



# Plan de l'exposé

- 1 Le problème
  - Énoncé du théorème principal
- 2  $L$ -incidence
  - Matrice de pré-élimination
- 3 Schéma de preuve du théorème principal

# Contexte mathématique

Soient  $M^{m+1}$  une variété fermée et  $0 \neq u \in H_{\text{dR}}^1(M, \mathbb{R})$ .

Considérons :

## Représentants de la classe $u$

①  $\Omega^u := \left\{ \alpha \text{ 1-forme} \mid \begin{array}{l} d\alpha = 0 \\ [\alpha] = u \end{array} \right\}$  muni de la topologie  $\mathcal{C}^\infty$ ,  
et son sous-espace :

②  $\Omega_{NS}^u := \{ \alpha \in \Omega^u \mid Z(\alpha) = \emptyset \},$

où  $Z(\alpha) := \{ p \in M \mid \alpha(p) = 0 \in T_p^*M \}.$

On se place dans la situation où  $\Omega_{NS}^u$  est non vide.

# Le problème. Historique

Que pouvons-nous dire sur l'espace des composantes connexes de  $\Omega_{NS}^u$  ?

## Problème

Calcul de  $\pi_0(\Omega_{NS}^u)$ .

On ne connaît que très peu de résultats :

- si  $\dim M = 3$ , alors  $\pi_0(\Omega_{NS}^u) = \{*\}$  (*Laudenbach - Blank, 1979*),
- si  $M = \mathbb{T}^m$ ,  $m \geq 6$  et  $u$  est rationnelle,  $\pi_0(\Omega_{NS}^u)$  est infini (*Laudenbach, 1976*).

Nous avons abordé le problème pour  $M$  dans la dimension grande ( $\dim(M) \geq 4$ ).

# Le problème. Approche « à la Cerf »

## Problème

Calcul de  $\pi_0(\Omega_{NS}^u)$ .

Comme  $\Omega^u$  est convexe, on déduit une bijection

$$\pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\Omega_{NS}^u).$$

L'objectif, non encore atteint, est de fabriquer une obstruction algébrique non-triviale

$$\Sigma : \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u) \rightarrow G$$

pour qu'un chemin  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  dans  $\Omega^u$  à extrémités non singulières, se déforme entièrement sur les 1-formes non singulières.

# Chemins génériques dans $\Omega^u$

## Proposition

La propriété des chemins  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  dans  $\Omega^u$  énoncée ci-dessous est générique.

Il existe  $S$  fini  $\subset ]0, 1[$ , de temps dits *de naissance* ou *d'élimination* tel que :

- 1 pour  $t \notin S$ , tout zéro  $p_t$  de  $\alpha_t$  est *de Morse* ou *quadratique*,
- 2 pour  $t_j \in S$ , même situation sauf pour un seul zéro  $p_{t_j}$  qui est *cubique*.

# Représentation des chemins : graphique de Cerf-Novikov

Pour représenter  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  générique, nous avons introduit le graphique de Cerf-Novikov. Soit :

# Représentation des chemins : graphique de Cerf-Novikov

Pour représenter  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  générique, nous avons introduit le graphique de Cerf-Novikov. Soit :

- ①  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  le revêtement universel de  $M$ ,
- ② un chemin de primitives  $h_t : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $dh_t = \pi^* \alpha_t$ ),  $t \in [0, 1]$ ,
- ③ un choix de relevés  $B_t \subset \tilde{M}$  de  $Z(\alpha_t)$ , continu en  $t$  à partir des naissances.

Pour tout  $t \in [0, 1]$ , l'ensemble  $B_t$  est fini et  $B_t \subset \text{Crit}(h_t)$ .

Graphique de Cerf-Novikov associé à la famille  $(\alpha_t, B_t)_{t \in [0,1]}$

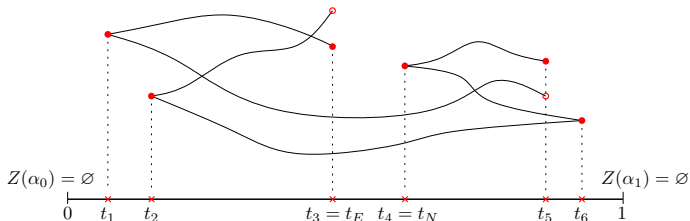
Il s'agit du sous-ensemble de  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  donné par

$$\text{Gr}(\alpha_\bullet, B_\bullet) := \bigcup_{t \in [0,1]} \{t\} \times h_t(B_t).$$



# Évolution normale sur un exemple

Graphique d'un chemin  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  générique :



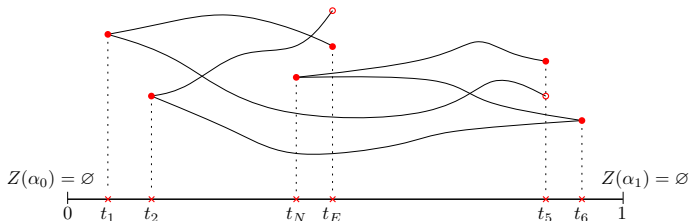
Un chemin est dit *d'évolution normale* s'il est générique et toute naissance précède toute élimination ( $t_N < t_E$ ). Nous avons montré :

## Proposition

Tout chemin générique  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  se déforme, à extrémités fixes, sur  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  d'évolution normale.

# Évolution normale sur un exemple

Graphique d'un chemin  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  d'évolution normale :



Un chemin est dit *d'évolution normale* s'il est générique et toute naissance précède toute élimination ( $t_N < t_E$ ). Nous avons montré :

## Proposition

Tout chemin générique  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  se déforme, à extrémités fixes, sur  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  d'évolution normale.

# Forme normale. Théorème principal

## Forme normale

Un  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  générique est en *forme normale* si les relevés qui sont nés ensemble s'éliminent ensemble.

# Forme normale. Théorème principal

## Forme normale

Un  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  générique est en *forme normale* si les relevés qui sont nés ensemble s'éliminent ensemble.

Le théorème concerne un type de chemins génériques : ceux qui ont deux indices critiques  $i, i + 1$ .

## Théorème principal

Pour tout  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  générique à deux indices  $i, i + 1$  où  $1 < i < n - 1$ , il existe  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  de même nature tel que :

- 1  $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$ ,
- 2  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  est en *forme normale*.

Forme normale s'exprime algébriquement à travers la notion de L-incidence.

# $L$ -incidence

Pour la définir, nous avons besoin des concepts ci-dessous.

- Équipements  $L$ -transverses (champs de vecteurs  $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ ).
- Liaisons  $\mathcal{L}^\xi(p, q)$  (orbites des  $\xi$ ).
- Enroulement et  $u$ -enroulement des liaisons.
- Taille  $T > 0$ .

# Équipements

Le chemin de champs de vecteurs  $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$  équipe  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  si

- ①  $\alpha_t(\xi_t) < 0$  hors de  $Z(\alpha_t)$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ ,
- ② condition non dégénérescence sur  $Z(\alpha_t)$  quand  $\alpha_t$  de Morse.

Si  $\xi$  équipe  $\alpha$ , on a les variétés stable/instable d'un  $p \in Z(\alpha)$  :

$$W^s(p; \xi) := \{x \in M \mid \lim_{s \rightarrow +\infty} \xi^s(x) = p\},$$

$$W^u(p; \xi) := \{x \in M \mid \lim_{s \rightarrow -\infty} \xi^s(x) = p\},$$

Un tel  $\xi$  est dit *Morse-Smale* si

$W^u(p) \pitchfork W^s(q), \forall p, q \in Z(\alpha)$  ou de façon équivalente, si

$$W^u(P) \pitchfork W^s(gQ), \forall P, Q \in B, g \in \pi_1 M.$$

# Liaisons, enroulement et $u$ -enroulement

Notons  $\mathcal{L}^\xi(p, q)$  l'espace de liaisons (orbites) de  $\xi$  allant de  $p$  à  $q$ .

Enroulement :  $\mathcal{L}^\xi(p, q) \xrightarrow{e} \pi_1 M$

$$e(\ell) = g \iff \tilde{\ell} \text{ va de } P \text{ à } gQ, \text{ où } P, Q \in B.$$

La classe  $u$  induit un morphisme  $u : \pi_1 M \rightarrow \mathbb{R}$ .

$u$ -enroulement :  $\mathcal{L}^\xi(p, q) \xrightarrow{u \circ e} \mathbb{R}$

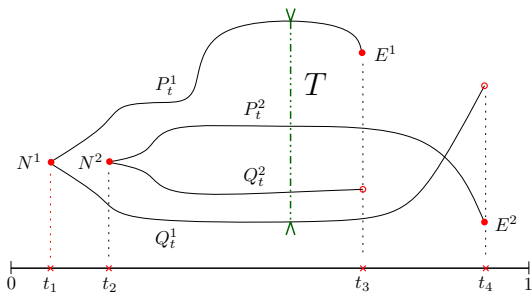
Pour  $L > 0$ , on note  $\mathcal{L}_L^\xi(p, q) := \{\ell \in \mathcal{L}^\xi(p, q) \mid u(e(\ell)) \geq -L\}$ .

La taille d'un chemin  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$

$$T = \max_{\substack{P_t, Q_t \in B_t \\ t \in [0,1]}} |h_t(P_t) - h_t(Q_t)|.$$

## Exemple

La *taille*  $T$  se lit sur le graphique :



La quantité  $L(\ell) := -\int_{\ell} \alpha > 0$  et on peut voir que  
 $L(\ell) = h(P) - h(gQ) = h(P) - h(Q) - u(e(\ell)).$

## Remarque

Pour toute liaison, nous avons la majoration  $u(e(\ell)) < T.$



# Équipements $L$ -transverses

Soit  $L > 0$  :

## Proposition

La propriété ci-dessous, dite de  $L$ -transversalité, est générique pour les équipements  $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ .

Il existe  $R$  fini  $\subset ]0, 1[$  disjoint de  $S$ , tel que :

- 1 pour  $t \notin R$ , on a  $W^u(P_t) \pitchfork W^s(gQ_t)$  pour tout  $P_t, Q_t \in B_t$  et tout  $g \in \pi_1 M$  tel que  $u(g) \geq -L$ .
- 2 Si  $t \in R$ , même situation sauf pour l'existence d'une seule liaison  $\ell \in \mathcal{L}^{\xi_t}(p_t^l, p_t^k)$  telle que
  - $u(e(\ell)) \geq -L$ ,
  - $p_t^l, p_t^k$  sont des zéros de Morse de même indice.

Les temps dans  $R$  sont dits *de glissement*.

Si  $t \in S \cup R$ , il est dit *accidental*.

Si  $\xi_\bullet$  est équipement *L*-transverse de  $\alpha_\bullet$  :

### *L*-incidence

Pour  $\text{ind}(p) = \text{ind}(q) + 1$ , l'ensemble  $\mathcal{L}_L^\xi(p, q)$  est fini. On définit :

$$\langle p, q \rangle_L := \sum_{\ell \in \mathcal{L}_L^\xi(p, q)} s(\ell) e(\ell) \in \mathbb{Z}[\pi_1 M].$$

Si  $\xi_\bullet$  est également  $L$ -transverse de  $\alpha_\bullet$  :

### $L$ -incidence

Pour  $\text{ind}(p) = \text{ind}(q) + 1$ , l'ensemble  $\mathcal{L}_L^\xi(p, q)$  est fini. On définit :

$$\langle p, q \rangle_L := \sum_{\ell \in \mathcal{L}_L^\xi(p, q)} s(\ell) e(\ell) \in \mathbb{Z}[\pi_1 M].$$

On associe ainsi à tout instant  $t \notin S \cup R$  (non accidentel) :

- $C_*(\alpha_t)$  le  $\mathbb{Z}[\pi_1 M]$ -module libre engendré par  $B_t$ , gradué par l'indice,
- $\partial_*^\xi : C_*(\alpha_t) \rightarrow C_{*-1}(\alpha_t)$  l'application  $\mathbb{Z}[\pi_1 M]$ -linéaire telle que  $P \mapsto \sum_{Q \in (B_t)_{*-1}} \langle p, q \rangle_L Q$ .

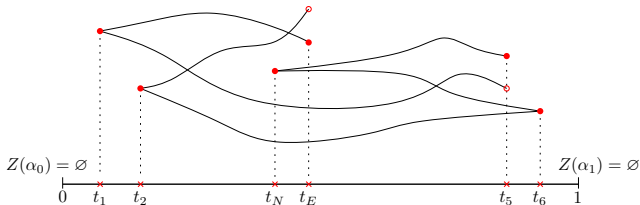
On note par  $A_*^t$  les matrices de  $L$ -incidence, qui ne changent que lors du passage par  $S \cup R$ .

Nous avons étudié les variations des  $A_*^t$  au passage par  $t \in S \cup R$ .

# Évolution $L$ -normale

Un chemin  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est dit d'évolution  $L$ -normale si :

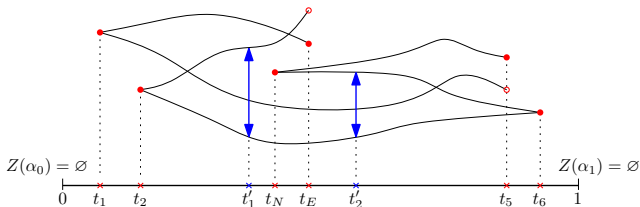
- 1 il est d'évolution normale (générique et  $t_N < t_E$ ),
- 2 il existe  $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$  équipement  $L$ -transverse tel que
  - les instants de glissement vérifient  $R \subset ]t_N, t_E[$ ,
  - toute naissance/élimination  $p$  est  $L$ -indépendante :  
 $\mathcal{L}_L(p, q) \cup \mathcal{L}_L(q, p) = \emptyset$  pour tout  $q \in Z(\alpha)$ .



# Évolution $L$ -normale

Un chemin  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est dit d'évolution  $L$ -normale si :

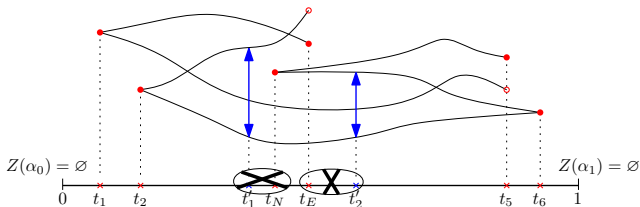
- ① il est d'évolution normale (générique et  $t_N < t_E$ ),
- ② il existe  $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$  équipement  $L$ -transverse tel que
  - les instants de glissement vérifient  $R \subset ]t_N, t_E[$ ,
  - toute naissance/élimination  $p$  est  $L$ -indépendante :  
 $\mathcal{L}_L(p, q) \cup \mathcal{L}_L(q, p) = \emptyset$  pour tout  $q \in Z(\alpha)$ .



# Évolution $L$ -normale

Un chemin  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est dit d'évolution  $L$ -normale si :

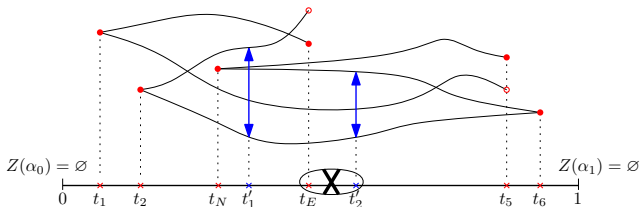
- ① il est d'évolution normale (générique et  $t_N < t_E$ ),
- ② il existe  $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$  équipement  $L$ -transverse tel que
  - les instants de glissement vérifient  $R \subset ]t_N, t_E[$ ,
  - toute naissance/élimination  $p$  est  $L$ -indépendante :  
 $\mathcal{L}_L(p, q) \cup \mathcal{L}_L(q, p) = \emptyset$  pour tout  $q \in Z(\alpha)$ .



# Évolution $L$ -normale

Un chemin  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est dit d'évolution  $L$ -normale si :

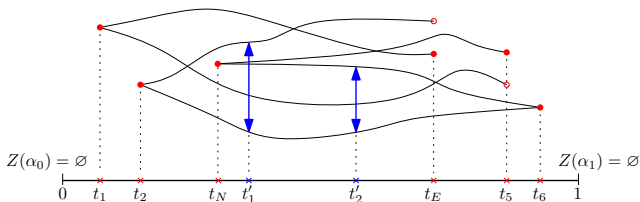
- ① il est d'évolution normale (générique et  $t_N < t_E$ ),
- ② il existe  $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$  équipement  $L$ -transverse tel que
  - les instants de glissement vérifient  $R \subset ]t_N, t_E[$ ,
  - toute naissance/élimination  $p$  est  $L$ -indépendante :  
 $\mathcal{L}_L(p, q) \cup \mathcal{L}_L(q, p) = \emptyset$  pour tout  $q \in Z(\alpha)$ .



# Évolution $L$ -normale

Un chemin  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est dit d'évolution  $L$ -normale si :

- ① il est d'évolution normale (générique et  $t_N < t_E$ ),
- ② il existe  $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$  équipement  $L$ -transverse tel que
  - les instants de glissement vérifient  $R \subset ]t_N, t_E[$ ,
  - toute naissance/élimination  $p$  est  $L$ -indépendante :  
 $\mathcal{L}_L(p, q) \cup \mathcal{L}_L(q, p) = \emptyset$  pour tout  $q \in Z(\alpha)$ .

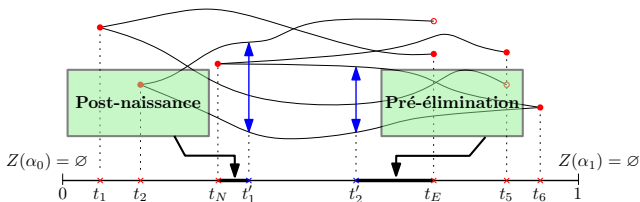




# Évolution $L$ -normale

Un chemin  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est dit d'évolution  $L$ -normale si :

- ① il est d'évolution normale (générique et  $t_N < t_E$ ),
- ② il existe  $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$  équipement  $L$ -transverse tel que
  - les instants de glissement vérifient  $R \subset ]t_N, t_E[$ ,
  - toute naissance/élimination  $p$  est  $L$ -indépendante :  
 $\mathcal{L}_L(p, q) \cup \mathcal{L}_L(q, p) = \emptyset$  pour tout  $q \in Z(\alpha)$ .



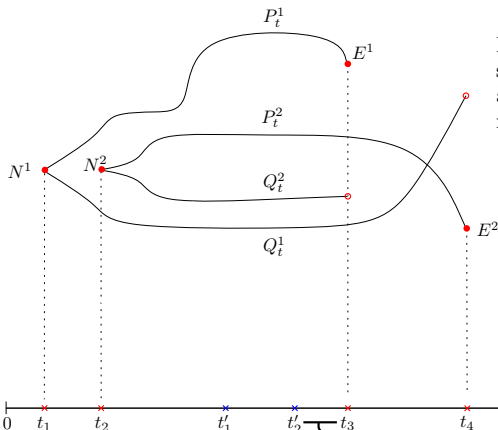
# Forme normale à travers la *L*-incidence

Soit  $\alpha_\bullet$  d'évolution *L*-normale.

Alors  $\alpha_\bullet$  est en forme normale si ses matrices de *L*-incidence  $A_*^t$ , pour  $t$  un temps de pré-élimination, sont l'identité au signe près.

# Exemple. Chemin d'évolution *L*-normale

Prenons  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  d'évolution *L*-normale.

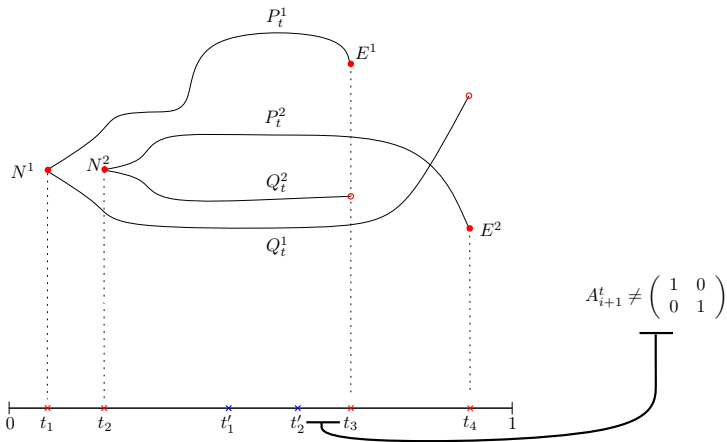


Il n'est pas en forme normale : sa matrice de *L*-incidence  $A_{i+1}^t$  à un instant de pré-élimination n'est pas l'identité.

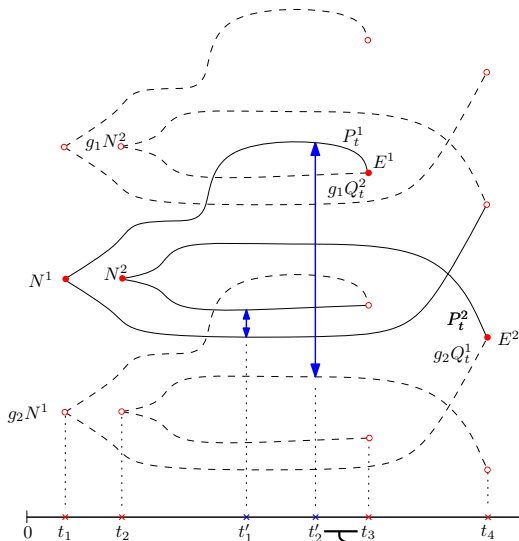
$$A_{i+1}^t \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Exemple. Chemin d'évolution *L*-normale

On trouve  $g_1, g_2 \in \pi_1 M$  tels que  $P_t^1$  s'élimine avec  $g_1 Q_t^2$  et  $P_t^2$  s'élimine avec  $g_2 Q_t^1$ .



# Exemple. Chemin d'évolution *L*-normale

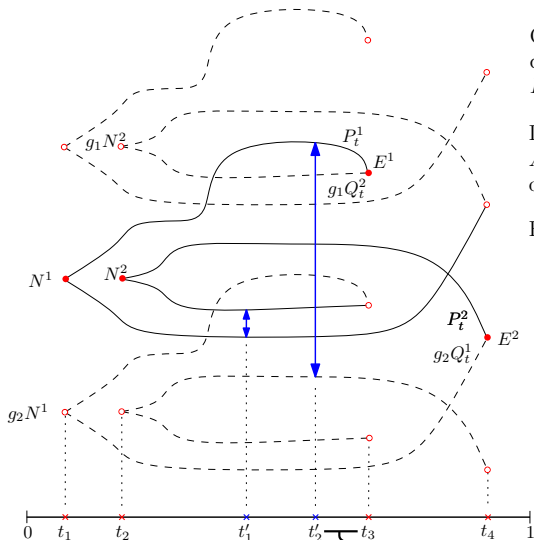


On trouve  $g_1, g_2 \in \pi_1 M$  tels que  $P_t^1$  s'élimine avec  $g_1 Q_t^2$  et  $P_t^2$  s'élimine avec  $g_2 Q_t^1$ .

La matrice de *L*-incidence  $A_{i+1}^t$  devrait être comme ci-dessous.

$$A_{i+1}^t = \begin{pmatrix} * & g_1 + * \\ g_2 + * & * \end{pmatrix}$$

# Exemple. Chemin d'évolution L-normale



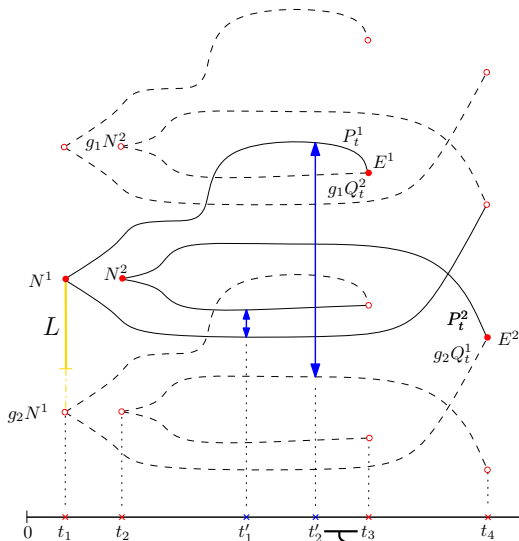
On trouve  $g_1, g_2 \in \pi_1 M$  tels que  $P_t^1$  s'élimine avec  $g_1 Q_t^2$  et  $P_t^2$  s'élimine avec  $g_2 Q_t^1$ .

La matrice de L-incidence  $A_{i+1}^t$  devrait être comme ci-dessous.

En effet  $A_{i+1}^t$  est monômiale.

$$A_{i+1}^t = \begin{pmatrix} 0 & g_1 \\ g_2 & 0 \end{pmatrix}$$

# Exemple. $L$ trop petit



Mais attention !  
Prendre  $L$  trop petit  
peut entraîner une perte  
d'informations.

Par exemple :  
si  $0 < L < -u(g_2)$ , la matrice  
de  $L$ -incidence  $A_{i+1}^t$  ne voit  
plus l'élimination de  $P_t^2$ .

$$A_{i+1}^t = \begin{pmatrix} 0 & g_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Matrices parfaites

Une  $A \in \text{Mat}_s(\mathbb{Z}[\pi_1 M])$  est monômiale s'il existe une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_s$  telle que  $A = P_\sigma \begin{pmatrix} \pm g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm g_s \end{pmatrix}$  où  $g_i \in \pi_1 M$ .

## Définition

Soit  $A = P_\sigma \begin{pmatrix} \pm g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm g_s \end{pmatrix}$  monômiale. Elle est dite *parfaite* si

$$\prod_{i=1}^s g_i \in [\pi_1 M, \pi_1 M].$$

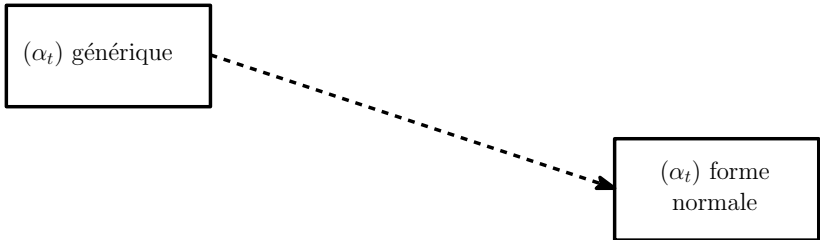


# Schéma de preuve

## Théorème principal

Pour tout  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  générique à deux indices  $i, i + 1$  où  $1 < i < n - 1$ , il existe  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  de même nature tel que

- ①  $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$ ,
- ②  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  est en *forme normale*.

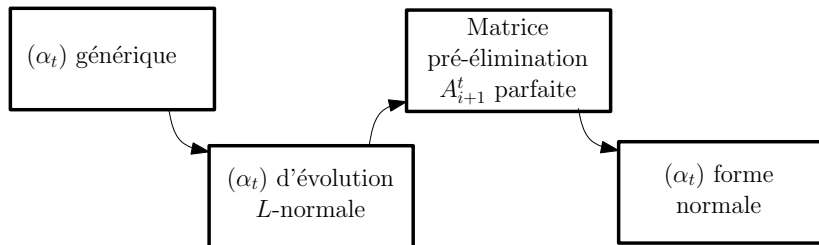


# Schéma de preuve

## Théorème principal

Pour tout  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  générique à deux indices  $i, i+1$  où  $1 < i < n-1$ , il existe  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  de même nature tel que

- 1  $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$ ,
- 2  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  est en *forme normale*.

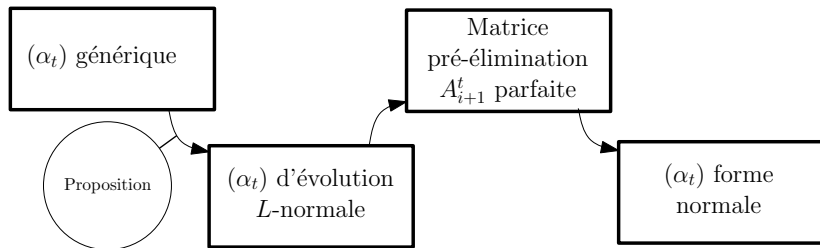


# Schéma de preuve

## Théorème principal

Pour tout  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  générique à deux indices  $i, i+1$  où  $1 < i < n-1$ , il existe  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  de même nature tel que

- 1  $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$ ,
- 2  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  est en *forme normale*.

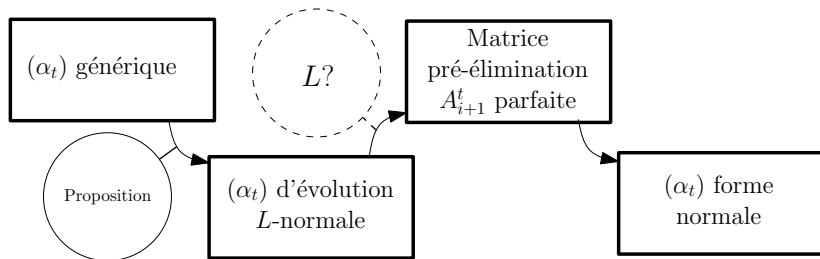


# Schéma de preuve

## Théorème principal

Pour tout  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  générique à deux indices  $i, i + 1$  où  $1 < i < n - 1$ , il existe  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  de même nature tel que

- 1  $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$ ,
- 2  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  est en *forme normale*.

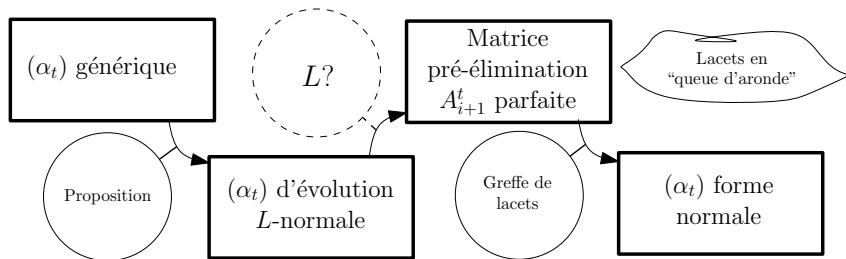


## Schéma de preuve

## Théorème principal

Pour tout  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  générique à deux indices  $i, i+1$  où  $1 < i < n-1$ , il existe  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  de même nature tel que

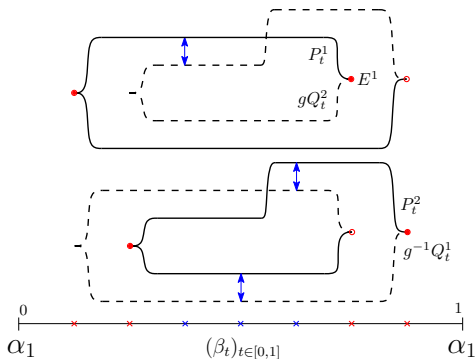
- ①  $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$ ,
- ②  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  est en *forme normale*.



# Lacets en queue d'aronde

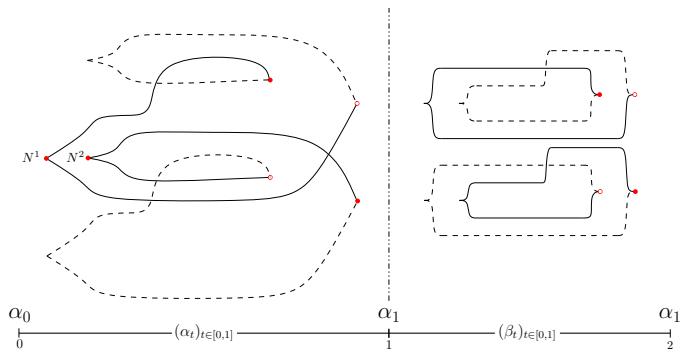
À partir de  $\alpha_1$  non-singulière et  $g \in \pi_1 M$  quelconques, nous avons construit un lacet contractile :

$\beta_\bullet$  basé en  $\alpha_1$  dont la matrice de pré-élimination est  $\begin{pmatrix} 0 & -g \\ g^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ .



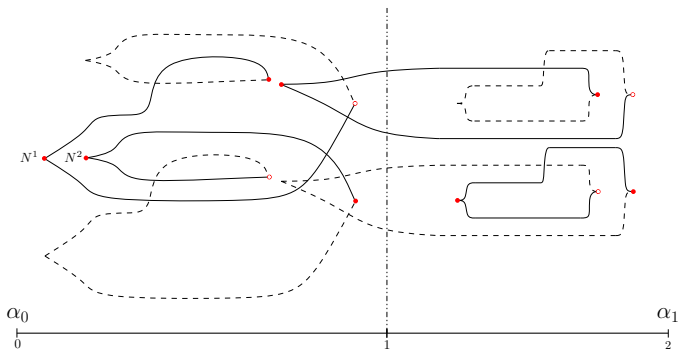
# Greffe des lacets. Exemple

La concaténation  $\alpha_\bullet * \beta_\bullet$  a les mêmes extrémités que  $\alpha_\bullet$ .  
 La greffe déforme la concaténation, à extrémités fixes, sur  $\alpha'_\bullet$ .  
 Nous avons  $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$ .



# Greffe des lacets. Exemple

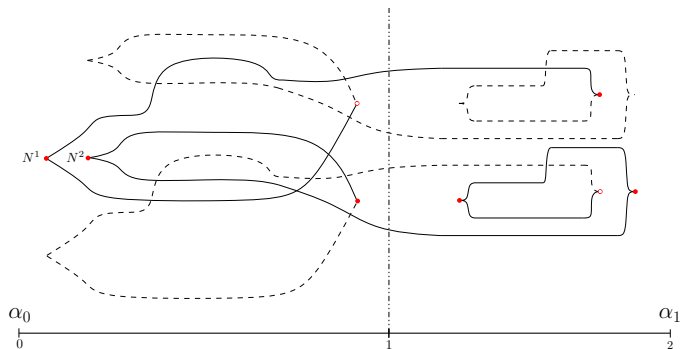
La concaténation  $\alpha_\bullet * \beta_\bullet$  a les mêmes extrémités que  $\alpha_\bullet$ .  
 La greffe déforme la concaténation, à extrémités fixes, sur  $\alpha'_\bullet$ .  
 Nous avons  $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$ .





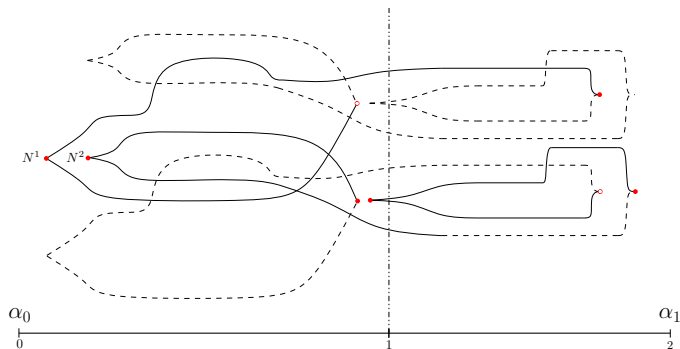
# Greffe des lacets. Exemple

La concaténation  $\alpha_{\bullet} * \beta_{\bullet}$  a les mêmes extrémités que  $\alpha_{\bullet}$ .  
 La greffe déforme la concaténation, à extrémités fixes, sur  $\alpha'_{\bullet}$ .  
 Nous avons  $[\alpha_{\bullet}] = [\alpha'_{\bullet}] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$ .



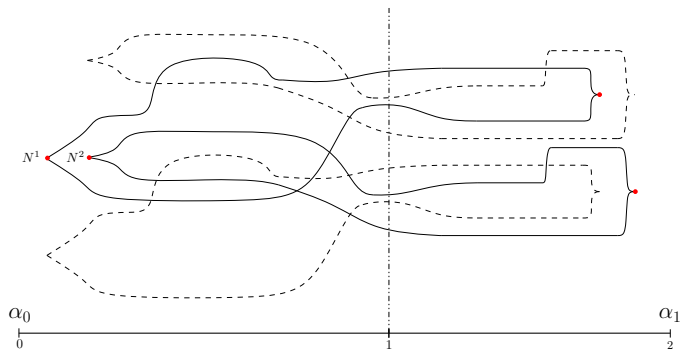
# Greffe des lacets. Exemple

La concaténation  $\alpha_{\bullet} * \beta_{\bullet}$  a les mêmes extrémités que  $\alpha_{\bullet}$ .  
 La greffe déforme la concaténation, à extrémités fixes, sur  $\alpha'_{\bullet}$ .  
 Nous avons  $[\alpha_{\bullet}] = [\alpha'_{\bullet}] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$ .



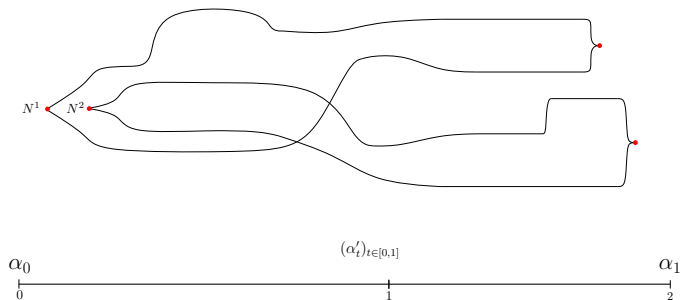
# Greffe des lacets. Exemple

La concaténation  $\alpha_{\bullet} * \beta_{\bullet}$  a les mêmes extrémités que  $\alpha_{\bullet}$ .  
 La greffe déforme la concaténation, à extrémités fixes, sur  $\alpha'_{\bullet}$ .  
 Nous avons  $[\alpha_{\bullet}] = [\alpha'_{\bullet}] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$ .



# Greffe des lacets. Exemple

La concaténation  $\alpha_\bullet * \beta_\bullet$  a les mêmes extrémités que  $\alpha_\bullet$ .  
 La greffe déforme la concaténation, à extrémités fixes, sur  $\alpha'_\bullet$ .  
 Nous avons  $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$ .



# Effet algébrique des greffes

Supposons que  $A_{i+1}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_1 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ g_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$ .

Nous avons montré que la greffe a la vertu de transformer la matrice de pré-élimination en :  $A_{i+1}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & -g_j g_1 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$ .

## Effet algébrique des greffes

Supposons que  $A_{i+1}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_1 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ g_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$ .

Nous avons montré que la greffe a la vertu de transformer la matrice de pré-élimination en :  $A_{i+1}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & -g_j g_1 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$ .

On se ramène de proche en proche à la matrice

$$A_{i+1}^t = \begin{pmatrix} \text{Id}_{s-1} & 0 \\ 0 & (-1)^\sigma \prod_{i=1}^s g_i \end{pmatrix}.$$

Mais les commutateurs se décomposent comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [h_1, h_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^{-1} & 0 \\ 0 & h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2^{-1} & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 h_1 & 0 \\ 0 & (h_2 h_1)^{-1} \end{pmatrix},$$

et finalement en un produit de deux greffes :

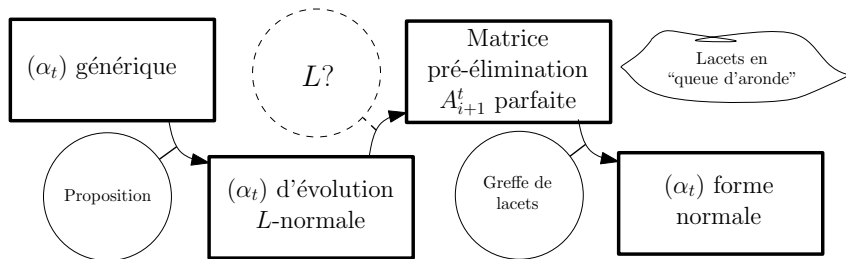
$$\begin{pmatrix} h^{-1} & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h^{-1} \\ -h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Schéma de preuve

## Théorème principal

Pour tout  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  générique à deux indices  $i, i+1$  où  $1 < i < n-1$ , il existe  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  de même nature tel que

- ①  $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$ ,
- ②  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  est en *forme normale*.

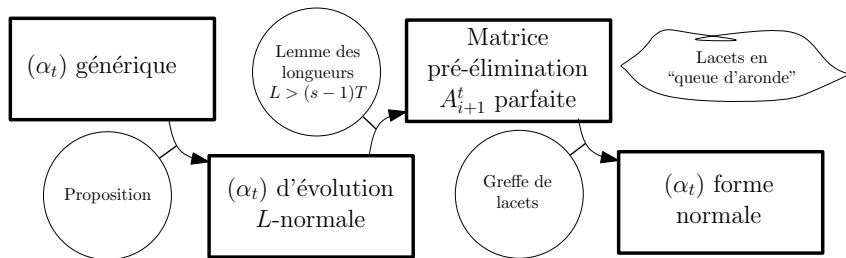


# Schéma de preuve

## Théorème principal

Pour tout  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  générique à deux indices  $i, i+1$  où  $1 < i < n-1$ , il existe  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  de même nature tel que

- 1  $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$ ,
- 2  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  est en *forme normale*.





# $L$ suffisamment grand : lemme des longueurs

## Proposition

Soit  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  d'évolution  $L$ -normale, à deux indices  $i, i + 1$ , de taille  $T$  et contenant  $s$  couples de zéros en  $]t_N, t_E[$ .

Si  $L > (s - 1)T$ , alors la matrice de pré-élimination  $A^t$  est parfaite.

# $L$ suffisamment grand : lemme des longueurs

## Proposition

Soit  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  d'évolution  $L$ -normale, à deux indices  $i, i+1$ , de taille  $T$  et contenant  $s$  couples de zéros en  $]t_N, t_E[$ .  
Si  $L > (s-1)T$ , alors la matrice de pré-élimination  $A^t$  est parfaite.

Elle nécessite un lemme algébrique, dit *des longueurs* :

## Lemme des longueurs

Soit  $B \in \text{Mat}_s(\mathbb{Z}[\pi_1 M])$  telle que  $u(\text{supp}(B)) \leq T$  pour un  $T > 0$ .  
Si  $L > (s-1)T$ , nous avons :

$$\det_{\text{ab}}(B) = \det_{\text{ab}}(\text{tr}_L(B)) + (u_{\text{ab}} < 0).$$

Où  $\text{tr}_L : \mathbb{Z}[\pi_1 M] \rightarrow \mathbb{Z}[\pi_1 M]$  est la troncature :

$$\sum_{g \in \pi_1 M} n_g g \mapsto \sum_{u(g) \geq -L} n_g g.$$