



HAL
open science

Allocation de ressources : optimisation des symboles pilotes et de la voie de retour

Imed Hadj Kacem

► **To cite this version:**

Imed Hadj Kacem. Allocation de ressources : optimisation des symboles pilotes et de la voie de retour. Théorie de l'information [cs.IT]. Université de Cergy Pontoise, 2011. Français. NNT : . tel-00767871

HAL Id: tel-00767871

<https://theses.hal.science/tel-00767871>

Submitted on 20 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Allocation de ressources : optimisation des symboles
pilotes et de la voie de retour

par

Imed HADJ KACEM

thèse présentée au département de physique
en vue de l'obtention du grade de docteur ès sciences (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, 7 février 2011

Table des matières

Table des matières	ii
Liste des tableaux	vi
Liste des figures	vii
Abréviations	1
Notations	3
Introduction générale	4
1 Transmission mono-porteuse sur un canal sélectif en fréquence	11
1 Introduction	11
2 Canal de transmission	12
2.1 Modèle du canal sélectif en fréquence	13
2.2 Égalisation	14
3 Estimation du canal	18
3.1 Variance de l'erreur de l'estimation du canal	18
3.2 Débit utile	19
4 Codage canal	21
4.1 Codes convolutifs	21
4.2 Décodage	22
4.3 Entrelacement	22
5 Conclusion	23
2 Optimisation de la séquence d'apprentissage : Cas d'un détecteur MAP	24
1 Introduction	24

2	Cas mono-antenne	25
2.1	Canal sélectif en fréquence	25
2.2	Calcul du RSB équivalent	27
2.3	Optimisation de la longueur de la séquence d'apprentissage	28
2.3.1	Puissances égales des symboles pilotes et de données	28
2.3.2	Optimisation conjointe de la longueur de la séquence d'apprentissage et de l'allocation des puissances	29
2.3.3	Comparaison de l'optimisation à puissances égales et à puissances différentes	32
2.3.4	Résultats des simulations	33
3	Cas multi-antennes (MIMO)	35
3.1	Modèle du système MIMO	36
3.2	Détecteur MAP et calcul du RSB équivalent	40
3.3	Optimisation de la longueur de l'intervalle d'apprentissage	41
3.3.1	Puissances égales des symboles pilotes et de données	41
3.3.2	Optimisation conjointe de la longueur de l'intervalle d'apprentissage et de l'allocation des puissances	42
3.3.3	Résultats des simulations	43
4	Conclusion	46
3	Optimisation de la séquence d'apprentissage : Cas d'un turbo- détecteur	48
1	Introduction	48
2	Cas mono-antenne	49
2.1	Récepteur itératif	49
2.2	Estimation bootstrap du canal	52
2.2.1	Calcul de l'EQM de l'estimateur bootstrap	52
2.2.2	Comparaison des complexités	53
2.3	Optimisation de la longueur de la séquence d'apprentissage pour une estimation bootstrap	54
2.3.1	Calcul du RSB équivalent	55
2.3.2	Optimisation de la longueur de la séquence d'apprentissage pour des puissances égales des symboles pilotes et des symboles de données	58
2.4	Résultats des simulations : performances du turbo-détecteur mono-antenne	60

3	Cas multi-antennes (MIMO)	61
3.1	Turbo-décteur	63
3.2	Optimisation de la longueur de l'intervalle d'apprentissage pour une estimation bootstrap	65
3.2.1	EQM de l'estimation du canal	66
3.2.2	Comparaison des complexités	68
3.2.3	Calcul du RSB équivalent	68
3.2.4	Optimisation de la longueur de l'intervalle d'apprentis- sage pour des puissances égales des symboles pilotes et des symboles de données	69
3.3	Résultats des simulations : performances du turbo-décteur MIMO	70
4	Conclusion	72
4	Optimisation de la voie de retour pour une liaison OFDM	74
1	Introduction	74
2	Modèle du système OFDM	75
3	Allocation des puissances	81
4	Optimisation conjointe de l'allocation des puissances et de la voie de retour	83
5	Allocation conjointe de la modulation et de la voie de retour	87
5.1	Algorithme classique de l'allocation de la modulation	88
5.2	Traitement par porteuse	90
5.2.1	Modèles des canaux OFDM mono-antenne	90
5.2.2	Principe de la méthode <i>On-Off</i> par porteuse	91
5.2.3	Minimisation du débit sur la voie de retour	92
5.2.4	Résultats des simulations	93
5.3	Traitement par paquet	96
5.3.1	Groupement des sous-porteuses	97
5.3.2	Principe de la méthode <i>On-Off</i> par paquet	100
5.3.3	Distribution de l'énergie du canal	101
5.3.4	Minimisation du débit sur la voie de retour	102
5.3.5	Résultats des simulations	104
6	Conclusion	108
	Conclusion générale	110

Annexe A	Preuves des résultats du Chapitre 2	114
1	Optimisation conjointe de la longueur de la séquence d'apprentissage et de l'allocation des puissances : Cas mono-antenne	114
2	Calcul du RSB équivalent pour un canal MIMO non sélectif en fréquence quand un estimateur MC est utilisé	116
3	Optimisation conjointe de la longueur de la séquence d'apprentissage et de l'allocation des puissances : Cas multi-antennes	119
Annexe B	Calcul de l'EQM de l'estimation du canal et du RSB équivalent quand un estimateur bootstrap est utilisé	122
1	EQM de l'estimation du canal	122
2	Calcul du RSB équivalent	125
Bibliographie		134

Liste des tableaux

2.1	Longueurs des séquences d'apprentissage maximisant $RSB_{u,eq}$ pour $\sigma_t^2 = 0dB$ et pour différentes valeurs de L et T	33
3.1	Valeurs du <i>Kurtosis</i> et du rapport R de la variance par la moyenne des LRVs <i>a priori</i> en fonction du RSB à l'entrée de l'égaliseur à la convergence du turbo-détecteur pour $T = 256$, $T_p = 10$, $\delta T = 50$ et le <i>Canal 4</i>	58
3.2	Valeurs de $\bar{\beta}$, μ , le maximum de $g_3(t)$ et T_p^* à la convergence pour $T = 1024$, $\delta T = 900$ et le <i>Canal 4</i>	61
3.3	Valeurs du <i>Kurtosis</i> et du rapport R de la variance par la moyenne des LRVs <i>a priori</i> en fonction du RSB à l'entrée du détecteur à la convergence du turbo-détecteur pour $T = 512$, $T_p = 10$, $\delta T = 450$, $n_E = n_R = 2$ et $\sigma_p^2 = \sigma_d^2 = 1$	71
3.4	Valeurs de $\bar{\beta}_M$, μ , $\max(g_4(t))$ et T_p^* à la convergence pour différentes valeurs du RSB , pour $T = 512$, $\delta T = 450$, $n_T = n_R = 2$ et $\sigma_p^2 = \sigma_d^2 = 1$	72
4.1	Valeurs de N_{off} en fonction du RSB pour $p_0 = 1$, $TEB_s = 10^{-3}$ et deux valeurs de N	94
4.2	Valeurs du TEB, débit, temps de calcul et du nombre de bits sur la voie de retour des quatre algorithmes proposés, moyennées sur 2000 réalisations du RSB, $N = 512$, $p_0 = 1$ et pour le canal AR avec $TEB_s = 10^{-6}$ et le modèle 1 du canal avec $TEB_s = 10^{-3}$	108

Liste des figures

1.1	Phénomènes de base observés en propagation radio mobile.	12
1.2	Chaîne de transmission numérique sur un canal sélectif en fréquence. . .	13
1.3	Représentation en treillis pour un canal de longueur 3 et une modulation BPSK.	16
1.4	Méthode de calcul de l'algorithme MAP.	17
1.5	Format du burst en GSM.	20
1.6	Codeur convolutif de polynômes générateurs $(7, 5)_8$	22
2.1	Structure de l'émetteur mono-antenne.	26
2.2	Structure du récepteur mono-antenne non itératif.	26
2.3	Optimisation de T_p pour des puissances égales : TEB à la sortie de l'égaliseur MAP pour différentes valeurs de T_p pour le <i>Canal 3</i> et $T = 256$	34
2.4	Optimisation de la longueur de la séquence d'apprentissage pour des puis- sances égales : Variation de T_p^* en fonction de T	35
2.5	Courbes de σ_p^{*2} et σ_d^{*2} en fonction de T_p pour $T = 256$, $\sigma_t^2 = 0dB$ et différentes valeurs de L	36
2.6	Courbes de σ_p^{*2} et σ_d^{*2} en fonction de T pour $T_p = 20$, $\sigma_t^2 = 0dB$ et différentes valeurs de L	37
2.7	Optimisation conjointe de la longueur de la séquence d'apprentissage et de l'allocation des puissances : TEB en fonction du RSB_u pour différentes valeurs de T_p et σ_p^2 pour le <i>Canal 3</i> , $T = 256$ et $\sigma_t^2 = 0dB$	38
2.8	Structure de l'émetteur MIMO.	38
2.9	Structure du récepteur MIMO.	39
2.10	Optimisation de la longueur de l'intervalle d'apprentissage à puissances égales : TEB en fonction du RSB_u à la sortie du détecteur MAP pour $T = 512$ et $n_E = n_R = 2$	44

2.11	TEB en fonction du RSB_u à la sortie du détecteur MAP pour $T = 512$, $\sigma_t^2 = 6dB$, $n_E = n_R = 2$ et pour différentes valeurs de T_p et σ_p^2	45
2.12	Optimisation conjointe de T_p et de l'allocation des puissances : σ_p^{*2} et σ_d^{*2} en fonction de T pour $n_E = 5$ et $\sigma_t^2 = 6dB$	46
3.1	Structure de l'émetteur.	49
3.2	Structure du récepteur itératif.	51
3.3	Courbes de l'EQM en fonction du RSB de l'estimateur basé sur le critère MC pour le <i>canal 3</i> et $T_p = 8$ et de l'estimateur bootstrap pour le <i>canal 3</i> , $T_p = 8$ et différentes valeurs de δT pour deux valeurs de σ_x^2 . (Simulations : courbes en lignes discontinues, Expressions théoriques : courbes en lignes continues)	54
3.4	Comparaison des performances de l'égaliseur (courbes discontinues) et des performances théoriques (courbes continues) pour une estimation du canal selon la technique bootstrap pour le <i>Canal 4</i> , $T = 256$, $T_p = 15$, $\delta T = 100$ et deux valeurs de μ et de σ_x^2	57
3.5	TEB en fonction du RSB_u pour le turbo-détecteur avec une estimation du canal basée sur la technique bootstrap pour le <i>Canal 4</i> , $T = 1024$, $\delta T = 900$ et différentes valeurs de T_p	61
3.6	Structure de l'émetteur MIMO utilisant le schéma ST-BICM.	63
3.7	Structure de l'émetteur MIMO utilisant le schéma T-BICM.	63
3.8	Structure du récepteur MIMO itératif.	64
3.9	Courbes de l'EQM de l'estimateur bootstrap en fonction du RSB pour différentes valeurs de T , σ_p^2 et σ_d^2 pour $n_E = n_R = 2$, $T_p = n_E$, $\delta T = T - n_E$ et $\sigma_x^2 = 0.1$. (Simulations : courbes en lignes continues, Expressions théoriques : courbes en lignes discontinues)	67
3.10	TEB en fonction du RSB_u à la sortie du décodeur MAP pour différentes valeurs de T_p après deux itérations du turbo-détecteur pour $T = 512$, $\delta T = 450$, $n_E = n_R = 2$ et $\sigma_p^2 = \sigma_d^2 = 1$	72
4.1	Principe de l'insertion du préfixe cyclique.	77
4.2	Principe de l'émetteur-récepteur OFDM.	78
4.3	Émetteur-Récepteur OFDM : modèle du canal équivalent.	80
4.4	Comparaison des débits entre l'allocation optimale et l'allocation uniforme des puissances pour une transmission OFDM sur un canal sélectif en fréquence pour $P_{tot} = 128$ et deux valeurs de N	82

4.5	Débit à l'émission d'un système OFDM en fonction de $\log_2(k)$ pour $N = 512$, $P_{tot} = 51.2$ et différentes valeurs du RSB	86
4.6	Principe de la méthode <i>On-Off</i> par porteuse.	94
4.7	Débit en fonction du RSB pour une transmission OFDM sur un canal sélectif en fréquence pour $p_0 = 1$, $TEB_s = 10^{-3}$ et deux valeurs de N . . .	95
4.8	Débit en fonction du RSB pour un canal AR pour $\alpha = 0.3$, $p_0 = 1$, $TEB_s = 10^{-6}$ et deux valeurs de N	97
4.9	Temps moyen d'exécution d'une allocation de modulation pour un symbole OFDM pour un canal AR pour $\alpha = 0.3$, $p_0 = 1$, $TEB_s = 10^{-6}$ et deux valeurs de N	98
4.10	Distribution de la loi du χ_2 pour un canal AR, $n_c = 7$ et différentes valeurs de α (Théoriques : traits discontinus, Simulations : traits continus). . . .	102
4.11	Courbes de K_{off} en fonction du RSB : courbes analytiques et obtenues par simulations pour un canal AR, $n_c \in \{5, 8\}$ et différentes valeurs de α	103
4.12	Principe de la méthode <i>On-Off</i> par paquet	105
4.13	Débit en fonction du RSB pour les différents algorithmes proposés, pour un canal AR, $\alpha = 0.3$, $N = 512$, $TEB_s = 10^{-6}$, $p_0 = 1$ et différentes valeurs de n_c	106
4.14	Temps moyen d'exécution d'une allocation de modulation pour un symbole OFDM pour un canal AR avec $\alpha = 0.3$, $p_0 = 1$, $N = 512$, $TEB_s = 10^{-6}$ et différentes valeurs de n_c	107

Abréviations

Dans ce document, plusieurs abréviations sont utilisées. Nous les rappelons maintenant et donnons leurs significations :

APP	<i>A Posteriori</i> Probability
AR	Auto-Régressif
BABG	Bruit Additif Blanc Gaussien
BCJR	Bahl-Cocke-Jelinek-Raviv
BICM	Bit Interleaved Coded Modulation
BPSK	Binary Phase Shift Keying
DFE	Decision Feedback Equalizer
EQM	Erreur Quadratique Moyenne
EQMM	Erreur Quadratique Moyenne Minimale
FDD	Frequency Division Duplexing
GSM	Global System for Mobile communications
IES	Interférence Entre Symboles
iid	indépendants identiquement distribués
LRV	Logarithme de Rapport de Vraisemblance
MAP	Maximum <i>A Posteriori</i>
MAQ-M	Modulation d'amplitude en Quadrature à M états
MC	Moindres Carrés
MDP	Modulation à Déplacement de Phase
MIMO	Multiple-Input Multiple-Output
MMSE	Minimum Mean Square Error
MV	Maximum de Vraisemblance
OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
PC	Préfixe Cyclique
RSB	Rapport Signal à Bruit
SISO	Single-Input Single-Output
ST-BICM	Space Time Bit Interleaved Coded Modulation
T-BICM	Space Time Bit Interleaved Coded Modulation
TDD	Time Division Duplexing

TEB	Taux d'Erreur Binaire
TFD	Transformée de Fourier Discrète
TFDI	Transformée de Fourier Discrète Inverse
ZF	Zero Forcing

Notations

$\delta(\cdot)$	Fonction Dirac
$(\cdot)^T$	Transposition
$(\cdot)^*$	Complex conjugué
$(\cdot)^\dagger$	Transconjugaison
$(\cdot)^{-1}$	Inversion
$\ \cdot\ $	Norme L_2
$ x $	Valeur absolue de x
$\lfloor x \rfloor$	Le plus grand entier inférieur à x
$\lceil x \rceil$	Le plus petit entier supérieur à x
I_m	Matrice identité de dimensions $(m \times m)$
$E(\cdot)$	Espérance mathématique
$*$	Convolution linéaire
$(x)^+$	$\max\{0, x\}$
$Re(\cdot)$	Partie réelle
M_{ij}	Élément de la matrice M sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne

Introduction générale

Dans les systèmes de radiocommunications à hauts débits, les canaux de propagation sont dispersifs dans le temps à cause de la présence de la propagation par trajets multiples (multipath). Cette dispersion temporelle de la réponse du canal de propagation engendre de l'interférence entre symboles (IES) qui dégrade les performances du système en réception. Pour lutter contre l'IES, un égaliseur doit être utilisé en réception. Afin de retrouver les symboles émis à partir des échantillons reçus, l'égaliseur doit disposer d'une bonne estimation du canal. Cette estimation est en général effectuée en utilisant une séquence d'apprentissage connue par le récepteur. Augmenter la longueur de la séquence d'apprentissage améliore la qualité de l'estimation du canal mais diminue le débit utile de transmission. La question qui se pose concerne la longueur de la séquence d'apprentissage à choisir permettant d'avoir une bonne estimation du canal sans diminuer significativement le débit utile de transmission. Dans [24, 54], une solution basée sur la maximisation de la borne inférieure de la capacité du canal a été proposée pour une transmission sur un canal mono-antenne (SISO : *Single-Input Single-Output*) non sélectif en fréquence [54] et une transmission sur un canal multi-antennes (MIMO : *Multiple-Input Multiple-Output*) non sélectif en fréquence et pour un récepteur non itératif. Dans [8], *Buzzi et al.* proposent de détecter les données et d'estimer le canal de manière itérative. Leur solution consiste à optimiser la longueur de la séquence d'apprentissage en minimisant le rapport de l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) de l'estimation du canal sur le débit utile pour un canal non sélectif en fréquence. Toutes ces études ne spécifient pas le récepteur utilisé. Dans cette thèse, nous considérons le cas d'une transmission sur un canal SISO sélectif en fréquence et le cas d'une transmission MIMO sur un canal non sélectif en fréquence. Nous commençons par considérer le cas où un récepteur non itératif composé d'un estimateur du canal et d'un détecteur Maximum *A Posteriori* (MAP) est utilisé. L'estimation du canal est réalisée selon le critère des moindres carrés en utilisant uniquement une séquence d'apprentissage. Puis, nous considérons le cas où le récepteur est itératif et composé d'un détecteur MAP et d'un décodeur MAP. Dans ce cas, l'estimation du canal est effectuée

selon la technique bootstrap. Nous trouvons que le détecteur MAP utilisant l'estimation du canal peut être approximé par l'égaliseur MAP connaissant parfaitement le canal mais avec un Rapport Signal à Bruit (RSB) équivalent. En nous basant sur le calcul de ce RSB équivalent et afin de tenir compte de la perte en termes de débit utile due à l'utilisation de la séquence d'apprentissage, nous définissons un rapport signal à bruit utile. Nous trouvons la longueur de la séquence d'apprentissage maximisant ce RSB utile pour les deux cas de transmission : transmission SISO sur un canal sélectif en fréquence et transmission MIMO sur un canal non sélectif en fréquence et pour les deux types du récepteur : non itératif et itératif.

Les interférences entre symboles sont généralement traitées par des techniques d'égalisation. Cependant, l'égaliseur est d'autant plus complexe que la longueur du canal sélectif en fréquence est grande. Afin de contourner ce problème de complexité de l'égalisation, une modulation OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) peut être utilisée. Quand l'émetteur connaît les caractéristiques du canal OFDM tel que le cas pour le mode TDD (*Time Division Duplexing*), une modulation adaptative et une allocation optimale de la puissance peuvent être utilisées en émission ce qui améliore significativement les performances du système. Cependant, en mode FDD (*Frequency Division Duplexing*), le récepteur estime le canal et retourne cette estimation vers l'émetteur sur un canal de retour à faible débit [34]. Le récepteur peut également effectuer l'allocation de puissances et/ou de la modulation et la renvoyer à l'émetteur [28,57]. La voie de retour nécessite alors une réservation de ressources. Quand ces ressources sont importantes, les informations retournées à l'émetteur sont fiables. Mais ceci entraîne une chute en termes de débit utile. Un compromis doit être alors trouvé entre la voie de retour et l'allocation des puissances et/ou de la modulation. Nous étudions le problème d'optimisation conjointe de l'allocation des puissances et de la voie de retour. Nous trouvons le nombre de sous-porteuses sur la voie de retour permettant de retourner l'allocation optimale des puissances sans dégrader significativement le débit utile. Nous considérons aussi le problème de l'allocation de la modulation, nous trouvons le nombre minimale de bits sur la voie de retour permettant de renvoyer à l'émetteur l'indice de la modulation choisie.

Cette thèse est constituée de quatre chapitres. Ils sont organisés comme suit :

Le premier chapitre rappelle les caractéristiques du canal radio-mobile notamment le phénomène de sélectivité en fréquence. Nous présentons les approches d'égalisation utilisées pour lutter contre l'IES. L'égaliseur optimal en termes de taux d'erreur binaire

est basé sur le critère MAP. Nous expliquons le fonctionnement de l'égaliseur basé sur le critère MAP. Nous étudions dans ce même chapitre le principe de l'estimateur du canal basé sur le critère des moindres carrés (MC) qui fournit une estimation du canal à l'égaliseur afin de détecter les symboles émis. L'estimation basée sur le critère MC utilise une séquence d'apprentissage ce qui entraîne une chute en termes de débit utile. Nous calculons alors le débit utile pour un récepteur non itératif. Afin de lutter contre les erreurs dues au canal, une autre solution consiste à ajouter en plus de l'égaliseur, un codeur de canal à l'émission. Dans ce cas, un décodeur de canal est utilisé en réception. Nous présentons les notions du codage et du décodage de canal. Nous expliquons également le principe de l'entrelacement nécessaire pour la compréhension du fonctionnement du récepteur itératif que nous utilisons dans le chapitre 3.

Dans le deuxième chapitre, nous considérons un récepteur non itératif composé d'un détecteur MAP et d'un estimateur MC. Nous proposons d'optimiser conjointement le nombre des symboles pilotes et l'allocation des puissances pour les canaux SISO sélectifs en fréquence et MIMO non sélectifs en fréquence. Pour les deux cas, nous montrons que le détecteur MAP utilisant l'estimation MC du canal peut être approximé par l'égaliseur MAP connaissant parfaitement le canal mais avec un RSB équivalent. Nous calculons l'expression de ce RSB et nous définissons un RSB utile qui tient compte de la perte en termes de débit due à l'utilisation de la séquence d'apprentissage. L'optimisation conjointe du nombre des symboles pilotes et de l'allocation des puissances est étudiée en se basant sur la maximisation de ce RSB utile. Nous considérons le cas où les puissances des symboles pilotes et celles des symboles de données sont égales et nous trouvons le nombre optimal des symboles pilotes maximisant le RSB utile. Nous considérons également le cas où ces puissances peuvent avoir des valeurs différentes et nous trouvons dans ce cas, en plus du nombre optimal des symboles pilotes, l'allocation optimale des puissances.

L'estimation du canal peut être affinée itérativement en utilisant, en plus des symboles pilotes, des décisions dures sur les symboles de données à la sortie du décodeur. Nous considérons donc dans le troisième chapitre un turbo-détecteur composé d'un détecteur MAP, un décodeur MAP et un estimateur de canal. Afin d'améliorer les performances du récepteur, le détecteur et le décodeur échangent des informations extrinsèques à chaque itération. Ces informations seront utilisées comme des informations *a priori* à l'itération suivante. L'estimation du canal est effectuée en utilisant la séquence d'apprentissage uniquement à la première itération. Aux itérations suivantes, elle se base sur la technique

bootstrap utilisant les symboles pilotes et des décisions dures sur les symboles de données fournies par le décodeur. Nous montrons, comme dans le chapitre 2, que le détecteur MAP utilisant l'estimateur bootstrap du canal peut être approximé par un détecteur MAP connaissant parfaitement le canal mais avec un RSB équivalent que nous le calculons pour le cas d'une transmission SISO sur un canal sélectif en fréquence et le cas d'une transmission MIMO sur un canal non sélectif en fréquence. Nous trouvons, dans les deux cas, que le nombre optimal des symboles pilotes maximisant le RSB utile est égale à sa valeur minimale : $2L - 1$ où L est la longueur du canal pour le cas d'une transmission SISO sur un canal sélectif en fréquence et n_E où n_E est le nombre d'antennes en émission pour le cas d'une transmission MIMO sur un canal non sélectif en fréquence.

Le quatrième chapitre considère une liaison OFDM mono-antenne. Nous nous plaçons dans le cas où le mode FDD est utilisé. Nous commençons par étudier le problème de l'allocation conjointe des puissances et de la voie de retour. Augmenter le nombre de sous-porteuses réservées à la voie de retour entraîne une bonne fiabilité des informations (concernant l'allocation optimale des puissances) retournées du récepteur à l'émetteur mais entraîne aussi une diminution du nombre des sous-porteuses sur la voie aller (de l'émetteur vers le récepteur) ce qui chute le débit utile de transmission. Ainsi, nous nous chargeons de trouver le nombre optimal de sous-porteuses sur la voie de retour permettant un meilleur retour de l'allocation des puissances sans chuter significativement le débit. Nous proposons de répartir les N sous-porteuses du canal OFDM en K paquets de porteuses contenant chacun $\frac{N}{K}$ sous-porteuses. Nous supposons que les sous-porteuses d'un même paquet émettent avec la même puissance. Nous résolvons le problème de l'optimisation conjointe de l'allocation des puissances et du nombre des sous-porteuses sur la voie de retour et nous trouvons que la solution optimale consiste à attribuer la même puissance à toutes les sous-porteuses et ainsi n'utiliser aucune ressource sur la voie de retour. Nous étudions ensuite l'allocation de la modulation. En effet, l'augmentation de la taille des constellations des modulations sur les différentes sous-porteuses augmente le débit sur la voie aller mais engendre une dégradation en termes de taux d'erreur binaire (TEB). Afin d'augmenter le débit sans dégrader significativement le TEB, des problèmes d'optimisation ont été proposés et résolus dans la littérature [29, 57, 60]. Un algorithme a été proposé pour résoudre ce problème [29, 57]. Cependant, plus le nombre de sous-porteuses est grand, plus l'allocation est coûteuse en termes de temps d'exécution et de complexité. Pour simplifier cet algorithme, nous proposons d'utiliser la méthode *On-Off* qui consiste à écarter un certain nombre de porteuses avant d'allouer la modulation ce

qui facilite l'allocation. Nous proposons aussi une seconde méthode qui consiste à définir des groupes de sous-porteuses. Dans ce cas, nous supposons que toutes les sous-porteuses d'un même paquet transmettent avec la même modulation ce qui simplifie l'allocation de la modulation vu qu'elle s'effectue sur un nombre paquets inférieur au nombre de sous-porteuses. Nous proposons de simplifier davantage l'allocation en appliquant la méthode *On-Off* aux paquets. Sur la voie de retour nous utilisons un certain nombre de bits qui se transmettent à l'émetteur afin de lui informer de la meilleure modulation à utiliser en émission. Nous trouvons le nombre minimal de bits nécessaires sur la voie de retour pour informer l'émetteur sur l'indice de la modulation choisie et ceci quand les méthodes *On-Off* par porteuse et *On-Off* par paquet sont utilisées.

Publications de l'auteur

- Articles de Revue

1. I.Hadj-Kacem, N.Sellami, I.Fijalkow, and A.Roumy, "Training interval length optimization for non-iterative and iterative MIMO channel estimation", *soumis à l'IEEE Transactions on Communications*.
2. I.Hadj-Kacem, N.Sellami, I.Fijalkow, and A.Roumy, "Training sequence length optimization for a turbo-detector using decision-directed channel estimation," *Research Letters in Communications*, vol.2008, Article ID 860368, 2008.

- Conférences internationales à comité de lecture

3. I.Hadj-Kacem, N.Sellami, A.Roumy, and I.Fijalkow, "Training sequence optimization for frequency selective channels with MAP equalization," *IEEE International Symposium on Communications, Control and Signal Processing (ISCCSP)*, pp.532-537, Malta 2008.
4. I.Hadj-Kacem, N.Sellami, I.Fijalkow, and A.Roumy, "Joint training interval length and power allocation optimization for MIMO flat fading channels," *IEEE International Symposium on Wireless Communication Systems (ISWCS)*, Italy, September 2009.
5. I.Hadj-Kacem, N.Sellami, I.Fijalkow, and A.Roumy, "Training interval length optimization for MIMO flat fading channels using decision-directed channel estimation," *IEEE International Conference on Wireless and Mobile Computing, Networking and communication (WiMob)*, Morocco, October 2009.
6. I.Hadj-Kacem, N.Sellami, and L.Kamoun, "Optimal training sequence length for soft iterative channel estimation," *IEEE International Conference on Environmental and Computer Science (ICECS)*, Tunisia, December 2009.
7. I.Hadj-Kacem, N.Sellami, I.Fijalkow, and A.Roumy, "Optimisation conjointe du nombre des symboles pilotes et de l'allocation des puissances pour les canaux MIMO non sélectifs en fréquence," *22th Symposium on Signal and Image Processing, GretsI*, Dijon, France, Septembre 2009.

- Conférences nationales à comité de lecture

8. I.Hadj-Kacem, N.Sellami, I.Fijalkow, A.Roumy et L.Kamoun, "Optimisation de la longueur de la séquence d'apprentissage pour des estimations non itératives et itératives

du canal,” *Journées Tunisiennes de l’Electrotechnique et de l’Automatique (JTEA)*, Hammamet, Tunisie, Mai 2008.

Chapitre 1

Transmission mono-porteuse sur un canal sélectif en fréquence

1 Introduction

Dans ce premier chapitre, nous présenterons les caractéristiques des canaux de propagation radio-mobiles et notamment la sélectivité en fréquence. Cette sélectivité engendre un phénomène d'interférence entre symboles (IES). Pour combattre l'IES, un égaliseur doit être placé en réception. L'égaliseur optimal en termes de Taux d'Erreur Binaire (TEB) à utiliser est basé sur le critère Maximum *a posteriori* (MAP). Nous donnerons les principales méthodes d'égalisation et nous détaillerons le principe de l'égalisation MAP que nous utiliserons dans la suite. Afin de bien détecter les symboles transmis, l'égaliseur doit disposer d'une bonne estimation du canal de propagation. En pratique, le canal est estimé en utilisant une séquence d'apprentissage connue par le récepteur [11]. Nous expliquerons la méthode d'estimation du canal basée sur le critère des Moindres Carrés (MC) et nous calculerons la variance de l'erreur de l'estimation du canal dans ce cas. Quand la longueur de la séquence d'apprentissage augmente, l'estimée du canal devient plus fiable. Cependant, ceci entraîne une perte en termes de débit utile. Nous expliciterons l'expression du débit utile tenant compte de cette perte due à l'utilisation des symboles pilotes. D'autre part, pour lutter contre les erreurs introduites par les canaux de transmission, un codeur de canal est en général utilisé en émission. Nous présenterons dans ce chapitre le principe des codeurs convolutifs que nous utiliserons dans cette thèse.

2 Canal de transmission

Dans un environnement radio-mobile, à cause de la présence d'obstacles, un signal émis suit plusieurs chemins avant d'atteindre le récepteur. On parle alors de propagation par trajets multiples. La figure 1.1 montre les différents phénomènes observés en propagation à savoir la réflexion, la réfraction et la diffraction (ou dispersion). Le signal reçu est ainsi composé de plusieurs répliques du signal émis caractérisées par des temps d'arrivée, des amplitudes et des déphasages différentes.

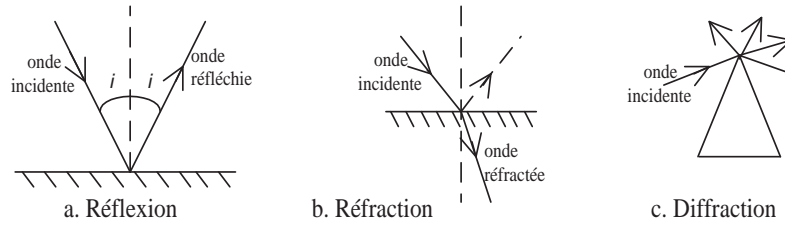


FIGURE 1.1 – Phénomènes de base observés en propagation radio mobile.

Pour modéliser le canal multitrajets, il faut préciser le nombre de trajets, leur énergie et leur délai. Pour cela, nous considérons le profil de puissance qui donne la puissance moyenne du signal reçu en fonction du délai τ (Delay Power Profile) [58, 59]. Nous définissons la dispersion temporelle T_m du canal comme étant l'intervalle de temps durant lequel la puissance moyenne n'est pas négligeable. Nous définissons également la bande de cohérence du canal de propagation telle que :

$$B_c \simeq \frac{1}{T_m}. \quad (1.1)$$

Soit B_s la bande occupée par le signal. On distingue deux cas : le cas où $B_s > B_c$ et le cas où $B_s < B_c$. Quand $B_s > B_c$, les composantes fréquentielles du signal subissent des atténuations différentes. Le canal est dit sélectif en fréquence et on a un phénomène d'interférence entre symboles. Quand $B_s < B_c$, le canal est dit non sélectif en fréquence puisque toutes les composantes fréquentielles du signal subissent les mêmes atténuations.

2.1 Modèle du canal sélectif en fréquence

Nous considérons la séquence de symboles transmis x_k issus d'un alphabet de taille finie et émis à la fréquence symbole

$$x(t) = \sum_k x_k \delta(t - kT_s). \quad (1.2)$$

où T_s est la durée symbole et $\delta(\cdot)$ est la fonction Dirac.

Le signal $x(t)$ est transmis via la chaîne de transmission donnée par la figure 1.2. A l'émission, le signal $x(t)$ est filtré par le filtre d'émission de réponse impulsionnelle $h_e(t)$. Son spectre est ensuite décalé en fréquence autour de la fréquence f_0 du canal. Nous supposons que le canal de transmission, représenté par son gain complexe $G(f)$, est invariant dans le temps et ajoute un Bruit Additif Blanc Gaussien (BABG) noté $b(t)$.

Au niveau du récepteur, le signal est ramené en bande de base puis filtré par le filtre de réception adapté au filtre d'émission et de réponse impulsionnelle $h_r(t)$ où $h_r(t) = h_e^*(-t)$. Ainsi, le signal en sortie du filtre de réception s'écrit :

$$y(t) = h * x(t) + n(t) \quad (1.3)$$

où $h(t) = h_e * g * h_r(t)$, $g(t)$ est le canal équivalent en bande de base, $*$ est l'opérateur de la convolution et $n(t)$ est le bruit en bande de base filtré par le filtre de réception.

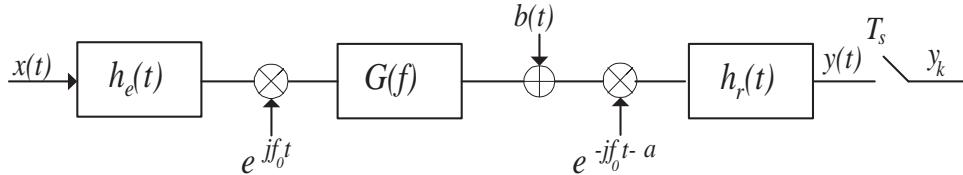


FIGURE 1.2 – Chaîne de transmission numérique sur un canal sélectif en fréquence.

Le signal $y(t)$ est ensuite échantillonné au rythme symbole. Ainsi, nous obtenons le modèle discret du canal comme suit :

$$y_k = \sum_l h_l x_{k-l} + n_k \quad (1.4)$$

où n_k représentent les échantillons du bruit supposés indépendants.

L'équation (1.4) est équivalente à

$$y_k = h_0 x_k + \sum_{l \neq 0} h_l x_{k-l} + n_k. \quad (1.5)$$

Ainsi, on remarque que le signal reçu est la somme d'un terme incluant le symbole d'intérêt $h_0 x_k$, d'un terme de bruit n_k et d'un terme regroupant la contribution d'autres symboles $\sum_{l \neq 0} h_l x_{k-l}$ qui représente l'interférence entre symboles. Afin de combattre les effets de l'IES causée par la sélectivité en fréquence du canal, un égaliseur peut être utilisé en réception.

2.2 Égalisation

Nous considérons une transmission des données sur un canal sélectif en fréquence. Les bits d'information en entrée sont modulés selon la modulation de phase à 2 états (MDP-2 : Modulation à Déplacement de Phase à 2 états ou en anglais BPSK pour *Binary Phase Shift Keying*) dont l'alphabet est $\mathcal{A} = \{-1, 1\}$. Nous supposons que la transmission se fait par blocs de T symboles. Le canal est supposé constant durant la transmission. Le bruit du canal est modélisé par un bruit réel blanc gaussien suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ où $\mathcal{N}(\alpha, \sigma^2)$ est une distribution gaussienne de moyenne α et de variance σ^2 . D'après (1.4), le signal reçu en bande de base échantillonné au rythme symbole à l'instant k est donné par

$$y_k = \sum_{l=0}^{L-1} h_l x_{k-l} + n_k \quad (1.6)$$

où L est la longueur du canal, x_k , pour $0 \leq k \leq T - 1$ sont les symboles émis, x_k , pour $1 - L \leq k < 0$ sont des symboles virtuels égaux à 0 et supposés connus au niveau du récepteur, n_k sont des échantillons indépendants identiquement distribués (iid) du bruit réel blanc gaussien et h_l est le $l^{\text{ème}}$ coefficient du canal.

L'égalisation a pour but de retrouver la séquence émise à partir de la séquence reçue en luttant contre l'IES. Plusieurs techniques d'égalisation ont été proposées dans la littérature [13, 41]. On distingue deux types d'égaliseurs : les égaliseurs linéaires et les égaliseurs non linéaires. Les égaliseurs linéaires sont basés sur le critère de forçage à zéro (ZF : Zero Forcing) ou le critère de l'erreur quadratique moyenne minimale (EQMM). Le critère ZF consiste à choisir un filtre permettant de compenser les interférences entre symboles mais cela peut aussi conduire à une amplification du bruit. Le critère de l'EQMM ou MMSE (Minimum Mean Square Error) consiste à minimiser l'erreur quadratique moyenne

entre la séquence émise et la sortie de l'égaliseur. Ce filtre réalise un bon compromis entre l'élimination de l'IES et l'amplification du bruit [42]. Les égaliseurs linéaires sont caractérisés par leur simplicité vu qu'ils utilisent des filtres, mais il sont peu performants quand le canal possède des zéros proches du cercle unité. Afin d'améliorer les performances des égaliseurs linéaires, des égaliseurs non linéaires à retour de décisions sont proposés (DFE : *Decision Feedback Equalizer*). En plus des échantillons reçus, ils utilisent des décisions passées sur les symboles x_k afin d'améliorer leurs performances. Cependant, ils sont complexes et souffrent de la propagation d'erreurs si les décisions sur les symboles x_k sont erronées.

Un autre type d'égaliseur non linéaire est l'égaliseur basé sur le critère Maximum *A Posteriori* (MAP). Lorsque ce critère est défini par séquence, il conduit à l'algorithme de Viterbi [13]. S'il est défini par symbole, on utilise l'algorithme aller retour de *Bahl et al.* [3]. Dans cette thèse, nous utilisons cet égaliseur vu qu'il est optimal en termes de TEB. Dans ce qui suit, nous présentons l'égaliseur MAP symbole.

Égaliseur MAP symbole : L'égaliseur optimal utilisant le critère MAP symbole calcule la probabilité *a posteriori* (APP : *A Posteriori Probability*) de chaque symbole sachant la totalité de la séquence reçue [3] :

$$P(x_k = x | \underline{y}) = \frac{1}{P(\underline{y})} P(x_k = x, \underline{y}), \quad x \in \mathcal{A} \quad (1.7)$$

où $\underline{y} = (y_0, \dots, y_{T-1})^T$ est le signal reçu (à l'entrée de l'égaliseur) en bande de base échantillonné au rythme symbole.

L'ensemble des séquences possibles à la sortie du canal (en l'absence de bruit) peut être représenté par un diagramme en treillis [30]. Dans la figure 1.3, nous donnons la représentation en treillis du canal de longueur $L = 3$ pour une modulation MDP-2. Chaque état σ_k est identifié par les $L - 1$ symboles transmis avant l'instant k : $(x_{k-1}, \dots, x_{k-L+1})$. Ainsi, il existe $M = \text{card}(\mathcal{A})^{L-1}$ états possibles. Dans le cas d'une modulation BPSK et pour une longueur de canal $L = 3$, quatre états sont définis.

Soit l'état $\sigma_k = (x_{k-2}, x_{k-1})$. Le symbole x_k peut prendre toutes les valeurs possibles de $\mathcal{A} = \{-1, 1\}$. Soit x un élément particulier de \mathcal{A} . Il lui correspond une branche partant de σ_k et ce pour chaque état du treillis. Ainsi la probabilité jointe peut se décomposer comme suit :

$$P(x_k = x, \underline{y}) = \sum_{m=0}^{M-1} P(x_k = x, \sigma_k = m, \underline{y}) \quad (1.8)$$

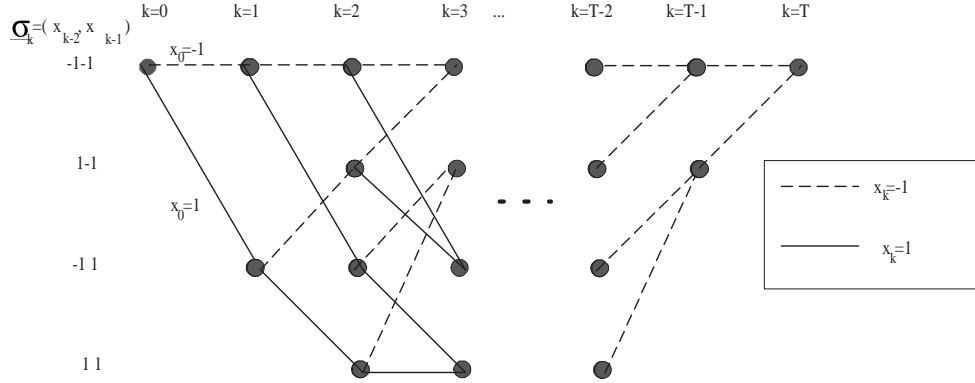


FIGURE 1.3 – Représentation en treillis pour un canal de longueur 3 et une modulation BPSK.

où m représente un état du treillis.

Soit la branche reliant l'état $\sigma_k = m$ et l'état $\sigma_{k+1} = m'$ et représentée en trait gras sur la figure 1.4. Cette branche correspond au symbole émis courant $x_k = x$. On obtient

$$\begin{aligned}
 P(\sigma_k = m, x_k = x, \underline{y}) &= P(\sigma_k = m, \sigma_{k+1} = m', \underline{y}) \\
 &= P(\sigma_k = m, (y_0, \dots, y_{k-1})^T) P(\sigma_{k+1} = m', y_k | \sigma_k = m) P((y_{k+1}, \dots, y_{T-1})^T | \sigma_{k+1} = m') \\
 &= \alpha_k(m) \gamma_{k+1}(m, m') \beta_{k+1}(m')
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

où $\alpha_k(m) = P(\sigma_k = m, (y_0, \dots, y_{k-1})^T)$ représente la probabilité conjointe d'être dans l'état $\sigma_k = m$ à l'instant k et d'avoir une observation passée $(y_0, \dots, y_{k-1})^T$, $\gamma_{k+1}(m, m') = P(\sigma_{k+1} = m', y_k | \sigma_k = m)$ est la probabilité de transition de branche entre les états m et m' , à l'instant k et $\beta_{k+1}(m') = P((y_{k+1}, \dots, y_{T-1})^T | \sigma_{k+1} = m')$ représente la probabilité d'avoir une observation future $(y_{k+1}, \dots, y_{T-1})^T$ sachant que l'état à l'instant $k+1$ est m' .

Les probabilités $\alpha_k(m)$ et $\beta_k(m)$ sont initialisées comme suit :

$$\begin{aligned}
 \alpha_0(0) &= 1 \text{ et } \alpha_0(m) = 0 \text{ si } m \neq 0 \\
 \beta_{T-1}(0) &= 1 \text{ et } \beta_{T-1}(m) = 0 \text{ si } m \neq 0
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Le terme $\alpha_k(m)$ se calcule de la manière récursive suivante

$$\alpha_{k+1}(m') = \sum_{m=0}^{M-1} \gamma_{k+1}(m, m') \alpha_k(m) \tag{1.11}$$

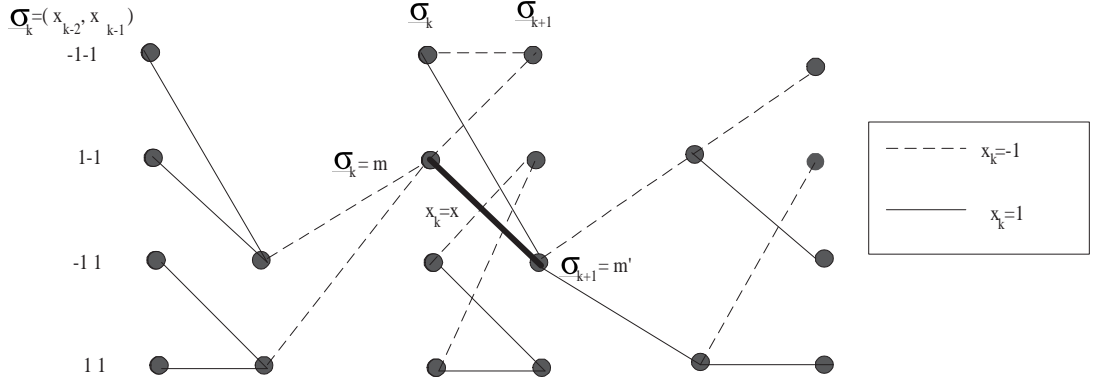


FIGURE 1.4 – Méthode de calcul de l'algorithme MAP.

et $\gamma_{k+1}(m, m')$ se calcule en utilisant (1.6) de la manière suivante

$$\begin{aligned}
 \gamma_{k+1}(m, m') &= P(\sigma_{k+1} = m', y_k | \sigma_k = m) \\
 &= P(y_k | \sigma_k = m, \sigma_{k+1} = m') P(\sigma_{k+1} = m' | \sigma_k = m) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\|y_k - \sum_{l=0}^{L-1} h_l x_{k-l}\|^2}{2\sigma^2}} P(\sigma_{k+1} = m' | \sigma_k = m)
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

La probabilité de transition $P(\sigma_{k+1} = m' | \sigma_k = m)$ de l'état m à l'état m' à l'instant k est la probabilité *a priori* à l'instant k . Cette probabilité est fournie par le décodeur à l'égaliseur quand un récepteur itératif est considéré en réception. Dans le cas d'un récepteur non itératif, toutes les transitions sont équiprobables et $P(\sigma_{k+1} = m' | \sigma_k = m) = \frac{1}{\text{card}(\mathcal{A})}$.

Le terme $\beta_k(m)$ se calcule de la manière récursive suivante

$$\beta_k(m) = \sum_{m'=0}^{M-1} \gamma_{k+1}(m, m') \beta_{k+1}(m'). \tag{1.13}$$

Ainsi, le treillis est parcouru dans le sens de temps croissant pour calculer $\alpha_k(m)$ et $\gamma_{k+1}(m, m')$ et dans le sens de temps décroissant pour calculer $\beta_k(m)$, d'où le nom algorithme aller-retour. Enfin, un dernier passage dans le sens croissant du temps permet d'obtenir les probabilités composites $P(x_k = x, \sigma_k = m, \underline{y})$ et par une sommation sur les états, nous obtenons finalement la probabilité jointe : $P(x_k = x, \underline{y})$. En se basant sur cette probabilité, l'égaliseur prend une décision sur chaque symbole x_k , donnée par

$$\hat{x}_k = \arg \max_{x \in \{-1, 1\}} P(x_k = x, \underline{y}). \tag{1.14}$$

A partir de (1.12), nous remarquons que l'égaliseur a besoin de connaître le canal. Or, dans la pratique, l'égaliseur ne connaît pas le canal et doit l'estimer. Dans la section suivante, nous présentons la méthode d'estimation du canal basée sur le critère des moindres carrés.

3 Estimation du canal

L'égaliseur doit disposer d'une bonne estimation du canal de propagation pour bien détecter les symboles transmis. Les méthodes d'estimation du canal peuvent être divisées en deux groupes : des méthodes d'estimation aveugles qui exploitent les statistiques des symboles transmis afin d'estimer le canal et des méthodes d'estimation non aveugles où une séquence d'apprentissage connue par le récepteur est insérée dans le bloc de symboles émis [11]. Parmi ces méthodes non aveugles, nous citons l'estimation du canal basée sur le critère des moindres carrés. Elle consiste à minimiser l'erreur quadratique moyenne entre le signal reçu durant la phase d'apprentissage et son équivalent non bruité. L'estimation du canal selon le critère des MC ainsi que toutes les autres méthodes non aveugles donnent de meilleurs résultats mais elles présentent l'inconvénient de consommer une partie du débit disponible pour transmettre les symboles pilotes formant la séquence d'apprentissage. Ainsi, une solution pour limiter cette perte en termes de débit utile consiste à utiliser une estimation itérative du canal. En effet, quand un récepteur itératif composé d'un égaliseur et un décodeur de canal est considéré, l'estimation du canal peut être améliorée itérativement en utilisant, en plus des symboles pilotes, des décisions dures sur les symboles de données à la sortie du décodeur [8, 32, 43]. Nous expliquons dans la section 4 de ce chapitre le principe du codage canal. Dans le chapitre 3 de cette thèse, la technique d'estimation itérative du canal sera plus détaillée. Dans ce qui suit, nous étudions l'estimation selon le critère des moindres carrés du canal que nous utiliserons dans le chapitre 2.

3.1 Variance de l'erreur de l'estimation du canal

Le canal est estimé en utilisant une séquence d'apprentissage de longueur $T_p \geq 2L - 1$ [23]. Puisque le bruit du canal est un BABG, l'estimateur utilisant le critère Maximum de Vraisemblance (MV) minimise l'erreur quadratique moyenne entre le signal reçu durant la phase d'apprentissage et son équivalent non bruité. Il est donc équivalent à l'estimateur aux moindres carrés du canal [11]. Soient $\underline{x} = (x_{T_p-1}, \dots, x_0)^T$ le vecteur des symboles pilotes modulés selon la modulation MDP-2. La sortie du canal correspondant à la séquence

d'apprentissage $\underline{y}_{T_p} = (y_{T_p-1}, \dots, y_{L-1})^T$ est donnée par

$$\underline{y}_{T_p} = X\underline{h} + \underline{n} \quad (1.15)$$

où X est la matrice de Hankel de dimensions $(T_p - L + 1) \times L$ ayant pour première colonne $(x_{T_p-1}, \dots, x_{L-1})^T$ et pour dernière ligne (x_{L-1}, \dots, x_0) , \underline{n} est le vecteur du bruit et $\underline{h} = (h_0, \dots, h_{L-1})^T$ est le vecteur des coefficients du canal.

L'estimée $\hat{\underline{h}} = (\hat{h}_0, \dots, \hat{h}_{L-1})^T$ aux moindres carrés du canal est donnée par

$$\begin{aligned} \hat{\underline{h}} &= \arg \min_{\underline{f}} \|\underline{y} - X\underline{f}\| \\ &= (X^T X)^{-1} X^T \underline{y}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme L_2 . On obtient ainsi,

$$\delta \underline{h} \triangleq \hat{\underline{h}} - \underline{h} \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 (X^T X)^{-1}\right). \quad (1.17)$$

Nous supposons que la séquence d'apprentissage a des propriétés idéales d'autocorrélation et d'intercorrélation. Ainsi, $X^T X = (T_p - L + 1)I_L$, où I_L est la matrice identité de dimensions $(L \times L)$. Les coefficients estimés du canal \hat{h}_l , pour $0 \leq l \leq L - 1$, peuvent donc être modélisés par $\hat{h}_l = h_l + \sigma_e k_l$, où k_l sont des échantillons iid d'une variable aléatoire réelle gaussienne de moyenne nulle et de variance 1 et $\sigma_e = \frac{\sigma}{\sqrt{T_p - L + 1}}$.

Ainsi,

$$\delta \underline{h} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{(T_p - L + 1)} I_L\right). \quad (1.18)$$

L'erreur quadratique moyenne (EQM) de l'estimation du canal, est alors donnée par

$$E(\|\delta \underline{h}\|^2) = \frac{\sigma^2 L}{T_p - L + 1} \quad (1.19)$$

où $E(\cdot)$ est l'espérance mathématique.

3.2 Débit utile

D'après l'expression (1.19), nous remarquons que l'augmentation de la longueur de la séquence d'apprentissage améliore la qualité de l'estimation du canal. Par contre, ceci entraîne une perte en termes de débit utile. Prenons l'exemple d'un système GSM

(*Global System for Mobile communications*). La longueur du canal est généralement égale à $L_{GSM} = 5$. Cependant, comme le montre la figure 1.5, la norme réserve $26 \simeq 5L_{GSM}$ bits d'apprentissage sur chaque burst GSM afin de déterminer le profil des trajets multiples du canal [31]. Ceci entraîne une perte en termes de débit utile. En effet, en supposant que les temps de propagation et d'inter-bursts (temps qui sépare la transmission de deux bursts successifs) sont négligeables, le débit utile est donné par

$$D_u = \frac{\text{Nombre de bits utiles du burst}}{\text{Nombre total de bits du burst}} D = \frac{116}{148} D = 78\% D \quad (1.20)$$

où D est le débit de transmission. Notons que nous tenons aussi compte dans (1.20) des bits de queue. Nous remarquons que la perte en termes de débit due à l'utilisation de la séquence d'apprentissage est assez significative dans les systèmes GSM.

Queue 3 bits	Données 58 bits	Séquence d'apprentissage 26 bits	Données 58 bits	Queue 3 bits
-----------------	--------------------	--	--------------------	-----------------

FIGURE 1.5 – Format du burst en GSM.

Dans ce travail, nous nous intéressons au problème de l'optimisation de la longueur de la séquence d'apprentissage afin d'obtenir un bon compromis entre le débit utile et la qualité de l'estimation du canal. Nous considérons à la réception un égaliseur MAP. Il a été montré dans [45] qu'à fort rapport signal à bruit (RSB), l'égaliseur MAP utilisant l'estimée selon le critère MC du canal est équivalent à l'égaliseur MAP ayant une connaissance parfaite du canal mais avec un rapport signal à bruit équivalent. L'expression de ce RSB équivalent a été trouvée dans [45] pour le cas d'une transmission SISO (*Single-Input Single-Output*) sur un canal sélectif en fréquence et dans [18, 20] pour le cas d'une transmission MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output*) sur un canal non sélectif en fréquence. En nous basant sur ces expressions et afin de tenir compte de la perte en termes de débit utile due à l'utilisation des symboles pilotes, nous définissons un rapport signal à bruit utile pour les deux cas dans le deuxième chapitre. Nous proposons de trouver la taille de la séquence d'apprentissage maximisant le RSB utile. Nous considérons aussi dans le troisième chapitre le cas où l'égaliseur MAP est intégré dans un turbo détecteur utilisant une estimation itérative du canal.

En plus de l'égalisation, une autre solution permettant de lutter contre les erreurs de transmission introduites par le canal consiste à ajouter, dans la chaîne de transmission,

un codeur de canal à l'émission et un décodeur de canal à la réception. La méthode de codage de canal consiste à rajouter des bits de redondance à la séquence initiale de manière à détecter et corriger les erreurs au niveau du décodeur.

4 Codage canal

Afin de lutter contre les erreurs de transmission, un codeur de canal est en général utilisé en plus de l'égaliseur. Le codeur canal est généralement placé au début de la chaîne de communication. Un codeur de canal rajoute des bits de redondance à la séquence émise afin de détecter et/ou corriger les erreurs de transmission [47]. Une telle approche diminue certes le débit utile de transmission mais permet d'améliorer de manière significative les performances en termes de taux d'erreur binaire. Différents types de codes peuvent être utilisés tels que les codes en bloc, les codes convolutifs, les turbo-codes... Dans ce travail, nous utilisons les codeurs convolutifs que nous présentons dans la suite.

4.1 Codes convolutifs

Un code convolutif est défini par trois paramètres : n , k et K . Un code (n, k, K) génère un bloc de n bits codés pour chaque bloc de k bits d'information. A un instant donné, les n sorties du codeur dépendent aussi bien du bloc de k bits en entrée que des $K - 1$ blocs précédents. Le paramètre K est appelé longueur de contrainte du code et $R_c = k/n$ est le rendement du code.

Considérons l'exemple du codeur convolutif donné par la figure 1.6 pour $n = 2$, $k = 1$ et $K = 3$. Chaque sortie $c_t^{(i)}$, ($i = 0, 1$) est le résultat de l'addition modulo 2 du bit d'entrée et des éléments du registre à décalage déterminés par les polynômes générateurs de l'encodeur. Ainsi,

$$c_t^{(i)} = \sum_{j=0}^n g_{i,j} d_{t-j} \quad (1.21)$$

où d_t représente le bit à l'entrée du codeur à l'instant t , $g_i = [g_{i,0}, g_{i,1}, g_{i,2}]$, $i \in \{0, 1\}$, sont les polynômes générateurs et $g_{i,j}$ désigne le $j^{\text{ème}}$ élément du polynôme générateur g_i . Dans l'exemple de la figure 1.6, $g_0 = [1, 1, 1] = 7_{(octal)}$ et $g_1 = [1, 0, 1] = 5_{(octal)}$. Ainsi, un tel codeur est appelé un codeur convolutif de polynômes générateurs $(7, 5)$ en octal.

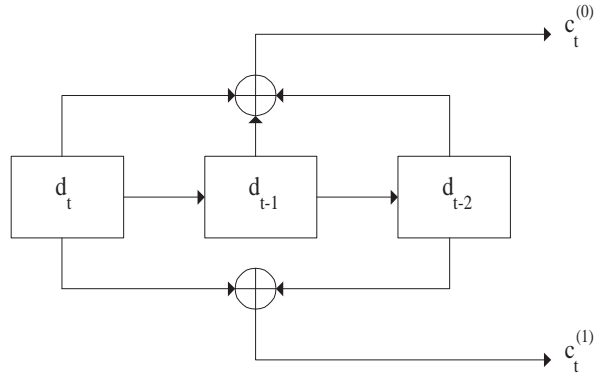


FIGURE 1.6 – Codeur convolutif de polynômes générateurs $(7, 5)_8$.

4.2 Décodage

Un certain nombre d’algorithmes de décodage a été développé pour les codes convolutifs. Deux stratégies de décodage sont définies. La première consiste à calculer des décisions dures sur les bits d’informations en utilisant de l’algorithme de Viterbi [14] basé sur le critère MV. La seconde consiste à calculer les probabilités *a posteriori* (APP) sur les bits d’informations et sur les bits codés en utilisant l’algorithme MAP. L’algorithme MAP est mis en oeuvre par l’algorithme BCJR ou l’algorithme aller-retour [3]. Dans cette thèse, nous allons considérer dans le chapitre 3, un récepteur itératif composé d’un égaliseur à entrées souples et à sorties souples (*soft-input soft-output*) et d’un décodeur à entrées souples et à sorties souples utilisant l’algorithme MAP.

4.3 Entrelacement

La plupart des codeurs correcteurs d’erreurs supposent que les erreurs sont uniformément réparties ce qui n’est pas le cas en réalité. En effet, cette hypothèse n’est pas vérifiée dans le cas de canaux sélectifs en temps et/ou en fréquence qui peuvent engendrer des paquets d’erreurs [42]. Ceci peut rendre difficile la détection et la correction des bits erronés par le décodeur. Ainsi, une solution consiste à utiliser un entrelaceur en émission qui permute les bits codés. Ceci permet de re-disperser les erreurs en réception après désentrelacement et donc de les réduire de manière conséquente après décodage de canal. Plusieurs types d’entrelaceurs ont été proposés dans la littérature [35]. Nous nous limitons à l’utilisation des entrelaceurs pseudo-aléatoires qui permettent de répartir pseudo-aléatoirement les bits d’une séquence donnée.

5 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons étudié l'aspect sélectif en fréquence des canaux de propagation. Nous avons également présenté l'égalisation qui permet de combattre les effets des interférences entre symboles causées par la sélectivité en fréquence du canal radio mobile. Nous nous sommes particulièrement intéressés à l'égaliseur optimal basé sur le critère MAP que nous utiliserons dans la suite.

Afin de bien détecter les symboles émis, l'égaliseur MAP doit disposer d'une bonne estimation du canal. Nous avons présenté l'estimateur selon le critère des moindres carrés du canal utilisant des symboles pilotes. Nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne de cet estimateur. Nous avons noté qu'elle diminue lorsque le nombre de symboles pilotes augmente. Cependant, ceci conduit à une perte en termes de débit utile. Nous avons ensuite présenté le codage de canal et notamment le codage convolutif qui sera utilisé tout au long de ce travail. De même, nous avons expliqué le principe du décodage de canal. Dans le chapitre suivant, nous nous intéressons à l'optimisation de la séquence d'apprentissage quand un égaliseur MAP est utilisé. Pour se faire, nous approximations l'égaliseur MAP utilisant une estimation du canal basée sur le critère MC par l'égaliseur MAP connaissant parfaitement le canal mais avec un RSB équivalent. Nous proposons de définir à partir du RSB équivalent un RSB utile qui tient compte de la perte en termes de débit due à l'utilisation des symboles pilotes. Puis, nous cherchons la longueur de la séquence d'apprentissage maximisant ce RSB utile pour les canaux SISO sélectifs en fréquence et les canaux MIMO non sélectifs en fréquence.

Chapitre 2

Optimisation de la séquence d'apprentissage : Cas d'un détecteur MAP

1 Introduction

Le canal de propagation est généralement estimé en utilisant une séquence d'apprentissage connue au niveau du récepteur. Augmenter la taille de la séquence d'apprentissage engendre une amélioration de la qualité d'estimation du canal mais aussi une perte en termes de débit utile. De même, diminuer la taille de la séquence d'apprentissage augmente le débit utile mais dégrade la qualité d'estimation du canal. Une question qui se pose concerne la taille de la séquence d'apprentissage à choisir pour avoir une bonne estimation du canal sans diminuer significativement le débit utile de transmission. Quelques méthodes ont été proposées afin de répondre à cette question [8, 24, 54]. Dans [24, 54], une solution basée sur la maximisation d'une borne inférieure de la capacité du canal a été proposée pour une transmission dans le cas d'un canal SISO sélectif en fréquence [54] et d'un canal MIMO non sélectif en fréquence [24]. Une autre approche proposée dans [8] optimise la taille de la séquence d'apprentissage en minimisant le rapport de l'EQM de l'estimation du canal sur le débit utile [8]. Cependant, toutes ces études ne tiennent pas compte du récepteur utilisé. La plupart des autres travaux s'intéressent à la minimisation de l'EQM de l'estimation du canal en attribuant la meilleure modélisation de la séquence d'apprentissage [4, 9, 15, 49]. L'étude de [1] trouve l'allocation optimale des puissances de la séquence d'apprentissage et l'emplacement optimal des symboles pilotes. Cependant,

tous ces travaux ne considèrent pas le problème de l'optimisation de la longueur de la séquence d'apprentissage [1, 4, 9, 15, 49]. En effet, leurs études ont été élaborées pour une longueur fixe de la séquence d'apprentissage.

Dans ce chapitre, nous considérons le cas d'une transmission sur un canal mono-antenne (SISO) sélectif en fréquence et le cas d'une transmission sur un canal MIMO non sélectif en fréquence. Un détecteur MAP est utilisé au niveau du récepteur pour lutter contre les interférences entre symboles causées par la sélectivité en fréquence du canal SISO et contre les interférences spatiales causées par la transmission par les antennes multiples. L'estimation du canal est effectuée selon le critère des moindres carrés. Pour trouver le nombre optimal des symboles pilotes permettant d'obtenir une bonne estimation du canal sans diminuer significativement le débit utile, nous montrons que le détecteur MAP utilisant l'estimation du canal peut être approximé, à fort RSB, par le détecteur MAP connaissant parfaitement le canal mais avec un certain RSB équivalent. Nous calculons l'expression de ce RSB équivalent dans les deux cas de transmission : la transmission sur un canal SISO sélectif en fréquence et la transmission sur un canal MIMO non sélectif en fréquence. En nous basant sur cette expression, nous définissons un rapport signal à bruit utile qui tient compte de la perte en termes de débit due à l'utilisation de la séquence d'apprentissage. Nous considérons deux cas : le cas où les puissances des symboles pilotes et des symboles de données sont égales et le cas où ces puissances peuvent avoir des valeurs différentes. Dans le cas de puissances égales, nous donnons la longueur optimale de la séquence d'apprentissage. Dans le cas où les puissances peuvent être différentes, nous donnons en plus l'allocation optimale des puissances.

2 Cas mono-antenne

Dans cette section, nous étudions l'optimisation de la longueur de la séquence d'apprentissage dans le cas d'un canal mono-antenne sélectif en fréquence.

2.1 Canal sélectif en fréquence

Comme le montre la figure 2.1, nous considérons la transmission des données sur un canal sélectif en fréquence. Les bits d'information en entrée sont modulés selon la modulation de phase à 2 états (MDP-2) dont l'alphabet est $\mathcal{A} = \{-1, 1\}$. Nous supposons que la transmission se fait par blocs de T symboles. Nous supposons que le canal est invariant durant la transmission et est inconnu au niveau du récepteur.

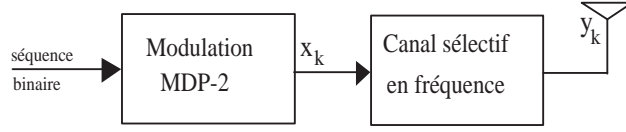


FIGURE 2.1 – Structure de l'émetteur mono-antenne.

En réception, nous considérons un récepteur non itératif composé d'un estimateur du canal et d'un égaliseur MAP utilisant l'algorithme BCJR [3] (cf. figure 2.2).

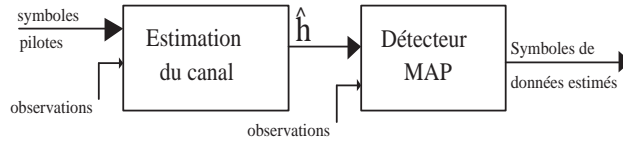


FIGURE 2.2 – Structure du récepteur mono-antenne non itératif.

Le canal est estimé selon le critère des moindres carrés en utilisant une séquence d'apprentissage idéale de longueur $T_p \geq 2L - 1$ [17, 21–23]. Nous supposons dans la suite que les T_p symboles pilotes sont transmis avec une puissance σ_p^2 et que les $T_d = T - T_p$ symboles de données sont transmis avec une puissance σ_d^2 . Afin de conserver l'énergie totale de transmission, σ_p^2 et σ_d^2 doivent satisfaire la contrainte suivante

$$\sigma_p^2 T_p + \sigma_d^2 T_d = \sigma_t^2 T \quad (2.1)$$

où $\sigma_t^2 T$ est l'énergie totale transmise par bloc.

Nous rappelons que l'expression de l'EQM de l'estimation du canal a été calculée dans la section 3.1 du chapitre 1 quand les puissances des symboles pilotes sont égales à l'unité. Quand ces puissances sont égales à σ_p^2 , l'expression de l'EQM devient [23]

$$E(\|\delta \underline{h}\|^2) = \frac{\sigma^2 L}{\sigma_p^2 (T_p - L + 1)} \quad (2.2)$$

Le signal reçu en bande de base échantillonné au rythme symbole à l'instant k est donné par

$$y_k = \begin{cases} \sigma_p \sum_{l=0}^{L-1} h_l x_{k-l} + n_k & , \text{ pour } 0 \leq k \leq T_p - 1 \\ \sigma_d \sum_{l=0}^{k-T_p} h_l x_{k-l} + \sigma_p \sum_{l=k-T_p+1}^{L-1} h_l x_{k-l} + n_k & , \text{ pour } T_p \leq k \leq T_p + L - 2 \\ \sigma_d \sum_{l=0}^{L-1} h_l x_{k-l} + n_k & , \text{ pour } T_p + L - 1 \leq k \leq T - 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

où L est la longueur du canal, σ_d^2 (respect. σ_p^2) est la puissance des symboles de données (respect. pilotes) et x_k , pour $0 \leq k \leq T-1$, sont les symboles émis. Les symboles virtuels x_k , pour $1-L \leq k \leq -1$ sont supposés connus au récepteur et peuvent être mis à 0. Dans (2.3), n_k sont des échantillons indépendants identiquement distribués (iid) d'un bruit réel blanc gaussien suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Le terme h_l est le $l^{\text{ème}}$ coefficient du canal qu'on suppose réel.

Dans la suite, nous mettons en évidence que l'égaliseur MAP utilisant l'estimation du canal aux moindres carrés est approximé, à fort RSB, par l'égaliseur MAP connaissant parfaitement le canal mais avec un RSB équivalent. Nous donnons l'expression de ce RSB équivalent dans la section suivante.

2.2 Calcul du RSB équivalent

Soient $\underline{x} = (\sigma_d x_{T-1}, \dots, \sigma_d x_{T_p}, \sigma_p x_{T_p-1}, \dots, \sigma_p x_{1-L})^T$ le vecteur de longueur $T+L-1$ des symboles émis et $\underline{n} = (n_{T-1}, \dots, n_0)^T$ le vecteur de bruit de longueur T . La sortie du canal $\underline{y} = (y_{T-1}, \dots, y_0)^T$ est donnée par

$$\underline{y} = \tau(\underline{h})\underline{x} + \underline{n} \quad (2.4)$$

où $\tau(\underline{h})$ est la matrice de Toeplitz de dimensions $T \times (T+L-1)$ ayant pour première ligne $(h_0, h_1, \dots, h_{L-1}, 0, \dots, 0)$ et pour première colonne $(h_0, 0, \dots, 0)^T$.

La séquence de données estimée selon le critère MAP est donnée quand le canal est estimé par

$$\hat{\underline{x}} = \arg \min_{\underline{u}} \left(\left\| \underline{y} - \tau(\hat{\underline{h}})\underline{u} \right\| \right) \quad (2.5)$$

où $\hat{\underline{h}} = (\hat{h}_0, \dots, \hat{h}_{L-1})$ est la réponse impulsionnelle estimée du canal et \underline{u} s'écrit sous la forme $\underline{u} = (\sigma_d u_{T-1}, \dots, \sigma_d u_{T_p}, \sigma_p u_{T_p-1}, \dots, \sigma_p u_{1-L})^T$ avec $u_k \in \mathcal{A}$ pour $1-L \leq k \leq T-1$. Notons que le récepteur connaît parfaitement les symboles x_k pour $1-L \leq k \leq T_p-1$ et n'a pas besoin de les estimer.

Quand le canal est parfaitement connu au niveau du récepteur, la probabilité d'erreur à la sortie de l'égaliseur MAP peut être approximée à fort RSB par [13]

$$P_0 \simeq Q \left(\frac{d_{\min} \sigma_d}{2\sigma} \right) \quad (2.6)$$

où d_{\min} est la distance minimale du canal définie comme étant la plus petite distance entre toutes les séquences modulées en MDP-2 et filtrées par le canal et $Q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$.

Quand le canal est estimé selon le critère des moindres carrés, l'expression de la probabilité d'erreur à la sortie de l'égaliseur MAP est approximée à fort RSB par [45]

$$P \simeq Q \left(\sqrt{\frac{d_{min}^2 \sigma_d^2}{4 \sigma^2} \left(1 + \frac{L \sigma_d^2}{(T_p - L + 1) \sigma_p^2} \right)^{-1}} \right) \quad (2.7)$$

Ainsi, nous déduisons qu'à fort RSB, la probabilité d'erreur donnée par (2.7) quand le canal est estimé est équivalente à celle donnée par (2.6) quand le canal est connu mais avec un RSB équivalent

$$RSB_{eq} = \frac{d_{min}^2 \sigma_d^2}{4 \sigma^2} \left(1 + \frac{L \sigma_d^2}{(T_p - L + 1) \sigma_p^2} \right)^{-1} \quad (2.8)$$

En nous basant sur cette expression, nous définissons dans ce qui suit un RSB utile tenant compte de la perte en termes de débit due à l'utilisation de la séquence d'apprentissage.

2.3 Optimisation de la longueur de la séquence d'apprentissage

Nous commençons par supposer que les puissances des symboles pilotes et des symboles de données sont égales à l'unité ($\sigma_p^2 = \sigma_d^2 = 1$). Nous nous intéressons à l'optimisation de la longueur de la séquence d'apprentissage en maximisant le RSB utile. Nous supposons ensuite que les puissances des symboles pilotes et des symboles de données peuvent avoir des valeurs différentes et nous optimisons conjointement la longueur de la séquence d'apprentissage et l'allocation des puissances.

2.3.1 Puissances égales des symboles pilotes et de données

Nous supposons que les puissances des symboles pilotes et des symboles de données sont égales. Quand la séquence d'apprentissage est longue, l'estimée du canal devient plus fiable. Cependant, ceci entraîne une perte en termes de débit utile. Ainsi, pour tenir compte de cette perte, nous définissons un RSB utile à la sortie de l'égaliseur MAP comme suit [17, 21–23]

$$\begin{aligned} RSB_{u,eq} &= \frac{T-T_p}{T} RSB_{eq} \\ &= \frac{T-T_p}{T} \frac{d_{min}^2}{4\sigma^2} \left(1 + \frac{L}{T_p-L+1} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Notre objectif est de maximiser $RSB_{u,eq}$ sous les contraintes $T_p \leq T - 1$ et $T_p \geq 2L - 1$. Nous considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\max_{2L-1 \leq T_p \leq T-1} RSB_{u,eq}. \quad (2.10)$$

Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $f_0(t) = \frac{d_{min}^2}{4\sigma^2} \frac{T-t}{T} \left(1 + \frac{L}{t-L+1}\right)^{-1}$. Notons que $RSB_{u,eq} = f_0(T_p)$. Soit $f_0''(t)$ la dérivée seconde de $f_0(t)$. Puisque $f_0''(t) < 0$, pour $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction f_0 est concave. Ainsi, elle possède un maximum unique atteint en $t_0^* \in \mathbb{R}_+$, tel que :

$$t_0^* = -1 + \sqrt{L + TL}. \quad (2.11)$$

Nous considérons les deux cas possibles :

- Si $t_0^* < 2L - 1 \Leftrightarrow T < 4L - 1$, la longueur optimale de la séquence d'apprentissage T_p^* maximisant $RSB_{u,eq}$ est alors égale à $2L - 1$.
- Si $2L - 1 \leq t_0^* \leq T - 1 \Leftrightarrow T \geq 4L - 1$ alors $T_p^* = r_0^*$ où

$$r_0^* = \arg \max_{t \in \{\lfloor t_0^* \rfloor, \lceil t_0^* \rceil\}} f_0(t) \quad (2.12)$$

et $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$ désignent respectivement le plus grand entier inférieur à x et le plus petit entier supérieur à x .

Finalement,

$$T_p^* = (r_0^* - 2L + 1)^+ + 2L - 1 \quad (2.13)$$

où $(x)^+ = \max\{0, x\}$.

D'après les équations (2.11), (2.12) et (2.13), nous remarquons que la valeur de T_p^* augmente quand T et/ou L augmente.

Remarque 2.1 : Quand $T \geq 4L + 5$, nous montrons facilement que $t_0^* > 2L$. Ainsi, $T_p^* > 2L - 1$.

2.3.2 Optimisation conjointe de la longueur de la séquence d'apprentissage et de l'allocation des puissances

Dans cette section, nous supposons que les symboles pilotes et de données peuvent avoir des puissances différentes σ_p^2 et σ_d^2 respectivement [23]. L'expression du rapport

signal à bruit utile devient

$$RSB_{u,eq} = \frac{T - T_p}{T} \frac{d_{min}^2}{4} \frac{\sigma_d^2}{\sigma^2} \left(1 + \frac{L\sigma_d^2}{(T_p - L + 1)\sigma_p^2} \right)^{-1} \quad (2.14)$$

Dans la suite, nous considérons le problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \max RSB_{u,eq}(T_p, \sigma_p^2, T_d, \sigma_d^2) \\ \text{s.c.} \\ \sigma_p^2 T_p + \sigma_d^2 T_d = \sigma_t^2 T \\ T_p + T_d = T \\ \sigma_p^2, \sigma_d^2 > 0 \\ 2L - 1 \leq T_p \leq T - 1 \end{cases} \quad (2.15)$$

Soit le réel $0 < \alpha < 1$ tel que

$$\sigma_d^2 T_d = \alpha \sigma_t^2 T. \quad (2.16)$$

L'expression du RSB utile devient

$$RSB_{u,eq} = \frac{\alpha \sigma_t^2 d_{min}^2}{4\sigma^2} \left(1 + \frac{\alpha T_p L}{(1 - \alpha)(T - T_p)(T_p - L + 1)} \right)^{-1} \quad (2.17)$$

Le problème (2.15) est alors équivalent à

$$\begin{cases} \max RSB_{u,eq}(T_p, \alpha) \\ \text{s.c.} \\ 2L - 1 \leq T_p \leq T - 1 \\ 0 < \alpha < 1 \end{cases} \quad (2.18)$$

Les contraintes sont ainsi devenues indépendantes puisque chaque contrainte ne dépend que de α ou de T_p [7, p133]. Ceci permet de simplifier la résolution du problème. Ainsi, nous montrons que la longueur optimale de la séquence d'apprentissage et la valeur optimale de la puissance des symboles pilotes maximisant $RSB_{u,eq}$ sous les contraintes de (2.15) sont données par

$$\begin{aligned} T_p^* &= (r_1^* - 2L + 1)^+ + 2L - 1 \\ \sigma_p^{*2} &= \frac{(1 - \alpha^*(T_p^*))\sigma_t^2 T}{T_p^*} \end{aligned} \quad (2.19)$$

où

$$r_1^* = \arg \max_{t \in \{[t_1^*], [t_1^*]\}} f_1(t, \alpha^*(t)), \quad (2.20)$$

$$f_1(t, \alpha) = \frac{\alpha \sigma_t^2 d_{min}^2}{4\sigma^2} \left(1 + \frac{\alpha t L}{(1-\alpha)(T-t)(t-L+1)} \right)^{-1}, \quad t_1^* = \sqrt{TL - T}, \quad \alpha^*(t) = \frac{A(t) - \sqrt{A(t)Lt}}{A(t) - Lt} \text{ et } A(t) = (T-t)(t-L+1).$$

La preuve de (2.19) est donnée dans l'Annexe A.1.

En utilisant la condition de conservation de l'énergie, la puissance des symboles de données maximisant le rapport signal à bruit utile est donnée par

$$\begin{aligned} \sigma_d^{*2} &= \frac{\alpha^*(T_p^*) \sigma_t^2 T}{T - T_p^*} \\ &= \frac{\sigma_t^2 T (A(T_p^*) - \sqrt{A(T_p^*) L T_p^*})}{(T - T_p^*)(A(T_p^*) - L T_p^*)} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ainsi, les puissances des symboles pilotes et des symboles de données maximisant le RSB utile sont égales ($\sigma_p^{*2} = \sigma_d^{*2}$) quand

$$\sigma_p^{*2} = \sigma_t^2 \text{ ou } T_p^* = T(1 - \alpha^*(T_p^*)). \quad (2.22)$$

A partir des équations (2.19) et (2.20), nous remarquons que comme dans le cas de l'optimisation de la longueur de la séquence d'apprentissage à puissances égales, T_p^* augmente quand T et/ou L augmente.

Remarque 2.2 : Comme il est mentionné dans l'Annexe A.1, pour une valeur donnée de T_p , le RSB utile est maximisé pour des valeurs des puissances pilote et de données égales respectivement à :

$$\begin{aligned} \sigma_p^{*2}(T_p) &= \frac{\sigma_t^2 T (-L T_p + \sqrt{A(T_p) L T_p})}{T_p (A(T_p) - L T_p)} \\ \sigma_d^{*2}(T_p) &= \frac{\sigma_t^2 T (A(T_p) - \sqrt{A(T_p) L T_p})}{(T - T_p)(A(T_p) - L T_p)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

En utilisant (2.23), nous trouvons que la dérivée de σ_p^{*2} par rapport à T_p pour une valeur fixée de T est négative. Celle par rapport à T pour une valeur fixée de T_p est positive. Ainsi, σ_p^{*2} diminue quand T_p augmente et/ou T diminue. De même, la dérivée de σ_d^{*2} par rapport à T_p pour une valeur fixée de T est positive. Celle par rapport à T pour une valeur fixée de T_p est négative. Ainsi, σ_d^{*2} diminue quand T_p diminue et/ou T augmente.

2.3.3 Comparaison de l'optimisation à puissances égales et à puissances différentes

Nous comparons dans ce qui suit la longueur optimale de la séquence d'apprentissage maximisant le RSB utile quand les puissances des symboles pilotes et des symboles de données sont égales et celle maximisant la même quantité quand l'optimisation est faite de manière conjointe. En effet, en utilisant (2.12) et (2.20), nous remarquons que

$$\begin{aligned} r_1^* &< u_1 \\ r_0^* &> u_0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

où $u_1 = \sqrt{TL - T} + 1$ et $u_0 = -2 + \sqrt{TL + L}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} (u_0 - 1)^2 - (u_1 - 1)^2 &= T + L + 9 - 6\sqrt{TL + L} \\ &= L + 9 + \sqrt{T} \left(\sqrt{T} - 6\sqrt{L} \left(1 + \frac{1}{T}\right)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Quand $T \gg L$,

$$\begin{aligned} (u_0 - 1)^2 - (u_1 - 1)^2 &\simeq L + 9 + \sqrt{T} \left(\sqrt{T} - 6\sqrt{L} - \frac{6\sqrt{L}}{2T} \right) \\ &\simeq 9 + T - 6\sqrt{LT}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Ainsi, quand $T \gg L$

$$(u_0 - 1)^2 - (u_1 - 1)^2 \geq 0. \tag{2.27}$$

Dans ce cas et en utilisant (2.24), nous obtenons

$$r_1^* < u_1 \leq u_0 < r_0^*. \tag{2.28}$$

Par suite, quand $T \gg L$, la valeur de T_p^* maximisant le RSB utile quand les puissances sont égales est plus grande que celle maximisant la même quantité quand les puissances peuvent avoir des valeurs différentes.

Dans le tableau 2.1, nous donnons les longueurs des séquences d'apprentissage maximisant le RSB utile quand $\sigma_p^2 = \sigma_d^2$ et quand σ_p^2 peut être différente de σ_d^2 pour différentes valeurs de T et L et pour $\sigma_t^2 = 0dB$. Nous remarquons que la longueur de la séquence d'apprentissage qui maximise le *RSB* utile quand les puissances sont égales est plus grande que celle qui maximise la même quantité quand ces puissances peuvent avoir des valeurs différentes et que l'optimisation est faite de manière conjointe. Nous remarquons également, dans les deux cas, que T_p^* augmente quand T et/ou L augmente.

	T_p^* (puissances égales)	T_p^* (optimisation conjointe)
$T=128$ et $L = 3$	19	16
$T=256$ et $L = 3$	27	23
$T=128$ et $L = 5$	24	23
$T=256$ et $L = 5$	35	32

TABLEAU 2.1 – Longueurs des séquences d’apprentissage maximisant $RSB_{u,eq}$ pour $\sigma_t^2 = 0dB$ et pour différentes valeurs de L et T .

2.3.4 Résultats des simulations

Nous avons supposé dans notre étude que la séquence d’apprentissage a des propriétés idéales d’intercorrélacion et d’autocorrélacion. Or, il n’est pas toujours possible de trouver une telle séquence pour un T_p donné ou une longueur de canal donnée. Dans nos simulations, la séquence d’apprentissage de longueur T_p est choisie selon la méthode de [11] quand la valeur de T_p est petite ($T_p < 20$) pour minimiser le rapport signal à erreur d’estimation. Quand la longueur de la séquence d’apprentissage est grande $T_p \geq 20$, nous choisissons aléatoirement les éléments de la séquence d’apprentissage vu que celle-ci devient quasi-idéale quand sa taille est grande.

2.3.4.a Cas 1 : puissances égales des symboles de données et des symboles pilotes

La figure 2.3 montre les performances de l’égaliseur MAP, en termes de Taux d’Erreur Binaire (TEB), pour le *Canal 3* de réponse impulsionnelle (0.5;0.71;0.5) quand le canal est estimé et pour différentes valeurs de la longueur de la séquence d’apprentissage en fonction de $RSB_u = \frac{T-T_p}{T}RSB$, où RSB est le rapport signal à bruit à l’entrée de l’égaliseur MAP. Nous considérons dans nos simulations le RSB_u au lieu du RSB afin de tenir compte de la perte en termes de débit utile due à l’utilisation des symboles pilotes. Le nombre de symboles par bloc est $T = 256$. Nous supposons dans ce premier cas que les puissances des symboles pilotes et de données sont égales. En nous basant sur notre étude analytique, la longueur optimale de la séquence d’apprentissage maximisant $RSB_{u,eq}$ est $T_p^* = 27$ pour $L = 3$. Nous considérons dans la figure 2.3 trois valeurs de T_p : $T_p = 8$, $T_p = T_p^* = 27$ et $T_p = 100$. Les simulations dans la figure 2.3 confirment que l’égaliseur présente ses meilleures performances quand $T_p = T_p^*$.

La figure 2.4 montre variation de T_p^* en fonction de T pour un canal de longueur $L = 3$ et des puissances égales des symboles pilotes et de données. Nous obtenons une courbe

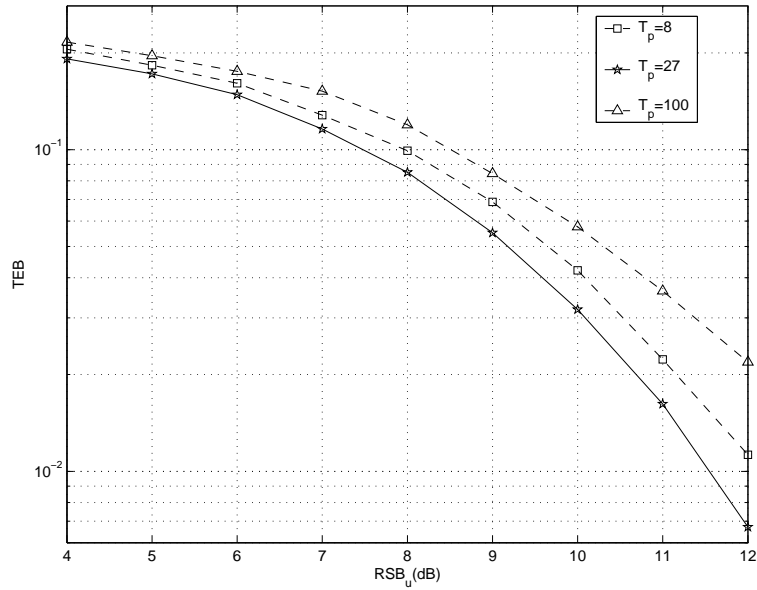


FIGURE 2.3 – Optimisation de T_p pour des puissances égales : TEB à la sortie de l'égaliseur MAP pour différentes valeurs de T_p pour le *Canal 3* et $T = 256$.

en escalier. Ainsi, pour deux transmissions avec des blocs de tailles proches la taille de la séquence d'apprentissage optimale reste la même. Nous remarquons aussi qu'à partir de $T \geq 15$, $T_p^* > 2L - 1$ (voir remarque 2.1).

2.3.4.b Cas 2 : puissances différentes des symboles de données et des symboles pilotes

Nous considérons maintenant le cas où les puissances des symboles pilotes et des symboles de données sont différentes. Nous représentons dans la figure 2.5 σ_p^{*2} et σ_d^{*2} (obtenues en utilisant (2.23)) en fonction de T_p pour $T = 256$, $\sigma_t^2 = 0dB$ et différentes valeurs de la longueur du canal. Nous vérifions que la puissance des symboles pilotes maximisant $RSB_{u,eq}$ diminue quand la longueur de la séquence d'apprentissage augmente. Celle des symboles de données augmente quand T_p augmente.

Nous représentons dans la figure 2.6 σ_p^{*2} et σ_d^{*2} en fonction de T pour $T_p = 20$, $\sigma_t^2 = 0dB$ et différentes valeurs de la longueur du canal. Nous remarquons que la puissance des symboles pilotes maximisant $RSB_{u,eq}$ augmente quand la longueur du bloc augmente. Celle des symboles de données diminue quand T diminue.

La figure 2.7 montre le TEB à la sortie de l'égaliseur MAP en fonction du RSB_u pour le *Canal 3*, $T = 256$ et $\sigma_t^2 = 0dB$. Nous considérons cinq scénarios. En utilisant (2.19), les valeurs théoriques optimales de la longueur de la séquence d'apprentissage et de la

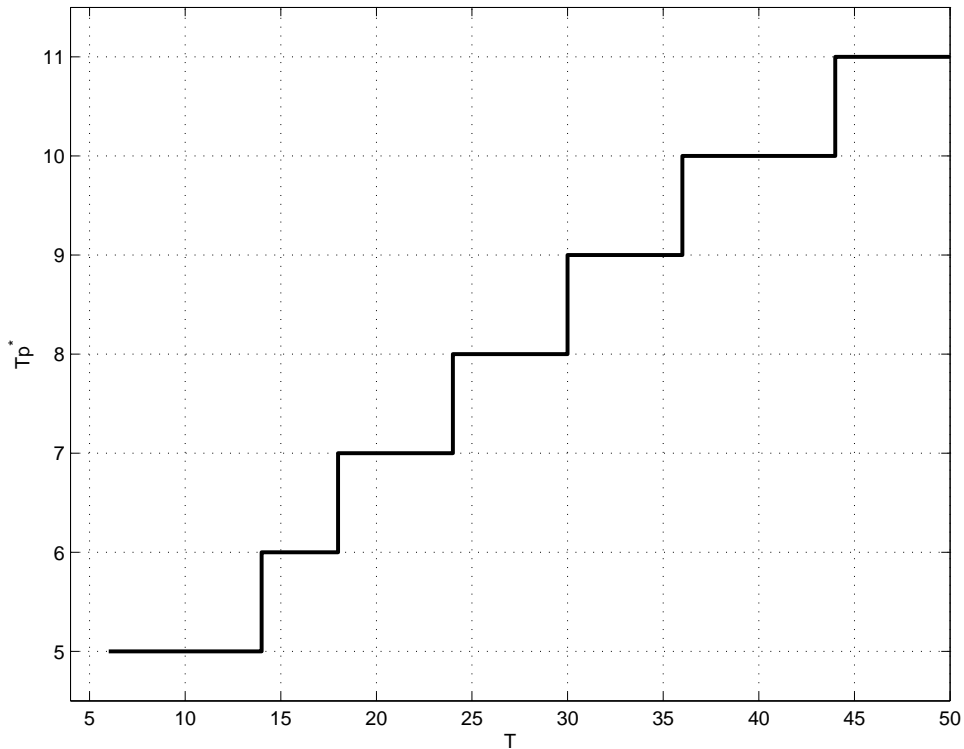


FIGURE 2.4 – Optimisation de la longueur de la séquence d’apprentissage pour des puissances égales : Variation de T_p^* en fonction de T .

puissance des symboles pilotes quand l’optimisation est effectuée de manière conjointe sont respectivement $T_p^* = 23$ et $\sigma_p^{*2} = 0.72dB$. Les simulations confirment que l’égaliseur MAP présente ses meilleures performances quand $T_p = T_p^*$ et $\sigma_p^2 = \sigma_p^{*2}$.

Dans la suite, nous proposons d’étendre l’étude au cas des systèmes MIMO. En effet, les systèmes MIMO connaissent un intérêt croissant puisqu’ils permettent d’obtenir une amélioration significative des performances aussi bien en termes de capacité qu’en termes de fiabilité [56]. Nous étudions dans la section suivante l’optimisation de la longueur de l’intervalle d’apprentissage pour un canal MIMO non sélectif en fréquence.

3 Cas multi-antennes (MIMO)

Nous considérons un canal MIMO non sélectif en fréquence. En réception, nous considérons un détecteur MAP et un estimateur de canal basé sur le critère des MC. Nous supposons, comme dans [24], que le canal est quasi-stationnaire. Nous proposons comme précédemment d’optimiser les séquences d’apprentissage.

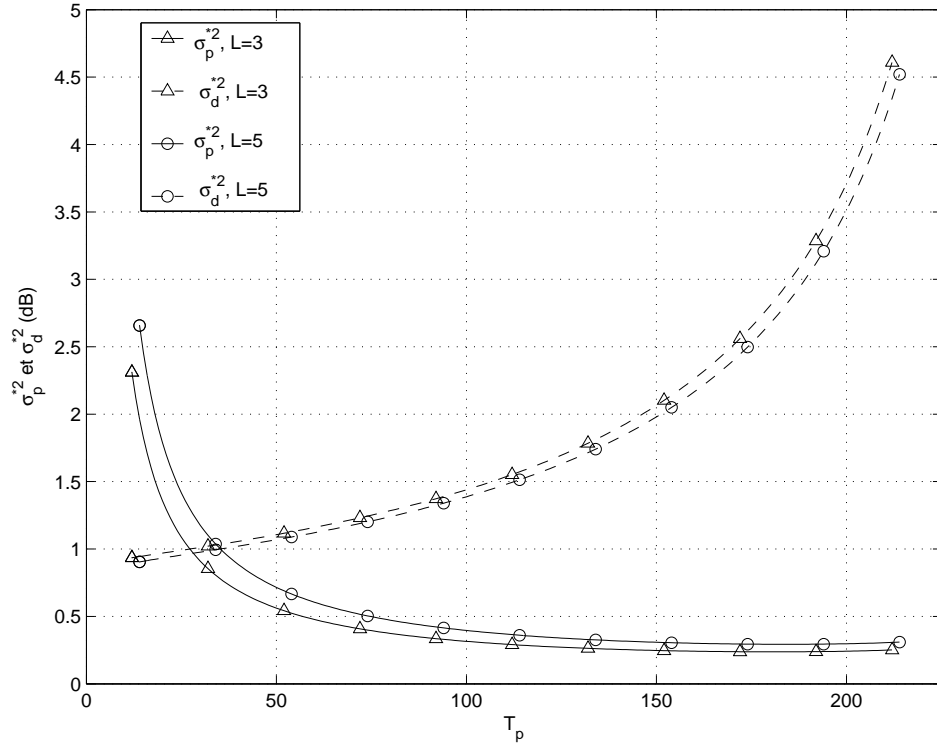


FIGURE 2.5 – Courbes de σ_p^{*2} et σ_d^{*2} en fonction de T_p pour $T = 256$, $\sigma_t^2 = 0dB$ et différentes valeurs de L .

3.1 Modèle du système MIMO

Nous considérons un système MIMO avec n_E antennes émettrices et n_R antennes réceptrices. Comme le montre la figure 2.8, les bits d'information en entrée sont modulés selon la modulation de phase à 2 états (MDP-2) dont l'alphabet est $\mathcal{A} = \{-1, 1\}$. Nous supposons que la transmission se fait par blocs. Chaque antenne émettrice émet des blocs de T symboles. Nous supposons que les T_p premiers symboles sont des symboles pilotes transmis avec une puissance σ_p^2 et que les $T_d = T - T_p$ derniers symboles sont des symboles de données transmis avec une puissance σ_d^2 . Afin de conserver l'énergie totale de transmission, σ_p^2 et σ_d^2 doivent satisfaire la contrainte suivante

$$\sigma_p^2 T_p + \sigma_d^2 T_d = \sigma_t^2 T \quad (2.29)$$

où $\sigma_t^2 T$ est l'énergie totale transmise par bloc.

Le canal est quasi stationnaire et est supposé invariant durant un bloc et peut changer d'un bloc à l'autre. Le récepteur MIMO non itératif donné par la figure 2.9 doit effectuer

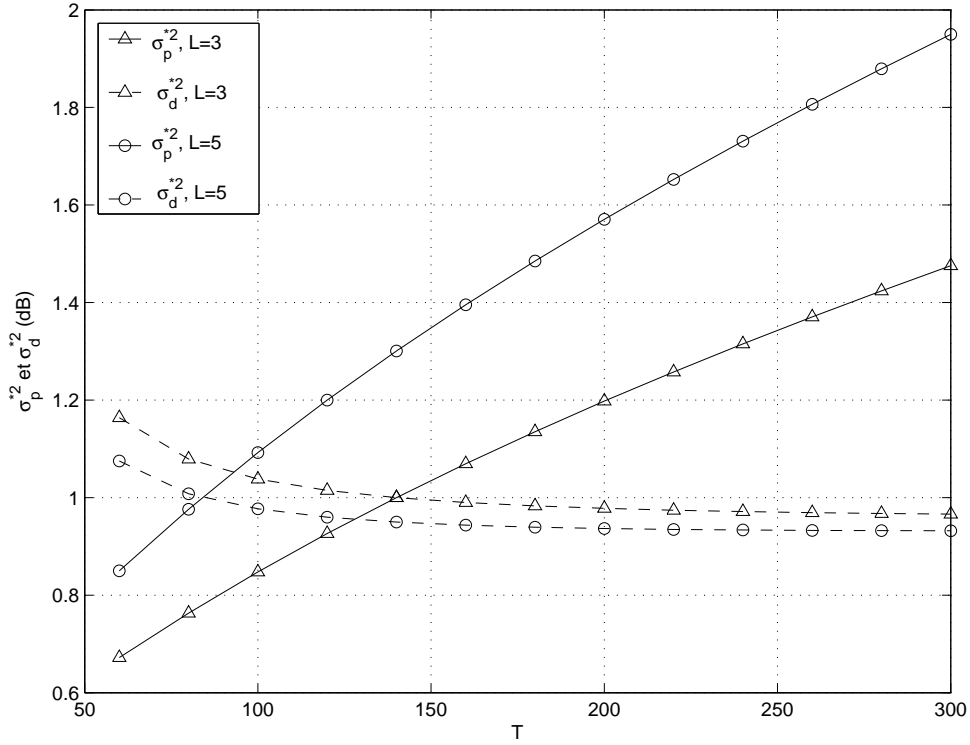


FIGURE 2.6 – Courbes de σ_p^{*2} et σ_d^{*2} en fonction de T pour $T_p = 20$, $\sigma_t^2 = 0dB$ et différentes valeurs de L .

une détection spatiale afin de séparer les données émises par les différentes antennes. Nous considérons ici un détecteur MAP. Pour bien estimer les symboles émis, le détecteur MAP doit disposer d'une bonne connaissance du canal. Dans cette section, nous supposons que le canal MIMO est estimé en se basant sur le critère des MC.

Le signal reçu en bande de base échantillonné au rythme symbole à l'instant k à l'antenne réceptrice j est donné par

$$y_k^{(j)} = \begin{cases} \sigma_p \sum_{i=1}^{n_E} h_{ji} x_k^{(i)} + n_k^{(j)}, & \text{pour } 0 \leq k \leq T_p - 1 \\ \sigma_d \sum_{i=1}^{n_E} h_{ji} x_k^{(i)} + n_k^{(j)}, & \text{pour } T_p \leq k \leq T - 1 \end{cases} \quad (2.30)$$

où $x_k^{(i)}$ est le $k^{\text{ème}}$ symbole transmis par la $i^{\text{ème}}$ antenne émettrice et h_{ji} est le gain du canal entre l'antenne émettrice i et l'antenne réceptrice j . Les coefficients du canal h_{ji} sont modélisés par des variables aléatoires réelles gaussiennes centrées et indépendantes. Pour une antenne réceptrice j donnée, nous supposons que $E(\sum_{i=1}^{n_E} |h_{ji}|^2) = 1$. Dans (2.30), $n_k^{(j)}$ sont des échantillons indépendants d'un bruit blanc réel gaussien centré et de variance σ^2 . Le vecteur reçu sur l'antenne réceptrice j durant la phase d'apprentissage,

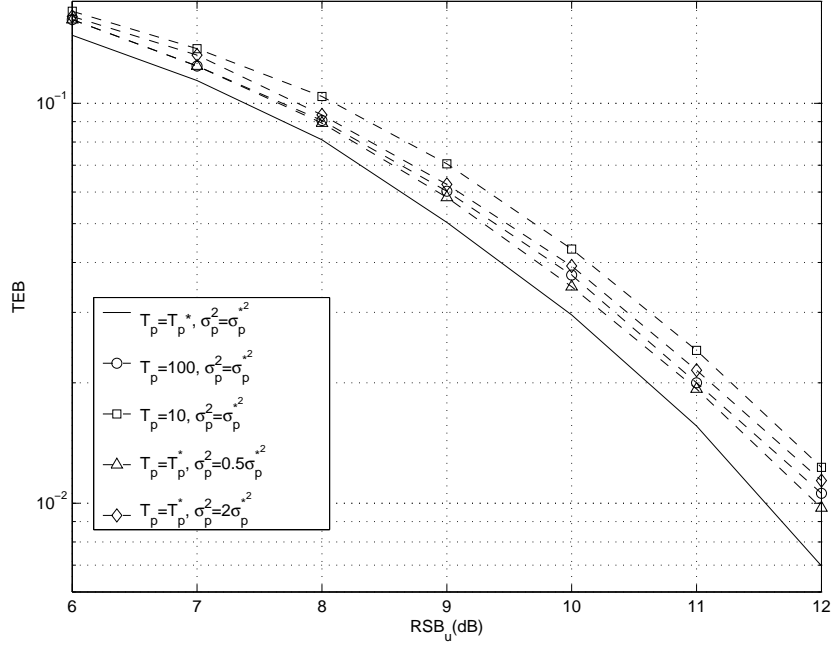


FIGURE 2.7 – Optimisation conjointe de la longueur de la séquence d’apprentissage et de l’allocation des puissances : TEB en fonction du RSB_u pour différentes valeurs de T_p et σ_p^2 pour le Canal 3, $T = 256$ et $\sigma_t^2 = 0dB$.

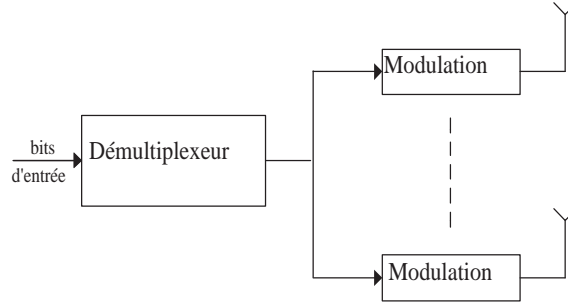


FIGURE 2.8 – Structure de l’émetteur MIMO.

$\underline{y}^{(j)} = \left(y_0^{(j)}, y_1^{(j)}, \dots, y_{T_p-1}^{(j)} \right)^T$, est donné par

$$\underline{y}^{(j)} = \sigma_p X \underline{h}^{(j)} + \underline{n}^{(j)} \quad (2.31)$$

où $\underline{h}^{(j)} = (h_{j1}, h_{j2}, \dots, h_{jn_E})^T$, $\underline{n}^{(j)} = \left(n_0^{(j)}, n_1^{(j)}, \dots, n_{T_p-1}^{(j)} \right)^T$ et X est la matrice contenant les symboles pilotes émis par les différentes antennes émettrices dont l’élément sur la $k^{\text{ème}}$ ligne et la $i^{\text{ème}}$ colonne est $x_k^{(i)}$. Sous l’hypothèse que $T_p \geq n_E$, l’estimée aux moindres

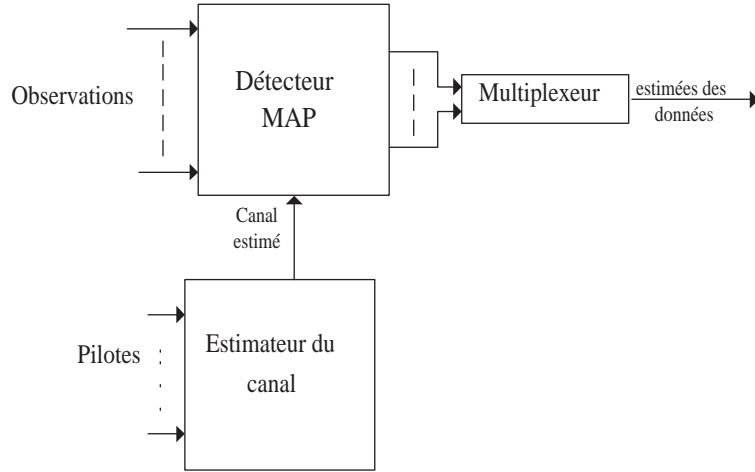


FIGURE 2.9 – Structure du récepteur MIMO.

carrés du canal $\underline{h}^{(j)}$ est donnée par [11] :

$$\hat{\underline{h}}^{(j)} = \frac{1}{\sigma_p} (X^T X)^{-1} X^T \underline{y}^{(j)}. \quad (2.32)$$

Nous supposons que les séquences d'apprentissage ont des propriétés idéales d'auto-corrélation et d'intercorrélation, c'est-à-dire $X^T X = T_p I_{n_E}$. Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta \underline{h}^{(j)} = \hat{\underline{h}}^{(j)} - \underline{h}^{(j)} &\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{\sigma_p^2} (X^T X)^{-1}\right) \\ &= \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{T_p \sigma_p^2} I_{n_E}\right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

qui ne dépend pas de j . Ainsi, l'exposant (j) ne sera pas considéré dans l'écriture de l'EQM de l'estimation du canal par antenne réceptrice qui est donnée par

$$E(\|\delta \underline{h}\|^2) = \frac{n_E \sigma^2}{T_p \sigma_p^2}. \quad (2.34)$$

D'après (2.34), nous notons que quand T_p augmente, la qualité de l'estimation s'améliore. Cependant, ceci entraîne une perte en termes de débit utile. Nous proposons donc d'optimiser les séquences d'apprentissage pour réaliser un bon compromis entre la qualité de l'estimation et le débit utile. Pour se faire, nous calculons dans la suite l'expression du RSB équivalent caractérisant le détecteur MAP utilisant l'estimation du canal. En nous basant sur cette expression, nous définissons un RSB utile qui tient compte de la perte

en termes de débit due à l'utilisation des symboles pilotes.

3.2 Détecteur MAP et calcul du RSB équivalent

Nous commençons par présenter le détecteur MAP. Selon (2.30), le signal reçu sur les n_R antennes réceptrices à l'instant k , pour $T_p \leq k \leq T - 1$, est donné par :

$$\underline{y}_k = \sigma_d H \underline{x}_k + \underline{n}_k, \quad (2.35)$$

où $\underline{x}_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_k^{(n_E)})^T$, $\underline{n}_k = (n_k^{(1)}, n_k^{(2)}, \dots, n_k^{(n_R)})^T$ et H est la matrice du canal de dimensions $n_R \times n_E$ dont l'élément sur la $j^{\text{ème}}$ ligne et la $i^{\text{ème}}$ colonne est h_{ji} . Pour détecter les symboles transmis, le détecteur MAP calcule les probabilités $p(x_k^{(i)} = x | \underline{y}_k)$, pour $1 \leq i \leq n_E$ et $x \in \{-1, 1\}$. Or, on a

$$p(x_k^{(i)} = x | \underline{y}_k) = \frac{p(\underline{y}_k | x_k^{(i)} = x) p(x_k^{(i)} = x)}{p(\underline{y}_k)} \quad (2.36)$$

Puisque les symboles transmis sont équiprobables, le détecteur MAP calcule les probabilités $p(\underline{y}_k | x_k^{(i)} = x)$ données par :

$$p(\underline{y}_k | x_k^{(i)} = x) = \sum_{\underline{x}_k \in X_1} p(\underline{y}_k | \underline{x}_k) \quad (2.37)$$

où X_1 est l'ensemble de toutes les valeurs pouvant être prises par \underline{x}_k avec $x_k^{(i)} = x$. La probabilité $p(\underline{y}_k | \underline{x}_k)$ est donnée par :

$$p(\underline{y}_k | \underline{x}_k) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n_R}{2}}} \exp\left(-\frac{\|\underline{y}_k - \sigma_d H \underline{x}_k\|^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.38)$$

Pour calculer (2.38), le détecteur MAP utilise l'estimation du canal au lieu du vrai canal. Nous montrons dans l'Annexe A.2 qu'à fort RSB, le détecteur MAP utilisant l'estimation du canal peut être approximé par le détecteur MAP connaissant parfaitement le canal mais avec un RSB équivalent donné par

$$RSB_{eq}^{MIMO} = \frac{\sigma_d^2}{\sigma^2} \left(1 + \frac{n_E \sigma_d^2}{T_p \sigma_p^2}\right)^{-1}. \quad (2.39)$$

A partir de cette expression, nous proposons dans ce qui suit de définir le RSB utile.

3.3 Optimisation de la longueur de l'intervalle d'apprentissage

Afin de tenir compte de la perte en termes de débit utile due à l'utilisation des symboles pilotes, nous définissons, comme dans le cas des systèmes mono-antenne sélectifs en fréquence, le RSB utile comme suit [18–20]

$$RSB_{u,eq}^{MIMO} = \frac{T - T_p}{T} RSB_{eq}^{MIMO}. \quad (2.40)$$

Notre objectif est de maximiser le RSB utile quand les puissances des symboles pilotes et celles des symboles de données sont égales et quand celles-ci peuvent avoir des valeurs différentes.

3.3.1 Puissances égales des symboles pilotes et de données

Nous supposons d'abord que les puissances transmises durant la phase d'apprentissage et de données sont égales ($\sigma_p^2 = \sigma_d^2 = 1$). Ainsi, le RSB utile est donné par

$$RSB_{u,eq}^{MIMO} = \frac{T - T_p}{T\sigma^2} \left(1 + \frac{n_E}{T_p}\right)^{-1}. \quad (2.41)$$

Notre but est de trouver la valeur de T_p maximisant le rapport signal à bruit utile $RSB_{u,eq}^{MIMO}$ sous contrainte que $n_E \leq T_p \leq T - 1$ [18, 20]. Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$f_2(t) = \frac{T - t}{\sigma^2 T} \left(1 + \frac{n_E}{t}\right)^{-1} \quad (2.42)$$

Ainsi, $RSB_{u,eq}^{MIMO} = f_2(T_p)$. Puisque, $f_2''(t) < 0$, pour $t > 0$, la fonction f_2 est concave. Elle possède donc un maximum unique atteint en $t_2^* \in \mathbb{R}_+^*$, tel que :

$$t_2^* = -n_E + \sqrt{n_E^2 + n_E T}. \quad (2.43)$$

Ainsi, la longueur optimale de l'intervalle d'apprentissage est donnée par

$$T_p^* = (r_2^* - n_E)^+ + n_E \quad (2.44)$$

où $r_2^* = \arg \max_{t \in \{[t_2^*], [t_2^*]\}} f_2(t)$.

Nous montrons facilement que pour $T > 3n_E + 4$, $T_p^* > n_E$.

Remarque 2.3 : Dans [24], une optimisation conjointe de la longueur de l'intervalle

d'apprentissage et de l'allocation des puissances est considérée pour la maximisation de la borne inférieure de la capacité du canal. Les expressions de T_p^* et de l'allocation optimale des puissances sont trouvées. Cependant, aucune expression analytique de T_p^* n'a été trouvée pour une optimisation de la longueur de l'intervalle d'apprentissage à puissances égales.

3.3.2 Optimisation conjointe de la longueur de l'intervalle d'apprentissage et de l'allocation des puissances

Nous supposons maintenant que les puissances σ_p^2 et σ_d^2 peuvent avoir des valeurs différentes. Nous étudions le problème de la maximisation du RSB utile sous une contrainte d'énergie totale transmise par bloc et une contrainte de la longueur totale du bloc. Ainsi, nous définissons le problème d'optimisation suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \max RSB_{u,eq}^{MIMO}(T_p, \sigma_p^2, T_d, \sigma_d^2) \\ \text{s.c.} \\ \sigma_p^2 T_p + \sigma_d^2 T_d = \sigma_t^2 T \\ T_p + T_d = T \\ n_E \leq T_p \leq T - 1 \\ \sigma_p^2 > 0, \sigma_d^2 > 0 \end{array} \right. \quad (2.45)$$

Nous exprimons la fraction de l'énergie allouée aux symboles de données par bloc par :

$$\sigma_d^2 T_d = \alpha \sigma_t^2 T, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (2.46)$$

Ainsi, l'expression du RSB utile devient

$$RSB_{u,eq}^{MIMO} = \frac{\sigma_t^2 (T - T_p) \alpha (1 - \alpha)}{(1 - \alpha)(T - T_p) + n_E \alpha} \quad (2.47)$$

qui ne dépend donc que de α et de T_p , pour des valeurs fixées de σ_t^2 , T et n_E . Le problème (2.45) est alors équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \max RSB_{u,eq}^{MIMO}(T_p, \alpha) \\ \text{s.c.} \\ n_E \leq T_p \leq T - 1 \\ 0 < \alpha < 1 \end{array} \right. \quad (2.48)$$

Les contraintes sont ainsi devenues indépendantes puisque chaque contrainte ne dépend que de α ou de T_p [7, p133], ce qui permet de simplifier la résolution du problème. Ainsi, nous montrons que quand $T \neq 2n_E$, la longueur optimale de l'intervalle d'apprentissage et la puissance optimale des symboles pilotes maximisant le RSB utile sous les contraintes de (2.45) sont respectivement données par :

$$\begin{aligned} T_p^* &= n_E \\ \sigma_p^{*2} &= \frac{\sigma_t^2 T (-n_E + \sqrt{n_E(T - n_E)})}{n_E(T - 2n_E)}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Quand $T = 2n_E$, la solution de (2.45) est :

$$\begin{aligned} T_p^* &= n_E \\ \sigma_p^{*2} &= \sigma_t^2. \end{aligned} \quad (2.50)$$

La preuve complète de ce résultat est donnée dans l'Annexe A.3.

La puissance des symboles de données maximisant le RSB utile est alors donnée par

$$\sigma_d^{*2} = \frac{\sigma_t^2 T - \sigma_p^{*2} n_E}{T - n_E}. \quad (2.51)$$

Notons que les puissances optimales durant la phase d'apprentissage et celle des données sont égales, $\sigma_p^{*2} = \sigma_d^{*2} = \sigma_t^2$, quand $T = 2n_E$.

Remarque 2.4 : Comme il est mentionné dans l'Annexe A.3, pour une valeur donnée de T_p , le RSB utile est maximisé pour une valeur de la puissance pilote $\sigma_p^2 = \sigma_p^{*2}(T_p)$ donnée par

$$\begin{cases} \sigma_p^{*2}(T_p) = \frac{\sigma_t^2 T (-n_E + \sqrt{n_E(T - T_p)})}{T_p(T - T_p - n_E)} & \text{si } T_p \neq T - n_E \\ \sigma_p^{*2}(T_p) = \frac{\sigma_t^2 T}{2T_p} & \text{si } T_p = T - n_E \end{cases} \quad (2.52)$$

3.3.3 Résultats des simulations

Dans cette section, nous proposons de valider nos résultats analytiques relatifs aux systèmes MIMO non sélectifs en fréquence par des simulations. Nous supposons que les puissances des symboles pilotes et des symboles de données peuvent être égales ou différentes. Si les puissances sont égales, nous considérons l'optimisation de la longueur de l'intervalle d'apprentissage. Si elles sont différentes, nous considérons l'optimisation conjointe de la longueur de l'intervalle d'apprentissage et de l'allocation des puissances.

Nous supposons que $T = 512$ et $n_E = n_R = 2$. Les coefficients du canal h_{ji} sont modélisés par des variables aléatoires réelles gaussiennes indépendantes centrées de variance 0.5.

3.3.3.a Cas 1 : puissances égales des symboles de données et des symboles pilotes

Nous supposons que les puissances des symboles pilotes et des symboles de données sont égales. La figure 2.10 montre les performances, en termes de TEB, à la sortie du détecteur MAP en fonction de RSB_u pour différentes valeurs de T_p . D'après (2.44), $T_p^* = 30$. Ceci est confirmé par les simulations dans la figure 2.10 puisque le détecteur MAP présente ses meilleures performances quand $T_p = 30$.

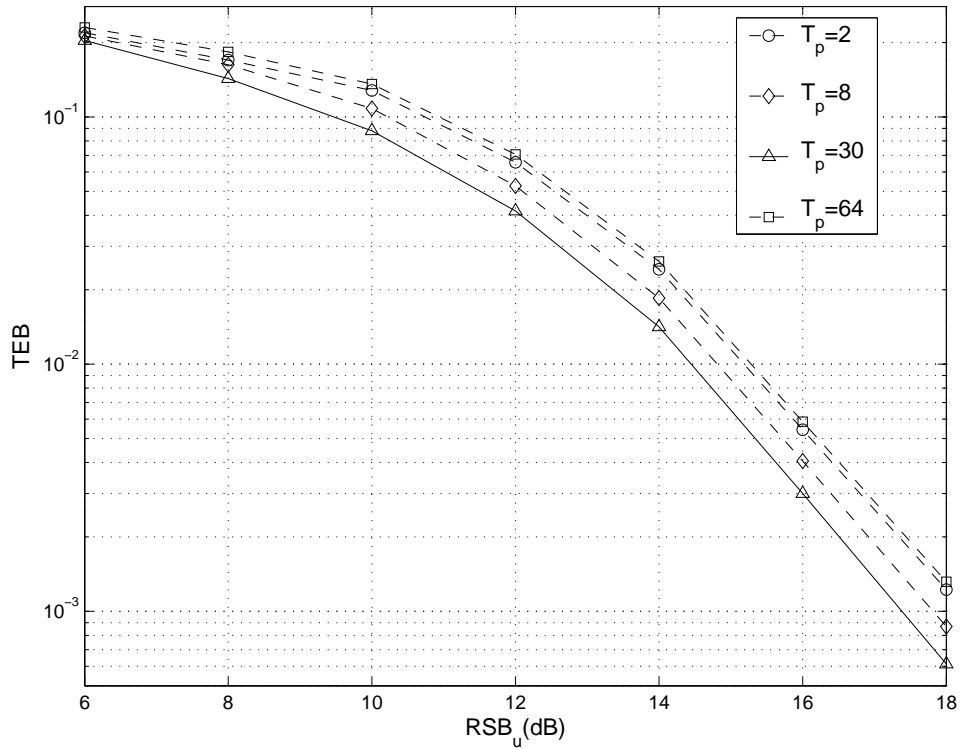


FIGURE 2.10 – Optimisation de la longueur de l'intervalle d'apprentissage à puissances égales : TEB en fonction du RSB_u à la sortie du détecteur MAP pour $T = 512$ et $n_E = n_R = 2$.

3.3.3.b Cas 2 : puissances différentes des symboles de données et des symboles pilotes

Nous supposons maintenant que les puissances des symboles pilotes et des symboles de données peuvent avoir des valeurs différentes. La figure 2.11 montre les performances,

en termes de TEB, à la sortie du détecteur MAP en fonction de RSB_u pour $\sigma_t^2 = 6dB$ et différentes valeurs de T_p . Les courbes tracées en lignes continues montrent les performances obtenues quand l'allocation des puissances est optimisée pour une valeur donnée de T_p (voir Remarque 2.4). Celles tracées en lignes discontinues montrent les performances quand $\sigma_p^2 = \sigma_d^2 = \sigma_t^2$. D'après notre étude théorique, $T_p^* = n_E = 2$ et $\sigma_p^2 = \sigma_p^{*2} = 17.79dB$. Les simulations dans la figure 2.11 confirment que le détecteur MAP présente ses meilleures performances quand la valeur de T_p est minimale et pour $\sigma_p^2 = \sigma_p^{*2}$. Les simulations de la figure 2.11 montrent aussi que pour une valeur donnée de T_p , l'optimisation de l'allocation des puissances permet d'améliorer les performances.

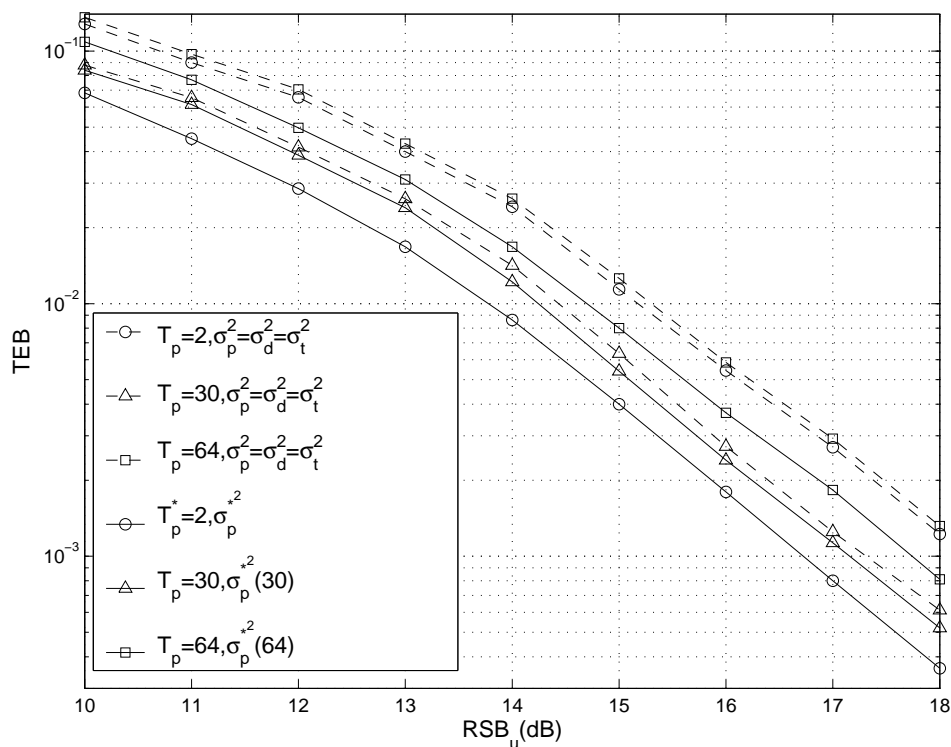


FIGURE 2.11 – TEB en fonction du RSB_u à la sortie du détecteur MAP pour $T = 512$, $\sigma_t^2 = 6dB$, $n_E = n_R = 2$ et pour différentes valeurs de T_p et σ_p^2 .

Sur la figure 2.12, nous représentons les puissances optimales des symboles pilotes et celles de données obtenues quand l'optimisation est effectuée de manière conjointe pour $n_E = 5$, $\sigma_t^2 = 6dB$ et pour différentes valeurs de T , la longueur d'un bloc. Notons ici que σ_p^{*2} est donnée par (2.49) quand $T \neq 10$ et par (2.50) quand $T = 10$ et σ_d^{*2} est donnée par (2.51). Les courbes représentées en lignes continues sont obtenues en utilisant notre

étude. Les courbes tracées en lignes discontinues sont obtenues en utilisant les résultats de [24]. Nous remarquons que le critère de la maximisation du rapport signal à bruit utile donne les mêmes résultats que celui qui se base sur la maximisation de la borne inférieure de la capacité du canal [24]. Nous vérifions également que lorsque T augmente, σ_p^{*2} augmente. Notons finalement que quand $T = 2n_E$, $\sigma_p^{*2} = \sigma_d^{*2} = \sigma_t^2$.

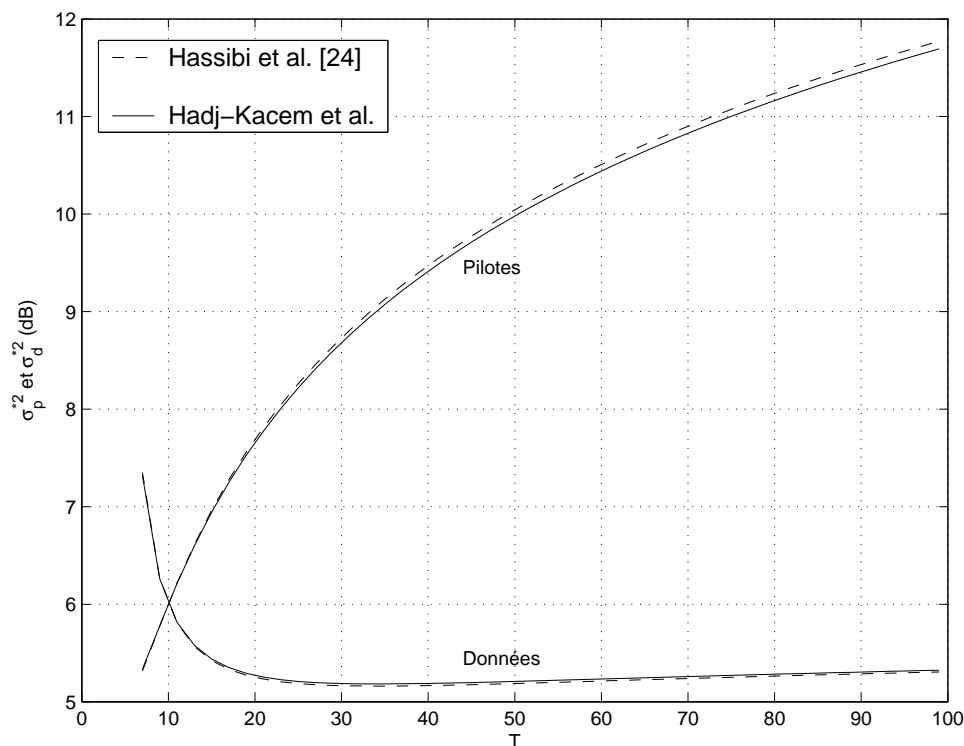


FIGURE 2.12 – Optimisation conjointe de T_p et de l'allocation des puissances : σ_p^{*2} et σ_d^{*2} en fonction de T pour $n_E = 5$ et $\sigma_t^2 = 6dB$.

4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré le problème de l'optimisation du nombre des symboles pilotes quand un détecteur MAP est utilisé. Nous avons montré que le détecteur MAP utilisant l'estimation du canal peut être approximé à fort RSB par le détecteur MAP connaissant parfaitement le canal mais avec un RSB équivalent que nous avons calculé pour un système mono-antenne sélectif en fréquence et un système multi-antennes non sélectif en fréquence. En nous basant sur le RSB équivalent, nous avons défini un RSB utile qui tient compte de la perte en termes de débit utile due à l'utilisation des symboles

pilotes. Nous avons ensuite trouvé le nombre de ces symboles maximisant cette quantité pour les systèmes mono-antenne et multi-antennes dans le cas où les puissances des symboles pilotes et ceux de données sont égales. Quand ces puissances peuvent avoir des valeurs différentes, nous avons déterminé conjointement le nombre de symboles pilotes et l'allocation des puissances maximisant le RSB utile.

Nous avons considéré dans ce chapitre un récepteur non itératif. Dans le chapitre suivant, nous considérerons un récepteur itératif composé d'un détecteur MAP et d'un décodeur MAP. L'estimation du canal est améliorée itérativement en utilisant, en plus des symboles pilotes, des décisions dures sur les symboles de données à la sortie du décodeur du canal. Nous considérerons le problème d'optimisation du nombre de symboles pilotes dans ce cadre.

Chapitre 3

Optimisation de la séquence d'apprentissage : Cas d'un turbo- détecteur

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons une transmission codée sur un canal mono-antenne sélectif en fréquence puis sur un canal MIMO non sélectif en fréquence. Au niveau du récepteur, un turbo-détecteur composé d'un détecteur MAP et d'un décodeur MAP est utilisé. A chaque itération, le détecteur et le décodeur calculent des probabilités *a posteriori* et des probabilités extrinsèques sur les bits codés [40]. Ils échangent les probabilités extrinsèques, qui seront utilisées comme des probabilités *a priori*, pour améliorer itérativement leurs performances.

Dans le chapitre précédent, le canal était estimé en utilisant uniquement une séquence d'apprentissage connue par le récepteur. Quand cette séquence est longue, l'estimée du canal devient plus fiable. Cependant, ceci entraîne une perte en termes de débit utile. Ainsi, nous proposons dans ce chapitre une solution pour limiter cette perte et améliorer l'estimation du canal qui consiste à utiliser, en plus des symboles pilotes, des décisions dures sur les symboles codés obtenues en se basant sur les probabilités *a posteriori* à la sortie du décodeur. Une telle technique est appelée estimation bootstrap [17, 19, 32].

Quand le turbo-détecteur avec estimation itérative du canal est considéré, nous approximations à fort RSB, comme dans le chapitre précédent, le détecteur MAP utilisant l'estimation du canal et les probabilités *a priori* provenant du décodeur par un détecteur MAP

connaissant parfaitement le canal et sans informations *a priori* mais avec un certain RSB équivalent. Nous montrons que ce RSB équivalent dépend du nombre des décisions dures utilisées pour réestimer le canal et de la fiabilité des informations *a priori* reçues du décodeur. Nous étudions ensuite le problème de l'optimisation du nombre de symboles pilotes maximisant le RSB utile.

Dans ce chapitre, nous supposons, que les symboles pilotes et ceux de données sont transmis avec une même puissance égale à l'unité.

2 Cas mono-antenne

Dans cette section, nous étudions l'optimisation de la longueur de la séquence d'apprentissage dans le cas d'une transmission sur un canal mono-antenne sélectif en fréquence. En réception, nous considérons un récepteur itératif composé d'un égaliseur MAP, un décodeur MAP et un estimateur de canal. L'estimation du canal est réalisée de manière itérative et sera expliquée dans la section (2.2) de ce chapitre.

2.1 Récepteur itératif

Comme le montre la figure 3.1, nous considérons dans cette section une transmission codée sur un canal mono-antenne sélectif en fréquence. Nous adoptons un schéma basé sur les modulations codées avec entrelacement de bits plus connu sous le nom de BICM (*Bit Interleaved Coded Modulation*). Ainsi, les bits d'information en entrée sont codés par un codeur convolutif, entrelacés puis modulés selon la modulation MDP-2. Nous considérons un entrelaceur à entrelacement aléatoire de bits. Nous supposons que la transmission se fait par blocs de T symboles. Le canal est supposé invariant durant la transmission.

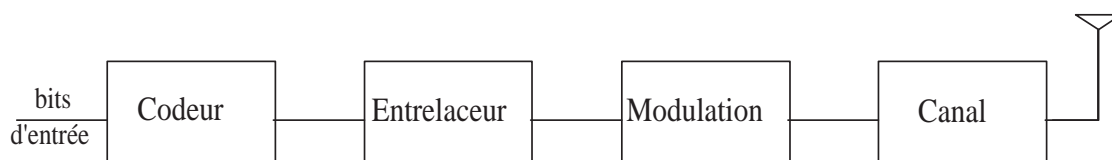


FIGURE 3.1 – Structure de l'émetteur.

Le signal reçu en bande de base échantillonné au rythme symbole à l'instant k est donné

par

$$y_k = \sum_{l=0}^{L-1} h_l x_{k-l} + n_k \quad (3.1)$$

où L est la longueur du canal et x_k , pour $0 \leq k \leq T - 1$, sont les symboles émis. Les symboles virtuels x_k , pour $1 - L \leq x_k \leq -1$, sont supposés connus au récepteur et peuvent être mis à 0. Dans (3.1), n_k sont des échantillons indépendants identiquement distribués (iid) d'un bruit réel blanc gaussien suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Le terme h_l est le $l^{\text{ème}}$ coefficient du canal qu'on suppose réel.

Le récepteur optimal correspondant effectue conjointement les fonctions d'égalisation et de décodage. Cependant, un tel récepteur est très compliqué à mettre en oeuvre à cause de la présence de l'entrelaceur. Ainsi, un récepteur itératif composé d'un égaliseur et d'un décodeur peut être utilisé selon l'idée des turbo-codes [6]. Celui-ci réalise un bon compromis complexité/performance. L'algorithme optimal, en termes de taux d'erreur binaire, à être utilisé au niveau de l'égaliseur et du décodeur est l'algorithme MAP [3]. Ainsi, nous considérons un récepteur itératif composé d'un égaliseur MAP et d'un décodeur MAP comme le montre la figure 3.2. En pratique, l'égaliseur doit disposer d'une estimation du canal. Ainsi, nous considérons un estimateur de canal en réception (figure 3.2).

A chaque itération, l'égaliseur MAP et le décodeur MAP échangent des informations extrinsèques, qui seront utilisées comme des informations *a priori* à la prochaine itération afin d'améliorer itérativement leurs performances. Ces informations extrinsèques sont généralement des Logarithmes des Rapports de Vraisemblance (LRV). En effet, pour $0 \leq k \leq T - 1$, l'égaliseur MAP calcule les probabilités *a posteriori* sur les bits codés $P(x_k = x | \underline{y}, \underline{z}^{dec})$ où $x \in \{-1, 1\}$, $\underline{y} = (y_0, \dots, y_{T-1})^T$ et $\underline{z}^{dec} = (z_0^{dec}, \dots, z_{T-1}^{dec})^T$ est le vecteur des LRVs *a priori* à l'entrée de l'égaliseur en provenance du décodeur. L'égaliseur calcule alors les LRVs extrinsèques donnés par :

$$LRV_{ext}^{eg}(x_k) = LRV_{post}^{eg}(x_k) - LRV_{prio}^{dec}(x_k) \quad (3.2)$$

où

$$LRV_{post}^{eg}(x_k) = \ln \left(\frac{P(x_k = 1 | \underline{y}, \underline{z}^{dec})}{P(x_k = -1 | \underline{y}, \underline{z}^{dec})} \right) \quad (3.3)$$

sont les LRVs *a posteriori* calculés par l'égaliseur et

$$LRV_{prio}^{dec}(x_k) = \ln \left(\frac{P(x_k = 1)}{P(x_k = -1)} \right) \quad (3.4)$$

sont les LRVs *a priori* en provenance du décodeur. Signalons que les LRVs *a priori* sont nuls à la première itération puisque l'égaliseur ne dispose d'aucune information *a priori*. Les LRV_{ext}^{eg} sont désentrelacés puis fournis au décodeur MAP conformément à la figure 3.2. Le décodeur calcule alors les probabilités *a posteriori* $P(\hat{x}_k = x | \underline{z}^{eg})$ où $\underline{z}^{eg} = (LRV_{ext}^{eg}(\hat{x}_{1-L}), \dots, LRV_{ext}^{eg}(\hat{x}_{T-1}))^T$ et $\hat{\underline{x}} = (\hat{x}_{1-L}, \dots, \hat{x}_{T-1})^T$ est la version désentrelacée du vecteur $\underline{x} = (x_{1-L}, \dots, x_{T-1})^T$. Ainsi, le décodeur MAP calcule des LRVs extrinsèques donnés par

$$LRV_{ext}^{dec}(\hat{x}_k) = \ln \left(\frac{P(\hat{x}_k = 1 | \underline{z}^{eg})}{P(\hat{x}_k = -1 | \underline{z}^{eg})} \right) - LRV_{ext}^{eg}(\hat{x}_k). \quad (3.5)$$

Après entrelacement, les LRV_{ext}^{dec} sont fournis à l'égaliseur et seront utilisés comme des LRVs *a priori* à l'itération suivante. A la convergence (après un certain nombre d'itérations du récepteur itératif), le décodeur estime les bits d'entrée.

L'estimation du canal est effectuée, à la première itération, en utilisant la séquence d'apprentissage [11]. Aux itérations suivantes, le décodeur fournit des décisions dures sur les bits codés à l'estimateur du canal. Ainsi, l'estimateur du canal utilise une pseudo-séquence d'apprentissage contenant les symboles pilotes et les décisions dures sur les symboles de données en provenance du décodeur. La technique d'estimation est appelée bootstrap [17,32]. Nous présentons dans ce qui suit cette technique. Nous posons ensuite le problème du choix de la longueur de la séquence d'apprentissage permettant d'avoir une bonne estimation initiale du canal sans diminuer significativement le débit utile de transmission.

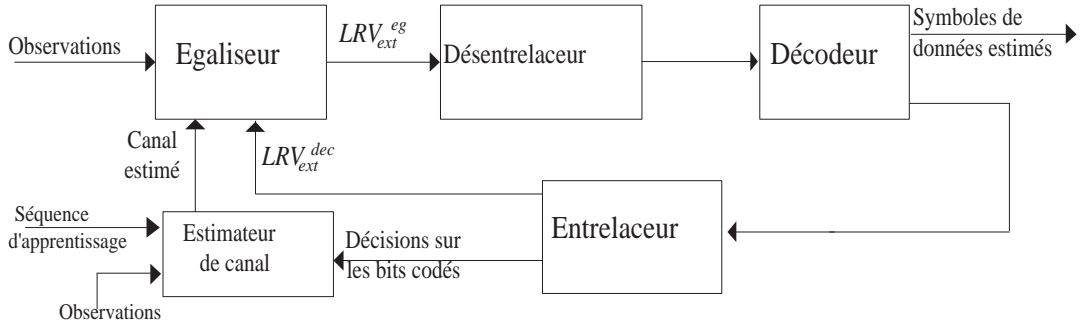


FIGURE 3.2 – Structure du récepteur itératif.

2.2 Estimation bootstrap du canal

A la première itération, l'estimation du canal utilise les T_p symboles pilotes et est basée sur le critère des MC [11]. Aux itérations suivantes, elle utilise en plus des symboles pilotes, les décisions dures sur les symboles codés à la sortie du décodeur [32]. Quand ces décisions sont fiables, l'estimée du canal devient meilleure. Si ces décisions sont très peu fiables, la qualité de l'estimation du canal peut se dégrader [32]. Dans ce qui suit, nous supposons que le décodeur fournit à l'estimateur du canal δT décisions dures sur les symboles codés. Soit $\underline{\tilde{x}} = (x_{T_p+\delta T-1}, \dots, x_0)^T$ la séquence contenant les T_p symboles pilotes x_k , pour $0 \leq k \leq T_p - 1$ et les δT symboles de données x_k , pour $T_p \leq k \leq T_p + \delta T - 1$. La sortie du canal $\underline{\tilde{y}} = (y_{T_p+\delta T-1}, \dots, y_{L-1})^T$ correspondant au vecteur $\underline{\tilde{x}}$ est donnée par

$$\underline{\tilde{y}} = X_b \underline{h} + \underline{\tilde{n}} \quad (3.6)$$

où X_b est une matrice de Hankel de dimensions $(T_p - L + 1 + \delta T) \times L$ ayant pour première colonne $(x_{T_p+\delta T-1}, \dots, x_{L-1})^T$ et pour dernière ligne (x_{L-1}, \dots, x_0) , $\underline{\tilde{n}}$ est le vecteur de bruit correspondant et $\underline{h} = (h_0, \dots, h_{L-1})^T$.

Afin d'estimer le canal, le vecteur d'observations $\underline{\tilde{y}}$ est approximé comme suit :

$$\underline{\tilde{y}} \simeq \widehat{X}_b \underline{h} + \underline{\tilde{n}} \quad (3.7)$$

où \widehat{X}_b est la version estimée de la matrice X_b contenant les symboles pilotes et les décisions dures sur les symboles codés à la sortie du décodeur. Ainsi, l'estimation du canal est donnée par [11]

$$\widehat{\underline{h}} = \left(\widehat{X}_b^T \widehat{X}_b \right)^{-1} \widehat{X}_b^T \underline{\tilde{y}}. \quad (3.8)$$

Notons que le processus est itératif et peut être répété plusieurs fois et que la matrice \widehat{X}_b contient les estimées des symboles à la dernière itération.

2.2.1 Calcul de l'EQM de l'estimateur bootstrap

On suppose dans la suite que $\delta T \gg L$ et que le vecteur contenant les erreurs sur les symboles codés à la sortie du décodeur est indépendant du vecteur de bruit. On suppose que les erreurs sont uniformément réparties sur un bloc grâce à l'entrelacement. L'EQM de l'estimation du canal est donnée par [32]

$$E(\|\delta \underline{h}\|^2) = \frac{\sigma^2 L}{T_p - L + 1 + \delta T} + 4 \frac{\overline{\beta^2} \delta T^2 + (L-1) \overline{\beta} \delta T}{(T_p - L + 1 + \delta T)^2} \quad (3.9)$$

où $\delta\hat{h} = \hat{h} - \underline{h}$, $\bar{\beta} = E(n/\delta T)$, $\bar{\beta}^2 = E(n^2/\delta T^2)$ et n est le nombre des décisions dures erronées sur les symboles codés à la sortie du décodeur, utilisées par l'estimateur du canal. Notons que $\bar{\beta}$ peut être vu comme étant le taux d'erreur binaire sur les bits codés à la sortie du décodeur.

La figure 3.3 montre l'EQM de l'estimation du canal en fonction du *RSB* quand le canal est estimé en utilisant la séquence d'apprentissage seule puis quand celui-ci est estimé par la technique bootstrap. Nous considérons le *Canal 3* de réponse impulsionnelle (0.5; 0.71; 0.5) et différentes valeurs de δT . Les δT décisions dures sont générées en se basant sur des LRVs *a posteriori* artificiels modélisés par des échantillons iid d'une variable aléatoire gaussienne suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\frac{\pm 2}{\sigma_x^2}, \frac{4}{\sigma_x^2}\right)$ [44, 45, 50, 52]. Nous choisissons deux valeurs de σ_x^2 : $\sigma_x^2 = 0.3$ ($\bar{\beta} = 3.5 \cdot 10^{-2}$) et $\sigma_x^2 = 1$ ($\bar{\beta} = 1.5 \cdot 10^{-1}$). Le nombre de symboles pilotes est $T_p = 8$. Dans la figure 3.3, les courbes représentées en lignes discontinues sont obtenues par des simulations et celles en lignes continues indiquent les performances théoriques obtenues en utilisant (2.2) si l'estimation du canal est basée sur la séquence d'apprentissage uniquement et (3.9) quand un estimateur bootstrap est utilisé. Nous remarquons d'abord que quand les informations *a priori* sont fiables ($\bar{\beta} = 3.5 \cdot 10^{-2}$), la qualité d'estimation du canal s'améliore par rapport à l'estimation du canal basée uniquement sur les symboles pilotes. Cependant, quand ces informations ne sont pas suffisamment fiables ($\bar{\beta} = 1.5 \cdot 10^{-1}$), l'estimation du canal se dégrade. Nous remarquons aussi que quand les informations *a priori* sont fiables, l'EQM de l'estimation du canal diminue quand δT augmente. Mais cette diminution est au obtenu au prix d'une augmentation de la complexité de calcul. Nous comparons dans la section suivante, les complexités de calcul des deux méthodes d'estimation du canal : celle utilisant la séquence d'apprentissage seule et celle basée sur la technique bootstrap.

2.2.2 Comparaison des complexités

Afin de comparer les complexités de calcul des deux méthodes d'estimation du canal, nous calculons le nombre de multiplications nécessaires pour chaque méthode. Rappelons que la multiplication d'une matrice A de dimensions $(a \times n)$ par une matrice B de dimensions $(n \times b)$ nécessite nab multiplications. Nous rappelons aussi que pour inverser une matrice inversible C de taille $(n \times n)$, $\frac{n^3}{6}$ multiplications sont nécessaires.

En nous basant sur l'équation (1.16), nous remarquons qu'une estimation d'un canal de longueur L utilisant uniquement T_p symboles pilotes nécessite $(T_p - L + 1)(L^2 + L) + \frac{L^3}{6}$ multiplications. En utilisant (3.8), nous trouvons que l'estimateur bootstrap utilisant T_p symboles pilotes et δT décisions sur les symboles codés nécessite pour estimer un

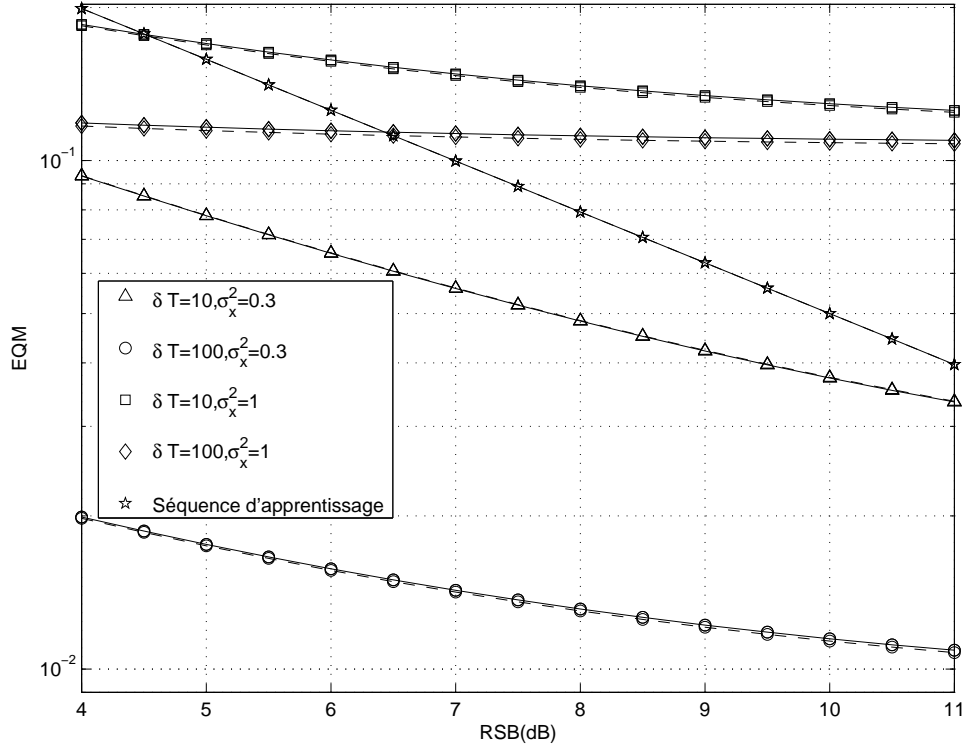


FIGURE 3.3 – Courbes de l’EQM en fonction du RSB de l’estimateur basé sur le critère MC pour le *canal 3* et $T_p = 8$ et de l’estimateur bootstrap pour le *canal 3*, $T_p = 8$ et différentes valeurs de δT pour deux valeurs de σ_x^2 . (Simulations : courbes en lignes discontinues, Expressions théoriques : courbes en lignes continues)

canal de longueur L , $(T_p - L + 1 + \delta T)(L^2 + L) + \frac{L^3}{6}$ multiplications. Nous concluons que l’estimateur bootstrap a besoin de $\delta T(L^2 + L)$ multiplications supplémentaires. Nous remarquons également que quand δT augmente de η , la complexité de calcul de l’approche bootstrap augmente de $\eta(L^2 + L)$ multiplications.

2.3 Optimisation de la longueur de la séquence d’apprentissage pour une estimation bootstrap

Dans le chapitre précédent, nous avons montré dans le cas d’une transmission sur un canal mono-antenne sélectif en fréquence, que l’égaliseur MAP utilisant l’estimation du canal selon le critère des moindres carrés peut être approximé, à fort RSB, par un détecteur MAP connaissant parfaitement le canal mais avec un certain RSB équivalent. Dans ce chapitre, nous tenons compte, en plus de l’estimation du canal, des informations extrinsèques en provenance du décodeur pour calculer le RSB équivalent. L’optimisation

de la longueur de la séquence d'apprentissage est effectuée en se basant sur la maximisation du RSB utile qui est calculé à partir du RSB équivalent.

2.3.1 Calcul du RSB équivalent

Nous supposons que les observations *a priori* à l'entrée de l'égaliseur MAP sont modélisées comme des sorties d'un canal BABG de moyenne nulle et de variance σ_a^2 . Cette hypothèse a été considérée dans [44, 45, 50, 52] et a été prouvée dans [45] quand le canal est parfaitement connu au niveau du récepteur. Nous proposons par la suite de la valider par simulations quand le canal est estimé par l'estimateur bootstrap. Ces observations *a priori* sont données par :

$$z_k = x_k + w_k \quad (3.10)$$

où $w_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_a^2)$, $T_p \leq k \leq T - 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} LRV_{ext}^{dec}(x_k) &= \ln \left(\frac{P(z_k|x_k=1)}{P(z_k|x_k=-1)} \right) \\ &= \ln \frac{\exp\left(\frac{-|z_k-1|^2}{2\sigma_a^2}\right)}{\exp\left(\frac{-|z_k+1|^2}{2\sigma_a^2}\right)} \\ &= \frac{2z_k}{\sigma_a^2} \\ &= \frac{2(x_k+w_k)}{\sigma_a^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Les LRVs *a priori* (extrinsèques) à l'entrée de l'égaliseur MAP, provenant du décodeur, sont alors modélisés par des échantillons iid d'une variable aléatoire gaussienne suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\frac{\pm 2}{\sigma_a^2}, \frac{4}{\sigma_a^2}\right)$ [44, 45, 50, 52]. Dans l'étude de [45], il a été démontré que l'égaliseur MAP utilisant des informations *a priori* en provenance du décodeur et une estimation du canal basée sur la séquence d'apprentissage peut être approximé à fort RSB par un égaliseur MAP n'ayant pas d'informations *a priori* à son entrée et connaissant parfaitement le canal mais avec un RSB équivalent donné par l'équation (12) de [45]. Nous proposons maintenant de généraliser l'étude de [45] au cas de l'égaliseur MAP utilisant des informations *a priori* provenant du décodeur et l'estimation bootstrap du canal. Nous supposons ici que les termes non diagonaux de la matrice $E(\delta \underline{h} \delta \underline{h}^T)$ sont négligeables et que $E(\delta \underline{h} \delta \underline{h}^T) \approx \frac{E(\|\delta \underline{h}\|^2)}{L} I_L$. En intégrant cette hypothèse dans l'équation

(38) de [45], nous trouvons que l'expression du RSB équivalent est donnée par [17]

$$RSB_{eq,boot} \simeq \frac{d'^2 + 4m'\mu^2}{4\sigma^2} \left(1 + \frac{1}{\sigma^2} \frac{E(\|\delta\underline{h}\|^2)}{1 + \frac{4m'\mu^2}{d'^2}} \right)^{-1} \quad (3.12)$$

où $\mu = \frac{\sigma}{\sigma_a}$ mesure la fiabilité des LRVs *a priori*. Les quantités m' et d' sont définies par

$$(m', d') = \arg \min_{m(\underline{e}), \|\underline{d}(\underline{e})\|} \frac{\sqrt{\|\underline{d}(\underline{e})\|^2 + 4m(\underline{e})\mu^2}}{2\sigma} \left(1 + \frac{1}{\sigma^2} \frac{E(\|\delta\underline{h}\|^2)}{1 + \frac{4m(\underline{e})\mu^2}{\|\underline{d}(\underline{e})\|^2}} \right)^{-1/2} \quad (3.13)$$

où $\underline{e} \in E$, E est l'ensemble de tous les événements d'erreurs non nuls relatifs à l'égaliseur [5], $m(\underline{e})$ est le nombre d'erreurs dans \underline{e} et $\underline{d}(\underline{e})$ est la convolution de \underline{e} avec le canal.

La preuve de (3.12) est détaillée dans l'annexe de [45].

Résultats des simulations

Nous proposons de vérifier la validité de l'équation (3.12) par simulations. Nous ne simulons pas ici la chaîne de transmission complète avec un codeur en émission et un décodeur en réception. Nous considérons une transmission de symboles MDP-2 sur le *Canal 4* de réponse impulsionnelle (0.37; 0.6; 0.6; 0.37). Nous supposons que l'égaliseur MAP reçoit des LRVs *a posteriori* et extrinsèques artificiels à son entrée. La figure 3.4 montre les courbes du TEB en fonction du RSB à la sortie de l'égaliseur MAP quand le canal est estimé par la technique bootstrap pour $T = 256$, $T_p = 15$ et $\delta T = 100$ décisions sur les symboles de données. Ces dernières sont générées en réalisant des décisions dures sur des LRVs *a posteriori* artificiels modélisés par des échantillons iid d'une variable aléatoire gaussienne suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\frac{\pm 2}{\sigma_x^2}, \frac{4}{\sigma_x^2}\right)$. Nous choisissons deux valeurs de σ_x^2 : $\sigma_x^2 = 0.5$ et $\sigma_x^2 = 0.2$. Les LRVs extrinsèques sont modélisés par des échantillons iid d'une variable aléatoire gaussienne suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\frac{\pm 2}{\sigma_a^2}, \frac{4}{\sigma_a^2}\right)$ [44, 45, 50, 52]. Nous considérons deux valeurs de $\mu = \frac{\sigma}{\sigma_a}$: $\mu = 0.1$ et $\mu = 0.5$. Les courbes représentées en lignes discontinues sont obtenues par des simulations et celles en lignes continues indiquent les performances théoriques de l'égaliseur MAP (TEB_{theo}) obtenues en utilisant l'expression (3.12) comme suit :

$$TEB_{theo} = Q\left(\sqrt{RSB_{eq,boot}}\right). \quad (3.14)$$

Nous remarquons que les courbes théoriques approximent bien celles obtenues par les simulations.

Nous proposons maintenant d'étudier par des simulations la validité de l'hypothèse que

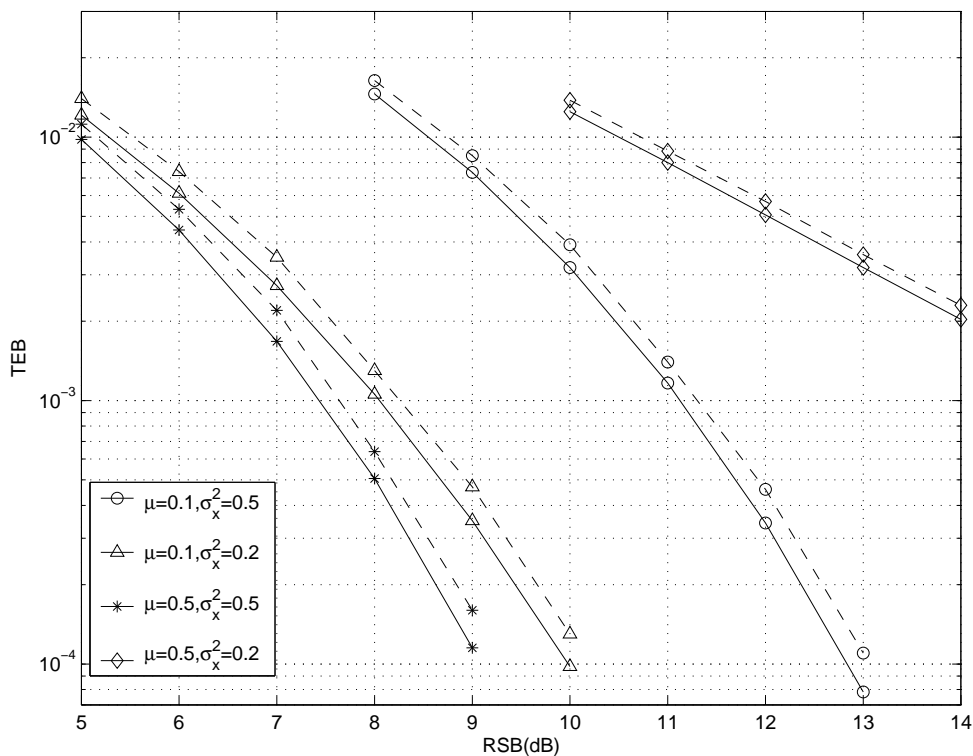


FIGURE 3.4 – Comparaison des performances de l'égaliseur (courbes discontinues) et des performances théoriques (courbes continues) pour une estimation du canal selon la technique bootstrap pour le *Canal 4*, $T = 256$, $T_p = 15$, $\delta T = 100$ et deux valeurs de μ et de σ_x^2 .

LRVs *a priori* fournis par le décodeur MAP à l'égaliseur MAP sont modélisés par des échantillons iid d'une variable aléatoire gaussienne suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\frac{\pm 2}{\sigma_a^2}, \frac{4}{\sigma_a^2}\right)$ [44, 45, 50, 52]. Pour se faire, nous considérons la chaîne complète avec un codeur canal convolutif de rendement $\frac{1}{2}$ et de polynômes générateurs $(7, 5)_8$ à l'émission et un turbo-décodeur composé d'un égaliseur MAP et d'un décodeur MAP à la réception. Le canal de transmission est le *Canal 4*. L'estimation du canal est effectuée selon la technique bootstrap utilisant $T_p = 10$ symboles pilotes et $\delta T = 50$ décisions dures sur les LRVs *a posteriori* provenant du décodeur. La longueur du bloc est $T = 256$. Dans le tableau 3.1, nous donnons les valeurs des *Kurtosis* des LRVs *a priori* à l'entrée de l'égaliseur MAP en fonction du *RSB* à la convergence (après 3 itérations du turbo-décodeur). Dans le tableau 3.1, nous donnons également la valeur absolue du rapport de la variance des LRVs *a priori* à l'entrée de l'égaliseur sur la moyenne de ces LRVs qu'on notera R . Nous remarquons que la valeur du *Kurtosis* $\simeq 3$ et que $R \simeq 2$, ce qui prouve que notre hypothèse que les LRVs peuvent être modélisés par des échantillons iid d'une variable

aléatoire gaussienne suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\frac{\pm 2}{\sigma_a^2}, \frac{4}{\sigma_a^2}\right)$ est valide.

RSB	0	1	2	3	4
<i>Kurtosis</i>	2.93	3.07	3.04	3.05	3.03
<i>R</i>	1.99	2.05	2.01	1.99	2.01

TABLEAU 3.1 – Valeurs du *Kurtosis* et du rapport *R* de la variance par la moyenne des LRVs *a priori* en fonction du *RSB* à l'entrée de l'égaliseur à la convergence du turbo-détecteur pour $T = 256$, $T_p = 10$, $\delta T = 50$ et le *Canal 4*.

2.3.2 Optimisation de la longueur de la séquence d'apprentissage pour des puissances égales des symboles pilotes et des symboles de données

Afin de tenir compte de la perte en termes de débit utile due à l'utilisation des symboles pilotes, nous définissons le rapport signal à bruit utile à la sortie de l'égaliseur MAP par

$$\begin{aligned} RSB_{u,eq,boot} &= \frac{T-T_p}{T} RSB_{eq,boot} \\ &= \frac{T-T_p}{T} \left(\frac{d'^2 + 4m'\mu^2}{4\sigma^2} \right) \left(1 + \frac{1}{\sigma^2} \frac{E(\|\delta h\|^2)}{1 + \frac{4m'\mu^2}{d'^2}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Notre objectif est de trouver la longueur de la séquence d'apprentissage maximisant cette quantité. Nous définissons alors le problème d'optimisation suivant

$$T_p^* = \arg \max_{2L-1 \leq T_p \leq T-\delta T} RSB_{u,eq,boot} \quad (3.16)$$

Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$, $t \geq 2L - 1$ et

$$f_3(t) = \frac{T-t}{T} \left(\frac{d'^2 + 4m'\mu^2}{4\sigma^2} \right) (1 + g_3(t))^{-1} \quad (3.17)$$

avec

$$g_3(t) = \frac{1}{\left(1 + \frac{4m'\mu^2}{d'^2}\right)} \left(\frac{L}{t - L + 1 + \delta T} + 4 \frac{\overline{\beta^2} \delta T^2 + (L-1)\overline{\beta} \delta T}{\sigma^2 (t - L + 1 + \delta T)^2} \right). \quad (3.18)$$

Ainsi, $RSB_{u,eq,boot} = f_3(T_p)$.

Quand $g_3(t) \ll 1$, $f_3(t)$ peut être approximée par

$$f_3(t) \approx \frac{T-t}{T} \left(\frac{d'^2 + 4m'\mu^2}{4\sigma^2} \right) (1 - g_3(t)) \quad (3.19)$$

Dans ce cas, f_3 est une fonction décroissante.

Puisque, $\delta T \gg L$, nous supposons que $\frac{L}{t-L+1+\delta T} \ll 1$. De plus, quand les δT décisions sur les symboles de données utilisées par l'estimateur du canal sont fiables, $\bar{\beta} \ll 1$ et $\bar{\beta}^2 \ll 1$. D'où, à fort RSB, $\frac{\bar{\beta}^2 \delta T^2 + (L-1)\bar{\beta} \delta T}{\sigma^2(t-L+1+\delta T)^2} \ll 1$. Ainsi, $g_3(t) \ll 1$ et f_3 est une fonction décroissante. Ainsi, la longueur optimale de la séquence d'apprentissage résolvant (3.16) est [17, 21]

$$T_p^* = 2L - 1. \quad (3.20)$$

Nous allons vérifier dans la section suivante par des simulations que l'hypothèse $g_3(t) \ll 1$ est exacte même pour les valeurs faibles du RSB. En effet, grâce à l'utilisation du codage canal, la valeur du TEB ($\bar{\beta}$) est toujours suffisamment petite pour garantir que $g_3(t) \ll 1$.

Remarque 3.1 : Optimisation conjointe de la longueur de la séquence d'apprentissage et de l'allocation des puissances

En considérant, comme le chapitre 2, que les puissances des symboles pilotes σ_p^2 et des symboles de données σ_d^2 peuvent avoir des valeurs différentes, l'EQM de l'estimation du canal devient

$$E(\|\delta \underline{h}\|^2) = \frac{\sigma^2 L}{(T_p - L + 1)\sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2} + 4 \frac{(\sigma_d^4) \left[\bar{\beta}^2 \delta T^2 + (L-1)\bar{\beta} \delta T \right]}{\left((T_p - L + 1)\sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2 \right)^2} \quad (3.21)$$

Le rapport signal à bruit équivalent devient

$$RSB_{u,eq,boot} = \frac{T-T_p}{T} \left(\frac{\sigma_d^2(d'^2+4m'\mu^2)}{4\sigma^2} \right) \left(1 + \frac{\sigma_d^2}{\sigma^2} \frac{E(\|\delta \underline{h}\|^2)}{1 + \frac{4m'\mu^2}{d'^2}} \right)^{-1} \quad (3.22)$$

où $\mu = \frac{\sigma}{\sigma_d \sigma_a}$.

Si nous considérons maintenant le problème d'optimisation conjointe de la longueur de la séquence d'apprentissage et de l'allocation des puissances, nous trouvons que lorsque les décisions sur les symboles codés en provenance du décodeur sont fiables, les valeurs

de T_p^* et σ_p^{*2} maximisant (3.22) sont données par :

$$\begin{aligned} T_p^* &= 2L - 1 \\ \sigma_p^{*2} &\simeq 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de fiabilité des décisions. En effet, quand la puissance des symboles pilotes est très petite ($\sigma_p^{*2} \simeq 0$) et la valeur de T_p^* est minimale ($T_p^* = 2L - 1$), la première estimation du canal est très mauvaise et le décodeur fournit à son tour des décisions très peu fiables.

Dans le cas où on ne considère pas cette hypothèse de fiabilité des décisions, le problème d'optimisation ne peut pas être résolu analytiquement.

2.4 Résultats des simulations : performances du turbo-détecteur mono-antenne

Nous considérons la chaîne complète avec un codeur de canal convolutif de rendement $\frac{1}{2}$ et de polynômes générateurs $(7, 5)_8$ et un turbo-détecteur composé d'un égaliseur MAP et d'un décodeur MAP. Nous considérons le *Canal 4*. L'estimation du canal est effectuée en utilisant la technique bootstrap. Nous considérons une longueur totale du bloc $T = 1024$ et $\delta T = 900$.

Le tableau 3.2 donne les valeurs obtenues par des simulations de $\bar{\beta}$, $\mu = \frac{\sigma}{\sigma_a}$, le maximum de la fonction $g_3(t)$ donnée par l'équation (3.18) pour $2L - 1 \leq t \leq T - \delta T$ et T_p^* à la convergence (après 3 itérations du récepteur itératif). Nous remarquons que l'hypothèse $g_3(t) \ll 1$ est toujours juste même pour des faibles valeurs du RSB et ainsi $T_p^* = 2L - 1 = 7$.

Dans la figure 3.5, nous traçons les courbes du TEB en fonction du RSB_u après 2 itérations du récepteur itératif et à la convergence (après 3 itérations) pour différentes valeurs de T_p . Nous remarquons que l'égaliseur présente ses meilleures performances quand $T_p = 2L - 1$ ce qui confirme nos résultats théoriques. Dans la section suivante, nous proposons de généraliser l'étude de l'optimisation du nombre des symboles pilotes au cas d'une transmission sur un canal MIMO non sélectif en fréquence quand un turbo-détecteur est utilisé.

RSB	0	1	2	3
$\bar{\beta}$	0.087	0.062	0.041	0.013
μ	0.94	1.12	1.5	1.61
$\max(g_3(t))$	0.092	0.074	0.038	0.017
T_p^*	7	7	7	7

TABLEAU 3.2 – Valeurs de $\bar{\beta}$, μ , le maximum de $g_3(t)$ et T_p^* à la convergence pour $T = 1024$, $\delta T = 900$ et le *Canal 4*.

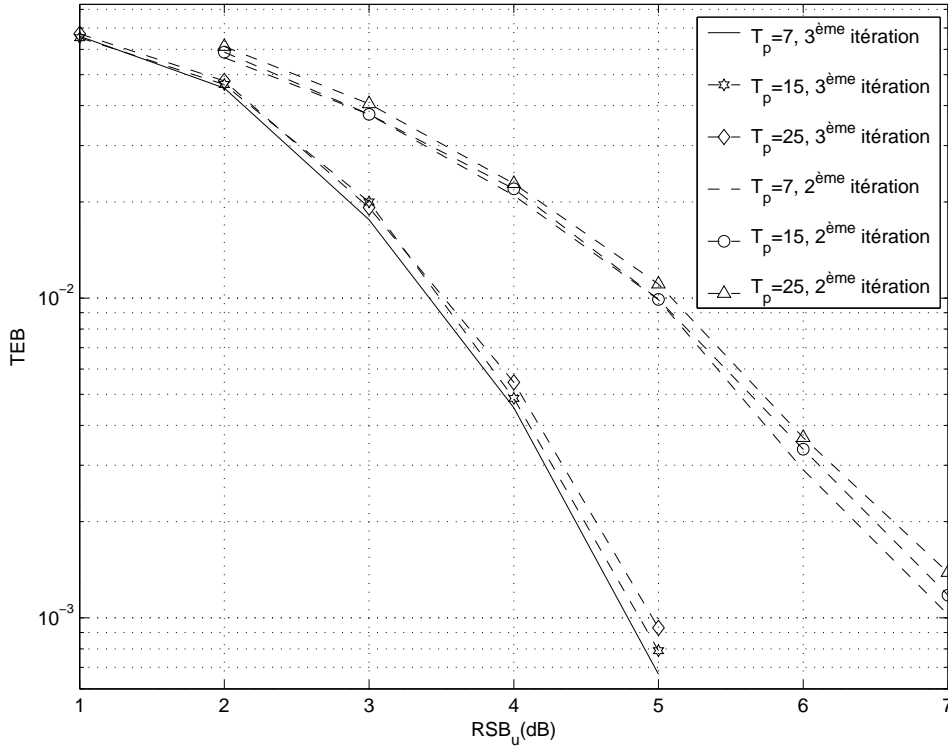


FIGURE 3.5 – TEB en fonction du RSB_u pour le turbo-détecteur avec une estimation du canal basée sur la technique bootstrap pour le *Canal 4*, $T = 1024$, $\delta T = 900$ et différentes valeurs de T_p .

3 Cas multi-antennes (MIMO)

Nous considérons maintenant une transmission codée sur un canal MIMO non sélectif en fréquence à n_E antennes émettrices et n_R antennes réceptrices. Nous considérons un schéma utilisant les modulations codées à entrelacement aléatoire de bits (BICM). Deux schémas de codage utilisant BICM ont été définis [51]. Le premier est donné par la figure 3.6 où les bits d'information en entrée sont codés par un codeur convolutif. La sortie du

codeur est démultiplexée en n_E séquences qui sont entrelacées par différents entrelaceurs $(\Pi_1, \dots, \Pi_{n_E})$ puis modulées selon la modulation MDP-2. Ce schéma est appelé ST-BICM (*Space Time Bit Interleaved Coded Modulation*) [51]. Le second schéma nommé T-BICM (*Time Bit Interleaved Coded Modulation*) consiste à démultiplexer les bits d'informations en n_E séquences puis à coder ces séquences en utilisant n_E codeurs de canal comme le montre la figure 3.7 [51].

Le schéma T-BICM est le plus intéressant si on utilise un annuleur d'interférences. En effet, pour détecter une séquence émise par une des antennes, le récepteur peut annuler les interférences en utilisant les décisions provenant des décodeurs correspondant aux autres séquences déjà traitées. Ceci n'est pas faisable quand le schéma ST-BICM est utilisé à l'émission puisque toutes les séquences sont mélangées et on ne peut donc pas utiliser des décisions après décodage d'une séquence pour détecter les autres séquences. Dans notre étude, nous n'allons pas utiliser un tel récepteur. Nous nous plaçons dans le cas où le nombre d'antennes est raisonnable ($n_E = n_R = 2$ pour les simulations) et la taille de la constellation est faible (MDP-2). Nous pouvons donc utiliser dans ces conditions un détecteur optimal. Ainsi, nous choisissons le schéma ST-BICM à l'émission donné par la figure 3.6 puisqu'il permet d'exploiter la diversité en émission contrairement au schéma T-BICM.

Nous supposons que la transmission se fait par blocs. Chaque antenne émettrice émet des blocs de T symboles dont les T_p premiers sont des symboles pilotes. Le canal est supposé invariant durant un bloc et peut changer indépendamment d'un bloc à l'autre.

Le signal reçu en bande de base échantillonné au rythme symbole à l'instant k à l'antenne réceptrice j est donné par

$$y_k^{(j)} = \sum_{i=1}^{n_E} h_{ji} x_k^{(i)} + n_k^{(j)} \quad (3.24)$$

où $x_k^{(i)}$ est le $k^{\text{ème}}$ symbole transmis par la $i^{\text{ème}}$ antenne émettrice et h_{ji} est le gain du canal entre l'antenne émettrice i et l'antenne réceptrice j . Les coefficients du canal h_{ji} sont modélisés par des variables aléatoires réelles gaussiennes centrées indépendantes. Pour une antenne réceptrice j donnée, nous supposons que $E(\sum_{i=1}^{n_T} |h_{ji}|^2) = 1$. Dans (3.24), $n_k^{(j)}$ sont des échantillons indépendants d'un bruit blanc gaussien réel centré et de variance σ^2 .

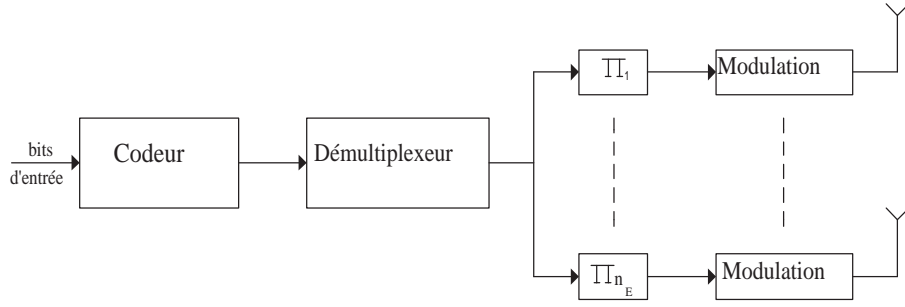


FIGURE 3.6 – Structure de l'émetteur MIMO utilisant le schéma ST-BICM.

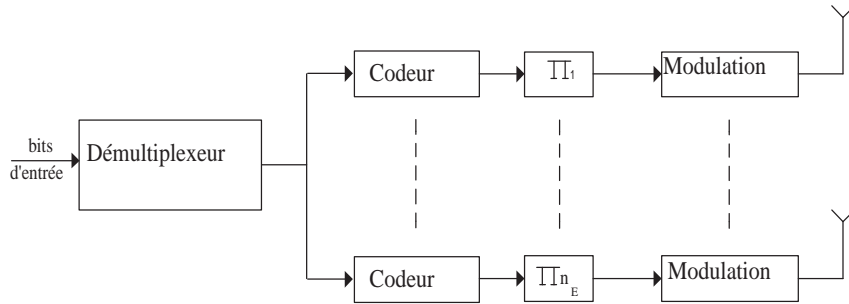


FIGURE 3.7 – Structure de l'émetteur MIMO utilisant le schéma T-BICM.

3.1 Turbo-détecteur

Comme le montre la figure 3.8, nous considérons un turbo-détecteur composé d'un détecteur MAP, un décodeur MAP et un estimateur de canal en réception. Comme pour le cas du récepteur itératif mono-antenne, à chaque itération du récepteur MIMO itératif, le détecteur et le décodeur calculent des probabilités *a posteriori* et des probabilités extrinsèques sur les bits codés [40]. Ils échangent les probabilités extrinsèques qui seront utilisées comme des probabilités *a priori* afin d'améliorer itérativement leurs performances.

D'après (3.24), le signal reçu sur les n_R antennes réceptrices à l'instant k est donné par :

$$\underline{y}_k = H\underline{x}_k + \underline{n}_k, \quad (3.25)$$

où $\underline{x}_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_k^{(n_E)})^T$, $\underline{n}_k = (n_k^{(1)}, n_k^{(2)}, \dots, n_k^{(n_R)})^T$ et H est la matrice du canal de dimensions $n_R \times n_E$.

Afin de détecter les symboles transmis, le détecteur MAP calcule les probabilités $p(x_k^{(i)} =$

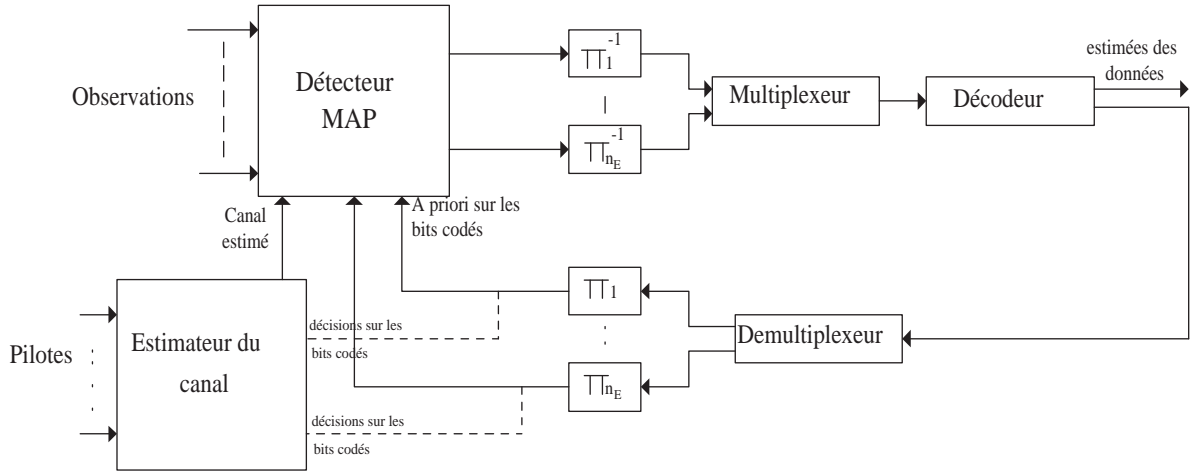


FIGURE 3.8 – Structure du récepteur MIMO itératif.

$x|y_k$), pour $1 \leq i \leq n_E$ et $x \in \{-1, 1\}$. Selon la formule de Bayes

$$P(x_k^{(i)} = x | y_k) = \frac{p(y_k | x_k^{(i)} = x) P(x_k^{(i)} = x)}{p(y_k)} \propto p(y_k | x_k^{(i)} = x) P(x_k^{(i)} = x) \quad (3.26)$$

où $P(x_k^{(i)} = x)$ est la probabilité *a priori* sur le bit codé $x_k^{(i)}$ fourni par le décodeur au détecteur MAP. Ainsi, le détecteur calcule les probabilités extrinsèques $p(y_k | x_k^{(i)} = x)$ données par :

$$\begin{aligned} p(y_k | x_k^{(i)} = x) &= \frac{p(y_k, x_k^{(i)} = x)}{P(x_k^{(i)} = x)} \\ &= \sum_{\underline{x}_k \in X_1} \frac{p(y_k | \underline{x}_k) P(\underline{x}_k)}{P(x_k^{(i)} = x)} \\ &= \sum_{\underline{x}_k \in X_1} p(y_k | \underline{x}_k) \prod_{j=1, j \neq i}^{n_E} P(x_k^{(j)}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

où X_1 est l'ensemble de toutes les valeurs pouvant être prises par \underline{x}_k avec $x_k^{(i)} = x$ et $P(x_k^{(j)})$ est la probabilité *a priori* sur le bit codé $x_k^{(j)}$ calculé par le décodeur MAP. Notons que grâce à l'entrelacement, nous avons supposé dans (3.27) que les probabilités *a priori* fournies par le décodeur sont indépendantes. Ainsi, la probabilité *a priori* sur \underline{x}_k est $P(\underline{x}_k) = \prod_{j=1}^{n_E} P(x_k^{(j)})$. D'après (3.25), la probabilité $p(y_k | \underline{x}_k)$ est donnée par

$$p(y_k | \underline{x}_k) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n_R}{2}}} \exp\left(-\frac{\|y_k - H\underline{x}_k\|^2}{2\sigma^2}\right). \quad (3.28)$$

Les probabilités extrinsèques $p(\underline{y}_k | x_k^{(i)} = x)$ sont désentrelacées, multiplexées puis utilisées par le décodeur pour calculer les APPs sur les bits codés [3]. En se basant sur ces APPs, le décodeur calcule des probabilités extrinsèques qui seront entrelacées, demultiplexées puis fournies au détecteur MAP à la prochaine itération comme des probabilités *a priori*. Après quelques itérations, le décodeur prend des décisions dures sur les bits d'information.

Pour évaluer (3.28), une connaissance du canal est indispensable au niveau du récepteur. Comme pour le cas du récepteur mono-antenne itératif, à la première itération, l'estimation du canal est effectuée en utilisant les symboles pilotes [11]. Aux itérations suivantes, le décodeur peut fournir à l'estimateur du canal des décisions dures sur les bits codés. Nous commençons dans le paragraphe suivant par étudier le cas de l'estimation bootstrap. Notre but est d'approximer le détecteur MAP utilisant l'estimateur bootstrap et les informations *a priori* provenant du décodeur par un détecteur MAP n'ayant aucune information *a priori* et connaissant parfaitement le canal mais avec un certain RSB équivalent. A fort RSB, nous calculons l'expression de ce RSB équivalent puis nous proposons de trouver la longueur de l'intervalle d'apprentissage permettant de maximiser le RSB utile.

3.2 Optimisation de la longueur de l'intervalle d'apprentissage pour une estimation bootstrap

A la première itération, un estimateur aux moindres carrés utilisant uniquement les symboles pilotes est considéré [11]. Afin d'affiner la première estimation, l'estimateur bootstrap utilise des décisions dures sur les symboles émis en se basant sur les APPs à la sortie du décodeur. Ces décisions sont effectuées sur les δT symboles de données qui suivent les T_p symboles pilotes de chaque antenne émettrice. Ainsi, l'estimateur du canal utilise $n_E T_p$ symboles pilotes et $n_E \delta T$ estimées des symboles de données en provenance du décodeur. Soient $\underline{x}^{(i)} = \left(x_0^{(i)}, \dots, x_{T_p + \delta T - 1}^{(i)} \right)^T$ les séquences transmises par les antennes émettrices pour $1 \leq i \leq n_E$, contenant les T_p symboles pilotes $x_k^{(i)}$, pour $0 \leq k \leq T_p - 1$, et les δT symboles de données $x_k^{(i)}$, pour $T_p \leq k \leq T_p + \delta T - 1$. Le vecteur reçu correspondant à la $j^{\text{ème}}$ antenne réceptrice $\underline{\tilde{y}}^{(j)} = \left(y_0^{(j)}, y_1^{(j)}, \dots, y_{T_p + \delta T - 1}^{(j)} \right)^T$, est donné par

$$\underline{\tilde{y}}^{(j)} = X_b^M \underline{h}^{(j)} + \underline{\tilde{n}}^{(j)} \quad (3.29)$$

où X_b^M est une matrice de dimensions $(T_p + \delta T) \times n_E$ ayant comme $k^{\text{ème}}$ colonne $\left(x_0^{(k)}, \dots, x_{T_p-1}^{(k)}, x_{T_p}^{(k)}, \dots, x_{T_p+\delta T-1}^{(k)}\right)^T$, pour $1 \leq k \leq n_E$, $\underline{\tilde{n}}^{(j)} = \left(n_0^{(j)}, n_1^{(j)}, \dots, n_{T_p+\delta T-1}^{(j)}\right)^T$ et $\underline{h}^{(j)} = (h_{j1}, h_{j2}, \dots, h_{jn_E})^T$.

Afin d'estimer le canal, le vecteur d'observation $\underline{\tilde{y}}^{(j)}$ est approximé comme suit :

$$\underline{\tilde{y}}^{(j)} \approx \widehat{X}_b^M \underline{h}^{(j)} + \underline{\tilde{n}}^{(j)} \quad (3.30)$$

où \widehat{X}_b^M est la version estimée de X_b^M contenant les symboles pilotes et les décisions dures sur les symboles codés à la sortie du décodeur. L'estimateur aux moindres carrés $\widehat{\underline{h}}^{(j)} = \left(\widehat{h}_{j1}, \dots, \widehat{h}_{jn_E}\right)^T$ de $\underline{h}^{(j)}$ est alors donné par

$$\widehat{\underline{h}}^{(j)} = \left(\widehat{X}_b^{M^T} \widehat{X}_b^M\right)^{-1} \widehat{X}_b^{M^T} \underline{\tilde{y}}^{(j)}. \quad (3.31)$$

3.2.1 EQM de l'estimation du canal

Nous supposons que $\delta T \gg n_E$ et que le vecteur d'erreur sur les bits codés à la sortie du décodeur est indépendant du vecteur du bruit. Nous supposons également que les erreurs sont uniformément réparties à la sortie des entrelaceurs. En généralisant l'étude de [32] au cas des systèmes MIMO non sélectifs en fréquence, nous montrons dans l'Annexe B.1 que quand les symboles pilotes et ceux de données peuvent avoir des puissances différentes (σ_p^2 et σ_d^2 respectivement), l'EQM de l'estimation du canal correspondant à l'antenne réceptrice j est donnée par [19]

$$E(\|\delta \underline{h}\|^2) = \frac{\sigma^2 n_E}{T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2} + \frac{\sigma_d^4 \left(\overline{\beta_M^2} \delta T^2 + (n_E - 1) \overline{\beta_M} \delta T\right)}{\left(T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2\right)^2} \quad (3.32)$$

où $\overline{\beta_M} = \frac{1}{n_E \delta T} E(n)$, $\overline{\beta_M^2} = \frac{1}{n_E \delta T^2} E(n^2)$ et n est le nombre d'erreurs dans les $n_E \delta T$ décisions dures sur les symboles codés à la sortie du décodeur. Puisque (3.32) est indépendante de l'antenne réceptrice j , nous omettons l'exposant (j) et nous notons l'EQM par antenne réceptrice $E(\|\delta \underline{h}\|^2)$.

Résultats des simulations :

Afin de valider l'expression analytique de l'EQM de l'estimation du canal donnée par (3.32) quand un estimateur bootstrap est utilisé, nous considérons une transmission sur un canal MIMO non sélectif en fréquence avec $n_E = n_R = 2$. Les coefficients du canal h_{ji} sont modélisés par des variables aléatoires réelles gaussiennes centrées indépendantes de

variance 0.5. L'estimateur bootstrap utilise $T_p = n_E = 2$ symboles pilotes par antenne émettrice et $n_E \delta T = n_E(T - n_E)$ décisions dures basées sur des LRVs *a posteriori* artificiels pour réestimer le canal. Nous supposons que ces LRVs sont modélisés par des échantillons iid d'une variable aléatoire gaussienne suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\frac{\pm 2}{\sigma_x^2}, \frac{4}{\sigma_x^2}\right)$ où $\sigma_x^2 = 0.1$. La figure 3.9 montre l'EQM de l'estimation du canal en fonction du *RSB* pour différentes valeurs de T , σ_p^2 et σ_d^2 . Les courbes théoriques (en lignes discontinues) sont obtenues en utilisant (3.32). Les courbes obtenues par des simulations sont représentées en lignes continues. Nous remarquons que les courbes théoriques approximent bien celles obtenues par les simulations. Dans la figure 3.9, nous remarquons également que quand δT augmente (T augmente), la qualité de l'estimation du canal s'améliore mais au prix d'une augmentation de la complexité de calcul. Nous évaluons la complexité de calcul en fonction de δT dans la section suivante.

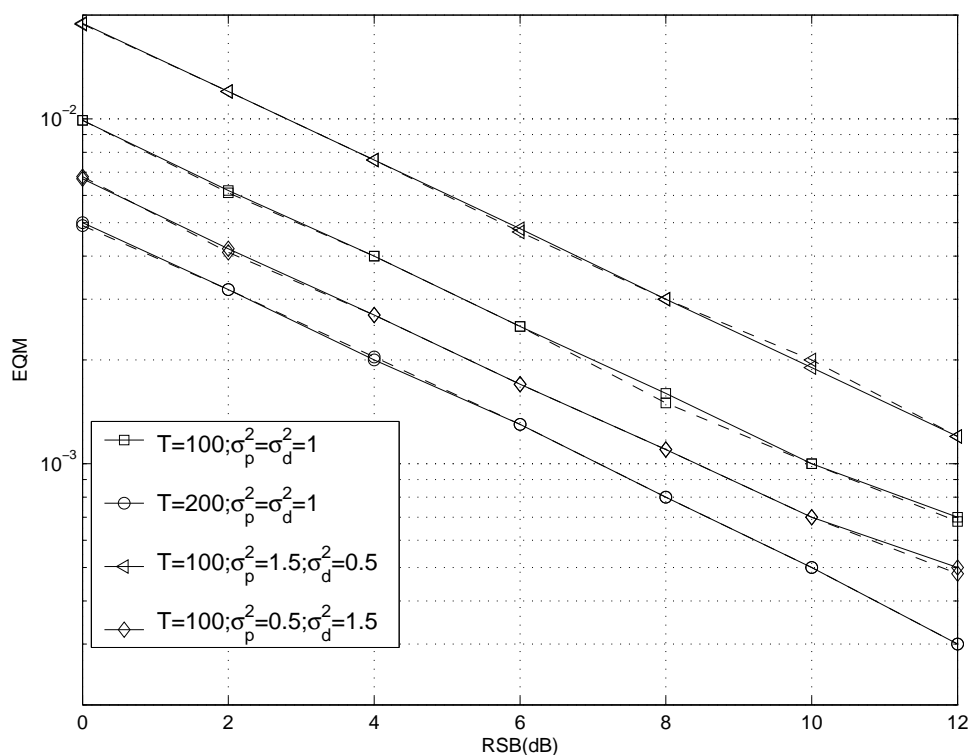


FIGURE 3.9 – Courbes de l'EQM de l'estimateur bootstrap en fonction du RSB pour différentes valeurs de T , σ_p^2 et σ_d^2 pour $n_E = n_R = 2$, $T_p = n_E$, $\delta T = T - n_E$ et $\sigma_x^2 = 0.1$. (Simulations : courbes en lignes continues, Expressions théoriques : courbes en lignes discontinues)

3.2.2 Comparaison des complexités

Comme dans la section (2.2.2) de ce chapitre, nous étudions la complexité de calcul de l'estimation bootstrap du canal. En nous basant sur (3.31), nous trouvons que l'estimateur bootstrap utilisant $n_E T_p$ symboles pilotes et $n_E \delta T$ décisions sur les symboles codés pour estimer le canal MIMO non sélectif en fréquence nécessite $(T_p + \delta T)(n_E^2 + n_E) + \frac{n_E^3}{6}$ multiplications. Ainsi, nous remarquons que quand δT augmente de η_M , le nombre de multiplications augmente de $\eta_M(n_E^2 + n_E)$.

Nous remarquons qu'une estimation de canal basée sur le critère des MC utilisant $n_E T_p$ symboles pilotes nécessite $T_p(n_E^2 + n_E) + \frac{n_E^3}{6}$ multiplications correspondant à $\delta T = 0$. Ainsi, nous concluons que l'estimateur bootstrap a besoin de $\delta T(n_E^2 + n_E)$ multiplications de plus par rapport à l'estimateur utilisant les symboles pilotes uniquement.

3.2.3 Calcul du RSB équivalent

Afin de définir le RSB utile, nous proposons d'approximer à fort RSB le détecteur MAP utilisant une estimation du canal basée sur la technique bootstrap et les informations *a priori* par le détecteur MAP sans informations *a priori* et connaissant parfaitement le canal mais avec un certain RSB équivalent. Dans [45], l'expression de ce RSB équivalent a été dérivée pour un système mono-antenne sélectif en fréquence en tenant compte des informations *a priori* et de l'estimation de canal basée sur la séquence d'apprentissage. Nous proposons ici d'étendre l'étude de [45] aux canaux MIMO non sélectifs en fréquence avec un turbo-détecteur MAP utilisant un estimateur bootstrap du canal. Nous supposons, comme dans le cas mono-antenne, que les observations *a priori* à l'entrée du détecteur MAP sont modélisées comme des sorties d'un canal BABG de moyenne nulle et de variance σ_a^2 . Ces observations *a priori* sont les suivantes :

$$z_k^{(i)} = x_k^{(i)} + w_k^{(i)} \quad (3.33)$$

où $w_k^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_a^2)$, $T_p \leq k \leq T-1$ et $1 \leq i \leq n_E$. Ainsi, les LRVs *a priori* (extrinsèques) à l'entrée du détecteur MAP, fournis par le décodeur MAP sont des échantillons iid d'une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\frac{\pm 2}{\sigma_a^2}, \frac{4}{\sigma_a^2}\right)$ [44, 50, 52]. Nous montrons dans l'annexe B.2 que le détecteur MAP utilisant l'estimation bootstrap du canal et les informations *a priori* fournies par le décodeur peut être approximé à fort RSB par le détecteur MAP sans informations *a priori* et connaissant parfaitement le canal mais

avec un RSB équivalent donné par

$$RSB_{eq,boot}^{MIMO} = \frac{\sigma_d^2(1 + \mu^2)}{\sigma^2} \left(1 + \frac{\sigma_d^2 E(\|\delta \underline{h}\|^2)}{\sigma^2(1 + \mu^2)} \right)^{-1} \quad (3.34)$$

où $\mu = \frac{\sigma}{\sigma_a}$ et $E(\|\delta \underline{h}\|^2)$ est l'EQM de l'estimation du canal donnée par (3.32).

3.2.4 Optimisation de la longueur de l'intervalle d'apprentissage pour des puissances égales des symboles pilotes et des symboles de données

Nous supposons que $\sigma_p^2 = \sigma_d^2 = 1$. En nous basant sur l'expression du RSB équivalent, nous définissons un RSB utile qui tient compte de la perte en termes de débit due à l'utilisation des symboles pilotes :

$$RSB_{u,eq,boot}^{MIMO} = \frac{T - T_p}{T} RSB_{eq,boot}^{MIMO}. \quad (3.35)$$

Notre objectif est de trouver la valeur de T_p qui maximise ce RSB utile :

$$T_p^* = \arg \max_{n_E \leq T_p \leq T - \delta T} RSB_{u,eq,boot}^{MIMO}. \quad (3.36)$$

Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$, $t \geq n_E$ et

$$f_4(t) = \frac{T - t(1 + \mu^2)}{T} \frac{1}{\sigma^2} (1 + g_4(t))^{-1} \quad (3.37)$$

où

$$g_4(t) = \frac{1}{1 + \mu^2} \left(\frac{n_E}{t + \delta T} + 4 \frac{\overline{\beta_M^2} \delta T^2 + (n_E - 1) \overline{\beta_M} \delta T}{\sigma^2 (t + \delta T)^2} \right). \quad (3.38)$$

Ainsi, $RSB_{u,eq,boot}^{MIMO} = f_4(T_p)$.

Quand $g_4(t) \ll 1$, $f_4(t)$ peut être approximée par

$$f_4(t) \approx \frac{T - t(1 + \mu^2)}{T} \frac{1}{\sigma^2} (1 - g_4(t)) \quad (3.39)$$

qui est une fonction décroissante.

Puisque, $\delta T \gg n_E$, nous supposons que $\frac{n_E}{t + \delta T} \ll 1$. De plus, quand les δT décisions sur les symboles de données utilisées par l'estimateur du canal sont fiables, $\overline{\beta_M} \ll 1$ et $\overline{\beta_M^2} \ll 1$. D'où, à fort RSB, $\frac{\overline{\beta_M^2} \delta T^2 + (n_E - 1) \overline{\beta_M} \delta T}{\sigma^2 (t + \delta T)^2} \ll 1$. Ainsi, $g_4(t) \ll 1$ et f_4 est une

fonction décroissante. La valeur optimale de T_p maximisant $RSB_{u,eq,boot}^{MIMO}$ est donc [19]

$$T_p^* = n_E. \quad (3.40)$$

Nous vérifions, dans la section 3.3, par des simulations que l'hypothèse $g_4(t) \ll 1$ est exacte même pour des valeurs faibles du RSB. En effet, grâce à l'utilisation du codage canal, la valeur du TEB ($\overline{\beta_M}$) est toujours assez petite.

Remarque 3.2 : Optimisation conjointe de la longueur de l'intervalle d'apprentissage et de l'allocation des puissances

Quand les symboles pilotes et ceux de données peuvent avoir des puissances différentes (σ_p^2 et σ_d^2 respectivement), l'expression du RSB équivalent à la sortie du détecteur MAP tenant compte de l'estimation du canal et des observations *a priori* s'écrit par :

$$RSB_{eq,boot}^{MIMO} = \frac{\sigma_d^2(1 + \mu^2)}{\sigma^2} \left(1 + \frac{\sigma_d^2 E(\|\delta h\|^2)}{\sigma^2(1 + \mu^2)} \right)^{-1} \quad (3.41)$$

où $\mu = \frac{\sigma}{\sigma_d \sigma_a}$.

Quand nous étudions l'optimisation conjointe du nombre des symboles pilotes et de l'allocation des puissances pour le récepteur MIMO itératif utilisant un estimateur bootstrap tout en supposant que les décisions sur les symboles de données en provenance du décodeur sont fiables, nous trouvons que σ_p^{*2} tend vers zéro et $T_p^* = n_E$. Ceci est contradictoire avec l'hypothèse que les décisions sont fiables vu qu'une telle hypothèse nécessite une première estimation de canal suffisamment bonne. Dans le cas où on ne considère pas cette hypothèse de fiabilité des décisions, le problème d'optimisation ne peut pas être résolu analytiquement.

3.3 Résultats des simulations : performances du turbo-détecteur MIMO

Nous validons dans cette section nos résultats analytiques obtenus pour un récepteur MIMO itératif composé d'un détecteur MAP, un décodeur MAP et un estimateur itératif du canal. Nous considérons une transmission selon le schéma ST-BICM sur un canal MIMO avec $n_E = n_R = 2$. La séquence d'entrée est codée par le codeur convolutif de rendement $\frac{1}{2}$ et de polynômes générateurs $(7, 5)_8$, démultiplexée en n_E sous-séquences.

Ces n_E sous-séquences sont entrelacées par différents entrelaceurs, modulées en MDP-2 puis émises par les n_E antennes émettrices. Les coefficients du canal h_{ji} sont modélisés par des variables aléatoires réelles gaussiennes centrées indépendantes de variance 0.5. Au niveau du récepteur, un turbo-détecteur formé par un détecteur MAP et un décodeur MAP est utilisé. Nous supposons que $T = 512$, $\delta T = 450$ et $\sigma_p^2 = \sigma_d^2 = 1$. A la première itération, l'estimation du canal est effectuée selon le critère MC en utilisant les symboles pilotes. Aux itérations suivantes, le décodeur fournit à l'estimateur bootstrap du canal des décisions dures sur les bits codés.

Nous commençons par étudier la validité de l'hypothèse que LRVs *a priori* fournis par le décodeur MAP au détecteur MAP sont modélisés par des échantillons iid d'une variable aléatoire gaussienne suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\frac{\pm 2}{\sigma_a^2}, \frac{4}{\sigma_a^2}\right)$ [44, 45, 50, 52]. Dans le tableau 3.3, nous donnons à la convergence (après 2 itérations du turbo-détecteur) les valeurs des *Kurtosis* des LRVs *a priori* à l'entrée du détecteur MAP en fonction du *RSB* et les valeurs absolues R_M des rapports de la variance des LRVs *a priori* à l'entrée du détecteur sur les moyennes de ces LRVs. Nous supposons que $T_p = 10$. Nous remarquons que la valeur du *Kurtosis* est proche de 3 et que R est proche de 2, ce qui prouve que notre hypothèse que les LRVs peuvent être modélisés par des échantillons iid d'une variable aléatoire gaussienne suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\frac{\pm 2}{\sigma_a^2}, \frac{4}{\sigma_a^2}\right)$ est valide.

RSB	0	1	2	3	4
<i>Kurtosis</i>	3.12	3.14	3.08	3.15	3.10
R_M	2.07	2.13	2.05	2.14	2.12

TABLEAU 3.3 – Valeurs du *Kurtosis* et du rapport R de la variance par la moyenne des LRVs *a priori* en fonction du *RSB* à l'entrée du détecteur à la convergence du turbo-détecteur pour $T = 512$, $T_p = 10$, $\delta T = 450$, $n_E = n_R = 2$ et $\sigma_p^2 = \sigma_d^2 = 1$.

Le tableau 3.4 montre les valeurs obtenues par simulations de $\overline{\beta_M}$, $\mu = \frac{\sigma}{\sigma_a}$, le maximum de $g_4(t)$ donnée par (3.38) pour $n_E \leq t \leq T - \delta T$ et T_p^* à la convergence (après 2 itérations du turbo-détecteur) pour différentes valeurs du *RSB*. Nous remarquons que pour $RSB \geq 2dB$, l'hypothèse que $g_4(t) \ll 1$ est vraie et $T_p^* = n_E = 2$.

La figure 3.10 montre le TEB en fonction du RSB_u à la sortie du décodeur MAP à la convergence pour différentes valeurs de T_p quand l'estimateur bootstrap est utilisé. A partir de (3.40), $T_p^* = n_E$. Ceci est confirmé par les simulations vu que le décodeur présente ses meilleures performances pour $T_p = 2$.

RSB	0	1	2	3	4	6	8
$\overline{\beta}_M$	0.215	0.193	0.184	0.165	0.144	0.102	0.059
μ	0.62	0.69	0.78	0.80	0.82	1.04	1.31
$\max(g_4(t))$	0.138	0.124	0.117	0.097	0.084	0.059	0.049
T_p^*	8	4	2	2	2	2	2

TABLEAU 3.4 – Valeurs de $\overline{\beta}_M$, μ , $\max(g_4(t))$ et T_p^* à la convergence pour différentes valeurs du *RSB*, pour $T = 512$, $\delta T = 450$, $n_T = n_R = 2$ et $\sigma_p^2 = \sigma_d^2 = 1$.

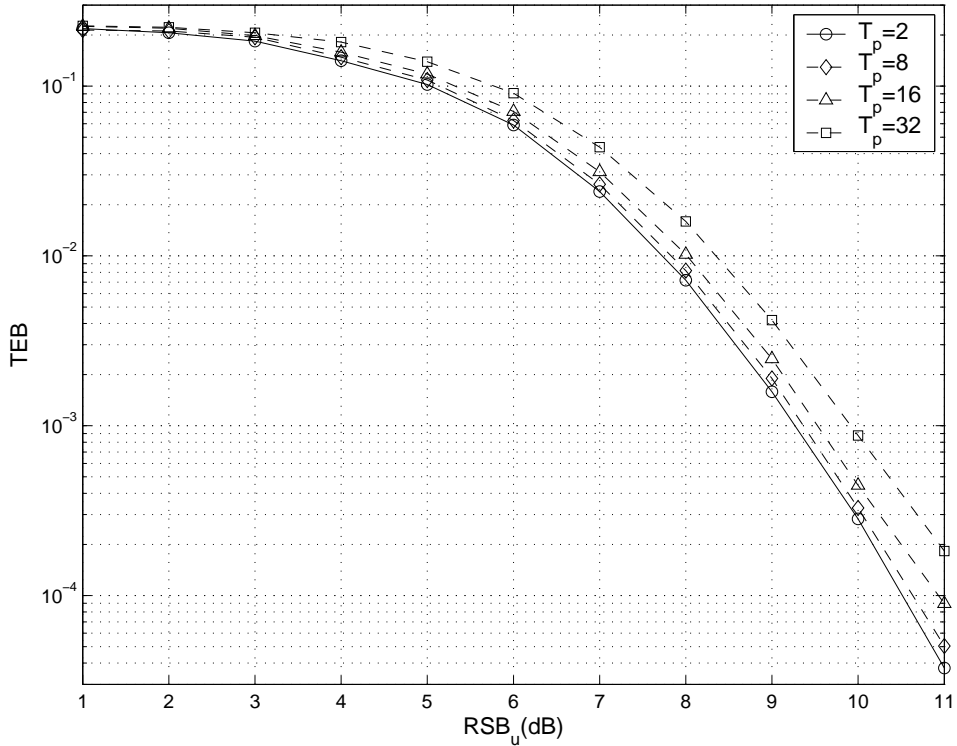


FIGURE 3.10 – TEB en fonction du RSB_u à la sortie du décodeur MAP pour différentes valeurs de T_p après deux itérations du turbo-détecteur pour $T = 512$, $\delta T = 450$, $n_E = n_R = 2$ et $\sigma_p^2 = \sigma_d^2 = 1$.

4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré un récepteur itératif composé d'un détecteur MAP, un décodeur MAP et un estimateur de canal dans le cas d'un canal mono-antenne sélectif en fréquence et un canal MIMO non sélectifs en fréquence. L'estimation du canal a été effectuée de manière itérative en se basant sur des décisions dures fournies par le

décodeur. Nous avons ensuite considéré le problème d'optimisation du nombre des symboles pilotes maximisant le RSB utile. Nous avons montré que le nombre optimal des symboles pilotes est égal à sa valeur minimale dans les deux cas quand les décisions fournies par le décodeur à l'estimateur du canal sont fiables.

Durant les trois premiers chapitres, nous avons considéré un détecteur MAP en réception pour combattre les effets de l'IES causée par la sélectivité en fréquence du canal mono-antenne. Un tel égaliseur est d'autant plus complexe que la mémoire du canal est grande. Afin de remédier à ce problème, nous proposons dans le chapitre suivant d'utiliser la modulation OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) qui permet de transformer le canal sélectif en fréquence en des sous-canaux orthogonaux non sélectifs en fréquence. Le récepteur peut utiliser une voie de retour pour informer l'émetteur sur les caractéristiques du canal. Dans ce cas, l'émetteur peut effectuer une adaptation de puissance et/ou de modulation afin d'améliorer les performances du système. Cependant, la voie de retour chute le débit. Ainsi, nous allons étudier dans la suite le problème d'optimisation de la voie de retour.

Chapitre 4

Optimisation de la voie de retour pour une liaison OFDM

1 Introduction

Dans le cas des canaux sélectifs en fréquence, un égaliseur est en général placé en réception pour combattre les effets des interférences entre symboles. Cependant, l'égaliseur est d'autant plus complexe que la longueur du canal sélectif en fréquence est grande. Afin de contourner ce problème de complexité de l'égalisation, une modulation OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) peut être utilisée. Dans un système OFDM, la bande de fréquence est divisée en N sous-porteuses orthogonales et le canal sélectif en fréquence devient équivalent à N canaux orthogonaux non sélectifs en fréquence ce qui réduit de manière considérable la complexité de l'égalisation. Ainsi, nous considérons dans ce chapitre une liaison mono-antenne adoptant la modulation OFDM. Quand l'émetteur connaît les caractéristiques du canal OFDM, une modulation adaptative et une allocation optimale de la puissance peuvent être utilisées en émission ce qui améliore significativement les performances du système [2, 28, 29, 57, 60]. C'est le cas quand le mode TDD (*Time Division Duplexing*) est utilisé. Dans ce mode, en se basant sur les signaux reçus, l'émetteur peut estimer le canal [34]. Par contre, quand le mode FDD (*Frequency Division Duplexing*) est utilisé, l'émission et la réception du signal se font sur des fréquences différentes (pas de réciprocité du canal). Dans ce cas, l'estimation du canal est généralement envoyée du récepteur vers l'émetteur sur un canal de retour (*feedback channel*) à faible débit [34, 48, 60]. Puisque le récepteur connaît le canal (peut l'estimer), il peut aussi effectuer l'allocation de puissances et la renvoyer à l'émetteur [34].

Il peut aussi effectuer l'adaptation de la modulation et renvoyer à l'émetteur l'indice de la modulation choisie. Dans ce chapitre, on se place dans le cas où le mode FDD est utilisé. La voie de retour (*feedback*) nécessite une réservation de ressources (sous-porteuses, bits ou symboles), ce qui entraîne une chute du débit de transmission. Ainsi, comme dans les chapitres 2 et 3, un compromis entre le débit utile et la fiabilité des informations retournées sur la voie de retour doit être trouvé. Nous rappelons que dans les deux chapitres précédents, nous avons remarqué que l'augmentation du nombre des symboles pilotes améliore la qualité de l'estimation des canaux SISO non sélectifs en fréquence et MIMO sélectifs en fréquence mais entraîne une chute en termes de débit utile. Nous avons alors trouvé le nombre optimal des symboles pilotes permettant une bonne estimation du canal sans dégrader significativement le débit utile. Dans ce chapitre, nous considérons un problème analogue de l'optimisation de la voie de retour pour une transmission mono-antenne utilisant la modulation OFDM. En effet, augmenter le nombre de sous-porteuses réservées à la voie de retour entraîne une bonne fiabilité des informations (concernant l'allocation optimale des puissances) retournées du récepteur à l'émetteur mais entraîne aussi une diminution du nombre des sous-porteuses sur la voie aller (de l'émetteur vers le récepteur) ce qui chute le débit utile de transmission. Ainsi, nous nous chargeons de trouver le nombre optimal de sous-porteuses sur la voie de retour permettant un meilleur retour de l'allocation des puissances sans chuter significativement le débit. De même, l'augmentation de la taille des constellations des modulations sur les différentes sous-porteuses augmente le débit sur la voie aller mais engendre une dégradation en termes de taux d'erreur binaire (TEB). Nous étudions alors le problème de l'optimisation de l'allocation de la modulation permettant d'augmenter le débit sans dégrader significativement le TEB. Nous trouvons également le nombre de bits nécessaires sur la voie de retour permettant d'informer l'émetteur sur l'allocation optimale de la modulation.

2 Modèle du système OFDM

Afin de réduire la complexité de l'égalisation, les systèmes OFDM (basée sur la Transformée de Fourier Discrète : TFD) utilisent en général un intervalle de garde. Cette technique consiste à concaténer un préfixe cyclique (redondant) à chaque bloc de symboles dans le but d'utiliser la propriété de convolution cyclique de la TFD. Ainsi, l'idée de base des transmissions OFDM est de changer l'effet de la convolution du canal en une simple multiplication dans le domaine fréquentiel. Rappelons que la convolution circulaire est une multiplication dans le domaine fréquentiel et peut être considérée comme

une convolution linéaire avec un chevauchement [38]. Le principe est expliqué dans la figure 4.1. Nous supposons que la transmission s'effectue par blocs. Ces blocs sont notés $\underline{x}(i) = (x_0(i), \dots, x_{N-1}(i))^T$ où N et (i) sont respectivement la taille et l'indice du bloc. La figure 4.1 illustre la différence entre une convolution circulaire et une convolution linéaire dans le cas de la transmission du bloc de symboles $\underline{x}(i)$. La partie supérieure de la figure 4.1 décrit la convolution circulaire : la séquence $\underline{y}(i)$ est donnée par la convolution circulaire de la séquence $\underline{x}(i)$ avec un canal de réponse impulsionnelle \underline{h} . Dans le domaine fréquentiel, cette convolution circulaire se traduit par une multiplication comme suit

$$\text{TFD}(\underline{y}(i)) = \text{TFD}(\underline{h})\text{TFD}(\underline{x}(i)). \quad (4.1)$$

En raison du chevauchement au début du bloc, il est clair que le résultat de la convolution linéaire de $[\dots, \underline{x}(i-1), \underline{x}(i), \underline{x}(i+1), \dots]$ n'est pas égal en général à une convolution circulaire. En effet, il n'y a aucune raison pour que la fin du bloc de $\underline{x}(i-1)$ soit égale à la fin du bloc $\underline{x}(i)$. En outre, la transmission de $\underline{x}(i)$ se chevauche avec celle de $\underline{x}(i+1)$, ce qui pose un problème si l'on veut récupérer $\underline{x}(i)$ et $\underline{x}(i+1)$ de manière indépendante. Un préfixe cyclique (PC) est alors introduit pour résoudre ce problème. Le préfixe cyclique consiste à rajouter une certaine redondance dans le signal transmis de telle sorte que le chevauchement introduit par la mémoire du canal corresponde à celle d'une convolution circulaire. De cette façon, le bloc de symboles reçus correspondant à la transmission de $\underline{x}(i)$ est exactement égal à la convolution circulaire de $\underline{x}(i)$ et \underline{h} . Ainsi, $\underline{x}(i)$ peut facilement être récupéré à partir de $\underline{y}(i)$ par la TFD inverse (TFDI). De plus, le bloc $\underline{y}(i)$ est indépendant de $\underline{x}(i-1)$ parce que la récupération de $\underline{x}(i)$ ne nécessite pas la connaissance des symboles précédemment envoyés.

Nous étudions dans la suite le principe de l'ensemble émetteur-récepteur OFDM classique. Dans ce système, comme le montre la figure 4.2, les données sont transmises par blocs de taille N : $\tilde{\underline{x}}_N(i) = (\tilde{x}_0(i), \dots, \tilde{x}_{N-1}(i))^T$. Ces symboles sont d'abord précodés par la matrice de la TFD inverse $F_N^\dagger = F_N^{-1}$ où F_N est la matrice de la transformée de Fourier discrète dont les entrées sont $F_{kl} = \frac{\exp(-j2\pi kl/N)}{\sqrt{N}}$ pour $0 \leq k \leq N-1$, $0 \leq l \leq N-1$ et $(.)^\dagger$ désigne la transposée conjuguée. Puis, le préfixe cyclique est introduit entre les blocs de symboles à transmettre en vue de transformer la convolution linéaire en une convolution circulaire, comme expliqué précédemment. Notons que la longueur de ce PC doit être plus grande que celle de la longueur du canal, afin de transformer l'effet du canal convolutif en un effet circulaire. Une telle hypothèse est généralement considérée dans la plupart des systèmes OFDM. Les éléments de ces blocs résultants $\underline{x}_{pc}(i)$ sont enfin envoyés séquentiellement à travers le canal sélectif en fréquence. Le canal représenté

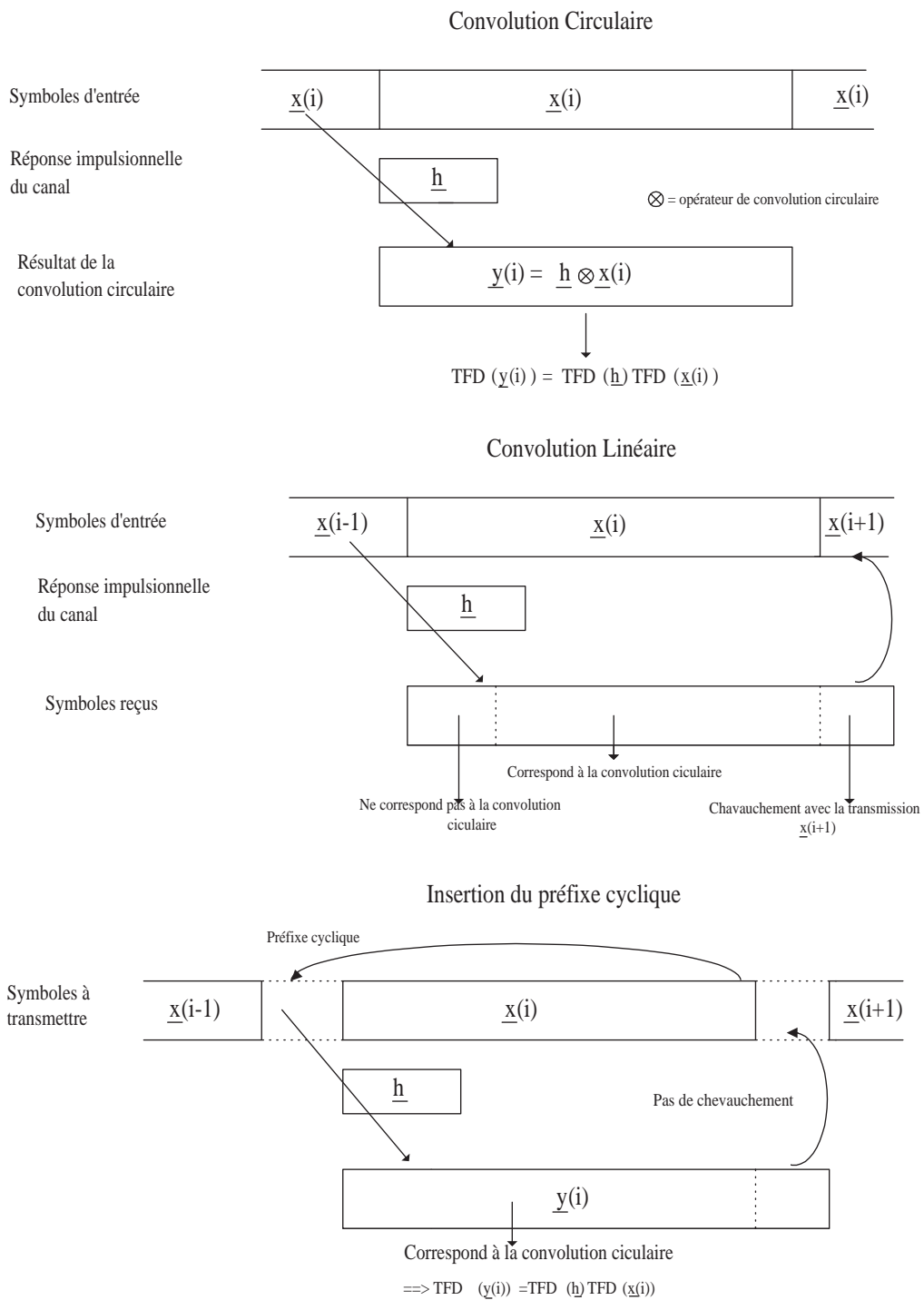


FIGURE 4.1 – Principe de l'insertion du préfixe cyclique.

par son modèle équivalent à temps discret est caractérisé par sa réponse impulsionnelle

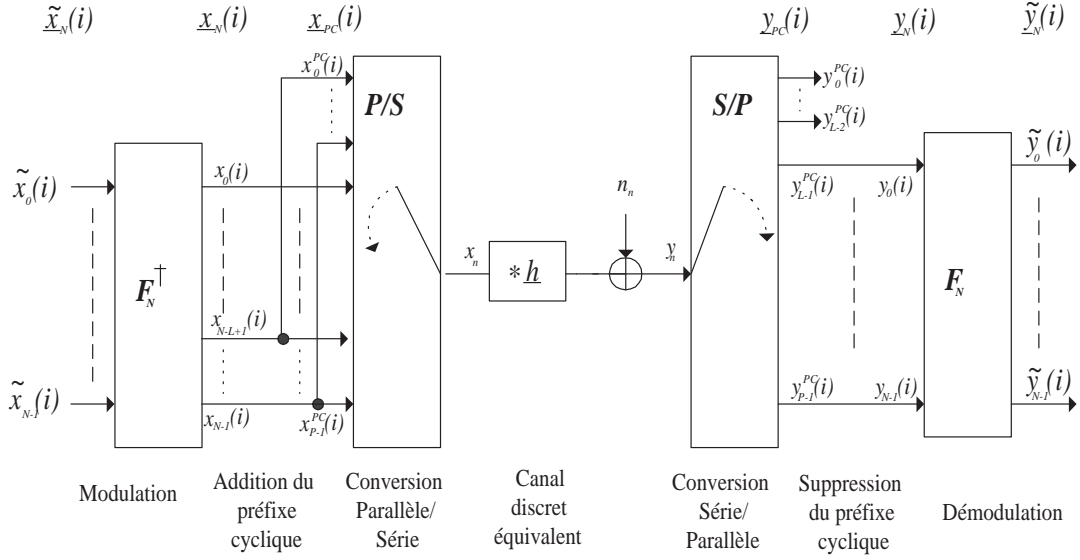


FIGURE 4.2 – Principe de l'émetteur-récepteur OFDM.

$\underline{h} = (h_0, \dots, h_{L-1})^T$. Habituellement, N est plus grand que $L - 1$, typiquement $L - 1 = \frac{N}{4}$. Soient $P = N + L - 1$ le nombre total de symboles transmis par bloc de données ($\tilde{\underline{x}}_N(i)$) et la matrice $J_{pc} = [J_c, I_N]^T$ de dimensions $P \times N$ où J_c est la matrice de dimensions $N \times L - 1$ contenant les $L - 1$ dernières colonnes de I_N . On définit aussi la matrice F_{pc} de dimensions $P \times N$ telle que $F_{pc} = J_{pc} F_N^\dagger$. Le vecteur des symboles transmis est donné par :

$$\underline{x}_{pc}(i) = J_{pc} F_N^\dagger \tilde{\underline{x}}_N(i) = F_{pc} \tilde{\underline{x}}_N(i). \quad (4.2)$$

Le vecteur des symboles reçus correspondant $\underline{y}_{pc}(i) = (y_0^{pc}(i), \dots, y_{P-1}^{pc}(i))^T$ peut être exprimé comme la somme de deux termes. Le premier correspond à la transmission de $\underline{x}_{pc}(i)$ par le canal \underline{h} qui introduit des interférences entre symboles entre les symboles de $\underline{x}_{pc}(i)$. Le second correspond au chevauchement de la transmission du bloc $\underline{x}_{pc}(i)$ et du bloc $\underline{x}_{pc}(i + 1)$. Pour cette raison, il est traditionnellement appelé interférence inter bloc. Ces deux contributions peuvent être exprimées sous forme matricielle en définissant deux matrices de Toeplitz H_{IES} et H_{IIB} telles que

$$\begin{aligned} \underline{y}_{pc}(i) &= H_{IES} \underline{x}_{pc}(i) + H_{IIB} \underline{x}_{pc}(i - 1) + \underline{n}_P(i) \\ &= H_{IES} F_{pc} \tilde{\underline{x}}_N(i) + H_{IIB} F_{pc} \tilde{\underline{x}}_N(i - 1) + \underline{n}_P(i) \\ &= H_{IES} J_{pc} F_N^\dagger \tilde{\underline{x}}_N(i) + H_{IIB} J_{pc} F_N^\dagger \tilde{\underline{x}}_N(i - 1) + \underline{n}_P(i) \end{aligned} \quad (4.3)$$

où H_{IES} est la matrice de Toeplitz de dimensions $P \times P$ ayant la première ligne $(h_0, 0, \dots, 0)$ et la première colonne $(h_0, h_1, \dots, h_{L-1}, 0, \dots, 0)^T$, H_{IES} est aussi une matrice de Toeplitz de dimensions $P \times P$ ayant la première ligne $(0, \dots, 0, h_{L-1}, \dots, h_1)$ et la première colonne $(0, \dots, 0)^T$ et $\underline{n}_P(i) = (n_0(i), \dots, n_{P-1}(i))^T$ sont des échantillons d'un bruit blanc complexe gaussien centré de variance σ^2 .

En réception, les premiers symboles correspondant au préfixe cyclique sont retirés pour supprimer le terme d'interférence inter block. Soit $\underline{y}_N(i) = (y_{L-1}^{pc}(i), \dots, y_{P-1}^{pc}(i))^T$ le vecteur de taille $N \times 1$ obtenu à partir du vecteur $\underline{y}_{-pc}(i)$ en supprimant le préfixe cyclique. Ainsi,

$$\underline{y}_N(i) = C_P(\underline{h}) \begin{bmatrix} J_c^T \\ I_N \end{bmatrix} F_N^\dagger \tilde{\underline{x}}_N(i) + \underline{n}_N(i) \quad (4.4)$$

où $\underline{n}_N(i) = (n_{L-1}(i), \dots, n_{P-1}(i))^T$ et $C_P(\underline{h})$ est une matrice de Toeplitz de dimensions $P \times N$ dont la première ligne est $(h_{L-1}, \dots, h_0, 0, \dots, 0)$ et la première colonne est $(h_{L-1}, 0, \dots, 0)^T$.

En raison de la structure circulante du préfixe cyclique, l'équation (4.4) devient

$$\underline{y}_N(i) = C_N(\underline{h}) F_N^\dagger \tilde{\underline{x}}_N(i) + \underline{n}_N(i) \quad (4.5)$$

où $C_N(\underline{h})$ est la matrice circulante de dimensions $N \times N$ dont la première ligne est $(h_0, 0, \dots, 0, h_{L-1}, \dots, h_1)$.

Etant donné que toute matrice circulante est diagonale dans la base de Fourier [37], on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{y}}_N(i) &= F_N \underline{y}_N(i) \\ &= \sqrt{N} \text{diag}(F_N \underline{h}_N) \tilde{\underline{x}}_N(i) + \tilde{\underline{n}}_N(i) \end{aligned} \quad (4.6)$$

où $\underline{h}_N = (h_0, \dots, h_{L-1}, 0, \dots, 0)^T$ un vecteur de taille $N \times 1$, $\text{diag}(F_N \underline{h}_N)$ est la matrice de dimensions $N \times N$ nulle partout sauf sur sa diagonale qui contient les éléments du vecteur $F_N \underline{h}_N$ et $\tilde{\underline{n}}_N(i) = F_N \underline{n}_N(i)$.

Soit $\underline{g} = (g_0, \dots, g_{N-1})^T$ défini par

$$\underline{g} = \sqrt{N} F_N \underline{h}_N. \quad (4.7)$$

Ainsi, l'équation (4.6) peut se réécrire par

$$\tilde{\underline{y}}_N(i) = \text{diag}(\underline{g}) \tilde{\underline{x}}_N(i) + \tilde{\underline{n}}_N(i) \quad (4.8)$$

où $\text{diag}(\underline{g})$ est la matrice de dimensions $N \times N$ nulle partout sauf sur sa diagonale qui est égale à \underline{g} .

Le modèle de (4.8) peut être résumé par la figure 4.3 où le canal sélectif en fréquence \underline{h} se transforme en N sous-porteuses non sélectifs en fréquence de coefficients g_0, g_1, \dots, g_{N-1} . Chaque symbole transmis $\tilde{x}_k(i)$, $0 \leq k \leq N - 1$, est simplement atténué par le coefficient de la sous-porteuse g_k puis bruité par l'échantillon de bruit $\tilde{n}_k(i)$. Le récepteur peut simplement multiplier le signal reçu par l'inverse de l'estimée du coefficient de la sous-porteuse k , \hat{g}_k , pour récupérer le symbole estimé $\hat{\tilde{x}}_k(i)$.

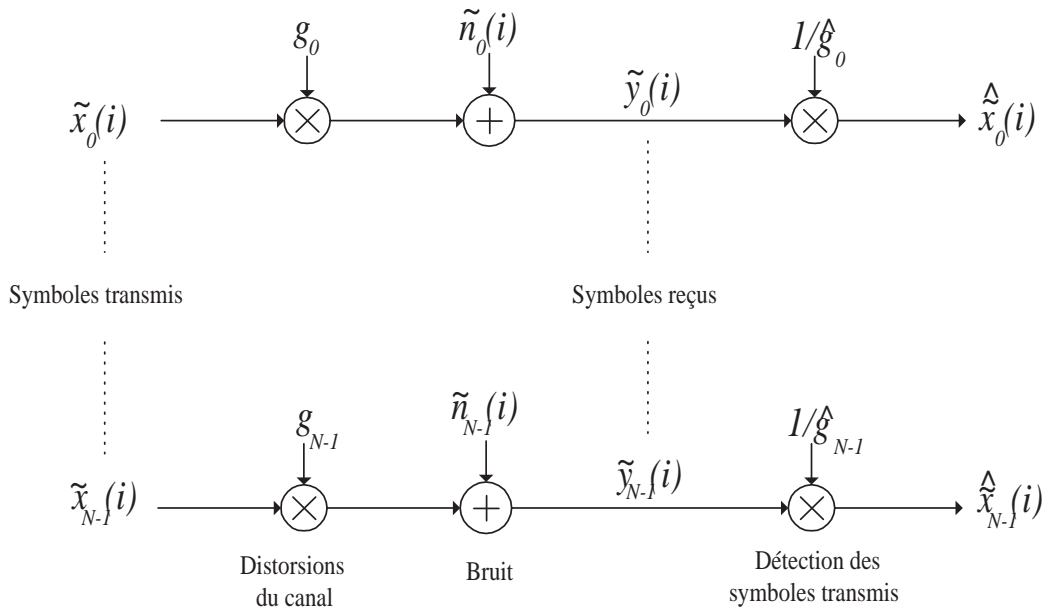


FIGURE 4.3 – Emetteur-Récepteur OFDM : modèle du canal équivalent.

Dans la suite, l'indice (i) sera omis. Nous supposons que le canal OFDM $\underline{g} = (g_0, \dots, g_{N-1})^T$ est parfaitement connu par le récepteur. Le système transmet avec une puissance totale P_{tot} . Cette puissance est partagée entre les différentes sous-porteuses telle que

$$\sum_{n=0}^{N-1} p_n = P_{tot} \quad (4.9)$$

où p_n est la puissance de transmission de la sous-porteuse n . Afin d'améliorer les performances du système, un partage optimal des puissances entre les différentes sous-porteuses est nécessaire [2, 12, 28, 48]. Nous étudions dans la section suivante l'allocation des puissances pour un système OFDM en tenant compte de la voie de retour.

3 Allocation des puissances

Nous étudions le problème de l'allocation des puissances pour un système OFDM mono-antenne en maximisant le débit du système sous une contrainte de puissance totale donnée par (4.9). Le débit s'écrit comme

$$D = \sum_{n=0}^{N-1} \delta f \log_2 \left(1 + \frac{p_n |g_n|^2}{\sigma^2} \right) \quad (4.10)$$

où δf est la largeur fréquentielle d'une sous-porteuse.

Nous cherchons l'allocation optimale des puissances permettant de maximiser (4.10) sous la contrainte (4.9). Ainsi, nous définissons le problème d'optimisation suivant

$$\begin{aligned} \max & \left[D = \sum_{n=0}^{N-1} \delta f \log_2 \left(1 + \frac{p_n |g_n|^2}{\sigma^2} \right) \right] \\ \text{s.c.} & \sum_{n=0}^{N-1} p_n = P_{tot}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

La solution de (4.11) est donnée par le *Water-Filling* [10] comme suit

$$p_n^* = \left(\kappa - \frac{\sigma^2}{|g_n|^2} \right)^+ \quad (4.12)$$

où κ vérifie $\sum_{n=0}^{N-1} p_n^* = P_{tot}$.

La solution donnée par (4.12) permet d'obtenir un débit maximal. Cependant, le récepteur doit utiliser des ressources sur la voie de retour pour informer l'émetteur sur les coefficients du canal ou sur l'allocation des puissances. Ces ressources sont d'autant plus importantes que le nombre N des sous-porteuses est grand. Une solution qui ne consomme pas de ressources sur la voie de retour consiste à attribuer les mêmes puissances aux différentes sous-porteuses : $p_n = \frac{P_{tot}}{N}$, pour $0 \leq n \leq N - 1$. Cependant, une telle solution présente de mauvaises performances à faible RSB.

Dans la figure 4.4, nous comparons les performances, en termes de débit, de l'allocation optimale des puissances qui maximise D donnée par (4.12) et de l'allocation à puissances égales pour une transmission OFDM sur un canal sélectif en fréquence. Les coefficients du canal sélectif sont modélisés par des variables aléatoires complexes gaussiennes centrées indépendantes de variances (0.5; 0.71; 0.5). La TFD du canal est $\underline{g} = (g_0, \dots, g_{N-1})^T$. Nous considérons deux valeurs de N : $N = 64$ et $N = 512$. La puissance totale accordée à l'émission est $P_{tot} = 128$. Nous remarquons que la solution optimale donnée par la *Water Filling* (4.12) apporte un gain important par rapport à l'allocation à puissances

égales notamment à faible RSB. Cependant, ceci est obtenu au prix d'une perte importante de débit sur la voie de retour importante.

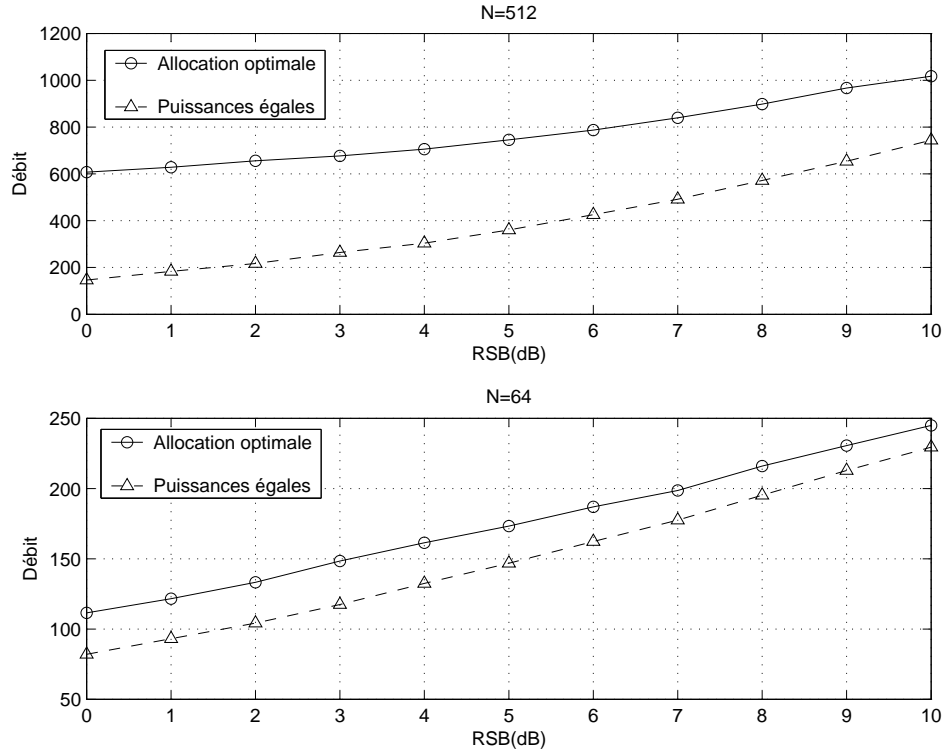


FIGURE 4.4 – Comparaison des débits entre l'allocation optimale et l'allocation uniforme des puissances pour une transmission OFDM sur un canal sélectif en fréquence pour $P_{tot} = 128$ et deux valeurs de N .

Dans [48], *Sun et al.* considèrent le même problème (4.11). Afin de limiter le débit sur la voie de retour, ils ont proposé une méthode *On-Off* qui consiste à écarter les sous-porteuses ayant un RSB faible avant d'allouer les puissances. Ainsi, la solution de *Water-Filling* s'applique sur un nombre de sous-porteuses inférieur à N et la voie de retour consomme moins de ressources. Cependant, l'étude de [48] n'étudie pas conjointement l'allocation des puissances et de la voie de retour. Dans ce qui suit, nous étudions conjointement le problème de l'allocation de la puissance et de la voie de retour. Nous trouvons analytiquement que l'allocation optimale consiste à attribuer une même puissance sur les différentes sous-porteuses à fort RSB.

4 Optimisation conjointe de l'allocation des puissances et de la voie de retour

Dans le cas où l'allocation des puissances est considérée, le récepteur doit retourner à l'émetteur sur la voie de retour la meilleure allocation des puissances permettant de maximiser le débit ou les coefficients du canal OFDM. Cependant, ceci entraîne une perte en termes de débit puisque la voie de retour consomme des ressources (sous-porteuses, bits ou symboles). Plus les ressources accordées à la voie de retour sont importantes, meilleure est l'allocation des puissances. Mais, ceci conduit à une perte de débit. Ainsi, un compromis entre la qualité de l'allocation des puissances et la voie de retour doit être trouvé pour permettre la maximisation du débit utile sur la voie directe. Nous nous proposons dans cette section d'optimiser conjointement l'allocation des puissances et de la voie de retour pour un système OFDM mono-antenne.

Soit $B = \delta f N$ la bande totale attribuée au système OFDM. La bande B est répartie en une bande utile B_u et une bande réservée pour la voie de retour B_r . Soient $N_c = \frac{B_u}{\delta f}$ le nombre de sous-porteuses utiles et $N - N_c$ le nombre de sous-porteuses réservées à la voie de retour. Afin de limiter le débit sur la voie de retour, nous supposons que les N_c sous-porteuses utiles sont disposées en K paquets de sous-porteuses contenant chacun $n_c = \frac{N_c}{K}$ sous-porteuses. Dans un même paquet, toutes les sous-porteuses transmettent avec une même puissance. Le canal OFDM est $\underline{g} = (g_0, \dots, g_{N-1})^T$ où g_l est le coefficient du canal correspondant à la $l^{\text{ème}}$ sous-porteuse. Pour tenir compte de la répartition en paquets des sous-porteuses, \underline{g} s'écrit de la manière suivante : $\underline{g} = (g_{1,1}, \dots, g_{1,n_c}, \dots, g_{K,1}, \dots, g_{K,n_c})^T$ où $g_{k,n}$ est le coefficient du canal correspondant à la $n^{\text{ème}}$ sous-porteuse du $k^{\text{ème}}$ paquet.

Le débit utile s'écrit

$$D(p_{k,n}, K) = \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^{n_c} \delta f \log_2 \left(1 + \frac{p_{k,n} |g_{k,n}|^2}{\sigma^2} \right) \quad (4.13)$$

où $p_{k,n}$ représente la puissance attribuée à la $n^{\text{ème}}$ sous-porteuse du $k^{\text{ème}}$ paquet. Le système est soumis à la contrainte de la puissance totale P_{tot} définie telle que

$$\sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^{n_c} p_{k,n} = P_{tot}. \quad (4.14)$$

Nous admettons que les n_c sous-porteuses d'un même paquet utilisent un même puissance \tilde{p}_k . Nous définissons un débit approché du débit $D(p_{k,n}, K)$ donné par

$$\begin{aligned}\tilde{D}(\tilde{p}_k, K) &= \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^{n_c} \delta f \log_2 \left(1 + \frac{\tilde{p}_k |\bar{g}_k|^2}{\sigma^2} \right) \\ &= n_c \sum_{k=1}^K \delta f \log_2 \left(1 + \frac{\tilde{p}_k |\bar{g}_k|^2}{\sigma^2} \right)\end{aligned}\quad (4.15)$$

où $|\bar{g}_k| = \left(\frac{1}{n_c} \sum_{n=1}^{n_c} |g_{k,n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ est le gain moyen du paquet k .

Sur la voie de retour, le récepteur informe l'émetteur sur l'allocation optimale des puissances (\tilde{p}_k^* pour $1 \leq k \leq K$) permettant de maximiser (4.15) sous la contrainte (4.14) pour que ce dernier adapte sa transmission. Ainsi, nous supposons que le système accorde K sous-porteuses pour la voie de retour correspondant aux K valeurs des puissances ce qui se traduit par $B_r = K\delta f$. Finalement, on a

$$B_u + B_r = B \quad \Rightarrow \quad K + N_c = N. \quad (4.16)$$

Sans perte de généralité, nous supposons dans la suite que $\delta f = 1$.

Nous proposons d'optimiser conjointement la valeur de K et l'allocation des puissances. Ainsi, nous définissons le problème d'optimisation suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{K, \tilde{p}_k} \left(\tilde{D}(\tilde{p}_k, K) \right) = \frac{N-K}{K} \sum_{k=1}^K \log_2 \left(1 + \frac{\tilde{p}_k |\bar{g}_k|^2}{\sigma^2} \right) \\ \text{s.c.} \\ 1 \leq K \leq \frac{N}{2} \\ n_c \sum_{k=1}^K \tilde{p}_k = P_{tot} \Rightarrow \sum_{k=1}^K \tilde{p}_k = \frac{K}{N-K} P_{tot} \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Notons ici que $K \leq \frac{N}{2}$ puisque $n_c = \frac{Nc}{K} = \frac{N-K}{K} \geq 1$.

Le problème (4.17) est équivalent à deux sous problèmes donnés par

$$\begin{aligned}\tilde{p}_k^* &= \arg \max \left(d(\tilde{p}_k, K) = \sum_{k=1}^K \log_2 \left(1 + \frac{\tilde{p}_k |\bar{g}_k|^2}{\sigma^2} \right) \right) \\ \text{s.c.} \\ \sum_{k=1}^K \tilde{p}_k &= \frac{K}{N-K} P_{tot}\end{aligned}\quad (4.18)$$

et

$$\begin{aligned}K^* &= \arg \max \left(\tilde{D}(\tilde{p}_k^*, K) = \frac{N-K}{K} d(\tilde{p}_k^*, K) \right) \\ \text{s.c.} \\ 1 &\leq K \leq \frac{N}{2}\end{aligned}\quad (4.19)$$

La solution du sous-problème (4.18) est donnée par le *Water-Filling* [10] comme suit

$$\tilde{p}_k^* = \left(\psi - \frac{\sigma^2}{|\bar{g}_k|^2} \right)^+ \quad (4.20)$$

où ψ vérifie $\sum_{k=1}^K \tilde{p}_k^* = \frac{K}{N-K} P_{tot}$.

A fort RSB, $\tilde{p}_k^* \simeq \psi - \frac{\sigma^2}{|\bar{g}_k|^2}$. Puisque $\sum_{k=1}^K \tilde{p}_k^* = \frac{K}{N-K} P_{tot}$, alors

$$\psi = \frac{P_{tot}}{N-K} + \frac{\sigma^2}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{|\bar{g}_k|^2}. \quad (4.21)$$

Ainsi, en remplaçant \tilde{p}_k et ψ par leurs valeurs, $d(\tilde{p}_k^*, K)$ peut être approximé, à fort RSB, par

$$\begin{aligned} d(\tilde{p}_k^*, K) &\simeq \sum_{k=1}^K \log_2 \left(\frac{\psi |\bar{g}_k|^2}{\sigma^2} \right) \\ &\simeq \sum_{k=1}^K \log_2 \left(\frac{P_{tot} |\bar{g}_k|^2}{(N-K)\sigma^2} + \frac{|\bar{g}_k|^2}{K} \sum_{l=1}^K \frac{1}{|\bar{g}_l|^2} \right) \\ &\simeq \sum_{k=1}^K \log_2 \left(\frac{P_{tot}}{(N-K)\sigma^2} \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

En utilisant la valeur de $d(\tilde{p}_k^*, K)$ donnée par (4.22), l'expression du débit \tilde{D} s'approxime à fort RSB par

$$\tilde{D}(\tilde{p}_k^*, K) \simeq \frac{N-K}{K} \sum_{k=1}^K \log_2 \left(\frac{P_{tot}}{(N-K)\sigma^2} \right) = (N-K) \log_2 \left(\frac{P_{tot}}{(N-K)\sigma^2} \right) \quad (4.23)$$

Soient $t > 0$ et $f(t) = (N-t) \log_2 \left(\frac{P_{tot}}{(N-t)\sigma^2} \right)$. Ainsi, $\tilde{D}(\tilde{p}_k^*, K) = f(K)$. En remarquant que $f'(t) < 0$, nous concluons que $K^* = 1$. Par suite, la solution de (4.17) est donnée par

$$\begin{aligned} K^* &= 1, \\ \tilde{p}_k^* &= \frac{P_{tot}}{N-1}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Afin de valider le résultat théorique, nous considérons une transmission OFDM sur un canal sélectif en fréquence de longueur $L = 3$. Les coefficients du canal sélectif sont modélisés par des variables aléatoires complexes gaussiennes centrées indépendantes de variances (0.5; 0.71; 0.5). La TFD du canal est $\underline{g} = (g_0, \dots, g_{N-1})^T$ avec $N = 512$. La puissance totale accordée à l'émission est $P_{tot} = 51.2$. Les simulations dans la figure 4.5 donnent le débit en émission pour différentes valeurs du RSB et de K . Quand $K > 1$, l'allocation de la puissance par paquet est réalisée par le *Water Filling* conformément à (4.20). Nous remarquons que le débit est maximal pour $K = 1$ même pour les faibles

RSB, ce qui valide notre étude analytique.

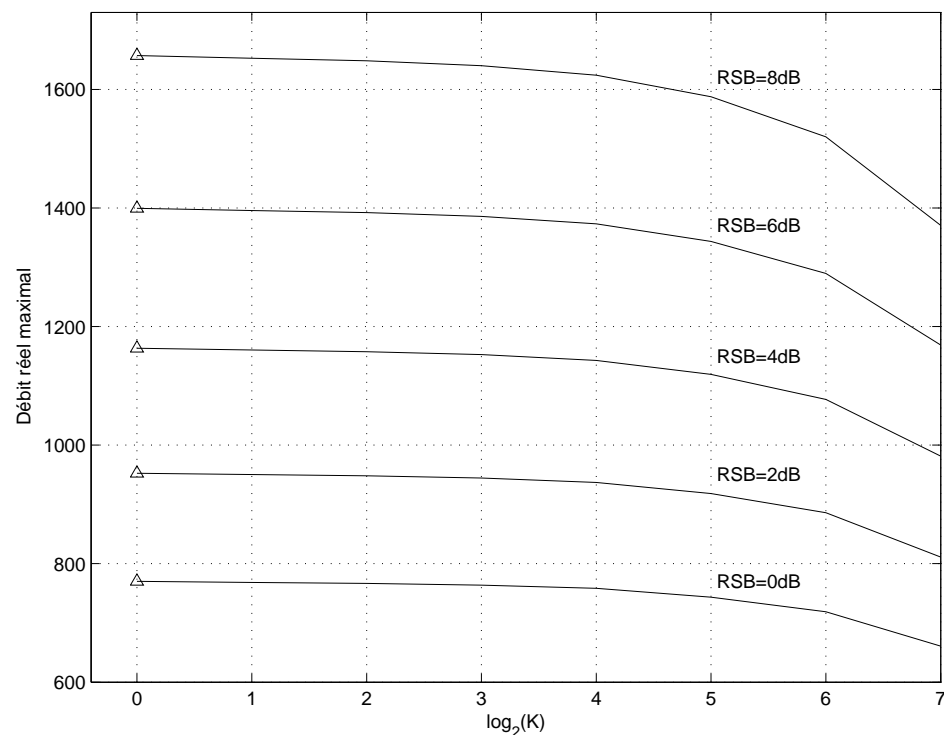


FIGURE 4.5 – Débit à l'émission d'un système OFDM en fonction de $\log_2(k)$ pour $N = 512$, $P_{tot} = 51.2$ et différentes valeurs du RSB .

Dans cette section, nous avons étudié le problème de l'optimisation conjointe de l'allocation des puissances et de la voie de retour permettant la maximisation du débit. Cependant, nous n'avons pas tenu compte de l'allocation de la modulation. Dans ce qui suit, nous allons supposer que la taille de la modulation peut changer d'une sous-porteuse à une autre. Quand la taille de la modulation augmente, le débit s'améliore mais le taux d'erreur binaire augmente. Nous allons alors chercher la meilleure allocation de la modulation permettant de maximiser le débit sans dégrader significativement le TEB. Nous étudierons conjointement la minimisation du débit sur la voie de retour dans ce cas.

5 Allocation conjointe de la modulation et de la voie de retour

Nous considérons un système OFDM mono-antenne comportant N sous-porteuses. Nous supposons dans la suite que toutes les sous-porteuses émettent avec une même puissance $p_0 = \frac{P_{tot}}{N}$. Nous supposons aussi que chaque sous-porteuse utilise une modulation $MAQ-M$ (Modulation d'amplitude en Quadrature à M états) avec le codage de Gray où $M \in \mathcal{M} = \{4, 16, 64, \dots, M_{max}\}$ et M_{max} est la taille maximale de la constellation MAQ qu'on considérera. Le taux d'erreur binaire (TEB) sur la porteuse n ($0 \leq n \leq N - 1$) peut être approximé par [16]

$$TEB_n = 0.2 \exp\left(\frac{-1.6p_0|g_n|^2}{\sigma^2(M_n - 1)}\right) \quad (4.25)$$

où $M_n \in \mathcal{M}$ est la taille de la modulation MAQ choisie pour la sous-porteuse n . Nous définissons dans la suite un TEB moyen donné par

$$\overline{TEB} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} b_n TEB_n}{\sum_{n=0}^{N-1} b_n} \quad (4.26)$$

où $b_n = \log_2(M_n)$.

Augmenter M_n accroît le débit de transmission mais engendre une dégradation en termes de TEB moyen. Ainsi, nous définissons, comme dans [29, 57, 60], le problème d'optimisation suivant

$$\max_{b_n} (D_0 = \sum_{n=0}^{N-1} b_n) \quad \text{s.c} \quad \overline{TEB} \leq TEB_s. \quad (4.27)$$

où TEB_s (TEB seuil) est la valeur maximale du TEB qu'on ne peut pas dépasser pour assurer une qualité de service acceptable.

La solution analytique au problème (4.27) est très complexe à trouver. Classiquement, on propose dans la littérature un algorithme itératif (\mathcal{A}) permettant de résoudre ce problème [29, 57]. Cet algorithme converge vers une solution quasi-optimale notamment à fort RSB mais il converge lentement quand la valeur du RSB est faible et quand N est grand [29, 57]. Ainsi, nous proposons de simplifier l'algorithme (\mathcal{A}) en proposant d'écartier les sous-porteuses dont le RSB est inférieur à un RSB seuil (Γ_0) qu'on calculera. L'algorithme (\mathcal{A}) est alors appliqué sur les sous-porteuses gardées (dont le RSB est supérieur ou égal à Γ_0).

Cette méthode appelée *On-Off* a été proposée dans [36, 48]. Dans [48], elle a été utilisée pour simplifier l'allocation des puissances. Comme deuxième solution pour simplifier la résolution du problème (4.27), nous proposons de regrouper les sous-porteuses en des paquets de sous-porteuses [29, 33, 36]. Les sous-porteuses d'un même paquet utilisent la même modulation. L'algorithme (\mathcal{A}) s'applique dans ce cas sur les paquets ce qui diminue le temps d'exécution de l'algorithme vu que le nombre de paquets est inférieur à N . Nous proposons de simplifier davantage l'allocation de la modulation en appliquant la méthode *On-Off* sur les paquets. Dans ce cas, nous définissons un RSB moyen par sous-porteuse pour chaque paquet et nous écartons les paquets dont le RSB moyen est inférieur au RSB seuil Γ_0 . Dans la suite, nous détaillons l'algorithme itératif (\mathcal{A}) puis nous présentons les méthodes permettant d'accélérer la convergence de l'algorithme (\mathcal{A}) à savoir la méthode *On-Off* par porteuse, le groupement des sous-porteuses et la méthode *On-Off* par paquet.

5.1 Algorithme classique de l'allocation de la modulation

Afin d'approcher la solution de (4.27), l'algorithme (\mathcal{A}) itératif suivant a été proposé [29, 57]

1. Initialisation : allouer la modulation ayant le nombre maximal d'états $MAQ - M_{max}$ à toutes les sous-porteuses
2. Calculer le TEB de chacune des porteuses TEB_n ($0 \leq n \leq N - 1$) en utilisant l'équation (4.25).
3. Calculer le TEB moyen \overline{TEB} en se basant sur l'équation (4.26) puis le comparer avec le TEB seuil TEB_s . Si $\overline{TEB} \leq TEB_s$, garder l'allocation de la modulation courante et finir l'algorithme. Sinon, passer à l'étape 4.
4. Chercher la sous-porteuse i ayant le plus mauvais TEB et réduire la taille de sa constellation. Si $b_i = 2$, alors écarter la sous-porteuse.
5. Recalculer le TEB_i en utilisant (4.25) et retourner à l'étape 3.

Le problème de cet algorithme réside dans sa complexité de calcul qui augmente avec le nombre de sous-porteuses N et le nombre des constellations $MAQ-M$ possibles notamment pour des faibles RSB. Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature afin de réduire la complexité de l'algorithme (\mathcal{A}) et rendre la recherche de la solution plus rapide. Dans [57], *Wyglinski et al.* ont défini une valeur pic du TEB notée \widehat{TEB} . Ainsi, à chaque porteuse i est attribuée la taille maximale de la modulation vérifiant $TEB_i \leq \widehat{TEB}$. En se basant sur l'allocation de la modulation, on calcule le \overline{TEB} et

on fait varier itérativement la valeur du \widehat{TEB} . En effet, la valeur de \widehat{TEB} est augmentée à chaque itération d'une valeur notée δ_{TEB} si $\overline{TEB} \leq TEB_s$ et est diminuée de δ_{TEB} en cas contraire où TEB_s est le TEB seuil. On refait ensuite l'allocation de la modulation en attribuant à chaque sous-porteuse i la taille maximale de la modulation vérifiant $TEB_i \leq \widehat{TEB}$. L'algorithme converge quand la valeur de \overline{TEB} atteint \overline{TEB}_W défini par $\overline{TEB}_W = \max\{\overline{TEB} \text{ tel que } \overline{TEB} \leq TEB_s\}$. Le calcul de la valeur initiale du \widehat{TEB} a été présenté dans [57]. D'autres méthodes proposent un groupement des sous-porteuses pour lequel toutes les sous-porteuses d'un même paquet utilisent la même taille de la modulation. Ainsi, l'allocation de la modulation se fait sur le nombre de groupes $N_{Gr} < N$ ce qui simplifie la recherche de la solution. Dans [33], deux méthodes de groupement ont été proposées. La première consiste à un regrouper chaque n_c porteuses successives. Dans ce cas, le groupe i , $i \geq 1$, est formé par les sous-porteuses ayant les indices $(i-1)n_c, (i-1)n_c + 1, \dots, in_c - 1$. Cependant, ceci est fait sans tenir compte des caractéristiques du canal et dégrade les performances du système notamment quand les gains des sous-porteuses d'un même paquet diffèrent beaucoup. La seconde méthode consiste à réordonner les sous-porteuses selon leurs gains dans l'ordre croissant avant de les regrouper en des groupes de n_c sous-porteuses, ce qui améliore les performances du système. Cependant, cette méthode nécessite une voie de retour importante pour que l'émetteur ait une information complète sur la manière avec laquelle les sous-porteuses ont été regroupées. La méthode de groupement de sous-porteuses a été aussi proposée dans [29]. Bien que le nombre de groupes ainsi que le nombre de sous-porteuses par groupe peuvent être déterminés en utilisant un algorithme proposé dans [29], cette étude a également besoin d'une voie de retour importante vu que la répartition des sous-porteuses sur les groupes n'est pas uniforme. Puisque les gains des sous-porteuses voisines ont une corrélation significative, on propose dans [36] de regrouper les sous-porteuses en continu selon les distributions de gain. L'idée de base est de développer des groupes incluant le maximum possible de sous-porteuses voisines. Cependant, et comme dans l'étude de [29], la répartition des sous-porteuses sur les groupes n'est pas uniforme, ce qui nécessite une quantité importante d'informations sur la voie de retour.

Dans ce travail, nous considérons deux modèles de canaux de Rayleigh. Nous proposons de calculer analytiquement le nombre de sous-porteuses écartées quand la méthode *On-Off* est appliquée sur les sous-porteuses. En supposant que le récepteur retourne à l'émetteur l'allocation de la modulation sur les sous-porteuses restantes, nous calculons également la quantité d'information transmise sur la voie de retour. Nous proposons ensuite de regrouper uniformément les sous-porteuses sur des paquets de même taille n_c

afin de limiter la quantité d'informations sur la voie de retour. Le choix de la valeur de n_c dépend de la corrélation entre les coefficients du canal OFDM. Nous appliquons la méthode *On-Off* sur les paquets et nous calculons quand le canal est décrit par un modèle auto-régressif (AR) [25, 39, 48], la quantité d'information nécessaire sur la voie de retour.

5.2 Traitement par porteuse

Contrairement à l'algorithme classique présenté dans la section précédente et au problème (4.27) où on compare le TEB moyen au TEB_s , nous nous intéressons dans cette section au TEB par porteuse. Le calcul de ce TEB nous permet de décider de garder ou d'écartier une sous-porteuse avant d'appliquer l'algorithme (\mathcal{A}). Dans la suite, nous calculons le nombre de sous-porteuses à écartier pour deux modèles de canaux OFDM. Nous commençons par présenter ces deux modèles.

5.2.1 Modèles des canaux OFDM mono-antenne

Dans cette section, nous présentons les modèles des canaux de Rayleigh OFDM mono-antenne considérés dans notre étude. Nous commençons par présenter le cas de la transmission OFDM sur un canal sélectif en fréquence puis nous présentons le modèle auto-régressif du canal.

Modèle 1 : canal de Rayleigh

Soit la réponse temporelle du canal $\underline{h} = (h_0, \dots, h_{L-1})^T$. Les gains du canal sont des variables aléatoires indépendantes gaussiennes de moyenne nulle et de variance σ_l^2 . La TFD du canal sélectif en fréquence $\underline{g} = (g_0, \dots, g_{N-1})^T$ où $g_n, 0 \leq n \leq N-1$, s'écrit :

$$g_n = \sum_{l=0}^{L-1} h_l \exp\left(-\frac{j2\pi nl}{N}\right). \quad (4.28)$$

Ainsi, g_n est une variable aléatoire complexe gaussienne de moyenne nulle et de variance $\sigma_0^2 = \sum_{l=0}^{L-1} \sigma_l^2$. L'enveloppe de g_n suit la loi de Rayleigh avec la densité de probabilité :

$$\mathcal{F}(|g_n|) = \frac{|g_n|}{\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{|g_n|^2}{2\sigma_0^2}\right). \quad (4.29)$$

Modèle 2 : canal de Rayleigh auto-régressif

Le processus auto-régressif (AR) a été introduit dans [25, 39] pour modéliser la corrélation

entre les sous-porteuses du canal. Il a été considéré dans [48] afin de modéliser le canal OFDM. Soit $\underline{g} = (g_0, \dots, g_{N-1})^T$ la réponse fréquentielle du canal OFDM où g_0 est supposé modélisé par une variable aléatoire complexe gaussienne centrée de variance 1. Nous supposons que les coefficients de \underline{g} sont générés par un modèle auto-régressif du premier ordre tel que [48]

$$g_i = \alpha g_{i-1} + \epsilon_i \quad (4.30)$$

où $0 \leq \alpha \leq 1$ et ϵ_i , $1 \leq i \leq N - 1$ sont modélisées par des variables aléatoires complexes gaussiennes iid centrées et chacune de variance $1 - \alpha^2$. Ainsi, $E[|g_i|^2] = 1$. En nous basant sur (4.30), nous déduisons facilement par récurrence que chaque coefficient g_i , $1 \leq i \leq N - 1$, est la somme de deux variables aléatoires complexes gaussiennes iid et centrées. Ainsi, g_i suit à son tour une loi complexe gaussienne centrée de variance 1. Dans ce qui suit, nous appliquons la méthode *On-Off* par porteuse pour les deux modèles de canaux.

5.2.2 Principe de la méthode *On-Off* par porteuse

Quand une modulation MAQ-M avec le codage de Gray est utilisée avec $M \geq 4$, le TEB de la porteuse n peut être approximé par [16]

$$TEB_n = 0.2 \exp\left(-1.6 \frac{RSB_n}{M_n - 1}\right), \quad (4.31)$$

où $M_n \in \mathcal{M}$ et $RSB_n = \frac{|g_n|^2 p_0}{\sigma^2}$. Dans la suite, nous supposons que $\mathcal{M} = \{4, 16, 64\}$.

Le principe de la méthode *On-Off* consiste à garder les sous-porteuses dont le TEB est inférieur au TEB seuil (TEB_s). En nous basant sur (4.31), il est facile de montrer que pour assurer un TEB par porteuse inférieur au TEB_s , le RSB par porteuse doit être supérieur à

$$\Gamma_0 = 0.625(1 - M_{min}) \ln(5TEB_s) \quad (4.32)$$

où $M_{min} = \min(\mathcal{M}) = 4$. Ainsi,

$$\Gamma_0 = -1.875 \ln(5TEB_s). \quad (4.33)$$

Ainsi, la méthode *On-Off* consiste à écarter les sous-porteuses dont le RSB est inférieur strictement à Γ_0 . Nous proposons ensuite d'utiliser l'algorithme (\mathcal{A}) pour allouer la modulation pour les sous-porteuses restantes. Grâce à cette méthode *On-Off*, le temps d'exécution de l'algorithme (\mathcal{A}) diminue vu qu'il cherche la solution sur $(N - N_{off})$ sous-

porteuses au lieu de la chercher sur toutes les N sous-porteuses où N_{off} est le nombre de sous-porteuses écartées. Dans ce qui suit, nous proposons de calculer analytiquement N_{off} . Ensuite, nous proposons deux méthodes pour retourner l'allocation de la modulation sur la voie de retour. Nous spécifions comment faire le choix entre ces deux méthodes pour minimiser la quantité d'informations sur la voie de retour.

5.2.3 Minimisation du débit sur la voie de retour

Une sous-porteuse i est écartée si son RSB est faible ($RSB_i < \Gamma_0$) ce qui équivaut à dire que le gain $|g_i|$ de la sous-porteuse i vérifie $|g_i| < \sqrt{\frac{\sigma^2 \Gamma_0}{p_0}}$. Ainsi, nous pouvons déterminer analytiquement en moyenne le nombre de sous-porteuses écartées N_{off} . En effet, en considérant le modèle 1 du canal et en nous basant sur (4.29), nous trouvons que

$$N_{off} = N \int_0^{\rho_0} \frac{t}{\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_0^2}\right) dt \quad (4.34)$$

où $\rho_0 = \sqrt{\frac{\sigma^2 \Gamma_0}{p_0}}$. Ainsi,

$$N_{off} = N \left(1 - \exp\left(-\frac{\Gamma_0 \sigma_0^2}{p_0}\right)\right). \quad (4.35)$$

Quand le modèle AR est considéré, le nombre moyen de sous-porteuses écartées pour un TEB_s donné est

$$\begin{aligned} N_{off} &= N \int_0^{\rho_0} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Gamma_0 \sigma^2}{p_0}\right)\right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Sur la voie de retour, le récepteur peut utiliser deux méthodes pour retourner l'allocation de la modulation. La première consiste à supposer que les sous-porteuses écartées sont modulées avec une constellation de taille nulle. Dans ce cas, le nombre B_1 de bits réservés à la voie de retour est donné par

$$B_1 = N \log_2(n + 1) \quad (4.37)$$

où n est le nombre de niveaux de modulation $MAQ-M$ possibles ($n = 3$ dans notre cas). La seconde méthode consiste à retourner à la fois les indices des sous-porteuses non-écartées et les modulations correspondantes. Nous avons donc besoin de B_2 bits où

$$B_2 = (N - N_{off}) (\log_2(n) + \log_2(N)). \quad (4.38)$$

où $\log_2(N)$ bits sont nécessaires pour spécifier les indices des $(N - N_{off})$ sous-porteuses actives et $\log_2(n)$ bits sont nécessaires pour indiquer les modulations correspondantes. Le récepteur choisit ensuite la méthode qui minimise le nombre de bits dédiés à la voie de retour. Ainsi, en faisant l'égalité entre (4.37) et (4.38), nous montrons simplement qu'à partir d'une valeur limite du nombre de sous-porteuses écartées ($N_{off,l}$), le récepteur nécessite moins de bits sur la voie de retour quand il utilise la seconde méthode. Cette valeur limite est donnée par

$$N_{off,l} = N \left(1 - \frac{\log_2(n+1)}{\log_2(nN)} \right). \quad (4.39)$$

Le choix de l'une des deux méthodes peut aussi être fait en comparant N à une valeur limite N_l donnée par :

$$N_l = 2^e \quad (4.40)$$

où $e = \frac{\log_2(n+1)}{\exp\left(-\frac{\Gamma_0 \sigma^2}{p_0}\right)} - \log_2(n)$. Si $N \geq N_l$, le récepteur choisit la première méthode.

5.2.4 Résultats des simulations

La figure 4.6.a montre le principe de la méthode *On-Off* par porteuse. Nous représentons les RSB des différentes sous-porteuses dans le cas d'une transmission OFDM sur un canal sélectif en fréquence modélisé par le modèle 1 et de longueur $L = 3$. Ici, $TEB_s = 10^{-3}$, $p_0 = 1$, $RSB = 12dB$ et $N = 512$. Les coefficients temporels du canal sont modélisés par des variables aléatoires complexes gaussiennes indépendantes centrées de variances $(0.5; 0.71; 0.5)$. La même méthode est appliquée au canal modélisé par le modèle AR pour $\alpha = 0.3$, $N = 512$, $p_0 = 1$, $RSB = 12dB$ et $TEB_s = 10^{-6}$ (figure 4.6.b). Dans la figure 4.6, la sous-porteuse q est écartée quand son RSB, $RSB_q = \frac{p_0 |g_q|^2}{\sigma^2}$, est strictement inférieur à Γ_0 . Sinon, elle est gardée.

Afin de montrer la variation de la valeur du N_{off} avec le RSB, nous considérons une transmission OFDM sur un canal suivant le modèle 1 de longueur $L = 3$. Les coefficients temporels du canal sont modélisés par des variables aléatoires complexes gaussiennes centrées indépendantes de variances $(0.5; 0.71; 0.5)$. La TFD du canal est $\underline{g} = (g_0, \dots, g_{N-1})^T$. Dans le tableau 4.1, nous donnons les valeurs de N_{off} pour deux valeurs de N : $N = 52$ (*Standard IEEE 802.11a* [26]) et $N = 512$ pour $p_0 = 1$, $TEB_s = 10^{-3}$, différentes valeurs du RSB et trois niveaux de constellation MAQ (4, 16 et 64). Notons que la valeur du $N_{off,l}$ est 39 pour $N = 52$ et 419 pour $N = 512$. Ainsi, d'après le tableau 4.1, la seconde méthode qui retourne indépendamment les sous-porteuses gardées ainsi que l'allocation

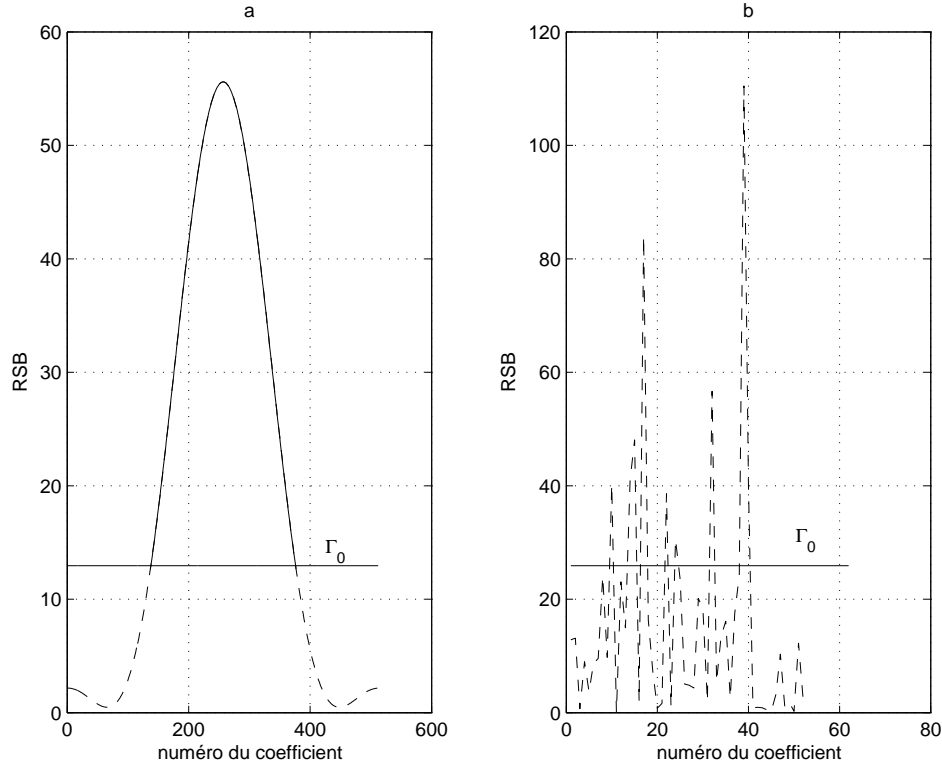


FIGURE 4.6 – Principe de la méthode *On-Off* par porteuse.

de la modulation consomme moins de bits sur la voie de retour à faible RSB. Ce résultat est attendu vu qu'à faible RSB, le nombre de sous-porteuses écartées est grand. Dans ce cas, l'algorithme (\mathcal{A}) converge lentement à faible RSB. En utilisant la méthode *On-Off*, l'algorithme (\mathcal{A}) converge plus rapidement puisque la recherche de la solution se fait uniquement sur $(N - N_{off})$ sous-porteuses.

RSB	0	2	4	<u>5</u>	6	8	10	12
$N_{off}, N = 52$	51	50	47	<u>40</u>	38	33	25	19
$N_{off}, N = 512$	508	492	450	<u>420</u>	385	312	241	180

TABEAU 4.1 – Valeurs de N_{off} en fonction du RSB pour $p_0 = 1$, $TEB_s = 10^{-3}$ et deux valeurs de N .

Sous les mêmes hypothèses de simulations, nous comparons dans la figure 4.7 les performances en termes de débit D_0 donné par (4.27) ($D_0 = \sum_{n=0}^{N-1} b_n$) de la méthode utilisant

les N sous-porteuses à l'entrée de l'algorithme (\mathcal{A}) et celle du *On-Off* sélectionnant $(N - N_{off})$ sous-porteuses à l'entrée de (\mathcal{A}). Nous remarquons que notre méthode proposée donne les mêmes performances que l'algorithme classique (\mathcal{A}) utilisant toutes les sous-porteuses simultanément quand le *RSB* est grand. En effet, $N_{off} \simeq 0$ à fort *RSB* et les deux méthodes deviennent équivalentes. Pour des valeurs faibles à modérées du *RSB*, les deux solutions donnent des résultats proches. En effet, la méthode *On-Off* écarte quelques sous-porteuses avant d'appliquer l'algorithme (\mathcal{A}), ce qui engendre une légère perte en termes de débit notamment quand les *RSB* des sous-porteuses écartées sont proches de Γ_0 .

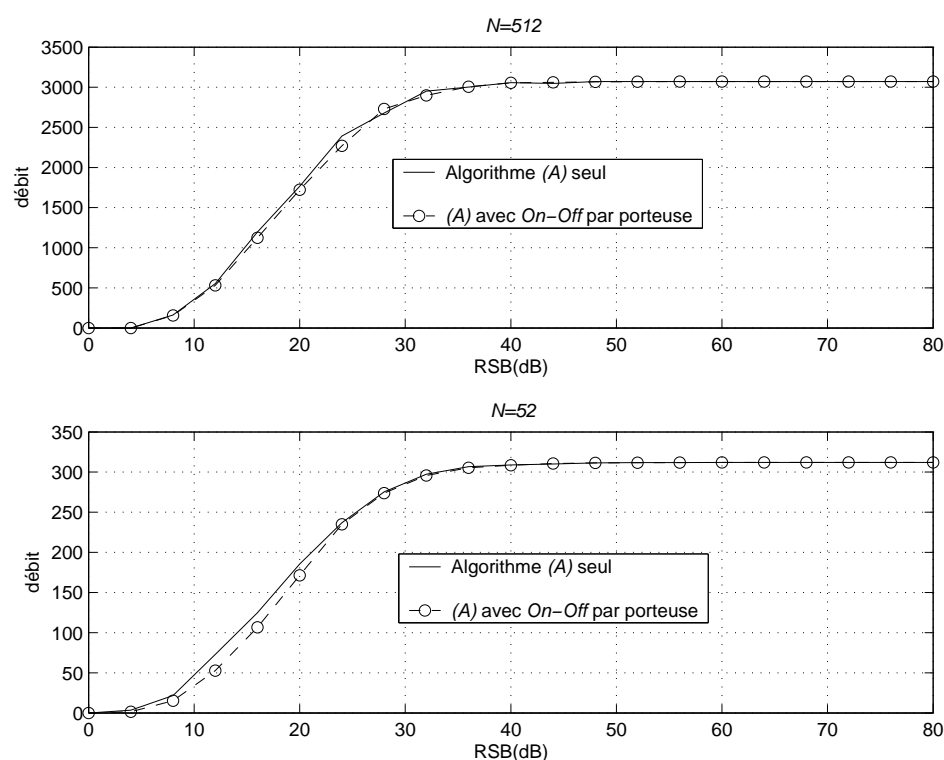


FIGURE 4.7 – Débit en fonction du *RSB* pour une transmission OFDM sur un canal sélectif en fréquence pour $p_0 = 1$, $TEB_s = 10^{-3}$ et deux valeurs de N .

Dans la figure 4.8 nous présentons la même comparaison des performances en termes de débit de l'algorithme (\mathcal{A}) seul et de l'algorithme (\mathcal{A}) avec la méthode *On-Off* pour un canal AR à N coefficients ($N = 52$ et $N = 512$) pour $\alpha = 0.3$, $p_0 = 1$ et $TEB_s = 10^{-6}$. Nous trouvons aussi et pour les mêmes raisons, que les deux méthodes offrent le même débit à fort *RSB* et des débits proches pour des valeurs faibles à modérées du *RSB*.

Malgré la légère perte obtenue en termes du débit quand nous utilisons la méthode *On-Off* pour un RSB faible ou modéré, cette méthode est intéressante vu qu'elle permet d'obtenir un gain important en termes de temps d'exécution de l'algorithme (\mathcal{A}). En effet, sous les mêmes hypothèses de simulations de la figure 4.8, nous montrons dans la figure 4.9 les temps moyens d'exécutions d'une allocation de modulation pour un symbole OFDM des deux algorithmes : algorithme (\mathcal{A}) seul et algorithme (\mathcal{A}) avec la méthode *On-Off*. Nous remarquons que la méthode *On-Off* permet d'obtenir un gain significatif en termes de temps de traitement pour des valeurs faibles à modérées du RSB. En effet, quand le *RSB* est faible ou modéré, la valeur de N_{off} est assez élevée et l'algorithme (\mathcal{A}) avec la méthode *On-Off* converge plus rapidement. Cependant, quand la méthode *On-Off* n'est pas considérée, l'algorithme (\mathcal{A}) seul perd beaucoup de temps pour passer de l'allocation initiale (M_{max} pour toutes les sous-porteuses) à l'allocation finale et un nombre important de sous-porteuses seront écartées en passant par les tailles de la modulation intermédiaires. Quand le *RSB* augmente, l'algorithme (\mathcal{A}) seul converge plus rapidement car les tailles de la modulation des différentes sous-porteuses s'approchent de M_{max} . Contrairement à ceci, l'algorithme (\mathcal{A}) avec la méthode *On-Off* converge plus lentement à des RSB modérés. Ceci est dû à la diminution de la valeur N_{off} . Quand le *RSB* est grand, cet algorithme converge plus rapidement bien que $N_{off} \simeq 0$ puisqu'il accorde la valeur M_{max} comme taille de la modulation à la plupart des sous-porteuses. Finalement, le temps d'exécution de l'algorithme (\mathcal{A}) avec la méthode *On-Off* est légèrement supérieur à celui de l'algorithme (\mathcal{A}) à très fort RSB. Ce est dû au fait que la méthode *On-Off* consomme du temps pour tester le RSB des sous-porteuses sans diminuer le nombre de sous-porteuses à l'entrée de (\mathcal{A}) à fort RSB.

Afin de limiter la quantité d'informations sur la voie de retour et simplifier davantage l'allocation optimale de la modulation, nous proposons dans la suite de répartir les sous-porteuses en des paquets de sous-porteuses.

5.3 Traitement par paquet

Puisque les sous-porteuses voisines d'un canal OFDM sont corrélées, nous proposons de regrouper les N sous-porteuses en K paquets de sous-porteuses de même taille n_c . Une même modulation est allouée à toutes les sous-porteuses d'un même paquet. Le récepteur renvoie les tailles des constellations M_k , $1 \leq k \leq K$ correspondant aux K paquets au lieu de celles correspondant aux N sous-porteuses. Ceci permet de minimiser le nombre de bits utilisés sur la voie de retour. Afin de ne pas dégrader significativement les performances, nous tiendrons compte des caractéristiques du canal dans le choix de n_c . Cette méthode

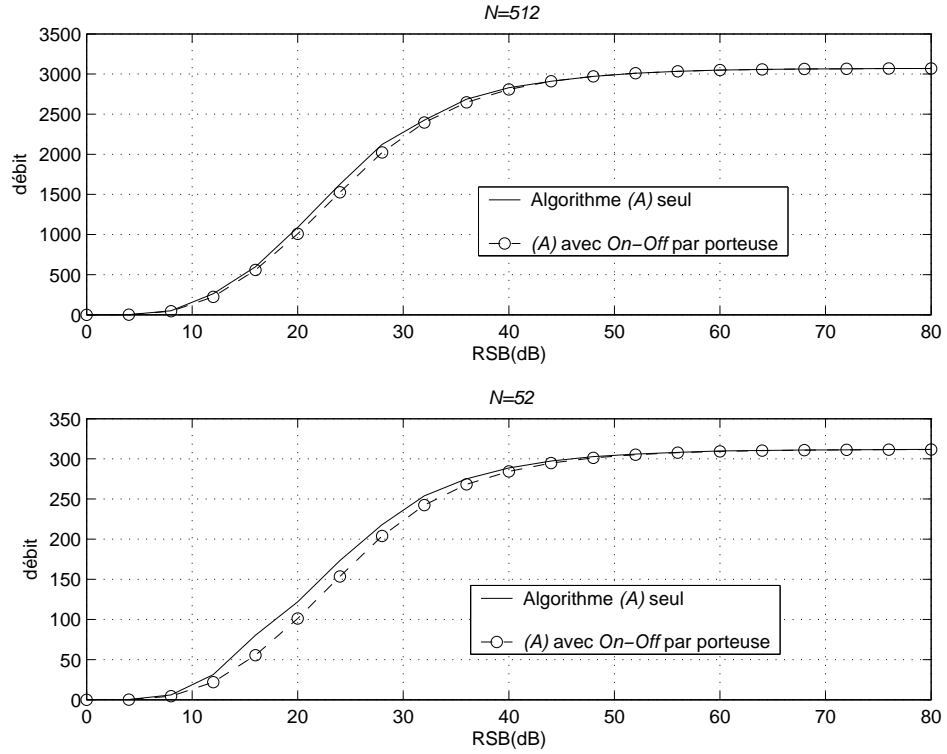


FIGURE 4.8 – Débit en fonction du RSB pour un canal AR pour $\alpha = 0.3$, $p_0 = 1$, $TEB_s = 10^{-6}$ et deux valeurs de N .

permet également d'obtenir un gain en termes de temps d'exécution de l'algorithme de l'allocation de la modulation notamment quand K est grand. Nous proposons ensuite d'appliquer la méthode *On-Off* basée sur le RSB équivalent d'un paquet afin de faciliter davantage l'algorithme de l'allocation de la modulation.

5.3.1 Groupement des sous-porteuses

Les N sous-porteuses sont regroupées en des paquets de même taille n_c . Le choix de n_c dépend de la corrélation désirée entre les coefficients du canal. En effet, quand le modèle du canal de Jackes est considéré, la corrélation entre les gains des deux sous-porteuses g_n et g_{n+n_c} est donnée par [27]

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(n_c) &= E[g_n g_{n+n_c}^*] \\ &= \frac{J_0(0)}{1 + \left(\frac{2\pi n_c}{N}\right)^2} \left(1 - j \frac{2\pi n_c}{N}\right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

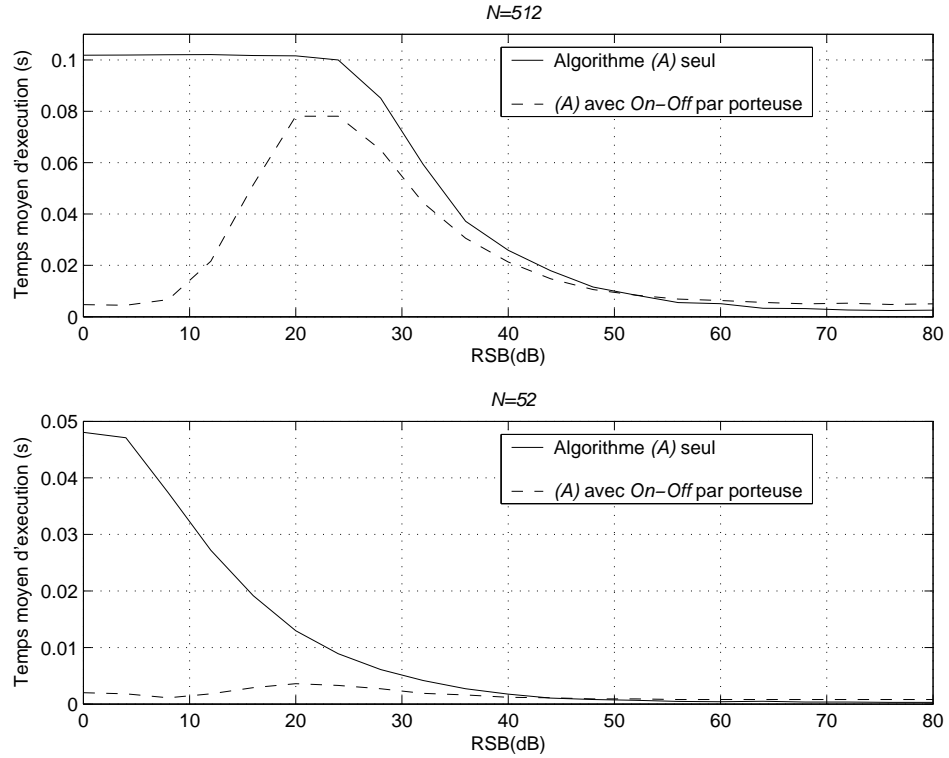


FIGURE 4.9 – Temps moyen d’exécution d’une allocation de modulation pour un symbole OFDM pour un canal AR pour $\alpha = 0.3$, $p_0 = 1$, $TEB_s = 10^{-6}$ et deux valeurs de N .

où $j^2 = -1$ et $J_0(\cdot)$ est la fonction de Bessel d’ordre 0.

Quand le modèle auto-régressif du canal est utilisé, la corrélation entre les gains des deux sous-porteuses g_n et g_{n+n_c} est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(n_c) &= E[g_n g_{n+n_c}^*] \\ &= \alpha^{n_c}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Quand la valeur de n_c augmente, le nombre de paquets diminue. Ainsi, l’allocation de la modulation devient plus simple et la voie de retour consomme moins de ressources. Mais ceci dégrade la qualité de l’allocation vu que les sous-porteuses éloignées d’un même paquet sont peu corrélées. En nous basant sur des simulations, nous discutons dans la section suivante l’influence de la valeur de n_c sur les performances du système.

Pour une valeur donnée de n_c , nous disposons de $K = \frac{N}{n_c}$ paquets de sous-porteuses. Nous définissons le rapport signal à bruit moyen par sous-porteuse du paquet k ($1 \leq k \leq K$)

par :

$$\begin{aligned}\overline{RSB}_k &= \frac{1}{n_c} \sum_{i=(k-1)n_c}^{kn_c-1} RSB_i \\ &= \frac{p_0}{\sigma^2 n_c} \left(|g_{(k-1)n_c}|^2 + \dots + |g_{kn_c-1}|^2 \right)\end{aligned}\quad (4.43)$$

où $p_0 = \frac{P_{tot}}{N}$ est la puissance d'une sous-porteuse.

L'allocation de la modulation s'effectue par paquet. Le débit d'un paquet k est donné par

$$D_k = n_c b_k \quad (4.44)$$

où $b_k = \log_2(M_k)$. Le débit total sur l'ensemble des K paquets s'écrit alors

$$D_K = n_c \sum_{k=1}^K b_k. \quad (4.45)$$

Soit $\bar{g}_k = \sqrt{\frac{|g_{(k-1)n_c}|^2 + \dots + |g_{kn_c-1}|^2}{n_c}}$. Nous approximons le TEB du paquet k par

$$TEB_k = 0.2 \exp\left(\frac{-1.6p_0|\bar{g}_k|^2}{\sigma^2(M_k - 1)}\right). \quad (4.46)$$

Similairement au traitement par porteuse, nous définissons un TEB moyen des paquets comme suit

$$\overline{TEB}_{pq} = \frac{\sum_{k=1}^K b_k TEB_k}{\sum_{k=1}^K b_k} \quad (4.47)$$

L'augmentation de b_k engendre une amélioration du débit de transmission mais aussi une dégradation en termes du TEB moyen des paquets. Nous proposons donc de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\max_{b_k} D_K = n_c \sum_{k=1}^K b_k \quad \text{s.c} \quad \overline{TEB}_{pq} \leq TEB_s \quad (4.48)$$

où TEB_s représente la même valeur maximale du TEB qu'on peut tolérer.

Nous proposons de généraliser l'algorithme (\mathcal{A}) [29, 57] au cas de l'allocation de la modulation par paquet. L'algorithme obtenu est appelé algorithme (\mathcal{B}). Nous présentons dans ce qui suit ses différentes étapes :

1. A partir de $\mathcal{R}(n_c)$, déterminer la valeur de n_c en utilisant (4.41) ou (4.42) selon le modèle du canal puis calculer $K = \frac{N}{n_c}$
2. Allouer la modulation $MAQ - M_{max}$ à tous les paquets

3. Calculer le TEB de chacun des paquets TEB_k ($1 \leq k \leq K$) en utilisant (4.46)
4. Calculer le TEB moyen des paquets \overline{TEB}_{pq} puis le comparer avec TEB_s . Si $\overline{TEB}_{pq} \leq TEB_s$, garder l'allocation de la modulation courante et finir l'algorithme. Sinon, passer à l'étape 5
5. Chercher le paquet k ayant le plus mauvais TEB et réduire la taille de sa constellation. Si $b_k = 2$, alors écarter le paquet
6. Recalculer le TEB_k en utilisant (4.46) et retourner à l'étape 4

L'algorithme (\mathcal{B}) est moins complexe que l'algorithme (\mathcal{A}) puisqu'il cherche la solution sur K paquets ($K < N$). Nous proposons de simplifier davantage l'algorithme (\mathcal{B}) en appliquant la méthode *On-Off* par paquet. Nous décrivons le principe de cette méthode dans la section suivante.

5.3.2 Principe de la méthode *On-Off* par paquet

La méthode *On-Off* par paquet consiste à écarter le paquet k , $1 \leq k \leq K$, dont le RSB moyen par sous-porteuse (\overline{RSB}_k) est inférieur au seuil Γ_0 donné par (4.32). En utilisant (4.43), le RSB moyen par sous-porteuse du paquet k peut s'écrire par

$$\overline{RSB}_k = \frac{p_0}{\sigma^2 n_c} \overline{G}_k \quad (4.49)$$

où

$$\overline{G}_k = |g_{(k-1)n_c}|^2 + \dots + |g_{kn_c-1}|^2. \quad (4.50)$$

En comparant \overline{RSB}_k à Γ_0 , nous remarquons qu'un paquet k est écarté quand

$$\overline{G}_k < \frac{\Gamma_0 \sigma^2 n_c}{p_0}. \quad (4.51)$$

Afin de calculer analytiquement le nombre de paquets écartés, nous considérons dans ce qui suit le modèle AR du canal OFDM et nous étudions la distribution de l'énergie de \overline{G}_k .

5.3.3 Distribution de l'énergie du canal

Nous considérons le modèle AR du canal donné par (4.30). Le $p^{\text{ème}}$ coefficient du $k^{\text{ème}}$ groupe ($1 \leq p \leq n_c - 1$) peut s'écrire par

$$g_{(k-1)n_c+p} = \alpha^p g_{(k-1)n_c} + \sum_{i=1}^p \alpha^{p-i} \epsilon_{(k-1)n_c+i}. \quad (4.52)$$

Soient $g_{k,p,0} = \alpha^p g_{(k-1)n_c}$ et $g_{k,p,i} = \alpha^{p-i} \epsilon_{(k-1)n_c+i}$, pour $1 \leq i \leq p$. Ainsi, (4.52) devient

$$g_{(k-1)n_c+p} = \sum_{i=0}^p g_{k,p,i}. \quad (4.53)$$

Ainsi,

$$|g_{(k-1)n_c+p}|^2 = \sum_{i=0}^p |g_{k,p,i}|^2 + \sum_{j=0}^p \sum_{i=0, i < j}^p (g_{k,p,i} g_{k,p,j}^* + g_{k,p,i}^* g_{k,p,j}). \quad (4.54)$$

En négligeant les termes $g_{k,p,i} g_{k,p,j}^*$ et en supposant que $\alpha^2 \ll 1$, $|g_{(k-1)n_c+p}|^2$ peut être approximé par

$$|g_{(k-1)n_c+p}|^2 \simeq |\epsilon_{(k-1)n_c+p}|^2. \quad (4.55)$$

Ainsi, en utilisant (4.50), \overline{G}_k peut s'approximer par

$$\overline{G}_k \simeq |g_{(k-1)n_c}|^2 + |\epsilon_{(k-1)n_c+1}|^2 + \dots + |\epsilon_{kn_c-1}|^2. \quad (4.56)$$

Par suite, quand $\alpha^2 \ll 1$, \overline{G}_k est la somme de carrés de $2n_c$ variables complexes gaussiennes indépendantes centrées de variance 1. D'où \overline{G}_k suit la loi du χ^2 à $2n_c$ degrés de liberté dont la fonction de densité de probabilité est

$$\mathcal{F}(\overline{G}_k) = \frac{1}{2^{n_c} \gamma(n_c)} \overline{G}_k^{n_c-1} \exp\left(-\frac{\overline{G}_k}{2}\right) \quad (4.57)$$

où $\gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt$.

Afin de vérifier cette approximation, nous considérons un canal auto-régressif. Nous représentons dans la figure 4.10 l'histogramme de \overline{G}_k pour $n_c = 7$ pour différentes valeurs de α (traits en continu) et la distribution de la loi du χ^2 à $2n_c$ degrés de liberté (traits en discontinu). Nous remarquons que lorsque α est petit ($\alpha \leq 0.5$), les résultats analytiques et théoriques sont proches, ce qui valide notre approximation.

En nous basant sur la connaissance de la fonction de densité de probabilité de \overline{G}_k

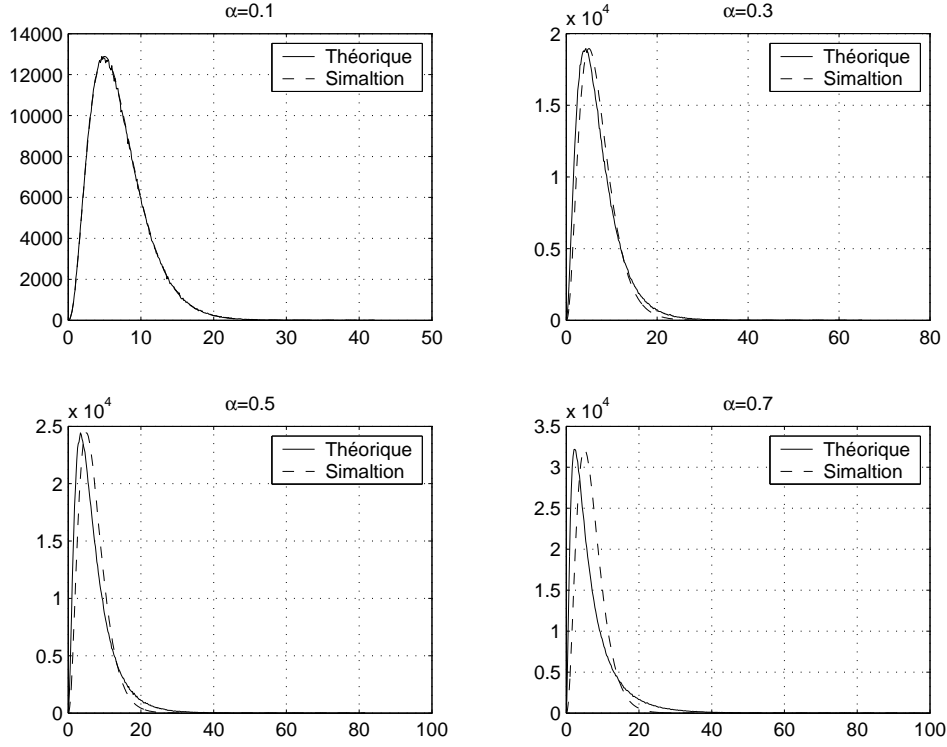


FIGURE 4.10 – Distribution de la loi du χ_2 pour un canal AR, $n_c = 7$ et différentes valeurs de α (Théoriques : traits discontinus, Simulations : traits continus).

(équation (4.57)), nous calculons dans la suite la valeur analytique du nombre de paquets écartés par la méthode *On-Off* ainsi que la quantité d'informations nécessaire sur la voie de retour.

5.3.4 Minimisation du débit sur la voie de retour

En nous basant sur (4.51), un paquet k est écarté si $\overline{G}_k < \frac{\Gamma_0 \sigma^2 n_c}{p_0}$. En moyenne, la valeur analytique de K_{off} , le nombre de paquets écartés peut alors être déterminée analytiquement en utilisant (4.57) comme suit

$$K_{off} = K \int_0^{\rho_1} \frac{1}{2^{n_c} \gamma(n_c)} t^{n_c-1} \exp\left(-\frac{t}{2}\right) dt. \quad (4.58)$$

où $\rho_1 = \frac{\Gamma_0 \sigma^2 n_c}{p_0}$.

Le calcul de l'intégrale (4.58) n'est pas possible, nous nous basons donc pour l'approximer sur la table du χ_2 .

Nous comparons dans la figure 4.11, les valeurs analytiques du nombre moyen de paquets écartés K_{off} obtenues en se basant sur (4.58) et sur la table du χ_2 (qui sont indépendante de α) et celles obtenues par des simulations pour différentes valeurs de α . Nous supposons que $TEB_s = 10^{-3}$ et $N = 512$. Nous considérons deux cas : $n_c = 8$ et $n_c = 5$. Nous remarquons que quand la valeur de α est faible ($\alpha < 0.5$), la courbe analytique approxime bien celles obtenues par simulations puisque l'approximation que \overline{G}_k suit la loi du χ_2 est d'autant plus vraie que α est faible. Nous remarquons également que le nombre de paquets écartés est quasiment indépendant de α quand la valeur de celle-ci est faible.

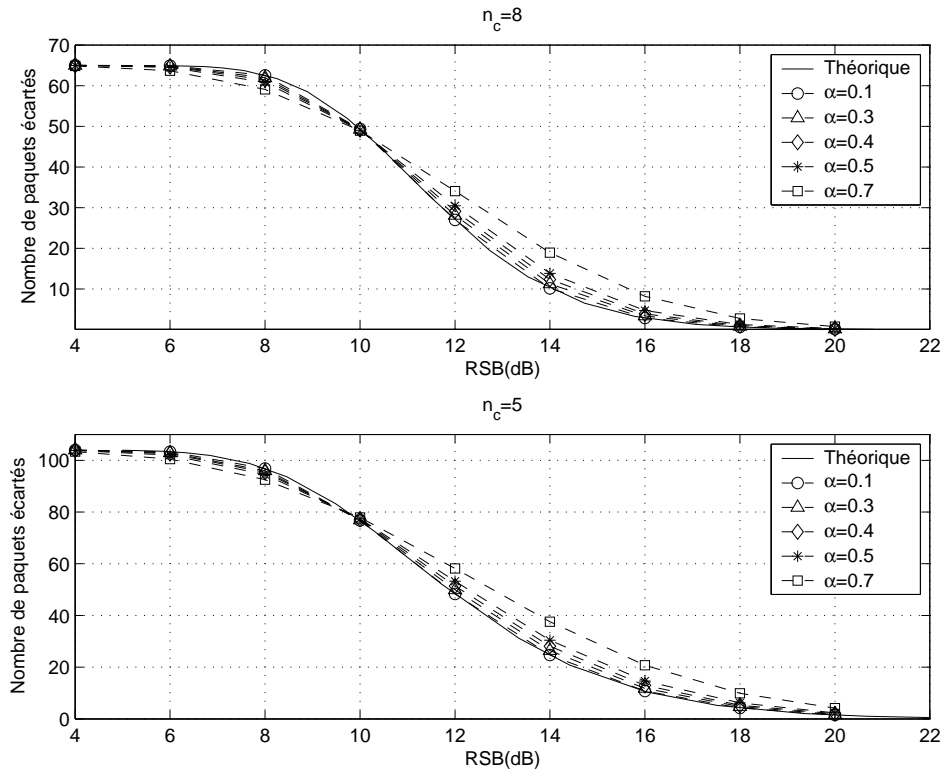


FIGURE 4.11 – Courbes de K_{off} en fonction du RSB : courbes analytiques et obtenues par simulations pour un canal AR, $n_c \in \{5, 8\}$ et différentes valeurs de α .

Sur la voie de retour, le récepteur a deux méthodes pour retourner l'allocation de la modulation. La première consiste à supposer que les paquets écartés sont modulés avec une constellation de taille nulle. Dans ce cas, le nombre B_{pq1} de bits réservés à la voie de retour est donné par

$$B_{pq1} = K \log_2(n + 1) \quad (4.59)$$

où $n = 3$ est le nombre de niveaux de modulation *MAQ-M* possibles.

La seconde méthode consiste à retourner à la fois les indices des paquets non-écartés et les modulations correspondantes. Nous avons donc besoin de B_{pq2} bits où

$$B_{pq2} = (K - K_{off}) (\log_2(n) + \log_2(K)) \quad (4.60)$$

où $\log_2(K)$ bits sont nécessaires pour spécifier les indices des $(K - K_{off})$ paquets actifs et $\log_2(n)$ bits sont nécessaires pour indiquer les modulations correspondantes.

Le récepteur choisit ensuite la méthode qui minimise le nombre de bits sur la voie de retour. Ainsi, en faisant l'égalité entre (4.59) et (4.60), nous montrons facilement qu'à partir d'une valeur limite du nombre de sous-porteuses écartées ($K_{off,l}$), le récepteur nécessite moins de bits sur la voie de retour quand il utilise la seconde méthode. Cette valeur limite est donnée par

$$K_{off,l} = K \left(1 - \frac{\log_2(n+1)}{\log_2(nK)} \right) \quad (4.61)$$

Le choix de l'une des deux méthodes peut aussi être basé sur la comparaison de K à une valeur limite K_l donnée par :

$$K_l = 2^{2\varrho_{pq}} \quad (4.62)$$

où $\varrho_{pq} = \frac{\log_2(n+1)}{1 - \int_0^{\rho_1} \frac{1}{2^{n_c \gamma(n_c)}} t^{n_c-1} \exp(-\frac{t}{2}) dt} - \log_2(n)$. Si $K \geq K_l$, le récepteur choisit la première méthode.

5.3.5 Résultats des simulations

Dans la figure 4.12, nous montrons le principe de la méthode *On-Off* par paquet pour un canal AR avec $\alpha = 0.3$, $N = 64$, $p_0 = 1$, $n_c = 2$, $RSB = 12dB$ et $TEB_s = 10^{-6}$. Ainsi, le nombre de paquets est $K = 32$. La courbe en trait continu représente les RSB moyens par sous-porteuse des 32 paquets. Celle en trait discontinu montre les RSB des 64 sous-porteuses. La valeur du seuil Γ_0 est obtenue en utilisant (4.32). Les paquets dont le RSB moyen est inférieur à Γ_0 sont écartés. Nous remarquons dans ce cas que seuls onze paquets sont gardés par la méthode *On-Off* par paquet contrairement à la méthode *On-Off* par porteuse où le nombre de sous-porteuses actives est nettement supérieur comme le montre la figure 4.12.

Dans les figures 4.13 et 4.14, nous considérons un canal AR avec $N = 512$ coefficients et $\alpha = 0.3$. Nous appliquons les quatre algorithmes présentés dans ce chapitre à savoir l'algorithme (\mathcal{A}) seul, l'algorithme (\mathcal{A}) avec la méthode *On-Off* par porteuse, l'algorithme

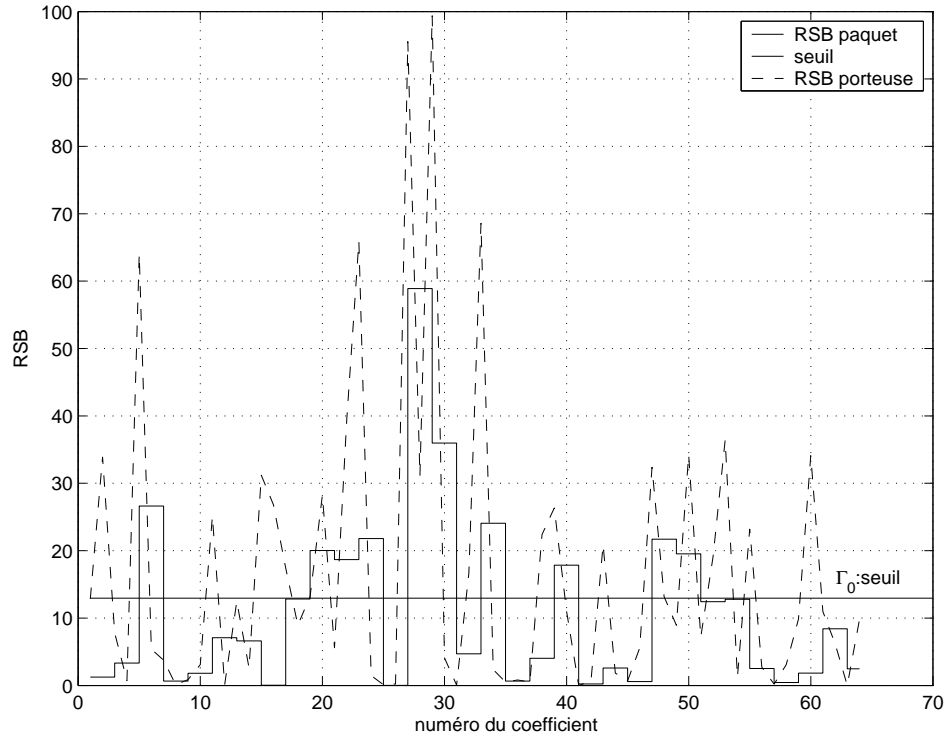


FIGURE 4.12 – Principe de la méthode *On-Off* par paquet .

(\mathcal{B}) seul et l'algorithme (\mathcal{B}) avec la méthode *On-Off* par paquet. Quand l'algorithme (\mathcal{B}) est utilisé, nous considérons trois valeurs de n_c ($n_c = 2, 4$ et 8). Le TEB_s est fixé à 10^{-6} et $p_0 = 1$. La figure 4.13 montre les débits obtenus en utilisant les quatre algorithmes. Nous remarquons que l'algorithme (\mathcal{A}) seul et l'algorithme (\mathcal{A}) avec la méthode *On-Off* présentent les meilleures performances. Nous remarquons aussi que l'algorithme (\mathcal{B}) seul et l'algorithme (\mathcal{B}) avec la méthode *On-Off* par paquet offrent les mêmes performances en termes de débit. La figure 4.13 montre aussi que quand n_c augmente le débit diminue. Ceci est dû au fait que la qualité de l'allocation se dégrade quand n_c augmente vu que les sous-porteuses éloignées d'un même paquet sont peu corrélées. Ainsi, nous remarquons dans la figure 4.13 que quand $n_c > 2$, les performances du système se dégradent significativement.

La figure 4.14 montre le temps moyen d'exécution d'une allocation de modulation pour un symbole OFDM pour les quatre algorithmes proposés. Nous remarquons que l'algorithme (\mathcal{B}) avec la méthode *On-Off* par paquet apporte un gain important en termes de temps d'exécution par rapport à l'algorithme (\mathcal{B}) seul pour des valeurs faibles à modérées

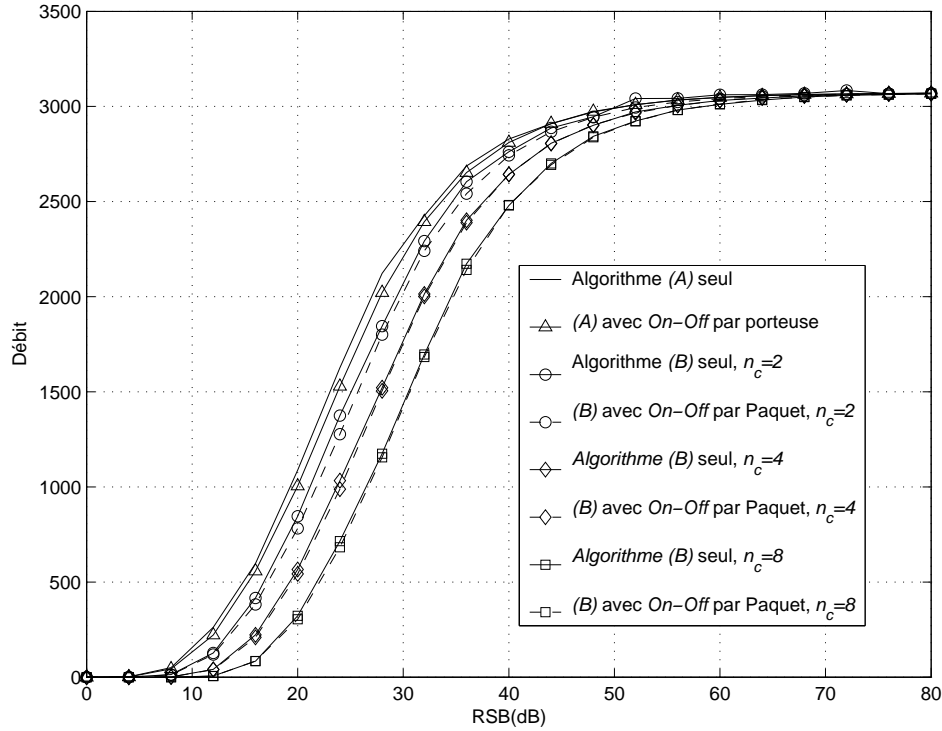


FIGURE 4.13 – Débit en fonction du RSB pour les différents algorithmes proposés, pour un canal AR, $\alpha = 0.3$, $N = 512$, $TEB_s = 10^{-6}$, $p_0 = 1$ et différentes valeurs de n_c .

du RSB. Nous trouvons aussi que l'algorithme (\mathcal{B}) avec la méthode *On-Off* par paquet est la technique la plus rapide notamment quand n_c est grande. L'explication de l'allure des courbes quand l'algorithme (\mathcal{B}) est utilisé seul (respectivement l'algorithme (\mathcal{B}) avec la méthode *On-Off* par paquet) est similaire de celle donnée pour la figure 4.9 quand l'algorithme (\mathcal{A}) est utilisé seul (respectivement l'algorithme (\mathcal{A}) avec la méthode *On-Off* par porteuse).

Dans le tableau 4.2, nous comparons à la fois les valeurs du TEB moyen, du débit, du temps d'exécution et du nombre de bits nécessaires sur la voie de retour (\overline{N}_{fb}) moyennées sur une large plage du RSB des quatre algorithmes proposés. Pour se faire, nous tirons aléatoirement 2000 valeurs du *RSB* comprises entre 0 et 60dB. Nous considérons deux canaux : canal AR avec $\alpha = 0.3$ et le modèle du canal avec des coefficients modélisés par des variables aléatoires complexes gaussiennes centrées indépendantes de variances (0.5;0.71;0.5). Nous supposons que $N = 512$, $p_0 = 1$ et considérons deux valeurs de TEB_s : $TEB_s = 10^{-6}$ et $TEB_s = 10^{-3}$.

En analysant les différents résultats du tableau 4.2, nous remarquons d'abord que quand

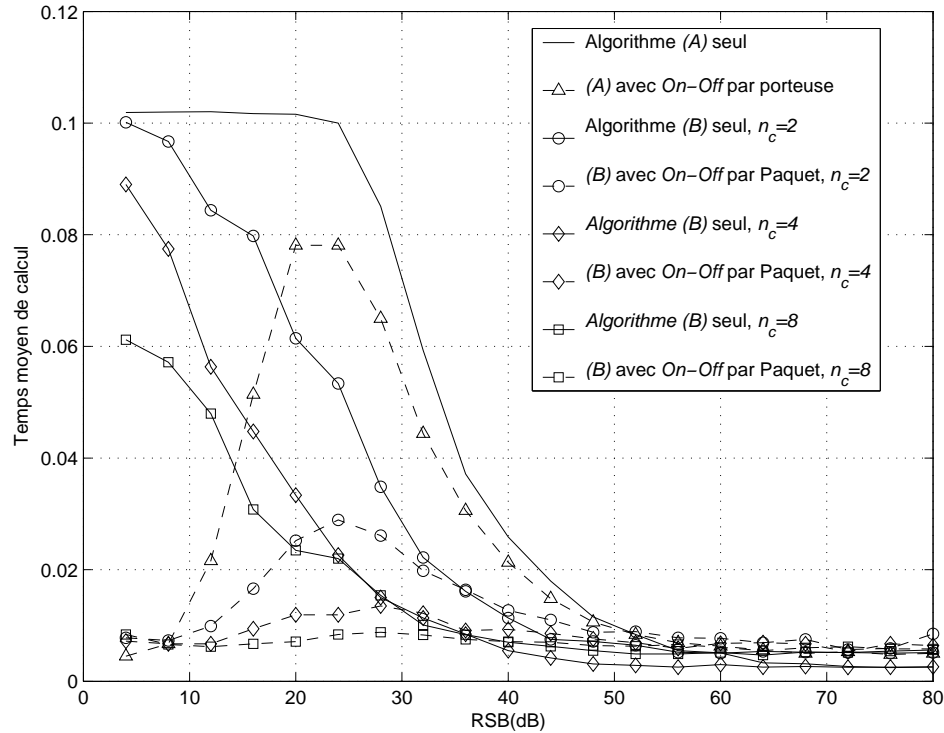


FIGURE 4.14 – Temps moyen d’exécution d’une allocation de modulation pour un symbole OFDM pour un canal AR avec $\alpha = 0.3$, $p_0 = 1$, $N = 512$, $TEB_s = 10^{-6}$ et différentes valeurs de n_c .

$n_c > 2$, les résultats apportés par l’algorithme (B) seul et ceux apportés par l’algorithme (B) avec la méthode *On-Off* par paquet restent insuffisants vu que le débit est nettement inférieur au débit optimal trouvé par l’algorithme (A) seul. Nous remarquons également que le choix d’un algorithme dépend des contraintes du système. En effet,

- **Si le système veut minimiser débit sur la voie de retour** : nous recommandons le choix de l’algorithme (B) seul avec $n_c = 2$ car le débit moyen correspondant est proche de la valeur maximale trouvée par l’algorithme (A) seul et le temps moyen de calcul reste inférieur au temps de calcul de l’algorithme (A) seul.

- **Si le système veut minimiser le temps moyen de calcul** : nous recommandons l’algorithme (B) avec $n_c = 2$ et utilisant la méthode *On-Off* par paquet parce que celui ci apporte un débit moyen proche du débit maximal offert par l’algorithme (A) seul et le nombre moyen de bits sur la voie de retour est inférieur à celui qui est nécessaire pour les algorithmes (A) seul et (A) avec la méthode *On-Off* par porteuse.

Signalons aussi que l’algorithme (A) avec la méthode *On-Off* par porteuse reste intéressant

Canal	Algorithme	TEB moyen	Débit moyen	Temps de calcul moyen	\bar{N}_{fb}
AR, $TEB_s = 10^{-6}$	(\mathcal{A}) seul	$6.75e^{-7}$	2094	0.041	1188
	(\mathcal{A}) avec <i>On-Off</i> porteuse	$6.75e^{-7}$	2073	0.021	2229
	(\mathcal{B}) seul, $n_c = 2$	$6.73e^{-7}$	2030	0.027	298
	(\mathcal{B}) seul, $n_c = 4$	$6.93e^{-7}$	1950	0.024	149
	(\mathcal{B}) seul, $n_c = 8$	$6.95e^{-7}$	1873	0.021	75
	(\mathcal{B}) avec <i>On-Off</i> paquet, $n_c = 2$	$6.54e^{-7}$	2003	0.0125	1202
	(\mathcal{B}) avec <i>On-Off</i> paquet, $n_c = 4$	$6.22e^{-7}$	1920	0.0083	431
	(\mathcal{B}) avec <i>On-Off</i> paquet, $n_c = 8$	$6.31e^{-7}$	1821	0.0068	190
Modèle 1 du canal $TEB_s = 10^{-3}$	(\mathcal{A}) seul	$7.45e^{-4}$	2307	0.0380	1188
	(\mathcal{A}) avec <i>On-Off</i> porteuse	$7.47e^{-4}$	2295	0.019	2096
	(\mathcal{B}) seul, $n_c = 2$	$7.53e^{-4}$	2290	0.024	298
	(\mathcal{B}) seul, $n_c = 4$	$7.64e^{-4}$	2290	0.020	149
	(\mathcal{B}) seul, $n_c = 8$	$7.51e^{-4}$	2280	0.018	75
	(\mathcal{B}) avec <i>On-Off</i> paquet, $n_c = 2$	$7.88e^{-4}$	2285	0.0084	1102
	(\mathcal{B}) avec <i>On-Off</i> paquet, $n_c = 4$	$7.81e^{-4}$	2282	0.0036	441
	(\mathcal{B}) avec <i>On-Off</i> paquet, $n_c = 8$	$7.54e^{-4}$	2281	0.0017	197

TABLEAU 4.2 – Valeurs du TEB, débit, temps de calcul et du nombre de bits sur la voie de retour des quatre algorithmes proposés, moyennées sur 2000 réalisations du RSB, $N = 512$, $p_0 = 1$ et pour le canal AR avec $TEB_s = 10^{-6}$ et le modèle 1 du canal avec $TEB_s = 10^{-3}$.

notamment à faible *RSB* puisque le temps moyen de calcul est beaucoup plus faible que celui trouvé pour l'algorithme (\mathcal{A}). En plus, à faible RSB la valeur analytique de N_{off} est grande ce qui traduit par une quantité faible d'information sur la voie de retour.

6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'optimisation conjointe de l'allocation des puissances et de la voie de retour pour une liaison OFDM. L'optimisation a été réalisée en se basant sur la maximisation du débit utile. Nous avons trouvé que la solution optimale consiste à partager uniformément la puissance entre toutes les sous-porteuses. Nous avons ensuite étudié l'allocation conjointe de la modulation et de la voie de retour. Nous avons remarqué que l'algorithme classique de l'allocation de la modulation est d'autant complexe que le nombre des sous-porteuses est grand. Afin de simplifier la complexité de cet algorithme, nous avons utilisé la méthode *On-Off* par porteuse qui permet d'écarter

quelques sous-porteuses avant d'appliquer l'algorithme sur les sous-porteuses restantes. Nous avons également proposé de regrouper les sous-porteuses en des paquets et d'utiliser la méthode *On-Off* pour écarter quelques paquets. Nous avons ensuite comparé les performances des différentes méthodes en termes de débit et de temps moyen d'exécution.

Conclusion générale

La recherche en communication numérique s'intéresse de plus en plus à l'optimisation de la longueur de la séquence d'apprentissage afin que le récepteur dispose d'une bonne estimation du canal sans dégrader significativement le débit utile de transmission. Dans [54] et [24], une solution basée sur la maximisation de la borne inférieure de la capacité du canal a été proposée pour un canal SISO sélectif en fréquence et un canal MIMO non sélectif en fréquence. Dans [8], la solution était basée sur la minimisation du rapport de l'erreur quadratique moyenne de l'estimation du canal sur le débit utile de transmission. Ces travaux n'ont pas spécifié le récepteur utilisé.

Dans ce travail, nous avons considéré le cas d'une transmission SISO sur un canal sélectif en fréquence et le cas d'une transmission MIMO sur un canal non sélectif en fréquence. Nous avons utilisé un détecteur MAP en réception pour lutter contre les interférences entre symboles dues à la sélectivité en fréquence du canal SISO et contre les interférences spatiales dues à la transmission par les antennes multiples. Nous avons commencé, dans le chapitre 2, par considérer un récepteur non itératif composé d'un détecteur MAP et d'un estimateur de canal. L'estimation du canal était basée sur la critère des moindres carrés utilisant uniquement une séquence d'apprentissage. Nous avons approximé le détecteur MAP utilisant l'estimation du canal à un détecteur MAP connaissant parfaitement le canal mais avec un certain RSB équivalent. Nous avons calculé l'expression de ce RSB équivalent. Puis, nous avons défini un RSB utile qui tient compte de la perte en termes de débit due à l'utilisation de la séquence d'apprentissage. Nous avons supposé que les puissances des symboles pilotes et des symboles de données peuvent être égales et peuvent avoir des valeurs différentes. Quand ces puissances sont égales, nous avons trouvé le nombre optimal des symboles pilotes permettant de maximiser le RSB utile. Quand ces puissances sont différentes, nous avons trouvé aussi bien le nombre optimal de symboles pilotes que l'allocation optimale des puissances. Nous avons ensuite validé nos résultats analytiques par des simulations pour les deux cas de transmission : transmission SISO sur un canal sélectif en fréquence et transmission MIMO sur un canal non sélectif en

fréquence.

Nous avons proposé dans le troisième chapitre une solution pour améliorer l'estimation du canal et limiter la perte en termes de débit utile due à l'utilisation des symboles pilotes. Cette solution consistait à utiliser, en plus des symboles pilotes, des décisions dures sur les symboles de données à la sortie du décodeur du canal. Une telle approche est généralement dite bootstrap. Nous avons appliquée cette approche pour un turbo-décodeur composé d'un détecteur MAP, un décodeur MAP et un estimateur de canal. Nous avons approximé le détecteur MAP utilisant l'estimation bootstrap du canal à un détecteur MAP connaissant parfaitement le canal mais avec un RSB équivalent que nous avons calculé comme dans le chapitre 2. Nous avons ensuite trouvé le nombre optimal de symboles pilotes permettant de maximiser le RSB utile pour les deux types de transmissions considérées dans le chapitre 2 : la transmission SISO sur un canal sélectif en fréquence et la transmission MIMO sur un canal non sélectif en fréquence.

Pour lutter contre les interférences entre symboles causées par la sélectivité des canaux, le Standard *IEEE 802.11a* a choisi d'utiliser la modulation OFDM vu que les techniques d'égalisation deviennent complexes notamment quand la longueur du canal est grande. Quand l'émetteur connaît la réponse du canal, il peut adapter l'allocation de la modulation et l'allocation des puissances pour améliorer le débit. Cependant, l'émetteur ne connaît pas généralement la réponse du canal quand le mode FDD est considéré. Nous avons alors proposé dans le chapitre 4 de ce document que le récepteur utilise une voie de retour pour informer l'émetteur sur le canal. Plus les ressources réservées à cette voie de retour sont importantes, meilleure est la qualité d'informations retournées mais ceci entraîne une chute en termes de débit. Nous avons donc proposé comme dans les deux chapitres 2 et 3 de poser des problèmes d'optimisation. Le premier consistait à optimiser conjointement l'allocation des puissances et la voie de retour. Nous avons proposé de réserver un certain nombre de canaux sur la voie de retour qui permettent d'informer l'émetteur sur l'allocation optimale des puissances. Nous avons proposé de répartir les sous-porteuses sur des paquets de même taille et que les sous-porteuses d'un même paquet émettent avec la même puissance. Nous avons trouvé qu'il suffit de répartir uniformément les puissances sur toutes les sous-porteuses pour avoir un débit maximal. Nous avons également étudié le problème de l'adaptation de la modulation. Nous avons proposé que le récepteur cherche la meilleure adaptation de la modulation qui permet d'avoir le meilleur débit en utilisant un algorithme que nous l'avons présenté dans le chapitre 4. Le récepteur renvoie ensuite les indices de la modulation à l'émetteur sur la voie de retour. Afin de limiter le débit sur la voie de retour, nous avons proposé une méthode *On-Off*

qui consiste à écarter les sous-porteuses ayant des amplitudes faibles avant d'appliquer l'algorithme de l'allocation de la modulation. Nous avons aussi proposé de répartir les sous-porteuses en des paquets et d'appliquer la méthode *On-Off* sur les paquets. Nous avons trouvé le nombre de bits minimal sur la voie de retour pour les deux méthodes : la méthode *On-Off* par porteuse et la méthode *On-Off* par paquet la méthode *On-Off* par paquet.

Nous proposons dans les études futures d'améliorer ce travail par :

- Dans le chapitre 2, nous avons considéré une transmission sur un canal SISO non sélectif en fréquence. Le canal a été supposé constant durant la transmission. Cette hypothèse était nécessaire pour trouver l'expression du RSB équivalent. Quand le canal est supposé quasi-stationnaire constant sur un bloc et peut changer indépendamment d'un bloc à l'autre, nous ne pouvons pas trouver une expression analytique du RSB équivalent. Cependant, une approximation de la probabilité d'erreur binaire peut être calculée à fort RSB. Nous proposons dans ce cas, d'étudier le problème d'optimisation de la longueur de la séquence d'apprentissage en minimisant la probabilité d'erreur binaire utile.
- Nous avons supposé dans les chapitres 2 et 3 que la variance du bruit est connu. Cependant, cette variance est estimée en pratique [55]. L'erreur de l'estimation de la variance de bruit dépend du nombre de symboles pilotes. Nous proposons alors de tenir compte de l'erreur de l'estimation de la variance du bruit lors de l'optimisation de la longueur de la séquence d'apprentissage.
- Dans ces deux chapitres (2 et 3), nous avons placé les symboles pilotes au début des blocs. Ce placement peut ne pas être optimal [1]. Ainsi, l'optimisation conjointe du nombre de symboles pilotes et l'emplacement de ces symboles dans le bloc pourrait être étudiée.
- Dans le troisième chapitre, l'estimateur bootstrap utilise δT décisions dures sur les symboles de données en plus de la séquence d'apprentissage. Nous avons choisi d'utiliser les δT décisions situées justes après les symboles pilotes sur chaque bloc indépendamment de leurs fiabilités. Cependant, quand ces décisions ne sont pas fiables, la qualité de l'estimation du canal se dégrade. Nous proposons donc que les travaux futurs sélectionnent bien les symboles fiables qui vont être rajouter à la séquence d'apprentissage [46].
- Dans le chapitre 3 également, nous avons trouvé que le problème d'optimisation conjointe de la longueur de la séquence d'apprentissage et de l'allocation des puissances donne des résultats contradictoire quand un turbo-détecteur est utilisé. En effet, nous avons trouvé que lorsque les décisions sur les symboles codés en provenance du décodeur sont fiables,

la puissance des symboles pilotes est très petite ($\sigma_p^{*2} \simeq 0$) et la valeur de la longueur de la séquence d'apprentissage T_p^* est minimale, ce qui ne peut pas être le cas vu que la première estimation du canal est très mauvaise et le décodeur fournit à son tour des décisions très peu fiables. Nous proposons de trouver analytiquement la valeur minimale de σ_p^2 permettant d'avoir des décisions fiables fournies par le décodeur.

- Dans le quatrième chapitre, nous avons considéré les problèmes de l'optimisation conjointe de l'allocation de puissances ou de la modulation et de la voie de retour pour une transmission sur un canal OFDM. Nous avons supposé que le canal est connu par le récepteur. En pratique, le canal doit être estimé en utilisant des symboles pilotes [4, 53]. Il serait donc intéressant d'étudier le problème de l'optimisation conjointe du nombre de symboles pilotes et de la voie de retour.

Annexe A

Preuves des résultats du Chapitre 2

1 Optimisation conjointe de la longueur de la séquence d'apprentissage et de l'allocation des puissances : Cas mono-antenne

Soient $\{t, \alpha\} \in [2L - 1, +\infty[\times]0, 1[$ et

$$f_1(t, \alpha) = \frac{\alpha \sigma_t^2 d_{min}^2}{4\sigma^2} \left(1 + \frac{\alpha t L}{(1 - \alpha)(T - t)(t - L + 1)} \right)^{-1}.$$

Ainsi, $RSB_{eq,u} = f_1(T_p, \alpha)$.

Considérons maintenant le problème d'optimisation suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \max f_1(t, \alpha) \\ \text{s.c.} \\ 2L - 1 \leq t \leq T \\ 0 < \alpha < 1 \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

Puisque les contraintes sont indépendantes (chaque contrainte dépend uniquement de α ou de t), il est possible de commencer par maximiser la fonction objective selon α puis selon t . Le problème (A.1) est alors équivalent à deux sous-problèmes [7, p133]

$$\alpha^*(t) = \arg \max_{\alpha \in \mathbf{R}} \{f_1(t, \alpha), 0 < \alpha < 1\} \quad (\text{A.2})$$

et

$$t^* = \arg \max_{t \in \mathbf{N}} \{f_1(t, \alpha^*(t)), 2L - 1 \leq t \leq T\} \quad (\text{A.3})$$

Puisque, $\frac{\partial^2 f_1}{\partial \alpha^2} < 0$, f_1 est concave en fonction de α , pour une valeur donnée de t . Ainsi, quand t est fixée, f_1 possède un maximum unique atteint en $\alpha = \alpha^*(t)$ tel que

$$\alpha^*(t) = \frac{A(t) - \sqrt{A(t)Lt}}{A(t) - Lt} \quad (\text{A.4})$$

où $A(t) = (T - t)(t - L + 1)$. Notons que $0 < \alpha^*(t) < 1$.

Ainsi, pour une valeur donnée de T_p , le RSB utile est maximisé pour une valeur de la puissance pilote $\sigma_p^2 = \sigma_p^{*2}(T_p)$ donnée par

$$\begin{aligned} \sigma_p^{*2}(T_p) &= (1 - \alpha^*(T_p)) \frac{\sigma_t^2 T}{T_p} \\ &= \frac{\sigma_t^2 T (-LT_p + \sqrt{A(T_p)LT_p})}{T_p(A(T_p) - LT_p)} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

De même, pour une valeur donnée de T_p , le RSB utile est maximisé pour une valeur de la puissance de données $\sigma_d^2 = \sigma_d^{*2}(T_p)$ donnée par

$$\begin{aligned} \sigma_d^{*2}(T_p) &= \alpha^*(T_p) \frac{\sigma_t^2 T}{T - T_p} \\ &= \frac{\sigma_t^2 T (A(T_p) - \sqrt{A(T_p)LT_p})}{(T - T_p)(A(T_p) - LT_p)} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

La solution de (A.1) est

$$(T_p^*, \alpha^*) = \left(\arg \max_{2L-1 \leq m \leq T} f_1(m, \alpha^*(m)), \alpha^*(T_p^*) \right) \quad (\text{A.7})$$

où m est un entier.

Soit $t \in [2L - 1, +\infty[$ et

$$F_1(t) = f_1(t, \alpha^*(t)) = \frac{\sigma_t^2 d_{min}^2}{4\sigma^2} \frac{A(t)}{\sqrt{A(t)Lt} + Lt} \quad (\text{A.8})$$

Puisque $F_1''(t) < 0$, pour $t \in [2L - 1, +\infty[$, F_1 est concave. Ainsi, F_1 possède un maximum unique atteint en $t = t^* \in [2L - 1, +\infty[$. En calculant la dérivée de F_1 , nous en déduisons que F_1 est maximale pour $t^* = \sqrt{TL - T}$. En supposant que $T \geq \frac{(2L-1)^2}{L-1}$, on obtient $t^* \geq 2L - 1$.

Soit (T_1, α_1) la solution de (2.18). Supposons que $T_1 \notin \{\lfloor t^* \rfloor, \lceil t^* \rceil\}$. Ainsi, nous définissons les deux cas possibles suivants : $T_1 < \lfloor t^* \rfloor = t_1$ ou $T_1 > \lceil t^* \rceil = t_2$.

Puisque $\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}(t, \alpha) < 0$, f_1 est concave en fonction de t pour une valeur fixée de α .

- Si $T_1 < t_1 < t_2$, nous avons $f_1(T_1, \alpha_1) \geq f_1(t_1, \alpha_1) \geq f_1(t_2, \alpha_1)$. Donc, $\frac{f_1(t_2, \alpha_1) - f_1(T_1, \alpha_1)}{t_2 - T_1} < \frac{f_1(t_2, \alpha_1) - f_1(t_1, \alpha_1)}{t_2 - t_1}$. D'autre part, $f_1(t, \alpha)$ est concave en fonction de t pour une valeur donnée de α . Ainsi, $\frac{f_1(t_2, \alpha_1) - f_1(T_1, \alpha_1)}{t_2 - T_1} \geq \frac{f_1(t_2, \alpha_1) - f_1(t_1, \alpha_1)}{t_2 - t_1}$ ce qui est impossible.

- Si $T_1 > t_2 > t^*$, $f_1(t^*, \alpha^*) \geq f_1(t_2, \alpha^*) \geq f_1(T_1, \alpha^*)$. Alors, $\frac{f_1(T_1, \alpha^*) - f_1(t^*, \alpha^*)}{T_1 - t^*} < \frac{f_1(T_1, \alpha^*) - f_1(t_2, \alpha^*)}{T_1 - t_2}$. D'autre part, $f_1(t, \alpha)$ est concave en t pour une valeur donnée de α . Alors, $\frac{f_1(T_1, \alpha^*) - f_1(t^*, \alpha^*)}{T_1 - t^*} \geq \frac{f_1(T_1, \alpha^*) - f_1(t_2, \alpha^*)}{T_1 - t_2}$ ce qui est impossible.

Par suite, la longueur de la séquence d'apprentissage maximisant le rapport signal à bruit utile est dans ce cas donnée par

$$r_3^* = \arg \max_{t \in \{\lfloor t^* \rfloor, \lceil t^* \rceil\}} f_1(t, \alpha^*(t)).$$

Si maintenant $T < \frac{(2L-1)^2}{L-1}$, alors $t^* < 2L - 1$. Puisque F_1 est concave, alors $T_p^* = 2L - 1$.

En conclusion,

$$T_p^* = (r_3^* - 2L + 1)^+ + 2L - 1. \quad (\text{A.9})$$

2 Calcul du RSB équivalent pour un canal MIMO non sélectif en fréquence quand un estimateur MC est utilisé

Dans ce paragraphe, nous donnons la démonstration de l'équation (2.39). La preuve ci-dessous est donnée dans le cas général où σ_p^2 et σ_d^2 sont différentes.

Le signal reçu sur les n_R antennes réceptrices à l'instant k , pour $T_p \leq k \leq T - 1$ est donné par :

$$\underline{y}_k = \sigma_d H \underline{x}_k + \underline{n}_k, \quad (\text{A.10})$$

où H est la matrice du canal de dimensions $n_R \times n_E$, $\underline{x}_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_k^{(n_E)})^T$ est le vecteur transmis à l'instant k et $\underline{n}_k = (n_k^{(1)}, n_k^{(2)}, \dots, n_k^{(n_R)})^T$ sont des échantillons iid d'un bruit réel blanc gaussien suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

En réception, le canal est estimé. Soit \hat{H} l'estimée de H .

En utilisant \widehat{H} au lieu de H , la probabilité *a posteriori* de la séquence \underline{x}_k est donnée par

$$p(\underline{x}_k | \underline{y}_k, \widehat{H}) \propto \exp\left(-\frac{\|\underline{y}_k - \sigma_d \widehat{H} \underline{x}_k\|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{A.11})$$

L'estimée de \underline{x}_k selon le critère MAP est donnée par

$$\widehat{\underline{x}}_k = \arg \min_{\underline{u}} \left(\|\underline{y}_k - \sigma_d \widehat{H} \underline{u}\|^2 : \underline{u} \in \mathcal{A}^{n_E} \right) \quad (\text{A.12})$$

Notre objectif est de calculer la probabilité P_{ξ_k} de l'événement d'erreur $\xi_k : \widehat{\underline{x}}_k \neq \underline{x}_k$.

L'événement d'erreur ξ_k est équivalent à l'événement

$$\|\underline{y}_k - \sigma_d \widehat{H} \widehat{\underline{x}}_k\|^2 \leq \|\underline{y}_k - \sigma_d \widehat{H} \underline{x}_k\|^2 \quad (\text{A.13})$$

Soit $\underline{e}_k = \widehat{\underline{x}}_k - \underline{x}_k$ le vecteur d'erreurs. Ainsi, (A.13) est équivalente à

$$\sigma_d \|\widehat{H} \underline{e}_k\|^2 \leq 2 \left(\underline{e}_k^T \widehat{H}^T (\underline{y}_k - \sigma_d \widehat{H} \underline{x}_k) \right) \quad (\text{A.14})$$

Soit $\Delta H = \widehat{H} - H$. L'expression (A.14) est alors équivalente à

$$\sigma_d \|\widehat{H} \underline{e}_k\|^2 \leq 2 \left(\underline{e}_k^T \widehat{H}^T \underline{n}_k - \sigma_d \underline{e}_k^T \widehat{H}^T \Delta H \underline{x}_k \right) \quad (\text{A.15})$$

Comme dans [45], nous pouvons montrer que $\widehat{H} \underline{e}_k$ converge vers $H \underline{e}_k$ en moyenne quadratique quand T_p tend vers l'infini.

Soit m le nombre d'erreurs dans \underline{e}_k (composantes non nulles) et $\underline{\varepsilon}_k = H \underline{e}_k$. Ainsi, nous obtenons

$$\sigma_d \|\underline{\varepsilon}_k\|^2 \leq 2 \left(\underline{e}_k^T \widehat{H}^T \underline{n}_k - \sigma_d \underline{e}_k^T \widehat{H}^T \Delta H \underline{x}_k \right) \quad (\text{A.16})$$

Soient le vecteur des coefficients du canal $\underline{h} = (h_{11}, \dots, h_{1n_E}, \dots, h_{n_R1}, \dots, h_{n_R n_E})^T$ et son estimée $\widehat{\underline{h}} = (\widehat{h}_{11}, \dots, \widehat{h}_{1n_E}, \dots, \widehat{h}_{n_R1}, \dots, \widehat{h}_{n_R n_E})^T$. Soit $\Delta \underline{h} = \underline{h} - \widehat{\underline{h}}$. L'estimée du canal est non biaisée quand un estimateur MC est utilisé (voir (2.33)). Ainsi, $\Delta \underline{h} \sim \mathcal{N}(0, \mathcal{C})$ où \mathcal{C} est la matrice de covariance de $\Delta \underline{h}$. Soit $H(\underline{x}_k)$ la matrice de dimensions $(n_R \times n_R n_E)$ ayant comme $p^{\text{ème}}$ ligne $(\mathbf{0}_{1 \times (p-1)n_E}, \underline{x}_k^T, \mathbf{0}_{1 \times (n_R-p)n_E})$, pour $1 \leq p \leq n_R$, où $\mathbf{0}_{a \times b}$ est une matrice de dimensions $a \times b$ ne contenant que des zéros. Ainsi, $H(\underline{x}_k) \Delta \underline{h} = \Delta H \underline{x}_k$. Nous définissons $\mathcal{C}(\underline{x}_k) = H(\underline{x}_k) \mathcal{C} H(\underline{x}_k)^T$. Alors,

$$\sigma_d^2 \|\underline{\varepsilon}_k\|^2 \leq \chi_s \quad (\text{A.17})$$

où $\chi_s \sim \mathcal{N}(0, \Delta_s)$ avec

$$\begin{aligned}\Delta_s &= 4\mathbf{e}_k^T H^T E(\mathbf{n}_k \mathbf{n}_k^T) H \mathbf{e}_k + 4\sigma_d^4 \mathbf{\varepsilon}_k^T \mathcal{C}(\mathbf{x}_k) \mathbf{\varepsilon}_k \\ &= 4\sigma^2 \|H \mathbf{e}_k\|^2 + 4\sigma_d^4 \mathbf{\varepsilon}_k^T \mathcal{C}(\mathbf{x}_k) \mathbf{\varepsilon}_k \\ &= 4\sigma^2 \sigma_d^2 \|\mathbf{\varepsilon}_k\|^2 + 4\sigma_d^4 \mathbf{\varepsilon}_k^T \mathcal{C}(\mathbf{x}_k) \mathbf{\varepsilon}_k\end{aligned}\tag{A.18}$$

Finalement,

$$\Delta_s = 4\sigma^2 \sigma_d^2 \|\mathbf{\varepsilon}_k\|^2 \left(1 + \frac{\sigma_d^2 \mathbf{\varepsilon}_k^T \mathcal{C}(\mathbf{x}_k) \mathbf{\varepsilon}_k}{\sigma^2 \|\mathbf{\varepsilon}_k\|^2}\right).\tag{A.19}$$

Quand l'estimation du canal est basée sur le critère MC et que les séquences d'apprentissage ont des propriétés idéales d'autocorrélation et d'intercorrélacion, \mathcal{C} est une matrice diagonale (voir (2.33)), nous obtenons alors

$$\mathbf{\varepsilon}_k^T \mathcal{C}(\mathbf{x}_k) \mathbf{\varepsilon}_k = \frac{n_E \sigma^2 \|\mathbf{\varepsilon}_k\|^2}{T_p \sigma_p^2}.\tag{A.20}$$

Ainsi, en utilisant (A.17), la probabilité d'erreur est donnée par

$$P_{\xi_k} = Q\left(\frac{\sigma_d \|\mathbf{\varepsilon}_k\|}{2\sigma} \left(1 + \frac{\sigma_d^2 n_E}{T_p \sigma_p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\tag{A.21}$$

A fort RSB, nous supposons que les erreurs se produisent rarement et que $m = 1$. Ainsi, $\|\mathbf{\varepsilon}_k\|^2 = 4$. La probabilité d'erreur P_{ξ_k} est alors donnée par

$$P_{\xi_k} = Q\left(\frac{\sigma_d}{\sigma} \left(1 + \frac{\sigma_d^2 n_E}{T_p \sigma_p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\tag{A.22}$$

Quand le canal est connu, la probabilité de l'évènement d'erreur ξ_k , $P_{\xi_k, p}$, est donnée par

$$P_{\xi_k, p} = Q\left(\frac{\sigma_d}{\sigma}\right)\tag{A.23}$$

Ainsi, l'expression de la probabilité d'erreur donnée par (A.22) quand le canal est estimé peut être vu comme celle donnée par (A.23) quand le canal est parfaitement connu mais avec un RSB équivalent

$$RSB_{eq}^{MIMO} = \frac{\sigma_d^2}{\sigma^2} \left(1 + \frac{\sigma_d^2 n_E}{T_p \sigma_p^2}\right)^{-1}\tag{A.24}$$

3 Optimisation conjointe de la longueur de la séquence d'apprentissage et de l'allocation des puissances : Cas multi-antennes

Soient $\{t, \alpha\} \in [n_E, +\infty[\times]0, 1[$ et $g(t, \alpha) = \frac{\sigma_t^2(T-t)\alpha(1-\alpha)}{(1-\alpha)(T-t)+n_E\alpha}$. Ainsi, $RSB_{u,eq} = g(T_p, \alpha)$. Nous considérons maintenant le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max g(t, \alpha) \\ \text{s.c.} \\ n_E \leq t \leq T, 0 < \alpha < 1 \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

Puisque les contraintes sont indépendantes (chaque contrainte dépend uniquement de α ou de t), il est possible de commencer par maximiser la fonction objective selon α puis selon t . Le problème (A.25) est alors équivalent à deux sous-problèmes [7, p133]

$$\alpha^*(t) = \arg \max_{\alpha \in \mathbf{R}} \{g(t, \alpha), 0 < \alpha < 1\} \quad (\text{A.26})$$

et

$$t^* = \arg \max_{t \in \mathbf{N}} \{g(t, \alpha^*(t)), n_E \leq t \leq T\} \quad (\text{A.27})$$

Nous commençons par considérer le sous problème (A.26). Pour une valeur fixée de $t \neq T - n_E$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2} < 0$. Ainsi, g est concave en fonction de α . Quand t est fixée, g possède donc un maximum unique atteint pour $\alpha = \alpha^*(t)$ tel que

$$\alpha^*(t) = \frac{(T-t) - \sqrt{n_E(T-t)}}{T-t-n_E} \quad (\text{A.28})$$

Ainsi, pour une valeur donnée de $T_p \neq T - n_E$, le RSB utile est maximisé pour une valeur de la puissance pilote $\sigma_p^2 = \sigma_p^{*2}(T_p)$ donnée par

$$\begin{aligned} \sigma_p^{*2}(T_p) &= (1 - \alpha^*(T_p)) \frac{\sigma_t^2 T}{T_p} \\ &= \frac{\sigma_t^2 T (-n_E + \sqrt{n_E(T-T_p)})}{T_p(T-T_p-n_E)} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Notons que lorsque $t = T - n_E$, $\alpha^*(t) = \frac{1}{2}$ et $\sigma_p^{*2}(T_p = T - n_E) = \frac{\sigma_t^2 T}{2(T-n_E)}$.

En se basant sur (A.28), nous notons que $0.5 < \alpha^*(t) < 1$ quand $n_E \leq t \leq T - n_E - 1$ et $0 < \alpha^*(t) < 0.5$ quand $T - n_E + 1 \leq t \leq T - 1$. Cette remarque sera utile dans la suite

de la preuve.

Nous voulons maintenant résoudre le problème d'optimisation combinatoire donnée par (A.27). Pour se faire, nous séparons l'intervalle $[n_E, T]$ en trois sous-intervalles et nous analysons la fonction objective $g(t, \alpha^*(t))$ sur ces sous-intervalles. Nous considérons les deux cas où $T \neq 2n_E$ et $T = 2n_E$.

1. Quand $T \neq 2n_E$

Supposons que $T > 2n_E$. Soit $M = \max_{T_p, \alpha} RSB_{u,eq}$. En utilisant l'optimisation combinatoire, $M = \max\{m_1, m_2, m_3\}$ où

$$\begin{aligned} m_1 &= \max_{n_E \leq q \leq T-n_E-1} g(q, \alpha^*(q)), q \in \mathbf{N} \\ m_2 &= \max_{T_p=T-n_E, \alpha} g(T_p, \alpha) \\ m_3 &= \max_{T-n_E+1 \leq q \leq T-1} g(q, \alpha^*(q)), q \in \mathbf{N} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Soit $t \in [n_E, T - n_E - 1]$ et $G(t) = g(t, \alpha^*(t))$. Puisque $G'(t) < 0$, G est une fonction décroissante et elle est maximale pour $t = n_E$. Ainsi, $m_1 = g(n_E, \alpha^*(n_E))$. D'autre part, $m_2 = \max_{\alpha} g(T - n_E, \alpha) = g(T - n_E, \frac{1}{2}) = \frac{\sigma_t^2}{4}$. Soit maintenant $f_t(\alpha) = g(t, \alpha) - \frac{\sigma_t^2}{4}$. Pour $t = n_E$, $f_t(\alpha) > 0$ pour tout $0.5 < \alpha < 1$. Puisque $\alpha^*(n_E) \in]0.5, 1[$, alors $m_1 > \frac{\sigma_t^2}{4} = m_2$. De la même manière, nous prouvons que $m_3 = g(T - n_E + 1, \alpha^*(T - n_E + 1))$ et $m_3 < m_2$. Ainsi, $m_1 > m_2 > m_3$ et la solution de (2.45) est donnée par

$$\begin{aligned} T_p^* &= n_E \\ \sigma_p^{*2} &= \frac{\sigma_t^2 T (1 - \alpha^*(n_E))}{n_E} = \frac{\sigma_t^2 T (-n_E + \sqrt{(T - n_E)n_E})}{n_E (T - 2n_E)} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Maintenant, quand $n_E < T \leq 2n_E$, $M = m'_3$ où

$$m'_3 = \max_{n_E \leq m \leq T-1} g(m, \alpha^*(m)), m \in \mathbf{N} \quad (\text{A.32})$$

On peut facilement voir que $m'_3 = g(n_E, \alpha^*(n_E))$. Ainsi

$$\begin{aligned} T_p^* &= n_E \\ \sigma_p^{*2} &= \frac{\sigma_t^2 T (1 - \alpha^*(n_E))}{n_E} = \frac{\sigma_t^2 T (-n_E + \sqrt{(T - n_E)n_E})}{n_E (T - 2n_E)} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

2. Quand $T = 2n_E$

Dans ce cas, $M = \max\{m_2, m_3\}$ où

$$\begin{aligned} m_2 &= \max_{T_p=T-n_E, \alpha} g(T_p, \alpha) \\ m_3 &= \max_{T-n_E+1 \leq m \leq T-1} g(m, \alpha^*(m)), m \in \mathbf{N} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

De la même manière que dans le premier cas, nous prouvons que $m_2 > m_3$. Ainsi

$$\begin{aligned} T_p^* &= T - n_E = n_E \\ \sigma_p^{*2} &= \frac{\sigma_t^2 T}{2(T - n_E)} = \sigma_t^2 \end{aligned} \tag{A.35}$$

Annexe B

Calcul de l'EQM de l'estimation du canal et du RSB équivalent quand un estimateur bootstrap est utilisé

1 EQM de l'estimation du canal

Nous donnons ici la démonstration de l'équation (3.32) pour le cas général, c'est-à-dire quand les puissances des symboles pilotes et celles des symboles de données peuvent avoir des valeurs différentes. Le cas particulier des puissances égales se déduit facilement en attribuant à σ_p^2 et σ_d^2 la valeur 1.

Soit $\underline{x}^{(i)} = \left(x_0^{(i)}, \dots, x_{T_p+\delta T-1}^{(i)} \right)^T$ la sequence transmise par la $i^{\text{ème}}$ antenne émettrice contenant les T_p symboles pilotes $x_k^{(i)}$, pour $0 \leq k \leq T_p - 1$, et les δT symboles de données $x_k^{(i)}$, pour $T_p \leq k \leq T_p + \delta T - 1$. Le vecteur correspondant à la $j^{\text{ème}}$ antenne réceptrice $\underline{\tilde{y}}^{(j)} = \left(y_0^{(j)}, y_1^{(j)}, \dots, y_{T_p+\delta T-1}^{(j)} \right)^T$, est donné par

$$\underline{\tilde{y}}^{(j)} = X_b^M \underline{h}^{(j)} + \underline{\tilde{n}}^{(j)} \quad (\text{B.1})$$

où $\underline{h}^{(j)} = (h_{j1}, h_{j2}, \dots, h_{jn_E})^T$, $\underline{n}^{(j)} = \left(n_0^{(j)}, n_1^{(j)}, \dots, n_{T_p+\delta T-1}^{(j)} \right)^T$ et X_b^M est une matrice de dimensions $(T_p+\delta T) \times n_E$ ayant comme $k^{\text{ème}}$ colonne $\left(\sigma_p x_0^{(k)}, \dots, \sigma_p x_{T_p-1}^{(k)}, \sigma_d x_{T_p}^{(k)}, \dots, \sigma_d x_{T_p+\delta T-1}^{(k)} \right)^T$, pour $1 \leq k \leq n_E$.

Afin d'estimer le canal, le vecteur d'observation $\underline{\tilde{y}}^{(j)}$ est approximé comme suit :

$$\underline{\tilde{y}}^{(j)} \approx \widehat{X}_b^M \underline{h}^{(j)} + \underline{\tilde{n}}^{(j)} \quad (\text{B.2})$$

où \widehat{X}_b^M est la version estimée de X_b^M contenant les symboles pilotes et les décisions dures sur les symboles codés à la sortie du décodeur. L'estimation aux moindres carrés $\widehat{\underline{h}}^{(j)} = \left(\widehat{h}_{j1}, \dots, \widehat{h}_{jn_E}\right)^T$ de $\underline{h}^{(j)}$ est alors donnée par

$$\widehat{\underline{h}}^{(j)} = \left(\widehat{X}_b^{M^T} \widehat{X}_b^M\right)^{-1} \widehat{X}_b^{M^T} \underline{\widehat{y}}^{(j)}. \quad (\text{B.3})$$

La matrice \widehat{X}_b^M peut être réécrite comme

$$\widehat{X}_b^M = X_b^M + \delta X \quad (\text{B.4})$$

où $\delta X_{ij} \in \{-2\sigma_d, 0, 2\sigma_d\}$ pour $0 \leq i \leq T_p + \delta T - 1$ et $1 \leq j \leq n_E$.

Sous l'hypothèse que $\delta T \gg 1$, nous supposons que $X_b^{M^T} X_b^M \simeq (T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2) I_{n_E}$ et $\widehat{X}_b^{M^T} \widehat{X}_b^M \simeq (T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_p^2) I_{n_E}$. L'estimée du canal peut s'écrire alors comme

$$\begin{aligned} \widehat{\underline{h}}^{(j)} &= \frac{1}{T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2} \left(X_b^{M^T} + \delta X^T \right) \left(X_b^M \underline{h}^{(j)} + \widetilde{\underline{n}}^{(j)} \right) \\ &= \underline{h}^{(j)} + \frac{1}{T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2} \left(X_b^{M^T} \widetilde{\underline{n}}^{(j)} + \delta X^T X_b^M \underline{h}^{(j)} + \delta X^T \widetilde{\underline{n}}^{(j)} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \delta \underline{h}^{(j)} &= \widehat{\underline{h}}^{(j)} - \underline{h}^{(j)} \\ &= \frac{1}{T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2} (M_1 + M_2 + M_3) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

où $M_1 = X_b^{M^T} \widetilde{\underline{n}}^{(j)}$, $M_2 = \delta X^T X_b^M \underline{h}^{(j)}$ et $M_3 = \delta X^T \widetilde{\underline{n}}^{(j)}$. L'EQM de l'estimation du canal par antenne réceptrice est alors donnée par

$$\begin{aligned} E \left(\|\delta \underline{h}^{(j)}\|^2 \right) &= E \left[\text{Tr}(\delta \underline{h}^{(j)} \delta \underline{h}^{(j)T}) \right] \\ &= \text{Tr} \left(E \left[\delta \underline{h}^{(j)} \delta \underline{h}^{(j)T} \right] \right) \\ &= \frac{1}{(T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2)^2} \left[\text{Tr}(E[M_1 M_1^T]) + \text{Tr}(E[M_1 M_3^T]) \right] + (E[M_2 M_2^T]) + \text{Tr}(E[M_3 M_1^T]) + \text{Tr}(E[M_3 M_3^T]) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Il est facile d'écrire que

$$E[M_1 M_1^T] = \frac{\sigma^2}{T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2} I_{n_E} \quad (\text{B.8})$$

$$E[M_1 M_3^T] = \frac{-2\sigma^2 \sigma_d^2 E(n)}{n_E (T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2)^2} I_{n_E} \quad (\text{B.9})$$

$$E[M_3 M_1^T] = \frac{-2\sigma^2 \sigma_d^2 E(n)}{n_E (T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2)^2} I_{n_E} \quad (\text{B.10})$$

$$E[M_3 M_3^T] = \frac{4\sigma^2 \sigma_d^2 E(n)}{n_E (T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2)^2} I_{n_E} \quad (\text{B.11})$$

où n est le nombre d'erreurs dans les $n_E \delta T$ décisions dures sur les symboles codés en provenance du décodeur.

Ainsi,

$$E \left(\|\delta \underline{h}^{(j)}\|^2 \right) = \frac{\sigma^2 n_E}{T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2} + \frac{1}{(T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2)^2} \text{Tr} \left(E[M_2 M_2^T] \right). \quad (\text{B.12})$$

Afin d'évaluer le terme $\text{Tr} \left(E[M_2 M_2^T] \right)$, nous supposons que les coefficients de $\underline{h}^{(j)}$ sont décorrélés. Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(E[M_2 M_2^T] \right) &= E \left[\text{Tr} \left(\delta X^T X_b^M D_h X_b^{M^T} \delta X \right) \right] \\ &= E \left[\text{Tr} \left(\sum_{i=1}^{n_E} E_i \underline{u}_i \underline{u}_i^T \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n_E} E_i E \left[\|\underline{u}_i\|^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

où $D_h = \underline{h}^{(j)} \underline{h}^{(j)T}$, $E_i = E(|h_i|^2)$ pour $1 \leq i \leq n_E$ et les vecteurs $\underline{u}_{i, 1 \leq i \leq n_E}$ sont définis par $\delta X^T X_b^M \equiv [\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{n_E}]$.

Le terme $E \left[\|\underline{u}_j\|^2 \right]$ peut s'écrire comme [32]

$$E \left[\|\underline{u}_i\|^2 \right] = \frac{4\sigma_d^4}{n_E^2} E(n^2) + 4\overline{\beta}_M \sigma_d^4 \sum_{k=1, k \neq i}^{n_E} \delta T - |k - i| \quad (\text{B.14})$$

où $\overline{\beta}_M = \frac{1}{n_E \delta T} E(n)$.

Ainsi,

$$\text{Tr} \left(E[M_2 M_2^T] \right) = 4E \left[\|\underline{h}\|^2 \right] \left(\frac{\sigma_d^4}{n_E^2} E(n^2) + \overline{\beta}_M \sigma_d^4 (n_E - 1) \delta T - S \right) \quad (\text{B.15})$$

où $S = \overline{\beta_M} \sigma_d^4 \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_E} i E_i}{\sum_{i=1}^{n_E} E_i} - (n_E - 1) \frac{\sum_{i=1}^{n_E} i^2 E_i}{\sum_{i=1}^{n_E} E_i} + \frac{(n_E - 1)n_E}{2} \right)$.

Puisque $\delta T \gg n_E$, alors $S \ll \left(\frac{1}{n_E} E(n^2) + (n_E - 1) \delta T \overline{\beta_M} \right)$. De plus, $E \left[\|\underline{h}^{(j)}\|^2 \right] = 1$, nous avons alors

$$\text{Tr} \left(E[M_2 M_2^T] \right) = 4\sigma_d^4 \left(\frac{1}{n_E^2} E(n^2) + \overline{\beta_M} (n_E - 1) \delta T \right). \quad (\text{B.16})$$

$$E \left(\|\delta \underline{h}^{(j)}\|^2 \right) = \frac{\sigma^2 n_E}{T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2} + \frac{\sigma_d^4 \left(\overline{\beta_M^2} \delta T^2 + (n_E - 1) \overline{\beta_M} \delta T \right)}{(T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2)^2} \quad (\text{B.17})$$

où $\overline{\beta_M^2} = \frac{1}{n_E^2 \delta T^2} E(n^2)$.

2 Calcul du RSB équivalent

Dans ce paragraphe, nous donnons la démonstration de l'équation (3.34). La preuve ci-dessous est donnée dans le cas général où σ_p^2 et σ_d^2 sont différentes.

Le signal reçu sur les n_R antennes réceptrices à l'instant k , pour $T_p \leq k \leq T - 1$ est donné par :

$$\underline{y}_k = \sigma_d H \underline{x}_k + \underline{n}_k, \quad (\text{B.18})$$

où H est la matrice du canal de dimensions $n_R \times n_E$, $\underline{x}_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_k^{(n_E)})^T$ est le vecteur transmis à l'instant k et $\underline{n}_k = (n_k^{(1)}, n_k^{(2)}, \dots, n_k^{(n_R)})^T$ sont des échantillons iid d'un bruit réel blanc gaussien suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Nous supposons que les observations *a priori* à l'entrée du détecteur MAP sont modélisées comme des sorties d'un canal BABG de moyenne nulle et de variance σ_a^2 . Ces observations *a priori* sont les suivantes :

$$z_k^{(i)} = x_k^{(i)} + w_k^{(i)} \quad (\text{B.19})$$

où $w_k^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_a^2)$ et $1 \leq i \leq n_E$.

En réception, le canal est estimé en se basant sur la technique bootstrap. Soit \hat{H} l'estimée de H . En tenant compte des informations *a priori* et en utilisant \hat{H} au lieu de H , la probabilité *a posteriori* de la séquence \underline{x}_k est donnée par

$$p \left(\underline{x}_k | \underline{y}_k, \underline{z}_k, \hat{H} \right) \propto \exp \left(- \frac{\|\underline{y}_k - \sigma_d \hat{H} \underline{x}_k\|^2}{2\sigma^2} \right) \exp \left(- \frac{\|\underline{z}_k - \underline{x}_k\|^2}{2\sigma_a^2} \right) \quad (\text{B.20})$$

où $\underline{z}_k = \left(z_k^{(1)}, \dots, z_k^{(n_E)} \right)^T$.

L'estimée de \underline{x}_k selon le critère MAP est donnée par

$$\hat{\underline{x}}_k = \arg \min_{\underline{u}} \left(\left\| \underline{y}_k - \sigma_d \hat{H} \underline{u} \right\|^2 + \frac{\sigma^2}{\sigma_a^2} \left\| \underline{z}_k - \underline{u} \right\|^2 : \underline{u} \in \mathcal{A}^{n_E} \right) \quad (\text{B.21})$$

Soient $\nu = \frac{\sigma}{\sigma_a}$, $M = (\sigma_d H^T, \nu I_{n_E})^T$ une matrice de dimensions $(n_E + n_R) \times n_E$, $\underline{r}_k = \left(y_k^{(1)}, \dots, y_k^{(n_R)}, \nu z_k^{(1)}, \dots, \nu z_k^{(n_E)} \right)^T$ et $\underline{b}_k = \left(n_k^{(1)}, \dots, n_k^{(n_R)}, \nu w_k^{(1)}, \dots, \nu w_k^{(n_E)} \right)^T$.

En utilisant (B.18) and (B.19), nous pouvons écrire

$$\underline{r}_k = M \underline{x}_k + \underline{b}_k. \quad (\text{B.22})$$

L'estimée des données selon le critère MAP est donnée par

$$\hat{\underline{x}}_k = \arg \min_{\underline{u}} \left(\left\| \underline{r}_k - \hat{M} \underline{u} \right\|^2 : \underline{u} \in \mathcal{A}^{n_E} \right) \quad (\text{B.23})$$

où $\hat{M} = (\sigma_d \hat{H}^T, \nu I_{n_E})^T$.

Notre objectif est de calculer la probabilité P_{ξ_k} de l'événement d'erreur $\xi_k : \hat{\underline{x}}_k \neq \underline{x}_k$.

L'événement d'erreur ξ_k est équivalent à l'événement

$$\left\| \underline{r}_k - \hat{M} \hat{\underline{x}}_k \right\|^2 \leq \left\| \underline{r}_k - \hat{M} \underline{x}_k \right\|^2. \quad (\text{B.24})$$

Soit $\underline{e}_k = \hat{\underline{x}}_k - \underline{x}_k$ le vecteur d'erreurs. Ainsi, (B.24) est équivalente à

$$\left\| \hat{M} \underline{e}_k \right\|^2 \leq 2 \left(\underline{e}_k^T \hat{M}^T \left(\underline{r}_k - \hat{M} \underline{x}_k \right) \right). \quad (\text{B.25})$$

Soit $\Delta M = \hat{M} - M$. L'expression (B.25) est alors équivalente à

$$\left\| \hat{M} \underline{e}_k \right\|^2 \leq 2 \left(\underline{e}_k^T \hat{M}^T \underline{b}_k - \underline{e}_k^T \hat{M}^T \Delta M \underline{x}_k \right). \quad (\text{B.26})$$

Comme dans [45], nous pouvons montrer que $\hat{H} \underline{e}_k$ converge vers $H \underline{e}_k$ en moyenne quadratique quand T_p tend vers l'infini. Soit m le nombre d'erreurs dans \underline{e}_k (composantes non nulles), alors $\|M \underline{e}_k\|^2 = \sigma_d^2 \|\underline{\varepsilon}_k\|^2 + 4m\nu^2$, où $\underline{\varepsilon}_k = H \underline{e}_k$. Ainsi, nous obtenons

$$\sigma_d^2 \|\underline{\varepsilon}_k\|^2 + 4m\nu^2 \leq 2 \left(\underline{e}_k^T M^T \underline{b}_k - \underline{e}_k^T M^T \Delta M \underline{x}_k \right). \quad (\text{B.27})$$

Puisque le bloc inférieur de la matrice ΔM de dimensions $(n_E \times n_E)$ est nul, nous obtenons

$$\underline{e}_k^T M^T \Delta M \underline{x}_k = \sigma_d^2 \underline{\varepsilon}_k^T \Delta H \underline{x}_k \quad (\text{B.28})$$

où $\Delta H = H - \widehat{H}$.

Soient le vecteur des coefficients du canal $\underline{h} = (h_{11}, \dots, h_{1n_E}, \dots, h_{n_R 1}, \dots, h_{n_R n_E})^T$ et son estimée $\widehat{\underline{h}} = (\widehat{h}_{11}, \dots, \widehat{h}_{1n_E}, \dots, \widehat{h}_{n_R 1}, \dots, \widehat{h}_{n_R n_E})^T$. Soit $\Delta \underline{h} = \underline{h} - \widehat{\underline{h}}$. L'estimée du canal est non biaisée puisque l'espérance du canal est nulle [32]. Ainsi, $\Delta \underline{h} \sim \mathcal{N}(0, \mathcal{C})$ où \mathcal{C} est la matrice de covariance de $\Delta \underline{h}$. Soit $H(\underline{x}_k)$ la matrice de dimensions $(n_R \times n_R n_E)$ ayant comme $p^{\text{ème}}$ ligne $(\mathbf{0}_{1 \times (p-1)n_E}, \underline{x}_k^T, \mathbf{0}_{1 \times (n_R-p)n_E})$, pour $1 \leq p \leq n_R$, où $\mathbf{0}_{a \times b}$ est une matrice de dimensions $a \times b$ ne contenant que des zéros. Ainsi, $H(\underline{x}_k) \Delta \underline{h} = \Delta H \underline{x}_k$. Nous définissons $\mathcal{C}(\underline{x}_k) = H(\underline{x}_k) \mathcal{C} H(\underline{x}_k)^T$. Alors,

$$\sigma_d^2 \|\underline{\varepsilon}_k\|^2 + 4m\nu^2 \leq \chi_s \quad (\text{B.29})$$

où $\chi_s \sim \mathcal{N}(0, \Delta_s)$ avec

$$\begin{aligned} \Delta_s &= 4\underline{e}_k^T M^T E(\underline{b}_k \underline{b}_k^T) M \underline{e}_k + 4\sigma_d^4 \underline{\varepsilon}_k^T \mathcal{C}(\underline{x}_k) \underline{\varepsilon}_k \\ &= 4\sigma^2 \|M \underline{e}_k\|^2 + 4\sigma_d^4 \underline{\varepsilon}_k^T \mathcal{C}(\underline{x}_k) \underline{\varepsilon}_k \\ &= 4\sigma^2 (\sigma_d^2 \|\underline{\varepsilon}_k\|^2 + 4m\nu^2) + 4\sigma_d^4 \underline{\varepsilon}_k^T \mathcal{C}(\underline{x}_k) \underline{\varepsilon}_k \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Soit $\mu = \frac{\sigma}{\sigma_d \sigma_a}$. On a,

$$\begin{aligned} \Delta_s &= 4\sigma^2 \sigma_d^2 (\|\underline{\varepsilon}_k\|^2 + 4m\mu^2) + 4\sigma_d^4 \underline{\varepsilon}_k^T \mathcal{C}(\underline{x}_k) \underline{\varepsilon}_k \\ &= 4\sigma^2 \sigma_d^2 (\|\underline{\varepsilon}_k\|^2 + 4m\mu^2) \left(1 + \frac{\sigma_d^2}{\sigma^2} \frac{\underline{\varepsilon}_k^T \mathcal{C}(\underline{x}_k) \underline{\varepsilon}_k}{\|\underline{\varepsilon}_k\|^2 + 4m\mu^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Nous montrons dans la suite que \mathcal{C} est une matrice diagonale et que sa diagonale a la forme $(c_1, c_2, \dots, c_{n_T}, c_1, c_2, \dots, c_{n_T}, \dots, c_1, c_2, \dots, c_{n_T})^T$. Dans ce cas, nous obtenons

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}_k^T \mathcal{C}(\underline{x}_k) \underline{\varepsilon}_k &= \frac{1}{n_R} \text{tr}(\mathcal{C}) \|\underline{\varepsilon}_k\|^2 \\ &= E(\|\delta \underline{h}\|^2) \|\underline{\varepsilon}_k\|^2. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Quand un estimateur bootstrap est utilisé, l'estimée du canal $\widehat{\underline{h}}^{(j)}$ correspondant à l'antenne j est donnée par

$$\widehat{\underline{h}}^{(j)} = \left(\widehat{X}_b^{M^T} \widehat{X}_b^M \right)^{-1} \widehat{X}_b^{M^T} \underline{\widehat{y}}^{(j)}. \quad (\text{B.33})$$

Puisque la valeur de δT est supposée élevée, nous supposons que $X_b^{M^T} X_b^M \simeq \widehat{X}_b^{M^T} \widehat{X}_b^M \simeq (T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2) I_{n_E}$. Soit $\delta X = \widehat{X}_b^M - X_b^M$. L'estimée du canal peut être réécrite comme

$$\begin{aligned} \widehat{\underline{h}}^{(j)} &= \frac{1}{T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2} \left(X_b^{M^T} + \delta X^T \right) \left(X_b^M \underline{h}^{(j)} + \widetilde{\underline{n}}^{(j)} \right) \\ &= \underline{h}^{(j)} + \frac{1}{T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2} \left(X_b^{M^T} \widetilde{\underline{n}}^{(j)} + \delta X^T X_b^M \underline{h}^{(j)} + \delta X^T \widetilde{\underline{n}}^{(j)} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Ainsi,

$$E \left[(\widehat{\underline{h}}^{(j)} - \underline{h}^{(j)}) (\widehat{\underline{h}}^{(j)} - \underline{h}^{(j)})^T \right] = \frac{\sigma^2}{T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2} I_{n_E} + \frac{1}{(T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2)^2} E \left[\delta X^T X_b^M \underline{h}^{(j)} \underline{h}^{(j)T} X_b^{M^T} \delta X \right]. \quad (\text{B.35})$$

Puisque $\delta T \gg 1$, $\delta X^T X \simeq -2n\sigma_d^2 I_{n_E}$. Ainsi,

$$E \left[\delta X^T X_b^M \underline{h}^{(j)} \underline{h}^{(j)T} X_b^{M^T} \delta X \right] = 4\sigma_d^4 E[n^2] E \left[\underline{h}^{(j)} \underline{h}^{(j)T} \right]. \quad (\text{B.36})$$

où n est le nombre d'erreurs dans les $n_E \delta T$ décisions dures sur les bits codés fournies par le décodeur à l'estimateur du canal.

Ainsi, nous avons

$$E \left[(\widehat{\underline{h}}^{(j)} - \underline{h}^{(j)}) (\widehat{\underline{h}}^{(j)} - \underline{h}^{(j)})^T \right] = \frac{\sigma^2}{T_p \sigma_p^2 + \delta T \sigma_d^2} I_{n_E} + 4\sigma_d^4 E[n^2] E \left[\underline{h}^{(j)} \underline{h}^{(j)T} \right]. \quad (\text{B.37})$$

Puisque les coefficients du canal sont indépendants, la matrice $E \left[\underline{h}^{(j)} \underline{h}^{(j)T} \right]$ est diagonale. Nous supposons aussi qu'elle est indépendante de j ce qui signifie que $E(|h_{ji}|^2)$ est indépendante de j . Ainsi, (B.32) est vérifiée dans ce cas. En utilisant (B.29), la probabilité d'erreur est donnée par

$$P_{\xi_k} = Q \left(\frac{\sigma_d \sqrt{\|\underline{\varepsilon}_k\|^2 + 4m\mu^2}}{2\sigma} \left(1 + \frac{\sigma_d^2 E(\|\delta \underline{h}\|^2)}{\sigma^2} \frac{\|\underline{\varepsilon}_k\|^2}{\|\underline{\varepsilon}_k\|^2 + 4m\mu^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{B.38})$$

A fort RSB, nous supposons que les erreurs se produisent rarement et que $m = 1$. Ainsi, $\|\underline{\varepsilon}_k\|^2 = 4$. La probabilité d'erreur P_{ξ_k} est alors donnée par

$$P_{\xi_k} = Q \left(\frac{\sigma_d \sqrt{1 + \mu^2}}{\sigma} \left(1 + \frac{\sigma_d^2 E(\|\delta \underline{h}\|^2)}{\sigma^2 (1 + \mu^2)} \right)^{-\frac{1}{2}} \right). \quad (\text{B.39})$$

Quand le canal est connu et aucune information *a priori* n'est utilisée, la probabilité de l'évènement d'erreur ξ_k $P_{\xi_k,p}$ est donnée à fort RSB par

$$P_{\xi_k,p} = Q\left(\frac{\sigma_d}{\sigma}\right). \quad (\text{B.40})$$

Ainsi, l'expression de la probabilité d'erreur donnée par (B.39) quand le canal est estimé et des informations *a priori* sont utilisées peut être vu comme celle donnée par (B.40) quand le canal est parfaitement connu et aucune information *a priori* n'est utilisée mais avec un RSB équivalent

$$RSB_{eq,boot}^{MIMO} = \frac{\sigma_d^2}{\sigma^2}(1 + \mu^2) \left(1 + \frac{E(\|\delta\underline{h}\|^2)}{\sigma^2(1 + \mu^2)}\right)^{-1}. \quad (\text{B.41})$$

Bibliographie

- [1] S. Adireddy, L. Tong, and H. Viswanathan, “Optimal placement of training for frequency-selective block-fading channels”, *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 48, no. 8, pp. 2338–2353, August 2002.
- [2] A. Alsawah and I. Fijalkow, “Optimal subcarrier sharing for weighted sum of rates maximization in multiuser-OFDM systems,” *5th International Symposium on Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks and Workshops*, pp. 1–6, April 2007.
- [3] L.R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv, “Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate,” *IEEE Trans. Information Theory*, vol. IT-32, pp. 284–287, March 1974.
- [4] I. Barhumi, G. Leus, and M. Moonen, “Optimal training design for MIMO-OFDM systems in mobile wireless channels,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 51, no. 6, pp. 1615–1624, June 2003.
- [5] S Benedetto and E. Biglieri, *Principles of Digital Transmission with Wireless Applications*. Kluwer/Plenum, NewYork, May 1999.
- [6] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, “Near shannon limit error-correcting coding and decoding : Turbo codes,” *IEEE Int. Conf. Communications (ICC)*, pp. 1064–1070, May 1993.
- [7] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, March 2004.
- [8] S. Buzzi, M. Lops, and S. Sardellitti, “Performance of iterative data detection and channel estimation for single-antenna and multiple-antennas wireless communications,” *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, vol. 53, no. 4, pp. 1085–1104, July 2004.
- [9] G. Caire and U. Mitra, “Training sequence design for adaptive equalization of multi-user systems,” *Asilomar Conf. Signals, Systems and Computers*, vol. 2, pp. 1479–1483, November 1998.
- [10] T.M. Cover and J.A. Thomas, *Elements of information theory*, Wiley, New York, August 1991.
- [11] S. Crozier, D. Falconer, and S. Mahmoud, “Least sum of squared errors (LSSE) channel estimation,” *IEE Proceedings*, vol. 138, pp. 371–378, August 1991.

- [12] R.F.H Fischer and J.B Huber, “A new loading algorithm for discrete multitone transmission,” *IEEE Global Telecomm. conference (Globecom)*, vol. 1, pp. 724–728, November 1996.
- [13] G.D. Forney, “Maximum-likelihood sequence estimation for digital sequences in the presence of intersymbol interference,” *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 18, pp. 363–378, May 1972.
- [14] G. D. Forney, “The Viterbi algorithm,” *IEEE Proceeding*, vol. 68, pp. 268–278, March 1973.
- [15] C. Fragouli, N. Al-Dhahir, and W. Turin, “Training-based channel estimation for multiple-antenna broadband transmissions,” *IEEE Trans. Wireless Communications*, vol. 2, pp. 384–391, March 2003.
- [16] A. Goldsmith and S.G. Chua, “Variable rate variable power MQAM for fading channels,” *IEEE Trans. on Communications*, vol. 45, no. 10, pp. 1218–1230, October 1997.
- [17] I. Hadj Kacem, N. Sellami, I. Fijalkow, and A. Roumy, “Training sequence length optimization for a turbo-detector using decision-directed channel estimation,” *Research Letters in Communications*, Article ID 860368, 5 pages, 2008. doi :10.1155/2008/860368, May 2008.
- [18] I. Hadj-Kacem, N. Sellami, I. Fijalkow, and A. Roumy, “Joint training interval length and power allocation optimization for MIMO flat fading channels,” *IEEE International Symposium on Wireless Communication Systems (ISWCS)*, pp. 16–20, September 2009.
- [19] I. Hadj-Kacem, N. Sellami, I. Fijalkow, and A. Roumy, “Training interval length optimization for MIMO flat fading channels using decision-directed channel estimation,” *IEEE International Conference on Wireless and Mobile Computing, Networking and communication (WiMob)*, pp. 24–29, November 2009.
- [20] I. Hadj Kacem, N. Sellami, I. Fijalkow, et A. Roumy, “Optimisation conjointe du nombre des symboles pilotes et de l’allocation des puissances pour les canaux MIMO non sélectifs en fréquence,” *Gretsi*, <http://hdl.handle.net/2042/28957>, Septembre 2009.
- [21] I. Hadj Kacem, N. Sellami, I. Fijalkow, A. Roumy, et L. Kamoun, “Optimisation de la longueur de la séquence d’apprentissage pour des estimations non itératives et itératives du canal,” *Journées Tunisiennes de l’Electrotechnique et de l’Automatique (JTEA)* pp. 1182–1186, Mai 2008.
- [22] I. Hadj-Kacem, N. Sellami, and L. Kamoun, “Optimal training sequence length for soft iterative channel estimation,” *IEEE International Conference on Environmental and Computer Science (ICECS)*, pp. 1016–1019, December 2009.
- [23] I. Hadj Kacem, N. Sellami, A. Roumy, and I. Fijalkow, “Training sequence optimization for frequency selective channels with MAP equalization,” *IEEE International*

- Symposium on Communications, Control and Signal Processing (ISCCSP)*, pp. 532–537, March 2008.
- [24] B. Hassibi and B. M. Hochwald, “How much training is needed in multiple-antenna wireless links?,” *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 49, no. 4, pp. 951–963, April 2003.
- [25] S. J. Howard and K. Pahlavan, “Autoregressive Modeling of Wide-Band Indoor Radio Propagation,” *IEEE Trans. on Communications*, vol. 40, No. 9, pp. 1540–1552, September 2005.
- [26] Institute of Electrical and Electronics Engineers, “Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications : High-Speed Physical Layer in the 5 GHz Band,” *IEEE Std. 802.11a*, November 1999.
- [27] W. C. Jakes, *Microwave Mobile Communications*, Piscataway, NJ : IEEE Press, pp. 45-54, May 1994.
- [28] J. Jang and K.B. Lee, “Transmit power adaptation for multiuser OFDM systems,” *IEEE Journal on selected areas in comm.*, vol. 21, no. 2, pp. 171–178, February 2003.
- [29] H. Ko, S. Oh, B. Kim, and C. Kim, “Simple bit allocation algorithms with ber-constraint for ofdm-based systems,” *IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, pp. 1–5, April 2009.
- [30] R. Koetter, A. Singer, and M. Tüchler, “Turbo equalization : an iterative equalization and decoding technique for coded data transmission,” *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 67–79, January 2004.
- [31] X. Lagrange, P. Godlewski, et S. Tabbane, *Réseaux GSM*, Hermes Science Publications, Paris, Septembre 2000.
- [32] S. Lasaulce and N. Sellami, “On the impact of using unreliable data on the bootstrap channel estimation performance,” *4th IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC)*, pp. 348–352, June 2003.
- [33] M. Lei and P. Zhang. “Subband bit and power loading for adaptive OFDM,” *IEEE Vehicular Technology Conference (VTC)*, vol. 3, pp. 1482–1486, October 2003.
- [34] Love, D.J. and Heath, R.W., Jr., “OFDM power loading using limited feedback ,” *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, vol. 54, no. 5, pp. 1773-1780, September 2005.
- [35] P. Magniez, “Egalisation et décodage conjoints,” Thèse de l’Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Mars 2001.
- [36] G. Miao and Z. Niu, “Practical feedback design based OFDM link adaptive communications over frequency selective channels,” in *Proceedings of IEEE International Conference on Communications (ICC’06)*, pp. 4624-4629, Istanbul, Turkey, June 2006.
- [37] B. Muquet, “Nouveaux schémas de réception et décodage pour les systèmes OFDM sans fil avec préfixe cyclique ou zero-padding,” Thèse de l’Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Juin 2001.

- [38] A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer, *Discrete-time signal processing*, Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1989.
- [39] K. Pahlavan and R. Ganesh, “Wideband Frequency and Time Domain Models for the Indoor Radio Channel,” *In Proceedings on IEEE GLOBECOM’91*, vol. 2, pp. 1135-1140, December 1991.
- [40] A. Picart, P. Didier, and A. Glavieux, “Turbo-Detection : A new approach to combat channel frequency selectivity,” *International Conference on Communications (ICC)*, pp. 1498–1502, June 1997.
- [41] J.G. Proakis, *Digital Communications, (Fourth edition)*, McGraw-Hill, USA, 2000.
- [42] A. Roumy, “Egalisation et décodage conjoints : méthodes turbo,” Thèse de l’Université de Cergy Pontoise, Octobre 2000.
- [43] N. Sellami, S. Lasaulce, and I. Fijalkow, “Turbo channel estimation for coded DS-CDMA systems over frequency selective channels,” *4th IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC)*, pp. 80–84, June 2003.
- [44] N. Sellami, A. Roumy, and I. Fijalkow, “A proof of convergence of the MAP turbo-detector to the AWGN case,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 56, no. 4, pp. 1548–1561, April 2008.
- [45] N. Sellami, A. Roumy, and I. Fijalkow, “The impact of both *a priori* information and channel estimation errors on the MAP equalizer performance,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 54, no. 7, pp. 2716–2724, July 2006.
- [46] J-H. Park, M-K. Oh, and D-J. Park, “New channel estimation exploiting reliable decision-feedback symbols for OFDM Systems,” *IEEE International Conference on Communications (ICC)*, pp. 3046 - 3051, June 2006.
- [47] W. Stallings, *Réseaux et communication sans fil*, Pearson Education, Paris-France, Juin 2005.
- [48] Y. Sun and M.L. Honig, “Asymptotic capacity of multicarrier transmission with frequency-selective fading and limited feedback,” *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 54, no. 7, pp. 2879–2902, July 2008.
- [49] C. Tellambura, M. G. Parker, Y. J. Guo, S. J. Shepherd, and S. K. Barton, “Optimal sequences for channel estimation using discrete Fourier transform technique,” *IEEE Trans. Communications*, vol. 47, pp. 230–238, February 1999.
- [50] S. Ten Brink, “Convergence of iterative decoding,” *IEEE Electronics Letters*, vol. 35, pp. 806–808, May 1999.
- [51] A.M.Tonello, “Array processing for simplified turbo decoding of interleaved space-time codes,” *IEEE Vehicular Technology Conference (VTC)*, pp. 1304-1308, September 2001.
- [52] M. Tüchler, R. Koetter, and A. Singer, “Turbo equalization : principles and new results,” *IEEE Trans. on Communications*, vol. 50, no. 5, pp. 754–767, May 2002.

- [53] T-L. Tung, K. Yao, and R.E. Hudson, "Channel estimation and adaptive power allocation for performance and capacity improvement of multiple-antenna OFDM systems," *IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC'01)*, pp. 82–85, March 2001.
- [54] H. Vikalo, B. Hassibi, B. Hochwald, and T. Kailath, "On the capacity of frequency-selective channels in training-based transmission schemes," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 52, no. 9, pp. 2572–2583, September 2004.
- [55] X. Wautelet, C. Herzet, A. Dejonphe, J. Louveaux, and L. Vandendorpe, "Comparison of EM based algorithms for MIMO channel estimation," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 55, no. 1, pp. 216–226, January 2007.
- [56] P. W. Wolniansky, G. J. Foschini, G. D. Golden, and R. A. Valenzuela, "V-BLAST : An architecture for realizing very high data rates over the rich-scattering wireless channel," *International Symposium on Signal, Systems and Electronics (ISSSE)*, Italy, pp. 295–300, September 29- October 2, 1998.
- [57] A. M. Wyglinski, F. Labeau, and P. Kabal, "Bit loading with BER-constraint for multicarrier systems," *IEEE Trans. on Wireless Communications*, vol. 4, No. 4, pp. 1383-1387, July 2005.
- [58] C. Xiao, J. Wu, S. Leong, Y. Zheng, and K. Ben Letaief, "A discrete-time model for triply selective MIMO Rayleigh fading channels," *IEEE Trans. on Wireless Communications*, vol. 3, no. 5, pp. 1678–1688, September 2004.
- [59] K.-W. Yip and T.-S. Ng, "Discrete-time model for digital communications over a frequency-selective Rician fading WSSUS channel," *IEE proceedings. Communications*, vol. 143, pp. 37–42, February 1996.
- [60] S. Zhou and G.B. Giannakis, "Adaptive modulation for multi-antenna transmissions with channel mean feedback," *IEEE International Conference on Communications (ICC)*, vol. 4, pp. 2281–2285, May 2003.