Logique dans le Facteur Hyperfini
Géométrie de l'Interaction et Complexité

Thomas Seiller

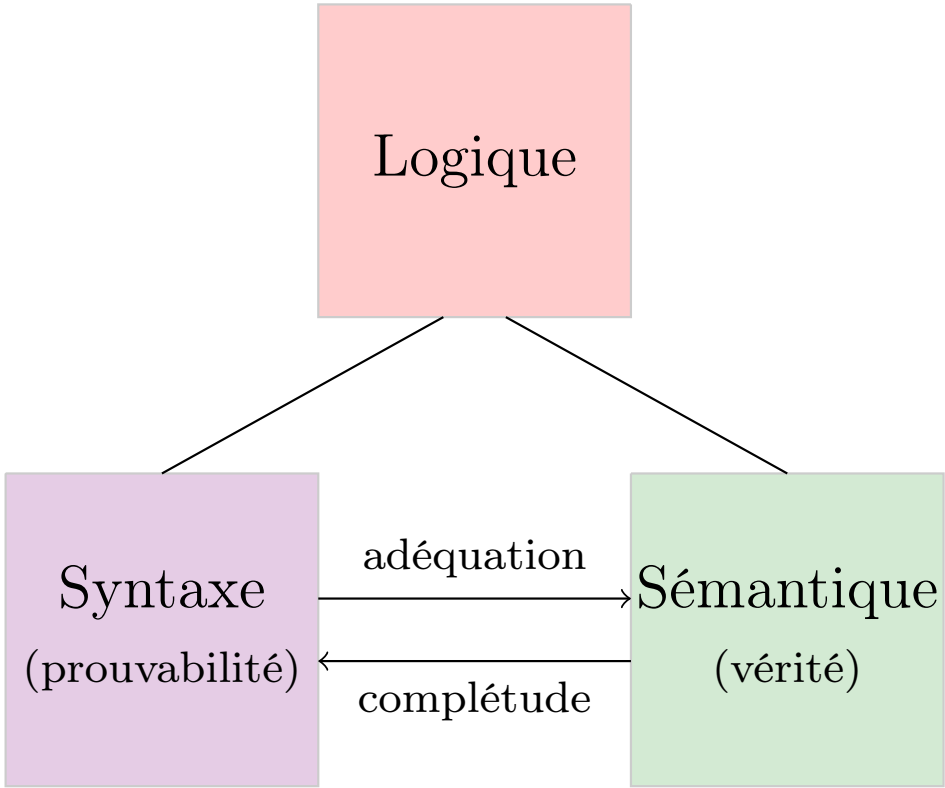
IML — Université Aix-Marseille

Soutenance de Thèse
13 Novembre 2012
Institut de Mathématiques de Luminy

De la théorie de la démonstration à la géométrie de l'interaction

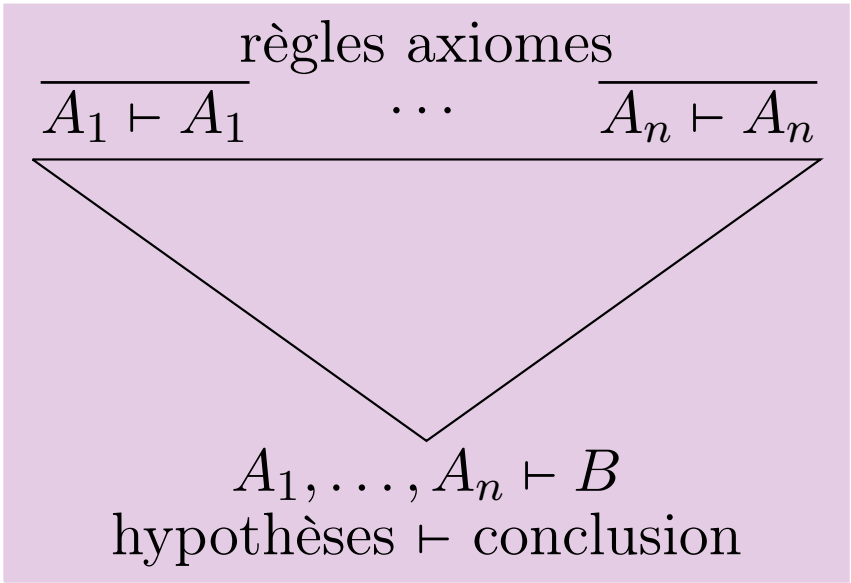
Logique: La Dualité Traditionnelle

Logique: Règles formelles de l'argumentation.
Logique mathématique: formalisation de l'argumentation mathématique



Théorie de la démonstration

Théorie de la démonstration: formalisation des preuves mathématiques
Les preuves sont représentées par des arbres.



Coupures et Curry-Howard

Coupure: utilisation d'un lemme

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots \\ \Gamma, A \vdash B & \Delta \vdash A\end{array}}{\Delta, \Gamma \vdash B}\ \text{cut}$$

Théorème

Si une formule A est prouvable, il en existe une preuve sans coupures.

L'intérêt de ce théorème réside dans sa preuve: on définit une procédure d'élimination des coupures.
Lambda-calcul et correspondance de Curry-Howard

Logique Linéaire

En étudiant les modèles du λ-calcul, Girard découvre que l'implication $A \Rightarrow B$ se décompose ainsi:

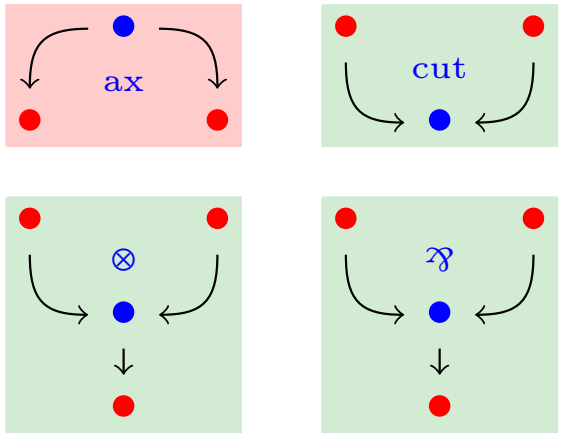
$$!A \multimap B$$

- $\multimap$ est une implication *linéaire* — qui utilise une et une seule fois son argument;
- ! est une modalité qui permet de rendre une formule duplicable;

Cette décomposition lui permet de définir un raffinement de la logique classique: la logique linéaire.
Deux conjonctions: $\otimes$ et $\&$, deux disjonctions: $\parr$ et $\oplus$, dites multiplicatives et additives. Les modalités ! et ? sont appelées exponentielles du fait de l'isomorphisme $!(A \,\&\, B) \multimap\!\!\circ\, (!A) \otimes (!B)$.

Réseaux de Preuves

Structures de preuves:

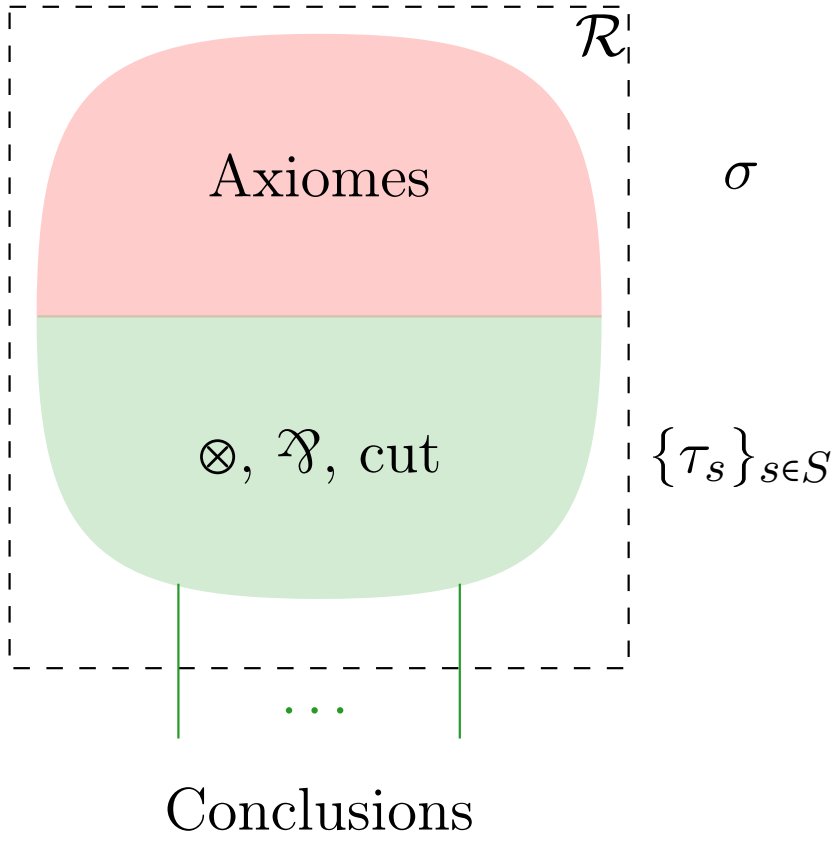


Théorème

$\mathcal{R}$ est séquentialisable

ssi

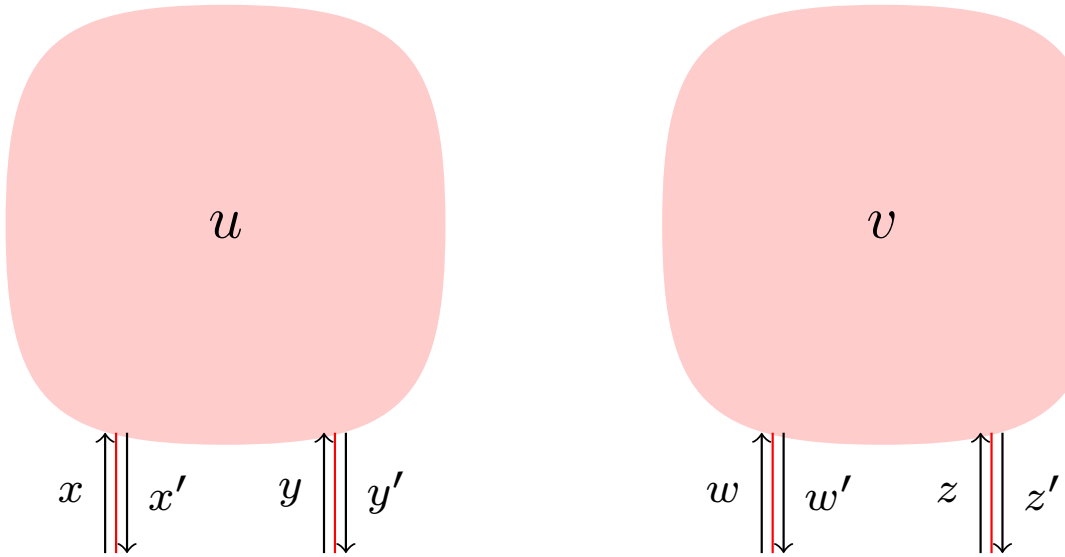
$\forall s \in S$, $\sigma\tau_s$ est cyclique



Géométrie de l'Interaction: Élimination des Coupures

Interprétation des preuves rendant compte de la dynamique de la procédure d'élimination des coupures.
On interprète les preuves par des opérateurs agissant sur un espace de Hilbert de dimension infinie.
L'élimination des coupures correspond à la résolution de *l'équation de rétroaction*:

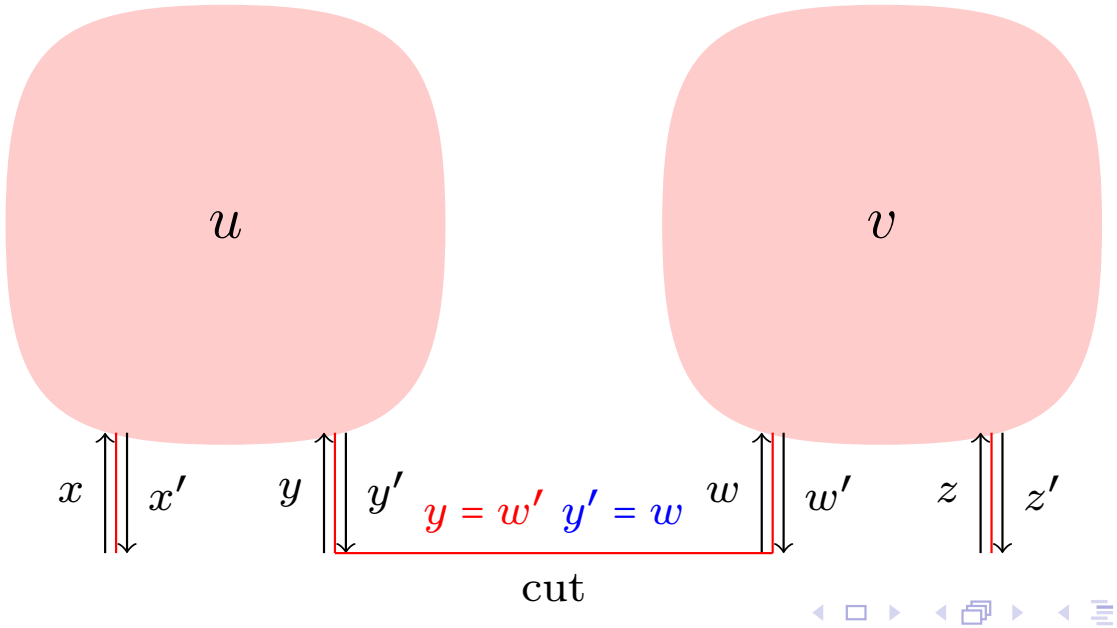
$$\begin{cases} u(x \oplus y) &= x' \oplus y' \\ v(y' \oplus z) &= y \oplus z' \end{cases}$$



Géométrie de l'Interaction: Élimination des Coupures

Interprétation des preuves rendant compte de la dynamique de la procédure d'élimination des coupures.
On interprète les preuves par des opérateurs agissant sur un espace de Hilbert de dimension infinie.
L'élimination des coupures correspond à la résolution de *l'équation de rétroaction*:

$$\begin{cases} u(x \oplus y) &= x' \oplus y' \\ v(y' \oplus z) &= y \oplus z' \end{cases}$$



Géométrie de l'Interaction: Négation

La géométrie de l'interaction n'est pas une simple interprétation dynamique des preuves. Il s'agit d'une complète reconstruction de la logique autour de la notion d'interaction (élimination des coupures = exécution des programmes).
On définit une notion d'orthogonalité entre opérateurs qui permet de parler de la négation.

Definition (Multiplicatives)

$u \perp v$ si et seulement si uv est cyclique

Géométrie de l'Interaction: Négation

La géométrie de l'interaction n'est pas une simple interprétation dynamique des preuves. Il s'agit d'une complète reconstruction de la logique autour de la notion d'interaction (élimination des coupures = exécution des programmes).
On définit une notion d'orthogonalité entre opérateurs qui permet de parler de la négation.

Definition (Premières GdIs)

$u \perp v$ si et seulement si uv est nilpotent

Géométrie de l'Interaction: Négation

La géométrie de l'interaction n'est pas une simple interprétation dynamique des preuves. Il s'agit d'une complète reconstruction de la logique autour de la notion d'interaction (élimination des coupures = exécution des programmes).
On définit une notion d'orthogonalité entre opérateurs qui permet de parler de la négation.

Definition (GdI5)

$$u \perp v \text{ si et seulement si } -\log(\det_{FK}(1-uv)) \neq 0, \infty$$

Géométrie de l'Interaction: Reconstruction

On vérifie que la solution de l'équation de rétroaction vérifie une *adjonction (à trois termes)*:

$$f \perp (u \oplus v) \text{ ssi } f \perp u \text{ et } \mathrm{Ex}(f, u) \perp v$$

On définit les types (formules) comme des ensembles clos par bi-orthogonal (de manière équivalente, comme l'orthogonal d'un ensemble d'opérateurs).
L'adjonction permet alors de s'assurer de la bonne définition des connecteurs multiplicatifs $\otimes$ et $\parr$.

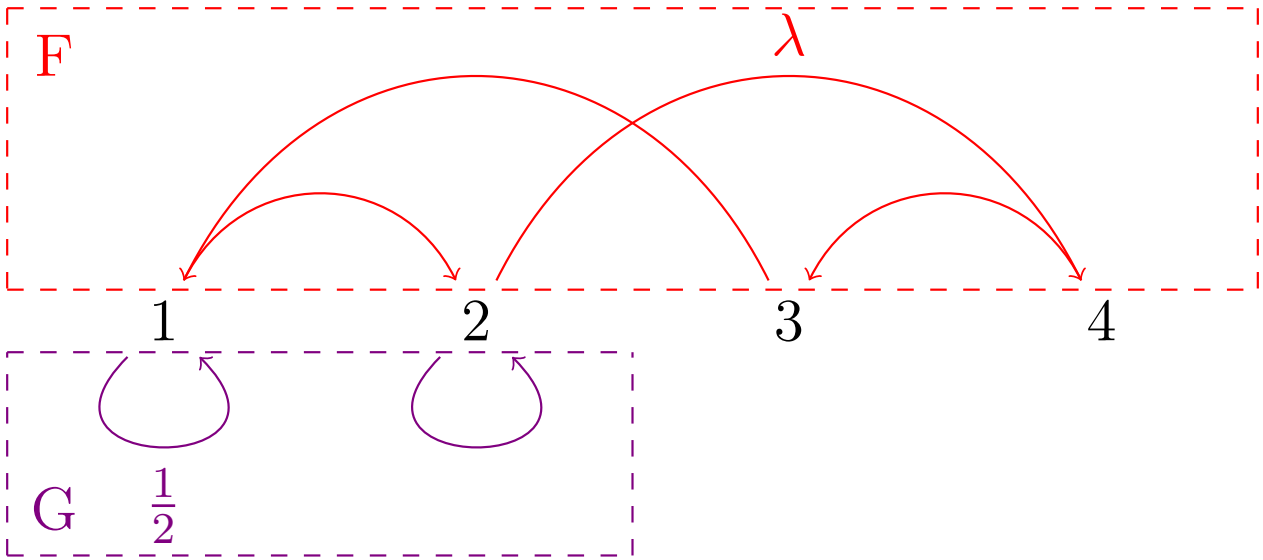
Graphes d'interaction

Graphes

Principe: revenir à des objets finis
Interpréter les "preuves" par des graphes
Définir l'exécution comme le graphe des chemins alternants

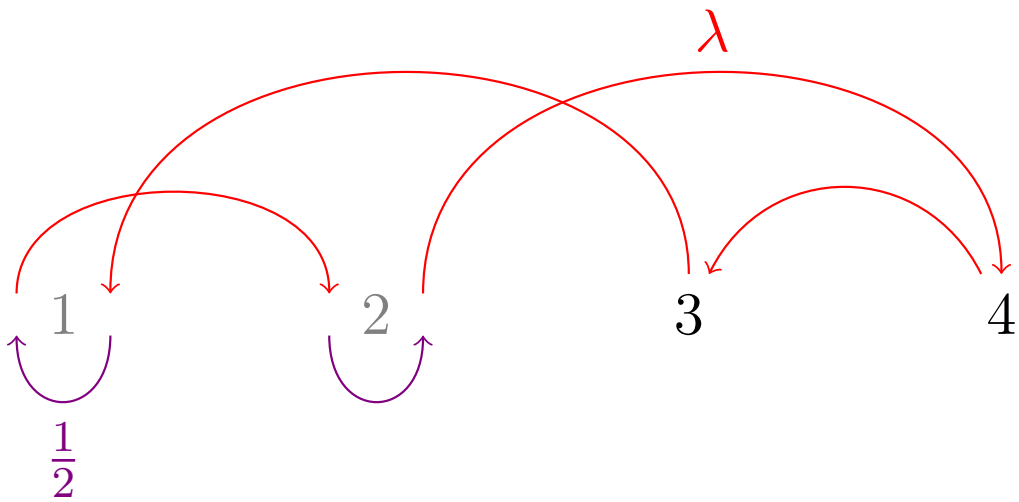
Exécution

L'exécution de deux graphes F, G est le graphe des chemins alternants dont la source et le but sont dans $V^F \Delta V^G$.



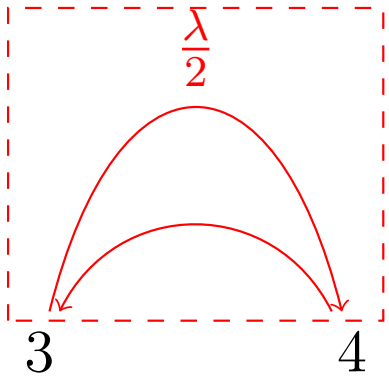
Exécution

L'exécution de deux graphes F, G est le graphe des chemins alternants dont la source et le but sont dans $V^F \Delta V^G$.



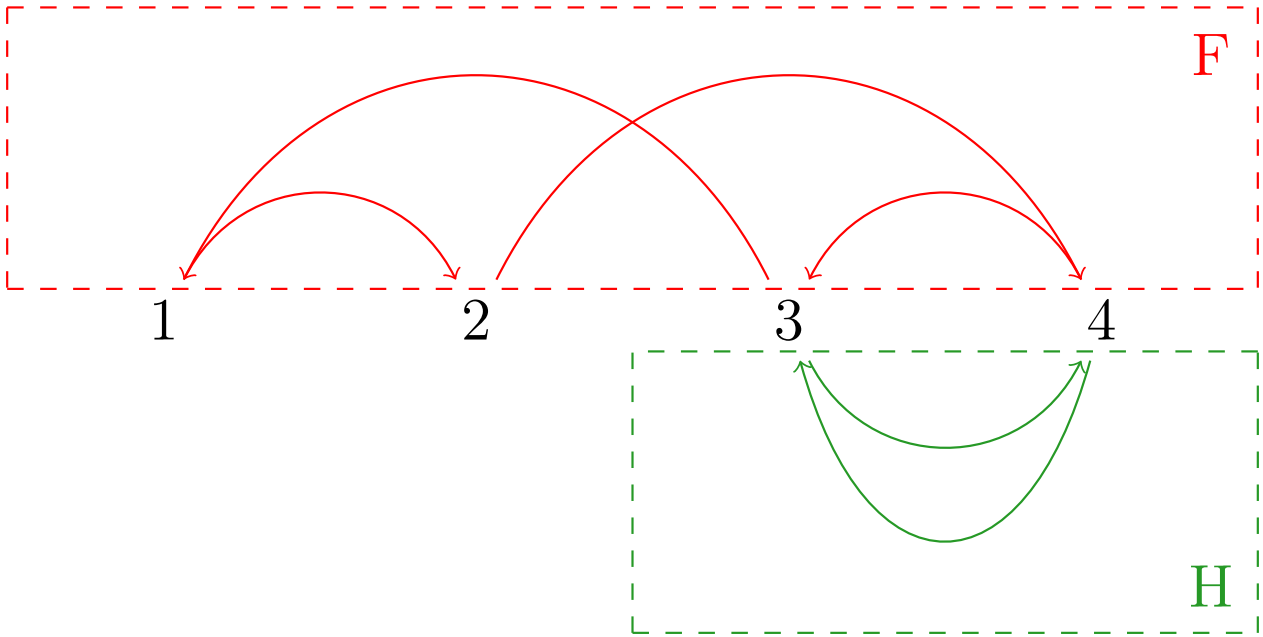
Exécution

L'exécution de deux graphes F, G est le graphe des chemins alternants dont la source et le but sont dans $V^F \Delta V^G$.



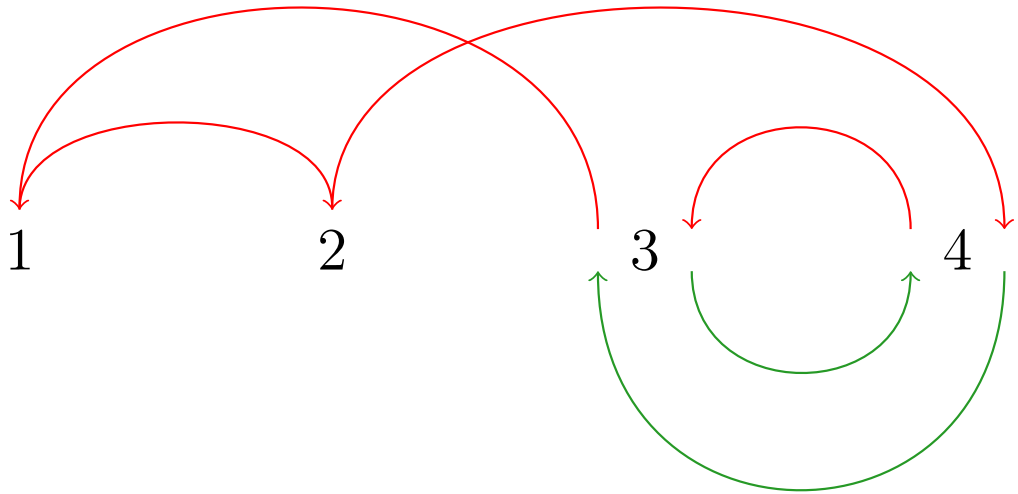
Cycles

Dans certains cas, des cycles apparaissent entre les deux graphes.



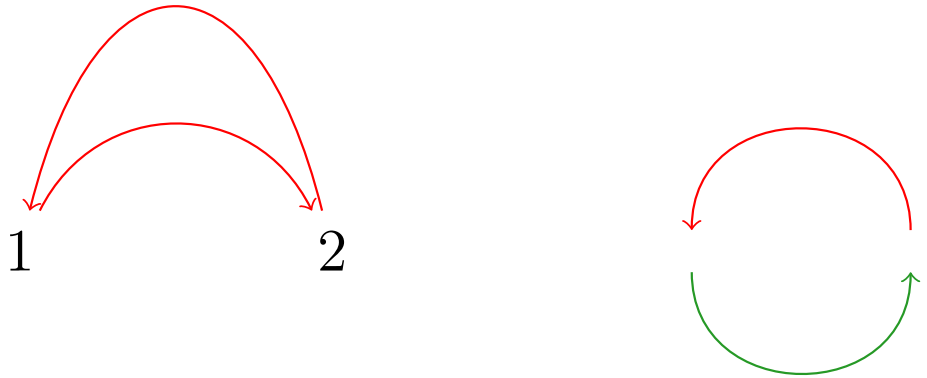
Cycles

Dans certains cas, des cycles apparaissent entre les deux graphes.

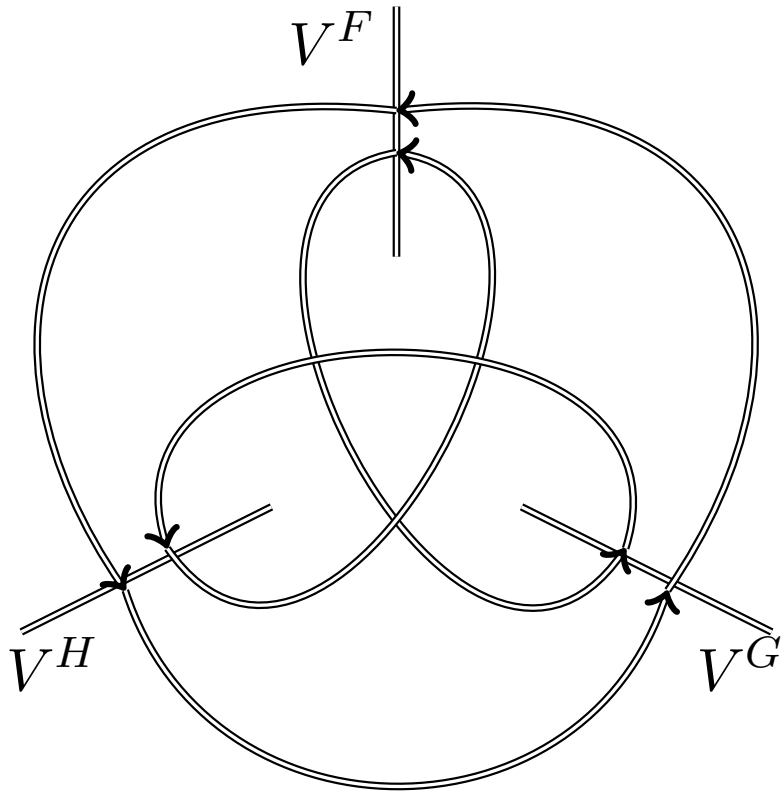


Cycles

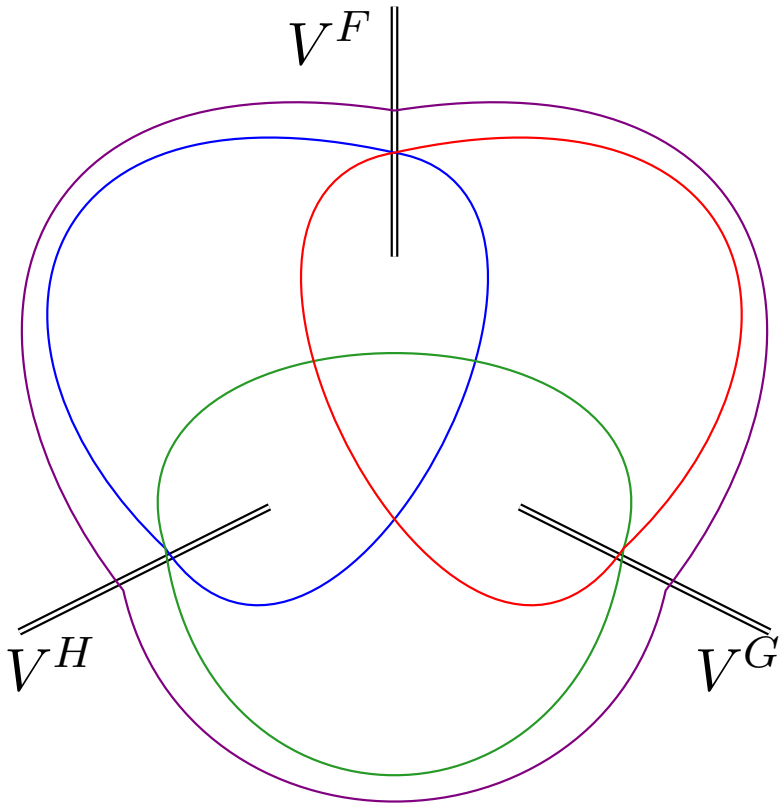
Dans certains cas, des cycles apparaissent entre les deux graphes.



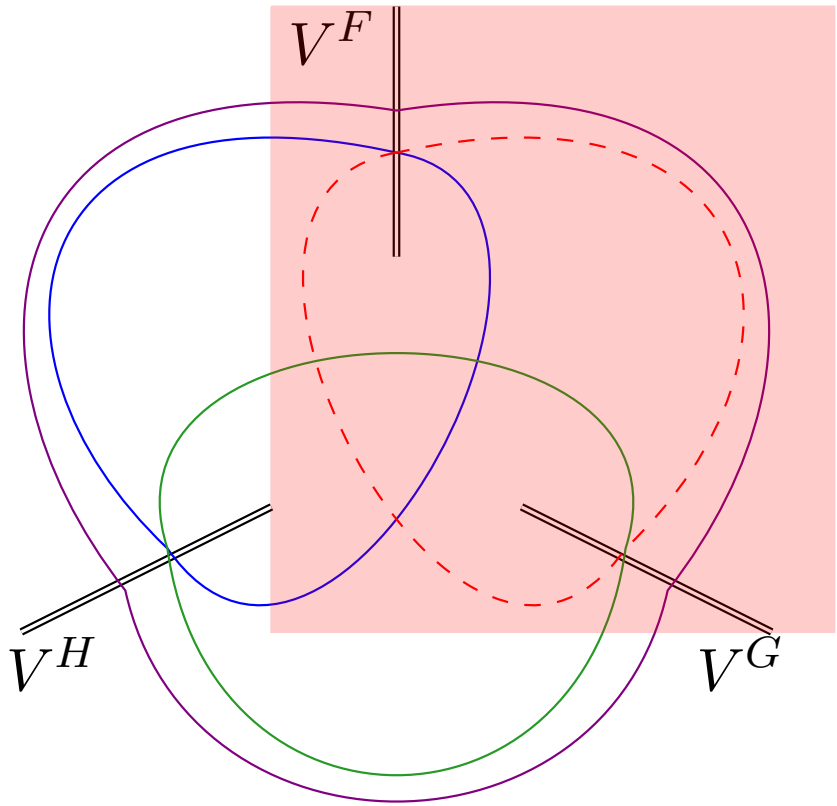
La propriété cyclique



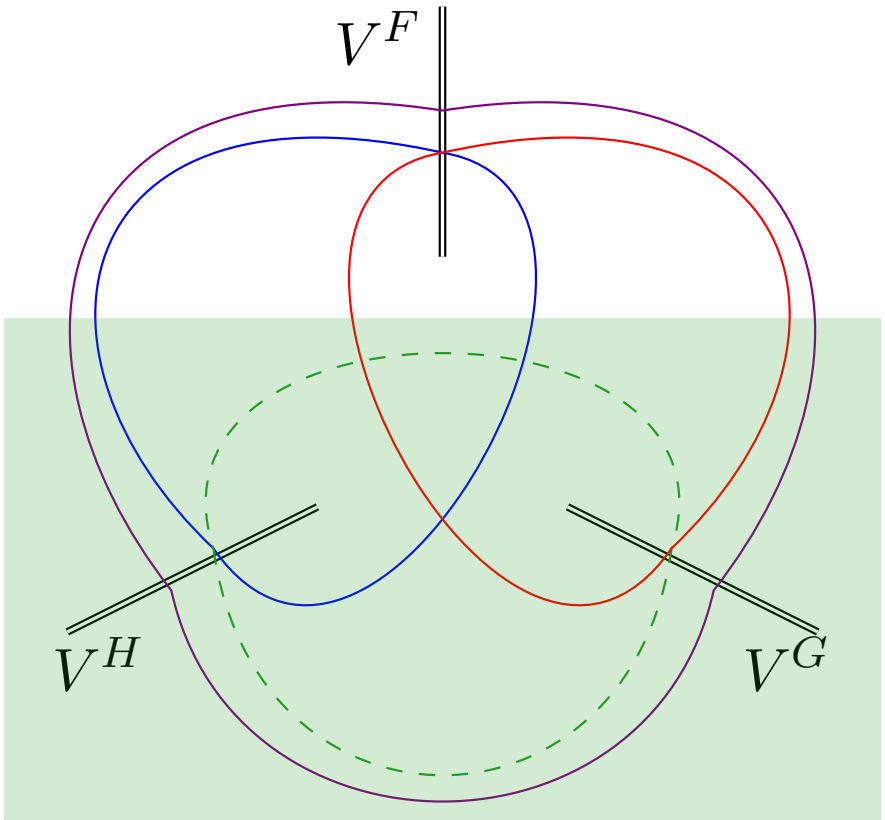
La propriété cyclique



La propriété cyclique



La propriété cyclique



Fonction de quantification des cycles

Proposition (Propriété Cyclique)

Soit F, G, H des graphes tels que $V^F \cap V^G \cap V^H = \varnothing$. Alors:

$$\mathrm{cycl}(F, G :: H) \uplus \mathrm{cycl}(G, H) \cong \mathrm{cycl}(F :: G, H) \uplus \mathrm{cycl}(F, G)$$

Definition

Soit $m : \Omega \to \mathbf{R}_{\geqslant 0} \cup \{\infty\}$. On définit, pour tout graphes F, G:

$$[\![F, G]\!]_m = \sum\nolimits_{\pi \in \mathrm{cycl}(F,G)} m(\omega(\pi))$$

Proposition (Propriété Cyclique (Scalaire))

Soient F, G, H des graphes tels que $V^F \cap V^G \cap V^H = \varnothing$. Alors:

$$[\![F, G :: H]\!]_m + [\![G, H]\!]_m = [\![F :: G, H]\!]_m + [\![F, G]\!]_m$$

GdI pour MLL

Sur la base de la propriété cyclique on peut construire une géométrie de l'interaction pour MLL: on considère des couples — les *projets* — (f, F) constitués d'un réel f et d'un graphe F. On définit:

$$\begin{aligned} (f,F) :: (g,G) &= (f+g+[\![F,G]\!]_m, F :: G) \\ [\![(f,F),(g,G)]\!]_m &= f+g+[\![F,G]\!]_m \end{aligned}$$

Alors la propriété cyclique entre trois projets s'énonce:

$$[\![(f,F),(g,G) :: (h,H)]\!]_m = [\![(f,F) :: (g,G),(h,H)]\!]_m$$

Le cas particulier $V^G \cap V^H = \varnothing$ donne une adjonction:

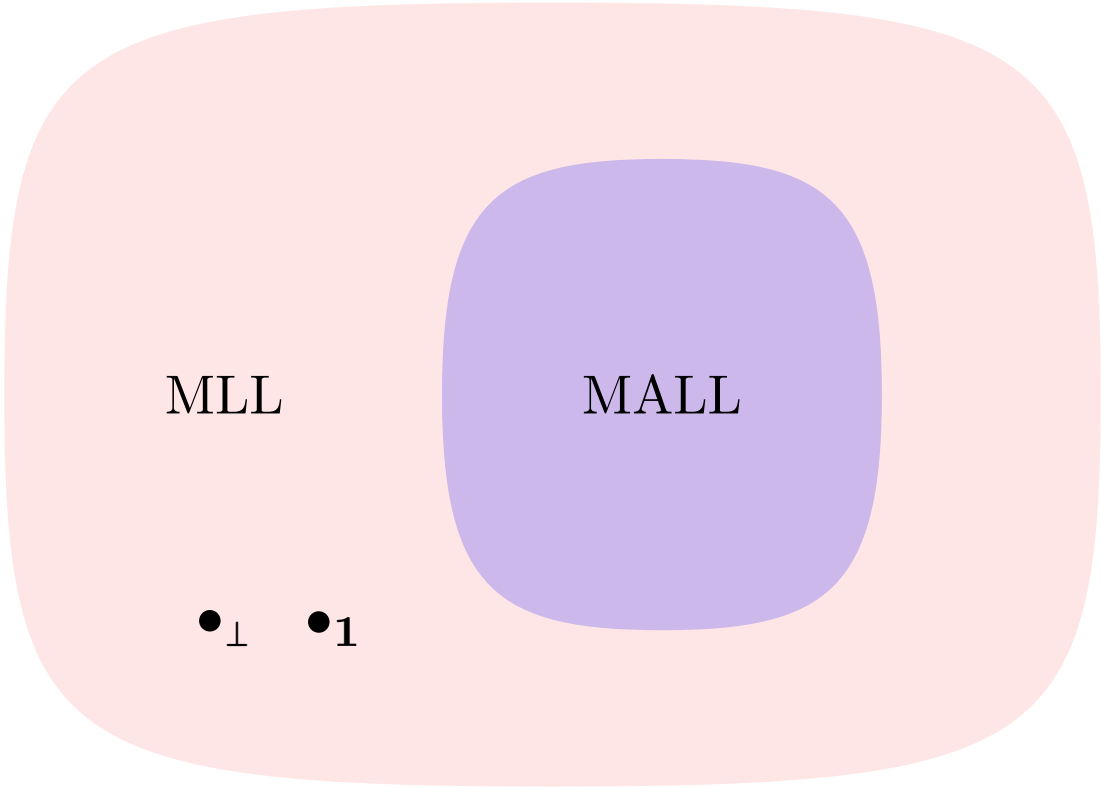
$$[\![(f,F),(g,G) \cup (h,H)]\!]_m = [\![(f,F) :: (g,G),(h,H)]\!]_m$$

GdI pour MALL I

La propriété cyclique s'étend aux sommes formelles pondérées de graphes $G = \sum_{i \in I^G} \alpha_i^G G_i$. On peut alors dans ce cas définir les connecteurs additifs: la somme formelle permet d'interpréter le connecteur &.
On définit une notion d'équivalence observationelle entre deux projets: $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont observationellement équivalents dans un type $\mathbf{A}$ lorsqu'ils sont indistinguables par des tests dans $\mathbf{A}^{\perp}$.
C'est là qu'entre en jeu la propriété cyclique, puisqu'elle permet de montrer que:

- le connecteur & est un produit *à équivalence observationelle près*;
- la relation d'équivalence est une congruence: on peut donc définir un modèle catégorique de MALL en quotientant les ensembles des morphismes;
- la catégorie quotient est encore un modèle de MLL ($*$-autonome) et contient une sous-catégorie avec les produits.

GdI pour MALL II



Les Constructions de Girard I

On associe à un graphe G un graphe simple $\hat{G}$. On définit $\mathcal{M}_G$ comme la matrice des poids de $\hat{G}$.

Théorème

$$\mathcal{M}_{G::H} = \mathrm{Ex}(\mathcal{M}_G, \mathcal{M}_H)$$

Lorsque $m(x) = \infty$, la propriété cyclique permet d'obtenir l'adjonction des anciennes GdI:

$$\mathcal{M}_F(\mathcal{M}_G + \mathcal{M}_H) \text{ nilpotent}$$
$$\text{si et seulement si}$$
$$\mathcal{M}_F\mathcal{M}_G \text{ nilpotent et } \mathrm{Ex}(\mathcal{M}_F, \mathcal{M}_G)\mathcal{M}_H \text{ nilpotent}$$

Les Constructions de Girard I

On associe à un graphe G un graphe simple $\hat{G}$. On définit $\mathcal{M}_G$ comme la matrice des poids de $\hat{G}$.

Théorème

$$\mathcal{M}_{G::H} = \mathrm{Ex}(\mathcal{M}_G, \mathcal{M}_H)$$

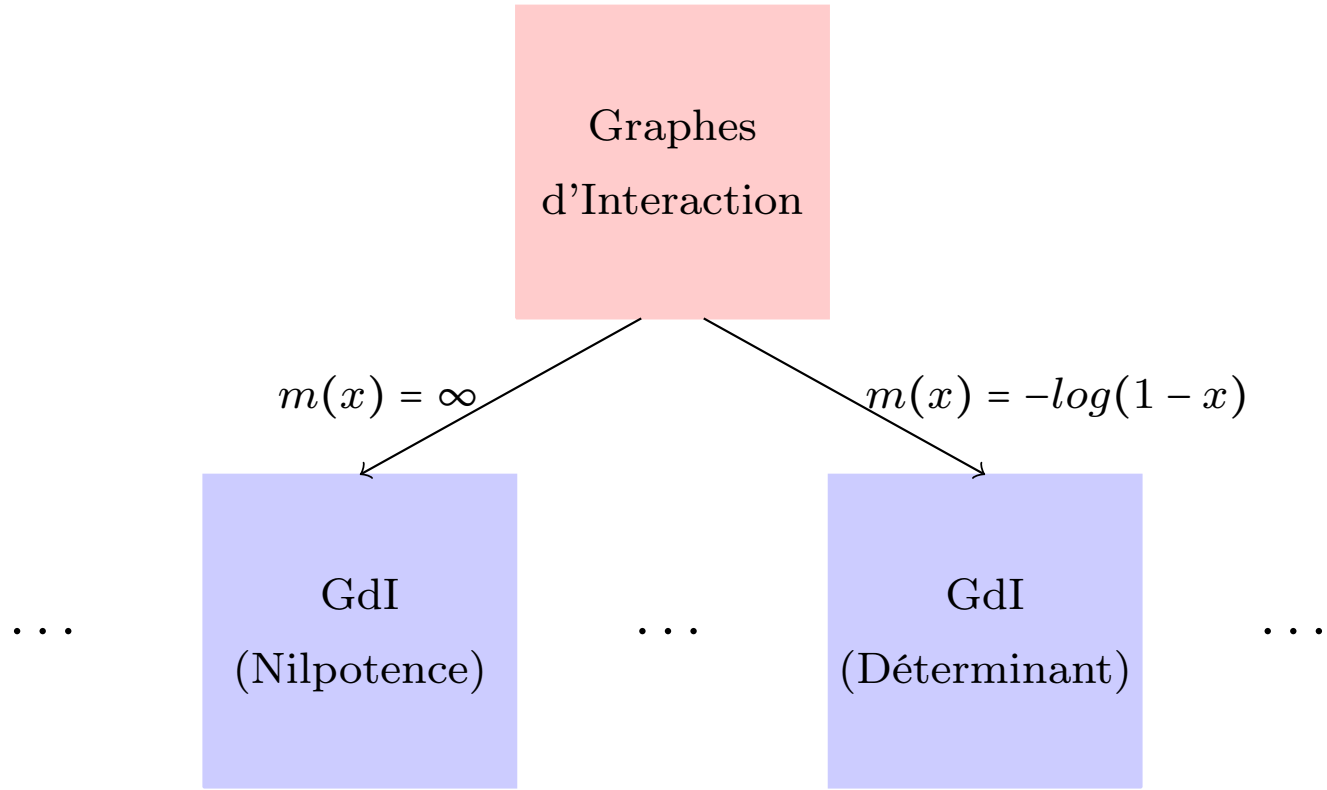
Lorsque $m(x) = -\log(1-x)$, la propriété cyclique permet d'obtenir l'adjonction de la GdI5:

$$\begin{aligned}&\mathrm{ldet}(1 - \mathcal{M}_F(\mathcal{M}_G + \mathcal{M}_H))) = \\ &\qquad \mathrm{ldet}(1 - \mathcal{M}_F\mathcal{M}_G)) + \mathrm{ldet}(1 - \mathrm{Ex}(\mathcal{M}_F, \mathcal{M}_G)\mathcal{M}_H))\end{aligned}$$

En particulier,

$$[\![F, G]\!]_m = \sum_{\pi \in \mathrm{Circ}(F,G)} -\log(1-\omega(\pi)) = -\log(\det(1 - \mathcal{M}_F\mathcal{M}_G))$$

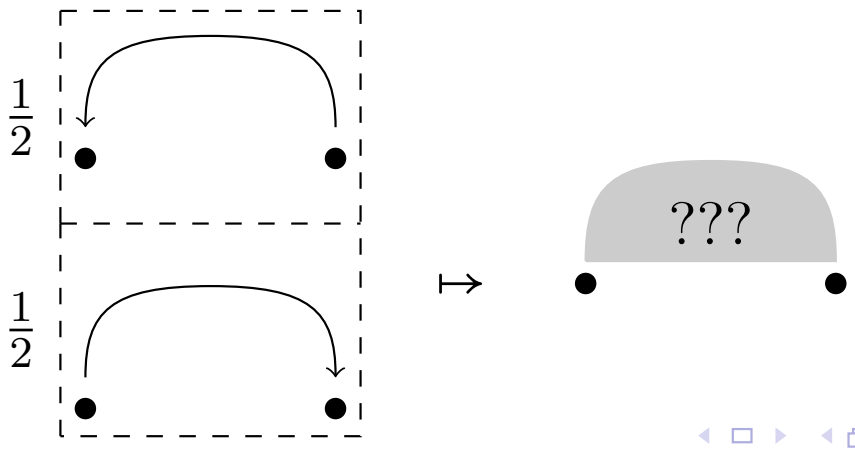
Les Constructions de Girard II



Autres résultats: exponentielles

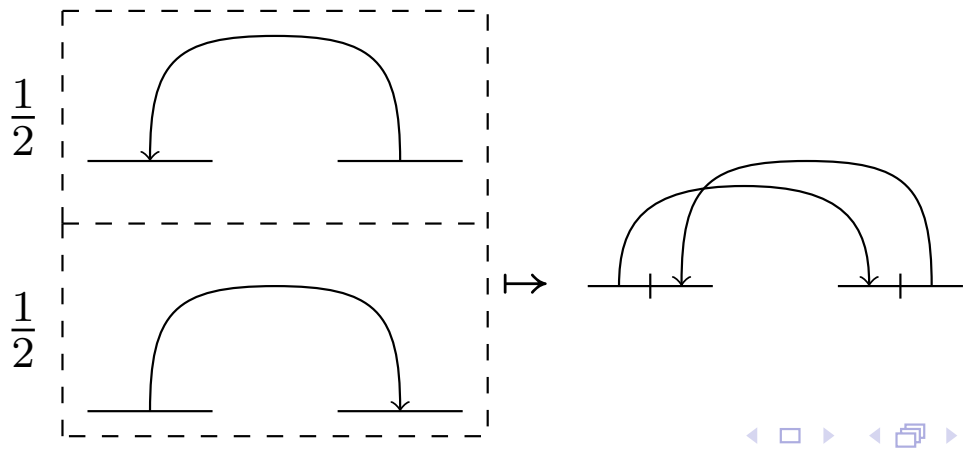
Graphes d'Interaction et Exponentielles I

- Pour parler d'exponentielles, il faut introduire la notion de graphe épais (tranches).
- La contraction ne fonctionne que sur les graphes à une seule tranche (et par extension sur les types engendrés par un ensemble de graphes à une seule tranche);
- Une pérennisation: une fonction qui associe à tout graphe un graphe à une seule tranche.



Graphes d'Interaction et Exponentielles I

- Pour parler d'exponentielles, il faut introduire la notion de graphe épais (tranches).
- La contraction ne fonctionne que sur les graphes à une seule tranche (et par extension sur les types engendrés par un ensemble de graphes à une seule tranche);
- Une pérennisation: une fonction qui associe à tout graphe un graphe à une seule tranche.
- On remplace les graphes par des *graphages*: des familles de transformations préservant la mesure entre des ensembles mesurables.



Graphes d'Interaction et Exponentielles II

- On définit les notions de chemins (donc exécution) et de cycles naturellement.
- On définit une famille de *fonctions de quantification des circuits* — fonctions pour lesquelles on montre que la propriété cyclique est satisfaite.
- On construit une exponentielle ! et on montre qu'il est possible d'interpréter la règle de promotion fonctorielle.
- On montre un résultat d'adéquation forte pour une version de la logique linéaire élémentaire.

Autres résultats: vérité subjective

Vérité Subjective

Definition (Point de vue)

Un point de vue est une représentation π de $\mathcal{R}_{0,1}$ sur $L^2(\mathbb{R})$ satisfaisant certaines propriétés, dont $L^\infty(\mathbb{R}) \subset \pi(\mathcal{R}_{0,1})$.

- Notion de projet gagnant par rapport à un point de vue π.

Definition (Angle)

Un angle est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathcal{R}_{0,1}$.

- Notion de projet prometteur sous un angle $\mathcal{A}$.

Théorème

Si $\mathfrak{a}$ est gagnant du point de vue de π, alors $\mathfrak{a}$ est prometteur sous l'angle $\pi^{-1}(L^\infty(\mathbb{R}))$.

Résultats

On utilise une classification des sous-algèbres commutatives maximales $\mathcal{A}$ dûe à Dixmier, et qui dépend de l'algèbre engendrée par le normalisateur de $\mathcal{A}$.

Théorème (GdI5.0)

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre commutative maximale:

- *si $\mathcal{A}$ est singulière, toute interprétation des preuves est triviale;*
- *si $\mathcal{A}$ est semi-régulière, on peut interpréter MALL (adéquation forte);*
- *si $\mathcal{A}$ est régulière, on peut de plus interpréter les exponentielles (adéquation forte);*

Autres résultats: complexité

travail en collaboration avec Clément Aubert

GdI et Complexité

$$\mathcal{K} = (\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}) \rtimes \mathfrak{S}$$

Deux sous-algèbres de $\mathcal{K}$:

- $\mathcal{R}$, qui se plonge dans $\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}$ par $u \mapsto u \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \ldots$;
- $\mathcal{S}$, l'algèbre engendrée par les unitaires $\lambda(g)$ $(g \in \mathfrak{S})$.

Principe:

- $\mathcal{R}$ contient les multiples représentations (en GdI) des entiers;
- $\mathcal{S}$ contient des opérateurs ϕ tels que, pour toutes représentations N_n, N'_n d'un même entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi N_n \text{ nilpotent ssi } \phi N'_n \text{ nilpotent}$$

Pour $\phi \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ (une observation) on définit:

$$[\phi] = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(N_n \otimes 1) \text{ nilpotent}\}$$

Résultats

$$[\phi] = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(N_n \otimes 1) \text{ nilpotent}\}$$

Definition

$$P_+ = \{(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k} \in \mathcal{M}_k(\mathcal{S}) \mid a_{i,j} = \sum_{m=0}^{p_{i,j}} \lambda(g_m^{i,j})\}$$

Théorème

$$\{[\phi] \mid \phi \in P_+\} = \text{co-NL}$$

Résultats

$$[\phi] = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(N_n \otimes 1) \text{ nilpotent}\}$$

Definition

$$P_+ = \{(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k} \in \mathcal{M}_k(\mathcal{S}) \mid a_{i,j} = \sum_{m=0}^{p_{i,j}} \lambda(g_m^{i,j})\}$$

Théorème

$$\{[\phi] \mid \phi \in P_+\} = \text{co-NL}$$

- L'inclusion $[P_+] \subset$ co-NL utilise le fait que $\mathcal{S}$ est localement fini: pour toute représentation N_n de $n \in \mathbb{N}$ et tout $\phi \in P_+$, il existe alors une injection $\iota : \mathcal{M}_L(\mathbb{C}) \to \mathcal{K} \otimes \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ et des opérateurs $M, \Phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ tels que $\iota(M) = N_n \otimes 1$ et $\iota(\Phi) = \phi$.

Résultats

$$[\phi] = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(N_n \otimes 1) \text{ nilpotent}\}$$

Definition

$$P_+ = \{(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k} \in \mathcal{M}_k(\mathcal{S}) \mid a_{i,j} = \sum_{m=0}^{p_{i,j}} \lambda(g_m^{i,j})\}$$

Théorème

$$\{[\phi] \mid \phi \in P_+\} = \text{co-NL}$$

- On montre co-NL $\subset [P_+]$ en définissant la notion de *machines à pointeurs non-déterministe* qui caractérise co-NL et qui peuvent être naturellement interprétées par des opérateurs dans P_+.

Perspectives

- Graphages: peut-on montrer que différentes instances de cette construction correspondent aux GdI de Girard?
- Vérité Subjective: obtenir un résultat d'adéquation forte (éventuellement grâce au point précédent).
- Complexité: obtenir de nouvelles caractérisations (on sait obtenir la classe L), en particulier obtenir des classes de complexité au-delà de P.
- Complexité: comprendre comment ces résultats se relient à la GdI (définir un type coNL par exemple).
- ...

Bibliographie


Clément Aubert and Thomas Seiller.
Characterizing co-NL by a Group Action.
Submitted to Mathematical Structures in Computer Science
Arxiv preprint arXiv:1209.3422, 2012.


Thomas Seiller.
Interaction Graphs: Multiplicatives.
Annals of Pure and Applied Logic, 163:1808–1837, December 2012.
Arxiv preprint arXiv:1205.6558


Thomas Seiller.
Interaction Graphs: Additives.
Arxiv preprint arXiv:1205.6557, 2012.