ligne, puis par *Abdelmoula et Leger* [1] dans l'étude d'une structure élastique axi-symétrique contenant une fine couche de cavités distribuées périodiquement. Plus récemment, le cas des cavités a été étudié dans *Marigo et Pideri* [29] où l'influence des hétérogénéités sur le comportement macroscopique de la structure est pris en compte par l'identification d'un tenseur d'endommagement effectif. Dans *David et al.* [14], le cas des inclusions élastiques a été étudié et une formulation énergétique du problème effectif est proposée en déterminant l'énergie surfacique de l'interface. Ce type de formulation énergétique, proposé également dans le cas des fissures dans *Abdelmoula et Marigo* [3], est très intéressant dans l'optique d'une résolution numérique. En effet, une mise en oeuvre d'une telle formulation énergétique dans un code éléments finis est relativement simple. Cependant, généralement l'énergie surfacique de l'interface n'est pas définie positive ce qui pose un réel problème.

Dans cette étude, nous proposons d'une part une contribution à l'étude asymptotique des problèmes de couche hétérogène, et d'autre part une étude numérique qui permet une validation numérique du modèle asymptotique. Cette thèse est donc divisée en deux parties : une première partie consacrée à l'étude asymptotique et une seconde consacrée à l'étude numérique. Chacune de ces deux parties est précédée d'un chapitre dans lequel les principales notions utilisées sont rappelées.

Dans toute la thèse, les tenseurs et les vecteurs seront désignés en caractères gras, on adoptera la convention de l'indice répété et on notera $\otimes$ le produit tensoriel et $\otimes_S$ le produit tensoriel symétrisé, i.e. $\boldsymbol{e}_1 \otimes_S \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1)$.
Les indices et les exposants grecs prendront toujours leurs valeurs dans l'ensemble $\{2, 3\}$. Lorsqu'il ne sera pas défini explicitement, l'ensemble des valeurs prises par les indices et les exposants latins sera l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Généralités en élasticité linéaire

Dans cette partie on introduit les notions classiques de la mécanique des milieux continus, puis on présente les problèmes de structure en élasticité linéaire et la formulation variationnelle de ces problèmes. Cette introduction a été inspirée des ouvrages de *Bamberger* [4], *Duvaut* [16], *Le Tallec* [27], *Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia* [33] et *Duvaut et Lions* [15].

1.1.1 Cadre général

1.1.1.1 Déformations

L'espace physique étant rapporté à un repère orthonormé direct, $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, on note Ω l'espace occupé par un milieu continu à instant t. On parle alors de configuration actuelle. On définit de même la configuration du système à un instant t_0 fixé. On notera Ω_0 cette configuration dite configuration de référence. Chaque point matériel constituant le milieu considéré est repéré par son vecteur position $\boldsymbol{X}(t)$ dans la configuration de référence et par son vecteur position $\boldsymbol{x}(t)$ dans la configuration actuelle. Plus précisément on a :

$$\boldsymbol{x}(t) = \phi(\boldsymbol{X}, t)$$

On appelle gradient de la transformation, l'application linéaire tangente $\mathbb{F}$ définie par

$$\boldsymbol{dx} = \mathbb{F}\boldsymbol{dX}$$

avec

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{X}) = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{X}, t)}{\partial \boldsymbol{X}}$$

Ce tenseur décrit la transformation locale autour d'un point donné.
En introduisant le vecteur déplacement $\boldsymbol{u}$ défini par :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{X}$$

on exprime le tenseur gradient de la transformation en fonction du gradient du déplacement, i.e.

$$\mathbb{F} = \mathbb{I} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{X}}$$

où $\mathbb{I}$ est le tenseur identité d'ordre 2.
Afin de prendre en compte les changements de forme, i.e. les déformations, on est amené à définir le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\mathbb{E}$ permettant de mesurer la différence entre le produit scalaire de deux vecteurs pris dans la configuration de référence et le produit scalaire de ces deux vecteurs après transformation, dans la configuration actuelle. Ce tenseur est défini par :

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{F}^T\mathbb{F} - \mathbb{I}\right)$$

En remplaçant $\mathbb{F}$ par son expression en fonction du gradient du déplacement, on obtient :

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{X}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{X}}\right)^T + \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{X}}\right)^T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{X}}\right)$$

On constate que $\mathbb{E}$ est une expression quadratique, donc non linéaire, des déplacements.
Dans la suite de l'étude, nous nous placerons sous l'hypothèse des petites perturbations, i.e. les déplacements entre la configuration de référence et la configuration actuelle sont très petits et le gradient des déplacements est également petit. Dans ce cas on peut identifier au premier ordre le tenseur des déformations de Green-Lagrange et le tenseur des déformations linéarisé, qu'on notera $\boldsymbol{\gamma}$, i.e. on a :

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{u}) \simeq \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla(\boldsymbol{u}) + \nabla(\boldsymbol{u})^T\right)$$

On notera que dans ce cas la configuration de référence et la configuration actuelle sont confondues.

Dans la suite, on se placera toujours sous l'hypothèse des petites perturbations.

1.1.1.2 Contraintes et lois de comportement

On introduit en chaque point M d'un milieu continu (et à chaque instant t) un tenseur symétrique $\boldsymbol{\sigma}(M, t)$ appelé tenseur des contraintes, qui, pour chaque direction de vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$, fait correspondre le vecteur $\boldsymbol{T}$, par :

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

qu'on appelle vecteur contrainte. Ce vecteur représente la densité de forces qui s'exerce sur toute région limitée par une surface passant par M et ayant comme normale extérieure $\boldsymbol{n}$.

La résolution des problèmes de mécanique nécessite l'identification de lois de comportement permettant de relier le tenseur des contraintes à des grandeurs cinématiques telles que la déformation. Dans le cas de l'élasticité linéaire, cette loi permet d'écrire le tenseur des contraintes comme une fonction linéaire du tenseur des déformations linéarisé. On notera que :

- dans le cas général d'un matériau hétérogène et anisotrope la loi de comportement est de la forme :
$$\sigma_{ij} = A_{ijk\ell}\gamma_{k\ell}(\boldsymbol{u}) \tag{1.1}$$
où les coefficients $A_{ijk\ell}$, qui dépendent de $\boldsymbol{x}$ dans le cas des matériaux hétérogènes, vérifient les conditions de symétrie :
$$A_{ijk\ell} = A_{jik\ell} = A_{ij\ell k} \tag{1.2}$$
et les conditions de positivité de la forme quadratique associée :
$$\begin{cases} \exists \alpha_0 > 0, /A_{ijk\ell}(\boldsymbol{x})\gamma_{k\ell}(\boldsymbol{u})\gamma_{ij}(\boldsymbol{u}) \geq \alpha_0\gamma_{ij}(\boldsymbol{u})\gamma_{ij}(\boldsymbol{u}) \\ \forall \gamma_{ij}(\boldsymbol{u}) = \gamma_{ji}(\boldsymbol{u}), \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \end{cases} \tag{1.3}$$
- dans le cas particulier des matériaux élastiques isotropes, la loi de comportement (1.1) s'écrit :
$$\sigma_{ij} = \lambda\gamma_{\ell\ell}(\boldsymbol{u})\delta_{ij} + 2\mu\gamma_{ij}(\boldsymbol{u}) \tag{1.4}$$
où les coefficients λ et μ sont appelés coefficients de Lamé.

  La loi (1.4) est appelée loi de Hooke. Cette loi fait intervenir uniquement deux coefficients indépendants au lieu des 21 coefficients indépendants $A_{ijk\ell}$ du cas anisotrope. Plus précisément, les coefficients $A_{ijk\ell}$ vérifient :
$$A_{ijk\ell} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kh} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}) \tag{1.5}$$

1.1.2 Formulations mathématiques

Les grandeurs mécaniques qui caractérisent l'état d'un solide élastique à l'équilibre statique sont les champs de déplacements et de contraintes associés. Dans la suite de cette section, ces champs seront respectivement notés $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{\sigma}$.

1.1.2.1 Classification des données d'un problème

De façon générale, les données d'un problème d'équilibre statique d'un solide élastique linéaire sont :

i) la forme géométrique du domaine occupé par le solide dans sa position de référence,
ii) les forces volumiques qui s'appliquent au domaine,
iii) les coefficients de rigidité de la loi de comportement,
iv) les conditions aux limites de déplacement ou de densité surfacique de forces, sur le bord du domaine. Les plus utilisées sont :
   - les conditions de type Dirichlet : condition de déplacement imposé sur le bord du domaine,
   - les conditions de type Neumann : condition de densité de force imposée sur le bord du domaine,

   D'autres types de conditions aux limites seront employés dans la suite ; ces conditions seront introduites au fur et à mesure dans des contextes bien précis.

La résolution du problème consiste à déterminer, en tout point du domaine, les champs de déplacements $\boldsymbol{u}$ et de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ qui caractérisent l'état du solide à l'équilibre.

1.1.2.2 Formulations classiques (ou locales)

A- *Problème mixte Dirichlet Neumann*

On considère le problème modèle suivant : soit un milieu élastique occupant Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ supposé borné, connexe, de frontière régulière par morceaux. Soit $\boldsymbol{f}$ la densité de forces volumiques appliquées en chaque point de Ω. La frontière de $\partial\Omega$ est composée de deux parties disjointes notées Γ_U et Γ_F. On note $\boldsymbol{n}$ la normale unitaire à Γ_F, extérieure à Ω. Un déplacement noté $\boldsymbol{U}$ est imposé sur Γ_U et la partie complémentaire Γ_F est soumise à une densité surfacique de forces noté $\boldsymbol{F}$. On considère le cas général d'un matériau hétérogène et anisotrope.
Les champs de déplacements $\boldsymbol{u}$ et de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ vérifient les équations et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{div\sigma} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{A\gamma}(\boldsymbol{u}) & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} & \text{sur } \Gamma_U \\ \boldsymbol{\sigma n} = \boldsymbol{F} & \text{sur } \Gamma_F \end{cases} \tag{1.7}$$

Remarque 1.1.1. *Dans le cas où le bord du domaine est soumis uniquement à une densité de forces, i.e.* $\Gamma_F = \partial\Omega$*, pour que le problème correspondant admette une solution il faut que les conditions suivantes soient vérifiées :*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \boldsymbol{f} d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} ds = \boldsymbol{0} \\ &\int_\Omega \boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{x}\, ds = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ces conditions traduisent l'équilibre du torseur des efforts extérieurs. Ces conditions nécessaires sont souvent appelées conditions de compatibilité. Pour ce type de problème, la solution sera toujours définie à un déplacement rigide près. On rappelle que sous l'hypothèse des petites perturbations, un déplacement rigide $\boldsymbol{r}$ *est une superposition d'une translation* $\boldsymbol{a}$ *et d'une rotation* $\boldsymbol{b}$ *:*

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x}$$

B- *Inclusion rigide*

On considère le problème précédent en supposant qu'une inclusion rigide, notée Ω^R, est entièrement contenue dans Ω, i.e. le bord de Ω^R ne rencontre pas le bord de Ω. Cette inclusion est elle même soumise à une densité de forces notée $\boldsymbol{f}^R$. Dans ce cas les champs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ vérifient les équations (1.6) dans $\Omega\backslash\Omega^R$, les conditions aux limites (1.7) et les conditions suivantes sur le bord $\partial\Omega^R$:

$$\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega^R}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x} \tag{1.9}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\partial\Omega^R} \boldsymbol{\sigma n}\, ds = \int_{\Omega^R} \boldsymbol{f}^R d\boldsymbol{x} \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega^R} \boldsymbol{\sigma n} \wedge \boldsymbol{x}\, ds = \int_{\Omega^R} \boldsymbol{f}^R \wedge \boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{1.10}$$

Remarque 1.1.2.
• *Les vecteurs* $\boldsymbol{a}$ *et* $\boldsymbol{b}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *ne sont pas des données mais des inconnues du problème.*
• *Les conditions (1.10) traduisent l'équilibre du sous domaine* Ω^R.

C- *Conditions au bord de type périodicité*

On considère des milieux élastiques linéaires fortement hétérogènes. On suppose que ces hétérogénéités sont réparties périodiquement dans la structure considérée et que les forces volumiques s'exerçant sur la structure satisfont cette périodicité. La modélisation de ce type de milieu conduit à des problèmes posés sur une cellule de base P, avec des conditions aux limites de type périodique. Plus précisément les équations locales s'écrivent :

$$\begin{cases} \boldsymbol{div\sigma} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} & \text{dans } P \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}) & \text{dans } P \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\begin{cases} \bullet\ \boldsymbol{u} \text{ prend des valeurs égales sur deux bords de vecteur normal extérieur opposé.} \\ \bullet \text{ le vecteur contrainte } \boldsymbol{\sigma n} \text{ prend des valeurs égales sur deux bords de vecteur} \\ \text{normal extérieur opposé. (voir exemple Figure 1.1)} \end{cases} \tag{1.12}$$

Afin que le problème (1.11)-(1.12) ainsi posé admette une solution, la condition suivante doit être vérifiée :

$$\int_P \boldsymbol{f} d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

La solution de ce problème sera toujours définie à une translation près.

On peut alors définir un champ de déplacements sur le milieu formé de toutes les cellules de base en prolongeant par périodicité la solution obtenue en résolvant (1.11) et (1.12). Les conditions aux limites (1.12) permettent d'assurer la continuité du déplacement et du vecteur contrainte à l'interface entre deux cellules.

D- *Prise en compte de conditions de transmission sur une interface*

On considère le cas où le domaine Ω est constitué de deux parties, Ω^- et Ω^+, séparées par une interface ω d'équation $x_1 = 0$. On note $\boldsymbol{n}^+$ la normale unitaire à ω, extérieure à Ω^+. En posant $\hat{\boldsymbol{x}} = (x_2, x_3)$, on note $\boldsymbol{w}^+(\hat{\boldsymbol{x}})$ (resp. $\boldsymbol{w}^-(\hat{\boldsymbol{x}})$) la limite, quand elle existe, de $\boldsymbol{w}(x_1, \hat{\boldsymbol{x}})$ lorsque x_1 tend vers 0+ (resp. 0−). On note $[\boldsymbol{w}]_\omega := \boldsymbol{w}^+ - \boldsymbol{w}^-$ le saut de $\boldsymbol{w}$

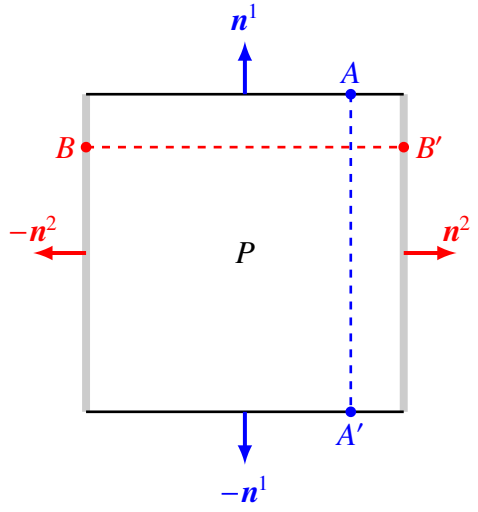


FIGURE 1.1 – Exemple de conditions de périodicité :
$\boldsymbol{u}(A) = \boldsymbol{u}(A')$ et $\boldsymbol{\sigma n}^1(A) = \boldsymbol{\sigma n}^1(A')$
$\boldsymbol{u}(B) = \boldsymbol{u}(B')$ et $\boldsymbol{\sigma n}^2(B) = \boldsymbol{\sigma n}^2(B')$

à travers ω. Dans ce cas les champs de déplacements et de contraintes vérifient

$$\begin{cases} \boldsymbol{div\sigma} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} & \text{dans } \Omega^- \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{A\gamma}(\boldsymbol{u}) & \text{dans } \Omega^- \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} & \text{sur } \Gamma_U \cap \partial\Omega^- \\ \boldsymbol{\sigma n} = \boldsymbol{F} & \text{sur } \Gamma_F \cap \partial\Omega^- \end{cases} \tag{1.13}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^- = \boldsymbol{u}^+ & \text{sur } \omega \\ \boldsymbol{\sigma}^-\boldsymbol{n}^+ = \boldsymbol{\sigma}^+\boldsymbol{n}^+ & \text{sur } \omega \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{div\sigma} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} & \text{dans } \Omega^+ \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{A\gamma}(\boldsymbol{u}) & \text{dans } \Omega^+ \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} & \text{sur } \Gamma_U \cap \partial\Omega^+ \\ \boldsymbol{\sigma n} = \boldsymbol{F} & \text{sur } \Gamma_F \cap \partial\Omega^+ \end{cases} \tag{1.15}$$

Les conditions (1.14) sont dites conditions de transmission à l'interface. Elles expriment la continuité du champs de déplacements et du vecteur contrainte en tous point de ω.
Dans notre étude nous rencontrerons des problèmes avec des conditions de saut non homogènes. Dans ce cas (1.14) est remplacée par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^- = \boldsymbol{g} & \text{sur } \omega \\ \boldsymbol{\sigma}^+\boldsymbol{n}^+ - \boldsymbol{\sigma}^-\boldsymbol{n}^+ = \boldsymbol{h} & \text{sur } \omega \end{cases} \tag{1.16}$$

où $\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{h}$ sont des données.
Ici ces problèmes sont issus d'une analyse asymptotique de problèmes dépendant d'un petit paramètre.
Par la suite, on notera par abus de notation :

$$[\boldsymbol{\sigma n}]_\omega := \boldsymbol{\sigma}^+\boldsymbol{n}^+ - \boldsymbol{\sigma}^-\boldsymbol{n}^+$$

Remarque 1.1.3. *Un problème mathématique qui correspond à une réalité physique, doit en général satisfaire les trois propriétés suivantes :*

(i) Le problème doit admettre une solution.

(ii) La solution doit être unique (éventuellement modulo un sous espace de dimension finie).

(iii) La solution doit être stable c'est-à-dire qu'elle doit dépendre continûment des données.

Dans ce cas le problème est appelé problème bien posé selon Hadamard (voir Courant et Hilbert [13]).

Si les conditions (1.2) et (1.3) sont satisfaites alors les équations (1.6) sont un exemple d'un système d'équations aux dérivées partielles elliptiques. Pour obtenir un problème bien posé on doit compléter les équations (1.6) par des conditions aux limites adéquates telles celles présentées dans les exemples précédents. Un instrument mathématique permettant de démontrer que les problèmes aux limites ainsi obtenus sont bien posés est la formulation variationnelle de ces problèmes.

1.1.2.3 Formulations variationnelles des différents problèmes

Dans cette section on présente succinctement la formulation variationnelle des problèmes considérés précédemment.

A- *Problème mixte Dirichlet Neumann*

Soit V_U l'ensemble des champs cinématiquement admissibles pour le problème (1.6) défini par

$$V_U = \{\boldsymbol{v}/\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3); v_k \in H^1(\Omega); v_k = U_k \text{ sur } \Gamma_U\} \tag{1.17}$$

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{\phi/\phi \in L^2(\Omega), \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, 3\right\} \tag{1.18}$$

où $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions de carré sommable sur Ω, c'est-à-dire :

$$\int_\Omega (f(x))^2 \, dx < \infty$$

La norme dans V_U est celle induite par $(H^1(\Omega)^3)$, c'est-à-dire :

$$\|\boldsymbol{v}\|^2_{V_U} = \sum_{i=1}^{3} \|v_i\|^2_{H^1(\Omega)} \tag{1.19}$$

avec

$$\|\phi\|^2_{H^1(\Omega)} = |\phi|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right|^2_{L^2(\Omega)}, \ |\phi|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \phi(x)^2 dx \tag{1.20}$$

Dans le cas $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}$, on peut remplacer la norme (1.19) par :

$$\|\boldsymbol{v}\|_0 = \left[\int_\Omega \gamma_{ij}(\boldsymbol{v})\gamma_{ij}(\boldsymbol{v})\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.21}$$

On retrouvera une démonstration de ce résultat par exemple dans *Duvaut et Lions* [15].

La formulation variationnelle en déplacements du problème (1.6)-(1.7) s'écrit :

Trouver $\boldsymbol{u}$ *tel que :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} \in V_U \\ a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = L(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \ , \forall \boldsymbol{v} \in V_U. \end{cases} \tag{1.22}$$

avec

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = \displaystyle\int_\Omega A_{k\ell mn}\gamma_{k\ell}(\boldsymbol{u})\gamma_{mn}(\boldsymbol{w})\, d\boldsymbol{x} \\ L(\boldsymbol{w}) = \displaystyle\int_{\Gamma_F} F_k w_k \, ds + \int_\Omega f_k w_k \, d\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{1.23}$$

On notera que $\boldsymbol{u}$ peut également être déterminé en résolvant le problème de minimisation suivant, équivalent à (1.22)-(1.23) :

Trouver $\boldsymbol{u}$ *tel que :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} \in V_U \\ I(\boldsymbol{u}) \leq I(\boldsymbol{v}) \ , \ \forall \boldsymbol{v} \in V_U \end{cases} \tag{1.24}$$

avec

$$I(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) - L(\boldsymbol{v}) \tag{1.25}$$

$I(\boldsymbol{v})$ est l'énergie potentielle du champ cinématiquement admissible $\boldsymbol{v}$. Notons que $\frac{1}{2}a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ est l'énergie élastique de déformation et que $L(\boldsymbol{v})$ est le travail des efforts extérieurs.
Parmi tous les champs cinématiquement admissibles, le champ solution est celui qui minimise l'énergie potentielle.

B- *Inclusion rigide*

L'ensemble V_U des champs cinématiquement admissibles pour ce problème est défini par :

$$V_U = \{\boldsymbol{v}/\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3), v_k = U_k \text{ sur } \Gamma_U \ ; \ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{R} \ , \ \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega^R\} \tag{1.26}$$

où $\mathcal{R}$ est l'ensemble des déplacements rigides défini par :

$$\mathcal{R} := \{\boldsymbol{v}/\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3\}.$$

La formulation variationnelle en déplacements du problème s'écrit :
Trouver $\boldsymbol{u}$ *tel que :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} \in V_U \\ a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = L(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \ , \ \forall \boldsymbol{v} \in V_U. \end{cases} \tag{1.27}$$

avec

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = \displaystyle\int_{\Omega \setminus \Omega^R} A_{k\ell mn} \gamma_{k\ell}(\boldsymbol{u}) \gamma_{mn}(\boldsymbol{w}) \, d\boldsymbol{x} \\ L(\boldsymbol{w}) = \displaystyle\int_{\Gamma_F} F_k w_k \, ds + \int_{\Omega \setminus \Omega^R} f_k w_k \, d\boldsymbol{x} + a_k \int_{\Omega^R} f_k^R \, d\boldsymbol{x} + b_k \int_{\Omega^R} (\boldsymbol{f}^R \wedge \boldsymbol{x})_k \, d\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{1.28}$$

C- *Conditions aux bords de type périodicité*

Soit V l'ensemble des champs cinématiquement admissibles défini par

$$V = \{\boldsymbol{v} / \boldsymbol{v} \in (H^1_{per}(P))^3\} \tag{1.29}$$

où $H^1_{per}(P)$ désigne l'espace des fonctions de $H^1(P)$ dont les traces, définies au sens de $H^{\frac{1}{2}}(\partial P)$, sur les faces opposées de P, sont égales.

Trouver $\boldsymbol{u}$ *tel que :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} \in V \\ a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = L(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \ , \ \forall \boldsymbol{v} \in V. \end{cases} \tag{1.30}$$

avec

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = \displaystyle\int_P A_{k\ell mn} \gamma_{k\ell}(\boldsymbol{u}) \gamma_{mn}(\boldsymbol{w}) \, d\boldsymbol{x} \\ L(\boldsymbol{w}) = \displaystyle\int_P f_k w_k \, d\boldsymbol{x}. \end{cases} \tag{1.31}$$

D- *Prise en compte de conditions de transmission sur une interface*

On considère le cas où les conditions de transmission sont :

$$\begin{cases} [\boldsymbol{u}]_\omega = \boldsymbol{g} \\ [\boldsymbol{\sigma n}]_\omega = \boldsymbol{h} \end{cases} \tag{1.32}$$

De plus, on suppose que $\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{h}$ sont suffisamment régulières.
Soit V_U l'ensemble des champs cinématiquement admissibles défini par

$$V_U = \{\boldsymbol{v} / \boldsymbol{v}^\pm \in (H^1(\Omega^\pm))^3 ; \boldsymbol{v}^+ - \boldsymbol{v}^- = \boldsymbol{g} \text{ sur } \omega \ , \ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{U} \text{ sur } \Gamma_U\} \tag{1.33}$$

En remarquant que le saut d'un produit de fonctions α et β à travers une surface de discontinuité peut s'exprimer sous la forme :

$$[\alpha\beta] = [\alpha]\left(\frac{\beta^+ + \beta^-}{2}\right) + [\beta]\left(\frac{\alpha^+ + \alpha^-}{2}\right) \tag{1.34}$$

la formulation variationnelle en déplacements du problème (1.13)-(1.15)-(1.32) s'écrit :

Trouver $\boldsymbol{u}$ *tel que :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} \in V_U \\ a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = L(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \ , \forall \boldsymbol{v} \in V_U. \end{cases} \tag{1.35}$$

avec

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = \displaystyle\int_{\Omega^-} A^-_{k\ell mn} \gamma_{k\ell}(\boldsymbol{u}) \gamma_{mn}(\boldsymbol{w}) \, d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega^+} A^+_{k\ell mn} \gamma_{k\ell}(\boldsymbol{u}) \gamma_{mn}(\boldsymbol{w}) \, d\boldsymbol{x} \\ L(\boldsymbol{w}) = \displaystyle\int_{\Gamma_F} F_k w_k \, ds + \int_{\Omega^-} f^-_k w_k \, d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega^+} f^+_k w_k \, d\boldsymbol{x} + \int_{\omega} h_k \left(\frac{w^-_k + w^+_k}{2} \right) ds \end{cases} \tag{1.36}$$

Le terme $\int_\omega h_k \frac{w^-_k + w^+_k}{2} ds$ représente le travail dans le déplacement $\boldsymbol{w}$ dû à la densité surfacique de forces $\boldsymbol{h}$ imposée sur la surface ω.

Remarque 1.1.4. *A cause de l'abus de notation, la formule (1.34) ne peut clairement pas s'appliquer à* $[\boldsymbol{\sigma n}]_\omega$.

1.2 Méthode de décomposition de domaines

Dans la suite (cf. Chapitre 7), l'algorithme de résolution du problème (7.7) sera de type décomposition de domaines. Il est utile de rappeler le point de départ de ces méthodes. Pour plus de détails sur les méthodes de décomposition de domaines on renvoie le lecteur vers, par exemple, *Le Tallec* [26] et *Toselli et Widlund* [40].

En reprenant les notations précédentes, on considère le problème modèle suivant :

$$\begin{cases} -\boldsymbol{div}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) & = & \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} & = & \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}) & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma n} & = & \boldsymbol{F} & \text{sur } \Gamma_F \\ \boldsymbol{u} & = & \boldsymbol{U} & \text{sur } \Gamma_U \end{cases} \tag{1.37}$$

Le domaine Ω est décomposé en deux sous domaines, qui ne se recouvrent pas, Ω^1 et Ω^2, et ω est l'interface entre les sous domaines. L'objectif de la méthode de décomposition de domaines est de remplacer le problème dans tout le domaine par un problème défini uniquement sur l'interface. Ces deux conditions sont vérifiées sur l'interface :

- continuité de la solution $\boldsymbol{u}$,
- continuité du vecteur contrainte.

Nous imposerons une des deux conditions et vérifierons l'autre. Soit $\lambda = Tr(\boldsymbol{u})$ sur l'interface avec $\boldsymbol{u}$ la solution du problème (1.37). Résoudre le problème (1.37) équivaut à résoudre, sur chaque sous domaine, le problème suivant où λ est l'inconnue supplémentaire et $i = 1$ ou 2 :

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}\boldsymbol{\sigma}^i & = & \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega^i \\ \boldsymbol{\sigma}^i & = & \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^{\pm}) & \text{dans } \Omega^i \\ \boldsymbol{\sigma}^i\boldsymbol{n} & = & \boldsymbol{F} & \text{sur } \Gamma_F \cap \Omega^i \\ \boldsymbol{u}^i & = & \boldsymbol{U} & \text{sur } \Gamma_U \cap \Omega^i \\ \boldsymbol{u}^i & = & \lambda & \text{sur } \omega \end{cases} \tag{1.38}$$

Pour chaque λ donné, on considère $\boldsymbol{u}^i_\lambda$ la solution de :

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}\boldsymbol{\sigma}^i_\lambda & = & \boldsymbol{0} & \text{dans } \Omega^i \\ \boldsymbol{\sigma}^i_\lambda & = & \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^i_\lambda) & \text{dans } \Omega^i \\ \boldsymbol{\sigma}^i_\lambda\boldsymbol{n} & = & \boldsymbol{0} & \text{sur } \Gamma_F \cap \Omega^i \\ \boldsymbol{u}^i_\lambda & = & \boldsymbol{U} & \text{sur } \Gamma_U \cap \Omega^i \\ \boldsymbol{u}^i_\lambda & = & \lambda & \text{sur } \omega \end{cases} \tag{1.39}$$

On note S^i, l'opérateur appelé de Steklov Poincaré qui associe à chaque donnée λ, sur ω, le vecteur contrainte solution de (1.38) s'exerçant sur ω, i.e. :

$$S^i\lambda = \boldsymbol{\sigma}^i_\lambda\boldsymbol{n}^i$$

où $\boldsymbol{n}^i$ est la normale extérieure à ω par rapport à Ω^i.

On remarque qu'en utilisant la linéarité de (1.38) on a $\boldsymbol{u}^i = \boldsymbol{u}^i_0 + \boldsymbol{u}^i_\lambda$ où $\boldsymbol{u}^i_0$ est la solution de (1.38) avec $\boldsymbol{u}^i_0 = \boldsymbol{0}$ sur ω. Avec $\boldsymbol{n}^1 = -\boldsymbol{n}^2$, la continuité du vecteur contrainte sur l'interface s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^1\boldsymbol{n}^1 + \boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{n}^2 &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\sigma}^1_\lambda\boldsymbol{n}^1 + \boldsymbol{\sigma}^1_0\boldsymbol{n}^1 + \boldsymbol{\sigma}^2_\lambda\boldsymbol{n}^2 + \boldsymbol{\sigma}^2_0\boldsymbol{n}^2 &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

En utilisant maintenant l'opérateur de Steklov Poincaré on a :

$$S^1\lambda + S^2\lambda = -\boldsymbol{\sigma}^1_0\boldsymbol{n}^1 - \boldsymbol{\sigma}^2_0\boldsymbol{n}^2$$

et finalement, avec $S = S^1 + S^2$, le système sur l'interface s'écrit :

$$S\lambda = -\boldsymbol{\sigma}^1_0\boldsymbol{n}^1 - \boldsymbol{\sigma}^2_0\boldsymbol{n}^2 \tag{1.40}$$

1.3 Méthodes asymptotiques

Les méthodes asymptotiques formelles permettent d'étudier l'influence de petits paramètres sur la solution d'un problème donné. Souvent le petit paramètre a une grande influence sur la solution dans une région étroite du domaine. Une étude asymptotique permet de caractériser ces phénomènes locaux qui pourront être pris en compte dans une résolution numérique du problème.

1.3.1 Généralités

Un des points clés de la méthode asymptotique que nous présentons dans cette section est la notion de développement asymptotique. La définition de cette notion est l'objet du

prochain paragraphe.
Nous nous inspirons dans ce qui suit de *Van Dyke* [41], *Sanchez-Hubert* et *Sanchez-Palencia* [32] et la présentation de la méthode des développements asymptotiques raccordés reprend les arguments de la thèse de *Tordeux* [39].

Soit ε une variable réelle définie dans l'intervalle $]0, \varepsilon_0[$, $\varepsilon_0 << 1$. Soit Ω un domaine d'une variable x, scalaire ou vectorielle, avec $x = x(\varepsilon)$, et soit $f(x, \varepsilon)$ une fonction définie sur Ω.

Définition 1.3.1. *On désigne par fonctions de jauge, pour $\varepsilon \searrow 0$, les éléments d'une suite de fonctions $\eta_i(\varepsilon)$ satisfaisant à :*

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\eta_{i+1}(\varepsilon)}{\eta_i(\varepsilon)} = 0 \tag{1.41}$$

Si $\eta(\varepsilon)$ est une fonction de jauge alors

$$\begin{aligned} f(x, \varepsilon) = o(\eta) &\Leftrightarrow \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{f(x, \varepsilon)}{\eta(\varepsilon)} = 0 \\ f(x, \varepsilon) = O(\eta) &\Leftrightarrow \left| \frac{f(x, \varepsilon)}{\eta(\varepsilon)} \right| < +\infty \end{aligned} \tag{1.42}$$

Définition 1.3.2. *Pour x_o une valeur de x fixé dans Ω :*

$$F_N(x_o, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \eta_i(\varepsilon) f^i(x_0) \tag{1.43}$$

est un développement asymptotique de $f(x_o, \varepsilon)$ par rapport aux fonctions de jauge $\eta_i(\varepsilon)$ si

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{f(x_o, \varepsilon) - F_N(x_o, \varepsilon)}{\eta_N(\varepsilon)} = 0, \quad N = 0, 1, ... \tag{1.44}$$

ou de façon équivalente :

$$\begin{cases} f(x_o, \varepsilon) = f^0(x_o, \varepsilon) + o(\eta_0) & \textit{pour } N = 0 \\ f(x_o, \varepsilon) = F_N(x_o, \varepsilon) + o(\eta_N) & \textit{pour tout } N \end{cases} \tag{1.45}$$

Remarque 1.3.1.

- *Le développement asymptotique (1.43) est une approximation de la fonction $f(x = x_o, \varepsilon)$, quand $\varepsilon \searrow 0$, avec une erreur en $o(\eta_N(\varepsilon))$. L'ordre de l'erreur peut donc être contrôlé par le choix de N. C'est tout l'intérêt de ce type de développement.*
- *On notera que la précision d'un développement asymptotique est d'autant meilleure que ε est petit.*

On dit que la **perturbation** introduite par le paramètre ε est **régulière** si le développement asymptotique est uniformément valable dans Ω. C'est à dire :

$$f(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \eta_i(\varepsilon) f_i(x) + o(\eta_N(\varepsilon)), \quad \forall x \in \Omega \tag{1.46}$$

Lorsque le développement (1.43) n'est valable que dans une partie du domaine Ω, on dit que la **perturbation est singulière**.

1.3.2 Méthode des développements asymptotiques raccordés

Dans certains problèmes asymptotiques, le petit paramètre ε intervient de telle sorte que l'influence de certaines conditions aux limites seront perdues lorsque ε tend vers 0 et la zone d'influence de ces conditions aux limites va décroître avec ε. Le processus asymptotique fait apparaître un phénomène de couche limite, c'est-à-dire que le comportement de la solution va subir une variation brutale dans une zone étroite du domaine. On en déduit que, pour ce type de problème, le comportement asymptotique de la solution est différent dans la couche de celui à l'extérieur de la couche. Ceci suggère de décrire le comportement asymptotique de la solution dans la couche limite par un premier développement asymptotique, appelé développement intérieur, et de décrire le comportement asymptotique à l'extérieur de la couche par un deuxième développement, nécessairement différent du développement intérieur, qu'on appelle développement extérieur.
L'introduction de ces deux développements présente une difficulté quant à la définition précise de leur domaine de validité car la transition entre l'intérieur et l'extérieur de la couche n'est pas nette. On suppose alors que la solution du problème vérifie simultanément les deux développements dans une zone intermédiaire. L'expression mathématique de l'égalité des deux développements est appelée principe de raccordement.
La méthodologie décrite ci-dessus illustre les trois concepts de base de la méthode des développements asymptotiques raccordés.

Remarque 1.3.2. *La perturbation introduite par le petit paramètre ε est de nature géométrique étant donné que l'épaisseur de la couche limite va décroître avec ε. Par conséquent, les deux domaines, intérieur et extérieur, vont varier simultanément lorsque $\varepsilon \to 0$. L'utilisation de coordonnées et géométries normalisées (indépendantes de ε) est systématique afin d'obtenir une solution asymptotique définie sur un domaine indépendant de ε. On soulignera qu'en pratique le changement de coordonnées peut engendrer un domaine non borné qui va continuer à croître lorsque $\varepsilon \to 0$ mais qui va converger vers un domaine fixe.*

Dans ce qui suit, nous illustrons la méthode des développements asymptotiques raccordés à travers un exemple, tiré de *Van Dyke* [41], qui reprend un modèle simple proposé par Friedrichs. L'objectif est double : d'une part mettre en évidence la différence entre une perturbation régulière et une perturbation singulière, et d'autre part mettre en oeuvre la méthode des développement asymptotique raccordés sur un exemple simple.

On considère les deux problèmes suivants qui dépendent d'un petit paramètre ε :

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{d^2u^\varepsilon}{dx^2}(x) + \dfrac{du^\varepsilon}{dx}(x) = -sin(x) \quad (0 < x < \pi) \\ \\ u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1.47}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2w^\varepsilon}{dx^2}(x) + \varepsilon \dfrac{dw^\varepsilon}{dx}(x) = -sin(x) \quad (0 < x < \pi) \\ \\ w^\varepsilon(0) = w^\varepsilon(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1.48}$$

Le paramètre ε intervient dans le problème (1.47) de telle sorte que l'ordre de l'équation différentielle est plus petit pour $\varepsilon = 0$ que pour $\varepsilon > 0$. Ceci implique que pour $\varepsilon = 0$ l'une des deux conditions aux limites ne sera pas satisfaite. On dit qu'il y a perturbation singulière. Cette constatation n'est pas valable dans le problème (1.48) étant donné que l'ordre de l'équation est indépendant de ε, et donc les deux conditions aux limites seront vérifiées.

Notons qu'un simple développement asymptotique de w^ε défini par :

$$w^\varepsilon(x) = w^0(x) + \varepsilon w^1(x) + \varepsilon^2 w^2(x) + O(\varepsilon^3)$$

permet de déterminer une bonne approximation de la solution, même pour des valeurs de ε relativement élevées. On retrouvera les détails de ce résultat dans la référence indiquée précédemment.
Ci-après nous allons nous focaliser sur le problème singulier et montrer qu'un simple développement asymptotique de la solution ne permet pas de donner une bonne approximation du problème. Nous détaillerons ensuite l'approximation par la méthode des développements asymptotiques raccordés.

La solution analytique du problème (1.47) est donnée par :

$$u^\varepsilon(x) = \frac{1}{1+\varepsilon^2}\left(1 + \cos(x) + \varepsilon\sin(x) - \frac{2\left(e^{\frac{-x}{\varepsilon}} - e^{\frac{-\pi}{\varepsilon}}\right)}{1 - e^{\frac{-\pi}{\varepsilon}}}\right) \tag{1.49}$$

Dans un premier temps, on suppose le développement asymptotique suivant de u^ε dans tout le domaine :

$$u^\varepsilon(x) = u^{\varepsilon,e}(x) = u^0(x) + \varepsilon u^1(x) + \varepsilon^2 u^2(x) + O(\varepsilon^3) \tag{1.50}$$

En introduisant ce développement dans (1.47), on montre que :

$$\begin{cases} u^0(x) = 1 + \cos(x) \\ u^1(x) = \sin(x) \\ u^2(x) = -(1 + \cos(x)) \end{cases} \tag{1.51}$$

et on constate que, pour ε petit fixé, la solution approchée $u^\varepsilon_{app} = u^0(x) + \varepsilon u^1(x) + \varepsilon^2 u^2(x)$ est une bonne approximation de la solution u^ε sauf dans un voisinage de $x = 0$, où la variation brutale de u^ε n'est pas prise en compte par u^ε_{app} (cf. Figure 1.2).
Le développement (1.50) appelé développement extérieur, est une approximation de la solution u^ε dans le domaine loin de $x = 0$, appelé domaine extérieur.
A présent on cherche un autre développement, appelé développement intérieur, dans le voisinage de $x = 0$ (i.e. $x \in [0, x_0[$) en exprimant u^ε à l'aide de la variable rapide $y = \frac{x}{\varepsilon}$:

$$u^\varepsilon(x) = u^{\varepsilon,i}(y) = v^0(y) + \varepsilon v^1(y) + \varepsilon^2 v^2(y) + O(\varepsilon^3) \tag{1.52}$$

En remplaçant dans (1.47) u^ε par son développement intérieur (1.52) et en remarquant que le second membre se développe sous la forme

$$\sin(\varepsilon y) = \varepsilon y + O(\varepsilon^3)$$

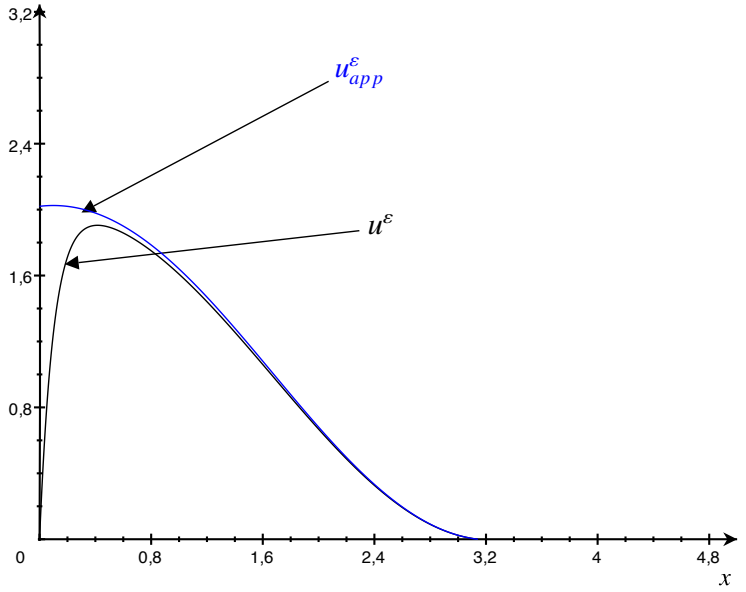


FIGURE 1.2 – Graphe de u^{ε} et de $u^{\varepsilon}_{app} = u^0(x) + \varepsilon u^1(x) + \varepsilon^2 u^2(x)$, pour $\varepsilon = 0.1$

on obtient une partie des équations vérifiées par les termes v^0, v^1 et v^2 :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v^0}{dy^2}(y) + \dfrac{dv^0}{dy}(y) = 0 \quad (y > 0) \\ \\ v^0(0) = 0 \end{cases} \tag{1.53}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v^1}{dy^2}(y) + \dfrac{dv^1}{dy}(y) = 0 \quad (y > 0) \\ \\ v^1(0) = 0 \end{cases} \tag{1.54}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v^2}{dy^2}(y) + \dfrac{dv^2}{dy}(y) = -y \quad (y > 0) \\ \\ v^2(0) = 0 \end{cases} \tag{1.55}$$

Ces problèmes ne sont pas bien posés étant donné qu'il manque une condition pour y qui tend vers $+\infty$. Notons que les solutions des problèmes (1.53), (1.54) et (1.55), ainsi posés, dépendent d'une constante indéterminée et sont respectivement données par :

$$v^i(y) = c_i(e^{-y} - 1)\ ,\ i = 0, 1 \tag{1.56}$$

$$v^2(y) = c_2(e^{-y} - 1) - \frac{1}{2}y^2 + y \tag{1.57}$$

Les constantes c_0, c_1 et c_2 seront déterminées en écrivant le raccord du développement intérieur avec le développement extérieur.
Le raccord est obtenu en supposant que les deux développements coïncident dans une zone

intermédiaire. Plus précisément, on suppose que les développements, intérieur et extérieur, ont la même limite respectivement pour y qui tend vers l'infini et x qui tend vers zéro. Un développement de Taylor à l'ordre 2 permet de déterminer le comportement asymptotique du développement extérieur pour x qui tend vers zéro, i.e. pour $x = \varepsilon y$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^{\varepsilon,e}(\varepsilon y) &\simeq u^0(\varepsilon y) + \varepsilon u^1(\varepsilon y) + \varepsilon^2 u^2(\varepsilon y) \\
&\simeq (1 + \cos(\varepsilon y)) + \varepsilon(\sin(\varepsilon y)) - \varepsilon^2(1 + \cos(\varepsilon y)) \\
&\simeq (1 + 1 - \frac{\varepsilon^2 y^2}{2}) + \varepsilon(\varepsilon y) - \varepsilon^2(1 + 1 - \frac{\varepsilon^2 y^2}{2}) \\
&\simeq 2 - \varepsilon^2(\frac{y^2}{2} - y + 2)
\end{aligned} \tag{1.58}$$

On en déduit par raccordement des deux développements, la limite, lorsque $y_1 \to \infty$, de chacun des termes intérieurs v^0, v^1 et v^2 :

$$\lim_{y\to+\infty} v^0(y) = 2\,,\ \lim_{y\to+\infty} v^1(y) = 0\,,\ \lim_{y\to+\infty} v^2(y) = -(\frac{y^2}{2} - y + 2)$$

Ces limites sont les conditions manquantes pour que les problèmes (1.53), (1.54) et (1.55) soient bien posés. Elle permettent de déterminer les constantes c_0, c_1 et c_2, i.e.

$$c_0 = -2\,,\ c_1 = 0\,,\ c_2 = 2$$

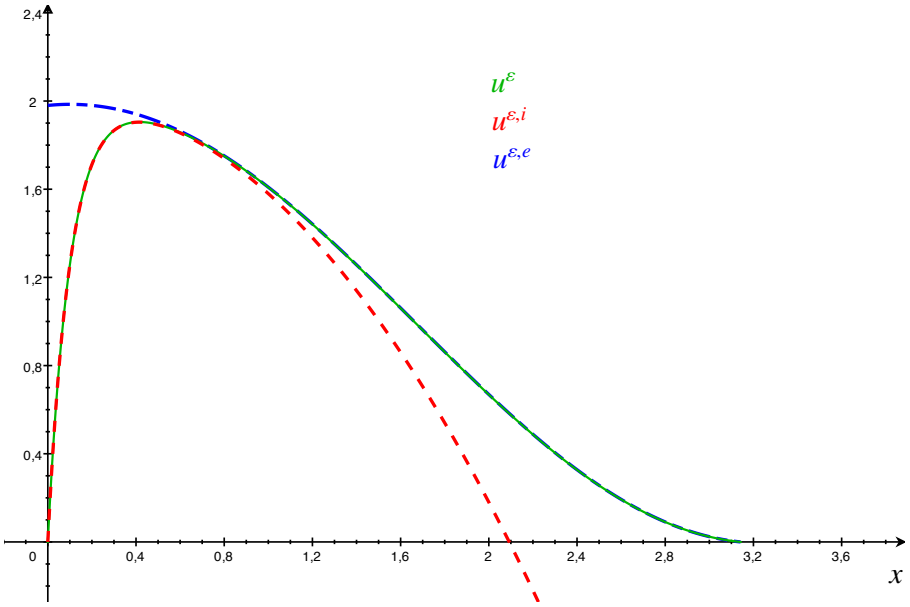


FIGURE 1.3 – Graphe de u^{ε}, $u^{\varepsilon,i}$ et $u^{\varepsilon,e}$, pour $\varepsilon = 0.1$

Première partie

Etude asymptotique

Chapitre 2

Introduction de l'étude asymptotique

Dans un repère orthonormé $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, on considère une structure tridimensionnelle élastique linéaire anisotrope, qui occupe dans sa position de référence un domaine noté Ω. On note ω l'intersection de Ω avec le plan d'équation $x_1 = 0$. Soit ε un petit paramètre, dont en précisera l'origine (ou la signification) ultérieurement. On suppose que des hétérogénéités volumiques identiques, de taille d'ordre ε, sont réparties périodiquement, avec une période également d'ordre ε, le long de la surface ω. Soulignons ici que la périodicité n'est que dans le plan $(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ et donc qu'il s'agit en fait d'une fine couche, de taille d'ordre ε, d'hétérogénéités distribuées périodiquement sur ω (cf. Figure 2.1).

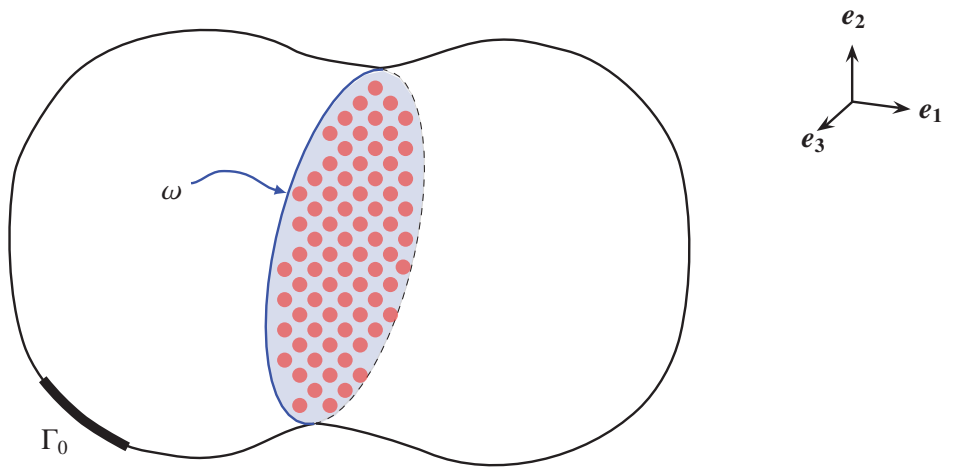


FIGURE 2.1 – Paramètres du problème réel dans le repère $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$

Pour un chargement donné, on note $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ et $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ les champs de déplacements et de contraintes à l'équilibre statique. L'objectif est d'étudier le comportement asymptotique de ces champs lorsque $\varepsilon \to 0$ pour différents types d'inclusions. On distinguera deux catégories d'hétérogénéités :

- *Les inclusions élastiques de rigidité pouvant dépendre de ε.*
  Dans ce cas le domaine occupé par les inclusions est inclus dans le domaine de

calcul. Les conditions de transmission suivantes doivent être vérifiées sur le bord de chaque inclusion :

$$[\boldsymbol{u}^\varepsilon] = [\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \boldsymbol{n}] = \mathbf{0} \tag{2.1}$$

où $\boldsymbol{n}$ est la normale sortante à chaque inclusion.

- *Les cavités.*
  Dans ce cas les inclusions ne font pas partie du domaine de calcul. Leur présence dans la structure se traduit par la condition aux limites suivante sur le bord de chaque inclusion :

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \boldsymbol{n} = \mathbf{0}$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, le volume des hétérogénéités diminue et, en même temps, le nombre d'hétérogénéités augmente. Le problème limite correspond donc à un problème d'interface où la couche d'hétérogénéités est remplacée par une surface homogène. Il est important de remarquer que la structure géométrique de cette interface, du moins à l'échelle macroscopique, ne prend pas en compte les hétérogénéités. Il faut donc déterminer des conditions de transmission qui dépendent de la microstructure de l'interface.

2.1 Position du problème

Soit $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière régulière $\partial\Omega$. Soit ω l'intersection de Ω avec le plan d'équation $x_1 = 0$. On suppose ω non vide, borné et de mesure bidimensionnelle strictement positive. On suppose que des petites hétérogénéités sont réparties de façon périodique sur le plan ω. Ces hétérogénéités sont des petits volumes, tous identiques (cf. Figure 2.1).
On note $\hat{Y} \subset \mathbb{R}^2$ la base d'un motif périodique plan. Soit I un domaine fermé strictement contenu dans $\mathbb{R} \times \hat{Y}$ de diamètre d, où d est du même ordre de grandeur que le diamètre de Ω, vérifiant $d < diam\hat{Y}$ (cf. Figure 2.2). On suppose que ω est contenu dans l'union de $\mathcal{N}(\varepsilon) \approx \frac{aire(\omega)}{aire(\hat{Y})}\varepsilon^{-2}$ ensembles $\varepsilon\hat{Y}$. On suppose également que les hétérogénéités occupent chaque sous domaine εI. Les hétérogénéités sont donc de diamètre εd. On désigne par $\varepsilon\partial I$ le bord de εI et par I^ε, resp. ∂I^ε, l'union de toutes les hétérogénéités, resp. tous les bords des hétérogénéités.

Remarquons qu'à cette étape de notre description, le paramètre ε est un paramètre adimensionnel caractérisant à la fois le rapport entre le diamètre des hétérogénéités (εd) et le diamètre de Ω, et à la fois le rapport entre la taille de la période ($\varepsilon\hat{Y}$), qui caractérise la répartition des hétérogénéités autour du plan ω, et le diamètre de Ω.

On suppose maintenant que le domaine Ω est composé, en dehors des hétérogénéités, d'un matériau élastique linéaire homogène caractérisé par le tenseur de rigidité $\boldsymbol{A}$ qui vérifie les conditions de symétrie et de positivité. Pour les hétérogénéités, on considère deux situations :

(i) des inclusions élastiques caractérisées par un tenseur de rigidité $\boldsymbol{A}^{\varepsilon,I}$ qui dépend de ε,

(ii) des cavités.

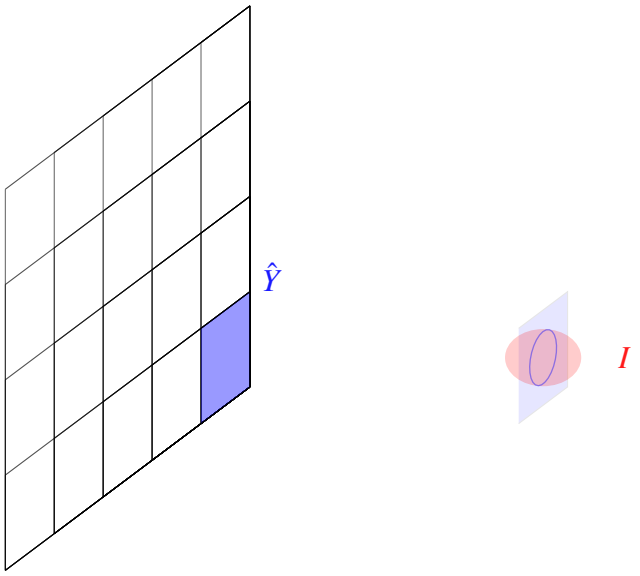


FIGURE 2.2 – Définitions de $\hat{Y}$ et de I

Dans le cas (i), le paramètre ε caractérisera aussi l'ordre de grandeur entre la rigidité des inclusions et celle en dehors des inclusions.

La structure est encastrée sur une partie du bord de Ω, notée Γ_0 (de mesure surfacique strictement positive), et soumise à une densité surfacique de forces $\boldsymbol{F}$ sur la partie complémentaire Γ_F. On suppose, afin de simplifier la lecture, et sans perte de généralité, que les forces volumiques sont négligeables.

Soient $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ et $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ les champs de déplacements et de contraintes de la structure à l'équilibre. Pour $\boldsymbol{\varepsilon}$ fixé, ces champs sont les solutions du problème élasto-statique P^ε, correspondant aux différentes situations :

- cas des inclusions élastiques :

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \boldsymbol{0} & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) & \text{dans } \Omega\backslash I^\varepsilon \\ \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \boldsymbol{A}^{\varepsilon,I}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) & \text{dans } I^\varepsilon \\ \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon\boldsymbol{n} = \boldsymbol{F} & \text{sur } \Gamma_F \\ \boldsymbol{u}^\varepsilon = \boldsymbol{0} & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

avec

$$\boldsymbol{A}^{\varepsilon,I} = \varepsilon^p \boldsymbol{A}^I \quad , \quad \boldsymbol{A}^I \backsimeq \boldsymbol{A} \quad , \quad p \in \mathbb{Z}$$

et $\boldsymbol{\gamma}$ est le tenseur des déformations linéarisé, i.e.

$$\gamma_{ij}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

- cas des cavités :

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}\boldsymbol{\sigma}^{\epsilon} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega\backslash I^{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon} = \boldsymbol{A}\gamma(\boldsymbol{u}^{\varepsilon}) & \text{dans } \Omega\backslash I^{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{F} & \text{sur } \Gamma_F \\ \boldsymbol{u}^{\varepsilon} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_0 \\ \boldsymbol{\sigma}^{\epsilon}\boldsymbol{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial I^{\varepsilon} \end{cases} \tag{2.3}$$

Une étude désormais classique via les formulations variationnelles posées sur les espaces fonctionnels adaptés permet d'assurer l'existence et l'unicité de la solution, à ε fixé.

2.2 Etude asymptotique du problème $(P^{\varepsilon}, \varepsilon \to 0)$: principales étapes

Soient $\boldsymbol{u}^{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon}$ les champs de déplacements et de contraintes du problème P^{ε} défini par (2.2) ou (2.3). L'objectif de l'étude asymptotique du problème $(P^{\varepsilon}, \varepsilon \to 0)$ est de déterminer le comportement de $\boldsymbol{u}^{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon}$ lorsque le petit paramètre ε tend vers 0. Plus précisément on cherche à remplacer le problème défini précédemment par un nouveau problème où les hétérogénéités auront été remplacées par des conditions de transmission convenables sur la surface ω. Les coefficients caractéristiques apparaissant dans ces relations de discontinuité prendront en compte, de façon adéquate, les hétérogénéités présentes dans le problème P^{ε}. Pour cela on utilise la méthode des développements asymptotiques raccordés présentée dans le premier chapitre. Comme cela a été dit précédemment, on s'inspire fortement de l'utilisation qu'en ont fait *Nguetseng et Sanchez-Palencia* [30] dans ce type de problèmes et qui a été reprise et ultérieurement développée, entre autres, par *Marigo et Pideri* [29] et *David et al.* [14]. La présentation de la méthodologie s'inspire, quant à elle, de celle proposée dans la thèse de *Tordeux* [39].

Nous distinguons maintenant deux zones de calcul de la solution : dans la première, située loin des hétérogénéités, les champs de déplacements et les champs de contraintes ne « verront pas les hétérogénéités ». Cette zone est définie par :

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \Omega \; ; \; |x_1| > \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

et constitue ce que l'on appelle classiquement le domaine extérieur.
Dans la seconde zone de calcul, située au voisinage des hétérogénéités, les champs de déplacements et les champs de contraintes ont des oscillations rapides par rapport aux variables du plan $(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, dues à la présence des petites hétérogénéités. Cette zone, que l'on appelle domaine intérieur est ici définie par :

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \Omega \; ; \; |x_1| < \frac{\eta(\varepsilon)}{2} \right\}$$

où $\eta(\varepsilon) > \varepsilon$ est une fonction qui doit tendre vers zéro avec ε mais moins vite que ε. La

fonction $\eta(\varepsilon)$ vérifie donc les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \eta(\varepsilon) = 0 \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty \end{cases} \tag{2.4}$$

On notera que, par définition, les domaines intérieur et extérieur dépendent de ε.

Remarque 2.2.1. *Une hypothèse importante de la méthode des développements asymptotiques raccordés est la superposition des deux domaines, intérieur et extérieur, dans une zone de transition appelée zone de raccord. Les définitions données précédemment permettent de respecter cette hypothèse. On retrouvera, dans la Figure 2.3, une illustration, dans un exemple 2D, de la décomposition en domaines intérieur et extérieur, faisant apparaître la zone de recouvrement.*

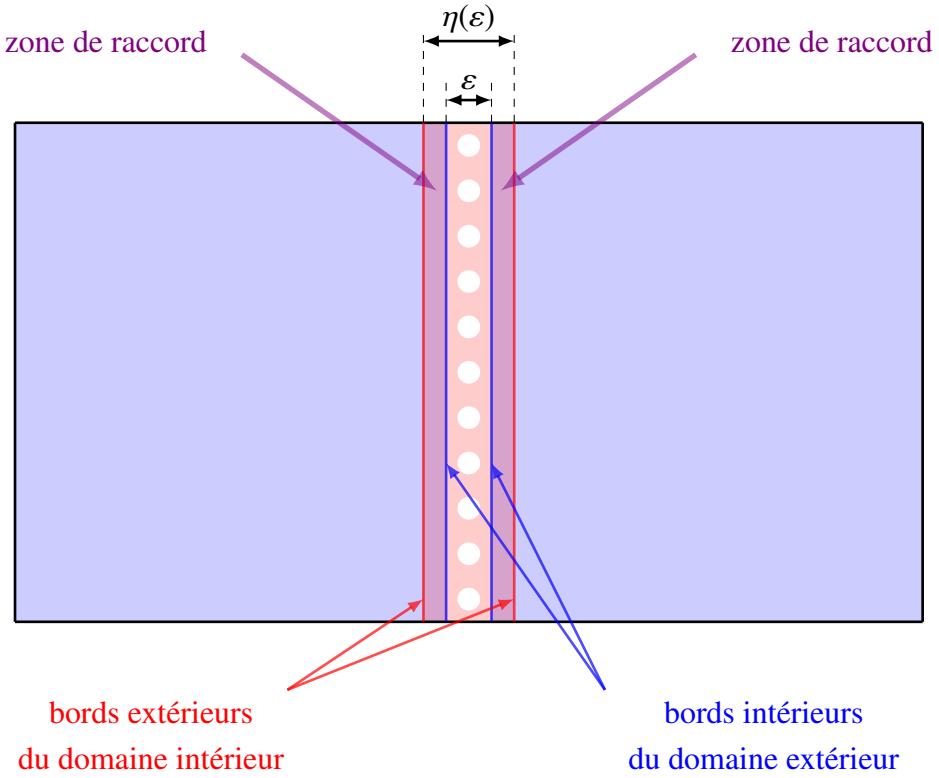


FIGURE 2.3 – Identification du domaine extérieur (couleur bleu), du domaine intérieur (couleur rouge), et de la zone de raccord (couleur violette).

On suppose à présent que la solution admet un développement asymptotique valable dans la zone extérieure et un autre développement dans la zone intérieure. Dans la zone intermédiaire, les deux développements doivent coïncider et cela donnera lieu aux conditions de raccord.

Classiquement (voir par exemple *Tordeux* [39], Chapitre 8) la méthodologie utilisée dans les développements asymptotiques raccordés est la suivante :

1) utilisation de coordonnées normalisées de façon que les domaines intérieur et extérieur convergent, pour ε tendant vers 0, vers des domaines fixes, indépendants de ε,
2) utilisation d'Ansatz pour la forme de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ et déduction du développement de $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ dans les deux domaines,
3) écriture des systèmes d'équations aux dérivées partielles découlant des choix précédents dans chaque domaine,
4) écriture des conditions de raccord.

La suite de cette section est consacrée au détail de ces quatre étapes.

1) *Choix de coordonnées normalisées.*

- Le domaine extérieur est partagé en une partie $\Omega^{+,\varepsilon}$ et une partie $\Omega^{-,\varepsilon}$. On notera que lorsque ε tend vers 0, les domaines $\Omega^{+,\varepsilon}$ et $\Omega^{-,\varepsilon}$ convergent respectivement vers Ω^+ et Ω^-, définis par :

$$\Omega^+ := \{\boldsymbol{x} \in \Omega \; ; \; x_1 > 0\} \; , \; \Omega^- := \{\boldsymbol{x} \in \Omega \; ; \; x_1 < 0\}$$

  Le domaine extérieur sera donc le domaine $\Omega^+ \cup \Omega^- = \Omega \backslash \omega$.
  Un point est alors repéré dans le domaine extérieur par ses coordonnées (x_1, x_2, x_3) que l'on qualifie de macroscopiques, et qui correspondent à l'échelle de la structure.

- En adoptant le même raisonnement que dans les méthodes d'homogénéisation des milieux périodiques (voir par exemples *Sanchez-Palencia* [34], *Bensoussan et al.* [6], ou encore *Cioranescu et Donato* [12]), la position $\boldsymbol{z} := (z_1, z_2, z_3)$ d'un point M, dans le domaine intérieur, peut être déterminée par deux données indépendantes :

  i) la position macroscopique $(0, \hat{\boldsymbol{x}}) := (0, x_2, x_3)$ du centre de la période $\varepsilon\hat{Y}$ contenant la projection du point M sur ω,
  ii) et la position du point M par rapport à ce centre.

  La taille d'une cellule étant d'ordre ε et l'épaisseur du domaine intérieur d'ordre $\eta(\varepsilon)$, les deux étant des quantités très petites, la donnée qui traduit la position du point M par rapport au centre de la période, est qualifiée de coordonnée microscopique.

  En d'autres termes, la relation entre les coordonnées $\boldsymbol{z}$ du point M et le point $((0, \hat{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{y})$ du domaine intérieur est donnée par

$$\boldsymbol{z} = (0, \hat{\boldsymbol{x}}) + \varepsilon \boldsymbol{y} \tag{2.5}$$

  Dans la suite de cette étude, sans perdre de généralité, on considérera le cas où $\hat{Y} =]-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}[\times]-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}[$.

Afin de se ramener sur un domaine ne dépendant pas de ε, on effectue une dilatation des variables εy_i d'un facteur $\frac{1}{\varepsilon}$. On obtient ainsi, en tenant compte de (2.4) pour le domaine intérieur, une bande constituée de cellules élémentaires infinies dans la direction $\boldsymbol{e}_1$ et de taille α dans les deux autres directions (cf. Figure 2.4), se répétant de façon périodique dans le plan $(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. L'échelle microscopique ainsi définie fournira une description précise des hétérogénéités.

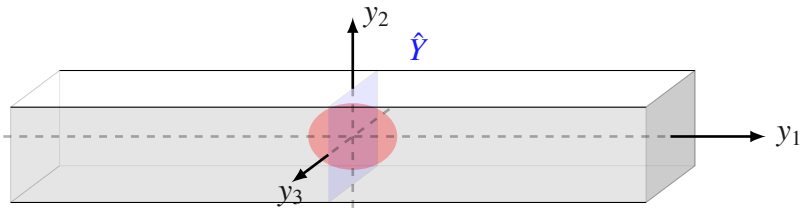


FIGURE 2.4 – Exemple de cellule de base Y

2) *Ansatz.*

On suppose que les champs de déplacements solutions du problème P^ε, définis par (2.2) ou (2.3), peuvent s'écrire sous la forme des deux développements suivants :

- un développement dit extérieur valable uniquement dans le domaine extérieur, i.e. loin de ω :

$$\boldsymbol{u}^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \boldsymbol{u}^i(x_1, x_2, x_3) \tag{2.6}$$

- un développement dit intérieur valable uniquement dans le domaine intérieur, i.e. proche de ω :

$$\boldsymbol{u}^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \boldsymbol{v}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \tag{2.7}$$

  où les $\boldsymbol{v}^i$ sont des fonctions $\hat{\boldsymbol{y}}$-périodiques, i.e. telles que :

$$\boldsymbol{v}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}} + p\alpha\boldsymbol{e}_2 + q\alpha\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{v}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}^2 \tag{2.8}$$

La relation (2.7) signifie qu'il existe des champs $\boldsymbol{v}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}})$ définis sur $\omega \times \mathbb{R}^3$, $\hat{Y}$ périodiques dans les variables $\hat{\boldsymbol{y}}$ tels que, pour $y_i = \frac{x_i}{\varepsilon}$, le membre de droite de (2.7) est un développement asymptotique de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ dans le domaine intérieur.

Dans le domaine intérieur, à cause des choix de coordonnées normalisées, nous devons, lorsque nous dérivons par rapport à la variable de position globale, utiliser la formule de dérivation suivante :

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.9}$$

Les relations (2.5) et (2.9) impliquent la re-formulation des opérateurs $(\boldsymbol{div})$ et $(\boldsymbol{\gamma})$ en fonction des coordonnées macroscopiques $\hat{\boldsymbol{x}}$ et microscopiques $\boldsymbol{y}$. Plus précisément, pour un champ tensoriel $\boldsymbol{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$, on a :

$$\boldsymbol{div}\boldsymbol{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{div}_x\boldsymbol{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) + \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{div}_y\boldsymbol{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) \tag{2.10}$$

et pour un champ vectoriel $\boldsymbol{w}(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$, on a :

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{w}(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})) = \boldsymbol{\gamma}_x(\boldsymbol{w}(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})) + \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{w}(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})) \tag{2.11}$$

avec

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}_x\boldsymbol{\Sigma} = \dfrac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i & , \quad \boldsymbol{div}_y\boldsymbol{\Sigma} = \dfrac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial y_j}\boldsymbol{e}_i \\ (\boldsymbol{\gamma}_x(\boldsymbol{w}))_{ij} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial w_j}{\partial x_i} + \dfrac{\partial w_i}{\partial x_j}) & , \quad (\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{w}))_{ij} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial w_j}{\partial y_i} + \dfrac{\partial w_i}{\partial y_j}) \end{cases} \tag{2.12}$$

On déduit, grâce aux choix des développements (2.6) et (2.7) du déplacement $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ et en utilisant la loi de comportement du problème de départ, les développements extérieurs et intérieurs du champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$. On notera $\boldsymbol{\sigma}^i$ les différents termes du développement extérieur et $\boldsymbol{\tau}^i$ les différents termes intervenant dans le développement intérieur. Les valeurs de i dépendent des cas traités et seront explicitées dans les chapitres suivants.
On notera que l'expression (2.11) du tenseur des déformations ($\boldsymbol{\gamma}$) suggère que le développement de $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ dans le domaine intérieur commence à des ordres différents de celui dans le domaine extérieur.

Remarque 2.2.2. *Les deux étapes précédentes (changements de coordonnées et utilisation d'Ansatz) sont identiques quelque soit le type d'hétérogénéité considéré. Les domaines intérieurs sont parfois à préciser lorsque les inclusions sont en fait des cavités. Dans les chapitres suivants, les hypothèses des étapes (1) et (2) seront admises et l'étude asymptotique débutera toujours à l'étape (3) décrite ci-dessous.*

3) *Systèmes d'équations aux différents ordres.*

On introduit les développements de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ et de $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ dans les équations du problème P^ε. On obtient ainsi à chaque ordre de ε, l'équation d'équilibre et les conditions aux limites, qui, en rajoutant les conditions de raccord, permetteront de calculer les différents termes des développements intérieur et extérieur.

4) *Conditions de raccord.*

Le raccord se fait dans la zone "épaisse" (cf. Figure 2.3) où les deux domaines se superposent :

$$\left\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \; ; \; \frac{\varepsilon}{2} < |x_1| < \frac{\eta(\varepsilon)}{2}\right\}$$

En effet, dans cette zone, les deux développements représentent les mêmes fonctions. Puisque l'image de cette zone, dans les coordonnées (x_1, x_2, x_3) du domaine extérieur, tend, pour ε tendant vers 0, vers $\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \; ; \; x_1 = 0\}$ $(= \omega)$, et tend, dans les coordonnées du domaine intérieur, vers le domaine infini $\{\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \; ; \; |y_1| > 1\}$, les conditions de raccord seront du type :

$$\text{limite pour } x_1 \text{ tendant vers } 0\pm = \text{ limite pour } y_1 \text{ tendant vers } \pm\infty$$

Plus précisément on introduit, pour chaque $\boldsymbol{u}^i$, un développement de Taylor pour $x_1 > 0$ et pour $x_1 < 0$:

$$\boldsymbol{u}^i(x_1, \hat{\boldsymbol{x}}) = \begin{cases} \boldsymbol{u}^i(0+, \hat{\boldsymbol{x}}) + x_1 \dfrac{\partial \boldsymbol{u}^i}{\partial x_1}(0+, \hat{\boldsymbol{x}}) + ... & \text{pour } x_1 > 0 \\ \boldsymbol{u}^i(0-, \hat{\boldsymbol{x}}) + x_1 \dfrac{\partial \boldsymbol{u}^i}{\partial x_1}(0-, \hat{\boldsymbol{x}}) + ... & \text{pour } x_1 < 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

On obtient alors, en remplaçant x_1 par εy_1, les deux développements suivants de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$:

$$\boldsymbol{u}^\varepsilon(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1) = \begin{cases} \boldsymbol{u}^0(0+, \hat{\boldsymbol{x}}) + \varepsilon \left(\boldsymbol{u}^1(0+, \hat{\boldsymbol{x}}) + y_1 \dfrac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0+, \hat{\boldsymbol{x}}) \right) + ... & \text{pour } x_1 > 0 \\ \boldsymbol{u}^0(0-, \hat{\boldsymbol{x}}) + \varepsilon \left(\boldsymbol{u}^1(0-, \hat{\boldsymbol{x}}) + y_1 \dfrac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0-, \hat{\boldsymbol{x}}) \right) + ... & \text{pour } x_1 < 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

On en déduit dans la zone de raccord, zone dans laquelle on rappelle que $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ peut être également représenté par son développement intérieur (2.7), les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \left(\boldsymbol{u}^0(0+, \hat{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \right) + \varepsilon \left(\boldsymbol{u}^1(0+, \hat{\boldsymbol{x}}) + y_1 \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0+, \hat{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{v}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \right) + ... \\ \mathbf{0} &= \left(\boldsymbol{u}^0(0-, \hat{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \right) + \varepsilon \left(\boldsymbol{u}^1(0-, \hat{\boldsymbol{x}}) + y_1 \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0-, \hat{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{v}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \right) + ... \end{aligned} \tag{2.15}$$

On fixe x_1, $\hat{\boldsymbol{x}}$ et $\hat{\boldsymbol{y}}$ et on passe à la limite pour ε tendant vers 0. On obtient :

$$\lim_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{u}^0(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}}) \tag{2.16}$$

$$\lim_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{v}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) - y_1 \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{u}^1(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}}) \tag{2.17}$$

Des considérations analogues seront à faire pour le développement de $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$.

Remarque 2.2.3.
Par la suite, on cherchera à déterminer uniquement les deux premiers ordres de chaque développement.

2.3 Plan de l'étude asymptotique

Nous avons étudié tout d'abord le cas des cavités. Ce problème a été traité par *Marigo* et *Pideri* [29]. Les auteurs font un choix classique (voir par exemple *Nguetseng et Sanchez-Palencia* [30] et *Sanchez-Palencia* [35]) concernant le comportement du terme $\boldsymbol{v}^1$ du développement intérieur du déplacement. Plus précisément, ils supposent que :

$$\boldsymbol{v}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = y_1 \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) + \text{un terme correcteur}$$

Ce choix simplifie la prise en compte de la condition de raccord (2.17) mais étend à tout le domaine intérieur le comportement à l'infini.
Dans l'étude que nous présentons, nous avons fait un autre choix qui semble nouveau. Ce choix permet de prendre en compte la transition entre le domaine extérieur et le domaine intérieur, sans étendre le comportement à l'infini de $\boldsymbol{v}^1$ au voisinage des hétérogénéités afin d'obtenir une bonne approximation des champs locaux. Ce travail est présenté au Chapitre 4 en reproduisant le texte intégral d'un article publié dans la revue Journal for Multiscale Computational Engineering.
Nous avons ensuite étudié le cas où les hétérogénéités sont des inclusions élastiques dont la rigidité est du même ordre de grandeur que celle du milieu environnant, et dans le cas où la rigidité des inclusions est très faible par rapport à celle du milieu environnant. Ce travail est présenté avant celui des cavités, dans le Chapitre 3, afin de garantir une bonne transition entre ce chapitre introductif et la suite de la rédaction. Le Chapitre 5 concerne une étude plus récente : nous présentons les premiers résultats de l'étude des inclusions de grande rigidité, dans un cas plus simple que celui de l'élasticité, en considérant un problème de conduction thermique stationnaire

Chapitre 3

Inclusions élastiques

On considère le problème (2.2), introduit dans la section 2.1 que l'on note P^ε. Les hétérogénéités sont des inclusions élastiques dont la rigidité peut être d'un ordre de grandeur par rapport à celle du reste de la structure caractérisé par une puissance de ε. Plus précisément, on suppose que dans le sous domaine I^ε, le tenseur de rigidité, noté $\boldsymbol{A}^{\varepsilon,I}$ vérifie :

$$\boldsymbol{A}^{\varepsilon,I} = \varepsilon^p \boldsymbol{A}^I \ , \ \boldsymbol{A}^I \backsimeq \boldsymbol{A} \ , \ p \in \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

Ce choix de $\boldsymbol{A}^{\varepsilon,I}$ permet d'étudier l'influence du rapport entre la rigidité des hétérogénéités et celle du reste de la structure, sur le comportement global de l'assemblage.
Suivant le choix fait sur p, les problèmes limites seront différents. Dans un cas concret, une fois déterminée la valeur de ε décrivant la géométrie, il faudra comparer les coefficients des matrices de rigidité des matériaux afin de décider quelle est la valeur de p la plus pertinente.
Dans une modélisation différente, on pourrait introduire plusieurs petits paramètres afin de décrire, de façon distincte, la géométrie et le rapport des rigidités.
Le cas $p = 0$, étudié également par *David et al* [14], correspond à une rigidité des inclusions qui est du même ordre que la rigidité de la structure globale et par conséquent indépendante de ε. Le cas $p > 0$ correspond au cas où la rigidité des inclusions est d'un ordre de grandeur très inférieur à celle de la structure. Le matériau composant l'inclusion est très peu rigide en comparaison au reste de la structure. Le cas $p < 0$ correspond au cas où la rigidité des inclusions est très grande devant celle de la structure.

Dorénavant, afin d'alléger les écritures, on désignera par inclusions ε^p-élastiques, les inclusions dont le tenseur de rigidité vérifie (3.1).

On rappelle (cf. Chapitre 2) que l'étude asymptotique du problème se décompose en deux parties principales qui consistent à déterminer puis à étudier et résoudre les équations vérifiées aux différents ordres par les termes des développements asymptotiques de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$.

3.1 Equations aux différents ordres

Après avoir introduit les développements intérieur et extérieur de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ (voir section 2.2), on détermine les développements asymptotiques intérieur et extérieur de $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ puis les

conditions de raccord.

Les développements asymptotiques de $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ découlent de la linéarité du problème, des lois de comportement et des développements asymptotiques de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$:

- *Développement extérieur :*

  Du développement extérieur (2.6) du déplacement $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ et de la loi de comportement ($\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^\varepsilon)$), on déduit le développement suivant de la contrainte dans le domaine extérieur :

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \boldsymbol{\sigma}^i(\boldsymbol{x}) \tag{3.2}$$

  avec

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^i) \tag{3.3}$$

- *Développement intérieur :*

  Du développement intérieur (2.7) du déplacement $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ et, de la loi de comportement ($\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^\varepsilon)$) dans $Y\backslash I \times \omega$ et de la loi de comportement ($\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \varepsilon^p \boldsymbol{A}^I\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^\varepsilon)$) dans $I \times \omega$, on déduit le développement suivant de la contrainte dans le domaine intérieur :
  – dans $Y\backslash I$:

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \boldsymbol{\tau}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) \tag{3.4}$$

  avec

$$\boldsymbol{\tau}^i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_x(\boldsymbol{v}^i) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v}^{i+1})$$

  – dans I :

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=p-1}^{\infty} \varepsilon^i \boldsymbol{\tau}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) \tag{3.5}$$

  avec

$$\boldsymbol{\tau}^i = \boldsymbol{A}^I\boldsymbol{\gamma}_x(\boldsymbol{v}^{i-p}) + \boldsymbol{A}^I\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v}^{i-p+1})$$

  Les champs $\boldsymbol{\tau}^i$ dépendent des variables $(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}})$ et sont $\hat{\boldsymbol{y}}$-périodiques.

Dans cette étude on utilise uniquement les conditions de raccord à l'ordre -1, 0 et 1 qui s'écrivent :

$$\lim_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{\tau}^{-1}(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0} \tag{3.6}$$

$$\lim_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{u}^0(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}}) \tag{3.7}$$

$$\lim_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{\tau}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{\sigma}^0(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1 \tag{3.8}$$

$$\lim_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{v}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) - y_1 \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{u}^1(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}}) \tag{3.9}$$

$$\lim_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 - y_1 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1}(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{\sigma}^1(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1 \tag{3.10}$$

On détermine à présent les équations vérifiées par les différents termes des développements asymptotiques. On présente ici en guise d'exemple, le développement de l'équation d'équilibre dans le cas $p = 0$. La méthode est la même dans tous les autres cas.
Dans l'équation d'équilibre

$$\boldsymbol{div}\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon} = \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon}$ est remplacé par son développement asymptotique :

- dans Y :

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{-2}\boldsymbol{div}_y\boldsymbol{\tau}^{-1} \\ &+ \varepsilon^{-1}(\boldsymbol{div}_y\boldsymbol{\tau}^{0} + \boldsymbol{div}_x\boldsymbol{\tau}^{-1}) \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i}(\boldsymbol{div}_y\boldsymbol{\tau}^{i+1} + \boldsymbol{div}_x\boldsymbol{\tau}^{i}) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.11}$$

  On en déduit les équations aux différents ordres :

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{div}_y\boldsymbol{\tau}^{-1} = \mathbf{0} \\ &\boldsymbol{div}_y\boldsymbol{\tau}^{0} + \boldsymbol{div}_x\boldsymbol{\tau}^{-1} = \mathbf{0} \\ &\boldsymbol{div}_y\boldsymbol{\tau}^{i+1} + \boldsymbol{div}_x\boldsymbol{\tau}^{i} = \mathbf{0}\ , \quad \forall i > 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

- dans $\Omega\backslash\omega$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i}\boldsymbol{div}_x\boldsymbol{\sigma}^{i} = \mathbf{0}$$

  d'où

$$\boldsymbol{div}_x\boldsymbol{\sigma}^{i} = \mathbf{0}\ , \quad \forall i \geq 0$$

Plus généralement, à chaque équation du problème P^{ε}, correspond une famille d'équations obtenues en remplaçant les champs $\boldsymbol{u}^{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon}$ par leurs développements asymptotiques (intérieur et extérieur) et en identifiant à zéro les termes de même puissance de ε. On retrouvera ci-dessous un récapitulatif de ces différentes équations en notant que les équations qui portent sur les termes intérieurs, $\boldsymbol{v}^{i}(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$ et $\boldsymbol{\tau}^{i}(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$, sont données ici à $\hat{\boldsymbol{x}}$ fixé.

Equations d'équilibre

Ordre	Dans I
$p-2$	$\boldsymbol{div}_y\boldsymbol{\tau}^{p-1} = \mathbf{0}$
$i \geq p-1$	$\boldsymbol{div}_x\boldsymbol{\tau}^{i} + \boldsymbol{div}_y\boldsymbol{\tau}^{i+1} = 0$

Ordre	Dans $\Omega\backslash\omega$	Dans $(Y\backslash I)$
-2	$\times$	$\boldsymbol{div}_y\boldsymbol{\tau}^{-1} = 0$
-1	$\times$	$\boldsymbol{div}_x\boldsymbol{\tau}^{-1} + \boldsymbol{div}_y\boldsymbol{\tau}^{0} = 0$
$i \geq 0$	$\boldsymbol{div}_x\boldsymbol{\sigma}^{i} = 0$	$\boldsymbol{div}_x\boldsymbol{\tau}^{i} + \boldsymbol{div}_y\boldsymbol{\tau}^{i+1} = 0$

Loi de comportement

Ordre	Dans I
$p-1$	$\boldsymbol{\tau}^{p-1} = \boldsymbol{A}^I \boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v}^0)$
$i \geq p$	$\boldsymbol{\tau}^i = \boldsymbol{A}^I \boldsymbol{\gamma}_x(\boldsymbol{v}^{i-p}) + \boldsymbol{A}^I \boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v}^{i-p+1})$

Ordre	Dans $\Omega \backslash \omega$	Dans $(Y \backslash I)$
-1	$\times$	$\boldsymbol{\tau}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v}^0)$
$i \geq 0$	$\boldsymbol{\sigma}^i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_x(\boldsymbol{u}^0)$	$\boldsymbol{\tau}^i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_x(\boldsymbol{v}^i) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v}^{i+1})$

Conditions aux limites

Ordre	Extérieur
$i = 0$	$\boldsymbol{\sigma}^0 \boldsymbol{n} = \boldsymbol{F}$ sur Γ_F $\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{0}$ sur Γ_0
$i > 0$	$\boldsymbol{\sigma}^i \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ sur Γ_F $\boldsymbol{u}^i = \boldsymbol{0}$ sur Γ_0

A ces équations il faut rajouter, pour le problème intérieur, les conditions de périodicité et les conditions sur le bord de l'inclusion, qui sont ici données, à $\hat{\boldsymbol{x}}$ fixé, par :

Conditions de périodicité sur $\mathbb{R} \times \partial\hat{Y}$

$i \geq -1$	$\boldsymbol{\tau}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{\alpha}{2}, y_3)\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{\tau}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-\alpha}{2}, y_3)\boldsymbol{e}_2$ $\boldsymbol{\tau}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{\alpha}{2})\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{\tau}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-\alpha}{2})\boldsymbol{e}_3$
$i \geq 0$	$\boldsymbol{v}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{\alpha}{2}, y_3) = \boldsymbol{v}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-\alpha}{2}, y_3)$ $\boldsymbol{v}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{\alpha}{2}) = \boldsymbol{v}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-\alpha}{2})$

Conditions sur le bord de l'inclusion

	Ordre	Sur ∂I
si $p < 0$	$i = p-1, ..., -2$ $i \geq 0$	$\boldsymbol{\tau}^i_- \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ $\left[\boldsymbol{\tau}^{i-1}\boldsymbol{n}\right]_{\partial I} = \left[\boldsymbol{v}^i\right]_{\partial I} = \boldsymbol{0}$
si $p = 0$	$i \geq -1$	$\left[\boldsymbol{\tau}^i \boldsymbol{n}\right]_{\partial I} = \left[\boldsymbol{v}^{i+1}\right]_{\partial I} = \boldsymbol{0}$
si $p > 0$	$i = -1, ..., p-2$ $i \geq p-1$	$\boldsymbol{\tau}^i_+ \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ $\left[\boldsymbol{\tau}^i \boldsymbol{n}\right]_{\partial I} = \left[\boldsymbol{v}^{i-p+1}\right]_{\partial I} = \boldsymbol{0}$

où $\boldsymbol{\tau}^i_+$ (resp. $\boldsymbol{\tau}^i_-$) est la valeur de $\boldsymbol{\tau}^i$ considéré dans $Y \backslash I$ (resp. dans I).

3.2 Approximations intérieure et extérieure de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ pour $p \geq 0$

3.2.1 Comportement asymptotique de $\boldsymbol{v}^0$ et $\boldsymbol{\tau}^0$ lorsque $y_1 \to \pm\infty$

Proposition 1. *Pour $p \geq 0$, le champ intérieur $\boldsymbol{v}^0$ est indépendant de la variable microscopique $\boldsymbol{y}$ dans toute la cellule Y ; il dépend uniquement de la variable macroscopique $\hat{\boldsymbol{x}}$. On*

en déduit que :

$$\lim_{y_1 \to -\infty} \boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) = \lim_{y_1 \to +\infty} \boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{3.13}$$

Démonstration.
On distingue le cas $p = 0$ du cas $p > 0$:

- dans le cas $p = 0$, $\boldsymbol{v}^0$ et $\boldsymbol{\tau}^{-1}$ sont solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}_y \boldsymbol{\tau}^{-1} = \boldsymbol{0} & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{\tau}^{-1} = \tilde{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{0}}) & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{\tau}^{-1}(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{\alpha}{2}, y_3)\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{\tau}^{-1}(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-\alpha}{2}, y_3)\boldsymbol{e}_2 & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\hat{Y} \\ \boldsymbol{\tau}^{-1}(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{\alpha}{2})\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{\tau}^{-1}(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-\alpha}{2})\boldsymbol{e}_3 & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\hat{Y} \\ \boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{\alpha}{2}, y_3) = \boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-\alpha}{2}, y_3) & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\hat{Y} \\ \boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{\alpha}{2}) = \boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-\alpha}{2}) & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\hat{Y} \\ \lim\limits_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{\tau}^{-1}(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0} & \text{pour } (\hat{\boldsymbol{y}}) \in \hat{Y} \end{cases} \tag{3.14}$$

  avec

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{cases} \boldsymbol{A} & \text{dans } Y \backslash I \\ \boldsymbol{A}^I & \text{dans } I \end{cases} \tag{3.15}$$

  On en déduit que

$$\boldsymbol{\tau}^{-1} = \tilde{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v}^0) = \boldsymbol{0}\,, \quad \text{dans } Y$$

  D'où

$$\boldsymbol{v}^0 = \boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}})$$

- dans le cas $p > 0$, $\boldsymbol{\tau}^{-1} = \boldsymbol{0}$ dans I. On en déduit que, dans $Y \backslash I$, $\boldsymbol{v}^0$ et $\boldsymbol{\tau}^{-1}$ sont solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}_y \boldsymbol{\tau}^{-1} = \boldsymbol{0} & \text{dans } Y \backslash I \\ \boldsymbol{\tau}^{-1} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{0}}) & \text{dans } Y \backslash I \\ \boldsymbol{\tau}^{-1}(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{\alpha}{2}, y_3)\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{\tau}^{-1}(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-\alpha}{2}, y_3)\boldsymbol{e}_2 & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\hat{Y} \\ \boldsymbol{\tau}^{-1}(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{\alpha}{2})\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{\tau}^{-1}(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-\alpha}{2})\boldsymbol{e}_3 & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\hat{Y} \\ \boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{\alpha}{2}, y_3) = \boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-\alpha}{2}, y_3) & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\hat{Y} \\ \boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{\alpha}{2}) = \boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-\alpha}{2}) & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\hat{Y} \\ \lim\limits_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{\tau}^{-1}(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0} & \text{pour } (\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \in \hat{Y} \\ \boldsymbol{\tau}^{-1}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} & \text{sur } \partial I \end{cases} \tag{3.16}$$

  On en déduit que

$$\boldsymbol{\tau}^{-1} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v}^0) = \boldsymbol{0}\,, \quad \text{dans } Y \backslash I$$

  D'où

$$\boldsymbol{v}^0 = \boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}})\,, \quad \text{dans } Y \backslash I \tag{3.17}$$

□

Remarque 3.2.1. *La condition de saut* $[\boldsymbol{v}^0]_{\partial I} = 0$*, d'ordre* $p - 1$*, entraîne que le résultat (3.17) est valable dans toute la cellule* Y*.*

Proposition 2. *Pour $p \geq 0$, le champ intérieur $\boldsymbol{\tau}^0$ vérifie le comportement asymptotique suivant :*

$$\lim_{y_1 \to -\infty} \int_{\hat{Y}} \boldsymbol{\tau}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \boldsymbol{e}_1 d\hat{\boldsymbol{y}} = \lim_{y_1 \to +\infty} \int_{\hat{Y}} \boldsymbol{\tau}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \boldsymbol{e}_1 d\hat{\boldsymbol{y}} \tag{3.18}$$

Démonstration.
En écrivant l'équation d'équilibre intérieur d'ordre $i = -1$ et en remarquant que pour $p > 0$ on a $\boldsymbol{\tau}^0 = \mathbf{0}$ dans I, on obtient quelque soit $p \geq 0$:

$$\boldsymbol{div}_y \boldsymbol{\tau}^0 = \mathbf{0}\,, \quad \text{dans tout } Y. \tag{3.19}$$

On intègre l'équation (3.19) sur $Y_L =]-L, L[\times \hat{Y}$. En utilisant la périodicité de $\boldsymbol{\tau}^0$ et en appliquant la formule de Green, on obtient quelque soit $p \geq 0$:

$$\int_{\hat{Y}} \left(\boldsymbol{\tau}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, L, \hat{\boldsymbol{y}}) \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{\tau}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, -L, \hat{\boldsymbol{y}}) \boldsymbol{e}_1 \right) d\hat{\boldsymbol{y}} = \mathbf{0} \tag{3.20}$$

Puis, par passage à la limite lorsque $L \to +\infty$, on obtient le résultat souhaité. □

On rappelle qu'à ce stade de l'étude, les termes $\boldsymbol{v}^0$ et $\boldsymbol{\tau}^0$ ne sont pas déterminés.

3.2.2 Approximation extérieure à l'ordre $i = 0$

Au premier ordre du développement extérieur, les champs de déplacements et de contraintes ne sont pas perturbés par les hétérogénéités. En effet, on peut montrer la proposition suivante :

Proposition 3. *On détermine $\boldsymbol{u}^0$ et $\boldsymbol{\sigma}^0$ en résolvant le problème extérieur à l'ordre 0 défini par :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{0} & \textit{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^0) & \textit{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^0 \boldsymbol{n} = \boldsymbol{F} & \textit{sur } \Gamma_F \\ \boldsymbol{u}^0 = \mathbf{0} & \textit{sur } \Gamma_0 \end{cases} \tag{3.21}$$

Démonstration.

- Les équations du problème (3.21) sont respectivement l'équation d'équilibre, la loi de comportement et les conditions aux limites extérieures d'ordre $i = 0$.
- La continuité de $\boldsymbol{u}^0$ sur l'interface ω est une conséquence directe de la condition de raccord (3.7) et du comportement asymptotique (3.13) de $\boldsymbol{v}^0$.
- Pour démontrer la continuité du vecteur contrainte $\boldsymbol{\sigma}^0 \boldsymbol{e}_1$ le long de ω, on remarque que la condition de raccord (3.8) implique :

$$\left[\boldsymbol{\sigma}^0 \boldsymbol{e}_1 \right]_\omega = \lim_{y_1 \to +\infty} \left(\boldsymbol{\tau}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{\tau}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, -y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \boldsymbol{e}_1 \right) \tag{3.22}$$

On en déduit, grâce à (3.18), la continuité de $\boldsymbol{\sigma}^0 \boldsymbol{e}_1$ sur l'interface ω.

□

Remarque 3.2.2. *Le problème (3.21) est un problème d'élasticité bien posé sur Ω avec une condition de Dirichlet sur Γ_0 et une condition de Neumann sur Γ_F. Ce problème admet donc une solution unique et régulière dans Ω où le champ de déplacements et le vecteur contrainte sont continus sur l'interface ω, c'est-à-dire :*

$$\left[\boldsymbol{u}^0\right]_\omega = \left[\boldsymbol{\sigma}^0 \boldsymbol{e}_1\right]_\omega = \mathbf{0} \quad \textit{sur } \omega$$

Remarque 3.2.3. *Les hétérogénéités n'étant pas visibles au premier ordre du développement asymptotique (extérieur), la résolution du problème (3.21) ne permet pas d'évaluer et de quantifier l'influence de ces hétérogénéités sur le comportement global de la structure. Il faut calculer les termes à l'ordre suivant.*

A ce stade de l'étude, $\boldsymbol{u}^0$ et $\boldsymbol{\sigma}^0$ sont déterminés. La proposition 1 entraîne que $\boldsymbol{v}^0$ est également déterminé et vérifie :

$$\boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{u}^0(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \tag{3.23}$$

3.2.3 Comportement asymptotique de $\boldsymbol{v}^1$ lorsque $y_1 \to \pm\infty$

Afin de déterminer la solution du problème extérieur à l'ordre $i = 1$, on est amené à utiliser les conditions de raccord définies en (3.9) et (3.10). Cela nécessite l'étude de la limite, lorsque y_1 tend vers $\pm\infty$, de $\boldsymbol{v}^1$. On obtiendra ainsi les conditions de transmission du problème extérieur d'ordre $i = 1$.

Le calcul de la condition de transmission en déplacement du problème extérieur d'ordre $i = 1$ est facilité en posant :

$$\boldsymbol{v}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = f(y_1; a, b)\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{v}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) \tag{3.24}$$

où $f(y_1; a, b)$ est une fonction régulière impaire (de classe $C^2(\mathbb{R})$) avec

$$f(y_1; a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < |y_1| \leq a \\ y_1 & \text{si } |y_1| \geq b \end{cases} \tag{3.25}$$

et $d < 2a < 2b$ (rappelons que, après mise à l'échelle 1, i.e. à l'échelle microscopique, d est le diamètre d'une inclusion et $d < diam\hat{Y}$).
Afin d'alléger l'écriture, on adoptera dans la suite la notation $f(y_1)$.

Proposition 4. *Pour $\hat{\boldsymbol{x}}$ fixé, le champ correcteur $\boldsymbol{v}^\star$ est l'unique solution, à une translation près, du problème suivant :*

– *Lorsque* $p = 0$

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}_y \boldsymbol{\tau}^\star = -f''(y_1)\tilde{\boldsymbol{A}}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0,\hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_1\right)\boldsymbol{e}_1 & \textit{dans } Y \\ \boldsymbol{\tau}^\star = \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v}^\star) & \textit{dans } Y \\ \boldsymbol{\tau}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{\alpha}{2}, y_3)\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{\tau}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-\alpha}{2}, y_3)\boldsymbol{e}_2 & \textit{sur } \mathbb{R}\times\partial\hat{Y} \\ \boldsymbol{\tau}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{\alpha}{2})\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{\tau}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-\alpha}{2})\boldsymbol{e}_3 & \textit{sur } \mathbb{R}\times\partial\hat{Y} \\ \boldsymbol{v}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{\alpha}{2}, y_3) = \boldsymbol{v}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-\alpha}{2}, y_3) & \textit{sur } \mathbb{R}\times\partial\hat{Y} \\ \boldsymbol{v}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{\alpha}{2}) = \boldsymbol{v}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-\alpha}{2}) & \textit{sur } \mathbb{R}\times\partial\hat{Y} \\ \lim\limits_{y_1\to\pm\infty} \boldsymbol{\tau}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0} & \textit{pour } \hat{\boldsymbol{y}} \in \hat{Y} \end{cases} \tag{3.26}$$

Conditions sur ∂I

$$\begin{cases} [\boldsymbol{v}^\star] = \boldsymbol{0} \\ [\boldsymbol{\tau}^\star \boldsymbol{n}] = \left(\left(\boldsymbol{A}^I - \boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{\gamma}_x\left(\boldsymbol{u}^0(0,\hat{\boldsymbol{x}})\right)\right)\boldsymbol{n} \end{cases}$$

où $\tilde{\boldsymbol{A}}$ *est donné dans (3.15)*

– *Lorsque* $p > 0$

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}_y \boldsymbol{\tau}^\star = -f''(y_1)\boldsymbol{A}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0,\hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_1\right)\boldsymbol{e}_1 & \textit{dans } Y\backslash I \\ \boldsymbol{\tau}^\star = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v}^\star) & \textit{dans } Y\backslash I \\ \boldsymbol{\tau}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{\alpha}{2}, y_3)\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{\tau}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-\alpha}{2}, y_3)\boldsymbol{e}_2 & \textit{sur } \mathbb{R}\times\partial\hat{Y} \\ \boldsymbol{\tau}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{\alpha}{2})\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{\tau}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-\alpha}{2})\boldsymbol{e}_3 & \textit{sur } \mathbb{R}\times\partial\hat{Y} \\ \boldsymbol{v}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{\alpha}{2}, y_3) = \boldsymbol{v}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-\alpha}{2}, y_3) & \textit{sur } \mathbb{R}\times\partial\hat{Y} \\ \boldsymbol{v}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{\alpha}{2}) = \boldsymbol{v}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-\alpha}{2}) & \textit{sur } \mathbb{R}\times\partial\hat{Y} \\ \lim\limits_{y_1\to\pm\infty} \boldsymbol{\tau}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0} & \textit{pour } \hat{\boldsymbol{y}} \in \hat{Y} \end{cases} \tag{3.27}$$

Condition sur ∂I

$$\boldsymbol{\tau}^\star_+ \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{A}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_2}(0,\hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_3}(0,\hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_3\right)\boldsymbol{n}$$

Démonstration.

- La loi de comportement intérieur d'ordre $i = 0$, i.e. $\boldsymbol{\tau}^0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v}^1) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_x(\boldsymbol{v}^0)$, définie dans $Y\backslash I$, et le résultat (3.23) impliquent que :

$$\boldsymbol{\tau}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{G}(y_1, \boldsymbol{u}^0) + \boldsymbol{\tau}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y) \tag{3.28}$$

où le tenseur $\boldsymbol{G}$ est défini par

$$\boldsymbol{G}(y_1, \boldsymbol{u}^0) = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{\gamma}_x\left(\boldsymbol{u}^0(0,\hat{\boldsymbol{x}})\right) + f'(y_1)\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0,\hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_1\right) \text{ dans } Y\backslash I \tag{3.29}$$

Notons que dans le cas $p = 0$, étant donné que la loi de comportement d'ordre $i = 0$ est la même dans $Y\backslash I$ et dans I, l'expression (3.28) est valable dans tout Y. Dans ce

cas $\boldsymbol{G}$ est défini par :

$$\boldsymbol{G}(y_1, \boldsymbol{u}^0) = \tilde{\boldsymbol{A}} \left(\boldsymbol{\gamma}_x \left(\boldsymbol{u}^0(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \right) + f'(y_1) \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_1 \right) \text{ dans } Y \tag{3.30}$$

où $\tilde{\boldsymbol{A}}$ est défini dans (3.15).

Soulignons que $\boldsymbol{\gamma}_x(\boldsymbol{u}^0(0, \hat{\boldsymbol{x}}))$ est obtenu en calculant les dérivées par rapport à $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{u}^0$ calculé en $(x_1 = 0, x_2, x_3)$ et donc que toutes les dérivées par rapport à x_1 sont nulles. Le terme $\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}})$ est la valeur, pour $x_1 = 0$, de $\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}$.

- En prenant en compte la définition de $\boldsymbol{G}(y_1, \boldsymbol{u}^0)$, donnée dans (3.29), les deux premières équations, dans le cas $p > 0$ (resp. $p = 0$), sont obtenues directement à partir de :
  i) l'équation d'équilibre d'ordre $i = -1$ ($\boldsymbol{div}_y \boldsymbol{\tau}^0 = \boldsymbol{0}$) dans $Y \backslash I$ (resp. dans Y),
  ii) la loi de comportement d'ordre $i = 0$ ($\boldsymbol{\tau}^0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_x(\boldsymbol{v}^0) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v}^1)$) dans $Y \backslash I$ (resp. dans Y).

- Les quatre équations suivantes sont les conditions de périodicité, sur $\mathbb{R} \times \partial \hat{Y}$, d'ordre $i = 0$ pour le vecteur contrainte et d'ordre $i = 1$ pour le déplacement.

- Dans les deux cas, $p > 0$ et $p = 0$, le comportement à l'infini de $\boldsymbol{\tau}^\star$ est une conséquence directe de la condition de raccord d'ordre $i = 0$ ($\lim_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{\tau}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{\sigma}^0(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1$), du choix de la fonction $f(y_1)$ et de la définition de $\boldsymbol{G}(y_1, \boldsymbol{u}^0)$.

- Conditions au bord de l'inclusion :

  ⋆ Pour $p = 0$, la condition du saut du déplacement est une conséquence de la définition de la fonction $f(y_1)$ et de la condition de saut $[\boldsymbol{v}^1]_{\partial I} = \boldsymbol{0}$. La condition de saut du vecteur contrainte provient de la définition de $\boldsymbol{G}(y_1, \boldsymbol{u}^0)$ et de la condition de saut $[\boldsymbol{\tau}^0 \boldsymbol{n}]_{\partial I} = \boldsymbol{0}$.

  ⋆ Pour obtenir, dans le cas $p > 0$, la condition sur ∂I, on doit dans un premier temps montrer que

  $$\boldsymbol{\tau}^0_+ \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$$

  Pour cela, on doit distinguer le cas $p = 1$ du cas $p > 1$. En effet dans le cas $p > 1$, la condition $\boldsymbol{\tau}^0_+ \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ au bord de I est directement la condition $\boldsymbol{\tau}^i_+ \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ d'ordre $i = 0$. Cependant cette condition est valable uniquement pour $i = -1, ..., p-2$, et ne permet donc pas d'obtenir une condition sur $\boldsymbol{\tau}^0_+ \boldsymbol{n}$ dans le cas $p = 1$.
  Pour montrer la condition $\boldsymbol{\tau}^0_+ \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ dans le cas $p = 1$, on a, grâce à la remarque 3.2.1 et à la loi de comportement dans I d'ordre $p - 1$ ($\boldsymbol{\tau}^{p-1} = \boldsymbol{A}^I \boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v}^0)$), que $\boldsymbol{\tau}^0 = \boldsymbol{0}$ dans I. On en déduit, en considérant la condition de saut $[\boldsymbol{\tau}^i \boldsymbol{n}] = \boldsymbol{0}$ d'ordre $i = 0$, que $\boldsymbol{\tau}^0_+ \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$.
  On déduit des résultats ci-dessus et de la définition de $\boldsymbol{G}(y_1, \boldsymbol{u}^0)$ le résultat souhaité.

- Les problèmes définis par (3.26) et (3.27) sont des problèmes avec des conditions de périodicité sur $\mathbb{R} \times \partial \hat{Y}$ et des conditions de type Neumann en y_1 qui tend vers

$+\infty$ et y_1 qui tend vers $-\infty$. De plus, le problème (3.26) est un problème avec des conditions de transmission sur le bord de l'inclusion où le saut du déplacement est homogène mais pas celui du vecteur contrainte. Le problème (3.27) est un problème avec des conditions de type Neumann sur le bord de l'inclusion.
Comme cela a été indiqué précédemment (cf. Chapitre 1, section 1.1.2.2), ces deux type de problèmes admettent une solution unique, à un vecteur constant près, réduit à une translation à cause de la périodicité, si les conditions de compatibilité suivantes sont vérifiée :

⋆ pour $p = 0$

$$\int_Y f''(y_1)\tilde{\boldsymbol{A}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0,\hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_1\right)\boldsymbol{e}_1 d\boldsymbol{y} = 0 \tag{3.31}$$

⋆ pour $p > 0$

$$\begin{aligned}&\int_Y f''(y_1)\boldsymbol{A}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0,\hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_1\right)\boldsymbol{e}_1 d\boldsymbol{y}\\ &+\int_{\partial I}\boldsymbol{A}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_2}(0,\hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_3}(0,\hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_3\right)\boldsymbol{n} ds = \boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{3.32}$$

On vérifie immédiatement les conditions (3.31) et (3.32) en remarquant que d'une part, $\int_Y f''(y_1)d\boldsymbol{y} = 0$ (intégrale d'une fonction impaire sur un domaine symétrique), et que d'autre part, en utilisant le théorème de la divergence sur I, $\int_{\partial I}\boldsymbol{n} ds = \boldsymbol{0}$.

□

Remarque 3.2.4. *Remarquons que*

$$\lim_{y_1\to\pm\infty}\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\hat{Y}}\boldsymbol{v}^\star(\hat{\boldsymbol{x}},y_1,\hat{\boldsymbol{y}})d\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}$$

En effet on constate que :

$$\int_{\hat{Y}}\boldsymbol{\tau}^\star(\hat{\boldsymbol{x}},y_1,\hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 d\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\hat{Y}}\boldsymbol{v}^\star(\hat{\boldsymbol{x}},y_1,\hat{\boldsymbol{y}})d\hat{\boldsymbol{y}}\right)\otimes_S \boldsymbol{e}_1\right)\boldsymbol{e}_1.$$

En raison des hypothèses de symétrie et de positivité sur $\boldsymbol{A}$*, on a :*

$$\lim_{y_1\to\pm\infty}\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\hat{Y}}\boldsymbol{v}^\star(\hat{\boldsymbol{x}},y_1,\hat{\boldsymbol{y}})d\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}$$

Sanchez-Palencia a de plus montré dans [36] que les limites de $\boldsymbol{v}^\star$ *lorsque* $y_1 \to \pm\infty$ *existent et sont deux vecteurs indépendants de* $\hat{\boldsymbol{y}}$ *que l'on notera* $\boldsymbol{v}^{\star\pm}(\hat{\boldsymbol{x}})$*. On retrouvera ici ce résultat dans les essais numériques.*

La linéarité des problèmes (3.26) et (3.27) par rapport aux composantes $\frac{\partial u_l^0}{\partial x_k}$ entraîne une décomposition en 9 problèmes élémentaires.

Proposition 5. *Pour tout $\hat{\boldsymbol{x}} \in \omega$, la solution $\boldsymbol{v}^\star$ du problème (3.26) (resp. (3.27)) peut être décomposée comme suit :*

$$\boldsymbol{v}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = \frac{\partial u_l^0}{\partial x_k}(0, \hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{V}^{lk}(\boldsymbol{y}) + \check{\boldsymbol{v}}(\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{3.33}$$

où $\check{\boldsymbol{v}}$ est un champ de déplacement constant (par rapport à $\boldsymbol{y}$) et les champs $(\boldsymbol{V}^{lk}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{T}^{lk}(\boldsymbol{y}))$ sont les uniques solutions qui vérifient les conditions asymptotiques $\boldsymbol{V}^{ij+} + \boldsymbol{V}^{ij-} = \boldsymbol{0}$, où l'on pose $\boldsymbol{V}^{ij+} := \lim_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{V}^{ij}(y_1, \hat{\boldsymbol{y}})$, des 9 problèmes élémentaires suivants :

- *cas $p = 0$*

  i) pour (l,1), l = 1, 2, 3 :

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}_y \boldsymbol{T}^{l1} = -f''(y_1)\tilde{A}_{i1l1}\boldsymbol{e}_i & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{T}^{l1} = \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{V}^{l1}) & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{V}^{l1} \text{ et } \boldsymbol{T}^{l1}\boldsymbol{n} \text{ périodiques} & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\hat{Y} \\ \lim_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{T}^{l1}(y_1, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0} & \text{pour } \hat{\boldsymbol{y}} \in \hat{Y} \end{cases} \tag{3.34}$$

  Conditions sur ∂I

$$\left[\boldsymbol{V}^{l1}\right] = \left[\boldsymbol{T}^{l1}\boldsymbol{n}\right] = \boldsymbol{0}$$

  ii) pour (l,k) = (1,2) ; (2,2) ; (3,2) ; (1,3) ; (2,3) ; (3,3),

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}_y \boldsymbol{T}^{lk} = \boldsymbol{0} & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{T}^{lk} = \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{V}^{lk}) & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{V}^{lk} \text{ et } \boldsymbol{T}^{lk}\boldsymbol{n} \text{ périodiques} & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\hat{Y} \\ \lim_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{T}^{lk}(y_1, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0} & \text{pour } \hat{\boldsymbol{y}} \in \hat{Y} \end{cases} \tag{3.35}$$

  Conditions sur ∂I

$$\begin{cases} \left[\boldsymbol{V}^{lk}\right] = \boldsymbol{0} \\ \left[\boldsymbol{T}^{lk}\boldsymbol{n}\right] = \left(\left(\boldsymbol{A}^I - \boldsymbol{A}\right)(\boldsymbol{e}_l \otimes_S \boldsymbol{e}_k)\right)\boldsymbol{n} \end{cases}$$

- *cas $p > 0$:*

  i) pour (l,1), l = 1, 2, 3 :

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}_y \boldsymbol{T}^{l1} = -f''(y_1)A_{i1l1}\boldsymbol{e}_i & \text{dans } Y\backslash I \\ \boldsymbol{T}^{l1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{V}^{l1}) & \text{dans } Y\backslash I \\ \boldsymbol{V}^{l1} \text{ et } \boldsymbol{T}^{l1}\boldsymbol{n} \text{ périodiques} & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\hat{Y} \\ \lim_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{T}^{l1}(y_1, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0} & \text{pour } \hat{\boldsymbol{y}} \in \hat{Y} \end{cases} \tag{3.36}$$

  Condition sur ∂I

$$\boldsymbol{T}_+^{l1}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$$

ii) pour (l,k) = (1,2) ; (2,2) ; (3,2) ; (1,3) ; (2,3) ; (3,3),

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}_y \boldsymbol{T}^{lk} = \boldsymbol{0} & \textit{dans } Y\backslash I \\ \boldsymbol{T}^{lk} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{V}^{lk}) & \textit{dans } Y\backslash I \\ \boldsymbol{V}^{lk} \textit{ et } \boldsymbol{T}^{lk}\boldsymbol{n} \textit{ périodiques} & \textit{sur } \mathbb{R}\times\partial\hat{Y} \\ \lim\limits_{y_1\to\pm\infty} \boldsymbol{T}^{lk}(y_1,\hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0} & \textit{pour } \hat{\boldsymbol{y}}\in\hat{Y} \end{cases} \tag{3.37}$$

$$\textit{Condition sur } \partial I$$

$$\boldsymbol{T}^{lk}_{+}\boldsymbol{n} = -\left(A_{ijlk}n_j\right)\boldsymbol{e}_i$$

Remarque 3.2.5. *En vue de l'implémentation, on notera que le champ de déplacement $\boldsymbol{V}^{lk}$, solution du problème (3.35), peut être déterminé en résolvant un problème différent où les conditions de transmission sur le bord de l'inclusion sont homogènes. Plus précisément, le champ $\boldsymbol{V}^{lk}$, solution de (3.35), est également solution du problème précontraint suivant :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}_y \boldsymbol{\Sigma}^{lk} = \boldsymbol{0} & \textit{dans } Y \\ \boldsymbol{\Sigma}^{lk} = \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{V}^{lk}) + \tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{e}_l\otimes\boldsymbol{e}_k) & \textit{dans } Y \\ \boldsymbol{V}^{lk} \textit{ et } \boldsymbol{\Sigma}^{lk}\boldsymbol{n} \textit{ périodiques} & \textit{sur } \mathbb{R}\times\partial\hat{Y} \\ \lim\limits_{y_1\to\pm\infty} \boldsymbol{\Sigma}^{lk}(y_1,\hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_l\otimes\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_1 & \textit{pour } \hat{\boldsymbol{y}}\in\hat{Y} \end{cases} \tag{3.38}$$

$$\textit{Conditions sur } \partial I$$

$$\left[\boldsymbol{V}^{l1}\right] = \left[\boldsymbol{\Sigma}^{l1}\boldsymbol{n}\right] = \boldsymbol{0}$$

A ce stade, les champs $\boldsymbol{V}^{ij}$, $\boldsymbol{T}^{ij}$ et $\boldsymbol{\tau}^0$ sont entièrement déterminés. Le champ $\boldsymbol{v}^1$ est déterminé à la translation $\check{\boldsymbol{v}}(\hat{\boldsymbol{x}})$ près. Cette translation sera déterminée une fois le problème extérieur d'ordre $i = 1$ résolu. En effet, étant donné que $\boldsymbol{V}^{ij+} + \boldsymbol{V}^{ij-} = \boldsymbol{0}$, la condition de raccord (3.9) et la décomposition adoptée pour $\boldsymbol{v}^1$ dans (3.24) impliquent que :

$$\check{\boldsymbol{v}}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}^1(0+,\hat{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{u}^1(0-,\hat{\boldsymbol{x}})) \tag{3.39}$$

3.2.4 Approximation extérieure à l'ordre $i = 1$

L'équation d'équilibre, la loi de comportement et les conditions aux bords, d'ordre $i = 1$, impliquent que $\boldsymbol{u}^1$ et $\boldsymbol{\sigma}^1$ sont solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}\boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{0} & \text{dans } \Omega\backslash\omega \\ \boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^1) & \text{dans } \Omega\backslash\omega \\ \boldsymbol{\sigma}^1\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} & \text{sur } \Gamma_F \\ \boldsymbol{u}^1 = \boldsymbol{0} & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \tag{3.40}$$

Pour compléter ces équations, il faut ajouter les conditions de transmission sur ω obtenues grâce aux conditions de raccord (3.9) et (3.10). En effet, en remarquant que la condition de raccord en déplacement d'ordre $i = 1$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{u}^1(0+,\hat{\boldsymbol{x}}) = \lim_{y_1\to+\infty}\left(\boldsymbol{v}^1(\hat{\boldsymbol{x}},y_1,\hat{\boldsymbol{y}}) - y_1\frac{\partial\boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\right) \tag{3.41}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^1(0-,\hat{\boldsymbol{x}}) &= \lim_{y_1\to-\infty}\left(\boldsymbol{v}^1(\hat{\boldsymbol{x}},y_1,\hat{\boldsymbol{y}}) - y_1\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\right)\\
&= \lim_{y_1\to+\infty}\left(\boldsymbol{v}^1(\hat{\boldsymbol{x}},-y_1,\hat{\boldsymbol{y}}) + y_1\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\right)
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

on obtient l'expression suivante du saut du déplacement sur ω :

$$
\begin{aligned}
\left[\boldsymbol{u}^1\right]_\omega &:= \boldsymbol{u}^1(0+,\hat{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{u}^1(0-,\hat{\boldsymbol{x}})\\
&= \lim_{y_1\to+\infty}\left(\left(\boldsymbol{v}^1(\hat{\boldsymbol{x}},y_1,\hat{\boldsymbol{y}}) - \boldsymbol{v}^1(\hat{\boldsymbol{x}},-y_1,\hat{\boldsymbol{y}})\right) - 2y_1\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\right)
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

En suivant le même raisonnement, on déduit de la condition de raccord en contrainte d'ordre $i = 1$, donnée dans (3.10), l'expression suivante du saut du vecteur contrainte sur ω :

$$
\begin{aligned}
\left[\boldsymbol{\sigma}^1\boldsymbol{e}_1\right]_\omega &:= \boldsymbol{\sigma}^1(0+,\hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{\sigma}^1(0-,\hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1\\
&= \lim_{y_1\to+\infty}\left(\left(\boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}},y_1,\hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}},-y_1,\hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1\right) - 2y_1\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1\right)
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

On déduit directement de (3.24), (3.33) et (3.43) la condition de transmission suivante du champ de déplacements $\boldsymbol{u}^1$ sur ω :

$$
\boxed{\left[\boldsymbol{u}^1\right]_\omega = \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\left[\boldsymbol{V}^{ij}\right]^\infty}
\tag{3.45}
$$

où $\left[\boldsymbol{V}^{ij}\right]^\infty := \boldsymbol{V}^{ij+} - \boldsymbol{V}^{ij-}$.

Afin de déterminer la seconde condition de transmission, on considère le domaine borné $Y_L =]-L, L[\times\hat{Y}$, pour un L fixé > 0. Suivant la valeur de p on a :

- pour $p = 0$: l'équation d'équilibre intérieur d'ordre $i = 0$ ($\boldsymbol{div}_y\boldsymbol{\tau}^1 + \boldsymbol{div}_x\boldsymbol{\tau}^0 = \boldsymbol{0}$) et les conditions de périodicité impliquent que :

$$
\begin{aligned}
\int_{\hat{Y}}\left(\boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}},L,\hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}},-L,\hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1\right)\,d\hat{\boldsymbol{y}} &= \int_{Y_L}\boldsymbol{div}_y\tau^1(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\\
&= -\int_{Y_L}\boldsymbol{div}_x\tau^0(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

  Afin de calculer le dernier membre de (3.46), et en tenant compte de la décomposition (3.28) ($\boldsymbol{\tau}^0(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{G}(y_1,\boldsymbol{u}^0)+\boldsymbol{\tau}^\star(\hat{\boldsymbol{x}},y)$), on commence par calculer $\int_{Y_L}\boldsymbol{div}_x\boldsymbol{G}(y_1,\boldsymbol{u}^0)\,d\boldsymbol{y}$.

  On remarque que :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G}(y_1,\boldsymbol{u}^0) &= \tilde{\boldsymbol{A}}\left(\boldsymbol{\gamma}_x\left(\boldsymbol{u}^0(0,\hat{\boldsymbol{x}})\right) + \boldsymbol{\gamma}_y\left(f(y_1)\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\right)\right)\\
&= \tilde{\boldsymbol{A}}\left(f'(y_1)\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\otimes_S\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_\alpha}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\otimes_S\boldsymbol{e}_\alpha)\right)
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

On en déduit :

$$\int_{Y_L} \boldsymbol{div}_x \boldsymbol{G}(y_1; \boldsymbol{u}^0(0, \hat{\boldsymbol{x}}))\, d\boldsymbol{y} =$$
$$\int_{Y_L} \boldsymbol{div}_x \left(\tilde{\boldsymbol{A}} \left(f'(y_1) \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_1 \right) \right) d\boldsymbol{y} + \int_{Y_L} \boldsymbol{div}_x \left(\tilde{\boldsymbol{A}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_\alpha}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_\alpha \right) \right) d\boldsymbol{y} \tag{3.48}$$

où on rappelle que

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{cases} \boldsymbol{A} & \text{dans } Y_L \backslash I \\ \boldsymbol{A}^I & \text{dans } I \end{cases} \tag{3.49}$$

et $\boldsymbol{A}^I$ du même ordre de grandeur que $\boldsymbol{A}$. En utilisant la définition de la fonction f donnée dans (3.25) on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{Y_L} \boldsymbol{div}_x \tilde{\boldsymbol{A}} \left(f'(y_1) \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_1 \right) d\boldsymbol{y} = \\
&= \int_{Y_L \backslash I} \boldsymbol{div}_x \boldsymbol{A} \left(f'(y_1) \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_1 \right) d\boldsymbol{y} + \int_I \boldsymbol{div}_x \boldsymbol{A}^I \left(f'(y_1) \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_1 \right) d\boldsymbol{y} \\
&= \boldsymbol{div}_x \boldsymbol{A} \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_1 \right) \int_{Y_L \backslash I} f'(y_1)\, d\boldsymbol{y} \\
&= 2L|\hat{Y}|\, \boldsymbol{div}_x \boldsymbol{A} \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_1 \right)
\end{aligned} \tag{3.50}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{Y_L} \boldsymbol{div}_x \left(\tilde{\boldsymbol{A}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_\alpha}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_\alpha \right) \right) d\boldsymbol{y} = \\
&= \int_{Y_L \backslash I} \boldsymbol{div}_x \left(\boldsymbol{A} \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_\alpha}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_\alpha \right) \right) d\boldsymbol{y} + \int_I \boldsymbol{div}_x \left(\boldsymbol{A}^I \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_\alpha}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_\alpha \right) \right) d\boldsymbol{y} \\
&= \int_{Y_L} \boldsymbol{div}_x \left(\boldsymbol{A} \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_\alpha}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_\alpha \right) \right) d\boldsymbol{y} - \int_I \boldsymbol{div}_x \left(\boldsymbol{A} \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_\alpha}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_\alpha \right) \right) d\boldsymbol{y} \\
&+ |I| \boldsymbol{div}_x \left(\boldsymbol{A}^I \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_\alpha}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_\alpha \right) \right) \\
&= 2L|\hat{Y}| \boldsymbol{div}_x \left(\boldsymbol{A} \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_\alpha}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_\alpha \right) \right) + |I| \boldsymbol{div}_x \left((\boldsymbol{A}^I - \boldsymbol{A}) \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_\alpha}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_\alpha \right) \right)
\end{aligned}$$

Sachant que :

$$\boldsymbol{\sigma}^0(0, \hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{A} \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_2}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_3}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_3 \right)$$

et en remarquant que :

$$\boldsymbol{A} \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_\alpha}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_\alpha \right) = \boldsymbol{A} \boldsymbol{\gamma}_x \left(\boldsymbol{u}^0(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \right)$$

on obtient le résultat suivant :

$$\int_{Y_L} \boldsymbol{div}_x \boldsymbol{G}(y_1, \boldsymbol{u}^0)\, d\boldsymbol{y} = 2L|\hat{Y}|\boldsymbol{div}_x\left(\boldsymbol{\sigma}^0(0,\hat{\boldsymbol{x}})\right) + |I|\boldsymbol{div}_x\left((\boldsymbol{A}^I - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\gamma}_x(\boldsymbol{u}^0(0,\hat{\boldsymbol{x}}))\right) \quad (3.51)$$

En remarquant que :

$$\boldsymbol{div}_x \boldsymbol{\sigma}^0 = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_3 \quad (3.52)$$

on déduit de l'équation d'équilibre extérieur d'ordre $i = 0$ ($\boldsymbol{div}_x \boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{0}$) :

$$-\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_3 \quad (3.53)$$

Sachant que $\boldsymbol{div}_x\left(\boldsymbol{\sigma}^0(0,\hat{\boldsymbol{x}})\right) = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_2}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_3}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_3$, on déduit de (3.46), de la décomposition de $\boldsymbol{\tau}^0$ donnée dans (3.28), de (3.51) et de (3.53) le résultat suivant :

$$\begin{aligned}&\int_{\hat{Y}} \left(\boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, -L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1\right)\, d\hat{\boldsymbol{y}} - 2L|\hat{Y}|\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1 = \\ &= |I|\boldsymbol{div}_x\left((\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^I)\boldsymbol{\gamma}_x(\boldsymbol{u}^0(0,\hat{\boldsymbol{x}}))\right) - \boldsymbol{div}_x\left(\int_Y \boldsymbol{\tau}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}\right)\end{aligned} \quad (3.54)$$

En remarquant que :

$$\boldsymbol{\tau}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y}) \quad (3.55)$$

on obtient finalement :

$$\begin{aligned}&\int_{\hat{Y}} \left(\boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, -L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1\right)\, d\hat{\boldsymbol{y}} - 2L|\hat{Y}|\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1 = \\ &= |I|\boldsymbol{div}_x\left((\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^I)\boldsymbol{\gamma}_x(\boldsymbol{u}^0(0,\hat{\boldsymbol{x}}))\right) - \boldsymbol{div}_x\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\int_Y \boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}\right)\end{aligned} \quad (3.56)$$

- pour $p > 0$: on remarque d'abord qu'on a :

$$\int_I \boldsymbol{div}_y \boldsymbol{\tau}^1\, d\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

On en déduit avec l'équation d'équilibre intérieur d'ordre $i = 0$ dans $Y \backslash I$:

$$\begin{aligned}\int_{\hat{Y}} \left(\boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, -L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1\right)\, d\hat{\boldsymbol{y}} &= \int_{Y_L} \boldsymbol{div}_y \tau^1(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \\ &= -\int_{Y_L \backslash I} \boldsymbol{div}_x \tau^0(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}\end{aligned} \quad (3.57)$$

En suivant le même raisonnement que dans le cas $p = 0$, on montre grâce à (3.25), (3.28) et (3.29) que :

$$\int_{Y_L \backslash I} \boldsymbol{div}_x \boldsymbol{G}(y_1, \boldsymbol{u}^0)\, d\boldsymbol{y} = 2L|\hat{Y}|\boldsymbol{div}_x\left(\boldsymbol{\sigma}^0(0,\hat{\boldsymbol{x}})\right) - |I|\boldsymbol{div}_x\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_x(\boldsymbol{u}^0(0,\hat{\boldsymbol{x}}))\right) \quad (3.58)$$

et on en déduit que :

$$\begin{aligned}&\int_{\hat{Y}}\left(\boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}},L,\hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}},-L,\hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1\right)\,d\hat{\boldsymbol{y}}-2L|\hat{Y}|\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1=\\&=|I|\boldsymbol{div}_x\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_x(\boldsymbol{u}^0(0,\hat{\boldsymbol{x}}))\right)-\boldsymbol{div}_x\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\int_{Y\backslash I}\boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\right)\end{aligned}\tag{3.59}$$

Finalement en prenant dans (3.56) et (3.59) la $\lim_{L\to\infty}$ et en intégrant sur $\hat{Y}$ les deux membres de l'égalité (3.44), on obtient la condition suivante sur le saut de $\boldsymbol{\sigma}^1\boldsymbol{e}_1$ à travers ω :

$$\boxed{\left[\boldsymbol{\sigma}^1\boldsymbol{e}_1\right]_\omega=\begin{cases}\boldsymbol{div}_x\left(\frac{|I|}{|\hat{Y}|}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^I\right)\boldsymbol{\gamma}_x\left(\boldsymbol{u}^0(0,\hat{\boldsymbol{x}})\right)-\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\frac{1}{|\hat{Y}|}\int_Y\boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\right) & \text{si } p=0\\ \boldsymbol{div}_x\left(\frac{|I|}{|\hat{Y}|}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_x\left(\boldsymbol{u}^0(0,\hat{\boldsymbol{x}})\right)-\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\frac{1}{|\hat{Y}|}\int_{Y\backslash I}\boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\right) & \text{si } p>0\end{cases}}\tag{3.60}$$

3.3 Conclusions

Dans le cas des inclusions ε^p-élastiques, $p\geq 0$, l'étude asymptotique montre que :

- en première approximation, la couche d'hétérogénéités est remplacée par une interface parfaite. L'influence des inclusions n'apparaît pas au premier ordre du développement asymptotique.

- en étudiant le second ordre des développements intérieur et extérieur, l'interface n'est plus parfaite : le déplacement et le vecteur contrainte sont discontinus. Plus précisément :
  i) le saut du déplacement de $\boldsymbol{u}^1$ est non nul : il dépend du gradient de $\boldsymbol{u}^0$ sur l'interface ω et des coefficients $[\boldsymbol{V}^{ij}]^\infty$,
  ii) le saut de $\boldsymbol{\sigma}^1$ est non nul : il dépend de la taille des inclusions, du gradient de $\boldsymbol{u}^0$ sur l'interface ω et des coefficients $\int_{Y^\star}\boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}$, où $Y^\star=Y\backslash I$ dans le cas $p>0$ et $Y^\star=Y$ dans le cas $p=0$. On notera que dans le cas $p=0$, cette condition de transmission permet de prendre en compte la différence de rigidité entre l'inclusion et le milieu environnant.

  Notons que les coefficients $[\boldsymbol{V}^{ij}]^\infty$ et $\int_{Y^\star}\boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}$ ne dépendent pas du chargement global de la structure. Ils sont calculés une fois pour toutes en résolvant les problèmes de cellule définis dans (3.34), (3.35), (3.36) et (3.37). Notons également que ces coefficients $[\boldsymbol{V}^{ij}]^\infty$ calculés dans le cas $p=0$ sont différents de ceux calculés dans le cas $p>0$.

Remarque 3.3.1.

- *Les résultats obtenus dans le cas $p=0$ sont semblables à ceux obtenus par David et al. [14]. Ces derniers obtiennent également un modèle asymptotique où le champ*

de déplacements et le vecteur contrainte extérieurs, d'ordre $i = 0$, sont continus sur l'interface ω, et où l'influence des hétérogénéités apparaît au second ordre, à travers des conditions de transmission non homogènes. Ces conditions s'expriment de façon légèrement différente à cause du choix différent de la décomposition de $\boldsymbol{v}^1$.

- *Le comportement asymptotique de la solution dans le cas des inclusions ε^p-élastiques, $p > 0$ est semblable à celui dans le cas des cavités (voir Chapitre 4).*
  Cependant on notera que, dans le cas des inclusions ε^p-élastiques, $p > 0$, les champs intérieurs sont définis à l'intérieur de l'inclusion I, et peuvent donc être calculés. La présence de champs locaux dans l'inclusion rend ce modèle asymptotique différent de celui des cavités.

Chapitre 4

Cavités

Ce chapitre est consacré à l'étude du cas où les hétérogénéités sont des cavités. Comme cela a été indiqué au Chapitre 2, la présence des cavités dans la structure se traduit par des conditions aux limites de type Neumann homogène sur le bord $\varepsilon\partial I$. La prise en compte de ces conditions dans l'analyse asymptotique, aboutit, aux deux premiers ordres du développement extérieur, au même résultat que dans le cas des inclusions molles. Plus précisément, l'influence des cavités n'apparaît pas au premier ordre du développement asymptotique extérieur. C'est le problème extérieur d'ordre $i = 1$ qui permet de prendre en compte l'influence des cavités à travers des conditions de transmission qui ont la même expression dans le cas des inclusions molles. Les coefficients qui interviennent dans ces conditions ont la même valeur car ils s'obtiennent à travers la solution de mêmes problèmes élémentaires. Toutefois la présence des inclusions élastiques molles rend ces deux modèles asymptotiques différents.

Cette étude est présentée en reproduisant le texte intégral d'un article publié dans la revue Journal for Multiscale Computational Engineering. Certaines parties ont déjà été présentées précédemment mais nous avons choisi de les garder afin de faciliter la lecture de l'article.

Journal for Multiscale Computational Engineering, 9 (5): 529–542 (2011)

THE MATCHED ASYMPTOTIC EXPANSION FOR THE COMPUTATION OF THE EFFECTIVE BEHAVIOR OF AN ELASTIC STRUCTURE WITH A THIN LAYER OF HOLES

Giuseppe Geymonat,[1,*] Françoise Krasucki,[2] Sofiane Hendili,[2,3] & Marina Vidrascu[3]

[1]*Université Montpellier II, LMGC, UMR-CNRS 5508, Case Courier 048, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5, France*

[2]*Université Montpellier 2, I3M, UMR-CNRS 5149, Case Courier 051, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5, France*

[3]*EPI MACS, INRIA Rocquencourt*

[*]Address all correspondence to Giuseppe Geymonat, E-mail: geymonat@lmgc.univ-montp2.fr

In the framework of matched asymptotic expansions we introduce a new efficient and robust method to approximate the behavior of a structure containing a thin layer with periodically distributed micro-holes. A surface (in three dimensions) or a line (in two dimensions), on which particular jumping conditions are defined, substitutes for the initial problem.

KEY WORDS: *multi-materials, multi-scaling, asymptotic analysis, elasticity*

1. MOTIVATION

Structures with a layer containing many very small heterogeneities with highly contrasted materials are widely used in real-life problems. It is expensive to solve such a multi-scale and multi-material problem by a standard finite-element method. Indeed, when the number of heterogeneities is large the number of degrees of freedom (d.o.f.) necessary to properly describe the geometry increases (see Fig. 1) and it is rather difficult to obtain a reliable mesh, especially in three-dimensional (3D) computations. In addition, the large differences in material characteristics do not allow to neglecting these heterogeneities also when they are concentrated only in a thin layer as they induce important discontinuities in the stresses.

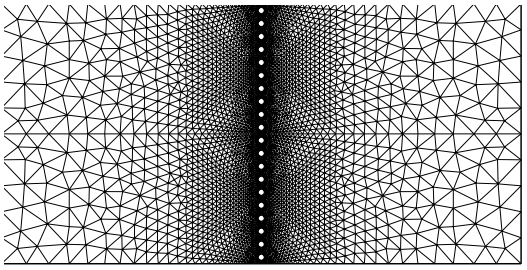


FIG. 1: Mesh of a 2D structure with micro-holes localized on a line

1543–1649/11/$35.00 © 2011 by Begell House, Inc.

The objective here is to design, analyze, and implement an efficient and robust method well suited for this class of problems for various heterogeneities (holes, stiff materials, etc.). Following the methodology of Nguetseng and Sanchez-Palencia (1986) and Marigo and Pideri (2011) we use matched asymptotic expansions in order to replace the initial problem by a new one where the layer of heterogeneities is replaced by a surface (in three dimensions) or a line (in two dimensions) on which particular jumping conditions are defined. Let us stress that in this paper the heterogeneities are in some sense orthogonal to the layer; the case when the heterogeneities are fibers along the surface is completely different and is analyzed from an abstract point of view by Bellieud et al. (in preparation).

The convention of sum over repeated indexes will be employed. Furthermore, Latin indexes range in $\{1, 2, 3\}$ and Greek indexes range in $\{2, 3\}$. Boldface letters are used for vectors and tensors.

2. INTRODUCTION

Let Ω^+ and Ω^- be two disjoint open domains of $\mathbb{R}^3$ with smooth boundaries $\partial\Omega^+$ and $\partial\Omega^-$. Let ω be the interior of the common part of the boundaries, which is assumed to be a non-empty domain in $\mathbb{R}^2$ having a positive two-dimensional measure. Let $0 < \varepsilon < 1$ be a dimensional *small* real parameter. Let us consider $B^\varepsilon :=]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[\times\omega$ and $S^{\pm,\varepsilon} := \{\pm\frac{\varepsilon}{2}\} \times \omega$. Let $\mathbf{x}^\varepsilon = (x_1^\varepsilon, \hat{\boldsymbol{x}})$ denote the generic point in the set $\overline{B^\varepsilon}$ with $\hat{\boldsymbol{x}} = (x_2, x_3)$. We denote by $\Omega^{+,\varepsilon}$ (respectively, $\Omega^{-,\varepsilon}$) the translation of Ω^+ (respectively Ω^-) in the direction $\mathbf{e}_1$ (respectively, $\mathbf{e}_1$) of $\frac{\varepsilon}{2}$ and we set $\Omega^\varepsilon = \Omega^{-,\varepsilon} \cup S^{-,\varepsilon} \cup B^\varepsilon \cup S^{+,\varepsilon} \cup \Omega^{+,\varepsilon}$. Let us stress that the physical domain of the assembly is obtained by inserting in the direction $\mathbf{e}_1$ the layer within the two bodies (see Fig. 2). The structure is clamped on the parts $\Gamma_0^{+,\varepsilon} \subset \partial\Omega^{+,\varepsilon} \backslash S^{+,\varepsilon}$, resp.$\Gamma_0^{-,\varepsilon} \subset \partial\Omega^{-,\varepsilon} \backslash S^{-,\varepsilon}$, whose union is denoted by Γ_0^ε and has > 0 surface area. The external boundary of the layer $]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[\times\partial\omega$ is traction-free and the complementary part Γ_F^ε of the boundary $\partial\Omega^\varepsilon$ is submitted to applied surface forces $\boldsymbol{F}$. Obviously, one can consider other types of boundary conditions (e.g., a combination of some components of the stress vector and of the displacement). For simplicity, we assume that the structure is free of applied body forces. We also suppose that the material of the structure is hyperelastic and characterized by hyperelastic fourth-order tensor $\boldsymbol{A}$ satisfying the usual symmetry and positivity assumptions (we also assume for simplicity that $\boldsymbol{A}$ does not depend on $\boldsymbol{x}$).

Let be $\widetilde{Y} =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ and let H be a closed subset strictly contained in $\widetilde{Y}$ whose diameter D satisfies $D < 1$. We assume that the layer B^ε is contained in the union of $\mathcal{N}(\varepsilon) \approx \frac{area(\omega)}{\varepsilon^2}$ cubes $\varepsilon\widetilde{Y}$ and that it is

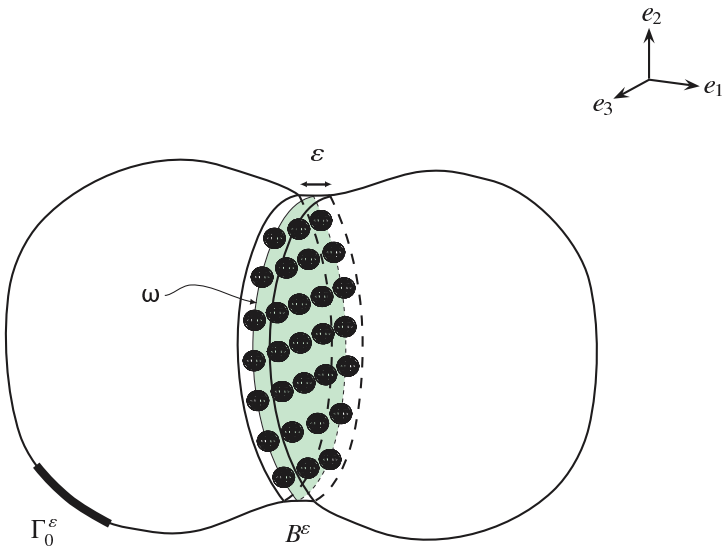


FIG. 2: Physical domain

weakened by the micro-holes of diameter $\rho_\varepsilon = \varepsilon R$. We denote by $\varepsilon\partial H$ the boundary of εH and with $\mathcal{H}^\varepsilon$, respectively, $\partial\mathcal{H}^\varepsilon$, the union of all the holes $\varepsilon\widetilde{Y}$, resp. all their boundaries $\varepsilon\partial H$. We suppose that $\partial\mathcal{H}^\varepsilon$ is free.

The displacement field $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ and the stress field $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ satisfy the classical elastostatic problem:

$$P^\varepsilon \begin{cases} \boldsymbol{div}\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = 0 & \text{equilibrium in } \Omega^\varepsilon\backslash\mathcal{H}^\varepsilon \\ \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) & \text{constitutive relation in } \Omega^\varepsilon\backslash\mathcal{H}^\varepsilon \\ \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon\boldsymbol{n} = 0 & \text{boundary conditions on } \partial\mathcal{H}^\varepsilon \\ \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon\boldsymbol{n} = \boldsymbol{F} & \text{on } \Gamma_F^\varepsilon \\ \boldsymbol{u}^\varepsilon = 0 & \text{on } \Gamma_0^\varepsilon \end{cases} \tag{1}$$

where $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^\varepsilon)$ denotes the linearized deformation tensor field (symmetrized gradient of $\boldsymbol{u}^\varepsilon$).

When the parameter $\varepsilon \to 0$ the width of the layer B^ε tends to 0 and the number $\mathcal{N}(\varepsilon)$ of the holes increases to ∞. Therefore, it is natural to look for approximate displacement and stress fields $\boldsymbol{u}^0$, $\boldsymbol{\sigma}^0$ defined in $\Omega^0 := \Omega^- \cup \omega \cup \Omega^+$. A simple rescaling argument gives:

$$\int_{B^\varepsilon} \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) : \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^\varepsilon)dx \approx \mathcal{N}(\varepsilon)\int_{\varepsilon\widetilde{Y}\backslash\varepsilon H} \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) : \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^\varepsilon)dx \approx \mathcal{N}(\varepsilon)\varepsilon^3 \approx \varepsilon \to 0 \text{ when } \varepsilon \to 0$$

and, hence, $\boldsymbol{u}^0$ and $\boldsymbol{\sigma}^0$ will satisfy:

$$P^0 \begin{cases} \boldsymbol{div}\boldsymbol{\sigma}^0 = 0 & \text{equilibrium in } \Omega^\pm \\ \boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^0) & \text{constitutive relation in } \Omega^\pm \\ [\boldsymbol{\sigma}^0\boldsymbol{e}_1] = 0 = [\boldsymbol{u}^0] & \text{transmission conditions on } \omega \\ \boldsymbol{\sigma}^0\boldsymbol{n} = \boldsymbol{F} & \text{on } \Gamma_F^0 \\ \boldsymbol{u}^0 = 0 & \text{on } \Gamma_0^0 \end{cases} \tag{2}$$

where

$$[\mathbf{w}] := \mathbf{w}^+(0+, x_2, x_3) - \mathbf{w}^-(0-, x_2, x_3) \text{ with } \mathbf{w}^\pm(0\pm, x_2, x_3) := \lim_{h\downarrow 0} \mathbf{w}(\pm h, x_2, x_3)$$

and with obvious notations, Γ_F^0 and Γ_0^0 are obtained formally taking $\varepsilon = 0$ in the previous definitions. Hence, the zeroth-order approximation $\boldsymbol{u}^0$ and $\boldsymbol{\sigma}^0$ gives no information on the behavior of the real fields $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ and $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ near interface ω. In order to get a better approximation near the interface ω we suitably adapt the inner–outer matched asymptotic expansion method introduced by Nguetseng and Sanchez-Palencia (1986) and further deeply developed by Abdelmoula and Marigo (2000) and Marigo and Pideri (2011). In order to assess the obtained asymptotic models we also study the robustness of our forms with respect to the parameters introduced.

3. THE INNER–OUTER MATCHED ASYMPTOTIC EXPANSION METHOD

In order to capture the behavior of the real fields $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ and $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ in the structure and especially near interface ω we look for two different asymptotic expansions:

(1) *Outer expansion; i.e., far from* ω. We assume that $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ and $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ have the asymptotic expansion:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^{\pm\varepsilon}(x_1 \pm \frac{\varepsilon}{2}, x_2, x_3) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \boldsymbol{u}^{i,\pm}(x_1, x_2, x_3) \\ \boldsymbol{\sigma}^{\pm\varepsilon}(x_1 \pm \frac{\varepsilon}{2}, x_2, x_3) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \boldsymbol{\sigma}^{i,\pm}(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \tag{3}$$

where $\boldsymbol{w}^{\pm\varepsilon}$ (respectively, $\boldsymbol{w}^{i,\pm}$) denotes the restriction of $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ (respectively, $\boldsymbol{w}^i$) to $\Omega^{\pm,\varepsilon}$ (respectively, to $\Omega^\pm$). Let us remark that the translation of $\frac{\varepsilon}{2}$ in the direction $\pm\boldsymbol{e}_1$ appears explicitly in the arguments of $\boldsymbol{u}^{\pm\varepsilon}$ and $\boldsymbol{\sigma}^{\pm\varepsilon}$.

(2) *Inner expansion; i.e., near* ω. Near the layer it is essential to take into account the presence of the microstructure with the holes and, hence, to distinguish the behavior of the out-of-plane variable x_1 where we perform a standard dilatation, from the behavior of the in-plane variables $\hat{\boldsymbol{x}} = (x_2, x_3)$ where we follow the now classical asymptotic homogenization method (see, e.g., Sanchez-Palencia (1980), Bensoussan et al. (1987)). Therefore, we assume that $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ and $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ have the asymptotic expansion

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \boldsymbol{v}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \\ \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \boldsymbol{\tau}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \end{cases} \tag{4}$$

where $y_i = x_i/\varepsilon$, $\hat{\boldsymbol{y}} = (y_2, y_3)$ and the fields $\boldsymbol{v}^i$ and $\boldsymbol{\tau}^i$ are 1-periodic with respect to (y_2, y_3):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}} + p\boldsymbol{e}_2 + q\boldsymbol{e}_3) &= \boldsymbol{v}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}^2 \\ \boldsymbol{\tau}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}} + p\boldsymbol{e}_2 + q\boldsymbol{e}_3) &= \boldsymbol{\tau}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Let us point out that fields $\boldsymbol{v}^i$ and $\boldsymbol{\tau}^i$ are defined for $\hat{\boldsymbol{x}} \in \omega$ and for $\hat{\boldsymbol{y}}$ in one representative period. In order to fix the notations we assume that $(y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \in Y \backslash H$ where $Y := \mathbb{R} \times \hat{Y}$ and $\hat{Y} =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

(3) *Matching conditions.* Following Sanchez-Hubert and Sanchez-Palencia (1989, chap VI), these conditions come from the assumption: inner limit of the outer limit = outer limit of the inner limit. In our case we assume:

$$\begin{aligned} \lim_{y_1 \to \pm\infty} \left(\int_{\hat{Y}} \boldsymbol{v}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) d\hat{\boldsymbol{y}} - \sum_{j=0}^{i} \frac{y_1^{i-j}}{(i-j)!} \frac{\partial^{i-j} \boldsymbol{u}^j}{\partial x_1^{i-j}} (0\pm, \hat{\boldsymbol{x}}) \right) &= \boldsymbol{0} \\ \lim_{y_1 \to \pm\infty} \left(\int_{\hat{Y}} \boldsymbol{\tau}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \boldsymbol{e}_1 d\hat{\boldsymbol{y}} - \sum_{j=0}^{i} \frac{y_1^{i-j}}{(i-j)!} \frac{\partial^{i-j} \boldsymbol{\sigma}^j}{\partial x_1^{i-j}} (0\pm, \hat{\boldsymbol{x}}) \boldsymbol{e}_1 \right) &= \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{6}$$

where as usual $(\partial^0 \boldsymbol{w})/(\partial x_1^0) = \boldsymbol{w}$. Since the fields $\boldsymbol{v}^i$ and $\boldsymbol{\tau}^i$ are 1-periodic with respect to (y_2, y_3) these matching conditions have to be realized for every $\hat{\boldsymbol{x}} \in \omega$ and for $\hat{\boldsymbol{y}}$ only in one representative period; i.e., for $(y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \in Y \backslash H$.

In order to insert the previous expansions into Eq. (1) we remark that in the outer expansion appears only as a translation whose action does not affect the operators divergence (**div**) and symmetric gradient ($\boldsymbol{\gamma}$).

In the inner expansion, the dilatation assumptions imply:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{div}\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \left[\boldsymbol{div}_x \boldsymbol{\tau}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) + \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{div}_y \boldsymbol{\tau}^i(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) \right] \\ \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^\varepsilon)(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \left[\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}^i)(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) + \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{v}^i)(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) \right] \end{aligned} \tag{7}$$

with

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}_x \boldsymbol{\tau} = \dfrac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_i, & \boldsymbol{div}_y \boldsymbol{\tau} = \dfrac{\partial \tau_{ij}}{\partial y_j} \boldsymbol{e}_i \\ [\boldsymbol{\gamma}_x(\boldsymbol{v})]_{ij} = \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial v_j}{\partial x_i} + \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), & [\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v})]_{ij} = \dfrac{1}{2} \left[\dfrac{\partial v_j}{\partial y_i} + \dfrac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] \end{cases} \tag{8}$$

Identifying the terms with the same powers of ε we obtain, therefore, the family of equations shown in Tables 1–4.

TABLE 1: Equilibrium equations

Order	**Outer:** $\Omega\backslash\omega$	**Inner:** $\omega \times (Y\backslash H)$
-1		$\boldsymbol{div}_y \boldsymbol{\tau}^0 = 0$
$i \geq 0$	$\boldsymbol{div}_x \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{i}} = 0$	$\boldsymbol{div}_y \boldsymbol{\tau}^{i+1} + \boldsymbol{div}_x \boldsymbol{\tau}^i = 0$

TABLE 2: Constitutive equations

Order	**Outer:** $\Omega\backslash\omega$	**Inner:** $\omega \times (Y\backslash H)$
-1		$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v}^0) = 0$
$i \geq 0$	$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_x(\boldsymbol{u}^i) = \boldsymbol{\sigma}^i$	$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v}^{i+1}) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_x(\boldsymbol{v}^i) = \boldsymbol{\tau}^i$

TABLE 3: Boundary conditions

Order	**Outer**	**Inner**
i = 0	$\boldsymbol{\sigma}^0\boldsymbol{n} = \boldsymbol{F}$ on Γ_F $\boldsymbol{u}^0 = 0$ on Γ_0	$\boldsymbol{\tau}^0\boldsymbol{n} = 0$ on $\omega \times \partial H$
$i > 0$	$\boldsymbol{\sigma}^i\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ on Γ_F $\boldsymbol{u}^i = 0$ on Γ_0	$\boldsymbol{\tau}^i\boldsymbol{n} = 0$ on $\omega \times \partial H$

TABLE 4: Periodicity conditions on $\omega \times \mathbb{R} \times \partial\hat{Y}$

$i \geq 0$	$\boldsymbol{v}^i\left(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{1}{2}, y_3\right) = \boldsymbol{v}^i\left(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-1}{2}, y_3\right)$ $\boldsymbol{v}^i\left(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{v}^i\left(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-1}{2}\right)$ $\boldsymbol{\tau}^i\left(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{1}{2}, y_3\right)\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{\tau}^i\left(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-1}{2}, y_3\right)\boldsymbol{e}_2$ $\boldsymbol{\tau}^i\left(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{1}{2}\right)\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{\tau}^i\left(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-1}{2}\right)\boldsymbol{e}_3$

To these equations and boundary conditions we have to add the matching conditions [Eq. (6)]. In this paper we will use only the zeroth- and first-order matching conditions:

$$\lim_{y_1 \to \pm\infty} \left(\int_{\hat{Y}} \boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) d\hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{u}^0(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}}) \right) = 0 \tag{9}$$

$$\lim_{y_1 \to \pm\infty} \left(\int_{\hat{Y}} \boldsymbol{v}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) d\hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{u}^1(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}}) - y_1 \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}}) \right) = 0 \tag{10}$$

$$\lim_{y_1 \to \pm\infty} \left(\int_{\hat{Y}} \boldsymbol{\tau}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \boldsymbol{e}_1 d\hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{\sigma}^0(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}}) \boldsymbol{e}_1 \right) = 0 \tag{11}$$

$$\lim_{y_1 \to \pm\infty} \left(\int_{\hat{Y}} \boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \boldsymbol{e}_1 d\hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{\sigma}^1(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}}) \boldsymbol{e}_1 - y_1 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1}(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}}) \boldsymbol{e}_1 \right) = 0 \tag{12}$$

These conditions not only realize the matching between inner and outer expansion but, as we shall see, are essential also for the well-posedness of the inner boundary values problem.

4. ZEROTH-ORDER OUTER APPROXIMATION

First we prove that the first term of the outer asymptotic expansion of solution $\boldsymbol{u}^0$ satisfies problem (2) previously obtained by heuristic reasoning.

Proposition 1. *Under the classical previous assumptions on $\boldsymbol{A}$ and on the loads, $\boldsymbol{u}^0$ and $\boldsymbol{\sigma}^0$ are the unique solution of the elastic problem (2).*

Proof. From the inner constitutive equation of order -1 we get $\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v}^0) = 0$ and from the periodicity conditions it follows that $\boldsymbol{v}^0$ does not depend on $\boldsymbol{y}$. The matching conditions [Eq. (9)] imply that $[\boldsymbol{u}^0] = 0$ across ω. In order to prove that also $\boldsymbol{\sigma}^0\boldsymbol{e}_1$ is continuous across ω we integrate the inner equilibrium equation of order -1 over $Y\backslash H$ and then the result is obtained by using the Green formula, periodicity conditions, and matching condition [Eq. (11)].

In order to find the first-order outer approximation it is useful to note that $\boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{v}^0(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{u}^0(0, \hat{\boldsymbol{x}})$.

5. FIRST-ORDER OUTER APPROXIMATION

Since at the zeroth-order approximation the influence of the layer with its microstructure does not appear we look for the first-order approximation. At this order the outer expansion implies that $\boldsymbol{u}^1$ and $\boldsymbol{\sigma}^1$ are the solution of the boundary value problem:

$$P^1 \begin{cases} \boldsymbol{div}\ \boldsymbol{\sigma}^1 = 0 & \text{equilibrium in } \Omega^{\pm} \\ \boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^1) & \text{constitutive relation in } \Omega^{\pm} \\ \boldsymbol{\sigma}^1\boldsymbol{n} = 0 & \text{on } \Gamma_F^0 \\ \boldsymbol{u}^1 = 0 & \text{on } \Gamma_0^0 \end{cases} \tag{13}$$

In this form problem (13) cannot be well posed since there are no conditions on ω. The missing conditions will be obtained from the inner expansion and the matching conditions and will prove that these conditions are transmission conditions on $[\boldsymbol{u}^1]$ and $[\boldsymbol{\sigma}^1\boldsymbol{e}_1]$.

In order to simplify the application of matching conditions (10) it is usually assumed (see, e.g., Marigo and Pideri, 2011) that:

$$\boldsymbol{v}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = y_1 \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{v}^\sharp(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) \tag{14}$$

However, also if matching conditions (10) have only an asymptotic character far from hole H decomposition (14) is postulated everywhere and, hence, in particular near hole H. In order to bypass this assumption we use the following decomposition, which can be used for any kind of heterogeneities:

$$\boldsymbol{v}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = f(y_1; a, b) \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{v}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) \tag{15}$$

where $f(y_1; a, b)$ is an odd function of class $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ such that

$$f(y_1; a, b) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < |y_1| \leq a \\ y_1 & \text{if } |y_1| \geq b \end{cases} \tag{16}$$

where $D < 2a < 2b$. In the sequel, except when we wish to stress the dependence on a, b, we will simply write $f(y_1)$. The inner constitutive equation of order $i = 0$ implies the decomposition:

$$\boldsymbol{\tau}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{G}\left[y_1; \boldsymbol{u}^0(0, \hat{\boldsymbol{x}})\right] + \boldsymbol{\tau}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y) \tag{17}$$

where

$$\boldsymbol{G}\left[y_1; \boldsymbol{u}^0(0, \hat{\boldsymbol{x}})\right] = \boldsymbol{A}\left\{\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{x}}\left[\boldsymbol{u}^0(0, \hat{\boldsymbol{x}})\right] + \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{y}}\left[f(y_1)\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}})\right]\right\} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\gamma}}(y_1; \boldsymbol{u}^0) \tag{18}$$

and

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}(y_1; \boldsymbol{u}^0) = f'(y_1)\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_2}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_3}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_3 \tag{19}$$

As usual $\boldsymbol{a} \otimes_S \boldsymbol{b}$ denotes the symmetrized tensor product of the vectors $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$; i.e. $(\boldsymbol{a} \otimes_S \boldsymbol{b})_{ij} = 1/2(a_i b_j + a_j b_i)$. For further use let us also note that:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}(y_1; \boldsymbol{u}^0) = \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0, \hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{ij}(y_1) \tag{20}$$

where

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{i1}(y_1) = f'(y_1)\boldsymbol{e}_i \otimes_S \boldsymbol{e}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{i2}((y_1) = \boldsymbol{e}_i \otimes_S \boldsymbol{e}_2, \;\; \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{i3} = \boldsymbol{e}_i \otimes_S \boldsymbol{e}_3 \end{cases} \tag{21}$$

Proposition 2. *Under the previous assumptions on $\boldsymbol{A}$, for every $\hat{\boldsymbol{x}} \in \omega$, the solution $\boldsymbol{v}^\star$ of the following boundary value problem is unique up to a translation $\boldsymbol{v}'(\hat{\boldsymbol{x}})$.*

$$P^\star \quad \begin{cases} \boldsymbol{div}_y \boldsymbol{\tau}^\star = -f''(y_1)\boldsymbol{A}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_1\right)\boldsymbol{e}_1 & \text{in } \omega \times Y \backslash H \\ \boldsymbol{\tau}^\star = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{v}^\star) & \text{in } \omega \times Y \backslash H \\ \boldsymbol{v}^\star \text{ and } \boldsymbol{\tau}^\star \boldsymbol{n} \text{ periodic} & \text{on } \omega \times \mathbb{R} \times \partial \hat{Y} \\ \boldsymbol{\tau}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})\,\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{A}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_2}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_2 + \dfrac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_3}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_3\right)\boldsymbol{n} & \text{on } \omega \times \partial H \\ \lim_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{\tau}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0} & \text{for } (\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \in \omega \times \hat{Y} \end{cases} \tag{22}$$

Moreover the following asymptotic behavior holds:

$$\lim_{y_1 \to \pm\infty} \int_{\hat{Y}} \boldsymbol{v}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}})d\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{v}^{\star\pm}(\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{23}$$

Proof. The formulation of the first four equations of problem $P^\star$ is a straightforward consequence of the equilibrium equation of order $i = -1$, of the constitutive equation, of the periodicity conditions, of the boundary conditions of order $i = 0$ for the inner expansion, the definitions of $\boldsymbol{G}\left(y_1; \boldsymbol{u}^0\right)$ and $f(y_1)$, and the remark that

$$\boldsymbol{div}_y \boldsymbol{G} = \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y_3}\boldsymbol{e}_3$$

The last one is a consequence of matching conditions (11). In order to prove the asymptotic behavior we remark that

$$\int_{\hat{Y}} \boldsymbol{\tau}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 d\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\hat{Y}} \boldsymbol{v}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}})d\hat{\boldsymbol{y}}\right] \otimes_S \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1\right\}$$

Due to the symmetry and positivity assumptions on $\boldsymbol{A}$ we have

$$\lim_{y_1 \to \pm\infty} \frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\hat{Y}} \boldsymbol{v}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}})d\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}$$

and then Eq. (23) follows.

Remark 1: It is worth noticing that $\boldsymbol{v}^{\star+}(\hat{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{v}^{\star-}(\hat{\boldsymbol{x}})$ is uniquely determined also if $\boldsymbol{v}^\star$ is only defined up to a translation. The uniqueness of $\boldsymbol{v}^\star$ can be recovered if one adds the following condition:

$$\boldsymbol{v}^{\star+}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{v}^{\star-}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0} \tag{24}$$

The linearity of the problem implies immediately the following decomposition.

Proposition 3. *For every $\hat{\boldsymbol{x}} \in \omega$, the solution $\boldsymbol{v}^\star$ of $P^\star$ can be decomposed as follows:*

$$\boldsymbol{v}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = -\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0, \hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{V}^{ij}(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{v}'(\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{25}$$

where $\boldsymbol{V}^{ij}$ are the (unique) solutions of the nine elementary problems:

(a) for (l,k) = (2,2) ; (3,3) ; (1,2) ; (1,3) ; (2,3) ; (3,2) :

$$P^{lk} \quad \begin{cases} \boldsymbol{div}_y \boldsymbol{T}^{lk} = 0 & \text{in } Y \backslash H \\ \boldsymbol{T}^{lk} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{V}^{lk}) & \text{in } Y \backslash H \\ \boldsymbol{V}^{lk} \text{ and } \boldsymbol{T}^{lk}\boldsymbol{n} \text{ periodic} & \text{on } \mathbb{R} \times \partial \hat{Y} \\ \left(\boldsymbol{T}^{lk}\boldsymbol{n}\right)_i = A_{ijlk} n_j & \text{on } \partial H \\ \lim_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{T}^{lk}(y_1, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0} & \text{for } \hat{\boldsymbol{y}} \in \hat{Y} \end{cases} \tag{26}$$

(b) for (l,k) = (1,1) ; (2,1) ; (3,1) :

$$P^{lk} \quad \begin{cases} \left(\boldsymbol{div}_y \boldsymbol{T}^{lk}\right)_i = f''(y_1) A_{iklk} & \text{in } Y \backslash H \\ \boldsymbol{T}^{lk} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_y(\boldsymbol{V}^{lk}) & \text{in } Y \backslash H \\ \boldsymbol{V}^{lk} \text{ and } \boldsymbol{T}^{lk}\boldsymbol{n} \text{ periodic} & \text{on } \mathbb{R} \times \partial \hat{Y} \\ \boldsymbol{T}^{lk}\boldsymbol{n} = 0 & \text{on } \partial H \\ \lim_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{T}^{lk}(y_1, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0} & \text{for } \hat{\boldsymbol{y}} \in \hat{Y} \end{cases} \tag{27}$$

The solutions must also satisfy the following condition:

$$\boldsymbol{V}^{ij+} + \boldsymbol{V}^{ij-} = \boldsymbol{0} \tag{28}$$

where

$$\boldsymbol{V}^{ij\pm} := \lim_{y_1 \to \pm\infty} \int_{\hat{Y}} \boldsymbol{V}^{ij}(y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) d\hat{\boldsymbol{y}} \tag{29}$$

Proof. The only fact to prove is the uniqueness of the solutions: this follows from Eq. (28).
Remark 2: The elementary problems P^{ij} can be solved independently of the data of the original boundary value problem P^{ε}. They will give the influence of the microstructure on the first-order outer approximation. In general $\boldsymbol{V}^{ij} \neq \boldsymbol{V}^{ji}$; however, it appears immediately that $\boldsymbol{V}^{23} = \boldsymbol{V}^{32}$.

5.1 Determination of $[\boldsymbol{u}^1]$ and $[\boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{e}_1]$

We can now obtain the missing conditions on ω for boundary value problem (13). The first missing condition follows from matching condition (10) and decompositions (15) and (25). Indeed, the asymptotic behavior [Eq. (23)] of $\boldsymbol{v}^\star$ and Eq. (29) of $\boldsymbol{V}^{ij}$ imply:

$$[\boldsymbol{u}^1](\hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0, \hat{\boldsymbol{x}})[\boldsymbol{V}^{ij}] \tag{30}$$

where $[\boldsymbol{V}^{ij}] := \boldsymbol{V}^{ij+} - \boldsymbol{V}^{ij-}$. In order to obtain the missing condition on $[\boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{e}_1]$ we remark that matching condition (12) can be written as

$$\boldsymbol{\sigma}^1(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1 = \lim_{y_1 \to \pm\infty} \left(\int_{\hat{Y}} \boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 d\hat{\boldsymbol{y}} - y_1 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1 \right)$$

and so we can write

$$[\boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{e}_1] = \lim_{L \to \infty} \left\{ \int_{\hat{Y}} \left[\boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, -L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 \right] d\hat{\boldsymbol{y}} - 2L \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1 \right\} \tag{31}$$

Let $Y_L =]-L, L[\times\hat{Y}$ for fixed $L > b$. From the inner equilibrium equation of order $i = 0$ one has

$$\int_{\hat{Y}} \left[\boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, -L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1\right] d\hat{\boldsymbol{y}} = \int_{Y_L\setminus H} \boldsymbol{div}_y \boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = -\int_{Y_L\setminus H} \boldsymbol{div}_x \boldsymbol{\tau}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \tag{32}$$

Thanks to Eqs. (16)–(18) we get:

$$\int_{Y_L\setminus H} \boldsymbol{div}_x \boldsymbol{G}\left[y_1; \boldsymbol{u}^0(0, \hat{\boldsymbol{x}})\right] d\boldsymbol{y} = \boldsymbol{div}_x \left\{2L\boldsymbol{\sigma}^0(0, \hat{\boldsymbol{x}}) - |H|\boldsymbol{A}\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_2}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_3}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_3\right]\right\}$$

where $|H|$ denotes the volume of hole H. Since $\boldsymbol{div}_x \boldsymbol{\sigma}^0(0, \hat{\boldsymbol{x}}) = \dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_2}(0, \hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_2 + \dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_3}(0, \hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_3$ from the outer equilibrium equation of order $i = 0$ and Eq. (25) we get

$$\begin{aligned}
&\int_{\hat{Y}} \left[\boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{\tau}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, -L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1\right] d\hat{\boldsymbol{y}} - 2L\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1 \\
&= |H|\boldsymbol{div}_x \boldsymbol{A}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_2}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_3}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_3\right) + \boldsymbol{div}_x\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \int_{Y_L\setminus H} \boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}\right)
\end{aligned}$$

Finally, taking the $\lim\limits_{L\to\infty}$ we obtain

$$\left[\boldsymbol{\sigma}^1\boldsymbol{e}_1\right] = |H|\boldsymbol{div}_x \boldsymbol{A}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_2}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_3}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \otimes_S \boldsymbol{e}_3\right) + \boldsymbol{div}_x\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \int_{Y\setminus H} \boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}\right) \tag{33}$$

The first-order outer approximation [Eq. (13)] can, hence, be completed with transmission conditions (30) and (33) on ω. With these conditions the boundary value problem P^1 has a unique solution.

5.2 The Influence of the Symmetries

The problems P^{ij} and, in particular, conditions (28) are easier to solve in the presence of symmetries of $Y\setminus H$ and of $\boldsymbol{A}$ (and, hence, also of the loads). Thus, the general equations [Eqs. (30) and (33)] can be simplified. Let us note at first that Y is invariant for the finite group $\mathbb{G}$ of rotations generated by reflections $\boldsymbol{e}_i \to -\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, and the rotation of $\pi/2$ around $(O, \boldsymbol{e}_1)$. All the elements of this group are rotations of the form $(\pm\mathcal{I})\mathcal{O}$ where $(\mathcal{I})_{ij} = \delta_{ij}$, respectively, $(-\mathcal{I})_{ij} = -\delta_{ij}$, and $\mathcal{O} \in \mathbb{O}$ where $\mathbb{O}$ is the group of the rotational symmetries of the octahedron (or of the cube) (see Golubitsky et al., 1988). Hence, the simplest geometric situation is obtained when H is such that $Y\setminus H$ has the same invariance; this happens for instance when H is a spherical cavity centered in the origin. Since $\boldsymbol{A}$ is a fourth order tensor it is enough to ask that it is invariant with respect to $\mathcal{O} \in \mathbb{O}$, i.e. that $\mathcal{O}\boldsymbol{A}\mathcal{O}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$ for all $\mathcal{O} \in \mathbb{O}$. This kind of invariance has been characterized in by Forte and Vianello (1996) (for some comments on the classification and the applications to the identification strategy, also see François et al., 1998). It corresponds to the cubic elasticity.

To explore the influence of these assumptions, let $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{y})$ be a displacement field defined in $Y\setminus H$ and let $\boldsymbol{y}^\dagger := \mathcal{O}\boldsymbol{y}$ and $\boldsymbol{w}^\dagger(\boldsymbol{y}^\dagger) := \mathcal{O}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{y})$. Then $\boldsymbol{w}^\dagger(\boldsymbol{y}^\dagger)$ is also defined in $Y\setminus H$ and, with obvious notations, one has $\boldsymbol{\gamma}^\dagger(\boldsymbol{w}^\dagger) = \mathcal{O}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{w})\mathcal{O}^{\mathrm{T}}$ and, hence, $\boldsymbol{T}^\dagger = \mathcal{O}\boldsymbol{T}\mathcal{O}^{\mathrm{T}}$ thanks to the invariance of $\boldsymbol{A}$. To simplify Eqs. (30) and (33) we apply these considerations to every $\boldsymbol{V}^{ij}$ and for all $\mathcal{O} \in \mathbb{G}$.

To illustrate the method, in the sequel we consider only the simplest situation corresponding to the isotropic 3D case:

$$A_{ijhk} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{hk} + \frac{E}{2(1+\nu)}(\delta_{ih}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jh}) \tag{34}$$

In the example where $(\mathcal{O})_{11} = -1$, $(\mathcal{O})_{22} = (\mathcal{O})_{33} = 1$ and $(\mathcal{O})_{ij} = 0$ elsewhere one has

$$\boldsymbol{V}^{\dagger\, ij}(-y_1, y_2, y_3) = -V_1^{ij}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}_1 + V_2^{ij}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}_2 + V_3^{ij}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}_3$$

$$T^{\dagger\, ij}_{hk}(-y_1, y_2, y_3) = -T^{ij}_{hk}(\boldsymbol{y}) \text{ for } (h,k) = (1,2); (1,3)$$
$$T^{\dagger\, ij}_{hk}(-y_1, y_2, y_3) = T^{ij}_{hk}(\boldsymbol{y}) \text{ in the other cases}$$

The invariance of $Y \backslash H$ and the uniqueness of the solution of the problem P^{ij} imply

$$\begin{cases} V^{ij+}_k = V^{ij-}_k = 0 \text{ for } k = 2,3 \text{ if } \boldsymbol{V}^{\dagger\, ij}(y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{V}^{ij}(y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \\ V^{ij+}_1 = V^{ij-}_1 = 0 \text{ if } \boldsymbol{V}^{\dagger\, ij}(y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) = -\boldsymbol{V}^{ij}(y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \end{cases}$$

Applying these remarks to Eqs. (26) and (27) it can be deduced that

$$\begin{aligned} &V^{11\pm}_2 = V^{11\pm}_3 = 0\,,\ V^{21\pm}_1 = V^{31\pm}_1 = 0\,,\ V^{12\pm}_1 = V^{13\pm}_1 = 0 \\ &V^{23\pm}_2 = V^{23\pm}_3 = 0\,,\ V^{22\pm}_2 = V^{22\pm}_3 = 0\,,\ V^{33\pm}_2 = V^{33\pm}_3 = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

Furthermore, the invariance of $Y \backslash H$ for the other rotations $\mathcal{O} \in \mathbb{G}$ implies:

$$\begin{aligned} &V^{22}_1 = V^{33}_1; \quad V^{22}_2 = V^{33}_3\,; \quad V^{22}_3 = -V^{33}_2 \\ &V^{21}_1 = V^{31}_1; \quad V^{21}_2 = V^{31}_3\,; \quad V^{21}_3 = -V^{31}_2 \end{aligned} \tag{36}$$

A huge simplification of $[\boldsymbol{u}^1]$ follows from this kind of results. In the same spirit one can also look for the possible simplifications of $[\boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{e}_1]$. For instance, if T^{ij}_{kl} is odd with respect to one of the variables y_i then $\int_{Y \backslash H} T^{ij}_{kl}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = 0$. In particular, it is possible to prove:

$$\begin{cases} \int_{Y\backslash H} T^{kk}_{12} = \int_{Y\backslash H} T^{kk}_{13} = \int_{Y\backslash H} T^{kk}_{23} = 0 \quad \text{for} \quad k = 1,2 \quad \text{or} \quad k = 3 \\ \int_{Y\backslash H} T^{lk}_{pq} = 0 \quad \text{if} \quad (p,q) \neq (l,k) \\ \text{for} \quad (l,k) = (1,2); (2,3); (1,3); (2,1); (3,2); (3,1) \end{cases}$$

6. COMMENTS ON THE NUMERICAL IMPLEMENTATION

The general Eqs. (30) and (33) depend on the function $f(y_1; a, b)$ and on the solution of the problems P^{ij} posed on the unbounded domain $Y \backslash H$. For this reason we study how the coefficients $[\boldsymbol{V}^{ij}]$ are robust with respect to:

(1) The substitution of a bounded domain $Y_L \backslash H$ with a $L > 0$ big enough to the unbounded domain $Y \backslash H$ for the computation of the $\boldsymbol{V}^{ij}$ with a finite-element method.

(2) The choice of parameters a, b in the definition of $f(y_1; a, b)$.

We will consider a simple but still significant situation: the plane stress approximation in the isotropic case with H being a circle of diameter D. The elastic coefficients are easily deduced from Eq. (34); moreover, there are only four problems P^{ij} corresponding to $i, j = 1, 2$. The loads corresponding to Eq. (26) are presented in Figs. 3 and 4. The loads corresponding to Eq. (27) depend on the choice of function $f(y_1, a, b)$. Figures 5–8 present the loads corresponding to the choices of the parameters given in Section 6.2.

6.1 Dependence on L

In order to study the influence of L and of the mesh size on $[\boldsymbol{V}^{ij}]$ we consider a first mesh and then two other finer meshes with a larger number of d.o.f. From Eq. (35) it follows that the coefficients $[V^{ij}_p] \neq 0$ are: $[V^{11}_1]$, $[V^{22}_1]$, $[V^{21}_2]$, and $[V^{12}_2]$. In Tables 5–7 we give the computed values of $[V^{11}_1]$, $[V^{22}_1]$, $[V^{21}_2]$ and $[V^{12}_2]$ corresponding to the different lengths and different meshes when $D = 0.5$, $a = 0.5$, $b = 2a$, $E = 1$, and $\nu = 0.25$.

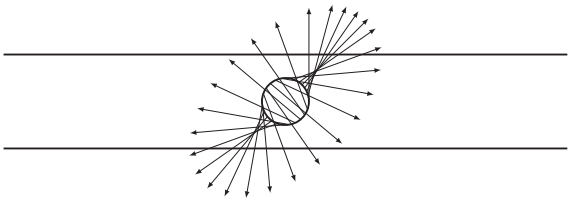


FIG. 3: P^{12}

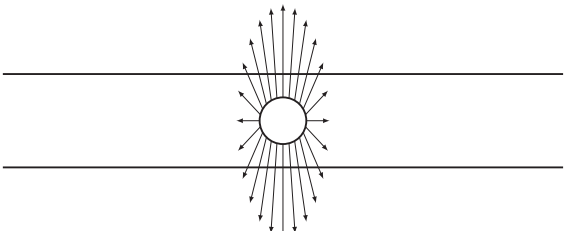


FIG. 4: P^{22}

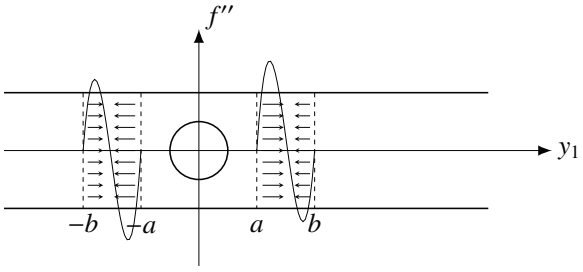


FIG. 5: P^{11} first choice: $b = 2a$

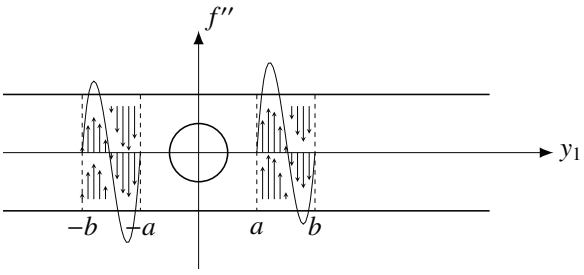


FIG. 6: P^{21} first choice: $b = 2a$

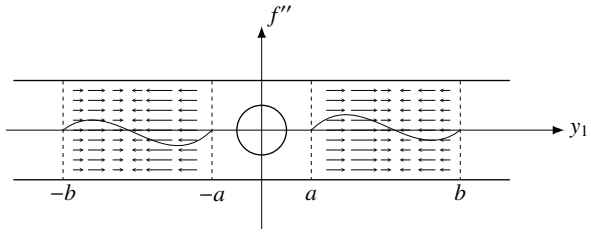


FIG. 7: P^{11} second choice: $b = 4a$

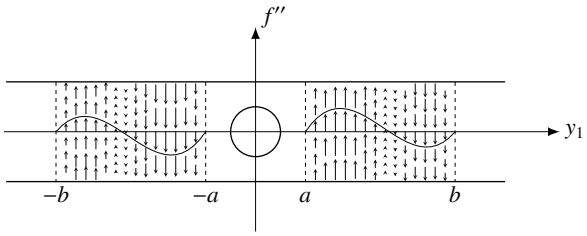


FIG. 8: P^{21} second choice: $b = 4a$

TABLE 5: Mesh 1, $a = 0.5$, $b = 2a$

L	d.o.f.	$[V_1^{11}]$	$[V_2^{12}]$	$[V_2^{21}]$	$[V_1^{22}]$
3.00	12608	0.68203	0.98547	1.00851	0.16410
4.00	15640	0.74448	0.98559	1.07873	0.16410
5.00	17552	0.68278	0.98556	1.01113	0.16409
6.00	18712	0.68558	0.98562	1.01548	0.16409
7.00	20192	0.63759	0.98575	0.96099	0.16409
8.00	21464	0.66860	0.98561	0.99619	0.16409
9.00	22096	0.67762	0.98576	1.00553	0.16410
10.00	22920	0.66177	0.98567	0.98523	0.16409
15.00	25576	0.68475	0.98556	1.01351	0.16409
20.00	27808	0.65507	0.98571	0.98063	0.16410

6.2 Dependence on $f(y_1, a, b)$

The simplest way to define a function $f(y_1, a, b)$ satisfying Eq. (16) is to choose for $a \leq |y_1| \leq b$ a polynomial such that:

$$f'(y_1) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad |y_1| = a \\ 1 & \text{if} \quad |y_1| = b \end{cases}$$

and

$$f''(y_1) = 0 \quad \text{if} \quad |y_1| = a \quad \text{or} \quad |y_1| = b$$

TABLE 6: Mesh 2, $a = 0.5$, $b = 2a$

L	d.o.f.	$[V_1^{11}]$	$[V_2^{12}]$	$[V_2^{21}]$	$[V_1^{22}]$
3.00	49440	0.65816	0.98614	0.98353	0.16407
4.00	61392	0.65923	0.98615	0.98520	0.16407
5.00	68864	0.66565	0.98614	0.99185	0.16407
6.00	73360	0.65581	0.98615	0.98011	0.16407
7.00	79136	0.66035	0.98616	0.98547	0.16407
8.00	84112	0.66239	0.98615	0.98760	0.16407
9.00	86528	0.65639	0.98616	0.98154	0.16407
10.00	89712	0.66119	0.98615	0.98741	0.16407
15.00	99888	0.68746	0.98614	1.01614	0.16407
20.00	108448	0.66097	0.98616	0.98612	0.16407

TABLE 7: Mesh 3, $a = 0.5$, $b = 2a$

L	d.o.f.	$[V_1^{11}]$	$[V_2^{12}]$	$[V_2^{21}]$	$[V_1^{22}]$
3.00	110496	0.65462	0.98618	0.97984	0.16407
4.00	137256	0.66467	0.98618	0.99114	0.16407
5.00	153936	0.66248	0.98618	0.98875	0.16407
6.00	163944	0.66178	0.98618	0.98795	0.16407
7.00	176832	0.66340	0.98618	0.98974	0.16407
8.00	187944	0.66046	0.98618	0.98644	0.16407
9.00	193296	0.66205	0.98618	0.98823	0.16407
10.00	200376	0.66232	0.98618	0.98851	0.16407
15.00	222936	0.66270	0.98618	0.98902	0.16407
20.00	241920	0.66078	0.98618	0.98687	0.16407

TABLE 8: Mesh 1, $a = 0.5$, $b = 4a$

L	d.o.f.	$[V_1^{11}]$	$[V_2^{12}]$	$[V_2^{21}]$	$[V_1^{22}]$
3.00	12608	0.66376	0.98547	0.98930	0.16410
4.00	15640	0.66118	0.98559	0.98661	0.16410
5.00	17552	0.65701	0.98556	0.98223	0.16409
6.00	18712	0.66258	0.98562	0.98837	0.16409
7.00	20192	0.66009	0.98575	0.98572	0.16409
8.00	21464	0.65979	0.98561	0.98534	0.16409
9.00	22096	0.66047	0.98576	0.98610	0.16410
10.00	22920	0.65919	0.98567	0.98443	0.16409
15.00	25576	0.66216	0.98556	0.98776	0.16409
20.00	27808	0.66040	0.98571	0.98603	0.16410

In order to study the dependence on a, b we have considered a second choice of $a = 0.5$, $b = 4a$ whose results are given in Table 8 and must be compared with results of Table 5 where $a = 0.5$, $b = 2a$.

7. CONCLUSION

The solution $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ of the original problem P^ε can be approximated by $\boldsymbol{u}^0 + \varepsilon \boldsymbol{u}^1$ where $\boldsymbol{u}^0$ and $\boldsymbol{u}^1$ are solutions of transmission problems posed in the domain $\Omega^0 := \Omega^- \cup \omega \cup \Omega^+$ where the layer of heterogeneities has disappeared. In our approach in order to determine $\boldsymbol{u}^1$ we introduce the function $f(y_1; a, b)$ that takes into account the matching conditions only quite far from the heterogeneity. In this paper we have proved that such a function allows us to treat in a very satisfactory way the case of holes, and that the results are robust with respect of the choice of parameters a, b. Moreover, we have also seen that the unbounded domain can be approximated in a satisfactory way by a finite one and that the results are stable when the mesh becomes finer and finer. In a forthcoming paper we will use this approach when the heterogeneities are rigid. Let us also stress that when the heterogeneities are fibers along a two-dimensional plane the results are completely different (Bellieud et al., in preparation).

ACKNOWLEDGMENTS

This work was partially supported by the French Agence National de la Recherche (ANR) under Grant Epsilon (BLAN08-2_312370) (Domain decomposition and multi-scale computations of singularities in mechanical structures).

REFERENCES

Abdelmoula, R. and Marigo, J. J., The effective behavior of a fiber bridged crack, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. **48**, no. 11, pp. 2419–2444, 2000.

Bellieud, M., Geymonat, G., Krasucki, F., and Michaille, G., in preparation.

Bensoussan, A., Lions, J. L., and Papanicolaou, G., *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Amsterdam: North Holland, 1987.

Forte, S. and Vianello, M., Symmetry classes for elasticity tensors, *J. Elast.*, vol. **43**, pp. 81–108, 1996.

François, M., Geymonat, G., and Berthaud, Y., Determination of the symmetries of an experimentally determined stiffness tensor: Application to acoustic measurements, *Int. J. Solids Struct.*, vol. **35**, pp. 4091–4106, 1998.

Golubitsky, M., Stewart, I., and Schaeffer, D. G., *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, vol. **II**, New York: Springer-Verlag, 1988.

Marigo, J. J. and Pideri, C., The effective behavior of elastic bodies containing microcracks or microholes localized on a surface, *Int. J. Damage Mech.*, doi:1056789511406914, 2011.

Nguetseng, G. and Sanchez-Palencia, E., Stress concentration for defects distributed near a surface. In *Local Effects in the Analysis of Structures*, ed. Ladevèze, P., Amsterdam: Elsevier, pp. 55–74, 1986.

Sanchez-Hubert, J. and Sanchez-Palencia, E., *Vibration and Coupling of Continuous Systems: Asymptotic Methods*, New York: Springer Verlag, 1989.

Sanchez-Palencia, E., *Nonhomogeneous Media and Vibration Theory*, Berlin: Springer, 1980.

Chapitre 5

Inclusions de grande rigidité dans le cas scalaire

L'étude des inclusions élastiques de grande rigidité a présenté des difficultés qui n'ont pas permis d'aboutir au modèle asymptotique correspondant. Nous étudions ici la situation plus simple de la conduction de la chaleur dans le cas stationnaire. On reprend les mêmes notations que précédemment avec quelques modifications :

- les vecteurs $\boldsymbol{u}^i$ et $\boldsymbol{v}^i$ deviennent les scalaires u^i et v^i (température),
- les tenseurs de déformation $\boldsymbol{\gamma}_x$ et $\boldsymbol{\gamma}_y$ sont remplacés par ∇_x et ∇_y,
- les tenseurs de rigidité $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{A}^{\varepsilon,I}$ sont remplacés par les tenseurs de conductivité $\boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{K}^{\varepsilon,I}$ où $\boldsymbol{K}^{\varepsilon,I} = \varepsilon^p \boldsymbol{K}^I$ avec $\boldsymbol{K}^I \simeq \boldsymbol{K}$,
- les tenseurs $\boldsymbol{\sigma}^i$ et $\boldsymbol{\tau}^i$ sont remplacés par les vecteurs $\boldsymbol{s}^i$ et $\boldsymbol{q}^i$ (vecteur flux de chaleur),
- les opérateurs vectoriels $\boldsymbol{div}_x$ et $\boldsymbol{div}_y$ sont remplacés par les opérateurs scalaires div_x et div_y,
- la loi de comportement de l'élasticité linéaire $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u})$ devient $\boldsymbol{s} = -\boldsymbol{K}\nabla(u)$.

5.1 Approximations intérieure et extérieure d'ordre 0 et 1 dans le cas $p = -1$

5.1.1 Approximation extérieure d'ordre 0

L'approximation d'ordre 0 est présentée ici de façon plus condensée que dans le cas ε^p-élastique, $p \geq 0$: l'étude du comportement des champs intérieurs v^0 et $\boldsymbol{q}^0$ lorsque $y_1 \to \infty$ est incorporée dans la démonstration du problème extérieur d'ordre 0.
Afin de simplifier les notations, on pose $\nabla_{\hat{x}} = (\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$, $\hat{\boldsymbol{n}} = (n_2, n_3)$ et $\hat{\boldsymbol{K}}^I = (K^I_{\alpha\beta})$.

Proposition 6. *L'approximation extérieure d'ordre 0 $(u^0, \boldsymbol{s}^0)$ est la solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}\boldsymbol{s}^0 = \boldsymbol{0} & \textit{dans } \Omega \\ \boldsymbol{s}^0 = -\boldsymbol{K}\nabla_x(u^0) & \textit{dans } \Omega \\ \boldsymbol{s}^0\boldsymbol{n} = F & \textit{sur } \Gamma_F \\ u^0 = 0 & \textit{sur } \Gamma_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Démonstration.

- Les équations du problème (5.1) sont respectivement l'équation d'équilibre, la loi de comportement et les conditions aux limites d'ordre $i = 0$.

- *Continuité de u^0 sur ω :*

  i) En prenant en compte les changements précédents, dans I l'équation d'équilibre d'ordre -3 ($div_y \boldsymbol{q}^{-2} = 0$), la loi de comportement d'ordre -2 ($\boldsymbol{q}^{-2} = -\boldsymbol{K}^I \nabla_y(v^0)$) et la condition de transmission $\boldsymbol{q}_-^{-2}\boldsymbol{n} = 0$ impliquent que :

  $$\boldsymbol{q}^{-2} = \boldsymbol{0} \text{ et } v^0(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = c^0(\hat{\boldsymbol{x}}) \text{ , dans } I.$$

  ii) Dans $(Y \backslash I)$ l'équation d'équilibre d'ordre -2 ($div_y \boldsymbol{q}^{-1} = 0$), la loi de comportement d'ordre -1 ($\boldsymbol{q}^{-1} = -\boldsymbol{K}^I \nabla_y v^0$), la condition de transmission $[v^0]_{\partial I} = 0$, les conditions de périodicité, d'ordre -1 pour $\boldsymbol{q}^i$ et d'ordre 0 pour v^i, et la condition de raccord (3.6) ($\lim_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{0}$) impliquent que :

  $$\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{0} \text{ et } v^0(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = c^0(\hat{\boldsymbol{x}}) \text{ , dans } (Y \backslash I).$$

  On en déduit grâce à la condition de raccord (3.7) ($\lim_{y_1 \to \pm\infty} v^0(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = u^0(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}})$) que :

  $$\left[u^0\right]_\omega (\hat{\boldsymbol{x}}) = 0 \tag{5.2}$$

  et dans tout Y, on a :

  $$v^0(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = c^0(\hat{\boldsymbol{x}}) = u^0(0, \hat{\boldsymbol{x}})$$

- *Continuité de $\boldsymbol{s}^0\boldsymbol{e}_1$ sur ω :*

  i) Dans I, l'équation d'équilibre d'ordre -2 ($div_y \boldsymbol{q}^{-1} = 0$) associée à la loi de comportement à l'ordre -1 ($\boldsymbol{q}^{-1} = -\boldsymbol{K}^I(\nabla_x(v^0) + \nabla_y(v^1))$) et la condition de transmission $[\boldsymbol{q}^{-1}\boldsymbol{n}] = 0$ associée au résultat précédemment obtenu ($\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{0}$ dans $Y \backslash I$), impliquent que $v^1(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$ doit satisfaire :

  $$\begin{cases} div_y \boldsymbol{q}^{-1} = 0 & \text{dans } I \\ \boldsymbol{q}^{-1} = -\boldsymbol{K}^I(\nabla_x(v^0) + \nabla_y(v^1)) & \text{dans } I \\ \boldsymbol{q}_-^{-1}\boldsymbol{n} = 0 & \text{sur } \partial I \end{cases} \tag{5.3}$$

  Pour que ce problème admette une solution, il faut que la condition de compatibilité ci-dessous, analogue à celle énoncée précédemment dans le cas élastique (voir chapitre 1), soit vérifiée :

  $$\int_{\partial I} \boldsymbol{K}^I \nabla_x u^0(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \boldsymbol{n} ds = \boldsymbol{K}^I \nabla_x u^0(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \int_{\partial I} \boldsymbol{n} ds = 0 \tag{5.4}$$

  Grâce au théorème classique de la divergence dans I, cette condition de compatibilité est vérifiée et par conséquent on a dans I :

  $$v^1(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) = -\nabla_{\hat{x}} u^0(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \hat{\boldsymbol{y}} + c^1(\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{5.5}$$

  avec $c^1(\hat{\boldsymbol{x}})$ arbitraire et $\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{0}$.

ii) Dans $(Y\backslash I)$, l'équation d'équilibre d'ordre -1 ($div_x \boldsymbol{q}^{-1} + div_y \boldsymbol{q}^0 = 0$ avec $\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{0}$), la loi de comportement d'ordre 0 ($\boldsymbol{q}^0 = -\boldsymbol{K}(\nabla_x v^0 + \nabla_y v^1)$), la condition de transmission $[v^1]_{\partial I} = 0$, les conditions de périodicité et la condition de raccord (3.8) ($\lim_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{q}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{s}^0(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}})$), impliquent que $v^1(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$ doit vérifier :

$$\begin{cases} div_y \boldsymbol{q}^0 = 0 & \text{dans } (Y\backslash I) \\ \boldsymbol{q}^0 = -\boldsymbol{K}(\nabla_x v^0 + \nabla_y v^1) & \text{dans } (Y\backslash I) \\ \lim_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{q}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{s}^0(0\pm, \hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1 & \text{sur } \hat{Y} \\ v^1(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = -\nabla_{\hat{x}} u^0(0, \hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{y}} + c^1(\hat{\boldsymbol{x}}) & \text{sur } \partial I \\ \boldsymbol{q}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{\alpha}{2}, y_3)\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{q}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-\alpha}{2}, y_3)\boldsymbol{e}_2 & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\hat{Y} \\ \boldsymbol{q}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{\alpha}{2})\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{q}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-\alpha}{2})\boldsymbol{e}_3 & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\hat{Y} \\ \boldsymbol{v}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{\alpha}{2}, y_3) = \boldsymbol{v}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-\alpha}{2}, y_3) & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\hat{Y} \\ \boldsymbol{v}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{\alpha}{2}) = \boldsymbol{v}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-\alpha}{2}) & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\hat{Y} \end{cases} \tag{5.6}$$

Ces équations ont une unique solution $v^1(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{q}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$.
Il est important de remarquer que $\boldsymbol{q}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$ ne dépend pas du choix de $c^1(\hat{\boldsymbol{x}})$.

iii) Dans I, l'équation d'équilibre d'ordre -1 ($div_x(\boldsymbol{q}^{-1}) + div_y(\boldsymbol{q}^0) = 0$), la loi de comportement d'ordre 0 ($\boldsymbol{q}^0 = -\boldsymbol{K}^I(\nabla_x(v^1) + \nabla_y(v^2))$) et la condition de transmission $[\boldsymbol{q}^0\boldsymbol{n}]_{\partial I} = 0$ impliquent que v^2 doit satisfaire :

$$\begin{cases} div_y \boldsymbol{q}^0 = 0 & \text{dans } I \\ \boldsymbol{q}^0 = -\boldsymbol{K}^I(\nabla_x(v^1) + \nabla_y(v^2)) & \text{dans } I \\ \boldsymbol{q}^0_- \boldsymbol{n}^- = -\boldsymbol{q}^0_+ \boldsymbol{n}^+ & \text{sur } \partial I \end{cases} \tag{5.7}$$

Pour que ce problème admette une solution, il faut que la condition de compatibilité suivante sur v^1 et $\boldsymbol{q}^0_+$ soit satisfaite :

$$\int_{\partial I} \boldsymbol{q}^0_+ \boldsymbol{n}^+ ds - \int_{\partial I} \boldsymbol{K}^I \nabla_x v^1 \boldsymbol{n}^- ds + \int_I div_y(\boldsymbol{K}^I \nabla_x v^1) d\boldsymbol{y} = 0 \tag{5.8}$$

où $\boldsymbol{n}^+$ (resp. $\boldsymbol{n}^-$) représente la normale à ∂I orientée de $Y\backslash I$ vers I (resp. orientée de I vers $Y\backslash I$).
On en déduit après application du théorème de la divergence dans I :

$$\int_{\partial I} \boldsymbol{q}^0_+ \boldsymbol{n}^+ ds = 0 \tag{5.9}$$

En intégrant l'équation d'équilibre $div_y \boldsymbol{q}^0 = 0$ sur $Y_L\backslash I$ avec L suffisamment grand, et en considérant la formule de Green et les conditions de périodicité sur $\boldsymbol{q}^0$, on a :

$$\int_{\hat{Y}} \left(\boldsymbol{q}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{q}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, -L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 \right) d\hat{\boldsymbol{y}} = -\int_{\partial I} \boldsymbol{q}^0_+ \boldsymbol{n}^+ ds = 0 \tag{5.10}$$

En rappelant que la condition de raccord (3.8) entraîne :

$$|\hat{Y}| \left[\boldsymbol{s}^0 \boldsymbol{e}_1 \right]_\omega = \lim_{L \to +\infty} \left(\int_{\hat{Y}} \left(\boldsymbol{q}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{q}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, -L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 \right) d\hat{\boldsymbol{y}} \right) \tag{5.11}$$

on obtient alors à partir de (5.10) :

$$\left[\boldsymbol{s}^0\boldsymbol{e}_1\right]_\omega = 0 \tag{5.12}$$

□

5.1.2 Approximation extérieure à l'ordre $i = 1$

L'équation d'équilibre, la loi de comportement et les conditions aux bords, d'ordre $i = 1$, impliquent que u^1 et $\boldsymbol{s}^1$ sont solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}\boldsymbol{s}^1 = \boldsymbol{0} & \text{dans } \Omega\backslash\omega \\ \boldsymbol{s}^1 = -\boldsymbol{K}\nabla_x(u^1) & \text{dans } \Omega\backslash\omega \\ \boldsymbol{s}^1\boldsymbol{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_F \\ u^1 = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \tag{5.13}$$

Comme dans le cas ε^p-élastique, $p \geq 0$, ces équations sont complétées par les conditions de transmission sur ω, obtenues grâce aux conditions de raccord (3.9), (3.10). Plus précisément, on obtient les expressions suivantes du saut de la température et du saut du flux de chaleur sur ω :

$$\begin{aligned} \left[u^1\right]_\omega &:= u^1(0+,\hat{\boldsymbol{x}}) - u^1(0-,\hat{\boldsymbol{x}}) \\ &= \lim_{y_1\to+\infty}\left(\left(v^1(\hat{\boldsymbol{x}},y_1,\hat{\boldsymbol{y}}) - v^1(\hat{\boldsymbol{x}},-y_1,\hat{\boldsymbol{y}})\right) - 2y_1\frac{\partial u^0}{\partial x_1}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\right) \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} \left[\boldsymbol{s}^1\boldsymbol{e}_1\right]_\omega &:= \boldsymbol{s}^1(0+,\hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{s}^1(0-,\hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1 \\ &= \lim_{y_1\to+\infty}\left(\left(\boldsymbol{q}^1(\hat{\boldsymbol{x}},y_1,\hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{q}^1(\hat{\boldsymbol{x}},-y_1,\hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1\right) - 2y_1\frac{\partial \boldsymbol{s}^0}{\partial x_1}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1\right) \end{aligned} \tag{5.15}$$

5.1.2.1 Comportement asymptotique de v^1 lorsque $y_1 \to \pm\infty$

On pose dans $Y\backslash I$:

$$v^1(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) = f(y_1;a,b)\frac{\partial u^0}{\partial x_1}(0,\hat{\boldsymbol{x}}) + v^\star(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) \tag{5.16}$$

où, comme dans les chapitres précédents, $f(y_1;a,b)$ est une fonction régulière impaire (de classe $C^2(\mathbb{R})$) avec

$$f(y_1;a,b) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < |y_1| \leq a \\ y_1 & \text{si } |y_1| \geq b \end{cases} \tag{5.17}$$

et $d < 2a < 2b$ (rappelons que d est le diamètre d'une inclusion et $d < diam\hat{Y}$).

Proposition 7. *Pour $\hat{\boldsymbol{x}}$ fixé, le champ correcteur $v^\star$ est l'unique solution du problème suivant dans $Y\backslash I$:*

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{div}_y \boldsymbol{q}^\star = f''(y_1) K_{11} \dfrac{\partial u^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) & \textit{dans } Y \backslash I \\
\boldsymbol{q}^\star = -\boldsymbol{K} \nabla_y (v^\star) & \textit{dans } Y \backslash I \\
\boldsymbol{q}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{\alpha}{2}, y_3) \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{q}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-\alpha}{2}, y_3) \boldsymbol{e}_2 & \textit{sur } \mathbb{R} \times \partial \hat{Y} \\
\boldsymbol{q}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{\alpha}{2}) \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{q}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-\alpha}{2}) \boldsymbol{e}_3 & \textit{sur } \mathbb{R} \times \partial \hat{Y} \\
v^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{\alpha}{2}, y_3) = v^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-\alpha}{2}, y_3) & \textit{sur } \mathbb{R} \times \partial \hat{Y} \\
v^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{\alpha}{2}) = v^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-\alpha}{2}) & \textit{sur } \mathbb{R} \times \partial \hat{Y} \\
\lim\limits_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{q}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) \boldsymbol{e}_1 = 0 & \textit{pour } (\hat{\boldsymbol{y}}) \in \hat{Y} \\
v^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) = -\nabla_{\hat{x}} u^0(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \hat{\boldsymbol{y}} + c^1(\hat{\boldsymbol{x}}) & \textit{sur } \partial I
\end{cases}
\tag{5.18}
$$

Démonstration.

- De l'équation d'équilibre d'ordre -1 dans $Y \backslash I$ associée à $\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{0}$ dans $Y \backslash I$ ($div_y \boldsymbol{q}^0 = 0$), de la loi de comportement d'ordre 0 ($\boldsymbol{q}^0 = -\boldsymbol{K}(\nabla_x(v^0) + \nabla_y(v^1))$) et de la décomposition (5.16) découlent les deux premières équations.

- Le comportement à l'infini de $\boldsymbol{q}^\star \boldsymbol{e}^1$ découle du choix fait sur la fonction $f(y_1)$ et du résultat $[\boldsymbol{s}^0 \boldsymbol{e}_1] = 0$.
- La condition sur $v^\star$ au bord de I est une conséquence de $[v^1]_{\partial I} = 0$ et du choix de $f(y_1)$.

□

Le problème défini par (5.18) admet existence et unicité de la solution.

De façon analogue à la remarque 3.2.4 on a :

$$
\begin{aligned}
v^{\star +} &:= \lim_{y_1 \to +\infty} v^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) < \infty \\
v^{\star -} &:= \lim_{y_1 \to -\infty} v^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \hat{\boldsymbol{y}}) < \infty
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

La linéarité du problème (5.18) par rapport aux dérivées partielles $\frac{\partial u^0}{\partial x_k}(0, \hat{\boldsymbol{x}})$ entraîne la décomposition en 3 problèmes élémentaires dans $Y \backslash I$.

Proposition 8. *Pour tout $\hat{\boldsymbol{x}} \in \omega$, la solution $v^\star$ du problème (5.18) peut être décomposée comme suit :*

$$
v^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = c^1(\hat{\boldsymbol{x}}) + \frac{\partial u^0}{\partial x_k}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) V^k(\boldsymbol{y}) \tag{5.20}
$$

où les champs $V^k(\boldsymbol{y})$ sont les uniques solutions des 3 problèmes élémentaires suivants :

i)

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}_y \boldsymbol{T}^1 = f''(y_1)K_{11} & \text{dans } Y\backslash I \\ \boldsymbol{T}^1 = -\boldsymbol{K}\nabla_y(V^1) & \text{dans } Y\backslash I \\ \boldsymbol{T}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{\alpha}{2}, y_3)\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{T}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-\alpha}{2}, y_3)\boldsymbol{e}_2 & \text{sur } \mathbb{R}\times\partial\hat{Y} \\ \boldsymbol{T}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{\alpha}{2})\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{T}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-\alpha}{2})\boldsymbol{e}_3 & \text{sur } \mathbb{R}\times\partial\hat{Y} \\ V^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{\alpha}{2}, y_3) = V^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-\alpha}{2}, y_3) & \text{sur } \mathbb{R}\times\partial\hat{Y} \\ V^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{\alpha}{2}) = V^1(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-\alpha}{2}) & \text{sur } \mathbb{R}\times\partial\hat{Y} \\ \lim\limits_{y_1\to\pm\infty} \boldsymbol{T}^1(y_1, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 = 0 & \text{pour } \hat{\boldsymbol{y}} \in \hat{Y} \\ V^1 = 0 & \text{sur } \partial I \end{cases} \tag{5.21}$$

ii) pour $k = 1, 2$

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}_y \boldsymbol{T}^k = 0 & \text{dans } Y\backslash I \\ \boldsymbol{T}^k = -\boldsymbol{K}\nabla_y(V^k) & \text{dans } Y\backslash I \\ \boldsymbol{T}^k(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{\alpha}{2}, y_3)\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{T}^k(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-\alpha}{2}, y_3)\boldsymbol{e}_2 & \text{sur } \mathbb{R}\times\partial\hat{Y} \\ \boldsymbol{T}^k(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{\alpha}{2})\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{T}^k(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-\alpha}{2})\boldsymbol{e}_3 & \text{sur } \mathbb{R}\times\partial\hat{Y} \\ V^k(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{\alpha}{2}, y_3) = V^k(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, \frac{-\alpha}{2}, y_3) & \text{sur } \mathbb{R}\times\partial\hat{Y} \\ V^k(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{\alpha}{2}) = V^k(\hat{\boldsymbol{x}}, y_1, y_2, \frac{-\alpha}{2}) & \text{sur } \mathbb{R}\times\partial\hat{Y} \\ \lim\limits_{y_1\to\pm\infty} \boldsymbol{T}^k(y_1, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 = 0 & \text{pour } \hat{\boldsymbol{y}} \in \hat{Y} \\ V^k = -y_k & \text{sur } \partial I \end{cases} \tag{5.22}$$

Remarque 5.1.1. *Les limites de* V^k *lorsque* $y_1 \to \pm\infty$ *existent et sont deux constantes que l'on notera* $V^{k\pm}$.

5.1.3 Calcul de $[u^1]_\omega$ et $[\boldsymbol{s}^1\boldsymbol{e}_1]_\omega$

On déduit directement de (5.14), (5.16), de la proposition 8 et de la remarque 5.1.1 la condition de transmission suivante du champ de température u^1 sur ω :

Proposition 9. *Le terme d'ordre 1 du développement extérieur de* u^ε *admet une discontinuité sur* ω *donnée par :*

$$\boxed{\left[u^1\right]_\omega = \frac{\partial u^0}{\partial x_k}(0, \hat{\boldsymbol{x}})\left[V^k\right]^\infty} \tag{5.23}$$

où $\left[V^k\right]^\infty := V^{k+} - V^{k-}$.

Proposition 10. *Le terme d'ordre 1 du développement extérieur de* $\boldsymbol{q}^\varepsilon$ *admet une discontinuité sur* ω *donnée par :*

$$\boxed{[\boldsymbol{s}^1\boldsymbol{e}_1]_\omega = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial u^0}{\partial x_i}(0, \hat{\boldsymbol{x}})\right)\frac{1}{|\hat{Y}|}\left\{\int_{Y\backslash I} \boldsymbol{T}^i_\alpha(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} + K^I_{\alpha j}\int_I \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathcal{A}(\boldsymbol{T}^i\boldsymbol{n}^+)\right)d\boldsymbol{y}\right\}} \tag{5.24}$$

où $\mathcal{A}$ est l'opérateur qui, à une donnée régulière g sur ∂I vérifiant $\int_{\partial I} g ds = 0$, associe la solution z de moyenne nulle du problème suivant :

$$\begin{cases} div_y(-\boldsymbol{K}^I \nabla_y(z)) = 0 & \text{dans } I \\ -\boldsymbol{K}^I \nabla_y(z)\boldsymbol{n}^- = g & \text{sur } \partial I \end{cases} \tag{5.25}$$

Démonstration.

- En intégrant l'équation d'équilibre d'ordre zéro dans $Y_L \backslash I$ ($div_y \boldsymbol{q}^1 + div_x \boldsymbol{q}^0 = 0$) on obtient :

$$\int_{\hat{Y}} (\boldsymbol{q}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{q}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, -L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1) d\hat{\boldsymbol{y}} + \int_{\partial I} \boldsymbol{q}^1_+ \boldsymbol{n}^+ ds = -\int_{Y_L \backslash I} div_x \boldsymbol{q}^0 d\boldsymbol{y} \tag{5.26}$$

Afin de calculer le second membre de l'égalité (5.26), on explicite $\boldsymbol{q}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$:

$$q_i^0(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = -\left(f'(y_1) K_{i1} \frac{\partial u^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) + K_{i\alpha} \frac{\partial u^0}{\partial x_\alpha}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \right) + q_i^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) \tag{5.27}$$

Un simple calcul conduit à :

$$\begin{aligned} \int_{Y_L \backslash I} div_x \boldsymbol{q}^0 d\boldsymbol{y} &= div_x \int_{Y_L \backslash I} \boldsymbol{q}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} - K_{\beta 1} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \right) \int_{Y_L \backslash I} f'(y_1) d\boldsymbol{y} \\ &\quad - K_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \int_{Y_L \backslash I} d\boldsymbol{y} \\ &= div_x \int_{Y_L \backslash I} \boldsymbol{q}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} - 2L|\hat{Y}| K_{\beta i} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_i}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \right) \\ &\quad + |I| K_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \end{aligned} \tag{5.28}$$

En intégrant sur $\hat{Y}$ les deux membres de (5.15), on a :

$$|\hat{Y}| \left[\boldsymbol{s}^1 \boldsymbol{e}_1 \right]_\omega = \lim_{L \to +\infty} \left(\int_{\hat{Y}} \left(\boldsymbol{q}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{q}^1(\hat{\boldsymbol{x}}, -L, \hat{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{e}_1 \right) d\hat{\boldsymbol{y}} - 2L|\hat{Y}| \frac{\partial \boldsymbol{s}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1 \right) \tag{5.29}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \left[\boldsymbol{s}^1 \boldsymbol{e}_1 \right]_\omega &= \frac{1}{|\hat{Y}|} \lim_{L \to +\infty} \left\{ -\int_{Y_L \backslash I} div_x \boldsymbol{q}^\star d\boldsymbol{y} + 2L|\hat{Y}| K_{\beta i} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_i}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \right) - 2L|\hat{Y}| \frac{\partial s^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{e}_1 \right\} \\ &\quad - \frac{|I|}{|\hat{Y}|} K_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) - \frac{1}{|\hat{Y}|} \int_{\partial I} \boldsymbol{q}^1_+ \boldsymbol{n}^+ ds \end{aligned} \tag{5.30}$$

On déduit de la loi de comportement dans le domaine extérieur d'ordre $i = 0$ ($\boldsymbol{s}^0 = -\boldsymbol{K} \nabla_x(u^0)$) que :

$$\frac{\partial s_i^0}{\partial x_1}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) = -K_{ij} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_1 \partial x_j}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \tag{5.31}$$

En remarquant que $div_x \boldsymbol{s}^0 = \frac{\partial s_i^0}{\partial x_i}$, on déduit de (5.31) et de l'équation d'équilibre extérieure d'ordre 0 ($div_x \boldsymbol{s}^0 = 0$) :

$$K_{\beta i} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_i}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \right) + K_{1j} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_1 \partial x_j}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) = 0 \tag{5.32}$$

et on obtient :

$$\left[\boldsymbol{s}^1 \boldsymbol{e}_1 \right]_\omega = -\frac{1}{|\hat{Y}|} \int_{Y \setminus I} div_x \boldsymbol{q}^\star d\boldsymbol{y} - \frac{|I|}{|\hat{Y}|} K_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) - \frac{1}{|\hat{Y}|} \int_{\partial I} \boldsymbol{q}_+^1 \boldsymbol{n}^+ ds \tag{5.33}$$

- En exprimant $\boldsymbol{q}^\star$ sous la forme

$$\boldsymbol{q}^\star(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = \frac{\partial u^0}{\partial x_i}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \boldsymbol{T}^i(\boldsymbol{y})$$

on écrit :

$$\left[\boldsymbol{s}^1 \boldsymbol{e}_1 \right]_\omega = -\frac{1}{|\hat{Y}|} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_i}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \right) \int_{Y \setminus I} T_\alpha^i(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} - \frac{|I|}{|\hat{Y}|} K_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) - \frac{1}{|\hat{Y}|} \int_{\partial I} \boldsymbol{q}_+^1 \boldsymbol{n}^+ ds \tag{5.34}$$

Afin d'exprimer $\int_{\partial I} \boldsymbol{q}_+^1 \boldsymbol{n}_+$ on utilise le problème vérifié par v^3 dans I. Celui-ci s'écrit :

$$\begin{cases} -div_y \boldsymbol{q}^1 = div_x \boldsymbol{q}^0 & \text{dans } I \\ \boldsymbol{q}^1 = -\boldsymbol{K}^I (\nabla_x(v^2) + \nabla_y(v^3)) & \text{dans } I \\ \boldsymbol{q}_-^1 \boldsymbol{n}^- = \boldsymbol{q}_+^1 \boldsymbol{n}^- = -\boldsymbol{q}_+^1 \boldsymbol{n}^+ & \text{sur } \partial I \end{cases} \tag{5.35}$$

$\boldsymbol{n}^-$ étant la normale extérieure à I.
Ce problème vérifie une condition nécessaire d'existence qui s'écrit :

$$\int_I div_x \boldsymbol{q}^0 d\boldsymbol{y} - \int_{\partial I} \boldsymbol{q}_+^1 \boldsymbol{n}^+ = 0 \tag{5.36}$$

D'où :

$$\left[\boldsymbol{s}^1 \boldsymbol{e}_1 \right]_\omega = -\frac{1}{\hat{Y}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_i}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \right) \int_{Y \setminus I} T_\alpha^i(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} - \frac{|I|}{|\hat{Y}|} K_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) - \frac{1}{|\hat{Y}|} \int_I div_x \boldsymbol{q}^0 d\boldsymbol{y} \tag{5.37}$$

- Le champ de contraintes $\boldsymbol{q}^0$ vérifie dans I le problème défini par (5.7). La solution de ce problème peut encore s'écrire :

$$v^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\nabla_x(v^1(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})) + z^2(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) \tag{5.38}$$

où z^2 est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} div_y(-\boldsymbol{K}^I \nabla_y(z^2)) = 0 & \text{dans } I \\ -\boldsymbol{K}^I \nabla_y(z^2) \boldsymbol{n}^- = -\boldsymbol{q}_+^0 \boldsymbol{n}^+ & \text{sur } \partial I \end{cases} \tag{5.39}$$

Avec l'opérateur $\mathcal{A}$ défini dans la proposition 10, $\boldsymbol{q}^0$ s'écrit :

$$\boldsymbol{q}^0(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{K}^I \nabla_y(\mathcal{A}(\boldsymbol{q}_+^0 \boldsymbol{n}^+)) \tag{5.40}$$

- On a dans $Y\backslash I$, grâce à la décomposition (5.27) :

$$\boldsymbol{q}_+^0\boldsymbol{n}^+ = \boldsymbol{q}^\star\boldsymbol{n}^+ - K_{i\beta}\frac{\partial u^0}{\partial x_\beta}n_i^+ \tag{5.41}$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ étant linéaire, on a :

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{q}_+^0\boldsymbol{n}^+) = \frac{\partial u^0}{\partial x_k}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\mathcal{A}(\boldsymbol{T}^k\boldsymbol{n}^+) - K_{i\beta}\frac{\partial u^0}{\partial x_k}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\mathcal{A}(n_i^+) \tag{5.42}$$

et $w^i := \mathcal{A}(n_i^+)$ vérifie à $i = 1, 2$ ou 3 fixé :

$$\begin{cases} div_y(-\boldsymbol{K}^I\nabla_y(w^i)) = 0 & \text{dans } I \\ -\boldsymbol{K}^I\nabla_y(w^i)\boldsymbol{n}^- = n_i^+ & \text{sur } \partial I \end{cases} \tag{5.43}$$

On remarque que $w^i = H_{ij}^I y_j$ où $\boldsymbol{H}^I = \left(\boldsymbol{K}^I\right)^{-1}$, et donc :

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{q}_+^0\boldsymbol{n}^+) = \frac{\partial u^0}{\partial x_k}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\mathcal{A}(\boldsymbol{T}^k\boldsymbol{n}^+) - K_{i\beta}H_{ij}^I\frac{\partial u^0}{\partial x_\beta}(0,\hat{\boldsymbol{x}})y_j \tag{5.44}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} q_i^0(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) &= \frac{\partial u^0}{\partial x_k}(0,\hat{\boldsymbol{x}})K_{ij}^I\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathcal{A}(\boldsymbol{T}^k\boldsymbol{n}^+)\right) - K_{ij}^I K_{\beta\ell}H_{\ell j}^I\frac{\partial u^0}{\partial x_\beta}(0,\hat{\boldsymbol{x}}) \\ &= \frac{\partial u^0}{\partial x_k}(0,\hat{\boldsymbol{x}})K_{ij}^I\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\mathcal{A}(\boldsymbol{T}^k\boldsymbol{n}^+)\right) - K_{i\beta}\frac{\partial u^0}{\partial x_\beta}(0,\hat{\boldsymbol{x}}) \end{aligned} \tag{5.45}$$

Soit

$$div_x\int_I \boldsymbol{q}^0 d\boldsymbol{y} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial u^0}{\partial x_k}(0,\hat{\boldsymbol{x}})\right)K_{\alpha j}^I\int_I\frac{\partial}{\partial y_j}\mathcal{A}(\boldsymbol{T}^k\boldsymbol{n}_k)d\boldsymbol{y} - |I|K_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}(0,\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{5.46}$$

On en déduit en sommant avec (5.37) le résultat annoncé.

□

5.2 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons étudié le cas des inclusions de grande rigidité dans le cas scalaire. Plus précisément, le problème asymptotique étudié est celui de l'équilibre thermique, dans le cas stationnaire, d'une structure tridimensionnelle contenant une fine couche d'hétérogénéités. Ces hétérogénéités sont des inclusions caractérisées par un tenseur de conductivité $\boldsymbol{K}^{\varepsilon,I}$ tel que

$$\boldsymbol{K}^{\varepsilon,I} = \varepsilon^{-1}\boldsymbol{K}^I \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{K}^I \simeq \boldsymbol{K}$$

où $\boldsymbol{K}$ est le tenseur de conductivité du milieux environnant.
L'étude asymptotique montre que :

- en première approximation, comme dans les cas des cavités et des inclusions ε^p-élastiques, $p \geq 0$, la couche d'hétérogénéités est remplacée par une interface parfaite. L'influence des inclusions n'apparaît pas au premier ordre du développement asymptotique.

- en étudiant le second ordre des développements intérieur et extérieur, l'interface n'est plus parfaite : le déplacement et le vecteur contrainte sont discontinus. Plus précisément :
  i) le saut du déplacement de u^1 est non nul : il dépend du gradient de u^0 sur l'interface ω et des coefficients $[\boldsymbol{V}^k]^\infty$,
  ii) le saut de $\boldsymbol{q}^1$ est non nul : il dépend de la taille des inclusions, du gradient de u^0 sur l'interface ω, des coefficients $\int_{Y\setminus I} \boldsymbol{T}^i_\alpha(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$ et de la rigidité $\boldsymbol{K}^I$ des inclusions.

Deuxième partie

Etude numérique

L'objectif de cette partie est double : il s'agit d'une part d'implémenter la méthode asymptotique décrite en première partie et d'autre part d'évaluer les performances de cette méthode afin de la valider. Cette validation numérique permet de justifier les hypothèses a priori de la méthode des développements asymptotiques raccordés. En effet on rappelle que l'analyse asymptotique repose d'une part sur l'Ansatz des développements asymptotiques intérieur et extérieur de la solution $\boldsymbol{u}^{\varepsilon}$, et d'autre part sur l'hypothèse de l'existence d'un domaine où ces deux développements sont valides (domaine de raccord). A notre connaissance, aucune justification mathématique rigoureuse ne permet de confirmer ces hypothèses.
L'évaluation de la performance repose sur la comparaison de solutions à une solution de référence. Cette dernière est obtenue en résolvant le problème de départ par un calcul éléments finis standard, sur un maillage suffisamment fin.

Une brève analyse des résultats de l'étude asymptotique permet de constater que certains termes des développements asymptotiques sont les solutions de problèmes aux limites classiques. C'est le cas, par exemple, du champ de déplacements extérieurs $\boldsymbol{u}^0$, dans le cas des cavités et des inclusions élastiques. Ces termes sont donc obtenus par un calcul élément fini standard. Mais ce n'est pas le cas pour tous les termes. En effet certains termes, comme le champ de déplacements extérieurs $\boldsymbol{u}^1$, sont les solutions de problèmes où les conditions de transmission sont non homogènes. Cette difficulté a été surmontée en concevant et en implémentant un algorithme de type décomposition de domaines adéquat. On notera que ce type d'approche qui consiste à développer une méthode de décomposition de domaines pour prendre en compte des conditions de transmission non homogènes a déjà été considéré dans *Geymonat et al.* [21].
Mener à bien cette étude nécessite l'implémentation de modules complémentaires dans le logiciel élément fini utilisé (Shelddon).

Dans la suite de cette partie, on introduit dans le chapitre 6 les principales notations matricielles d'un calcul élément fini. Puis, dans le chapitre 7 on détaille les points clefs de l'implémentation et les résultats concluants de la validation.

Chapitre 6

Rappels et notations

L'objectif est de mettre en évidence les opérateurs utilisés dans un programme informatique pour la résolution d'un problème d'élasticité. Les notations vectorielles et matricielles introduites dans cette partie sont essentielles car elles permettent de détailler l'implémentation des nouveaux modules. Il ne s'agit que de très brefs rappels et présentation des notations adoptées. Pour plus de détails et pour les aspects théoriques, voir par exemple *Bathe* [5], *Ciarlet* [11] ou *Ern et Guermond* [17].

6.1 Approximation des solutions : méthode des éléments finis

On considère une structure bi ou tridimensionnelle élastique qui occupe, dans sa position de référence, un domaine Ω borné de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$). On suppose que la structure est fixée sur une partie Γ_0 de sa frontière et qu'elle est soumise, sur la partie complémentaire Γ_F, à une densité de forces $\boldsymbol{F}$. On suppose également qu'un chargement volumique $\boldsymbol{f}$ est appliqué à toute la structure.
Le champ de déplacements $\boldsymbol{u}$ vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases} -\boldsymbol{div}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}) & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{F} & \text{sur } \Gamma_F \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \tag{6.1}$$

où $\boldsymbol{\gamma}$ est le tenseur linéarisé des déformations :

$$\gamma_{mn}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m}) \tag{6.2}$$

et $\boldsymbol{A}$ est la matrice de rigidité.

Formulation variationnelle du problème :

- *Le problème continu.*

Soit V l'ensemble des champs cinématiquement admissibles pour le problème considéré défini par

$$V = \{\boldsymbol{v}/\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3); v_k \in H^1(\Omega); v_k = 0 \text{ sur } \Gamma_0\} \tag{6.3}$$

La formulation variationnelle en déplacements du problème 6.1 s'écrit :
Trouver $\boldsymbol{u}$ tel que

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} \in V \\ a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}) \ , \ \forall \boldsymbol{v} \in V. \end{cases} \tag{6.4}$$

avec

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \displaystyle\int_\Omega A_{k\ell mn} \gamma_{k\ell}(\boldsymbol{u}) \gamma_{mn}(\boldsymbol{v}) \, d\boldsymbol{x} \\ L(\boldsymbol{v}) = \displaystyle\int_{\Gamma_F} F_k v_k \, ds + \int_\Omega f_k v_k \, d\boldsymbol{x}. \end{cases} \tag{6.5}$$

- *Le problème discret.*

Soit $X_h \subset H^1(\Omega)$ un espace de dimension finie, défini par :

$$X_h = \left\{ v/ \ v|_T \in P_T, \forall T \in \mathcal{T}_h, v \in C^0(\overline{\Omega}) \right\} \tag{6.6}$$

où
– $\mathcal{T}_h$ est une partition du domaine Ω,
– P_T est un espace de polynômes défini sur $T \in \mathcal{T}_h$,
– $C^0(\overline{\Omega})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{\Omega} = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} T$
On définit alors $\boldsymbol{V}_h \subset V$ par :

$$\boldsymbol{V}_h = \left\{ \boldsymbol{v}/\boldsymbol{v} \in X_h^3, \boldsymbol{v}|_{\Gamma_0} = 0 \right\} \tag{6.7}$$

Le problème approché s'écrit :

$$\begin{cases} \text{trouver } \boldsymbol{u_h} \in \boldsymbol{V}_h \ \text{ tel que} \\ a(\boldsymbol{u_h}, \boldsymbol{v_h}) = L(\boldsymbol{v_h}) \ , \ \forall \boldsymbol{v_h} \in \boldsymbol{V}_h. \end{cases} \tag{6.8}$$

où $a(.,.)$ et $L(.)$ sont définies dans (6.5).

6.2 Notations utilisées pour l'implémentation

Le but du paragraphe suivant est de définir les notations matricielles utilisées lors de l'implémentation.

- le tenseur des déformations linéarisées $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{v})$ s'écrit sous la forme vectorielle suivante

$$\{\boldsymbol{\gamma}\}(\boldsymbol{v}) = \begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \\ 2\gamma_{12} \\ 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{13} \end{Bmatrix} (\boldsymbol{v}) \tag{6.9}$$

ou encore

$$\{\boldsymbol{\gamma}\}(\boldsymbol{v}) = [\mathcal{D}]\{D\boldsymbol{v}\} \tag{6.10}$$

avec

$$[\mathcal{D}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \{D\boldsymbol{v}\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \tag{6.11}$$

Ainsi le tenseur des déformations est exprimé en fonction du gradient du déplacement.

- la loi de comportement (Loi de Hooke) s'écrit sous la forme suivante :

$$\{\sigma\}(\boldsymbol{v}) = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}(\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} & & \\ & E_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \\ 2\gamma_{12} \\ 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{13} \end{Bmatrix} = [E]\{\boldsymbol{\gamma}\}(\boldsymbol{v}) \tag{6.12}$$

Dans le cas d'un matériau homogène isotrope on a :

$$[\boldsymbol{E}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé.

- pour chaque élément T, on note :

$$v_j\big|_T(\boldsymbol{x})$$

la j^{ème} composante du champ $\boldsymbol{v}$ au point $M \in T$ de coordonnées $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$.
Dans le cas d'une interpolation de Lagrange, on a :

$$u_{h_j}\big|_T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n_T} p_i(\boldsymbol{x}) \cdot u_{h_j}(a_i^T)\ ,\ j = 1, 2, 3 \tag{6.14}$$

et

$$\left.\frac{\partial u_{h_j}}{\partial x_k}\right|_T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n_T} \frac{\partial p_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) u_{h_j}(a_i^T)\ ,\ j = 1, 2, 3\ ,\ k = 1, 2, 3 \tag{6.15}$$

où p_i et a_i^T sont respectivement la i^{ème} fonction de base et le i^{ème} sommet de l'élément T, et n_T est le nombre de nœuds de l'élément T.
Sous forme matricielle, (6.14) s'écrit :

$$u_{h_j}\big|_T(\boldsymbol{x}) = [p_1(\boldsymbol{x}), p_2(\boldsymbol{x}), \ldots, p_{n_T}(\boldsymbol{x})] \begin{Bmatrix} u_{h_j}(a_1^T) \\ u_{h_j}(a_2^T) \\ \vdots \\ u_{h_j}(a_{n_T}^T) \end{Bmatrix} = [p(\boldsymbol{x})] \cdot \left\{u_{h_j}^T\right\} \tag{6.16}$$

En utilisant (6.15) puis (6.16) on a :

$$\begin{aligned} \left\{Du_{h_j}\right\}\Big|_T(\boldsymbol{x}) &= \left.\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_{h_j}}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u_{h_j}}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u_{h_j}}{\partial x_3} \end{Bmatrix}\right|_T (\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} p_1(\boldsymbol{x}), \dfrac{\partial}{\partial x_1} p_2(\boldsymbol{x}), \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_1} p_{n_T}(\boldsymbol{x}) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} p_1(\boldsymbol{x}), \dfrac{\partial}{\partial x_2} p_2(\boldsymbol{x}), \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_2} p_{n_T}(\boldsymbol{x}) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} p_1(\boldsymbol{x}), \dfrac{\partial}{\partial x_3} p_2(\boldsymbol{x}), \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_3} p_{n_T}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{h_j}(a_1^T) \\ u_{h_j}(a_2^T) \\ \vdots \\ u_{h_j}(a_{n_T}^T) \end{Bmatrix} \\ &= [DP^T(\boldsymbol{x})] \cdot \left\{u_{h_j}^T\right\} \end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\{D\boldsymbol{u}_h\}|_T(\boldsymbol{x}) = \left.\begin{Bmatrix} Du_{h_1} \\ Du_{h_2} \\ Du_{h_3} \end{Bmatrix}\right|_T (\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} & 0-0 & 0-0 \\ DP^T(\boldsymbol{x}) & 0-0 & 0-0 \\ & 0-0 & 0-0 \\ 0-0 & & 0-0 \\ 0-0 & DP^T(\boldsymbol{x}) & 0-0 \\ 0-0 & & 0-0 \\ 0-0 & 0-0 & \\ 0-0 & 0-0 & DP^T(\boldsymbol{x}) \\ 0-0 & 0-0 & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{h_1}^T \\ u_{h_2}^T \\ u_{h_3}^T \end{Bmatrix} = [D\mathbb{P}^T(\boldsymbol{x})] \cdot \left\{\boldsymbol{u}_h^T\right\} \tag{6.18}$$

Ainsi, dans le cas d'une interpolation de Lagrange, le problème approché (6.8)

$$\int_\Omega A_{k\ell mn} \gamma_{k\ell}(\boldsymbol{u_h}) \gamma_{mn}(\boldsymbol{v_h})\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Gamma_F} F_k (v_h)_k\, ds + \int_\Omega f_k (v_h)_k\, d\boldsymbol{x}.$$

s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\sum_{T\in\mathcal{T}} \left({}^t\left\{\boldsymbol{v}_h^T\right\}\left[\boldsymbol{K}^T\right]\left\{\boldsymbol{u}_h^T\right\}\right) = \sum_{T\in\mathcal{T}} \left({}^t\left\{\boldsymbol{v}_h^T\right\}\left\{b^T\right\}\right) \quad , \quad \forall \boldsymbol{v_h} \in \boldsymbol{V}_h \tag{6.19}$$

où $\left[\boldsymbol{K}^T\right]$ est la matrice de rigidité élémentaire définie par :

$$\left[\boldsymbol{K}^T\right] = \int_T {}^t[D\mathbb{P}^T(\boldsymbol{x})]\ {}^t[\mathcal{D}]\ [\boldsymbol{E}]\ [\mathcal{D}]\ [D\mathbb{P}^T(\boldsymbol{x})]d\boldsymbol{x} \tag{6.20}$$

et le second membre $\left\{b^T\right\}$ est le vecteur des efforts élémentaires défini par :

$$\left\{b^T\right\} = \int_T {}^t[D\mathbb{P}^T(\boldsymbol{x})]\,\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\}\,d\boldsymbol{x} + \int_{\partial T\cap\Gamma_F} {}^t[D\mathbb{P}^T(\boldsymbol{s})]\,\{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s})\}\,d\boldsymbol{s} \tag{6.21}$$

Après assemblage, la solution $\{\boldsymbol{u}^g\}$ est obtenue en résolvant le système linéaire suivant :

$$[\boldsymbol{K}^g]\ \{\boldsymbol{u}^g\} = \{\boldsymbol{b}^g\} \tag{6.22}$$

où

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{K}^g] &= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} {}^t\left[\mathcal{B}^T\right]\left[\boldsymbol{K}^T\right]\left[\mathcal{B}^T\right] \\ [\boldsymbol{b}^g] &= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} {}^t\left[\mathcal{B}^T\right]\left\{b^T\right\} \end{aligned} \tag{6.23}$$

et où $\left[\mathcal{B}^T\right]$ est la matrice booléenne qui permet le passage de la numérotation locale à la numérotation globale, i.e. :

$$\left\{\boldsymbol{u}_h^T\right\} = \left[\mathcal{B}^T\right]\left\{\boldsymbol{u}_h^g\right\} \tag{6.24}$$

Remarque 6.2.1. *Une intégration numérique est souvent nécessaire pour le calcul de $\left[\boldsymbol{K}^T\right]$ et de $\left\{b^T\right\}$. Pour chaque élément $T \in \mathcal{T}_h$, on considère la formule suivante :*

$$\int_T \phi(x)dx \simeq \sum_{\ell=1}^{NPI} w_\ell \phi(b_\ell) \tag{6.25}$$

où NPI désigne le nombre de points d'intégration, w_ℓ les poids de la formule d'intégration et b_ℓ les coordonnées des points d'intégration.

Remarque 6.2.2. *Passage à l'élément de référence :*
Soit $\hat{F}$ la transformation géométrique qui, à tout point $\hat{M}$ de l'élément de référence $\hat{T}$, de coordonnées $\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}} = (\hat{x}_1^{\hat{M}}, \hat{x}_2^{\hat{M}}, \hat{x}_3^{\hat{M}})$, associe le point M de l'élément T. $\hat{F}$ est une application inversible qui vérifie :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = F(\hat{\boldsymbol{x}}) & \textit{pour } \hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{T} \\ \hat{\boldsymbol{x}} = F^{-1}(\boldsymbol{x}) & \textit{pour } \boldsymbol{x} \in T \end{cases} \tag{6.26}$$

Après passage à l'élément de référence, on a :

$$\left\{Du_{h_j}\right\}\Big|_T (\boldsymbol{x}) = [D\hat{F}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}})]^{-1}[D\hat{P}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}})]\{u_i^0\}^T \tag{6.27}$$

avec

$$[D\hat{P}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \hat{x}_1}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}}) & \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \hat{x}_1}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}}) & \dots & \frac{\partial \hat{p}_{n_T}}{\partial \hat{x}_1}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}}) \\ \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \hat{x}_2}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}}) & \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \hat{x}_2}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}}) & \dots & \frac{\partial \hat{p}_{n_T}}{\partial \hat{x}_2}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}}) \\ \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \hat{x}_3}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}}) & \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \hat{x}_3}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}}) & \dots & \frac{\partial \hat{p}_{n_T}}{\partial \hat{x}_3}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}}) \end{bmatrix} \tag{6.28}$$

et où la matrice $[D\hat{F}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}})]^{-1}$ *est calculée en inversant la matrice* $[D\hat{F}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}})]$ *définie par :*

$$[D\hat{F}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial \hat{x}_1}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}}) & \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial \hat{x}_1}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}}) & \frac{\partial \hat{F}_3}{\partial \hat{x}_1}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}}) \\ \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial \hat{x}_2}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}}) & \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial \hat{x}_2}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}}) & \frac{\partial \hat{F}_3}{\partial \hat{x}_2}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}}) \\ \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial \hat{x}_3}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}}) & \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial \hat{x}_3}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}}) & \frac{\partial \hat{F}_3}{\partial \hat{x}_3}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\hat{M}}) \end{bmatrix} \tag{6.29}$$

6.3 Méthode de décomposition de domaines : formulation discrète

Dans cette section, nous rappelons les points clés de l'implémentation de la méthode de décomposition de domaines sans recouvrement.

Nous reprenons les hypothèses faites précédemment en divisant le domaine Ω en deux sous domaines qui ne se recouvrent pas, notés Ω^1 et Ω^2. L'objectif est de construire et de résoudre le problème d'interface entre ces deux sous domaines.

Pour éviter toute confusion, nous rappelons que, dans le cas présent, le problème d'interface doit assurer la continuité du déplacement et du vecteur contrainte (voir chapitre 1).

En reprenant la formulation discrète (6.22) du problème, on divise, pour chaque sous domaine Ω^i, l'ensemble des degrés de liberté en :

- degrés de liberté internes, notés U_I^i,
- degrés de liberté d'interface, notés U_S^i.

On obtient le système linéaire suivant qui traduit l'équilibre local des sous domaines :

$$K^i U^i = \begin{bmatrix} K_{II}^{(i)} & K_{IS}^{(i)} \\ K_{SI}^{(i)} & K_{SS}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_I^{(i)} \\ U_S^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_I^{(i)} \\ F_S^{(i)} \end{bmatrix}$$

On élimine les d.d.l. internes $U_I^{(i)}$ par :

$$U_I^{(i)} = (K_{II}^{(i)})^{-1}(F_I^{(i)} - K_{IS}^{(i)} U_S^{(i)})$$

et on écrit les équations d'équilibre associées à l'interface :

$$K_{SS}^{(i)} U_S^{(i)} + K_{SI}^{(i)}(K_{II}^{(i)})^{-1}(F_I^{(i)} - K_{IS}^{(i)} U_S^{(i)}) = F_S^{(i)}$$

A présent, on pose :

- $U_S = \cup_i U_S^{(i)}$: l'ensemble totale des d.d.l. sur l'interface,
- $U_S^{(i)} = R_i U_S$: la restriction de U_S au sous domaine Ω^i.

Le système d'interface s'écrit alors :

$$\sum_i R_i^T (K_{SS}^{(i)} R_i U_S + K_{SI}^{(i)} (K_{II}^{(i)})^{-1} (F_I^{(i)} - K_{IS}^{(i)} R_i U_S)) = \sum_i R_i^T F_S^{(i)}$$

En introduisant le complément de Schur local défini par :

$$S_i = K_{SS}^{(i)} - K_{SI}^{(i)} (K_{II}^{(i)})^{-1} K_{IS}^{(i)} \tag{6.30}$$

le problème d'interface s'écrit :

$$S U_S = b \tag{6.31}$$

où S et b sont définis par :

$$\begin{cases} S = \sum_i R_i^T S_i R_i \\ b = \sum_i R_i^T (F_S^{(i)} - K_{SI}^{(i)} (K_{II}^{(i)})^{-1} F_I^{(i)}) \end{cases} \tag{6.32}$$

Remarque 6.3.1.

- *Le complément de Shur S est l'opérateur de Steklov Poincaré après discrétisation, qui, on rappelle, est un opérateur symétrique défini positif. La définition de S, établie dans (6.30) et (6.31), implique que cet opérateur est très cher à construire. Par contre le produit $S\lambda$ est, lui, facile à calculer, étant donné qu'il requiert la résolution d'un problème par sous domaine. En effet, pour une valeur λ donnée du déplacement sur l'interface, le calcul de $S_i\lambda$ est obtenu par :*

  i) le produit matrice-vecteur $K_{IS}^{(i)}\lambda$ qui donne un vecteur,
  ii) la résolution du système linéaire $(K_{II}^i)^{-1}(K_{IS}^{(i)}\lambda)$ qui donne un second vecteur,
  iii) le produit matrice-vecteur $K_{SI}^{(i)}\left((K_{II}^{(i)})^{-1} K_{IS}^{(i)}\lambda\right)$ qui donne un troisième vecteur,
  iv) le calcul de $K_{SS}^{(i)}\lambda$ puis de la différence $K_{SS}^{(i)}\lambda - K_{SI}^{(i)}(K_{II}^{(i)})^{-1}K_{IS}^{(i)}\lambda$.

  Il est alors pratique de résoudre le système linéaire par une méthode itérative de type gradient conjugué ou GMRES. Pour des raisons de robustesse il est préférable d'utiliser l'algorithme GMRES.

- *Ce qui a été présenté dans cette section est uniquement un point de départ pour une méthode de décomposition de domaine primale. Plusieurs choix de préconditionneurs sont possibles et l'efficacité de l'algorithme est étroitement liée à ce choix. Nous utiliserons le préconditionneur Neumann-Neumann, bien étudié dans la littérature et dont la robustesse a été prouvée.*

- *Une alternative est d'utiliser une méthode duale de type FETI.*

Chapitre 7

Implémentation et validation du modèle asymptotique dans le cas des cavités et des inclusions élastiques

Ce chapitre est consacré à la validation numérique des résultats de l'étude asymptotique dans le cas des inclusions élastiques (voir chapitre 3) et des cavités (voir chapitre 4). Les résultats numériques concernant le cas des inclusions de grande rigidité sont en cours d'implémentation et seront publiés dans un travail ultérieur. Pour cela, on calcule les deux premiers termes des développements asymptotiques, intérieur et extérieur. Certains termes ($\boldsymbol{u}^0$ et $\boldsymbol{\sigma}^0$ par exemple) sont les solutions de problèmes classiques résolus par une méthode éléments finis standard, d'autres problèmes correspondent à des situations moins usuelles. C'est le cas des problèmes de cellule définis sur un domaine non borné, c'est également le cas du problème extérieur d'ordre $i = 1$ pour lequel des conditions de transmission non homogènes doivent êtres prises en compte. Une fois calculée, la solution du modèle asymptotique est comparée à une solution de référence. Cette solution de référence est obtenue en résolvant le problème complet (avec la couche d'hétérogénéités).

Par la suite, on détaille, dans la section 7.1, le calcul des coefficients $\left[\boldsymbol{V}^{ij}\right]^{\infty}$ et $\int_Y \boldsymbol{T}^{ij} d\boldsymbol{y}$ ainsi que l'implémentation du problème extérieur d'ordre $i = 1$. La validation des résultats de l'étude asymptotique est présentée dans la section 7.2.

7.1 Implémentation du modèle asymptotique

Le calcul numérique de la solution du modèle asymptotique est effectué en plusieurs étapes successives :

- calcul des coefficients $\left[\boldsymbol{V}^{ij}\right]^{\infty}$ et $\int_Y \boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$,
- calcul des champs $\boldsymbol{u}^0$ et $\boldsymbol{\sigma}^0$,
- calcul des champs $\boldsymbol{u}^1$ et $\boldsymbol{\sigma}^1$,
- calcul des champs $\boldsymbol{v}^1$ et $\boldsymbol{\tau}^0$,
- reconstruction de la solution du modèle asymptotique.

7.1.1 Calcul des coefficients $[\boldsymbol{V}^{ij}]^{\infty}$ et $\int_Y \boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$

Les coefficients $\left[\boldsymbol{V}^{ij}\right]^{\infty}$ et $\int_Y \boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$ interviennent dans les conditions de transmission du problème extérieur d'ordre 1 et leur calcul est indépendant de ε et du chargement global de la structure.
Les problèmes élémentaires, permettant de calculer les champs $\boldsymbol{V}^{ij}$ et $\boldsymbol{T}^{ij}$, sont résolus sur une cellule de longueur infinie dans une direction et de longueur 1 dans les deux autres directions. En pratique, il faut considérer un domaine borné assez grand dont il convient d'évaluer la longueur.
Pour fixer les notations, on note L^{∞} la longueur de la cellule dans la direction y_1 et on suppose que $Y := L^{\infty} \times \hat{Y}$ et $\hat{Y} =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

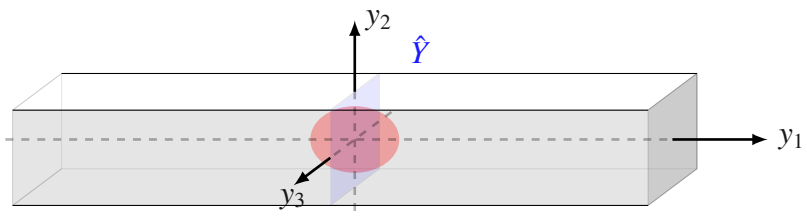


FIGURE 7.1 – Cellule Y

Dans l'étude asymptotique (voir remarque 3.2.4 et proposition 5) il a été indiqué que, quelque soit le type d'inclusion considéré, les champs $\boldsymbol{V}^{ij}$ tendent exponentiellement vers un vecteur constant, noté $\boldsymbol{V}^{ij\pm}$, lorsque y_1 tend vers $\pm\infty$. La vérification numérique de cette propriété permet de déterminer une valeur convenable de L^{∞}. Dans la figure 7.2, cette propriété est illustrée dans le cas 2D et pour des inclusions vides.

Remarque 7.1.1. *La valeur de L^{∞} doit permettre de vérifier la propriété décrite ci-dessus pour tous les $\boldsymbol{V}^{ij}$. Il faut donc effectuer une étude paramétrique en augmentant progressivement la longueur de la cellule dans la direction y_1 et ceci pour les 9 problèmes élémentaires. La valeur convenable de L^{∞} est la valeur à partir de laquelle tous les $\boldsymbol{V}^{ij}$ ne changent plus.*

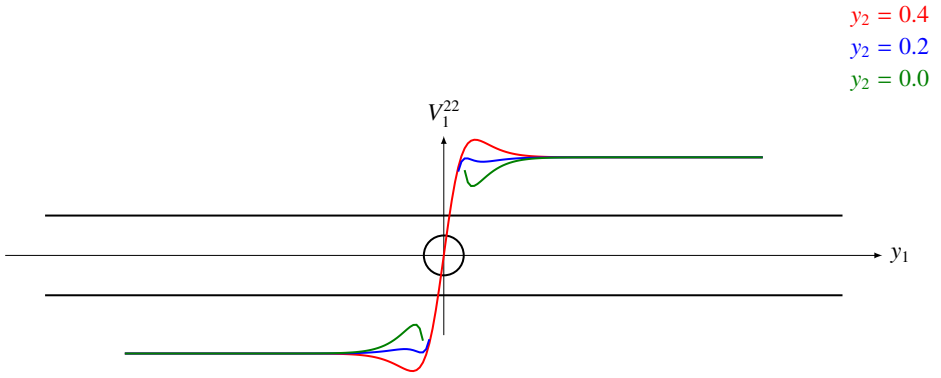


FIGURE 7.2 – Mise en évidence du comportement des déplacements $\boldsymbol{V}^{ij}$ lorsque $y_1 \to \pm\infty$

Une étude paramétrique a permis de mettre en évidence la robustesse des coefficients $[\boldsymbol{V}^{ij}]^\infty$ et $\int_Y \boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$ par rapport à la longueur L^∞ et au choix de la fonction $f(y_1; a, b)$. Ces propriétés de robustesse sont essentielles car elles constituent une première validation du modèle asymptotique. On retrouvera les résultats de cette validation dans la section 7.2.2.

i) **Calcul de $\left[\boldsymbol{V}^{ij}\right]^\infty$**
Par définition on a :

$$\left[\boldsymbol{V}^{ij}\right]^\infty = \boldsymbol{V}^{ij+} - \boldsymbol{V}^{ij-} \tag{7.1}$$

avec

$$\boldsymbol{V}^{ij\pm} = \lim_{y_1 \to \pm\infty} \boldsymbol{V}^{ij}(y_1, \hat{\boldsymbol{y}})$$

Ce calcul ne nécessite aucune manipulation particulière. Après avoir vérifié que la valeur des $\boldsymbol{V}^{ij}$ est bien constante, lorsque $y_1 \to \pm\infty$, les coefficients $\left[\boldsymbol{V}^{ij}\right]^\infty$ sont calculés en appliquant directement la formule (7.1).

ii) **Implémentation du calcul de $\int_Y \boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$**
En adoptant les notations de la section précédente, $\int_Y \boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_Y \boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} &= \int_Y [\boldsymbol{A}]\,[\mathcal{D}]\left\{D\boldsymbol{V}_h^{ij}\right\}\, d\boldsymbol{y} \\ &= \sum_{T\in\mathcal{T}} \left(\int_T [\boldsymbol{A}]\,[\mathcal{D}]\left[D\mathbb{P}^T(\boldsymbol{y})\right]\left\{\boldsymbol{V}_h^{ij}\right\}^T\, d\boldsymbol{y} \right) \end{aligned} \tag{7.2}$$

En posant

$$\left[\boldsymbol{IC}^T\right] := \int_T [\boldsymbol{A}]\,[\mathcal{D}]\left[D\mathbb{P}^T(\boldsymbol{y})\right]\, d\boldsymbol{y} \tag{7.3}$$

on a

$$\int_Y \boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} = \sum_{T\in\mathcal{T}} \left[\boldsymbol{IC}^T\right]\left\{\boldsymbol{V}_h^{ij}\right\}^T \tag{7.4}$$

L'implémentation de (7.4) peut être réalisée de deux façons différentes :

i) en calculant, élément par élément, le produit $\left[\boldsymbol{IC}^T\right]\left\{\boldsymbol{V}_h^{ij}\right\}^T$ que l'on somme ensuite sur le nombre total d'éléments,

ii) en assemblant les contributions élémentaires. Dans ce cas on calcule :

$$\int_Y \boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{IC}^g] \left\{ \boldsymbol{V}_h^{ij} \right\}^g \tag{7.5}$$

où

$$[\boldsymbol{IC}^g] = \sum_{T \in \mathcal{T}} \left[\boldsymbol{IC}^T \right] \left[\mathcal{B}^T \right]$$

et où $\left[\mathcal{B}^T\right]$ est la matrice booléenne qui permet le passage de la numérotation locale à la numérotation globale, i.e. :

$$\left\{ \boldsymbol{u}_h^T \right\} = \left[\mathcal{B}^T \right] \left\{ \boldsymbol{u}_h^g \right\} \tag{7.6}$$

La première méthode nécessite moins d'espace mémoire que la seconde pour laquelle il faut stocker la matrice $[\boldsymbol{IC}^g]$, en revanche il faut effectuer une boucle sur les éléments à chaque calcul. En utilisant la première méthode, l'implémentation du calcul des coefficients $\int_Y \boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$ a été effectuée et validée dans un cas très simple où le calcul analytique de ces coefficients est possible.

7.1.2 Calcul de $\boldsymbol{u}^1$ et $\boldsymbol{\sigma}^1$

Le problème extérieur d'ordre 1 s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}\boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{0} & \text{dans } \Omega \backslash \omega \\ \boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}^1) & \text{dans } \Omega \backslash \omega \\ \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} & \text{sur } \Gamma_F \\ \boldsymbol{u}^1 = \boldsymbol{0} & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

Conditions sur ω

$$\begin{cases} \left[\boldsymbol{u}^1\right](\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{\mathcal{G}_d}\left(\boldsymbol{u}^0(0,\hat{\boldsymbol{x}})\,;\left[\boldsymbol{V}^{ij}\right]^\infty\right) \\ \left[\boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{e}_1\right](\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{\mathcal{G}_{nS}}\left(\boldsymbol{u}^0(0,\hat{\boldsymbol{x}})\,;\int_{Y^\star} \boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}\right) \end{cases} \tag{7.7}$$

où $\left[\boldsymbol{V}^{ij}\right]^\infty = \boldsymbol{V}^{ij+} - \boldsymbol{V}^{ij-}$ et $Y^\star = Y \backslash I$ (resp. $Y^\star = Y$) dans le cas des inclusions ε^p-élastique avec $p > 0$ (resp. $p = 0$).
Quelque soit le type d'inclusion considéré, on a :

$$\boldsymbol{\mathcal{G}_d} = \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0,\hat{\boldsymbol{x}}) \left[\boldsymbol{V}^{ij}\right]^\infty \tag{7.8}$$

L'expression de $\boldsymbol{\mathcal{G}_{nS}}$ dépend du type d'inclusion considéré :

i) dans le cas des inclusions élastiques, on a :

$$\boldsymbol{\mathcal{G}_{nS}} = \begin{cases} \boldsymbol{div}_x\left(|I|\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^I\right)\boldsymbol{\gamma}_x\left(\boldsymbol{u}^0(0,\hat{\boldsymbol{x}})\right) - \dfrac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0,\hat{\boldsymbol{x}}) \displaystyle\int_Y \boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}\right) & \text{si } p = 0 \\ \boldsymbol{div}_x\left(|I|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_x\left(\boldsymbol{u}^0(0,\hat{\boldsymbol{x}})\right) - \dfrac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0,\hat{\boldsymbol{x}}) \displaystyle\int_{Y\backslash I} \boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}\right) & \text{si } p > 0 \end{cases} \tag{7.9}$$

ii) dans le cas des cavités on a :

$$\mathcal{G}_{nS} = \boldsymbol{div}_x \left(|I| \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_x \left(\boldsymbol{u}^0(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \right) - \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0, \hat{\boldsymbol{x}}) \int_{Y \setminus I} \boldsymbol{T}^{ij}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \right) \tag{7.10}$$

Ce problème est résolu par un algorithme de type décomposition de domaines. Les principales étapes pour la résolution d'un problème d'élasticité linéaire standard par décomposition de domaines ont été introduites dans le chapitre 1.
Ci-après, on détaille la méthodologie pour adapter la méthode de décomposition de domaines à la résolution du problème particulier (7.7) qui est réécrit sous la forme générique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} -\boldsymbol{div}\boldsymbol{\sigma} & = & \boldsymbol{0} & \text{dans } \Omega \setminus \omega \\ \boldsymbol{\sigma} & = & \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{u}) & \text{dans } \Omega \setminus \omega \\ \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} & = & \boldsymbol{0} & \text{sur } \Gamma_F \\ \boldsymbol{u} & = & \boldsymbol{0} & \text{sur } \Gamma_0 \\ [\boldsymbol{u}] & = & \mathcal{G}_d & \text{sur } \omega \\ [\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}] & = & \mathcal{G}_{nS} & \text{sur } \omega \end{array} \right. \tag{7.11}$$

où $\mathcal{G}_d$ et $\mathcal{G}_{nS}$ indiquent respectivement le saut du déplacement et le saut du vecteur contrainte sur l'interface ω. Ces valeurs sont connues pour ce problème et ont été calculées en utilisant les solutions des problèmes de cellule et du problème d'ordre 0. L'objectif à présent est de reformuler le problème (7.11) afin d'obtenir un problème de décomposition de domaines standard.

Soit $\boldsymbol{z}^{\pm}$ la solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} -\boldsymbol{div}\boldsymbol{\sigma}_z^{\pm} & = & \boldsymbol{0} & \text{dans } \Omega^{\pm} \\ \boldsymbol{\sigma}_z^{\pm} & = & \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{z}^{\pm}) & \text{dans } \Omega^{\pm} \\ \boldsymbol{\sigma}_z^{\pm}\boldsymbol{n} & = & \boldsymbol{0} & \text{sur } \partial\Omega^{\pm} \cap \Gamma_F \\ \boldsymbol{z}^{\pm} & = & \boldsymbol{0} & \text{sur } \partial\Omega^{\pm} \cap \Gamma_0 \\ \boldsymbol{z}^{\pm} & = & \mathcal{G}_d & \text{sur } \omega \end{array} \right. \tag{7.12}$$

On notera que ces deux problèmes sont indépendants. Par la suite, sur chaque sous domaine, on considère la décomposition suivante de la solution $\boldsymbol{u}^{\pm}$:

$$\boldsymbol{u}^{\pm} = \boldsymbol{w}^{\pm} + \beta^{\pm}\boldsymbol{z}^{\pm}$$

avec $\beta^{\pm}$ deux réels convenablement choisis. Cette décomposition est possible car l'opérateur considéré est linéaire. Avec ces nouvelles notations les inconnues du problème sont $\boldsymbol{w}^{\pm}$.

Les conditions de transmission pour $\boldsymbol{w}^{\pm}$ sont données par

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} [\boldsymbol{w}] & = & [\boldsymbol{u}] - \beta^{-}\mathcal{G}_d + \beta^{+}\mathcal{G}_d & = & (1 - \beta^{-} + \beta^{+})\mathcal{G}_d \\ [\boldsymbol{\sigma}_w\boldsymbol{n}] & = & [\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}] + \beta^{-}\boldsymbol{\sigma}_z^{-}\boldsymbol{n} - \beta^{+}\boldsymbol{\sigma}_z^{+}\boldsymbol{n} & = & \mathcal{G}_{nS} + \beta^{-}\boldsymbol{\sigma}_z^{-}\boldsymbol{n} - \beta^{+}\boldsymbol{\sigma}_z^{+}\boldsymbol{n} \end{array} \right.$$

Si on choisit $1 - \beta^{-} + \beta^{+} = 0$ alors $\boldsymbol{w}$ est continu sur l'interface ω mais pas le vecteur contrainte.

On décompose la solution $\boldsymbol{w}^{\pm}$ en deux parties

$$\boldsymbol{w}^{\pm} = \boldsymbol{w}_0^{\pm} + \boldsymbol{w}_{\lambda}^{\pm}$$

En utilisant l'opérateur de Steklov Poincaré, défini dans la section 1.2, le problème d'interface s'écrit :

$$S\lambda = -\boldsymbol{\sigma}^-_{w_0}\boldsymbol{n}^- - \boldsymbol{\sigma}^+_{w_0}\boldsymbol{n}^+ + \boldsymbol{\mathcal{G}}_{nS} + \beta^-\boldsymbol{\sigma}^-_z\boldsymbol{n} - \beta^+\boldsymbol{\sigma}^+_z\boldsymbol{n}$$

qui peut également être écrit sous la forme suivante :

$$S\lambda = -\boldsymbol{\sigma}^-_{w_0}\boldsymbol{n}^- - \boldsymbol{\sigma}^+_{w_0}\boldsymbol{n}^+ + \boldsymbol{\mathcal{G}}_{nS} + \beta^-\ S^-\boldsymbol{\mathcal{G}}_d - \beta^+\ S^+\boldsymbol{\mathcal{G}}_d \tag{7.13}$$

On notera que les équations (1.40) et (7.13) diffèrent uniquement au niveau du second membre. Etant donné que l'opérateur ne change pas, le même algorithme peut être utilisé pour résoudre le problème, avec les mêmes performances et aucune analyse additionnelle n'est requise pour prouver l'efficacité de la méthode.

7.1.2.1 Implémentation

L'implémentation du problème (7.11) est immédiate, dans le cadre des algorithmes de décomposition de domaines, étant donné qu'elle requiert la solution d'un problème additionnel par sous domaine. Ce problème est du même type que les problèmes standards. Pour compléter la résolution du problème (7.7), il reste à calculer les données d'entrée qui interviennent dans l'algorithme de décomposition de domaines à savoir les conditions de sauts (7.8), (7.9) et (7.10).

D'un point de vue "mathématique" ces quantités sont connues ; elles dépendent de la solution du problème à l'ordre précédent. D'un point de vue numérique le calcul de ces quantités est délicat. En effet l'approximation par éléments finis du champ $\boldsymbol{u}^0$ est de classe C^0. Ceci implique que les dérivées de $\boldsymbol{u}^0$, qui interviennent dans l'expression de $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$ et $\boldsymbol{\mathcal{G}}_{nS}$ sont discontinues d'un élément du maillage à un autre. Une bonne approximation de ces dérivées est obtenue en chaque nœud de l'interface ω par lissage.

Remarque 7.1.2. *Il est bien connu (voir Isaacson et Keller [24], Ralston [31] ou Stoer et Bulirsch [37]) qu'il est préférable de régulariser avant de calculer les dérivées.*

- **calcul de $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$**
  En pratique la valeur au nœud de la dérivée du déplacement est une moyenne pondérée des valeurs dans les différents éléments contenant le nœud.
- **calcul de $\boldsymbol{\mathcal{G}}_{nS}$**
  Notons que, pour simplifier la présentation de la méthode, la formulation sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles a été considérée au lieu de la formulation variationnelle. En pratique, on doit calculer $\int_\omega \boldsymbol{\mathcal{G}}_{nS}(\hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{v}d\hat{\boldsymbol{x}}$. Etant donné que l'intégrale est calculée élément par élément, à première vue il n'est pas impératif de régulariser avant d'intégrer. Néanmoins, notre choix est d'utiliser la même régularisation que pour le calcul de $\boldsymbol{\mathcal{G}}_d$.

Approximation nodale des valeurs de $\left\{\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}\right\}$ *et* $\left\{\frac{\partial^2 u_i^0}{\partial x_j^2}\right\}$

Soit N un nœud de l'interface ω et soient T^k le $k^{\text{ème}}$ élément contenant le nœud N. On note

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_i}\right|_{T_k}(N) \tag{7.14}$$

les dérivées partielles de $\boldsymbol{u}^0$ au nœud N, le nœud N étant un nœud de l'élément T_k. Le calcul de ces dérivées est donné par la formule (6.27).
Pour obtenir une bonne approximation des valeurs des dérivées partielles de $\boldsymbol{u}^0$ au nœud N, on effectue une opération de lissage sur les différentes valeurs des dérivées $\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_i}(N)|_{T_k}$.

$$\left\{\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}\right\}(N) := \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n_T} \mathcal{V}(T_k) \cdot \left.\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}\right|_{T_k}(N)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n_T} \mathcal{V}(T_k)} \tag{7.15}$$

où $\mathcal{V}(T_k)$ est le volume de l'élément T_k.

La formule (7.15) a été implémentée puis validée en considérant un problème où le calcul des dérivées partielles de $\boldsymbol{u}^0$ est réalisable analytiquement.

7.1.3 Calcul de $\boldsymbol{v}^1$ et $\boldsymbol{\tau}^0$

Il est important de souligner que chacun des champs intérieurs $\boldsymbol{v}^1$ et $\boldsymbol{\tau}^0$ est une combinaison linéaire de données macroscopiques et de données microscopiques. Ces champs intérieurs sont plus précisément obtenus par reconstruction à partir de données calculées aux étapes précédentes, sur des maillages différents, ce qui rend cette reconstruction délicate.
Les champs intérieurs peuvent être déterminés sur deux maillages différents :

- soit sur le maillage de la cellule Y, pour une valeur donnée de la coordonnée macroscopique du centre de l'hétérogénéité,
- soit sur le maillage du domaine initiale Ω^ε, et plus précisément sur la partie de ce maillage autour des hétérogénéités.

Dans la suite nous présentons le "calcul" des champs $\boldsymbol{v}^1$ et $\boldsymbol{\tau}^0$ sur le second maillage en prévision de l'étape de validation au cours de laquelle la solution du modèle asymptotique et la solution de référence doivent être comparées sur un même maillage.

Soient $\mathcal{T}_h^\varepsilon$ le maillage complet de la structure (domaine avec les inclusions) et $\mathcal{T}_h^\omega$ une partie $\mathcal{T}_h^\varepsilon$ centrée autour de l'interface ω (voir figure 7.3). L'objectif de cette section est de reconstruire le champ $\boldsymbol{v}^1$ en chaque nœud de $\mathcal{T}_h^\omega$ et le champ $\boldsymbol{\tau}^0$ au barycentre de chaque élément de $\mathcal{T}_h^\omega$. Le point clé de cette reconstruction est la prise en compte du calcul à double échelle de $\boldsymbol{v}^1$ et $\boldsymbol{\tau}^0$ en des points dont il faut déterminer les coordonnées microscopiques dans la cellule Y.

7.1.3.1 Calcul des coordonnées microscopiques

Soient $M(x_1^M, x_2^M, x_3^M)$ un point de $\mathcal{T}_h^\omega$ et $O^M(0, x_2^O, x_3^O)$ le centre de l'inclusion dont les coordonnées vérifient $\left|x_\alpha^M - x_\alpha^O\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, où $\alpha = 2, 3$. On note y_i^M les coordonnées du point M

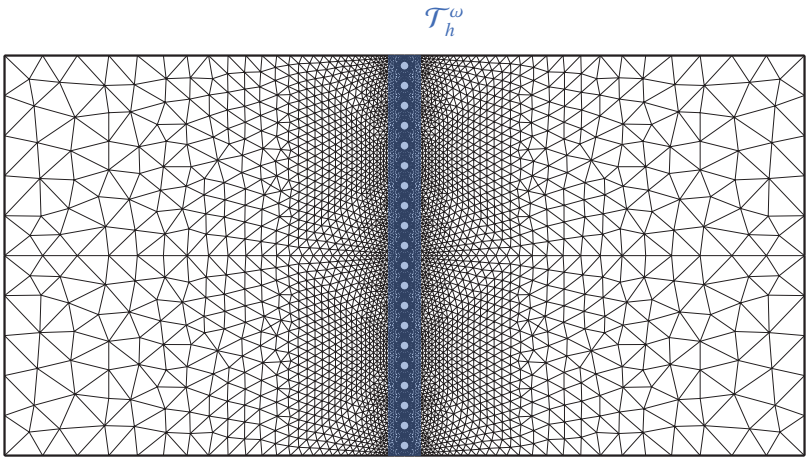


FIGURE 7.3 – Exemple du domaine $\mathcal{T}_h^\omega \subset \mathcal{T}_h^\varepsilon$ dans un cas 2D

dans la cellule Y. Par définition, on a :

$$\begin{cases} y_1^M = \dfrac{x_1^M}{\varepsilon} \\ y_\alpha^M = \dfrac{x_\alpha^M - x_\alpha^O}{\varepsilon} \end{cases} \tag{7.16}$$

7.1.3.2 Reconstruction de $\boldsymbol{v}^1$

Soit N_i^ω le i^{ème} nœud de $\mathcal{T}_h^\omega$de coordonnées (x_1^N, x_2^N, x_3^N) et de coordonnées (y_1^N, y_2^N, y_3^N) dans Y. On notera que les coordonnées microscopiques (y_1^N, y_2^N, y_3^N) de N_i^ω ne sont pas les coordonnées d'un nœud de Y. Pour calculer $\left\{\boldsymbol{v}_h^1\right\}(N_i^\omega)$ l'approximation du champ $\boldsymbol{v}^1$ au nœud N_i^ω il faut d'abord déterminer la valeur de $f(y_1^N)$, puis, par interpolation :

- les valeurs des champs V^{ij} au point de Y de coordonnées (y_1^N, y_2^N, y_3^N),
- les valeurs des $\dfrac{\partial u_k^0}{\partial x_\ell}(0, x_2^O, x_3^O)$,
- les valeurs de $\boldsymbol{u}^1(0^\pm, x_2^O, x_3^O)$,

Un fois ces quantités calculées, on peut déterminer $\left\{\boldsymbol{v}_h^1\right\}(N_i^\omega)$:

$$\begin{aligned} \left\{\boldsymbol{v}_h^1\right\}(N_i^\omega) = f(y_1^N)\left\{\frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_1}\right\}(0, x_2^O, x_3^O) + \left\{\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l}\right\}(0, x_2^O, x_3^O)\left\{\boldsymbol{V}^{kl}\right\}(y_1^N, y_2^N, y_3^N) \\ + \frac{1}{2}\left(\left\{\boldsymbol{u}^1\right\}(0^+, x_2^O, x_3^O) + \left\{\boldsymbol{u}^1\right\}(0^-, x_2^O, x_3^O)\right) \end{aligned}$$

où on adopte la convention de l'indice répété.

7.1.3.3 Reconstruction de $\boldsymbol{\tau}^0$

Soient T_i^ω le i^{ème} élément de $\mathcal{T}_h^\omega$ et B^T le barycentre de T_i^ω de coordonnées (x_1^B, x_2^B, x_3^B) et de coordonnées (y_1^B, y_2^B, y_3^B) dans Y définis par (7.16). Pour calculer $\left\{\boldsymbol{\tau}_h^0\right\}(T_i^\omega)$, l'approximation du champ $\boldsymbol{\tau}^0$ sur l'élément T_i^ω, il faut d'abord déterminer par interpolation les

valeurs des dérivées partielles de $\boldsymbol{u}^0$ en $(0, x_2^B, x_3^B)$ puis déterminer l'élément $T^{Y,B}$ de "Y" contenant le point de coordonnées (y_1^B, y_2^B, y_3^B). Après avoir calculé $f'(y_1)$ on peut calculer $\boldsymbol{G}\left(y_1^B; \boldsymbol{u}^0(0, x_2^B, x_3^B)\right)$ pour finalement déterminer $\left\{\boldsymbol{\tau}_h^0\right\}(T_i^\omega)$ par :

$$\left\{\boldsymbol{\tau}_h^0\right\}(T_i^\omega) = \boldsymbol{G}\left(y_1^B; \boldsymbol{u}^0(0, x_2^B, x_3^B)\right) + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0, x_2^B, x_3^B)\boldsymbol{T}^{ij}(y_1^B, y_2^B, y_3^B)$$

avec $\boldsymbol{T}^{ij}(y_1^B, y_2^B, y_3^B)$ la valeur de $\boldsymbol{T}^{ij}$ dans l'élément $T^{Y,B}$.

7.2 Validation du modèle asymptotique

La première étape de validation consiste à vérifier la robustesse du calcul des coefficients $[\boldsymbol{V}^{ij}]^\infty$ et $\int_{Y^\star} \boldsymbol{T}^{ij} d\boldsymbol{y}$ vis-à-vis des différents paramètres de calcul. La deuxième étape consiste à comparer, pour une valeur de ε fixée, la solution de chacun des modèles asymptotiques à une solution dite de référence. Plus précisément, on résout par un calcul élément finis standard un problème modèle, élasto-statique linéaire, qu'on notera $\mathcal{P}^\varepsilon$. La solution obtenue, notée $\boldsymbol{u}^\varepsilon$, est comparée à son approximation asymptotique, calculée numériquement par l'algorithme présenté dans la section précédente.
La validation du modèle asymptotique pour les différents types d'inclusions est réalisée en considérant des problèmes bi-dimensionnels.

Dans ce qui suit, le problème de départ est présenté dans le section 7.2.1 en fixant les données géométriques et mécaniques, les conditions aux limites, ainsi que la valeur du petit paramètre ε. Ensuite, l'étude des coefficients $[\boldsymbol{V}^{ij}]^\infty$ et $\int_{Y^\star} \boldsymbol{T}^{ij} d\boldsymbol{y}$ est présentée dans la section 7.2.2. Dans les sections 7.2.3 et 7.2.4, l'approximation asymptotique de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ est validée respectivement dans les domaines extérieur et intérieur.

7.2.1 Problème asymptotique

En reprenant les notations de la section 2.1, on considère un corps élastique linéaire qui occupe dans sa position de référence un domaine rectangulaire $\Omega = \{-L, L\} \times \{-H, H\}$ et on note ω la ligne de Ω d'équation $x_1 = 0$. Le domaine Ω est le domaine non perturbé. On suppose à présent que le domaine Ω contient $\mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{2H}{|\hat{Y}|}\varepsilon^{-1}$ disques identiques de rayon $R\varepsilon$, disposés périodiquement, avec une période $\varepsilon\hat{Y}$, le long de ω. On définit ainsi le domaine perturbé Ω^ε. On notera Γ_0 le bord encastré de Ω^ε et Γ_F la partie complémentaire de $\partial\Omega$ soumise à une densité de force. Plus précisément, le bord Γ_F est un bord libre sauf en $x_1 = L$ où un chargement linéique $\boldsymbol{F}_\ell$ est appliqué. Le chargement surfacique dans Ω est supposé nul (voir figure 7.4).

De plus, on suppose que la structure est constitué d'un matériau homogène isotrope de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν. Sous l'hypothèse des contraintes planes, la loi de comportement s'écrit :

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\gamma_{kl}(\boldsymbol{u}) \tag{7.17}$$

où les coefficients non nuls sont :

$$A_{1111} = A_{2222} = \frac{E}{1-\nu^2}$$

$$A_{2211} = A_{1122} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}$$

$$A_{1212} = A_{2121} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

(plus ceux qui viennent par les symétries).

Dans le cas des inclusions élastiques, on notera E^I (resp. ν^I) le module d'Young (resp. le coefficient de Poisson) dans l'inclusion.

Les résultats présentés par la suite sont obtenus pour :

$$L = 1,\ H = 0.5,\ R = 0.3,\ |\hat{Y}| = 1,\ E = 1,\ \nu = 0.25 \text{ et } \boldsymbol{F_\ell} = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$$

Les paramètres du problème étudié ne correspondant pas à ceux d'une situation réelle particulière, les valeurs de ces paramètres ont été choisies de façon à simplifier l'analyse des résultats. Il est important de noter que ce choix est possible grâce à la linéarité du problème.
Le petit paramètre ε est fixé en supposant que la structure comporte $\mathcal{N}(\varepsilon) = 80$ inclusions, i.e.

$$\varepsilon = \frac{2H}{\mathcal{N}(\varepsilon)} = 1,25.10^{-2}$$

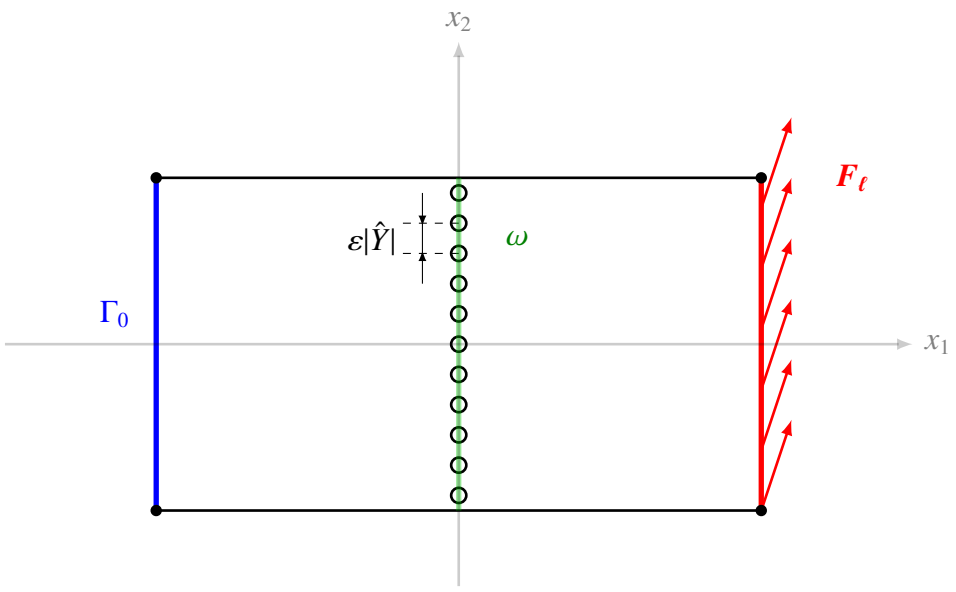


FIGURE 7.4 – Paramètres du problème étudié

La première étape de la méthode des développements asymptotiques raccordés est d'identifier le domaine extérieur et le domaine intérieur. Le domaine extérieur est, par

définition, le domaine Ω. Les champs intérieurs sont eux définis sur une période représentative de la couche, mise à l'échelle 1 et notée $Y^\star$. Dans ce qui suit, on considérera, dans un repère (O, y_1, y_2), une période centrée en O, et où l'hétérogénéité I de rayon R est également centrée en O (voir figure 7.5).

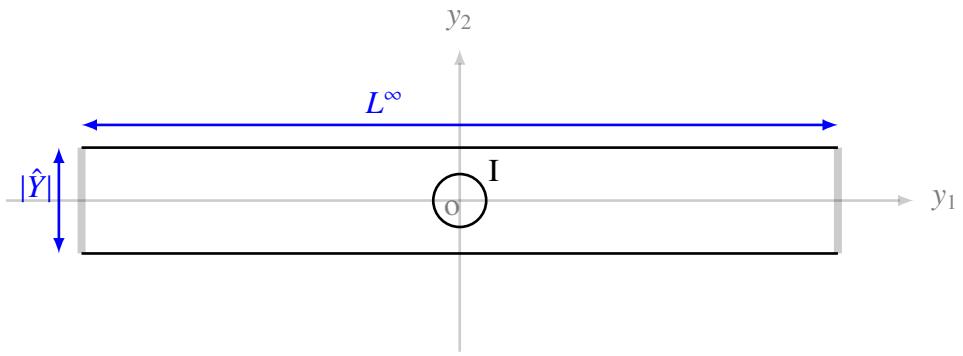


FIGURE 7.5 – Paramètres géométriques de $Y^\star$

Les calculs présentés par la suite ont été réalisés avec des éléments finis triangulaires P2-Lagrange.

7.2.2 Robustesse du calcul des coefficients $[\boldsymbol{V}^{ij}]^\infty$ et $\int_{Y^\star} \boldsymbol{T}^{ij} d\boldsymbol{y}$

Cette première étape de validation consiste à étudier la robustesse des coefficients $[\boldsymbol{V}^{ij}]^\infty$ et $\int_{Y^\star} \boldsymbol{T}^{ij} d\boldsymbol{y}$ par rapport :

i) à la longueur L^∞ utilisée dans l'approximation de $Y^\star$ pour le calcul des champs $\boldsymbol{V}^{ij}$,

ii) au choix de la fonction f.

Dans un premier temps, pour $a = 4R$ et $b = 3a$, on choisit la fonction $f(y_1; a, b)$ comme un polynôme de degré 5 qui vérifie :

$$f(y_1; a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < |y_1| < a \\ y_1 & \text{si } |y_1| \geq b \end{cases} \tag{7.18}$$

$$f'(y_1; a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < |y_1| < a \\ 1 & \text{si } |y_1| \geq b \end{cases} \tag{7.19}$$

$$f''(|y_1| = a) = f''(|y_1| = b) = 0 \tag{7.20}$$

et on étudie le comportement des coefficients lorsque la valeur de L^∞ augmente progressivement.

Dans cette section, on étudie le cas des cavités et le cas des inclusions ε^p-élastiques, $p = 0$, avec $E^I = 0.5E$ et $\nu^I = 0.3$.

Les résultats de cette première étude paramétrique montrent que, dans les cas des cavités et des inclusions élastiques, les coefficients $[\boldsymbol{V}^{ij}]^\infty$ et $\int_{Y^\star} \boldsymbol{T}^{ij} d\boldsymbol{y}$ sont tous constants à partir de la valeur de $L^\infty = 2b + \delta b$, avec $\delta \simeq 10^{-1}$. (Voir tableaux 7.1, 7.2, 7.3 et 7.4)

L^∞	$[V_1^{11}]^\infty$	$[V_2^{12}]^\infty$	$[V_2^{21}]^\infty$	$[V_1^{22}]^\infty$
2b+ 0.010b	0.2039353	0.2682324	0.2682330	0.0289023
2b+ 0.020b	0.2039361	0.2682324	0.2682330	0.0289023
2b+ 0.030b	0.2039363	0.2682324	0.2682329	0.0289023
2b+ 0.040b	0.2039363	0.2682324	0.2682329	0.0289023
2b+ 0.050b	0.2039364	0.2682324	0.2682330	0.0289023
2b+ 0.060b	0.2039364	0.2682324	0.2682330	0.0289023
2b+ 0.070b	0.2039364	0.2682324	0.2682330	0.0289023
2b+ 0.080b	0.2039364	0.2682324	0.2682330	0.0289023
2b+ 0.090b	0.2039364	0.2682324	0.2682330	0.0289023
2b+ 0.100b	0.2039364	0.2682324	0.2682330	0.0289023
2b+ 0.120b	0.2039364	0.2682324	0.2682330	0.0289023
2b+ 0.140b	0.2039364	0.2682324	0.2682330	0.0289023
2b+ 0.160b	0.2039364	0.2682324	0.2682330	0.0289023
2b+ 0.180b	0.2039364	0.2682324	0.2682330	0.0289023
2b+ 0.200b	0.2039364	0.2682324	0.2682330	0.0289023
2b+ 0.400b	0.2039364	0.2682324	0.2682330	0.0289023
2b+ 0.600b	0.2039364	0.2682324	0.2682330	0.0289023

TABLE 7.1 – Variation des coefficients $[V_k^{ij}]^\infty$ en fonction de L^∞ : cas des inclusions élastiques

L^∞	$\int_Y T_{22}^{11} d\boldsymbol{y}$	$\int_Y T_{12}^{12} d\boldsymbol{y}$	$\int_Y T_{11}^{22} d\boldsymbol{y}$	$\int_Y T_{22}^{22} d\boldsymbol{y}$
2b+ 0.010b	0.0235539	0.0595651	0.0228962	-0.0303513
2b+ 0.020b	0.0235539	0.0595651	0.0228962	-0.0303513
2b+ 0.030b	0.0235539	0.0595651	0.0228962	-0.0303513
2b+ 0.040b	0.0235539	0.0595651	0.0228962	-0.0303513
2b+ 0.050b	0.0235539	0.0595651	0.0228962	-0.0303513
2b+ 0.060b	0.0235539	0.0595651	0.0228962	-0.0303513
2b+ 0.070b	0.0235539	0.0595651	0.0228962	-0.0303513
2b+ 0.080b	0.0235539	0.0595651	0.0228962	-0.0303513
2b+ 0.090b	0.0235539	0.0595651	0.0228962	-0.0303513
2b+ 0.100b	0.0235539	0.0595651	0.0228962	-0.0303513
2b+ 0.120b	0.0235539	0.0595651	0.0228962	-0.0303513
2b+ 0.140b	0.0235539	0.0595651	0.0228962	-0.0303513
2b+ 0.160b	0.0235539	0.0595651	0.0228962	-0.0303513
2b+ 0.180b	0.0235539	0.0595651	0.0228962	-0.0303513
2b+ 0.200b	0.0235539	0.0595651	0.0228962	-0.0303513
2b+ 0.400b	0.0235539	0.0595651	0.0228962	-0.0303513
2b+ 0.600b	0.0235539	0.0595651	0.0228962	-0.0303513

TABLE 7.2 – Variation des coefficients $\int_Y T_{kl}^{ij} d\boldsymbol{y}$ en fonction de L^∞ : cas des inclusions élastiques

L^∞	$[V_1^{11}]^\infty$	$[V_2^{12}]^\infty$	$[V_2^{21}]^\infty$	$[V_1^{22}]^\infty$
2b+0.01b	1.0483199	1.7902189	1.7902198	0.2749295
2b+0.02b	1.0483207	1.7902189	1.7902198	0.2749295
2b+0.03b	1.0483208	1.7902189	1.7902197	0.2749295
2b+0.04b	1.0483208	1.7902189	1.7902196	0.2749295
2b+0.05b	1.0483209	1.7902189	1.7902197	0.2749295
2b+0.06b	1.0483210	1.7902189	1.7902198	0.2749295
2b+0.07b	1.0483209	1.7902189	1.7902197	0.2749295
2b+0.08b	1.0483210	1.7902189	1.7902198	0.2749295
2b+0.09b	1.0483209	1.7902189	1.7902197	0.2749295
2b+0.10b	1.0483209	1.7902189	1.7902197	0.2749295
2b+0.12b	1.0483209	1.7902189	1.7902197	0.2749295
2b+0.14b	1.0483210	1.7902189	1.7902198	0.2749295
2b+0.16b	1.0483210	1.7902189	1.7902198	0.2749295
2b+0.18b	1.0483210	1.7902189	1.7902198	0.2749295
2b+0.20b	1.0483210	1.7902189	1.7902198	0.2749295
2b+0.40b	1.0483210	1.7902189	1.7902198	0.2749295

TABLE 7.3 – Variation des coefficients $[V_k^{ij}]^\infty$ en fonction de L^∞ : cas des cavités

L^∞	$\int_{Y\setminus I} T_{22}^{11} d\boldsymbol{y}$	$\int_{Y\setminus I} T_{12}^{12} d\boldsymbol{y}$	$\int_{Y\setminus I} T_{11}^{22} d\boldsymbol{y}$	$\int_{Y\setminus I} T_{22}^{22} d\boldsymbol{y}$
2b+ 0.010b	-0.0137059	0.1130969	0.0753980	-0.2004527
2b+ 0.020b	-0.0137059	0.1130969	0.0753980	-0.2004527
2b+ 0.030b	-0.0137060	0.1130969	0.0753980	-0.2004527
2b+ 0.040b	-0.0137060	0.1130969	0.0753980	-0.2004527
2b+ 0.050b	-0.0137060	0.1130969	0.0753980	-0.2004527
2b+ 0.060b	-0.0137059	0.1130969	0.0753980	-0.2004527
2b+ 0.070b	-0.0137059	0.1130969	0.0753980	-0.2004527
2b+ 0.080b	-0.0137059	0.1130969	0.0753980	-0.2004527
2b+ 0.090b	-0.0137059	0.1130969	0.0753980	-0.2004527
2b+ 0.100b	-0.0137059	0.1130969	0.0753980	-0.2004527
2b+ 0.120b	-0.0137059	0.1130969	0.0753980	-0.2004527
2b+ 0.140b	-0.0137059	0.1130969	0.0753980	-0.2004527
2b+ 0.160b	-0.0137059	0.1130969	0.0753980	-0.2004527
2b+ 0.180b	-0.0137059	0.1130969	0.0753980	-0.2004527
2b+ 0.200b	-0.0137059	0.1130969	0.0753980	-0.2004527
2b+ 0.400b	-0.0137059	0.1130969	0.0753980	-0.2004527

TABLE 7.4 – Variation des coefficients $\int_{Y\setminus I} T_{kl}^{ij} d\boldsymbol{y}$ en fonction de L^∞ : cas des cavités

Pour L^∞ fixé, on effectue une second étude paramétrique : pour $f(y_1; a, b)$ qui vérifie (7.18), (7.19) et (7.20), on fixe la valeur de $a = 1$ et on fait varier la valeurs de b. Cette étude paramétrique est réalisée, dans le cas ε^p-élastique, $p = 0$.

Remarque 7.2.1. *En imposant les conditions (7.18), (7.19) et (7.20), le choix de la fonction $f(y_1; a, b)$ intervient uniquement dans le chargement des problèmes $\mathcal{P}^{11}$ et $\mathcal{P}^{21}$. On étudie donc uniquement la robustesse des coefficients $[V_k^{11}]^\infty$, $\int_Y T_{kl}^{11} d\boldsymbol{y}$, $[V_k^{21}]^\infty$ et $\int_Y T_{kl}^{21} d\boldsymbol{y}$.*

Les résultats de cette étude paramétrique montrent, en tenant compte des erreurs d'interpolation, que les coefficients sont indépendants du choix de a et b. (Voir tableaux 7.5 et 7.6). Ces résultats sont également vérifiés dans le cas des cavités.

b	$[V_1^{11}]^\infty$	$[V_2^{21}]^\infty$
1.500	0.2039358	0.2682322
2.000	0.2039357	0.2682322
2.500	0.2039358	0.2682322
3.000	0.2039358	0.2682322

TABLE 7.5 – Variation des coefficients $[V_k^{ij}]^\infty$ en fonction de b

b	$\int_Y T_{22}^{11} d\boldsymbol{y}$
1.500	0.0235538
2.000	0.0235537
2.500	0.0235538
3.000	0.0235538

TABLE 7.6 – Variation des coefficients $\int_Y T_{kl}^{ij} d\boldsymbol{y}$ en fonction de b

Remarque 7.2.2. *Dans les différents tableaux présentés précédemment, uniquement les coefficients non nuls ont été pris en compte.*

7.2.3 Validation : échelle macroscopique

La validation à l'échelle macroscopique consiste à comparer $\boldsymbol{u}^0 + \varepsilon \boldsymbol{u}^1$ et $\boldsymbol{u}^\varepsilon$. Il est clair que la correction de $\boldsymbol{u}^0$ par $\varepsilon \boldsymbol{u}^1$ est de l'ordre ε. On pourrait se dire que la nécessité de calculer $\boldsymbol{u}^1$ dépend de la précision avec laquelle on souhaite estimer $\boldsymbol{u}^\varepsilon$. Cependant, il est important de rappeler que, d'une part la solution du problème non perturbé $\boldsymbol{u}^0$ ne fournit aucune information sur les hétérogénéités, et que d'autre part l'approximation du comportement de la couche par le développement intérieur $\boldsymbol{v}^0 + \varepsilon \boldsymbol{v}^1$ nécessite le calcul de $\boldsymbol{u}^1$ afin d'obtenir l'unicité de $\boldsymbol{v}^1$. Il est donc nécessaire d'implémenter et de valider le calcul de $\boldsymbol{u}^1$.

Dans la suite, on calcule la norme de l'erreur de $\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{u}^{ext}$, où $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ est la solution de référence obtenue par un calcul élément fini standard et $\boldsymbol{u}^{ext}$ est le développement asymptotique extérieur de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ qui, en première approximation, sera pris tel que $\boldsymbol{u}^{ext} = \boldsymbol{u}^0$, et $\boldsymbol{u}^{ext} = \boldsymbol{u}^0 + \varepsilon \boldsymbol{u}^1$ en seconde approximation. Pour cela, on considère, pour un champ vectoriel donné $\boldsymbol{w}$, la norme de l'énergie, notée $\|\boldsymbol{w}\|_E$, définie par :

$$\|\boldsymbol{w}\|_E^2 := \int_\Omega \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{w}) d\boldsymbol{x}$$

Remarque 7.2.3. *Les résultats présentés dans ce qui suit sont obtenus en calculant la norme relative*

$$\frac{\|\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{u}^{ext}\|_E}{\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_E}$$

Par abus de notation, la norme relative sera notée $\|\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{u}^{ext}\|_E$.

Remarque 7.2.4. *Le calcul numérique de* $\boldsymbol{u}^{ext}$ *consiste à calculer* $\boldsymbol{u}^0$ *et* $\boldsymbol{u}^1$*, sur un maillage grossier de* Ω *(cf. Figure 7.6), en suivant la méthodologie présentée dans la section précédente, puis à reconstruire la solution asymptotique sur le maillage complet de la structure, c'est-à-dire le maillage de* Ω^ε*, noté* $\mathcal{T}_h^\varepsilon$ *(cf. Figure 7.7 et Figure 7.8).*

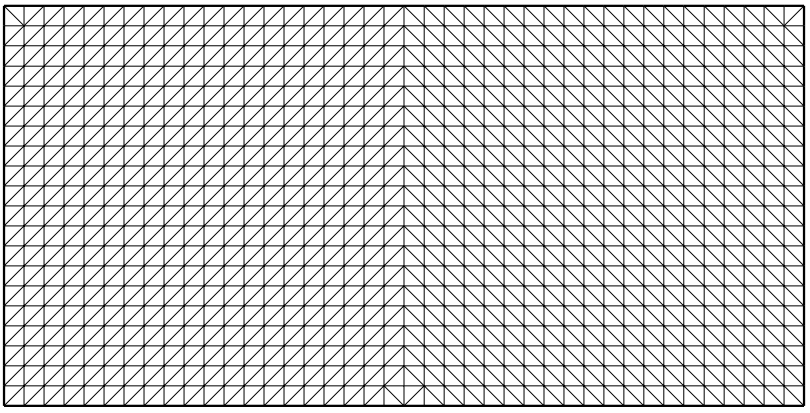


FIGURE 7.6 – Maillage utilisé pour le calcul de $\boldsymbol{u}^0$ et $\boldsymbol{u}^1$ (1600 éléments P2-Lagrange)

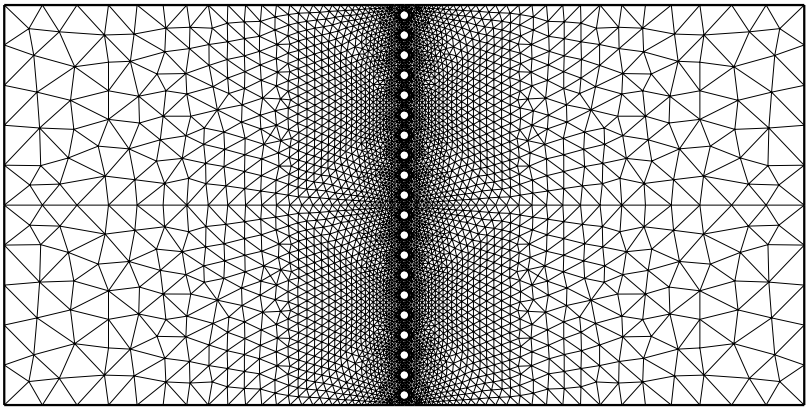


FIGURE 7.7 – Maillage utilisé pour le calcul de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ avec $\varepsilon = \frac{1}{20}$ (9836 éléments P2-Lagrange)

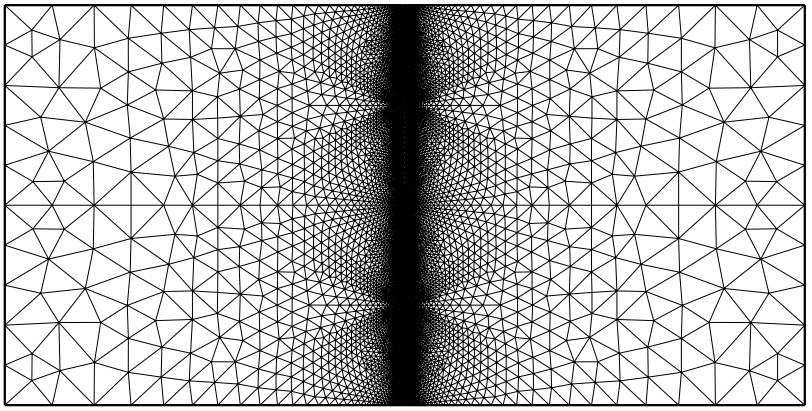


FIGURE 7.8 – Maillage utilisé pour le calcul de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ avec $\varepsilon = \frac{1}{80}$ (41332 éléments P2-Lagrange)

Il est important, lors du calcul de $\|\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{u}^{ext}\|_E$, de ne pas prendre en compte le domaine autour des inclusions et de se restreindre, dans le maillage $\mathcal{T}_h^\varepsilon$, au domaine extérieur. Etant donné que le domaine extérieur n'est pas défini de façon précise, la norme $\|\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{u}^{ext}\|_E$ est calculée sur un domaine $\Omega^\varepsilon \setminus ([-H, H] \times \delta^{ext}(\varepsilon))$, en augmentant progressivement la valeur de $\delta^{ext}(\varepsilon)$ de façon à obtenir une approximation satisfaisante du développement extérieur. Ces calculs sont effectués dans le cas des cavités pour deux valeurs de ε : $\varepsilon = \frac{1}{20}$ et $\varepsilon = \frac{1}{80}$. Dans le cas des inclusions ε^p-élastiques, $p = 0$, les calculs sont effectués pour une seule valeur de ε ($\varepsilon = \frac{1}{80}$) et pour $E^I = 0.5E$. On notera que, pour cette valeur de E^I, on a bien $\boldsymbol{A}^I$ du même ordre que $\boldsymbol{A}$.

Les résultats de l'étude de $\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{u}^{ext}$, dans le cas des cavités, sont représentés dans les figures 7.9 - 7.10 . L'analyse de ces résultats montre que :

- ⋆ le calcul de $\boldsymbol{u}^1$ permet d'obtenir une meilleure approximation de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ que le seul calcul de $\boldsymbol{u}^0$,
- ⋆ l'approximation de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ par le modèle asymptotique est d'autant meilleure que ε est petit,
- ⋆ le développement extérieur $\boldsymbol{u}^0 + \varepsilon \boldsymbol{u}^1$ est une bonne approximation de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ à partir de $\delta^{ext}(\varepsilon) > 1.5\varepsilon$.

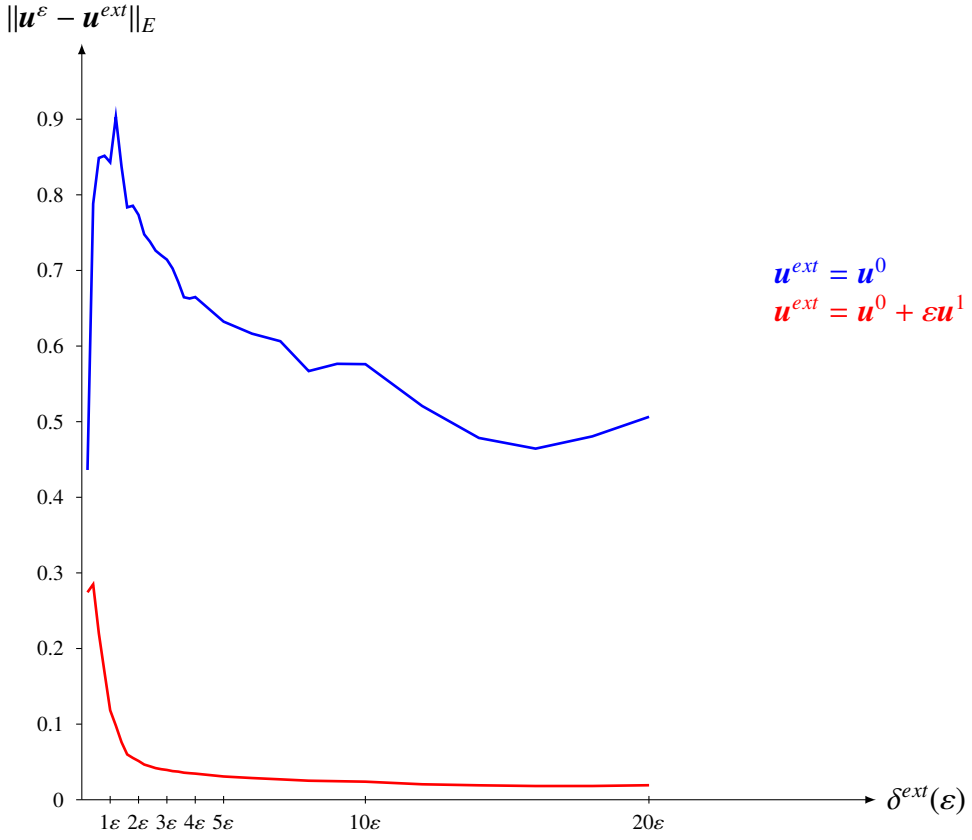


FIGURE 7.9 – Cavités : calcul de $\|\boldsymbol{u}^{\varepsilon} - \boldsymbol{u}^{ext}\|_E$ dans $\Omega^{\varepsilon} \setminus ([-H, H] \times \delta^{ext}(\varepsilon))$ pour $\varepsilon = \frac{1}{20}$.

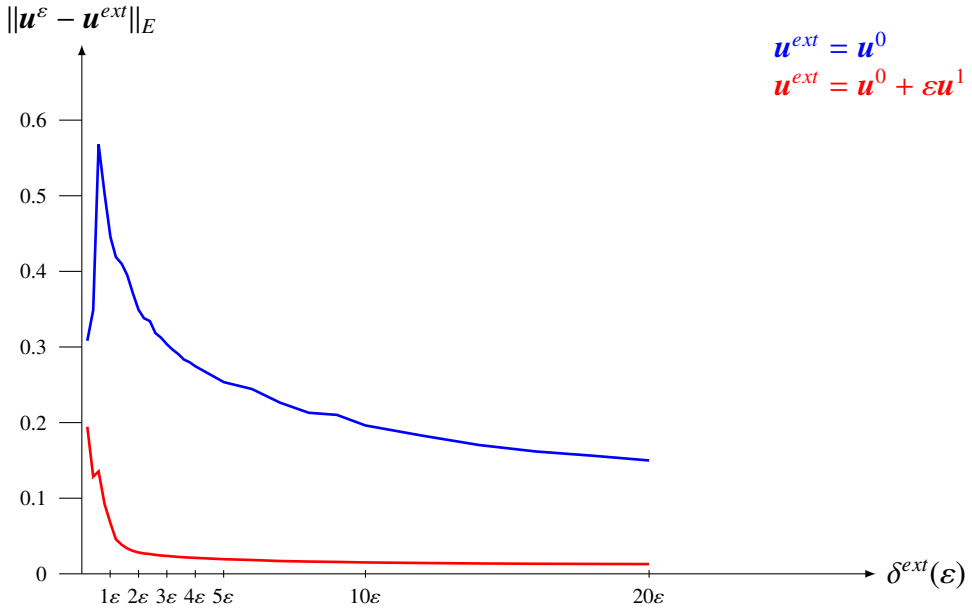


FIGURE 7.10 – Cavités : calcul de $\|\boldsymbol{u}^{\varepsilon} - \boldsymbol{u}^{ext}\|_E$ dans $\Omega^{\varepsilon} \setminus ([-H, H] \times \delta^{ext}(\varepsilon))$ pour $\varepsilon = \frac{1}{80}$.

Les résultats de l'étude de $\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{u}^{ext}$, dans le cas des inclusions ε^p-élastiques, p=0, sont représentés dans la figure 7.11. L'analyse de ces résultats montre que :

- ⋆ $\boldsymbol{u}^0 + \varepsilon\boldsymbol{u}^1$ est, comme dans le cas des cavités, une meilleure approximation de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ que $\boldsymbol{u}^0$ uniquement,
- ⋆ l'écart entre $\|\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{u}^0\|_E$ et $\|\boldsymbol{u}^\varepsilon - (\boldsymbol{u}^0 + \varepsilon\boldsymbol{u}^1)\|_E$ est moins important dans ce cas que dans le cas des cavités.

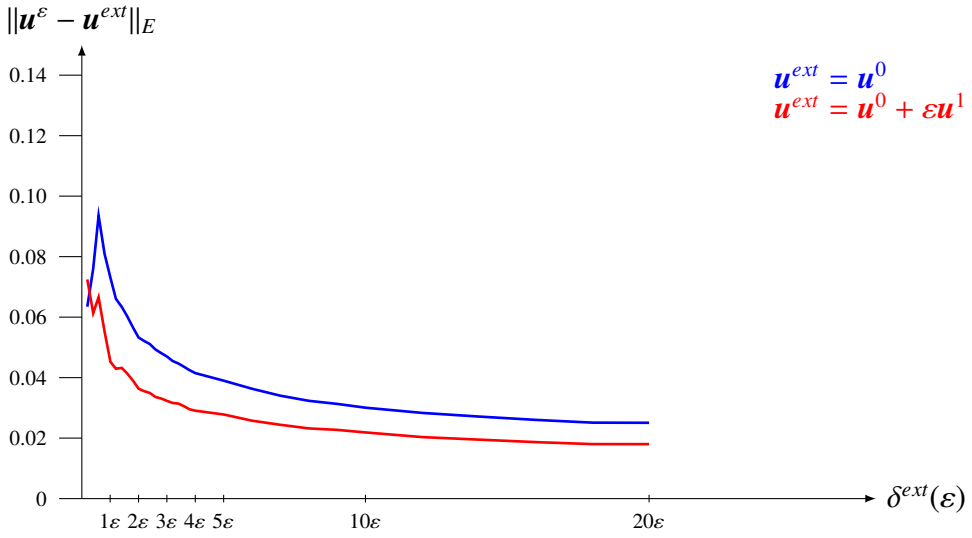


FIGURE 7.11 – Inclusions élastiques : calcul de $\|\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{u}^{ext}\|_E$ dans $\Omega^\varepsilon \setminus ([-H, H] \times \delta^{ext}(\varepsilon))$ pour $\varepsilon = \frac{1}{80}$ et $E^I = 0.5E$.

7.2.4 Validation : échelle microscopique

La validation est réalisée en deux étapes :

i) on valide l'approximation de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ par le développement intérieur $\boldsymbol{v}^0 + \varepsilon\boldsymbol{v}^1$,

ii) on valide la reconstruction des champs de contraintes autour des inclusions, i.e. comparer $\boldsymbol{\tau}^0$ et $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$.

Par la suite, on calcule $\|\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{v}^0\|_E$ et $\|\boldsymbol{u}^\varepsilon - (\boldsymbol{v}^0 + \varepsilon\boldsymbol{v}^1)\|_E$, sur le maillage $\mathcal{T}_h^\varepsilon$ (maillage complet de la structure), dans une zone proche des inclusions. Plus précisément, en reprenant les notations de la section précédente, le calcul est réalisé dans le domaine $\Big([-H, H] \times \delta^{int}(\varepsilon)\Big)$. La valeur de $\delta^{int}(\varepsilon)$ n'étant pas connue a priori, on réalise une étude paramétrique en faisant varier le paramètre $\delta^{int}(\varepsilon)$.

Les résultats de l'étude de $\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{u}^{int}$ sont représentés dans les figures 7.12 - 7.15 . L'analyse de ces résultats montre que :

- ⋆ le calcul de $\boldsymbol{v}^1$ permet d'obtenir une bien meilleure approximation de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ que le seul calcul de $\boldsymbol{v}^0$,
- ⋆ l'approximation de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ par le modèle asymptotique est d'autant meilleure que ε est petit,
- ⋆ pour $\varepsilon = \frac{1}{20}$, le développement intérieur $\boldsymbol{v}^0 + \varepsilon \boldsymbol{v}^1$ est une bonne approximation de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ tant que $\delta^{int}(\varepsilon) < 1.5\varepsilon$,
- ⋆ pour $\varepsilon = \frac{1}{80}$, on observe une dégradation de $\|\boldsymbol{u}^\varepsilon - (\boldsymbol{v}^0 + \varepsilon \boldsymbol{v}^1)\|_E$ à partir de $\delta^{int}(\varepsilon) = 3\varepsilon$ dans le cas des cavités, et à partir de $\delta^{int}(\varepsilon) = 5\varepsilon$ dans le cas des inclusions élastiques.

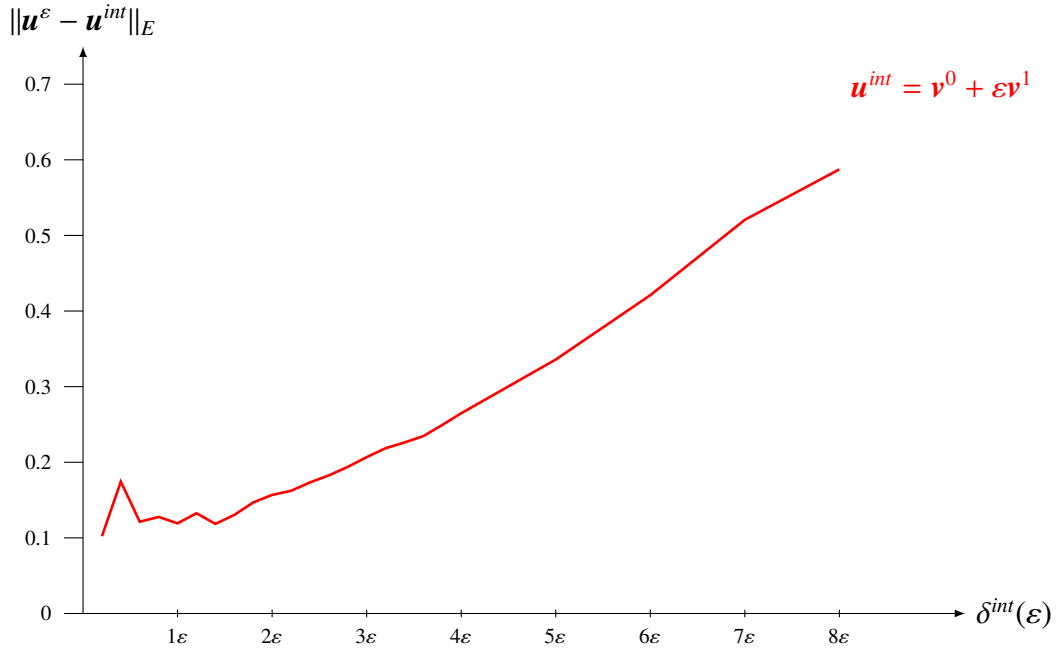


FIGURE 7.12 – Cavités : calcul de $\|\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{u}^{int}\|_E$ dans $\left([-H, H] \times \delta^{int}(\varepsilon)\right)$ pour $\varepsilon = \frac{1}{20}$.

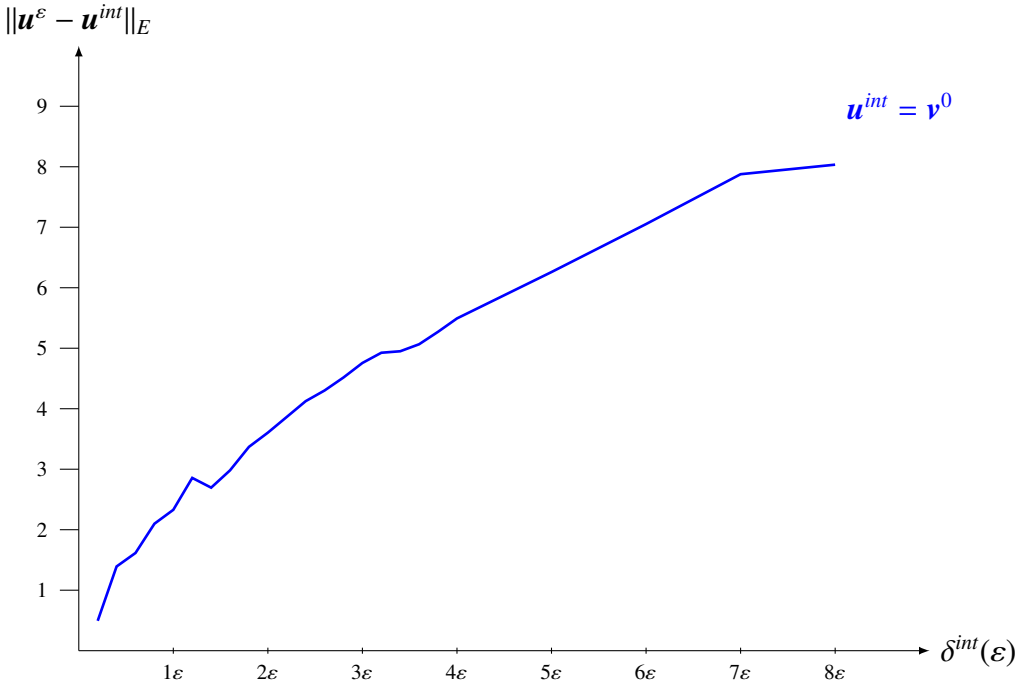


FIGURE 7.13 – Cavités : calcul de $\|\boldsymbol{u}^{\varepsilon} - \boldsymbol{u}^{int}\|_E$ dans $\left([-H, H] \times \delta^{int}(\varepsilon)\right)$ pour $\varepsilon = \frac{1}{20}$

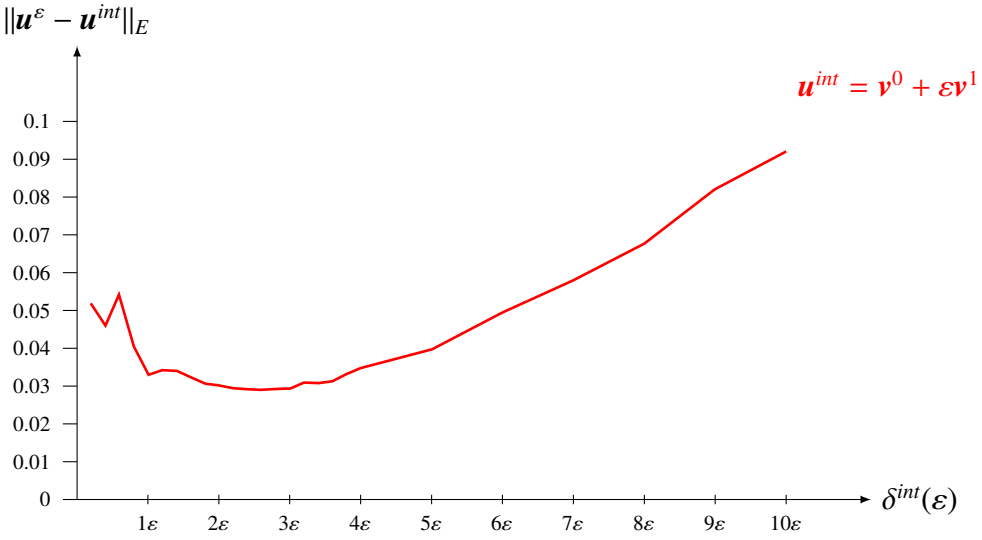


FIGURE 7.14 – Cavités : calcul de $\|\boldsymbol{u}^{\varepsilon} - \boldsymbol{u}^{int}\|_E$ dans $\left([-H, H] \times \delta^{int}(\varepsilon)\right)$ pour $\varepsilon = \frac{1}{80}$.

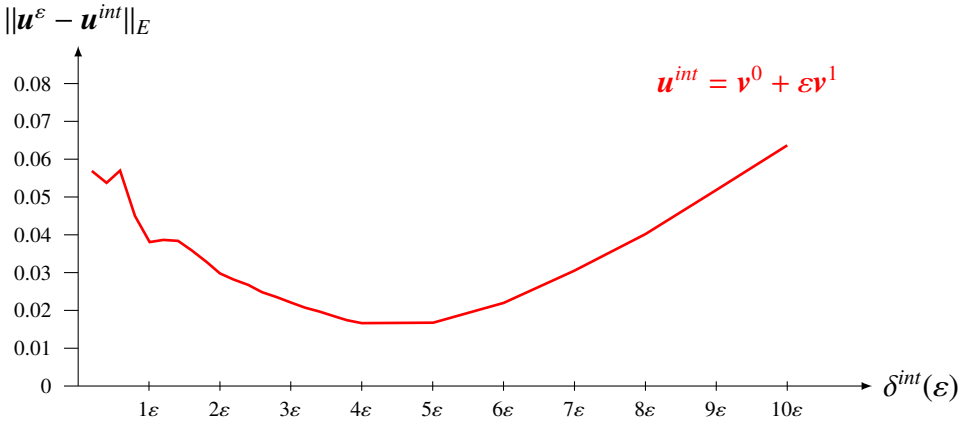


FIGURE 7.15 – Inclusions élastiques : calcul de $\|\boldsymbol{u}^{\varepsilon} - \boldsymbol{u}^{int}\|_E$ dans $\left([-H, H] \times \delta^{int}(\varepsilon)\right)$ pour $\varepsilon = \frac{1}{80}$.

Remarque 7.2.5. *En affichant simultanément $\|\boldsymbol{u}^{\varepsilon} - \boldsymbol{u}^{ext}\|_E$ et $\|\boldsymbol{u}^{\varepsilon} - \boldsymbol{u}^{int}\|_E$, on fait apparaître la zone de raccord entre le développement intérieur et le développement extérieur (cf. Figure 7.16).*

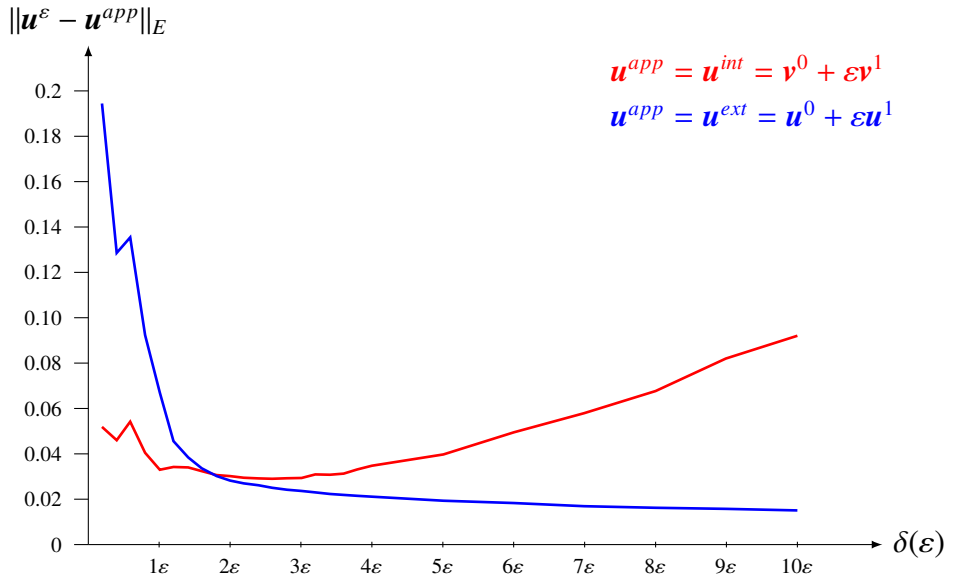
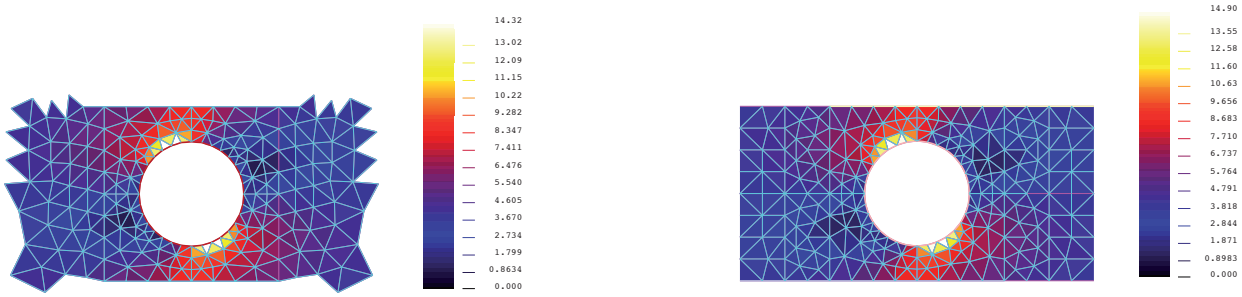


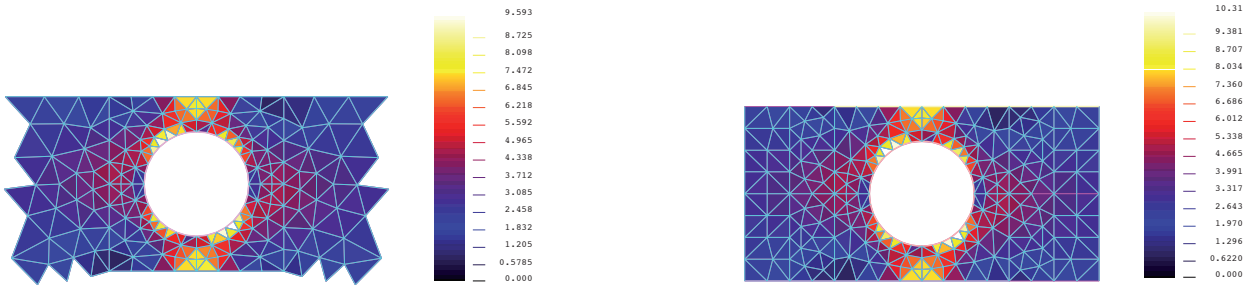
FIGURE 7.16 – Cavités : mise en évidence de la zone de raccord, pour $\varepsilon = \frac{1}{80}$.

A présent, on considère 4 inclusions notées $\mathcal{I}_k^{\varepsilon}$, $k = 1, 2, 3$ *et* 4, repérées par leur centre de coordonnées $(x_1 = 0, x_2^k)$ avec $x_2^k = -20\varepsilon, -\varepsilon, 10\varepsilon,$ *et* 30ε. On note $\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon,VM}$ (resp. $\boldsymbol{\tau}^{0,VM}$), la contrainte équivalente de Von Mises de $\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon}$ (resp. $\boldsymbol{\tau}^0$). On trace les iso-valeurs de $\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon,VM}$ autour de chaque inclusion $\mathcal{I}_k^{\varepsilon}$ que l'on compare aux iso-valeurs de $\boldsymbol{\tau}^{0,VM}(x_2^k, \boldsymbol{y})$. Cette comparaison est effectuée pour $\varepsilon = 1.25 \cdot 10^{-2}$, dans le cas des cavités puis dans le cas des inclusions élastiques.



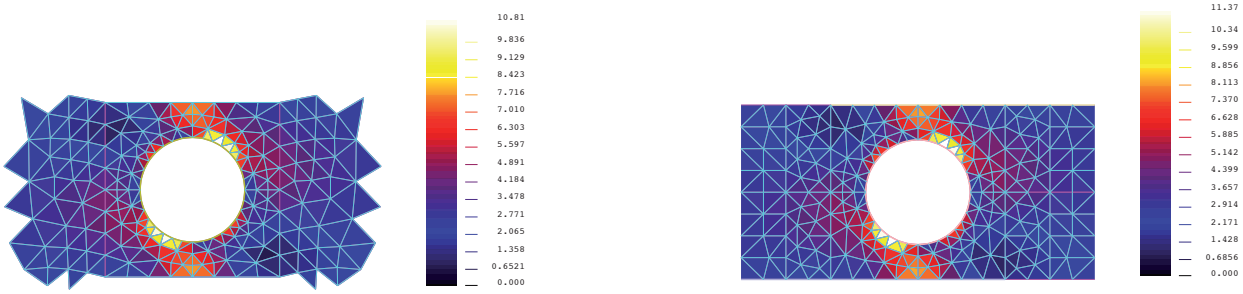
$\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon}$ $\boldsymbol{\tau}^{0}$

(a) Comparaison autour de $\mathcal{I}_1^{\varepsilon}$



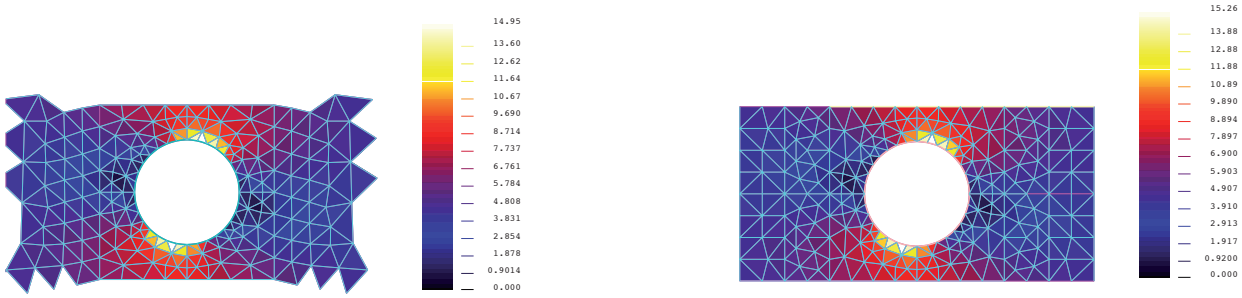
$\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon}$ $\boldsymbol{\tau}^{0}$

(b) Comparaison autour de $\mathcal{I}_2^{\varepsilon}$



$\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon}$ $\boldsymbol{\tau}^{0}$

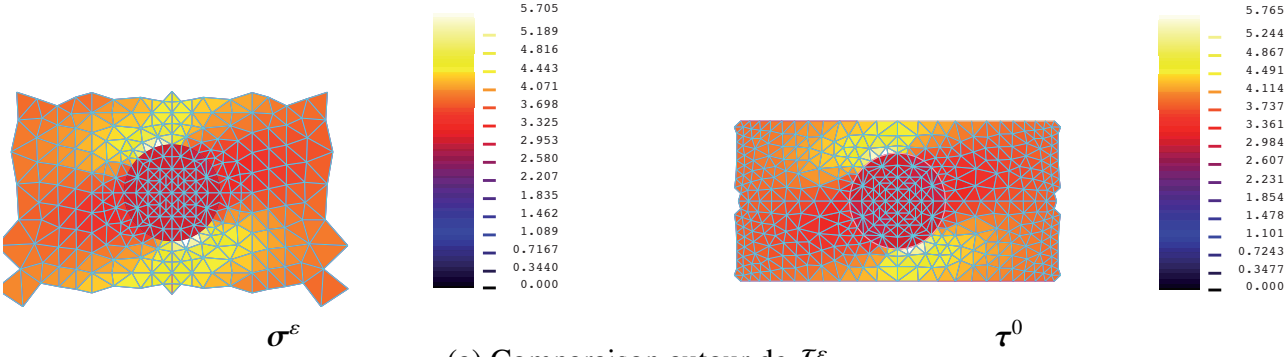
(c) Comparaison autour de $\mathcal{I}_3^{\varepsilon}$



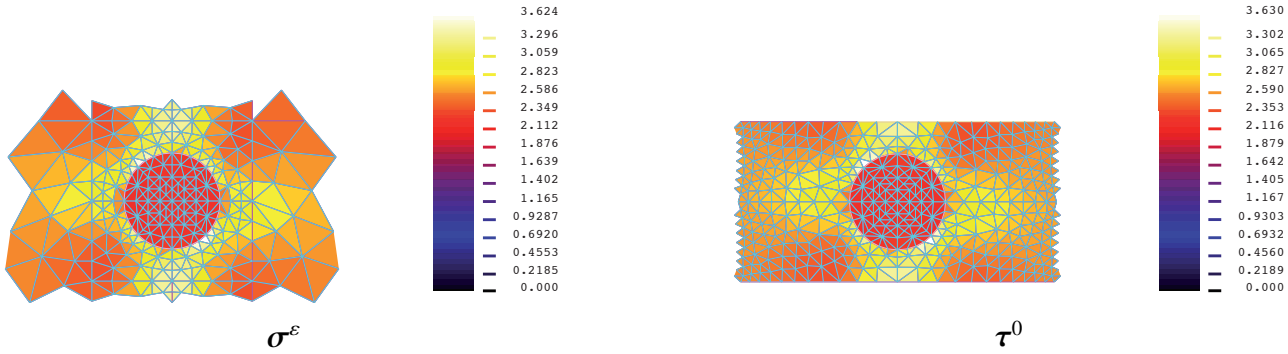
$\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon}$ $\boldsymbol{\tau}^{0}$

(d) Comparaison autour de $\mathcal{I}_4^{\varepsilon}$

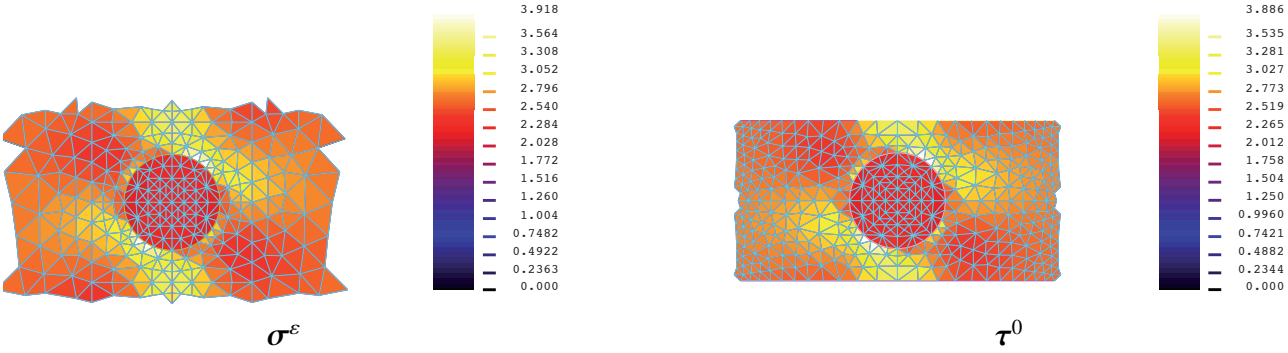
FIGURE 7.17 – Comparaison de $\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\tau}^{0}$ dans le cas des cavités.



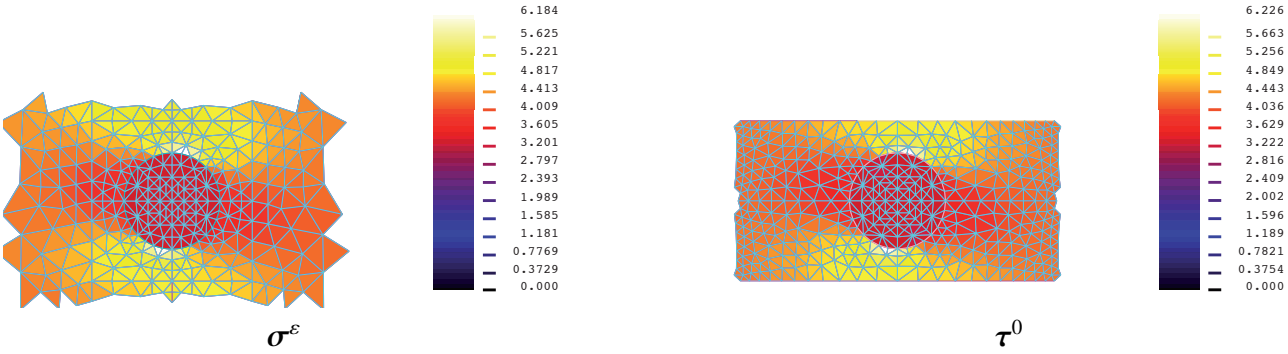
(a) Comparaison autour de $\mathcal{I}_1^{\varepsilon}$



(b) Comparaison autour de $\mathcal{I}_2^{\varepsilon}$



(c) Comparaison autour de $\mathcal{I}_3^{\varepsilon}$



(d) Comparaison autour de $\mathcal{I}_4^{\varepsilon}$

FIGURE 7.18 – Comparaison de $\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\tau}^{0}$ dans le cas d'inclusions $\varepsilon^{p=0}$-élastiques ($E^I = 0.5E$).

Conclusion

Principaux résultats

La première partie a été consacrée à l'analyse asymptotique des problèmes de couches minces hétérogènes, dans le cadre de l'élasticité linéaire. En utilisant la méthode des développements asymptotiques raccordés, le comportement asymptotique de ces problèmes est obtenu en introduisant deux développements : un premier, appelé développement extérieur, qui caractérise le comportement macroscopique de la structure, et un second, appelé développement intérieur, qui traduit le comportement microscopique de la couche d'hétérogénéités. La compatibilité de ces deux développements est assurée par des conditions de raccord adéquates, qui, d'un certain point de vue, permettent d'assurer également la régularité de la solution asymptotique.

Les cas des inclusions élastiques, de rigidité du même ordre que celle de la structure, et des inclusions souples ont été étudiés simultanément dans le chapitre 3. Dans ces deux cas, l'influence des hétérogénéités sur le comportement macroscopique de la structure apparaît au second ordre du développement asymptotique.
Pour le cas des inclusions de rigidité du même ordre que celle de la structure, les résultats sont en accord avec ceux obtenus par *David et al.* [14]. Pour le cas des inclusions souples, le modèle asymptotique est semblable à celui obtenu dans le cas des cavités, cas étudié dans le chapitre 4.
Dans le chapitre 5, nous nous sommes intéressés à l'étude des inclusions de grande rigidité. Les résultats, présentés dans le cas plus simple de la thermique, montrent également une influence des hétérogénéités qu'au second ordre du développement extérieur.

Le cas des cavités a été publié dans la revue *Journal for Multiscale Computational Engineering*.
Le cas des inclusions élastiques est en cours de rédaction et sera soumis prochainement.

L'étude numérique des résultats de l'analyse asymptotique a fait l'objet de la deuxième partie de cette thèse.
L'implémentation des modèles asymptotiques, dans le cas des inclusions élastiques, de rigidité du même ordre que celle de la structure, et le cas des cavités a été réalisée et a permis de valider les résultats obtenus. Les points clés de cette implémentation ainsi que les résultats de la validation ont été présentés dans le chapitre 7.
L'étude numérique a permis de concevoir une nouvelle méthode de résolution pour ce type de problème. Cette méthode consiste à résoudre les problèmes de cellule, à résoudre, sur

un maillage grossier, les problèmes extérieurs d'ordre 0 et 1, puis à reconstruire la solution du modèle asymptotique.

Perspectives

Une analyse complémentaire, comme celle réalisée par *Abdelmoula et Leger* [1] ou *Abdelmoula et Marigo* [3] , permettrait d'enrichir les différents modèles asymptotiques en étudiant les singularités qui apparaissent sur le bord de l'interface ω et qui n'ont pas été considérées dans notre étude. De plus, la prise en compte de la perte de périodicité des champs intérieurs permettrait de donner une meilleure approximation des champs locaux dans les zones proches du bord de la structure.

L'étude des inclusions élastiques de grande rigidité a présenté des difficultés qui n'ont pas permis d'aboutir au modèle asymptotique correspondant. Dans le cas scalaire plus simple, comme celui de la thermique stationnaire, l'étude asymptotique a été réalisée dans le cas où le rapport entre les coefficients de conductivité des inclusions et les coefficients du milieu environnant est d'ordre ε^{-1}. Les résultats montrent un comportement asymptotique semblable à celui obtenu dans le cas des inclusions ε^p-élastiques, $p > 0$, i.e. l'influence des hétérogénéités n'apparaît qu'au second ordre du développement extérieur.
On notera, qu'une étude numérique, par une méthode éléments finis standard, a été réalisée dans le cas des inclusions élastiques de grande rigidité. Cette étude a montré un comportement macroscopique de la structure qui suggère un modèle asymptotique probablement différent des autres cas lorsque la rigidité est très grande (inclusions quasi-indéformables). En effet, pour des valeurs faibles de p le comportement semble en adéquation avec les premiers résultats déterminés dans le chapitre 5. Par contre pour $|p|$ très grand, c'est à dire pour des hétérogénéités quasiment rigides, un phénomène de charnière apparaît (voir figure 7.19). Le comportement de la structure est alors, dans ce cas, sensiblement différent de celui de la structure saine (sans hétérogénéités). Cette constatation suggère que, à la différence du cas des inclusions ε^p-élastiques, $p \geq 0$, du cas des inclusions ε^p-élastiques, $p < 0$ et $|p|$ pas trop grand, et du cas des cavités, l'influence des inclusions de très grande rigidité devrait apparaître dès le premier ordre du développement asymptotique.

La visualisation des contraintes (contraintes de Von Mises) autour des inclusions permet de confirmer les constatations précédentes et apporte une information complémentaire. En effet, comme on peut le voir sur la figure 7.20, la valeur des contraintes et leur distribution sont significativement différentes de part et d'autre de la rangée d'inclusions. Ceci suggère que, dans le modèle asymptotique, le saut du vecteur contrainte est probablement non nul dès le premier ordre du développement asymptotique extérieur.

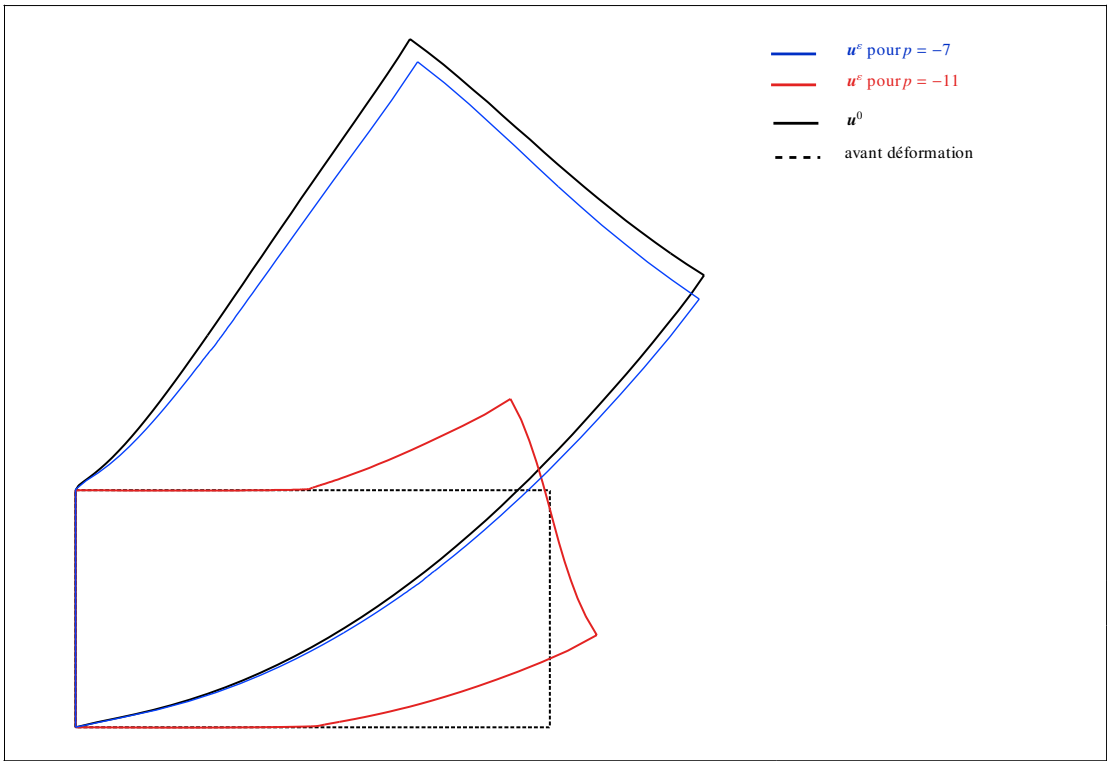


FIGURE 7.19 – Allures des déformées (amplifiées) pour différentes valeurs de p.

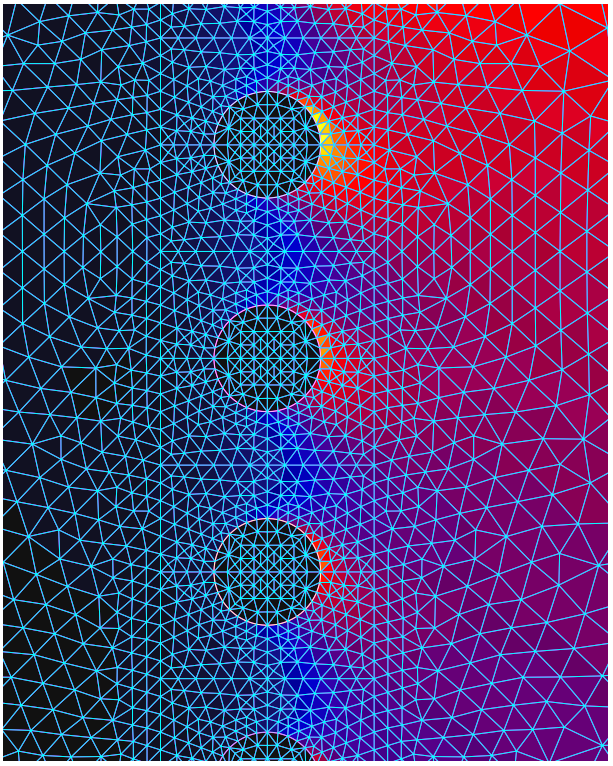


FIGURE 7.20 – Isovaleurs des contraintes de Von Mises dans le cas $p = -11$.

Bibliographie

[1] R. Abdelmoula, L. Leger. *Local and global effects of small holes periodically distributed on a surface embedded in an axisymmetrical elastic medium*. European Journal of Mechanics A/Solids 24 (2005) 89–109.

[2] R. Abdelmoula, M. Coutris, J. J. Marigo. *Comportement asymptotique d'une interphase élastique mince*. Compte Rendu Académie des Sciences Série II 326 (1998) 237 ?242.

[3] R. Abdelmoula, J. J. Marigo. *The effective behavior of a fiber bridged crack*. J. Mech. Phys. Solids 48(11), 2419 – 2444, 2000.

[4] Y. Bamberger. *Mécanique de l'ingénieur : Systèmes de corps rigides*. Hermann, 1981.

[5] K.J. Bathe. *Finite element procedures* Prentice Hall, 1996.

[6] A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North holland, Amsterdam, 1978.

[7] A.L. Bessoud, F. Krasucki. *Q-superlinear convergence of the GMRES algorithm for multi-materials with strong interface*. C. R. Acad. Sc. Paris, s. I, vol 343, 279–282, 2006.

[8] A.L. Bessoud, F. Krasucki, M. Serpilli. *Plate-like and shell-like inclusions with high rigidity*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 346, 697–702, 2008.

[9] A. L. Bessoud, F. Krasucki and G. Michaille. *Multi-materials with strong interface : variational modelings*. Asymptotic Analysis, vol 61, n1, 1-19, 2009.

[10] D. Caillerie. *The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body*. Math. Methods Appl. Sci., 2 : 251–270, 1980.

[11] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[12] D. Cioranescu, P. Donato. *An introduction to homogenization*. Oxford Lecture Series in Mathematics and Applications 17, Oxford, 1999.

[13] R. Courant, D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*. vol. II, Interscience, pag. 227, 1962.

[14] M. David, J.J. Marigo, C. Pideri. *Homogenized Interface Model Describing Inhomogeneities Localized on a Surface*. J. of Elasticity, 2012.

[15] G. Duvaut, J.L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*, Paris, Dunod, 1972.

[16] G. Duvaut. *Mécanique des milieux continus*. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, 1990.

[17] A. Ern, J.L. Guermond. *Eléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*. Mathématiques et applications (36), Springer/SMAI, 2002.

[18] S. Forte, M. Vianello. *Symmetry Classes for Elasticity Tensors*, J. of Elasticity, 43, 81-108, 1996.

[19] M. François, G. Geymonat, Y. Berthaud. *Determination of the symmetries of an experimentally determined stiffness tensor : application to acoustic measurements*. Int. J. Solids Structures, 35, 4091-4106,1998.

[20] G. Geymonat, F. Krasucki, S. Lenci. *Mathematical analysis of a bounded joint with a soft adhesive*. Math. Mech. Solids, 4 : 201–225, 1999.

[21] G. Geymonat, F. Krasucki, D. Marini, M. Vidrascu. *A domain decomposition method for a bonded structure*. Math. Models Methods Appl. Sci., 8 (1998), pp. 1387–1402

[22] G. Geymonat, S. Hendili, F. Krasucki et M. Vidrascu. *The matched asymptotic expansion for the computation of the effective behavior of an elastic structure with a thin layer of holes*. Journal for Multiscale Computational Engineering, 2011.

[23] M.Golubitsky, I.Stewart, D.G.Schaeffer. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Volume II*. Springer-Verlag, 1988.

[24] E. Isaacson, H.B. Keller. *Analysis of numerical methods*. J.Wiley, 1966.

[25] F. Lebon, R. Rizzoni. *Asymptotic analysis of a thin interface : The case involving similar rigidity*. International Journal of Engineering Science 48 (2010) 473–486

[26] P. Le Tallec. *Domain decomposition methods in computational mechanics*. Computational Mechanics Advances, Elsevier Science, 1994.

[27] P. Le Tallec. *Modélisation et calcul des milieux continus*. Éditions de l'école polytechnique, 2009.

[28] C. Licht, G. Michaille. *A modeling of elastic adhesive bounded joints*. Adv. Math. Sci. Appl.,7(2) : 711–740, 1997.

[29] J.J. Marigo, C. Pideri. *The effective behavior of elastic bodies containing microcracks or microholes localized on a surface*. International Journal of Damage Mechanics, 2011.

[30] G. Nguetseng, E. Sanchez-Palencia. *Stress concentration for defects distributed near a surface*. P. Ladevèze (ed.) : Local Effects in the Analysis of Structures. Elsevier, Amsterdam, 1986, 55-74.

[31] A. Ralston. *A first course in numerical analysis*. McGraw-Hill, 1985.

[32] J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia. *Vibration and coupling of continuous systems. Asymptotic Methods*. Springer Verlag, 1989.

[33] J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia. *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation - Application à la mécanique des milieux continus*. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, 1992.

[34] E. Sanchez-Palencia. *Nonhomogeneous media and vibration theory*. Springer Verlag, Berlin, 1980.

[35] E. Sanchez-Palencia. *Elastic body with defects distributed near a surface*, In : Homogenization Techniques for Composite Media. Springer Verlag (1986)

[36] E. Sanchez-Palencia. *Un problème d'écoulement lent d'un fluide incompressible au travers d'une paroi finement perforée*. Dans : Les méthodes de l'homogénéisation : théorie et applications en physique, Ecole d'été d'analyse numérique (CEA-EDF-INRIA), Eyrolles, 1985.

[37] J. Stoer, R. Bulirsch. *Introduction to numerical analysis*. Springer-Verlag, 1980.

[38] P. Suquet. *Discontinuities and plasticity*. In : J. J. Moreau and P. D. Panagiotopoulos, editors, Non-Smooth Mechanics and Applications, CISM Courses and Lectures, pages 280–340, Springer-Verlag, Wien, 1988.

[39] S. Tordeux. *Méthodes Asymptotiques pour la Propagation des Ondes dans les Milieux comportant des Fentes*. Thèse de doctorat, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, 2004.

[40] A. Toselli, O. Widlund. *Domain Decomposition Methods - Algorithms and Theory*. Springer Series in Computational Mathematics, Springer, 2005.

[41] M. Van Dyke. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Academic Press, New York, 1964.