



**HAL**  
open science

# Schémas Numériques pour la Simulation des Grandes Echelles

Fanny Dardalhon

► **To cite this version:**

Fanny Dardalhon. Schémas Numériques pour la Simulation des Grandes Echelles. Analyse numérique [math.NA]. Aix-Marseille Université, 2012. Français. NNT : 2012AIXM4328 . tel-00766722

**HAL Id: tel-00766722**

**<https://theses.hal.science/tel-00766722>**

Submitted on 18 Dec 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ**  
**U.F.R. de Mathématiques, Informatique et Mécanique**

# **THÈSE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE**

Discipline : Mathématiques  
École Doctorale Mathématiques et Informatique de Marseille  
E.D. numéro 184

présentée  
par

**Fanny DARDALHON**

le 3 décembre 2012

## **Schémas numériques pour la Simulation des Grandes Échelles**

### **JURY**

Mme	C.	BERNARDI	CNRS, Université Pierre et Marie Curie	Rapporteur
M	F.	BOYER	Aix-Marseille Université	Directeur de thèse
M	E.	CREUSÉ	Université Lille 1	Rapporteur
M	C.	GALUSINSKI	Université du Sud Toulon Var	Examineur
Mme	C.	LAPUERTA	IRSN, Cadarache	Encadrante IRSN
M	J.-C.	LATCHÉ	IRSN, Cadarache	Examineur
M	R.	PASQUETTI	CNRS, Université de Nice Sophia-Antipolis	Examineur



*À Myriam, ma mère,  
et Emmanuel,*

*pour leurs encouragements,  
leur soutien,  
et leur patience...*



# Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Franck Boyer et Céline Lapuerta.

Merci à Franck pour avoir fait preuve d'une très grande disponibilité tout au long de la thèse pour répondre à mes questions. Ce fût très agréable et très enrichissant de travailler à ses côtés. Merci de m'avoir toujours écoutée, conseillée, soutenue dans les moments les plus difficiles, même en dehors du cadre de la thèse. Merci pour tout, sincèrement.

Je remercie Céline de m'avoir encadrée. Merci pour l'aide qu'elle m'a apportée et pour avoir su me faire partager ses qualités scientifiques de rigueur et d'organisation.

Mes plus sincères remerciements vont à Christine Bernardi et Emmanuel Creusé pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail.

Je souhaite également remercier Cédric Galusinski, Jean-Claude Latché et Richard Pasquetti pour avoir accepté de participer à mon jury.

Je tiens par ailleurs à remercier Jean-Claude Latché pour avoir suivi mon travail pendant ces trois ans, et pour avoir répondu à mes questions en restant toujours optimiste quoiqu'il arrive.

Je remercie Jean-Marc Ricaud et Laurence Rigollet de m'avoir accueillie dans leur laboratoire. Je remercie par ailleurs tous mes collègues du LIE et/ou du LIMSI pour leur sympathie, et pour m'avoir chacun aidé ou transmis des savoir-faire : Jean, Eric, Sylvain, Fabien, Fabrice, Matthieu, Philippe, Laura, Marc, William, François, Samuel, Jean-Paul, Guillaume. Merci également aux thésards : Aurélien, Clément, Walid, Ayoub, Raphaël qui a partagé mon bureau pendant trois ans, Trung, Romain, Rodrigo. Merci à Delphine et aux stagiaires anciens : Khaled, Anani ou nouveaux : Julien, Sophie, Hélène, Gaétan. Je remercie par ailleurs Caroline, Marie-Claire et Sarah pour m'avoir toujours accueillie chaleureusement et aidé. Je n'oublie pas tous ceux du LETR : Martin et Corinne mais aussi ceux avec qui j'ai partagé des repas bien animés : Rolland Dubourg, Rolland Ducher, Bruno, Marc, Bénédicte.

Je remercie également les membres du LATP de m'avoir accueillie au sein de leur laboratoire. En premier lieu, merci à tous ceux qui ont contribué à mon éducation mathématique et qui m'ont intégrée chaleureusement à l'équipe d'analyse appliquée : Florence, Thierry, Raphaële, Philippe, Pascal, Olivier, Yves, Assia, Gérard, Norbert, Guillemette, François, Mihai, Pierre ainsi que Claudia et Emmanuel. Ensuite, j'adresse un grand merci à Sebastian et Stella pour m'avoir toujours encouragée et aidée. Merci également à Sébastien, Federico, Shanti, Jonathan, Lionel, Clément, Emilie, Michael mais aussi à Thomas, Flore, Niklas, Guillaume, Amel, Rima, Chady, Benjamin et Serge qui ont participé au plaisir de travailler au CMI. Merci pour tous ces excellents moments passés à vos côtés. Un grand merci à Sonia, Valérie et à Marie-Christine pour m'avoir sauvée de nombreuses fois face à d'abominables tâches administratives.

Par ailleurs, merci aux équipes pédagogiques de Saint-Jerôme et d'Aix-Montperrin dont j'assume les TD et qui ont fait leur possible pour faciliter la préparation de ma fin de thèse : merci à Emil, Odile, Galliano et Victoria.

J'adresse une tendre pensée à ma famille sans laquelle tout ça n'aurait jamais été possible, merci

en particulier à ma mère qui a fait de son mieux pour gérer mon stress et qui m'a toujours aidée et secouée quand il le fallait.

Je tiens à remercier mes amis de toujours qui m'ont permis (de force parfois) de me changer les idées régulièrement : Ghislain, Leticia, Alexandra, Gilles, Delphine, Nicolas. Merci aussi à tous les membres de la Pootra.

Je l'avoue, je dois aussi remercier Chataigne et Craby pour avoir porté un intérêt particulier à mon travail sur ordinateur et à tous les papiers sur lesquels je travaillais.

Enfin, merci à Emmanuel pour son immense soutien face à mes doutes, mes angoisses et pour avoir à chaque fois su m'épauler et me motiver. Merci également à sa famille.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>17</b>
<b>Partie I : Discrétisation en temps</b>	<b>39</b>
<b>I Méthode de projection</b>	<b>41</b>
I.1 Semi-discrétisation en temps de la méthode de projection incrémentale . . . . .	42
I.2 Schéma discret en temps et en espace . . . . .	45
I.2.1 Étapes de prédiction et de projection (problème de Darcy) . . . . .	45
I.2.2 Le problème elliptique discret et les conditions au bord artificielles pour la pression . . . . .	46
I.3 Analyse variationnelle discrète et estimations de l'erreur de splitting . . . . .	47
I.3.1 Analyse formelle de la méthode de projection incrémentale . . . . .	47
I.3.2 Cadre variationnel discret et estimations d'erreur de splitting . . . . .	56
I.4 Expériences numériques . . . . .	62
I.4.1 Problème de Stokes avec des conditions au bord de type Dirichlet . . . . .	62
I.4.2 Conditions au bord ouvertes . . . . .	64
I.5 Conclusion . . . . .	68
<b>II Discrétisation en temps de Crank-Nicolson</b>	<b>69</b>
II.1 Introduction . . . . .	69
II.2 Construction d'un opérateur convectif stable . . . . .	71
II.2.1 Construction de l'opérateur convectif . . . . .	71
II.2.2 Analyse de stabilité de l'opérateur convectif . . . . .	74
II.3 Un schéma de correction de pression Crank-Nicolson-like . . . . .	75
II.3.1 L'algorithme en temps . . . . .	76
II.3.2 Schéma discret en temps et en espace . . . . .	78
II.3.3 Identité d'énergie cinétique . . . . .	79
II.3.4 Ordre en temps du défaut de dissipation . . . . .	81
II.4 Expériences numériques . . . . .	83
II.4.1 Décroissance de la vorticité dans un canal plan laminaire 2D . . . . .	83
II.4.2 écoulement laminaire 2D derrière un cylindre . . . . .	87
II.4.3 Couche de mélange turbulente 3D . . . . .	92
II.5 Conclusion . . . . .	93
<b>Partie II : Discrétisation en espace</b>	<b>96</b>



<b>III</b>	<b>Discrétisation spatiale : contexte et motivations</b>	<b>99</b>
III.1	Étude d'un canal plan à $Re_\tau = 590$	99
III.1.1	Description du cas-test	100
III.1.2	Choix des paramètres pour la Simulation des Grandes Échelles	101
III.1.3	Résultats numériques	104
III.1.4	Conclusion (provisoire) concernant le cas-test du canal plan	106
III.2	Quels critères portant sur la discrétisation spatiale pour la LES?	106
III.2.1	Bibliographie	106
III.2.2	Cas-tests simples illustrant les défauts du schéma RT	108
III.3	Conclusion	119
<b>IV</b>	<b>Contrôle des vitesses tangentes aux faces pour l'élément fini de Rannacher-Turek</b>	<b>121</b>
IV.1	Schéma discret en temps et en espace	122
IV.1.1	Notations concernant les discrétisations en temps et en espace	122
IV.1.2	Schéma RT-Stab	122
IV.2	Analyse de stabilité	124
IV.3	Construction du terme de stabilisation en dimension deux	126
IV.4	Extension à la dimension trois	130
IV.5	Expériences numériques	130
IV.5.1	Problème du tourbillon isolé	131
IV.5.2	Problème d'Oseen stationnaire 2D	133
IV.5.3	Couche de mélange à $Re = 10000$	136
IV.5.4	Problème d'Oseen stationnaire 3D	140
IV.5.5	Canal plan tridimensionnel	141
IV.6	Conclusion	143
<b>V</b>	<b>Enrichissement de la pression pour l'élément fini de Rannacher-Turek</b>	<b>145</b>
V.1	Démarche	146
V.2	Pavage pression	147
V.3	Discrétisation	148
V.3.1	Notations	148
V.3.2	Opérateur divergence de vitesse discret	149
V.3.3	Opérateur gradient de pression discret	153
V.3.4	Opérateur elliptique discret pour la pression	154
V.4	Premiers tests numériques	155
V.4.1	Problème de Stokes stationnaire	156
V.4.2	Problème d'Oseen stationnaire à convection dominante	162
V.4.3	Problème du tourbillon isolé	164
V.5	Reconstruction des flux de masse sur le maillage primal	166
V.5.1	Principe	167
V.5.2	Couche de mélange à $Re = 10000$	169
V.6	Analyse du problème de Stokes	173
V.6.1	Analyse de stabilité	175
V.6.2	Analyse <i>a priori</i> de l'erreur d'approximation	175
V.7	Conclusion	189
	<b>Conclusion</b>	<b>191</b>

<b>Annexes</b>	<b>192</b>
<b>A Élément fini de Rannacher-Turek</b>	<b>195</b>
A.1 Maillages et espaces discrets . . . . .	195
A.2 Propriétés des des fonctions de forme Rannacher-Turek . . . . .	196
<b>B Viscosité W.A.L.E.</b>	<b>203</b>
<b>C Discrétisation des modèles sous-maille</b>	<b>205</b>
C.1 Introduction . . . . .	205
C.2 Discrétisation du terme non-linéaire diffusif . . . . .	206
C.3 Problème de Stokes stationnaire incompressible . . . . .	207
C.4 Conclusion . . . . .	209
<b>D Résultats d'analyse fonctionnelle</b>	<b>211</b>
<b>E Paramètres physiques et numériques des simulations présentées</b>	<b>213</b>
<b>F Quelques remarques concernant l'implémentation</b>	<b>227</b>
F.1 Discrétisation en temps de Crank-Nicolson, Chapitre II . . . . .	227
F.2 Contrôle des vitesses tangentées, Chapitre IV . . . . .	228
F.3 Enrichissement de la pression, Chapitre V . . . . .	230
<b>Bibliographie</b>	<b>233</b>



# Nomenclature

## Notations générales

$\Omega$	ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$	
$\omega$	domaine convexe de $\mathbb{R}^d$	
$d\sigma$	mesure de Lebesgue uni-dimensionnelle	
$d\mathbf{x}$	mesure de Lebesgue multidimensionnelle	
$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$	frontière Lipschitz de $\Omega$	
$\Gamma_D$	frontière Dirichlet	
$\Gamma_N$	frontière Neumann	
$T$	borne supérieure de l'intervalle en temps considéré	[s]
$\Delta t$	pas de temps	[s]
$d$	dimension du domaine spatial $\Omega$	
$\rho$	masse volumique du fluide	[kg · m <sup>-3</sup> ]
$\mu_l$	viscosité dynamique laminaire	[Pa · s]
$\mu_{eff}$	viscosité dynamique effective	[Pa · s]
$\mu_\tau$	viscosité dynamique turbulente	[Pa · s]
$\nu$	viscosité cinématique	[m <sup>2</sup> · s <sup>-1</sup> ]
$\mathbf{f}$	terme source de $\mathbb{R}^d$ (forces extérieures)	[N]
$\theta$	scalaire (température, concentration)	
$\mathbf{g}$	force due à la gravité	[m · s <sup>-2</sup> ]
$\mathbf{g}_N$	force extérieure exercée sur $\Gamma_N$	[N]
$St$	nombre de Strouhal	
$c_D$	coefficient de portance	
$c_L$	coefficient de traînée	
Re	nombre de Reynolds (Re = $\frac{\mathbf{u}L_0}{\nu}$ )	
Re $_\tau$	nombre de Reynolds de frottement	
Re $_d$	nombre de Reynolds débitant	
(·) <sup>+</sup>	unités de paroi	
$Q$	débit	[m <sup>3</sup> ]
$F$	force adaptative	
$\lambda$	coefficient positif ou nul de diffusion	
$\mathbf{u}_\tau$	vitesse de frottement pariétal	[m · s <sup>-1</sup> ]
$\mathbf{u}_d$	vitesse débitante	[m · s <sup>-1</sup> ]
$T_h, T_c$	températures	[K]
$\mathbf{u}^{exact}, p^{exact}$	solutions analytiques pour la vitesse et la pression	

## Tenseurs

$\boldsymbol{\tau}$	tenseur des contraintes visqueuses
---------------------	------------------------------------

$\bar{S}$	tenseur des taux de déformations : partie symétrique du gradient de vitesse
$\varsigma$	forme déviatorique de la partie symétrique du carré du gradient de vitesse
$\bar{T}$	tenseur sous-maille

### Champs discrets de la méthode de projection

$\mathbf{u}^k$	champ de vitesse calculé par la méthode de projection incrémentale au temps $t^k = k\Delta t$
$p^k$	approximation du champ de pression calculé par la méthode de projection incrémentale au temps $t^k$
$\phi^k$	incrément de pression en temps au temps $t^k$ , <i>i.e.</i> $p^k - p^{k-1}$
$\tilde{\mathbf{u}}^k$	champ de vitesse prédite au temps $t^k$
$\mathbf{u}_{imp}^k$	approximation du champ de vitesse calculé par une méthode implicite au temps $t^k$
$p_{imp}^k$	approximation du champ de pression calculé par une méthode implicite au temps $t^k$
$\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{e}}, \varepsilon$	erreurs de splitting en vitesse ( $\mathbf{e} = \mathbf{u}_{imp} - \mathbf{u}$ et $\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{u}_{imp} - \tilde{\mathbf{u}}$ ) et en pression ( $\varepsilon = p_{imp} - p$ )
$\rho^k$	approximation de la masse volumique au temps $t^k$
$\theta^k$	approximation du scalaire au temps $t^k$
$\tilde{p}_h$	post-traitement de la pression (moyenne par cellule primale)
$\tilde{\tilde{p}}_h$	post-traitement de la pression (moyenne par quart de cellule primale)

### Vecteurs et matrices

$\mathbf{e}^{(i)}$	$i$ -ème vecteur de la base canonique
$\tilde{M}$	matrice de masse en vitesse lumpée
$A$	matrice de rigidité en vitesse
$B$	matrice divergence discrète (en vitesse)
$\Upsilon^n$	matrice diagonale (masse volumique) de coefficients $\rho^n$
$X$	vecteur de $\mathbb{R}^5$ si $d = 2$ ( $\mathbb{R}^{18}$ si $d = 3$ ) contenant les coefficients du schéma RT-Stab
$\mathbf{x} = (x, y)$	coordonnées du centre de l'arête dont on cherche à contrôler la vitesse si $d = 2$
$\vec{ab}$	vecteur d'extrémités $a$ et $b$
$\vec{ab}^\perp$	vecteur $\vec{ab}$ tourné d'un angle $\frac{\pi}{2}$ (dans le sens trigonométrique)

### Opérateurs

$\nabla$	gradient
div	divergence
$\nabla^{EP}$	gradient discret pour l'enrichissement de la pression
div <sup>EP</sup>	divergence discrète pour l'enrichissement de la pression
$m(\cdot)$	opérateur moyenne

---

$S_h(\cdot)$	inverse de l'opérateur de Stokes
$\cdot$	filtre
$\text{sign}(\cdot)$	signe
$\varrho(\cdot)$	loi d'état
$a_T(\cdot, \cdot)$	terme de stabilisation (schéma RT-Stab, Chapitre IV)
$\langle (\cdot) \rangle$	moyenne d'une variable (scalaire)
$\text{rot}(\cdot)$	rotationnel d'une fonction $f$ définie de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
$\cdot^T$	transposée
$[[\cdot]]$	saut de la fonction à travers une arête
$I_h^{RT}(\cdot)$	opérateur d'interpolation vitesse Rannacher-Turek
$I_h^{EP}(\cdot)$	opérateur d'interpolation vitesse pour l'élément enrichi

### Espaces fonctionnels

$L_0^2(\Omega)$	$\{\mathbf{v} \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0\}$
$H$	$\{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^d; \text{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_{\Gamma_D}^{k+1} \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_D\}$
$\mathcal{Q}$	espace vectoriel de fonctions scalaires (analyse formelle de la méthode de projection)
$\mathcal{V}$	espace vectoriel discret de fonctions à valeurs vectorielles (analyse formelle de la méthode de projection)
$\mathcal{X}$	$\mathcal{V} + \nabla \mathcal{Q}$ (analyse formelle de la méthode de projection)
$\mathcal{H}$	espace des vecteurs à divergence nulle (analyse formelle de la méthode de projection)

### Élément fini de référence

$\mathcal{N}_{\sigma}$	fonction nodale associée à la face $\sigma$
$\widehat{K}$	cellule de référence (carré unité pour l'élément de Rannacher-Turek)
$\varphi_{\sigma}$	fonction de forme de vitesse (vectorielle) associée à la face $\sigma$
$\varphi_{\sigma}$	fonction de forme de vitesse (scalaire) associée à la face $\sigma$
$T_K$	mapping défini de l'élément de référence $\widehat{K}$ vers la cellule courante $K$
$\mathcal{N}_{\sigma}(\mathbf{v}), \mathbf{v}_{\sigma}$	degré de liberté en vitesse associé à $\sigma$

### Espaces discrets

$M_h = \mathbb{Q}_0$	espace d'approximation pour la pression (fonctions constantes par mailles)
$N_h$	espace d'approximation en pression enrichi
$X_h$	espace d'approximation pour la vitesse associé à l'élément fini de Rannacher-Turek
$H$	espace des fonctions à divergence discrète nulle

### Maillage primal

$\mathcal{T}_h$	maillage primal de $\Omega$
$K$	cellule primale

$h_\sigma$	diamètre moyen des mailles adjacentes à $\sigma$
$h, k$	pas d'espace (maillage rectangle uniforme)
$\mathcal{E}$	ensemble des faces primales de $\Omega$
$\mathcal{E}_{\text{int}}$	ensemble des faces intérieures de $\mathcal{T}_h$
$\mathcal{E}_N$	ensemble des faces situées sur $\Gamma_N$ (de même pour $\mathcal{E}_D$ )
$I(\sigma)$	ensemble des faces ayant un sommet commun avec $\sigma$
$\mathbf{n}$	vecteur normal unitaire sortant de $\partial\Omega$
$\mathbf{n}_{K,\sigma}$	vecteur normal unitaire sortant de la cellule $K$ à travers la face $\sigma$
$F_{K,\sigma}$	approximation du flux de masse primal sortant de la cellule $K$ à travers la face $\sigma$ obtenus par discrétisation volumes finis de l'équation de conservation de la masse

### Maillage diamant (vitesse)

$D_\sigma = D_{K,\sigma} \cup D_{L,\sigma}$	maille diamant
$\xi_{K,\sigma}$	volume de $D_{K,\sigma}$ et $D_{L,\sigma}$ ( $\frac{1}{4}$ si $d = 2$ , $\frac{1}{6}$ si $d = 3$ )
$\varepsilon$	arête (si $d = 2$ ) ou face (si $d = 3$ ) du maillage diamant
$F_{\sigma,\varepsilon}$	approximation du flux massique dual sortant de la cellule diamant $D_\sigma$ à travers la face $\varepsilon$ à travers la face $\varepsilon$
$\bar{\mathcal{E}}_{\text{int}}$	ensemble des faces duales intérieures
$\bar{\mathcal{E}}_D, \bar{\mathcal{E}}_N$	ensemble des faces d'une cellule duale dont un bord est un bord Dirichlet ou un bord Neumann
$\rho_\sigma, \rho_\sigma^m$	approximation de la masse volumique sur la face $\sigma$

### Pavage (pression)

$\mathcal{T}_h^*$	pavage pression	
$\delta$	arête du pavage de pression	[ $m$ ]
$V$	sommet d'une arête primale	
$\mathcal{E}^*$	ensemble des arêtes du pavage (pression)	
$K^*$	cellule cell-centered	
$V^*$	cellule vertex-centered	
$L^*$	cellule du pavage (cell-centered ou vertex-centered) appartenant au pavage $\mathcal{T}_h^*$	
$\varepsilon_\sigma$	diagonale de la cellule du pavage pression n'intersectant pas l'arête $\sigma$	
$\mathbf{n}_{\varepsilon_\sigma}$	normale sortante de la cellule duale $L^*$ à l'arête $\varepsilon_\sigma$	
$\mathcal{S}(L^*)$	sommets de la cellule du pavage $L^*$	
$\widehat{F}$	demi-flux primal (cherché)	
$\widetilde{F}$	flux vertex-centered	

### Paramètres réels

$\beta_\sigma$	coefficient devant le terme $\mathcal{N}_\sigma(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\tau}$ dans le schéma RT-Stab dans la décomposition (IV.2)
----------------	---

---

$\alpha_{\sigma'}^{\sigma}$	coefficient dans l'expression de la composante tangente de vitesse $\mathcal{N}_{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\tau}$ comme fonction de $\mathcal{N}_{\sigma'}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_{\sigma'}$ et des composantes normales alentour ( $d = 2$ )	
$r$	paramètre (réel) de stabilisation (pénalisation)	
$C_s$	constante du modèle de Smagorinsky	
$C_w$	constante du modèle W.A.L.E.	
$\overline{\Delta}$	échelle de coupure	[m]
$a$	constante déterminant la progression du maillage du canal plan	
$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker	
$x, y, z$	directions longitudinale, transverse et verticale	[m]
$L_0$	demi-hauteur du canal	[m]
$m$	nombre de faces d'une cellule primale	
$\xi$	critère d'arrêt des pseudo-évolutions en temps	

### Normes et semi-normes

$\ \cdot\ $	norme euclidienne
$ \cdot _s$	semi-norme $H^s$
$ \cdot _{C^k}$	semi-norme $C^k$
$\ \cdot\ _0$	norme $L^2$
$\ \cdot\ _{1,b}$	norme $H^1$ brisée
$ \cdot _{H^k}$	semi-norme $H^k$ , <i>i.e.</i> $\left(\sum_{ \alpha =k} \ \partial^{\alpha} \cdot\ _0^2\right)^{1/2}$
$   \cdot   $	norme d'application linéaire

### Abréviations

L.E.S.	pour Large Eddy Simulation en anglais, <i>i.e.</i> Simulation des Grandes Échelles en français
DNS	pour Direct Numerical Simulation en anglais, <i>i.e.</i> Simulation Numérique Directe en français
W.A.L.E.	pour Wall Adaptative Local Eddy viscosity
$r_{rms}$	pour root mean square value en anglais, écart-type en français
M.A.C.	pour Marker And Cell
V.M.S.	pour Variational MultiScale method
Schéma RT	discrétisation en temps par la méthode de projection et par l'élément fini de Rannacher-Turek en espace
Schéma RT-Stab	schéma RT pénalisé ( <i>cf</i> Chapitre IV)
Schéma RT-Stab $_{\infty}$	limite quand le paramètre de pénalisation tend vers l'infini du schéma RT-Stab ( <i>cf</i> Chapitre IV)
RT+EP	discrétisation spatiale par enrichissement de la pression ( <i>cf</i> Chapitre V)





# Introduction

Dans ce travail de thèse, nous traitons de la simulation d'écoulements turbulents, incompressibles ou à faible nombre de Mach pour des applications touchant à la sûreté nucléaire. En particulier, nous nous concentrons sur le développement et l'analyse mathématique de schémas numériques performants par la méthode dite de Simulation des Grandes Échelles. Ces schémas sont basés sur des méthodes à pas fractionnaires de type correction de pression et des éléments finis non conformes de bas degré.

Cette thèse s'est déroulée au sein du Laboratoire de l'Incendie et des Explosions (LIE) de l'IRSN (acronyme pour Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire) au service PSN-RES/SA2I (Service des Agressions Internes et des risques Industriels). Le champ de compétences de l'IRSN couvre l'ensemble des risques liés aux rayonnements ionisants, utilisés dans l'industrie ou la médecine, ou encore les rayonnements naturels. Plus précisément, l'IRSN exerce ses missions d'expertise et de recherche dans les domaines suivants :

- la sûreté des installations nucléaires, y compris celles intéressant la défense,
- la sûreté des transports de matières radioactives et fissiles,
- la protection de l'homme et de l'environnement contre les rayonnements ionisants,
- la protection et le contrôle des matières nucléaires et des produits susceptibles de concourir à la fabrication d'armes,
- la protection des installations et des transports contre les actions de malveillance (vol ou détournement de matières nucléaires, ou encore sabotage).

Quant au laboratoire, le LIE a pour mission, d'une part, d'améliorer la connaissance sur les incendies et les phénomènes qui s'y rattachent, en particulier les incendies confinés dans des installations nucléaires ou usines ; et d'autre part, de développer des codes de calcul en support à l'expertise.

Dans la suite, nous expliquons en détail la problématique dans laquelle s'inscrit ce travail de thèse.

## 1 Problématique

Dans les simulations effectuées pour les études de sûreté nucléaire, les écoulements à décrire sont la plupart du temps turbulents. La simulation de ce type d'écoulements constitue un outil essentiel pour la prévention d'éventuels accidents (en complément des expériences). Nous présentons dans le paragraphe suivant deux situations motivant ce travail de thèse, à savoir les incendies dans des locaux confinés, ventilés mécaniquement et les écoulements dans le circuit primaire d'un réacteur nucléaire.

### **Incendies dans des locaux confinés, ventilés mécaniquement**

Une configuration d'intérêt pour les études de sûreté est celle de plusieurs locaux dans lesquels on

peut trouver des matières radioactives. Ces installations sont partiellement ou totalement étanches et reliées les unes aux autres par un équipement de ventilation. Le risque d'incendie dans l'un de ces locaux, s'il se propage aux locaux voisins ou à l'environnement naturel, constitue un danger majeur qu'il est nécessaire de prévenir. La simulation d'incendies dans une installation composée de plusieurs locaux ventilés est développée à l'IRSN dans deux codes de calcul : un code à zones (SYLVIA) et un code à champs (ISIS) [54] (un exemple de simulation d'incendie réalisé avec le logiciel ISIS est représenté sur la figure 1).

Ce travail de thèse s'inscrit donc en partie dans la problématique suivante : la simulation d'un incendie, *i.e.* un écoulement à convection naturelle dominante (tourbillons), présentant de fortes variations de masse volumique et à faible nombre de Mach (la vitesse de l'écoulement est très petite devant celle du son).

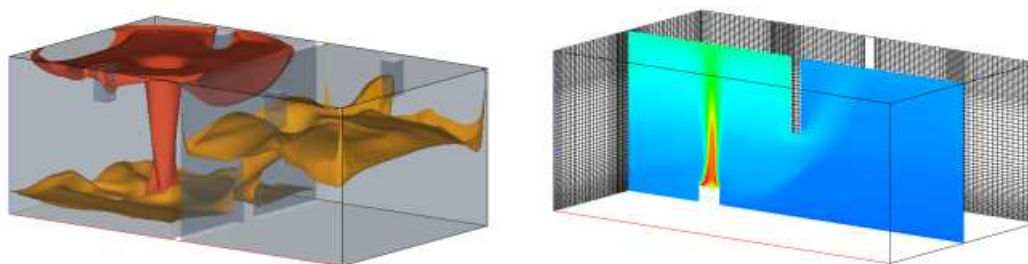


FIGURE 1 – Simulation d'incendie réalisée à l'IRSN par le code ISIS.

### Écoulements dans le circuit primaire d'un réacteur nucléaire

Dans un réacteur à eau sous pression, il est crucial de maintenir l'eau à une température telle que le refroidissement du cœur du réacteur soit toujours assuré. Pour ce faire, l'eau joue le rôle de caloporteur, *i.e.* véhicule la chaleur dans des tuyaux (constituant le circuit primaire) jusqu'à un échangeur thermique où elle est refroidie et ensuite réinjectée dans le circuit de refroidissement au moyen d'un té de mélange. Dans cette zone, un important gradient de température est généré par les différences de température de chacun des écoulements circulant à travers les branches. Ceci induit des sollicitations thermiques sur la paroi et les fluctuations de température répétées au cours du temps peuvent conduire à des détériorations ou des fissures de la paroi (voire sa rupture par fatigue thermique). Ce fut le cas lors de l'incident de Civaux (1998) où, suite à l'arrêt du réacteur, le circuit de secours du réacteur a pris la relève du circuit primaire et au bout d'une centaine d'heures est apparue une fuite au niveau d'un coude (Figure 2).

La problématique essentielle de ce type d'incident est de simuler des écoulements turbulents dans un contexte industriel avec des schémas numériques valides pour des domaines complexes et des maillages non cartésiens.

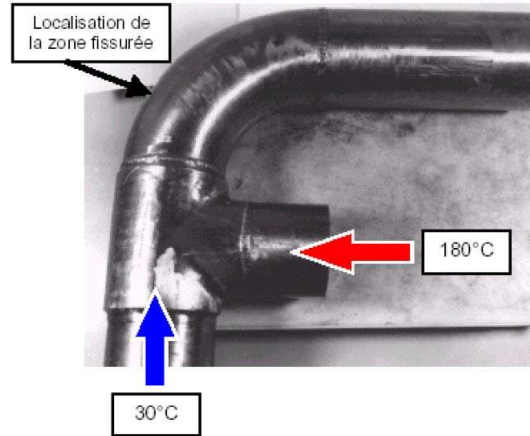


FIGURE 2 – Té de mélange.

Présentons les méthodes choisies dans cette thèse pour traiter de la problématique.

### Objectifs de la thèse

Dans les études industrielles, la turbulence est généralement prise en compte par des modèles semi-empiriques dits modèles RANS (acronyme pour Reynolds Averaged Navier-Stokes equations), dont le modèle  $k - \epsilon$  est le représentant le plus fréquemment utilisé. Toutefois, ces modèles touchent aujourd'hui à leurs limites, pour au moins deux raisons :

- construits pour et ajustés sur des écoulements particuliers, ils se prêtent mal aux généralisations à des situations complexes, par exemple lorsque la convection naturelle devient dominante, ce qui est typiquement le cas des incendies ;
- ils ont pour objectif de calculer un écoulement moyen, où les fluctuations sont filtrées, et ne peuvent donc s'appliquer à la prédiction du phénomène de fatigue thermique décrit ci-dessus.

Grâce à la croissance des puissances de calcul, on s'intéresse dans ce manuscrit à l'approche de simulation des écoulements turbulents appelée Simulation des Grandes Échelles [86, 8] (dont l'acronyme est SGE en français ou LES pour Large Eddy Simulation en anglais) car cette méthode permet d'évaluer les fluctuations de vitesse d'un écoulement avec un bon compromis précision/temps de calcul (de même pour la température mais nous ne le faisons pas dans ce manuscrit). Nous en donnons une description dans la section 3.

L'objectif de cette thèse est de développer un ou des schémas numériques performants pour les deux applications précitées, donc dans des domaines complexes (excluant ainsi les schémas basés uniquement sur des maillages structurés, tel le schéma à mailles décalées classique, dit schéma MAC), pour des écoulements incompressibles ou à faible nombre de Mach. Des premières difficultés apparaissent déjà dans le cas de maillages cartésiens comme nous le montrons dans la suite et les schémas que nous présentons constituent donc un premier élément de réponse à la problématique. La discrétisation en temps est du type correction de pression [36, 94] (une description de la méthode de projection incrémentale se trouve dans la section 5) car elle offre un bon compromis entre

- robustesse : il satisfait l'analogie discret des principes physiques (par exemple, la conservativité, le principe du maximum, la stabilité) et un contrôle de la solution, ceci pour une large gamme d'écoulements (faible Mach, incompressible).
- efficacité : il offre un rapport temps de calcul/précision attractif dans le cadre industriel. En effet, la méthode de projection incrémentale de [19, 93] est une méthode à pas fractionnaires qui offre la possibilité de découpler le calcul de la vitesse de celui de la pression et de remplacer

la résolution d'un problème couplé par un algorithme de type Lagrangien augmenté (coûteux en temps CPU) par celle de systèmes indépendants les uns des autres, de taille raisonnable.

L'organisation de la suite de l'introduction est la suivante : nous donnons une description rapide des méthodes numériques utilisées. Nous soulignons ensuite les défauts du schéma proposé dans ISIS pour des écoulements turbulents et présentons des solutions apportées dans le cadre de ce travail.

Le plan que nous adoptons dans la suite de l'introduction ne suit pas de manière rigoureuse celui du manuscrit.

## 2 Préliminaire

Nous notons  $\Omega$  un ouvert polygonal ou polyédral, connexe, borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ou  $d = 3$ ). Nous considérons les équations de Navier-Stokes compressibles instationnaires, posées sur un intervalle de temps fini  $(0, T)$  et dans  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \rho \mathbf{u}) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}^0(\cdot), & \text{dans } \Omega \times \{0\}, \end{cases} \quad (1)$$

où  $\mathbf{u}$ ,  $p$  et  $\rho$  sont respectivement la vitesse, la pression et la masse volumique du fluide. La quantité

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) = \mu \left[ \nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \mathbf{u}) I_d \right],$$

est le tenseur des contraintes visqueuses,  $\mu$  un réel positif représentant la viscosité dynamique,  $\mathbf{u} \otimes \rho \mathbf{u}$  est le  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ -tenseur de composantes  $(\mathbf{u} \otimes \rho \mathbf{u})_{i,j} = \rho \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j$ , pour tous  $i, j$  dans  $\{1, \dots, d\}$  et  $I_d$  est la matrice identité de taille  $d \times d$ . Tel quel, le système (1) n'est pas fermé. L'hypothèse la plus simple conduisant à un problème bien posé consiste à supposer que  $\rho$  est une fonction donnée de l'espace et du temps ; équation de conservation de la masse (*i.e.* la première relation de (1)) doit donc être considérée comme une contrainte sur la vitesse, comme pour des écoulements incompressibles (et, en effet, lorsque  $\rho$  est constant, cela conduit à  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ ). Cette équation joue basiquement le même rôle que pour les modèles asymptotiques d'écoulements à faible nombre de Mach [68], où  $\rho$  est donné comme fonction d'une inconnue supplémentaire  $\theta$  (habituellement, la température ou une concentration), laquelle satisfait une équation de conservation supplémentaire :

$$\partial_t(\rho \theta) + \operatorname{div}(\rho \theta \mathbf{u}) - \operatorname{div}(\lambda \nabla \theta) = 0, \quad \rho = \varrho(\theta). \quad (2)$$

La fonction  $\theta \mapsto \varrho(\theta)$  est la loi d'état du fluide étudié et  $\lambda$  est un coefficient positif ou nul de diffusion.

Le système (1)-(2) doit être complété par des conditions au bord appropriées, par exemple des conditions au bord de type Dirichlet pour  $\mathbf{u}$  et  $\theta$ , ou des conditions de type glissement parfait pour la vitesse et de Neumann pour  $\theta$  :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad ((\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) - p I) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} = 0, \quad \text{et} \quad \nabla \theta \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial \Omega \times (0, T), \quad (3)$$

où  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{t}$  sont respectivement les vecteurs unitaires normal et tangent sortants de  $\partial \Omega$ . Des conditions initiales sont données pour  $\mathbf{u}$  et  $\theta$ , c'est-à-dire  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0$  et  $\theta = \theta^0$  dans  $\Omega$ . Nous supposons que la loi d'état satisfait  $\varrho(\theta) > 0$  si  $\theta > 0$ , que  $\theta^0 > 0$ , et que les conditions au bord permettent que  $\theta$  reste strictement positif au cours du temps.

### 3 Simulation des Grandes Échelles

Une spécificité de la modélisation d'incendies ou bien d'écoulements turbulents dans le circuit primaire d'un réacteur nucléaire tient dans la large gamme d'échelles spatiales à considérer : en effet, le domaine dans lequel évolue l'écoulement est de "grande" échelle (plusieurs mètres cubes) tandis qu'au cœur de l'écoulement se trouvent des structures (de taille inférieure à l'échelle d'observation) qui transportent la chaleur et sont appelées *fluctuations turbulentes*. C'est sur le principe de séparation d'échelles que s'appuie la LES, nous le détaillons dans la suite.

#### 3.1 Principe de la Simulation des Grandes Échelles

La LES a pour but de ne résoudre que les grosses structures de l'écoulement, tandis que l'effet des fluctuations (échelles sous-maille) sur les grandes échelles est modélisé. Pour ce faire, nous considérons les équations de Navier-Stokes incompressibles (Système (1), Section 2, dont la deuxième relation traduisant la conservation de la masse est donnée par  $\text{div} \mathbf{u} = 0$ ). L'approche consiste à moyenner ces équations en espace (par convolution), et ensuite à faire commuter cette opération de filtrage (notée par le symbole barre supérieure) avec les dérivées spatiales et temporelles. En pratique, la taille du filtre est souvent définie par les échelles de coupure, à savoir : la taille du domaine et celle des mailles, ces dernières limitant la taille des (petites) structures considérées. Ces deux opérations (filtrage et commutation) conduisent à des équations de conservation, qui gardent la même forme que les équations d'origine, pour les (grandes) échelles résolues de vitesse  $\bar{\mathbf{u}}$  et de pression  $\bar{p}$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho(\partial_t \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}) - \text{div}(\boldsymbol{\tau}(\bar{\mathbf{u}})) + \nabla \bar{p} = \bar{\mathbf{f}} - \text{div}(\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}^T} - \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}^T), & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \text{div} \bar{\mathbf{u}} = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \bar{\mathbf{u}}(\cdot, 0) = \bar{\mathbf{u}}^0(\cdot), & \text{dans } \Omega \times \{0\}, \end{array} \right. \quad (4)$$

ces équations étant bien sûr complétées par des conditions au bord.

Du fait de la présence du terme convectif non-linéaire (et puisque  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \text{div}(\mathbf{u}\mathbf{u}^T)$ ), la quantité non-fermée  $-\text{div}(\bar{T})$ , avec  $\bar{T} = \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}^T} - \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}^T$  apparaît au second membre et doit être modélisée, *i.e.* exprimée comme fonction des inconnues  $\bar{\mathbf{u}}$  et  $\bar{p}$ .

La question clé de l'approche LES est donc de trouver une expression convenable pour le *tenseur sous-maille*  $\bar{T}$ . Une hypothèse courante (hypothèse de Boussinesq) est de supposer une relation de proportionnalité entre  $\bar{T}$  et le tenseur des taux de déformations  $\bar{S}$  :

$$\bar{T} = -2 \mu_\tau \bar{S}, \quad \text{avec} \quad \bar{S}_{i,j} = \frac{1}{2}(\partial_j \bar{u}_i + \partial_i \bar{u}_j), \quad \forall i, j \in \{1, \dots, d\},$$

le scalaire  $\mu_\tau$  étant appelé *viscosité turbulente*. De ce fait, l'écriture de la première équation du système (4) peut se simplifier en considérant  $\mu_{eff}$  la viscosité effective égale à la somme de la viscosité laminaire et de la viscosité turbulente notées  $\mu_l$  et  $\mu_\tau$ , respectivement, la dernière étant donnée comme une fonction de la vitesse par un modèle sous-maille. Nous décrivons dans la section suivante deux modèles (Smagorinsky et W.A.L.E.) couramment utilisés dans la littérature pour expliciter la viscosité turbulente  $\mu_\tau$ . Ils seront par ailleurs utilisés dans la suite.

### 3.2 Modèles sous-maille considérés

Classiquement, le modèle de Smagorinsky [91] est le plus fréquemment utilisé du fait de sa forme simple et s'écrit :

$$\mu_\tau = (C_s \bar{\Delta})^2 \sqrt{2 \operatorname{Trace}(\bar{S} \bar{S}^T)} = (C_s \bar{\Delta})^2 \left( 2 \sum_{i,j \in \{1, \dots, d\}} \bar{S}_{i,j} \bar{S}_{i,j} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

$C_s$  étant une constante ajustée en fonction de l'écoulement et  $\bar{\Delta}$  étant l'échelle de coupure (longueur caractéristique des cellules). Cependant, si  $z$  représente la distance au mur, la viscosité turbulente donnée par le modèle de Smagorinsky a un comportement en  $\mathcal{O}(1)$  près d'une paroi, contrairement au résultat théorique  $\mu_\tau = \mathcal{O}(z^3)$  (qui peut être obtenu par analyse asymptotique [86]). Donc ce modèle dissipe trop les grandes échelles près d'un mur.

Le modèle W.A.L.E. (acronyme pour Wall Adaptating Local Eddy viscosity) [76] a pour but de résoudre ce problème et s'écrit :

$$\mu_\tau = (C_w \bar{\Delta})^2 \frac{\left( \sum_{i,j} \bar{\varsigma}_{i,j} \bar{\varsigma}_{i,j} \right)^{3/2}}{\left( \sum_{i,j} \bar{S}_{i,j} \bar{S}_{i,j} \right)^{5/2} + \left( \sum_{i,j} \bar{\varsigma}_{i,j} \bar{\varsigma}_{i,j} \right)^{5/4}}, \quad (6)$$

$C_w$  étant une constante réelle ajustée en fonction de l'écoulement, et

$$\bar{\varsigma} = \frac{1}{2} \left( \nabla \bar{\mathbf{u}}^2 + (\nabla \bar{\mathbf{u}}^2)^T \right) - \frac{1}{d} \operatorname{Trace}(\nabla \bar{\mathbf{u}}^2) I_d.$$

Une analyse asymptotique de l'équation (6) (*cf* Annexe B) montre que le comportement attendu de la viscosité en  $\mathcal{O}(z^3)$  est retrouvé, ce qui rend ce modèle particulièrement attractif pour traiter de géométries complexes. Par ailleurs, il reproduit correctement la transition laminaire-turbulent et il ne nécessite pas d'information concernant la distance à la paroi, ce qui le rend intéressant pour des maillages non structurés.

Pour ces raisons, dans la suite du manuscrit, nous choisissons d'utiliser l'expression de la viscosité turbulente donnée par le modèle W.A.L.E. lorsque nous avons recours à un modèle sous-maille.

Présentons les méthodes utilisées pour écrire les équations discrètes associées au problème (4). Dans la suite, nous omettons le symbole  $\bar{\cdot}$  et nous nous concentrons sur la discrétisation des équations de Navier-Stokes instationnaires (1) (Section 2), car celle des modèles sous-maille en découle naturellement (*cf* Annexe C pour la discrétisation des modèles de Smagorinsky et W.A.L.E. dans un cadre éléments finis non conformes).

## 4 Discrétisation spatiale

Considérons un maillage régulier du domaine  $\Omega$  constitué de quadrangles (si  $d = 2$ ) ou d'hexaèdres (si  $d = 3$ ).

L'élément fini de Rannacher-Turek [83] a été choisi dans ISIS pour discrétiser la vitesse et la pression solutions de l'équation (4) car il est de bas degré et *inf-sup* stable. Cet élément fini mixte

est défini sur des quadrangles si  $d = 2$  ou hexaèdres si  $d = 3$  (Figure 3). Les inconnues de vitesse sont situées sur les arêtes si  $d = 2$  (ou faces si  $d = 3$ ) et le champ discret est  $\widetilde{\mathbb{Q}}_1$  par maille. De plus, la valeur des degrés de liberté est déterminée par la moyenne de la fonction à travers les arêtes (si  $d = 2$  ou faces si  $d = 3$ ) : l'intégrale du saut de vitesse sur chacune d'entre elles est nulle. Ainsi, l'espace d'approximation est constitué de fonctions discontinues à travers les arêtes (ou faces) : l'élément fini de Rannacher-Turek est dit non conforme. Les inconnues de pression sont situées au centre des cellules et le champ discret est constant par mailles. Dans l'annexe A, se trouve le détail concernant la définition de cet élément ainsi que le rappel de certaines de ses propriétés.

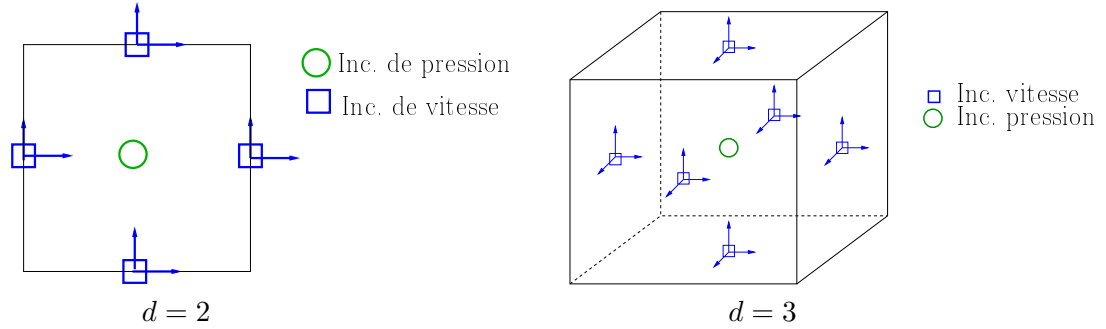


FIGURE 3 – Localisation des inconnues pour l'élément fini de Rannacher-Turek.

Par ailleurs, il est possible de travailler avec l'élément fini de Crouzeix-Raviart [21] défini de la même manière sur des triangles si  $d = 2$  ou des tétraèdres si  $d = 3$ . Théoriquement, ce sont les éléments hexaédriques qui sont les plus efficaces [65, p. 173]. En effet, il y a moins d'informations à mémoriser dans ce cas. Par ailleurs, l'élément fini de Crouzeix-Raviart pose des problèmes de coercivité lorsque l'on utilise la forme physique du tenseur des contraintes (*i.e.*  $\text{div}(\boldsymbol{\tau})$ ). Mais ce n'est pas le point principal. Au delà, il semble que la qualité de la solution soit meilleure avec des quadrangles ou hexaèdres, surtout lorsque les principales lignes de courant sont parallèles aux faces des mailles (jets, tuyaux,...).

## 5 Discrétisation temporelle : méthode de projection (Chapitre I)

Présentons la discrétisation en temps de base utilisée dans ISIS, à savoir la méthode de projection incrémentale. Pour ce faire, on considère une subdivision  $(t^n)_{n \in [0, N]}$  de l'intervalle de temps  $(0, T)$  où  $N$  est le nombre d'intervalles de la subdivision, et telle que  $t^0 = 0$  et  $t^N = T$ . Quitte à poser  $\Delta t^n = t^n - t^{n-1}$  et  $\Delta t = \max_{n \in [1, N]} \Delta t^n$ , supposons le pas de temps fixe noté  $\Delta t$ . Dans la suite, on note  $f^n$  l'approximation du champ  $f$  au temps  $t^n$ .

Considérons le problème de Stokes instationnaire incompressible, écrit ici pour  $\rho = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $\mu = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Nous supposons que des conditions au bord de type Dirichlet non homogènes sont imposées sur une partie  $\Gamma_D$  de la frontière et des conditions au bord dites ouvertes sont présentes sur  $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \text{div } \mathbf{u} = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D, & \text{sur } \Gamma_D \times (0, T), \\ \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = \mathbf{g}_N, & \text{sur } \Gamma_N \times (0, T). \end{array} \right. \quad (7)$$



Le principe de la méthode de projection incrémentale pour la résolution du système (7) est le suivant : dans un premier temps, la contrainte d'incompressibilité est ignorée et l'équation de conservation de la quantité de mouvement (Première relation de (7)) est résolue avec une pression explicite afin de fournir une première approximation de la vitesse appelée *vitesse prédite*. Dans un second temps, afin d'obtenir une solution du problème de Stokes, la vitesse prédite est projetée sur l'espace des fonctions à divergence nulle. Pour la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles, la méthode décrite dans ce paragraphe se généralise [68, 4] en projetant la vitesse prédite sur l'espace des vecteurs satisfaisant la contrainte donnée par l'équation de conservation de la masse (Deuxième relation de (7)).

Ainsi, à chaque itération en temps, la résolution s'effectue en deux étapes :

**1- Prédiction de vitesse :**

Trouver  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \nabla p^n = \mathbf{f}^{n+1}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{u}_D^{n+1}, \quad \text{sur } \Gamma_D, \\ \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{n} - p^n \mathbf{n} = \mathbf{g}_N^{n+1}, \quad \text{sur } \Gamma_N. \end{array} \right.$$

**2- Projection de vitesse (problème de Darcy) :**

Trouver  $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\Delta t} + \nabla \phi^{n+1} = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{n}, \quad \text{sur } \Gamma_D, \\ \phi^{n+1} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_N. \end{array} \right.$$

En prenant la divergence de la première équation de ce système, on obtient la formulation équivalente (étape 2') suivante utilisée en pratique.

**2'- Projection de vitesse (problème de Poisson) :**

Trouver  $\phi^{n+1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \phi^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \nabla \phi^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_D, \\ \phi^{n+1} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_N. \end{array} \right.$$

Alors

$$\begin{aligned} p^{n+1} &= p^n + \phi^{n+1}, \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \Delta t \nabla \phi^{n+1}. \end{aligned}$$

Les conditions aux bords pour la pression sur  $\Gamma = \partial\Omega$  dans la dernière étape sont dites *artificielles*, car elles ne sont pas vérifiées par la solution du problème continu. Les étapes 1 et 2 sont ensuite discrétisées par l'élément fini non conforme de bas degré de Rannacher-Turek (Section 4) en utilisant une matrice masse "lumpée". Comme la pression est constante par mailles, l'élimination

de  $\mathbf{u}^{n+1}$  est réalisée sur le système discret pour obtenir la contrepartie discrète de l'étape 2'. On parle de méthode de projection algébrique. Nous notons que l'opérateur discret ainsi obtenu est similaire à un Laplacien volumes finis. En outre, la nouveauté apportée par cette étude est que nous prouvons que les conditions aux bords artificielles de l'étape 2' sont présentes dans cet opérateur, même s'il a été construit au niveau discret (question soulevée dans [41]). Cependant ces conditions aux bords sont imposées au sens (faible) volumes finis et les tests numériques que nous réalisons montrent que l'ordre d'approximation optimal en espace est toujours atteint, même en présence de conditions aux bords ouvertes (conditions au bord sur  $\Gamma_N$  dans l'étape 1).

Par ailleurs, la deuxième contribution apportée dans ce chapitre est que nous établissons un cadre variationnel discret avec des produits scalaires, des opérateurs et des normes ayant tous une expression reliée à la taille des cellules, ce qui nous permet d'adapter l'analyse d'erreur connue dans le cadre semi-discret ou conforme de [88, 38, 40]. Pour le problème de Stokes avec des conditions aux bords de type Dirichlet homogènes, nous montrons que l'erreur de fractionnement en temps est d'ordre deux en vitesse et d'ordre un en pression pour deux normes  $L^2$  discrètes adaptées (Théorème I.19).

## 6 Quels critères pour la LES ? (Chapitre III)

Nous examinons les défauts du schéma de projection incrémental discrétisé par l'élément fini de Rannacher-Turek, noté "*schéma RT*", dans le contexte de la simulation d'écoulements turbulents et nous proposons des solutions à ces défauts. Nous commençons par nous interroger sur le fait de savoir si le schéma RT répond aux exigences de la littérature. C'est l'objet des deux sous-sections suivantes.

### 6.1 Bibliographie

Commençons par examiner les différentes approches proposées dans la littérature pour mettre en œuvre la LES sur des maillages non structurés, pour des écoulements incompressibles ou à faible nombre de Mach.

#### Critères de la littérature concernant la discrétisation en temps

D'après la littérature, il semble essentiel qu'un schéma adapté à la LES satisfasse une identité d'énergie cinétique discrète localement et globalement [66]. En effet, même pour des écoulements compressibles, il a été observé [92] que cette propriété permet d'améliorer la précision des méthodes étudiées. Elle garantit d'une part la stabilité du schéma étudié mais aussi que les transferts énergétiques entre petites et grandes échelles ne soient pas négligeables devant des résidus de dissipation numérique.

Dans la littérature, plusieurs approches coexistent afin de satisfaire cette propriété. Le schéma le plus répandu est le schéma MAC, introduit dans [47]. Afin de généraliser cette discrétisation à des écoulements compressibles et des maillages non structurés, de nombreux auteurs proposent d'utiliser des méthodes décalées [75, 25, 72], souvent basées sur une forme anti-symétrique du terme convectif. Des travaux dans un cadre colocalisé sont aussi présentés dans [26, 30, 46, 34].

#### Critères de la littérature concernant la discrétisation en espace

Nous distinguons dans la littérature trois grands types de méthodes numériques (pour la discrétisation spatiale) adaptées à la LES et valides pour des maillages non structurés :

1. Un certain nombre d'auteurs présentent une généralisation du schéma MAC valide pour des maillages généraux. C'est par exemple le cas de [66, 45, 46] (volumes finis) ou de [25] (différences finies en coordonnées cylindriques).

2. Il existe dans la littérature des méthodes basées sur des éléments finis de degré élevé et introduisant un terme supplémentaire de stabilisation censé jouer le rôle du modèle sous-maille [42, 59]. C'est l'objet des méthodes dites VMS (Variational MultiScale method). Basées sur certains des principes énoncés dans [39], elles constituent une extension possible de la LES valide pour des maillages non structurés ; c'est l'objet de [52] (éléments finis, écoulements incompressibles) et de [61] (éléments finis/volumes finis, écoulements compressibles).
3. Enfin, il existe une dernière catégorie de méthodes basées sur l'enrichissement de l'espace discret d'approximation pour la pression : c'est d'une part le cas de la littérature de Trio-U (code CFD développé au CEA) [1, 48, 32] étudiée dans [7] (élément fini de Crouzeix-Raviart ou Rannacher-Turek) et d'autre part le cas de [58, 60] (méthode de type VMS sur l'espace  $\mathbb{Q}_2/\mathbb{P}_{1disc}$  avec projection variationnelle sur l'espace  $\mathbb{Q}_0$ ).

## 6.2 Discrétisation spatiale : contexte et motivations

Dans la suite, nous présentons différents cas-tests mettant en évidence les défauts du schéma RT pour des applications touchant la LES.

### Cas-test académique du canal plan à $Re_\tau = 590$

Il s'agit d'étudier un écoulement incompressible entre deux plaques planes parallèles infinies. Pour le modèle W.A.L.E. (Sous-section 3.2), les profils de viscosité moyenne effective obtenus par le schéma RT présentent des extrema près des parois (Figure 5). De ce fait, les profils des deux premiers moments (moyenne et écart-type) de la composante longitudinale de vitesse adimensionnés par la vitesse de frottement pariétal notée  $u_\tau$  ne sont pas en accord avec les références de Simulation Numérique Directe (DNS) [74] ou avec les résultats obtenus avec le schéma MAC (Figure 4).

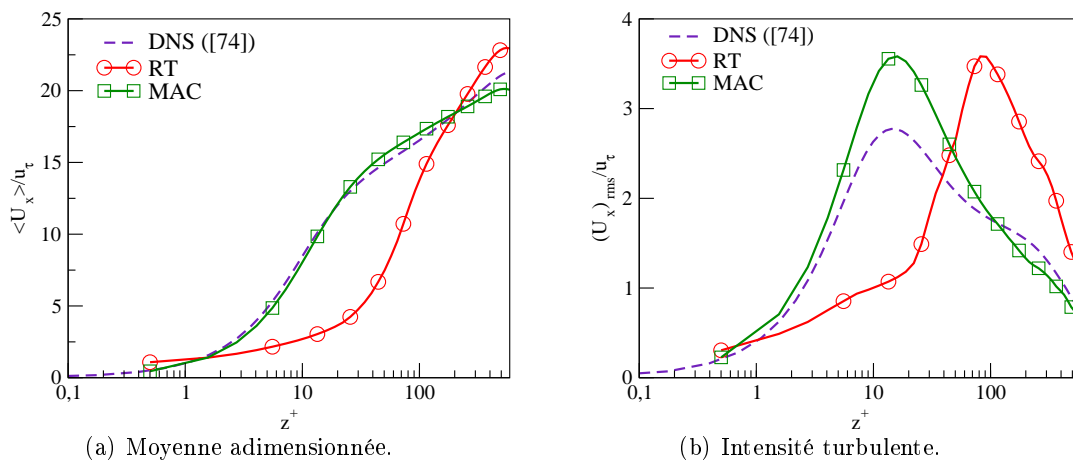


FIGURE 4 – Profils des moments (en temps et en espace) adimensionnés de la composante longitudinale de la vitesse résolue (représentés sur un demi canal) –  $Re_\tau = 590$ , modèle W.A.L.E.

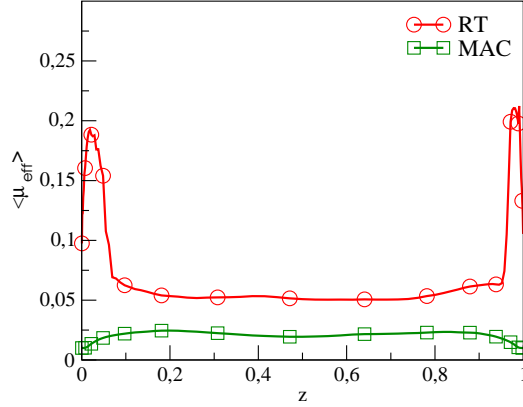


FIGURE 5 – Profils de la moyenne (en temps et en espace) de la viscosité dynamique effective –  $\text{Re}_\tau = 590$ , modèle W.A.L.E.

Compte tenu des mauvais résultats du schéma RT pour le cas-test du canal plan, nous examinons ensuite ses capacités sur trois problèmes plus simples sans considérer de modèle sous-maille.

#### Problème d'Oseen stationnaire à convection dominante

Nous proposons de construire une solution manufacturée  $(\mathbf{u}^{exact}, p^{exact})$  aux équations de Navier-Stokes stationnaires et de tester l'approximation de la solution obtenue pour le problème d'Oseen stationnaire (sans modèle sous-maille) suivant, écrit pour  $\rho = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $\mu = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  : trouver  $\mathbf{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $p : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u}^{exact} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} = 0. \end{array} \right. \quad (8)$$

En observant la convergence spatiale de la vitesse approchée en échelle logarithmique pour des maillages rectangles uniformes (Figure 6), nous montrons que le schéma RT converge à l'ordre deux mais surtout qu'il est peu précis pour des écoulements à convection dominante, contrairement au schéma MAC. Ce défaut de précision semble de plus provenir des degrés de liberté de vitesse tangents aux faces.

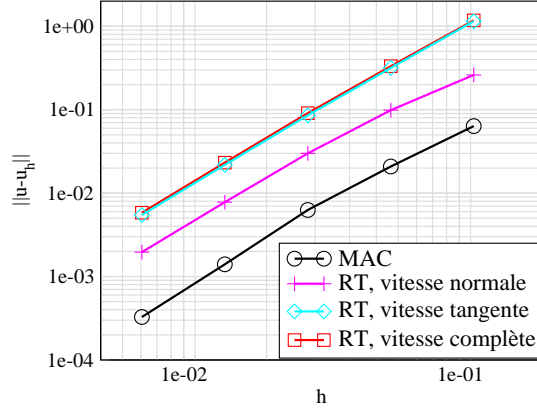


FIGURE 6 – Norme  $L^2$  de l’erreur (relative) d’approximation pour les composantes normale et tangente de vitesse en fonction du pas d’espace – Problème d’Oseen stationnaire à convection dominante.

### Problème du tourbillon isolé

On s’intéresse à la contrepartie discrète des équations d’Euler incompressibles stationnaires suivantes, sans modèle sous-maille (pour  $\rho = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ). Ces équations traduisent l’évolution de l’écoulement loin des parois, pour  $\text{Re} = \infty$  et s’écrivent comme suit : trouver  $\mathbf{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $p : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} = 0. \end{array} \right. \quad (9)$$

La contrepartie discrète de ce système n’est pas satisfaite pour le schéma RT pour un maillage rectangle uniforme, contrairement au schéma MAC, pour une solution particulière des équations continues [32] donnée par  $\mathbf{u}^{exact}(x, y) = (y, -x)^T$  et  $p^{exact}(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  au sens où les interpolées de la solution continue vérifient la formulation discrète associée au problème (9) (Section III.2.2.b). De fait, les solutions approchées par le schéma RT ne convergent pas vers la solution du problème continu (Figure 7).

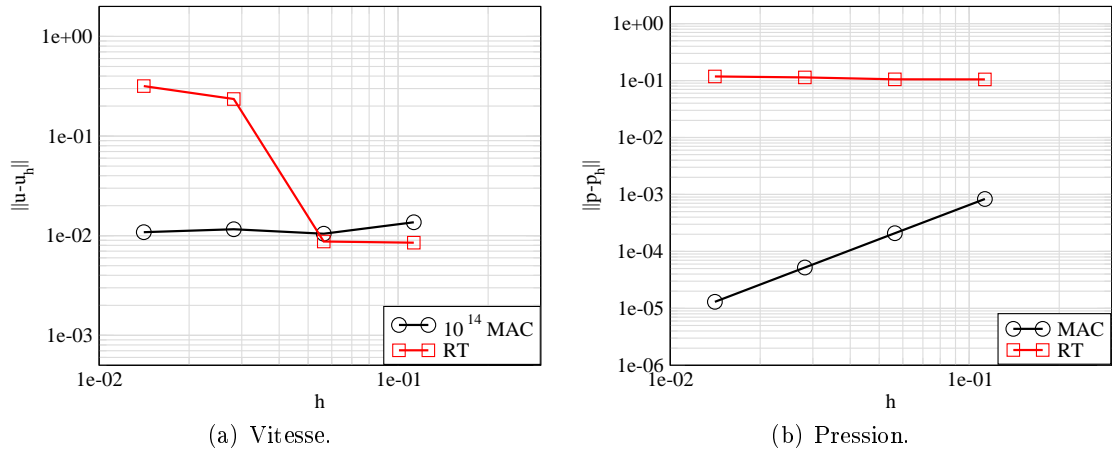
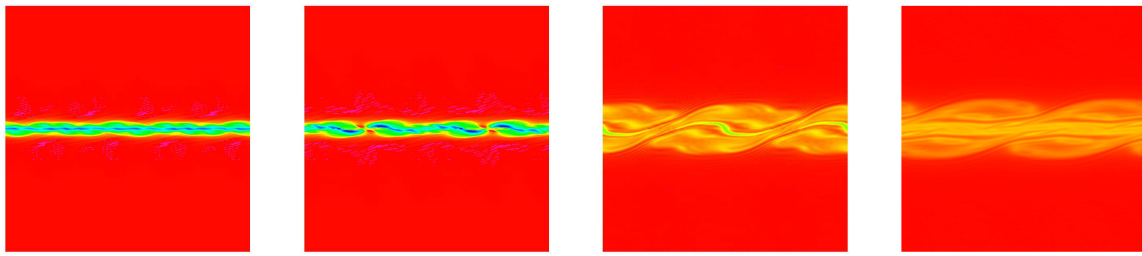


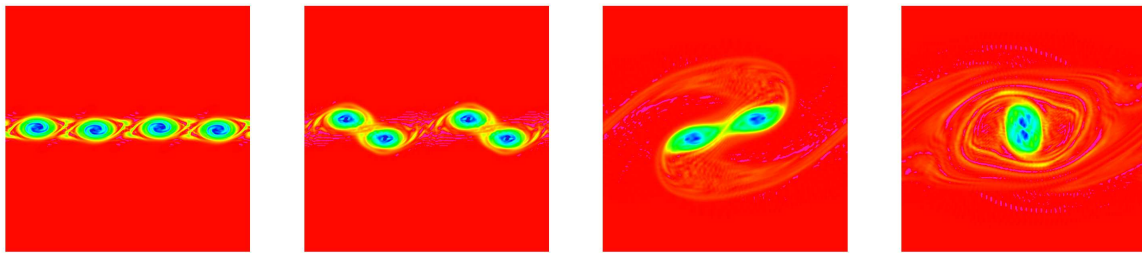
FIGURE 7 – Norme  $L^2$  de l'erreur d'approximation (relative) en fonction du pas d'espace – Test du tourbillon isolé.

### Couche de mélange à $Re = 10000$

On traite à présent de la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles (Système (1) pour lequel la deuxième relation est donnée par  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ ) sur un cas-test très populaire pour la LES [63, 57, 37, 15] car le problème est peu coercif, ce qui rend la simulation très sensible à l'ajout de dissipation numérique (instabilités). Le cas-test consiste à étudier l'évolution d'un écoulement turbulent au sein duquel se trouve une interface que l'on perturbe afin de créer quatre tourbillons qui s'apparient deux à deux jusqu'à ne former qu'un seul tourbillon.



(a) Schéma RT.



(b) Schéma MAC.

FIGURE 8 – Profil instantané de vorticité – Cas-test de couche de mélange à  $Re = 10000$ .

Le schéma RT atténue complètement les instabilités et il n’y a pas de tourbillons qui se créent, comme représenté sur la figure 8, ce qui le rend totalement inadapté à la LES. Ce n’est pas le cas du schéma MAC.

### 6.3 Critères requis dans le cadre de cette thèse

La bibliographie et les quatre cas-tests qui précèdent nous conduisent à sélectionner les critères suivants pour construire un schéma “adapté à la LES” basé sur le schéma RT :

(C.1) Critère requis pour la discrétisation en temps : *le contrôle de l’énergie cinétique.*

(C.2) Critère requis pour la discrétisation spatiale : *la précision pour des écoulements à convection dominante.*

Des discrétisations répondant à ces exigences sont présentées dans les Parties I et II du manuscrit (traitant respectivement des critères (C.1) et (C.2)).

Dans la partie I (Critère (C.1)), nous proposons un schéma basé sur une discrétisation volumes finis de l’opérateur convectif et l’approximation de la dérivée temporelle de vitesse par un schéma de Crank-Nicolson.

Dans la partie II (Critère (C.2)), l’idée de départ provient du fait que les problèmes présentés dans la section 6.2 ont le point commun suivant : la composante tangente du gradient de pression est nulle, donc le multiplicateur de Lagrange qui lui est associé n’intervient pas dans l’équation de conservation de la quantité de mouvement. Nous proposons donc deux stratégies

- retirer l’équation tangente de l’équation de prédiction de vitesse (Étape 1 de l’algorithme de la section 5) et reconstituer une équation pour la composante tangente de vitesse. Pour ce faire, comme pour les problèmes de minimisation sous contraintes, nous proposons d’ajouter à cette équation un terme de pénalisation contraignant chaque inconnue de vitesse tangente à une arête (ou face) à s’écrire comme combinaison linéaire des composantes normales alentour

- (le champ normal aux arêtes est plus précis pour le problème d'Oseen à convection dominante comme représenté sur la figure 6). C'est l'objet de la méthode présentée dans le chapitre IV.
- enrichir l'espace discret d'approximation pour la pression (*i.e.* ajouter des degrés de liberté en pression) de manière à ce que la composante tangente du gradient de pression discret soit non nulle comme fait dans Trio-U (Chapitre V).

## 7 Discrétisation en temps de Crank-Nicolson (Chapitre II)

Afin de répondre au critère (C.1) requis pour que la discrétisation temporelle soit adaptée à la LES, nous recherchons un schéma satisfaisant la conservation ou, du moins, le contrôle de l'énergie cinétique.

Nous proposons un schéma décalé pour la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles instationnaires (Système (1), Section 2) satisfaisant cette propriété. Nous utilisons un algorithme de Crank-Nicolson pour la discrétisation en temps et les éléments finis de Rannacher-Turek (ou de Crouzeix-Raviart) pour la discrétisation spatiale. L'originalité du schéma vient de l'utilisation d'un opérateur de convection en vitesse de type volumes finis. Nous montrons d'abord la stabilité de cet opérateur. La preuve de ce résultat nécessite de supposer que l'équation de conservation de la masse discrète soit vraie sur un maillage dual. La discrétisation des flux de masse sur ce maillage dual de [4] permet de satisfaire cette propriété.

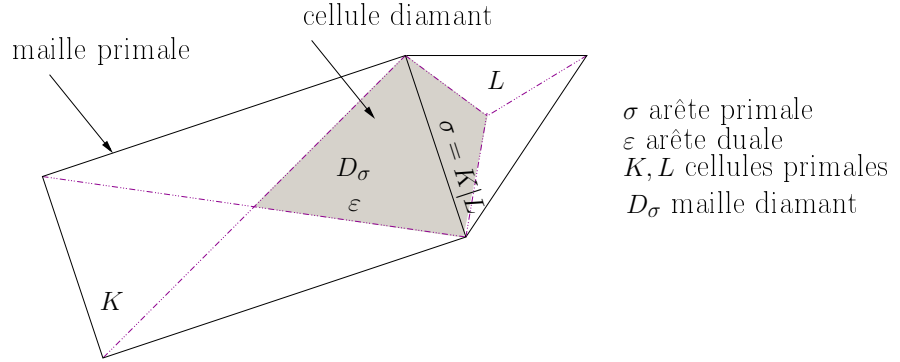


FIGURE 9 – Notations concernant les volumes de contrôle et les cellules diamant.

Nous présentons ensuite un algorithme de correction de pression basé sur le schéma en temps et les éléments finis précités, en utilisant l'opérateur de convection décrit précédemment. Ce schéma appelé "schéma Crank-Nicolson-like" est valide pour des maillages non structurés en 2D et en 3D. Il s'écrit, dans le cas de conditions au bord de type glissement parfait (2), pour  $n$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$  fixé, comme suit : étant données  $p^n, \theta^n$  et  $\rho^{n-1}, \rho^n, \mathbf{u}^n$  des approximations respectives de la pression, température, masse volumique et de la vitesse telles que

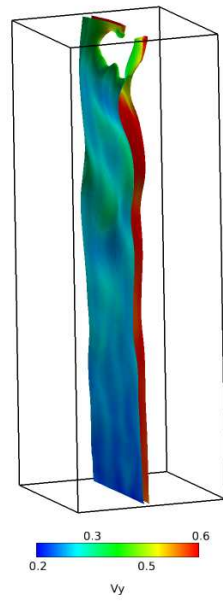
$$\frac{\rho^n - \rho^{n-1}}{\Delta t} + \operatorname{div}(\rho^n \mathbf{u}^n) = 0, \quad \text{dans } \Omega.$$

1- **Équation de conservation pour  $\theta$**  – Trouver  $\theta^{n+1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  :

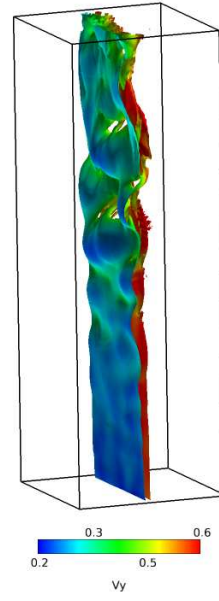
$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} (\rho^n \theta^{n+1} - \rho^{n-1} \theta^n) + \operatorname{div}(\rho^n \theta^{n+1} \mathbf{u}^n) - \operatorname{div}(\lambda \nabla \theta^{n+1}) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \theta^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$



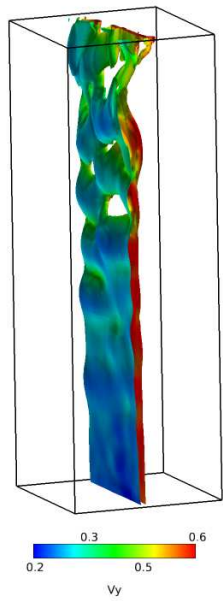




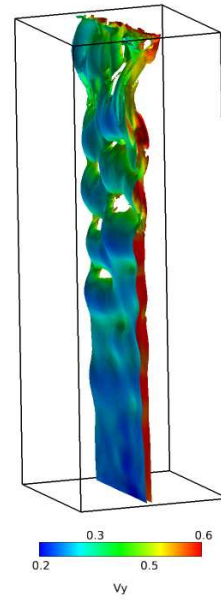
(a) Euler,  $\Delta t = 10^{-2}$  s.



(b) Crank-Nicolson,  $\Delta t = 10^{-2}$  s.



(c) Euler,  $\Delta t = 10^{-3}$  s.



(d) Crank-Nicolson,  $\Delta t = 10^{-3}$  s.

FIGURE 10 – Isosurface de norme de vorticité instantanée pour l'isovaleur 6 au temps 20 s – Couche de mélange turbulent.

Nous avons abordé la contribution apportée à la discrétisation temporelle, traitons à présent de la discrétisation spatiale dans les deux sections à venir.

## 8 Contrôle des vitesses tangentes aux faces pour l'élément fini de Rannacher-Turek (Chapitre IV)

Nous construisons un schéma permettant de répondre au critère **(C.2)** de précision pour des écoulements à convection dominante en utilisant une discrétisation de l'opérateur convectif satisfaisant une identité d'énergie cinétique.

Nous proposons d'ajouter à l'équation de prédiction de vitesse discrète un terme pénalisant la différence entre une inconnue tangente à une arête et une combinaison linéaire bien choisie des inconnues normales alentour (car la composante tangente souffre d'un défaut de précision sur le problème d'Oseen comme vu dans la section 6.2). La forme du terme de pénalisation est donnée par une forme bilinéaire notée  $a_T(\cdot, \cdot)$  multipliée par un paramètre de pénalisation  $r$  de telle sorte que  $a_T(\cdot, \cdot)$  soit :

- coercive,
- de stencil (*i.e.* nombre d'inconnues) le plus petit possible,
- contraignant chaque degré de liberté de vitesse tangent à une arête (face) à s'écrire comme combinaison linéaire des degrés de liberté normaux aux arêtes (faces) qui l'entourent comme suit :

$$\mathcal{N}_\sigma(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\tau} \approx \beta_\sigma \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma)} \alpha_\sigma^\sigma \mathcal{N}_{\hat{\sigma}}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_{\hat{\sigma}}, \quad (10)$$

où

- $\beta_\sigma$  et  $\alpha_\sigma^\sigma$  sont des réels à déterminer,
- $\boldsymbol{\tau}$  et  $\mathbf{n}$  sont les vecteurs tangent et normal à l'arête (face)  $\sigma$ ,
- la fonction  $\mathcal{N}_\sigma(\cdot)$  désigne la fonction nodale associée à l'arête (face)  $\sigma$ ,
- $\mathcal{I}(\sigma)$  désigne l'ensemble des faces partageant un sommet avec  $\sigma$ .

La principale difficulté de ce travail est de déterminer les coefficients de l'expression (10) car l'espace discret d'approximation pour la vitesse est constitué de fonctions linéaires ou bilinéaires par maille. Pour ce faire, nous demandons donc que la formule (10) soit consistante pour les champs affines à divergence nulle (afin de traiter d'écoulements incompressibles). Cette méthode est valide pour des maillages quadrangles et nous proposons une expression des coefficients pour des cellules parallélépipèdes rectangles ou parallélogrammes.

Nous montrons que le schéma construit, noté *RT-Stab* dans la suite, est stable et bien posé. De plus, en faisant tendre le paramètre de pénalisation vers l'infini, on remarque que le schéma limite est de type MAC (maillages non structurés) : en effet, il fait intervenir exclusivement les inconnues normales aux faces mais il est de stencil plus important que le schéma MAC usuel. Lors des tests numériques, on observe effectivement que la précision du schéma RT-Stab pour d'importantes valeurs du paramètre de pénalisation se rapproche de celle du schéma MAC sur des maillages rectangles et que celle-ci est bien meilleure que celle du schéma RT dans tous les cas. Par ailleurs, il est bon de noter que le schéma RT-Stab donne des résultats qualitativement satisfaisants pour le cas-test du canal plan turbulent à  $\text{Re}_\tau = 590$  (Section 6.2) avec le modèle sous-maille W.A.L.E., comme représenté sur les figures 11 et 12 (par souci de clarté, nous représentons le profil de viscosité effective moyenne obtenu par le schéma stabilisé pour une seule valeur du paramètre de pénalisation). En effet, pour les différentes valeurs de  $r$ , on observe une amélioration du profil de vitesse moyenne pour le schéma RT-Stab comparé au schéma RT. Concernant l'intensité turbulente, pour de petites valeurs de  $r$ , l'abscisse de l'extremum est calculée correctement et l'approximation

au centre du canal n'est pas bonne, contrairement à  $r = 1$  ou  $r = 10$ . Dans tous les cas, le schéma RT-Stab donne un profil d'intensité turbulente meilleur que celui du schéma RT.

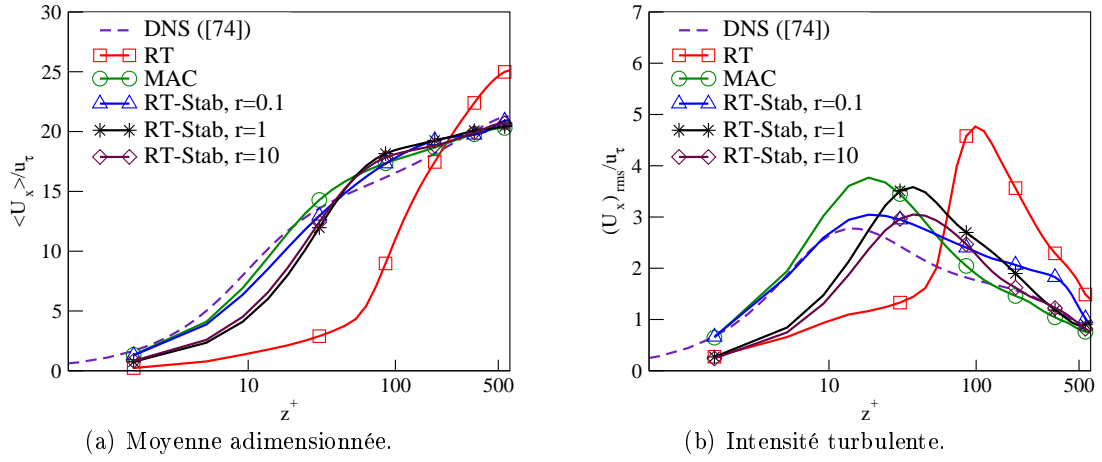


FIGURE 11 – Moments de la composante longitudinale de la vitesse résolue adimensionnée par la vitesse de frottement pariétal – Canal plan.

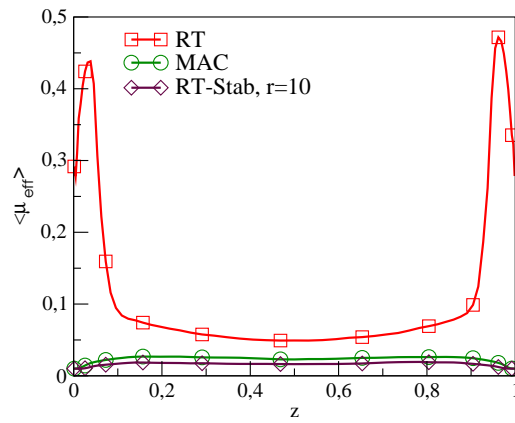


FIGURE 12 – Viscosité effective moyenne – Canal plan.

## 9 Enrichissement de la pression pour l'élément fini de Rannacher-Turek (Chapitre V)

Afin de proposer un schéma précis pour des écoulements à convection dominante (Critère (C.2)), on admet parfois qu'un tel schéma doit satisfaire le problème du tourbillon isolé (Système (9)); c'est l'objet des méthodes développées dans le logiciel de calcul Trio-U [1, 48, 32]. Le schéma MAC satisfait la propriété énoncée ci-dessus. Nous construisons une discrétisation de caractéristiques similaires au schéma MAC, mais s'appuyant sur des maillages non structurés. Le point de départ est l'élément fini de Rannacher-Turek, que nous modifions en enrichissant l'espace discret d'approximation pour la pression : aux degrés de liberté situés au centre de chaque cellule (appelés inconnues cell-centered), nous ajoutons des degrés de liberté situés aux sommets (appelés inconnues vertex-centered).

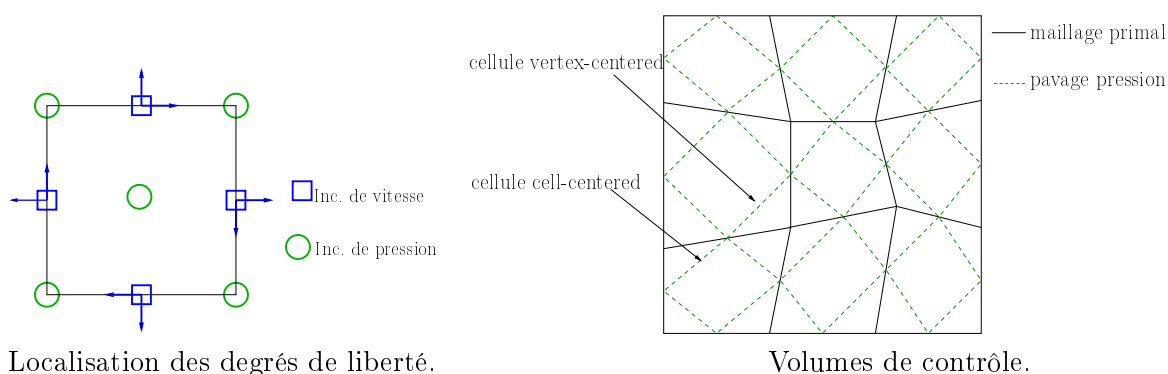
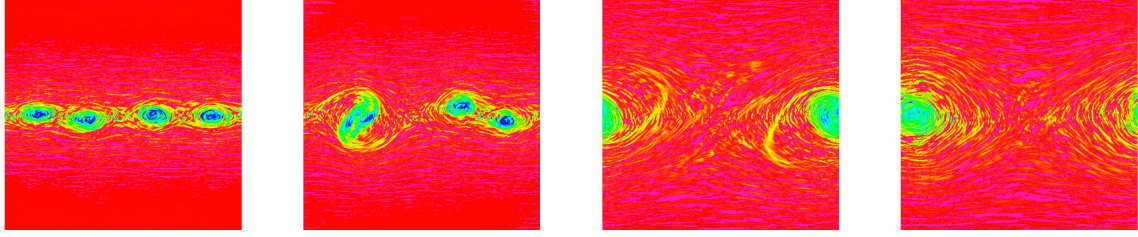


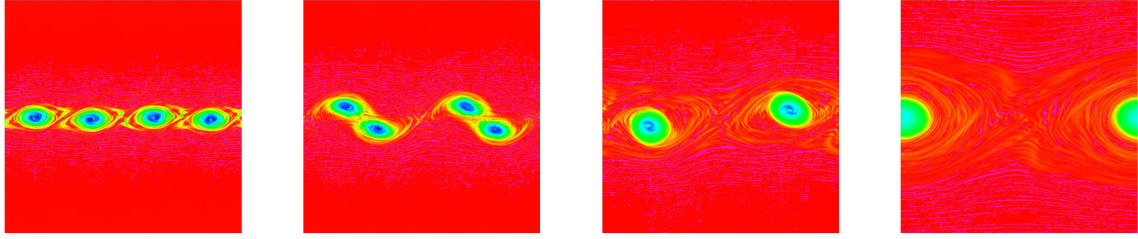
FIGURE 13 – Degrés de liberté et pavage pour la pression.

Ceci nous conduit à considérer un pavage en pression (Figure 13) à partir duquel nous explicitons dans un premier temps les opérateurs discrets, à savoir la divergence de vitesse, le gradient de pression et l'opérateur elliptique pour l'incrément de pression. Ces opérateurs ont la propriété de coupler les inconnues de pression cell-centered et vertex-centered. Avec ces opérateurs, le problème du tourbillon isolé (9) est résolu exactement.

Par ailleurs, lors des expériences numériques, le schéma résultant (comme le schéma MAC) se révèle nettement plus précis que l'élément fini de Rannacher-Turek standard sur plusieurs cas-tests à convection dominante (problème de Stokes, d'Oseen). Cependant, la difficulté soulevée par la discrétisation proposée est la suivante : l'équation de conservation de la masse discrète n'est pas satisfaite sur des maillages non structurés. Nous présentons donc une méthode de reconstruction des flux primaux, analogue à celle permettant d'approcher les flux de masse sur les cellules diamants (comme dans le chapitre II). Cette démarche nous permet d'utiliser un opérateur convectif qui satisfait une identité d'énergie cinétique. Il est bon de noter que le cas-test de couche de mélange à  $Re = 10000$  donne d'ailleurs des résultats satisfaisants (qualitativement) sur des maillages non structurés (Figure 9).



(a) Sans reconstruction.



(b) Reconstruction des flux.

FIGURE 14 – Profil instantané de vorticité – Cas-test de couche de mélange à  $Re = 10000$  réalisé par enrichissement de la pression.

Par ailleurs, nous montrons la stabilité pour la vitesse et nous proposons l'analyse *a priori* de l'erreur d'approximation pour le problème de Stokes stationnaire 2D (conditions au bord de type Dirichlet homogènes) en supposant la solution régulière  $\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})^2$  et le maillage rectangle (ou parallélogramme) uniforme. Pour cela, nous introduisons un opérateur d'interpolation pour la vitesse qui nous permet d'adapter la preuve des estimations en vitesse de [12]. La difficulté de l'analyse est due au fait que la discrétisation proposée ne satisfait pas la condition *inf-sup* comme dans [7], par conséquent il faut travailler un peu pour obtenir les estimations en pression. Pour cela, nous définissons un champ de pression post-traité (lissage) noté  $\tilde{p}_h$ . En appliquant le lemme de Nečas à une pression appropriée, nous déduisons des estimations pour la pression post-traitée, énoncées comme suit :

**Proposition (Théorèmes V.18 et V.19, pages 182 et 185)**

Supposons que  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})^2$  et soit  $(\underline{\mathbf{u}}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^2 \cap \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})^2 \times L_0^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  la solution du problème de Stokes continu. Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage rectangle (ou parallélogramme) uniforme. Alors il existe une constante  $C > 0$  telle que la solution  $\mathbf{u}_h$  du problème de Stokes discret et la pression post-traitée vérifient

$$\|\underline{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h\|_{1,b} \leq Ch(|\underline{\mathbf{u}}|_{\mathcal{C}^2} + |p|_{\mathcal{C}^1}), \quad \text{et} \quad \|p - \tilde{p}_h\|_0 \leq Ch(|\underline{\mathbf{u}}|_{\mathcal{C}^2} + |p|_{\mathcal{C}^1}),$$

où  $\|\cdot\|_0$  et  $|\cdot|_{\mathcal{C}^k}$  désignent respectivement la norme  $L^2$  et la norme  $\mathcal{C}^k$ .



# Partie I : Discrétisation en temps





# Chapitre I

## Méthode de projection

L'essentiel de ce chapitre a fait l'objet d'un article écrit en collaboration avec Sebastian Minjeaud et Jean-Claude Latché, paru dans IMA Journal of Numerical Analysis [22].

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la résolution du problème de Stokes instationnaire, posé sur un intervalle de temps (fini)  $(0, T)$  et sur un domaine  $\Omega$  ouvert, connexe, borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ou  $d = 3$ ), supposé polygonal ( $d = 2$ ) ou polyédral ( $d = 3$ ). Le système d'équations considéré est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Dans ces équations,  $\partial_t$  désigne la dérivée temporelle,  $\mathbf{u}$  la vitesse (vectorielle) du fluide,  $p$  la pression (scalaire) et  $\mathbf{f}$  une force (vectorielle) supposée connue et régulière.

La frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  est supposée divisée en deux parties  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , et la mesure de  $\Gamma_D$  est non nulle. La vitesse est imposée sur  $\Gamma_D$  tandis que des conditions au bord de type Neumann sont prescrites sur  $\Gamma_N$  :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_D, & \text{sur } \Gamma_D \times (0, T), \\ -p\mathbf{n} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}_N, & \text{sur } \Gamma_N \times (0, T). \end{cases}$$

Dans ces équations,  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur normal sortant de  $\Omega$  et  $\mathbf{u}_D$  et  $\mathbf{g}_N$  désignent respectivement une vitesse imposée sur  $\Gamma_D$  et une force extérieure exercée sur  $\Gamma_N$ . De plus, ce système d'équations est complété par une condition initiale portant sur la vitesse :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0, \quad \text{dans } \Omega \times \{0\}.$$

Les champs de vecteurs  $\mathbf{u}_D$ ,  $\mathbf{u}^0$  et  $\mathbf{g}_N$  sont supposés réguliers.

Nous présentons dans ce chapitre la discrétisation en temps du problème de Stokes par la méthode dite de *projection incrémentale* [19, 93, 36, 94]. Il s'agit d'une technique à pas fractionnaires souvent appliquée aux équations de Navier-Stokes (Système (1) en Introduction, Section 2). La discrétisation en espace du système (I.1) repose sur l'élément fini de Rannacher-Turek [83] ou Crouzeix-Raviart [21], tous deux non conformes de bas degré (donc attractifs pour les applications industrielles). Puisque la pression est approchée par des fonctions constantes par mailles, l'étape de projection doit être écrite sous la forme d'un problème de Darcy. Nous choisissons donc d'utiliser une discrétisation dite "lumpée" des termes de dérivée en temps, ce qui permet d'obtenir un problème elliptique pour la pression par un procédé algébrique. Une extension de ce schéma [4] aux équations de Navier-Stokes à densité variable [68] est utilisée dans le logiciel libre ISIS [54] basé sur la librairie PELICANS [79], tous deux développés à l'IRSN.

Les résultats présentés dans ce chapitre sont de deux types. Tout d'abord, nous établissons un cadre variationnel discret avec des produits scalaires, des opérateurs et des normes ayant tous une expression reliée à la taille des cellules, ce qui nous permet d'adapter l'analyse d'erreur connue dans le cadre semi-discret en temps proposée dans [88, 40] ou dans le cas d'éléments finis conformes présentée dans [38]. Nous obtenons donc, dans le cas de conditions au bord de type Dirichlet homogènes, des estimations d'ordre deux en temps pour l'erreur de fractionnement en vitesse en norme  $l^2(L^2(\Omega)^d)$  et d'ordre un en pression pour la norme  $l^2(L^2(\Omega))$ . Ensuite, nous écrivons une expression explicite pour l'opérateur elliptique discret appliqué à l'incrément de pression dans l'étape de projection. Cette construction apporte des éléments nouveaux à la question assez controversée (dans le contexte des méthodes algébriques) des conditions au bord artificielles (question soulevée dans [41]). En effet, nous montrons que l'on obtient une discrétisation volumes finis de l'opérateur de Laplace, avec les conditions au bord attendues, c'est-à-dire des conditions au bord de type Neumann sur  $\Gamma_D$  et des conditions de type Dirichlet sur  $\Gamma_N$ . Cependant, puisque, comme souvent dans le cas des volumes finis, ces conditions au bord sont seulement imposées au sens faible, nous observons lors des tests numériques que leur influence disparaît effectivement quand le pas de temps tend vers zéro, et nous retrouvons un ordre de convergence en espace optimal, même en norme  $L^\infty$  pour la pression dans le cas de conditions aux limites ouvertes.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Nous commençons par décrire le principe de la méthode de projection incrémentale (Section I.1), puis nous en donnons la version discrétisée par l'élément fini de Rannacher-Turek (Section I.2). L'expression de l'opérateur elliptique discret pour la pression est détaillée dans la section I.2.2. Ensuite, nous présentons une analyse d'erreur de fractionnement dans la section I.3 et, enfin, des expérimentations numériques destinées à appuyer cette analyse sont proposées dans la section I.3.1.

## I.1 Semi-discrétisation en temps de la méthode de projection incrémentale

Soit  $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ) une partition de l'intervalle de temps  $(0, T)$ , supposée uniforme pour simplifier et soit  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  pour  $n = 0, 1, \dots, N-1$  le pas de temps. Dans la suite de ce chapitre, lorsqu'une fonction  $f$  est donnée, la notation  $f^n$  ( $0 \leq n \leq N$ ) désigne la valeur  $f(\cdot, t^n)$  de la fonction  $f$  au temps  $t^n$ . De plus, on désigne par  $f_D$  ( $f_N$ ) la trace de la fonction  $f$  sur la partie  $\Gamma_D$  ( $\Gamma_N$ ) du bord de  $\Omega$ .

Commençons par énoncer une discrétisation en temps implicite du problème (I.1).

Étant donné un entier  $n \in \{0, \dots, N-1\}$ , et supposant  $\mathbf{u}_{imp}^n$  connu, on cherche  $(\mathbf{u}_{imp}^{n+1}, p_{imp}^{n+1})$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\mathbf{u}_{imp}^{n+1} - \mathbf{u}_{imp}^n}{\Delta t} - \Delta \mathbf{u}_{imp}^{n+1} + \nabla p_{imp}^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1}, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_{imp}^{n+1} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}_{imp}^{n+1} = \mathbf{u}_D^{n+1}, & \text{sur } \Gamma_D, \\ -p_{imp}^{n+1} \mathbf{n} + \nabla \mathbf{u}_{imp}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}_N^{n+1}, & \text{sur } \Gamma_N. \end{array} \right. \quad (\text{I.2})$$

Un inconvénient de ce type de problème est que, du fait de sa structure de type point selle (problème couplé), sa résolution par une méthode itérative est très coûteuse, en particulier en CPU. C'est pourquoi nous traitons dans la suite de la méthode de projection incrémentale permettant de

découpler le calcul de la vitesse de celui de la pression dans le système (I.2) ci-dessus. Le principe est le suivant : à chaque itération en temps, la résolution s'effectue en seulement deux étapes.

1- D'abord, dans l'étape de *prédiction de vitesse*, on ignore la contrainte d'incompressibilité et on choisit pour première approximation de la vitesse la solution  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$  (appelée *vitesse prédite*) de l'équation de quantité de mouvement où la pression est explicite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \nabla p^n = \mathbf{f}^{n+1}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{u}_D^{n+1}, \quad \text{sur } \Gamma_D, \\ \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{n} - p^n \mathbf{n} = \mathbf{g}_N^{n+1}, \quad \text{sur } \Gamma_N. \end{array} \right. \quad (\text{I.3})$$

2- Dans un second temps, il s'agit de projeter la vitesse prédite sur l'espace des vecteurs à divergence nulle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\Delta t} + \nabla(p^{n+1} - p^n) = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{n}, \quad \text{sur } \Gamma_D, \\ p^{n+1} = p^n, \quad \text{sur } \Gamma_N. \end{array} \right. \quad (\text{I.4})$$

2'- Usuellement, pour résoudre l'étape 2 (problème de Darcy), on montre que les deux équations de cette étape permettent d'obtenir un problème elliptique pour la pression. En effet, en prenant la divergence de la première équation, la vitesse  $\mathbf{u}^{n+1}$  est éliminée. Le système (I.4) est alors formellement équivalent au problème de Poisson (I.4') consistant à trouver l'incrément de pression  $\phi^{n+1} = p^{n+1} - p^n$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \phi^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \nabla \phi^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_D, \\ \phi^{n+1} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \quad (\text{I.4}')$$

et de corriger ensuite la pression et la vitesse par :

$$\begin{aligned} p^{n+1} &= p^n + \phi^{n+1}, \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \Delta t \nabla \phi^{n+1}. \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

De fait, le système (I.5) est souvent appelé *étape de correction*.

Les conditions au bord imposées dans l'étape 2 ou l'étape 2' se justifient comme suit. La condition  $p^{n+1} = p^n$  sur  $\Gamma_N$  permet de déduire une condition de Neumann pour la vitesse prédite sur cette partie de la frontière :

$$\nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{n} - p^{n+1} \mathbf{n} = \mathbf{g}_N^{n+1}.$$

De plus, sur la condition  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}$  sur le bord  $\Gamma_D$  résulte de la condition au bord de type Dirichlet sur  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$  dans l'étape de prédiction de vitesse. Enfin, la décomposition de Leray ([11]) et

la condition  $p^{n+1} = p^n$  sur  $\Gamma_N$  permettent d'identifier  $\mathbf{u}^{n+1}$  comme étant le projeté orthogonal de  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$  sur le sous espace affine suivant :

$$\{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_D^{n+1} \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_D\}.$$

Remarque I.1 (Conditions au bord dans l'étape de projection de vitesse)

*La vitesse prédite  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$  satisfait les conditions au bord du problème initial (I.1), mais ce n'est pas le cas de la vitesse corrigée  $\mathbf{u}^{n+1}$ . Les conditions au bord de l'étape de projection (Système I.4) sont dites artificielles (i.e. non vérifiées par la solution du problème couplé) : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\begin{aligned} \nabla p^n \cdot \mathbf{n} &= \nabla p^0 \cdot \mathbf{n}, & \text{sur } \Gamma_D, \\ p^n &= p^0, & \text{sur } \Gamma_N. \end{aligned}$$

*Ces dernières conditions génèrent une perte de convergence en espace [41] et constituent un inconvénient majeur de ce type de méthode.*

L'algorithme de projection incrémentale est rappelé ci-après (Algorithme I.2), avec les deux formulations possibles de l'étape de projection. En pratique, tous les résultats de ce manuscrit sont obtenus par résolution du problème de Poisson (Étape 2') qui offre la possibilité de découpler le calcul de la pression de celui de la vitesse et de résoudre  $d$  problèmes scalaires indépendants les uns des autres.

**Algorithme I.2 (Méthode de projection incrémentale pour le problème de Stokes)**

*Supposons que  $(\mathbf{u}^n, p^n)$  sont connus, tels que  $\operatorname{div} \mathbf{u}^n = 0$ .*

**1- Prédiction de vitesse :**

*Trouver  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$  tel que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \nabla p^n = \mathbf{f}^{n+1}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{u}_D^{n+1}, \quad \text{sur } \Gamma_D, \\ \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{n} - p^n \mathbf{n} = \mathbf{g}_N^{n+1}, \quad \text{sur } \Gamma_N. \end{array} \right.$$

**2- Projection de vitesse (problème de Darcy) :**

*Trouver  $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$  tels que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\Delta t} + \nabla \phi^{n+1} = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{n}, \quad \text{sur } \Gamma_D, \\ \phi^{n+1} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_N. \end{array} \right.$$

**2'- Projection de vitesse (problème de Poisson) :**

Trouver  $\phi^{n+1}$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\phi^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, & \text{dans } \Omega, \\ \nabla\phi^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \Gamma_D, \\ \phi^{n+1} = 0, & \text{sur } \Gamma_N. \end{array} \right.$$

Alors

$$\begin{aligned} p^{n+1} &= p^n + \phi^{n+1}, \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \Delta t \nabla \phi^{n+1}. \end{aligned}$$

## I.2 Schéma discret en temps et en espace

Afin d'obtenir les équations discrètes de l'algorithme à pas fractionnaires que l'on vient de présenter, il nous suffit de choisir les fonctions de forme Rannacher-Turek comme fonctions tests dans la formulation variationnelle de l'algorithme I.2. Rappelons que l'élément fini de Rannacher-Turek [83] (Annexe A) est un élément fini mixte, défini sur des quadrangles comme suit :

- les inconnues de vitesse sont situées aux arêtes si  $d = 2$  ou faces si  $d = 3$ . La vitesse discrète appartient à l'espace d'approximation noté  $\mathbf{X}_h$  des fonctions  $\mathbb{Q}_1$  par cellules. Le degré de liberté en vitesse associé à  $\sigma$  et à la composante  $i$  est noté  $\mathbf{u}_{\sigma,i}$  et déterminé pour que la moyenne du saut de  $\mathbf{u}_i$  soit nulle à travers  $\sigma$ . De ce fait, la vitesse discrète est discontinue et cet élément est non conforme.
- Les inconnues de pression sont situées au centre des cellules, et la pression est constante par maille. Nous notons  $\mathbf{M}_h$  l'espace discret d'approximation pour la pression.

### I.2.1 Étapes de prédiction et de projection (problème de Darcy)

Afin d'inverser facilement celle-ci, nous utilisons une version lumpée de la matrice de masse en vitesse, *i.e.* la matrice diagonale  $\widetilde{M}$  de coefficients :

$$\widetilde{M}_{\sigma,\sigma} = \sum_{\sigma' \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varphi}_{\sigma}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\sigma'}^{(i)},$$

c'est-à-dire  $|D_{\sigma}|$  par les propositions A.2 et A.4 (*cf* Annexe A).

Ce procédé conduit à l'algorithme suivant :

- 1 - Prédiction de vitesse – Trouver  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \in \mathbf{X}_h$  tel que :

$$\forall \sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D, \quad \forall 1 \leq i \leq d,$$

$$\begin{aligned} \frac{|D_{\sigma}|}{\Delta t} [\tilde{\mathbf{u}}_{\sigma,i}^{n+1} - \mathbf{u}_{\sigma,i}^n] + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} : \nabla \boldsymbol{\varphi}_{\sigma}^{(i)} \, d\mathbf{x} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p^n \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_{\sigma}^{(i)} \, d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\sigma}^{(i)} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_N(\mathbf{x}, t^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\sigma}^{(i)} \, d\sigma. \end{aligned}$$

2 - Projection de vitesse – Trouver  $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{X}_h$  et  $p^{n+1} \in \mathbf{M}_h$  tels que :

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D, \quad \forall 1 \leq i \leq d, \\ \frac{|D_\sigma|}{\Delta t} [\mathbf{u}_{\sigma,i}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_{\sigma,i}^{n+1}] - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (p^{n+1} - p^n) \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} = 0, \\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} \, d\mathbf{x} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathbf{u}_\sigma^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = 0. \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

Dans ces écritures, pour tous  $1 \leq i \leq d$  et  $q \in \mathbf{M}_h$ ,

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \quad \sigma = K|L, \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K q \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} q_K \int_K \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x}, \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} q_K \int_{\partial K} \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \, d\mathbf{x}, \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} q_K \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{E}(K)} \mathbf{n}_{K,\sigma,i} \int_{\tilde{\sigma}} \varphi_\sigma \, d\tilde{\sigma}, \\ &= |\sigma| (q_K - q_L) \mathbf{n}_{K,\sigma,i}, \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \setminus \mathcal{E}_D, \quad \sigma = K|ext, \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K q \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} = |\sigma| q_K \mathbf{n}_{K,\sigma,i}.$$

Au premier coup d'oeil, comparé à la version semi-discrète de la méthode de projection incrémentale, il peut paraître déroutant que l'ensemble des conditions au bord de Dirichlet soit imposé à la vitesse corrigée. En effet, l'espace d'approximation  $\mathbf{X}_h$  impose une condition de type Dirichlet sur la vitesse alors que dans l'algorithme semi-discret, seule la composante normale de celle-ci est fixée. En fait, l'expression (I.7) du gradient de pression discret montre que, pour la discrétisation particulière considérée ici, le gradient de pression discret sur une face  $\sigma$  est colinéaire à son vecteur normal, donc les vitesses tangentes aux faces (et donc à la frontière du domaine) sont dans tous les cas laissées inchangées au cours de l'étape de correction de vitesse (*i.e.* qu'elles soient imposées ou pas).

## 1.2.2 Le problème elliptique discret et les conditions au bord artificielles pour la pression

L'élimination de  $\mathbf{u}^{n+1}$  est réalisée sur le système discret (I.6) pour obtenir la contrepartie discrète de (I.4'). Ainsi, le problème elliptique discret portant sur l'incrément de pression n'est pas posé explicitement (comme dans le cas semi-discret), il en est de même des conditions au bord pour l'incrément de pression. Nous allons montrer que l'on retrouve en fait les conditions au bord imposées dans (I.4') en exprimant l'opérateur Laplacien discret.

Pour cela, considérons une maille  $K \in \mathcal{T}_h$  et multiplions la première équation de l'étape de projection de vitesse (I.6) par  $\frac{1}{|D_\sigma|} |\sigma| \mathbf{n}_{K,\sigma,i}$  et sommions les équations obtenues pour  $1 \leq i \leq d$  et  $\sigma \in \mathcal{E}(K)$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma = K|L} \frac{|\sigma|^2}{|D_\sigma|} [\phi_K^{n+1} - \phi_L^{n+1}] + \sum_{\sigma \in (\mathcal{E}_{\text{ext}} \setminus \mathcal{E}_D) \cap \mathcal{E}(K)} \frac{|\sigma|^2}{|D_\sigma|} \phi_K^{n+1} \\ = \frac{1}{\Delta t} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

où la quantité  $\phi_K^{n+1}$  désigne la différence de pression aux instants  $n + 1$  et  $n$ , *i.e.*  $p_K^{n+1} - p_K^n$ , sur chaque maille  $K \in \mathcal{T}_h$ .

Le membre de gauche de cette dernière égalité est une approximation volumes finis d'un opérateur Laplacien, mais pas consistante, puisque, pour un maillage uniforme, il est facile de voir que le coefficient  $|\sigma|^2/|D_\sigma|$  est  $d$  fois plus grand que pour les approximations volumes finis usuelles ; c'est probablement relié au fait que l'élément fini de Rannacher-Turek est connu pour fournir une approximation non consistante du problème de Darcy. Les conditions au bord de l'algorithme semi-discret I.2, c'est-à-dire des conditions de Neumann homogènes sur chaque face  $\sigma \in \mathcal{E}_D$  et de Dirichlet homogènes sur chaque face  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \setminus \mathcal{E}_D$ , sont incorporées dans cet opérateur (Équation (I.8)). Cependant, sur  $\Gamma_N$ , les conditions au bord sont imposées dans un sens plus faible que pour des approximations conformes pour lesquelles la valeur des degrés de liberté est fixée exactement en un point. On peut donc s'attendre à ce que l'influence des conditions au bord s'atténue lorsque le pas de temps tend vers zéro ; ce comportement est effectivement observé dans les expériences numériques présentées dans la section I.4.

### I.3 Analyse variationnelle discrète et estimations de l'erreur de splitting

Nous supposons dans cette section que la vitesse au bord est nulle, c'est-à-dire :

$$\Gamma_N = \emptyset \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_D = 0.$$

Sous cette hypothèse, nous donnons une analyse d'erreur pour le schéma proposé, découpée en deux étapes : d'abord, nous donnons l'analyse d'erreur dans un cadre variationnel discret abstrait (Section I.3.1), et ensuite nous montrons que le schéma présenté dans ce chapitre entre dans ce cadre de travail (Section I.3.2). En particulier, nous estimons l'erreur de fractionnement pour le schéma discret proposé et nous montrons, sous l'hypothèse que le problème de Stokes est régularisant, des estimations d'ordre deux en temps pour l'erreur de splitting en vitesse (dans  $l^2(\mathbf{L}^2)^d$ ) et d'ordre un pour la pression (dans  $l^2(\mathbf{L}^2)$ ).

#### I.3.1 Analyse formelle de la méthode de projection incrémentale

Nous donnons dans cette section la preuve du fait que l'erreur de fractionnement associée à la méthode de projection incrémentale est d'ordre deux en temps pour la vitesse (dans  $l^2(\mathbf{L}^2)^d$ ), sous l'hypothèse que le problème de Stokes (continu) est régularisant, autrement dit : si le second membre  $\mathbf{f}$  appartient à l'espace  $\mathbf{L}^2(\Omega)^d$ , alors la solution  $(\mathbf{u}, p)$  de ce même problème appartient à l'espace  $\mathbf{H}^2(\Omega)^d \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d \times \mathbf{H}^1(\Omega)$  (Définition I.16 ci-dessous). L'avantage de travailler avec l'erreur de fractionnement (*i.e.* la différence entre la solution fournie par la méthode de projection et la solution du schéma implicite) est double. D'abord, à condition de pouvoir interpréter le schéma considéré comme une méthode Galerkin, l'analyse d'erreur est formellement la même dans le cas discret que dans le cas semi-discret : nous travaillons sur des formulations variationnelles, peu importe que les espaces fonctionnels soient discrets ou continus (en espace). Ensuite, l'erreur de splitting est irréductible, et utiliser des schémas en temps d'ordre supérieur n'améliore pas la précision. L'analyse de l'erreur de splitting peut donc être menée avec une discrétisation en temps d'Euler rétrograde. Bien sûr, pour obtenir l'ordre de convergence du schéma numérique, les estimations portant sur l'erreur de fractionnement doivent être combinées avec l'analyse d'erreur du schéma implicite (seulement d'ordre un en temps pour Euler) et incorporer l'erreur associée à la discrétisation spatiale.



La preuve présentée dans cette section consiste essentiellement en une adaptation de travaux existants : voir [88, 89, 90] pour des travaux majeurs, dans des cadres semi-discrets, et [38, 43, 40] pour l'analyse de schémas discrets (éléments finis conformes). En particulier, la “version conforme” du résultat prouvé dans cette section est donnée dans [40, Section 5].

Nous nous inspirons du formalisme de [38], que nous adaptons pour traiter de discrétisations non conformes. Pour  $0 \leq n < N$ , supposons donc que le schéma de projection considéré consiste à déterminer  $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Q}$  tels que :

$$\frac{1}{\Delta t}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + \langle \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \nabla \mathbf{v} \rangle + (\nabla p^n, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (\text{I.9a})$$

$$\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \mathbf{v}) + (\nabla(p^{n+1} - p^n), \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X}, \quad (\text{I.9b})$$

$$(\mathbf{u}^{n+1}, \nabla q) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{Q}, \quad (\text{I.9c})$$

où  $\mathcal{V}$  représente un espace vectoriel discret de fonctions à valeurs vectorielles,  $\mathcal{Q}$  est un espace vectoriel de fonctions scalaires,  $\mathcal{X}$  est l'espace vectoriel contenant les fonctions de  $\mathcal{V}$  et le gradient des fonctions de  $\mathcal{Q}$ , habituellement noté  $\mathcal{X} = \mathcal{V} + \nabla \mathcal{Q}$ . De plus,  $(\cdot, \cdot)$  désigne un produit scalaire sur  $\mathcal{X}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente le produit scalaire  $L^2$ . Les fonctions de  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{Q}$  sont supposées de carré intégrable, *i.e.*  $\mathcal{V} \subset L^2(\Omega)^d$  et  $\mathcal{Q} \subset L^2(\Omega)$ . Dans ce chapitre, nous définissons une norme sur  $\mathcal{X}$  par :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{X}, \quad \|\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{v}, \mathbf{v}),$$

et notons  $\|\cdot\|_{L^2}$  la norme usuelle de l'espace  $L^2$ . Deux opérateurs gradient différents apparaissent (avec la même notation) dans cette formulation : le premier s'applique aux fonctions de  $\mathcal{V}$  à valeurs dans l'espace  $L^2(\Omega)^{d \times d}$  tandis que le second s'applique aux fonctions de  $\mathcal{Q}$  et prend ses valeurs dans un sous-ensemble de  $\mathcal{X}$ .

L'algorithme doit être initialisé par les données de  $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{V}$  et  $p^0 \in \mathcal{Q}$ .

Remarque I.3 (Définition de  $\mathcal{X}$ ,  $\nabla p$  et problème elliptique de pression)

*La définition du sous-espace  $\mathcal{X}$  est complètement déterminée par la définition du gradient de pression, laquelle peut-être adaptée pour représenter différentes techniques de correction de pression. Deux cas sont souvent rencontrés dans la littérature :*

– Les méthodes non-algébriques avec un problème de Poisson pour la pression. *Dans ce cadre de travail, pour la plupart des cas, l'espace  $\mathcal{Q}$  est inclus dans  $H^1(\Omega)$ ,  $\nabla q$  représente le gradient usuel de la pression discrète  $q$ , et le problème elliptique pour l'incrément de pression est obtenu par une discrétisation usuelle du problème de Poisson semi-discret. L'équation (I.9b) est alors utilisée deux fois : d'abord avec  $\nabla q$ ,  $q \in \mathcal{Q}$ , comme fonction test, pour calculer l'incrément de pression du problème elliptique discret; ensuite, avec des fonctions tests de l'espace  $\mathcal{V}$ , pour obtenir la vitesse finale comme projection orthogonale de la vitesse prédite par rapport au produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  de  $\mathcal{V}$ .*

– Les méthodes algébriques. *Dans ce cas,  $\mathcal{X} = \mathcal{V}$ , et l'opérateur gradient est défini par dualité (*i.e.*  $\nabla q$  est le représentant de  $\mathcal{V}$ , pour le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$ , d'une forme linéaire obtenue par discrétisation du gradient). Notons que, ici aussi, en utilisant pour fonctions tests  $\nabla q$ ,  $q \in \mathcal{Q}$ , cela conduit à un problème elliptique discret pour l'incrément de pression, à partir duquel la vitesse finale a été éliminée; l'opérateur de ce problème est le complément de Schur du problème de Darcy (I.9b)–(I.9c). Cependant, cette technique est pertinente seulement si l'inverse de la matrice de masse en vitesse (*i.e.* la matrice associée au produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$ ) peut-être facilement calculée.*

Les calculs menés dans la suite de cette section sont valides dans les deux cas, mais bien sûr le contrôle d'une norme du gradient de pression notée  $\|\nabla p\|$  dépend du cas considéré. Le schéma étudié ici appartient à la seconde classe de méthodes, avec une matrice de masse diagonale pour la vitesse.

**Lemme I.4 (Stabilité du schéma)**

La solution du système (I.9) satisfait, pour  $0 \leq n \leq N - 1$  :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}^{n+1}\|^2 + \|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|^2 - \|\mathbf{u}^n\|^2 + 2\Delta t \|\nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ & + \Delta t^2 \left[ \|\nabla p^{n+1}\|^2 - \|\nabla p^n\|^2 \right] = 2\Delta t \langle \mathbf{f}^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \rangle. \end{aligned}$$

**Démonstration** Utilisons la fonction test  $\mathbf{v} = 2\Delta t \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$  dans l'équation (I.9a), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{u}^n\|^2 + \|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|^2 + 2\Delta t \|\nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ & + 2\Delta t (\nabla p^n, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) = 2\Delta t \langle \mathbf{f}^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

Ensuite, nous écrivons l'équation (I.9b) sous la forme suivante

$$\left( \left[ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} \right] - \left[ \frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \nabla p^n \right], \mathbf{v} \right) = 0,$$

et nous choisissons  $\mathbf{v}$  tel que :

$$\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{v} = \left[ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} \right] + \left[ \frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \nabla p^n \right] \in \mathcal{X}$$

dans cette équation. En remarquant que  $(\mathbf{u}^{n+1}, \nabla p^{n+1}) = 0$  par l'équation (I.9c), cela conduit à :

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|^2 - \|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 + \Delta t^2 \left[ \|\nabla p^{n+1}\|^2 - \|\nabla p^n\|^2 \right] - 2\Delta t (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \nabla p^n) = 0. \quad (\text{I.11})$$

Nous concluons la preuve en ajoutant les équations (I.10) et (I.11). ■

**Remarque I.5**

*Bien sûr, le lemme I.4 conduit à un contrôle de la solution seulement si le second membre de l'équation peut être absorbé dans le membre de gauche. C'est le cas, avec la même estimation que dans le cas continu, si une inégalité de Poincaré discrète (Relation donnée par l'inégalité (I.24) ci-dessous) est vraie.*

Avec les notations introduites ci-dessus, pour  $0 \leq n < N$  et en supposant que  $\mathbf{u}_{imp}^n \in \mathcal{V}$  est connu, le schéma implicite discret associé à l'équation (I.2) consiste à trouver  $(\mathbf{u}_{imp}^{n+1}, p_{imp}^{n+1}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$  tels que :

$$\frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}_{imp}^{n+1} - \mathbf{u}_{imp}^n, \mathbf{v}) + \langle \nabla \mathbf{u}_{imp}^{n+1}, \nabla \mathbf{v} \rangle + (\nabla p_{imp}^{n+1}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (\text{I.12a})$$

$$(\mathbf{u}_{imp}^{n+1}, \nabla q) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{Q}, \quad (\text{I.12b})$$

et nous faisons les hypothèses de régularité suivantes pour ce système :

$$\|\nabla(p_{imp}^{n+1} - p_{imp}^n)\| \leq c \Delta t, \quad \text{pour } 0 \leq n < N, \quad (\text{I.13})$$

où  $c$  est un réel positif.

Définissons les erreurs de fractionnement  $\tilde{\mathbf{e}}^n \in \mathcal{V}$ ,  $\mathbf{e}^n \in \mathcal{X}$  et  $\epsilon^n \in \mathcal{Q}$  définies pour  $0 \leq n \leq N$  par :

$$\mathbf{e}^n = \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_{imp}^n, \quad \tilde{\mathbf{e}}^n = \tilde{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}_{imp}^n, \quad \epsilon^n = p^n - p_{imp}^n.$$

Pour  $0 \leq n \leq N$ , on considère de plus  $\psi^n \in \mathcal{Q}$  la quantité :

$$\psi^n = p^n - p_{imp}^{n+1}.$$

Il est naturel de supposer que le schéma est initialisé de telle sorte que  $\mathbf{e}^0 = 0$  et nous pouvons arbitrairement définir  $\tilde{\mathbf{e}}^0 = 0$  puisque  $\tilde{\mathbf{u}}^0$  n'apparaît jamais dans l'algorithme. La quantité  $p_{imp}^n$  n'apparaît pas dans le schéma implicite, mais nous utilisons par la suite l'hypothèse (I.13) pour  $n = 0$ , donc la question de l'estimation de  $\epsilon^0$  se pose en effet ; pour simplifier, et aussi pour éviter des irrégularités possibles en temps de la solution du schéma implicite au temps  $t = 0$ , nous supposons que l'algorithme de projection est initialisé par des (au moins une) étapes du schéma implicite, donc nous avons aussi  $\epsilon^0 = 0$ . Ensuite, prenant la différence entre (I.9a) et (I.12a) pour la première équation, entre (I.9c) et (I.12b) pour la troisième équation et soustrayant  $\mathbf{u}_{imp}^{n+1}$  (resp.  $p_{imp}^{n+1}$ ) aux deux premiers termes (resp. troisième et quatrième termes) de (I.9b), nous obtenons le système (I.14) suivant pour les erreurs de fractionnement, pour  $0 \leq n < N$  :

$$\frac{1}{\Delta t}(\tilde{\mathbf{e}}^{n+1} - \mathbf{e}^n, \mathbf{v}) + \langle \nabla \tilde{\mathbf{e}}^{n+1}, \nabla \mathbf{v} \rangle + (\nabla \psi^n, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (\text{I.14a})$$

$$\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{e}^{n+1} - \tilde{\mathbf{e}}^{n+1}, \mathbf{v}) + (\nabla(\epsilon^{n+1} - \psi^n), \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X}, \quad (\text{I.14b})$$

$$(\mathbf{e}^{n+1}, \nabla q) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{Q}. \quad (\text{I.14c})$$

Pour aider le lecteur à comprendre la démarche afin d'établir des estimations pour l'erreur de fractionnement, nous rassemblons ici les principales étapes de la preuve :

- Dans le cadre discret, nous définissons des produits scalaires appropriés et des normes pour formuler le problème discret sous forme variationnelle (Section I.3.2).
- Nous établissons des estimations d'erreur d'ordre un en vitesse :

$$\|\mathbf{e}^n\|^2 + \sum_{k=1}^n \|\tilde{\mathbf{e}}^k - \mathbf{e}^{k-1}\|^2 + 2\Delta t \sum_{k=1}^n \|\nabla \tilde{\mathbf{e}}^k\|_{L^2}^2 + \Delta t^2 \|\nabla \epsilon^n\|^2 \leq c \Delta t^2.$$

- Les incréments d'erreur de splitting  $\delta \mathbf{e}^k = \mathbf{e}^k - \mathbf{e}^{k-1}$  et  $\delta \epsilon^k = \epsilon^k - \epsilon^{k-1}$  satisfont le schéma de projection incrémentale avec un second membre dans l'étape de prédiction donné par “ $\nabla \delta p_{imp}^{k+1} = p_{imp}^{k+1} - 2p_{imp}^k + p_{imp}^{k-1}$ ”. Le lemme de stabilité (Lemme I.4) et le lemme de Gronwall discret (Lemme I.6) ci-dessous conduisent à :

$$\|\delta \mathbf{e}^n\|^2 + 2\Delta t \sum_{k=1}^n \|\nabla \delta \tilde{\mathbf{e}}^k\|_{L^2}^2 + \Delta t^2 \|\nabla \delta \epsilon^n\|^2 \leq c \Delta t^4.$$

- Les estimations précédentes sur les incréments d'erreur de fractionnement et l'équation satisfaite par l'incrément de pression  $\delta \epsilon^k$  conduisent à :

$$\|\mathbf{e}^k - \tilde{\mathbf{e}}^k\| \leq C \Delta t^2.$$

- Une estimation d'ordre deux pour les erreurs de fractionnement en vitesse  $e^k$  et  $\tilde{e}^k$  est obtenue en utilisant l'inverse de l'opérateur de Stokes  $S^{-1}$  : les termes de pression s'annulent lorsqu'on multiplie par  $S^{-1}\tilde{e}^k$  une reconstitution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement satisfaite par les erreurs de fractionnement.
- Une estimation d'ordre un pour les erreurs de fractionnement en pression  $\epsilon^k$  est alors obtenue si la condition inf – sup discrète est satisfaite.

Nous donnons maintenant une première estimation des erreurs de fractionnement. Au cours de la preuve, nous utilisons le lemme de Gronwall discret suivant [82, p. 14].

**Lemme I.6 (Lemme de Gronwall discret)**

Supposons que  $(\delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g^n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites de réels positifs, et que les suites  $(\theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfont  $\theta^0 \leq g^0$  et :

$$\forall n \geq 1, \quad \theta^n \leq \sum_{k=0}^n g^k + \sum_{k=0}^{n-1} \delta^k \theta^k.$$

Alors, nous avons :

$$\forall n \geq 1, \quad \theta^n \leq \left[ \sum_{k=0}^n g^k \right] \exp \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \delta^k \right].$$

**Lemme I.7 (Estimations de l'erreur de fractionnement d'ordre un pour la vitesse)**

Supposons que l'équation (I.13) est satisfaite. Alors pour  $1 \leq n \leq N$ , on a :

$$\|e^n\|^2 + \sum_{k=1}^n \|\tilde{e}^k - e^{k-1}\|^2 + 2\Delta t \sum_{k=1}^n \|\nabla \tilde{e}^k\|_{L^2}^2 + \Delta t^2 \|\nabla \epsilon^n\|^2 \leq c \Delta t^2.$$

**Démonstration** Nous remarquons que le système (I.14) a la même structure que le système (I.9), donc le lemme I.4 donne, pour  $0 \leq n < N$  :

$$\|e^{n+1}\|^2 - \|e^n\|^2 + \|\tilde{e}^{n+1} - e^n\|^2 + 2\Delta t \|\nabla \tilde{e}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \Delta t^2 [\|\nabla \epsilon^{n+1}\|^2 - \|\nabla \psi^n\|^2] = 0. \quad (\text{I.15})$$

Nous observons maintenant que  $\psi^n = \epsilon^n - \delta p_{imp}^{n+1}$  avec  $\delta p_{imp}^{n+1} = p_{imp}^{n+1} - p_{imp}^n$ . Pour n'importe quel  $\alpha > 0$ , par les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, on a

$$\|\nabla \epsilon^n + \nabla \delta p_{imp}^{n+1}\|^2 \leq (\|\nabla \epsilon^n\| + \|\nabla \delta p_{imp}^{n+1}\|)^2 \leq (1 + \alpha) \|\nabla \epsilon^n\|^2 + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \|\nabla \delta p_{imp}^{n+1}\|^2.$$

Nous pouvons alors écrire, sous l'hypothèse (I.13) :

$$\|\nabla \psi^n\|^2 \leq (1 + \Delta t) \|\nabla \epsilon^n\|^2 + \left(1 + \frac{1}{\Delta t}\right) \|\nabla \delta p_{imp}^{n+1}\|^2 \leq (1 + \Delta t) \|\nabla \epsilon^n\|^2 + c \Delta t.$$

Retournant à l'équation (I.15), nous avons :

$$\begin{aligned} \|e^{n+1}\|^2 - \|e^n\|^2 + \|\tilde{e}^{n+1} - e^n\|^2 + 2\Delta t \|\nabla \tilde{e}^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ + \Delta t^2 [\|\nabla \epsilon^{n+1}\|^2 - \|\nabla \epsilon^n\|^2] \leq \Delta t^2 \|\nabla \epsilon^n\|^2 + c \Delta t^3. \end{aligned}$$

En sommant cette équation sur les pas de temps, on obtient pour  $0 < n \leq N$  fixé :

$$\begin{aligned} \|e^n\|^2 + \sum_{k=1}^n \|\tilde{e}^k - e^{k-1}\|^2 + 2\Delta t \sum_{k=1}^n \|\nabla \tilde{e}^k\|_{L^2}^2 + \Delta t^2 \|\nabla e^n\|^2 \\ \leq \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t^2 \|\nabla e^k\|^2 + cT \Delta t^2. \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Cette relation conduit en particulier à :

$$\Delta t^2 \|\nabla e^n\|^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t^2 \|\nabla e^k\|^2 + cT \Delta t^2,$$

et, puisque nous supposons que  $e^0 = 0$ , le lemme de Gronwall discret (Lemme I.6) ci-dessous conduit à  $\Delta t^2 \|\nabla e^n\|^2 \leq c \Delta t^2$ , pour  $1 \leq n \leq N$ . En utilisant cette inégalité dans l'inégalité (I.16), nous obtenons la conclusion.  $\blacksquare$

Remarque I.8 (Une hypothèse de régularité plus faible)

*L'hypothèse (I.13) est la contrepartie discrète d'une estimation pour la dérivée temporelle de la pression solution du schéma implicite dans l'espace  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ . En examinant la preuve du lemme I.7 et l'énoncé du lemme de Gronwall discret, il apparaît qu'un contrôle pour la norme  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  discrète serait suffisant, i.e. :*

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\nabla(p_{imp}^{n+1} - p_{imp}^n)\|^2 \leq c \Delta t^2.$$

Retournons maintenant aux estimations d'ordre deux. Pour cela, la première intuition consiste à supposer que la différence entre les vitesses prédite et finale  $\|\mathbf{u}^n - \tilde{\mathbf{u}}^n\|$  (ou, de manière équivalente,  $\|e^n - \tilde{e}^n\|$ ) se comporte en  $\Delta t^2$ . En effet, cela est suggéré par l'équation (I.9b), qui peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \mathbf{v}) &= \Delta t (\nabla(p^{n+1} - p^n), \mathbf{v}) \\ &= \Delta t (\nabla(p_{imp}^{n+1} - p_{imp}^n), \mathbf{v}) + \Delta t (\nabla(e^{n+1} - e^n), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

combiné à l'hypothèse (I.13), i.e.  $\|\nabla(p_{imp}^{n+1} - p_{imp}^n)\| \leq c \Delta t$ . Évidemment, il reste à prouver qu'une estimation similaire est vraie pour  $\|\nabla(e^{n+1} - e^n)\|$ ; reportons cette preuve pour l'instant (donnée au lemme I.11), et supposons que nous avons, pour  $0 \leq n \leq N$  :

$$\|\mathbf{u}^n - \tilde{\mathbf{u}}^n\| = \|e^n - \tilde{e}^n\| \leq c \Delta t^2, \quad (\text{I.18})$$

où  $c$  est un nombre réel donné dépendant seulement de la régularité de la solution du schéma implicite. Cette relation suggère que la vitesse prédite est presque (i.e. à une erreur d'ordre deux en temps près) à divergence nulle. La manière d'exploiter cette remarque est alors de reconstituer une équation de conservation de la quantité de mouvement (variationnelle) pour  $\tilde{e}$  et de choisir comme fonction test une projection de  $\tilde{e}$  sur l'espace des fonctions à divergence nulle, éliminant ainsi les erreurs en pression du calcul. Pour mener à bien cette démarche, nous avons besoin de

supposer que nous pouvons construire une telle projection satisfaisant des propriétés de stabilité fortes, que nous définissons maintenant.

**Définition I.9 (Inverse de l'opérateur de Stokes)**

Soit  $S^{-1}$  l'opérateur qui, à chaque fonction  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  associe  $S^{-1}\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  défini par :

$$\begin{aligned} \langle \nabla S^{-1}\mathbf{v}, \nabla \mathbf{w} \rangle + (\nabla \zeta, \mathbf{w}) &= (\mathbf{v}, \mathbf{w}), & \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}, \\ (\nabla q, S^{-1}\mathbf{v}) &= 0, & \forall q \in \mathcal{Q}, \end{aligned}$$

avec  $\zeta \in \mathcal{Q}$ .

Ensuite, supposons que l'opérateur  $S^{-1}$  satisfait les propriétés suivantes.

- (S1) La forme bilinéaire sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  définie par  $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \rightarrow (S^{-1}\mathbf{v}, \mathbf{w})$  est symétrique, positive et associée à une semi-norme sur  $\mathcal{V}$  notée  $\|\cdot\|_*$  (i.e.  $\|\mathbf{v}\|_*^2 = (S^{-1}\mathbf{v}, \mathbf{v})$ , pour tous  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ).
- (S2) De plus, pour chaque  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , la quantité  $\langle \nabla S^{-1}\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v} \rangle$  contrôle presque le (carré de) la norme  $L^2$  de  $\mathbf{v}$  :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in (0, 1), \text{ il existe } c(\alpha) > 0 \text{ tel que, } \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \\ \langle \nabla S^{-1}\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v} \rangle \geq (1 - \alpha) \|\mathbf{v}\|^2 - c(\alpha) \inf_{\mathbf{w} \in \mathcal{H}} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{H}$  représente l'espace des vecteurs à divergence nulle :

$$\mathcal{H} = \left\{ \mathbf{w} \in \mathcal{X} \text{ tels que } (\mathbf{w}, \nabla \zeta) = 0, \forall \zeta \in \mathcal{Q} \right\}.$$

Nous montrons dans la section I.3.2 que l'hypothèse (S2) est satisfaite si le problème de Stokes (stationnaire) continu est régularisant, ce qui est vrai si le domaine  $\Omega$  est convexe [17, 3].

Nous sommes maintenant capables d'énoncer un contrôle des erreurs de fractionnement.

**Lemme I.10 (Estimations de l'erreur de fractionnement d'ordre deux pour la vitesse)**

Supposons que l'inégalité (I.18) est satisfaite. Alors, sous les hypothèses (S1) et (S2) concernant l'inverse de l'opérateur de Stokes, il existe un nombre réel  $c$  dépendant seulement de la régularité de la solution du problème implicite tel que :

$$\sum_{n=0}^N \Delta t \|\tilde{\mathbf{e}}^n\|^2 + \sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|^2 \leq c \Delta t^4.$$

**Démonstration** Comme annoncé, en prenant la différence entre les équations (I.14a) et (I.14b) écrite au temps précédent, nous reconstituons une équation de conservation de la quantité de mouvement pour la vitesse prédite, qui s'écrit, pour  $0 \leq n < N$  :

$$\frac{1}{\Delta t} (\tilde{\mathbf{e}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{e}}^n, \mathbf{v}) + \langle \nabla \tilde{\mathbf{e}}^{n+1}, \nabla \mathbf{v} \rangle - (\nabla \zeta^n, \mathbf{v}) = 0,$$

où nous avons utilisé (par convention)  $\tilde{\mathbf{e}}^0 = 0$  et où  $\zeta^n$  représente une fonction de  $\mathcal{Q}$ . En prenant  $\mathbf{v} = 2\Delta t S^{-1}\tilde{\mathbf{e}}^{n+1}$  dans cette relation, les termes de pression s'annulent et en invoquant l'hypothèse (S1), nous obtenons :

$$\|\tilde{\mathbf{e}}^{n+1}\|_*^2 + \|\tilde{\mathbf{e}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{e}}^n\|_*^2 - \|\tilde{\mathbf{e}}^n\|_*^2 + 2\Delta t \langle \nabla \tilde{\mathbf{e}}^{n+1}, \nabla S^{-1}\tilde{\mathbf{e}}^{n+1} \rangle = 0.$$

Nous appliquons maintenant (S2) avec  $\alpha = 1/2$  pour faire apparaître la quantité  $\Delta t \|\tilde{\mathbf{e}}^{n+1}\|^2$ , ce qui conduit à :

$$\|\tilde{\mathbf{e}}^{n+1}\|_*^2 + \|\tilde{\mathbf{e}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{e}}^n\|_*^2 - \|\tilde{\mathbf{e}}^n\|_*^2 + \Delta t \|\tilde{\mathbf{e}}^{n+1}\|^2 \leq 2c(1/2) \Delta t \inf_{\mathbf{w} \in \mathcal{H}} \|\tilde{\mathbf{e}}^{n+1} - \mathbf{w}\|^2,$$

d'où, en prenant en particulier  $\mathbf{w}$  égal à  $\mathbf{e}^{n+1}$  et en utilisant (I.18) :

$$\|\tilde{\mathbf{e}}^{n+1}\|_*^2 + \|\tilde{\mathbf{e}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{e}}^n\|_*^2 - \|\tilde{\mathbf{e}}^n\|_*^2 + \Delta t \|\tilde{\mathbf{e}}^{n+1}\|^2 \leq 2c(1/2) \Delta t \|\tilde{\mathbf{e}}^{n+1} - \mathbf{e}^{n+1}\|^2 \leq 2c(1/2) \Delta t^5.$$

En sommant cette relation pour  $0 \leq n < N$  et en utilisant  $\tilde{\mathbf{e}}^0 = 0$ , ceci conduit à la première partie de l'inégalité attendue. La deuxième partie découle de l'inégalité triangulaire  $\|\mathbf{e}^n\| \leq \|\tilde{\mathbf{e}}^n\| + \|\tilde{\mathbf{e}}^n - \mathbf{e}^n\|$  et de l'utilisation une seconde fois de l'équation (I.18). ■

Nous devons à présent montrer l'équation (I.18). Pour cela, l'idée est d'utiliser une preuve similaire à celle du lemme I.7, mais pour les incréments en temps des erreurs. Nous définissons ainsi, pour  $0 < n \leq N$  :

$$\delta \mathbf{e}^n = \mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}, \quad \delta \tilde{\mathbf{e}}^n = \tilde{\mathbf{e}}^n - \tilde{\mathbf{e}}^{n-1}, \quad \delta \epsilon^n = \epsilon^n - \epsilon^{n-1}, \quad \delta \psi^n = \psi^n - \psi^{n-1}.$$

Rappelons que, par convention, nous avons défini  $\tilde{\mathbf{e}}^0$  de telle sorte que  $\delta \tilde{\mathbf{e}}^1 = \tilde{\mathbf{e}}^1$ . En prenant la différence du système (I.14) à deux pas de temps consécutifs, nous obtenons le système d'équations suivant, pour  $0 < n < N$  :

$$\frac{1}{\Delta t} (\delta \tilde{\mathbf{e}}^{n+1} - \delta \mathbf{e}^n, \mathbf{v}) + \langle \nabla \delta \tilde{\mathbf{e}}^{n+1}, \nabla \mathbf{v} \rangle + \langle \nabla \delta \psi^n, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (\text{I.19a})$$

$$\frac{1}{\Delta t} (\delta \mathbf{e}^{n+1} - \delta \tilde{\mathbf{e}}^{n+1}, \mathbf{v}) + \langle \nabla (\delta \epsilon^{n+1} - \delta \psi^n), \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X}, \quad (\text{I.19b})$$

$$(\delta \mathbf{e}^{n+1}, \nabla q) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{Q}. \quad (\text{I.19c})$$

Faisons à présent les hypothèses suivantes de régularité pour la solution du schéma implicite :

$$\|\nabla (p_{imp}^{n+1} - 2p_{imp}^n + p_{imp}^{n-1})\| \leq c \Delta t^2, \quad \text{pour } 0 < n < N, \quad (\text{I.20})$$

où  $c$  est un nombre réel positif.

### Lemme I.11 (Estimations pour les incréments d'erreur en vitesse)

*Sous l'hypothèse (I.20), pour  $0 < n \leq N$  :*

$$\|\delta \mathbf{e}^n\|^2 + 2\Delta t \sum_{k=1}^n \|\nabla \delta \tilde{\mathbf{e}}^k\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \Delta t^2 \|\nabla \delta \epsilon^n\|^2 \leq c \Delta t^4.$$

*Par conséquent,  $\|\nabla \delta \epsilon^n\| \leq c \Delta t$  pour  $0 < n \leq N$ , et l'inégalité (I.18) est vraie.*

**Démonstration** L'idée de la preuve est la même que pour le lemme I.7, l'équation (I.15) étant maintenant remplacée par les relations suivantes, vraies pour  $0 < n < N$  :

$$\begin{aligned} \|\delta \mathbf{e}^{n+1}\|^2 - \|\delta \mathbf{e}^n\|^2 + \|\delta \tilde{\mathbf{e}}^{n+1} - \delta \mathbf{e}^n\|^2 + 2\Delta t \|\nabla \delta \tilde{\mathbf{e}}^{n+1}\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ + \Delta t^2 [\|\nabla \delta \epsilon^{n+1}\|^2 - \|\nabla \delta \psi^n\|^2] = 0. \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

Notons maintenant que  $\delta \psi^n = \delta \epsilon^n - (p_{imp}^{n+1} - 2p_{imp}^n + p_{imp}^{n-1})$ , alors l'hypothèse (I.20) implique :

$$\|\nabla \delta \psi^n\|^2 \leq (1 + \Delta t) \|\nabla \delta \epsilon^n\|^2 + c \Delta t^3,$$

où  $c$  dépend seulement de la régularité de la solution du schéma implicite. Retournons à l'équation (I.21), nous avons :

$$\begin{aligned} & \|\delta \mathbf{e}^{n+1}\|^2 - \|\delta \mathbf{e}^n\|^2 + \|\delta \tilde{\mathbf{e}}^{n+1} - \delta \mathbf{e}^n\|^2 + 2\Delta t \|\nabla \delta \tilde{\mathbf{e}}^{n+1}\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ & \quad + \Delta t^2 [\|\nabla \delta \epsilon^{n+1}\|^2 - \|\nabla \delta \epsilon^n\|^2] \leq \Delta t^3 \|\nabla \delta \epsilon^n\|^2 + c \Delta t^5. \end{aligned}$$

Sommons ces équations, la somme portant sur les pas de temps pour  $1 < n \leq N$ , d'où :

$$\begin{aligned} & \|\delta \mathbf{e}^n\|^2 + 2\Delta t \sum_{k=2}^n \|\nabla \delta \tilde{\mathbf{e}}^k\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \Delta t^2 \|\nabla \delta \epsilon^n\|^2 \\ & \leq \Delta t \sum_{k=1}^{n-1} \Delta t^2 \|\nabla \delta \epsilon^k\|^2 + \|\delta \mathbf{e}^1\|^2 + \Delta t^2 \|\nabla \delta \epsilon^1\|^2 + cT \Delta t^4. \end{aligned} \tag{I.22}$$

Puisque l'initialisation du schéma vérifie  $\mathbf{e}^0 = 0$  et  $\epsilon^0 = 0$  et que nous avons arbitrairement posé  $\tilde{\mathbf{e}}^0 = 0$ , on a  $\delta \mathbf{e}^1 = \mathbf{e}^1$ ,  $\delta \tilde{\mathbf{e}}^1 = \tilde{\mathbf{e}}^1$ ,  $\delta \epsilon^1 = \epsilon^1$  et  $\psi^1 = p_{imp}^1 - p_{imp}^0$ , l'équation (I.15) écrite pour  $n = 0$  conduit à :

$$\|\delta \mathbf{e}^1\|^2 + \|\delta \tilde{\mathbf{e}}^1\|^2 + 2\Delta t \|\nabla \delta \tilde{\mathbf{e}}^1\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \Delta t^2 \|\nabla \delta \epsilon^1\|^2 = \Delta t^2 \|\nabla (p_{imp}^1 - p_{imp}^0)\|^2 \leq c \Delta t^4,$$

et nous concluons la preuve en utilisant le lemme de Gronwall discret. L'équation (I.18) découle de l'équation (I.17).  $\blacksquare$

Remarque I.12 (Une hypothèse de régularité plus faible)

*L'hypothèse (I.20) est la contrepartie discrète d'une estimation de la dérivée seconde temporelle de la solution en pression du schéma implicite dans  $L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$ . Une fois encore, la preuve du lemme I.11 montre qu'un contrôle dans la norme  $L^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$  discrète serait suffisant (puisque l'on somme sur les pas de temps pour obtenir l'inégalité (I.22)), i.e. :*

$$\sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|\nabla (p_{imp}^{n+1} - 2p_{imp}^n + p_{imp}^{n-1})\|^2 \leq c \Delta t^4.$$

Nous finissons en donnant une estimation d'erreur pour la pression. Pour cela, nous avons besoin de faire les hypothèses suivantes sur les espaces fonctionnels considérés :

- la paire  $(\mathbf{V} \times \mathcal{Q})$  satisfait la condition *inf-sup* :

$$\forall q \in \mathcal{Q}, \quad \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \frac{(\nabla q, \mathbf{v})}{\|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^2}} \geq \beta \|q\|_{\mathbb{L}^2}, \tag{I.23}$$

où  $\beta$  est un nombre réel donné,

- les fonctions de  $\mathbf{V}$  satisfont une inégalité de Poincaré, i.e. il existe un nombre réel  $c_p$  tel que :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad \|\mathbf{v}\| \leq c_p \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^2}. \tag{I.24}$$

**Lemme I.13 (Estimations de l'erreur de fractionnement d'ordre un pour la pression)**

*Supposons que les inégalités (I.13) et (I.20) sont vraies. Alors, sous les hypothèses (I.23) et (I.24), il existe  $c$  dépendant seulement de  $\beta$ ,  $c_p$  et de la régularité de la solution du schéma implicite tel que :*

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\epsilon^n\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq c \Delta t^2.$$



**Démonstration** La première équation (I.14a) du système contrôlant les erreurs de fractionnement s'écrit, pour  $0 \leq n < N$  et pour tout  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  :

$$\begin{aligned} (\nabla \epsilon^n, \mathbf{v}) &= -\frac{1}{\Delta t} (\tilde{\mathbf{e}}^{n+1} - \mathbf{e}^n, \mathbf{v}) - \langle \nabla \tilde{\mathbf{e}}^{n+1}, \nabla \mathbf{v} \rangle + (\nabla (p_{imp}^{n+1} - p_{imp}^n), \mathbf{v}), \\ &= -\frac{1}{\Delta t} (\tilde{\mathbf{e}}^{n+1} - \mathbf{e}^{n+1}, \mathbf{v}) - \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{e}^{n+1} - \mathbf{e}^n, \mathbf{v}) - \langle \nabla \tilde{\mathbf{e}}^{n+1}, \nabla \mathbf{v} \rangle + (\nabla (p_{imp}^{n+1} - p_{imp}^n), \mathbf{v}), \end{aligned}$$

donc les équations (I.23) et (I.24) impliquent :

$$\|\epsilon^n\|_{L^2} \leq c_1 \left( \frac{1}{\Delta t} \|\tilde{\mathbf{e}}^{n+1} - \mathbf{e}^{n+1}\| + \frac{1}{\Delta t} \|\mathbf{e}^{n+1} - \mathbf{e}^n\| + \|\nabla \tilde{\mathbf{e}}^{n+1}\|_{L^2} + \|\nabla (p_{imp}^{n+1} - p_{imp}^n)\| \right),$$

avec  $c_1$  dépendant seulement de  $\beta$  et  $c_p$ . Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \|\epsilon^n\|_{L^2}^2 &\leq 4c_1^2 \left( \frac{1}{\Delta t^2} \|\tilde{\mathbf{e}}^{n+1} - \mathbf{e}^{n+1}\|^2 + \frac{1}{\Delta t^2} \|\mathbf{e}^{n+1} - \mathbf{e}^n\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla \tilde{\mathbf{e}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\nabla (p_{imp}^{n+1} - p_{imp}^n)\|^2 \right), \end{aligned}$$

et nous concluons en multipliant par  $\Delta t$ , en sommant sur  $n$  et en utilisant l'équation (I.18) (conséquence du lemme I.11), les lemmes I.11, I.7 et l'équation (I.13). ■

### I.3.2 Cadre variationnel discret et estimations d'erreur de splitting

Le but de cette section est de montrer que le schéma discret présenté dans la section I.2 entre dans le formalisme utilisé dans la section I.3.1, et que les espaces discrets satisfont aussi les hypothèses de la section I.3.1, conduisant à un contrôle des erreurs de fractionnement.

Commençons par définir les opérateurs gradient discrets. Pour la vitesse, nous utilisons les définitions habituelles, *i.e.* pour  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h$ , nous définissons  $\nabla \mathbf{v}$  comme la fonction de  $L^2(\Omega)^{d \times d}$  égale presque partout (c'est-à-dire à l'intérieur des cellules) au gradient de  $\mathbf{v}$ . Concernant le gradient de pression, adoptons les notations de la figure I.1.

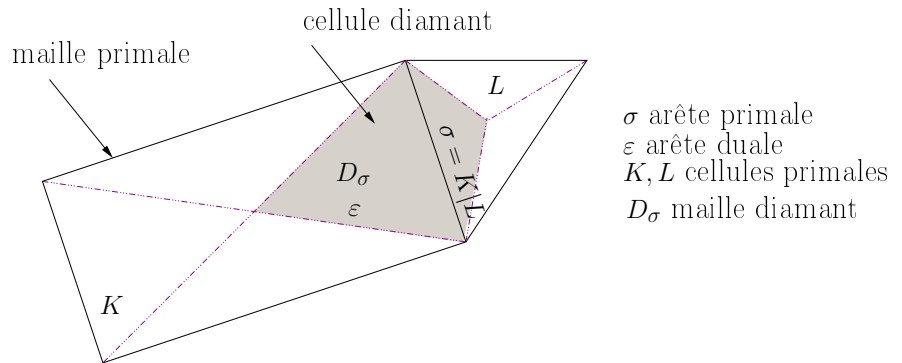


FIGURE I.1 – Notations concernant les volumes de contrôle et les cellules diamant.

Pour  $q \in \mathbf{M}_h$ , nous définissons  $\nabla q$  comme la fonction de  $\mathbf{X}_h$  définie par :

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma = K|L, \quad (\nabla q)_\sigma = \frac{|\sigma|}{|D_\sigma|} (q_L - q_K) \mathbf{n}_{K,\sigma}. \quad (\text{I.25})$$

Notons que, puisque nous avons supposé que  $\nabla q \in \mathbf{X}_h$ , alors  $(\nabla q)_\sigma = 0$  pour chaque face externe.

Identifions maintenant l'espace abstrait  $\mathcal{V}$  de la section I.3.1 à  $\mathbf{X}_h$ ,  $\mathcal{Q}$  à  $\mathbf{M}_h$  et, avec la définition (I.25) du gradient de pression, nous avons  $\mathcal{X} = \mathbf{X}_h$ . Le produit scalaire discret sur  $\mathcal{X}$  (ici  $\mathbf{X}_h$ ) est choisi comme :

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{X}_h, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \mathbf{v}_\sigma \cdot \mathbf{w}_\sigma. \quad (\text{I.26})$$

Notons que, avec cette définition, les normes  $\|\cdot\|$  et  $L^2$  sont équivalentes.

Combinons les définitions du gradient de pression discret (I.25) avec celle du produit scalaire discret (I.26), nous obtenons, pour tous  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h$  et  $q \in \mathbf{M}_h$  :

$$(\nabla q, \mathbf{v}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma=K|L} |\sigma| (q_L - q_K) \mathbf{v}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K q \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx.$$

Cette relation a deux conséquences. D'abord, il est facile de voir que le schéma écrit comme dans l'équation (I.9) est en effet le schéma considéré. Ensuite, la condition *inf-sup* (I.23) est en fait la condition *inf-sup* habituelle pour les éléments finis Rannacher-Turek ou Crouzeix-Raviart, elle est donc satisfaite [13, Chapitre VI.4].

De façon similaire, la définition (classique) du gradient de vitesse implique que l'inégalité de Poincaré (I.24) est aussi vraie [78].

Retournons maintenant à l'étude des propriétés de l'inverse de l'opérateur de Stokes. Pour cela, nous utilisons les lemmes suivants. La preuve du premier se trouve dans [78, 6] ; la seconde découle des lemmes de trace obtenus pour des maillages quelconques de  $\mathbb{R}^d$  ([2, Théorème 3.10], ou [29, Lemme A.1]), combinés avec une hypothèse de régularité du maillage.

#### Lemme I.14 (Inégalité de Poincaré)

Pour tout domaine convexe  $\omega$ , et pour toute fonction  $\Phi \in H^1(\omega)$  telle que

$$\int_\omega \Phi(x) \, dx = 0,$$

nous avons :

$$\|\Phi\|_{L^2(\omega)} \leq \frac{\operatorname{diam}(\omega)}{\pi} \|\nabla \Phi\|_{L^2(\omega)^d},$$

où  $\operatorname{diam}(\omega)$  représente le diamètre de  $\omega$ .

#### Lemme I.15 (Lemme de trace)

Soient  $K$  une cellule de  $\mathcal{T}_h$  et  $\sigma$  une face de  $K$ . Soit  $\mathbf{v}$  une fonction de  $H^1(K)^d$ . Alors il existe un réel  $c$  tel que :

$$\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \mathbf{v}^2 \, d\sigma \leq \frac{c}{|K|} \left( \|\mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2 + h_K^2 \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(K)^d}^2 \right),$$

où  $h_K$  représente le diamètre de  $K$ .

**Démonstration** (idée dans le cas d'un maillage structuré) Soit  $\mathbf{v} \in H^1(K)^d$ . Supposons, pour simplifier, que  $\sigma$  est la face d'équation  $\{x = 0\}$ .

1. On a

$$\int_{\sigma} \mathbf{v}^2 \, d\sigma = \int_K \partial_x \left( \left[ 1 - \frac{x}{|\sigma|} \right] \mathbf{v}^2 \right) \, d\mathbf{x}.$$

En effet, puisque  $\mathbf{n}$  est constant sur l'arête  $\sigma$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \mathbf{v}^2 \, d\sigma &= \int_{x=0} \left( 1 - \frac{x}{|\sigma|} \right) \mathbf{v}^2 \, d\sigma, \\ &= \int_{\partial K} \left( 1 - \frac{x}{|\sigma|} \right) \mathbf{v}^2 \mathbf{n}_{\partial K} \, d\sigma. \end{aligned}$$

Le résultat découle de la formule de Green. Cette égalité est cruciale pour la suite de la preuve et repose essentiellement sur la structure du maillage.

2. Par la première étape,

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \mathbf{v}^2 \, d\sigma &= \int_K \left( -\frac{\mathbf{v}^2}{|\sigma|} + 2 \left( 1 - \frac{x}{|\sigma|} \right) \mathbf{v} \partial_x \mathbf{v} \right) \, d\mathbf{x}, \\ &= \frac{|\sigma|}{|K|} \left( \int_K |\mathbf{v}|^2 + 2 |\sigma| - x |\mathbf{v} \partial_x \mathbf{v}| \, d\mathbf{x} \right). \end{aligned}$$

Puis, par l'inégalité de Young, il vient

$$2 \int_K (|\sigma| - x) \mathbf{v} \partial_x \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \leq (h \|\nabla \mathbf{v}\|_0)^2 + \|\mathbf{v}\|_0^2.$$

D'où le résultat en notant  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ .

■

Nous avons aussi besoin d'introduire un nombre réel  $c_u$  caractérisant la quasi-uniformité du maillage, défini par le fait que l'inégalité suivante est vraie :

$$\max_{K \in \mathcal{T}_h, \sigma \in \mathcal{E}(K)} \frac{|\sigma|}{|D_{K,\sigma}|} \leq \frac{c_u}{h}. \quad (\text{I.27})$$

Compte tenu de la définition des mailles diamant (Section A.1), cette condition signifie que :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \forall \sigma \in \mathcal{E}(K), |K| \geq \frac{1}{c_u} |\sigma| h.$$

Nous prouvons que les propriétés (S1) et (S2) (données dans la section I.3.1, après la définition I.9) sont satisfaites pourvu que le problème de Stokes continu stationnaire soit régularisant dans le sens de la définition suivante I.16.

**Définition I.16**

*Le problème de Stokes continu stationnaire est dit régularisant s'il existe une constante  $c$  (dépendant seulement de  $\Omega$ ) telle que pour toute fonction  $\underline{\mathbf{f}} \in L^2(\Omega)^d$ , la solution  $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\zeta}) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$  du système :*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \underline{\mathbf{u}} : \nabla \underline{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \underline{\zeta} \operatorname{div} \underline{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}, & \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d, \\ \int_{\Omega} \underline{q} \operatorname{div} \underline{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} &= 0, & \forall \underline{q} \in L^2(\Omega), \end{aligned}$$

*vérifie*

$$\|\underline{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + \|\nabla \underline{\zeta}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq c \|\underline{\mathbf{f}}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par exemple, cette propriété est vraie si  $\Omega$  est convexe [17, 3]. Nous pouvons maintenant énoncer les propriétés vérifiées par l'inverse de l'opérateur de Stokes.

**Lemme I.17**

Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage de  $\Omega$  quasi-uniforme (Équation (I.27)).

1. Soit  $S^{-1}$  l'inverse de l'opérateur de Stokes discret donné par la définition I.9. Alors la propriété (S1) est vérifiée.

2. Supposons de plus que le problème de Stokes stationnaire continu est régularisant (Définition I.16). Alors l'hypothèse (S2) est vérifiée, avec une fonction croissante  $c(\alpha)$  du nombre réel  $c_u$  de l'équation (I.27) caractérisant la quasi-uniformité du maillage.

**Démonstration** Soit  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h$ . Rappelons que  $S^{-1}\mathbf{v}$  est défini par  $S^{-1}\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h$  et :

$$\langle \nabla S^{-1}\mathbf{v}, \nabla \mathbf{w} \rangle + (\nabla \zeta, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{X}_h, \quad (\text{I.28a})$$

$$(\nabla q, S^{-1}\mathbf{v}) = 0, \quad \forall q \in \mathbf{M}_h, \quad (\text{I.28b})$$

avec  $\zeta \in \mathbf{M}_h$ .

**Preuve de (S1)** – Soit  $\mathbf{w} \in \mathbf{X}_h$ . Prenons  $S^{-1}\mathbf{w}$  comme fonction test dans l'équation (I.28a), alors :

$$(\mathbf{v}, S^{-1}\mathbf{w}) = \langle \nabla S^{-1}\mathbf{v}, \nabla S^{-1}\mathbf{w} \rangle + (\nabla \zeta, S^{-1}\mathbf{w}),$$

et ainsi, puisque  $S^{-1}\mathbf{w}$  est à divergence discrète nulle (*i.e.* par l'équation (I.28b) écrite avec  $\mathbf{w}$  à la place de  $\mathbf{v}$  pour la définition de  $S^{-1}\mathbf{w}$ ) :

$$(\mathbf{v}, S^{-1}\mathbf{w}) = \langle \nabla S^{-1}\mathbf{v}, \nabla S^{-1}\mathbf{w} \rangle,$$

ce qui prouve la symétrie et la positivité (puisque  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  vérifie ces propriétés).

**Preuve de (S2)** – Pour le reste de la preuve, notons  $c_i$  un nombre réel dépendant seulement de  $\Omega$  et de la régularité du maillage. Définissons  $\hat{\mathbf{v}}$  la fonction de  $L^2$  telle que :

$$\forall \mathbf{w} \in \mathbf{X}_h, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x}.$$

Par équivalence entre les normes  $\|\cdot\|$  et  $L^2$ , nous obtenons :

$$\|\hat{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Notons  $(\underline{S}^{-1}\hat{\mathbf{v}}, \underline{\zeta})$  la solution du problème de Stokes continu avec  $\hat{\mathbf{v}}$  pour second membre, *i.e.*  $(\underline{S}^{-1}\hat{\mathbf{v}}, \underline{\zeta}) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$  tel que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \underline{S}^{-1}\hat{\mathbf{v}} : \nabla \underline{\mathbf{w}} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \underline{\zeta} \operatorname{div} \underline{\mathbf{w}} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \hat{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{w}} \, d\mathbf{x}, & \forall \underline{\mathbf{w}} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d, \\ \int_{\Omega} \underline{q} \operatorname{div}(\underline{S}^{-1}\hat{\mathbf{v}}) \, d\mathbf{x} &= 0, & \forall \underline{q} \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Étant donné que nous supposons le problème de Stokes stationnaire (continu) régularisant, nous avons :

$$\|\nabla \underline{\zeta}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq c_2 \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}.$$

De plus, le système (I.28) est une approximation standard du problème de Stokes continu ci-dessus, donc par des résultats de convergence standard concernant l'élément fini de Rannacher-Turek ou Crouzeix-Raviart, on a :

$$\|\zeta - \underline{\zeta}\|_{L^2(\Omega)} \leq c_3 h \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{I.29})$$

Soit  $\pi_h$  l'opérateur de projection défini de  $L^2(\Omega)$  sur  $\mathbf{M}_h$  obtenu en prenant la moyenne sur chaque cellule :

$$\forall \underline{\xi} \in L^2(\Omega), \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (\pi_h \underline{\xi})_K = \frac{1}{|K|} \int_K \underline{\xi} \, d\mathbf{x}.$$

Montrons les deux inégalités (I.30) et (I.31) dans la suite pour  $\underline{\xi}$  quelconque et appliquons-les ensuite à  $\underline{\zeta}$ .

Par application immédiate du lemme I.14, cet opérateur satisfait la propriété d'approximation suivante :

$$\forall \underline{\xi} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \|\underline{\xi} - \pi_h \underline{\xi}\|_{L^2(\Omega)} \leq c_4 h \|\nabla \underline{\xi}\|_{L^2(\Omega)^d}. \quad (\text{I.30})$$

Par ailleurs, il vérifie la propriété de stabilité ci-dessous

$$\forall \underline{\xi} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \|\nabla \pi_h \underline{\xi}\| \leq c_5 \|\nabla \underline{\xi}\|_{L^2(\Omega)^d}. \quad (\text{I.31})$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|\nabla \pi_h \underline{\xi}\|^2 &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ (\sigma=K|L)}} \frac{|\sigma|^2}{|D_\sigma|} \left[ \frac{1}{|K|} \int_K \underline{\xi} \, d\mathbf{x} - \frac{1}{|L|} \int_L \underline{\xi} \, d\mathbf{x} \right]^2 \\ &\leq 2 \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ (\sigma=K|L)}} \frac{|\sigma|^2}{|D_\sigma|} \left[ \left( \frac{1}{|K|} \int_K \underline{\xi} \, d\mathbf{x} - \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \underline{\xi} \, d\sigma \right)^2 + \left( \frac{1}{|L|} \int_L \underline{\xi} \, d\mathbf{x} - \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \underline{\xi} \, d\sigma \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

Soit  $\underline{\xi}^K$  la fonction définie sur  $K$  par :

$$\underline{\xi}^K = \underline{\xi} - \frac{1}{|K|} \int_K \underline{\xi} \, d\mathbf{x}.$$

Avec cette notation, pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ ,  $\sigma = K|L$ , soit  $T_{\sigma,K}$  la quantité définie par

$$T_{\sigma,K} = \left( \frac{1}{|K|} \int_K \underline{\xi} \, d\mathbf{x} - \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \underline{\xi} \, d\sigma \right)^2 = \left( \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \underline{\xi}^K \, d\sigma \right)^2.$$

Par, successivement, l'inégalité de Jensen, le lemme de trace (Lemme I.15) et l'inégalité de Poincaré pour les fonctions à moyenne nulle (Lemme I.14), on a :

$$\begin{aligned} T_{\sigma,K} &\leq \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma (\underline{\xi}^K)^2 \, d\sigma \leq \frac{c_6}{|K|} \left[ \|\underline{\xi}^K\|_{L^2(K)}^2 + h_K^2 \|\nabla \underline{\xi}\|_{L^2(K)^d}^2 \right] \\ &\leq \frac{c_6}{|K|} \left[ \frac{h_K^2}{\pi^2} \|\nabla \underline{\xi}\|_{L^2(K)^d}^2 + h_K^2 \|\nabla \underline{\xi}\|_{L^2(K)^d}^2 \right] \\ &\leq c_7 \frac{h_K^2}{|K|} \|\nabla \underline{\xi}\|_{L^2(K)^d}^2. \end{aligned}$$

Revenons à l'équation (I.32), il vient :

$$\begin{aligned} \|\nabla \pi_h \underline{\xi}\|^2 &\leq 2 \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ (\sigma=K|L)}} \frac{|\sigma|^2}{|D_\sigma|} (T_{\sigma,L} - T_{\sigma,K}), \\ &\leq c_8 \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ (\sigma=K|L)}} \frac{|\sigma|^2}{|D_\sigma|} \left[ \frac{h_K^2}{|K|} \|\nabla \underline{\xi}\|_{L^2(K)^d}^2 + \frac{h_L^2}{|L|} \|\nabla \underline{\xi}\|_{L^2(L)^d}^2 \right], \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'équation (I.31) en invoquant la régularité du maillage.

Nous sommes à présent capables de fournir une estimation pour  $\nabla\zeta$  en appliquant les inégalités (I.30) et (I.31) que nous venons de montrer. Par inégalité triangulaire d'abord, puis par une inégalité inverse montrée ci-dessous, et enfin par les équations (I.29), (I.30) et (I.31), nous avons :

$$\begin{aligned} \|\nabla\zeta\| &\leq \|\nabla(\zeta - \pi_h\zeta)\| + \|\nabla\pi_h\zeta\| \\ &\leq \frac{c_{10}}{h} \|\zeta - \pi_h\zeta\|_{L^2} + \|\nabla\pi_h\zeta\| \\ &\leq \frac{c_{10}}{h} \left[ \|\zeta - \zeta\|_{L^2} + \|\zeta - \pi_h\zeta\|_{L^2} \right] + \|\nabla\pi_h\zeta\| \leq c_{11} \|\mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}$  étant l'espace des fonctions à divergence discrète nulle, et  $\alpha \in (0, 1)$  :

$$\begin{aligned} \langle \nabla S^{-1}\mathbf{v}, \nabla\mathbf{v} \rangle &= \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \nabla\zeta, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \nabla\zeta, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle \geq \|\mathbf{v}\|^2 - \|\nabla\zeta\| \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \\ &\geq \|\mathbf{v}\|^2 - c_{11} \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \geq (1 - \alpha)\|\mathbf{v}\|^2 - \frac{c_{11}^2}{4\alpha} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2, \end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité que nous voulions montrer.  $\blacksquare$

Dans la preuve précédente, nous avons utilisé le lemme I.18 suivant (pour écrire que  $\|\nabla(\zeta - \pi_h\zeta)\| \leq \frac{c_{10}}{h} \|\zeta - \pi_h\zeta\|_{L^2}$ ) :

**Lemme I.18 (Inégalité inverse)**

*L'opérateur gradient de pression discret défini par l'équation (I.25) et le produit scalaire discret défini par l'équation (I.26) vérifient l'inégalité inverse suivante pour un maillage quasi-uniforme  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$  (au sens de l'équation (I.27))*

$$\forall q \in \mathbf{M}_h, \quad \|\nabla q\| \leq \theta_{\mathcal{T}_h} \|q\|_{L^2} \quad \text{avec} \quad \theta_{\mathcal{T}_h} = \max_{K \in \mathcal{T}_h, \sigma \in \mathcal{E}(K)} \frac{|\sigma|}{|D_{K,\sigma}|}.$$

**Démonstration** Soit  $q \in \mathbf{M}_h$ . Par définition, on a :

$$\|\nabla q\|^2 = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ (\sigma=K|L)}} \frac{|\sigma|^2}{|D_\sigma|} (q_K - q_L)^2 \leq 2 \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ (\sigma=K|L)}} \frac{|\sigma|^2}{|D_\sigma|} [q_K^2 + q_L^2].$$

En réordonnant les sommes, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\nabla q\|^2 &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} q_K^2 \sum_{\sigma=K|L} \frac{|\sigma|^2}{|D_\sigma|} \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} q_K^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} \frac{|\sigma|^2}{|D_{K,\sigma}|} \\ &\leq \theta_{\mathcal{T}_h}^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} q_K^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |D_{K,\sigma}|, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve, puisque  $\sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |D_{K,\sigma}| = |K|$ .  $\blacksquare$

L'application des résultats de la section I.3.1 conduit maintenant aux bornes d'erreur attendues du Théorème I.19.

**Théorème I.19 (Estimations de l'erreur de fractionnement)**

*Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage quasi-uniforme de  $\Omega$  (au sens de l'équation (I.27)). Soient  $(\mathbf{u}^n, p^n)_{0 \leq n \leq N}$  la solution du schéma de projection,  $(\mathbf{u}_{\text{imp}}^n, p_{\text{imp}}^n)_{0 \leq n \leq N}$  la solution du schéma implicite (I.12),*

et les erreurs de fractionnement définies par :

$$\mathbf{e}^n = \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_{imp}^n, \quad \tilde{\mathbf{e}}^n = \tilde{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}_{imp}^n, \quad \epsilon^n = p^n - p_{imp}^n,$$

pour  $0 \leq n \leq N$ . Supposons que l'on peut poser  $\mathbf{e}^0 = 0$  et  $\epsilon^0 = 0$ ; de plus, nous posons arbitrairement  $\tilde{\mathbf{e}}^0 = 0$ , ce qui est possible puisque  $\tilde{\mathbf{u}}^0$  n'apparaît jamais dans l'algorithme. Alors nous avons les estimations d'erreur suivantes.

1. Supposons que la solution du schéma implicite satisfait l'hypothèse de régularité en temps suivante  $\|\nabla(p_{imp}^{n+1} - p_{imp}^n)\| \leq c_1 \Delta t$ , pour  $0 \leq n < N$ . Alors les erreurs en vitesse vérifient l'estimation d'ordre un suivante :

$$\|\mathbf{e}^n\|^2 + 2\Delta t \sum_{k=1}^n \|\nabla \tilde{\mathbf{e}}^k\|_{L^2}^2 \leq c \Delta t^2,$$

où  $c$  dépend seulement de  $c_1$ , du domaine et de la régularité du maillage.

2. Si nous supposons de plus que la solution du schéma implicite est plus régulière, c'est-à-dire que  $\|\nabla(p_{imp}^{n+1} - 2p_{imp}^n + p_{imp}^{n-1})\| \leq c_2 \Delta t^2$ , pour  $0 < n < N$ , alors les erreurs en pression vérifient l'estimation d'ordre un suivante :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\epsilon^n\|_{L^2}^2 \leq c \Delta t^2,$$

où  $c$  dépend seulement de  $c_1, c_2$ , du domaine et de la régularité du maillage.

3. Si, de plus, nous supposons que le problème de Stokes est régularisant au sens de la définition I.16, alors l'erreur en vitesse vérifie l'estimation d'ordre deux suivante :

$$\sum_{n=0}^N \Delta t \|\tilde{\mathbf{e}}^n\|^2 + \sum_{n=0}^N \Delta t \|\mathbf{e}^n\|^2 \leq c \Delta t^4,$$

où  $c$  dépend de  $c_1, c_2$ , du domaine, de la régularité du maillage et, de façon croissante du nombre réel  $c_u$  de l'équation (I.27) caractérisant la quasi-uniformité du maillage.

## I.4 Expériences numériques

Dans cette partie, nous illustrons les propriétés de convergence du schéma à travers deux exemples : on commence avec un cas où des conditions au bord de type Dirichlet sont imposées sur toute la frontière de  $\Omega$  (Section I.4.1), ensuite nous revenons à un cas où des conditions au bord ouvertes sont imposées sur une partie du bord (Section I.4.2).

### I.4.1 Problème de Stokes avec des conditions au bord de type Dirichlet

Pour ce cas-test, nous supposons que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est un disque de diamètre un et  $\partial\Omega = \Gamma_D$ , i.e.  $\Gamma_N = \emptyset$ . Nous calculons le terme de force  $\underline{\mathbf{f}}$  de telle sorte que les champs de vitesse et de pression exacts,  $\underline{\mathbf{u}}$  et  $\underline{p}$ , sont donnés par :

$$\underline{\mathbf{u}}(x, y, t) = \begin{bmatrix} \sin(x) \sin(y+t) \\ \cos(x) \cos(y+t) \end{bmatrix}, \quad \underline{p}(x, y, t) = \cos(x) \sin(y+t).$$

Afin d'initialiser les champs pour le calcul, nous posons  $p^0 = 0$  et  $\mathbf{u}^0 = (0,0)$  et, sur  $\partial\Omega$ , nous imposons des conditions au bord de type Dirichlet non-homogènes, *i.e.*  $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}_D$ ,  $\underline{\mathbf{u}}_D$  étant la trace de  $\underline{\mathbf{u}}$  sur  $\partial\Omega$ . Notons que nous n'initialisons pas la pression par la pression exacte au temps  $t = 0$  s puisque, en général, ce n'est pas une donnée du problème.

La discrétisation spatiale repose sur l'élément fini de Crouzeix-Raviart, et nous utilisons trois maillages simpliciaux presque uniformes, avec respectivement 3600, 14400 et 57600 cellules.

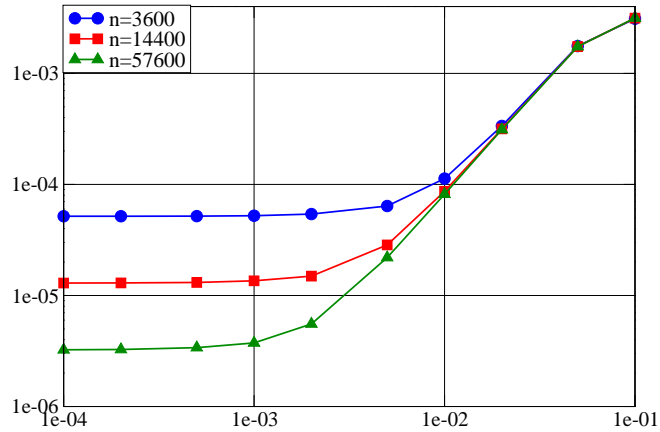


FIGURE I.2 – Erreur relative en vitesse (norme  $L^2$ ) comme fonction de  $\Delta t$  – Problème de Stokes, cas Dirichlet.

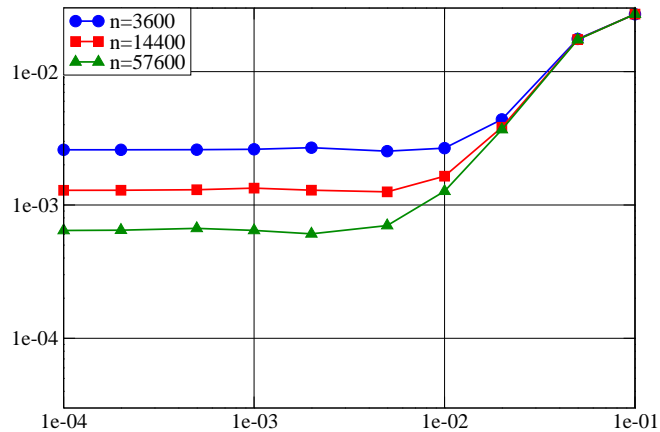


FIGURE I.3 – Erreur relative en pression (norme  $L^2$ ) comme fonction de  $\Delta t$  – Problème de Stokes, cas Dirichlet.

Les erreurs d'approximation numériques mesurées en norme  $L^2$  obtenues à  $t = 1$  s, pour la vitesse et la pression, comme fonctions du pas de temps et pour plusieurs maillages, sont représentées respectivement sur les figures I.2 et I.3. Les erreurs décroissent d'abord avec le pas de temps, ensuite un plateau est atteint, lequel correspond à l'erreur résiduelle en espace. L'ordre de convergence en temps est à peu près égal à deux pour la vitesse et un pour la pression (normes  $L^2$ ); ce peut être surprenant, puisque nous utilisons un schéma d'Euler seulement d'ordre un en temps mais,



de façon consistante avec l'analyse d'erreur donnée ci-dessus, ceci est expliqué par le fait que l'erreur est essentiellement due au fractionnement. Sur le plateau, nous observons une convergence en espace d'ordre deux pour la vitesse et d'ordre un pour la pression, c'est-à-dire l'ordre optimal de convergence avec notre approximation spatiale (de bas degré).

Comme d'habitude, les conditions au bord de Neumann imposées dans l'équation (I.8) perturbent le champ de pression essentiellement près de la frontière, comme représenté sur la figure I.4, obtenue avec  $\Delta t = 10^{-4}$  s et le maillage le plus fin. Des erreurs apparaissent aussi le long de certaines lignes correspondant à une variation brutale de la taille des éléments, résultant du procédé de construction du maillage.

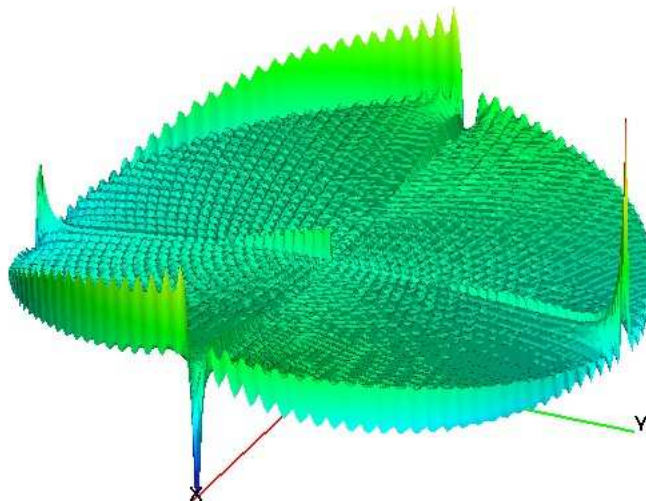


FIGURE I.4 – Répartition de l'erreur en pression (différence entre les solutions exacte et numérique) – Problème de Stokes, cas Dirichlet.

## I.4.2 Conditions au bord ouvertes

Dans cette section, nous illustrons l'impact des conditions au bord de Neumann artificielles imposées lors de l'étape de projection de vitesse formulée comme un problème de Poisson. Nous observons en particulier les couches limites en pression résultantes.

### I.4.2.a Comparaison des approximations par les éléments finis de Rannacher-Turek et Taylor-Hood $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Q}_1$

Le domaine  $\Omega$  est  $[0, 1]^2$  sur les bords duquel

- des conditions au bord de type Dirichlet homogènes sont imposées sur les parois haute et basse,
- des conditions au bord ouvertes sont imposées à l'entrée et à la sortie du canal, *i.e.* :

$$\nabla \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{n}} - \underline{p} \underline{\mathbf{n}} = -\underline{p}_{ext} \underline{\mathbf{n}},$$

la pression décroissant linéairement de la valeur  $\underline{p}_{ext} = 1$  à l'entrée jusqu'à  $\underline{p}_{ext} = 0$  à la sortie (Figure I.5(a)).

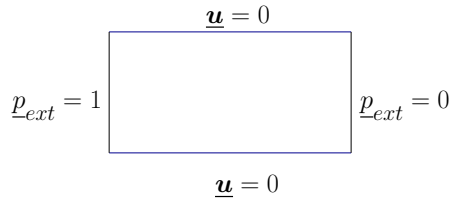
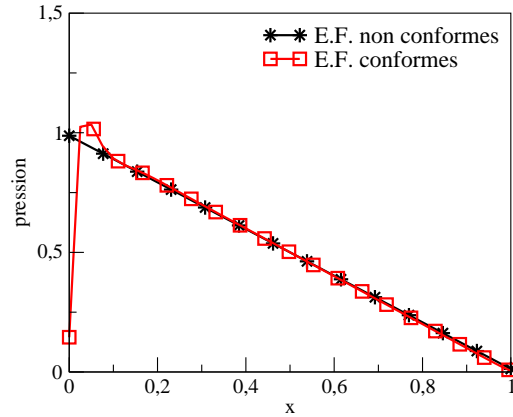

 (a) Domaine  $\Omega$  et conditions au bord.

 (b) Pression approchée – Section le long de l'axe d'équation  $\{y = 0.5\}$ .

FIGURE I.5 – Comparaison des approximations de la pression pour les éléments de Rannacher-Turek et Taylor-Hood.

Nous nous intéressons à la résolution du problème de Stokes avec un terme source nul,  $\mu = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $\rho = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . De plus, le temps final est de 5000 s et le pas de temps est de 1 s, le maillage est constitué de  $40 \times 10$  cellules. La vitesse et la pression à l'instant initial sont nulles. Considérons la surface représentant la répartition dans  $\Omega$  de la pression calculée pour chacune des deux discrétisations par l'élément fini de Rannacher-Turek et l'élément fini de Taylor-Hood. Le traitement des conditions au bord artificielles liées à la méthode de projection (Remarque I.1) est différent pour les deux discrétisations spatiales. En effet, pour l'élément fini de Taylor-Hood, la condition  $p^n = p^0 = 0$  sur  $\Gamma_N$  se traduit par la condition suivante : la valeur aux points de  $\Gamma_N$  de  $p^n$  est égale à celle de  $p^0$  en ces points. En revanche, pour l'élément fini de Rannacher-Turek, cette condition est seulement imposée au sens faible. En effectuant une coupe en pression le long de l'axe d'équation  $\{y = 0.5\}$  (Figure I.5(b)), il résulte de ce traitement des conditions au bord artificielles une diminution des couches limites en pression pour l'élément fini Rannacher-Turek comparé à l'élément fini de Taylor-Hood.

#### I.4.2.b Problème de Stokes avec des conditions au bord ouvertes

Pour ce test, le domaine de calcul  $\Omega$  est le carré unité  $[0, 1]^2$  avec  $\Gamma_N$  égal au côté gauche vertical (et alors  $\Gamma_D = \partial\Omega \setminus \Gamma_N$  est donné par les trois autres côtés). Nous calculons le terme de force  $\underline{f}$  et choisissons les conditions initiales et au bord de telle sorte que les champs exacts de vitesse et pression sont les mêmes que dans la section I.4.1. Nous obtenons sur  $\Gamma_N$  :

$$\nabla \underline{u} \cdot \underline{n} - \underline{p} \underline{n} = 0.$$

Traçons sur les figures I.6 et I.7 l'erreur numérique comme fonction du pas de temps, mesurée en norme  $L^2$  et calculée à un temps fixé ( $t = 1 \text{ s}$ ), pour des maillages structurés uniformes de  $20 \times 20$ ,  $40 \times 40$  et  $80 \times 80$  mailles.

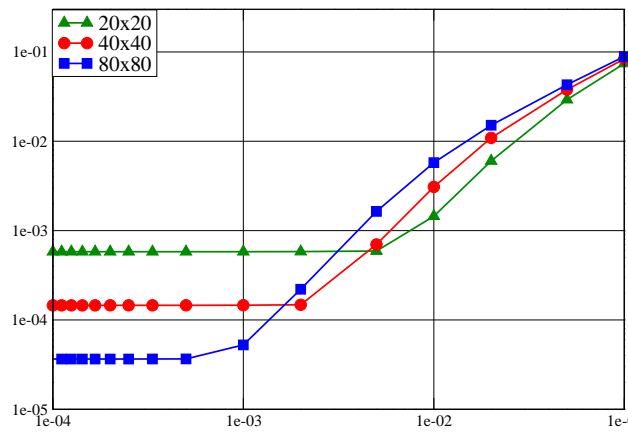


FIGURE I.6 – Erreur relative en vitesse (norme  $L^2$ ) comme fonction de  $\Delta t$  – Problème de Stokes, cas Neumann.

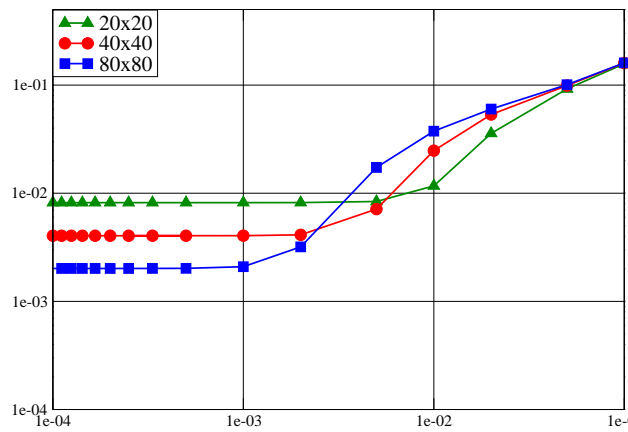


FIGURE I.7 – Erreur relative en pression (norme  $L^2$ ) comme fonction de  $\Delta t$  – Problème de Stokes, cas Neumann.

Comme précédemment, les erreurs décroissent d'abord avec le pas de temps jusqu'à atteindre un plateau, qui correspond à l'erreur résiduelle en espace. L'ordre de convergence en temps est encore une fois de deux pour la vitesse et un pour la pression, comme précédemment car l'erreur de fractionnement est prédominante. Sur le plateau, nous observons une convergence d'ordre deux en espace pour la vitesse et une convergence d'ordre un pour la pression, c'est-à-dire l'ordre optimal de convergence avec notre approximation (de bas degré) ; en comparaison, dans [56], les auteurs observent pour une approximation par l'élément fini de Taylor-Hood (*i.e.*  $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Q}_1$ ) un ordre de convergence de seulement un pour la vitesse et un demi pour la pression. Donc, pour la vitesse, les calculs présentés ici sont déjà plus précis pour le maillage constitué de  $80 \times 80$  cellules. Sur la figure I.8, nous traçons l'erreur en pression mesurée en norme  $L^\infty$  ; après avoir stagné (pour de grands  $\Delta t$ ), ils montrent une convergence, ce qui indique que les conditions au bord de type Dirichlet homogène artificielles pour l'incrément de pression sont en effet présentes pour de gros pas de temps et relaxées pour les plus petits. Ceci est illustré sur la figure I.9 qui montre, pour le maillage constitué de  $80 \times 80$  cellules, la répartition spatiale de la pression pour deux pas de temps : pour  $\Delta t = 10^{-2}$  s, l'erreur est localisée près du bord Neumann ; avec un pas de temps plus petit, l'amplitude de l'erreur décroît fortement, et les valeurs maximum sont maintenant localisées sur la frontière lorsque deux bords Dirichlet s'intersectent.

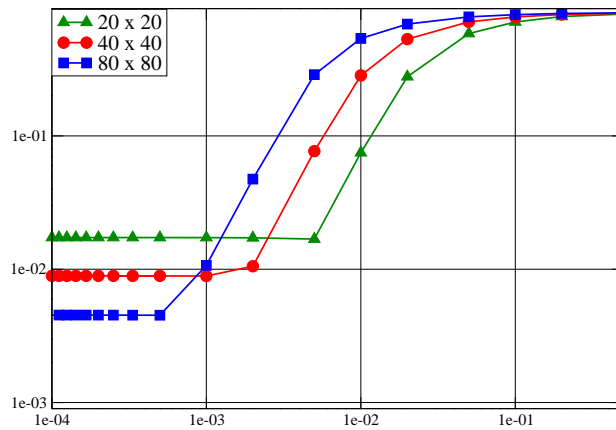


FIGURE I.8 – Erreur relative en pression (norme  $L^\infty$ ) comme fonction de  $\Delta t$  – Problème de Stokes, cas Neumann.

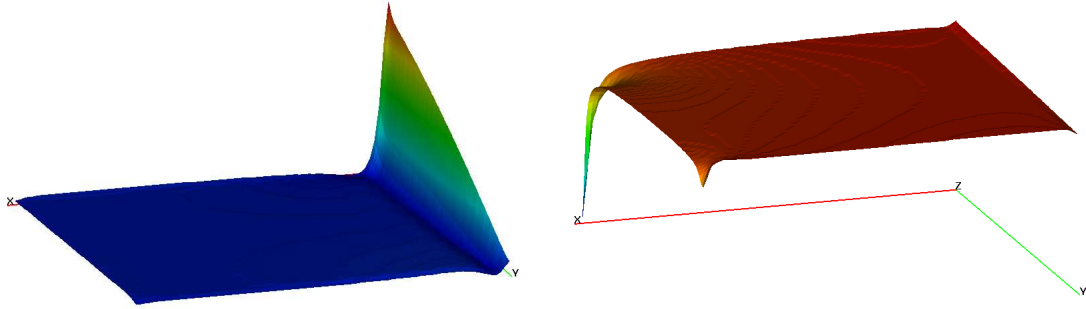


FIGURE I.9 – Répartition de l'erreur en pression (différence entre les solutions exacte et numérique) – Problème de Stokes, cas Neumann. Gauche :  $\Delta t = 10^{-2}$  s,  $p - \underline{p} \in [-0.021, 0.538]$ . Droite :  $\Delta t = 1.35 \times 10^{-4}$  s,  $p - \underline{p} \in [-0.0046, 0.00029]$ .

## I.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude de la méthode de projection incrémentale pour résoudre le problème de Stokes incompressible en se basant sur une approximation en espace basé sur un élément fini de bas degré, non conforme. Nous avons fourni une analyse d'erreur dans le cas de conditions au bord de type Dirichlet sur tout le bord du domaine, qui confirme que l'erreur de splitting est d'ordre deux en temps pour la vitesse (dans  $l^2(\mathbf{L}^2)^d$ ) et un en pression (dans  $l^2(\mathbf{L}^2)$ ). De plus, nous avons montré que les conditions au bord artificielles en pression sont présentes dans l'opérateur elliptique discret appliqué à l'incrément de pression, même si cet opérateur est obtenu par un splitting effectué au niveau discret ; cependant, ces conditions au bord sont imposées au sens (faible) des volumes finis et l'ordre optimal d'approximation est retrouvé lors des tests numériques, même dans le cas de conditions au bord ouvertes.

## Chapitre II

# Discrétisation en temps de Crank-Nicolson

Nous proposons une discrétisation temporelle satisfaisant le critère **(C.1)** évoqué en Introduction (Section 6.3), à savoir le contrôle de l'énergie cinétique et la minimisation des résidus numériques de dissipation par rapport au schéma d'Euler.

Ce chapitre fait l'objet d'un article soumis [9]. Il a été réalisé avec la collaboration de Franck Boyer, Céline Lapuerta et Jean-Claude Latché.

### II.1 Introduction

Nous considérons les équations de Navier-Stokes instationnaires (Système (1)-(3) en Introduction), à masse volumique variable, posées sur un intervalle de temps fini  $(0, T)$  et dans un domaine  $\Omega$  ouvert, connexe, borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ou  $3$ ), supposé polygonal ( $d = 2$ ) ou polyédral ( $d = 3$ ).

La masse volumique  $\rho$  et la vitesse  $\mathbf{u}$  satisfont une identité d'énergie cinétique. Cette relation découle du calcul formel suivant.

#### Proposition II.1 (Propriété I.C.)

*Supposons que*

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{\beta}) = 0,$$

*pour un champ régulier  $\boldsymbol{\beta}$  et que les fonctions  $\rho$  et  $\mathbf{u}$  sont régulières. Alors, nous avons :*

$$(\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \rho \boldsymbol{\beta})) \cdot \mathbf{u} = \partial_t \left( \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) + \operatorname{div} \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \rho \boldsymbol{\beta} \right). \quad (\text{II.1})$$

*En intégrant cette relation sur  $\Omega$  et en supposant que  $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}$  s'annule sur  $\partial\Omega$ , on a :*

$$\int_{\Omega} \left( \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \rho \boldsymbol{\beta}) \right) \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x}. \quad (\text{II.2})$$

En appliquant cette identité avec  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{u}$  au produit scalaire de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (Première relation du système (1) en Introduction) avec  $\mathbf{u}$ , on obtient l'identité d'énergie cinétique (locale) :

$$\frac{1}{2} \partial_t(\rho |\mathbf{u}|^2) + \frac{1}{2} \operatorname{div}(\rho |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla p - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (\text{II.3})$$

Les deux premiers termes de cette relation sont la dérivée temporelle et le terme de transport de l'énergie cinétique, respectivement ; le troisième correspond à la puissance des forces de pression, et le dernier terme du membre de gauche représente la dissipation visqueuse. En intégrant sur  $\Omega$  cette relation, et en utilisant une intégration par parties du terme visqueux d'une part et les conditions au bord d'autre part, il en résulte une relation (globale) portant sur l'énergie cinétique qui s'écrit comme suit :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla p d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{u} d\mathbf{x} = 0. \quad (\text{II.4})$$

Sous cette forme, cette relation ne conduit pas à une estimation de stabilité à cause de la présence des termes de pression. Pour des écoulements incompressibles, une simple intégration par parties montre qu'il s'annule (grâce aux conditions au bord) ; il peut être réécrit comme la dérivée en temps d'un terme d'énergie pour les écoulements compressibles barotropes. Pour le modèle à faible nombre de Mach, le traitement de ce terme n'est pas clair.

Obtenir un schéma satisfaisant l'analogie discret de (II.3)-(II.4) a de nombreux avantages.

- D'abord, combinée avec des arguments supplémentaires pour contrôler le terme de pression, l'équation (II.4) conduit à une estimation de stabilité, ce qui garantit la robustesse du schéma, en particulier pour les calculs d'écoulement à convection dominante.
- Ensuite, dans le contexte de la Simulation des Grandes Échelles (LES), un modèle sous-maille est introduit pour simuler le rôle dissipatif (en énergie cinétique) des petites structures de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Il est donc crucial que le schéma respecte cette dissipation "physique", *i.e.* que le terme de dissipation visqueuse dans la contrepartie discrète de l'équation (II.3) ne soit pas négligeable par rapport à de trop gros résidus numériques [5, 70]. En regroupant l'ensemble de ces résidus dans un terme dit "défaut de dissipation", le but est donc de minimiser ce terme pour construire un schéma numérique pour la LES.

La discrétisation spatiale par le schéma Marker And Cell (MAC), d'abord introduite dans [47] et maintenant largement utilisée pour la simulation d'écoulements incompressibles, s'applique à des maillages cartésiens et est de type décalée, avec les inconnues de pression situées au centre des cellules et les inconnues normales de vitesse situées au centre des faces. Pour des écoulements à masse volumique constante et à divergence nulle, il a été observé depuis le milieu des années soixante que l'opérateur convectif discret associé à cette discrétisation conserve l'énergie cinétique discrète [64], *i.e.* satisfait un analogue discret de l'identité sous forme intégrale (II.2) (bien sûr, en supposant, dans cette dernière, une masse volumique  $\rho$  constante). Des opérateurs convectifs d'ordre supérieur, satisfaisant encore la même propriété, et aussi un analogue discret de l'équation de transport locale d'énergie cinétique (II.2), ont été proposés dans [73, 95, 96, 92] ; combinés avec une discrétisation convenable du terme de gradient de pression et une marche en temps convenable, ces résultats conduisent à (des analogues discrets) des bilans d'énergie cinétique local (II.3) et global (II.4).

Toujours pour le schéma MAC, des travaux pour le cas compressible faible Mach sont plus récents et plus rares. D'abord, [75] a généralisé la formule aux différences finies de [73], pour obtenir un schéma qui semble, lors des tests numériques, satisfaire une version discrète de l'identité globale (II.4) avec un résidu d'ordre deux. Une approche similaire, adaptée pour traiter de coordonnées cylindriques, est proposée dans [25]. Récemment, un schéma MAC (structuré) est présenté dans [72], suivi par une discussion au sujet de ses propriétés de conservation : la conservation de l'énergie cinétique locale et globale est prouvée, dans un cadre semi-discret (en temps) comme dans un cadre discret (en temps et en espace). Cependant, le schéma résultant semble être plutôt coûteux, et plus d'alternatives efficaces sont proposées avec des résidus non nuls d'ordres supérieurs.

Pour des travaux dans le cadre de méthodes collocalisées, nous renvoyons à [26, 30, 46, 34].

Dans ce chapitre, nous poursuivons le développement de schémas conservant l'énergie cinétique pour des écoulements à faible nombre de Mach, avec pour but de traiter de discrétisations non structurées décalées. L'approche que nous adoptons est basée sur une structure volumes finis de l'opérateur convectif d'abord introduit dans [4] pour une discrétisation en temps d'Euler rétrograde d'ordre un et une approximation centrée de la vitesse advectée à la face, à ceci près que l'algorithme en temps est ici obtenu par une technique de Crank-Nicolson (l'usage de méthodes éléments finis/volumes finis est assez répandue dans la littérature de la CFD [77, 16]). L'opérateur convectif discret que nous proposons satisfait un contrôle de l'énergie cinétique (analogue discret de (II.1)). Nous implémentons cette discrétisation dans un schéma de correction de pression pour le modèle faible Mach, et nous explicitons le terme de défaut de dissipation. La particularité de l'approche proposée par rapport à [4] est la réduction du défaut de dissipation avec des résidus numériques d'ordre supérieur (analogue discret de (II.2)). En effet, nous montrons que cette quantité est d'ordre deux en temps, et n'est pas signée, contrairement au terme analogue de [4] qui est seulement d'ordre un en temps. Les capacités du schéma sont illustrées lors des expériences numériques, elles confirment les résultats théoriques et illustrent la capacité du schéma à calculer les structures turbulentes pour de relativement gros pas de temps comparé au schéma en temps d'Euler.

Le plan du chapitre est le suivant. Après avoir traité dans la section II.2 de la construction de l'opérateur convectif (Sous-section II.2.1) et montré sa stabilité (Proposition II.1), le schéma de correction de pression pour les écoulements à faible nombre de Mach est présenté dans la section II.3, d'abord dans le cadre semi-discret, puis dans le cadre discret (Sous-sections II.3.2 et II.3.2 respectivement). L'identité d'énergie cinétique discrète satisfaite par le schéma est établie (Sous-section II.3.3), et ensuite la taille du terme de défaut de dissipation est évaluée (Sous-section II.3.4). Enfin, les tests numériques sont rassemblés dans la Section II.4.

## II.2 Construction d'un opérateur convectif stable

Le but de cette section est d'établir l'analogie de la proposition II.1 pour l'opérateur convectif de vitesse discrétisé en temps par l'algorithme de Crank-Nicolson. La discrétisation spatiale repose sur l'élément fini de Rannacher-Turek [83] (*cf* Annexe A). Il s'agit d'un élément fini mixte défini sur des quadrangles, permettant de calculer les champs de vitesse et de pression. Rappelons que cet élément fini est défini de la façon suivante :

- les inconnues de vitesse sont situées sur les arêtes  $\sigma$  si  $d = 2$  ou faces si  $d = 3$  et les degrés de liberté de vitesse notés  $\mathbf{u}_{\sigma,i}$  sont déterminés comme suit : la vitesse discrète appartient à l'espace d'approximation  $\mathbf{X}_h$  des fonctions  $\widetilde{\mathbb{Q}}_1$  par cellule, et on impose que la moyenne du saut de vitesse à travers chaque arête (si  $d = 2$ ) ou face (si  $d = 3$ ) soit nulle.
- les inconnues de pression sont situées au centre des cellules et la pression est constante par mailles. Nous notons  $\mathbf{M}_h$  l'espace discret d'approximation pour la pression.

Cet élément est non conforme et *inf-sup* stable.

### II.2.1 Construction de l'opérateur convectif

Nous donnons les principales idées de cette construction, détaillée dans [4, 33], en considérant le problème pour un pas de temps fixe. Nous partons de l'équation de conservation de la masse discrète, supposée obtenue par une technique volumes finis sur le maillage primal (Section II.3 pour



la description de tout l'algorithme) :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \frac{|K|}{\Delta t} (\rho_K - \rho_K^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0. \quad (\text{II.5})$$

Dans cette relation,  $\rho_K$  et  $\rho_K^*$  représentent l'approximation de la masse volumique  $\rho$  sur la cellule  $K$  à la fin et au début du pas de temps respectivement, et la quantité  $F_{K,\sigma}$  est le flux de masse discret à travers la face  $\sigma$  et sortant de  $K$ , *i.e.*

$$F_{K,\sigma} = |\sigma| \tilde{\rho}_\sigma \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma},$$

$\tilde{\rho}_\sigma$  étant une approximation de la masse volumique sur la face  $\sigma$ , choisie centrée sur les arêtes internes et upwind (décentrage amont) sur celles du bord.

Soit  $D_\sigma$  une cellule duale donnée. Le but est de construire des approximations de la masse volumique notées  $\rho_\sigma$  et  $\rho_\sigma^*$  et des flux de masse à travers les faces de  $D_\sigma$ , notés  $(F_{\sigma,\varepsilon})_{\varepsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)}$ , de telle sorte que l'équation de conservation de la masse suivante soit satisfaite sur la maille duale

$$\frac{|D_\sigma|}{\Delta t} (\rho_\sigma - \rho_\sigma^*) + \sum_{\varepsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\varepsilon} = 0. \quad (\text{II.6})$$

D'abord, pour construire les flux  $F_{\sigma,\varepsilon}$ , l'idée de départ est d'imposer la conservation de la masse sur les demi-diamants :

$$F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\varepsilon \subset K \\ \varepsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)}} F_{\sigma,\varepsilon} = -\frac{|D_{K,\sigma}|}{\Delta t} (\rho_K - \rho_K^*). \quad (\text{II.7})$$

Pour une face externe  $\sigma$ , en utilisant l'égalité  $\rho_\sigma = \rho_K$ , cette relation est exactement l'équation (II.6), pourvu que le flux massique primal  $F_{K,\sigma}$  soit égal au flux de masse dual à travers  $\sigma$  ( $\sigma$  est à la fois une arête primale et duale). Pour une face interne  $\sigma = K|L$ , en combinant l'équation (II.7) écrite pour  $K$  et  $L$  avec la définition (II.10) de la masse volumique et en utilisant la conservativité des flux de masse primaux (*i.e.*  $F_{K,\sigma} + F_{L,\sigma} = 0$ ), on obtient la relation (II.6) encore une fois. Utilisons maintenant la conservation de la masse (II.5) pour écrire l'équation (II.7) sous la forme :

$$F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\varepsilon \subset K \\ \varepsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)}} F_{\sigma,\varepsilon} = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma'} = \frac{1}{m} \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma'}. \quad (\text{II.8})$$

L'écriture de cette relation pour toutes les faces  $\sigma$  de  $K$  conduit à un système linéaire singulier (en sommant ces  $m$  relations et en utilisant la propriété de conservativité des flux massiques duaux, cela conduit à  $\sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma'}$ ) qui a une infinité de solutions. Grâce à la forme du second membre de l'équation (II.8), en sélectionnant la solution dans l'orthogonal du noyau du système, nous obtenons une relation de la forme :

$$F_{\sigma,\varepsilon} = \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}(K)} \alpha_{\varepsilon,\sigma'} F_{K,\sigma'},$$

où les coefficients  $(\alpha_{\varepsilon,\sigma'})_{\sigma' \in \mathcal{E}(K)}$  sont des nombres réels indépendants de la cellule  $K$ . Par exemple, en dimension deux de l'espace, avec les notations de la figure II.1, nous obtenons pour chaque flux massique dual  $F_{\sigma,\varepsilon}$  une expression de la forme :

$$F_{\sigma,\varepsilon} = \alpha_W F_W + \alpha_E F_E + \alpha_S F_S + \alpha_N F_N, \quad (\text{II.9})$$

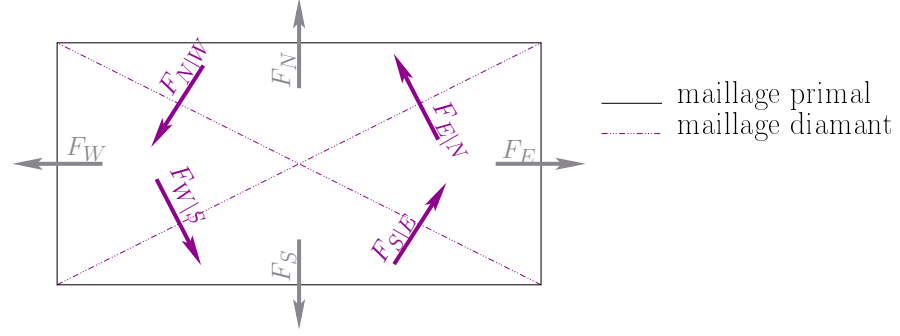


FIGURE II.1 – Notations concernant les flux de masse.

$F_{\sigma,\epsilon}$	$\alpha_W$	$\alpha_E$	$\alpha_S$	$\alpha_N$
$F_{W S}$	$-3/8$	$1/8$	$3/8$	$-1/8$
$F_{S E}$	$-1/8$	$3/8$	$-3/8$	$1/8$
$F_{E N}$	$1/8$	$-3/8$	$-1/8$	$3/8$
$F_{N W}$	$3/8$	$-1/8$	$1/8$	$-3/8$

TABLE II.1 – Coefficients intervenant dans l'écriture des flux de masse duaux comme fonctions des flux de masse primaux (Équation (II.9)).

pour les coefficients  $\alpha$  rassemblés dans le tableau II.1.

Ensuite, afin d'obtenir une équation de conservation de la masse sur les cellules diamant, nous définissons  $\rho_\sigma$  par :

$$\begin{cases} \rho_\sigma |D_\sigma| = |D_{K,\sigma}| \rho_K + |D_{L,\sigma}| \rho_L, & \text{si } \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \\ \rho_\sigma = \rho_K, & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}. \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

La même définition est valide pour  $\rho_\sigma^*$ .

#### Remarque II.2

*Avec les mêmes arguments, la construction de l'opérateur convectif et des flux de masse duaux peut être généralisée en trois dimensions d'espace. Par exemple, des calculs 3D sont effectués dans [4].*

Rappelons que nous notons  $\mathbf{X}_h$  l'espace discret d'approximation Rannacher-Turek pour la vitesse. Nous sommes maintenant en position de définir un opérateur convectif volumes finis  $\mathcal{C}_h : (\mathbb{R}^2)^{|\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D|} \times (\mathbb{R}^2)^{|\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D|} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^{|\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D|}$  pour deux champs de vitesse discrets  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}^*$  de  $\mathbf{X}_h$  comme suit :

$$\forall \sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D, \quad \mathcal{C}_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)_\sigma = \frac{1}{\Delta t} (\rho_\sigma \mathbf{u}_\sigma - \rho_\sigma^* \mathbf{u}_\sigma^*) + \sum_{\epsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)} \frac{1}{|D_\sigma|} F_{\sigma,\epsilon} \frac{\mathbf{u}_\epsilon + \mathbf{u}_\epsilon^*}{2}, \quad (\text{II.11})$$

où  $\mathbf{u}_\epsilon$  ( $\epsilon \in \bar{\mathcal{E}}$ ) est donné par :

$$\mathbf{u}_\epsilon = \begin{cases} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_\sigma + \mathbf{u}_{\sigma'}), & \text{si } \epsilon = D_\sigma | D_{\sigma'} \in \bar{\mathcal{E}}_{\text{int}}, \\ \mathbf{u}_\sigma, & \text{si } \epsilon = D_\sigma | \text{ext} \in \mathcal{E}_{\text{ext}}. \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

## II.2.2 Analyse de stabilité de l'opérateur convectif

Dans cette section, nous prouvons la contrepartie discrète de la proposition II.1 pour l'opérateur convectif donné par les équations (II.11)-(II.12).

### Proposition II.3 (Identité d'énergie cinétique pour l'opérateur convectif discret)

Supposons que la conservation de la masse (II.6) soit vraie, pour toute arête  $\sigma \in \mathcal{E}$ . Si de plus  $F_{\sigma,\varepsilon} = 0$  pour tout  $\varepsilon = D_\sigma|_{\text{ext}}$ , on a :

$$\forall \sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \in \mathbf{X}_h,$$

$$\begin{aligned} & |D_\sigma| \mathcal{C}_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)_\sigma \cdot \left( \frac{\mathbf{u}_\sigma + \mathbf{u}_\sigma^*}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2\Delta t} |D_\sigma| \left( \rho_\sigma |\mathbf{u}_\sigma^*|^2 - \rho_\sigma^* |\mathbf{u}_\sigma|^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon = D_\sigma|_{D_{\sigma'}}} F_{\sigma,\varepsilon} \frac{\mathbf{u}_\sigma + \mathbf{u}_\sigma^*}{2} \cdot \frac{\mathbf{u}_{\sigma'} + \mathbf{u}_{\sigma'}^*}{2} + \mathcal{R}_\sigma, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{R}_\sigma$  est un terme de reste donné par :

$$\mathcal{R}_\sigma = -\frac{1}{8\Delta t} |D_\sigma| (\rho_\sigma - \rho_\sigma^*) |\mathbf{u}_\sigma - \mathbf{u}_\sigma^*|^2.$$

Nous reconnaissons dans le membre de droite une conservation discrète d'énergie cinétique avec une discrétisation volumes finis conservative des termes de convection d'énergie cinétique.

**Démonstration** On a :

$$|D_\sigma| \mathcal{C}_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)_\sigma \cdot \left( \frac{\mathbf{u}_\sigma + \mathbf{u}_\sigma^*}{2} \right) = T_1 + T_2,$$

avec

$$T_1 = \frac{1}{\Delta t} |D_\sigma| (\rho_\sigma \mathbf{u}_\sigma - \rho_\sigma^* \mathbf{u}_\sigma^*) \cdot \left( \frac{\mathbf{u}_\sigma + \mathbf{u}_\sigma^*}{2} \right),$$

$$T_2 = \frac{\mathbf{u}_\sigma^* + \mathbf{u}_\sigma}{2} \cdot \left( \sum_{\varepsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\varepsilon} \frac{\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon^*}{2} \right).$$

Le terme  $T_1$  s'écrit :

$$T_1 = \underbrace{\frac{1}{2\Delta t} |D_\sigma| (\rho_\sigma |\mathbf{u}_\sigma|^2 - \rho_\sigma^* |\mathbf{u}_\sigma^*|^2)}_{T_{1,1}} + \underbrace{\frac{1}{2\Delta t} |D_\sigma| (\rho_\sigma - \rho_\sigma^*) \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{u}_\sigma^*}_{T_{1,2}}. \quad (\text{II.13})$$

Considérons maintenant  $T_2$ . Introduisons pour cela les notations suivantes :

$$\bar{\mathbf{u}}_\sigma = \frac{\mathbf{u}_\sigma + \mathbf{u}_\sigma^*}{2}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{u}}_\varepsilon = \frac{\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon^*}{2}, \quad \forall \varepsilon \in \bar{\mathcal{E}}. \quad (\text{II.14})$$

On obtient

$$T_2 = \bar{\mathbf{u}}_\sigma \cdot \left( \sum_{\varepsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\varepsilon} \bar{\mathbf{u}}_\varepsilon \right).$$

En utilisant  $\bar{\mathbf{u}}_\sigma \cdot \bar{\mathbf{u}}_\varepsilon = |\bar{\mathbf{u}}_\sigma|^2 + \bar{\mathbf{u}}_\sigma \cdot (\bar{\mathbf{u}}_\varepsilon - \bar{\mathbf{u}}_\sigma)$ , on obtient :

$$T_2 = \underbrace{|\bar{\mathbf{u}}_\sigma|^2 \sum_{\varepsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\varepsilon}}_{T_{2,1}} + \underbrace{\sum_{\varepsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\varepsilon} \bar{\mathbf{u}}_\sigma \cdot (\bar{\mathbf{u}}_\varepsilon - \bar{\mathbf{u}}_\sigma)}_{T_{2,2}}. \quad (\text{II.15})$$

Considérons le second terme  $T_{2,2}$ . En utilisant l'identité  $2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{b}|^2$ , valide pour tous vecteurs réels  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ , il vient :

$$T_{2,2} = -\frac{1}{2} |\bar{\mathbf{u}}_\sigma|^2 \sum_{\varepsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\varepsilon} + \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\varepsilon} (|\bar{\mathbf{u}}_\varepsilon|^2 - |\bar{\mathbf{u}}_\sigma - \bar{\mathbf{u}}_\varepsilon|^2).$$

Par conséquent, on a

$$T_2 = \frac{1}{2} |\bar{\mathbf{u}}_\sigma|^2 \sum_{\varepsilon = D_\sigma | D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon} + \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\varepsilon} (|\bar{\mathbf{u}}_\varepsilon|^2 - |\bar{\mathbf{u}}_\sigma - \bar{\mathbf{u}}_\varepsilon|^2).$$

En utilisant l'équation de conservation de la masse discrète (II.6), on a :

$$T_2 = - \underbrace{\frac{1}{2\Delta t} |D_\sigma| (\rho_\sigma - \rho_\sigma^*) |\bar{\mathbf{u}}_\sigma|^2}_{T_{2,2,1}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\varepsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\varepsilon} (|\bar{\mathbf{u}}_\varepsilon|^2 - |\bar{\mathbf{u}}_\sigma - \bar{\mathbf{u}}_\varepsilon|^2)}_{T_{2,2,2}}.$$

Premièrement, le terme  $T_{2,2,1}$  peut être combiné avec le terme  $T_{1,2}$  dans (II.13), et en utilisant la définition (II.14) de  $\bar{\mathbf{u}}_\sigma$ , ceci conduit à :

$$T_{2,2,1} + T_{1,2} = -\frac{1}{8\Delta t} |D_\sigma| (\rho_\sigma - \rho_\sigma^*) |\mathbf{u}_\sigma - \mathbf{u}_\sigma^*|^2 = \mathcal{R}_\sigma.$$

Deuxièmement, par la définition de l'approximation de la vitesse convectée sur une face (centrée) (II.12),  $T_{2,2,2}$  s'écrit aussi :

$$T_{2,2,2} = \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon = D_\sigma | D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon} \bar{\mathbf{u}}_\sigma \cdot \bar{\mathbf{u}}_{\sigma'} + \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon = D_\sigma | \text{ext}} F_{\sigma,\varepsilon} |\bar{\mathbf{u}}_\sigma|^2.$$

Finalement, par l'équation (II.14), nous obtenons :

$$T_{2,2} = \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon = D_\sigma | D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon} (\mathbf{u}_\sigma + \mathbf{u}_\sigma^*) \cdot (\mathbf{u}_{\sigma'} + \mathbf{u}_{\sigma'}^*) + \frac{1}{8} |\mathbf{u}_\sigma + \mathbf{u}_\sigma^*|^2 \sum_{\varepsilon = D_\sigma | \text{ext}} F_{\sigma,\varepsilon},$$

et nous concluons la preuve grâce à l'hypothèse  $F_{\sigma,\varepsilon} = 0$  pour tout  $\varepsilon = D_\sigma | \text{ext}$ .  $\blacksquare$

## II.3 Un schéma de correction de pression Crank-Nicolson-like

Nous présentons maintenant un schéma de correction de pression pour approcher les solutions du système d'équations de Navier-Stokes à faible nombre de Mach (Système (1) en Introduction). Nous commençons par présenter l'algorithme dans le cadre semi-discret (Section II.3.1), et donnons ensuite la discrétisation spatiale (Section II.3.2). En utilisant la proposition II.3 concernant l'opérateur convectif prouvée dans la section II.2, nous établissons ensuite l'identité d'énergie cinétique satisfaite par le schéma (Section II.3.3). Dans cette relation, un terme de reste apparaît lorsque la masse volumique n'est pas constante et nous discutons de son ordre en temps dans la Section II.3.4.



Le but de la troisième étape, appelée étape de *prédiction de vitesse*, est de calculer un champ de vitesse intermédiaire noté  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ , en utilisant les champs de pression  $p^n$  et masse volumique  $\rho^n$  et  $\rho^{n-1}$  déjà évalués aux pas de temps précédents. Puisque nous avons pour objectif d'appliquer la théorie développée dans la Section II.2, il est nécessaire que la masse volumique et l'opérateur convectif satisfassent une propriété de conservation de la masse (semi-)discrète ; cette dernière équation étant seulement résolue dans l'étape 4 de l'algorithme, il faut s'appuyer pour cela sur la propriété satisfaite au pas de temps précédent, et nous devons donc effectuer un décalage des masses volumiques dans le terme de dérivée temporelle.

Finalement, la quatrième étape de l'algorithme, appelée étape de *correction de vitesse et de pression*, et formulée comme un problème de Darcy, peut paraître coûteuse numériquement. En fait, en prenant la divergence de la première équation multipliée par  $\rho^{n+1}/\rho^n$  et en utilisant la seconde, il est possible d'éliminer la vitesse finale et de reformuler cette étape comme un problème elliptique discret pour l'incrément de pression, dont l'opérateur est le complément de Schur du problème de Darcy (Chapitre I). Cette opération est effectuée au niveau algébrique (*i.e.* les équations sont d'abord discrétisées en espace avant de faire ce calcul car le champ de pression discret est constant par mailles), ce qui nécessite de calculer facilement l'inverse de la matrice de masse en vitesse ; c'est fait de manière simple ici, puisque la matrice masse de vitesse est lumpée (Section I.2.1), ce qui est raisonnable compte tenu de l'approximation volumes finis de l'opérateur convectif discret étudié dans la Section II.2. Une fois que l'incrément de pression est connu, la valeur de la pression et celle de la vitesse finale s'obtiennent aisément.

La précision en temps de cet algorithme est analysée pour un problème modèle (à savoir le problème de Stokes instationnaire incompressible) dans le chapitre I.

Remarque II.5 (Erreur de splitting en temps pour la vitesse)

*Cet algorithme est formellement du premier ordre en temps (en norme  $l^\infty(L^2(\Omega)^d)$ ) quand la masse volumique varie au cours du temps, ainsi, même si les étapes de prédiction et de correction ont été obtenues par une technique de Crank-Nicolson, nous n'attendons pas une convergence d'ordre deux en temps dans ce cas. Notre but ici est seulement de limiter le défaut de dissipation du schéma.*

Remarque II.6 (Opérateur convectif pour  $\theta$ )

*Comme au niveau continu,  $\theta$  satisfait un principe du maximum. L'argument essentiel qui conduit à cette conclusion est que l'opérateur convectif de l'équation de conservation de  $\theta$  peut être réécrit, en utilisant l'équation de conservation de la masse, comme un opérateur de transport :*

$$\partial_t(\rho\theta) + \operatorname{div}(\rho\theta\mathbf{u}) = \rho (\partial_t\theta + \nabla\theta \cdot \mathbf{u}).$$

*Pour obtenir cette proposition au niveau discret, il est donc important de construire un opérateur convectif consistant avec la conservation de la masse [62] (autrement dit, qui s'annule à cause de la conservation des champs constants  $\theta$ ). Pour cela, une fois encore, nous devons effectuer un décalage en temps de la masse volumique dans le terme de dérivée temporelle. Noter cependant que, au niveau discret, le principe du maximum n'est pas forcément vrai dans le cas de maillages généraux puisque l'opérateur de Laplace que nous utilisons satisfait cette proposition seulement pour des maillages particuliers (Remarque II.7 ci-dessous).*

### II.3.2 Schéma discret en temps et en espace

En utilisant la construction de l'opérateur convectif pour la vitesse (Sous-section II.2.2) dans les équations discrètes de conservation de la quantité de mouvement et de la masse, la forme discrète de l'algorithme proposé ci-dessus consiste en les étapes suivantes.

Supposons que  $(\rho_K^{n-1})_{K \in \mathcal{T}_h}$ ,  $(\rho_K^n)_{K \in \mathcal{T}_h}$ ,  $(\theta_K^n)_{K \in \mathcal{T}_h}$ ,  $(\mathbf{u}_\sigma^n)_{\sigma \in \mathcal{E}}$  et  $(p_K^n)_{K \in \mathcal{T}_h}$  sont connus et supposons de plus que :

$$\frac{|K|}{\Delta t} (\rho_K^n - \rho_K^{n-1}) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}^n = 0,$$

où, pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$ ,  $\sigma = K|\text{ext}$ ,  $F_{K,\sigma}^n = 0$  et pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ ,  $\sigma = K|L$ , le flux de masse  $F_{K,\sigma}^n$  est une fonction donnée de  $\rho_K^n$ ,  $\rho_L^n$  et  $\mathbf{u}_\sigma^n$  (discrétisation de l'étape 4 ci-dessous).

Ensuite, nous calculons successivement :

1– **Équation de conservation pour  $\theta$**  – Trouver  $(\theta_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}_h}$  :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \frac{|K|}{\Delta t} (\rho_K^n \theta_K^{n+1} - \rho_K^{n-1} \theta_K^n) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}^n \theta_\sigma^{n+1} + \lambda \Delta_K (\theta^{n+1}) = 0,$$

où l'approximation de la masse volumique sur la face  $\sigma$  notée  $\theta_\sigma$  est obtenue par une approximation upwind (décentrage amont) du terme convectif. De plus,  $\Delta_K$  est une approximation volumes finis de l'opérateur de Laplace (en vitesse) : pour des maillages admissibles (*i.e.* ici, pour des maillages structurés), nous utilisons l'approximation à deux points usuelle des flux, tandis qu'une variante de la méthode SUSHI utilisant seulement les inconnues aux centres des cellules [28, 80] est implémentée quand le maillage n'est pas structuré.

2– **Mise à jour de la masse volumique** – Calculer la masse volumique par la loi d'état :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \rho_K^{n+1} = \varrho(\theta_K^{n+1}).$$

3– **Prédiction de vitesse** – En oubliant les conditions au bord pendant un instant, cette étape consiste à trouver les inconnues de vitesse prédite  $(\tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1})_{\sigma \in \mathcal{E}}$  solutions du système suivant :

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}, \forall 1 \leq i \leq d,$$

$$\mathbf{e}^{(i)} \cdot \left[ \frac{|D_\sigma|}{\Delta t} (\rho_\sigma^n \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} - \rho_\sigma^{n-1} \mathbf{u}_\sigma^n) + \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\varepsilon}^n \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{n+1/2} + |D_\sigma| (\nabla p^n)_\sigma \right] + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}) : \nabla \varphi_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} = 0, \quad (\text{II.18})$$

où nous rappelons que  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2} = (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{u}^n)/2$ . L'opérateur convectif (*i.e.* le calcul de la masse volumique  $\rho_\sigma$  sur les faces, celui des flux de masse sur les faces duales  $F_{\sigma,\varepsilon}$  et l'approximation (centrée)  $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{n+1/2}$  de la vitesse sur les faces duales) est décrite dans la section II.2.1. Les termes de gradient de pression s'écrivent :

$$|D_\sigma| (\nabla p^n)_\sigma \cdot \mathbf{e}^{(i)} = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p^n \operatorname{div} \varphi_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x},$$

et donc, pour toute face interne :

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma = K|L, \quad |D_\sigma| (\nabla p^n)_\sigma = |\sigma| (p_L^n - p_K^n) \mathbf{n}_{K,\sigma}.$$

Sur une face externe, la condition au bord d'imperméabilité (nullité de la composante normale à la paroi) doit être prise en compte (si possible, *i.e.* si la normale à la face n'est pas colinéaire à l'un des axes de coordonnées) en faisant un changement d'inconnues de vitesse pour faire apparaître la ou les composante(s) de vitesse tangente et normale au bord, ces dernières étant fixées à zéro ; à chaque  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$ , une équation est donc supprimée du système. Puisque le gradient de pression associé à une face  $\sigma$  est dirigé selon la normale à celle-ci, il est donc inutile de le définir pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$ . Notons cependant que, puisque le bord Neumann associé à la ou aux composante(s) tangente(s) est homogène, il n'apparaît aucun terme suite à l'intégration par parties du terme visqueux.

- 4– **Étapes de correction de vitesse et de pression** – Trouver les inconnues de vitesse finale  $(\mathbf{u}_\sigma^{n+1})_{\sigma \in \mathcal{E}}$  et les inconnues de pression  $(p_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}_h}$  telles que

$$\begin{cases} \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, & \frac{|D_\sigma|}{\Delta t} \rho_\sigma^n (\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1}) + \frac{1}{2} |D_\sigma| (\nabla(p^{n+1} - p^n))_\sigma = 0, \\ \forall K \in \mathcal{T}_h, & \frac{|K|}{\Delta t} (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Notons que, puisque le gradient de pression est normal aux faces et que la composante normale de la vitesse est fixée à zéro sur le bord du domaine, la vitesse sur ce bord est laissée inchangée, durant cette étape. Ceci explique pourquoi le système associé à la correction de vitesse (Première équation de (II.19)) peut-être restreint aux faces internes.

Puisque la masse volumique est donnée par la loi d'état, il n'est pas nécessaire d'utiliser un schéma upwind dans l'équation de conservation de la masse (par opposition avec les problèmes pour des écoulements compressibles [50], par exemple, où il garantit la positivité de  $\rho$ ), et nous devons donc utiliser une approche centrée :

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma = K|L, & \quad F_{K,\sigma}^{n+1} = |\sigma| \frac{\rho_K^{n+1} + \rho_L^{n+1}}{2} \mathbf{u}_\sigma^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}, \\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}, \sigma = K|\text{ext}, & \quad F_{K,\sigma}^{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Remarque II.7 (Principe du maximum pour  $\theta$  et positivité de la masse volumique)

*Pour des maillages structurés, le choix upwind pour  $\theta$  dans l'opérateur convectif discret de l'équation de conservation associée, ajouté à la forme particulière de l'opérateur de Laplace, garantit un principe du maximum discret, et donc la positivité de la masse volumique. Quand le maillage n'est pas structuré, le schéma SUSHI ne satisfait pas une telle propriété. Cependant, nous n'avons pas constaté de dépassement des bornes en pratique.*

### II.3.3 Identité d'énergie cinétique

Nous définissons d'abord la semi-norme suivante pour une pression  $p$  de  $\mathbf{M}_h$  et la masse volumique  $\rho_\sigma$  définie par l'équation (II.10) à partir de la discrétisation volumes finis de l'équation de conservation de la masse :

$$|p|_{1,\mathcal{T}_h,\rho}^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \frac{1}{\rho_\sigma |D_\sigma|} |(\nabla p)_\sigma|^2 = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \\ \sigma = K|L}} \frac{|\sigma|^2}{\rho_\sigma |D_\sigma|} (p_K - p_L)^2. \quad (\text{II.20})$$



Cette quantité est bien définie si  $\rho$  est strictement positive, ce qui est toujours le cas en pratique (Remarque II.7).

L'application de la contrepartie discrète de la procédure continue décrite en introduction (Propriété I.C.) conduit au résultat suivant.

**Proposition II.8 (Identité d'énergie cinétique globale)**

*Supposons que  $F_{\sigma,\varepsilon} = 0$  pour tout  $\varepsilon = D_\sigma | \text{ext}$ . À condition que la conservation de la masse discrète (II.6) soit satisfaite, nous avons, pour tout  $n \in \{0, \dots, N-1\}$  :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |D_\sigma| (\rho_\sigma^n |\mathbf{u}_\sigma^{n+1}|^2 - \rho_\sigma^{n-1} |\mathbf{u}_\sigma^n|^2) + \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}) : \boldsymbol{\nabla}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}) \, dx \\ - \frac{\Delta t}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| (p_K^{n+1} \mathbf{u}_\sigma^{n+1} + p_K^n \mathbf{u}_\sigma^n) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} + \mathcal{D}^{n+1} = 0, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{D}^{n+1}$  représente un terme de reste qui s'écrit :

$$\mathcal{D}^{n+1} = \frac{\Delta t^2}{8} (|p^{n+1}|_{1,\mathcal{T}_h,\rho^n}^2 - |p^n|_{1,\mathcal{T}_h,\rho^n}^2) - \frac{1}{8} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |D_\sigma| (\rho_\sigma^n - \rho_\sigma^{n-1}) |\tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n|^2. \quad (\text{II.21})$$

**Démonstration** Soient  $0 \leq n \leq N-1$  et  $\sigma \in \mathcal{E}$ . Multipliant l'équation de prédiction de vitesse (II.18) associée à la face  $\sigma$  et à la composante  $i$  par  $(\tilde{\mathbf{u}}_{\sigma,i}^{n+1/2})$  pour  $1 \leq i \leq d$  et sommant sur  $i$ ; appliquant de plus la proposition II.3, on a :

$$\begin{aligned} \frac{|D_\sigma|}{2\Delta t} (\rho_\sigma^n |\tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1}|^2 - \rho_\sigma^{n-1} |\mathbf{u}_\sigma^n|^2) + \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon = D_\sigma | D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon}^n \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1/2} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{\sigma'}^{n+1/2} \\ + |D_\sigma| (\boldsymbol{\nabla} p^n)_\sigma \cdot \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1/2} + |D_\sigma| (-\Delta \tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1/2} + \mathcal{R}_\sigma^{n+1} = 0, \quad (\text{II.22}) \end{aligned}$$

où l'approximation discrète de l'opérateur de Laplace appliquée à  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}$  s'écrit :

$$\text{pour } 1 \leq i \leq d, \quad |D_\sigma| (-\Delta \tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2})_i = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}) : \boldsymbol{\nabla} \varphi_\sigma^{(i)} \, dx,$$

et le terme de reste  $\mathcal{R}_\sigma^{n+1}$  s'écrit :

$$\mathcal{R}_\sigma^{n+1} = -\frac{|D_\sigma|}{8\Delta t} (\rho_\sigma^n - \rho_\sigma^{n-1}) |\tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n|^2.$$

Nous réordonnons maintenant la première équation de l'étape de correction (II.19) comme suit :

$$\left[ \frac{|D_\sigma| \rho_\sigma^n}{2\Delta t} \right]^{1/2} \mathbf{u}_\sigma^{n+1} + \left[ \frac{|D_\sigma| \Delta t}{8\rho_\sigma^n} \right]^{1/2} (\boldsymbol{\nabla} p^{n+1})_\sigma = \left[ \frac{|D_\sigma| \rho_\sigma^n}{2\Delta t} \right]^{1/2} \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} + \left[ \frac{|D_\sigma| \Delta t}{8\rho_\sigma^n} \right]^{1/2} (\boldsymbol{\nabla} p^n)_\sigma.$$

En prenant le carré de la norme des deux côtés de cette relation, il vient

$$\begin{aligned} \frac{|D_\sigma|}{2\Delta t} \rho_\sigma^n |\mathbf{u}_\sigma^{n+1}|^2 + \frac{1}{2} |D_\sigma| (\boldsymbol{\nabla} p^{n+1})_\sigma \cdot \mathbf{u}_\sigma^{n+1} + \frac{\Delta t}{8} \frac{|D_\sigma|}{\rho_\sigma^n} |(\boldsymbol{\nabla} p^{n+1})_\sigma|^2 \\ = \frac{|D_\sigma|}{2\Delta t} \rho_\sigma^n |\tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1}|^2 + \frac{1}{2} |D_\sigma| (\boldsymbol{\nabla} p^n)_\sigma \cdot \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} + \frac{\Delta t}{8} \frac{|D_\sigma|}{\rho_\sigma^n} |(\boldsymbol{\nabla} p^n)_\sigma|^2. \end{aligned}$$

En sommant cette dernière relation avec (II.22) et en multipliant par  $\Delta t$ , il s'ensuit :

$$\begin{aligned} & \frac{|D_\sigma|}{2} (\rho_\sigma^n |\mathbf{u}_\sigma^{n+1}|^2 - \rho_\sigma^{n-1} |\mathbf{u}_\sigma^n|^2) + \frac{\Delta t}{2} \sum_{\varepsilon=D_\sigma|D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon}^n \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1/2} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{\sigma'}^{n+1/2} \\ & + \frac{\Delta t |D_\sigma|}{2} [(\nabla p^n)_\sigma \cdot \mathbf{u}_\sigma^n + (\nabla p^{n+1})_\sigma \cdot \mathbf{u}_\sigma^{n+1}] + |D_\sigma| \Delta t (-\Delta \tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2} + \mathcal{D}_\sigma^{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

avec :

$$\mathcal{D}_\sigma^{n+1} = -\frac{|D_\sigma|}{8} (\rho_\sigma^n - \rho_\sigma^{n-1}) |\tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n|^2 + \frac{\Delta t^2}{8} \left( \frac{|D_\sigma|}{\rho_\sigma^n} |(\nabla p^{n+1})_\sigma|^2 - \frac{|D_\sigma|}{\rho_\sigma^n} |(\nabla p^n)_\sigma|^2 \right).$$

Nous sommons ensuite le résultat obtenu sur les faces. Les flux convectifs d'énergie cinétique (*i.e.* le second terme du membre de gauche) s'annule par conservativité (pour  $\varepsilon = D_\sigma|D_{\sigma'}$ ,  $F_{\sigma,\varepsilon}^n = -F_{\sigma',\varepsilon}^n$ ) et par les conditions au bord (pour  $\varepsilon = D_\sigma|\text{ext}$ ,  $F_{\sigma,\varepsilon}^n = 0$ ). Par intégration par parties discrète des termes de gradient, *i.e.* en utilisant le fait que, par définition du gradient de pression et, une fois encore, des conditions au bord, pour toutes fonctions discrètes  $\mathbf{u}$  et  $p$ , on a

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \\ \sigma = K|L}} |D_\sigma| (\nabla p)_\sigma \cdot \mathbf{u}_\sigma = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \\ \sigma = K|L}} |\sigma| (p_L - p_K) \mathbf{n}_{K,\sigma} \cdot \mathbf{u}_\sigma = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} p_K \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}.$$

Finalement, nous obtenons facilement, par définition :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |D_\sigma| (-\Delta \tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}) : \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2} \, d\mathbf{x},$$

ce qui conclut la preuve.  $\blacksquare$

#### Remarque II.9 (Identité d'énergie cinétique locale)

*Notons que l'équation (II.23) est l'analogue discret de l'identité d'énergie cinétique (locale) (II.3), à laquelle elle peut être identifiée terme par terme. Chacun des deux termes de flux d'énergie cinétique (second terme) et le gradient (troisième terme) sont consistants avec des discrétisations centrées en temps. Une telle relation peut être utilisée pour différents objectifs. Par exemple, on peut trouver dans [50] une manière d'exploiter une telle identité permet de basculer dans les équations d'Euler de la conservation de l'énergie totale à celle de l'énergie interne sans perdre la consistance du schéma.*

### II.3.4 Ordre en temps du défaut de dissipation

Dans la sous-section précédente, il a été montré (Proposition II.8) qu'il est possible d'écrire une équation discrète gouvernant la variation d'énergie cinétique pour le schéma de correction de pression Crank-Nicolson-like déjà présenté. En ajoutant chaque relation établie dans la proposition II.8 pour  $n$  allant de 0 à  $N-1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |D_\sigma| (\rho_\sigma^{N-1} |\mathbf{u}_\sigma^N|^2 - \rho_\sigma^{-1} |\mathbf{u}_\sigma^0|^2) + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}) : \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2} \, d\mathbf{x} \\ & - \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| (p_K^n \mathbf{u}_\sigma^n + p_K^{n+1} \mathbf{u}_\sigma^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} + \mathcal{D} = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

avec :

$$\mathcal{D} = \frac{\Delta t^2}{8} \sum_{n=0}^{N-1} \left( |p^{n+1}|_{1, \mathcal{T}_h, \rho^n}^2 - |p^n|_{1, \mathcal{T}_h, \rho^n}^2 \right) - \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |D_\sigma| (\rho_\sigma^n - \rho_\sigma^{n-1}) |\tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n|^2.$$

La relation (II.24) ne fournit pas une estimation de stabilité pour les trois raisons suivantes :

- 1 - Le troisième terme dans le membre de gauche est la contrepartie discrète du terme continu  $\int_0^T \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \, dt$ , dont le contrôle n'est pas possible pour les écoulements à faible Mach ; pour un écoulement incompressible, ce terme s'annulerait simplement.
- 2 - Le premier terme du reste  $\mathcal{D}$  n'est pas positif, du fait de la présence de différents poids de masse volumique dans l'expression des semi-normes de pression ; ce problème pourrait être résolu si la quantité  $|p^n|_{1, \mathcal{T}_h, \rho^n}$  était remplacée par  $|p^n|_{1, \mathcal{T}_h, \rho^{n-1}}$ , et ceci est possible en ajoutant une étape de renormalisation à l'algorithme, suivant l'étude présentée dans [44]. Cette étape n'est pas implémentée ici, parce qu'elle ne semble pas cruciale pour la robustesse de notre schéma.
- 3 - Le dernier terme de  $\mathcal{D}$  n'est pas signé car il dépend du signe de  $(\rho_\sigma^n - \rho_\sigma^{n-1})$ .

Notons qu'aucune de ces questions ne se pose quand la masse volumique est constante ( $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  et  $\mathcal{D} = 0$ ), donc le schéma est inconditionnellement stable dans ce cas.

La quantité  $\mathcal{D}$  est un terme de reste numérique, appelé dans la suite *défaut de dissipation* du schéma. Nous montrons maintenant que  $\mathcal{D}$  est formellement d'ordre deux en temps. En effet, par l'équation (II.20) et en réordonnant les sommes en temps :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t^2}{8} \sum_{n=0}^{N-1} \left( |p^{n+1}|_{1, \mathcal{T}_h, \rho^n}^2 - |p^n|_{1, \mathcal{T}_h, \rho^n}^2 \right) &= \frac{\Delta t^2}{8} \left( |p^N|_{1, \mathcal{T}_h, \rho^{N-1}}^2 - |p^0|_{1, \mathcal{T}_h, \rho^0}^2 \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{8} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| |(\nabla p^n)_\sigma|^2 \left( \frac{1}{\rho_\sigma^{n-1}} - \frac{1}{\rho_\sigma^n} \right). \end{aligned}$$

Donc chaque somme de  $\mathcal{D}$  est le produit de  $\Delta t^2$  multiplié par une somme en  $\mathcal{O}(1)$  par rapport à  $\Delta t$  au moins formellement sur les solutions régulières.

Remarque II.10 (Discrétisation en temps d'Euler rétrograde du premier ordre)

*En approchant la dérivée en temps de la vitesse par un schéma en temps d'Euler rétrograde d'ordre 1, une analyse similaire [4] conduit, pour  $0 \leq n \leq N-1$  :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |D_\sigma| (\rho_\sigma^n |\mathbf{u}_\sigma^{n+1}|^2 - \rho_\sigma^{n-1} |\mathbf{u}_\sigma^n|^2) + \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) : \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \, d\mathbf{x} \\ - \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} p_K^{n+1} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathbf{u}_\sigma^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma} + \mathcal{D}_{Euler}^{n+1} = 0, \quad (\text{II.25}) \end{aligned}$$

où le terme de reste numérique  $\mathcal{D}_{Euler}^{n+1}$  s'écrit maintenant :

$$\mathcal{D}_{Euler}^{n+1} = \frac{\Delta t^2}{2} \left( |p^{n+1}|_{1, \mathcal{T}_h, \rho^n}^2 - |p^n|_{1, \mathcal{T}_h, \rho^n}^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |D_\sigma| \rho_\sigma^n |\tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n|^2. \quad (\text{II.26})$$

En sommant les égalités (II.25) pour  $n$  allant de 0 à  $N - 1$ , nous obtenons l'expression suivante du terme de défaut de dissipation pour le schéma d'Euler

$$\mathcal{D}_{Euler} = \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( |p^{n+1}|_{1, \mathcal{T}_h, \rho^n}^2 - |p^n|_{1, \mathcal{T}_h, \rho^n}^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |D_\sigma| \rho_\sigma^n |\tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n|^2,$$

et, si, comme pour le schéma de correction de pression Crank-Nicolson-like, le premier terme est en  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ , le second est lui en  $\mathcal{O}(\Delta t)$  et le défaut de dissipation est donc d'ordre un en temps.

## II.4 Expériences numériques

Dans cette section, nous décrivons des expériences numériques réalisées pour illustrer le comportement du schéma de correction de pression Crank-Nicolson-like proposé dans la section II.3. Pour cela, nous le comparons au schéma de correction de pression classique [4], basé sur la même discrétisation spatiale et sur la formule d'Euler rétrograde d'ordre un en temps.

### II.4.1 Décroissance de la vorticité dans un canal plan laminaire 2D

Pour ce cas-test, nous proposons d'étudier le taux de décroissance de tourbillons dans un canal 2D. Le domaine de calcul  $\Omega$  est  $(-2H, 2H) \times (-H, H)$ , avec  $H = 1$ . L'écoulement est supposé périodique dans la direction  $x$  et des conditions de glissement parfait sont imposées sur les parois haute et basse du domaine, comme décrit par la Figure II.2. Il est initialisé par deux tourbillons contre-rotatifs qui ne sont soumis à aucune force. L'expression de la vitesse pour un unique tourbillon centré en  $(0, 0)$  est :

$$\begin{aligned} u &= y \sin(\pi r)/r \\ v &= -x \sin(\pi r)/r \end{aligned}$$

avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et la vitesse est nulle en dehors du tourbillon (pour  $r > 1$ ). Par translation de cette dernière formule, on obtient l'expression de la vitesse de deux tourbillons centrés respectivement en  $(-1, 0)$  et  $(1, 0)$ , de signe opposé. La valeur initiale est définie par la somme des deux tourbillons.

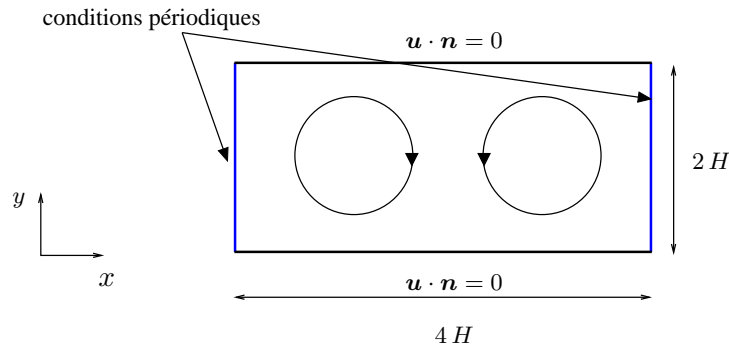


FIGURE II.2 – Configuration du cas-test – Cas-test de décroissance de la vorticité.

Les deux cas étudiés dans la suite sont à masse volumique constante puis variable.

Le maillage est régulier, composé de  $500 \times 250$  cellules. Même s'il n'y a aucune condition initiale sur la pression dans le système de Navier-Stokes, une valeur initiale doit être fournie dans l'algorithme. Nous choisissons ici de poser  $p^0 = 0$ .

### II.4.1.a Masse volumique constante

Nous débutons l'étude par une simulation pour un écoulement à masse volumique constante (*i.e.* incompressible), avec  $\rho = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . La viscosité est fixée à  $\mu = 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , donc, prenant  $\mathbf{u}_{\max} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  pour valeurs de référence pour la vitesse, nous obtenons pour le nombre de Reynolds :

$$\text{Re} = \frac{\rho \mathbf{u}_b H}{\mu} = 10^4.$$

**Énergie cinétique** – Les tourbillons s'amortissent doucement au cours du temps. Par conséquent, l'énergie cinétique décroît (Figure II.3). Les graphes donnant l'évolution de l'énergie cinétique pour les discrétisations en temps considérées sont rassemblés ci-dessous pour les pas de temps  $\Delta t = 0.1 \text{ s}$  et  $\Delta t = 0.005 \text{ s}$  (Figure II.3) ; de plus, les résultats des simulations effectuées pour le petit pas de temps  $\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$  sont données comme un calcul de référence.

Pour un gros pas de temps, le schéma d'Euler dissipe davantage que le schéma de Crank-Nicolson puisque l'énergie cinétique décroît plus vite. Pour  $\Delta t = 0.005 \text{ s}$ , les deux schémas donnent des résultats similaires et ont convergé en temps.

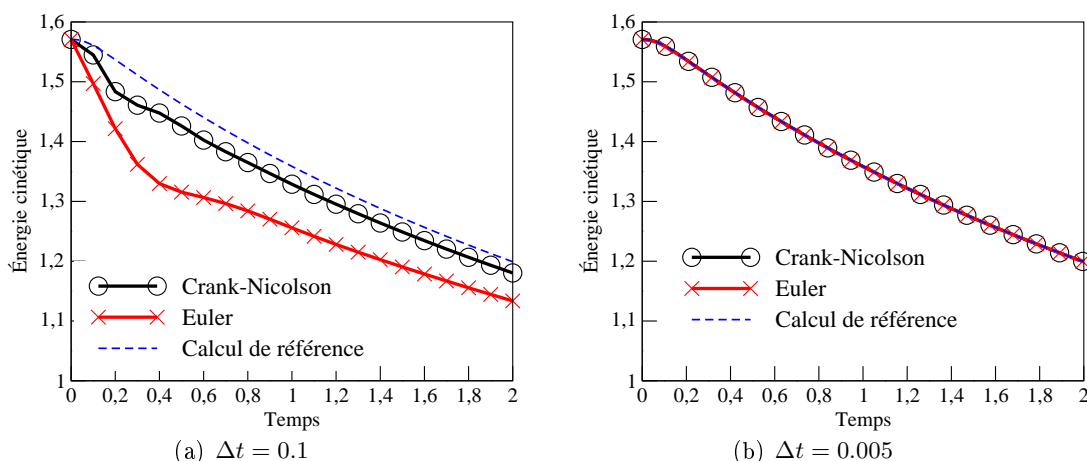


FIGURE II.3 – Énergie cinétique pour les discrétisations en temps de Crank-Nicolson et Euler – Cas-test de décroissance de la vorticité, masse volumique constante.

**Défaut de dissipation** – L'objectif de ce paragraphe est d'illustrer le fait que l'algorithme en temps proposé fournit un plus petit défaut de dissipation que le schéma d'Euler. Dans la définition du défaut de dissipation donnée par l'équation (II.21) pour Crank-Nicolson et l'équation (II.26) pour Euler, nous distinguons la partie associée au gradient de pression, notée  $\mathcal{D}_P^n$ , de la partie due à l'énergie cinétique, notée  $\mathcal{D}_E^n$ . Sur la figure II.4 sont représentées les valeurs maximum en temps  $\mathcal{D}_P$  et  $\mathcal{D}_E$  de chacune des parties comme fonctions du pas de temps en échelle logarithmique pour les deux algorithmes, où  $\mathcal{D}_P$  et  $\mathcal{D}_E$  sont définies par ( $N_0 = 0$  dans le cas où la masse volumique est constante) :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_P &= \max_{N_0 \leq n \leq N-1} \left| \sum_{k=N_0}^n \mathcal{D}_P^{k+1} \right|, \\ \mathcal{D}_E &= \max_{N_0 \leq n \leq N-1} \left| \sum_{k=N_0}^n \mathcal{D}_E^{k+1} \right|. \end{aligned} \tag{II.27}$$

Puisque la masse volumique est constante, la partie du défaut de dissipation due à l'énergie cinétique pour le schéma de Crank-Nicolson est nulle. Comme attendu par l'analyse donnée dans la sous-section II.3.4, la partie gradient de pression du défaut de dissipation est d'ordre deux pour les deux schémas et la partie énergie cinétique pour le schéma d'Euler est d'ordre un.

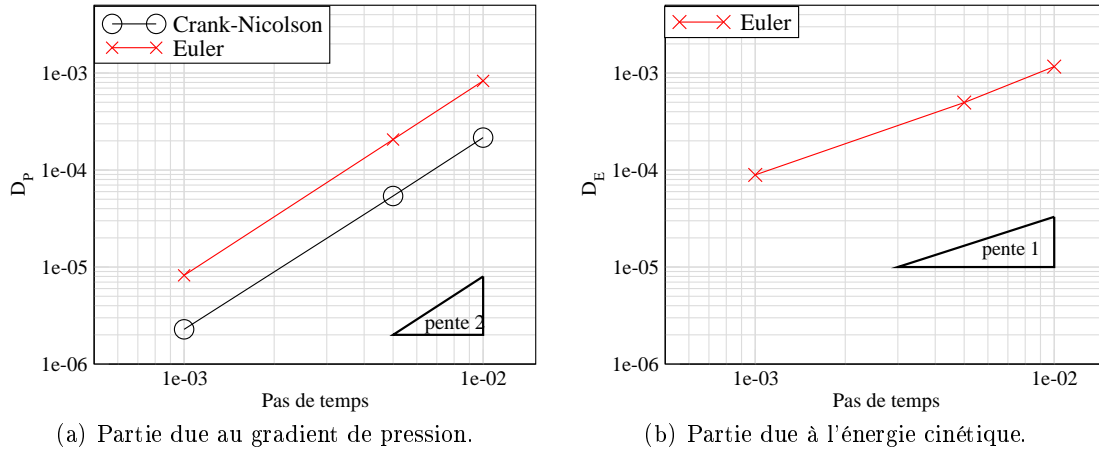


FIGURE II.4 – Taille du défaut de dissipation comme fonction du pas de temps pour les discrétisations en temps de Crank-Nicolson et d'Euler – Cas-test de décroissance de la vorticité, masse volumique constante.

#### II.4.1.b Masse volumique variable

Nous traitons maintenant un cas à masse volumique variable. Pour ce test, nous considérions que  $\theta$  est une fraction massique et utilisons, pour l'équation d'état, une loi de mélange standard pour la modélisation d'écoulements diphasiques :

$$\rho = \frac{1}{\frac{\theta}{\rho_1} + \frac{1-\theta}{\rho_2}},$$

où  $\rho_1 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $\rho_2 = 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  représentent les masses volumiques. La valeur initiale de  $\theta$  pour chacun des tourbillons est :

$$\theta = \frac{1 + \cos(\pi r)}{2}.$$

** nergie cinétique** – L'évolution en temps de l'énergie cinétique sur l'intervalle de temps  $(0, 2)$  est représentée sur la figure II.5, pour deux pas de temps et une solution de référence obtenue pour  $\Delta t = 10^{-3}$  s. Pour un gros pas de temps, il semble que le schéma Crank-Nicolson-like est encore moins dissipatif que le schéma d'Euler. Pour le plus petit pas de temps  $\Delta t = 0.005$  s, l'évolution de l'énergie cinétique est très similaire pour les deux schémas.

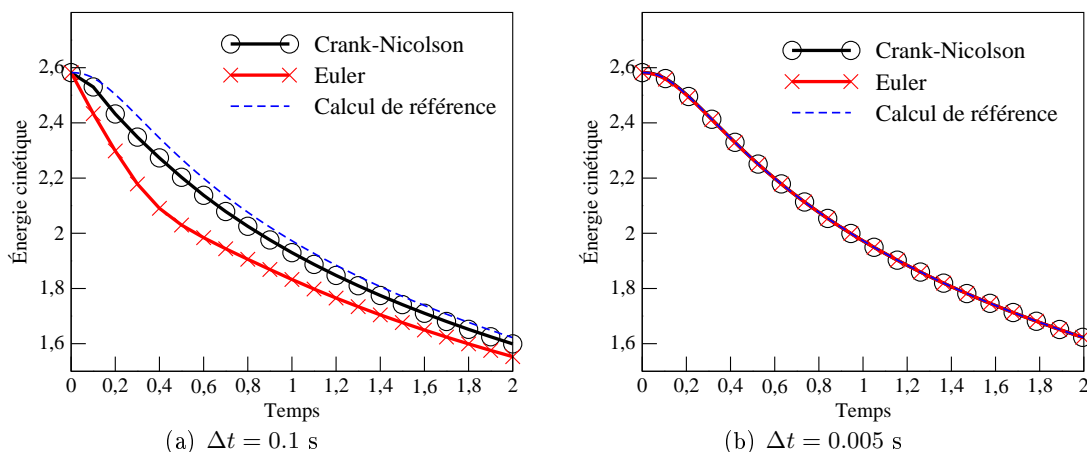


FIGURE II.5 – Énergie cinétique pour les discrétisations en temps d'Euler et Crank-Nicolson – Cas-test de décroissance de la vorticité, masse volumique variable.

**Défaut de dissipation** – Ici, dans la définition (II.27),  $N_0$  est choisi suffisamment grand ( $N_0 = 0.5/\Delta t$ ) pour que la condition initiale n'ait pas d'impact sur les résultats. En effet, si  $N_0$  est choisi égal à zéro, l'ordre en temps de chacune des parties du défaut de dissipation pour le schéma Crank-Nicolson-like se dégrade quand le pas de temps tend vers zéro (Figure II.6).

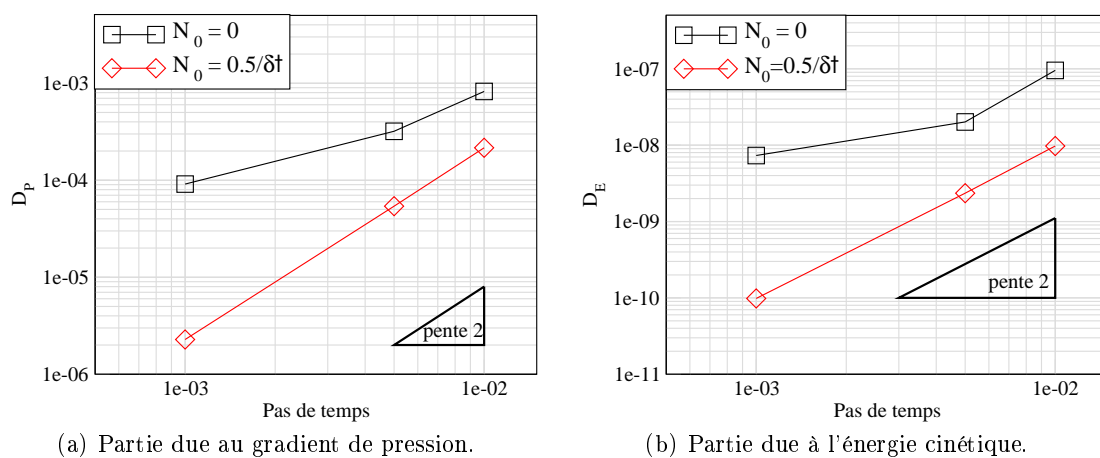


FIGURE II.6 – Taille des parties du défaut de dissipation comme fonctions du pas de temps pour différents  $N_0$  (Équation (II.27)) pour la discrétisation en temps de Crank-Nicolson – Cas-test de décroissance de la vorticité, masse volumique variable.

Traçons le défaut de dissipation comme fonction du pas de temps sur la figure II.7. Comme pour le cas à masse volumique constante, nous observons un comportement d'ordre deux en temps pour les deux schémas pour la partie due au gradient de pression du défaut de dissipation. La partie due à l'énergie cinétique est d'ordre un pour le schéma d'Euler et d'ordre deux pour le schéma Crank-Nicolson. Cette quantité est vraiment petite pour la discrétisation en temps de Crank-Nicolson (observer que le défaut de dissipation est multiplié par  $10^4$  sur la figure II.7).

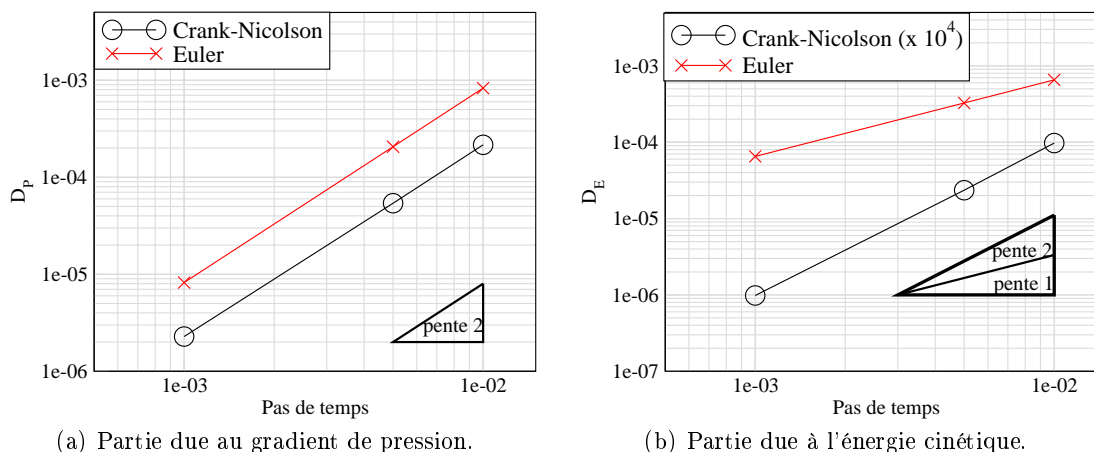


FIGURE II.7 – Taille des parties du défaut de dissipation comme fonctions du pas de temps pour les discrétisations en temps de Crank-Nicolson et Euler – Cas-test de décroissance de la vorticité, masse volumique variable.

### II.4.2 Écoulement laminaire 2D derrière un cylindre

Dans cette section, nous traitons de cas-tests tirés du benchmark proposé dans [87]. Le cas considéré est bi-dimensionnel, et nous décomposons l'étude en deux parties : d'abord, l'écoulement est supposé homogène et isotherme ( $\rho$  est constant) et ensuite, le cylindre est chauffé pour que  $\rho$  soit variable. Nous donnons ici une brève description des données utilisées et nous référons à [87] (2D-2 case) pour une présentation complète.

La géométrie des deux tests est représentée sur la figure II.8. Un obstacle circulaire de diamètre  $D = 0.1$  m est inclus dans un canal. Le fluide entre dans le domaine par la partie gauche avec un profil de vitesse imposé :

$$u_x(0, y) = 4u_m y \frac{H - y}{H^2}, \quad u_y(0, y) = 0,$$

et sort par la partie droite. Il n'est soumis à aucune force extérieure (*i.e.*  $\mathbf{g} = 0$  dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement). Dans cette équation,  $H = 0.41$  m est la hauteur du canal et  $u_m = 1.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  est la vitesse d'entrée ; des conditions au bord de type Dirichlet homogènes sont imposées sur les autres parties de la frontière, excepté pour la partie droite, où une condition au bord de type sortie ( $(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})\mathbf{n} - p\mathbf{n}) = 0$  sur  $\partial\Omega$ ) est imposée. De plus, on définit la vitesse moyenne par  $\bar{u} = 2u_x(0, H/2)/3$ .

Une "version grossière" du maillage (M#1) utilisée pour les calculs menés est représentée sur la figure II.9 ; les autres maillages sont raffinés par rapport à celui-ci, en diminuant le pas d'espace le long de certaines lignes caractéristiques du domaine (les frontières et les cercles concentriques autour du cylindre), comme représenté sur le tableau II.2.

Calcul	M#1	M#2	M#3	M#4	M#5
Nb de cellules	4033	12913	43009	76091	106101
Inc. en espace	12256	39014	129527	228937	409099

TABLE II.2 – Description des maillages utilisés – Écoulement laminaire derrière un cylindre.



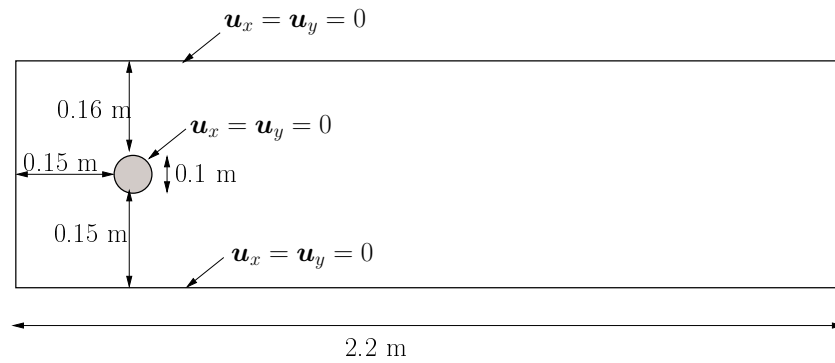


FIGURE II.8 – Géométrie du cas-test. – Écoulement laminaire derrière un cylindre.

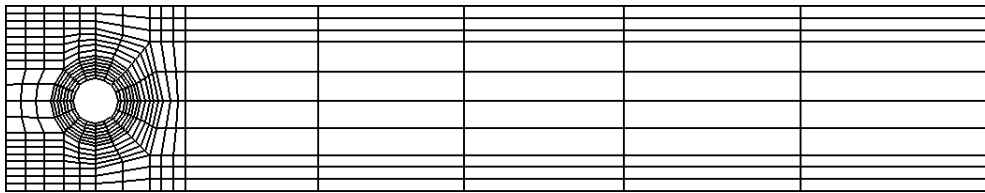


FIGURE II.9 – "Version grossière" du maillage ( $M\#1$ ). – Écoulement laminaire derrière un cylindre.

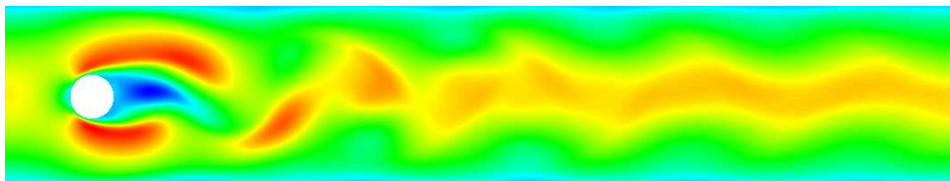


FIGURE II.10 – Profil instantané de la première composante de la vitesse – Écoulement laminaire derrière un cylindre.

L'écoulement est instationnaire (Figure II.10 pour une visualisation à un temps donné), et les principales caractéristiques de l'écoulement citées dans [87] sont le coefficient de traînée maximum  $c_{D\max}$ , le coefficient de portance maximum  $c_{L\max}$ , le nombre de Strouhal  $St$  et une différence de pression instantanée  $\Delta P$  entre les points de l'entrée et de la sortie du cylindre, *i.e.* les points (0.15 m, 0.20 m) et (0.25 m, 0.20 m) [87, section 2.2]. Le nombre de Strouhal représente la fréquence principale de l'écoulement, rendue sans dimension par la dimension  $D$  de l'obstacle et par la vitesse de l'écoulement  $\bar{u}$ .

Les coefficients de portance et de traînée sont définis comme suit : en notant  $S$  le cercle et  $\mathbf{u}_t$  la composante tangente de la vitesse (c'est-à-dire  $\mathbf{u}_t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}$  si  $\mathbf{t}$  désigne le vecteur tangent à  $S$ ), nous considérons d'abord les forces correspondantes

$$F_D = \int_S \left( \rho\nu \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n}_y - p \mathbf{n}_x \right) dS, \quad \text{et} \quad F_L = - \int_S \left( \rho\nu \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n}_x + p \mathbf{n}_y \right) dS.$$

Ensuite,  $c_D$  et  $c_L$  sont obtenus en multipliant  $F_D$  et  $F_L$  par  $2/(\rho \bar{u} D)$ . De plus, le nombre de Strouhal est  $St = Df/\bar{u}$ ,  $f$  représentant la fréquence de séparation. Cette fréquence est obtenue à partir de l'évolution en temps du coefficient de portance.

#### II.4.2.a Cas isotherme

La masse volumique est  $\rho = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et la viscosité est  $\mu = 0.001 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , donc le nombre de Reynolds, défini comme  $Re = \rho \bar{u} D / \mu$  est égal à 100.

Pour chaque calcul  $M\#i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ), le pas de temps est choisi de manière à satisfaire une sorte de condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) inférieure à 1. Pour cela, en notant  $|M\#i|$  le cardinal du maillage ( $i = 1, \dots, 5$ ) du calcul  $M\#i$ , nous considérons le pas de temps donné par

$$\Delta t = \frac{10^{-3}}{\sqrt{|M\#i|/|M\#1|}}.$$

Ainsi, le pas de temps varie entre  $10^{-3}$  s pour le maillage grossier et  $2 \times 10^{-4}$  s pour le maillage le plus fin.

Les valeurs calculées de  $c_{D\max}$ ,  $c_{L\max}$ ,  $St$  et  $\Delta P$  sont rassemblées dans les tableaux II.3 et II.4 (calculs  $M\#1$ ,  $M\#2$ ,  $M\#3$ ,  $M\#4$  et  $M\#5$ ), et un domaine de valeurs plausibles pour les résultats dérivé de l'ensemble des contributions du benchmark est donné. Les valeurs comprises dans l'intervalle de référence sont notées en gras.

Calcul	$\Delta t$	$c_{D\max}$	$c_{L\max}$	$St$	$\Delta P$
M#1	$10^{-3}$	3.66	0.79	0.270	2.30
M#2	$5.58 \times 10^{-4}$	3.41	0.95	0.294	2.45
M#3	$3.06 \times 10^{-4}$	3.25	0.98	<b>0.303</b>	<b>2.50</b>
M#4	$2.30 \times 10^{-4}$	<b>3.23</b>	<b>1.00</b>	<b>0.303</b>	<b>2.49</b>
M#5	$1.94 \times 10^{-4}$	<b>3.22</b>	<b>1.01</b>	<b>0.303</b>	<b>2.48</b>
Intervalle de référence		3.22 – 3.24	0.99 – 1.01	0.295 – 0.305	2.46 – 2.50

TABLE II.3 – Discrétisation en temps de Crank-Nicolson – Écoulement laminaire derrière un cylindre, cas isotherme.

Calcul	$\Delta t$	$c_{D\max}$	$c_{L\max}$	St	$\Delta P$
M#1	$10^{-3}$	3.62	0.75	0.269	2.36
M#2	$5.58 \times 10^{-4}$	3.40	0.92	0.288	2.45
M#3	$3.06 \times 10^{-4}$	3.25	0.97	0.294	<b>2.49</b>
M#4	$2.30 \times 10^{-4}$	<b>3.23</b>	0.98	0.294	<b>2.484</b>
M#5	$1.94 \times 10^{-4}$	<b>3.22</b>	<b>1.00</b>	0.294	<b>2.478</b>
Intervalle de référence		3.22 – 3.24	0.99 – 1.01	0.295 – 0.305	2.46 – 2.50

TABLE II.4 – Discrétisation en temps d’Euler – Écoulement laminaire derrière un cylindre, cas isotherme.

D’après les tableaux II.3 et II.4, il semble que les résultats soient en accord avec ceux de référence, mais le nombre de Strouhal calculé pour la discrétisation en temps de Crank-Nicolson a convergé dans l’intervalle des valeurs de référence, contrairement à la discrétisation d’Euler qui sous-estime cette grandeur, ce qui va bien dans le sens d’une plus grande dissipation en temps car les fréquences sont amorties dans ce dernier cas.

#### II.4.2.b Cas anisotherme

Dans cette partie, avec la même configuration que dans la partie précédente, le cylindre est chauffé avec une température  $T_h$ . Le fluide entre dans le domaine avec une température froide  $T_c$  et la température du mur est aussi fixée à  $T_c$ .

Nous proposons d’étudier l’influence du paramètre  $\epsilon$  défini par :

$$\epsilon = \frac{T_h - T_c}{T_h + T_c}.$$

Ce paramètre varie entre 0 (cas isotherme) et 0.8. Pour cette étude, le nombre de Prandtl est égal à 0.7, la viscosité est fixée à 0.001 Pa.s et la capacité thermique  $1000 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

Ici, le scalaire  $\theta$  est la température  $T$  et la masse volumique obéit à la loi des gaz dilatables :

$$\rho = \rho_0 \frac{T_0}{T},$$

où  $T_0 = T_c$  et  $\rho_0 = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ . Comme le maillage n’est pas structuré, le schéma SUSHI est utilisé pour approcher l’opérateur de Laplace (Remarque II.7) et le schéma MUSCL pour le terme convectif [80] dans l’équation de conservation pour  $\theta$ . Le pas de temps satisfait une condition de CFL requise par le schéma MUSCL de telle sorte qu’il varie entre  $2 \times 10^{-5}$  s et  $10^{-4}$  s au cours des calculs. Les calculs sont effectués avec le plus petit maillage du cas isotherme (M#5).

Sur la figure II.11, le champ de masse volumique est représenté pour  $\epsilon = 0.4, 0.6, 0.8$ . Pour de petites valeurs de  $\epsilon$ , comme pour le cas isotherme, l’écoulement est instationnaire et des oscillations apparaissent derrière le cylindre. Pour  $\epsilon = 0.4$ , les amplitudes semblent plus grandes que pour  $\epsilon = 0.6$ . Ce comportement est cohérent avec l’augmentation du nombre de Strouhal quand  $\epsilon$  croît (Tableau II.5). Pour  $\epsilon = 0.8$ , contrairement aux autres calculs, l’écoulement est stationnaire et ne présente pas d’oscillation.

Chauffer le cylindre conduit à une dépressurisation derrière le cylindre plus grande que dans le cas isotherme. La différence de pression entre deux points du cylindre grandit avec  $\epsilon$  (Tableau II.5).

Le coefficient de traînée croît aussi avec  $\epsilon$  tandis que le coefficient de portance décroît. Pour le cas stationnaire ( $\epsilon = 0.8$ ), le coefficient de portance est vraiment très petit et sa valeur est similaire à celle donnée dans [87] pour le cas 2D stationnaire.

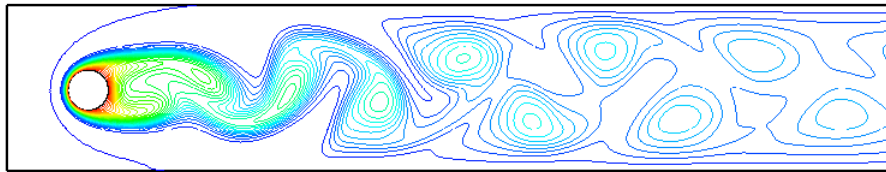
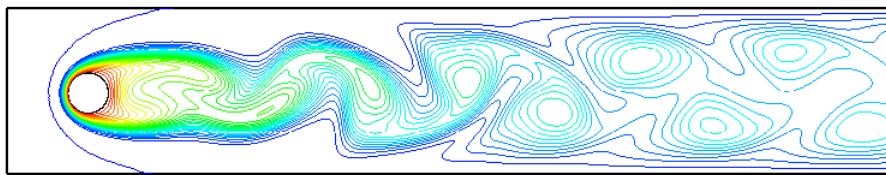
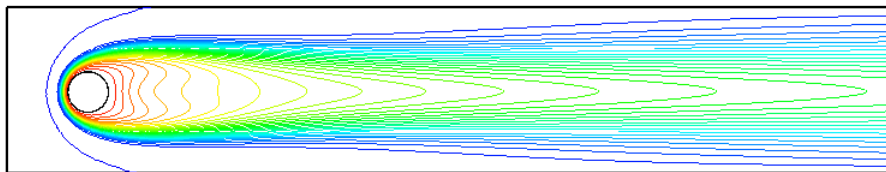

 (a)  $\epsilon = 0.4$ 

 (b)  $\epsilon = 0.6$ 

 (c)  $\epsilon = 0.8$ 

 FIGURE II.11 – Masse volumique pour plusieurs  $\epsilon$  au temps 10 s – Écoulement laminaire derrière un cylindre, cas anisotherme.

Calcul	$c_{D\max}$	$c_{L\max}$	St	$\Delta P$
isotherme	3.22	1	0.303	2.48
$\epsilon = 0.4$	3.54	0.56	0.316	2.59
$\epsilon = 0.6$	3.84	0.236	0.342	2.71
$\epsilon = 0.8$	4.62	0.0055	stationnaire	3.04

 TABLE II.5 – Coefficients de portance et de traînée, nombre de Strouhal et  $\Delta P$  pour plusieurs  $\epsilon$  – Écoulement laminaire derrière un cylindre, cas anisotherme.

### II.4.3 Couche de mélange turbulente 3D

Nous considérons ici un canal turbulent vertical tri-dimensionnel  $\Omega = [-0.2; 0.2] \times [-0.01; 1.20] \times [-0.2; 0.2]$  (en mètres), rempli d'eau ( $\rho = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  et  $\mu = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ), avec des conditions d'entrée imposées sur la paroi basse d'équation  $\{y = -0.01\}$  et des conditions de sortie sur la paroi haute d'équation  $\{y = 1.20\}$ . Des conditions de glissement parfait sont imposées sur les plans latéraux de  $\Omega$ . Par ailleurs, le canal est divisé en bas en deux parties égales de débits différents par une plaque verticale s'étendant de  $\{y = -0.01\}$  à  $\{y = 0\}$ . La vitesse d'injection  $\mathbf{u}_1 = 0.61 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  de l'écoulement à droite de la séparation est plus grande que celle de gauche  $\mathbf{u}_2 = 0.26 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , générant une couche de mélange turbulente (le fluide est seulement soumis à la force de gravité). Le système étudié contient donc l'équation (3). Enfin, des tests expérimentaux fournissent des coupes des profils de vitesse moyenne et de l'écart-type de vitesse (rms, acronyme pour root mean square value en anglais) relevées à plusieurs hauteurs [84, 69] définis comme suit : considérons l'intervalle de temps  $[t; t']$  (quand l'écoulement est établi, *i.e.*  $t = 6 \text{ s}$  et  $t' = 20 \text{ s}$  pour cette simulation) discrétion par  $t \leq \Delta t_0 \leq \dots \leq \Delta t_L = t'$ , alors pour une cellule  $K$  on pose

$$\begin{aligned} \langle U_y \rangle_{|K} &= \frac{1}{t' - t} \sum_{j=0}^L \frac{\Delta t_j}{|K|} \int_K U_y(\mathbf{x}, t + \Delta t_j) d\mathbf{x}, \\ (U_y)_{rms} &= \sqrt{\langle U_y^2 \rangle_{|K} - \langle U_y \rangle_{|K}^2}. \end{aligned}$$

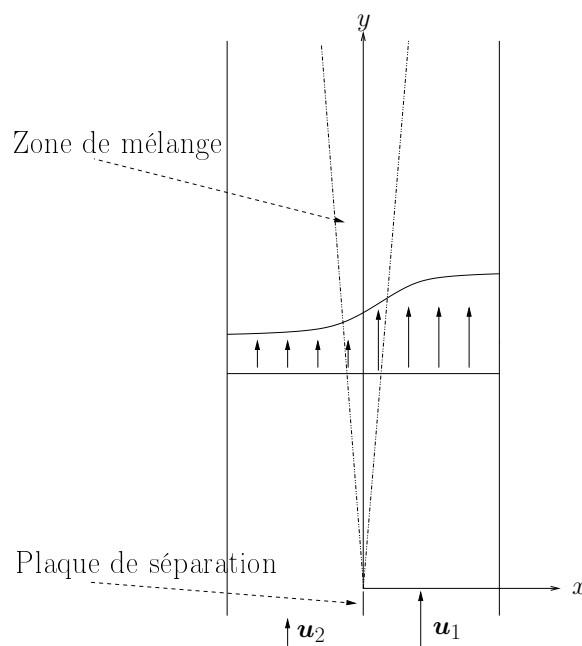


FIGURE II.12 – Configuration (vue de face) – Couche de mélange turbulente.

Le maillage est uniforme, constitué de  $90 \times 90 \times 270$  cellules et les pas de temps choisis pour les simulations sont  $\Delta t = 10^{-2}$  et  $\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$ , le temps variant de 0 à 20 s. Le champ de vitesse entrante est construit à partir de données expérimentales par la méthode des vortex [55] pour générer la turbulence. Le modèle sous-maille choisi est le modèle de Smagorinsky ( $C_s = 0.12$ , [69], Section 3.2) et nous comparons le schéma de correction de pression Crank-Nicolson-like introduit ici et le schéma d'Euler rétrograde d'ordre un, discrétisés en espace par l'élément fini de Rannacher-Turek.

Des représentations d'isosurfaces de norme de vorticité pour l'isovaleur 6 sont rassemblées sur la figure II.13 pour différents pas de temps.

Pour le pas de temps  $10^{-2}$  s, la figure II.13 montre que les tourbillons présentent davantage de structures complexes dans le cas de l'algorithme en temps de Crank-Nicolson que pour celui d'Euler. Pour  $\Delta t = 10^{-3}$  s, les deux schémas semblent donner des résultats similaires.

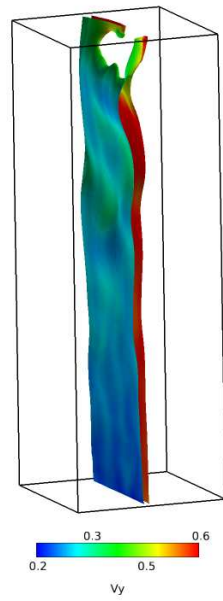
En comparant les coupes de la moyenne (temporelle) de la vitesse axiale (notée  $\langle U_y \rangle$ ) entre 8 s et 20 s (Figure II.14) aux données expérimentales, le long de l'axe d'équation  $\{y = 0.5\}$ , nous observons que les schémas d'Euler et de Crank-Nicolson fournissent tous les deux des valeurs convergées de la vitesse moyenne pour le pas de temps  $10^{-2}$  et que ces deux valeurs sont en accord avec les données expérimentales.

En considérant les coupes d'écart-type (en temps) de la vitesse axiale (noté  $(U_y)_{rms}$ ), de 8 s à 20 s, on observe les résultats rassemblés sur la figure II.15.

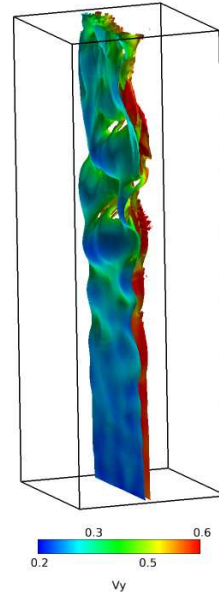
Sur la figure II.15, la distribution de l'écart-type est sous-estimée pour les deux discrétisations en temps. De plus, le schéma de Crank-Nicolson permet de calculer correctement l'extremum atteint pour le pas de temps  $10^{-2}$  s, contrairement au schéma d'Euler. Pour le pas de temps  $10^{-3}$ , les deux schémas semblent avoir atteint la convergence.

## II.5 Conclusion

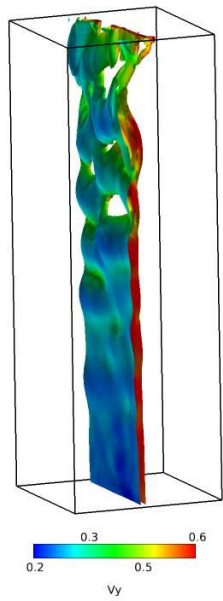
Ce chapitre est dédié à la construction d'un opérateur convectif stable de types volumes finis défini sur un maillage dual et basé sur un schéma de Crank-Nicolson en temps, pour la discrétisation en espace par l'élément fini de Rannacher-Turek de l'équation de conservation de la quantité de mouvement sur les mailles primales. Nous avons prouvé la stabilité de cette discrétisation et ensuite nous l'avons utilisée pour construire un schéma de correction de pression. On a montré que ce schéma est moins dissipatif numériquement que celui obtenu par une discrétisation d'Euler rétrograde d'ordre un en temps. Ce travail peut-être adapté au cas de la discrétisation spatiale par l'élément fini de Crouzeix-Raviart sur un maillage triangulaire. De plus, nous avons dérivé une identité d'énergie cinétique discrète et estimé la taille du défaut de dissipation. Le schéma proposé est adapté à la LES puisqu'il fournit un contrôle de l'énergie cinétique et un défaut de dissipation petit. Nous avons illustré donc les possibilités du schéma grâce à divers cas-tests bi- ou tri-dimensionnels, incompressibles ou compressibles.



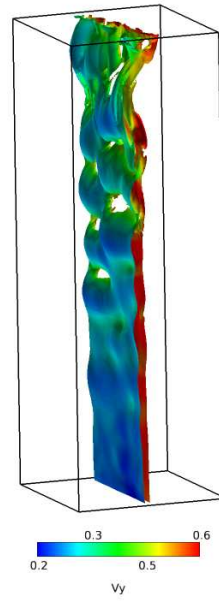
(a) Euler,  $\Delta t = 10^{-2}$ .



(b) Crank-Nicolson,  $\Delta t = 10^{-2}$ .



(c) Euler,  $\Delta t = 10^{-3}$ .



(d) Crank-Nicolson,  $\Delta t = 10^{-3}$ .

FIGURE II.13 – Isosurface de norme de vorticité instantanée pour l'isovaleur 6 au temps 20 s – Couche de mélange turbulente.

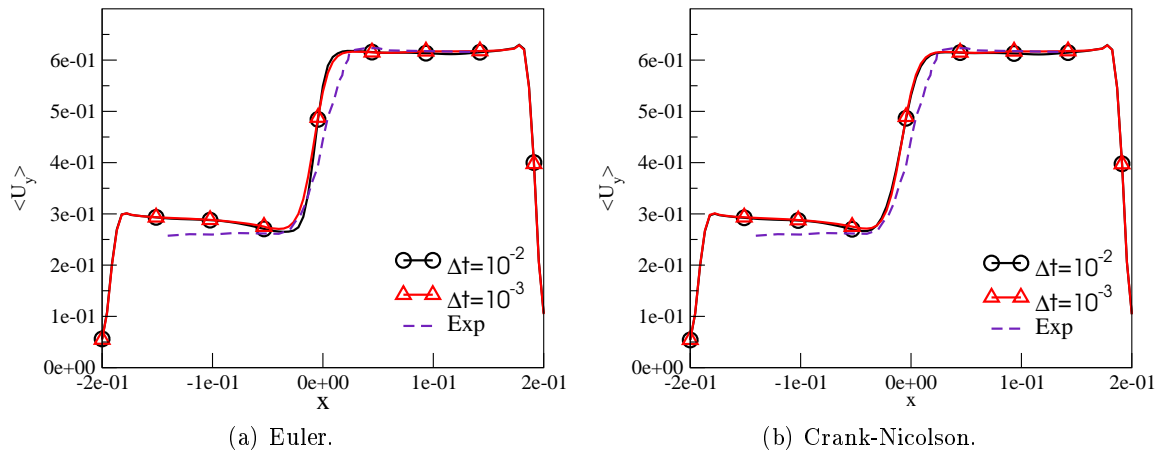


FIGURE II.14 – Moyenne (temporelle) de la vitesse axiale à  $y = 0.5$  et  $z = 0$  – Couche de mélange turbulente.

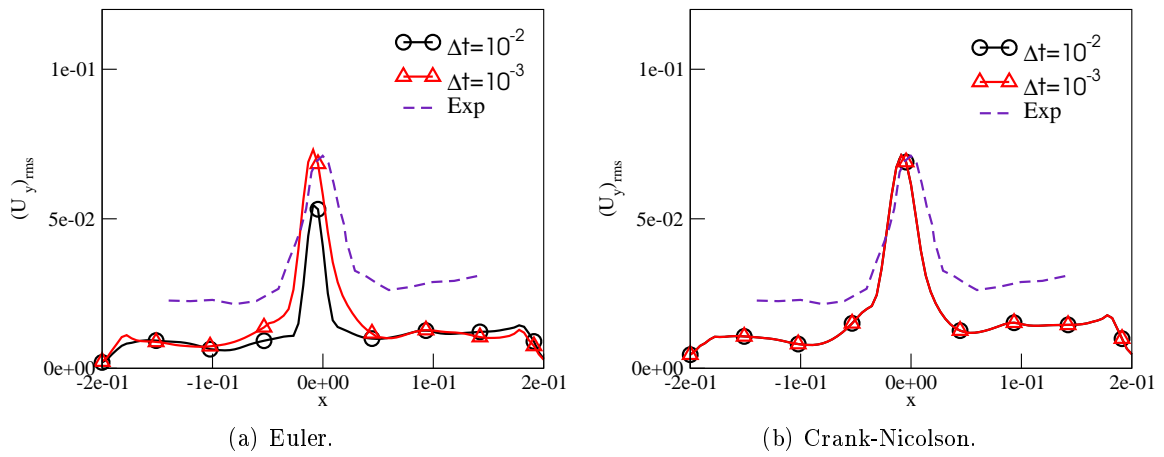


FIGURE II.15 – Écart-type (en temps) de la vitesse axiale à  $y = 0.5$  et  $z = 0$  – Couche de mélange turbulente.





## Partie II : Discrétisation en espace



## Chapitre III

# Discrétisation spatiale : contexte et motivations

Dans le contexte du développement de schémas performants pour la LES basés sur la méthode de projection incrémentale [19, 93, 36, 94] et l'élément fini de Rannacher-Turek [83] (voir la description de cet élément en Annexe A), nous proposons dans un premier temps d'étudier les capacités du schéma de projection incrémental discrétisé par cet élément fini (noté "*schéma RT*" dans la suite) pour des calculs de Simulation des Grandes Échelles (une description rapide de cette méthode appelée aussi LES est donnée dans la section 3 en Introduction).

Une première étude est réalisée pour le cas-test (académique) du canal plan périodique pour lequel des résultats de référence précis obtenus par simulation numérique directe sont à notre disposition [74]. Ce cas-test consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles filtrées (Système (4) en Introduction) avec le modèle W.A.L.E. (acronyme de Wall Adapting Local Eddy viscosity, [76], Équation (6) en Introduction) comme modèle sous-maille. La comparaison des performances des deux discrétisation spatiales suivantes : l'élément fini Rannacher-Turek avec le schéma MAC (volumes finis), fait l'objet de la première section de ce chapitre et permet de comprendre quelles qualités devra présenter le schéma numérique envisagé par la suite.

Dans une deuxième partie, nous traitons des critères requis pour le choix d'une discrétisation spatiale adaptée. Nous proposons plusieurs tests simples mettant en exergue les défauts du schéma RT, réalisés sans utiliser de modèle sous-maille afin d'éliminer tout problème éventuel lié à celui-ci (tel que l'implémentation dans un cadre non conforme). Nous cherchons dans la suite à proposer une discrétisation en espace basée sur le schéma RT qui corrige les défauts du schéma RT sur les deux cas-tests décrits ci-dessus.

Le plan du chapitre est le suivant : dans la section III.1, nous introduisons le cas-test du canal plan à  $Re_\tau = 590$  avec le modèle sous-maille W.A.L.E., que l'on résout en utilisant la méthode de projection incrémentale en temps et l'élément fini de Rannacher-Turek ou le schéma MAC en espace. Dans la section III.2, nous cherchons des critères pour construire un schéma numérique (discrétisation spatiale) basé sur le schéma RT et adapté à la LES.

### III.1 Étude d'un canal plan à $Re_\tau = 590$

Dans la sous-section III.1.1, nous introduisons les principales grandeurs physiques utilisées lors de l'étude du cas-test. Par ailleurs, nous détaillons dans la sous-section III.1.2 les paramètres choisis pour les simulations menées et, enfin, les résultats obtenus avec le modèle sous-maille W.A.L.E.

(Équation (6) en Introduction, annexes B et C pour une description de ce modèle et de son implémentation dans le cadre non conforme) sont abordés dans les dernières parties de ce travail (Section III.1.3).

### III.1.1 Description du cas-test

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère deux plaques horizontales planes parallèles infinies définies par le plan  $(x, y)$  avec des conditions de type non-glissement sur chacune d'entre elles. Les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  de l'espace sont désignées par la suite par les termes de *direction longitudinale* ou *direction principale* de l'écoulement ( $x$ ), *direction transversale* ( $y$ ) et *direction normale à la paroi* ( $z$ ). Pour les simulations, on suppose que les deux parois de mesure  $L_x \times L_y$  sont séparées d'une distance  $L_z = 2 L_0$ , et des conditions périodiques sont imposées à l'entrée et la sortie du canal dans les directions  $x$  et  $y$  (Figure III.1).

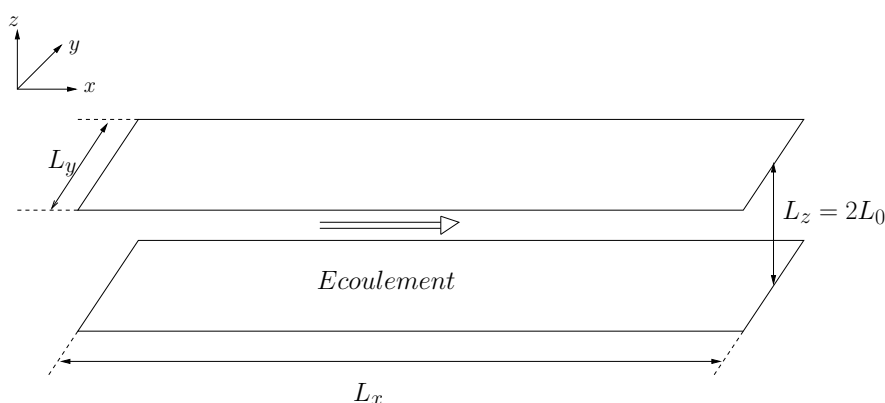


FIGURE III.1 – Configuration du cas-test de canal plan.

On s'intéresse à un écoulement turbulent incompressible décrit par les équations de Navier-Stokes filtrées (Système (4) en Introduction), entrant dans ce domaine par la partie gauche avec un débit imposé dans la direction longitudinale. Par les conditions au bord (condition d'adhérence sur les parois haute et basse et conditions périodiques dans les directions  $x$  et  $y$ ) et par la contrainte d'incompressibilité, en régime établi, la vitesse moyenne  $\bar{\mathbf{u}}$  est dirigée parallèlement aux parois.

On note  $\mathbf{u}_\tau = \sqrt{\nu \partial_z \bar{\mathbf{u}}|_{z=0}}$  la *vitesse de frottement pariétal* et on définit le *nombre de Reynolds de frottement pariétal* et la *distance à la paroi adimensionnée* :

$$\text{Re}_\tau = \frac{\mathbf{u}_\tau L_0}{\nu}, \quad \text{et} \quad z^+ = \frac{z \mathbf{u}_\tau}{\nu},$$

$\nu$  désignant la viscosité cinématique. Le nombre de Reynolds de frottement caractérise l'écoulement. De même, il est possible de définir un nombre de *Reynolds débitant* noté  $\text{Re}_d$  basé sur la vitesse débitante,  $\text{Re}_\tau$  et  $\text{Re}_d$  étant souvent corrélées [23] :

$$\text{Re}_\tau = \text{Re}_d^{7/8} 0.175. \quad (\text{III.1})$$

Par ailleurs, il existe dans la littérature de nombreux résultats de référence obtenus par DNS auxquels comparer les résultats obtenus par LES. Dans la suite, nous utilisons les résultats de [74].

De fait, le cas-test du canal plan est couramment étudié car il présente les avantages suivants [81] :

- la géométrie est simple,

- l'écoulement en canal plan est inhomogène, unidirectionnel en moyenne (profil de type Poiseuille),
- ce cas-test est bien documenté (DNS, nombreuses expériences),
- la structure asymptotique de l'écoulement consiste en deux couches : une zone pariétale et un cœur de l'écoulement caractérisé par un frottement turbulent approximativement linéaire.

### III.1.2 Choix des paramètres pour la Simulation des Grandes Échelles

Dans ce paragraphe, nous abordons la question du choix des paramètres de calcul qui doivent être déterminés précisément afin de séparer correctement les grandes échelles des petites d'une part et d'exploiter les résultats obtenus par DNS d'autre part.

#### III.1.2.a Choix du domaine de calcul

Afin de déterminer les dimensions du domaine de calcul  $\Omega$ , la littérature se base sur deux points [74, 71] :

- On considère les deux variables aléatoires données par chacune des valeurs des fluctuations de la vitesse à l'entrée et à la sortie du canal dans les directions homogènes  $x$  et  $y$ . La longueur et la profondeur du canal sont choisies (ajustées lors des expériences ou simulations) de sorte que ces variables soient non-corrélées après une demi-période.
- De plus, le domaine doit pouvoir contenir deux grosses structures (une grosse structure représente environ 2000 unités de paroi, *i.e.*  $2000/l_\tau$ , dans la direction longitudinale et 1000 unités de paroi dans la direction transverse).

Le domaine de calcul  $\Omega$  retenu pour les simulations est donc le suivant :

$$\Omega = [0; 2\pi L_0] \times [0; \pi L_0] \times [0; 2L_0].$$

#### III.1.2.b Choix du maillage

Une fois les dimensions du domaine connues, l'objet de cette partie est de traiter du choix du maillage LES pour les simulations.

De manière générale, pour les calculs LES, le maillage est uniforme dans les directions transverse et longitudinale mais il est à noter que la taille des mailles dans la direction transverse semble avoir un rôle non négligeable dans l'évolution de l'écoulement [18]. De plus, dans le sens de la hauteur, le maillage est raffiné près des parois et plus relâché au centre du canal pour limiter le nombre de cellules. La raison en est que les structures motrices d'un écoulement turbulent sont concentrées près de la paroi, comme mis en évidence sur la nappe d'isovaleurs de la vorticit   présentée ci-dessous (Figure III.2).

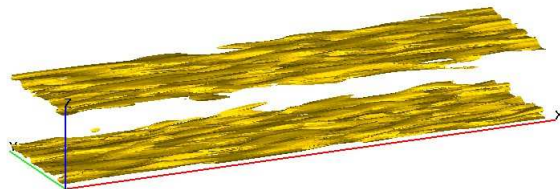


FIGURE III.2 – Isosurface d'isovaleur 3 du champ vorticit  .

Afin de construire un maillage adapt   dans la direction normale    la paroi,

1. la première arête près du bord se trouve à une distance de la paroi  $z^+ = 1$  afin de séparer les petites structures des autres,
2. au centre du canal où se trouvent les grosses structures, il n'est pas utile de raffiner autant le maillage. Cependant, pour contrôler les erreurs commises entre les approximations sur deux cellules adjacentes, la progression de la taille de celles-ci doit être comprise entre 10% et 14%.

Le maillage retenu pour les simulations à venir est constitué de  $40 \times 48 \times 88$  mailles et une progression en  $\tanh$  [53, p.89] est utilisée dans la direction normale à la paroi :

$$\forall k \in [1; N_z], \quad z_k = L_0 \left\{ 1 + \frac{1}{a} \tanh \left[ \left( -1 + \frac{2(k-1)}{N_z-1} \right) \operatorname{arctanh} a \right] \right\}, \quad (\text{III.2})$$

où  $N_z$  désigne le nombre de sommets dans la direction  $z$  et  $a$  un nombre réel déterminé pour satisfaire les points 1 et 2 ci-dessus, *i.e.*  $a = 0.98605$  (soit une progression entre deux mailles adjacentes de l'ordre de 11.87%).

Le maillage considéré satisfait les conditions précitées. En effet, pour  $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\text{Re}_\tau = 590$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\tau &= \frac{\nu \text{Re}_\tau}{L_0} = 0.118, \\ \mathbf{u}_d &= \frac{\nu}{L_0} \left( \frac{\text{Re}_\tau}{0.175} \right)^{\frac{8}{7}} = 2.15, \\ l_\tau &= \frac{L_0}{\text{Re}_\tau} = 8.47 \times 10^{-4}, \\ \Delta_x^+ &= \frac{4\pi \text{Re}_\tau}{N_x} = 92.6, \\ \Delta_y^+ &= \frac{2\pi \text{Re}_\tau}{N_y} = 38.5, \\ (\Delta_z^+)_{\min} &= 1, \text{ et } (\Delta_z^+)_{\max} = 17.08. \end{aligned}$$

### III.1.2.c Initialisation du champ turbulent

L'étude du canal plan turbulent nécessite préalablement de générer la turbulence. De nombreux auteurs initialisent la vitesse par la somme d'un profil de type Poiseuille (solution des équations de Navier-Stokes pour le cas-test du canal plan) et d'une perturbation arbitraire à divergence nulle pour ajouter des fluctuations (par exemple, [71, p.110] ou [67, Expression (40), p.743]). Les premiers tests réalisés avec ces méthodes montrent qu'effectivement, le champ de vitesse moyen est turbulent mais que les fluctuations sont rapidement atténuées.

Une autre possibilité, appelée recyclage, est la suivante [14, p.66] : le champ de vitesse est initialisé par la vitesse sauvegardée à l'issue de la simulation d'un écoulement de canal plan à  $\text{Re}_\tau = 3600$  (Figure III.3). Les tests effectués montrent que, par cette deuxième méthode, les fluctuations gardent des valeurs raisonnables. Nous la retenons donc pour la suite des calculs.

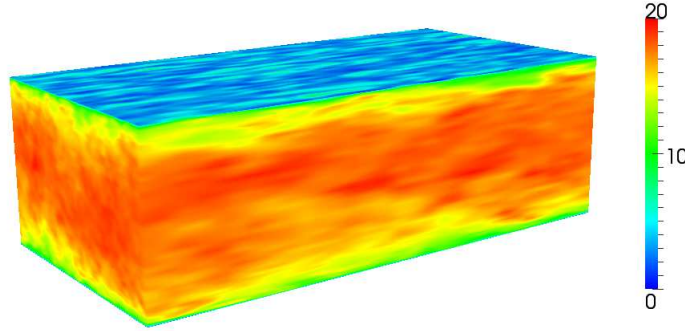


FIGURE III.3 – Profil de la composante longitudinale de vitesse pour l'initialisation du canal plan turbulent.

#### III.1.2.d Forçage

L'écoulement étant incompressible, la vitesse moyenne dans le canal est constante compte tenu de la géométrie du domaine. Pour ce faire, le débit du fluide est imposé (et maintenu) dans le canal au moyen d'une force volumique. Il s'agit d'une force itérative, vectorielle (dirigée longitudinalement dans le canal) dont l'expression est détaillée dans [24, 85] : étant donné le nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau$ , on déduit une valeur du débit de référence (par exemple, en utilisant la corrélation de Dean (III.1)) et on construit la force  $F^{n+1}$  au temps  $t^{n+1}$  en appliquant la formule suivante

$$F^{n+1} = F^n + \frac{(Q^{ref} - Q^n) - \frac{1}{2}(Q^{ref} - Q^{n-1})}{S},$$

où

- $F^n$  représente la force appliquée au temps  $t^n$ ,
- $Q^n$  est le débit calculé au temps  $t^n$ ,
- $S$  la mesure de la section (verticale) du canal.

La valeur de  $F^0$  est donnée par l'utilisateur.

#### III.1.2.e Choix du débit de référence

Dans [74], seule figure la valeur du  $Re_\tau$  choisie pour les simulations. Cependant, la relation entre les nombres de Reynolds de frottement et débitant utilisée n'est pas explicitée à notre connaissance, il nous est donc impossible de déterminer la valeur du débit  $Q^{ref}$  à maintenir.

Nous allons dans la suite imposer le débit calculé par intégration des moments de vitesse d'ordre un présentés dans [74], soit  $Q^{ref} = 4318.5$  (soit  $\mathbf{u}_d = 2.19 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

#### III.1.2.f Statistiques

La validation/comparaison des résultats de LES se basant principalement sur les moments d'ordre un (*moyenne*) et deux (*écart-type*) de la vitesse, nous proposons de décrire dans ce paragraphe le calcul de ces deux quantités.

Pour cela, nous choisissons une direction privilégiée déterminée par le profil de l'écoulement. Dans la direction parallèle à la paroi (la même démarche s'applique dans les autres directions) :



- le domaine  $\Omega$  est découpé selon des tranches définies par des plans horizontaux  $(x, y)$  de hauteur  $z_0$  ( $z_0$  est l'ordonnée d'une demi-maille), comme décrit par la figure III.4.

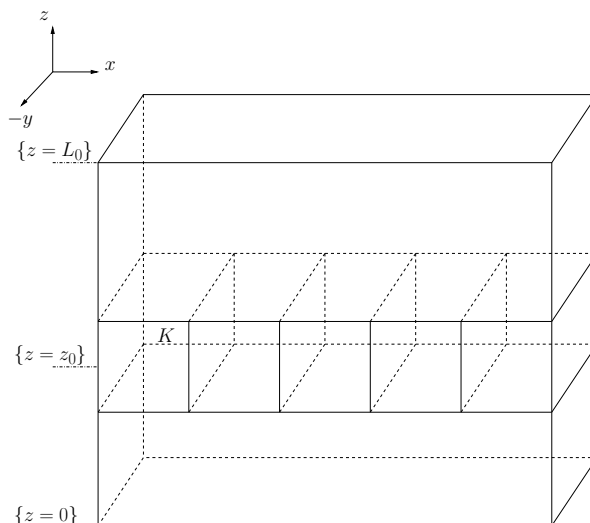


FIGURE III.4 – Découpage du domaine de calcul pour estimer les moments.

- Étant donnée une subdivision de l'intervalle de simulation en périodes contenant  $n_0$  itérations, les statistiques sont réinitialisées au début de chacune d'entre elles et calculées comme suit. Sur une période  $[i n_0 \Delta t; (i + 1) n_0 \Delta t]$ , la moyenne de la vitesse sur la tranche de hauteur  $\{z = z_0\}$  notée  $\langle \mathbf{u} \rangle (z_0)$  a pour valeur

$$\langle \mathbf{u} \rangle (z_0) = \frac{1}{n_0 \Delta t \sum_{\{K \in \mathcal{T}_h; (x, y, z_0) \in K\}} |K|} \sum_{j=i n_0}^{(i+1) n_0} \Delta t \sum_{\{K \in \mathcal{T}_h; (x, y, z_0) \in K\}} |K| \mathbf{u}_K(x, y, z_0, j \Delta t),$$

où  $\mathbf{u}_K$  désigne la moyenne (spatiale) de la vitesse  $\mathbf{u}$  sur la maille  $K$ , calculée à l'aide d'une règle de quadrature d'ordre suffisant (déterminé en fonction de la discrétisation spatiale). Dans la pratique,  $\Delta t = 10^{-2}$  s et les calculs de moyenne (en temps et en espace) ont lieu toutes les 1000 itérations (sur 10000 itérations).

- Le calcul de l'écart type noté  $U_{rms}$  (acronyme de root mean square value en anglais) en découle.

### III.1.2.g Détermination du temps final

Le temps final est déterminé de telle sorte que le régime de l'écoulement soit établi à cet instant (*i.e.* turbulence pleinement développée). Pour décider de ce dernier point lors des simulations, plusieurs critères sont proposés dans la littérature et nous retenons le suivant :

- les statistiques en vitesse évaluées sur deux périodes consécutives ne diffèrent pas,
- celles-ci sont lisses.

Pour les calculs à venir, le temps final retenu pour les simulations est de 100 s, ce qui représente 68 tours de canal.

### III.1.3 Résultats numériques

Pour ce calcul, la discrétisation en temps est du type correction de pression, plus précisément ici il s'agit de la méthode de projection incrémentale (Chapitre I) basée sur une approximation de la dérivée temporelle par le schéma BDF2 (Backward Difference Formula of order 2).

Afin d'évaluer les capacités du schéma RT, nous le comparons au schéma MAC connu pour donner des résultats satisfaisants et à ceux de référence (DNS de [74]).

Compte tenu du profil de l'écoulement (voir la sous-section III.1.1), nous traitons seulement des moments de la composante longitudinale de la vitesse. Le canal étant symétrique, il suffit de les représenter sur un demi-canal. Enfin, ils sont adimensionnés par la vitesse de frottement pariétal en fonction de la hauteur dans le canal (exprimée en unités de parois), comme sur la figure III.5.

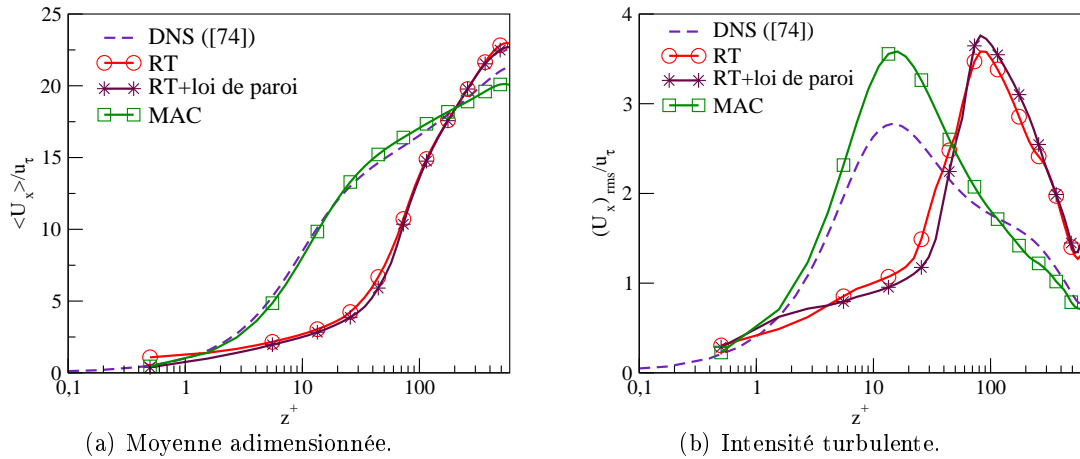


FIGURE III.5 – Profils des moments (en espace et en temps) adimensionnés de la composante longitudinale de la vitesse résolue entre 90 s et 100 s –  $Re_\tau = 590$ , modèle W.A.L.E.

D'après la figure III.5(a), il semble que les profils de vitesse moyenne pour le schéma RT sont éloignés de ceux de DNS, à la différence du schéma MAC. Par ailleurs, l'intensité turbulente est surestimée pour ces deux discrétisations par rapport à la DNS (Figure III.5(b)).

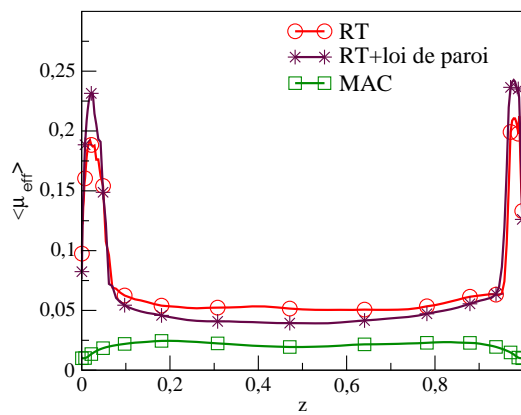


FIGURE III.6 – Profils de la moyenne (en espace et en temps) de la viscosité effective entre 90 s et 100 s –  $Re_\tau = 590$ , modèle W.A.L.E.

Nous traitons à présent du profil de viscosité effective moyenne en fonction de la hauteur dans le canal (Figure III.6). Généralement, celui-ci présente des extrema près des parois parce qu'il y a un fort taux de dissipation dans ces zones. En revanche, en s'éloignant de celles-ci, il y a de moins en moins de structures turbulentes et donc la valeur de la viscosité turbulente diminue (il ne reste

que la viscosité laminaire).

- Le profil de viscosité moyenne approchée par le schéma MAC présente des extrema d’amplitude 0.025 en  $z^+ = 0.25$  et  $z^+ = 0.74$ .
- Ce n’est pas le cas du schéma RT : en effet, l’amplitude des extrema est dix fois plus importante que pour le schéma MAC et se situe en  $z^+ = 0.02$  et  $z^+ = 0.98$ . Ainsi, la viscosité (turbulente) est importante près des parois et l’écoulement dissipe beaucoup trop d’énergie, ce qui aplatit le profil de vitesse moyenne près des parois. En revanche, au centre du canal où la viscosité turbulente est petite, les profils de vitesse se rapprochent de ceux de référence.

Afin de corriger le mauvais comportement de la viscosité en proche paroi, nous proposons de tester l’ajout d’une loi de paroi au schéma RT. Les lois de paroi sont habituellement utilisées pour imposer un ”bon” frottement à la paroi. Ici, nous avons par exemple choisi de représenter les résultats obtenus pour la loi de Werner et Wengle [97] imposant au profil de vitesse instantané d’obéir à la loi suivante (voir les propriétés intéressantes de ce modèle dans [1, p. 109]) :

$$\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{u}_\tau} = \begin{cases} z^+, & \text{si } z^+ \leq 11.81, \\ A(z^+)^B, & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour  $A = 8.2$  et  $B = 1/7$ . Il est bon de noter que le profil de viscosité pour le schéma RT reste inchangé, malgré l’ajout d’une loi de paroi.

### III.1.4 Conclusion (provisoire) concernant le cas-test du canal plan

Cette section montre que, pour le cas-test du canal plan à Reynolds 590, le schéma RT ne permet pas de retrouver les profils des moments de vitesse de référence (DNS). Nous cherchons donc des critères permettant de construire un schéma adapté à la LES basé sur le schéma RT, ce test indiquant clairement la nécessité de proposer un schéma de type MAC.

Dans la partie I, nous avons proposé une discrétisation en temps qui n’améliore pas les moments de vitesse pour le cas-test du canal plan à  $Re_\tau = 590$  pour le schéma RT au contraire du schéma MAC. Pour cette raison, nous proposons de traiter dans la suite à la discrétisation spatiale.

## III.2 Quels critères portant sur la discrétisation spatiale pour la LES ?

Dans cette section, dans le but de construire un schéma basé sur le schéma RT et adapté à la LES pour des maillages non structurés, nous nous interrogeons d’abord sur les critères sélectionnés par la littérature dans le contexte plus général des méthodes basées sur des éléments finis ou des volumes finis. Nous présentons ensuite deux tests simples soulignant un défaut du schéma RT, à savoir le manque de précision pour des écoulements à convection dominante.

### III.2.1 Bibliographie

Nous distinguons dans la littérature trois grands types de méthodes numériques proposant une discrétisation spatiale adaptée à la LES et valide pour des maillages non structurés.

1. Un certain nombre d’auteurs présentent une généralisation du schéma MAC valide pour des maillages généraux.

Au sein du code CDP (code CFD développé à Stanford), un schéma volumes finis valide pour des maillages quelconques est proposé dans [66] pour des écoulements incompressibles

et étendu dans [45] pour des écoulements faible Mach à masse volumique variable. Pour ce schéma, les inconnues cartésiennes de vitesse et la pression se trouvent au centre des cellules primales tandis que les inconnues de vitesse normales aux arêtes (si  $d = 2$ ) ou faces (si  $d = 3$ ) sont stockées indépendamment des autres au centre des arêtes ou des faces. Une approche prédicteur-correcteur est utilisée, permettant de calculer la vitesse prédite au centre des volumes de contrôle et d'en déduire les vitesses normales aux faces par interpolation. Enfin, les vitesses normales aux faces sont projetées, conduisant à un problème de Poisson sur la pression. Une amélioration de ce schéma a de plus été proposée dans [46].

Par ailleurs, dans le cas compressible, une généralisation du schéma MAC en coordonnées cylindriques est introduite dans [25], en adaptant la construction de l'opérateur convectif anti-symétrique proposée dans [73] (différences finies).

2. Il existe dans la littérature des méthodes basées sur des éléments finis de degré élevé et introduisant un terme supplémentaire de stabilisation censé jouer le rôle du modèle sous-maille [42, 59].
  - Par exemple, dans [39], l'espace d'approximation pour la vitesse est décomposé en deux niveaux (échelles résolues et échelles sous-maille), et un terme de diffusion artificielle est ajouté à l'équation d'advection-diffusion considérée. Cette méthode, valide pour des maillages quasi uniformes, donne des résultats satisfaisants pour des problèmes à convection dominante.
  - Puisque la commutation du filtre et de l'opération de différentiation n'est pas toujours vraie, les méthodes dites VMS (Variational MultiScale method) constituent une extension possible de la LES (introduite dans [52] dans le cas incompressible pour des éléments finis et étendue par [61] au cadre compressible, pour une discrétisation spatiale mixte par des éléments finis/volumes finis). Les méthodes VMS reposent sur le principe suivant : on décompose l'écoulement selon trois types d'échelles, à savoir les échelles non résolues, les petites échelles résolues et les grandes échelles résolues. On considère que les échelles non résolues n'influencent pas directement les grandes échelles et que l'influence des échelles non résolues, limitée aux petites échelles, est modélisée par un terme de viscosité. Ainsi, les grandes échelles sont influencées indirectement par les échelles non résolues du fait du couplage des échelles (la non-linéarité des équations de Navier-Stokes). Les différences essentielles de cette méthode avec la LES sont les suivantes : d'une part, les espaces d'approximation sont définis par projection sur des espaces de fonctions appropriés, plutôt que par filtrage et d'autre part l'effet des échelles non résolues est modélisé seulement sur les "petites échelles résolues", pas sur les grandes.
3. Par ailleurs, il existe certaines méthodes dans la littérature reposant sur l'enrichissement de l'espace d'approximation discret pour la pression.
  - C'est le cas de la littérature de Trio-U (code CFD développé au CEA) qui fait référence à la nécessité d'enrichir l'espace d'approximation discret pour la pression de l'élément fini Crouzeix-Raviart dans le cadre d'applications utilisant la LES (des explications sont fournies dans [1, p. 27]). Ainsi, dans [48], l'auteur propose de travailler avec l'espace d'approximation pour la pression  $\mathbb{P}_1$  bulle pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . De plus, la construction de cet espace est étendue dans le cas où  $d = 3$  dans [32] où le choix des espaces discrets est déterminé de manière à satisfaire une identité d'énergie cinétique. Enfin, l'analyse de compatibilité pour ce nouvel élément et des estimations d'erreur sur le problème de Stokes sont présentées dans [7].

Enfin, il semble que ce type de méthode soit développé sur des quadrangles/hexaèdres dans Trio-U et qu'elle donne des résultats satisfaisants dans le cas où les mailles sont carrées ou cubiques, mais pas pour des maillages rectangles ou pavés.

- Dans [58, 60], il est proposé d'utiliser une méthode VMS basée sur une projection variationnelle pour des maillages structurés : la discrétisation en espace est basée sur l'élément fini  $\mathbb{Q}_2/\mathbb{P}_{1disc}$  pour les petites échelles tandis que les grandes échelles sont obtenues par projection dans l'espace  $\mathbb{Q}_0$ . Ainsi, le système discret repose sur l'espace d'approximation  $\mathbb{Q}_2$  pour la vitesse et l'espace  $\mathbb{P}_{1disc} + \mathbb{P}_0$  pour la pression. Il est d'ailleurs constaté, pour le cas-test du canal plan à  $Re_\tau = 180$  [60], que cette méthode fournit une approximation de la moyenne de la vitesse en accord avec les références, et surestime l'intensité turbulente. Il en est de même pour des cas-tests plus complexes [58] comme celui des couches de mélange à  $Re = 10000$  (appariement de tourbillons) ou bien un écoulement turbulent derrière un cylindre.

### III.2.2 Cas-tests simples illustrant les défauts du schéma RT

Nous présentons plusieurs cas-tests simples supplémentaires réalisés sans modèle sous-maille afin d'éliminer tout problème hypothétique lié à ce dernier.

#### III.2.2.a Problème d'Oseen stationnaire à convection dominante

Nous proposons de construire une solution manufacturée  $(\mathbf{u}^{exact}, p^{exact})$  aux équations de Navier-Stokes stationnaires incompressibles (Système (1) en Introduction, Section 2) et de tester l'approximation de la solution obtenue pour le problème d'Oseen stationnaire (Système (8) en Introduction) avec, pour vitesse d'advection,  $\mathbf{u}^{exact}$ .

Pour ce test, le domaine de calcul est  $\Omega = [0; 1]^2$ , et afin d'avoir un écoulement à convection dominante nous prenons  $\mu = 10^{-3}$  Pa · s et  $\rho = 1$  kg · m<sup>-3</sup>. La solution analytique  $(\mathbf{u}^{exact}, p^{exact})$  est donnée par

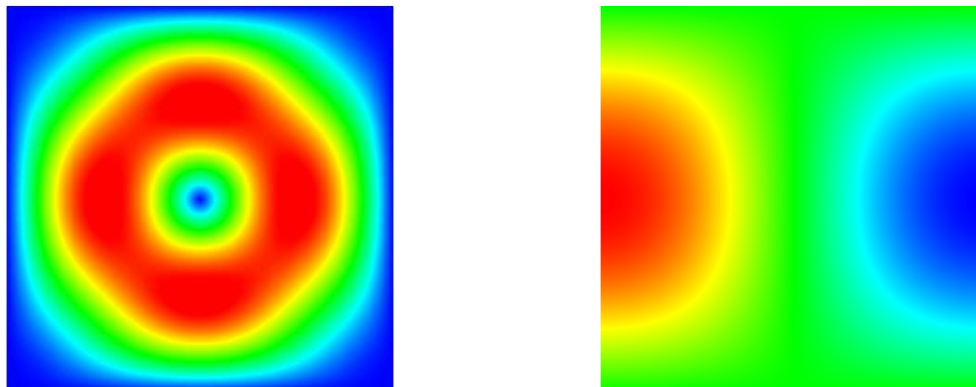
$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{exact}(x, y) &= \text{rot}(\sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2) = \begin{pmatrix} 2\pi \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y) \cos(\pi y) \\ -2\pi \sin(\pi y)^2 \sin(\pi x) \cos(\pi x) \end{pmatrix}, \\ p^{exact}(x, y) &= \cos(\pi x) \sin(\pi y), \end{aligned}$$

afin qu'elle vérifie des conditions au bord de type Dirichlet homogènes pour la vitesse (Figure III.7).

Afin de déterminer numériquement l'état stationnaire, nous utilisons une pseudo-évolution en temps avec une méthode de projection : précisément, un schéma de projection incrémental (de type BDF2) est appliqué à chaque itération en temps tant qu'un critère d'arrêt n'est pas satisfait. Nous supposons que l'état stationnaire est atteint lorsque la norme  $L^\infty$  des incréments de vitesse et de pression est assez petite (inférieure à un paramètre  $\xi$  multiplié par  $\Delta t$ ). En pratique, pour ce calcul,  $\Delta t = 10^{-2}$  s et  $\xi = 10^{-5}$ .

Les maillages utilisés sont rectangles uniformes, constitués de  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$ ,  $40 \times 40$  et  $80 \times 80$  cellules. La convergence spatiale du schéma RT comparée à celle du schéma MAC est représentée sur la figure III.8 (échelle logarithmique).

La figure III.8 montre une convergence spatiale d'ordre deux pour le schéma RT et le schéma MAC, le schéma RT étant moins précis que le schéma MAC. Puisque le schéma MAC a seulement des inconnues de vitesse normales aux arêtes et puisque la composante tangente du gradient de pression discret est nulle pour l'élément fini de Rannacher-Turek, on propose dans la suite d'évaluer séparément la contribution de chacune des composantes de vitesse (tangente et normale) pour l'élément fini de Rannacher-Turek.



(a) Module de vitesse.

(b) Pression.

FIGURE III.7 – Profils des solutions exactes – Problème d’Oseen stationnaire à convection dominante.

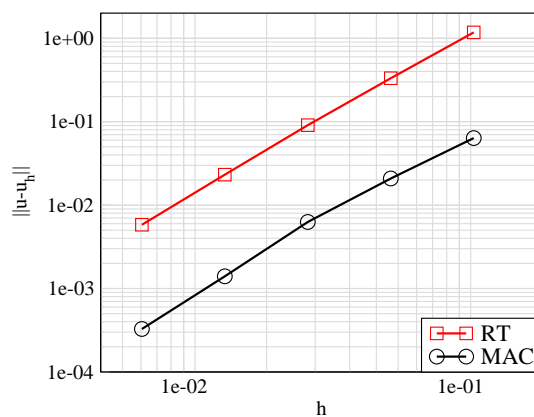


FIGURE III.8 – Norme  $L^2$  de l’erreur d’approximation (relative) pour la vitesse en fonction du pas d’espace – Problème d’Oseen stationnaire à convection dominante.

Considérons les champs de “vitesse normale” et de “vitesse tangente” notés respectivement  $\mathbf{u}^{normal}$  et  $\mathbf{u}^{tangent}$

$$\mathbf{u}^{normal} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma \varphi_\sigma \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^{tangent} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} \mathbf{u}_\sigma \cdot \boldsymbol{\tau}_\sigma \varphi_\sigma,$$

où  $\mathbf{u}_\sigma$  désigne le degré de liberté pour la vitesse et  $\varphi_\sigma$  est la fonction de forme en vitesse pour l’élément fini de Rannacher-Turek, tous deux étant associés à l’arête  $\sigma$ .

On définit la norme  $L^2$  pour les composantes  $\mathbf{u}^{normal}$  et  $\mathbf{u}^{tangent}$  de la vitesse comme suit

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^{normal}\|_0^2 &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} |D_\sigma| |\mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma|^2, \\ \|\mathbf{u}^{tangent}\|_0^2 &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} |D_\sigma| |\mathbf{u}_\sigma \cdot \boldsymbol{\tau}_\sigma|^2. \end{aligned}$$

Nous étudions dans la suite de ce paragraphe la convergence spatiale en norme  $L^2$  des composantes normales et tangentes de la vitesse pour le problème d’Oseen stationnaire à convection dominante (Figure III.9).

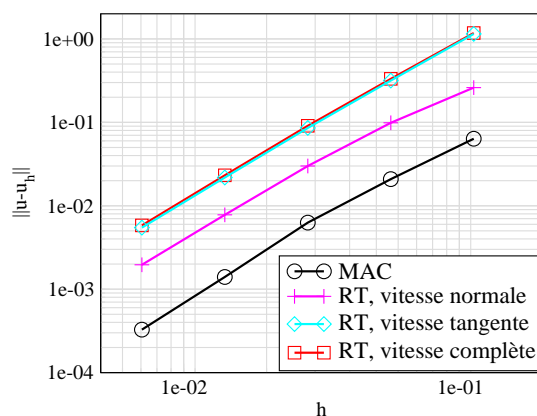


FIGURE III.9 – Norme  $L^2$  de l’erreur d’approximation (relative) pour les composantes normale et tangente de vitesse en fonction du pas d’espace – Problème d’Oseen stationnaire à convection dominante.

D’après la figure III.9, on constate que le défaut de précision du schéma RT semble être dicté principalement par le champ de vitesse tangente. En revanche, les degrés de liberté normaux aux arêtes présentent une erreur d’approximation réduite.

### Conclusion (provisoire) pour le problème d’Oseen stationnaire à convection dominante

Pour le cas-test d’Oseen à convection dominante, le schéma RT souffre d’un défaut de précision comparé au schéma MAC, il semble provenir des composantes tangentes de vitesse aux arêtes. Dans la suite de ce mémoire (Chapitre IV), nous proposons de pénaliser chaque degré de liberté de vitesse tangente à une arête (si  $d = 2$ ) ou face (si  $d = 3$ ) afin qu’il soit proche d’une combinaison linéaire des degrés de liberté normaux alentour. Cette construction permet de réduire le défaut de précision du schéma RT.

#### III.2.2.b Problème du tourbillon isolé

On admet parfois [32] qu’un schéma adapté à la LES doit avoir la propriété de calculer exactement une solution particulière des équations d’Euler incompressibles stationnaires, où le gradient

de pression équilibre exactement le terme convectif. Cette propriété signifie moralement que loin de la paroi, aux endroits où les effets dissipatifs du modèle sous-maille ne se font plus sentir, le schéma RT n'est pas fidèle à la physique dans le cas où le nombre de Reynolds est très grand ( $\text{Re} = \infty$ ); c'est la stratégie que nous étudions ici. Cette solution s'écrit  $\mathbf{u}^{exact}(x, y) = (y, -x)^t$  et  $p^{exact}(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ , elle vérifie l'analogie discret du système (9) en Introduction pour le schéma MAC mais pas pour le schéma RT sur un maillage rectangle uniforme (l'erreur est en  $\mathcal{O}(1)$  par rapport au pas d'espace).

### 1- Élément fini de Rannacher-Turek

Rappelons que l'élément fini de Rannacher-Turek est un élément fini mixte, défini sur des quadrangles comme suit :

- les inconnues de vitesse sont situées sur les arêtes. La vitesse discrète appartient à l'espace d'approximation noté  $\mathbf{X}_h$  des fonctions  $\widehat{\mathbb{Q}}_1$  par cellules. Le degré de liberté en vitesse associé à l'arête  $\sigma$  et à la composante  $i$  est noté  $\mathbf{u}_{\sigma,i}$  et déterminé de telle sorte que la moyenne du saut de  $\mathbf{u}_i$  soit nulle à travers  $\sigma$ . De ce fait, la vitesse discrète est discontinue et cet élément est non conforme.
- les inconnues de pression sont situées au centre des cellules, et la pression est constante par maille. Nous notons  $\mathbf{M}_h$  l'espace discret d'approximation pour la pression.

#### Notations

Adoptons les notations de la figure III.10. Étant données deux cellules  $K$  et  $L$  d'un maillage rectangle uniforme de  $\Omega$ , on note  $\sigma = K|L$  une arête les séparant et  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) les arêtes de la cellule diamant  $D_\sigma$ . Nous notons les approximations des flux massiques sur le maillage primal :  $F_W, F_S, F_N, F_E$  et  $\widetilde{F}_W, \widetilde{F}_S, \widetilde{F}_E, \widetilde{F}_N$  et sur le maillage dual :  $F_{\sigma,\varepsilon_1}, F_{\sigma,\varepsilon_2}, F_{\sigma,\varepsilon_3}$  et  $F_{\sigma,\varepsilon_4}$ .

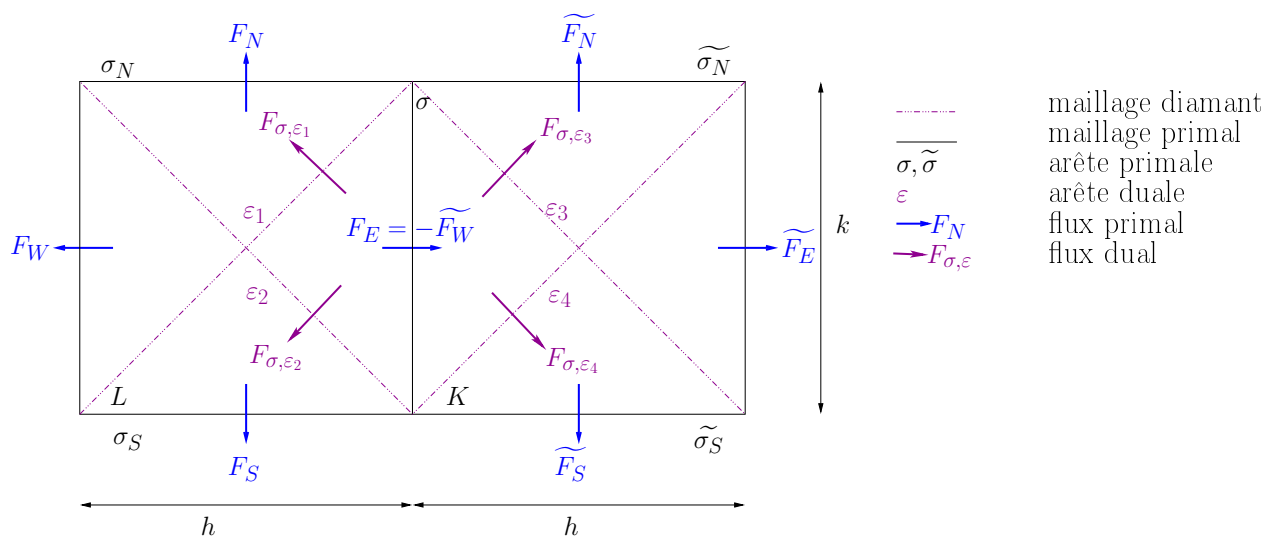


FIGURE III.10 – Notations concernant la discrétisation spatiale par l'élément fini de Rannacher-Turek.

On note  $x_\sigma$  et  $y_\sigma$  les coordonnées du centre de  $\sigma$  et  $h$  et  $k$  le pas d'espace dans les directions  $x$  et  $y$ .

#### Discrétisation des équations d'Euler stationnaires incompressibles

##### a- Discrétisation du gradient de pression sur l'arête $\sigma$

Nous allons montrer que la composante selon  $\mathbf{e}^{(y)}$  du terme convectif non-linéaire discret est



non nulle sur les arêtes dont la normale est portée par  $\mathbf{e}^{(x)}$ , impliquant alors que le terme convectif et le gradient de pression discrets ne s'équilibrent dans le cas d'un maillage rectangle uniforme.

Compte tenu que l'espace d'approximation pour la pression est constitué de fonctions constantes par mailles, par la formule de Stokes, le gradient de pression discret sur l'arête  $\sigma$  s'écrit (Chapitre I) :

$$|D_\sigma| (\nabla p)_\sigma = |\sigma| (p_L - p_K) \mathbf{n}_{K,\sigma},$$

et celui-ci est dirigé selon la normale aux arêtes. D'où, par définition de la solution exacte pour la pression d'abord et puisque  $y_K = y_L$  ensuite,

$$\begin{aligned} |D_\sigma| (\nabla p^{exact})_{\sigma,x} &= \frac{|\sigma|}{2} (x_K + x_L) (x_K - x_L), \\ &= hk x_\sigma. \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

#### b- Discrétisation du terme convectif non-linéaire sur l'arête $\sigma$

La discrétisation de l'opérateur convectif pour l'élément fini de Rannacher-Turek est décrite en détail au paragraphe II.2.1. Appliqué à une fonction  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}_h$ , il s'écrit :

$$\frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\varepsilon=D_\sigma|D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon} \mathbf{u}_\varepsilon,$$

où  $\mathbf{u}_\varepsilon$  est une approximation centrée de la vitesse sur les arêtes internes. Dans la suite, nous étudions le terme suivant

$$\sum_{\varepsilon=D_\sigma|D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon} \mathbf{u}_\varepsilon^{exact}.$$

Avec les notations du paragraphe II.2.1, commençons par voir que l'expression de l'approximation des flux de masse sur le maillage dual est construite à partir des flux primaux comme suit (utiliser le tableau II.1 et les expressions suivantes :  $F_{\sigma,\varepsilon_1} = F_{E|N}$ ,  $F_{\sigma,\varepsilon_2} = -F_{S|E}$ ,  $F_{\sigma,\varepsilon_3} = -F_{N|W}$  et  $F_{\sigma,\varepsilon_4} = F_{W|S}$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{\sigma,\varepsilon_1} = \frac{1}{8} F_W - \frac{3}{8} F_E - \frac{1}{8} F_S + \frac{3}{8} F_N, \\ F_{\sigma,\varepsilon_2} = \frac{1}{8} F_W - \frac{3}{8} F_E + \frac{3}{8} F_S - \frac{1}{8} F_N, \\ F_{\sigma,\varepsilon_3} = -\frac{3}{8} \widetilde{F}_W + \frac{1}{8} \widetilde{F}_E - \frac{1}{8} \widetilde{F}_S + \frac{3}{8} \widetilde{F}_N, \\ F_{\sigma,\varepsilon_4} = -\frac{3}{8} \widetilde{F}_W + \frac{1}{8} \widetilde{F}_E + \frac{3}{8} \widetilde{F}_S - \frac{1}{8} \widetilde{F}_N. \end{array} \right. \quad (\text{III.4})$$

L'expression de la solution analytique  $\mathbf{u}^{exact} = (y, -x)^T$  implique :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_W = -F_E, \\ F_S = -F_N, \\ \widetilde{F}_W = -\widetilde{F}_E, \\ \widetilde{F}_S = -\widetilde{F}_N, \\ \widetilde{F}_E = F_E. \end{array} \right.$$

Ainsi, les équations (III.4) s'écrivent encore :

$$\begin{cases} F_{\sigma,\varepsilon_1} &= \frac{1}{2}(F_N - F_E), \\ F_{\sigma,\varepsilon_2} &= -\frac{1}{2}(F_E + F_N), \\ F_{\sigma,\varepsilon_3} &= \frac{1}{2}(F_E + \widetilde{F}_N), \\ F_{\sigma,\varepsilon_4} &= \frac{1}{2}(F_E - \widetilde{F}_N). \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

- Équation associée à l'arête  $\sigma$  dans la direction  $x$ .

Remarquons que le fait que  $\sum_{\varepsilon=D_\sigma|D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon} = 0$  implique que :

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon=D_\sigma|D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon} \mathbf{u}_{\varepsilon,x}^{exact} &= \sum_{\varepsilon=D_\sigma|D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon} \left( \frac{\mathbf{u}_{\sigma,x}^{exact} + \mathbf{u}_{\sigma',x}^{exact}}{2} \right) - \mathbf{u}_{\sigma,x}^{exact} \sum_{\varepsilon=D_\sigma|D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon}, \\ &= \sum_{\varepsilon=D_\sigma|D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon} \left( \frac{\mathbf{u}_{\sigma',x}^{exact} - \mathbf{u}_{\sigma,x}^{exact}}{2} \right). \end{aligned}$$

De ce fait, en utilisant l'équation (III.5) d'abord et l'expression de l'approximation des flux primaux  $F_N = -|\sigma_N| x_L$  et  $\widetilde{F}_N = -|\widetilde{\sigma}_N| x_K$  ensuite (la solution analytique  $\mathbf{u}^{exact}$  étant linéaire, ses degrés de liberté sont égaux à la valeur de la fonction au centre de l'arête (*i.e.* une coordonnée)), on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon=D_\sigma|D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon} \mathbf{u}_{\varepsilon,x}^{exact} &= \sum_{\varepsilon=D_\sigma|D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon} \left( \frac{\mathbf{u}_{\sigma',x}^{exact} - \mathbf{u}_{\sigma,x}^{exact}}{2} \right), \\ &= \frac{|\sigma|}{4} (F_{\sigma,\varepsilon_1} - F_{\sigma,\varepsilon_2} + F_{\sigma,\varepsilon_3} - F_{\sigma,\varepsilon_4}), \\ &= \frac{|\sigma|}{4} (F_N + \widetilde{F}_N), \\ &= -\frac{|\sigma|}{4} (|\sigma_N| x_L + |\widetilde{\sigma}_N| x_K), \\ &= -\frac{hk}{2} x_\sigma. \end{aligned}$$

- Équation associée à l'arête  $\sigma$  dans la direction  $y$ .

Le même raisonnement que pour la composante  $x$  de la discrétisation du terme convectif sur la face  $\sigma$  s'applique :

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon=D_\sigma|D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon} \mathbf{u}_{\varepsilon,y}^{exact} &= -\frac{|\sigma|}{2} F_E, \\ &= -\frac{hk}{2} y_\sigma \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Le gradient de pression et le terme convectif discrets s'écrivent donc :

$$\begin{cases} |D_\sigma| (\nabla p^{exact})_\sigma &= |\sigma| (p_L - p_K) \mathbf{n}_{K,\sigma} = \begin{pmatrix} hk x_\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |D_\sigma| (\mathbf{u}^{exact} \cdot \nabla \mathbf{u}^{exact})_\sigma &= \begin{pmatrix} -\frac{hk}{2} x_\sigma \\ -\frac{hk}{2} y_\sigma \end{pmatrix}. \end{cases}$$

De ceci, on déduit que le terme non-linéaire discret n'équilibre pas le gradient de pression discret et l'erreur est en  $\mathcal{O}(1)$  par rapport au pas d'espace.

## 2- Schéma MAC

Rappelons que le schéma MAC consiste à calculer la vitesse approchée comme solution de deux schémas volumes finis écrits sur deux maillages décalés tandis que la pression est constante par cellule primale.

### Notations

Les notations adoptées sont résumées sur la figure III.11. Soient  $K$ ,  $L$  (left) et  $R$  (right) des cellules adjacentes (deux à deux) de  $\mathcal{T}_h$ . Considérons  $\sigma = K|L$  une arête interne et  $D_\sigma$  la maille décalée associée à  $\sigma$ ; associons à cette arête le vecteur normal unitaire  $\mathbf{n}_{K,\sigma}$  sortant de la cellule primale  $K$ . Soit de plus  $\sigma_W$  (resp.  $\sigma_E$ ) l'arête de  $L$  (resp.  $R$ ) qui ne partage aucun sommet avec  $\sigma$ . Sur chacune des deux familles de maillages  $(K)_{K \in \mathcal{T}_h}$  et  $(D_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}}$  considérons des approximations des flux massiques sur le maillage primal :  $F_W$ ,  $F_{N,L}$ ,  $F_C$ ,  $F_{S,L}$ ,  $F_{N,K}$ ,  $F_E$  et  $F_{S,K}$  et dual :  $F_{\sigma,\varepsilon_1}$ ,  $F_{\sigma,\varepsilon_2}$ ,  $F_{\sigma,\varepsilon_3}$  et  $F_{\sigma,\varepsilon_4}$ . De plus, par  $x_\sigma$  et  $y_\sigma$ , nous désignons les coordonnées du centre de l'arête  $\sigma$  et par  $x_K$  et  $y_K$  les coordonnées du centre de la maille  $K$ .

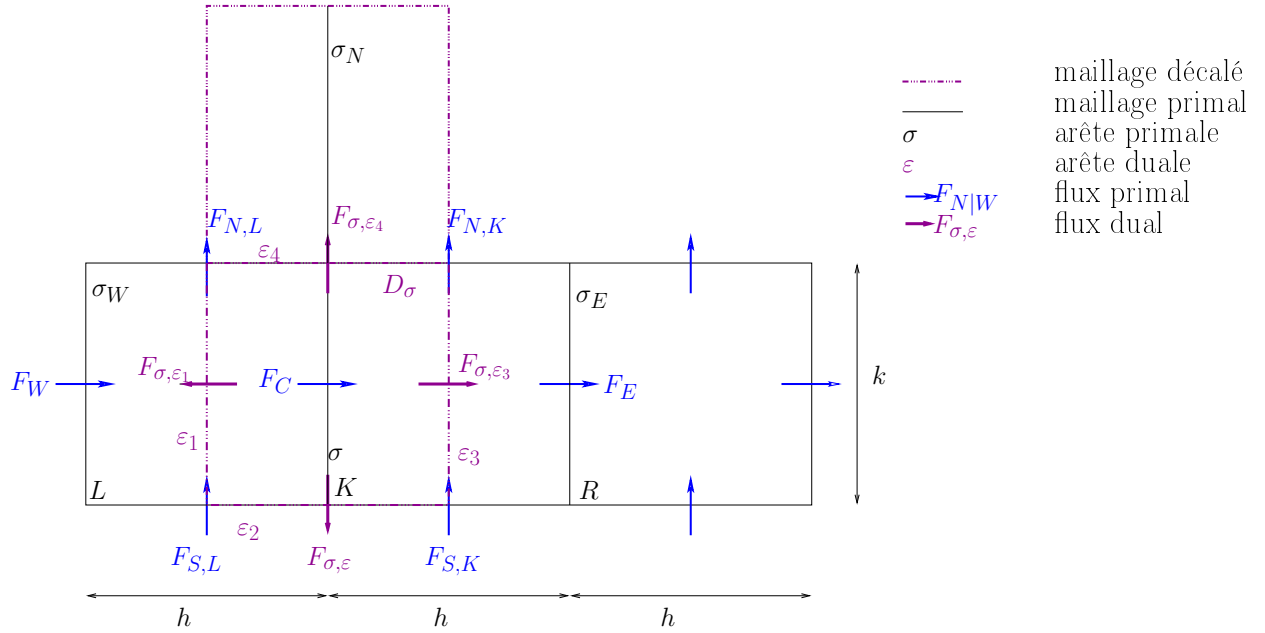


FIGURE III.11 – Notations concernant la discrétisation spatiale par le schéma MAC.

### Discrétisation des équations d'Euler stationnaires incompressibles

Dans ce paragraphe, nous montrons que la formulation discrète des équations d'Euler incompressibles stationnaires pour la solution  $\mathbf{u}^{exact}(x, y) = (y, -x)^T$  et  $p^{exact}(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  sont satisfaites par le schéma MAC.

#### a- Discrétisation du gradient de pression sur l'arête $\sigma$

Dans la configuration de la figure III.11 et d'après l'équation (III.3), on a :

$$|D_\sigma|(\nabla p^{exact})_\sigma = \begin{pmatrix} hk x_\sigma \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b- Discrétisation du terme convectif non-linéaire sur l'arête  $\sigma$ 

La discrétisation de l'opérateur convectif pour le schéma MAC est donnée dans [49]. Compte tenu du fait que

$$\sum_{\varepsilon=D_\sigma|D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon} = 0,$$

et de l'expression de la solution analytique  $\mathbf{u}^{exact} = (y, -x)^T$  qui implique :  $\mathbf{u}_{\sigma_E,x}^{exact} = \mathbf{u}_{\sigma_W,x}^{exact} = \mathbf{u}_{\sigma,x}^{exact}$ , on a (notations de la figure III.11) :

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon=D_\sigma|D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon} \mathbf{u}_{\varepsilon,x}^{exact} &= F_{\sigma,\varepsilon_4} \left( \frac{\mathbf{u}_{\sigma_N,x}^{exact} - \mathbf{u}_{\sigma,x}^{exact}}{2} \right) + F_{\sigma,\varepsilon_3} \left( \frac{\mathbf{u}_{\sigma_E,x}^{exact} - \mathbf{u}_{\sigma,x}^{exact}}{2} \right) \\ &+ F_{\sigma,\varepsilon_2} \left( \frac{\mathbf{u}_{\sigma_S,x}^{exact} - \mathbf{u}_{\sigma,x}^{exact}}{2} \right) + F_{\sigma,\varepsilon_1} \left( \frac{\mathbf{u}_{\sigma_W,x}^{exact} - \mathbf{u}_{\sigma,x}^{exact}}{2} \right). \end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{\varepsilon=D_\sigma|D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon} \mathbf{u}_{\varepsilon,x}^{exact} = F_{\sigma,\varepsilon_4} \left( \frac{\mathbf{u}_{\sigma_N,x}^{exact} - \mathbf{u}_{\sigma,x}^{exact}}{2} \right) + F_{\sigma,\varepsilon_2} \left( \frac{\mathbf{u}_{\sigma_S,x}^{exact} - \mathbf{u}_{\sigma,x}^{exact}}{2} \right),$$

soit encore, compte tenu de l'expression de la solution  $\mathbf{u}^{exact} = (y, -x)^T$ ,

$$\sum_{\varepsilon=D_\sigma|D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon} \mathbf{u}_{\varepsilon,x}^{exact} = F_{\sigma,\varepsilon_4} \left( \frac{y_{\sigma_N} - y_\sigma}{2} \right) + F_{\sigma,\varepsilon_2} \left( \frac{y_{\sigma_S} - y_\sigma}{2} \right). \quad (\text{III.7})$$

La différence d'ordonnées dans l'équation (III.7) ci-dessus s'écrit

$$y_{\sigma_N} - y_\sigma = \frac{|\sigma_N| + |\sigma|}{2}.$$

De plus, utilisant l'expression de l'approximation des flux de masse sur le maillage dual en fonction de ceux calculés sur le maillage primal [49] :

$$\begin{aligned} F_{\sigma,\varepsilon_4} &= \frac{1}{2}(F_{N,L} + F_{N,K}), \\ F_{\sigma,\varepsilon_2} &= -\frac{1}{2}(F_{S,L} + F_{S,K}), \\ F_{\sigma,\varepsilon_3} &= \frac{1}{2}(F_C + F_E), \\ F_{\sigma,\varepsilon_1} &= -\frac{1}{2}(F_W + F_C), \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon=D_\sigma|D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon} \mathbf{u}_{\varepsilon,x}^{exact} &= F_{\sigma,\varepsilon_4} \left( \frac{|\sigma_N| + |\sigma|}{4} \right) - F_{\sigma,\varepsilon_2} \left( \frac{|\sigma_S| + |\sigma|}{4} \right), \\ &= \frac{1}{8} (F_{N,L} + F_{N,K}) (|\sigma_N| + |\sigma|) + \frac{1}{8} (F_{S,L} + F_{S,K}) (|\sigma_S| + |\sigma|). \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Puisque le maillage est structuré, et par l'expression des flux primaux en notant  $|\sigma_{N,L}|$  la mesure de l'arête horizontale supérieure de la cellule  $L$ , on a

$$F_{N,L} = F_{S,L} = -|\sigma_{N,L}| x_L, \quad \text{et} \quad F_{S,K} = F_{N,K} = -|\sigma_{S,K}| x_K.$$

Reportons ces formules dans (III.8), il vient

$$\begin{aligned}
 \sum_{\varepsilon=D_\sigma|D_{\sigma'}} F_{\sigma,\varepsilon} \mathbf{u}_{\varepsilon,x}^{exact} &= -\frac{1}{8} (|\sigma_N| + |\sigma|) (|\sigma_{N,L}| x_L + |\sigma_{N,K}| x_K) \\
 &\quad -\frac{1}{8} (|\sigma_S| + |\sigma|) (|\sigma_{S,L}| x_L + |\sigma_{S,K}| x_K), \\
 &= -\frac{1}{8} (|\sigma_{N,L}| x_L + |\sigma_{N,K}| x_K) (|\sigma_N| + 2|\sigma| + |\sigma_S|).
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour un maillage rectangle uniforme de pas  $h$  dans la direction  $x$  et  $k$  dans la direction  $y$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} |D_\sigma| (\nabla p^{exact})_\sigma = |\sigma| (p_L - p_K) \mathbf{n}_{K,\sigma} = \begin{pmatrix} hk x_\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |D_\sigma| (\mathbf{u}^{exact} \cdot \nabla \mathbf{u}^{exact})_\sigma = \begin{pmatrix} -hk x_\sigma \\ 0 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

De ceci, on déduit que le terme non-linéaire discret équilibre le gradient de pression discret pour le schéma MAC.

### 3- Mise en œuvre numérique

Lors de la mise en œuvre numérique du cas-test, afin d'atteindre un état stationnaire, nous utilisons une pseudo-évolution en temps avec une méthode de projection : précisément, l'algorithme en temps consiste à itérer le schéma de projection incrémental BDF2, jusqu'à ce que la norme  $L^\infty$  des incréments de vitesse et pression soient inférieure à un paramètre  $\xi$  multiplié par  $\Delta t$ . Pour ce test,  $\xi = 0.3$  et  $\Delta t = 10^{-2}$  s.

Comparons les discrétisations spatiales par l'élément fini de Rannacher-Turek et le schéma MAC. Le maillage est constitué de  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$ ,  $40 \times 40$  et  $80 \times 80$  rectangles uniformes.

Les résultats relatifs à la répartition de la norme  $L^2$  discrète de l'erreur d'approximation pour la vitesse et la pression en fonction du pas d'espace sont rassemblés sur la figure III.12 en échelle logarithmique : l'erreur d'approximation en vitesse pour le schéma MAC est de l'ordre de l'erreur machine tandis que celle pour la pression est d'ordre deux en espace. En revanche, les solutions approchées par le schéma RT ne convergent pas en espace.

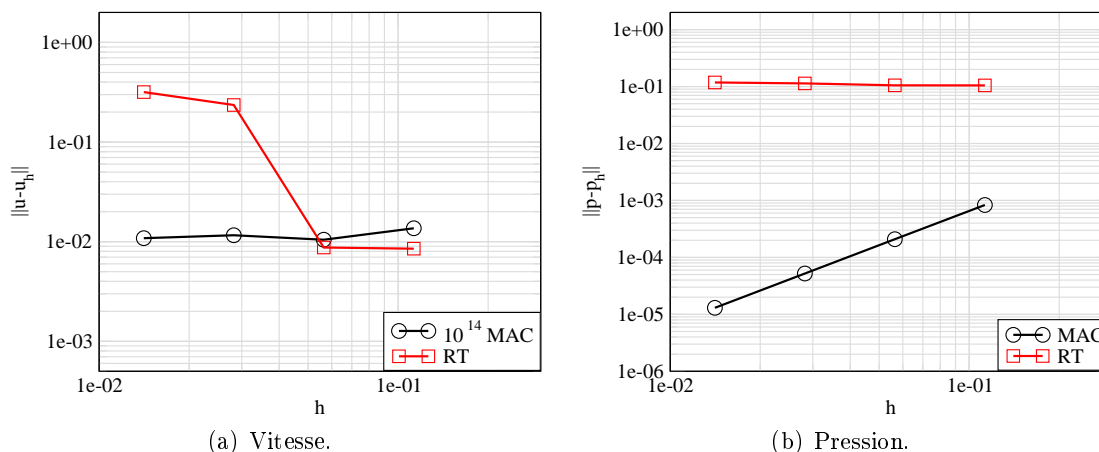


FIGURE III.12 – Norme  $L^2$  de l'erreur d'approximation (relative) en fonction du pas d'espace – Test du tourbillon isolé.

### Conclusion (provisoire) sur le problème du tourbillon isolé

Ce cas-test simple montre que, pour le schéma RT, le terme convectif non-linéaire ne s'équilibre pas avec le gradient de pression pour une solution particulière comme c'est le cas au niveau continu, contrairement au schéma MAC. De ce fait, les solutions approchées par le schéma RT ne convergent pas (spatialement). Une stratégie envisagée dans la suite de ce manuscrit (Chapitre V) consiste à enrichir l'espace d'approximation pour la pression, ce qui permet de résoudre ce problème.

#### III.2.2.c Couche de mélange à $Re = 10000$

Nous traitons à présent d'un cas-test très répandu dans la littérature pour la LES du fait de sensibilité à la discrétisation choisie.

Le principe de ce cas-test, décrit dans [63, 57, 37, 15], est le suivant : considérons deux couches visqueuses, de caractéristiques  $\mu = 3.571 \times 10^{-6}$  Pa·s et  $\rho = 1$  kg·m $^{-3}$ , se déplaçant horizontalement avec des vitesses opposées  $-\mathbf{u}_\infty$  et  $\mathbf{u}_\infty = 1$  m·s $^{-1}$  dans  $\Omega = [0; 1]^2$  et séparées par une zone de mélange d'épaisseur  $\sigma_0 = \frac{1}{28}$ . À l'instant initial, le profil de vitesse est en tangente hyperbolique, et soumis à une perturbation sinusoïdale verticale :

$$u_0(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_\infty \tanh\left(\frac{2y-1}{\sigma_0}\right) + \begin{pmatrix} \partial_y \psi \\ -\partial_x \psi \end{pmatrix},$$

où la fonction de courant  $\psi$  est donnée par :

$$\psi(x, y) = c \mathbf{u}_\infty \exp\left(-\frac{(y-0.5)^2}{\sigma_0^2}\right) (\cos(8\pi x) + \cos(20\pi x)),$$

et  $c = 0.001$  désigne l'amplitude de la perturbation (bruit). Des conditions de type symétrie sont imposées sur les parois horizontales  $\{y = 0\}$  et  $\{y = 1\}$ , et des conditions au bord périodiques sont prescrites sur les axes  $\{x = 0\}$  et  $\{x = 1\}$ .

Nous étudions l'évolution de l'écoulement décrit par les équations de Navier-Stokes incompressibles (Système (1) en Introduction, pour lequel la deuxième relation est donnée par  $\text{div} \mathbf{u} = 0$ ) sur l'intervalle de temps  $(0, T)$  (le temps final est adimensionné et vaut  $T = 200 \sigma_0$  s). La perturbation

verticale de la vitesse injecte de l'énergie au mélange et le rend turbulent, le nombre de Reynolds étant donné par  $Re = \frac{u_\infty \nu_l}{\sigma_0} = 10000$ . Ainsi, quatre tourbillons sont générés et s'apparient (fusionnent) successivement deux à deux pour donner d'abord deux tourbillons secondaires et ensuite un seul tourbillon (Figure III.13).

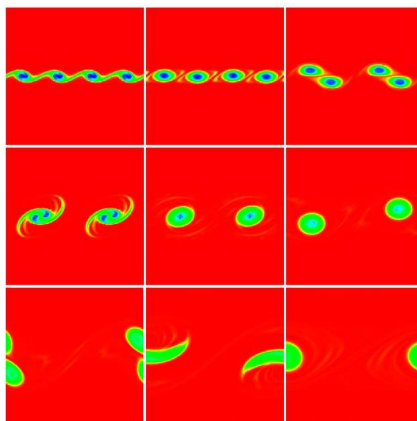
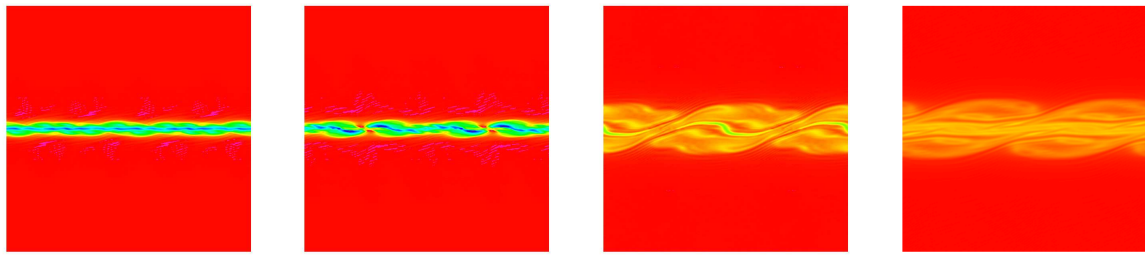


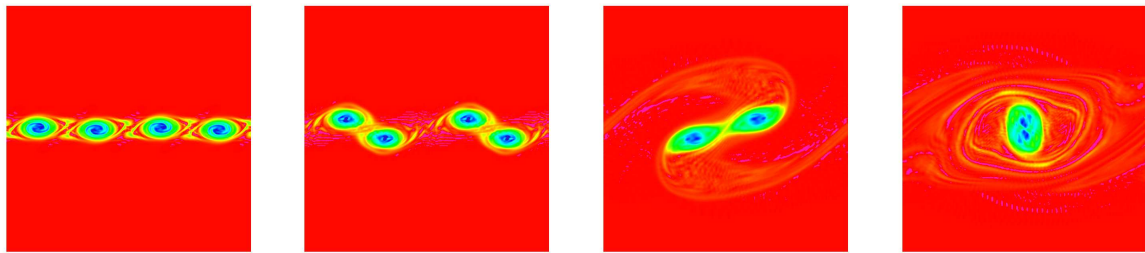
FIGURE III.13 – Champ de vortacité aux temps non adimensionnés 20 s, 30 s, 50 s, 70 s, 80 s, 100 s, 120 s, 140 s et 200 s [37].

Afin de simuler ce phénomène, nous utilisons une discrétisation en temps de type BDF2, et le pas de temps adimensionné est donné par  $\Delta t = 0.01 \sigma_0 = 3.57 \times 10^{-4}$  s. De plus, la discrétisation spatiale repose sur l'élément fini de Rannacher-Turek ou le schéma MAC. Le maillage est choisi pour que la taille du filtre soit plus petite que l'épaisseur de la zone de mélange ( $320 \times 320$  mailles rectangles uniformes).

Nous représentons le profil de vortacité instantanée aux temps (non-adimensionnés) 20 s, 30 s, 50 s, 70 s, 80 s, 100 s, 120 s, 140 s et 200 s sur la figure III.14.



(a) Schéma RT.



(b) Schéma MAC.

 FIGURE III.14 – Profil instantané de vorticité – Cas-test de couches de mélange à  $Re = 10000$  (appariement de tourbillons).

D'après la figure III.14, nous constatons que le schéma RT atténue complètement les tourbillons, contrairement aux références et au schéma MAC.

Par ailleurs, il existe de nombreuses analyses concernant l'amplitude de la vorticité et les temps d'appariement des tourbillons, ce qui nous permet de voir rapidement si le schéma est adapté ou pas à la simulation d'écoulements turbulents. En effet [57] signale que les tourbillons primaires sont clairement visibles après 30 unités de temps, s'apparient aux alentours de 80 unités de temps pour donner deux tourbillons secondaires ; ces derniers fusionnent ensuite au temps (non adimensionné) 140.

Les valeurs de la vorticité et les temps d'appariement pour le schéma MAC sont en accord avec les références. Ce n'est pas le cas du schéma RT pour lequel le maximum de la valeur absolue de la vorticité est de 70.7 au temps 30 s (à titre indicatif : il en est de même pour le schéma MAC mais pour ce dernier, le premier appariement se produit), mais seulement 23 au temps 120 s (54 pour le schéma MAC et le deuxième appariement a lieu pour les tourbillons simulés par ce dernier schéma).

### Conclusion (provisoire) sur le problème de couche de mélange à $Re = 10000$

Ce cas-test simple montre que les défauts du schéma RT ne le rendent pas adapté à la LES. En effet, cette discrétisation s'avère trop diffusive pour pouvoir la combiner à un modèle sous-maille.

## III.3 Conclusion

Dans cette section, nous avons décrit dans un premier temps le cas-test académique du canal plan (avec le modèle de W.A.L.E. pour modèle sous-maille) et les paramètres sur lesquels il repose. Pour ce cas-test, afin d'évaluer les capacités de la méthode de projection incrémentale discrétisée en



espace par l'élément fini de Rannacher-Turek, nous l'avons comparée au schéma MAC. Le schéma RT n'a pas donné des résultats en accord avec les références (Simulation Numérique Directe de [74]), contrairement au schéma MAC. Ceci s'explique par des extrema de viscosité moyenne près des parois présentés par l'élément fini, et ce phénomène ne s'est pas estompé en ajoutant une loi de paroi.

La question de savoir quels critères permettent de construire un schéma adapté à la LES basé sur le schéma RT s'est donc posée. Ayant traité de la discrétisation en temps dans la partie I, nous nous sommes concentrés sur la discrétisation spatiale. Les résultats du canal plan suggèrent de construire un schéma de type MAC. Par ailleurs, nous avons abordé plusieurs cas-tests simples qui ont mis en avant le défaut de précision du schéma RT pour des écoulements à convection dominante.

L'analyse du schéma RT montre que la composante tangente à une face du gradient de pression discret est nulle, donc le multiplicateur de Lagrange qui lui est associé n'intervient pas dans la formulation discrète de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Nous proposons deux solutions à ce problème dans la suite de ce manuscrit :

1. retirer l'équation tangente de prédiction de vitesse et reconstituer la composante tangente de vitesse. Pour ce faire, comme pour les problèmes de minimisation sous contraintes, nous proposons d'ajouter à cette équation un terme de pénalisation contraignant chaque composante tangente de vitesse à une face à s'écrire comme combinaison linéaire des composantes normales alentour (plus précises, comme observé sur le problème d'Oseen à convection dominante dans la section III.2.2.a). C'est l'objet de la méthode RT-Stab présentée dans le chapitre IV.
2. Enrichir l'espace discret d'approximation pour la pression (*i.e.* ajouter des degrés de liberté en pression) de manière à ce que la composante tangente du gradient de pression discret soit non nulle et s'équilibre avec le terme convectif non-linéaire discret. Le schéma RT+EP du chapitre V est construit selon ce principe.

## Chapitre IV

# Contrôle des vitesses tangentes aux faces pour l'élément fini de Rannacher-Turek

Ce chapitre est dédié à la construction et à l'étude d'une méthode de stabilisation du schéma RT satisfaisant le critère (C.2) de l'introduction (Section 6.3) à savoir la précision pour des écoulements à convection dominante (voir la justification dans la section III.2).

Dans ce chapitre, nous considérons les équations de Navier-Stokes incompressibles instationnaires dont nous rappelons la forme ci-dessous (Système (1) en Introduction, dont la première relation est donnée par  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ ). Trouver  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}^0(\cdot), & \text{dans } \Omega \times \{0\}. \end{array} \right. \quad (\text{IV.1})$$

Ce système est complété par des conditions au bord.

Nous proposons d'ajouter à l'équation de prédiction de vitesse discrète du schéma RT (Algorithme I.2) un terme de pénalisation contraignant chaque inconnue de vitesse tangente à une face à s'écrire comme combinaison linéaire des inconnues normales alentour (pour lesquelles on observe une meilleure précision sur le problème d'Oseen stationnaire à convection dominante, voir la section III.2.2.a). Pour approcher le mieux possible les coefficients de cette combinaison linéaire, une méthode est présentée ici pour des maillages quelconques si  $d = 2$ , et parallélépipèdes rectangles (ou parallélogrammes) si  $d = 3$ . Nous montrons que le schéma résultant noté "*schéma RT-Stab*" est stable. De plus, en faisant tendre le paramètre de pénalisation vers l'infini, on observe que le schéma limite est de type MAC (sur des maillages non structurés).

Nous illustrons les possibilités du schéma RT-Stab sur de nombreux cas-tests à convection dominante, faisant tous défaut au schéma RT. Il permet en particulier, pour le problème d'Oseen stationnaire, de retrouver une convergence spatiale d'ordre deux pour la vitesse et un pour la pression (en normes  $L^2$  discrètes), avec une précision bien meilleure que celle du schéma RT. Enfin, les résultats du cas-test du canal plan à  $\operatorname{Re}_\tau = 590$  avec le modèle sous-maille W.A.L.E. ([76], Équation (6) en Introduction) sont satisfaisants qualitativement : les extrema de viscosité effective près des parois présentés par le schéma RT (voir la Section III.1) n'apparaissent pas avec le schéma RT-Stab et les deux premiers moments de la composante longitudinale de vitesse sont proches des résultats de référence obtenus par Simulation Numérique Directe (DNS de [74]).

Le chapitre se découpe comme suit : le principe du schéma RT-Stab est d'abord présenté dans la section IV.1. Nous montrons dans la section IV.2 que le schéma RT-Stab proposé est stable, et nous présentons une méthode permettant de calculer les coefficients de la décomposition d'une composante tangente de vitesse à une arête comme combinaison des composantes normales qui l'entourent dans la section IV.3. De plus, des éléments permettant de généraliser le calcul de ces coefficients pour  $d = 3$  sont présentés dans la section IV.4. Le gain de précision et les capacités du schéma résultant sont illustrés par des tests numériques dans la section IV.5 (maillages structurés et non structurés).

## IV.1 Schéma discret en temps et en espace

### IV.1.1 Notations concernant les discrétisations en temps et en espace

Rappelons que nous notons respectivement  $\mathbf{X}_h$  et  $\mathbf{M}_h$  les espaces discrets d'approximation Rannacher-Turek pour la vitesse et pour la pression (*cf* Annexe A pour une description détaillée de l'élément fini de Rannacher-Turek) et que le degré de liberté en vitesse associé à l'arête ou la face  $\sigma$  est noté  $\mathcal{N}_\sigma(\mathbf{u})$ .

Nous considérons une subdivision de l'intervalle de temps  $(0, T)$  notée  $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$ , supposée uniforme pour simplifier. Soit  $\Delta t$  le pas de temps supposé constant, c'est-à-dire  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  pour tout entier  $n$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$ .

### IV.1.2 Schéma RT-Stab

Nous proposons de modifier le schéma RT pour résoudre des équations de Navier-Stokes incompressibles (Système (IV.1)) par pénalisation. Le principe du schéma résultant noté *RT-Stab* est le suivant : il s'agit d'ajouter à l'équation de prédiction de vitesse associée à chaque face un terme supplémentaire assemblé arête par arête (si  $d = 2$ ) ou face par face (si  $d = 3$ ), dépendant de la taille des mailles, proportionnel à un terme de diffusion numérique et censé ne pas compromettre la consistance du schéma.

Pour ce faire, on applique les étapes suivantes.

0 - Pour chaque arête (si  $d = 2$ ) ou face (si  $d = 3$ )  $\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D$ , on cherche des réels  $\beta_\sigma$  et  $(\alpha_\sigma^g)_{\hat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma)}$  tels que pour toute fonction  $\mathbf{v}$  d'un sous-espace bien choisi de  $\mathbf{X}_h$  (cet espace sera précisé dans la section IV.3), on ait :

$$\mathcal{N}_\sigma(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\tau} \approx \beta_\sigma \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma)} \alpha_\sigma^g \mathcal{N}_{\hat{\sigma}}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_{\hat{\sigma}}, \quad (\text{IV.2})$$

où les notations suivantes sont utilisées :

- $\boldsymbol{\tau}$  et  $\mathbf{n}$  désignent les vecteurs tangent et normal à  $\sigma$ ,
- $\mathcal{I}(\sigma)$  désigne l'ensemble des faces des cellules adjacentes à  $\sigma$ , partageant un sommet avec  $\sigma$ , afin de ne pas dégrader le stencil de la matrice (vitesse) associée à l'étape de prédiction de vitesse.

Ensuite, à chaque pas de temps  $t^n$ , étant donnés  $(\mathbf{u}^n, p^n)$  connus,

1 - Prédiction de vitesse – Trouver  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \in \mathbf{X}_h$  tel que :

$$\forall \sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D, \forall 1 \leq i \leq d,$$

$$\begin{aligned} \frac{|D_\sigma|}{\Delta t} [\mathcal{N}_{\sigma,i}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) - \mathcal{N}_{\sigma,i}(\mathbf{u}^n)] + \sum_{\varepsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} \tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon,i}^{n+1} F_{\sigma,\varepsilon}^n + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \nu \int_K \nabla(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) : \nabla \varphi_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} \\ - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p^n \operatorname{div} \varphi_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} + r a_T(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \varphi_\sigma^{(i)}) = \int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{x}, t^{n+1}) \cdot \varphi_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

où  $r$  désigne un paramètre réel strictement positif,  $\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon,i}^{n+1}$  est une approximation centrée de la vitesse sur les faces duales  $\varepsilon$  intérieures ( $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u}_\sigma$  si  $\varepsilon = D_\sigma |ext$  (Équation (II.12)) et  $F_{\sigma,\varepsilon}^n$  est une approximation volumes finis du flux de masse sortant de la cellule diamant  $D_\sigma$  à travers la face  $\varepsilon$  (voir [4] et le chapitre II). L'approximation de l'opérateur convectif résultante  $\sum_{\varepsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} \tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon,i}^{n+1} F_{\sigma,\varepsilon}^n$  permet à celui-ci de satisfaire une identité d'énergie cinétique.

Notons  $h_\sigma$  le diamètre moyen des cellules adjacentes à  $\sigma$ . Afin que la forme bilinéaire associée à  $a_T(\cdot, \cdot)$  soit coercive et d'avoir des estimations d'énergie, celle-ci est construite de telle sorte que  $a_T(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1})$  soit donnée par  $\sum_{\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} h_\sigma^{d-2} |A_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})|^2$ , où  $A_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})$  est le résidu associé à l'équation (IV.2) :

$$A_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) = \mathcal{N}_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\tau} - \beta_\sigma \mathcal{N}_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \mathbf{n} - \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma)} \alpha_{\hat{\sigma}}^\sigma \mathcal{N}_{\hat{\sigma}}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_{\hat{\sigma}}. \quad (\text{IV.4})$$

Le terme de stabilisation résultant ajouté à l'étape de prédiction de vitesse s'écrit pour  $i \in \{1 \dots d\}$  et  $\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D$

$$\begin{aligned} a_T(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \varphi_\sigma^{(i)}) &= \sum_{\sigma' \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} h_{\sigma'}^{d-2} A_{\sigma'}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) A_{\sigma'}(\varphi_\sigma^{(i)}), \\ &= h_\sigma^{d-2} (\boldsymbol{\tau}_i - \beta_\sigma \mathbf{n}_i) \\ &\quad \left( \mathcal{N}_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\tau} - \beta_\sigma \mathcal{N}_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \mathbf{n} - \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma)} \alpha_{\hat{\sigma}}^\sigma \mathcal{N}_{\hat{\sigma}}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_{\hat{\sigma}} \right) \\ &\quad + \sum_{\{\sigma'; \sigma \in \mathcal{I}(\sigma')\}} h_{\sigma'}^{d-2} (-\alpha_{\sigma'}^{\sigma'} \mathbf{n}_i) \\ &\quad \left( \mathcal{N}_{\sigma'}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\tau}_{\sigma'} - \beta_{\sigma'} \mathcal{N}_{\sigma'}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_{\sigma'} - \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma')} \alpha_{\hat{\sigma}}^{\sigma'} \mathcal{N}_{\hat{\sigma}}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_{\hat{\sigma}} \right). \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

2 - Projection de vitesse – Trouver  $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{X}_h$  et  $p^{n+1} \in \mathbf{M}_h$  tels que :

$$\forall \sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D, \forall 1 \leq i \leq d,$$

$$\frac{|D_\sigma|}{\Delta t} [\mathcal{N}_{\sigma,i}(\mathbf{u}^{n+1}) - \mathcal{N}_{\sigma,i}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})] - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (p^{n+1} - p^n) \operatorname{div} \varphi_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} = 0, \quad (\text{IV.6})$$

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} \, d\mathbf{x} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{u}^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = 0.$$

L'algorithme de résolution est résumé ci-dessous (Algorithme IV.1). Commençons par nous donner pour prérequis de trouver des réels  $\beta_\sigma$  et  $(\alpha_{\hat{\sigma}}^\sigma)_{\hat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma)}$  tels que pour chaque  $\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D$  et pour

chaque fonction  $\mathbf{v}$  d'un sous-espace bien choisi de  $\mathbf{X}_h$

$$\mathcal{N}_\sigma(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\tau} \approx \beta_\sigma \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma)} \alpha_\sigma^\sigma \mathcal{N}_{\hat{\sigma}}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_{\hat{\sigma}}.$$

**Algorithme IV.1 (Schéma RT-Stab pour les équations de Navier-Stokes incompressibles)**

À chaque pas de temps  $t^n$ , étant donnés  $(\mathbf{u}^n, p^n)$  connus,

1 - Prédiction de vitesse - Trouver  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \in \mathbf{X}_h$  tel que :

$$\forall \sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D, \forall 1 \leq i \leq d,$$

$$\begin{aligned} \frac{|D_\sigma|}{\Delta t} [\mathcal{N}_{\sigma,i}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) - \mathcal{N}_{\sigma,i}(\mathbf{u}^n)] + \sum_{\varepsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} \tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon,i}^{n+1} F_{\sigma,\varepsilon}^n + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \nu \int_K \boldsymbol{\nabla} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} : \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} \\ - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p^n \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} + r a_T(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)}) = \int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{x}, t^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

où  $a_T(\cdot, \cdot)$  est définie par l'équation (IV.5).

2 - Projection de vitesse - Trouver  $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{X}_h$  et  $p^{n+1} \in \mathbf{M}_h$  tels que :

$$\forall \sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D, \forall 1 \leq i \leq d,$$

$$\frac{|D_\sigma|}{\Delta t} [\mathcal{N}_{\sigma,i}(\mathbf{u}^{n+1}) - \mathcal{N}_{\sigma,i}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})] - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (p^{n+1} - p^n) \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} = 0,$$

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} \, d\mathbf{x} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{u}^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = 0.$$

Remarque IV.2 (Existence et unicité de solution)

Étant donné que le terme de stabilisation ajouté à l'étape de prédiction  $a_T(\cdot, \cdot)$  défini par (IV.5) est coercif et que l'élément fini de Rannacher-Turek est inf-sup stable [13, Chapitre VI.4], le problème précédent est bien posé : il existe une unique solution au schéma RT-Stab.

## IV.2 Analyse de stabilité

Dans cette section, nous montrons que le schéma RT-Stab est stable en vitesse et en pression, en nous appuyant sur la stabilité de l'opérateur convectif prouvée dans [4] et sur l'expression (IV.5) du terme  $a_T(\cdot, \cdot)$ .

**Proposition IV.3 (Stabilité du schéma proposé)**

La solution du schéma proposé satisfait, pour tout  $n \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}^{n+1}\|_0^2 + \|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_0^2 - \|\mathbf{u}^n\|_0^2 + 2\nu \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{\varepsilon = D_\sigma |ext} F_{\sigma,\varepsilon}^n |\mathcal{N}_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})|^2 \\ & + 2r \Delta t \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} h_\sigma^{d-2} |\mathcal{N}_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\tau} - \beta_\sigma \mathcal{N}_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \mathbf{n} - \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma)} \alpha_{\hat{\sigma}}^\sigma \mathcal{N}_{\hat{\sigma}}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_{\hat{\sigma}}|^2 \\ & - 2\Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p^{n+1} \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} \, d\mathbf{x} \\ & + \Delta t^2 \left[ |p^{n+1}|_{1,\mathcal{T}_h,1}^2 - |p^n|_{1,\mathcal{T}_h,1}^2 \right] = 2\Delta t \int_\Omega \mathbf{f}^{n+1} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

où la semi-norme  $|\cdot|_{1,\mathcal{T}_h,1}$  est définie par l'équation (II.20). En particulier, pour des écoulements incompressibles, si  $F_{\sigma,\varepsilon}^n = 0$  pour tout  $\varepsilon = D_\sigma |ext$  on a :

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_0^2 + \Delta t^2 |p^n|_{1,\mathcal{T}_h,1}^2 \leq \|\mathbf{u}^n\|_0^2 + \Delta t^2 |p^{n+1}|_{1,\mathcal{T}_h,1}^2.$$

Rappelons que l'opérateur convectif discret de [4] satisfait la propriété de stabilité suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} F_{\sigma,\varepsilon}^n \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{n+1} \cdot \mathcal{N}_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \\ & = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} \frac{|D_\sigma|}{\Delta t} (|\mathcal{N}_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})|^2 - |\mathcal{N}_\sigma(\mathbf{u}^n)|^2) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon = D_\sigma |ext} F_{\sigma,\varepsilon}^n |\mathcal{N}_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} \frac{|D_\sigma|}{\Delta t} |\mathcal{N}_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) - \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{u}^n)|^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

En appliquant cette propriété, on obtient le résultat de la proposition IV.3 (voir la preuve ci-dessous).

**Démonstration** D'abord, multiplions l'équation de prédiction de vitesse (IV.3) par  $\mathcal{N}_{\sigma,i}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})$  et sommons sur  $\sigma, i$ . Alors, par stabilité de l'opérateur convectif donné par l'équation (IV.7), il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} \frac{|D_\sigma|}{\Delta t} (|\mathcal{N}_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})|^2 - |\mathcal{N}_\sigma(\mathbf{u}^n)|^2) + \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon = D_\sigma |ext} F_{\sigma,\varepsilon}^n |\mathcal{N}_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})|^2 \\ & + r \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} h_\sigma^{d-2} |\mathcal{N}_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\tau} - \beta_\sigma \mathcal{N}_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \mathbf{n} - \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma)} \alpha_{\hat{\sigma}}^\sigma \mathcal{N}_{\hat{\sigma}}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_{\hat{\sigma}}|^2 \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \nu \int_K |\nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}|^2 \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} \frac{|D_\sigma|}{\Delta t} |\mathcal{N}_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) - \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{u}^n)|^2 \\ & - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p^n \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \, d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f}^{n+1} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

Multiplions ensuite l'équation de projection de vitesse (IV.6) par la fonction

$$\frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\mathbf{u}^{n+1} + \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\Delta t} - \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D \\ 1 \leq i \leq d}} \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (p^{n+1} + p^n) \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} \right),$$

conduisant à l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} \frac{|D_\sigma|}{\Delta t} (|\mathcal{N}_\sigma(\mathbf{u}^{n+1})|^2 - |\mathcal{N}_\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})|^2) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p^n \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \, d\mathbf{x} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p^{n+1} \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} \, d\mathbf{x} \\ + \frac{\Delta t}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} \frac{1}{|D_\sigma|} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p^{n+1} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} \right)^2 - \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p^n \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

On déduit le résultat en faisant la somme des équations (IV.8) et (IV.9) et en utilisant le fait que

$$\left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p^n \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} \right)^2 = |p^n|_{1, \mathcal{T}_h, 1}^2.$$

■

### IV.3 Construction du terme de stabilisation en dimension deux

Commençons par présenter la méthode de calcul des coefficients  $\beta_\sigma$  et  $(\alpha_\sigma^\sigma)_{\sigma \in \mathcal{I}(\sigma)}$  intervenant dans l'équation (IV.2), en dimension deux. Pour ce faire, adoptons les notations de la figure IV.1.

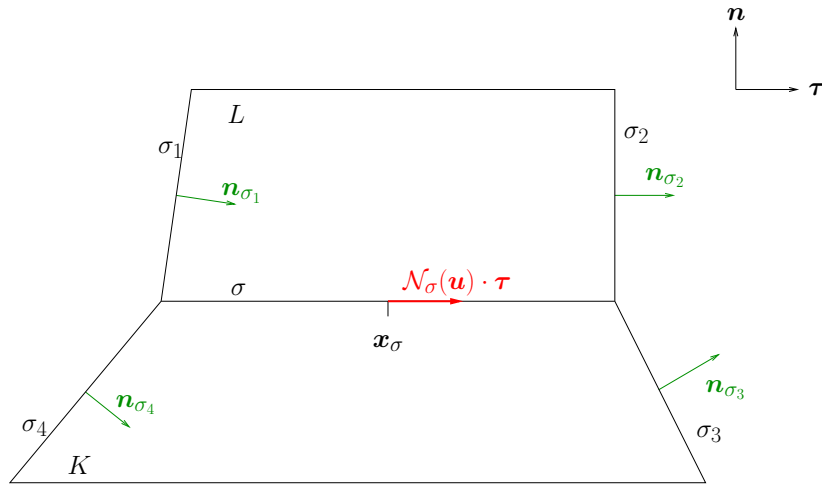


FIGURE IV.1 – Localisation des inconnues du schéma RT-Stab si  $d = 2$ .

Étant donnée une arête  $\sigma$  de centre  $\mathbf{x}_\sigma$  séparant deux cellules  $K$  et  $L$ , notons  $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n})$  le repère direct constitué des vecteurs tangent et normal à  $\sigma$ . Soit de plus  $\mathcal{I}(\sigma)$  l'ensemble des arêtes voisines de  $\sigma$  (dans le cas de la figure IV.1, il s'agit de l'ensemble  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ ) de normales respectives :  $\mathbf{n}_{\sigma_1}$ ,  $\mathbf{n}_{\sigma_2}$ ,  $\mathbf{n}_{\sigma_3}$  et  $\mathbf{n}_{\sigma_4}$ .

Dans la suite, nous cherchons à établir un système d'équations portant sur les coefficients réels  $\beta_\sigma$  et  $(\alpha_{\sigma_i}^\sigma)_{1 \leq i \leq 4}$  de l'équation IV.2, ce qui constitue la difficulté du travail car les fonctions discrètes pour la vitesse sont linéaires ou bilinéaires par maille et le système est surdéterminé.

• La première idée (non concluante) est la suivante : imposons que la formule (IV.2) soit consistante pour les champs affines. En remplaçant le champ de vitesse  $\mathbf{v}$  dans cette équation par différentes

fonctions génératrices de l'espace des fonctions affines, à savoir les fonctions constantes :

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbf{n},$$

et les applications linéaires :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 &\mapsto x \boldsymbol{\tau}, & \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 &\mapsto x \mathbf{n}, \\ \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 &\mapsto y \boldsymbol{\tau}, & \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 &\mapsto y \mathbf{n}, \end{aligned}$$

nous écrivons un système de six équations auquel obéissent les cinq inconnues  $\beta_\sigma$  et  $\alpha_{\sigma_i}^\sigma$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) = \sum_{i=1}^4 \alpha_{\sigma_i}^\sigma (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_{\sigma_i}), \\ 0 = (\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}) = \beta_\sigma + \sum_{i=1}^4 \alpha_{\sigma_i}^\sigma (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\sigma_i}), \\ x_\sigma = (x_\sigma \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) = \sum_{i=1}^4 \alpha_{\sigma_i}^\sigma x_{\sigma_i} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_{\sigma_i}), \\ 0 = (x_\sigma \mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}) = \beta_\sigma x_\sigma + \sum_{i=1}^4 \alpha_{\sigma_i}^\sigma x_{\sigma_i} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\sigma_i}), \\ y_\sigma = (y_\sigma \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) = \sum_{i=1}^4 \alpha_{\sigma_i}^\sigma y_{\sigma_i} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_{\sigma_i}), \\ 0 = (y_\sigma \mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}) = \beta_\sigma y_\sigma + \sum_{i=1}^4 \alpha_{\sigma_i}^\sigma y_{\sigma_i} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\sigma_i}). \end{array} \right. \quad (\text{IV.10})$$

Il est à présent facile de justifier le choix de faire intervenir la composante normale  $\mathcal{N}_\sigma(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}$  dans l'équation (IV.2). En effet, sans ce terme dans l'équation (IV.2), si l'arête  $\sigma$  sépare deux parallélogrammes identiques dont le vecteur normal aux arêtes de  $\mathcal{I}(\sigma)$  est noté  $\tilde{\mathbf{n}}$ , les produits scalaires  $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_{\sigma_i}$  et  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\sigma_i}$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) sont égaux respectivement à  $\boldsymbol{\tau} \cdot \tilde{\mathbf{n}}$  et  $\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{n}}$ . Sous ces conditions, les deux premières équations du système (IV.10) ci-dessus s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \sum_{i=1}^4 \alpha_{\sigma_i}^\sigma \right) (\boldsymbol{\tau} \cdot \tilde{\mathbf{n}}) = 1, \\ \left( \sum_{i=1}^4 \alpha_{\sigma_i}^\sigma \right) (\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{n}}) = 0. \end{array} \right.$$

En particulier, dans le cas de parallélogrammes  $\boldsymbol{\tau} \cdot \tilde{\mathbf{n}} \neq 0$  et  $\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{n}} \neq 0$ , on aboutit à une contradiction.

De plus, le système (IV.10) est surdéterminé, il est donc possible qu'il n'ait pas de solution ou qu'il en ait plusieurs. Pour ces raisons, nous aimerions avoir à résoudre un système :

1. ayant toujours (au moins) une solution,
  2. construit pour permettre de retenir "la meilleure" solution.
- Nous présentons dans la suite la méthode retenue pour traiter de ce problème. Puisqu'il semble difficile que la formule (IV.2) soit exacte pour tous les champs affines, nous restreignons encore l'espace des contraintes aux champs affines à divergence nulle dans l'objectif d'utiliser le schéma RT-Stab pour des écoulements incompressibles. L'espace des champs affines à divergence nulle est



de dimension cinq si  $d = 2$ , et on peut en exhiber une base "adaptée" (de la forme  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \frac{1}{2} \text{Trace}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) I_2$ ), à savoir les champs constants :

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbf{n},$$

et les applications linéaires :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 &\mapsto (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \boldsymbol{\tau}, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 &\mapsto (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}) \mathbf{n}, \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 &\mapsto (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau}. \end{aligned}$$

En remplaçant le champ de vitesse  $\mathbf{v}$  dans l'équation (IV.2) par ces fonctions, on obtient le système (IV.11) de cinq équations à cinq inconnues portant sur les réels  $\beta_\sigma$  et  $\alpha_{\sigma_i}^\sigma$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) \\ 0 = (\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}) \\ \mathbf{x}_\sigma \cdot \mathbf{n} = ((\mathbf{x}_\sigma \cdot \mathbf{n}) \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) \\ 0 = ((\mathbf{x}_\sigma \cdot \boldsymbol{\tau}) \mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}) \\ -(\mathbf{x}_\sigma, \boldsymbol{\tau}) = ((\mathbf{x}_\sigma \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - (\mathbf{x}_\sigma \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) \end{array} \right. = \begin{array}{l} = \sum_{i=1}^4 \alpha_{\sigma_i}^\sigma (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_{\sigma_i}), \\ = \beta_\sigma + \sum_{i=1}^4 \alpha_{\sigma_i}^\sigma (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\sigma_i}), \\ = \sum_{i=1}^4 \alpha_{\sigma_i}^\sigma (\mathbf{x}_{\sigma_i} \cdot \mathbf{n}) (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_{\sigma_i}), \\ = \beta_\sigma (\mathbf{x}_\sigma \cdot \boldsymbol{\tau}) + \sum_{i=1}^4 \alpha_{\sigma_i}^\sigma (\mathbf{x}_{\sigma_i} \cdot \boldsymbol{\tau}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\sigma_i}), \\ = \beta_\sigma (\mathbf{x}_\sigma \cdot \mathbf{n}) \\ + \sum_{i=1}^4 \alpha_{\sigma_i}^\sigma ((\mathbf{x}_{\sigma_i} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\sigma_i}) - (\mathbf{x}_{\sigma_i} \cdot \boldsymbol{\tau}) (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_{\sigma_i})). \end{array} \quad (\text{IV.11})$$

Noter que le système (IV.11) s'obtient à partir de (IV.10) par différence des lignes 3 et 6. En pratique, il est résolu par la méthode de Gauss, donc le résidu du système est de l'ordre de la précision machine. Cependant, cette méthode ne fournit pas de coefficients raisonnables pour certaines géométries telles que les cellules rectangles, parallélogrammes ou cellules obtenues après raffinement car dans ces cas la matrice du système (IV.11) a un noyau (le vecteur  $(0.5/(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_{\sigma_1}), -0.5/(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_{\sigma_2}), -0.5/(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_{\sigma_3}), 0.5/(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_{\sigma_4}), 0)^T$  appartient par exemple au noyau de la matrice de (IV.11) dans le cas d'un maillage rectangle où l'arête  $\sigma$  est centrée sur  $(0, 0)$ ). Dans ces cas-là, notant  $\tilde{\mathbf{n}}$  la valeur commune de la normale aux arêtes voisines de  $\sigma$ , si l'arête  $\sigma = K|L$ , pour  $i \in \{1, \dots, 4\}$ , une solution raisonnable aux deux premières équations du système (IV.11) est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\sigma_i}^\sigma = \frac{|L|}{2 \boldsymbol{\tau} \cdot \tilde{\mathbf{n}} (|K| + |L|)}, \quad \text{si } \sigma_i \in K, \\ \alpha_{\sigma_i}^\sigma = \frac{|K|}{2 \boldsymbol{\tau} \cdot \tilde{\mathbf{n}} (|K| + |L|)}, \quad \text{si } \sigma_i \in L, \\ \beta_\sigma = -\frac{\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{n}}}{\boldsymbol{\tau} \cdot \tilde{\mathbf{n}}}. \end{array} \right. \quad (\text{IV.12})$$

Pour construire une méthode qui répond à tous les types de géométries, nous appliquons l'algorithme IV.4.

**Algorithme IV.4 (Algorithme de calcul des coefficients  $\alpha_{\sigma_i}^\sigma$  et  $\beta_\sigma$ )**

– Calculer la solution du système (IV.11). Les coefficients obtenus sont jugés satisfaisants

si

1. ils ne sont pas trop grands (de module inférieur à 10),
  2. le terme de stabilisation résultant est consistant pour les champs constants.
- Sinon, la valeur explicite spécifique aux cellules rectangles ou parallélogrammes (Équation (IV.12)) est attribuée aux  $\alpha_{\sigma_i}^\sigma$  et  $\beta_\sigma$ .

Remarque IV.5 (Schéma limite quand  $r \rightarrow \infty$ )

On peut vérifier que le schéma limite noté  $RT\text{-Stab}_\infty$  est un schéma de type MAC, dont les inconnues de vitesse sont toutes normales aux arêtes (si  $d = 2$ ) ou faces (si  $d = 3$ ). De plus, son stencil dépend de la géométrie du maillage : en effet, il compte 15 inconnues en 2D pour des maillages structurés contre 27 pour des maillages non structurés (respectivement 33 et 45 en 3D).

En particulier, dans le cas d'un maillage rectangle uniforme,  $\beta_\sigma = 0$ ,  $\alpha_{\sigma'}^\sigma = \frac{1}{4\tau \cdot \mathbf{n}_{\sigma'}}$  (Équation (IV.12)). En utilisant la valeur des coefficients de la matrice de rigidité (Proposition A.5), dans la configuration de la figure IV.2, le terme diffusif de l'équation associée à l'arête  $\sigma$  et à la direction  $x$  a la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & \frac{27}{8} \mathcal{N}_{\sigma,x}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) - \frac{3}{8} \mathcal{N}_{\sigma_5,x}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) - \frac{3}{4} \mathcal{N}_{\sigma_9,x}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) - \frac{3}{8} \mathcal{N}_{\sigma_{14},x}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) - \frac{5}{16} \mathcal{N}_{\sigma_{3,x}}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \\
 & - \frac{5}{16} \mathcal{N}_{\sigma_{12},x}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) - \frac{3}{8} \mathcal{N}_{\sigma_1,x}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) - \frac{3}{8} \mathcal{N}_{\sigma_{10},x}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) - \frac{3}{4} \mathcal{N}_{\sigma_6,x}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \frac{1}{32} \mathcal{N}_{\sigma_{21},x}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \\
 & + \frac{1}{16} \mathcal{N}_{\sigma_{22},x}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \frac{1}{32} \mathcal{N}_{\sigma_{23},x}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \frac{1}{32} \mathcal{N}_{\sigma_{24},x}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \frac{1}{16} \mathcal{N}_{\sigma_{25},x}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \frac{1}{32} \mathcal{N}_{\sigma_{26},x}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}).
 \end{aligned} \tag{IV.13}$$

	$\sigma_{21}$ $\sigma_{17}$	$\sigma_{22}$ $\sigma_{18}$	$\sigma_{23}$
	$I$	$J$	
	$\sigma_5$	$\sigma_9$	$\sigma_{14}$
$\sigma_4$	$\sigma_8$	$\sigma_{13}$	$\sigma_{16}$
	$K$	$L$	
	$\sigma_3$	$\sigma$	$\sigma_{12}$
$\sigma_2$	$\sigma_7$	$\sigma_{11}$	$\sigma_{15}$
	$M$	$N$	
	$\sigma_1$	$\sigma_6$	$\sigma_{10}$
	$\sigma_{19}$	$\sigma_{20}$	
	$\sigma_{24}$	$\sigma_{25}$	$\sigma_{26}$

FIGURE IV.2 – Numérotation des inconnues intervenant dans l'équation associée à  $\sigma$  du schéma  $RT\text{-Stab}_\infty$ .

## IV.4 Extension à la dimension trois

Dans le cas où  $d = 3$ , chaque face  $\sigma$  considérée partage un sommet avec huit faces du maillage (Figure IV.3). Notant  $(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{n})$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ , nous cherchons à calculer des réels  $\beta_\sigma, \gamma_\sigma, \alpha_{\sigma_i}^\sigma$  et  $\delta_{\sigma_i}^\sigma$  ( $1 \leq i \leq 8$ ) tels que pour tout  $\mathbf{v}$  dans un sous-espace bien choisi de  $\mathbf{X}_h$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\tau}_1 &= \beta_\sigma \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \sum_{i=1}^8 \alpha_{\sigma_i}^\sigma \mathcal{N}_{\sigma_i}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_{\sigma_i}, \\ \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\tau}_2 &= \gamma_\sigma \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \sum_{i=1}^8 \delta_{\sigma_i}^\sigma \mathcal{N}_{\sigma_i}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_{\sigma_i}. \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

Compte tenu de la dimension de l'espace des champs de  $\mathbb{R}^3$  à divergence nulle (onze), la démarche proposée dans la section précédente (Section IV.3) conduit à considérer un système de onze équations à dix-huit inconnues. Contrairement au cas de la dimension deux, le système résultant est sous-déterminé, et certaines inconnues sont donc des variables libres. Pour résoudre ce problème, on pourrait imposer des critères supplémentaires comme par exemple la consistance sur les champs non linéaires  $\mathbb{Q}_1$ .

Comme en 2D, en imposant la consistance de la formule (IV.14) pour les applications constantes, nous disposons cependant d'une solution raisonnable dans le cas où les mailles sont des parallélépipèdes rectangles ou parallélogrammes. En effet, pour chaque vecteur tangent à une face  $\sigma$  noté  $\boldsymbol{\tau}_j$  ( $1 \leq j \leq 2$ ), quatre produits  $\boldsymbol{\tau}_j \cdot \mathbf{n}_{\sigma_i}$  pour  $i \in \{1, \dots, 8\}$  sont nuls. Le système d'équations à résoudre a donc pour solution les coefficients donnés par l'équation (IV.12) sur les faces où  $\boldsymbol{\tau}_j \cdot \mathbf{n}_{\sigma_i}$  est non nul et zéro ailleurs.

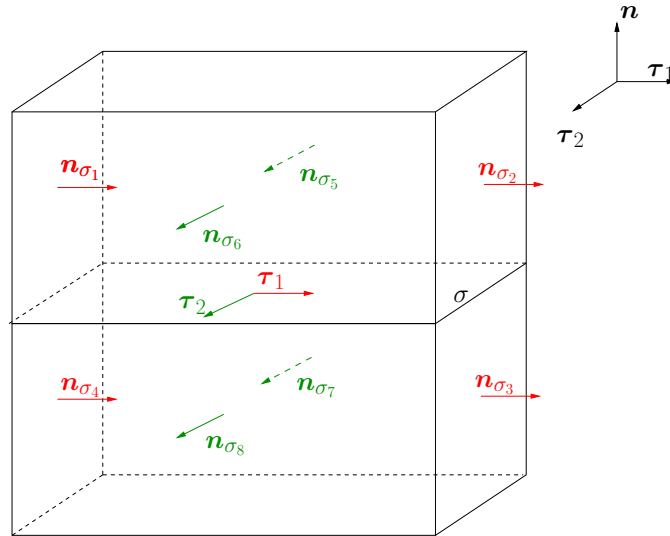


FIGURE IV.3 – Localisation des inconnues du schéma RT-Stab si  $d = 3$ .

## IV.5 Expériences numériques

Dans cette section, nous présentons les tests réalisés d'abord pour  $d = 2$  puis pour  $d = 3$ . Nous comparons en particulier le schéma RT-Stab aux deux discrétisations spatiales suivantes de la méthode de projection :

- l'élément fini de Rannacher-Turek (le schéma obtenu est noté schéma RT),
- le schéma MAC.

### IV.5.1 Problème du tourbillon isolé

Dans ce paragraphe, nous reprenons le problème du tourbillon isolé (Système (9) en Introduction) : il s'agit d'évaluer si l'opérateur convectif discret équilibre le gradient de pression discret, pour la solution particulière donnée par  $\mathbf{u}^{exact}(x, y) = (y, -x)^T$  et  $p^{exact}(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , sur un maillage cartésien uniforme de  $[0; 1]^2$ . Il est bon de remarquer que ces fonctions sont solutions du problème de Stokes (vitesse harmonique).

#### Étude de la convergence spatiale

Le maillage étant constitué de cellules rectangles uniformes, les coefficients  $\alpha_\sigma^g$  pour  $\hat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma)$  de la décomposition (IV.2) sont explicites (cf Algorithme IV.4) :

$$\alpha_\sigma^g = \frac{1}{4\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_{\hat{\sigma}}}, \quad \text{et} \quad \beta_\sigma = 0.$$

Noter que le produit scalaire  $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_{\hat{\sigma}}$  vaut 1 ou  $-1$  en fonction de l'orientation de ces vecteurs. Le paramètre de pénalisation choisi pour ce calcul est  $r = 10^4$ . Concernant le schéma en temps, afin d'atteindre l'état stationnaire, le procédé itératif décrit par l'algorithme IV.6 est appliqué jusqu'à ce que des incréments de vitesse et de pression soient inférieurs à une certaine valeur.

#### Algorithme IV.6 (Discrétisation du problème du tourbillon isolé)

Soit  $\xi > 0$  fixé. Tant que,

$$\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_\infty / \max(1, \|\mathbf{u}^n\|_\infty) \geq \xi \Delta t \text{ ou } \|p^{n+1} - p^n\|_\infty / \max(1, \|p^n\|_\infty) \geq \xi \Delta t,$$

on résout les étapes suivantes :

1 - Prédiction de vitesse - Trouver  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \in \mathbf{X}_h$  tel que

$$\forall \sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D, \quad \forall 1 \leq i \leq d,$$

$$\begin{aligned} \frac{|D_\sigma|}{\Delta t} \left[ \frac{3}{2} \mathcal{N}_{\sigma,i}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) - 2\mathcal{N}_{\sigma,i}(\mathbf{u}^n) + \frac{1}{2} \mathcal{N}_{\sigma,i}(\mathbf{u}^{n-1}) \right] + \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} \tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon,i}^{n+1} F_{\sigma,\varepsilon}^n \\ - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p^n \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} + r \mathbf{a}_T(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)}) = 0. \end{aligned}$$

2 - Correction de vitesse et de pression - Trouver  $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{X}_h$  et  $p^{n+1} \in \mathbf{M}_h$  tels que

$$\forall \sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D, \quad \forall 1 \leq i \leq d,$$

$$\frac{3|D_\sigma|}{2\Delta t} [\mathcal{N}_{\sigma,i}(\mathbf{u}^{n+1}) - \mathcal{N}_{\sigma,i}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})] - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (p^{n+1} - p^n) \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} = 0,$$

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} \, d\mathbf{x} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{u}^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = 0.$$

Les maillages utilisés pour ce test sont constitués de  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$ ,  $40 \times 40$  et  $80 \times 80$  mailles. Les résultats de convergence spatiale pour la vitesse et la pression (en échelle logarithmique) sont rassemblés sur les figures IV.4 et IV.5.

Dans un premier temps, le critère d'arrêt de l'algorithme ci-dessus est donné par  $\xi = 0.3$  et  $\Delta t = 10^{-2}$  s. La valeur de  $\xi = 0.3$  est dictée par le schéma RT (qui ne converge pas pour de petites valeurs de  $\xi$ ), ceci pour nous permettre de comparer les schémas entre eux. Le schéma RT-Stab converge pour des valeurs du paramètre  $\xi$  plus petites, et des courbes de convergence pour  $\xi = 2 \times 10^{-2}$  sont présentées plus loin (Figure IV.5).

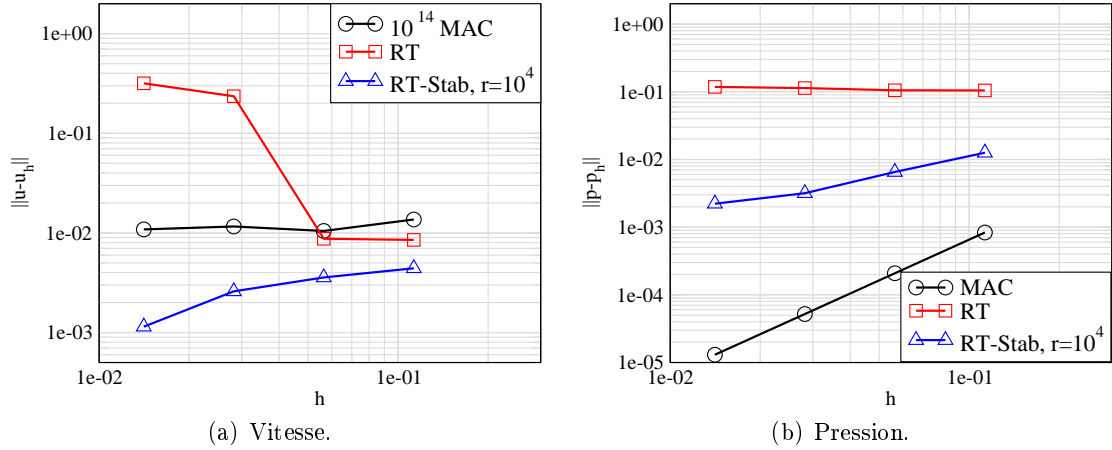


FIGURE IV.4 – Norme  $L^2$  de l'erreur d'approximation en fonction du pas d'espace (erreur relative) – Test du tourbillon isolé pour  $\xi = 0.3$ .

- La figure IV.4 montre que le schéma RT ne converge contrairement au schéma MAC qui présente une convergence spatiale d'ordre deux pour la pression en norme  $L^2$ . De plus, ce dernier schéma est exact en vitesse (noter qu'on a multiplié par  $10^{14}$  la courbe de vitesse pour le schéma MAC). Ceci s'explique par le fait qu'on a montré dans la section III.2.2.b que le terme non-linéaire convectif discret et le gradient de pression discret ne s'équilibrent pas pour le schéma RT mais pas pour le schéma MAC.

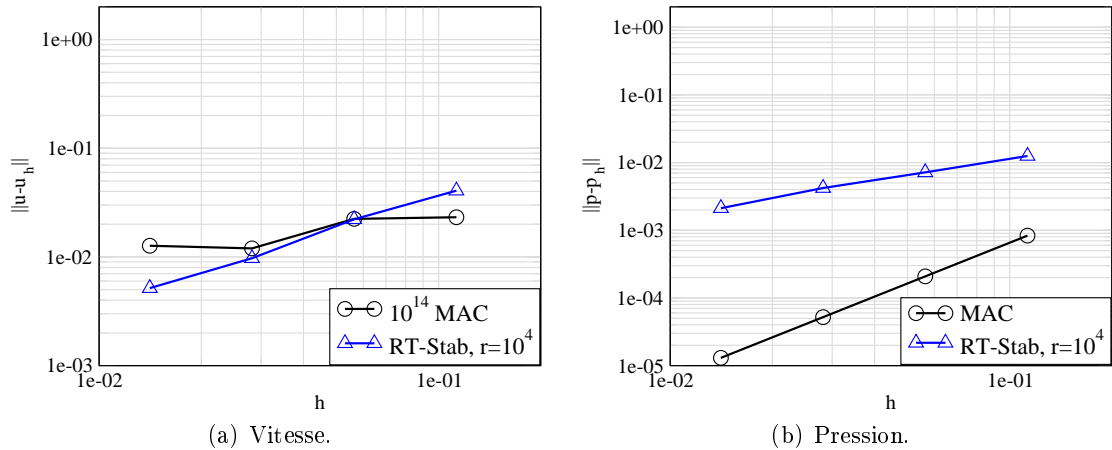


FIGURE IV.5 – Norme  $L^2$  de l'erreur d'approximation en fonction du pas d'espace (erreur relative) – Test du tourbillon isolé pour  $\xi = 2 \times 10^{-2}$ .

- Pour  $\xi$  plus petit ( $\xi = 2 \times 10^{-2}$ ), la figure IV.5 montre que l'ordre de convergence en espace

tend vers la valeur un (normes  $L^2$  discrètes) pour le schéma RT-Stab, en vitesse comme en pression (l'ordre de convergence de la vitesse est dégradé).

### IV.5.2 Problème d'Oseen stationnaire 2D

Dans cette partie, nous étudions le schéma RT-Stab construit dans la section IV.3 sur l'un des cas-tests simples pour lequel le schéma RT fait défaut (Section III.2.2.a). Nous proposons de construire une solution manufacturée notée  $(\mathbf{u}^{exact}, p^{exact})$  aux équations de Navier-Stokes incompressibles et de tester l'approximation de la solution obtenue par le schéma RT-Stab pour le problème d'Oseen stationnaire (Système (8) en Introduction).

Le domaine  $\Omega = [0; 1]^2$  est muni de conditions au bord de type Dirichlet homogènes. La solution analytique est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{exact}(x, y) &= \text{rot}(\sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2) = \begin{pmatrix} 2\pi \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y) \cos(\pi y) \\ -2\pi \sin(\pi y)^2 \sin(\pi x) \cos(\pi x) \end{pmatrix}, \\ p^{exact}(x, y) &= \sin(\pi x)^2, \end{aligned}$$

et la convection est dominante (la viscosité est donnée par  $\mu = 10^{-3}$  Pa · s et la masse volumique  $\rho = 1$  kg · m<sup>-3</sup>).

#### Étude de la convergence spatiale

On utilise méthode de projection incrémentale d'ordre deux (BDF2) en temps. La vitesse et la pression étant initialisées par les solutions exactes, le problème est résolu par un procédé itératif en temps et l'état stationnaire est supposé atteint quand un critère de convergence sur des résidus de vitesse et de pression est satisfait (cf Algorithme (IV.7)).

#### Algorithme IV.7 (Discrétisation du problème d'Oseen stationnaire)

Soit  $\xi > 0$  fixé. Si on a

$$\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_\infty / \max(1, \|\mathbf{u}^n\|_\infty) \geq \xi \Delta t \text{ ou } \|p^{n+1} - p^n\|_\infty / \max(1, \|p^n\|_\infty) \geq \xi \Delta t,$$

alors on résout les étapes suivantes :

1 - Prédiction de vitesse - Trouver  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \in \mathbf{X}_h$  tel que :

$$\forall \sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D, \quad \forall 1 \leq i \leq d,$$

$$\begin{aligned} & \frac{|D_\sigma|}{\Delta t} \left[ \frac{3}{2} \mathcal{N}_{\sigma,i}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) - 2 \mathcal{N}_{\sigma,i}(\mathbf{u}^n) + \frac{1}{2} \mathcal{N}_{\sigma,i}(\mathbf{u}^{n-1}) \right] + \sum_{\varepsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\varepsilon}^n \tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon,i}^{n+1} \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \nu \int_K \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} : \nabla \varphi_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p^n \operatorname{div} \varphi_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} + r \mathbf{a}_T(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \varphi_\sigma^{(i)}) \\ & = \int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{x}, t^{n+1}) \cdot \varphi_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

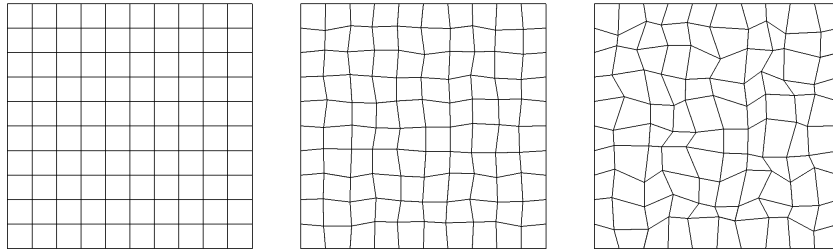
Dans cette équation,  $F_{\sigma,\varepsilon}^n$  désigne une approximation du flux de masse à travers l'arête duale  $\varepsilon$  sortant de la cellule diamant  $D_\sigma$  (voir [4] et le chapitre II) calculée à l'aide de la vitesse d'advection  $\mathbf{u}^{exact}$ .

2 - Correction de vitesse et de pression – Trouver  $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{X}_h$  et  $p^{n+1} \in \mathbf{M}_h$  tels que :

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D, \quad \forall 1 \leq i \leq d, \\ \frac{3|D_\sigma|}{2\Delta t} [\mathcal{N}_{\sigma,i}(\mathbf{u}^{n+1}) - \mathcal{N}_{\sigma,i}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})] - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (p^{n+1} - p^n) \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)} d\mathbf{x} = 0, \\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} d\mathbf{x} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{u}^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = 0. \end{aligned}$$

Précisément, le pas de temps est donné par  $\Delta t = 10^{-2}$  s et un critère d'arrêt donné par  $\xi = 10^{-5}$  est imposé sur les dérivées temporelles (vitesse et pression).

Différents maillages constitués de  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$ ,  $40 \times 40$  et  $80 \times 80$  quadrangles sont utilisés (une version grossière de ces maillages est représentée sur la figure IV.6). Nous désignons par maillages “*perturbés*” des maillages définis par perturbation aléatoire d'un maillage uniforme comme suit : étant donné un paramètre réel de déformation  $\varepsilon$ , on déplace chaque sommet  $v$  de ce maillage vers un point aléatoire du cercle de centre  $v$  et de rayon la longueur de la plus petite arête issue de  $v$  multipliée par  $\varepsilon$ .



(a) Maillage rectangle. (b) Maillage peu perturbé. (c) Maillage très perturbé.

FIGURE IV.6 – Maillages “grossiers” considérés ( $10 \times 10$  mailles) – Problème d'Oseen stationnaire 2D.

Les résultats de convergence spatiale pour le schéma RT-Stab (construit dans la section IV.3) pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation sont représentés sur les figures IV.7, IV.8 et IV.9, en vitesse et en pression (échelle logarithmique). Noter que les résultats obtenus en utilisant le schéma MAC pour discrétisation spatiale (valide pour des maillages cartésiens) sont donnés à titre indicatif.

- D'une part, concernant l'ordre de convergence spatiale (en normes  $L^2$  discrètes) : les figures IV.7, IV.8 et IV.9 montrent que la convergence spatiale est d'ordre deux en espace pour la vitesse et d'ordre un pour la pression. Le comportement de la pression semble dépendre de la géométrie du maillage : en effet, l'ordre de convergence de la pression varie lorsqu'on perturbe le maillage, comme pour le schéma RT (Figures IV.8(b) et IV.9(b)). On observe d'ailleurs une super-convergence de la pression approchée par le schéma RT-Stab quand  $r = 10^4$  et que les mailles sont des rectangles (Figure IV.7(b)).
- D'autre part, concernant le comportement du schéma RT-Stab en fonction des valeurs du paramètre de pénalisation  $r$  : en augmentant  $r$ , la précision du schéma RT-Stab est meilleure que celle du schéma RT. De plus, sur des maillages rectangles, elle tend vers celle du schéma

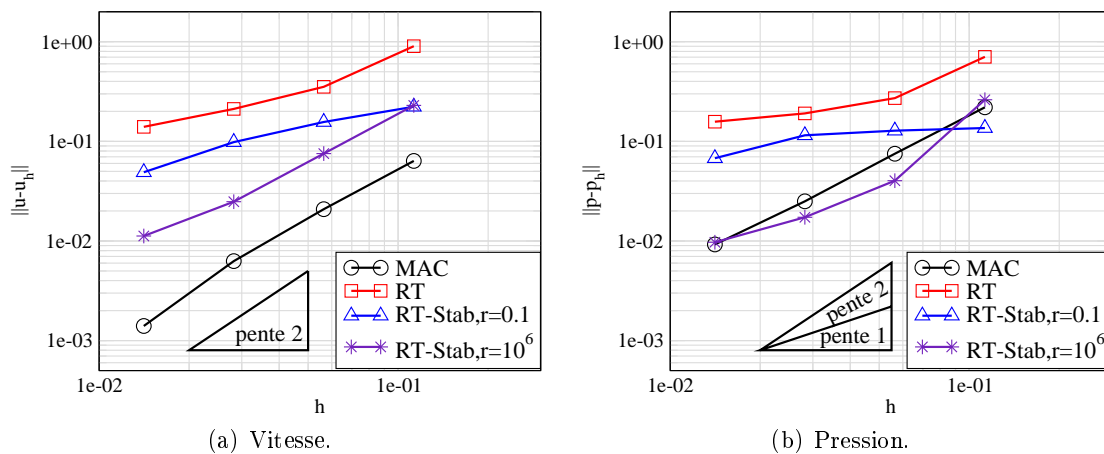


FIGURE IV.7 – Norme  $L^2$  de l’erreur d’approximation (erreur relative) en fonction du pas d’espace – Problème d’Oseen stationnaire 2D (maillage rectangle).

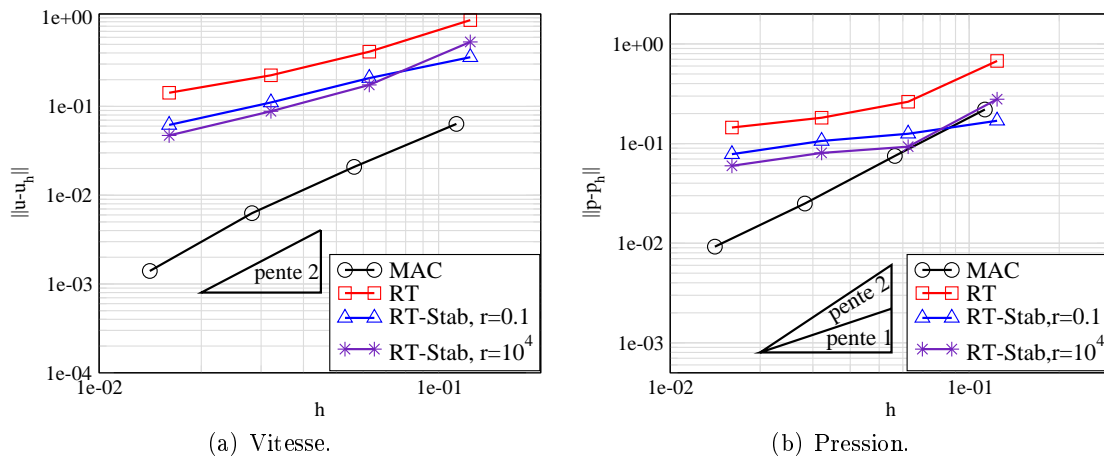


FIGURE IV.8 – Norme  $L^2$  de l’erreur d’approximation (erreur relative) en fonction du pas d’espace – Problème d’Oseen stationnaire 2D (maillage peu perturbé).



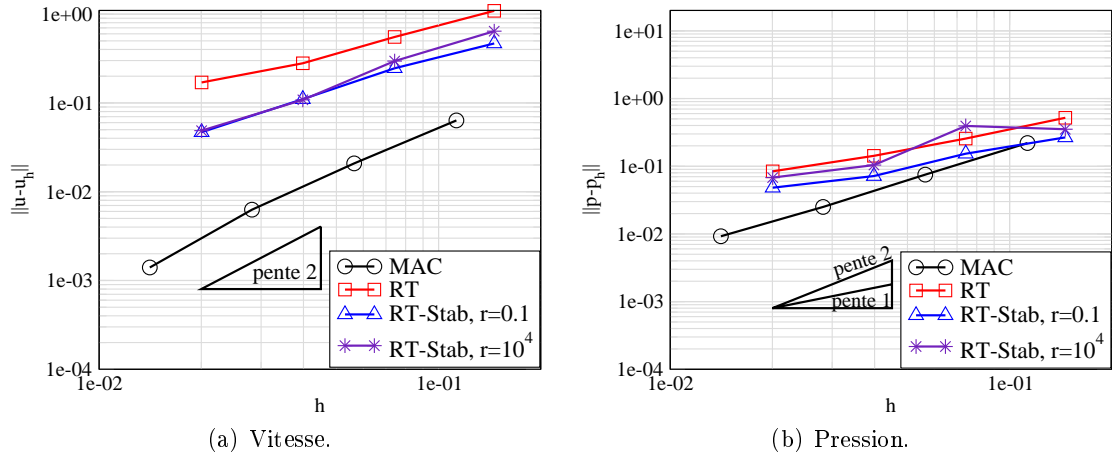


FIGURE IV.9 – Norme  $L^2$  de l'erreur d'approximation (erreur relative) en fonction du pas d'espace – Problème d'Oseen stationnaire 2D (maillage très perturbé).

MAC car le schéma limite est un schéma de type MAC à stencil plus important (Remarque IV.5). Notons de plus que le comportement observé (précision pour  $r$  grand) s'inverse pour la pression seulement lorsque le maillage est fortement perturbé (Figure IV.9(b)).

### IV.5.3 Couche de mélange à $Re = 10000$

Dans ce paragraphe, nous illustrons les possibilités du schéma RT-Stab sur un cas-test 2D à Reynolds élevé, à savoir le test de couche de mélange à  $Re = 10000$  présenté dans la section III.2.2.c.

Ce cas-test, consistant à approcher les solutions des équations de Navier-Stokes incompressibles, est très utilisé pour la LES [63, 57, 37, 15]. Le maillage est rectangle uniforme, et il est choisi pour que la taille du filtre soit plus petite que l'épaisseur de la zone de mélange ( $320 \times 320$  mailles). Nous proposons de tester le schéma RT-Stab (construit dans la section IV.3 pour les coefficients explicites donnés par l'équation (IV.12)) et de comparer la répartition du champ de vorticité obtenue pour un maillage structuré à celui donné par les références.

Le profil de vorticité instantanée est relevé aux temps (non-adimensionnés) 20 s, 30 s, 50 s, 70 s, 80 s, 100 s, 120 s, 140 s et 200 s (Figures IV.10, IV.11 et IV.12).

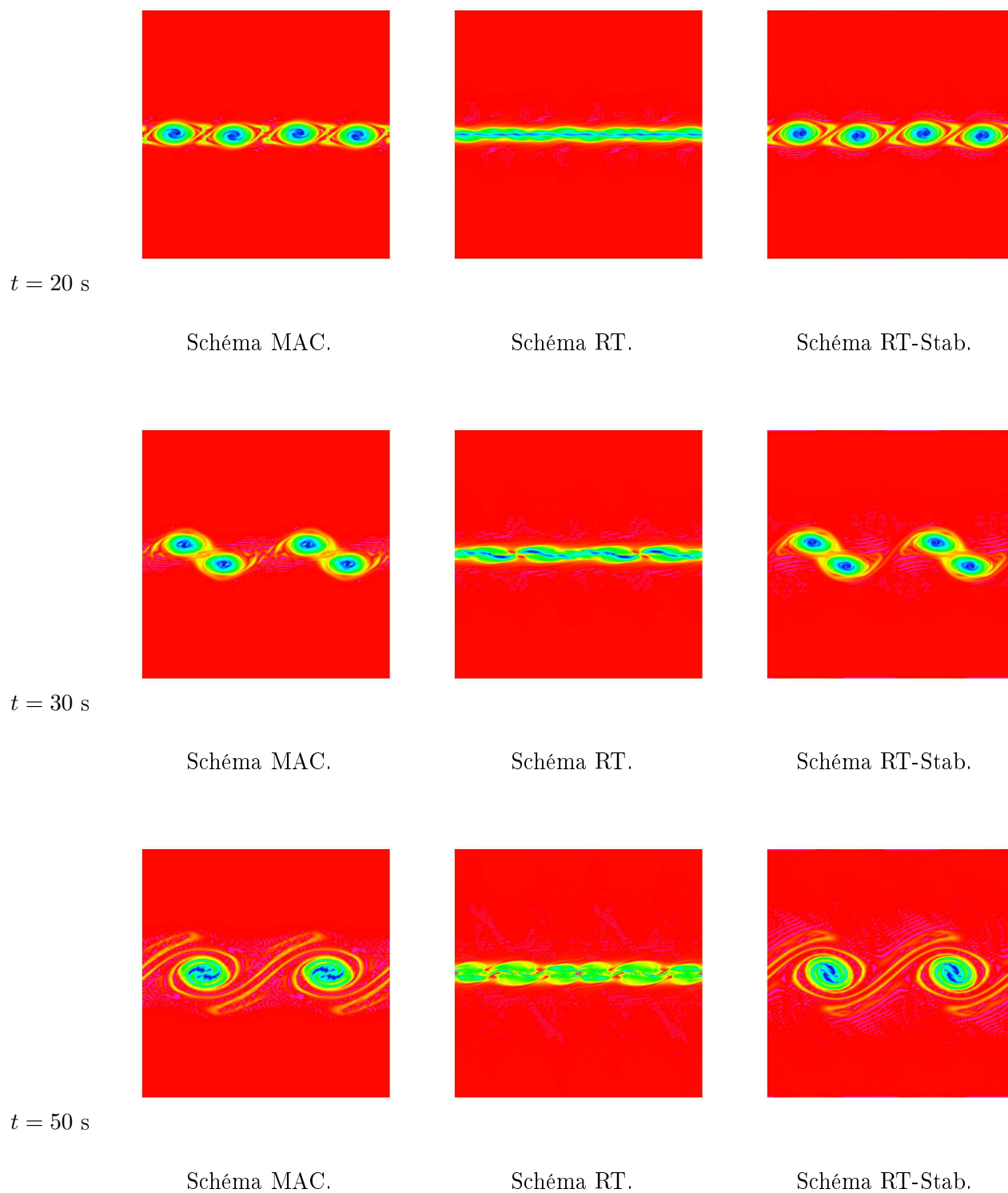


FIGURE IV.10 – Champ de vorticité aux temps non adimensionnés 20 s, 30 s, 50 s sur un maillage rectangle de  $320 \times 320$  mailles – Couche de mélange à  $Re = 10000$ .

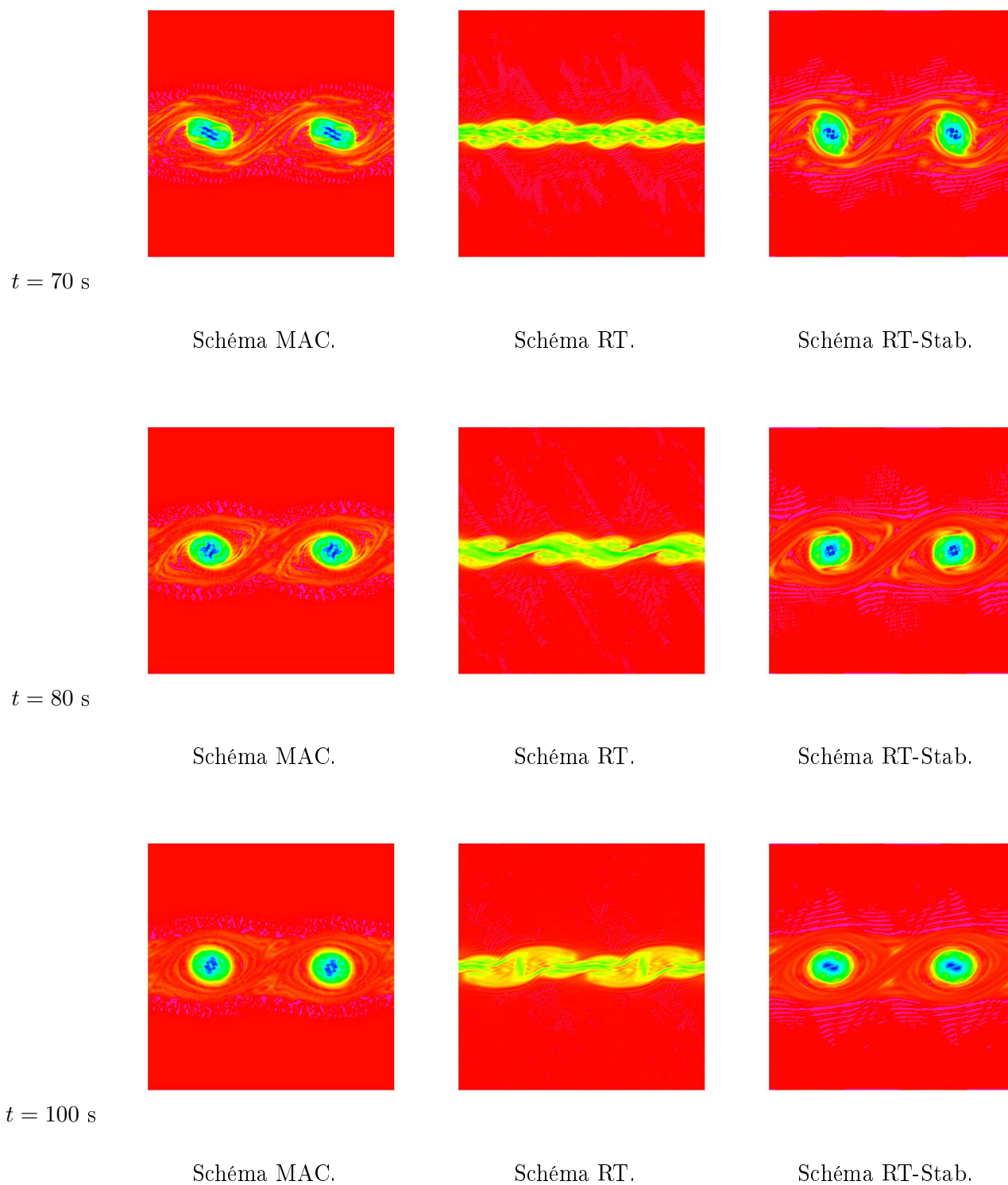


FIGURE IV.11 – Champ de vorticité aux temps non adimensionnés 70 s, 80 s, 100 s sur un maillage rectangle de  $320 \times 320$  mailles – Couche de mélange à  $Re = 10000$ .

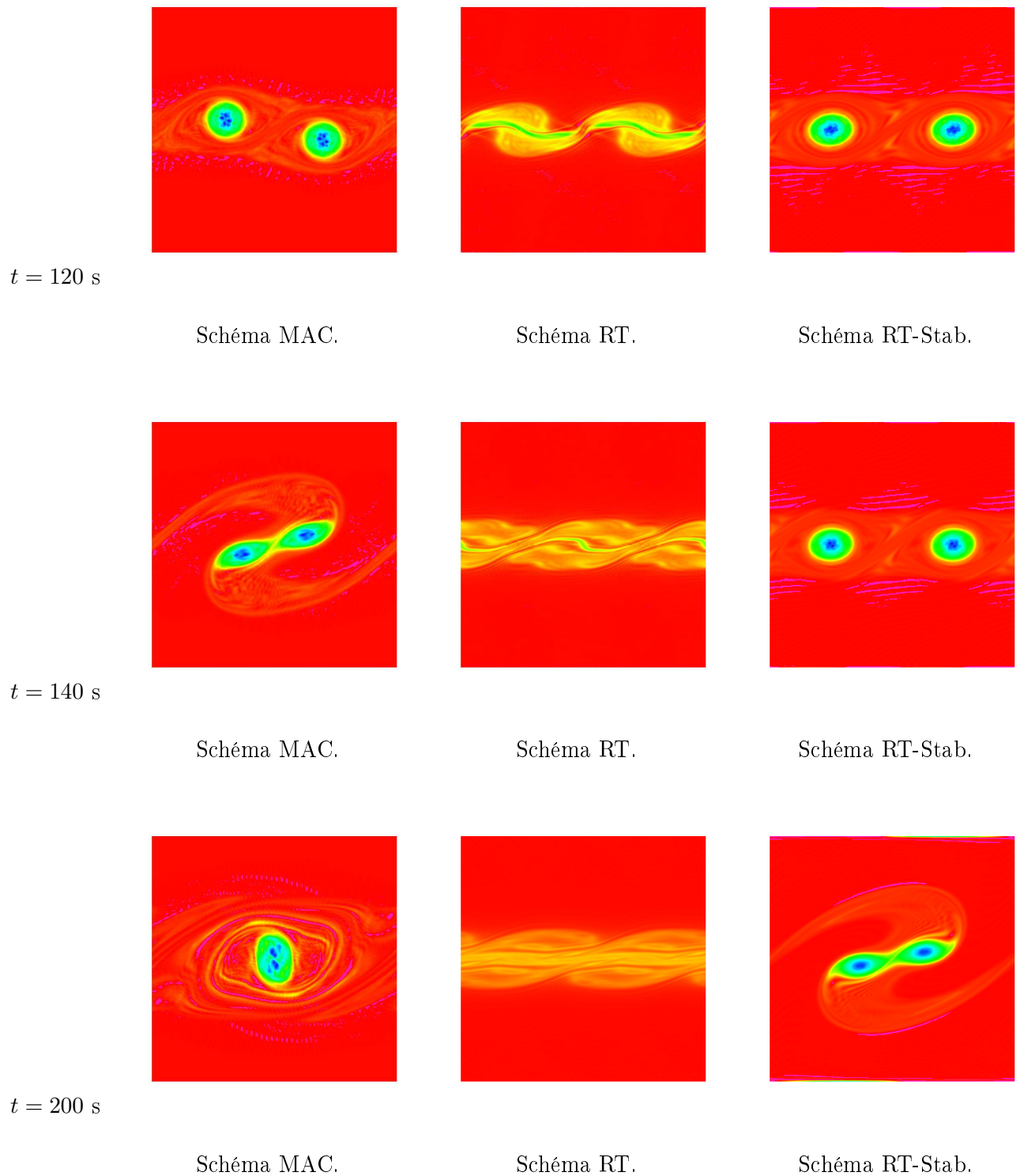


FIGURE IV.12 – Champ de vorticité aux temps non adimensionnés 120 s, 140 s et 200 s sur un maillage rectangle de  $320 \times 320$  mailles – Couche de mélange à  $Re = 10000$ .

Le temps (non adimensionné) auquel se produit le premier appariement pour le schéma RT-Stab est de 30 s tandis que l'appariement des tourbillons secondaires débute après le temps 140 s. Ce dernier temps est plus important que ceux donnés par les références [37, 63].

Pour des maillages quadrangles non rectangles, le schéma RT-Stab ne donne pas des résultats satisfaisants (qualitativement) sur ce cas-test : en effet, il se crée des instabilités qui perturbent le profil des tourbillons.

#### IV.5.4 Problème d'Oseen stationnaire 3D

Dans ce paragraphe, nous étudions un problème d'Oseen stationnaire à convection dominante (Système (8) en Introduction) dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Nous considérons  $\Omega = [0; 1]^3$  dont les bords sont équipés de conditions de type Dirichlet homogènes et la solution analytique est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z) &= \text{rot}(\sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2 \sin(\pi z)^2), \\ &= \begin{pmatrix} 2\pi \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y) \cos(\pi y) \sin(\pi z)^2 \\ -2\pi \sin(\pi y)^2 \sin(\pi x) \cos(\pi x) \sin(\pi z)^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ p(x, y, z) &= \cos(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\pi z). \end{aligned}$$

La viscosité  $\mu$  est fixée à  $10^{-3}$  Pa · s pour  $\rho = 1$  kg · m<sup>-3</sup>. De plus, pour les simulations, une discrétisation en temps BDF2 est utilisée. Afin d'atteindre l'état stationnaire, nous appliquons l'algorithme IV.7 et nous imposons un critère d'arrêt portant sur les dérivées temporelles (vitesse et pression) avec  $\xi$  égal à  $10^{-4}$  ( $\Delta t = 10^{-3}$  s). Afin de tester le schéma RT-Stab, la méthode de calcul des coefficients présentée dans la section IV.3 est utilisée (les coefficients sont explicites donnés par (IV.12)) et le paramètre de stabilisation est  $r = 10^4$ .

#### Étude de la convergence spatiale

Pour ce test, le maillage est parallélépipède rectangle uniforme constitué de  $10 \times 10 \times 10$ ,  $20 \times 20 \times 20$  et  $40 \times 40 \times 40$  mailles. La norme  $L^2$  de l'erreur d'approximation pour les solutions approchées en fonction du pas d'espace en échelle logarithmique est représentée sur la figure IV.13.

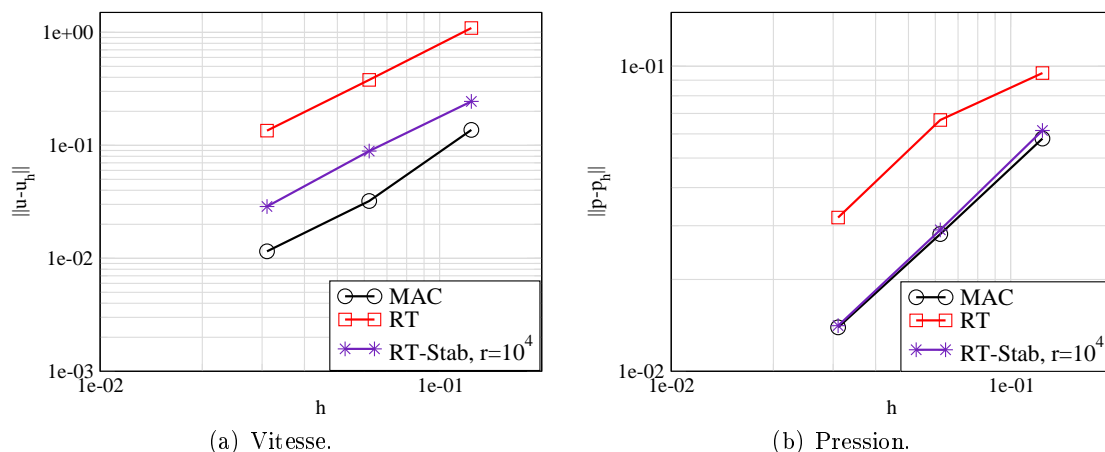


FIGURE IV.13 – Norme  $L^2$  de l'erreur d'approximation (erreur relative) en fonction du pas d'espace – Problème d'Oseen stationnaire 3D.

La figure IV.13 montre que les différentes discrétisations proposées convergent à l'ordre deux en espace pour la vitesse et pour la pression (super-convergence), le schéma MAC étant plus précis que les autres. Le schéma RT-Stab apporte un gain de précision comparé au schéma RT de l'ordre de dix (en vitesse) pour  $r = 10^4$ , et il est aussi précis que le schéma MAC pour la pression.

#### IV.5.5 Canal plan tridimensionnel

Dans cette sous-section, nous reprenons le cas-test académique du canal plan turbulent tridimensionnel à  $Re_\tau = 590$  pour lequel le schéma RT ne donne pas de résultats satisfaisants (Section III.1). Des résultats de référence précis obtenus par simulation numérique directe sont disponibles [74]. Nous proposons de calculer les solutions approchées des équations de Navier-Stokes incompressibles filtrées (Système (4) en Introduction) avec le modèle W.A.L.E. afin d'examiner l'influence du schéma RT-Stab sur les extrema du profil de viscosité effective moyenne présentés par le schéma RT près des parois. Du fait des capacités limitées des solveurs, le maillage est plus grossier que dans le chapitre III. Les équations à résoudre sont les équations de Navier-Stokes incompressibles filtrées (Système (4) en Introduction). Le domaine  $\Omega = [-\pi L_0; \pi L_0] \times [-\frac{\pi}{2} L_0; \frac{\pi}{2} L_0] \times [0; 2 L_0]$  ( $L_0 = 0.5$  m) est périodique dans les directions  $x$  et  $y$  et muni de conditions d'adhérence  $\mathbf{u} = 0$  sur les parois haute et basse (les plans  $\{z = 0\}$  et  $\{z = 2 L_0\}$ ). Pour ces simulations, l'intervalle de temps  $(0, 100$  s) est subdivisé avec un pas de temps  $\Delta t = 10^{-2}$  s. De plus, le maillage est assez grossier : en effet, il est uniforme (composé de 32 mailles) dans chacune des directions  $x$  et  $y$ . La progression de la taille des mailles dans le sens de la hauteur obéit à une loi en tangente hyperbolique, pour 64 cellules dont la coordonnée  $z_k$  du sommet  $1 \leq k \leq 65$  est donnée par l'équation (III.2). Le réel  $a$  est choisi en fonction de la dilatation du maillage de telle sorte que la mesure adimensionnée de la première maille  $z_1^+ = \frac{z_1}{l_\tau}$  soit égale à 1 et que la progression de la taille de deux mailles successives soit comprise entre 10 et 14% (ici,  $a = 0.95701$ , cf Section III.1.2.b). L'écoulement turbulent est initialisé par reprise graphique d'un calcul mené pour un Reynolds élevé ( $Re_\tau = 3600$ , cf Section III.1.2.c) et une force volumique adaptative est imposée dans le canal, dans la direction principale de l'écoulement, afin de maintenir un débit constant noté  $Q^{ref}$  (cf Section III.1.2.d). Le paramètre de stabilisation  $r$  est choisi dans l'ensemble  $\{0.1, 1, 10\}$ .

Les paramètres étudiés sont les deux premiers moments (en temps et en espace) de la composante longitudinale de vitesse résolue (voir la section III.1.2.f pour le calcul des statistiques)

adimensionnés par la vitesse de frottement  $u_\tau$  en fonction de la hauteur adimensionnée dans le canal (Figure IV.14). Le profil de viscosité effective moyenne en fonction de la hauteur est quant à lui représenté sur la figure IV.15.

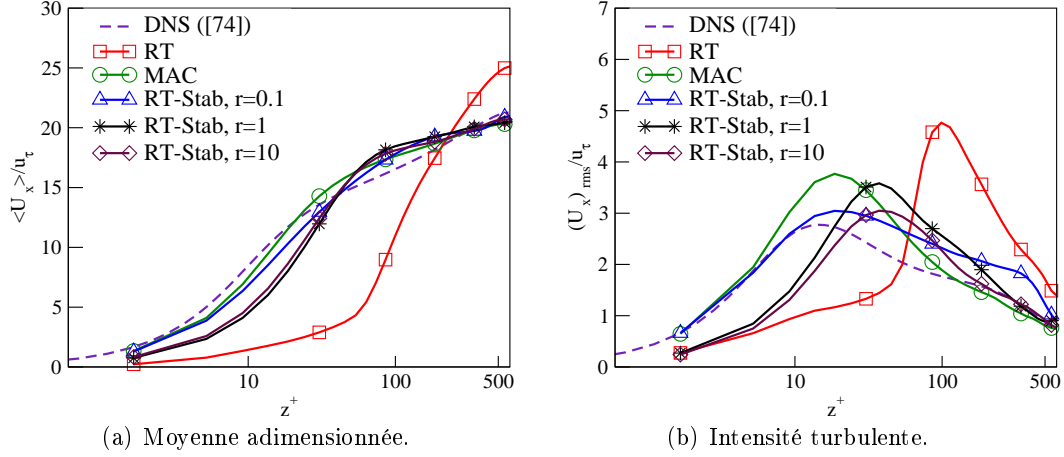


FIGURE IV.14 – Moments (en espace et en temps) de la composante longitudinale de la vitesse résolue adimensionnée par la vitesse de frottement pariétal entre 90 s et 100 s – Canal plan.

Le canal étant symétrique, les moments de la vitesse sont représentés sur un demi-canal ; on observe une amélioration des profils des moments de la vitesse par rapport au schéma RT : la moyenne et l'intensité turbulente se rapprochent des données de DNS [74], les moments d'ordre deux restant sur-évalués (Figure IV.14).

Concernant la viscosité effective moyenne, le schéma RT montre une zone de dissipation importante en proche paroi (pics), contrairement au schéma MAC (Figure IV.15). Ces maxima jouent un rôle important dans la cascade d'énergie puisqu'ils représentent la zone dans laquelle l'énergie d'agitation est dissipée par les petites échelles sous forme de chaleur.

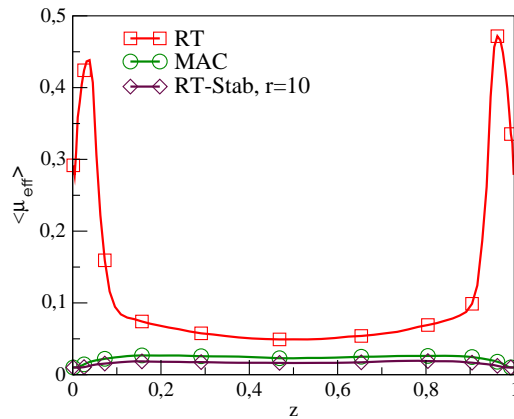


FIGURE IV.15 – Viscosité effective moyenne entre 90 s et 100 s – Canal plan.

Contrairement au schéma RT, le schéma RT-Stab donne des résultats qualitativement satisfaisants pour deux raisons. En effet, en comparant l'ordre de la viscosité turbulente en fonction de la hauteur  $z$  en proche paroi (Figure IV.16(a)), on constate que celui-ci est en  $\mathcal{O}(z^3)$  ( $z \rightarrow 0$ )

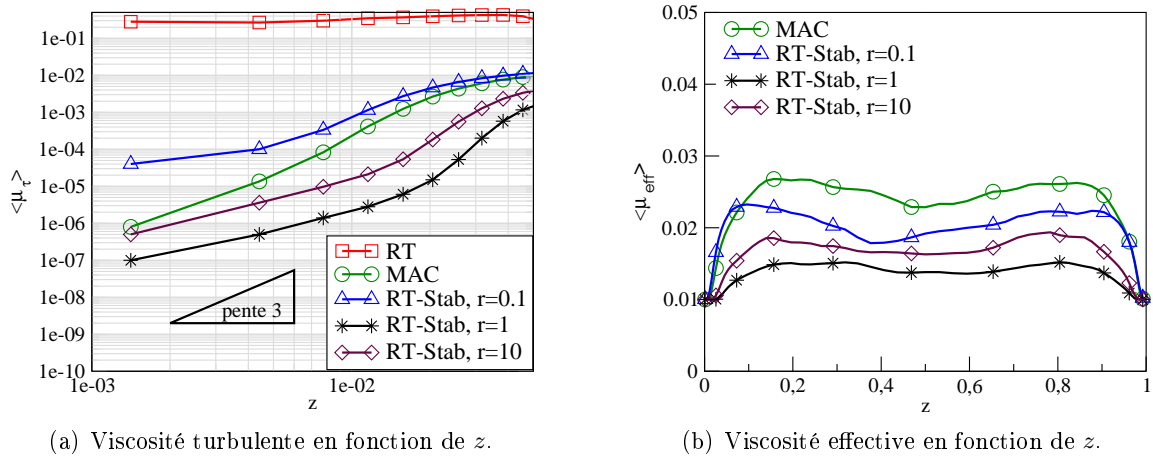


FIGURE IV.16 – Profils de viscosité dynamique moyenne entre 90 s et 100 s – Canal plan.

pour cette discrétisation, contrairement au schéma RT. Par ailleurs, le profil de viscosité (effective) moyenne en fonction de la hauteur dans le canal pour le schéma RT-Stab semble se rapprocher de celui du schéma MAC pour ce nouveau schéma (Figure IV.16(b)).

## IV.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons construit un schéma de pénalisation pour le schéma RT pour compenser le fait que le multiplicateur de Lagrange de la composante tangente du gradient de pression est nul. Le principe du schéma RT-Stab est de contraindre les degrés de liberté de vitesse tangents aux faces à être égaux à une combinaison linéaire des degrés de liberté normaux aux faces alentour. Nous avons retenu une méthode de calcul des coefficients de cette combinaison linéaire en imposant la consistence pour les champs affines à divergence nulle. Nous avons montré que le schéma résultant est bien posé et stable. En faisant tendre le paramètre de pénalisation vers l'infini, il est possible de voir que le schéma limite est de type MAC (valide pour des maillages non structurés) car les inconnues qu'il fait intervenir sont toutes normales aux faces. Ainsi, pour d'importantes valeurs du paramètre de pénalisation, le schéma RT-Stab permet notamment d'obtenir des résultats satisfaisants sur les problèmes d'Oseen à convection dominante et du tourbillon isolé, contrairement au schéma RT usuel. Enfin, nous avons montré que le schéma RT-Stab donne des résultats en accord avec les références pour le cas-test du canal plan avec le modèle sous-maille W.A.L.E. Le schéma proposé répond donc au critère (C.2) énoncé en Introduction (Section 6.3), à savoir la précision pour des écoulements à convection dominante. Par ailleurs, en utilisant une discrétisation de l'opérateur convectif satisfaisant un contrôle de l'énergie cinétique, ça en fait un schéma adapté à la LES.





## Chapitre V

# Enrichissement de la pression pour l'élément fini de Rannacher-Turek

Dans le chapitre III (Section III.2.2.b), nous avons montré que l'élément fini de Rannacher-Turek [83] ne permet pas de trouver une solution particulière du problème du tourbillon isolé [32] (Système (9) en Introduction), contrairement au schéma MAC. Nous présentons ici une discrétisation des équations de Navier-Stokes incompressibles instationnaires (Système (1) en Introduction, pour lequel l'équation de conservation de la masse est donnée par  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ ) que nous rappelons ici. On cherche à approcher les solutions, à savoir la vitesse  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  et la pression  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}^0(\cdot), & \text{dans } \Omega \times \{0\}. \end{array} \right. \quad (\text{V.1})$$

Ces dernières étant complétées par des conditions au bord.

La discrétisation que nous proposons est basée sur l'élément fini de Rannacher-Turek, de caractéristiques similaires au schéma MAC, mais elle s'appuie sur des maillages non structurés. Celle-ci répond au critère (C.2) requis pour qu'un schéma soit adapté à la LES (Section 6.3 en Introduction), à savoir la précision pour des écoulements à convection dominante.

En nous inspirant de la littérature sur le sujet (enrichissement de la pression pour l'élément fini de Crouzeix-Raviart de Trio-U [48, 32, 7] ou de l'élément fini de Stokes  $\mathbb{Q}_2/\mathbb{P}_{1disc}$  [58, 60], voir le troisième paragraphe de la section III.2.1), nous proposons dans ce chapitre de modifier la discrétisation de la pression pour l'élément fini de Rannacher-Turek afin de satisfaire le problème du tourbillon isolé (*cf* Section III.2.2.b). L'approche envisagée repose sur l'ajout de degrés de liberté en pression : à ceux situés au centre de chaque cellule, nous ajoutons des degrés de liberté situés aux sommets. Par construction, ce nouvel élément résout effectivement le problème du tourbillon isolé. De plus, comme le schéma MAC, il se révèle nettement plus précis que l'élément fini de Rannacher-Turek sur plusieurs cas-tests à convection dominante. Cependant, pour des maillages quadrangles non rectangles ou non parallélogrammes, le bilan de masse discret n'est pas satisfait sur le maillage primal. Cette propriété est primordiale pour utiliser la discrétisation de l'opérateur convectif sur les mailles diamant vérifiant une identité d'énergie cinétique (Critère (C.1) en Introduction, Sections 6.3) et le principe du maximum discret pour la température. Nous proposons donc une méthode de reconstruction des flux de masse primaux afin de satisfaire le bilan de masse discret sur les cellules primales et illustrons les possibilités du schéma résultant pour des écoulements complexes à convection dominante comme le cas-test de couches de mélange à  $\operatorname{Re} = 10000$  (Section III.2.2.c).

Par ailleurs, nous présentons l'étude mathématique du problème de Stokes pour des conditions au bord de type Dirichlet homogènes dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , discrétisé par l'élément enrichi. D'une part, nous montrons la stabilité de la vitesse du schéma proposé mais nous constatons que la condition *inf-sup* n'est pas satisfaite. D'autre part, nous prouvons des estimations de l'erreur d'approximation en espace d'ordre un en norme  $H^1$  brisée pour la vitesse et en norme  $L^2$  pour la pression après application d'un post-traitement convenable sur celle-ci. Pour ce faire, nous proposons un opérateur d'interpolation en vitesse, et prouvons sa stabilité  $H^1$  et une inégalité d'interpolation. En utilisant les estimations de l'erreur d'approximation en vitesse, le lemme de *Nečas* pour un choix approprié de la pression et ces inégalités d'interpolation, nous majorons l'erreur d'approximation pour la pression post-traitée. Cependant, nous remarquons (Remarque V.14 ci-dessous) que l'analyse de l'opérateur d'interpolation proposé n'est valide que pour des maillages uniformes, rectangles ou parallélogrammes.

Le plan du chapitre est le suivant : nous explicitons dans un premier temps le nouvel élément, un pavage pression et les opérateurs discrets qui leur sont associés (Sections V.2 et V.3). Ensuite, nous présentons les premiers tests numériques réalisés avec cet élément dans la section V.4. Une méthode permettant de retrouver le bilan de masse discret pour des maillages non rectangles ou non parallélogrammes est proposée dans la section V.5, dont les capacités sont illustrées pour le cas-test de couches de mélange à  $Re = 10000$  pour des maillages non structurés (Sous-section V.5.2). Dans un second temps, nous analysons les propriétés mathématiques du schéma construit dans la section V.6 : nous présentons le problème de Stokes discret, puis nous traitons de la stabilité de la vitesse et la pression (Sous-section V.6.1). Enfin, nous présentons l'analyse de l'erreur d'approximation dans la sous-section V.6.2.

Les théorèmes d'analyse utilisés dans ce chapitre sont énoncés dans l'annexe D.

## V.1 Démarche

Rappelons que nous notons  $\mathbf{X}_h$  et  $\mathbf{M}_h$  les espaces d'approximation Rannacher-Turek pour la vitesse et la pression (avec des conditions au bord adaptées) et que  $\mathbf{u}_\sigma$  désigne le degré de liberté en vitesse associé à l'arête  $\sigma$  (Annexe A pour une description de cet élément fini et de certaines de ses propriétés).

Rappelons que pour cette discrétisation, pour le cas-test du tourbillon isolé (Section III.2.2.b), pour un maillage uniforme rectangle, la composante tangentielle du gradient de pression discret s'annule, contrairement à celle du terme convectif. En effet, en notant  $h$  et  $k$  les pas d'espace respectifs dans les directions  $x$  et  $y$ , on a, pour  $\mathbf{u}^{exact}(x, y) = (y, -x)^T$  et  $p^{exact}(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , si  $\sigma = K|L$  est verticale

$$\begin{aligned} |D_\sigma|(\nabla p^{exact})_\sigma &= |\sigma|(p_L - p_K) \mathbf{n}_{K,\sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ hk y_\sigma \end{pmatrix}. \\ |D_\sigma|(\mathbf{u}^{exact} \cdot \nabla \mathbf{u}^{exact})_\sigma &= \begin{pmatrix} -\frac{hk}{2} x_\sigma \\ -\frac{hk}{2} y_\sigma \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{V.2}$$

Ainsi, la démarche consiste à trouver une discrétisation telle que les composantes tangentes contribuent au gradient de pression et que, de plus, celui-ci s'équilibre avec le terme convectif non-linéaire.

La démarche proposée pour des maillages rectangles est la suivante : considérons un maillage primal et un maillage décalé (Figure V.1). En décalant l'opérateur divergence standard sur le maillage

décalé, celui-ci porte sur les degrés de liberté normaux aux arêtes du maillage décalé, *i.e.* les degrés de liberté tangents aux arêtes primales. Cela revient à considérer un nouvel élément avec des degrés de liberté en pression situés à la fois aux sommets et au centre de la cellule. Dans la suite, nous généralisons cette construction à des maillages 2D généraux.

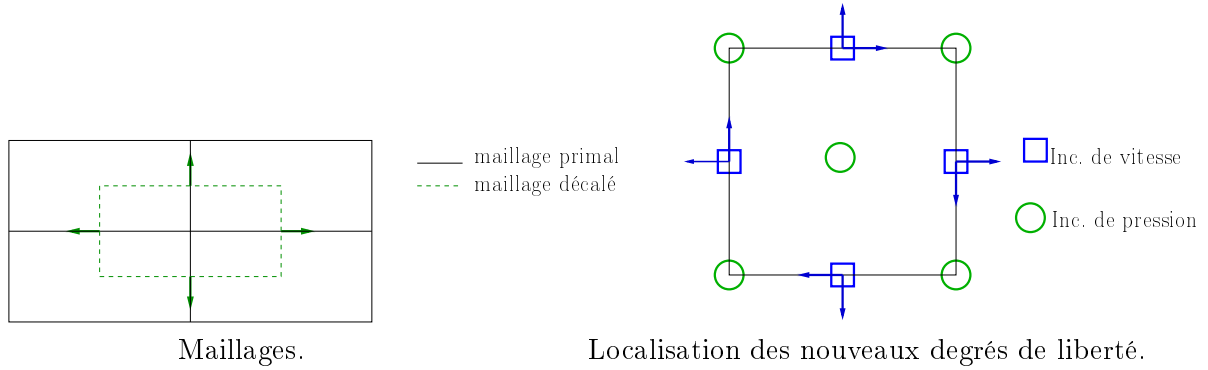


FIGURE V.1 – Description de la démarche dans le cas d’un maillage cartésien si  $d = 2$ .

## V.2 Pavage pression

Dans cette section, nous construisons un pavage pour discrétiser la pression.

Considérons un maillage "primal" de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  noté  $\mathcal{T}_h$  constitué de quadrangles et supposé régulier au sens de la littérature éléments finis [20, conditions  $\mathcal{T}_h1$  à  $\mathcal{T}_h5$  p. 61 et 71]. Parmi ces maillages, nous considérons seulement ceux où quatre cellules exactement partagent un même sommet intérieur. Les arêtes obtenues en reliant les centres de deux arêtes primales adjacentes permettent de définir des cellules quadrangles constituant un pavage de  $\Omega$  noté  $\mathcal{T}_h^*$  (Figure V.2).

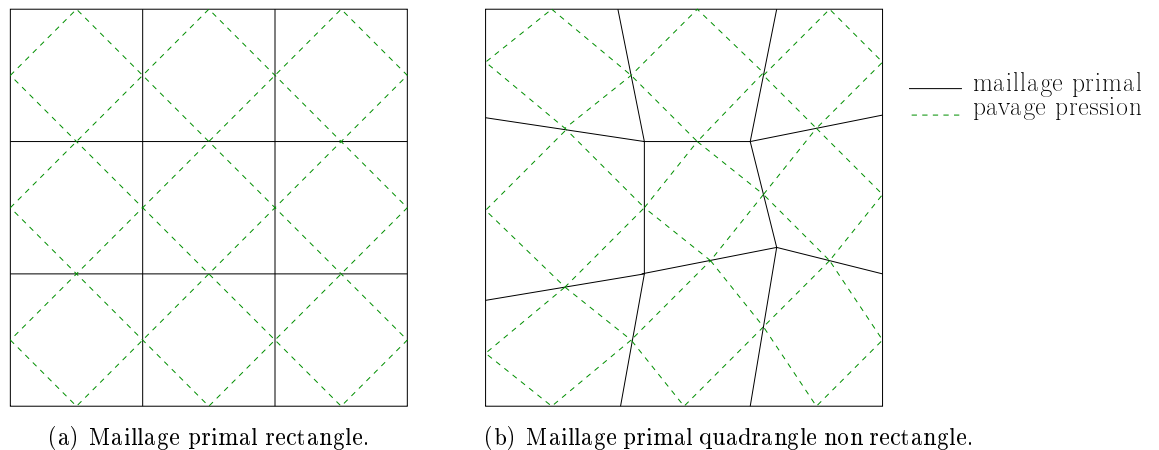


FIGURE V.2 – Description du pavage pour la pression de  $\Omega$ .

Les cellules du pavage pression ainsi construites (notées  $L^* \in \{K^*, V^*\}$ ) sont de deux types (Figure V.3) :

- des cellules  $K^*$  dites *cell-centered*, chacune incluse dans une cellule primale  $K$  et contenant le centre de gravité de cette dernière,

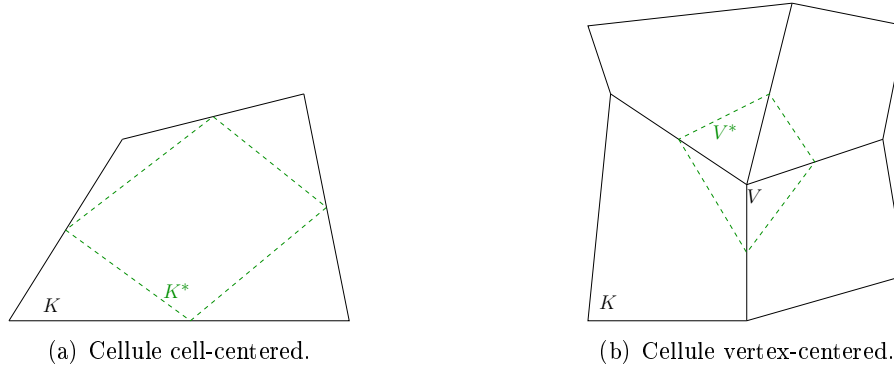


FIGURE V.3 – Volumes de contrôle du pavage considéré.

- des cellules  $V^*$  dites *vertex-centered*, chacune centrée sur un sommet  $V$  du maillage primal.

De plus, nous supposons que la pression discrète est constante par cellule  $L^*$  (de valeur  $p_{L^*}$ ). Ainsi,  $p_{L^*}$  prend selon les cas la valeur

- $p_{K^*}$  dans une cellule duale  $K^*$  cell-centered incluse dans une maille primale  $K$ ,
- $p_{V^*}$  dans une cellule duale  $V^*$  vertex-centered centrée sur un sommet  $V$ .

Nous notons  $\mathbf{N}_h$  l'espace discret d'approximation pour la pression enrichie.

### V.3 Discrétisation

Dans cette section, nous construisons les nouveaux opérateurs divergence de vitesse et gradient de pression discrets, pour la vitesse appartenant au même espace d'approximation en vitesse que l'élément fini de Rannacher-Turek et pour la pression constante sur chaque maille du pavage construit dans la section V.2. Pour la méthode de projection, l'élimination réalisée lors de l'étape de projection de vitesse (Étape 2' de l'algorithme I.2) conduit à considérer le complément de Schur du problème de Darcy. Pour cette raison, nous détaillons l'expression de cet opérateur discret dans un second temps.

#### V.3.1 Notations

Pour construire l'opérateur divergence de vitesse discret, nous utilisons les notations ci-dessous. À une arête primale  $\sigma$ , nous associons l'ensemble des nœuds de vitesse partageant un sommet commun avec  $\sigma$  (cet ensemble est noté  $\{1, 2, 3, 4\}$  sur la figure V.4(a)).

Considérons une cellule du pavage de pression notée  $L^*$  et construisons, pour cette cellule, deux arêtes auxiliaires notées  $\varepsilon_\sigma$ , chacune étant associée à un sommet  $\mathbf{x}_\sigma$  de  $L^*$ . Pour ce faire,

- notons  $\delta_i$  ( $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) les arêtes de la cellule  $L^*$  et  $\mathbf{n}_{\delta_i}$  les normales sortantes de  $L^*$  à travers ces arêtes.
- Considérons un sommet  $\mathbf{x}_\sigma$  de  $L^*$  situé sur une arête primale  $\sigma$ . On définit l'arête auxiliaire  $\varepsilon_\sigma$  comme le segment reliant les centres des arêtes de la cellule  $L^*$  partageant un sommet commun avec  $\sigma$ , autrement dit  $\varepsilon_\sigma = [1; 2]$  dans le cas de la figure V.4. Ainsi, pour une cellule  $L^*$  du pavage pression, on définit deux arêtes auxiliaires correspondantes aux "diagonales" de  $L^*$ . Avec les notations de la figure V.4(a), il s'agit de  $\varepsilon_\sigma$  et  $\varepsilon_{\sigma_1} = \varepsilon_{\sigma_2}$ .

Notons  $\mathbf{n}_{\varepsilon_\sigma}$  la normale sortante de  $L^*$  à travers l'arête  $\varepsilon_\sigma$  (Figure V.4(b)), on a

$$|\delta_1| \mathbf{n}_{\delta_1} + |\delta_2| \mathbf{n}_{\delta_2} = |\varepsilon_\sigma| \mathbf{n}_{\varepsilon_\sigma}. \quad (\text{V.3})$$

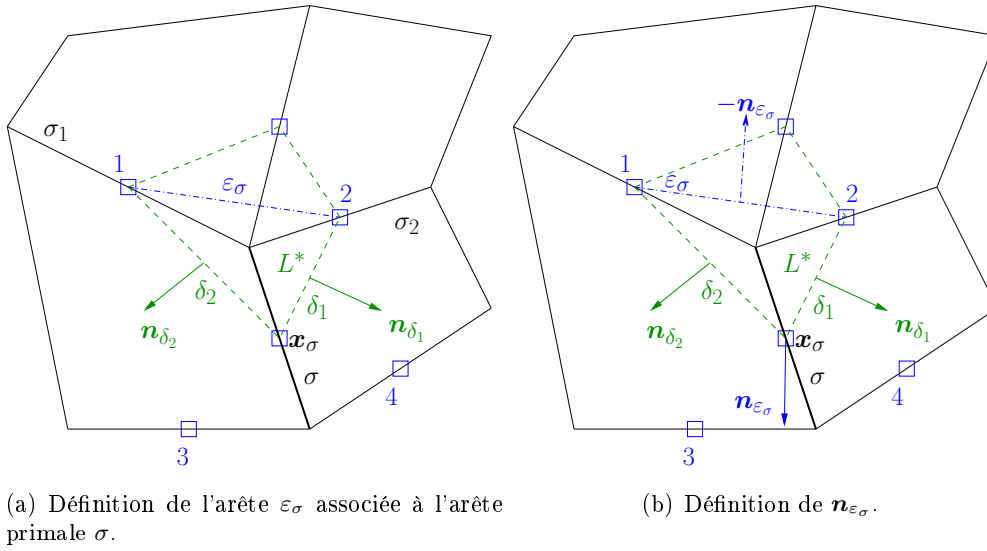


FIGURE V.4 – Notations relatives à l'élément enrichi.

De plus, la quantité  $\mathbf{u}_\delta$  est une approximation centrée de la vitesse, autrement dit si  $\delta = [\mathbf{x}_\sigma; \mathbf{x}_{\sigma'}]$ ,

$$\mathbf{u}_\delta = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_\sigma + \mathbf{u}_{\sigma'}).$$

### V.3.2 Opérateur divergence de vitesse discret

Pour écrire l'opérateur divergence de vitesse discret, nous distinguons les "cellules intérieures" et des "cellules extérieures" dont une arête au moins est située sur le bord  $\partial\Omega$ , comme représenté sur la figure V.5.

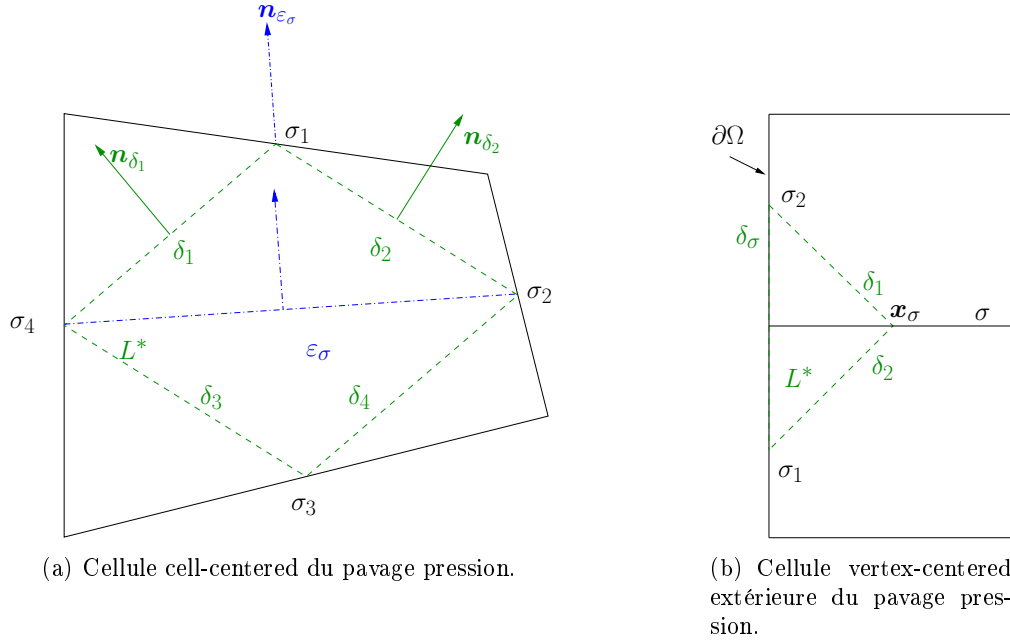


FIGURE V.5 – Configurations considérées pour la définition de l'opérateur divergence de vitesse.

**Définition V.1 (Opérateur divergence de vitesse discret)**

1- Étant donnée une cellule duale de pression intérieure  $L^*$ , en notant  $\mathcal{E}^*(L^*)$  l'ensemble des arêtes de  $L^*$ , posons

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{X}_h, \quad |L^*| (\operatorname{div}^{EP} \mathbf{u})_{L^*} = \sum_{\delta \in \mathcal{E}^*(L^*)} |\delta| \mathbf{u}_\delta \cdot \mathbf{n}_\delta, \quad (\text{V.4})$$

où  $\mathbf{n}_\delta$  est la normale sortante de  $L^*$  à travers l'arête duale  $\delta$  et  $\mathbf{u}_\delta$  est une approximation centrée de la vitesse. Alors, en notant  $\mathcal{S}(L^*)$  l'ensemble des sommets de  $L^*$ , par la relation (V.3) (entre les normales et les mesures des arêtes) appliquée sur chaque demi cellule du pavage pression, il vient

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{X}_h, \quad |L^*| (\operatorname{div}^{EP} \mathbf{u})_{L^*} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}_\sigma \in \mathcal{S}(L^*)} |\varepsilon_\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\varepsilon_\sigma}, \quad (\text{V.5})$$

2- Pour une cellule extérieure (vertex-centered) du pavage pression, la définition de l'opérateur divergence est choisie de manière à satisfaire un bilan de masse discret sur celle-ci. Adoptons les notations de la figure V.5(b) : étant donnée une arête primale  $\sigma$ , soit  $\delta_\sigma$  la seule arête de la cellule vertex-centered à laquelle  $\mathbf{x}_\sigma$  n'appartient pas. Nous posons alors

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{X}_h, \quad |L^*| (\operatorname{div}^{EP} \mathbf{u})_{L^*} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}_\sigma \in \mathcal{S}(L^*)} |\delta_\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\delta_\sigma}. \quad (\text{V.6})$$

Dans la suite, nous justifions cette définition.

1- Si  $L^*$  est une cellule cell-centered (idem pour les cellules vertex-centered intérieures) : avec les notations de la figure V.5(a), par l'équation (V.4) d'abord puis par définition de l'approximation

centrée de la vitesse ensuite, on a

$$\begin{aligned}
|L^*| (\operatorname{div}^{EP} \mathbf{u})_{L^*} &= |\delta_1| \mathbf{u}_{\delta_1} \cdot \mathbf{n}_{\delta_1} + |\delta_2| \mathbf{u}_{\delta_2} \cdot \mathbf{n}_{\delta_2} + |\delta_3| \mathbf{u}_{\delta_3} \cdot \mathbf{n}_{\delta_3} + |\delta_4| \mathbf{u}_{\delta_4} \cdot \mathbf{n}_{\delta_4}, \\
&= \frac{1}{2} |\delta_1| (\mathbf{u}_{\sigma_1} + \mathbf{u}_{\sigma_4}) \cdot \mathbf{n}_{\delta_1} + \frac{1}{2} |\delta_2| (\mathbf{u}_{\sigma_1} + \mathbf{u}_{\sigma_2}) \cdot \mathbf{n}_{\delta_2} \\
&\quad + \frac{1}{2} |\delta_3| (\mathbf{u}_{\sigma_4} + \mathbf{u}_{\sigma_3}) \cdot \mathbf{n}_{\delta_3} + \frac{1}{2} |\delta_4| (\mathbf{u}_{\sigma_3} + \mathbf{u}_{\sigma_2}) \cdot \mathbf{n}_{\delta_4}.
\end{aligned}$$

Réordonnons cette dernière somme et utilisons l'équation (V.3) deux fois sur chacune des moitiés de  $L^*$  (à savoir celles dont les sommets sont les centres des arêtes  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_4$  d'une part et  $\sigma_2, \sigma_3$  et  $\sigma_4$  d'autre part), il vient

$$|L^*| (\operatorname{div}^{EP} \mathbf{u})_{L^*} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}_\sigma \in \mathcal{S}(L^*)} |\varepsilon_\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\varepsilon_\sigma},$$

c'est-à-dire l'équation (V.5).

Un traitement particulier au bord est important pour satisfaire l'équation d'incompressibilité discrète.

2- Si  $L^*$  est une cellule vertex-centered "extérieure" : avec les notations de la figure V.5(b) et par l'équation (V.4), on a

$$\begin{aligned}
|L^*| (\operatorname{div}^{EP} \mathbf{u})_{L^*} &= \frac{1}{2} |\delta_1| (\mathbf{u}_{\sigma_1} + \mathbf{u}_\sigma) \cdot \mathbf{n}_{\delta_1} + \frac{1}{2} |\delta_2| (\mathbf{u}_{\sigma_2} + \mathbf{u}_\sigma) \cdot \mathbf{n}_{\delta_2} + \frac{1}{2} |\delta_\sigma| (\mathbf{u}_{\sigma_1} + \mathbf{u}_{\sigma_2}) \cdot \mathbf{n}_{\delta_\sigma}, \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{u}_\sigma \cdot (|\delta_1| \mathbf{n}_{\delta_1} + |\delta_2| \mathbf{n}_{\delta_2}) + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{\sigma_1} \cdot (|\delta_1| \mathbf{n}_{\delta_1} + |\delta_\sigma| \mathbf{n}_{\delta_\sigma}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{\sigma_2} \cdot (|\delta_2| \mathbf{n}_{\delta_2} + |\delta_\sigma| \mathbf{n}_{\delta_\sigma}).
\end{aligned}$$

Par l'équation (V.3), il vient

$$|L^*| (\operatorname{div}^{EP} \mathbf{u})_{L^*} = \frac{1}{2} |\delta_\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\delta_\sigma} + \frac{1}{2} |\delta_2| \mathbf{u}_{\sigma_1} \cdot \mathbf{n}_{\delta_2} + \frac{1}{2} |\delta_1| \mathbf{u}_{\sigma_2} \cdot \mathbf{n}_{\delta_1},$$

c'est-à-dire l'équation (V.6).

Donnons l'expression détaillée de l'opérateur divergence de vitesse discret proposé ci-dessus (Équations (V.5) et (V.6)) dans la configuration décrite par la figure V.6.



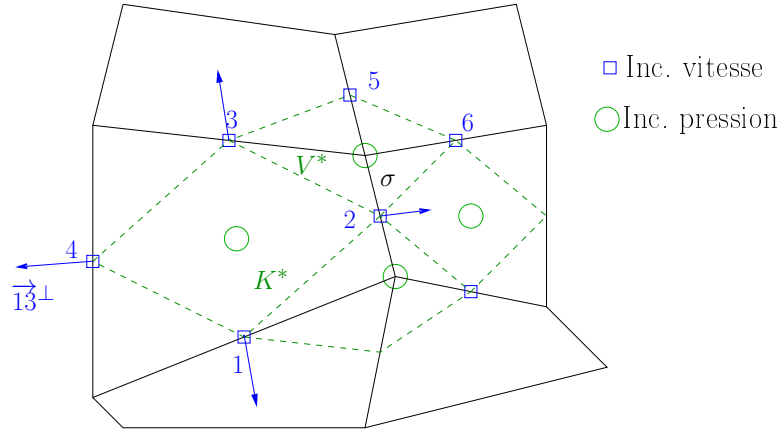


FIGURE V.6 – Détail de l'expression de l'opérateur divergence (Définition V.1).

Notons  $\vec{12}^\perp$  le vecteur obtenu par rotation de  $\vec{12}$  (dans le sens trigonométrique) d'un angle  $\frac{\pi}{2}$  (la distance entre les nœuds de vitesse 1 et 2 est comprise dans le terme  $\vec{12}$ ). De plus, notant  $\sigma_i$  l'arête associée à l'inconnue d'indice  $i$  sur la figure V.6, alors :

$$|K^*| (\operatorname{div}^{EP} \mathbf{u})_{K^*} = \frac{1}{2} \left( \vec{24}^\perp \cdot \mathbf{u}_{\sigma_1} + \vec{42}^\perp \cdot \mathbf{u}_{\sigma_3} + \vec{13}^\perp \cdot \mathbf{u}_{\sigma_4} + \vec{31}^\perp \cdot \mathbf{u}_{\sigma_2} \right),$$

$$|V^*| (\operatorname{div}^{EP} \mathbf{u})_{V^*} = \frac{1}{2} \left( \vec{25}^\perp \cdot \mathbf{u}_{\sigma_3} + \vec{52}^\perp \cdot \mathbf{u}_{\sigma_6} + \vec{36}^\perp \cdot \mathbf{u}_{\sigma_5} + \vec{63}^\perp \cdot \mathbf{u}_{\sigma_2} \right).$$

Pour les remarques V.2 et V.4, nous adoptons les notations de la figure V.7.

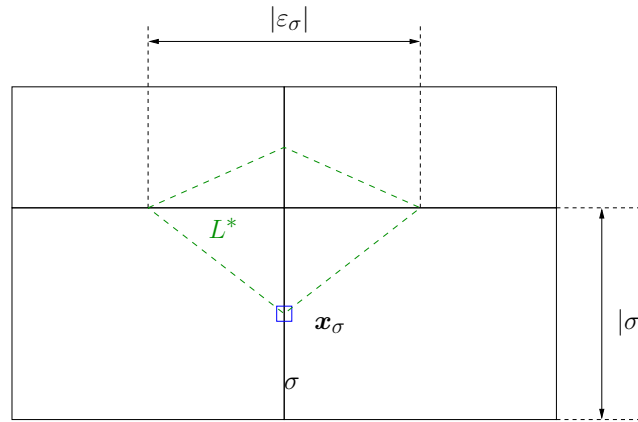


FIGURE V.7 – Notations pour l'opérateur divergence de vitesse discret (Définition V.1).

Remarque V.2 (Maillage rectangle)

Dans le cas d'un maillage rectangle,  $\mathbf{n}_{\varepsilon_\sigma} \in \{\mathbf{t}_\sigma, \mathbf{n}_\sigma\}$ . Ainsi, l'opérateur divergence de vitesse discret proposé (Définition V.1) a pour effet :

- sur les cellules cell-centered, de multiplier par 1/2 l'opérateur divergence Rannacher-Turek standard qui agit sur les composantes normales de vitesse,
- sur les cellules vertex-centered, d'ajouter une contribution des composantes tangentes de vitesse.

Remarque V.3 (Maillage non rectangle)

Dans le cas d'un maillage quadrangle non rectangle ou non parallélogramme et pour cette nou-

velle discrétisation, le bilan de masse discret est vérifié sur le pavage pression, mais il n'est pas satisfait sur les cellules primales. Or, ce dernier bilan est utilisé pour écrire une identité d'énergie cinétique pour l'opérateur convectif (Section II.2.1). Dans la section V.5, nous proposons une méthode permettant de reconstruire les flux de masse primaux, connaissant les approximations des flux vertex-centered.

Remarque V.4 (Consistance de l'opérateur divergence de vitesse discret)

Le degré de liberté de vitesse  $\mathbf{u}_\sigma$  dans l'équation (V.5) est défini par

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{X}_h, \quad \mathbf{u}_\sigma = \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \mathbf{u} \, d\sigma,$$

et donc l'opérateur divergence discret défini en V.1 s'écrit

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}^{EP} \mathbf{u})_{L^*} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}_\sigma \in \mathcal{S}(L^*)} |\varepsilon_\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\varepsilon_\sigma}, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}_\sigma \in \mathcal{S}(L^*)} \frac{|\varepsilon_\sigma|}{|\sigma|} \int_\sigma \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{\varepsilon_\sigma} \, d\sigma, \\ &\neq \frac{1}{|L^*|} \int_{L^*} \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

L'opérateur divergence proposé n'est donc pas consistant au sens des volumes finis, même dans le cas où le maillage est cartésien.

### V.3.3 Opérateur gradient de pression discret

Dans ce paragraphe, on donne l'expression du gradient de pression discret permettant de satisfaire la propriété de dualité suivante :

$$\int_\Omega p \operatorname{div}^{EP} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = - \int_\Omega \nabla^{EP} p \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x}.$$

**Définition V.5 (Opérateur gradient de pression discret)**

Étant donnée une arête  $\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D$ , le gradient de pression discret est défini par

$$\forall p \in \mathbf{N}_h, \quad -|D_\sigma| (\nabla^{EP} p)_\sigma = \frac{1}{2} \sum_{\{L^*; \mathbf{x}_\sigma \in \mathcal{S}(L^*)\}} |\varepsilon_\sigma| \mathbf{n}_{\varepsilon_\sigma} p_{L^*}. \quad (\text{V.7})$$

**Démonstration** D'une part, en exploitant le fait que la pression et la divergence discrètes sont constantes sur les cellules du pavage  $\mathcal{T}_h^*$ ,

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{u} \in \mathbf{X}_h, \forall p \in \mathbf{N}_h, \quad \int_\Omega p \operatorname{div}^{EP} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} &= \sum_{L^* \in \mathcal{T}_h^*} |L^*| p_{L^*} (\operatorname{div} \mathbf{u})_{L^*}, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{L^* \in \mathcal{T}_h^*} p_{L^*} \sum_{\mathbf{x}_\sigma \in \mathcal{S}(L^*)} |\varepsilon_\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\varepsilon_\sigma}, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} \mathbf{u}_\sigma \cdot \sum_{\{L^* \in \mathcal{T}_h^*; \mathbf{x}_\sigma \in \mathcal{S}(L^*)\}} |\varepsilon_\sigma| \mathbf{n}_{\varepsilon_\sigma} p_{L^*}. \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$

D'autre part, par définition des fonctions de base vitesse et lumping de la matrice masse de vitesse (Propositions A.2 et A.4, Annexe A), on a :

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{X}_h, \forall p \in \mathbf{N}_h, \quad \int_{\Omega} \nabla^{EP} p \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} |D_{\sigma}| (\nabla^{EP} p)_{\sigma} \cdot \mathbf{u}_{\sigma}. \quad (\text{V.9})$$

D'où en égalant les équations (V.8) et (V.9), on en déduit le résultat. ■

Remarquons que, par l'expression (V.8), les sommets situés dans des coins ne sont pas considérés comme des degrés de liberté.

### V.3.4 Opérateur elliptique discret pour la pression

L'objectif du paragraphe qui suit est de déterminer l'expression de l'opérateur elliptique discret appliqué à l'incrément de pression  $\Phi$  lors de l'étape de projection (Étape 2' de l'algorithme I.2). Cet opérateur s'écrit  $B \widetilde{M}^{-1} B^T$  où  $\widetilde{M}$  est la matrice de masse en vitesse lumpée définie par :

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} \widetilde{M}^{(1)} & 0 \\ 0 & \widetilde{M}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \forall \sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D, \forall 1 \leq i \leq d, \quad \widetilde{M}_{\sigma, \sigma}^{(i)} = |D_{\sigma}|,$$

et  $B$  est la matrice divergence de vitesse discrète ( $B_{L^*, \sigma} = \frac{|\varepsilon_{\sigma}|}{2} \mathbf{n}_{\varepsilon_{\sigma}}$ ).

L'implémentation de l'opérateur elliptique discret pour la pression se fait arête par arête. Soit  $V^*$  une cellule vertex-centered, alors par produit matriciel, on a pour tout  $q \in \mathbf{N}_h$

$$-(B \widetilde{M}^{-1} B^T q)_{V^*} = \sum_{\mathbf{x}_{\sigma} \in \mathcal{S}(V^*)} \frac{B_{V^*, \sigma}}{|D_{\sigma}|} \left( \sum_{L^* \text{ cell-centered}} B_{\sigma, L^*}^T q_{L^*} + \sum_{L^* \text{ vertex-centered}} B_{\sigma, L^*}^T q_{L^*} \right). \quad (\text{V.10})$$

De plus, pour toutes cellules du pavage pression  $L^*$  et  $V^*$ , en notant  $\mathbf{n}_{\varepsilon_{\sigma}, V^*}$  la normale  $\mathbf{n}_{\varepsilon_{\sigma}}$  sortant de  $V^*$ , on a

$$\mathbf{x}_{\sigma} \in \mathcal{S}(V^*) \cap \mathcal{S}(L^*) \implies \mathbf{n}_{\varepsilon_{\sigma}, V^*} \cdot \mathbf{n}_{\varepsilon_{\sigma}, L^*} \neq 0.$$

Ainsi, l'opérateur elliptique discret pour la pression (élément enrichi) couple les inconnues de pression cell-centered et vertex-centered et a un stencil plus large que l'opérateur classique. Sa valeur sur une cellule vertex-centered  $V^*$  du pavage pression fait intervenir neuf inconnues de pression.

En effet, dans la configuration de la figure V.8, notons  $\sigma_i$  l'arête associée à l'inconnue d'indice  $i$  et  $p_{V^*}$  la valeur de l'inconnue de pression associée au nœud  $V$ . Cet opérateur est la somme de quatre contributions, à savoir chacune des lignes de l'écriture ci-dessous

$$\begin{aligned} -(B \widetilde{M}^{-1} B^T q)_{V^*} &= \frac{1}{4|D_{\sigma_2}|} \overrightarrow{(10)3}^{\perp} \cdot \left( \overrightarrow{31}^{\perp} q_{K^*} + \overrightarrow{8(10)}^{\perp} q_{L^*} + \overrightarrow{81}^{\perp} q_{A^*} + \overrightarrow{(10)3}^{\perp} q_{V^*} \right) \\ &+ \frac{1}{4|D_{\sigma_3}|} \overrightarrow{25}^{\perp} \cdot \left( \overrightarrow{25}^{\perp} q_{V^*} + \overrightarrow{57}^{\perp} q_{I^*} + \overrightarrow{24}^{\perp} q_{K^*} + \overrightarrow{74}^{\perp} q_{D^*} \right) \\ &+ \frac{1}{4|D_{\sigma_5}|} \overrightarrow{3(10)}^{\perp} \cdot \left( \overrightarrow{36}^{\perp} q_{I^*} + \overrightarrow{3(10)}^{\perp} q_{V^*} + \overrightarrow{6(12)}^{\perp} q_{C^*} + \overrightarrow{(10)(12)}^{\perp} q_{J^*} \right) \\ &+ \frac{1}{4|D_{\sigma_{10}}|} \overrightarrow{52}^{\perp} \cdot \left( \overrightarrow{(11)5}^{\perp} q_{J^*} + \overrightarrow{92}^{\perp} q_{L^*} + \overrightarrow{52}^{\perp} q_{V^*} + \overrightarrow{(11)9}^{\perp} q_{E^*} \right). \end{aligned}$$

La matrice associée à l'opérateur elliptique pour la pression n'est pas inversible mais, en pratique, chacune des deux pressions (cell-centered et vertex-centered) est à moyenne nulle.

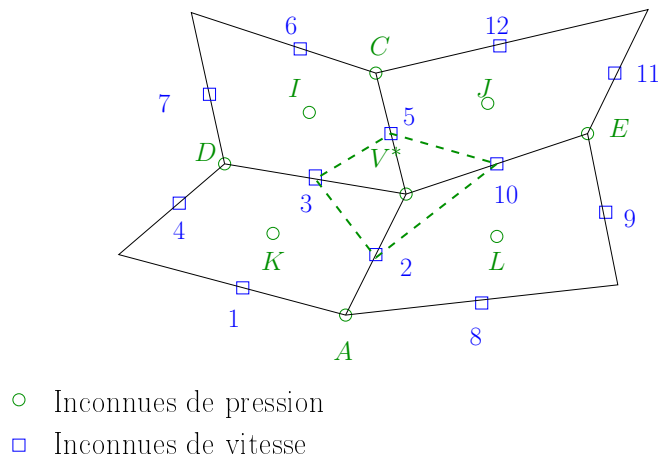


FIGURE V.8 – Localisation des inconnues intervenant dans l’expression de l’opérateur elliptique discret pour la pression.

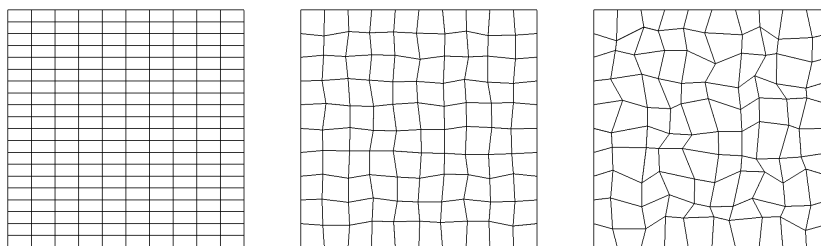
## V.4 Premiers tests numériques

Dans cette partie, nous illustrons les capacités de l’élément enrichi sur différents cas-tests à convection dominante (faisant défaut au schéma RT), comme le problème d’Oseen stationnaire (Section III.2.2.a) sur des maillages quadrangles généraux (tels qu’un sommet intérieur appartienne à quatre cellules) ou le problème du tourbillon isolé (Section III.2.2.b).

Dans cette partie, nous comparons les discrétisations spatiales suivantes

- l’élément fini de Rannacher-Turek noté "RT",
- le schéma MAC (volumes finis) noté "MAC",
- l’élément enrichi, noté "RT+EP".

Par ailleurs, nous considérons essentiellement trois géométries pour les maillages, les versions grossières sont rassemblées sur la figure V.9



(a) Maillage rectangle. (b) Maillage peu perturbé. (c) Maillage très perturbé.

FIGURE V.9 – Versions grossières (10 × 20, 10 × 10 et 10 × 10 mailles) des maillages utilisés.

Rappelons que nous désignons par maillages "perturbés" ceux qui sont définis par perturbation aléatoire d’un maillage uniforme comme suit : étant donné un paramètre réel de déformation  $\varepsilon$ , on déplace chaque sommet  $v$  de ce maillage vers un point aléatoire du cercle de centre  $v$  et de rayon la longueur de la plus petite arête issue de  $v$  multipliée par  $\varepsilon$ . Ce maillage est ensuite raffiné deux, quatre et huit fois pour donner des maillages composés de 10 × 10, 20 × 20, 40 × 40, 80 × 80 mailles.

### V.4.1 Problème de Stokes stationnaire

Dans ce paragraphe, nous considérons le problème de Stokes stationnaire incompressible (V.11) suivant :

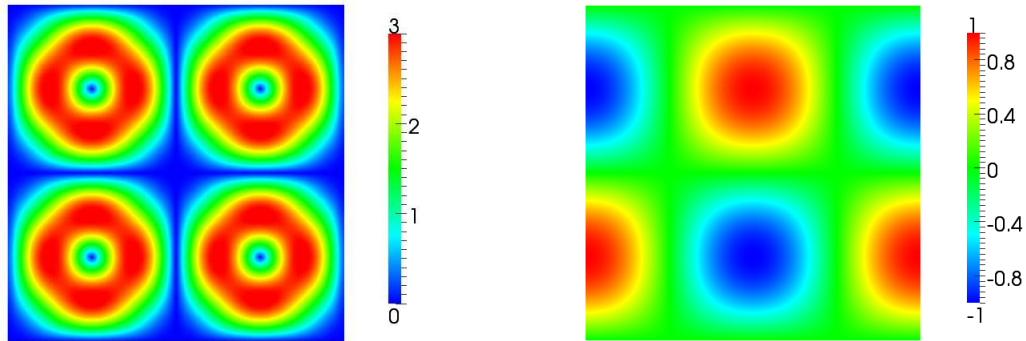
$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega = [-1, 1]^2, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} = 0. \end{array} \right. \quad (\text{V.11})$$

L'étude du cas-test de Stokes stationnaire est dans la suite complétée par une analyse mathématique (Section V.6).

Pour ce problème, deux valeurs de la viscosité sont considérées :  $\mu = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  ou  $\mu = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  ( $\rho = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ), on a donc un écoulement à diffusion dominante d'une part et un écoulement à convection dominante d'autre part.

Nous proposons d'étudier une solution manufacturée de ce problème dont l'expression de la solution analytique (solution des équations de Navier-Stokes incompressibles) est donnée par l'équation (V.12) (Représentation des solutions sur la figure V.10) :

$$\mathbf{u}^{exact}(x, y) = \begin{pmatrix} 2\pi \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y) \cos(\pi y) \\ -2\pi \sin(\pi y)^2 \sin(\pi x) \cos(\pi x) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad p^{exact}(x, y) = \cos(\pi x) \sin(\pi y). \quad (\text{V.12})$$



(a) Module de la vitesse exacte.

(b) Pression exacte.

FIGURE V.10 – Profil des solutions exactes.

Pour ne pas être confronté à des couches limites en pression liées à la méthode de projection (Remarque I.1), la solution est obtenue par une méthode itérative de type Lagrangien augmenté [31] où le critère d'arrêt porte sur le bilan de masse discret.

#### Profil des solutions approchées

Concernant la norme de vitesse, son profil pour la solution approchée est similaire à celui de la

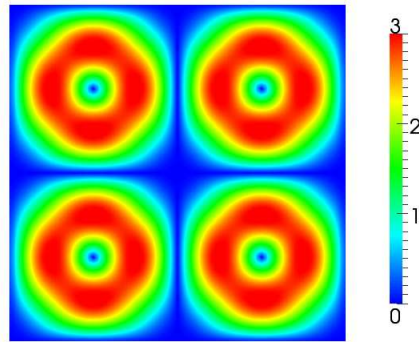


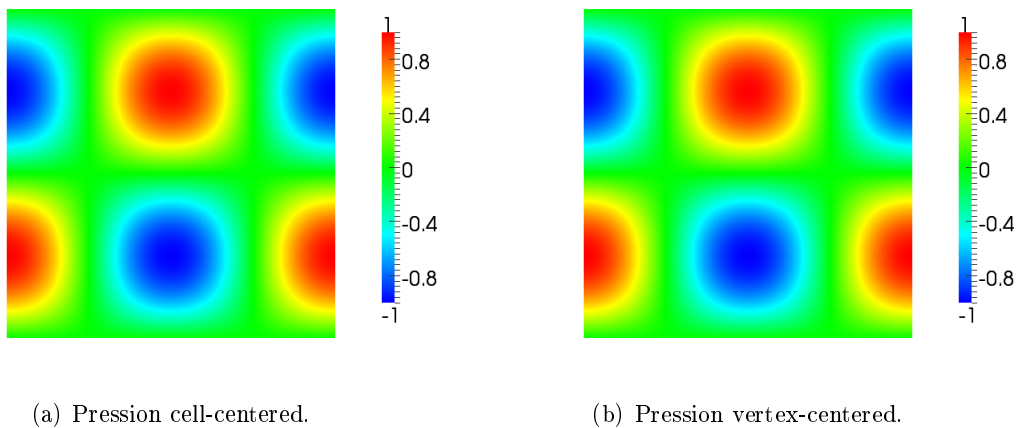
FIGURE V.11 – Module de la solution approchée en vitesse.

solution exacte (Figure V.11), indépendamment de la géométrie du maillage ou de la valeur de la viscosité.

Représentons ensuite le profil de pression approchée dans le cas d'un maillage rectangle de  $80 \times 160$  mailles. Définissons les champs pression cell-centered et vertex-centered comme suit :

- le champ cell-centered est le champ constant par cellule cell-centered dont la valeur est la valeur du degré de liberté de pression situé au centre de la cellule.
- le champ vertex-centered est le champ constant par cellule vertex-centered de valeur celle du degré de liberté de pression associé au sommet.

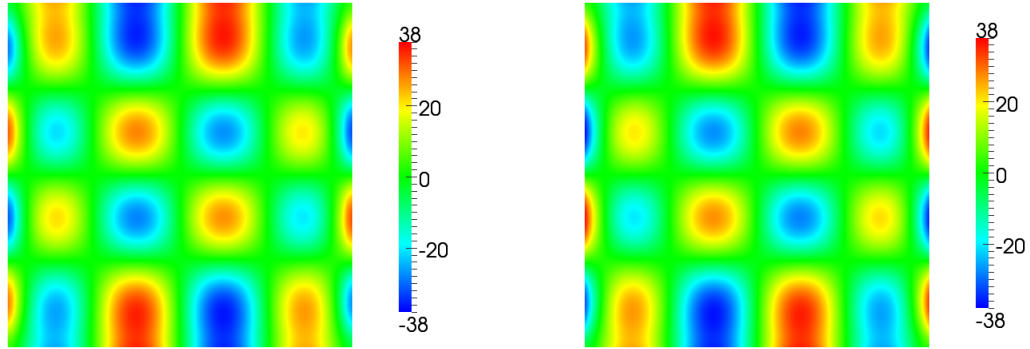
Les profils des champs vertex-centered et cell-centered sont représentés sur les figures V.12 (pour  $\mu = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ) et V.13 (pour  $\mu = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ).



(a) Pression cell-centered.

(b) Pression vertex-centered.

FIGURE V.12 – Profils des solutions approchées – Problème de Stokes (maillage rectangle  $80 \times 160$ ),  $\mu = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .



(a) Pression cell-centered.

(b) Pression vertex-centered.

FIGURE V.13 – Profils des solutions approchées – Problème de Stokes (maillage rectangle  $80 \times 160$ ),  $\mu = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

La comparaison des figures V.12 et V.13 avec V.10(b) montre que l'approximation de la solution pour la pression dépend de la valeur de la viscosité. En effet, pour  $\mu = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  (Figure V.12), les pressions cell-centered et vertex-centered calculées ont un profil semblable à celui de la solution exacte. Par contre, pour  $\mu = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  (Figure V.13), la pression cell-centered et la pression vertex-centered ont des profils assez éloignés de la solution exacte. Ces deux profils présentent des perturbations, de signes opposés. De fait, la pression approchée ne converge pas vers la solution analytique pour la norme  $L^2$  classique.

Nous effectuons un post-traitement de la pression (classiquement un lissage), *i.e.* nous considérons un nouveau champ pression constant par cellule primale dont la valeur sur une cellule primale  $K$  est donnée par

$$\tilde{p}_K = \frac{1}{2} \left( p_K + \sum_{\{V^* \text{ vertex-centered}; V^* \cap K \neq \emptyset\}} \frac{|K \cap V^*|}{|K|} p_{V^*} \right). \quad (\text{V.13})$$

Les profils des solutions approchées pour ce post-traitement de la pression sont représentés sur la figure V.14.

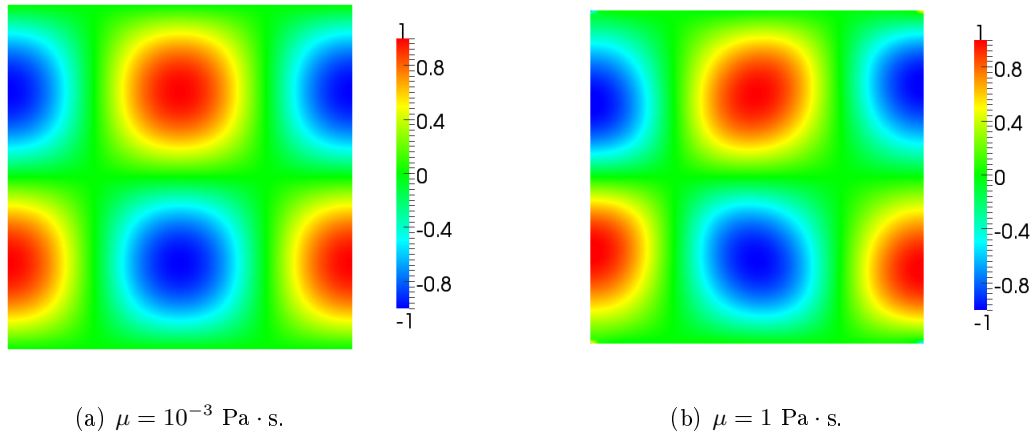


FIGURE V.14 – Profil de la pression post-traitée,  $\tilde{p}$  – Problème de Stokes (maillage rectangle  $80 \times 160$ ).

Sur la figure V.14, on constate qu’en appliquant le post-traitement défini en (V.13) au champ pression approchée  $p$ , on obtient un champ  $\tilde{p}$  dont le profil est semblable à celui de la solution exacte, indépendamment de la valeur de la viscosité (profils à comparer avec les figures V.12 et V.13).

### Convergence spatiale

Pour les maillages perturbés, les résultats du schéma MAC (obtenu pour des maillages rectangles) est donné à titre indicatif.

- Sur les figures V.15, V.16 et V.17 sont représentés les résultats de convergence au maillage en échelle logarithmique (pour la géométrie rectangle représentée sur la figure V.9(a)).

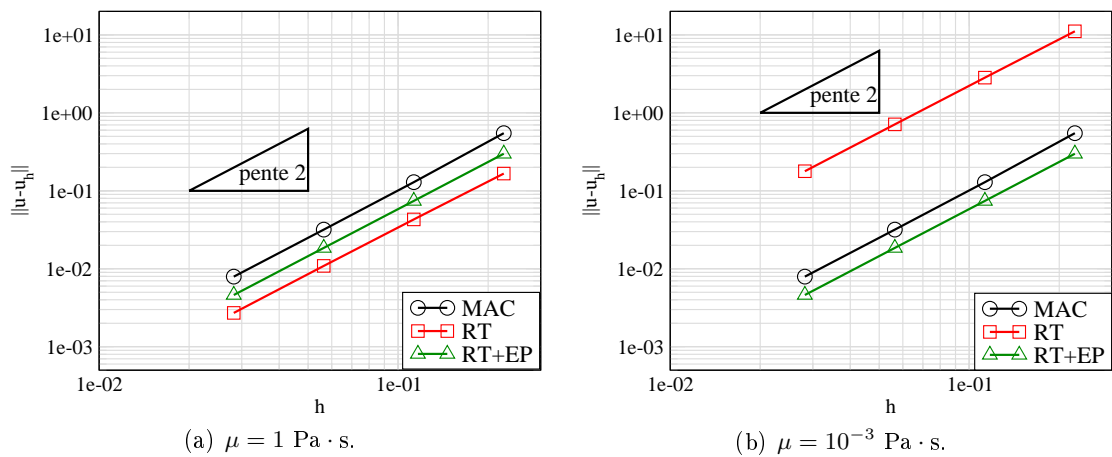


FIGURE V.15 – Norme  $L^2$  de l’erreur d’approximation (relative) pour la vitesse – Problème de Stokes (maillage rectangle).



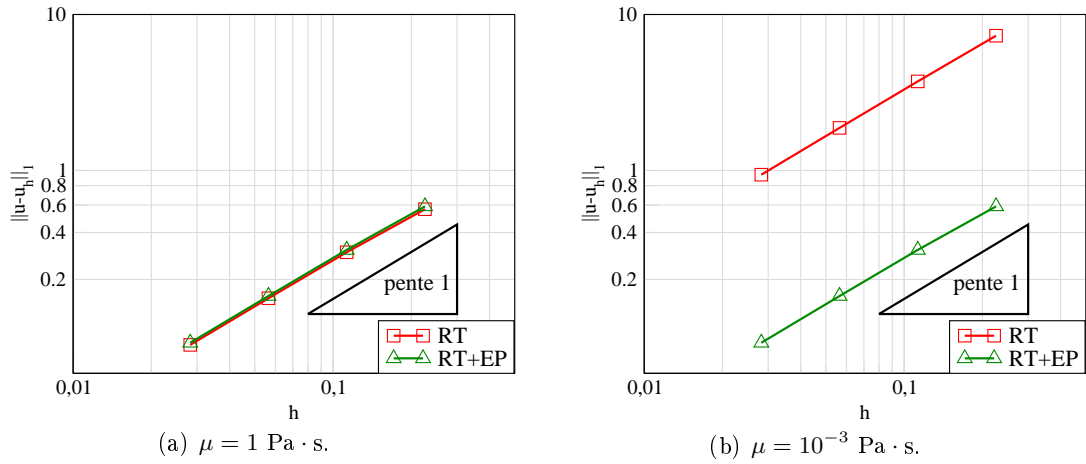


FIGURE V.16 – Norme  $H^1$  de l'erreur d'approximation (relative) pour la vitesse – Problème de Stokes (maillage rectangle).

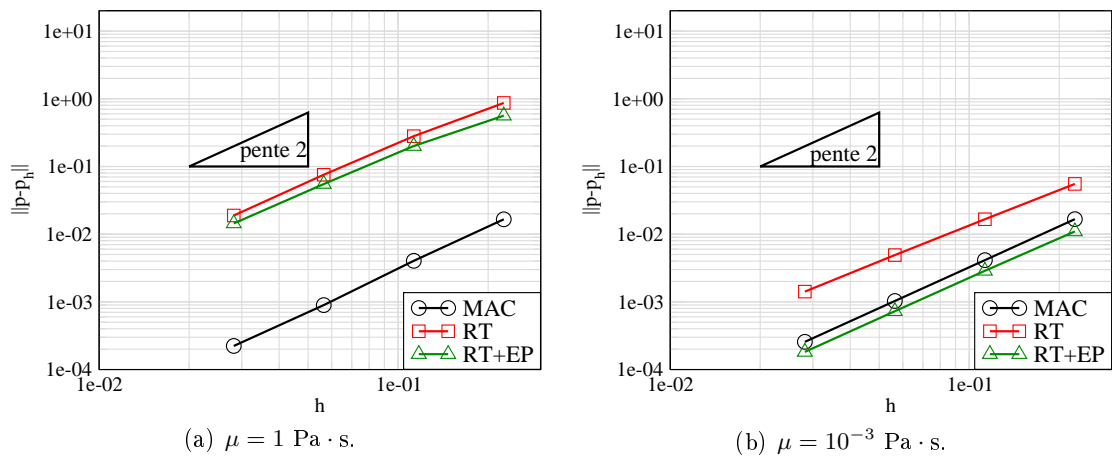


FIGURE V.17 – Norme  $L^2$  de l'erreur d'approximation (relative) pour la pression – Problème de Stokes (maillage rectangle).

Pour les différents schémas, on observe une convergence en espace d'ordre deux pour la vitesse en norme  $L^2$  discrète (un en norme  $H^1$ ) et une super-convergence d'ordre deux pour la pression  $\tilde{p}$  (norme  $L^2$  discrète) dans le cas de cellules rectangles. De plus, pour le champ vitesse, le nouvel élément est (presque) aussi précis que la discrétisation Rannacher-Turek pour  $\mu = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  et plus précis pour  $\mu = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  (presque aussi précis que le schéma MAC, voir la figure V.15 où la translation des courbes de convergence au maillage est proportionnelle à la viscosité).

- Pour le maillage quadrangle perturbé représenté sur la figure V.9(c), les figures V.18, V.19 et V.20 montrent le même type de comportement de l'élément enrichi que pour des maillages rectangles.

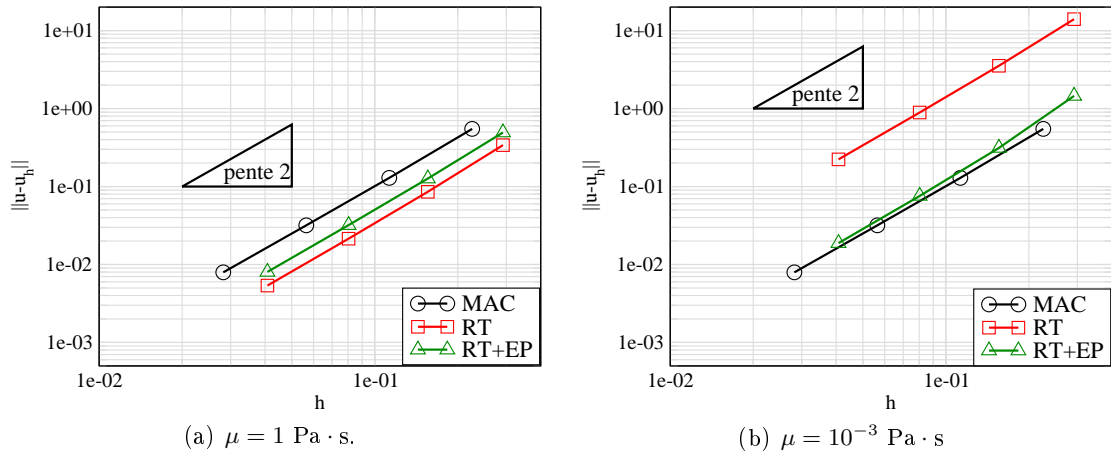


FIGURE V.18 – Norme  $L^2$  de l'erreur d'approximation (relative) pour la vitesse – Problème de Stokes (maillage perturbé).

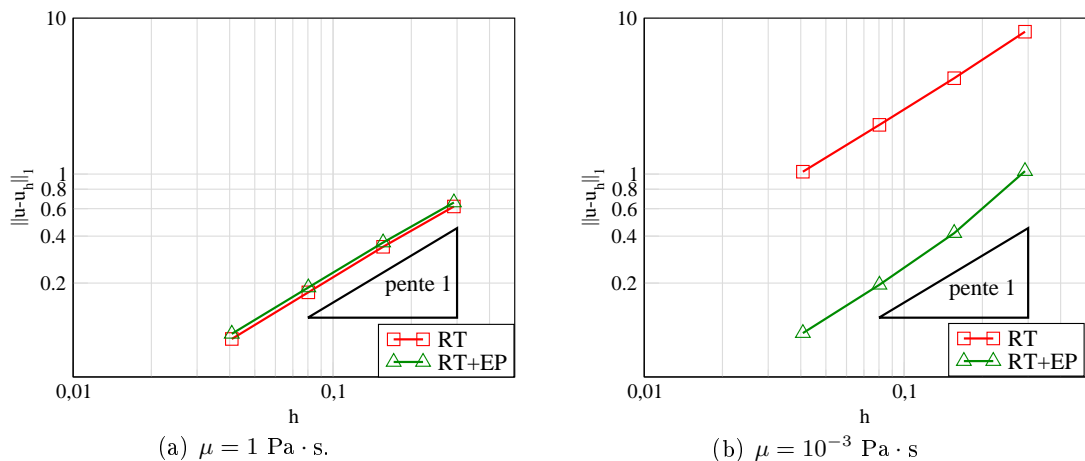


FIGURE V.19 – Norme  $H^1$  de l'erreur d'approximation (relative) pour la vitesse – Problème de Stokes (maillage perturbé).

En particulier, la figure V.20 montre qu'à convection dominante, la discrétisation par l'enrichissement de la pression permet gagner en précision par rapport à l'élément fini de Rannacher-Turek.

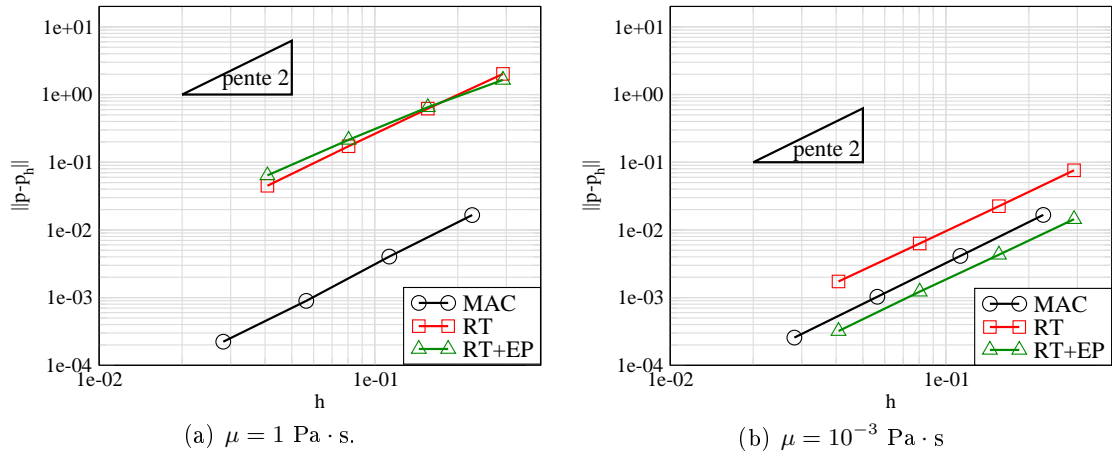


FIGURE V.20 – Norme  $L^2$  de l'erreur d'approximation (relative) pour la pression – Problème de Stokes (maillage perturbé).

Ainsi, le schéma utilisé semble satisfaisant pour des maillages généraux en deux dimensions d'espace mais les maillages étant obtenus par raffinement, ceci implique que les maillages fins utilisés sont proches de parallélogrammes pour lesquels les estimations de l'erreur d'approximation en espace sont effectivement démontrées (Section V.6).

#### V.4.2 Problème d'Oseen stationnaire à convection dominante

Dans ce paragraphe, nous traitons du problème d'Oseen stationnaire à convection dominante présenté dans la section III.2.2.a. Nous utilisons une solution aux équations de Navier-Stokes donnée par l'équation (V.12) et nous testons l'approximation de la solution obtenue pour le problème d'Oseen (Système (8) en Introduction).

Comme pour le problème de Stokes présenté ci-dessus, nous appliquons un procédé itératif en temps basé sur un algorithme de Lagrangien augmenté [31], où le critère d'arrêt porte sur le bilan de masse discret pour s'assurer d'atteindre l'état stationnaire.

L'expression de l'opérateur convectif discret fait intervenir la vitesse analytique pour vitesse d'advection, laquelle est à divergence discrète nulle sur les cellules primales.

Le maillage grossier très perturbé du (cas-test de Stokes, figure V.9(c)) constitué de  $10 \times 10$  cellules est utilisé, il est ensuite raffiné deux, quatre et huit fois pour obtenir des maillages de  $20 \times 20$ ,  $40 \times 40$  et  $80 \times 80$  cellules.

Les résultats de convergence en espace pour la vitesse et la pression sont rassemblés sur les figures V.21, V.22 et V.23. Noter que, là encore, les résultats du schéma MAC (valide pour des maillages cartésiens) sont donnés à titre indicatif.

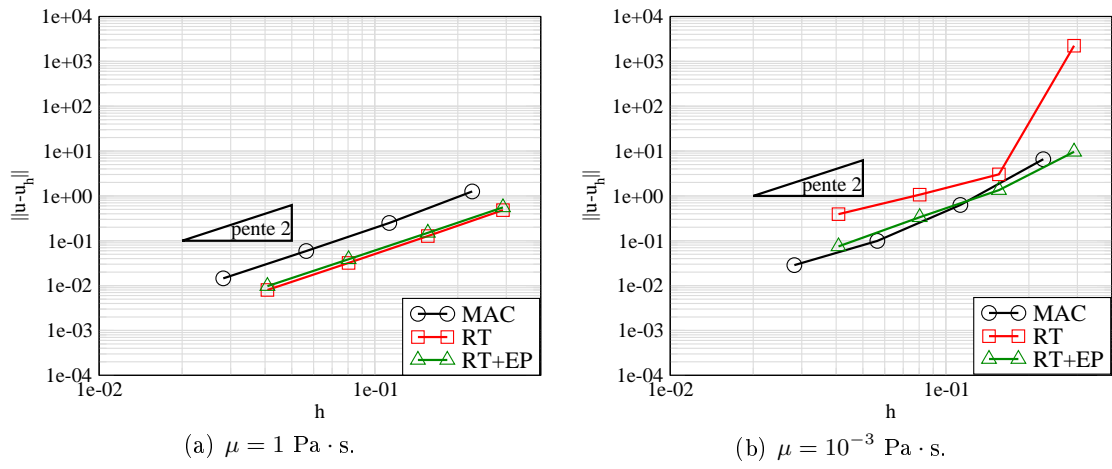


FIGURE V.21 – Norme  $L^2$  de l’erreur d’approximation (relative) pour la vitesse – Problème d’Oseen (maillage perturbé).

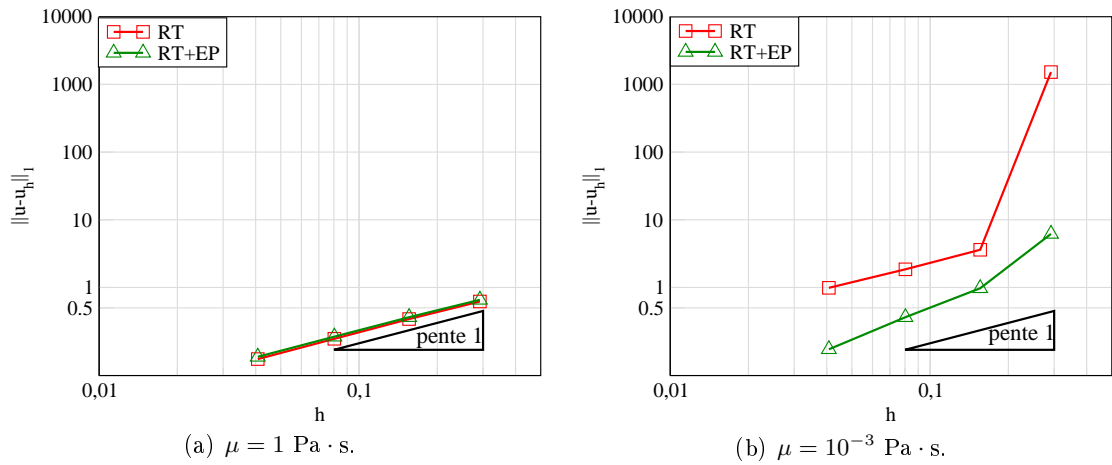


FIGURE V.22 – Norme  $H^1$  de l’erreur d’approximation (relative) pour la vitesse – Problème d’Oseen (maillage perturbé).

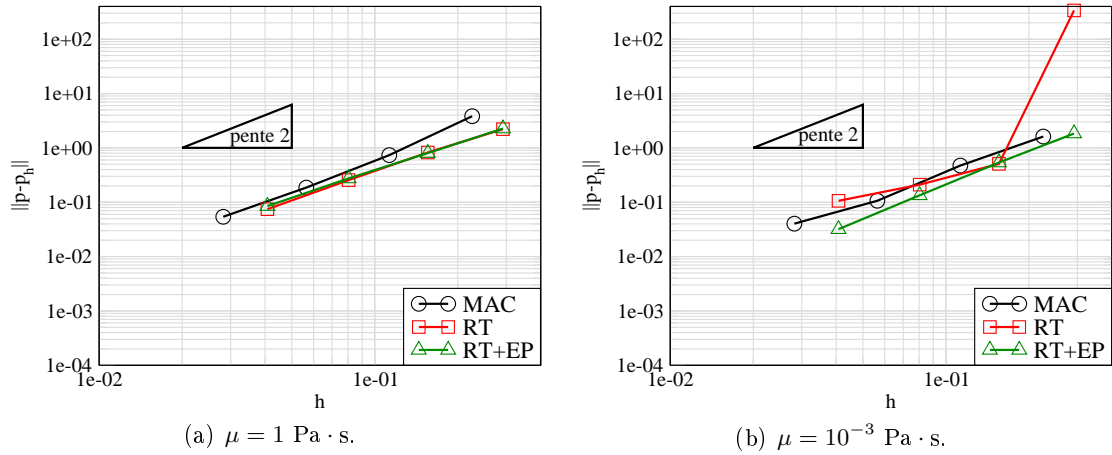


FIGURE V.23 – Norme  $L^2$  de l'erreur d'approximation (relative) pour la pression – Problème d'Oseen (maillage perturbé).

Les figures V.21, V.22 et V.23 nous donnent des informations sur l'ordre de convergence en espace et la précision de la discrétisation RT+EP pour un écoulement à convection dominante.

- Concernant la précision : à diffusion dominante, l'élément enrichi se montre aussi précis que l'élément fini de Rannacher-Turek tandis qu'à convection dominante, il est plus précis que l'élément fini de Rannacher-Turek.
- Concernant l'ordre de convergence en espace : on retrouve une convergence en espace d'ordre deux pour la vitesse et la pression (en normes  $L^2$  discrètes) pour l'élément enrichi. Enfin, la figure V.22 montre que la convergence de la vitesse est d'ordre un en espace en norme  $H^1$ .
- Là encore, notons que les maillages perturbés sont obtenus par raffinement d'un maillage grossier  $10 \times 10$  mailles. Par conséquent, les maillages fins utilisés sont proches de parallélogrammes pour lesquels les estimations de l'erreur d'approximation en espace sont effectivement démontrées (Section V.6).

### V.4.3 Problème du tourbillon isolé

Dans ce paragraphe, nous étudions les équations stationnaires d'Euler incompressibles (Système (9) en Introduction) et nous vérifions que la discrétisation de ce problème par l'élément enrichi a pour solution le couple de fonctions suivant :  $\mathbf{u}^{exact}(x, y) = (y, -x)^T$  et  $p^{exact}(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , comme c'est le cas au niveau continu.

#### Analyse théorique

Plaçons-nous dans la configuration de la figure V.24 (maillage rectangle uniforme, de pas notés  $h$  dans la direction  $x$  et  $k$  dans la direction  $y$ ) : soit  $\sigma$  une arête horizontale.

- L'espace d'approximation pour la vitesse n'étant pas modifié, rappelons que le terme convectif non-linéaire discret a pour expression (Section III.2.2.b)

$$|D_\sigma|(\mathbf{u}^{exact} \cdot \nabla \mathbf{u}^{exact})_\sigma = \begin{pmatrix} -\frac{hk}{2} x_\sigma \\ hk \\ -\frac{hk}{2} y_\sigma \end{pmatrix},$$

où  $(x_\sigma, y_\sigma)$  désigne les coordonnées du centre de l'arête  $\sigma$ .

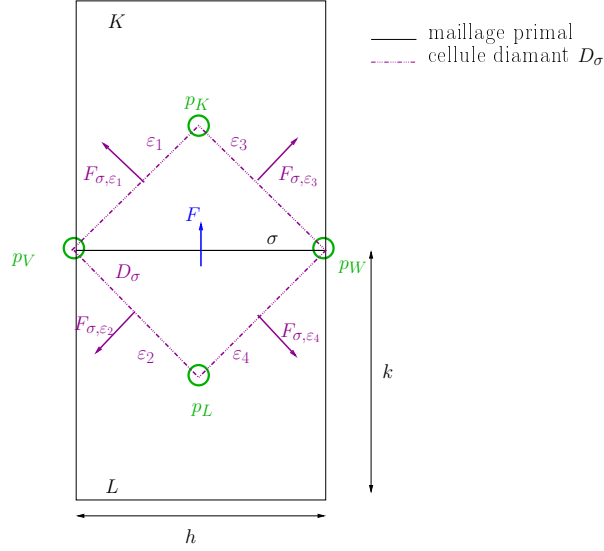


FIGURE V.24 – Notations – Problème du tourbillon isolé.

- Étudions à présent le gradient de pression discret afin de déterminer si le système d'Euler incompressible stationnaire est satisfait pour la nouvelle discrétisation. Notant  $\overrightarrow{VW}$  le vecteur d'extrémités les sommets  $V$  et  $W$  de l'arête  $\sigma$ , on a :

$$|D_\sigma| (\nabla^{EP} p^{exact})_\sigma = \begin{pmatrix} \frac{k}{2} \tau_{\overrightarrow{VW}} (p_W - p_V) \\ \frac{h}{2} \mathbf{n}_{K,\sigma} (p_L - p_K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{hk}{2} x_\sigma \\ \frac{hk}{2} y_\sigma \end{pmatrix}.$$

En conclusion, le gradient de pression et le terme non-linéaire convectif discrets s'équilibrent pour un maillage rectangle uniforme pour la nouvelle discrétisation.

### Essais numériques

Notant  $\mathbf{N}_h$  l'espace d'approximation pour la pression enrichie, l'algorithme de résolution est le suivant :

#### Algorithme V.6 (Discrétisation du problème du tourbillon isolé)

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Tant que,

$$\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_\infty / \max(1, \|\mathbf{u}^n\|_\infty) \geq \varepsilon \Delta t \text{ ou } \|p^{n+1} - p^n\|_\infty / \max(1, \|p^n\|_\infty) \geq \varepsilon \Delta t,$$

on résout les étapes suivantes :

1 - Prédiction de vitesse - Trouver  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \in \mathbf{X}_h$  tel que

$$\forall \sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D, \quad \forall 1 \leq i \leq d,$$

$$\frac{|D_\sigma|}{\Delta t} \left[ \frac{3}{2} \tilde{\mathbf{u}}_{\sigma,i}^{n+1} - 2\mathbf{u}_{\sigma,i}^n + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{\sigma,i}^{n-1} \right] + \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\varepsilon}^n \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{n+1} - \sum_{L^* \in \mathcal{T}_h^*} p_{L^*}^n (\operatorname{div}^{EP} \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)})_{L^*} = 0,$$

où  $F_{\sigma,\varepsilon}^n$  désigne l'approximation des flux de masse construite sur les mailles diamant  $D_\sigma$  dans [4] (voir le chapitre II).

2 - Correction de vitesse et de pression – Trouver  $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{X}_h$  et  $p^{n+1} \in \mathbf{N}_h$  tels que

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D, \quad \forall 1 \leq i \leq d, \\ \frac{3|D_\sigma|}{2\Delta t} [\mathbf{u}_{\sigma,i}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_{\sigma,i}^{n+1}] - \sum_{L^* \in \mathcal{T}_h^*} (p_{L^*}^{n+1} - p_{L^*}^n) (\operatorname{div}^{EP} \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)})_{L^*} = 0, \\ \forall L^* \in \mathcal{T}_h^*, \quad (\operatorname{div}^{EP} \mathbf{u}^{n+1})_{L^*} = \sum_{\mathbf{x}_\sigma \in \mathcal{S}(L^*)} |\varepsilon_\sigma| \mathbf{u}_\sigma^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{\varepsilon_\sigma} = 0. \end{aligned}$$

Lors des tests numériques,  $\varepsilon = 0.3$  et  $\Delta t = 10^{-2}$  s. L'étude de l'erreur d'approximation en norme  $L^2$  discrète sur un maillage rectangle uniforme (Figure V.25) montre que les solutions approchées pour le schéma RT ne convergent pas vers la solution exacte. Ceci illustre l'intérêt de l'élément enrichi proposé puisque, pour cette discrétisation, les solutions approchées convergent vers la solution attendue. Par ailleurs, cet élément se montre exact : il est aussi précis que le schéma MAC pour la vitesse et plus précis que celui-ci pour la pression (noter que l'erreur d'approximation est multipliée par  $10^{14}$  pour l'élément enrichi).

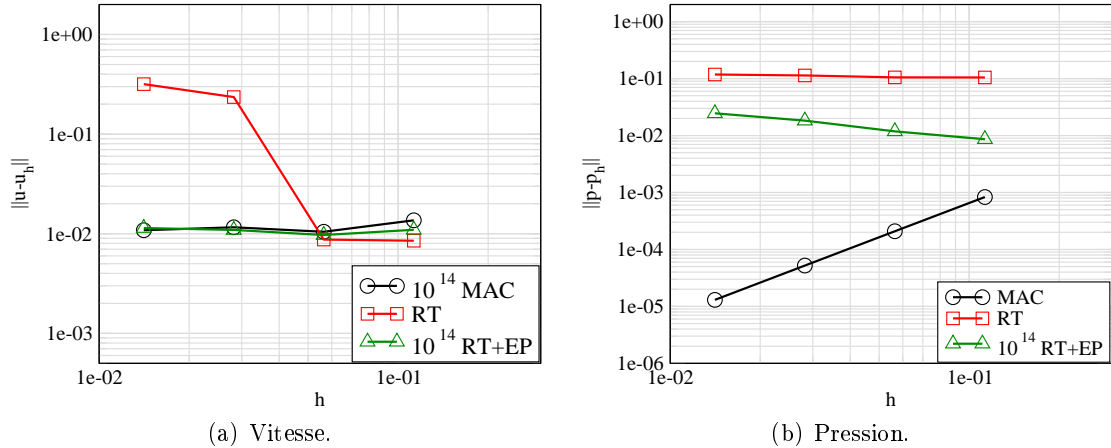


FIGURE V.25 – Norme  $L^2$  des erreurs d'approximation (relative) – Problème du tourbillon isolé.

## V.5 Reconstruction des flux de masse sur le maillage primal

Le bilan de masse discret est satisfait sur le pavage pression, mais pas sur les cellules primales lorsque ce sont des quadrangles non rectangles ou non parallélogrammes (Remarque V.3). Afin de préserver les propriétés de l'opérateur convectif (vitesse) défini sur les mailles diamant (identité d'énergie cinétique et principe du maximum pour les scalaires), nous proposons dans cette partie de reconstruire un bilan de masse sur les cellules primales à partir de celui connu sur les cellules vertex-centered. Une fois le bilan de masse discret sur les cellules primales retrouvé, la construction d'un opérateur convectif discret satisfaisant une identité d'énergie cinétique s'applique (Section II.2.1). Le schéma résultant est valide pour des maillages généraux et répond aux deux critères pour qu'un schéma soit adapté à la LES (C.1) et (C.2) évoqués en Introduction (Section 6.3) : le contrôle de l'énergie cinétique et la précision pour des écoulements à convection dominante.

### V.5.1 Principe

Considérons une arête  $\sigma$  et une cellule primale  $K$ . Nous allons montrer que l'approximation du flux primal  $F_{K,\sigma}$  sortant de la cellule  $K$  à travers l'arête  $\sigma$  est la somme de huit flux de masse sortant des cellules vertex-centered, comme représenté sur la figure V.26.

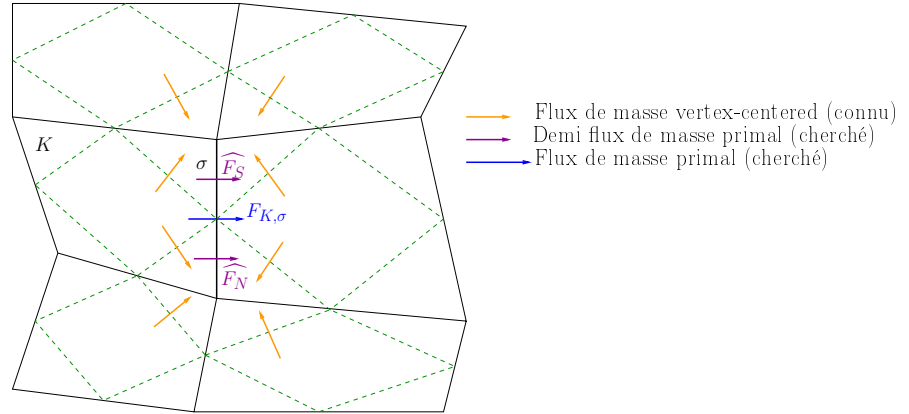


FIGURE V.26 – Localisation des flux de masse vertex-centered intervenant dans la reconstruction du flux primal  $F_{K,\sigma}$  (et des demi flux  $\widehat{F}_N$  et  $\widehat{F}_S$ ).

Plaçons-nous dans la configuration de la figure V.26. On cherche une approximation du flux massique primal  $F_{K,\sigma}$  comme somme d'approximations des demi flux massiques  $\widehat{F}_N, \widehat{F}_S$ , connaissant les approximations des flux massiques vertex-centered  $\widetilde{F}$ . La démarche que nous suivons dans la suite est la suivante : nous montrons d'abord que les approximations des demi flux primaux  $\widehat{F}_N$  et  $\widehat{F}_S$  s'expriment chacune comme combinaison linéaire des quatre flux sortant de la cellule vertex-centered qui les contient en appliquant une méthode similaire à la construction des flux de masse sur les cellules diamant (Section II.2.1). Ensuite, nous déduisons que l'approximation du flux primal  $F_{K,\sigma}$  cherché, somme des deux demi flux primaux  $\widehat{F}_N$  et  $\widehat{F}_S$  est donc la somme de huit flux vertex-centered alentour.

**Étape 1** : détermination des approximations des demi flux de masse  $\widehat{F}_N$  et  $\widehat{F}_S$

Pour trouver l'approximation du flux  $\widehat{F}_S$  cherché au sein d'une cellule vertex-centered, une rotation d'angle  $-\frac{\pi}{4}$  dans le sens trigonométrique (Figure V.27) permet de mettre en parallèle cette configuration avec celle de la recherche de flux de masse sur les mailles diamant décrite dans la section II.2.1.



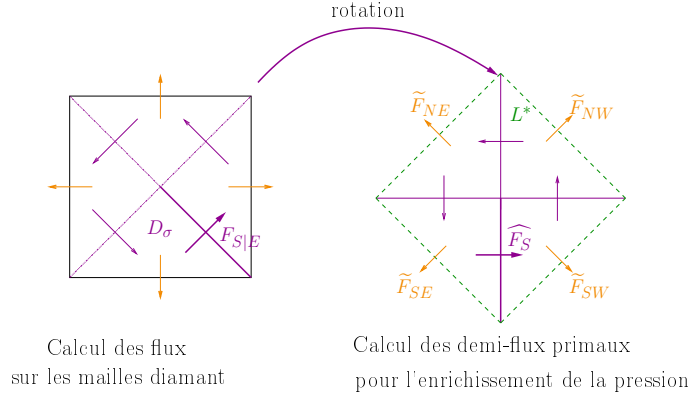


FIGURE V.27 – Transformation mettant en parallèle la construction des flux de masse sortant des mailles diamants et celle des flux primaux cherchés.

L'expression de ces demi flux primaux est donc égale à celle des flux diamant (au signe près), comme décrit par le tableau V.1 :

Flux diamant	Demi flux primaux cherchés
$F_{S E}$	$\widehat{F}_S$
$F_{N W}$	$-\widehat{F}_N$

TABLE V.1 – Correspondance entre les flux diamant et les demi flux primaux cherchés.

Comme dans la section II.2.1 sur le maillage diamant, posons

$$\widehat{F}_S = \alpha_{N|W} \tilde{F}_{NW} + \alpha_{S|E} \tilde{F}_{SE} + \alpha_{S|W} \tilde{F}_{SW} + \alpha_{N|E} \tilde{F}_{NE}, \quad (\text{V.14})$$

on a alors le tableau V.2.

$\widehat{F}$	$\alpha_{N W}$	$\alpha_{S E}$	$\alpha_{S W}$	$\alpha_{N E}$
$\widehat{F}_S$	1/8	-3/8	3/8	-1/8
$\widehat{F}_N$	-3/8	1/8	-1/8	3/8

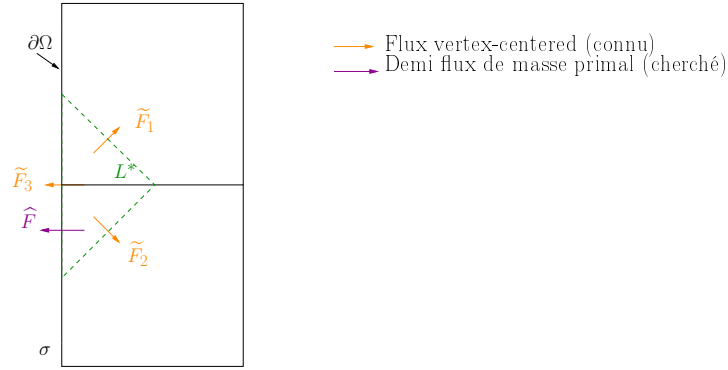
TABLE V.2 – Coefficients intervenant dans l'écriture des demi flux de masse primaux comme fonctions des flux de masse vertex-centered (Équation (V.14)).

**Étape 2** : déduction du flux de masse primal  $F_{K,\sigma}$

Nous distinguons ci-dessous différentes configurations pour reconstruire les flux de masse primaux.

- Pour une arête  $\sigma$  dont aucun sommet n'appartient à une arête extérieure (Figure V.26), l'approximation de ce flux est la somme des deux demi flux primaux  $\widehat{F}_N$  et  $\widehat{F}_S$  donnés par l'équation (V.14).
- Pour une arête dont un sommet au moins est situé sur une arête extérieure :
  - si l'arête  $\sigma$  fait partie (est incluse) du bord :

Avec les notations de la figure V.28, on pose  $\widehat{F} = \frac{1}{2} \tilde{F}_3$  car il n'y a aucune raison que le fluide s'écoule plus à travers une arête qu'une autre.


 FIGURE V.28 – Flux considérés dans le cas d'une arête  $\sigma \subset \partial\Omega$ .

– si l'arête  $\sigma$  est orthogonale au bord :

Adoptons les notations de la figure V.29 et déterminons l'expression du demi flux primal  $\hat{F}$  sortant de l'arête  $\sigma$ , étant donnés les flux vertex-centered  $\tilde{F}_1$ ,  $\tilde{F}_2$  et  $\tilde{F}_3$ .

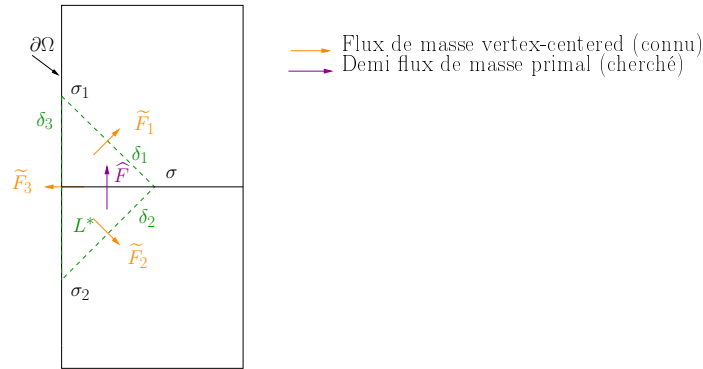


FIGURE V.29 – Flux considérés dans le cas d'une arête orthogonale au bord.

Les équations de bilan de masse sur chacun des deux triangles constituant la cellule vertex-centered sont données par :

$$\begin{cases} \tilde{F}_1 + \hat{F} + \frac{\tilde{F}_3}{2} = 0, \\ \tilde{F}_2 - \hat{F} + \frac{\tilde{F}_3}{2} = 0. \end{cases}$$

Par combinaison (différence) des deux lignes de ce système, on obtient

$$2\hat{F} = \tilde{F}_2 - \tilde{F}_1,$$

c'est-à-dire que le flux primal cherché s'écrit

$$\hat{F} = \frac{\tilde{F}_2 - \tilde{F}_1}{2}.$$

### V.5.2 Couche de mélange à $Re = 10000$

Nous reprenons le cas-test décrit dans la section III.2.2.c, pour un maillage perturbé constitué de  $320 \times 320$  quadrangles non rectangles (Figure V.9(b) pour une version grossière de ce maillage).

Remarquons que le calcul donne des résultats satisfaisants pour des mailles rectangles ou parallélogrammes sans reconstruction des flux car le bilan de masse cell-centered fait intervenir les flux primaux (puisque  $\mathbf{n}_{\varepsilon_\sigma}$  est la normale à l'arête  $\sigma$ , voir la remarque V.2). Pour le maillage choisi ici, le bilan de masse discret n'est pas satisfait sur les cellules primales, nous utilisons donc la méthode de reconstruction des flux décrite dans la section V.5.1. Les profils instantanés de vorticité obtenus par cette technique sont rassemblés sur les figures V.30-V.33. Les résultats pour la discrétisation par l'élément enrichi sans reconstruction (sur le même maillage) sont donnés pour comparaison.

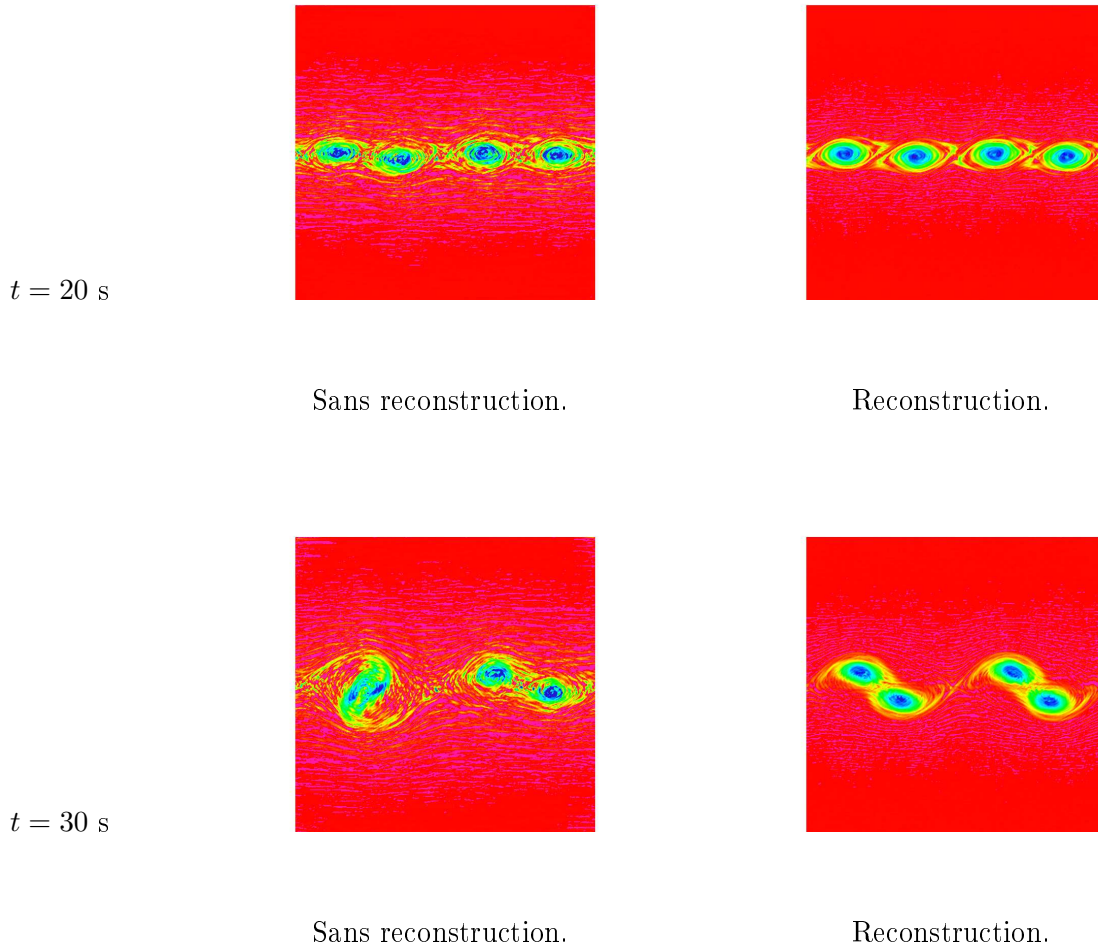


FIGURE V.30 – Champ de vorticité aux temps non adimensionnés 20 s et 30 s sur un maillage perturbé de  $320 \times 320$  mailles – Couche de mélange à  $Re = 10000$ .

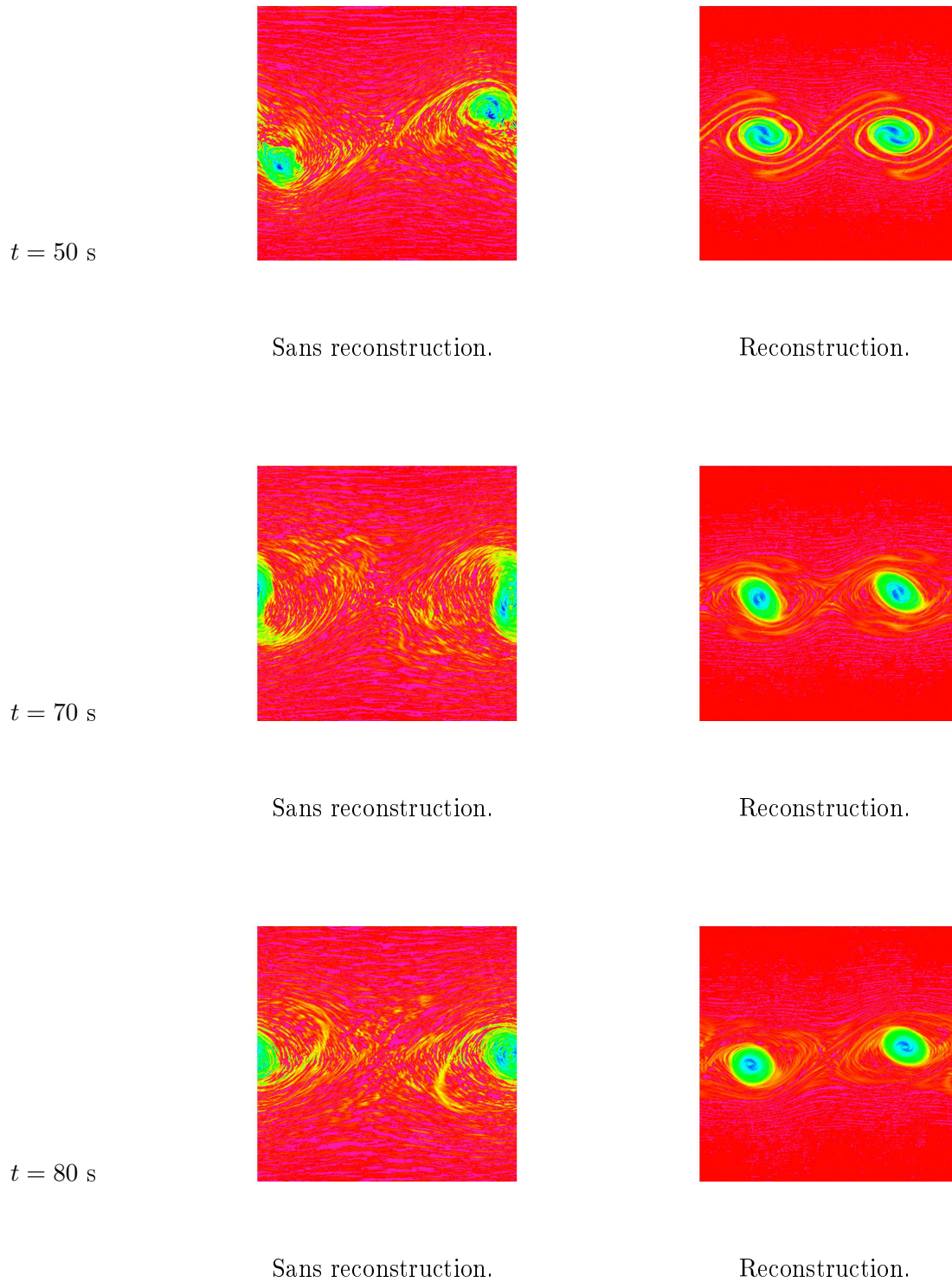


FIGURE V.31 – Champ de vorticité aux temps non adimensionnés 50 s, 70 s, 80 s sur un maillage perturbé de  $320 \times 320$  mailles – Couche de mélange à  $Re = 10000$ .

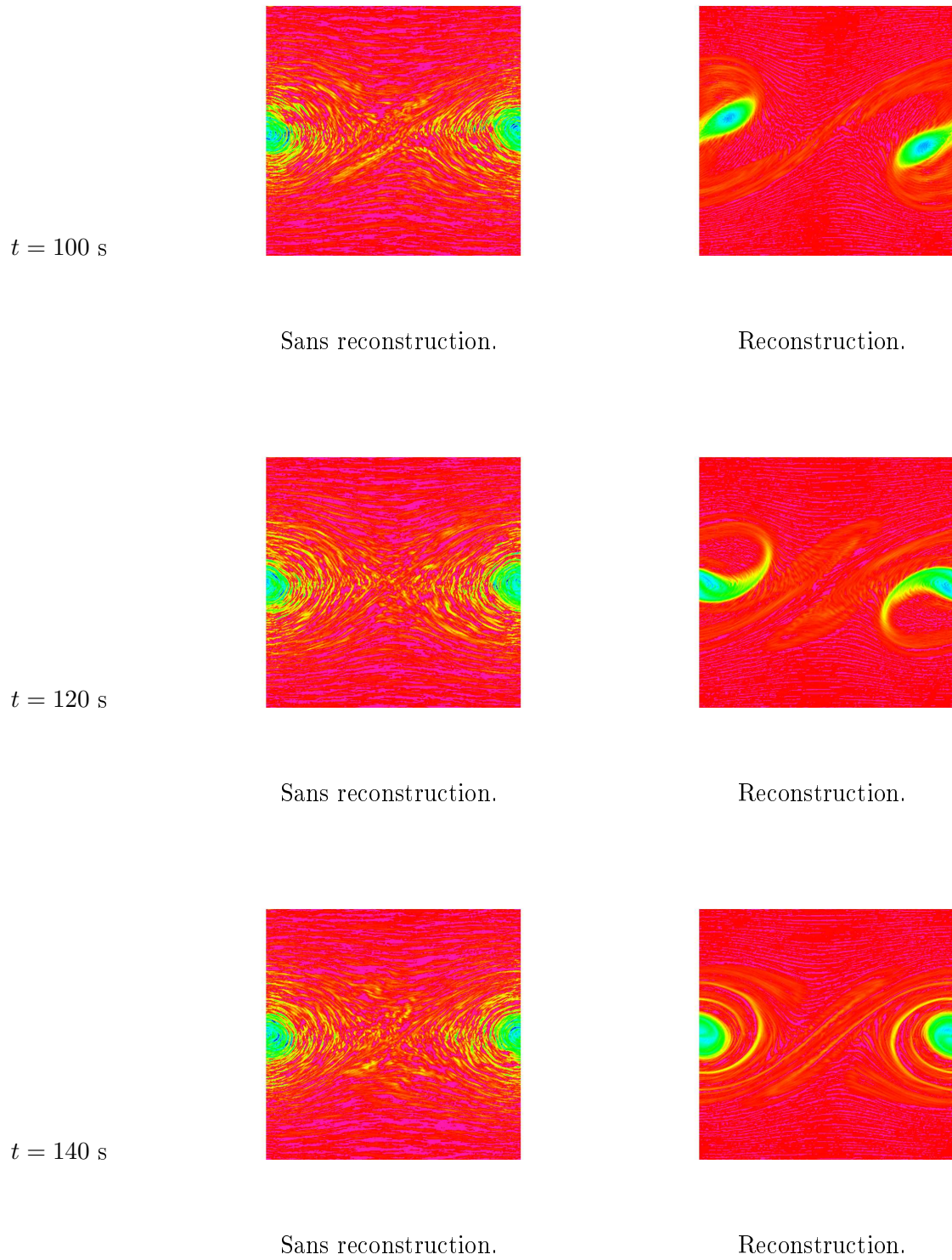


FIGURE V.32 – Champ de vorticité aux temps non adimensionnés 100 s, 120 s, 140 ssur un maillage perturbé de  $320 \times 320$  mailles – Couche de mélange à  $Re = 10000$ .

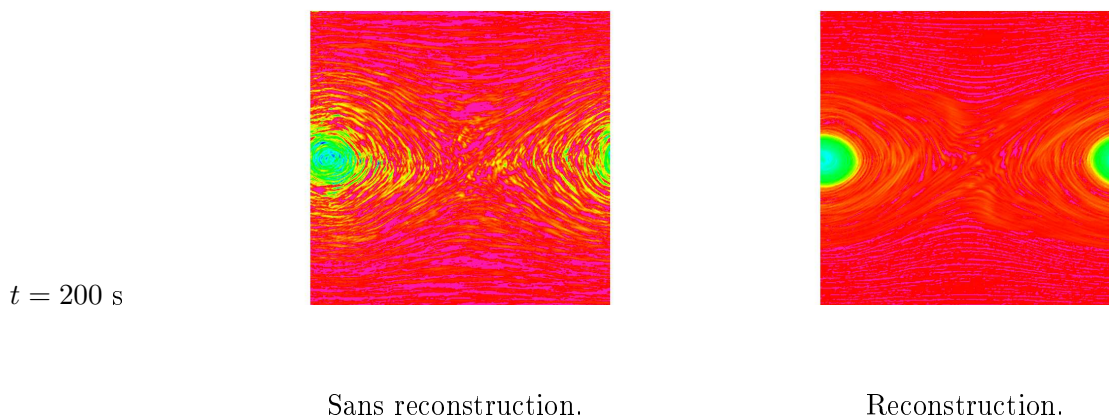


FIGURE V.33 – Champ de vorticité au temps non adimensionné 200 s sur un maillage perturbé de  $320 \times 320$  mailles – Couche de mélange à  $\text{Re} = 10000$ .

Les figures V.30-V.33 montrent que sans reconstruction des flux primaux, le profil des tourbillons est bruité, les temps d'appariement sont avancés (le dernier tourbillon se forme à partir de 50 s au lieu de 80 s) et l'amplitude de la vorticité est multipliée par au moins trois dès les premiers instants de la simulation.

En revanche, notons que le schéma basé sur la reconstruction des flux primaux représente correctement les étapes de l'appariement des tourbillons. De plus, les temps d'appariement sont en accord avec ceux donnés par les références, comme pour le schéma MAC [63, 57, 37, 15] : en effet, les quatre tourbillons primaires se développent jusqu'à un peu moins de 30 s, s'apparient avant 80 s. Ensuite, les deux tourbillons secondaires fusionnent entre 80 s et 100 s. De plus, l'amplitude de vorticité est, elle aussi, en accord avec celle calculée pour le schéma MAC et les références. Enfin, il est bon de signaler que, même avec la reconstruction des flux, plus le maillage est éloigné d'un maillage uniforme, plus il faut le raffiner pour que la valeur de la vorticité soit proche de celle du schéma MAC.

## V.6 Analyse du problème de Stokes

Nous supposons dans cette section que la vitesse au bord est nulle, c'est-à-dire :

$$\Gamma_N = \emptyset \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_D = 0.$$

Dans la suite, nous notons  $\mathcal{N}_\sigma(\mathbf{u})$  le degré de liberté en vitesse associé à l'arête  $\sigma$  et nous considérons le problème de Stokes stationnaire 2D (V.11), où nous supposons que  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})^2$ .

1- Problème (formulation variationnelle) associé au système (V.11) : trouver  $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{p}) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$  tels que :

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^2, & a(\underline{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \underline{p}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ \forall q \in L_0^2(\Omega), & b(\underline{\mathbf{u}}, q) = 0, \end{cases} \quad (\text{V.15})$$

où  $a(\underline{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$  désigne la forme bilinéaire  $\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$  et  $b(\mathbf{v}, p)$  est donnée par  $-\int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$ .



Dans cette section, nous considérons que les cellules cell-centered sont les cellules primales et les cellules vertex-centered sont décalées par rapport aux cellules du maillage primal comme représenté sur la figure V.6.

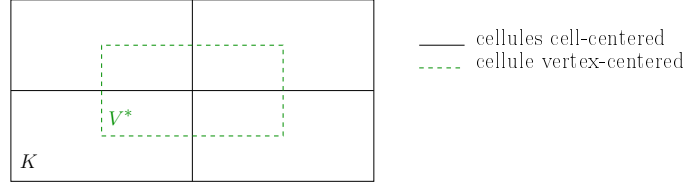


FIGURE V.34 – Cellules cell-centered et vertex-centered considérées.

Notons  $\mathbf{X}_h$  l'espace d'approximation pour la vitesse (Rannacher-Turek)

$$\mathbf{X}_h = \left\{ \mathbf{v} \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^2; \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v} \circ T_K \in \widetilde{\mathbb{Q}}_1(\widehat{K})^2, \text{ et, } \forall \sigma = K|L, \mathcal{N}_{K,\sigma}(\mathbf{v}) = \mathcal{N}_{L,\sigma}(\mathbf{v}), \right. \\ \left. \text{et, } \forall \sigma = K|ext, \mathcal{N}_{K,\sigma}(\mathbf{v}) = 0 \right\}, \quad (\text{V.16})$$

et  $\mathbf{N}_h$  l'espace d'approximation pour la pression :

$$\mathbf{N}_h = \{p; \forall L^* \in \mathcal{T}_h^*, p|_{L^*} \in \mathbb{Q}_0(L^*) \text{ et } p \in \mathbf{L}_0^2(\Omega)\}.$$

Le problème discret est le suivant

2- Problème discret : trouver  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{N}_h$  tels que :

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, & a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \\ \forall q_h \in \mathbf{N}_h, & b_h(\mathbf{u}_h, q_h) = 0, \end{cases} \quad (\text{V.17})$$

où la forme bilinéaire  $a_h$  et la forme linéaire  $b_h$  sont définies comme suit

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \quad \text{et} \quad b_h(\mathbf{v}_h, p_h) = \sum_{L^* \in \mathcal{T}_h^*} p_{L^*} (\text{div}^{EP} \mathbf{v}_h)_{L^*}. \quad (\text{V.18})$$

Définissons de plus les espaces restreints continus et discrets notés  $W$  et  $W_h$  suivants :

$$\begin{aligned} W &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^2; \forall q \in \mathbf{L}_0^2(\Omega), b(\mathbf{v}, q) = 0\}, \\ W_h &= \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h; \forall q_h \in \mathbf{N}_h, b_h(\mathbf{v}_h, q_h) = 0\}. \end{aligned} \quad (\text{V.19})$$

#### Remarque V.7

*La solution  $\underline{\mathbf{u}}$  du problème (V.15) est aussi solution du problème restreint suivant consistant à trouver  $\underline{\mathbf{w}} \in W$  tel que*

$$\forall \mathbf{v} \in W, \quad a(\underline{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \underline{\mathbf{w}} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (\text{V.20})$$

*par définition de l'espace restreint  $W$  d'une part et par la contrainte d'incompressibilité imposée*

à  $\underline{\mathbf{u}}$  d'autre part. Par ailleurs,  $\mathbf{u}_h$  est solution de la formulation discrète du problème restreint suivante : trouver  $\mathbf{w}_h \in W_h$  tel que

$$\forall \mathbf{v}_h \in W_h, \quad a_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \mathbf{w}_h : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}. \quad (\text{V.21})$$

Le fait de considérer le problème restreint revient à travailler sur un problème elliptique en vitesse uniquement. Dans la suite, nous supposons que  $\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})^2 \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)^2$ .

### V.6.1 Analyse de stabilité

Dans ce paragraphe, nous étudions la stabilité des solutions approchées au problème de Stokes stationnaire 2D (Système (V.11) pour des conditions au bord de type Dirichlet homogènes). En choisissant  $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h \in W_h$  dans l'équation du problème restreint discret donné par l'équation (V.21) (Remarque V.7), par définition de la forme bilinéaire  $a_h$  et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz ensuite :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)}^2 \leq \|\mathbf{f}\|_0 \|\mathbf{u}_h\|_0.$$

D'où le résultat par l'inégalité de Poincaré (Théorème D.2, Annexe D) :

$$\|\mathbf{u}_h\|_0 \leq C \|\mathbf{f}\|_0.$$

Remarque V.8 (Stabilité de la pression)

*L'inégalité inf-sup n'est pas uniformément satisfaite sur  $\mathbf{X}_h \times \mathbf{N}_h$  (la pression constante égale à 1 sur les cellules cell-centered et à  $-1$  sur les cellules vertex-centered appartient par exemple au noyau de l'opérateur gradient de pression). Pour cette raison, lors des tests numériques, chacune des deux pressions (cell-centered et vertex-centered) est cherchée à moyenne nulle. Ceci nous permet de déduire que les problèmes discrets sont bien posés (car la forme bilinéaire  $a_h(\cdot, \cdot)$  est coercive  $\mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h$ ).*

### V.6.2 Analyse a priori de l'erreur d'approximation

Dans cette section, nous montrons des estimations sur l'erreur d'approximation d'ordre un en espace pour la vitesse (en norme  $\mathbf{H}^1$  discrète) et d'ordre un pour un post-traitement de la pression (en norme  $L^2$  discrète) sur des maillages uniformes, rectangles (ou parallélogrammes), comme observé dans les tests numériques (voir la section V.4).

Il est bon de noter que cette analyse diffère de celle de [7], laquelle consiste en une analyse de la condition *inf-sup* pour les espaces d'approximations discrets (pour l'élément enrichi). De ceci, les auteurs déduisent des estimations pour la vitesse et la pression. Comme signalé dans la remarque V.8, l'élément que nous proposons ne satisfait pas la condition *inf-sup* sur  $\mathbf{X}_h \times \mathbf{N}_h$ , donc l'analyse d'erreur ne suit pas la même démarche que [7] et s'appuie sur un post-traitement de la pression pour pallier ce manque.

Dans la suite de ce chapitre, on admet le lemme V.9 (résultant d'un changement de variables et du fait que le mapping défini de la cellule de référence  $\widehat{K}$  à valeurs dans la cellule courante  $K$  est affine car il conserve le parallélisme).



**Lemme V.9**

Soit  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^k(K)^2$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), alors il existe une constante  $C > 0$  telle que si  $\widehat{\mathbf{v}}$  désigne la fonction définie sur l'élément de référence  $\widehat{K}$  :

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}|_{\mathbf{H}^k(K)} &\leq C \frac{|K|^{1/2}}{\rho_K^k} |\widehat{\mathbf{v}}|_{\mathbf{H}^k(\widehat{K})}, \\ |\widehat{\mathbf{v}}|_{\mathbf{H}^k(\widehat{K})} &\leq C \frac{h_K^k}{|K|^{1/2}} |\mathbf{v}|_{\mathbf{H}^k(K)}, \end{aligned}$$

où  $|\cdot|_{\mathbf{H}^k(K)}$  désigne la semi-norme  $\mathbf{H}^k$ , i.e.  $|\mathbf{v}|_{\mathbf{H}^k(K)} = \left( \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha \mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2}$  et  $\rho_K$  est la rondeur de  $K$  ( $\rho_K = \min_{1 \leq i \leq 4} \rho_{T_i}$  où les  $T_i$  sont les triangles définis à partir de trois sommets du quadrangle,  $\rho_{T_i}$  est le diamètre de la plus grande boule incluse dans le triangle  $T_i$ ) et  $h_K$  le diamètre de  $K$ .

**V.6.2.a Analyse de l'erreur d'approximation pour la vitesse**

**Analyse de l'erreur d'interpolation pour la vitesse**

Donnons la définition des opérateurs d'interpolation pour la vitesse  $I_h^{RT}$  et  $I_h^{EP}$  respectivement pour l'élément fini de Rannacher-Turek et pour l'élément enrichi. Pour ce faire, soit  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$  une arête (primale) donnée. À partir de celle-ci, on définit  $\sigma^*$  comme étant l'unique arête du pavage pression qui coupe  $\sigma$  en son milieu ( $\sigma^* \neq \sigma$ ) (Figure V.35).

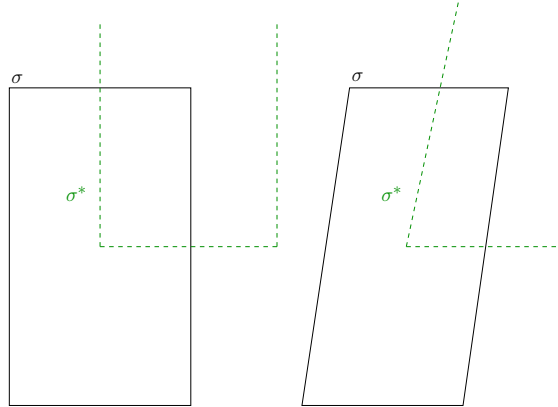


FIGURE V.35 – Définition de l'arête  $\sigma^*$  du pavage associée à  $\sigma$ .

**Définition V.10 (Opérateurs d'interpolation pour la vitesse)**

Soit  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$  une arête (primale) donnée. Pour  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^2$ , on définit l'opérateur  $I_h^{RT}$  (Rannacher-Turek classique) comme suit :  $I_h^{RT} \mathbf{v} \in \mathbf{X}_h$  et

$$\mathcal{N}_\sigma(I_h^{RT} \mathbf{v}) = \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{v}). \quad (\text{V.22})$$

De plus, on définit l'opérateur  $I_h^{EP}$  (pour l'élément enrichi) par :  $I_h^{EP} \mathbf{v} \in \mathbf{X}_h$  et

$$\begin{cases} \mathcal{N}_\sigma(I_h^{EP} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_\sigma &= \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_\sigma, \\ \mathcal{N}_\sigma(I_h^{EP} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_{\sigma^*} &= \mathcal{N}_{\sigma^*}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_{\sigma^*}. \end{cases} \quad (\text{V.23})$$

## Remarque V.11

- Si  $\mathbf{v}$  est régulière sur  $L^*$  et que  $L^*$  est rectangle ou parallélogramme alors

$$\begin{aligned} |L^*| (\operatorname{div}^{EP} I_h^{EP} \mathbf{v})_{L^*} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}_\sigma \in \mathcal{S}(L^*)} |\varepsilon_\sigma| \mathcal{N}_\sigma(I_h^{EP} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_{\varepsilon_\sigma}, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}_\sigma \in \mathcal{S}(L^*)} |\varepsilon_\sigma| \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_{\varepsilon_\sigma}, \\ &= \frac{1}{2} \int_{L^*} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (\text{V.24})$$

car la normale  $\mathbf{n}_{\varepsilon_\sigma}$  correspond (dans le cas de maillages rectangles ou parallélogrammes) à la normale sortante des cellules cell-centered ou vertex-centered (i.e. les mailles primales ou décalées) et la formule de Stokes donne le résultat.

- Si  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h$  vérifie  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , alors  $\operatorname{div}^{EP} I_h^{EP} \mathbf{v} = 0$ .

Étant donné un champ de vitesse  $\mathbf{v}$  tel que  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(K)^d$  pour toute cellule  $K \in \mathcal{T}_h$ , on définit sa norme  $\mathbf{H}^1$  brisée comme suit :

$$\|\mathbf{v}\|_{1,b}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |\nabla \mathbf{v}|^2 \, d\mathbf{x}. \quad (\text{V.25})$$

Rappelons de plus que nous notons  $T_K$  le mapping  $\mathbb{Q}_1^2$  défini de la cellule de référence  $\widehat{K}$  à valeurs dans une cellule courante  $K$ , et alors  $\mathbf{u} = \widehat{\mathbf{u}} \circ T_K^{-1}$ . Alors, si l'on note  $I_0^{RT}$  l'opérateur d'interpolation défini sur la cellule de référence  $\widehat{K}$ ,  $I_h^{RT} \mathbf{u} \circ T_K = I_0^{RT}(\mathbf{u} \circ T_K)$  (idem pour  $I_0^{EP}$ ).

Dans la suite, nous allons montrer les deux lemmes suivants :

**Lemme V.12**

Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage de  $\Omega$ , uniformément constitué de rectangles (ou de parallélogrammes). Soient de plus  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^2$ ,  $I_h^{RT}$  et  $I_h^{EP}$  les opérateurs d'interpolation pour la vitesse définis par les équations (V.22) et (V.23), alors il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|I_h^{RT} \mathbf{u}\|_{1,b} \leq C |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}, \quad \text{et} \quad \|I_h^{EP} \mathbf{u}\|_{1,b} \leq C |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)},$$

où  $\|\cdot\|_{1,b}$  est définie par l'équation (V.25). De plus,

$$\|I_h^{EP} \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_0 \leq Ch |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

**Lemme V.13**

Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage de  $\Omega$ , uniforme et constitué de rectangles (ou de parallélogrammes). Soit  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^2 \cap \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  et soit  $I_h^{EP}$  le nouvel opérateur d'interpolation pour la vitesse (Équation (V.23)), alors il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|I_h^{EP} \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{1,b} \leq Ch |\mathbf{u}|_{\mathcal{C}^2},$$

où  $|\mathbf{u}|_{\mathcal{C}^2} = \sup_\Omega |D^2 \mathbf{u}|$ .

**Démonstration du lemme V.12**

Montrons que

$$\|I_h^{RT} \mathbf{u}\|_{1,b} \leq C |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}, \quad \text{et} \quad \|I_h^{EP} \mathbf{u}\|_{1,b} \leq C |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

- Pour  $I_h^{RT}$ , la preuve est classique (opérateur de Fortin, voir [35]).
- Faisons la preuve pour l'opérateur  $I_h^{EP}$  défini par l'équation (V.23). Soit  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^2 \cap \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})^2$ . Nous aimerions appliquer le lemme de Bramble-Hilbert (Lemme D.1, Annexe D) à l'opérateur d'interpolation  $I_0^{EP}$  défini sur la cellule de référence. Le fait que l'opérateur  $I_0^{EP}$  soit défini sur les arêtes  $\sigma^*$  (pas contenues dans la cellule de référence) complique les choses. À une cellule de référence  $K_0$  associons donc un domaine noté  $\widetilde{K}_0$  défini de manière à contenir entièrement les arêtes  $\sigma^*$  associées à  $\sigma \in \mathcal{E}(K_0)$  (Figure V.36).

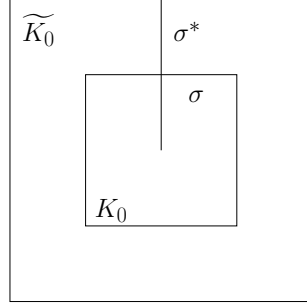


FIGURE V.36 – Domaine  $\widetilde{K}_0$ .

Dans  $\widetilde{K}_0$ , on définit  $I_0^{EP}$  comme suit :

$$I_0^{EP}(\mathbf{u}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K_0)} \left( \frac{1}{|\sigma^*|} \int_{\sigma^*} \mathbf{u} \, d\sigma \right) \varphi_\sigma.$$

Alors, l'opérateur  $I_0^{EP}$  satisfait les propriétés suivantes :

- $I_0^{EP} - I_d : \mathbf{H}^1(\widetilde{K}_0)^2 \rightarrow \mathbf{H}^1(K_0)^2$  est linéaire continu par linéarité de l'intégrale.
- $I_0^{EP} - I_d = 0$  sur l'espace  $\mathbb{Q}_0(\widetilde{K}_0)^2$ .

Le lemme de Bramble-Hilbert permet de déduire l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que  $|I_0^{EP} \mathbf{u} - \mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(K_0)} \leq C |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(\widetilde{K}_0)}$ . Mais alors, l'inégalité triangulaire implique qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|I_0^{EP} \mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(K_0)} \leq |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(K_0)} + C |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(\widetilde{K}_0)}.$$

Par le lemme V.9, on en déduit que pour toute cellule courante  $K$  contenue dans un domaine  $\widetilde{K}$  ( $\widetilde{K}$  étant construit de manière à contenir toutes les arêtes  $\sigma^*$  associées aux arêtes  $\sigma \in \mathcal{E}(K)$ ),

$$|I_h^{EP} \mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(K)} \leq |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(K)} + C |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(\widetilde{K})}. \quad (\text{V.26})$$

Remarquons qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(\widetilde{K})} \leq C \sum_{\{K; K \cap \widetilde{K} \neq \emptyset\}} |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(K)}. \quad (\text{V.27})$$

Donc, en élevant l'inégalité (V.26) au carré et par somme sur  $K \in \mathcal{T}_h$ , l'inégalité (V.27) implique qu'il existe une constante  $\widetilde{C} > 0$  telle que

$$\|I_0^{EP} \mathbf{u}\|_{1,b}^2 \leq \widetilde{C} |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2.$$

D'où le résultat.

Montrons que

$$\|I_h^{EP} \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_0 \leq Ch |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

Pour cela, utilisons les notations de la preuve de stabilité  $H^1$  de l'opérateur d'interpolation ci-dessus. En particulier, étant donnée une cellule  $K$ , nous définissons  $\tilde{K}$  comme étant le domaine constitué des cellules contenant les arêtes  $\sigma^* \in \mathcal{E}^*(K)$  et nous notons  $K_0$  et  $\tilde{K}_0$  les cellules de référence qui leur sont associées par mapping.

En appliquant le lemme de Bramble-Hilbert (Lemme D.1, Annexe D) à l'opérateur  $I_0^{EP} - I_d : H^1(\tilde{K}_0)^2 \rightarrow L^2(K_0)^2$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|I_0^{EP} \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L^2(K_0)} \leq C |\mathbf{u}|_{H^1(\tilde{K}_0)}.$$

Par changement de variables (Lemme V.9) et en utilisant cette dernière inégalité, on a

$$\begin{aligned} \|I_h^{EP} \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L^2(K)} &\leq Ch_K \|I_0^{EP} \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L^2(K_0)}, \\ &\leq C^2 h_K |\mathbf{u}|_{H^1(\tilde{K}_0)}, \\ &\leq C^2 h_K |\mathbf{u}|_{H^1(\tilde{K})}. \end{aligned} \tag{V.28}$$

Comme ci-dessus, en élevant l'inégalité (V.28) au carré et par somme sur  $K \in \mathcal{T}_h$ , l'inégalité (V.27) implique qu'il existe une constante  $\tilde{C} > 0$  telle que

$$\|I_h^{EP} \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_0^2 \leq \tilde{C} h^2 |\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)}^2.$$

D'où le résultat. ■

### Démonstration du lemme V.13

Supposons pour simplifier le maillage uniforme de pas  $h$  dans les deux directions de l'espace. On a :

$$\|I_h^{EP} \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{1,b} \leq \|I_h^{RT} \mathbf{u} - I_h^{EP} \mathbf{u}\|_{1,b} + \|I_h^{RT} \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{1,b}.$$

La preuve se divise en deux étapes consistant chacune à majorer un des termes au second membre de l'inégalité ci-dessus. D'abord, par les lemmes d'interpolation classiques [83, Lemme 1, p. 99], il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|I_h^{RT} \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{1,b} \leq Ch |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)}.$$

En utilisant le fait qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)} \leq C |\mathbf{u}|_{C^2(\bar{\Omega})},$$

( $\Omega$  est borné) et on en déduit que

$$\|I_h^{RT} \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{1,b} \leq Ch |\mathbf{u}|_{C^2(\bar{\Omega})}.$$

Ensuite, on montre qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|I_h^{EP} \mathbf{u} - I_h^{RT} \mathbf{u}\|_{1,b} \leq Ch |\mathbf{u}|_{C^2(\bar{\Omega})}.$$

Pour cela, soit  $K \in \mathcal{T}_h$ , supposons que  $\mathbf{u} \in C^2(\bar{\Omega})^2$ . D'abord, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et en utilisant ensuite la valeur des coefficients de la matrice de rigidité pour un maillage

structuré (Proposition A.5, Annexe A), il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\begin{aligned}
 \|I_h^{EP} \mathbf{u} - I_h^{RT} \mathbf{u}\|_{1,b}^2 &= \\
 &\sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ \sigma, \sigma' \in \mathcal{E}(K)}} (\mathcal{N}_\sigma(I_h^{EP} \mathbf{u}) - \mathcal{N}_\sigma(I_h^{RT} \mathbf{u})) \cdot (\mathcal{N}_{\sigma'}(I_h^{EP} \mathbf{u}) - \mathcal{N}_{\sigma'}(I_h^{RT} \mathbf{u})) \left( \int_K \nabla \varphi_\sigma : \nabla \varphi_{\sigma'} \, d\mathbf{x} \right), \\
 &\leq C \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ \sigma \in \mathcal{E}(K)}} |\mathcal{N}_\sigma(I_h^{EP} \mathbf{u}) - \mathcal{N}_\sigma(I_h^{RT} \mathbf{u})|^2 \left( \int_K |\nabla \varphi_\sigma|^2 \, d\mathbf{x} \right), \\
 &\leq C \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ \sigma \in \mathcal{E}(K)}} |\mathcal{N}_\sigma(I_h^{EP} \mathbf{u}) - \mathcal{N}_\sigma(I_h^{RT} \mathbf{u})|^2.
 \end{aligned} \tag{V.29}$$

- Si  $\sigma \in \mathcal{E}(K)$  est horizontale (idem si verticale), évaluons  $|\mathcal{N}_\sigma(I_h^{EP} \mathbf{u}) - \mathcal{N}_\sigma(I_h^{RT} \mathbf{u})|^2$  en utilisant les développements de Taylor donnés par l'équation (V.30) ( $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})^2$ ). Il existe  $\tilde{\mathbf{x}}_\sigma$  et  $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_\sigma$  tels que

$$\begin{cases} \mathcal{N}_\sigma(I_h^{EP} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_{\sigma^*} &= \mathbf{u}_y(\mathbf{x}_\sigma) + \frac{h^2}{48} \partial_{yy} \mathbf{u}_y(\tilde{\mathbf{x}}_\sigma), \\ \mathcal{N}_\sigma(I_h^{RT} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_{\sigma^*} &= \mathbf{u}_y(\mathbf{x}_\sigma) + \frac{h^2}{48} \partial_{xx} \mathbf{u}_y(\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_\sigma). \end{cases} \tag{V.30}$$

Par différence de ces deux équations, on en déduit le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{N}_\sigma(I_h^{EP} \mathbf{u}) - \mathcal{N}_\sigma(I_h^{RT} \mathbf{u})|^2 &= \left| \frac{h^2}{48} \partial_{yy} \mathbf{u}_y(\tilde{\mathbf{x}}_\sigma) - \frac{h^2}{48} \partial_{xx} \mathbf{u}_y(\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_\sigma) \right|^2, \\
 &\leq C \frac{h^4}{48} \|D^2 \mathbf{u}\|_{L^\infty(K)}^2.
 \end{aligned}$$

Revenons à l'équation (V.29), par somme sur  $\sigma \in \mathcal{E}(K)$  et sur  $K \in \mathcal{T}_h$ , l'inégalité précédente implique :

$$\|I_h^{EP} \mathbf{u} - I_h^{RT} \mathbf{u}\|_{1,b}^2 \leq C \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \frac{h^4}{48} |\mathbf{u}|_{\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})}^2.$$

D'où le résultat car le cardinal de  $\mathcal{E}_{\text{int}}$  est de l'ordre de  $\frac{1}{h^2}$ .

- Si  $\sigma$  est une arête d'un parallélogramme ni horizontale, ni verticale, on se ramène au résultat précédent par une transformation affine (translation d'une coordonnée). Par ailleurs, le déterminant d'une telle application étant égal à un, le résultat reste inchangé. ■

**Remarque V.14 (Maillages structurés non uniformes ou non structurés)**

*Il est important de remarquer que nous avons utilisé l'argument suivant pour estimer la différence  $\mathcal{N}_\sigma(I_h^{EP} \mathbf{u}) - \mathcal{N}_\sigma(I_h^{RT} \mathbf{u})$  : on est capable d'écrire des développements de Taylor pour  $I_h^{EP} \mathbf{u}$  et  $I_h^{RT} \mathbf{u}$  évalués au centre de l'arête  $\sigma$ . En utilisant la définition des degrés de liberté vitesse  $\mathcal{N}_\sigma$ , les termes dérivés d'ordre un du développement de  $\mathcal{N}_\sigma(I_h^{RT} \mathbf{u})$  et  $\mathcal{N}_\sigma(I_h^{EP} \mathbf{u})$  s'annulent (ce qui n'est pas le cas sur des maillages non uniformes). Cette propriété permet par la suite de déduire des estimations d'ordre un sur la différence des deux interpolateurs dans le cas de maillages uniformes mais elle nous fait défaut dans le cas de maillages structurés non uniformes ou non structurés.*

**Analyse de l'erreur d'approximation pour la vitesse**

Dans cette partie, nous cherchons à montrer des estimations d'ordre un en norme  $H^1$  discrète pour la vitesse (Théorème V.18 ci-dessous).

**Étape 1 : Contrôle des sauts**

Dans ce qui suit, nous considérons les sauts de la vitesse  $\mathbf{v}$  à travers une arête  $\sigma$  définis par

**Définition V.15 (Saut de vitesse  $\mathbf{v}$  à travers l'arête  $\sigma$ )**

Soit  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h$ .

- Si  $\sigma = K|L$  est une arête intérieure, alors le saut de  $\mathbf{v}$  à travers  $\sigma$  noté  $[[\mathbf{v}]]$  est la matrice définie par

$$[[\mathbf{v}]] = \mathbf{v}|_K \otimes \mathbf{n}_{K,\sigma} + \mathbf{v}|_L \otimes \mathbf{n}_{L,\sigma}.$$

- Si  $\sigma = K|ext$  est une arête extérieure, dans ce cas

$$[[\mathbf{v}]] = \mathbf{v}|_K \otimes \mathbf{n}_{K,\sigma}.$$

**Proposition V.16 (Contrôle des sauts de vitesse dans l'espace d'approximation)**

Soient  $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})^2 \cap H_0^1(\Omega)^2$  et  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h$ . Alors, il existe une constante  $C$  telle que

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \int_{\sigma} \nabla \mathbf{u} : [[\mathbf{v}_h]] \, d\sigma \leq Ch |\mathbf{u}|_{\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})} \|\mathbf{v}_h\|_{1,b}.$$

De même, on peut montrer que pour toute fonction  $p \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$  :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \int_{\sigma} p : [[\mathbf{v}_h]] \, d\sigma \leq Ch |p|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} \|\mathbf{v}_h\|_{1,b}. \quad (\text{V.31})$$

La preuve de la proposition V.16 se trouve dans [12, p.281] (estimations *a priori* en norme  $H^2$ ). Elle repose sur l'inégalité de trace [2, Théorème 3.10], ou [29, Lemme A.1] (Lemme I.15) et le lemme V.17 suivant (que nous démontrons dans la suite car le détail de la preuve n'apparaît pas dans [12]).

**Lemme V.17**

Il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|\sigma| \|\llbracket \mathbf{v}_h \rrbracket\|_{L^2(\sigma)}^2 \leq C \sum_{\{K;\sigma \in \mathcal{E}(K)\}} h_K^2 |\mathbf{v}_h|_{H^1(K)}^2, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}, \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h.$$

**Démonstration du lemme V.17**

Soit  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h$ , notons  $v_h$  est une composante scalaire de  $\mathbf{v}_h$ . Si  $\sigma = K|ext$ , le résultat est immédiat. Supposons donc que  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma = K|L$ , par la définition V.15, on a

$$\llbracket v_h \rrbracket = v|_K \mathbf{n}_{K,\sigma} + v|_L \mathbf{n}_{L,\sigma} = \mathbf{n}_{K,\sigma} (v|_K - v|_L).$$

Soit  $\mathbf{a}_\sigma \in \sigma$ . Supposons que  $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ . Comme  $v|_K$  et  $v|_L$  sont régulières, la formule de Taylor avec reste intégral s'écrit :

$$v|_K(\mathbf{x}) = v|_K(\mathbf{a}_\sigma) + \int_{\mathbf{a}_\sigma}^{\mathbf{x}} \nabla v|_K(\mathbf{t}) \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{t})}{(\mathbf{x} - \mathbf{a}_\sigma)} \, d\mathbf{t}.$$

Pour estimer  $\|[[v_h]]\|_{L^2(\sigma)}^2$ , comme  $[[v_h]] = \mathbf{n}_{K,\sigma}(v_{|K} - v_{|L})$ , écrivons une identité analogue sur  $L$ . En prenant la différence des deux équations (sur  $K$  et sur  $L$ ), on a

$$|\sigma| \|[[v_h]]\|_{L^2(\sigma)}^2 = |\sigma| \int_{\sigma} \left( \int_{\mathbf{a}_{\sigma}}^{\mathbf{x}} (\nabla v_{|K}(\mathbf{t}) - \nabla v_{|L}(\mathbf{t})) \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{t})}{(\mathbf{x} - \mathbf{a}_{\sigma})} d\mathbf{t} \right)^2 d\mathbf{x}. \quad (\text{V.32})$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$|\sigma| \|[[v_h]]\|_{L^2(\sigma)}^2 = |\sigma| \int_{\sigma} \left( \int_{\mathbf{a}_{\sigma}}^{\mathbf{x}} |\nabla v_{|K}(\mathbf{t}) - \nabla v_{|L}(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t} \right) \underbrace{\left( \int_{\mathbf{a}_{\sigma}}^{\mathbf{x}} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{t})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{a}_{\sigma})^2} d\mathbf{t} \right)}_{\leq \frac{|\sigma|}{3}} d\sigma.$$

On obtient alors

$$|\sigma| \|[[v_h]]\|_{L^2(\sigma)}^2 \leq \frac{|\sigma|^2}{3} \int_{\sigma} \left( \sum_{\{K; \sigma \in \mathcal{E}(K)\}} \int_{\mathbf{a}_{\sigma}}^{\mathbf{x}} |\nabla v_{|K}(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t} \right) d\sigma,$$

et, comme  $(\mathbf{a}_{\sigma}, \mathbf{x}) \subset \sigma$ , il vient finalement

$$|\sigma| \|[[v_h]]\|_{L^2(\sigma)}^2 \leq \frac{|\sigma|^3}{3} \sum_{\{K; \sigma \in \mathcal{E}(K)\}} \int_{\sigma} |\nabla v_{|K}(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t}. \quad (\text{V.33})$$

Par ailleurs, par l'inégalité de trace d'abord et par le théorème de Poincaré (Théorème D.2, Annexe D) ensuite, on a

$$|\sigma| \|\nabla v_{|K}\|_{L^2(\sigma)}^2 \leq (C + h_K^2) |v|_{H^1(K)}^2. \quad (\text{V.34})$$

Le résultat final est obtenu en injectant l'équation (V.34) dans l'équation (V.33) et en utilisant que  $|\sigma| \leq h_K$  et  $h_K^2 \leq |\Omega| \leq C'$  ( $\Omega$  est borné). ■

### Étape 2 : Estimations de l'erreur d'approximation en vitesse

Dans cette partie, on considère les problèmes restreints (V.20) et (V.21), et nous montrons le résultat suivant (Théorème V.18).

#### **Théorème V.18 (Estimations d'ordre un en espace pour la vitesse en norme $H^1$ )**

*Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage cartésien (ou parallélogramme) et uniforme de  $\Omega$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\|\mathbf{u}_h - \underline{\mathbf{u}}\|_{1,b} \leq Ch(|\underline{\mathbf{u}}|_{C^2(\bar{\Omega})} + |\underline{p}|_{C^1(\bar{\Omega})}),$$

*où  $\|\cdot\|_{1,b}$  désigne la norme  $H^1$  brisée.*

#### **Démonstration du théorème V.18**

D'après le lemme de Strang [27, p. 93] (Lemme D.5, Annexe D), on a

$$\|\underline{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h\|_{1,b} \leq \inf_{\mathbf{w}_h \in W_h} \|\underline{\mathbf{u}} - \mathbf{w}_h\|_{1,b} + \sup_{\mathbf{w}_h \in W_h \setminus \{0\}} \frac{|a_h(\underline{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_{1,b}}. \quad (\text{V.35})$$

• L'analyse de l'erreur d'interpolation que nous avons menée précédemment (Lemme V.13) nous permet d'estimer le premier terme de la somme contenue dans le membre de droite de l'inégalité (V.35) :

$$\inf_{\mathbf{w}_h \in W_h} \|\underline{\mathbf{u}} - \mathbf{v}_h\|_{1,b} \leq \|\underline{\mathbf{u}} - I_h^{EP} \underline{\mathbf{u}}\|_{1,b} \leq Ch|\underline{\mathbf{u}}|_{C^2(\bar{\Omega})}.$$

• L'analyse de l'erreur de consistance nous permet de majorer le deuxième terme du membre de droite de l'inégalité (V.35). En effet, soit  $\mathbf{w}_h \in W_h \setminus \{0\}$ . Réécrivons le terme  $a_h(\underline{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h)$  en utilisant que  $\mathbf{u}_h$  est solution du problème restreint discret (V.21) :

$$a_h(\underline{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \underline{\mathbf{u}} : \nabla \mathbf{w}_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}_h \, d\mathbf{x}.$$

Par la formule de Stokes ( $\mathbf{w}_h \in \mathbf{H}^1(K)^2$ ) d'abord et comme  $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{p})$  est solution du problème de Stokes continu ensuite ( $W_h \not\subseteq W$ ), on a

$$\begin{aligned} a_h(\underline{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \int_{\partial K} \nabla \underline{\mathbf{u}} \mathbf{w}_h \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - \int_K \Delta \underline{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w}_h \, d\mathbf{x} \right) - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}_h \, d\mathbf{x}, \\ &= \underbrace{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \nabla \underline{\mathbf{u}} \mathbf{w}_h \cdot \mathbf{n} \, d\sigma}_{T_1} - \underbrace{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \underline{p} \cdot \mathbf{w}_h \, d\mathbf{x}}_{T_2}. \end{aligned}$$

– Le premier terme du membre de droite de cette dernière égalité s'écrit :

$$T_1 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \int_{\sigma} \nabla \underline{\mathbf{u}} : [[\mathbf{w}_h]] \, d\sigma,$$

et, par le lemme des sauts V.16, on a la majoration suivante

$$T_1 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \int_{\sigma} \nabla \underline{\mathbf{u}} : [[\mathbf{w}_h]] \, d\sigma \leq Ch |\underline{\mathbf{u}}|_{C^2(\bar{\Omega})} \|\mathbf{w}_h\|_{1,b}.$$

– De plus, par intégration par parties ( $\mathbf{w}_h \in W_h \subset \mathbf{H}^1(K)^2$ ) d'abord et par définition des cellules cell-centered (cellules primales) et de la divergence sur ces cellules ensuite, on a :

$$\begin{aligned} T_2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \underline{p} \cdot \mathbf{w}_h \, d\mathbf{x} = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \underline{p} \operatorname{div} \mathbf{w}_h \, d\mathbf{x} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \int_{\sigma} \underline{p} (\mathbf{w}_h \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}) \, d\sigma, \\ &= - \underbrace{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \underline{p} \operatorname{div} \mathbf{w}_h \, d\mathbf{x}}_{T_{2,1}} + \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \int_{\sigma} \underline{p} I_d : [[\mathbf{w}_h]] \, d\sigma}_{T_{2,2}}. \end{aligned}$$

D'une part, comme  $\mathbf{w}_h \in W_h$ , en choisissant  $\mathbb{1}_K \in \mathbf{N}_h$  comme fonction-test dans la définition de  $W_h$  et par la remarque V.24, on a :

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{w}_h \, d\mathbf{x} = 0.$$

D'où

$$T_{2,1} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\underline{p} - m_K(\underline{p})) \operatorname{div} \mathbf{w}_h \, d\mathbf{x},$$

et alors, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz deux fois et la propriété d'interpolation pour la pression, on a

$$\begin{aligned} T_{2,1} &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\underline{p} - m_K(\underline{p})\|_{L^2(K)} |\mathbf{w}_h|_{\mathbf{H}^1(K)}, \\ &\leq h |\underline{p}|_{C^1} |\mathbf{w}_h|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \end{aligned}$$



D'autre part, par le lemme des sauts pour la pression (Équation (V.31)), on a

$$T_{2,2} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \int_{\sigma} \underline{p} I_d : [[\mathbf{w}_h]] \, d\sigma \leq Ch |\underline{p}|_{C^1(\bar{\Omega})} \|\mathbf{w}_h\|_{1,b}.$$

Donc

$$a_h(\underline{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) \leq Ch (|\underline{\mathbf{u}}|_{C^2} + |\underline{p}|_{C^1}) \|\mathbf{w}_h\|_{1,b}.$$

- Retournons à l'inégalité (V.35), alors on a le résultat :

$$\|\underline{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h\|_{1,b} \leq Ch (|\underline{\mathbf{u}}|_{C^2(\bar{\Omega})} + |\underline{p}|_{C^1(\bar{\Omega})}).$$

■

### V.6.2.b Analyse de l'erreur d'approximation pour la pression

Rappelons que nous considérons dans cette partie que les cellules cell-centered sont les cellules primales, que les cellules vertex-centered sont décalées d'une demi maille par rapport aux mailles primales (Figure V.6). Nous notons  $p_{V^*}$  la valeur de la pression approchée sur la cellule vertex-centered  $V^*$ .

Afin d'aider le lecteur, commençons par donner une idée de la démarche adoptée. Les estimations d'erreur suivantes ne suivent pas le cheminement "classique" car on n'a pas de condition *inf-sup* sur l'espace  $\mathbf{X}_h \times \mathbf{N}_h$ . En considérant la différence des systèmes (V.15) et (V.17), on a

$$a(\underline{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}, \underline{p}) - b_h(\mathbf{v}_h, p_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x},$$

et donc

$$|b(\mathbf{v}, \underline{p}) - b_h(\mathbf{v}_h, p_h)| \leq \left| \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} \right| + |a(\underline{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)|.$$

- Pour majorer chacun des termes du membre de droite de la dernière inégalité, nous avons peu d'informations à notre disposition puisque  $\mathbf{v}$  est quelconque dans  $H_0^1(\Omega)^2$ . Cependant, si  $\mathbf{v}_h$  appartient à l'image de  $I_h^{EP}$ , l'inégalité d'interpolation (Lemme V.13) nous fournit une borne pour ce premier terme et donc  $\mathbf{v}$  est pris égal à  $\underline{\mathbf{u}}$ .
- Reste à estimer le membre de droite de l'inégalité ci-dessus. Pour avoir des estimations en pression, on aimerait que ce terme soit de la forme  $\|\underline{p} - q_h\|_0$  où  $q_h$  est une fonction de  $p_h$ . Compte tenu de la définition de la divergence discrète, nous sommes amenés à considérer la demi-somme des champs cell-centered et vertex-centered dans les zones de recouvrement de ces deux cellules.

À partir de l'approximation du champ de pression  $p_h$  (solution du problème de Stokes discret (V.17)), nous définissons deux reconstructions de ce champ, notées  $\tilde{\tilde{p}}_h$  et  $\tilde{p}_h$  définies comme suit. Le champ de pression  $\tilde{\tilde{p}}_h$  est constant par quart de quadrangle  $K \cap V^*$  (intersection de la cellule décalée  $V^*$  avec la cellule primaire  $K$ )

$$\tilde{\tilde{p}}_h = \sum_{K \cap V^*} \frac{1}{2} (p_K + p_{V^*}) \mathbf{1}_{K \cap V^*}.$$

Le champ  $\tilde{p}_h$  est constant par cellule primaire et s'obtient par lissage du champ  $p_h$  :

$$\tilde{p}_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{2} \left( p_K + \frac{1}{4} \sum_{V \in \mathcal{S}(K)} p_{V^*} \right) \mathbf{1}_K.$$

Le théorème que nous allons montrer dans la suite est :

**Théorème V.19 (Estimations d'ordre un en espace pour la pression)**

Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage uniforme, rectangle (ou parallélogramme) de  $\Omega$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|\tilde{p}_h - \underline{p}\|_0 \leq Ch(|\underline{u}|_{C^2(\bar{\Omega})} + |\underline{p}|_{C^1(\bar{\Omega})}).$$

Le plan de la preuve est le suivant : on montre tout d'abord qu'il existe un réel  $C_1 > 0$  tel que

$$\|\tilde{p}_h - \underline{p}\|_0 \leq C_1 \|\tilde{\tilde{p}}_h - \underline{p}\|_0.$$

On estime ensuite l'erreur en pression pour  $\tilde{\tilde{p}}_h$  : il existe un réel  $C_2 > 0$  tel que

$$\|\tilde{\tilde{p}}_h - \underline{p}\|_0 \leq C_2 h(|\underline{u}|_{C^2(\bar{\Omega})} + |\underline{p}|_{C^1(\bar{\Omega})}).$$

**Démonstration**

**Étape 1 :** Il existe un réel  $C_1 > 0$  tel que

$$\|\tilde{p}_h - \underline{p}\|_0 \leq C_1 \|\tilde{\tilde{p}}_h - \underline{p}\|_0.$$

En effet, soit  $K \in \mathcal{T}_h$  une cellule primale rectangle. Par définition de  $\tilde{p}_h$ , on a

$$\|\tilde{p}_h - \underline{p}\|_{L^2(K)}^2 = |K| \left| \frac{1}{2} \left( p_K + \frac{1}{4} \sum_{V \in \mathcal{S}(K)} p_{V^*} \right) - \underline{p}_K \right|^2,$$

où  $\underline{p}_K = \frac{1}{|K|} \int_K \underline{p} \, d\mathbf{x}$ . Par inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} |K| \left| \frac{1}{2} \left( p_K + \frac{1}{4} \sum_{V \in \mathcal{S}(K)} p_{V^*} \right) - \underline{p}_K \right|^2 &= |K| \left| \sum_{V \in \mathcal{S}(K)} \frac{1}{2} \left( \frac{p_K}{4} + \frac{p_{V^*}}{4} \right) - \frac{\underline{p}_K}{4} \right|^2, \\ &\leq \frac{|K|}{16} \sum_{V \in \mathcal{S}(K)} \left| \frac{1}{2} (p_K + p_{V^*}) - \underline{p}_K \right|^2. \end{aligned}$$

Or, comme le maillage est uniforme,  $\frac{|K|}{4} = |K \cap V^*|$  pour toute cellule décalée  $V^*$  associée à un sommet  $V$  de  $\mathcal{S}(K)$ . Cette dernière inégalité s'écrit encore :

$$|K| \left| \frac{1}{2} \left( p_K + \frac{1}{4} \sum_{V \in \mathcal{S}(K)} p_{V^*} \right) - \underline{p}_K \right|^2 \leq \sum_{V \in \mathcal{S}(K)} \frac{|K \cap V^*|}{4} \left| \frac{1}{2} (p_K + p_{V^*}) - \underline{p}_K \right|^2.$$

En sommant les inégalités obtenues pour  $K \in \mathcal{T}_h$  et en réordonnant les symboles de sommation comme suit :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{V \in \mathcal{S}(K)} = \sum_{K \cap V^*},$$

on obtient ( $C_1 = \frac{1}{2}$ )

$$\|\tilde{p}_h - \underline{p}\|_0^2 \leq C_1 \|\tilde{\tilde{p}}_h - \underline{p}\|_0^2.$$

**Étape 2 :** Il existe un réel  $C_2 > 0$  tel que

$$\|\tilde{p}_h - \underline{p}\|_0 \leq C_2 h (|\underline{\mathbf{u}}|_{C^2} + |\underline{p}|_{C^1}).$$

En effet, comme  $\underline{p} - \tilde{p}_h$  appartient à l'espace  $L_0^2(\Omega)$  (par définition de l'espace d'approximation  $\mathbf{N}_h$  et de  $\underline{p}$ ), par le lemme de *Nečas* (Lemme D.4, Annexe D), il existe  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^2$  tel que

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \underline{p} - \tilde{p}_h, \quad \text{et} \quad \|\nabla \mathbf{w}\|_0 \leq \|\underline{p} - \tilde{p}_h\|_0. \quad (\text{V.36})$$

Prenons ensuite la différence des équations (V.15) (évaluée pour  $\mathbf{v} = \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^2$ ) et (V.17) (évaluée pour  $\mathbf{v}_h = I_h^{EP} \mathbf{w} \in \mathbf{X}_h$ , où  $I_h^{EP}$  désigne l'opérateur d'interpolation en vitesse défini en V.10), il vient :

$$a(\underline{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) - a_h(\underline{\mathbf{u}}_h, I_h^{EP} \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, \underline{p}) - b_h(I_h^{EP} \mathbf{w}, p_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{w} - I_h^{EP} \mathbf{w}) \, d\mathbf{x}. \quad (\text{V.37})$$

Nous organisons le travail qui suit en deux étapes : nous montrons que la différence  $b(\mathbf{w}, \underline{p}) - b_h(I_h^{EP} \mathbf{w}, p_h)$  est égale à  $\|\underline{p} - \tilde{p}_h\|_0^2$ , puis nous estimons le terme  $|\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{w} - I_h^{EP} \mathbf{w}) \, d\mathbf{x}| + |a(\underline{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) - a_h(\underline{\mathbf{u}}_h, I_h^{EP} \mathbf{w})|$ .

**Étape 2.a-** Commençons par évaluer  $b(\mathbf{w}, \underline{p}) - b_h(I_h^{EP} \mathbf{w}, p_h)$  et montrons que

$$b(\mathbf{w}, \underline{p}) - b_h(I_h^{EP} \mathbf{w}, p_h) = \|\underline{p} - \tilde{p}_h\|_0^2. \quad (\text{V.38})$$

On a :

$$b(\mathbf{w}, \underline{p}) - b_h(I_h^{EP} \mathbf{w}, p_h) = \underbrace{b(\mathbf{w}, \underline{p} - \tilde{p}_h)}_{T_1} + \underbrace{b(\mathbf{w}, \tilde{p}_h) - b_h(I_h^{EP} \mathbf{w}, p_h)}_{T_2}. \quad (\text{V.39})$$

• D'une part, par l'équation (V.36),  $\operatorname{div} \mathbf{w} = \underline{p} - \tilde{p}_h$ , on a

$$T_1 = \int_{\Omega} (\underline{p} - \tilde{p}_h) \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} = \|\underline{p} - \tilde{p}_h\|_0^2. \quad (\text{V.40})$$

• D'autre part, par définition de  $b_h(\cdot, \cdot)$  (Équation (V.18)),  $T_2$  s'écrit

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_{\Omega} \tilde{p}_h \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - \sum_{K \text{ cell-centered}} |K| p_K (\operatorname{div}^{EP} I_h^{EP} \mathbf{w})_K \\ &\quad - \sum_{V^* \text{ vertex-centered}} |V^*| p_{V^*} (\operatorname{div}^{EP} I_h^{EP} \mathbf{w})_{V^*}. \end{aligned}$$

Au final, compte tenu de l'équation (V.24) et du fait que  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^2$ ,  $T_2$  s'écrit

$$\begin{aligned} T_2 &= \sum_{K \cap V^*} \frac{1}{2} (p_K + p_{V^*}) \int_{K \cap V^*} \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} p_K \int_K \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{V^* \text{ vertex-centered}} p_{V^*} \int_{V^*} \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x}, \\ &= \sum_{K \cap V^*} \frac{1}{2} (p_K + p_{V^*}) \int_{K \cap V^*} \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} p_K \sum_{V \in \mathcal{S}(K)} \int_{K \cap V^*} \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{V^* \text{ vertex-centered}} p_{V^*} \sum_{\{K \in \mathcal{T}_h; V \in \mathcal{S}(K)\}} \int_{K \cap V^*} \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En réordonnant les symboles de sommation comme suit (car les sommes sont finies)

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{V \in \mathcal{S}(K)} &= \sum_{K \cap V^*}, \\ \sum_{V^* \text{ vertex-centered}} \sum_{\{K \in \mathcal{T}_h; V \in \mathcal{S}(K)\}} &= \sum_{K \cap V^*}, \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} T_2 &= \sum_{K \cap V^*} \frac{1}{2} (p_K + p_{V^*}) \int_{K \cap V^*} \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \sum_{K \cap V^*} p_K \int_{K \cap V^*} \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{K \cap V^*} p_{V^*} \int_{K \cap V^*} \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x}, \\ &= 0. \end{aligned} \tag{V.41}$$

Au final, comme  $T_1 = \|\underline{p} - \tilde{p}_h\|_0^2$  et  $T_2 = 0$ , il vient :

$$b(\mathbf{w}, \underline{p}) - b_h(I_h^{EP} \mathbf{w}, p_h) = \|\underline{p} - \tilde{p}_h\|_0^2.$$

**Étape 2.b-** Retournons à l'équation (V.37), on a :

$$b(\mathbf{w}, \underline{p}) - b_h(I_h^{EP} \mathbf{w}, p_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{w} - I_h^{EP} \mathbf{w}) \, d\mathbf{x} - a(\underline{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) + a_h(\mathbf{u}_h, I_h^{EP} \mathbf{w}).$$

D'où, par l'équation (V.38), et par définition de  $a_h$ , il vient

$$\begin{aligned} \|\underline{p} - \tilde{p}_h\|_0^2 &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{w} - I_h^{EP} \mathbf{w}) \, d\mathbf{x} - a(\underline{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) + a_h(\mathbf{u}_h, I_h^{EP} \mathbf{w}), \\ &\leq \|\mathbf{f}\|_0 \|\mathbf{w} - I_h^{EP} \mathbf{w}\|_0 - a(\underline{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) + a_h(\underline{\mathbf{u}}, I_h^{EP} \mathbf{w}) + a_h(\mathbf{u}_h - \underline{\mathbf{u}}, I_h^{EP} \mathbf{w}), \\ &\leq \underbrace{\|\mathbf{f}\|_0 \|\mathbf{w} - I_h^{EP} \mathbf{w}\|_0}_{Q_1} - \underbrace{a(\underline{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) + a_h(\underline{\mathbf{u}}, I_h^{EP} \mathbf{w})}_{Q_2} + \underbrace{\|\mathbf{u}_h - \underline{\mathbf{u}}\|_{1,b} \|I_h^{EP} \mathbf{w}\|_{1,b}}_{Q_3}. \end{aligned}$$

Analysons chacun des termes de l'inégalité ci-dessus.

• Concernant  $Q_1$ , par les estimations de l'erreur d'interpolation de vitesse (norme  $L^2$ ) pour  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^2$  (Lemme V.12), il existe une constante  $C_5$  telle que

$$Q_1 \leq C_5 h \|\mathbf{f}\|_0 |\mathbf{w}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

De plus, il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|\mathbf{f}\|_0 \leq C(|\underline{\mathbf{u}}|_{C^2} + |\underline{p}|_{C^1}),$$

d'où

$$Q_1 \leq CC_5 h |\mathbf{w}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} (|\underline{\mathbf{u}}|_{C^2} + |\underline{p}|_{C^1}).$$

• De plus, concernant  $Q_2$  :

$$Q_2 = -a(\underline{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) + a_h(\underline{\mathbf{u}}, I_h^{EP} \mathbf{w}),$$

on a, en intégrant par parties le second terme du membre de droite (car  $I_h^{EP} \mathbf{w} \in H^1(K)^2$  et  $\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})^2$ ),

$$\begin{aligned} Q_2 &= \int_{\Omega} \nabla \underline{\mathbf{u}} : \nabla \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \underline{\mathbf{u}} : \nabla I_h^{EP} \mathbf{w} \, d\mathbf{x}, \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} \nabla \underline{\mathbf{u}} : \nabla \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Delta \underline{\mathbf{u}} \cdot I_h^{EP} \mathbf{w} \, d\mathbf{x}}_{Q_{2,1}} - \underbrace{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (\nabla \underline{\mathbf{u}} I_h^{EP} \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma}_{Q_{2,2}}, \end{aligned} \quad (\text{V.42})$$

Majorons chacun des termes de cette égalité. Concernant  $Q_{2,1}$ , on a

$$Q_{2,1} \leq |\underline{\mathbf{u}}|_{H^1(\Omega)} |\mathbf{w}|_{H^1(\Omega)} + |\underline{\mathbf{u}}|_{\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})} \|I_h^{EP} \mathbf{w}\|_0. \quad (\text{V.43})$$

Par ailleurs  $Q_{2,2}$  s'écrit aussi :

$$Q_{2,2} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \int_{\sigma} \nabla \underline{\mathbf{u}} : [[I_h^{EP} \mathbf{w}]] \, d\sigma.$$

En appliquant la proposition V.16, on en déduit qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \int_{\sigma} \nabla \underline{\mathbf{u}} : [[I_h^{EP} \mathbf{w}]] \, d\sigma \leq Ch \|I_h^{EP} \mathbf{w}\|_{1,b} |\underline{\mathbf{u}}|_{\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})}. \quad (\text{V.44})$$

Dans les inégalités (V.43) et (V.44), il reste à majorer  $\|I_h^{EP} \mathbf{w}\|_0$  et  $\|I_h^{EP} \mathbf{w}\|_{1,b}$ . Par le théorème de Poincaré (Théorème D.2, chapitre D), on est ramené à seulement majorer  $\|I_h^{EP} \mathbf{w}\|_{1,b}$  (majoration établie dans le lemme V.12). Ainsi, en utilisant cette majoration dans les équations (V.43) et (V.44) et en injectant ensuite le résultat obtenu dans l'équation (V.42), ceci nous permet de conclure qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$Q_2 \leq Ch |\mathbf{w}|_{H^1(\Omega)} |\underline{\mathbf{u}}|_{\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})}.$$

• Enfin, pour  $Q_3$ , par l'estimation de l'erreur d'approximation sur la vitesse en norme  $H^1$  (Théorème V.18) :

$$Q_3 \leq Ch (|\underline{\mathbf{u}}|_{\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})} + |\underline{p}|_{\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})}) \|I_h^{EP} \mathbf{w}\|_{1,b}$$

Par ailleurs, par le lemme V.12, il existe une constante  $C$  telle que

$$Q_3 \leq Ch (|\underline{\mathbf{u}}|_{\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})} + |\underline{p}|_{\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})}) |\mathbf{w}|_{H^1}.$$

• Au final,

$$\|\underline{p} - \tilde{p}_h\|_0^2 \leq Ch |\mathbf{w}|_{H^1(\Omega)} (|\underline{\mathbf{u}}|_{\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})} + |\underline{p}|_{\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})}). \quad (\text{V.45})$$

D'après l'équation (V.36), on a

$$|\mathbf{w}|_{H^1(\Omega)} \leq \|\underline{p} - \tilde{p}_h\|_0,$$

et par conséquent en injectant cette majoration dans l'équation (V.45), on obtient le résultat annoncé.  $\blacksquare$

## V.7 Conclusion

En conclusion, nous avons proposé un élément valide pour des maillages non structurés et satisfaisant le test du tourbillon isolé sur des maillages cartésiens. Le nouvel élément est plus précis que l'élément fini de Rannacher-Turek pour des écoulements à convection dominante (par exemple, le problème d'Oseen). Cependant, il faut signaler que le procédé de construction des maillages pour effectuer les calculs de convergence au maillage consiste à découper les cellules d'un maillage grossier en deux à partir du centre des arêtes ; les maillages raffinés se rapprochent donc de plus en plus de parallélogrammes pour lesquels l'analyse d'erreur est valide.

Dans une deuxième étape, nous avons étudié une extension de ce schéma aux équations de Navier-Stokes : en effet, la discrétisation proposée ne permet pas d'avoir un bilan de masse sur les cellules primales (quadrangles non rectangles), par conséquent la construction de l'opérateur convectif sur les mailles diamant proposée dans [4] n'a pas donné des résultats qualitativement satisfaisants pour le cas-test de couches de mélange à  $Re = 10000$ . Nous avons proposé de reconstruire les flux de masse primaux de manière cohérente avec la construction des flux sur les cellules diamant, et nous avons montré les capacités du schéma résultant pour le cas-test de couches de mélange à  $Re = 10000$  sur un maillage fortement perturbé.

Par ailleurs, nous avons étudié la discrétisation du problème de Stokes stationnaire 2D avec des conditions au bord de type Dirichlet homogènes sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Nous avons montré que le schéma est stable en vitesse. Par ailleurs, en travaillant sur le problème restreint (dans le sous-espace de l'espace d'approximation pour la vitesse constitué des vecteurs à divergence discrète nulle) et en nous appuyant sur la preuve de [12], nous avons mené l'analyse d'erreur pour le problème de Stokes pour des maillages rectangles (ou parallélogrammes) uniformes. Nous avons ainsi montré que l'erreur d'approximation de la discrétisation par l'élément enrichi est d'ordre un en espace pour la vitesse (en norme  $H^1$ ) et d'ordre un en espace pour un post-traitement de la pression (en norme  $L^2$ ).



# Conclusion

Dans ce manuscrit, nous avons proposé et analysé des schémas numériques performants pour la LES, dans le contexte des schémas basés sur l'élément fini non conforme de bas degré de Rannacher-Turek (ou de Crouzeix-Raviart) et des méthodes de correction de pression (méthode de projection incrémentale), utilisés dans le logiciel ISIS. Une première étude portant sur la discrétisation temporelle a été menée, et nous a amené à proposer le schéma Crank-Nicolson-like. Ensuite, l'étude du cas-test du canal plan turbulent avec le modèle sous-maille W.A.L.E. a permis de souligner les défauts de la discrétisation spatiale par l'élément fini de Rannacher-Turek et nous a conduit à sélectionner des critères pour proposer une discrétisation spatiale adaptée à la LES. Nous avons par ailleurs présenté plusieurs cas-tests plus simples réalisés sans modèle sous-maille (faisant défaut au schéma RT) : le problème d'Oseen stationnaire à convection dominante, le problème du tourbillon isolé et celui des couches de mélange à  $Re = 10000$ . Ceci nous a conduit à introduire de nouveaux schémas basés sur l'élément fini de Rannacher-Turek, à savoir : un schéma (stabilisation) noté schéma RT-Stab et l'enrichissement de la pression, que nous avons développés et implémentés sous ISIS.

Dans le chapitre II, nous avons abordé une discrétisation en temps pour la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles (schéma Crank-Nicolson-like) adaptée à la LES. Celle-ci repose sur la construction d'un opérateur convectif satisfaisant une identité d'énergie cinétique et la réduction des résidus de dissipation numérique par rapport à la discrétisation temporelle existante d'Euler. Sur le cas-test de couches de mélange résolu par LES, ce schéma permet de représenter davantage de structures turbulentes que le schéma en temps d'Euler.

Dans le chapitre IV, nous avons proposé un schéma de pénalisation pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles, contraignant les degrés de liberté de vitesse tangents aux arêtes (si  $d = 2$ ) ou faces (si  $d = 3$ ) à s'écrire comme combinaison linéaire des degrés de liberté de vitesse normaux aux arêtes ou faces alentour. Nous avons montré le caractère bien posé et la stabilité de cette discrétisation.

La difficulté de l'approche est sans nul doute le calcul des coefficients de l'expression d'une inconnue de vitesse tangente en fonction des inconnues normales alentour. Pour ce faire, nous avons établi une méthode pour des maillages généraux 2D ou structurés 3D, permettant d'obtenir un schéma plus précis que le schéma RT. Par ailleurs, nous avons observé lors des tests numériques sur des maillages cartésiens que l'erreur d'approximation pour ce schéma tend vers celle du schéma MAC de référence (volumes finis) lorsqu'on augmente le paramètre de pénalisation : ceci est dû au fait que le schéma obtenu en faisant tendre le paramètre de pénalisation vers l'infini est de type MAC (valide pour des maillages non structurés), puisqu'il a pour inconnues les composantes normales de vitesse aux arêtes (ou faces).

Dans le chapitre V, nous avons présenté une discrétisation spatiale obtenue en enrichissant l'espace d'approximation pour la pression de l'élément fini de Rannacher-Turek. Le nouvel élément, de caractéristiques similaires au schéma MAC mais valide pour des maillages quelconques 2D (tels qu'un sommet appartienne exactement à quatre cellules), résout le problème du tourbillon isolé et



s'avère plus précis que le schéma RT pour des problèmes à convection dominante.

Par ailleurs, nous avons montré la stabilité de la vitesse et établi des estimations de l'erreur d'approximation d'ordre un en espace pour la vitesse (en norme  $H^1$  discrète) et d'ordre un pour un post-traitement de la pression (en norme  $L^2$  discrète) pour le problème de Stokes stationnaire 2D. Ces résultats sont en accord avec les tests numériques.

Cependant, l'identité d'énergie cinétique obtenue en construisant un opérateur convectif particulier de type volumes finis sur un maillage diamant repose sur l'hypothèse de conservation de la masse sur le maillage primal, laquelle n'est pas satisfaite pour le nouvel élément sur des maillages quadrangles non rectangles. Par conséquent, nous avons étendu cette discrétisation à la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles en proposant de reconstruire les flux de masse du maillage primal à partir des flux de masse vertex-centered. Ce dernier schéma donne des résultats qualitativement satisfaisants pour le cas-test de couches de mélange à  $Re = 10000$ .

La méthode de stabilisation (schéma RT-Stab) proposée peut faire l'objet de compléments pour des domaines 3D. En particulier, il serait intéressant de tester si la méthode de calcul des coefficients 2D pour des maillages quadrangles non structurés se généralise en 3D à des hexaèdres qui ne sont ni des parallélépipèdes rectangles, ni des parallélépipèdes parallélogrammes en imposant la consistance pour les champs  $\mathbb{Q}_1$ .

De la même manière, il serait intéressant de généraliser la discrétisation obtenue en enrichissant la pression en 3D afin de jauger de son intérêt dans le cadre de la LES. Une première étape pourrait être de traiter de maillages parallélépipèdes rectangles : de manière analogue à la démarche adoptée en 2D, nous pouvons envisager de décaler les parallélépipèdes d'une demi-maille dans deux directions de l'espace. Il faudrait ensuite étendre cette construction pour des maillages non structurés.

D'autre part, le schéma proposé pour l'enrichissement de la pression est valide pour une masse volumique constante. Pour les écoulements à faible nombre de Mach, il faudrait proposer une reconstruction du bilan de masse sur le maillage primal en s'appuyant sur une discrétisation de la masse volumique appropriée sur le pavage pression, en se basant sur la démarche proposée pour construire l'opérateur convectif sur les cellules diamant (Sous-section II.2.1).

Enfin, une fois validés, les schémas proposés pourraient être testés (et comparés) dans le contexte de la LES sur un cas-test de couche de mélange 3D.

# Annexes



## Annexe A

# Élément fini de Rannacher-Turek

Dans ce paragraphe, nous présentons l'élément fini de Rannacher-Turek [83], et quelques unes des propriétés essentielles des fonctions de forme utilisées dans ce mémoire.

### A.1 Maillages et espaces discrets

Soit  $\mathcal{T}_h$  une décomposition du domaine  $\Omega$  en quadrangles ( $d = 2$ ) ou hexaèdres ( $d = 3$ ), supposée régulière au sens habituel de la littérature éléments finis [20, conditions  $\mathcal{T}_h1$  à  $\mathcal{T}_h5$  p. 61 et 71]. Nous notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble de toutes les faces  $\sigma$  de la cellule ; par  $\mathcal{E}_{\text{ext}}$  l'ensemble des faces incluses dans la frontière de  $\Omega$ , par  $\mathcal{E}_{\text{int}}$  l'ensemble des faces intérieures (*i.e.*  $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\text{ext}}$ ) et par  $\mathcal{E}(K)$  les faces d'une cellule particulière  $K \in \mathcal{T}_h$ . La face interne séparant les cellules voisines  $K$  et  $L$  est notée  $\sigma = K|L$ . De plus, nous utilisons aussi la notation  $\sigma = K|\text{ext}$  si la face  $\sigma$  est dans le volume de contrôle  $K$  et  $\sigma$  appartient à  $\mathcal{E}_{\text{ext}}$ . Pour chaque cellule  $K \in \mathcal{T}_h$  et chaque face  $\sigma \in \mathcal{E}(K)$ ,  $\mathbf{n}_{K,\sigma}$  représente le vecteur normal unitaire sortant de  $K$  à travers la face  $\sigma$ . Par  $|K|$  et  $|\sigma|$  nous notons respectivement les mesures du volume de contrôle  $K$  et de la face  $\sigma$ .

La vitesse  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$  sont discrétisées en utilisant l'élément fini dit de Rannacher-Turek (appelé aussi "rotated bilinear finite element" [83]). L'élément de référence  $\hat{K}$  est le cube unité  $d$ -dimensionnel (avec les faces colinéaires aux axes de coordonnées) ; l'espace fonctionnel discret sur  $\hat{K}$  est  $\widetilde{\mathbb{Q}}_1(\hat{K})$ , où  $\widetilde{\mathbb{Q}}_1(\hat{K})$  est défini comme suit :

$$\widetilde{\mathbb{Q}}_1(\hat{K}) = \text{vect} \{1, (x_i)_{i=1,\dots,d}, (x_i^2 - x_{i+1}^2)_{i=1,\dots,d-1}\}.$$

La transformation affine  $T_K$  défini de l'élément de référence  $\hat{K}$  à valeurs dans la cellule courante  $K$  est la transformation standard  $\mathbb{Q}_1$ . Par ailleurs, nous choisissons la version de l'élément pour laquelle la fonction nodale  $\mathcal{N}_{K,\sigma}$  associée à la cellule  $K$  est la moyenne de la vitesse à travers la face  $\sigma$  :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}(K), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}^\infty(K), \quad \mathcal{N}_{K,\sigma}(\mathbf{v}) = \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \mathbf{v}|_K \, d\sigma.$$

Ainsi, l'espace discret  $\mathbf{X}_h$  est défini comme suit :

$$\mathbf{X}_h = \left\{ \mathbf{v} \in (\mathbb{L}^2(\Omega))^d; \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v} \circ T_K \in \widetilde{\mathbb{Q}}_1(\hat{K})^d \text{ et } \forall \sigma = K|L, \mathcal{N}_{K,\sigma}(\mathbf{v}) = \mathcal{N}_{L,\sigma}(\mathbf{v}) \right\}.$$

L'approximation pour la vitesse est donc non conforme dans  $\mathbb{H}^1(\Omega)^d$  parce que l'espace  $\mathbf{X}_h$  est composé d'inconnues discrètes discontinues à travers une arête, et donc  $\mathbf{X}_h \not\subseteq \mathbb{H}^1(\Omega)^d$ . L'ensemble des degrés de liberté pour la vitesse est donné par :

$$\{\mathbf{u}_{\sigma,i} = \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{u}_i), \sigma \in \mathcal{E}, 1 \leq i \leq d\},$$

où  $\mathcal{N}_\sigma(\mathbf{u}_i) = \mathcal{N}_{K,\sigma}(\mathbf{u}_i) = \mathcal{N}_{L,\sigma}(\mathbf{u}_i)$  si  $\sigma = K|L$ . Nous notons  $\boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)}$  la fonction de forme vectorielle associée à  $\mathbf{u}_{\sigma,i}$ , qui, par définition, s'écrit  $\boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)} = \varphi_\sigma \mathbf{e}^{(i)}$ , où  $\varphi_\sigma$  est la fonction de forme scalaire associée à la face  $\sigma$  et  $\mathbf{e}^{(i)}$  est le  $i$ ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ , et nous définissons  $\mathbf{u}_\sigma$  par  $\mathbf{u}_\sigma = \sum_{i=1}^d \mathbf{u}_{\sigma,i} \mathbf{e}^{(i)}$ . Avec ces définitions, on a l'identité :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \sum_{i=1}^d \mathbf{u}_{\sigma,i} \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)}(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{u}_\sigma \varphi_\sigma(\mathbf{x}), \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Omega.$$

Nous notons respectivement  $\nabla \mathbf{v}$  et  $\text{div } \mathbf{v}$  le gradient et la divergence brisés de toute fonction  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h$ .

La pression appartient à l'espace  $\mathbf{M}_h$  composé de fonctions constantes par mailles :

$$\mathbf{M}_h = \{p \in L^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, p \text{ est constant sur } K\}.$$

Les degrés de liberté pour la pression sont par conséquent  $\{p_K; K \in \mathcal{T}_h\}$ . Cet élément fini mixte est *inf-sup* stable [13, Chapitre VI.4].

Afin d'expliciter le (terme convectif du) schéma, nous avons besoin d'un maillage dual défini comme suit. Quand  $K \in \mathcal{T}_h$  est un rectangle ou un cube, pour  $\sigma \in \mathcal{E}(K)$ , nous définissons  $D_{K,\sigma}$  comme le cône de base  $\sigma$  et de sommet le centre de gravité de  $K$ . Nous obtenons donc une partition de  $K$  en  $m$  sous-volumes, où  $m$  est le nombre de faces de la cellule (*i.e.*  $m = 4$  si  $d = 2$  et  $m = 6$  si  $d = 3$ ), chaque sous-volume ayant la même mesure  $|D_{K,\sigma}| = |K|/m$ . Nous étendons cette définition à des quadrangles ou hexaèdres généraux, en supposant que nous avons encore une partition en sous-cellules de même volume, et avec les mêmes connectivités ; notons que c'est bien sûr toujours possible, mais qu'un volume  $D_{K,\sigma}$  peut ne plus être un cône puisque, si  $K$  est éloigné d'un parallélogramme, il n'est plus possible de construire un cône ayant  $\sigma$  pour base, le sommet opposé appartenant à  $K$  et un volume égal à  $|K|/m$ . Le volume  $D_{K,\sigma}$  est appelé le demi-diamant associé à  $K$  et  $\sigma$ . Pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ ,  $\sigma = K|L$ , nous définissons maintenant la cellule diamant  $D_\sigma$  associée à  $\sigma$  par  $D_\sigma = D_{K,\sigma} \cup D_{L,\sigma}$  (Figure A.1). Pour une face externe  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \cap \mathcal{E}(K)$ ,  $D_\sigma$  est juste le même polyèdre que  $D_{K,\sigma}$ . Nous utilisons les notations suivantes pour l'ensemble des faces duales de la cellule ainsi construite : l'ensemble des faces internes duales est noté  $\bar{\mathcal{E}}_{\text{int}}$  et, celles d'une cellule particulière  $D_\sigma$  sont notées  $\bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)$  ; les faces externes de ce maillage dual coïncident avec les faces primales, et l'ensemble des faces externes duales est noté  $\mathcal{E}_{\text{ext}}$ . En pratique, les cellules diamant ne sont pas construites explicitement et la géométrie de  $D_\sigma$  n'a pas une grande importance.

Dans la suite, nous énonçons les propriétés des fonctions de forme Rannacher-Turek qui permettent d'écrire le schéma discret et de montrer des estimations d'erreur.

## A.2 Propriétés des des fonctions de forme Rannacher-Turek

Notons  $\varphi_\sigma$  la fonction de forme (scalaire) globale associée à la face  $\sigma$  et  $\widehat{\varphi}_{\widehat{\sigma}}$  la fonction de forme locale correspondante associée à la face  $\widehat{\sigma}$  définie sur la cellule de référence (Figure A.2). Dans cette section, nous considérons des maillages cartésiens.

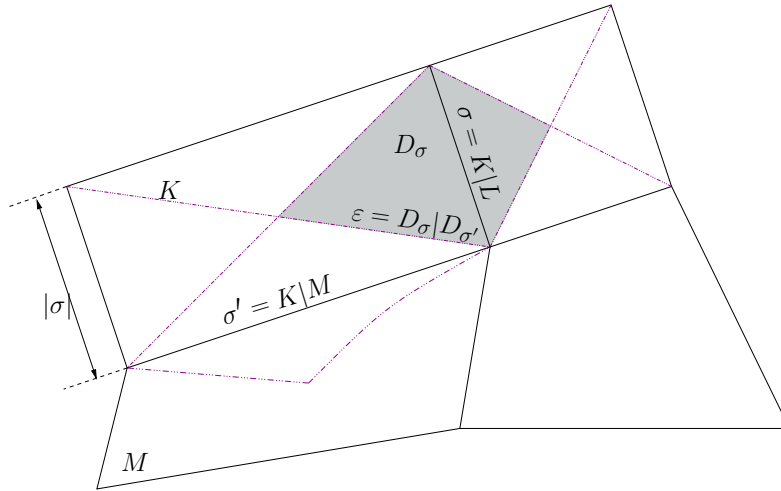


FIGURE A.1 – Volumes de contrôle et cellules diamant.

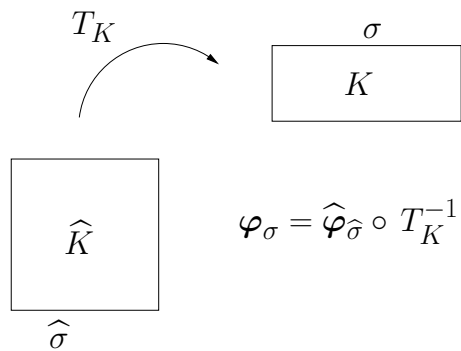


FIGURE A.2 – Transformation définie des objets de référence vers les objets courants.

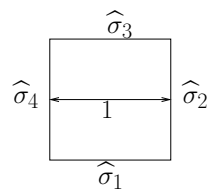


FIGURE A.3 – Numérotation des arêtes.

**Proposition A.1 (Expression des fonctions de forme locales  $\widetilde{\mathbb{Q}}_1(\widehat{K})$ )**

Avec les notations de la figure A.3, les fonctions de forme locales sont données, pour tout  $(\hat{x}, \hat{y})$  dans  $[0; 1]^2$ , par :

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}_{\widehat{\sigma}_1}(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{3}{4} + \frac{3}{2}\hat{x} - \frac{5}{2}\hat{y} - \frac{3}{2}(\hat{x}^2 - \hat{y}^2), \\ \widehat{\varphi}_{\widehat{\sigma}_2}(\hat{x}, \hat{y}) &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{3}{2}\hat{y} + \frac{3}{2}(\hat{x}^2 - \hat{y}^2), \\ \widehat{\varphi}_{\widehat{\sigma}_3}(\hat{x}, \hat{y}) &= -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\hat{x} - \frac{1}{2}\hat{y} - \frac{3}{2}(\hat{x}^2 - \hat{y}^2), \\ \widehat{\varphi}_{\widehat{\sigma}_4}(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{3}{4} - \frac{5}{2}\hat{x} + \frac{3}{2}\hat{y} + \frac{3}{2}(\hat{x}^2 - \hat{y}^2).\end{aligned}$$

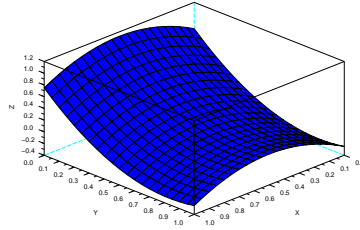


FIGURE A.4 – Profil de la fonction de forme locale  $\widehat{\varphi}_{\widehat{\sigma}_1}$ .

Par unisolvence de l'élément de Rannacher-Turek, on a :

**Proposition A.2 (Somme des fonctions de forme  $\widetilde{\mathbb{Q}}_1(K)$ )**

On a :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} \varphi_\sigma = 1.$$

**Démonstration** En effet,

$$\forall (\hat{x}, \hat{y}) \in [0; 1]^2, \quad \sum_{\widehat{\sigma}} \widehat{\varphi}_{\widehat{\sigma}}(\hat{x}, \hat{y}) = 1,$$

et

$$\sum_{\widehat{\sigma}} \widehat{\varphi}_{\widehat{\sigma}}(\hat{x}, \hat{y}) \in \text{vect} \{1, x, y, x^2 - y^2\}.$$

Par unisolvence la transformation  $T_K$  est bijectif et de plus,  $\widehat{\varphi}_{\widehat{\sigma}} \in \widetilde{\mathbb{Q}}_1(K)$  si et seulement si  $K$  est un rectangle. Il existe donc une unique fonction de l'espace  $\mathbf{X}_h$  qui prend la valeur 1 partout et, comme la fonction constante égale à 1 satisfait cette propriété, ceci conclut la preuve. ■

Les propriétés suivantes sont basées sur la structure du maillage (rectangles) d'une part et sur un changement de variables d'autre part.

**Proposition A.3 (Intégrale d'une fonction de forme  $\widetilde{\mathbb{Q}}_1(K)$  sur une face)**

Pour chaque face  $\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D$ ,

$$\int_{\sigma} \varphi_{\sigma} = |\sigma|.$$

La preuve des propositions suivantes repose sur le fait que la transformation  $T_K$  est affine (puisque le maillage est structuré). On généralise celle-ci dans la suite pour des maillages non structurés (transformation affine  $\mathbb{Q}_1$ ).

**Proposition A.4 (Intégrale d'une fonction de forme  $\widetilde{\mathbb{Q}}_1(K)$  sur une maille)**

Pour chaque face  $\sigma \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D$ , si  $\sigma$  appartient à  $K$  :

$$\int_K \varphi_{\sigma} = \frac{1}{4} |K|.$$

Notons que :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad |K| = |\det T_K|.$$

Un changement de variables conduit au résultat.

Dans les chapitres suivants de ce mémoire, la définition des mailles diamant pour des maillages non structurés permet de satisfaire la proposition A.4.

**Proposition A.5 (Coefficients de la matrice de rigidité)**

Soit  $\varphi_{\sigma}^{(i)}$  une fonction de forme globale (vectorielle) en vitesse de l'élément fini Rannacher-Turek associée à la face  $\sigma \in K$  ( $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$  et  $1 \leq i \leq d$ ). Alors, pour toute arête  $\sigma^{\perp}$  partageant un sommet commun avec  $\sigma$  ou pour toute arête  $\sigma^{\parallel}$  ne partageant aucun sommet avec  $\sigma$ , on a

$$\begin{aligned} \int_K \nabla \varphi_{\sigma}^{(i)} : \nabla \varphi_{\sigma}^{(i)} \, d\mathbf{x} &= \frac{5}{2}, & \int_K \nabla \varphi_{\sigma^{\perp}}^{(i)} : \nabla \varphi_{\sigma}^{(i)} \, d\mathbf{x} &= -\frac{3}{2}, \\ \int_K \nabla \varphi_{\sigma^{\parallel}}^{(i)} : \nabla \varphi_{\sigma}^{(i)} \, d\mathbf{x} &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et

$$\forall \sigma' \in \mathcal{E}, \quad \forall 1 \leq j \leq d, \quad j \neq i, \quad \int_K \nabla \varphi_{\sigma'}^{(j)} : \nabla \varphi_{\sigma}^{(i)} \, d\mathbf{x} = 0.$$

Le lemme A.6 suivant est une conséquence des formules de Taylor et du fait que l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique est nulle.



**Lemme A.6 (Relation entre interpolé de vitesse et valeur au point)**

Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage uniforme structuré de pas  $2h$ . Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \sigma \text{ horizontale : } \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{u}_x) = \mathbf{u}_x(\mathbf{x}_\sigma) + \frac{1}{2h} \frac{1}{2} \partial_{xx} \mathbf{u}_x(\mathbf{x}_\sigma) \int_{-h}^h x^2 \, d\sigma + \mathcal{O}(h^3), \\ \hspace{15em} = \mathbf{u}_x(\mathbf{x}_\sigma) + \frac{h^2}{6} \partial_{xx} \mathbf{u}_x(\mathbf{x}_\sigma) + \mathcal{O}(h^3). \\ \text{Si } \sigma \text{ verticale : } \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{u}_y) = \mathbf{u}_y(\mathbf{x}_\sigma) + \frac{1}{2h} \frac{1}{2} \partial_{yy} \mathbf{u}_y(\mathbf{x}_\sigma) \int_{-h}^h y^2 \, d\sigma + \mathcal{O}(h^3), \\ \hspace{15em} = \mathbf{u}_y(\mathbf{x}_\sigma) + \frac{h^2}{6} \partial_{yy} \mathbf{u}_y(\mathbf{x}_\sigma) + \mathcal{O}(h^3), \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{x}_\sigma$  désigne les coordonnées du centre de la face  $\sigma$ .

**Proposition A.7 (Consistance de l'opérateur Laplacien)**

L'opérateur laplacien de vitesse construit n'est pas consistant (au sens des différences finies) si l'on considère la définition suivante des degrés de liberté de vitesse :  $\mathbf{u}_\sigma = \mathbf{u}(\mathbf{x}_\sigma)$  où  $\mathbf{x}_\sigma$  désigne le centre de la face  $\sigma$ .

**Démonstration** Considérons une face  $\sigma$  séparant deux cellules  $K$  et  $L$  (supposons-la centrée sur le point  $(0,0)$  pour simplifier) et un entier  $i \in \{1 \dots, d\}$ . Supposons de plus le maillage uniforme de pas  $2h$  pour simplifier les notations.

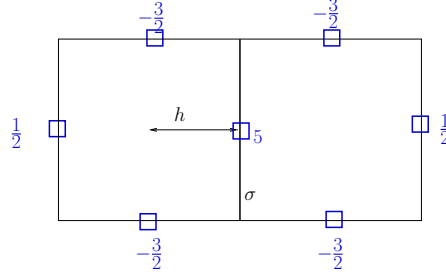


FIGURE A.5 – Coefficients de la matrice de rigidité.

On a (par définition des fonctions de base vectorielles  $\widetilde{\mathbb{Q}}_1(K)$ )

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}(K)} \mathbf{u}_{\sigma', i} \int_K \nabla \varphi_{\sigma'}^{(i)} : \nabla \varphi_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x}. \quad (\text{A.1})$$

1. Si  $\mathbf{u}_\sigma = \mathbf{u}(\mathbf{x}_\sigma)$  :

L'équation (A.1) s'écrit, par développements limités à l'ordre trois :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x} &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} 5\mathbf{u}(0,0) - \frac{3}{2} (\mathbf{u}(-h, h) + \mathbf{u}(-h, -h) + \mathbf{u}(h, h) + \mathbf{u}(h, -h)) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathbf{u}(-2h, 0) + \mathbf{u}(2h, 0)), \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (-h^2 \partial_{xx}^2 \mathbf{u}(0,0) - 3h^2 \partial_{yy}^2 \mathbf{u}(0,0) + \mathcal{O}(h^3)). \end{aligned}$$

2. Si  $\mathbf{u}_\sigma = \frac{1}{|\sigma|} \int_{\sigma} \mathbf{u} \, d\sigma$  :

L'équation (A.1) s'écrit, par développements limités à l'ordre trois et du fait que la moyenne

de la fonction  $y$  entre  $-h$  et  $h$  est nulle, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi_{\sigma}^{(i)} \, d\mathbf{x} &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{5}{2h} \int_{-2h}^0 \mathbf{u}(0, y) \, dy - \frac{3}{4h} \left[ \int_{-2h}^0 \mathbf{u}(x, -h) \, dx + \int_0^{2h} \mathbf{u}(x, -h) \, dx \right] \\
&\quad - \frac{3}{4h} \left[ \int_{-2h}^0 \mathbf{u}(x, h) \, dx + \int_0^{2h} \mathbf{u}(x, h) \, dx \right] \\
&\quad + \frac{1}{4h} \left[ \int_{-h}^h \mathbf{u}(-2h, y) \, dy + \int_{-h}^h \mathbf{u}(2h, y) \, dy \right], \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{2h} \left( -4h^3 \partial_{xx}^2 \mathbf{u}(0, 0) - 4h^3 \partial_{yy}^2 \mathbf{u}(0, 0) + \mathcal{O}(h^3) \right).
\end{aligned}$$

■



## Annexe B

# Viscosité W.A.L.E.

Dans cette annexe, nous détaillons quelques compléments concernant le modèle W.A.L.E. [76, 14]. Prouvons que  $\nu_\tau = \mathcal{O}(z^3)$  près du mur.

Nous considérons l'écoulement (incompressible) d'un fluide dans un canal plan dont la hauteur correspond à l'axe  $z$  dans le plan  $(x, y, z)$ . Supposons de plus que les parois du canal sont définies par les plans d'équation  $\{z = 0\}$  et  $\{z = 1\}$ . Dans la suite, nous nous concentrons sur le cas où  $z$  est proche de 0,  $z > 0$  (le raisonnement est similaire pour  $z$  proche de 1).

### Résultats préliminaires

Pour  $z$  proche de 0, en supposant que  $\bar{\mathbf{u}} = (u, v, w)$  est régulière, la formule de Taylor donne l'existence de fonctions  $u_1, u_2, v_2, w_1$  et  $w_2$  des variables  $x$  et  $y$  telles que :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_1(x, y) z + u_2(x, y) z^2 + \mathcal{O}(z^3), \\ v(x, y, z) &= v_2(x, y) z^2 + \mathcal{O}(z^3), \\ w(x, y, z) &= w_1(x, y) z + w_2(x, y) z^2 + \mathcal{O}(z^3), \end{aligned}$$

(le fait que  $v_1 = 0$  résulte de la condition d'incompressibilité).

– Montrons que  $|\nabla \bar{\mathbf{u}}|^2 = \mathcal{O}(z^2)$  ( $z \rightarrow 0$ ).

$$\nabla \bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} z(\partial_x u_1(x, y) + o(z)) & u_1(x, y) + o(z) & z(\partial_y u_1(x, y) + o(z)) \\ z^2(\partial_x v_2(x, y) + o(z)) & o(z) & z^2(\partial_y v_2(x, y) + o(z)) \\ z(\partial_x w_1(x, y) + o(z)) & w_1(x, y) + o(z) & z(\partial_y w_1(x, y) + o(z)) \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$\nabla \bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}(z) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(z) \\ \mathcal{O}(z^2) & \mathcal{O}(z^2) & \mathcal{O}(z^2) \\ \mathcal{O}(z) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(z) \end{pmatrix},$$

Par produit matriciel, on en déduit que :

$$|\nabla \bar{\mathbf{u}}|^2 = \text{Trace}(\nabla \bar{\mathbf{u}} \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) = \mathcal{O}(z^2).$$

– Montrons que  $|\bar{S}|^2 = \mathcal{O}(1)$  ( $z \rightarrow 0$ ), où  $\bar{S}$  est la partie symétrique du gradient de vitesse filtrée.

Par développement limité, il est facile de voir que les coefficients  $\bar{S}_{1,2}, \bar{S}_{2,1}, \bar{S}_{2,3}$  et  $\bar{S}_{3,2}$  sont en  $\mathcal{O}(1)$  ( $z \rightarrow 0$ ). On a alors :

$$\bar{S} : \bar{S} = \text{Trace}(\bar{S} \bar{S}) = \mathcal{O}(1).$$

- Montrons que  $\bar{\zeta} : \bar{\zeta} = \mathcal{O}(z^2)$  ( $z \rightarrow 0$ ), où  $\bar{\zeta}$  est la partie déviatorique du tenseur de déformations.

On voit facilement que :

$$\text{Trace}(\nabla \bar{\mathbf{u}}^2) = \mathcal{O}(z^2), \quad (\text{B.1})$$

et

$$\frac{1}{2}(\nabla \bar{\mathbf{u}}^2 + (\nabla \bar{\mathbf{u}}^2)^T) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}(z^2) & \mathcal{O}(z) & \mathcal{O}(z^2) \\ \mathcal{O}(z) & \mathcal{O}(z^2) & \mathcal{O}(z) \\ \mathcal{O}(z^2) & \mathcal{O}(z) & \mathcal{O}(z^2) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

De plus, le coefficient en facteur de  $z^2$  ne s'annule pas dans l'expression de  $\bar{\zeta}$ , d'où par les équations (B.1) et (B.2)

$$\bar{\zeta} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}(z^2) & \mathcal{O}(z) & \mathcal{O}(z^2) \\ \mathcal{O}(z) & \mathcal{O}(z^2) & \mathcal{O}(z) \\ \mathcal{O}(z^2) & \mathcal{O}(z) & \mathcal{O}(z^2) \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\bar{\zeta} \bar{\zeta} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}(z^2) & \mathcal{O}(z^3) & \mathcal{O}(z^2) \\ \mathcal{O}(z^3) & \mathcal{O}(z^2) & \mathcal{O}(z^3) \\ \mathcal{O}(z^2) & \mathcal{O}(z^3) & \mathcal{O}(z^2) \end{pmatrix},$$

et

$$\text{Trace}(\bar{\zeta} \bar{\zeta}) = \mathcal{O}(z^2) (z \rightarrow 0).$$

### Comportement près du mur [76]

Écrivons  $\nu_\tau$  sous la forme

$$\nu_\tau = C_W \bar{\Delta}^2 \frac{\overline{OP_1}}{\overline{OP_2}}.$$

Afin de récupérer le comportement en  $\mathcal{O}(z^3)$  près du mur, puisque  $\bar{\zeta} \bar{\zeta}$  est en  $\mathcal{O}(z^2)$ , commençons par poser  $\overline{OP_1} = (\bar{\zeta} \bar{\zeta})^{3/2}$ . Pour expliciter  $\overline{OP_2}$ , on utilise que le quotient est homogène à une fréquence et on veut que le dénominateur soit non nul.

Puisque le gradient de vitesse a la dimension d'une fréquence,  $\overline{OP_1}$  est homogène à une fréquence à la puissance six. Étant donné que  $\overline{S \bar{S}}$  est homogène à une fréquence au carré, une possibilité est de considérer que  $\overline{OP_2}$  contient le terme  $\overline{S \bar{S}^{5/2}}$ . Cependant, ce dernier terme peut être nul. Le terme  $\overline{S \bar{S}^{5/2}} + \bar{\zeta} \bar{\zeta}$  étant non nul pour un écoulement cisailé pur et pour un écoulement rotationnel, on pose  $\overline{OP_2} = \overline{S \bar{S}^{5/2}} + \bar{\zeta} \bar{\zeta}$ .

## Annexe C

# Discrétisation des modèles sous-maille

### C.1 Introduction

Dans cette annexe, nous proposons deux discrétisations de la viscosité turbulente pour le modèle W.A.L.E. [76] (Équation (6) en Introduction) dans le cas de l'élément fini non conforme de Rannacher-Turek.

Ce chapitre fait l'objet d'un article publié dans les proceedings de *FVCA6, Finite Volume for Complex Applications VI, Prague* [10]. Il a été réalisé avec la collaboration de Franck Boyer, Céline Lapuerta et Jean-Claude Latché.

Comme première étape vers la construction d'un schéma pour les équations de la LES, nous proposons dans cette annexe d'étudier la discrétisation du terme non-linéaire (du fait de la présence du modèle sous-maille) diffusif de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Pour cela, nous traitons d'un problème simplifié, à savoir le problème de Stokes stationnaire incompressible obtenu en remplaçant la dérivée en temps et le terme convectif dans les équations de Navier-Stokes d'origine par :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\nu S(\bar{\mathbf{u}})) + \nabla \bar{p} = \bar{\mathbf{f}} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \bar{\mathbf{u}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

où  $S(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}(\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T)$  est la partie symétrique du gradient de  $\bar{\mathbf{u}}$  et  $\bar{\mathbf{f}}$  est un terme source connu. Ce problème est posé sur un domaine  $\Omega$  ouvert, connexe, borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), supposé polygonal pour simplifier. La viscosité effective  $\nu$  est égale à la somme de la viscosité laminaire et de la viscosité turbulente notées  $\nu_l$  et  $\nu_\tau$ , respectivement, la dernière étant donnée comme une fonction de la vitesse par les équations (5) ou (6) avec un coefficient  $\bar{\Delta}$  supposé fixe ici (*i.e.* indépendant du maillage). Puisque la vitesse est fixée à zéro sur la totalité de la frontière, la pression doit être supposée à moyenne nulle pour que le problème soit bien posé.

Deux approches sont considérées ici pour la discrétisation spatiale : l'élément fini de bas degré de Rannacher-Turek et le schéma MAC. Nous concentrons le chapitre sur la version élément fini, la description du schéma MAC utilisé pour comparaison dans les tests numériques est donnée dans [47, 51, 49]. Les schémas obtenus sont testés en utilisant une technique de solution manufacturée.

Le plan du chapitre est le suivant. Nous décrivons d'abord l'expression discrète proposée pour les modèles sous-maille W.A.L.E. et Smagorinsky (Section C.2). Dans une deuxième partie, les tests numériques concernant le problème de Stokes simplifié C.1 sont présentés (Section C.3).

Pour alléger les notations, nous omettons dans la suite de ce chapitre le  $\bar{\cdot}$  pour noter les champs filtrés.

## C.2 Discrétisation du terme non-linéaire diffusif

Dans cette section, nous commençons par décrire l'approximation de la viscosité turbulente, laquelle est choisie constante par mailles.

### Expression de la viscosité $\nu_K$ sur la cellule $K$ pour le modèle de Smagorinsky

Nous proposons d'étudier deux discrétisations du terme  $S$  dans l'équation (5) de la viscosité turbulente. La première consiste à approcher l'expression  $\text{Trace}(S S^T)$  par sa valeur moyenne sur une cellule  $K$  :

$$\overline{S^2}^K = \frac{1}{|K|} \int_K S(\mathbf{u}) : S(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x}.$$

La seconde approche consiste à calculer la valeur moyenne du gradient de vitesse sur  $K$  et ensuite d'utiliser la définition de  $S$  :

$$\overline{S_{ij}}^K = \frac{1}{2} \left( \overline{\partial_j \mathbf{u}_i}^K + \overline{\partial_i \mathbf{u}_j}^K \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{|K|} \int_K \partial_j \mathbf{u}_i \, d\mathbf{x} + \frac{1}{|K|} \int_K \partial_i \mathbf{u}_j \, d\mathbf{x} \right). \quad (\text{C.2})$$

Finalement, l'expression de la viscosité effective pour les deux approximations est :

– pour la méthode 1 :

$$\nu_K = \nu_l + (C_s \overline{\Delta})^2 \left( 2 \overline{S^2}^K \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.3})$$

– pour la méthode 2 :

$$\nu_K = \nu_l + (C_s \overline{\Delta})^2 \left( 2 \sum_{i,j} \overline{S_{ij}}^K \overline{S_{ij}}^K \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.4})$$

Ces discrétisations sont différentes puisque le champ de vitesse discret n'est pas affine par morceaux. Cependant, comme souligné dans la section C.3 suivante, ils donnent des résultats similaires, par conséquent seule la méthode 2 est retenue pour la discrétisation du modèle W.A.L.E., afin d'éviter le calcul d'intégrales nécessitant des formules de quadrature d'ordre élevé.

### Expression de la viscosité $\nu_K$ sur la cellule $K$ pour le modèle W.A.L.E.

La discrétisation du tenseur  $\varsigma$  dans une cellule  $K \in \mathcal{T}_h$  est :

$$\begin{aligned} \overline{\varsigma_{ij}}^K &= \frac{1}{2} \sum_{\ell \in \{1, \dots, d\}} \left( \overline{\partial_\ell \mathbf{u}_i}^K \overline{\partial_j \mathbf{u}_\ell}^K + \overline{\partial_i \mathbf{u}_\ell}^K \overline{\partial_\ell \mathbf{u}_j}^K \right) \\ &\quad - \left( \frac{1}{d} \sum_{m,n \in \{1, \dots, d\}} \overline{\partial_m \mathbf{u}_n}^K \overline{\partial_n \mathbf{u}_m}^K \right) \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, d\}, \quad (\text{C.5}) \end{aligned}$$

où  $\delta$  est le symbole de Kronecker. Utilisant les approximations de  $S$  et  $\varsigma$  données respectivement par les équations (C.2) et (C.5), la viscosité effective sur une cellule  $K$  s'écrit :

$$\nu_K = \nu_l + (C_w \overline{\Delta})^2 \frac{\left( \sum_{i,j} \overline{\varsigma_{ij}}^K \overline{\varsigma_{ij}}^K \right)^{3/2}}{\left( \sum_{i,j} \overline{S_{ij}}^K \overline{S_{ij}}^K \right)^{5/2} + \left( \sum_{i,j} \overline{\varsigma_{ij}}^K \overline{\varsigma_{ij}}^K \right)^{5/4}}.$$

### C.3 Problème de Stokes stationnaire incompressible

A partir de la discrétisation de la viscosité présentée dans la section précédente, on en déduit celle du schéma utilisé ici pour résoudre le problème de Stokes (C.1).

#### Discrétisation du problème (C.1)

Le schéma permettant de déterminer une solution approchée du problème (C.1) consiste à trouver  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}_h$  et  $p \in \mathbf{M}_h$  tels que  $p$  soit d'intégrale nulle sur  $\Omega$  et :

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq i \leq d, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} 2\nu_K \int_K S(\mathbf{u}) : S(\boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)}) \, d\mathbf{x} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)}) \, d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)} \, d\mathbf{x}, \\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \int_K \operatorname{div}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Dans cette section, nous construisons une solution manufacturée du problème (C.1) bidimensionnel, et nous comparons les résultats obtenus avec les discrétisations considérées à la solution analytique et aux solutions discrètes obtenues par le schéma MAC (schéma de référence pour les maillages cartésiens).

#### Description des tests numériques

Le domaine de calcul  $\Omega$  est le carré unité  $(0, 1)^2$  et nous calculons le second membre  $\mathbf{f}$  de (C.1) de telle sorte que les solutions analytiques pour la vitesse et la pression,  $\mathbf{u}^{\text{exact}}$  et  $p^{\text{exact}}$ , soient données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{\text{exact}}(x, y) &= \operatorname{rot}(\sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2) = \begin{pmatrix} 2\pi \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y) \cos(\pi y) \\ -2\pi \sin(\pi y)^2 \sin(\pi x) \cos(\pi x) \end{pmatrix}, \\ p^{\text{exact}}(x, y) &= \sin(\pi x)^2, \end{aligned}$$

Notons que  $\mathbf{u}^{\text{exact}}$  satisfait en effet des conditions au bord de Dirichlet homogènes sur  $\partial\Omega$ , et que la moyenne de  $p^{\text{exact}}$  sur le domaine  $\Omega$  est nulle.

La viscosité laminaire est choisie égale à  $\nu_l = 10^{-3}$  et le coefficient  $C_w \overline{\Delta}$  dans l'expression de  $\nu_\tau$  (Equations (5) et (6)) est fixé égal à  $C_s \overline{\Delta} = 0.007$  pour le modèle de Smagorinsky et  $C_w \overline{\Delta} = 0.009$  pour le modèle W.A.L.E., ce qui conduit à avoir des viscosités laminaire et turbulente du même ordre. Les viscosités obtenues pour  $\mathbf{u}^{\text{exact}}$  pour les modèles W.A.L.E. et Smagorinsky sont représentées sur la figure C.3. Les profils sont assez différents, et l'on peut remarquer que, comme attendu, la viscosité turbulente près du mur s'annule avec le modèle W.A.L.E. tandis qu'elle ne décroît pas avec le modèle de Smagorinsky.

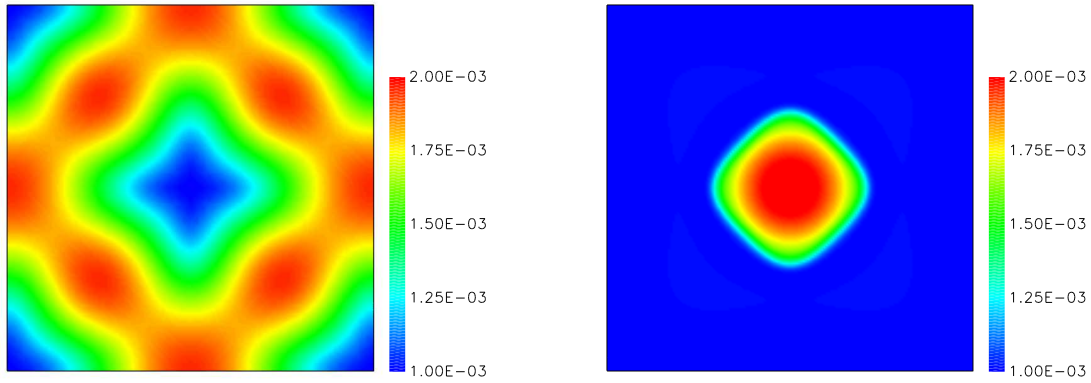
Le problème non-linéaire (C.6) est résolu en utilisant un procédé itératif analogue à une marche en temps de type correction de pression [22], calculant à chaque pas de temps la valeur de la viscosité turbulente à partir de la vitesse initiale. L'état stationnaire est supposé atteint quand les incréments de vitesse et de pression sont assez petits.

La norme  $L^2$  discrète définie par

$$\|\mathbf{u}\|_0^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |D_\sigma| |\mathbf{u}_\sigma|^2,$$

est utilisée pour mesurer l'erreur en espace commise sur des maillages structurés constitués de  $n \times n$  cellules avec  $n = 10, 20, 40$  et  $80$ .





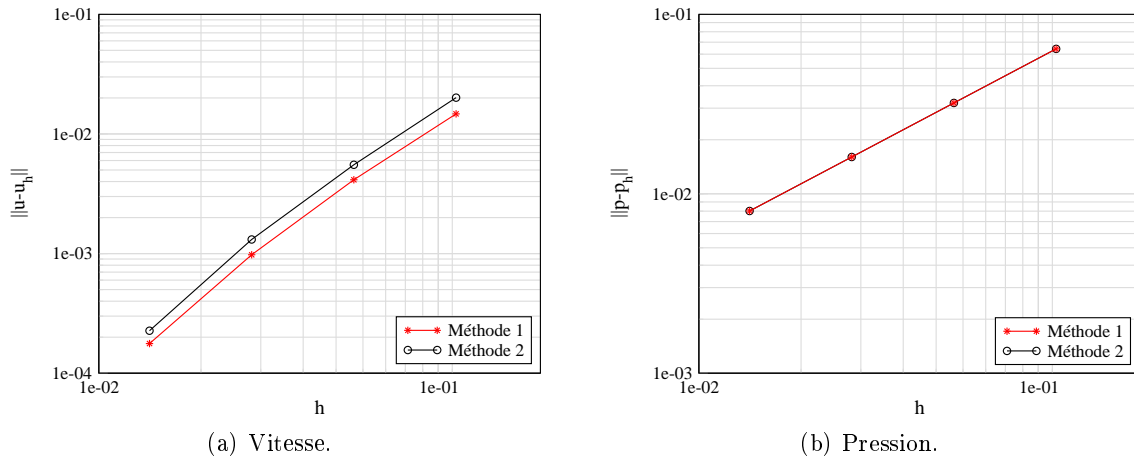
(a) Modèle de Smagorinsky

(b) Modèle W.A.L.E.

FIGURE C.1 – Viscosité effective.

### Comparaison des deux implémentations pour le modèle de Smagorinsky

Sur la figure C.2, l'erreur spatiale en norme  $L^2$  est représentée pour les deux méthodes pour le calcul de la viscosité de Smagorinsky. Les deux implémentations sont presque aussi précises. Par conséquent, la méthode 2 est choisie pour les tests numériques suivants, parce que son implémentation est plus simple.



(a) Vitesse.

(b) Pression.

FIGURE C.2 – Norme  $L^2$  de l'erreur pour la vitesse et la pression comme fonction du pas d'espace pour les deux discrétisations de la viscosité de Smagorinsky : la méthode 1 correspond à l'équation (C.3), la méthode 2 à l'équation (C.4).

### Comparaison de l'approche éléments finis avec le schéma MAC pour les deux modèles

Sur les figures C.3 et C.4, 'RT' et 'MAC' représentent la discrétisation choisie, c'est-à-dire respectivement l'élément fini de Rannacher-Turek ou le schéma MAC (volumes finis). Les deux discrétisations semblent conduire au même ordre de convergence en espace, c'est-à-dire 2 pour la vitesse et 1 pour la pression, pour le modèle de Smagorinsky. La discrétisation Rannacher-Turek est plus précise que le schéma MAC mais, à maillage donné, le nombre de degrés de liberté pour la vitesse pour la discrétisation Rannacher-Turek est deux fois plus grand (pour  $d = 2$ ) que pour l'approximation

par le schéma MAC (le nombre de degrés de liberté pour la pression est exactement le même dans les deux cas). Pour le modèle W.A.L.E., les résultats paraissent semblables, avec une convergence plus irrégulière pour la vitesse.

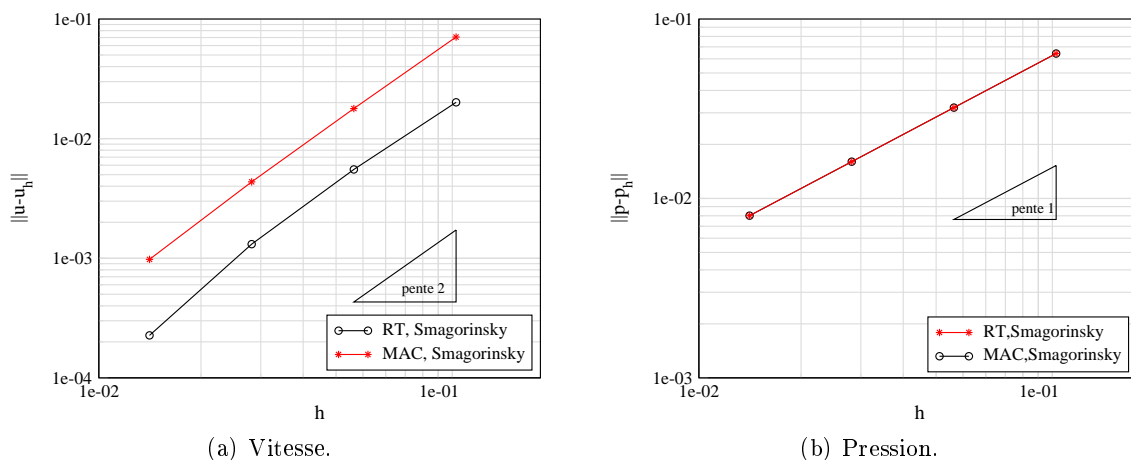


FIGURE C.3 – Norme  $L^2$  de l’erreur pour la vitesse et la pression comme fonction du pas d’espace pour le modèle de Smagorinsky.

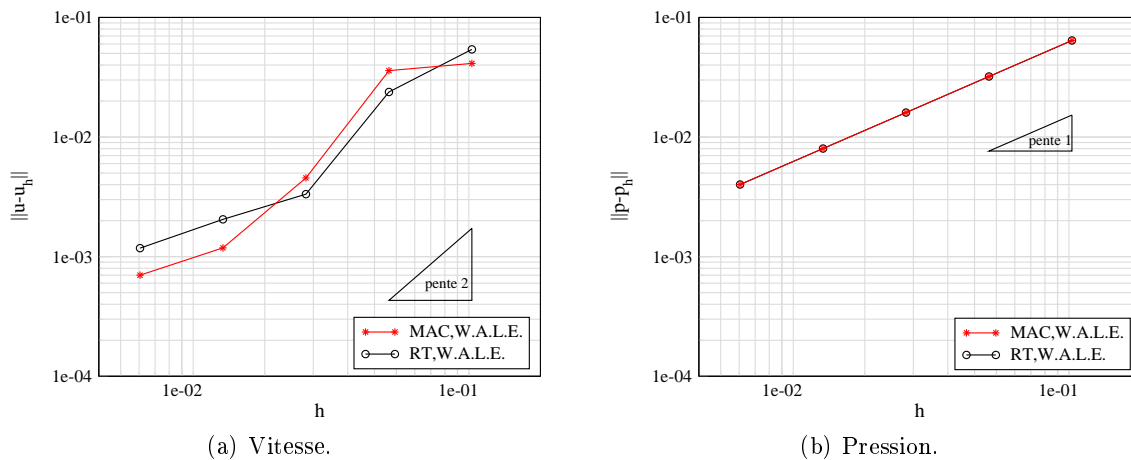


FIGURE C.4 – Norme  $L^2$  de l’erreur pour la vitesse et la pression comme fonctions du pas d’espace pour le modèle W.A.L.E.

## C.4 Conclusion

En conclusion, concernant le problème de Stokes les discrétisations spatiales retenues pour le modèle de Smagorinsky et W.A.L.E. donnent des résultats satisfaisants pour le problème de Stokes stationnaire non-linéaire considéré, pour la méthode éléments finis et pour le schéma MAC. L’extension du schéma aux équations de Navier-Stokes complètes avec le modèle sous-maille W.A.L.E. [4, 9] pour une discrétisation du terme convectif préservant l’énergie cinétique) et montre que les deux

méthodes de discrétisation du terme de viscosité turbulente donnent des résultats similaires sur les profils des moments de vitesse et de viscosité effective.

## Annexe D

# Résultats d'analyse fonctionnelle

### Lemme D.1 (Lemme de Bramble-Hilbert)

Soient  $\Omega$  un ouvert borné lipschitzien de  $\mathbb{R}^d$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et  $\Phi$  un opérateur linéaire continu de  $H^{k+1}(\Omega)$  dans un espace de Banach  $E$ . Si  $\Phi$  s'annule sur  $\mathbb{P}_k$ , alors il existe  $C > 0$  telle que

$$\forall u \in H^{k+1}(\Omega), \quad \|\Phi(u)\|_E \leq C |u|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

### Lemme D.2 (Inégalité de Poincaré)

Soit  $\Omega$  un ouvert borné, lipschitzien de  $\mathbb{R}^d$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|\mathbf{u}\|_0 \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_0, \quad \forall \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega).$$

### Théorème D.3 (Théorème de Lax-Milgram)

Soient  $H$  un espace de Hilbert réel,  $a$  une forme bilinéaire sur  $H$ ,  $L$  une forme linéaire sur  $H$ . On suppose que

1.  $a$  est continue :

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H, \quad |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|a\|_H \|\mathbf{u}\|_H \|\mathbf{v}\|_H.$$

2.  $a$  est coercive : il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall \mathbf{u} \in H, \quad |a(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \geq \alpha \|\mathbf{u}\|_H^2.$$

3.  $L$  est continue :

$$\forall \mathbf{u} \in H, \quad |L(\mathbf{u})| \leq \|L\| \|\mathbf{u}\|_H.$$

Alors il existe un unique  $\mathbf{u}$  dans  $H$  qui vérifie

$$\forall \mathbf{v} \in H, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}),$$

et celui-ci vérifie

$$\|\mathbf{u}\|_H \leq \frac{\|L\|}{\alpha}.$$

**Lemme D.4 (Lemme de Nečas)**

Pour toute fonction  $p \in L_0^2(\Omega)$ , il existe une fonction  $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$  telle que  $\operatorname{div} \mathbf{v} = p$ . Par ailleurs, on peut choisir  $\mathbf{v}$  tel que

$$\|\mathbf{v}\|_1 \leq C \|p\|_0,$$

où  $C$  ne dépend que de  $\Omega$ .

**Démonstration** Voir [35, Corollaire 2.4] et [11, Lemme III.1.17]. ■

**Lemme D.5 (Lemme de Strang)**

Soient  $\underline{\mathbf{u}}$  et  $\mathbf{u}_h \in W_h$  solutions respectivement des problèmes (V.20) et (V.21). Alors

$$\|\underline{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h\|_{1,b} \leq \inf_{\mathbf{w}_h \in W_h} \|\underline{\mathbf{u}} - \mathbf{w}_h\|_{1,b} + \sup_{\mathbf{w}_h \in W_h \setminus \{0\}} \frac{|a_h(\underline{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_{1,b}}.$$

## Annexe E

# Paramètres physiques et numériques des simulations présentées

- masse volumique en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,
- viscosités laminaire  $\nu_l$ , turbulente  $\nu_\tau$  et effective  $\nu_{eff}$  en  $\text{Pa} \cdot \text{s}$ ,
- pas de temps  $\Delta t$  et les bornes de l'intervalle de temps  $(T_0, T)$  en s,
- pas de maillage  $h$  en m,

Par ailleurs,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  désignent la masse volumique de chacun des deux fluides considérés pour la loi d'état suivante :

$$\rho = \frac{1}{\frac{\theta}{\rho_1} + \frac{1-\theta}{\rho_2}},$$

Sauf mention du contraire, la discrétisation spatiale est donnée par l'élément fini de Rannacher-Turek et les solveurs choisis pour la méthode de projection sont les suivants

- ◆ Solveur de l'étape de prédiction de vitesse
  - Solveur itératif de type GMRES,
  - Nombre maximal d'itérations : 10000,
  - Restart : 30,
  - Tolérances absolue  $10^{-8}$  et relative  $10^{-10}$ ,
- ◆ Solveur de correction de pression (problème de Laplace)
  - Solveur itératif de type Gradient conjugué,
  - Nombre maximal d'itérations : 10000,
  - Tolérances absolue  $10^{-6}$  et relative  $10^{-10}$ ,

### CHAPITRE I Méthode de projection

- ◆ Problème de Stokes avec des conditions au bord de type Dirichlet, Figures I.2 (page 63), I.3 (page 63) et I.4 (page 64) :

Paramètres physiques

$\mu$	$\rho$	$\Omega$	Re
1	1	cercle unité	1

Géométrie

Type de maillage	Nombre de cellules
2D, structuré (triangles)	$30 \times 30, 60 \times 60, 120 \times 120$

Discrétisation temporelle

$\Delta t$	Schéma en temps	Intervalle de temps
$10^{-1} \rightarrow 10^{-4}$	BDF2	(0; 1)

Initialisation

Vitesse	Pression
(0, 0)	0

Paramètres de calcul relatifs aux solveurs

Solveur prédiction
Solveur direct

- ◆ Comparaison des approximations par les éléments finis de Rannacher-Turek et Taylor-Hood, Figure I.5, page 65 :

Paramètres physiques

$\mu$	$\rho$	$\Omega$	Re
1	1	$[0; 1]^2$	1

Géométrie

Type de maillage	Nombre de cellules
2D, structuré	$40 \times 10$

Discrétisation temporelle

$\Delta t$	Schéma en temps	Intervalle de temps
1	BDF2	(0; 5000)

Initialisation

Vitesse	Pression
(0, 0)	0

Paramètres de calcul relatifs aux solveurs

Solveur prédiction
Solveur direct

- ◆ Problème de Stokes avec des conditions au bord ouvertes, Figures I.6 (page 66), I.7 (page 66), I.8 (page 67) et I.9 (page 68) :

Paramètres physiques

---

$\mu$	$\rho$	$\Omega$	Re
1	1	$[0; 1]^2$	1

Géométrie

Type de maillage	Nombre de cellules
2D, structuré	$20 \times 20, 40 \times 40, 80 \times 80$

Discrétisation temporelle

$\Delta t$	Schéma en temps	Intervalle de temps
$10^{-1} \rightarrow 10^{-4}$	BDF2	$(0; 1)$

Initialisation

Vitesse	Pression
$\mathbf{u}^{exact}(t = 0)$	$p^{exact}(t = 0)$

Paramètres de calcul relatifs aux solveurs

Solveur prédiction
Solveur direct



**CHAPITRE II Discrétisation en temps de Crank-Nicolson**

- ◆ Décroissance de la vorticité dans un canal plan laminaire 2D, Figures II.3 (page 84), II.4 (page 85), II.5 (page 86), II.6 (page 86) et II.7 (page 87) :

Paramètres physiques

$\mu$	$\rho$	$\Omega$	$\rho_1$	$\rho_2$	Re
$10^{-4}$	1	$[-2; 2] \times [-1; 1]$	5	1	10000

Géométrie

Type de maillage	Nombre de cellules
2D, structuré	$500 \times 250$

Discrétisation temporelle

$\Delta t$	Schéma en temps	Intervalle de temps
$10^{-1}$ ou $5 \times 10^{-3}$	Euler ou Crank-Nicolson	(0; 2)

Initialisation

Vitesse	Pression	Masse volumique	Fonction de courant
$\mathbf{u}^{exact}$	0	1	0

Fraction massique :  $\frac{1}{2} (mixt_1 + mixt_2)$  si  $mixt_i(x, y) = 1 + \cos(\pi r)$  pour  $r_i > 1$ .

Paramètres de calcul relatifs aux solveurs

Solveur prédiction
Solveur direct

- ◆ Écoulement laminaire 2D derrière un cylindre, Figures II.3 (page 89), II.4 (page 90), II.11 (page 91) et II.5 (page 91) :

Paramètres physiques

$\mu$	$\rho$	$\Omega$	Re
$10^{-3}$	1	$[0; 2.2] \times [0; 0.41]$	100

Géométrie

Type de maillage	Nombre de cellules
2D, quadrangle	$4033 \rightarrow 106101$

Discrétisation temporelle

$\Delta t$	Schéma en temps	Intervalle de temps
$10^{-3} \rightarrow 2 \times 10^{-4}$	Euler ou Crank-Nicolson	(0; 5)

Initialisation

Vitesse	Pression
(0, 0)	0

Conditions au bord

Dirichlet homogène	Dirichlet non-homogène	Outlet
Haut et bas	$4 \times 1.5/0.41y(0.41 - y)$ à l'entrée (gauche)	sortie (droite)

◆ Couche de mélange turbulente 3D, Figures II.13 (page 94), II.14 (page 95), II.15 (page 95) :

Paramètres physiques

$\mu_l$	$\rho$	$\Omega$	Re
$10^{-3}$	1000	$[-0.02; 0.02]^2 \times [-0.01; 1.19]$	10000

Géométrie

Type de maillage	Nombre de cellules
3D, structuré	$90 \times 90 \times 270$

Discretisation temporelle

$\Delta t$	Schéma en temps	Intervalle de temps
$10^{-2} \rightarrow 10^{-3}$	Euler ou Crank-Nicolson	(0, 20)

Initialisation

Vitesse	Pression	Masse volumique
(0,0,0)	$10^5$	$\mu_l$

Modélisation sous-maille

Modèle	Constante
Smagorinsky	$C_S = 0.12$

Forçage

Force	Adaptative
(0, -9.81, 0)	Non

Méthode des vortex

Nb d'échelles	échelle turbulente	$\mathbf{u}_d$	$\bar{\mathbf{u}}$
1000	$\max(5 \times 10^{-2}, 40 \times 10^{-2}/90)$	( 0.0 0.45 0.0)	(0.0, $\tilde{\mathbf{u}}$ , 0.0)

où  $\tilde{\mathbf{u}}$  est une interpolation de la vitesse calculée à partir de données expérimentales.

**CHAPITRE III, Discrétisation spatiale : contexte et motivations**

- ◆ Canal plan, Figure III.5 (page 105).

Paramètres physiques

$\mu_l$	$\rho$	$\Omega$	$Re_\tau$
$10^{-2}$	100	$[0; 2\pi L_0] \times [0; \pi L_0] \times [0; 2L_0] (L_0 = 0.5)$	601

Géométrie

Type de maillage	Nombre de cellules	$a$
3D, structuré	$40 \times 48 \times 88$	0.98605

Discrétisation temporelle

$\Delta t$	Schéma en temps	Intervalle de temps
$10^{-2}$	BDF2	$[0; 100]$

Modélisation sous-maille

Modèle	Constante
W.A.L.E.	$C_W = 0.5$

Forçage

$Q^{ref}$	Valeur initiale	Adaptative
4318.5	$(1.38393, 0, 0)$	oui

Initialisation

Vitesse	Pression	Viscosité
Recyclage vitesse pour $Re_\tau = 3600$	Recyclage pression pour $Re_\tau = 3600$	$\mu_l$

- ◆ Problème d'Oseen bidimensionnel stationnaire, Figures III.9 (page 110) et III.9 (page 110).

Paramètres physiques

$\mu$	$\rho$	$\Omega$	Re
$10^{-3}$	1	$[0; 1]^2$	1000

Géométrie

Type de maillage	Nombre de cellules
2D, structuré	$10 \times 10, 20 \times 20, 40 \times 40, 80 \times 80$

Discrétisation temporelle

$\Delta t$	Schéma en temps	$\varepsilon$
$10^{-2}$	BDF2	$10^{-5}$

Initialisation

Vitesse	Pression	Viscosité
$\mathbf{u}^{exact}$	$p^{exact}$	$\mu$

Paramètres de calcul relatifs aux solveurs

Solveur prédiction
Solveur direct

- ◆ Problème du tourbillon isolé, Figure III.12 (page 117).

Paramètres physiques

$\mu$	$\rho$	$\Omega$
0	1	$[0; 1]^2$

Géométrie

Type de maillage	Nombre de cellules
2D, structuré	$10 \times 10, 20 \times 20, 40 \times 40, 80 \times 80$

Discrétisation temporelle

$\Delta t$	Schéma en temps	$\varepsilon$
$10^{-2}$	BDF2	0.3

Initialisation

Vitesse	Pression	Viscosité
$\mathbf{u}^{exact}$	$p^{exact}$	$\mu$

Paramètres de calcul relatifs aux solveurs

Solveur prédiction
Solveur direct

- ◆ Couche de mélange à  $Re = 10000$ , Figure III.14 (page 119) :

Paramètres physiques

$\mu$	$\rho$	$\Omega$	Re
$3.57 \times 10^{-6}$	1	$[0; 1]^2$	10000

Géométrie

Type de maillage	Nombre de cellules
2D, structuré	$320 \times 320$

Discrétisation temporelle

$\Delta t$	Schéma en temps	Intervalle de temps
$0.01\sigma_0$	BDF2	$(0, 200\sigma_0)$

Initialisation

Vitesse	Pression	Masse volumique
$\tanh((2y - 1)/\sigma_0) + \begin{pmatrix} \partial_y \psi \\ -\partial_x \psi \end{pmatrix}$	0	$\mu$

Description de l'interface

Épaisseur	Fonction représentant l'interface
$\sigma_0 = 1/28$	$\psi(x, y) = 0.001 \exp(-(y - 0.5)^2/\sigma_0^2)(\cos(8\pi x) + \cos(20\pi x))$

---

## CHAPITRE IV Contrôle des vitesses tangentes aux faces pour l'élément fini de Rannacher-Turek

- ◆ Problème d'Oseen bidimensionnel stationnaire, Figures IV.7 (page 135), IV.8 (page 135) et IV.9 (page 136) :

Paramètres physiques

$\mu$	$\rho$	$\Omega$	Re
$10^{-3}$	1	$[0; 1]^2$	10000

Géométrie

Type de maillage	Nombre de cellules
2D, quadrangle (coefficient de perturbation 0.1 et 0.3)	$10 \times 10$ , $20 \times 20$ , $40 \times 40$ et $80 \times 80$

Discrétisation temporelle

$\Delta t$	Schéma en temps	$\varepsilon$
$10^{-2}$	BDF2	$10^{-5}$

Initialisation

Vitesse	Pression	Masse volumique
$\mathbf{u}^{exact}$	$p^{exact}$	$\mu$

Paramètres de calcul relatifs aux solveurs

Solveur prédiction
Solveur direct

- ◆ Couche de mélange à  $Re = 10000$ , Figures IV.10 (page 137), IV.11 (page 138) et IV.12 (page 139) :

Paramètres physiques

$\mu_l$	$\rho$	$\Omega$	Re
$3.57 \times 10^{-6}$	1	$[0; 1]^2$	10000

Géométrie

Type de maillage	Nombre de cellules
2D, structuré	$320 \times 320$

Discrétisation temporelle

$\Delta t$	Schéma en temps	Intervalle de temps
$0.01\sigma_0$	BDF2	$(0, 200\sigma_0)$

Initialisation

Vitesse	Pression	Masse volumique
$\tanh((2y - 1)/\sigma_0) + \begin{pmatrix} \partial_y \psi \\ -\partial_x \psi \end{pmatrix}$	0	$\mu_l$

Description de l'interface

Épaisseur	Fonction représentant l'interface
$\sigma_0 = 1/28$	$\psi(x, y) = 0.001 \exp(-(y - 0.5)^2/\sigma_0^2)(\cos(8\pi x) + \cos(20\pi x))$

- ◆ Solution manufacturée d'un problème d'Oseen tridimensionnel stationnaire, Figure IV.13 (page 141) :

Paramètres physiques

$\mu$	$\rho$	$\Omega$	Re
$10^{-3}$	1	$[0; 1]^3$	1000

Géométrie

Type de maillage	Nombre de cellules
3D, structuré	$10 \times 10 \times 10$ , $20 \times 20 \times 20$ et $40 \times 40 \times 40$

Discretisation temporelle

$\Delta t$	Schéma en temps	$\varepsilon$
$10^{-3}$	BDF2	$10^{-4}$

Initialisation

Vitesse	Pression	Masse volumique
$\mathbf{u}^{exact}$	$p^{exact}$	$\mu$

Paramètres de calcul relatifs aux solveurs

Solveur prédiction
BICGSTAB

- ◆ Canal plan à  $Re_\tau = 590$ , Figures IV.14 (page 142), IV.16 (page 143) et IV.15 (page 142) :

Paramètres physiques

$\mu_l$	$\rho$	$\Omega$	$Re_\tau$
$10^{-2}$	100	$[-\pi L_0; \pi L_0] \times [-\frac{\pi}{2} L_0; \frac{\pi}{2} L_0] \times [0; 2 L_0]$ ( $L_0 = 0.5$ )	590

Géométrie

Type de maillage	Nombre de cellules	$a$
3D, structuré	$32 \times 32 \times 65$	0.98605

---

Discrétisation temporelle

$\Delta t$	Schéma en temps	Intervalle de temps
$10^{-2}$	BDF2	(0 ;100)

Modélisation sous-maille

Modèle	Constante
W.A.L.E.	$C_W = 0.5$

Forçage

$Q^{ref}$	Valeur initiale	Adaptative
4318.5	(1.38393, 0, 0)	oui

Initialisation

Vitesse	Pression	Viscosité
Recyclage vitesse pour $Re_\tau = 3600$	Recyclage pression pour $Re_\tau = 3600$	$\mu_l$

Paramètres de calcul relatifs aux solveurs

Solveur prédiction
BICGSTAB



**CHAPITRE V Enrichissement de la pression pour l'élément fini de Rannacher-Turek**

- ◆ Problème de Stokes stationnaire, Figures V.10 (page 156), V.12 (page 157), V.13 (page 158), V.14 (page 159), V.15 (page 159), V.9 (page 155), V.17 (page 160), V.18 (page 161) et V.20 (page 162) :

Paramètres physiques

$\mu$	$\rho$	$\Omega$
$10^{-3}$ ou 1	1	$[-1; 1]^2$

Géométrie

Type de maillage
2D, rectangle et quadrangle (coeffs de perturbation 0.1 et 0.3)
Nombre de cellules
$10 \times 10$ , $20 \times 20$ , $40 \times 40$ , $80 \times 80$

Discrétisation temporelle

Schéma en temps	Nb max d'itérations	Erreur max	Paramètre d'augmentation
Lagrangien augmenté	200	$10^{-5}$	$50\mu$
	$\Delta t$	Intervalle de temps	
	$10^9$	$(0; 10^9)$	

Initialisation

Vitesse	Pression	Viscosité
$\mathbf{u}^{exact}$	$p^{exact}$	$\mu$

- ◆ Problème d'Oseen stationnaire, Figures V.21 (page 163) et V.23 (page 164) :
- Paramètres physiques

$\mu$	$\rho$	$\Omega$
$10^{-3}$ ou 1	1	$[-1; 1]^2$

Géométrie

Type de maillage	Nombre de cellules
2D, quadrangle (coefficients de perturbation 0.3)	$10 \times 10$ , $20 \times 20$ , $40 \times 40$ , $80 \times 80$

Discrétisation temporelle

Schéma en temps	Nb max d'itérations	erreur max	paramètre d'augmentation
Lagrangien augmenté	200	$10^{-5}$	$50\mu$
	$\Delta t$	Intervalle de temps	
	$10^9$	$(0; 10^9)$	

Initialisation

Vitesse	Pression	Viscosité
$\mathbf{u}^{exact}$	$p^{exact}$	$\mu$

- ◆ Problème du tourbillon isolé, Figure V.25 (page 166) :  
Paramètres physiques

$\mu$	$\rho$	$\Omega$
0	1	$[0; 1]^2$

Géométrie

Type de maillage	Nombre de cellules
2D, structuré	$10 \times 10, 20 \times 20, 40 \times 40, 80 \times 80$

Discretisation temporelle

$\Delta t$	Schéma en temps	$\varepsilon$
$10^{-2}$	BDF2	0.3

Initialisation

Vitesse	Pression
$\mathbf{u}^{exact}$	$p^{exact}$

Paramètres de calcul relatifs aux solveurs

Solveur prédiction
Solveur direct

- ◆ Couche de mélange à  $Re = 10000$ , Figures V.30 (page 170), V.31 (page 171), V.33 (page 173) :

Paramètres physiques

$\mu$	$\rho$	$\Omega$	Re
$3.57 \times 10^{-6}$	1	$[0; 1]^2$	10000

Géométrie

Type de maillage	Nombre de cellules
2D, quadrangle (coefficients de perturbation 0.2)	$320 \times 320$

Discretisation temporelle

$\Delta t$	Schéma en temps	Intervalle de temps
$0.01\sigma_0$	Euler (ordre 1)	$(0, 200\sigma_0)$

Initialisation

Vitesse	Pression	Masse volumique
$\tanh((2y - 1)/\sigma_0) + \begin{pmatrix} \partial_y \psi \\ -\partial_x \psi \end{pmatrix}$	0	$\mu$

Description de l'interface

Épaisseur	Fonction représentant l'interface
$\sigma_0 = 1/28$	$\psi(x, y) = 0.001 \exp(-(y - 0.5)^2/\sigma_0^2)(\cos(8\pi x) + \cos(20\pi x))$

## Annexe F

# Quelques remarques concernant l'implémentation

Dans ce chapitre, sont rassemblés les développements informatiques réalisés, en collaboration avec Céline Lapuerta et Fabrice Babik, dans le logiciel libre ISIS [54] construit à partir de la plateforme de développement PELICANS [79]. Développé à l'IRSN pour le calcul d'écoulements turbulents réactifs à faible nombre de Mach (et par extension aux incendies), ISIS est entièrement parallélisé.

### F.1 Discrétisation en temps de Crank-Nicolson, Chapitre II

Dans cette section, nous donnons des éléments pour implémenter le schéma de Crank-Nicolson-like, en particulier comment, par un changement de variables, nous nous ramenons à une implémentation identique à celle du schéma d'Euler.

Commençons par fixer quelques notations. Considérons la matrice de masse (en vitesse) lumpée notée  $\widetilde{M}$ , la matrice de rigidité (en vitesse)  $A$  et la matrice de divergence discrète  $B$  obtenues par discrétisation du schéma RT (Euler) par l'élément de Rannacher-Turek. Soit de plus  $\Upsilon^n$  la matrice diagonale (pour la masse volumique) de coefficients diagonaux  $\rho^n$ .

Supposons que la formulation algébrique du schéma de projection basé sur une discrétisation d'Euler rétrograde en temps s'écrive comme suit : supposant connus  $\Upsilon^{n-1}$ ,  $\mathbf{U}^n$  et  $\mathbf{P}^n$ ,

$$\frac{1}{\Delta t} \widetilde{M}(\Upsilon^n \widetilde{\mathbf{U}}^{n+1} - \Upsilon^{n-1} \mathbf{U}^n) + A \widetilde{\mathbf{U}}^{n+1} + B^T \mathbf{P}^n = \mathbf{F}^{n+1},$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} \widetilde{M}(\mathbf{U}^{n+1} - \widetilde{\mathbf{U}}^{n+1}) + B^T \phi^{n+1} = 0, \\ B \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{G}^{n+1}. \end{cases}$$

Avec ces notations, le schéma en temps de Crank-Nicolson s'écrit :

Première étape : Étape de "prédiction de vitesse" pour le schéma de Crank-Nicolson implémenté

$$\frac{1}{\Delta t} \widetilde{M}(\Upsilon^n \widetilde{\mathbf{U}}^{n+1} - \Upsilon^{n-1} \mathbf{U}^n) = -A \frac{\widetilde{\mathbf{U}}^{n+1} + \mathbf{U}^n}{2} - B^T \mathbf{P}^n + \mathbf{F}^{n+1}.$$

Posons :

$$\overline{\mathbf{U}}^{n+1} = \frac{\widetilde{\mathbf{U}}^{n+1} + \mathbf{U}^n}{2},$$

on cherche donc  $\bar{\mathbf{U}}^{n+1}$  tel que :

$$\widetilde{M} \frac{\gamma^n (2\bar{\mathbf{U}}^{n+1} - \mathbf{U}^n) - \gamma^{n-1} \mathbf{U}^n}{\Delta t} = A\bar{\mathbf{U}}^{n+1} - B^T P^n + \mathbf{F}^{n+1},$$

soit encore :

$$\widetilde{M} \frac{2\gamma^n \bar{\mathbf{U}}^{n+1} - (\gamma^n + \gamma^{n-1}) \mathbf{U}^n}{\Delta t} = A\bar{\mathbf{U}}^{n+1} - B^T P^n + \mathbf{F}^{n+1}.$$

Ainsi, la première étape du schéma consiste à résoudre l'équation de prédiction de vitesse associée au schéma d'Euler avec  $\widetilde{\rho}^n = 2\rho^n$  et  $\widetilde{\rho}^{n-1} = \rho^n + \rho^{n-1}$ .

Deuxième étape : Changement de variables

On repasse en variable  $\widetilde{\mathbf{U}}^{n+1}$  :

$$\widetilde{\mathbf{U}}^{n+1} = 2\bar{\mathbf{U}}^{n+1} - \mathbf{U}^n.$$

Troisième étape : Projection et correction de vitesse

On résout le problème de Darcy d'inconnues  $(\mathbf{U}^{n+1}, \phi^{n+1})$  :

$$\begin{cases} \frac{\widetilde{M}(\mathbf{U}^{n+1} - \widetilde{\mathbf{U}}^{n+1})}{\Delta t} + B^T \bar{\phi}^{n+1} = 0, \\ B\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{G}^{n+1}. \end{cases}$$

$$P^{n+1} = 2\bar{\phi}^{n+1} + P^n.$$

La définition de l'incrément de pression  $\bar{\phi}^{n+1} = \frac{P^{n+1} - P^n}{2} = \frac{1}{2}\phi^{n+1}$  provient du fait que l'on cherche à retrouver une équation de conservation de la quantité de mouvement lorsqu'on somme la première et la deuxième équation du schéma.

Par élimination de  $\mathbf{U}^{n+1}$ , on se ramène à la résolution de sous-problèmes indépendants en  $\bar{\phi}^{n+1}$ , et  $\widetilde{\mathbf{U}}^{n+1}$  :

1. Résolution d'un problème de Laplace pour l'incrément de pression

$$\begin{cases} B\widetilde{M}^{-1} B^T \bar{\phi}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} B\widetilde{\mathbf{U}}^{n+1}, \\ P^{n+1} = 2\bar{\phi}^{n+1} + P^n, \end{cases}$$

2. Correction de vitesse

$$\frac{1}{\Delta t} \widetilde{M}\mathbf{U}^{n+1} = -B^T \bar{\phi}^{n+1} + \frac{1}{\Delta t} \widetilde{M}\widetilde{\mathbf{U}}^{n+1}.$$

## F.2 Contrôle des vitesses tangentes, Chapitre IV

La classe d'ISIS responsable de l'ajout d'un terme de stabilisation à l'équation de prédiction de vitesse est la classe `IS_NonconformingFEstabilization`. Il s'agit d'une classe dans laquelle sont assemblées localement, arête par arête si  $d = 2$  (ou face par face si  $d = 3$ ), les matrices ajoutées à cette équation discrétisée par l'un des éléments finis non conformes Crouzeix-Raviart ou Rannacher-Turek. Cette matrice est ensuite assemblée dans son ensemble dans la classe `IS_NavierStokesLowMach`, une seule fois (stabilisation constante dans ISIS) au début de la résolution numérique.

Étant donnée une face  $\sigma$ , l'algorithme d'assemblage local est le suivant :

- Étape 1 (méthodes `side_geometry` et `bound_geometry`) : détermination de l'ensemble  $\{\widehat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma)\}$  des faces ayant un sommet commun avec la face  $\sigma$  et de la géométrie qui leur est associée :
  - (i) indice global des degrés de liberté de vitesse associés aux faces  $\widehat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma)$ ,
  - (ii) coordonnées du centre des faces  $\widehat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma)$ ,
  - (iii) composantes des vecteurs normaux aux faces  $\widehat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma)$ ,
  - (iv) produit scalaires  $\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\widehat{\sigma}}$  et  $\boldsymbol{\tau}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\widehat{\sigma}}$  pour les faces  $\widehat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma)$ .
- Étape 2 : calcul des coefficients de l'équation de contrainte écrite en coordonnées cartésiennes.
  - (i) Calcul des coefficients  $\beta_\sigma$  et  $\alpha_\sigma^\sigma$  par la méthode décrite dans la section IV.3 (méthode `compute_stabilization_coefficients`).
  - (ii) Passage aux inconnues de vitesse cartésiennes et non plus aux inconnues normales et tangentes aux faces (les inconnues de vitesse d'ISIS sont données par les composantes du vecteur vitesse dans la base canonique).
    - a-** Notons que dans ISIS, les classes rattachées à une arête intérieure ou extérieure mettent seulement à disposition le vecteur normal à la face considérée. Le vecteur tangent à une face donnée s'obtient donc par rotation du vecteur normal à celle-ci d'un angle de  $\frac{\pi}{2}$ .
    - b-** Une fois déterminées les composantes des vecteurs normaux et tangents aux faces dans la base canonique, nous sommes capables de traduire la contrainte imposée aux vitesses tangentes en fonction des degrés de liberté d'ISIS. Pour cela, utilisons la formule suivante

$$\mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma = \mathbf{u}_{\sigma,x} \mathbf{n}_{\sigma,x} + \mathbf{u}_{\sigma,y} \mathbf{n}_{\sigma,y}.$$

**Sur une face intérieure :**

Le terme

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \quad \mathbf{u}_\sigma \cdot \boldsymbol{\tau}_\sigma - \beta_\sigma \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma - \sum_{\widehat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma)} \alpha_\sigma^\sigma \mathbf{u}_{\widehat{\sigma}} \cdot \mathbf{n}_{\widehat{\sigma}},$$

s'écrit aussi

$$\mathbf{u}_{\sigma,x} (\boldsymbol{\tau}_{\sigma,x} - \beta_\sigma \mathbf{n}_{\sigma,x}) + \mathbf{u}_{\sigma,y} (\boldsymbol{\tau}_{\sigma,y} - \beta_\sigma \mathbf{n}_{\sigma,y}) - \sum_{\widehat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma)} (\alpha_\sigma^\sigma \mathbf{n}_{\widehat{\sigma},x} \mathbf{u}_{\widehat{\sigma},x} + \alpha_\sigma^\sigma \mathbf{n}_{\widehat{\sigma},y} \mathbf{u}_{\widehat{\sigma},y}). \quad (\text{F.1})$$

**Sur une face extérieure (conditions au bord de glissement) :**

Dans le cas de conditions au bord de glissement parfait ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  et  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_N$ ), la contrainte s'écrit :

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \cap \mathcal{E}_N, \quad \mathbf{u}_\sigma \cdot \boldsymbol{\tau}_\sigma = \beta_\sigma \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma + \sum_{\widehat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma) \cap \mathcal{E}_{\text{int}}} \alpha_\sigma^\sigma \mathbf{u}_{\widehat{\sigma}} \cdot \mathbf{n}_{\widehat{\sigma}}, \quad (\text{F.2})$$

où la somme ne porte que sur les faces "intérieures", c'est-à-dire un ensemble de cardinal deux si  $d = 2$  ou quatre si  $d = 3$ . Pour ne pas avoir à résoudre un autre système linéaire dans le but de calculer les coefficients  $\beta_\sigma$  et  $\alpha_\sigma^\sigma$ , nous leur donnons les valeurs conjecturées pour des maillages particuliers rectangles :  $\beta_\sigma = 0$  et  $\alpha_\sigma^\sigma = 0.5$ .

Par les relations (F.1) et (F.2), on identifie des coefficients notés  $C_I$  associés à l'inconnue de vitesse  $\mathbf{u}_{\sigma,i}$  d'indice global  $I$ .

- Etape 3 : assemblage de la matrice locale  $T$  (méthodes `assemble_u_T_edge_stabilization` et `assemble_u_T_bound_stabilization`).

Pour chaque face  $\sigma$ , nous assemblons une matrice de stabilisation  $T$  associée à la contrainte imposée, *i.e.*

$$\begin{aligned} a_T(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)}) &= \sum_{\sigma' \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D} A_{\sigma'}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) A_{\sigma'}(\boldsymbol{\varphi}_\sigma^{(i)}), \\ &= \left( \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_\sigma - \beta_\sigma \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} \cdot \mathbf{n}_\sigma - \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma)} \alpha_{\hat{\sigma}}^\sigma \tilde{\mathbf{u}}_{\hat{\sigma}}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{\hat{\sigma}} \right) (\boldsymbol{\tau}_{\sigma,i} - \beta_\sigma \mathbf{n}_{\sigma,i}) \\ &+ \sum_{\{\sigma'; \sigma \in \mathcal{I}(\sigma')\}} \left( \tilde{\mathbf{u}}_{\sigma'}^{n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\sigma'} - \beta_{\sigma'} \tilde{\mathbf{u}}_{\sigma'}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{\sigma'} - \sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{I}(\sigma')} \alpha_{\hat{\sigma}}^{\sigma'} \tilde{\mathbf{u}}_{\hat{\sigma}}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{\hat{\sigma}} \right) (-\alpha_{\sigma'}^{\sigma'} \mathbf{n}_{\sigma,i}), \end{aligned}$$

Cette matrice est dite locale dans le sens où elle ne porte que sur les inconnues de l'ensemble  $\mathcal{I}(\sigma)$  et sur  $\sigma$  elle-même. Autrement dit, si  $\sigma$  appartient à une cellule dont aucun bord n'est un bound,  $T \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$  si  $d = 2$  et  $T \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$  si  $d = 3$ . Sinon,  $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  si  $d = 2$  et  $T \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$  si  $d = 3$ . Dans tous les cas, elle a pour coefficients (réels) :

$$\forall I, J \in \mathbb{N}, \quad T_{I,J} = h_\sigma^{d-2} C_I C_J.$$

### F.3 Enrichissement de la pression, Chapitre V

Dans ce paragraphe, nous détaillons quelques points essentiels de l'implémentation de ce nouveau schéma dans ISIS. D'abord, le pavage pression, tout comme le maillage diamant pour la vitesse, n'est pas construit explicitement. Ensuite, les classes suivantes permettent de modifier les opérateurs discrets du schéma classique :

- dans `IS_NavierStokesTools_PE` sont implémentés arête par arête les coefficients généraux des opérateurs discrets, à savoir : la divergence de vitesse, le gradient de pression et l'opérateur elliptique de pression discrets. Ainsi, étant donnée une arête  $\sigma$ , il est important de déterminer les cellules du pavage de pression  $L^*$  pour lesquelles  $\sigma$  apporte une contribution à ces opérateurs. Par ailleurs, une fois  $L^*$  déterminée, l'expression de l'opérateur en question (Équations (V.5), (V.7) et (V.10)) fait intervenir essentiellement des termes de la forme  $|\varepsilon_\sigma| \mathbf{n}_{\varepsilon_\sigma}$ . Ces deux points sont calculés dans la classe `IS_PressureMeshing_PE`.
- dans `IS_PressureMeshing_PE` sont implémentées les fonctions relatives aux objets géométriques (nœuds de pression, normales, distances par exemple) nécessaires à l'écriture des opérateurs. En particulier, la méthode `build_pressure_sides` donne accès aux informations suivantes, étant donnée une arête  $\sigma$ 
  - (i) les indices nœuds de pression qui entourent cette arête : deux nœuds vertex-centered correspondant aux sommets du polyèdre associé à  $\sigma$  et deux (un pour une arête intérieure) nœud(s) correspondant au(x) centre(s) des cellules adjacentes à  $\sigma$ .
  - (ii) la mesure  $|\varepsilon_\sigma|$ , *i.e.* la distance entre les centres  $pt_1$  et  $pt_2$  des arêtes qui partagent un sommet commun avec  $\sigma$ .
  - (iii) la normale  $\mathbf{n}_{\varepsilon_\sigma}$  sortante de la cellule du pavage pression. En pratique, ce vecteur est construit de la façon suivante : une fois  $pt_1$  et  $pt_2$  déterminés, il est facile de déduire un vecteur orthogonal à  $\overrightarrow{pt_1 pt_2}$ , noté  $\overrightarrow{pt_1 pt_2}^\perp$ . Pour que  $\overrightarrow{pt_1 pt_2}^\perp$  soit sortant de la cellule du pavage pression considérée, il suffit de tester le produit scalaire de  $\overrightarrow{pt_1 pt_2}^\perp$  avec le vecteur d'extrémités suivantes :  $pt_1$  et le centre de la cellule du pavage pression,  $pt$ .

- deux classes de post-traitement du champ de pression enrichi, à savoir la classe `IS_Pressure-Parameter_PE` qui donne accès au champ de pression post-traité  $\tilde{p}$  et la classe `IS_Pressure-ComparatorWithAnalytic_PE` renvoyant la norme de l'erreur en pression du champ post-traité. Pour ces deux classes, étant donné que le champ de pression est supposé constant pas cellule du pavage pression, il suffit d'avoir accès au volume des cellules cell-centered et de chacun des quart de cellules vertex-centered (*i.e.*  $pt_1 \wedge pt$ ).





# Bibliographie

- [1] C. Ackermann. *Développement et Validation de Simulation de Grandes Échelles d'Écoulements Turbulents dans un Code Industriel*. PhD thesis, Institut national polytechnique de Grenoble, 2000.
- [2] S. Agmon. *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*. AMS Chelsea Publishing, 2010.
- [3] C. Amrouche and V. Girault. On the Existence and Regularity of the Solution of Stokes Problem in Arbitrary Dimension. *Proceedings of the Japan Academy, Série A*, 67(5) :171 – 175, 1991.
- [4] G. Ansanay-Alex, F. Babik, J.-C. Latché, and D. Vola. An  $L^2$ -Stable Approximation of the Navier-Stokes Convection Operator for Low-Order Non-Conforming Finite Elements. *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, 66 :555 – 580, 2011.
- [5] P. Beaudan and P. Moin. Numerical Experiments on the Flow Past a Circular Cylinder at Sub-Critical Reynolds Number. *Technical Report, TF-62, Department of Mechanic Engineering, Stanford University*, 1994.
- [6] M. Bebendorf. A Note on the Poincaré Inequality for Convex Domains. *Journal for Analysis and its Applications*, 22 :751 – 756, 2003.
- [7] C. Bernardi and F. Hecht. More Pressure in the Finite Element Discretization of the Stokes Problem. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 34(5) :953 – 980, 2000.
- [8] L.C. Berselli, T. Illiescu, and W.J. Layton. *Mathematics of Large Eddy Simulation of Turbulent Flows*. Springer, 2006.
- [9] F. Boyer, F. Dardalhon, C. Lapuerta, and J.-C. Latché. Stability of a Crank-Nicolson Pressure Correction Scheme based on Staggered Discretizations. *submitted*.
- [10] F. Boyer, F. Dardalhon, C. Lapuerta, and J.-C. Latché. A Low Degree Non-Conforming Approximation of the Steady Stokes Problem with an Eddy Viscosity. *Finite Volumes for Complex Applications VI, Prague*, 2 :165 – 173, 2011.
- [11] F. Boyer and P. Fabrie. *Éléments d'Analyse pour l'Étude de Quelques Modèles d'Écoulement de Fluides Visqueux Incompressibles*. Springer, 2006.
- [12] S.C. Brenner and L.R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, 2008.
- [13] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, volume 15 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, 1991.
- [14] G. Brilliant. *Simulations des Grandes Échelles Thermiques et Expériences dans le Cadre d'Effusion Anisotherme*. PhD thesis, CETHIL, Lyon, 2004.
- [15] E. Burman. Stabilized Finite Element Methods in the Inertial Range : Monitoring Artificial Dissipation. *ECCOMAS*, pages 1 – 19, 2006.

- 
- [16] C. Calgareo, E. Creusé, and T. Goudon. An Hybride Finite Volume-Finite Element Method for Variable Density Incompressible Flows. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 227 :4671 – 4696, 2008.
- [17] L. Cattabriga. Su un Problema al Contorno Relativo al Sistema di Equazioni di Stokes. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 31 :308 – 340, 1961.
- [18] A. Chatelain. *Simulations Des Grandes Échelles D'Écoulements Avec Transfert De Chaleur*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2004.
- [19] A.J. Chorin. Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations. *Mathematics of Computation*, 22 :745 – 762, 1968.
- [20] P. G. Ciarlet. Handbook of Numerical Analysis : Finite Elements Methods – Basic Error Estimates for Elliptic Problems. In P. Ciarlet and J.-L. Lions, editors, *Handbook of Numerical Analysis, Volume II*. North Holland, 1991.
- [21] M. Crouzeix and P.-A. Raviart. Conforming and Nonconforming Finite Element Methods for Solving the Stationary Stokes Equations. *RAIRO, Série Rouge*, 7 :33–75, 1973.
- [22] F. Dardalhon, S. Minjeaud, and J.-C. Latché. Analysis of a Projection Method for Low-Order Nonconforming Finite Elements. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2012.
- [23] R.B. Dean. Reynolds Number Dependence of Skin Friction and other Bulk Flow Variables in a Two-Dimensional Rectangular Duct-Flow. *Journal of Fluids Engineering*, 100 :215 – 223, 1978.
- [24] V. Deschamps. *Simulation Numérique de la Turbulence Inhomogène Incompressible dans un Écoulement de Canal Plan*. PhD thesis, INPT, 1988.
- [25] O. Desjardins, G. Blanquart, G. Balarac, and H. Pitsch. High Order Conservative Finite Difference Scheme for Variable Density Low Mach Number Turbulent Flows. *Journal of Computational Physics*, 227 :7125 – 7159, 2008.
- [26] F. Ducros, F Laporte, T. Soulères, P. Moinat, and B. Caruelle. High-Order Fluxes for Conservative Skew-Symmetric-Like Schemes in Structured Meshes : Application to Compressible Flows. *Journal of Computational Physics*, 161(1) :114 – 139, 2000.
- [27] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements*. Springer, 2004.
- [28] R. Eymard, T. Gallouet, and R. Herbin. Discretization of Heterogeneous and Anisotropic Diffusion Problems on General Nonconforming Meshes SUSHI : a Scheme Using Stabilisation and Hybrid Interfaces 1. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 30 :1009 – 1043, 2009.
- [29] R. Eymard, R. Herbin, J.-C. Latché, and B. Piar. Convergence Analysis of a Locally Stabilized Collocated Finite Volume Scheme for Incompressible Flows. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 43 :889 – 927, 2009.
- [30] F.N. Felten and T.S. Lund. Kinetic Energy Conservation Issues Associated with the Collocated Mesh Scheme for Incompressible Flow. *Journal of Computational Physics*, 215 :465 – 484, 2006.
- [31] M. Fortin and R. Glowinski. *Augmented Lagrangian Methods : Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems*. Studies in Mathematics and Its Applications. North-Holland Publishing Company, 1983.
- [32] T. Fortin. *Une Méthode d'Éléments Finis à Décomposition  $L^2$  d'Ordre Élevé Motivée par la Simulation des Écoulements Diphasiques Bas Mach*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2006.
- [33] L. Gastaldo, R. Herbin, W. Kheriji, C. Lapuerta, and J.-C. Latché. Staggered Discretizations, Pressure Correction Schemes and all Speed Barotropic Schemes. *Finite Volumes for Complex Applications VI, Prague*, 2 :39 – 55, 2011.

- [34] L. Georges, G. Winckelmans, and P. Geuzaine. Improving Shock-Free Compressible RANS Solvers for LES on Unstructured Meshes. *Journal of Computational Applied Mathematics*, 215 :419 – 428, 2008.
- [35] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, 1986.
- [36] K. Goda. A Multistep Technique with Implicit Difference Schemes for Calculating Two- or Three-Dimensional Cavity Flows. *Journal of Computational Physics*, 30 :76 – 95, 1979.
- [37] V. Gravemeier, W.A. Wall, and E. Ramm. Large Eddy Simulation of Turbulent Incompressible Flows by a Three-Level Finite-Element Method. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 48(10) :1067 – 1099, 2005.
- [38] J.-L. Guermond. Some Implementations of Projection Methods for Navier-Stokes Equations. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 30 :637 – 667, 1996.
- [39] J.-L. Guermond. Stabilization of Galerkin Approximations of Transport Equations by Subgrid Modeling. *Mathematic Modelling And Numerical Analysis*, 33 :1293 – 1316, 1999.
- [40] J.-L. Guermond. Un Résultat de Convergence d’Ordre Deux en Temps pour l’Approximation des Équations de Navier-Stokes par une Technique de Projection Incrémentale. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33 :169 – 189, 1999.
- [41] J.-L. Guermond, P. Minev, and J. Shen. Error Analysis of Pressure-Correction Schemes for the Time-Dependent Stokes Equations with Open Boundary Conditions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 43 :239 – 258, 2005.
- [42] J.-L. Guermond, J. T. Oden, and S. Prudhomme. Mathematical Perspectives on Large Eddy Simulation Models for Turbulent Flows. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 6(2) :194 – 248, 2004.
- [43] J.-L. Guermond and L. Quartapelle. On the Approximation of the Unsteady Navier-Stokes Equations by Finite Element Projection Methods. *Numerische Mathematik*, 80 :207 – 238, 1998.
- [44] J.-L. Guermond and L. Quartapelle. A Projection FEM for Variable Density Incompressible Flows. *Journal of Computational Physics*, 165 :167 – 188, 2000.
- [45] F. Ham, S.V. Apte, G. Iaccarino, X. Wu, S. Herrmann, G. Constantinescu, K. Mahesh, and P. Moin. Unstructured LES of Reacting Multiphase Flows in Realistic Gas-Turbine Combustors. *Annual Research Briefs*, pages 139 – 160, 2003.
- [46] F. Ham, K. Mattsson, and G. Iaccarino. Accurate and Stable Finite Volume Operators for Unstructured Flow Solvers. *Techniques*, pages 243 – 261, 2006.
- [47] F.H. Harlow and J.E. Welch. Numerical Calculations of Time Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with a Free Surface. *Physics of Fluids*, 8 :2182 – 2189, 1965.
- [48] S. Heib. *Nouvelles Discrétisations Non Structurées pour des Écoulements de Fluides à Incompressibilité Renforcée*. PhD thesis, Paris VI, 2003.
- [49] R. Herbin, W. Kheriji, and J.-C. Latché. Discretization of the Viscous Dissipation Term with the MAC Scheme. *Finite Volumes for Complex Applications VI, Prague*, pages 571 – 579, 2011.
- [50] R. Herbin, W. Kheriji, and J.-C. Latché. Staggered Schemes for All Speed Flows. *ESAIM proceedings*, 35 :122 – 150, 2012.
- [51] R. Herbin and J.-C. Latché. A Kinetic Energy Preserving Convection Operator for the MAC Discretization of Compressible Navier-Stokes Equations. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 7(2), 2010.

- 
- [52] T.J.R. Hughes, L. Mazzei, and Jansen K.E. Large Eddy Simulation and the Variational Multiscale Method. *Computing and Visualization in Sciences*, 3 :47 – 59, 2000.
- [53] S. Husson. *Simulation des Grandes Échelles pour les Écoulements Turbulents Anisothermes*. PhD thesis, Institut national des sciences appliquées de Lyon, 2007.
- [54] ISIS. A CFD computer code for the simulation of reactive turbulent flows.  
<https://gforge.irsn.fr/gf/project/isis>.
- [55] N. Jarrin, S. Benhamadouche, D. Laurence, and R. Prosser. A Synthetic-Eddy-Method for Generating Inflow Conditions for Large-Eddy Simulation. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 27 :585 – 593, 2006.
- [56] M. Jobelin, C. Lapuerta, J.-C. Latché, Ph. Angot, and B. Piar. A Finite Element Penalty-Projection Method for Incompressible Flows. *Journal of Computational Physics*, 217 :502 – 518, 2006.
- [57] V. John. An Assessment of Two Models for the Subgrid Scale Tensor in the Rational LES Model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 173 :57 – 80, 2005.
- [58] V. John and S. Kaya. A Finite Element Variational Multiscale Method for the Navier-Stokes Equations. *SIAM : Journal on Scientific Computing*, 26(5) :1485 – 1503, 2005.
- [59] V. John, A. Kindl, and C. Suci. Finite Element LES and VMS on Tetrahedral Meshes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233(12) :3095 – 3102, 2010.
- [60] V. John and M. Roland. Simulations of the Turbulent Channel Flow at  $Re_\tau = 180$  with Projection-Based Finite Element Variational Multiscale Method. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 55 :407 – 429, 2007.
- [61] B. Koobus and C. Farhat. A Variational Multi-Scale Method for the Large Eddy Simulation of Compressible Turbulent Flows on Unstructured Meshes – Application to Vortex Shedding. *Computational Methods in Applied Engineering*, 173 :1367 – 1384, 2004.
- [62] B. Larrouturou. How to Preserve the Mass Fractions Positivity when Computing Compressible Multi-Component Flows. *Journal of Computational Physics*, 95 :59 – 84, 1991.
- [63] M. Lesieur, C. Staquet, P. Le Roy, and P. Comte. The Mixing Layer and its Coherence Examined from the Point of View of Two-Dimensional Turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 192 :511 – 534, 1988.
- [64] D.K. Lilly. On the Computational Stability of Numerical Solutions of Time-Dependent Non-Linear Geophysical Fluid Dynamics Problems. *Monthly Weather Review*, 93 :11 – 26, 1965.
- [65] J. Mahaffy. Best Practice Guidelines for the use of CFD in Nuclear Reactor Safety Applications, 2007.
- [66] K. Mahesh, G. Constantinescu, and P. Moin. A Numerical Method for Large-Eddy Simulation in Complex Geometries. *Journal of Computational Physics*, 197 :215 – 240, 2004.
- [67] P. Majander and T. Siikonen. Evaluation of Smagorinsky-Based Subgrid-Scale Models in a Finite Volume Computation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 40 :735–774, 2002.
- [68] A. Majda and J. Sethian. The Derivation and Numerical Solution of the Equations for Zero Mach Number Combustion. *Combustion Science and Techniques*, 42 :185 – 205, 1985.
- [69] M. Milelli. *A Numerical Analysis of Confined Turbulent Bubble Plumes*. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 2002.
- [70] R. Mittal and P. Moin. Suitability of Upwind-Biased Finite Difference Schemes for Large-Eddy Simulation of Turbulent Flows. *AIAA Journal*, 35(8) :1415 – 17, 1997.

- [71] E. Montreuil. *Simulations Numériques pour l'Aérodynamique avec des Modèles Sous-Maille*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2000.
- [72] Y. Morinishi. Skew-Symmetric Form of Convective Terms and Fully Conservative Finite Difference Schemes for Variable Density Low-Mach Number Flows. *Journal of Computational Physics*, 229 :276 – 300, 2010.
- [73] Y. Morinishi, T. S. Lund, O. V. Vasilyev, and P. Moin. Fully Conservative Higher Order Finite Difference Schemes for Incompressible Flow. *Journal of Computational Physics*, 143 :90 – 124, 1998.
- [74] R.D Moser, J. Kim, and N.N. Mansour. Direct Numerical Simulation of Turbulent Channel Flow up to  $Re_\tau = 590$ . *Physics Of Fluids*, 11 :943 – 945, 1999.
- [75] F. Nicoud. Conservative High-Order Finite-Difference Schemes for Low-Mach Number Flows. *Journal of Computational Physics*, 158 :71 – 97, 2000.
- [76] F. Nicoud and F. Ducros. Subgrid-Scale Stress Modelling Based on the Square of the Velocity Gradient Tensor. *Flow, Turbulence And Combustion*, 62 :183 – 200, 1999.
- [77] F. Pascal. On Combining Finite Element Methods and Finite Volume Methods in Computational Fluid Dynamics. *Progress in Analysis*, I,II :1205 – 1213, 2001.
- [78] L.E. Payne and H.F. Weinberger. An Optimal Poincaré-Inequality for Convex Domains. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 5 :286 – 292, 1960.
- [79] PELICANS. Collaborative development environment.  
<https://gforge.irsn.fr/gf/project/pelicans>.
- [80] L. Piar, F. Babik, R. Herbin, and J.-C. Latché. A Formally Second-Order Cell Centered Scheme for Convection-Diffusion Equations on General Grids. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, published online DOI : 10.1002/fld.3688.
- [81] J. Piquet. Sur les Profils de Vitesse dans le Coeur de l'Écoulement Turbulent en Canal Plan. *Comptes-Rendus De Mécanique*, 335 :374 – 381, 2007.
- [82] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer, 1994.
- [83] R. Rannacher and S. Turek. Simple Nonconforming Quadrilateral Stokes Element. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 8 :97 – 111, 1992.
- [84] V. Roig. *Zone de Melange d'Écoulements Diphasiques à Bulles*. PhD thesis, University of Toulouse, 1993.
- [85] P. Rollet-Miet, D. Laurence, and J. Ferziger. LES and RANS of Turbulent Flows in Tube Bundles. *International Journal Of Heat And Fluid Flow*, 20 :241 – 254, 1999.
- [86] P. Sagaut. *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. Springer, 1998.
- [87] M. Schäfer and S. Turek. Benchmark Computations of Laminar Flow Around a Cylinder. In E.H. Hirschel, editor, *Flow Simulation with High-Performance Computers II*, volume 52 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, pages 547 – 566, 1996.
- [88] J. Shen. On Error Estimates of Projection Methods for Navier-Stokes Equations : First-Order Schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 29 :57 – 77, 1992.
- [89] J. Shen. Remarks on the Pressure Estimates for the Projection Methods. *Numerische Mathematik*, 67 :513 – 520, 1994.
- [90] J. Shen. On Error Estimates of Projection Methods for Navier-Stokes Equations : Second-Order Schemes. *Mathematics of Computation*, 65 :1039 – 1065, 1996.

- 
- [91] J. Smagorinsky. General Circulation Experiments with the Primitive Equations. *Monthly Weather Review*, 91(3) :99 – 164, 1963.
- [92] P. K. Subbareddy and G. V. Candler. A Fully Discrete, Kinetic Energy Consistent Finite-Volume Scheme for Compressible Flows. *Journal of Computational Physics*, 228 :1347 – 1364, 2009.
- [93] R. Temam. Sur l'Approximation de la Solution des Équations de Navier-Stokes par la Méthode des Pas Fractionnaires II. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 33 :377–385, 1969.
- [94] J. Van Kan. A Second-Order Accurate Pressure Correction Scheme for Viscous Incompressible Flow. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7 :870 – 891, 1986.
- [95] O. Vasilyev. High Order Finite Difference Schemes on Non-Uniform Meshes with Good Conservation Properties. *Journal of Computational Physics*, 157(2) :746 – 761, 2000.
- [96] R. W. C. P. Verstappen and A. E. P. Veldman. Symmetry-Preserving Discretization of Turbulent Flow. *Journal of Computational Physics*, 187 :343 – 368, 2003.
- [97] H. Werner and H. Wengle. *Large-Eddy Simulation of Turbulent Flow over and around a Cube in a Plane Channel*, pages 155 – 168. Durst, F. and Friedrich, R. and Launder, B.E. and Schumann, U. and Whitelaw, J.H. Editors, 1991.





## Schémas numériques pour la Simulation des Grandes Échelles

**Résumé :** Dans les simulations effectuées pour les études de sûreté nucléaire, les écoulements à décrire sont la plupart du temps turbulents. Dans ce contexte, l'objectif de ce travail est de développer et d'analyser des schémas numériques performants pour la LES dans des domaines de géométrie complexe (maillages non structurés) pour des écoulements incompressibles ou à faible nombre de Mach. Deux arguments semblent essentiels à la construction de tels schémas, à savoir de contrôler l'énergie cinétique et d'être précis pour des écoulements à convection dominante.

Les schémas étudiés sont des méthodes à pas fractionnaires basées sur une technique de correction de pression appliquée aux équations de Navier-Stokes. La discrétisation spatiale repose sur des éléments finis mixtes non conformes de bas degré (Rannacher-Turek).

Concernant la discrétisation en temps, nous proposons un schéma de type Crank-Nicolson et nous montrons qu'il satisfait un contrôle de l'énergie cinétique. Ce schéma présente de plus l'avantage d'être peu dissipatif numériquement (résidu d'ordre deux en temps).

Concernant la discrétisation en espace par l'élément fini de Rannacher-Turek, elle semble peu précise pour la simulation d'écoulements à convection dominante (mise en évidence sur différents cas-tests), notamment par rapport au schéma MAC. Pour cette raison, deux approches sont envisagées dans ce manuscrit. La première approche consiste à construire un schéma pénalisé contraignant les degrés de liberté tangents aux faces à s'écrire comme combinaison linéaire des degrés de liberté normaux de sorte que, en faisant tendre le paramètre de pénalisation vers l'infini, le schéma limite est de type MAC. La deuxième approche repose quant à elle sur l'enrichissement de l'espace discret d'approximation pour la pression. Pour la discrétisation du problème de Stokes par ce nouvel élément, des estimations en espace d'ordre un pour la vitesse (norme  $H^1$ ) et pour la pression (norme  $L^2$ ) sont démontrées dans le cas de maillages uniformes constitués de rectangles ou de parallélogrammes.

Enfin, différents tests numériques sont présentés en dimensions deux et trois et pour des maillages généraux, afin d'illustrer les capacités des schémas étudiés et de confronter les résultats théoriques et expérimentaux.

**Mots-clés :** Éléments finis de bas degré, maillage non structuré, méthode de correction de pression, Simulation des Grandes Échelles, écoulements à convection dominante.

---

**Abstract :** For the simulations performed for nuclear safety, the flows to describe are most of the time turbulent. In this context, the aim of this work is to develop and analyse effective numerical schemes for LES in complex geometry domains (unstructured grids) for incompressible or low Mach number flows. Two requirements seem essential to build such schemes, namely to control kinetic energy and to be accurate for convection dominated flows.

The schemes under study are of fractional-step type, relying on a pressure correction method applied to the Navier-Stokes equations. The discretization is based on a low degree nonconforming finite element approximation in space (Rannacher-Turek).

Concerning the time marching algorithm, we propose a Crank-Nicolson like scheme for which we prove a kinetic energy control. This scheme has the advantage to be numerically low dissipative (numerical dissipation residual is second order in time). Concerning the Rannacher-Turek space discretization, it seems not very accurate for the simulation of convection dominated flows, particularly with respect to the MAC scheme. To this purpose, two approaches are investigated in this work. The first approach consists in building a penalized scheme constraining the velocity degrees of freedom tangent to the faces to be written as a linear combination of some normal ones, thus giving a MAC-like scheme by making the penalization parameter to infinity. The second approach relies on the enrichment of the pressure approximation discrete space. For the discretization of the steady Stokes problem with this element, first order estimates in space for the velocity ( $H^1$  norm) and for the pressure ( $L^2$  norm) are proven in the case of uniform meshes constituted of rectangles or parallelograms.

Finally, various numerical tests are presented in both two and three dimensions and for general meshes, to illustrate the capacity of the schemes and compare theoretical and experimental results.

**Keywords :** Low degree finite elements, unstructured meshes, pressure correction scheme, Large Eddy Simulation, convection dominated flows.