



**HAL**  
open science

# Flot de Ricci sans borne supérieure sur la courbure et géométrie de certains espaces métriques

Thomas Richard

► **To cite this version:**

Thomas Richard. Flot de Ricci sans borne supérieure sur la courbure et géométrie de certains espaces métriques. Autre [q-bio.OT]. Université de Grenoble, 2012. Français. NNT : 2012GRENM038 . tel-00768066

**HAL Id: tel-00768066**

**<https://theses.hal.science/tel-00768066>**

Submitted on 20 Dec 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Thomas RICHARD**

Thèse dirigée par **Gérard BESSON**

préparée au sein l'Institut Fourier  
et de l'École Doctorale MSTII

# Flot de Ricci sans borne supérieure sur la courbure et géométrie de certains espaces métriques.

Thèse soutenue publiquement le **21 septembre 2012**,  
devant le jury composé de :

**M. Gérard BESSON**

DR CNRS, Université Grenoble 1, Directeur de thèse

**M. Vincent BORRELLI**

Maître de Conférences, HDR, Université Lyon 1, Examineur

**M. Gilles CARRON**

Professeur, Université de Nantes, Rapporteur

**M. Zidine DJADLI**

Professeur, Université Grenoble 1, Président

**M. Peter TOPPING**

Professeur, University of Warwick, Rapporteur





# Remerciements

Ces années de thèse à Grenoble ont été pour moi des années intenses mais heureuses, et nombre des personnes que j'ai cotoyées ici y ont contribué. Il est temps pour moi de les remercier. Je vais essayer de faire au mieux mais j'oublierai sans doute quelques uns, je m'en excuse.

Je remercie d'abord chaleureusement mon directeur Gérard Besson, dont l'encadrement toujours bienveillant m'a laissé une grande autonomie et une grande liberté dans mon travail. Il n'était pas toujours évident de te trouver entre tes responsabilités administratives et tes nombreuses conférences, mais tu étais là quand le besoin s'en faisait sentir. Ta vision de la géométrie m'influencera pendant encore longtemps. Merci aussi de m'avoir permis de participer à des conférences qui ont beaucoup ouvert mon horizon mathématiques (et m'ont permis de visiter des régions de France et d'ailleurs qui m'étaient inconnues).

J'exprime aussi ma gratitude à Gilles Carron et Peter Topping d'avoir été rapporteurs de cette thèse. Les conversations avec chacun d'entre eux ont toujours été intéressantes et stimulantes. Merci aussi Gilles pour ton exigence de rigueur à propos des surfaces à courbure minorée, elles le méritaient bien.

Je suis très heureux que Zindine Djadli fasse partie de ce jury. Tu étais déjà là pour ma soutenance de mémoire de M2, interrompue après un joli débordement alors que je n'avais pas encore abordé les points qui me semblaient intéressants. J'espère avoir progressé ! Merci aussi à Vincent Borrelli d'avoir accepté au pied levé de faire partie de ce jury, et de nous avoir montré ces images du tore plat qui me servent depuis de fond d'écran.

Je veux aussi remercier les chercheurs que j'ai croisés lors de séminaires ou de conférences et qui ont accepté de partager leurs points de vue sur mes questions. Je pense en particulier à Miles Simon : si je n'avais pas été spectateur d'un de ses exposés à Pise à la fin de mon M2, cette thèse aurait un tout autre aspect. Je remercie aussi Sylvain Maillot, Samuel Tapie, Jérôme Bertrand pour d'intéressantes discussions. Merci bien-sûr à Harish Seshadri qui m'accueille à Bangalore après cette thèse.

L'Institut Fourier est un cadre très agréable pour un thésard. Je commence par remercier ici les administratifs, les personnels d'entretien et l'équipe de la bibliothèque sans qui tout travail ici nous serait impossible.

Les interlocuteurs ne manquent jamais ici, que ce soit pour parler de maths, d'enseignements, ou de tout le reste. J'ai apprécié les discussions mathématiques que j'ai pu avoir avec Laurent Bessières, Benoît Kloeckner, Sylvain Gallot, Pierre Bérard, Éric Dumas, et j'en oublie sans doute.

À propos d'enseignement, mes questions existentielles et pratiques sur le programme de MAT111 ont toujours trouvé une réponse auprès des nombreux intervenants de ce

## *Remerciements*

module, je pense en particulier à Catriona Maclean, Romain Joly, Laurent Bessières, Pierre Will et aux thésards enseignants en MAT111. Je remercie aussi mes élèves de MAT111, qui m'ont beaucoup appris (à leur insu sans doute), ainsi que Bashar avec qui j'ai partagé un groupe. Confronter nos visions de l'enseignement était très intéressant.

Je remercie aussi mes « copains de clopes » avec lesquels j'ai passé beaucoup de temps à la porte du bâtiment, dans des circonstances climatiques variables. Je pense notamment à Éric Dumas et Marie-Hélène Biasini.

Ces années aurait été bien différentes (et sans doute moins marrantes) sans les autres thésards de l'Institut. Merci d'abord à mes cobureaux de première année, Alvaro et Nico, qui m'ont fait profiter de leur expérience alors que je débarquais. Merci ensuite à mes cobureaux suivants : Bashar et Mathieu. Les fous rires que nous avons pu avoir ne se comptent plus, et ont toujours été appréciables. Parmi les thésards, certains s'intéressaient aussi au flots géométriques, et c'était très agréables de pouvoir partager mes galères d'apprentissage avec vous Alix, Chih-Wei et Vincent. Aline, Élise, Maxime, Marianne, Jeff, Alix, Mathieu, Gunnar, Simon ont souvent égayé mes repas.

Mon passage à Grenoble ne s'arrête pas l'Institut. Les nombreux moments de détente ont été essentiels à l'accomplissement de cette thèse. Il a toujours été agréable de retrouver autour de bières et de pizzas Max, Bash, Mélaine, Simon, Camille, Jean, Mathieu, Florence, Alix, Gunni, Éliza, Ariadna, Fred, Élise, Aline... Avec Alix, Max, Gunni, Jean, Simon et Bashar, j'ai pu trouver des gens avec qui partager mon amour de la production de bruits divers, j'en avais bien besoin par moment ! Un des temps les plus forts de ces trois années à été le « projet Palestine » avec Bashar, Mélaine, Jean, Simon et Camille. De la préparation au voyage en lui-même, je ne suis pas prêt d'oublier cette expérience.

J'ai commencé ces années de thèse par un déménagement vers la coloc que je quitte maintenant. Mes colocataires ont été des personnes précieuses. Merci à Jean et Simon pour les innombrables discussions, que ce soit au petit-dej ou tard dans la soirée, et les geekeries perpétuelles. Je n'oublierai pas non plus Maximiliano et ses nombreux talents : mécanicien, géomètre algébriste, chimiste, cuistot, conteur, pilote, noctambule... Bien qu'aillant quitté la coloc quand j'y arrivais, Bash reste coloc honoris causa du 4 rue Jean-Jacques Rousseau.

Je remercie ma famille sans qui rien n'aurait été pareil. Papa, Maman, Quentin, mes passages (parfois furtifs) en Vendée m'ont toujours fait du bien. Vous m'avez fait confiance depuis que je suis tout petit et je vous en remercie.

Mes derniers remerciements vont enfin à Soizic, dont le retour dans ma vie à donné une saveur incomparable à cette dernière année de thèse.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
Motivation : Autour du Théorème de la Sphère . . . . .	7
Questions : Quand la courbure n'est que minorée? . . . . .	10
Présentation des résultats . . . . .	11
<b>1. Géométrie Riemannienne, géométrie métrique, flot de Ricci</b>	<b>17</b>
1.1. Géométrie Riemannienne . . . . .	17
1.1.1. Courbures . . . . .	17
1.1.2. Convergence de Cheeger-Gromov des variétés. . . . .	20
1.2. Géométrie métrique . . . . .	20
1.2.1. Convergence au sens de Gromov-Hausdorff . . . . .	20
1.2.2. Espaces d'Alexandrov . . . . .	22
1.3. Flot de Ricci . . . . .	24
1.3.1. Existence et unicité dans un cadre lisse . . . . .	25
1.3.2. Évolution des quantités géométriques . . . . .	25
1.3.3. Principe du maximum . . . . .	27
1.3.4. Suites de flots de Ricci . . . . .	28
<b>2. Flot de Ricci à condition initiale métrique, la dimension 3</b>	<b>31</b>
2.1. Condition initiale métrique . . . . .	31
2.1.1. Définition . . . . .	31
2.1.2. Une méthode de construction . . . . .	33
2.2. Un théorème de M. Simon . . . . .	37
2.3. Preuve du Théorème . . . . .	38
2.4. Quelques applications . . . . .	41
<b>3. Unicité en dimension 2</b>	<b>45</b>
3.1. Énoncé(s) . . . . .	45
3.2. Surfaces d'Alexandrov . . . . .	47
3.2.1. Définitions . . . . .	47
3.2.2. Théorèmes d'approximation . . . . .	50
3.2.3. Uniformisation des surfaces à courbure intégrale bornée . . . . .	51
3.3. Remarques sur l'existence . . . . .	53
3.4. Unicité de la structure conforme . . . . .	54
3.5. Unicité du flot . . . . .	57

<b>4. Généralisations en dimension quelconque</b>	<b>61</b>
4.1. Qu'attendre de la dimension $n$ ?	61
4.2. Courbures invariantes	62
4.3. Minorer les courbures invariantes	66
4.4. Premières Applications	71
4.4.1. Comment obtenir la borne en $A/t$ sur la courbure?	71
4.4.2. Flot de certaines métriques continues	72
4.4.3. Limite au sens de Gromov-Hausdorff et flot de Ricci	73
4.4.4. Un résultat de stabilité	76
4.5. Quand la courbure sectionnelles est minorée	77
4.5.1. Un lemme sur le flot des variétés à courbure presque positive et à volume presque euclidien	77
4.5.2. Flot de certains espaces métriques	78
4.5.3. Deuxième résultat de stabilité	78
4.6. Un autre théorème de pseudolocalité et quelques améliorations de 4.5	79
4.6.1. Le Théorème de Tian et Wang	79
4.6.2. Conséquences sur les résultats de 4.5	79
<b>Perspectives</b>	<b>81</b>
Unicité des flots à condition initiale métrique	81
Conditions de courbure	81
$\mathcal{C}$ -courbure minorée et géométrie métrique	82
<b>A. Approximation des surfaces d'Alexandrov</b>	<b>85</b>
A.1. Triangulations	85
A.2. Convergence	86
<b>Bibliographie</b>	<b>93</b>

# Introduction

Dans cette thèse, on utilise le flot de Ricci pour étudier la géométrie de certains espaces métriques à courbure minorée. On utilise aussi les méthodes mises en place pour prouver des résultats sur certaines variétés à courbure presque positive. Le point de vue adopté consiste à construire un flot de Ricci pour des espaces métriques qui ne sont pas des variétés riemanniennes. Cette introduction commence par montrer l'intérêt du flot de Ricci d'espaces métriques peu lisses en se basant sur l'exemple du théorème de la sphère, puis présente les résultats obtenus.

## Motivation : Autour du Théorème de la Sphère

Une question centrale en géométrie riemannienne est d'étudier les implications topologiques du contrôle de certains invariants géométriques comme la courbure, le volume, le diamètre. Un résultat très célèbre est le théorème de la sphère, démontré par Berger et Klingenberg autour de 1960 :

**Théorème 1** ([Kli61],[Ber60]). *Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne compacte simplement connexe dont la courbure sectionnelle vérifie*

$$\frac{1}{4} \leq \sec \leq 1.$$

*Alors  $(M^n, g)$  est homéomorphe à la sphère de dimension  $n$  ou isométrique à un espace symétrique compact de rang 1.*

Une variété vérifiant les hypothèses du théorème est dite  $\frac{1}{4}$ -pincée, si les inégalités sont strictes on dira strictement  $\frac{1}{4}$ -pincée. Les espaces symétriques simplement connexes compacts de rang 1 sont les espaces projectifs sur  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  ou  $\mathbb{O}$ .

Une question naturelle est alors de se demander si ce théorème reste valable quand la courbure est autorisée à être un peu inférieure à  $\frac{1}{4}$ . C'est en fait possible, et dû à Berger et Durumeric :

**Théorème 2** ([Dur87],[Ber83]). *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que si  $(M^n, g)$  est une variété riemannienne simplement connexe dont la courbure sectionnelle vérifie*

$$\frac{1}{4} - \varepsilon \leq \sec \leq 1.$$

*Alors  $(M^n, g)$  est homéomorphe à la sphère de dimension  $n$  ou difféomorphe à un espace symétrique compact de rang 1.*



## Introduction

La méthode de preuve est un prototype de l'utilisation des théorèmes de compacité dans l'espace des variétés riemanniennes pour montrer des résultats géométriques. On raisonne par l'absurde. Si le théorème est faux, on peut trouver une suite de variétés riemanniennes  $(M_i, g_i)$  dont la courbure vérifie

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{i} \leq \sec_{g_i} \leq 1$$

et dont aucune ne vérifie le résultat. Le théorème de compacité de Cheeger et Gromov (Théorème 1.1.11) permet d'affirmer qu'à extraction près la suite  $(M_i, g_i)$  converge de façon  $C^{1,\alpha}$  vers une variété riemannienne  $(M, g)$ . Si  $(M, g)$  était lisse, et que la convergence était  $C^\infty$ , la courbure de  $(M, g)$  serait comprise entre  $\frac{1}{4}$  et 1, on pourrait donc montrer qu'elle vérifie les conclusions du Théorème 1. Comme les éléments d'une suite qui converge vers une limite compacte sont tous difféomorphes à la limite à partir d'un certain rang, on aboutirait à une contradiction. Cette idée doit être adaptée car  $(M, g)$  n'est que  $C^{1,\alpha}$  et sa courbure n'est donc pas bien définie. Cependant  $(M, g)$  est à courbure comprise entre  $\frac{1}{4}$  et 1 en un sens faible : les triangles géodésiques y vérifient la conclusion du théorème de Toponogov (plus de détails sur la courbure des espaces métriques sont donnés dans la section 1.2.2). Il reste ensuite à prouver le Théorème 1 pour des variétés qui vérifient ces bornes faibles sur la courbure, ce qui est fait dans [Ber83] et [Dur87].

L'énoncé du théorème de la sphère pose immédiatement la question suivante : une variété vérifiant les hypothèses du théorème de la sphère et qui n'est pas un espace symétrique de rang 1 est-elle difféomorphe à  $S^n$  ?

Cette question a une longue histoire, qui s'est terminée par une réponse affirmative donnée par Brendle et Schoen :

**Théorème 3** ([BS09],[BS08]). *Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne compacte simplement connexe dont la courbure sectionnelle vérifie*

$$\frac{1}{4} \leq \sec \leq 1.$$

*Alors  $(M^n, g)$  est difféomorphe à la sphère de dimension  $n$  ou isométrique à un espace symétrique compact de rang 1.*

La preuve de ce résultat utilise le flot de Ricci introduit par Hamilton dans l'article fondateur [Ham82]. Le flot de Ricci est un analogue de l'équation de la chaleur pour les métriques riemanniennes. Il est donné par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2 \operatorname{Ric}_{g(t)} \tag{0.1}$$

où  $g(t)$  est une famille de métriques riemanniennes lisses sur une variété  $M$  fixée. Le flot de Ricci d'une variété  $(M, g_0)$  est la solution de l'équation (0.1) définie pour  $t \in [0, T)$  et qui vérifie  $g(0) = g_0$ .

Dans [BS09], Brendle et Schoen montrent qu'une variété  $\frac{1}{4}$ -pincée vérifie une condition sur la courbure nommée « PIC2 ». Plusieurs définitions équivalentes de cette condition

existent. La plus simple<sup>1</sup> est la suivante : on étend le tenseur de courbure  $R$  au complexifié  $TM^{\mathbb{C}}$  de l'espace tangent en une forme  $\mathbb{C}$ -quadrilinéaire, et on demande que pour tous vecteurs  $u, v \in TM^{\mathbb{C}}$ , on ait :

$$R(u, v, \bar{u}, \bar{v}) \geq 0.$$

Les auteurs montrent ensuite que le flot de Ricci  $(M, g(t))$  d'une variété  $(M, g_0)$   $\overline{\text{PIC2}}$  est tel que  $(M, g(t))$  est  $\overline{\text{PIC2}}$  pour tout  $t$ , et que soit le flot de Ricci converge vers une métrique à courbure constante (après renormalisation), soit le revêtement universel de  $M$  se décompose en un produit de variétés plus simples à étudier.

Les outils mis en place par Brendle et Schoen ont permis à Petersen et Tao de renforcer le Théorème 2 :

**Théorème 4** ([PT09]). *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que si  $(M^n, g)$  est une variété riemannienne simplement connexe dont la courbure sectionnelle vérifie*

$$\frac{1}{4} - \varepsilon \leq \sec \leq 1.$$

*Alors  $(M^n, g)$  est difféomorphe à la sphère de dimension  $n$  ou à un espace symétrique compact de rang 1.*

La méthode utilisée ici diffère de celle de la preuve du Théorème 2. C'est aussi une preuve par l'absurde, et on commence par considérer une suite de variétés  $(M_i, g_i)$  dont la courbure vérifie

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{i} \leq \sec_{g_i} \leq 1$$

et dont aucune ne vérifie les conclusions du théorème. Cependant, la limite  $(M, g)$  des  $(M_i, g_i)$  n'est pas lisse et la preuve du résultat de Brendle et Schoen ne peut pas s'adapter ici car il n'est pas du tout évident qu'il existe un flot de Ricci de condition initiale  $(M, g)$ . L'idée est alors de ne pas considérer la limite des variétés  $(M_i, g_i)$ , mais plutôt la limite des flots de Ricci  $(M_i, g_i(t))$  de condition initiale  $g_i(0) = g_i$ , qui existent en vertu des bornes a priori sur la courbure, le diamètre et le volume découlant du caractère presque  $\frac{1}{4}$ -pincé des  $(M_i, g_i)$ . On note cette limite  $(\tilde{M}, g(t))$ . Petersen et Tao montrent ensuite que  $(\tilde{M}, g(t))$  est  $\overline{\text{PIC2}}$ , ce qui permet de conclure.

La preuve du caractère  $\overline{\text{PIC2}}$  du flot limite repose sur deux observations. Tout d'abord les conditions initiales sont de « moins en moins éloignées » d'être  $\overline{\text{PIC2}}$  quand  $i$  tend vers l'infini. On montre en fait qu'il existe une suite de réels  $(\varepsilon_i)$  tendant vers 0 telle que  $(M_i, g_i)$  vérifie pour  $u, v \in TM_i^{\mathbb{C}}$  :

$$R_{g_i}(u, v, \bar{u}, \bar{v}) \geq -\varepsilon_i |u \wedge v|^2.$$

On contrôle ensuite la façon dont le caractère « presque  $\overline{\text{PIC2}}$  » des conditions initiales peut se dégrader lors de l'application du flot de Ricci. On montre qu'il existe  $T > 0$  et  $C > 0$  tels que pour tout  $t \in (0, T)$ , les flots  $(M_i, g_i(t))$  vérifient :

$$R_{g_i(t)}(u, v, \bar{u}, \bar{v}) \geq -C\varepsilon_i |u \wedge v|^2.$$

---

<sup>1</sup>Ce n'est pas celle proposée par Brendle et Schoen, ils utilisent plutôt une définition faisant appel à la notion de courbure isotrope, voir section 4.2.

## Introduction

La convergence des flots  $(M_i, g_i(t))$  vers  $(\tilde{M}, g(t))$  étant lisse, on a bien que  $(\tilde{M}, g(t))$  vérifie, pour  $t \in (0, T)$  :

$$R_{g(t)}(u, v, \bar{u}, \bar{v}) \geq 0.$$

On verra dans cette thèse que les preuves des Théorèmes 2 et 4 sont en fait fortement liées : le flot limite  $(\tilde{M}, g(t))$  construit par Petersen et Tao est en fait un flot de la variété limite  $(M, g)$  de Berger et Durumeric si l'on affaiblit la notion de condition initiale. Cette exemple montre l'intérêt de tenter de définir un flot de Ricci pour des espaces peu lisses.

## Questions : Quand la courbure n'est que minorée ?

D'un certain point de vue, le fait que l'on puisse définir un flot de Ricci pour l'espace limite  $(M, g)$  construit dans l'esquisse de preuve du Théorème 2 n'est pas très surprenant. En effet, cette limite reste une variété riemannienne, certes de classe  $C^{1,\alpha}$ , mais quand même riemannienne. D'un point de vue plus technique, le fait que la courbure soit uniformément bornée le long de la suite  $(M_i, g_i)$  de variétés presque  $\frac{1}{4}$ -pincées tendant vers  $(M, g)$  permet d'affirmer que la courbure des flots  $(M_i, g_i(t))$  est bornée sur un intervalle de temps indépendant de  $i$ , ce qui sera utile pour pouvoir appliquer le théorème de compacité d'Hamilton pour les suites de flots de Ricci (Théorème 1.3.11).

Cependant, certains résultats liant courbure positive et topologie ne nécessitent pas de borne supérieure sur la courbure, prenons par exemple le résultat suivant, dû à Böhm et Wilking pour le cas « opérateur de courbure strictement positif » et à Ni et Wu pour le cas opérateur de courbure positif ou nul :

**Théorème 5** ([BW08],[NW07b]). *Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne compacte dont l'opérateur de courbure  $R$  est positif ou nul en tant qu'opérateur symétrique sur  $\Lambda^2 TM$ , alors le revêtement universel  $\tilde{M}$  de  $M$  est diffeomorphe à un produit de variétés dont les facteurs sont soit :*

- des sphères,
- des espaces symétriques compacts,
- des espaces euclidiens.

La démonstration de ce théorème repose sur l'étude du flot de Ricci de  $(M^n, g)$ . On montre d'abord que le flot de  $(M^n, g)$  reste à opérateur de courbure positif ou nul, puis que soit cet opérateur devient strictement positif et le flot converge vers une métrique à courbure constante, soit  $M^n$  est un produit dont les facteurs sont contrôlés.

Une question naturelle est alors celle-ci :

**Question 6.** *Existe-t-il un analogue du Théorème 4 pour les variétés à opérateur de courbure presque positif ?*

*Remarque 7.* Un premier problème se pose : toute variété compacte  $M$  admet une métrique à opérateur de courbure aussi peu négatif que souhaité, en multipliant une métrique quelconque  $g$  sur  $M$  par une constante assez grande. On doit donc imposer des

conditions géométriques supplémentaires. Il semble raisonnable de demander par exemple une minoration du volume et une majoration du diamètre.

La démonstration d'un tel résultat passerait sans doute par la construction d'un flot de Ricci pour un espace métrique  $(X, d)$  qui serait limite au sens de Gromov–Hausdorff d'une suite de variétés  $(M_i, g_i)$  vérifiant :

- l'opérateur de courbure  $R_{g_i}$  de  $(M_i, g_i)$  vérifie  $R_{g_i} \geq -\frac{1}{i}$ ,
- le diamètre de  $(M_i, g_i)$  est plus petit que  $D > 0$ ,
- le volume de  $(M_i, g_i)$  est plus grand que  $V > 0$ .

Une façon naturelle de construire un flot de  $(X, d)$  serait alors de considérer les flots  $(M_i, g_i(t))$  des  $(M_i, g_i)$  et de contrôler ces flots assez finement pour montrer que la suite de flots  $(M_i, g_i(t))$  converge vers un flot limite  $(M, g(t))$  quand  $i$  tend vers l'infini et qu'en un sens faible  $(X, d)$  est condition initiale de ce flot limite.

Plus généralement on peut se demander :

**Question 8.** *Soit  $(M_i, g_i)$  une suite de variétés riemanniennes qui converge au sens de Gromov–Hausdorff vers une espace métrique  $(X, d)$ . Quelles conditions peut-on imposer sur les  $(M_i, g_i)$  pour pouvoir construire un flot de Ricci de condition initiale  $(X, d)$  comme limite des flots de Ricci des  $(M_i, g_i)$  ?*

On espère bien sûr que le flot construit nous aide à étudier la géométrie de  $(X, d)$ . L'idée de cette construction est décrite dans la figure 0.1. Les « traînées » derrière les variétés  $(M_i, g_i)$  symbolisent les flots des  $(M_i, g_i)$ . Les problèmes éventuels se trouvent sur les flèches en pointillés. Il faut être capable de dire qu'on peut extraire de la suite des flots  $(M_i, g_i(t))$  un flot limite  $(M_\infty, g_\infty(t))$ , et ceci nécessite des estimations a priori sur ces flots. Et il faut ensuite pouvoir relier cet éventuel flot limite à  $(X, d)$ .

Évidemment, pour pouvoir répondre à cette question, il faut aussi se poser celle-ci :

**Question 9.** *Si  $(X, d)$  est un espace métrique, quelle signification donner à l'affirmation «  $(M, g(t))$  est un flot de Ricci de condition initiale  $(X, d)$  » ?*

## Présentation des résultats

Pour terminer cette introduction, on donne un aperçu du contenu de chacun des chapitres de cette thèse.

### Chapitre 1

Le premier chapitre est constitué de rappels. Il a pour but de fixer les notations et de servir de référence pour les résultats qui seront utilisés le plus fréquemment. Ces rappels portent sur la géométrie riemannienne, la géométrie des espaces métriques et le flot de Ricci. Ce chapitre, très court, ne se veut pas une introduction à ces domaines.

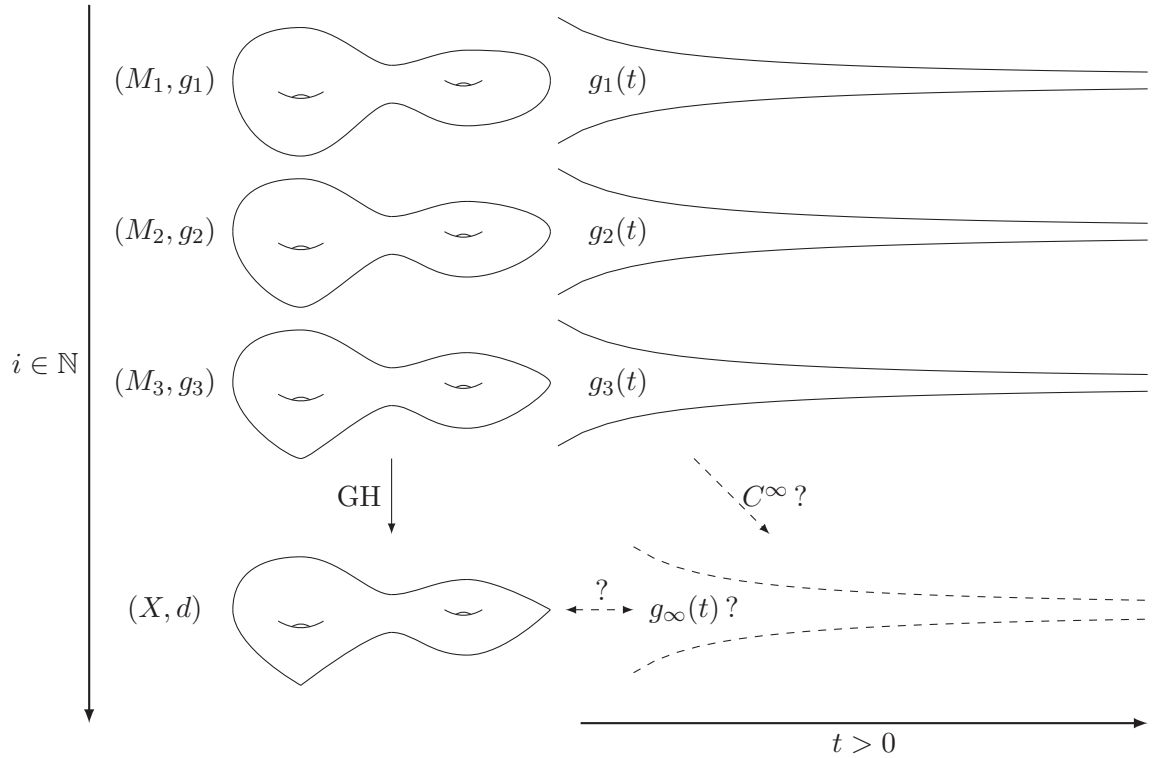


FIGURE 0.1.: Comment construire le flot de  $(X, d)$  ?

## Chapitre 2

Dans ce chapitre, on apporte une réponse à la Question 9. On affaiblit la notion de condition initiale du flot de Ricci pour pouvoir inclure des conditions initiales non-lisses. Plusieurs définitions sont envisagées.

On considère en particulier le cas où l'on impose à  $(M, g(t))$  de converger au sens de Gromov-Hausdorff quand  $t$  tends vers 0 vers un espace métrique  $(X, d)$ . Des exemples montrent que cette définition est sans doute trop restrictive pour pouvoir considérer  $(M, g(t))$  comme un flot de Ricci de  $(X, d)$ .

C'est pourquoi l'on privilégie plutôt la définition suivante :

**Définition 10.** *On dit que l'espace métrique  $(X, d)$  est la condition initiale métrique du flot de Ricci lisse  $(M, g(t))_{t \in (0, T)}$  si, quand  $t$  tend vers 0, les distances riemanniennes  $d_{g(t)}$  convergent uniformément sur tout compact de  $M \times M$  vers une distance  $\tilde{d}$  sur  $M$  telle que  $(M, \tilde{d})$  est isométrique à  $(X, d)$ .*

On observe que cette définition est contraignante pour la topologie de  $X$  et  $M$  : on montre que si  $X$  est compact,  $X$  et  $M$  sont alors homéomorphes.

On donne ensuite une méthode pour construire de tels flots à partir d'une suite  $(M_i, g_i)$  de variétés convergeant au sens de Gromov-Hausdorff vers  $(X, d)$ , en supposant certaines

estimations sur les flots des  $(M_i, g_i)$ . C'est la proposition 2.1.6. Cette proposition est une reformulation de résultats dûs à Simon dans [Sim09b] et [Sim09a]. On reprend ensuite les résultats de Simon en dimension 3 en essayant d'y mettre en évidence la notion de condition initiale métrique.

Les travaux de Simon permettent de construire des flots de Ricci à condition initiale métrique  $(X, d)$  quand  $(X, d)$  est un espace métrique limite au sens de Gromov-Hausdorff de variétés de dimension 3 à courbure de Ricci minorée et dans lesquelles le volume des boules de rayon 1 est minoré.

La dernière section de ce chapitre est consacrée aux applications géométriques des résultats de Simon. On commence par les résultats phares des articles [Sim09b] et [Sim09a]. On présente aussi un théorème de finitude pour les variétés de dimension 3 à courbure de Ricci minorée, diamètre majoré et volume minoré, ainsi qu'une preuve alternative valable en dimension 3 d'un théorème de Cheeger et Colding. Ces deux derniers résultats ont fait l'objet de la note [Ric11b].

### Chapitre 3

On s'intéressera ici au flot de Ricci à condition initiale métrique en dimension 2. On s'intéresse aux surfaces topologiques compactes  $(X, d)$  qui sont à courbure minorée au sens d'Alexandrov. On montre le résultat suivant :

**Théorème 11** ([Ric12]). *Soit  $(X, d)$  une surface compacte à courbure supérieure à  $-1$  au sens d'Alexandrov. Alors il existe un flot de Ricci lisse  $(M^2, g(t))_{t \in (0, T)}$ , où  $M^2$  est une surface lisse, tel que :*

- (i)  $K_{g(t)} \geq -1$  pour tout  $t$  dans  $(0, T)$ .
- (ii)  $(M^2, g(t))$  admet  $(X, d)$  comme condition initiale métrique.

De plus ce flot est l'unique flot vérifiant (i) et (ii) à difféomorphisme de  $M^2$  près.

La preuve de l'existence découle de deux faits. Tout d'abord, les surfaces d'Alexandrov à courbure minorée peuvent être approchées au sens de Gromov-Hausdorff par des suites de surfaces lisses à courbure minorée, volume minoré, et diamètre majoré. Les méthodes développées par M. Simon en dimension 3 s'appliquent alors et permettent de construire par approximation un flot de Ricci à condition initiale métrique  $(X, d)$ .

L'unicité doit se comprendre en ce sens : si  $(M_1, g_1(t))$  et  $(M_2, g_2(t))$  sont deux flots de Ricci à condition initiale métrique  $(X, d)$  et à courbure minorée alors il existe un difféomorphisme  $\varphi$  de  $M_1$  dans  $M_2$  tel que  $\varphi^*g_1(t) = g_2(t)$ .

Pour montrer cette unicité, on utilise un théorème d'uniformisation pour une certaine classe de surfaces singulières dû à Y. Reshetnyak qui permet d'exprimer la condition initiale métrique en des termes analytiques, puis des techniques standards d'équations aux dérivées partielles. Les résultats de géométrie de surfaces d'Alexandrov que nous utilisons sont rappelés dans une section de ce chapitre.

Ce résultat a une conséquence intéressante :

**Corollaire 12** ([Ric12]). *Soit  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de surfaces compactes lisses à courbure minorée par  $-1$  qui converge au sens de Gromov–Hausdorff vers une surface compacte  $(X, d)$  à courbure minorée au sens d’Alexandrov.*

*Alors chacun des flots de Ricci  $(M_i, g_i(t))$  de condition initiale (classique)  $g_i(0) = g_i$  existe au moins pour  $t \in (0, T)$ , où  $T$  est indépendant de  $i$ .*

*De plus, la suite de flots  $(M_i, g_i(t))_{t \in (0, T)}$  converge au sens d’Hamilton quand  $i$  tend vers l’infini vers le flot de Ricci de condition initiale métrique  $(X, d)$  dont l’existence et l’unicité sont assurées par le Théorème précédent.*

Cet énoncé montre que dans le cas des surfaces, le flot de Ricci dépend de manière continue de la donnée initiale, quand l’espace des conditions initiales est muni de la distance de Gromov-Hausdorff, et que les données initiales sont à courbure minorée.

## Chapitre 4

On cherche des analogues des résultats du Chapitre 2 en dimension quelconque. On va chercher à appliquer la méthode de construction donnée par la proposition 2.1.6 à des espaces métriques  $(X, d)$  qui sont limites au sens de Gromov-Hausdorff de variétés à courbure minorée et vérifiant certaines condition de non-effondrement. Ces résultats font l’objet du preprint [Ric11a].

On commence par expliquer pourquoi la minoration de la courbure de Ricci est une hypothèse trop faible dans ce contexte. On est amené à utiliser d’autres notions de minoration de la courbure qui sont plus restrictives qu’une minoration de la courbure de Ricci mais qui se comportent bien vis-à-vis du flot de Ricci. Ces courbures sont décrites par des cônes  $\mathcal{C}$  dans l’espace  $S_B^2(\Lambda^2 \mathbb{R}^n)$  des opérateurs de courbure algébriques qui vérifient

1.  $\mathcal{C}$  contient l’opérateur identité  $I : \Lambda^2 \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^n$ ,
2.  $\mathcal{C}$  est invariant par l’action du groupe  $O(n, \mathbb{R})$  sur  $S_B^2(\Lambda^2 \mathbb{R}^n)$ ,
3.  $\mathcal{C}$  est préservé par le flot de Ricci,
4.  $\mathcal{C}$  contient les opérateurs de courbure positifs ou nuls,
5. tout opérateur de courbure dans  $\mathcal{C}$  est à courbure de Ricci positive ou nulle.

On dit qu’une variété  $(M, g)$  est à  $\mathcal{C}$ -courbure plus grande que  $-k$  si en tout point  $x \in M$  l’opérateur de courbure  $R_x$  de  $(M, g)$  en  $x$  vérifie  $R + kI \in \mathcal{C}$ . On écrira  $R \geq_{\mathcal{C}} -kI$ .

Si, par exemple, on prend comme cône  $\mathcal{C}$  le cône  $\mathcal{C}_{PCO}$  des opérateurs positifs ou nuls,  $(M, g)$  est à  $\mathcal{C}$ -courbure plus grande que  $-k$  si en tout point  $x \in M$  les valeurs propres de l’opérateur de courbure sont plus grandes que  $-k$ . D’autres exemples sont connus, on renvoie aux sections 4.2 et 4.3 pour plus de détails. Remarquons que parmi ces exemples on trouve le cône  $\mathcal{C}_{IC1}$  des opérateurs «  $\overline{PIC1}$  », et que le théorème de Böhm et Wilking pour les variétés compactes à opérateur de courbure positif ou nul (Théorème 5) est aussi valable pour les variétés à opérateur de courbure vérifiant  $R \geq_{\mathcal{C}_{IC1}} 0$ , c’est un résultat dû à Brendle [Bre08].

Dans la suite de cette section, les cônes  $\mathcal{C}$  sont supposés vérifier les hypothèses 1 à 5 ci-dessus.

Le résultat central de ce chapitre est le Théorème 4.3.1 qui permet d'estimer à quelle vitesse une minoration de la  $\mathcal{C}$ -courbure peut se dégrader lorsque l'on applique le flot de Ricci, pourvu que l'on ait à l'avance un contrôle sur la courbure scalaire. On énonce ici ce résultat :

**Théorème 13** ([Ric11a]). *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , tout  $A \in (0, \frac{1}{4})$  et tout  $B > 0$ , il existe  $T > 0$  et  $K > 0$  tels que, si  $\mathcal{C} \subset S_B^2(\Lambda^2 \mathbb{R}^n)$  est une condition de courbure vérifiant les conditions précédentes et  $(M^n, g(t))_{t \in [0, T']}$  est un flot de Ricci tel que :*

1. à  $t = 0$ ,  $R_{g(0)} \geq_{\mathcal{C}} -\varepsilon$  pour un  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,
2. la courbure scalaire de  $(M, g(t))$  vérifie  $\text{Scal}_{g(t)} \leq \frac{A}{t} + B$  pour tout  $t \in (0, T')$ ,

alors pour tout  $t \in (0, T') \cap (0, T)$ , on a :

$$R_{g(t)} \geq_{\mathcal{C}} -K\varepsilon.$$

Cette estimation, combinée au Théorème de pseudolocalité de Perelman, permet une première réponse à la Question 6 :

**Théorème 14** ([Ric11a]). *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D > 0$  et  $\iota > 0$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que si une variété  $M$  compacte de dimension  $n$  admet une métrique vérifiant*

- $\text{diam}(M, g) \leq D$ ,
- $\text{inj}(M, g) \geq \iota$ ,
- $R_g \geq_{\mathcal{C}} -\varepsilon I$ ,

alors  $M$  admet une métrique à  $\mathcal{C}$ -courbure positive ou nulle.

On a aussi un élément de réponse à la Question 8 :

**Théorème 15** ([Ric11a]). *Si  $(X, d)$  est un espace métrique qui est limite au sens de Gromov-Hausdorff d'une suite  $(M_i, g_i)$  de variétés de dimension  $n$  vérifiant*

- $\text{diam}(M, g) \leq D$ ,
- $\text{inj}(M, g) \geq \iota$ ,
- $R_g \geq_{\mathcal{C}} -I$ ,

alors il existe un flot de Ricci  $(M, g(t))_{t \in (0, T)}$ , obtenu comme limite (à sous-suite près) quand  $i$  tends vers l'infini des flots des  $(M_i, g_i)$ , et qui admet  $(X, d)$  comme condition initiale métrique.



## Introduction

Cette réponse est très partielle. On sait par un résultat d'Anderson et Cheeger [AC92] que sous ces hypothèses, l'espace métrique  $(X, d)$  est une variété munie d'une métrique  $C^{0,\alpha}$ , en particulier  $(X, d)$  ne peut pas être trop singulier.

Les résultats qui suivent permettent de se passer d'un contrôle sur le rayon d'injectivité en le remplaçant par une minoration presque euclidienne sur le volume des boules, on note  $\omega_n$  le volume de la boule de rayon 1 dans  $\mathbb{R}^n$  :

**Théorème 16** ([Ric11a]). *Pour tout  $n$  et tout  $D > 0$  il existe un  $\delta > 0$  et un  $\kappa > 0$  tels que, si une variété compacte  $M$  de dimension  $n$  admet une métrique lisse telle que*

- $\text{diam}(M, g) \leq D$ ,
- $\text{vol}_g(B_g(x, 1)) \geq (1 - \delta)\omega_n$ ,
- $R \geq_{\mathcal{C}} -\kappa$ .

*Alors  $(M, g)$  admet une métrique à  $\mathcal{C}$ -courbure positive ou nulle.*

**Théorème 17** ([Ric11a]). *Soit  $n$  fixé, il existe  $\delta > 0$  et  $\kappa > 0$  tel que si  $(X, d)$  est un espace métrique compact qui est limite au sens de Gromov–Hausdorff d'une suite de variétés  $(M_i, g_i)$  de dimension  $n$  telles que :*

- $R_{g_i} \geq_{\mathcal{C}} -\kappa$ ,
- *pour tout  $x \in M_i$ ,  $\text{vol}_{g_i}(B_{g_i}(x, 1)) \geq (1 - \delta)\omega_n$ .*

*Alors il existe un variété lisse  $M$  munie d'un flot de Ricci  $g(t)$  pour  $t \in (0, T)$  qui admet  $(X, d)$  comme condition initiale métrique.*

On commence par donner une preuve des résultats qui suivent en renforçant un peu les hypothèses sur le cône  $\mathcal{C}$ , en utilisant des résultats dus à Cabezas-Rivas et Wilking [CW11]. C'est la section 4.5. Ces résultats sont ceux exposés dans [Ric11a]. On donne ensuite dans la section 4.6 une autre démonstration basée sur un récent théorème de pseudolocalité dû à Tian et Wang [TW12] et qui nécessite seulement que  $\mathcal{C}$  vérifie les hypothèses 1 à 5 précédemment citées. Une conséquence intéressante de ces résultats est le théorème suivant :

**Théorème 18.** *Pour toute dimension  $n$ , il existe  $\delta > 0$  tel que si  $(X, d)$  est un espace métrique qui est limite au sens de Gromov–Hausdorff de variétés compactes de dimension  $n$  vérifiant  $R \geq_{\mathcal{C}} -\delta$  et dont les boules de rayon 1 sont de volume au moins  $(1 - \delta)\omega_n$ , alors  $(X, d)$  est homéomorphe à une variété topologique.*

On retrouve avec ce résultat un cas particulier d'un théorème de Cheeger et Colding (Théorème 5.14 de [CC97]).

# 1. Géométrie Riemannienne, géométrie métrique, flot de Ricci

Dans ce chapitre, on compile les définitions et les résultats qui seront constamment utilisés dans cette thèse. Ce chapitre a pour but de fixer les notations et de servir de références pour les théorèmes les plus utilisés.

On commence par présenter quelques notions de géométrie riemannienne, on insiste sur les inégalités de comparaison et la convergence des variétés. On donne ensuite quelques notions de géométrie des espaces métriques, on insiste en particulier sur les espaces à courbure minorée au sens d'Alexandrov et sur la convergence au sens de Gromov-Hausdorff. Enfin, on donne quelques résultats sur le flot de Ricci, en particulier sur l'existence en temps court, l'évolution des quantités géométriques, le principe du maximum et la convergence des suites de flots.

Ce chapitre ne contient aucune preuve, on renvoie aux références en début de section pour les preuves des résultats pour lesquels une référence précise n'est pas donnée.

## 1.1. Géométrie Riemannienne

Pour cette section, on pourra consulter les ouvrages [GHL04], [Pet06] et [Jos11]. L'auteur a aussi appris énormément de l'encyclopédique [Ber03].

### 1.1.1. Courbures

**Définition 1.1.1.** *Soit  $M$  une variété lisse. Une métrique riemannienne sur  $M$  est la donnée en chaque point  $x \in M$  d'un produit scalaire  $g_x$  sur  $T_x M$  qui dépend de façon lisse de  $x$ .*

*Remarque 1.1.2.* La dépendance lisse en  $x$  peut se voir de plusieurs façons. On peut tout d'abord demander que pour tout champ de vecteur lisse  $V$  sur  $M$ ,  $x \mapsto g_x(V_x, V_x)$  est une fonction lisse de  $x$ . On peut aussi demander que  $g$  soit une section lisse du fibré  $S^2 T^* M$  des formes bilinéaires symétriques sur  $TM$ . Une dernière façon de voir est de considérer des coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$  et de demander à ce que les fonctions  $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$  soient  $C^\infty$ . On peut de même définir des notions de métriques de classe  $C^k$  ou  $C^{k,\alpha}$ . Sauf mention explicite, les variétés considérées seront supposées lisses.

La donnée d'une métrique Riemannienne permet de définir un calcul différentiel à tout ordre via la connexion de Levi-Civita.

**Définition 1.1.3.** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne. La connexion de Levi-Civita est l'unique connexion  $\nabla$  sur  $TM$  qui vérifie :*

1. Géométrie Riemannienne, géométrie métrique, flot de Ricci

1.  $\nabla$  est sans torsion :  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$  pour tout champs de vecteurs  $X$  et  $Y$ .
2.  $\nabla$  est compatible avec  $g$  :  $X.g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$  où  $X, Y$  et  $Z$  sont des champs de vecteurs.

La connexion s'étend aux 1-formes par la règle de Leibnitz, en posant  $X.(\omega(Y)) = (\nabla_X \omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y)$ . De même, on peut étendre  $\nabla$  aux tenseurs de type  $(p, q)$ .

Nous allons maintenant définir le tenseur de courbure de  $(M, g)$  :

**Définition 1.1.4.** *Le tenseur de courbure de  $(M, g)$  est défini par*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y, X]} Z$$

où  $X, Y$  et  $Z$  sont des champs de vecteurs.

*Remarque 1.1.5.* Certains ouvrages utilisent pour  $R$  l'opposé du tenseur que nous venons de définir. En utilisant la métrique on peut transformer ce tenseur  $(3, 1)$  en un tenseur  $(4, 0)$  que l'on notera encore  $R$  :

$$R(x, y, z, t) = g(R(x, y)z, t).$$

Les propriétés algébriques du tenseur de courbure sont résumés dans la proposition suivante :

**Proposition 1.1.6.** *Pour tout vecteurs  $x, y, z, t$ , on a :*

1.  $R(x, y, z, t) = -R(y, x, z, t) = -R(x, y, t, z)$ ,
2.  $R(x, y, z, t) = R(z, t, x, y)$ ,
3.  $R(x, y, z, t) + R(y, z, x, t) + R(z, x, y, t) = 0$ .

On va maintenant définir la notion d'opérateur de courbure, qui jouera un rôle central dans le chapitre 4. Tout d'abord, nous devons étendre  $g$  à  $\Lambda^2 TM$  en posant :

$$g(x \wedge y, z \wedge t) = g(x, z)g(y, t) - g(x, t)g(y, z).$$

**Définition 1.1.7.** *L'opérateur de courbure d'une variété riemannienne est l'endomorphisme symétrique  $R$  de  $\Lambda^2 TM$  défini par :*

$$g(R(x \wedge y), z \wedge t) = R(x, y, z, t).$$

Si  $V$  est un espace euclidien (ou le fibré tangent d'une variété riemannienne), on note  $S_B^2(\Lambda^2 V)$  l'espace vectoriel (ou le fibré) des opérateurs de courbure algébriques sur  $V$ , il est constitué des opérateurs symétriques  $R$  de  $\Lambda^2 V$  (muni du produit scalaire défini plus haut) qui vérifient l'identité de Bianchi :

$$g(R(x \wedge y), z \wedge t) + g(R(y \wedge z), x \wedge t) + g(R(z \wedge x), y \wedge t) = 0.$$

À partir de  $R$ , on peut construire différentes notions de courbure et de minoration ou de positivité de la courbure. Nous introduisons les plus usuelles ici, d'autres notions de courbure moins courantes seront présentées dans la section 4.2.

La courbure sectionnelle d'un plan  $\pi$  dans  $TM$  est définie par  $\text{sec}(\pi) = R(x, y, x, y)$  où  $x$  et  $y$  forment une base orthonormée de  $\pi$ . Une variété est dite à courbure sectionnelle positive ou nulle (ou minorée par  $k$ ) si pour tout plan  $\text{sec}(\pi)$  est positif ou nul (ou plus grande que  $k$ ) pour tout plan  $\pi$  dans  $TM$ .

On obtient une condition plus restrictive en imposant à l'opérateur symétrique  $R$  d'être positif ou nul (ou minoré). On dira qu'une variété est à opérateur de courbure minoré par  $k$  si pour tout  $\omega \in \Lambda^2 TM$ ,  $g(R(\omega), \omega) \geq k$ . Ceci revient à imposer qu'en tant qu'endomorphisme symétrique,  $R \geq kI$ , où  $I$  est l'identité de  $\Lambda^2 TM$ .

Le tenseur  $R$  et l'opérateur  $R$ , sont des objets complexes, qualifiés par Gromov dans [Gro91] de « petits monstres de l'algèbre (multi)linéaire ». Il est donc courant de réduire la complexité de  $R$  en prenant diverses traces. On définit ainsi la courbure de Ricci par :

$$\text{Ric}(x, y) = \sum_{i=1}^n R(x, e_i, y, e_i)$$

où  $x$  et  $y$  sont deux vecteurs tangents en un point  $x \in M$  et  $(e_i)_{i=1 \dots n}$  est une base orthonormée de  $T_x M$ . C'est une forme quadratique sur  $TM$ .

On peut encore prendre la trace de  $\text{Ric}$ , on obtient alors la courbure scalaire  $\text{Scal}$  qui est une fonction sur  $M$ . C'est aussi la moitié de la trace de l'opérateur de courbure  $R$ .

On utilisera souvent pour contrôler grossièrement la courbure la norme de Frobenius de l'opérateur de courbure :

$$|R| = \text{trace}(R R^T) = \text{trace}(R^2)$$

où  $R^T$  est la transposée de  $R$  par rapport au produit scalaire induit par  $g$  sur  $\Lambda^2 TM$ .

On aura parfois besoin de résultats de géométrie de comparaison, on notera :

$$\mathbb{S}_k^n = \begin{cases} \text{la sphère de rayon } \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ dans } \mathbb{R}^{n+1} \text{ si } k > 0, \\ \text{l'espace euclidien de dimension } n \text{ si } k = 0, \\ \text{l'espace hyperbolique de dimension } n \text{ et de courbure constante } k \text{ quand } k < 0. \end{cases}$$

Pour terminer, énonçons l'inégalité de Bishop-Gromov, que nous utiliserons fréquemment dans cette thèse.

**Théorème 1.1.8** (Bishop-Gromov). *Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne lisse à courbure de Ricci minorée par  $(n-1)kg$ . Soit  $x$  un point dans  $M$ , alors la fonction :*

$$r \mapsto \frac{\text{vol}_g(B_g(x, r))}{V_{k,n}(r)}$$

*est décroissante. Ici,  $V_{k,n}(r)$  est le volume d'une boule de rayon  $r$  dans  $\mathbb{S}_k^n$ .*

### 1.1.2. Convergence de Cheeger-Gromov des variétés.

On aura fréquemment besoin de faire converger des suites de variétés riemanniennes. On rappelle ici la définition de la convergence au sens de Cheeger-Gromov des variétés, et le Théorème de compacité pour cette convergence.

**Définition 1.1.9.** *Une suite  $(M_i, g_i, p_i)$  de variétés riemanniennes pointées converge vers une variété riemannienne pointée  $(M, g, p)$  de manière  $C^{k,\alpha}$  (resp.  $C^\infty$ ) s'il existe une exhaustion  $U_i$  de  $M$  par des ouverts relativement compacts contenant  $p$  et des difféomorphismes  $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i = \varphi_i(U_i) \subset M_i$  tels que  $\varphi_i(p) = p_i$  et les tirés en arrière  $\varphi_i^*g_i$  convergent vers  $g$  en norme  $C^{k,\alpha}$  (resp. pour toute norme  $C^k$ ) sur tout compact de  $M$ .*

*Remarque 1.1.10.* Les normes  $C^k$  et  $C^{k,\alpha}$  sont prises par rapport à la métrique  $g$ .

Remarquons que si la limite  $M$  est compacte, les variétés  $M_i$  sont toutes difféomorphes à  $M$  pour  $i$  assez grand.

Un critère de compacité pour cette convergence est le suivant :

**Théorème 1.1.11** ([GW88],[Pet06]). *Soit  $(M_i, g_i, p_i)$  une suite de variétés riemanniennes complètes. Supposons qu'il existe  $C$  et  $\iota_0$  tels que pour tout  $i$  :*

- $|R_{g_i}| \leq C$ ,
- Le rayon d'injectivité  $\text{inj}(M_i, g_i)$  est plus grand que  $\iota_0$ .

*Alors  $(M_i, g_i, p_i)$  admet une sous-suite qui converge de façon  $C^{1,\alpha}$  pour tout  $\alpha \in (0, 1)$ .*

*Remarque 1.1.12.* La limite est seulement une variété  $C^{1,\alpha}$ , et la courbure de celle-ci n'est donc pas bien définie. Pour obtenir une limite plus lisse et une convergence plus forte, on a besoin de bornes plus fortes sur  $R$ .

En particulier, si les normes des  $k_0$  premières dérivées covariantes de  $R$  sont bornées indépendamment de  $i$ , on a alors convergence  $C^{k+1,\alpha}$  pour tout  $k \leq k_0$  et tout  $\alpha \in (0, 1)$ .

## 1.2. Géométrie métrique

Pour pouvoir étudier la géométrie de certains espaces non-riemanniens, on va utiliser quelques résultats de géométrie des espaces métriques. Les notions que nous rappelons ici sont exposées en détail dans [BBI01]. On pourra aussi se référer à [Gro99].

Dans cette thèse, on utilisera  $(M, g)$  pour noter la variété riemannienne lisse  $(M, g)$ , mais aussi pour noter l'espace métrique  $(M, d_g)$  sous-jacent.

### 1.2.1. Convergence au sens de Gromov-Hausdorff

Commençons par définir la distance de Gromov-Hausdorff entre deux espaces métriques compacts :

**Définition 1.2.1.** *Soient  $(X_1, d_1)$  et  $(X_2, d_2)$  deux espaces métriques compacts. Une application  $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  est une  $\varepsilon$ -isométrie si :*

- $|d_1(x, y) - d_2(f(x), f(y))| \leq \varepsilon$  pour tout  $x$  et tout  $y$  dans  $X_1$ ,
- $\cup_{x \in X_1} B_{d_2}(f(x), \varepsilon) = X_2$ .

La distance de Gromov-Hausdorff  $d_{GH}((X_1, d_1), (X_2, d_2))$  entre  $(X_1, d_1)$  et  $(X_2, d_2)$  est l'infimum des  $\varepsilon > 0$  tels qu'il existe des  $\varepsilon$ -isométrie de  $X_1$  vers  $X_2$  et de  $X_2$  vers  $X_1$ .

Une suite  $(X_i, d_i)$  converge au sens de Gromov-Hausdorff si  $d_{GH}((X_i, d_i), (X, d))$  tend vers 0 quand  $i$  tends vers l'infini. Deux espaces métriques compacts sont isométriques si et seulement si la distance de Gromov-Hausdorff entre ceux-ci est nulle.

On peut étendre cette définition aux espaces pointés non-compacts :

**Définition 1.2.2.** Une suite  $(X_i, d_i, p_i)$  d'espaces métriques pointés converge au sens de Gromov-Hausdorff (pointé) vers  $(X, d, p)$  si pour tout  $r > 0$ , il existe des applications  $f_i : B_{d_i}(p_i, r) \rightarrow X$  et une suite  $\varepsilon_i$  tendant vers 0 telle que :

- $f_i(p_i) = p$ ,
- pour tout  $x$  et  $y$  dans  $B_{d_i}(p_i, r)$   $|d(f_i(x), f_i(y)) - d_i(x, y)| \leq \varepsilon_i$ ,
- $f_i(B_{d_i}(p_i, r))$  contient  $B_d(p, r - \varepsilon_i)$ .

On voit tout de suite l'intérêt de ce mode convergence en comparant les hypothèse du Théorème 1.1.11 et celles du théorème de compacité suivant :

**Théorème 1.2.3** ([Gro99]). Soit  $(M_i, g_i, p_i)$  une suite de variétés riemanniennes de dimension  $n$  fixée dont la courbure de Ricci est minorée par  $k(n - 1)g$ , alors la suite  $(M_i, g_i, p_i)$  admet une sous suite convergente au sens de Gromov-Hausdorff pointé.

En un certain sens la topologie définie par  $d_{GH}$  est à la topologie décrite dans la définition 1.1.9 ce que la topologie faible est à la topologie forte en analyse fonctionnelle, elle permet de faire converger des suites sous des hypothèses très faibles mais il n'est pas toujours facile de lier les propriétés de la limite aux propriétés des éléments de la suite.

Cependant, dans certaines conditions, on peut trouver des quantités continues utiles. Par exemple, le diamètre d'un espace métrique compacte est toujours continu pour la topologie définie par  $d_{GH}$ . De même, un théorème difficile dû à T. Colding [Col97] nous apprend que si  $(M_i, g_i)$  et  $(M, g)$  sont des variétés de dimension  $n$  à courbure de Ricci minorée et que  $(M_i, g_i)$  converge vers  $(M, g)$  au sens de Gromov-Hausdorff, alors le volume de  $(M_i, g_i)$  converge vers le volume de  $(M, g)$ . On utilisera aussi que la convergence de Gromov-Hausdorff à courbure de ricci minorée de variétés compactes de dimension fixée vers une variété lisse de même dimension implique la convergence en rapport des profils isopérimétriques, un résultat dû à V. Bayle [Bay03], voir section 4.4.3.

### 1.2.2. Espaces d'Alexandrov

Dans les chapitres 3 et 4, on étudiera la géométrie de certains « espaces métriques à courbure sectionnelle minorée ». On rappelle la définition de ces espaces et certaines de leur propriétés ici. En plus des références déjà données pour cette section, on peut citer l'article [BGP92].

Dans cette sous-section,  $(X, d)$  désignera un espace métrique géodésique : la distance entre deux points  $a$  et  $b$  dans  $X$  est égale à l'infimum des longueurs des courbes de  $a$  à  $b$  et cet infimum est atteint. Une courbe  $\gamma$  de  $a$  à  $b$  dont la longueur  $L(\gamma)$  est égale à  $d(a, b)$  est appelé « plus court chemin de  $a$  à  $b$  ».

Dans le plan euclidien, on peut définir l'angle  $\angle_0 abc$  entre  $ba$  et  $bc$  en utilisant uniquement la distance par

$$\cos(\angle_0 abc) = \frac{d(a, b)^2 + d(b, c)^2 - d(a, c)^2}{2d(a, b)d(b, c)}.$$

Par analogie, on définit l'angle de comparaison euclidien entre  $ba$  et  $bc$  (noté  $\tilde{\angle}_0 abc$ ) pour  $a, b$  et  $c$  dans un espace métrique  $X$  par :

$$\cos(\tilde{\angle}_0 abc) = \frac{d(a, b)^2 + d(b, c)^2 - d(a, c)^2}{2d(a, b)d(b, c)}.$$

C'est l'angle en  $\bar{b}$  d'un triangle euclidien  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$  dont les côtés  $\bar{a}\bar{b}$ ,  $\bar{b}\bar{c}$  et  $\bar{a}\bar{c}$  ont pour longueurs respectives  $d(a, b)$ ,  $d(b, c)$  et  $d(a, c)$ .

**Définition 1.2.4.** Soit  $a \in X$  et  $\alpha : [0, \varepsilon) \rightarrow X$  et  $\beta : [0, \varepsilon) \rightarrow X$  deux plus courts chemins partant de  $a$ . L'angle en  $a$  entre  $\alpha$  et  $\beta$  est défini par

$$\angle \alpha \beta = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\angle}_0 \alpha(t) a \beta(t)$$

si cette limite existe.

*Remarque 1.2.5.* Quand cette limite n'existe pas, il est parfois utile d'introduire l'angle supérieur  $\bar{\angle} \alpha \beta = \limsup_{t \rightarrow 0} \tilde{\angle}_0 \alpha(t) a \beta(t)$  qui lui existe toujours.

Avant de définir les espaces à courbure minorée, on va définir, de la même manière que l'on a défini l'angle de comparaison euclidien, l'angle de comparaison avec  $\mathbb{S}_k^2$ .

**Définition 1.2.6.** Soit  $a, b$  et  $c$  trois points dans  $(X, d)$ , l'angle de comparaison  $\tilde{\angle}_k abc$  est l'angle en  $\bar{b}$  du triangle  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$  de  $\mathbb{S}_k^2$  dont les côtés  $\bar{a}\bar{b}$ ,  $\bar{b}\bar{c}$  et  $\bar{a}\bar{c}$  ont pour longueurs respectives  $d(a, b)$ ,  $d(b, c)$  et  $d(a, c)$ , si ce triangle existe et est unique.

*Remarque 1.2.7.* On utilisera principalement les angles de comparaison pour  $k \leq 0$ , dans ce cas le triangle de comparaison existe et est unique quels que soient les distances  $d(a, b)$ ,  $d(b, c)$  et  $d(a, c)$ , en particulier, l'angle de comparaison est alors toujours bien défini.

Dans un espace géodésique  $(X, d)$ , on notera  $[ab]$  un plus court chemin de  $a$  à  $b$ . L'intérieur  $(ab)$  du plus court chemin  $[ab]$  est l'ensemble des points de  $[ab]$  différents de  $a$  et de  $b$ . On appellera triangle  $abc$  la donnée de trois points  $a, b$  et  $c$  de  $X$  et de trois plus courts chemins  $[ab]$ ,  $[ac]$  et  $[bc]$ . L'angle en  $a$  du triangle  $abc$ , noté  $\angle bac$  est l'angle entre les plus courts chemins  $[ab]$  et  $[ac]$  au sens de la définition 1.2.4.

**Définition 1.2.8.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique géodésique. On dit que  $(X, d)$  est un espace à courbure minorée par  $k$  au sens d’Alexandrov si les deux conditions suivantes sont réunies :

1. Pour tout triangle  $abc$  de  $X$ , on a les inégalités :

$$\angle abc \geq \tilde{\angle}_k abc \quad \angle bac \geq \tilde{\angle}_k bac \quad \angle bca \geq \tilde{\angle}_k bca$$

dès que les angles de comparaisons présents dans l’inégalité existent.

2. Soit  $[ab]$  un plus court chemin,  $c \in (ab)$  et  $d \in X$ , alors

$$\angle acd + \angle dc b \leq \pi,$$

pour tout plus court chemin  $[dc]$ .

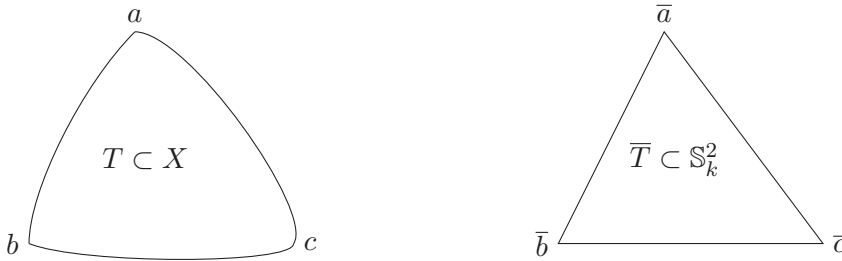


FIGURE 1.1.: Dans un espace à courbure minorée par  $k$ , les triangles sont plus « gros » que les triangles de comparaison.

Ce n’est pas la seule définition possible, on trouvera d’autres définitions équivalentes dans [BBI01]. On peut notamment demander que les médianes d’un triangle dans  $X$  soient plus longues que celles du triangle de comparaison associé dans  $\mathbb{S}_k^2$ . La caractérisation équivalente des espaces d’Alexandrov qui suit nous sera utile, c’est la condition du « quadruple » :

**Proposition 1.2.9** ([BGP92]). *Un espace métrique  $(X, d)$  est un espace d’Alexandrov à courbure minorée par  $k$  si et seulement si, pour tout points  $a, b, c, d$  dans  $X$ , on a :*

$$\tilde{\angle}_k bac + \tilde{\angle}_k cad + \tilde{\angle}_k dab \leq 2\pi.$$

Les variétés riemanniennes à courbure sectionnelle minorée par  $k$  sont des espaces d’Alexandrov à courbure minorée par  $k$ , c’est le Théorème de Toponogov (voir [BBI01] et aussi [Pet06]). Mais les espaces d’Alexandrov forment une famille beaucoup plus vaste, qui contient notamment des espaces métriques  $(X, d)$  où  $X$  n’est pas homéomorphe à une variété topologique.

Les espaces d’Alexandrov forment une classe d’espace qui est stable par convergence au sens de Gromov-Hausdorff.



## 1. Géométrie Riemannienne, géométrie métrique, flot de Ricci

Bien qu'ils forment une classe plus large que les variétés lisses à courbure minorée, les espaces d'Alexandrov sont relativement sympathiques pour des espaces métriques. Dans [BGP92], il est montré que leur dimension de Hausdorff est entière ou infinie. Les espaces d'Alexandrov  $(X, d)$  que l'on considèrera ici seront de dimension de Hausdorff finie  $n$ , la mesure de Hausdorff  $n$ -dimensionnelle  $\mu_n$  est alors appelée « mesure de volume de  $X$  », et sera notée  $\text{vol}_d$ .  $\text{vol}_d(X)$  est alors le volume de  $(X, d)$ . Ces notions coïncident avec celles définies à partir de la métrique  $g$  d'une variété riemannienne.

On utilisera les deux résultats suivants sur le volume des espaces d'Alexandrov, dont la preuve peut être trouvée dans l'article de Burago, Gromov et Perelman.

**Théorème 1.2.10** ([BGP92]). *Soit  $(X, d)$  un espace d'Alexandrov de dimension finie  $n$  à courbure minorée par  $k$ . Soit  $x$  un point dans  $X$ , alors la fonction :*

$$r \mapsto \frac{\text{vol}_d(B_d(x, r))}{V_{k,n}(r)}$$

*est décroissante. Ici,  $V_{k,n}(r)$  est le volume d'une boule de rayon  $r$  dans  $\mathbb{S}_k^n$ .*

**Théorème 1.2.11** ([BGP92]). *Soit  $\alpha > 0$  et  $(X_i, d_i)$  une suite d'espaces d'Alexandrov à courbure minorée par  $k$  qui converge au sens de Gromov-Hausdorff vers  $(X, d)$  alors la mesure de Hausdorff  $\alpha$ -dimensionnelle de  $X_i$  converge vers la mesure de Hausdorff  $\alpha$ -dimensionnelle de  $X$ .*

En particulier, la dimension d'un espace d'Alexandrov ne peut que décroître par convergence au sens de Gromov-Hausdorff.

### 1.3. Flot de Ricci

Le flot de Ricci a fait l'objet d'une intense activité éditoriale ces dernières années. Les résultats présentés ici peuvent être trouvés dans [CK04], [CLN06], [CCG<sup>+</sup>07], [CCG<sup>+</sup>08] et [CCG<sup>+</sup>10], ces cinq volumes constituant une référence sur le flot de Ricci dont l'auteur aurait eu du mal à se passer. On peut aussi citer [Top06]. Les travaux [MT07], [BBM<sup>+</sup>10] et [KL08], bien que plus consacrés à la preuve de la conjecture de Géométrisation de Thurston qu'au flot de Ricci, sont intéressants en particulier pour leur traitement des travaux de Perelman.

Une famille de métriques lisses  $g(t)$  sur une variété  $M$  dépendant de façon  $C^\infty$  du temps  $t$  dans un intervalle de  $\mathbb{R}$  est une solution du flot de Ricci si elle vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x, t) = -2 \text{Ric}_{g(t)}(x). \tag{1.1}$$

C'est une équation aux dérivées partielles faiblement parabolique et quasi-linéaire. Si  $t \in [a, b) \subset \mathbb{R}$ , la condition initiale du flot  $(M, g(t))_{t \in [a, b)}$  est la variété riemannienne  $(M, g(a))$ .

### 1.3.1. Existence et unicité dans un cadre lisse

Une des premières difficultés dans l'étude du flot de Ricci est le fait que l'équation n'est pas strictement parabolique. Ceci est dû à l'invariance de l'équation sous l'action du groupe des difféomorphismes de  $M$ , en effet si  $V$  est un champ de vecteur et  $\phi_t$  le flot de difféomorphismes associés, en dérivant la relation

$$\text{Ric}_{\phi_t^*g} = \phi_t^* \text{Ric}_g$$

on obtient que le symbole principale de l'opérateur différentiel  $g \mapsto \text{Ric}_g$  a un noyau non-trivial.

Cette difficulté peut soit être résolue en utilisant le théorème de Nash-Moser, c'est la méthode choisie par Hamilton dans [Ham82], ou en modifiant l'équation pour éliminer le noyau, idée due à DeTurck [DeT83]. Dans le cas d'une donnée initiale compacte et lisse, ceci suffit à établir l'existence et l'unicité des solutions du problème de Cauchy pour le flot de Ricci. Dans le cas non-compact, complet et à courbure bornée d'autres méthodes ont été nécessaires et ont été développées par Shi [Shi89] pour l'existence et par Chen et Zhu [CZ06] pour l'unicité. On obtient alors :

**Théorème 1.3.1** ([Ham82],[DeT83],[Shi89],[CZ06]). *Soit  $(M, g_0)$  une variété riemannienne lisse complète et à courbure sectionnelle bornée, alors le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) = -2 \text{Ric}_{g(t)}(x) \\ g(x, 0) = g_0(x) \end{cases}$$

*admet une unique solution maximale  $(M, g(t))_{t \in [0, T)}$  telle que pour tout  $t \in [0, T)$ , la variété riemannienne  $(M, g(t))$  soit lisse, complète et à courbure bornée.*

*De plus, les solutions maximales sont caractérisées par l'alternative suivante : soit  $T = +\infty$ , soit  $\limsup_{t \rightarrow T} \sup_{x \in M} |R_{g(t)}(x)| = +\infty$ .*

### 1.3.2. Évolution des quantités géométriques

Dans cette section on rappelle les équations d'évolution vérifiées par les différents invariants géométriques d'une variété  $(M, g(t))$  où  $g(t)$  est une solution du flot de Ricci.

Dans les travaux présentés ici, l'équation la plus intéressante est celle de l'évolution de l'opérateur de courbure. Cependant, calculée dans des coordonnées fixes, celle-ci présente des termes parasites qui gênent la compréhension. Une astuce due à Uhlenbeck permet de simplifier cette équation, l'idée est d'écrire l'opérateur de courbure dans des coordonnées sur  $M$  qui varient avec le temps. Un chapitre entier est consacré à cette construction dans le livre de Andrews et Hopper [AH11].

On considère sur les fibres de  $TM$  l'équation différentielle linéaire suivante :  $\frac{dV}{dt}(t) = \text{Ric}_{g(t)}(V)$ , et on note  $L_t : TM \rightarrow TM$  son flot.  $L_t$  agit par isométrie sur  $TM$  muni de la métrique  $g(0)$  dans  $TM$  muni de la métrique  $g(t)$ . Comme les propriétés de la courbure qui nous intéressent sont invariantes par isométrie de l'espace tangent, il revient

1. Géométrie Riemannienne, géométrie métrique, flot de Ricci

au même d'étudier l'évolution de  $R_{g(t)}(X, Y, U, V)$  ou celle de  $R_{g(t)}(L_t X, L_t Y, L_t U, L_t V)$ . Il se trouve que l'équation d'évolution de l'opérateur  $\hat{R}_{g(t)}$  défini par

$$g(t) \left( \hat{R}_{g(t)}(X \wedge Y), U \wedge V \right) = R_{g(t)}(L_t X, L_t Y, L_t U, L_t V)$$

peut être écrite de manière assez agréable.

Pour écrire l'évolution de  $\hat{R}$ , on va avoir besoin de définir certaines opération sur les opérateurs de courbure. On commence par identifier  $\Lambda^2 TM$  à  $\mathfrak{so}(TM)$ <sup>1</sup> de la manière suivante :

$$u \wedge v \mapsto (x \mapsto g(x, u)v - g(x, v)u).$$

Ceci munit  $\Lambda^2 TM$  d'un crochet de lie  $[\cdot, \cdot]$ . On note, pour  $\omega, \eta \in \Lambda^2 TM$ ,  $\text{ad}_\omega(\eta) = [\omega, \eta]$ . Enfin, on définit pour  $R_1$  et  $R_2$  deux opérateurs symétriques sur  $\Lambda^2 TM$  :

$$g((R_1 \# R_2)(\omega), \eta) = -\frac{1}{2} \text{trace}(R_1 \circ \text{ad}_\omega \circ R_2 \circ \text{ad}_\eta).$$

$\#$  définit une application bilinéaire symétrique de  $S^2 \Lambda^2 TM \times S^2 \Lambda^2 TM$  dans  $S^2 \Lambda^2 TM$ . On notera  $R^\# = R \# R$ .

**Définition 1.3.2.** On pose, pour  $R \in S^2_B \Lambda^2 TM$   $Q(R) = R^2 + R^\#$ , où  $R^2 = R \circ R$  est le carré usuel d'un endomorphisme.

*Remarque 1.3.3.* Ces constructions ne dépendent que de la structure euclidienne et sont donc valables en remplaçant  $(TM, g)$  par un espace euclidien  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

On peut maintenant écrire l'évolution de  $\hat{R}$  le long du flot de Ricci ;

**Proposition 1.3.4** ([Ham86]).

$$\frac{\partial \hat{R}_{g(t)}}{\partial t} = \Delta \hat{R} + Q(\hat{R})$$

où  $\Delta \hat{R}$  est la trace de la dérivée covariante seconde de  $\hat{R}$ .

Dans la suite de ce travail, quand on étudiera l'évolution de  $R$  sous le flot de Ricci, on étudiera en fait celle de  $\hat{R}$ , mais pour alléger les notations nous écrirons encore  $R$ . Comme les propriétés de  $R$  qui nous intéressent sont invariantes par l'action des isométries des fibres du tangent, cela ne fait aucune différence.

Pour le calcul de l'évolution de la courbure de Ricci et de la courbure scalaire, des coordonnées fixes suffisent pour avoir une expression maniable.

**Proposition 1.3.5** ([Ham82]).

$$\frac{\partial \text{Ric}}{\partial t}(U, V) = \Delta \text{Ric}(U, V) - 2g(\text{Ric}(U), \text{Ric}(V)) + 2 \sum_{i,j} \text{Ric}(e_i, e_j) R(U, e_i, V, e_j)$$

où  $e_i$  est une base de l'espace tangent pour le produit scalaire  $g(t)$ .

$$\frac{\partial \text{Scal}}{\partial t} = \Delta \text{Scal} + 2|\text{Ric}|^2$$

<sup>1</sup>le  $\mathfrak{so}$  est défini par rapport à la métrique  $g(t)$  sur  $TM$ .

L'évolution de la forme volume nous sera aussi utile :

**Proposition 1.3.6** ([Ham82]).

$$\frac{\partial}{\partial t} d \operatorname{vol}_g(t) = - \operatorname{Scal}_{g(t)} d \operatorname{vol}_{g(t)}.$$

### 1.3.3. Principe du maximum

On va ici présenter le principe du maximum d'Hamilton pour les tenseurs, qui sera un outil essentiel dans cette thèse. Commençons par la version scalaire :

**Théorème 1.3.7.** *Soit  $(M, g(t))_{t \in [0, t]}$  une variété munie d'une famille lisse de métriques riemanniennes. Et  $u$  une fonction lisse de  $M \times [0, T]$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq \Delta_{g(t)} u + F(u)$$

où  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction localement lipschitzienne.

Supposons que  $u(x, 0) \geq C$  et notons  $\phi : [0, T'] \rightarrow \mathbb{R}$  la solution maximale du problème de Cauchy  $\frac{d\phi}{dt} = F(\phi)$ ,  $\phi(0) = C$ , alors pour tout  $t \in [0, T']$  et tout  $x \in M$  :

$$u(x, t) \geq \phi(t).$$

Pour généraliser ce principe aux équations paraboliques vérifiées par des fonctions tensorielles, il nous faut introduire quelques notations.

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel munie d'une métrique  $h$  indépendante du temps au dessus de  $(M, g(t))$  où  $g(t)$  est une famille lisse de métriques sur  $M$ , on note  $\nabla(t)$  la connexion de Levi-Civita sur  $TM$ . On suppose que  $E$  est muni d'une famille de connexions  $D(t)$  compatibles<sup>2</sup> avec  $h$ . Posons, pour  $\alpha$  une section de  $E$ , et  $U$  et  $V$  des champs de vecteurs sur  $M$  :

$$D(t)_{X,Y}^2 \alpha = D(t)_X(D(t)_Y \alpha) - D(t)_{\nabla(t)_X Y} \alpha.$$

Le laplacien de  $\alpha$  est défini par :

$$\Delta_{g(t)} \alpha = \operatorname{trace}_{g(t)} D(t)^2 \alpha.$$

On considère une famille  $\alpha(t)_{t \in [0, T]}$  de sections de  $E$  qui sont solutions de l'équation :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \Delta \alpha + F(\alpha)$$

où  $F : E \rightarrow E$  est une application préservant les fibres de  $E$ .

Soit  $\mathcal{K}$  une partie fermée de  $E$  dont chaque fibre est convexe. On suppose aussi que  $\mathcal{K}$  est préservé par le transport parallèle défini par les connexions  $D(t)$ . Le principe du maximum d'Hamilton peut alors s'énoncer ainsi :

---

<sup>2</sup> $X.h(\alpha, \beta) = h(D(t)_X \alpha, \beta) + h(\alpha, D(t)_X \beta)$  pour tout champ de vecteur  $X$  sur  $M$  et toutes sections  $\alpha$  et  $\beta$  de  $E$ .

1. Géométrie Riemannienne, géométrie métrique, flot de Ricci

**Théorème 1.3.8** ([Ham86]). *On note, pour tout  $x \in M$ ,  $F_x$  la restriction de  $F$  en un champ de vecteur sur la fibre  $E_x$  de  $E$  au dessus de  $x$ , et  $\mathcal{K}_x = \mathcal{K} \cap E_x$ .*

*On suppose que pour tout  $x \in M$  et tout  $a_0 \in \mathcal{K}_x$ , la solution  $a(t)$  du problème de Cauchy  $\frac{d}{dt}a = F_x(a)$ ,  $a(0) = a_0$  reste dans  $\mathcal{K}_x$  pour  $t \in [0, T)$ .*

*Alors toute famille  $\alpha(t)_{t \in [0, T)}$  de sections de  $E$  vérifiant l'équation :*

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \Delta \alpha + F(\alpha)$$

*et telle que  $\alpha(0)_x \in \mathcal{K}_x$  pour tout  $x$  dans  $M$ , vérifie, pour tout  $x \in M$  et  $t \in [0, T)$  :*

$$\alpha(t)_x \in \mathcal{K}_x.$$

Remarquons que l'équation d'évolution déduite pour  $\hat{R}$  dans la partie précédente a toutes les propriétés nécessaire pour lui appliquer ce principe du maximum.

On aura aussi besoin d'une version un peu plus fine, due à Chow et Lu [CL04], qui permet de se servir dans l'étude du flot de l'équation différentielle  $\frac{d}{dt}a = F_x(a)$  d'informations connues a priori sur  $\alpha$ .

**Théorème 1.3.9** ([CL04]). *Sous les hypothèses du Théorème précédent, considérons une famille  $\mathcal{P}(t)$  de parties de  $E$ . Supposons maintenant que les solutions du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}a = F_x(a) \\ a(0) = a_0 \end{cases}$$

*où  $a_0 \in \mathcal{K}_x$  soient sortent de  $\mathcal{P}_x(t_0)$  pour un certain temps  $t_0 > 0$ , soient restent dans  $\mathcal{K}_x$ .*

*Soit toute famille  $\alpha(t)_{t \in [0, T)}$  de sections de  $E$  vérifiant l'équation :*

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \Delta \alpha + F(\alpha),$$

*telle que  $\alpha(0)_x \in \mathcal{K}_x$  pour tout  $x$  dans  $M$ , et telle que  $\alpha(t)_x \in \mathcal{P}(t)_x$  pour tout  $t \in [0, T)$  et  $x \in M$ .*

*Alors pour tout  $x \in M$  et  $t \in [0, T)$  :*

$$\alpha(t)_x \in \mathcal{K}_x.$$

De façon imagée, la partie  $\mathcal{P}(t)$  est un piège dans lequel la solution de l'équation aux dérivées partielles est confinée, et le théorème nous dit que l'on peut se servir de ce piège pour forcer les solutions de l'équation différentielle associée à rester dans  $\mathcal{K}$ .

#### 1.3.4. Suites de flots de Ricci

On aura fréquemment besoin d'une théorie analogue à celle développée en 1.1.2 mais s'appliquant à des suites de flot de Ricci plutôt qu'à des suites de variétés riemanniennes. Cette notion de convergence pour les flots géométriques a été développée par Hamilton dans [Ham95a].

**Définition 1.3.10.** Une suite  $(M_i, g_i(t), p_i)_{t \in (\alpha, \omega), i \in \mathbb{N}}$  de flots de Ricci pointés converge vers un flot de Ricci pointé  $(M, g(t), p)_{t \in (\alpha, \omega)}$  s'il existe une exhaustion de  $M$  par des ouverts relativement compacts  $U_i$  et des difféomorphismes  $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \subset M_i$  tels que  $\varphi_i(p) = p_i$  et les tirés en arrière  $\varphi_i^* g_i(t)$  convergent sur tout compact de  $M \times (\alpha, \beta)$  vers  $g(t)$  pour toutes les normes  $C^k$ .

On n'a pas ici défini la convergence  $C^{k, \alpha}$  d'une suite de flots car les propriétés fortement régularisantes du flot de Ricci permettent d'obtenir assez facilement un convergence  $C^\infty$ .

**Théorème 1.3.11** ([Ham95a]). Soit  $(M_i, g_i(t), p_i)_{t \in (\alpha, \omega), i \in \mathbb{N}}$  une suite de flots de Ricci complets. Supposons qu'il existe  $C$  et  $\iota_0$  tels que pour tout entier  $i$  et tout temps  $t$  :

- $|R_{g_i(t)}| \leq C$ ,
- Le rayon d'injectivité  $\text{inj}(M_i, g_i(0), p_i)$  est plus grand que  $\iota_0$ .

Alors  $(M_i, g_i(t), p_i)$  admet une sous-suite qui converge au sens de la définition précédente.

La convergence étant  $C^\infty$ , la limite est un flot de variétés lisses, et les bornes sur la courbure passent à la limite dans ce cas. Remarquons aussi que la borne sur la courbure pourrait être de la forme  $|R_{g_i(t)}| \leq C(t)$  où  $C(t)$  dépend continument de  $t$ , on obtiendrait encore une sous-suite convergente en procédant par extraction diagonale.

1. *Géométrie Riemannienne, géométrie métrique, flot de Ricci*

## 2. Flot de Ricci à condition initiale métrique, la dimension 3

On va ici donner une réponse à la question « Qu'est-ce que le flot de Ricci d'un espace métrique ? ». La première section donne une définition possible ainsi qu'une méthode de construction, inspirée par les travaux de Miles Simon en dimension 3 ([Sim09b] et [Sim09a]). En guise d'exemple, on reprend dans les sections suivantes les résultats de ces deux articles en les formulant avec cette définition.

### 2.1. Condition initiale métrique

#### 2.1.1. Définition

Dans cette section, on introduit une notion de condition initiale « faible » pour le flot de Ricci.

Le flot de Ricci a prouvé sa valeur dans l'étude de la géométrie des variétés lisses. Étant données les propriétés fortement régularisantes de celui-ci, il semble naturel de vouloir l'utiliser pour étudier des espaces peu lisses. Il serait par exemple souhaitable de pouvoir définir un flot pour des espaces métriques qui ne sont pas a priori des variétés riemanniennes.

Une autre motivation pour étendre la notion de condition initiale est l'étude du flot de Ricci avec chirurgie en dimension 3. Les constructions actuellement connues du flot avec chirurgie reposent sur de délicats choix de paramètres qui rendent la solution construite hautement non-canonique. Perelman dit d'ailleurs dans [Per03] :

*« It is likely that by passing to the limit in this construction one would get a canonically defined Ricci flow through singularities, but at the moment I don't have a proof of that. »*

L'idée, vague et hors de portée à l'heure qu'il est, serait, étant donné un flot de Ricci (normalisé)  $(M^3, g(x, t))_{t \in [0, T]}$  sur une variété de dimension 3 qui vérifie

$$\limsup_{t \rightarrow T} \sup_{x \in M} |R(x, t)| = +\infty,$$

de considérer un espace métrique  $(X, d)$  qui serait canoniquement construit à partir de  $(M^3, g(x, T))$  et de lui appliquer un flot de Ricci bien défini.

Dans les contextes que nous venons de mentionner, la notion usuelle de condition initiale ( $g(x, 0) = g_0(x)$ ) est inopérante. On doit la remplacer par une condition qui fait intervenir le seul objet bien défini sur notre hypothétique condition initiale : la distance.



## 2. Flot de Ricci à condition initiale métrique, la dimension 3

Une première tentative serait d'introduire un condition initiale au sens de Gromov-Hausdorff :

**Définition 2.1.1.** Soit  $(M, g(t), x)_{t \in (0, T)}$  un flot de Ricci pointé lisse. On dit qu'un espace métrique pointé  $(X, d, y)$  est condition initiale au sens de Gromov-Hausdorff de  $(M, g(t), x)_{t \in (0, T)}$  si la famille d'espaces métriques pointés  $(M, d_{g(t)}, x)_{t \in (0, T)}$  tend vers  $(X, d, y)$  au sens de Gromov-Hausdorff quand  $t$  tend vers 0.

C'est bien une généralisation de la notion usuelle de condition initiale. Sans hypothèses supplémentaires, cette définition est très souple et autorise certaines bizarreries peu souhaitables.

*Exemple 2.1.2.* Soit  $(M, h)$  une variété hyperbolique compacte de dimension  $n$  et de courbure  $-1$ , un flot de Ricci de  $(M, h)$  est  $g(t) = (1 + 2(n-1)t)h$ . Quand  $t$  tends vers  $-\frac{1}{2(n-1)}$ ,  $(M, g(t))$  converge au sens de Gromov-Hausdorff vers un point. En particulier, on a pas unicité du flot de Ricci dont la condition initiale au sens de Gromov-Hausdorff est un point, et en effectuant des produits, on voit que le flot à condition initiale au sens de Gromov-Hausdorff n'est jamais unique.

L'exemple précédent est en quelque sorte dégénéré, on perd des dimensions en approchant la condition initiale. L'exemple suivant montre que l'on peut avoir non-unicité sans perdre de dimensions.

*Exemple 2.1.3.* Soit  $(M^2, h)$  une surface hyperbolique non compacte qui admet un nombre fini de cusps, on peut considérer le flot  $(M^2, g_1(t))$  défini par  $g_1(t) = (1 + 2t)h$ , qui est unique parmi les solutions à courbure bornée par [CZ06]. Ce flot admet  $(M^2, h)$  comme condition initiale au sens de Gromov-Hausdorff.

Topping a construit dans [Top10] un autre flot de Ricci de  $(M^2, h)$ . La construction peut être décrite ainsi :  $(M^2, h)$  est conforme à une surface compacte  $(\tilde{M}^2, \tilde{h})$  privée d'un nombre fini de points  $x_1, \dots, x_N$ , le flot construit  $(g_2(t))$  est telle que la métrique  $g_2(t)$  converge vers  $h$  de façon lisse sur  $\tilde{M}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$  quand  $t$  tends vers 0, et les points  $x_i$  partent à l'infini. De façon imagée, le flot rebouche les cusps de  $(M, h)$ . Si  $x$  n'est pas un des  $x_i$ ,  $(\tilde{M}^2, g_2(t), x)$  converge vers  $(M^2, h)$  au sens de Gromov-Hausdorff.

On a donc deux flots très différents de  $(M^2, h)$ . C'est un autre exemple de non-unicité.

Remarquons aussi que si  $x$  est l'un des  $x_i$ ,  $(\tilde{M}^2, g_2(t), x)$  converge vers la demi droite  $\mathbb{R}_+$  munie de sa métrique usuelle.

Comme le montre l'exemple précédent, la dépendance au point base choisi peut aussi poser problème, on va donc donner une définition moins souple, mais indépendante du point base, et garantissant une certaine ressemblance entre  $X$  et  $M$  :

**Définition 2.1.4.** On dit que  $(X, d)$  est la condition initiale métrique du flot lisse  $(M, g(t))_{t \in (0, T)}$  si, quand  $t$  tend vers 0, les distances Riemanniennes  $d_{g(t)}$  convergent uniformément sur tout compact de  $M \times M$  vers une distance  $\tilde{d}$  sur  $M$  telle que  $(M, \tilde{d})$  est isométrique à  $(X, d)$ .

Montrons maintenant la ressemblance annoncée entre  $M$  et  $X$  :

**Proposition 2.1.5.** *Si  $(X, d)$  est la condition initiale métrique du flot de Ricci lisse  $(M, g(t))_{t \in (0, T)}$  où  $M$  est compacte, alors  $X$  et  $M$  sont homéomorphes.*

*Démonstration.* Par convergence uniforme des distances, on voit que  $\tilde{d}$  est continue sur  $M \times M$  quand  $M$  est munie de sa topologie usuelle  $\mathcal{T}$  de variété. Ceci implique que l'identité  $(M, \mathcal{T}) \rightarrow (M, \tilde{d})$  est continue. Une bijection continue d'un espace compact dans un espace séparé est automatiquement fermée.  $\square$

La définition que nous venons d'introduire est sans doute trop restrictive pour certaines applications. Il serait souhaitable, notamment dans l'étude du flot avec chirurgie en dimension 3, de permettre des changements dans la topologie.

### 2.1.2. Une méthode de construction

La méthode employée dans cette thèse pour construire un flot de Ricci à condition initiale métrique est une méthode d'approximation. Cette méthode a été initiée par M. Simon dans [Sim09b] et [Sim09a]. On suppose que  $(X, d)$  peut-être approché au sens de Gromov-Hausdorff par une suite de variétés riemanniennes lisses  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de dimension fixée  $n$ .

L'idée est alors de considérer les flots de Ricci  $(M_i, g_i(t))$  ayant pour condition initiale classique  $(M_i, g_i)$ , et d'en prendre la limite quand  $i$  tend vers l'infini. L'idée générale est illustrée dans la figure 2.1.

La proposition suivante donne une condition suffisante en termes de propriétés des flots des  $(M_i, g_i)$  pour construire un flot de Ricci avec condition initiale métrique  $(X, d)$ . Cet énoncé est une reformulation d'une partie des résultats de [Sim09a] :

**Proposition 2.1.6.** *Soit  $(M_i, g_i, p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variétés Riemanniennes complètes à courbure bornée de dimension  $n$  fixée qui converge au sens de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique  $(X, d, p)$ . On note  $g_i(t)$  le flot de  $(M_i, g_i)$ . On suppose :*

(i) *Il existe  $T > 0$  tel que le flot  $g_i(t)$  existe au moins sur  $[0, T)$ .*

(ii) *Il existe  $K > 0$  tel que, pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et  $t \in [0, T)$ ,*

$$\text{Ric}_{g_i(t)} \geq -K g_i(t).$$

(iii) *Il existe une fonction continue strictement positive  $f : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  et intégrable telle que, pour  $i \in \mathbb{N}$  et  $t \in (0, T)$  :*

$$|\mathbf{R}_{g_i(t)}| \leq f(t)^2.$$

(iv) *Il existe  $v_0 > 0$  tel que  $\text{vol}(B_{g_i(T/2)}(p_i, 1)) \geq v_0$ .*

*Alors, à extraction près, la suite de flots  $(M_i, g_i(t), p_i)_{t \in (0, T)}$  converge au sens de Cheeger-Gromov-Hamilton vers un flot  $(M, g(t), p)_{t \in (0, T)}$  qui admet  $(X, d)$  comme condition initiale métrique. De plus, le flot  $(M, g(t))$  vérifie les conditions (i)-(iv).*

## 2. Flot de Ricci à condition initiale métrique, la dimension 3

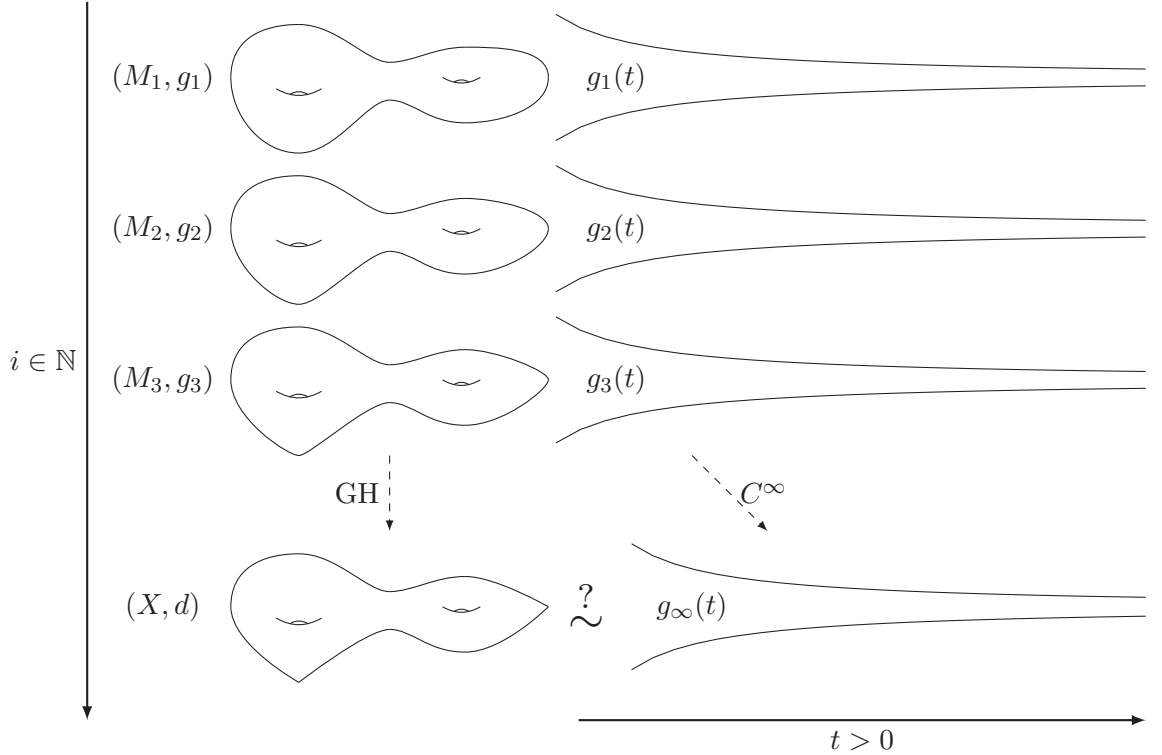


FIGURE 2.1.: La méthode de construction

*Démonstration.* Établissons d'abord l'existence d'une sous-suite convergente pour la suite  $(M_i, g_i(t), p_i)_{t \in (0, T)}$ . Il ne manque que l'hypothèse sur le rayon d'injectivité en  $t = T/2$  pour appliquer le Théorème 1.3.11. Grâce à la minoration du volume de  $B_{g_i(T/2)}(p_i, 1)$  et à la borne uniforme sur la courbure, on peut appliquer un résultat de Cheeger-Gromov et Taylor [CGT82] pour minorer le rayon d'injectivité. On a donc une sous suite convergente, que nous noterons encore  $(M_i, g_i(t), p_i)_{t \in (0, T)}$  par commodité.

Soit  $(M, g(t), p)_{t \in (0, T)}$  la limite au sens de Cheeger-Gromov-Hamilton de la suite de flots  $(M_i, g_i(t), p_i)_{t \in (0, T)}$ , cette limite vérifie aussi les estimations (i)-(iv) de l'énoncé. Montrons que  $g(t)$  admet  $(X, d)$  comme condition initiale métrique.

On note  $d_t$  la distance sur  $M$  induite par la métrique  $g(t)$ . Posons  $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ . La borne inférieure sur la courbure de Ricci permet de montrer que pour  $0 < s < t < T$  :

$$d_s \geq e^{-C(t-s)} d_t.$$

La borne supérieure sur la courbure permet quand à elle d'avoir :

$$d_s \leq d_t + C(F(t) - F(s)).$$

Dans les deux estimations précédentes,  $C$  est une constante ne dépendant que de la dimension. Ces estimations sont prouvés dans [Ham95b], section 17. On obtient finalement

que :

$$e^{-C(t-s)}d_t \leq d_s \leq d_t + C(F(t) - F(s)).$$

Ceci montre que la famille de fonction  $(d_t)_{t \in (0, T)}$  vérifie le critère de Cauchy uniforme sur tout compact de  $M \times M$ . Donc  $d_t$  converge uniformément sur tout compact vers une fonction continue  $\tilde{d}$  sur  $M \times M$ .  $\tilde{d}$  est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire, de plus si  $x \neq y$ , les inégalités précédemment établies montrent que  $\tilde{d}(x, y) \geq e^{Ct}d_t(x, y) > 0$ . Donc  $\tilde{d}$  est bien une distance sur  $M$ .

Montrons maintenant que  $(M, \tilde{d})$  est isométrique à  $(X, d)$ . Pour cela, on montre que, pour tout  $r > 0$ ,  $d_{GH}((B_d(x, r), d), (B_{\tilde{d}}(p, r), \tilde{d})) = 0$ .

Pour chaque  $i \in \mathbb{N}$ , notons  $d_{i,t}$  la distance sur  $M_i$  induite par la métrique  $g_i(t)$ . On a, dès que  $0 < s < t < T$  :

$$e^{-C(t-s)}d_{i,t} \leq d_{i,s} \leq d_{i,t} + C(F(t) - F(s)).$$

où  $d_{i,t}$  est la distance induite par la métrique  $g_i(t)$ . Ceci nous donne, en faisant tendre  $s$  vers 0 :

$$d_{GH}((B_{d_{i,t}}(p_i, r), d_{i,t}), (B_{d_{i,0}}(p_i, r), d_{i,0})) \leq \eta(t)$$

où  $\eta(t)$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers 0 ( $\eta$  dépend de  $r$  mais pas de  $i$ ). Soit  $t_\varepsilon > 0$  tel que  $\eta(t) \leq \varepsilon$  dès que  $t \leq t_\varepsilon$ . Comme  $(M_i, g_i(0), p_i)$  converge au sens de Gromov-Hausdorff vers  $(X, d, p)$ , on a un  $i_\varepsilon$  tel que, dès que  $i \geq i_\varepsilon$  :

$$d_{GH}((B_d(x, r), d), (B_{d_{i,0}}(p_i, r), d_{i,0})) \leq \varepsilon.$$

En particulier, en utilisant l'inégalité triangulaire, pour  $i \geq i_\varepsilon$  et  $t \leq t_\varepsilon$  :

$$d_{GH}((B_d(x, r), d), (B_{d_{i,t}}(p_i, r), d_{i,t})) \leq 2\varepsilon.$$

De plus,  $(M, g(t), p)$  tend vers  $(M, \tilde{d}, p)$  quand  $t$  tend vers 0, on peut donc trouver un  $t'_\varepsilon \in (0, t_\varepsilon]$  tel que, quand  $t \leq t'_\varepsilon$  :

$$d_{GH}((B_{\tilde{d}}(p, r), \tilde{d}), (B_{d_{X,t}}(p, r), d_{X,t})) \leq \varepsilon.$$

Ensuite, les  $(M_i, g_i(t'_\varepsilon), p_i)$  converge au sens de Cheeger-Gromov vers  $(M, g(t'_\varepsilon), p)$ , la convergence a donc aussi lieu au sens de Gromov-Hausdorff, on a donc un  $i'_\varepsilon \geq i_\varepsilon$  tel que :

$$d_{GH}((B_{d_{i,t}}(p_i, r), d_{i,t}), (B_{d_t}(p, r), d_t)) \leq \varepsilon.$$

On a alors, pour  $i \geq i'_\varepsilon$  et  $t \leq t'_\varepsilon$  :

$$d_{GH}((B_{d_{i,t}}(p_i, r), d_{i,t}), (B_{\tilde{d}}(p, r), \tilde{d})) \leq 2\varepsilon.$$

Et donc :

$$d_{GH}((B_d(x, r), d), (B_{\tilde{d}}(p, r), \tilde{d})) \leq 4\varepsilon.$$

Comme  $\varepsilon$  est arbitraire dans le raisonnement précédent,  $(M, \tilde{d})$  et  $(X, d)$  sont isométriques, ce qui conclut la preuve de la proposition.  $\square$

## 2. Flot de Ricci à condition initiale métrique, la dimension 3

Les propriétés (i)-(iv) du flot limite  $(M, g(t))$  construit par la proposition 2.1.6 permettent d'étendre la proposition 2.1.5 en l'absence de l'hypothèse de compacité sur  $M$ , la preuve de ce résultat est aussi contenue dans [Sim09a].

**Proposition 2.1.7.** *Le flot  $(M, g(t))$  construit par la proposition 2.1.6 est tel que  $M$  est homéomorphe à  $X$ .*

*Démonstration.* Dans la preuve de la proposition 2.1.5, on a montré, sans utiliser la compacité de  $M$ , que l'identité de  $(M, \mathcal{T})$  dans  $(M, \tilde{d})$  est une bijection continue, où  $\mathcal{T}$  est la topologie usuelle de variété de  $M$ .

Il suffit de montrer que l'identité est ouverte. Soit  $O$  un ouvert de  $\mathcal{T}$ . Fixons  $x \in O$ . On peut trouver un  $\varepsilon > 0$  tel que la boule  $B_{d_{T/2}}(x, \varepsilon)$  soit incluse dans  $O$ . De plus, on a vu dans la preuve de la proposition 2.1.6, que :

$$\tilde{d} \geq e^{-cT/2} d_{T/2}.$$

Donc  $B_{\tilde{d}}(x, e^{-cT/2}\varepsilon) \subset B_{d_{T/2}}(x, \varepsilon) \subset O$ . Donc  $O$  est ouvert pour  $\tilde{d}$ .  $\square$

Appliquons cette méthode sur un premier cas, celui des variétés simplement connexes presque  $\frac{1}{4}$ -pincées mentionné dans l'introduction.

*Exemple 2.1.8.* Soit  $(M_i, g_i)$  une suite de variétés riemanniennes simplement connexes de dimension  $n$  fixée qui vérifient

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{i} \leq \sec_{g_i} \leq 1.$$

On suppose que la suite  $(M_i, g_i)$  converge au sens de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique  $(X, d)$ , ce qui est toujours possible à extraction près. On peut en fait dire que la convergence est  $C^{1,\alpha}$  en utilisant le théorème de compacité de Cheeger-Gromov, mais ce n'est pas nécessaire ici. Rappelons ici que les espaces métriques  $(X, d)$  ainsi construits ont été étudiés par Berger dans [Ber83] pour montrer le théorème de la sphère pour les variétés presque  $\frac{1}{4}$ -pincées.

On va appliquer la proposition 2.1.6 pour construire un flot de Ricci de condition initiale métrique  $(X, d)$ . Considérons donc les flots  $g_i(t)$  de condition initiale  $g_i(0) = g_i$ .

Les bornes sur la courbure sectionnelle permettent d'affirmer que la norme de l'opérateur de courbure  $|R_{g_i}|$  est borné indépendamment de  $i$ . En appliquant le principe du maximum à  $|R_{g_i(t)}|^2$ , on obtient qu'il existe un temps  $T > 0$  et une constante  $C > 0$  tel que les flots  $g_i(t)$  existent au moins pour  $t \in [0, T)$  et vérifient

$$\forall t \in [0, T) |R_{g_i(t)}| \leq C.$$

Ceci implique en particulier que les conditions (i), (ii) et (iii) de la proposition 2.1.6 sont satisfaites.

Reste à vérifier la condition (iv). Pour cela, remarquons que pour  $i$  assez grand le rayon d'injectivité des  $(M_i, g_i)$  est minoré par  $\pi$ . En dimension paire, c'est un résultat dû à Klingenberg [Kli61]. En dimension impaire, c'est un théorème d'Abresch et Meyer

[AM96]. Par l'inégalité de Bishop-Guenther, ceci implique que le volume des boules de rayon inférieur à  $\pi$  dans  $(M_i, g_i)$  est minoré par le volume d'une boule de même rayon dans  $\mathbb{S}^n$  munie sa métrique à courbure constante égale à 1. En utilisant le fait que la courbure est borné indépendamment de  $i$  et de  $t$  le long du flot, on obtient que pour un temps  $t_0$  assez petit et pour un rayon  $r_0$  assez petit, les boules de rayon  $r_0$  ont un volume minoré indépendamment de  $i$ . Ceci permet d'appliquer la proposition 2.1.6.

On a donc montré que toute limite  $(M, g(t))$  des flots  $(M_i, g_i(t))$  est un flot de Ricci de condition initiale métrique  $(X, d)$ . On a de plus par la proposition 2.1.7 que  $M$  et  $X$  sont homéomorphes. Ces flots ont été considérés par Petersen et Tao dans [PT09] pour montrer le théorème des la sphère différentiable pour les variétés simplement connexes presque  $\frac{1}{4}$ -pincée, mais le fait qu'ils aient pour condition initiale  $(X, d)$  n'est pas mentionné dans [PT09]. Cet exemple fait donc le lien entre les travaux de Berger et de Petersen et Tao sur les variétés presque  $\frac{1}{4}$ .

## 2.2. Un théorème de M. Simon

Dans cette section, nous présentons le travail de M. Simon dans [Sim09b] et [Sim09a]. C'est à la connaissance de l'auteur le premier exemple d'étude d'un flot de Ricci à condition initiale métrique, et les techniques développées dans ce travail seront souvent utilisées dans la suite de la thèse.

La présentation donnée est pour partie issue de l'article d'exposition [Ric10].

**Définition 2.2.1.** *On note  $\mathcal{M}(3, k, v_0)$  l'ensemble des espaces métriques pointés  $(X, d, p)$  qui sont limite au sens de Gromov-Hausdorff d'une suite  $(M_i, g_i, p_i)$  de variétés riemanniennes pointées de dimension 3 à courbure bornée vérifiant :*

- pour tout  $i$ ,  $\text{Ric}_{g_i} \geq -kg_i$ .
- pour tout  $x \in M$ ,  $\text{vol}_{g_i}(B_{g_i}(x, 1)) \geq v_0$ .

Un des principaux résultats de [Sim09a] s'énonce alors ainsi :

**Théorème 2.2.2** (Théorème 8.2 dans [Sim09a]). *Pour tout  $k$  et  $v_0$ , et tout espace métrique  $(X, d) \in \mathcal{M}(3, k, v_0)$ , il existe un flot de Ricci de dimension 3  $(M, g(t))_{t \in (0, T)}$  admettant  $(X, d)$  comme condition initiale métrique.*

Pour montrer ce théorème, on va montrer certaines estimations sur le flot des variétés d'une suite  $(M_i, g_i)$  approchant  $(X, d)$ . Celles-ci nous permettront d'appliquer la proposition 2.1.6.

**Théorème 2.2.3.** *Pour tout  $k > 0, v_0 > 0$ , il existe  $T > 0$  et  $K > 0$  tels que si  $(M, g)$  est une variété riemannienne de dimension 3 complète à courbure bornée qui vérifie :*

- $\text{Ric}_g \geq -kg$ ,
- pour tout  $x \in M$ ,  $\text{vol}_g(B_g(x, 1)) \geq v_0$ .

## 2. Flot de Ricci à condition initiale métrique, la dimension 3

alors le flot de Ricci  $(M, g(t))$  tel que  $g(0) = g$  existe au moins pour  $t \in [0, T)$  et vérifie :

- (i) pour  $t \in [0, T)$ ,  $\text{Ric}_{g(t)} \geq -Kg(t)$ ,
- (ii) pour  $t \in [0, T)$  et  $x \in M$ ,  $\text{vol}_{g(t)}(B_{g(t)}(x, 1)) \geq v_0/2$ ,
- (iii) pour  $t \in (0, T)$ ,  $|\mathbf{R}_{g(t)}| \leq \frac{K}{t}$ .

### 2.3. Preuve du Théorème

On va maintenant donner les points clés de la preuve du Théorème 2.2.3.

**Lemme 2.3.1** ([Sim09a], Lemme 4.3). *Soit  $(M^3, g(t))_{t \in [0, T)}$  une solution complète à courbure bornée du flot de Ricci avec  $T \leq 1$ . On suppose que, pour tout  $t \in [0, T)$  :*

- (i)  $\text{Ric}_{g(t)} \geq -kg(t)$ .
- (ii) Pour tout  $x$  dans  $M$ ,  $\text{vol}_{g(t)}(B(x, 1)) \geq v_0 > 0$

Alors, il existe  $c_0$  ne dépendant que de  $k$  et  $v_0$  tel que, pour tout  $t \in (0, T)$  :

$$\sup_M \|\mathbf{R}_{g(t)}\| \leq \frac{c_0}{t}$$

En particulier, la solution n'est pas maximale.

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde. On suppose qu'on peut trouver une suite de flots de Ricci  $(M_i, g_i(t))_{t \in [0, T_i)}$  vérifiant les hypothèses du lemme et tels que :

$$\sup_{(x,t) \in M_i \times (0, T_i)} |\mathbf{R}_{g_i(t)}(x)|t \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On peut alors trouver des points  $(p_i, t_i) \in M_i \times (0, T_i)$  et une suite  $\varepsilon_i$  tendant vers 0 tels que :

$$|\mathbf{R}_{g_i(t_i)}(p_i)|t_i = -\varepsilon_i + \sup_{(x,t) \in M_i \times (0, t_i]} |\mathbf{R}_{g_i(t)}(x)|t \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Remarquons que comme  $t_i \leq 1$ , on a que  $c_i = |\mathbf{R}_{g_i(t_i)}(x_i)| \geq |\mathbf{R}_{g_i(t_i)}(x_i)|t_i$  tend vers l'infini quand  $i$  tend vers l'infini.

On effectue maintenant une mise à l'échelle autour des points  $(p_i, t_i)$ . Posons :

$$\tilde{g}_i(\tilde{t}) = c_i g_i\left(t_i + \frac{\tilde{t}}{c_i}\right).$$

C'est une suite de flot de Ricci dont chacun est défini au moins sur  $(-t_i c_i, 0]$ . Par définition des  $(p_i, t_i)$ ,  $-t_i c_i$  tend vers  $-\infty$ .

En utilisant encore la définition des  $(p_i, t_i)$ , on voit que  $|\mathbf{R}_{\tilde{g}_i(\tilde{t})}|$  est majoré sur tout intervalle compact de  $(-\infty, 0]$  dès que  $i$  est assez grand. De plus, l'hypothèse de minoration de la courbure de Ricci et le théorème de Bishop-Gromov permettent d'affirmer que, pour tout  $p$  dans  $M_i$ , tout  $\tilde{t}$  dans  $(-t_i c_i, 0]$  et tout  $r$  dans  $(0, \sqrt{c_i})$  :

$$\tilde{v}_0 r^3 \leq \text{vol}_{\tilde{g}_i(\tilde{t})}(B(p, r)) \leq l r^3. \quad (2.1)$$

où  $l$  et  $\tilde{v}_0$  ne dépendent que de  $v_0$ . Cette estimation permet, avec la majoration obtenue précédemment sur la courbure, par un théorème dû à Cheeger, Gromov et Taylor [CGT82], de minorer le rayon d'injectivité des  $\tilde{g}_i$ .

On peut alors, grâce au théorème de compacité d'Hamilton, extraire un flot limite  $(M_\infty, \tilde{g}_\infty(\tilde{t}), p_\infty)_{\tilde{t} \in (-\infty, 0)}$ . C'est une solution ancienne (son temps d'existence n'est pas borné à gauche) à courbure de Ricci positive ou nulle. De plus, on a  $\|Rm_{\tilde{g}_\infty(0)}(p_\infty)\| = 1$ , la solution n'est donc pas plate. L'estimation (2.1) permet de voir que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \text{vol}_{\tilde{g}_\infty(0)}(B(p_\infty, r))r^{-3} > 0$$

ce qui contredit un Théorème de Perelman qui assure qu'en dimension 3, pour toute solution ancienne non plate, la limite considérée est nulle. ([Per02], 11.4)  $\square$

Le lemme suivant contrôle le volume des petites boules en temps court le long d'une solution du flot de Ricci.

**Lemme 2.3.2** ([Sim09a], Corollaire 6.2). *Soit  $(M^3, g(t))_{t \in [0, T]}$  une solution complète du flot de Ricci satisfaisant, pour  $t \in (0, T)$  :*

$$(i) \text{ Ric}_{g(t)} \geq -kg(t),$$

$$(ii) |\mathbf{R}_{g(t)}| \leq \frac{c_0}{t}.$$

*On suppose qu'à  $t = 0$ , on a :*

$$\text{Pour tout } x \text{ dans } M \text{ vol}_{g(0)}(B_{g(0)}(x, 1)) \geq v_0$$

*Alors, pour tout  $t$  dans  $[0, T'']$  où  $T''$  ne dépend que de  $c_0, k$  et  $v_0$  :*

$$\text{Pour tout } x \text{ dans } M \text{ vol}_{g(t)}(B_{g(t)}(x, 1)) \geq \frac{1}{2}v_0.$$

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde. Si on trouve une suite de flots  $(M_i, g_i(t))$  vérifiant les hypothèses et tels que l'on a une suite  $t_i$  tendant vers 0 et des points  $p_i \in M_i$  vérifiant :

$$\text{vol}_{g_i(t_i)}(B_{g_i(t_i)}(p_i, 1)) < \frac{1}{2}v_0.$$

Une sous suite des  $(M_i, g_i(0), p_i)$  converge au sens de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique  $(X, d, p)$ . De plus, un théorème de Colding (voir [Col97]) donne la continuité du volume (comme mesure de Hausdorff tridimensionnelle) pour la convergence au sens de Gromov-Hausdorff à courbure de Ricci minorée. On a donc

$$\text{vol}_d(B_d(p, 1)) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \text{vol}_{g_i(0)}(B_{g_i(0)}(p_i, 1)) \geq v_0.$$

De plus, par les estimations sur l'évolution des distances établies lors de la preuve de la proposition 2.1.6, comme  $t_i$  tend vers 0,  $(M_i, g_i(t_i), p_i)$  converge aussi vers  $(X, d, p)$ . On en déduit que  $\text{vol}_d(B_d(p, 1)) < \frac{1}{2}v_0$ , c'est une contradiction.  $\square$



## 2. Flot de Ricci à condition initiale métrique, la dimension 3

Le lemme qui suit permet de minorer la courbure de Ricci d'une solution.

**Lemme 2.3.3** ([Sim09a], Lemme 5.1). *Soit  $(M^3, g(t))_{t \in [0, T]}$  une solution complète du flot de Ricci satisfaisant  $\text{Ric}_{g(0)} \geq -\varepsilon g(0)$  où  $\varepsilon$  est assez petit. Alors, sur  $[0, T] \cap [0, T')$  (où  $T'$  est une constante strictement positive universelle), on a :*

$$\text{Ric}_{g(t)} \geq -\varepsilon(1 + \beta t)g(t) - \varepsilon(1 + \beta t)t \text{Scal}_{g(t)} g(t),$$

où  $\beta$  est une constante strictement positive explicite assez grande et indépendante de  $\varepsilon$ .

*Démonstration.* Considérons d'abord le cas où  $M$  est compacte. On pose :

$$L(t) = \text{Ric}_{g(t)} + t\delta(t) \text{Scal}_{g(t)} g(t) + \delta(t)g(t)$$

avec  $\delta(t)$  défini par  $\delta(t) = \varepsilon(1 + \beta t)$ .  $L(t)$  vérifie une équation de la forme :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \Delta L + N(L)$$

où  $N(L)$  est un 2-tenseur symétrique dépendant du temps  $t$  et des valeurs propres du tenseur de Ricci. On va utiliser le principe du maximum d'Hamilton (Théorème 1.3.8) pour montrer que  $L \geq 0$  sur un petit intervalle  $[0, T')$ . Pour cela, on considère un tenseur  $L \geq 0$ , et un vecteur  $v$  dans le noyau de  $L$ . Des calculs élémentaires mais un peu longs, pour lesquels on renvoie à [Sim09a], montrent qu'alors  $N(L) \geq 0$ . On peut donc appliquer le principe du maximum.

Si  $M$  n'est pas compacte, on adapte la preuve en remplaçant  $L$  par  $\tilde{L} = L + afg$  où  $f(x, t)$  est une fonction tendant vite vers  $+\infty$ . Ceci assure que le minimum de  $\tilde{L}$  est atteint sur  $M$ . Un choix judicieux de  $f$  permet aux calculs mentionnés dans le paragraphe précédent de rester valables sans trop de modifications. On peut alors montrer que la condition  $\tilde{L} \geq 0$  est préservée par le flot sur un petit intervalle de temps, on peut même choisir cet intervalle indépendamment de  $a$ . En faisant tendre  $a$  vers 0, on obtient le résultat désiré.  $\square$

Les lemmes que nous venons d'exposer permettent de montrer le Théorème 2.2.3.

*Preuve du Théorème 2.2.3.* Remarquons tout d'abord que les estimations que nous voulons montrer se comportent bien par changement d'échelle, on se permet donc de supposer que  $(M^3, g_0)$  vérifie  $\text{Ric}_{g_0} \geq -\varepsilon$  où  $\varepsilon$  sera précisé dans la suite.

On note  $g(t)_{t \in [0, T]}$  la solution maximale du flot de Ricci à courbure bornée donnée par le théorème de Shi. On définit  $T_M$  comme étant le plus grand  $\tau$  tel que, pour tout  $t$  dans  $[0, \tau)$  :

$$\inf_{x \in M} \text{vol}_{g(t)}(B_{g(t)}(x, 1)) > \frac{v_0}{2} \quad \text{et} \quad \inf_M \text{Ric} > -1.$$

Il faut montrer que  $T_M$  est minoré par une constante strictement positive ne dépendant que de  $\varepsilon$  et  $v_0$ . Tout d'abord,  $T_M$  est strictement positif en utilisant le principe du maximum et des estimations assez standard. Ensuite  $T_M < T$  par le Lemme 2.3.1. On peut aussi supposer que  $T_M \leq 1$ . Alors, par le Lemme 2.3.1, on a sur  $[0, T_M]$  :

$$|\text{R}| \leq \frac{c_0}{t}$$

où  $c_0$  ne dépend que de  $v_0$ . Le Lemme 2.3.3 montre que, pour  $t \in [0, \min(T', 1/\beta, T_M)]$  :

$$\text{Ric}_{g(t)} \geq (-2\varepsilon(\text{Scal}_{g(t)} t + 1)g(t).$$

Supposons maintenant que  $\varepsilon < 1/8c_0$ , on a alors, sur  $[0, \min(T', 1/\beta, T_M)]$ ,  $\text{Ric}_{g(t)} \geq -\frac{1}{2}g(0)$ .

Ensuite, le Lemme 2.3.2 montre que, pour  $t \in [0, \min(T'', T', 1/\beta, T_M)]$ , on a le non-effondrement suivant :  $\inf_{x \in M} \text{vol}_{g(t)} B_{g(t)}(x, 1) \geq 2v_0/3$ .

En particulier, vu la définition de  $T_M$  :

$$T_M \geq \min(T'', T', 1/\beta) = S.$$

Les estimations (ii) et (iii) du Théorème 2.2.3 sont donc vérifiées, l'estimation (i) en découle par le Lemme. □

## 2.4. Quelques applications

On va terminer ce chapitre en exposant quelques applications géométriques des Théorèmes 2.2.2 et 2.2.3. Les deux premières sont tirées des travaux de M. Simon dans [Sim09a] et [Sim09b]. Nous les exposons ici car ils constituent un modèle pour les résultats du Chapitre 4 en dimension supérieure. Les deux applications suivantes ont fait l'objet de la note [Ric11b].

La première application est la suivante, et concerne la structure topologique des espaces métriques dans  $\mathcal{M}(3, k, v_0)$ .

**Théorème 2.4.1** ([Sim09a], Proposition 9.3). *Soit  $(X, d)$  un espace métriques appartenant à  $\mathcal{M}(3, k, v_0)$ , alors  $(X, d)$  est homéomorphe à une variété lisse de dimension 3.*

*Démonstration.* Les estimations du Théorème 2.2.3 permettent de construire un flot de Ricci  $(M^3, g(t))$  dont la condition initiale métrique est  $(X, d)$  (Théorème 2.1.6). La proposition 2.1.7 montre alors que  $X$  et  $M$  sont homéomorphes. □

Le théorème qui suit donne la structure topologique des variétés de dimension 3 à courbure de Ricci presque positive.

**Théorème 2.4.2** ([Sim09b], Théorème 1.7). *Étant donnés  $V > 0$  et  $D > 0$ , on peut trouver  $\varepsilon > 0$  tel que toute variété  $(M, g)$  compacte de dimension 3 vérifiant :*

$$(i) \text{ vol}(M, g) \geq V,$$

$$(ii) \text{ diam}(M, g) < D,$$

$$(iii) \text{ Ric}_g \geq -\varepsilon g$$

## 2. Flot de Ricci à condition initiale métrique, la dimension 3

admet une métrique à courbure de Ricci positive ou nulle.

En particulier,  $M$  est difféomorphe à un quotient de  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^3$  par un groupe discret d'isométries sans point fixe pour leurs métriques standards

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde. On suppose qu'on peut trouver une suite  $(M_i, g_i)$  de variétés de dimensions 3 ne vérifiant pas les conclusions du théorème et telles que :

1.  $\text{vol}(g_i) \geq v_0$ ,
2.  $\text{diam}(g_i) \leq D$ ,
3.  $\text{Ric}_{g_i} \geq -\varepsilon_i$ ,

où  $\varepsilon_i$  est une suite tendant vers 0. On note  $(M_i, g_i(t))$  la solution du flot de Ricci dont la condition initiale est  $(M_i, g_i)$ . Le Théorème 2.2.3 montre que chacun des flots  $g_i(t)$  existe au moins pour  $t \in [0, T)$ . De plus, pour tout  $i$  et tout  $t \in (0, T)$  :

- $|R| \leq \frac{K}{t}$ ,
- $\text{vol}(M, g) \geq V/2$
- $\text{diam}(M, g_i(t)) \leq De^{c_1 t}$ ,
- $\text{Ric}_{g_i(t)} \geq -\varepsilon_i(1 + \beta t)g_i(t) - \varepsilon_i(1 + \beta t)t \text{Scal}_{g_i(t)} g_i(t)$ .

On peut donc considérer la limite  $(M, g(t))_{t \in (0, T)}$  de cette suite de flots. La deuxième estimation montre que  $M$  est compact. Les  $M_i$  sont donc toutes difféomorphe à  $M$  pour  $i$  assez grand.

À l'aide de la borne inférieure sur la courbure de Ricci de  $g_i(t)$ , on a  $\text{Ric}_{g(t)} \geq 0$ . Or les  $M_i$  sont toutes difféomorphes à  $M$  pour  $i$  assez grand, c'est une contradiction.  $\square$

Les deux applications qui suivent ont été exposées dans la note [Ric11b]. On établit dans le théorème qui suit un théorème de finitude spécifique à la dimension 3.

**Théorème 2.4.3** ([Ric11b]). *Soient  $V, D > 0$  et  $k \in \mathbb{R}$ . L'ensemble des variétés compactes de dimension 3 admettant une métrique riemannienne  $g$  telle que  $\text{vol}(g) > V$ ,  $\text{diam}(g) < D$  et  $\text{Ric}_g > -kg$  ne contient qu'un nombre fini de variétés à difféomorphisme près.*

*Remarque 2.4.4.* En dimension 4, Perelman a construit en 1994 des variétés à courbure de Ricci strictement positive, diamètre 1 et volume minoré dont les nombres de Betti sont arbitrairement grands. (voir [Per97])

Des résultats dans cette direction ont été obtenus par Anderson et Cheeger au début de années 90. Ils sont valables en toute dimension mais requièrent des hypothèses plus forte. [AC91] demande, en plus des hypothèses du Théorème 2.4.3, une borne supérieure sur la courbure de Ricci et sur la norme  $L^{d/2}$  de l'opérateur de courbure, où  $d$  est la dimension. [AC92] remplace la borne sur le volume par une borne inférieure sur le rayon d'injectivité.

*Démonstration.* Fixons  $V, D$  et  $k$  et supposons que le théorème soit faux. On peut alors trouver une suite de variétés de dimension 3  $M_i$  munies de métriques riemanniennes  $g_i$  vérifiant :

- $\text{vol}(g_i) > V$ ,
- $\text{diam}(g_i) < D$ ,
- $\text{Ric}_{g_i} > -kg$ .

et où les  $M_i$  ne sont pas difféomorphes deux à deux.

En remplaçant  $g_i$  par  $\frac{1}{D^2}g_i$ , on peut supposer que  $\text{diam}(g_i) < 1$ . On est donc dans les hypothèses du Théorème 2.2.3, et on a une suite de flots de Ricci  $(M_i, g_i)$  dont on peut extraire un flot limite  $(M, g(t))$  où  $M$  est compacte grâce à l'hypothèse sur le diamètre. Les  $M_i$  sont donc difféomorphes à  $M$  pour  $i$  assez grand, ce qui est absurde.  $\square$

La dernière application que nous présentons est une preuve alternative d'un théorème de Cheeger et Colding.

**Théorème 2.4.5** ([CC97], Théorème A.1.12). *Soit  $(M_i, g_i)$  une suite de variétés compactes lisses de dimension 3 vérifiant  $\text{Ric}_{g_i} \geq -kg$  et qui converge au sens Gromov-Hausdorff vers une variété compacte lisse de dimension 3  $(M, g)$ , alors les  $M_i$  sont difféomorphes à  $M$  pour  $i$  assez grand.*

*Démonstration.* Par l'absurde, si le théorème est faux, on peut supposer à extraction près que toutes les  $M_i$  ne sont pas difféomorphes à  $M$ . Les  $(M_i, g_i)$  convergent au sens de Gromov-Hausdorff vers  $(M, g)$ . De plus,  $0 < D = \text{diam}(g) < +\infty$  car  $M$  est compacte. Comme le diamètre est continu pour la distance de Gromov-Hausdorff, on a :

$$\text{diam}(g_i) < 2D$$

pour  $i$  assez grand.

De plus, par un théorème de Colding, le volume est continu pour la distance de Gromov-Hausdorff, donc, pour  $i$  assez grand :

$$\text{vol}(g_i) > \frac{\text{vol}(g)}{2} = \frac{v_0}{2}.$$

En utilisant les Théorèmes 2.2.3 et 2.2.2, on a donc que la suite des flots de Ricci  $(M_i, g_i(t))$  de condition initiale  $(M_i, g_i)$  converge (à extraction près) vers un flot  $(\tilde{M}, \tilde{g}(t))$  de condition initiale métrique  $(M, g)$ , on peut alors utiliser la Proposition 2.1.5 pour montrer que  $M$  et  $\tilde{M}$  sont homéomorphes.  $\square$

2. *Flot de Ricci à condition initiale métrique, la dimension 3*

## 3. Unicité en dimension 2

Dans ce chapitre on s'intéresse au flot de Ricci de certaines surfaces singulières dont l'existence est garantie par les résultats du Chapitre 2. On montre en particulier que pour une certaine classe de surfaces compactes, la condition initiale métrique est suffisant pour garantir l'unicité du flot. Ceci permet aussi de montrer un résultat de continuité du flot par rapport aux variations au sens de Gromov-Hausdorff de la condition initiale. Ces résultats ont été exposés dans l'article [Ric12].

Dans la première section, on énonce le théorème principal de ce chapitre. La section suivante est ensuite dédiée à la mise en place des résultats de géométrie métrique des surfaces que nous utiliserons pour montrer le Théorème 3.1.1, ces résultats sont dus à Alexandrov et son élève Reshetnyak. Dans la section 3.3, on montre l'existence du flot en utilisant les outils mis en place au Chapitre 2. La section suivante montre que la condition initiale métrique détermine la classe conforme du flot, on utilise ici de manière cruciale les résultats d'Alexandrov et Reshetnyak. La dernière section conclut la preuve par un argument standard d'équations aux dérivées partielles.

### 3.1. Énoncé(s)

Le principal résultat de ce chapitre est le suivant :

**Théorème 3.1.1** ([Ric12]). *Soit  $(X, d)$  une surface compacte à courbure supérieure à  $-1$  au sens d'Alexandrov. Alors il existe un flot de Ricci  $(M^2, g(t))_{t \in (0, T)}$  tel que :*

- (i)  $K_{g(t)} \geq -1$  pour tout  $t$  dans  $(0, T)$ .
- (ii)  $(M^2, g(t))$  admet  $(X, d)$  comme condition initiale métrique.

De plus ce flot est l'unique flot vérifiant (i) et (ii) à difféomorphisme de  $M^2$  près.

*Remarque 3.1.2.* L'unicité doit se comprendre au sens où, si  $(M^2, g(t))_{t \in (0, T)}$  et  $(\hat{M}^2, \hat{g}(t))$  vérifient les conditions (i) et (ii) alors il existe un difféomorphisme  $\varphi : M^2 \rightarrow \hat{M}^2$  tel que  $\varphi^* \hat{g}(t) = g(t)$ .

On peut reformuler ce résultat de deux manières différentes, on peut d'abord affaiblir « condition initiale métrique » en « condition initiale au sens de Gromov-Hausdorff » :

**Corollaire 3.1.3** ([Ric12]). *Soit  $(X, d)$  une surface compacte à courbure supérieure à  $-1$  au sens d'Alexandrov. Alors il existe un flot de Ricci  $(M^2, g(t))_{t \in (0, T)}$  tel que :*

- (i)  $K_{g(t)} \geq -1$  pour tout  $t$  dans  $(0, T)$ .

### 3. Unicité en dimension 2

(ii)  $(M^2, g(t))$  admet  $(X, d)$  comme condition initiale au sens de Gromov-Hausdorff.

De plus ce flot est l'unique flot vérifiant (i) et (ii) à difféomorphisme de  $M^2$  près.

*Démonstration.* Pour montrer ce résultat à partir du Théorème 3.1.1, il suffit de montrer que  $(M, g(t))$  admet  $(X, d)$  comme condition initiale métrique.

La convergence au sens de Gromov-Hausdorff à courbure minorée implique que, quand  $t$  tend vers 0, le volume de  $(M, g(t))$  converge vers le volume de  $(X, d)$  (en tant que mesure de Hausdorff de dimension 2) et que le diamètre de  $(M, g(t))$  tend vers celui de  $(X, d)$ . Grâce au théorème de Bishop-Gromov, on obtient alors qu'il existe un réel  $v_0 > 0$  tel que :

$$\text{Pour tout } (x, t) \in M \times (0, T), \text{ vol}_{g(t)}(B_{g(t)}(x, 1)) \geq v_0.$$

On peut alors utiliser le Lemme 2.3.1 pour obtenir que sur un intervalle de temps  $(0, T') \subset (0, T)$  on a :

$$-1 \leq K_{g(t)} \leq \frac{C}{t}.$$

Par des arguments identiques à ceux de la preuve 2.1.6, on peut alors montrer que cette estimation sur la courbure implique la convergence uniforme des distances  $d_{g(t)}$ , et donc que  $(X, d)$  est condition initiale métrique du flot  $(M, g(t))$ , le théorème précédent s'applique donc.  $\square$

On peut aussi ne pas considérer la condition initiale métrique à isométrie près, on peut alors se passer de difféomorphismes pour l'unicité :

**Proposition 3.1.4** ([Ric12]). *Soit  $M^2$  une surface topologique compacte et  $d$  une distance qui fait de  $(M^2, d)$  une surface compacte à courbure supérieure à  $-1$ . Alors il existe un flot de Ricci  $g(t)_{t \in (0, T)}$  sur  $M$ , qui est lisse pour une structure différentiable sur  $M^2$ , tel que :*

(i)  $K_{g(t)} \geq -1$  pour tout  $t$  dans  $(0, T)$ .

(ii) Quand  $t$  tend vers 0,  $d_{g(t)}$  converge uniformément vers  $d$ .

De plus ce flot est l'unique flot vérifiant (i) et (ii).

Ce résultat n'est pas un corollaire direct du Théorème 3.1.1, mais ne nécessite qu'une adaptation mineure de la preuve de ce dernier, que nous indiquerons dans la section 3.4.

On termine cette section par énoncer un dernier corollaire de ces travaux, qui exprime que dans le cas des surfaces, le flot de Ricci dépend continûment de sa condition initiale au sens où convergence au sens de Gromov-Hausdorff des conditions initiales implique convergence lisse au sens de Hamilton des flots :

**Corollaire 3.1.5.** *Soit  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de surfaces compactes à courbure minorée par  $-1$  qui converge au sens de Gromov-Hausdorff vers une surface compacte  $(X, d)$  à courbure minorée au sens d'Alexandrov.*

*Alors chacun des flots de Ricci  $(M_i, g_i(t))$  de condition initiale (classique)  $g_i(0) = g_i$  existe au moins pour  $t \in (0, T)$ , où  $T$  est indépendant de  $i$ .*

De plus, la suite de flots  $(M_i, g_i(t))_{t \in (0, T)}$  converge au sens d'Hamilton quand  $i$  tend vers l'infini vers le flot de  $(X, d)$  dont l'existence et l'unicité est assurée par le Théorème 3.1.1.

*Démonstration.* Le volume et le diamètre des  $(M_i, g_i)$  tendent, quand  $i$  tend vers l'infini, vers le volume et le diamètre de  $(X, d)$ .

Notons  $(M_i, g_i(t))$  le flot de Ricci de condition initiale classique  $g_i(0) = g_i$ , défini pour  $t \in [0, T_i]$ . Ce flot vérifie  $K_{g_i(t)} \geq -1$ . On a alors, pour  $t \in [0, T_i] \cap [0, T]$  :

- $\text{diam}(M_i, g_i(t)) \leq e^t \text{diam}(M_i, g_i) \leq D$ ,
- $\text{vol}_{g_i(t)}(M_i) = \text{vol}_{g_i}(M_i) - 4\pi t \chi(M_i) \geq \text{vol}_{g_i}(M_i) - 8\pi t \geq V$

où  $T$ ,  $V$  et  $D$  ne dépendent que de  $(X, d)$ . Ces estimations permettent, par Bishop-Gromov, de minorer le volume des petites boules centrées en  $x \in M$  indépendamment de  $i$ ,  $x$  et  $t$ .

On peut alors utiliser le Lemme 2.3.1 pour obtenir la borne supérieure suivante sur la courbure :

$$-1 \leq K_{g_i(t)} \leq \frac{C}{t}$$

sur un intervalle de temps  $[0, T'] \subset [0, T]$ .

On peut alors appliquer la méthode de construction d'un flot à condition initiale métrique donnée par la Proposition 2.1.6 pour obtenir que toutes les valeurs d'adhérence de la suite de flot de Ricci  $(M_i, g_i(t))_{t \in (0, T)}$  sont des flots de Ricci  $g(t)$  vérifiant  $K_{g(t)} \geq -1$  et admettant  $(X, d)$  comme condition initiale métrique. Le Théorème 3.1.1 assure qu'il n'y a qu'une seule telle valeur d'adhérence.  $\square$

## 3.2. Surfaces d'Alexandrov

Les surfaces que nous allons considérer dans ce chapitre ont été étudiées en détail, d'abord par A. D. Alexandrov à partir des années 40, puis par ses continuateurs, on mentionnera en particulier des travaux dus à Y. G. Reshetnyak dans les années 60. On regroupe dans cette section les résultats qui nous seront utiles dans la suite. La plupart des énoncés seront donnés ici sans démonstrations précises, on renvoie pour cela aux monographies [Ale06], [AZ67] et [Res93]. Une exposition d'une partie de ces résultats dans un langage plus moderne peut aussi être trouvée dans [Tro09].

### 3.2.1. Définitions

Commençons par définir les deux classes de surfaces singulières qui vont nous intéresser. Dans la suite de ce chapitre,  $(X, d)$  sera un espace métrique compact et géodésique tel que  $X$  est une surface topologique.

La première classe de surfaces que l'on considérera est celle des surfaces  $(X, d)$  dont la courbure est minoré par  $k$  au sens de la définition 1.2.8.

L'autre classe de surfaces qui nous sera utile est la classe des surfaces compactes à courbure intégrale bornée.



### 3. Unicité en dimension 2

On appellera triangle plein de  $(X, d)$  un domaine  $T$  de  $X$  homéomorphe à un disque et bordé par une courbe fermée qui est la concaténation de 3 plus courts chemins  $[ab]$ ,  $[ac]$  et  $[bc]$ .  $T$  est dit simple si tout chemin reliant deux points  $x$  et  $y$  sur les côtés du triangle passant par l'extérieur de  $T$  est de longueur supérieure à un chemin de  $x$  à  $y$  passant par les côtés, voir figure 3.1. L'excès du triangle  $\Omega$  est défini par  $e(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ , où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont les angles de  $T$  en  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

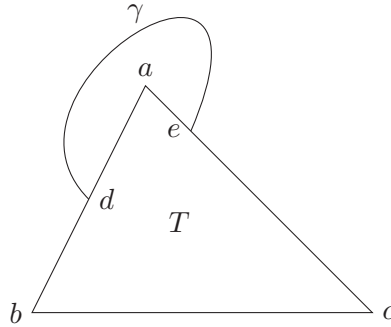


FIGURE 3.1.:  $T$  est simple si  $\gamma$  est plus long que  $|da| + |ae|$ .

On peut maintenant définir les surfaces à courbure intégrale bornée :

**Définition 3.2.1.**  $(X, d)$  est une surface compacte à courbure intégrale bornée s'il existe  $C > 0$  tel que pour toute famille finie de triangles simples disjoints  $(T_i)$  :

$$\sum_i e(T_i) < C$$

La proposition suivante montre que les surfaces à courbure minorée sont des surfaces à courbure intégrale bornée. L'idée de la preuve est issue du chapitre 5 de [Ale06], une estimation un peu plus précise quand la borne inférieure est non nulle se trouve dans [Mac98].

**Proposition 3.2.2.** Si  $(X, d)$  est une surface à courbure minorée par  $k \in \mathbb{R}$ , alors  $(X, d)$  est une surface à courbure intégrale bornée.

*Démonstration.* Soit  $(X, d)$  une surface à courbure minorée par  $k \in \mathbb{R}$ . Soit  $\mathcal{T}$  une collection finie de triangles simples dans  $X$ .

On complète  $\mathcal{T}$  en une triangulation  $\mathcal{T}'$  de  $X$  par des triangles simples, ceci est rendu possible par les résultats de la section 6 du chapitre 2 de [Ale06]. On note  $\mathcal{T}'$  l'ensemble des triangles de la triangulation,  $\mathcal{A}'$  l'ensemble de ses arrêtes et  $\mathcal{S}'$  l'ensemble de ses sommets. On note les angles d'un triangle  $T$   $\alpha_T$ ,  $\beta_T$  et  $\gamma_T$ .

Alors,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}'} e(T) = \sum_{T \in \mathcal{T}'} (\alpha_T + \beta_T + \gamma_T - \pi).$$

De plus, dans une surface à courbure minorée, la somme des angles entre différentes géodésiques issues d'un point est toujours inférieure à  $2\pi$  (grâce à la caractérisation des espaces d'Alexandrov donnée par la proposition 1.2.9), on a donc :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}'} e(T) \leq 2\#\mathcal{S}'\pi - \#\mathcal{T}'\pi.$$

Comme  $\mathcal{T}'$  est une triangulation,  $3\#\mathcal{T}' = 2\#\mathcal{A}'$ , et donc  $2\chi(X) = 2\#\mathcal{S}' - \#\mathcal{T}'$ . D'où :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}'} e(T) \leq 2\pi\chi(X).$$

Quand la courbure est supérieure ou égale à 0, l'excès est aussi supérieur à 0 et on a donc :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} e(T) \leq \sum_{T \in \mathcal{T}'} e(T) \leq 2\pi\chi(X),$$

ce qui conclut la preuve.

Supposons maintenant que la courbure est plus grande que  $-1$ . Alors Si  $T$  est un triangle géodésique dans  $X$ , on note  $\bar{T}$  le triangle de comparaison associé dans  $\mathbb{H}^2$ . Comme la courbure est minorée :

$$e(T) = \alpha_T + \beta_T + \gamma_T - \pi \geq \alpha_{\bar{T}} + \beta_{\bar{T}} + \gamma_{\bar{T}} - \pi = e(\bar{T}).$$

De plus, dans le plan hyperbolique, l'excès d'un triangle est l'opposé de son aire :  $e(\bar{T}) = -\text{Aire}(\bar{T})$ . Et par le lemme 3.2.3  $-\text{Aire}(\bar{T}) \geq -\text{Aire}(T)$ . D'où :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} e(T) \leq 2\pi\chi(X) - \sum_{T \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}'} e(T) \leq 2\pi\chi(X) + \sum_{T \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}'} \text{Aire}(T) \leq 2\pi\chi(X) + \text{Aire}(X).$$

□

**Lemme 3.2.3.** *Soit  $T$  un triangle simple dans une surface à courbure minorée par  $k$  et  $\bar{T}$  un triangle de comparaison dans  $\mathbb{S}_k^2$  alors l'aire de  $T$  est supérieure à l'aire de  $\bar{T}$ .*

*Démonstration.* On va définir une application surjective, pour toute paire de points  $(x, y)$  dans  $T$ ,  $\varphi : T \rightarrow \bar{T}$  telle que  $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq d(x, y)$ . Comme l'aire est la mesure de Hausdorff de dimension 2, on aura alors que  $\text{Aire}(\bar{T}) = \text{Aire}(\varphi(T)) \leq \text{Aire}(T)$ .

On définit d'abord  $\varphi$  sur les côtés de  $T$ . Soit  $a, b$  et  $c$  les sommets de  $T$  et  $\bar{a}, \bar{b}$  et  $\bar{c}$  les sommets de  $\bar{T}$ . Pour  $x \in [ab]$ , on définit  $\bar{x} = \varphi(x)$  l'unique point de  $[\bar{a}\bar{b}]$  vérifiant  $|\bar{a}\bar{x}| = |ax|$ . On procède de même pour les autres côtés. Comme  $X$  est à courbure minorée,  $\varphi$  est bien 1-Lipschitzienne (par comparaison des distances). Le théorème de Kirszbraun pour les espaces d'Alexandrov (voir [AKP10]) permet alors de conclure que  $\varphi$  s'étend à tout  $T$  est une application 1-Lipschitzienne à valeurs dans  $\bar{T}$ .

Il reste à montrer que  $\varphi$  est surjective. On raisonne par l'absurde. Si on peut trouver  $\bar{p} \notin \varphi(T)$ , on construit une application  $\rho : T$  dans le bord de  $\bar{T}$  en associant à tout  $x \in T$  l'unique intersection du bord de  $\bar{T}$  avec le rayon  $[\bar{p}\varphi(x)]$ . En identifiant  $T$  et  $\bar{T}$  par un homéomorphisme égal à  $\varphi$  sur le bord de  $T$ , on obtient que  $\rho$  est un retract de  $\bar{T}$  sur son bord. Comme  $\bar{T}$  est homéomorphe à un disque fermé, c'est impossible.

□

### 3. Unicité en dimension 2

Sur une surface compacte  $(X, d)$  à courbure intégrale bornée (et donc sur une surface compacte à courbure minorée par la proposition précédente), Alexandrov a défini deux mesures sur  $(X, d)$ .  $\omega$  est la mesure de courbure de  $(X, d)$ ,  $\sigma$  est la mesure d'aire de  $(X, d)$ . Des définitions précises sont données dans la monographie [AZ67], chapitres 5 et 8. La mesure de courbure est une mesure signée, on notera  $\omega = \omega^+ - \omega^-$  sa décomposition de Jordan.<sup>1</sup>

Quand  $(X, d)$  est une surface riemannienne lisse  $(M^2, g)$ , ces mesures correspondent aux mesure usuelles de courbure  $K_g dv_g$  et d'aire  $dv_g$ .

Quand  $(X, d)$  est une surface polyédrale, sa mesure d'aire est la mesure de Lebesgue d'un 'patron' de  $X$  et la mesure de courbure est une somme de masses de Dirac aux sommets  $v$  du polyèdre, chacune portant une masse de  $2\pi - \alpha_v$ , où  $\alpha_v$  est l'angle total de  $(X, d)$  en  $v$ , c'est à dire la somme des angles en  $v$  des faces du polyèdre ayant  $v$  comme sommet.

Un dernier exemple est la surface d'une 'boite de conserve', obtenue en recollant deux disques à un cylindre tronqué. La mesure d'aire est alors ce à quoi l'on s'attend, la mesure de courbure est quand à elle entièrement concentrée sur les deux 'arrêtes' de la boite, voir figure 3.2.

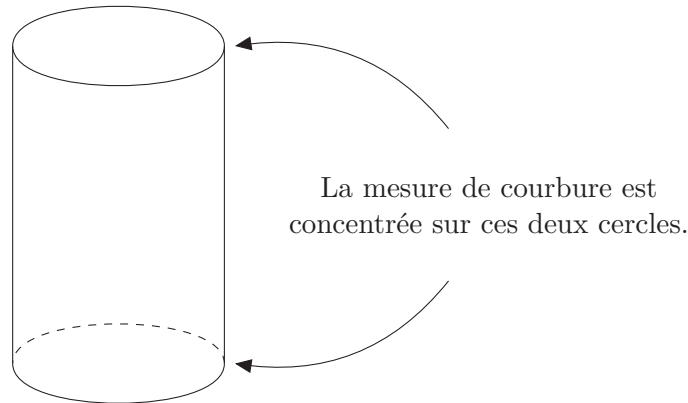


FIGURE 3.2.: La surface 'boite de conserve'.

#### 3.2.2. Théorèmes d'approximation

Le théorème qui suit exprime le fait que les surfaces à courbure minorée au sens d'Alexandrov se laissent bien approcher par des surfaces lisses.

**Théorème 3.2.4.** *Soit  $(X, d)$  une surface compacte d'Alexandrov à courbure plus grande que  $-1$ , alors il existe une suite de surfaces compactes lisses  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  vérifiant :*

- (i)  $(M_i, g_i)$  converge au sens de Gromov-Hausdorff vers  $(X, d)$ ,

<sup>1</sup> $\omega^+(E) = \sup_{E' \subset E} \omega(E')$  et  $\omega^-(E) = \sup_{E' \subset E} -\omega(E')$ .

- (ii) la courbure de Gauss de  $(M_i, g_i)$  est minorée par  $-1$ ,
- (iii) le diamètre de  $(M_i, g_i)$  est compris en  $\text{diam}(X, d)/2$  et  $2 \text{diam}(X, d)$ ,
- (iv) l'aire de  $(M_i, g_i)$  est comprise entre  $\text{Aire}(X, d)/2$  et  $2 \text{Aire}(X, d)$ .

Ce théorème semble faire partie du folklore de la théorie des espaces d'Alexandrov à courbure minorée. À la connaissance de l'auteur, aucune preuve complète n'en est disponible dans la littérature. Les idées essentielles de la preuve se trouvent dans les travaux d'Alexandrov sur le géométrie intrinsèque des surfaces convexes, voir [Ale06].

Alexandrov a montré que toute distance géodésique  $d$  sur  $\mathbb{S}^2$  dont la courbure est minorée par 0 peut être approchée uniformément (comme fonction de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par une suite de distance polyédrales  $d_i$  sur  $\mathbb{S}^2$  construites ainsi : on considère une suite de triangulations  $\mathcal{T}_i$  de  $(\mathbb{S}^2, d)$  par des triangles simples tel que, quand  $i$  tend vers l'infini,  $\sup_{T \in \mathcal{T}_i} \text{diam}(T)$  tend vers 0,  $d_i$  est ensuite construite en remplaçant chaque triangle de  $\mathcal{T}_i$  par son triangle de comparaison dans  $\mathbb{R}^2$ . Il résulte du fait que  $d$  est positivement courbée que  $d_i$  est aussi positivement courbée. La preuve du fait que  $d_i$  converge uniformément vers  $d$  se trouve dans [Ale06], Chapitre 7, section 6. Il suffit ensuite d'approcher les  $(\mathbb{S}^2, d_i)$  par des métriques lisses à courbure positive sur  $\mathbb{S}^2$  (on peut par exemple le faire en utilisant le flot de Ricci des surfaces à singularités coniques construit dans [Ram11]) et de procéder diagonalement.

Quand la borne sur la courbure est  $-1$ , on procède de la même manière en remplaçant les triangles de comparaison euclidiens par des triangles de comparaison dans  $\mathbb{H}^2$ . La preuve est ensuite similaire à celle d'Alexandrov dans le cas  $k = 0$ . Plus de détails sont donnés dans l'appendice.

Dans la suite de ce paragraphe, on énonce un résultat d'Alexandrov sur le lien entre convergence des distances et convergence de la courbure et de l'aire pour les surfaces d'Alexandrov à courbure intégrale bornée. Pour la preuve, on renvoie à [AZ67], chapitres 7 et 8.

**Théorème 3.2.5** ([Ale06]). *Soit  $(X, d_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une surface topologique compacte munie d'une suite de distances à courbure intégrale bornée. On suppose que  $d_i$  converge uniformément, en tant que fonction sur  $X \times X$ , vers une distance  $d$  à courbure intégrale bornée. Alors les mesures d'aire  $\sigma_i$  et de courbure  $\omega_i$  de  $(X, d_i)$  convergent faiblement vers la mesure d'aire  $\sigma$  et la mesure de courbure  $\omega$  de  $(X, d)$  au sens où pour toute fonction continue  $f$  sur  $X$  :*

$$\int_X f d\sigma_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \int_X f d\sigma \text{ et } \int_X f d\omega_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \int_X f d\omega.$$

### 3.2.3. Uniformisation des surfaces à courbure intégrale bornée

On va maintenant présenter certains résultats principalement dus à Reshetnyak. Ces résultats permettent de décrire la distance d'une surface à courbure intégrale bornée  $(X, d)$  comme étant induite par une métrique riemannienne non lisse  $e^{2u}h$  où  $h$  est une métrique lisse sur  $X$  et  $u$  une fonction non lisse mais ayant quand même une certaine régularité, de plus cette représentation est essentiellement unique.

### 3. Unicité en dimension 2

Ces travaux sont exposés dans l'article de Reshetnyak [Res93], section 7. On en trouvera une présentation moins détaillée mais plus moderne et accessible dans l'article [Tro09] de Troyanov.

On commence par définir la classe de fonction pouvant être considérées comme facteurs conformes pour les métriques non-lisses que nous allons étudier.

**Définition 3.2.6.** Soit  $(M^2, h)$  une surface riemannienne compacte, on note  $V(M, h)$  l'ensemble des fonctions dans  $u \in L^1(M, dv_h)$  telles que  $\Delta_h u$  est une mesure signée sur  $M$ , où le laplacien est calculé au sens des distributions. Si  $\mu$  est la mesure définie par  $\mu = \Delta_h u$ , on dit que  $u$  est un potentiel de  $\mu$ .

*Remarque 3.2.7.* Sur une surface compacte,  $\mu$  détermine  $u$  à une constante additive près. On appelle volume de  $u$  la quantité  $V_u = \int_M e^{2u} dv_h$ . Étant donné une mesure signée  $\mu$  et un réel  $V > 0$ , il existe une unique fonction  $u$  qui est un potentiel de  $\mu$  et a pour volume  $V$ .

On voudrait étudier la géométrie des métriques  $g$  définies par  $g = e^{2u}h$ , où  $u$  est dans  $V(M, h)$ . Cependant,  $u$  étant une fonction  $L^1$ , elle n'est définie qu'à un ensemble de mesure nulle près. Il est donc difficile a priori de définir la longueur d'une courbe pour la métrique  $g$ . Pour y remédier, on va utiliser les résultats suivant :

**Proposition 3.2.8** ([Res93]). Si  $u$  est dans  $V(M, h)$ , alors  $u$  est localement égale presque partout à la différence de deux fonctions sous-harmoniques.

**Proposition 3.2.9.** Si  $u$  est une fonction sous-harmonique définie sur un ouvert de  $(M, h)$ , alors  $u$  est semi-continue supérieurement et finie en dehors d'un ensemble de dimension de Hausdorff nulle.

Comme une fonction définie presque partout ne peut admettre qu'un seul représentant sous-harmonique, on obtient alors que  $u$  est bien définie à un ensemble de dimension de Hausdorff nulle près. Ceci permet alors de définir la longueur des courbes pour  $g = e^{2u}h$ , et donc la distance associée à  $g$ .

**Proposition 3.2.10** ([Res93]). Soit  $u \in V(M, h)$ . Posons  $\mu = \Delta_h u$ , et pour  $x$  et  $y$  dans  $M$  :

$$d_{h,u}(x, y) = \inf \left\{ \int_0^1 e^{u(\gamma(\tau))} |\dot{\gamma}(\tau)|_h d\tau \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow M \text{ chemin } C^1 \text{ de } x \text{ à } y \right\}.$$

Alors si pour tout  $x \in M$ ,  $\mu^+(\{x\}) < 2\pi$ ,  $d_{h,u}$  est une distance sur  $M$  à courbure intégrale minorée. La mesure de courbure de  $d_{h,u}$  est donnée par :

$$\omega = K_h dv_h + \mu.$$

*Remarque 3.2.11.* La condition  $\mu^+(\{x\}) < 2\pi$  assure que la distance  $d_{h,u}$  est finie et définit sur  $M$  sa topologie usuelle de surface. Les points  $x$  où  $\mu^+(\{x\}) \geq 2\pi$  sont appelés cusps. Ils peuvent être à distance finie ou infinie des autres points de  $M$ . Quand la courbure est minorée, on ne peut pas avoir de cusp. En effet, si un cusp existait il devrait être à distance finie (pour garder la topologie de  $M$ ). En un cusp, l'espace des directions s'effondre, il est réduit à un point, ce qui n'est pas possible pour une surface à courbure minorée, où l'espace des directions est toujours un cercle.

### 3.3. Remarques sur l'existence

Nous allons maintenant énoncer un Théorème d'uniformisation des surfaces compactes à courbure intégrale bornée, du à Reshetnyak et :

**Théorème 3.2.12** ([Res93]). *Soit  $(X, d)$  une surface compacte à courbure intégrale bornée telle que pour tout  $x$ ,  $\omega^+(\{x\}) < 2\pi$ , alors il existe une surface lisse  $(M, h)$  et une fonction  $u \in V(M, h)$  telle que  $(M, d_{h,u})$  soit isométrique à  $(X, d)$ .*

Cette description analytique d'une surface à courbure intégrale bornée est unique au choix d'un représentant de la classe conforme de  $h$  près, c'est l'objet du théorème que suit, dû à Huber et Reshetnyak :

**Théorème 3.2.13** ([Res93]). *Soit  $(M, h)$  et  $(M', h')$  deux surfaces lisses,  $u$  une fonction de  $V(M, h)$  et  $u'$  une fonction de  $V(M', h')$ . Alors toute isométrie  $\varphi : (M, d_{h,u}) \rightarrow (M', d_{h',u'})$  est une application conforme de  $(M, h) \rightarrow (M', h')$ . De plus :*

$$e^{2u'(\varphi(x))} \varphi^* h'(x) = e^{2u(x)} h(x).$$

Ces considérations analytiques permettent aussi d'énoncer une réciproque partielle du Théorème 3.2.5.

**Théorème 3.2.14** ([Res93]). *Soit  $(M, h)$  une surface riemannienne compacte lisse,  $\mu_i^+$  et  $\mu_i^-$  deux suites de mesures positives finies sur  $M$  convergeant faiblement vers deux mesures finies  $\mu^+$  et  $\mu^-$ . Soit  $V_i$  une suite de réels strictement positifs convergeant vers  $V > 0$ .*

*On note  $u_i$  le potentiel de  $\mu_i = \mu_i^+ - \mu_i^-$  de volume  $V_i$  et  $u$  le potentiel de  $\mu = \mu^+ - \mu^-$  de volume  $V$ . On suppose que  $\mu^+(\{x\}) < 2\pi$  pour tout  $x \in M$ .*

*Alors les distances  $d_{h,u_i}$  convergent uniformément vers  $d_{h,u}$ .*

*Remarque 3.2.15.* Les decompositions  $\mu_i = \mu_i^+ - \mu_i^-$  et  $\mu = \mu^+ - \mu^-$  ne sont pas nécessairement les decompositions de Jordan de  $\mu_i$  et  $\mu$ .

### 3.3. Remarques sur l'existence

Dans la suite de ce chapitre,  $(X, d)$  sera une surface compacte à courbure minorée au sens d'Alexandrov. Par le Théorème 3.2.4, on a une suite de surfaces riemanniennes compactes  $(M_i, g_i)$  qui converge au sens de Gromov-Hausdorff vers  $(X, d)$  et qui vérifie :

- $K_{g_i} \geq -1$ ,
- $V/2 \leq \text{vol}(M_i, g_i) \leq 2V$ ,
- $D/2 \leq \text{diam}(g_i) \leq 2D$ ,

où  $V$  et  $D$  sont l'aire et le diamètre de  $(X, d)$ . Remarquons que par le Théorème de Bishop-Gromov, le volume des boules de rayon 1 dans les  $(M_i, g_i)$  est minorée par une constante  $v_0 > 0$  ne dépendant que de  $V$  et  $D$ . En effet, pour tout  $x \in M_i$ , et pour  $\rho = \max(2D, 1)$  :

$$\frac{\text{vol}_{g_i}(B_{g_i}(x, 1))}{V_{k,2}(1)} \geq \frac{\text{vol}_{g_i}(B_{g_i}(x, \rho))}{V_{k,2}(\rho)},$$

### 3. Unicité en dimension 2

Comme  $\rho \geq \text{diam}(M_i, g_i)$ ,  $\text{vol}_{g_i}(B_{g_i}(x, \rho)) = \text{vol}(M_i, g_i) \geq V/2$ , donc :

$$\text{vol}_{g_i}(B_{g_i}(x, 1)) \geq V_{k,2}(1) \frac{V}{V_{k,2}(\rho)}.$$

Le Théorème 2.2.3, démontré au Chapitre 2 dans le cas de la dimension 3 est encore valable pour les surfaces. On obtient alors que le flot  $(M_i, g_i(t))$  des  $(M_i, g_i)$  existe au moins sur un intervalle  $[0, T)$  ne dépendant que de  $V$  et  $D$  et vérifie :

- $-1 \leq K_{g_i(t)} \leq C/t$ ,
- $V/4 \leq \text{vol}(M_i, g_i(t)) \leq 4V$ ,
- $D/4 \leq \text{diam}(M_i, g_i(t)) \leq 4D$ .

Certaines de ces estimations sont beaucoup plus simples à obtenir dans le cas des surfaces qu'en dimension 3. La minoration de la courbure devient une application directe du principe du maximum.

Le contrôle du volume s'obtient grâce à la formule de Gauss-Bonnet :

$$\frac{\partial \text{vol}(M_i, g_i(t))}{\partial t} = -2 \int_{M_i} K_{g_i(t)} dv_{g(t)} = -4\pi\chi(M_i)$$

où  $K_{g_i(t)}$  est la courbure de Gauss de  $g_i(t)$  et  $\chi(M_i)$  la caractéristique d'Euler de  $M_i$ .  
Donc :

$$\text{vol}(M_i, g_i(t)) = \text{vol}(M_i, g_i) - 4\pi\chi(M_i)t.$$

Étant données les bornes géométriques que vérifient les surfaces  $(M_i, g_i)$ ,  $\chi(M_i) = \int_{M_i} K_{g_i} dv_{g_i} \geq -2V$ . De plus, pour une surface,  $\chi(M_i) \leq 2$ . Le volume des  $(M_i, g_i(t))$  est donc contrôlé indépendamment de  $i$ .

La majoration en  $1/t$  sur la courbure ne semble quand à elle pas être plus simple à obtenir.

Une fois ces estimations obtenues, on peut appliquer le Théorème 2.1.6 pour montrer l'existence d'un flot de Ricci de dimension 2  $(M, g(t))$  qui a pour condition initiale métrique  $(X, d)$ .

### 3.4. Unicité de la structure conforme

Sur une surface, le flot de Ricci  $(M, g(t))$  est un flot conforme. On peut donc l'écrire  $g(t) = e^{2u(t)}h$  où  $h$  est une métrique lisse sur une surface  $M$ . Une fois la métrique  $h$  choisie, la fonction  $u$  vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{-2u}(\Delta_h u - K_h) = -2K_{g(t)}$$

où  $\Delta_h$  est le laplacien de la métrique  $h$  et  $K_h$  la courbure de Gauss de  $h$ .

On va montrer la proposition suivante, qui dit que la condition initiale métrique détermine la classe conforme du flot :

### 3.4. Unicité de la structure conforme

**Proposition 3.4.1.** *Soit  $(M, g(t))_{t \in (0, T)}$  et  $(\hat{M}, \hat{g}(t))_{t \in (0, T)}$  deux flots de Ricci de dimension 2. On écrit  $g(t) = e^{2u(t)}h$  et  $\hat{g}(t) = e^{2\hat{u}(t)}\hat{h}$ . On suppose :*

(i)  $(M, g(t))$  et  $(\hat{M}, \hat{g}(t))$  admettent la surface à courbure minorée  $(X, d)$  comme condition initiale métrique.

(ii) Il existe  $C > 0$  tel que  $-1 \leq K_{g(t)} \leq C/t$  et  $-1 \leq K_{\hat{g}(t)} \leq C/t$  pour  $t \in (0, T)$ .

Alors il existe un difféomorphisme conforme  $\varphi : (M, h) \rightarrow (\hat{M}, \hat{h})$ .

Dans les lemmes qui suivent,  $(M, e^{2u(t)}h)$  est un flot de Ricci qui vérifie les hypothèses (i) et (ii) de la Proposition 3.4.1. On note  $\tilde{d}$  la limite uniforme quand  $t$  tends vers 0 des distance  $d_{g(t)}$ . Par définition,  $(M, \tilde{d})$  est isométrique à  $(X, d)$ . On notera  $L^1$  l'espace des fonctions intégrables sur  $M$  par rapport à la mesure de volume  $dv_h$ . On commence par préciser le comportement de  $u$  quand  $t$  tends vers 0 :

**Lemme 3.4.2.** *Quand  $t$  tends vers 0,  $u(\cdot, t)$  converge en norme  $L^1$  vers une fonction  $u_0$  intégrable sur  $M$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord,  $\partial_t u(t) = -2K_{g(t)} \leq 2$ . Donc, pour tout  $x$  dans  $M$ ,  $u(x, t) - 2t$  croît quand  $t$  décroît vers 0. On a donc existence d'une limite ponctuelle  $u_0(x)$  de  $u(x, t)$  quand  $t$  tends vers 0, qui est une fonction  $M \rightarrow (-\infty, +\infty]$ . Pour montrer que  $u_0$  est dans  $L^1$  et que la convergence a lieu en norme  $L^1$ , il suffit, par convergence monotone, de voir que  $u(\cdot, t) - 2t$  est uniformément minorée et bornée dans  $L^1$ .

En fixant  $t_0 > 0$ , on a que  $u(\cdot, t) - 2t \geq u(\cdot, t_0) - 2t_0$  pour  $t \in (0, t_0)$ , comme  $u(\cdot, t_0)$  est lisse sur  $M$  compacte, on a la minoration annoncée. Pour contrôler la norme  $L^1$ , on utilise l'inégalité de Jensen :

$$\exp\left(\int_M 2u(x, t) \frac{dv_h}{\text{vol}(M, h)}\right) \leq \int_M e^{2u(x, t)} \frac{dv_h}{\text{vol}(M, h)} = \frac{\text{vol}(M, g(t))}{\text{vol}(M, h)}.$$

Par le Théorème 3.2.5 et le fait que les distances convergent, le membre de droite de l'inégalité est borné quand  $t$  tends vers 0. On a donc que  $u(\cdot, t) - 2t$  est bornée dans  $L^1$ .  $\square$

**Lemme 3.4.3.**  $u_0$  appartient à l'espace  $V(M, h)$  défini dans la section 3.2.3.

*Démonstration.* Le lemme précédent montre que  $u_0$  est dans  $L^1$ . Il suffit donc de voir que le laplacien de  $u_0$  au sens des distributions est une mesure signée.

Tout d'abord, notons que  $\Delta_h u(t) = K_h - K_{g(t)} e^{2u(t)}$ . Considérons une fonction lisse  $\eta : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors :

$$\begin{aligned} \int_M \eta(x) \Delta_h u(x, t) dv_h(x) &= \int_M \eta(x) (K_h - K_{g(t)} e^{2u(x, t)}) dv_h \\ &= \int_M \eta(x) K_h dv_h - \int_M \eta(x) d\omega_{g(t)} \end{aligned}$$



### 3. Unicité en dimension 2

où  $\omega_{g(t)}$  est la mesure de courbure de  $g(t)$ . Quand  $t$  tends vers 0, le Théorème 3.2.5 nous dit que  $\omega_{g(t)}$  converge faiblement vers la mesure de courbure  $\omega_{\tilde{d}}$  de  $(M, \tilde{d})$ . En intégrant par partie à gauche de l'égalité précédente et en faisant tendre  $t$  vers 0, on obtient alors :

$$\int_{M_i} u_0(x) \Delta_h \eta(x) dv_h = \int_M \eta(x) K_h dv_h - \int_{M_i} \eta(x) d\omega_{\tilde{d}}.$$

Ce qui montre bien que le laplacien au sens des distributions de  $u_0$  est la mesure signée  $K_h dv_h - \omega_{\tilde{d}}$ .  $\square$

Comme  $u_0 \in V(M, h)$ , on peut définir, comme dans la section 3.2.5, la distance  $d_0 = d_{h, u_0}$  associée à la métrique riemannienne non lisse  $e^{2u_0} h$ . Le lemme suivant montre que cette distance est la distance  $\tilde{d}$ .

**Lemme 3.4.4.**  $d_0 = \tilde{d}$ .

*Démonstration.* Pour tout  $t > 0$ , considérons la mesure de courbure de  $g(t)$  :

$$\omega_{g(t)} = K_{g(t)} e^{2u(t)} dv_h.$$

$\omega_{g(t)}$  converge faiblement vers la mesure de courbure  $\omega_{\tilde{d}}$  de  $(M, \tilde{d})$ . Posons :

$$\mu_t = \omega_{g(t)} - K_h dv_h.$$

$\mu_t$  converge faiblement vers  $\mu = \omega_{\tilde{d}} - K_h dv_h$  qui est le laplacien au sens des distributions de  $u_0$ .

Posons :

$$\omega_{g(t)}^+ = K_{g(t)}^+ e^{2u(t)} dv_h \text{ et } \omega_{g(t)}^- = -K_{g(t)}^- e^{2u(t)} dv_h.$$

$\omega_{g(t)}^+$  et  $\omega_{g(t)}^-$  sont deux mesures positives. De plus, leur masse est majorée uniformément en  $t$ . En effet, comme la courbure de  $g(t)$  est plus grande que  $-1$

$$\int_M \omega_{g(t)}^- \leq \text{vol}(M, g(t))$$

et par Gauss-Bonnet :

$$\int_M \omega_{g(t)}^+ \leq \text{vol}(M, g(t)) + 2\pi\chi(M).$$

En posant  $\mu_t^+ = \omega_{g(t)}^+ + K_h^- dv_h$  et  $\mu_t^- = \omega_{g(t)}^- + K_h^+ dv_h$ , on a, pour une suite  $t_i$  tendant vers 0, que  $\mu_{t_i}^+$  et  $\mu_{t_i}^-$  convergent faiblement vers deux mesures  $\mu^+$  et  $\mu^-$ . On peut alors appliquer le Théorème 3.2.14 pour avoir que  $d_{g(t_i)}$  converge uniformément vers  $d_0$ . Comme  $d_{g(t_i)}$  converge uniformément vers  $\tilde{d}$ , on a bien que  $d_0 = \tilde{d}$ .  $\square$

On a maintenant les outils nécessaires pour la preuve de la Proposition 3.4.1.

*Preuve de la Proposition 3.4.1.* Considérons les fonctions  $u_0 : M \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\hat{u}_0 : M' \rightarrow \mathbb{R}$  construites dans les lemmes précédents. Notons  $d_0$  et  $\hat{d}_0$  les distances induites par les métriques riemanniennes non-lisses  $e^{2u_0}h$  et  $e^{2\hat{u}_0}\hat{h}$ . Ces deux distances sont isométriques. Soit  $\phi$  une isométrie de  $(M, d_0)$  vers  $(\hat{M}, \hat{d}_0)$ , le Théorème 3.2.13 montre alors que  $\varphi$  est un difféomorphisme conforme de  $(M, h)$  vers  $(\hat{M}, \hat{h})$ .  $\square$

*Remarque 3.4.5.* Sous les hypothèses de la proposition 3.1.4, on obtient de la même manière que l'identité de  $(M, d_0)$  dans  $(\hat{M}, \hat{d}_0)$  est une isométrie, le Théorème 3.2.13 permet encore de conclure que l'identité est conforme, en particulier  $h$  et  $\hat{h}$  sont dans la même classe conforme.

### 3.5. Unicité du flot

Grâce à la Proposition 3.4.1, étant données deux solutions du flot de Ricci ayant la même surface d'Alexandrov comme condition initiale métrique, on peut les écrire  $g(t) = e^{2u(t)}h$  et  $\hat{g}(t) = e^{2\hat{u}(t)}\hat{h}$  où  $(M, h)$  est une surface lisse fixée, que l'on peut par exemple choisir à courbure constante par le théorème d'uniformisation. Les fonctions  $u$  et  $u'$  vérifient alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{-2u}(\Delta_h u - K_h) \text{ et } \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = e^{-2\hat{u}}(\Delta_{\hat{h}} \hat{u} - K_{\hat{h}}).$$

On va poser  $w(t) = e^{2u(t)}$  et  $\hat{w}(t) = e^{2\hat{u}(t)}$ ,  $w$  et  $\hat{w}$  vérifient alors les équations suivantes :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \Delta_h \log(w) - 2K_h \text{ et } \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} = \Delta_{\hat{h}} \log(\hat{w}) - 2K_{\hat{h}}$$

Remarquons que comme les métriques  $g(t)$  et  $\hat{g}(t)$  sont lisses pour  $t$  strictement positif,  $w$  et  $\hat{w}$  sont lisses et strictement positives pour  $t > 0$ .

Le lemme suivant montre que  $\hat{w}$  et  $w$  ont même condition initiale quand  $t$  tends vers 0, en un sens  $L^1$ .

**Lemme 3.5.1.** *Il existe une fonction  $L^1$   $\bar{w} : M \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $w(., t)$  et  $\hat{w}(., t)$  convergent en norme  $L^1$  vers  $\bar{w}$  quand  $t$  tends vers 0.*

*Démonstration.* Tout d'abord, dans la preuve du Lemme 3.4.2, on a vu que  $u(., t) - 2t$  croissait quand  $t$  décroissait. Donc  $e^{-2t}w(., t)$  croît quand  $t$  décroît. On a donc existence d'une limite ponctuelle  $\bar{w}$  quand  $t$  tends vers 0. De plus, comme  $\int_M |w(t)| dv_h = \int_M w(t) dv_h = \text{vol}(M, g(t))$ ,  $w(., t)$  est bornée dans  $L^1$  quand  $t$  tends vers 0, donc, par convergence monotone,  $\bar{w}$  est dans  $L^1$  et la convergence a lieu en norme  $L^1$ .

Il reste à montrer que la fonction  $\bar{w}$  obtenue par le même procédé à partir de  $\hat{w}(t)$  est la même. Pour cela, remarquons que  $dv_{g(t)} = w(t)dv_h$  et  $dv_{\hat{g}(t)} = \hat{w}(t)dv_h$ . De plus, le Théorème 3.2.5 montre que ces deux mesures convergent faiblement vers la mesure d'aire de  $(M, \tilde{d})$ , donc  $\bar{w}dv_h$  et  $\bar{\hat{w}}dv_h$  sont égales en tant que mesures. Donc  $\bar{w} = \bar{\hat{w}}$  presque partout.  $\square$

Le lemme précédent permet de remplacer l'hypothèse de condition initiale « géométrique » dont on était parti par une hypothèse de condition initiale « analytique » plus

### 3. Unicité en dimension 2

usuelle en théorie des équations aux dérivées partielles. Pour avoir l'unicité, il suffit donc de montrer le résultat suivant, utilisant des méthodes classiques pour l'étude d'équations non-linéaires comme l'équation des milieux poreux (voir par exemple [DK07]) :

**Proposition 3.5.2.** *Soit  $w : M \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  et  $\hat{w} : M \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  deux solutions lisses strictement positives de l'équation :*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \Delta_h \log(w) - 2K_h$$

sur une surface compacte lisse  $(M, h)$ . Si :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_M |w(x, t) - \hat{w}(x, t)| dv_h(x) = 0$$

alors  $w = \hat{w}$  sur  $M \times (0, T)$ .

La fin de cette section est consacrée à la preuve de cette proposition.

*Démonstration.* On va montrer que pour toute fonction  $\eta : M \rightarrow \mathbb{R}$  positive et lisse, et tout  $t_0 \in (0, T)$ , on a :

$$\int_M (w(x, t_0) - \hat{w}(x, t_0)) \eta dv_h(x) = 0.$$

Soit  $\psi : M \times [\tau, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse, où  $\tau \in (0, t_0)$  est fixé. On a alors, en multipliant par  $\psi$  l'équation vérifiée par  $w$  et en intégrant par partie :

$$\begin{aligned} \int_M (w(x, t_0) - \hat{w}(x, t_0)) \psi(x, t_0) dv_h(x) - \int_M (w(x, \tau) - \hat{w}(x, \tau)) \psi(x, \tau) dv_h(x) = \\ \int_{\tau}^{t_0} \int_M (w(x, t) - \hat{w}(x, t)) (A(x, t) \Delta_h \psi(x, t) + \partial_t \psi(x, t)) dv_h(x) dt \end{aligned}$$

où :

$$A(x, t) = \begin{cases} \frac{\log(w(x, t)) - \log(\hat{w}(x, t))}{w(x, t) - \hat{w}(x, t)} & \text{si } w(x, t) \neq \hat{w}(x, t), \\ \frac{1}{w(x, t)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme  $w$  et  $w'$  sont lisses et positives sur  $M \times (0, T)$ ,  $A$  est aussi lisse<sup>2</sup> et positive sur  $M \times (0, T)$ . Supposons maintenant que  $\psi$  est une solution de l'équation de la chaleur rétrograde suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -A(x, t) \Delta_h \psi(x, t) & \text{pour } (x, t) \in M \times (0, t_0), \\ \psi(x, t_0) = \eta(x) & \text{pour } x \in M. \end{cases}$$

Cette solution est unique, lisse et positive (voir par exemple [Lie96]). De plus, par le principe du maximum,  $\sup_{x \in M} \psi(x, t) \leq \sup_{x \in M} \eta(x)$ . On a alors :

$$\int_M (w(x, t_0) - \hat{w}(x, t_0)) \eta(x) dv_h(x) = \int_M (w(x, \tau) - \hat{w}(x, \tau)) \psi(x, \tau) dv_h(x).$$

<sup>2</sup>si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est  $C^\infty$ , alors  $F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$  prolongée par  $F(x, x) = f'(x)$  est lisse sur  $\mathbb{R}^2$ .

### 3.5. Unicité du flot

Comme  $w(., \tau) - \hat{w}(., \tau)$  tend vers 0 dans  $L^1$  quand  $\tau$  tend vers 0 et que  $\psi$  est majorée indépendamment de  $\tau$ , on a bien que le membre de droite de l'équation précédente tend vers 0. En particulier,  $w(x, t_0) = \hat{w}(x, t_0)$  presque partout. Comme le raisonnement précédent est valable pour tout  $t_0 \in (0, T)$  et  $w$  et  $\hat{w}$  sont lisses,  $w(x, t) = \hat{w}(x, t)$  sur  $M \times (0, T)$ .  $\square$

### 3. *Unicité en dimension 2*

## 4. Généralisations en dimension quelconque

Dans ce chapitre, on essaie de construire et d'étudier des flots de Ricci à condition initiale métrique en dimension supérieure à 3. Dans la première section, on se pose la question de savoir quels résultats du chapitre 2 sont susceptibles d'être généralisés en dimension supérieure.

On aura vu dans la section 4.1 que la minoration de la courbure de Ricci seule est une hypothèse trop faible pour permettre d'appliquer les méthodes du Chapitre 2 en dimension plus grande que 3, c'est pourquoi la deuxième section est consacrée à l'étude de conditions sur la courbure plus forte que la minoration du tenseur de Ricci, mais qui se comportent mieux vis à vis du flot de Ricci.

La section 4.3 propose une méthode pour minorer les courbures introduites dans la section précédente le long du flot de Ricci, cette estimation est cruciale pour utiliser les méthodes du chapitre 2, en particulier la Proposition 2.1.6.

Dans la dernière section, on expose des applications de ces méthodes. On montre l'existence du flot de Ricci pour certains espaces métriques à courbure minoré. On utilise aussi ces méthodes pour montrer des résultats de stabilité pour les variétés à courbure presque positive.

### 4.1. Qu'attendre de la dimension $n$ ?

Remarquons tout d'abord que les méthodes utilisées dans le Chapitre 3.2 pour montrer l'unicité du flot de Ricci des surfaces d'Alexandrov à courbure minorée sont très spécifiques à la dimension 2. Elles reposent principalement sur le Théorème d'uniformisation et sur le fait que le flot de Ricci est un flot conforme, deux faits qui ne sont plus valables en dimension supérieure. En résumé, l'unicité des flots à condition initiale métrique semble inaccessible avec les outils dont on dispose actuellement.

On va donc se concentrer sur les résultats du Chapitre 2. En particulier, on restreint notre étude aux espaces métriques lissables (approchables au sens de Gromov-Hausdorff par des variétés lisses). On considère donc une suite  $(M_i, g_i)$  de variétés compactes lisses qui converge au sens de Gromov-Hausdorff vers l'espace métrique  $(X, d)$  sur lequel on voudrait construire un flot de Ricci. La Proposition 2.1.6 donne un ensemble de conditions suffisantes sur les flots des  $(M_i, g_i)$  pour pouvoir construire un flot de condition initiale métrique  $(X, d)$ . Ces conditions sont :

- une minoration de la courbure de Ricci le long du flot de Ricci,
- une borne dépendant du temps sur l'opérateur de courbure (typiquement en  $\frac{1}{t}$ ),
- un contrôle du volume.

#### 4. Généralisations en dimension quelconque

Dans le Chapitre 2 on a construit un flot de Ricci de condition initiale  $(X, d)$  sous la seule condition que les  $(M_i, g_i)$  soit de dimension 3, à courbure de Ricci minorée et non-effondrées. On ne peut pas espérer construire un flot par les méthodes présentées ici pour des limites de variétés de dimension  $n$  non-effondrées et à courbure de Ricci minorée.

Une raison à ce fait est que si la Proposition 2.1.6 s'applique lorsque les  $(M_i, g_i)$  sont non-effondrées et à courbure de Ricci minorée, le Théorème 2.4.3 serait vrai en dimension supérieure à 3, or des contre-exemples à ce résultat de finitude ont été donnés par Perelman dans [Per97] dès la dimension 4.

Une autre raison est que lorsqu'on applique la Proposition 2.1.6, on obtient comme sous-produit de la preuve que tous les approximants  $(M_i, g_i)$  sont homéomorphes à  $(X, d)$  pour  $i$  assez grand. Or Anderson a montré dans [And90] qu'une suite non-effondrée de variétés à courbure de Ricci minoré pouvait changer de type topologique en passant à la limite au sens de Gromov-Hausdorff.

Il semble donc raisonnable de penser que la minoration de la courbure de Ricci est une condition trop faible pour appliquer les méthodes du Chapitre 2, et qu'une condition de courbure plus forte pourrait être utile. On va exposer dans la suite de ce chapitre des résultats se basant sur des minoration de courbures invariantes par le flot de Ricci.

## 4.2. Courbures invariantes

On note  $S_B^2(\Lambda^2\mathbb{R}^n)$  l'espace vectoriel des opérateurs de courbures algébriques. (voir section 1.1)  $S_B^2(\Lambda^2\mathbb{R}^n)$  est muni de l'action de  $O(n, \mathbb{R})$  définie par :

$$\langle (g.R)(x \wedge y), z \wedge t \rangle = \langle R(gx \wedge gy), gz \wedge gt \rangle.$$

Dans la section 7,75 de [Gro91], Gromov remarque que les conditions sur la courbure considérées en géométrie riemannienne proviennent toutes d'une même construction :

**Définition 4.2.1.** *On appelle condition de non-négativité sur la courbure (ou condition de courbure) un cône convexe fermé  $\mathcal{C} \subset S_B^2(\Lambda^2\mathbb{R}^n)$  qui est invariant sous l'action de  $O(n, \mathbb{R})$  et qui contient l'opérateur identité  $I : \Lambda^2\mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^2\mathbb{R}^n$  en son intérieur.*

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne et  $x \in M$ . En choisissant une base orthonormée de  $T_xM$ , on peut définir un isomorphisme  $\iota : T_xM \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $\iota$  induit alors un isomorphisme  $S_B^2(\Lambda^2T_xM) \rightarrow S_B^2(\Lambda^2\mathbb{R}^n)$  que l'on note aussi  $\iota$ . Cette construction permet de plonger  $\mathcal{C}$  dans  $S_B^2(\Lambda^2T_xM)$  en considérant  $\tilde{\mathcal{C}} = \iota^{-1}(\mathcal{C})$ . Si l'on choisit une autre base orthonormée de  $T_xM$ , on obtient un autre isomorphisme  $\iota' : T_xM \rightarrow \mathbb{R}^n$ , qui induit lui aussi un isomorphisme  $S_B^2(\Lambda^2T_xM) \rightarrow S_B^2(\Lambda^2\mathbb{R}^n)$ , et permet de définir une autre cône  $\tilde{\mathcal{C}}' = \iota'^{-1}(\mathcal{C})$ . Par construction, le changement de base  $\iota \circ \iota'^{-1}$  est dans  $O(n, \mathbb{R})$ , donc l'invariance de  $\mathcal{C}$  par  $O(n, \mathbb{R})$  donne  $\iota' \circ \iota^{-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ . Ceci permet de voir que  $\tilde{\mathcal{C}}' = \iota'^{-1}(\mathcal{C}) = \iota^{-1} \circ \iota \circ \iota'^{-1}(\mathcal{C}) = \iota^{-1}(\mathcal{C}) = \tilde{\mathcal{C}}$ . On a donc montré que le cône  $\tilde{\mathcal{C}} \subset S_B^2(\Lambda^2T_xM)$  ne dépendait pas du choix d'une base orthonormée de  $T_xM$ . Par abus de notation, on notera  $\mathcal{C} \subset S_B^2(\Lambda^2T_xM)$ .

**Définition 4.2.2.** *On dira qu'une variété  $(M, g)$  est à  $\mathcal{C}$ -courbure positive ou nulle si en tout point  $x \in M$ , l'opérateur de courbure  $R$  de  $(M, g)$  en  $x$  appartient à  $\mathcal{C}$ , on écrira que  $R$  vérifie  $R \geq_{\mathcal{C}} 0$ .*

*Si en tout point de  $M$ ,  $R$  est à l'intérieur de  $\mathcal{C}$ , on dira que  $(M, g)$  est à  $\mathcal{C}$ -courbure strictement positive.*

Essayons de justifier la définition 4.2.1. Tout d'abord, requérir que  $\mathcal{C}$  soit invariant sous l'action de  $O(n, \mathbb{R})$  permet de voir que l'appartenance de  $R$  à  $\mathcal{C}$  ne dépend pas du choix d'une base de l'espace tangent, et est donc nécessaire pour que l'affirmation  $R \in \mathcal{C}$  ait du sens quand  $R$  est l'opérateur de courbure d'une variété en un point. Demander que  $\mathcal{C}$  soit un cône est une traduction de l'affirmation « si  $(M, g)$  est positivement courbée, alors  $(M, \lambda g)$  l'est aussi ». Le fait que l'identité soit à l'intérieur de  $\mathcal{C}$  revient à imposer que la courbure de la sphère soit strictement positive. La propriété de convexité de  $\mathcal{C}$  permet d'étendre  $\leq_{\mathcal{C}}$  en un préordre sur  $S_B^2(\Lambda^2 \mathbb{R}^n)$  en imposant que  $R \geq_{\mathcal{C}} R'$  si et seulement si  $R - R' \in \mathcal{C}$ . Cette propriété est aussi vérifiée par les exemples classiques que nous exposons dans la suite.

Les conditions classiques sur la courbure peuvent être exprimés dans ce cadre. On décrit les cônes associés à ces conditions classiques dans le tableau 4.1.

Condition.	Cône $\mathcal{C} \subset S_B^2(\Lambda^2 \mathbb{R}^n)$ redonnant cette condition.
$\text{Scal} \geq 0$	$\{R \mid \text{trace}(R) \geq 0\}$
$\text{Ric} \geq 0$	$\{R \mid \sum_i \langle R(e_i \wedge u), e_i \wedge u \rangle \geq 0 \text{ pour toute b.o.n. } (e_i) \text{ et tout vecteur } u.\}$
$\text{sec} \geq 0$	$\{R \mid \langle R(u \wedge v), u \wedge v \rangle \geq 0 \text{ pour tous vecteurs } u \text{ et } v.\}$
$R \geq 0$	$\{R \mid \forall \omega \in \Lambda^2 \mathbb{R}^n \langle R(\omega), \omega \rangle \geq 0\}$

TABLE 4.1.: Conditions classiques et cônes associés.

Rappelons l'équation d'évolution de l'opérateur de courbure d'une variété riemannienne le long du flot de Ricci :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + R^2 + R^\# .$$

L'équation différentielle associée sur  $S_B^2(\Lambda_2 \mathbb{R}^n)$  est :

$$\frac{dR}{dt} = R^2 + R^\# . \tag{4.1}$$

Le principe du maximum d'Hamilton (Théorème 1.3.8) permet de relier les propriétés de la courbure invariantes par le flot de Ricci et les convexes de  $S_B^2(\Lambda^2 \mathbb{R}^n)$  qui sont préservés par le flot de (4.1). Ceci permet de définir une classe de condition de courbure se comportant bien vis à vis du flot de Ricci.

**Définition 4.2.3.** *Une condition de courbure  $\mathcal{C}$  est dite invariante par le flot de Ricci si pour tout  $R_0 \in \mathcal{C}$ , la solution maximale  $R(t)_{t \in [0, T]}$  de (4.1) telle que  $R(0) = R_0$  vérifie  $R(t) \in \mathcal{C}$  pour tout  $t$  dans  $[0, T)$ .*



#### 4. Généralisations en dimension quelconque

**Proposition 4.2.4** ([Ham86]). *Soit  $\mathcal{C}$  une condition de courbure invariante par le flot de Ricci et  $(M, g_0)$  une variété compacte à  $\mathcal{C}$ -courbure positive ou nulle. Alors la solution maximale du flot de Ricci  $(M, g(t))_{t \in [0, T]}$  telle que  $g(0) = g_0$  vérifie, pour tout  $t \in [0, T]$ , que  $(M, g(t))$  est à  $\mathcal{C}$ -courbure positive ou nulle.*

Parmi les conditions classiques décrites dans le tableau 4.1, seul la plus restrictive (opérateur de courbure positif ou nul) et la plus lâche sont préservées par le flot de Ricci<sup>1</sup>. Pour trouver d'autres courbures préservées en dimension plus grande, il faut se tourner vers des conditions plus exotiques.

Dans [Wil10], B. Wilking a donné un critère suffisant pour qu'une condition de courbure soit préservée. Cette construction permet de retrouver une bonne partie des conditions de courbure invariantes par le flot de Ricci qui étaient connues jusqu'alors.

Pour énoncer ce critère, rappelons que  $\Lambda^2 \mathbb{R}^n$  est identifié à  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$  par :

$$u \wedge v \mapsto (x \mapsto \langle x, u \rangle v - \langle x, v \rangle u)$$

et qu'un opérateur  $R \in S_B^2(\Lambda^2 \mathbb{R}^n)$  s'étend d'une unique manière en endomorphisme symétrique (pour l'extension  $\mathbb{C}$ -linéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  du produit scalaire euclidien)  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ .

**Théorème 4.2.5** ([Wil10]). *Soit  $S \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$  une ensemble invariant sous l'action par conjugaison de  $O(n, \mathbb{C})$  sur  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ . Alors le cône*

$$\mathcal{C}_S = \{R \in S_B^2(\Lambda^2 \mathbb{R}^n) \mid \forall \omega \in S \langle R(\omega), \bar{\omega} \rangle \geq 0\}$$

*est une condition de courbure invariante par le flot de Ricci.*

Les conditions construites de cette manière seront appelées cônes de Wilking. À l'aide de ce critère, on peut décrire une grande partie des conditions préservées par le flot de Ricci. On décrit les plus classiques ici, ces exemples sont tirés de [Wil10].

*Exemple 4.2.6.* En prenant  $S = \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ , on obtient le cône des opérateurs de courbure positifs ou nuls. On pose  $\mathcal{C}_{CO} = \mathcal{C}_S$ .

*Exemple 4.2.7.* Pour  $S = \{\omega \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \mid \text{trace}(\omega^2) = 0\}$  on obtient le cône des opérateurs de courbure 2-positifs ou nuls, défini par la condition que la somme des deux plus petites valeurs propres de  $R$  est supérieure ou égale à 0. On notera  $\mathcal{C}_{2CO} = \mathcal{C}_S$ .

*Exemple 4.2.8.* On prend maintenant  $S = \{\omega \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \mid \omega^2 = 0 \text{ et } \text{rang}(\omega) = 2\}$ , on obtient alors que  $\omega$  est l'ensemble des éléments de  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$  pouvant s'écrire  $u \wedge v$  pour deux vecteurs  $u$  et  $v$  dans  $\mathbb{C}^n$  qui engendrent un plan complexe isotrope, on a en particulier  $\langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle = \langle u, v \rangle = 0$ .  $\mathcal{C}_S$  est alors le cône des opérateurs à courbure isotrope positive ou nulle. On le notera  $\mathcal{C}_{IC}$  et on l'appellera<sup>2</sup> cône des opérateurs  $\overline{\text{PIC}}$ . Cette condition a été introduite par Micallef et Moore en lien avec les surfaces minimales

<sup>1</sup>À l'exception des dimensions 2 et 3 où toutes ces conditions sont préservées.

<sup>2</sup>On réserve PIC pour les opérateurs à courbure isotrope strictement positive (ceux qui sont à l'intérieur du cône  $\mathcal{C}_{IC}$ ).

dans [MM88]. Sa préservation par le flot de Ricci a été prouvée indépendamment par Brendle et Schoen dans [BS09] et par Nguyen dans [Ngu10].

Une caractérisation alternative des  $R \in \mathcal{C}_{IC}$  est la suivante : pour tout quadruplet orthonormé  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  de vecteurs,  $R$  vérifie

$$R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} - 2R_{1234} \geq 0,$$

où par définition  $R_{ijkl} = \langle R(e_i \wedge e_j), e_k \wedge e_l \rangle$ .

*Exemple 4.2.9.* On élargit un peu  $S$  en prenant  $S = \{\omega \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \mid \omega^3 = 0 \text{ et } \text{rang}(\omega) = 2\}$ . Le cône (plus petit) obtenu est celui des opérateurs  $R \in S_B^2(\Lambda^2 \mathbb{R}^n)$  dont l'extension à  $\Lambda^2 \mathbb{R}^{n+1}$  par 0 est à courbure isotrope positive ou nulle. Le cône invariant ainsi obtenu sera noté  $\mathcal{C}_{IC1}$  et appelé cône des opérateurs  $\overline{\text{PIC1}}$ . Cette condition a été introduite par Brendle et Schoen dans [BS09], et étudiée en détail par Brendle dans [Bre08].

*Exemple 4.2.10.* En élargissant encore un peu, avec  $S = \{\omega \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \mid \text{rang}(\omega) = 2\}$ , on obtient le cône des opérateurs à courbure sectionnelle complexe positive ou nulle, qui sont les  $R$  tels que  $\langle R(u \wedge v), \bar{u} \wedge \bar{v} \rangle \geq 0$  pour tous vecteurs complexes  $u$  et  $v$ . Une façon équivalente de formuler cette condition est d'imposer que  $R \in S_B^2(\Lambda^2 \mathbb{R}^n)$  soit à courbure isotrope positive ou nulle une fois étendu en un endomorphisme de  $\Lambda^2 \mathbb{R}^{n+2}$ . Cette condition joue un rôle crucial dans la preuve du théorème de la sphère différentiable par Brendle et Schoen dans [BS09]. On notera ce cône  $\mathcal{C}_{IC2}$  et un opérateur dans ce cône sera dit  $\overline{\text{PIC2}}$ . L'interprétation de ce cône à l'aide des courbures sectionnelles complexes est due à Ni et Wolfson dans [NW07a].

Les liens entre ces différentes conditions de courbures et leurs implications topologiques sont nombreuses, on pourra se référer au livre de Brendle [Bre10] pour une discussion approfondie et de plus nombreuses références. On se contentera ici de résumer les faits qui nous intéressent sur ces conditions dans la figure 4.1.

Certaines conditions de courbure invariantes moins simples à définir existent. On peut même construire des familles continues de telles conditions, des exemples se trouvent dans les travaux de Böhm et Wilking [BW08] et de Gao et Zheng [GZ11]. Certaines de ces familles ne sont pas composées de cônes de Wilking.

La condition algébrique forte vérifiée par les cônes de Wilking permet de démontrer des résultats intéressants. Le Théorème suivant découle des travaux de Maity, Gururaja et Seshadri :

**Théorème 4.2.11** ([GMS11]). *Soit  $\mathcal{C}$  un cône de Wilking, alors :*

- $\mathcal{C}_{PCO} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{C}_{IC}$ ,
- Si  $\mathcal{C} \subset \{R \mid \text{Ric}(R) \geq 0\}$  alors  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_{IC1}$ . De plus, si  $(M, g_0)$  est une variété compacte vérifiant  $R >_{\mathcal{C}} 0$ , alors le flot de Ricci normalisé de  $(M, g_0)$  converge vers une métrique à courbure sectionnelle constante.

Ces conditions de courbures vont fournir un cadre utile pour généraliser les résultats du Chapitre 2 en dimension supérieure.

#### 4. Généralisations en dimension quelconque

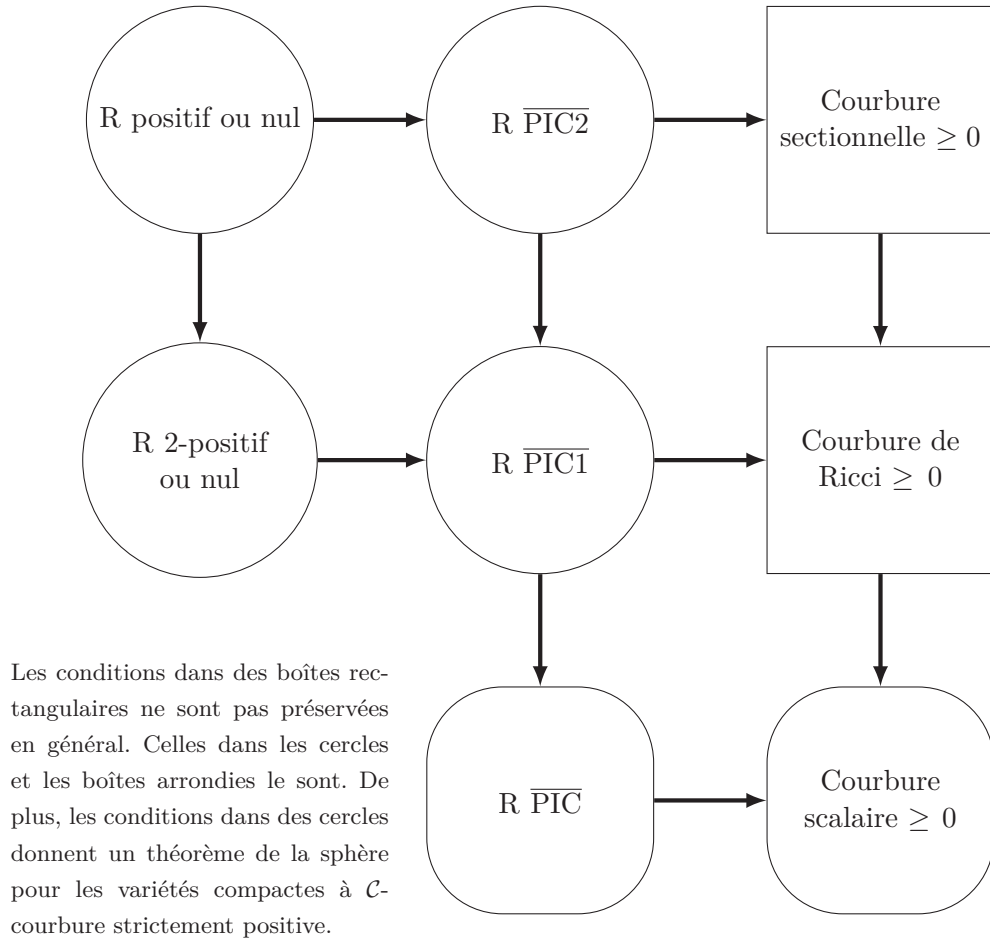


FIGURE 4.1.: Implications entre les différentes condition de courbures.

### 4.3. Minorer les courbures invariantes

Une étape importante dans la preuve des résultats de dimension 3 du Chapitre 2 est le Lemme 2.3.3, qui montre qu'en dimension 3, une borne inférieure sur la courbure de Ricci ne peut se dégrader plus vite qu'une certaine fonction du temps et de la courbure scalaire.

On va essayer de minorer des  $\mathcal{C}$ -courbures plus restrictives que la courbure de Ricci. On dit qu'un opérateur  $R$  est à  $\mathcal{C}$ -courbure plus grande que  $-k$  si  $R + kI \in \mathcal{C}$ , et on notera  $R \geq_{\mathcal{C}} -k$ .

Le résultat qu'on va énoncer ici peut être vu comme un analogue du Lemme 2.3.3 en dimension supérieure, on suppose un contrôle à priori sur la courbure scalaire le long du flot de Ricci du type  $\text{Scal} \leq A/t + B$ , ainsi qu'une minoration de la  $\mathcal{C}$ -courbure de la condition initiale, et on en déduit une minoration de la  $\mathcal{C}$ -courbure en temps court.

**Théorème 4.3.1** ([Ric11a]). *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , tout  $A \in (0, \frac{1}{4})$  et tout  $B > 0$ , il existe*

### 4.3. Minorer les courbures invariantes

$T > 0$  et  $K > 0$  tels que, si  $\mathcal{C} \subset S_B^2(\Lambda^2\mathbb{R}^n)$  est une condition de courbure qui vérifie :

1.  $\mathcal{C}$  est invariante par le flot de Ricci,
2.  $\mathcal{C}$  contient les opérateurs de courbures positifs ou nuls,
3.  $\mathcal{C}$  est contenu dans le cône des opérateurs de courbures dont la courbure de Ricci est positive ou nulle,

et  $(M^n, g(t))_{t \in [0, T']}$  est un flot de Ricci tel que :

1. à  $t = 0$ ,  $R_{g(0)} \geq_{\mathcal{C}} -\varepsilon$  pour un  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,
2. la courbure scalaire de  $(M, g(t))$  vérifie  $\text{Scal}_{g(t)} \leq \frac{A}{t} + B$  pour tout  $t \in (0, T')$ ,

alors pour tout  $t \in (0, T') \cap (0, T)$ , on a :

$$R_{g(t)} \geq_{\mathcal{C}} -K\varepsilon.$$

Au cours de la preuve de ce théorème, nous aurons besoin de certains résultats sur l'évolution de l'opérateur de courbure le long du flot de Ricci. Rappelons que cette évolution est donnée par l'équation :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + Q(R)$$

où  $Q$  est un champ de vecteur quadratique sur  $S_B^2(\Lambda^2\mathbb{R}^n)$ .

On note  $B$  l'application bilinéaire symétrique associée à  $Q$ , on peut écrire  $B$  comme :

$$B(R_1, R_2) = \frac{1}{2}(R_1 R_2 + R_2 R_1) + R_1 \# R_2.$$

$R_1 \# R_2$  est défini par :

$$\langle (R_1 \# R_2)\omega, \tilde{\omega} \rangle = -\frac{1}{2} \text{trace}(R_1 \text{ad}_{\omega} R_2 \text{ad}_{\tilde{\omega}})$$

où  $\text{ad}_{\omega}(\eta) = [\omega, \eta]$  est défini grâce à la structure d'algèbre de Lie donné par l'identification entre  $\Lambda^2\mathbb{R}^n$  et  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ . Le lemme suivant a été prouvé par Böhm et Wilking dans [BW08], il permet de développer les expressions de la forme  $Q(R + cI)$ .

**Proposition 4.3.2** ([BW08]).  $R + R \# I = \text{Ric} \wedge \text{id}$ .

L'endomorphisme  $\text{Ric} \wedge \text{id}$  de  $\Lambda^2\mathbb{R}^n$  est défini par :

$$\text{Ric} \wedge \text{id}(u \wedge v) = \frac{1}{2}(\text{Ric}(u) \wedge v + u \wedge \text{Ric}(v)).$$

On a maintenant les outils nécessaires pour prouver le Théorème 4.3.1.

#### 4. Généralisations en dimension quelconque

*Démonstration.* Définissons une nouvelle section  $L$  du fibré  $S_B^2(\Lambda^2 TM)$  des opérateurs de courbure algébriques sur  $M$  par :

$$L = R + \varepsilon(\varphi(t) + t\alpha \text{Scal}) I.$$

Pour prouver le théorème il suffit de trouver une fonction continue  $\varphi$ , une constante  $\alpha$  et un temps  $T > 0$ , ne dépendant que de  $A$  et  $B$  et tel que  $L \in \mathcal{C}$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Comme  $t \text{Scal}$  et  $\varphi$  sont uniformément bornés sur  $[0, T]$ , on aura alors la minoration désirée. Pour s'assurer que  $L \in \mathcal{C}$  au temps 0, on impose que  $\varphi(0) = 1$ . Comme on s'attend à ce que la minoration de la courbure se dégrade avec le temps, on va supposer que  $\varphi' \geq 0$ .

Pour montrer que  $L$  reste dans  $\mathcal{C}$ , on va utiliser le principe du maximum d'Hamilton pour les tenseurs [Ham86], ou plutôt une de ses variantes appelée « principe du maximum avec un ensemble d'évitement » montrée par Chow et Lu dans [CL04, Theorem 4]. Cette variante permet d'utiliser l'estimation a priori sur la courbure scalaire lors de l'étude de l'équation différentielle ordinaire qui contrôle l'évolution de  $L$ .

Au cours de la preuve, on imposera diverses conditions sur  $\varphi$  et  $\alpha$ , on vérifiera à la fin de la preuve que celles-ci peuvent être remplies.

L'évolution de  $L$  le long du flot de Ricci est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} &= \Delta R + 2Q(R) + \varepsilon(\varphi' + \alpha \text{Scal} + t\alpha(\Delta \text{Scal} + 2|\text{Ric}|^2)) I \\ &= \Delta L + 2Q(R) + \varepsilon(\varphi' + \alpha \text{Scal} + 2t\alpha|\text{Ric}|^2) I \\ &= \Delta L + 2N(L). \end{aligned}$$

Par le principe du maximum, on doit montrer que  $\mathcal{C}$  est préservé par l'équation différentielle  $\dot{L} = 2N(L)$ , dès que les solutions satisfont  $\text{Scal} \leq A/t + B$ . Pour cela, il suffit pour tout  $L \in \partial\mathcal{C}$  de montrer que  $N(L) \in \mathcal{C}$ . Comme  $\mathcal{C}$  est préservé par l'équation différentielle d'Hamilton :  $Q(L) \in \mathcal{C}$ . Comme  $\mathcal{C}$  est convexe, si l'on montre que  $D(L) = N(L) - Q(L) \in \mathcal{C}$ , on obtient alors que  $N(L) = D(L) + Q(L) \in \mathcal{C}$ . Cette idée trouve son origine dans les travaux de Böhm et Wilking sur le flot de Ricci des variétés à opérateurs de courbure positif [BW08].

On va en fait montrer que  $D(L)$  est un opérateur de courbure positif ou nul, ce qui suffira car  $\mathcal{C}$  contient le cône des opérateurs de courbure positif ou nul.

En utilisant l'identité de Böhm et Wilking (proposition 4.3.2), on a :

$$\begin{aligned} Q(L) &= Q(R) + 2\varepsilon(\varphi + t\alpha \text{Scal})(R + R \# I) + \varepsilon^2(\varphi + t\alpha \text{Scal})^2 Q(I) \\ &= Q(R) + 2\varepsilon(\varphi + t\alpha \text{Scal})(\text{Ric} \wedge \text{id}) + (n-1)\varepsilon^2(\varphi + t\alpha \text{Scal})^2 I. \end{aligned}$$

On calcule ensuite  $D(L)$  :

$$\begin{aligned} D(L) &= N(L) - Q(L) \\ &= \frac{\varepsilon}{2}(\varphi' + \alpha \text{Scal} + 2t\alpha|\text{Ric}|^2) I \\ &\quad - 2\varepsilon(\varphi + t\alpha \text{Scal})(\text{Ric} \wedge \text{id}) - (n-1)\varepsilon^2(\varphi + t\alpha \text{Scal})^2 I. \end{aligned}$$

### 4.3. Minorer les courbures invariantes

Pour estimer  $2 \text{ Ric} \wedge \text{id}$ , on se sert du fait que  $L \in \mathcal{C}$  est à courbure de Ricci positive ou nulle, ce qui nous donne que  $\text{Ric} \geq -(n-1)\varepsilon(\varphi + t\alpha \text{ Scal}) \text{id}$  en tant qu'endomorphisme symétrique. Comme  $\text{trace}(\text{Ric}) = \text{Scal}$ , on a :

$$-(n-1)\varepsilon(\varphi + t\alpha \text{ Scal}) \text{id} \leq \text{Ric} \leq (\text{Scal} + (n-1)^2\varepsilon(\varphi + t\alpha \text{ Scal})) \text{id}.$$

Et donc :

$$2 \text{ Ric} \wedge \text{id} \leq (\text{Scal} + (n-1)^2\varepsilon(\varphi + t\alpha \text{ Scal})) \text{I}.$$

Imposons à  $\varphi$  et  $\alpha$  de satisfaire :

$$\varphi + t\alpha \text{ Scal} \geq 0 \quad \text{condition (C1)}.$$

On peut alors estimer  $D(L)$  :

$$\begin{aligned} D(L) &\geq \frac{\varepsilon}{2}(\varphi' + \alpha \text{ Scal}) \text{I} \\ &\quad - \varepsilon(\varphi + t\alpha \text{ Scal})(\text{Scal} + (n-1)^2\varepsilon(\varphi + t\alpha \text{ Scal})) \text{I} \\ &\quad - (n-1)\varepsilon^2(\varphi + t\alpha \text{ Scal})^2 \text{I}. \end{aligned}$$

On réordonne les termes<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} D(L) &\geq \frac{\varepsilon}{2}\varphi' \\ &\quad + \varepsilon \text{ Scal} \left( \left( \frac{1}{2} - t \text{ Scal} \right) \alpha - \varphi \right) \\ &\quad - (2n-1)(n-1)\varepsilon^2(\varphi + t\alpha \text{ Scal})^2 \end{aligned}$$

Supposons que :

$$0 \leq \left( \frac{1}{2} - t \text{ Scal} \right) \alpha - \varphi \leq 1 \quad \text{condition (C2)},$$

Comme  $\text{Scal} \geq -\varepsilon n(n-1)$  en  $t = 0$ , cette minoration perdure pour  $t > 0$ , et on peut écrire :

$$\begin{aligned} D(L) &\geq \frac{\varepsilon}{2}\varphi' \\ &\quad - \varepsilon^2 n(n-1) \\ &\quad - (2n-1)(n-1)\varepsilon^2(\varphi + t\alpha \text{ Scal})^2, \end{aligned}$$

et comme  $\varepsilon \in [0, 1]$ ,  $\varepsilon^2 \leq 1$  et donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} D(L) &\geq \frac{\varphi'}{2} \\ &\quad - n(n-1) \\ &\quad - (2n-1)(n-1)(\varphi + t\alpha \text{ Scal})^2. \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Pour alléger les notations, on écrira dans la suite  $R \geq \alpha$  pour  $R \geq \alpha \text{I}$ .

#### 4. Généralisations en dimension quelconque

Enfin, on utilise l'inégalité  $|t\text{Scal}| \leq A + Bt$  pour avoir :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} D(L) &\geq \frac{\varphi'}{2} \\ &\quad - n(n-1) \\ &\quad - (n-1)(2n-1)(\varphi + \alpha(A+Bt))^2. \end{aligned}$$

Pour que  $D(L)$  soit non-négatif, il suffit donc de voir que :

$$\frac{\varphi'}{2} - n(n-1) - (n-1)(2n-1)(\varphi + \alpha(A+Bt))^2 \geq 0 \quad \text{condition (C3)}.$$

On doit maintenant trouver  $\varphi$ ,  $\alpha$  et  $T$  tels que les conditions (C1), (C2) and (C3) sont satisfaites sur  $[0, T]$ .

En utilisant une fois de plus que  $-n(n-1)t \leq t\text{Scal} \leq A + Bt$ , on voit que les conditions (C1) et (C2) sont impliquées par les inégalités suivantes qui ne dépendent que de  $A$ ,  $B$  et la dimension  $n$  :

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{1}{2} - (A+Bt) \right) \alpha - \varphi &\geq 0 \\ \left( \frac{1}{2} + tn(n-1) \right) \alpha - \varphi &\leq 1 \\ \varphi - n(n-1)t\alpha &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{condition (C4)}$$

La condition (C4) en  $t = 0$  est remplie si  $\alpha$  appartient à  $[\frac{2}{1-2A}, 4]$ . On impose donc que  $A < \frac{1}{4}$ . Soit  $\alpha \in (\frac{2}{1-2A}, 4)$ , et  $\varphi(t) = 1 + \beta t$ . La condition (C4) est alors satisfaite à  $t = 0$  avec des inégalités strictes.

Choisissons  $\beta$  assez grand pour que la condition (C3) soit remplie à  $t = 0$  avec une inégalité stricte. par continuité de  $\varphi$ , ces conditions sont encore remplies sur un intervalle de temps  $[0, T)$ .

Nos choix pour  $\varphi$ ,  $\alpha$  et  $T$  ne dépendent que de  $A$ ,  $B$  et  $n$ . Le théorème est donc prouvé.  $\square$

Voyons maintenant comment ce résultat permet de retrouver le résultat de Petersen et Tao [PT09] sur les variétés presque  $\frac{1}{4}$ -pincées mentionné dans l'introduction.

*Exemple 4.3.3.* On a vu dans l'exemple 2.1.8 que si une suite de variétés simplement connexes  $(M_i, g_i)$  vérifie

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{i} \leq \sec_{g_i} \leq 1$$

alors les flots de Ricci  $g_i(t)$  de condition initiale  $g_i(0) = g_i$

- existent sur intervalle de temps  $[0, T)$  indépendant de  $i$
- vérifient  $|R_{g_i(t)}| \leq C$  pour  $t \in [0, T)$
- forment une famille précompacte au sens de Cheeger-Gromov-Hamilton quand on restreint le temps d'existence à  $(0, T)$ .

On veut montrer que pour  $i$  assez grand, les  $(M_i, g_i)$  sont difféomorphes à des sphères ou des espaces symétriques de rang 1. Pour cela remarquons que l'inégalité sur la courbure sectionnelle implique  $(M_i, g_i)$  vérifie

$$R_{g_i} \geq_{C_{IC2}} -\frac{4}{3i} I.$$

Le théorème 4.3.1 permet alors de montrer que sur un intervalle de temps  $(0, T)$  indépendant de  $i$

$$R_{g_i} \geq_{C_{IC2}} -K \frac{4}{3i} I.$$

On a donc que tout flot  $(M, g(t))_{t \in (0, T)}$  limite des  $(M_i, g_i(t))_{t \in (0, T)}$  vérifie

$$R_{g(t)} \geq_{C_{IC2}} 0.$$

Par les résultats de Brendle et Schoen [BS09] et [BS08], on a alors que  $M$  est difféomorphe un produit de tores, de sphères et d'espaces symétriques de rang 1.

De plus, on sait par construction que  $M$  est homéomorphe à la limite au sens de Gromov-Hausdorff  $(X, d)$  des  $(M_i, g_i)$ . Cette limite est étudiée par Berger dans [Ber83], où il est montré que  $X$  est soit homéomorphe à  $S^n$  soit isométrique à un espace symétrique compact de rang 1. En combinant ce fait avec les restrictions sur le type topologique à difféomorphisme près de  $M$  imposées par le résultat de Brendle et Schoen, on en déduit donc que  $M$  est difféomorphe à une sphère ou une espace symétrique compact de rang 1.

Cette observation permet de retrouver le théorème de Petersen et Tao mentionné dans l'introduction.

## 4.4. Premières Applications

Dans cette section,  $\mathcal{C}$  désignera une condition de courbure qui satisfait les hypothèses du Théorème 4.3.1. C'est à dire,  $\mathcal{C}$  est une condition de courbure invariante par le flot de Ricci située entre « opérateur de courbure positif ou nul » et « courbure de Ricci positive ou nulle ».

Les exemples typiques de tels cônes sont  $\mathcal{C}_{IC1}$ ,  $\mathcal{C}_{IC2}$ ,  $\mathcal{C}_{2PCO}$  et  $\mathcal{C}_{PCO}$ .

### 4.4.1. Comment obtenir la borne en $A/t$ sur la courbure ?

L'utilisation du Théorème 4.3.1 nécessite un contrôle a priori de la courbure scalaire de  $(M, g(t))$  de la forme :

$$\text{Scal}_{g(t)} \leq \frac{A}{t} + B.$$

On utilisera pour obtenir une estimation de ce type le Théorème de pseudolocalité de Perelman. On l'énonce ici.

**Théorème 4.4.1** ([Per02]). *Pour toute dimension  $n$  et tout  $A > 0$ , on peut trouver  $\delta > 0$  et  $\varepsilon > 0$  tels que, si  $(M, g(t))_{t \in [0, (\varepsilon r_0)^2]}$  est une solution complète du flot de Ricci et  $x_0 \in M$  vérifient :*



#### 4. Généralisations en dimension quelconque

- pour tout  $x \in B_{g(0)}(x_0, r_0)$ ,  $\text{Scal}_{g(0)} \geq -\frac{1}{r_0^2}$ ,
- pour tout domaine  $\Omega \subset B_{g(0)}(x_0, r_0)$ ,  $\text{vol}_{g(0)}(\partial\Omega)^{\frac{n}{n-1}} \geq (1 - \delta)\gamma_n \text{vol}_{g(0)}(\Omega)$ , où  $\gamma_n$  est la constante isopérimétrique euclidienne,

alors pour tout  $t \in (0, (\varepsilon r_0)^2)$  et tout  $x \in B_{g(t)}(x_0, \varepsilon r_0)$  :

$$|\text{R}_{g(t)}(x)| \leq \frac{A}{t} + \frac{1}{(\varepsilon r_0)^2},$$

$$\text{vol}_{g(t)}(B_{g(t)}(x, \sqrt{t})) \geq ct^{n/2},$$

où  $c$  ne dépend que de la dimension.

Ce théorème dit que si une région est très proche de  $\mathbb{R}^n$  au niveau isopérimétrique, sa courbure est contrôlée sur un petit intervalle de temps. La force de ce théorème est de ne demander aucune majoration sur la courbure.

Ce théorème a été énoncé par Perelman dans [Per02]. Une coquille a cependant rendu l'énoncé faux, l'hypothèse de complétude y est manquante alors qu'un contre exemple dû à Topping montre que celle-ci est nécessaire, voir [GT11]. La démonstration originale de Perelman est très rapide, de plus amples détails sont donnés dans [KL08] et [CCG<sup>+</sup>10].

#### 4.4.2. Flot de certaines métriques continues

Un théorème de Cheeger et Anderson [AC92] montre qu'une limite au sens de Gromov-Hausdorff d'une suite  $(M_i, g_i)$  de variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée et rayon d'injectivité minoré est une variété  $M$  de classe  $C^{1,\alpha}$  munie d'une métrique  $g_\infty$  de classe  $C^\alpha$ . La régularité de  $(M, g_0)$  est alors insuffisante pour pouvoir définir un flot de Ricci de condition initiale classique  $(M, g)$  par les méthodes habituelles.

On va montrer ici qu'en renforçant l'hypothèse de courbure de Ricci minorée en  $\mathcal{C}$ -courbure minorée on peut définir un flot de Ricci  $(\tilde{M}, \tilde{g}(t))$  dont la condition initiale métrique est  $(M, g_\infty)$ .

**Théorème 4.4.2** ([Ric11a]). *Soit  $(M, g_\infty)$  une variété de dimension  $n$  qui est limite au sens de Gromov-Hausdorff d'une suite de variétés riemanniennes  $(M_i, g_i)$  de dimension  $n$  complètes à courbures sectionnelles bornées et qui vérifient, pour des constantes  $k > 0$  et  $\iota_0 > 0$  indépendantes de  $i$  :*

- $\text{R}_{g_i} \geq -k$ ,
- $\text{inj}(g_i) \geq \iota_0$ .

*Alors il existe un flot de Ricci  $(\tilde{M}, \tilde{g}(t))_{t \in (0, T)}$  de condition initiale métrique  $(M, g_\infty)$ . De plus  $M$  et  $\tilde{M}$  sont homéomorphes.*

*Démonstration.* Quitte à faire une homothétie, on peut supposer que  $k = 1$ .

Comme le rayon d'injectivité et la courbure de Ricci sont minorés, par le Théorème 0.1 de [AC92], pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver un rayon  $r_0$  tel que toute boule  $B$  de rayon inférieur à  $r_0$  admet une carte harmonique  $\varphi_B : B \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \varphi_B^* g_{euc} \leq g_i \leq (1+\varepsilon) \varphi_B^* g_{euc}$$

où  $g_{euc}$  est la métrique euclidienne standard sur  $\mathbb{R}^n$ .

Ce contrôle bi-Lipschitz permet, en choisissant  $r_0$  assez petit, de montrer que l'inégalité isopérimétrique dans  $(B, g_i)$  est aussi proche que l'on souhaite de l'inégalité isopérimétrique dans  $(B, \varphi_B^* g_{euc})$ . On obtient donc un  $r_0 > 0$  indépendant de  $i$  tel que les hypothèses du Théorème de pseudolocalité soient vérifiées.

Il existe donc deux constantes  $T > 0$  et  $B > 0$  telles que, pour  $t \in (0, T)$  et  $x \in M$  :

- $|R_{g_i(t)}| \leq \frac{\alpha}{t} + B$ ,
- $\text{vol}_{g_i(t)}(B_{g_i(t)}(x, \sqrt{t})) \geq ct^{n/2}$ ,

où  $g_i(t)$  est l'unique solution du flot de Ricci à courbure bornée vérifiant  $g_i(0) = g_i$ .

En choisissant  $\alpha > 0$  assez petit pour que  $|R| \geq \frac{\alpha}{t}$  implique  $\text{Scal} \leq \frac{1}{8t}$ , on se retrouve dans les hypothèses du Théorème 4.3.1 et on a donc, sur un intervalle  $[0, T')$  possiblement plus petit que  $[0, T)$  la minoration :

$$R_{g_i(t)} \geq -K.$$

Comme par hypothèse  $\mathcal{C}$ -courbure minorée implique courbure de Ricci minorée, on peut appliquer la Proposition 2.1.6 qui nous donne exactement le résultat.  $\square$

#### 4.4.3. Limite au sens de Gromov-Hausdorff et flot de Ricci

On essaie ici de voir ce qu'il advient de la preuve du Théorème de Cheeger-Colding donnée au Théorème 2.4.5 dans le cas de la dimension 3. On verra que les outils que nous avons mis en place ne permettent pas de montrer le Théorème 2.4.5 en toute dimension, on obtient néanmoins un lien intéressant entre convergence au sens de Gromov-Hausdorff vers une variété lisse et convergence des flots de Ricci des éléments de la suite lorsque la  $\mathcal{C}$ -courbure est minorée. Énonçons le résultat principal de cette sous-section :

**Théorème 4.4.3** ([Ric11a]). *Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé. Soit  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(M, g)$  des variétés riemanniennes compactes de dimension  $n$  telle que la suite  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  converge au sens de Gromov-Hausdorff vers  $(M, g)$ . Supposons que la  $\mathcal{C}$ -courbure des  $(M_i, g_i)$  est uniformément minorée et notons  $(M_i, g_i(t))$  le flot de Ricci de condition initiale  $(M_i, g_i)$ .*

*Alors les flots  $(M_i, g_i(t))$  existent au moins sur un intervalle de temps  $(0, T)$  qui ne dépend pas de  $i$  et convergent à extraction près vers un flot  $(\tilde{M}, \tilde{g}(t))_{t \in (0, T)}$  de condition initiale métrique  $(M, g)$ .*

#### 4. Généralisations en dimension quelconque

Pour prouver ce théorème, on a besoin de contrôler l'isopérimétrie indépendamment de  $i$  pour pouvoir appliquer le théorème de pseudolocalité. C'est ce que l'on fait dans le lemme suivant, qui a été suggéré à l'auteur par G. Carron. Remarquons que ce lemme s'applique même quand seule la courbure de Ricci est minorée.

**Lemme 4.4.4.** *Soit  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variétés riemanniennes de dimension  $n$  telles que  $\text{Ric}(g_i) \geq -(n-1)g_i$  et qui converge au sens de Gromov-Hausdorff vers un variété  $(M, g)$  lisse de dimension  $n$ .*

*Alors pour tout  $\alpha > 0$ , il existe  $i_0 \in \mathbb{N}$ ,  $B > 0$  et  $T > 0$  tels que, pour tout  $i \geq i_0$  les flots de Ricci  $(M_i, g_i(t))$  de condition initiale classique  $(M_i, g_i)$  existent au moins pour  $t$  dans  $[0, T)$  et satisfont :*

1.  $|\text{R}(g_i(t))| \leq \frac{\alpha}{t} + B$  pour tout  $t \in (0, T)$ ,
2.  $\text{vol}(B_{g_i(t)}(x, \sqrt{t})) \geq ct^{n/2}$  pour tout  $t \in (0, T)$  et  $x \in M_i$ .

*En particulier, les flots  $(M_i, g_i(t))_{t \in (0, T)}$  forment une suite précompacte au sens de Cheeger-Gromov-Hamilton.*

*Démonstration.* On veut appliquer le Théorème de pseudolocalité aux éléments de la suite  $(M_i, g_i)$  à partir d'un rang assez grand. Soit  $\alpha > 0$  fixé. On sait que pour tout  $x \in M_i$ ,  $\text{Scal}_{g_i}(x) \geq -n(n-1)$ . On doit donc juste trouver  $r_0 \in (0, (n(n-1))^{-1/2}]$  tel que tout domaine  $\Omega$  contenu dans une boule de rayon  $r_0$  dans  $M_i$  pour  $i$  assez grand satisfait une inégalité isopérimétrique presque euclidienne :

$$|\partial\Omega|^{\frac{n}{n-1}} \geq (1-\delta)\gamma_n|\Omega| \quad (4.2)$$

où  $\gamma_n$  est la constante isopérimétrique euclidienne.

Pour obtenir ceci, on considère les profils isopérimétriques  $h_i(\beta)$  des  $(M_i, g_i)$ , définis pour  $\beta \in [0, 1]$  par :

$$h_i(\beta) = \inf \left\{ \frac{|\partial\Omega|}{|M_i|} \mid \Omega \text{ ouvert de } M_i \text{ tel que } |\Omega| = \beta|M_i| \right\}$$

Comme  $(M, g)$  est lisse, un résultat de Bérard et Meyer [BM82, Appendice C] permet d'affirmer que le profil isopérimétrique  $h(\beta)$  de  $(M, g)$ , est équivalent au profil euclidien quand  $\beta$  tend vers 0. On peut donc trouver, pour tout  $\varepsilon > 0$ , un  $\rho > 0$  tel que :

$$\beta < \rho \Rightarrow h(\beta) \geq (1-\varepsilon) \frac{\gamma_n}{\text{vol}(M, g)^{\frac{1}{n}}} \beta^{\frac{n-1}{n}}$$

On a maintenant besoin d'un résultat montré dans la thèse de V. Bayle [Bay03] : sous les hypothèses du Lemme 4.4.4, le rapport  $h_i/h$  des profils isopérimétriques converge uniformément vers 1 quand  $i$  tend vers l'infini. En particulier, pour  $i$  assez grand :

$$h_i \geq (1-\varepsilon)h.$$

Soit  $\Omega \subset M_i$  un domaine dont le volume est plus petit que  $\frac{\rho}{2} \text{vol}(M_i, g_i)$ . Par continuité du volume sous la convergence de Gromov-Hausdorff [Col97], pour  $i$  assez grand  $\frac{\rho}{2} \text{vol}(M_i, g_i) \leq \rho \text{vol}(M, g)$  On a alors :

$$\begin{aligned} |\partial\Omega| &\geq \text{vol}(M_i, g_i) \times h_i \left( \frac{|\Omega|}{\text{vol}(M_i, g)} \right) \\ &\geq \text{vol}(M_i, g) \times (1 - \varepsilon) h \left( \frac{|\Omega|}{\text{vol}(M_i, g)} \right) \\ &\geq \text{vol}(M_i, g_i) \times (1 - \varepsilon)^2 \frac{\gamma_n}{\text{vol}(M, g)^{\frac{1}{n}}} \left( \frac{|\Omega|}{\text{vol}(M_i, g)} \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &= (1 - \varepsilon)^2 \left( \frac{\text{vol}(M_i, g_i)}{\text{vol}(M, g)} \right)^{\frac{1}{n}} \gamma_n |\Omega|^{\frac{n-1}{n}} \end{aligned}$$

Toujours par convergence du volume, pour  $i$  assez grand, on a  $\left( \frac{\text{vol}(M_i, g_i)}{\text{vol}(M, g)} \right)^{\frac{1}{n}} \geq 1 - \varepsilon$ , et donc :

$$|\partial\Omega| \leq (1 - \varepsilon)^3 \gamma_n |\Omega|^{\frac{n-1}{n}}$$

Si on prend  $\varepsilon$  assez petit, on obtient l'inégalité (4.2) pour les domaines de volume inférieur  $\frac{\rho}{2} \text{vol}(M_i, g_i)$ . En utilisant encore la convergence du volume, pour  $i$  assez grand l'inégalité est vraie pour les domaines de volume plus petit que  $\frac{\rho}{4} \text{vol}(M, g)$ .

Comme la courbure de Ricci est minorée, l'inégalité de Bishop-Gromov nous donne :

$$\text{vol}(B_{g_i}(x, r)) \leq V_{-1}(r)$$

où  $V_{-1}(r)$  est le volume d'une boule de rayon  $r$  dans l'espace hyperbolique de dimension  $n$ . Notre inégalité est donc vraie pour les domaines inclus dans une boule de rayon  $r_0$  tel que  $V_{-1}(r_0) = \frac{\rho}{4} \text{vol}(M, g)$ .

On a donc montré qu'une inégalité isopérimétrique presque euclidienne était vraie pour les domaines de  $M_i$  inclus dans une boule de rayon  $r_0$ , où  $r_0$  est indépendant de  $i$ . On peut donc appliquer le théorème de pseudolocalité pour obtenir les bornes requises.  $\square$

On peut maintenant prouver le Théorème 4.4.3.

*Démonstration.* On choisit  $\alpha > 0$  comme dans la preuve du Théorème 4.4.2, et à l'aide du lemme précédent, on obtient que les flots  $(M_i, g_i(t))_{t \in (0, T)}$  vérifient, pour  $t \in (0, T)$  :

- $|\mathbf{R}_{g_i(t)}| \leq \frac{1}{8t} + B$ ,
- $\mathbf{R}_{g_i(t)} \geq c - K$ ,
- $\text{vol}_{g_i(t)}(B_{g_i(t)}(x, \sqrt{t})) \geq ct^{n/2}$ .

Et on peut donc appliquer la proposition 2.1.6.  $\square$

#### 4.4.4. Un résultat de stabilité

On va maintenant montrer un résultat de stabilité pour les variétés à  $\mathcal{C}$ -courbure presque positive. Ce résultat dit que si le rayon d'injectivité est minoré et le diamètre est majoré, alors les variétés à  $\mathcal{C}$ -courbure presque positive sont en fait à  $\mathcal{C}$ -courbure positive ou nulle. Le résultat que nous allons énoncer est un analogue du Théorème 2.4.2 de M. Simon en dimension quelconque.

**Théorème 4.4.5** ([Ric11a]). *Pour tout  $\iota_0 > 0$  et tout  $D > 0$ , il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que si  $(M, g)$  est une variété riemannienne compacte telle que :*

- $\text{inj}(g) \geq \iota_0$ ,
- $\text{diam}(g) < D$ ,
- $R \geq_{\mathcal{C}} -\varepsilon$ ,

*alors  $M$  admet une métrique lisse à  $\mathcal{C}$ -courbure positive ou nulle.*

Pour certaines conditions, cela permet d'avoir une classification à difféomorphisme près. En particulier, si  $\mathcal{C}$  est le cône des opérateurs  $\overline{\text{PIC1}}$ , on a que le revêtement universel de  $M$  est difféomorphe à un produit de sphères, d'espaces euclidiens, et d'espaces symétriques compacts.

Ce résultat de stabilité n'apparaît pas dans la littérature même dans le cas où  $\mathcal{C}$  est le cône des opérateurs de courbure positifs ou nuls.

*Démonstration.* On procède par l'absurde. Soit  $\varepsilon_i$  une suite de réels strictement positifs tendant vers 0 et  $(M_i, g_i)$  des variétés vérifiant :

- $\text{inj}(g_i) \geq \iota_0$ ,
- $\text{diam}(g_i) < D$ ,
- $R_{g_i} \geq_{\mathcal{C}} -\varepsilon_i$ ,

et telle qu'aucune des  $M_i$  n'admette une métrique à  $\mathcal{C}$ -courbure non-négative.

Comme dans la preuve du Théorème 4.4.2, on construit les flots  $(M_i, g_i(t))$  de condition initiale  $(M_i, g_i)$ , ils existent au moins pour  $t \in [0, T]$  et vérifient  $|R_{g_i(t)}| \leq \frac{\alpha}{t} + B$ . Par le Théorème 4.3.1, on en déduit donc que, pour  $t < T'$ , on a :

$$R_{g_i(t)} \geq_{\mathcal{C}} -K\varepsilon_i.$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, la suite de flots  $(M_i, g_i(t))$  admet une sous suite qui converge vers un flot  $(M, g(t))$  et ce flot vérifiera  $R \geq_{\mathcal{C}} 0$ . Comme  $M$  est compacte, il y a une infinité de  $M_i$  qui sont difféomorphes à  $M$ , une contradiction.  $\square$

## 4.5. Quand la courbure sectionnelles est minorée

Dans cette section, on donne une alternative au Théorème de pseudolocalité pour obtenir des bornes en  $A/t$  pour la courbure. Cette méthode nécessite que la condition de courbure que l'on considère soit, en plus de satisfaire les hypothèses du Théorème 4.3.1, plus forte que la condition « courbure sectionnelle positive ou nulle ». Cette approche est basée sur des travaux récent de E. Cabezas-Rivas et B. Wilking dans [CW11].

Toutes les conditions de courbure  $\mathcal{C}$  que l'on rencontrera dans cette section vérifieront les hypothèses du Théorème 4.3.1 et seront contenues dans le cône des opérateurs à courbure sectionnelle positive ou nulle. On pourra penser aux cônes  $\mathcal{C}_{PCO}$  et  $\mathcal{C}_{IC2}$ .

### 4.5.1. Un lemme sur le flot des variétés à courbure presque positive et à volume presque euclidien

Le lemme suivant permet de borner la courbure par  $A/t$  sur un petit intervalle de temps pour les variétés à  $\mathcal{C}$ -courbure presque positive ou nulle et à volume presque euclidien, c'est une variation de la proposition 5.5 de [CW11].

**Lemme 4.5.1.** *Pour toute dimension  $n$ , on peut trouver un nombre  $A_0(n) > 0$ , tel que pour tout  $A \in (0, A_0(n))$ , on peut trouver  $\delta > 0$ ,  $T > 0$  et  $\kappa > 0$  tels que si  $(M, g_0)$  est une variété compacte lisse vérifient :*

- Pour tout  $x \in M$ ,  $\text{vol}_{g_0}(B_{g_0}(x, 1)) \geq (1 - \delta)\omega_n$  où  $\omega_n$  est le volume de la boule euclidienne de rayon 1,
- $R_{g_0} \geq c - \kappa$ .

Alors le flot de Ricci  $(M, g(t))$  de condition initiale  $g(0) = g_0$  existe au moins pour  $t \in [0, T)$  et vérifie, pour  $t \in (0, T)$  :

$$|R_g(t)| \leq \frac{A}{t}.$$

*Démonstration.* Rappelons que  $|\text{Scal}| \leq 2\sqrt{n}|R|$ , et posons  $A_0(n) = \frac{1}{8\sqrt{n}}$ . On va montrer le lemme par l'absurde. Fixons  $A \in (0, A_0(n))$  et considérons une suite de contre-exemples  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  vérifiant :

- $R_{g_i} \geq c - \frac{1}{i}$ ,
- pour tout  $x$  dans  $M_i$ ,  $\text{vol}_{g_i}(B_{g_i}(x, 1)) \geq (1 - \frac{1}{i})\omega_n$ .

Et telle qu'il existe une suite  $t_i$  tendant vers 0 telle que :

$$\sup_{M_i \times (0, t_i)} t |R_{g_i(t)}| = Q_i > A,$$

où  $g_i(t)$  est le flot de condition initiale  $g_i(0) = g_i$ . Quitte à changer  $t_i$  en  $t'_i < t_i$ , on peut toujours supposer que  $Q_i < A_0(n)$ .

#### 4. Généralisations en dimension quelconque

En particulier, on peut appliquer le Théorème 4.3.1 aux flots  $g_i(t)$  et obtenir (au moins pour  $i$  assez grand), que pour  $t \in [0, t_i)$

$$R_{g_i(t)} \geq c - K \frac{1}{i}.$$

Une fois cette minoration obtenue, on peut répéter mot pour mot la preuve de la Proposition 5.5 de [CW11].  $\square$

#### 4.5.2. Flot de certains espaces métriques

Le résultat précédent permet de définir un flot de Ricci pour certains espaces d'Alexandrov.

**Théorème 4.5.2** ([Ric11a]). *Soit  $n$  fixé, il existe  $\delta > 0$  et  $\kappa > 0$  tel que si  $(X, d)$  est un espace métrique compact qui est limite au sens de Gromov-Hausdorff d'une suite de variétés  $(M_i, g_i)$  de dimension  $n$  telles que :*

- $R_{g_i} \geq c - \kappa,$
- pour tout  $x \in M_i, \text{vol}_{g_i}(B_{g_i}(x, 1)) \geq (1 - \delta)\omega_n.$

*Alors il existe un variété lisse  $M$  munie d'un flot de Ricci  $g(t)$  pour  $t \in (0, T)$  qui admet  $(X, d)$  comme condition initiale métrique.*

*Remarque 4.5.3.* En particulier,  $X$  est homéomorphe à  $M$  (proposition 2.1.5), et en particulier  $X$  est une variété topologique. C'est en fait une conséquence directe du Théorème de stabilité de Perelman (voir [Kap07]).

*Démonstration.* Par le Lemme 4.5.1, si  $\delta$  et  $\kappa$  sont assez petits, les flots  $(M_i, g_i(t))$  de condition initiale  $(M_i, g_i)$  existent au moins pour  $t \in [0, T)$  et vérifient :

- $|R_{g_i(t)}| \leq \frac{A}{t},$
- $R \geq c - K\kappa.$

On peut alors appliquer le Lemme 2.3.2 pour obtenir une minoration du volume des boules en un  $t_0 > 0$ . Ceci permet d'appliquer la proposition 2.1.6 et d'obtenir un flot à condition initiale métrique  $(X, d)$  comme limite des flots  $(M_i, g_i(t))$ .  $\square$

#### 4.5.3. Deuxième résultat de stabilité

On peut aussi énoncer une variante du Théorème 4.4.5.

**Théorème 4.5.4** ([Ric11a]). *Pour tout  $n$  et tout  $D > 0$  il existe un  $\delta > 0$  et un  $\kappa > 0$  tels que, si une variété compacte  $M$  de dimension  $n$  admet une métrique lisse telle que :*

- $\text{diam}(M, g) \leq D,$
- $\text{vol}_g(B_g(x, 1)) \geq (1 - \delta)\omega_n,$

#### 4.6. Un autre théorème de pseudolocalité et quelques améliorations de 4.5

- $R \geq_{\mathcal{C}} -\kappa$ .

Alors  $(M, g)$  admet une métrique à  $\mathcal{C}$ -courbure positive ou nulle.

*Démonstration.* La preuve est la même que celle du Théorème 4.4.5 en utilisant le Lemme 4.5.1 en lieu et place du Théorème de pseudolocalité pour obtenir la borne en  $A/t$  sur la courbure.  $\square$

### 4.6. Un autre théorème de pseudolocalité et quelques améliorations de 4.5

Pendant la rédaction de cette thèse, Tian et Wang ont établis dans [TW12] une variante du Théorème de pseudolocalité de Perelman. En utilisant cette variante, on peut affaiblir les hypothèses des résultats de la section précédente. C'est ce que nous exposons dans cette section.

#### 4.6.1. Le Théorème de Tian et Wang

Le Théorème que nous allons maintenant citer est la proposition 3.2 de [TW12]. C'est un théorème de pseudolocalité avec comme hypothèses volume presque euclidien et courbure de Ricci presque positive, alors que le Théorème original de Perelman demandait courbure scalaire minorée et inégalité isopérimétrique presque euclidienne.

**Théorème 4.6.1** ([TW12]). *Soit  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $A$  assez petit, il existe  $\delta > 0$  et  $T > 0$  tels que si  $(M, g(t))$  est un flot de Ricci défini pour  $t \in [0, T')$  et  $x_0 \in M$  sont tels que :*

- $\text{vol}_{g(0)}(B_{g(0)}(x_0, 1)) \geq (1 - \delta)\omega_n$ ,
- $\text{Ric}_{g(0)} \geq -(n - 1)\delta^2 g(0)$  pour  $x \in B_{g(0)}(x_0, 1)$

Alors, pour  $t \in (0, T')$  et  $x \in B_{g(0)}(x_0, \frac{3}{4})$ , on a :

- $\text{vol}_{g(t)}(B_{g(t)}(x, \sqrt{t})) \geq ct^{n/2}$  où  $c$  ne dépend que de la dimension.
- $|R| \leq \frac{A}{t}$ .

#### 4.6.2. Conséquences sur les résultats de 4.5

Ceci permet d'affaiblir les conditions sur la condition de courbure  $\mathcal{C}$  utilisée dans les sections 4.5.2 et 4.5.3. En effet le Théorème précédent remplace le Lemme 4.5.1 sans requérir que la condition  $\mathcal{C}$  soit plus forte que courbure sectionnelle positive ou nulle.

On obtient en particulier le résultat suivant, qui découle de la preuve du Théorème 4.5.2 et du Théorème de Tian et Wang :

**Théorème 4.6.2.** *Soit  $\mathcal{C}$  un condition de courbure vérifiant les hypothèses du Théorème 4.3.1.*



#### 4. Généralisations en dimension quelconque

Pour toute dimension  $n$ , il existe  $\delta > 0$  tel que si  $(X, d)$  est un espace métrique qui est limite au sens de Gromov-Hausdorff de variétés compactes de dimension  $n$  vérifiant  $R \geq_C -\delta$  et dont les boules de rayon 1 sont de volume au moins  $(1 - \delta)\omega_n$ , alors  $(X, d)$  est homéomorphe à une variété topologique.

On retrouve avec ce résultat un cas particulier d'un théorème de Cheeger et Colding ([CC97], Théorème 5.14).

De même, on obtient :

**Théorème 4.6.3** ([Ric11a]). *Soit  $\mathcal{C}$  une condition de courbure vérifiant les hypothèses du Théorème 4.3.1.*

*Pour tout  $n$  et tout  $D > 0$  il existe un  $\delta > 0$  et un  $\kappa > 0$  tels que, si une variété compacte  $M$  de dimension  $n$  admet une métrique lisse telle que :*

- $\text{diam}(M, g) \leq D$ ,
- $\text{vol}_g(B_g(x, 1)) \geq (1 - \delta)\omega_n$ ,
- $R \geq_C -\kappa$ .

*Alors  $(M, g)$  admet une métrique à  $\mathcal{C}$ -courbure positive ou nulle.*

# Perspectives

Les résultats de cette thèse laissent un grand nombre de pistes à explorer. On présente ici quelques-unes d'entre elles.

## Unicité des flots à condition initiale métrique

Dans le chapitre 3, on a montré que pour les surfaces compactes à courbure minorée, le flot de Ricci avec condition initiale métrique est unique. Une première question est la suivante :

**Question.** *Peut-on avoir unicité du flot de Ricci d'une surface d'Alexandrov à courbure intégrale bornée ? non compacte ?*

La difficulté principale ici est que l'absence de minoration a priori de la courbure fait tomber un certain nombre d'arguments de monotonie utilisés, et oblige à travailler avec des convergences en mesure plutôt qu'avec des convergences  $L^1$ .

Un résultat d'unicité similaire en dimension supérieure semble difficilement accessible avec les techniques développées ici : le théorème d'uniformisation et le fait que le flot se réduise à une équation scalaire sont des faits spécifiques à la dimension 2. L'étude du cas des variétés rotationnellement symétriques, où le flot peut se réduire à une équation aux dérivées partielles scalaire, mérite d'être exploré avec les méthodes développées ici.

Il est aussi intéressant de voir si les techniques utilisées pourraient s'appliquer pour d'autres flots conformes (flot de Yamabe en dimension plus grande que 3 par exemple).

## Conditions de courbure

Les conditions de courbure invariantes par le flot de Ricci sont encore mal comprises. Dans le chapitre 3, on a eu besoin de condition de courbure invariantes par le flot de Ricci comprises entre courbure de Ricci positive ou nulle et courbure scalaire positive ou nulle. Dans la classe des cônes de Wilking, le cône  $\mathcal{C}_{IC1}$  est maximal parmi les cônes vérifiant ces conditions (voir section 4.2), il est donc légitime de se demander :

**Question.** *Si l'on considère tout les cônes  $\mathcal{C}$  invariants par le flot de Ricci,  $\mathcal{C}_{IC1}$  est-il encore maximal parmi les cônes compris entre courbure de Ricci positive ou nulle et opérateur de courbure positif ou nul ?*

Plus largement, on sait que tout cône de Wilking est inclus dans le cône de opérateurs PIC  $\mathcal{C}_{IC}$ . Il serait intéressant de se demander si ce résultat est vrai pour les cônes invariants généraux (à l'exception du cône des opérateurs à courbure scalaire positive ou nulle).

**Question.** *Existe-t-il des conditions de courbure invariantes par le flot de Ricci entre courbure scalaire positive ou nulle et courbure isotrope positive ou nulle ?*

Une dernière question, plus vague et plus difficile, est celle-ci :

**Question.** *Existe-t-il une caractérisation algébrique maniable des cônes invariants par le flot de Ricci ?*

## **C-courbure minorée et géométrie métrique**

Les résultats du chapitre 4 reposent sur des hypothèses restrictives, soit une minoration du rayon d'injectivité, soit une courbure presque positive et des boules de volume presque euclidien. On peut se demander si ces hypothèses ne sont pas trop fortes.

**Question.** *Dans les théorèmes de sections 4.4, 4.5 et 4.6, peut-on remplacer les hypothèses sur le rayon d'injectivité ou sur le caractère presque euclidien du volume par une simple minoration du volume des boules de rayon 1 ?*

Une piste naturelle pour approcher ce problème est d'essayer de montrer des théorème de pseudolocalité moins restrictifs que ceux de Perelman et de Tian et Wang.

De tels résultats permettraient une assez bonne compréhension des propriétés des espaces métriques qui sont limites au sens de Gromov-Hausdorff de suites de variétés non-effondrées à C-courbure minorée.

Une autre question intéressante est de comprendre l'adhérence de certains ensembles des variétés riemanniennes dans l'ensemble de toutes les variétés riemanniennes lisses pour la distance de Gromov-Hausdorff, voir p.634 de [Ber03]. Les adhérences que nous écrivons dans la suite s'entendent dans l'espace des variétés lisses et pour la distance de Gromov-Hausdorff.

La définition métrique de la minoration de la courbure sectionnelle nous apprend par exemple que l'ensemble des variétés à courbure sectionnelle minorée est fermé pour la distance de Gromov-Hausdorff, on écrira :

$$\overline{\{(M, g) \mid \text{sec}_g \geq k\}} = \{(M, g) \mid \text{sec}_g \geq k\}.$$

La définition métrique de la courbure de Ricci minorée donnée par Lott-Villani et Sturm (voir [Vil09]) permet de conclure que :

$$\overline{\{(M, g) \mid \text{Ric}_g \geq k\}} = \{(M, g) \mid \text{Ric}_g \geq k\}.$$

**Question.** *Trouver des courbures C telles que :*

$$\overline{\{(M, g) \mid \text{R}_g \geq_C k\}} = \{(M, g) \mid \text{R}_g \geq_C k\}.$$

Un indice laissant à penser que de tels résultats sont plausibles est le Théorème 4.4.3, qui nous dit par exemple que si des variétés lisses  $(M_i^n, g_i)$  convergent au sens de Gromov-Hausdorff vers une variété lisse  $(M^n, g)$  de même dimension et que toutes sont à opérateurs de courbure positif ou nul, alors il existe un flot de Ricci  $(\tilde{M}, \tilde{g}(t))_{t \in (0, T)}$  à opérateur

de courbure positif ou nul et tel que la distance  $d_{\tilde{g}(t)}$  converge uniformément quand  $t$  tend vers 0 vers une distance isométrique à  $d_g$ . Si ce flot était unique (ce qui semble hors de portée à l'heure actuelle), on pourrait en conclure que  $(M, g)$  est à opérateur de courbure positif ou nul.



# A. Approximation des surfaces d'Alexandrov

On donne ici des indications pour la preuve du Théorème 3.2.4, que l'on rappelle ici :

**Théorème A.0.4.** *Soit  $(X, d)$  une surface compacte d'Alexandrov à courbure plus grande que  $-1$ , alors il existe une suite de surfaces compactes lisses  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  vérifiant :*

- (i)  $(M_i, g_i)$  converge au sens de Gromov-Hausdorff vers  $(X, d)$ ,
- (ii) la courbure de Gauss de  $(M_i, g_i)$  est minorée par  $-1$ ,
- (iii) le diamètre de  $(M_i, g_i)$  est compris en  $\text{diam}(X, d)/2$  et  $2 \text{diam}(X, d)$ ,
- (iv) l'aire de  $(M_i, g_i)$  est comprise entre  $\text{Aire}(X, d)/2$  et  $2 \text{Aire}(X, d)$ .

Les estimations sur le diamètre et l'aire sont des conséquences directes de la convergence au sens de Gromov-Hausdorff et de la minoration de la courbure.

Comme mentionné dans la section 3.2.2, le coeur de la preuve consiste à montrer que  $(X, d)$  peut s'approcher par des surfaces polyédrales à faces hyperboliques dont la courbure est plus grande que  $-1$ .

La preuve de ce théorème repose sur des arguments dûs à Alexandrov dans ces travaux sur les surfaces positivement courbées et sur les surfaces à courbure intégrale bornée. La démonstration se révèle longue et technique, même dans le cas des surfaces à courbure positive. Pour des raisons de place, on va ici donner le plan de la preuve d'Alexandrov et mettre en évidence les changements nécessaires pour que cette preuve fonctionne dans le cas des surfaces à courbure plus grande que  $-1$ .

Dans tout ce chapitre,  $(X, d)$  est une surface d'Alexandrov compacte à courbure plus grande que  $-1$ . La première partie est consacrée à la preuve de l'existence de triangulations aussi fines que souhaitées de  $X$  par des triangles géodésiques. Ces triangulations permettent de construire un surface polyédrale (dont les faces sont des triangles hyperboliques) qui est à courbure plus grande que  $-1$ . La deuxième partie montre que ces surfaces polyédrales approchent d'autant mieux  $X$  au sens de Gromov-Hausdorff que la triangulation est choisie fine.

## A.1. Triangulations

Une triangulation  $\mathcal{T}$  de  $(X, d)$  est la donnée d'une famille finie de triangles  $(T_i)_{i \in I}$  géodésiques d'intérieurs homéomorphes au disque qui recouvrent  $X$  et dont les intérieurs sont disjoint. Dans cette définition, deux triangles peuvent être adjacents le long d'une

## A. Approximation des surfaces d'Alexandrov

portion seulement d'un de leur côtés, cette notion est donc différente de la notion de triangulation utilisée en topologie.

*Remarque A.1.1.* Ici, un triangle est un domaine de  $X$  dont le bord est formé de trois plus court chemins  $[ab]$ ,  $[ac]$  et  $[bc]$ . De même, un polygone est un domaine bordé par une suite finie de plus court chemins.

**Lemme A.1.2.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $(X, d)$  admet une triangulation par des triangles convexes de diamètre inférieur à  $\varepsilon$ .*

Ce lemme est prouvé dans le chapitre 2 de [Ale06] (Théorème, section 6, p. 88). Comme indiqué par Alexandrov, cette preuve ne repose pas sur la positivité de la courbure mais uniquement sur le caractère « non-branchant »<sup>1</sup> de l'espace considéré. Comme les espaces à courbure minorée sont non-branchants (voir [BGP92]), la preuve fonctionne pour les surfaces à courbure minorée. Donnons néanmoins les grandes lignes de la preuve.

La démonstration se fait en plusieurs étapes. Fixons  $\varepsilon > 0$ . On montre d'abord que pour tout  $x \in X$ , on peut trouver un triangle géodésique convexe de diamètre inférieur à  $\varepsilon$  dont l'intérieur est homéomorphe au disque et contient  $x$ . C'est le Théorème 2, page 79 dans [Ale06].

Par compacité, on peut donc recouvrir  $X$  par un nombre fini de triangles convexes. Les lemmes 2, 3 et 4 de la section 6 de [Ale06] montrent ensuite que si un nombre fini de domaines à bord polygonal sont triangulables, on peut construire des triangulations de chacun de ces domaines qui coïncident quand les domaines se chevauchent. Ceci permet de construire la triangulation recherchée.

## A.2. Convergence

On fixe  $\varepsilon > 0$  et on note  $\mathcal{T}_\varepsilon$  une triangulation donnée par le lemme précédent. On construit une surface polyédrale à faces hyperboliques  $(\bar{X}_\varepsilon, \bar{d}_\varepsilon)$  de la façon suivante : on considère pour tout triangle  $T \in \mathcal{T}_\varepsilon$  son triangle de comparaison  $\bar{T}$  dans le plan hyperbolique, on recolle ensuite cette collection de triangles hyperboliques suivant la même combinatoire que celle de  $\mathcal{T}_\varepsilon$  pour obtenir la surface polyédrale  $\bar{X}_\varepsilon$ . La distance  $\bar{d}_\varepsilon$  est la distance intrinsèque de  $\bar{X}_\varepsilon$ . Par construction,  $\bar{X}_\varepsilon$  est munie d'une triangulation  $\bar{\mathcal{T}}_\varepsilon$ . On montre tout d'abord :

**Lemme A.2.1.**  *$(\bar{X}_\varepsilon, \bar{d}_\varepsilon)$  est à courbure plus grande que  $-1$  au sens d'Alexandrov.*

*Démonstration.* Tout d'abord, le théorème de globalisation de Toponogov ([BBI01], Théorème 10.3) montre qu'il suffit de montrer que tout point admet un voisinage de courbure plus grande que  $-1$ . En dehors des sommets de la triangulation  $\bar{X}_\varepsilon$  est localement isométrique au plan hyperbolique. Il suffit donc montrer que chaque sommet admet un voisinage de courbure supérieure à  $-1$ .

Soit  $v \in \bar{X}_\varepsilon$  un sommet. Soit  $\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_n$  les triangles de la triangulation contenant  $v$  ( $v$  est soit un sommet soit un point sur un côté de chacun de  $\bar{T}_i$ ). On note  $\alpha$  la somme des

---

<sup>1</sup>Un espace métrique géodésique est non-branchant si, dès que deux géodésiques coïncident sur un intervalle ouvert, alors ces deux géodésiques sont incluses dans une troisième géodésique.

angles en  $\bar{v}$  des  $\bar{T}_i$  (si  $\bar{v}$  est sur un côté d'un triangle, l'angle en  $\bar{v}$  est de  $\pi$ ). Un voisinage assez petit de  $v$  est isométrique à un voisinage du sommet d'un cône hyperbolique sur un cercle de longueur  $\alpha$ . Pour que ce voisinage soit de courbure supérieure à  $-1$ , il suffit de montrer que  $\alpha \leq 2\pi$  (Théorème 10.2.3 de [BBI01]). Or les angles des  $\bar{T}_i$  sont plus grand que les angles des triangles  $T_i$  dans  $X$  dont ils proviennent, et la somme angles entre des géodésiques issues d'un même point est toujours plus petite que  $2\pi$  dans une surface courbure minorée.  $\square$

Il suffit maintenant de montrer que la distance de Gromov-Hausdorff entre  $X$  et  $\bar{X}_\varepsilon$  peut être rendue aussi petite que souhaitée en choisissant  $\varepsilon$  assez petit. Comme la distance de Gromov-Hausdorff n'avait pas encore été définie lors des travaux d'Alexandrov sur les surfaces, Alexandrov construit un homéomorphisme  $\varphi$  de  $\bar{X}_\varepsilon$  dans  $X$  tel que :

$$|\bar{d}_\varepsilon(x, y) - d(\varphi(x), \varphi(y))| \leq \varepsilon'$$

où  $\varepsilon'$  tend vers 0 quand  $\varepsilon$  tend vers 0, ce qui implique la convergence au sens de Gromov-Hausdorff.

Si l'on veut seulement la convergence au sens de Gromov-Hausdorff, on peut simplifier un peu la preuve. Comme les sommets des triangulations  $\mathcal{T}_\varepsilon$  et  $\bar{\mathcal{T}}_\varepsilon$  forment des  $\varepsilon$ -réseaux dans  $X$  et  $\bar{X}_\varepsilon$ , il suffit de montrer que si  $v$  et  $w$  sont des sommet de  $\mathcal{T}_\varepsilon$  et  $\bar{v}$  et  $\bar{w}$  sont les sommets de  $\bar{\mathcal{T}}_\varepsilon$  correspondants, on a :

$$|\bar{d}_\varepsilon(\bar{v}, \bar{w}) - d(v, w)| \leq \varepsilon'.$$

Pour cela, il nous faut pouvoir estimer la différence entre les distances dans un triangle  $T$  de  $X$  et dans le triangle hyperbolique de comparaison  $\bar{T}$  qui lui est associé. C'est l'objet du lemme qui suit, qui est une adaptation « hyperbolique » du Lemme 1 de la page 259 de [Ale06]. Pour simplifier les notations, on note la distance entre deux points  $x$  et  $y$  d'un même espace par  $|xy|$ .

**Lemme A.2.2.** *Soit  $T$  un triangle convexe dans  $X$  de sommets  $a, b$  et  $c$ ,  $x \in [ab]$  et  $y \in [ac]$ . On note  $\delta$  le diamètre de  $abc$ . Soit  $\bar{T}$  le triangle de comparaison de  $T$  dans  $\mathbb{H}^2$  et  $\bar{x}$  (resp.  $\bar{y}$ ) le point de  $[\bar{a}\bar{b}]$  (resp.  $[\bar{a}\bar{c}]$ ) défini par  $|\bar{a}\bar{x}| = |ax|$  (resp.  $|\bar{a}\bar{y}| = |ay|$ ).*

Alors :

$$|\bar{x}\bar{y}| \leq |xy| \leq |\bar{x}\bar{y}| + C\delta(e(T) + \mathcal{A}(T))$$

où  $C$  est une constante ne dépendant que de  $X$ ,  $e(T)$  est l'excès du triangle  $T$  et  $\mathcal{A}(T)$  son aire.

*Démonstration.* On commence par montrer que  $|\bar{x}\bar{y}| \leq |xy|$ . Notons  $T_1$  le triangle  $axc$  et  $\bar{T}_1$  son triangle de comparaison dans  $\mathbb{H}^2$ , de sommets  $\bar{a}_1, \bar{x}_1$  et  $\bar{c}_1$ . Soit  $\bar{y}_1$  l'unique point de  $[\bar{a}_1\bar{c}_1]$  vérifiant  $|\bar{a}_1\bar{y}_1| = |ay|$ .

Comme la courbure de  $X$  est plus grande que  $-1$ , on a que  $|xy| \geq |\bar{x}_1\bar{y}_1|$ . De même,  $|\bar{x}\bar{c}| \leq |xc| = |\bar{x}_1\bar{c}_1|$ . Considérons le triangle  $\bar{a}\bar{x}\bar{c}$  dans  $\bar{T}$ , ses côtés ont pour longueurs  $|ax|, |ac|$  et  $|\bar{x}\bar{c}| \leq |xc|$ , donc l'angle  $\bar{a}$  en  $\bar{a}$  dans  $\bar{T}$  est plus grand que l'angle  $\bar{a}_1$  en  $\bar{a}_1$  dans  $\bar{T}_1$ . Comme  $|\bar{a}\bar{x}| = |\bar{a}_1\bar{x}_1|$  et  $|\bar{a}\bar{y}| = |\bar{a}_1\bar{y}_1|$ , on donc que  $|\bar{x}_1\bar{y}_1| \geq |\bar{x}\bar{y}|$ , d'où :

$$|\bar{x}\bar{y}| \leq |xy|.$$



A. Approximation des surfaces d'Alexandrov

Montrons maintenant que  $|\bar{x}\bar{y}| + C\delta(e(T) + \mathcal{A}(T))$ . Notons  $T_2$  le triangle  $axy$  et  $\bar{T}_2$  son triangle de comparaison dans  $\mathbb{H}^2$ , de sommets  $\bar{a}_2$ ,  $\bar{x}_2$  et  $\bar{c}_2$ . On note  $\bar{\alpha}$  l'angle en  $\bar{a}$  dans  $T$  et  $\bar{\alpha}_2$  l'angle en  $\bar{a}_2$  dans  $T_2$ . Écrivons l'analogie hyperbolique du théorème d'Al-Kashi dans le triangle  $\bar{T}_2$  :

$$\operatorname{ch} |xy| = \operatorname{ch} |ax| \operatorname{ch} |ay| - \operatorname{sh} |ax| \operatorname{sh} |ay| \cos \bar{\alpha}_2$$

puis dans le triangle  $\bar{a}\bar{x}\bar{y}$  inclus dans  $\bar{T}$  :

$$\operatorname{ch} |\bar{x}\bar{y}| = \operatorname{ch} |ax| \operatorname{ch} |ay| - \operatorname{sh} |ax| \operatorname{sh} |ay| \cos \bar{\alpha}.$$

On écrit ensuite :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} |xy| &= \operatorname{ch}(|ax| - |ay|) + \operatorname{sh} |ax| \operatorname{sh} |ay| (1 - \cos \bar{\alpha}_2) \\ &= \operatorname{ch}(|ax| - |ay|) + \frac{1}{2} \operatorname{sh} |ax| \operatorname{sh} |ay| \sin^2 \frac{\bar{\alpha}_2}{2}, \\ \operatorname{ch} |\bar{x}\bar{y}| &= \operatorname{ch}(|ax| - |ay|) + \operatorname{sh} |ax| \operatorname{sh} |ay| (1 - \cos \bar{\alpha}) \\ &= \operatorname{ch}(|ax| - |ay|) + \frac{1}{2} \operatorname{sh} |ax| \operatorname{sh} |ay| \sin^2 \frac{\bar{\alpha}}{2}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

D'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} |xy| &\geq 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sh} |ax| \operatorname{sh} |ay| \sin^2 \frac{\bar{\alpha}_2}{2} \\ \operatorname{ch} |\bar{x}\bar{y}| &\geq 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sh} |ax| \operatorname{sh} |ay| \sin^2 \frac{\bar{\alpha}}{2}. \end{aligned}$$

En soustrayant les deux équations de (A.1), on obtient :

$$\operatorname{ch} |xy| - \operatorname{ch} |\bar{x}\bar{y}| = \frac{1}{2} \operatorname{sh} |ax| \operatorname{sh} |ay| \left( \sin^2 \frac{\bar{\alpha}}{2} - \sin^2 \frac{\bar{\alpha}_2}{2} \right).$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(|xy|) - \operatorname{ch}(|\bar{x}\bar{y}|) &= 2 \operatorname{sh} \left( \frac{|xy| + |\bar{x}\bar{y}|}{2} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{|xy| - |\bar{x}\bar{y}|}{2} \right) \\ &\geq \operatorname{sh} \left( \frac{|xy| + |\bar{x}\bar{y}|}{2} \right) (|xy| - |\bar{x}\bar{y}|) \\ &\geq \left( \operatorname{sh} \frac{|xy|}{2} + \operatorname{sh} \frac{|\bar{x}\bar{y}|}{2} \right) (|xy| - |\bar{x}\bar{y}|) \end{aligned}$$

Comme  $\operatorname{sh}(t/2) = \sqrt{(\operatorname{ch}(t) - 1)/2}$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \frac{|xy|}{2} &\geq \frac{1}{2} \sqrt{\operatorname{sh} |ax| \operatorname{sh} |ay| \sin^2 \frac{\bar{\alpha}_2}{2}} \\ \operatorname{sh} \frac{|\bar{x}\bar{y}|}{2} &\geq \frac{1}{2} \sqrt{\operatorname{sh} |ax| \operatorname{sh} |ay| \sin^2 \frac{\bar{\alpha}}{2}}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Posons  $\sigma = \sin \frac{\bar{\alpha}}{2}$ ,  $\sigma' = \sin \frac{\bar{\alpha}_2}{2}$  et  $S = \frac{1}{2} \sqrt{\text{sh} |ax| \text{sh} |ay|}$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} (|xy| - |\bar{x}\bar{y}|) &\leq \frac{S^2(\sigma^2 - \sigma'^2)}{2S(\sigma + \sigma')} \\ &= \frac{S}{2}(\sigma - \sigma'). \end{aligned}$$

En particulier, comme la fonction sinus est 1-Lipschitzienne :

$$||xy| - |\bar{x}\bar{y}|| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\text{sh} |ax| \text{sh} |ay|} |\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_2|.$$

Comme  $|ax|$  et  $|ay|$  sont majorés par le diamètre de  $X$ , on peut trouver une constante  $C$  ne dépendant que de  $X$  telle que  $\text{sh} |ax| \leq C|ax|$  et  $\text{sh} |ay| \leq C|ay|$ . De plus  $|ax|$  et  $|ay|$  sont plus petit que le diamètre  $\delta$  de  $T$  :

$$\frac{1}{2} \sqrt{\text{sh} |ax| \text{sh} |ay|} \leq \frac{C}{2} \delta.$$

Reste à majorer  $|\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_2|$ . Par le lemme A.2.3, on a :

$$\begin{aligned} -e(T) - \mathcal{A}(T) &\leq \bar{\alpha} - \alpha \leq 0 \\ 0 &\leq \alpha - \bar{\alpha}_2 \leq e(T_2) + \mathcal{A}(T_2), \end{aligned}$$

et donc :

$$-e(T) - \mathcal{A}(T) \leq \bar{\alpha} - \bar{\alpha}_2 \leq e(T_2) + \mathcal{A}(T_2).$$

Enfin, en décomposant le triangle  $T$  en les triangles  $T_2$ ,  $bx y$  et  $by c$ , on montre que  $e(T_2) + \mathcal{A}(T_2) \leq e(T) + \mathcal{A}(T)$ . Ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Lemme A.2.3.** Soit  $T$  un triangle comme dans l'énoncé du lemme A.2.2 et  $\bar{T}$  son triangle de comparaison. Soit  $\alpha$  l'angle en  $a$  de  $T$  et  $\bar{\alpha}$  l'angle en  $\bar{a}$  de  $\bar{T}$ . Alors :

$$0 \leq \alpha - \bar{\alpha} \leq e(T) + \mathcal{A}(T).$$

*Démonstration.* Notons  $\beta$  et  $\gamma$  les angles en  $b$  et en  $c$  de  $T$  et  $\bar{\beta}$  et  $\bar{\gamma}$  les angles en  $\bar{b}$  et  $\bar{c}$  de  $\bar{T}$ . Comme  $X$  est à courbure minorée,  $\bar{\alpha} - \alpha \geq 0$ ,  $\bar{\beta} - \beta \geq 0$  et  $\bar{\gamma} - \gamma \geq 0$ . De plus, en utilisant que l'excès d'un triangle hyperbolique est l'opposé de son aire :

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha} - \alpha) + (\bar{\beta} - \beta) + (\bar{\gamma} - \gamma) &= e(T) + \pi - (e(\bar{T}) + \pi) \\ &= e(T) + \mathcal{A}(\bar{T}) \\ &\leq e(T) + \mathcal{A}(T) \end{aligned}$$

car l'aire d'un triangle est plus grande que l'aire de son triangle de comparaison, voir lemme 3.2.3. En particulier :

$$0 \leq \alpha - \bar{\alpha} \leq e(T) + \mathcal{A}(T).$$

$\square$

## A. Approximation des surfaces d'Alexandrov

On peut maintenant montrer que  $\bar{d}_\varepsilon(\bar{v}, \bar{w}) \leq d(v, w)$ . Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  un plus court chemin dans  $X$  de  $v$  à  $w$ . On construit un chemin de  $\bar{v}$  à  $\bar{w}$  comme suit : chaque fois que  $\gamma$  passe à l'intérieur d'un triangle  $T$  de la triangulation  $\mathcal{T}_\varepsilon$ , on le remplace par le segment du triangle  $\bar{T}$  qui a les mêmes point d'entrée et de sortie. On obtient alors un chemin  $\bar{\gamma}$  de  $\bar{v}$  à  $\bar{w}$  dont la longueur est inférieure à celle de  $\gamma$  grâce au lemme A.2.2. L'idée de cette preuve est la même que celle du lemme 2 de la page 263 de [Ale06].

Il reste maintenant à montrer que  $d(v, w)$  ne peut pas être beaucoup plus grand que  $\bar{d}_\varepsilon(\bar{v}, \bar{w})$ . Dans la preuve d'Alexandrov, c'est la partie la plus technique. On considère pour cela un plus court chemin  $\bar{\gamma}$  de  $\bar{v}$  à  $\bar{w}$  dans  $\bar{X}_\varepsilon$ . L'idée naïve de remplacer chaque bout de chemin passant dans un triangle  $\bar{T}_i$  par le plus court chemin correspondant dans le triangle  $T_i$  ne fonctionne pas telle quelle pour la raison suivante : à chacune de ces opérations, on fait une erreur de  $C\delta(\varepsilon(T_i) + \mathcal{A}(T_i))$  grâce au lemme A.2.2, si  $\bar{\gamma}$  ne passait qu'au plus une seule fois dans chaque triangle la somme de toutes ces erreurs serait majorée par  $C\delta(2\pi\chi(X) + 2\mathcal{A}(X))$ , par des arguments analogues à ceux de la preuve de la proposition 3.2.2. Cependant, les triangles  $\bar{T}_i$  ne sont pas nécessairement convexes dans la surface  $\bar{X}_\varepsilon$ , et on ne peut pas exclure que  $\bar{\gamma}$  passe plusieurs fois dans un même triangle.

Dans le cas des surfaces à courbure positive (voir [Ale06]), pour l'approximation par des polyèdres à faces euclidienne, Alexandrov montre que moyennant certains ajustements sur  $\bar{\gamma}$  (qui modifient sa longueur de manière contrôlée), on peut supposer que  $\bar{\gamma}$  ne traverse chaque triangle que deux fois. Au cours de cette preuve, le caractère euclidien du polyèdre approchant n'intervient qu'à deux reprises. Tout d'abord dans le Lemme 1, p. 259, dont le lemme A.2.2 est un strict analogue dans notre cas. Ce caractère euclidien intervient encore dans le Lemme 2, même page. Une version hyperbolique de ce lemme est l'énoncé suivant :

**Lemme A.2.4.** *On peut trouver un  $\varepsilon > 0$  et  $C > 0$  tels que si  $a$  et  $b$  sont deux points dans une surface polyédrale à faces hyperboliques et à courbure plus grande que  $-1$  tels que :*

- $|ab| \leq \varepsilon$ ,
- $[ab]$  est un plus court chemin de  $a$  à  $b$ ,
- $\gamma$  est une géodésique de longueur  $L$  de  $a$  à  $b$ , et la courbe formée en concaténant  $\gamma$  et  $[ab]$  est simple et borde un domaine homéomorphe à un disque,
- la somme des angles  $\alpha$  et  $\beta$  en  $a$  et  $b$  du polygone formé par  $[ab]$  et  $\gamma$  est plus petite que  $\pi/4$ ,

alors :

$$|ab| \geq CL \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

*Démonstration.* Le seul fait typiquement euclidien utilisé par Alexandrov dans la preuve de son lemme 2 est le fait qu'il existe toujours un triangle de côté  $|ab|$  fixé, et d'angles  $\alpha$  et  $\beta$  fixés tels que  $\alpha + \beta < \pi$ . Ceci n'est plus vrai dans le plan hyperbolique, d'où les restrictions imposées.  $\square$

## A.2. Convergence

Pour terminer la preuve, on doit utiliser les arguments du livre [AZ67] d'Alexandrov et Zalgaller, car, comme les auteurs le font remarquer dans [AZ67], la fin de la preuve de [Ale06] est inexacte. La preuve d'Alexandrov et Zalgaller s'applique ensuite pour montrer que  $X$  et  $\bar{X}_\varepsilon$  sont très proches en distance de Gromov-Hausdorff pour  $\varepsilon$  assez petit.

*A. Approximation des surfaces d'Alexandrov*

## Bibliographie

- [AC91] Michael T. Anderson and Jeff Cheeger. Diffeomorphism finiteness for manifolds with Ricci curvature and  $L^{n/2}$ -norm of curvature bounded. *Geom. Funct. Anal.*, 1(3) :231–252, 1991.
- [AC92] Michael T. Anderson and Jeff Cheeger.  $C^\alpha$ -compactness for manifolds with Ricci curvature and injectivity radius bounded below. *J. Differential Geom.*, 35(2) :265–281, 1992.
- [AH11] Ben Andrews and Christopher Hopper. *The Ricci flow in Riemannian geometry*, volume 2011 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2011. A complete proof of the differentiable  $1/4$ -pinching sphere theorem.
- [AKP10] S. Alexander, V. Kapovitch, and A. Petrunin. Alexandrov meets Kirszbraun. *ArXiv e-prints*, December 2010.
- [Ale06] A. D. Aleksandrov. *A. D. Aleksandrov selected works. Part II*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006. Intrinsic geometry of convex surfaces, Edited by S. S. Kutateladze, Translated from the Russian by S. Vakhrameyev.
- [AM96] Uwe Abresch and Wolfgang T. Meyer. A sphere theorem with a pinching constant below  $\frac{1}{4}$ . *J. Differential Geom.*, 44(2) :214–261, 1996.
- [And90] Michael T. Anderson. Metrics of positive Ricci curvature with large diameter. *Manuscripta Math.*, 68(4) :405–415, 1990.
- [AZ67] A. D. Aleksandrov and V. A. Zalgaller. *Intrinsic geometry of surfaces*. Translated from the Russian by J. M. Danskin. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 15. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.
- [Bay03] Vincent Bayle. *Propriétés de concavité du profil isopérimétrique et applications*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, 2003. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00004317/en/>.
- [BBI01] Dmitri Burago, Yuri Burago, and Sergei Ivanov. *A course in metric geometry*, volume 33 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [BBM<sup>+</sup>10] Laurent Bessières, Gérard Besson, Sylvain Maillot, Michel Boileau, and Joan Porti. *Geometrisation of 3-manifolds*, volume 13 of *EMS Tracts in Mathematics*. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2010.

## Bibliographie

- [Ber60] M. Berger. Les variétés Riemanniennes  $(1/4)$ -pincées. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 14 :161–170, 1960.
- [Ber83] Marcel Berger. Sur les variétés riemanniennes pincées juste au-dessous de  $1/4$ . *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 33(2) :135–150 (loose errata), 1983.
- [Ber03] Marcel Berger. *A panoramic view of Riemannian geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [BGP92] Yu. Burago, M. Gromov, and G. Perel'man. A. D. Aleksandrov spaces with curvatures bounded below. *Uspekhi Mat. Nauk*, 47(2(284)) :3–51, 222, 1992.
- [BM82] Pierre Bérard and Daniel Meyer. Inégalités isopérimétriques et applications. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(3) :513–541, 1982.
- [Bre08] Simon Brendle. A general convergence result for the Ricci flow in higher dimensions. *Duke Math. J.*, 145(3) :585–601, 2008.
- [Bre10] Simon Brendle. *Ricci flow and the sphere theorem*, volume 111 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [BS08] Simon Brendle and Richard M. Schoen. Classification of manifolds with weakly  $1/4$ -pinched curvatures. *Acta Math.*, 200(1) :1–13, 2008.
- [BS09] Simon Brendle and Richard Schoen. Manifolds with  $1/4$ -pinched curvature are space forms. *J. Amer. Math. Soc.*, 22(1) :287–307, 2009.
- [BW08] Christoph Böhm and Burkhard Wilking. Manifolds with positive curvature operators are space forms. *Ann. of Math. (2)*, 167(3) :1079–1097, 2008.
- [CC97] Jeff Cheeger and Tobias H. Colding. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I. *J. Differential Geom.*, 46(3) :406–480, 1997.
- [CCG<sup>+</sup>07] Bennett Chow, Sun-Chin Chu, David Glickenstein, Christine Guenther, James Isenberg, Tom Ivey, Dan Knopf, Peng Lu, Feng Luo, and Lei Ni. *The Ricci flow : techniques and applications. Part I*, volume 135 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. Geometric aspects.
- [CCG<sup>+</sup>08] Bennett Chow, Sun-Chin Chu, David Glickenstein, Christine Guenther, James Isenberg, Tom Ivey, Dan Knopf, Peng Lu, Feng Luo, and Lei Ni. *The Ricci flow : techniques and applications. Part II*, volume 144 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. Analytic aspects.
- [CCG<sup>+</sup>10] Bennett Chow, Sun-Chin Chu, David Glickenstein, Christine Guenther, James Isenberg, Tom Ivey, Dan Knopf, Peng Lu, Feng Luo, and Lei Ni. *The Ricci flow : techniques and applications. Part III. Geometric-analytic aspects*,

- volume 163 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [CGT82] Jeff Cheeger, Mikhail Gromov, and Michael Taylor. Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, 17(1) :15–53, 1982.
- [CK04] Bennett Chow and Dan Knopf. *The Ricci flow : an introduction*, volume 110 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [CL04] Bennett Chow and Peng Lu. The maximum principle for systems of parabolic equations subject to an avoidance set. *Pacific J. Math.*, 214(2) :201–222, 2004.
- [CLN06] Bennett Chow, Peng Lu, and Lei Ni. *Hamilton’s Ricci flow*, volume 77 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [Col97] Tobias H. Colding. Ricci curvature and volume convergence. *Ann. of Math. (2)*, 145(3) :477–501, 1997.
- [CW11] E. Cabezas-Rivas and B. Wilking. How to produce a Ricci Flow via Cheeger-Gromoll exhaustion. *ArXiv e-prints*, July 2011.
- [CZ06] Bing-Long Chen and Xi-Ping Zhu. Uniqueness of the Ricci flow on complete noncompact manifolds. *J. Differential Geom.*, 74(1) :119–154, 2006.
- [DeT83] Dennis M. DeTurck. Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors. *J. Differential Geom.*, 18(1) :157–162, 1983.
- [DK07] Panagiota Daskalopoulos and Carlos E. Kenig. *Degenerate diffusions. Initial value problems and local regularity theory*. Zürich : European Mathematical Society (EMS), 2007.
- [Dur87] O. Durumeric. A generalization of Berger’s theorem on almost  $\frac{1}{4}$ -pinched manifolds. II. *J. Differential Geom.*, 26(1) :101–139, 1987.
- [GHL04] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.
- [GMS11] H. A. Gururaja, S. Maity, and H. Seshadri. On Wilking’s criterion for the Ricci flow. *ArXiv e-prints*, January 2011.
- [Gro91] M. Gromov. Sign and geometric meaning of curvature. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, 61 :9–123 (1994), 1991.
- [Gro99] Misha Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, volume 152 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999. Based on the 1981 French original [ MR0682063 (85e :53051)],



## Bibliographie

With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.

- [GT11] G. Giesen and P. M. Topping. Ricci flows with unbounded curvature. *ArXiv e-prints*, June 2011.
- [GW88] R. E. Greene and H. Wu. Lipschitz convergence of Riemannian manifolds. *Pacific J. Math.*, 131(1) :119–141, 1988.
- [GZ11] X. Gao and Y. Zheng. An Interpolating Curvature Condition Preserved By Ricci Flow. *ArXiv e-prints*, May 2011.
- [Ham82] Richard S. Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.*, 17(2) :255–306, 1982.
- [Ham86] Richard S. Hamilton. Four-manifolds with positive curvature operator. *J. Differential Geom.*, 24(2) :153–179, 1986.
- [Ham95a] Richard S. Hamilton. A compactness property for solutions of the Ricci flow. *Amer. J. Math.*, 117(3) :545–572, 1995.
- [Ham95b] Richard S. Hamilton. The formation of singularities in the Ricci flow. In *Surveys in differential geometry, Vol. II (Cambridge, MA, 1993)*, pages 7–136. Int. Press, Cambridge, MA, 1995.
- [Jos11] Jürgen Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis*. Universitext. Springer, Heidelberg, sixth edition, 2011.
- [Kap07] Vitali Kapovitch. Perelman’s stability theorem. In *Surveys in differential geometry. Vol. XI*, volume 11 of *Surv. Differ. Geom.*, pages 103–136. Int. Press, Somerville, MA, 2007.
- [KL08] Bruce Kleiner and John Lott. Notes on Perelman’s papers. *Geom. Topol.*, 12(5) :2587–2855, 2008.
- [Kli61] Wilhelm Klingenberg. Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung. *Comment. Math. Helv.*, 35 :47–54, 1961.
- [Lie96] Gary M. Lieberman. *Second order parabolic differential equations*. Singapore : World Scientific. xi, 439 p., 1996.
- [Mac98] Yoshiroh Machigashira. The Gaussian curvature of Alexandrov surfaces. *J. Math. Soc. Japan*, 50(4) :859–878, 1998.
- [MM88] Mario J. Micallef and John Douglas Moore. Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes. *Ann. of Math. (2)*, 127(1) :199–227, 1988.

- [MT07] John Morgan and Gang Tian. *Ricci flow and the Poincaré conjecture*, volume 3 of *Clay Mathematics Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [Ngu10] Huy T. Nguyen. Isotropic curvature and the Ricci flow. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (3) :536–558, 2010.
- [NW07a] L. Ni and J. Wolfson. Positive Complex Sectional Curvature, Ricci Flow and the Differential Sphere Theorem. *ArXiv e-prints*, June 2007.
- [NW07b] Lei Ni and Baoqiang Wu. Complete manifolds with nonnegative curvature operator. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135(9) :3021–3028, 2007.
- [Per97] G. Perelman. Construction of manifolds of positive Ricci curvature with big volume and large Betti numbers. In *Comparison geometry (Berkeley, CA, 1993–94)*, volume 30 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 157–163. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [Per02] G. Perelman. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. *ArXiv Mathematics e-prints*, November 2002.
- [Per03] G. Perelman. Ricci flow with surgery on three-manifolds. *ArXiv Mathematics e-prints*, March 2003.
- [Pet06] Peter Petersen. *Riemannian geometry*, volume 171 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.
- [PT09] Peter Petersen and Terence Tao. Classification of almost quarter-pinched manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(7) :2437–2440, 2009.
- [Ram11] D. Ramos. Smoothing cone points with Ricci flow. *ArXiv e-prints*, September 2011.
- [Res93] Yu. G. Reshetnyak. Two-dimensional manifolds of bounded curvature. In *Geometry, IV*, volume 70 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 3–163, 245–250. Springer, Berlin, 1993.
- [Ric10] T. Richard. Suites de flots de ricci en dimension 3 et applications. *Actes du Séminaire Théorie Spectrale et Géométrie*, 28 :121–145, 2010.
- [Ric11a] T. Richard. Lower bounds on Ricci flow invariant curvatures and geometric applications. *ArXiv e-prints*, November 2011.
- [Ric11b] T. Richard. Ricci flow of non-collapsed 3-manifolds : Two applications. *Comptes Rendus Mathématique*, 349(9-10) :567 – 569, 2011.
- [Ric12] T. Richard. Canonical smoothing of compact Alexandrov surfaces via Ricci flow. *ArXiv e-prints*, April 2012.

## Bibliographie

- [Shi89] Wan-Xiong Shi. Deforming the metric on complete Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, 30(1) :223–301, 1989.
- [Sim09a] M. Simon. Ricci flow of non-collapsed 3-manifolds whose Ricci curvature is bounded from below. *ArXiv e-prints*, March 2009.
- [Sim09b] Miles Simon. Ricci flow of almost non-negatively curved three manifolds. *J. Reine Angew. Math.*, 630 :177–217, 2009.
- [Top06] Peter Topping. *Lectures on the Ricci flow*, volume 325 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [Top10] P. Topping. Uniqueness and nonuniqueness for Ricci flow on surfaces : Reverse cusp singularities. *ArXiv e-prints*, October 2010.
- [Tro09] M. Troyanov. Les surfaces à courbure intégrale bornée au sens d’Aleksandrov. *ArXiv e-prints*, June 2009.
- [TW12] G. Tian and B. Wang. On the structure of almost Einstein manifolds. *ArXiv e-prints*, February 2012.
- [Vil09] Cédric Villani. *Optimal transport*, volume 338 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2009. Old and new.
- [Wil10] B. Wilking. A Lie algebraic approach to Ricci flow invariant curvature conditions and Harnack inequalities. *ArXiv e-prints*, November 2010.



## Résumé

Le flot de Ricci, introduit par Hamilton au début des années 80, a montré sa valeur pour étudier la topologie et la géométrie des variétés riemanniennes lisses. Il a ainsi permis de démontrer la conjecture de Poincaré (Perelman, 2003) et le théorème de la sphère différentiable (Brendle et Schoen, 2008).

Cette thèse s'intéresse aux applications du flot de Ricci à des espaces métriques à courbure minorée peu lisses. On définit en particulier ce que signifie pour un flot de Ricci d'avoir pour condition initiale un espace métrique.

Dans le Chapitre 2, on présente certains travaux de Simon permettant de construire un flot de Ricci pour certains espaces métriques de dimension 3. On démontre aussi deux applications de cette construction : un théorème de finitude en dimension 3 et une preuve alternative d'un théorème de Cheeger et Colding en dimension 3.

Dans le Chapitre 3, on s'intéresse à la dimension 2. On montre que pour les surfaces singulières à courbure minorée (au sens d'Alexandrov), on peut définir un flot de Ricci et que celui-ci est unique. Ceci permet de montrer que l'application qui à une surface associe son flot de Ricci est continue par rapport aux perturbations Gromov-Hausdorff de la condition initiale.

Le Chapitre 4 généralise une partie de ces méthodes en dimension quelconque. On doit y considérer des conditions de courbure autres que les usuelles minorations de la courbure de Ricci ou de la courbure sectionnelle. Les méthodes mises en place permettent de construire un flot de Ricci pour certains espaces métriques non effondrés limites de variétés dont l'opérateur de courbure est minoré. On montre aussi que sous certaines hypothèses de non-effondrement, les variétés à opérateur de courbure presque positif portent une métrique à opérateur de courbure positif ou nul.

**Mots-clés :** Géométrie Riemannienne, flot de Ricci, équations aux dérivées partielles, flots géométriques, espaces d'Alexandrov.

## Abstract

The Ricci flow was introduced by Hamilton in the beginning of the 80's. It has been a valuable tool to study the topology and the geometry of smooth Riemannian manifolds. For example, it was essential in the proof of the Poincaré conjecture (Perelman, 2003) and of the differentiable sphere theorem (Brendle and Schoen, 2008).

In this thesis, we are interested in the applications of Ricci flow to metric spaces with curvature bounded from below which are not smooth. We define what it means for a Ricci flow to admit a metric space as initial condition.

In Chapter 2, we present some works of Simon which allow to build a Ricci flow for some metric spaces of dimension 3. We also give two consequences of this result : a finiteness theorem in dimension 3 and an alternative proof of a theorem of Cheeger and Colding in dimension 3.

In Chapter 3, we treat the special case of dimension 2. We show that for singular surfaces whose curvature is bounded from below (in the sense of Alexandrov), we can define a Ricci flow and it is unique. This allows to show that for surfaces with curvature bounded from below, the application which maps a surface to its Ricci flow is continuous with respect to Gromov-Hausdorff perturbations of the initial condition.

Chapter 4 generalizes some of these methods in higher dimension. Here one needs to consider other conditions on the curvature than the usual "Ricci curvature bounded from below" and "sectional curvature bounded from below". The methods used there allow us to build a Ricci flow for some non-collapsed metric spaces which are limits of manifolds whose curvature operator is bounded from below. We also show that under some non-collapsing assumptions manifolds with almost non-negative curvature operator admit metrics with non-negative curvature operator.

**Keywords :** Riemannian geometry, Ricci flow, partial differential equations, geometric flows, Alexandrov spaces.