

# Synthèse

## 1 Introduction

Dans une première partie introductive, nous rappelons que la propagation peut être décrite en terme de deux types de mode de propagation, provenant des solutions de l'équation de propagation dans l'approximation paraxiale : les modes de Hermite-Gauss et les modes de Laguerre-Gauss. Nous discutons du moment cinétique transporté par les faisceaux lumineux et nous présentons leurs décomposition en terme de spin et de moment angulaire orbital (OAM). Le OAM est engendré par la circulation macroscopique de l'énergie, conséquence de la variation spatio-temporelle du faisceau. Il dépend essentiellement du gradient de la phase. Le terme de spin est clairement indépendant du choix de l'origine des coordonnées, il est donc considéré comme une quantité intrinsèque du faisceau lumineux et est associé à la polarisation circulaire ou elliptique.

La seconde partie est consacrée au codage de l'information dans les degrés de liberté de polarisation et de modes transversaux des faisceaux optiques. Les modes spin-orbites sont définis et un dispositif expérimental optique pour produire ces modes est présenté. Les modes spin-orbites sont alors exploités pour implémenter un protocole de distribution de clés BB84 ne nécessitant pas le partage à priori d'une base de référence.

Nous montrons que, de façon analogue à la polarisation, les modes transversaux de premiers ordres d'un faisceaux peuvent être utilisés pour coder de l'information. Ces deux degrés de liberté (polarisation et modes transversaux) sont combinés pour définir des modes spin-orbites qui forment une base d'un sous-espace de dimension 4. Nous montrons comment produire ces modes expérimentalement, à l'aide de masques holographiques et d'interféromètres.

## 2 Modes Spin-Orbites

Dans le domaine de l'Information Quantique, les système photoniques sont souvent utilisés pour faire des expériences. Plusieurs degrés de liberté du photon peuvent être intéressant comme la polarisation, les modes transversaux, la fréquence ou les chemins de propagation. Dans notre travaille nous exploitons les états de polarisation le profil des mode transversaux. dans la première section de ce chapitre, nous montrons comment ces deux propriétés peuvent être décrites comme un qubit, premier pas nécessaire pour une application en Information Quantique.

L'état de polarisation d'un photon présente la même structure mathématique qu'un qubit, et possède sa propre représentation géométrique, appelée la sphère de Poincaré [1]. Dans cette représentation, les coordonnées cartésiennes d'un point sur la sphère correspondent aux paramètres de Stokes qui décrivent l'état de polarisation.

dans [2] Padgett and collaborateurs développent une analogie de la sphère de Poincaré pour représenter les premiers ordres des modes transversaux. Pour établir cette représentation, ils définissent de nouveaux paramètres de Stokes où les mode Laguerre-Gauss jouent le rôle de la polarisation circulaire et les modes Hermite-Gauss la polarisation linéaire.

La sphère de Poincaré est représentée sur la Figure 1. Nous pouvons iden-

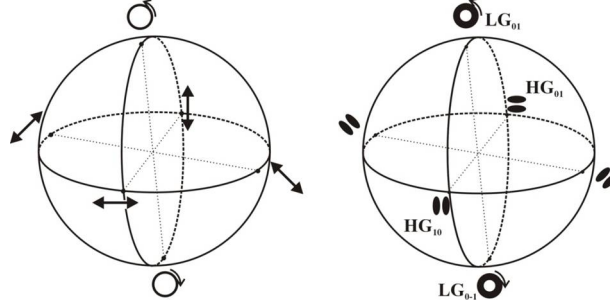


FIGURE 1 – Sphère de Poincaré et modes transversaux

tifier les vecteurs unitaires de la base de polarisation selon leur orientation, en notant  $\epsilon_H$  le vecteur orienté horizontalement et  $\epsilon_V$  celui orienté verticalement. De façon similaire, on note  $\psi_h, \psi_v$  les mode transversaux  $HG_{10}$  et  $\epsilon_H$ , respectivement, mettant ainsi en exergue leur orientation naturelle. Le couple de mode  $\{\psi_h, \psi_v\}$  forme une base de l'espace des mode transversaux du premier ordre. En combinant les degrés de liberté de spin-orbite, on peut définir un mode arbitraire de spin-orbit  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  du champs électromagnétique [3] de la façon suivante :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \alpha\psi_h(\mathbf{r})\epsilon_H + \beta\psi_h(\mathbf{r})\epsilon_V + \gamma\psi_v(\mathbf{r})\epsilon_H + \delta\psi_v(\mathbf{r})\epsilon_V. \quad (1)$$

La similarité avec la structure mathématique des états de Bell [4] nous permet de définir un ensemble de 4 modes MNS comme des modes de Bell, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\Phi+}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_h(\mathbf{r})\epsilon_H + \psi_v(\mathbf{r})\epsilon_V], \\ \mathbf{E}_{\Phi-}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_h(\mathbf{r})\epsilon_H - \psi_v(\mathbf{r})\epsilon_V], \\ \mathbf{E}_{\Psi+}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_h(\mathbf{r})\epsilon_V + \psi_v(\mathbf{r})\epsilon_H], \\ \mathbf{E}_{\Psi-}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_h(\mathbf{r})\epsilon_V - \psi_v(\mathbf{r})\epsilon_H]. \end{aligned} \quad (2)$$

Ces modes forment une base alternative pour l'espace des modes transversaux de premier ordre.

## 2.1 Production Expérimentale de Modes Spin-Orbites

Pour le degré de liberté de polarisation, les techniques appliquées sont relativement simples. Nous avons une source Laser qui nous donne un faisceau déjà assez bien polarisé. Même si ce n'est pas le cas, nous pouvons séparer les deux composantes de polarisation du faisceau à l'aide d'un séparateur polariseur (PBS). En partant d'un faisceau dans un état de polarisation bien défini, il est possible de manipuler sa polarisation avec une lame demi-onde (HWP) et une lame quart-d'onde (QWP). En fait, avec une lame QWP et une lame

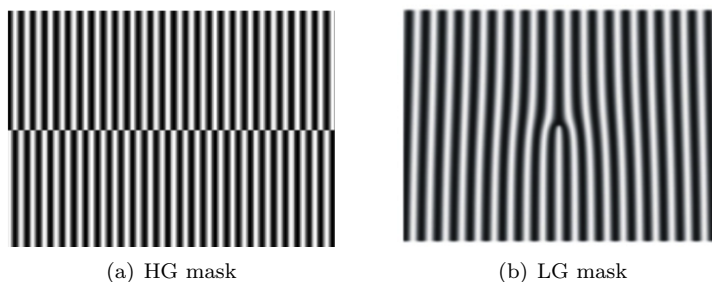


FIGURE 2 – Masques

HWP, il est possible d'effectuer une opération unitaire quelconque sur l'état de polarisation [5].

Pour manipuler les degrés de liberté orbitaux, nous devons, dans un premier temps, être capable de générer les modes avec lesquels nous travaillerons, c'est à dire les modes de premier ordre HG et LG. Une possibilité, parmi d'autres, pour obtenir ces modes est de fabriquer des masques holographiques, qui une fois placés sur la chemin du faisceau, permettent de générer le mode désiré. Il y a plusieurs type de masques, qui peuvent être produits à l'aide de techniques différentes [6, 7]. L'idée générale est de créer une figure d'interférence du profil désiré avec un faisceau de référence, en général une onde plane. La figure est générée numériquement à partir d'une description analytique du mode. Le résultat final est la densité de distribution du carré du module de la somme des amplitudes des faisceaux qui interfèrent. La figure d'interférence calculée peut être normale ou "incliné", si les faisceaux sont incidents avec un angles relatif. Dans le second cas, le faisceau généré se propagera dans une direction différente de la direction incidente, reconstruisant la géométrie correspondant à la génération de l'hologramme.

La figure d'interférence peut être miniaturisée et imprimée sur un microfilm, qui constitue un masque en amplitude. Le coefficient de transmission en chaque point du masque dépend de l'amplitude de l'interférence. Il est plus simple de produire un coefficient de transmission binaire, de telle sorte que le masque est opaque là où l'amplitude est supérieure à 0.5 et transparent ailleurs. Cette figure binaire peut aussi être gravée pour obtenir un masque de phase, en remplaçant les zones opaques et transparentes en zones épaisses et fines, formant ainsi un relief tel que la propagation à travers les zones épaisses induisent une différence de phase de  $\pi$  par rapport à la propagation à travers les zones fines.

Il est possible de produire des masques qui génèrent à la fois les modes LG and HG, et leur profils transversaux sont représentés sur les figures 2(a) et 2(b). Une fois un mode de départ défini, nous pouvons obtenir les autres mode en effectuant certaines manipulations. Un façon de transformer un mode transversal d'un faisceau est d'utiliser un prisme de Dove [8]. A l'intérieur du prisme, le faisceau subit successivement une réfraction, une réflexion totale puis de nouveau une réfraction sur la face de sortie. L'effet est d'inverser l'image par rapport au plan de réflexion. Donc, si le prisme est tourné d'un angle  $\theta$  par rapport à la verticale, il réfléchira l'image avec une rotation apparente de  $2\theta$ .

## 2.2 Quantification des Modes Spin-Orbites

Dans une description quantique de la lumière, le champ électromagnétique est quantifié nous devons donc définir les modes de spin-orbite décrits par l' Eq. (1) dans ce contexte.

Le développement en ondes planes est le plus simple, mais il n'est pas très physique, car le front d'onde dans chacun de ces modes est infini. Comme nous travaillons avec des faisceaux laser, nous voulons développer l'opérateur champ électrique en termes de modes LG ou de modes HG, qui obéissent à l'équation paraxiale. Nous pouvons nous limiter à un champ monochromatique dans le but de modéliser les expériences décrites ici. Dans ce cas, nous pouvons réécrire l'opérateur champ électrique pour une fréquence donnée  $\omega$  comme suit :

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\lambda, \sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L}} \boldsymbol{\epsilon}_{\sigma} u_{\lambda}(\mathbf{r}) \hat{a}_{\lambda\sigma} e^{-i\omega(t-z/c)} \quad (3)$$

Les amplitudes des modes de portent les indices  $\sigma$  pour la polarisation et  $\lambda$  pour la distribution transversale.  $\lambda$  peut représenter un ensemble d'indices, selon le choix de la base transversale. Si nous choisissons les modes HG,  $\lambda = \{m, n\}$  avec  $m, n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ , si nous choisissons la base LG,  $\lambda = \{p, l\}$  avec  $p = 0, 1, 2, \dots, \text{infy}$  et  $l$  peut être n'importe quel nombre entier compris entre  $-p$  à  $p$ .

Dans ce travail, nous nous limitons au sous-espace engendré par modes transversaux du premier ordre. En y ajoutant la polarisation, nous obtenons un espace de dimension 4, pour lequel on peut choisir plusieurs bases différentes. La première et peut-être la plus simple est celle qui est utilisée dans l'équation Eq. (1). Dans ces conditions, l'opérateur champ électrique est exprimée par :

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \psi_h(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_H \hat{a}_{hH} + \psi_h(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_V \hat{a}_{hV} + \psi_v(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_H \hat{a}_{vH} + \psi_v(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_V \hat{a}_{vV}. \quad (4)$$

Une alternative importante est la base de Bell, présentée dans l'équation Eq. (2), qui est formée par quatre modes différents maximalelement intriqués. Dans cette base, l'écriture de l'opérateur champ est la suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_h(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_H + \psi_v(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_V] \hat{a}_{\Phi+} + \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_h(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_H - \psi_v(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_V] \hat{a}_{\Phi-} \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_h(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_V + \psi_v(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_H] \hat{a}_{\Psi+} + \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_h(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_V - \psi_v(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_H] \hat{a}_{\Psi-}. \quad (5) \end{aligned}$$

Les modes de spin-orbite permettent le codage de deux qubits dans un photon, et avec cette ressource supplémentaire nous avons été en mesure d'effectuer un protocole BB84 de distribution de clés quantique sans repère de référence partagé.

## 2.3 Cryptographie quantique avec des modes Spin-Orbite

Le problème de la communication sécurisée a existé bien avant la théorie de l'information quantique. Avec l'avènement des algorithmes quantiques pour le traitement de l'information, le problème de la cryptographie a été touché à deux reprises : d'une part, les schémas de cryptographie modernes fondés sur la difficulté de factoriser de grands nombres a été menacé par la possibilité d'un algorithme quantique de factorisation beaucoup plus rapide. D'autre

part, l'information quantique a fourni une solution nouvelle au problème, avec le protocole de distribution quantique de clés fondamentalement sécurisé. Une introduction au problème de la cryptographie quantique se trouve dans [4].

Nous présentons une proposition pour effectuer le protocole BB84 de distribution de clés sans repère partagé entre les deux parties. Cette mise en œuvre s'inspire de l'idée des sous-espace sans dé-cohérence [9]. La proposition explore les modes de polarisation et les modes transversaux du faisceaux laser.

### 3 Inégalité de Bell en Spin-Orbite

Dans une troisième partie, nous proposons un critère de type inégalité de Bell, qui constitue une condition suffisante pour caractériser la non-séparabilité en spin-orbite d'un faisceau optique classique. Nous montrons ensuite que la notion de modes spin-orbite séparable ou non-séparable constitue une analogie pertinente avec la notion d'intrication d'états quantiques et permet l'étude de certaines de ses propriétés fondamentales. Enfin, une implémentation expérimentale de cette simulation de tests de Bell avec des faisceaux optiques classiques est présentée, ainsi que sa description détaillée dans le cadre de l'optique quantique.

Nous discutons de l'analogie entre le contexte habituel des inégalités de Bell en mécanique quantique et de notre contrepartie classique spin-orbite. Notre inégalité spin-orbite peut détecter la non-séparabilité des degrés de liberté de spin-orbite d'un faisceau laser *classique*. Nous utilisons la définition de modes spin-orbite séparables et non séparables présentée dans la section 1 et nous présentons notre dispositif expérimental pour la mesure d'une telle inégalité ainsi que les résultats obtenus [10].

Le concept des inégalités de Bell prend sa racine dans la célèbre équation d'Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) Gedankenexperiment [11, 12]. Dans cet article, les auteurs soulignent une « action fantôme à distance » comme Einstein l'appelait, qui découlerait des prédictions de la mécanique quantique (QM). Ils étaient en train de mettre en évidence, pour la première fois, les étranges propriétés des états intriqués. A l'époque de la parution de l'article EPR, la mécanique quantique était encore mise en doute, et la possibilité d'une théorie différente qui obéirait au réalisme local était encore envisagé. Depuis lors, il y a eu plusieurs expériences qui confirment les prédictions QM, elles s'appuient sur la violation des inégalités de Bell [13, 14, 15]. Actuellement, l'intérêt pour ce sujet n'est plus de confirmer QM (bien qu'il existe encore des lacunes à combler [16]), mais d'utiliser les inégalités de Bell comme d'un outil pour étudier de nouveaux systèmes physiques et d'établir leurs possibilités dans le domaine de l'information quantique.

La majorité des expériences proposées qui consistent à violer des inégalités de Bell s'appuient sur une *paire* systèmes quantiques intriquées, de sorte que chacun des systèmes puisse être envoyé loin de l'autre. La violation devient alors un véritable test de non-localité [17].

L'enchevêtrement des degrés de liberté de *particules* uniques a déjà été étudié dans [18], où une forme d'inégalité de Bell a été violée en enchevêtrant le spin et la trajectoire d'un faisceau de neutrons uniques dans un interféromètre. Le même type de schéma de particule unique a été proposé pour les configurations photoniques en utilisant la polarisation et les modes transversaux (spin-orbite) [19]. La simulation d'inégalités de avec de l'optique classique ont également

été examinés dans des guides d'ondes [20] et des systèmes d'imagerie [21]. La capacité de produire et de transformer des faisceaux transportant du moment angulaire orbital a permis le développement de techniques importantes ayant des applications potentielles pour l'information quantique [22, 23]. Nous avons proposé et testé expérimentalement une configuration qui permet d'étudier la séparabilité spin-orbite d'un faisceau laser [10].

Nous utilisons la définition de modes séparables et non séparables comme dans la Ref. [3] et définit à la section 1. Les modes séparables sont ceux qui peuvent être écrits sous la forme  $\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}$ , où  $\psi(\mathbf{r})$  est une fonction à valeur complexe des coordonnées spatiales transversales (mode transversal) et  $\boldsymbol{\epsilon}$  est un vecteur de polarisation normalisée.

Un des critères pour la séparabilité des modes de spin-orbite est définie comme suit : prenons un mode spin-orbite arbitraire

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = A_1\psi_v(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_V + A_2\psi_v(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_H + A_3\psi_h(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_V + A_4\psi_h(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_H, \quad (6)$$

où  $A_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ) sont des nombres complexes vérifiant  $\sum_{i=1}^4 |A_i|^2 = 1$ . Soit  $C$  défini par  $C = 2|A_2A_3 - A_1A_4|$ , Alors pour des modes non séparables, on a l'inégalité  $0 < C \leq 1$ , où  $C = 1$  correspond à des modes maximalement non-séparables et  $C = 0$  correspond à des modes séparables.

Pour obtenir une inégalité en spin-orbit, nous utilisons une base tournée pour réécrire le mode maximalement non-séparable :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{MNS}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \cos[(\beta - \alpha)](\psi_{\beta+}(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_{\alpha+} + \psi_{\beta-}(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_{\alpha-}) \\ &+ \sin[(\beta - \alpha)](\psi_{\beta-}(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_{\alpha+} - \psi_{\beta+}(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_{\alpha-}) \}. \end{aligned} \quad (7)$$

Soit  $I_{(\pm)(\pm)}(\alpha, \beta)$  les carrés des amplitudes des composantes respectives des  $\psi_{\beta(\pm)}(\mathbf{r})\boldsymbol{\epsilon}_{\alpha(\pm)}$  dans le développement de  $\mathbf{E}_{MNS}(\mathbf{r})$  dans la base tournée. Ils jouent le même rôle que les probabilités de détection dans le contexte des inégalités de Bell en mécanique quantique. A cause de l'orthonormalité de  $\{\psi_{\beta+}, \psi_{\beta-}\}$  et de  $\{\boldsymbol{\epsilon}_{\alpha+}, \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha-}\}$ , il est facile de montrer que

$$I_{++}(\alpha, \beta) + I_{+-}(\alpha, \beta) + I_{-+}(\alpha, \beta) + I_{--}(\alpha, \beta) = 1. \quad (8)$$

En continuant l'analogie avec l'inégalité CHSH [24] pour des particule de spin 1/2, on peut définir

$$M(\alpha, \beta) = I_{++}(\alpha, \beta) + I_{--}(\alpha, \beta) - I_{+-}(\alpha, \beta) - I_{-+}(\alpha, \beta) = \cos[2(\beta - \alpha)], \quad (9)$$

et obtenir une inégalité de type Bell pour la quantité

$$S = M(\alpha_1, \beta_1) + M(\alpha_1, \beta_2) - M(\alpha_2, \beta_1) + M(\alpha_2, \beta_2). \quad (10)$$

Pour tout mode séparable, la quantité  $S$  est bornée :  $-2 \leq S \leq 2$ . Ceci est attendu, car avoir des états bien définis en polarisation et mode transversal est équivalent à la condition du Réalisme Local sur les variables quantiques, puisque les résultats des mesures sont prédéterminées même si on ne les connaît pas, et le choix de la base pour une variable n'interférera jamais avec l'autre. Néanmoins, cette condition peut être violée pour des modes non-séparables. Une violation maximale de cette dernière inégalité, correspondant à  $S = 2\sqrt{2}$ , peut être obtenu par l'ensemble  $\alpha_1 = \pi/8$ ,  $\alpha_2 = 3\pi/8$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = \pi/4$  de façon analogue à l'inégalité CHSH.

### 3.1 Mesures de Bell

Le dispositif expérimental pour observer une violation maximale de l'inégalité (10) est présenté sur la Figure 3 et est composée de 2 étapes : préparation

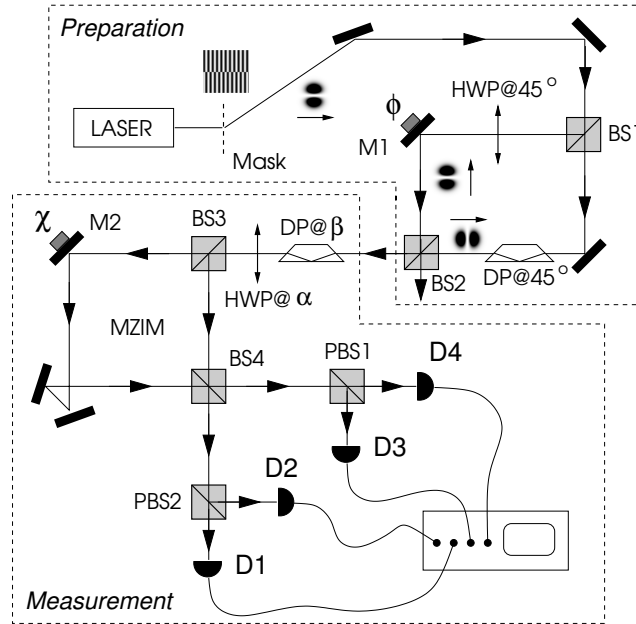


FIGURE 3 – Dispositif expérimental pour la violation de l'inégalité de Bell, en utilisant un faisceau classique non-séparable. HWP : lame demi-onde. DP : Prisme de Dove. (P)BS : lame séparatrice (polarisante). D1,D2,D3 et D4 : détecteurs de photo-courant.

du mode maximalement non-séparable et la mesure des intensités  $I_{(\pm)(\pm)}(\alpha, \beta)$ .

Nous pouvons tester la violation de l'inégalité de non-séparabilité en faisant des mesures dans les bases  $(\alpha_1, \beta_1)$ ,  $(\alpha_1, \beta_2)$ ,  $(\alpha_2, \beta_1)$  et  $(\alpha_2, \beta_2)$  et obtenir les valeurs de  $M(\alpha, \beta)$  et donc de  $S$ . La valeur de  $S$  pour des valeurs arbitraires de  $\phi$  et de  $\chi$  est donnée par :

$$S(\chi, \phi) = 2\sqrt{2} \cos \chi \cos^2(\phi/2). \quad (11)$$

Donc, la violation maximale de l'inégalité de non-séparabilité est obtenue pour  $\phi = \chi = 0$ . Ceci est un résultat clé car il montre que des erreurs expérimentales sur les phases ne pourront que diminuer la violation, et non pas l'augmenter.

Les résultats sont présentés dans le tableau 1 et la valeur de  $S$  obtenu pour le mode MNS est de  $2.10 \pm 0.03$ , qui viole donc l'inégalité de 3.3 déviations standards. Dans ce tableau nous avons aussi présenté nos résultats expérimentaux pour un mode séparable  $\psi_V(\mathbf{r})\epsilon_V$ , qui peut être obtenu simplement en bloquant le bras de l'interféromètre de préparation MZ, qui contient le prisme de Dove.

TABLE 1 – Mean values for  $M$  and  $S$  for maximally non-separable and separable modes.

	Maximally Non Separable	Separable
$\overline{M}(\alpha_1, \beta_1)$	$0.609 \pm 0.006$	$0.490 \pm 0.008$
$\overline{M}(\alpha_1, \beta_2)$	$0.486 \pm 0.009$	$0.000 \pm 0.005$
$\overline{M}(\alpha_2, \beta_1)$	$-0.522 \pm 0.004$	$-0.56 \pm 0.01$
$\overline{M}(\alpha_2, \beta_2)$	$0.482 \pm 0.009$	$0.000 \pm 0.004$
$\overline{S}$	$2.10 \pm 0.03$	$1.05 \pm 0.03$

### 3.2 l'Inégalité Pour des Modes Quantiques

Pour décrire notre expérience dans un cadre quantique, nous devons prendre en compte toutes les entrées possibles et décrire l'évolution des opérateurs champs électrique à l'intérieur du dispositif expérimental. En utilisant notre notation, les amplitudes des modes qui rentrent dans l'interféromètre sont  $\hat{a}_{\sigma\lambda}^i$  où l'indice  $i$  représente l'entrée,  $\sigma$  représente la polarisation et  $\lambda$  le mode transversal.

Les amplitudes des modes en sortie  $\hat{b}_{\mu\nu}^j$  sont une combinaison des amplitudes d'entrée avec les coefficients  $u_{j\mu\nu}^{i\sigma\lambda}$ . Donc, l'amplitude du champs  $\hat{\mathbf{E}}_j$  pour la sortie  $j$  est :

$$\hat{\mathbf{E}}_j = \sum_{\mu,\nu} \hat{b}_{\mu\nu}^j \boldsymbol{\epsilon}_\mu \psi_\nu e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}}, \quad (12)$$

où

$$\hat{b}_{\mu\nu}^j = \sum_{i,\sigma,\lambda} u_{j\mu\nu}^{i\sigma\lambda} \hat{a}_{\sigma\lambda}^i. \quad (13)$$

Comme les intensités sont des valeurs moyennes calculées sur les produits normalement ordonnés des opérateurs, tous les modes d'entrée qui sont dans l'état du vide dans vides ( $\hat{a}_{hV}^1$ ,  $\hat{a}_{vH}^1$ ,  $\hat{a}_{\sigma\lambda}^2$ ,  $\hat{a}_{\sigma\lambda}^3$ , and  $\hat{a}_{\sigma\lambda}^4$ ) ne contribueront pas. Les seules contributions non nulle à l'intensité normalisée détectée  $I_j = \langle \hat{\mathbf{E}}_j^\dagger \cdot \hat{\mathbf{E}}_j \rangle / I_0$  sont :

$$\begin{aligned} I_1 &= \langle \hat{b}_{hH}^{1\dagger} \hat{b}_{hH}^1 \rangle / I_0, \\ I_2 &= \langle \hat{b}_{vV}^{2\dagger} \hat{b}_{vV}^2 \rangle / I_0, \\ I_3 &= \langle \hat{b}_{vH}^{3\dagger} \hat{b}_{vH}^3 \rangle / I_0, \\ I_4 &= \langle \hat{b}_{hV}^{4\dagger} \hat{b}_{hV}^4 \rangle / I_0, \end{aligned} \quad (14)$$

où  $I_0 = \sum_{j=1}^4 \langle \hat{\mathbf{E}}_j^\dagger \cdot \hat{\mathbf{E}}_j \rangle$ .

Pour évaluer l'inégalité, en suivant la prescription CHSH, nous calculons  $M(\alpha, \beta) = I_1 + I_2 - I_3 - I_4$  pour les 4 bases et  $S$ , comme donnée par l'Eq. (10). Avec la description de l'inégalité ci-dessus, nous pouvons calculer la valeur théorique de  $S$  pour des états quantiques en entrée différents.

### 3.3 Etat Cohérent

Pour des mesures faites à l'intérieur de la longueur de cohérence, la source laser peut être décrite par un état cohérent. Nous utiliserons donc un état cohérent



pour représenter le faisceau laser intense préparé dans le mode maximalement non-séparable.

$$|\nu\rangle_{MNS} = e^{-\frac{|\nu|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n (a_{MNS}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle, \quad (15)$$

où  $a_{MNS}^\dagger$  est l'opérateur de création associé au mode MNS. Nous pouvons montrer que :

$$|\nu\rangle_{MNS} = |\nu/\sqrt{2}\rangle_{vV} |\nu/\sqrt{2}\rangle_{hH}, \quad (16)$$

qui est le produit d'un état cohérent pour les modes  $\psi_h(\mathbf{r})\epsilon_H$  et  $\psi_v(\mathbf{r})\epsilon_V$  avec une amplitude complexe  $\nu/\sqrt{2}$ . Nous pouvons utiliser cet état pour calculer les valeurs moyennes de l'Eq. (14), connaissant l'amplitude complexe  $\nu = \sqrt{I_0}$ , où  $I_0$  est l'intensité initiale du laser. Les résultats sont dans les équation ci-dessous :

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 &= \frac{1}{2} \cos^2(\beta - \alpha), \\ I_3 = I_4 &= \frac{1}{2} \sin^2(\beta - \alpha). \end{aligned} \quad (17)$$

Elles donnent  $S = 2\sqrt{2}$  pour le même choix de bases utilisées dans l'expérience, montrant que la violation maximale pour les deux états cohérent. Comme cet état est un produit tensoriel, la violation ne peut être attribuée à de l'enchevêtrement quantique. En effet, nous verrons, lorsque nous étudierons le cas du mélange statistique, que cette violation est en fait intimement liée à la notion de cohérence optique.

En effectuant le développement de  $|\nu\rangle_{MNS}$  en termes d'états de Fock, nous obtenons :

$$|\nu\rangle_{MNS} = e^{-\frac{|\nu|^2}{2}} [|0\rangle + \frac{\nu}{\sqrt{2}} (|1_{hH}0_{vV}\rangle + |0_{hH}1_{vV}\rangle) + \dots]. \quad (18)$$

Comme attendu, nous trouvons que la composante à un seul photon est maximalement intriquée. Donc, la post-sélection d'un seul photon à partir de  $|\nu\rangle_{MNS}$  suivit du dispositif expérimental utilisé ici permet d'étudier l'inégalité de Bell usuelle à partir de la mesure de probabilités.

### 3.4 Etat de Fock à Un Photon

Supposons maintenant que le mode d'entrée est préparé dans un état à un seul photon  $\hat{a}_{MNS}^\dagger|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1_{hH}0_{vV}\rangle + |0_{hH}1_{vV}\rangle)$ . Comme nous l'avons déjà mentionné, cet état est clairement enchevêtré. Dans ce régime, les mesures d'intensité se traduisent en termes de comptage de photons associés aux probabilités de détection dans chaque port de sortie du dispositif de mesure. Ces probabilités violent les inégalités de CHSH et on se retrouve dans le cadre « traditionnel » des expériences de Bell, dans ce cas pour les degrés de liberté spin-orbite de photons uniques [25]. Les probabilités de détection sont proportionnelles aux valeurs moyennes de l'opérateur intensité du champ, dans chaque port de sortie et peuvent être calculer facilement. Elle sont les mêmes que les intensité normalisée obtenues à l'Eq. (17), et donnant évidemment la même valeur  $S = 2\sqrt{2}$ .

### 3.5 Mélange statistique

Il est intéressant d'étudier la séparabilité en spin-orbite pour des mélange statistique de deux états cohérent comme :

$$\rho = \frac{1}{2}(|\nu/2, 0\rangle\langle\nu/2, 0| + |0, \nu/2\rangle\langle 0, \nu/2|) \quad (19)$$

où la première et la seconde étiquette dans le « ket » correspond aux modes respectifs  $hH$  et  $vV$ . Un tel mélange statistique peut modéliser deux faisceaux laser indépendants (avec une phase relative aléatoire) préparés dans les modes  $hH$  and  $vV$  et combinés dans une lame séparatrice. Le résultat pour le calcul des intensités de l'Eq. (14) est présenté ci-après :

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 &= \frac{1}{2}(\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta), \\ I_3 = I_4 &= \frac{1}{2}(\sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta). \end{aligned} \quad (20)$$

Pour les bases utilisées dans l'expérience, ils donnent  $S = \sqrt{2}$ , ce qui ne viole pas l'inégalité de non-séparabilité. Ceci montre que la cohérence optique joue un rôle important, puisque aucune violation n'est obtenue si les modes sont combinés de façon incohérentes.

La notion de mode spin-orbite séparables ou non-séparables en optique classique bâtit une analogie utile avec les états quantique enchevêtrés, permettant une étude de certaines de leurs propriétés mathématiques. Cette analogie a déjà été exploitée dans notre groupe pour étudier la nature topologique de l'évolution de la phase d'un état enchevêtré sous l'effet d'une opération unitaire [3]. Plusieurs tâches de calcul quantique exigent de l'enchevêtrement mais n'exigent pas de la non-localité, donc l'usage de plusieurs degrés de liberté d'une seule particule peut être utile. C'est ce type d'enchevêtrement, dont les propriétés peuvent être étudiées dans le régime de l'optique classique permettant de replacer des mesures basées sur des comptages de photons qui peuvent être très longues par des mesures de photo-courants qui sont beaucoup plus efficaces.

Bien que utile, les notions de non-séparabilité des modes ne doivent pas être confondues avec l'authentique enchevêtrement quantique. La discussion autour de l'Eq. (16) a été menée dans le but d'éviter cette confusion. D'autre part, son développement en états de Fock montre que sa composante à un photon présente de l'enchevêtrement qui est accessible via la post-sélection.

## 4 Inégalités de Bell avec des Corrélations Angulaires

Dans une dernière partie, nous nous intéressons à des inégalités de Bell, pour des états quantiques de systèmes à deux parties, qui sont caractérisées chacune par une variable continue de type angulaire (périodique). Nous montrons comment détecter la non-localité sur ce type de système, avec des inégalités qui sont similaires aux inégalités CHSH; inégalités qui avaient été développées originellement pour des systèmes de type spin 1/2. Nos inégalités, sont construites à partir de la mesure de la corrélation de fonctions angulaires. Nous montrons qu'elles sont en fait la superposition continue d'inégalités CHSH de type spin

1/2. Nous envisageons une possible implémentation expérimentale, où les corrélations mesurées sont les corrélations angulaires du profil transverse des photons intriqués.

Jusqu'à présent, la plupart des résultats sur l'enchevêtrement de variable continue et la non-localité ont été consacrées au cas de variables canoniques associées à des observables possédants un spectre non borné, comme la position et l'impulsion. Dans ce travail, nous considérons un autre type de CV. Nous traitons deux systèmes quantiques,  $A$  et  $B$ , caractérisés par des variables angulaires  $\theta_i \in [-\pi, \pi[$ ,  $i = A, B$  sur un cercle, au lieu d'une position  $q$  sur la droite réelle. La variable  $\theta$  peut représenter différentes variables physiques, et de la même façon, nous pouvons appliquer l'inégalité qui en résulte pour une variété de systèmes physiques. Par exemple,  $\theta$  peut être la position d'une particule sur un cercle, un rotateur linéaire dans un plan (par exemple, des molécules linéaire sur une surface [26]), ou l'angle des coordonnées polaire de localisation dans le plan transversal à la propagation d'un champ de photons. Nos idées peuvent également être appliquées à révéler la non-localité dans un système de particules diffusantes sur un réseau unidimensionnel (par exemple, un réseau optique) avec la période  $L$ . Dans ce cas, nous pouvons définir une variable angulaire liée à la position  $q$  de particules tel que  $\theta = \frac{2\pi q}{L}$ , et la position de la particule pourrait être l'observable à mesurer.

Le principal résultat présenté ici est la dérivation d'une égalité de type Bell pour des variables continues, sans recourir à la de la dichotomisation ou de la discretisation. La particularité des observables mesurées, utilisées ici, est qu'ils possède un spectre borné, de sorte que l'on peut bâtir un inégalité du type CHSH. L'inégalité se compose de mesures corrélées continue, réelles et périodiques de fonctions angulaires  $f_i(\theta_i)$  ( $i = A, B$ ). Comme nous le verrons, Les inégalités que nous obtenons possèdent des similarités avec les inégalité CHSH originales, puisque leur forme générale est donnée par une superposition continue d'inégalité CHSH. Exploiter la possibilité de révéler la non-localité en utilisant la mesure de variables angulaires peut s'avérer utile et bien adapter à une variété de systèmes quantiques allant de la physique atomique et moléculaire, en passant par les systèmes photoniques jusqu'au systèmes mesoscopiques de la physique de la matière condensée [27].

Nous considérons une mesure donnant un résultat continu et  $2\pi$ -périodique. En d'autre termes, l'espace de Hilbert sous-jacent est l'espace des fonction  $2\pi$ -périodique et de carré intégrable. Cet espace peut être engendré par la base  $\{|m_i\rangle; m_i \in \mathbb{Z}\}$ , qui est formée par l'ensemble des états propres du moment angulaire  $J_z|m_i\rangle = m_i|m_i\rangle$ , où  $J_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta}$  est l'opérateur qui représente la composante  $z$  su moment angulaire d'un faisceau, et  $i = A, B$  indiquent chacun des deux sous-système. Une autre base, continue celle là, est  $\{|\theta_i\rangle; \theta_i \in [-\pi, \pi[$ . Elle peut être obtenu à partir de la première à l'aide d'une transformée de Fourier :

$$\langle m_i | \theta_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_i \theta_i}. \quad (21)$$

dans cette représentation, un observable local peut être écrit de la façon suivante :

$$F_i = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_i f_i(\theta_i) |\theta_i\rangle \langle \theta_i|, \quad (22)$$

avec  $f_i(\theta_i)$  une fonction réelle, bornée et périodique.

Notre ligne directrice pour obtenir des inégalités de Bell à variables continues, est de bâtir un opérateur similaire à l'opérateur de Bell des inégalité CHSH [24], mais basé sur des mesures de corrélations d'un observable  $F_i$  pour chacune des particules. Il est clair, que l'hypothèse de spectre borné de l'opérateur  $H_i$  est préservée par toute transformation unitaire  $U_i(\phi_i)$  tel que :

$$F(\phi_i) = U_i(\phi_i)F_iU_i^\dagger(\phi_i). \quad (23)$$

Il est aussi évident de montrer que pour une théorie de locale à variables cachées (LHV), on a [28] :

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{B}(\phi_a, \phi'_a, \phi_b, \phi'_b) \rangle| &= |\langle F_A(\phi_a) \otimes F_B(\phi_b) + F_A(\phi'_a) \otimes F_B(\phi_b) \\ &+ F_A(\phi_a) \otimes F_B(\phi'_b) - F_A(\phi'_a) \otimes F_B(\phi'_b) \rangle| \leq 2, \end{aligned} \quad (24)$$

si la valeur maximale de  $f_i(\theta_i)$  est normalisée à 1. Quelles sont les conditions que les fonctions  $f_i(\theta_i)$  et les opérateurs unitairement transformés  $F_i(\phi_i)$  doivent satisfaire pour que l'inégalité (24) soit violée ? et permette donc des tests d'entrelacement et de non-localité quantique. Afin de répondre à cette question, nous nous focaliseront sur le cas particulier de  $f_i(\theta_i) = \cos(\theta_i)$  qui est une fonction qui peut être mesurée sur une variété de systèmes physiques. Les résultats que nous allons obtenir dans ce cas particulier peuvent aisément se généraliser au cas de toute fonction  $2\pi$ -périodique vérifiant la condition  $f(\theta) = -f(\theta - \pi) \forall \theta \in [0, \pi]$ .

Les observables  $C = F_i$  correspondant à  $f_i(\theta_i) = \cos(\theta_i)$ , peuvent être exprimés dans la base  $|m\rangle$ , comme suit :

$$C = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} (|m+1\rangle\langle m| + |m\rangle\langle m+1|). \quad (25)$$

en effet,

$$\langle m'|C|m\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im'\theta} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} e^{im\theta} d\theta = \frac{1}{2} [\delta_{m',m+1} + \delta_{m',m-1}]. \quad (26)$$

L'opérateur  $C$  a un spectre doublement dégénéré, les états propres états propres  $|\theta\rangle$  and  $|-\theta\rangle$  étant associés à la même valeur propre  $\cos \theta$ . Pour cet opérateur, nous introduisons un analogue de la rotation d'un système de spin 1/2 : l'opérateur unitaire  $e^{iJ_z^2\phi}$  (opérateur d'évolution pendant le temps  $t = 2\hbar\phi$ , d'une particule de masse unité et de moment angulaire  $J_z$ , contrainte à se déplacer sur un cercle). A partir de  $C$ , nous pouvons définir  $C(\phi_i) \equiv F_i(\phi_i)$  comme suit :

$$C(\phi) = e^{iJ_z^2\phi} C e^{-iJ_z^2\phi} = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i(2m+1)\phi} |m\rangle\langle m+1| + e^{-i(2m+1)\phi} |m+1\rangle\langle m|, \quad (27)$$

et pour un système bi-partite (particules  $A$  et  $B$ ), l'opérateur de Bell (Eq. 24) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\phi_a, \phi'_a, \phi_b, \phi'_b) &= C_A(\phi_a) \otimes C_B(\phi_b) + C_A(\phi'_a) \otimes C_B(\phi_b) \\ &+ C_A(\phi_a) \otimes C_B(\phi'_b) - C_A(\phi'_a) \otimes C_B(\phi'_b), \end{aligned} \quad (28)$$

où  $C_{A(B)}(\phi)$  sont des opérateurs définis comme dans l' Eq. (27) qui agissent sur l'espace de Hilbert de chacune des parties  $A(B)$ . Le spectre de  $C(\phi)$  ne

dépend pas de  $\phi$ . En diagonalisant  $C(\phi)$  on montre que son spectre est borné, avec  $|\langle C \rangle| \leq 1$ . Donc, pour une théorie LHV, l'inégalité  $|\langle \mathcal{B}(\phi_a, \phi'_a, \phi_b, \phi'_b) \rangle| < 2$  est toujours vérifiée. Toutefois, pour certaines valeurs des phases  $\phi_i$  il existe des états quantiques pour lesquelles cette inégalité est violée. Afin de montrer cela, nous calculons le spectre des opérateurs  $\mathcal{B}(\phi_a, \phi'_a, \phi_b, \phi'_b)$ . En fait, de tels spectres ne dépendent que des phases relatives  $\phi_a - \phi'_a$  et  $\phi_b - \phi'_b$  [29, 30]. On peut donc définir :

$$B(\xi_a, \xi_b) = B(\phi'_a - \phi_a, \phi'_b - \phi_b) \equiv \mathcal{B}(0, \phi'_a - \phi_a, 0, \phi'_b - \phi_b) = e^{iJ_{A_z}^2 \phi_a} \otimes e^{iJ_{B_z}^2 \phi_b} \mathcal{B}(\phi_a, \phi'_a, \phi_b, \phi'_b) e^{-iJ_{A_z}^2 \phi_a} \otimes e^{-iJ_{B_z}^2 \phi_b}. \quad (29)$$

$B(\xi_a, \xi_b)$  et  $\mathcal{B}(\phi_a, \phi'_a, \phi_b, \phi'_b)$  sont relié par une transformation unitaire. Donc, la variation de seulement deux phases  $(\xi_a, \xi_b)$  est suffisante pour explorer les spectres de tous les opérateurs  $\mathcal{B}(\phi_a, \phi'_a, \phi_b, \phi'_b)$ .

#### 4.1 Espace de Dimension Finie

Dans une première approche pour étudier la dépendance des opérateurs  $B(\xi_a, \xi_b)$  en fonction des phases  $\xi_i$ , nous discrétisons les résultats possibles des mesures de corrélations. Cette première étape nous donnera une intuition des propriétés des opérateurs de Bell, car elle permet d'effectuer des calculs numériques. Pour cela, nous considérons que mes états quantiques mesurés appartiennent à un espace de dimension finie engendrée par la base  $\{|m\rangle; m \in \mathbb{Z}, |m| \leq M\}$ . Nous définissons donc la projection  $C^{(M)}(\xi)$  de  $C(\xi)$  dans cet espace restreint :

$$C^{(M)}(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{|m| \leq M} e^{i(2m+1)\xi} |m\rangle \langle m+1| + e^{-i(2m+1)\xi} |m+1\rangle \langle m| \quad (30)$$

et  $C^{(M)} = C^{(M)}(0)$ .

Considérer cet espace restreint nous donnera une idée du cas continu qui sera exploré ensuite et permet aussi de calculer explicitement les  $2M+1$  états propres  $|\lambda_k\rangle$  et valeurs propres correspondantes de l'opérateur  $C^{(M)}$ , nous fournissant une image plus intuitive physique des opérateurs considérés. Il nous permet en outre, l'étude numérique du spectre de l'opérateur  $B^{(M)}(\xi_a, \xi_b)$  et de sa dépendance avec les phases. On définit  $b_{\max}^{(M)}(\xi_a, \xi_b)$  comme la plus grande des valeurs propres de  $B^{(M)}(\xi_a, \xi_b)$ . Nous voyons sur la figure Fig. 4 que pour  $M=2$  et  $M=5$ ,  $b_{\max}^{(M)}(\xi_a, \xi_b)$  atteint son maximum au point  $b_{\max}^{(M)}(\xi_a, \xi_a)$ . Nous concluons donc que notre opérateur de Bell discrétisé agit comme un témoins d'intrication [31, 32] pour un système bipartite à  $2M+1$  niveaux, puisque  $\text{Tr}(B^{(M)} \rho_{AB}) > 2\lambda_{\max}^2$  seulement si  $\rho_{AB}$  est un état enchevêtré.

L'étude des opérateurs discrétisés nous a montré que le point  $\xi_a = \xi_b = \pi/2$  est celui qui nous donne le maximum de contraste entre  $b_{\max}(\xi_a, \xi_b)$  et le seuil de violation qui est de 2. Cette propriété semble vraie pour toutes les valeurs de  $M$  et en conséquence aussi pour le cas continu.

#### 4.2 Variables Continues

pour étudier le cas des variables continues (où les opérateurs ont des spectres continus), nous nous focaliserons sur le point  $\xi_a = \xi_b = \pi/2$ , qui optimise le contraste et nous chercherons à déterminer les états non locaux qui violent

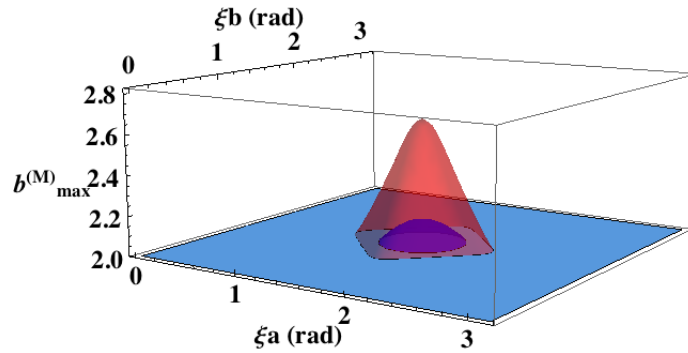


FIGURE 4 – Graphe de la plus grande des valeurs propres de  $B^{(M)}(\xi_a, \xi_b)$ ,  $b_{\max}^{(M)}$ , dans la région de violation ( $b_{\max}^{(M)} > 2$ ), en fonction de  $\xi_a$  et  $\xi_b$  pour  $M = 2$  (graphe intérieur en bleu) et  $M = 5$  (extérieure en rouge).

cette inégalité pour ce choix particulier des valeurs des phases. L'opérateur de Bell  $B_m \equiv B(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  peut être écrit comme la somme directe suivante :

$$B_m = \int_0^\pi \int_0^\pi d\theta d\theta' \cos \theta \cos \theta' X(\theta, \theta') \quad (31)$$

où

$$X(\theta, \theta') = [\sigma_A^z(\theta) \otimes \sigma_B^z(\theta') - \sigma_A^y(\theta) \otimes \sigma_B^z(\theta') - \sigma_A^z(\theta) \otimes \sigma_B^y(\theta') - \sigma_A^y(\theta) \otimes \sigma_B^y(\theta')], \quad (32)$$

et  $\sigma_A^j(\theta)$  et  $\sigma_B^j(\theta)$  ( $j = x, y, z$ ) constituent un ensemble continu d'opérateurs du type opérateurs de Pauli, et satisfont des propriétés analogues à celle des matrices de Pauli. En conséquence, les opérateurs  $X(\theta, \theta')$  sont orthogonaux et complètement analogues aux opérateurs usuel à 4 dimensions des équations CHSH à 2-qubits.

Nous montrons que l'opérateur de Bell  $B_m$  est une somme directe et continue d'opérateurs de Bell CHSH à 2 qubits  $X(\theta, \theta')$ , pondérée par les facteurs  $\cos \theta \cos \theta'$ . Grâce à la propriété d'orthogonalité des  $X(\theta, \theta')$ , déterminer le spectre et les états propres de  $B_m$  est une opération simple. En effet, pour chaque  $\theta$  et  $\theta'$  il suffit de diagonaliser la matrice  $4 \times 4$  représentant  $X(\theta, \theta')$ . Nous pouvons donc écrire l'expression de  $B_m$  sous une forme diagonale :

$$B_m = 2\sqrt{2} \sum_{n=\pm 1} n \int_0^\pi \int_0^\pi d\theta d\theta' \cos \theta \cos \theta' |\chi^n(\theta, \theta')\rangle \langle \chi^n(\theta, \theta')| \quad (33)$$

où :

$$|\chi^{\pm 1}(\theta, \theta')\rangle = \frac{1}{N_\pm} [|\theta\rangle \otimes |\theta'\rangle + |\bar{\theta}\rangle \otimes |\bar{\theta}'\rangle \mp i(\sqrt{2} \mp 1) (|\theta\rangle \otimes |\bar{\theta}'\rangle + |\bar{\theta}\rangle \otimes |\theta'\rangle)] \quad (34)$$

sont les vecteurs propres de  $X(\theta, \theta')$  et de  $B_m$  associés au valeur propres non nulles et où  $N_\pm = 2 [(2 \mp \sqrt{2})]^{1/2}$  est une facteur de normalisation tel que :

$$\langle \chi^{n'}(\theta'_a, \theta'_b) | \chi^n(\theta_a, \theta_b) \rangle = \delta_{nn'} \delta(\theta'_a - \theta_a) \delta(\theta'_b - \theta_b). \quad (35)$$

Le même procédé peut être appliqué aux autres observables reliés à  $C$  et  $C(\frac{\pi}{2})$  par une transformation unitaire [29]. Par conséquent, le spectre de  $B_m$  est continu et égal à  $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ .  $|\langle B_m \rangle|$  est donc borné par  $2\sqrt{2}$  comme dans le cas de l'inégalité CHSH à 2 qubits. Les valeurs extrêmes  $\pm 2\sqrt{2}$  ne peuvent pas être exactement atteinte par des états physiquement acceptable, puisqu'ils sont composés d'états parfaitement orientés, à savoir les états  $|0\rangle$  et  $|\pi\rangle$ , qui correspondent à des fonction de Dirac en représentation angulaire ( $\langle \theta | \theta' \rangle = \delta(\theta - \theta')$ ). Toutefois, ils peuvent être approchés avec une précision arbitraire en considérant des paquets d'onde localisés. Il est donc intéressant d'étudier la relation entre la localisation autour de  $\theta = 0, \pi$  du profil transversal et la violation des inégalités de Bell, c'est le sujet de la section suivante.

### 4.3 Etats Violant l'Inégalité de Bell

Afin de bâtir explicitement des état physiquement acceptable violant notre inégalité de Bell, nous considérons une superposition d'état propres  $|\chi^{+1}(\theta, \theta')\rangle$ , avec  $\theta$  and  $\theta'$  localisés autour de  $\theta = \theta' = 0$ , qui correspond au point où  $B_m$  prend sa valeur propre maximale. un exemple d'un tel paquet d'onde est donné par :

$$|\Psi\rangle = \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\theta' g_a(\theta) g_b(\theta') |\chi^{+1}(\theta, \theta')\rangle. \quad (36)$$

où  $g_a(\theta)$  et  $g_b(\theta)$  sont des fonctions  $L^2([0, \pi], d\theta)$  normalisées avec des supports contenant le point  $\theta = 0$ . La valeur moyenne de  $B_m$  pour cet état est :

$$\langle B_m \rangle_\Psi = 2\sqrt{2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\theta' \cos \theta \cos \theta' |g_a(\theta)|^2 |g_b(\theta')|^2 \quad (37)$$

Le paquet d'onde Eq. (36) peut être produit en effectuant une combinaison linéaire de paquets d'ondes à une particule :

$$|g\rangle = \int_0^\pi d\theta g(\theta) |\theta\rangle \text{ and } |\bar{g}\rangle = \int_0^\pi d\theta g(\theta) |\bar{\theta}\rangle, \quad (38)$$

en prenant les mêmes coefficients qu'à l' Eq. (34) :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}N_+} [ (|g_a\rangle \otimes |g_b\rangle + |\bar{g}_a\rangle \otimes |\bar{g}_b\rangle) - i(\sqrt{2}-1) (|g_a\rangle \otimes |\bar{g}_b\rangle + |\bar{g}_a\rangle \otimes |g_b\rangle) ]. \quad (39)$$

On peut maintenant obtenir une relation simple entre la localisation du paquet d'ondes et le degré de violation de l'inégalité de Bell. Pour cela, nous prenons pour  $g(\theta)$  le cas idéal d'une fente angulaire d'ouverture  $\delta\theta$ , comme représenté sur la figure Fig. 5, dont l'expression est simplement donnée par :

$$g_a(\theta) = g_b(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\delta\theta}} & \text{si } \theta < \delta\theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (40)$$

Ce masque peut être orienté soit avec la fente entre  $\theta = 0$  and  $\theta = \delta\theta$  soit son symétrique par rapport à l'origine, entre  $\theta = -\pi$  and  $\theta = -\pi + \delta\theta$ , pour créer des superpositions  $|g\rangle$  et  $|\bar{g}\rangle$ . Grâce à la forme de ce masque et à son orientation, l'état  $|\Psi\rangle$  donné par l'Eq. (39), englobe les état propres de  $B_m$  associés aux valeurs propres de valeurs proche du maximum  $2\sqrt{2}$ .

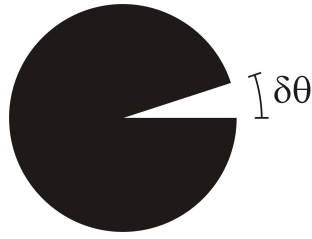


FIGURE 5 – Masque en amplitude avec une ouverture angulaire  $\delta\theta$ .

A l'aide de l' Eq. (37), la valeur de  $\langle B_m \rangle_\Psi$  peut être écrite en fonction de l'ouverture  $\delta\theta$  du masque, comme suit :

$$\langle B_m \rangle_\Psi = 2\sqrt{2} \left( \frac{\sin \delta\theta}{\delta\theta} \right)^2. \quad (41)$$

Cette dernière équation, montre que l'on peut obtenir des valeurs de  $\langle B_m \rangle_\Psi > 2$ , qui violent l'inégalité de Bell, avec une ouverture  $\delta\theta < 18^\circ$ , ce qui n'est pas une restriction trop forte. Il existe donc un ensemble assez large d'états purs à deux particules, comportant des superposition cohérentes de paquets d'ondes localisés autour de  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  qui violent l'inégalité de Bell que nous avons obtenue.

#### 4.4 Proposition de Mise en œuvre Expérimentale avec des Photons

Notre proposition consiste à mesurer des corrélations entre des observables possédant un spectre continu, qui sont reliés à la distribution azimutal des fronts d'onde de deux photons enchevêtrés. Pour la création des états non-locaux, nous utilisons l'enchevêtrement en polarisation généré lors d'un processus de conversion paramétrique avec deux cristaux adjacents puis nous transférons cet enchevêtrement sur le degré de liberté correspondant au le profil transversal.

Pour effectuer la mesure de l'opérateur de Bell, nous devons être capable de mesurer les corrélation  $C(\phi_A, \phi_B) = \langle C_A(\phi_A)C_B(\phi_B) \rangle$ . Ceci peut être accompli avec deux interféromètre de Mach-Zender, représentés sur la figure Fig. (6), un pour chacun des trajets des photons. L'orientions des prismes de Dove dans chacun des interféromètres permet d'ajuster les valeurs des phases  $\phi_A$  et  $\phi_B$ . Nous avons donc quatre sorties possibles, chacune donnant une intensité différente. Afin d'obtenir une mesure des corrélations entre les opération d'orientation avec des valeurs arbitraires de  $\phi_A$  and  $\phi_B$ , ces intensités doivent être combinées. Pour produire expérimentalement l'état enchevêtré  $|\Psi\rangle$  donné par l'Eq. (39), nous proposons le dispositif avec un cristal non linéaire comme source de photons enchevêtrés qui peuvent être ensuite manipulés pour obtenir l'état désiré.

Une fois que nous sommes capable de créer l'état  $|g\rangle$  et l'état  $|\bar{g}\rangle$  en utilisant, par exemple, un masque comme celui suggéré par l' Eq. 40, nous devons trouver un moyen de manipuler cet état pour créer l'état  $|\Psi\rangle$ . Une façon raisonnablement simple de manipuler des photons et de créer de l'enchevêtrement est d'utiliser leur degré de liberté de polarisation. La conversion paramétrique spontanée de deux cristaux adjacents (type I) permet la génération d'une état enchevêtré de la



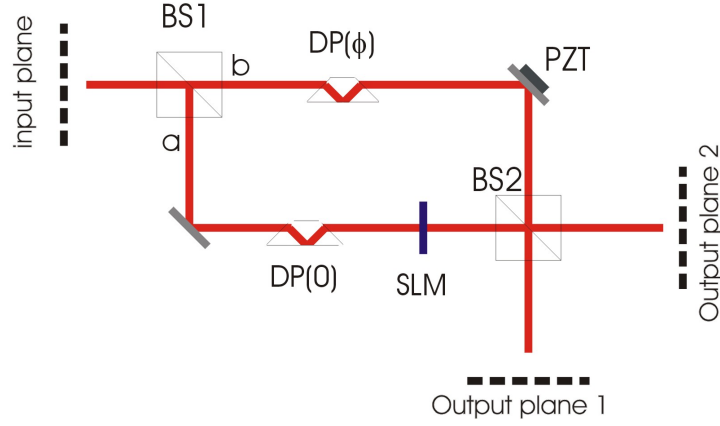


FIGURE 6 – Interféromètre de Mach-Zehnder pour la mesure de l’opérateur  $C(\phi)$ . DP : Prisme de Dove. BS : lame séparatrice. SLM : modulateur de lumière dans l’espace.

forme  $\frac{1}{\sqrt{2}} [|H\rangle|H\rangle + |V\rangle|V\rangle]$ , si les cristaux sont pompés par un laser polarisé à  $45^\circ$  [33]. Puisque dans ce cas l’enchevêtrement créé est du à l’ignorance à l’égard du cristal qui a généré la paire de photon, l’autre degré de liberté photonique, l’OAM, n’est pas enchevêtré. L’état complet de la paire de photon est donc :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [|H\rangle_A|H\rangle_B + |V\rangle_A|V\rangle_B] |\Psi_o\rangle_A|\Psi_o\rangle_B, \quad (42)$$

où  $|\Psi_o\rangle_i$ ,  $i = A, B$  sont des états gaussiens. Nous utilisons ensuite des lames d’onde pour créer un état enchevêtré en polarisation qui possède les mêmes coefficients que l’état  $|\Psi\rangle$ , de la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N_+} [|H\rangle_A|H\rangle_B + |V\rangle_A|V\rangle_B + \\ & -i(\sqrt{2} - 1) (|V\rangle_A|H\rangle_B + |H\rangle_A|V\rangle_B)] |\Psi_o\rangle_A|\Psi_o\rangle_B. \end{aligned} \quad (43)$$

La transition de l’Eq. (42) à l’Eq. (43) exige l’application de deux transformations unitaires locale  $U_A$  et  $U_B$  effectuées à l’aide de lame d’onde choisie de façon appropriée, comme présenté sur le Fig. 7. L’étape suivante consiste à transformer l’état gaussien en  $|g\rangle$  ou en  $|\bar{g}\rangle$ , suivant l’état de polarisation. Après cette transformation, un état hyper-enchevêtré est généré :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N_+} [|H\rangle_A|g\rangle_A|V\rangle_B|g\rangle_B + |V\rangle_A|\bar{g}\rangle_A|H\rangle_B|\bar{g}\rangle_B + \\ & -i(\sqrt{2} - 1) (|V\rangle_A|\bar{g}\rangle_A|V\rangle_B|g\rangle_B + |H\rangle_A|g\rangle_A|H\rangle_B|\bar{g}\rangle_B)]. \end{aligned} \quad (44)$$

L’état finale est de transformé la polarisation de telle sorte qu’elle devienne factorisable, séparable du degré de liberté OAM. Nous avons donc l’état résultant

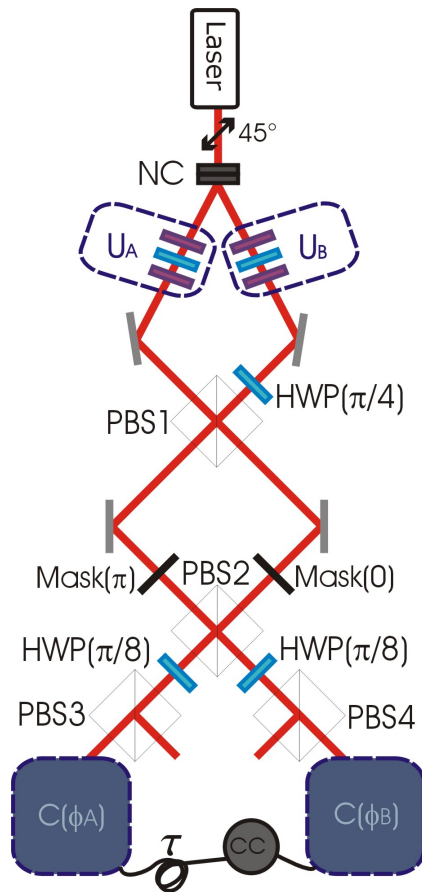


FIGURE 7 – Dispositif proposé pour la création de l'état  $|\Psi\rangle$  et la mesure des corrélations  $C_A(\phi_A)C_B(\phi_B)$ . NC : cristaux non linéaires de type I. HWP : lame demi-onde. PBS : lame séparatrice polarisante. CC : Comptage en coïncidence.

$|\Psi\rangle$  et pouvons, en principe, l'utiliser pour tester l'inégalité de Bell que nous avons proposé, à l'aide d'un dispositif d'optique quantique.

Le travail que nous avons présenté est basé sur l'optique paraxiale et l'étude des modes de propagation de la lumière qui transporte du moment cinétique orbitale. L'expérience que notre groupe de recherche a gagnée en manipulant ce type de système a permis des applications fondamentales en mécanique quantique et en information quantique. En particulier, nous avons exploré deux approches différentes des inégalités de Bell. La première d'un point de vue classique et la seconde avec le développement d'une inégalité de Bell pour des variables continues ainsi que d'une proposition d'un dispositif pour son implémentation expérimentale.

## Références

- [1] Max Born and Emil Wolf. *Principles of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation Interference and Diffraction of light*. Pergamon Press, sixth edition, 1985.
- [2] M. J. Padgett and J. Courtial. Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum. *Optics Letters*, 24 :430–432, 1999.
- [3] C. E. R. Souza, J. A. O. Huguenin, P. Milman, and A. Z. Khoury. Topological phase for spin-orbit transformations on a laser beam. *Physical Review Letters*, 99 :160401, 2007.
- [4] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [5] Berthold-Georg Englert, Christian Kurtsiefer, and Harald Weinfurter. Universal unitary gate for single-photon two-qubit states. *Phys. Rev. A*, 63 :032303, 2001.
- [6] N. R. Heckenberg, R. McDuff, C. P. Smith, and A. G. White. Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms. *Optics Letters*, 17(3) :221, 1992.
- [7] Miles Padgett and L. Allen. Light with a twist in its tail. *Contemporary Physics*, 41(5) :275–285, 2000.
- [8] Eugene Hecht. *Optics*. Addison Wesley, 2002.
- [9] L. Aolita and S. P. Walborn. Quantum communication without alignment using multiple-qubit single-photon states. *Physical Review Letters*, 98 :100501, 2007.
- [10] C. V. S. Borges, M. Hor-Meyll, J. A. O. Huguenin, and A. Z. Khoury. Bell-like inequality for the spin-orbit separability of a laser beam. *Phys. Rev. A*, 82 :033833, 2010.
- [11] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47 :777–780, May 1935.
- [12] M. D. Reid, P. D. Drummond, E. G. Cavalcanti, P. K. Lam, H. a. Bachor, U. L. Andersen, and G. Leuchs. Colloquium : The Einstein-Podolsky-Rosen paradox : From concepts to applications. *Reviews of Modern Physics*, 81(4) :1727–1751, December 2009.

- [13] A Aspect, P Grangier, and G Roger. Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment : A New Violation of Bell's Inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49(2) :91–94, 1982.
- [14] Gregor Weihs, Thomas Jennewein, Christoph Simon, Harald Weinfurter, and Anton Zeilinger. Violation of bell's inequality under strict einstein locality conditions. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :5039 – 5043, 1998.
- [15] M. A. Rowe, D. Kielpinski, V. Meyer, C. A. Sackett, W. M. Itano, C. Monroe, and D. J. Wineland. Experimental violation of a bell's inequality with efficient detection. *Nature*, 409 :791 – 794, 2001.
- [16] Paul G. Kwiat, Philippe H. Eberhard, Aephraim M. Steinberg, and Raymond Y. Chiao. Proposal for a loophole-free bell inequality experiment. *Phys. Rev. A*, 49 :3209 — 3220, 1994.
- [17] D. N. Matsukevich, P. Maunz, D. L. Moehring, S. Olmschenk, and C. Monroe. Bell inequality violation with two remote atomic qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :150404, 2008.
- [18] Yuji Hasegawa, Rudolf Loidl, Gerald Badurek, Matthias Baron, and Helmut Rauch. Violation of a bell-like inequality in single-neutron interferometry. *Nature*, 425 :45, 2003.
- [19] Lixiang Chen and Weilong She. Single-photon spin-orbit entanglement violating a bell-like inequality. arXiv :0911.0544v2, 2009.
- [20] Jian Fu, Zhijian Si, Shaofang Tang, and Jian Deng. Classical simulation of quantum entanglement using optical transverse modes in multimode waveguides. *Phys. Rev. A*, 70 :042313, 2004.
- [21] M. Goldin, D. Francisco, and S. Ledesma. Simulating bell inequalities violation with classical optics encoded qbits. arXiv :0904.3286v1.
- [22] C. E. R. Souza, C. V. S. Borges, A. Z. Khoury, J. A. O. Huguenin, L. Aolita, and S. P. Walborn. Quantum key distribution without a shared reference frame. *Physical Review A*, 77 :032345, 2008.
- [23] C. E. R. Souza and A. Z. Khoury. A michelson controlled-not gate with a single-lens astigmatic mode converter. *Optics Express*, 18 :9207–9212, 2010.
- [24] J F Clauser, M A Horne, A Shimony, and R A Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23 :880, 1969.
- [25] L. Chen and W. She. Single-photon spin-orbit entanglement violating a bell-like inequality. *J. Opt. Soc. Am. B*, 27 :A7, 2010.
- [26] K. Svensson, L. Bengtsson, J. Bellman, M. Hassel, M. Persson, and S. Andersson. Two-dimensional quantum rotation of adsorbed  $H_2$ . *Phys. Rev. Lett.*, 83 :124, 1999.
- [27] T. Yu. Ivanova and D. A. Ivanov. Quantum measurement of collective atomic position in optical lattice. *Optics Communications*, 272 :148 — 153, 2007.
- [28] J. F. Clauser and A. Shimony. Bell's theorem. experimental tests and implications. *Rep. Prog. Phys.*, 41 :1881, 1978.
- [29] P Milman, A Keller, E Charron, and O Atabek. Molecular orientation entanglement and temporal bell-type inequalities. *Eur. Phys. J. D*, 53 :383, 2009.

- [30] P Milman, A Keller, E Charron, and O Atabek. Bell-type inequalities for cold heteronuclear molecules. *Phys. Rev. Lett.*, 99 :130405, 2007.
- [31] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki. Separability of mixed states : necessary and sufficient conditions. *Phys. Lett. A*, 223 :1–8, 1996.
- [32] Barbara M Terhal. Bell inequalities and the separability criterion. *Phys. Lett. A*, 271(5-6) :319–326, 2000.
- [33] P G Kwiat, E Waks, A G White, I Appelbaum, and P H Eberhard. Ultra-bright source of polarization-entangled photons. *Phys. Rev. A*, 60 :R773, 1999.