



HAL
open science

Turbulence, transport et confinement : des tokamaks au magnétisme des étoiles

Antoine Strugarek

► **To cite this version:**

Antoine Strugarek. Turbulence, transport et confinement : des tokamaks au magnétisme des étoiles. Astrophysique stellaire et solaire [astro-ph.SR]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2012. Français. NNT : . tel-00765706

HAL Id: tel-00765706

<https://theses.hal.science/tel-00765706>

Submitted on 16 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-DIDEROT (PARIS 7)
ÉCOLE DOCTORALE D'ASTRONOMIE ET D'ASTROPHYSIQUE D'ÎLE-DE-FRANCE

THÈSE DE DOCTORAT

présentée pour obtenir le grade de

docteur de l'Université Paris-Diderot
Spécialité : Astronomie et Astrophysique

par

ANTOINE STRUGAREK

Turbulence, transport et confinement : des tokamaks au magnétisme des étoiles

Thèse dirigée par Allan Sacha Brun et Yanick Sarazin
Soutenue le 19 novembre 2012

Jury composé de :

Pr. Sébastien CHARNOZ Président
Pr. Annick POUQUET Rapportrice
Pr. Laurent VILLARD Rapporteur
Dr. Allan Sacha BRUN Directeur de thèse
Dr. Xavier GARBET Examinateur
Dr. Yanick SARAZIN Responsable CEA
Dr. Jean-Paul ZAHN Examinateur

Service d'Astrophysique, IRFU/DSM/CEA – Saclay
Service Chauffage et Confinement du Plasma, IRFM/DSM/CEA – Cadarache
antoine.strugarek@cea.fr

“Un instant Swann sentit que son esprit s’obscurcissait et il pensa à autre chose pour retrouver un peu de lumière. Puis il eut le courage de revenir vers ces réflexions.”

Marcel Proust, *Un amour de Swann*

Résumé

Cette thèse s'inscrit dans le contexte de l'étude de l'auto-organisation des plasmas chauds magnétisés. Nous nous intéressons en particulier aux deux objets que sont les étoiles et les tokamaks. Nous les étudions à l'aide de simulations numériques en utilisant des codes *premiers principes* dans le contexte des phénomènes de turbulence, de transport et de confinement dans les plasmas.

La première partie de cette thèse s'attache à donner une introduction sur les caractéristiques des plasmas des étoiles et des tokamaks, ainsi que sur les raisons qui nous ont poussé à les étudier conjointement.

Puis, nous développons en deuxième partie des travaux appliqués aux étoiles. A l'aide de simulations numériques, nous étudions pour la première fois en géométrie sphérique et en 3D l'interaction des mouvements turbulents avec un champ magnétique interne dans le Soleil, dans la région de la tachocline qui agit comme une barrière de transport du moment cinétique. Nous montrons qu'un tel champ magnétique ne peut expliquer l'épaisseur de la tachocline que nous observons, et donnons des pistes de réflexion pour comprendre cette épaisseur. Nous explorons également dans cette partie les implications que l'environnement d'une étoile (en particulier le vent de l'étoile, et les planètes gravitant autour) peut avoir sur son organisation interne. Cette étude nous permet aussi d'étudier l'interaction des vents stellaires avec les magnétosphères planétaires qui agissent comme des barrières de transport pour la matière.

Des travaux spécifiques aux tokamaks sont ensuite présentés dans une troisième partie. Nous y développons une étude numérique des mécanismes expérimentaux conduisant à la création de barrières de transport dans les tokamaks. Ces barrières de transport permettent l'accès à des régimes de fusion nucléaire performants. Pour la première fois, nous montrons théoriquement comment déclencher la formation de ces barrières dans des simulations turbulentes de codes premiers principes.

Enfin, la dernière partie présente les résultats des réflexions communes issue de cette thèse faisant le pont entre deux communautés scientifiques. L'utilisation d'une méthode spectrale originale pour l'analyse de phénomènes multi-échelles y est exposée. Elle est successivement développée puis appliquée pour mettre en évidence les mécanismes de saturation de la dynamo stellaire et de l'instabilité du gradient de température ionique dans les tokamaks. Un modèle unique traitant de l'interaction entre la turbulence et les écoulements de grande échelle est ensuite développé à la fois dans le contexte de la tachocline solaire et dans celui des tokamaks, formalisant l'analogie qui existe entre les deux objets de notre étude.

Abstract

This thesis is part of the general study of self-organization in hot and magnetized plasmas. We focus our work on two specific objects : stars and tokamaks. We use first principle numerical simulations to study turbulence, transport and confinement in these plasmas.

The first part of this thesis introduces the main characteristics of stellar and tokamak plasmas. The reasons for studying them together are properly detailed.

The second part is focused on stellar aspects. We study the interactions between the 3D turbulent motions in the solar convection zone with an internal magnetic field in the tachocline (the transition region between the unstable and stable zones in the Sun). The tachocline is a very thin layer (less than five percent of the solar radius) that acts as a transport barrier of angular momentum. We show that such an internal magnetic field is not likely to explain the observed thickness of the tachocline and we give some insights on how to find alternative mechanisms to constrain it. We also explore the effect of the environment of star on its structure. We develop a methodology to study the influence of stellar wind and of the magnetic coupling of a star with its orbiting planets. We use the same methodology to analyse the magnetic interaction between a stellar wind and a planetary magnetosphere that acts as a transport barrier of matter.

Then, the third part is dedicated to fusion oriented research. We present a numerical investigation on the experimental mechanisms that lead to the development of transport barriers in the plasma. These barriers are particularly important for the design of high performance fusion devices. The creation of transport barriers is obtained in turbulent first principle simulations for the very first time.

The collaboration between the two scientific teams lead to the results presented in the fourth part of this thesis. An original spectral method is developed to analyse the saturation of stellar convective dynamos and of the ion temperature gradient instability. We also develop a reduced model that tackles the interaction between turbulent motions, waves, and zonal and mean flows. The same model is applied to both the solar tachocline and tokamak turbulence, putting forth the strong analogy that exists between the two objects we studied.

Que soient ici très chaleureusement remerciés

Les membres de mon jury de thèse, à commencer par Annick Pouquet et Laurent Villard qui ont gentiment accepté la lourde tâche de relire ces quelques pages. Merci à eux pour leurs encouragements et leurs questions pertinentes sur les diverses parties de ce manuscrit. Merci à Sébastien, qui a bien voulu être le président d'un jury alliant astrophysiciens et physiciens des tokamaks, et dont les encouragements et l'intérêt qu'il a porté à ma thèse m'ont beaucoup touché. Je souhaite également remercier ici Xavier et Jean-Paul, avec qui j'ai eu le plaisir et le privilège d'interagir au cours des ces trois années de thèse. Vous m'avez tous deux beaucoup éclairé dans ma recherche, chacun à votre façon, sachez donc que je vous en suis extrêmement reconnaissant et espère continuer à travailler avec vous encore longtemps.

Enfin, je veux remercier tout particulièrement Yanick et Sacha, mes deux "papas" scientifiques sans qui cette thèse n'aurait jamais vu le jour. Je pense qu'il est inutile ici de décrire à quel point j'ai appris la physique à votre contact, c'est également grâce à vous que j'ai passé trois années aussi riches, intenses et passionnantes. Vous avez tous deux fait émerger en moi une envie irrépressible de continuer à chercher, comprendre et s'interroger. Merci aussi pour l'amitié que vous m'avez témoignée, qui me va droit au coeur.

Mes deux laboratoires d'accueil, l'IRFU et plus particulièrement le SAp et l'IRFM. Un grand merci à Pierre-Olivier Lagage, Michel Talvard, Alain Bécoulet et Xavier Litaudon. Merci d'avoir accepté de croire en ce projet de thèse commun entre les deux laboratoires, et d'avoir accepté de financer mes incessants aller-retour Paris-Aix en Provence ainsi que mon logement dans le sud de la France. Votre soutien et l'intérêt que vous avez montré pour mon travail lors des "présentations des thésards" annuelles m'ont poussé à me dépasser. Merci aussi à Dominique Monvoisin, Pascale Chavegrand, Christine Toutain, Valérie Icard et Stéphanie Beauvils pour leur aide indispensable au cours de ces trois années dans l'organisation de mes missions, des mes allers-retour Saclay-Cadarache et des complexités administratives liées à mon double statut.

Le "french ASH-mob", et plus largement les membres du LDEE, pour leur précieuse aide et de nombreuses discussions qui ont permis à cette thèse de largement s'étoffer. A commencer par Rui et Sean, mes "grands-frères" scientifiques avec qui il fut un plaisir de travailler, échanger et faire des dîners. Stéphane, avec qui j'ai eu la joie de découvrir en profondeur les subtilités des harmoniques sphériques, j'espère que nous pourrons travailler ensemble encore longtemps. Rafa et Vincent, pour leur soutien sans faille et leurs encouragements. Enfin, mes camarades thésards, Olivier-Long il faudra que l'on fasse le compte des cafés (t'es sérieux ?), et Lucie ma petite soeur de l'ENSTA à qui je souhaite de s'amuser autant que moi dans ce monde merveilleux des étoiles. Je tiens également à remercier ici l' "ASH-mob" originel, à commencer par le professeur Juri Toomre, pour son accueil et sa gentillesse. Merci à Mark Miesch, Nick Featherstone, Matt Browning, Ben Brown et Kyle Augustson. J'espère vous revoir à Boulder ou ailleurs, merci pour votre aide et vos commentaires bienveillants.

L'équipe GYSELA, Virginie pour son indispensable soutien et les désormais fameuses "Nuits de Villelaure" (mention spéciale à la (aux) cave(s) de Cyril); Philippe pour son exigence bienveillante; Guillaume pour la hotline de haut niveau et le côté mac; Chantal pour son travail de fond que peu de personnes voient et sans qui peu de choses seraient si simples à faire; Guilhem pour ses conseils avisés, sa perspicacité, le Cellini et les cigares. L'accueil que vous m'avez réservé au 513 a beaucoup participé à la réussite de cette thèse et je vous en suis très reconnaissant.

Bruno et Daniel, les "as" du 3D sans qui ma soutenance aurait manqué de relief. Merci pour l'aide enthousiaste que vous m'avez procurée au cours des ces trois années.

Le nombreux thésards que j'ai rencontré pendant ces trois années. A commencer par mes co-bureaux du plateau, jfaure et ptrembli. Pour l'animation et la science, pour les cafés-paris, les noobs (fped) et j'en passe, partager votre bureau aura été une grande joie. Que de beau monde à Cadarache, qu'il me fera toujours chaud au coeur de considérer comme "aixois". A commencer par les anciens, Jérémie avec qui j'ai fait mes premiers pas gyro-moyennés. Pour les sextius, les voix du Gaou, le brigand, et tant d'autres, je te remercie ! Comme tu le sais ma porte est toujours ouverte, il me tarde déjà de venir faire un petit tour à Munich. David, pour ta bonne humeur matinale et les planchas en veux tu en voilà, j'ai beaucoup apprécié travailler avec toi. Merci à Hugo-barbeuc-transpotting-Eguilles-cigarillos (sans compte l'arrachée-tennis). Merci à Antoine, pour les fameuses soirées PS3. Viennent ensuite les petits jeunes, ce fut un plaisir de vous côtoyer lors de mes séjours sudistes. Merci à François (qui ne devrait certainement pas être considéré comme "jeune" au 513) pour avoir su apprécier à leur juste valeur mes chaussures, pour le goût des couleurs et sa (réelle, si si) finesse. Merci à Didou & Timo, pour leur incroyable générosité, pour toutes nos discussions et pour leur talent Diplomatique. Merci à Greg pour m'avoir pris ma place pour Radiohead et pour l'intonation chantante de notre région natale. Merci à PVC, digne successeur de bureau, dont les questions feront toujours mouche. Merci à Yue, pour reprendre le flambeau des soirées de départ et d'arrivée, nous continuerons à travailler ensemble c'est certain. Merci enfin à Thomas Orain et Florian, éternels locataires du Jazz' de Bouffan, pour toutes ces splendides soirées passées ensemble à Aix ou à Berlin.

Tous mes amis qui m'ont permis de sortir de ma bulle pendant cette thèse, peu de place ici pour dire à quel point vous avez compté ces trois dernières années, vous êtes tous au TOP ! Un grand merci aux ENSTA, Mathieu et Sophie pour les dixit au vin rouge, le rhum bien arrangé et les cocktails à l'eau, Tom et Véro pour le bus du matin et Ponyo, Taleski et Rémy pour le bridge et le squash, Marie et Romain pour la mirabelle, et Anne pour les kinder. Merci à Anne-Claire, soeur thésarde, pour la veille informatique du Gangnam style (bon courage pour la suite !). Un immense merci aux jmjistes, les Chols, duo de spécialiste en raclée carcassonnaise, pour leur constante amitié et le soutien psychologique à toute heure, et Chol pour la relecture d'une bonne partie de ce manuscrit. Les Zallards, Bergeracs, Marie-Liesse et Manu, Baptiste, Vincent, pour le nouvel an et les nombreux à venir. Merci enfin au PESABIMAO, pour avoir accueilli un scientifique dans ce groupe d'ESSEC.

Ma famille : mes parents, qui ont soutenu ce projet d'un bout à l'autre et qui ont cru en moi. Mes frères, Cyrille, pour ce magnifique chemin que tu avais tracé avant moi et Martin, je te souhaite si le coeur t'en dit de te lancer également dans l'aventure. Merci Clotilde, seule "vraie" docteur de la fratrie, pour tous tes encouragements, tu es bientôt au bout aussi maintenant ! Merci également à ma belle-famille, la "meute" Descout, à commencer par Catherine et Dominique pour n'avoir pas eu peur d'un étrange astrophysicien. Merci à ma belle-fratrie, et aux valeurs ajoutées, votre intérêt pour ma thèse m'a beaucoup touché. Hélas, vous ne trouverez pas ici de prédiction météo de Monsieur Soleil ni de recette miracle pour les éoliennes.

Constance, pour ton soutien, ta force et ton amour. Pour la relecture de ce manuscrit aussi, et pour avoir supporté tous mes allers-retour dans le sud pendant ces trois années. Vivement la suite !

I	Turbulence, transport et confinement dans les plasmas chauds magnétisés : Introduction au Soleil et aux Tokamaks	9
1	Introduction	10
1.1	Le Soleil et les tokamaks comme des plasmas turbulents	10
1.1.1	Qu'est-ce qu'un plasma ?	10
1.1.2	Origine de la turbulence dans un plasma	12
1.1.3	Auto-organisation des plasmas	13
1.2	Régimes de paramètres et modélisations	14
1.2.1	Paramètres plasmas	15
1.2.2	Modélisation des plasmas	16
1.2.3	Etoiles : l'approche magnétohydrodynamique	19
1.2.4	Tokamaks : l'approche cinétique	22
1.3	Organisation du manuscrit	25
2	Turbulence, magnétisme et rotation dans le Soleil	27
2.1	Qu'est-ce qu'une étoile ?	27
2.1.1	Le diagramme HR	27
2.1.2	Structure interne d'une étoile	29
2.1.3	L'atmosphère stellaire	31
2.2	Caractéristiques particulières de notre étoile	32
2.2.1	Ecoulements moyens et tachocline	32
2.2.2	Champ magnétique et cycle de 11 ans	35
3	Turbulence, confinement et performance dans les tokamaks	38
3.1	Qu'est-ce qu'un tokamak ?	38
3.1.1	Concept du tokamak	38
3.1.2	Instabilités dans un tokamak	40
3.2	Confinement et auto-organisation des plasmas de tokamak	42
3.2.1	Ecoulements dans un tokamak	42
3.2.2	Barrières de transport	44
II	Transport et turbulence magnétohydrodynamique dans les étoiles	46
4	Confinement de la tachocline	47
4.1	Contexte et théories	47
4.1.1	Tachocline et turbulence anisotrope	47
4.1.2	Tachocline et magnétisme interne	48
4.1.3	Autres idées proposées dans la littérature	50
4.2	Les modèles magnétiques	51
4.2.1	Simuler une étoile complète en 3D	51
4.2.2	Simulations globales du scénario magnétique	55
4.2.3	Extension à diverses topologies magnétiques	57
	Conclusions	62

5	Interactions magnétiques d'un vent stellaire et d'une magnétosphère planétaire	86
5.1	Modéliser les vents stellaires	86
5.1.1	De l'inévitabilité du vent stellaire	86
5.1.2	Simuler des vents par l'approche magnétohydrodynamique	89
5.2	Modéliser une planète	96
5.2.1	Modèles planétaires existants	96
5.2.2	Méthodologie de modélisation	96
5.2.3	Interactions magnétiques étoiles-planètes	98
	Conclusions	100
III	Barrières de transport dans les tokamaks	103
6	Du choix de la topologie magnétique	104
6.1	Stabilisation de la turbulence par un cisaillement magnétique	104
6.1.1	Résonance et transport à grande échelle	105
6.1.2	La limite cinétique	105
6.1.3	La limite hydrodynamique	107
6.2	Le cas du profil de q inversé	110
6.2.1	Données expérimentales	110
6.2.2	Simulations numériques	111
6.2.3	Simulations gyrocinétiques globales de la turbulence ITG avec profil inversé	113
	Conclusions	116
7	Cisaillement de rotation et barrières de transport	127
7.1	Écoulements cisailés dans les plasmas de tokamak	127
7.1.1	Écoulements cisailés et barrières de transport expérimentales	127
7.1.2	Génération d'écoulements cisailés dans un tokamak	128
7.1.3	Stabilisation de la turbulence par un écoulement cisailé	130
7.1.4	Écoulements cisailés et bifurcation vers une barrière de transport	130
7.2	Imposer un cisaillement dans une simulation gyrocinétique	133
7.2.1	Prescription d'un écoulement	133
7.2.2	Construction d'une source de vortacité	134
7.2.3	Création d'une barrière de transport	137
	Conclusions	142
IV	Deux systèmes distincts, une physique commune	145
8	Apport de l'analyse spectrale pour l'étude de phénomènes multi-échelles	146
8.1	Analyser les interactions multi-échelles	146
8.1.1	De la puissance des méthodes d'analyse spectrale	146
8.1.2	Méthodologie de l'analyse spectrale	147
8.2	Auto-organisation du champ magnétique dans la dynamo solaire	148
8.2.1	Analyse spectrale dans le formalisme MHD	148
8.2.2	Création de grandes échelles dans la dynamo stellaire	155
8.3	Excitation de la turbulence gyrocinétique	163
8.3.1	Analyse spectrale dans le formalisme gyrocinétique	163
8.3.2	Dynamique des modes résonants et saturation de l'instabilité ITG	166

9	L'appui des modèles réduits	196
9.1	Ecoulements zonaux, turbulence et ondes de dérive	196
9.2	Ecoulements zonaux, turbulence et ondes de gravité	198
9.3	Perspectives	202
10	Conclusions et Perspectives	204
A	Notations et symboles	229
A.1	Systèmes de coordonnées	229
A.2	Symboles	231
A.3	Nombres sans dimension	232
B	Le code ASH (Anelastic Spherical Harmonics)	233
C	Le code GYSELA (GYrokinetic SEmi-LAgrangian)	236
D	Le code PLUTO	238
E	L'instabilité ITG-slab	240
E.1	Modèle cinétique	240
E.2	Modèle fluide	242
F	Échange d'énergie Ondes/Particules	246
G	Calcul des modes résonnants en géométrie torique dans la limite hydrodynamique et ballonnement	248
G.1	Représentation de ballonnement	248
G.1.1	Pincement des lignes de champ et périodicité	248
G.1.2	Le potentiel de ballonnement	249
G.2	Calcul des modes résonnants	249
H	Trou de surfaces résonnantes dans le cas d'un profil de q inversé	253
I	Polynômes orthogonaux d'Hermite et de Laguerre	254
J	Analyse des harmoniques sphériques	255
J.1	Bases d'harmoniques sphériques	255
J.1.1	Harmoniques sphériques scalaire	255
J.1.2	Harmoniques sphériques vectorielles ($\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}$)	256
J.1.3	Harmoniques sphériques vectorielles \mathbf{Y}	258
J.2	Evolution de l'énergie magnétique	259
J.3	Evolution de l'énergie cinétique	261
J.4	Evolution de l'hélicité magnétique et de l'hélicité croisée	262
K	Hélicité magnétique relative sur une surface sphérique	263
L	Familles dynamos	265

Première partie

**Turbulence, transport et confinement
dans les plasmas chauds magnétisés**

—

Introduction au Soleil et aux Tokamaks

Sommaire

1.1	Le Soleil et les tokamaks comme des plasmas turbulents	10
1.1.1	Qu'est-ce qu'un plasma?	10
1.1.2	Origine de la turbulence dans un plasma	12
1.1.3	Auto-organisation des plasmas	13
1.2	Régimes de paramètres et modélisations	14
1.2.1	Paramètres plasmas	15
1.2.2	Modélisation des plasmas	16
1.2.3	Etoiles : l'approche magnétohydrodynamique	19
1.2.4	Tokamaks : l'approche cinétique	22
1.3	Organisation du manuscrit	25

Cette thèse est dédiée à l'étude de situations physiques où un plasma est capable de s'auto-organiser et de créer une forme de confinement malgré l'existence d'instabilités pouvant s'y opposer. Les travaux présentés ici sont essentiellement appliqués à deux types d'objets physiques : les étoiles et les *tokamaks* (machines destinées à la recherche pour la fusion nucléaire). Nous développons dans ce chapitre introductif les points communs entre ces objets (section 1.1), et par là les raisons qui nous poussent à les étudier ensemble. Puis, nous détaillons leurs principales différences, qui mènent à des choix de modélisation distincts (section 1.2). Enfin, nous décrivons en section 1.3 l'organisation du manuscrit dans son ensemble.

1.1 Le Soleil et les tokamaks comme des plasmas turbulents

1.1.1 Qu'est-ce qu'un plasma ?

Les différents états de la matière sont souvent regroupés en trois familles : *solide*, *liquide* et *gaz*. En 1928, Langmuir introduit le terme de *plasma* pour désigner un quatrième état de la matière. Cet état est similaire à l'état gazeux pour lequel une large portion du gaz est *ionisé*, c'est-à-dire que le gaz est composé d'une population d'électrons et d'une population d'ions bien identifiées. Dans ce cas, la présence d'un nombre non-négligeable de porteurs de charges dans le plasma le rend électriquement conducteur et par conséquent très sensible aux champs électromagnétiques. On distingue les plasmas *chauds*, auxquels nous nous intéresserons dans cette thèse, des plasmas *froids*. Outre leur température, la différence entre les deux tient au nombre d'atomes dans le mélange : le paramètre d'ionisation $\alpha = n_e / (n_e + n_n)$ (où n_e et n_n sont respectivement la densité d'électrons et la densité d'atomes neutres) est proche de l'unité pour les plasmas chauds, et très petit pour les plasmas froids.

Un plasma est d'une part sujet au désordre du fait de l'agitation thermique qui y règne, d'autre part sujet à une certaine auto-organisation par l'aspect dynamique et collectif des interactions coulombiennes. Ces deux tendances peuvent être caractérisées par le paramètre plasma Ξ défini

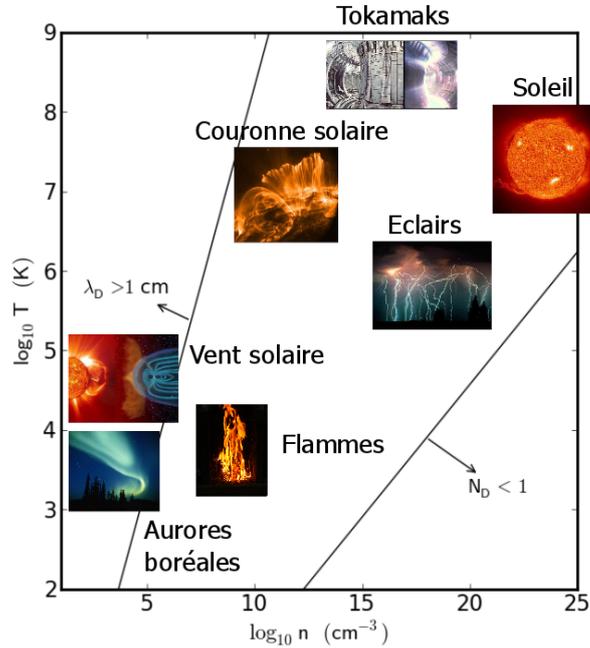


FIGURE 1.1 – Représentation de plasmas naturels et de laboratoire dans un diagramme logarithmique densité de particule (n)/température (T), en unités *cgs*.

comme le rapport de l'énergie potentielle électrostatique à l'énergie thermique du plasma. Il peut se réécrire, en unité *cgs* (que nous utiliserons dans l'ensemble du manuscrit) :

$$\Xi \approx 10^{-5} \left(\frac{n}{10^{12}} \right)^{1/3} \left(\frac{T}{10^6} \right)^{-1}. \quad (1.1)$$

Lorsque Ξ est petit devant 1, le plasma est dit *cinétique* (ou idéal), et est sujet à de nombreuses instabilités. La plupart des plasmas sont des plasmas *cinétiques*. Au contraire, si Ξ est grand devant 1, le plasma est fortement *couplé* et possède une structure très ordonnée. Dans ce manuscrit, nous nous concentrerons sur les plasmas cinétiques.

Bien que peu présent à l'état naturel à la surface terrestre, la majeure partie de la matière barionique de l'Univers est sous la forme de plasma. D'un point de vue astrophysique, la matière composant les étoiles, le milieu interstellaire ou encore la ionosphère terrestre constituent des plasmas. Aujourd'hui, nous sommes également capables de créer divers plasmas en laboratoire, et cet état de la matière s'est même glissé dans notre vie courante dans les lampes à *néon*, ou encore dans les écrans de télévision dits *plasmas*.

On peut représenter généralement les différents types de plasmas existants dans un diagramme "densité - température" (figure 1.1).

Cette figure nous permet d'introduire un paramètre fondamental des plasmas, la *longueur de Debye*

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T}{4\pi n e^2}},$$

où k_B est la constante de Boltzmann, T la température du plasma, n la densité du plasma et e la charge d'un électron. La longueur de Debye définit l'échelle de longueur caractéristique à laquelle les charges électriques écrantent le champ électrostatique dans le plasma. Autrement dit, c'est l'échelle caractéristique maximale à laquelle une séparation de charges peut avoir lieu. On peut alors définir le nombre de particules dans la sphère de Debye par $N_D = \frac{4}{3}\pi n \lambda_D^3$. Les deux droites tracées en figure 1.1 représentent respectivement les droites $\lambda_D = 1$ cm et $N_D = 1$. Les

droites parallèles à ces deux lignes de références sont respectivement des lignes à longueur de Debye et nombre de Debye constants. Les tokamaks, le vent solaire et le plasma solaire occupent des places très différentes dans ce diagramme.

1.1.2 Origine de la turbulence dans un plasma

En plus d'être dans un état de *plasma*, les systèmes que nous étudions dans cette thèse ont le point commun d'être des lieux de propagation d'ondes et de développement d'*instabilités*, pouvant parfois les rendre *turbulents*. Détaillons les mécanismes participant à cette turbulence.

Instabilité convective

Les intérieurs stellaires et les tokamaks sont des systèmes ouverts soumis à un flux de chaleur. Ce système réagit alors pour évacuer l'énergie vers l'extérieur¹. Il existe trois types standards de transport de l'énergie : rayonnement, diffusion et convection (mise en mouvement du système). Dans ce dernier cas, des rouleaux dits *convectifs* se forment pour transporter cette énergie vers l'extérieur du système, et on parle d'instabilité de *convection*.

Cette instabilité est linéaire, elle est généralement reliée au gradient de température local dans le plasma². Le flux de chaleur imposé au système le chauffe, ce qui a pour effet de raidir le gradient de température. Si ce gradient dépasse une valeur critique, l'instabilité de convection se déclenche. L'instabilité linéaire se développe ensuite non-linéairement, on parle alors de *turbulence convective*.

Les processus dissipatifs jouent peu dans le déclenchement de l'instabilité convective dans les tokamaks, ainsi que dans le Soleil. Cependant, les limitations des techniques de simulations numériques actuelles ne permettent pas de s'affranchir complètement des effets dissipatifs, et il est alors naturel d'introduire le nombre de Rayleigh Ra qui représente le rapport du mécanisme à l'origine du mouvement convectif (*e.g.*, la poussée d'Archimède dans le cas du Soleil) sur les processus dissipatifs s'y opposant (diffusion thermique, dissipation visqueuse, collisions de particules, etc...). L'instabilité convective est alors obtenue lorsque le nombre de Rayleigh dépasse une valeur critique Ra_c .

Le spectre de la turbulence ainsi généré diffère du spectra classique de la turbulence hydrodynamique. L'instabilité se déclenche sur une large gamme d'échelles, et il est difficile d'isoler une échelle d'injection d'énergie unique. A très petite échelle, les effets dissipatifs prennent le relais comme c'est le cas dans la turbulence hydrodynamique classique. La jonction entre les très petites échelles et les échelles instables s'effectue *a priori* sur une zone spectrale *inertielle* (stable et très peu dissipée). Ces particularités du spectre turbulent issues d'une instabilité multi-échelle rend les interactions non-linéaires particulièrement riches. L'émergence d'éventuelles grandes échelles (*e.g.*, écoulements zonaux, champ magnétique dynamo, etc...) peut alors s'effectuer *via* un phénomène de cascade inverse des plus petites échelles turbulentes du système vers les grandes, ou bien par couplage direct entre différentes échelles caractéristiques.

La turbulence transporte en tout cas l'énergie vers l'extérieur du système, et elle joue également un rôle essentiel pour le transport d'autres quantités globales telles que le moment cinétique ou les espèces chimiques. Bien comprendre les propriétés de la turbulence devient alors essentiel pour être capable de rendre compte des propriétés globales du système. De plus, l'existence d'un

1. Dans le cas du Soleil, cette énergie est naturellement évacuée de telle sorte que le système s'équilibre. Dans le cas des tokamaks, la problématique est de maîtriser ce flux de chaleur pour le minimiser et ainsi confiner un maximum d'énergie à l'intérieur de la machine (voir chapitre 3).

2. Dans le cas du Soleil, le plasma est fortement stratifié et l'instabilité convective est généralement reliée au gradient d'*entropie* plutôt que de température. Nous nous contentons dans cette introduction de discuter du gradient de température en première approximation, nous renvoyons le lecteur à la section 1.2.3 et aux chapitres 4 et 8 pour une description plus détaillée à ce sujet.

spectre multi-échelle rend nécessaire de modéliser nos système d'étude dans leur ensemble à l'aide de codes globaux (voir section 1.2).

Excitation d'ondes dans un plasma

Les systèmes que nous étudions sont également des lieux d'excitation de diverses ondes susceptibles d'influencer les caractéristiques globales du plasma. De nombreux mécanismes peuvent exciter des ondes dans les plasmas, dont nous donnons ci-après quelques exemples :

- Les ondes *inertielles* sont des ondes mécaniques qui sont excitées dans les fluides en rotation par les forces d'inertie. La force de Coriolis, par exemple, excite dans l'atmosphère terrestre des ondes dites de *Rossby*. Ces ondes sont connues pour largement affecter les propriétés globales des systèmes dans lesquelles elles se propagent en transportant notamment le moment cinétique à grande échelle.
- Les ondes *acoustiques* ou *sonores* sont aussi des ondes mécaniques dont la force de rappel est le gradient de pression du milieu. Elles sont particulièrement importantes dans l'intérieur solaire, car elles sont responsables des oscillations de la surface solaire qui nous permettent de reconstruire notamment le profil de rotation interne de notre étoile (voir chapitre 2).
- L'existence d'une stratification (densité croissante avec la profondeur, présente à la fois dans le Soleil et les tokamaks) rend possible l'existence d'ondes dites de *gravité*. L'exemple le plus classique de ce type d'onde est une vague à la surface de la mer. Ces ondes sont associées à des oscillations verticales pouvant localement influencer les propriétés du milieu.
- Les champs magnétiques rendent possibles la propagation d'ondes d'Alfvén dans le plasma. Ces ondes peuvent localement chauffer le milieu et sont notamment suspectées d'être la source principale de chauffage pour la couronne solaire.
- Les ondes de *dérives* sont des ondes excitées dans les plasmas de tokamaks par l'effet d'un gradient de densité ou de pression (similaire à la stratification pour les ondes de gravité). Leur force de rappel est cependant liée au champ magnétique de grande échelle (*e.g.*, *via* la vitesse de dérive $E \times B$). Ces ondes sont souvent invoquées pour expliquer une partie du transport turbulent dans les tokamaks.

Une multitude d'autres ondes peuvent être excitées dans les plasmas, et peuvent potentiellement interagir avec la turbulence et/ou modifier les propriétés globales du système. Puisqu'elles participent de façon non-négligeable au transport global, elles doivent être prises en compte pour comprendre l'éventuelle auto-organisation du plasma.

1.1.3 Auto-organisation des plasmas

La turbulence dans les fluides neutres (gaz ou liquide) peut présenter un caractère d'auto-organisation (*e.g.*, bandes zonales de Jupiter). Dans les plasmas, les interactions coulombiennes (ou, plus généralement, électromagnétiques) ont tendance à s'opposer à l'agitation thermique du milieu par effets collectifs et aident ainsi à l'auto-organisation. Les formes d'auto-organisation décrites ci-après constituent le cœur de mon travail de thèse, et seront abordées sous plusieurs angles au travers des différents chapitres de ce manuscrit.

– Écoulements à grande échelle

La première forme d'auto-organisation dans un plasma est la création d'écoulements dits *zonaux* sur une échelle caractéristique de l'ordre de la taille du système (*Diamond et al., 2005*). Le profil de rotation solaire, les écoulements azimuthaux de Jupiter ou encore la création d'un champ électrique radial dans les plasmas de tokamaks en sont des exemples frappants.

Ces écoulements interagissent avec la turbulence et les ondes du milieu dans lequel ils sont créés. Ils tirent généralement leur énergie de la turbulence par un processus de cascade d'énergie inverse (local ou non), et rétro-agissent sur celle-ci. Par conséquent, leur source d'énergie est modifiée et on obtient un état d'équilibre où les écoulements zonaux régulent et se nourrissent de la turbulence les générant. La cascade d'énergie inverse peut être notamment arrêtée par l'interaction de la turbulence avec des ondes se propageant dans le système. L'échelle à laquelle elle s'arrête s'appelle échelle de Rhines (*Rhines, 1975*).

La compréhension des mécanismes de génération de ces écoulements, ainsi que leur maîtrise dans le cas des tokamaks, est de première importance pour expliquer la dynamique des systèmes que nous étudions.

– Barrières de transport

La turbulence tend généralement à transporter des quantités globales (chaleur, moment cinétique, etc...) afin de s'opposer au mécanisme qui la génère (ici, nous prendrons de manière générique l'exemple d'un gradient de température instable). Il s'avère que dans certains cas, le plasma peut s'auto-organiser très fortement de façon à créer ce qu'on appelle une *barrière de transport*. Cette barrière est virtuellement créée par le plasma qui s'organise pour empêcher tout transport à travers une région localisée spatialement.

Ce phénomène très étrange est observé quotidiennement dans les plasmas de tokamaks, où il est possible de faire bifurquer le plasma dans un état où la turbulence est très réduite localement malgré une forte croissance du gradient de température (voir section 3.2). Dans le Soleil, la région appelée *tachocline* (voir section 2.2.1) peut également être vue comme une barrière de transport naturelle.

– Phénomènes cycliques

Enfin, une troisième forme d'auto-organisation peut être identifiée sous l'aspect de phénomènes cycliques dans les plasmas. L'auto-organisation est cette fois-ci temporelle, où un système dominé par une turbulence multi-fréquence est capable de s'organiser pour produire une oscillation particulière. C'est le cas par exemple de la dynamo solaire (voir section 2.2.2), qui produit un cycle magnétique régulier d'environ 11 ans, ou encore des relaxations quasi-périodiques des barrières de transport externes dans les tokamaks, appelées *ELM*³ (voir chapitre 7).

L'origine profonde de ces formes d'auto-organisation reste aujourd'hui encore un intense sujet de recherche. Bien que ces considérations générales s'appliquent aux différents plasmas que nous souhaitons étudier, il convient à présent de souligner leurs différences et par suite de préciser la manière dont nous les avons modélisés au cours de cette thèse.

1.2 Régimes de paramètres et modélisations

Nous mettons en relief les paramètres principaux des plasmas étudiés en section 1.2.1 afin de préciser les principales différences distinguant les plasmas stellaires des plasmas de tokamaks.

3. *Edge Localized Modes*

En se basant sur cette analyse ainsi que sur les différentes façons de décrire un plasma (section 1.2.2), nous détaillons les choix de modélisation que nous faisons dans cette thèse (sections 1.2.3 et 1.2.4).

1.2.1 Paramètres plasmas

Les principaux paramètres des plasmas auxquels nous nous intéressons sont reportés dans le tableau 1.1. Les valeurs sont données en unité *cgs*, par cohérence vis à vis de la communauté astrophysique. Les quantités sont préférentiellement données dans le cas des ions d'hydrogène (protons). Les définitions des différentes quantités pourront être trouvées dans la légende du tableau.

Paramètre	Tokamaks		Soleil	
Longueur (cm)	R_0	qlqs 10^2	R_\odot (rayon)	$6.96 \cdot 10^{10}$
	a ($< R_0$)	$\sim 10^2$	1 a.u. (vent)	$1.5 \cdot 10^{13}$
	λ_D	10^{-2}	λ_D (cœur)	10^{-13}
	ρ_L	10^{-1}	λ_D (vent)	10^3
	λ_{mfp}	10^5	ρ_L (vent)	10^2
			λ_{mfp} (cœur)	$\ll \lambda_{\text{mfp}}^{\text{photons}} \sim 1$
			λ_{mfp} (vent)	~ 1 a.u. at 1 a.u.
Température (K)	Cœur	$1.2 \cdot 10^8$	Cœur	$1.6 \cdot 10^7$
			Vent	$1.2 \cdot 10^5$
Densité (cm^{-3})	Cœur	10^{14}	Cœur	10^{26}
			Vent	1
Vitesse (cm s^{-1})	Poloïdale	$\sim 10^5$	$R_\odot \Omega_\odot$	10^5
	Toroïdale	$\sim 10^7$	Convection	10^4
	Thermique	$3.1 \cdot 10^7$	Vent	$4.5 \cdot 10^7$
Fréquence (s^{-1})	ω_c	10^7	ω_c (vent)	10^2
	ν_{ii}	10^4	ν_{ii} (cœur)	$\gg 10^7$
			ν_{ii} (vent)	10^{-6}
	ω_p	10^{12}	ω_p (cœur)	10^{18}
			ω_p (vent)	10^5
Magnétisme (G)	B	10^5	Tache solaire	3000
			Vent	10^{-5}
$\beta = \frac{8\pi n k_B T}{B^2}$	Cœur	10^{-2}	Cœur	$\gg 1$
			Vent	~ 1
$N_D = \frac{4}{3}\pi n \lambda_D^3$	Cœur	10^8	Cœur	~ 1
			Vent	10^{11}
Ξ (1.1)	Cœur	10^{-6}	Cœur	10^{-2}
			Vent	$10^{10^{-8}}$

TABLE 1.1 – Caractéristiques des plasmas solaires et de tokamak. Les valeurs sont données pour les ions, en unités *cgs* (sauf mention contraire). Rappelons que $k_B = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{erg K}^{-1}$. R_0 est le grand rayon du tokamak, a son petit rayon. R_\odot est le rayon du Soleil, et Ω_\odot son taux de rotation. La longueur de Debye est définie par $\lambda_D = (k_B T / 4\pi n e^2)^{1/2}$, et $\rho_L = \sqrt{mT} / eB$ est le rayon de giration des ions autour des lignes de champ magnétique, appelé rayon de *Larmor*. Le libre parcours moyen λ_{mfp} représente la distance caractéristique que les particules doivent parcourir pour subir une collision. La fréquence cyclotronique est définie par $\omega_c = eB/m$, et la fréquence plasma par $\omega_p = (4\pi Z^2 e^2 / m)^{1/2}$. Enfin, le paramètre plasma Ξ est défini en équation (1.1).

Les plasmas sont par définition sensibles aux champs électromagnétiques. Si un plasma est mis en présence d'un champ magnétique à grande échelle, il est susceptible d'y réagir fortement en fonction du rapport de l'intensité du champ magnétique à la pression thermique du plasma lui-même. Ceci conduit à définir le paramètre β tel que

$$\beta = \frac{8\pi n k_B T}{B^2},$$

où B est l'amplitude du champ magnétique. Ce ratio est extrêmement important pour comprendre l'interaction entre un champ magnétique et un plasma. Si $\beta \ll 1$, l'énergie magnétique dans le plasma est beaucoup plus intense que son énergie thermique. Par conséquent, le champ magnétique va être *a priori* peu modifié par le plasma et va complètement contraindre l'état de celui-ci. C'est le cas des plasmas de tokamaks (voir tableau 1.1), où un champ magnétique intense est forcé de l'extérieur dans le plasma pour le confiner (voir chapitre 3). Au contraire, si $\beta \gg 1$, le plasma va façonner le champ magnétique. C'est le cas des intérieurs stellaires, où l'on pense que le champ magnétique est généré par les mouvements du plasma *via* un effet dit *dynamo* (voir chapitre 2). Le vent stellaire, quant à lui, possède un paramètre β de l'ordre de 1.

Une telle différence pour le paramètre β nécessite une réflexion sur la manière de modéliser les plasmas de l'intérieur stellaire, des vents stellaires et des tokamaks. Les principaux paramètres des plasmas à l'étude dans ce manuscrit sont bien identifiés (tableau 1.1), et nous discutons à présent les différentes modélisations qui peuvent être envisagées pour décrire ces plasmas.

1.2.2 Modélisation des plasmas

Dans les plasmas que nous étudions ici, la longueur de Broglie de chaque particule est petite devant la séparation moyenne entre particules (gaz non dégénéré). Par conséquent, nous pouvons nous affranchir des éventuels phénomènes quantiques pour les décrire, et le gaz peut être représenté par une collection de particules régies par les équation d'Hamilton et les lois de Newton. Trois familles de modélisation sont alors généralement envisagées pour étudier la dynamique de tels plasmas. Elles s'organisent sous une forme hiérarchique où les degrés de liberté du système sont peu à peu diminués pour obtenir en contrepartie des équations d'évolution plus complexes à étudier, et pouvant poser un problème de fermeture (voir ci-après).

Le modèle à N corps

Le modèle à N corps est à la fois simple, intuitif, et relativement impraticable. Il est basé sur la description complète de chaque particule composant le système. Dans un plasma, chaque particule (qui est chargée) est couplée à toutes les autres particules du système, *via* par exemple la force Coulombienne. Chaque particule possède alors 6 degrés de liberté, trois pour repérer sa position dans l'espace et trois pour fixer sa vitesse. Pour un plasma contenant N particules, le système possède donc 6N degrés de liberté. Afin de se rendre compte de la complexité induite par ce genre de modélisation, prenons l'exemple du Soleil. Faisons l'approximation (incorrecte) que la densité interne du Soleil est constante et vaut environ de 10^{26} cm^{-3} . Sachant que le Soleil a un volume d'environ 10^{33} cm^3 , nous obtenons un modèle à 10^{59} particules. Aucune technique de modélisation numérique n'est évidemment capable aujourd'hui de résoudre une telle complexité.

Afin de construire des modèles plus "simples", l'approche statistique doit être utilisée.

Les modèles cinétiques

Pour simplifier le modèle de représentation, on peut construire une *fonction de distribution* de chaque espèce de particule composant le plasma. Généralement notée $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, elle représente

la probabilité de trouver une particule de l'espèce s à l'instant t à la position (\mathbf{x}, \mathbf{v}) ⁴ dans l'espace des phases à 6 dimensions (3 pour les positions, 3 pour les vitesses des particules). La construction d'une fonction de distribution est possible sous l'hypothèse statistique que des moyennes peuvent être faites sur des échelles supérieures à l'échelle de Debye, ou, autrement dit, qu'il est possible de définir une probabilité élémentaire $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})d\mathbf{q}d\mathbf{p}$ pour l'élément infinitésimal $d\mathbf{q}d\mathbf{p}$.

En l'absence de collisions, on peut démontrer le théorème de Liouville qui stipule que tout ensemble dans l'espace des phases reste à volume constant au cours de l'évolution temporelle du système. Il peut alors se réécrire pour obtenir l'équation de Vlasov sur la fonction de distribution f_s :

$$\partial_t f_s + [H, f_s] = 0, \quad (1.2)$$

où H est le Hamiltonien du système défini tel que $\partial_{\mathbf{p}}H = \dot{\mathbf{q}}$ et $\partial_{\mathbf{q}}H = -\dot{\mathbf{p}}$, et $[.,.]$ est le crochet de Poisson défini par

$$[A, B] = \sum_i \{ \partial_{q_i} A \partial_{p_i} B - \partial_{p_i} A \partial_{q_i} B \}$$

Dans le cas des plasmas, le Hamiltonien du système dépend explicitement des champs électromagnétiques \mathbf{E} et \mathbf{B} . L'équation de Vlasov doit donc être couplée aux équations de Maxwell (en unité *cgs*)

$$-\frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1.6)$$

où ρ est la densité de charges et \mathbf{J} la densité de courant. Par définition des fonctions de distribution, on peut relier les équations de Maxwell à l'équation de Vlasov en écrivant

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{\text{espèces } s} q_s \int f_s d\mathbf{v},$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\text{espèces } s} q_s \int f_s \mathbf{v} d\mathbf{v},$$

pour obtenir un système d'équations fermé.

Enfin, lorsque les collisions binaires jouent un rôle important dans la dynamique du plasma, l'équation de Vlasov devient l'équation de Boltzmann qui s'écrit

$$\partial_t f_s + [H, f_s] = \mathcal{C}(f). \quad (1.7)$$

\mathcal{C} est un opérateur de collision pouvant prendre plusieurs formes selon la ou les interactions qu'il représente. L'opérateur de collision est particulièrement important car il permet de s'assurer que le système relaxe vers une fonction de distribution d'équilibre de type maxwellienne qui fait alors partie du noyau de l'opérateur (théorème H, [Lanford \(1975\)](#)). Ainsi, moins la fréquence de collision est élevée, plus l'approche cinétique est justifiée. C'est en particulier le cas dans les tokamaks, ainsi que dans le vent solaire.

Le gain des modèles cinétiques apparaît alors clairement : nous avons transformé une représentation à 6N degrés de liberté en une seule variable par espèce dans un espace à 6 dimensions.

4. On utilisera aussi de façon équivalente l'espace des phase (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , où $\mathbf{q} = \mathbf{x}$ représente la position, et $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ l'impulsion.

Cependant, les modèles cinétiques sont encore aujourd'hui très coûteux à résoudre numériquement, et d'autres approximations permettant de les simplifier sont généralement nécessaires pour les simuler. Nous montrerons en particulier l'exemple du modèle gyrocinétique en section 1.2.4. Auparavant, nous montrons que nous pouvons encore une fois réduire le nombre de dimensions en utilisant l'approximation *fluide*.

Les modèles fluides

Un modèle fluide de plasma peut être dérivé en se basant sur l'équation de Boltzmann⁵ (1.7) couplée aux équations de Maxwell (1.3)-(1.6). La dérivation se fait en deux étapes.

Premièrement, nous définissons les moments (fluides) de la fonction de distribution :

- La densité

$$n(\mathbf{x}, t) = \int f \, d\mathbf{v}. \quad (1.8)$$

- La quantité de mouvement

$$n\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int f\mathbf{v} \, d\mathbf{v}. \quad (1.9)$$

- Le tenseur de pression

$$\bar{\bar{P}}(\mathbf{x}, t) = m \int f(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\mathbf{v}, \quad (1.10)$$

et la pression scalaire qui est le tiers de la trace de $\bar{\bar{P}}$

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{3} \int f(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 \, d\mathbf{v}. \quad (1.11)$$

- Le flux d'énergie

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{2} \int f\mathbf{v}^2\mathbf{v} \, d\mathbf{v}. \quad (1.12)$$

On peut également définir la température $T(\mathbf{x}, t) \equiv p/n$. Il est important de remarquer ici que nous n'avons donné que des définitions, sans faire aucune approximation (excepté pour le flux d'énergie \mathbf{Q} qui devrait être en toute rigueur un tenseur d'ordre trois, mais que nous simplifions à sa partie vectorielle pour ce propos). En théorie, on pourrait définir ainsi autant de moments de la fonction de distribution que nécessaire.

Dans une deuxième étape, nous devons construire les équations régissant les quantités fluides que nous venons de définir. Afin de simplifier la discussion, nous nous plaçons dans un cas où nous ne considérons qu'une espèce de particules, et où nous pouvons écrire l'équation de Vlasov sous la forme

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \partial_{\mathbf{v}} f = 0,$$

où q et m sont respectivement la charge et la masse de l'espèce de particule considérée. Puisque \mathbf{v} ne dépend pas de \mathbf{x} , et $(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})|_i$ ne dépend pas de la composante i de \mathbf{v} , il est important de noter les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f &= \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (f\mathbf{v}), \\ (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f &= \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]). \end{aligned}$$

5. L'opérateur de collision qui apparaît dans l'équation de Boltzmann (1.7) a pour propriété de s'annuler pour les trois premiers moments fluides lorsque les équations fluides sont sommées sur toutes les espèces. Dans ce manuscrit, nous ne nous intéresserons qu'aux modèles mono-fluides de plasmas (par opposition à bi-fluide). Par conséquent, on peut considérer ici les équations de Boltzmann ou Vlasov de manière équivalente pour dériver les équations (mono)fluides.

Alors, on peut calculer les différents moments de l'équation de Vlasov simplifiée pour obtenir

$$\partial_t n + \nabla_x \cdot (n\mathbf{u}) = 0, \quad (1.13)$$

$$m\partial_t (n\mathbf{u}) + m\nabla_x \cdot (n\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_x \cdot \bar{\mathbf{P}} = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1.14)$$

$$\partial_t \left(\frac{3}{2}p + \frac{1}{2}mn\mathbf{u}^2 \right) + \nabla_x \cdot \mathbf{Q} = qn\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}. \quad (1.15)$$

Il apparaît immédiatement que chaque équation dépend directement des moments fluides d'ordre inférieur et supérieur, et par conséquent on pourrait continuer à dériver ces équations à l'infini. C'est ici qu'intervient un choix de *fermeture* qui permet de clore ce système d'équations à l'aide d'approximations physiques, en faisant généralement appel à une équation représentant l'équilibre thermodynamique. Dans le cas où la collisionnalité est forte, de nombreux choix sont possibles pour fermer ce système (*e.g.*, Braginskii), allant du plus simple (*e.g.*, flux de chaleur nul ou de manière équivalente système isotherme) au plus complexe (*e.g.*, il existe des fermetures basées sur des effets de type cinétique comme l'effet Landau pour ne pas complètement perdre les effets de l'espace des vitesses de la description cinétique lors du passage au modèle fluide). Lorsque la collisionnalité est faible, cependant, le problème de fermeture est encore aujourd'hui un problème ouvert. Le choix de la fermeture est très important car il fixe les bornes de validité du système fluide formé. A ces trois équations doivent également s'ajouter des équations issues des équations de Maxwell (1.3-1.6) régissant l'évolution des champs électromagnétiques. Ce système d'équations est alors dit *magnétohydrodynamique* (MHD).

On peut généralement adopter une représentation fluide pour un plasma lorsque la densité à la plus petite échelle caractéristique considérée est suffisamment élevée pour qu'un grand nombre de collisions soit possible (*i.e.*, collisionnalité élevée). Autrement dit, il faut que le libre parcours moyen λ_{mfp} soit plus petit que la taille caractéristique L considérée dans le plasma (*i.e.*, le nombre de Knudsen λ_{mfp}/L est petit devant 1), et plus grand que le rayon de Larmor. Dans ce cas, un équilibre thermodynamique local (fonction de distribution proche d'une Maxwellienne) est assuré et la représentation fluide peut être utilisée. De plus, lorsque les échelles spatiales et temporelles du plasma sont plus grandes que la longueur de Debye et que l'inverse de la fréquence plasma, la séparation de charges s'effectue sur une distance suffisamment courte dans le plasma pour assurer sa neutralité aux échelles étudiées. Dans ce cas, on peut même utiliser l'approximation dit *mono-fluide* où les différentes espèces du plasma ne sont plus distinguées.

Les deux modèles de type magnéto-hydrodynamique mono-fluides que nous utiliserons dans les cas de l'intérieur solaire et des vents stellaires sont présentés à la section suivante.

1.2.3 Etoiles : l'approche magnétohydrodynamique

L'intérieur solaire

Les paramètres plasmas de l'intérieur solaire (tableau 1.1) laissent à penser qu'il est licite d'utiliser l'approximation fluide pour le modéliser. En particulier, le libre parcours moyen est plus petit que le centimètre, tandis que l'échelle caractéristique des mouvement convectifs dans l'intérieur du Soleil est environ 10^9 fois plus grande. De plus, et bien que le nombre de particules dans la sphère de Debye soit de l'ordre de 1, celle-ci est extrêmement petite devant les échelles convectives et nous pouvons donc considérer le plasma comme neutre.

Dans ce cas, nous utilisons l'approximation mono-fluide qui nous permet de ne pas distinguer les différentes espèces du plasma, pour laquelle les équations de Maxwell prennent une forme particulière. En effet, la densité de charges ρ est alors négligeable et par conséquent la divergence du champ électrique est négligeable également. On paramétrise le champ électrique *via* la loi d'Ohm globale, qui s'écrit $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ dans un fluide au repos (où σ est la conductivité électrique

du plasma). Les équations de Maxwell se réduisent alors à

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \\ \partial_t \mathbf{B} &= -\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}), \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}$$

où l'on a défini le coefficient de diffusion ohmique $\eta = c^2/\sigma 4\pi$, et on a négligé le courant de déplacement $c^{-2}\partial_t \mathbf{E}$ qui est très faible dans l'approximation MHD (*Davidson, 2001*). Dans le cas d'un fluide en mouvement, qui est le cas de la plupart des plasmas, la loi d'Ohm doit être évaluée dans le repère se déplaçant à la vitesse du fluide et s'écrit alors $\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ⁶. Par suite, nous pourrions nous contenter de deux équations pour décrire l'évolution du champ magnétique dans l'approximation mono-fluide, qui sont

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.16)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}). \quad (1.17)$$

L'intérieur solaire est stratifié et la vitesse du son varie en profondeur entre 10^6 et quelques 10^7 cm/s. Les vitesses associées à la rotation et à la convection sont plus d'un ordre de grandeur plus faibles. On peut par conséquent tirer parti de l'approximation dite *anélastique* (*Gough, 1969, Lantz and Fan, 1999*), qui permet de filtrer les ondes sonores (qui sont rapides et rendent le système plus difficile à simuler en contraignant le pas de temps à être très petit) tout en conservant l'important effet de la stratification en densité. L'approximation anélastique est un raffinement des équations fluides qui se situe entre les équations *compressibles* (voir ci-après dans le cas des vents) et les équations dites de *Boussinesq* où les fluctuations de densité ne sont conservées que dans la force gravitationnelle dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Dans les cas anélastiques et Boussinesq, les quantités fluides sont décomposées en parties moyennes (dans le cas du Soleil, moyennées sur une surface sphérique, dite *horizontale*, à un rayon donné) et fluctuantes. Les quantités moyennes sont notées avec des barres $\bar{\cdot}$, et nous écrivons les équations anélastiques pour les quantités fluctuantes :

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{v}) = 0, \quad (1.18)$$

$$\bar{\rho} [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{v}] = -\nabla P + \rho \mathbf{g} + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathcal{D} - [\nabla \bar{P} - \bar{\rho} \mathbf{g}], \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned}\bar{\rho} \bar{T} [\partial_t S + \mathbf{v} \cdot \nabla (\bar{S} + S)] &= \nabla \cdot [\kappa_r \bar{\rho} c_p \nabla (\bar{T} + T) + \kappa_0 \bar{\rho} \bar{T} \nabla \bar{S} + \kappa \bar{\rho} \bar{T} \nabla S] + \frac{4\pi\eta}{c^2} \mathbf{J}^2 \\ &+ 2\bar{\rho} \nu [e_{ij} e_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2] + \bar{\rho} \epsilon,\end{aligned} \quad (1.20)$$

L'équation de conservation de la masse (1.18) est simplifiée dans l'approximation anélastique en perdant le terme d'évolution de la densité. La densité évolue cependant implicitement dans le système anélastique *via* l'équation d'état linéarisée

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{P}{\bar{P}} - \frac{T}{\bar{T}} = \frac{P}{\gamma \bar{P}} - \frac{S}{c_p}, \quad (1.21)$$

où c_p est la chaleur spécifique à pression constante, $\mathcal{R} = c_p - c_v$ la constante des gaz parfaits et l'entropie moyenne \bar{S} est définie par

$$\bar{S} = c_p \ln \bar{T} - \mathcal{R} \ln \bar{P}. \quad (1.22)$$

6. Dans les chapitres concernant le Soleil et les étoiles, nous utiliserons la notation \mathbf{v} pour la vitesse du fluide, à ne pas confondre avec la vitesse des particules dans le formalisme (gyro)cinétique.

La force de Coriolis est apparue dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.19) car nous nous plaçons dans le repère tournant au taux de rotation Ω_0 ⁷. Le tenseur de pression qui apparaissait dans l'équation (1.10) est décomposé en sa partie scalaire P et un tenseur des contraintes visqueuses \mathcal{D} . La forme de ce tenseur visqueux dépend du choix de relation de fermeture du système d'équations. Dans notre cas, il s'écrit

$$\mathcal{D}_{ij} = -2\bar{\rho}\nu \left[e_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} \right], \quad (1.23)$$

où e_{ij} est le tenseur des déformations, δ_{ij} le symbole de Kronecker et ν la viscosité cinématique.

Compte-tenu de la ré-écriture des équations de Maxwell (1.16), la force de Lorentz prend naturellement la forme $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}/4\pi$ en négligeant la force électrique $\rho\mathbf{E}$ qui est très petite pour les plasmas (non relativistes) que nous considérons ici.

Enfin, l'approximation anélastique s'accompagne généralement de la réécriture de l'équation de conservation de l'énergie en terme d'entropie (1.22). Le flux d'entropie est modélisé par trois composantes différentes associées aux coefficients de diffusion thermique κ_0 (diffusion du profil d'entropie moyen), κ_r (modélisation de la diffusion radiative) et κ (diffusion thermique). On remarquera également le terme de chauffage ohmique obtenu en utilisant les équations de Maxwell, et un terme de chauffage volumique $\bar{\rho}\varepsilon$ pouvant représenter le flux de chaleur provenant du cœur stellaire (voir schéma 1.3).

Dans le cadre d'une résolution numérique des équations, les trois coefficients de diffusion η , ν et κ sont plus élevés que dans la réalité et représentent les échelles du plasma que nous ne résolvons pas. L'utilisation de coefficients de diffusion augmentés constitue le modèle *sous-maille* le plus simple possible à utiliser. Ils définissent des degrés de liberté de notre système, et leur influence sur les résultats obtenus doit être systématiquement déterminée.

Ces équations seront utilisées aux chapitres 4 et 8 dans le cadre de la modélisation de la tachocline solaire (voir section 2.2.1) et de la dynamo convective (voir section 2.2.2). Les méthodes numériques utilisées pour résoudre le système d'équation anélastique pourront être trouvées en annexe B, qui détaille le fonctionnement du code ASH (*Chune et al., 1999, Miesch et al., 2000, Brun et al., 2004a*).

Le vent solaire

Les conditions plasmas dans les vents stellaires sont radicalement différentes de l'intérieur solaire que nous venons de décrire. On peut en effet remarquer que dans le vent solaire (tableau 1.1), le libre parcours moyen est bien plus grand que le rayon de Larmor mais est typiquement de la taille du système que nous considérons, et le paramètre β du vent est légèrement inférieur à 1. On peut toutefois s'attendre à un comportement collectif du plasma, car la sphère de Debye contient un nombre élevé de particules. Traiter une atmosphère stellaire dans son ensemble de façon cinétique n'est pour le moment pas accessible à la modélisation. Par conséquent, deux approches peuvent être choisies pour modéliser les vents stellaires : soit utiliser un modèle de type cinétique qui décrit bien toute la physique mais qui ne peut pour le moment traiter que du comportement local du plasma (*Marsch, 2006*), soit utiliser un modèle de type MHD qui ne rend pas bien compte de la microphysique du plasma, mais permet de représenter l'ensemble de l'atmosphère. Dans le cas MHD, on peut en outre paramétrer la loi thermodynamique du

7. Le lecteur attentif remarquera l'absence de la force centrifuge dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.19). Pour des étoiles tournant au taux de rotation solaire, celle-ci est complètement négligeable devant la gravité. Cependant, pour des étoiles tournant très rapidement (que nous ne considérons pas dans ce manuscrit), elle devrait être prise en compte. Outre le fait qu'elle soit négligeable, la prise en compte de la force centrifuge entraîne des complications de simulation non triviales, et c'est aussi pourquoi nous ne la considérons pas ici (voir *Rieutord, 2006, Reese et al., 2006*).

plasma (par exemple, en se basant sur les observations solaires) afin que le modèle rende proprement compte des propriétés macroscopiques du vent (*Lamers and Cassinelli, 1999*). Bien qu'ils ne représentent *a priori* pas correctement la microphysique des vents stellaires, nous utiliserons dans cette thèse une approche MHD, du fait de sa simplicité. Par conséquent, nos modèles ne pourront donner des informations que sur les propriétés globales des vents stellaires.

La vitesse du vent solaire augmente au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'étoile, et la vitesse du son $c_s = \sqrt{\gamma * p/\rho}$ ($\gamma = c_p/c_v$ est l'indice polytropique du plasma) croît *a priori* moins vite. Le vent présente alors un point où le nombre de Mach dépasse 1 et des chocs peuvent ensuite se former (voir chapitre 5 pour plus de détails). Par conséquent, l'approximation anélastique ne peut pas être envisagée dans ce cas et les équations *compressibles* de la MHD doivent être utilisées. Dans les applications au vent solaire, nous négligerons les phénomènes diffusifs et écrivons les équations de la MHD idéale en unités normalisées :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.24)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho} \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{a}, \quad (1.25)$$

$$\partial_t P + \mathbf{v} \cdot \nabla P + \rho c_s^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.26)$$

$$\partial_t \mathbf{B} - \nabla (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (1.27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.28)$$

Dans ce cas, le système d'équation est fermé par l'équilibre thermodynamique défini par l'équation des gaz parfaits

$$P = \mathcal{R} \rho T. \quad (1.29)$$

Les termes d'accélération dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.25) s'écrivent généralement

$$\mathbf{a} = \underbrace{-\nabla \phi + \mathbf{g}}_{\mathbf{g}_{\text{eff}}} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}. \quad (1.30)$$

Ces termes permettent de représenter les forces centrifuges, de gravité et de Coriolis si nécessaire.

Le choix de négliger les termes diffusifs a d'importantes implications sur l'interprétation des résultats de simulation avec ce système d'équation. Pour le propos de cette thèse, nous nous concentrons sur les équations de la MHD idéale que nous venons d'écrire, de futurs travaux sont prévus pour outrepasser la limite idéale considérée (voir les conclusions du chapitre 5). Les techniques de simulation numérique que nous utilisons pour résoudre ces équations pourront être trouvées en annexe D, qui détaille le fonctionnement du code PLUTO (*Mignone et al., 2007*).

1.2.4 Tokamaks : l'approche cinétique

Dans les plasmas de cœur des tokamaks (voir tableau 1.1), la fréquence de collision est faible et le libre parcours moyen des particules est de plusieurs ordres de grandeur plus grand que le système lui-même (une particule peut typiquement faire plusieurs centaines de tours toroïdaux dans un tokamak avant de subir une interaction binaire). Par conséquent, il est très improbable que le plasma réussisse à être à l'équilibre thermodynamique localement. L'approximation fluide utilisée précédemment ne peut donc pas être utilisée, et un modèle de type cinétique doit être considéré.

Le champ magnétique est très intense dans les tokamaks, par suite le rayon de Larmor des particules est petit, et la fréquence cyclotronique élevée. On peut alors se placer dans l'approximation dite *gyrocinétique* (*Brizard and Hahm, 2007*) qui filtre le mouvement cyclotronique pour décrire l'évolution des fonctions de distribution des gyrocentres de chaque espèce. La dérivation

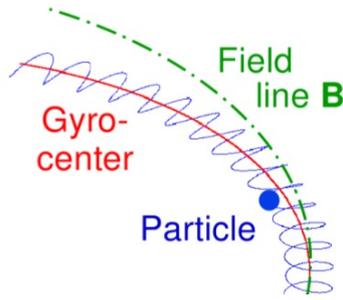


FIGURE 1.2 – Représentation schématique du mouvement cyclotronique d'une particule autour d'une ligne de champ magnétique.

de ce modèle est relativement complexe, et repose sur deux étapes principales : la transformation de l'espace des phases à 6 dimensions en un espace à 5 dimensions en modifiant de façon adéquate l'équation cinétique pour remplacer la fonction de distribution totale par la fonction de distribution des gyrocentres, et la réécriture des équations de Maxwell, généralement par l'apparition d'un terme de *polarisation*. Nous ne décrivons pas ici en détail la procédure de dérivation de ce modèle, mais nous donnons en figure 1.2 une représentation schématique de l'opération de moyenne du mouvement cyclotronique, appelé gyromoyenne.

Mathématiquement, cette opération s'effectue *via* un opérateur de gyromoyenne J_0 défini par

$$\begin{aligned}\bar{F}(\mathbf{x}_G) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_c}{2\pi} \int d\mathbf{k} \hat{F}_{\mathbf{k}} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{x}_G| - \rho_s) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{x}_G + \mathbf{x}_G)} \\ &= \int d\mathbf{k} \underbrace{\left[\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_c}{2\pi} e^{i\mathbf{k} \cdot \rho_s} \right]}_{J_0(k_{\perp} \rho_s)} \hat{F}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}},\end{aligned}\quad (1.31)$$

où φ_c est l'angle de giration de la particule, ρ_s son rayon de giration, \mathbf{r} la position de la particule et \mathbf{x}_G la position du gyrocentre. J_0 est en fait exactement la fonction de Bessel de premier ordre. Dans le cas où le système n'est pas périodique dans les deux directions perpendiculaires au champ magnétique, la décomposition en séries de Fourier pour évaluer la fonction de Bessel selon k_{\perp} ne peut être utilisée. Le traitement rigoureux de l'opérateur de gyromoyenne est alors délicat. Dans ce cas, l'approximation dite de *Padé* est souvent utilisée et s'écrit

$$J_0(k_{\perp} \rho_s) \approx \frac{1}{1 + (k_{\perp} \rho_s / 2)^2}.\quad (1.32)$$

Elle est valide pour les longueurs d'ondes $k_{\perp} \rho_s \lesssim 1$ et tend vers 0 quand $k_{\perp} \rho_s$ tend vers l'infini. Dans la suite de ce manuscrit, nous dénoterons avec une barre $\bar{\cdot}$ les quantités gyromoyennées dans les chapitres 6, 7 et 8. La transformation en gyrocentre peut s'effectuer pour chacune des espèces présentes dans le plasma. Nous omettons ici l'indice d'espèce s lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté, afin d'alléger les notations.

La transformation de l'équation de Boltzmann vers la fonction de distribution des gyrocentres, notée \bar{F} , s'écrit alors

$$\partial_t \bar{F} + \frac{1}{B_{\parallel}^*} \nabla_{\mathbf{z}} \cdot (\dot{\mathbf{z}} B_{\parallel}^* \bar{F}) = \mathcal{C}(\bar{F}) + \mathcal{S},\quad (1.33)$$

où $\mathbf{z} = (\chi, \theta, \varphi, v_{G\parallel}, \mu)$ (voir chapitre 3 pour une description détaillée de la géométrie tokamak) et $\dot{\mathbf{z}} = d_t \mathbf{z}$. $B_{\parallel}^* = B (1 + J_{\parallel} v_{G\parallel} / B^2)$ est le jacobien de la transformation en gyrocentres. Cette équation est valable à l'ordre 1 en $\rho_{\star} = \rho_i / a$, où ρ_i est le rayon de Larmor ionique et a le petit rayon de la machine.

Dans le formalisme gyrocinétique (*Brizard and Hahm, 2007*), les équations du mouvement des particules s'écrivent

$$B_{\parallel}^* d_t \mathbf{x}_G = v_{G\parallel} \mathbf{B}^* + \frac{1}{e} \mathbf{b} \times \nabla \Lambda, \quad (1.34)$$

$$B_{\parallel}^* m d_t v_{G\parallel} = -\mathbf{B}^* \cdot \nabla \Lambda, \quad (1.35)$$

où nous avons introduit les notations $\mathbf{B}^* = \mathbf{B} + \frac{mv_{G\parallel}}{e} \nabla \times \mathbf{b}$, \mathbf{b} (vecteur unitaire dans la direction de \mathbf{B}), et $\Lambda = e\bar{\phi} + \mu B$. Rappelons que nous notons l'opérateur de gyro-moyenne avec une barre, c'est à dire que $J_0 \cdot \phi \equiv \bar{\phi}$, où ϕ est le potentiel électrique.

Les équations du mouvement peuvent être réécrites pour faire apparaître des vitesses de dérive caractéristiques :

$$\frac{B_{\parallel}^*}{B} d_t \mathbf{x}_G = v_{G\parallel} \mathbf{b}^* + \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_E, \quad (1.36)$$

$$\frac{B_{\parallel}^*}{B} m d_t v_{G\parallel} = -e \mathbf{b}^* \cdot \nabla \bar{\phi} - \mu \mathbf{b}^* \cdot \nabla B + \frac{mv_{G\parallel}}{B} \mathbf{v}_E \cdot \nabla B, \quad (1.37)$$

où nous avons introduit le courant plasma $\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$, le champ magnétique $\mathbf{b}^* = \mathbf{b} + \frac{mv_{G\parallel}}{eB^2} \mu_0 \mathbf{j}$, et les vitesses de dérive

$$\mathbf{v}_D = \frac{mv_{G\parallel}^2 + \mu B}{eB} \mathbf{b} \times \frac{\nabla B}{B}, \quad (1.38)$$

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{b} \times \frac{\nabla \bar{\phi}}{B}. \quad (1.39)$$

\mathbf{v}_D est appelée vitesse de dérive magnétique. Elle provient de la courbure des lignes de champ magnétique et de ∇B . \mathbf{v}_E est quant à elle la vitesse de dérive électrique (ou $E \times B$) qui provient du développement du champ électrique \mathbf{E} dans le plasma.

Ces équations doivent ensuite être couplées aux équations de Maxwell pour former un système fermé. Dans ce manuscrit, nous ne nous intéresserons qu'aux espèces ioniques et nous considérerons par conséquent que les électrons répondent *adiabatiquement* aux perturbations du plasma, c'est-à-dire qu'ils s'ajustent instantanément à toute perturbation électromagnétique du fait de leur faible inertie. Des fluctuations locales de la densité ionique peuvent cependant être présentes sur des échelles supérieures à λ_D . On peut alors écrire une condition de *quasi-neutralité* sous la forme $\delta n_i / n_{eq} = \delta n_e / n_{eq} = e(\phi - \phi_{00}) / T_e(\chi)$. La transformation vers l'espace des centres-guides fait apparaître une densité de polarisation qui s'écrit, pour chaque population ionique,

$$\frac{\delta n^{\text{pol}}}{n_{eq}} \equiv \frac{1}{n_{eq}} \nabla_{\perp} \cdot \left[\frac{n_{eq}}{B\omega_{ci}} \nabla_{\perp} \phi \right]. \quad (1.40)$$

Les équations de Maxwell se réécrivent finalement sous la forme d'une unique équation de quasi-neutralité généralisée (pour des ions de charge $Z = 1$) :

$$\frac{en_{eq,s}}{T_e} [\phi - \langle \phi \rangle_{fs}] - \sum_{\text{ion species}} \nabla \cdot \left(\frac{n_{eq,s} m_s}{\mathbf{B}^2} \nabla_{\perp} \phi \right) = \sum_{\text{ion species}} e_s \int dv^* J_0 \cdot \bar{F} - en_{eq,s}. \quad (1.41)$$

Nous avons utilisé dans cette équation la moyenne sur une surface de flux qui s'écrit

$$\langle \phi \rangle_{fs} = \frac{\int \phi(\chi, \theta, \varphi) \mathcal{J}_x d\theta d\varphi}{\int \mathcal{J}_x d\theta d\varphi}, \quad (1.42)$$

où \mathcal{J}_x le jacobien des variables spatiales (θ, φ) .

Deux types d'approximations sont souvent ajoutés au modèle gyrocinétique afin de faciliter sa résolution numérique. Le critère d'instabilité du gradient de température ionique est local par nature. Il est par conséquent tentant d'étudier la turbulence dans les tokamaks d'un point de vue *local*, en se concentrant sur une petite fraction radiale du plasma. Comme nous l'avons vu en section 1.1.2, le développement non-linéaire de l'instabilité est cependant global et peut entraîner des phénomènes de transport à grande échelle qui ne peuvent pas être décrits par une approche locale. La deuxième approximation, appelée δf , consiste à supposer que la fonction de distribution est constituée d'une partie moyenne (d'équilibre) évoluant peu dans le temps, et d'une partie fluctuante. Ce traitement nécessite que les perturbations δf restent petites devant la fonction de distribution moyenne. La partie moyenne est alors figée, et seules les perturbations de la fonction de distribution sont traitées. Les éventuelles rétro-actions des fluctuations sur l'équilibre, pouvant être importantes dans certains cas, ne sont donc pas prises en compte. Ces modèles ne peuvent par conséquent traiter de l'impact des écoulements zonaux (fluctuant dans le temps) et moyens sur la fonction de distribution moyenne, qui agit comme un réservoir d'énergie pour la turbulence. Par conséquent, et comme nous l'avons déjà remarqué, de tels écoulements jouent un rôle crucial (et non-linéaire) pour la régulation de la turbulence et l'auto-organisation du plasma. Pour le propos de cette thèse, ces deux types d'approximations ne doivent donc pas être utilisés et nous considérerons le plasma de tokamak de manière *globale*, et traiterons l'évolution de l'ensemble de la fonction de distribution des ions.

Nous avons finalement identifié un modèle adéquat pour représenter les plasmas des cœurs de tokamak. Puisque l'approximation fluide n'est pas licite, nous avons opté pour un modèle cinétique simplifié (le modèle gyrocinétique) dans lequel l'espace des phases est réduit d'une dimension. Les techniques numériques utilisées pour simuler ce modèle sont présentées en annexe C, qui détaille le fonctionnement du code GYSELA (*Grandgirard et al., 2006*).

1.3 Organisation du manuscrit

Après avoir introduit les concepts généraux motivant ce travail de thèse, ainsi que les cadres de modélisation que nous allons utiliser, nous allons décrire plus spécifiquement les systèmes que nous étudions. Une introduction aux étoiles, et aux particularités que présente notre Soleil est donnée au chapitre 2. Puis, le chapitre 3 est dédié à introduire les principales caractéristiques des tokamaks.

Le reste du manuscrit s'articule ensuite en trois parties, dont les différents chapitres sont synthétiquement représentés sur le schéma générique 1.3. Ils sont mis en lien avec les problématiques de turbulence, transport et confinement, ainsi que les différents concepts qui en découlent et que nous avons introduits en section 1.1. Les trois parties s'organisent de la façon suivante :

- La partie II est consacrée uniquement aux étoiles. Nous y étudions la tachocline, qui est une barrière de transport naturelle dans le Soleil (chapitre 4). Puis, des réflexions sur l'influence de l'environnement stellaire sur les propriétés globales de l'étoile sont amorcées au chapitre 5.
- Des travaux appliqués aux barrières de transport dans les tokamaks sont ensuite présentés en partie III. L'influence de la topologie magnétique des machines de fusion est explorée au chapitre 6. Le chapitre 7 est pour sa part consacré à l'étude des interactions entre la turbulence et les écoulements zonaux, dans la problématique de la création de barrières de transport.
- Enfin, la dernière partie IV regroupe des travaux communs aux deux communautés. Les

deux parties précédentes mettent en évidence le besoin de mieux comprendre les interactions multi-échelles dans les systèmes que nous étudions. Nous développons au chapitre 8 une méthode d'analyse spectrale originale que nous appliquons successivement à la dynamo solaire et à la turbulence dans les tokamaks. Puis, nous présentons au chapitre 9 un travail prospectif basé sur une modélisation simplifiée des plasmas menant à un jeu d'équations commun pouvant s'appliquer à la fois à la turbulence dans les tokamaks, et à la problématique de la tachocline solaire.

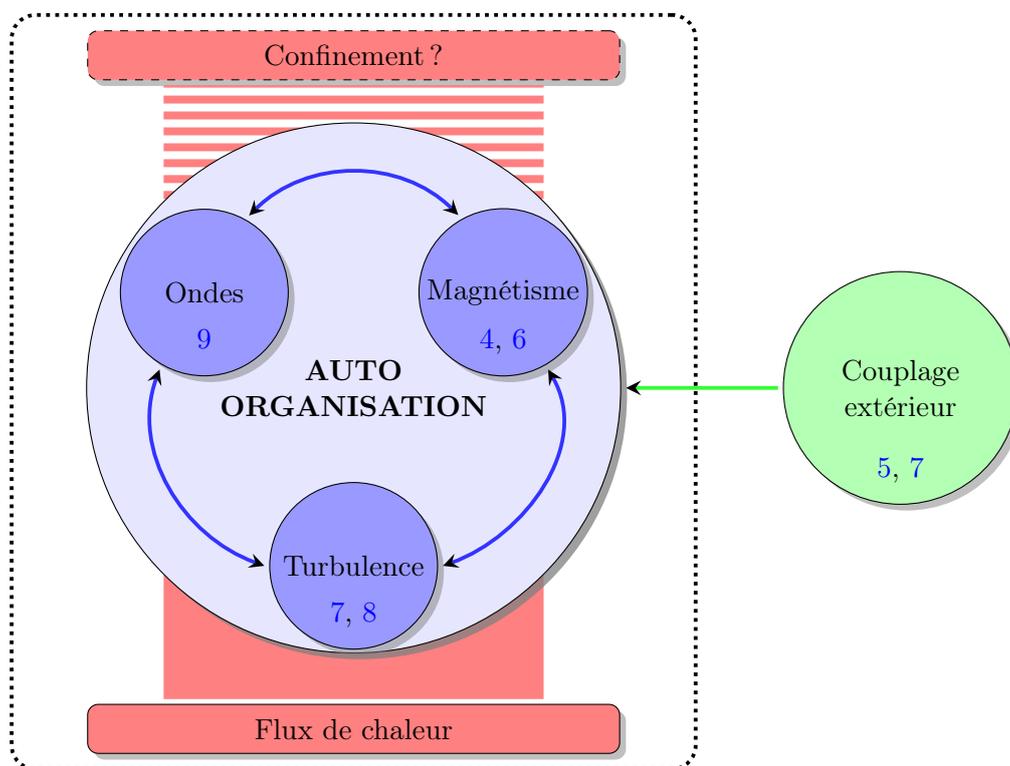


FIGURE 1.3 – Représentation schématique des systèmes étudiés au cours de cette thèse. Les chiffres bleus renvoient aux différents chapitres de ce manuscrit.

Turbulence, magnétisme et rotation dans le Soleil

Sommaire

2.1	Qu'est-ce qu'une étoile ?	27
2.1.1	Le diagramme HR	27
2.1.2	Structure interne d'une étoile	29
2.1.3	L'atmosphère stellaire	31
2.2	Caractéristiques particulières de notre étoile	32
2.2.1	Ecoulements moyens et tachocline	32
2.2.2	Champ magnétique et cycle de 11 ans	35

Ce chapitre est consacré à la description du Soleil comme une étoile. Nous décrivons succinctement ce qu'est une étoile en section 2.1, puis nous donnons les caractéristiques particulières du Soleil (section 2.2) qui ont motivé ce travail de thèse.

2.1 Qu'est-ce qu'une étoile ?

Un étoile est une sphère de plasma auto-gravitante. Nous détaillons ci-après les différentes classes d'étoiles, ainsi que leur structure et leur environnement.

2.1.1 Le diagramme HR

L'observation des étoiles, à l'œil nu et la nuit sur Terre, permet de réaliser deux points : elles sont très nombreuses, et plus ou moins brillantes. Si l'on a de très bons yeux, on peut même remarquer qu'elles sont de différentes couleurs, qui témoignent de leurs températures, masses, rayons, *etc...* Les différents types d'étoiles peuvent être remarquablement représentés sur un diagramme d'Hertzsprung-Russel (HR, figure 2.1) en fonction de leur type spectral (couleur), et de leur luminosité. Sur ce diagramme, nous pouvons représenter les lignes d'iso-rayon (lignes obliques). Nous remarquons que les étoiles peuvent être séparées en plusieurs grandes catégories sur ce diagramme¹ : les géantes, super-géantes, naines blanches et étoiles de la *séquence principale*. Après une phase de formation que nous ne décrivons pas ici, la plupart des étoiles se placent sur la séquence principale selon leur type spectral. Elles y passent la majeure partie de leurs vies, dont les durées sont indiquées en vert pour 5 types d'étoiles différentes. On remarque immédiatement que les étoiles les plus massives vivent le moins longtemps. On peut montrer que sur la séquence principale, les étoiles vérifient relativement bien les lois de puissance $R \propto M^{0.8}$ et $L \propto M^{3.5}$. A la fin de leur vie, les étoiles quittent la séquence principale et se déplacent sur le diagramme HR en parcourant les différentes branches selon leur masse initiale. Par exemple, une étoile de masse solaire (type G) quitte la séquence principale lorsque son cœur n'est plus constitué que d'hélium. L'étoile commence alors à brûler son hydrogène en couches autour du

1. Les étoiles les plus massives terminent leurs vies sous forme d'étoiles à neutrons ou de trous noirs après avoir passé l'étape de supernova. Ces "étoiles" ne sont pas représentées dans le diagramme HR.

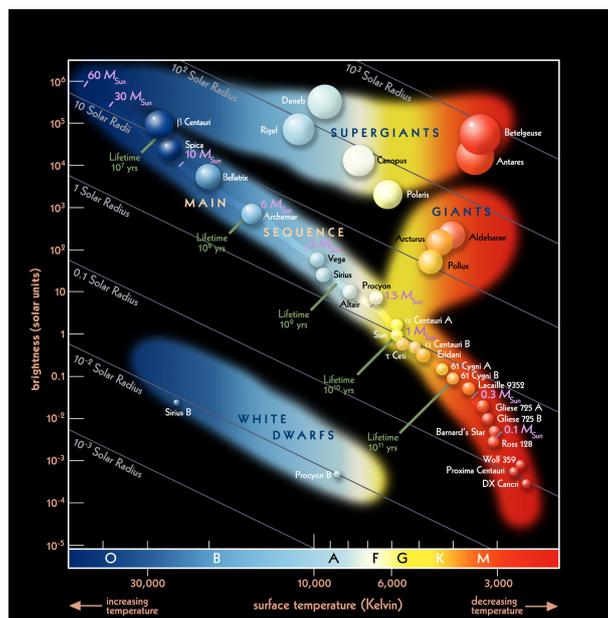


FIGURE 2.1 – Diagramme d’Hertzsprung-Russel (Cosmic Perspective, 4ème édition).

cœur, dont la masse et la température augmentent jusqu’à atteindre les conditions de fusion de l’hélium (on appelle cette étape le *flash hélium*). Le volume de l’étoile augmente alors brutalement, sa luminosité gagne un facteur 1000 et sa température diminue. L’étoile est devenue une géante rouge. Après l’hélium vient le carbone, et ce processus s’arrête lorsque la fusion en couche n’est plus possible. L’étoile refroidit alors et se contracte pour devenir un naine blanche. Les autres types d’étoiles peuvent subir des évolutions très différentes des étoiles de type solaire, le lecteur intéressé pourra se reporter aux nombreux ouvrages sur le sujet ([Chandrasekhar, 1939](#), [Cox and Giuli, 1968](#), [Kippenhahn and Weigert, 1994](#), [Hansen and Kawaler, 1995](#), [Schatzman and Praderie, 1990](#)).

☛ Le Soleil est une étoile de la séquence principale en milieu de vie, de type G2V, dont l’âge est estimé à $(4.52 \pm 0.04) 10^9$ ans. La luminosité du Soleil L_{\odot} correspond à l’énergie rayonnée par unité de temps. En intégrant sur tout le spectre électromagnétique, on peut définir la constante solaire S telle que $L_{\odot} = 4\pi A^2 S$, où A est la distance Terre-Soleil (une unité astronomique, voir tableau 1.1). La constante solaire a été notamment mesurée par la mission *Solar Maximum Mission* et vaut $S = (1.367 \pm 0.002) 10^6 \text{ erg.s}^{-1}.\text{cm}^{-2}$. On peut alors estimer la luminosité $L_{\odot} = (3.846 \pm 0.004) 10^{33} \text{ erg.s}^{-1}$. Notons que cette luminosité correspond à une perte de masse $\dot{m}_{\odot} = L_{\odot}/c^2$ de l’ordre que quelques 10^{12} g.s^{-1} ^a. Le vent solaire est de son côté responsable également d’une perte de masse $\lesssim 10^{12} \text{ g.s}^{-1}$ (voir ci-après). Sachant que sa masse actuelle est de $(1.9891 \pm 0.0012) 10^{33} \text{ g}$, ces pertes pourront être négligées en première approximation pour calculer les paramètres solaires. Enfin, le rayon du Soleil est estimé à $R_{\odot} = (6.9599 \pm 0.0002) 10^{10} \text{ cm}$. La température effective du Soleil à sa surface peut être estimée en faisant l’hypothèse que le spectre du Soleil est proche d’un spectre de corps noir. On peut dans ce cas écrire la loi de Stefan $L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T^4$, où σ est la constante de Stefan-Boltzmann. Cette approximation nous donne la température de $T_{\odot} \sim 5777 \text{ K}$.

^a. Sachant que le Soleil a environ 4.5 milliards d’années, cette perte de masse correspond, pour une luminosité constante, à une perte de masse totale de 10^{-4} de sa masse.

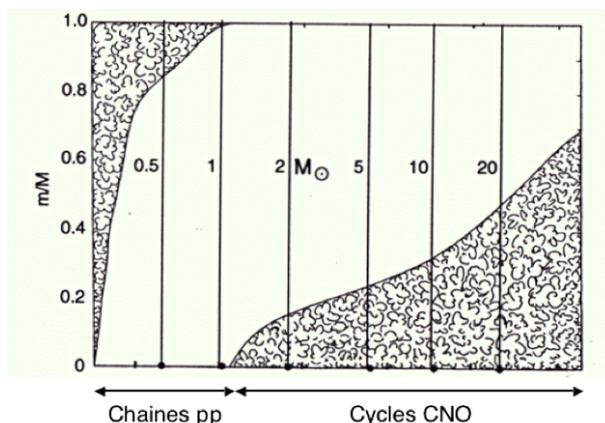


FIGURE 2.2 – Structure interne des étoiles en fonction de leur masse (ou, du cycle par lequel les réactions de fusion s’effectuent). Adapté de *Kippenhahn and Weigert (1994)*. La proportion en masse de la zone radiative est indiquée en blanc, celle de la zone convective en petits tourbillons. Notons que pour le Soleil, la zone convective fait environ 30% de son rayon mais représente environ 2% de sa masse totale.

Au cours de cette thèse, nous allons concentrer notre étude sur les étoiles de type solaire sur la séquence principale. La position d’une étoile dans la séquence principale détermine non seulement son évolution future, mais aussi les propriétés de sa structure interne.

2.1.2 Structure interne d’une étoile

L’énergie générée par les réactions de fusion nucléaire au cœur des étoiles peut être transportée vers l’extérieur par rayonnement (transfert radiatif), conduction thermique (faible dans les étoile) ou par des mouvements macroscopiques (convection, voir section 1.1.2). Selon la masse de l’étoile, les réactions de fusion nucléaire dans le cœur s’effectue selon les cycles pp ($M \lesssim 1.3 M_{\odot}$) ou CNO² ($M > 1.3 M_{\odot}$). Chaque cycle entraîne une répartition spatiale différente des réactions de fusion dans le cœur de l’étoile, et par suite la fonction de chauffage associée est différente selon la masse de l’étoile. Dans le cas du cycle CNO, les réactions de fusion sont plus concentrées vers le centre de l’étoile, et par conséquent le chauffage associé entraîne des flux d’énergie très intenses. Le gradient de température local $\nabla \equiv (P\partial_r T)/(T\partial_r P)$ augmente fortement et peut dépasser le gradient de température adiabatique $\nabla_{ad} \equiv (\partial \ln T / \partial \ln P)_s$ (*Kippenhahn and Weigert, 1994*). Le critère de Schwarzschild (cas inviscide) pour l’instabilité convective peut alors être dépassé et ces étoiles posséderont un cœur convectif³. Nous donnons en figure 2.2 un diagramme représentant la fraction de masse des zones convectives en fonction de la masse totale de l’étoile.

Les étoiles de type solaire présentent naturellement une zone interne où le transport de l’énergie s’effectue de manière radiative (que nous nommerons ci-après *zone radiative*), et une zone externe où l’énergie est transportée par des mouvements macroscopiques (*zone convective*). Les étoiles de faibles masse, par exemple de type M ($M \leq 0.3 M_{\odot}$), sont quant à elle complètement convectives, tandis que les étoiles de type F peuvent posséder à la fois un cœur et une couche externe convectifs entourant une zone radiative.

2. Ces différents cycles renvoient aux chaînes protons-protons et carbonés-azote-oxygène permettant la réaction de fusion de l’hydrogène en transformant quatre protons en un atome He^4 , deux neutrinos, et deux positrons qui s’annihilent immédiatement en libérant de l’énergie sous forme de rayons gamma (*Clayton, 1968*).

3. Dans le plasma solaire, les effets dissipatifs (viscosité, diffusion thermique, ...) doivent être pris en compte et le critère de Schwarzschild doit être remplacé par un critère sur le nombre de Rayleigh (*cf* section 1.1.2 pour une discussion plus détaillée à ce sujet).

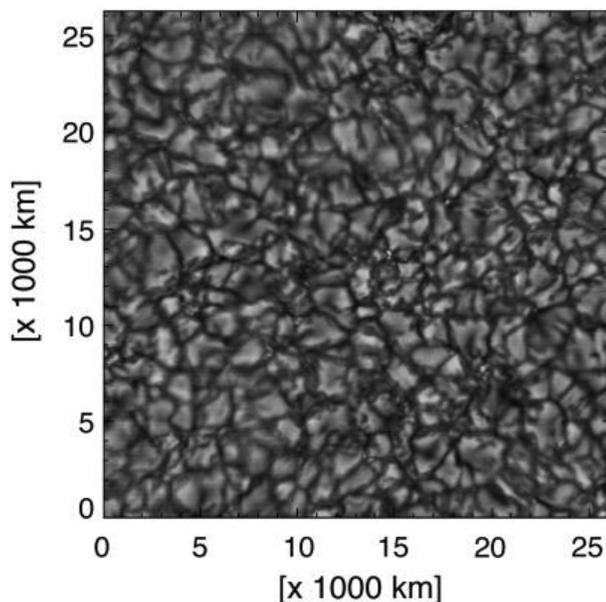


FIGURE 2.3 – Granulation à la surface du Soleil, observée depuis le pic du midi. On distingue bien les granules de quelques megamètres, et les lignes sombres inter-granulaires de taille inférieures à la centaine de kilomètres.

A titre d'exemple, nous montrons en figure 2.3 la manifestation de la convection à la surface du Soleil. Les *granules* observées ont un nombre de Reynolds⁴ associé de plus de 10^{13} , témoignant du haut degré de turbulence qui règne dans la couche convective solaire. Leur taille caractéristique est de l'ordre de quelques megamètres (environ la taille de la Terre), et ont une durée de vie de quelques minutes. Diverses structures de plus grande taille appelées meso-granules, super-granules et cellules géantes existent certainement aussi à la surface du Soleil (*Stix, 2002, Rast, 2003, Rieutord and Rincon, 2010*), elles résultent de la dynamique complexe à l'œuvre dans notre étoile. La plage d'échelles de longueur induite par la convection dépend de la taille de la zone convective, et par conséquent du type d'étoile considéré. Dans le Soleil, les cellules de convection atteignent des tailles de plusieurs centaines de megamètres à la base de la zone convective, entraînant au minimum deux ordres de grandeurs de différence avec la convection de surface.

Ces mouvements macroscopiques générés dans les zones convectives sont particulièrement importants car ils participent activement à l'établissement des caractéristiques globales de l'étoile. Dans le cas d'une étoile de type solaire, ces effets peuvent prendre les formes suivantes :

– **Transport de moment cinétique et des espèces chimiques**

Les mouvements convectifs sont créés par instabilité pour permettre au plasma de transporter la chaleur générée dans les cœurs stellaires vers l'extérieur. Ils redistribuent en même temps le moment cinétique de l'étoile, et modifient en conséquence son profil de rotation (*Brun and Toomre (2002)*, voir aussi section 2.2.1). Ils peuvent également modifier le transport de moment cinétique *via* l'excitation d'ondes se propageant dans la ou les éventuelles zones radiatives de l'étoile (*Zahn et al., 1997, Charbonnel and Talon, 2005*). Enfin, ils modifient également la composition chimique du plasma (*Brun, 1998*).

4. Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension qui caractérise le rapport des forces d'advection sur les processus visqueux dans l'équation de conservation du moment cinétique dans le formalisme fluide (1.19). Il s'écrit généralement $Re = UL/\nu$, où U et L sont les vitesses et longueurs caractéristiques du système, et ν la viscosité cinématique.

– **Génération de champ magnétique**

L'interaction des mouvements convectifs avec la rotation de l'étoile est essentielle pour le maintien des champs magnétiques observés dans de nombreuses étoiles *via* l'effet dynamo. L'existence d'une zone convective externe est également importante pour le magnétisme de surface d'une étoile (section 2.2.2), et par suite pour ses interactions avec son environnement.

– **Effet d'une zone de transition stable-instable**

L'existence d'une zone de transition stable-instable permet aux mouvements convectifs de s'étendre légèrement dans l'intérieur radiatif et modifier localement l'équilibre thermodynamique. Elle joue un rôle de barrière de transport dans l'intérieur solaire (section 2.2.1), et est de plus soupçonnée de jouer un rôle majeur dans la génération du champ magnétique dynamo solaire.

Ces trois points soulignent l'importance d'étudier les phénomènes dynamiques des intérieurs stellaires. Une première approche consiste à étudier directement ces phénomènes en trois dimensions, afin de bien caractériser les mécanismes de transport qui en découlent sur des temps dynamiques. Ensuite, on peut essayer de paramétrer ces effets pour les inclure dans des modèles réduits (typiquement, à une dimension) capables de traiter l'évolution séculaire d'une étoile. Ces deux approches sont complémentaires et connaissent actuellement un fort développement. En particulier, les processus de mélanges induits par le champ magnétique (*Maeder and Meynet, 2003, Mathis and Zahn, 2005*), l'effet des ondes internes (*Mathis et al., 2008*), les mouvements turbulents (*Decressin et al., 2009*) et le couplage entre les zones stables et instables (*Denissenkov et al. (2010)*) ont été introduits dans des modèles d'évolution stellaire.

2.1.3 L'atmosphère stellaire

L'atmosphère d'une étoile s'étend de la surface de l'étoile jusqu'à la frontière de l'astérosphère, lieu de rencontre avec le milieu interstellaire. On peut la décomposer en quatre zones : la *photosphère*, la *chromosphère*, la *région de transition* et la *couronne*. Les principales données sur ces régions proviennent d'observations du Soleil, nous ne discuterons donc pas ici le cas des autres étoiles (voir *Lamers and Cassinelli (1999), Wood (2004)* pour une discussion complète sur les observations de couronnes pour d'autres étoiles que le Soleil).

La photosphère est une couche très fine d'environ 500 km qui rayonne 99% de la lumière solaire avec un spectre de corps noir. La température de l'atmosphère atteint un minimum à la transition photosphère-chromosphère (figure 2.4(a)), puis croît jusqu'à atteindre environ 10^4 K. Le chauffage de la chromosphère se fait *a priori* par la dissipation d'ondes de chocs excitées par la turbulence photosphérique et se propageant dans la chromosphère dont la densité décroît avec l'altitude. A la surface de la chromosphère, la température augmente et la densité chute brutalement dans la région de transition. La raison physique de cette transition est encore aujourd'hui un mystère de la physique solaire (voir *Wedemeyer-Böhm et al., 2009*, pour une revue récente de la compréhension de la basse atmosphère solaire).

Enfin, la couronne commence à la sortie de la zone de transition et s'étend sur environ 150 unités astronomiques pour sa partie *avant* (~ 4000 unités astronomiques pour sa partie *arrière*) jusqu'à rencontrer le milieu interstellaire à ce qu'on appelle l'*héliopause*, qui constitue la frontière de ce qu'on peut considérer comme l'*atmosphère* du Soleil (figure 2.4(b)). C'est dans la couronne que se développe le vent solaire (voir le chapitre 5 pour une description détaillée de ce phénomène dynamique). Le vent est un écoulement magnétisé en rotation qui ralentit l'étoile au cours du

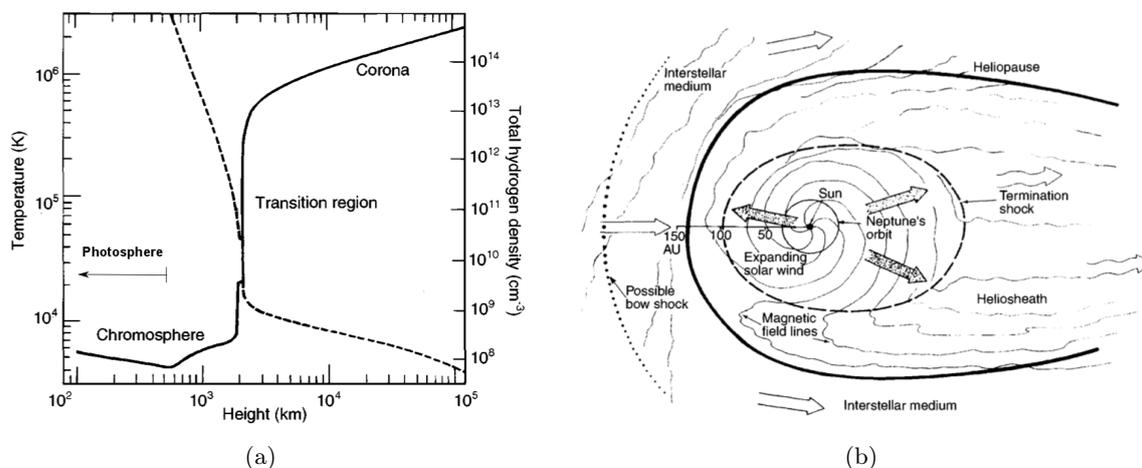


FIGURE 2.4 – (a) Structure de l’atmosphère solaire proche (adapté de [Gabriel \(1976\)](#)), et (b) représentation schématique de l’héliosphère (adapté de [Gombosi \(1998\)](#)).

temps par l’effet d’un couple magnétique. Ce couple dépend directement de l’intensité et de la topologie du champ magnétique, et, par suite, du magnétisme interne de l’étoile.

C’est également dans la couronne que sont susceptibles de se trouver des planètes gravitant autour de l’étoile. Si une planète est suffisamment proche, elle interagit activement avec son étoile hôte. L’interaction peut être de type gravitationnelle (*via*, par exemple, les effets de marée), ou magnétique (*via* le couplage de la planète, éventuellement magnétisée, avec le vent). Ces interactions peuvent sérieusement affecter à la fois l’orbite et les caractéristiques de la planète, mais également les propriétés internes de l’étoile hôte. De nombreux systèmes exo-planétaires sont notamment susceptibles d’être sujets à ces interactions (*e.g.*, [Cuntz et al., 2000](#)). Les étoiles abritant de telles planètes peuvent avoir une activité magnétique influencée par leurs satellites, et l’éventuelle connexion magnétique entre les deux corps peut potentiellement modifier l’histoire de la rotation de l’étoile (ce qui a d’importantes implications pour les caractéristiques globales de l’étoile, comme nous l’avons vu précédemment). Enfin, la bonne compréhension de ces interactions est également très importante pour l’établissement des caractéristiques planétaires, et en particulier la position de la zone d’habitabilité des planètes orbitant autour de l’étoile. Nous développons l’étude de l’interaction magnétique entre étoiles et planètes au chapitre 5, dans un premier temps dans le but de proposer une meilleure compréhension de l’impact des planètes proches sur les propriétés globales des étoiles. Cette étude est notamment comparée à ce que nous savons des interactions étoiles planètes grâce aux formidables laboratoires naturels que sont les systèmes jovien et saturnien dans notre système solaire ([Kivelson et al., 2004](#)).

2.2 Caractéristiques particulières de notre étoile

Le Soleil est l’étoile la plus proche de la Terre, ce qui nous permet de l’observer dans ses moindres détails. Le plasma solaire est organisé *via* ses écoulements moyens (section 2.2.1) et son cycle magnétique 2.2.2.

2.2.1 Écoulements moyens et tachocline

Le soleil est un étoile de type G, et par conséquent son intérieur possède deux zones principales (figure 2.5), la zone radiative (stable), et la zone convective (instable) (voir section 2.1.2). Leur interface est une partie de ce que l’on appelle la *tachocline*. En réalité, la tachocline est définie

à partir du profil de rotation du Soleil. Elle sépare la zone où le Soleil tourne de manière solide, et celle où il tourne de manière différentielle⁵. Cependant, certains auteurs préfèrent prescrire la profondeur où le gradient d'entropie moyen change de signe comme limite supérieure pour la tachocline (la profondeur à laquelle l'instabilité de convection disparaît). Dans ce manuscrit, nous choisissons de définir la tachocline à partir du profil de rotation du Soleil. Celle-ci est ensuite séparée en plusieurs zones. Dans sa partie haute, on trouve la zone de pénétration et/ou d'*overshoot*⁶ des mouvements convectifs. Au dessous se situe une zone stablement stratifiée qui ne subit l'influence des mouvements turbulents que par les éventuelles ondes, excitées par la convection à plus faible profondeur, qui s'y propagent. Enfin, la limite basse est définie par la profondeur à laquelle la rotation devient solide, c'est-à-dire où la rotation est la même à toutes les latitudes. L'épaisseur de la tachocline ainsi que son cisaillement de rotation varient avec la latitude.

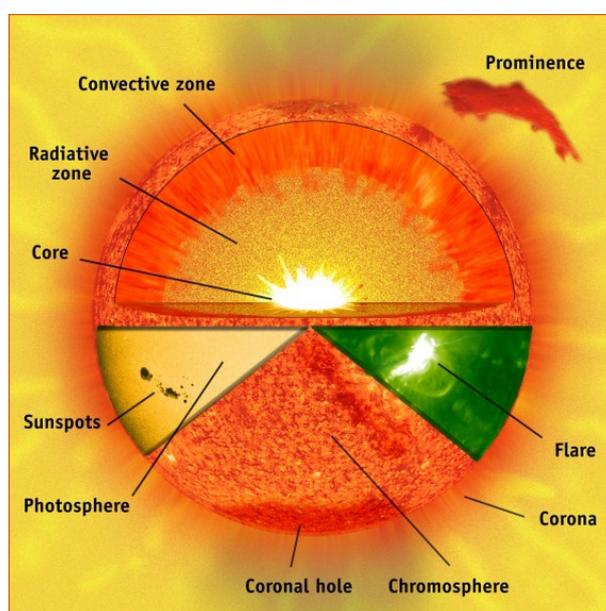


FIGURE 2.5 – Schéma de la structure interne et externe du Soleil.

Le profil de rotation déduit de l'héliosismologie est donné en figure 2.6 (*Schou et al.*, 1998, *Thompson et al.*, 2003). On observe une rotation solide en dessous de la ligne pointillée noire dans la figure (a), et une rotation différentielle en latitude au dessus. On peut remarquer que la zone convective est entourée de deux zones de cisaillement fort, à sa surface (appelée *Near Surface Shear Layer*, ou NSSL, *Miesch and Hindman* (2011)) et à sa base (la tachocline). On peut apprécier à l'œil nu l'épaisseur de la tachocline à l'aide de la figure (b) où sont tracés les profils de rotation à différentes latitudes en fonction du rayon (normalisé au rayon solaire). On peut tout de suite donner une valeur maximale pour l'épaisseur de la tachocline, $\Delta < 0.06 R_{\odot}$. De nombreuses études ont cherché à caractériser plus précisément cette épaisseur, ainsi que la position exacte du centre de la tachocline. D'après *Charbonneau et al.* (1999a), *Basu and Antia* (2003), la position de la tachocline à l'équateur est estimée à $r_{t,eq} = 0.693 \pm 0.003 R_{\odot}$ et sa position à plus haute latitude, *e.g.*, à 60 degrés, est estimée à $r_{t,60} = 0.717 \pm 0.003 R_{\odot}$. Rappelons que l'estimation de la position de la base de zone convective est donnée par $r_b = 0.713 \pm 0.003 R_{\odot}$

5. C'est de cette propriété que vient le mot *tachocline*, composé des mots grecs *tachos* qui signifie *promptitude*, *vivacité* ou encore *vitesse*; et *kléin* qui signifie *pencher*, *incliner*.

6. Nous appelons *overshoot* les mouvements convectifs qui sont excités dans la zone instable, mais pénètrent dans la zone stable dans laquelle ils sont dissipés. La zone de pénétration est quant à elle une zone sur laquelle les mouvements convectifs pénètrent et modifient les propriétés locales du plasma en le rendant instable à la convection.

(*Christensen-Dalsgaard et al., 1991*). Il est ainsi possible que la tachocline s'étende légèrement dans la zone convective à haute latitude. Selon la méthode utilisée, on trouve dans la littérature différentes estimations de l'épaisseur de la tachocline. On peut trouver un résumé de ces estimations dans le tableau 2.1.

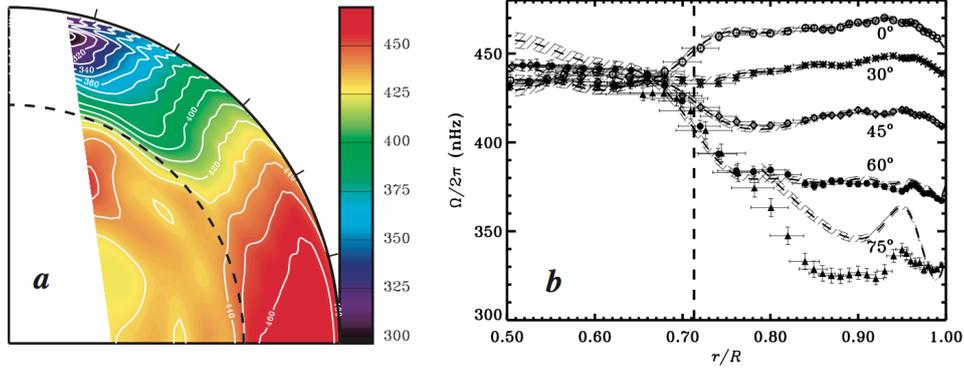


FIGURE 2.6 – Profil de vitesse angulaire dans l'intérieur solaire. Figures tirées de *Thompson et al. (2003)*.

Source	$\Delta (R_{\odot})$ à l'équateur
<i>Kosovichev (1996)</i>	0.09 ± 0.04
<i>Basu (1997)</i>	0.0196 ± 0.052
<i>Corbard et al. (1999)</i>	< 0.05
<i>Elliott and Gough (1999)</i>	$0.019 \pm 5\%$
<i>Charbonneau et al. (1999a)</i>	0.039 ± 0.013
<i>Basu and Antia (2003)</i>	~ 0.016

TABLE 2.1 – Principales estimations de l'épaisseur de la tachocline.

Le Soleil possède également un écoulement moyen dans le plan méridien (r, θ) , appelée *circulation méridienne*. Il est observé à la surface du soleil et se présente sous la forme de deux écoulements dirigés de l'équateur vers les pôles (figure 2.7). Cet écoulement fût observé pour la première fois par *Labonte and Howard (1982)*. *Haber et al. (2002)* mirent ensuite en évidence sa variabilité sur des temps comparables au cycle magnétique du Soleil (voir ci-après). Le processus de rétro-action du magnétisme solaire sur la circulation méridienne *via* la force de Lorentz est notamment important pour l'émergence de structure magnétiques (*Jouve and Brun, 2009*), ainsi que les modèles de dynamo de champ moyen (*Dikpati et al., 2010, Ulrich, 2010*). Le comportement de cette circulation n'a pu être observé que sur 10% de la profondeur de la zone convective. De nombreuses théories prennent appui sur le fait que cette circulation pourrait plonger jusqu'à la tachocline au niveau des pôles, et remonter à la surface à l'équateur. Plusieurs arguments théoriques peuvent être avancés pour un tel comportement (voir chapitre 4), ils doivent cependant encore être confirmés par les observations.

Si on sait aujourd'hui assez bien déterminer l'épaisseur de la tachocline, la compréhension physique de son existence, sa structure et de son éventuelle dynamique reste encore un sujet de recherches intenses. Nous passons en revue les différentes hypothèses qui ont été échafaudées pour expliquer son épaisseur au chapitre 4. Le rôle que pourrait jouer la circulation méridienne y est notamment détaillé. Des travaux originaux et novateurs visant à discriminer ces approches sont développés aux chapitres 4 et 9.

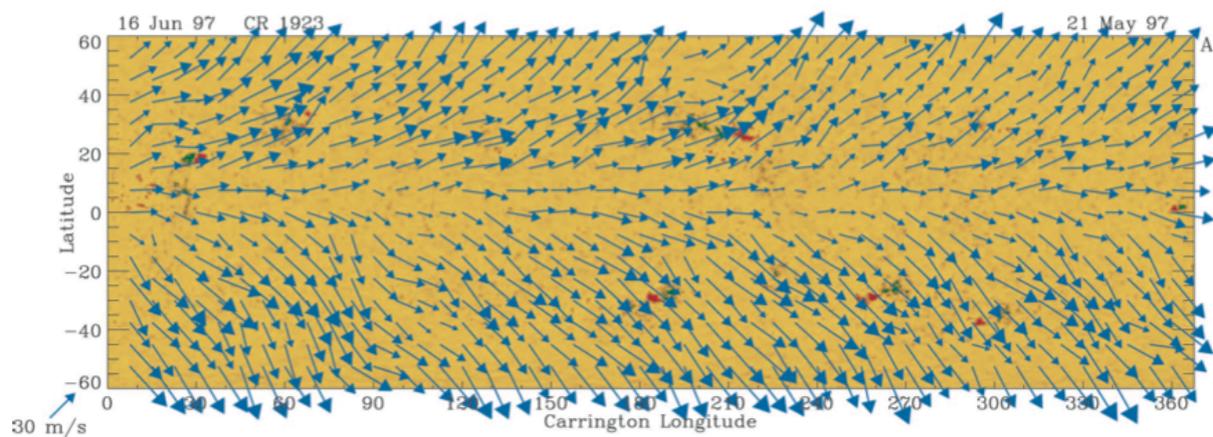


FIGURE 2.7 – Circulation méridienne observée par [Haber et al. \(2002\)](#) dans un diagramme longitude-latitude. On observe la nette tendance de la circulation méridienne vers les pôles dans chaque hémisphère. La carte de couleur correspond à un magnétogramme où les fortes polarités de champ magnétique sont indiquées en rouge et bleu.

2.2.2 Champ magnétique et cycle de 11 ans

Les mouvements turbulents tri-dimensionnels (figure 2.3) animant la zone convective du Soleil sont susceptibles de générer et maintenir un champ magnétique *via* l'effet *dynamo*. C'est à ce mécanisme que sont généralement associées les observations du champ magnétique à petite échelle à la surface du Soleil. Nous donnons en figure 2.8 un magnétogramme de la surface du Soleil. Les polarités du champ magnétique sont représentées en bleu et rouge. On observe immédiatement différentes échelles de champ magnétique. A la surface, des structures rouges/bleues de la taille des granules convectives peuvent être clairement identifiées : c'est le champ magnétique à petite échelle. A une échelle intermédiaire, les deux grosses zones rouges et bleues sur le zoom témoignent de l'existence d'une tache solaire qui est un lieu de forte activité magnétique. Enfin, un champ magnétique à plus grande échelle existe également dans la couronne et est partie intégrante du vent solaire (section 2.1.3). La création des différentes échelles magnétiques par le processus dynamo est encore aujourd'hui un défi de la physique stellaire, des travaux visant à mettre en lumière les processus détaillés y participant sont présentés au chapitre 8.

L'observation de la surface solaire depuis plus de 4 siècles a permis de mettre en évidence l'existence de cycles magnétiques. Les lieux d'apparition des taches solaires forment une ceinture d'activité magnétique à la surface du Soleil qui se déplace des moyennes latitudes à l'équateur avec un cycle d'environ 11 ans. La polarité des tâches solaires change à chaque signe, menant à un cycle magnétique effectif de 22 ans. On peut représenter ce cycle sur un diagramme temps-latitude (figure 2.9) pour faire apparaître le fameux *diagramme papillon*.

Les principales caractéristiques du cycle magnétique solaire sont les suivantes :

- Le cycle de 22 ans (dit de Hale) est modulé en amplitude sur un cycle d'environ 100 ans (Gleissberg). L'existence de minima d'activité (Maunder, sous le règne de Louis XIV, le roi Soleil) se produisant irrégulièrement ont également été mis en évidence.
- Les sites d'apparition des taches sont localisés dans une bande équatoriale de $\pm 30^\circ$. On peut observer l'existence d'une branche polaire en quadrature sur la figure 2.9, qui n'est pas directement reliée aux taches.
- Les taches sont en général inclinées avec un angle d'environ 10° (latitude 4°) à 35° (latitude 10°) par rapport à la direction est-ouest (loi de Joy).

L'apparition de cycles dans un milieu turbulent tel que le Soleil est remarquable (*cf* section

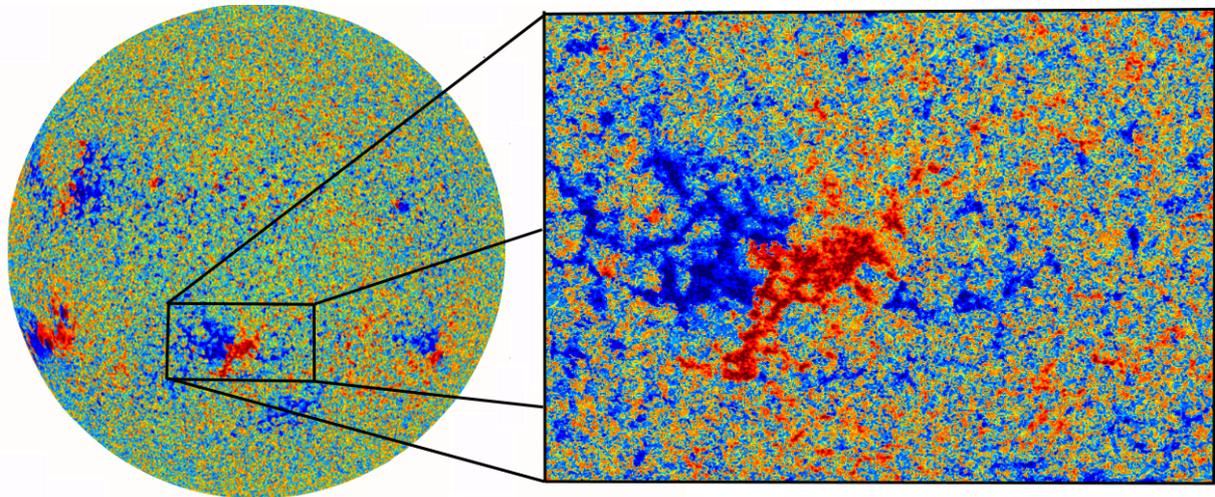


FIGURE 2.8 – Observation du magnétogramme sur l'instrument HMI à bord du satellite SDO. Ces images ont été réalisées avec le logiciel libre JHelioviewer (ESA, <http://jheliviewer.org/>).

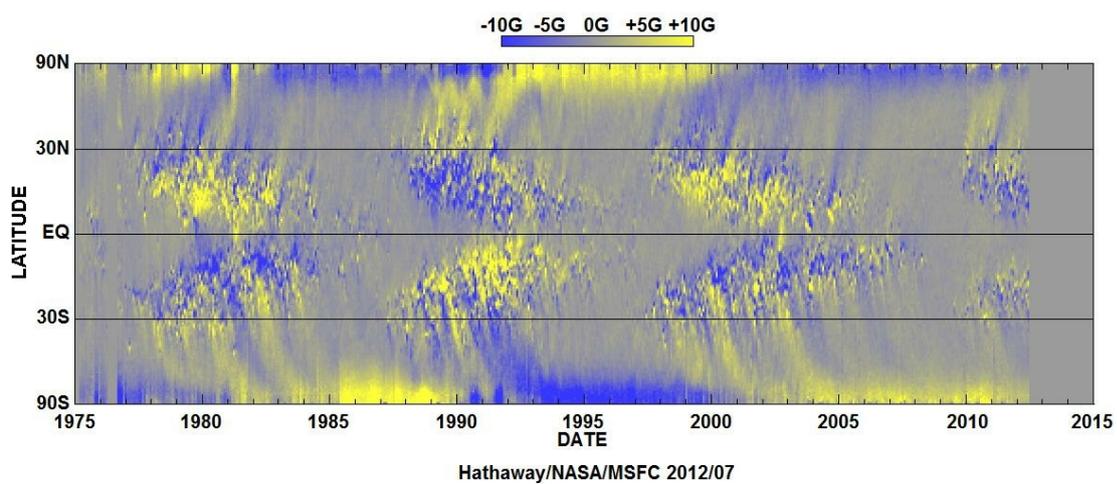


FIGURE 2.9 – Diagramme papillon des trois derniers cycles du Soleil. Crédit : D. Hathaway, <http://solarscience.msfc.nasa.gov/dynamo.shtml>

1.1.2). Ils sont certainement la manifestation externe de l'organisation interne du plasma solaire passant au travers de la granulation de surface. La reproduction de tels cycles à l'aide de simulations numériques tri-dimensionnelles est aujourd'hui un formidable défi pour les physiciens solaires (*Gilman, 1983, Glatzmaier, 1984, Brun et al., 2004b, Racine et al., 2011, Käpylä et al., 2012*). Des pistes de recherche pour parvenir à ce but seront évoquées au chapitre 8.

Turbulence, confinement et performance dans les tokamaks

Sommaire

3.1	Qu'est-ce qu'un tokamak ?	38
3.1.1	Concept du tokamak	38
3.1.2	Instabilités dans un tokamak	40
3.2	Confinement et auto-organisation des plasmas de tokamak	42
3.2.1	Ecoulements dans un tokamak	42
3.2.2	Barrières de transport	44

Ce chapitre est consacré à la description des machines expérimentales dédiées à la maîtrise humaine de la fusion nucléaire que nous appelons *tokamaks*. Le mot *tokamak* est un acronyme russe de “**T**oroidalnaya **k**amera s **m**agnitnymi **k**atushkami”, qui signifie “chambre magnétique torique”. Nous décrivons en section 3.1 ce qu’est un tokamak, puis nous donnons en section 3.2 les caractéristiques particulières des plasmas de tokamaks qui motivent ce travail.

3.1 Qu’est-ce qu’un tokamak ?

3.1.1 Concept du tokamak

L’énergie mise en œuvre dans les réactions de fusion au cœur des étoiles est formidablement élevée et provient essentiellement de l’énergie gravitationnelle générée par l’énorme masse mise en jeu. Il est impossible de reproduire cela sur Terre, car la masse minimale nécessaire à l’allumage des réactions de fusion est d’environ un dixième de la masse du Soleil, soit plus de 30 000 fois la masse de la Terre. Afin de tirer parti du potentiel énergétique des réactions de fusion nucléaire sur Terre, d’autres mécanismes doivent être considérés.

L’enjeu de la construction d’un réacteur de fusion nucléaire réside par conséquent dans le confinement d’une énergie suffisante pour déclencher et maintenir des réactions de fusion dans un plasma. Afin de maximiser les chances de fusion, des cycles différents des cycles pp et CNO (qui ont lieu dans les intérieurs stellaires, voir chapitre 2) doivent être envisagés. Le cycle basé sur le deutérium et le tritium est *a priori* le plus favorable car il est à la fois l’un des cycles de fusion les plus probables, et il peut se déclencher à relativement basse température. Le taux de réaction¹, mesuré par le produit $\langle \sigma v \rangle_{DT}$, est de l’ordre de $10^{-21} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ à son maximum, pour $T \sim 50 \text{ keV}$.

On peut alors schématiser une machine à fusion nucléaire de la manière suivante. Notons τ_E le temps caractéristique sur lequel le plasma peut être confiné dans la machine. Cette machine subit nécessairement des pertes d’énergie qui peuvent s’écrire $P_{\text{perte}} = W/\tau_E = 3(n_e T_e + n_i T_i)/(2\tau_E)$. Nous pouvons également définir le facteur d’amplification de la machine par $Q = P_{\text{fusion}}/P_{\text{add}}$, où P_{fusion} est la puissance nette générée par les réactions de fusion et P_{add} la puissance nécessaire au fonctionnement de la machine. Si on note k^{-1} la fraction de la puissance

1. Le taux de réaction en $\text{m}^{-3} \text{s}^{-1}$ est donné par le produit $n_D n_T \langle \sigma v \rangle$ pour le couple Deutérium-Tritium.

fusion captée par le plasma, la puissance additionnelle peut s'écrire $P_{\text{add}} = P_{\text{perte}} - P_{\text{fusion}}/k$ et le facteur d'amplification se réécrit alors

$$Q = \frac{k}{\frac{\tau_L}{\tau_E} - 1},$$

où nous avons défini le temps de Lawson $\tau_L = kW/P_{\text{fusion}}$. La condition d'auto-entretien de la machine de fusion s'écrit alors de façon très simple comme $\tau_E = \tau_L$, qui est connu comme le *critère de Lawson* pour la fusion expérimentale. A titre d'exemple, le facteur d'amplification visé pour la machine ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) en construction sur le site de Cadarache (France) est de l'ordre de 10 pour les chocs les plus performants.

De nombreuses idées ont été proposées pour confiner le plasma dans un volume fermé depuis les années 50. Deux familles de réacteurs sont aujourd'hui privilégiées : les machines à confinement inertiel dans lesquelles les réactions de fusion sont déclenchées par une impulsion laser très énergétique dans un très petit volume (*Laser mégajoule, National Ignition Facility, etc...*), et les machines à confinement magnétique dans lesquelles le plasma est confiné dans un volume (généralement torique) par un champ magnétique très intense (tokamaks, sphéromaks, stellarators, *reversed field pinch, etc...*). Nous ne nous intéresserons au cours de cette thèse qu'au tokamak, qui est un des concepts de machine de fusion les plus étudiés aujourd'hui.

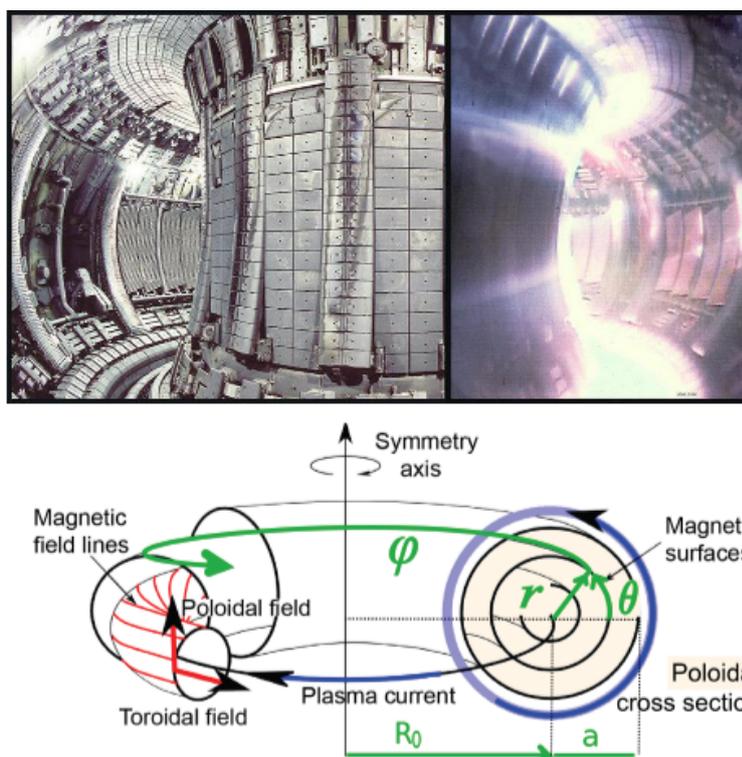


FIGURE 3.1 – Géométrie simplifiée d'un tokamak. Le champ magnétique toroïdal intense est généré par des bobines extérieures (non représentées ici). Le courant plasma induit le champ magnétique poloidal, et le champ total est enroulé (lignes rouges) autour de surface toriques. Nous définissons sur cette figure le grand rayon du tokamak R_0 , son petit rayon a , la direction radiale r , et les angles θ (poloïdal) et φ (toroïdal). Crédit Photo : JET. Crédit schéma : P. Tamain.

Un tokamak est une machine torique dans laquelle un champ magnétique toroidal très intense

(quelques teslas) est généré dans le plasma par des bobines magnétiques toroïdales englobant la chambre du plasma. La variation du flux magnétique dans un circuit primaire (solénoïde central) induit, *via* la loi de Maxwell-Faraday ($\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$), un champ électromoteur $E_\varphi = -v_{\text{loop}}/2\pi R$, et par suite un courant toroïdal dans le plasma qui joue un rôle de circuit secondaire d'un transformateur. Ce courant plasma génère à son tour un champ magnétique poloïdal. Le champ magnétique total est alors la somme de ces deux composantes, et les lignes de champ s'enroulent autour de surfaces magnétiques concentriques. Une représentation simplifiée de ce système ainsi que deux photos du tokamak JET (Angleterre) sont données en figure 3.1.

Les paramètres géométriques d'un tokamak sont naturellement son grand rayon R_0 (nous noterons (R, z) les coordonnées cartésiennes du plan poloïdal) et son petit rayon a . Dans le cas où les surfaces magnétiques ont une trace circulaire dans le plan poloïdal et où elles sont concentriques, le rayon r est à la fois la coordonnée polaire du plan et un label des surfaces magnétiques. Nous noterons plus généralement ce label χ ² dans les cas où nous ne supposons pas de géométrie particulière pour les surfaces magnétiques. Enfin, nous utiliserons les lettres m et n dans ce manuscrit pour décrire les modes de Fourier associés aux directions poloïdales (θ) et toroïdales (φ).

Le champ magnétique d'un tokamak est généralement exprimé sous la forme générale

$$\mathbf{B} = I\nabla\varphi + \nabla\varphi \times \nabla\chi. \quad (3.1)$$

Le champ magnétique est plus intense sur le bord interne du tore que sur le bord externe, ce qui a d'importantes implications sur le lieu de déclenchement d'instabilités dans les plasmas de tokamaks (voir section suivante). L'enroulement des lignes de champ magnétique est caractérisé par le facteur de sécurité q défini par

$$q = \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla\varphi}{\mathbf{B} \cdot \nabla\theta}, \quad (3.2)$$

qui représente le nombre de tours toroïdaux effectués par une ligne de champ pour un tour poloïdal.

La configuration magnétique d'un tokamak est construite pour confiner les particules du plasma sur des surface toriques en compensant les dérives liées à la courbure (et ∇B) du champ magnétique autour du tore. La théorie dite *néo-classique* ([Hinton and Hazeltine, 1976](#)) a été développée pour prédire les caractéristiques du transport dans les plasmas de tokamak en prenant en compte les collisions entre les différentes particules le composant. Cependant, il s'est avéré expérimentalement que la configuration du tokamak entraînait de nombreuses instabilités pouvant mener à une turbulence plasma, et à une dégradation conséquente du confinement de l'énergie. Les recherches actuelles visent entre autre à comprendre cette turbulence, et si possible à trouver des moyens de la minimiser et/ou de la supprimer. L'objectif final est de maximiser τ_E , et donc les performances fusion de la machine.

3.1.2 Instabilités dans un tokamak

Comme nous l'avons déjà esquissé en section 1.1.2, les plasmas de tokamak sont sujets à diverses instabilités pouvant mener à la turbulence. Les instabilités de petite échelle peuvent être classées en deux catégories : les instabilités liées à la pression dans le plasma, et celles issues de courant toroïdal le traversant. Les instabilités liées au courant limitent le courant toroïdal et la pression pouvant être atteints dans le plasma. Ce sont des instabilités électromagnétiques car elles mettent en jeu des perturbations du champ magnétique global. Elles sont en général

2. χ est exactement défini comme l'opposé du flux magnétique poloïdal noté ψ . Pour la plus grande partie de nos applications, nous utiliserons préférentiellement la coordonnée polaire r au lieu du label χ .

étudiées dans le formalisme MHD, et constituent un sujet très actif dans la communauté. Nous choisissons dans ce manuscrit de ne pas traiter ces instabilités, afin de se concentrer sur celles menant au transport radial d'énergie et par suite à la perte du confinement de l'énergie.

Les instabilités liées à la pression se déclinent ensuite à nouveau en deux catégories. On peut séparer d'un côté les instabilités de la famille d'*interchange*, qui est une généralisation de l'instabilité convective décrite en section 2.1.2 dans le cadre des étoiles. Dans la partie "faible champ" du tokamak ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$), le gradient de B (qui joue le rôle de la gravité stellaire) est aligné avec le gradient de pression et l'instabilité d'interchange peut se développer. Dans la partie "fort champ" au contraire, ces deux gradients sont anti-alignés et la configuration est stable par rapport à l'instabilité d'interchange.

La deuxième catégorie est la famille des *ondes de dérives*, qui est une instabilité liée au gradient de densité dans le plasma. Elle se présente sous forme d'ondes amplifiant conjointement les perturbations de densité et de potentiel électrique.

Nous représentons les principales instabilités liées à la pression dans les plasmas de tokamak en table 3.1. Les instabilités ioniques sont principalement reliées au gradient de température des ions (*Ion Temperature Gradient instability*, que nous dénommerons ITG). Elles sont souvent dénommées η_i , car elle peuvent être caractérisées par le gradient de température normalisé $\eta_i = d(\log T_i)/d(\log n)$. Il existe une instabilité jumelle à l'ITG pour les électrons, appelée ETG. Les électrons piégés sont aussi sujet à une instabilité propre à plus grande longueur d'onde. On trouve également dans ce bestiaire les instabilités d'ondes de dérive associées notamment au gradient de densité électronique. Enfin, bien que nous ne les étudierons pas ici, nous pouvons mentionner les instabilités "fluides" liées au gradient de pression.

Groupe	Instabilité	Source d'énergie	Sous-classe
Instabilités ionique	Modes η_i	∇T_i	Modes <i>slab</i>
			Modes toroïdaux Modes des ions piégés
Instabilités électroniques	Ondes de dérive	∇n_e	Modes <i>slab</i> Modes toroïdaux
	Modes dissipatifs des électrons piégés	∇T_e	
	Modes non collisionnels des électrons piégés	∇T_e	
	Modes η_e	∇T_e	Modes <i>slab</i> Modes toroïdaux
	Modes électromagnétiques des ondes de dérive	∇n_e	
Instabilités fluides	Modes ballonnés résistifs	∇P	Modes rapides Modes lents
	Modes ballonnés par diffusion de courant	∇P	

TABLE 3.1 – Principales instabilités dans les plasmas de tokamak. Adapté de *ITER Physics Expert Groups on Confinement et al. (1999)*.

Parmi ces instabilités, l'ITG est la principale actrice du transport turbulent pour les ions. Un traitement simplifié de déclenchement de l'ITG pourra être trouvé en annexe E. C'est cette instabilité que nous allons étudier dans ce manuscrit, pour les raisons suivantes. La turbulence issue de l'ITG interagit fortement avec les écoulement zonaux, et par conséquent participe directement à l'auto-organisation du plasma (section 3.2.1). Son contrôle dans les plasmas de tokamak *via* les

écoulements zonaux ou la configuration magnétique peut mener à une augmentation significative du confinement, et même à la bifurcation vers une *barrière de transport* (section 3.2.2). L'ITG est donc une instabilité de choix à étudier dans le contexte de cette thèse.

3.2 Confinement et auto-organisation des plasmas de tokamak

3.2.1 Écoulements dans un tokamak

Plusieurs types d'écoulements poloïdaux peuvent être naturellement présents dans les plasmas de tokamak. Nous pouvons en distinguer deux remarquables : les *écoulements moyens* et les *écoulements zonaux*.

Les écoulements moyens sont des écoulements qui ne dépendent que de la dimension radiale r (ils correspondent à des modes de Fourier $m = 0, n = 0$)³ qui n'évoluent que sur des temps comparables au temps de confinement. Ils ne dépendent donc pas directement de la turbulence et leur amplitude est bien contrainte par la théorie néoclassique (*Hinton and Hazeltine, 1976, Kim et al., 1991*). Le lecteur intéressé pourra se référer à la thèse de *Dif-Pradalier (2008)*, nous ne traiterons pas de cette partie néoclassique dans ce manuscrit.

Les écoulements zonaux sont pour leur part variables dans le temps et interagissent activement avec la turbulence. Nous nous concentrerons ici sur les écoulements poloïdaux, et nous renvoyons le lecteur à la thèse de *Abiteboul (2012)* pour une discussion complète sur les écoulements toroïdaux dans les plasmas de tokamak. En se basant sur l'équation du mouvement (1.34), la vitesse poloïdale des particules peut se décomposer sous la forme suivante

$$v_\theta = v_{E\theta} + v_{g\theta} + v_{G\parallel} \frac{B_\theta}{B} + v_{\text{mag}}. \quad (3.3)$$

Les trois premières composantes sont celles des gyrocentres, tandis que la vitesse de magnétisation v_{mag} tire son origine de la magnétisation du plasma *via* le terme de polarisation des gyrocentres.

On peut alors décomposer la vitesse poloïdale *fluide* équivalente sous la forme d'un équilibre radial des forces moyenné sur une surface de flux, qui s'écrit

$$u_\theta = -\underbrace{\frac{E_r}{B}}_{u_{E\theta}} + \underbrace{\frac{\partial_r p_\perp}{eBn}}_{u_\theta^*} + \frac{B_\theta}{B_\varphi} u_\varphi, \quad (3.4)$$

où les vitesses u_θ et u_φ sont les vitesses fluides. Cette équation d'équilibre relie directement le champ électrique radial aux vitesses de rotation du plasma, ainsi qu'aux forces thermodynamiques. L'équilibre s'établit *a priori* sur des temps collisionnels τ_{coll} , mais il s'avère très bien satisfait sur des temps bien plus courts ($\tau \ll \tau_{\text{coll}}$, voir *Abiteboul et al. (2011)*). Il s'avère également que la vitesse poloïdale totale u_θ est bien contrainte par la théorie néoclassique, même en présence de turbulence (voir *Dif-Pradalier et al., 2009*, pour une discussion sur l'écart de u_θ à u_θ^{neo})

Enfin, le champ électrique radial est également contraint par l'équation de quasi-neutralité (1.41) dans le formalisme gyrocinétique. Ces contraintes multiples rendent son contrôle difficile dans les simulations de turbulence gyrocinétique, comme nous allons le voir au chapitre 7. *Dif-Pradalier et al. (2008)* ont en outre montré l'importance de bien calculer ce champ électrique pour une représentation adéquate de la turbulence gyrocinétique à l'aide de codes globaux.

3. Rappelons ici que dans le cas des tokamaks, la lettre m renvoie au mode de Fourier poloïdal (θ) et la lettre n au mode de Fourier toroïdal (φ). Dans le cas de la base des harmoniques sphériques que nous utilisons dans les chapitres sur le Soleil, m renvoie au nombre d'onde azimutal (φ) et l au degré du polynôme de Legendre latitudinal (θ).

Le champ électrique joue un rôle particulièrement important pour la turbulence plasma dans les tokamaks (*Diamond et al., 2005*). En particulier, *Sarazin et al. (2010a)* ont montré que les structures turbulentes issues de l'instabilité ITG se propagent poloïdalement à la vitesse $v_{E\theta} + v_{\text{phase}}$ dans le plasma, et non à la vitesse totale des particules v_θ . Par suite, c'est l'écoulement lié au champ électrique radial qui interagit préférentiellement avec la turbulence. Les corrugations du champ électrique radial peuvent aussi être corrélées à des augmentations locales du gradient de température ionique (*Dif-Pradalier et al., 2010*), ou autrement dit, à une décroissance locale de la turbulence. Ces deux raisons sont par elles-mêmes déjà suffisantes pour que nous concentrons notre étude sur les écoulements zonaux liés au champ électrique radial (nous verrons ci-après d'autres raisons de se concentrer sur ces écoulements). Nous détaillons en section 7.1.2 les différents mécanismes expérimentaux pouvant être à l'origine de ce type d'écoulements poloïdaux dans les tokamaks. Des résultats expérimentaux mettant en évidence le lien entre les écoulements zonaux liés au champ électrique radial et une décroissance de la turbulence y sont aussi présentés (*e.g., Fujisawa et al., 2004*).

En outre, les écoulements zonaux sont des structures à grande échelle pouvant émerger d'un milieu turbulent multi-échelle (voir section 1.1.2). Ils sont issus d'interactions non-linéaires complexes et témoignent d'une capacité d'auto-organisation remarquable des plasmas de tokamak. Nous montrerons au chapitre 8 une première étape pour appréhender la complexité spectrale des interactions multi-échelles dans le but de mettre en évidence les mécanismes clés menant à l'apparition d'écoulements zonaux.

D'autres types d'écoulements peuvent participer à l'auto-organisation de la turbulence dans les tokamaks. En particulier, les *modes géodésiques acoustiques* (GAM) sont des modes oscillants axisymétriques ($m = 1, n = 0$) qui interagissent à la fois avec les écoulements zonaux et la turbulence (*Hallatschek and Biskamp, 2001*). Les GAM peuvent être excités par exemple par la turbulence elle-même lorsque le facteur de sécurité est élevé (*Itoh et al., 2005*), ou encore par une population de particules rapides (*Zaroso et al., 2012*). Il a récemment été montré que les GAM peuvent jouer un rôle non négligeable dans la saturation des écoulements zonaux à l'aide de modèles idéalisés proie-prédateurs (*Miki and Diamond, 2011*). L'étude de ces modes est au delà du champ d'investigation de cette thèse, nous renvoyons le lecteur à la thèse de *Zaroso (2012)* pour une discussion plus approfondie à ce sujet.

Enfin, nous donnons en figure 3.2 la hiérarchie des écoulements discutés dans cette section en fonction de leur fréquence (temporelle) caractéristique. Les écoulements zonaux sont de faible fréquence, tandis que les GAMs possèdent généralement une fréquence élevée. La turbulence possède un spectre large rendant complexe les interactions entre celle-ci, les écoulements zonaux, les écoulements moyens, et les GAMs. Nous montrerons en particulier au chapitre 7 l'apparition de phénomènes de relaxations quasi-cycliques issue de l'interaction entre la turbulence et un écoulement poloïdal moyen.

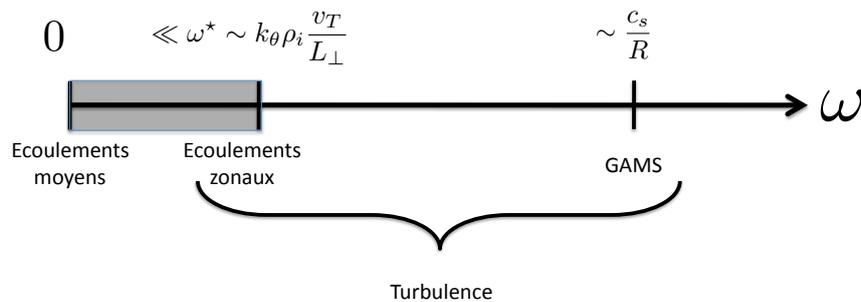


FIGURE 3.2 – Fréquences des écoulements poloïdaux principaux dans les plasmas de tokamak.

3.2.2 Barrières de transport

On peut représenter schématiquement le profil de pression d'un plasma de tokamak en fonction du petit rayon r (figure 3.3). Le profil indiqué en vert (mode "L") correspond à une décharge standard de tokamak. La pression est régulière et maximum au centre du plasma. Le gradient de pression est négatif, et génère les instabilités décrites en section 3.1.2. L'énergie confinée dans le plasma est relativement faible dans ce cas, et le transport de l'énergie est dominé par la turbulence à travers le plasma. Les courbes rouges montrent ensuite deux modes de fonctionnement des tokamaks qui ont été observés expérimentalement (pour une revue des données expérimentales, voir [Wolf, 2003](#)). Le mode "H" (pointillés rouges) est déclenché par l'apparition d'une *barrière de transport* au bord du plasma. Cette barrière de transport, parfois appelée *ETB*, se caractérise par un raidissement significatif du profil de pression au bord, ce qui permet d'augmenter fortement la pression au centre du plasma et par conséquent de confiner plus d'énergie dans le tokamak. Ce mode de fonctionnement peut encore être amélioré avec l'apparition de barrières de transport *internes* (généralement appelées *ITB*) au centre du plasma. Le profil de pression se raidit alors fortement au milieu du plasma, et l'énergie confinée est à nouveau accrue. Le mode opératoire combinant le mode "H" avec une barrière de transport interne est dénommé *mode avancé*. Ces deux barrières sont cependant susceptibles d'interagir et de rendre la configuration instable ([Sarazin et al., 2002](#)).

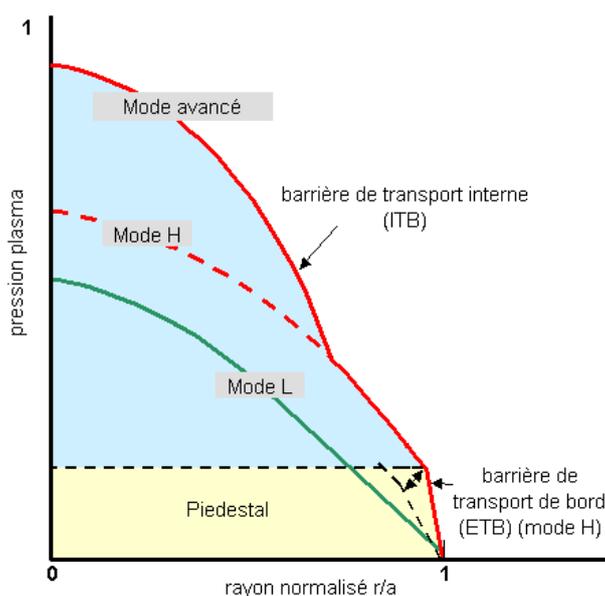


FIGURE 3.3 – Représentation schématique des scénarios de confinement amélioré basés sur le déclenchement de barrières de transport dans les tokamaks.

Les barrières de transport externes et internes font aujourd'hui partie intégrante des scénarios de base pour les futurs tokamaks tels que ITER. Le raidissement du profil de pression qui leur est associé peut être interprété comme une décroissance locale de la turbulence qui permet un accroissement du confinement énergétique. Les observations expérimentales suggèrent que l'apparition des barrières de transport, en particulier les ETB (*e.g.*, [Taylor et al., 1989](#)), pourrait provenir d'une bifurcation de l'état du plasma. Cependant, l'apparition progressive de barrières de transport a également été observée dans plusieurs tokamaks (*e.g.*, [Wolf et al., 2001](#)). Divers mécanismes sont par conséquent susceptibles de déclencher les barrières de transport, mais aucune théorie ne permet aujourd'hui de les comprendre de façon auto-consistante. L'étude des conditions de déclenchement, en lien avec l'étude de la turbulence dans les tokamaks, est par

conséquent de première importance pour les réacteurs des générations futures. C'est dans ce contexte que s'inscrit mon travail de thèse qui vise à caractériser les conditions d'apparition des barrières de transport dans un plasma de tokamak turbulent.

Deux ingrédients susceptibles de déclencher ces barrières ont été identifiés expérimentalement (*Connor et al., 2004*) :

- Les profils du facteur de sécurité q présentant un minimum déclenchent souvent l'apparition de barrières de transport internes (*Joffrin et al., 2003*). Ce mécanisme est souvent interprété comme une chute de l'excitation des modes ITG au niveau de ce minimum, bien que cette explication suscite encore aujourd'hui plusieurs interrogations et n'ait pas été reproduite par des simulations numériques prenant en compte l'ensemble des modes turbulents.
- L'existence d'écoulements cisailés générés par le champ électrique radial semble être une condition nécessaire à l'apparition des barrières de transport internes et externes (*Terry, 2000*). Ce cisaillement interagit directement avec la turbulence du plasma, et peut en outre être à l'origine de bifurcations.

Ces deux mécanismes seront respectivement décrits en détail aux chapitres 6 et 7, où nous étudions leur lien avec la turbulence gyrocinétique issue de l'instabilité ITG et leur rôle dans l'éventuel déclenchement de barrières de transport.

Deuxième partie

**Transport et turbulence
magnétohydrodynamique dans les
étoiles**

Confinement de la tachocline

Sommaire

4.1 Contexte et théories	47
4.1.1 Tachocline et turbulence anisotrope	47
4.1.2 Tachocline et magnétisme interne	48
4.1.3 Autres idées proposées dans la littérature	50
4.2 Les modèles magnétiques	51
4.2.1 Simuler une étoile complète en 3D	51
4.2.2 Simulations globales du scénario magnétique	55
4.2.3 Extension à diverses topologies magnétiques	57
Conclusions	62

4.1 Contexte et théories

La tachocline solaire est une zone bien particulière de l'intérieur de notre étoile, qui sépare une zone stable (radiative) d'une zone instable (convective, voir section 2.1), et qui est également le lieu de forts cisaillements de vitesse. Nous avons passé en revue les observations permettant de contraindre la structure de la tachocline en section 2.2.1. Dans le reste de cette section, nous présentons les différentes explications qui ont été proposées dans la littérature pour comprendre l'épaisseur de la tachocline.

4.1.1 Tachocline et turbulence anisotrope

Le premier travail visant à comprendre la structure de la tachocline fut proposé par *Spiegel and Zahn* (1992). Dans ce papier fondateur, les auteurs démontrent que le gradient latitudinal de rotation dans le haut de la tachocline doit induire des circulations dans le plan méridien (sens horaire dans l'hémisphère nord, anti-horaire dans l'hémisphère sud). Dans un cas quasi-stationnaire, ces circulations sont elles-mêmes contrôlées par la diffusion radiative via l'équation de conservation de l'énergie (1.20). Alors, on peut montrer que la diffusion radiative conduit à une hyper-diffusion pour le moment cinétique. C'est ce qu'on appelle le mécanisme de *radiative spreading* : la diffusion thermique contrôle le développement de circulations méridiennes qui redistribuent le moment cinétique. Le profil de rotation de la zone convective s'étend alors à travers la tachocline sur des temps de diffusion thermique, ce qui impliquerait que la tachocline ait une épaisseur de plus de 30% du rayon solaire à l'âge actuel de notre étoile. Ceci est bien entendu en complète contradiction avec les observations de l'intérieur solaire (*cf* section 2.2.1). Par conséquent, d'autres ingrédients physiques doivent être mis en avant pour expliquer la faible épaisseur actuelle de la tachocline. *Spiegel and Zahn* (1992) proposèrent de considérer l'impact d'une turbulence (par exemple, liée à la pénétration de mouvements convectifs) dans la tachocline. Cette turbulence est nécessairement anisotrope, car, sous l'effet de la forte stratification présente dans la tachocline, elle tend à devenir quasi-2D (dans le plan horizontal). Ils considèrent alors une turbulence générant un transport de type *diffusif* et montrèrent que celle-ci permettait de

contre-balancer l'effet de la diffusion thermique, et ainsi de confiner la tachocline sur une épaisseur compatible avec les observations.

Ce résultat fut très contesté, notamment par *Gough and McIntyre (1998)* (voir section 4.1.2). En faisant le parallèle avec des résultats géophysiques (*Starr, 1968, Dritschel and McIntyre, 2008*), ils statuèrent que la turbulence, dans une tachocline fortement stratifiée, devait avoir un effet anti-diffusif vis-à-vis du gradient horizontal de Ω , et par conséquent ne pouvaient éroder le gradient de rotation pour rendre la rotation solide comme le supposaient *Spiegel and Zahn (1992)*. En fait, l'effet de la turbulence est peut-être un petit plus compliqué que cela. En effet, ces résultats sont basés sur l'interaction entre ondes de Rossby et écoulements zonaux (en anglais, *zonal flows*) dans l'atmosphère terrestre. Sans rentrer dans les détails, ces interactions tendent à créer des jets localisés en latitude (*e.g.*, les écoulements zonaux de Jupiter). Par conséquent, la turbulence n'homogénéise pas la rotation en latitude, mais tend à raidir ses gradients et à créer des écoulements zonaux. Deux points doivent être notés ici. Premièrement, ce comportement nécessite l'existence d'ondes similaires aux ondes de Rossby, qui peuvent générer des couples horizontaux $u'v'$ d'anti-friction (*Dritschel and McIntyre, 2008*). Deuxièmement, cet effet est un effet qui s'applique en latitude. Or, la tachocline est le lieu de deux cisaillements de rotation latitudinaux et radiaux. Ainsi, *Miesch (2003)* a montré à l'aide de simulations de type *shallow-water* que lorsque les deux cisaillements sont pris en compte, le transport de moment cinétique est relativement plus compliqué. La turbulence agit de manière anti-diffusive dans la direction *radiale*, et par conséquent amplifie le cisaillement de rotation et potentiellement empêche l'extension radiale de la tachocline (voir *Kim and MacGregor, 2003*, pour une vision simplifiée de ce mécanisme, que nous abordons également au chapitre 9). Dans la direction *latitudinale*, il montre que la turbulence se comporte effectivement de manière diffusive comme l'avaient envisagé *Spiegel and Zahn (1992)*. Néanmoins, ces travaux doivent encore être confirmés par des simulations anélastiques à plus haute résolution. On peut également noter que des conclusions similaires ont été données par des travaux analytiques de *Kim (2005)*, *Leprovost and Kim (2006)*, *Kim and Leprovost (2007)*. Enfin, il semblerait que ces comportements diffusifs et anti-diffusifs de la turbulence pourraient disparaître en présence de champ magnétique toroïdal (*Tobias et al., 2007*). Ce sujet est ainsi encore très controversé dans la communauté. Des éléments de réflexions tirés d'un modèle réduit de ce problème seront donnés en section 9.2.

4.1.2 Tachocline et magnétisme interne

En "réponse" au modèle originel de *Spiegel and Zahn (1992)*, *Gough and McIntyre (1998)* présentèrent un autre scénario pour expliquer la structure de la tachocline.

Pour expliquer la structure de la tachocline, ils introduisirent l'idée de l'existence d'un champ magnétique dans l'intérieur radiatif de notre étoile, certainement d'origine fossile. Dans les faits, une idée similaire avait déjà été proposée par *Rüdiger and Kitchatinov (1997)* pour expliquer l'épaisseur de la tachocline, et par *Barnes et al. (1999)* pour interpréter la déplétion de Lithium-7 à la surface solaire.

En théorie, un tel champ pourrait facilement empêcher l'épaississement de la tachocline. En effet, lorsque le profil latitudinal de rotation diffuse radialement vers l'intérieur solaire, il rencontre ce champ magnétique dipolaire. Celui-ci transporte le moment cinétique le long de ses lignes de champ, faisant tendre le système vers un état d'isrotation dit de Ferraro (*Ferraro, 1937*, voir figure 4.6(d)). Par suite, la rotation est rendue solide dans l'intérieur radiatif *via* le couple magnétique. Cependant, comme l'ont noté Gough & McIntyre en 1998, un tel champ magnétique ne reste pas confiné naturellement, il faut donc expliquer sa stabilité afin de valider le scénario de confinement de la tachocline. Sans même parler de la stabilité de la topologie magnétique (*e.g.*, *Tayler, 1973, Duez and Mathis, 2010*), il faut s'assurer simplement que le champ reste confiné contre sa diffusion ohmique. Pour assurer ceci, *Gough and McIntyre (1998)* proposent un subtil

équilibre entre la diffusion du champ magnétique et la pénétration de la circulation méridienne (*cf* section 2.1.2) en dessous de la zone convective. Dans ce cas, le champ magnétique reste confiné dans la zone radiative, et confine lui-même la tachocline sur une épaisseur compatible avec les observations.

On peut noter les deux hypothèses principales de ce modèle : (i) l'existence d'un champ magnétique (dipolaire) dans l'intérieur radiatif et (ii) un profil de circulation méridienne particulier à la base de la zone convective, doté d'une énergie suffisante pour confiner le champ magnétique fossile. Ces deux hypothèses étant très mal contraintes par les observations, des simulations numériques se révèlent nécessaires pour valider ou infirmer ce scénario.

Depuis 1998, de nombreuses simulations numériques ont été conduites afin de tester ce scénario. Les premières simulations de la zone radiative menées par [Garaud \(2002\)](#) en 2D, puis par [Brun and Zahn \(2006\)](#) en 3D ne permirent pas de retrouver le scénario de [Gough and McIntyre \(1998\)](#), car elles ne prenaient pas en compte la circulation méridienne permettant de confiner le champ magnétique fossile. Dans ces modèles, le champ magnétique se connectait à la base de la zone convective où un cisaillement de vitesse mimant la rotation différentielle de la tachocline supérieure était imposé. La rotation différentielle se propageait alors dans l'intérieur radiatif en établissant la loi d'isrotation de Ferraro, d'abord à hautes latitudes puis progressivement à des latitudes de plus en plus basses. La circulation méridienne fut alors prise en compte dans les simulations numériques de [Sule et al. \(2005\)](#), [Rüdiger and Kitchatinov \(2007\)](#), [Garaud and Garaud \(2008\)](#). Ces travaux réussirent partiellement à retrouver le scénario de confinement de [Gough and McIntyre \(1998\)](#). Cependant, la circulation méridienne était systématiquement introduite de façon *ad hoc*, avec un profil et une amplitude bien choisis. Il apparaissait alors nécessaire de faire des simulations auto-consistantes du couplage entre la zone radiative et la zone convective solaire, afin de tester le scénario magnétique sans présupposer ses ingrédients majeurs (hormis le champ magnétique lui-même, bien entendu). De telles simulations furent conduites par [Rogers \(2011\)](#) (en 2D) et moi-même ([Strugarek et al., 2011a](#)) (en 3D), dont nous présentons les résultats en section 4.2. Notons ici que les résultats de [Rogers \(2011\)](#) diffèrent significativement des miens sur plusieurs points. Tout d'abord, la tachocline est auto-confinée hydrodynamiquement par une circulation méridienne contra-rotative en haut de la zone radiative (ce mécanisme doit encore être confirmé par d'autres résultats indépendants, car il n'est en accord avec aucun modèle théorique de la circulation méridienne). Bien que le champ magnétique fossile ne reste pas confiné dans l'intérieur radiatif (comme dans mon cas, voir section 4.2), aucun effet majeur de celui-ci n'est obtenu sur les propriétés hydrodynamiques globales de l'étoile. Ceci est également étonnant, mais peut être expliqué par la faible amplitude des champs magnétiques considérés par [Rogers \(2011\)](#).

En plus de ces simulations numériques, il faut ici aussi mentionner les travaux de [Wood and McIntyre \(2011\)](#), [Wood and Garaud \(2011\)](#) qui se sont intéressés au régime de paramètres dans lequel la théorie de confinement magnétique de [Gough and McIntyre \(1998\)](#) peut s'appliquer. En particulier, ils ont montré dans un modèle réduit cartésien que la pénétration de la circulation méridienne nécessaire au fonctionnement du modèle pouvait être réalisée à la condition que le paramètre $\sigma = N\sqrt{\nu/\kappa}/\Omega^1$ soit inférieur à 1 dans la zone de pénétration de la circulation méridienne. Ce nombre est une mesure de la profondeur sur laquelle la circulation méridienne est atténuée exponentiellement par l'intérieur radiatif stratifié du Soleil. Ces travaux ont suivi des travaux préliminaires sur la pénétration de la circulation méridienne par [Garaud and Brummell \(2008\)](#), [Garaud and Acevedo Arreguin \(2009\)](#). Les modèles semi-analytiques de [Wood and Garaud \(2011\)](#) montrent alors que dans le cas de paramètres solaires, le scénario de double confinement peut s'appliquer. Néanmoins, ces résultats ont été obtenus à l'aide de modèles réduits dans une

1. Rappelons que $N^2 = \frac{g}{c_p} \frac{d\bar{S}}{dr}$ est la fréquence de Brünt-Vaisala, ν est la viscosité, κ le coefficient de diffusion thermique et Ω le profil de rotation de l'étoile (voir section 2.1).

géométrie cartésienne, pour des solutions stationnaires. Or, ceux-ci sont sensibles à la géométrie du champ magnétique et du champ de vitesse. Par conséquent, leur application au véritable Soleil (géométrie sphérique tridimensionnelle) reste à démontrer. De plus, des effets induits par la pénétration convective turbulente à la base de la zone convective ne sont pas captés par ces modèles. Malgré cette approche intéressante et prometteuse, des simulations tri-dimensionnelles sont nécessaires pour confirmer ou infirmer leurs résultats.

4.1.3 Autres idées proposées dans la littérature

Les deux modèles de confinement de la tachocline présentés en sections 4.1.1 et 4.1.2 sont des modèles dits *lents*. Ils partagent tous deux un scénario basé sur des équilibres lents à s'établir (comparés au temps dynamique de la convection). Tous deux proposent un moyen de s'opposer à la diffusion radiative, qui agit sur des temps d'Eddington-Sweet local, de l'ordre de 10^9 à 10^{10} ans à la base de la tachocline dans le Soleil. Dans le premier cas, l'effet à long terme de la pénétration convective est convoqué pour agir comme une (relativement) lente hyper-viscosité. Dans le second, l'équilibre proposé s'établit sur des temps dits de ventilation de la tachocline, de l'ordre de $\tau_v \sim 10^6$ ans. Cependant, d'autres idées basées sur phénomènes rapides ont été proposées dans la littérature.

L'existence de cisaillements (radial, et latitudinal) de vitesse dans la tachocline fait naturellement émerger la possibilité d'instabilités de cisaillement. En effet, celles-ci s'opposent généralement au cisaillement qui les génère, et, par conséquent, pourraient fournir un mécanisme de destruction du cisaillement dans la tachocline.

Peu de travaux ont étudié la stabilité du cisaillement radial de la tachocline. On notera toutefois le travail de [Schatzman et al. \(2000\)](#), qui montra que le cisaillement radial pouvait être instable à la base de la tachocline. Cependant, de nombreux autres phénomènes pourraient largement changer ce résultat. De plus, les auteurs conclurent que la turbulence générée par ce cisaillement ne pouvait en aucun cas expliquer la transition rapide vers un état de rotation solide à travers la tachocline.

Concernant la rotation différentielle latitudinale, le premier travail sur ce sujet fut proposé par [Watson \(1981\)](#). [Charbonneau et al. \(1999b\)](#) revisitèrent ces travaux en utilisant le profil de rotation de la tachocline observé par l'héliosismologie. Ils montrèrent que la rotation différentielle latitudinale de la tachocline est stable hydrodynamiquement pour un profil de stratification solaire. Ces résultats furent confirmés plus tard par [Arlt et al. \(2005\)](#), [Dikpati \(2012\)](#). Parallèlement, [Gilman and Fox \(1997\)](#) étudièrent la stabilité de la rotation différentielle dans la tachocline en présence de champ magnétique. Ils mirent en évidence une instabilité jointe entre la rotation différentielle et un champ magnétique toroïdal, qui fut largement étudiée par la suite ([Cally, 2003](#), [Gilman et al., 2007](#), [Miesch, 2007](#), [Dikpati et al., 2009](#), [Dikpati and Cally, 2011](#)). L'existence d'une instabilité jointe a donc été clairement établie, son impact sur le profil de rotation moyen dans la tachocline est encore un sujet de débat dans la communauté (le lecteur pourra se reporter à ce sujet à la revue plus complète de [Miesch, 2005](#)).

La tachocline joue également un rôle particulier dans de nombreux modèles de dynamo solaire (voir section 2.2.2). Par conséquent, [Forgács-Dajka and Petrovay \(2001\)](#) eurent l'idée que le champ magnétique lié à l'effet dynamo dans le Soleil pourrait confiner la tachocline sur l'épaisseur que nous lui connaissons. Ce modèle est basé sur une tachocline *turbulente*, dans le sens où des viscosités/diffusivités augmentées (par la turbulence) peuvent être considérées. Dans ce cas, les auteurs ont montré dans une série de papiers ([Forgács-Dajka and Petrovay, 2002](#), [Forgács-Dajka, 2004](#)) que le tenseur de Maxwell issu du champ magnétique *poloïdal* (associé à une dynamo de 11 ans) pouvait supprimer le gradient latitudinal de Ω et par conséquent confiner la tachocline sur l'épaisseur que nous lui connaissons, tant que l'on peut considérer que $\eta > 10^9 \text{ cm s}^{-1}$. Ces modèles présentent une alternative sérieuse pour expliquer la structure de la tachocline.

Cependant, plusieurs points les concernant doivent être éclaircis :

- Le traitement de la turbulence est extrêmement simplifié par l'utilisation d'une diffusivité magnétique augmentée. Des modèles dédiés confirmant ou infirmant ces valeurs seraient nécessaires pour justifier cette approximation.
- La champ magnétique considéré est uniquement poloïdal, l'impact d'un champ magnétique toroïdal doit être quantifié dans les solutions proposées. Des études préliminaires (Zahn, communications privées) ont montré la validité de leurs résultats en présence de champs magnétiques toroïdaux.
- Les mouvements poloïdaux du plasma, comme d'éventuelles circulations méridiennes, doivent également être pris en compte.

Ces points ouvrent le champ à de futures investigations, car ils n'ont pas été traités à l'heure actuelle.

4.2 Les modèles magnétiques

Dans cette section nous détaillons des résultats de simulations 3D du Soleil dans son ensemble. Les détails des équations anélastiques utilisées pour ces simulations, que nous ne répétons pas ici, pourront être trouvés en section 1.2.3. Ces simulations ont pour but de tester la validité du scénario magnétique de confinement de la tachocline, présenté en section 4.1.2.

4.2.1 Simuler une étoile complète en 3D

Simuler de manière auto-consistante le couplage d'une zone radiative et d'une zone convective est un véritable challenge numérique du fait de la large gamme d'échelles de temps et d'espaces mise en jeu. En général, les simulations représentent seulement la zone radiative, la zone convective, ou bien une portion 'cartésienne' de l'interface entre les deux zones (typiquement un cube de la hauteur de la tachocline représentant une petite portion latitude/longitude de l'étoile). Récemment, des travaux pionniers en la matière ont été réalisés par *Rogers (2011)* en 2D axi-symétrique, et en 3D par *Brun et al. (2011)* (dont nous donnons les caractéristiques principales dans le reste de cette sous-section). Ces dernières ont été réalisées avec le code ASH, que nous décrivons en annexe B.

Avant de décrire en détail ces modèles, il est important de noter une chose. Les échelles de temps caractéristiques de la zone radiative et de la zone convective solaires sont très différentes. Afin de rapprocher ces échelles de temps les unes des autres, et ainsi de rendre les simulations numériques multi-D possibles, les valeurs des diffusivités augmentées sont adaptées pour modifier ces temps caractéristiques. On pourra trouver un profil des valeurs de diffusivités turbulentes de *Strugarek et al. (2011a)* en Fig. 4.1. En se basant sur ces diffusivités, on peut par exemple calculer le temps de diffusion ohmique dans nos simulations. En le définissant par $\tau_\eta = R_\odot^2/\eta$, on trouve $\tau_\eta^{CZ} = 9.60$ ans dans la zone convective et $\tau_\eta^{RZ} = 192$ ans dans la zone radiative. A titre comparatif, ces temps estimés avec les valeurs microscopiques solaires sont respectivement $\tau_\eta^{CZ\odot} \sim 10^9$ ans et $\tau_\eta^{RZ\odot} \sim 10^{11}$ ans. Le temps de retournement convectif est, quant à lui, similaire au temps de retournement convectif solaire, *i.e.*, de l'ordre de 28 jours. Une attention extrême a été apportée lors de cette étape de modélisation afin que la hiérarchie des temps caractéristiques soit respectée. Leurs ratios, eux, sont en revanche non solaire. Comme nous allons le voir, les caractéristiques générales développées par ces simulations sont très proches des caractéristiques solaires, ce qui nous rend confiants quant à la qualité physique de nos simulations.

L'énergie est transportée radialement par un flux radiatif dans la zone radiative, puis par les cellules turbulentes dans la zone convective (figure 4.2). Près de la limite supérieure du domaine, l'énergie est transportée par les mouvements non résolus par notre modèle car la convection est atténuée. Ainsi, un bon équilibre d'énergie est atteint à travers tout le domaine. Afin d'avoir une

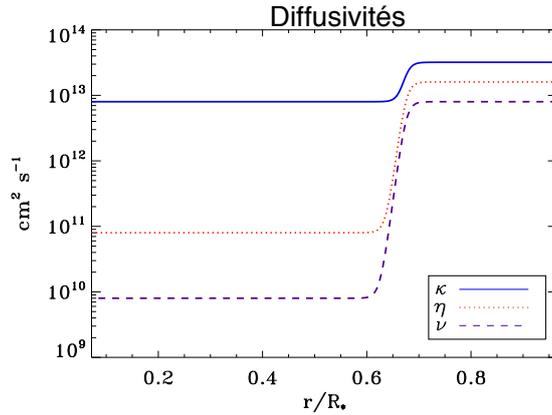


FIGURE 4.1 – Profil radial des diffusivités dans le modèle (les valeurs sont données en unités cgs).

idée du niveau de turbulence de notre modèle, on pourra trouver une projection de Mollweide de la vitesse radiale v_r dans la partie haute de la zone convective ($r = 0.96 R_\odot$) en figure 4.3. On y retrouve des motifs caractéristiques de la convection en rotation dans une sphère, tel que les formes allongées de type *banane* à l'équateur, et des motifs à plus petite échelle à haute latitude (*Brun and Toomre, 2002*). Malgré l'utilisation de diffusivités augmentées, l'amplitude des mouvements convectifs est déterminée par la luminosité solaire ($v_{\text{conv}} \sim L_\odot^{1/3}$) que nous imposons à la surface de notre modèle.

Nous choisissons des conditions aux limites (aux deux rayons délimitant notre domaine) rigides et sans couples pour la vitesse. Le gradient d'entropie moyen est figé aux limites. Le champ magnétique est considéré comme potentiel (sans courant, c'est-à-dire $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} = 0$) à la surface, et la limite interne est considérée comme conducteur parfait ($B_r = 0$, $J_\theta, J_\varphi = 0$ dans le cas d'une condition aux limites rigide pour la vitesse).

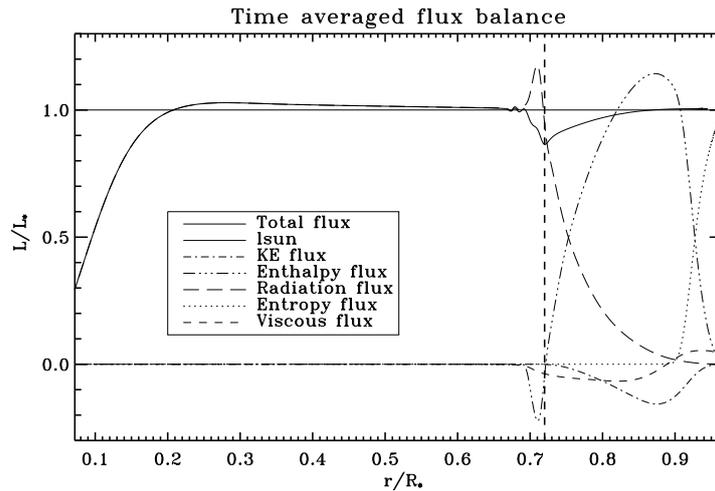


FIGURE 4.2 – Equilibre radial des flux d'énergie. Dans la zone convective, l'énergie est transportée par le flux d'enthalpie, tandis que le flux d'entropie près de la surface représente l'énergie transportée par les mouvements non résolus dans la simulation. On peut déjà noter la pénétration des mouvement convectifs à la base de la zone convective (tirets verticaux) se caractérisant par un flux d'enthalpie négatif.

La première caractéristique frappante de nos simulations est l'obtention d'un profil de rotation différentielle de type solaire. Depuis les travaux de *Brun and Toomre (2002)*, *Miesch et al.*

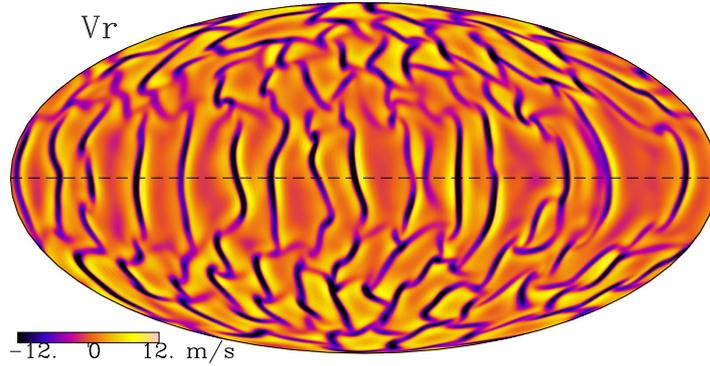


FIGURE 4.3 – Vitesse radiale sur une coupe sphérique dans la zone convective, à $r = 0.96 R_{\odot}$.

(2006), on sait que l’obtention d’un profil de rotation réaliste dans les simulations de convection turbulente 3D est non triviale. On se doute, en particulier, que la prise en compte d’une tachocline joue un rôle important dans l’obtention de la rotation différentielle solaire (e.g., [Miesch, 2005](#)). La rotation différentielle que nous obtenons est donnée en figure 4.4(a). On peut remarquer qu’elle se compare remarquablement bien aux observations (figure 2.6) : progrades à basse latitude et retrogrades à haute latitude, les iso-contours du profil de rotation sont alignés avec la direction radiale à moyenne latitude. Associé à cette rotation différentielle, on observe également le développement de circulations méridiennes (figure 4.4(c)). Dans la zone convective, la circulation méridienne est globalement mono-cellulaire dans chaque hémisphère. Elle tourne dans le sens horaire dans l’hémisphère sud, et dans le sens anti-horaire dans l’hémisphère nord. Cette structure est consistante avec les observations ([Haber et al., 2002](#)) et peut être comprise simplement par le phénomène dit de *gyroscopic pumping* ([McIntyre, 2007](#)). En effet, dans l’équation de conservation du moment cinétique (4.6), et dans un état quasi-stationnaire, un couple transportant le moment cinétique peut être équilibré par la force de Coriolis, qui nécessite un écoulement méridien. En se donnant le profil d’un couple (par exemple, turbulent) faisant tendre le profil de rotation vers un profil de rotation solaire, on peut déduire que la circulation méridienne associée au couple de Coriolis équilibrant le couple turbulent est *grosso modo* mono-cellulaire dans chaque hémisphère ([Miesch and Hindman, 2011](#)). Notre modèle présente également des profils de circulation méridienne en haut de la zone radiative (mais il y en a dans ce cas une succession dans la direction radiale), qui sont aussi globalement mono-cellulaires dans chaque hémisphère. Elles sont néanmoins d’amplitude extrêmement faible comparées à la circulation méridienne de la zone convective.

Ces simulations développent naturellement une tachocline d’épaisseur $\Delta \sim 0.135 R_{\odot}$. On note immédiatement que la tachocline simulée est plus épaisse que la tachocline observée. Néanmoins, ceci n’est pas surprenant compte-tenu des diffusivités augmentées considérées dans les simulations. Comme nous sommes intéressés par le comportement global de la tachocline vis-à-vis des couches qui l’entourent, cette importante épaisseur n’est pas *a priori* un problème.

A la lumière des hypothèses du scénario magnétique de confinement de la tachocline (section 4.1.2), il est bon de vérifier si la circulation méridienne générée de manière auto-consistante dans notre modèle pénètre ou non dans la tachocline et dans l’intérieur radiatif. Celle-ci pénètre effectivement sous la base de la zone convective sur une distance d’environ $0.04 R_{\odot}$ (cf figure 4.5). Elle pénètre donc à l’intérieur de la tachocline, mais ne parvient pas jusqu’à la zone radiative (i.e., dans la zone en rotation solide). La réalité physique de cette pénétration dans le Soleil est complexe (e.g., [Gilman and Miesch, 2004](#), [Garaud and Brummell, 2008](#)), elle est de plus mal contrainte par les observations. Cependant, la pénétration observée dans nos modèles est *a priori* suffisamment profonde pour notre problématique (voir les conclusions de ce chapitre pour une

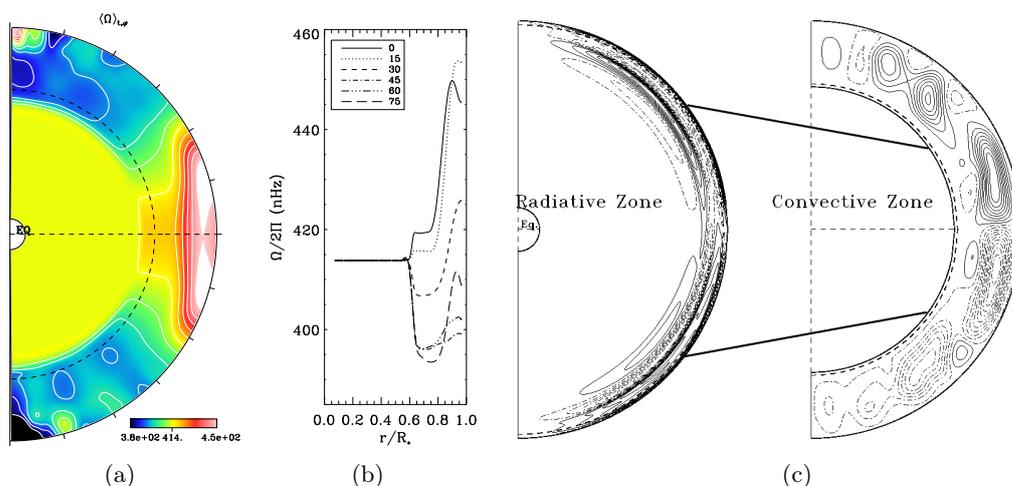


FIGURE 4.4 – Profil de vitesse angulaire généré de manière auto-consistante par les simulations turbulentes 3D. Ces trois figures sont tirées de (*Strugarek et al., 2011a*).

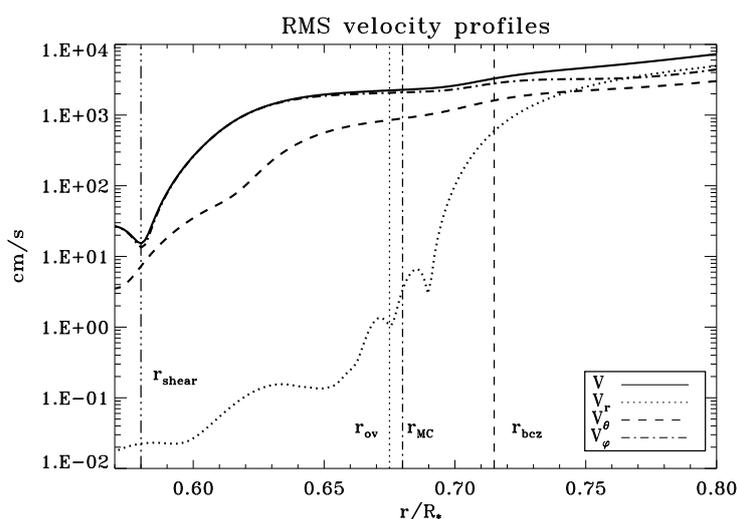


FIGURE 4.5 – Vitesses rms en fonction de la profondeur. Les profondeurs particulières du modèle sont tracée en lignes verticales pointillées. On y retrouve la base de la zone convective r_{bcz} , la profondeur de pénétration de la circulation méridienne r_{MC} , la profondeur de débordement des mouvements convectifs r_{ov} et la base de la tachocline r_{shear} .

discussion à ce sujet).

Ces modèles hydrodynamiques atteignent un état quasi-stationnaire au cours duquel la tachocline s'épaissit lentement sous l'effet combiné de la viscosité augmentée que nous considérons, et du mécanisme d'hyperdiffusion radiative décrit par *Spiegel and Zahn (1992)*. Ces deux mécanismes s'additionnent naturellement, et leur rôle respectifs est contrôlé par le nombre de Prandtl considéré (*Brun and Zahn, 2006*). Ainsi, si on continuait ces simulations sur plusieurs temps visqueux, la tachocline s'épaissirait significativement. On peut par suite utiliser ces simulations afin de tester les mécanismes physiques envisagés pour contrer cette diffusion. Notons toutefois que les effets de turbulence anisotrope discutés en section 4.1.1 sont difficilement captés par ces simulations. En effet, bien que des ondes de gravité soient effectivement excitées dans notre modèle, la résolution spatiale dans la tachocline n'est *a priori* pas suffisante pour voir ces effets. De simulations dédiées telles que celles de *Miesch (2003)* peuvent quant à elles plus facilement s'attaquer au problème.

Bien que tous les éléments requis pour poursuivre notre analyse de la structure de la tachocline aient été présentés, on pourra si besoin trouver des détails supplémentaires sur ces simulations dans [Brun et al. \(2011\)](#), [Strugarek et al. \(2011a\)](#) (voir en fin de chapitre).

4.2.2 Simulations globales du scénario magnétique

Sachant que les hypothèses principales du scénario de confinement de [Gough and McIntyre \(1998\)](#) sont vérifiées dans notre modèle numérique (rotation différentielle solaire et circulation méridienne pénétrant dans l'intérieur radiatif), nous pouvons l'utiliser afin de tester sa validité. Nous initialisons ainsi un champ magnétique dipolaire, aligné avec l'axe de rotation de l'étoile, confiné dans l'intérieur radiatif de l'étoile qui tourne de manière solide (figure 4.6(a)). Nous choisissons un champ magnétique de la forme $\mathbf{B} = B_0 (B_r \mathbf{e}_r + B_\theta \mathbf{e}_\theta)$, tel que

$$B_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta \Psi, \quad B_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \partial_r \Psi. \quad (4.1)$$

$\Psi(r, \theta) = r \sin \theta A_\varphi$ est constant le long des lignes de champ. Nous choisissons

$$\begin{aligned} \Psi &= (r/R)^2 (r - R_b)^2 \sin^2 \theta && \text{pour } r \leq R_b \\ &= 0 && \text{pour } r \geq R_b, \end{aligned} \quad (4.2)$$

où $R_b = 0.57 R_\odot$ est le rayon supérieur de confinement du champ magnétique.

Cette expression peut également s'écrire de manière plus générale dans le formalisme de décomposition poloïdale - toroïdale du code ASH ($\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times (C \mathbf{e}_r) + \nabla \times (A \mathbf{e}_r)$) :

$$\begin{cases} A &= 0 \\ C &= f(r) \left(\cos \Theta Y_0^1 + \frac{\sin \Theta}{\sqrt{2}} Y_1^1 \right) \end{cases}, \quad (4.3)$$

avec $f(r) = B_0 (r/R_\odot)^2 (r - R_b)^2$, et Y_1^0, Y_1^1 les harmoniques sphériques classiques (annexe J). Le paramètre Θ correspond à une inclinaison du dipôle par rapport à l'axe de rotation de l'étoile. Si on choisit $\Theta = 0$, on retrouve bien l'expression (4.1). D'autres valeurs de Θ sont envisagées dans la section 4.2.3.

Dans le scénario initial de [Gough and McIntyre \(1998\)](#), l'amplitude du champ magnétique contrôle les échelles de la tachocline (Δ) et de la magnétopause (δ) qui est une fine couche de champ magnétique toroïdal très intense. Afin d'obtenir des épaisseurs raisonnables (*i.e.*, $\Delta/R_\odot \sim \delta/R_\odot \sim 10^{-2}$), nos choix de paramètres impliquent de considérer des champs magnétiques de l'ordre de 10^4 G. Nous choisissons par suite $B_0 = 4.2 \cdot 10^4$ G afin de nous placer dans le bon régime de paramètres, et d'être en situation d'équipartition entre l'énergie magnétique du champ fossile et l'énergie cinétique totale dans le référentiel en rotation.

Nous traçons en figure 4.6 l'évolution temporelle du champ magnétique poloïdal moyen (lignes noires) et du profil de rotation moyen (contours de couleur). Le champ magnétique ne reste pas confiné dans l'intérieur radiatif et s'étend dans la zone convective. En conséquence, le moment cinétique est transporté par couple magnétique sur quelques temps d'Alfvén (bien plus rapidement que par diffusion) dans l'intérieur radiatif qui ralentit à hautes latitudes (figures 4.6(b)-4.6(d)). Le système tend vers la loi d'iso-rotation de Ferraro, où les lignes de champ poloïdales sont alignées avec les iso-contours du moment cinétique (cet état est quasiment réalisé aux plus hautes latitudes dans la figure 4.6(d)).

L'échec du scénario de confinement est ainsi dû à la perte de confinement du champ magnétique, malgré la prise en compte d'une circulation méridienne pénétrante. Une réflexion sur la topologie magnétique s'impose ici. Il est important de noter que dans la figure 4.6, le champ magnétique

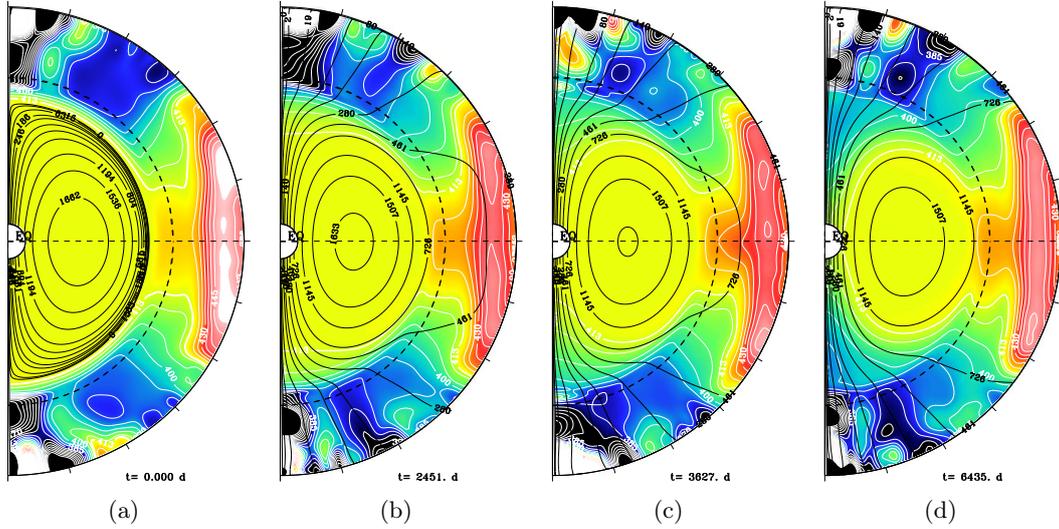


FIGURE 4.6 – Coupes poloïdales de la moyenne azimutale du profil de rotation (carte de couleur). Les lignes de champ magnétique sont représentées en noir. La table de couleur est la même que dans la figure 4.4(a). Les pointillés noirs représentent la base de la zone convective r_{bcz} (cf figure 4.5).

se connecte à la zone convective à l'équateur. Il y a deux raisons principales à cela. La première est simplement liée à la topologie du dipôle. Du fait des faibles mouvements qui animent la zone radiative, le champ magnétique évolue de manière purement diffusif en dessous de la tachocline. *Strugarek et al. (2011b)* (voir en fin de chapitre) ont montré que la topologie du dipôle n'est pas anodine, et que lors d'un processus diffusif le dipôle diffuse plus rapidement au niveau de son 'ventre' (ici, à l'équateur) qu'au niveau de son axe (ici, les poles), car le gradient radial de $|\mathbf{B}|$ est plus important en son 'ventre'. Par conséquent, il est naturel que le champ magnétique entre en contact avec la tachocline puis avec la zone convective en premier lieu à cet endroit. Le second argument en faveur de l'ouverture du champ à l'équateur est quant à lui dû au profil de circulation méridienne. En effet, la circulation méridienne est descendante au niveau des pôles (d'où l'idée de confinement du champ magnétique *via* la circulation méridienne par *Gough and McIntyre (1998)*), mais elle est ascendante à l'équateur. Ainsi, elle a tendance à entraîner les lignes de champ avec elle par simple advection. Ces arguments sont valables tant que le champ magnétique ne rencontre pas la convection à proprement parler, car alors il subit une évolution bien plus complexe. Afin de bien comprendre sa structure et son évolution, on pourra trouver en figure 4.8 les différents termes de production de champ magnétique moyen $\langle B_\theta \rangle$ (équations (4.4 - 4.5)), et une vue 3D de la simulation en figure 4.7 afin de bien visualiser la topologie magnétique générée.

On peut écrire l'équation d'induction (1.17) moyenne pour $\langle B_\theta \rangle$ de la manière suivante (*Brown et al., 2010*)

$$\partial_t \langle B_\theta \rangle = P_{FS} + P_{MS} + P_{FA} + P_{MA} + P_C + P_{MD}, \quad (4.4)$$

avec P_{MS} et P_{MA} représentant la production *via* le cisaillement et l'advection moyennes, P_{FS} et P_{FA} *via* le cisaillement et l'advection fluctuantes, P_C *via* des effets de compressibilité, et P_{MD} *via* la diffusion ohmique moyenne. Le symbole $\langle \rangle$ représente la moyenne azimutale. Ces six termes

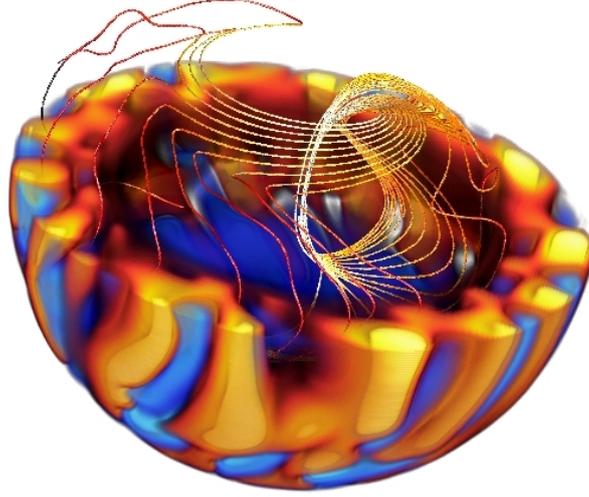


FIGURE 4.7 – Rendu 3D de la vitesse azimutale dans le repère tournant (volumes en couleur) et des lignes de champ (lignes en couleur) à un instant avancé de la simulation. On notera la structure complexe des lignes de champ magnétique dans la zone convective.

sont définis de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
 P_{FS} &= \langle (\mathbf{B}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' \rangle|_{\theta}, \\
 P_{MS} &= \langle (\mathbf{B}) \cdot \nabla \rangle \langle \mathbf{v} \rangle|_{\theta}, \\
 P_{FA} &= - \langle (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{B}' \rangle|_{\theta}, \\
 P_{MA} &= - \langle (\mathbf{v}) \cdot \nabla \rangle \langle \mathbf{B} \rangle|_{\theta}, \\
 P_C &= \left(\langle v_r \rangle \langle B_{\theta} \rangle + \langle v'_r B'_{\theta} \rangle \right) \frac{d}{dr} \ln \bar{\rho}, \\
 P_{MD} &= - \nabla \times (\eta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle)|_{\theta}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

On pourra s'appuyer sur la figure 4.8 pour comprendre l'évolution du champ magnétique. En panneau (a), on retrouve le profil de $\langle B_{\theta} \rangle$ en fonction de la profondeur (ordonnée) et de la latitude (abscisse), centré sur la tachocline (entre les deux traits noirs horizontaux) dans l'hémisphère nord. Dans les panneaux (c) à (j), on trouve les différents termes de l'équation d'induction moyenne donnés en équation (4.5). Enfin, le panneau (b) correspond à la somme des panneaux (e), (h), (i) et (j) et donne donc l'évolution de $\langle B_{\theta} \rangle$. On voit immédiatement que l'évolution du champ magnétique n'est pas dominée par la diffusion dans la tachocline, mais bien par le cisaillement et l'advection par le champ de vitesse. En particulier, on peut remarquer que les contributions non-axisymétriques (panneau (h)) dominent à faible latitude. Nous démontrons donc ici que les effets tridimensionnels que nous simulons de manière auto-consistante sont responsables de l'échec du confinement du champ magnétique. Une analyse plus détaillée sur ces simulations pourra être trouvée dans [Strugarek et al. \(2011a\)](#) (voir à la fin de ce chapitre).

4.2.3 Extension à diverses topologies magnétiques

Afin d'étendre les résultats présentés en section 4.2.2, nous considérons ici des valeurs non nulles pour l'angle d'inclinaison Θ du dipôle initial. L'idée d'un champ magnétique (dans la zone radiative) incliné avec l'axe de rotation de l'étoile remonte aux travaux de [Mestel and Takhar \(1972\)](#), [Mestel and Weiss \(1987\)](#). De plus, on pense également que les étoiles de type A sont des *rotateurs obliques* (voir [Brun et al. \(2005\)](#) dans le cadre de simulations dynamo d'étoiles

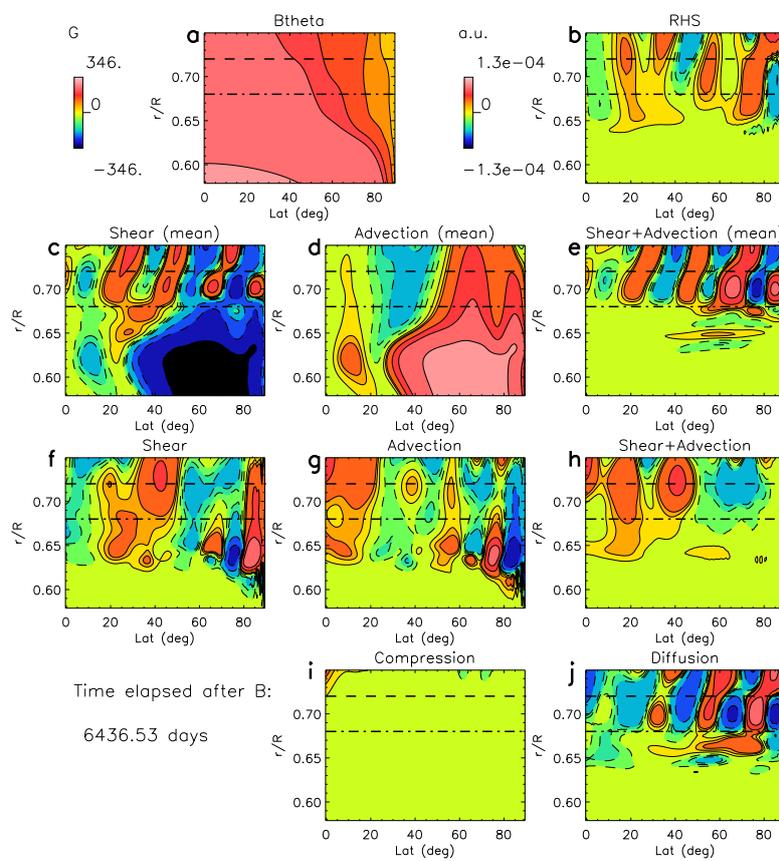


FIGURE 4.8 – (a) Principaux termes de production de $\langle B_\theta \rangle$ dans la tachocline. Les deux traits noirs horizontaux représentent la base de la zone convective (tirets) et la base du cisaillement de rotation (tiret-point).

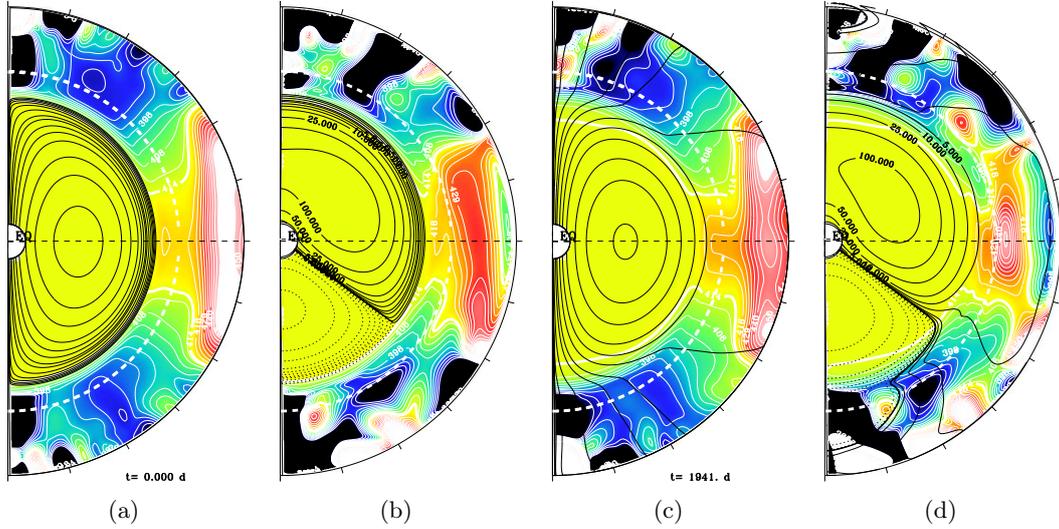


FIGURE 4.9 – Coupes polaires du cas dipôle incliné. Les quantités sont moyennées selon φ dans les panneaux (a,c), et sont prises à $\varphi \sim 0$ (*i.e.*, la longitude à laquelle la projection du champ magnétique sur le plan polaire est effectivement un dipôle, en tout cas initialement) dans les panneaux (b,d). Les cartes de couleur représentent la rotation $\Omega = r \sin \theta v_\varphi$, et les lignes noires les lignes de champ magnétique. (a,b) sont tracés au début de la simulation, (c,d) environ 70 temps de retournement convectif plus tard.

A). Cependant, la prise en compte d'un champ incliné dans un scénario de confinement de la tachocline est nouveau pour la communauté.

Un choix logique est de débiter par un dipôle incliné de manière significative, *e.g.*, $\Theta = 60^\circ$. Bien que dans ce cas la topologie magnétique soit clairement différente du cas aligné, on peut remarquer d'après l'équation (4.3) que le dipôle ainsi construit est en fait la somme d'un dipôle axisymétrique (aligné avec l'axe de rotation, *i.e.*, composante $m = 0$ des harmoniques sphériques) et d'un dipôle non-axisymétrique équatorial qualifié de *perpendiculaire* (composante $m = 1$, *i.e.*, dipôle *perpendiculaire* à l'axe de rotation). Ceci apparaît très clairement sur les figures 4.9(a) et 4.9(b) où l'on voit à la fois la moyenne axisymétrique du dipôle incliné (et donc la composante $m = 0$), et le champ incliné complet. Il s'avère que la composante axisymétrique du dipôle incliné subit une évolution similaire à celle du dipôle aligné, décrite dans la section précédente (4.2.2). Par suite, la composante axisymétrique du champ s'ouvre dans la zone convective et transporte le moment cinétique le long des lignes de champ magnétique toujours aussi efficacement en quelques temps d'Alfvén (figure 4.9(c)). Il ne reste ainsi pas confiné dans l'intérieur radiatif et à nouveau, le scénario de confinement de la tachocline ne peut être réalisé. La partie non-axisymétrique, quant à elle, évolue d'une manière très différente que nous détaillons ci-après. Une analyse plus complète sur le cas du dipôle incliné pourra être trouvée dans *Strugarek et al. (2011b)* (voir à la fin de ce chapitre).

Afin d'isoler les comportements des différentes composantes du dipôle incliné, nous conduisons pour terminer cette étude une simulation identique aux deux simulations précédentes avec un dipôle perpendiculaire à l'axe de rotation de l'étoile ($\Theta = 90^\circ$). Dans ce cas, le champ magnétique ne possède pas de composante axisymétrique à grande échelle et par conséquent le transport de moment cinétique observé dans les cas précédents ne peut se produire (au moins initialement, tant qu'aucune composante $m = 0$ n'a été créée). En début de simulation, le dipôle perpendiculaire diffuse ohmiquement dans l'intérieur radiatif et rencontre tout d'abord la tachocline aux pôles (la diffusion est plus rapide dans le *ventre* du dipôle, *cf* partie 4.2.2). Il rencontre dans cette région la circulation méridienne descendante (Figure 4.4) qui semble confiner la majeure partie

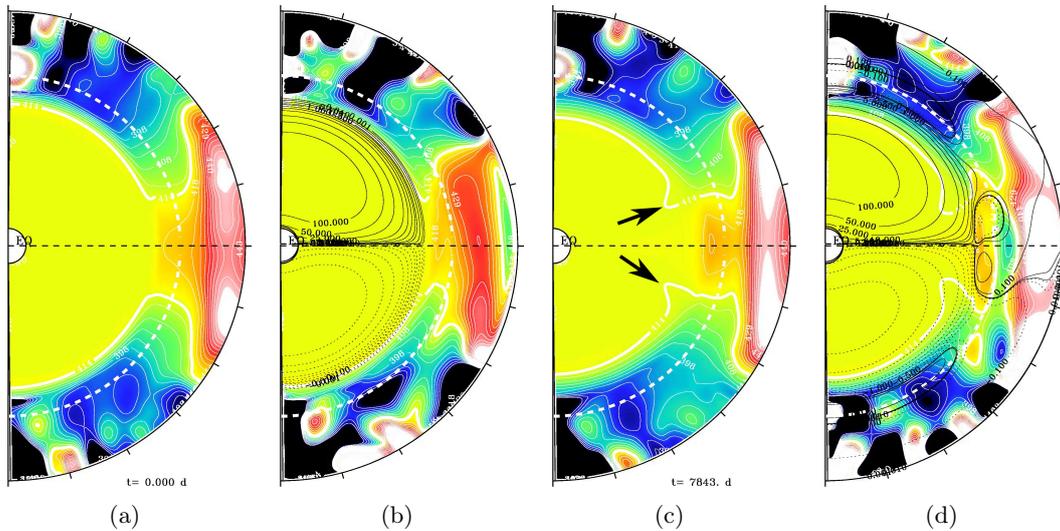


FIGURE 4.10 – Coupes polaires du cas dipôle perpendiculaire (la disposition est la même que dans la figure 4.9). Les figures (c,d) sont données environ 300 temps de retournement convectifs après l’introduction du champ perpendiculaire. Les figures (a,c) sont tracées sans lignes de champ magnétique, car le dipôle initial n’a aucune composante axisymétrique. Les flèches noires sur le panneau (c) indiquent les *croc* qui apparaissent sur le profil de rotation par effet du dipôle équatorial.

du champ magnétique interne (bien que les lignes de champ magnétique les moins intenses semblent se connecter à la zone convective). La figure 4.10 est équivalente à la figure 4.9 dans le cas du dipôle perpendiculaire. Les figures 4.10(c) et 4.10(d) sont prises environ 300 temps de retournement convectifs après l’introduction du champ magnétique. À partir de ce moment, le profil de rotation évolue lentement sur des temps visqueux, tandis que la topologie magnétique du dipôle perpendiculaire change peu dans l’intérieur radiatif.

Dans ces figures, les lignes de champ poloïdales sont correctement tracées initialement car nous avons choisi un plan de coupe à $\varphi \sim 0$ qui comprend exactement l’axe du dipôle perpendiculaire. Cependant, l’évolution du champ magnétique dans la tachocline est rapidement tri-dimensionnel et une représentation en coupe ne suffit plus à comprendre sa structure. Nous traçons en figure 4.11 deux représentations tri-dimensionnelles des lignes de champ magnétique pendant sa phase d’évolution. Les volumes de couleurs correspondent à la vitesse azimutale instantanée dans le repère tournant (*cf* figure 4.7). Dans la figure 4.11(a), les lignes de champ sont tracées à partir de points régulièrement répartis dans l’intérieur radiatif et donnent un rendu du champ magnétique global. Dans le but de saisir la topologie des lignes de champ magnétique qui connectent la zone radiative à la zone convective, nous traçons quelques lignes à partir de points à la surface de l’étoile répartis régulièrement à trois latitudes différentes $\theta \in \{30^\circ, 90^\circ, 150^\circ\}$ (figure 4.11(b)). On voit immédiatement que les lignes de champ à haute latitude sont connectées à la partie *droite* (sur l’image) du dipôle, et les lignes de champ à l’équateur sont connectées à la partie *gauche*. Un schéma illustratif est donné en figure 4.11(c). Les signes plus et moins représentent le signe de la rotation différentielle dans la zone convective. Quatre boucles du champ magnétique perpendiculaire sont représentées en rouge et noir dans l’intérieur radiatif. On voit que sur la partie droite du schéma, la boucle équatoriale (noir) est alignée avec le sens de la rotation différentielle, tandis que la boucle à haute latitude (rouge) est anti-alignée. Sur la partie gauche du dessin, les alignements sont inversés. Par conséquent, les lignes de champ équatoriales vont plus facilement pénétrer la tachocline du côté du lobe aligné avec la rotation différentielle, tandis que les lignes de champ à haute latitude pénétreront plus facilement du côté du lobe

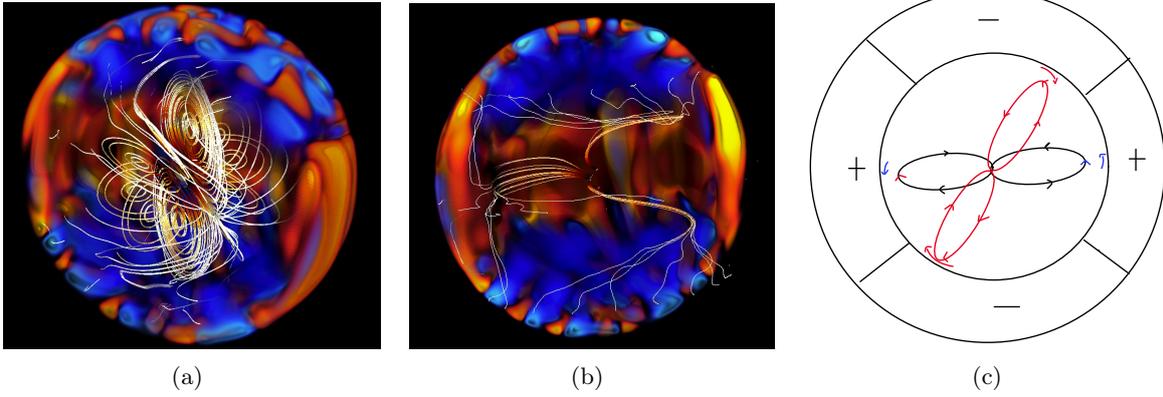


FIGURE 4.11 – (a,b) Rendus tri-dimensionnels du champ magnétique perpendiculaire. L'axe de rotation de l'étoile est vertical. (c) Schéma explicatif de l'interaction du champ perpendiculaire avec la rotation différentielle de l'enveloppe convective.

opposé. C'est exactement ce que nous observons dans la figure 4.11(b).

Après avoir bien compris la structure du champ magnétique, on peut s'intéresser aux propriétés du transport de moment cinétique dans le cas perpendiculaire. On peut tout d'abord noter la structure en forme de *croc* (indiquée par les flèches noires) sur le profil de Ω dans les figures 4.10(c) et 4.10(d), juste en dessous de la tachocline à $\theta \sim 70^\circ$. Il est intéressant de noter que cette structure, quoique légèrement différente, est retrouvée à la fois sur la coupe polaire et sur la moyenne azimutale du profil de rotation. Nous écrivons l'équation d'évolution du moment cinétique $\mathcal{L} \equiv r \sin \theta (\Omega_0 r \sin \theta + \langle v_\varphi \rangle)$ (Brun *et al.*, 2004b):

$$\partial_t (\bar{\rho} \mathcal{L}) = -\nabla \cdot \underbrace{(\mathbf{F}^{MC} + \mathbf{F}^{RS} + \mathbf{F}^{VD})}_{\text{hydro}} + \underbrace{(\mathbf{F}^{MT} + \mathbf{F}^{MS})}_{\text{MHD}}, \quad (4.6)$$

où les différents termes représentent les contributions de la circulation méridienne (que nous séparons en termes de force de Coriolis et rotation différentielle)

$$\mathbf{F}^{MC} \equiv \underbrace{\bar{\rho} r^2 \sin^2 \theta \langle \mathbf{v}_M \rangle \Omega_0}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\bar{\rho} r \sin \theta \langle \mathbf{v}_M \rangle \langle v_\varphi \rangle}_{\text{Rotation différentielle}}, \quad (4.7)$$

du tenseur de Reynolds

$$\mathbf{F}^{RS} \equiv r \sin \theta \bar{\rho} (\langle v'_r v'_\varphi \rangle \mathbf{e}_r + \langle v'_\theta v'_\varphi \rangle \mathbf{e}_\theta), \quad (4.8)$$

du tenseur visqueux

$$\mathbf{F}^{VD} \equiv -\nu \bar{\rho} r^2 \sin \theta \left\{ \partial_r \left(\frac{\langle v_\varphi \rangle}{r} \right) \mathbf{e}_r + \partial_\theta \left(\frac{\langle v_\varphi \rangle}{\sin \theta} \right) \mathbf{e}_\theta \right\}, \quad (4.9)$$

du couple de Maxwell

$$\mathbf{F}^{MT} \equiv -\frac{r \sin \theta}{4\pi} \langle B_\varphi \rangle \langle \mathbf{B}_M \rangle, \quad (4.10)$$

et du tenseur de Maxwell

$$\mathbf{F}^{MS} \equiv -\frac{r \sin \theta}{4\pi} (\langle B'_r B'_\varphi \rangle \mathbf{e}_r + \langle B'_\theta B'_\varphi \rangle \mathbf{e}_\theta). \quad (4.11)$$

Nous traçons la divergence de ces différents termes dans les 6 premiers panneaux des figures 4.12 (2450 jours après l'introduction du champ perpendiculaire) et 4.13 (7843 jours après l'introduction du champ magnétique), en fonction du rayon de la latitude. La dernière ligne de panneaux correspond au total de ce termes, au moment cinétique \mathcal{L} et au profil de rotation Ω . On voit que les *crocs* que nous observons sur le profil de Ω sont en fait réminiscents du transport de moment cinétique par le couple du champ magnétique non-axisymétrique dans l'ensemble de l'intérieur radiatif. A l'équateur, la différence entre Ω et $\bar{\rho}\mathcal{L}$ est de l'ordre de $\bar{\rho}r^2$. Or, on sait que le profil de densité moyenne décroît proportionnellement à r^{-3} dans les modèles solaires. Par suite, plus on est profond, moins une variation absolue de moment cinétique se traduit par un changement de significatif du profil de rotation. On obtient alors ces *crocs* sur le profil de Ω , qui témoignent d'un transport de moment cinétique bien plus profond (avant dernier panneau de la figure 4.13) dans l'intérieur de l'étoile. De plus, ce phénomène est d'autant plus fort que dans le cas du dipôle équatorial, le transport de moment cinétique s'effectue à l'équateur. En effet, à un rayon donné, une variation de moment cinétique $\delta\mathcal{L}$ se traduit par une variation $\delta\Omega$ sur le profil de rotation à l'équateur, tandis qu'au pôle la variation sera de $\delta\Omega/\sin^2\theta$ (où θ est petit). Par suite, la variation observée de Ω aux pôles sera bien plus grande et c'est pourquoi pour un champ magnétique de même ordre de grandeur, le profil de rotation subira une plus forte modification aux pôle qu'à l'équateur. Enfin, dans le cas du dipôle perpendiculaire le transport de moment cinétique axisymétrique s'effectue par un champ magnétique non-axisymétrique, et par suite on ne s'attend pas à avoir le même comportement que dans le cas du dipôle aligné.

Il est également important de noter que dans la zone radiative profonde ($r < 0.4 R_\odot$), seuls le couple magnétique et la diffusion visqueuse transportent le moment cinétique dans notre modèle. Ces deux contributions ne s'annulent pas, elles s'additionnent au contraire et transportent le moment cinétique dans l'intérieur radiatif.

Enfin, ces figures nous permettent de comprendre la propagation de la rotation différentielle à haute latitude (dans la figure 4.12, le changement de signe du moment cinétique s'opère à $r \sim 0.56 R_\odot$, alors qu'il se trouve à $r \sim 0.53 R_\odot$ dans la figure 4.13). Cette propagation est faible et prend son origine dans deux termes de transport qui sont le couple magnétique non-axisymétrique et la circulation méridienne de la zone radiative (*via* la force de Coriolis). Cette propagation ne peut donc pas être imputée à la diffusion visqueuse, qui tend plutôt à s'y opposer. L'image classique d'un champ magnétique s'opposant à la propagation de la rotation différentielle ne s'applique donc pas dans le cas non-axisymétrique où l'axe de rotation et l'axe du dipôle magnétique sont orthogonaux. Nous avons montré que bien que le cas du dipôle perpendiculaire présente une situation radicalement différente du cas du dipôle aligné avec l'axe de rotation de l'étoile, il n'empêche pas l'épaississement de la tachocline. Nos résultats indiquent donc qu'un scénario de confinement magnétique de la tachocline est tout aussi difficile à réaliser dans cette situation, dans le régime de paramètres que nous avons exploré. Cette simulation sera poursuivie et fera l'objet d'une publication dans *Strugarek et al. (2012b)*.

Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons étudié à l'aide des simulations tri-dimensionnelles la validité du scénario magnétique de confinement de la tachocline solaire. Pour cela, nous avons modélisé 90% du Soleil, et en particulier la région de transition entre les zones radiative et convective où se situe la tachocline. Nous avons testés différentes topologies de champ magnétique enfouis dans la zone radiative stable. Dans l'ensemble des cas étudiés, nous montrons que le champ magnétique ne conserve pas sa topologie initiale : il ne reste pas confiné dans l'intérieur radiatif mais connecte les zones radiative et convective en s'ouvrant dans la tachocline. Alors, il participe au transport de moment cinétique dans l'intérieur solaire et ne permet plus de confiner la tachocline sur une épaisseur faible. Au contraire, nous montrons que dans le régime de paramètres que nous avons

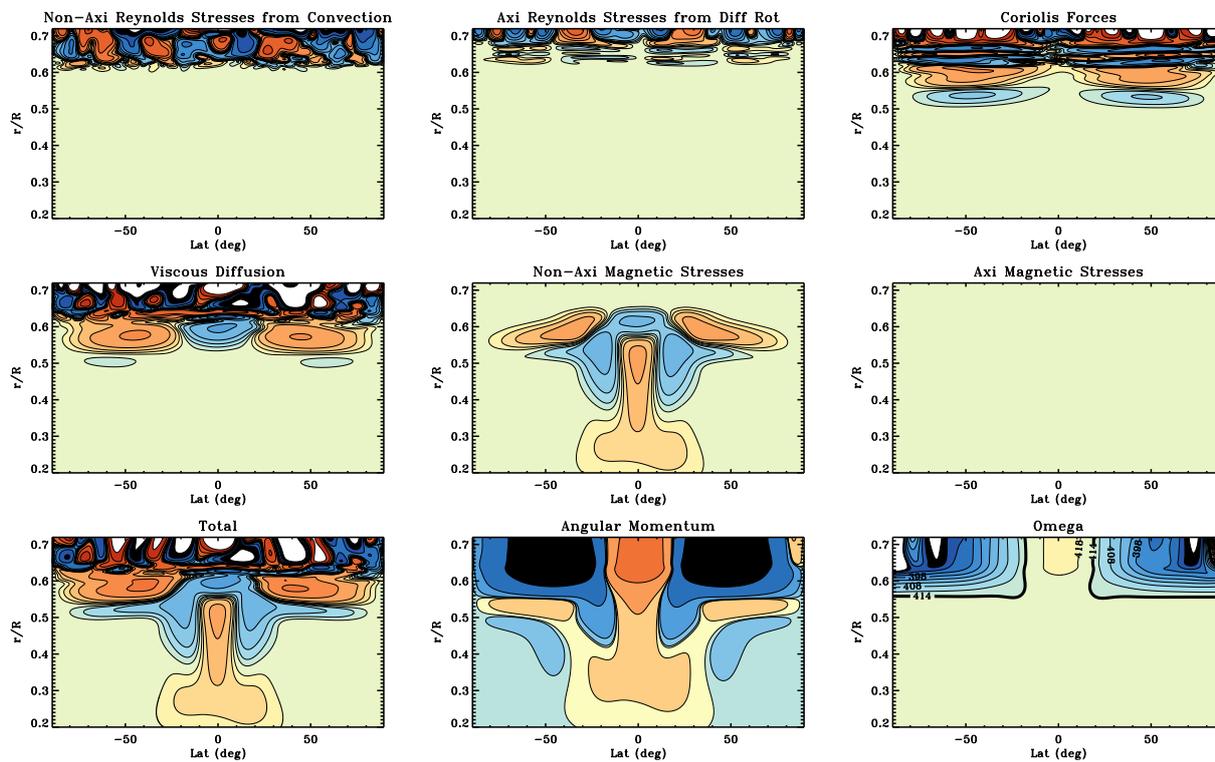


FIGURE 4.12 – Transport net de moment cinétique 2450 jours après l'introduction du champ magnétique perpendiculaire.

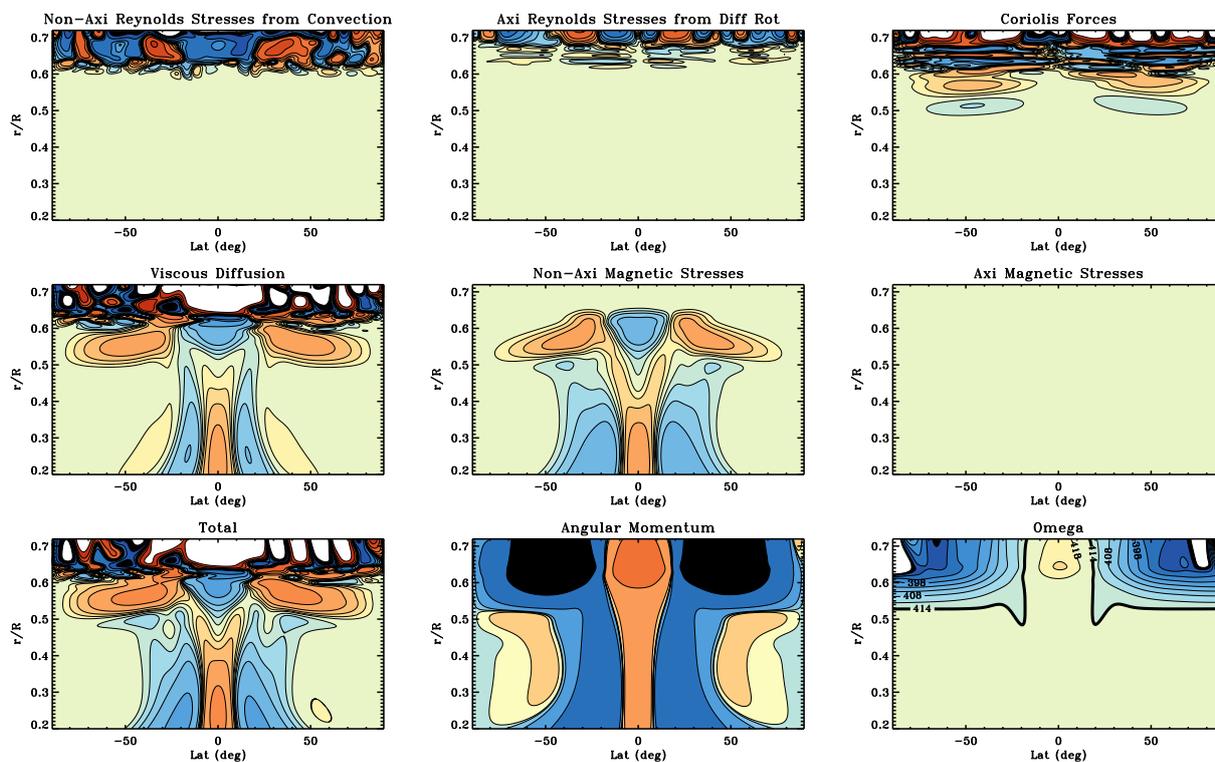


FIGURE 4.13 – Transport net de moment cinétique 7843 jours après l'introduction du champ magnétique perpendiculaire. Ce temps correspond au même temps que la figure 4.10(c).

exploré, c'est le champ magnétique qui domine le transport de moment cinétique dans l'intérieur radiatif, et par suite qui est responsable de la destruction de la tachocline.

Nos modèles font appel à des coefficients de diffusion augmentés qui rapprochent les temps caractéristiques solaires les uns des autres. Par suite, des simulations à plus haute résolution sont nécessaires pour confirmer ces résultats. De plus, notre régime de paramètre sous-estime la pénétration de la circulation méridienne à la base de la zone convective. Cette pénétration est cependant déjà présente dans nos simulations, une étude spécifique de l'influence d'une pénétration plus profonde de la circulation méridienne sur nos résultats sera effectuée dans un futur proche.

Enfin, notre étude laisse à penser qu'un autre mécanisme plus robuste pour le confinement de la tachocline doit être trouvé. Parmi les idées existantes (section 4.1), deux pistes me semblent judicieuses d'explorer. Premièrement, le transport du moment cinétique par les ondes internes doit être mieux caractérisé dans des modèles tri-dimensionnels réalistes afin de comprendre si le transport de moment cinétique "turbulent" dans la tachocline est réellement diffusif ou anti-diffusif, et ce dans les directions horizontale et radiale. Ensuite, la tachocline est souvent pensée comme un élément majeur de la dynamo solaire. L'effet du cycle dynamo sur le transport de moment cinétique est encore mal compris (section 4.1.3), et pourrait fournir une solution élégante au problème du confinement de la tachocline. Ces deux pistes seront explorées dans de futurs travaux.

Magnetic confinement of the solar tachocline: II. Coupling to a convection zone

A. Strugarek¹, A. S. Brun¹, and J.-P. Zahn^{2,1}

¹ Laboratoire AIM Paris-Saclay, CEA/Irfu Université Paris-Diderot CNRS/INSU, 91191 Gif-sur-Yvette, France
e-mail: antoine.strugarek@cea.fr

² LUTH, Observatoire de Paris, CNRS-Université Paris Diderot, Place Jules Janssen, 92195 Meudon, France

Received 14 January 2011 / Accepted 12 June 2011

ABSTRACT

Context. The reason for the observed thinness of the solar tachocline is still not well understood. One of the explanations that have been proposed is that a primordial magnetic field renders the rotation uniform in the radiation zone.

Aims. We test here the validity of this magnetic scenario through 3D numerical MHD simulations that encompass both the radiation zone and the convection zone.

Methods. The numerical simulations are performed with the anelastic spherical harmonics (ASH) code. The computational domain extends from $0.07 R_{\odot}$ to $0.97 R_{\odot}$.

Results. In the parameter regime we explored, a dipolar fossil field aligned with the rotation axis cannot remain confined in the radiation zone. When the field lines are allowed to interact with turbulent unstationary convective motions at the base of the convection zone, 3D effects prevent the field confinement.

Conclusions. In agreement with previous work, we find that a dipolar fossil field, even when it is initially buried deep inside the radiation zone, will spread into the convective zone. According to Ferraro's law of iso-rotation, it then imprints on the radiation zone the latitudinal differential rotation of the convection zone, which is not observed.

Key words. Sun: interior – Sun: rotation – magnetohydrodynamics (MHD)– convection – magnetic fields

1. Introduction

The discovery of the solar tachocline can be considered as one of the great achievements of helioseismology (see [Brown et al. 1989](#)). In this layer the rotation switches from differential (i.e., varying with latitude) in the convection zone to nearly uniform in the radiation zone below. Its extreme thinness (less than 5% of the solar radius) came as a surprise (see [Charbonneau et al. 1999](#)) and has still not been explained properly.

[Spiegel & Zahn \(1992\)](#) made the first attempt to model the tachocline, and they showed that it should spread deep into the radiation zone owing to thermal diffusion. As a result, the differential rotation should extend down to $0.3 R_{\odot}$ after 4.5 Gyr, contrary to what is inferred from helioseismology ([Schou et al. 1998](#); [Thompson et al. 2003](#)). The authors suggested one way to confine the tachocline, namely to counter-balance thermal diffusion by an anisotropic turbulence, which would smooth the differential rotation in latitude. This model was successfully simulated in 2D by [Elliott \(1997\)](#).

[Gough & McIntyre \(1998\)](#) (GM98 hereafter) argued that such an anisotropic turbulent momentum transport is not able to erode a large-scale latitudinal shear, citing examples from geophysical studies (see [Starr 1968](#) and more recently [Dritschel & McIntyre 2008](#) for a comprehensive review). For instance, the quasi-biennial oscillation in the Earth's stratosphere arises from the anti-diffusive behavior of anisotropic turbulence. But the question is hardly settled because [Miesch \(2003\)](#) found in his numerical simulations that this turbulence is indeed anti-diffusive in the vertical direction, but the shear is reduced in latitude. Similar conclusions were reached through theoretical

(analytical) studies by [Kim \(2005\)](#), [Leprovoost & Kim \(2006\)](#), and [Kim & Leprovoost \(2007\)](#).

[Gough & McIntyre](#) proposed an alternate model, in which a primordial magnetic field is buried in the radiative zone and inhibits the spread of the tachocline. This is achieved through a balance between the confined magnetic field and a meridional flow pervading the base of the convection zone. Such a fossil field was also invoked by [Rudiger & Kitchatinov \(1997\)](#) to explain the thinness of the tachocline and by [Barnes et al. \(1999\)](#) to interpret the lithium-7 depletion at the solar surface. Moreover, it would easily account for the quasi uniform rotation of the radiative interior, which the hydrodynamic model of [Spiegel & Zahn](#) does not (at least in its original formulation). However, one may expect that such a field would spread by ohmic diffusion, and that it would eventually connect with the convection zone, thus imposing the differential rotation of that zone on the radiation zone below.

In order to test the magnetic confinement scenario and to put constraints on the existence of such a primordial field, several numerical simulations of the solar radiation zone were performed by [Garaud \(2002\)](#) in 2D, and by [Brun & Zahn \(2006\)](#) (i.e., Paper I, hereafter BZ06) in 3D. These simulations exhibit a propagation of the differential rotation into the radiation zone (primarily in the polar region). The primordial magnetic field successfully connects to the base of the convection zone where the shear is imposed and, according to Ferraro's law of iso-rotation ([Ferraro 1937](#)), the angular velocity is transmitted along the magnetic field lines from the convection zone into the radiative interior, much faster than it would through thermal diffusion. However, in the aforementioned calculations the base of

the convection zone was treated as an impenetrable wall, i.e. radial motions could not penetrate in either direction (from top down or from bottom up). No provision was made for a meridional circulation originating in the convection zone that would penetrate into the radiation zone and could prevent the upward spread of the magnetic field. This penetration was taken into account in numerical simulations by Sule et al. (2005), Rudiger & Kitchatinov (2007), Garaud & Garaud (2008), in a model of the polar region by Wood & McIntyre (2007), and in simulations coupling the radiative zone to a convective zone by Rogers (2011) to properly represent the GM98 scenario. In most of these models, an axisymmetric and stationary meridional circulation was imposed at the top of the radiation zone, strong enough to bend the magnetic field lines of the primordial field. As could be expected, various profiles of meridional circulation resulted in different confinement properties, thus emphasizing the need for a more self-consistent approach. We thus propose here to treat the problem by letting a genuine convective envelope dynamically generate its meridional circulation and differential rotation and to study how these nonlinearly generated flows interact with a fossil field.

Our 3D simulations treat the nonlinear coupling of the convection and radiation zones, and the model includes all physical ingredients that play a role in the tachocline confinement (thermal and viscous diffusion, meridional circulation, convective penetration, solar-like stratification, magnetic fields, pumping,...). The paper is organized as follows. In Sect. 2 we describe the model we use to address the question of the magnetic confinement of the tachocline. We then emphasize in Sect. 3 the global trend of our simulations, and examine in Sect. 4 the dynamics of the tachocline region. Discussions and conclusions are reported in Sect. 5.

2. The model

We use the well tested ASH code (anelastic spherical harmonics, see Clune et al. 1999; Miesch et al. 2000; Brun et al. 2004). Originally designed to model solar convection, it has been adapted to include the radiation zone as well (see BZ06). With this code, Brun et al. (2011) performed the first 3D MHD simulations of the whole sun from $r = 0.07 R_{\odot}$ to $r = 0.97 R_{\odot}$ with realistic stratification, thus nonlinearly coupling the radiation zone with the convection zone. Convective motions at the base of the convective envelope (around $r = 0.72 R_{\odot}$) penetrate into the radiative zone over a distance of about $0.04 R_{\odot}$, exciting internal waves that propagate over the entire radiative interior. The model maintains a radiation zone in solid body rotation and develops a differentially rotating convective zone that agrees well with helioseismic inversions (see Thompson et al. 2003). Although approximately three times thicker than observed, the simulated tachocline possesses both a latitudinal and radial shear. This tachocline spreads downward first because of thermal diffusion, and later because of viscous diffusion, as explained in SZ92. We do not assume here any anisotropic turbulent diffusivity to prevent the spread of the tachocline.

In the present work, we start our simulation from a mature model with a convection and a radiation zone. We then introduce an axisymmetric dipole-like magnetic field deep in the inner radiation zone. This work is meant to explore further the mechanisms considered in BZ06. The system is then evolved self-consistently through the interplay of fluid and magnetic field dynamics. As in Brun et al. (2011), the computational domain extends from $r_{\text{bottom}} = 0.07 R_{\odot}$ to $r_{\text{top}} = 0.97 R_{\odot}$, and the boundary between radiation and convection zone is defined at

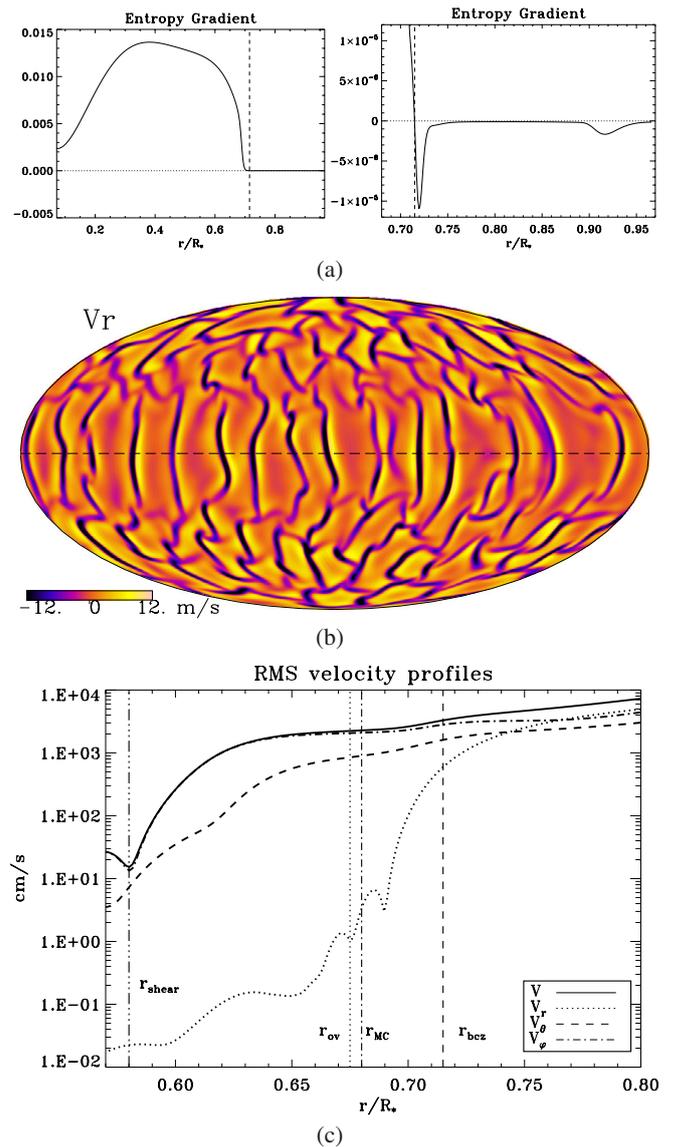


Fig. 1. **a)** Mean entropy gradient profile and zoom in the region where the entropy gradient changes sign. Entropy gradients are plotted in $\text{erg g}^{-1} \text{K}^{-1} \text{cm}^{-1}$. **b)** Radial velocity on a spherical shell near the top of the convection zone ($0.96 R_{\odot}$). Dark colors represent the downflows, while bright-yellow colors denote the upflows. **c)** rms velocities profiles at the interface between radiative and convective zones. The four vertical bars label the base of the convection zone (where the entropy gradient changes sign), the penetration depth of meridional circulation, the overshooting depth of convective motions, and the shear depth where differential rotation vanishes.

$r_{\text{bcz}} \sim 0.715 R_{\odot}$, based on the initial entropy profile (see Figs. 1a and 1c) that is assumed to setup the background equilibrium state. We also define in Fig. 1c the convective overshooting depth $r_{\text{ov}} \sim 0.675 R_{\odot}$ (see Sect. 2.2), the penetration depth of the meridional circulation $r_{\text{MC}} \sim 0.68 R_{\odot}$ (see Sect. 3.2), and the shear depth $r_{\text{shear}} \sim 0.58 R_{\odot}$ (see Sect. 2.2).

The diffusivities (Fig. 2) were chosen to achieve a realistic rotation profile in the convective envelope (see Sect. 2.2) by means of an efficient angular momentum redistribution by Reynolds stresses (Brun & Toomre 2002; Miesch et al. 2006). In the radiation zone, they have the same values as in BZ06 for consistency with previous studies. We define the following *step*

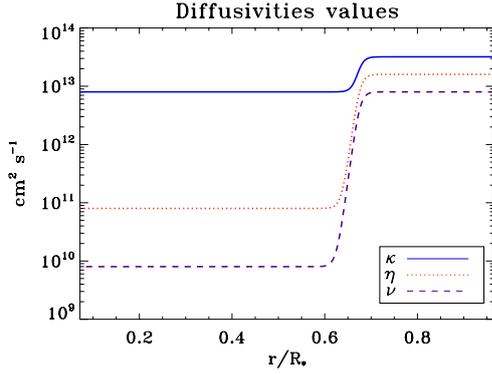


Fig. 2. Radial profile of the diffusivities used in our model (the values are given in cgs units). The κ profile corresponds to thermal diffusivity in Eq. (5), acting on the entropy fluctuations.

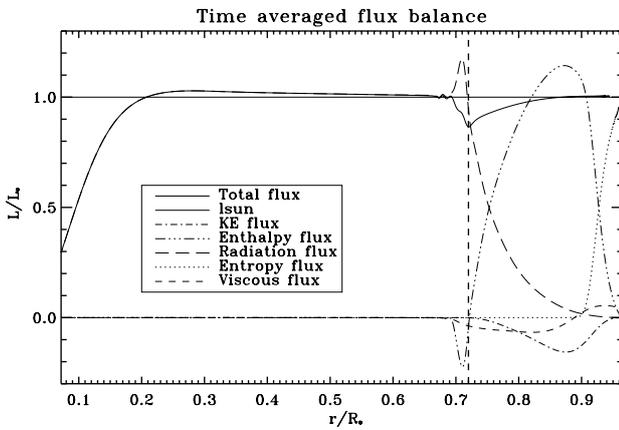


Fig. 3. Radial flux balance. In the convection zone, energy is mainly carried by the enthalpy flux; the entropy flux represents the flux carried by the unresolved motions. Note the penetration of convective motions below the convection zone (represented by the dashed line).

function to construct our diffusivity profiles:

$$\text{step}(r) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(10^{-10} \frac{r - r_v}{v_s} \right) \right),$$

$$v = v_e v_t + v_t (1 - v_e) \text{step}, \quad (1)$$

where $r_v = 4.7 \times 10^{10}$ cm and $v_s = 0.1$ control the radial localization and the thickness of the diffusivity jump. The parameter $v_t = 8.0 \times 10^{12}$ cm² s⁻¹ controls the viscosity value in the convection zone and $v_e = 10^{-3}$ controls the size of the viscosity jump. The thermal and magnetic diffusivities are similarly defined with the same formulation as for the step function, but with different $\kappa_t = 3.2 \times 10^{13}$ cm² s⁻¹, $\eta_t = 1.6 \times 10^{13}$ cm² s⁻¹ and $\kappa_e = 0.25$, $\eta_e = 5.0 \times 10^{-3}$ parameters to generate the diffusivity profiles plotted in Fig. 2. We used a $N_r \times N_\theta \times N_\varphi = 1024 \times 256 \times 512$ grid on massively parallel computers to compute this model. The Prandtl number ν/κ is 10^{-3} in the radiative zone and 0.25 in the convective zone; and the magnetic Prandtl number ν/η is 0.1 in the radiative zone and 0.5 in the convective zone. The hierarchy between the various diffusivities is thus respected even if their amplitudes are higher than in the Sun. As will be seen in Sect. 3, they were chosen in a way that nonlinear processes act efficiently in the regions of interest.

2.1. Governing equations

ASH solves the 3D MHD set of Eqs. (2–6). It uses the anelastic approximation to filter out the sound waves, and the LES approach (large eddy simulation) with parameterization to take into account subgrid motions. The mean state is described by mean profiles of density $\bar{\rho}$, temperature \bar{T} , pressure \bar{P} , and entropy \bar{S} . The reference state is taken from a thermally relaxed 1D solar structure model (Brun et al. 2002) and is regularly updated. Fluctuations around the reference state are denoted without bars. The governing equations are written in electromagnetic units, in the reference frame rotating at angular velocity $\mathbf{\Omega}_0 = \Omega_0 \mathbf{e}_z$:

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{v}) = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\bar{\rho} [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{v}] = -\nabla P + \rho \mathbf{g}$$

$$+ \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathcal{D} - [\nabla \bar{P} - \bar{\rho} \mathbf{g}] \quad (4)$$

$$\bar{\rho} \bar{T} [\partial_t S + \mathbf{v} \cdot \nabla (\bar{S} + S)] = \nabla \cdot [\kappa_r \bar{\rho} c_p \nabla (\bar{T} + T)]$$

$$+ \kappa_0 \bar{\rho} \bar{T} \nabla \bar{S} + \kappa \bar{\rho} \bar{T} \nabla S + \frac{4\pi\eta}{c^2} \mathbf{J}^2$$

$$+ 2\bar{\rho}\nu [e_{ij} e_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2] + \bar{\rho}\epsilon \quad (5)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}), \quad (6)$$

where \mathbf{v} is the local velocity, \mathbf{B} the magnetic field, κ , ν and η are respectively the effective thermal diffusivity, eddy viscosity, and magnetic diffusivity. The radiative diffusivity κ_r is deduced from a 1D model and adjusted in the radiative zone and in the overshooting layer to achieve an equilibrated radial flux balance (see Fig. 3). The thermal diffusion coefficient κ_0 plays a role at the top of the convective zone (where convective motions vanish) to ensure the heat transport through the surface. This term proportional to $d\bar{S}/dr$ is part of our subgrid scale treatment in the convection zone. The unresolved flux only acts in the upper part of the convection zone (see Fig. 3), and κ_0 is chosen to be small enough that this flux does not play any role in the radiative interior (besides eventual numerical stabilization). $\bar{\rho}\epsilon$ is the rate of nuclear energy generation chosen to have the correct integrated luminosity (see Brun et al. 2011). $\mathbf{J} = (c/4\pi)\nabla \times \mathbf{B}$ is the current density, and the viscous stress tensor \mathcal{D} is defined by

$$\mathcal{D}_{ij} = -2\bar{\rho}\nu \left[e_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} \right]. \quad (7)$$

The system is closed by using the linearized ideal gas law:

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{P}{\bar{P}} - \frac{T}{\bar{T}} = \frac{P}{\gamma \bar{P}} - \frac{S}{c_p}, \quad (8)$$

with c_p the specific heat at constant pressure and γ the adiabatic exponent.

We chose rigid and stress-free conditions at the boundary shells for the velocity. We also imposed constant mean entropy gradient at the boundaries, matched the magnetic field to an external potential magnetic field at the top, and treated the bottom boundary as a perfect conductor.

2.2. Characteristics of the background model and choice of the initial magnetic field

Integrated solar models built with the ASH code that couple a deep radiative interior to a convective zone have been previously described in Brun et al. (2011); here we need only to stress

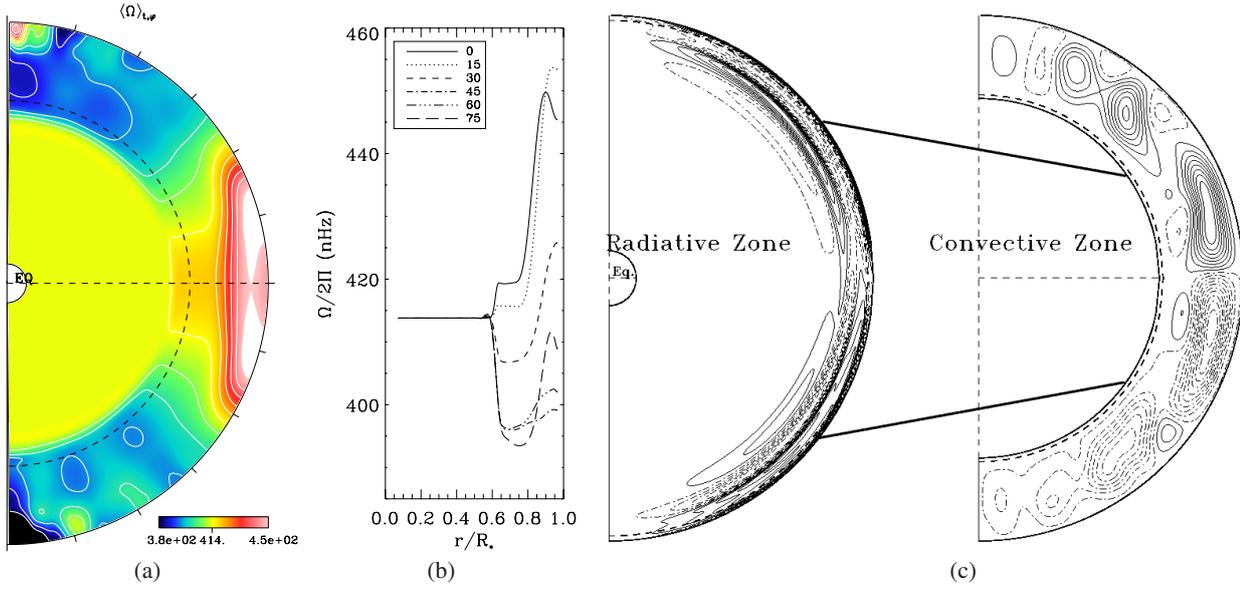


Fig. 4. **a)** Azimuthally and temporally averaged rotation frequency. Yellow denotes the rotation rate of the interior, red is the higher rotation rate and blue the lower rotation rate. **b)** Radial profile of rotation frequency at different latitudes. **c)** Meridional circulation in the radiation zone (*left*) and in the convection zone (*right*), evaluated from the poloidal mass flux averaged over time and longitude. Solid contours denote counterclockwise circulation, dashed contours clockwise circulation.

some properties that are of particular interest for our study of the tachocline dynamics.

The starting point of our model is the choice of thermodynamic quantity profiles that will allow us to treat the convective and radiative zones together. Using a standard solar model calibrated to seismic data (Brun et al. 2002) computed by the CESAM code (Morel 1997), we chose to use the real solar stratification in the radiation zone and take a constant negative initial entropy gradient in the convection zone. These profiles are closely in agreement the guess profile after a Newton-Raphson solve. After setting a stable/unstable stratification, we perturbed the background state assuming a Rayleigh number well above the critical Rayleigh number for the onset of convection. A sample of the convective motions realized in the model is shown in Fig. 1b, where one can recognize the characteristic banana pattern near the equator and a patchy behavior at high latitudes (see Brun & Toomre 2002). We then let the model evolve toward a mature state in two steps. First we let the overshooting layer and the differential rotation develop. Then we sped up the thermal relaxation of the system by adding a bump on the radiative flux in the overshooting region (see Brun et al. 2011 for more details). Thanks to this procedure, we quickly achieved good radial flux balance (Fig. 3). The energy provided by nuclear reactions is transported through radiation in the radiation zone, and is essentially transported by the enthalpy flux in the convection zone. The overshoot region, defined here as the region of negative enthalpy flux, extends from $r_{bcz} = 0.715 R_\odot$ to $r_{ov} = 0.675 R_\odot$, leading to $d_{ov} \approx 0.04 R_\odot \approx 0.4 H_p$ (where H_p is the local pressure scale height). In the convection zone, the radiative flux quickly goes to zero, while viscous and kinetic energy fluxes tend to oppose the outward transport of heat of the enthalpy flux associated to the convective motions. Near the top of the domain, convective motions vanish due to our choice of impenetrable wall; thus the enthalpy flux decreases, and the energy is then transported by the entropy flux.

With our choice of diffusion coefficients (Fig. 2), the system reached a state of fully developed convection with a rotation

profile that agreed well with the results of helioseismology (e.g. Thompson et al. 2003): the convection zone rotates faster at the equator than at the poles, and the rotation profiles are conical at mid-latitudes (see Fig. 4a). We display the radial profile of Ω at indicated latitudes in Fig. 4b. We clearly see the presence of a tachocline. Future work will aim at reducing the thickness of the jump of the diffusivities (Fig. 2) with a more flexible radial discretization (currently under development) to model a thinner hydrodynamic tachocline. Finally, the meridional circulation in the convection zone is composed by a major cell in each hemisphere (Fig. 4c), and by smaller counter-rotating cells at the poles.

When the hydrodynamic model reached an equilibrated state (as reported in Brun et al. 2011), we introduced a dipolar axisymmetric magnetic field buried in the radiative zone. It is set to vanish at the base of the tachocline, below the level where differential rotation starts, and we imposed the functional form $\mathbf{B} = B_0 (B_r \mathbf{e}_r + B_\theta \mathbf{e}_\theta)$, with

$$B_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta \Psi, \quad B_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \partial_r \Psi. \quad (9)$$

$\Psi(r, \theta)$ is constant on field lines. As in BZ06, we chose

$$\Psi = (r/R)^2 (r - R_b)^2 \sin^2 \theta \quad \text{for } r \leq R_b \\ = 0 \quad \text{for } r \geq R_b \quad (10)$$

where $R_b = 0.57 R_\odot$ is the bounding radius of the confined field. According to Gough & McIntyre (1998), the amplitude of the magnetic field controls the scalings of the tachocline and the magnetopause (a thin layer of intense magnetic field). With our choice of parameters, these scalings would require an initial seed magnetic field of the order of $10^4 G$ (i.e., $\delta/R \sim \Delta/R \sim 10^{-2}$, in GM98's notations). Here we set B_0 to $4.2 \times 10^4 G$ to be at equipartition of energy in the radiative zone between magnetic energy and total kinetic energy in the rotating reference frame.

We stress here that such a magnetic field is subject to the high m Tayler instability (see Tayler 1973; Brun & Zahn 2006; Brun 2007) because it has no azimuthal component to start with. One could prefer to choose a mixed poloidal/toroidal magnetic field

because it is the only possible stable configuration of magnetic field in radiative stellar interiors (Taylor 1973; Braithwaite & Spruit 2004; Duez & Mathis 2010). However, this has no consequences for the problem at hand, because a toroidal field quickly develops and stabilizes the magnetic configuration.

3. General evolution

The first evolutionary phase of our simulation is similar to that in BZ06, with the magnetic field diffusing through the tachocline. But here we follow its evolution as it enters into the convection zone, and we witness the back-reaction of convective motions on the field. The outcome is the same in the end, as we shall see in Sect. 3.1. More details on tachocline dynamics are given in Sect. 3.2.

3.1. Global evolution of the magnetic field

We started the simulation by burying the primordial field deep within the radiative interior and below the tachocline. As the simulation proceeded, the field expanded through the tachocline into the convection zone, where it experienced a complex evolution under the combined action of advection by the convective motions, shearing through the differential rotation and ohmic diffusion. It finally reached the domain boundary (Fig. 5b) where it connected to an external potential field.

The distortion of the field lines produces magnetic torques that force the angular velocity Ω to tend toward constant along the field lines of the mean poloidal field, thus leading to Ferraro’s law of iso-rotation. This is illustrated in Fig. 5, where the iso-contour $\Omega = 414$ nHz (i.e., the initial rotation frequency of the whole radiation zone) is thicker and more intense. As a result, the radiation zone slows down under the influence of the magnetic torques (Fig. 5c). Our choice of torque-free boundary conditions implies that the total angular momentum is conserved. It is extracted from the radiative zone and redistributed within the convective envelope.

As the initial magnetic field meets the angular velocity shear, toroidal magnetic field is created in the tachocline region *via* the Ω -effect (see Moffatt 1978), consistent with the magnetic layer introduced in GM98. Near the initial time (Fig. 6a) the magnetic layer exhibits a mixed $l = 1, l = 3$ configuration. The axisymmetric longitudinal magnetic field then presents a $l = 3$ structure (Fig. 6b), consistent with the action of differential rotation on the dipolar magnetic field through the induction equation. This layer of axisymmetric azimuthal magnetic field spreads downward, accompanying the spread of differential rotation (Figs. 6c–d). We also observe that the upper radial localization of maximum azimuthal magnetic field remains remarkably localized at the base of our initial tachocline. Some azimuthal field does penetrate into the convective envelope, partly because of some local Ω -effect that is at work in this region.

Meridional circulations exist in the radiative and convective zones and are self-consistently generated by the convective motions and local dynamics (Fig. 6). Observe that the evolution of the magnetic layer greatly perturbs the pattern of the meridional circulations in the radiative zone. Comparing Fig. 6 to the hydrodynamic model (Fig. 4c), we observe that even if temporal averages of the meridional circulation produce large hemispherical cells in the convection zone, the instantaneous pattern of this flow is multicellular both in longitude and latitude. Those 3D motions are unable to prevent the magnetic field from spreading into the convective zone, in contrast to what GM98 and

Garaud & Garaud (2008) proposed in their 2D scenario. Note that Rogers (2011) confirm the absence of magnetic field confinement in recent 2D simulations, where the author coupled a radiative interior to a convective envelope.

Azimuthally averaged views can mislead the reader here because from those figures one cannot deduce the real impact of the turbulent convective motions on the magnetic field. Figure 7 displays 3D visualizations that emphasize at the same time the advective and diffusive processes that act on the magnetic field in the convective zone. Magnetic field lines are twisted and sheared by convective motions, but still the magnetic field connects the radiative and convective zones. One clearly observes the mostly horizontal magnetic layer in the tachocline on Fig. 7c. In that panel also the radiation zone starts to show the “footprint” of the differential rotation of the convection zone. In order to follow one particular field line, we display in Fig. 8 a 3D rendering time evolution using a high sampling cadence, viewed from the north pole. We observe that particular field lines (labeled A, B, and C) are strongly influenced by convective motions and exhibit a complex behavior, far from just simple diffusion. The primary importance of 3D motions will also be discussed in Sect. 3.2.

We stress here that the magnetic field lines first penetrate into the convective zone through the equator. One may wonder how this can be achieved in spite of the magnetic pumping (see Tobias et al. 2001; Weiss et al. 2004) that should be acting in this region. Let us mention several reasons why the magnetic pumping may not be efficient enough in our simulation, and by extension perhaps in the Sun:

- Magnetic pumping has been proven to be much less efficient when strong rotation is present and enhances horizontal mixing. This corresponds to a low Rossby number regime, which is the case for the Sun and our simulation. Indeed, our Rossby number $R_o = \omega_{\text{rms}}/2\Omega$ varies from 0.1 to 1 in the convection zone.
- It has also been proven to be much less efficient as the underlying region (here the tachocline) is more stably stratified. We use here a realistic (strong) solar-like stratification.
- The meridional circulation tends to advect the magnetic field upward at the equator, opposing the effect of the magnetic pumping. However, our simulation is perhaps not turbulent enough to counterbalance this effect, even though $R_m > 1$.
- Our relatively high diffusivities may facilitate the connection between the two zones by favoring the field lines’ expansion. Nevertheless, it is also known that diffusion helps the “slipping” of the field lines (e.g., Zanni & Ferreira 2009 from ideal flux frozen scenario). This implies that even though the field lines have pervaded into the convection zone, they may not be efficiently enough anchored to transport angular momentum. More details will be given in Sect. 3.2.
- The nature of penetration at the base of the convection zone is influenced by the Peclet number. In our case, the Peclet number is on the order of 1 at the base of the convection zone, implying a regime of overshooting rather than of penetrative convection (Zahn 1991). This translates into a more extended region of mixing than what is occurring in the Sun. Hence, the motions in our simulation are likely to be more vigorous at r_{ov} .

For all these reasons, the magnetic pumping near the equator in a fossil buried magnetic field scenario (Wood & McIntyre 2011) is quite complex and cannot be taken for granted as a mechanism to impermeably confine an inner magnetic field near the equator (detailed magnetic field evolution may be found in Sect. 3.2).

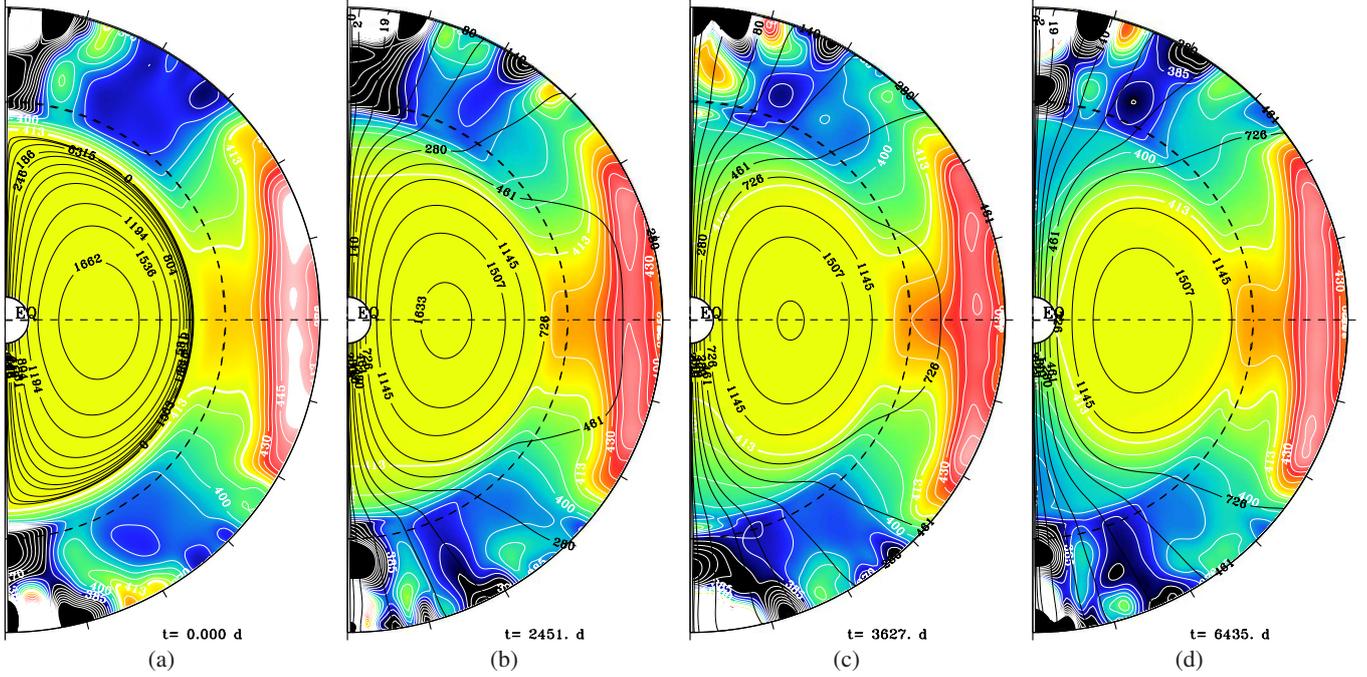


Fig. 5. Poloidal snapshots of azimuthal averages of the rotation profile (colored background) and magnetic field lines (black). Color table is the same as in Fig. 4a.

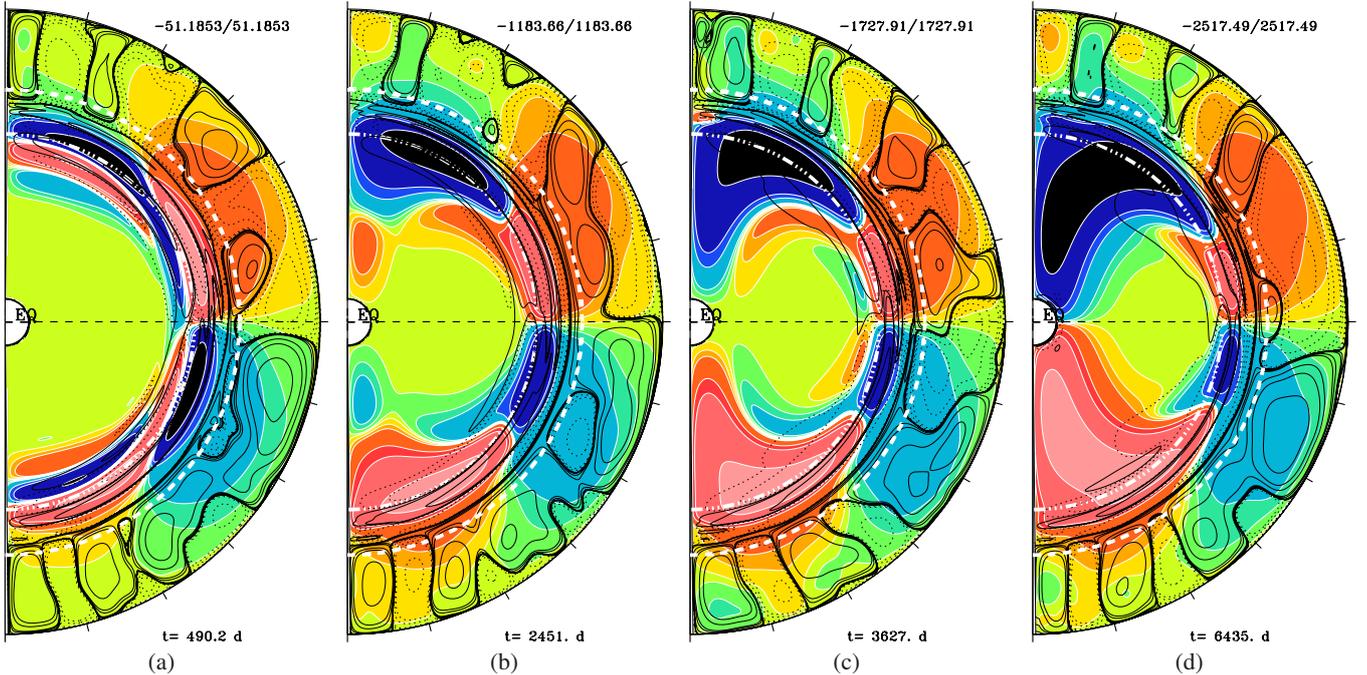


Fig. 6. Poloidal snapshots of $\langle B_\phi \rangle$ (colored background) and instant meridional circulation (black lines). Initially, the magnetic field is purely poloidal. The first figure *on the left* is taken just after the beginning iteration (not the same time as in Fig. 5a) to demonstrate how the longitudinal magnetic field is primarily created. Red is the positive magnetic field, and blue the negative magnetic field. In order to display the azimuthal magnetic field in the radiation zone and the convection zone (where it is much weaker), a logarithmic scale was used for the color table. The two white lines indicate the base of the convection zone r_{bcz} and the shear depth r_{shear} (cf. Fig. 1c).

In order to watch how the primordial magnetic field manifests its presence in the convective zone, we tracked the evolution of B_r near the surface (at $r = 0.96 R_\odot$). Our choice of parameters ($P_m = 0.5$) for this simulation prevents the development

of a dynamo-generated magnetic field in the convection zone because the resulting magnetic Reynolds number is less than one hundred there. The threshold for dynamo action is likely to be above that value, as shown by Brun et al. (2004). As a

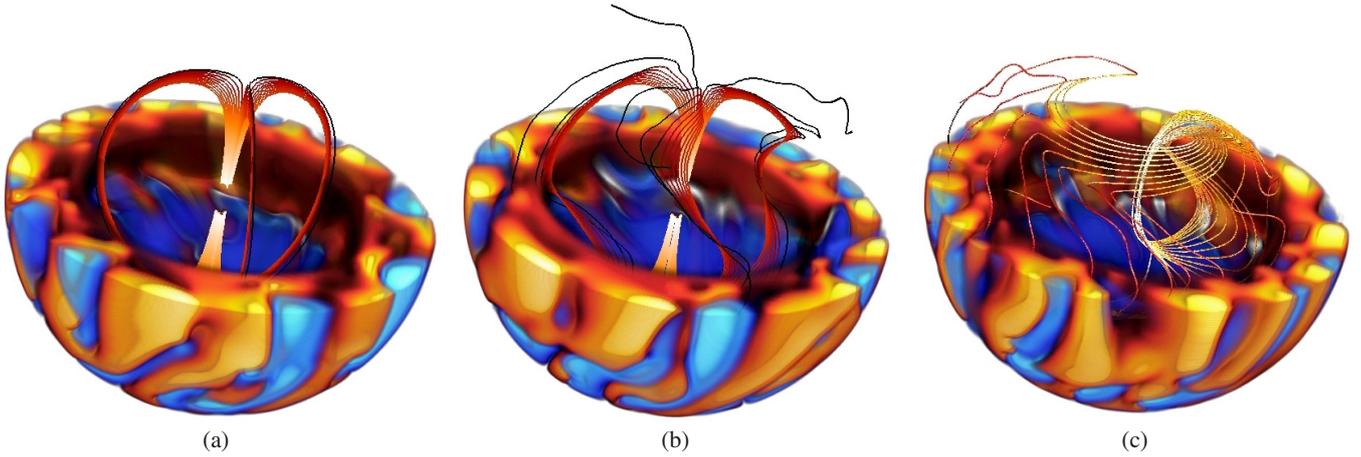


Fig. 7. Three-dimensional views of the longitudinal velocity in the rotating frame. Red are the positive velocities, and blue the negative velocities. Picture **a)** is the initial time where we added the magnetic field, and picture **b)** is taken after two solar rotation periods. Picture **c)** is taken much later in the simulation, when the magnetic layer became stable. Colored lines are the magnetic field lines we constructed from only a few seed points to be able to distinguish them. Dark colors denote lower magnetic field intensity. Note that for the third image, we only put in seed points at one longitude value to distinguish the field lines that explore almost the entire φ domain in the radiation zone.

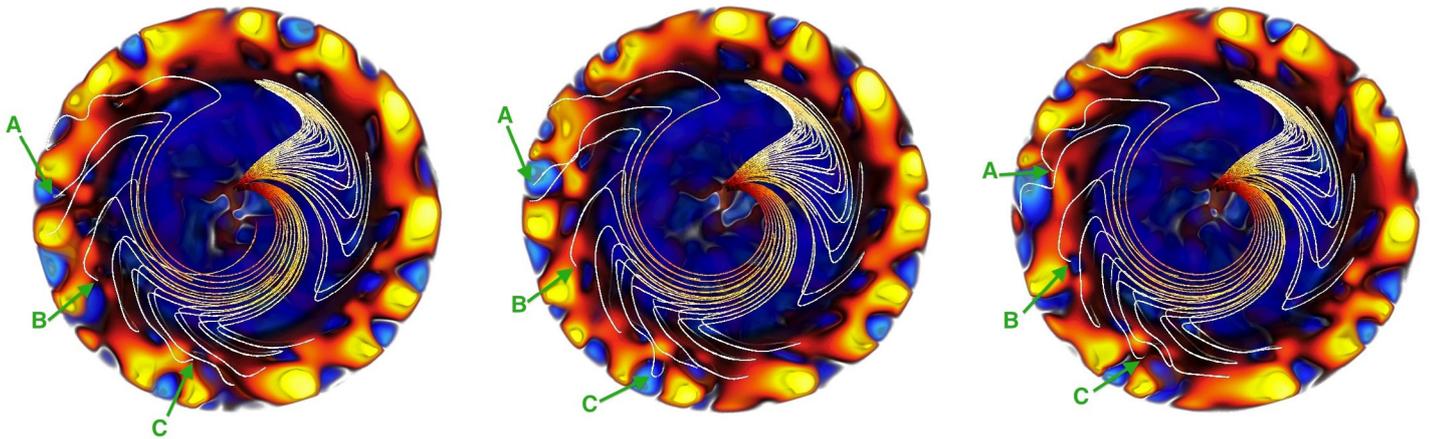


Fig. 8. Three-dimensional views from the north pole. The *left picture* corresponds to Fig. 7c, and the two following snapshots are taken 2 and 4 days later. We reversed the color table of the field lines to emphasize their movement. The green arrows indicate the movement of three field lines during this period.

consequence, the presence of a magnetic field at the surface of the model (as seen in Fig. 9) is solely caused by the spreading and reshuffling of the inner magnetic field through the convective envelope. Since no dynamo action is operating in the model, the magnetic field decays on an ohmic time scale and will eventually vanish. However, we did not run the simulation long enough to access this decaying phase across the whole Sun. We also stress that the ratio ME/KE is only few 10^{-3} throughout the convection zone during the late evolution of our model; it is still far too low to observe any influence of the magnetic field on the convective patterns (see Cattaneo et al. 2003). Note that the non-axisymmetric pattern of B_r in Fig. 9 is strongly correlated with v_r , the vertical velocity pattern, with opposite sign of B_r in the northern and southern hemispheres. Because the latitudinal derivative of v_r changes sign at the equator, we deduce that it is the shear term $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ of the induction equation that dictates the evolution of B_r in the convection zone. An interesting diagnostic is provided by reconstructing (with a potential field extrapolation) the magnetic field outside our simulated star,

up to $2R_\odot$ (Fig. 10). One easily recognizes the magnetic layer in the tachocline and the rapidly evolving magnetic field in the convection zone. The reconstructed outer magnetic field looks mainly dipolar and does not give any hints for its complicated inner structure.

As mentioned above, our initial magnetic field is subject to high m instabilities because it starts as a purely poloidal field. Quickly the development of a toroidal component stabilizes the poloidal field, resulting in a complex poloidal-toroidal topology. In the magnetic layer, the azimuthal component of the toroidal field can locally be much larger than the poloidal field. Such a toroidal field is subject to low m instabilities (e.g. Tayler 1973; Zahn et al. 2007; Brun 2007). We observe the recurring of the $m = 1$ pattern at high latitudes on Fig. 11d. The profiles of the horizontal components of the magnetic field are shown in Figs. 11a and 11c. In the two right panels of Fig. 11, we subtracted the axisymmetric part of the field to render the instability more obvious. Note also that at the time chosen to generate the

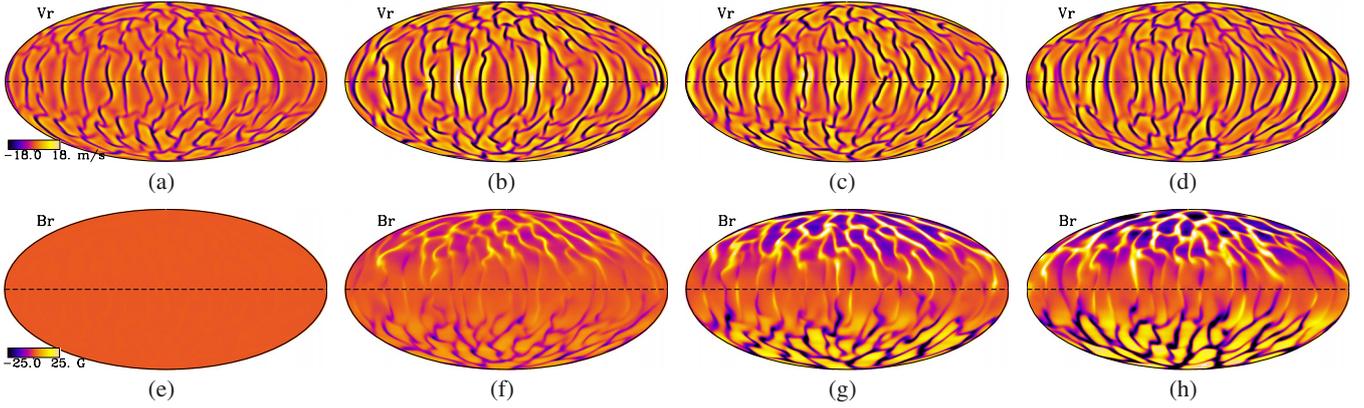


Fig. 9. Time evolution of v_r and B_r for the shell $r = 0.96 R_\odot$. The different times are exactly the same as in Fig. 5. We subtracted the $m = 0$ component for B_r . Dark colors denote negative velocities and radial magnetic field, and bright colors positive velocities and radial magnetic field.

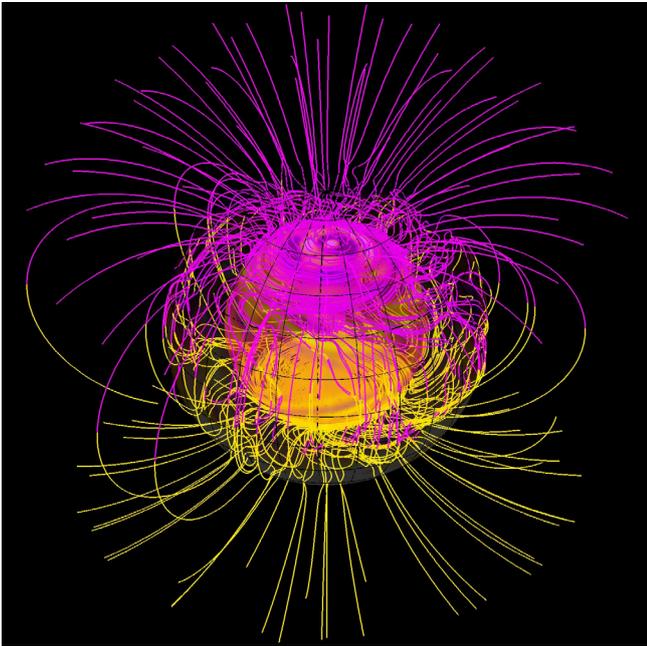


Fig. 10. Magnetic field lines from the center to the corona. For $r > 0.96 R_\odot$, a potential extrapolation is assumed. This snapshot is taken at the same time as Fig. 9g. The two very transparent spherical shells are set at $r = 0.62 R_\odot$ and $r = R_\odot$, we display in them the contours of the non-axisymmetric B_ϕ and total B_r . Magenta denotes the positive radial magnetic field, and yellow denotes the negative radial magnetic field.

figure, the longitudinal component of the magnetic field is ten times stronger than its latitudinal component.

3.2. Tachocline and local magnetic field evolution

Previous studies of the GM98 scenario have shed light on the importance of the penetration of the meridional circulation into the tachocline (Sule et al. 2005; Garaud & Garaud 2008). Numerical simulations in 2D have shown that this large-scale flow was able to deflect the magnetic field, and could prevent it from entering into the convection zone. We plot in Fig. 12 the meridional circulation patterns realized in the bulk of the tachocline. We observe both the meridional circulation penetration (coming from above $r_{bcz} \sim 0.72 R_\odot$), and the meridional circulation cells generated in the tachocline and at the top of the radiation

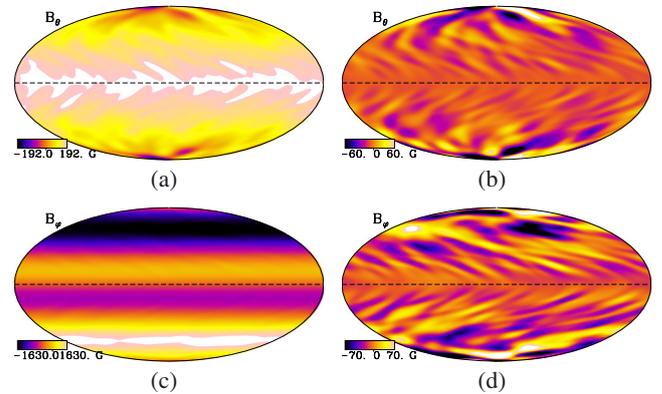


Fig. 11. Shell slices of the horizontal components of the magnetic field at $r = 0.60 R_\odot$ in the late evolution of our model. Left figures represent the full fields, while the azimuthal mean was subtracted in the right figures. Dark colors denote negative magnetic fields, and bright colors positive magnetic fields.

zone. In our model, the meridional circulation penetrates approximately 4% of the solar radius below the base of the convection zone. The rms strength of the meridional velocity (shown with a logarithmic colormap) strongly decreases with depth in the tachocline. For instance, the meridional velocity loses three orders of magnitude over 0.03 solar radius by dropping from 18 m s^{-1} to 0.06 m s^{-1} near the poles at the base of the convective zone (see also Fig. 1c). Again, because our Peclet number is on the order of 1, this penetration is likely overestimated.

To evaluate the impact of the flow on the magnetic field evolution in the penetrative layer, we computed the magnetic Reynolds number $R_m = V^{\text{rms}} \Delta / \eta$, where V^{rms} is the total rms velocity, Δ the convective penetration depth under the convection zone, and η the magnetic diffusivity. We take $\Delta = r_{bcz} - r_{ov} \approx 0.04 R_\odot$ (see Figs. 1c and 12). We obtained a magnetic Reynolds number on the order of 1 to a few in this penetration zone. This means that we are in a regime where shear and advection are on the order of, or slightly greater than diffusion in the magnetic field evolution equation. Different definitions of the magnetic Reynolds number may lead to different values. Indeed, if one retains only the radial component of the velocity field (i.e., in the sense of Garaud & Garaud 2008) or only the meridional component of the flow, we obtain a magnetic Reynolds number slightly lower than one. Conversely, if one uses the total radius

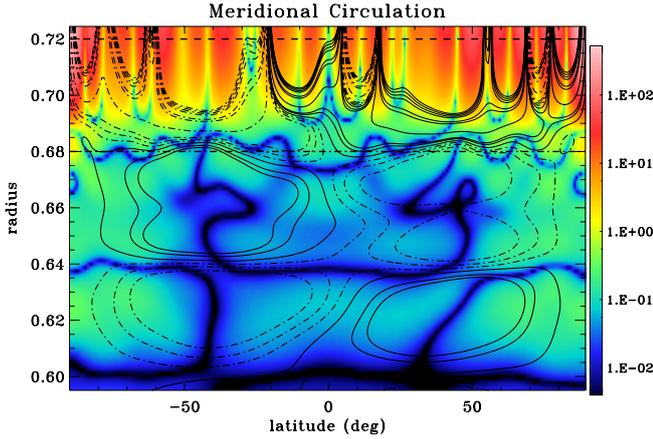


Fig. 12. Zoom of the time-averaged meridional circulation pattern before the introduction of the magnetic field in the tachocline area. The stream function is plotted in iso-contours, solid lines denoting clockwise circulation profiles, and dotted lines anti-clockwise. The background color map corresponds to the rms strength of the meridional circulation flow in m s^{-1} with a logarithmic scale. Red colors denote the strongest downflows.

of the star (i.e., in the sense of Sule et al. 2005), we obtain much higher Reynolds number values. In the end, it is the relative amplitude and the spatial structure of the various terms in the induction equation at any given location that actually determine the evolution of the system. The quantitative analysis of those terms demonstrates that we are in an advective regime, as will be seen in Figs. 13–16.

In addition, we also simulated the evolution of the same magnetic field in a purely diffusive case (i.e., without any velocity field). The evolution of the magnetic field deep in the radiation zone, i.e., below r_{ov} , is equivalent in the two simulations and is dominated by diffusion, its amplitude decreasing with the square root of time. However, the penetration of the magnetic field into the convective zone is faster in the full MHD case, as will be seen in Fig. 15.

In order to demonstrate the role played by time-dependent 3D convective motions and nonlinearities in our simulation, we now turn to a detailed analysis of the evolution of the mean poloidal and toroidal fields. Following Brown et al. (2010), we first evaluate the different terms that contribute to the creation and maintenance of the axisymmetric latitudinal magnetic field $\langle B_\theta \rangle$. It is essentially amplified by shear, transported by advection, and opposed by diffusion. Starting from the induction equation, one may write

$$\partial_t \langle B_\theta \rangle = P_{\text{FS}} + P_{\text{MS}} + P_{\text{FA}} + P_{\text{MA}} + P_{\text{C}} + P_{\text{MD}}, \quad (11)$$

with P_{MS} and P_{MA} representing the production by the mean shearing and advecting flows, P_{FS} and P_{FA} by fluctuating shear and advection, P_{C} by compression, and P_{MD} by mean ohmic diffusion. The symbol $\langle \rangle$ stands for azimuthal average. Those six terms are

$$\begin{aligned} P_{\text{FS}} &= \langle (\mathbf{B}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' \rangle_\theta \\ P_{\text{MS}} &= \langle (\langle \mathbf{B} \rangle \cdot \nabla) \langle \mathbf{v} \rangle \rangle_\theta \\ P_{\text{FA}} &= - \langle (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{B}' \rangle_\theta \\ P_{\text{MA}} &= - \langle (\langle \mathbf{v} \rangle \cdot \nabla) \langle \mathbf{B} \rangle \rangle_\theta \\ P_{\text{C}} &= \langle (\langle v_r \rangle \langle B_\theta \rangle + \langle v'_r B'_\theta \rangle) \frac{d}{dr} \ln \bar{\rho} \rangle_\theta \\ P_{\text{MD}} &= - \nabla \times (\eta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle)_\theta. \end{aligned} \quad (12)$$

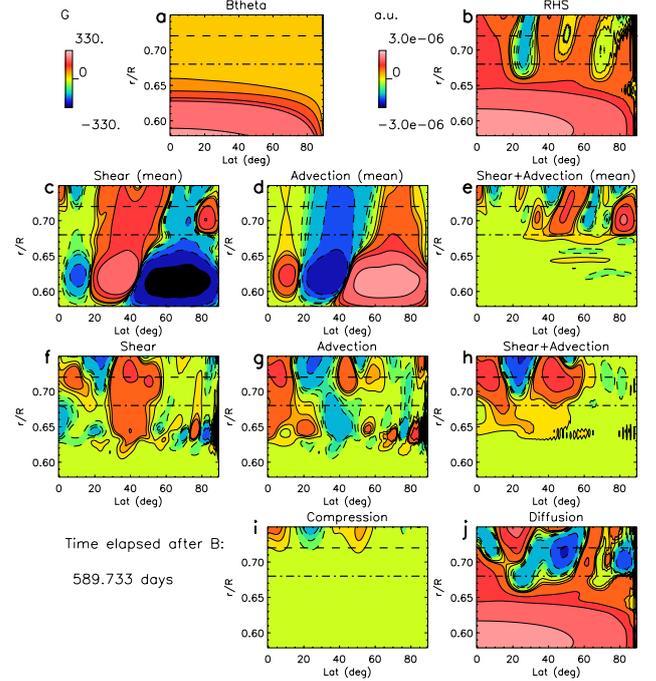


Fig. 13. Major terms of production of $\langle B_\theta \rangle$. The abscissa spans the northern hemisphere, the ordinate is a zoom in the tachocline. The left color bar corresponds to instantaneous $\langle B_\theta \rangle$, while the right color bars stands for the nine other panels. The RHS panel is the sum of the panels e), h), j), and i), and represents the net evolution of the mean latitudinal magnetic field. Panels c), d), f), g), i), and j) correspond to P_{MS} , P_{MA} , P_{FS} , P_{FA} , P_{C} , and P_{MD} , respectively (see Eq. (12)). The panels e) and h) correspond to the sum of panels c) and d), and f) and g), respectively. Color levels are not linear in order to see at the same time the contributions of the terms in the different regions. Red colors denote the positive contribution to the magnetic field and blue colors the negative contributions. The two horizontal lines in each panel represent r_{bcz} (dash) and r_{MC} (dot-dash), as in Fig. 1c.

These definitions are then easily transposed to the radial and azimuthal components of the magnetic field.

We plot in Figs. 13–14 the mean latitudinal field $\langle B_\theta \rangle$ and the various terms of the right hand side of Eq. (12) at two instants in the simulation. We first show in Fig. 13 the early phase of evolution of $\langle B_\theta \rangle$, and a later phase of evolution in Fig. 14. At radius $r = 0.6 R_\odot$ (i.e., deeper than r_{ov}), we initially observe two trends. First, the mean advective and shear contributions effectively cancel one another, possibly because of our choice of impenetrable and perfect conductor lower boundary condition ($\langle V_r \rangle = 0$ and $\langle B_\theta \rangle = 0$ at $r = r_{\text{bot}}$). The same effect is observed for the $\langle B_r \rangle$ component (not shown here). Second, because those two terms cancel each other, it is the magnetic diffusion that dictates the evolution of $\langle B_\theta \rangle$ in this deep region. This is not a surprise, considering our diffusivity values and the lack of strong motions in this deep (inner) part of the model.

On the other hand, the patterns are much more complicated in the penetration layer (between $r_{\text{ov}} = 0.675 R_\odot$ and $r_{\text{bcz}} \sim 0.72 R_\odot$). Mean advection and shear are important, their sum (panel e) mainly acts at latitudes higher than 40° . Diffusion (panel j) acts everywhere in the penetration layer, but its action does not dominate the other contributions (panel b). The non-axisymmetric contributions (panels f, g, and h) are very important at latitudes lower than 60° in the penetration layer. Therefore, 3D motions are obviously responsible in our model for the fail-

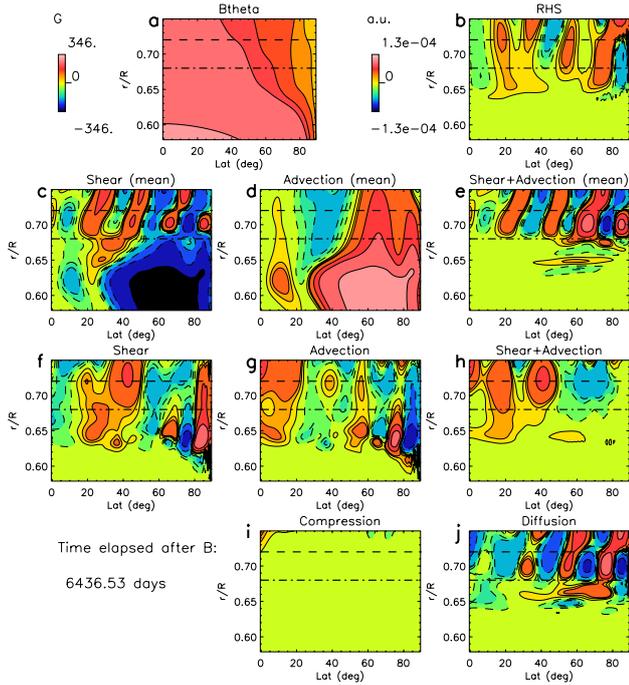


Fig. 14. Major terms of production of $\langle B_\theta \rangle$. The panels represent the same as in Fig. 13, but at a later time.

ure of the magnetic field confinement below the convection zone at low latitude. This result contrasts with previous 2D studies, where these motions were not taken into account.

During the late evolution of our model (Fig. 14), the complex balance between axisymmetric motions, non-axisymmetric motions and diffusion is still operating in the penetration layer. We observe (panel a) that the magnetic field has completely pervaded the tachocline and extends into the convection zone. Again, the relative importance of the three panels e, h, and j indicates that diffusion is not the dominant process transporting the field. Indeed, we find again that the non-axisymmetric components significantly act at low latitude in this layer. We also note here that the levels of the color table were modified between Figs. 13 and 14, making the diffusive term (which is still operating around $r = 0.6 R_\odot$) harder to be seen in panel j. Finally, we note that magnetic pumping is proven inefficient to confine the magnetic field at both times.

In order to estimate the pumping, we plot in Fig. 15 the evolution of the amplitude of the latitudinal magnetic field at $r = 0.86 R_\odot$ (in the convection zone) after its introduction. As previously seen, the amplitude rises. We plot on the same figure the evolution of the absolute value of the latitudinal component of the magnetic field both in the downflows (dot-dash) and in the upflows (triple dot-dash). We observe that the amplitude rises slower in the downflows than in the upflows. In addition, the temporal lag between the up- and downflow regions increases with time. This agrees with the action of magnetic pumping by downflows. However, it is a minor effect in the global evolution of the magnetic field.

We also plot in Fig. 15 the evolution of the rms latitudinal component of the magnetic field in the convection zone in both the nonlinear simulation discussed in the paper (solid line) and in another purely diffusive test case (diamonds). Once more, this stresses that the field evolution is different in our simulation than in the purely diffusive test case. The larger amplitude of B_θ in our convection simulation clearly demonstrates the role of advec-

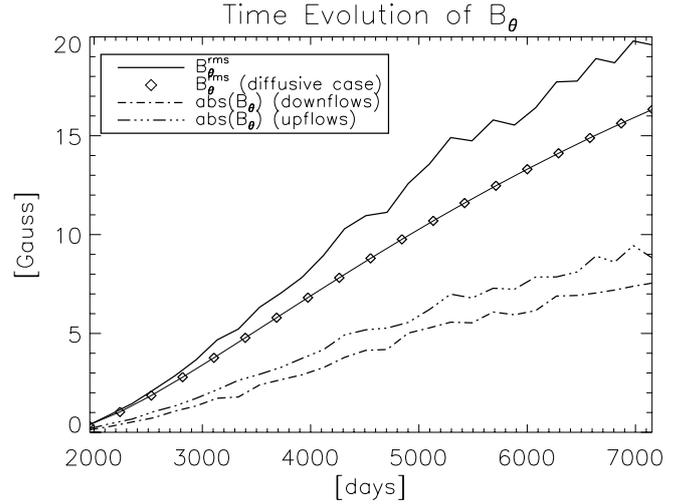


Fig. 15. Rms and absolute value of the latitudinal magnetic field amplitude evolution at $r = 0.86 R_\odot$. The dotted and dashed lines correspond to the absolute value of the latitudinal component of the magnetic field in the downflows and in the upflows. We selected the downflows part by setting the magnetic field to zero at the points corresponding to a positive v_r on the $r = 0.86 R_\odot$ spherical shell. We averaged the remaining values over the shell to obtain B_θ in downflows, and did the opposite for the upflows selection. The diamond line represents the evolution of the rms latitudinal magnetic field in the purely diffusive (test) case.

tion in pulling the field inside the convection zone. The trends in Fig. 15 are similar between $r = r_{ov}$ and r_{top} , i.e., in the whole convection zone and even in the penetration layer.

We may now also examine two different processes in the evolution of the azimuthal magnetic field: the creation and sustainment of the magnetic layer, and the expansion of the magnetic field into the convection zone. $\langle B_\varphi \rangle$ is firstly created underneath the convection zone through the interaction between the dipolar magnetic field and the differential rotation around $r = 0.62 R_\odot$. Diffusion slightly counterbalances the Ω effect, and advection does not act much in this layer. In order to illustrate these processes, we plot in Fig. 16 $\langle B_\varphi \rangle$ and the right hand side terms from Eq. (12) (as in Fig. 13, but taken in the φ direction) during the early evolution of our model. Diffusion (panel j) opposes the creation of magnetic field by mean shear (panel c) in the magnetic layer (around $0.6 R_\odot$). Although the magnetic layer seems to remain radially localized, the magnetic field also exists in the convective zone. It has a much smaller amplitude than in the magnetic layer, but it is not negligible. We observe that $\langle B_\varphi \rangle$ is preferentially created through the two terms of shear at latitudes below 40° . Notice that the non-axisymmetric velocity and magnetic field (panels f, g, and h) contribute equally with the axisymmetric terms to produce some magnetic field in the penetration layer (between the two horizontal lines). Diffusion generally tends to oppose the mean shear contribution P_{MS} at all latitudes at the base of the convection zone, but does not act much in comparison with the other contributions in panels e and h. The mean advection opposes the creation of negative $\langle B_\varphi \rangle$ above latitude 40° , which explains why the significant creation of coherent mean azimuthal magnetic field is localized at lower latitudes.

To summarize, we showed that the magnetic field evolution through the tachocline is caused by a complex interplay between shear and advection mechanisms. The diffusive process does not dictate the evolution of the magnetic field at the base of the convection zone, neither at the equator nor in the polar regions.

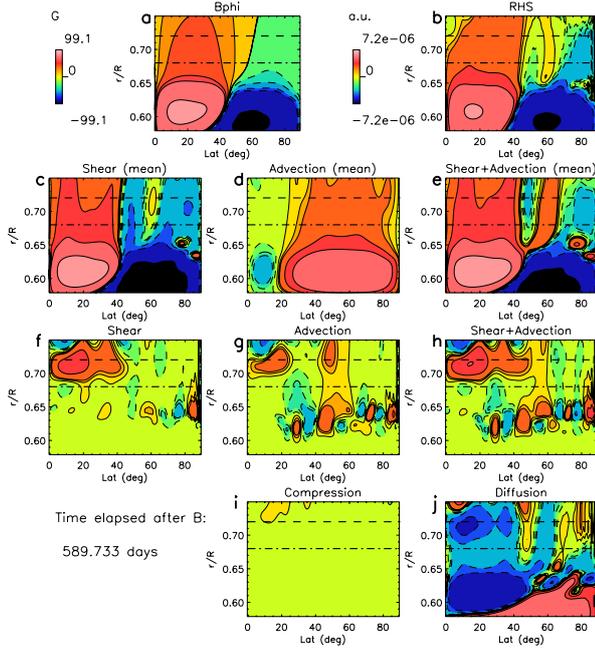


Fig. 16. Major terms of production of $\langle B_\varphi \rangle$ in the tachocline. The various contributions are taken at the same time as Fig. 13, but using expressions corresponding to $\langle B_\varphi \rangle$.

Magnetic pumping is present, but inefficient. As a result, the magnetic field penetrates into the convection zone and does not remain confined. We stress here that the nonlinear term involving Maxwell and Reynolds stresses is a key and fundamental feature of our 3D simulation.

4. Balances in the tachocline

In order to understand the global rotation profile realized in our simulation (see Sect. 3), we study the MHD meridional force balance and the angular momentum transport equation in the following subsections. Even if the magnetic field does not modify the meridional force balance (Sect. 4.1), it is proven to be responsible for the outward transport of angular momentum in the mid- to high-latitude regions (Sect. 4.2).

4.1. MHD meridional force balance

Starting from the vorticity equation (Eq. (13)), one can derive the full meridional force balance in the general magnetic case (e.g., Fearn 1998; Brun 2005).

$$\begin{aligned} \partial_t \boldsymbol{\omega} = & -\nabla \times (\boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{v}) + \frac{1}{\rho^2} \nabla \bar{\rho} \times \nabla P - \nabla \times \left(\frac{\rho g}{\bar{\rho}} \mathbf{e}_r \right) \\ & + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{1}{\bar{\rho}} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right) - \nabla \times \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \mathcal{D} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

with $\boldsymbol{\omega}_a = \nabla \times \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega}_0$ the absolute vorticity and $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ the vorticity in the rotating frame. In a statistically stationary state, Eq. (13) can be rewritten by taking the temporal and azimuthal

averages of the longitudinal component:

$$\begin{aligned} 2\Omega_0 \frac{\partial \langle v_\varphi \rangle}{\partial z} = & - \underbrace{\left\langle (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) v_\varphi + \frac{\omega_\varphi v_r}{r} + \frac{\omega_\varphi v_\theta \cot \theta}{r} \right\rangle}_{\text{stretching}} \\ & + \underbrace{\left\langle (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega_\varphi + \frac{v_\varphi \omega_r}{r} + \frac{v_\varphi \omega_\theta \cot \theta}{r} \right\rangle}_{\text{advection}} \\ & + \underbrace{-\langle \omega_\varphi v_r \rangle \frac{d \ln \bar{\rho}}{dr}}_{\text{compressibility}} + \underbrace{\frac{g}{rc_p} \frac{\partial \langle S \rangle}{\partial \theta} + \frac{1}{r \bar{\rho} c_p} \frac{d \bar{S}}{dr} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \theta}}_{\text{baroclinicity due to latitudinal entropy and pressure gradients}} \\ & + \underbrace{\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \langle \mathcal{A}_\theta \rangle) - \frac{\partial}{\partial \theta} \langle \mathcal{A}_r \rangle \right]}_{\text{viscous stresses}} \\ & + \underbrace{\left\langle -\frac{1}{c \bar{\rho}} (\mathbf{B} \cdot \nabla) j_\varphi - \frac{j_r B_\varphi}{c \bar{\rho} r} - \frac{j_\theta B_\varphi \cot \theta}{c \bar{\rho} r} \right\rangle}_{\text{magnetic torque 1}} \\ & + \underbrace{\left\langle \frac{1}{c \bar{\rho}} (j \cdot \nabla) B_\varphi + \frac{B_r j_\varphi}{c \bar{\rho} r} + \frac{B_\theta j_\varphi \cot \theta}{c \bar{\rho} r} \right\rangle}_{\text{magnetic torque 2}} \\ & + \underbrace{\left\langle \frac{B_r j_\varphi}{c \bar{\rho}} \frac{d \ln \bar{\rho}}{dr} - \frac{B_\varphi j_r}{c \bar{\rho}} \frac{d \ln \bar{\rho}}{dr} \right\rangle}_{\text{compressibility 2}} \end{aligned} \quad (14)$$

where $\frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$ and

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_r = & \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \mathcal{D}_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta \mathcal{D}_{\theta r})}{\partial \theta} - \frac{\mathcal{D}_{\theta\theta} + \mathcal{D}_{\phi\phi}}{r} \right] \\ \mathcal{A}_\theta = & \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \mathcal{D}_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta \mathcal{D}_{\theta\theta})}{\partial \theta} \right] \\ & + \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\frac{\mathcal{D}_{\theta r} - \cot \theta \mathcal{D}_{\phi\phi}}{r} \right]. \end{aligned}$$

In Eq. (14) we underlined different terms:

- *stretching* represents the stretching of the vorticity by velocity gradients;
- *advection* represents the advection of the vorticity by the flow;
- *compressibility* represents the flow compressibility reaction on the vorticity;
- $\frac{g}{rc_p} \frac{\partial \langle S \rangle}{\partial \theta}$ is the baroclinic term, characteristic of non-aligned density and pressure gradients;
- $\frac{1}{r \bar{\rho} c_p} \frac{d \bar{S}}{dr} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \theta}$ is part of the baroclinic term but arises from departures from adiabatic stratification;
- *viscous stresses* represent the diffusion of vorticity caused by viscous effects;
- *magnetic torques 1 and 2* represent the “shear” and “transport” of the magnetic field by the current;
- *compressibility 2* represents the component of the curl of the magnetic torque owing to compressibility of the flow.

The meridional force balance Eq. (14) helps understanding which physical effects are responsible for breaking the Taylor-Proudman constraint of cylindrical differential rotation in the

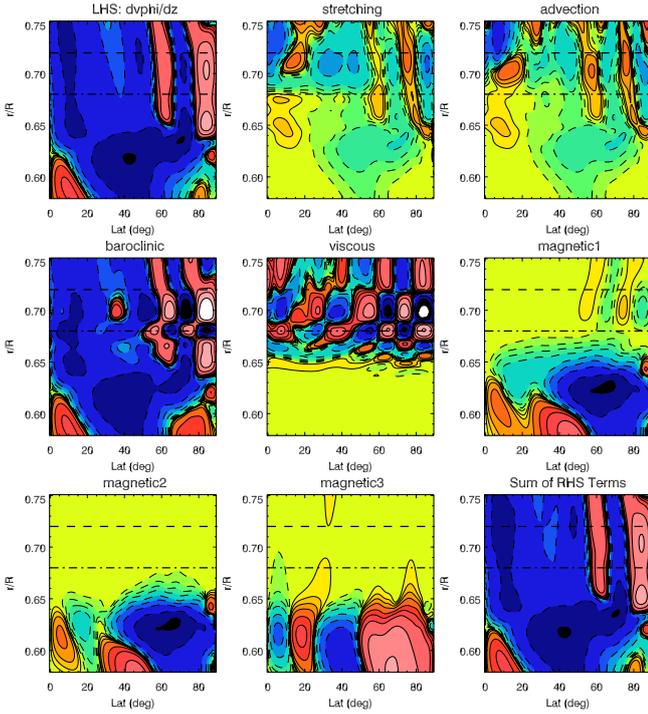


Fig. 17. Zoom around the tachocline of the different terms discussed in Eq. (14), averaged over longitude and two solar rotation periods during the late evolution of the model. Magnetic terms were increased by a factor 500 to make their structure more evident.

convection zone (achieved for example with baroclinic flows, see Miesch et al. 2006; Balbus et al. 2009; Brun et al. 2010). Indeed, considering a small Rossby number and neglecting stratification, Reynolds, Maxwell, and viscous stresses, Eq. (14) reduces to

$$\frac{\partial \langle v_\varphi \rangle}{\partial z} = \frac{g}{2\Omega_0 r c_p} \frac{\partial \langle S \rangle}{\partial \theta}, \quad (15)$$

which is the original thermal wind equation (e.g., Pedlosky 1987; Durney 1999). The baroclinic term induces motions that break the cylindrical rotation profile. In the model of Wood & McIntyre (2011), this balance is considered in the polar regions. Compositional gradients and magnetic effects are added to Eq. (15). This balance is of primary importance in their magnetic confinement layer scaling. We therefore present below the full meridional force balance of our model to evaluate the role played by all mechanisms in the tachocline, except compositional effects.

Figure 17 displays the main contributing terms from Eq. (14) in our simulation. The magnetic terms were increased (by a factor of 500) to make them more visible. Surprisingly, they are too low to contribute to the meridional force balance, as such there is no “magnetic wind” (see Fearn 1998). As already noticed in Brun et al. (2011), the baroclinic term dominates the balance, especially under $0.65 R_\odot$, i.e., below the penetration. At the base of the convection zone ($0.72 R_\odot$), all terms play a significant role. Stretching, advection, and viscous stresses compete against each other at low latitude, letting the baroclinic term dominate again. Near the pole, the balance is more complex, and viscous stresses (helped a little by stretching and advection) counteract the positive/negative pattern of the baroclinic term. The strict thermal wind balance expressed in Eq. (15) is thus not observed in the polar region. The magnetic terms are located in the magnetic layer where B_φ is generated (see Sect. 3), and are negligible.

Indeed, our magnetic field is far from being force-free, and the Lorentz force is non-zero in the three components of the momentum equation. The poloidal velocity is mainly driven by advection of convective motions and by baroclinic terms in the radiation zone. As a result, the poloidal magnetic field does not act much on the poloidal velocity. Note that this does not imply the opposite. We indeed observed (see Sect. 3.2) that the poloidal magnetic field evolution is dominated by advection and shear from convective motions. We did not recover the balance from Wood & McIntyre (2011), although we already have a sufficiently strong magnetic field to transport angular momentum, as seen in Sect. 4.2. Gyroscopic pumping is not operating efficiently near the polar region. There is a small downwelling, but it is not strong enough to modify the local dynamics (see Brun et al. 2011 for more details).

4.2. Angular momentum balance

Identifying processes that redistribute angular momentum in the bulk of the tachocline gives us clues to understand how this layer evolves. Because we choose stress-free and torque free magnetic boundary conditions, no external torque is applied to the system. As a consequence, the angular momentum is conserved. Following previous studies (e.g., Brun et al. 2004), we examine the contribution of different terms in the balance of angular momentum. Averaging the φ component of the momentum Eq. (4) over φ and multiplying it by $r \sin \theta$, we obtain the following equation for the specific angular momentum $\mathcal{L} \equiv r \sin \theta (\Omega_0 r \sin \theta + \langle v_\varphi \rangle)$:

$$\partial_t (\bar{\rho} \mathcal{L}) = -\nabla \cdot \left(\underbrace{\mathbf{F}^{\text{MC}} + \mathbf{F}^{\text{RS}} + \mathbf{F}^{\text{VD}}}_{\text{hydro}} + \underbrace{\mathbf{F}^{\text{MT}} + \mathbf{F}^{\text{MS}}}_{\text{MHD}} \right), \quad (16)$$

where the different terms correspond to contributions from meridional circulation, reynolds stress, viscous diffusion, maxwell torque and maxwell stress. They are defined by

$$\mathbf{F}^{\text{MC}} \equiv \bar{\rho} \langle v_M \rangle \mathcal{L} \quad (17)$$

$$\mathbf{F}^{\text{RS}} \equiv r \sin \theta \bar{\rho} \left(\langle v'_r v'_\varphi \rangle \mathbf{e}_r + \langle v'_\theta v'_\varphi \rangle \mathbf{e}_\theta \right) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{VD}} \equiv & -v \bar{\rho} r^2 \sin \theta \left\{ \partial_r \left(\frac{\langle v_\varphi \rangle}{r} \right) \mathbf{e}_r \right. \\ & \left. + \frac{\sin \theta}{r^2} \partial_\theta \left(\frac{\langle v_\varphi \rangle}{\sin \theta} \right) \mathbf{e}_\theta \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathbf{F}^{\text{MT}} \equiv -\frac{r \sin \theta}{4\pi} \langle B_\varphi \rangle \langle \mathbf{B}_M \rangle \quad (20)$$

$$\mathbf{F}^{\text{MS}} \equiv -\frac{r \sin \theta}{4\pi} \left(\langle B'_r B'_\varphi \rangle \mathbf{e}_r + \langle B'_\theta B'_\varphi \rangle \mathbf{e}_\theta \right), \quad (21)$$

where the subscript \cdot_M designates the meridional component of \mathbf{v} and \mathbf{B} . In the previous equations, we decomposed the velocity and the magnetic field into an azimuthally averaged part $\langle \cdot \rangle$ and φ -dependent part (with a prime). The different contributions can be separated between radial (\mathcal{F}_r along \mathbf{e}_r) and latitudinal (\mathcal{F}_θ along \mathbf{e}_θ) contributions. We then compute a radial flux of angular momentum defined by

$$I_r(r) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathcal{F}_r(r, \theta) r^2 \sin \theta \, d\theta, \quad (22)$$

where (θ_1, θ_2) maybe chosen to study a particular region of our simulation.

As emphasized in Sect. 3.1, magnetic field lines seem to be advected and diffused first outward and then poleward. In

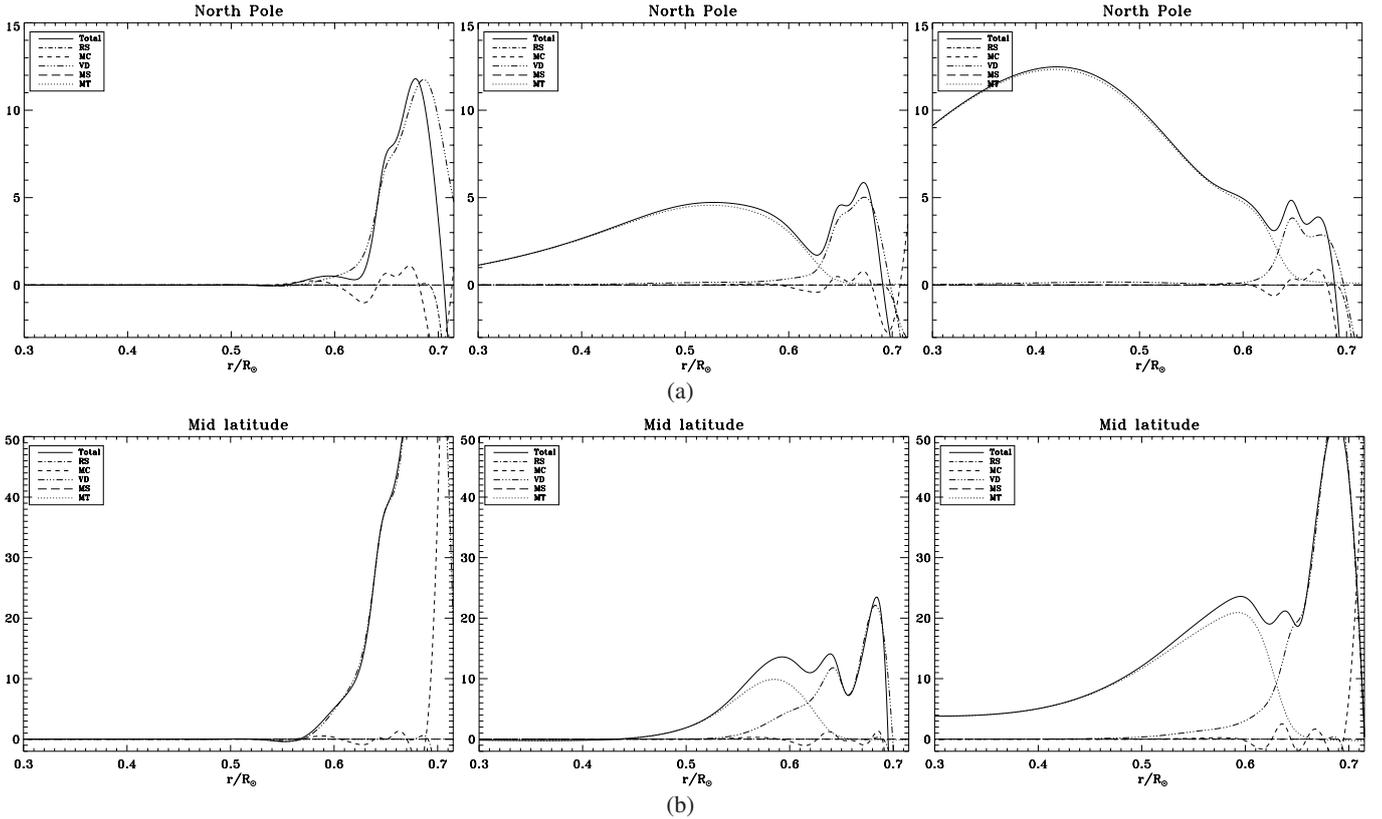


Fig. 18. Angular momentum redistribution in the radiative zone and the tachocline region. Panels **a)** are summed over $\theta_1 = 60$ and $\theta_2 = 90$ (north pole), and panels **b)** are summed over $\theta_1 = 30$ and $\theta_2 = 60$ (mid latitudes). The different fluxes are averaged approximately over six rotation periods. From left to right, the three plots correspond to the instants used to make Figs. 6a, c and d. Our magnetic field does not initially change the angular momentum balance.

Fig. 18 we plot the different components of the radial angular momentum flux in the radiative zone and the tachocline at different times, summed over the polar region and at mid latitudes. Initially, the magnetic field is axisymmetric so Maxwell stresses do not contribute to the angular momentum balance. Because we chose a purely meridional magnetic field, there is no large-scale Maxwell torque. The radial angular momentum flux is then essentially carried by the meridional circulation in the radiative zone and is very weak (few percents of its value in the convective zone). Note, however, that internal waves are present in our simulation and may contribute to the transport of angular momentum (see Brun et al. 2011 for more details). In the tachocline, meridional circulation, Reynolds stress and viscous diffusion transport the angular momentum.

While the magnetic field more and more pervades the domain, a magnetic torque develops in the magnetic layer (along with B_ϕ generation, see Figs. 5–6) at the top of the radiative zone both at high and mid latitudes. Angular momentum is then extracted by the Maxwell torque from the radiative zone (that locally rotates faster) into the tachocline (that locally rotates slower), slowing down the radiative interior. This torque tends to align the Ω contours with the poloidal magnetic field lines, thus bringing the system closer and closer to a state known as Ferraro’s law of isorotation. We remark in addition that the Maxwell torque operates initially in a wider part of the radiative zone in the polar region than at mid latitudes. Because the magnetic field primarily connects at the poles, it is natural that the transport of angular momentum by the magnetic field starts earlier in this region. One may also observe that this transport is

more intense at mid-latitude, acknowledging that the magnetic field lines involve a magnetic field with much higher strength there. We stress again that the angular momentum is conserved in our simulation, meaning that the angular momentum lost in the radiative zone is redistributed in the convective zone.

We also observe that the magnetic torque applies essentially in the radiation zone and becomes negligible at the base of the convection zone. Because we are not yet in iso-rotation (see Fig. 5d), this may only be interpreted by the fact that B_ϕ is weak in this region.

Because the first magnetic field lines that transport angular momentum are localized at mid- and high-latitudes, we observe here only a slow-down of the radiative interior. If we had continued this simulation, magnetic field lines would have connected the radiative zone to the convection zone near the equator. This would imply a speed-up of the radiative interior, consistent with the results from Brun & Zahn (2006). However, we do not show this later evolution because it does not add any useful information.

Viscosity seems to act substantially in the bulk of the tachocline, augmenting the angular momentum transport locally. This viscous transport is caused by the radial shear and the relatively high viscosity value used to meet numerical requirements. As a result, diffusive processes are over-evaluated in our simulation. Angular momentum transport like this would not contribute in the Sun, given the low viscosity of the solar plasma. In our case, both thermal and viscous diffusion processes are acting in our simulation thanks to our choice of Prandtl number (10^{-3}) in the radiative zone. However, BZ06 showed that the simulated

viscous spreading of the tachocline does not make much qualitative difference with the thermal spreading introduced by Spiegel & Zahn (1992).

The typical viscous diffusive time scale in our simulation is given by $\tau_v = R^2/\nu \sim 2.2 \times 10^{10}$ s at the top of the radiative zone. As the magnetic field grows, the Alfvén time $\tau_A = R \sqrt{4\pi\rho}/B$ diminishes alike and magnetic effects become more important than diffusion. The angular momentum balance analysis emphasizes two phases in our simulation: a diffusive transport of angular momentum and the action of large-scale Maxwell torque. This confirms that our magnetic field does not prevent the spread of the tachocline, but on the contrary transports angular momentum outwards and speeds the process up.

5. Discussion and conclusion

The existence of a magnetic field in the solar radiation zone has been the subject of a longstanding debate. Such a field, for example of fossil origin, could easily account for the uniform rotation of the radiative interior. It could also prevent the inward spread of the tachocline through thermal diffusion, as was proposed by Gough & McIntyre (1998). However, it has been argued that such a field would diffuse into the convection zone and imprint the latitude-dependent rotation of that region on the radiation zone below (which is not observed by helioseismology inversions).

This objection has indeed been confirmed by the calculations of Garaud (2002) and Brun & Zahn (2006). However, their simulations treated the top of the radiation zone as a non-penetrative boundary, which does not allow for a meridional flow that would originate in the convection zone and could oppose the diffusion of the magnetic field.

This restriction was lifted in the 2D simulations performed by Sule et al. (2005), Rudiger & Kitchatinov (2007), and Garaud & Garaud (2008), who showed that this meridional circulation could indeed prevent the magnetic field from diffusing into the convection zone. Very recent work in 2D (Rogers 2011) has studied the role of a fossil magnetic field in a simulation coupling a radiative and a convective zone. It confirms our result that the field is not confined at the base of the convection zone. However, the author does not find any magnetic transport of angular momentum, possibly because of a force-free state for the magnetic field. These 2D simulations assumed large-scale axisymmetric flows, unlike the three-dimensional motions of the real convection zone. For this reason we decided to treat the problem using a 3D code, with the best possible representation of the turbulent convective motions.

We showed by considering time-dependent 3D motions that the interior magnetic field does not stay confined in the radiative interior, but expands into the convection zone. Non-axisymmetric convective motions interact much differently with a dipolar-type magnetic field, as would a monolithic, single cell large-scale meridional circulation.

That our magnetic field is able to expand from the radiative interior into the convection zone results in an efficient outward transport of angular momentum through the tachocline, imposing Ferraro's law of iso-rotation. It is likely a direct consequence of the non force-free configuration of our magnetic field that yields this efficient transport through the large-scale magnetic torque.

We are aware that our simulations are far from representing the real Sun, because of the enhanced diffusivities we had to use to meet numerical requirements. The overshooting convective

motions are overestimated owing to our enhanced thermal diffusivity κ . The high solar Peclet number (lower κ) regime would make the flow amplitude drop even faster at the base of the convection zone, which would result in an even weaker meridional circulation velocity. This would not help the confinement of the magnetic field.

Although our enhanced magnetic diffusivity is quite large, we demonstrated (see Sect. 3) that our choice of parameters ensured that we are in the correct regime for magnetic field confinement, with advection dominating diffusion. Nevertheless, more efforts will be made in future work to increase the spatial resolution and to improve the subgrid-scales representation.

The initial magnetic topology may also be questioned. The gradient of our primordial dipolar field possesses a maximum at the equator. Because the field is initialized in the radiation zone where its evolution is diffusive, the magnetic field initially evolves faster at its maximum gradient location, i.e., at the equator. As a result, it first encounters the complex motions coming from the convection zone at the equator. Other simulations conducted with a modified topology to change the location of the maximum gradient (and thus the latitude where the magnetic field primarily enters the tachocline) led to similar results as those reported here.

Given the extension of our tachocline, the differential rotation is already initially present below the base of the convection zone before we introduce the magnetic field. A confined magnetic field would naturally erode this angular velocity gradient, though we do not know much about the real initial conditions. In our simulation the magnetic field opens into the convection zone, consequently there is no chance to obtain a solid rotator in the radiative zone because there is no confinement. In fact, our magnetic field lines primarily open at the equator. We point out that this is a major difficulty with the GM98 scenario: even if magnetic pumping can be a way to slow down the penetration of the magnetic field into the convective zone, it will not prevent it from connecting the two zones, and/or prevent the magnetic field lines from opening there. Furthermore, the meridional circulation is not a laminar uni-cellular flow in our 3D simulation. It has a complex instantaneous multicellular pattern, which affects the efficiency of a polar confinement.

We therefore conclude that a dipolar axisymmetric fossil magnetic field cannot prevent the spread of the solar tachocline. We intend to explore other mechanisms and different magnetic field topologies. Our 3D model will allow us to test non-axisymmetric configurations, e.g., an oblique and confined dipole.

Acknowledgements. The authors thank Nick Brummell, Gary Glatzmaier, Michael McIntyre and Toby Wood for helpful discussions. We are also grateful to Sean Matt for a careful reading of our manuscript. The authors acknowledge funding by the European Research Council through ERC grant STARS2 207430 (www.stars2.eu). 3D renderings in Figs. 7 and 8 were made with SDvision (see Pomaredé & Brun 2010).

References

- Balbus, S. A., Bonart, J., Latter, H. N., & Weiss, N. O. 2009, MNRAS, 400, 176
- Barnes, G., Charbonneau, P., & MacGregor, K. B. 1999, ApJ, 511, 466
- Braithwaite, J., & Spruit, H. C. 2004, Nature, 431, 819
- Brown, B. P., Browning, M. K., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2010, ApJS, 711, 424
- Brown, T. M., Christensen-Dalsgaard, J., Dziembowski, W. A., et al. 1989, ApJS, 343, 526
- Brun, A. S. 2005, Habilitation in Physics (University of Denis-Diderot – Paris VII)
- Brun, A. S. 2007, Astron. Nachr., 328, 1137
- Brun, A. S., & Toomre, J. 2002, ApJ, 570, 865

- Brun, A. S., & Zahn, J.-P. 2006, *A&A*, 457, 665
- Brun, A. S., Antia, H. M., Chitre, S. M., & Zahn, J.-P. 2002, *A&A*, 391, 725
- Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2004, *ApJS*, 614, 1073
- Brun, A. S., Antia, H. M., & Chitre, S. M. 2010, *A&A*, 510, A33
- Brun, A. S., Miesch, M., & Toomre, J. 2011, *ApJ*, accepted
- Cattaneo, F., Emonet, T., & Weiss, N. 2003, *ApJ*, 588, 1183
- Charbonneau, P., Christensen-Dalsgaard, J., Henning, R., et al. 1999, *ApJS*, 527, 445
- Clune, T. L., Elliott, J. R., Miesch, M. S., Toomre, J., & Glatzmaier, G. A. 1999, *Parallel Computing*, 25, 361
- Dritschel, D. G., & McIntyre, M. E. 2008, *J. Atmospheric Sci.*, 65, 855
- Duez, V., & Mathis, S. 2010, *A&A*, 517, A58
- Durney, B. R. 1999, *ApJ*, 511, 945
- Elliott, J. R. 1997, *A&A*, 327, 1222
- Fearn, D. R. 1998, *Rep. Progress Phys.*, 61, 175
- Ferraro, V. C. A. 1937, *MNRAS*, 97, 458
- Garaud, P. 2002, *MNRAS*, 329, 1
- Garaud, P., & Garaud, J.-D. 2008, *MNRAS*, 391, 1239
- Gough, D. O., & McIntyre, M. E. 1998, *Nature*, 394, 755
- Kim, E.-J. 2005, *A&A*, 441, 763
- Kim, E.-J., & Leprovost, N. 2007, *A&A*, 468, 1025
- Leprovost, N., & Kim, E.-J. 2006, *A&A*, 456, 617
- Miesch, M. S. 2003, *ApJ*, 586, 663
- Miesch, M. S., Elliott, J. R., Toomre, J., et al. 2000, *ApJS*, 532, 593
- Miesch, M. S., Brun, A. S., & Toomre, J. 2006, *ApJ*, 641, 618
- Moffatt, H. K. 1978 (Cambridge University Press)
- Morel, P. 1997, *A&ASS*, 124, 597
- Pedlosky, J. 1987, *J. Phys. Oc.*, 17, 1978
- Pomaredé, D., & Brun, A. 2010, *Astronomical Data Analysis Software and Systems XIX. Proceedings of a conference held October 4–8*, 434, 378
- Rogers, T. M. 2011, *ApJ*, accepted
- Rudiger, G., & Kitchatinov, L. L. 1997, *Astro. Nach.*, 318, 273
- Rudiger, G., & Kitchatinov, L. L. 2007, *NJP*, 9, 302
- Schou, J., Antia, H. M., Basu, S., et al. 1998, *ApJ*, 505, 390
- Spiegel, E. A., & Zahn, J.-P. 1992, *A&A*, 265, 106
- Starr, V. 1968, *Physics of negative viscosity phenomena* (McGraw-Hill)
- Sule, A., Rudiger, G., & Arlt, R. 2005, *A&A*, 437, 1061
- Tayler, R. J. 1973, *MNRAS*, 161, 365
- Thompson, M. J., Christensen-Dalsgaard, J., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2003, *ARA&A*, 41, 599
- Tobias, S. M., Brummell, N. H., Clune, T. L., & Toomre, J. 2001, *ApJ*, 549, 1183
- Weiss, N. O., Thomas, J. H., Brummell, N. H., & Tobias, S. M. 2004, *ApJ*, 600, 1073
- Wood, T. S., & McIntyre, M. E. 2007, *Unsolved Problems in Stellar Physics: A Conference in Honor of Douglas Gough*. *AIP Conf. Proc.*, 948, 303
- Wood, T. S., & McIntyre, M. E. 2011, *JFM*, accepted
- Zahn, J.-P. 1991, *A&A*, 252, 179
- Zahn, J.-P., Brun, A. S., & Mathis, S. 2007, *A&A*, 474, 145
- Zanni, C., & Ferreira, J. 2009, *A&A*, 508, 1117

Magnetic confinement of the solar tachocline: The oblique dipole

A. Strugarek^{1,*}, A. S. Brun¹, and J.-P. Zahn^{2,1}

¹ Laboratoire AIM Paris-Saclay, CEA/Irfu Université Paris-Diderot CNRS/INSU, 91191 Gif-sur-Yvette, France

² LUTH, Observatoire de Paris, CNRS-Université Paris Diderot, Place Jules Janssen, 92195 Meudon, France

Received 2011 Oct 4, accepted 2011 Oct 27

Published online 2011 Dec 12

Key words convection – magnetohydrodynamics (MHD) – Sun: interior – Sun: magnetic fields – Sun: rotation

3D MHD global solar simulations coupling the turbulent convective zone and the radiative zone have been carried out. Essential features of the Sun such as differential rotation, meridional circulation and internal waves excitation are recovered. These realistic models are used to test the possibility of having the solar tachocline confined by a primordial inner magnetic field. We find that the initially confined magnetic fields we consider open into the convective envelope. Angular momentum is transported across the two zones by magnetic torques and stresses, establishing the so-called Ferraro's law of isorotation. In the parameter space studied, the confinement of the magnetic field by meridional circulation penetration fails, also implying the failure of the tachocline confinement by the magnetic field. Three-dimensional convective motions are proven responsible for the lack of magnetic field confinement. Those results are robust for the different magnetic field topologies considered, i.e. aligned or oblique dipole.

© 2011 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

1 Introduction

Since its discovery (Brown et al. 1989), the solar tachocline has puzzled the scientific community. In particular, a clear explanation for its extreme thinness (less than 5% of the solar radius R_{\odot} , see Charbonneau et al. 1999) is still lacking. The first theoretical work dedicated to the tachocline was carried out by Spiegel & Zahn (1992). They considered an hydrodynamic tachocline and showed that such an interface layer will spread into the radiative interior because of thermal diffusion. As a result, they estimated that the differential rotation should extend down to $0.3 R_{\odot}$ after 4.5 Gyr, which is in total contradiction with the helioseismic inversions (Schou et al. 1998; Thompson et al. 2003). Consequently, additional physical mechanisms have to be considered in order to properly explain the observed thinness of the tachocline.

Spiegel & Zahn (1992) suggested that the stratification in the tachocline would imply an anisotropy in the turbulence, making it predominantly horizontal. It would then erode the latitudinal gradient of angular-velocity (Elliott 1997). However, Gough & McIntyre (1998) pointed out that such anisotropic turbulence would on the contrary act as an anti-diffusion (Dritschel & McIntyre 2008). In fact, the question is still hardly settled when both radial and latitudinal shears of angular-velocity are taken into account (Kim 2005; Kim & Leprovost 2007; Leprovost & Kim 2006; Miesch 2003). Further, Tobias et al. (2007) showed that the introduction of (even weak) magnetic fields in the bulk of the tachocline would erase both the diffusive and anti-diffusive behaviors of 2D turbulence.

Gough & McIntyre (1998) then proposed that a (fossil) dipolar magnetic field confined in the solar interior could oppose the thermal spreading of the tachocline. This solution offered also an explanation for the solid body rotation of the solar radiation zone and such a fossil field was also invoked by Rüdiger & Kitchatinov (1997) to confine the tachocline.

The fossil field confinement scenario is in fact a double confinement problem. First, the imposed magnetic field erodes latitudinal gradients of angular-velocity, thus confining the tachocline. Second, the magnetic field has to remain confined in the radiation zone against its outward ohmic diffusion. In order to confine the magnetic field, it was first argued that a meridional flow coming from the convection zone down to the radiative interior through the tachocline at the high latitudes could eventually prevent the field from diffusing outward in this region (Gough & McIntyre 1998). At the equator, Wood & McIntyre (2011) suggested that if the magnetic field were to connect to the convection zone, the magnetic pumping (Dorch & Nordlund 2001; Tobias et al. 2001; Ziegler & Rüdiger 2003) would 'confine' it below the region of intense shear.

Despite the appeal of this scenario, none of the many numerical simulations that have been carried out in the past succeeded in recovering it completely. The first simulations of the radiation zone in 2D (Garaud 2002) and in 3D Brun & Zahn (2006) showed that if the confinement of the magnetic field fails, angular momentum is transported along the field lines into the radiation zone, making the radiative interior rotate differentially. The Ferraro's law of iso-rotation is then established (Ferraro 1937), in complete contradiction with solar observations. However these models did not al-

* Corresponding author: antoine.strugarek@cea.fr

low for flows penetrating from the convection zone, such as plumes or meridional circulation. In their simulations, Sule et al. (2005), Rüdiger & Kitchatinov (2007), and Garaud & Garaud (2008) imposed a meridional circulation at the top of the radiation zone. They recovered partially the Gough & McIntyre (1998) scenario, but one may object that those results are highly sensitive to the prescribed (profiles and amplitude) meridional circulation.

Simulations coupling self-consistently the two zones of the Sun were then carried out by Rogers (2011) in 2D and by Strugarek et al. (2011, hereafter SBZ11) in 3D in order to take into account the motions of the convection zone. Both studies were not able to validate the magnetic confinement scenario. Finally, Wood et al. (2011) conducted an analytical study in a reduced cartesian model and proposed an improved theory for a magnetic confinement scenario *à la* Gough & McIntyre (1998).

We are interested here in the fact that SBZ11 showed that the convective motions were responsible for the lack of confinement of the buried magnetic field, and that in most of the works previously cited, the magnetic field enters the convection zone primarily at the equator. Since different magnetic topologies may lead to significantly different interactions with the convective motions, the universality of the results obtained with our axisymmetric dipolar field can be questioned. We thus conduct here numerical simulations based on the SBZ11 model to investigate the role of the magnetic field topology. In Sect. 2 we summarize the main ingredients of the model used by SBZ11, and in Sect. 3 we study the impact of the magnetic topology on the confinement of the field. Conclusions and perspectives are reported in Sect. 4.

2 Modeling the convection and the radiation zones

Following Brun et al. (2011), SBZ11, we use the ASH code (Brun et al. 2004) to model 90% of the solar interior in 3D using the non-linear MHD equations under the anelastic approximation. A LES (large eddy simulation) approach is used to parametrize turbulent diffusivity profiles; the detailed equations can be found in SBZ11.

Our initial hydrodynamical setup is exactly the same than the one used in SBZ11. We recall here the principal features of the model. We use the solar rotation rate $\Omega_0 = 2.6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, the solar mass $M_\odot = 2.0 \times 10^{33} \text{ g}$ and the solar luminosity $L_\odot = 3.8 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$. The background thermodynamic quantities were computed with the CESAM code (Morel 1997), hence we use the solar stratification and obtain a realistic Brunt-Väisälä frequency N in the radiation zone. The radial gradient of entropy is negative above $r_{\text{bcz}} = 0.715 R_\odot$, it defines the convection zone since the Rayleigh number ($\sim 10^5$) in this region is well above the critical Rayleigh number for the onset of the convective instability (Gilman & Glatzmaier 1981). We display in Fig. 1 the radial energy flux balance normalized to L_\odot . The energy

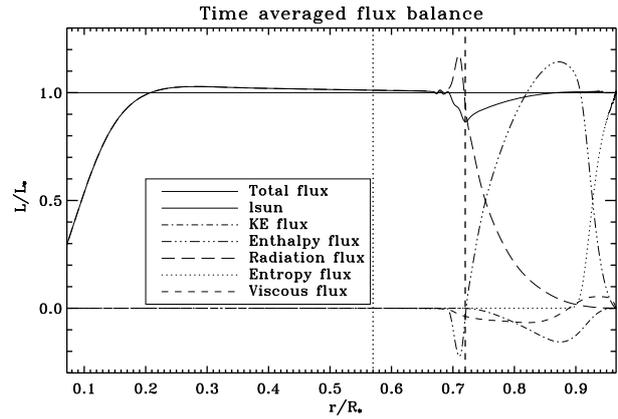


Fig. 1 Radial energy flux balance normalized to the luminosity of the Sun. The dashed vertical line at $r = r_{\text{bcz}}/R_\odot$ denotes the base of the convection zone, the dotted vertical line at $r = R_b/R_\odot$ denotes the bounding radius of the initial magnetic field (see Eq. 2).

is carried by the radiative flux in the radiation zone (below r_{bcz} , the black dashed line), and the enthalpy flux transports the major part of the energy in the convection zone (above r_{bcz}).

The convective motions exhibit banana-like shapes at the equator (Brun & Toomre 2002), and more patchy patterns at higher latitudes. Angular momentum is transported mainly by convective Reynolds stresses in the bulk of the convection zone, establishing a differential rotation similar to the solar differential rotation (see for example the color contours in Fig. 2). A tachocline develops, and the angular velocity shear extends down to $r = 0.58 R_\odot$. The meridional circulation which is self-consistently excited in the convection zone is roughly unicellular in each hemisphere (when time-averaged), with downflows near the poles and upflows at the equator. We stress here that those mean flows are self-consistently induced by the interaction between the convective motions, the rotation, and the baroclinicity induced by latitudinal gradients of entropy. Thus, they are not artificially imposed by parameters, by boundary conditions or prescribed profiles.

The convective overshooting depth is $d_{\text{ov}} = 0.04 R_\odot$ (see the enthalpy flux in Fig. 1) and is known to scale as the square root of the filling factor of downflow plumes (Zahn 1991). Consequently, it is certainly overestimated in this model. The mean meridional circulation penetrates by $d_{\text{MC}} = 0.035 R_\odot$ below the base of the convection zone r_{bcz} . Even if our model is not completely in the solar parameter regime due to our enhanced diffusivities (see SBZ11), we observe a penetration of both the meridional circulation and the convection below r_{bcz} . We are thus confident that our model captures the key physical ingredients of the upper tachocline. Finally, we observe also that the convective overshooting plumes excite gravity waves in the radiation zone (Brun et al. 2011).

Since we used enhanced viscosity ν , thermal diffusivity κ and magnetic diffusivity η , the time-scales involved in the

simulation differ from what is occurring in the real Sun. Still we took great care to maintain the proper hierarchy between the time-scales, though they are somewhat closer to each other than what they are in reality. The Ohmic time-scale $\tau_\eta = R_\odot^2/\eta$ is $\tau_\eta^{CZ} = 9.60$ years in the convection zone, and $\tau_\eta^{RZ} = 192$ years in the radiation zone. By comparison, the convective turnover time is $\tau_{\text{conv}} = 28$ days. We refer the reader to SBZ11 for further details on the simulations.

3 Influence of the magnetic topology

3.1 On the axisymmetric dipole topology

The expression of the magnetic field used in SBZ11 is given by $\mathbf{B} = B_0 (B_r \mathbf{e}_r + B_\theta \mathbf{e}_\theta)$, with

$$B_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta \Psi, \quad B_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \partial_r \Psi, \quad (1)$$

where $\Psi(r, \theta) = r \sin \theta A_\varphi$ is constant on field lines and is such that

$$\Psi = (r/R)^2 (r - R_b)^2 \sin^2 \theta \quad \text{for } r \leq R_b, \\ = 0 \quad \text{for } r \geq R_b, \quad (2)$$

where $R_b = 0.57 R_\odot$ is the bounding radius of the confined field. One can immediately see that for such a choice of Ψ , the maximum radial gradient of B_θ is located at the equator. Since the behavior of the magnetic field is mainly diffusive in the bulk of the radiation zone, it will evolve more rapidly where its gradients are maximum. As a result, it preferentially interacts with the tachocline (and eventually the convection zone) at the equator.

One may construct modified ‘dipoles’ in order to move the location of maximum gradient with latitude. To do so, we consider a Ψ function defined by

$$\Psi = [\alpha \sin^2 \theta + (1 - \alpha) \sin^2 \theta \cos^{2p} \theta] f(r), \quad (3)$$

where α and p are related to the co-latitude θ_{max} where the gradient of B_θ is maximum, and $f(r)$ controls the radial shape of the dipole. We choose $\theta_{\text{max}} = 10^\circ$ and run the ASH code. We display in Fig. 2 the initial magnetic configuration, and the evolution of the magnetic field at a later instant. We observe that the dipole interacts with the convective motions primarily at latitude 80° , as expected. This confirms the key role played by the field topology in controlling the temporal evolution of the field in the stable radiative interior.

Nevertheless, the end state in this case will be the same than in SBZ11. Even if a longer time is needed for the magnetic field lines to interact with the convective motions at the equator, the modified dipole is still axisymmetric. As a result, its interaction with the convective zone will be similar to the behavior described in SBZ11. Angular momentum will still be transported along the field lines, although slight differences may occur due to the little topological change in the bulk of the radiative zone. This will result again in a differentially rotating radiative zone. In the end, the magnetic scenario for the solar tachocline will again certainly fail in this case.

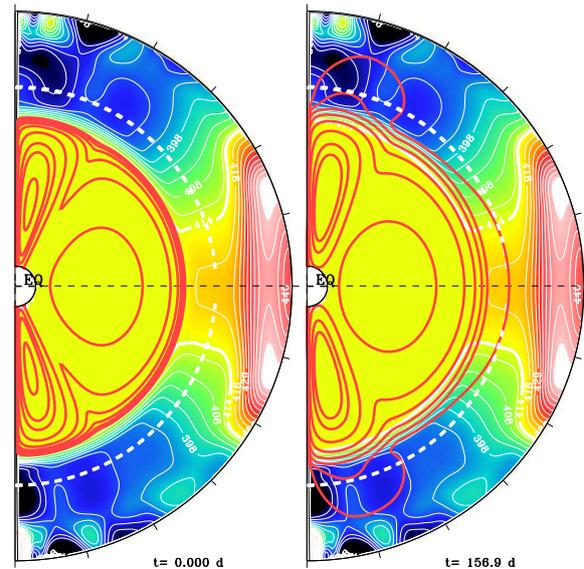


Fig. 2 (online colour at: www.an-journal.org) Azimuthal averages of the angular velocity Ω (color map) and the magnetic field lines (red lines), in the axisymmetric case. The Ω contours have also been temporally averaged.

3.2 Non axisymmetric magnetic topology: the oblique dipole

The oblique magnetic fields in stars have been a long-standing subject of research (Mestel & Takhar 1972; Mestel & Weiss 1987). For example, A-type stars are typically thought to be oblique rotators (Brun et al. 2005). Given that a purely axisymmetric field establishes Ferraro’s law, one may wonder whether an oblique dipole acts similarly. In addition, any confined dipolar magnetic field may explain the solid body rotation of the radiation zone. We consequently test the robustness of the results of SBZ11 by considering a tilted dipole.

We use the ASH formalism and decompose the magnetic field into poloidal and toroidal components,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times (C \mathbf{e}_r) + \nabla \times (A \mathbf{e}_r). \quad (4)$$

The dipole aligned with the rotation axis is then simply written

$$\begin{cases} A = 0 \\ C = f(r) Y_0^1, \end{cases} \quad (5)$$

where Y_l^m stands for the classical spherical harmonics. To tilt the dipole with an angle β with respect to the rotation axis, we simply write

$$\begin{cases} A = 0 \\ C = f(r) \left(\cos \beta Y_0^1 + \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} Y_1^1 \right), \end{cases} \quad (6)$$

where $f(r) = B_0 (r/R_\odot)^2 (r - R_b)^2$ and $R_b = 0.57 R_\odot$ is the bounding radius of the initial magnetic field. We choose $\beta = 60^\circ$ to tilt significantly the dipole. A 3D rendering of the magnetic field lines is displayed in Fig. 3.

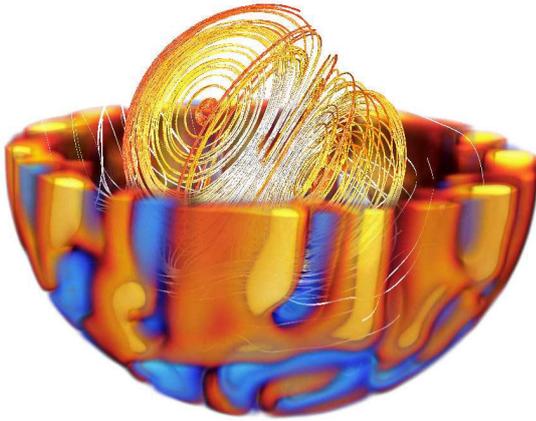


Fig. 3 (online colour at: www.an-journal.org) 3D rendering of magnetic field lines. The volume rendering is the azimuthal velocity in the rotating frame in the south hemisphere, orange denotes positive v_φ and blue negative v_φ .

Although the magnetic topology is clearly different from SBZ11, we observe that if $\beta \neq 90^\circ$, then the initial magnetic field is the sum of an axisymmetric dipole (i.e., similar to SBZ11) and a non-axisymmetric component (see Eq. (6)). This is also made clear by comparing Figs. 4(a) and 4(c) which are taken at the initialization of the magnetic field. The azimuthally averaged field displayed in Fig. 4(a) only retains the axisymmetric component of the tilted dipole, although the real magnetic configuration is oblique (Fig. 4(c)).

Figure 4(b) is taken ~ 70 convective turnover times later. We see that the axisymmetric component of the oblique dipole roughly evolves similarly to the pure axisymmetric dipole of SBZ11. We observe indeed that the initially buried magnetic field does not remain confined and connects the convection zone with the radiative interior. The non axisymmetric field likewise does not remain confined in Fig. 4(d), and its evolution is highly three dimensional. We stress that the field lines plotted in the radiation zone are a fair representation of the field topology, whereas in the tachocline and in the convection zone only the projection into the meridional plane of a 3D magnetic field with non zero azimuthal component is represented.

The magnetic Reynolds number realized in the convection zone is below the threshold for a dynamo to occur ($Rm \sim 100$ vs. 300 in Brun et al. 2004). As a result, the total magnetic energy decreases as the simulation evolves.

The polar slices in Fig. 4 seem to exhibit major changes in the Ω profile at the poles, and we know from SBZ11 that the unconfined axisymmetric magnetic field will apply a torque leading to efficient transport of angular momentum. The evolution of the non-axisymmetric component may also have some effects on the angular momentum balance. Thus we examine the different terms of the angular momentum

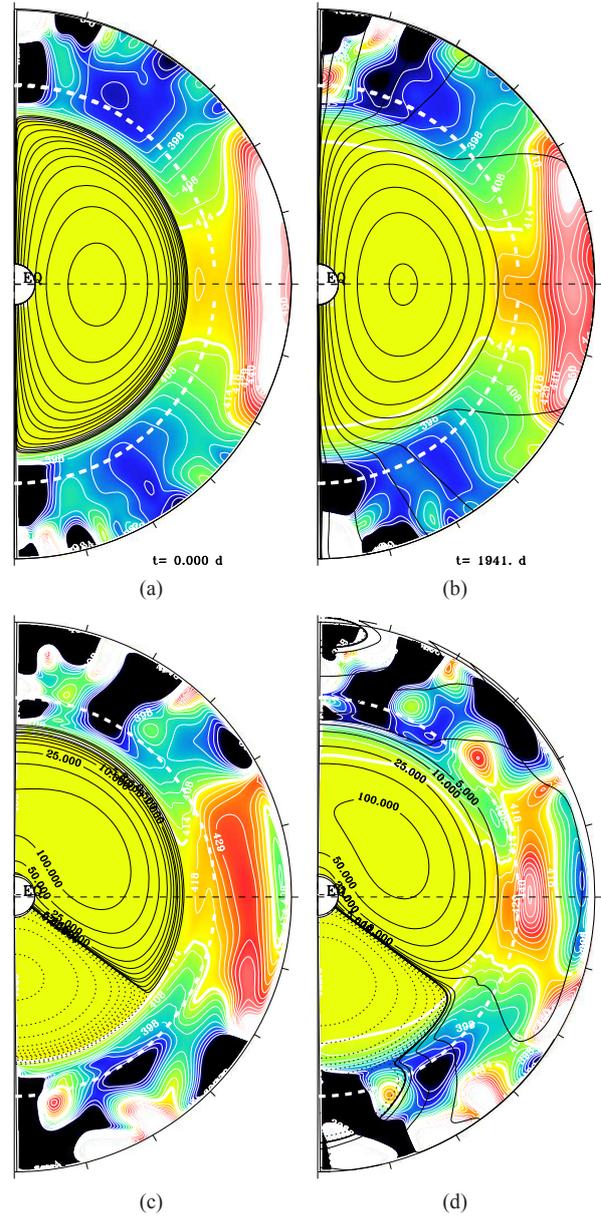


Fig. 4 (online colour at: www.an-journal.org) Meridional cuts of the tilted dipole case. The quantities in (a, b) are azimuthally averaged, while they are taken at the longitude $\varphi \sim 0$ (i.e., the longitude where the projection of the magnetic field on a polar slice is indeed a planar dipole, at least initially) in panels (c, d). The slight discrepancy between the dipole angle and 60° (or -30°) is due to the fact that we are not exactly at $\varphi = 0$. The color maps display the angular velocity Ω , and the black lines the magnetic field lines. (a, c) are taken at the initialization of the magnetic field, and (b, d) approximately 70 convective turnover times later.

balance which are defined as follows (Brun et al. 2004):

$$\partial_t(\bar{\rho}\mathcal{L}) = -\nabla \cdot \underbrace{(\mathbf{F}^{MC} + \mathbf{F}^{RS} + \mathbf{F}^{VD})}_{\text{Hydro}} + \underbrace{(\mathbf{F}^{MT} + \mathbf{F}^{MS})}_{\text{MHD}}, \quad (7)$$

where the different terms correspond respectively to contributions from meridional circulation, Reynolds stress, viscous diffusion, Maxwell torque, and Maxwell stress. They are defined by

$$\mathbf{F}^{\text{MC}} \equiv \bar{\rho} \langle \mathbf{v}_M \rangle \mathcal{L}, \quad (8)$$

$$\mathbf{F}^{\text{RS}} \equiv r \sin \theta \bar{\rho} (\langle v'_r v'_\varphi \rangle \mathbf{e}_r + \langle v'_\theta v'_\varphi \rangle \mathbf{e}_\theta), \quad (9)$$

$$\mathbf{F}^{\text{VD}} \equiv -\nu \bar{\rho} r^2 \sin \theta \left\{ \partial_r \left(\frac{\langle v_\varphi \rangle}{r} \right) \mathbf{e}_r + \partial_\theta \left(\frac{\langle v_\varphi \rangle}{\sin \theta} \right) \mathbf{e}_\theta \right\}, \quad (10)$$

$$\mathbf{F}^{\text{MT}} \equiv -\frac{r \sin \theta}{4\pi} \langle B_\varphi \rangle \langle \mathbf{B}_M \rangle \text{ and} \quad (11)$$

$$\mathbf{F}^{\text{MS}} \equiv -\frac{r \sin \theta}{4\pi} (\langle B'_r B'_\varphi \rangle \mathbf{e}_r + \langle B'_\theta B'_\varphi \rangle \mathbf{e}_\theta), \quad (12)$$

where the subscript ${}_M$ designates the meridional component of \mathbf{v} and \mathbf{B} . In the previous equations, we have decomposed the velocity and the magnetic field into an azimuthally averaged part $\langle \cdot \rangle$ and φ -dependent part (with a prime). The different contributions can further be separated between radial (\mathcal{F}_r along \mathbf{e}_r) and latitudinal (\mathcal{F}_θ along \mathbf{e}_θ) contributions. However here we only focus on the radial flux of angular momentum defined by

$$\mathcal{I}_r(r) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathcal{F}_r(r, \theta) r^2 \sin \theta \, d\theta, \quad (13)$$

where (θ_1, θ_2) maybe chosen to study a particular region of our simulation.

We plot in Fig. 5 the time-averaged angular momentum balance near the north pole and near the equator about 75 convective turnover times after the introduction of the magnetic field. The magnetic contributions are highlighted in red and are separated in axisymmetric (Maxwell torque MT) and non axisymmetric (Maxwell stress MS). At the beginning, those contributions are exactly zero. Since the field is initially buried deep in the radiation zone, we first notice that angular momentum is transported at the top of the radiative zone by (axisymmetric) Maxwell torque at the north pole (as already noticed in SBZ11). This again leads to a differentially rotating radiative zone. What is remarkable here is that we also observe magnetic transport of angular momentum at the equator. The axisymmetric and non-axisymmetric (torque and stress) components contribute equally to the inward transport of angular momentum, thus accelerating the upper radiation zone at low latitude, while Maxwell torque slows down the high latitude. We can thus conclude that an oblique field is acting very similarly to a purely aligned dipole.

4 Conclusions and perspectives

In a previous paper (SBZ11), we tested the Gough & McIntyre (1998) magnetic confinement scenario of the solar tachocline with a 3D non-linear MHD model of 90% of the Sun which couples together the convective and radiative zones. We showed that a fossil axisymmetric magnetic field does not remain confined in the radiation zone, and thus cannot prevent the spread of the tachocline.

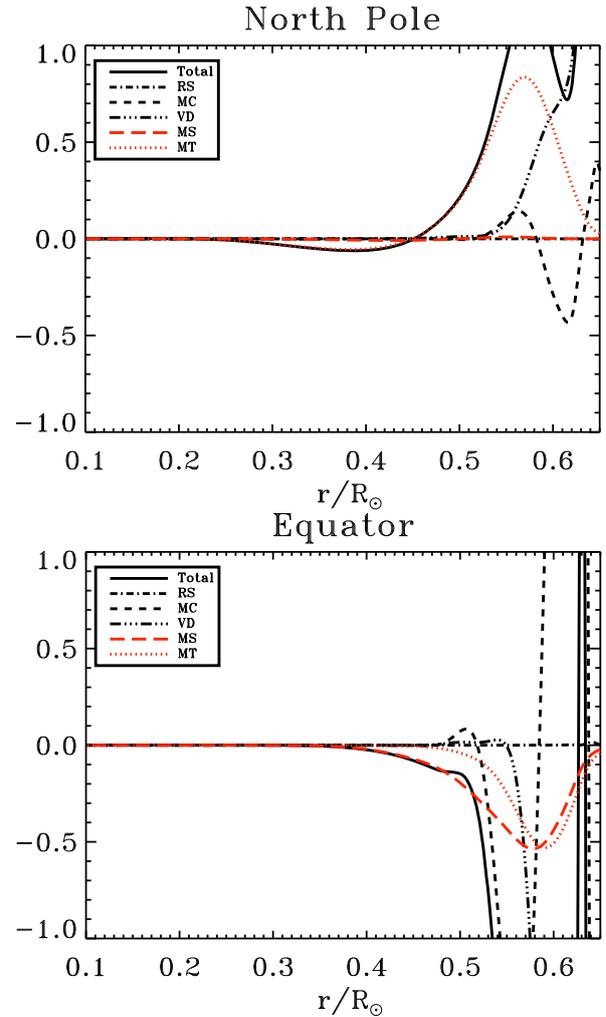


Fig. 5 (online colour at: www.an-journal.org) Time-averaged angular momentum balance (\mathcal{I}_r) at the north pole ($\theta_1 = 60^\circ, \theta_2 = 90^\circ$, see Eq. 13) and at the equator ($\theta_1 = -15^\circ, \theta_2 = 15^\circ$). \mathcal{I}_r is normalized to 10^{12} .

We showed that the motions (both meridional circulation and convection) were not strong enough to confine the field and that upward motions at the base of the convection zone were on the contrary helping the field to expand inside the convection zone. Although our numerical experiment is far from representing the real Sun, we are confident that our parameter regime allows us to model the main ingredients of the tachocline confinement scenario. More precisely, we demonstrated in SBZ11 that even if we consider high magnetic diffusivity, our magnetic Reynolds number is higher than 1 in the overshooting/penetration region and in the convection zone. The magnetic field evolution is thus dominated by advection and not by diffusion. The overshooting depth of the convective plumes is likely to be overestimated because our Peclet number is lower than the solar one, and the penetration of the meridional circulation may be underestimated (see Garaud & Brummell 2008; Wood et al. 2011) in our model. However, penetration and overshooting are clearly observed in our model. If more ‘realistic’ values of

the parameters could have consequences on the polar dynamics, we stress here that it may not have much influence at the equator, where the confinement of the magnetic field fails.

The magnetic topology considered in SBZ11 was very simple (axisymmetric dipole), and the robustness of the results is not obvious when considering the geometry of the field. We demonstrated in Sect. 3.1 that an axisymmetric dipole preferentially diffuses at the location where its maximum radial gradient is, i.e., at the equator. This has some importance since SBZ11 showed that the lack of confinement specifically at the equator was responsible for the failure of the Gough & McIntyre (1998) scenario. In order to test other topologies, we reported in Sect. 3.2 the study of an oblique dipole buried in the radiation zone. A tilted dipole can be decomposed into an axisymmetric and a non-axisymmetric part, and the axisymmetric component was shown to evolve similarly to the purely axisymmetric dipole of SBZ11. As a result, the magnetic confinement also fails for the tilted dipole.

The non-axisymmetric component of the titled dipole exhibits interesting three dimensional dynamics and transports angular momentum at the equator. In order to get rid of the SBZ11 dynamics and to isolate the effect of the non-axisymmetric dipole, simulations with a purely perpendicular dipole (i.e., with no axisymmetric component, $\beta = 90^\circ$ in Eq. (6)) will be reported in a future paper.

Acknowledgements. The authors acknowledge funding by the European Research Council through ERC grant STARS2 207430 (www.stars2.eu). 3D renderings in Fig. 3 were made with SDvision (see Pomarède & Brun 2010).

References

- Brown, T.M., Christensen-Dalsgaard, J., Dziembowski, W.A., Goode, P., Gough, D.O., Morrow, C.A.: 1989, *ApJ* 343, 526
- Brun, A.S., Toomre, J.: 2002, *ApJ* 570, 865
- Brun, A.S., Zahn, J.-P.: 2006, *A&A* 457, 665
- Brun, A.S., Miesch, M.S., Toomre, J.: 2004, *ApJ* 614, 1073
- Brun, A.S., Browning, M.K., Toomre, J.: 2005, *ApJ* 629, 461
- Brun, A.S., Miesch, M.S., Toomre, J.: 2011, *ApJ* 740, in press
- Charbonneau, P., Christensen-Dalsgaard, J., Henning, R., Larsen, R.M., Schou, J., Thompson, M.J., Tomczyk, S.: 1999, *ApJ* 527, 445
- Dorch, S.B.F., Nordlund, Å.: 2001, *A&A* 365, 562
- Dritschel, D.G., McIntyre, M.: 2008, *Journal of the Atmospheric Sciences* 65, 855
- Elliott, J.R.: 1997, *A&A* 327, 1222
- Ferraro, V.C.A.: 1937, *MNRAS* 97, 458
- Garaud, P.: 2002, *MNRAS* 329, 1
- Garaud, P., Brummell, N.H.: 2008, *ApJ* 674, 498
- Garaud, P., Garaud, J.-D.: 2008, *MNRAS* 391, 1239
- Gilman, P.A., Glatzmaier, G.A.: 1981, *ApJS* 45, 335
- Gough, D.O., McIntyre, M.E.: 1998, *Nature* 394, 755
- Kim, E.-J.: 2005, *A&A* 441, 763
- Kim, E.-J., Leprovost, N.: 2007, *A&A* 468, 1025
- Leprovost, N., Kim, E.-J.: 2006, *A&A* 456, 617
- Mestel, L., Takhar, H.S.: 1972, *MNRAS* 156, 419
- Mestel, L., Weiss, N.O.: 1987, *MNRAS* 226, 123
- Miesch, M.S.: 2003, *ApJ* 586, 663
- Morel, P.: 1997, *A&AS* 124, 597
- Pomarède, D., Brun, A.: 2010, in: Y. Mizumoto, K.-I. Morita, M. Ohishi (eds.), *Astronomical Data Analysis Software and Systems XIX*, ASPC 434, p. 378
- Rogers, T.M.: 2011, *ApJ* 733, 12
- Rüdiger, G., Kitchatinov, L.L.: 1997, *AN* 318, 273
- Rüdiger, G., Kitchatinov, L.L.: 2007, *NJP* 9, 302
- Schou, J., Antia, H.M., Basu, S., et al.: 1998, *ApJ* 505, 390
- Spiegel, E.A., Zahn, J.-P.: 1992, *A&A* 265, 106
- Strugarek, A., Brun, A.S., Zahn, J.-P.: 2011, *A&A* 532, 34
- Sule, A., Rüdiger, G., Arlt, R.: 2005, *A&A* 437, 1061
- Thompson, M.J., Christensen-Dalsgaard, J., Miesch, M.S., Toomre, J.: 2003, *ARA&A* 41, 599
- Tobias, S.M., Brummell, N.H., Clune, T.L., Toomre, J.: 2001, *ApJ* 549, 1183
- Tobias, S.M., Diamond, P.H., Hughes, D.W.: 2007, *ApJ* 667, L113
- Wood, T.S., McCaslin, J.O., Garaud, P.: 2011, *ApJ* 738, 47
- Wood, T.S., McIntyre, M.E.: 2011, *JFM* 677, 445
- Zahn, J.-P.: 1991, *A&A* 252, 179
- Ziegler, U., Rüdiger, G.: 2003, *A&A* 401, 433

Interactions magnétiques d'un vent stellaire et d'une magnétosphère planétaire

Sommaire

5.1 Modéliser les vents stellaires	86
5.1.1 De l'inévitabilité du vent stellaire	86
5.1.2 Simuler des vents par l'approche magnétohydrodynamique	89
5.2 Modéliser une planète	96
5.2.1 Modèles planétaires existants	96
5.2.2 Méthodologie de modélisation	96
5.2.3 Interactions magnétiques étoiles-planètes	98
Conclusions	100

Le magnétisme des étoiles, en plus de motiver une recherche active pour en comprendre l'origine, a des conséquences importantes sur leurs caractéristiques globales. Nous avons vu dans la partie précédente l'impact que pourrait avoir un champ magnétique organisé, interne à l'étoile, sur sa structure. Dans cette partie, nous nous intéressons à un autre aspect du magnétisme stellaire à *grande échelle* : le vent stellaire. Le vent stellaire est un écoulement magnéto-hydrodynamique généré par une étoile dans son environnement. Ce vent rétro-agit sur son étoile et la ralentit par couple magnétique en *transportant* le moment cinétique. Il interagit également avec l'environnement de l'étoile, et plus particulièrement avec les éventuelles planètes gravitant autour de l'astre. La découverte de systèmes exo-planétaires mit en évidence l'existence de *Jupiter chaudes*, planètes géantes très proches de leur étoile hôte. En plus de l'effet de son vent, l'étoile interagit magnétiquement avec ce genre de planètes, ce qui peut affecter à la fois son magnétisme de surface, mais également ses propriétés internes. Dans le cas où la planète est magnétisée, l'interface de sa magnétosphère avec le vent stellaire peut être vue comme une forme de *barrière de transport*. Nous développons dans ce chapitre un travail préliminaire en vue d'une modélisation réaliste des interactions magnétiques étoiles-planètes.

5.1 Modéliser les vents stellaires

5.1.1 De l'inévitabilité du vent stellaire

D'un point de vue théorique, l'existence du vent solaire a été pour la première fois proposée par *Parker* (1958). On peut simplifier son raisonnement de la manière suivante. En considérant un état d'équilibre hydrostatique à symétrie sphérique de la couronne solaire à une température de l'ordre de $10^6 K$, on peut montrer¹ que le ratio de la pression à *l'infini* sur la pression à la surface de l'étoile devrait être de l'ordre de 10^{-4} . Cependant, les observations du vent solaire nous donnent une estimation de l'ordre de 10^{-14} , soit un ratio plus faible de 10 ordres de grandeurs.

1. A l'équilibre hydrostatique, le gradient radial de pression est équilibré par la force de flottaison. Dans ce cas, la pression prend la forme $p = p_0 e^{-GM_\odot/(c^2 r) + cst}$, et par suite $p_\infty/p(R_\odot) = e^{-GM_\odot/(c^2 R_\odot)}$.

Afin de permettre une telle chute de pression dans l'environnement solaire, [Parker \(1958\)](#) eut l'idée de considérer que le gaz interplanétaire était en *mouvement*. Par un traitement simplifié à une dimension (la distance à l'étoile), il proposa divers types de solutions hydrodynamiques isothermes de vent solaire. Celles-ci sont représentées dans le diagramme donné en figure 5.1(a).

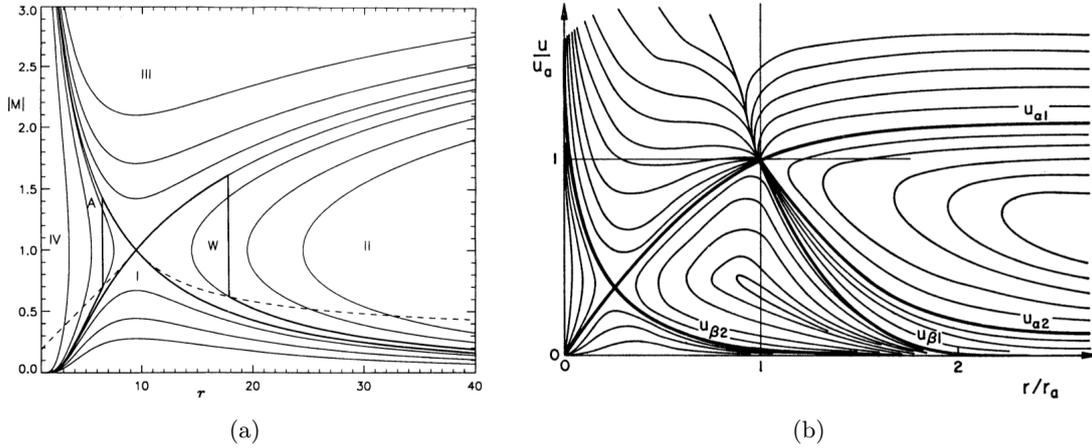


FIGURE 5.1 – (a) Solutions de vent solaire proposées par [Parker \(1958\)](#) (adapté de [Velli \(1994\)](#)). L'abscisse représente la distance à l'étoile (en rayon stellaire), et l'ordonnée le nombre de Mach $M \equiv v/c_s$ qui donne une mesure de la vitesse radiale du gaz interplanétaire. (b) Graphique équivalent proposé par [Weber and Davis \(1967\)](#), dans le cas d'un vent non isotherme magnétisé en rotation. On retrouve les solutions de Parker dans la partie inférieure gauche, et un nouveau point critique apparaît : le rayon d'Alfvén r_A à partir duquel la vitesse du vent dépasse la vitesse d'Alfvén. Les abscisses et ordonnées sont respectivement normalisées au rayon d'Alfvén et à la vitesse d'Alfvén.

On distingue dans cette figure quatre zones (I,II,III,IV) et deux solutions séparant le domaine en quatre zones (lignes qui se croisent au milieu du graphique, respectivement croissantes et décroissantes avec r). Ces deux solutions sont dites *transoniques*, car elles passent à travers le *point sonique* (de coordonnées (10, 1)), ce qui entraîne une transition entre des régimes subsonique ($M < 1$) et supersonique ($M > 1$). On peut démontrer que les solutions dans ces quatre zones ne sont pas réalisées dans le contexte des vents stellaires, pour les raisons suivantes :

- Les solutions des zones (II) et (IV) présentent deux vitesses différentes pour chaque rayon, et ne sont pas physiquement acceptables.
- Les solutions de la zone (I) sont des solutions dites de *brise*, car elles restent subsoniques dans tout le domaine. Elles sont instables aux ondes soniques de basse fréquence, et par conséquent toute solution de type (I) aura tendance à se déplacer sur la solution transonique en accélération ([Velli, 1994](#)).
- Les solutions de la zone (III) sont quant à elle supersoniques dans l'ensemble du domaine. Elle correspondent à une vitesse qui tend vers l'infini à la surface de l'étoile, et sont donc à rejeter du point de vue physique. De plus, les observations montrent que le vent n'est pas supersonique à la surface du Soleil ce qui écarte ce type de solution.

Ainsi, la solution préférée pour les vents stellaires est de type transonique. Elle présente un choc au passage du point sonique. A titre d'exemple, ([Parker, 1958](#)) donne la formule suivante pour le rayon sonique

$$r_s = \left(\frac{v_{\text{esc}}}{c_{s\star}} \right) \frac{r_\star}{4} \quad (5.1)$$

où $c_{s\star}$ est la vitesse du son à la surface de l'étoile, r_\star le rayon de l'étoile, et $v_{\text{esc}} = \sqrt{2Gm_\star/r_\star}$ la

vitesse d'échappement à la surface de l'étoile². Dans le cas du Soleil, ce point sonique est atteint à environ $10 R_{\odot}$ (environ $0.05 u.a.$).

Ces solutions sont obtenues pour un traitement très simplifié de l'atmosphère stellaire : symétrie sphérique, gaz isotherme, pas de champ magnétique, pas de rotation, ... Afin de généraliser le concept de vent stellaire, *Weber and Davis (1967)* ont étendu le travail de Parker au cas d'un gaz non isotherme, en rotation dans un champ magnétique. On peut alors définir le rayon d'Alfvén r_A comme le point auquel la vitesse du vent dépasse la vitesse d'Alfvén locale. Au delà de ce point d'Alfvén, le vent est dit *super-alfvénique* et les ondes d'Alfvén ne peuvent plus "remonter" le vent vers l'étoile. Ce point est par conséquent particulièrement important car il détermine la taille du bras de levier du couple magnétique s'appliquant à la rotation de l'étoile. Nous montrons en figure 5.1(b) le diagramme des solutions proposé par *Weber and Davis (1967)* où l'on remarque l'apparition du nouveau point critique r_A . Dans le cas du Soleil, le rayon d'Alfvén se positionne entre 15 et $20 R_{\odot}$.

Ces modèles restent cependant à une dimension. De nombreux efforts ont depuis été conduits afin de rendre plus réaliste la description des vents stellaires, et ce pour différents types d'étoiles³. Les différentes routes qui ont été suivies peuvent être séparées en deux grandes catégories. La première regroupe les travaux visant à étudier précisément le mécanisme d'excitation du vent stellaire. Parmi ces études, on retiendra notamment

- Les modèles unidimensionnels (*e.g.*, *Suzuki and Inutsuka, 2006*) qui incluent une physique riche et traitent plus particulièrement du problème détaillé de l'excitation du vent.
- Les applications aux étoiles massives de *ud Doula and Owocki (2002)*.
- Les travaux analytiques de *Lima and Priest (1993)*, ainsi que la série d'articles de *Tsinganos and Sauty (1992a,b)*.

Ensuite, d'autres études ont tenté de caractériser les vents stellaires dans des géométries plus réalistes, en paramétrant l'excitation du vent le plus souvent via un chauffage *ad hoc* (*i.e.*, via une fonction de chauffage ou un indice polytropique γ modifié). Dans cette catégorie nous retiendrons principalement deux approches :

- Les modèles semi-analytiques (2D et 3D) basés sur des fonctions de chauffage volumétrique, calibrées sur les données observationnelles du vent solaire (*e.g.*, le modèle *Wang-Sheeley-Arge*, ou WSA). Ces travaux, initiés par *Wang and Sheeley (1990)*, ont notamment été poursuivis par *Arge and Pizzo (2000)*, *Cohen et al. (2006)*.
- Les modèles numériques (principalement 2D) basés sur des prédictions analytiques MHD de *Pneuman and Kopp (1971)*, *Washimi and Shibata (1993)*, *Ustyugova et al. (1999)*, *Kepens and Goedbloed (2000)*, *Matt and Pudritz (2008)*.

Il convient ici de noter que l'ensemble des modèles que nous venons de décrire s'attachent à décrire les propriétés globales des vents stellaires. Ils sont par suite dédiés à l'étude des vents stationnaires, et ne s'intéressent pas directement à la variabilité temporelle du vent ni à l'éventuelle turbulence qui en découle. De nombreuses autres études cherchent par ailleurs à comprendre les spectres des fluctuations observées dans le vent solaire. Afin de s'attaquer à ce problème, d'autres types de modélisations que la MHD mono-fluide doivent être utilisées afin de décrire les petites échelles du vent qui varient sur des échelles de temps rapides et ne sont en général pas à l'équilibre thermodynamique local. Ce champ d'investigation est bien au delà des objectifs de ce

2. La vitesse d'échappement est obtenue lorsqu'on égale l'énergie cinétique de l'objet $mv^2/2$ à son énergie gravitationnelle GMm/r dans le champ de gravitation d'un objet de masse M . Si son énergie cinétique est plus importante, alors il n'est pas gravitationnellement piégé et peut s'échapper. On trouve naturellement que $v_{\text{esc}} = \sqrt{2GM/r_{\star}}$

3. Selon le type de l'étoile, le mécanisme qui entretient le vent peut être différent. Dans ce manuscrit, nous concentrons notre étude sur les vents des étoiles de type solaire dans leur séquence principale, dont l'origine est due à une température ou une pression thermique élevée. Des observations de vents d'étoiles massives, pourront être trouvées dans (*Kudritzki and Puls, 2000*).

chapitre, et nous renvoyons le lecteur intéressé aux revues de [Goldstein et al. \(1995\)](#) (approche MHD) et [Marsch \(2006\)](#) (approche cinétique) traitant de cette problématique.

Nous développons dans la partie suivante (section 5.1.2) une méthodologie similaire à ([Kepens and Goedbloed, 1999](#)) afin de simuler les vents stellaires dans le formalisme MHD. La vérification des bonnes propriétés de conservation de nos solutions nous permet de construire ensuite des modèles d'interaction étoile-planète sur une base solide.

5.1.2 Simuler des vents par l'approche magnétohydrodynamique

Paramètres, conditions initiales et conditions aux limites

Nous souhaitons modéliser un vent stellaire dans l'optique d'étudier son interaction avec des planètes, magnétisées ou non. Par suite, le mécanisme détaillé de l'accélération du vent ne nous intéresse pas directement, mais nous souhaitons être capables de prédire correctement des quantités telles que le flux de masse du vent, le flux de moment cinétique ou encore la topologie du champ magnétique global. Pour cela, nous construisons notre modèle sur le travail pionnier de [Matt and Pudritz \(2008\)](#). On peut montrer que pour un champ magnétique stellaire dipolaire, les simulations de vents (en grandeurs adimensionnées) ne dépendent que de quatre paramètres estimés à la surface de l'étoile (à l'équateur), qui sont :

- Le coefficient adiabatique γ . Ce paramètre doit être compris comme un γ effectif, qui modélise la thermodynamique du gaz que nous ne résolvons pas. Il est choisi constant dans tout le domaine.
- Le rapport de la vitesse du son sur la vitesse d'échappement c_s/v_{esc} .
- Le rapport de la vitesse d'Alfvén sur la vitesse d'échappement v_A/v_{esc} . Ce paramètre fixe l'intensité du champ magnétique via la définition de la vitesse d'Alfvén $v_A = B_\star/\sqrt{\rho_\star}$.
- Le rapport de la vitesse de rotation de l'étoile sur la vitesse d'échappement $v_{\text{rot}}/v_{\text{esc}}$.

Ces quatre paramètres sont directement reliés aux différentes énergies de notre système. L'*énergie thermique* est mesurée en terme d'excitation du vent (ici, *via* le gradient de pression) qui est représenté par la vitesse du son c_s et l'indice polytropique γ . L'*énergie gravitationnelle* est représentée par la vitesse d'échappement v_{esc} , et l'*énergie magnétique* par la vitesse d'Alfvén v_A . Enfin, l'*énergie cinétique* est représentée par la vitesse de rotation v_{rot} . Ils seront directement utilisés comme paramètres d'entrée dans le cadre de nos simulations.

L'ensemble des simulations présentées dans ce chapitre sont initialisées avec la solution de vent de [Parker \(1958\)](#) (symétrie sphérique, isotherme, non magnétisée et sans rotation) à laquelle un champ magnétique dipolaire est ajouté. Cette condition initiale est représentée en figure 5.2.

Une solution stationnaire est ensuite obtenue par simulation numérique en fonction des valeurs des quatre paramètres d'entrée choisis. Ces simulations sont effectuées avec le code PLUTO (*cf* section 1.2.3 et annexe D) qui résout les équation de la MHD idéale et compressible. Ce code est modulable, nous utilisons son solveur de type *hll* (solveur de Riemann de type *Harten, Lax, Van Leer*, avec une méthode Godunov).

Le système de coordonnées le plus adapté à la géométrie stellaire et au vent est le système sphérique. Cependant, nous travaillons dans le système de coordonnées cylindriques (ϖ, φ, z) (*cf* annexe A.1) car il nous permettra une meilleure flexibilité dans notre étude sur les interactions étoiles-planètes (section 5.2). Nous utilisons une grille uniforme pour mailler l'intérieur de l'étoile (qui sert de condition aux limites, voir ci-dessous), et une grille étirée (*stretched*) pour le domaine du vent. Différentes résolutions sont considérées ci-après.

Dans les cas magnétiques, la nullité de la divergence de \mathbf{B} est assurée par une méthode de type *constrained transport* ([Gardiner and Stone, 2005](#)). Le champ magnétique est initialisé sous

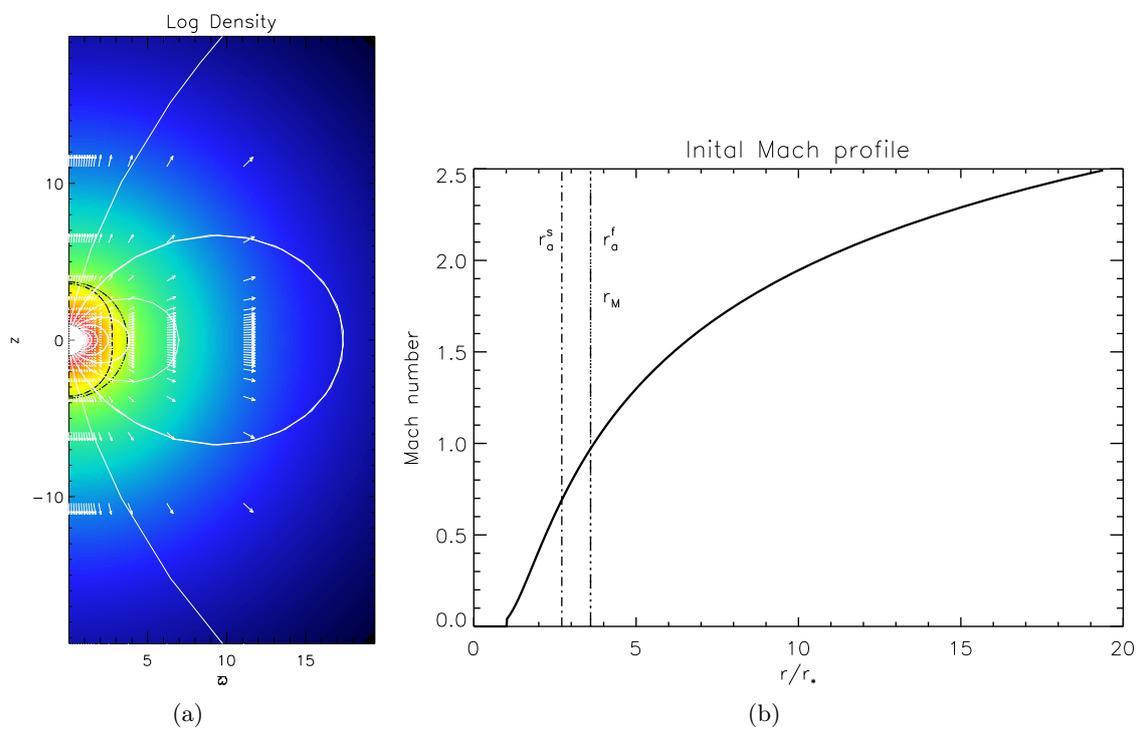


FIGURE 5.2 – (a) Condition initiale des cas du benchmark. La carte de couleur correspond au logarithme de la densité qui décroît avec la distance à l'étoile. Le champ de vitesse est initialement à symétrie sphérique (flèches blanches), et le champ magnétique est dipolaire (lignes de champ blanches). Les lignes noires représentent les surfaces critiques définies ci-après. **(b)** Profil 1D du nombre de Mach initial à l'équateur. La surface sonique se situe à environ $3.6 r_*$.

la forme d'un dipôle de moment μ_\star donné par

$$\mu_\star = v_{\text{esc}} \sqrt{\rho} r_\star^3 \frac{v_A}{v_{\text{esc}}}. \quad (5.2)$$

Les composantes cylindriques du dipôle axisymétrique sont alors données par

$$B_\varpi = \mu_\star \frac{3\varpi z}{(\varpi^2 + z^2)^{5/2}}, \quad (5.3)$$

$$B_z = \mu_\star \frac{2z^2 - \varpi^2}{(\varpi^2 + z^2)^{5/2}}. \quad (5.4)$$

Les conditions aux limites dans ce genre de simulation sont particulièrement critiques pour obtenir des solutions de vent correctes (*e.g.*, [Zanni and Ferreira, 2009](#)). Dans ce chapitre, nous optons pour des conditions aux limites *en couche* où les points de grille à la surface de l'étoile sont progressivement forcés vers un état de rotation solide⁴ et de champ magnétique dipolaire dans l'intérieur stellaire. Ces conditions aux limites sont directement inspirés des travaux de [Matt and Balick \(2004\)](#), [Matt and Pudritz \(2008\)](#). Elles agissent de telle façon que la direction du vent à la surface stellaire soit déterminée uniquement par l'équilibre des forces. De plus, elles permettent que les lignes de champ soient ancrées à une certaine profondeur (le champ électrique poloidal est alors nul), et par suite que B_φ évolue en adéquation avec les propriétés du vent. Enfin, elles sont justifiées par les bons résultats obtenus à la fois sur les propriétés des vents simulés, et sur la bonne conservation des quantités appropriées le long des lignes de champ magnétique (nous détaillons ces deux points ci-après).

Benchmark

Nous construisons ici une série de cas de vent stellaire qui permet de tester la validité de notre méthode de modélisation. Ces cas feront l'objet d'une publication de la cadre d'un benchmark international ([Matt et al., 2012](#)), et serviront de base à l'étude des interactions magnétiques étoiles-planètes. Nous donnons les différents paramètres de ces modèles dans le tableau 5.1. Ils permettent de tester successivement les cas des vents à rotation rapide, lente, avec ou sans champ magnétique. Les paramètres estimés du vent solaire sont également donnés à titre comparatif.

Case	γ	c_s/v_{esc}	$v_{\text{rot}}/v_{\text{esc}}$	v_A/v_{esc}
A	1.05	0.2599	0.0819	0.3183
B	1.05	0.2599	0.00303	0.3183
C	1.05	0.2220	0.00303	0.3183
A1	1.05	0.2599	0.0	0.0
C1	1.05	0.2220	0.0	0.0
A2	1.05	0.2599	0.0	0.3183
C2	1.05	0.2220	0.0	0.3183
Vent solaire	1.05	0.222	0.0028	0.0035

TABLE 5.1 – Paramètres des modèles de vent. Les paramètres du vent solaire sont obtenus empiriquement pour un modèle donnant des caractéristiques solaires à une unité astronomique [Matt and Pudritz \(2008\)](#).

Les modèles “1” (A1 et C1) sont unidimensionnels et peuvent être calculés analytiquement. Ils sont donc les premiers modèles à tester pour valider notre méthode et nos conditions aux limites.

4. Bien que dans la réalité la rotation d'une étoile n'est généralement pas solide (*cf* la rotation différentielle du Soleil, chapitre 4), nous nous limiterons à ce cas dans ce chapitre. Les conditions aux limites utilisées peuvent être adaptées pour prendre en compte n'importe quel type de rotation.

Nous donnons dans le tableau 5.2 la valeur de la perte de masse et de la vitesse poloidale obtenues avec différentes grilles par le calcul numérique, ainsi que les valeurs théoriques attendues. La perte de masse est calculée de la manière suivante en géométrie sphérique :

$$\dot{M} = \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \oint \rho v_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (5.5)$$

Case	\dot{M} ($10^{-14} M_\odot / yr$)	v_p / v_{esc} ($15 r_*$)
A1 (théorique)	0.889	0.395
(grille 32 - 64 -128)	0.854 - 0.873 - 0.882	0.391 - 0.394 - 0.395
(grille 64 + mc)	0.876	0.392
C1 (théorique)	0.0155	0.226
(grille 32 - 64)	0.0156 - 0.0154	0.228 - 0.226

TABLE 5.2 – Paramètres caractéristiques des vents analytiques (cas “1”) dans le cadre du benchmark. Le nombre de points de grille correspond au nombre de points utilisés pour discrétiser le rayon de l’étoile.

Le cas A1 nous permet de vérifier que notre solution converge lorsqu’on augmente la résolution. On notera les excellents résultats obtenus, même dans le cas le moins résolu. Nous testons également différents limiteurs de notre schéma numérique dans le cas A1. Le limiteur *minmod* est le limiteur le plus diffusif, et *mc* (*monotonized central difference*, [van Leer \(1977\)](#)) est le limiteur le moins diffusif proposé avec le code PLUTO. La différence de résultat entre les deux limiteurs n’est pas significative, nous utiliserons exclusivement le limiteur *minmod* (plus robuste, [Roe \(1986\)](#)) dans le reste du chapitre.

Nous traçons en figure 5.3 la carte de densité des cas A, B et C. La surface de l’étoile est repérée par un demi-cercle noir. Les lignes de champ magnétique sont tracées en blanc. La surface critique où le nombre de Mach poloidal M^p est égal à 1 ($|\mathbf{v}_p| = c_s$) est tracée en pointillées. Les différentes surfaces critiques alfvéniques sont définies par

$$(M_A^p)^2 = \frac{v_\omega^2 + v_z^2}{A_\omega^2 + A_z^2} \quad \text{Mach Alfvénique poloïdal (tirets)}, \quad (5.6)$$

$$(M_s^p)^2 = \frac{2(v_\omega^2 + v_z^2)}{c_s^2 + A_p^2 + A_\varphi^2 - \sqrt{[c_s^2 + A_p^2 + A_\varphi^2]^2 - 4c_s^2 A_p^2}} \quad \text{Mach Alfvénique lent (tirets-points)}, \quad (5.7)$$

$$(M_f^p)^2 = \frac{2(v_\omega^2 + v_z^2)}{c_s^2 + A_p^2 + A_\varphi^2 + \sqrt{[c_s^2 + A_p^2 + A_\varphi^2]^2 - 4c_s^2 A_p^2}} \quad \text{rapide (tirets-triple points)}, \quad (5.8)$$

où $A_i = B_i / \sqrt{\rho}$ et l’indice p signifie poloïdal.

Les deux premiers cas (A et B) sont équivalents, à ceci près que le cas A possède une vitesse de rotation plus élevée. La rotation rapide éloigne les surfaces critiques de l’étoile à haute latitude, car les lignes de champ magnétique y sont ouvertes et collimatées (l’amplitude du champ magnétique décroît alors moins vite que dans le cas sans rotation). La région des lignes de champ fermées (zone morte) est plus petite dans le cas à forte rotation car l’énergie cinétique du vent est plus élevée dans ce cas : il est moins contraint par la tension des lignes de champ magnétique. Enfin, le cas C est équivalent au cas B (faible rotation), mais la vitesse du son du vent est moins élevée à la surface de l’étoile. Une vitesse de son moins élevée correspond dans notre cas à un mécanisme d’excitation du vent plus faible. Par suite, le vent est moins intense et il est plus contraint par le champ magnétique à basse latitude : l’extension latitudinale de la zone morte est alors plus élevée. A haute latitude, le vent est également moins intense et par conséquent les surface critiques sont repoussées loin de l’étoile (on remarquera le changement d’échelles des

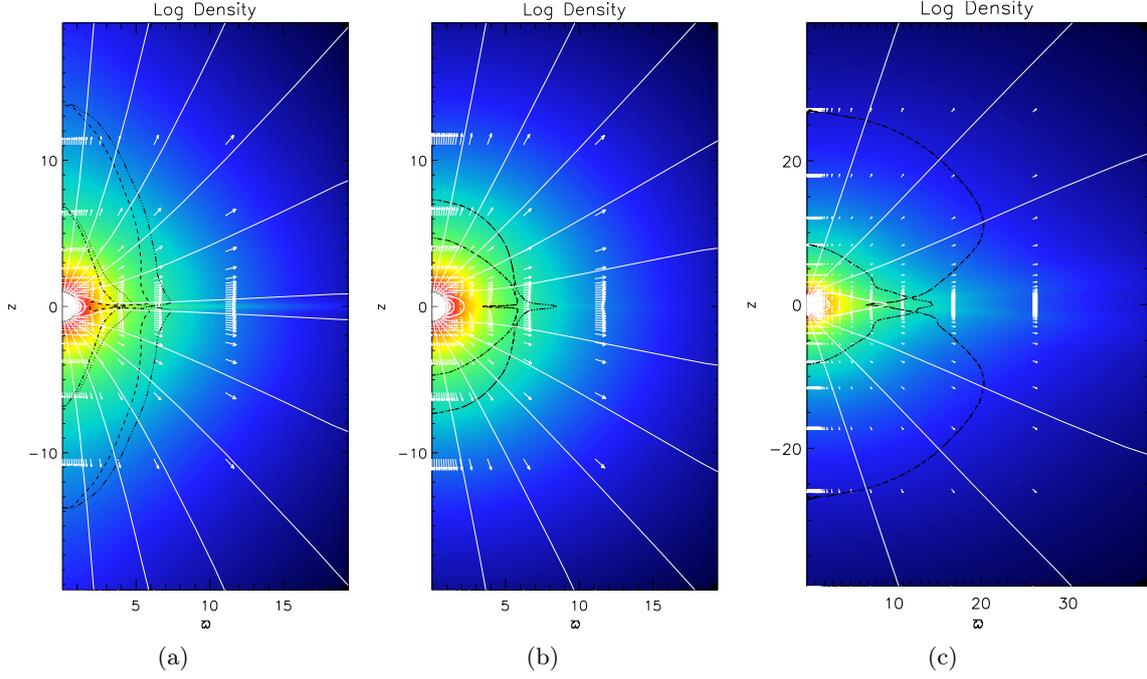


FIGURE 5.3 – Solutions de vents des cas A (a), B (b) et C (c). Le fond coloré représente la logarithme de la densité. Les lignes blanches pleines représentent le champ magnétique, et les flèches blanches le champ de vitesse. Les surfaces critiques sont tracées en noir.

axes de la figure 5.3(c)).

Nous caractérisons ensuite quantitativement nos simulations à l'aide d'une série de paramètres clés reportés dans le tableau 5.3. Le premier paramètre correspond à la perte de masse normalisée

$$\dot{m} \equiv \frac{\dot{M}}{\rho_* v_{\text{esc}} r_*^2}, \quad (5.9)$$

où ρ_* est la densité de l'étoile à sa surface r_* , et la perte de masse est donnée par l'équation (5.5). Ensuite, nous caractérisons le nombre de lignes de champ ouvertes sur le nombre de lignes de champ fermées par la grandeur

$$\frac{\Psi_o}{\Psi_*} = \frac{\oint |\mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}|}{4\pi B_* r_*^2}. \quad (5.10)$$

Enfin, pour les cas avec rotation, nous calculons le flux de moment cinétique normalisé

$$\dot{j} \equiv \frac{\dot{J}}{\rho_* v_{\text{esc}}^2 r_*^3}, \quad (5.11)$$

où

$$\dot{J} = \oint \varpi \left(v_\varphi - B_\varphi \frac{\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{B}_p}{\rho |\mathbf{v}_p|^2} \right) \rho \mathbf{v}_p \cdot d\mathbf{A}. \quad (5.12)$$

On peut remarquer que les cas A2 et B présentent des caractéristiques identiques (tableau 5.3). Ceci est attendu car seulement un très faible taux de rotation est appliqué à l'étoile pour passer du cas A2 au cas B. La perte de moment cinétique est alors faible dans ce cas. La taille de la zone morte peut être caractérisée par le rapport $1 - \Psi_o/\Psi_*$. On voit immédiatement que la rotation stellaire tend à diminuer la taille de la zone morte dans nos simulations, elle est

Case	\dot{m}	Ψ_o/Ψ_*	j	v_p/v_{esc} ($15r_*, 0^\circ$)	v_p/v_{esc} ($15r_*, 45^\circ$)	v_p/v_{esc} ($15r_*, 90^\circ$)
A	$5.60 \cdot 10^{-2}$	0.600	$1.09 \cdot 10^{-1}$	0.321	0.500	0.457
A2	$3.40 \cdot 10^{-2}$	0.495	...	0.410	0.405	0.365
B	$3.40 \cdot 10^{-2}$	0.495	$3.50 \cdot 10^{-3}$	0.410	0.405	0.365
C	$6.48 \cdot 10^{-4}$	0.251	$7.12 \cdot 10^{-4}$	0.245	0.250	0.198
C2	$5.29 \cdot 10^{-4}$	0.183	...	0.266	0.284	0.092

TABLE 5.3 – Valeurs caractéristiques des vents dans le cadre du benchmark. La résolution typique est de 64 points pour un rayon stellaire, puis une grille étirée pour le domaine du vent.

effectivement maximale dans les cas C. Des comparaisons préliminaires avec d'autres codes indépendants (*Matt, Pinto & Vidotto, communication privée*) donnent des résultats très satisfaisants pour l'ensemble de ces cas. Cette petite étude nous permet à la fois d'être confiants sur nos modèles, mais aussi d'identifier les régimes de paramètres intéressants pour l'étude des interactions étoile-planètes. En particulier, la position de la planète par rapport aux surfaces critiques change la nature des éventuelles interactions. Ces points seront détaillés en section 5.2, mais une dernière étape de vérification des nos solutions de vent doit être auparavant effectuée.

Conservation

D'après *Lovelace et al. (1986)*, *Ustyugova et al. (1999)*, *Keppens and Goedbloed (2000)*, *Matt and Balick (2004)*, on peut définir 5 quantités conservées le long des lignes de champ magnétique poloidales (en supposant un système axisymétrique), qui sont :

$$K(\psi) \equiv \rho \frac{\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{B}_p}{|\mathbf{B}_p|^2}, \quad (5.13)$$

$$\Lambda(\psi) \equiv \varpi \left(v_\varphi - B_\varphi \frac{B_p}{\rho v_p} \right) = \varpi \left(v_\varphi - \frac{B_\varphi}{K} \right), \quad (5.14)$$

$$\Omega(\psi) \equiv \frac{1}{\varpi} \left(v_\varphi - \frac{v_p}{B_p} B_\varphi \right) = \frac{1}{\varpi} \left(v_\varphi - \frac{K B_\varphi}{\rho} \right), \quad (5.15)$$

$$S(\psi) \equiv p \rho^{-\gamma}, \quad (5.16)$$

$$E(\psi) \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{v}_p^2 - v_\varphi^2) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} S - \frac{Gm_*}{r} + v_\varphi B_\varphi \frac{K}{\rho}. \quad (5.17)$$

K est directement relié à la conservation de la masse le long des lignes de champ, Λ à la conservation du moment cinétique (*cf* équation (5.12)), Ω à la conservation de l'hélicité, S à la conservation de l'entropie and E à la conservation de l'énergie. Enfin, ψ est la fonction de courant du champ magnétique poloïdal \mathbf{B}_p .

Nous traçons en figure 5.4 les différentes quantités qui doivent être conservées le long des lignes de champ en fonction de ψ pour le cas A. Chaque abscisse correspond à une ligne de champ magnétique poloïdal. Les propriétés de conservation impliquent que pour une simulation exacte, les points devraient être confondus pour chaque valeur de ψ . Pour chacune des quantités, on peut remarquer une mauvaise conservation autour de $0.275 < \psi < 0.333$ (les lignes de champ ouvertes sont retrouvées pour $\psi < 0.275$). Cette zone correspond physiquement à la zone de transition entre les lignes de champ fermées et ouvertes, qui est très difficile à capturer dans des simulations de type MHD idéale. Il n'est par conséquent pas étonnant de retrouver une conservation imparfaite pour cette région. On remarquera cependant la bonne propriété de propagation du taux de rotation Ω à toutes les latitudes sur le troisième panneau.

Nous avons démontré la qualité des modèles de vent que nous avons développé, nous pouvons à présent nous baser sur ces simulations pour construire des modèles d'interaction étoile-planète.

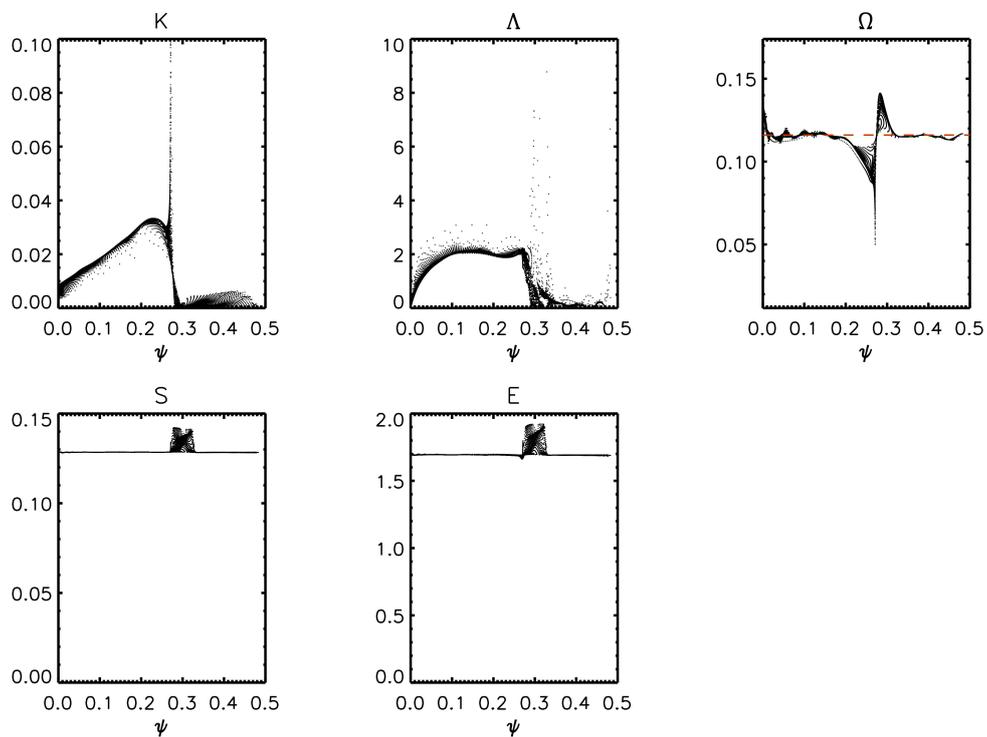


FIGURE 5.4 – Conservation des 5 quantités (5.13- 5.17) en fonction de ψ dans le cas A. Chaque point correspond à un point de la simulation. Si la conservation était parfaite, les points devraient être confondus pour chaque valeur de ψ . La rotation Ω_* imposée à l'étoile est donnée par la ligne pointillée rouge. $\psi < 0.275$ correspond aux pôles, tandis que $\psi > 0.333$ représente la région équatoriale où l'on trouve des lignes de champ fermées. On voit nettement le changement des diagrammes au passage des lignes de champ ouvertes aux lignes de champ fermées.

5.2 Modéliser une planète

5.2.1 Modèles planétaires existants

Les interactions magnétiques étoiles-planètes ont été classées en quatre catégories par [Zarka \(2007\)](#), qui distingue des écoulements magnétisé/non-magnétisé (pour notre étude, le vent stellaire), et des obstacles magnétisé/non-magnétisé (pour notre étude, la planète). Nous considérons seulement le cas de l'écoulement magnétisé qui s'applique pour les planètes proches de leur étoile hôte. Deux types d'interactions peuvent alors être considérées, elle sont dites *unipolaires* (planète non magnétisée) et *dipolaires* (planète magnétisée).

Le cas *unipolaire*, introduit par [Goldreich and Lynden-Bell \(1969\)](#) dans le cas de Io (satellite de Jupiter), a été principalement étudié dans le cadre d'émissions radio aurorales induites par des lunes d'une planète (voir [Prangé et al. \(1996\)](#), [Zarka \(2004\)](#), [Bagenal \(2007\)](#) pour le système des lunes de Jupiter). L'application directe à de possibles émissions liées à des interactions étoile-planète a fait l'objet de certaines études ([Preusse et al., 2006](#)). Il constitue la première étape de notre processus de modélisation.

Le cas *dipolaire* est quant à lui applicable à la fois à des systèmes planète-lune ([Kivelson et al., 1997](#)), mais aussi aux interactions directes étoile-planète, dans le système solaire ([Cowley et al., 2004](#), [Jia et al., 2012](#)) et dans le cas des Jupiter chaudes ([Cuntz et al., 2000](#), [Ip et al., 2004](#), [Cohen et al., 2011](#)).

Nous développons ici une méthodologie robuste qui permet d'étudier l'ensemble de ces interactions pour cette première étape. L'étude est menée en deux dimensions, pour un système axisymétrique. La section 5.2.2 présente la méthode générale de modélisation, tandis que les premiers résultats sont donnés en section 5.2.3. Nous nous limitons à deux cas simples d'interactions bien connues des systèmes magnétosphériques planète-satellite, ce qui nous permet d'être confiants sur notre technique de modélisation.

5.2.2 Méthodologie de modélisation

Le code PLUTO nous permet facilement d'introduire des conditions aux limites à n'importe quel endroit de notre domaine. Nous introduisons ainsi une planète à son rayon d'orbite ϖ_{orb} , que nous considérons circulaire pour le moment. Nous considérons les cas de planètes magnétisées ou non.

La première étape de modélisation consiste à construire une grille nous permettant de résoudre les dimensions planétaires. Dans l'étude préliminaire présentée ici, nous nous limiterons à des planètes de rayon $r_P = 0.1 r_*$, et de rapport de masse $Q_m = \frac{m_p}{m_*} = 0.01$. A titre comparatif, ces rapports dans le cas du couple Jupiter-Soleil sont tels que $r_J \sim 0.1 R_\odot$ et $m_J \sim 10^{-3} M_\odot$. Nous considérons donc une planète plutôt massive. Le champ gravitationnel de la planète est ajouté au champ gravitationnel de l'étoile. La position de la planète est choisie en début de simulation, nous donnons en figure 5.5 une grille typique pour une planète orbitant à $\varpi_{\text{orb}} = 7 r_*$ de son étoile. La grande flexibilité du code PLUTO nous permet *a priori* de simuler facilement (au moins en 2D) une large gamme de valeurs de rayon et masse planétaire. Nous ne présentons qu'un seul cas, des travaux sont en cours pour explorer un régime de paramètre plus grand.

Les conditions aux limites de la planète influencent largement les résultats obtenus. Nous adoptons la méthodologie suivante pour l'intérieur planétaire :

- La densité et la pression sont maintenues constantes dans la planète, et la vitesse poloidale est mise à zéro. La vitesse azimutale est soit fixée de telle sorte qu'elle compense la force de gravitation lié à l'étoile, soit mise à zéro dans les cas où l'on se place dans le repère tournant à la vitesse de révolution de la planète.
- Le champ magnétique est figé dans sa structure dipolaire dans l'intérieur de la planète. Dans le cas d'une planète non magnétisée, le champ magnétique est laissé libre.

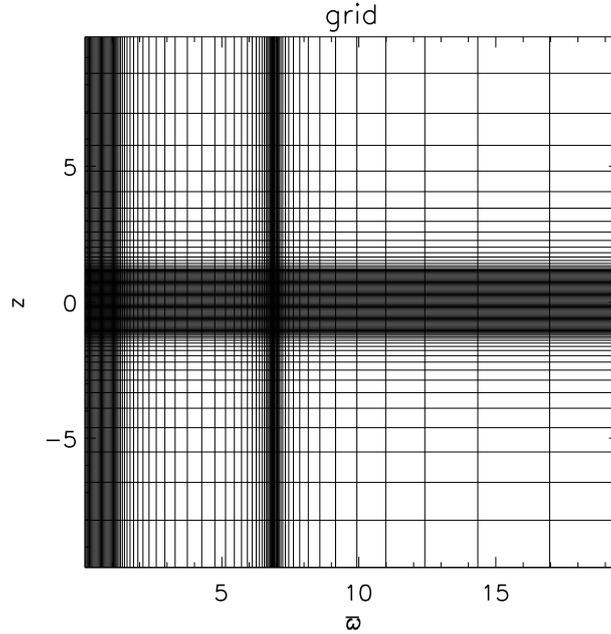


FIGURE 5.5 – Grille typique pour les interactions étoiles-planètes. On voit l'augmentation de la résolution à la surface de l'étoile, ainsi qu'à la position de la planète (ici à $(\varpi = 7, z = 0)$). Dans ce cas, nous avons utilisé une grille de 320 x 374 points.

- Nous initialisons une atmosphère planétaire dans le puits gravitationnel de la planète (voir ci-dessous pour une description détaillée). L'atmosphère évolue ensuite librement au cours de la simulation.

Initialisation d'une atmosphère planétaire

Nous utilisons trois paramètres de contrôle qui permettent d'initialiser l'atmosphère planétaire. Ces paramètres sont

- Le rapport de densité à l'interface entre le vent stellaire et l'atmosphère planétaire, noté Q_ρ .
- Le rapport de pression à l'interface entre le vent stellaire et l'atmosphère planétaire, noté Q_p .
- Le rapport de densité entre l'atmosphère planétaire et la surface planétaire, noté Q_ρ^P .

Ces quantités sont utilisées sur la ligne de visée planète-étoile, puis l'atmosphère est considérée à symétrie sphérique centrée sur la planète. On utilisera les coordonnées sphériques locales notées (r', θ', φ') . On définit un "rayon atmosphérique" par le rapport de masse et le rayon orbital de la planète

$$r'_{\text{atm}} = \frac{\varpi_{\text{orb}} \sqrt{Q_m}}{1 + \sqrt{Q_m}}. \quad (5.18)$$

Ce rayon correspond point d'équilibre gravitationnel entre l'étoile et la planète, et n'est utilisé que dans la phase d'initialisation de l'atmosphère planétaire. Les cas que nous considérons dans ce chapitre sont tels que $r'_{\text{atm}} > r_P$, où r_P est le rayon planétaire. La densité et la pression à la surface de la planète sont alors définis par

$$\begin{aligned} \rho_P &= Q_\rho \rho_w \left(\frac{r'_{\text{atm}}}{r_P} \right)^\alpha, \\ p_P &= Q_p \rho_w \frac{c_s^2}{\gamma} - \frac{\rho_P Q_m}{(\alpha + 1) r_P} \left[\left(\frac{r'_{\text{atm}}}{r_P} \right)^{\alpha+1} - 1 \right], \end{aligned}$$

où

$$\alpha = \frac{\ln Q_\rho^P}{\ln \frac{r'_{\text{atm}}}{r_P}}$$

et ρ_w est la densité du vent stellaire à r'_{atm} . Puis, nous définissons les profils de densité et pression dans l'atmosphère par

$$\begin{aligned}\rho(r') &= \rho_P \left(\frac{r'}{r_P} \right)^{-\alpha}, \\ p(r') &= p_P + \frac{\rho_P Q_m}{(\alpha + 1) r_P} \left[\left(\frac{r'}{r_P} \right)^{-\alpha-1} - 1 \right].\end{aligned}$$

Les profils sont choisis de telle sorte que $\rho(r_P) = \rho_P$ et $p(r_P) = p_P$, ce qui assure la continuité à la surface planétaire. De plus, on peut remarquer que

$$\rho(r'_{\text{atm}}) = \rho_P \left(\frac{r'_{\text{atm}}}{r_P} \right)^{-\alpha} = Q_\rho \rho_w,$$

et Q_ρ caractérise bien le saut en densité à l'interface vent stellaire/atmosphère planétaire. On remarque également que Q_p caractérise bien le saut de pression car

$$p(r'_{\text{atm}}) = Q_p p_w,$$

où $p_w = \rho_w c_s^2 / \gamma$ est la pression du vent à l'interface. Enfin, nous avons choisi les profils de telle sorte qu'ils réalisent l'équilibre hydrostatique dans l'atmosphère planétaire, c'est à dire

$$\partial_{r'} p = -\frac{\rho_P Q_m}{r_P^2} \left(\frac{r'}{r_P} \right)^{-\alpha-2} = -\frac{Q_m}{r'^2} \rho(r') = -g_P \rho(r').$$

Notre dernier paramètre, Q_ρ^P , contrôle la loi de puissance de la pression et de la densité par la variable α . Nous pouvons remarquer que la définition de α implique que

$$\rho(r') = \rho_P e^{-\ln(Q_\rho^P) \ln(r'/r_P) / \ln(r'_{\text{atm}}/r_P)},$$

et par conséquent le rapport de densité entre la surface planétaire et l'atmosphère est donné par

$$\frac{\rho_P}{\rho(r'_{\text{atm}})} = Q_\rho^P.$$

Enfin, nous donnons également le rapport des pressions

$$\frac{p_P}{p(r'_{\text{atm}})} = 1 - \frac{Q_\rho^P Q_m Q_\rho}{(\alpha + 1) r_P Q_p c_s^2 / \gamma} \left[\frac{r'_{\text{atm}}}{r_P} Q_\rho^P - 1 \right].$$

5.2.3 Interactions magnétiques étoiles-planètes

Interactions d'une étoile avec une planète non magnétisée

Nous utilisons le cas C du benchmark (section 5.1.2) dans lequel nous initialisons une planète à $\varpi_{\text{orb}} = 2.5 r_\star$. Les paramètres initiaux de la planète sont $Q_\rho = 1$, $Q_p = 0.5$ et $Q_\rho^P = 1$. Les profils de pression atmosphérique et planétaire sont tels que la pression est légèrement plus faible que la pression totale du vent stellaire ($p_{\text{tot}} = p + p_{\text{ram}} = p + \rho |\mathbf{v}|^2$). On s'assure de cette façon que la planète ne génère pas de vent par elle-même. La planète induit une interaction magnétique

unipolaire et crée ce qu'on appelle des *ailes d'Alfvén*. Ces ailes sont constituées du tube de flux du champ magnétique stellaire que la planète (dont la vitesse d'orbite est plus rapide que la vitesse de rotation du vent) emporte et perturbe. Un champ électrique et un courant associé se créent alors entre l'étoile et la planète dans le tube de flux ([Goldreich and Lynden-Bell, 1969](#), [Neubauer, 1980](#)). Le courant est orienté de la planète vers l'étoile sur le côté interne (*i.e.*, côté de l'étoile) du tube de flux, et de l'étoile vers la planète sur son côté externe. C'est effectivement ce que nous observons (figure 5.6(a)) dans un cas purement axisymétrique. Les paramètres Q en conditions initiales influencent peu la dynamique du système tant qu'ils ne permettent pas la génération d'un "vent" planétaire en outrepassant la pression *ram* du vent stellaire.

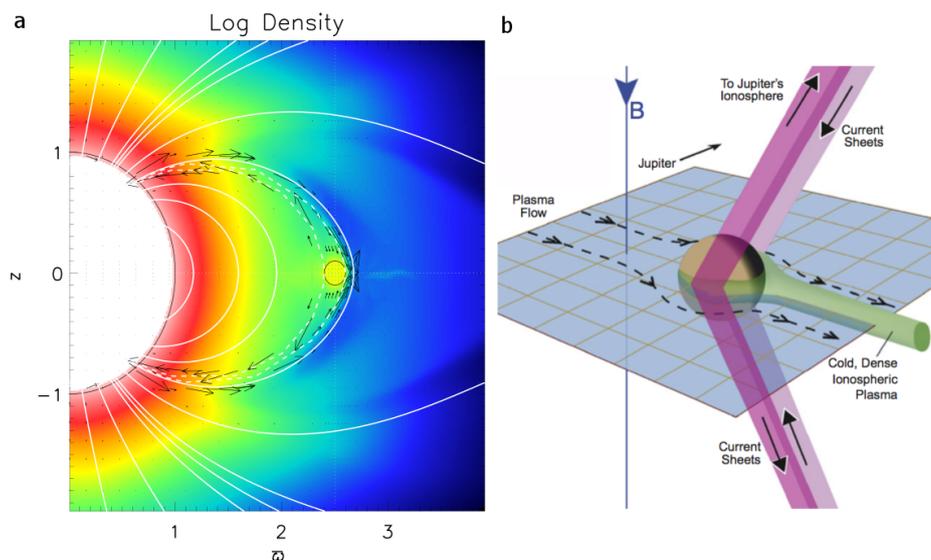


FIGURE 5.6 – (a) Interaction unipolaire entre une étoile et une planète proche non magnétisée. Le champ magnétique est représenté en traits pleins blanc. Les lignes de champ magnétique délimitant le *tube de flux* reliant la planète à l'étoile sont indiquées en tirets blancs. Enfin, le vecteur densité de courant $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$ est représenté par les flèches noires. La table de couleur représente la densité de plasma. (b) Schéma de l'interaction unipolaire entre Io et la magnétosphère jovienne (adapté de [Bagenal \(2007\)](#)). On remarquera la comparaison directe avec notre cas test.

Un flot de la planète vers l'étoile est associé au tube de flux. Les lignes de champ magnétique du vent stellaire ne sont pas perturbées, et la zone *morte* (lignes de champ fermées) est uniquement modifiée dans le tube de flux ainsi créé. Ces résultats sont en accord avec la description de ce genre d'interaction pour le système Io-Jupiter ([Kivelson et al., 2004](#), [Zarka, 2007](#), [Bagenal, 2007](#)).

Interactions d'une étoile avec une planète magnétisée

Nous initialisons le champ magnétique sous la forme d'un dipôle, orienté de telle sorte que le champ magnétique polaire de la planète se couple naturellement au champ magnétique stellaire. Des reconnections magnétiques peuvent alors avoir lieu à l'équateur planétaire. Le cas où le champ magnétique de la planète est opposé entraîne des reconnections magnétiques au niveau des pôles. Nous ne détaillons pas ce cas ici, nous renvoyons le lecteur à l'article de [Ip et al. \(2004\)](#) pour plus de détails sur ce cas particulier.

Puisque la planète n'est pas centrée dans notre système de coordonnées, les formules du champ magnétique dipolaire (équations 5.3 et 5.4) doivent être adaptées afin de conserver un champ magnétique à divergence nulle. En redéfinissant la coordonnée cylindrique radiale $\varpi' = \varpi - r_{\text{orb}}$ centrée sur la planète, et pour un champ dipolaire planétaire de moment μ_p , on obtient que le

champ de la planète \mathbf{B}' dans le repère de l'étoile s'écrit

$$B'_{\varpi} = \mu_p \frac{3\varpi'z}{(\varpi'^2 + z^2)^{5/2}}, \quad (5.19)$$

$$B'_z = \mu_p \frac{(2 - r_{\text{orb}}/\varpi)z^2 - (1 - r_{\text{orb}}/\varpi)\varpi'^2}{(\varpi'^2 + z^2)^{5/2}}. \quad (5.20)$$

L'interaction magnétique est alors dipolaire car elle met en jeu les deux champs magnétiques stellaire et planétaire. On représente en figure 5.7(a) une carte du taux de rotation effectif Ω (équation (5.15)) issu de cette interaction. Comme précédemment, la planète a un mouvement orbital plus rapide que la rotation de l'étoile. La connexion magnétique s'effectue naturellement aux pôles de la planète du fait de la topologie choisie. Le moment cinétique est transporté le long des lignes de champ magnétique et la zone morte du vent stellaire est très perturbé. Aux bords des zones d'interaction magnétiques directes, on peut observer trois zones "noires", dans la zone morte et dans les zones de champ magnétique ouvert. Ces zones correspondent à une rotation effective négative, elles constituent une zone de reflux entourant la magnétosphère planétaire qui tourne très rapidement dans l'atmosphère stellaire.

On peut également observer sur cette figure le processus de reconnection dans cette configuration. Les lignes de champ fermées de la zone morte reconnectent avec les lignes de champ de la planète à environ $1.9 r_*$ à l'équateur (ligne blanche en pointillés). Suite à cette reconnection les lignes de champ connectent directement le pôle de la planète à la surface de l'étoile (pointillés rouges). Ces lignes de champ sont ensuite éventuellement déformées à l'interface des lignes de champ magnétique ouvertes et fermées du vent stellaire (pointillés jaunes) pour finalement reconnecter dans la queue magnétique de la planète (pointillés noirs) et se désolidariser de l'étoile. Les importants écoulements créés aux pôles de la planète, ainsi que dans les lobes de la queue magnétique, sont directement associés à ces reconections (*Jia et al.*, 2008). Ce mécanisme de reconnection est bien connu de la communauté géophysique, comme l'atteste le schéma explicatif 5.7(b) de *Gombosi* (1998). Malgré notre approche très simplifiée, nous retrouvons le comportement global du premier type d'interaction étoile-planète dipolaire.

Conclusions

Dans cette partie, nous avons mis en place de nombreux éléments de modélisation nécessaires à la description des interactions magnétiques entre étoiles et planètes. Nous avons dans un premier temps (section 5.1) détaillé le modèle de vent stellaire que nous utilisons, qui est en cours de validation *via* un benchmark international. Ensuite, nous avons montré comment il est possible de simuler l'existence d'une planète dans la région où les lignes de champ magnétique sont fermées (5.2.3). Dans ce cas, les deux types d'interaction (unipolaire et dipolaire) sont bien identifiés et se comparent bien aux études précédentes faites dans le cadre des interactions d'un satellite avec sa planète hôte.

Fort de ces deux bases solides, ce travail va être poursuivi et sera largement étendu. Dans un premier temps, l'application de notre méthode à des systèmes exo-planétaires connus devrait permettre de contraindre théoriquement certaines observations (par exemple, le flux radio qui peut être émis par ce type d'interactions (voir *Cohen et al.*, 2011, *Vidotto et al.*, 2012)). En particulier, *Cuntz et al.* (2000) ont identifié une dizaine de systèmes exo-planétaires susceptibles d'être sous l'influence d'interactions magnétiques étoiles-planètes. La liste s'est aujourd'hui agrandie, et nous disposons également d'observations de champ magnétiques stellaires de surface (voir *Donati et al.* (2008) pour τ Bootis, *Petit et al.* (2009) pour HD 190771, *Fares et al.* (2010) pour HD 189733, *etc...*) qui nous donnent des cibles de simulation intéressantes. Ces travaux de re-

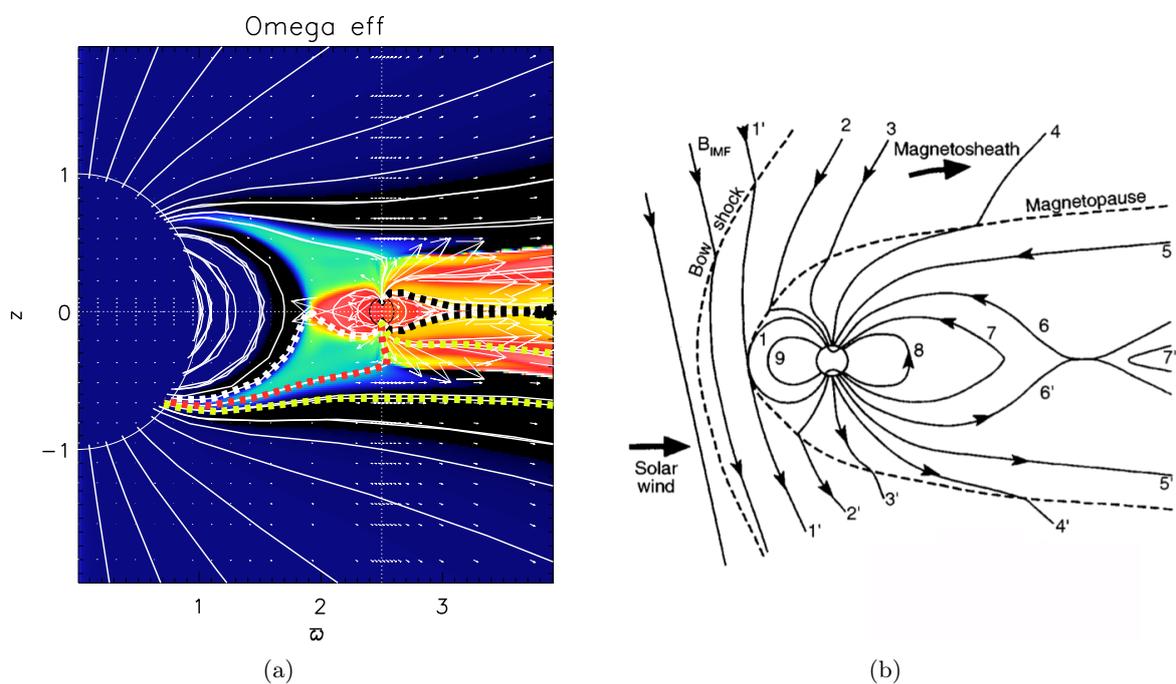


FIGURE 5.7 – (a) Cycle de reconnection magnétique dans le cas de champs magnétiques couplés. Les lignes de champ se connectent à l'équateur entre l'étoile et la planète (blanc), puis relient directement un pôle planétaire à l'étoile (rouge, jaune), et enfin reconnected dans la queue magnétique de la planète (noir). La carte de couleur représente le taux de rotation effectif Ω (équation (5.15)), qui est conservé le long des lignes de champ magnétique. **(b)** Schéma de reconnection magnétique proposé par *Hughes* (1995), *Gombosi* (1998). Bien que la situation d'une planète proche soit légèrement différente, nous retrouvons immédiatement un comportement en bon accord avec ce schéma dans nos simulations.

cherche s’inscrivent notamment dans le contexte spatial actuel avec les deux missions PLATO ⁵ et JUICE ⁶ qui sont en ce moment à l’étude à l’agence spatiale européenne (ESA).

Ensuite, nous nous sommes limités au cas simple d’un système axisymétrique. Ce cas n’est pas adéquat dans le cas d’une planète, car celle-ci devient alors un “tore” de matière axisymétrique et les interactions que nous étudions perdent un degré de liberté. Il est donc important de passer à trois dimensions, ce qui va être simplement effectué grâce à la modularité du code PLUTO. Le passage à trois dimensions nous permettra également de considérer des champs magnétiques plus complexes (non-axisymétriques), voire réalistes en se basant sur des modèles dynamos (section 8.2) ou même des spectrogrammes observés (*Donati et al., 2008, Fares et al., 2010*).

Les modèles utilisés dans cette étude utilisent les équations de la MHD idéale (sans dissipation). Par conséquent, la dissipation qui existe dans notre système est purement *numérique*, c’est à dire qu’elle provient du schéma numérique et de la grille choisie. Une diffusivité ohmique pourrait être introduite dans l’équation d’induction et permettrait de contrôler facilement le degré de diffusion dans le modèle. Les résultats avec et sans diffusivité seront comparés avec précaution.

Enfin, cette étude ouvre la voie à de nombreux champs d’investigation. On peut par exemple penser à l’effet des interactions magnétiques sur les dérives planétaires (*Vidotto et al., 2009*), l’impact sur le magnétisme stellaire de surface via les connexions magnétiques liant la planète à l’étoile (*Lanza, 2008, 2009*), ou encore leur impact sur le ralentissement de la rotation de l’étoile (*Cohen et al., 2010*). Ces diverses directions seront explorées dans un futur proche.

5. Mission de classe M, <http://sci.esa.int/science-e/www/area/index.cfm?fareaid=104>

6. Mission de classe L, <http://sci.esa.int/science-e/www/area/index.cfm?fareaid=129>

Troisième partie

**Barrières de transport dans les
tokamaks**

Du choix de la topologie magnétique

Sommaire

6.1 Stabilisation de la turbulence par un cisaillement magnétique . . .	104
6.1.1 Résonance et transport à grande échelle	105
6.1.2 La limite cinétique	105
6.1.3 La limite hydrodynamique	107
6.2 Le cas du profil de q inversé	110
6.2.1 Données expérimentales	110
6.2.2 Simulations numériques	111
6.2.3 Simulations gyrocinétiques globales de la turbulence ITG avec profil inversé	113
Conclusions	116

Dans ce chapitre, nous étudions l’impact de la topologie magnétique du tokamak pour la génération de barrières de transport dans le plasma. Nous nous limiterons à des configurations axisymétriques, dont la topologie est contrôlée par le *facteur de sécurité* $q(r)$ (voir section 3.1. Rappelons que q est une fonction de r , le petit rayon du tokamak (voir chapitre 3). Il représente le nombre de tours toroïdaux effectués par une ligne de champ pour un tour poloïdal. Il est défini par $q \equiv \mathbf{B} \cdot \nabla \varphi / \mathbf{B} \cdot \nabla \theta$. Enfin, on caractérise également souvent la topologie magnétique par son *cisaillement magnétique* $s \equiv \frac{r}{q} \frac{dq}{dr}$.

6.1 Stabilisation de la turbulence par un cisaillement magnétique

La valeur du cisaillement magnétique a un impact non négligeable sur les taux de croissances des instabilités dans un tokamak, ce que l’on peut comprendre simplement de la manière suivante. Pour un cisaillement magnétique faible, la courbure des lignes de champ magnétique varie peu avec le rayon et par conséquent les instabilités de type interchange sont moins facilement excitées (*Drake et al., 1996, Beer et al., 1997*). Le cisaillement magnétique faible est alors stabilisant. Dans le cas d’un cisaillement magnétique négatif fort, la courbure des lignes de champ varie beaucoup sur des échelles radiales petites et par suite les instabilités *toroïdales* sont susceptibles d’être stabilisées (*Maget et al., 1999*). Par suite, la limite d’un cisaillement magnétique négatif fort est également stabilisant.

Nous nous concentrons sur l’effet d’un cisaillement faible dans ce chapitre. Nous développons dans cette section les raisons théoriques de penser qu’un cisaillement magnétique faible permet la diminution de la turbulence. La considération des différentes limites fluides et cinétiques soulève une ambiguïté sur l’efficacité du cisaillement magnétique faible à stabiliser le système.

Guidés par l’importance qu’ont certains profils de q pour l’apparition de barrières de transport dans les tokamaks, nous mettrons en lumière les résultats théoriques présentés ci-après à l’aide de simulations gyrocinétiques en section 6.2.

6.1.1 Résonance et transport à grande échelle

L'étude quasi-linéaire du système d'équations gyrocinétique (section 1.2.4) permet de mettre en évidence l'existence de modes dits *résonants* dans les plasmas de tokamak. Une rapide étude de l'instabilité ionique principale des plasmas de cœurs (Annexe E) les caractérise comme étant les plus instables, et montre qu'ils sont localisés autour de leur surface de résonance (voir ci-après). Puisqu'ils sont généralement les plus instables, ils sont la plupart du temps considérés comme responsables du transport radial d'énergie (non désiré) dans un tokamak. On peut aussi penser que la réduction des couplages entre ces modes résonants peut permettre de réduire le transport dû à la turbulence (*e.g.*, dans le cas d'une barrière de transport). Par suite, si ces modes sont très écartés spatialement les uns des autres, et possèdent des extensions spatiales suffisamment petites, leurs interactions seront réduites et *a fortiori* la turbulence le sera aussi. Si l'on note δ la largeur radiale d'un mode résonant, et Δ la distance typique entre deux modes voisins, on peut construire un paramètre dit de Chirikov (*i.e.*, un seuil de stochasticité) qui caractérise une possible transition vers le chaos et par là du transport à grande échelle :

$$\sigma^{\text{Chirikov}} \equiv \frac{\delta}{\Delta}. \quad (6.1)$$

Lorsque σ^{Chirikov} dépasse 1, la transition vers le chaos peut s'effectuer. Dans cette section, nous quantifions ce paramètre afin de comprendre en quoi le profil de q peut permettre de réduire la turbulence.

Lors de l'analyse quasi-linéaire (Annexe E.1), les résonances $\omega = k_{\parallel}v_{\parallel}$ sont mises en évidence *via* des intégrales du type (voir équation (E.12))

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{v_{\parallel}^2}{v_T^2}}}{\omega - k_{\parallel}v_{\parallel}} dv_{\parallel}.$$

On peut immédiatement identifier deux régimes :

- Si $\omega \ll k_{\parallel}v_T$, le terme exponentiel tend vers 1 et la résonance domine. On parle dans ce cas de limite *cinétique*.
- Si $\omega \gg k_{\parallel}v_T$, le terme exponentiel domine la résonance qui ne joue plus de rôle particulier *a priori*. Cette limite correspond à la limite *hydrodynamique* du plasma.

Dans un premier temps nous nous limiterons au cas simplifié d'une géométrie cylindrique, et nous nous placerons dans la limite cinétique. Puis, nous étudierons ce même problème dans une géométrie torique et dans la limite hydrodynamique. Le lecteur moins familier des calculs pedestres peut se reporter à la discussion "géométrique" à la fin de cette sous-section.

6.1.2 La limite cinétique

Dans un premier temps, nous ne considérons que $\omega = k_{\parallel}v_{\parallel}$ en négligeant les termes de courbure et de dérive $E \times B$. Nous prenons cependant en compte la courbure des lignes de champ, mais en négligeant la dérive magnétique qui leur est associée. De plus, nous choisissons une fréquence $\omega \sim \omega_T^*$ (*cf* annexe F) qui est une fréquence résonante pour l'échange d'énergie entre ondes et particules. Nous estimons ensuite la largeur des modes résonants en calculant de manière approchée la variation radiale de leur vecteur d'onde parallèle au champ magnétique (k_{\parallel}). Calculons la forme que peut prendre le gradient dans la direction du champ magnétique, dans une géométrie simplifiée :

$$\begin{aligned} \nabla_{\parallel} &\equiv \mathbf{b} \cdot \nabla \\ &= B^{-1} (B_{\phi} \nabla \phi \partial_{\phi} + B_{\theta} \nabla \theta \partial_{\theta}) \\ &\approx R^{-1} \partial_{\phi} + (qR)^{-1} \partial_{\theta}. \end{aligned}$$

La géométrie cylindrique considérée possède deux composantes périodiques : l'angle θ du cylindre et sa hauteur z (ou φ). Avec ces conditions, on peut naturellement écrire la transformée de Fourier $\phi = \sum \hat{\phi} e^{i(m\theta + n\varphi)}$ et on obtient ainsi l'expression de k_{\parallel} :

$$k_{\parallel} = \frac{1}{R} \left(n + \frac{m}{q} \right). \quad (6.2)$$

Considérons alors une surface magnétique telle que q soit un rationnel, c'est à dire $q(r_{mn}) = -\frac{m}{n}$. Dans ce cas, on remarque que $k_{\parallel}(r_{mn}) = 0$. Il nous faut alors évaluer k_{\parallel} proche de cette surface rationnelle.

De manière générale, on a,

$$\begin{aligned} \frac{dk_{\parallel}}{dr} &= -\frac{m}{Rqr} \underbrace{\frac{r}{q} \frac{dq}{dr}}_s - \underbrace{\frac{dR}{R^2 dr} \left(n + \frac{m}{q} \right)}_{\text{négligeable}} \\ &= \frac{k_{\theta} s}{qR} = \frac{k_{\theta}}{L_s}, \end{aligned}$$

où $k_{\theta} = -\frac{m}{r}$ est le coefficient de Fourier poloidal et $L_s = \frac{qR}{s}$ la longueur de cisaillement magnétique.

Par conséquent, si on fait un développement de Taylor de k_{\parallel} autour de la surface rationnelle on obtient :

$$k_{\parallel}(r_{mn} + x) = 0 + x \left. \frac{dk_{\parallel}}{dr} \right|_{r_{mn}} = \frac{x k_{\theta}}{L_s}. \quad (6.3)$$

De plus, on a à la résonance $\omega \sim k_{\parallel} v_{\parallel}$ d'après l'annexe E et $\omega \sim \omega_T^*$ d'après l'annexe F. Or, $k_{\parallel} v_{\parallel} \sim \frac{x k_{\theta}}{L_s} v_T$ et $\omega_T^* \sim \frac{k_{\theta} \rho_i v_T}{L_T}$. D'où

$$x \sim \frac{L_s}{L_T} \rho_i \equiv \delta. \quad (6.4)$$

On a ainsi évalué la largeur des modes résonnants, qui sont des modes instables où les ondes "pompe" de l'énergie aux particules. On peut à présent évaluer la distance Δ entre deux modes résonnants proches. En faisant un développement limité de l'expression exacte de k_{\parallel} pour le mode $(m+1, n)$, on obtient que $1 - \frac{s\Delta}{r_{mn}} \sim 0$. Par conséquent, la distance entre deux modes résonnants voisins est donnée par

$$\Delta \approx \frac{1}{k_{\theta} s}. \quad (6.5)$$

On notera aussi qu'il est possible de montrer que la distance le séparant d'un autre mode proche $(m, n+1)$ est de l'ordre de $q(r_{mn})\Delta$. Le paramètre de Chirikov est alors

$$\sigma^{Chirikov} \equiv \frac{\delta}{\Delta} = \frac{R}{L_T} \rho_i k_{\theta}. \quad (6.6)$$

Dans le cas des tokamaks, $\rho_i k_{\theta} \sim 0.3$, $L_T \sim 0.3$ et $R \sim 3$. On dépasse ainsi le seuil de stochasticité $\sigma^{Chirikov} = 1$ de manière naturelle. Ce calcul rapide nous permet de comprendre que lorsque le cisaillement magnétique s diminue vers 0, l'extension d'un mode résonnant autour de sa surface de résonance augmente mais la distance entre deux modes résonnants augmente également. Dans cette approche, les modes s'écartent aussi vite qu'ils s'étendent par rapport à s , le paramètre de Chirikov est alors *indépendant* de s . Néanmoins le modèle pris pour faire ce calcul était basé sur l'instabilité ITG en géométrie cylindrique, ce qui n'est pas complètement représentatif de la géométrie d'un tokamak. De plus, nous avons effectué ce calcul dans le cadre de la limite cinétique $w \ll k_{\parallel} v_T$. Nous allons voir à la partie suivante que ce résultat n'est pas générique, et que pour une autre géométrie et une autre limite ce comportement spatial des modes peut conduire à une prédiction analytique différente.

6.1.3 La limite hydrodynamique

Nous allons reprendre le calcul précédent dans le cas de la géométrie toroïdale, et avec la représentation de ballonnement. Les calculs étant assez longs, on pourra trouver en annexe G.2 tous les détails dont nous ne présenterons ici que les grandes lignes. Dans un cylindre, avec des conditions aux limites périodiques, la transformée de Fourier est de la forme $\phi(r)e^{i(m\theta+n\varphi-\omega t)}$. Dans le tore, la forme générale est *a priori* $\phi(r, \theta)e^{i(n\varphi-\omega t)}$. Cependant, les instabilités dans un tokamak semblent développer une anisotropie : le vecteur d'onde parallèle est en général très faible devant le vecteur d'onde perpendiculaire, c'est à dire que l'extension spatiale parallèle des instabilités sera bien plus importante que leur extension perpendiculaire (typiquement, on a $qRk_{\parallel} \sim k_{\perp}\rho_i \lesssim 1$). La représentation de ballonnement est une formulation non classique d'une transformée de Fourier qui prend en compte cette anisotropie, et permet de réduire la dimensionnalité du problème. On pourra se reporter à [Thyagaraja \(1998\)](#) pour les détails de la formulation mathématique, et l'annexe G.1 pour une dérivation simple de l'équation (6.7). Pour notre propos, on pourra retenir la formulation suivante

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_n \hat{\phi}_n(\theta, \theta_0) e^{i\{n(\varphi-q(r)(\theta-\theta_0))-\omega t\}}, \quad (6.7)$$

ainsi que les résultats des dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \partial_{\theta}\phi &\rightarrow \sum_n (-inq + \partial_{\theta}) \hat{\phi}_n e^{i\{n(\varphi-q(r)(\theta-\theta_0))-\omega t\}} = \sum_n \left(irk_{\theta} \hat{\phi}_n + \partial_{\theta} \hat{\phi}_n \right) e^{i\{n(\varphi-q(r)(\theta-\theta_0))-\omega t\}}, \\ \partial_r\phi &\rightarrow \sum_n -inq'(\theta - \theta_0) \hat{\phi}_n e^{i\{n(\varphi-q(r)(\theta-\theta_0))-\omega t\}} = \sum_n ik_{\theta s}(\theta - \theta_0) \hat{\phi}_n e^{i\{n(\varphi-q(r)(\theta-\theta_0))-\omega t\}}, \\ \nabla_{\parallel}\phi &= \frac{1}{R}(\partial_{\varphi} + \frac{1}{q}\partial_{\theta})\phi \rightarrow \sum_n \frac{1}{qR} \partial_{\theta} \hat{\phi}_n e^{i\{n(\varphi-q(r)(\theta-\theta_0))-\omega t\}}, \end{aligned}$$

où $k_{\theta} = -\frac{nq}{r}$, $k_{\parallel}^2 = -\frac{1}{q^2 R^2} \partial_{\theta}^2$ et θ_0 est l'angle de ballonnement (*cf* annexe G.1.1). On pose également $k_{\perp}^2 \rho_i^2 = k_{\theta}^2 \rho_i^2 (1 + s^2(\theta - \theta_0)^2)$. On peut remarquer que le second terme de la dérivée polioïdale est petit devant le premier, car il est lié aux petites échelles de variation spatiales.

De manière similaire au calcul de l'équation (E.9) dans le cas d'une géométrie cylindrique, nous allons à présent utiliser la représentation de ballonnement pour une géométrie torique dans les équations implémentées dans GYSELA (voir partie 1.2.4). Un calcul analogue permet d'obtenir l'équation :

$$\tau(\phi - \langle \phi \rangle_{\theta, \varphi}) - \rho_i^2 \nabla_{\perp}^2 \phi = - \left\{ 1 - \langle J_0 \frac{\omega - \omega^*}{\omega - \omega_{\parallel} - \omega_g} J_0 \rangle_v \right\} \phi, \quad (6.8)$$

où $\langle \cdot \rangle_v \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F_M d^3v$, $\tau = \frac{T_i}{T_e}$, $\omega_{\parallel} = k_{\parallel} v_{\parallel}$ et $\omega_g = i \frac{mv_{G\parallel}^2 + \mu B}{eBRr} (\cos \theta \partial_{\theta} + r \sin \theta \partial_r)$. L'opérateur de gyromoyenne J_0 est défini en équation (1.31). Dans la suite, on prendra son approximation de Padé (équation 1.32), et on admettra qu'il commute avec $\frac{\omega - \omega^*}{\omega - \omega_{\parallel} - \omega_g}$ car l'équilibre varie sur des échelles grandes devant ρ_i (et $J_0(k_{\perp}\rho_i) \sim 1$ si $k_{\perp}\rho_i \ll 1$). Nous allons prendre la limite hydrodynamique de l'équation (6.8), en considérant $\omega \gg k_{\parallel} v_T$, et $k_{\parallel} v_T \approx |\omega_{gth}|^2 \approx k_{\perp}^2 \rho_i^2$.

La limite hydrodynamique nous permet d'approcher l'opérateur $1/(\omega - \omega_{\parallel} - \omega_g)$ de la manière suivante :

$$\frac{1}{\omega - \omega_{\parallel} - \omega_g} \approx \frac{1}{\omega} \left(1 + \frac{\omega_{\parallel}}{\omega} + \frac{\omega_g}{\omega} + \frac{\omega_{\parallel}^2}{\omega^2} + \frac{2\omega_{\parallel}\omega_g}{\omega^2} \right). \quad (6.9)$$

Les termes impairs en ω_{\parallel} le sont aussi en v_{\parallel} . Leur intégration contre la maxwellienne F_M sur tout l'espace des vitesses donnera 0. On obtient après de nombreuses intégrations par parties :

$$\left\langle \frac{\omega - \omega^*}{\omega - \omega_{\parallel} - \omega_g} J_0^2 \right\rangle_v = \frac{\omega - \omega_n^*}{\omega} + \frac{\omega - \omega_p^*}{\omega} \left(\frac{k_{\parallel}^2 v_T^2}{\omega^2} + i \frac{2T}{\omega eBRr} (\cos \theta \partial_{\theta} + r \sin \theta \partial_r) - \frac{k_{\perp}^2 \rho_i^2}{2} \right). \quad (6.10)$$

Si l'on introduit alors la représentation de ballonnement (6.7), on obtient l'équation de Mathieu suivante sur le potentiel de ballonnement $\hat{\phi}_n(\theta, \theta_0)$

$$\left\{ \frac{(\tau + k_{\perp}^2 \rho_i^2) \omega + \omega_n^*}{\omega - \omega_p^*} - \frac{\bar{\omega}_g}{\omega} [\cos \theta + s(\theta - \theta_0) \sin \theta] + \frac{v_T^2}{q^2 R^2 \omega^2} \partial_{\theta}^2 + k_{\theta}^2 \rho_i^2 [1 + s^2(\theta - \theta_0)^2] \right\} \hat{\phi}_n = 0, \quad (6.11)$$

où $\bar{\omega}_g = -\frac{2k_{\theta} T}{eBR}$. Posons alors $y = \theta - \theta_0$. Plaçons-nous dans la limite où les structures sont faiblement ballonnées ($\theta_0 \ll 1$) et concentrées dans la région faible champ du tokamak ($y \ll 1$). On obtient alors :

$$\begin{aligned} \cos(y + \theta_0) &\approx 1 - y\theta_0 - \frac{y^2}{2} \\ y \cdot \sin(y + \theta_0) &\approx y(\theta_0 + y). \end{aligned}$$

On obtient, pour l'équation (6.11) :

$$\begin{aligned} \partial_y^2 \hat{\phi}_n + \left[\frac{\tau + k^2(1 + s^2 y^2) + \Omega_n^*}{\Omega_{\parallel}^2(1 - \Omega_p^*)} + \frac{k^2}{2\Omega_{\parallel}^2}(1 + s^2 y^2) - \right. \\ \left. \frac{\Omega_g}{\Omega_{\parallel}^2} \left(1 + y^2 \left(s - \frac{1}{2} \right) + y\theta_0(s - 1) - \frac{\theta_0^2}{2} \right) \right] \hat{\phi}_n = 0, \end{aligned} \quad (6.12)$$

où on a posé $k^2 = k_{\theta}^2 \rho_i^2$, $\omega_{\parallel}^2 = \frac{v_T^2}{q^2 R^2}$ et $\Omega_a^b = \frac{\omega_a^b}{\omega}$. On peut alors réécrire cette équation aux valeurs propres de la manière suivante :

$$\partial_y^2 \hat{\phi}_n - \lambda(y - \alpha)^2 \hat{\phi}_n = \mu \hat{\phi}_n, \quad (6.13)$$

en posant :

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv \frac{1}{2\Omega_{\parallel}^2} \left(\Omega_g(2s - 1) - k^2 s^2 \frac{3 - \Omega_p^*}{1 - \Omega_p^*} \right), \\ \alpha &\equiv -\theta_0(s - 1) \left(2s - 1 - \frac{k^2 s^2 3 - \Omega_p^*}{\Omega_g 1 - \Omega_p^*} \right)^{-1}, \\ \mu &\equiv -\frac{1}{\Omega_{\parallel}^2} \left(\frac{\tau + k^2 + \Omega_n^*}{1 - \Omega_p^*} - \frac{k^2 \Omega_g}{2} + \frac{\Omega_g \theta_0^2}{2} \left[1 + (s - 1)^2 \left(2s - 1 - \frac{k^2 s^2 3 - \Omega_p^*}{\Omega_g 1 - \Omega_p^*} \right)^{-1} \right] \right). \end{aligned}$$

L'équation (6.13) admet des solutions de la forme $\hat{\phi}_n = \hat{\phi}_n^0 e^{-\frac{(y-y_0)^2}{2\delta_y^2}}$. On peut identifier

$$\begin{cases} \delta_y^4 &= \frac{1}{\lambda} \\ y_0 &= \alpha \\ \frac{\mu}{\lambda} + \lambda^{-1/2} &= 0 \end{cases}.$$

La dernière équation est équivalente à une relation de dispersion. Nous pouvons encore simplifier cette équation en se plaçant dans une configuration à densité quasi-constante dans la direction radiale (ce qui est localement le cas dans le cœur du plasma), c'est à dire $\omega_n^* = 0$. Alors, si on se place également dans le cas où $\omega_p^* = \omega_T^* + \omega_n^* \gg \omega$ (interaction onde-particule un peu moins efficace que dans le cas précédent, cf Annexe F), on obtient

$$-(\tau + k^2) \frac{\omega}{\omega_p^*} - \frac{\omega_g}{\omega} + \frac{k^2}{2} - \frac{\omega_{\parallel} \omega_g^{1/2}}{\sqrt{2} \omega^{3/2}} \left(2s - 1 - k^2 s^2 \frac{\omega}{\omega_g} \right)^{1/2} = 0. \quad (6.14)$$

Le dernier terme est négligeable, car il est du même ordre que $\frac{\omega_g}{\omega}$ et k^2 qui sont nos paramètres d'ordering. Par suite, on peut approcher ω par

$$\omega \approx i \left(\frac{\omega_g \omega_p^*}{\tau + k^2} \right)^{1/2}. \quad (6.15)$$

On peut alors écrire, pour la largeur du mode δ_y en y ,

$$\delta_y = \lambda^{-1/4} \approx \left[-\frac{2(\tau + k^2)\omega_{\parallel}^2}{\omega_g \omega_p^*} \right]^{1/4} \left(-i(2s - 1) \left[(\tau + k^2) \frac{\omega_g}{\omega_p^*} \right]^{1/2} - k^2 s^2 \right)^{-1/4}. \quad (6.16)$$

Si on note δ la largeur radiale du mode, et en rappelant que $k_r = k_{\theta} s y$, on trouve que

$$\delta_y \sim \frac{1}{\delta k_{\theta} s}.$$

D'où, finalement,

$$\delta \sim \frac{1}{k_{\theta} s} \left[-\frac{2(\tau + k^2)\omega_{\parallel}^2}{\omega_g \omega_p^*} \right]^{-1/4} \left(-i(2s - 1) \left[(\tau + k^2) \frac{\omega_g}{\omega_p^*} \right]^{1/2} - k^2 s^2 \right)^{1/4}. \quad (6.17)$$

La largeur des modes se décompose en deux termes, qui donnent une dépendance de la largeur des modes en $s^{-1/2}$ et $s^{-3/2}$, au lieu de s^{-1} à l'équation (6.4) dans la limite cinétique. Selon le formalisme choisi, on voit ainsi que le paramètre de Chirikov (6.1) peut avoir une dépendance différente en s ; et qu'il est cohérent de considérer que les modes peuvent croître radialement moins vite qu'ils ne s'écartent. Ainsi, un faible cisaillement s du facteur de sécurité q peut favoriser une décroissance de la turbulence.

On représente schématiquement ces résultats sur la figure 6.1. On voit immédiatement que lorsque l'on fait tendre s vers 0, le couplage radial entre modes devient plus difficile, et par conséquent le transport peut être réduit.

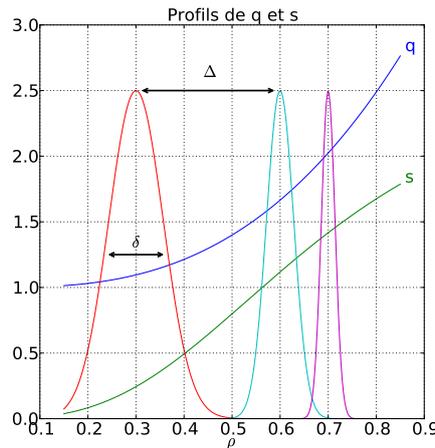


FIGURE 6.1 – Profil radial d'un facteur de sécurité q et de son cisaillement s . La dépendance de la structure radiale des modes résonants en fonction de s est représentée par les trois courbes gaussiennes.

6.2 Le cas du profil de q inversé

Les résultats analytiques obtenus dans la section précédente (6.1) conduisent naturellement à considérer des profils de q dits *inversés*, qui présentent un cisaillement nul en leur minimum. Nous traçons en figure 6.2 un profil de q monotone (en bleu), et un profil inversé (en rouge). Nous représentons les positions des surfaces de résonance par des points bleus et rouges sur ces deux courbes. On voit immédiatement un *trou* de surfaces résonantes au centre du profil inversé, autour de sa valeur minimale. Ce trou est réminiscent de l'écartement des surfaces résonantes lorsque s devient petit.

Différentes raisons expliquent la présence de ce trou. Tout d'abord, puisque \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , on pourrait s'attendre à ce que les courbes de q soient remplies de points représentant les surfaces résonantes. Cela serait effectivement le cas si $q = -m/n$ pouvait prendre une infinité de valeurs, c'est à dire si m et n pouvaient prendre une infinité de valeurs. Or, nous savons que les modes dont la longueur d'onde transverse est inférieure au rayon de Larmor ionique thermique sont amortis, car les particules ne ressentent alors qu'une moyenne au cours de leur mouvement cyclotronique. Par suite, la gamme de m disponible est réduite, et l'on ne dispose alors que d'un nombre fini de surfaces résonantes. Ensuite, la répartition d'un nombre fini de rationnels m/n dans \mathbb{R} (où m et n sont bornés) est anisotrope et on observe une déplétion de surfaces résonantes autour des rationnels d'ordre bas¹ (on observe effectivement des *trous* autour de $q \in \{1.5, 2\}$ à la figure 6.2). En combinant habilement ces propriétés, on peut créer un profil de q inversé dont la valeur minimale est légèrement supérieure à un rationnel d'ordre bas. Alors, on crée un profil qui présente naturellement un large déficit de surfaces résonantes autour de son minimum (courbe rouge sur la figure 6.2). Dans ce cas, *Garbet et al.* (2001) estiment la taille du trou central par

$$d_{\text{trou}} \sim \sqrt{\frac{2q_{\min}\rho_{\star}}{n_0\rho_{\min}q''_{\min}}}, \quad (6.18)$$

où q_{\min} est la valeur minimale de q , ρ_{\min} le rayon normalisé correspondant et $q''_{\min} = \left. \frac{d^2q}{dr^2} \right|_{\min}$ (on pourra trouver la dérivation détaillée de cette formule en annexe H). On voit que $d_{\text{trou}} \sim \rho_{\star}^{1/2}$. De plus, on sait également que la longueur de corrélation spatiale de la turbulence est de l'ordre de $5\rho_i$, et décroît par conséquent comme ρ_{\star} . Par suite, la taille du trou de surface résonantes décroît moins vite que la longueur de corrélation de la turbulence avec ρ_{\star} . On s'attend alors à ce que l'effet d'un profil de q inversé soit amplifié lorsque le paramètre ρ_{\star} du plasma décroît.

Nous montrons ensuite des résultats expérimentaux (section 6.2.1) et numériques (section 6.2.2) de la littérature confirmant l'effet particulier de la géométrie magnétique. Puis, nous présentons des simulations gyrocinétiques globales effectuées avec le code GYSELA, qui apportent un éclairage neuf ces résultats expérimentaux et théoriques (section 6.2.3).

6.2.1 Données expérimentales

Le rôle d'un profil de q inversé pour la création de barrières de transport internes a été mis en évidence de manière claire dans différents tokamaks (*Connor et al.*, 2004), à la fois sur les profils de température ionique et électronique. Un exemple frappant est certainement la décharge 51594 du *Joint European Torus* (JET) (*Joffrin et al.*, 2003), où le rôle du profil de q inversé et des surfaces rationnelles d'ordre bas apparaît clairement. La figure 6.3 est tirée de *Joffrin et al.* (2003). C'est une carte temps-rayon du paramètre $\rho_T^* = \rho_s/L_T$ (*Joffrin et al.*, 2002), où ρ_s est

1. Tout rationnel r peut se décomposer de sous la forme $r = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$, avec $a_i \in \mathbb{N}$. L'ordre du rationnel est alors donné par le rang k de la série $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ nécessaire à sa décomposition.

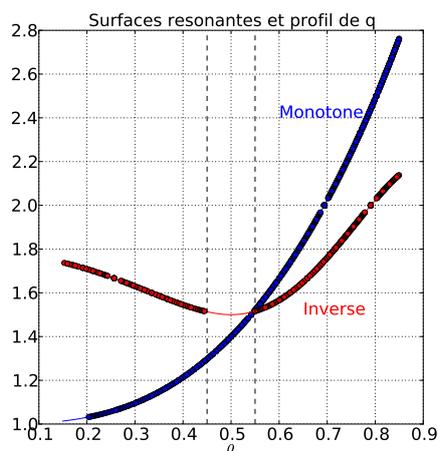


FIGURE 6.2 – Profil radial de deux profils de q monotone (bleu) et inversé (rouge). Les points rouges et bleu représentent les positions des surfaces résonantes résolues par nos simulations.

le rayon de Larmor électronique et L_T la longueur de gradient de température électronique. Dans une barrière de transport, le profil de température est très raide (longueur de gradient très petite), et par conséquent un ρ_T^* grand témoigne d'une barrière de transport. Nous pouvons voir l'apparition de la barrière de transport lors du passage de la surface de résonance $q = 2$ au centre du plasma. Puis, les deux *ailes* témoignent de la séparation en deux barrières de transport suivant les deux valeurs $q = 2$ sur le profil du facteur de sécurité.

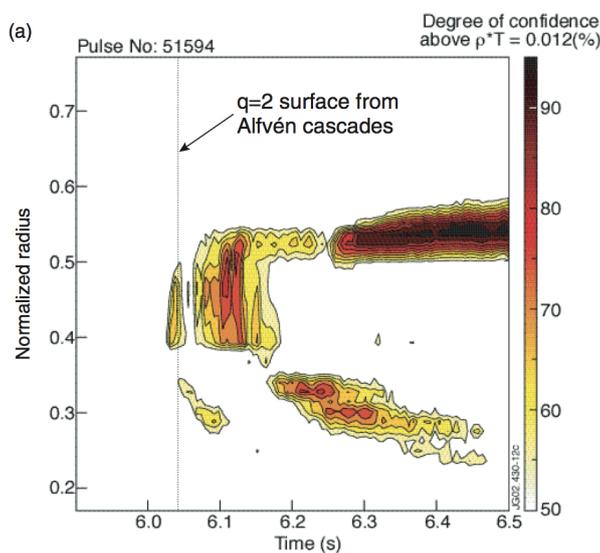


FIGURE 6.3 – Carte temps-rayon du paramètre ρ_T^* dans la décharge 51594 du JET, d'après (Joffrin et al., 2003). Une valeur élevée de ρ_T^* témoigne de l'apparition d'une barrière de transport.

Enfin, de nombreuses autres barrières de transport internes liées à des profils de q inversés ont été observées dans d'autres tokamaks, tels que ASDEX Upgrade (Wolf et al., 2001), D-IIID (Rice et al., 1996) ou encore JT-60U (Koide and JT-60 Team, 1997).

6.2.2 Simulations numériques

Divers travaux numériques ont tenté de mettre en évidence le rôle particulier des surfaces résonantes rationnelles d'ordre bas dans la création de barrières de transport. Garbet et al. (2001) ont mené des simulations numériques de turbulence ITG en approximation fluide. Ils ont mis

en évidence la création d'une barrière de transport pour des profils de q inversés dont la valeur minimale est un rationnel d'ordre bas. A titre d'exemple, on montre en figure 6.4 les résultats de ces simulations. Dans le cas monotone (L), le profil de température ne présente pas de signe particulier. Dans les deux autres cas en revanche, une barrière de transport est créée à la position du minimum du profil de q . Ces simulations semblent donc reproduire l'expérience (section 6.2.1), et corrobore notre prédiction analytique dans le cas hydrodynamique (section 6.1). Il convient toutefois de noter que ces simulations ne prennent en compte que les modes résonants, dans le formalisme fluide (*cf* section 6.1).

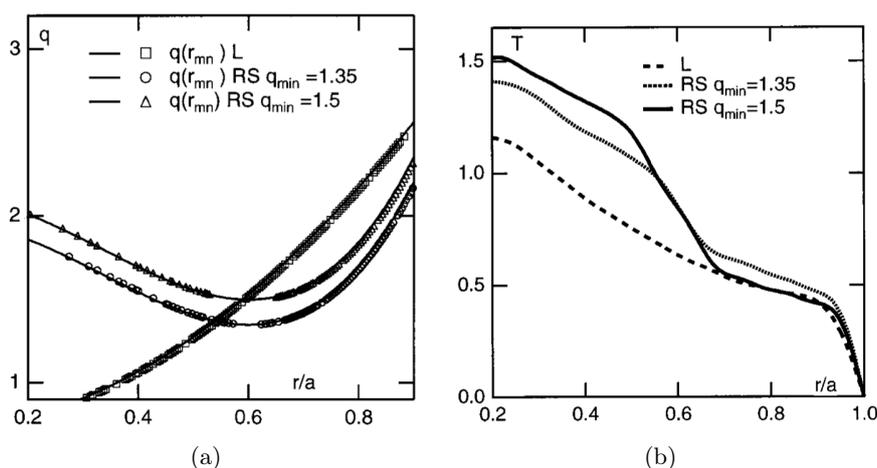


FIGURE 6.4 – (a) Profils de q considérés par [Garbet et al. \(2001\)](#). Les symboles sur les courbes correspondent au modes résonants inclus dans la simulation (*cf* figure 6.2) (b) Profil de température associés. On observera la barrière de transport au centre du profil dans les cas $q_{\min} = 1.35$ et $q_{\min} = 1.5$. Ces deux figures sont tirées de [Garbet et al. \(2001\)](#).

Des simulations plus complètes, basées sur la description gyrocinétique et prenant en compte les modes résonants et non-résonants, ont toujours échoué à reproduire ces résultats. [Candy et al. \(2004\)](#) ont en effet montré que le transport turbulent dans une simulation gyrocinétique n'est pas réduit dans le cas d'un profil de q inversé. Malgré la déplétion des surfaces résonantes autour du minimum de q , il existe dans ces simulations des modes non-résonants qui "remplissent" le trou de modes résonants et contribuent de manière non négligeable au transport turbulent. Bien que d'amplitude faible, les résultats de simulation tendent à montrer l'importance des modes non-résonants : ils semblent remettre en cause la compréhension (section 6.1) que l'on peut avoir de l'effet d'un profil de q inversé sur la turbulence.

En effet, les deux différences principales entre les simulations de [Garbet et al. \(2001\)](#) et [Candy et al. \(2004\)](#) sont les modélisations fluides/gyrocinétiques et la prise en compte ou non des modes non résonants. Notre étude analytique (section 6.1) prédit une différence de comportement entre les approximations fluides et cinétiques, cependant notre calcul ne prend pas en compte la dynamique non-linéaire du système. Par suite, il est difficile d'estimer si la différence fluide/cinétique peut permettre à elle-seule d'expliquer les divergences des simulations.

Dans la partie suivante (section 6.2.3), nous reproduisons une partie de ces résultats à l'aide du code gyrocinétique GYSELA. Nous mettons en évidence comment réconcilier les deux approches fluides et cinétique, et indiquons la route à suivre afin de mieux comprendre comment le profil de q peut influencer l'apparition de barrières de transport dans les tokamaks.

6.2.3 Simulations gyrocinétiques globales de la turbulence ITG avec profil inversé

Afin de vérifier si les arguments quasi-linéaires (section 6.1) et leur extension aux profils de q inversés sont réalistes lorsque toute la dynamique du plasma est prise en compte, nous conduisons des simulations numériques gyrocinétique avec le code GYSELA (voir section 1.2.4). Ces résultats ont été publiés dans [Sarazin et al. \(2010b\)](#), voir à la fin de ce chapitre.

Effet faible du profil inversé

Nous avons considéré deux profils de q différents, dits *monotone* et *inversé* (cf figure 6.2). Ces profils sont donnés par les formules suivantes

$$q(\rho) = q_0 + (q_a - q_0)\rho^2 \quad (6.19)$$

$$q(\rho) = q_{\min} + C_2 (\rho^2 - \rho_{\min}^2)^2 + C_3 (\rho^2 - \rho_{\min}^2)^3. \quad (6.20)$$

Nous rappelons que $\rho = r/a$ est le rayon normalisé. Par suite, q_0 est la valeur de q en $\rho = 0$ (centre), q_a en $\rho = 1$ (bord), et q_{\min} la valeur du facteur de sécurité en son minimum dans le cas du profil inversé. La définition du profil inversé (6.20) est identique à celle considérée par [Garbet et al. \(2001\)](#). Les coefficients C_2 et C_3 qui apparaissent dans sa définition sont donnés par

$$C_2 = \frac{\rho_{\min}^6 (q_a - q_{\min}) + (1 - \rho_{\min}^2)^3 (q_0 - q_{\min})}{\rho_{\min}^4 (1 - \rho_{\min}^2)^2},$$

$$C_3 = \frac{\rho_{\min}^4 (q_a - q_{\min}) + (1 - \rho_{\min}^2)^2 (q_0 - q_{\min})}{\rho_{\min}^4 (1 - \rho_{\min}^2)^2}.$$

Des simulations jumelles (*i.e.*, qui ne diffèrent que par le choix du profil de q) ont été menées avec différentes valeurs de ρ_* . L'ensemble des résultats est consistant, aussi nous ne détaillons ici que les résultats obtenus pour $\rho_* = 1/128$. C'est une valeur suffisamment basse pour que la longueur de corrélation de la turbulence soit de l'ordre de la moitié de la taille du trou de surface résonantes localisé au niveau du minimum de q (voir equation (6.18)). Dans ce cas, la grille de calcul $N_r \times N_\theta \times N_\varphi \times N_{v_{G\parallel}} \times N_\mu$ est de $256 \times 256 \times 128 \times 128 \times 8$, c'est à dire 2^{23} points de grille.

Il apparaît clairement dans ces deux simulations que le profil de q inversé ne produit pas l'effet attendu. En effet, on peut voir en figure 6.5 les profils de température (panneau (a)) et de gradient de température R/L_T (panneau (b))² dans les cas monotone (*monotonous*) et inversé (*hollow*). Bien que légèrement différents, il n'y a aucun raidissement du profil (accroissement de R/L_T) au niveau du minimum de q . Ainsi, aucune barrière de transport n'est observée.

Afin de vérifier que le profil de q ne semble pas avoir d'influence significative sur le transport, nous calculons le flux de chaleur turbulent Q défini par

$$Q(r, t) = \left\langle \int d^3v \left(\frac{v_{G\parallel}^2}{2} + \mu B \right) (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{e}_r) J_0 \bar{f} \right\rangle_{fs}, \quad (6.21)$$

où nous rappelons que $\langle \cdot \rangle_{fs}$ est la moyenne sur une surface de flux, définie en equation (1.42). On peut voir sur la figure 6.5 les profils moyens du flux de chaleur, et en figure 6.6 le flux de chaleur turbulent tracé en fonction du rayon r (abscisse) et du temps (ordonnées). Les deux cartes sont très similaires. Le flux de chaleur turbulent ne semble pas être fortement modifié dans la région du

2. On notera dans le panneau (b) que le seuil d'instabilité linéaire (courbes fines) dépend de r dû à la variation radiale du facteur de sécurité. Cela explique pourquoi le profil de R/L_T varie autant radialement.

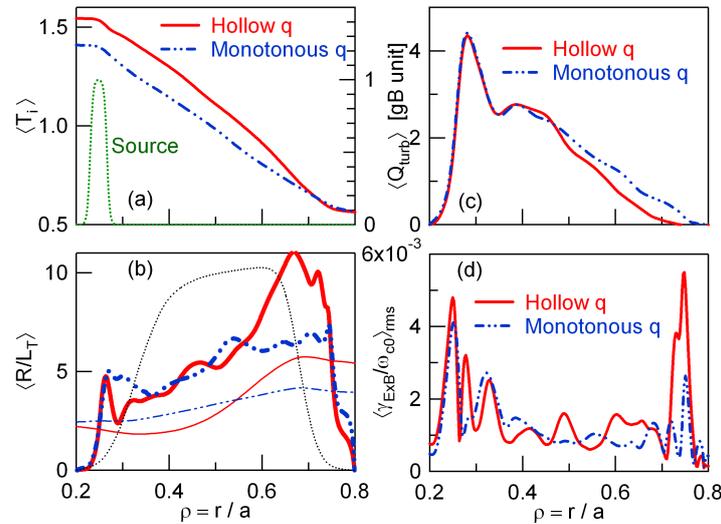


FIGURE 6.5 – (a) Moyenne temporelle des profils de température ionique. La courbe verte représente la source de chaleur normalisée qui maintient le système dans un état instable vis à vis de l’ITG. (b) Profil du gradient de température ionique R/L_T . La courbe noire est le profil initial, les courbes fines correspondent au seuil de l’instabilité. (c) Flux de chaleur turbulent. (d) Cisaillement $E \times B$ (*rms*).

trou de surface résonantes (région entourée par les deux lignes blanches verticales dans la figure 6.6(b)). Cependant, la légère différence entre les courbes du panneau (c) de la figure 6.5 reflète que le cas inversé présente moins d’avalanches, c’est-à-dire moins de transport à grande échelle, ce qui réduit certainement le transport dans les régions externes du plasma (Sarazin *et al.*, 2010b). Ceci est confirmé par les figures 6.6(d) et 6.6(d) qui représentent l’évolution temporelle du flux de chaleur turbulent au centre de la boîte, ainsi que ses propriétés statistiques. En particulier, il apparaît clairement au panneau (d) que la simulation avec profil de q inversé présente moins d’avalanches (phénomènes de transport à grande échelle) que la simulation à profil parabolique, dont l’histogramme est bien plus asymétrique.

Deux pistes au moins peuvent être envisagées afin d’expliquer pourquoi nous n’obtenons pas de barrières de transports dans le cas du profil de q inversé :

- Le paramètre de Chirikov reste plus grand que 1, malgré le profil inversé (voir section 6.1.1).
- Des modes non résonants sont excités et transportent l’énergie vers l’extérieur.

Les résultats de la partie précédente (section 6.1) laissent à penser que l’extension radiale des modes résonants peut être suffisamment grande pour dépasser le trou. Alors, les modes résonants peuvent se coupler radialement, et par suite la turbulence a peu de chances d’être réduite. Il existe effectivement de tels modes dans notre simulation. Ce phénomène avait été notamment observé par Candy *et al.* (2004). Cependant, l’analyse doit être poursuivie plus en profondeur afin de savoir si ce sont ces modes qui transportent l’énergie vers l’extérieur.

Nous observons également le développement de modes non résonants (c’est-à-dire, dont les nombre d’onde polôïdaux m et toroïdaux n sont tels que $-m/n$ ne correspond pas à une valeur de q dans le tokamak) qui sont excités non-linéairement dans nos simulations. Ils sont notamment excités au centre la boîte, dans le trou de surface résonantes. Ces modes transportent l’énergie vers l’extérieur et peuvent être responsables du flux de chaleur observé. On peut comprendre l’excitation de ces modes du fait du caractère particulier de la turbulence ITG, qui est dominée par des *avalanches* (voir par exemple figure 6.6(b)). Ces avalanches, largement observées dans de nombreuses simulations numériques (Idomura *et al.*, 2009, McMillan *et al.*, 2009, Sarazin

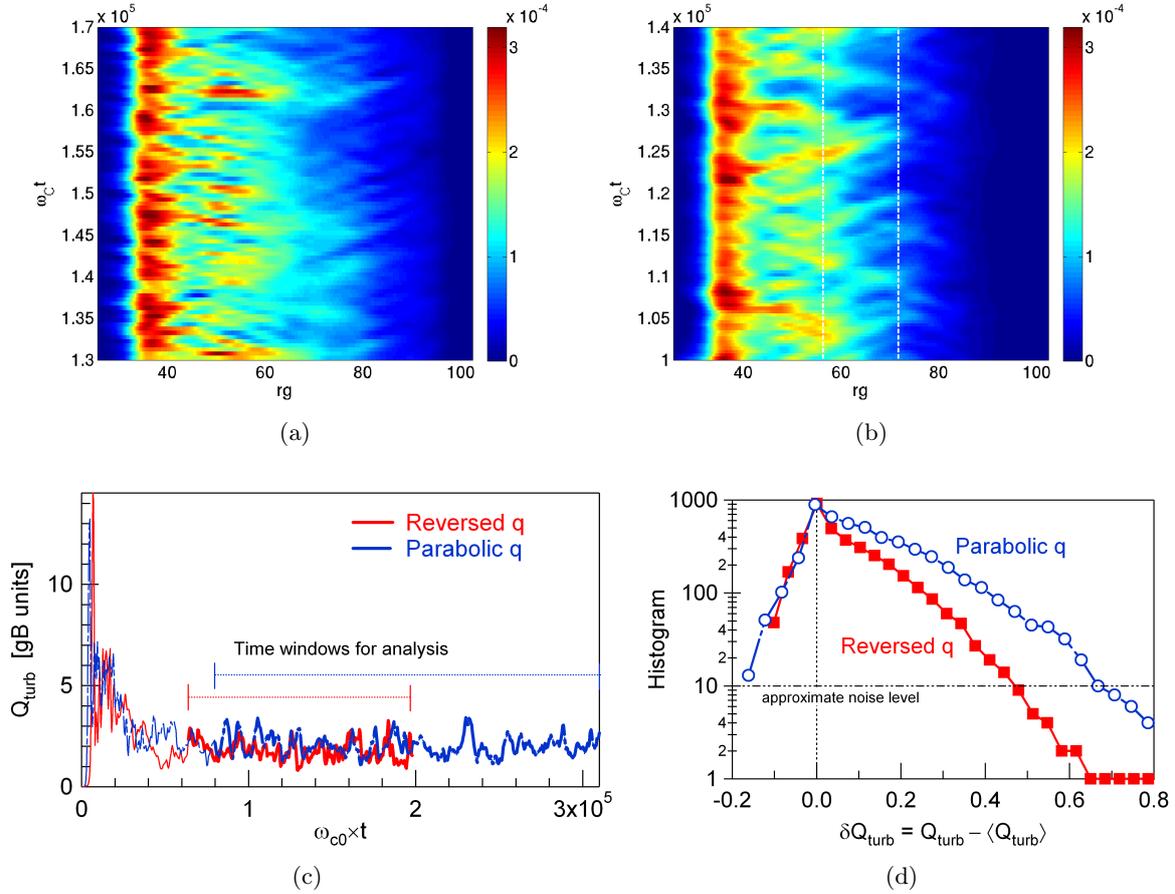


FIGURE 6.6 – (a) Carte rayon-temps du flux de chaleur turbulent dans le cas monotone. (b) Carte rayon-temps du flux de chaleur turbulent dans le cas inversé. Les deux lignes blanches verticales représentent les bords du trou de surfaces résonantes. (c) Evolution temporelle des flux de chaleur turbulents à $\rho = 0.5$ dans les deux simulations. (d) Histogramme des flux de chaleur turbulents au centre de la boîte, sur les fenêtres temporelles indiquées au panneau (c). La droite horizontale (*noise level*) indique la limite à laquelle la statistique devient trop faible.

et al., 2010a), se propagent de façon balistique à une vitesse qui correspond à une fraction de la vitesse diamagnétique $v_i^* \sim \rho_* v_T$ (Sarazin *et al.*, 2011). Par ailleurs, l'amortissement de ces avalanches est certainement dominé par l'amortissement Landau des modes non-résonants qui est approximativement donné par³ $\gamma_L \sim -k_{\parallel} v_T e^{-(\omega/k_{\parallel} v_T)^2/2}$. Les avalanches traversent le trou, ce qui signifie que le temps d'amortissement Landau τ_{damp} est certainement plus lent que le temps de propagation des avalanches à travers le trou τ_{aval} . Dans ce cas, on ne peut créer de barrière de transport car les avalanches ne sont pas stoppées.

Réconcilier les résultats de simulations

Afin de réconcilier les résultats fluides et gyrocinétiques contradictoires, et de comprendre si l'absence de barrières de transport dans nos simulations globales est due aux modes non-résonants ou à la structure radiale des modes résonants, nous avons conduit l'expérience numérique suivante.

Nous avons poursuivi la simulation avec profil de q inversé en supprimant artificiellement la plupart des modes non-résonants à chaque pas de temps. Cette opération consiste à appliquer

3. Lorsque les modes sont loin de leur surface résonante, l'amortissement Landau est grand car $k_{\parallel} v_T$ est grand.

un filtre conique dans l'espace de Fourier. Pour chaque mode toroïdal n , nous ne retenons que les modes poloïdaux m tels que $nq_{\min} \leq m \leq nq_{\max}$. Quelques modes non-résonants ne sont pas filtrés par ce critère, cependant leur nombre est grandement réduit. Les modes résonants sont, quant à eux, tous conservés. Ainsi, nous simulons un système directement comparable aux simulations fluides de *Garbet et al.* (2001), qui ne considèrent que les modes résonants.

Ce filtre est appliqué au cas du profil inversé à partir de $t = 128000 \omega_{c0} t_0$. Nous traçons en figure 6.7 l'évolution temporelle du flux de chaleur turbulent dans trois régions radiales du plasma. Dans la région centrale (bleu), le flux de chaleur se stabilise rapidement après l'activation du filtre. Il est deux ordres de grandeur inférieur dans la région du trou de surfaces résonantes (rouge). Enfin, il devient complètement négligeable dans la région externe du plasma (vert). Ce comportement n'apparaît pas lorsque l'on effectue la même expérience numérique dans le cas du profil monotone.

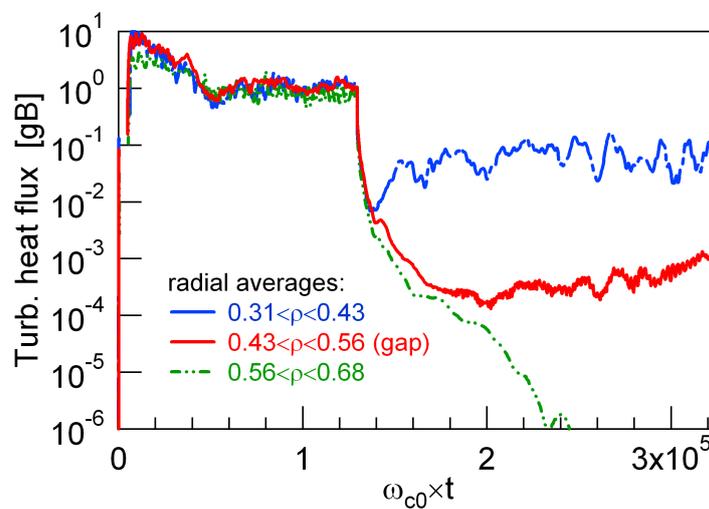


FIGURE 6.7 – Evolution du flux de chaleur turbulent radial dans trois régions radiales de la simulation. Le filtre de Fourier conique est mis en route à partir de $128000 \omega_{c0} t_0$.

De fait, la turbulence est complètement réduite dans le trou. On peut voir en figure 6.8 deux coupes poloïdales des fluctuations du potentiel électrique, avant et après l'application du filtre conique. Dans le premier panneau, la turbulence est bien développée et s'étend sur tout le domaine radial. Dans le second panneau on voit qu'elle est confinée au centre du plasma, juste avant le trou du surfaces résonantes symbolisé par les deux cercles en tirets noirs. Les deux panneaux de droite montrent quant à eux l'effet du filtre de Fourier. Dans le premier panneau, le spectre est développé sur de nombreuses harmoniques. Les modes résonants sont compris entre les deux lignes blanches. Le filtre sélectionne effectivement uniquement ces modes, comme on peut le voir dans le second panneau de droite.

Les avalanches ne traversent donc pas le trou, et par conséquent une barrière de transport se crée. L'effet est peu visible sur le profil de température, car la barrière est censée se créer sur un temps de confinement de l'énergie, qui est bien plus grand que la fenêtre temporelle explorée dans cette simulation. D'autres détails sur ces simulations pourront être trouvés dans *Sarazin et al.* (2010b) (voir à la fin de ce chapitre).

Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons esquissé une explication simple du rôle que jouent les profils inversés du facteur de sécurité pour l'apparition de barrières de transport dans les tokamaks. A l'aide de simulations gyrocinétiques, nous avons fait le lien entre des résultats des travaux passés

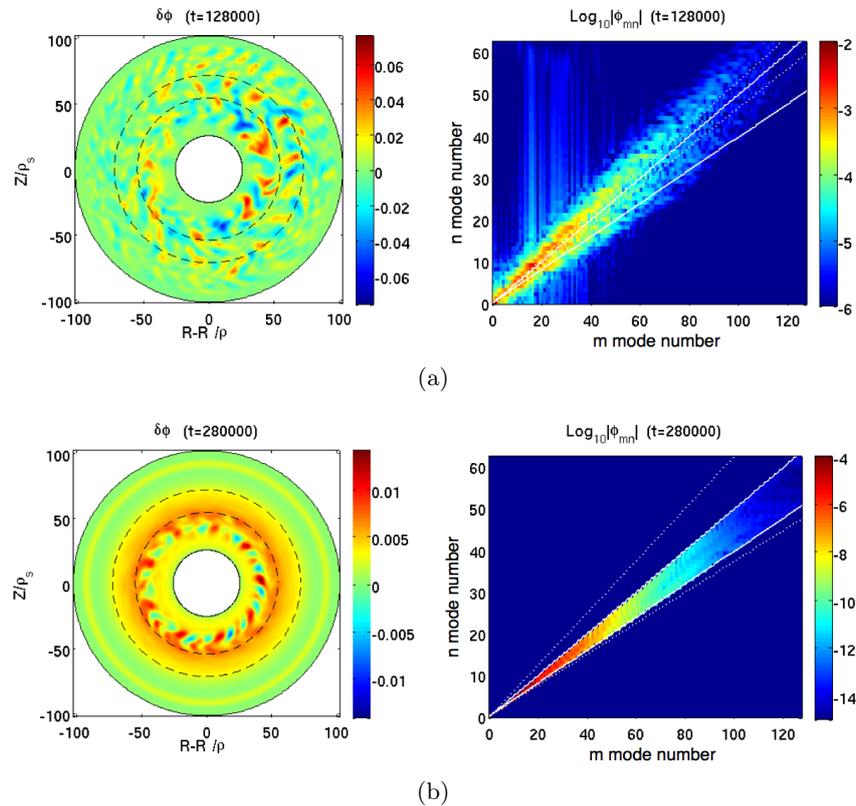


FIGURE 6.8 – Coupe poloïdale des fluctuations du potentiel électrostatique avant et après l’application du filtre (panneaux de gauche). Les cercles en tirets noirs représentent les bords du trou de surfaces résonantes. Sur les panneaux de droite sont tracés les spectres de Fourier aux mêmes instants, au centre de la boîte. L’effet du filtre apparaît de manière claire dans le dernier panneau.

qui semblaient contradictoires. De plus, nous avons mis en évidence l’importance des modes non-résonants dans cette problématique, qui peuvent mettre en défaut l’explication simple que nous avons proposée. Plusieurs questions se posent alors:

- Les modes non-résonants sont naturellement présents dans les expériences. Pourtant, celles-ci autorisent bien la création de barrières de transport corrélées au profil de q . Une analyse détaillée des modes non-résonants dans les simulations gyrocinétique est alors nécessaire pour comprendre pourquoi une barrière de transport basée sur un profil de q inversé est complexe à obtenir dans ce formalisme. Un premier pas dans cette direction sera détaillé au chapitre 8, section 8.3.
- Les expériences montrent que dans la plupart des barrières de transport observées, une vitesse poloïdale de dérive $E \times B$ est détectée semble jouer un rôle important dans le processus de création. Afin d’explorer ce deuxième ingrédient essentiel aux barrières de transport, une étude de la création d’une barrière de transport par un cisaillement de vitesse poloïdale $E \times B$ est présentée au chapitre 7.
- Enfin, de nombreuses expériences reportent également l’observation de vitesses toroïdales importantes sur les lieux d’apparition de barrières de transport dans les tokamaks (*Mantica et al., 2009, 2011*). L’effet de tels écoulements sur la turbulence gyrocinétique est à l’étude, et sera poursuivie à l’issue de cette thèse à l’aide des techniques mises en place en section 7.2.2.

Flux-driven gyrokinetic simulations of ion turbulent transport at low magnetic shear

Y Sarazin¹, A Strugarek^{1,2}, G Dif-Pradalier³, J Abiteboul¹, S Allfrey¹, X Garbet¹, Ph Ghendrih¹, V Grandgirard¹, G Latu¹

¹ CEA, IRFM, F-13108 Saint-Paul-lez-Durance, France.

² CEA, IRFU, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France.

³ Center for Astrophysics and Space Science, U.C.S.D., La Jolla, CA 92093, USA.

E-mail: yanick.sarazin@cea.fr

Abstract.

Ion Temperature Gradient driven turbulence is investigated with the global full- f gyrokinetic code GYSELA for different magnetic equilibria. Reversed shear and monotonous q profile cases do not exhibit dramatic changes nor in the dynamics nor in the level of turbulence, leading to similar mean profiles. Especially, no transport barrier is observed in the vicinity of $s = 0$ in the general case, although the radial extent of the gap without resonant modes is larger than the typical turbulence correlation length. Conversely, a transport barrier is found to develop in the gap region if non resonant modes are artificially suppressed from the simulation. Such simulations tend to reconcile previously published contradictory results, while extending the analysis to more realistic flux-driven gyrokinetic regimes.

1. Introduction

Turbulence and transport studies in tokamak plasmas primarily aim at investigating routes towards improved confinement regimes. In the core of fusion plasmas, internal transport barriers (ITBs) are commonly reported in magnetically confined fusion plasmas, provided the heating power exceeds some critical value (see [1] for a review on experimental results). Once the barrier is triggered, the following positive feed back loop is supposed to play a key role in its sustainment: the strong pressure gradient (and possibly its curvature as well) at the barrier position drives strongly sheared poloidal flows via the radial force balance; this shear has now long proven efficient in stabilizing the turbulence through decorrelation processes of convective cells [2]. Two main ingredients are invoked to explain the empirical threshold for the onset of ITBs (see e.g. [3] for a review): velocity shear and magnetic topology. The former can be either intrinsic, i.e. self-generated by the turbulence itself, or extrinsic in the presence of sources of momentum. This issue has been extensively studied in the literature and will not be addressed here (see [4] for an overview). The later can affect plasma turbulence at least in two ways: either through large (negative) magnetic shear $s = d \log q / d \log r$, with q the safety factor profile, which is linearly stabilizing, or due to the rarefaction of resonant surfaces close to low order rational q surfaces and/or low shear regions $s \approx 0$ [5]. As a matter of fact, the formation of ITBs has been experimentally associated with the presence of rational q surfaces in both JET and ASDEX Upgrade plasmas [8, 9].

From the non-linear theoretical side, the possibility to trigger ITBs in the vicinity of low magnetic shear and/or low order rational q values remains an open issue. Indeed, contradictory results have been obtained with first principle numerical simulations of core plasma turbulence. Fluid simulations retaining resonant modes only have reported impressive agreements with experimental observations, especially regarding the splitting of the ITB when two $q = 2$ magnetic surfaces were present in the plasma [5]. However, such results were not recovered with both local and global gyrokinetic simulations [6]. Non-resonant modes were found to play a critical role in driving finite turbulent heat flux in the vicinity of $s \approx 0$. Later on, similar simulations with fully kinetic electrons, including trapped electron modes, reported fine scale corrugations on the electron temperature and density profiles close to low order q rational values, resulting from the local increase of self generated zonal flows [7].

The role of a large gap region without resonant modes in the case of reversed shear profiles is re-investigated in this paper and extended to flux-driven global gyrokinetic simulations of ion temperature gradient driven turbulence. Section 2 highlights the main equations which are solved. Two cases are then compared in section 3, with (hollow q profile) and without (monotonous q profile) any large radial gap in resonant modes. Finally, the case with an even larger gap is considered in section 4, when Fourier filtering only retains those modes which are resonant within the simulation domain.

2. The model

The numerical investigation is performed with the global gyro-kinetic code GYSELA, which models the self consistent time evolution of the full ion distribution function f in the electrostatic limit. The electron response is taken adiabatic. The semi-Lagrangian numerical scheme is detailed in reference [10]. Most of the simulations reported in this paper are performed with the set of equations detailed in reference [11]. Such a system neglects small order terms (of order $\beta \ll 1$, the ratio of kinetic over magnetic pressure) which are proportional to the parallel current. The simulations reported in section 4 make use of the recently upgraded set of equations, which accounts for the conservative formulation consistent with modern gyro-kinetic theory [12]. They read:

$$B_{\parallel}^* \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot \left(B_{\parallel}^* \frac{d\mathbf{x}_G}{dt} f \right) + \frac{\partial}{\partial v_{G\parallel}} \left(B_{\parallel}^* \frac{dv_{G\parallel}}{dt} f \right) = \mathcal{C}(f) + S \quad (1)$$

where the equations of motion of the guiding centers are given below:

$$B_{\parallel}^* \frac{d\mathbf{x}_G}{dt} = v_{G\parallel} \mathbf{B}^* + \frac{\mathbf{b}}{e_s} \times \nabla \Xi \quad (2)$$

$$B_{\parallel}^* \frac{dv_{G\parallel}}{dt} = -\frac{\mathbf{B}^*}{m_s} \cdot \nabla \Xi \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{with } \nabla \Xi &= \mu_s \nabla B + e_s \nabla \bar{\phi} \\ \mathbf{B}^* &= \mathbf{B} + (m_s/e_s) v_{G\parallel} \nabla \times \mathbf{b} \end{aligned}$$

These modified equations only differ from the old ones by small terms, proportional to $(m_s v_{G\parallel} / e_s B^2) \mu_0 j_{\parallel}$. This ratio is indeed very small, of the order of $\rho_*(a/qR) \ll 1$ for thermal particles ($\rho_* = \rho_{c0}/a$, with ρ_{c0} the thermal gyro-radius and a the minor radius of the torus). Therefore, no significant impact on the results presented here is to be expected. Here, $\bar{\phi}$ denotes the gyro-averaged electric potential, where the Bessel function is replaced by a Padé approximation. The scalar B_{\parallel}^* is simply $B_{\parallel}^* = \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{b}$, with $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ the unit vector along the magnetic field line at the guiding-center position. The magnetic equilibrium is made of tori with concentric and circular cross-sections. The Fokker-Planck type collision operator $\mathcal{C}(f)$ acts on $v_{G\parallel}$ only [13], and has been modified to preserve mass, momentum and energy. The source term

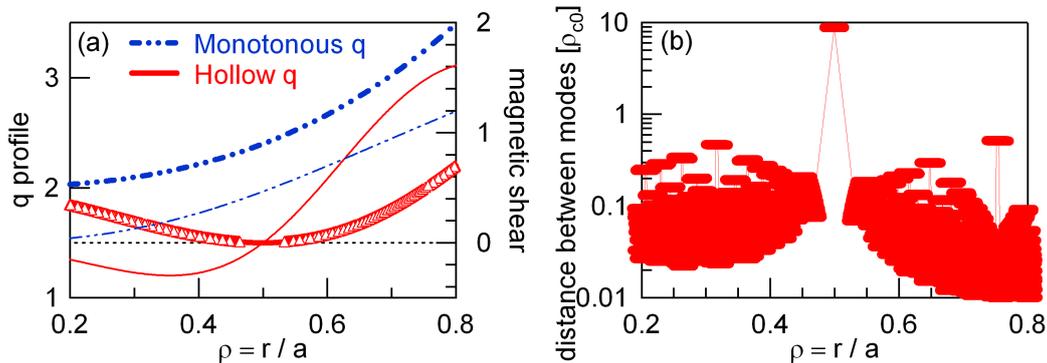


Figure 1. (a) Profiles of q (bold lines) and magnetic shear s (thin lines) used in the simulation runs. The triangles on the hollow q profile refer to the locations of the resonant modes present in the simulation; (b) distance between resonant modes for the hollow q case, normalized by the thermal gyro-radius ρ_{c0} .

S provides constant heat in the system. It is given a double \tanh shape, localized close to the inner radial boundary of the simulation domain (see Fig.2a). Such flux-driven simulations are particularly time-consuming since the equilibrium state typically develops on time scales of the order of the energy confinement time τ_E . Since $\omega_c \tau_E$ scales like ρ_*^{-3} in the gyro-Bohm regime, small ρ_* relevant simulations remain extremely challenging. Still, as evident in the following, turbulence reaches statistical steady state on much smaller time scales, which then becomes accessible on nowadays supercomputers.

3. Comparative dynamics with monotonous and hollow q profiles

Two main simulations are reported here. They are characterized by the following set of parameters. The relatively small value of $\rho_* = 1/128$ already requires about $8.6 \cdot 10^9$ grid points in the 5D phase space: $N_r \times N_\theta \times N_\varphi \times N_{v_\parallel} \times N_\mu = 256 \times 256 \times 128 \times 128 \times 8$. At the considered collisionality $\nu_* = 0.5$, neoclassical transport is mainly governed by trapped particles (banana regime). Finally, the source magnitude is $S_0 = 10^{-2}$, and vanishes for $\rho > 0.3$, while the simulation domain is $0.2 < \rho < 0.8$. Similar results were obtained with smaller (factor 1/2) and larger (factor 2) forcings as well. As detailed in reference [11], the corresponding additional power P_{add} that is injected in the system reads, in physical units and for a purely Deuterium plasma:

$$P_{add} \approx 2.89 \frac{R_0}{a} \frac{S_0}{\rho_*} \frac{n_0 [10^{20} m^{-3}] T_0 [keV]}{B_0 [T]} [MW] \quad (4)$$

where n_0 , T_0 and B_0 are the arbitrary normalizing density, temperature and magnetic field, respectively. Considering a Deuterium plasma with $n_0 = 2.10^{19} m^{-3}$, $T_0 = 4keV$ and $B_0 = 3T$, and given the parameters of the simulations, namely $A = R_0/a = 3.2$ and $\rho_* = 1/128$, one finds that $S_0 = 10^{-2}$ would correspond to $P_{add} \approx 3.2 MW$ of injected heating power.

These two simulations only differ by their prescribed q profile: monotonous and hollow q profiles. They are depicted on Fig.1a. The absolute magnitude of the magnetic shear is comparable in each case. The hollow q profile case, which we will hereafter refer to as "RS case" (for "reversed shear"), is characterized by a large gap of resonant modes in the vicinity of the low order rational $q_{min} 1.5$, at $\rho = 0.5$. The resonant (m, n) (poloidal and toroidal wave numbers) modes are such that there exists a radial location ρ_{mn} in the simulation domain where

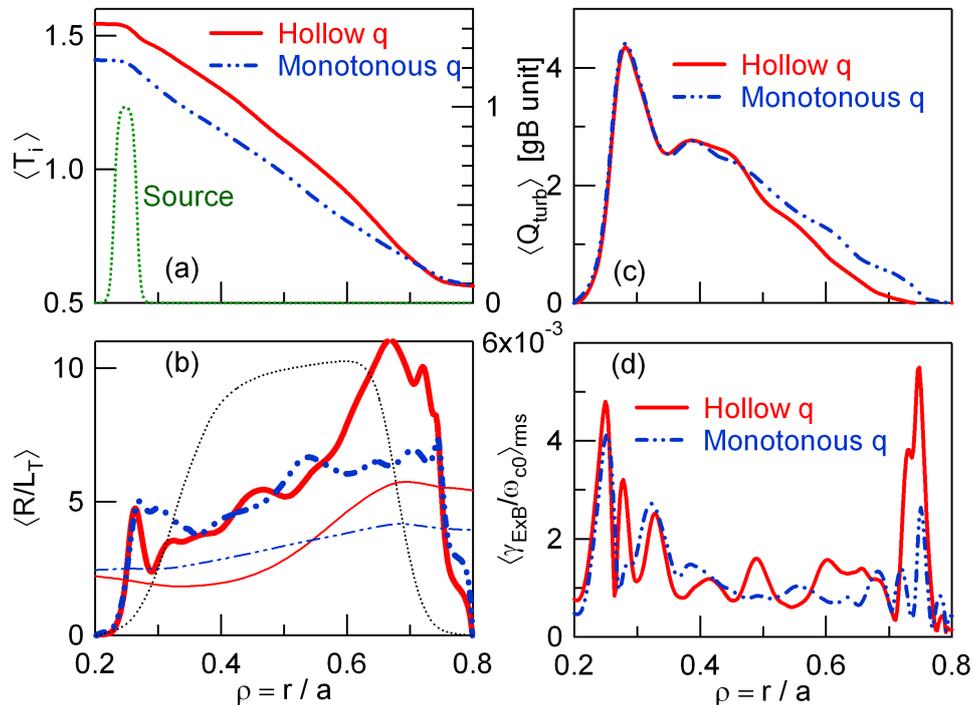


Figure 2. Time averaged profiles of (a) temperature (left axis) and source (normalized to its maximum, right axis); (b) normalized temperature gradient (bold lines) and critical one (thin lines; from [14]) (black dotted line = initial profile); (c) turbulent heat flux, and (d) root mean square value of the $E \times B$ shearing rate in the two compared simulations.

$q(\rho_{mn}) = m/n$. Indeed, as visible on Fig.1b, while most of the resonant modes are distant from fractions of one thermal Larmor radius ρ_{c0} , this normalized distance reaches about $\Delta_{gap}/\rho_{c0} \approx 9$ at $\rho = 0.5$. We shall refer to this region as the "gap" in the following. Simulations with even larger gaps have been performed (up to $\Delta_{gap}/\rho_{c0} \approx 17$, cf. section 4) at this ρ_* value, leaving unchanged the main conclusions.

These two cases exhibit roughly the same linear growth rate. As inferred from the early time evolution of those (m, n) modes which exhibit the fastest exponential growth at $\rho = 0.5$, they are of the order of $\gamma_{lin} \approx 1.5 \cdot 10^{-3} \omega_{c0}$ for the monotonous q profile, and about $\gamma_{lin} \approx 1.17 \cdot 10^{-3} \omega_{c0}$ for the RS case.

The time averaged profiles, averaged over the saturated non linear phase of turbulence (cf. Fig.3), are displayed on Fig.2 for both of these simulations. Neither the temperature gradient length nor the turbulent heat flux Q or the $E \times B$ shearing rate exhibit significant differences in the gap region, comprised within $0.464 \leq \rho \leq 0.534$. Conversely, the temperature is larger inside $\rho \approx 0.7$ for the RS case, as a consequence of the larger value of R/L_T in this case at the edge, from $\rho \approx 0.6$ to $\rho \approx 0.75$. As evident on Fig.2b, the radial shape of $\langle R/L_T \rangle$ mimics the one of the critical gradient, as derived from [14] (we do not have included the $\epsilon = r/R$ correction to the calculation of $R/L_{T,crit}$ to get a better fit of the non linear results). Especially, the RS case exhibits a significant increase of $R/L_{T,crit}$ at the edge, due to the larger values of the ratio s/q in this region. The larger $E \times B$ shearing rate in this region (cf. Fig.2d) should contribute to further increase the effective critical gradient. Consistently, the turbulent flux is smaller at

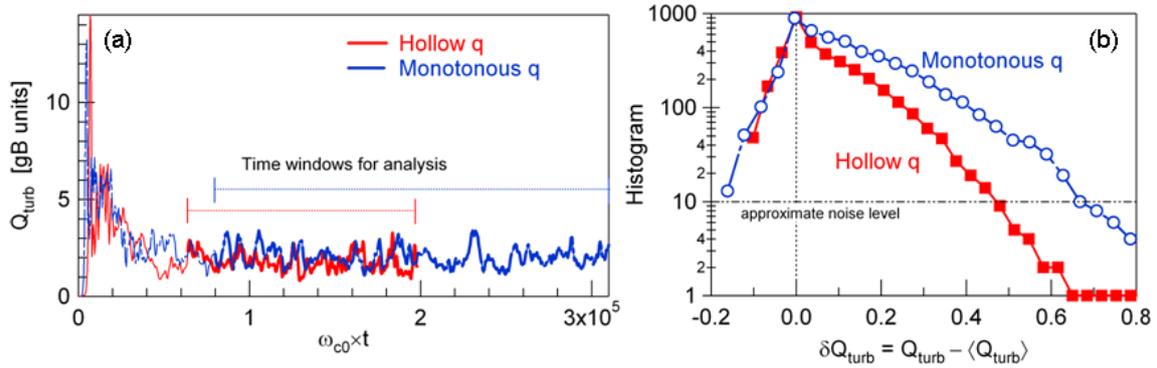


Figure 3. (a) Time histories of the turbulent heat flux at $\rho = 0.5$ in both simulations. The time windows considered for the various analyses are highlighted; (b) Histogram of the flux in each case. The "noise level" refers to the threshold below which the statistics becomes too poor.

the edge for the RS case, from about 50% at $\rho = 0.6$ to a factor 2 at $\rho = 0.75$.

The time evolution of the turbulent heat flux at $\rho = 0.5$ is shown on Fig.3a. From this graph, it is evident that both simulations have reached statistical steady state on turbulent time scales. Although they share approximately the same magnitude at this location, the fluxes exhibit significant differences with respect to their dynamics. Indeed, they both exhibit skewed probability density functions, characteristic of avalanche-like dynamics and already many times reported in fluid (see e.g. [15]) and more recently gyrokinetic [16, 17, 18, 11] flux-driven simulations of turbulence. However, the RS case is characterized by much less large scale transport events, as evident from the less asymmetric histogram of the flux. Such a property possibly further reinforces the reduction of the transport level in the outer region, as noticed in Fig.2c.

Still, avalanches are observed to cross the gap region. In previous gyrokinetic local simulations [6], it was reported that non resonant modes can fill in the gap region. Indeed, modes of the electric potential are clearly visible in this region on Fig.4b. One possible mechanism for their excitation is when the propagation time of an avalanche event into this depleted region, namely $\tau_{\text{aval}} \approx \Delta_{\text{gap}}/v_{\text{aval}}$, becomes comparable or even smaller than the time τ_{damp} for such modes to be locally damped. On the one hand, the avalanche velocity is of the order of the diamagnetic velocity $v_{\text{aval}} \approx \rho_* v_T$ [11]. On the other hand, the damping time is likely to be dominated by Landau damping for non resonant modes. Landau damping is all the larger since the modes are far from their resonant surface, i.e. basically since $k_{\parallel} v_T$ is large (γ_L scales approximately like $\gamma_L \sim -k_{\parallel} v_T \exp\{-\frac{1}{2}(\omega/k_{\parallel} v_T)^2\}$, with ω the real frequency of the mode, of the order of the diamagnetic frequency $\omega \approx (k_{\theta} \rho_i) v_T / L_n$ with $k_{\theta} = m/r$). In the gap region, $k_{\parallel} v_T / \omega_{c0} = \rho_*(n + m/q)/A$ remains finite, whatever the considered couple of poloidal and toroidal mode numbers (m, n). Therefore, in small ρ_* simulations, $k_{\parallel} v_T / \omega_{c0}$ remains small even in the gap region for two reasons. First because it scales like ρ_* . Second because the maximum m and n mode numbers of the simulation *must* increase when decreasing ρ_* (linear modes peak at around $k_{\theta, \text{peak}} \rho_i \approx 0.3$, which translates into $m_{\text{peak}} \approx 0.3(r/a)\rho_*^{-1}$). In this case, high order rational q_{min} values only are likely to satisfy $(n + m/q) \neq 0$ whatever $-m_{\text{max}} \leq m \leq m_{\text{max}}$ and $-n_{\text{max}} \leq n \leq n_{\text{max}}$. In other words, for a given hollow q profile, the gap width decreases with ρ_* , like $\Delta_{\text{gap}} \approx \rho_*^{1/2} (2q_{\text{min}} / n \rho_{\text{min}} q''_{\text{min}})^{1/2}$ [5]. The fact that avalanches do cross the gap then suggests that, in this case, the following hierarchy of times prevails: $\tau_{\text{aval}} < \tau_{\text{damp}}$.

The turbulent convection cells exhibit similar k_{θ} spectrum in both simulations, peaking

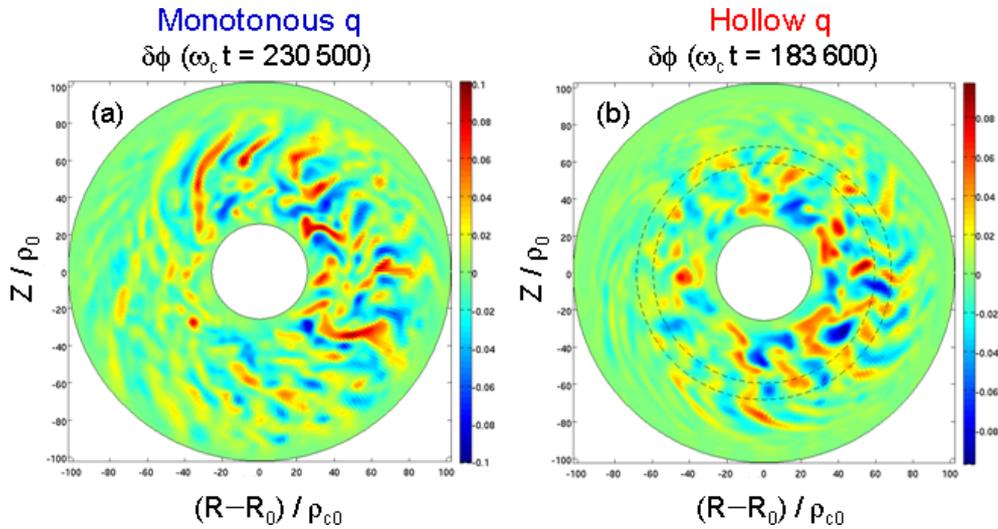


Figure 4. Snapshots of the poloidal cross-section of the electric potential fluctuations during one large outburst in the (a) monotonous and (b) hollow q profile cases.

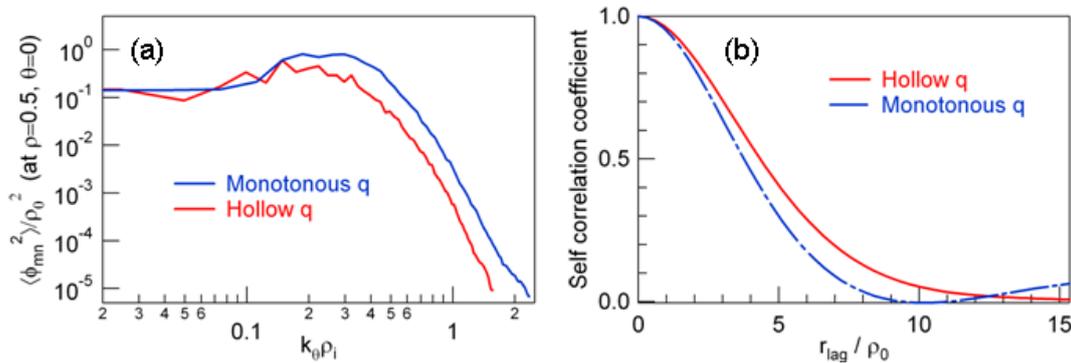


Figure 5. (a) Time averaged Fourier spectra of the $k_\theta = nq/r$ modes at $\rho = 0.5$ and $\theta = 0$ in both cases; (b) Two point radial auto-correlation function of the electric potential. The radial window slightly exceeds the gap region $0.4 < \rho < 0.6$.

around $k_\theta \rho_{c0} \sim 0.2 - 0.3$, Fig.5a. As far as their radial property is concerned, Figure 4b shows that they can even cross the gap (cf. for instance at $\theta \approx 0$). This striking observation is reinforced by the structure of the two-point correlation function of the electric potential fluctuations, Fig.5b. Indeed, the correlation function is even wider in the RS case than for the monotonous q profile, with a long tail extending approximately to $r_{lag}/\rho_{c0} \approx 15$. Candy *et al.* have already shown that, in the absence of global effects such as profile variations, the radial mode structure of those modes resonant at the edge of the gap region can significantly overlap [6]. Unfortunately, at such a still moderate ρ_* value, it has not been possible with the global GYSELA code to further investigate this point, and decouple global effects from linear properties.

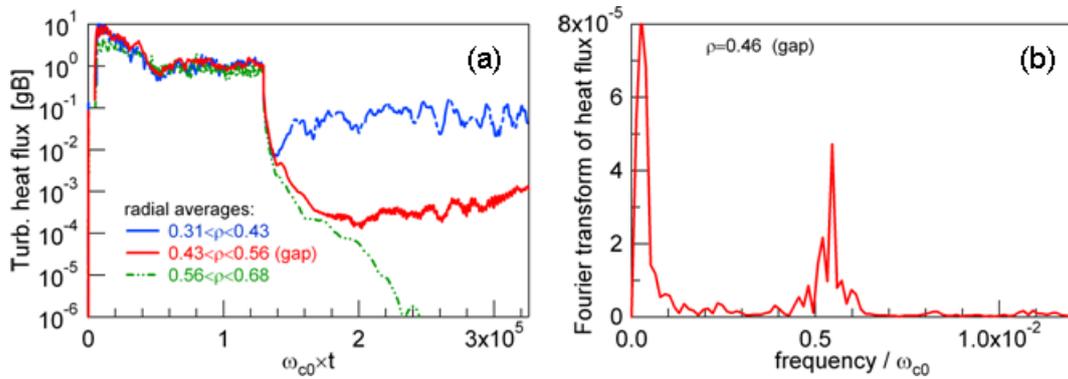


Figure 6. (a) Time evolution of the heat flux (logarithmic scale) when the conical filter is applied (from $\omega_{c0}t_0 = 128\,000$). Each curve corresponds to the average over radial domains either left (core) or right (edge) from the gap, and within the gap; (b) Fourier frequency spectrum of the heat flux fluctuations at $\rho = 0.46$, within the gap region.

4. Case without non-resonant modes

In order to sort out the role played by non resonant modes in the triggering of transport barriers in low shear regions, another simulation has been run, making use of the conservative expression of the gyrokinetic equation, eq.1. Also, for the simple reason that these simulations are part of another set of runs, they also differ from the ones of section 3 by two other parameters: the number of μ values is larger by a factor 2 ($N_\mu = 16$), and the collisionality is smaller ($\nu_* = 5.10^{-2}$). As far as the hollow q profile is concerned, it has essentially the same shape as the one reported on Fig.1, but with $q_{min} = 2.008$ (it is slightly above 2 to prevent the existence of any resonant mode in the vanishing shear region), such that the gap region is even larger $\Delta_{gap}/\rho_{c0} \approx 17$.

The simulation run is divided in two time windows. Up to $\omega_{c0}t_0 = 128\,000$, all modes are retained like in standard simulations. From t_0 onwards, only those modes resonant within the simulation domain are kept, the other being artificially set to zero. For each toroidal n mode, the retained poloidal m modes satisfy the relation $nq_{min} \leq m \leq nq_{max}$, with q_{min} and q_{max} the minimum and maximum values of the q profile, such that a conic filter is applied in Fourier space. Notice that non-resonant modes can still exist locally (such that $(n + m/q) \neq 0$, with m and n still satisfying the previous relation). However, their number is reduced. It is even more reduced for the extremal q values, and particularly at q_{min} for hollow q profiles.

The beginning of the simulation does not depart from what we have learned in the previous section. Especially, the turbulent heat flux does not exhibit any drop in the gap region, although it is significantly larger than in the previous cases, Fig.6a. From t_0 however, the dynamics changes dramatically. First of all, the turbulent heat flux rapidly decreases everywhere, as a result of the energy sink introduced by the conic filter. While the flux partly recovers left from the gap, i.e. close to the heat source, it remains at an extremely low value within the gap, about 2 orders of magnitude below. More surprisingly, the heat flux does completely vanish right from the gap. It is worth noticing that such a behavior is specific of this RS case. Indeed, when applying the same filter to a case with monotonous q profile, the turbulent heat flux was marginally and homogeneously reduced in the whole radial domain, with no drastic change on the simulation results. Incidentally, we note in these new simulations the impact on the resonance condition of the Doppler shift $\omega_E = k_\theta v_E$ induced by any mean $E \times B$ flow $v_E = \phi'_{00}/B$. Indeed, the most prominent (m, n) modes are then such that $k_\parallel v_T + \omega_E \approx 0$, or alternatively

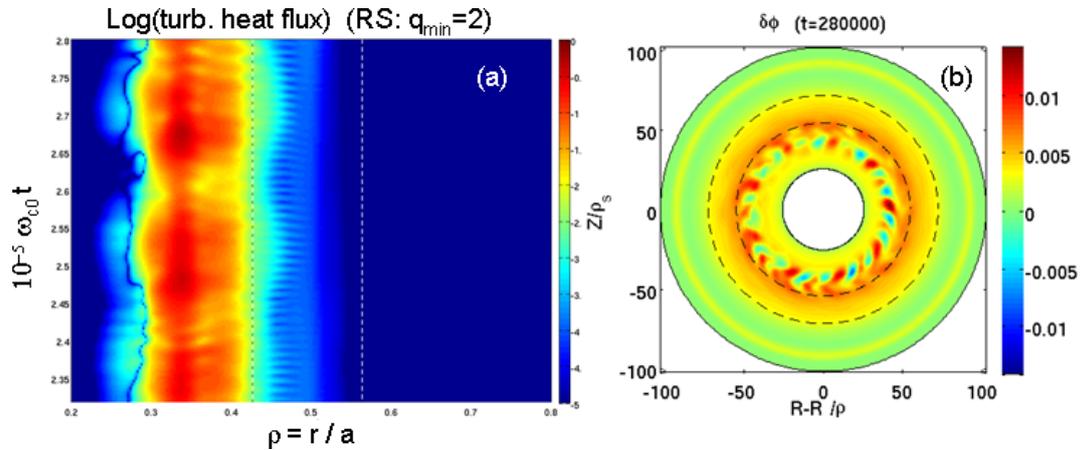


Figure 7. (a) Space-time evolution of the turbulent heat flux when the conical filter is active; (b) Snapshot of the poloidal cross-section of the electric potential fluctuations when the filter is active. In each graph, thin dashed lines indicate the boundaries of the gap region.

$n = -(m/q)\{1 \pm (qR_0/r)v_E/v_T\}$. Such a time dependent (v_E evolves in time) relationship is well fulfilled in the course of the simulation.

The impact of the conic filter on the RS simulation can be understood as follows. It introduces an asymmetry between, on the one hand, the radial regions where q is close to the extremum q_{min} and q_{max} , and, on the other hand, the rest of the radial domain. Neglecting the Doppler shift discussed above, those (m, n) modes satisfying $m = n(q \pm \delta q)$ (i.e. from one side to another of the resonant condition $m = nq$) are excited at each position, either linearly or via non linear coupling. Typical values of the parallel wave vector $k_{||}qR \approx 1$ suggest that δq remains small, of the order of $\delta q \approx 1/n$. Then, focussing on the region close to q_{min} , only half of these non resonant modes are allowed when the filter is present, namely those such that $m = n(q_{min} + \delta q)$. In the case of monotonous q profile, it is not expected to significantly impact the simulation results, since it occurs at the radial boundary of the domain, where fluctuations are usually forced to zero in global codes. Conversely, when q_{min} stands in the middle of the considered radial domain, as is the case for hollow q profiles, such a drastic reduction of the number of accessible modes is likely to become visible.

As a matter of fact, turbulence is almost completely quenched in the gap, as evident in Fig.7a: the turbulent flux stops at the entrance of the gap region. No avalanche succeeds in crossing the gap in this case. Such a behavior characterizes transport barriers. Yet, no strong temperature gradient could be observed in this too short simulation run. Indeed, the temperature profile builds up on energy confinement time scale, which is much larger than the explored time window. Also, the root mean square value of the $E \times B$ shearing rate is lower in the gap region when the Fourier filter is active. Finally, consistently with the radial structure of the turbulent flux, turbulence eddies do not appear in the gap region. They develop characteristic structures of toroidal ITG modes in the inner region, but vanish from the inner boundary of the gap outwards, Fig.7b.

Two additional observations can be made with respect to the transport barrier. First of all, its inner boundary seems to breeze, in the sense that low frequency oscillations (the period is about $\omega_{c0}\tau_{slow} \approx 2.10^4$) are visible on the color plot of the flux, around e.g. $\rho \approx 0.45$. This slow dynamics was also reported in fluid flux-driven simulations of interchange turbulence in the scrape-off layer of tokamak plasmas, for barriers triggered by strong velocity shear [19]. In this case, they were understood as the result of turbulence spreading into otherwise the linearly stable

sheared region. Secondly, fast oscillating outbursts are also visible, with decreasing magnitude from the inner gap boundary toward almost $\rho \approx 0.5$. Surprisingly, the high characteristic frequency is very close to the one expected for Geodesic Acoustic modes, which is equal to $\omega_{GAM} = [(2 + 1/q^2)T_e/T_i + 7/2]^{1/2}c_s/R \approx 6.10^{-3}\omega_{c0}$ in the present simulation, as evident on Fig.6b. Such a result is surprising since those specific modes characteristic of the GAM dynamics, namely $(m, n) = (\pm 1, 0)$, are absent from the simulation when the filter is applied. As a matter of fact, a detailed analysis (not shown here) reveals that the dominant (m, n) modes with $5 \leq m \leq 20$ do exhibit large frequency oscillations. This frequency increases with m , approximately linearly like $\omega/\omega_{c0} \sim 3.10^{-4}(m + 9)$. We do not have any explanation for this observation so far.

5. Conclusions

Flux-driven simulations of ITG turbulence in the cases of hollow and monotonous q profiles have been performed with the global and full- f gyrokinetic GYSELA code. In the vicinity of q_{min} where $s \approx 0$, the reversed shear cases exhibit large radial gap regions without any resonant mode. Still, no transport barrier has been observed so far in these cases, although different heat source magnitudes and increasing gap widths have been explored. Conversely, turbulent transport dramatically drops (by 2 orders of magnitude) in the gap region when a conical Fourier filter is applied, which only retains those modes which are resonant in the simulation domain. Such gyrokinetic simulations tend to reconcile – and extend to the turbulence flux-driven regime – previously published contradictory results on the topic. Still, understanding and reproducing the experimental triggering of internal transport barriers in JET remain an open issue.

Acknowledgments

It is our pleasure to acknowledge C. Passeron for her constant and invaluable help in the course of running GYSELA, and T. Görler for useful comments. This work was granted access to the HPC resources of CCRT and CINES under the allocation 2009052224 made by GENCI (Grand Equipement National de Calcul Intensif), as well as on HPC-FF in Jülich. This work, supported by the European Communities under the contract of Association between EURATOM and CEA, was carried out within the framework of the European Fusion Development Agreement. The views and opinions expressed herein do not necessarily reflect those of the European Commission.

References

- [1] Wolf R C 2003 *Plasma Phys. Control. Fusion* **45** R1-R91
- [2] Biglari H, Diamond P H and Terry P 1990 *Phys. Fluids B* **2** 1
- [3] Garbet X, Baranov Y, Bateman G *et al* 2003 *Nucl. Fusion* **43** 975
- [4] Terry P W 2000 *Rev. Mod. Phys.* **72** 109
- [5] Garbet X, Bourdelle C, Hoang G T *et al* 2001 *Phys. Plasmas* **8** 2793
- [6] Candy J, Waltz R E and Rosenbluth M N 2004 *Phys. Plasmas* **11** 1879
- [7] Waltz R E, Austin M E, Burrell K H and Candy J 2006 *Phys. Plasmas* **13** 052301
- [8] Challis C D *et al* 2002 *Plasma Phys. Control. Fusion* **44** 1031
- [9] Joffrin E, Challis C D, Conway G D *et al* 2003 *Nucl. Fusion* **43** 1167
- [10] Grandgirard V, Brunetti M, Bertrand P *et al* 2006 *J. Comput. Phys.* **217** 395
- [11] Sarazin Y, Grandgirard V, Abiteboul A *et al* 2010 *Nucl. Fusion* **50** 054004
- [12] Brizard A J and Hahm T S 2007 *Rev. Mod. Phys.* **79** 421
- [13] Dif-Pradalier G, Grandgirard V, Sarazin Y, Garbet X and Ghendrih Ph 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 065002
- [14] Jenko F, Dorland W and Hammett G W 2001 *Phys. Plasmas* **8** 4096
- [15] Garbet X, Sarazin Y *et al* 1999 *Nucl. Fusion* **39**, 2063
- [16] Idomura Y, Urano H, Aiba N and Tokuda S 2009 *Nucl. Fusion* **49** 065029
- [17] Ku S, Chang C S, Adams M *et al* 2006 *J. Phys.: Conf. Ser.* **46** 87
- [18] McMillan B F, Jolliet S, Tran T M, Villard L, Bottino A and Angelino P 2009 *Phys. Plasmas* **16** 022310
- [19] Ghendrih Ph, Sarazin Y, Ciraolo G *et al* 2007 *J. Nucl. Mater.* **363-365** 581

Cisaillement de rotation et barrières de transport

Sommaire

7.1	Écoulements cisailés dans les plasmas de tokamak	127
7.1.1	Écoulements cisailés et barrières de transport expérimentales	127
7.1.2	Génération d'écoulements cisailés dans un tokamak	128
7.1.3	Stabilisation de la turbulence par un écoulement cisailé	130
7.1.4	Écoulements cisailés et bifurcation vers une barrière de transport	130
7.2	Imposer un cisaillement dans une simulation gyrocinétique	133
7.2.1	Prescription d'un écoulement	133
7.2.2	Construction d'une source de vortacité	134
7.2.3	Création d'une barrière de transport	137
Conclusions		142

Dans ce chapitre, nous complétons l'étude du chapitre précédent en nous concentrant sur l'effet des écoulements cisailés $E \times B$ sur la turbulence cinétique dans les tokamaks, et leur contribution à la création de barrières de transport (*cf* chapitre 3). En s'appuyant à la fois sur les observations expérimentales ainsi que sur des considérations plus théoriques, nous détaillons en section 7.1 quels types d'écoulements sont susceptibles d'interagir avec la turbulence du plasma, et quels sont les mécanismes envisagés pour expliquer cette interaction. Ensuite, nous développons une étude novatrice de l'effet des écoulements cisailés sur la turbulence gyrocinétique à l'aide du code "premiers principes" GYSELA en sections 7.2 et 7.2.3.

7.1 Écoulements cisailés dans les plasmas de tokamak

7.1.1 Écoulements cisailés et barrières de transport expérimentales

Les deux ingrédients principaux pour la génération de barrières de transport dans les tokamaks sont le cisaillement du champ électrique radial (écoulement $v_{E\theta}$ cisailé), et/ou une topologie magnétique particulière *via* un profil de facteur de sécurité inversé (voir chapitre 6). Nous donnons ici quelques exemples d'expériences où l'apparition de barrières de transport est directement corrélée à la présence d'un cisaillement $E \times B$.

Dans le cas de la transition vers le mode H, de nombreuses revues (*Groebner, 1993, Burrell, 1997*) mettent en évidence la condition nécessaire d'être en présence d'un écoulement cisailé. Par exemple, on pourra trouver en figure 7.1 une décharge dans le tokamak DIII-D où l'apparition de la barrière de transport externe est corrélée à l'existence d'un fort cisaillement de vitesse poléidale ($E \times B$).

Certains types de barrières de transport sont directement liées au mode H. On obtient alors le mode VH (*Very High confinement*) qui a été observé dans DIII-D (*Jackson et al., 1991*). L'apparition de la barrière de transport est dans ce cas liée à la propagation du cisaillement $E \times B$ du bord du plasma vers le cœur.

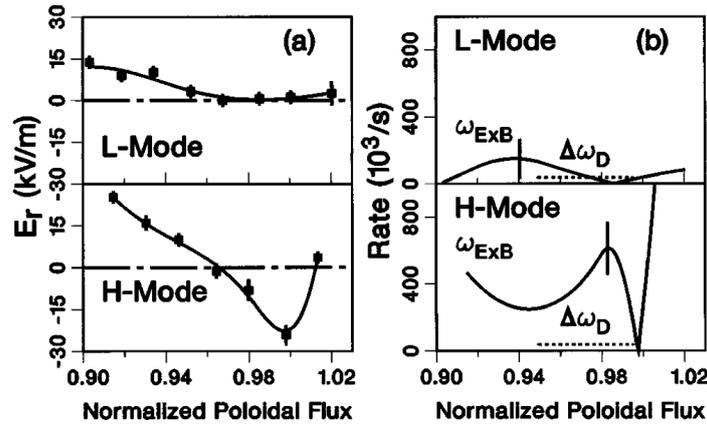


FIGURE 7.1 – Comparaison entre les modes L et H dans le tokamak DIII-D. On observe en (a) l'apparition d'un fort cisaillement du champ électrique radial dans le cas du mode H, que l'on visualise mieux en terme de taux de cisaillement $\omega_{E \times B}$ dans le panneau (b). Figure tirée de [Burrell \(1997\)](#).

Enfin, de nombreuses autres barrières de transport internes indépendantes du mode H ont également été observées. Outre les expériences à profil de q inversé (voir chapitre 6), l'apparition d'une barrière de transport interne coïncidant avec avec une augmentation (éventuellement temporaire) de la vitesse $E \times B$ fût observée dans le tokamak JT-60U avec ([Koide et al., 1994](#)) et sans ([Koide et al., 1996](#)) cisaillement magnétique négatif.

Enfin, la réduction du transport dans le cœur du tokamak permet aussi d'autres modes de confinement améliorés, sans nécessairement induire une barrière de transport interne. Dans ce cas, les écoulements cisailés $E \times B$ sont très souvent invoqués pour expliquer la réduction du transport turbulent (voir [Lao et al. \(1993\)](#) sur DIII-D, ou [Strachan et al. \(1987\)](#), [Ernst et al. \(1998\)](#) sur TFTR).

Cet aperçu d'expériences marquantes, court et non exhaustif, permet cependant de bien se rendre compte à quel point les écoulements cisailés semblent importants pour les différents régimes de confinement amélioré des tokamaks. Si certains mécanismes d'interaction des écoulements cisailés avec la turbulence sont aujourd'hui bien définis (sections 7.1.3 et 7.1.4), comprendre la bifurcation spontanée vers une barrière de transport dans les plasmas de tokamaks à l'aide de codes "premiers principes" reste cependant un sujet de recherche majeur dans la communauté (section 7.2.3). Avant tout, il convient de détailler les différents mécanismes pouvant mener à la génération d'écoulements cisailés dans un plasma de tokamak.

7.1.2 Génération d'écoulements cisailés dans un tokamak

L'origine du cisaillement du champ électrique radial peut être multiple dans les tokamaks. Les principaux mécanismes identifiés par la théorie et les expériences sont listés ci-après (voir [Terry, 2000](#)).

1. La mécanique le plus simple provient d'un biais imposé de l'extérieur du plasma *via* la force de Lorentz qui génère un écoulement proportionnel au courant radial dans le plasma. Ceci peut être obtenu par le forçage d'une différence de voltage entre le mur du tokamak et une surface magnétique du plasma, ou bien par l'insertion d'une électrode dans le plasma lui-même ([Weynants and Van Oost, 1993](#)).
2. Les méthodes expérimentales de chauffage peuvent générer des écoulements locaux cisailés. C'est le cas par exemple des ondes dites radio-fréquence (RF), bien que la procédure soit complexe. Suite au travail de [Ono et al. \(1988\)](#) sur le *Princeton Large Torus* (PLT), [Leblanc](#)

et al. (1995) mirent en évidence le processus lors d'une décharge (sur le *Princeton Beta Experiment Modification*, PBX-M) où un écoulement cisailé généré par une combinaison d'ondes RF et d'ondes ioniques de Bernstein (IBW) a permis de déclencher l'apparition d'une barrière de transport interne. Des tentatives similaires conduites sur d'autres tokamaks (e.g., *Leblanc et al.*, 1999, sur le *Tokamak Fusion Test Reactor*, ou TFTR) réussirent à générer des écoulements cisailés, sans toutefois enclencher la bifurcation vers la barrière de transport. *Craddock et al.* (1994) furent les premiers à proposer une explication théorique de l'effet des ondes ioniques de Bernstein, à l'aide d'un modèle quasi-linéaire. Des recherches dans cette direction se poursuivent encore aujourd'hui.

3. Dans un plasma à géométrie torique, un champ électrique radial peut se construire dans la partie extérieure du plasma par le mécanisme suivant. Au bord du plasma, et pour des températures équivalentes, le rayon de Larmor ionique peut être jusqu'à 60 fois plus grand que le rayon de Larmor électronique. Par suite, la perte de particules par interaction avec les parois est plus importante pour les ions que pour les électrons, ce qui crée localement un déficit de charges. Ce mécanisme est appelé "perte d'orbite", il a notamment été proposé par *Shaing and Crume* (1989) pour expliquer la génération de l'écoulement cisailé (via le champ électrique radial) entraînant la bifurcation L-H au bord externe d'un plasma de tokamak.
4. La vitesse poloïdale peut théoriquement être générée par une asymétrie poloïdale du flux radial de particule (*Stringer, 1969, Hassam et al.*, 1991). Dans ce cas, un mode collectif du plasma se crée et se couple à l'asymétrie poloïdale. Plus celle-ci est forte, plus l'écoulement poloïdal est important. Cependant, ce mécanisme n'a toujours pas été confirmé expérimentalement de manière probante.
5. Enfin, la turbulence elle-même peut générer des écoulements cisailés localisés, appelés *écoulements zonaux* (*zonal flows*) (*Diamond et al.*, 2005). Ces écoulements rétro-agissent sur la turbulence qui les génère (notamment lorsqu'ils sont cisailés), ce qui rend la prédiction de leurs propriétés difficile. *Fujisawa et al.* (2004) ont également démontré expérimentalement que la turbulence pouvait générer des écoulements zonaux cisailés. Enfin, par analogie avec certaines études stratosphériques, il s'avère que l'interaction d'ondes particulières (liées à la turbulence) avec un écoulement cisailé peuvent renforcer ce cisaillement, et non le détruire (voir la section 4.1.1 et le chapitre 9 pour plus de détails à propos de cet effet).

Les mécanismes 1 et 3 sont plus facilement applicables dans le cas de la génération d'une barrière de transport externe, qui permet aux plasmas de tokamak de transiter du mode L (faible confinement) au mode H (fort confinement, voir section 3.2.2). Le mécanisme 4 est quant à lui directement relié au transport de particules. Nous n'avons pas accès à cette physique dans notre formalisme avec le code GYSELA car nous considérons des électrons *adiabatiques*, ce qui empêche tout transport de matière au travers des surfaces magnétiques via la dérive $E \times B$ (voir section 1.2.4). Enfin, les modèles gyrocinétiques de turbulence sont aujourd'hui capables de reproduire la capacité de la turbulence à auto-générer des écoulements cisailés de grande échelle (mécanisme 5, e.g., *Idomura, 2006, Dif-Pradalier et al.*, 2010). Cependant, aucune expérience numérique en géométrie torique n'a réussi à obtenir la bifurcation vers une barrière de transport via l'effet de cet écoulement cisailé auto-consistant¹. De plus, les résultats expérimentaux ne permettent pas aujourd'hui de déterminer si les bifurcations observées sont déclenchées par un cisaillement $E \times B$ généré uniquement par la turbulence. Le mécanisme 2 sera exploré en section 7.2.

1. On notera toutefois les simulations de *Sarazin et al.* (2006) qui montrent l'auto-génération d'une barrière de transport par cisaillement $E \times B$ dans le cas d'une géométrie *plate (slab)*.

7.1.3 Stabilisation de la turbulence par un écoulement cisailé

Les écoulements dits *cisailés* (c'est-à-dire, dont la vitesse varie perpendiculairement à l'écoulement) ont été le sujet des nombreuses études dans le cadre de la mécanique des fluides. Ils peuvent généralement déclencher des instabilités fluides (*e.g.*, la fameuse instabilité de Kelvin-Helmoltz) sous certaines conditions. Certaines études cherchent par exemple à mettre en évidence les instabilités que pourraient déclencher le profil de rotation cisailé du Soleil dans la tachocline (voir section 4.1.3). Cependant, il s'avère également que lorsque des écoulements cisailés sont stables, ils peuvent aussi aider à la stabilisation de la turbulence avec laquelle ils interagissent (et dont ils ne sont pas à l'origine). On peut facilement comprendre ceci de deux façons (voir *Burrell, 1997, Terry, 2000*). Dans le cas d'une turbulence dominée par des structures cohérentes, la présence d'un écoulement cisailé stable à une échelle plus grande que la taille caractéristique des structures peut les cisailier, et potentiellement les décorréler (*Biglari et al., 1990*). Dans ce cas, un cisaillement suffisamment intense peut aller jusqu'à complètement supprimer la turbulence locale (figure 7.2).

Wang et al. (1992) ont aussi montré qu'un écoulement cisailé pouvait simplement stabiliser linéairement les modes ITG. Dans ce cas, l'effet du cisaillement est plus profond car il modifie directement le critère d'instabilité menant *in fine* à un système turbulent. Notons que dans le régime non-linéaire, cet effet pourrait toutefois être sous-dominant (*Waltz et al., 1994, 1998, Kinsey et al., 2007*).

Les écoulements cisailés peuvent donc réduire la turbulence par deux effets complémentaires, à la source de l'instabilité mais aussi lorsque la turbulence est complètement développée.

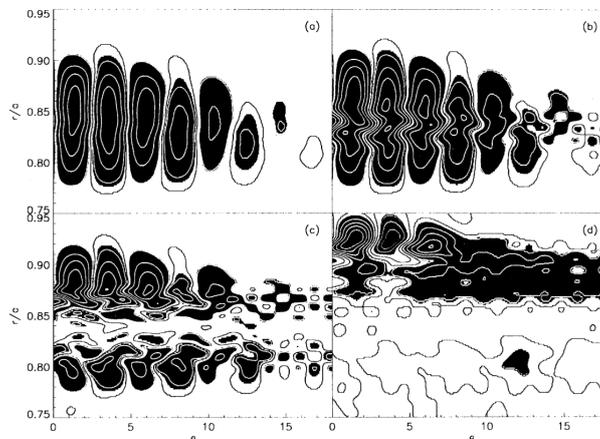


FIGURE 7.2 – Tiré de *Charlton et al. (1994)*. Cette séquence temporelle montre la destruction des fluctuations de densité par un écoulement cisailé amplifié par la turbulence elle-même.

7.1.4 Écoulements cisailés et bifurcation vers une barrière de transport

Un écoulement cisailé $E \times B$ imposé, s'il est suffisamment intense, peut faire transiter un plasma de tokamak d'un état turbulent "classique" (par exemple, en mode L) à un état possédant une barrière de transport (par exemple, en mode H). Afin de comprendre la bifurcation du système, on peut se baser sur le concept de courbe en "S" (*Hinton and Staebler, 1993*), qui permet de représenter à la fois la bifurcation, mais aussi l'éventuelle hystérésis du système. Ce modèle est représenté schématiquement en figure 7.3. On y trace le flux de chaleur (Q) en fonction de l'opposé gradient de pression ($-\nabla p$) supposé être à l'origine du flux de chaleur. La courbe obtenue représente l'état du plasma : lorsque le flux de chaleur dépasse la valeur critique $Q_{\text{crit}}^{L \rightarrow H}$, le système bifurque sur la branche "barrière" (gradients de p élevés). On obtient immédiatement

que lorsque l'on décroît le flux de chaleur, le système bifurque vers le régime "normal" pour un flux $Q_{\text{crit}}^{B \rightarrow L}$ moins élevé que précédemment : c'est une hystérésis. La branche intermédiaire est instable, le système ne peut s'y développer que de manière transitoire².

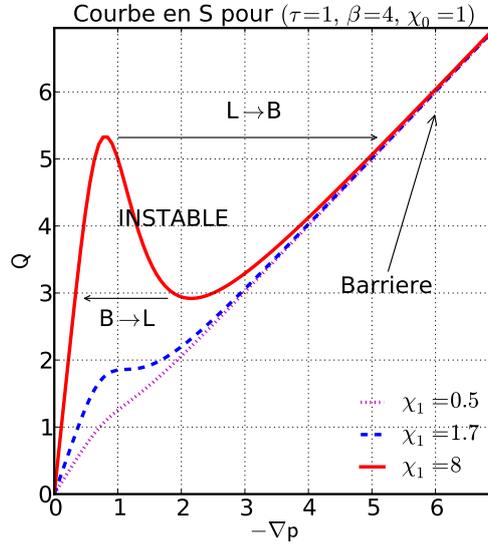


FIGURE 7.3 – Courbes en S pour différentes valeur de χ_1 (équation 7.3). La bifurcation n'est obtenue que pour certains choix de paramètres.

Ce modèle est basé sur la paramétrisation des coefficients de diffusion turbulents par le cisaillement $E \times B$ ($\gamma_{E \times B} \sim dv_{E\theta}/dr$), de telle sorte que

$$\chi = \underbrace{\frac{\chi_1}{1 + (\tau\gamma_{E \times B})^\beta}}_{\text{turbulent}} + \underbrace{\chi_0}_{\text{néoclassique}}, \quad (7.1)$$

où τ est typiquement le temps de corrélation de la turbulence qui fixe l'intensité de cisaillement requise pour affecter le coefficient de diffusion turbulent. Cette équation formalise l'idée qu'un cisaillement de vitesse réduit la turbulence, et, par suite, réduit les coefficients de diffusion associés à celle-ci. On peut alors écrire simplement les équations de transport de la densité et de la pression qui sont (*Malkov and Diamond, 2008*)

$$\partial_t n - \partial_x \left\{ \overbrace{\left[D_0 + \frac{D_1}{1 + (\tau\gamma_{E \times B})^\beta} \right]}^{-\Gamma} \partial_x n \right\} = S(x), \quad (7.2)$$

$$\frac{3}{2} \partial_t p - \partial_x \left\{ \underbrace{\left[\chi_0 + \frac{\chi_1}{1 + (\tau\gamma_{E \times B})^\beta} \right]}_{-Q} \partial_x p \right\} = H(x), \quad (7.3)$$

où x représente la direction radiale dans un tokamak, $S(x)$ est une source de particules et $H(x)$ une source de chaleur. Il nous faut à présent relier la vitesse $E \times B$ aux champs de densité et de pression. Pour cela, on réécrit l'équilibre radial des forces (équation (3.4)) en supposant que, à l'ordre dominant, le champ électrique radial équilibre le gradient de pression :

$$\gamma_{E \times B} = \frac{c}{eB} \partial_x \{ n^{-1} \partial_x p \}. \quad (7.4)$$

2. En effet, la dérivée du flux de chaleur par rapport à l'opposé gradient de pression est directement liée à la fréquence du mode de Fourier associé (*Hinton and Staebler, 1993*). Par suite, lorsque la pente de Q est négative en figure 7.3, le système est instable.

En injectant cette formule dans les équations (7.2) et (7.3), on obtient un système couplé de deux équations sur les variables de pression et de densité.

Hystérésis et flux de Maxwell

Le système peut être réduit à la seule variable de pression en supposant la densité constante, et en faisant l'approximation que le cisaillement $E \times B$ est tel que $\gamma_{E \times B} \sim \partial_x p$. Dans ce cas, on peut facilement montrer que la transition $B \rightarrow L$ ne s'effectue pas à $Q_{\text{crit}}^{B \rightarrow L}$, mais au flux dit de Maxwell (Q^M). En effet, à l'équilibre et loin de la source de chaleur, l'équation (7.3) se réduit à $\partial_x Q = 0$. On note alors Q^M le flux auquel le système bifurque de la branche "standard" à la branche "barrière" (Q^M est *a priori* inconnu), et g^+ et g^- les deux gradients de pression (au signe près) qui correspondent à la bifurcation (on notera $g = -\partial_x p$ dans le reste de ce paragraphe). Alors, on multiplie $\partial_x Q$ par g et en intégrant par partie, on obtient

$$Q^M (g^+ - g^-) = \int_{g^-}^{g^+} Q(g) dg. \quad (7.5)$$

En d'autres termes le flux auquel le système bifurque est le flux pour lequel les deux aires A_1 et A_2 (en figure 7.4) sont égales. Q^M est plus élevé que $Q_{\text{crit}}^{B \rightarrow L}$, ce qui a pour conséquence de réduire l'effet d'hystérésis envisagé à la figure 7.3.

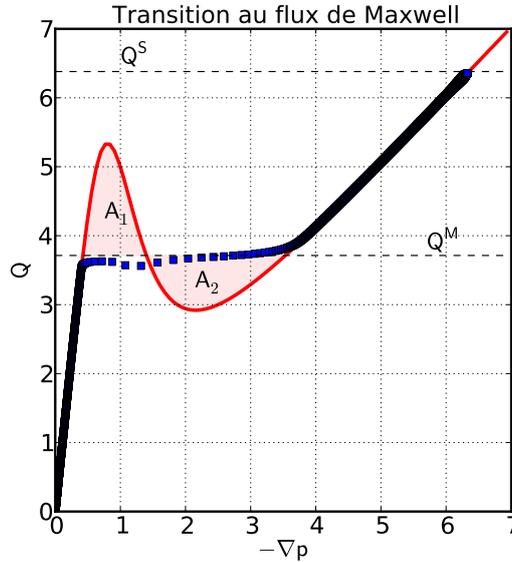


FIGURE 7.4 – Simulation numérique de la transition $L \rightarrow B$ (carrés bleus). On retrouve effectivement la transition au flux de Maxwell Q^M . Les points des données ne sont plus alignés sur la courbe au niveau de la transition du fait de l'ajout d'un opérateur d'hyper-diffusion pour stabiliser numériquement le modèle de transition.

La simulation numérique³ de ce système (carrés bleus en figure 7.4) permet effectivement de retrouver la transition au flux de Maxwell. Le système bifurque dès que le flux imposé par la source (Q^S) dépasse $Q_{\text{crit}}^{L \rightarrow B}$, puis se déplace sur le flux de Maxwell. Si la source baisse, la transition inverse s'effectue dès que Q^S devient plus faible que Q^M : nous retrouvons le phénomène d'hystérésis.

3. Afin de simuler numériquement une bifurcation, l'ajout d'un opérateur d'hyperviscosité est nécessaire. En effet, sans cet opérateur, les points bleus doivent suivre la ligne rouge sur la figure 7.4. Puisque la branche centrale est instable, le système subit une discontinuité du gradient de pression pour bifurquer, qui est très difficile à résoudre numériquement. Un opérateur d'hyperviscosité permet de lever cette difficulté.

La dynamique temporelle de la création de la barrière de transport est également instructive. Nous traçons en figure 7.5(a) trois profils instantanés du gradient de pression du système. La courbe rouge représente l'état initial, et la courbe bleue l'état final. La barrière se crée à une certaine position radiale lorsque le flux de chaleur dépasse la valeur critique $Q_{L \rightarrow B}^{\text{crit}}$, puis se déplace pour s'ajuster au flux de Maxwell. Afin de caractériser cette dynamique, nous représentons en figure 7.5(b) l'écart de la barrière à sa position initiale en fonction du temps (courbe bleue en pointillés). Cette évolution se compare bien à un comportement de type diffusif, c'est à dire en \sqrt{t} (droite noire).

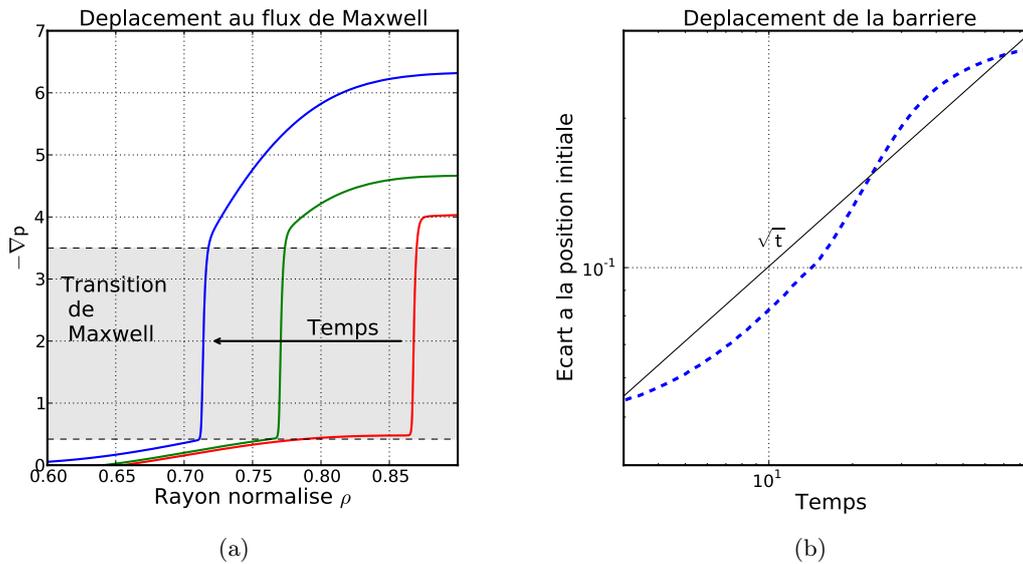


FIGURE 7.5 – (a) Profils du gradient de pression au temps initial (rouge), à un temps intermédiaire (vert) et au temps final (bleu). La barrière se crée à la position où le flux de chaleur dépasse la courbe en “S”, puis se déplace au flux de Maxwell. (b) Vitesse de déplacement de la barrière en échelle logarithmique.

Ce petit modèle confirme qu’il est possible que le système bifurque d’un état “normal” à un état de forts gradients de température (barrière) du fait de l’impact d’un écoulement cisailé sur la turbulence. Cependant, l’existence d’une bifurcation dépend des paramètres α et β de notre modèle (équation 7.1), et leur détermination dans un tokamak est incertaine. De plus, notre paramétrisation du cisaillement $E \times B$ par rapport aux gradients d’équilibre (équation 7.4) est volontairement simple et ne rend pas compte de tous les ingrédients physiques d’un tokamak (*cf* l’équation complète d’équilibre radial des forces (3.4)). Nous procédons par conséquent à une étude “premiers principes” de l’interaction d’un écoulement cisailé avec la turbulence dans les sections 7.2 et 7.2.3.

7.2 Imposer un cisaillement dans une simulation gyrocinétique

7.2.1 Prescription d’un écoulement

Comme nous l’avons vu en section 7.1.2, les écoulements cisailés liés au champ électrique radial peuvent être générés par de nombreux processus. Nous détaillons ici comment contrôler de tels écoulements dans des codes premiers principes afin de pouvoir étudier la physique des barrières de transport qui leur est associée. Dans un premier temps, nous pouvons nous affranchir du mécanisme précis de génération de l’écoulement afin d’étudier d’un point de vue plus fondamental

comment la turbulence interagit avec un écoulement cisailé qui lui est extérieur. Différentes idées peuvent être envisagées afin d'ajouter un écoulement cisailé (ou, de façon équivalente, un champ électrique radial) à une expérience de modélisation de la turbulence :

- Dans le formalisme fluide, un opérateur de relaxation du type $-\nu(v_{E\theta} - v_{\text{cible}})$ peut être ajouté à l'équation de conservation de la charge, ou équation de vorticité. Dans ce cas, le système relaxe vers le profil cible v_{cible} sur un temps caractéristique $\tau = \nu^{-1}$. Dans le cas de la turbulence de type interchange dans les tokamaks, cette technique f t notamment utilisée par [Beyer et al. \(2005\)](#) pour forcer l'apparition de barrières de transport. Nous utiliserons également ce genre de méthode au chapitre 8 pour imposer un écoulement dans le cas d'une dynamo solaire simplifiée (voir [Strugarek et al., 2012a](#),   la fin du chapitre 8). Cependant, nous travaillons ici dans le formalisme gyrocinétique pour lequel il n'existe pas d'équation d'évolution du potentiel électrique, ce dernier étant simplement donnée par la relation d'électro-neutralité (1.41).
- Le système gyrocinétique (voir section 1.2.4) est souvent décomposé en terme de fonctions de distribution moyenne (sur une surface de flux) ou d'équilibre (qui conserve les invariants gyrocinétiques), et fluctuante. Dans ce cas, [McMillan et al. \(2011\)](#) proposèrent d'inclure un écoulement cisailé directement dans la fonction de distribution d'équilibre, puis de simuler la turbulence *via* un approche dite δf (voir section 1.2.4). Il identifièrent différents régimes à l'aide de cette technique, selon le profil de cisaillement choisi. Cependant, aucune barrière de transport n'a pu être formée dans ce cas, car pour un écoulement localisé leur résultats suggèrent que le plasma  crante et sature le profil de rotation poloïdal à un niveau comparable aux simulations sans écoulement ajouté. Une des spécificité du code GYSELA est de résoudre le système gyrocinétique sur le fonction de distribution totale (dite *full-f*), sans faire d'approximation de type δf . Par conséquent, nous ne pouvons pas non plus utiliser cette méthode pour imposer un écoulement cisailé à notre système.
- L'idée la plus simple ([Sarazin et al., 2008](#)) est alors d'ajouter à tous les instants une vitesse de dérive cisailée $\mathbf{v}_{\text{cible}}$ aux équations du mouvement (1.36 et 1.37), c'est à dire

$$\frac{B_{\parallel}^*}{B} d_t \mathbf{x}_G = v_{G\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + \frac{mv_{G\parallel}^2}{eB^2} \mu_0 \mathbf{j} + \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{\text{cible}}, \quad (7.6)$$

$$\frac{B_{\parallel}^*}{B} m d_t v_{G\parallel} = -e \mathbf{b}^* \cdot \nabla (\bar{\phi} + \bar{\phi}_{\text{cible}}) - \mu \mathbf{b}^* \cdot \nabla B + \frac{mv_{G\parallel}}{B} (\mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{\text{cible}}) \cdot \nabla B. \quad (7.7)$$

Cette méthode ne permet cependant pas de forcer un écoulement cisailé car le plasma développe un cisaillement inverse au profil choisi et ainsi  crante le profil que nous avons choisi (voir figure 7.6). Ce résultat est toutefois logique car la modification de l'équation du mouvement n'était pas consistante avec le système d'équations que nous résolvons.

- Enfin, une méthode alternative consiste à construire un terme source dans le membre de droite de l'équation gyrocinétique (1.33) qui se traduit par un terme source de vorticité dans l'équation fluide équivalente (voir équation 7.19). Cette idée, qui est la plus fructueuse, sera explorée aux sections 7.2.2 et 7.2.3.

7.2.2 Construction d'une source de vorticité

Afin d'imposer un cisaillement de vitesse poloïdale dans une simulation gyrocinétique globale et *full-f*, nous avons construit une série de termes sources axisymétriques $\mathcal{S}(r, \theta, v_{G\parallel}, \mu)$ adéquats pour l'équation gyrocinétique (1.33) que nous rappelons ici,

$$\partial_t \bar{F} + \frac{1}{B_{\parallel}^*} \nabla_{\mathbf{z}} \cdot (\dot{\mathbf{z}} B_{\parallel}^* \bar{F}) = \mathcal{C}(\bar{F}) + \mathcal{S}. \quad (7.8)$$

Nous projetons la source \mathcal{S} sur la base des polynômes orthogonaux d'Hermite (H_h) et de Laguerre (L_ℓ) afin de s'assurer que chaque terme source puisse injecter indépendamment les

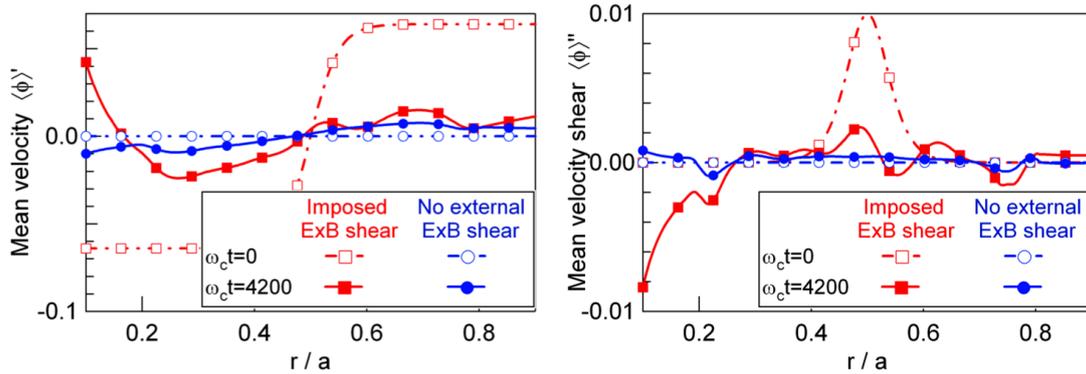


FIGURE 7.6 – Réaction du plasma dans le cas de l’ajout d’un terme non-consistant dans l’équation du mouvement (7.6). A gauche, on représente le champ électrique radial E_r , et à droite le cisaillement $\gamma_{E \times B}$. Les courbes rouges correspondent aux simulations avec termes additionnels, tandis que les courbes bleues correspondent aux simulations initiales. On montre les profils initiaux et finaux et on observe que le système relaxe vers un même profil dans les deux cas : il y a un phénomène d’écrantage du cisaillement imposé.

différentes quantités fluides telles que la densité, la quantité de mouvement, le chaleur ou la vorticité. Nous donnons les propriétés de ces bases polynomiales en annexe I. La projection s’écrit

$$\mathcal{S} = S_E(r, \theta, v_{G\parallel}, \mu) S_r(\rho) = S_r(\rho) \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{h=0}^{+\infty} c_{h\ell} H_h(\bar{v}_{G\parallel}) L_\ell(\bar{\mu}) e^{-\bar{v}_{G\parallel}^2 - \bar{\mu}}, \quad (7.9)$$

où les coefficients $c_{h\ell}$ ne dépendent que des coordonnées d’espace (r, θ) . Nous avons également introduit les définitions suivantes

$$\bar{\mu} \equiv \frac{\mu B}{T_s} \quad ; \quad \bar{v}_{G\parallel} \equiv \frac{v_{G\parallel}}{\sqrt{2T_s}}, \quad (7.10)$$

où T_s est la température de la source.

On peut calculer les sources équivalentes à \mathcal{S} pour les quantités fluides en prenant différents moments de l’équation gyrocinétique. Rappelons que

$$\int d^3\vec{v} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{G\parallel} \int_0^{+\infty} 2\pi B_{\parallel}^* d\mu = \frac{(2\pi T_s)^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + J_{\parallel B} \bar{v}_{G\parallel}) d\bar{v}_{G\parallel} \int_0^{+\infty} d\bar{\mu},$$

où $J_{\parallel B} = \sqrt{2T_s} J_{\parallel} / B^2$ et $J_{\parallel} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{J}$ est le courant parallèle. Alors, en utilisant les propriétés d’orthogonalité des deux bases polynomiales, on peut simplement déduire que les sources de

matière (gyrocentres), moment parallèle, énergie (thermique) et vorticité s'écrivent

$$\mathbb{S}_n \equiv \int d^3\vec{v} S_E S_r = (2\pi T_s)^{3/2} (c_{00} + J_{\parallel B} c_{10}) S_r, \quad (7.11)$$

$$\mathbb{S}_{v_{\parallel}} \equiv \int d^3\vec{v} v_{G\parallel} S_E S_r = 2\pi^{3/2} T_s^2 [2c_{10} + J_{\parallel B} (c_{00} + 4c_{20})] S_r, \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{\mathcal{E}} &\equiv \int d^3\vec{v} \left(\frac{v_{G\parallel}^2}{2} + \mu B \right) S_E S_r \\ &= (2\pi)^{3/2} T_s^{5/2} \left[\underbrace{2c_{20} + \frac{1}{2}c_{00} + J_{\parallel B} \frac{3}{2}c_{10} + 6J_{\parallel B}c_{30}}_{\text{parallèle}} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{c_{00} - c_{01} + J_{\parallel B}c_{10} - J_{\parallel B}c_{11}}_{\text{perpendiculaire}} \right] S_r, \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{\Omega} &\equiv \int d^3\vec{v} J_0 \cdot (S_E S_r) \\ &= \mathbb{S}_n + (2\pi T_s)^{3/2} \left[\nabla_{\perp}^2 \left(\frac{(c_{00} - c_{01}) S_r}{B^2} \right) + J_{\parallel B} \nabla_{\perp}^2 \left(\frac{(c_{10} - c_{11}) S_r}{B^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Il est alors possible de construire des sources pures de moment parallèle, de chaleur et de vorticité en choisissant astucieusement les coefficients c_{hl} . Ces choix sont résumés dans le tableau 7.1.

Coefficient	Moment parallèle (7.16)	Energie (7.15)	Vorticité (7.17)
c_{00}	$-J_{\parallel B}c_{10}$	$\frac{4J_{\parallel B}}{2-J_{\parallel B}^2}c_{20}$	0
c_{10}	libre	$-\frac{4J_{\parallel B}}{2-J_{\parallel B}^2}c_{20}$	0
c_{20}	$-J_{\parallel B}c_{10}/2$	libre	$c_{01}/2$
c_{01}	$-J_{\parallel B}c_{10}$	$\frac{4J_{\parallel B}}{2-J_{\parallel B}^2}c_{20}$	libre
c_{30}	0	0	0
c_{11}	0	$-\frac{4J_{\parallel B}}{2-J_{\parallel B}^2}c_{20}$	0

TABLE 7.1 – Choix des coefficients pour des sources pures de moment, chaleur et vorticité.

Pour chacune des sources, le paramètre libre permet d'ajuster la normalisation afin de sélectionner les amplitudes effectives des sources (S_0) facilement. On peut résumer les trois types de sources de la manière suivante

$$\mathcal{S} = \left\{ \left[\bar{v}_{G\parallel}^2 - \frac{1}{2} - \frac{J_{\parallel B}}{2 - J_{\parallel B}^2} (2 - \bar{\mu}) (2\bar{v}_{G\parallel} - J_{\parallel B}) \right] \frac{S_0^{\mathcal{E}}}{2(2\pi)^{3/2} T_s^{5/2}} S_r^{\mathcal{E}} \right. \quad (7.15)$$

$$\left. + \left[2\bar{v}_{G\parallel} (2 - \bar{\mu}) - J_{\parallel B} (1 + 2\bar{v}_{G\parallel}^2 - \bar{\mu}) \right] \frac{S_0^{v_{\parallel}}}{4\pi^{3/2} T_s^2} \hat{S}_r^{v_{\parallel}} \right. \quad (7.16)$$

$$\left. + \left[1 - \bar{\mu} + (2\bar{v}_{G\parallel}^2 - 1) \right] \frac{S_0^{\Omega}}{\sqrt{2} \pi^{3/2} T_s^{5/2} B^2} S_r^{\Omega} \right\} e^{-\bar{v}_{G\parallel}^2 - \bar{\mu}}. \quad (7.17)$$

Dans le reste de ce chapitre, nous nous concentrons sur l'utilisation de la source de vorticité \mathbb{S}_Ω pour imposer un écoulement poloïdal cisailé dans notre plasma de tokamak. Il convient de remarquer que la source de vorticité que nous avons choisie n'est pas tout à fait pure, mais introduit un peu de moment dans le système. Cependant, comme nous le verrons ci-après, cette source de moment reste en tout temps négligeable au cours de la simulation. Avant de procéder, il est important de comprendre pourquoi la source que nous avons construite nous permet effectivement d'imposer un écoulement cisailé à notre système. En intégrant l'équation gyrocinétique (1.33) contre la gyromoyenne dans l'espace des vitesses ainsi que sur une surface de flux, on peut montrer que (voir [Abiteboul et al., 2011](#))

$$\partial_t W + \partial_r \mathcal{J} = 0, \quad (7.18)$$

où nous avons introduit la vorticité $W(r, t) \equiv \langle \int dv^* J_0 \cdot \bar{F} \rangle_{f_s}$, et le flux de vorticité

$$\mathcal{J}(r, t) \equiv e \left\langle \int dv^* J_0 \cdot [(d_t \mathbf{x}_G \cdot \nabla r) \bar{F}] \right\rangle_{f_s}.$$

Si on ajoute une source de vorticité \mathcal{S}_Ω    l'équation gyrocinétique, on obtient alors que

$$\partial_t W + \partial_r \mathcal{J} = S_0^\Omega \partial_{rr}^2 S_r^\Omega. \quad (7.19)$$

En se basant sur l'équation de quasi-neutralité, on obtient immédiatement que $\partial_t W = -\partial_t \langle \nabla_\perp^2 \phi \rangle_{f_s}$. On comprend ainsi que notre source ajoute bien une source de vorticité (c'est à dire, une source pour le champ électrique du système) dont le profil est fixe et déterminé par la structure radiale de la source gyrocinétique. Nous choisissons un profil radial de type "double tangente hyperbolique" pour notre source, qui s'écrit

$$S_r^\Omega = \left[\tanh \left(\frac{\rho - \rho_\Omega - 3L_\Omega}{L_\Omega} \right) + \tanh \left(\frac{\rho_\Omega - 3L_\Omega - \rho}{L_\Omega} \right) \right] / 2, \quad (7.20)$$

où ρ_Ω contrôle la position radiale de la source et L_Ω son extension. Nous normalisons ensuite S_r^Ω de telle sorte que son intégrale dans la direction radiale soit 1. Ainsi, l'amplitude de notre source est entièrement contrôlée par le paramètre S_0^Ω . Grâce à ce profil cisailé, nous imposons indirectement *via* l'équation (7.19) un champ électrique cisailé dont le cisaillement est maximal en ρ_Ω . Nous étudions dans la partie suivante 7.2.3 l'effet de cette source de vorticité sur la turbulence de tokamak.

7.2.3 Création d'une barrière de transport

Nous utilisons à nouveau le code GYSELA (annexe C) pour simuler la turbulence gyrocinétique issue de l'instabilité ITG. Nous choisissons une résolution relativement élevée ($\rho_\star = 1/150$, environ 10 milliards de points de grilles) afin de s'affranchir le plus possible des éventuels effets de bord de notre boîte de simulation. Nous choisissons une collisionalit   $\nu_\star = 0.1$, et notre fonction de distribution est initialement proche du seuil de l'instabilité ($R/L_T \sim 6$ au centre de la boîte). Nous traçons en figure 7.7 le flux de chaleur turbulent issu de cette simulation en fonction du petit rayon r (abscisse) et du temps (ordonnée). Le transport turbulent de la chaleur est dirigé vers l'extérieur du domaine, et il est dominé par des   v  nements à grande échelle de type *avalanches* ([Sarazin et al., 2010a](#)). Un champ électrique radial se développe dans le plasma, mais ne permet pas la création d'une barrière de transport.

Nous introduisons par conséquent dans cette simulation la source de vorticité que nous avons décrite précédemment. Nous traçons en figure 7.8 les sources effectives dans notre simulation. Sur le bord interne du plasma, nous retrouvons (en bleu) la source d'énergie qui force le système

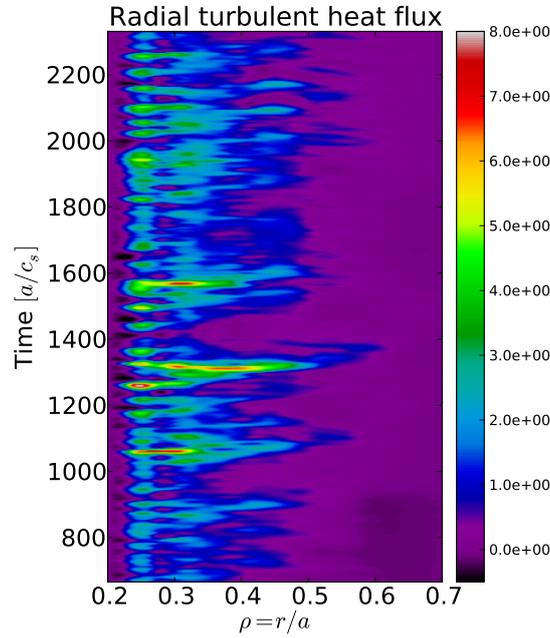


FIGURE 7.7 – Flux de chaleur turbulent dans une simulation ($\rho_* = 1/150$, $\nu_* = 0.1$). Le transport est dominé par des *avalanches*, évènements de grande échelle qui transportent la chaleur à travers le domaine de simulation.

vers un état turbulent. La source d'énergie est décomposée en parties parallèle (tirets cyans) et perpendiculaire (tirets mauves) au champ magnétique. Remarquons que cette source produit également localement de la vorticité (courbe verte en tirets-pointillés), qui n'influencera pas notre discussion ici. Aucun moment cinétique (courbe en pointillés rouges) n'est ajouté au plasma par nos sources. Nous plaçons la source de vorticité en $\rho = 0.43$. Son enveloppe radiale $S_r^\Omega(r)$ est repérée par l'aire verte, et la source effective ( quation (7.19)) en tirets-pointillés verts. Comme nous l'avions indiqué à la partie précédente, notre source de vorticité injecte localement de l'énergie parallèle dans le plasma, que nous compensons par une injection d'énergie perpendiculaire opposée.

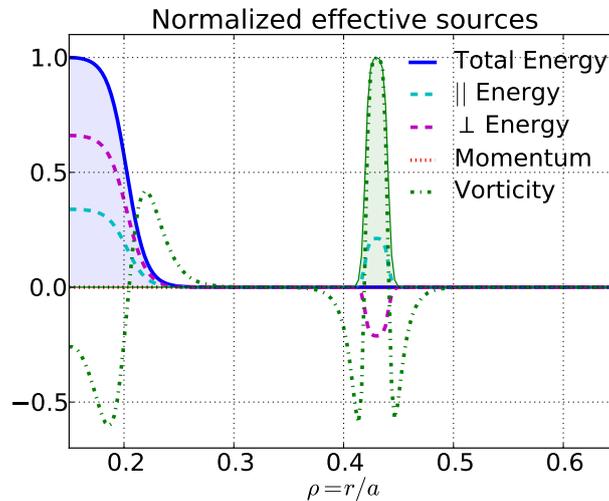


FIGURE 7.8 – Sources fluides effectives dans la simulation gyrocinétique, normalisées à l'unité.

Nous traçons ensuite en figure 7.9(a) le flux de chaleur turbulent en fonction du petit rayon et du temps après l'introduction de la source de vorticité à $\tau_\omega \sim 2600 a/c_s$. On voit immédiatement apparaître un cisaillement $E \times B$ au niveau de la source de vorticité (lignes blanches pleines). Le transport turbulent est rapidement modifié et décroît jusqu'à devenir négatif à certains moments de la simulation (zones noires). Ce cisaillement est érodé pour la première fois au temps $t \sim 3600 a/c_s$, et est suivi par un fort flux de chaleur turbulent provenant du centre du plasma. La turbulence redémarre alors, jusqu'à ce que le cisaillement de vitesse se reconstruise à nouveau et la supprime. Ce cycle se reproduit ensuite de manière quasi-périodique. La création de l'écoulement cisailé par la source de vorticité s'accompagne d'une barrière de transport, comme le témoigne l'augmentation de l'inverse du gradient de température à la position de la source en figure 7.9(b). La création d'une barrière est r  miniscente des expériences de création de barrière *via* un cisaillement de vitesse cr  e par l'injection d'ondes de Bernstein dans le plasma (voir *Ono et al., 1988, Craddock et al., 1994, Leblanc et al., 1995*, et la section 7.1.1). Lorsque le cisaillement est érodé, la barrière de transport est également détruite, puis se reconstruit au cycle suivant. Les courbes sont relativement chahutées et témoignent du caractère complexe (quasi-périodique) de ce phénomène. Compte-tenu des fortes valeurs de cisaillement obtenues dans cette simulation, il convient de se demander si l'écoulement ainsi formé est instable vis-à-vis de l'instabilité Kelvin-Helmoltz. Le critère le plus simple pour cette d'instabilité (présence d'un point d'inflexion dans le profil) est bien vérifié, une étude précise de l'instabilité dans notre cas est au delà de la portée de ce chapitre (voir *Chiueh et al., 1986, Scott et al., 1988, Kim and Diamond, 2003*, pour des études de ce genre). Le fait que le cisaillement du champ électrique radial, normalement contrôlé par notre source vorticité, soit érodé pour des amplitudes très différentes montre que le phénomène à l'oeuvre ici ne dépend pas d'un seuil sur l'amplitude du cisaillement et élimine *a priori* l'instabilité de Kelvin-Helmoltz comme origine de sa disparition.

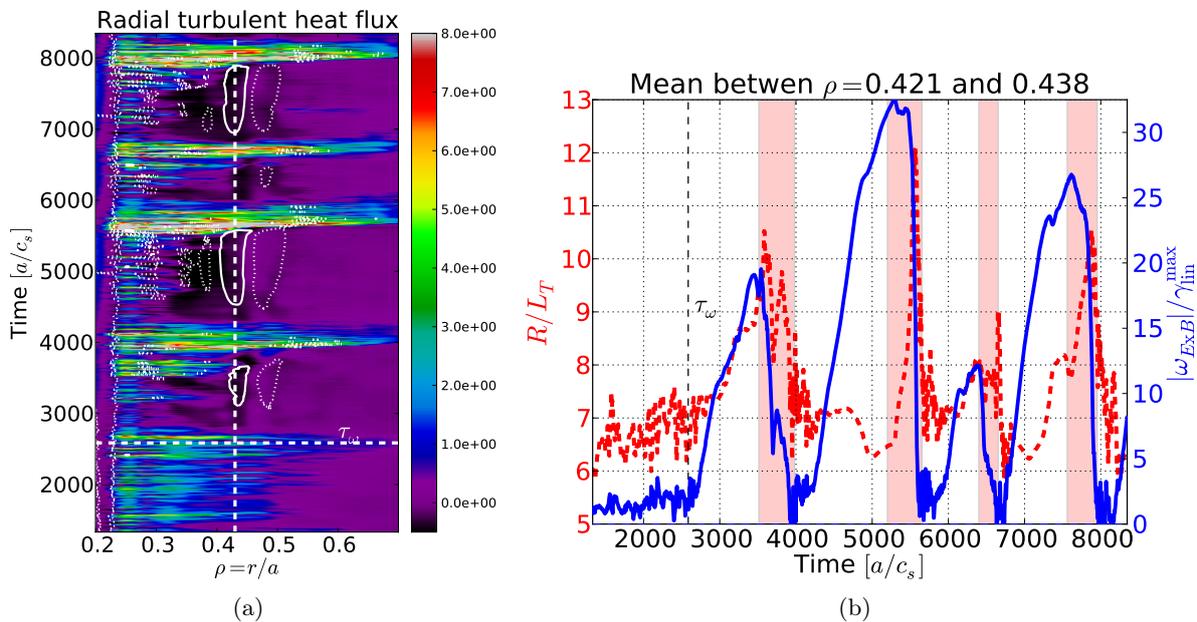


FIGURE 7.9 – (a) Flux de chaleur turbulent après l'introduction de la source de vorticité à ($t = \tau_\omega, \rho = \rho_\omega$) (tirets blancs sur la figure). La table de couleur est la même qu'à la figure 7.7. Les lignes blanches pleines et pointillées représentent respectivement les contours $\{-20\gamma_{lin}$ (plain), $8\gamma_{lin}$ (dotted) $\}$ du cisaillement $E \times B$. (b) Trace temporelle de la valeur absolue du cisaillement $E \times B$ normalisée au taux de croissance linéaire (courbe bleue), et de l'inverse du gradient de température normalisé R/L_T (tirets rouges). Les plages surlignées en rouge représentent les périodes de destruction de la barrière de transport.

La source de vorticité est maintenue constante au cours de la simulation, il faut par conséquent comprendre le mécanisme menant à la relaxation à fois du cisaillement généré, et de la barrière qui lui est associé. S'il on trace une coupe poloïdale de la fonction de distribution juste avant la destruction du cisaillement de vitesse (figure 7.10(a)), on peut observer l'apparition de modes particuliers sur le bord interne de la barrière. Ces modes sont mis en évidence en figure 7.10(b) où nous traçons la trace temporelle des modes résonants sur le bord interne de la barrière ($\rho = 0.41$, pour $m = -qn$). Ces modes croissent exponentiellement antérieurement à la destruction du cisaillement $E \times B$ et de la barrière de transport. Ils participent non seulement au transport turbulent de la chaleur et érodent le gradient de température constituant la barrière de transport, mais aussi au transport turbulent de la vorticité *via* le tenseur de Reynolds et sont à l'origine de la destruction du cisaillement de vitesse. La croissance de ces modes explique par conséquent le caractère quasi-périodique des créations et destructions des barrières de transport que nous observons.

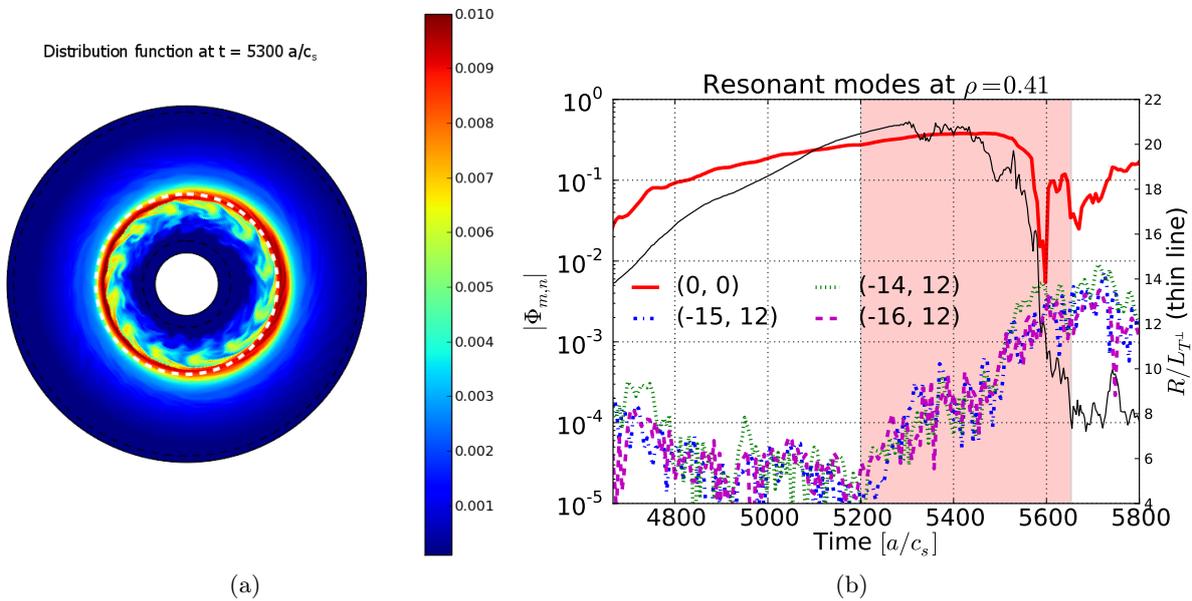


FIGURE 7.10 – (a) Coupe poloïdale de la fonction de distribution pour une vitesse parallèle élevée à $t = 5300 a/c_s$. La position de la source de vorticité est représentée par la ligne blanche pointillée. (b) Trace temporelle de l'amplitude du mode $(0,0)$ et des modes résonants sur le bord interne de la barrière de transport, à $\rho = 0.41$. La fenêtre temporelle est restreinte au moment de la seconde destruction du cisaillement, et l'inverse de la longueur de gradient de température perpendiculaire est tracé en noir.

Si nous comprenons pourquoi les barrières de transport que nous créons sont systématiquement détruites, il faut à présent expliquer pourquoi des modes résonants sont capables de croître alors que le cisaillement de vitesse devrait les stabiliser. Pour cela, il faut se souvenir que notre source de vorticité induit une anisotropie de température en chauffant le plasma dans la direction parallèle, et le refroidissant dans la direction perpendiculaire. Il s'avère qu'une telle anisotropie modifie le seuil de l'instabilité ITG (Zarzoso, 2012). Celui-ci est modifié à la fois en fonction de l'anisotropie nette $T_{\parallel} - T_{\perp}$, mais aussi du gradient de l'anisotropie $\partial_r (T_{\parallel} - T_{\perp})$. Nous traçons en figure 7.11 le taux de croissance de l'ITG calculé par Zarzoso (2012) en iso-contours de couleurs. Le seuil de l'instabilité est représenté en tirets noirs. On trace sur cette carte l'évolution temporelle de l'anisotropie dans notre système, à la position $\rho = 0.41$ où les modes ITG croissent. On observe que pour chaque construction/relaxation de la barrière (courbes épaisses), le système tend vers la région où les modes ITG sont très excités, puis relaxe vers un état moins anisotrope du fait du transport induit par les modes ITG excités.

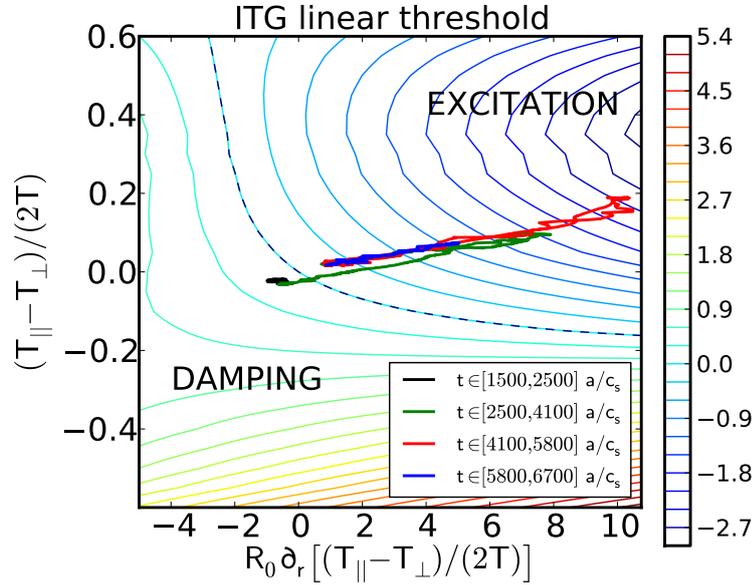


FIGURE 7.11 – Les contours de couleur représentent le taux de croissance de l’ITG modifié par l’anisotropie de température dans un cas idéal. Les modes ITG sont stabilisés dans la zone en dessous de la ligne pointillée, et excités au dessus (voir [Zarzoso, 2012](#), pour plus de détails). Nous traçons sur cette carte l’évolution de l’anisotropie à $\rho = 0.41$ dans notre simulation. Les lignes épaisses de couleur verte, rouge et bleue correspondent aux différentes relaxations dans notre simulation. On observe pour chaque évènement que le système explore une zone où les modes ITG sont fortement excités, puis relaxe en direction de l’état initial quasi-isotrope. De l’autre côté de la barrière, le gradient de l’anisotropie est inversé et les modes ITG sont très amortis.

Dans notre cas, l’excitation des modes ITG est donc fortement augmenté sur le bord interne de la barrière (tracé en figure 7.11), et diminué sur le bord externe (et vice-versa s’il on change le signe de la source de vorticité). Par suite, la diminution du seuil est telle que l’effet stabilisant du cisaillement $E \times B$ n’est plus assez puissant pour contre-balancer la croissance des modes résonants. Cette analyse est également corroborée par des simulations où nous avons inversé le signe de la source de vorticité. Dans ce cas, le seuil d’instabilité linéaire est diminué sur la partie externe de la barrière où des modes résonants croissent et détruisent la barrière. Pour ces autres simulations, aucun mode résonant ne croît sur la partie interne de la barrière.

Nous avons ainsi mis en évidence la possibilité de créer des barrières de transport dans le formalisme gyrocinétique *via* un cisaillement de vitesse $E \times B$. La dynamique des barrières ainsi formées est résumée en figure 7.12. Le point de départ consiste en un état turbulent ne présentant pas de fort cisaillement du champ électrique, auquel nous appliquons notre source de vorticité (bloc rouge). La source a deux effets principaux sur le système : elle ajoute un écoulement cisailé à la turbulence ambiante, et rend la fonction de distribution des gyrocentres anisotrope en température. L’écoulement cisailé stabilise la turbulence et permet l’apparition d’une barrière de transport (bloc vert). Parall mement, le développement de l’anisotropie de température fait décroître le seuil linéaire de l’instabilité ITG sur le bord interne de la barrière de transport qui s’est formée (si la source de vorticité avait un signe opposé, ceci s’op rerait sur le bord externe) et permet le développement de modes résonants. Ces modes participent ensuite au transport turbulent de la chaleur et de la vorticité, conduisant à la destruction de la barrière et du cisaillement qui lui est associé pour revenir à l’état initial. Ce cycle se poursuit ensuite de façon

quasi-périodique.

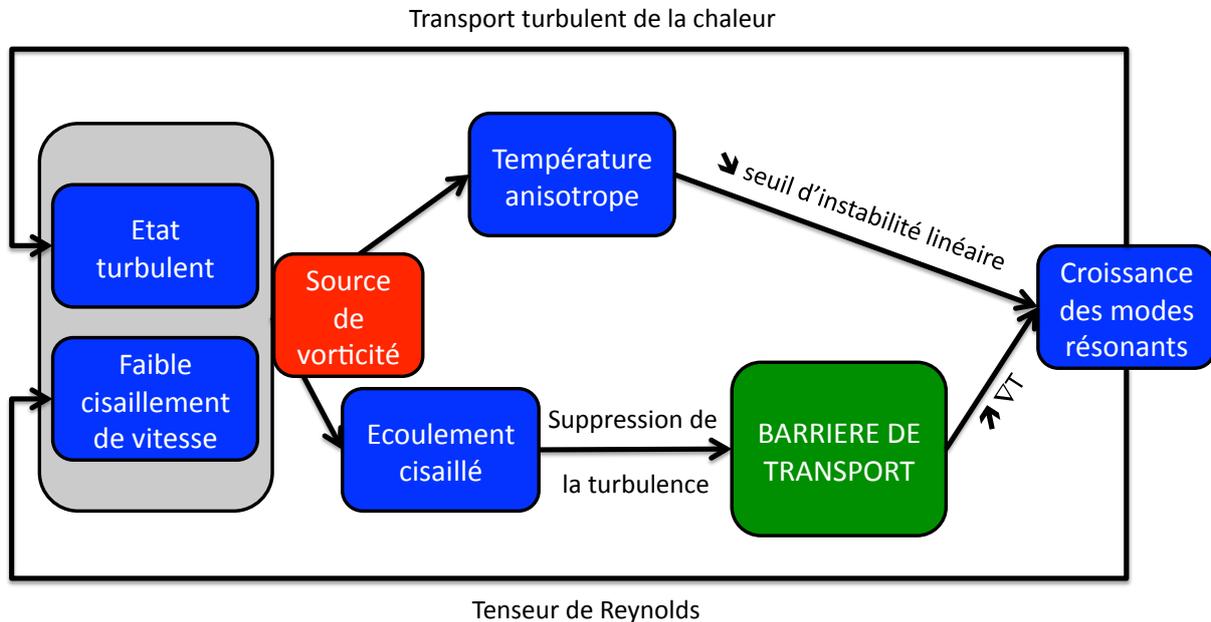


FIGURE 7.12 – Schématisation du cycle de création et destruction d’une barrière de transport dans une simulation de turbulence gyrocinétique issue de l’ITG avec des électrons adiabatiques.

Deux points particuliers de ce cycle peuvent être mis en relief. Premièrement, le source de vorticité permet d’entraîner la création d’un cisaillement de rotation si son amplitude est suffisamment grande pour dominer l’équation d’évolution (7.19) de la vorticité. Le transport $\partial_r \mathcal{J}$ est généralement dominé par l’état turbulent du système. Par suite, on peut effectuer une étude paramétrique en changeant la source d’énergie qui force l’état du système (modifiant ainsi les propriétés de la turbulence), et en appliquant à ces cas la même source de vorticité. Nous montrons les résultats en figure 7.13. La source d’énergie est multipliée par 2 entre le panneau (a) et le panneau (c). On voit immédiatement que lorsque la source d’énergie considérée est intense, la source de vorticité que nous essayons d’appliquer au plasma n’est plus suffisamment forte pour s’imposer sur des temps longs contre la turbulence. Le cycle que nous avons identifié précédemment disparaît alors et aucune barrière de transport ne peut être cr ee.

Deuxièmement, on peut légitimement se poser la question de savoir s’il est possible de trouver une hystérésis dans la transition vers une barrière de transport que nous avons identifié dans ces simulations. Compte-tenu du caractère périodique de la création de la barrière, il faut pour cela couper la source de vorticité alors que la barrière est en train de se former afin de vérifier si le système peut rester dans cet  tat. Dans l’ensemble des simulations effectuées pour cette étude, le système relaxe systématiquement vers son état d’origine (*i.e.*, avant l’introduction de la source de vorticité) lorsque la source de vorticité est arrêtée.

Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons étudié l’effet des écoulements cisailés sur l’éventuelle apparition de barrières de transport dans les plasmas de tokamak. Pour cela, nous avons dans un premier temps détaillé les mécanismes de stabilisation de la turbulence par un écoulement cisailé, et développé un modèle simple permettant d’analyser l’éventuelle transition (et l’hystérésis pouvant lui être associée) d’un état turbulent à un état de barrière de transport dans un plasma. Puis, nous avons démontré pour la première fois la possibilité d’ajouter un écoulement cisailé de

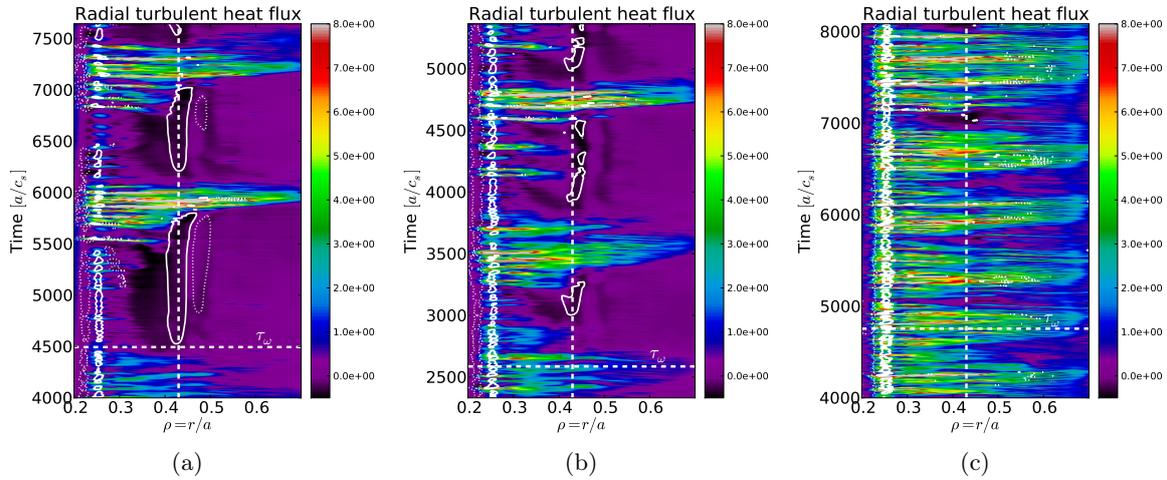


FIGURE 7.13 – Etude paramétrique de l’effet de la source d’énergie sur la création d’un écoulement cisailé et d’une barrière de transport par une source de vorticité. Les panneaux (a), (b) et (c) correspondent à des sources d’énergie de 2.78, 3.70 et 5.55 MW pour un plasma de deutérium (voir [Sarazin et al., 2010a](#)).

manière consistante à une simulation numérique de turbulence gyrocinétique dans le cadre dit *full-f* (*i.e.*, où les fonctions de distributions moyenne et fluctuante sont évoluées en même temps). Ceci a été rendu possible par la construction de source gyrocinétiques modifiant la fonction de distribution dans l’espace des vitesses. La construction d’une source de vorticité nous a permis de modifier le champ électrique radial (et par là d’ajouter un écoulement cisailé dans le plasma), et de mettre en évidence l’inévitable anisotropie de température qui lui est associée. Gr ce à cet écoulement cisailé, nous avons pu obtenir la création de barrières de transport relaxant de façon quasi-périodique dans le plasma. Ces résultats seront publiés dans [Strugarek et al. \(2012c\)](#).

Les simulations présentées dans ce chapitre soulèvent plusieurs questions sur la nature des barrières de transport issues d’un cisaillement de vitesse dans les tokamaks. En effet, notre méthodologie ne nous permet pas de construire une barrière de transport perenne. Toute vorticité ajoutée au plasma conduit à une anisotropie de température qui finira par rendre possible le développement de modes détruisant la barrière. Notre terme source ajoute sans discontinuer de la vorticité au système. Puisque nous n’observons pas d’hystérésis, il faudrait pouvoir construire une source de vorticité qui interviendrait comme un terme de *relaxation* (et non comme un terme source) dans l’équation de vorticité. Dans ce cas, le profil cisailé du champ électrique imposé par la source serait fixe (et non croissant en amplitude comme c’est le cas actuellement), et une barrière de transport perenne pourrait éventuellement voir le jour. Cette piste sera explorée dans un futur proche.

Les barrières de transport expérimentales (liées à un cisaillement de vitesse) sont relativement différentes de l’expérience numérique que nous avons conduite ici. Les barrières externes, très souvent associées à un cisaillement du champ électrique radial, se situent à la périphérie du plasma de cœur au niveau de la dernière surface magnétique fermée et par conséquent d’autres ingrédients physiques que nous ne prenons pas en compte ici sont susceptibles d’intervenir dans leur dynamique. Les barrières internes déclenchées en présence d’un écoulement cisailé sont en revanche très proches de notre expérience numérique. La source du cisaillement provient du dépôt de vorticité par des ondes injectées dans le plasma, ce qui est correctement représenté par notre terme source dans l’équation de vorticité. Il est cependant possible que la dynamique de relaxation particulière que nous observons numériquement n’ait pas été observée expérimentalement car, par exemple, les ondes n’ont pas été appliquées suffisamment longtemps au plasma. Aussi, il est

possible que ce dépôt de vorticité soit accompagné d'un chauffage/refroidissement du plasma dont nous ne tenons pas compte ici. Ceci pourrait changer l'anisotropie de température induite par notre source, et par conséquent mener à une dynamique de barrière différente. Une étude précise à ce sujet devra être effectuée dans un futur proche.

En conclusion, de nombreuses pistes de recherche découlent naturellement de cette étude. Dans un premier temps, et en lien avec l'étude menée au chapitre précédent, nous souhaitons étudier l'impact du profil de q sur les barrières de transport déclenchées avec un écoulement cisailé (en particulier, nous nous intéresserons au cas de profils de q inversés). Ensuite, nous souhaitons également mener une étude numérique sur l'interaction de deux barrières de transport localisées au centre et en périphérie du plasma. Ce système pourrait présenter des similarités avec les barrières de transport du mode H des plasmas de tokamaks, qui sont suspectées d'interagir pour produire une dynamique riche (*Sarazin et al., 2002*). Ces travaux seront menés à moyen terme.

Quatrième partie

Deux systèmes distincts, une physique commune

Apport de l'analyse spectrale pour l'étude de phénomènes multi-échelles

Sommaire

8.1 Analyser les interactions multi-échelles	146
8.1.1 De la puissance des méthodes d'analyse spectrale	146
8.1.2 Méthodologie de l'analyse spectrale	147
8.2 Auto-organisation du champ magnétique dans la dynamo solaire . .	148
8.2.1 Analyse spectrale dans le formalisme MHD	148
8.2.2 Création de grandes échelles dans la dynamo stellaire	155
8.3 Excitation de la turbulence gyrocinétique	163
8.3.1 Analyse spectrale dans le formalisme gyrocinétique	163
8.3.2 Dynamique des modes résonants et saturation de l'instabilité ITG . . .	166

Dans les deux parties précédentes, nous nous sommes intéressés à plusieurs types de plasmas dans lesquels diverses échelles spatiales et temporelles interagissent. Ces interactions, souvent non-triviales, peuvent être à l'origine d'une auto-organisation du plasma, que ce soit par la création d'écoulements zonaux, de barrières de transport, ou encore l'apparition d'une certaine cyclicité. Dans le cas du Soleil, par exemple, la création d'un champ magnétique à grande échelle par la convection turbulente (ainsi que la mise en place du cycle de 11 ans, voir section 2.2.2) met en jeu de nombreuses échelles spatiales et temporelles. Dans le cas des tokamaks, les modes non-résonants semblent importants pour la dynamique du plasma (chapitre 6) et leur interaction avec la turbulence est peu connue. Dans ces deux cas, l'analyse spectrale permet de décrire les échanges d'énergie entre différentes échelles et ainsi de comprendre quels sont les ingrédients physiques qui mènent à l'auto-organisation du plasma. Nous décrivons de manière générale les méthodes d'analyse spectrale en section 8.1, puis nous mettons en œuvre cette analyse dans le formalisme magnétohydrodynamique pour la dynamo solaire (section 8.2), puis dans le formalisme gyrocinétique dans une première étape pour comprendre la dynamique des modes non-résonants dans les tokamaks (section 8.3).

8.1 Analyser les interactions multi-échelles

8.1.1 De la puissance des méthodes d'analyse spectrale

Les techniques d'analyse des interactions inter-échelles sont principalement basées sur des décompositions spectrales (*Frisch, 1995, Frick and Sokoloff, 1998, Dar et al., 2001, Lesieur, 2008*), et des méthodes de décomposition en ondelettes (*Farge, 1992*). Ces techniques furent développées initialement dans différents buts tels que la construction de modèles réduits (*Gürçan et al., 2007, Gürçan and Grappin, 2011*), la caractérisation des spectres turbulents (*Politano and Pouquet, 1998, Boldyrev et al., 2009, Pouquet et al., 2011*), ou encore la fermeture de modèles fluides (*Frisch et al., 1975, Pouquet et al., 1976*). La littérature à ce sujet est extrêmement vaste au

travers de toute la communauté “turbulence”, nous ne nous intéressons ici qu’à une utilisation de type “diagnostique” (*i.e.*, de caractérisation de la turbulence) des méthodes d’analyse spectrale.

Au lieu d’essayer de paramétrer les interactions spectrales analytiquement pour obtenir des prédictions sur les spectres turbulents, nous calculons l’ensemble de ces interactions *via* des simulations numériques où une certaine gamme d’échelles est intégralement résolue. Ceci nous permet d’identifier les échelles clés du système simulé, et de comprendre comment celles-ci interagissent lors de phénomènes dynamiques particuliers. Dans le cadre de la dynamo, de nombreuses études ont cherché à caractériser les échanges d’énergie magnétique ([Blackman and Brandenburg, 2002](#), [Mininni et al., 2005](#), [Livermore et al., 2010](#)) ainsi que les transferts d’hélicité magnétique ([Alexakis et al., 2006](#)). Ces travaux ont permis de comprendre les spectres observés dans les simulations, et ont aussi mis clairement en évidence l’existence d’une cascade inverse d’hélicité magnétique. Dans un autre contexte MHD, [Lesur and Longaretti \(2011\)](#) ont également développé des techniques d’analyse spectrale pour caractériser les transferts d’énergie entre échelles dans la *MRI*¹. Dans le contexte de l’instabilité convection hydrodynamique, [Rincon \(2006\)](#) a proposé une technique d’analyse spectrale pour correctement caractériser les spectres anisotropes. Enfin, et dans un cadre très différent, [Bañón Navarro et al. \(2011\)](#) (voir aussi [Nakata et al. \(2012\)](#)) ont développé une technique tout à fait similaire pour comprendre les interactions entre échelles de la turbulence cinétique dans les tokamaks.

On ne peut qu’être frappé par la variété des applications des techniques d’analyse spectrale. Cependant, un point particulier doit être noté ici. Ces méthodes se basent sur l’étude de quantités quadratiques (mais pas forcément définies positives, voir section 8.1.2) qui font systématiquement intervenir le couplage entre trois champs physiques. On parle alors d’interaction *triadique* ([Verma et al., 2005](#), [Lesieur, 2008](#)). Dans la plupart des études précédemment citées, seuls deux des trois champs intervenant dans ces interactions sont analysés spectralement : le troisième champ effectuant le couplage est considéré dans son ensemble et ses différentes échelles ne sont pas explicitées. Par exemple, dans le cadre de la dynamo, les échelles du champ de vitesse sont rarement distinguées et seules les échelles du champ magnétique sont séparées pour étudier les transferts d’énergie magnétique. Une exception notable est le travail de [Nakata et al. \(2012\)](#) dans le cadre de la turbulence gyrocinétique, où l’ensemble des champs intervenant dans les transferts non-linéaires sont discutés. De même (et pour la première fois dans le formalisme MHD), nous discutons dans ce chapitre l’ensemble des champs intervenant dans les transferts spectraux non-linéaires.

Détaillons à présent la méthodologie générale de ce type d’analyse spectrale.

8.1.2 Méthodologie de l’analyse spectrale

La méthode d’analyse dite *spectrale* est donc un outil puissant permettant non seulement d’extraire d’un système des échelles caractéristiques, mais aussi de caractériser comment ces différentes échelles interagissent entre-elles et par suite de comprendre d’où proviennent les propriétés globales du système. De manière générale, nous adoptons le schéma suivant pour construire notre analyse spectrale :

- Nous étudions des systèmes physiques connus pour conserver globalement un certain nombre de quantités au cours de leur évolution. Selon le problème étudié, nous identifions la ou les quantité(s) conservée(s) permettant de le décrire de manière adéquate.
- Afin de bien décrire les différentes échelles, nous choisissons une base fonctionnelle prenant en compte la géométrie du système à l’aide de laquelle nous séparons les échelles d’intérêt du système.

1. L’instabilité magnéto-rotationnelle est une instabilité MHD qui se développe notamment dans les disques d’accrétion, elle prend sa source dans la rotation différentielle (Keplerienne) du disque (voir [Chandrasekhar, 1960](#), [Balbus and Hawley, 1991](#)).

- Une fois les quantités et la base de projection identifiées, nous construisons leur équation d'évolution dans le formalisme choisi.
- Les équations d'évolution ainsi formées font alors apparaître des termes de couplages entre échelles dont l'étude nous permet de caractériser le processus dynamique mis en jeu.

Nous allons mettre en œuvre cette procédure théorique dans deux formalismes différents, et l'appliquer en particulier à l'étude de la dynamo solaire et de la turbulence (gyro)cinétique dans les tokamaks.

8.2 Auto-organisation du champ magnétique dans la dynamo solaire

Les premiers objets d'application de notre méthode sont les étoiles (voir section 2.1 et partie II). La méthode spectrale que nous développons (section 8.2.1) peut s'appliquer à de nombreux problèmes tels que les interactions entre échelles de la convection, la stabilité des configurations magnétiques, ou encore la dynamo stellaire (que nous détaillerons en section 8.2.2).

8.2.1 Analyse spectrale dans le formalisme MHD

Invariants de la MHD

Pour un système tri-dimensionnel, les équations de la magnétohydrodynamique idéale (*i.e.*, sans aucun terme dissipatif, voir section 1.2.3) sont connues pour conserver les trois quantités suivantes (*Biskamp, 1993*) :

$$E = E^M + E^K = \frac{1}{2} \int_V |\mathbf{B}|^2 d^3V + \frac{1}{2} \int_V \bar{\rho} |\mathbf{v}|^2 d^3V, \quad (8.1)$$

$$H^M = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3V, \quad (8.2)$$

$$H^C = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} d^3V, \quad (8.3)$$

où E est l'énergie totale, E^M l'énergie magnétique, E^K l'énergie cinétique, H^M l'hélicité magnétique (\mathbf{A} est le potentiel vecteur tel que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$) et H^C l'hélicité croisée. Pour autant que le cadre de la MHD idéale soit valide, ces trois quantités sont conservées idéalement sur toute l'étoile, et se transfèrent entre les différentes échelles de l'objet.

Dans le cas de la MHD non-idéale, ces quantités sont lentement dissipées par les opérateurs de diffusion. Puisqu'elle ne sont alors plus conservées, on peut se poser la question de savoir si elles sont toujours pertinentes à étudier d'un point de vue spectral. Suite au travail pionnier de *Taylor (1974)*, *Matthaeus and Montgomery (1980)* ont introduit l'hypothèse de la décroissance sélective (*selective decay*), qui postule que les invariants de la MHD idéale sont dissipés sur des temps caractéristiques différents. Cette idée provient naturellement du fait que les coefficients de dissipation sont *a priori* différents pour le champ magnétique et le champ de vitesse, et par conséquent les invariants sont susceptibles d'être dissipés sur des temps différents. Ceci peut aussi être retrouvé plus rigoureusement à l'aide de principes variationnels (*Montgomery and Phillips, 1989*). Pour illustrer ce processus, nous donnons en figure 8.1 un exemple de décroissance sélective de *Shaikh et al. (2008)* où l'énergie magnétique décroît plus rapidement que l'hélicité magnétique. Dans ce cas, on peut considérer que l'énergie magnétique est dissipée à hélicité magnétique quasi-constante. Malgré les effets dissipatifs qui doivent être pris en compte de façon adéquat, les invariants de la MHD idéale restent ainsi des quantités pertinentes pour analyser les interactions entre échelles dans les processus MHD non-idéaux.

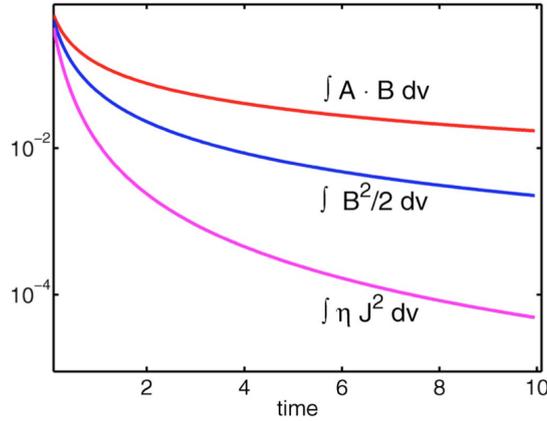


FIGURE 8.1 – Décroissance sélective dans un cas à grand nombre de Lundquist $Lu = LV_A/\eta = Al R_m$, où $Al = V_A/V$ est le nombre d'Alfvén². On voit dans ce cas que l'énergie magnétique décroît sur un temps caractéristique plus rapide que l'hélicité magnétique. Adapté de [Shaikh et al. \(2008\)](#).

Nous donnons ci-après les équations de conservation de trois invariants de la MHD idéale en séparant l'énergie totale en énergies magnétique et cinétique. Puis, nous concentrerons notre étude sur les transferts d'énergie magnétique dans une simulation de dynamo stellaire. Les autres invariants feront l'objet de futurs travaux.

Base des harmoniques sphériques

Notre méthode spectrale est destinée à l'étude des étoiles. Par suite, nous devons choisir une base spectrale sur laquelle projeter nos quantités. Elle nous permettra de décrire les différentes échelles. La base la plus naturelle pour étudier un objet sphérique est la base orthogonale des *harmoniques sphériques*

$$X(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l X_l^m Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (8.4)$$

où θ est la colatitute, φ la longitude, les X_l^m sont les coefficients de la décomposition et nous choisissons la normalisation de Laplace

$$Y_l^m = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad (8.5)$$

et les polynôme de Legendre associés P_l^m sont définis par

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l. \quad (8.6)$$

A titre d'exemple, nous traçons en figure 8.2 les harmoniques sphériques $l = 3$, pour différentes valeurs de m positif. Le nombre $l - m$ permet de donner le nombre des noeuds présents dans la direction poloïdale.

Les harmoniques sphériques ont largement été utilisées dans le cadre de la théorie dynamo, suite au travail pionnier de [Bullard and Gellman \(1954\)](#). Elles permettent en effet d'écrire simplement les opérateurs vectoriels de la MHD en géométrie sphérique (voir annexe J.1.2). Par la

2. Le nombre de Lundquist peut être vu comme le rapport de la force de Lorentz (dans l'équation sur la vitesse) sur le terme de diffusion ohmique (dans l'équation d'induction). Il est important de ne pas confondre grand nombre de Lundquist, et grand nombre de Reynolds magnétique qui signifie un haut de degré de turbulence.

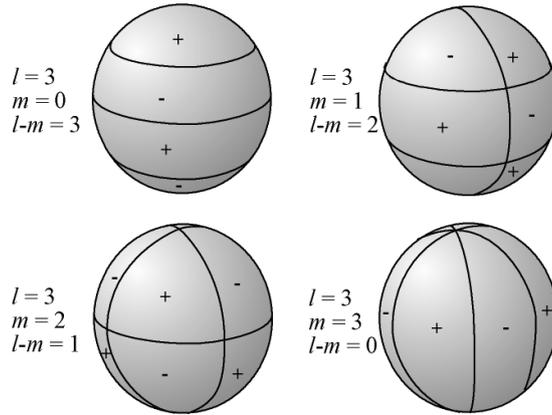


FIGURE 8.2 – Harmoniques sphériques pour $l = 3$ et $0 \leq m \leq 3$. On peut remarquer que le nombre de noeuds dans la direction poloïdal est donné par $l - m$.

suite, les communautés de la dynamo solaire (*Roberts and Stix, 1972*) et de la dynamo terrestre (*McFadden et al., 1991, Ivers and Phillips, 2008*) ont adopté ce formalisme. Les observations elles-mêmes de la dynamo solaire sont systématiquement interprétées en terme d'harmoniques sphériques *DeRosa et al. (2011, 2012)*.

Ces harmoniques sphériques ont les propriétés suivantes

$$(Y_l^m)^{cc} = (-1)^m Y_l^{-m}, \quad (8.7)$$

$$\int_S Y_{l_1}^{m_1} (Y_{l_2}^{m_2})^{cc} d\Omega = \delta_{m_1, m_2} \delta_{l_1, l_2}, \quad (8.8)$$

où cc signifie complexe conjugué, $d\Omega$ est l'angle solide $\sin\theta d\theta d\varphi$ et δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Puisque nous travaillons sur des quantités vectorielles, nous pouvons utiliser la puissance de la décomposition spectrale sur la base des harmoniques sphériques vectorielles définie par *Rieutord (1987), Mathis and Zahn (2005)*

$$\begin{cases} \mathbf{R}_l^m &= Y_l^m \mathbf{e}_r \\ \mathbf{S}_l^m &= \nabla_{\perp} Y_l^m = \partial_{\theta} Y_l^m \mathbf{e}_{\theta} + \frac{1}{\sin\theta} \partial_{\varphi} Y_l^m \mathbf{e}_{\varphi} \\ \mathbf{T}_l^m &= \nabla_{\perp} \times \mathbf{R}_l^m = \frac{1}{\sin\theta} \partial_{\varphi} Y_l^m \mathbf{e}_{\theta} - \partial_{\theta} Y_l^m \mathbf{e}_{\varphi} \end{cases} \quad (8.9)$$

Cette base est extrêmement pratique car elle permet d'écrire les opérateurs de différentiation très simplement. Elle hérite également des propriétés d'orthogonalité de la base scalaire (8.4) (voir équation (J.7)).

Les équations de la magnétohydrodynamiques font également intervenir des produits vectoriels, qui ne sont pas facilement exprimés dans la base vectorielle (8.9). Par suite, nous utiliserons également une base vectorielle alternative (*Varshalovich et al., 1988*)

$$\mathbf{Y}_{l, l+\nu}^m = \sum_{\mu=-1}^1 (-1)^{l-m} \sqrt{2l+1} \begin{pmatrix} l & l+\nu & 1 \\ m & \mu-m & -\mu \end{pmatrix} Y_{l+\nu}^{m-\mu} \mathbf{e}_{\mu} \quad (8.10)$$

où (...) représente le coefficient de Wigner 3-j, qui est directement relié aux coefficients de Clebsch-Gordan. Les vecteurs \mathbf{e}_{μ} sont définis par

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \\ \mathbf{e}_0 &= \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \end{cases} \quad (8.11)$$

Nous donnons en annexe J.1.3 les propriétés de cette base, et explicitons en quoi elle permet de calculer analytiquement les produits vectoriels. Les formules de passage entre les bases vectorielles sont données en équations (J.25) et (J.26).

Définition des échelles caractéristiques

Afin de développer notre analyse spectrale, nous définissons les échelles du problème des deux manières suivantes, que nous dénommerons de manière générique par l'indice L . Premièrement, nous distinguons les échelles axisymétriques (notées avec l'exposant 0 , $\partial_\varphi = 0$) des échelles non-axisymétriques (notées avec l'exposant * , $\partial_\varphi \neq 0$) en écrivant, pour un champ vectoriel \mathbf{X} ,

$$\mathbf{X}_L^0 = \mathcal{A}_0^l \mathbf{R}_l^0 + \mathcal{B}_0^l \mathbf{S}_l^0 + \mathcal{C}_0^l \mathbf{T}_l^0, \quad (8.12)$$

$$\mathbf{X}_L^* = \sum_{\substack{-l \leq m \leq l \\ m \neq 0}} \left\{ \mathcal{A}_m^l \mathbf{R}_l^m + \mathcal{B}_m^l \mathbf{S}_l^m + \mathcal{C}_m^l \mathbf{T}_l^m \right\}. \quad (8.13)$$

Puis, nous décomposerons également dans certains cas nos échelles en *familles primaire* (anti-symétrique par rapport à l'équateur) et *secondaire* (symétrique par rapport à l'équateur). Ces familles sont importantes en théorie dynamo, car lorsque le champ de vitesse est de type *primaire*, les deux familles sont découplées et deux dynamos co-existent sans s'influencer (*Gubbins and Zhang, 1993*). Une discussion sur ces familles, et comment elles sont représentées dans notre formalisme, pourra être trouvée en annexe L.

Dans les deux cas, la décomposition est orthogonale et nous pouvons construire le spectre des invariants. Il faut noter ici que notre décomposition spectrale ne traite que de la direction horizontale (θ, φ). Notre analyse se fera donc sur une coquille sphérique à un rayon donné, et prendra en compte les transferts spectraux horizontaux issus du flux traversant la coquille. Cependant, nous ne traitons pas des interactions entre échelles radiales. Dans la convection, la direction radiale est la direction principale de transport de l'énergie. Ce transport est généré par des structures convectives ayant une grande élongation verticale et présentant un large spectre de structures horizontales. Par suite, les échanges spectraux radiaux sont moins pertinents à étudier et nous nous concentrons sur les échelles horizontales. Rappelons tout de même que même si nous développons notre analyse à un rayon donné, celle-ci peut-être conduite sur une série de rayons pour obtenir plus d'informations sur la dynamique radiale.

Evolution de l'énergie magnétique

Nous définissons le spectre d'énergie magnétique par

$$E_L^M = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{B}_L \cdot \mathbf{B}_L \, d\Omega. \quad (8.14)$$

L'équation de conservation de l'énergie magnétique est alors basée sur l'équation d'induction (1.17) que nous rappelons ici

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}).$$

En multipliant cette équation par \mathbf{B}_L , et en intégrant sur une surface sphérique, nous pouvons obtenir

$$\partial_t E_L^{mag} = \mathcal{N}_L + \sum_{L_1, L_2} \{ \mathcal{P}_L(L_1, L_2) + \mathcal{F}_L(L_1, L_2) \}, \quad (8.15)$$

où \mathcal{N} représente les termes de diffusion ohmique, \mathcal{P} la production³ d'énergie magnétique et \mathcal{F} la divergence du flux d'énergie magnétique à travers la surface sphérique considérée. Ces trois termes s'écrivent

$$\mathcal{N}_L(r) = \int_S \{ \eta \mathbf{B}_L \cdot \nabla^2 \mathbf{B}_L + \partial_r \eta \mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{B}_L \times \nabla \times \mathbf{B}_L) \} d\Omega, \quad (8.16)$$

$$\mathcal{P}_L(r, L_1, L_2) = \int_S (\mathbf{v}_{L_1} \times \mathbf{B}_{L_2}) \cdot \nabla \times \mathbf{B}_L d\Omega, \quad (8.17)$$

$$\mathcal{F}_L(r, L_1, L_2) = \int_S \nabla \cdot [(\mathbf{v}_{L_1} \times \mathbf{B}_{L_2}) \times \mathbf{B}_L] d\Omega. \quad (8.18)$$

Le terme diffusif \mathcal{N} a été coupé en deux parties en utilisant la relation vectorielle $\nabla \times (f(r)\mathbf{X}) = f(r)\nabla \times \mathbf{X} + \partial_r f(r)\mathbf{e}_r \times \mathbf{X}$ car le coefficient de diffusion η peut dépendre de la direction radiale. De plus, nous avons également utilisé la relation vectorielle $\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{X} = \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{X}) + \mathbf{X} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$ (avec $\mathbf{X} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$) pour séparer les termes de production et de flux.

Les expressions données ici font intervenir des produits vectoriels d'harmoniques sphériques qui peuvent être complexes à évaluer⁴. Par souci de simplicité, nous renvoyons le lecteur à l'annexe J.1 pour la dérivation des coefficients de couplages nécessaires à leur évaluation.

Notons ici que le terme de *production* doit être compris au sens large, car il peut représenter à la fois la *création* et la *destruction* d'énergie magnétique à une certaine échelle.

Nous appliquons notre méthode spectrale au cas dynamo en section 8.2.2. Auparavant, nous détaillons la dérivation des équations de conservation des autres invariants dans les paragraphes ci-après.

Evolution de l'énergie cinétique

Nous définissons le spectre d'énergie cinétique, en unité *cgs*, par

$$E_L^K = \frac{\bar{\rho}}{2} \int_S \mathbf{v}_L \cdot \mathbf{v}_L d\Omega. \quad (8.19)$$

L'équation de conservation de l'énergie cinétique dérive de l'équation de conservation du moment (1.19) que nous rappelons ici

$$\bar{\rho} [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{v}] = -\nabla P + \rho \mathbf{g} + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathcal{D} - [\nabla \bar{P} - \bar{\rho} \mathbf{g}].$$

En multipliant cette équation par \mathbf{v}_L et en intégrant sur une surface sphérique, nous obtenons

$$\partial_t E_L^K = \mathcal{V}_L + \mathcal{H}_L + \mathcal{C}_L(L-1, L+1) + \sum_{L_1, L_2} \{ \mathcal{R}_L(L_1, L_2) + \mathcal{M}_L(L_1, L_2) \}, \quad (8.20)$$

où \mathcal{V} représente les termes visqueux, \mathcal{H} les contributions hydrostatiques, \mathcal{C} la force de Coriolis, \mathcal{R} le tenseur de Reynolds et \mathcal{M} le tenseur de Maxwell. Nous donnons ci-après l'expression des

3. Dans ce chapitre, le nom *production* doit être compris au sens large car il peut représenter un transfert positif ou négatif, et par conséquent contribuer à la production ou la destruction de la quantité étudiée.

4. Dans le cas d'une simulation de dynamo stellaire, l'ordre des harmoniques sphériques peut facilement atteindre quelques centaines. Les coefficients de couplage font intervenir les coefficients de Clebsch-Gordan, qui font eux-mêmes intervenir des formules analytiques non triviales. Numériquement, leur évaluation est un défi de précision numérique. Afin de calculer ces coefficients jusqu'aux ordres les plus élevés, nous avons dû faire appel à une librairie numérique de précision arbitraire que nous avons couplée au code ASH (voir annexe B).

différents termes

$$\mathcal{V}_L(r) = - \int_S (\nabla \cdot \mathcal{D})_L \cdot \mathbf{v}_L \, d\Omega, \quad (8.21)$$

$$\mathcal{H}_L(r) = (1 - \delta_{L,0}) \int_S (\rho \mathbf{g} - \nabla P)_L \cdot \mathbf{v}_L \, d\Omega, \quad (8.22)$$

$$\mathcal{C}_L(r, L-1, L+1) = -2\bar{\rho} \int_S (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{v}_{(L-1|L+1)}) \cdot \mathbf{v}_L \, d\Omega, \quad (8.23)$$

$$\mathcal{R}_L(r, L_1, L_2) = \bar{\rho} \int_S [\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} - \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})]_L \times \mathbf{v}_L \, d\Omega, \quad (8.24)$$

$$\mathcal{M}_L(r, L_1, L_2) = \frac{1}{4\pi} \int_S (\nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B})_L \cdot \mathbf{v}_L \, d\Omega, \quad (8.25)$$

où la notation $\mathbf{v}_{(L-1|L+1)}$ signifie que le terme de Coriolis fait uniquement intervenir \mathbf{v}_{L-1} et \mathbf{v}_{L+1} .

Les termes visqueux et hydrostatiques ne couplent pas les différentes échelles entre elles. Cependant, le terme visqueux a une écriture relativement compliquée que nous donnons en annexe J.3. Afin de dériver l'expression du terme advectif de Reynolds, nous avons utilisé la relation vectorielle $\nabla(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Z}) = \mathbf{X} \times (\nabla \times \mathbf{Z}) + \mathbf{Z} \times (\nabla \times \mathbf{X}) + (\mathbf{X} \cdot \nabla)\mathbf{Z} + (\mathbf{Z} \cdot \nabla)\mathbf{X}$. Les produits vectoriels et scalaires présents dans les termes de Reynolds (8.24) et de Maxwell (8.25) sont alors évalués à l'aide des formules (J.21) et (J.23).

Enfin, la force de Coriolis couple une échelle avec ses échelles voisines $L-1$ et $L+1$ pour la raison suivante. Par définition, nous pouvons écrire la rotation solide

$$\boldsymbol{\Omega}_0 = \Omega_0 (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) = \frac{\sqrt{4\pi}\Omega_0}{\sqrt{3}} (\mathbf{R}_1^0 + \mathbf{S}_1^0) = \sqrt{4\pi}\Omega_0 \mathbf{Y}_{1,0}^0.$$

En utilisant la formule du produit vectoriel (J.21), nous obtenons immédiatement

$$-(\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{v})_{l,l+\nu}^m = \sqrt{4\pi} \sum_{\nu_1=-1}^1 \left[U_{l,l+\nu_1}^m \mathcal{J}_{l,m,\nu_1,1,0,-1}^{l,m,\nu} + U_{l+1,l+1+\nu_1}^m \mathcal{J}_{l+1,m,\nu_1,1,0,-1}^{l,m,\nu} + U_{l-1,l-1+\nu_1}^m \mathcal{J}_{l-1,m,\nu_1,1,0,-1}^{l,m,\nu} \right] \Omega_0$$

Par conséquent, seules les échelles voisines de L peuvent intervenir dans le couplage \mathcal{C} par la force de Coriolis. Ainsi, nous avons pu exprimer dans notre formalisme tous les termes participant à la construction du spectre d'énergie cinétique.

Evolution de l'hélicité magnétique

Nous définissons le spectre d'hélicité magnétique par

$$H_L^M = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{A}_L \cdot \mathbf{B}_L \, d\Omega, \quad (8.26)$$

où \mathbf{A} est un potentiel vecteur tel que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Il est défini à une jauge près, car si $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$, alors on a également $\nabla \times \mathbf{A}' = \mathbf{B}$. Par suite, l'hélicité définie en (8.26) dépend de la jauge choisie pour \mathbf{A} selon les conditions aux limites, ce qui n'est pas satisfaisant. Afin de résoudre ce problème, *Berger and Field* (1984) proposèrent d'introduire une *hélicité magnétique relative* indépendante de la jauge choisie pour le potentiel vecteur. Pour cela, il nous faut introduire un champ magnétique potentiel \mathbf{B}_0 ($\nabla \times \mathbf{B}_0 = 0$) qui possède les mêmes composantes tangentielles que \mathbf{B} sur les bords du volume considéré. Un tel champ magnétique est défini de manière unique.

Puisque nous définissons notre hélicité magnétique sur une surface S (de normale \mathbf{n}), le champ magnétique potentiel \mathbf{B}_0 est tel que $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$, et la composante tangentielle à S de \mathbf{B}_0 est définie telle que $\nabla \times \mathbf{B}_0 = 0$ et $\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0$. Dans ce cas, l'hélicité magnétique relative s'écrit

$$H_{\text{rel}}^M = \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) \, d\Omega, \quad (8.27)$$

où $\nabla \times \mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_0$. Le potentiel vecteur \mathbf{A}_0 est également défini à une jauge près, cependant le choix de sa jauge ne change pas l'hélicité magnétique relative. L'invariance de jauge de (8.27) apparaît immédiatement, car pour $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$ on a

$$\begin{aligned} H_{\text{rel}}^M(\mathbf{A}') - H_{\text{rel}}^M(\mathbf{A}) &= \int_S \nabla\psi \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) \, d\Omega = \int_S \nabla \cdot \{\psi(\mathbf{B} - \mathbf{B}_0)\} \, d\Omega \\ &= \int_S \nabla_h \cdot \{\psi(\mathbf{B} - \mathbf{B}_0)\} \, d\Omega = 0, \end{aligned}$$

où ∇_h représente le gradient horizontal sur la surface S .

On peut aller plus loin et démontrer que si l'on se place dans la jauge de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$), l'hélicité magnétique (8.26) est égale à l'hélicité relative (8.27) (cf annexe K). Dans ce cas, le vecteur potentiel \mathbf{A} est régi par l'équation

$$\partial_t \mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{4\pi\eta}{c} \nabla \times \mathbf{B}.$$

Par conséquent, nous pouvons écrire

$$\partial_t H^M = \mathcal{N}_L^H + \sum_{L_1, L_2} \{\mathcal{P}_L^H(L_1, L_2) + \mathcal{F}_L^H(L_1, L_2)\}. \quad (8.28)$$

Les trois termes sont définis par

$$\mathcal{N}_L^H(r) = -\frac{4\pi\eta}{c} \int_S \mathbf{J}_L \cdot \mathbf{B}_L \, d\Omega, \quad (8.29)$$

$$\mathcal{P}_L^H(r, L_1, L_2) = \int_S (\mathbf{v}_{L_1} \times \mathbf{B}_{L_2}) \cdot \mathbf{B}_L \, d\Omega, \quad (8.30)$$

$$\mathcal{F}_L^H(r, L_1, L_2) = \int_S \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} (\mathbf{v}_{L_1} \times \mathbf{B}_{L_2}) \times \mathbf{A}_L - \frac{4\pi\eta}{c} \mathbf{J}_L \times \mathbf{A}_L \right] \, d\Omega. \quad (8.31)$$

Il est intéressant de noter que le terme de production \mathcal{P}^H disparaît lorsque l'on écrit l'équation d'évolution de l'hélicité magnétique dans l'espace réel. Par conséquent, il représente les transferts d'hélicité entre les différentes échelles du système. On peut également remarquer que le terme de dissipation de l'hélicité magnétique \mathcal{N}^H possède un ordre de moins que le terme de dissipation de l'énergie magnétique \mathcal{N} , justifiant le phénomène de décroissance sélective décrit en section 8.2.1.

Evolution de l'hélicité croisée

Enfin, le dernier invariant de la MHD est l'hélicité croisée que nous définissons par

$$H_L^C = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{B}_L \cdot \mathbf{v}_L \, d\Omega. \quad (8.32)$$

Son équation d'évolution est obtenue très simplement en utilisant les équations d'induction (1.17) et de conservation du moment (1.19). Afin de ne pas alourdir la discussion ici, nous renvoyons le lecteur en annexe J pour la description détaillée des différents termes spectraux.

Spécificité des harmoniques sphériques pour les transferts spectraux

Les différentes équations de conservation des invariants de la MHD idéales font intervenir des couplages entre échelles (*i.e.*, entre harmoniques sphériques) *via* le produit vectoriel. Les couplages spectraux dans l'espace de Fourier sont souvent bien compris en termes de triades de vecteurs d'onde, tels que $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$. Dans le cas des harmoniques sphériques, cette triade se complique légèrement. En effet, la règle d'interaction entre trois harmoniques est obtenue pour l'inégalité triangulaire $|l_1 - l_2| \leq l \leq l_1 + l_2$ sous la condition $m = m_1 + m_2$. Par suite, deux harmoniques l_1 et l_2 interagissent ensemble pour impacter une gamme d'harmoniques l (alors que dans la base de Fourier, une seule harmonique est impactée lors de l'interaction triadique). Afin d'illustrer cette particularité, nous donnons en figure 8.3 un exemple type d'interactions d'harmoniques sphériques. Les échelles du champ de vitesse sont représentées en triangles rouges, celles du champ magnétique en carrés bleus, et les résultats de leurs interactions (symbolisées par les doubles flèches noires) sont donnés en ronds verts. Par exemple, on voit que les interactions des modes du champ magnétique ($l_1 = 1, m_1 = -1$) et ($l_1 = 1, m_1 = 1$) impactent tous les deux modes axisymétriques ($l \in \{1, 2, 3\}, m = 0$). Ce schéma explicatif permet de comprendre comment se couplent les harmoniques sphériques et sert de base à notre analyse spectrale.

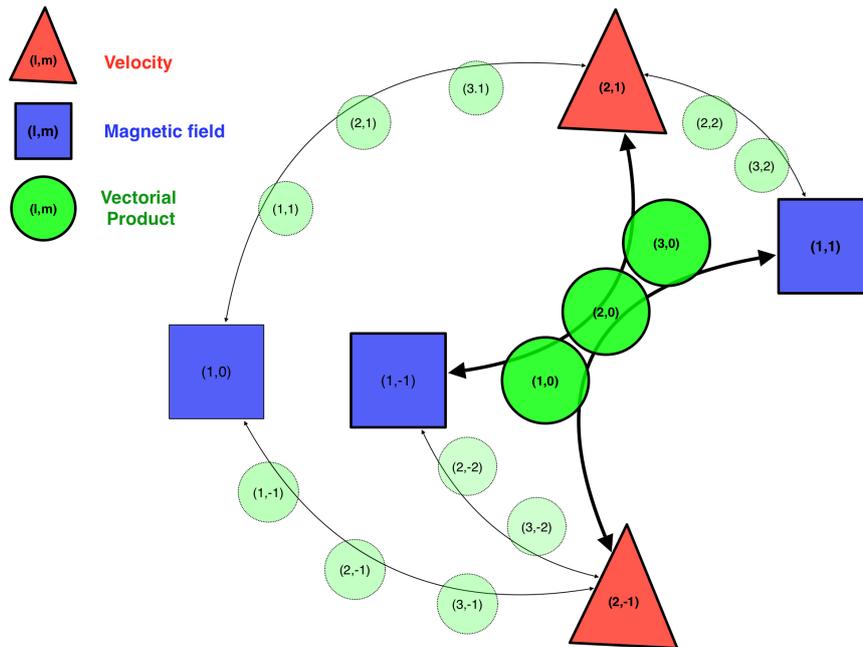


FIGURE 8.3 – Schéma d'interaction triadique pour les harmoniques sphériques *via* le produit vectoriel. Deux harmoniques de \mathbf{v} (triangles rouges) interagissent (flèches noires) avec trois harmoniques de \mathbf{B} (carrés bleus) pour impacter une gamme d'harmoniques (ronds verts). Les symboles gras sont utilisés par *Strugarek et al.* (2012a) pour valider la méthode développée.

Nous avons développé notre technique d'analyse spectrale à l'aide de la méthodologie décrite en section 8.1.2 dans le formalisme MHD en géométrie sphérique. Nous l'appliquons à présent à la dynamo stellaire.

8.2.2 Création de grandes échelles dans la dynamo stellaire

Contexte

Le champ magnétique solaire est observé sur une large gamme d'échelles spatiales, allant de la taille du Soleil (~ 700 Mm) aux échelles de la granulation à la surface solaire (< 1 Mm),

ainsi que sur une large gamme d'échelles temporelles (voir section 2.2.2). Ces champs magnétiques prennent *a priori* leur origine dans un processus dynamo. Le développement de la théorie dynamo a mené à la distinction de dynamos petites et grandes échelles (Cattaneo and Hughes, 2001), ainsi que la distinction entre les dynamos lentes (*i.e.*, quiaturent sur des échelles de temps ohmiques) et rapides (voir Tobias and Cattaneo, 2008). La dynamo grande échelle est capable de produire un champ magnétique à une échelle plus grande que l'échelle caractéristique du champ de vitesse, tandis que les dynamos petites échelles créent uniquement du champ magnétique aux mêmes échelles (Tobias *et al.*, 2011). Dans certains cas, le terme de dynamo grande échelle renvoie à une dynamo qui développe un champ magnétique en super-équipartition avec l'état hydrodynamique du système, (*i.e.*, dont l'énergie magnétique est plus importante que l'énergie cinétique de l'écoulement générant la dynamo (voir Featherstone *et al.* (2009))). Dans le Soleil, les deux types de dynamos sont *a priori* actives et les observations permettent d'identifier à la fois des champs magnétiques intenses de grande échelle (Schrijver and DeRosa, 2003), et des structures magnétiques à très petite échelle (Hagenaar *et al.*, 2003, Centeno *et al.*, 2007). Enfin, dans le cas où le champ de vitesse présente une large gamme d'échelles également, il devient complexe de proprement distinguer les tendances petites et grandes échelles de la dynamo (Tobias and Cattaneo, 2008). Dans ce cas, l'analyse spectrale que nous venons de construire permet de distinguer précisément les contributions des différentes échelles qui jouent un rôle dans la dynamo.

De plus, le champ magnétique stellaire possède une cyclicité intrinsèque de 11 ans (demi-période du cycle complet, voir section 2.2.2). Le cycle est observé à la fois sur l'activité magnétique de l'étoile à petite échelle (cycle de 11 ans sur les tâches solaires), sur la polarité moyenne de ces tâches, ainsi que sur la polarité et l'amplitude des champs magnétiques de plus grandes échelles (DeRosa *et al.*, 2012). Cette dynamique est *a priori* générée par processus dynamo. La question de savoir si le cycle est généré par les grandes échelles, les petites échelles, ou bien s'il provient d'un mécanisme générique à toutes les échelles reste encore à élucider. La méthode spectrale que nous développons ici permettra de faire un premier pas pour répondre à cette question.

Nous concentrons notre étude sur les spectres d'énergie magnétique (8.14). Les simulations numériques actuelles de la dynamo stellaire Brun *et al.* (2004b), Browning (2008), Brown *et al.* (2010), Ghizaru *et al.* (2010), Käpylä *et al.* (2012) permettent de modéliser des interactions non-linéaires sur une gamme d'échelles suffisamment étendue pour que nous puissions distinguer les dynamos à petite et grande échelle. Nous étudions la phase de croissance initiale de la dynamo, ainsi que sa saturation. Bien que dans le cas étudié, le champ magnétique dynamo rétro-aggisse peu sur les écoulements le générant, il nous faudrait également analyser l'évolution de l'énergie cinétique afin de compléter l'étude. Ceci sera effectué dans un future proche. Une autre remarque sur notre modèle est qu'il ne présente pas de renversement de polarité à grande échelle sur l'intervalle de temps étudié. Des pistes pour rendre la dynamo simulée cyclique pourront être trouvées dans Brown *et al.* (2011), Racine *et al.* (2011), Nelson *et al.* (2012), et feront également l'objet de futures études.

Dynamo convective

Nous utilisons le code ASH pour simuler une dynamo générée dans une zone convective turbulente de type solaire. Pour cela, nous utilisons un modèle équivalent au modèle complet présenté au chapitre 4, en ne conservant que la zone convective (Jouve and Brun, 2009). Nous donnons en figure 8.4 les principales caractéristiques du modèle hydrodynamique.

Le profil de rotation est solaire (figure 8.4(a)), avec un équateur rapide et des pôles lents. Le spectre d'énergie cinétique (figure 8.4(b)) présente un pic en E_3^0 , qui représente la rotation différentielle. Il présente également une large zone "plate" qui témoigne du large spectre excité par l'instabilité convective. Nous initialisons un champ magnétique non-axisymétrique ($l = 9, m = 5$) dans cette simulation convective pour déclencher une dynamo :

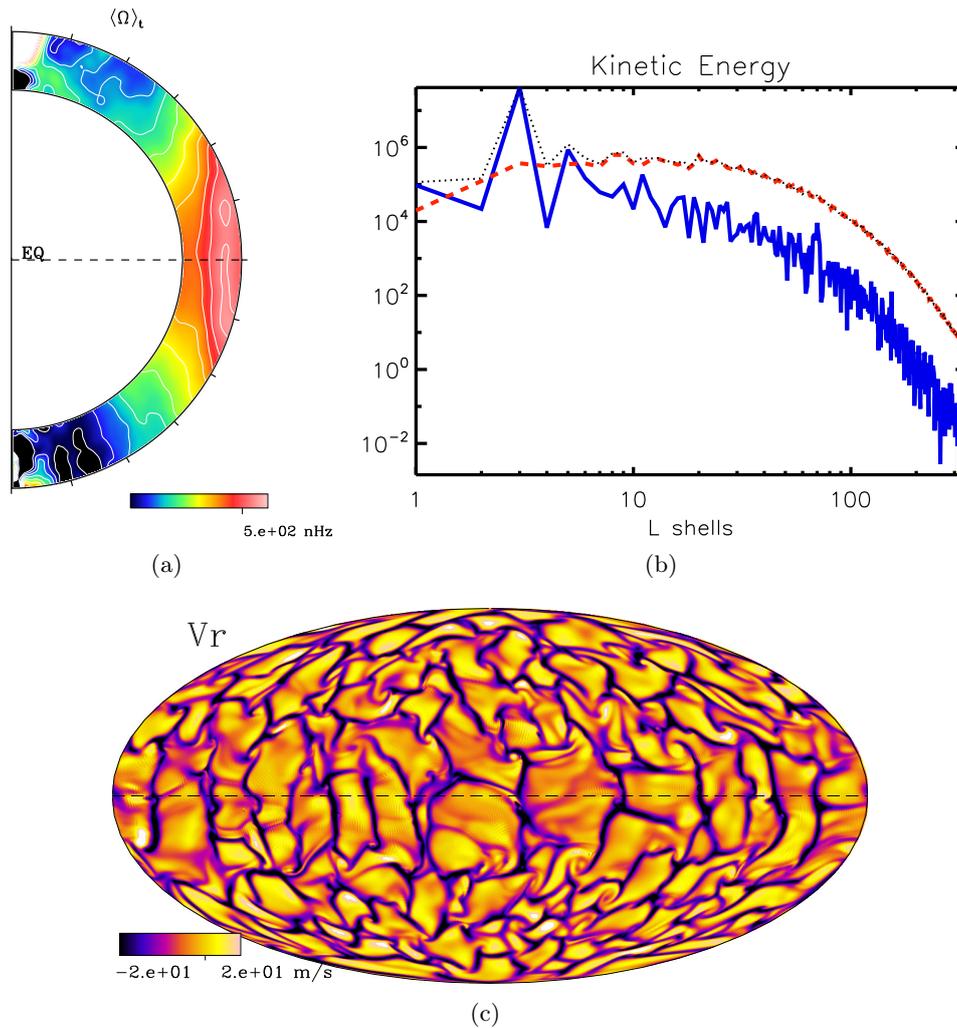


FIGURE 8.4 – (a) Rotation différentielle solaire moyennée sur environ un mois. (b) Spectre d'énergie cinétique au milieu de la zone convective. Le spectre axisymétrique est en bleu et le spectre non-axisymétrique en tirets rouges. Le spectre total est tracé en pointillés. (c) Vitesse radiale de la convection en haut de la zone convective (*cf* figure 4.3). Les zones oranges correspondent aux écoulements montants, et les petites structures violettes aux écoulements descendants.

$$\mathbf{B} = \frac{10 B_0 R_\odot^2}{r^2} \left(\frac{R_b}{r} \right)^9 \mathbf{R}_9^5 - \frac{B_0 R_\odot^2}{r^2} \left(\frac{R_b}{r} \right)^9 \mathbf{S}_9^5. \quad (8.33)$$

Nous choisissons $B_0 = 100 G$ de telle sorte que l'énergie magnétique de la coquille $L = 9$ soit égale initialement à l'énergie cinétique à cette échelle. Cette initialisation nous permet de directement observer le transfert d'énergie d'une échelle unique vers toutes les échelles du spectre turbulent. Nous représentons en figure 8.5 l'état initial de l'énergie magnétique, et l'état saturé au bout d'environ 600 jours d'évolution. La complexité des structures magnétiques saturées apparaît immédiatement. Nous allons utiliser la méthode d'analyse spectrale que nous avons développée dans la partie précédente pour mieux comprendre le mode opératoire de cette dynamo.

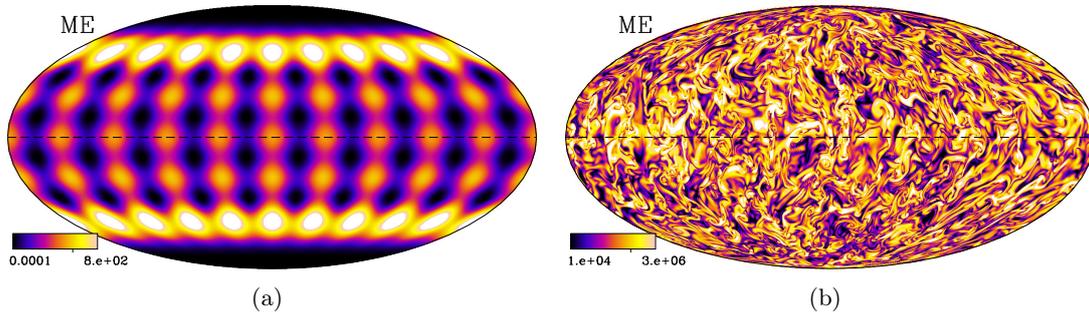


FIGURE 8.5 – (a) Projection de Mollweide de l'énergie magnétique initiale ($l = 9, m = 5$) au milieu de la zone convective. (b) Énergie magnétique saturée à la même position, environ 600 jours après l'introduction du champ magnétique.

Nous traçons l'évolution des spectres d'énergie magnétique axisymétrique et non-axisymétrique au centre de la zone convective en figure 8.6. Les panneaux (a) et (c) présentent l'évolution du spectre total, tandis que les panneaux (b) et (d) montrent la trace temporelle de quelques coquilles spectrales seulement. Compte tenu de notre initialisation, le spectre est divisé en quatre zones : la zone (I) représente les grandes échelles, la zone (II) les échelles voisines de l'échelle d'injection initiale, la zone (III) présente un spectre plat, et la zone (IV) correspond à la zone où la diffusion commence à jouer un rôle. L'évolution temporelle s'effectue en trois temps. L'ensemble du spectre croît exponentiellement (taux de croissance exponentiel d'environ 0.6 jours^{-1} , soit un temps caractéristique environ 17 fois plus petit que le temps de retournement convectif des cellules les plus grandes) pendant environ 17 jours (à l'exception de la coquille $L = 9$ qui initialement perd de l'énergie), puis entre dans une phase de croissance lente où les interactions non-linéaires jouent un rôle majeur. Enfin, le spectre (non axisymétrique, panneau (b)) sature environ 300 jours après l'introduction du champ magnétique, soit environ 10 périodes de rotation de l'étoile. La condition initiale ($L = 9$) n'apparaît plus distinctement pour le spectre saturé (courbe rouge sur le panneau (a)).

Le champ magnétique axisymétrique de grande échelle (petit L) sature à un niveau bien plus faible que le spectre non-axisymétrique. Nous détaillons ci-après les processus de saturation menant à cette répartition.

Du fait de la valeur augmentée de la diffusion ohmique, le temps caractéristique de diffusion pour le dipôle axisymétrique ($t_\eta = \Delta_{CZ}^2 / (\pi^2 \eta)$) est de l'ordre de 700 jours. La dynamo que nous présentons ici est *rapide* dans le sens où le champ magnétique atteint un état saturé sur un temps plus court que le temps de diffusion ohmique.

La croissance initiale est principalement dominée par l'effet de la rotation différentielle \mathbf{v}_3^0 sur le spectre d'énergie magnétique. Les interactions des harmoniques sphériques sont contrôlées par la règle de triangulation $|l_2 - l_1| \leq l \leq l_1 + l_2$ (voir partie précédente), et par conséquent la

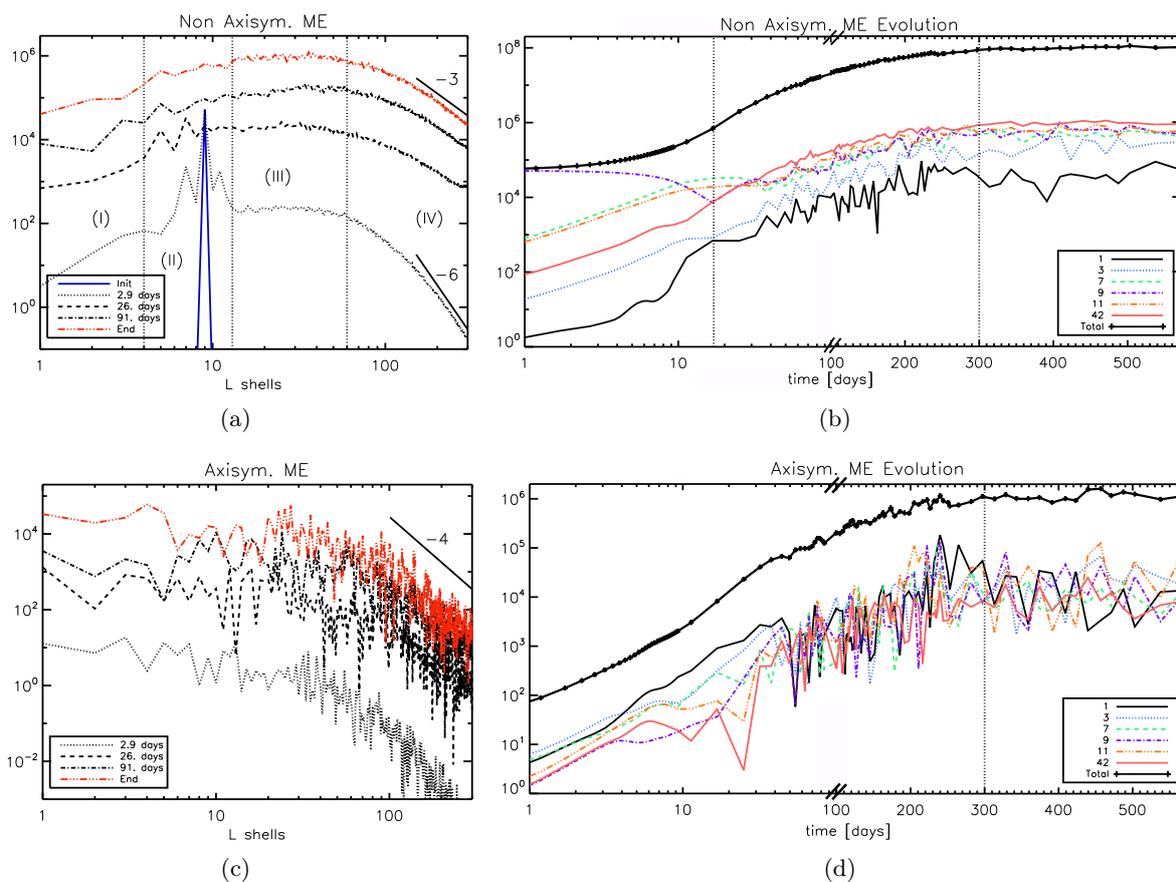


FIGURE 8.6 – Evolution des spectres d'énergie magnétique dans une dynamo turbulente. Les panneaux (a) et (c) représentent les spectres non-axisymétrique et axisymétrique à différents instants. Les panneaux (b) et (d) montrent la trace temporelle de 6 coquilles spectrales au milieu de la zone convective. On distingue bien la phase de croissance exponentielle initiale ($t \lesssim 17$ jours pour le spectre non-axisymétrique), et la saturation de la dynamo environ 300 jours après l'introduction du champ magnétique.

rotation différentielle \mathbf{v}_3^0 ne peut agir que dans la zone voisine (II) de l'échelle initiale du spectre. Les autres zones du spectre sont dominées par deux interactions principales : le couplage de l'échelle initiale \mathbf{B}_9^* avec les échelles non axisymétriques du champ de vitesse \mathbf{v}^* , et le couplage de la rotation différentielle aux échelles de champ magnétique accessibles. A titre d'exemple, nous montrons le terme de production \mathcal{P} (voir équation (8.15)) pour la coquille spectrale $L = 42$ pendant la phase de croissance initiale en figure 8.7. Nous traçons les cartes d'interaction $\mathbf{v} - \mathbf{B}$ pour cette coquille, en séparant les échelles non-axisymétriques (a) et axisymétriques (b) du champ de vitesse. Le panneau (c) représente la contribution nette sommée sur les échelles du champ de vitesse. Les deux types d'interaction apparaissent alors clairement. Tout d'abord, on voit qu'un fort transfert non-local d'énergie domine l'évolution de cette coquille. C'est l'interaction directe des coquilles spectrales du champ de vitesse non-axisymétrique \mathbf{v}_{33}^* à \mathbf{v}_{51}^* avec l'échelle magnétique initiale \mathbf{B}_9^* (panneau (a)) qui est responsable de ce transfert non-local. On observe ainsi que le spectre d'énergie magnétique est principalement créé par des interactions non-locales directes entre l'échelle d'injection d'énergie initiale et le spectre de vitesse (et donc d'énergie cinétique). Ensuite, la courbe donnée au panneau (c) présente une forme de cascade autour de l'échelle $L = 42$. Cette contribution provient du panneau (b) et témoigne de l'effet cisailant de la rotation différentielle sur le champ magnétique à $L = 42$. La rotation différentielle a donc pour effet de générer une cascade directe d'énergie magnétique vers les petites échelles, car elle permet à l'échelle $L = 42$ de recevoir de l'énergie d'une échelle plus grande ($L_1 < 42$) et d'en donner à une échelle plus petite ($L > 42$). Ces deux types d'interactions sont à l'œuvre initialement pour toutes les échelles du spectre d'énergie magnétique (excepté l'échelle d'initialisation $L = 9$).

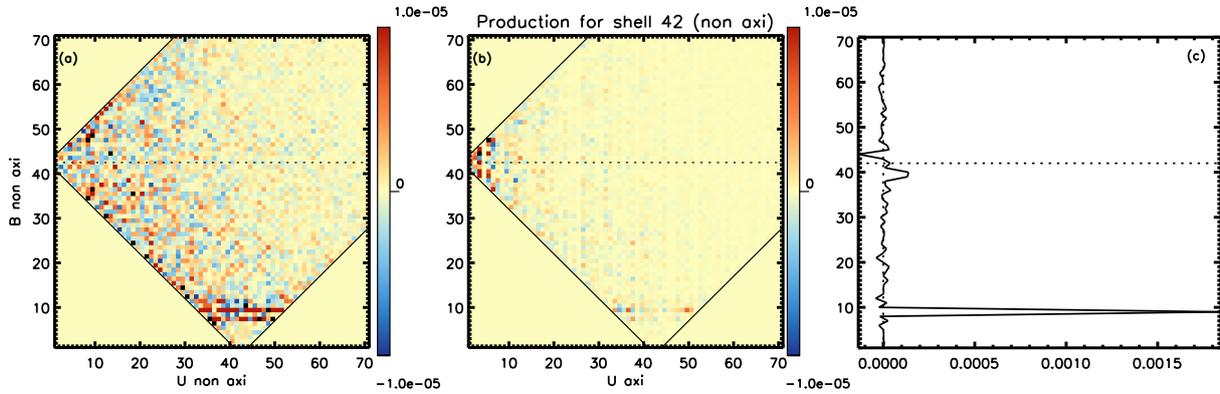


FIGURE 8.7 – Terme de production \mathcal{P} pour la coquille $L = 42$ du spectre non-axisymétrique dans la phase initiale de construction du spectre.

La saturation de la dynamo résulte de l'annulation du membre droite de l'équation d'évolution de l'énergie magnétique (8.15). Aux plus grandes échelles, la diffusion est faible et peut être par conséquent négligée dans un premier temps. Le terme de flux \mathcal{F} représente les interactions horizontales générées par les mouvements convectifs dans la direction radiale. Dans une zone convective turbulente, ces interactions sont susceptibles de ne jamais être nulles du fait du mouvement de circulation continu des rouleaux convectifs caractéristiques de cette instabilité. Par conséquent, la saturation des grandes et moyennes échelles du spectre d'énergie magnétique s'effectue par un équilibre entre le terme de flux \mathcal{F} et le terme de production \mathcal{P} . Cependant, la diffusion joue un rôle non négligeable aux petites échelles (zone (IV) par exemple) et entre dans l'équilibre de saturation de la dynamo. Dans ce cas, nous trouvons que les termes de production et de flux se combinent pour compenser la dissipation ohmique.

L'effet cascade de la rotation différentielle que nous avons précédemment identifié est gé-

nérique et continue à agir lors de la saturation du spectre. Il domine notamment les termes de saturation et de maintien de l'énergie magnétique dans la zone (III). Il existe cependant à plus petite échelle (qui ne ressent que très faiblement la rotation différentielle) un autre type de cascade. Nous traçons en figure 8.8 la carte des interactions dominantes du terme de production pour la coquille spectrale $L = 152$. On voit immédiatement sur le panneau (a) que les interactions principales sont localisées autour de $L = 152$, et mettent en jeu une large gamme d'échelles du champ magnétique et du champ de vitesse (non-axisymétrique). Le panneau (b) est obtenu en sommant les contributions des différentes échelles non-axisymétriques du champ de vitesse. Comme pouvait le laisser présager la carte de couleur, les échelles plus grandes que la coquille $L = 152$ lui donnent majoritairement de l'énergie, et elle donne de l'énergie aux échelles plus petites qu'elle. Nous mettons cette fois en évidence une véritable cascade d'énergie magnétique qui n'est pas dominée par l'effet cisailant de la rotation différentielle (les contributions du champ de vitesse axisymétrique pour ce transfert sont plus faibles de deux ordres de grandeur), témoignant de l'organisation du système sur une large plage aux petites échelle.

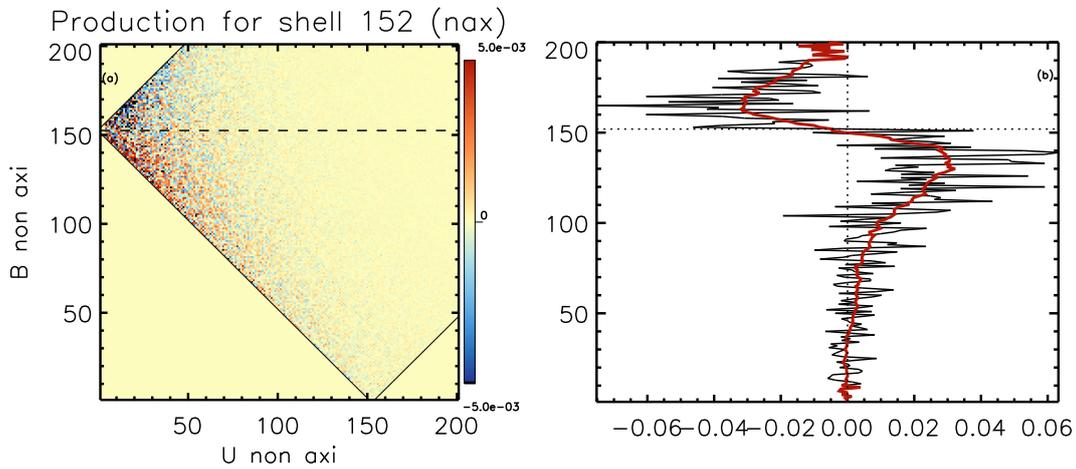


FIGURE 8.8 – Terme de Production \mathcal{P} pour la coquille $L = 152$ du spectre non-axisymétrique pendant la phase de saturation. La courbe rouge est le résultat du lissage de la courbe noir (panneau (c)), elle met en évidence la forme caractéristique (en “S”) d’une cascade d’énergie.

Enfin, la compréhension de la saturation des grandes échelles est également essentielle pour le développement de la théorie dynamo. En particulier, la dynamo que nous simulons ici produit un champ magnétique axisymétrique dipolaire de grande échelle ($l = 1, m = 0$). Ce champ magnétique possède cependant, à l’inverse de ce qui est observé dans le Soleil, une énergie plus faible que les composantes non-axisymétriques du champ magnétique total. Nous détaillons ici le processus aboutissant à sa saturation.

Nous montrons en figure 8.9 le terme de production pour la coquille axisymétrique $L = 1$ pendant la phase de saturation. Les couplages axisymétriques et non-axisymétriques sont tous les deux importants pour la saturation de cette coquille. Les interactions axisymétriques (panneaux (a) et (b)) sont dominées par l’effet de la rotation différentielle. Puisque ce terme est positif, il représente certainement l’effet Ω qui produit du champ magnétique toroïdal de grande échelle en cisillant le champ magnétique poloïdal. L’effet Ω fait intervenir la coquille $l_1 = 3$ du champ de vitesse. Par simple règle de triangulation (figure 8.2), nous comprenons que c’est le champ magnétique poloïdal axisymétrique $l_2 = 4$ qui est principalement cisillé pour produire et saturer le champ magnétique toroïdal $l = 1$ en figure 8.9(a) ($l_2 \in [l_1 - l = 2, l_1 + l = 4]$). Le deuxième type d’interaction met en jeu les échelles non-axisymétriques du spectre. Cette fois-ci, ces termes représentent la saturation du dipôle axisymétrique. Comme l’indique le zoom sur le panneau (c), l’interaction est dominée par le couplage des coquilles \mathbf{B}_{23}^* et \mathbf{v}_{23}^* . Il s’avère que la coquille $L = 23$

correspond au maximum du spectre d'énergie magnétique. La saturation du dipôle axisymétrique s'effectue par conséquent *via* une interaction non-locale.

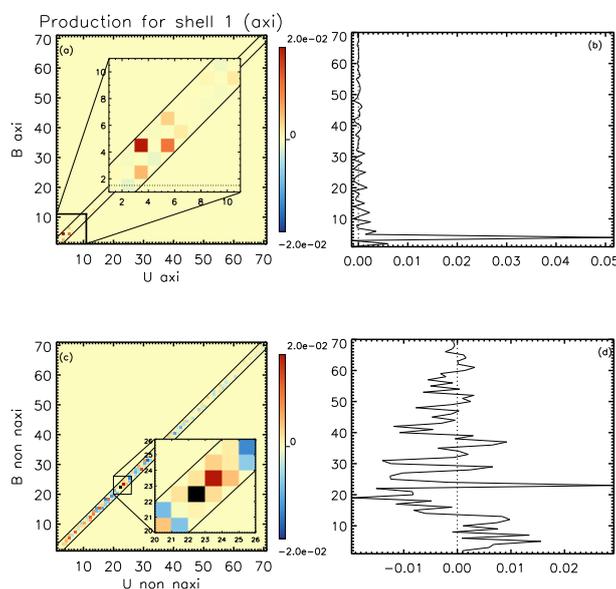


FIGURE 8.9 – Terme de production pour la coquille axisymétrique $L = 1$ pendant la phase de saturation, moyenné sur environ 150 jours.

La simulation que nous présentons ici possède un nombre de Prandtl magnétique ($P_m = \nu/\eta$) de 4. Par conséquent, le spectre d'énergie magnétique est décalé vers les petites échelles par rapport au spectre d'énergie cinétique. Si on augmente le nombre de Prandtl magnétique, les deux maxima des spectres d'énergie magnétique et cinétique sont susceptibles de se séparer davantage. L'interaction saturante du dipôle axisymétrique, qui met en jeu la coquille d'énergie maximale du spectre d'énergie magnétique, fera alors intervenir une échelle plus petite (et moins énergétique) du spectre d'énergie cinétique. Par suite, le niveau de saturation du dipôle axisymétrique pourrait être plus faible. Au contraire, si on diminue le nombre de Prandtl magnétique, la saturation du dipôle axisymétrique est difficile à prédire. En effet, le pic du spectre d'énergie magnétique va dans ce cas se décaler vers les grandes échelles et potentiellement se situer à plus grande échelle que le pic d'énergie cinétique (pour $P_m < 1$). L'interaction saturante du dipôle pourrait alors ne plus être dictée par l'échelle d'énergie maximale du spectre d'énergie magnétique. Nos résultats suggèrent par conséquent que le nombre de Prandtl magnétique joue un rôle extrêmement important pour la saturation du champ magnétique de grande échelle. Une étude numérique à ce sujet va être poursuivie dans un futur proche (voir aussi [Schekochihin et al., 2004](#)).

Conclusions et perspectives

Nous avons développé un formalisme robuste d'étude spectrale des invariants de la MHD idéale à l'aide de la décomposition en harmoniques sphériques (voir l'annexe B pour des détails sur la technique d'implémentation, et l'annexe J pour plus de détails sur le formalisme utilisé). Après avoir écrit l'ensemble des équations d'évolution, nous avons appliqué notre méthodologie au cas d'une dynamo turbulente dans une zone convective de type solaire. La méthode que nous avons développée nous a permis de mettre en évidence deux types de cascades d'énergie magnétique, et de comprendre l'importance du nombre de Prandtl magnétique pour le niveau de saturation du champ magnétique de grande échelle dans les simulations de dynamo stellaire. Ce travail a été publié dans [Strugarek et al. \(2012a\)](#) (voir à la fin de ce chapitre).

Outre l'étude approfondie de l'impact du nombre de Prandtl magnétique sur la saturation du champ magnétique de grande échelle dans la dynamo, la méthode d'analyse va nous permettre de nous attaquer à de nombreux autres aspects de la dynamo. Trois points critiques seront en particulier explorés

- L'impact de la rotation différentielle sur l'éventuel développement du champ magnétique toroïdal de grande échelle (observé numériquement par [Brown et al. \(2010\)](#)), et son rôle dans la transition de la dynamo de la branche *faible* (où le multipôle domine sur le dipôle) à la branche *forte* ([Christensen and Aubert, 2006](#), [Simitev and Busse, 2009](#), [Featherstone et al., 2009](#), [Schrinner et al., 2012](#)).
- L'impact de la modification du spectre d'énergie cinétique dans la saturation de la dynamo.
- Le rôle spectral de l'hélicité magnétique dans la production du champ magnétique de grande échelle.

Enfin, d'autres types de phénomènes MHD peuvent être caractérisés par notre méthode. Par exemple, nous allons nous attacher à comprendre les interactions entre les différentes échelles MHD dans la relaxation et la stabilité des configurations de champs magnétiques fossiles dans les intérieurs stellaires ([Braithwaite and Nordlund, 2006](#), [Brun, 2007](#), [Zahn et al., 2007](#), [Duez and Mathis, 2010](#), [Duez, 2011](#)). Ces aspects des phénomènes magnétiques dans les intérieurs stellaires seront présentés dans de futures publications.

8.3 Excitation de la turbulence gyrocinétique

Nous appliquons maintenant notre méthode spectrale à la turbulence gyrocinétique issue de l'instabilité du gradient ionique (ITG, voir chapitre 3 et annexe E dans le cas *slab*). Nous développons la méthodologie dans le formalisme gyrocinétique en section 8.3.1. Celle-ci est utile pour détailler le mécanisme de croissance et de saturation de l'instabilité (section 8.3.2), ainsi que le rôle particulier que peuvent jouer à la fois les écoulements moyens (écoulements zonaux, modes géodésiques acoustiques, *etc.*) et les modes stables *non-résonants* (*cf* chapitre 6).

8.3.1 Analyse spectrale dans le formalisme gyrocinétique

Entropie et énergie généralisée

Afin de caractériser les interactions non-linéaires de la turbulence ainsi que leurs effets sur le transport dans les plasmas de tokamaks, il convient d'identifier la ou les quantités adéquates dans le formalisme gyrocinétique. L'équation d'évolution de l'entropie, sous certaines conditions, peut se ramener à une équation d'énergie généralisée qui s'écrit comme la somme d'une entropie fluctuante et d'une énergie potentielle. Ceci fut démontré notamment par [Watanabe and Sugama \(2006\)](#), [Garbet et al. \(2012\)](#) dans le cas de l'ITG en géométrie torique dans le cas électrostatique, et par [Schekochihin et al. \(2008\)](#) dans le cas électromagnétique. L'existence de cascades d'entropie en turbulence gyrocinétique a aussi été mise en évidence par [Tatsuno et al. \(2009\)](#), [Plunk and Tatsuno \(2011\)](#) dans le formalisme δf (voir section 1.2.4). Par analogie avec la turbulence fluide (magnétisée), l'existence de ces cascades, à la fois dans l'espace physique et dans l'espace des vitesses, montre que l'entropie gyrocinétique est une quantité pertinente à étudier pour comprendre l'éventuelle auto-organisation du plasma de tokamak.

Nous décrivons ici les grandes lignes du principe entropique développé par [Garbet et al. \(2012\)](#). Nous décomposons la fonction de distribution en parties moyenne et fluctuante, c'est-à-dire $\bar{F} = F_M + \delta\bar{f}$. La dérivation s'effectue ensuite en deux étapes :

- La décomposition repose sur la définition des quantités fluctuantes telles que $\langle \delta\bar{f} \rangle = 0$, où $\langle \cdot \rangle$ représente la moyenne sur une surface de flux (équation (1.42)). Cela signifie que F_M correspond, dans une géométrie simplifiée, au mode de Fourier (0, 0) (voir partie suivante).

L'équation de quasi-neutralité (1.41) permet alors de construire un potentiel d'équilibre $\Phi(r, t)$. Par suite, nous décomposons également le potentiel total en parties d'équilibre et fluctuante, c'est-à-dire $\phi = \Phi(r, t) + \delta\phi(r, \theta, \phi, t)$, où $\langle \delta\phi \rangle = 0$. Puisque la fonction de distribution peut être vue comme une fonction de probabilité des particules, nous pouvons construire une entropie \mathcal{S} dans le formalisme gyrocinétique par analogie avec la définition thermodynamique. Nous la séparons en entropie moyenne et entropie fluctuante, de telle sorte que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_M + \delta\mathcal{S}$. A l'ordre le plus bas en fluctuations, on obtient que

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_M &= - \int \ln(F_M) F_M \, d\tau^*, \\ \delta\mathcal{S} &= -\frac{1}{2} \int \frac{\delta f^2}{F_M} \, d\tau^*,\end{aligned}$$

où nous rappelons que $d\tau^*$ est l'élément d'intégration sur l'espace des vitesses et sur les directions périodiques (θ, φ) de l'espace réel. De ces définitions découlent les équations d'évolution suivantes

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{S}_M &= \dot{\mathcal{S}}_{transp} + \dot{\mathcal{S}}_{sour}, \\ \partial_t \delta\mathcal{S} &= -\dot{\mathcal{S}}_{transp} + \dot{\mathcal{S}}_{coll},\end{aligned}$$

où $\dot{\mathcal{S}}_{transp} = \int d\tau \delta f \bar{H} [\bar{H}, \ln(F_M)]$.

- Puis, en supposant une température isotrope $T_\perp \sim T_\parallel \sim T$, et que la fonction de distribution est Maxwellienne (c'est-à-dire $\partial_{\mathcal{E}_\perp}(\ln F_M) = -1/T_\perp$ et $\partial_{\mathcal{E}_\parallel}(\ln F_M) = -1/T_\parallel$, où $\mathcal{E}_{\perp, \parallel}$ représentent les énergies parallèle et perpendiculaire des particules), $\dot{\mathcal{S}}_{transp}$ peut s'écrire

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{S}}_{transp} &= \dot{\mathcal{S}}_{flux} + \dot{\mathcal{S}}_{chauffage}, \\ \dot{\mathcal{S}}_{flux} &= - \int \delta f \partial_r \Xi \delta \mathbf{v}_G \cdot \nabla \delta \bar{H} \, d\tau, \\ \dot{\mathcal{S}}_{chauffage} &= \frac{1}{T} \int \delta \bar{H} \partial_t \delta f \, d\tau = \frac{e}{T} \int \delta \phi \partial_t (J_0 \cdot \delta f) \, d\tau,\end{aligned}$$

où $\partial_r \Xi$ dépend directement des gradients de la fonction de distribution d'équilibre (voir [Garbet et al. \(2012\)](#) pour plus de détails).

On peut alors réécrire ces équations en utilisant l'équation de quasi-neutralité (1.41) pour obtenir

$$\partial_t E = \sum_{\text{espèces}} \partial_t \left(\underbrace{\frac{1}{2} \int \frac{nm}{B^2} |\nabla_\perp \delta \phi|^2 \, d\mathbf{x}_G}_{\mathcal{E}_\phi} + \underbrace{\delta \mathcal{S}}_{\mathcal{E}_f} \right) = \sum_{\text{espèces}} \left(-\dot{\mathcal{S}}_{flux} + \dot{\mathcal{S}}_{coll} \right). \quad (8.34)$$

Nous avons donc construit une quantité E que nous nommons énergie généralisée dans le formalisme gyrocinétique. Dans le membre de droite, $\dot{\mathcal{S}}_{flux}$ s'écrit directement en fonction des gradients d'équilibre (et donc, indirectement des sources éventuelles de la turbulence du système), et $\dot{\mathcal{S}}_{coll}$ représente la dissipation par les termes de collisions. Nous avons donc bien identifié une quantité E qui nous permettra de développer un diagnostic spectral pour comprendre les caractéristiques de la turbulence dans un tokamak. Dans un premier temps, nous allons nous concentrer uniquement sur la partie entropique de l'énergie généralisée. Une étude détaillée de la partie potentielle (\mathcal{E}_ϕ) sera poursuivie dans de futurs travaux.

Analyse spectrale sur des surfaces toriques

Nous nous concentrons ici sur la manifestation de la turbulence dans l'espace physique, dans le formalisme gyrocinétique. Dans un plasma de tokamak, les surfaces magnétiques sont imbriquées et le transport turbulent s'effectue à travers ces surfaces. Pour des surfaces magnétiques toriques de section circulaire (que nous considérerons ici), la direction radiale est la direction principale de transport de l'énergie. Nous ne nous intéressons pas aux échanges spectraux dans la direction radiale car le transport d'énergie turbulent est dans ce cas dominé par des phénomènes de type *avalanches* (ces avalanches sont corrélées à des structures de type convectives allongées radialement, voir [Sarazin et al., 2010a](#)), mal décrits par une approche de type spectrale. La turbulence s'organise cependant sur chaque surface magnétique ((θ, φ) dans notre géométrie simplifiée) et nous allons développer notre méthode spectrale dans cet espace. De manière analogue à la section précédente (8.2), nous utiliserons cette méthode à différentes positions radiales dans le plasma afin de capturer la riche dynamique à grande échelle engendrée par les avalanches.

Puisque les directions poloïdale et toroïdale sont périodiques, nous pouvons facilement utiliser la transformée de Fourier pour distinguer les différentes échelles de notre système. Nous décomposons un champ $X(r, \theta, \varphi)$ sous la forme

$$X(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{m,n}(r) e^{i(m\theta+n\varphi)}.$$

Définissons l'entropie fluctuante comme

$$\mathcal{E}_{mn}^f = \frac{1}{2} \int d\tau^* \frac{\bar{F}_{m,n} \bar{F}_{m,n}^{cc}}{\bar{F}_{\text{eq}}}. \quad (8.35)$$

Nous pouvons alors multiplier l'équation gyrocinétique (1.33) par $\bar{F}_{m,n}^{cc} e^{-i(m\theta+n\varphi)}$ pour obtenir l'équation d'évolution pour la composante (m, n) de l'entropie fluctuante suivante

$$\partial_t \mathcal{E}_{mn}^f = \mathcal{G}_{m,n}(m \pm 1) + \mathcal{P}_{m,n}^{\mathcal{G}}(m \pm 1) + \sum_{m',n'} \mathcal{T}_{m,n}(m', n') + \mathcal{P}_{m,n}^E(m', n') + \mathcal{T}_{m,n}^G(m', n'), \quad (8.36)$$

où nous avons fait l'hypothèse que les variations temporelles de \bar{F}_{eq} sont faibles, et que nous nous trouvons loin de toute source d'énergie, moment ou matière du système. Les termes \mathcal{G} et $\mathcal{P}^{\mathcal{G}}$ représentent respectivement l'effet de dérive dû à la courbure du champ magnétique, et l'effet de piégeage magnétique (voir section 1.2.4) dû à cette même courbure. Les termes qui couplent les différentes échelles entre elles sont le terme de dérive dû au champ électrique \mathcal{T} , le terme de piégeage dû au champ électrique parallèle \mathcal{P}^E et un terme d'accélération \mathcal{T}^G lié à l'éventuel alignement de la dérive $E \times B$ et de la courbure du champ magnétique.

Si on se place dans la géométrie simplifiée constituée par des surfaces magnétiques toriques de section circulaire à grand rapport d'aspect (c'est-à-dire $\varepsilon \equiv r/R_0 \ll 1$), on peut simplifier

l'écriture du champ magnétique et des vitesses de dérive pour trouver

$$\begin{aligned}
R &= R_0 (1 + \varepsilon \cos \theta) \\
B &= \frac{B_0 R_0 b_0}{R} \approx B_0 b_0 (1 - \varepsilon \cos \theta) \text{ et } b_0 = \sqrt{1 + \frac{r^2}{q^2 R_0^2}}, \\
\mathbf{v}_E &= \frac{1}{B_0 b_0^2} (1 + \varepsilon) \left(-\frac{1}{r} \partial_\theta \bar{\phi} \mathbf{e}_r + \partial_r \bar{\phi} \mathbf{e}_\theta \right), \\
\mathbf{v}_g &= -v_g (\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta) \text{ et } v_g = \frac{M v_\parallel^2 + \mu B_0 b_0}{e B_0 b_0^2 R_0}, \\
\dot{v}_{G\parallel} &= -\frac{e}{M} \nabla_\parallel \bar{\phi} - \frac{\mu}{M} \nabla_\parallel B + \frac{v_\parallel}{B} \mathbf{v}_E \cdot \nabla B, \\
\nabla_\parallel &= \frac{1}{R} \left(\partial_\varphi + \frac{\partial_\theta}{q} \right).
\end{aligned}$$

On pourra noter que le terme advectif en $\mathbf{v}_{G\parallel} \cdot \nabla_\parallel f$, non discuté ici, est exactement nul du point de vue spectral pour des raisons de symétrie.

Ainsi, les différents termes de l'équation d'évolution de l'entropie fluctuante (8.36) s'écrivent

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{m,n}(r, m+1, m-1) &= -\Im \int d^3 \vec{v} \frac{v_g}{2} \left\{ \frac{1}{r} [(m-1) \bar{F}_{m-1,n} + (m+1) \bar{F}_{m+1,n}] \right. \\
&\quad \left. + \partial_r [\bar{F}_{m+1,n} - \bar{F}_{m-1,n}] \right\} \bar{F}_{m,n}^{cc}, \tag{8.37}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_{m,n}^{\mathcal{G}}(r, m+1, m-1) = -\Im \int d^3 \vec{v} \frac{\mu B_0}{2 M R_0^2 q} r \partial_{v_\parallel} (\bar{F}_{m+1,n} - \bar{F}_{m-1,n}) \bar{F}_{m,n}^{cc}, \tag{8.38}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{m,n}(r, m', n') &= -\Im \int d^3 \vec{v} \frac{1}{B_0 b_0^2 r} \left\{ [(m' - m) \partial_r \bar{\phi}_{m',n'} \bar{F}_{m-m',n-n'} + m' \bar{\phi}_{m',n'} \partial_r \bar{F}_{m-m',n-n'}] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\varepsilon}{2} [(m' - m) \partial_r (\bar{\phi}_{m'+1,n'} + \bar{\phi}_{m'-1,n'}) \bar{F}_{m-m',n-n'} \right. \\
&\quad \left. + ((m' + 1) \bar{\phi}_{m'+1,n'} + (m' - 1) \bar{\phi}_{m'-1,n'}) \partial_r \bar{F}_{m-m',n-n'} \right\} \bar{F}_{m,n}^{cc}, \tag{8.39}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_{m,n}^E(r, m', n') = -\Im \int d^3 \vec{v} \frac{e}{M R_0 b_0} \left(n' + \frac{m'}{q} \right) \bar{\phi}_{m',n'} \partial_{v_\parallel} \bar{F}_{m-m',n-n'} \bar{F}_{m,n}^{cc}, \tag{8.40}$$

$$\mathcal{T}_{m,n}^{\mathcal{G}}(r, m', n') = -\Re \int d^3 \vec{v} \left(\frac{\mathbf{v}_E \cdot \nabla B}{B} \right)_{m',n'} v_\parallel \partial_{v_\parallel} \bar{F}_{m-m',n-n'} \bar{F}_{m,n}^{cc}, \tag{8.41}$$

où \Re et \Im désignent respectivement les parties réelle et imaginaire, et

$$\left(\frac{\mathbf{v}_E \cdot \nabla B}{B} \right)_{m',n'} = \frac{i}{2 R_0 B_0 b_0^2} \left[\partial_r \{ \bar{\phi}_{m'+1,n'} - \bar{\phi}_{m'-1,n'} \} + \frac{1}{r} \{ (m' + 1) \bar{\phi}_{m'+1,n} + (m' - 1) \bar{\phi}_{m'-1,n} \} \right].$$

Nous analysons ci-après les contributions de ces différents termes dans l'excitation et la saturation de la turbulence gyrocinétique. Nous séparerons en particulier les contributions des modes $m+1$ et $m-1$ dans les termes de courbure.

8.3.2 Dynamique des modes résonants et saturation de l'instabilité ITG

Nous utilisons le code GYSELA (voir la section 1.2.4 et l'annexe C) pour simuler la turbulence gyrocinétique issue de l'ITG. Nous choisissons un cas à relativement faible résolution ($\rho_\star = 1/75$) afin d'étudier la phase de croissance linéaire et la saturation de l'instabilité. Nous négligeons ici les collisions (la collisionnalité du plasma est donnée par $\nu_\star = 0.05$). Nous choisissons dans cette étude de nous placer à la position $\rho = 0.32$, qui se situe près de la zone de transport turbulent maximal et loin de la source de chaleur du système. Nous traçons en figure 8.10 l'entropie initiale

dans la simulation. On retrouve la fonction de distribution dans la composante axisymétrique $n = 0$, autour de $m = 0$. Les deux carrés bleus ($m \neq 0$) correspondent au bain de modes initial que nous choisissons pour déclencher l'instabilité ITG.

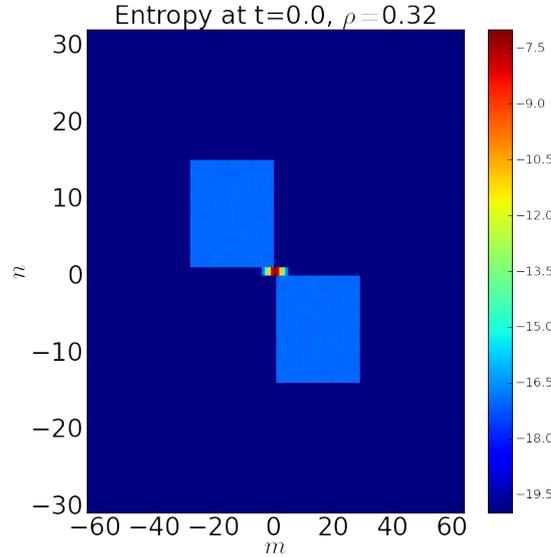


FIGURE 8.10 – Initialisation du spectre de Fourier dans les directions θ (m) et φ (n) pour le déclenchement de la turbulence ITG.

Nous donnons en figure 8.11(a) la trace temporelle de 6 modes dans la simulation. Les modes $(0,0)$ et $(1,0)$ évoluent relativement peu, tandis que les 4 autres modes subissent une phase de croissance exponentielle puis saturent à environ $100 a/c_s$. Le mode $(-9,8)$ est résonant à $\rho = 0.32$ ($q(0.32) \sim 9/8$) et c'est par conséquent le mode non-axisymétrique le plus intense pendant la phase de saturation. Le spectre moyenné sur la phase de saturation (zone grisée de la figure 8.11(a)) est donné en figure 8.11(b). Les autres modes que nous montrons sont des modes voisins de $(-9,8)$, et un mode d'harmonique "double" $(-20,8)$ qui, comme nous allons le voir, joue un rôle important dans la saturation du mode résonant. Le taux de croissance des modes autour de $(-9,8)$ est d'environ $0.27 c_s/a$. Le spectre saturé (panneau (b)) est dominé par quelques modes axisymétriques autour de $m = 0$, et par le mode résonant principal $(-9,8)$ à cette position. On remarque que l'enveloppe des modes les plus intenses est bien décrite par la condition de résonance (ligne blanche) en prenant en compte le décalage Doppler (lignes rouges pointillées) lié à l'existence d'un champ électrique radial d'équilibre $\phi_{00}(r)$, comme on pouvait s'y attendre.

Nous nous intéressons à présent aux mécanismes qui expliquent la croissance et la saturation des différents modes que nous étudions. Nous traçons en figure 8.12 les différents termes de l'équation d'évolution de l'entropie (8.36) au cours du temps. Les interactions non-linéaires sont sommées sur tous les modes participant au transfert spectral.

On observe immédiatement que pour tous les modes présentés, les contributions de la dérive $E \times B$ (\mathcal{T} , courbe rouge et symbole triangle haut) et de la dérive de courbure (\mathcal{G} , courbe bleue et symbole rond) dominent l'évolution nette de l'entropie (courbe noire, symbole carré). L'évolution du mode résonant $(-9,8)$ est naturellement dominée par la dérive $E \times B$. Son mode voisin $(-10,8)$ gagne de l'entropie grâce à la dérive de courbure en lui prenant de l'entropie, et est stabilisé par la dérive $E \times B$ qui s'oppose à sa croissance. Détaillons à présent quels couplages dominent le terme de transfert \mathcal{T} pour le mode $(-9,8)$.

Sans surprise, la croissance linéaire du mode $(-9,8)$ est portée par l'excitation résonante via le terme de transfert \mathcal{T} (dérive $E \times B$), et plus particulièrement le terme qui met en jeu le

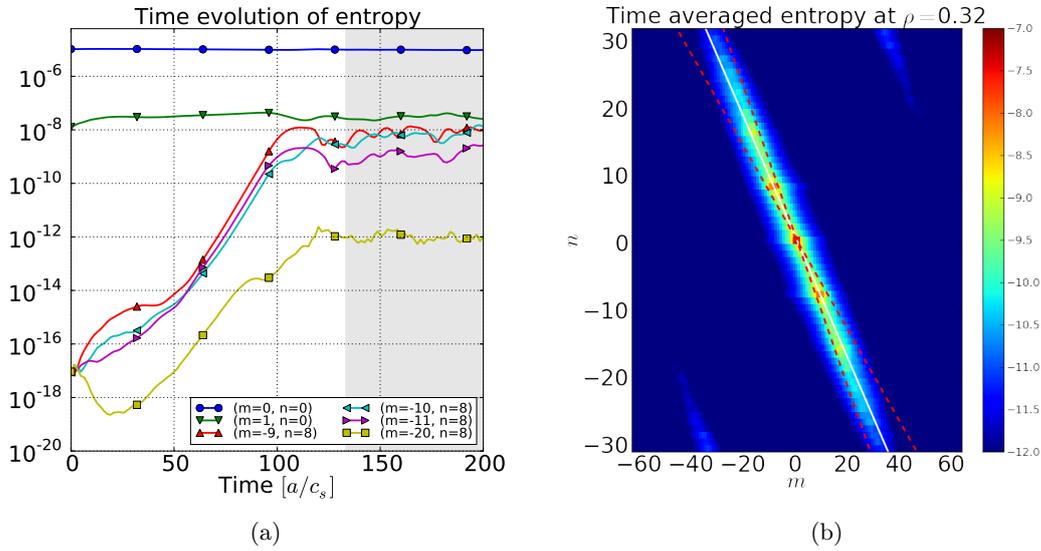


FIGURE 8.11 – (a) Trace temporelle de l’entropie pour 6 modes de la simulation à la position $\rho = 0.32$. Le mode $(-9, 8)$ est résonant à cette position. Une phase de croissance exponentielle se distingue clairement, pour atteindre la saturation vers $100 a/c_s$. Le spectre total moyenné sur la phase de saturation grisée est tracé en échelle logarithmique sur le panneau (b). Les modes axisymétriques ainsi que le mode résonant $(-9, 8)$ apparaissent clairement comme maxima du spectre saturé.

gradient de la fonction de distribution moyenne \bar{F}_{00} (courbe bleue, symbole rond de la figure 8.13(a)). L’étude du mécanisme de saturation non linéaire de ce mode linéairement instable est quant à elle plus instructive. Il apparaît que cette saturation résulte de la combinaison de deux mécanismes principaux :

- D’une part le terme d’excitation linéaire (contribution du gradient de \bar{F}_{00} au terme de transfert \mathcal{T} , discuté précédemment) décroît, ce qui réduit d’autant la croissance de l’instabilité, jusqu’à même devenir stabilisant (*i.e.*, négatif). Ce mécanisme-là résulte de la rétroaction de la turbulence sur l’équilibre: le flux turbulent conduit à la relaxation du profil d’équilibre. Il est quantifié par le terme \mathcal{T} dans l’évolution du mode $(0, 0)$ (premier panneau de la figure 8.12, *cf.* discussion ci-dessous). Son importance, que nous pressentions au départ, justifie *a posteriori* le traitement “full-f” adopté dans nos simulations gyrocinétiques, autorisant l’équilibre à évoluer sur des échelles de temps comparables à celles des fluctuations. Il est également fort plausible qu’il soit à la base du transport radial par avalanches observé dans les simulations, par un effet de type domino ou propagation de front.
- D’autre part les couplages non-linéaires (courbe turquoise, symbole triangle gauche) s’opposent à la croissance du mode : c’est typiquement un processus de cascade d’énergie qui sous-tend ce mécanisme, qu’elle soit directe ou inverse, locale ou non-locale. Un mode linéairement instable se couple non linéairement à un ensemble d’autres modes, résonants ou non, et linéairement stables ou non. Il s’avère que pour le mode $(-9, 8)$ considéré, ce transfert d’énergie se fait toujours à son détriment, même dans la phase de saturation non-linéaire (sauf pendant un très court intervalle de temps autour de $t \sim 11640 \omega_c^{-1}$). Ces deux mécanismes se compensent partiellement et permettent ainsi la saturation non linéaire du mode.

Ce sont ensuite ces deux contributions qui dominent l’effet net de la dérive $E \times B$, qui oscille entre valeurs négatives et positives (courbe magenta, symbole triangle droit) et permet ainsi la

Time evolution of the different contributions

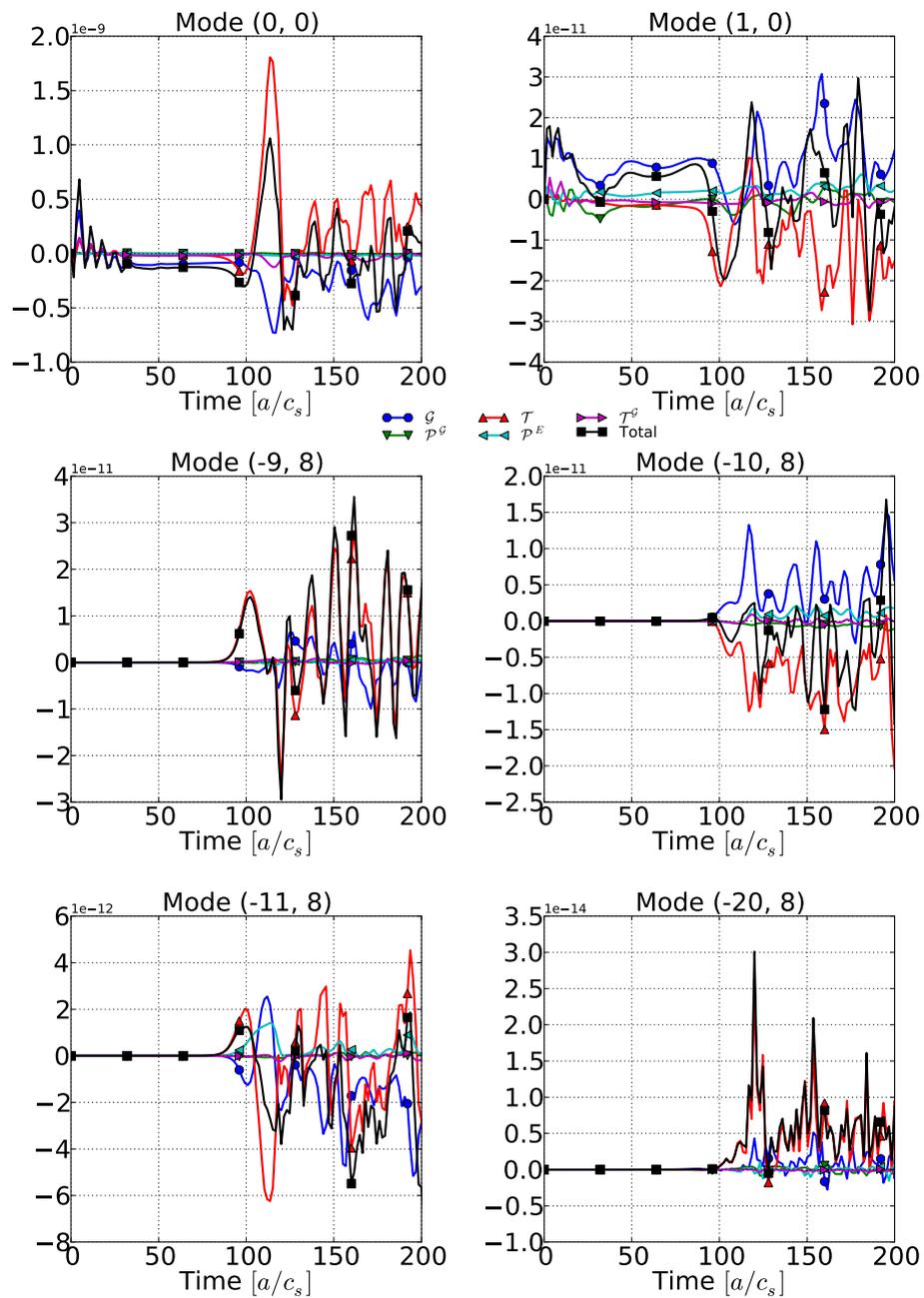


FIGURE 8.12 – Contributions à l'évolution de l'entropie (équation (8.36)) pour les différents modes détaillés en figure 8.11(a).

saturation.

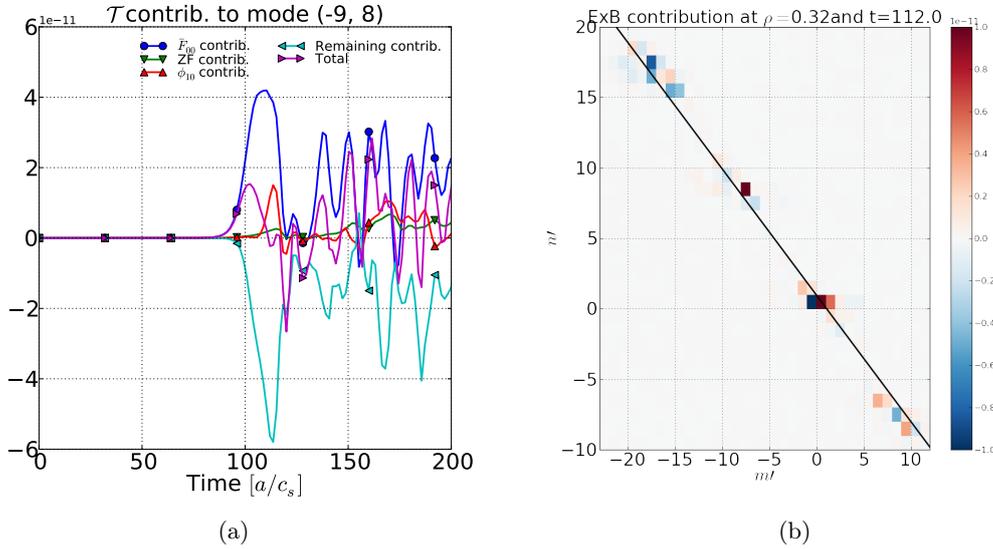


FIGURE 8.13 – (a) Décomposition du terme de transfert \mathcal{T} issu de la dérivée $E \times B$ pour le mode résonant $(-9, 8)$ en terme de contributions provenant de la fonction de distribution d’équilibre, des écoulements zonaux et des modes $\bar{\phi}_{\pm 1,0}$. (b) Carte 2D du terme de transfert \mathcal{T} au début de la phase de saturation du mode $(-9, 8)$. Les axes correspondent au mode de Fourier “ $\bar{F}_{m',n'}$ ” participant au terme de transfert \mathcal{T} . L’interaction en $(0, 0)$ met par conséquent en jeu la fonction de distribution d’équilibre. La droite noire correspond à la condition de résonance.

Le terme saturant met en jeu un nombre non négligeable de modes (figure 8.13(b)), et en particulier les modes d’harmoniques “doubles” autour de $(-20, 18)$. Cette interaction semble générique aux modes résonants et permet de comprendre leur saturation. Ce schéma se reproduit jusqu’aux échelles les plus petites du système.

Notre méthode nous permet également de comprendre la saturation de l’équilibre $(0, 0)$ (bien que celui-ci évolue peu). L’équilibre est le résultat d’une compensation entre le terme de courbure \mathcal{G} qui fait intervenir les modes $\bar{F}_{\pm 1,0}$, et le transfert non-linéaire \mathcal{T} (premier panneau de la figure 8.12). Les couplages \mathcal{T} sont dominés par des interactions faisant jouer $\bar{\phi}_{9,-8}$ et $\bar{F}_{-9,8}$, et contribuent positivement à l’évolution de l’entropie moyenne. Ceci peut paraître contre-intuitif car la fonction d’équilibre moyenne contribue positivement à la création de $\mathcal{E}_{-9,8}^f$, et $\bar{F}_{-9,8}$ contribue également positivement à l’évolution de l’entropie moyenne. Les interactions décrites par \mathcal{T} font intervenir un couplage triadique complexe entre deux échelles de la fonction de distribution et une échelle du potentiel électrique. Dans le premier cas, c’est la dérivée radiale de la fonction de distribution moyenne qui contribue au transfert, dans le second la dérivée radiale du produit $\bar{\phi}_{9,-8}\bar{F}_{-9,8}$. Rien n’empêche alors *a priori* que les deux contributions à $\mathcal{E}_{0,0}^f$ et $\mathcal{E}_{-9,8}^f$ soient positives. L’entropie moyenne est pour sa part saturée par le terme de courbure, tandis que $\mathcal{E}_{-9,8}^f$ est saturée par interaction avec les modes résonants de plus petite échelle.

Finalement, cette étude préliminaire nous permet d’identifier le processus de saturation de l’instabilité ITG, et de mettre en évidence l’importance des modes résonants pour celle-ci. Le diagnostic spectral que nous avons mis en œuvre permet de comprendre les détails des interactions entre échelles. Nous l’appliquerons dans un futur proche aux simulations à profil de q inversé présentées au chapitre 6 (section 6.2.3), afin de comprendre pourquoi les modes non-résonants semblent jouer un rôle si important dans ce cas et empêchent l’apparition de barrières

de transport. Nous souhaitons également utiliser cette approche pour analyser la croissance des modes ITG qui peuvent détruire une barrière de transport induite par un cisaillement $E \times B$ (voir chapitre 7). Notre analyse devrait permettre une avancée significative dans la compréhension de la physique des barrières de transport. Cette analyse sera publiée dans *Dong et al. (2012)*.

Enfin, nous n'avons pour le moment développé la méthode d'analyse spectrale que pour la partie entropique de l'énergie généralisée dans le formalisme gyrocinétique (équation (8.34)). L'analyse spectrale de l'énergie totale est en cours de développement et sera publiée dans un futur proche.

MAGNETIC ENERGY CASCADE IN SPHERICAL GEOMETRY: I. THE STELLAR CONVECTIVE DYNAMO CASE.

A. STRUGAREK, A.S. BRUN, S. MATHIS

Laboratoire AIM Paris-Saclay, CEA/Irfu Université Paris-Diderot CNRS/INSU, F-91191 Gif-sur-Yvette.

Y. SARAZIN

CEA, IRFM, F-13108 Saint-Paul-lez-Durance, France.

Draft version September 9, 2012

ABSTRACT

We present an original method to characterize the spectral transfers of magnetic energy between scales in simulations of stellar convective dynamos. The full triadic transfer functions are computed thanks to analytical coupling relations of spherical harmonics based on the Clebsch-Gordan coefficients. The method is applied to mean field $\alpha\Omega$ dynamo models as benchmark tests. From the physical standpoint, the decomposition of the dynamo field into primary and secondary dynamo families proves very instructive in the $\alpha\Omega$ case. The same method is then applied to a fully turbulent dynamo in a solar convection zone, modeled with the 3D MHD ASH code. The initial growth of the magnetic energy spectrum is shown to be non-local. It mainly reproduces the kinetic energy spectrum of convection at intermediate scales. During the saturation phase, two kinds of direct magnetic energy cascades are observed in regions encompassing the smallest scales involved in the simulation. The first cascade is obtained through the shearing of magnetic field by the large scale differential rotation that effectively cascades magnetic energy. The second is a generalized cascade that involves a range of local magnetic and velocity scales. Non-local transfers appear to be significant, such that the net transfers cannot be reduced to the dynamics of a small set of modes. The saturation of the large scale axisymmetric dipole and quadrupole are detailed. In particular, the dipole is saturated by a non-local interaction involving the most energetic scale of the magnetic energy spectrum, which points out the importance of the magnetic Prandtl number for large-scale dynamos.

Subject headings: Dynamo — Magnetohydrodynamics (MHD) — Stars: magnetic field — Turbulence

1. INTRODUCTION

Magnetic fields are observed in astrophysical bodies in a broad range of scales, from the object scale to the smallest dissipative scales (Donati & Landstreet 2009). The origin of such fields is, in most cases, due to a hydromagnetic dynamo process. Recent developments in dynamo theory led to a distinction between large-scale and small-scale dynamos (Cattaneo & Hughes 2001). The large-scale dynamos produce magnetic fields at larger scale than the largest velocity scale (or, the largest driving scale), while small-scale dynamos generate magnetic fields at all scales smaller or equal to the driving scales (Tobias et al. 2011). Large scale dynamos also sometimes refer to dynamos that develop a large-scale magnetic field in super-equipartition with large scale kinetic energy (Olson et al. 1999). In that case, small-scale dynamos refer to those that develop a spectrum peaked at small scales. Both dynamos are generally acting together, like in the Sun, where we observe both large-scale, intense, global magnetic fields (Schrijver & DeRosa 2003; DeRosa et al. 2011, 2012), and small-scale magnetic fields (Hagenaar et al. 2003; Centeno et al. 2007). In the case where multiple scales coexist also in the velocity field, special care is needed to isolate 'small' and 'large' scales tendencies (Tobias & Cattaneo 2008a).

Recent developments in numerical simulations in 3D spherical geometry allow us to model fully non-linear dynamos in stars, involving a broad range of scales (Brun et al. 2004; Browning 2008; Brown et al. 2010; Racine et al. 2011; Käpylä et al. 2012). In order to properly characterize such dynamos, one may use specific methods to tackle the multi-scale aspect of the problem. The principal tools that have been used in the literature are spectral decomposition (Frick & Sokoloff 1998; Dar et al. 2001), and wavelet analysis (Farge 1992). In this paper, we choose to use spherical harmonics decomposition (which is adapted to the spherical geometry of stars, Bullard & Gellman (1954)) to develop a spectral analysis of energy transfers in the frame of dynamo theory.

Mainly used to study turbulence (Frisch 1995; Debliquy et al. 2005; Lesieur 2008; Alexakis et al. 2005), spectral analysis is also a useful tool to characterize magnetohydrodynamic (MHD) processes like dynamos (Blackman & Brandenburg 2002; Mininni et al. 2005; Livermore et al. 2010) or the magneto-rotational instability (MRI, see Lesur & Longaretti (2011)). Understanding spectral energy transfers between scales in such processes may reinforce our ability to characterize non-linear MHD phenomena. The shell-to-shell or mode-to-mode methods have been recently and extensively used in the context of MHD turbulence. Indeed, the classical Kolmogorov approach to turbulence

must be adapted to the MHD case, since the magnetic field induces an anisotropy that has to be taken into account (Iroshnikov 1964; Kraichnan 1965; Biskamp 1993; Goldreich & Sridhar 1995). Depending on the dimensionality of the problem, spectrum slopes are often understood to result from local (direct or indirect) transfers of energy, referred as *cascades* (Biskamp 1993; Maron et al. 2004). However, it was found that non-local interactions in MHD turbulence may also contribute importantly to the built-up of the spectrum (Schilling & Zhou 2002; Aluie & Eyink 2010). The directions and localizations of energy transfers are then less obvious to identify, and studies dedicated to transfer processes in spectral space are essential to properly understand spectrum slopes in MHD (Politano & Pouquet 1998; Boldyrev et al. 2009; Pouquet et al. 2011).

In the past, spectral analyses have mainly been used with Fourier spectral decomposition, generally in cartesian coordinates and periodic parallelepipedic boxes. The Fourier decomposition is indeed a natural way to understand spectra, since the Fourier wave numbers represent the inverse of a spatial scale. It is however one of many projection bases that may be used to probe characteristic lengths in a complex medium. One could prefer to choose another basis, depending on the geometry of the object or the type of turbulence one is studying. In the case of stars or planets, the spherical geometry of the object makes the spherical harmonics basis much more adapted to the spectral analysis (Bullard & Gellman 1954). For example, Ivers & Phillips (2008) wrote the decomposition of the MHD equations onto spherical harmonics in the framework of geodynamics. They were able to analytically express the non linear terms by calculating the coupling between the spherical harmonics with the Clebsch-Gordan coefficients (see also Mathis & Zahn 2005, in a stellar context). The spherical harmonics decomposition was also used by Livermore et al. (2010) to develop a spectral analysis study, in the context of a kinematic dynamo with forced helical flows. In addition to a particular geometry, the choice of a certain basis for the spectral analysis may be motivated by the presence of anisotropy (*e.g.*, between the vertical and horizontal directions), which is poorly described by the classical Fourier decomposition. Spherical harmonics may also be used to deal with anisotropy in the case of turbulent convection (Rincon 2006).

The spectral interactions in MHD involve triads coupling, meaning that two modes interact to impact a third one through a triangulation rule. Depending on the ideal MHD invariant considered, these kinds of interaction involve couplings between the velocity and the magnetic field, impacting the magnetic or the velocity field. Shell-to-shell methods generally only consider dual interactions, raising an ambiguity on the medium (third component) of the triadic interaction (Verma et al. 2005). In order to cope with this ambiguity, other studies (*e.g.*, Schilling & Zhou 2002) made use of the eddy-damped quasi-neutral Markovian (EDQNM) two point statistical closure (Frisch et al. 1975; Pouquet et al. 1976) to get an analytical expression of the triadic interactions. We point out that such methods

are relevant for, *e.g.*, developing subgrid-scale models for large eddy simulations (LES). Tobias & Cattaneo (2008b) demonstrated that such *truncated* methods often badly describe coherent turbulent structures in flows, which are thought to be responsible for the generation of large-scale fields in dynamos. This limitation is relevant for reduced spectral models, which aim to reproduce the full turbulent behavior with a reduced number of modes. However, here we directly calculate the full triadic shell-to-shell interactions of all the scales included in our simulations, (*i.e.*, we do not use any specific closure in spectral space to compute the full triadic interactions). For the first time, such a method is applied to a numerical simulation using a spherical harmonics decomposition (instead of a pure Fourier decomposition), and including the three spectral components of the triadic interaction.

The three ideal MHD invariants in three dimensions (Biskamp 1993) are the total energy (kinetic plus magnetic), the magnetic helicity and the cross helicity. As a first step, we will focus our study on the magnetic energy only to gain intuition of the complex interplay of scales that is operating in a nonlinear dynamo during its early evolution phase. We defer to follow up studies the analysis of spectral transfers for quantities such as magnetic helicity and kinetic (or total) energy.

In section 2 we present the set of MHD equations we will use, derive from them the spectral evolution equation for the magnetic energy in the spherical harmonics formalism and analytically validate our method. A toy model of an axisymmetric $\alpha - \Omega$ dynamo is analyzed with our spectral method in Sect. 3. In section 4, we apply our method to study non-linear dynamo action in a numerical simulation of a solar convective zone. Finally, conclusions and perspectives are given in section 5.

2. MAGNETIC ENERGY EVOLUTION EQUATION

2.1. Main equations in physical space

We use the well-tested Anelastic Spherical Harmonics (ASH) code which models turbulent stellar convection zones (Clune et al. 1999; Jones et al. 2011). It solves the following three dimensional MHD set of equations (see Brun et al. (2004)) in the anelastic approximation, in a reference frame rotating at the angular velocity $\mathbf{\Omega}_0 = \Omega_0 \mathbf{e}_z$ (where \mathbf{e}_z is the cartesian vertical axis):

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{U}) = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} [\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + 2\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{U}] = & -\nabla P + \rho \mathbf{g} \\ & + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{D} - [\nabla \bar{P} - \bar{\rho} \mathbf{g}], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \bar{T} [\partial_t S + \mathbf{U} \cdot \nabla (\bar{S} + S)] = & \nabla \cdot [\kappa_r \bar{\rho} c_p \nabla (\bar{T} + T) \\ & + \kappa_0 \bar{\rho} \bar{T} \nabla \bar{S} + \kappa \bar{\rho} \bar{T} \nabla S] + \frac{4\pi\eta}{c^2} \mathbf{J}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & + 2\bar{\rho} \nu [e_{ij} e_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{U})^2], \quad (4) \\ \partial_t \mathbf{B} = & \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}), \quad (5) \end{aligned}$$

where the spherically symmetric background thermodynamical state is denoted by bars (fluctuations with respect to the background state are denoted without bars), \mathbf{v} is the local velocity, κ_r is the radiative diffusivity, and κ , ν and η are respectively the effective thermal diffusivity, the eddy viscosity and the magnetic diffusivity. The thermal diffusion coefficient κ_0 applies at the top of the modeled convective zone (where convective motions vanish), to ensure the heat transport through the upper surface. $\mathbf{J} = (c/4\pi)\nabla \times \mathbf{B}$ is the current density, and the viscous stress tensor \mathbf{D} is defined by

$$D_{ij} = -2\bar{\rho}\nu \left[e_{ij} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{U})\delta_{ij} \right], \quad (6)$$

where e_{ij} is the strain rate tensor, and δ_{ij} is the Kronecker symbol. The system is closed by using the linearized ideal gas law:

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{P}{\bar{P}} - \frac{T}{\bar{T}} = \frac{P}{\gamma\bar{P}} - \frac{S}{c_p} \quad (7)$$

with c_p the specific heat at constant pressure and γ the adiabatic exponent. The vectorial fields are decomposed in poloidal and toroidal components:

$$\mathbf{B}(r, \theta, \varphi) = \nabla \times \nabla \times [C(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_r] + \nabla \times [A(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_r], \quad (8)$$

$$\bar{\rho}(r)\mathbf{U}(r, \theta, \varphi) = \nabla \times \nabla \times [W(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_r] + \nabla \times [Z(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_r], \quad (9)$$

where $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ are the unit vectors in spherical coordinates. All the quantities are time-dependent. This decomposition ensures numerically that both the magnetic field and the mass flux remain divergenceless up to the machine precision.

A potential match of the magnetic field ($\nabla \times \mathbf{B} = 0$) is applied both at the bottom and top radial boundaries. For the convective dynamo case (Sect. 4), the boundary conditions for the velocity are impenetrable and stress-free. A latitudinal entropy gradient is imposed at the bottom (as in Miesch et al. (2006)), and we fix a constant entropy gradient at the top of the domain.

2.2. Magnetic energy transfer functions

2.2.1. The formalism

In this section, we present a method to obtain a spectral (in the sense of the spherical harmonics) evolution equation for the magnetic energy, starting from the induction equation (5). In order to deal with vectorial fields and spherical harmonics (see Eq. (A2) in Appendix), it is practical to define the vectorial spherical harmonics basis (Rieutord 1987; Mathis & Zahn 2005):

$$\begin{cases} \mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi)\mathbf{e}_r \\ \mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi) = \nabla_\perp Y_l^m = \partial_\theta Y_l^m \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sin\theta} \partial_\varphi Y_l^m \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{T}_l^m(\theta, \varphi) = \nabla_\perp \times \mathbf{R}_l^m = \frac{1}{\sin\theta} \partial_\varphi Y_l^m \mathbf{e}_\theta - \partial_\theta Y_l^m \mathbf{e}_\varphi \end{cases} \quad (10)$$

It is an orthogonal basis for the scalar product $\int_S \cdot d\Omega$, where S is a spherical surface and $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ the associated infinitesimal solid angle. The mode numbers m refer to the longitudinal variation of the spherical harmonics and the mode numbers l are linked to their latitudinal variations. One may see an example of a

($l = 9, m = 5$) mode in Fig. 8(a). The general properties of this basis maybe found in appendix A.1. The two main vectorial fields that appear in the induction equation (5) are the magnetic and the velocity fields. We want to project those fields on the vectorial basis (10), using the decompositions (8)-(9). Fortunately, the curl of a vector is a linear operation that can be expressed very easily in the vectorial spherical harmonics basis (see equation (A9)). We obtain:

$$\mathbf{B}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \frac{l(l+1)}{r^2} C_m^l(r) \mathbf{R}_l^m + \frac{1}{r} \partial_r C_m^l(r) \mathbf{S}_l^m + \frac{A_m^l(r)}{r} \mathbf{T}_l^m \right\}, \quad (11)$$

$$\bar{\rho}(r)\mathbf{U}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \frac{l(l+1)}{r^2} W_m^l(r) \mathbf{R}_l^m + \frac{1}{r} \partial_r W_m^l(r) \mathbf{S}_l^m + \frac{Z_m^l(r)}{r} \mathbf{T}_l^m \right\}, \quad (12)$$

and,

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \frac{l(l+1)}{r^2} A_m^l \mathbf{R}_l^m + \frac{1}{r} \partial_r A_m^l \mathbf{S}_l^m - \Delta_l \left(\frac{C_m^l}{r} \right) \mathbf{T}_l^m \right\}, \quad (13)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \frac{l(l+1)}{r} \Delta_l \left(\frac{C_m^l}{r} \right) \mathbf{R}_l^m + \frac{1}{r} \partial_r \left[r \Delta_l \left(\frac{C_m^l}{r} \right) \right] \mathbf{S}_l^m + \Delta_l \left(\frac{A_m^l}{r} \right) \mathbf{T}_l^m \right\}, \quad (14)$$

where $\Delta_l = \partial_{rr}^2 + \frac{2}{r} \partial_r - \frac{l(l+1)}{r^2}$. Note that we have projected the toroidal and poloidal components of the fields (A , C , Z and W) on the scalar spherical harmonics basis. We see that in equation (11), the poloidal C and toroidal A components of \mathbf{B} are respectively projected on (\mathbf{R}, \mathbf{S}) and \mathbf{T} . Consequently, in the remainder of this paper the projection of any vectorial field on (\mathbf{R}, \mathbf{S}) will be referred as *poloidal*, and the projection on \mathbf{T} as *toroidal*. We also have written the expression of the current density $\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B}$ (Eq. (13)) and the laplacian of \mathbf{B} (Eq. (14)) which will be useful later.

2.2.2. Shell to shell analysis

To study the transfers of energy between scales on a spherical surface, we distinguish the different scales of the axisymmetric ($m = 0$) and non-axisymmetric physical fields by defining shells L^0 and L^* as follows:

$$\mathbf{X}_L^0 = \mathcal{A}_L^0 \mathbf{R}_L^0 + \mathcal{B}_L^0 \mathbf{S}_L^0 + \mathcal{C}_L^0 \mathbf{T}_L^0, \quad (15)$$

$$\mathbf{X}_L^* = \sum_{\substack{-l \leq m \leq l \\ m \neq 0}} \left\{ \mathcal{A}_L^m \mathbf{R}_L^m + \mathcal{B}_L^m \mathbf{S}_L^m + \mathcal{C}_L^m \mathbf{T}_L^m \right\}. \quad (16)$$

This distinction is natural when studying the generation of large scale axisymmetric field. It distinguishes the contribution of the organized axisymmetric fields, and the

more turbulent non-axisymmetric ones. Another choice of shells based on dynamo families will also be used in this paper (see Appendix A.7 and the end of Sect. 2.2.3). Note that the defined shells are orthogonal, *i.e.* that any scalar product of strictly different shells is zero. In order to simplify the notations, the shell L may represent either axisymmetric or non-axisymmetric shells. Exponents 0 and * denote axisymmetric and non-axisymmetric components in the remainder of this paper. The shells of magnetic energy in spectral space are then defined by

$$E_L^{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{B}_L \cdot \mathbf{B}_L \, d\Omega. \quad (17)$$

This spectrum may be defined at any radial location of the spherical domain (*e.g.*, in a stellar interior). Our spectral analysis intends to characterize horizontal scales of velocity and magnetic fields, and may be applied at different depths, depending on the radial location of the zone one wants to study.

2.2.3. Spectral magnetic energy equation

In order to obtain the spectral magnetic energy evolution equation, we multiply equation (5) by \mathbf{B}_L and integrate it over the spherical surface so that

$$\partial_t E_L^{\text{mag}} = \mathcal{D}_L + \sum_{L_1, L_2} \{ \mathcal{P}_L(L_1, L_2) + \mathcal{F}_L(L_1, L_2) \}, \quad (18)$$

where \mathcal{D} regroups the diffusion terms, \mathcal{P} represents the volumetric production of magnetic energy, and \mathcal{F} is the divergence of the flux of magnetic energy through a spherical surface. Note that the production \mathcal{P} term has to be understood as a general production term, that can either be positive (real production) or negative (destruction). The sum over L_1, L_2 involves the triangular selection rule $\{|l_1 - l_2| \leq l \leq l_1 + l_2, m_1 + m_2 = m\}$ that comes naturally from the spherical harmonics coupling (see Appendix A.2). The expressions of the three contributions \mathcal{D} , \mathcal{P} , and \mathcal{F} are given by:

$$\mathcal{D}_L(r) = \int_S \{ \eta \mathbf{B}_L \cdot \nabla^2 \mathbf{B}_L + \partial_r \eta \mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{B}_L \times \nabla \times \mathbf{B}_L) \} \, d\Omega, \quad (19)$$

$$\mathcal{P}_L(r, L_1, L_2) = \int_S (\mathbf{U}_{L_1} \times \mathbf{B}_{L_2}) \cdot \nabla \times \mathbf{B}_L \, d\Omega, \quad (20)$$

$$\mathcal{F}_L(r, L_1, L_2) = \int_S \nabla \cdot [(\mathbf{U}_{L_1} \times \mathbf{B}_{L_2}) \times \mathbf{B}_L] \, d\Omega. \quad (21)$$

We have split the diffusive terms by making use of the vectorial relation $\nabla \times [f(r)\mathbf{A}] = f(r)\nabla \times \mathbf{A} + \partial_r f(r)\mathbf{e}_r \times \mathbf{A}$, for the diffusivity η may only depend on r in the cases considered. We also used the vectorial relation $\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$ with $\mathbf{A} = \mathbf{U} \times \mathbf{B}$ to separate the production and the flux terms. The production and flux of magnetic energy are discretized over scales so that we compute which scale of the velocity field (L_1) is interacting with which scale of the magnetic field (L_2) towards a studied scale L .

Although the expressions (19)-(21) are formally written, they include the evaluation of vectorial products of vectors decomposed on the vectorial spherical harmonics basis. Since this operation is not easily calculated in the

($\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}$) basis. It is then necessary to use an alternative basis (Varshalovich et al. 1988) to compute the coupling coefficients. For sake of simplicity, these details are given in appendix A.5.

Alternatively to considering axisymmetric and non-axisymmetric spectra, it is instructive to decompose the flow and field into the so-called *primary* (dipolar, antisymmetric) and *secondary* (quadrupolar, symmetric) families (McFadden et al. 1991; Roberts & Stix 1972). These families were proven very insightful to characterize geophysical and astrophysical dynamos (Gubbins & Zhang 1993; DeRosa et al. 2011, 2012). Further, the primary/secondary distinction greatly simplifies the transfer maps of \mathcal{P} and \mathcal{F} . Indeed, the coupling between fields of the same family always gives *secondary* fields, while the coupling between fields of different families always gives a *primary* field (see Appendix A.7). Both of these approaches (*i.e.*, axisymmetric/non-axisymmetric and primary/secondary distinctions) will be used hereafter.

2.3. Validation and illustration of the method

In this section, we illustrate the coupling calculations for two simple fields. The reader only interested in physical discussions may skip this part and go directly to Sect. 3.

Since the ASH code is a spectral code, it solves the MHD equations for the spherical harmonics coefficients of the fields. Although it does not compute explicitly the decomposition on the vectorial spherical harmonics basis (10), it is straightforward to make use of this basis in the code by using the transformation relations (11)-(12). We have added in the code the ability to compute the different terms (19)-(21) of the spectral magnetic energy equation (18).

In order to illustrate and validate both the coupling coefficients (A17) for the vectorial product and the general method, we numerically computed a simple analytical test case. We initialize the magnetic and velocity fields in the following way:

$$\mathbf{B} = a \left(\mathbf{R}_1^0 + \frac{1}{2} \mathbf{R}_1^1 - \frac{1}{2} \mathbf{R}_1^{-1} \right) + b \left(\mathbf{S}_1^0 + \frac{1}{2} \mathbf{S}_1^1 - \frac{1}{2} \mathbf{S}_1^{-1} \right) + c \left(\mathbf{T}_1^0 + \frac{1}{2} \mathbf{T}_1^1 - \frac{1}{2} \mathbf{T}_1^{-1} \right),$$

$$\bar{\rho} \mathbf{U} = d (\mathbf{R}_2^1 - \mathbf{R}_2^{-1}) + e (\mathbf{S}_2^1 - \mathbf{S}_2^{-1}) + f (\mathbf{T}_2^1 - \mathbf{T}_2^{-1})$$

where a, b, c, d, e and f are functions of r only. This initialization allows us to test at the same time the axisymmetric/non-axisymmetric and non-axisymmetric/non-axisymmetric coupling schemes between the velocity and the magnetic fields. The low order harmonics ($l \in \{0, 1, 2\}$) that are involved make the analytic calculation easy. We display on figure 1 the possible couplings (*via* vectorial product) between the \mathbf{U} and \mathbf{B} fields we initialized. This is in fact a schematic representation of the triangulation rule that appear in the summation of equation (A17). The analytical calculation of the values of the three large green circles is given in appendix B. The resulting vectorial products calculated by the code using the Wigner coefficients show very good agreement with the coefficients calculated analytically (table 1 in appendix B).

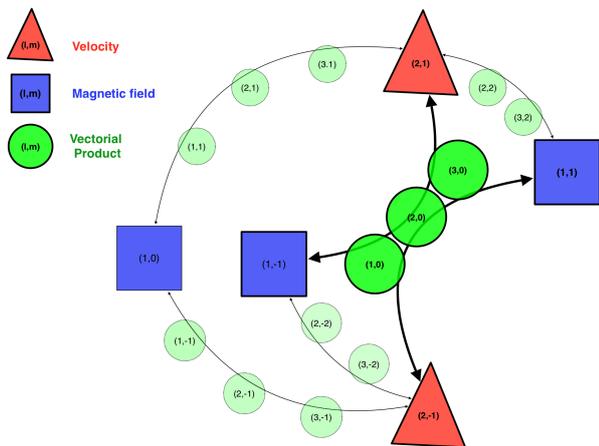


FIG. 1.— Schematic coupling between spherical harmonics of \mathbf{U} and \mathbf{B} for the simple test case. The \mathbf{B} modes are represented by blue squares, and the \mathbf{U} modes by red triangles. The black arrows represent the coupling between the modes, the green circles on them represent resulting modes obtained from the coupling *via* the triangulation rule of the vectorial product $\mathbf{U} \times \mathbf{B}$. The three highlighted green circles in the center correspond to the modes calculated in appendix B.

We stress here that this test has been done for low m and l values. The numerical accuracy of the algorithms calculating the Clebsch-Gordan coefficients (and thus $3j$, $6j$ and $9j$ Wigner coefficients) is known to decrease with increasing l and m . The calculation routines we use are accurate up to values of l of the order of 500. To do so, we used a multiple precision package¹ to simulate large-precision numbers that are needed to compute the ratios of factorials and binomial coefficients that are involved in the Wigner coefficients calculations. However, the calculation time of the transfer functions \mathcal{P} and \mathcal{F} increases dramatically with l and m . For practical reason, when computing fully nonlinear dynamos (see Sect. 4 below), we have chosen to limit the computation of the coupling coefficients to $l_{\max} = 70$, even if the effective resolution of such simulations reaches $l_{\max} = 340$. From time to time, we do calculate the transfer terms for high l 's to have an indication of how energy is transferred at the smallest scales (see Sect. 4). Nevertheless, the magnetic-energy-carrying scales in the spectrum are dominated by $l < 70$ in this case. We thus capture the essential part of the dynamics.

3. AXISYMMETRIC $\alpha\Omega$ DYNAMO

In this section, we use the spectral method we developed in Sect. 2 on two academic cases. First, we explain how the classical Ω effect (Moffatt 1978) is represented by our formalism (Sect. 3.1). Then, we calculate the spectral transfers for a mean field $\alpha\Omega$ model (Sect. 3.2).

3.1. Omega effect

The complexity of the two spherical harmonics bases may be confusing when it comes to interpret simple and classical dynamo processes. We thus give hereafter a step-by-step explanation of the Ω -effect in the two vectorial spherical harmonics bases formalism.

¹ <http://crd-legacy.lbl.gov/~dhbailey/mpdist/>

We start with a purely dipolar poloidal magnetic field that reads (using Eq. (A9))

$$\mathbf{B}_p(r, \theta) = b_r(r)\mathbf{R}_1^0 + b_\theta(r)\mathbf{S}_1^0. \quad (22)$$

Then, we want to calculate the effect of a differential rotation that reads

$$\Omega = A + B \cos^2 \theta. \quad (23)$$

Such differential rotation is usually seen as a “ $l = 2$ ” field. Though, it projects on a $l = 3$ component when considering the azimuthal component of the velocity $\mathbf{U}_\varphi = r \sin \theta \Omega \mathbf{e}_\varphi$ (see Roberts & Stix (1972) and Appendix A.8), which reads

$$\mathbf{U}_\varphi(r, \theta) = U_\varphi(r) (A \sin \theta + B \sin \theta \cos^2 \theta) \mathbf{e}_\varphi \quad (24)$$

$$\sim U_\varphi(r) \partial_\theta Y_3^0 \mathbf{e}_\varphi = U_\varphi(r) \mathbf{T}_3^0. \quad (25)$$

In general, Eq. (24) should project both on \mathbf{T}_1^0 and \mathbf{T}_3^0 . For the sake of simplicity, we select here a profile of differential rotation that is purely described by a ($l = 3, m = 0$) harmonic, which corresponds to $B = -5A$ (Eq. (23)). We simply apply the curl operator (A9) and make use of the coupling relations (A17) to obtain the production of \mathbf{B} in the induction equation,

$$\nabla \times (\mathbf{U}_\varphi \times \mathbf{B}_p) = f(b_r, b_\theta, U_\varphi) \mathbf{T}_2^0. \quad (26)$$

A more detailed calculation can be found in appendix A.8. We recovered that the action of differential rotation on a purely axisymmetric poloidal field creates a toroidal field $B_\varphi \propto \sin \theta \cos \theta$. With our notations, this kind of field will be labeled as a ‘ $l = 2$ ’ field.

An additional feature of the differential rotation can also be learnt from this little analysis. We immediately remark that for axisymmetric fields, the first Wigner coefficient involved in the coupling between two shells L_1 and L_2 is zero if $3 + l_1 + l_2$ is odd (equation (A36)), *i.e.*, if l_1 and l_2 are of the opposite parity. The shearing effect of differential rotation will then always couple axisymmetric scales of the magnetic field that are of opposite parity, which will be observed in the transfer maps in more complex cases (*e.g.*, Figs 6 and 17).

This simple example strikingly illustrates how the complex vectorial product formula (A17) couples together two simple fields. This description of the Ω effect will guide our analysis in Sects. 3.2 and 4.

3.2. A mean field dynamo

We use the ASH code (Clune et al. 1999; Brun et al. 2004) to simulate an axisymmetric mean field dynamo (Charbonneau 2010; Jouve et al. 2008). To do so, we use a stable entropy profile $\frac{d\bar{s}}{dr} = 10^{-7} \text{ erg } K^{-1} \text{ cm}^{-1}$ so that the system is enforced to be stable with respect to the convective instability. Our radial domain is defined between $r_b = 0.6 R_\odot$ and $r_t = 0.966 R_\odot$. We use a resolution of $N_r \times N_\theta \times N_\varphi = 64 \times 128 \times 256$ and solve the MHD anelastic equations in a frame rotating at the solar rotation rate $\Omega_0 = 2.6 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$. We impose a solar differential rotation profile $\Omega_{DR}(r, \theta) = -\partial_\theta Z_{DR} / (r^2 \sin \theta)$ through the toroidal component Z_{DR} of the momentum,

which is, in the rotating frame:

$$Z_{DR}(r, \theta) = Z_t(r) \left(A \cos \theta + \frac{B}{3} \cos^3 \theta + \frac{C}{5} \cos^5 \theta \right). \quad (27)$$

From [Schou et al. \(1998\)](#), we take $A = 257$ nHz, $B = 321$ nHz and $C = 529$ nHz. The differential rotation then naturally projects on \mathbf{U}_1^0 , \mathbf{U}_3^0 and \mathbf{U}_5^0 . The radial profile $Z_t(r)$ is chosen such as to impose a tachocline at the base of the domain and is defined by

$$Z_t(r) = \bar{\rho} \frac{r^2}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{r - 4.87 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 10^9} \right) \right]. \quad (28)$$

The differential rotation profile is enforced thanks to a drag operator that we have introduced in the toroidal component of equation (3) (see appendix of [Brun et al. \(2004\)](#) for more details on the full equation):

$$\partial_t Z = \frac{1}{\tau_d} (Z_{DR} - Z). \quad (29)$$

We set $\tau_d = 10^5$ s and obtain a stable solar-like differential rotation profile (Fig. 2(a)), with a constant meridional circulation that is driven by the action of the Coriolis force on the differential rotation (*e.g.* by gyroscopic pumping, see [Miesch et al. 2006](#); [McIntyre 2007](#); [Garaud & Acevedo Arreguin 2009](#); [Brun et al. 2011](#); [Miesch & Hindman 2011](#)). The meridional circulation is almost mono-cellular in each hemisphere, and penetrates into the tachocline (Fig. 2(b)). It rotates clockwise in the southern hemisphere, and counter-clockwise in the northern hemisphere. We note that the 2 small counter rotating cells near the equator in the tachocline are due to the change of sign of the radial shear.

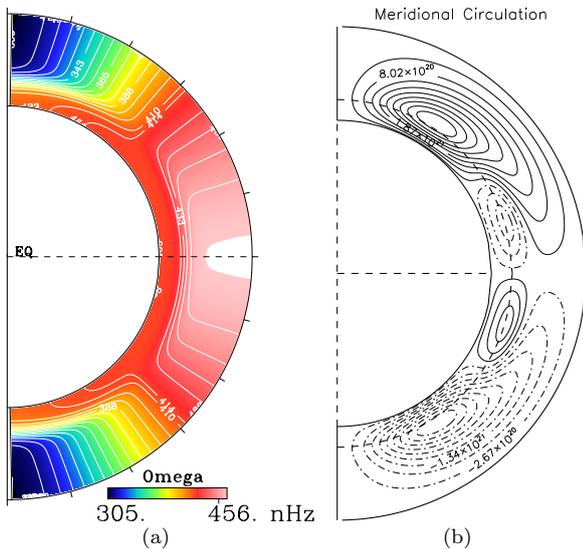


FIG. 2.— (a) Solar like differential rotation profile computed from [Schou et al. \(1998\)](#). The tachocline is located near $r = 0.7 R_\odot$, and the base of the tachocline rotates at the solar rotation rate $\Omega_0 = 2.6 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$. (b) Meridional circulation shape triggered by the Coriolis force on the prescribed differential rotation.

Once the hydrodynamic state has reached a steady state, we introduce a seed $l = 3$ poloidal (antisymmetric

and axisymmetric) magnetic field. We set the Lorentz force and the Ohmic heating to zero in equations (3) and (4). Our setup is then equivalent to solving only the induction equation with prescribed differential rotation and meridional circulation. Finally, we add an α effect to the induction equation such that

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B} + \alpha B_\varphi \mathbf{e}_\varphi) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}), \quad (30)$$

where α is defined by

$$\alpha(r, \theta) = \alpha_0 e^{\left(-\frac{r-0.75 R_\odot}{0.05 R_\odot}\right)^2} \frac{\cos \theta}{1 + (|\mathbf{B}|/B_q)^2}. \quad (31)$$

This is the simplest α that is needed to trigger an oscillating solar-like dynamo ([Charbonneau 2010](#)); it is anti-symmetric with respect to the equator. The radial profile of α is localized near the base of the convection zone and the quenching value is given by $B_q = 10^3$ G. We have deliberately chosen that the α -effect operates only on the poloidal component of the induction equation, therefore computing an $\alpha\Omega$ mean field dynamo ([Moffatt 1978](#)). This $\alpha\Omega$ dynamo exhibits the characteristic butterfly diagram showed in Fig. 3. Although this α profile differs from the many profiles that were tested in the literature (*e.g.*, [Roberts & Stix 1972](#); [Charbonneau & MacGregor 1997](#); [Bonanno et al. 2002](#); [Zhang et al. 2003](#); [Jouve et al. 2008](#)), we chose this form because it easily triggers an oscillatory dynamo and its effect in spectral space can be easily calculated (see eq. (33) below). It is consequently a good choice to illustrate our new spectral method. With the parameters we chose, the cycle period is of the order of 400 days (see Fig. 3).

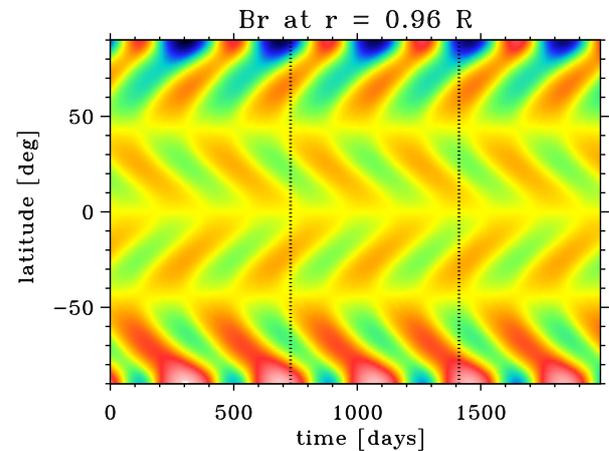


FIG. 3.— Butterfly diagram in the kinetic axisymmetric $\alpha - \Omega$ dynamo (only B_r as a function of time and latitude is shown, at the surface of the convection zone). The two vertical black dotted lines represent the abscissa limits of Figs. 4 and 5.

We note that our imposed axisymmetric flow field greatly simplifies the production and flux expressions (see Sect. 3.1). The extra α effect adds a new term in the spectral energy equation (18) that can lead to complex formula in spectral space. We rewrite the energy equation

$$\partial_t E_L^{\text{mag}} = \mathcal{D}_L + \int_S \nabla \times (\alpha B_\varphi \mathbf{e}_\varphi)_L \cdot \mathbf{B}_L \, d\Omega + \sum_{L_1, L_2} \{ \mathcal{P}_L(L_1, L_2) + \mathcal{F}_L(L_1, L_2) \}. \quad (32)$$

In general, all the spherical harmonics coefficients of α couple to all the coefficients of B_φ to create $\nabla \times (\alpha B_\varphi \mathbf{e}_\varphi)_L$. The α term in equation (32) then involves a sum over (L_1, L_2) , as the production and flux terms. Nevertheless, those couplings are easily written for the particular formulation of α we use (eq. (31)). Recasting the expression of the coupling using the relation (A22) given in the appendix, we obtain for the axisymmetric components of \mathbf{B} that

$$\int_S \nabla \times (\alpha B_\varphi \mathbf{e}_\varphi)_L \cdot \mathbf{B}_L \, d\Omega = \frac{l(l+1)}{r^2} \left\{ \frac{l(l+1)}{r^2} \xi_0^l (C_0^l)^{cc} + \partial_r (\xi_0^l) \partial_r (C_0^l)^{cc} \right\}. \quad (33)$$

Due to complex latitudinal dependence involved in the quenching part of the α effect, the coupling coefficient ξ_l^0 (defined in eq. (A21)) couples all the magnetic field shells together. In fact, it can be rewritten in a much simpler formula in the case where we neglect the quenching in α (*i.e.*, where $|\mathbf{B}| \ll B_q$), namely

$$\xi_l^0 = \alpha_0 e^{\left(-\frac{r-0.75 R_\odot}{0.05 R_\odot}\right)^2} \left(\frac{(l-1)}{\sqrt{(2l-1)(2l+1)}} A_0^{l-1} + \frac{(l+2)}{\sqrt{(2l+1)(2l+3)}} A_0^{l+1} \right). \quad (34)$$

Wherever \mathbf{B} is not too large, the quenching part of the α effect is negligible and the expression (34) is correct. In that case, the α effect (which restores poloidal field from toroidal field) simply couples the L shells of toroidal field to its neighboring shells of poloidal field, namely $L-1$ and $L+1$.

We display in Fig. 4 the evolution of the magnetic energy of the first shells during a few cycles. The remaining figures of this section are evaluated on a spherical surface at the middle of the 'convection' zone, at $r = 0.86 R_\odot$. We see that the total magnetic energy is indeed modulated with the cycle of the butterfly diagram (Fig. 3). All the shells evolve with almost the same period, ranging from 178 days (total energy and $L=2$ cycle period) to 192 days (cycle period of shells 1, 4, 5, ...). Though, they are generally out of phase. The shell 2 dominates the spectrum and thus sets the total cycle phase. The shells 1, 3, 4 and 5 are out of phase with the total energy cycle. Higher L 's (not shown here) also exhibit a similar cycle period and are generally out of phase with the total energy cycle. This phase shift is a natural ingredient that allow the reversal of the overall field polarity (Knobloch et al. 1998; Tobias 2002).

We see in Fig. 4 that energy is transferred from the initial poloidal $l=3$ field to all the shells. Nevertheless, all the magnetic field that is created in this experiment is of the primary family ($(\mathbf{R}_{2l+1}^0, \mathbf{S}_{2l+1}^0)$ and \mathbf{T}_{2l}^0 , see appendix A.7). Our initial magnetic field is a poloidal primary field ($\mathbf{R}_3^0, \mathbf{S}_3^0$). As a result, the toroidal field created through the Ω -effect is also a primary field (\mathbf{T}_2^0 , see section 3.1). Then, our α -effect, that creates poloidal field from toroidal field, transforms the primary toroidal field into a primary poloidal field ($(\mathbf{R}_{1,3}^0, \mathbf{S}_{1,3}^0)$, see Eqs. (33) and (34)), which is of the same type than our initial magnetic field. Hence, no secondary field can be cre-

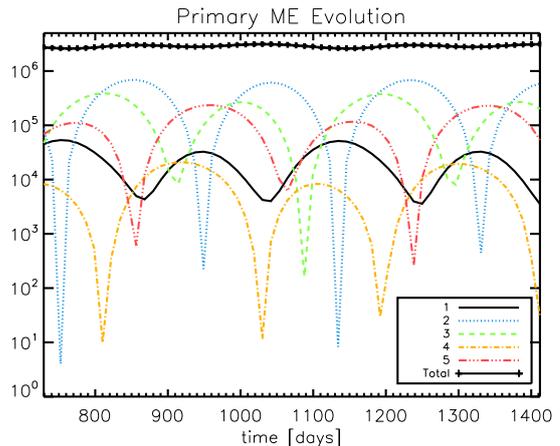


FIG. 4.— Evolution of the magnetic energy in the first shells of the mean field $\alpha\Omega$ dynamo simulation. The thick plain line at the top is the total magnetic energy. Note that this spectrum is only composed of primary field, which is both poloidal and toroidal. For symmetry reasons (see appendix A.7), the odd L shells are composed of poloidal primary field, and the even L shells of toroidal primary field. The secondary family fields, not shown here, are null to machine precision in this simulation.

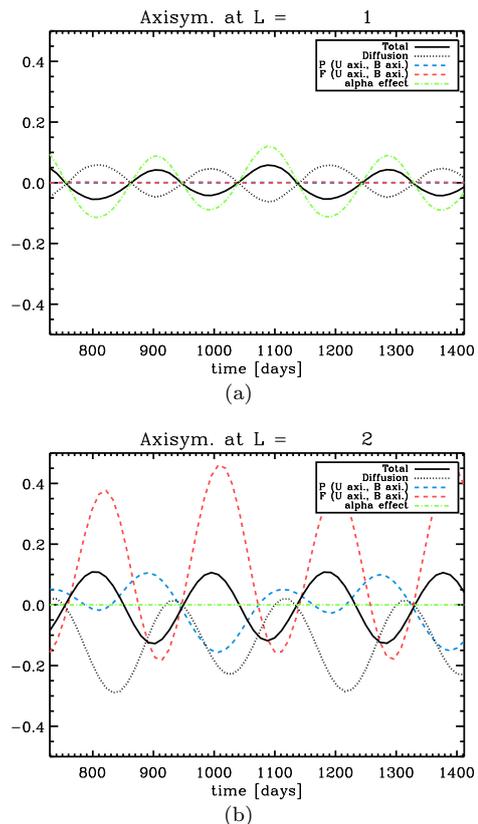


FIG. 5.— Evolution of the different terms of equation (32) for the shells 1 and 2. Production \mathcal{P} is the dashed blue line, flux \mathcal{F} the dashed red line, diffusion $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$ the dotted black line and the α effect is the dash-dot green line. The black plain line is the total of all the contributions.

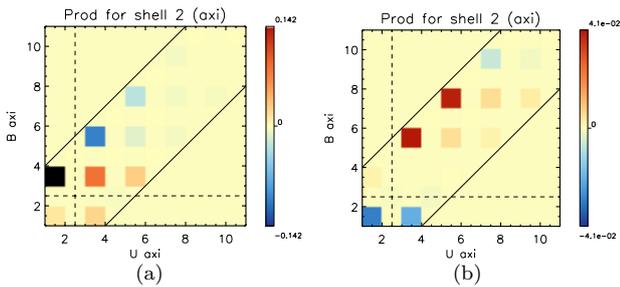


FIG. 6.— Production \mathcal{P} contribution to the $L = 2$ shell (see Eq. (32)). (a) is taken at $t = 1000$ days, at a minimum of the production contribution (Fig. 5(b)). (b) is taken during a maximum, at $t = 1100$ days. The 2D color maps are the $\mathbf{B}^0 - \mathbf{U}^0$ transfer functions (dark red is the maximum value, black the minimum). The oblique black lines represent the boundaries of the triangular selection rule.

ated in the simulation, and the α -effect can only act on the primary toroidal field to create a primary poloidal field. This is a direct consequence of the well-known separability property of the induction equation between the dipolar and quadrupolar families, when symmetric flows and antisymmetric α effect are chosen (Gubbins & Zhang 1993).

The evolution of the different terms involved in the magnetic energy equation (32) are displayed in Figs. 5 for the first 2 shells in the simulation. The primary toroidal field energy (shell 2) clearly evolves due to the production \mathcal{P} and flux \mathcal{F} terms that account for the effect of differential rotation and meridional circulation on the magnetic field (as expected, since there are no other production nor advection terms), and also due to the diffusion term. On the contrary, the primary poloidal field energy evolution (shell 1) is dominated by the α effect we prescribed, and opposed by diffusion. This distinction holds for higher L 's. Nevertheless, minor modulations of the production term are sometimes observed for the toroidal fields (L even), which explain both the different amplitudes of the oscillations observed in Fig. 4, and the small phase shift of the cycle period between shells.

As an example, we display in Fig. 6 the transfer maps for the production \mathcal{P} terms of equation (32), for the $L = 2$ shell. The shell that mainly contribute to the transfer correspond to \mathbf{U}_1^0 , \mathbf{U}_3^0 and \mathbf{U}_5^0 , which are the scales involved in the prescribed differential rotation (eq. (27)). The production is achieved through a coupling with the primary components of the magnetic field, as expected (see, e.g., Pétrélis et al. 2009). We display the transfer maps at two different times, when the production term reaches a minimum (6(a)) and a maximum 6(b). We observe that the maps are qualitatively opposite (the sign of each coupling is reversed), which means that all the couplings between the shells reverse sign during the cycle. This reversal of all shells is a simple, direct consequence of the reversal of the whole magnetic field. However, the dominant interactions are not necessarily the same along the cycle. During the minimum, the transfer is dominated by a $\mathbf{U}_1^0 - \mathbf{B}_3^0$ coupling, and during the maximum, it is a $\mathbf{U}_3^0 - \mathbf{B}_5^0$ that dictates the transfer. The magnetic field shells contributing to this transfer are always the shells of higher energy (Fig. 4). We can conclude that the magnetic energy is limited by the large scale (\mathbf{U}_0^1) component of the differential rotation, while

the two scales (\mathbf{U}_3^0 , \mathbf{U}_5^0) are responsible for the growth of magnetic energy at the beginning of each cycle.

This $\alpha\Omega$ dynamo provides a simple example of how our diagnostic may be interpreted in the context of stellar dynamo. Now, we apply it to a turbulent dynamo triggered in a stellar convection zone that possess, as in the $\alpha\Omega$ case, a solar-like differential rotation profile.

4. NONLINEAR CONVECTIVE DYNAMO

We use the general method described in Section 2 to study dynamo action in a solar convection zone. We model a turbulent solar convection zone (Brun et al. 2004; Jouve & Brun 2009; Pinto & Brun 2012) that develops a solar-like differential rotation profile (Fig. 7(a)), with fast equator and slow poles. We display the convective patterns we obtain in Fig. 7(b). We recover the well-known 'banana'-shaped cells at the equator, and more patchy patterns at higher latitudes. Our choice of parameters yields a mildly turbulent state (based on the maximum amplitude of the velocity, the Reynolds number in the middle of the convection zone is of the order of 800).

We display in Fig. 7(c) the kinetic energy spectra in the rotating frame at the center of the convection zone as a function of the shell L . We separate the axisymmetric component (the plain blue line) from the non-axisymmetric component (the dashed red line), and the dotted black line is the total spectrum. Notice that the two peaks at $L = 3, 5$ dominate the kinetic energy spectrum and represent the differential rotation of the azimuthal component of the toroidal velocity (see Sect. 3.1).

We initialize a peaked $(l, m) = (9, 5)$ non-axisymmetric magnetic field (Fig. 8(a)) throughout the convection zone by setting:

$$\mathbf{B} = \frac{10 B_0 R_\odot^2}{r^2} \left(\frac{R_b}{r}\right)^9 \mathbf{R}_9^5 - \frac{B_0 R_\odot^2}{r^2} \left(\frac{R_b}{r}\right)^9 \mathbf{S}_9^5. \quad (35)$$

We set $B_0 = 100$ G so the initial magnetic energy contained in the $L = 9$ shell is comparable to the kinetic energy at that scale (see Fig. 8(b)). This initialization allows us to directly see how a significant amount of energy can be transferred to large scales. Then, a non-linearly saturated state is reached, and this initial scale is forgotten.

The magnetic Prandtl number throughout the convection zone is set to $P_m = \frac{\nu}{\eta} = 4$, leading to a magnetic Reynolds number of the order of 200 at mid-convection zone. Such set of parameters triggers a dynamo instability and the growth of magnetic energy (see Fig. 9(c)).

The complex interactions between the convective motions and the initially peaked magnetic field lead to the construction of the magnetic energy spectrum. The saturated magnetic energy after 600 days of evolution is displayed on Fig. 8(c) in physical space, in the middle of the convection zone. In the remainder of this section, we characterize how such a state is obtained, and maintained. We distinguish two regimes: the development of the spectrum shape (Sect. 4.1), and its saturation and sustainment (Sects. 4.2 and 4.3). We recall here that no α effect has been added to the induction equation (5), dynamo action is naturally achieved since convection is

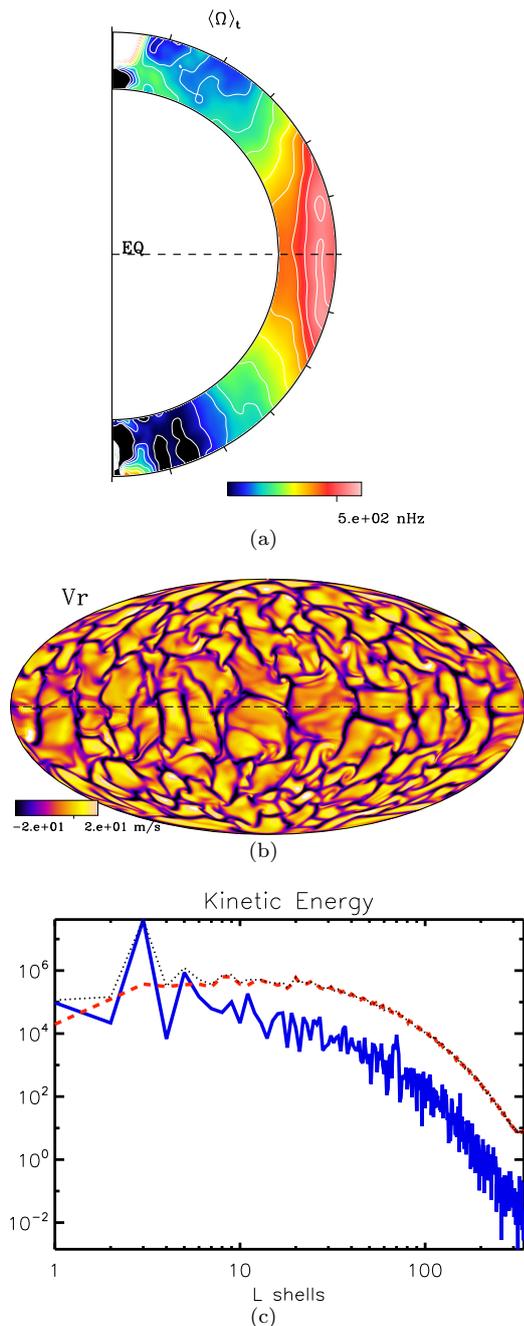


FIG. 7.— Progenitor hydro state. (a) Mean differential rotation profile averaged over 3 months. (b) Convective patterns at the top of the convection zone. (c) Kinetic energy spectra in the middle of the convection zone. The axisymmetric spectra are in plain blue, the non-axisymmetric spectra in dashed red and the total spectra in dotted black.

3D and $R_m > R_m^{\text{crit}}$ (Brun et al. 2004).

4.1. Creation of Magnetic Energy spectrum

We plot in Fig. 9(a) the evolution of the non-axisymmetric magnetic energy spectrum. The initial spectrum is plotted in blue, and the saturated spectrum in red. In addition, we display in Fig. 9(c) the evolution of the magnetic energy for 6 different L shells. The total energy evolution is also shown (plain thick line). The

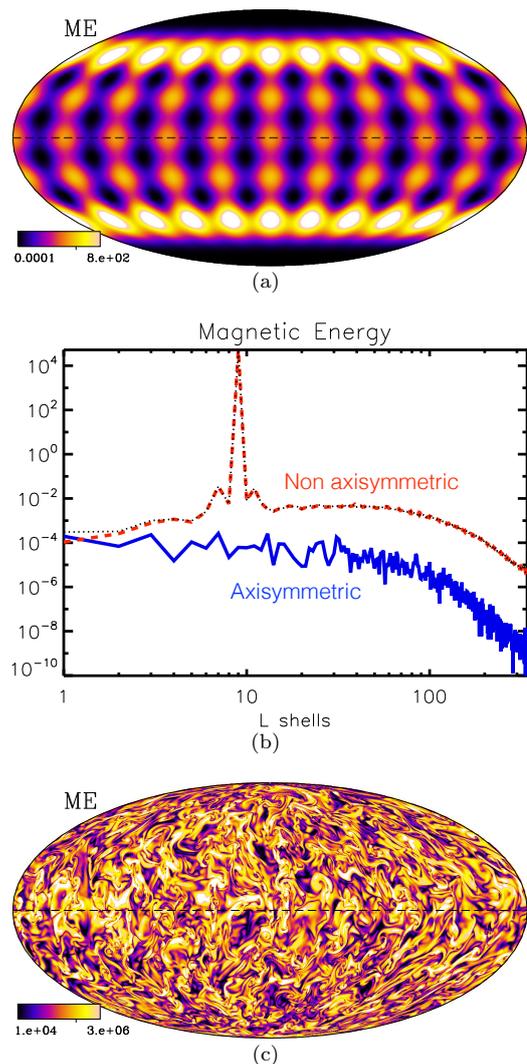


FIG. 8.— (a) Initial magnetic energy ($l = 9, m = 5$) in cgs , in the middle of the convection zone. (b) Magnetic energy spectra one time step after the introduction of the peaked magnetic field in our turbulent convection zone. The axisymmetric spectra are in plain blue, the non-axisymmetric spectra in dashed red and the total spectra in dotted black. (c) Saturated magnetic energy in cgs , 600 days after the introduction of the seed magnetic field. The color scale is logarithmic.

initial evolution ($t < 100$ days) is shown in logarithmic scale so that the exponential growth of the magnetic energy clearly appears ($t \lesssim 17$ days). The saturation of magnetic energy is reached at $t \sim 300$ days.

We detail hereafter how the non-axisymmetric (Sect. 4.1.1) and the axisymmetric (Sect. 4.1.2) spectra are created.

4.1.1. Creation of the non-axisymmetric spectrum

We observe at first that all the L shells gain energy (Fig. 9(a)), excepts the $L = 9$ shell which loses energy because it is redistributed throughout the whole domain by the convective flows (Fig. 9(c)). It stops decaying when its magnitude reaches that of the growing modes at $t \sim 17$ days. We identify four regions in the non axisymmetric spectrum that exhibit different behaviors. We define the large-scale zone (I) by $1 \leq L \leq 4$, the

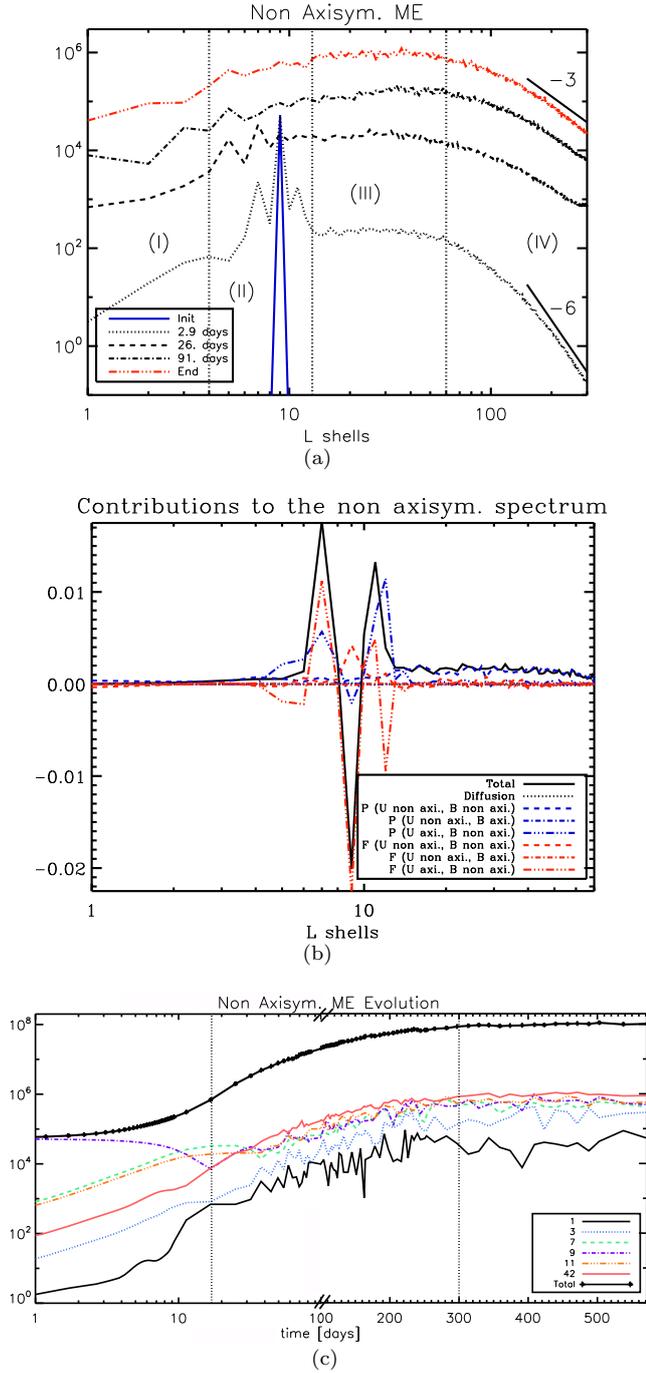


FIG. 9.— (a) Evolution of the non-axisymmetric magnetic energy spectra. The initial spectra is blue, the saturated spectrum red. Two slopes (L^{-6} and L^{-3}) are given as references for the small scales. (b) Contributions to the non-axisymmetric magnetic energy evolution in the initial phase (dotted line in panel (a)). The total is in plain black, \mathcal{D} in dotted black, \mathcal{P} in blue and \mathcal{F} in red. (c) Evolution of non-axisymmetric energy of shells 1, 3, 7, 9, 11 and 42. Notice the fast early evolution of E_7^* and E_{11}^* due to shearing of \mathbf{B}_9^* by the differential rotation. The thick plain line is the total non-axisymmetric energy. The abscissa is in log scale between for $t < 100$ days, and in linear scale for $t > 100$ days. Even though the initial growth is exponential, we chose to represent it in log-log scale to make it appear clearly in the evolution plot.

neighborhood zone (II) by $4 \leq L \leq 13$, and the plateau zone (III) by $13 \leq L \leq 60$. The small-scale zone (IV) ($L \gtrsim 60$) starts at the highest diffusive scale, which is the highest viscous scale $l \sim 60$ based on the first scale at which the local Reynolds number is lower than 1. It also includes the magnetic dissipative scales ($L \gtrsim 120$). The four zones are separated by the three dotted vertical lines in Fig. 9(a). In order to understand how the spectrum is built, we display the contributions from the different terms of Eqs. (A25)-(A28) in Fig. 9(b). Those contributions are taken shortly after the introduction of the magnetic field. They correspond to the spectrum plotted with a dotted line in Fig. 9(a). We recall that we fully calculate all the coupling terms up to $L = 70$.

The energy transfers around the $L = 9$ shell (the neighborhood zone II) are dominated by $\mathbf{U}^0 - \mathbf{B}^*$ interactions from both the production \mathcal{P} and the flux \mathcal{F} terms. We recall here that both \mathcal{P} and \mathcal{F} represent generic transfer functions, that can either be positive or negative. Dissipation is negligible in zone (II), even for the $L = 9$ shell that initially contains the energy. The $L = 9$ energy then decreases through the interaction of \mathbf{B}_9^* and the differential rotation \mathbf{U}_3^0 that shear the magnetic field (see Sect. 3.1). The energy is preferentially redistributed to E_{11}^* and E_7^* . For those two shells, the production \mathcal{P} and flux \mathcal{F} terms contribute positively to the creation of the spectrum (Fig. 9(b)). We display in Fig. 10 the detailed contribution of \mathcal{P} and \mathcal{F} to E_7^* . We only display contributions from \mathbf{B}^* because the axisymmetric magnetic energy is very small initially. The $\mathbf{U}^* - \mathbf{B}^*$ interactions are displayed in panel (a), and the $\mathbf{U}^0 - \mathbf{B}^*$ interactions in panel (b). We sum over the velocity shells to plot the production term against \mathbf{B}^* in panel (c). We observe that the summed contribution is dominated by $\mathbf{B}_9^* - \mathbf{U}_3^0$ interactions, as expected. Also, we observe that energy is directly transferred from E_9 to E_7^* , such that the $L = 8$ shell is not involved in the transfer. This is true for all the shells in zone (II) and implies that the transfer of energy is non-local, even for shells close to the initial energetic shell.

Due to the triangular selection rule, the $\mathbf{U}_3^0 - \mathbf{B}_9^*$ interaction can only act in zone (II). Indeed, L must be strictly greater than 12 in zones (III-IV) and strictly lower than 6 in zone (I). \mathbf{U}_3^0 and \mathbf{B}_9^* initially dominate respectively the kinetic and magnetic energy spectra. Their interaction was consequently dominant in zone (II), and we expect a different kind of spectral transfers in the other zones. This zone exists because of our choice of initial condition. The very early evolution would have been changed if we had chosen a different initial shell. Though, this initial scale is forgotten when the saturated state is reached (Fig. 9(a)).

The dynamics of zones (I), (III) and (IV) are dominated by two effects initially, which are shown in Fig. 11 for $L = 3$ (zone I) and Fig. 12 for $L = 42$ (zone III). In both cases, there is a competition between direct non-local $\mathbf{B}_9^* - \mathbf{U}^*$ transfers of energy, and effective shearing of neighbor shells by the large scale differential rotation ($\mathbf{B}^* - \mathbf{U}_3^0$ interactions).

In the case of the large-scale zone (I), the evolution is dominated by both \mathcal{P} and \mathcal{F} . The interactions between \mathbf{B}_9^* and \mathbf{U}^* alternate signs depending on the \mathbf{U}^* shell considered. We also note that the interactions involving

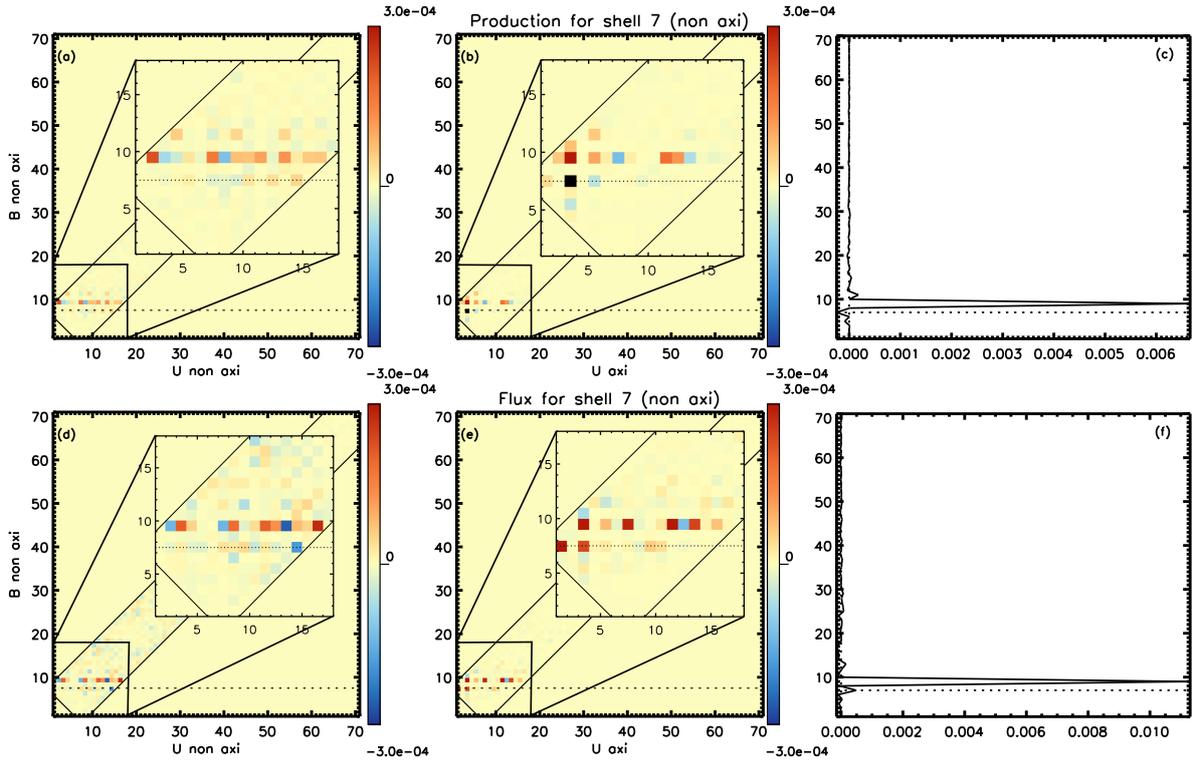


FIG. 10.— Production \mathcal{P} and flux \mathcal{F} contributions to the non-axisymmetric shell $L = 7$. The 2D color maps are the $\mathbf{B}^* - \mathbf{U}^*$ and $\mathbf{B}^* - \mathbf{U}^0$ transfer functions, the 1D plot is the sum of the transfer functions over the \mathbf{U} shells. The oblique black lines represent the boundaries of the triangular selection rule. The horizontal dotted line labels the \mathbf{B}_7 shell.

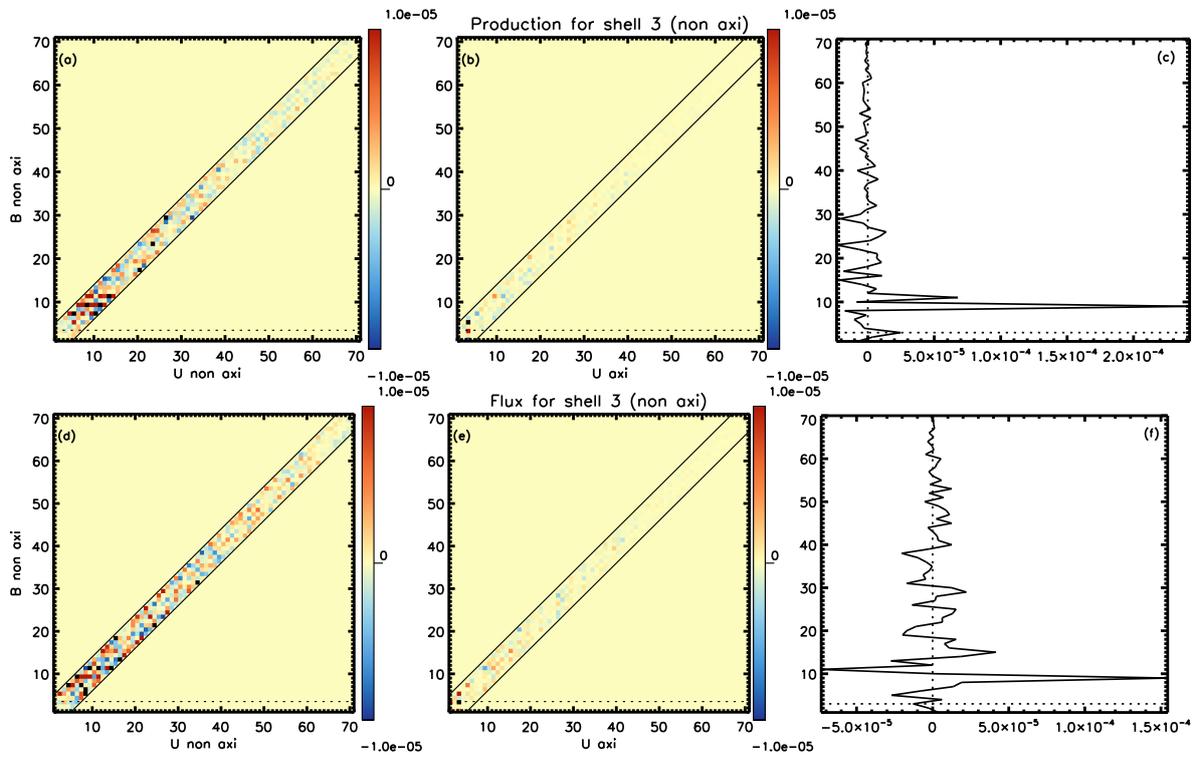


FIG. 11.— Production \mathcal{P} and flux \mathcal{F} contributions to the non-axisymmetric shell $L = 3$.

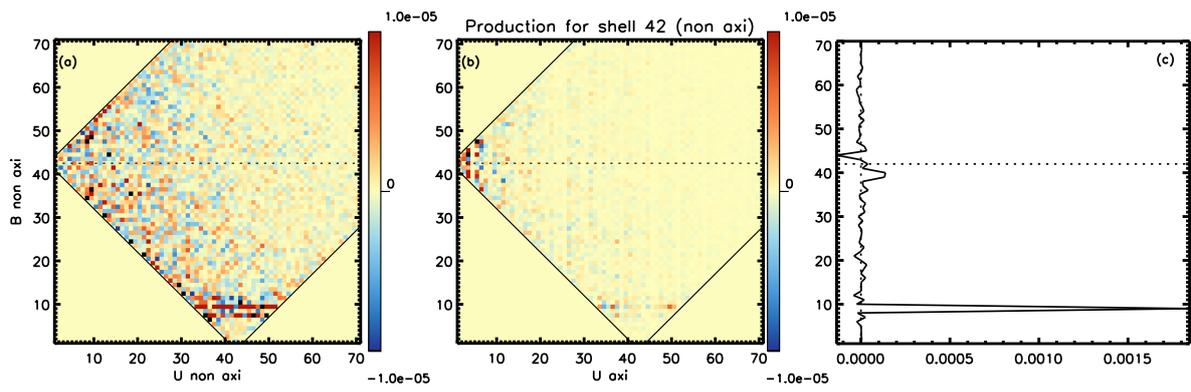


FIG. 12.— Production \mathcal{P} contribution to the non-axisymmetric shell $L = 42$

other \mathbf{B}^* shells are not negligible. The differential rotation action is visible in the panel (b) of Fig. 11, but is completely negligible compared to $\mathbf{U}^* - \mathbf{B}^*$ interactions.

In the case of the plateau zone (III), almost a flat profile in the log-log plot is observed in Fig. 9(a) (hence its name). This plateau is characteristic of convective flows that usually exhibit a broad spectrum between the injection and inertial ranges (Fig. 7(c)). The evolution of the spectrum is dominated only by the $\mathcal{P}_L(L_1, L_2)$ contributions (\mathcal{F} is negligible), and in particular by the coupling between (non-axisymmetric) \mathbf{U}^* and \mathbf{B}^* (Fig. 9(b)). Hence, it is a non-local transfer of magnetic energy that creates the spectrum. All the shells in zone (III) receive energy mainly through this non-local mechanism. As a result, the energy transfer is very sensitive to the kinetic energy contained in the \mathbf{U}_L^* shells involved in the coupling. This explains why the magnetic energy spectrum reflects the kinetic energy spectrum in this region.

Although the $\mathbf{U}^* - \mathbf{B}^*$ interactions dominate (Fig. 12), we stress that the $\mathbf{U}^0 - \mathbf{B}^*$ interactions exhibit a direct cascade pattern. E_{42}^* receives energy from E_{40}^* through $\mathbf{U}_3^0 - \mathbf{B}_{40}^*$ interactions, and gives energy to E_{44}^* through $\mathbf{U}_3^0 - \mathbf{B}_{44}^*$ interactions (see panel (b) in Fig. 12). Even if the triadic interaction involves the large scale velocity \mathbf{U}_3^0 , we nonetheless refer this effect as a *cascade*. The velocity field only acts here as a *mediator*, and the scales of magnetic field involved in the magnetic energy transfer are at the same scale. It is consequently a cascade when considering the scales of magnetic field.

The energy transfers in zone (IV) (not shown here) are very similar to zone (III). A noticeable difference is that the cascade of energy triggered by the shear of the differential rotation \mathbf{U}_3^0 is much less efficient since the smallest scales hardly feel the large scale rotation profile. Finally, ohmic diffusion acts in the whole zone (IV) and tends to dissipate energy. It has a sufficiently lower amplitude than the non-local transfers so that it does not dictate the spectrum shape initially. It will nevertheless contribute to the saturation process (Sect. 4.2).

4.1.2. Creation of the axisymmetric spectrum

We now characterize the creation of the axisymmetric spectrum. We display in Fig. 13(a) the evolution of the axisymmetric component of the magnetic energy. Recall that since we initialize the dynamo with a purely non-axisymmetric field, the initial axisymmetric spectrum is null. After one time-step, the axisymmetric magnetic energy is orders of magnitude lower than the non-axisymmetric spectrum (Fig. 8(b)). The global shape of the axisymmetric spectrum is created very rapidly, all the shells gain energy at about the same rate until they saturate. The initial exponential growth rate is the same for both the axisymmetric and non-axisymmetric spectrum is approximately 0.6 days^{-1} (which corresponds to a time-scale approximately 17 times lower than the convective turn-over time). This can also be observed on Fig. 13(c), where we plot the evolution of few shells against time. They all gain energy at about the same rate initially, and then slowly tend to a saturated state. The axisymmetric shells considered have compar-

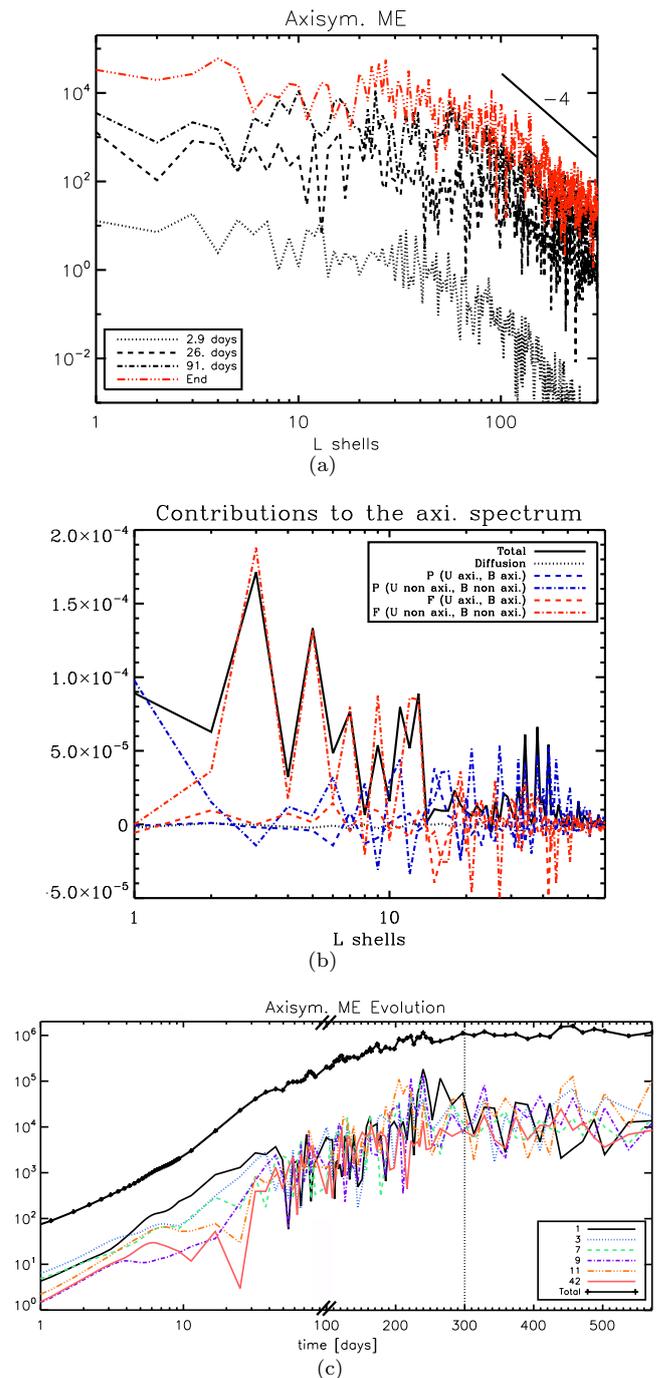


FIG. 13.— Same as Fig. 9, for the axisymmetric part of the spectrum. In panel (a), the initial spectrum is zero.

able energy since the spectrum is essentially flat at scales $L \leq 30$ (Fig. 13(a)), which was not the case for the non-axisymmetric spectrum (Fig. 9(c)). We observe in Fig. 13(b) that the flux term \mathcal{F} plays a major role between $L = 2$ and $L = 13$. This means that the creation of the spectrum is dominated by the radial interactions at those scales. The two flux curves exhibit a *sawtooth* pattern that is again reminiscent from the differential rotation energy shells (see Sects. 3.1 and 4.1.1). At higher L , the evolution of the spectrum is the result of a complex

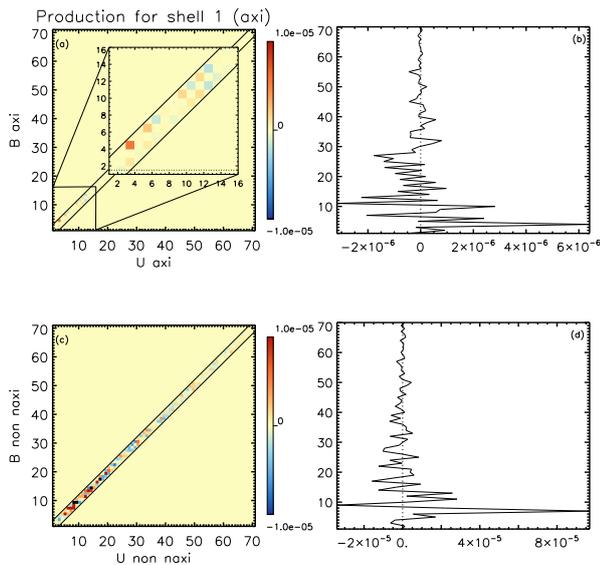


FIG. 14.— Production \mathcal{P} for the axisymmetric shell $L = 1$ during the initial state. Both $\mathbf{U}^0 - \mathbf{B}^0$ and $\mathbf{U}^* - \mathbf{B}^*$ couplings are shown.

interplay between the production and flux terms.

More interesting, the dipole ($L = 1$) evolution is dominated by the production term through the interaction between the non axisymmetric magnetic field and velocity field. We display the detailed transfers maps for this scale on Fig. 14. We observe that the large scale magnetic field is mainly created by the interplay between \mathbf{B}_7^* and \mathbf{U}_{6-8}^* . The transfers involving \mathbf{B}_9^* (where the energy is originally mainly contained) act negatively and do not dominate the transfer of magnetic energy. This is consistent with the fact that the whole axisymmetric spectrum shape is rapidly created and only gains energy globally afterwards. It does not depend on the scale at which we initially put the non-axisymmetric magnetic energy. Since the energy is not transferred directly from the initial reservoir of energy E_9^* , we already see preferred transfers towards the large scale dipole involving \mathbf{B}_7^* , which is one of the highest energy scale of the non-axisymmetric spectrum at this time. This effect shall be confirmed during the saturation phase (Sect. 4.3). Finally, the kinetic energy spectrum is not modified at all by the magnetic energy, at least at the largest scales. The creation of the axisymmetric magnetic energy spectrum seems to depend essentially on the initial hydrodynamic convective spectrum (as expected in such quasi-kinematic phase).

4.2. Saturation of the smallest scales

Following Sect. 4.1, we now detail the saturation and sustainment of the magnetic energy spectrum at small scales. By 500 days the axisymmetric spectrum is already fully saturated (Fig. 13(c)), and the non-axisymmetric spectrum is still slowly evolving but is also saturated (Fig. 9(c)).

The flux \mathcal{F} contribution is likely to never be null at the largest scales since it represents the flux of magnetic energy through the horizontal surface at the middle of the turbulent convection zone. In order to saturate the magnetic energy (*i.e.*, to get $dE_L^{\text{mag}}/dt = 0$), \mathcal{D} and/or \mathcal{P}

have to compensate \mathcal{F} . In the first three zones, diffusion is negligible. Hence, \mathcal{P} naturally tends to cancel \mathcal{F} out in those zones (see Sect. 3.2 for a simple version of this cancellation effect). The cancellation effect is such that $\mathcal{F}(\mathbf{U}^*, \mathbf{B}^*)$ tends to cancel $\mathcal{P}(\mathbf{U}^*, \mathbf{B}^*)$ out. This is also the case for $\mathcal{F}(\mathbf{U}^0, \mathbf{B}^*)$, $\mathcal{F}(\mathbf{U}^*, \mathbf{B}^0)$, and $\mathcal{F}(\mathbf{U}^0, \mathbf{B}^0)$.

In spite of the cancellation of the different contributions, characteristic patterns can still be identified. The more distinctive pattern we identified in Sect. 4.1 was the direct cascade of magnetic energy in zone (III). It turns out that we still observe it and that it slightly dominates the transfer terms during the saturation phase. We display on Fig. 15 the production contribution to the non-axisymmetric magnetic energy evolution 600 days after the magnetic field introduction. We recover the direct cascade of energy in the production contribution, that was already present on Fig. 12. This direct cascade of energy is associated with an inverse cascade of energy carried by the flux contribution, which opposes the production term during the saturation phase. Both cascades are of the same order of magnitude and tend to cancel each other out. They are associated with the axisymmetric component \mathbf{U}_3^0 (the differential rotation), and the non-axisymmetric components of \mathbf{B} . The contributions of non-axisymmetric components of \mathbf{U} involve more shells, but their net effect is a bit lower than the shear from differential rotation (panel (a) on Fig 15). On this panel, no particular global pattern can be identified.

The transfers of magnetic energy appear to be very interesting in zone (IV) where diffusion acts significantly. In order to saturate, \mathcal{P} and \mathcal{F} have to combine to cancel \mathcal{D} . For the non-axisymmetric spectrum, it is the production term that dominates over the flux term to compensate diffusion. In addition, the production term in zone (IV) exhibits a very particular generalized cascade shape. This cascade could not be identified during the early evolution for it was dominated by the non-local transfer from \mathbf{B}_9^* . We display on Fig. 16 (panel a) the $\mathbf{U}^* - \mathbf{B}^*$ production map towards E_{152}^* . The other interactions are negligible. We observe that the map is dominated by positive contribution (red) under the horizontal dashed line ($L = 152$), and by negative contribution (blue) above. This is confirmed by the plot in panel b where the transfers have been summed over the velocity shells. This cascade is of different kind than the one observed in zone (III) (Fig. 15). Here, no clear velocity shell dominates the transfer map (panel a on Fig. 16). It is a *generalized cascade* that results from the coupling between many magnetic shells (around $L = 152$) and all the largest velocity scales. Hence, the velocity scales involved in the cascade are not local compared to the magnetic field scale considered.

Trying to simplify the complex 2D transfer maps, one may isolate the main contributing couplings to the different evolution terms. Doing so at all times for the non-axisymmetric spectrum at small scales, we find that the percentage of couplings that account for 90% of the contributing terms typically varies from nearly 1 to 70% of the calculated couples. As a result, we demonstrate here that the complex dynamo process occurring in

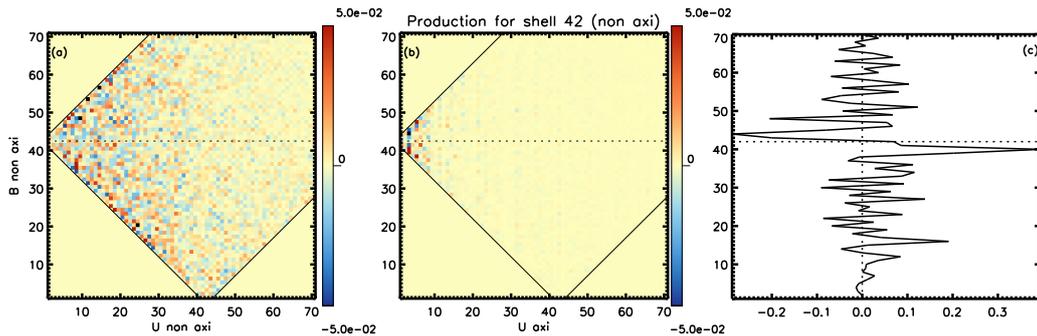


FIG. 15.— Production \mathcal{P} contribution to the non-axisymmetric shell $L = 42$ during the saturation phase. Interactions between \mathbf{B}^0 and \mathbf{U}^* are negligible.

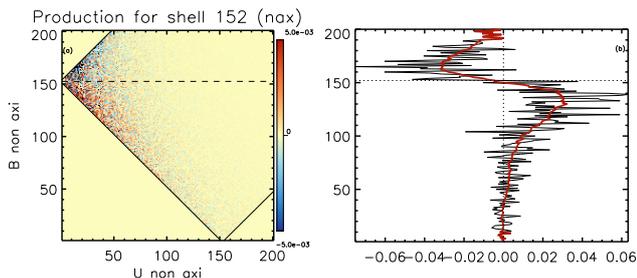


FIG. 16.— Production \mathcal{P} contribution to the non-axisymmetric shell $L = 152$ during the saturation phase. The red line is the smoothed contribution, that exhibits the characteristic S-shape of the generalized cascade.

a 3D turbulent convection zone involves many modes that interact through non-trivial triadic interactions. Then, the dynamics of the smallest scales can hardly be reduced to the evolution of a small set of modes.

Finally, the analysis of the axisymmetric $\alpha\Omega$ dynamo in Sect. 3.2 shed light on the importance of the families of symmetry (with respect to the equator) of the fields. The instantaneous convective motions do not exhibit any particular symmetry at any scale and the kinetic energy spectrum is a mixture of both primary and secondary velocities. The differential rotation is the only velocity feature that has a clear symmetry (secondary family, see Sect. 3.1) and that has a large influence on the magnetic energy spectrum. It is involved in the magnetic energy cascade in zone (III), and shears both primary and secondary magnetic fields to cascade primary and secondary magnetic energy. Thus, it does not select a particular symmetry. Indeed, the ratio of primary (antisymmetric) to secondary (symmetric) magnetic energy varies with time for all shells and does not settle even during the saturation phase. The presence of complex flows, often breaking the equatorial symmetry, yields a strong coupling of both dynamo families (as in the Sun, see DeRosa et al. (2012)), contrary to simpler mean field dynamo models (see Sect. 3).

4.3. Sustainment of the mean large scale magnetic field

Given their key role in setting the overall magnetic polarity in the Sun (DeRosa et al. 2012), we now detail the main contributions to the saturation and sustainment of the large scale dipole ($l = 1, m = 0$) and the quadrupole ($l = 2, m = 0$) fields.

At the late phase of the simulation the large-scale ax-

isymmetric spectrum is fully saturated (Fig. 13(c)). The saturation is obtained thanks to the compensation of the production and flux terms, similarly to the saturation of the mid-scales (see previous section). The large-scale dipole ($l = 1, m = 0$) saturation process significantly differs from its creation. We display in Fig. 17 the production contribution for the axisymmetric dipole averaged over 150 days during the saturated state. The transfers maps of \mathcal{F} (not shown here) are exactly opposite to the maps (a) and (c) for \mathcal{P} . We see that both the axisymmetric and non-axisymmetric fields significantly contribute to the saturation and sustainment of the large scale dipole. In particular, two main contributors emerge. First (panels (a) and (b)), the coupling of the differential rotation \mathbf{U}_3^0 with the large scale \mathbf{B}_4^0 field dominates the axisymmetric contributions. This effect is more likely to represent the shearing of the large scale poloidal multipole \mathbf{B}_p^0 by the large-scale toroidal differential rotation. Thus, it creates the large-scale toroidal field.

Second, the non-axisymmetric contributions are at least equally important for the saturation of the dipole. In particular, the interaction $\mathbf{U}_{23}^* - \mathbf{B}_{23}^*$ dominates the non-axisymmetric contributions. Thus, is it a *non-local* interaction that saturates the large-scale magnetic dipole. Furthermore, \mathbf{B}_{23}^* is one of the most energetic shells of the magnetic energy spectrum (Fig. 9(a)). This directly points out the importance of the mid-scale part of both the kinetic and magnetic energy spectra for the saturation level of the large-scale magnetic dipole.

We can remark here that the major contributions of \mathcal{P} for the saturation of the dipole are all positive. They are balanced by negative contributions from \mathcal{F} . Consequently, if the differential rotation was more efficient, or if the $\mathbf{U}_{23}^* - \mathbf{B}_{23}^*$ interaction possessed more energy, the saturation level of the large scale dipole would be much higher.

Since our magnetic Prandtl number is 4, the peak of the kinetic and magnetic energy spectra are likely to be shifted. At saturation, the couplings are nonetheless dominated by the peak of the magnetic energy spectrum that occurs at smaller scale than the peak of the kinetic energy spectrum. Changing the magnetic Prandtl number will cause the separation of the peaks to change. If the peaks separate more, our results suggest that the saturating interaction will involve smaller scales velocity and magnetic fields. The velocity field involved is likely to be less energetic, which could trigger a smaller saturat-

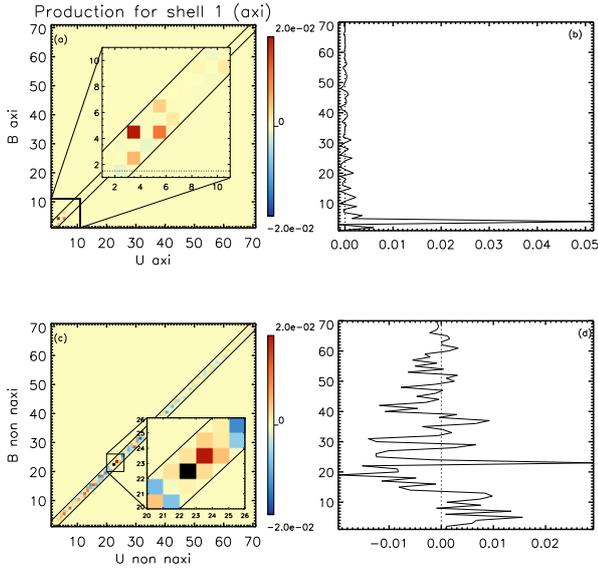


FIG. 17.— Saturation of the large scale axisymmetric dipole (production \mathcal{P} for E_1^0). The interaction maps are time averaged over a period of ~ 150 days. Both $\mathbf{U}^0 - \mathbf{B}^0$ and $\mathbf{U}^* - \mathbf{B}^*$ couplings are shown.

ing interaction, and in turn a lower energy state for the large scale dipole. If the peaks are closer (or eventually switch), the picture becomes more complicated and we cannot predict if the saturating interaction will remain fixed by the peak of the magnetic energy spectrum. The exploration of this parameter space is left for future work.

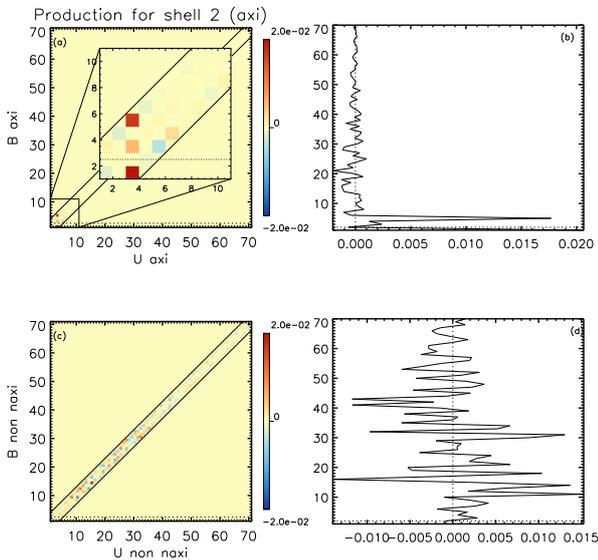


FIG. 18.— Saturation of the large scale axisymmetric quadrupole (production \mathcal{P} for E_2^0). The interaction maps are time averaged over a period of ~ 150 days. Both $\mathbf{U}^0 - \mathbf{B}^0$ and $\mathbf{U}^* - \mathbf{B}^*$ couplings are shown.

The large scale quadrupole also saturates thanks to both the axisymmetric and non-axisymmetric fields (Fig. 18). The axisymmetric contributions are very similar to the dipole case and are dominated by the differential rotation. The differential rotation shears both \mathbf{B}_1^0 and \mathbf{B}_5^0 to saturate the quadrupole. Again, this effects is likely

to describes the saturation of the toroidal quadrupolar field. Hence, the saturated level of the poloidal dipolar field (Fig. 17) plays a major role for the saturation of the toroidal quadrupolar field.

The poloidal quadrupolar field is then saturated through the non-axisymmetric interactions. The contribution are again very non-local, but no particular scale dominates the saturation process. We may expect that the saturation process of the axisymmetric quadrupole will have a very different dependency on the magnetic Prandtl number than the axisymmetric dipole.

5. CONCLUSIONS AND PERSPECTIVES

In this paper we developed and validated a new spectral analysis method suited for spherical objects. Using two vectorial spherical harmonics basis, we were able to calculate transfer functions of magnetic energy in spectral space. We can calculate the coupling coefficients up to $l \sim 500$. For the first time in such studies, the complete 2D transfers maps have been calculated to characterize the full triadic interactions.

After a quick numerical validation, we first applied our method to a simplified $\alpha\Omega$ dynamo case. Such axisymmetric models are very well known to trigger cyclic dynamos (Charbonneau 2010) with our choice of a symmetric (with respect to equator) velocity field and an antisymmetric α effect. The clear separation between the dipolar and quadrupolar families was illustrated thanks to our new diagnostic. The production (*i.e.*, on a spherical surface) and a flux (*i.e.*, through a spherical surface) contributions were shown to quasi-cancel each other out for all shells.

Our method was then successfully applied to a 3D turbulent convective dynamo case. We initialize a highly non-axisymmetric magnetic field and let the dynamo develop a turbulent spectrum of magnetic energy. We identify two regimes during the evolution of the magnetic energy spectrum. First, the quick creation of a spectrum shape that will globally remain during the rest of the simulation. Second, the saturation and sustainment of the spectrum. The first phase is dominated by both a non-local transfer of energy from the initial scale of magnetic energy, coupled with the convective scales, towards all the other magnetic scales, and the shearing by the large scale differential rotation. A large part of the magnetic energy spectrum is then dictated by the kinetic energy spectrum developed by the convection.

The second phase is more subtle and greatly differs for the different scales in the spectrum. Our new method allowed us to distinguish two clear cascades of magnetic energy at the smallest scales of our simulation, for $13 \leq L \leq 60$ and $L > 60$ (highest L 's).

In the former case, the differential rotation profile mediates the cascade by shearing the magnetic field. It results in an efficient cascade of magnetic energy.

The latter cascade is also direct and involves all the highest velocity scales (the large scale differential rotation does not dominate in this case). It is a generalized cascade over a large range of magnetic scales. The velocity scales involved in the cascade are not local with respect to the magnetic scales. As consequence, we cannot predict if this generalized cascade would hold

at the lowest scales in the case of a real convective dynamo where scale separation is much higher. Besides, the saturation also involve non-local coupling that can eventually be of the order of the sheared cascade for the intermediate scales. We proved in that case that the transfers cannot be reduced to a limited set of modes.

The saturation of the large scale axisymmetric dipole and quadrupole appear to be radically different than the small-scale saturation. The toroidal components are mainly saturated by the shearing effect of the differential rotation on the large scale poloidal fields, and the poloidal components are mainly saturated by non-local non-axisymmetric interactions. The dipole is saturated by the scale of maximum (highest) magnetic energy, and the quadrupole saturation is not dominated by any particular scale. These two observations point to the two main dependencies of the saturating interactions for the large-scale fields. First, the rotation rate of the star (which is linked to the saturating interaction through the differential rotation) can determine the ability of the dynamo to build wreaths (Brown et al. 2010), and/or to be in a strong or weak regime (Christensen & Aubert 2006; Featherstone et al. 2009; Simitiev & Busse 2009). Second, the magnetic Prandtl number $P_m = \nu/\eta$ determines the position of the peak of magnetic energy and then affects the saturating interaction (e.g., see Schekochihin et al. 2004). We will explore in detail how the saturating interactions depend on those two effects in future work.

Our results also suggest that no significant large-scale magnetic field is growing over dissipative time scales in our simulation (the ohmic dissipation time scale for the axisymmetric dipole is typically of the order of $\tau_\eta \sim 700$ days in the simulation). Again, the fast saturation of the dynamo (less than 300 days) may not hold for lower magnetic Prandtl number dynamos.

We developed a diagnostic on the magnetic energy

that is an invariant of ideal MHD. In the case of non-ideal MHD, the existence of the selective decay (Taylor 1974; Matthaeus & Montgomery 1980; Mininni & Montgomery 2006) introduces a decoupling between, e.g., the evolution time scales of the magnetic (or total) energy (rapid) and the magnetic helicity (slow). As mentioned before, we were interested, in this work, in rapid phenomena compared to the ohmic diffusion time. For such processes, the ideal invariants of MHD are still the appropriate quantities to interpret the scales interactions. Although the magnetic energy is the relevant quantity to characterize nearly kinematic dynamos (where the Lorentz force plays little role), a diagnostic on kinetic energy will be required for more non-linear dynamos. On top of that, the detailed spectral transfers of magnetic helicity are also mandatory to fully address the complexity of the dynamo process. Evolution equations of kinetic energy, magnetic helicity and cross helicity in the framework introduced in this paper are under development and will be published in a forthcoming paper.

Finally, those diagnostics may also prove very useful for non-dynamo related MHD phenomena. For example, spectral considerations on the relaxation and the stability of low- l fossil field (see Braithwaite & Nordlund 2006; Brun 2007; Zahn et al. 2007; Duez & Mathis 2010; Duez et al. 2010) will be studied in a future publication.

We acknowledge inspiring interactions with the participants of the fifth and sixth Festival de Théorie, held in Aix en Provence, July 2009 and 2011. We acknowledge the valuable comments of the anonymous referee that have tightened the focus of this paper. A. Strugarek acknowledges S. Matt for his careful reading of the manuscript. A. S. Brun and A. Strugarek acknowledge funding by the European Research Council through ERC grant STARS2 207430 (www.stars2.eu). The simulations were performed using HPC resources of GENCI [IDRIS], project 1623.

REFERENCES

- Alexakis, A., Mininni, P. D., & Pouquet, A. 2005, Phys. Rev. E, 72, 46301
 Aluie, H., & Eyink, G. L. 2010, PRL, 104, 81101
 Biskamp, D. 1993, Nonlinear magnetohydrodynamics (Cambridge Monographs on Plasma Physics)
 Blackman, E. G., & Brandenburg, A. 2002, ApJ, 579, 359
 Boldyrev, S., Mason, J., & Cattaneo, F. 2009, ApJ Letters, 699, L39
 Bonanno, A., Elstner, D., Rüdiger, G., & Belvedere, G. 2002, Astronomy and Astrophysics, 390, 673
 Braithwaite, J., & Nordlund, Å. 2006, Astronomy and Astrophysics, 450, 1077
 Brown, B. P., Browning, M. K., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2010, ApJ, 711, 424
 Browning, M. K. 2008, ApJ, 676, 1262
 Brun, A. S. 2007, Astro. Nach., 328, 1137
 Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2004, ApJ, 614, 1073
 —. 2011, ApJ, 742, 79
 Bullard, E., & Gellman, H. 1954, Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A, 247, 213
 Cattaneo, F., & Hughes, D. W. 2001, Astronomy & Geophysics, 42, 18
 Centeno, R., Socas-Navarro, H., Lites, B., et al. 2007, ApJ, 666, L137
 Charbonneau, P. 2010, Living Review on Solar Physics, 7, 3
 Charbonneau, P., & MacGregor, K. B. 1997, ApJ, 486, 502
 Christensen, U. R., & Aubert, J. 2006, Geophysical Journal International, 166, 97
 Clune, T. L., Elliott, J. R., Miesch, M. S., Toomre, J., & Glatzmaier, G. A. 1999, Parallel Computing, 25, 361
 Dar, G., Verma, M. K., & Eswaran, V. 2001, Physica D: Nonlinear Phenomena, 157, 207
 Debliquy, O., Verma, M. K., & Carati, D. 2005, PoP, 12, 2309
 DeRosa, M. L., Brun, A. S., & Hoeksema, J. T. 2011, Astrophysical Dynamics: From Stars to Galaxies, 271, 94
 —. 2012, accepted in ApJ, 1
 Donati, J.-F., & Landstreet, J. D. 2009, Annual Review of A&A, 47, 333
 Duez, V., Braithwaite, J., & Mathis, S. 2010, ApJ Letters, 724, L34
 Duez, V., & Mathis, S. 2010, Astronomy and Astrophysics, 517, 58
 Farge, M. 1992, IN: Annual Review of Fluid Mechanics. Vol. 24 (A92-45082 19-34). Palo Alto, 24, 395
 Featherstone, N. A., Browning, M. K., Brun, A. S., & Toomre, J. 2009, ApJ, 705, 1000
 Frick, P., & Sokoloff, D. 1998, Phys. Rev. E, 57, 4155
 Frisch, U. 1995, Turbulence. The legacy of A. N. Kolmogorov. (Turbulence. The legacy of A. N. Kolmogorov.)
 Frisch, U., Pouquet, A., Léorat, J., & Mazure, A. 1975, JFM, 68, 769
 Garaud, P., & Acevedo Arreguin, L. 2009, ApJ, 704, 1
 Goldreich, P., & Sridhar, S. 1995, ApJ, 438, 763
 Gubbins, D., & Zhang, K. 1993, Physics of the Earth and Planetary Interiors, 75, 225

- Hagenaar, H. J., Schrijver, C. J., & Title, A. M. 2003, ApJ, 584, 1107
- Iroshnikov, P. S. 1964, Soviet Astronomy, 7, 566
- Ivers, D. J., & Phillips, C. G. 2008, Geophysical Journal International, 175, 955
- Jones, C. A., Boronski, P., Brun, A. S., et al. 2011, Icarus, 216, 120
- Jouve, L., & Brun, A. S. 2009, ApJ, 701, 1300
- Jouve, L., Brun, A. S., Arlt, R., et al. 2008, Astronomy and Astrophysics, 483, 949
- Käpylä, P. J., Mantere, M. J., & Brandenburg, A. 2012, ApJ, 755, L22
- Knobloch, E., Tobias, S. M., & Weiss, N. O. 1998, MNRAS, 297, 1123
- Kraichnan, R. H. 1965, PoF, 8, 1385
- Lesieur, M. 2008, Turbulence in fluids (Springer Verlag)
- Lesur, G., & Longaretti, P.-Y. 2011, Astronomy and Astrophysics, 528, 17
- Livermore, P. W., Hughes, D. W., & Tobias, S. M. 2010, PoF, 22, 7101
- Maron, J., Cowley, S., & McWilliams, J. 2004, ApJ, 603, 569
- Mathis, S., & Zahn, J.-P. 2005, Astronomy and Astrophysics, 440, 653
- Matthaeus, W. H., & Montgomery, D. 1980, Ann. N.Y. Acad. Sci., 357, 203
- McFadden, P. L., Merrill, R. T., McElhinny, M. W., & Lee, S. 1991, JGR, 96, 3923
- McIntyre, M. E. 2007, The Solar Tachocline, 183
- Miesch, M. S., Brun, A. S., & Toomre, J. 2006, ApJ, 641, 618
- Miesch, M. S., & Hindman, B. W. 2011, ApJ, 743, 79
- Mininni, P. D., Alexakis, A., & Pouquet, A. 2005, Phys. Rev. E, 72, 46302
- Mininni, P. D., & Montgomery, D. C. 2006, PoF, 18, 6602
- Moffatt, H. K. 1978, Magnetic field generation in electrically conducting fluids (Bristol, University, Bristol, England: Cambridge)
- Olson, P., Christensen, U., & Glatzmaier, G. A. 1999, JGR, 104, 10383
- Pétréris, F., Fauve, S., Dormy, E., & Valet, J.-P. 2009, PRL, 102, 144503
- Pinto, R. F., & Brun, A. S. 2012, to be submitted to ApJ
- Politano, H., & Pouquet, A. 1998, Geophysical Research Letters, 25, 273
- Pouquet, A., Brachet, M.-E., Lee, E., et al. 2011, Astrophysical Dynamics: From Stars to Galaxies, 271, 304
- Pouquet, A., Frisch, U., & Leorat, J. 1976, JFM, 77, 321
- Racine, É., Charbonneau, P., Ghizaru, M., Bouchat, A., & Smolarkiewicz, P. 2011, ApJ, 735, 46
- Rieutord, M. 1987, Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, 39, 163
- Rincon, F. 2006, JFM, 563, 43
- Roberts, P. H., & Stix, M. 1972, Astronomy and Astrophysics, 18, 453
- Schekochihin, A. A., Cowley, S. C., Taylor, S. F., Maron, J. L., & McWilliams, J. C. 2004, ApJ, 612, 276
- Schilling, O., & Zhou, Y. 2002, JoP, 68, 389
- Schou, J., Antia, H. M., Basu, S., et al. 1998, ApJ, 505, 390
- Schrijver, C., & DeRosa, M. 2003, So. Phys., 212, 165
- Simitev, R. D., & Busse, F. H. 2009, Europhys. Lett., 85, 19001
- Taylor, J. B. 1974, PRL, 33, 1139
- Tobias, S. M. 2002, Triennial Issue: Astronomy and Earth Science. Papers of a Theme compiled and edited by J. M. T. Thompson. Roy Soc of London Phil Tr A, 360, 2741
- Tobias, S. M., & Cattaneo, F. 2008a, JFM, 601, 101
- , 2008b, PRL, 101, 125003
- Tobias, S. M., Cattaneo, F., & Brummell, N. H. 2011, ApJ, 728, 153
- Varshalovich, A., N Moskalev, A., & K Khersonskii, V. 1988, Leningrad, 514
- Verma, M. K., Ayyer, A., & Chandra, A. V. 2005, PoP, 12, 2307
- Zahn, J.-P., Brun, A. S., & Mathis, S. 2007, Astronomy and Astrophysics, 474, 145
- Zhang, K., Chan, K. H., Zou, J., Liao, X., & Schubert, G. 2003, ApJ, 596, 663

APPENDIX

A. DEFINITION AND PROPERTIES OF VECTORIAL SPHERICAL HARMONICS

A.1. Classical vectorial spherical harmonics basis

A.1.1. Definitions

We define from Rieutord (1987); Mathis & Zahn (2005):

$$\begin{cases} \mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r \\ \mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi) = \nabla_{\perp} Y_l^m = \partial_{\theta} Y_l^m \mathbf{e}_{\theta} + \frac{1}{\sin \theta} \partial_{\varphi} Y_l^m \mathbf{e}_{\varphi} \\ \mathbf{T}_l^m(\theta, \varphi) = \nabla_{\perp} \times \mathbf{R}_l^m = \frac{1}{\sin \theta} \partial_{\varphi} Y_l^m \mathbf{e}_{\theta} - \partial_{\theta} Y_l^m \mathbf{e}_{\varphi} \end{cases}, \quad (\text{A1})$$

where $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{\theta}, \mathbf{e}_{\varphi})$ defines the spherical basis and Y_l^m are the Laplace spherical harmonics defined by

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (\text{A2})$$

where P_l^m are the associated Legendre polynomials. The basis (A1) have the following properties :

$$\int_S \mathbf{R}_{l_1}^{m_1} \cdot (\mathbf{R}_{l_2}^{m_2})^{cc} d\Omega = \delta_{l_1, l_2} \delta_{m_1, m_2}, \quad (\text{A3})$$

$$\int_S \mathbf{S}_{l_1}^{m_1} \cdot (\mathbf{S}_{l_2}^{m_2})^{cc} d\Omega = \int_S \mathbf{T}_{l_1}^{m_1} \cdot (\mathbf{T}_{l_2}^{m_2})^{cc} d\Omega = l_1(l_1+1) \delta_{l_1, l_2} \delta_{m_1, m_2}, \quad (\text{A4})$$

where S is a spherical surface, $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ the solid angle, cc means complex conjugate and δ is the Kronecker symbol. We also have:

$$(\mathbf{S}_l^m)^{cc} = (-1)^m \mathbf{S}_l^{-m}, \quad (\text{A5})$$

and all the other scalar cross products are 0. We remind the reader that the poloidal fields are described by their projection on $(\mathbf{R}_l^m, \mathbf{S}_l^m)$, and the toroidal fields by their projection on \mathbf{T}_l^m .

A.1.2. Scalar fields

Defining $\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \{\psi_m^l(r) Y_l^m(\theta, \varphi)\}$, we get:

$$\nabla \psi = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \partial_r \psi_m^l \mathbf{R}_l^m + \frac{\psi_m^l}{r} \mathbf{S}_l^m \right\}, \quad (\text{A6})$$

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Delta_l \psi_m^l Y_l^m \quad (\text{A7})$$

where $\Delta_l = \partial_{rr}^2 + \frac{2}{r} \partial_r - \frac{l(l+1)}{r^2}$.

A.1.3. Vectorial fields

For a vector $\mathbf{X}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \{\mathcal{A}_m^l(r) \mathbf{R}_l^m + \mathcal{B}_m^l(r) \mathbf{S}_l^m + \mathcal{C}_m^l(r) \mathbf{T}_l^m\}$, we obtain:

$$\nabla \cdot \mathbf{X} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \left[\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \mathcal{A}_m^l) - l(l+1) \frac{\mathcal{B}_m^l}{r} \right] Y_l^m \right\}, \quad (\text{A8})$$

$$\nabla \times \mathbf{X} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \left[l(l+1) \frac{\mathcal{C}_m^l}{r} \right] \mathbf{R}_l^m + \left[\frac{1}{r} \partial_r (r \mathcal{C}_m^l) \right] \mathbf{S}_l^m + \left[\frac{\mathcal{A}_m^l}{r} - \frac{1}{r} \partial_r (r \mathcal{B}_m^l) \right] \mathbf{T}_l^m \right\}, \quad (\text{A9})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{X} = & \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \left[\Delta_l \mathcal{A}_m^l - \frac{2}{r^2} (\mathcal{A}_m^l - l(l+1) \mathcal{B}_m^l) \right] \mathbf{R}_l^m \right. \\ & \left. + \left[\Delta_l \mathcal{B}_m^l + 2 \frac{\mathcal{A}_m^l}{r^2} \right] \mathbf{S}_l^m + \left[\Delta_l \mathcal{C}_m^l \right] \mathbf{T}_l^m \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

A.1.4. Recurrence relations

In addition to the expression of the different operators, we also give here two useful coupling relations between spherical harmonics. First, according to [Varshalovich et al. \(1988\)](#), the coupling between $\cos \theta$ and the spherical harmonic Y_l^m is given by

$$\cos \theta Y_l^m = \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^m + \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1}^m. \quad (\text{A11})$$

Then, one easily deduces the following properties:

$$\begin{aligned} \cos \theta \mathbf{S}_l^m = & \frac{l}{l+1} \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} \mathbf{S}_{l+1}^m + \frac{l+1}{l} \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}} \mathbf{S}_{l-1}^m \\ & - \frac{im}{l(l+1)} \mathbf{T}_l^m, \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

$$\begin{aligned} \cos \theta \mathbf{T}_l^m = & \frac{l}{l+1} \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} \mathbf{T}_{l+1}^m + \frac{l+1}{l} \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}} \mathbf{T}_{l-1}^m \\ & + \frac{im}{l(l+1)} \mathbf{S}_l^m. \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

A.2. An alternative vectorial basis

A.2.1. Definitions

The vectorial spherical harmonics basis defined in appendix [A.1](#) is very efficient to calculate scalar products or linear differential operator on vectors. Nevertheless, it is quite hard to use it to express vectorial products. Instead we define the following basis (*e.g.*, see [Varshalovich et al. \(1988\)](#)):

$$\mathbf{Y}_{l,l+\nu}^m(\theta, \varphi) = \sum_{\mu=-1}^1 \left\{ (-1)^{l-m} \sqrt{2l+1} \begin{pmatrix} l & l+\nu & 1 \\ m & \mu-m & -\mu \end{pmatrix} Y_{l+\nu}^{m-\mu} \mathbf{e}_\mu \right\}, \quad (\text{A14})$$

where (\dots) is the 3-j Wigner coefficient linked to Clebsch-Gordan coefficients, and the vectors \mathbf{e}_μ are

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \\ \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \end{cases}, \quad (\text{A15})$$

where $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ defines the cartesian basis. Note that the equivalent of the conjugation rule (A5) is then

$$(\mathbf{Y}_{l,l+\nu}^m)^{cc} = (-1)^{m+\delta_{0\nu}} \mathbf{Y}_{l,l+\nu}^{-m}. \quad (\text{A16})$$

Again, we recall that the poloidal fields are described by their projection on $(\mathbf{Y}_{l,l+1}^m, \mathbf{Y}_{l,l-1}^m)$ ($\nu \in \{-1; 1\}$), and the toroidal fields are described by their projection on $\mathbf{Y}_{l,l}^m$ ($\nu = 0$).

A.2.2. Vectorial product

We decompose a vector \mathbf{X} on this basis in the following way:

$$\mathbf{X}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{\nu=-1}^1 X_{l,l+\nu}^m(r) \mathbf{Y}_{l,l+\nu}^m.$$

Evaluating the vectorial product of two vectors $\mathbf{X}_{12} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$, one gets:

$$X_{12;l_{12},l_{12}+\nu_{12}}^{m_{12}} = \sum_{\substack{l_1, l_2=1 \\ l_{12} \geq |l_1 - l_2| \\ l_{12} \leq l_1 + l_2}}^{\infty} \sum_{\substack{l_1, l_2 \\ m_1 = -l_1 \\ m_2 = -l_2 \\ m_1 + m_2 = m_{12}}} \sum_{\nu_1, \nu_2} X_{1;l_1, l_1 + \nu_1}^{m_1} X_{2;l_2, l_2 + \nu_2}^{m_2} \mathcal{J}_{l_1, m_1, \nu_1, l_2, m_2, \nu_2}^{l_{12}, m_{12}, \nu_{12}}, \quad (\text{A17})$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{l_1, m_1, \nu_1, l_2, m_2, \nu_2}^{l, m, \nu} &= i(-1)^{\nu_1 - \nu_2 + (m_1 + m_2)} \\ &\sqrt{\frac{3}{2\pi} (2l_1 + 1)(2l_1 + 2\nu_1 + 1)(2l_2 + 1)(2l_2 + 2\nu_2 + 1)(2l + 1)(2l + 2\nu + 1)} \\ &\left\{ \begin{matrix} l_1 & l_2 & l \\ l_1 + \nu_1 & l_2 + \nu_2 & l + \nu \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & -(m_1 + m_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 + \nu_1 & l_2 + \nu_2 & l + \nu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A18})$$

with $\{\dots\}$ being the 9-j Wigner coefficient.

A.3. Basis change relations

For a vector \mathbf{X} decomposed in the following manner:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \{ \mathcal{A}_m^l \mathbf{R}_l^m + \mathcal{B}_m^l \mathbf{S}_l^m + \mathcal{C}_m^l \mathbf{T}_l^m \} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{\nu=-1}^1 \{ X_{l,l+\nu}^m \mathbf{Y}_{l,l+\nu}^m \}, \end{aligned}$$

we have the two following relations to change from one basis to the other:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_m^l = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left[\sqrt{l} X_{l,l-1}^m - \sqrt{l+1} X_{l,l+1}^m \right] \\ \mathcal{B}_m^l = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left[\frac{1}{\sqrt{l}} X_{l,l-1}^m + \frac{1}{\sqrt{l+1}} X_{l,l+1}^m \right] \\ \mathcal{C}_m^l = \frac{i}{\sqrt{l(l+1)}} X_{l,l}^m \end{cases}, \quad \begin{cases} X_{l,l-1}^m = \sqrt{\frac{l}{2l+1}} (\mathcal{A}_m^l + (l+1)\mathcal{B}_m^l) \\ X_{l,l}^m = -i\sqrt{l(l+1)}\mathcal{C}_m^l \\ X_{l,l+1}^m = \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} (-\mathcal{A}_m^l + l\mathcal{B}_m^l) \end{cases}. \quad (\text{A19})$$

A.4. Expression of the α effect

The α effect introduces the spectral coupling of a scalar and a vector, which was not treated before. In the special case of an axisymmetric α and an axisymmetric vectorial field $B_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ (which is the case in this paper, see Sect. 3), we write the α coefficient

$$\alpha(r, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} \alpha_0^l(r) Y_l^0,$$

and we rewrite the magnetic field from (11)

$$B_\varphi \mathbf{e}_\varphi = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{A_0^l}{r} \mathbf{T}_l^0.$$

Introducing the coefficient

$$\mathcal{H}_{l_1, l_2}^l = -\sqrt{\frac{1}{4\pi} l(l+1)l_2(l_2+1)(2l+1)(2l_1+1)(2l_2+1)} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A20})$$

we can write the α effect such as

$$\alpha B_\varphi \mathbf{e}_\varphi = \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{l_1, l_2=0 \\ l \geq |l_1 - l_2| \\ l \leq l_1 + l_2}}^{\infty} \mathcal{H}_{l_1, l_2}^l \alpha_{l_1}^0 \frac{A_{l_2}^0}{r} \right) \mathbf{T}_l^0 \equiv \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\xi_0^l}{r} \mathbf{T}_l^0. \quad (\text{A21})$$

Finally, one gets

$$\nabla \times (\alpha B_\varphi \mathbf{e}_\varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \left\{ \frac{l(l+1)}{r^2} \xi_0^l \mathbf{R}_l^0 + \frac{1}{r} \partial_r (\xi_0^l) \mathbf{S}_l^0 \right\}. \quad (\text{A22})$$

A.5. Couplings in the magnetic energy equation

The detailed expressions of the different terms of the magnetic energy equation (19)-(21) are given here. We write the magnetic field \mathbf{B} and the current \mathbf{J}

$$\mathbf{B} = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{\nu=-1}^1 B_{l, l+\nu}^m(r) \mathbf{Y}_{l, l+\nu}^m, \quad (\text{A23})$$

$$\mathbf{J} = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{\nu=-1}^1 J_{l, l+\nu}^m(r) \mathbf{Y}_{l, l+\nu}^m. \quad (\text{A24})$$

In this basis, the vectorial product may be evaluated thanks to a coupling coefficient $\mathcal{J}_{l_1, m_1, \nu_1, l_2, m_2, \nu_2}^{l, m, \nu}$ given in equation (A18). The transformation rules from one basis to the other are given in appendix A.3, and they allow us to easily evaluate the integrals (19)-(21). By separating the diffusive terms into two \mathcal{D}_1 and \mathcal{D}_2 terms, we get that

$$\mathcal{D}_1(L, r) = \eta \sum_L (-1)^m l(l+1) \left\{ \frac{l(l+1)}{r^3} \Delta_l \left(\frac{C_m^l}{r} \right) C_{-m}^l + \frac{1}{r^2} \partial_r \left[r \Delta_l \left(\frac{C_m^l}{r} \right) \right] \partial_r C_{-m}^l + \Delta_l \left(\frac{A_m^l}{r} \right) \frac{A_{-m}^l}{r} \right\}, \quad (\text{A25})$$

$$\mathcal{D}_2(L, r) = -\frac{c \partial_r \eta}{\sqrt{4\pi}} \sum_L \sum_{\nu_1, \nu_2} B_{l, l+\nu_1}^m J_{l, l+\nu_2}^{-m} \mathcal{J}_{l, m, \nu_1, l, -m, \nu_2}^{0, 0, 1}, \quad (\text{A26})$$

where \sum_L stands for a summation over all the spherical harmonics contained in the shell L (one element in an axisymmetric shell, and $2l$ elements in a non-axisymmetric shell). The production and flux terms then read

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_L(L_1, L_2, r) &= \frac{c}{4\pi} \sum_L \frac{(-1)^m}{r^2} \frac{l(l+1)}{\sqrt{2l+1}} \left\{ \left[\sqrt{l} (\mathbf{U}_{L_1} \times \mathbf{B}_{L_2})_{l, l-1}^m - \sqrt{l+1} (\mathbf{U}_{L_1} \times \mathbf{B}_{L_2})_{l, l+1}^m \right] A_{-m}^l \right. \\ &\quad + \left[\frac{1}{\sqrt{l}} (\mathbf{U}_{L_1} \times \mathbf{B}_{L_2})_{l, l-1}^m + \frac{1}{\sqrt{l+1}} (\mathbf{U}_{L_1} \times \mathbf{B}_{L_2})_{l, l+1}^m \right] r \partial_r A_{-m}^l \\ &\quad \left. - i \sqrt{\frac{2l+1}{l(l+1)}} (\mathbf{U}_{L_1} \times \mathbf{B}_{L_2})_{l, l}^m r^2 \Delta_l \left(\frac{C_{-m}^l}{r} \right) \right\}, \quad (\text{A27}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_L(L_1, L_2, r) = -\frac{\sqrt{4\pi}}{r^2} \partial_r \left\{ r^2 \sum_L \sum_{\nu_1=-1}^1 \sum_{\nu_2=-1}^1 (\mathbf{U}_{L_1} \times \mathbf{B}_{L_2})_{l, l+\nu_1}^m B_{l, l+\nu_2}^{-m} \mathcal{J}_{l, m, \nu_1, l, -m, \nu_2}^{0, 0, 1} \right\}. \quad (\text{A28})$$

The laplacian formula used for \mathcal{D}_1 in the vectorial spherical harmonics basis is given in equation (A10). In the production term we simply made use of the basis transformation (A19). Finally, the expressions for \mathcal{D}_2 and the flux term need some intermediate steps to be properly explained. These details are given in Appendix A.6 for the flux of magnetic energy, and the same procedure may be applied in the case of the second diffusive term.

A.6. Simplification of the magnetic energy flux

The flux of magnetic energy can be simplified, if one notes that it has the general form

$$F = \int_S \nabla \cdot \mathbf{X} \, d\Omega \quad \text{and} \quad \mathbf{X} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \{ \mathcal{A}_m^l \mathbf{R}_l^m + \mathcal{B}_m^l \mathbf{S}_l^m + \mathcal{C}_m^l \mathbf{T}_l^m \}.$$

Then, one can easily deduce that

$$F = \int_S \nabla \cdot \mathbf{X} \, d\Omega = \frac{\sqrt{4\pi}}{r^2} \partial_r (r^2 \mathcal{A}_0^0).$$

Recalling from the system (A19) that $\mathbf{R}_0^0 = -\mathbf{Y}_{0,1}^0$, and if one assumes that $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$, one obtains, for an integral similar to the magnetic energy flux:

$$\int_S \nabla \cdot (\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2) \, d\Omega = -\frac{\sqrt{4\pi}}{r^2} \partial_r (r^2 X_{0,1}^0) = -\frac{\sqrt{4\pi}}{r^2} \partial_r \left\{ r^2 \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{\nu_1, \nu_2} X_{1:l, l+\nu_1}^m X_{2:l, l+\nu_2}^{-m} \mathcal{J}_{l, m, \nu_1, l, -m, \nu_2}^{0,0,1} \right\}.$$

A.7. On primary and secondary families

Previous studies on dynamos in stars shed light on the important distinction of *primary* (or *dipolar*, antisymmetric with respect to the equator) and *secondary* (or *quadrupolar*, symmetric with respect to the equator) families of magnetic field. For a vector $\mathbf{X} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \{ \mathcal{A}_m^l \mathbf{R}_l^m + \mathcal{B}_m^l \mathbf{S}_l^m + \mathcal{C}_m^l \mathbf{T}_l^m \}$, Roberts & Stix (1972) define the primary family as

$$\mathbf{X}^p = \mathcal{A}_m^{m+1} \mathbf{R}_{m+1}^m + \mathcal{B}_m^{m+1} \mathbf{S}_{m+1}^m + \mathcal{C}_m^m \mathbf{T}_m^m + \mathcal{A}_m^{m+3} \mathbf{R}_{m+3}^m + \mathcal{B}_m^{m+3} \mathbf{S}_{m+3}^m + \mathcal{C}_m^{m+2} \mathbf{T}_{m+2}^m + \dots$$

and the secondary family as

$$\mathbf{X}^s = \mathcal{A}_m^m \mathbf{R}_m^m + \mathcal{B}_m^m \mathbf{S}_m^m + \mathcal{C}_m^{m+1} \mathbf{T}_{m+1}^m + \mathcal{A}_m^{m+2} \mathbf{R}_{m+2}^m + \mathcal{B}_m^{m+2} \mathbf{S}_{m+2}^m + \mathcal{C}_m^{m+3} \mathbf{T}_{m+3}^m + \dots$$

It can also be easily shown that in the $(\mathbf{Y}_{l, l+\nu}^m)_{\nu=-1,0,1}$ basis, a primary field always satisfies $l + m + \nu$ even, and a secondary field always satisfies $l + m + \nu$ odd.

Note that the vectorial product depends on the 3-j Wigner

$$\begin{pmatrix} l_1 + \nu_1 & l_2 + \nu_2 & l + \nu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Recalling that $m_1 + m_2 = m$, this 3-j Wigner is zero if $l_1 + \nu_1 + l_2 + \nu_2 + l + \nu = (l_1 + \nu_1 + m_1) + (l_2 + \nu_2 + m_2) + (l + \nu + m) - 2m$ is odd. Consequently, in order to have a non-zero 3-j Wigner, if \mathbf{U} and \mathbf{B} are from different families, their vectorial product is a secondary field; and if they are from the same family, their vectorial product is a primary field. If $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, this means that

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A}^p \times \mathbf{B}^s \\ \mathbf{A}^s \times \mathbf{B}^p \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{C}^s \quad \text{and} \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{A}^p \times \mathbf{B}^p \\ \mathbf{A}^s \times \mathbf{B}^s \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{C}^p, \quad (\text{A29})$$

where the superscripts p and s stand for primary and secondary. This was already acknowledged by McFadden et al. (1991) and Gubbins & Zhang (1993).

A.8. Ω effect on an axisymmetric dipole

We detail here the step-by-step calculation of the Ω -effect given in section 3.1. We start with a purely dipolar poloidal magnetic field that reads (using Eq. (A9))

$$\mathbf{B}_p(r, \theta) = \nabla \times \nabla \times [b_p(r) Y_1^0 \mathbf{e}_r] = \nabla \times \nabla \times [b_p(r) \mathbf{R}_1^0] = \nabla \times \left[\frac{b_p(r)}{r} \mathbf{T}_1^0 \right] = \frac{2}{r^2} b_p(r) \mathbf{R}_1^0 + \frac{\partial_r b_p(r)}{r} \mathbf{S}_1^0. \quad (\text{A30})$$

Then, we want to calculate the effect of a differential rotation that reads

$$\Omega = A + B \cos^2 \theta. \quad (\text{A31})$$

Such differential rotation is usually seen as a “ $l = 2$ ” field. Though, it projects on a $l = 3$ component when considering the azimuthal component of the velocity $\mathbf{U}_\varphi = r \sin \theta \Omega \mathbf{e}_\varphi$, which reads

$$\mathbf{U}_\varphi(r, \theta) = U_\varphi(r) (A \sin \theta + B \sin \theta \cos^2 \theta) \mathbf{e}_\varphi \quad (\text{A32})$$

$$\sim U_\varphi(r) \partial_\theta Y_3^0 \mathbf{e}_\varphi = U_\varphi(r) \mathbf{T}_3^0. \quad (\text{A33})$$

In general, Eq. (A32) should project both on \mathbf{T}_1^0 and \mathbf{T}_3^0 . For the sake of simplicity, we select here a profile of differential rotation that is purely described by a ($l = 3, m = 0$) harmonic, which corresponds to $B = -5A$ (Eq. (A31)). We then include A in the definition of $U_\varphi(r)$. We project the two fields on our second basis and obtain

$$\mathbf{B}_p = \frac{2}{r\sqrt{3}} \left(\frac{b_p(r)}{r} + \partial_r b_p(r) \right) \mathbf{Y}_{1,0}^0 + \frac{\sqrt{2}}{r\sqrt{3}} \left(\partial_r b_p(r) - 2 \frac{b_p(r)}{r} \right) \mathbf{Y}_{1,2}^0 = \Upsilon_{1,0}^0 \mathbf{Y}_{1,0}^0 + \Upsilon_{1,2}^0 \mathbf{Y}_{1,2}^0, \quad (\text{A34})$$

$$\mathbf{U}_\varphi = -i\sqrt{2}U_\varphi(r)\mathbf{Y}_{3,3}^0 = \Xi_{3,3}^0 \mathbf{Y}_{3,3}^0, \quad (\text{A35})$$

where the symbols Υ and Ξ have been introduced to simplify the notations. We can evaluate the vectorial product $(\mathbf{U}_\varphi \times \mathbf{B}_p)_{l,l+\nu}^m$ thanks to equation (A17). The triangulation rule implies that $l \in \{1, 2, 3\}$ and $m = 0$. The \mathcal{J} coefficient involved in the vectorial product is composed of two remarkable $3j$ -Wigner coefficients, that are

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} 3+0 & 1+\nu_1 & l+\nu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A36})$$

where $\nu_1 \in \{-1, 1\}$ and $\nu \in \{-1, 0, 1\}$ *a priori*. Notice that those two coefficients are respectively zero if $3+1+l = 4+l$ is odd (*i.e.*, if l is odd) and $3+1+\nu_1+l+\nu$ is odd (*i.e.*, if $l+\nu$ is even). Consequently the only couplings left are obtained for $l = 2$ and $\nu \in \{-1, 1\}$. They are

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_\varphi \times \mathbf{B}_p &= \Xi_{3,3}^0 \left(\Upsilon_{1,0}^0 \mathcal{J}_{3,0,0,1,0,-1}^{2,0,-1} \Upsilon_{1,2}^0 \mathcal{J}_{3,0,0,1,0,1}^{2,0,-1} \right) \mathbf{Y}_{2,1}^0 + \Xi_{3,3}^0 \left(\Upsilon_{1,0}^0 \mathcal{J}_{3,0,0,1,0,-1}^{2,0,1} \Upsilon_{1,2}^0 \mathcal{J}_{3,0,0,1,0,1}^{2,0,1} \right) \mathbf{Y}_{2,3}^0 \\ &= \Lambda_{2,1}^0 \mathbf{Y}_{2,1}^0 + \Lambda_{2,3}^0 \mathbf{Y}_{2,3}^0 \end{aligned} \quad (\text{A37})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sqrt{2}\Lambda_{2,1}^0 - \sqrt{3}\Lambda_{2,3}^0 \right) \mathbf{R}_2^0 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Lambda_{2,1}^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\Lambda_{2,3}^0 \right) \mathbf{S}_2^0, \quad (\text{A38})$$

where the symbols $\Lambda_{r,\theta}$ have been introduced to simplify the notations. We simply apply the curl operator (A9) and make use of the coupling relations (A17) to obtain the production of \mathbf{B} in the induction equation,

$$\nabla \times (\mathbf{U}_\varphi \times \mathbf{B}_p) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sqrt{2}\Lambda_{2,1}^0 - \sqrt{3}\Lambda_{2,3}^0 - \partial_r \left[r \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Lambda_{2,1}^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\Lambda_{2,3}^0 \right) \right] \right) \frac{\mathbf{T}_2^0}{r}. \quad (\text{A39})$$

B. NUMERICAL VALIDATION

In order to validate the way we implemented in the ASH code the complex interactions between spherical harmonics, we compared an analytic calculation for a simple setup with numerical results. We summarize here those calculations.

We start from a mixed $m = 0, \pm 1$ and $l = 1$ state for the magnetic field, and an $(l, m) = (2, \pm 1)$ state for the velocity field. We initialize the magnetic field in the following way:

$$\mathbf{B} = \frac{2R_\odot^2 R_b}{r^3} \left(\mathbf{R}_1^0 + \frac{1}{2}\mathbf{R}_1^1 - \frac{1}{2}\mathbf{R}_1^{-1} \right) - \frac{R_\odot^2 R_b}{r^3} \left(\mathbf{S}_1^0 + \frac{1}{2}\mathbf{S}_1^1 - \frac{1}{2}\mathbf{S}_1^{-1} \right) + \frac{\beta^2}{rR_\odot^2} \left(\mathbf{T}_1^0 + \frac{1}{2}\mathbf{T}_1^1 - \frac{1}{2}\mathbf{T}_1^{-1} \right),$$

where R_\odot is the solar radius, R_b is our inner boundary radius, R_t is our outer boundary radius, and $\beta = (R_t - r)^2(r - R_b)^2$. The velocity is initialized by:

$$\bar{\rho}\mathbf{U} = \frac{3\beta^2}{r^2R_\odot^4} (\mathbf{R}_2^1 - \mathbf{R}_2^{-1}) + \frac{3\alpha r}{2R_\odot^2} (\mathbf{S}_2^1 - \mathbf{S}_2^{-1}) + \frac{\beta^2}{2rR_\odot^2} (\mathbf{T}_2^1 - \mathbf{T}_2^{-1}),$$

where $\alpha = (R_t - r)^2(r - R_b)^2(R_t + R_b - 2r)/(r^2R_\odot^2)$. Rewriting those fields in the conventional spherical harmonics writing gives

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \frac{2R_\odot^2 R_b}{r^3} Y_1^0 - \frac{R_\odot^2 R_b}{r^3} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta \cos \varphi \\ -\frac{R_\odot^2 R_b}{r^3} \partial_\theta Y_1^0 + \frac{R_\odot^2 R_b}{2r^3} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cos \theta \cos \varphi + \frac{\beta^2}{2rR_\odot^2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \varphi \\ -\frac{\beta^2}{rR_\odot^2} \partial_\theta Y_1^0 - \frac{R_\odot^2 R_b}{2r^3} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \varphi + \frac{\beta^2}{2rR_\odot^2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix}; \\ \bar{\rho}\mathbf{U} &= \begin{pmatrix} -\frac{3\beta^3}{r^2R_\odot^2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \\ -\frac{3\alpha r}{2R_\odot^2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \varphi + \frac{\beta^2}{2rR_\odot^2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cos \theta \sin \varphi \\ \frac{3\alpha r}{2R_\odot^2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\beta^2}{2rR_\odot^2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

TABLE 1
ANALYTICAL AND NUMERICAL VALUES OF THE VECTORIAL PRODUCT $\mathbf{U} \times \mathbf{B}$ (VALIDATION CASE, SEE SECT. 2.3).

SH Mode	Analytical Expression	Analytical Value	Code Output
(1, 0)	$\begin{pmatrix} -\frac{3\gamma_r}{5}\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \\ -\left(\frac{\gamma_\theta^2}{5} + \gamma_\theta^1\right)\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \\ \left(\frac{\gamma_\varphi^2}{5} + \gamma_\varphi^1\right)\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -12949906405.7406 \\ -12949960422.6225 \\ -0.00337401832383 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -12949906405.7402 \\ -12949960422.6225 \\ -0.00337401832383 \end{pmatrix}$
(2, 0)	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$
(3, 0)	$\begin{pmatrix} -\frac{2\gamma_r}{5}\sqrt{\frac{4\pi}{7}} \\ -\frac{2\gamma_\theta^2}{15}\sqrt{\frac{4\pi}{7}} \\ \frac{2\gamma_\varphi^2}{15}\sqrt{\frac{4\pi}{7}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5651802509.22854 \\ 3767844764.58569 \\ -0.00147254232049 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5651802509.22835 \\ 3767844764.58568 \\ -0.00147254232049 \end{pmatrix}$

NOTE. — The values are evaluated at $r = 0.84 R_\odot$. The expressions for the γ coefficients are given in Appendix B. Numerical results are given with 15 significant digits, *i.e.* up to the numerical accuracy.

Calculating the axisymmetric components of the vectorial product $\bar{\rho}\mathbf{U} \times \mathbf{B}$ results in

$$\bar{\rho}\mathbf{U} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{2\gamma_r}{5}\sqrt{\frac{4\pi}{7}}Y_3^0 - \frac{3\gamma_r}{5}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0 \\ -\frac{2\gamma_\theta^2}{15}\sqrt{\frac{4\pi}{7}}\partial_\theta Y_3^0 - \left(\frac{\gamma_\theta^2}{5} + \gamma_\theta^1\right)\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\partial_\theta Y_1^0 \\ -\frac{2\gamma_\varphi^2}{15}\sqrt{\frac{4\pi}{7}}\partial_\theta Y_3^0 - \left(\frac{\gamma_\varphi^2}{5} + \gamma_\varphi^1\right)\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\partial_\theta Y_1^0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B1})$$

where the γ coefficients are defined by:

$$\begin{aligned} \gamma_r &= \frac{9\sqrt{5}\alpha\beta^2}{8\pi R_\odot^2} + \gamma_\theta^1, \\ \gamma_\theta^1 &= \frac{3\sqrt{5}\beta^2 R_b}{8\pi r^4}, \quad \gamma_\theta^2 = \frac{9\sqrt{5}\beta^5}{8\pi r^3 R_\odot^6} - \gamma_\theta^1 \\ \gamma_\varphi^1 &= \frac{9\sqrt{5}\alpha R_b}{8\pi r^2} \quad \text{and} \quad \gamma_\varphi^2 = -\frac{9\sqrt{5}\beta^3 R_b}{8\pi r^5 R_\odot^2} - \gamma_\varphi^1. \end{aligned}$$

These coefficients match exactly the outputs from the code (table 1). The production and flux terms in equation (18) are then simple scalar products involving the vectorial product (B1). They also have been checked by comparison with the analytical calculation.

L'appui des modèles réduits

Sommaire

9.1	Écoulements zonaux, turbulence et ondes de dérive	196
9.2	Écoulements zonaux, turbulence et ondes de gravité	198
9.3	Perspectives	202

De nombreux parallèles ont été faits dans la littérature entre la génération d'écoulements zonaux dans les tokamaks, les atmosphères planétaires et la tachocline (voir *McIntyre, 2003, Diamond et al., 2005*). A l'aide de l'étude de situations idéales *via* le développement de modèles réduits, ces parallèles peuvent effectivement apparaître très clairement du point de vue mathématique. Nous détaillons dans ce chapitre les deux principaux parallèles qui peuvent être envisagés, et indiquons une route à suivre pouvant mener à une explication du confinement de la tachocline solaire. Ce chapitre, volontairement simpliste, est constitué de travaux en cours de réalisation, et doit être par conséquent considéré comme prospectif.

9.1 Écoulements zonaux, turbulence et ondes de dérive

L'idée de rapprocher la génération d'écoulements zonaux dans les tokamaks et dans les atmosphères planétaires remonte au travail pionnier d'*Hasegawa et al. (1979)*, qui montrèrent que la dynamique des ondes de dérive liées au gradient de densité dans les tokamaks (voir section 1.1.2) pouvait être représentée par une équation équivalente à une équation de vortacité pour l'étude des ondes de Rossby. Dans le cas atmosphérique, les ondes de Rossby sont excitées par la rotation de la planète et se propagent horizontalement sur une surface sphérique donnée. Du fait de la rotation naturelle du Soleil, de telles ondes sont également excitées dans l'intérieur de notre étoile. Enfin, dans le cas des tokamaks, les ondes de dérive considérées ici sont excitées par le gradient de densité ou de pression dans le plasma et correspondent à des perturbations radiales de densité sur les surfaces magnétiques.

Les ondes de Rossby jouent un rôle primordial pour le transport du moment cinétique dans les atmosphères planétaires. Pour un fluide turbulent proche de l'équilibre géostrophique (*i.e.*, où la force de Coriolis compense le gradient de pression horizontal dans l'équation de conservation du moment), il existe une séparation d'échelles où le fluide est dominé soit par les structures turbulentes, soit par la propagation d'ondes de Rossby. On peut voir cela en se plaçant dans le *plan* β , qui consiste à écrire le paramètre de Coriolis sous la forme $\mathbf{f} = 2\boldsymbol{\Omega}_0 = (f_0 + \beta y)\mathbf{k}$, où y représente la latitude et \mathbf{k} le vecteur unitaire colinéaire à l'axe de rotation. Cette approximation est valide proche des pôles. On peut alors écrire l'équation régissant la composante verticale de la vortacité ω de l'écoulement quasi-géostrophique sous la forme

$$\partial_t \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega + \beta v = 0$$

où v est la composante latitudinale du vecteur vitesse. On voit immédiatement que la dynamique de l'écoulement quasi-géostrophique est déterminée par un équilibre entre le terme d'advection

et la force de Coriolis. En comparant les deux termes, on peut mettre en évidence l'échelle de *Rhines* $L_R = \sqrt{U/\beta}$ (*Rhines*, 1975). Aux échelles plus grandes que L_R , l'écoulement est dominé par les ondes de Rossby et aux échelles plus petites, l'écoulement est dominé par les structures turbulentes. Cette séparation d'échelle conduit alors à l'émergence d'écoulements zonaux, espacés en latitude d'environ L_R (voir *Vallis and Maltrud* (1993), et le chapitre 9 du livre de *Vallis* (2006) pour une discussion plus détaillée à ce sujet). Cette interaction particulière entre ondes et turbulence est un mécanisme à l'origine des écoulements zonaux, nous détaillons ci-après comment transposer cette idée dans le cas de la tachocline et des tokamaks.

Applications à la tachocline

Du fait des propriétés de transport anti-diffusives des ondes de Rossby (*i.e.*, elles renforcent les gradients des écoulements cisailés avec lesquelles elles interagissent), elles sont souvent invoquées pour expliquer la création d'écoulements zonaux. Puisque la tachocline est une couche mince, on peut postuler que l'éventuelle turbulence qui y règne est quasi-2D (sur une surface horizontale) et par conséquent que les ondes de Rossby s'y propageant pourraient créer des écoulements azimutaux localisés en latitude. Il convient de rappeler ici la problématique de la tachocline (*cf* section 4.1). Du fait de l'existence d'une rotation différentielle en latitude, (*Spiegel and Zahn*, 1992) ont mis en évidence l'existence du phénomène de *radiative spreading* conduisant à une hyper-diffusion *radiale* du profil de rotation au niveau de la tachocline. Cette hyper-diffusion conduit à un épaissement théorique de la tachocline en désaccord avec les observations du Soleil, et par conséquent un ou plusieurs mécanismes doivent être trouvés pour expliquer son épaisseur. On peut envisager deux types de mécanisme pour "contrer" l'épaississement radiatif :

- Supprimer la rotation différentielle *en latitude*, et par conséquent supprimer l'origine de l'épaississement.
- S'opposer à l'hyper-diffusion dans la *direction radiale*, et confiner ainsi la tachocline sur une épaisseur donnée.

La plupart des scénarios envisagés dans la littérature cherchent à identifier un mécanisme de suppression de la rotation différentielle latitudinale. En particulier, *Spiegel and Zahn* (1992) postulèrent que la turbulence quasi-2D au niveau de la tachocline pouvait supprimer de manière diffusif la variation latitudinale du profil de rotation. À la lumière de la discussion précédente sur les ondes de Rossby, *Gough and McIntyre* (1998) s'opposèrent à cette interprétation car la turbulence 2D dans la tachocline a très probablement au contraire un caractère anti-diffusif, renforçant les gradients latitudinaux et ainsi accélérant potentiellement l'épaississement de la tachocline. Par conséquent, l'effet de ces ondes se propageant horizontalement ne peut expliquer l'épaisseur de la tachocline. En outre, *Tobias et al.* (2007) ont montré que l'effet anti-diffusif des ondes de Rossby était fortement atténué en présence d'un champ magnétique toroïdal (ce qui est très probablement le cas dans la tachocline), et que le profil de rotation différentielle en latitude n'est *a priori* que finalement peu modifié par la propagation de ces ondes. Cependant, d'autres ondes sont susceptibles de se propager dans des directions différentes et de transporter du moment cinétique en s'opposant directement à l'épaississement radial de la tachocline, comme nous allons le voir à la section suivante.

Applications aux tokamaks

La problématique des ondes de dérive, et de leur interaction avec la turbulence et les écoulements zonaux, est radicalement différente dans le cas des tokamaks. *A contrario* du cas de la tachocline, la génération et le maintien d'écoulements zonaux sous forme de *jets* régulièrement espacés présente une forte similarité avec les observations atmosphériques. Ceci fut mis en évidence par *Dif-Pradalier et al.* (2010) *via* l'étude statistique du transport turbulent dans des simulations

gyrocinétiques avec le code GYSELA (Annexe C). Lorsque le système est légèrement au dessus du seuil de l’instabilité ITG, le transport turbulent est caractérisé par une échelle *d’influence* Δ intermédiaire entre la taille du système et l’échelle caractéristique de la turbulence. Des écoulements zonaux localisés radialement sont formés, avec un espacement caractéristique proche de Δ . Il n’y a ensuite qu’un pas à franchir pour faire le lien entre cette échelle caractéristique et une longueur de Rhines pour les tokamaks (*Diamond et al., 2005*). Cependant, l’analyse développée par *Dif-Pradalier et al. (2010)* ne permet pas d’identifier le rôle que pourraient jouer les ondes de dérives liées au gradient de densité dans la création de ces écoulements cisailés, il faut par conséquent être prudent quant à la comparaison avec les jets atmosphériques. Des investigations plus poussées doivent être poursuivies afin de proprement définir un échelle de Rhines dans les simulations gyrocinétiques. En particulier, d’autres types d’ondes de dérive existent dans les plasmas de tokamak et pourraient participer à l’auto-organisation des écoulements zonaux, comme nous allons le montrer à la section suivante.

9.2 Écoulements zonaux, turbulence et ondes de gravité

Les ondes de dérive (de type Rossby) ne sont pas les seules ondes à être excitées dans le Soleil et les tokamaks. Nous nous intéressons dans cette section aux ondes internes dites de *gravité*, qui sont liées dans le cas du Soleil à la stratification du plasma, et dans le cas des tokamaks à la courbure du champ magnétique¹. Contrairement aux ondes de dérives qui peuvent être reliées à une turbulence dite géostrophique (on parle alors de turbulence d’ondes de dérive, voir section précédente), ces ondes ne sont pas liées à une instabilité particulière. Elles peuvent être excitées dans le plasma par différents mécanismes, puis se propager de façon amortie. Elles sont cependant capables de transporter de l’énergie et du moment cinétique et peuvent ainsi contribuer significativement à l’établissement des propriétés globales du plasma.

On peut dériver un modèle minimal capturant à la fois l’instabilité convective (d’interchange) qui excite les ondes internes de gravité, et la propagation de ces ondes dans le milieu considéré. Ce genre de modèles ont auparavant été développés à la fois pour étudier la turbulence dans les tokamaks, mais aussi la structure de la tachocline. Nous montrons clairement ci-après que ces modèles se réduisent à un unique système d’équations commun. Détaillons auparavant les contextes dans lesquels ces modèles ont été développés par les deux communautés.

Les modèles réduits traitant de l’instabilité d’interchange dans les tokamaks sont légions. Nous nous intéressons ici à une classe de modèles se concentrant sur la description conjointe du potentiel électrique ϕ , et de la pression (ou de la densité) du plasma. Ce modèle dérive des équations générales de la MHD dans l’approximation “flute” ($k_{\parallel} \ll k_{\perp}$), et fut initialement proposé par *Hazeltine and Meiss (1992)*. Prenant appui sur ce modèle, de nombreux travaux ont été conduits afin de caractériser la turbulence d’interchange, son interaction avec les écoulements zonaux, ainsi que l’éventuelle transition vers une barrière de transport et la relaxation quasi-périodique de celle-ci (*Beyer and Spatschek, 1996, Sarazin et al., 2000, Bian et al., 2003, Beyer et al., 2005, 2007*). Initialement tri-dimensionnel, ce modèle peut être simplifié selon le problème étudié. Dans le cas du lien entre la turbulence interchange et la transition vers une barrière de transport, on peut même le réduire à une seule dimension comme nous allons le montrer à la partie suivante. Il est important de noter ici que ces modèles contiennent généralement aussi la description des ondes de dérive décrites à la section précédente. Pour note discussion, nous

1. Il est important de noter ici que dans le cas des tokamaks, ces ondes sont également souvent référencées comme “ondes de dérive”, car elles sont liées aux vitesses de dérive des particules dans le plasma. Comme nous le montrons dans cette section, ces ondes peuvent cependant être différentes des ondes de dérive discutées à la section précédente.

nous placerons dans la limite $k_{\parallel} = 0$ (structures constantes le long des lignes de champ) afin de ne pas prendre en compte l'instabilité des ondes de dérive, et de ne conserver que l'instabilité d'interchange et la propagation des ondes qu'elle excite éventuellement.

Un modèle très similaire a également été développé par *Kim and MacGregor (2001)* dans le contexte de l'excitation d'ondes de gravité dans la tachocline solaire. Dans une étude plus approfondie, *Kim and MacGregor (2003)* ont démontré en principe que le dépôt de moment cinétique dans la tachocline par des ondes de gravité excitées à la base de la zone convective pouvait être anti-diffusif dans la direction *radiale* et s'opposer à l'épaississement radiatif décrit à la section précédente. Ce résultat, confirmé *a priori* par *Miesch (2003)* à l'aide de simulations de type *shallow water*, pourrait expliquer le confinement de la tachocline de façon élégante. Le moment cinétique transporté par les ondes dépend largement de leur propagation ainsi que de leur amplitude, et par suite de leur mécanisme d'excitation. Nous développons ainsi aux paragraphes suivants un modèle minimal (1D) permettant de traiter à la fois l'excitation d'ondes de gravité à la surface de la tachocline, et leur propagation ainsi que le transport de moment cinétique qui leur est associé.

☛ La description des mécanismes d'excitation et de propagation des ondes de gravité dans les intérieurs stellaires est formidablement compliquée et bien au delà des objectifs de ce chapitre. En effet, une description adéquate de ces ondes requiert un traitement tri-dimensionnel en géométrie sphérique de la propagation d'ondes magnéto-gravito-inertielles (ondes de gravité en présence de champ magnétique et de rotation, cf *Brun et al., 2011*). De nombreux efforts ont été faits depuis le travail pionnier de *Zahn et al. (1997)* pour comprendre le transport de moment cinétique par les ondes internes dans toute sa complexité (e.g. *Talon et al., 2002*, *Mathis and Zahn, 2005*, *Rogers and MacGregor, 2010*, *MacGregor and Rogers, 2011*, *Mathis and de Brye, 2012*). Le propos de ce chapitre est d'identifier les mécanismes primordiaux pouvant mener au confinement de la tachocline. Par suite, nous renvoyons le lecteur à ces autres travaux pour une description plus réaliste et complète du transport induit par les ondes internes dans les zones radiatives stellaires.

Cette rapide mise en contexte montre une différence radicale entre les deux raisonnements que nous utilisons pour étudier les tokmaks et la tachocline dans ce chapitre. Dans le cas des tokmaks, nous cherchons à étudier le lien entre la turbulence, l'établissement d'écoulements zonaux et la création de barrières de transport. Le plasma est instable pour l'interchange, et c'est au milieu de ce plasma instable que nous cherchons à comprendre l'auto-organisation du système. Dans le cas de la tachocline, nous nous intéressons à un domaine à l'interface entre une zone stable et une zone instable, et ce sont par conséquent la dynamique des ondes et l'éventuelle pénétration des mouvements turbulents qui pourront contribuer à l'auto-organisation du plasma. Malgré cette différence fondamentale, il est remarquable de pouvoir construire un modèle simplifié identique pour étudier les deux systèmes.

Nous développons donc ici un modèle *local* pour les plasmas de tokamak et la tachocline solaire. Afin de clarifier les notations, les coordonnées locales qui seront utilisées à la fois pour la tachocline et pour les tokmaks sont données en figure 9.1.

Modèle d'interchange dans les tokmaks

Notre point de départ est le modèle d'interchange bien connu (*Beyer et al., 2005, 2007*)

$$\partial_t p + [\phi, p] = S + \nabla_{\perp} \cdot (\chi \nabla_{\perp} p), \quad (9.1)$$

$$\partial_t \nabla_{\perp}^2 \phi + [\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi] + g \partial_y \log p = \nabla_{\perp} \cdot (\nu \nabla_{\perp} \nabla_{\perp}^2 \phi), \quad (9.2)$$

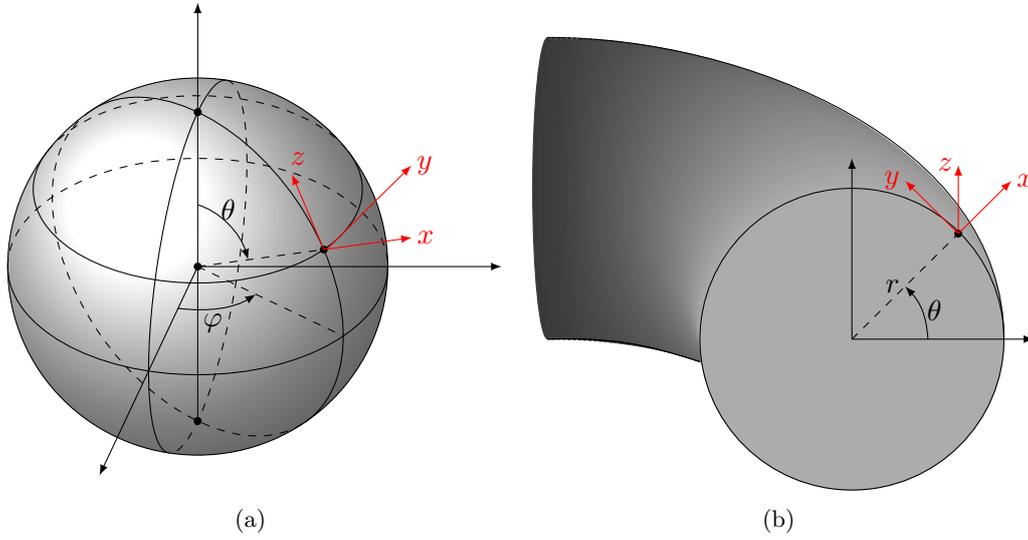


FIGURE 9.1 – Système de coordonnées locales pour la tachocline (a) et les tokamaks (b).

où p est la pression, ϕ le potentiel électrostatique, S une source de chaleur, g la gravité effective due à la courbure des lignes de champ et ν , χ la viscosité et la diffusivité du plasma. Nous avons aussi simplifié le système original en considérant que la pression et le potentiel sont constants le long des lignes de champ magnétique ($k_{\parallel} = 0$). Cette approximation permet de ne pas prendre en compte l'instabilité des ondes de dérives liées au gradient de densité (voir section précédente), et de se concentrer uniquement sur l'instabilité d'interchange. Dans notre système de coordonnées, la direction perpendiculaire correspond au plan (x, y) . Nous nous plaçons sur un domaine localisé côté faible champ (à droite sur la figure 9.1(b)). Nous décomposons les deux équations en termes de quantités moyennes (selon y) et fluctuantes, en ne retenant *qu'un seul* mode "poloïdal" selon y . On peut alors écrire

$$p(x, y, t) = p_{eq}(x, t) + p_k(x, t)e^{iky} + p_k^*(x, t)e^{-iky}, \quad (9.3)$$

$$\phi(x, y, t) = \phi_{eq}(x, t) + \phi_k(x, t)e^{iky} + \phi_k^*(x, t)e^{-iky}, \quad (9.4)$$

$$V_{eq} \equiv \partial_x \phi_{eq}. \quad (9.5)$$

Nous nous plaçons naturellement dans le cadre où les fluctuations sont petites devant l'équilibre, c'est-à-dire $|\phi_k/\phi_{eq}| \ll 1$, et $|p_k/p_{eq}| \ll 1$. Dans ce cas, si l'on paramètre les couplages entre modes k par une saturation non-linéaire *via* des coefficients α_* , on obtient le système

$$\partial_t p_{eq} = -ik\partial_x (p_k \phi_k^* - p_k^* \phi_k) + \chi \partial_{xx}^2 p_{eq} + S, \quad (9.6)$$

$$\partial_t V_{eq} = 2k\Im (\phi_k^* \partial_{xx}^2 \phi_k) + \nu \partial_{xx}^2 V_{eq}, \quad (9.7)$$

$$\partial_t p_k = ik [\phi_k (\partial_x p_{eq} - \kappa) - V_{eq} p_k] - \alpha_p |p_k|^2 p_k + \chi \partial_{xx}^2 p_k, \quad (9.8)$$

$$\partial_t \phi_k = i \left(\frac{g}{k} \frac{p_k}{p_{eq}} - k V_{eq} \phi_k \right) - \alpha_\phi |\phi_k|^2 \phi_k + \nu \partial_{xx}^2 \phi_k. \quad (9.9)$$

Le paramètre κ contrôle le seuil de l'instabilité d'interchange, qui est déclenchée lorsque la source de chaleur S est suffisamment forte pour que le gradient de pression dépasse le seuil. [Bian et al. \(2003\)](#) ont notamment montré que ce système pouvait capturer la transition L-H (donc, la formation d'une barrière de transport) *via* la création d'un écoulement moyen cisailé. Nous montrons ci-après comment obtenir un système d'équations identique dans le cas de la tachocline.

Modèle réduit pour la tachocline

Nous démarrons notre dérivation des équations anélastiques de la mécanique des fluides (voir *Spiegel and Veronis, 1960, Gough, 1969, Vallis, 2006*, ainsi que la section 1.2.3) qui sont valables pour l'intérieur solaire

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{u}) = 0, \quad (9.10)$$

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\bar{\rho}} + \frac{\rho}{\bar{\rho}} \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (9.11)$$

$$\partial_t \bar{T} + \langle \mathbf{u} \cdot \nabla T \rangle_{y,z} = \kappa \nabla^2 \bar{T}, \quad (9.12)$$

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) T = -u_x \left(\partial_x \bar{T} + \frac{g}{C_p} \right) + \langle \mathbf{u} \cdot \nabla T \rangle_{y,z} + \kappa \nabla^2 T, \quad (9.13)$$

où nous rappelons que les quantités avec une barre sont des quantités moyennes qui dépendent uniquement de la direction radiale (x pour cette section), tandis que les autres quantités dépendent a priori de toutes les directions. Nous avons supposé que le système était à l'équilibre hydrostatique, *i.e.* $d\bar{p}/dx = -\bar{\rho}g$, et utilisé l'équation d'état linéarisée suivante

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{p}{\bar{p}} - \frac{T}{\bar{T}}. \quad (9.14)$$

Nous introduisons un profil de vitesse azimutal (selon \mathbf{e}_y) moyen tel que $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \bar{U}(x)\mathbf{e}_y$, et nous supposons que $|\mathbf{v}| \ll |\mathbf{u}|$. On peut alors écrire l'équation d'évolution du profil de vitesse moyen en projetant (9.11) et en faisant la moyenne selon (y, z) pour obtenir

$$\partial_t \bar{U} = -\langle \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \rangle_{y,z} \Big|_y + \nu \partial_{xx}^2 \bar{U}. \quad (9.15)$$

On retrouve une équation d'évolution simple, le premier terme du membre de droite représente le tenseur de Reynolds, tandis que le second est un simple opérateur de diffusion.

On introduit alors la vorticité latitudinale $\omega = \partial_x v_y - \partial_y v_x$. En prenant la composante z du rotationnel de l'équation (9.11), et en se rappelant que le terme de pression de l'équation d'état (9.14) est petit devant les deux autres, on trouve que

$$\partial_t \omega + \bar{U} \partial_y \omega + \partial_x \bar{U} (\partial_x v_x + \partial_y v_y) + v_x \partial_{xx}^2 \bar{U} = (\nabla \times \mathbf{\Pi})_z - \frac{g}{\bar{T}} \partial_y T + \nu \nabla^2 \omega. \quad (9.16)$$

Les termes de gauche correspondent à la variation temporelle de ω , et à la réécriture du terme d'advection. Le membre de droite est composé de trois termes. Nous avons introduit la notation $\mathbf{\Pi} = \langle \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \rangle_{y,z} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ qui représente l'effet de l'écart à la moyenne du tenseur de Reynolds turbulent. Le second terme du membre de droite est simplement le terme de flottaison, et le dernier terme représente les effets visqueux. A l'ordre auquel nous travaillons, nous pouvons supposer que $\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \sim 0$ et récrire (9.16) tel que

$$(\partial_t + \bar{U} \partial_y) \omega = -\frac{g}{\bar{T}} \partial_y T + \nu \nabla^2 \omega + \underbrace{\partial_x \bar{U} \partial_z v_z - v_x \partial_{xx}^2 \bar{U}}_* + (\nabla \times \mathbf{\Pi})_z. \quad (9.17)$$

Les deux termes soulignés par une étoile sont des termes *a priori* non nécessaires à la description des phénomènes que nous souhaitons étudier. Le premier correspond à l'effet de la variation latitudinale du champ de vitesse fluctuant, tandis que le second est relié à la courbure du champ de vitesse moyen. Tous deux peuvent potentiellement jouer un rôle dans la réalité, mais afin de simplifier notre étude nous les négligeons dans un premier temps. Une étude plus complète devra

caractériser l'effet des chacun de ces deux termes.

Nous pouvons à présent introduire la décomposition en quantités moyenne et fluctuante dans les deux équations d'énergie (9.12) et (9.13). La première se réécrit naturellement

$$\partial_t \bar{T} + \langle \mathbf{v} \cdot \nabla T \rangle_{y,z} = \kappa \partial_{xx}^2 \bar{T}. \quad (9.18)$$

En introduisant $Q = \langle \mathbf{v} \cdot \nabla T \rangle - \mathbf{v} \cdot \nabla T$, on peut également réécrire la deuxième équation

$$(\partial_t + \bar{U} \partial_y) T = -v_x \left(\frac{g}{C_p} + \partial_x \bar{T} \right) + Q + \kappa \nabla^2 T. \quad (9.19)$$

Notre système est finalement décrit par quatre équations couplées, qui s'écrivent

$$\partial_t \bar{U} = - \langle \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \rangle_{y,z} \Big|_y + \nu \partial_{xx}^2 \bar{U}, \quad (9.20)$$

$$(\partial_t + \bar{U} \partial_y) \omega = - \frac{g}{\bar{T}} \partial_y T + (\nabla \times \mathbf{\Pi})_z + \nu \nabla^2 \omega, \quad (9.21)$$

$$\partial_t \bar{T} = - \langle \mathbf{v} \cdot \nabla T \rangle_{y,z} + \kappa \partial_{xx}^2 \bar{T}, \quad (9.22)$$

$$(\partial_t + \bar{U} \partial_y) T = -v_x \left(\frac{g}{C_p} + \partial_x \bar{T} \right) + Q + \kappa \nabla^2 T. \quad (9.23)$$

On peut alors appliquer la même discrétisation sur la base de Fourier que dans le paragraphe précédent. Nous modélisons les termes $\mathbf{\Pi}$ et Q par un amortissement non-linéaire α_* . Nous introduisons également la fonction de courant $\mathbf{e}_z \times \nabla \psi = \mathbf{u}$ telle que $-k^2 \psi_k \sim \omega_k$. Nous pouvons écrire

$$\partial_t \bar{U} = 2k \Im (\psi_k^* \partial_{xx}^2 \psi_k) + \nu \partial_{xx}^2 \bar{U} \quad (9.24)$$

$$\partial_t \psi_k = i \left(\frac{g}{k} \frac{T_k}{\bar{T}} + k(ik\nu - \bar{U}) \psi_k \right) - \alpha_\psi |\psi_k|^2 \psi_k + \nu \partial_{xx}^2 \psi_k, \quad (9.25)$$

$$\partial_t \bar{T} = -ik \partial_x (T_k \psi_k^* - T_k^* \psi_k) + \kappa \partial_{xx}^2 \bar{T}, \quad (9.26)$$

$$\partial_t T_k = ik \left[\psi_k \left(\partial_x \bar{T} + \frac{g}{C_p} \right) + (ik\kappa - \bar{U}) T_k \right] - \alpha_T |T_k|^2 T_k + \kappa \partial_{xx}^2 T_k. \quad (9.27)$$

D'un point de vue mathématique, ce système est exactement équivalent au système que nous avons dérivé dans le cas de la turbulence tokamak au paragraphe précédent. Nous pouvons ainsi faire un lien entre le potentiel électrique ϕ et la fonction de courant ψ , et entre la pression et la température. La dérivation du système que nous venons d'effectuer est licite dans le cas où l'échelle de variation verticale de la pression est grande devant l'échelle considéré. Il s'applique par conséquent au cas de la tachocline, qui est une couche mince de l'intérieur solaire ($\Delta_{\text{tacho}} \lesssim H_p/2$).

9.3 Perspectives

Ce chapitre prospectif a eu pour but d'explorer, de la manière la plus simple possible, les parallèles qu'il est possible de faire entre la turbulence dans les tokamaks et la dynamique de la tachocline solaire. Dans un premier temps, nous avons montré le lien existant entre les ondes de dérive liées au gradient de densité dans les tokamaks et les ondes de Rossby dans les fluides en rotation. Cette analogie a suscité de nombreux travaux depuis *Hasegawa et al. (1979)*. Nous avons montré que ce parallèle avait cependant peu de sens lorsqu'on s'intéresse au cas de la tachocline solaire.

En revanche, nous avons mis en évidence une autre analogie mettant en jeu la turbulence d'interchange, la propagation d'ondes de dérive liées à la courbure du champ magnétique dans

les tokamaks, et la propagation d'ondes de gravité dans le cas du Soleil. Nous avons démontré la possibilité de construire un modèle simplifié commun traitant de cette problématique à la fois dans le cas des tokamaks et de la tachocline.

Le développement de ces modèles réduits est basé sur deux problématiques distinctes:

- Dans le cas tachocline (zone stable pour l'interchange), identifier un mécanisme transportant le moment cinétique de façon anti-diffusive dans la direction radiale pour empêcher son épaissement.
- Dans le cas des tokamaks (zone instable pour l'interchange), comprendre la transition d'un état turbulent à un état de barrière de transport (où le transport turbulent est supprimé) lorsque l'on augmente la source de chaleur du système.

Après avoir construit un modèle minimal pour traiter ces deux problématiques, nous allons simuler ce modèle numériquement afin de vérifier si (i) ils permettent bien de représenter et comprendre les phénomènes envisagés, et (ii) explorer la dépendance paramétrique (diffusivités, écart au seuil de l'instabilité, *etc...*) de ces effets. L'étude numérique de ce modèle a été débutée à la fin de cette thèse, et va être développée dans un futur très proche.

De nombreux éléments pouvant jouer un rôle important dans les deux systèmes que nous étudions manquent encore à notre modèle réduit. Les principaux ingrédients physiques que nous souhaitons rajouter prochainement à cette description sont, respectivement :

- Ajouter l'équilibre des forces (3.4) dans le cas des tokamaks, qui est *a priori* très bien vérifié dans les simulations turbulentes en gyrocinétique (*Dif-Pradalier et al., 2009*). Dans une version simplifiée (dans un premier temps) ceci peut se faire *via* un terme de relaxation dans l'équation de conservation du mouvement d'équilibre forçant le gradient de pression d'équilibre à être égal à la vitesse poloïdale ($E \times B$) d'équilibre.
- Ajouter l'effet d'un champ magnétique toroïdal au modèle pour la tachocline. Par analogie avec les travaux de *Tobias et al. (2007)*, il est important de caractériser comment le transport de moment cinétique par les ondes de gravité dans la tachocline est affecté par un tel champ magnétique. Le lecteur intéressé pourra notamment se reporter au travail de *MacGregor and Rogers (2011)* qui met en évidence un piégeage des ondes de gravité dans la tachocline par un champ magnétique toroïdal, ainsi que celui de *Mathis and de Brye (2012)* qui s'attache à décrire les ondes internes des étoiles en prenant en compte la géométrie sphérique tri-dimensionnelle.

En conclusion, le rapprochement théorique des deux objets ayant motivé l'étude conjointement développée dans cette thèse offre d'intéressantes perspectives pour une meilleure compréhension de la dynamique des barrières de transport dans les tokamaks, mais aussi du confinement de la tachocline.

Conclusions et Perspectives

Mon travail de thèse s'est développé au travers des deux communautés scientifiques de la fusion nucléaire et de la physique des plasmas stellaires. Cette fructueuse collaboration m'a permis de développer une étude sur la turbulence, le transport et le confinement dans les plasmas chauds magnétisés sous plusieurs perspectives. Les objets que nous avons étudiés sont les étoiles, sphères de plasma auto-gravitant, et les tokamaks, machines dédiées à l'étude de la maîtrise de la fusion nucléaire.

Cette thèse s'est concentrée sur les étoiles de type solaire, qui ont la particularité d'être constituées d'une zone interne où l'énergie est transportée par radiation vers l'extérieur, et une zone externe où des mouvements convectifs sont déclenchés pour transporter cette énergie lorsque l'opacité du plasma devient trop élevée pour que le rayonnement se propage. La tachocline se situe à l'interface entre ces deux zones qui présentent des échelles de temps caractéristiques très différentes. Le Soleil est l'étoile qui nous est la plus proche, et la qualité des données observationnelles auxquelles nous avons accès aujourd'hui font apparaître plusieurs formes d'auto-organisation en son sein. La répartition du moment cinétique dans notre étoile est tout d'abord remarquable. La zone stable (interne) tourne de manière solide, tandis que la zone convective est animée d'une rotation différentielle de grande échelle (comparée aux échelles convectives) telle que l'équateur solaire tourne rapidement, et les pôles lentement. La tachocline est par suite le lieu de forts cisaillements de vitesse dans les directions radiales et latitudinales. Sa très faible épaisseur (moins de 4% du rayon solaire) n'a cessé d'intriguer les physiciens solaires depuis des décennies et témoigne de la formidable auto-organisation du moment cinétique dans l'intérieur de notre étoile. Je me suis efforcé au chapitre 4 d'étudier, de la façon la plus réaliste possible avec les techniques de simulation actuelles, une des hypothèses les plus sérieuses qui ont été avancées pour expliquer la faible épaisseur de cette interface. Ce scénario repose sur l'existence potentielle d'un champ magnétique à grande échelle dans l'intérieur solaire, qui pourrait confiner la tachocline en homogénéisant le profil de rotation dans l'intérieur stable. Malgré les différentes topologies magnétiques envisagées dans ce manuscrit, nous trouvons que ce scénario est peu probable pour le Soleil du fait de l'interaction tri-dimensionnelle du champ magnétique interne avec les mouvements convectifs animant la zone externe de notre étoile. Puis, j'ai esquissé au chapitre 9 un mécanisme de confinement de la tachocline alternatif basé sur le transport du moment cinétique par des ondes de gravité. Ces travaux doivent maintenant être confirmés *via* une étude paramétrique.

La deuxième forme remarquable d'auto-organisation au sein du Soleil est l'existence d'un cycle d'activité magnétique, tirant son origine du processus dynamo. Le grand nombre d'échelles caractéristiques qui interviennent dans la dynamo nous ont mené à développer une technique d'analyse spectrale pour comprendre l'émergence des grandes échelles dans la dynamo turbulente stellaire (chapitre 8). Pour la première fois, j'ai appliqué les techniques d'analyse spectrale à une simulation de dynamo en zone convective en prenant en compte la géométrie stellaire. J'ai étudié les transferts d'énergie dans la dynamo convective grâce à cette technique. Le rôle "cascadant" de la rotation différentielle de grande échelle domine la construction du spectre aux échelles

intermédiaires, tandis qu'une véritable cascade d'énergie magnétique a clairement été mise en évidence aux plus petites échelles. J'ai aussi montré que le processus de saturation du champ magnétique à grande échelle repose sur les échelles de plus haute énergie du spectre d'énergie magnétique, et est par conséquent non-local par essence. Des perspectives pour une meilleure compréhension de la création d'un champ magnétique à grande échelle dans les zones convectives stellaires sont développées au chapitre 8.

Enfin, cette thèse a aussi été l'occasion de s'interroger sur l'impact de l'environnement d'une étoile sur son organisation interne. Nous avons ainsi développé une méthodologie pour quantifier les interactions magnétiques d'une étoile avec ses planètes. Nous avons démontré au chapitre 5 que notre méthode représentait de façon adéquate ces interactions. Cette étude a des implications à la fois pour la structure interne de l'étoile, son magnétisme de surface, mais aussi les propriétés orbitales de la planète. La recherche observationnelle des exo-planètes est actuellement en plein essor, et la quête pour trouver des planètes habitables semblables à la Terre bat son plein. L'habitabilité d'une planète dépend fortement de son étoile hôte, notre étude a ainsi pour vocation d'améliorer la compréhension des phénomènes magnétiques reliant les deux objets et par conséquent d'améliorer le concept d'habitabilité.

Conjointement à ces travaux orientés vers la physique stellaire, cette thèse est également dédiée à l'étude des phénomènes d'auto-organisation dans les plasmas de tokamak sous la forme de barrières de transport. Ces barrières correspondent à des raidissements localisés du profil de température dans le plasma, conduisant à une amélioration nette du confinement de l'énergie au centre de la machine et par suite à une amélioration des performances fusion. Leur bonne compréhension théorique est un formidable défi qui doit être remporté pour assurer le développement de réacteur de fusion nucléaire de future génération. Expérimentalement, l'apparition de barrières de transport est bien corrélée avec une topologie magnétique particulière de la machine, et/ou l'existence d'écoulements cisailés localisés. Ces deux mécanismes ont été respectivement explorés aux chapitres 6 et 7.

Les barrières de transport liées à une topologie magnétique dite à *profil de q inversé* (q , le facteur de sécurité, représente le taux d'enroulement des lignes de champ magnétique) défient la compréhension des plasmiciens depuis de nombreuses années. En effet, nous avons montré que dans le cadre de la modélisation gyrocinétique de la turbulence, il est très difficile de corréliser l'apparition d'une barrière avec ces topologies particulières. Une comparaison des modélisations fluides et gyrocinétiques nous a permis de mettre en évidence l'importance des modes dits *non-résonants* pour le transport turbulent (ces modes ne sont *a priori* pas excités par l'instabilité principale menant à la turbulence dans un tokamak). Cette découverte nous a poussé à développer une méthode d'analyse spectrale pour comprendre la dynamique de ces modes, dans le formalisme gyrocinétique (chapitre 8). Le développement conjoint de méthodes d'analyse spectrale a été une des voies de collaboration fructueuse entre les deux groupes *via* mon travail de thèse.

J'ai aussi exploré le lien existant entre les écoulements cisailés et les barrières de transport dans les tokamaks au chapitre 7. Pour cela, j'ai dû développer un moyen de polariser le plasma dans une simulation gyrocinétique pour contrôler les écoulements cisailés s'y développant, et ainsi déclencher l'apparition d'une barrière de transport. Grâce à ce travail, j'ai pu pour la première fois déclencher une barrière de transport dans une simulation gyrocinétique turbulente *via* l'effet d'un écoulement cisailé. Cette étude nous a permis de mettre en évidence une dynamique de relaxation quasi-périodique des barrières ainsi formées du fait de l'existence d'une anisotropie de température dans les directions parallèles et perpendiculaires.

L'existence d'écoulements cisailés dans un tokamak, relié à l'existence de barrières de transports, n'est pas sans rappeler la problématique de la tachocline que nous avons abordé au chapitre 4. Un second axe de collaboration entre les deux communautés s'est mis en place *via* le développement d'un modèle de turbulence simplifié pouvant traiter à la fois de la problématique de la

tachocline et des barrières de transport dans les tokamaks (chapitre 9). Nous avons développé une démonstration de principe des similarités des deux systèmes, l'analyse du modèle ainsi formé va permettre de tester un scénario alternatif de confinement de la tachocline, ainsi que différentes façon de relier les écoulements cisailés, la turbulence et l'apparition de barrières de transport dans les tokamaks.

Fort de ces résultats, cette thèse ouvre le champ de nouvelles investigations, que nous pouvons regrouper en trois parties :

– **Le soleil et les étoiles**

- Les scénarios de confinement de la tachocline sont nombreux, et certains éléments de la dynamique de la tachocline sont encore mal compris lorsque la géométrie sphérique en trois dimensions est prise en compte. Parmi ceux-ci, on peut citer la profondeur de pénétration des mouvements convectifs et de la circulation méridienne, le transport global de moment cinétique par les ondes magnéto-gravito-inertielles, l'impact d'un champ magnétique provenant du cycle dynamo. Le travail que nous avons présenté dans cette thèse montre que le code ASH est un formidable outil pour étudier ces problèmes. Les récents développement en matière de discrétisation dans la direction radiale (différences finies d'ordre élevé) vont nous permettre d'utiliser des grilles numériques flexibles et par conséquent de nous attaquer sérieusement à ces problématiques.
- La méthode d'analyse spectrale que j'ai développé conduit naturellement à une étude plus conséquente de l'effet dynamo, notamment en fonction du nombre de Prandtl magnétique. De plus, la caractérisation de l'hélicité magnétique dans ces simulations pourrait apporter des éléments de réflexions de plus pour contraindre l'émergence de grandes échelles ainsi que l'établissement de cycles. Enfin, les détails de l'évolution l'énergie cinétique lors de la saturation du processus dynamo doivent également être quantifiés. L'étude spectrale que j'ai mené conduit aussi naturellement à s'interroger sur les mécanismes de saturation de la convection stellaire dans les modèles numériques que nous utilisons. Une étude paramétrique hydrodynamique sur cette instabilité pour une étoile de type solaire sera développée prochainement.
- L'impact de l'environnement extérieur de l'étoile sur sa dynamique interne ne doit pas non plus être négligé. De nombreuses missions sont en cours de développement à l'ESA dans ce contexte. En particulier, la future mission spatiale Solar Orbiter¹ sera dédiée à l'étude du contrôle de l'héliosphère par le Soleil. L'étude du lien entre la dynamique et le magnétisme interne du Soleil, le vent solaire se développant dans la couronne et les différentes éruptions à la surface du Soleil est en particulier un des objectifs de cette mission. L'étude préliminaire que j'ai mené avec le code PLUTO abouti naturellement à l'étude de cette connexion. En outre, les missions JUICE et PLATO (voir chapitre 5.2) sont à l'étude à l'ESA et ont pour but une meilleure compréhension des liens existant entre étoiles et planètes. En particulier, la présence de planètes massives proche de leur étoile hôte peut entraîner un fort couplage magnétique pouvant modifier la compréhension que nous avons du magnétisme des étoiles. La quantification de cet effet fera suite aux bases de modélisation que nous avons développé dans cette thèse. L'impact de ces couplages sur les caractéristiques planétaires telles que l'orbite, le magnétisme et l'habitabilité seront aussi étudiés.

1. Mission de classe M, <http://sci.esa.int/science-e/www/area/index.cfm?fareaid=45>

– **Les barrières de transport dans les tokamaks**

- L'effet de la topologie magnétique sur la turbulence gyrocinétique doit être mieux compris afin de pouvoir prédire l'apparition de barrières de transport. Les barrières de transport sont très importantes dans le design des futurs tokamaks tels que ITER et DEMO, qui seront dédiées à la démonstration de principe de la viabilité d'un réacteur de fusion industriel. L'étude que nous avons menée nous a conduit à nous interroger sur le rôle des modes non-résonants dans les plasmas de tokamak. Ils sont linéairement stables, mais peuvent être excités par la turbulence dans les tokamaks. Nous avons développé un diagnostic spectral qui va permettre dans un futur proche de quantifier le rôle de ces modes pour le transport turbulent, pour la saturation des modes résonants et pour le développement des écoulements zonaux.
- La technique que nous avons développée pour polariser le plasma dans le formalisme gyrocinétique et entraîner la création d'une barrière de transport va nous permettre d'explorer plusieurs aspects des barrières. L'interaction d'un profil de q inversé avec une barrière de transport créée par un écoulement cisailé sera étudiée. En outre, nous pouvons aussi envisager l'analyse de l'interaction de plusieurs barrières de transport (*e.g.*, interne et externe) au sein du plasma. Nous souhaitons également développer d'autres sources de polarisation en autorisant qu'elles s'accompagnent d'un chauffage ou refroidissement local du système. L'anisotropie de température induite par ces sources serait différente et pourrait permettre l'émergence d'autres dynamiques de barrières. Enfin, notre expérience numérique conduit à s'interroger sur l'existence de telles anisotropies dans les expériences de tokamaks. Nous envisageons une collaboration étroite avec des expérimentateurs pour analyser l'éventuelle anisotropie présente dans des décharges où des barrières de transport sont créées.

– **Les liens tachocline-tokamak, et la collaboration de deux groupes de recherche**

- Cette thèse a été initiée à la suite d'interactions de mes deux responsables lors des "Festivals de théorie", conférence internationale à Aix-en-Provence qui a pour but de faire se rencontrer des chercheurs des communautés de recherche en astrophysique et en fusion nucléaire. La sixième édition de ce festival a eu lieu au mois de juillet 2011 sur le thème *General principles for relaxation and self-organization*. Le travail commun que nous avons initié au cours de cette thèse se poursuivra notamment *via* l'activité générée autour de cette conférence qui a lieu tous les deux ans.
- Enfin, la réussite de la collaboration entre les deux communautés nous incite à poursuivre sur cette voie *via* l'étude de modèles simplifiés s'appliquant aux deux champs d'investigation de cette thèse. En particulier, le parallèle que nous avons développé entre certaines ondes de dérive dans les tokamaks et les ondes de gravité dans le Soleil sera exploré plus en profondeur, poursuivant ainsi la synergie que nous avons initiée au cours de cette thèse.

Table des figures

1.1	Diagramme densité/température des plasmas	11
1.2	Mouvement cyclotronique et gyromoyenne	23
1.3	Plan de thèse	26
2.1	Diagramme d'Hertzsprung-Russel	28
2.2	Structure interne des étoiles en fonction de leur masse	29
2.3	Granulation à la surface du Soleil	30
2.4	Atmosphère du Soleil	32
2.5	Schéma de la structure interne et externe du Soleil	33
2.6	Profil de rotation de l'intérieur solaire	34
2.7	Circulation méridienne à la surface du Soleil	35
2.8	Observation du magnétisme solaire	36
2.9	Diagramme papillon du cycle magnétique solaire	36
3.1	Géométrie du tokamak	39
3.2	Fréquences des écoulements poloïdaux principaux dans les plasmas de tokamak	43
3.3	Barrières de transport et profil de pression	44
4.1	Diffusivités des modèles numériques du Soleil	52
4.2	Equilibre radial des modèles numériques du Soleil	52
4.3	Convection dans les modèles numérique du Soleil	53
4.4	Profil de rotation des modèles numériques du Soleil	54
4.5	Profils des vitesses des modèles numériques du Soleil	54
4.6	Rotation et champ magnétique à grande échelle dans la tachocline	56
4.7	Rendu 3D des modèles de tachocline	57
4.8	Evolution du champ magnétique dans la tachocline	58
4.9	Scénario magnétique pour un dipôle incliné	59
4.10	Scénario magnétique pour un dipôle perpendiculaire	60
4.11	Interaction 3D du champ magnétique perpendiculaire avec la zone convective	61
4.12	Transport de moment cinétique par le champ magnétique (1)	63
4.13	Transport de moment cinétique par le champ magnétique (2)	63
5.1	Vent de Parker	87
5.2	Condition initiale des modèles de vent	90
5.3	Benchmark des modèles de vent	93
5.4	Propriétés de conservation du vent	95
5.5	Grille des modèles d'interaction étoile-planète	97
5.6	Interaction étoile-planète unipolaire	99
5.7	Interaction étoile-planète bipolaire	101
6.1	Facteur de sécurité et modes résonants	109
6.2	Profil inversé du facteur de sécurité	111
6.3	Barrière de transport expérimentale et profil de q inversé	111
6.4	Simulations fluides d'une barrière de transport associée à un profil inversé	112
6.5	Profils de température des simulations gyrocinétiques à profil inversé	114
6.6	Flux de chaleur dans les simulations gyrocinétiques à profil inversé	115
6.7	Impact des modes non-résonants sur le flux de chaleur	116

6.8	Filtre des modes non-résonants et turbulence	117
7.1	Barrière de transport expérimentale et écoulement cisailé	128
7.2	Cisaillement des structures turbulentes	130
7.3	Modèle de bifurcation pour les barrières de transport	131
7.4	Bifurcation et hystérésis des barrières de transport	132
7.5	Dynamique q'une barrière de transport	133
7.6	Forçage d'un écoulement cisailé dans un modèle gyrocinétique	135
7.7	Flux de chaleur turbulent dans une simulation ($\rho_\star = 1/150, \nu_\star = 0.1$)	138
7.8	Sources fluides effectives dans la simulation gyrocinétique	138
7.9	Evolution du flux de chaleur avec source de vorticité, et création d'une barrière de transport	139
7.10	Croissance de modes résonant sur la partie interne de la barrière de transport	140
7.11	Modification du seuil ITG par l'anisotropie de température	141
7.12	Cycle de création et destruction d'une barrière de transport	142
7.13	Etude paramétrique de l'effet de la source de vorticité en fonction de la source d'énergie du système	143
8.1	Décroissance selective des invariants de la MHD	149
8.2	Harmoniques sphériques $l = 3$	150
8.3	Interactions triadique pour les harmoniques sphériques	155
8.4	Modèle hydrodynamique pour la dynamo solaire	157
8.5	Energie magnétique initiale et finale pour une dynamo solaire	158
8.6	Evolution des spectres d'énergie magnétique dans une dynamo turbulente.	159
8.7	Production d'énergie magnétique initiale pour les échelles intermédiaire	160
8.8	Cascade généralisée à petite échelle	161
8.9	Saturation du champ magnétique de grande échelle	162
8.10	Spectre d'entropie initial pour la turbulence ITG	167
8.11	Saturation du spectre d'entropie	168
8.12	Contributions à la construction du spectre gyrocinétique	169
8.13	Transfert spectral par dérive $E \times B$ pour le mode résonant principal	170
9.1	Système de coordonnées des modèles réduits	200
A.1	Systèmes de coordonnées	230
C.1	Schéma de la méthode semi-lagrangienne	237
D.1	Schéma de la résolution numérique du code PLUTO	239
E.1	Diagramme de stabilité pour le modèle ITG slab cinétique	242
E.2	Diagramme de stabilité pour le modèle ITG slab dans les approches cinétique et fluide	245
F.1	Echange d'énergie onde-particule	247
J.1	Harmoniques sphériques $l = 3$	256

Liste des tableaux

1.1	Paramètres caractéristiques des plasmas étudiés	15
2.1	Estimations de l'épaisseur de la tachocline	34
3.1	Principales instabilités dans les plasmas de tokamak	41
5.1	Paramètres des modèles de vents stellaires	91
5.2	Validation des modèles de vents stellaires	92
5.3	Benchmark des modèles de vents stellaires	94
7.1	Sources gyrocinétiques	136
A.1	Symboles	231
A.2	Nombres sans dimensions	232

Bibliographie

- Abiteboul, J. (2012), *PhD Thesis*.
- Abiteboul, J., X. Garbet, V. Grandgirard, S. J. Allfrey, P. Ghendrih, G. Latu, Y. Sarazin, and A. Strugarek (2011), Conservation equations and calculation of mean flows in gyrokinetics, *PoP*, *18*(8), 2503.
- Alexakis, A., P. D. Mininni, and A. Pouquet (2006), On the Inverse Cascade of Magnetic Helicity, *ApJ*, *640*(1), 335–343.
- Arge, C. N., and V. J. Pizzo (2000), Improvement in the prediction of solar wind conditions using near-real time solar magnetic field updates, *JGR*, *105*(A), 10,465–10,480.
- Arlt, R., A. Sule, and G. Rüdiger (2005), Three-dimensional stability of the solar tachocline, *Astronomy and Astrophysics*, *441*(3), 1171–1175.
- Bagenal, F. (2007), The magnetosphere of Jupiter: Coupling the equator to the poles, *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, *69*(3), 387–402.
- Balbus, S. A., and J. F. Hawley (1991), A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. II - Nonlinear evolution, *ApJ*, *376*, 214–233.
- Bañón Navarro, A., P. Morel, M. Albrecht-Marc, D. Carati, F. Merz, T. Görler, and F. Jenko (2011), Free Energy Cascade in Gyrokinetic Turbulence, *PRL*, *106*(5), 055,001.
- Barnes, G., P. Charbonneau, and K. B. MacGregor (1999), Angular Momentum Transport in Magnetized Stellar Radiative Zones. III. The Solar Light-Element Abundances, *ApJ*, *511*(1), 466–480.
- Basu, S. (1997), Seismology of the base of the solar convection zone, *MNRAS*, *288*(3), 572–584.
- Basu, S., and H. M. Antia (2003), Changes in Solar Dynamics from 1995 to 2002, *ApJ*, *585*(1), 553–565.
- Beer, M. A., G. W. Hammett, G. Rewoldt, E. J. Synakowski, M. C. Zarnstorff, and W. Dorland (1997), Gyrofluid simulations of turbulence suppression in reversed-shear experiments on the Tokamak Fusion Test Reactor, *PoP*, *4*, 1792.
- Berger, M. A., and G. B. Field (1984), The topological properties of magnetic helicity, *JFM*, *147*, 133.
- Beyer, P., and K. H. Spatschek (1996), Center manifold theory for the dynamics of the L-H-transition, *PoP*, *3*(3), 995–1004.
- Beyer, P., S. Benkadda, G. Fuhr-Chaudier, X. Garbet, P. Ghendrih, and Y. Sarazin (2005), Nonlinear Dynamics of Transport Barrier Relaxations in Tokamak Edge Plasmas, *PRL*, *94*(10), 105,001.
- Beyer, P., S. Benkadda, G. Fuhr-Chaudier, X. Garbet, P. Ghendrih, and Y. Sarazin (2007), Turbulence simulations of transport barrier relaxations in tokamak edge plasmas, *PPCF*, *49*(4), 507–523.
- Bian, N., S. Benkadda, O. E. Garcia, J.-V. Paulsen, and X. Garbet (2003), The quasilinear behavior of convective turbulence with sheared flows, *PoP*, *10*(5), 1382–1388.

- Biglari, H., P. H. Diamond, and P. W. Terry (1990), Influence of sheared poloidal rotation on edge turbulence, *PoF B: Plasma Physics*, 2, 1.
- Biskamp, D. (1993), *Nonlinear magnetohydrodynamics*, Cambridge Monographs on Plasma Physics.
- Blackman, E. G., and A. Brandenburg (2002), Dynamic Nonlinearity in Large-Scale Dynamos with Shear, *ApJ*, 579(1), 359–373.
- Boldyrev, S., J. Mason, and F. Cattaneo (2009), Dynamic Alignment and Exact Scaling Laws in Magnetohydrodynamic Turbulence, *ApJ Letters*, 699(1), L39–L42.
- Boyd, J. P. (1989), Fourier and Chebyshev spectral methods, Berlin : Springer-Verlag.
- Braithwaite, J., and Å. Nordlund (2006), Stable magnetic fields in stellar interiors, *Astronomy and Astrophysics*, 450(3), 1077–1095.
- Brizard, A. J., and T. S. Hahm (2007), Foundations of nonlinear gyrokinetic theory, *Reviews of Modern Physics*, 79, 421.
- Brown, B. P., M. K. Browning, A. S. Brun, M. S. Miesch, and J. Toomre (2010), Persistent Magnetic Wreaths in a Rapidly Rotating Sun, *ApJ*, 711(1), 424–438.
- Brown, B. P., M. S. Miesch, M. K. Browning, A. S. Brun, and J. Toomre (2011), Magnetic Cycles in a Convective Dynamo Simulation of a Young Solar-type Star, *ApJ*, 731(1), 69.
- Browning, M. K. (2008), Simulations of Dynamo Action in Fully Convective Stars, *ApJ*, 676(2), 1262–1280.
- Brun, A. S. (1998), Etude Theorique De La Structure Interne Du Soleil L’Apport De L’Héliosismologie Avec Le Satellite Soho, *PhD Thesis*, pp. 1–199.
- Brun, A. S. (2007), Nonlinear simulations of magnetic instabilities in stellar radiation zones: The role of rotation and shear, *Astro. Nach.*, 328(10), 1137–1141.
- Brun, A. S., and J. Toomre (2002), Turbulent Convection under the Influence of Rotation: Sustaining a Strong Differential Rotation, *ApJ*, 570, 865.
- Brun, A. S., and J.-P. Zahn (2006), Magnetic confinement of the solar tachocline, *Astronomy and Astrophysics*, 457, 665.
- Brun, A. S., M. K. Browning, and J. Toomre (2004a), Looking Deep Within an A-type Star: Core Convection Under the Influence of Rotation, *Stellar Rotation*, 215, 388.
- Brun, A. S., M. S. Miesch, and J. Toomre (2004b), Global-Scale Turbulent Convection and Magnetic Dynamo Action in the Solar Envelope, *ApJ*, 614(2), 1073–1098.
- Brun, A. S., M. K. Browning, and J. Toomre (2005), Simulations of Core Convection in Rotating A-Type Stars: Magnetic Dynamo Action, *ApJ*, 629, 461.
- Brun, A. S., M. S. Miesch, and J. Toomre (2011), Modeling the Dynamical Coupling of Solar Convection with the Radiative Interior, *ApJ*, 742(2), 79.
- Bullard, E., and H. Gellman (1954), Homogeneous Dynamos and Terrestrial Magnetism, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, 247(9), 213–278.

- Burrell, K. H. (1997), Effects of $E \times B$ velocity shear and magnetic shear on turbulence and transport in magnetic confinement devices, *PoP*, 4(5), 1499–1518.
- Cally, P. S. (2003), Three-dimensional magneto-shear instabilities in the solar tachocline, *MNRAS*, 339(4), 957–972.
- Candy, J., R. E. Waltz, and M. N. Rosenbluth (2004), Smoothness of turbulent transport across a minimum- q surface, *PoP*, 11, 1879.
- Cattaneo, F., and D. W. Hughes (2001), Solar dynamo theory : Solar dynamo theory: a new look at the origin of small-scale magnetic fields, *Astronomy & Geophysics*, 42, 18.
- Centeno, R., et al. (2007), Emergence of Small-Scale Magnetic Loops in the Quiet-Sun Internetwork, *ApJ*, 666(2), L137–L140.
- Chandrasekhar, S. (1939), *An introduction to the study of stellar structure*, Chicago.
- Chandrasekhar, S. (1960), The Stability of Non-Dissipative Couette Flow in Hydromagnetics, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 46(2), 253–257.
- Charbonneau, P., J. Christensen-Dalsgaard, R. Henning, R. M. Larsen, J. Schou, M. J. Thompson, and S. Tomczyk (1999a), Helioseismic Constraints on the Structure of the Solar Tachocline, *ApJ*, 527(1), 445–460.
- Charbonneau, P., M. Dikpati, and P. A. Gilman (1999b), Stability of the Solar Latitudinal Differential Rotation Inferred from Helioseismic Data, *ApJ*, 526(1), 523–537.
- Charbonnel, C., and S. Talon (2005), Influence of gravity waves on the internal rotation and Li abundance of solar-type stars, *Science*, 309(5744), 2189.
- Charlton, L. A., B. A. Carreras, V. E. Lynch, K. L. Sidikman, and P. H. Diamond (1994), Bifurcations and modulational interaction in negative compressibility turbulence, *PoP*, 1(8), 2700–2710.
- Chiueh, T., P. W. Terry, P. H. Diamond, and J. E. Sedlak (1986), Effects of a radial electric field on tokamak edge turbulence, *PoF*, 29(1), 231–241.
- Christensen, U. R., and J. Aubert (2006), Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields, *Geophysical Journal International*, 166, 97.
- Christensen-Dalsgaard, J., D. O. Gough, and M. J. Thompson (1991), The depth of the solar convection zone, *ApJ*, 378, 413–437.
- Clayton, D. D. (1968), Principles of stellar evolution and nucleosynthesis, *New York: McGraw-Hill*.
- Clune, T. L., J. R. Elliott, M. S. Miesch, J. Toomre, and G. A. Glatzmaier (1999), Computational aspects of a code to study rotating turbulent convection in spherical shells, *Parallel Computing*, 25(4), 361–380.
- Cohen, O., J. J. Drake, V. L. Kashyap, I. V. Sokolov, and T. I. Gombosi (2010), The Impact of Hot Jupiters on the Spin-Down of Their Host Stars, *ApJ*, 723(1), L64–L67.

- Cohen, O., V. L. Kashyap, J. J. Drake, I. V. Sokolov, C. Garraffo, and T. I. Gombosi (2011), The Dynamics of Stellar Coronae Harboring Hot Jupiters. I. a Time-Dependent Magnetohydrodynamic Simulation of the Interplanetary Environment in the Hd 189733 Planetary System, *ApJ*, 733(1), 67.
- Cohen, O., et al. (2006), A Semiempirical Magnetohydrodynamical Model of the Solar Wind, *ApJ*, 654(2), L163–L166.
- Connor, J. W., T. Fukuda, X. Garbet, C. Gormezano, V. Mukhovatov, and M. Wakatani (2004), REVIEW ARTICLE: A review of internal transport barrier physics for steady-state operation of tokamaks, *NF*, 44, 1.
- Corbard, T., L. Blanc-Féraud, G. Berthomieu, and J. Provost (1999), Non linear regularization for helioseismic inversions. Application for the study of the solar tachocline, *Astronomy and Astrophysics*, 344, 696–708.
- Cowley, S. C., E. Bunce, and R. Prangé (2004), Saturn’s polar ionospheric flows and their relation to the main auroral oval, *Annales Geophysicae*, 22(4), 1379–1394.
- Cox, J. P., and R. T. Giuli (1968), Principles of stellar structure, *New York*, 65.
- Craddock, G. G., P. H. Diamond, M. Ono, and H. Biglari (1994), Theory of ion Bernstein wave induced shear suppression of turbulence, *PoP*, 1(6), 1944–1952.
- Cuntz, M., S. H. Saar, and Z. E. Musielak (2000), On Stellar Activity Enhancement Due to Interactions with Extrasolar Giant Planets, *ApJ*, 533(2), L151–L154.
- Dar, G., M. K. Verma, and V. Eswaran (2001), Energy transfer in two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence: formalism and numerical results, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 157(3), 207–225.
- Davidson, P. A. (2001), *An introduction to magnetohydrodynamics*, cambridge univ pr ed., Cambridge Univ Pr.
- Decressin, T., S. Mathis, A. Palacios, L. Siess, S. Talon, C. Charbonnel, and J.-P. Zahn (2009), Diagnoses to unravel secular hydrodynamical processes in rotating main sequence stars, *Astronomy and Astrophysics*, 495(1), 271–286.
- Denissenkov, P. A., M. Pinsonneault, D. M. Terndrup, and G. Newsham (2010), Angular Momentum Transport in Solar-Type Stars: Testing the Timescale for Core-Envelope Coupling, *ApJ Supp. Series*, 716(2), 1269–1287.
- DeRosa, M. L., A. S. Brun, and J. T. Hoeksema (2011), Dipolar and Quadrupolar Magnetic Field Evolution over Solar Cycles 21, 22, and 23, *Astrophysical Dynamics: From Stars to Galaxies*, 271, 94–101.
- DeRosa, M. L., A. S. Brun, and J. T. Hoeksema (2012), Solar Magnetic Field Reversals and the Role of Dynamo Families, *accepted in ApJ*, pp. 1–17.
- Diamond, P. H., S.-I. Itoh, K. Itoh, and T. S. Hahm (2005), TOPICAL REVIEW: Zonal flows in plasma—a review, *PPCF*, 47, 35.
- Dif-Pradalier, G. (2008), First-principle description of collisional gyrokinetic turbulence in tokamak plasmas, *PhD Thesis*, pp. 1–154.

- Dif-Pradalier, G., V. Grandgirard, Y. Sarazin, X. Garbet, P. Ghendrih, and P. Angelino (2008), On the influence of initial state on gyrokinetic simulations, *PoP*, *15*(4), 2315.
- Dif-Pradalier, G., V. Grandgirard, Y. Sarazin, X. Garbet, and P. Ghendrih (2009), Interplay between Gyrokinetic Turbulence, Flows, and Collisions: Perspectives on Transport and Poloidal Rotation, *PRL*, *103*(6), 65,002.
- Dif-Pradalier, G., et al. (2010), On the validity of the local diffusive paradigm in turbulent plasma transport, *Phys. Rev. E*, *82*(2), 25,401.
- Dikpati, M. (2012), Nonlinear Evolution of Global Hydrodynamic Shallow-Water Instability in the Solar Tachocline, *ApJ Supp. Series*, *745*(2), 128.
- Dikpati, M., and P. S. Cally (2011), Analyses Of Three-dimensional Magnetohydrodynamic Instability of Antisolar Latitudinal Differential Rotation in F, G, and K Stars, *ApJ*, *739*(1), 4.
- Dikpati, M., P. A. Gilman, P. S. Cally, and M. S. Miesch (2009), Axisymmetric MHD Instabilities in Solar/Stellar Tachoclines, *ApJ*, *692*(2), 1421–1431.
- Dikpati, M., P. A. Gilman, and R. K. Ulrich (2010), Physical Origin of Differences Among Various Measures of Solar Meridional Circulation, *ApJ*, *722*(1), 774–778.
- Donati, J.-F., et al. (2008), Magnetic cycles of the planet-hosting star tau Bootis, *MNRAS*, *385*(3), 1179–1185.
- Dong, Y., A. Strugarek, Y. Sarazin, A. S. Brun, X. Garbet, V. Grandgirard, J. Abiteboul, P. Ghendrih, and G. Dif-Pradalier (2012), Spectral transfers in ITG turbulence, *in preparation*.
- Drake, J. F., Y. T. Lau, P. N. Guzdar, A. B. Hassam, S. V. Novakovski, B. Rogers, and A. Zeiler (1996), Local Negative Shear and the Formation of Transport Barriers, *PRL*, *77*, 494.
- Dritschel, D. G., and M. E. McIntyre (2008), Multiple Jets as PV Staircases: The Phillips Effect and the Resilience of Eddy-Transport Barriers, *Journal of the Atmospheric Sciences*, *65*, 855.
- Duez, V. (2011), Numerical simulations of magnetic relaxation in rotating stellar radiation zones, *Astro. Nach.*, *332*(9), 983.
- Duez, V., and S. Mathis (2010), Relaxed equilibrium configurations to model fossil fields . I. A first family, *Astronomy and Astrophysics*, *517*, 58.
- Elliott, J. R., and D. O. Gough (1999), Calibration of the Thickness of the Solar Tachocline, *ApJ*, *516*(1), 475–481.
- Ernst, D. R., et al. (1998), Notched velocity profiles and the radial electric field in high ion temperature plasmas in the Tokamak Fusion Test Reactor, *PoP*, *5*(3), 665–681.
- Fares, R., et al. (2010), Searching for star-planet interactions within the magnetosphere of HD 189733, *MNRAS*, *406*(1), 409–419.
- Farge, M. (1992), Wavelet transforms and their applications to turbulence, *IN: Annual Review of Fluid Mechanics. Vol. 24 (A92-45082 19-34). Palo Alto*, *24*, 395–457.
- Featherstone, N. A., M. K. Browning, A. S. Brun, and J. Toomre (2009), Effects of Fossil Magnetic Fields on Convective Core Dynamos in A-type Stars, *ApJ*, *705*, 1000.

- Ferraro, V. C. A. (1937), The non-uniform rotation of the Sun and its magnetic field, *MNRAS*, *97*, 458.
- Forgács-Dajka, E. (2004), Dynamics of the fast solar tachocline. II. Migrating field, *Astronomy and Astrophysics*, *413*, 1143.
- Forgács-Dajka, E., and K. Petrovay (2001), Tachocline Confinement by an Oscillatory Magnetic Field, *So. Phy.*, *203*, 195.
- Forgács-Dajka, E., and K. Petrovay (2002), Dynamics of the fast solar tachocline. I. Dipolar field, *Astronomy and Astrophysics*, *389*, 629.
- Frick, P., and D. Sokoloff (1998), Cascade and dynamo action in a shell model of magnetohydrodynamic turbulence, *Phys. Rev. E*, *57*(4), 4155–4164.
- Frisch, U. (1995), *Turbulence. The legacy of A. N. Kolmogorov.*, Turbulence. The legacy of A. N. Kolmogorov.
- Frisch, U., A. Pouquet, J. Leorat, and A. Mazure (1975), Possibility of an inverse cascade of magnetic helicity in magnetohydrodynamic turbulence, *JFM*, *68*, 769.
- Fujisawa, A., et al. (2004), Identification of Zonal Flows in a Toroidal Plasma, *PRL*, *93*(16), 165,002.
- Gabriel, A. H. (1976), A magnetic model of the solar transition region, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, *281*, 339–352.
- Garaud, P. (2002), Dynamics of the solar tachocline - I. An incompressible study, *MNRAS*, *329*, 1.
- Garaud, P., and L. Acevedo Arreguin (2009), On the Penetration of Meridional Circulation Below the Solar Convection Zone. II. Models with Convection Zone, the Taylor-Proudman Constraint, and Applications to Other Stars, *ApJ*, *704*, 1.
- Garaud, P., and N. H. Brummell (2008), On the Penetration of Meridional Circulation below the Solar Convection Zone, *ApJ*, *674*(1), 498–510.
- Garaud, P., and J.-D. Garaud (2008), Dynamics of the solar tachocline - II. The stratified case, *MNRAS*, *391*, 1239.
- Garbet, X., Y. Sarazin, P. Beyer, P. Ghendrih, R. E. Waltz, M. Ottaviani, and S. Benkadda (1999), Flux driven turbulence in tokamaks, *NF*, *39*(1), 2063–2068.
- Garbet, X., et al. (2001), Global simulations of ion turbulence with magnetic shear reversal, *PoP*, *8*(6), 2793–2803.
- Garbet, X., et al. (2012), Thermodynamics of neoclassical and turbulent transport, *PPCF*, *54*(5), 5007.
- Gardiner, T. A., and J. M. Stone (2005), An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport, *JCP*, *205*(2), 509–539.
- Ghizaru, M., P. Charbonneau, and P. Smolarkiewicz (2010), Magnetic Cycles in Global Large-eddy Simulations of Solar Convection, *ApJ Letters*, *715*(2), L133–L137.

- Gilman, P. A. (1983), Dynamically consistent nonlinear dynamos driven by convection in a rotating spherical shell. II - Dynamos with cycles and strong feedbacks, *ApJ Supp. Series*, *53*, 243.
- Gilman, P. A., and P. A. Fox (1997), Joint Instability of Latitudinal Differential Rotation and Toroidal Magnetic Fields below the Solar Convection Zone, *ApJ*, *484*, 439.
- Gilman, P. A., and M. S. Miesch (2004), Limits to Penetration of Meridional Circulation below the Solar Convection Zone, *ApJ*, *611*(1), 568–574.
- Gilman, P. A., M. Dikpati, and M. S. Miesch (2007), Global MHD Instabilities in a Three-dimensional Thin-Shell Model of Solar Tachocline, *ApJ Supp. Series*, *170*(1), 203–227.
- Glatzmaier, G. A. (1984), Numerical simulations of stellar convective dynamos. I - The model and method, *JCP*, *55*, 461.
- Goldreich, P., and D. Lynden-Bell (1969), Io, a jovian unipolar inductor, *ApJ*, *156*, 59–78.
- Goldstein, M. L., D. A. Roberts, and W. H. Matthaeus (1995), Magnetohydrodynamic Turbulence In The Solar Wind, *Annual Review of A&A*, *33*, 283–326.
- Gombosi, T. I. (1998), *Physics of the space environment*, Physics of the space environment / Tamas I. Gombosi. Cambridge ; New York : Cambridge University Press.
- Gough, D. O. (1969), The Anelastic Approximation for Thermal Convection., *J. Atmospheric Sci.*, *26*(3), 448–456.
- Gough, D. O., and M. E. McIntyre (1998), Inevitability of a magnetic field in the Sun’s radiative interior, *Nature*, *394*, 755.
- Grandgirard, V., and Y. Sarazin (2012), Gyrokinetic simulations of magnetic fusion plasmas, *Panoramas et synthèses (in press)*.
- Grandgirard, V., et al. (2006), A drift-kinetic Semi-Lagrangian 4D code for ion turbulence simulation, *JCP*, *217*(2), 395–423.
- Grandgirard, V., et al. (2007), Global full-f gyrokinetic simulations of plasma turbulence, *PPCF*, *49*(1), 173.
- Groebner, R. J. (1993), An emerging understanding of H-mode discharges in tokamaks*, *PoF B: Plasma Physics*, *5*(7), 2343–2354.
- Gubbins, D., and K. Zhang (1993), Symmetry properties of the dynamo equations for palaeomagnetism and geomagnetism, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, *75*(4), 225–241.
- Gürçan, Ö., and R. Grappin (2011), Anisotropic shell model of turbulence, *Phys. Rev. E*, *84*(6).
- Gürçan, Ö. D., P. H. Diamond, and T. S. Hahm (2007), Spatial and spectral evolution of turbulence, *PoP*, *14*, 5902.
- Haber, D. A., B. W. Hindman, J. Toomre, R. S. Bogart, R. M. Larsen, and F. Hill (2002), Evolving Submerged Meridional Circulation Cells within the Upper Convection Zone Revealed by Ring-Diagram Analysis, *ApJ*, *570*(2), 855–864.
- Hagenaar, H. J., C. J. Schrijver, and A. M. Title (2003), The Properties of Small Magnetic Regions on the Solar Surface and the Implications for the Solar Dynamo(s), *ApJ*, *584*(2), 1107–1119.

- Hallatschek, K., and D. Biskamp (2001), Transport Control by Coherent Zonal Flows in the Core/Edge Transitional Regime, *PRL*, 86(7), 1223–1226.
- Hansen, C. J., and S. D. Kawaler (1995), *Book Review: Stellar interiors: physical principles, structure, and evolution / Springer-Verlag, 1994*, vol. 48, Physics today.
- Hasegawa, A., C. G. MacLennan, and Y. Kodama (1979), Nonlinear behavior and turbulence spectra of drift waves and Rossby waves, *PoF*, 22, 2122–2129.
- Hassam, A. B., T. M. J. Antonsen, J. F. Drake, and C. S. Liu (1991), Spontaneous poloidal spin-up of tokamaks and the transition to the H mode, *PRL*, 66(3), 309–312.
- Hazeltine, R. D., and J. D. Meiss (1992), *Plasma Confinement*, Dover Books on Physics Series, Dover Publications.
- Hinton, F. L., and R. D. Hazeltine (1976), Theory of plasma transport in toroidal confinement systems, *Reviews of Modern Physics*, 48, 239.
- Hinton, F. L., and G. M. Staebler (1993), Particle and energy confinement bifurcation in tokamaks, *PoF B: Plasma Physics*, 5(4), 1281–1288.
- Hughes, W. J. (1995), *Hughes: The magnetopause, magnetotail, and magnetic... - Google Scholar*, Introduction to Space Physics.
- Idomura, Y. (2006), Self-organization in electron temperature gradient driven turbulence, *PoP*, 13(8), 0701.
- Idomura, Y., H. Urano, N. Aiba, and S. Tokuda (2009), Study of ion turbulent transport and profile formations using global gyrokinetic full-f Vlasov simulation, *NF*, 49, 5029.
- Ip, W.-H., A. Kopp, and J.-H. Hu (2004), On the Star-Magnetosphere Interaction of Close-in Exoplanets, *ApJ*, 602(1), L53–L56.
- ITER Physics Expert Groups on Confinement, T. C. M. D., I. P. B. Editors, and I. EDA (1999), Chapter 2: Plasma confinement and transport, *NF*, 39(1), 2175–2249.
- Itoh, K., K. Hallatschek, and S.-I. Itoh (2005), Excitation of geodesic acoustic mode in toroidal plasmas, *PPCF*, 47(3), 451–458.
- Ivers, D. J., and C. G. Phillips (2008), Scalar and vector spherical harmonic spectral equations of rotating magnetohydrodynamics, *Geophysical Journal International*, 175(3), 955–974.
- Jackson, G. L., et al. (1991), Regime of very high confinement in the boronized DIII-D tokamak, *PRL*, 67(2), 3098–3101.
- Jia, X., R. J. Walker, M. G. Kivelson, K. K. Khurana, and J. A. Linker (2008), Three-dimensional MHD simulations of Ganymede’s magnetosphere, *JGR*, 113(A), 06,212.
- Jia, X., K. C. Hansen, T. I. Gombosi, M. G. Kivelson, G. Tóth, D. L. DeZeeuw, and A. J. Ridley (2012), Magnetospheric configuration and dynamics of Saturn’s magnetosphere: A global MHD simulation, *JGR*, 117(A), 05,225.
- Joffrin, E., et al. (2002), Triggering of internal transport barrier in JET, *PPCF*, 44, 1739.
- Joffrin, E., et al. (2003), Internal transport barrier triggering by rational magnetic flux surfaces in tokamaks, *NF*, 43, 1167.

- Jouve, L., and A. S. Brun (2009), Three-Dimensional Nonlinear Evolution of a Magnetic Flux Tube in a Spherical Shell: Influence of Turbulent Convection and Associated Mean Flows, *ApJ*, *701*(2), 1300–1322.
- Käpylä, P. J., M. J. Mantere, and A. Brandenburg (2012), Cyclic Magnetic Activity Due to Turbulent Convection in Spherical Wedge Geometry, *ApJ*, *755*(1), L22.
- Keppens, R., and J. P. Goedbloed (1999), Numerical simulations of stellar winds: polytropic models, *Astronomy and Astrophysics*, *343*, 251–260.
- Keppens, R., and J. P. Goedbloed (2000), Stellar Winds, Dead Zones, and Coronal Mass Ejections, *ApJ*, *530*(2), 1036–1048.
- Kim, E.-J. (2005), Self-consistent theory of turbulent transport in the solar tachocline. I. Anisotropic turbulence, *Astronomy and Astrophysics*, *441*, 763.
- Kim, E.-J., and P. H. Diamond (2003), Mean shear flows, zonal flows, and generalized Kelvin–Helmholtz modes in drift wave turbulence: A minimal model for L-H transition, *PoP*, *10*(5), 1698.
- Kim, E.-J., and N. Leprovost (2007), Self-consistent theory of turbulent transport in the solar tachocline. III. Gravity waves, *Astronomy and Astrophysics*, *468*, 1025.
- Kim, E.-J., and K. B. MacGregor (2001), Gravity Wave-driven Flows in the Solar Tachocline, *ApJ*, *556*(2), L117–L120.
- Kim, E.-J., and K. B. MacGregor (2003), Gravity Wave-driven Flows in the Solar Tachocline. II. Stationary Flows, *ApJ*, *588*(1), 645–654.
- Kim, Y. B., P. H. Diamond, and R. J. Groebner (1991), Neoclassical poloidal and toroidal rotation in tokamaks, *PoF B: Plasma Physics*, *3*(8), 2050–2060.
- Kinsey, J. E., R. E. Waltz, and J. Candy (2007), The effect of plasma shaping on turbulent transport and ExB shear quenching in nonlinear gyrokinetic simulations, *PoP*, *14*(1), 2306.
- Kippenhahn, R., and A. Weigert (1994), *Stellar structure and evolution*, springer verlag ed., Springer Verlag.
- Kivelson, M. G., K. K. Khurana, F. V. Coroniti, S. Joy, C. T. Russell, R. J. Walker, J. Warnecke, L. Bennett, and C. Polansky (1997), Magnetic field and magnetosphere of Ganymede, *Geophysical Research Letters*, *24*, 2155.
- Kivelson, M. G., F. Bagenal, W. S. Kurth, F. M. Neubauer, C. Paranicas, and J. Saur (2004), Magnetospheric interactions with satellites, *In: Jupiter. The planet*, pp. 513–536.
- Koide, Y., and t. JT-60 Team (1997), Progress in confinement and stability with plasma shape and profile control for steady-state operation in the Japan Atomic Energy Research Institute Tokamak-60 Upgrade, *PoP*, *4*(5), 1623–1631.
- Koide, Y., et al. (1994), Internal transport barrier on q=3 surface and poloidal plasma spin up in JT-60U high-beta_p discharges, *PRL*, *72*, 3662.
- Koide, Y., et al. (1996), Internal transport barrier with improved confinement in the JT-60U tokamak, *PoP*, *38*(7), 1011–1022.
- Kosovichev, A. G. (1996), Helioseismic Constraints on the Gradient of Angular Velocity at the Base of the Solar Convection Zone, *Astrophysical Journal Letters v.469*, *469*, L61.

- Kudritzki, R.-P., and J. Puls (2000), Winds from Hot Stars, *Annual Review of A&A*, 38, 613–666.
- Labonte, B. J., and R. Howard (1982), Solar rotation measurements at Mount Wilson. III - Meridional flow and limbshift, *So. Phy.*, 80, 361–372.
- Lamers, H. J. G. L. M., and J. P. Cassinelli (1999), *Introduction to Stellar Winds*, Introduction to Stellar Winds, Universiteit Utrecht, The Netherlands.
- Lanford, O. E. (1975), Time evolution of large classical systems, *Dynamical Systems*, 38, 1–111.
- Lantz, S. R., and Y. Fan (1999), Anelastic Magnetohydrodynamic Equations for Modeling Solar and Stellar Convection Zones, *ApJ Supp. Series*, 121(1), 247–264.
- Lanza, A. F. (2008), Hot Jupiters and stellar magnetic activity, *Astronomy and Astrophysics*, 487(3), 1163–1170.
- Lanza, A. F. (2009), Stellar coronal magnetic fields and star-planet interaction, *Astronomy and Astrophysics*, 505(1), 339–350.
- Lao, L. L., et al. (1993), High internal inductance improved confinement H-mode discharges obtained with an elongation ramp technique in the DIII-D tokamak, *PRL*, 70(2), 3435–3438.
- Leblanc, B., et al. (1995), Active core profile and transport modification by application of ion Bernstein wave power in the Princeton Beta Experiment-Modification, *PoP*, 2(3), 741–751.
- Leblanc, B. P., et al. (1999), Direct Observation of Ion-Bernstein-Wave-Induced Poloidal Flow in TFTR, *PRL*, 82(2), 331–334.
- Leprovost, N., and E.-J. Kim (2006), Self-consistent theory of turbulent transport in the solar tachocline. II. Tachocline confinement, *Astronomy and Astrophysics*, 456, 617.
- Lesieur, M. (2008), *Turbulence in fluids*, Springer Verlag.
- Lesur, G., and P.-Y. Longaretti (2011), Non-linear energy transfers in accretion discs MRI turbulence. I. Net vertical field case, *Astronomy and Astrophysics*, 528, 17.
- Lima, J. J. G., and E. R. Priest (1993), Two-dimensional models for solar and stellar winds - Hydrodynamic effects, *A&A*, 268, 641–649.
- Livermore, P. W., D. W. Hughes, and S. M. Tobias (2010), Nonlinear generation of large-scale magnetic fields in forced spherical shell dynamos, *PoF*, 22(3), 7101.
- Lovelace, R. V. E., C. Mehanian, C. M. Mobarry, and M. E. Sulkanen (1986), Theory of axisymmetric magnetohydrodynamic flows - Disks, *ApJ Supp. Series*, 62, 1–37.
- MacGregor, K. B., and T. M. Rogers (2011), Reflection and Ducting of Gravity Waves Inside the Sun, *So. Phy.*, 270(2), 417–436.
- Maeder, A., and G. Meynet (2003), Stellar evolution with rotation and magnetic fields. I. The relative importance of rotational and magnetic effects, *Astronomy and Astrophysics*, 411, 543–552.
- Maget, P., X. Garbet, A. Géraud, and E. Joffrin (1999), Drift wave stability of PEP discharges in Tore Supra, *NF*, 39(7), 949–962.
- Malkov, M. A., and P. H. Diamond (2008), Analytic theory of L→H transition, barrier structure, and hysteresis for a simple model of coupled particle and heat fluxes, *PoP*, 15, 2301.

- Mantica, P., et al. (2009), Experimental Study of the Ion Critical-Gradient Length and Stiffness Level and the Impact of Rotation in the JET Tokamak, *PRL*, *102*(1), 175,002.
- Mantica, P., et al. (2011), A Key to Improved Ion Core Confinement in the JET Tokamak: Ion Stiffness Mitigation due to Combined Plasma Rotation and Low Magnetic Shear, *PRL*, *107*(1), 135,004.
- Marsch, E. (2006), Kinetic Physics of the Solar Corona and Solar Wind, *Living Review on Solar Physics*, *3*, 1.
- Mathis, S., and N. de Brye (2012), Low-frequency internal waves in magnetized rotating stellar radiation zones. II. Angular momentum transport with a toroidal field, *Astronomy and Astrophysics*, *540*, 37.
- Mathis, S., and J.-P. Zahn (2005), Transport and mixing in the radiation zones of rotating stars. II. Axisymmetric magnetic field, *Astronomy and Astrophysics*, *440*, 653.
- Mathis, S., S. Talon, F. P. Pantillon, and J.-P. Zahn (2008), Angular Momentum Transport in the Sun's Radiative Zone by Gravitational-Inertial Waves, *So. Phy.*, *251*(1), 101–118.
- Matt, S., and B. Balick (2004), Simultaneous Production of Disk and Lobes: A Single-Wind MHD Model for the eta Carinae Nebula, *ApJ*, *615*(2), 921–933.
- Matt, S., and R. E. Pudritz (2008), Accretion-powered Stellar Winds. II. Numerical Solutions for Stellar Wind Torques, *ApJ*, *678*(2), 1109–1118.
- Matt, S., R. Pinto, A. Strugarek, A. A. Vidotto, and A. S. Brun (2012), Wind benchmark, *in preparation*.
- Matthaeus, W. H., and D. Montgomery (1980), Selective decay hypothesis at high mechanical and magnetic Reynolds numbers, *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, *357*, 203–222.
- McFadden, P. L., R. T. Merrill, M. W. McElhinny, and S. Lee (1991), Reversals of the earth's magnetic field and temporal variations of the dynamo families, *JGR*, *96*, 3923.
- McIntyre, M. E. (2003), Solar tachocline dynamics: eddy viscosity, anti-friction, or something in between?, *In: Stellar astrophysical fluid dynamics. Edited by Michael J. Thompson*, pp. 111–130.
- McIntyre, M. E. (2007), Magnetic confinement and the sharp tachopause, *The Solar Tachocline*, p. 183.
- McMillan, B. F., S. Jolliet, T. M. Tran, L. Villard, A. Bottino, and P. Angelino (2009), Avalanche-like bursts in global gyrokinetic simulations, *PoP*, *16*(2), 2310.
- McMillan, B. F., P. Hill, A. Bottino, S. Jolliet, T. Vernay, and L. Villard (2011), Interaction of large scale flow structures with gyrokinetic turbulence, *PoP*, *18*(11), 112,503.
- Mestel, L., and H. S. Takhar (1972), The internal Dynamics of the Oblique Rotator, *MNRAS*, *156*, 419.
- Mestel, L., and N. O. Weiss (1987), Magnetic fields and non-uniform rotation in stellar radiative zones, *MNRAS*, *226*, 123–135.
- Miesch, M. S. (2003), Numerical Modeling of the Solar Tachocline. II. Forced Turbulence with Imposed Shear, *ApJ*, *586*, 663.

- Miesch, M. S. (2005), Large-Scale Dynamics of the Convection Zone and Tachocline, *Living Review on Solar Physics*, 2, 1.
- Miesch, M. S. (2007), Sustained Magnetoshear Instabilities in the Solar Tachocline, *ApJ*, 658, L131.
- Miesch, M. S., and B. W. Hindman (2011), Gyroscopic Pumping in the Solar Near-surface Shear Layer, *ApJ*, 743(1), 79.
- Miesch, M. S., J. R. Elliott, J. Toomre, T. L. Clune, G. A. Glatzmaier, and P. A. Gilman (2000), Three-dimensional Spherical Simulations of Solar Convection. I. Differential Rotation and Pattern Evolution Achieved with Laminar and Turbulent States, *ApJ*, 532(1), 593–615.
- Miesch, M. S., A. S. Brun, and J. Toomre (2006), Solar Differential Rotation Influenced by Latitudinal Entropy Variations in the Tachocline, *ApJ*, 641, 618.
- Mignone, A., G. Bodo, S. Massaglia, T. Matsakos, O. Tesileanu, C. Zanni, and A. Ferrari (2007), PLUTO: A Numerical Code for Computational Astrophysics, *ApJ Supp. Series*, 170(1), 228–242.
- Miki, K., and P. H. Diamond (2011), Novel states of pre-transition edge turbulence emerging from shearing mode competition, *NF*, 51(1), 3003.
- Mininni, P. D., A. Alexakis, and A. Pouquet (2005), Shell-to-shell energy transfer in magneto-hydrodynamics. II. Kinematic dynamo, *Phys. Rev. E*, 72(4), 46,302.
- Montgomery, D., and L. Phillips (1989), MHD turbulence: relaxation processes and variational principles, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 37(1), 215–226.
- Nakata, M., T.-H. Watanabe, and H. Sugama (2012), Nonlinear entropy transfer via zonal flows in gyrokinetic plasma turbulence, *PoP*, 19(2), 022,303.
- Nelson, N. J., B. P. Brown, A. S. Brun, M. S. Miesch, and J. Toomre (2012), Magnetic Wreaths and Cycles in Convective Dynamos, *submitted to ApJ*, pp. 1–22.
- Neubauer, F. M. (1980), Nonlinear standing Alfvén wave current system at Io - Theory, *JGR*, 85, 1171–1178.
- Ono, M., et al. (1988), Effects of high-power ion Bernstein waves on a tokamak plasma, *PRL*, 60(4), 294–297.
- Parker, E. N. (1958), Dynamics of the Interplanetary Gas and Magnetic Fields., *ApJ*, 128, 664.
- Petit, P., B. Dintrans, A. Morgenthaler, V. van Grootel, J. Morin, J. Lanoux, M. Aurière, and R. Konstantinova-Antova (2009), A polarity reversal in the large-scale magnetic field of the rapidly rotating sun HD 190771, *Astronomy and Astrophysics*, 508(1), L9–L12.
- Plunk, G. G., and T. Tatsuno (2011), Energy Transfer and Dual Cascade in Kinetic Magnetized Plasma Turbulence, *PRL*, 106(16), 165,003.
- Pneuman, G. W., and R. A. Kopp (1971), Gas-Magnetic Field Interactions in the Solar Corona, *So. Phy.*, 18(2), 258–270.
- Politano, H., and A. Pouquet (1998), Dynamical length scales for turbulent magnetized flows, *Geophysical Research Letters*, 25(3), 273–276.

- Pouquet, A., U. Frisch, and J. Leorat (1976), Strong MHD helical turbulence and the nonlinear dynamo effect, *JFM*, *77*, 321.
- Pouquet, A., M.-E. Brachet, E. Lee, P. D. Mininni, D. Rosenberg, and V. Uritsky (2011), Lack of universality in MHD turbulence, and the possible emergence of a new paradigm?, *Astrophysical Dynamics: From Stars to Galaxies*, *271*, 304–316.
- Prangé, R., D. Rego, D. Southwood, P. Zarka, S. Miller, and W. Ip (1996), Rapid energy dissipation and variability of the Io-Jupiter electrodynamic circuit, *Nature*, *379*(6), 323–325.
- Preusse, S., A. Kopp, J. Büchner, and U. Motschmann (2006), A magnetic communication scenario for hot Jupiters, *Astronomy and Astrophysics*, *460*(1), 317–322.
- Racine, É., P. Charbonneau, M. Ghizaru, A. Bouchat, and P. Smolarkiewicz (2011), On the Mode of Dynamo Action in a Global Large-Eddy Simulation of Solar Convection, *ApJ*, *735*(1), 46–46.
- Rast, M. P. (2003), The Scales of Granulation, Mesogranulation, and Supergranulation, *ApJ*, *597*(2), 1200–1210.
- Reese, D., F. Lignières, and M. Rieutord (2006), Acoustic oscillations of rapidly rotating polytropic stars. II. Effects of the Coriolis and centrifugal accelerations, *Astronomy and Astrophysics*, *455*(2), 621–637.
- Rhines, P. B. (1975), Waves and turbulence on a beta-plane, *JFM*, *69*, 417–443.
- Rice, B. W., et al. (1996), Demonstration of high-performance negative central magnetic shear discharges in the DIII-D tokamak, *PoP*, *3*(5), 1983–1991.
- Rieutord, M. (1987), Linear theory of rotating fluids using spherical harmonics part I: Steady flows, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, *39*, 163.
- Rieutord, M. (2006), The dynamics of the radiative envelope of rapidly rotating stars. I. A spherical Boussinesq model, *Astronomy and Astrophysics*, *451*(3), 1025–1036.
- Rieutord, M., and F. Rincon (2010), The Sun’s Supergranulation, *Living Review on Solar Physics*, *7*, 2.
- Rincon, F. (2006), Anisotropy, inhomogeneity and inertial-range scalings in turbulent convection, *JFM*, *563*, 43.
- Roberts, P. H., and M. Stix (1972), Ac-Effect Dynamos, by the Buliard-Geffman Formalism, *Astronomy and Astrophysics*, *18*, 453.
- Roe, P. L. (1986), Characteristic-based schemes for the Euler equations, *IN: Annual review of fluid mechanics. Volume 18 (A86-29410 12-34). Palo Alto*, *18*, 337–365.
- Rogers, T. M. (2011), On Limiting the Thickness of the Solar Tachocline, *ApJ*, *733*(1), 12.
- Rogers, T. M., and K. B. MacGregor (2010), On the interaction of internal gravity waves with a magnetic field - II. Convective forcing, *MNRAS*, *410*(2), 946–962.
- Rüdiger, G., and L. L. Kitchatinov (1997), The slender solar tachocline: a magnetic model, *Astro. Nach.*, *318*, 273.
- Rüdiger, G., and L. L. Kitchatinov (2007), Structure and stability of the magnetic solar tachocline, *NJP*, *9*, 302.

- Sarazin, Y., X. Garbet, P. Ghendrih, and S. Benkadda (2000), Transport due to front propagation in tokamaks, *PoP*, 7(4), 1085–1088.
- Sarazin, Y., V. Grandgirard, G. Dif-Pradalier, X. Garbet, and P. Ghendrih (2006), Interplay between transport barriers and density gradient, *PoP*, 13(9), 2307.
- Sarazin, Y., V. Grandgirard, J. Abiteboul, S. J. Allfrey, X. Garbet, P. Ghendrih, G. Latu, A. Strugarek, and G. Dif-Pradalier (2010a), Large scale dynamics in flux driven gyrokinetic turbulence, *NF*, 50(5), 4004.
- Sarazin, Y., A. Strugarek, G. Dif-Pradalier, J. Abiteboul, S. J. Allfrey, X. Garbet, P. Ghendrih, V. Grandgirard, and G. Latu (2010b), Flux-driven gyrokinetic simulations of ion turbulent transport at low magnetic shear, *Journal of Physics: Conference Series*, 260(1), 2017.
- Sarazin, Y., et al. (2002), Edge issues in ITB plasmas in JET, *PPCF*, 44(1), 2445–2469.
- Sarazin, Y., et al. (2008), Turbulence spectra and transport barriers in gyrokinetic simulations, *Varenna*, pp. 1–6.
- Sarazin, Y., et al. (2011), Predictions on heat transport and plasma rotation from global gyrokinetic simulations, *NF*, 51(10), 103,023.
- Schatzman, E., J.-P. Zahn, and P. Morel (2000), Shear turbulence beneath the solar tachocline, *Astronomy and Astrophysics*, 364, 876–878.
- Schatzman, E. L., and F. Praderie (1990), Les étoiles, *Paris : InterEditions : Editions du CNRS*.
- Schekochihin, A. A., S. C. Cowley, S. F. Taylor, J. L. Maron, and J. C. McWilliams (2004), Simulations of the Small-Scale Turbulent Dynamo, *ApJ*, 612(1), 276–307.
- Schekochihin, A. A., S. C. Cowley, W. Dorland, G. W. Hammett, G. G. Howes, G. G. Plunk, E. Quataert, and T. Tatsuno (2008), Gyrokinetic turbulence: a nonlinear route to dissipation through phase space, *PPCF*, 50, 4024.
- Schou, J., et al. (1998), Helioseismic Studies of Differential Rotation in the Solar Envelope by the Solar Oscillations Investigation Using the Michelson Doppler Imager, *ApJ*, 505, 390.
- Schrijver, C., and M. DeRosa (2003), Photospheric and heliospheric magnetic fields, *So. Phy.*, 212(1), 165–200.
- Schrinner, M., L. Petitdemange, and E. Dormy (2012), Dipole Collapse and Dynamo Waves in Global Direct Numerical Simulations, *ApJ*, 752(2), 121.
- Scott, B. D., P. W. Terry, and P. H. Diamond (1988), Saturation of Kelvin-Helmholtz fluctuations in a sheared magnetic field, *PoF*, 31(6), 1481–1491.
- Shaikh, D., B. Dasgupta, G. P. Zank, and Q. Hu (2008), Theory and simulations of principle of minimum dissipation rate, *PoP*, 15, 2306.
- Shaing, K. C., and E. C. J. Crume (1989), Bifurcation theory of poloidal rotation in tokamaks: A model for L-H transition, *PRL*, 63(2), 2369–2372.
- Simitev, R. D., and F. H. Busse (2009), Bistability and hysteresis of dipolar dynamos generated by turbulent convection in rotating spherical shells, *Europhys. Lett.*, 85(1), 19,001.
- Spiegel, E. A., and G. Veronis (1960), On the Boussinesq Approximation for a Compressible Fluid., *ApJ*, 131, 442.

- Spiegel, E. A., and J.-P. Zahn (1992), The solar tachocline, *Astronomy and Astrophysics*, 265, 106.
- Starr, V. (1968), *Physics of negative viscosity phenomena*, McGraw-Hill (New York).
- Stevenson, P. D. (2002), Analytic angular momentum coupling coefficient calculators, *Computer Physics Communications*, 147(3), 853–858.
- Stix, M. (2002), The sun: an introduction, *The sun : an introduction – 2nd ed. /Michael Stix. Berlin : Springer.*
- Strachan, J. D., et al. (1987), High-temperature plasmas in a tokamak fusion test reactor, *PRL*, 58(1), 1004–1007.
- Stringer, T. E. (1969), Diffusion in Toroidal Plasmas with Radial Electric Field, *PRL*, 22(1), 770–774.
- Strugarek, A., A. S. Brun, and J.-P. Zahn (2011a), Magnetic confinement of the solar tachocline: II. Coupling to a convection zone, *Astronomy and Astrophysics*, 532, 34.
- Strugarek, A., A. S. Brun, and J.-P. Zahn (2011b), Magnetic confinement of the solar tachocline: The oblique dipole, *Astro. Nach.*, 332(9), 891.
- Strugarek, A., A. S. Brun, S. Mathis, and Y. Sarazin (2012a), Magnetic Energy Cascade in Spherical Geometry: I. the Stellar Convective Dynamo Case., *to appear in ApJ*, pp. 1–24.
- Strugarek, A., A. S. Brun, and J.-P. Zahn (2012b), in preparation, *Astronomy and Astrophysics*.
- Strugarek, A., et al. (2012c), Internal Transport Barriers and ExB Shear in Gyrokinetic Simulations, *to be submitted to PRL*.
- Sule, A., G. Rüdiger, and R. Arlt (2005), A numerical MHD model for the solar tachocline with meridional flow, *Astronomy and Astrophysics*, 437(3), 1061–1067.
- Suzuki, T. K., and S.-i. Inutsuka (2006), Solar winds driven by nonlinear low-frequency Alfvén waves from the photosphere: Parametric study for fast/slow winds and disappearance of solar winds, *JGR*, 111(A), 06,101.
- Talon, S., P. Kumar, and J.-P. Zahn (2002), Angular Momentum Extraction by Gravity Waves in the Sun, *ApJ*, 574(2), L175–L178.
- Tatsuno, T., W. Dorland, A. A. Schekochihin, G. G. Plunk, M. Barnes, S. C. Cowley, and G. G. Howes (2009), Nonlinear Phase Mixing and Phase-Space Cascade of Entropy in Gyrokinetic Plasma Turbulence, *PRL*, 103, 15,003.
- Tayler, R. J. (1973), The adiabatic stability of stars containing magnetic fields-I. Toroidal fields, *MNRAS*, 161, 365.
- Taylor, J. B. (1974), Relaxation of Toroidal Plasma and Generation of Reverse Magnetic Fields, *PRL*, 33(1), 1139–1141.
- Taylor, R. J., M. L. Brown, B. D. Fried, H. Grote, J. R. Liberati, G. J. Morales, P. Pribyl, D. Darrow, and M. Ono (1989), H-mode behavior induced by cross-field currents in a tokamak, *PRL*, 63(2), 2365–2368.
- Terry, P. W. (2000), Suppression of turbulence and transport by sheared flow, *Reviews of Modern Physics*, 72, 109.

- Thompson, M. J., J. Christensen-Dalsgaard, M. S. Miesch, and J. Toomre (2003), The Internal Rotation of the Sun, *Annual Review of A&A*, *41*, 599.
- Thyagaraja, A. (1998), A spectral approach to ballooning theory. Part 1, *JoP*, *59*, 367.
- Tobias, S. M., and F. Cattaneo (2008), Dynamo action in complex flows: the quick and the fast, *JFM*, *601*, 101–122.
- Tobias, S. M., P. H. Diamond, and D. W. Hughes (2007), Beta-Plane Magnetohydrodynamic Turbulence in the Solar Tachocline, *ApJ*, *667*, L113.
- Tobias, S. M., F. Cattaneo, and N. H. Brummell (2011), On the Generation of Organized Magnetic Fields, *ApJ*, *728*, 153.
- Tsinganos, K., and C. Sauty (1992a), Nonradial and nonpolytropic astrophysical outflows. I - Hydrodynamic solutions with flaring streamlines, *Astronomy and Astrophysics*, *255*, 405–419.
- Tsinganos, K., and C. Sauty (1992b), Nonradial and nonpolytropic astrophysical outflows. II - Topology of MHD solutions with flaring streamlines, *Astronomy and Astrophysics*, *257*, 790–806.
- ud Doula, A., and S. P. Owocki (2002), Dynamical Simulations of Magnetically Channeled Line-driven Stellar Winds. I. Isothermal, Nonrotating, Radially Driven Flow, *ApJ*, *576*(1), 413–428.
- Ulrich, R. K. (2010), Solar Meridional Circulation from Doppler Shifts of the Fe I Line at 5250 Å as Measured by the 150-foot Solar Tower Telescope at the Mt. Wilson Observatory, *ApJ*, *725*(1), 658–669.
- Ustyugova, G. V., A. V. Koldoba, M. M. Romanova, V. M. Chechetkin, and R. V. E. Lovelace (1999), Magnetocentrally Driven Winds: Comparison of MHD Simulations with Theory, *ApJ*, *516*(1), 221–235.
- Vallis, G. K. (2006), *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*, Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics.
- Vallis, G. K., and M. E. Maltrud (1993), Generation of Mean Flows and Jets on a Beta Plane and over Topography, *Journal of Physical Oceanography*, *23*, 1346.
- van Leer, B. (1977), Towards the ultimate conservative difference scheme. III - Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow. IV - A new approach to numerical convection, *JCP*, *23*, 263–299.
- Varshalovich, A., A. N. Moskalev, and V. K. Khersonskii (1988), Quantum theory of angular momentum, *Leningrad*, p. 514.
- Velli, M. (1994), From supersonic winds to accretion: Comments on the stability of stellar winds and related flows, *ApJ*, *432*, L55–L58.
- Verma, M. K., A. Ayyer, and A. V. Chandra (2005), Energy transfers and locality in magnetohydrodynamic turbulence, *PoP*, *12*, 2307.
- Vidotto, A. A., M. Opher, V. Jatenco-Pereira, and T. I. Gombosi (2009), Simulations of Winds of Weak-Lined T Tauri Stars: The Magnetic Field Geometry and the Influence of the Wind on Giant Planet Migration, *ApJ*, *703*(2), 1734–1742.

- Vidotto, A. A., R. Fares, M. Jardine, J.-F. Donati, M. Opher, C. Moutou, C. Catala, and T. I. Gombosi (2012), The stellar wind cycles and planetary radio emission of the Tau Boo system, *arXiv*, 1204, 3843.
- Waltz, R. E., G. D. Kerbel, and J. Milovich (1994), Toroidal gyro-Landau fluid model turbulence simulations in a nonlinear ballooning mode representation with radial modes, *PoP*, 1, 2229.
- Waltz, R. E., R. L. Dewar, and X. Garbet (1998), Theory and simulation of rotational shear stabilization of turbulence, *PoP*, 5, 1784.
- Wang, X.-H., P. H. Diamond, and M. N. Rosenbluth (1992), Stability of ion-temperature-gradient-driven modes in the presence of sheared poloidal flows, *PoF B: Plasma Physics*, 4, 2402.
- Wang, Y.-M., and N. R. J. Sheeley (1990), Solar wind speed and coronal flux-tube expansion, *ApJ*, 355, 726–732.
- Washimi, H., and S. Shibata (1993), Thermo-centrifugal wind from a rotating magnetic dipole, *MNRAS*, 262, 936–944.
- Watanabe, T.-H., and H. Sugama (2006), Velocity space structures of distribution function in toroidal ion temperature gradient turbulence, *NF*, 46, 24.
- Watson, M. (1981), Shear instability of differential rotation in stars, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 16, 285–298.
- Weber, E. J., and L. J. Davis (1967), The Angular Momentum of the Solar Wind, *ApJ Supp. Series*, 148, 217.
- Wedemeyer-Böhm, S., A. Lagg, and Å. Nordlund (2009), Coupling from the Photosphere to the Chromosphere and the Corona, *Space Sci Rev*, 144(1), 317–350.
- Weynants, R. R., and G. Van Oost (1993), Edge biasing in tokamaks, *PPCF*, 35, 177–B189.
- Wolf, R. C. (2003), TOPICAL REVIEW: Internal transport barriers in tokamak plasmas*Internal transport barriers in tokamak plasmas, *PPCF*, 45, 1.
- Wolf, R. C., et al. (2001), Performance, heating and current drive scenarios of ASDEX Upgrade advanced tokamak discharges, *NF*, 41(9), 1259–1271.
- Wood, B. E. (2004), Astrospheres and Solar-like Stellar Winds, *Living Review on Solar Physics*, 1, 2.
- Wood, T. S., and P. Garaud (2011), The Sun’s Meridional Circulation and Interior Magnetic Field, *ApJ*, 738(1), 47.
- Wood, T. S., and M. E. McIntyre (2011), Polar confinement of the Sun’s interior magnetic field by laminar magnetostrophic flow, *JFM*, 677, 445–482.
- Zahn, J.-P., S. Talon, and J. Matias (1997), Angular momentum transport by internal waves in the solar interior., *Astronomy and Astrophysics*, 322, 320.
- Zahn, J.-P., A. S. Brun, and S. Mathis (2007), On magnetic instabilities and dynamo action in stellar radiation zones, *Astronomy and Astrophysics*, 474, 145.
- Zanni, C., and J. Ferreira (2009), MHD simulations of accretion onto a dipolar magnetosphere. I. Accretion curtains and the disk-locking paradigm, *Astronomy and Astrophysics*, 508, 1117.

- Zarka, P. (2004), Fast radio imaging of Jupiter's magnetosphere at low-frequencies with LOFAR, *Planetary and Space Science*, 52(1), 1455–1467.
- Zarka, P. (2007), Plasma interactions of exoplanets with their parent star and associated radio emissions, *Planetary and Space Science*, 55(5), 598–617.
- Zarzoso, D. (2012), *PhD Thesis*.
- Zarzoso, D., X. Garbet, Y. Sarazin, R. Dumont, and V. Grandgirard (2012), Fully kinetic description of the linear excitation and nonlinear saturation of fast-ion-driven geodesic acoustic mode instability, *PoP*, 19(2), 2102.

Notations et symboles

Sommaire

A.1 Systèmes de coordonnées	229
A.2 Symboles	231
A.3 Nombres sans dimension	232

Cette thèse s’inscrit à l’interface entre deux communautés de physiciens dont le langage commun est celui de la physique des plasmas. Par conséquent, certaines notations sont naturelles pour certains et sont du “jargon” pour d’autres. Cette annexe est dédiée à expliciter les différentes notations utilisées à travers les chapitres de ce manuscrit.

A.1 Systèmes de coordonnées

Trois principaux systèmes de coordonnées sont utilisés. Nous donnons ci-dessous leur expression dans le repère cartésien.

(a) **Le système sphérique :**

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{z}{r}\right) \\ \varphi = \arccos\left(\frac{y}{x}\right) \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_r = \sin\theta \cos\varphi \mathbf{e}_x + \sin\theta \sin\varphi \mathbf{e}_y + \cos\theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \mathbf{e}_x + \cos\theta \sin\varphi \mathbf{e}_y - \sin\theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\varphi = -\sin\theta \cos\varphi \mathbf{e}_x + \cos\varphi \mathbf{e}_y \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

Ce système de coordonnées est généralement utilisé dans les études stellaires (chapitres 4 et 8).

(b) **Le système cylindrique¹ :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \varpi = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan 2(y, x) \\ z = z \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_\varpi = \cos\theta \mathbf{e}_x + \sin\theta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\varphi = -\sin\theta \mathbf{e}_x + \cos\theta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

Ce système de coordonnées est utilisé à la fois dans les problèmes d’interactions étoiles-planètes (chapitre 5), et dans le cadre des tokamaks (chapitres 6, 7 et 8).

(c) **Le système torique local :**

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{z}{r}\right) \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

Ce système est uniquement utilisé dans le cadre des applications aux tokamaks.

Nous représentons schématiquement les trois systèmes de coordonnées en figure A.1.

1. La fonction $\arctan 2$ est la fonction \arctan modifiée pour prendre en compte le quadrant. La plupart des langages de programmation proposent cette fonction.

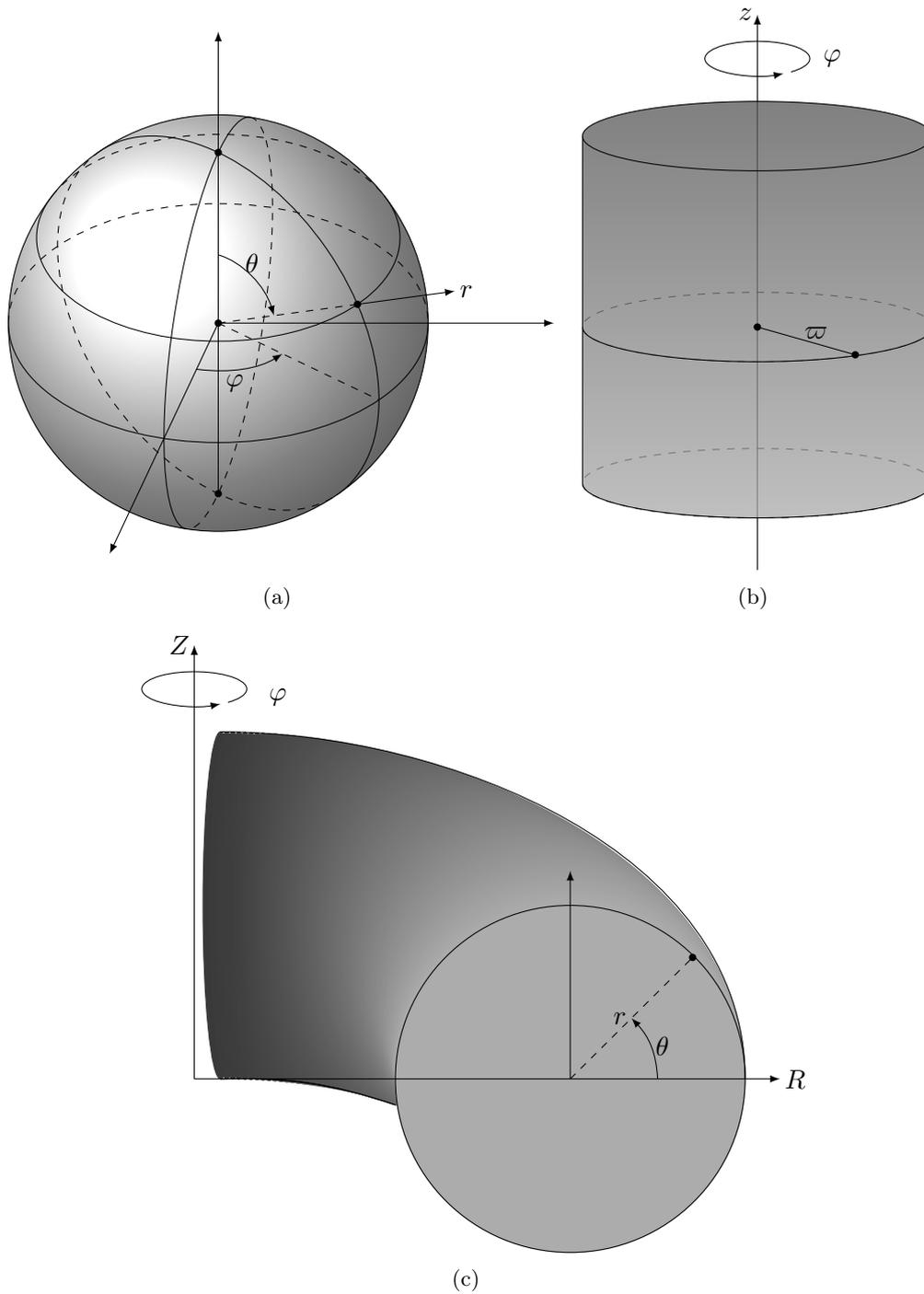


FIGURE A.1 – Systèmes de coordonnées utilisés au cours de cette thèse.

A.2 Symboles

Symbole	Définition
\mathbf{B}	Vecteur champ magnétique
\mathbf{v}, \mathbf{U}	Vecteur champ de vitesse fluide/cinétique
\bar{F}	Fonction de distribution des gyrocentres
ϕ	Potentiel électrique
μ	Moment magnétique
\perp et \parallel	Directions perpendiculaire et parallèle au champ magnétique
P	Pression
S	Entropie spécifique
T	Température
ρ	Densité volumique
n	Densité de particules / Nombre d'onde selon φ pour les tokamaks
m	Nombre d'onde selon φ pour les harmoniques sphériques (Soleil)
	Nombre d'onde selon θ pour les tokamaks
l	Nombre d'onde poloidal des harmoniques sphériques
q	Facteur de sécurité
$\boldsymbol{\Omega}_0$	Vecteur de rotation du repère tournant
c_p	Chaleur spécifique à pression constante
g	Accélération gravitationnelle
η	Diffusivité magnétique
ν	Viscosité cinématique
κ	Diffusivité thermique
L_\star	Longueur de gradient de la quantité \star
\odot/\star	Soleil/Etoile
ω	Fréquence caractéristique / vortacité

TABLE A.1 – Définition des principaux symboles utilisés au cours de cette thèse.

A.3 Nombres sans dimension

Nombre	Formule	Définition
Ekman \mathcal{E}_k	$\nu/2\Omega_0 L^2$	Forces visqueuses sur forces de Coriolis
Mach M	v/c_s	Vitesse du fluide sur vitesse du son
Péclet P_e	$R_e \times P_r = vL/\kappa$	Forces d'inertie sur diffusivité thermique
Rayleigh R_a	$(-\partial\rho/\partial S)\Delta SgL^3/\rho\nu\kappa$	Force de flottaison sur forces visqueuses
Reynolds R_e	vL/ν	Force d'inerties sur forces visqueuses
Reynolds magnétique R_m	vL/η	Force d'inerties sur diffusivité magnétique
Rossby R_o	$\omega/2\Omega_0$	Advection sur force de Coriolis
Rossby stellaire R_{os}	P_{rot}/τ_c	Période de rotation sur retournement convectif
Rossby convectif R_c	$\sqrt{R_a/T_a P_r}$	Force de flottaison sur forces de Coriolis
Prandtl P_r	ν/κ	Viscosité cinématique sur diffusivité thermique
Prandtl magnétique P_m	ν/η	Viscosité cinématique sur diffusivité magnétique
Taylor T_a	$4\Omega_0^2 L^4/\nu^2$	Forces de Coriolis sur forces visqueuses
ρ_\star	ρ_L/a	Rayon de Larmor sur taille de la machine
ν_\star	$\nu_{\text{eff}}/\omega_b$	Fréquence de collision sur fréquence de rebond
β	$8\pi n k_B T/B^2$	Energie thermique sur énergie magnétique

TABLE A.2 – Définition des nombres sans-dimensions communs. L fait référence à la longueur caractéristique du système.

Le code ASH (Anelastic Spherical Harmonics)

Le code ASH (*Clune et al., 1999, Miesch et al., 2000, Brun et al., 2004b*) est un code qui résout les équations de la MHD en approximation anélastique (voir section 1.2.3). C'est un code global, qui permet de traiter ces équations sur une coquille sphérique tri-dimensionnelle. Il repose sur une méthode *spectrale* et sur une approche dite *LES* (Large Eddy Simulation, voir *Lesieur (2008)*) qui revient à paramétriser dans les équations résolues les échelles inférieures à la taille de la grille considérée, qui ne sont pas résolues. Dans ce manuscrit, nous utilisons la paramétrisation la plus simple possible, qui consiste à représenter ces échelles par des coefficients de diffusion augmentés.

La méthode numérique du code ASH est dite pseudo-spectrale (*Boyd, 1989, Glatzmaier, 1984, Clune et al., 1999*). Les variables thermodynamiques et les trois composantes du flux de masse $\bar{\rho}\mathbf{v}$ et du champ magnétique \mathbf{B} (s'il est inclus) sont projetées sur les harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \varphi)$ (voir annexe J) pour leur structure horizontale, comme par exemple pour la fonction de courant poloidale W :

$$W(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{l=0}^{l_{\max}} \sum_{m=-l}^l W_l^m(r, t) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

Cette décomposition en harmoniques sphériques a l'avantage de permettre une résolution spatiale homogène (évitant ainsi le problème de la convergence des méridiens aux pôles) si tous les multiplets m pour un degré l donné sont conservés (*Boyd, 1989*). La précision numérique est assurée en utilisant des points de maille vérifiant la quadrature de Gauss, c'est à dire les zéros de polynôme de Legendre pour la colatitude et des points équidistants en longitude pour Fourier (direction azimutale). Afin d'éviter les problèmes d'*aliasing* des termes non linéaires (comme ceux d'advection) qui sont calculés dans l'espace physique et ensuite transformés vers l'espace spectral (évitant ainsi de calculer des convolutions), on applique la relation de troncation $N_\theta \geq \frac{3l_{\max}+1}{2} = 2N_\theta$. Pour leur structure radiale nous décomposons les grandeurs physiques sur les polynômes de Chebyshev $T_n(r_k)$, ce qui donne (pour la composante W) :

$$W_l^m(r_k, t) = \frac{2}{N_r - 1} \sum_{n=1}^{N_r} {}'' W_{ln}^m(t) T_n(r_k), \text{ avec } 1 \leq k \leq N_r,$$

où $\sum_{n=1}^{N_r} {}''$ sous entend que le premiers et dernier points sont multipliés par 1/2. Nous réécrivons cette décomposition sous la forme matricielle suivante, utile pour la suite :

$$W_l^m(r_k, t) = \mathcal{T}_{kn} W_{ln}^m(t),$$

où la sommation pour répétition d'indices s'applique à n , et r_k correspond au k -ième point de collocation Gauss-Lobatto, solution des polynômes de Chebyshev dans la direction radiale. Pour les mêmes raisons d'*aliasing* apparaissant lors du calcul des termes non linéaires, nous n'utilisons en pratique que $N_r' = N_r - 2$ points dans la direction radiale. L'évolution temporelle des équations peut alors s'écrire (en prenant encore ici W comme variable d'exemple) :

$$\partial_t W_l^m(r_k, t) = \mathcal{L}_{lmk}^W(t) + \mathcal{N}_{ln}^W(t),$$

où \mathcal{L}_{lmk}^W et \mathcal{N}_{ln}^W représentent respectivement les termes linéaires et non linéaires auxquels on a rajouté les forces de Coriolis et de Laplace. Ceci implique qu'il n'y a pas dans les termes linéaires de couplage en l et on peut alors écrire de façon formelle :

$$\mathcal{L}_{lmk}^W(t) = \mathcal{K}_{lmk}^W W_{ln}^m(t),$$

où il n'y a pas de sommation sur l . Ceci permet d'écrire

$$\partial_t \mathcal{T}_{kn} W_{ln}^m(t) = \mathcal{K}_{lmk}^W W_{ln}^m(t) + \mathcal{N}_{lmk}^W(t).$$

Comme des dérivées radiales interviennent dans ces équations temporelles, il est pratique de travailler dans l'espace de Chebyshev pour les variables S , P , W , et Z (et C et A). Pour discrétiser dans le temps ces équations, nous utilisons un schéma numérique temporel dit semi-implicite, basé sur un algorithme Crank-Nicholson implicite d'ordre 2 pour les termes linéaires et un algorithme Adams-Bashforth explicite d'ordre 2 pour les termes non-linéaires, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{kn} \left[\frac{W_{ln}^m(t_{\sigma+1}) - W_{ln}^m(t_{\sigma})}{\Delta t} \right] &= \mathcal{K}_{lmk}^W [\alpha_{CN} W_{ln}^m(t_{\sigma+1}) + (1 - \alpha_{CN}) W_{ln}^m(t_{\sigma})] \\ &+ \mathcal{N}_{lmk}^W(t_{\sigma}) + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta t_{\text{old}}} [\mathcal{N}_{lmk}^W(t_{\sigma}) - \mathcal{N}_{lmk}^W(t_{\sigma-1})], \end{aligned}$$

avec $\Delta t = t_{\sigma+1} - t_{\sigma}$, $\Delta t_{\text{old}} = t_{\sigma} - t_{\sigma-1}$ et α_{CN} un paramètre de contrôle caractérisant la méthode de Crank-Nicholson. En réarrangeant cette équation on obtient :

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_{kn} - \alpha_{CN} \Delta t \mathcal{K}_{lmk}^W) W_{ln}^m(t_{\sigma+1}) &= (\mathcal{T}_{kn} + (1 - \alpha_{CN}) \Delta t \mathcal{K}_{lmk}^W) W_{ln}^m(t_{\sigma}) \\ &+ \Delta t \mathcal{N}_{lmk}^W(t_{\sigma}) + \frac{1}{2} \frac{\Delta t^2}{\Delta t_{\text{old}}} [\mathcal{N}_{lmk}^W(t_{\sigma}) - \mathcal{N}_{lmk}^W(t_{\sigma-1})], \end{aligned}$$

ce qui sous forme matricielle donne

$$\mathcal{A}_{lkn}^W W_{ln}^m(t_{\sigma+1}) = \mathcal{B}_{lmk}^W.$$

Un cycle complet du code ASH procède alors en deux étapes. Premièrement, nous calculons les termes de droite $\mathcal{B}^{S,P,W,Z,(C,A)}$, dont la partie faisant intervenir les termes de Adams-Bashforth du pas de temps précédent $t_{\sigma-1}$ est déjà connue. Cela consiste principalement à calculer les dérivées spatiales dans l'espace spectral approprié puis à passer dans l'espace physique pour évaluer $\mathcal{B}^{S,P,W,Z,(C,A)}$, et enfin à revenir par transformée inverse dans l'espace spectral. Deuxièmement, nous résolvons le système matriciel pour chaque membre de droite, grâce à une décomposition LU (*via* un solveur implicite). Finalement, les solutions sont transformées depuis l'espace de Chebyshev vers l'espace physique dans la direction radiale (configuration dite primaire voir plus bas). Avec le code ASH, toutes les transformées spectrales sont appliquées à des données locales pour chaque processeur avec des transformations inter-processeur quand nécessaire. Cela nécessite en tout trois configurations de la distribution des données sur les $N_{\text{cpus}} - N_{I/O}$ processeurs utilisés pour les calculs :

- configuration primaire : l en processeur et r et m distribués,
- configuration pour solveur implicite : r et m en processeur et l distribué,
- configuration pour l'espace physique : r , θ distribués et φ en processeur.

La communication inter processeur utilise *MPI* (Message Passing Interface) et *SHMEM* (SHared MEMory). Bien qu'une bonne performance par processeur ait été atteinte pour les transformations (Fourier, Chebyshev, Legendre) ainsi que la partie implicite, la contrainte d'avoir les transformations locales et la représentation non triviale des données dans l'espace spectral empêchent toute distribution simple des données et de la charge par processeur (tel que $N_{\text{cpus}} = N_{\text{rad}} \times N_{\text{ang}} + N_{I/O}$, cf *Clune et al. (1999)* pour une discussion plus complète). La

stratégie a donc été d'utiliser des pointeurs, des tables d'accès et une allocation dynamique de la mémoire pour morceler les données en blocs pouvant chacun être manipulés efficacement par un processeur et de distribuer ces blocs intelligemment à partir d'une évaluation préalable de la charge que chacun représente. Pour les problèmes de grande taille, la transformée de Legendre domine le temps de calcul et un effort particulier a été fait pour en améliorer les performances (prise en compte de la symétrie équatoriale, bloc tenant dans la mémoire cache processeur et réutilisation des tableaux). L'utilisation de routines numériques spécifiques machine comme les bibliothèques numériques pour l'algèbre linéaire de types LAPACK maximise l'efficacité. Le code ASH a démontré une bonne portabilité depuis de nombreuses années, ainsi qu'une bonne "scalabilité" (environ un facteur 1.75 d'accélération pour un doublement du nombre de processeurs) sur la machine CCRT-CURIE jusqu'à 4096 cœurs. De récents développements sur le traitement de la transformée de Legendre indiquent une bonne scalabilité jusqu'à 17,000 cœurs pour des problèmes allant jusqu'à un degré $l = 680$ (pour $N_r = 500$).

Au cours de cette thèse, j'ai développé un module d'analyse spectrale (voir chapitre 8) faisant intervenir deux principales difficultés numériques. Premièrement, cette technique d'analyse fait intervenir pour chaque mode (l, m) du code ASH le calcul de $l \times 2m \times l \times 2m \sim o(l^4)$ coefficients de couplages, soit un nombre d'opérations de l'ordre de l^6 . La décomposition parallèle de ASH n'était pas adaptée à ce calcul, j'ai dû adapter les communications en modifiant localement cette décomposition au moment de ce diagnostic. La version actuelle du module d'analyse spectrale est utilisable, mais elle ralentit encore significativement l'exécution du code ASH. L'amélioration de la parallélisation du diagnostic est un travail en cours qui devait aboutir dans un futur proche. Ensuite, le calcul des coefficients de couplages des harmoniques sphériques nécessaire à ce diagnostic fait intervenir le calcul des coefficients dits de Clebsch-Gordan. Ces coefficients sont connus pour être difficiles à calculer numériquement, car ils font intervenir des quotients de factorielles de grands nombres qui ne se simplifient pas dans le cas général (*Varshalovich et al., 1988, Stevenson, 2002*). J'ai donc dû ajouter au module d'analyse spectrale la capacité de faire des calculs numériques en précision arbitraire, afin de pouvoir calculer ces coefficients. J'ai pour cela utilisé la bibliothèque MPFUN90¹ qui permet d'effectuer de tels calculs en fortran 90. Afin de ne pas pénaliser l'exécution du code, j'ai minimisé le nombre de variables et d'opérations de haute précision. L'utilisation d'une bibliothèque auxiliaire permet d'assurer la portabilité de la méthode sur tous types de machines, contrairement aux solutions multi-precision proposées par certains compilateurs.

1. <http://crd-legacy.lbl.gov/~dhbailey/mpdist/>

Le code GYSELA (GYrokinetic SEmi-LAgrangian)

Le code GYSELA ([Grandgirard et al., 2006, 2007](#)) est un code gyrocinétique global utilisant le formalisme dit *semi-lagrangien*. Comme nous l'avons mentionné en introduction (section 1.2.4), le code GYSELA traite l'équation d'évolution de la fonction de distribution des gyrocentre sans séparation d'échelle (cette approche est dite *full-f*), ce qui permet de traiter des rétro-actions des petites échelles sur la fonction de distribution d'équilibre du système. C'est en outre un code *global*, qui permet de traiter tout le plasma de cœur de tokamak sans se restreindre à un domaine local autour d'une surface magnétique du plasma (approche dite *flux-tube*). Ces deux approches ont un coût numérique, mais sont indispensables pour traiter à la fois de manière auto-consistante la physique des écoulements moyens et zonaux, ainsi que l'éventuelle modification de l'état d'équilibre du plasma. Les équations résolues par GYSELA sont finalement le système couplé "Valsov"–quasi-neutralité qui s'écrit

$$\partial_t \bar{F} + \frac{1}{B_{\parallel}^*} \nabla_{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{z} B_{\parallel}^* \bar{F}) = \mathcal{C}(\bar{F}) + \mathcal{S}, \quad (\text{C.1})$$

et

$$\frac{e}{T_e} [\phi - \langle \phi \rangle_{fs}] - \sum_{\text{ion species}} \nabla \cdot \left(\frac{n_{eq,s} m_s}{\mathbf{B}^2} \nabla_{\perp} \phi \right) = \sum_{\text{ion species}} e_s \int dv^* J_0 \cdot \bar{F}. \quad (\text{C.2})$$

La caractère *global* du code GYSELA fait naturellement apparaître la question des conditions aux limites du domaine de simulation. En effet, les équations gyrocinétiques sont valides dans le cœur du tokamak, et le domaine de simulation s'étend généralement jusqu'à $\rho = r/a$ entre 0.8 et 0.9. L'axe magnétique ($\rho = 0$) est la plupart du temps exclus du domaine de simulation du fait des difficultés numériques associées à son traitement. Le choix des conditions aux limites est extrêmement important car il peut sérieusement modifier la physique mise en jeu dans la simulation numérique. Le code GYSELA adopte l'approche *forçage par le flux*, qui consiste à imposer un flux de chaleur sur le bord interne du système. Le gradient de température est alors forcé à zéro sur le bord interne, et maintenu constant sur le bord externe du domaine. L'importance de cette condition aux limites pour correctement représenter la turbulence gyrocinétique dans les tokamaks fût notamment mise en évidence par [Garbet et al. \(1999\)](#). Une discussion sur la construction d'une source de chaleur imposant un flux au système pourra être trouvée au chapitre 7 (section 7.2.2).

Le code GYSELA a pour spécificité d'utiliser une méthode dite *semi-lagrangienne* pour résoudre l'équation de Valsov (1.33). Plusieurs types de méthodes ont été proposées pour résoudre le système couplé de l'équation gyrocinétique (1.33) et de l'équation de quasi-neutralité (1.41). On distingue généralement

- Les méthodes *lagrangiennes* (souvent connues sous le nom de code PIC, *Particle-In-Cell*) qui utilisent une représentation discrète de la fonction de distribution comme un nombre fini de macro-particules. Ces méthodes ont pour avantage d'être naturellement parallélisables, et leur coût numérique dépend directement du nombre de macro-particules considérées, et par conséquent de la précision de la méthode. Cependant, les méthodes lagrangiennes sont

sujettes à un fort bruit numérique qui peut être maîtrisé au prix de lourds développements informatiques.

- Les méthodes *eulériennes* utilisent une grille fixe dans tout l'espace des phases, sur laquelle l'équation de Vlasov peut être discrétisée en utilisant des méthodes de différences finies, de volumes finis ou encore des méthodes spectrales. Le principal problème de ces problèmes réside dans la dissipation numérique inhérente à ce genre de méthodes.

La méthode *semi-lagrangienne* est un compromis entre ces deux approches. Une grille fixe est choisie afin d'éviter les problèmes numériques associés aux méthodes lagrangiennes. Cependant, à chaque pas de temps, et dans l'esprit de la méthode lagrangienne, les caractéristiques de l'équation de Vlasov sont suivies dans le passé. Le pied de chaque caractéristique ainsi formée ne tombe généralement pas sur la grille eulérienne choisie, et la solution du pas de temps précédent est alors interpolée avec une bonne précision pour un faible coût numérique à l'aide des *splines cubiques*. Une représentation schématique du schéma semi-lagrangien est donnée en figure C.1. Le lecteur intéressé pourra trouver une description très détaillée de l'ensemble des méthodes numériques associées à la résolution du système gyrocinétique dans (*Grandgirard and Sarazin, 2012*).

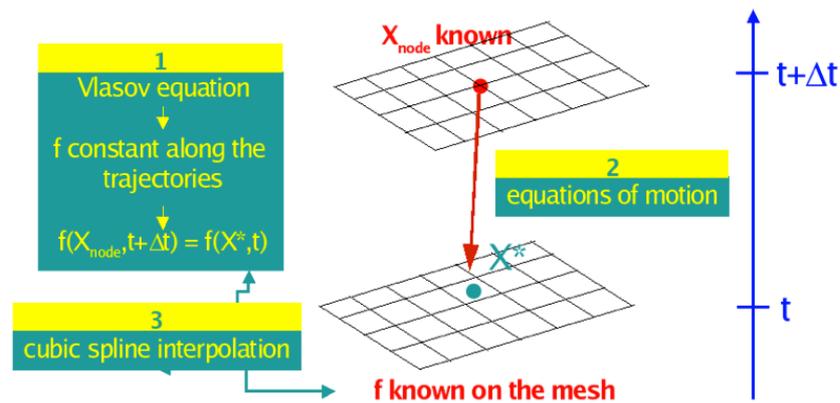


FIGURE C.1 – Concept du schéma numérique semi-lagrangien : (1) La solution est recherchée à l'instant $t + \Delta t$ sur une grille eulérienne. (2) Pour cela, on remonte les caractéristiques de l'équation de Vlasov dans le passé jusqu'à l'instant t où la solution est connue. (3) Les pieds des caractéristiques ne tombent *a priori* pas sur la grille eulérienne, et la solution doit être interpolée à l'aide de splines cubiques.

Enfin le code GYSELA est parallèle (hybride MPI/OpenMP) et a récemment été adapté pour avoir de bonnes performances jusqu'à 65000 cœurs sur la machine CURIE au Très Grand Centre de calcul du Cea (TGCC, <http://www-hpc.cea.fr/fr/complexes/tgcc.htm>).

Le code PLUTO

Le code PLUTO est un code modulable de type Godunov développé à l’université de Turin par A. Mignone et collaborateurs (*Mignone et al., 2007*). Il est libre de droits (<http://plutocode.ph.unito.it/index.html>) et continue à être développé, il présente cependant déjà de nombreux avantages :

- Il permet de résoudre les équations de la MHD complète (section 1.2.3),
- Il peut être utilisé en 1, 2 ou 3 dimensions,
- Le système de coordonnées peut être cartésien, cylindrique ou sphérique,
- Il est parallèle (MPI) est *scale* bien jusqu’à au moins 30000 processeurs,
- Une grille adaptative peut être utilisée si nécessaire,
- De nombreuses méthodes numériques peuvent être utilisées afin de vérifier la robustesse des résultats obtenus.

En particulier, le code PLUTO possède 7 solveurs de Riemann différents, 7 limiteurs de pentes, et 3 méthodes de contrôle pour assurer que la divergence du champ magnétique soit nulle. Ces méthodes peuvent être utilisées chacune à leur tour pour contraindre les éventuels biais numériques présents dans les solutions. L’ensemble des détails des méthodes numériques utilisées dans le code PLUTO peut être trouvé à l’adresse suivante : <http://plutocode.ph.unito.it/files/userguide.pdf>.

De manière générale, le code PLUTO est fait pour résoudre des équations pouvant s’écrire sous la forme

$$\partial_t \mathbf{U} = \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{U}) + \mathbf{S}(\mathbf{U}),$$

où \mathbf{U} représente les quantités conservées qui sont résolues, \mathbf{T} est un tenseur contenant les flux des différentes quantités, et \mathbf{S} représente n’importe quel type de source pour le système. En général, les quantités conservées des équations de la MHD ne sont pas pratiques pour calculer le tenseur des flux \mathbf{T} ¹. Par conséquent, il est nécessaire d’être capable de passer des quantités conservées \mathbf{U} aux quantités physiques \mathbf{V} . Puis, comme le code PLUTO utilise un solveur de type Riemann, il faut calculer dans chaque domaine de résolution les états *gauche* et *droit* aux bornes du système, pour pouvoir effectuer la résolution du système et calculer le flux à travers chaque domaine de résolution. Enfin, l’évolution temporelle peut être effectuée et le processus recommencé. Ces étapes sont représentées schématiquement en figure D.1.

Les détails de chacune des étapes pourront être trouvés dans *Mignone et al. (2007)*. Dans cette thèse, nous utilisons le code PLUTO pour modéliser les vent stellaires magnétisés qui mettent en jeu un champ magnétique de grande échelle. Nous utilisons par conséquent la capacité du code à décomposer le champ magnétique en une partie de *fond* (qui n’évolue pas), et l’écart à ce fond qui est résolu numériquement. Ceci permet de maximiser le pas de temps du solveur en ne le contraignant par la vitesse d’Alfvén intense à la surface de l’étoile. En contrepartie, cette méthode nous oblige à choisir le solveur *hll* (qui est un solveur de Riemann relativement diffusif) dans le code PLUTO. Elle nous contraint également à utiliser la méthode du *transport contraint*

1. Par exemple, ρ et $\rho \mathbf{v}$ sont des quantités conservatives, mais il est utile d’avoir accès à \mathbf{v} seul pour calculer les flux des équations de conservation du moment cinétique et de l’énergie, ou encore pour l’équation d’induction.

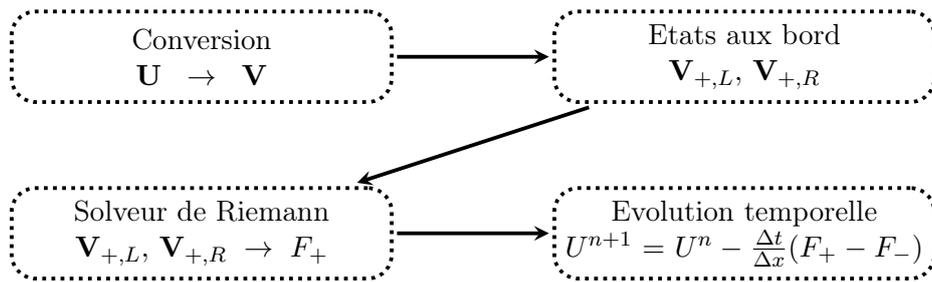


FIGURE D.1 – Schéma des étapes de la résolution numérique du code PLUTO, adapté de *Mignone et al. (2007)*.

(CT) pour assurer que la divergence du champ magnétique reste bien nulle. Ces limitations seront levées dans les futurs développements de PLUTO. Enfin, nous utilisons également différents limiteurs de pente au chapitre 5 afin de vérifier la stabilité numérique de nos résultats.

Le code PLUTO est en conclusion un formidable outil pour tout personne travaillant dans le domaine de la dynamique des fluides (magnétisés). La description détaillé du code est bien au delà de la portée de cette annexe, nous renvoyons le lecteur à l'article fondateur *Mignone et al. (2007)* ainsi qu'à la documentation du code pour de plus amples informations.

L'instabilité ITG-slab

Sommaire

E.1	Modèle cinétique	240
E.2	Modèle fluide	242

L'instabilité ITG-slab est une instabilité fondée sur la résonance Landau entre ondes et particules et due à un gradient de température ionique.

E.1 Modèle cinétique

On étudie un plasma cylindrique orienté selon la direction d'un champ magnétique extérieur constant $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ dans la limite électrostatique $\mathbf{E} = -\vec{\nabla}\phi$. On se place également dans le cadre de la théorie adiabatique, qui permet de considérer un espace des phases à 4 dimensions $(r, \theta, z, v_{\parallel})$ où v_{\parallel} est la vitesse suivant l'axe du champ magnétique z . Dans ces hypothèses et en l'absence de collisions, la fonction de distribution des centre-guides des ions vérifie l'équation

$$\partial_t f + v_{\parallel} \partial_z f + \frac{1}{B} [\phi, f] - \frac{e}{M} \partial_z \phi \partial_{v_{\parallel}} f = 0 \quad (\text{E.1})$$

Le crochet de Poisson rend compte de l'advection de f par la dérive électrique $\mathbf{v}_E = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2$, soit

$$[\phi, f] = B(\mathbf{v}_E \cdot \vec{\nabla} f) = \frac{1}{r} (\partial_r \phi \partial_{\theta} f - \partial_{\theta} \phi \partial_r f) \quad (\text{E.2})$$

L'équation (E.1) admet une solution stationnaire sous la forme d'une maxwellienne

$$f_{eq} = \frac{n_{eq}}{\sqrt{2\pi T_{eq}/M}} \exp\left(-\frac{Mv_{\parallel}^2}{2T_{eq}}\right) \quad (\text{E.3})$$

où T_{eq} et n_{eq} sont des fonctions du rayon r uniquement, et où le potentiel d'équilibre est nul $\phi_{eq} = 0$. On s'intéresse à des perturbations de faible amplitude autour de cet équilibre :

$$\begin{aligned} f &= f_{eq}(r, v_{\parallel}) + \tilde{f}(r, \theta, z, v_{\parallel}, t) \\ \phi &= \tilde{\phi}(r, \theta, z, t) \end{aligned}$$

En supposant des conditions aux limites périodiques dans la direction z , on peut décomposer les fluctuations en modes de Fourier de la forme $\hat{\phi}_{k,\omega}(r) \exp\{i(m\theta + k_{\parallel}z - \omega t)\}$. Au premier ordre, l'équation (E.1) donne alors pour chaque mode

$$\begin{aligned} -i\omega \hat{f}_{k,\omega} + ik_{\parallel} v_{\parallel} \hat{f}_{k,\omega} - \frac{im}{Br} \hat{\phi}_{k,\omega} \partial_r f_{eq} - \frac{e}{M} ik_{\parallel} \hat{\phi}_{k,\omega} \partial_{v_{\parallel}} f_{eq} &= 0 \\ \hat{f}_{k,\omega} (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) + \hat{\phi}_{k,\omega} f_{eq} \left\{ \frac{ek_{\parallel} v_{\parallel}}{T_{eq}} - \frac{M}{rB} \left(\frac{n'_{eq}}{n_{eq}} - \frac{T'_{eq}}{2T_{eq}} + \frac{Mv_{\parallel}^2 T'_{eq}}{2T_{eq} T_{eq}} \right) \right\} &= 0 \\ \hat{f}_{k,\omega} &= - \left\{ 1 - \frac{\omega^* - k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} \right\} f_{eq} \frac{e\hat{\phi}_{k,\omega}}{T_{eq}} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

où n'_{eq} et T'_{eq} sont les dérivées radiales et où on définit la fréquence diamagnétique ω^* en fonction des fréquences ω_n^* et ω_T^* :

$$\omega_n^* = k_\theta \rho_i v_{th} \frac{n'_{eq}}{n_{eq}} \quad (\text{E.5})$$

$$\omega_T^* = k_\theta \rho_i v_{th} \frac{T'_{eq}}{T_{eq}} \quad (\text{E.6})$$

$$\omega^* = \omega_n^* + \omega_T^* \left(\frac{v_{\parallel}^2}{v_{th}^2} - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{E.7})$$

en notant $v_{th} = \sqrt{T_{eq}/M}$ la vitesse thermique, $k_\theta = m/r$ le vecteur d'onde poloïdal et $\rho_i = Mv_{th}/eB$ le rayon de Larmor ionique.

Pour compléter le problème, on utilise l'hypothèse de quasi-neutralité électrique, en supposant un comportement adiabatique pour les électrons du fait de leur grande mobilité (soit $\tilde{n}_e/n_{eq} = e\tilde{\phi}/T_{eq}$). On suppose de plus que l'équilibre est neutre électriquement. Dans le cadre du modèle gyrocinétique, l'équation de quasi-neutralité peut alors s'écrire

$$(1 - \rho_i^2 \nabla_\perp^2) \frac{e\tilde{\phi}}{T_{eq}} = \frac{1}{n_{eq}} \int_{-\infty}^{\infty} f dv_{\parallel} - 1 = \frac{1}{n_{eq}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f} dv_{\parallel} \quad (\text{E.8})$$

avec $\nabla_\perp^2 = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2$ le laplacien transverse. En combinant les équations (E.4) et (E.8), on obtient l'équation suivante pour les modes $\hat{\phi}_{k,\omega}$

$$-\frac{\rho_i^2}{r} \partial_r \left\{ r \partial_r \left(\frac{e\hat{\phi}_{k,\omega}}{T_{eq}} \right) \right\} + \frac{e\hat{\phi}_{k,\omega}}{T_{eq}} \left\{ 1 + \rho_i^2 k_\theta^2 + \frac{1}{n_{eq}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^* - k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} f_{eq}(v_{\parallel}) dv_{\parallel} \right\} = 0 \quad (\text{E.9})$$

On suppose que les modes sont de la forme $e\hat{\phi}_{k,\omega}/T_{eq} \propto \exp\{g(r)\}$. On a alors:

$$\begin{aligned} \partial_r \left(\frac{e\hat{\phi}_{k,\omega}}{T_{eq}} \right) &\propto g' e^g \\ \frac{1}{r} \partial_r \left\{ r \partial_r \left(\frac{e\hat{\phi}_{k,\omega}}{T_{eq}} \right) \right\} &\propto (g'/r + g'' + g'^2) e^g \equiv \kappa^2 e^g \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{e\hat{\phi}_{k,\omega}}{T_{eq}} \left\{ -\kappa^2 \rho_i^2 + 1 + k_\theta^2 \rho_i^2 + \frac{1}{n_{eq}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega^* - \omega) + (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} f_{eq}(v_{\parallel}) dv_{\parallel} \right\} = 0 \quad (\text{E.10})$$

On obtient la relation de dispersion suivante:

$$\epsilon(k, \omega) = 2 + k_\theta^2 \rho_i^2 - \kappa^2 \rho_i^2 - \frac{1}{n_{eq}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega - \omega^*}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} f_{eq}(v_{\parallel}) dv_{\parallel} = 0 \quad (\text{E.11})$$

$$\epsilon(k, \omega) = 2 + (k_\theta \rho_i)^2 - (\kappa \rho_i)^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega - \omega^*}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} du = 0 \quad (\text{E.12})$$

en effectuant le changement de variable $u^2 = v_{\parallel}^2/2v_{th}$. Les solutions (k, ω) de (E.12) sont instables si la partie imaginaire de ω est strictement positive. On s'intéresse à la condition limite de stabilité, c'est-à-dire au passage d'une solution stable à une solution instable. Suivant la méthode

de Landau du prolongement analytique, on peut séparer partie réelle et partie imaginaire de la relation de dispersion (on note $C = 2 + (k_\theta \rho_i)^2 - (\kappa \rho_i)^2$):

$$\epsilon_r(k, \omega) = C - \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega - \omega^*}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} du \quad (\text{E.13})$$

$$\epsilon_i(k, \omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{k_\theta} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega^*) \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) \frac{\delta(v - \omega/k_{\parallel})}{\sqrt{2}v_{th}} dv \quad (\text{E.14})$$

où \mathcal{P} désigne la partie principale de l'intégrale. Pour ω_0 réelle (mode propre linéaire), la condition $\epsilon_i(k, \omega) = 0$ entraîne la relation:

$$\omega_0 - \omega_n^* - \omega_T^* \left(\frac{\omega_0^2}{2(k_{\parallel} v_{th})^2} - \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (\text{E.15})$$

La condition $\epsilon_r(k, \omega) = 0$ donne alors la condition critique en gradient de température pour l'apparition de l'instabilité:

$$\omega_{T,crit}^* = \omega_n^* \pm \sqrt{\omega_n^{*2} + 4(C^2 - C)(k_{\parallel} v_{th})^2} \quad (\text{E.16})$$

Le seuil est donc défini en fonctions des gradients de densité ω_n^* et de température ω_T^* . On trouve deux zones instables, en fonction du signe du gradient de température. La figure E.1 représente le diagramme de stabilité, la zone stable étant située entre les deux courbes. On remarque notamment que le gradient de densité est toujours un facteur stabilisant.

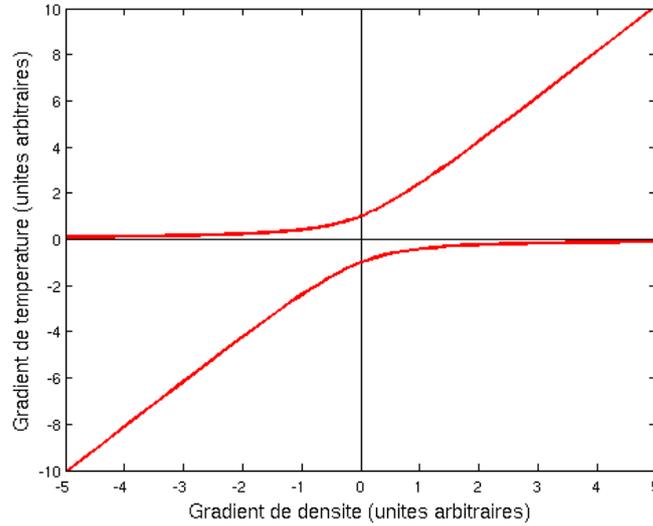


FIGURE E.1 – Diagramme de stabilité pour le modèle ITG slab cinétique

E.2 Modèle fluide

Étudions à présent l'équivalent fluide du modèle cinétique des équations (E.1) et (E.8). On considère pour cela les quatre premiers moments suivants :

- La densité : $n = \int_{-\infty}^{\infty} f dv_{\parallel}$
- La vitesse u du fluide selon z : $nu = \int_{-\infty}^{\infty} v_{\parallel} f dv_{\parallel}$

- La pression : $p = \int_{-\infty}^{\infty} M(u - v_{\parallel})^2 f dv_{\parallel}$
- Le flux de chaleur : $q = \int_{-\infty}^{\infty} M(u - v_{\parallel})^3 f dv_{\parallel}$

On peut ensuite dériver de manière classique trois équations fluide de l'équation (E.1). L'équation de conservation de la masse se déduit en intégrant l'équation (E.1) sur l'espace des vitesses. Il est utile de remarquer que l'intégrale en vitesse parallèle commute avec le crochet de poisson $[\phi, \cdot]$. On obtient :

$$\partial_t n + \int v_{\parallel} \partial_z f dv_{\parallel} + \frac{1}{B} [\phi, n] - \frac{e}{M} \partial_z \phi [f]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

D'où, sachant que f est Maxwellienne :

$$\partial_t n + \partial_z (nu) + \frac{1}{B} [\phi, n] = 0 \quad (\text{E.17})$$

L'équation (E.17) est appelée *équation de conservation de la masse*, et constitue notre première équation fluide. Intégrons alors à présent l'équation (E.1) contre v_{\parallel} et détaillons chacun des termes :

$$\begin{aligned} \int v_{\parallel} \partial_t f dv_{\parallel} &= \partial_t (nu) = u \partial_t n + n \partial_t u \\ \int v_{\parallel} [\phi, f] dv_{\parallel} &= [\phi, nu] = n [\phi, u] + u [\phi, n] \\ \int v_{\parallel}^2 \partial_z f dv_{\parallel} &= \frac{\partial_z p}{M} + 2 \partial_z u \int v f dv_{\parallel} - \partial_z u^2 \int f dv_{\parallel} \\ &= \frac{\partial_z p}{M} + u \partial_z (un) + un \partial_z (u) \end{aligned}$$

Et enfin, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \partial_z \phi \int v_{\parallel} \partial_{v_{\parallel}} f dv_{\parallel} &= 0 + \partial_z \phi \int f dv_{\parallel} \\ &= n \partial_z \phi \end{aligned}$$

En combinant ces quatre termes on obtient l'équation fluide de conservation de quantité de mouvement :

$$\partial_t u + \frac{1}{B} [\phi, n] + \frac{\partial_z p}{Mn} + u \partial_z u + \frac{e}{M} \partial_z \phi = 0 \quad (\text{E.18})$$

Le calcul de l'équation de conservation de l'énergie se fait de manière analogue, nous ne détaillerons pas ici les détails du calcul qui n'incluent pas de grosses difficultés techniques. On obtient finalement :

$$\partial_t p + \frac{1}{B} [\phi, p] + \partial_z (up) + \partial_z q + 2p \partial_z p = 0 \quad (\text{E.19})$$

Il faut enfin fermer la hiérarchie des moments fluides. On peut pour ce faire supposer que le quatrième moment q défini ci-dessus est nul. Cette hypothèse n'est pas dénué de sens car s'il on choisit la fonction de distribution Maxwellienne d'équilibre (E.3), le quatrième moment fluide q est effectivement nul.

De la même manière que précédemment, nous considérons la fonction de distribution d'équilibre (E.3) et un potentiel électrique d'équilibre nul. Cela se traduit sur les moment fluides de la manière suivante :

$$\begin{cases} n_{eq} &= n_{eq} \\ u_{eq} &= 0 \\ p_{eq} &= n_{eq} T_{eq} \end{cases}$$

Perturbons cet équilibre par une densité $\bar{n} = \sum_{m,\omega,k_{\parallel}} \hat{n} \exp i(m\theta + k_{\parallel}z + \omega t)$, une pression \bar{p} , une vitesse \bar{u} et un potentiel $\bar{\phi}$ (on a supposé, de manière consistante avec précédemment, des conditions au limites périodiques en z). En linéarisant le système défini par les équation (E.17), (E.18) et (E.19), on obtient :

$$\begin{cases} \partial_t \bar{n} + \partial_z(\bar{u}\bar{n}_{eq}) & = \frac{1}{BM} \partial_r n_{eq} \partial_\theta \bar{\phi} \\ \partial_t \bar{u} + \frac{\partial_z \bar{p}}{n_{eq} M} & = -\frac{e}{M} \partial_z \bar{\phi} \\ \partial_t \bar{p} + \partial_z(\bar{n} p_{eq}) + 2p_{eq} \partial_z \bar{u} & = -\frac{1}{B} [\bar{\phi}, p_{eq}] \end{cases}$$

Avec les définitions de ω_n^* et ω_T^* de la partie précédente, et en passant dans l'espace de Fourier, on trouve le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \omega & -\omega_{\parallel} & 0 \\ 0 & \omega & -\omega_{\parallel} \\ 0 & 3k_{\parallel} & -\omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\hat{n}}{n_{eq}} \\ \frac{\hat{u}}{v_{th}} \\ \frac{\hat{p}}{p_{eq}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_n^* \\ \omega_{\parallel} \\ \omega_n^* + \omega_T^* \end{pmatrix} \frac{e}{T_{eq}} \hat{\phi} \quad (\text{E.20})$$

où on a posé $\wp = k_{\parallel} v_{th}$. Il suffit alors de coupler le système (E.20) avec l'équation d'électroneutralité :

$$\frac{\hat{n}}{n_{eq}} = (C - 1) \frac{e\hat{\phi}}{T_{eq}} \quad (\text{E.21})$$

pour obtenir la relation de dispersion :

$$D(k, \omega) = \frac{C - 1}{\omega_{\parallel}^2} \omega^3 + \frac{\omega_n^*}{\omega_{\parallel}^2} \omega^2 - (3C - 2)\omega + (\omega_T^* + 2\omega_n^*) = 0 \quad (\text{E.22})$$

On observe ainsi une relation de dispersion réactive (E.22) en opposition avec la relation cinétique (E.12) de la partie précédente. Puisque tous les coefficients de l'équation sont réels, l'équation de dispersion au seuil est donnée par :

$$D(k, \omega_0) = 0 \quad (\text{E.23})$$

$$\partial_\omega D(k, \omega_0) = 0 \quad (\text{E.24})$$

Ces deux équations nous donnent la valeur d' ω_0 en fonction de ω_T^* et ω_n^* :

$$\omega_0 = \frac{9(C - 1)\omega_T^* - (15C - 16)\omega_n^*}{2\frac{\omega_n^{*2}}{\omega_{\parallel}^2} + 6(C - 1)(3C - 2)} \quad (\text{E.25})$$

En injectant l'équation (E.25) dans l'équation (E.24), on obtient une relation implicite reliant $\omega_{T,crit}^*$ à ω_n^* . On peut alors faire un graphique représentant les seuils de l'instabilité dans les deux modèles (figure E.2) On remarquera que le modèle fluide sousestime l'instabilité ITG-slab par rapport au modèle cinétique, qui décrit mieux le comportement du plasma. Il est ainsi important de comprendre les limites des modèles mis en jeu.

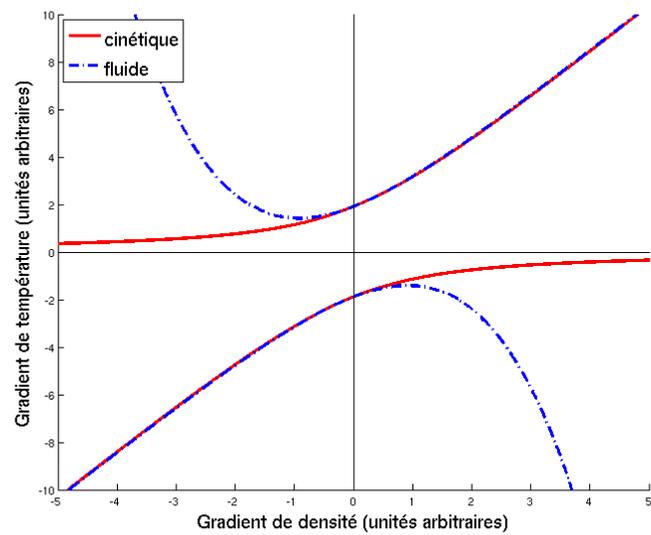


FIGURE E.2 – Diagramme de stabilité pour le modèle ITG slab dans les approches cinétique et fluide

Échange d'énergie Ondes/Particules

Nous voulons quantifier l'échange d'énergie entre ondes et particules dans un tokamak. Pour ceci, rappelons la définition de l'énergie transportée par une onde :

$$\epsilon_{EM} \equiv \int_V dV \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \right). \quad (\text{F.1})$$

Et l'équation d'évolution de la puissance électromagnétique s'écrit alors $W = \partial_t \epsilon_{EM}$. On obtient alors

$$W = \int_V dV \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \partial_t \mathbf{B} + \epsilon_0 \mathbf{E} \partial_t \mathbf{E} \right).$$

En utilisant les équations de Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ et $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E}$, on en déduit :

$$W = \int_V dV \left(\frac{\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})}{\mu_0} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \right),$$

en se rappelant que $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$. On obtient alors

$$W = - \int_V dV \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right) - \int_V dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}.$$

Finalement, en utilisant la formule d'Ostrogradsky, on trouve l'expression

$$W = - \int_S dS \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} - \int_V dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}. \quad (\text{F.2})$$

On remarque que le premier terme correspond aux conditions aux limites, c'est à dire aux puits et aux sources aux frontières du système. Le second terme quant à lui représente la puissance d'interaction de l'onde avec les particules, notée W_{int} .

L'équation de conservation de la charge impose $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, et on peut par suite réécrire W_{int}

$$W_{int} = \int_V dV (\phi \partial_t \rho + \mathbf{j} \cdot \partial_t \mathbf{A})$$

où ρ est la densité de charges dans le plasma et \mathbf{A} le potentiel vecteur du champ magnétique. Prenons le cas particulier d'une onde électrostatique de fréquence réelle ω : $\hat{\phi} = \phi e^{-i\omega t} + \phi^* e^{+i\omega t}$. Alors la densité de puissance W_{int} s'écrit :

$$W_{int} = \hat{\phi} \partial_t \hat{\rho} = 2\omega \text{Im}(\rho \phi e^{-2i\omega t} + \rho \phi^*)$$

Le premier terme de W_{int} est un terme oscillant à la fréquence 2ω et s'annule en moyenne sur des temps longs devant 2ω . On peut donc ne conserver que le résultat général suivant :

$$W_{int} = 2\omega \text{Im}(\rho \phi^*) \quad (\text{F.3})$$

On peut alors appliquer cette formule dans le cas des tokamak, dans le cadre de calcul de la section 6.1.2 où la densité de charges vaut $\rho = \int f dv_{\parallel}$. En utilisant les calculs de l'annexe E.1, on obtient :

$$\begin{aligned}
 W_{int} &= 2\omega \text{Im}(e\phi^* \int f dv_{\parallel}) \\
 &= -2T_i \omega \text{Im} \left(\int dv_{\parallel} \left(1 - \frac{\omega - \omega^*}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} \right) F_{eq} \right) \left| \frac{e\phi}{T_i} \right|^2 \\
 &= -2T_i \omega \int dv_{\parallel} (\omega - \omega^*) \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) F_{eq} \left| \frac{e\phi}{T_i} \right|^2
 \end{aligned} \tag{F.4}$$

On utilise cette formule pour calculer la puissance reçue par une onde autour de la surface magnétique r_{mn} en fonction de sa fréquence normalisée à la fréquence ω_T^* , et on trouve un spectre avec un maximum bien marqué à $\omega/\omega_T^* \approx 0.7$ (voir figure F.1).

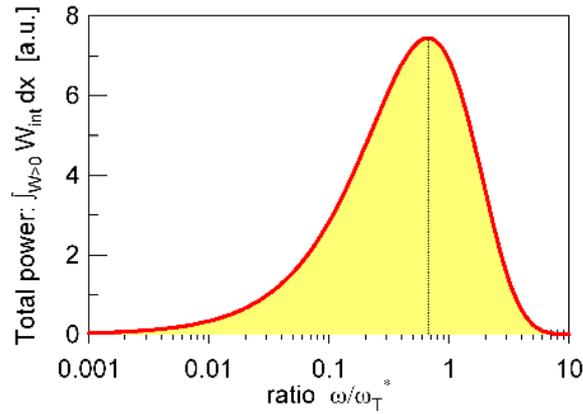


FIGURE F.1 – Puissance totale reçue par l’onde autour de la surface magnétique r_{mn} en fonction du rapport ω/ω_T^*

Ainsi une onde électrostatique interagit de manière préférentielle autour la fréquence ω_T^* avec les particules autour d’une surface magnétique r_{mn} d’après la figure F.1. On choisi le dimensionnement $\omega \sim \omega_T^*$ à la partie 6.1.2 pour prendre en compte cette résonance.

Calcul des modes résonnants en géométrie torique dans la limite hydrodynamique et ballonnement

Sommaire

G.1 Représentation de ballonnement	248
G.1.1 Pincement des lignes de champ et périodicité	248
G.1.2 Le potentiel de ballonnement	249
G.2 Calcul des modes résonnants	249

Nous allons dans cette annexe détailler tous les calculs de la partie 6.1.3. Dans un premier temps nous présenterons un point de vue particulier sur la représentation de ballonnement, et dans un second temps nous présenterons la dérivation complète du calcul avec la représentation de ballonnement.

G.1 Représentation de ballonnement

Dans un tokamak, les modes de Fourier (m, n) sont fortement localisés autour de leur surface de résonance r_{mn} définie par $q(r_{mn}) = -\frac{m}{n}$, mais ont une extension radiale qui leur permet d'interagir avec des modes résonnants voisins. Cette localisation spatiale est dû à l'effet stabilisateur du pincement des lignes champ magnétique. Cependant, on comprend qu'une instabilité peut apparaître si le gradient de pression (qui tend à écarter les modes de leur surface résonnante) bat la stabilisation du pincement des lignes de champ. L'instabilité touche alors de nombreux modes et peut affecter une large région du plasma : on parle d'*instabilité de ballonnement*.

G.1.1 Pincement des lignes de champ et périodicité

Considérons un champ $\xi(r, \theta, \varphi)$. On prendra la transformée de Fourier classique dans la direction toroïdale, c'est à dire $\xi(r, \theta, \varphi) = \xi(r, \theta)e^{-in\varphi}$. Pour modéliser l'instabilité de ballonnement, essayons de tenir compte que le pincement des lignes de champ magnétiques doit être faible, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \nabla \xi &= \frac{B_\theta}{r} \partial_\theta \xi - in \frac{B_\varphi}{R} \xi \\ &= \frac{B_\theta}{r} (\partial_\theta \xi - inq\xi) \\ &= O(1) \end{aligned}$$

car dans une géométrie simplifiée, on peut écrire $q = \frac{rB_\varphi}{RB_\theta}$. On peut penser que les perturbations pourront s'écrire :

$$\xi(r, \theta) = \hat{\xi}(r, \theta)e^{in(q\theta - \varphi)}$$

afin de vérifier $\mathbf{B} \cdot \nabla \xi = O(1)$. Le problème de cette formulation est que la périodicité dans la direction poloïdale n'est pas vérifiée car on a :

$$\frac{\xi(r, \theta + 2\pi)}{\xi(r, \theta)} = \frac{\hat{\xi}(r, \theta + 2\pi)}{\hat{\xi}(r, \theta)} e^{2i\pi nq}$$

La périodicité n'est donc correcte que pour les surfaces rationnelles où nq est entier. Il faut essayer de construire une représentation de ballonnement différemment.

G.1.2 Le potentiel de ballonnement

Nous avons tenté sans succès à la partie précédente de construire une représentation de ballonnement. Nous allons essayer de "périoriser" $\hat{\xi}(r, \theta)$. Pour cela, écrivons la transformée de Fourier non standard :

$$\hat{\xi}(r, \theta) = \sum_p c_p(\theta, \theta_0) e^{i(\theta_0 + 2\pi p)x/\delta_y} \quad (\text{G.1})$$

où $\delta_y = \frac{1}{nq'} = \frac{1}{k_\theta s}$ et $x = r - r_0$.

On introduit le **potentiel de ballonnement** :

$$\hat{\xi}_n(\theta_p, \theta_0) = c_p(\theta, \theta_0) e^{-inq_0(\theta_0 + 2\pi p)} \quad (\text{G.2})$$

où $\theta_p = \theta + 2\pi p$. On obtient finalement :

$$\xi(r, \theta, \varphi) = \sum_n \sum_{\theta_0} \sum_p \hat{\xi}_n(\theta_p, \theta_0) e^{-in(\varphi - q(\theta_p - \theta_0))} \quad (\text{G.3})$$

avec un périodicité en θ restaurée.

G.2 Calcul des modes résonnants

Nous allons détailler le calcul de la partie 6.1.3. On rappelle la formulation de la transformation de ballonnement retenue :

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_n \hat{\phi}_n(\theta, \theta_0) e^{i\{n(\varphi - q(r)(\theta - \theta_0)) - \omega t\}} \quad (\text{G.4})$$

ainsi que les résultats des dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \partial_\theta \phi &\rightarrow \sum_n (-inq + \partial_\theta) \hat{\phi}_n e^{i\{n(\varphi - q(r)(\theta - \theta_0)) - \omega t\}} = \sum_n irk_\theta \hat{\phi}_n + \partial_\theta \hat{\phi}_n e^{i\{n(\varphi - q(r)(\theta - \theta_0)) - \omega t\}} \\ \partial_r \phi &\rightarrow \sum_n -inq'(\theta - \theta_0) \hat{\phi}_n e^{i\{n(\varphi - q(r)(\theta - \theta_0)) - \omega t\}} = \sum_n ik_\theta s(\theta - \theta_0) \hat{\phi}_n e^{i\{n(\varphi - q(r)(\theta - \theta_0)) - \omega t\}} \\ \nabla_{\parallel} \phi &= \frac{1}{R} (\partial_\varphi + \frac{1}{q} \partial_\theta) \phi \rightarrow \sum_n \frac{1}{qR} \partial_\theta \hat{\phi}_n e^{i\{n(\varphi - q(r)(\theta - \theta_0)) - \omega t\}} \end{aligned}$$

où $k_\theta = -\frac{nq}{r}$ et $k_{\parallel}^2 = -\frac{1}{q^2 R^2} \partial_\theta^2$. On pose également poser $k_{\perp}^2 \rho_i^2 = k_\theta^2 \rho_i^2 (1 + s^2(\theta - \theta_0)^2)$. On peut remarquer que le second terme de la dérivée poloïdale est petit devant le premier, car il est lié aux petites échelles de variation spatiales.

Notre équation de départ est l'équation modèle de l'instabilité ITG toroïdale :

$$\tau (\phi - \langle \phi \rangle_{\theta, \varphi}) - \rho_i^2 \nabla_{\perp}^2 \phi = - \left\{ 1 - \langle J_0 \frac{\omega - \omega^*}{\omega - \omega_{\parallel} - \omega_g} J_0 \rangle_v \right\} \phi \quad (\text{G.5})$$

où $\langle \cdot \rangle_v \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \cdot F_M d^3v$, $\tau = \frac{T_i}{T_e}$, $\omega_{\parallel} = k_{\parallel} v_{\parallel}$ et $\omega_g = i \frac{m v_{G\parallel}^2 + \mu B}{e B R r} (\cos \theta \partial_{\theta} + r \sin \theta \partial_r)$.

Nous nous placerons dans le cadre de la limite hydrodynamique $\omega \gg k_{\parallel} v_T$, et $k_{\parallel} v_T \approx |\omega_{gth}|^2 \approx k_{\perp}^2 \rho_i^2$. Dans ce cadre, on peut développer :

$$\frac{1}{\omega - \omega_{\parallel} - \omega_g} \approx \frac{1}{\omega} \left(1 + \frac{\omega_{\parallel}}{\omega} + \frac{\omega_g}{\omega} + \frac{\omega_{\parallel}^2}{\omega^2} + \frac{2\omega_{\parallel}\omega_g}{\omega^2} \right) \quad (\text{G.6})$$

Les termes impairs en ω_{\parallel} le sont aussi en v_{\parallel} . Leur intégration contre la maxwellienne F_M sur tout l'espace des vitesses donnera 0. Avec l'approximation de Padé sur l'opérateur de gyromoyenne (équation (1.32)), et en admettant de pouvoir faire commuter J_0 avec $\frac{\omega - \omega^*}{\omega - \omega_{\parallel} - \omega_g}$, on peut écrire :

$$\left\langle \frac{\omega - \omega^*}{\omega - \omega_{\parallel} - \omega_g} J_0^2 \right\rangle_v = \left\langle \frac{\omega - \omega^*}{\omega} \left(1 + \frac{\omega_g}{\omega} + \frac{\omega_{\parallel}^2}{\omega^2} \right) \left(1 - \frac{k_{\parallel}^2 \rho_i^2 \mu B}{2 T} \right) \right\rangle_v \quad (\text{G.7})$$

Posons deux quantités pour effectuer ce calcul :

$$\begin{aligned} \epsilon_{\parallel} &\equiv \frac{m v_{G\parallel}^2}{2T} \\ \epsilon_{\perp} &\equiv \frac{\mu B}{T} \end{aligned}$$

On a alors les égalités suivantes, par intégrations par parties (IPP) :

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_{\perp} \rangle_v &= \int \epsilon_{\perp} F_M d^3v \underset{IPP(\mu)}{=} 0 + \int F_M d^3v = 1 \\ \langle \epsilon_{\parallel} \rangle_v &= \int \epsilon_{\parallel} F_M d^3v \underset{IPP(v_{G\parallel})}{=} 0 + \frac{1}{2} \int F_M d^3v = \frac{1}{2} \\ \langle \epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} \rangle_v &= \int \epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} F_M d^3v \underset{IPP(\mu)}{=} 0 + \int \epsilon_{\parallel} F_M d^3v = \langle \epsilon_{\parallel} \rangle_v = \frac{1}{2} \\ \langle \epsilon_{\perp}^2 \rangle_v &= \int \epsilon_{\perp}^2 F_M d^3v \underset{IPP(\mu)}{=} 0 + 2 \int \epsilon_{\perp} F_M d^3v = 2 \langle \epsilon_{\perp} \rangle_v = 2 \\ \langle \epsilon_{\parallel}^2 \rangle_v &= \int \epsilon_{\parallel}^2 F_M d^3v \underset{IPP(v_{G\parallel})}{=} 0 + \frac{3}{2} \int \epsilon_{\parallel} F_M d^3v = \frac{3}{2} \langle \epsilon_{\parallel} \rangle_v = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

On reprend alors le calcul (G.7) et il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\omega - \omega^*}{\omega - \omega_{\parallel} - \omega_g} J_0^2 &\approx \frac{\omega - \omega_n^* - \omega_T^* (\epsilon_{\perp} + \epsilon_{\parallel} - \frac{3}{2})}{\omega} \cdot \left(1 + \frac{iT \cos \theta \partial_{\theta} + r \sin \theta \partial_r}{e B R r} (2\epsilon_{\parallel} + \epsilon_{\perp}) + \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2} v_{G\parallel}^2 \right) \cdot \left(1 - \frac{k_{\parallel}^2 \rho_i^2}{2} \epsilon_{\perp} \right) \\ &\approx \frac{\omega - \omega_n^* - \omega_T^* (\epsilon_{\perp} + \epsilon_{\parallel} - \frac{3}{2})}{\omega} \cdot \left[1 - \frac{k_{\parallel}^2 \rho_i^2}{2} \epsilon_{\perp} + \frac{2v_T^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2} \epsilon_{\parallel} + \right. \\ &\quad \left. \frac{iT}{\omega e B R r} \frac{2\epsilon_{\parallel} + \epsilon_{\perp}}{\omega} (\cos \theta \partial_{\theta} + r \sin \theta \partial_r) + \text{termes d'ordre supérieur} \right] \end{aligned}$$

En utilisant les 5 égalités précédentes, et en intégrant l'équation précédente contre F_M , on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\omega - \omega^*}{\omega - \omega_{\parallel} - \omega_g} J_0^2 \right\rangle_v &= \frac{\omega - \omega_n^*}{\omega} + \\
&\frac{\omega - \omega_n^*}{\omega} \left(\frac{k_{\parallel}^2 v_T^2}{\omega^2} + i \frac{2T}{\omega e B R r} (\cos \theta \partial_{\theta} + r \sin \theta \partial_r) - \frac{k_{\perp}^2 \rho_i^2}{2} \right) + \\
&-\frac{\omega_T^*}{\omega} \left[\left(\langle \epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} \rangle_v + \langle \epsilon_{\parallel}^2 \rangle_v - \frac{3}{2} \langle \epsilon_{\parallel} \rangle_v \right) \frac{2k_{\parallel}^2 v_T^2}{\omega^2} + \right. \\
&\left. \left(2 \langle \epsilon_{\parallel}^2 \rangle_v + \langle \epsilon_{\perp}^2 \rangle_v + 3 \langle \epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} \rangle_v - \frac{3}{2} \left(2 \langle \epsilon_{\parallel} \rangle_v + \langle \epsilon_{\perp} \rangle_v \right) \right) \right. \\
&+ i \frac{2T}{\omega e B R r} (\cos \theta \partial_{\theta} + r \sin \theta \partial_r) + \\
&\left. - \left(\langle \epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} \rangle_v + \langle \epsilon_{\perp}^2 \rangle_v - \frac{3}{2} \langle \epsilon_{\perp} \rangle_v \right) \frac{k_{\perp}^2 \rho_i^2}{2} \right] \\
&= \frac{\omega - \omega_n^*}{\omega} + \\
&\frac{\omega - \omega_n^*}{\omega} \left(\frac{k_{\parallel}^2 v_T^2}{\omega^2} + i \frac{2T}{\omega e B R r} (\cos \theta \partial_{\theta} + r \sin \theta \partial_r) - \frac{k_{\perp}^2 \rho_i^2}{2} \right) + \\
&-\frac{\omega_T^*}{\omega} \left(\frac{k_{\parallel}^2 v_T^2}{\omega^2} + i \frac{2T}{\omega e B R r} (\cos \theta \partial_{\theta} + r \sin \theta \partial_r) - \frac{k_{\perp}^2 \rho_i^2}{2} \right)
\end{aligned}$$

Si on pose $\omega_p^* = \omega_n^* + \omega_T^*$, on trouve finalement :

$$\left\langle \frac{\omega - \omega^*}{\omega - \omega_{\parallel} - \omega_g} J_0^2 \right\rangle_v = \frac{\omega - \omega_n^*}{\omega} + \frac{\omega - \omega_p^*}{\omega} \left(\frac{k_{\parallel}^2 v_T^2}{\omega^2} + i \frac{2T}{\omega e B R r} (\cos \theta \partial_{\theta} + r \sin \theta \partial_r) - \frac{k_{\perp}^2 \rho_i^2}{2} \right) \quad (\text{G.8})$$

Si l'on introduit alors la représentation de ballonnement (G.4) dans l'équation (G.5), on obtient l'équation de Mathieu suivante sur le potentiel de ballonnement $\hat{\phi}_n(\theta, \theta_0)$:

$$\left\{ \frac{(\tau + k_{\perp}^2 \rho_i^2) \omega + \omega_n^*}{\omega - \omega_p^*} - \frac{\bar{\omega}_g}{\omega} [\cos \theta + s(\theta - \theta_0) \sin \theta] + \frac{v_T^2}{q^2 R^2 \omega^2} \partial_{\theta}^2 + k_{\theta}^2 \rho_i^2 [1 + s^2(\theta - \theta_0)^2] \right\} \hat{\phi}_n = 0 \quad (\text{G.9})$$

où $\bar{\omega}_g = -\frac{2k_{\theta} T}{e B R}$. Posons alors $y = \theta - \theta_0$ et plaçons-nous dans la limite $\theta_0 \ll 1$, $y \ll 1$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\cos(y + \theta_0) &\approx 1 - y\theta_0 - \frac{y^2}{2} \\
y \cdot \sin(y + \theta_0) &\approx y(\theta_0 + y)
\end{aligned}$$

On obtient, pour l'équation (G.9) :

$$\begin{aligned}
\partial_y^2 \hat{\phi}_n + \left[\frac{\tau + k^2(1 + s^2 y^2) + \Omega_n^*}{\Omega_{\parallel}^2(1 - \Omega_p^*)} + \frac{k^2}{2\Omega_{\parallel}^2}(1 + s^2 y^2) - \right. \\
\left. \frac{\Omega_g}{\Omega_{\parallel}^2} \left(1 + y^2 \left(s - \frac{1}{2} \right) + y\theta_0(s - 1) - \frac{\theta_0^2}{2} \right) \right] \hat{\phi}_n = 0 \quad (\text{G.10})
\end{aligned}$$

où on a posé $k^2 = k_{\theta}^2 \rho_i^2$, $\omega_{\parallel}^2 = \frac{v_T^2}{q^2 R^2}$ et $\Omega_a^b = \frac{\omega_a^b}{\omega}$. On peut alors réécrire cette équation aux valeurs propres de la manière suivante :

$$\partial_y^2 \hat{\phi}_n - \lambda(y - \alpha)^2 \hat{\phi}_n = \mu \hat{\phi}_n \quad (\text{G.11})$$

en posant :

$$\begin{aligned}\lambda &\equiv \frac{1}{2\Omega_{\parallel}^2} \left(\Omega_g(2s-1) - k^2 s^2 \frac{3 - \Omega_p^*}{1 - \Omega_p^*} \right) \\ \alpha &\equiv -\theta_0(s-1) \left(2s-1 - \frac{k^2 s^2}{\Omega_g} \frac{3 - \Omega_p^*}{1 - \Omega_p^*} \right)^{-1} \\ \mu &\equiv -\frac{1}{\Omega_{\parallel}^2} \left(\frac{\tau + k^2 + \Omega_n^*}{1 - \Omega_p^*} - \frac{k^2 \Omega_g}{2} + \frac{\Omega_g \theta_0^2}{2} \left[1 + (s-1)^2 \left(2s-1 - \frac{k^2 s^2}{\Omega_g} \frac{3 - \Omega_p^*}{1 - \Omega_p^*} \right)^{-1} \right] \right)\end{aligned}$$

L'équation (G.11) admet des solutions de la forme $\hat{\phi}_n = \hat{\phi}_n^0 e^{-\frac{(y-y_0)^2}{2\delta_y^2}}$. On peut identifier :

$$\begin{cases} \delta_y^4 &= \frac{1}{\lambda} \\ y_0 &= \alpha \\ \frac{\mu}{\lambda} + \lambda^{-1/2} &= 0 \end{cases}$$

La dernière équation est équivalente à une relation de dispersion. Si on se place dans le cas $\omega_n^* = 0$, $\theta_0 = 0$ et $\omega_p^* \gg \omega$, on obtient :

$$-(\tau + k^2) \frac{\omega}{\omega_p^*} - \frac{\omega_g}{\omega} + \frac{k^2}{2} - \frac{\omega_{\parallel} \omega_g^{1/2}}{\sqrt{2} \omega^{3/2}} (2s-1 - k^2 s^2 \frac{\omega}{\omega_g})^{1/2} = 0 \quad (\text{G.12})$$

Le dernier terme est négligeable, car il est du même ordre que $\frac{\omega_g}{\omega}$ et k^2 qui sont nos paramètres d'ordering. Par suite, on peut approcher ω par :

$$\omega \approx i \left(\frac{\omega_g \omega_p^*}{\tau + k^2} \right)^{1/2} \quad (\text{G.13})$$

On peut alors écrire, pour la largeur du mode δ_y en y :

$$\delta_y = \lambda^{-1/4} \approx \left[-\frac{2(\tau + k^2)\omega_{\parallel}^2}{\omega_g \omega_p^*} \right]^{1/4} \left(-i(2s-1) \left[(\tau + k^2) \frac{\omega_g}{\omega_p^*} \right]^{1/2} - k^2 s^2 \right)^{-1/4} \quad (\text{G.14})$$

Si on note δ la largeur radiale du mode, et qu'on se rappelle que $k_r = k_{\theta} s y$, on trouve que :

$$\delta_y \sim \frac{1}{\delta k_{\theta} s}$$

D'où, finalement :

$$\delta \sim \frac{1}{k_{\theta} s} \left[-\frac{2(\tau + k^2)\omega_{\parallel}^2}{\omega_g \omega_p^*} \right]^{-1/4} \left(-i(2s-1) \left[(\tau + k^2) \frac{\omega_g}{\omega_p^*} \right]^{1/2} - k^2 s^2 \right)^{1/4} \quad (\text{G.15})$$

Dans ce cas, on trouve que la largeur du mode est en $\frac{1}{\sqrt{s}}$.

Trou de surfaces résonantes dans le cas d'un profil de q inversé

Nous détaillons dans cette annexe comment obtenir la formule donnée par [Garbet et al. \(2001\)](#) pour l'estimation de la taille du trou des surfaces résonantes dans le cas d'un profil de q inversé (équation (6.18)) :

$$d_{\text{trou}} = \sqrt{\frac{2q_{\min}\rho_{\star}}{n_0\rho_{\min}q''_{\min}}}. \quad (\text{H.1})$$

Nous rappelons la définition de $k_{\parallel} = (n + m/q)/R$ (équation (6.2)). Nous choisissons un profil de q inversé de telle sorte que q soit minimum pour $r = r_{\min}$. Il existe alors un mode (m_0, n_0) tel que $q(r_{\min}) = q_{\min} = -m_0/n_0$, et que $k_{\parallel}(r_{\min}) = 0$. Ecrivons le développement de Taylor de $k_{\parallel}(r_{\min} + d_{\text{trou}})$:

$$k_{\parallel}(r_{\min} + d_{\text{trou}}) = \underbrace{k_{\parallel}(r_{\min})}_{=0} + d_{\text{trou}}k'_{\parallel}(r_{\min}) + \frac{d_{\text{trou}}^2}{2}k''_{\parallel}(r_{\min}). \quad (\text{H.2})$$

La dépendance radiale de R dans k_{\parallel} est négligeable, et par conséquent nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} k'_{\parallel}(r) &= -\frac{mq'}{Rq^2} \rightarrow k'_{\parallel}(r_{\min}) = 0, \\ k''_{\parallel}(r) &= \frac{2mq'^2}{Rq^3} - \frac{mq''}{Rq^2} \rightarrow k''_{\parallel}(r_{\min}) = -\frac{mq''_{\min}}{Rq_{\min}^2}. \end{aligned}$$

La taille du trou peut alors s'écrire

$$d_{\text{trou}}^2 = -k_{\parallel}(r_{\min} + d_{\text{trou}}) \frac{2Rq_{\min}^2}{mq''_{\min}}. \quad (\text{H.3})$$

D'autre part, $k_{\parallel}(r_{\min} + d_{\text{trou}})$ peut être exprimé en fonction de δq , qui représente la distance entre q_{\min} et le q rationnel le plus proche ($q \equiv q_{\min} + \delta q$) pour lequel une surface rationnel existe. On obtient simplement :

$$k_{\parallel}(r_{\min} + d_{\text{trou}}) = \frac{1}{R} \left(n_1 + \frac{m_1}{q_{\min} + \delta q} \right) \sim \frac{1}{R} \left(n_1 + \frac{m_1}{q_{\min}} \left[1 - \frac{\delta q}{q_{\min}} \right] \right) \sim -\frac{m_1}{Rq_{\min}} \frac{\delta q}{q_{\min}}, \quad (\text{H.4})$$

où (m_1, n_1) est tel que d_{trou} est minimisé. En théorie, il est toujours possible de trouver un mode (m_1, n_1) de telle sorte que d_{trou} soit aussi petit que l'on désire. Cependant, on sait que les modes ioniques thermiques sont amortis lorsque leur longueur d'onde transverse est plus faible que le rayon de Larmor. Par conséquent, nous pouvons nous limiter à l'étude des modes tels que $k_{\theta}\rho_i \lesssim 1$, ce qui peut encore s'écrire $m \lesssim r/\rho_i$. Nous obtenons ainsi

$$\frac{\delta q}{q_{\min}} = \frac{|m_0n_1 - m_1n_0|}{n_1n_0q_{\min}} \geq \frac{1}{n_1m_0} \gtrsim \frac{\rho_i}{n_1r_{\min}} = \frac{\rho_{\star}}{n_1\rho_{\min}} \sim \frac{\rho_{\star}}{n_0\rho_{\min}}. \quad (\text{H.5})$$

En combinant les équations (H.3), (H.4) et (H.5), on obtient simplement la limite basse suivante

$$d_{\text{trou}} \sim \sqrt{\frac{m_1}{Rq_{\min}} \frac{\rho_{\star}}{n_0\rho_{\min}} \frac{2Rq_{\min}^2}{m_0q''_{\min}}} \sim \sqrt{\frac{2q_{\min}\rho_{\star}}{n_0\rho_{\min}q''_{\min}}}. \quad (\text{H.6})$$

Polynômes orthogonaux d'Hermite et de Laguerre

Les polynômes d'Hermite et de Laguerre sont des base orthogonales pour les produits scalaires suivants

$$\text{Laguerre } L_\ell(x) : \int_0^{+\infty} L_\ell L_{\ell'} e^{-x} dx = \delta_{\ell\ell'} |L_\ell|^2, \quad (\text{I.1})$$

$$\text{Hermite } H_h(x) : \int_{-\infty}^{+\infty} H_h H_{h'} e^{-x^2} dx = \delta_{hh'} |H_h|^2. \quad (\text{I.2})$$

Les polynômes de Laguerre sont normalisée de telle sorte que $|L_\ell|^2 = 1$. La norme des polynômes d'Hermite est donnée par

$$|H_h|^2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} H_h^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^h h!.$$

Les cinq premiers polynômes de Laguerre sont

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= 1 - x, \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}(2 - 4x + x^2), \\ L_3(x) &= \frac{1}{6}(6 - 18x + 9x^2 - x^3), \\ L_4(x) &= \frac{1}{24}(24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4), \end{aligned}$$

et les cinq premiers polynômes d'Hermite sont

$$\begin{aligned} H_0(x) = 1 &\rightarrow |H_0|^2 = \sqrt{\pi}, \\ H_1(x) = 2x &\rightarrow |H_1|^2 = 2\sqrt{\pi}, \\ H_2(x) = -2 + 4x^2 &\rightarrow |H_2|^2 = 8\sqrt{\pi}, \\ H_3(x) = -12x + 8x^3 &\rightarrow |H_3|^2 = 48\sqrt{\pi}, \\ H_4(x) = 12 - 48x^2 + 16x^4 &\rightarrow |H_4|^2 = 384\sqrt{\pi}. \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

Analyse des harmoniques sphériques

Sommaire

J.1 Bases d'harmoniques sphériques	255
J.1.1 Harmoniques sphériques scalaire	255
J.1.2 Harmoniques sphériques vectorielles (R, S, T)	256
J.1.3 Harmoniques sphériques vectorielles Y	258
J.2 Evolution de l'énergie magnétique	259
J.3 Evolution de l'énergie cinétique	261
J.4 Evolution de l'hélicité magnétique et de l'hélicité croisée	262

Cette annexe présente les détails requis pour calculer les couplages spectraux dans l'espace des harmoniques sphériques. Nous y donnons les définitions, ainsi que les propriétés essentielles des harmoniques. Cette annexe est destinée au lecteur désireux de pratiquer lui-même cette mathématique, elle n'est cependant pas indispensable à la compréhension de l'analyse spectrale développée au chapitre 8.

J.1 Bases d'harmoniques sphériques

J.1.1 Harmoniques sphériques scalaire

Définition

La projection d'un champ scalaire X sur la base des harmoniques sphériques classiques s'écrit

$$X(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l X_l^m Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (\text{J.1})$$

où nous choisissons la normalisation de Laplace

$$Y_l^m = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad (\text{J.2})$$

et où fonction P_l^m représente le polynôme de Legendre associé. Nous donnons en figure J.1 un exemple des harmonique sphérique pour $l = 3$ et $0 \leq m \leq 3$.

Propriétés

La base des harmoniques sphérique est orthogonale car

$$(Y_l^m)^{cc} = (-1)^m Y_l^{-m}, \quad (\text{J.3})$$

$$\int_S Y_{l_1}^{m_1} (Y_{l_2}^{m_2})^{cc} d\Omega = \delta_{m_1, m_2} \delta_{l_1, l_2}, \quad (\text{J.4})$$

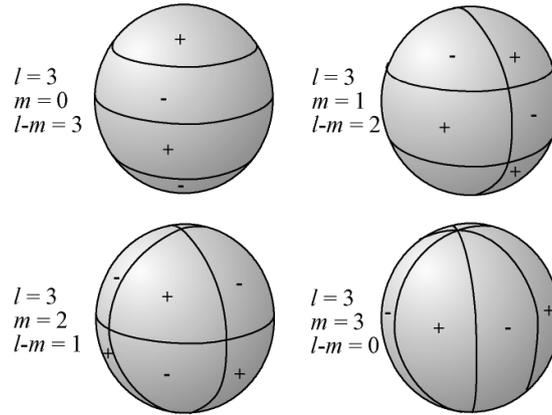


FIGURE J.1 – Harmoniques sphériques pour $l = 3$ et $0 \leq m \leq 3$. On peut remarquer que le nombre de noeuds dans la direction poloïdal est donné par $l - m$.

où cc signifie complexe conjugué, $d\Omega$ est l'angle solide $\sin \theta d\theta d\varphi$ et δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

De plus, les harmoniques sphériques satisfont la relation de récurrence suivante

$$\cos \theta Y_l^m = \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^m + \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1}^m. \quad (\text{J.5})$$

J.1.2 Harmoniques sphériques vectorielles (\mathbf{R} , \mathbf{S} , \mathbf{T})

Définition

A la suite de [Rieutord \(1987\)](#), [Mathis and Zahn \(2005\)](#), nous écrivons

$$\begin{cases} \mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi) &= Y_l^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r \\ \mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi) &= \nabla_{\perp} Y_l^m = \partial_{\theta} Y_l^m \mathbf{e}_{\theta} + \frac{1}{\sin \theta} \partial_{\varphi} Y_l^m \mathbf{e}_{\varphi} \\ \mathbf{T}_l^m(\theta, \varphi) &= \nabla_{\perp} \times \mathbf{R}_l^m = \frac{1}{\sin \theta} \partial_{\varphi} Y_l^m \mathbf{e}_{\theta} - \partial_{\theta} Y_l^m \mathbf{e}_{\varphi} \end{cases}, \quad (\text{J.6})$$

où $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{\theta}, \mathbf{e}_{\varphi})$ est la base sphérique introduite en annexe A.

Propriétés

La base (J.6) hérite des propriétés orthogonale de la base scalaire sous la forme

$$\int_S \mathbf{R}_{l_1}^{m_1} \cdot (\mathbf{R}_{l_2}^{m_2})^{cc} d\Omega = \delta_{l_1, l_2} \delta_{m_1, m_2}, \quad (\text{J.7})$$

$$\int_S \mathbf{S}_{l_1}^{m_1} \cdot (\mathbf{S}_{l_2}^{m_2})^{cc} d\Omega = \int_S \mathbf{T}_{l_1}^{m_1} \cdot (\mathbf{T}_{l_2}^{m_2})^{cc} d\Omega = l_1(l_1 + 1) \delta_{l_1, l_2} \delta_{m_1, m_2}. \quad (\text{J.8})$$

Tous les autres produits scalaires sont exactement nuls. Notons que l'on a

$$(\mathbf{S}_l^m)^{cc} = (-1)^m \mathbf{S}_l^{-m}. \quad (\text{J.9})$$

Les relations de récurrence de la base scalaire s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \cos \theta \mathbf{S}_l^m &= \frac{l}{l+1} \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} \mathbf{S}_{l+1}^m + \frac{l+1}{l} \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}} \mathbf{S}_{l-1}^m \\ &\quad - \frac{im}{l(l+1)} \mathbf{T}_l^m, \end{aligned} \quad (\text{J.10})$$

$$\begin{aligned} \cos \theta \mathbf{T}_l^m &= \frac{l}{l+1} \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} \mathbf{T}_{l+1}^m + \frac{l+1}{l} \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}} \mathbf{T}_{l-1}^m \\ &\quad + \frac{im}{l(l+1)} \mathbf{S}_l^m. \end{aligned} \quad (\text{J.11})$$

Expression des opérateurs vectoriels

Nous donnons ici les expressions des opérateurs vectoriels sur les champs scalaires et vectoriels.

En définissant $\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \{ \psi_m^l(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \}$, on peut écrire

$$\nabla \psi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \partial_r \psi_m^l \mathbf{R}_l^m + \frac{\psi_m^l}{r} \mathbf{S}_l^m \right\}, \quad (\text{J.12})$$

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Delta_l \psi_m^l Y_l^m \quad (\text{J.13})$$

où $\Delta_l = \partial_{rr}^2 + \frac{2}{r} \partial_r - \frac{l(l+1)}{r^2}$.

Pour un vecteur $\mathbf{X}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \{ \mathcal{A}_m^l(r) \mathbf{R}_l^m + \mathcal{B}_m^l(r) \mathbf{S}_l^m + \mathcal{C}_m^l(r) \mathbf{T}_l^m \}$, nous obtenons :

$$\nabla \cdot \mathbf{X} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \left[\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \mathcal{A}_m^l) - l(l+1) \frac{\mathcal{B}_m^l}{r} \right] Y_l^m \right\}, \quad (\text{J.14})$$

$$\nabla \times \mathbf{X} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \left[l(l+1) \frac{\mathcal{C}_m^l}{r} \right] \mathbf{R}_l^m + \left[\frac{1}{r} \partial_r (r \mathcal{C}_m^l) \right] \mathbf{S}_l^m + \left[\frac{\mathcal{A}_m^l}{r} - \frac{1}{r} \partial_r (r \mathcal{B}_m^l) \right] \mathbf{T}_l^m \right\}, \quad (\text{J.15})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{X} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \left[\Delta_l \mathcal{A}_m^l - \frac{2}{r^2} (\mathcal{A}_m^l - l(l+1) \mathcal{B}_m^l) \right] \mathbf{R}_l^m \right. \\ &\quad \left. + \left[\Delta_l \mathcal{B}_m^l + 2 \frac{\mathcal{A}_m^l}{r^2} \right] \mathbf{S}_l^m + \left[\Delta_l \mathcal{C}_m^l \right] \mathbf{T}_l^m \right\}. \end{aligned} \quad (\text{J.16})$$

Décomposition poloïdale-toroïdale

Dans le contexte de la magnétohydrodynamique en approximation anélastique, nous travaillons avec deux champs vectoriels à divergence nulle \mathbf{B} et $\bar{\rho} \mathbf{v}$. Dans ce cas, nous pouvons les décomposer sous la forme "poloïdale-toroïdale" utilisée dans le code ASH

$$\mathbf{X} = \nabla \times \nabla \times (C \mathbf{e}_r) + \nabla \times (A \mathbf{e}_r).$$

Si l'on projette les composantes poloïdales et toroïdales sur les harmoniques sphériques scalaires (J.1), on peut écrire en utilisant (J.15) :

$$\mathbf{X} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \frac{l(l+1)}{r^2} C_m^l(r) \mathbf{R}_l^m + \frac{1}{r} \partial_r C_m^l(r) \mathbf{S}_l^m + \frac{A_m^l(r)}{r} \mathbf{T}_l^m \right\}, \quad (\text{J.17})$$

Il est important ici de garder en mémoire que les champs poloïdaux de projettent sur (\mathbf{R}, \mathbf{S}) , et les champs toroïdaux sur \mathbf{T} .

J.1.3 Harmoniques sphériques vectorielles \mathbf{Y}

Si les opérateurs vectoriels sont pratiques à écrire dans la base $(\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T})$, l'évaluation des produits vectoriels et scalaires est autrement plus complexe. Nous introduisons ici une autre base vectorielle (*Varshalovich et al.*, 1988) afin d'exprimer ces opérations en utilisant les harmoniques sphériques.

Définition

La nouvelle base s'écrit

$$\mathbf{Y}_{l,l+\nu}^m(\theta, \varphi) = \sum_{\mu=-1}^1 \left\{ (-1)^{l-m} \sqrt{2l+1} \begin{pmatrix} l & l+\nu & 1 \\ m & \mu-m & -\mu \end{pmatrix} Y_{l+\nu}^{m-\mu} \mathbf{e}_\mu \right\}, \quad (\text{J.18})$$

où (...) représente le coefficient 3j de Wigner, qui est directement relié aux coefficients de Clebsch-Gordan. Les vecteurs \mathbf{e}_μ sont définis par

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \\ \mathbf{e}_0 &= \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \end{cases}, \quad (\text{J.19})$$

où $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ est la base cartésienne.

Propriétés

La règle de conjugaison s'écrit alors

$$(\mathbf{Y}_{l,l+\nu}^m)^{cc} = (-1)^{m+\delta_{0\nu}} \mathbf{Y}_{l,l+\nu}^{-m}. \quad (\text{J.20})$$

La démonstration que les vecteurs ainsi formés définissent bien une base pourra être trouvée dans *Varshalovich et al.* (1988).

Expressions des produits scalaires et vectoriels

On décompose un vecteur \mathbf{X} de la manière suivante :

$$\mathbf{X}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{\nu=-1}^1 X_{l,l+\nu}^m(r) \mathbf{Y}_{l,l+\nu}^m.$$

Le produit vectoriel $\mathbf{X}_{12} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ s'écrit alors

$$X_{12;l_1 l_2, l_1 l_2 + \nu_{12}}^{m_{12}} = \sum_{\substack{l_1, l_2=0 \\ l_{12} \geq |l_1 - l_2| \\ l_{12} \leq l_1 + l_2}}^{\infty} \sum_{\substack{l_1, l_2 \\ m_1 = -l_1 \\ m_2 = -l_2 \\ m_1 + m_2 = m_{12}}} \sum_{\nu_1, \nu_2} X_{1;l_1, l_1 + \nu_1}^{m_1} X_{2;l_2, l_2 + \nu_2}^{m_2} \mathcal{J}_{l_1, m_1, \nu_1, l_2, m_2, \nu_2}^{l_{12}, m_{12}, \nu_{12}}, \quad (\text{J.21})$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{l_1, m_1, \nu_1, l_2, m_2, \nu_2}^{l_{12}, m_{12}, \nu_{12}} &= i(-1)^{\nu_1 - \nu_2 + (m_1 + m_2)} \\ &\sqrt{\frac{3}{2\pi} (2l_1 + 1)(2l_1 + 2\nu_1 + 1)(2l_2 + 1)(2l_2 + 2\nu_2 + 1)(2l + 1)(2l + 2\nu + 1)} \\ &\begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ l_1 + \nu_1 & l_2 + \nu_2 & l + \nu \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & -(m_1 + m_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 + \nu_1 & l_2 + \nu_2 & l + \nu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{J.22})$$

et $\{\dots\}$ est le coefficient 9j de Wigner.

Nous pouvons également écrire le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{Y}_{l_1, l_1 + \nu_1}^{m_1}$ et $\mathbf{Y}_{l_2, l_2 + \nu_2}^{m_2}$:

$$\mathbf{Y}_{l_1, l_1 + \nu_1}^{m_1} \cdot \mathbf{Y}_{l_2, l_2 + \nu_2}^{m_2} = \sum_l \mathcal{K}_{l_1, m_1, \nu_1, l_2, m_2, \nu_2}^{l, m_1 + m_2} Y_l^{m_1 + m_2}, \quad (\text{J.23})$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{l_1, m_1, \nu_1, l_2, m_2, \nu_2}^{l, m_1 + m_2} &= (-1)^{l_1 - (l_2 + \nu_2) + l + m} \\ &\sqrt{\frac{1}{4\pi} (2l_1 + 1)(2l_1 + 2\nu_1 + 1)(2l_2 + 1)(2l_2 + 2\nu_2 + 1)(2l + 1)} \\ &\left\{ \begin{matrix} l_1 + \nu_1 & l_2 + \nu_2 & l \\ l_2 & l_1 & 1 \end{matrix} \right\} \left(\begin{matrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & -(m_1 + m_2) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} l_1 + \nu_1 & l_2 + \nu_2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right) \end{aligned} \quad (\text{J.24})$$

et $\{\dots\}$ est le coefficient 6j de Wigner.

Relations de passage

De façon remarquable, les relations de passages entre les bases (J.6) et (J.18) s'écrivent très simplement. Pour un vecteur \mathbf{X} décomposé de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \mathcal{A}_m^l \mathbf{R}_l^m + \mathcal{B}_m^l \mathbf{S}_l^m + \mathcal{C}_m^l \mathbf{T}_l^m \right\} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{\nu=-1}^1 \left\{ X_{l, l + \nu}^m \mathbf{Y}_{l, l + \nu}^m \right\}, \end{aligned}$$

les deux relations de passage s'écrivent

$$\begin{cases} \mathcal{A}_m^l &= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left[\sqrt{l} X_{l, l-1}^m - \sqrt{l+1} X_{l, l+1}^m \right] \\ \mathcal{B}_m^l &= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left[\frac{1}{\sqrt{l}} X_{l, l-1}^m + \frac{1}{\sqrt{l+1}} X_{l, l+1}^m \right] \\ \mathcal{C}_m^l &= \frac{i}{\sqrt{l(l+1)}} X_{l, l}^m \end{cases}, \quad (\text{J.25})$$

$$\begin{cases} X_{l, l-1}^m &= \sqrt{\frac{l}{2l+1}} (\mathcal{A}_m^l + (l+1)\mathcal{B}_m^l) \\ X_{l, l}^m &= -i\sqrt{l(l+1)}\mathcal{C}_m^l \\ X_{l, l+1}^m &= \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} (-\mathcal{A}_m^l + l\mathcal{B}_m^l) \end{cases}. \quad (\text{J.26})$$

J.2 Evolution de l'énergie magnétique

La dérivation des différentes équations d'évolution sont données au chapitre 8. Dans cette annexe, nous donnons les expressions détaillées des différentes termes. Nous utiliserons les dé-

compositions suivantes pour le champ magnétique et le champ de vitesse

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \nabla \times \nabla \times (C\mathbf{e}_r) + \nabla \times (A\mathbf{e}_r) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \frac{l(l+1)}{r^2} C_m^l \mathbf{R}_l^m + \frac{1}{r} \partial_r C_m^l \mathbf{S}_l^m + \frac{A_m^l}{r} \mathbf{T}_l^m \right\} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{l}{r} C_m^l + \partial_r C_m^l \right) \mathbf{Y}_{l,l-1}^m - i\sqrt{l(l+1)} \frac{A_m^l}{r} \mathbf{Y}_{l,l}^m \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \frac{l}{r} \left(-\frac{l+1}{r} C_m^l + \partial_r C_m^l \right) \mathbf{Y}_{l,l+1}^m \right\} \tag{J.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}\mathbf{v} &= \nabla \times \nabla \times (W\mathbf{e}_r) + \nabla \times (Z\mathbf{e}_r) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \frac{l(l+1)}{r^2} W_m^l \mathbf{R}_l^m + \frac{1}{r} \partial_r W_m^l \mathbf{S}_l^m + \frac{Z_m^l}{r} \mathbf{T}_l^m \right\} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{l}{r} W_m^l + \partial_r W_m^l \right) \mathbf{Y}_{l,l-1}^m - i\sqrt{l(l+1)} \frac{Z_m^l}{r} \mathbf{Y}_{l,l}^m \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \frac{l}{r} \left(-\frac{l+1}{r} W_m^l + \partial_r W_m^l \right) \mathbf{Y}_{l,l+1}^m \right\} \tag{J.28}
\end{aligned}$$

L'équation d'évolution de l'énergie magnétique s'écrit

$$\partial_t E_L^{mag} = \mathcal{N}_L + \sum_{L_1, L_2} \{ \mathcal{P}_L(L_1, L_2) + \mathcal{F}_L(L_1, L_2) \} . \tag{J.29}$$

Terme de production

Le terme de production se réécrit

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \frac{c}{4\pi} \int_S (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_L \cdot \mathbf{J}_L \, d\Omega \\
&= \frac{c}{4\pi} \sum_{l|m} \frac{(-1)^m l(l+1)}{r^2 \sqrt{2l+1}} \left\{ \left[\sqrt{l} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{l,l-1}^m - \sqrt{l+1} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{l,l+1}^m \right] A_{-m}^l \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{1}{\sqrt{l}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{l,l-1}^m + \frac{1}{\sqrt{l+1}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{l,l+1}^m \right] r \partial_r A_{-m}^l \right. \\
&\quad \left. - i\sqrt{\frac{2l+1}{l(l+1)}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{l,l}^m r^2 \Delta_l \left(\frac{C_{-m}^l}{r} \right) \right\} , \tag{J.30}
\end{aligned}$$

où $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{l,l}^m$ est donné par la formule du produit vectoriel (J.21) et inclus la sommation sur les coquilles L_1, L_2 .

Terme de flux

Le terme de flux se réécrit

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \int_S \nabla \cdot ((\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_L) \, d\Omega \\
&= -\frac{\sqrt{4\pi}}{r^2} \partial_r r^2 \sum_{l|m} \sum_{\nu_1, \nu_2} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{l,l+\nu_1}^m B_{l,l+\nu_2}^{-m} \mathcal{J}_{l,m,\nu_1,l,-m,\nu_2}^{0,0,1} . \tag{J.31}
\end{aligned}$$

Termes dissipatifs

Les termes dissipatifs se réécrivent

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 = \int_S \eta \mathbf{B}_L \cdot \nabla^2 \mathbf{B}_L \, d\Omega = & \eta \sum_{l|m} (-1)^m l(l+1) \left\{ \frac{l(l+1)}{r^3} \Delta_l \left(\frac{C_m^l}{r} \right) C_{-m}^l \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2} \partial_r \left[r \Delta_l \left(\frac{C_m^l}{r} \right) \right] \partial_r C_{-m}^l + \Delta_l \left(\frac{A_m^l}{r} \right) \frac{A_{-m}^l}{r} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{J.32})$$

et

$$\mathcal{N}_2 = \int_s (\mathbf{B}_L \times \nabla \times \mathbf{B}) \cdot \partial_r \eta \mathbf{e}_r \, d\Omega = -\frac{c \partial_r \eta}{\sqrt{4\pi}} \sum_{l|m} \sum_{\nu_1, \nu_2} B_{l, l+\nu_1}^m J_{l, l+\nu_2}^{-m} \mathcal{J}_{l, m, \nu_1, l, -m, \nu_2}^{0,0,1}. \quad (\text{J.33})$$

J.3 Evolution de l'énergie cinétique

Rappelons l'expression de l'équation d'évolution de l'énergie cinétique :

$$\partial_t E_L^K = \mathcal{V}_L + \mathcal{H}_L + \mathcal{C}_L(L-1, L+1) + \sum_{L_1, L_2} \{ \mathcal{R}_L(L_1, L_2) + \mathcal{M}_L(L_1, L_2) \}. \quad (\text{J.34})$$

Les contributions hydrostatiques \mathcal{H} et du tenseur de Maxwell \mathcal{M} ne présentent pas de difficulté particulière. La contribution issue du tenseur de Reynolds \mathcal{R} s'exprime facilement lorsqu'on le décompose en deux parties

$$\mathcal{R}_L(r, L_1, L_2) = \bar{\rho} \int_S [\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} - \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})]_{L_1} \times \mathbf{v}_{L_2} \, d\Omega, \quad (\text{J.35})$$

en utilisant les formules du produit vectoriel (J.21) et du produit scalaire (J.23).

Terme de Coriolis

Le terme issu de la force de Coriolis s'écrit

$$\mathcal{C}_L(r, L-1, L+1) = -2\bar{\rho} \int_S (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{v}_{(L-1|L+1)}) \cdot \mathbf{v}_L \, d\Omega,$$

et $(\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{U})_{l, l+\nu}^m$ s'écrit

$$\begin{aligned} -(\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{U})_{l, l+\nu}^m = & \sqrt{4\pi} \sum_{\nu_1=-1}^1 \left[U_{l, l+\nu_1}^m \mathcal{J}_{l, m, \nu_1, 1, 0, -1}^{l, m, \nu} + U_{l+1, l+1+\nu_1}^m \mathcal{J}_{l+1, m, \nu_1, 1, 0, -1}^{l, m, \nu} \right. \\ & \left. + U_{l-1, l-1+\nu_1}^m \mathcal{J}_{l-1, m, \nu_1, 1, 0, -1}^{l, m, \nu} \right] \Omega_0. \end{aligned}$$

Il couple la coquille L aux coquilles $L+1$ et $L-1$.

Terme visqueux

A l'aide de la définition $\mathcal{D}_{ij} = -2\bar{\rho}\nu (\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \delta_{ij})$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & -2\bar{\rho}\nu \cdot \\ \left(\begin{array}{ccc} \partial_r v_r - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} & \frac{1}{2} (r \partial_r \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta v_r) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi v_r + r \partial_r \frac{v_\varphi}{r} \right) \\ \frac{1}{2} (r \partial_r \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta v_r) & \frac{1}{r} \partial_\theta v_\theta + \frac{v_r}{r} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} & \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \frac{v_\varphi}{\sin \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi v_\theta \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi v_r + r \partial_r \frac{v_\varphi}{r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \frac{v_\varphi}{\sin \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi v_\theta \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi v_\varphi + \frac{v_r + \cot \theta v_\theta}{r} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (\text{J.36})$$

Pour simplifier les notations, nous écrivons le vecteur \mathbf{v} tel que :

$$\mathbf{v} = \sum_{l,m} \mathcal{A}_m^l \mathbf{R}_l^m + \mathcal{B}_m^l \mathbf{S}_l^m + \mathcal{C}_m^l \mathbf{T}_l^m .$$

Les différentes composantes du tenseur visqueux se réécrivent alors

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{rr} &= -2\bar{\rho}\nu \sum_{l,m} \left\{ \partial_r \mathcal{A}_m^l Y_l^m \right\} + \frac{2\bar{\rho}\nu}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \mathcal{D}_{r\theta} &= -\bar{\rho}\nu \sum_{l,m} \left\{ \left(\partial_r \mathcal{B}_m^l - \frac{\mathcal{B}_m^l}{r} + \frac{\mathcal{A}_m^l}{r} \right) \partial_\theta Y_l^m + \left(\partial_r \mathcal{C}_m^l - \frac{\mathcal{C}_m^l}{r} \right) \frac{\partial_\varphi Y_l^m}{\sin \theta} \right\} \\ \mathcal{D}_{r\varphi} &= -\bar{\rho}\nu \sum_{l,m} \left\{ \left(\frac{\mathcal{C}_m^l}{r} - \partial_r \mathcal{C}_m^l \right) \partial_\theta Y_l^m + \left(\partial_r \mathcal{B}_m^l - \frac{\mathcal{B}_m^l}{r} + \frac{\mathcal{A}_m^l}{r} \right) \frac{\partial_\varphi Y_l^m}{\sin \theta} \right\} \\ \mathcal{D}_{\theta\theta} &= -2\bar{\rho}\nu \sum_{l,m} \left\{ \frac{\mathcal{B}_m^l}{r} \partial_{\theta\theta}^2 Y_l^m + \frac{\mathcal{A}_m^l}{r} Y_l^m + \frac{\mathcal{C}_m^l}{r \sin \theta} \partial_{\theta\varphi}^2 Y_l^m - \frac{\mathcal{C}_m^l}{r \tan \theta} \frac{\partial_\varphi Y_l^m}{\sin \theta} \right\} + \frac{2\bar{\rho}\nu}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \mathcal{D}_{\theta\varphi} &= -\bar{\rho}\nu \sum_{l,m} \left\{ \frac{\mathcal{C}_m^l}{r \tan \theta} \partial_\theta Y_l^m - \frac{\mathcal{C}_m^l}{r} \partial_{\theta\theta}^2 Y_l^m + \frac{\mathcal{C}_m^l}{r \sin^2 \theta} \partial_{\varphi\varphi}^2 Y_l^m + \frac{2\mathcal{B}_m^l}{r \sin \theta} \partial_{\theta\varphi}^2 Y_l^m - \frac{2\mathcal{B}_m^l}{r \tan \theta} \frac{\partial_\varphi Y_l^m}{\sin \theta} \right\} \\ \mathcal{D}_{\varphi\varphi} &= -2\bar{\rho}\nu \sum_{l,m} \left\{ \frac{\mathcal{B}_m^l}{\sin^2 \theta} \partial_{\varphi\varphi}^2 Y_l^m + \frac{\mathcal{B}_m^l}{r \tan \theta} \partial_\theta Y_l^m - \frac{\mathcal{C}_m^l}{r \sin \theta} \partial_{\theta\varphi}^2 Y_l^m + \frac{\mathcal{C}_m^l}{r \tan \theta} \frac{\partial_\varphi Y_l^m}{\sin \theta} \right\} + \frac{2\bar{\rho}\nu}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

En utilisant la formule de la divergence d'un tenseur en coordonnées sphériques, on peut enfin montrer que

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \mathcal{D} &= \sum_{l,m} \left\{ \bar{\rho}\nu \left[\Delta_l \mathcal{A}_m^l + \frac{1}{3} \partial_{rr}^2 \mathcal{A}_m^l + \frac{2}{3r} \partial_r \mathcal{A}_m^l - \frac{8}{3r^2} \mathcal{A}_m^l + \frac{l(l+1)}{3r} \left(-\partial_r \mathcal{B}_m^l + \frac{7}{r} \mathcal{B}_m^l \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \partial_r (\bar{\rho}\nu) \left(2\partial_r \mathcal{A}_m^l - 2\frac{\mathcal{A}_m^l}{r} + \frac{l(l+1)}{r} \mathcal{B}_m^l \right) \right\} \mathbf{R}_l^m + \\ &\quad + \left\{ \bar{\rho}\nu \left[\Delta_l \mathcal{B}_m^l - \frac{l(l+1)}{3r^2} \mathcal{B}_m^l + \frac{1}{3r} \left(\partial_r \mathcal{A}_m^l + \frac{8}{r} \mathcal{A}_m^l \right) \right] + \partial_r (\bar{\rho}\nu) \left(r \partial_r \frac{\mathcal{B}_m^l}{r} + \frac{\mathcal{A}_m^l}{r} \right) \right\} \mathbf{S}_l^m + \\ &\quad + \left\{ \bar{\rho}\nu \Delta_l \mathcal{C}_m^l + \partial_r (\bar{\rho}\nu) r \partial_r \frac{\mathcal{C}_m^l}{r} \right\} \mathbf{T}_l^m . \end{aligned}$$

où nous rappelons que $\Delta_l = \partial_{rr}^2 + \frac{2}{r} \partial_r - \frac{l(l+1)}{r^2}$. Il suffit alors de prendre le produit scalaire de cette expression avec \mathbf{v}_L pour obtenir \mathcal{V}_L .

J.4 Evolution de l'hélicité magnétique et de l'hélicité croisée

La démonstration de l'invariance de jauge de notre hélicité magnétique est donnée en annexe K. Les termes inclus dans les équations d'évolution de l'hélicité magnétique et de l'hélicité croisée n'impliquent pas de difficulté particulière et sont similaires aux termes que nous avons donné pour les équations d'évolution de l'énergie magnétique et de l'énergie cinétique. Nous ne donnons pas les détails des expressions ici afin de ne pas alourdir cette annexe, le lecteur intéressé peut aisément les retrouver à partir des calculs détaillés ci-dessus.

Hélicité magnétique relative sur une surface sphérique

Nous démontrons dans cette annexe que dans la géométrie sphérique, le choix de la jauge de Coulomb rend l'hélicité magnétique et l'hélicité magnétique relative égales. Rappelons les définitions de ces deux hélicités

$$H^M = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d\Omega, \quad (\text{K.1})$$

$$H_{\text{rel}}^M = \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) \, d\Omega, \quad (\text{K.2})$$

où le champ magnétique \mathbf{B}_0 est potentiel ($\nabla \times \mathbf{B}_0 = 0$) et tel que sa composante normale à la surface S considérée est égale à celle du champ \mathbf{B} .

Nous écrivons à présent la décomposition poloïdale-toroïdale des champs magnétiques \mathbf{B} et \mathbf{B}_0 de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \nabla \times (C\mathbf{e}_e) + \nabla \times (A\mathbf{e}_r), \\ \mathbf{A} &= \nabla \times (C\mathbf{e}_r) + A\mathbf{e}_r + \nabla\psi, \\ \mathbf{B}_0 &= \nabla \times \nabla \times (C_0\mathbf{e}_e), \\ \mathbf{A}_0 &= \nabla \times (C_0\mathbf{e}_e). \end{aligned}$$

Rappelons que le choix de jauge pour le champ potentiel \mathbf{B}_0 ne change pas le caractère de relatif de l'hélicité (section 8.2.1), nous choisissons par suite l'expression la plus simple possible pour \mathbf{A}_0 . Le champ potentiel n'a pas de composante toroïdale (ceci découle naturellement de la condition potentielle qui impose que $J_r = 0$). En choisissant la jauge de Coulomb ($\psi = 0$) pour \mathbf{B} , nous pouvons calculer la différence d'hélicité :

$$\begin{aligned} H_{\text{rel}}^M - H^M &= - \frac{1}{2} \int \nabla \times (C\mathbf{e}_r) \cdot \nabla \times \nabla \times (C_0\mathbf{e}_r) \, d\Omega \\ &\quad - \frac{1}{2} \int A\mathbf{e}_r \cdot \nabla \times \nabla \times (C_0\mathbf{e}_r) \, d\Omega \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \nabla \times (C_0\mathbf{e}_r) \cdot \nabla \times \nabla \times (C\mathbf{e}_r) \, d\Omega \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \nabla \times (C_0\mathbf{e}_r) \cdot \nabla \times (A\mathbf{e}_r) \, d\Omega \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \nabla \times (C_0\mathbf{e}_r) \cdot \nabla \times \nabla \times (C_0\mathbf{e}_r) \, d\Omega \end{aligned}$$

En utilisant la relation vectorielle $\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int \nabla \times (C\mathbf{e}_r) \cdot \nabla \times \nabla \times (C_0\mathbf{e}_r) \, d\Omega &= \int \nabla \cdot [(C\mathbf{e}_r) \times \nabla \times \nabla \times (C_0\mathbf{e}_r)] \, d\Omega \\ &\quad + \int (C\mathbf{e}_r) \times \nabla \times \nabla \times \nabla \times (C_0\mathbf{e}_r) \, d\Omega. \end{aligned}$$

La première intégrale est nulle car le vecteur se trouvant dans la divergence ne possède pas de composante radiale. Puis, la seconde intégrale est également nulle car $\nabla \times \nabla \times \nabla \times (C_0 \mathbf{e}_r)$ ne possède pas non plus de composante radiale. La somme des deux intégrales est donc nulle, indépendamment des valeurs de C et C_0 . On peut par conséquent réécrire

$$\begin{aligned} H_{\text{rel}}^M - H^M = & - \frac{1}{2} \int \mathbf{Ae}_r \cdot \nabla \times \nabla \times (C_0 \mathbf{e}_r) \, d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int \nabla \times (C_0 \mathbf{e}_r) \cdot \nabla \times (\mathbf{Ae}_r) \, d\Omega. \end{aligned}$$

En réutilisant la relation vectorielle précédente, on obtient

$$\begin{aligned} H_{\text{rel}}^M - H^M = & - \frac{1}{2} \int \nabla \cdot [(\mathbf{Ae}_r) \times \nabla \times (C_0 \mathbf{e}_r)] \, d\Omega \\ & - \frac{1}{2} \int \nabla \times (\mathbf{Ae}_r) \cdot \nabla \times (C_0 \mathbf{e}_r) \, d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int \nabla \times (C_0 \mathbf{e}_r) \cdot \nabla \times (\mathbf{Ae}_r) \, d\Omega. \end{aligned}$$

La première intégrale est à nouveau nulle car le vecteur dans la divergence ne contient pas de composante radiale. On obtient donc trivialement

$$H_{\text{rel}}^M = H^M.$$

Nous avons bien démontré que dans la jauge de Coulomb sur une surface sphérique, l'hélicité magnétique est égale à une hélicité indépendante de jauge.

Familles dynamos

Depuis les premières études sur l'effet dynamo dans les plasmas, la décomposition du champ magnétique sous forme de familles *primaires* (ou *dipolaires*, anti-symétriques par rapport à l'équateur) et *secondaires* (ou *quadripolaires*, symétriques par rapport à l'équateur) a été mathématiquement mis en évidence (*Bullard and Gellman, 1954, Roberts and Stix, 1972, McFadden et al., 1991, Gubbins and Zhang, 1993, DeRosa et al., 2012*). Pour un vecteur

$$\mathbf{X} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \mathcal{A}_m^l \mathbf{R}_l^m + \mathcal{B}_m^l \mathbf{S}_l^m + \mathcal{C}_m^l \mathbf{T}_l^m \right\},$$

Roberts and Stix (1972) définissent la famille primaire de la manière suivante

$$\mathbf{X}^p = \mathcal{A}_m^{m+1} \mathbf{R}_{m+1}^m + \mathcal{B}_m^{m+1} \mathbf{S}_{m+1}^m + \mathcal{C}_m^m \mathbf{T}_m^m + \mathcal{A}_m^{m+3} \mathbf{R}_{m+3}^m + \mathcal{B}_m^{m+3} \mathbf{S}_{m+3}^m + \mathcal{C}_m^{m+2} \mathbf{T}_{m+2}^m + \dots,$$

et la famille secondaire par

$$\mathbf{X}^s = \mathcal{A}_m^m \mathbf{R}_m^m + \mathcal{B}_m^m \mathbf{S}_m^m + \mathcal{C}_m^{m+1} \mathbf{T}_{m+1}^m + \mathcal{A}_m^{m+2} \mathbf{R}_{m+2}^m + \mathcal{B}_m^{m+2} \mathbf{S}_{m+2}^m + \mathcal{C}_m^{m+3} \mathbf{T}_{m+3}^m + \dots$$

En utilisant la base $(\mathbf{Y}_{l,l+\nu}^m)_{\nu=-1,0,1}$ (annexe J, section J.1.3), on peut facilement montrer que les vecteurs de la famille primaire sont tels que $l+m+\nu$ est pair, et les vecteurs de la famille secondaire tels que $l+m+\nu$ est impair.

Le produit vectoriel qui apparaît dans l'équation d'induction (1.17) fait intervenir le coefficient 3-j Wigner (voir aussi équation (J.21)) suivant

$$\begin{pmatrix} l_1 + \nu_1 & l_2 + \nu_2 & l + \nu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $m_1 + m_2 = m$, ce coefficient 3-j Wigner est nul si $l_1 + \nu_1 + l_2 + \nu_2 + l + \nu = (l_1 + \nu_1 + m_1) + (l_2 + \nu_2 + m_2) + (l + \nu + m) - 2m$ est impair. Par conséquent, si \mathbf{U} et \mathbf{B} sont de familles différentes, il faut que $l+m+\nu$ soit impair pour que le coefficient 3-j Wigner soit non nul. De même si \mathbf{U} et \mathbf{B} sont de la même famille, le coefficient 3-j Wigner est non nul si et seulement si $l+m+\nu$ est pair. La séparation des familles dynamo primaire et secondaire apparaît alors clairement et peut être résumée de la façon suivante :

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times (\mathbf{U}^p \times \mathbf{B}^s) \\ \nabla \times (\mathbf{U}^s \times \mathbf{B}^p) \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{B}^p \quad \text{et} \quad \left. \begin{array}{l} \nabla \times (\mathbf{U}^p \times \mathbf{B}^p) \\ \nabla \times (\mathbf{U}^s \times \mathbf{B}^s) \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{B}^s, \quad (\text{L.1})$$

où les exposants p et s représentent les familles primaires et secondaires et on rappelle que le rotationnel change la symétrie du champ auquel il s'applique. Cette décomposition est particulièrement intéressante dans le cas où le champ de vitesse générant la dynamo est de la famille secondaire (typiquement, la rotation différentielle est un champ secondaire). Dans ce cas, les deux familles dynamo ne communiquent pas entre elles et sont indépendantes. De plus, la force de Lorentz qui apparaît dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement est toujours

de la famille secondaire et ne génère par conséquent pas d'écoulement susceptible de mélanger les deux familles dynamo. Ces propriétés ont également été mises en évidence, dans un autre formalisme, par *McFadden et al.* (1991), *Gubbins and Zhang* (1993). Dans le Soleil, la brisure de symétrie équatoriale est naturellement présente dans les mouvements convectifs et entraîne un couplage des familles dynamos.