



HAL
open science

Quelques aspects de la physique des interfaces cisillées : Hydrodynamique et Fluctuations.

Marine Thiébaud

► **To cite this version:**

Marine Thiébaud. Quelques aspects de la physique des interfaces cisillées: Hydrodynamique et Fluctuations.. Matière Molle [cond-mat.soft]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2011. Français. NNT : 2011BOR14310 . tel-00769006

HAL Id: tel-00769006

<https://theses.hal.science/tel-00769006>

Submitted on 27 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 4310

THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DE SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par **Marine THIÉBAUD**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **Lasers, Matière et Nanosciences**

Quelques aspects de la physique des interfaces cisillées

Hydrodynamique et Fluctuations

soutenue le 23 Septembre 2011 devant le jury composé de

M	Daniel BONN	Directeur de Recherche, Ecole Normale Supérieure	Rapporteur
M	Nicolas DESTAINVILLE	Professeur, Université de Toulouse	Rapporteur
M	Thierry BIBEN	Professeur, Université de Lyon	Président du Jury
Mme	Annie COLIN	Professeur, Université de Bordeaux	Examineur
M	Thomas BICKEL	Maître de Conférences, Université de Bordeaux	Directeur
M	Alois WÜRGER	Professeur, Université de Bordeaux	Directeur

Thèse préparée à l'Université Bordeaux 1
au Laboratoire Ondes et Matière d'Aquitaine (LOMA), UMR5798,
351 cours de la Libération, 33405 Talence cedex.

Some aspects of the physics of interface under shear

Hydrodynamics and fluctuations

Abstract

In this contribution, we investigate theoretically an interface between two newtonian fluids in a stationary shear flow. The statistical properties of the interface are driven out of equilibrium due to the coupling by the shear flow between viscous and tension effects. The shear flow may either enhance or suppress interfacial deformations, as it is the case in other soft matter systems (for example, lamellar phases). The dynamics of thermal fluctuations is first considered. It is shown that fluctuation modes follow a stochastic nonlinear equation. The solution is then controlled by a single dimensionless parameter, that contains all the information of the system. The mean square displacement is obtained in the limit of small shear rates : it is found to be smoothed out by the flow, in qualitative agreement with experiments and simulations. Then, a stability analysis of the flow is achieved when inertial contributions are taken into account. We focus on the regime of small surface tension and large viscosity. This regime has experienced a renewed interest in the last few years, in the context of phase-separated colloid-polymer mixtures. Simple criteria for the stability or instability of the flow are unveiled. Finally, a numerical study of fluctuation properties is performed in the limit of large shear rate. Although viscous effects are predominant, the results share some similarities with some turbulence models.

Keywords : out-of-equilibrium statistical physics, hydrodynamics, fluid-fluid interfaces, thermal fluctuations, large capillary number, stationary Couette flow

Résumé

Ce travail porte sur l'étude théorique des interfaces entre deux fluides visqueux, soumis à un écoulement de Couette plan. Dans cette situation hors d'équilibre, les fluctuations thermiques de l'interface sont modifiées en raison du couplage par le cisaillement entre les effets visqueux et les effets de tension. Comme c'est le cas pour d'autres systèmes de matière molle (par exemple, les phases lamellaires), le cisaillement peut alors amplifier ou amortir les déformations interfaciales. On s'intéresse tout d'abord à la dynamique des fluctuations interfaciales. On montre que ces dernières vérifient une équation stochastique non-linéaire, dont la solution est contrôlée par un paramètre sans dimension qui contient toute l'information sur le système. La résolution à faible taux de cisaillement révèle que le déplacement quadratique moyen des fluctuations thermiques diminue avec l'écoulement, conformément aux observations expérimentales et numériques. Ensuite, on étudie l'influence des effets inertiels sur la stabilité de l'écoulement, dans le régime des fortes viscosités et des faibles tensions. Ce régime des grands nombres capillaires n'a été que très peu étudié, mais trouve sa pertinence par exemple dans les mélanges biphasiques de colloïdes et de polymères. Des critères de stabilité simples sont mis en évidence. Finalement, on réalise une étude numérique des propriétés des fluctuations interfaciales à grand cisaillement. Bien que les effets visqueux soient dominants, il en ressort une phénoménologie similaire à certains modèles de turbulence.

Mots-clés : physique statistique hors d'équilibre, hydrodynamique, interfaces fluide-fluide, fluctuations thermiques, grand nombre capillaire, écoulement de Couette stationnaire

Merci tout d'abord à mes directeurs de thèse : à Thomas pour m'avoir accompagné pendant plus de trois ans, et à Aloïs, notamment pour sa patience à mes questions.

Ensuite, je remercie le jury du temps qu'ils m'ont consacré et de leur intérêt. Je remercie plus particulièrement Daniel Bonn et Nicolas Destainville de leur relecture.

Remerciements qui vont aussi à Eric Freysz et Jean-Pierre Delville de m'avoir accueilli au LOMA.

Cent fois je les ai appelés, je remercie les experts des papiers : Sophie, Isabelle, Laurette, Suzanne, Annie du labo, Brigitte de l'ED, puis Alexia et Silvie de la DRH.

Icônes de l'informatique, je dois aussi une fière chandelle à Hassan et Joseph.

à Bernadette qui m'a supporté.
Merci

Philippe, Yann, Julien (x2), Christine, Jérôme, Daniel, Silvia, Laura, Yacine, Francois de l'étage 1,
Manu, Régis, Pini de l'étage 2,
Pierre, Simon, Yves, Stéphane, Jonah, Arghya, Julien de l'étage 4,
Sébastien du 5^{em}Xavier, Carlotta, Joseph, Fabio, Sacha, Francois de l'étage 4,
Merci
à tous les chercheurs qui m'ont supporté

Enfin, sans fioritures, je remercie mes parents et mes soeurs ainsi que toute ma famille. Sans lui, je n'y serais pas arrivée, je remercie de tout coeur mon compagnon, JB.

Table des matières

1	Introduction	11
2	Physique des interfaces	13
2.1	Vous avez dit « interface » ?	13
2.1.1	Description macroscopique d'une interface	13
2.1.2	L'interface : une zone diffuse.	16
2.2	Hamiltonien capillaire	19
2.3	Relation de dispersion	22
2.3.1	Etablissement de la relation	22
2.3.2	Comportements asymptotiques des perturbations	25
2.4	Fluctuations thermiques	27
2.4.1	Quelques dates significatives	27
2.4.2	Propriétés statiques des fluctuations	28
2.4.3	Dynamique	31
3	Dynamique des fluctuations	35
3.1	Description du système	36
3.2	Formulation hydrodynamique	37
3.2.1	Immiscibilité de l'interface	38
3.2.2	Equations hydrodynamiques vérifiées par le champ de vitesse	40
3.2.3	Conditions limites au niveau de l'interface	40
3.2.4	Approximation des faibles gradients	41
3.3	Relaxation	43
3.3.1	Ecoulement de Couette plan	43
3.3.2	Constante de relaxation linéaire	44
3.3.3	Terme de couplage	49
3.3.4	Discussion	52
3.4	Contribution stochastique	52
3.4.1	Hydrodynamique fluctuante	53
3.4.2	Modification de l'approximation à faible gradient par le tenseur des contraintes aléatoires	54
3.4.3	Dérivation des contributions stochastiques de l'équation d'évolution	56

3.5	Discussion	58
4	Fluctuations hors d'équilibre	59
4.1	Paramètre de contrôle du cisaillement	60
4.2	Résolution de l'équation d'évolution	61
4.3	Spectre des fluctuations dans l'espace de Fourier	62
4.4	Propriétés statiques des fluctuations de l'interface	65
4.4.1	Déplacement quadratique moyen	65
4.4.2	Corrélations spatiales	66
4.5	Discussion	67
4.5.1	Quelques précisions à propos de l'expérience sur les interfaces colloïdales.	67
4.5.2	Comparaison à l'expérience	70
4.5.3	Vérification des hypothèses du modèle hydrodynamique	73
5	Analyse de stabilité	77
5.1	Contexte historique	77
5.2	La relation de dispersion généralisée	79
5.2.1	Hypothèses	80
5.2.2	Formulation hydrodynamique	81
5.2.3	Dérivation de la relation de dispersion	86
5.3	Critères d'instabilité	89
5.3.1	Sans tension, ni gravité	93
5.3.2	Effets de la tension et de la gravité	94
5.3.3	Cas marginal $r = m$	97
5.4	Discussion	102
6	Etude numérique	105
6.1	Fluctuations à l'équilibre	105
6.1.1	Description analytique d'une interface à 1 dimension	106
6.1.2	Algorithme	108
6.1.3	Résultats	108
6.2	Fluctuations sous cisaillement	113
6.2.1	Description analytique du terme de couplage de mode	114
6.2.2	Algorithme et paramètres de discrétisation	115
6.2.3	Résultats	119
6.3	Au-delà de la rugosité de l'interface	123
6.3.1	Moment d'ordre 4 de la déformation	124
6.3.2	Densité de probabilité des déformations	124
6.3.3	Incréments de déformation	127
6.4	Discussion	131
7	Conclusion et perspectives	135

Annexes	138
A Relation de dispersion	141
A.1 Obtention de la relation de dispersion	141
A.2 Transition entre les deux régimes	145
A.3 Relaxation volumique	147
B Conditions limites	149
C Equation d'évolution	153
C.1 Forme générale du champ de vitesse	153
C.1.1 Détermination de $v_{j,t}^{(n)}$	155
C.1.2 Détermination de $v_{j,q}^{(n)}$, $v_{j,z}^{(n)}$ et $P_j^{(n)}$	155
C.1.3 Synthèse de la forme des champs hydrodynamiques	156
C.2 Conditions limites à l'interface	157
C.2.1 Développement des conditions limites à l'interface	157
C.2.2 Détermination des constantes du champ de vitesse	158
D Résolution	163
D.1 Obtention de $h_q(\omega)$	163
D.2 Calcul du spectre	165
D.2.1 Dynamique	165
D.2.2 Statique	167

Chapitre 1

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude des fluctuations hors d'équilibre des interfaces fluides. Pour des systèmes à l'équilibre, les théorèmes généraux de la physique statistique permettent de calculer les propriétés thermodynamiques d'un système à partir des propriétés microscopiques. En ce qui concerne les systèmes hors d'équilibre, la situation est plus complexe et constitue un sujet de recherche plus que jamais d'actualité. La physique statistique hors d'équilibre ambitionne de répondre à un certain nombre d'interrogations fondamentales, comme par exemple la réponse d'un système lorsqu'on lui applique un gradient de champ extérieur (différence de température, de potentiel électrique, . . .) ou lorsque de l'énergie y est constamment injectée (par exemple sous forme mécanique). Parmi ces propriétés hors d'équilibre, la première étape consiste déjà à comprendre la classe particulière des états stationnaires.

Afin de faire progresser la compréhension de la physique statistique hors d'équilibre, deux approches sont conjointement menées. La première approche procède de manière fondamentale : elle vise à établir de nouveaux théorèmes généraux, à démontrer des propriétés universelles. Le but par exemple est de mettre en évidence des quantités invariantes lorsque le système s'éloigne de l'équilibre [6]. Des généralisations du théorème de fluctuation-dissipation sont également proposées, en introduisant par exemple le concept de température effective [12] ou des termes supplémentaires [45, 43] par rapport aux relations d'équilibre.

Il est également possible d'aborder les systèmes hors d'équilibre de manière plus spécifique. Le but est alors d'étudier de manière théorique (analytique ou numérique) un système particulier et de caractériser ses propriétés tant que c'est possible. C'est l'approche choisie dans le cadre de cette thèse, où l'on a choisi d'étudier les interfaces entre deux fluides newtoniens soumis à un écoulement de cisaillement.

Tout d'abord, on peut noter que les propriétés statistiques des interfaces à l'équilibre sont aujourd'hui bien établies [27]. Le modèle capillaire des fluctuations thermiques des interfaces a de plus été vérifié jusqu'à des échelles de longueur proches des échelles moléculaires, aussi bien expérimentalement [18] que numériquement [15]. Cependant, les interfaces entre fluides moléculaires sont étudiées par des expériences de diffusion [27], techniques plus ou moins lourdes à mettre en oeuvre et qui aboutissent

tissent à des résultats dans l'espace réciproque. Il est toutefois possible de tirer bénéfice des systèmes de matière molle pour étudier les interfaces [9]. En effet, dans une suspension colloïdale, les interactions entre particules peuvent être ajustées afin que ces dernières imitent les atomes ou molécules, constitutifs des fluides simples : on a alors affaire à des fluides dits colloïdaux. De même que les fluides simples, ils sont délimités par des surfaces et des interfaces. Les échelles de longueur et de temps correspondantes permettent l'étude des interfaces colloïdales par des techniques de microscopie optique, avec l'avantage que les mesures se présentent dans l'espace direct.

La généralisation, depuis quelques années, des études sur les interfaces colloïdales [1], a permis de mesurer l'évolution de leurs fluctuations sous cisaillement [17]. Dans cette expérience, le cisaillement est assez important pour amener le système loin de l'équilibre. Dans le cadre de cette thèse, on effectue l'étude théorique des interfaces soumises à un écoulement de Couette plan dans le régime de faible tension de surface et de forts effets visqueux associé aux interfaces colloïdales.

Le document s'organise de la façon suivante. Tout d'abord, on rappelle quelques généralités à propos des interfaces entre fluides (chapitre 2). Ensuite, le but est de mettre en évidence les modifications des propriétés de l'interface sous cisaillement. Ces modifications sont principalement dues au couplage avec les effets visqueux. La première étape est d'établir la dynamique des fluctuations, et ceci même si l'on s'intéresse seulement aux propriétés stationnaires (chapitre 3). L'équation d'évolution des fluctuations est alors résolue par un développement analytique par rapport au paramètre de contrôle du cisaillement (chapitre 4). On prend en compte a posteriori les effets inertiels et leur influence potentiellement déstabilisante en effectuant une analyse de stabilité linéaire (chapitre 5). Finalement, on revient aux fluctuations interfaciales et par une étude numérique, on montre quelques-unes de leurs propriétés en situation de fort cisaillement (chapitre 6). Le document se conclut par une discussion des résultats et des perspectives à ce travail.

Chapitre 2

Physique des interfaces

2.1 Vous avez dit « interface » ?

Les mots « surface » et « interface » appartiennent au langage courant et il suffit de feuilleter un dictionnaire pour s'en procurer des définitions concises. Par exemple, le *Grand Robert* définit une interface comme « une surface de séparation entre deux phases distinctes (solide-liquide-gaz) », une surface étant définie comme « la partie extérieure d'un corps qui le limite en tout sens ou [comme la] limite entre deux milieux différents » [40]. Ces définitions, utiles à la vie quotidienne, se placent à l'échelle humaine donc macroscopique. D'un point de vue physique, on ne peut faire preuve d'autant de concision car ce qu'on nomme « interface » dépend de l'échelle considérée. La présentation qui suit concerne seulement les interfaces entre deux fluides. Après avoir rappelé quelques notions thermodynamiques dont celle de tension de surface (description macroscopique), on s'intéresse aux inhomogénéités de densité entre les deux fluides et à leur relation avec la tension dans une description plus microscopique.

2.1.1 Description macroscopique d'une interface

Quelques expériences élémentaires . . .

Au niveau macroscopique, l'étude des phénomènes capillaires a mené à la notion de tension de surface pour caractériser les propriétés des interfaces. Quelques expériences simples permettent d'appréhender plus particulièrement cette notion. Tout d'abord, l'expérience des surfaces minimales consiste à tremper dans de l'eau savonneuse des formes solides tridimensionnelles (par exemple, un cube) : l'expérience montre que le liquide forme une surface d'aire minimale étant donné les contraintes, comme on le voit sur la fig. 2.1.a). Ensuite, on peut réaliser la même expérience avec un cadre quelconque au sein duquel une boucle de fil lâche a été attachée en deux extrémités. Après un bain du cadre dans le liquide savonneux, on observe un film tendu dans le cadre. Lorsque l'on crève le film à l'intérieur de la boucle, le fil lâche

forme alors un cercle de manière à maximiser la surface sans film savonneux, comme l'illustre la fig. 2.1.b). Ces quelques manipulations permettent de réaliser que la créa-

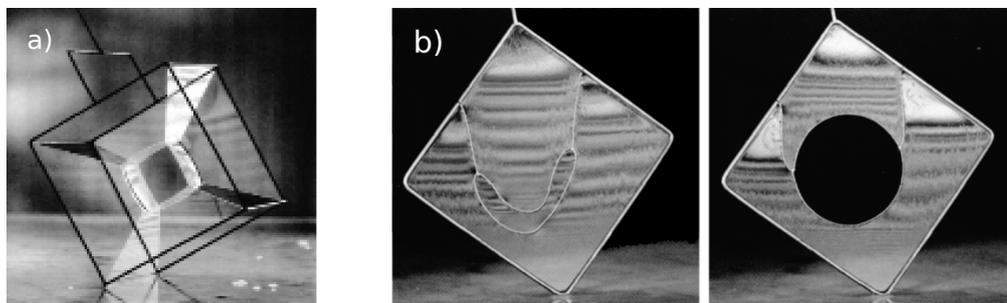


FIGURE 2.1 – Quelques expériences de surfaces minimales. Photos tirées de la réf. [13].

tion de surface du liquide nécessite de l'énergie. Il en résulte la première définition mécanique de la tension de surface σ : il s'agit de l'énergie nécessaire à la création d'une unité d'aire de surface. En notant δW le travail fourni afin d'augmenter l'aire de la surface de dS , σ est définie par

$$\delta W = \sigma dS \quad (2.1)$$

Par exemple, dans l'expérience du rail fermant un cadre schématisé sur la fig 2.2, le travail nécessaire δW pour déplacer le rail de dx est $\delta W = 2\sigma l dx$, avec l la longueur du rail. Le facteur 2 vient du fait que le déplacement du rail crée deux interfaces, l'une en dessous (air-liquide) et la seconde au-dessus (liquide-air). On sait par ailleurs que $\delta W = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ avec \mathbf{F} la force exercée par le film savonneux sur le rail. On associe alors à la tension de surface σ et à chaque surface une force capillaire \mathbf{F} :

- de direction tangente à la surface et normale à la ligne de contact considérée (dans l'expérience, il s'agit du rail)
- dont la norme est le produit de la tension de surface σ par la longueur de la ligne de contact
- dirigée vers la surface de manière à la minimiser.

La tension de surface s'exprime en $\text{J} \cdot \text{m}^{-2}$, ou plus couramment en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, soit en utilisant le système international en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$.

Point de vue thermodynamique

La définition de la tension que nous venons de rappeler est une définition mécanique. Afin de lier les échelles macroscopique et microscopique, il est plus adapté de travailler avec la définition thermodynamique de la tension de surface. Celle-ci se définit comme un excès d'« énergie » par unité d'aire, où la fonction thermodynamique « énergie » doit être précisée. On suppose que l'interface séparant deux

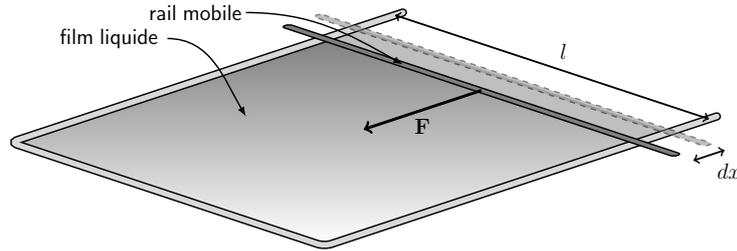


FIGURE 2.2 – Mise en évidence de la force capillaire tangente à l’interface à l’aide d’un rail mobile, 4^{ième} soutien d’un film liquide.

fluides immiscibles est en équilibre, c’est-à-dire à l’équilibre thermique et chimique. Le système total est à température et à potentiel chimique constants, la fonction thermodynamique à considérer est par conséquent le grand potentiel Ω . La tension de surface σ et l’aire de l’interface A y sont des variables conjuguées et

$$\sigma = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial A} \right)_{V, T, \mu_i} \quad (2.2)$$

où, selon les usages, on note V le volume du système, T sa température et μ_i le potentiel chimique de l’espèce i . Quelques valeurs de tension de surface pour des fluides en contact avec l’air ambiant sont données dans la table 2.1.

liquides	σ en mN.m^{-1}
eau à 20°C	72
eau à 100°C	58
éthanol	23
mercure	485

TABLE 2.1 – Quelques valeurs de tension de surface pour des fluides en contact avec l’air ambiant [13].

La définition thermodynamique 2.2 permet d’obtenir un ordre de grandeur de la tension de surface. Il s’agit en effet d’une énergie divisée par une aire. Au niveau d’une particule de fluide, les énergies mises en jeu sont de l’ordre de l’énergie thermique $k_B T$, avec k_B la constante de Boltzmann et T la température. L’aire caractéristique est simplement le diamètre de la particule au carré. On obtient $\sigma \sim k_B T / a^2$ avec a le diamètre des particules. Pour l’interface eau-air, ce raisonnement mène effectivement à $\sigma \sim 10^{-1} \text{ N.m}^{-1}$.

Ce raisonnement à propos de l’ordre de grandeur des tensions de surface permet en outre d’apprécier par quels moyens la tension de surface peut être modifiée.

- i) Tout d’abord, la tension de surface dépend fortement de la température, comme cela est illustré par les deux premières valeurs de la table 2.1. En particulier, une interface entre deux fluides n’existe que pour une certaine gamme de

température. Au-delà d'une « température critique » T_c , les deux fluides se mélangent et l'interface disparaît. Logiquement, la tension de surface décroît vers une valeur nulle lorsque la température tend vers la température critique T_c . Ce comportement définit un exposant critique ζ tel que $\sigma \propto |T - T_c|^\zeta$ lorsque $T \rightarrow T_c$. Dans le cadre de la théorie du champ moyen, l'exposant critique universel ζ est $\zeta = 3/2$ [35]. J. Meunier a dans sa thèse [32] mesuré un exposant critique de $\zeta \simeq 1.25$ pour le dioxyde de carbone, valeur qui se rapproche de celle de l'argon, du diazote et du xenon, fluides pour lesquelles $\zeta \simeq 1.25 - 1.28$, comme J. Meunier le souligne également : la valeur $\zeta = 1.25 - 1.28$ semble alors aussi universelle. Widom [49] s'approche de cette valeur théoriquement : il obtient $\zeta = 1.24$.

- ii) Ensuite, la tension de surface dépend de la taille des particules. Par exemple, pour des liquides moléculaires, la tension de surface est de l'ordre de $10^{-2} - 10^{-1}$ N.m⁻¹ tandis que pour les liquides colloïdaux, présentés dans le chapitre 4, la tension de surface est de l'ordre de 10^{-7} N.m⁻¹.
- iii) Un autre moyen de modifier la tension de surface est d'y rajouter des tensio-actifs. Ce sont de longues molécules constituées de deux parties, une tête polaire (ou chargée) hydrophile et une queue apolaire hydrophobe, constituée d'au moins une branche carbonée. En s'absorbant aux interfaces, les molécules tensio-actives diminuent leur énergie et donc la tension de surface [23].

2.1.2 L'interface : une zone diffuse.

Profil continu ...

D'un point de vue macroscopique, l'interface est décrite comme une surface mathématique qui sépare de manière abrupte deux fluides immiscibles. On décrit les propriétés du fluide 1 par l'indice 1, et celles du fluide 2 par l'indice 2. On suppose que cette surface est confondue avec le plan horizontal (xOy) de manière à ce que les quantités physiques ne dépendent que de z . Par exemple, la densité $\rho(z)$ évolue de sa valeur dans la fluide 1, ρ_1 , à celle dans le fluide 2, ρ_2 , suivant une fonction « marche », comme le schématise la courbe en pointillés de la fig. 2.3. Cependant, ce modèle ne tient pas à une échelle plus microscopique car il en découle que les molécules proches de la surface ne sont pas à l'équilibre mécanique (somme des forces nulle). Ce petit raisonnement par l'absurde conduit au fait que les propriétés des fluides doivent évoluer continûment de la valeur en volume du premier fluide à celle du second fluide, comme le schématise la courbe continue de la fig. 2.3.

On note ϵ l'épaisseur de la zone de transition entre les deux fluides. L'interface est maintenant décrite comme une couche d'épaisseur très fine mais non nulle. En pratique, ϵ est de l'ordre de quelques diamètres de particules. A partir du profil $\rho(z)$, on se rapproche du point de vue macroscopique en définissant la surface de Gibbs localisée en $z = z_G$, frontière mathématique entre les deux fluides. z_G est défini de

telle sorte qu'il y ait conservation de la matière entre les deux représentations soit

$$\int_{-\infty}^{z_G} dz [\rho_1 - \rho(z)] + \int_{z_G}^{+\infty} dz [\rho_2 - \rho(z)] = 0. \quad (2.3)$$

La description microscopique de l'interface présentée dans ce paragraphe se base sur la densité ρ . Notons cependant que dans la grande majorité des systèmes biphasiques, plusieurs espèces coexistent et l'on peut donc définir plusieurs surfaces de Gibbs. On suppose implicitement un raisonnement par rapport à l'espèce « principale ». Par exemple, dans le mélange de colloïdes et de polymères introduit au chapitre 4, cette espèce « principale » est les colloïdes.

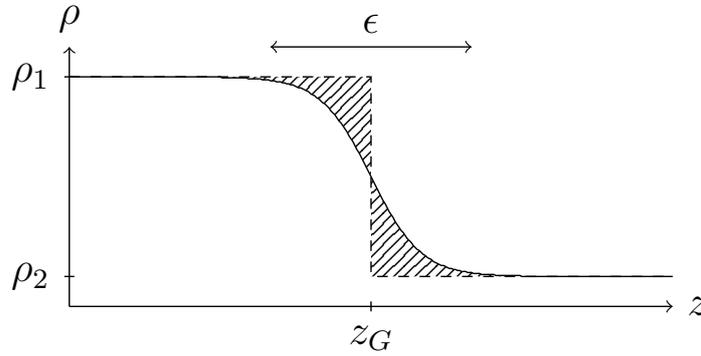


FIGURE 2.3 – Evolution de la densité en fonction de la coordonnée z , perpendiculaire à l'interface. La transition est continue de la phase 1 à la phase 2.

Afin d'approfondir ce modèle microscopique, il reste à préciser l'expression du profil de densité $\rho(z)$. La dérivation présentée suit celle de la réf. [5]. Etant à température et potentiel chimique constants, ce profil est celui qui minimise le grand potentiel. Si l'on considère le grand potentiel Ω comme une fonctionnelle du profil de densité $\rho(z)$, ceci permet d'obtenir $\rho(z)$ à partir de la condition :

$$\frac{\delta\Omega[\rho]}{\delta\rho} = 0 \quad (2.4)$$

Il reste donc à exprimer le grand potentiel Ω en fonction du profil de densité $\rho(z)$. Pour cela, on suppose que le grand potentiel peut s'écrire sous la forme $\Omega = A \int_{-\infty}^{+\infty} dz \omega(z)$ avec A l'aire projetée du système (selon le plan (xOy)) et $\omega(z)$ la densité du grand potentiel. La fonction ω dépend a priori de ρ et de toutes ses dérivées : $\omega(\rho, \nabla\rho, \nabla\nabla\rho, \dots)$. Dans le cas où les gradients sont petits, on se place dans l'approximation de Ginzburg-Landau, la densité du grand potentiel $\omega(z)$ se décompose alors en deux termes.

- Le premier terme, $\omega(\rho)$, est la densité du grand potentiel dans un système homogène de densité ρ . Par construction, $\omega(\rho)$ présente deux minima correspondant aux deux phases du système. La condition d'égalité des potentiels chimiques implique que $\omega(\rho_1) = \omega(\rho_2)$. La forme la plus simple que l'on puisse choisir est donnée par

$$\omega(\rho) = \frac{C}{2}(\rho - \rho_1)^2(\rho - \rho_2)^2 \quad (2.5)$$

avec C une constante. Ce potentiel en double puits est représenté schématiquement sur la fig. 2.4.

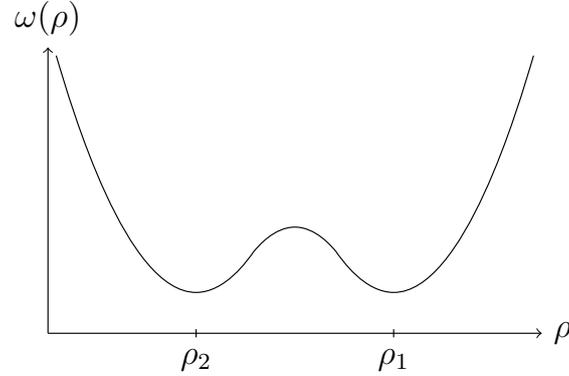


FIGURE 2.4 – Représentation de $\omega(\rho)$

- La seconde contribution correspond au coût énergétique des inhomogénéités du système. Pour des petits gradients, elle est proportionnelle à $(\nabla\rho)^2$. On note $m/2$ le facteur de ce terme.

Pour résumer, $\omega(z)$ se met sous la forme

$$\omega(z) = \omega(\rho) + \frac{m}{2}(\nabla\rho)^2 \quad (2.6)$$

Les deux constantes C et m qui apparaissent dans cette identité sont directement reliées aux propriétés des particules constitutives des fluides [42]. La minimisation du grand potentiel 2.4 conduit alors au profil de densité suivant :

$$\rho(z) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} - \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \tanh\left(\frac{z}{2\epsilon}\right). \quad (2.7)$$

La constante ϵ est définie par $\epsilon = \sqrt{m/C}(\rho_1 - \rho_2)^{-1}$. Cette constante a la dimension d'une longueur, et définit effectivement l'épaisseur de l'interface. Le profil de densité (2.7) est représenté sur la fig. 2.3.

... et sa relation avec la tension de surface

Afin d'être cohérent entre les deux modèles, microscopique et macroscopique, on cherche à lier la tension de surface σ , caractéristique thermodynamique de l'interface, avec le profil de densité $\rho(z)$. La tension de surface σ est définie comme l'excès du grand potentiel par unité d'aire. Avec $\omega(z)$ la densité du grand potentiel, σ vérifie

$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \omega(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[\omega(\rho) + \frac{m}{2} (\nabla \rho)^2 \right] \quad (2.8)$$

Grâce à la relation de minimisation du grand potentiel (2.4), on obtient finalement une expression explicite de la tension de surface en fonction de l'épaisseur de l'interface ϵ

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_{\rho_2}^{\rho_1} d\rho \sqrt{2m\omega(\rho)} \\ &= \epsilon C (\rho_1 - \rho_2)^4 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Autrement dit, la tension de surface σ est directement proportionnelle à l'épaisseur de l'interface ϵ .

En conclusion, la description microscopique des interfaces révèle deux longueurs microscopiques : la taille des particules a et l'épaisseur interfaciale ϵ . On évoquera ce caractère ambivalent lors de l'étude du déplacement quadratique moyen des fluctuations de l'interface. La description microscopique présentée ici, bien que plus précise que la description en terme d'une surface mathématique, possède aussi ses limites. En particulier, elle n'est pas appropriée à la description des fluctuations de position de l'interface. On a choisi cependant de présenter cette approche en terme de fonctionnelles de densité car elle a l'avantage de souligner la dépendance de la tension de surface avec l'épaisseur de l'interface.

2.2 Energie de déformation d'une interface : Hamiltonien capillaire

Maintenant que la notion de tension de surface a été clairement définie, les propriétés physiques des interfaces peuvent être abordées. La première d'entre elles est son énergie. On exprime l'hamiltonien capillaire après avoir décrit le système. En particulier, on insiste sur la façon dont est repérée la déformation de l'interface.

Dans la partie précédente, l'interface a été modélisée principalement de deux façons : tout d'abord, comme une surface en deux dimensions, la surface de Gibbs, puis comme un volume tridimensionnel avec une épaisseur ϵ très fine. Méthodiquement, on commence par considérer l'interface de la manière la plus simple possible : l'interface est une surface mathématique, confondue avec sa surface de Gibbs.

On suppose que l'interface au repos est confondue avec le plan horizontal (xOy) de manière à ce que le système présente une stratification des quantités physiques, la densité ρ et la viscosité dynamique η , selon la direction z . On nomme le fluide se situant en-dessous de l'interface le fluide 1 et ses propriétés sont marquées par l'indice 1, de même pour le fluide 2 situé au-dessus de l'interface. Le fluide inférieur est plus dense que le fluide supérieur, $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$ est une quantité positive. L'énergie de l'interface est alors posée comme étant nulle. Il faut fournir de l'énergie pour perturber l'interface par rapport à son état fondamental. On suppose que cette perturbation est petite et l'on utilise la représentation de Monge pour décrire la déformation de l'interface. La configuration perturbée de l'interface est repérée par le déplacement vertical $z = h(\mathbf{r})$ de l'interface, où \mathbf{r} appartient au plan horizontal (xOy). La description du système est résumée sur la fig. 2.5. La représentation de Monge permet de plus de préciser ce qu'on entend par « petite » perturbation : il s'agit de l'approximation des faibles gradients, $|\nabla h| \ll 1$.

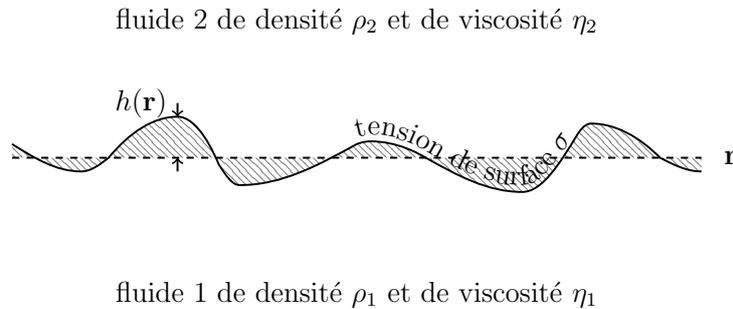


FIGURE 2.5 – Représentation schématique d'une interface perturbée, initialement horizontale.

On s'intéresse en premier lieu au coût énergétique nécessaire à l'établissement d'une perturbation de l'interface par rapport à sa configuration plane. Il s'agit aussi de ce qu'on appelle l'hamiltonien capillaire H . On peut tout d'abord constater que l'aire de l'interface déformée est supérieure à l'aire de l'interface plane. Cette augmentation de la superficie est associée à une énergie de surface E_s

$$E_s = \sigma \int_S dS - \sigma \int_{S_0} d\mathbf{r}$$

avec S_0 une portion du plan (xOy), projection de la surface S de la déformation étudiée. Dans la représentation de Monge, $dS = d\mathbf{r} \sqrt{1 + |\nabla h|^2}$. L'approximation des faibles gradients conduit alors à

$$E_s = \frac{\sigma}{2} \int_{S_0} d\mathbf{r} |\nabla h(\mathbf{r})|^2. \quad (2.10)$$

Ensuite, on peut remarquer que, lorsque l'interface est déformée, une partie du fluide le plus dense se trouve au-dessus du fluide plus léger et réciproquement : ce sont

les zones hachurées sur la fig. 2.5. Cette inversion de hauteurs entre les deux fluides entraîne un coût énergétique de pesanteur E_P

$$E_P = \int_{S_0} d\mathbf{r} \left[\int_{-\infty}^{h(\mathbf{r})} dz \rho_1 g z + \int_{h(\mathbf{r})}^{+\infty} dz \rho_2 g z - \int_{-\infty}^0 dz \rho_1 g z - \int_0^{+\infty} dz \rho_2 g z \right]$$

avec g l'accélération de pesanteur. Les deux derniers termes sont constants, et ne sont introduits que pour imposer $E_P = 0$ lorsque l'interface est strictement plane. Après intégration sur z , l'énergie de pesanteur de la perturbation interfaciale se met sous la forme

$$E_P = \frac{\Delta\rho g}{2} \int_{S_0} d\mathbf{r} h^2(\mathbf{r}). \quad (2.11)$$

En résumé, l'hamiltonien H associé à la perturbation $h(\mathbf{r})$ de l'interface est constitué de deux termes, une énergie de surface E_s et une énergie de pesanteur E_P , et est donné dans l'approximation des faibles gradients par

$$H = \frac{\sigma}{2} \int_{S_0} d\mathbf{r} |\nabla h(\mathbf{r})|^2 + \frac{\Delta\rho g}{2} \int_{S_0} d\mathbf{r} h^2(\mathbf{r}). \quad (2.12)$$

L'hamiltonien H n'est pas diagonal avec cette expression, fonction de la représentation dans l'espace réel de la déformation $h(\mathbf{r})$ de l'interface. Or il est pratique de manipuler une expression diagonale de cet hamiltonien. En raison de l'invariance par translation dans le plan horizontal (xOy), on utilise la représentation en série de Fourier $h_{\mathbf{q}}$ liée à la représentation réelle $h(\mathbf{r})$ par les relations

$$h_{\mathbf{q}} = \int_{S_0} d\mathbf{r} h(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) \quad (2.13a)$$

$$h(\mathbf{r}) = \frac{1}{L_x \times L_y} \sum_{\substack{n,m=-\infty \\ (n,m) \neq (0,0)}}^{+\infty} h_{\mathbf{q}} \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) \quad (2.13b)$$

Le passage en série de Fourier fait intervenir L_x et L_y , les dimensions de l'interface dans les deux directions (Ox) et (Oy) respectivement, ainsi que le vecteur d'onde $\mathbf{q} = n\frac{2\pi}{L_x}\mathbf{e}_x + m\frac{2\pi}{L_y}\mathbf{e}_y$ avec n et m deux entiers quelconques. \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y sont les deux vecteurs directeurs de norme 1 dans les directions (Ox) et (Oy). Le théorème de Parseval mène alors à l'expression suivante de l'hamiltonien

$$H = \sum_{\mathbf{q}} G(q) |h_{\mathbf{q}}|^2 \quad \text{avec} \quad G(q) = \frac{1}{S_0} \times \frac{\sigma}{2} (q^2 + l_c^{-2}) \quad (2.14)$$

où on note q la norme du vecteur d'onde \mathbf{q} . Cette expression de l'hamiltonien capillaire révèle une longueur caractéristique de l'interface, la longueur capillaire $l_c = \sqrt{\sigma/(\Delta\rho g)}$. La longueur capillaire l_c détermine une échelle de longueur au-delà de laquelle la gravité est importante et les effets de tension négligeables tandis

qu'en-dessous les effets de tension sont prédominants et la gravité négligeable. On retrouve cette longueur capillaire dans la plupart des phénomènes capillaires. Par exemple, en ce qui concerne les gouttes, si la taille de la goutte est inférieure à la longueur capillaire, la goutte est sphérique afin de minimiser sa surface à volume constant, tandis que si la taille de la goutte est supérieure à la longueur capillaire, la goutte s'étale sous l'effet de la gravité. Pour une interface eau-air, elle est de l'ordre du millimètre tandis que pour les interfaces colloïdales (voir chapitre 4), il s'agit plutôt d'une dizaine de micromètres.

2.3 Relation de dispersion

2.3.1 Etablissement de la relation

Forme des perturbations

L'étude de l'hamiltonien souligne que la description en série de Fourier d'une perturbation interfaciale est particulièrement bien adaptée à son étude. Afin d'obtenir la réponse linéaire du système à la perturbation, on la suppose donc être de la forme $h(x) = \mathcal{R}[h_q \exp(i(qx - \omega t))]$. Le champ de vitesse est supposé bidimensionnel et la perturbation interfaciale unidimensionnelle en raison de la symétrie par rotation dans le plan horizontal (xOy). En pratique, on se demande pour chaque vecteur d'onde q , comment évolue temporellement la déformation imposée de l'interface, soit comment ω dépend de q , relation nommée *relation de dispersion*. La partie réelle de ω est liée à la propagation de la perturbation tandis que sa partie imaginaire est liée à sa relaxation. Pour des raisons de concision, l'interface n'est plus considérée comme la frontière entre deux fluides de viscosité et de densité comparables, mais comme la surface libre supérieure d'un liquide en contact avec un gaz. Ainsi, on suppose $\rho_1 \gg \rho_2$ et en notant η_1 la viscosité du fluide inférieur et η_2 celle du fluide supérieur, $\eta_1 \gg \eta_2$. Autrement dit, en première approximation, on néglige la densité ρ_2 et la viscosité η_2 et on note alors P_0 la pression constante qui règne au sein du gaz. On note de plus simplement ρ la densité du liquide (ρ_1) et η sa viscosité (η_1).

Le champ de vitesse \mathbf{v}

L'évolution temporelle des déformations de l'interface est donnée par le champ de vitesse \mathbf{v} créé par la déformation interfaciale elle-même au sein du liquide. Cette relation entre la déformation interfaciale $h(x)$ et le champ de vitesse \mathbf{v} vient du fait que, par définition, l'interface est imperméable : le liquide reste confiné dans le demi-espace inférieur $z < h(x)$. On détaille ce lien entre $h(x)$ et \mathbf{v} dans le prochain chapitre dans le paragraphe 3.2 sur la formulation hydrodynamique. Outre la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, le champ de vitesse \mathbf{v} vérifie l'équation de

Navier-Stokes

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P + \eta \Delta \mathbf{v} \quad (2.15)$$

où P est le champ de pression à une constante près, $P = p + \rho g z$ avec p le véritable champ de pression. Le terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes est négligeable dans l'approximation des faibles gradients.

La résolution des équations hydrodynamiques mène à un champ de vitesse qui disparaît lorsque la distance à l'interface devient infinie. Le champ de vitesse s'écrit sous la forme d'une double décroissance exponentielle.

- La première décroissance en $\exp(-q|z|)$ fait naturellement apparaître la longueur d'onde.
- La seconde décroissance moins évidente est proportionnelle à $\exp(-l|z|)$ où $l = q\sqrt{1 - i\omega/(\nu q^2)}$ dépend à la fois du vecteur d'onde et de la pulsation. On note $\nu = \eta/\rho$ la viscosité cinématique.

Le champ de vitesse est finalement relié à la perturbation interfaciale via les conditions limites. Dans l'approximation des faibles gradients, elles se réduisent à $-i\omega h_q = v_z|_{z=0}$ et $P_0 \mathbf{n} + \mathbb{T} \cdot \mathbf{n} = \sigma \Delta h \mathbf{n}$. \mathbf{n} est le vecteur normal unitaire à l'interface dirigé vers l'extérieur du fluide (à l'ordre 1, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$) et \mathbb{T} le tenseur des contraintes dans la phase inférieure ($T_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$).

Paramètres de la relation de dispersion

Une fois ces conditions limites prises en compte, on aboutit à la relation de dispersion suivante :

$$(2 - iX)^2 + St f(q l_c) = 4\sqrt{1 - iX} \quad (2.16)$$

avec $X = \omega/(\nu q^2)$ proportionnel à la pulsation ω , $St = \rho \sigma l_c / \eta^2$ un nombre sans dimension qui dépend seulement des propriétés de l'interface et $f(q l_c) = [1 + (q l_c)^2] / [(q l_c)^3]$ une fonction sans dimension du vecteur d'onde. La relation de dispersion fait apparaître plusieurs grandeurs.

- La longueur caractéristique est à nouveau sans surprise la longueur capillaire l_c .
- Ensuite, la pulsation se retrouve adimensionnée par νq^2 , $X = \omega/(\nu q^2)$. Il s'agit du rapport entre deux temps caractéristiques : le temps de diffusion du mode q avec comme coefficient ν et le temps d'évolution de l'interface.
- Le dernier paramètre mis en évidence dans la relation de dispersion est un nombre sans dimension, noté St égal à $St = \rho \sigma l_c / \eta^2$. L'interprétation de ce dernier nombre sans dimension est multiple.
 - ▷ En premier lieu, on peut le voir comme un nombre de Reynolds intrinsèque à l'interface si on considère l'interface comme un obstacle dans l'écoulement du fluide. Un nombre de Reynolds compare les effets inertiels avec les effets visqueux. Il s'agit du produit de la densité volumique du fluide ρ par la

vitesse caractéristique de l'interface σ/η obtenue par analyse dimensionnelle, par la longueur caractéristique de l'interface l_c , produit divisé par la viscosité dynamique η du fluide.

- ▷ En second lieu, on peut voir ce nombre sans dimension St comme un nombre de Stokes (d'où le choix du St , les nombres de Reynolds étant nombreux dans la suite du travail). Un nombre de Stokes compare l'énergie élastique à la dissipation. L'énergie élastique est la vitesse caractéristique σ/η de l'interface au carré multipliée par la masse déplacée par l'interface : la densité du fluide est multipliée par le volume caractéristique occupé par une déformation du fluide $l_c^2 \times \xi_T$ avec ξ_T le déplacement caractéristique réalisé par l'interface. La dissipation est le produit entre le taux de dissipation $\eta \times l_c \times (\sigma/\eta)$ et la longueur d'arrêt de l'interface $\sim \xi_T$. On retrouve $St = \rho \sigma l_c / \eta^2$.

Ces différentes quantités sont définies quelle que soit l'interface. Elles sont cependant d'ordre de grandeur très différent selon le type d'interface, interface moléculaire ou interface colloïdale (voir le chapitre 4) comme le résume la table 2.2 ci-dessous. Dans la table 2.2, on indique également l'ordre de grandeur du temps caractéristique de l'interface $\tau_c = 2\eta l_c / \sigma$ mis en évidence dans le prochain paragraphe 2.3.2.

	Interface moléculaire	Interface colloïdale
σ	$10^{-1} - 10^{-2} \text{ N.m}^{-1}$	$10^{-6} - 10^{-9} \text{ N.m}^{-1}$
ρ ou $\Delta\rho$	10^3 kg.m^{-3}	10^2 kg.m^{-3}
η	$10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$	$10^{-2} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$
l_c	10^{-3} m	$10^{-6} - 10^{-5} \text{ m}$
τ_c	10^{-4} s	$1 - 10 \text{ s}$
St	$10^4 - 10^5$	$10^{-5} - 10^{-8}$

TABLE 2.2 – Récapitulatif des ordres de grandeur des quantités caractéristiques des interfaces.

Représentation graphique de la relation de dispersion

La relation de dispersion $(2 - iX)^2 + Stf(ql_c) = 4\sqrt{1 - iX}$ est une fois mise au carré une équation polynômiale d'ordre 4. Parmi les 4 solutions du polynôme d'ordre 4, seules deux satisfont la relation de dispersion, les deux autres étant solutions de $(2 - iX)^2 + Stf(ql_c) = -4\sqrt{1 - iX}$. Les fig. 2.6 tracent la pulsation adimensionnée par l_c^2/ν en fonction du vecteur d'onde adimensionné par la longueur capillaire ql_c . La figure de gauche représente la partie réelle de la pulsation tandis que celle de droite sa partie imaginaire. La partie réelle de la pulsation est liée à la propagation de la perturbation, sa partie imaginaire à la relaxation des déformations de l'interface. Avec la forme choisie pour la perturbation, la perturbation est atténuée dans le temps si la pulsation possède une partie imaginaire négative.

Ces représentations graphiques mettent en évidence deux régimes d'évolution temporelle des perturbations interfaciales.

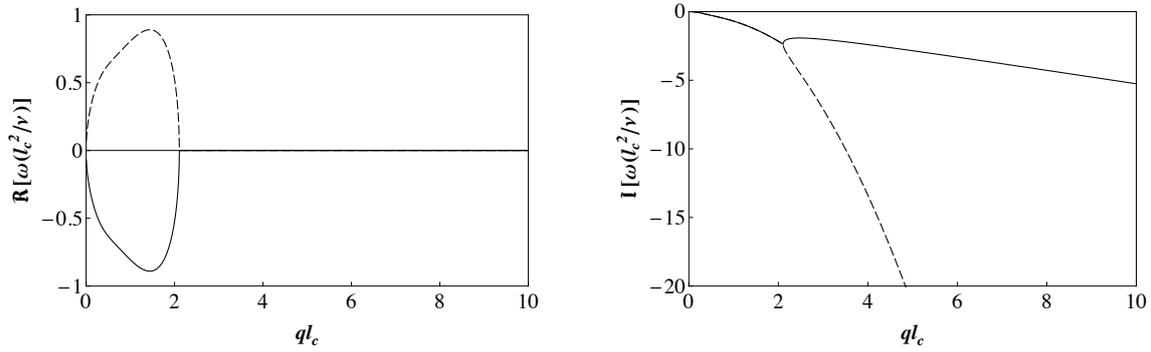


FIGURE 2.6 – Représentation de la relation de dispersion pour $St = 1$ avec, à gauche, la partie réelle de la pulsation et, à droite, sa partie imaginaire. Les traits pleins et pointillés correspondent aux deux racines.

- A petit vecteur d'onde, les deux modes sont des modes propagatifs légèrement amortis. Ces deux modes sont identiques physiquement, leur amortissement étant identique et leur vitesse de propagation opposée, ce qui correspond à la symétrie du problème selon n'importe quel axe vertical. On nomme ce régime « régime propagatif » et les perturbations peuvent être vues comme des ondes de surface puisque qu'il y a transport d'énergie sans transport de matière.
- A grand vecteur d'onde, les perturbations sont simplement surarmorties sans propagation. On y associe le terme de « régime surarmorti ». Les deux modes ayant deux taux de relaxation différents sont deux modes physiques différents. Le 1^{er} mode surarmorti représenté à l'aide d'une ligne continue est nommé « mode rampant ». Il s'agit du mode généralement observé expérimentalement. En effet, le taux de relaxation du second mode est en valeur absolue beaucoup plus important, et ceci est d'autant plus vrai que q est grand. Un taux de relaxation grand signifie une courte durée de vie pour ce mode ce qui explique qu'il est très peu observé face au premier et qu'on néglige ainsi souvent son existence. On nomme ce second mode le « mode visqueux ».

La transition entre les deux régimes dépend du nombre de Stokes St de l'interface : plus St est grand, plus le régime propagatif prend de l'importance et inversement.

2.3.2 Comportements asymptotiques des perturbations

À la surface d'un fluide très peu visqueux

A petit vecteur d'onde, la relation de dispersion se simplifie pour donner la relation suivante valable dans le régime propagatif

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho} q^3 + gq = \frac{\sigma}{\rho} q(q^2 + l_c^{-2}) \quad (2.17)$$

On retrouve cette relation aussi bien en simplifiant la relation de dispersion originelle qu'en considérant le modèle du fluide parfait. En effet, plus St est grand, plus les effets visqueux sont négligeables et plus le régime propagatif concerne une large gamme de vecteurs d'onde. Les ondes de surface sont alors nommées « ondes capillaires » ou « ondes gravitationnelles » selon le rapport de la longueur d'onde et de la longueur capillaire l_c ($ql_c \gg 1$ et $ql_c \ll 1$ respectivement). On peut aussi montrer que le taux de relaxation des modes des petits vecteurs d'onde tend vers $\mathcal{I}(\omega) \rightarrow -2\nu q^2$ quand $q \rightarrow 0$.

À la surface d'un fluide très visqueux

A grand vecteur d'onde, la relation de dispersion se simplifie pour donner la relation de dispersion suivante valable dans le régime surarmorti

$$\omega = -\frac{i}{\tau_q} = -i \frac{\sigma q^2 + \Delta \rho g}{2\eta q} \quad (2.18)$$

Il s'agit de la relation de dispersion des perturbations lorsque les effets visqueux prédominent. On retrouve cette même relation de dispersion lorsque, partant des équations hydrodynamiques, on suppose $\eta \Delta \mathbf{v} \gg \rho \partial_t \mathbf{v}$, soit lorsque la variation temporelle du champ de vitesse est négligeable. Cette remarque permet un autre éclairage sur l'interprétation physique de St . On sait que le nombre de Reynolds habituel Re compare les deux termes de l'équation de Navier-Stokes, le terme inertiel $\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ et le terme visqueux $\eta \Delta \mathbf{v}$. Vu la remarque précédente, le nombre de Stokes St compare deux autres termes de l'équation de Navier-Stokes, le terme inertiel non-stationnaire $\rho \partial_t \mathbf{v}$ avec toujours le même terme visqueux $\eta \Delta \mathbf{v}$.

τ_q est le temps caractéristique de chaque mode de déformation q et met plus généralement en évidence le temps caractéristique de l'interface τ_c défini par : $\tau_q = \tau_c \times 2ql_c / (1 + (ql_c)^2)$. L'ordre de grandeur de τ_c a été donné précédemment dans la table 2.2.

Transition entre les deux régimes

Dans les deux paragraphes précédents, on a considéré q comme petit puis comme étant grand, mais il n'a pas été précisé par rapport à quel vecteur d'onde. La comparaison s'effectue par rapport au vecteur d'onde frontière q_f , défini par la disparition de la propagation des perturbations. Comme on le montre dans l'annexe A, q_f ne dépend que du nombre de Stokes. Lorsque $St \gg 1$, $q_f l_c \propto St$. Pour une interface usuelle moléculaire, on a vu que $St \sim 10^5$ soit $q_f l_c \sim 10^5$. Au contraire, lorsque $St \ll 1$, $q_f l_c \propto St^{1/3}$. Pour une interface entre deux fluides colloïdaux, $St \sim 10^{-8}$ soit $q_f l_c \sim 10^{-3}$.

Dans cette section, la réponse linéaire d'une perturbation à l'écoulement qu'elle crée elle-même a été dérivée. Selon le nombre de Stokes St , selon que $St \gg 1$ ou $St \ll 1$, l'évolution temporelle de la perturbation diffère complètement. Dans le

premier cas, elle se propage et peut être vue comme des ondes de surface. Dans le second cas, elle est surarmortie selon le taux de relaxation τ_q .

2.4 Fluctuations thermiques

On a décrit dans la première section de ce chapitre l'interface selon divers modèles. Ces représentations supposent une vue statique de l'interface. Cependant, comme l'illustre l'expérience sur les interfaces colloïdales décrite au chapitre 4, l'interface n'est pas une frontière statique entre deux matériaux : elle ne cesse de « fluctuer » autour de sa configuration moyenne.

Avant de s'intéresser aux propriétés des fluctuations interfaciales, un premier paragraphe est consacré aux principaux développements historiques de la notion des fluctuations thermiques interfaciales. Ensuite, les propriétés physiques statiques, puis dynamiques sont exposées.

2.4.1 Quelques dates significatives

La notion de fluctuations thermiques est liée à la description statistique de la matière. Le développement de la physique statistique provient de la nécessité de donner une signification à la fonction thermodynamique entropie. En 1877, Boltzmann lui associe une interprétation statistique : l'entropie est une mesure du désordre. Les propriétés à l'équilibre d'un système macroscopique ne sont en réalité pas strictement constantes dans le temps mais fluctuent légèrement autour d'une valeur moyenne. La description complète de la physique statistique est effectuée essentiellement par Gibbs et Einstein au début du XX^{ième} siècle. Il en découle en particulier que pour un système à l'équilibre, les fluctuations se comportent comme $1/\sqrt{N}$ avec N le nombre de particules du système étudié.

D'un point de vue expérimental, on cherche à mettre en évidence ces fluctuations. La diffusion de la lumière au sein d'un fluide est particulièrement étudiée, la diffusion étant due aux fluctuations de densité du fluide. Dans ce courant, Smoluchowski étudie l'opalescence des gaz près du point critique. Il conclut son article de 1908 [47] par une remarque qui relie pour la première fois interface et fluctuations. Ayant conscience qu'une surface n'est pas une frontière infiniment fine entre deux fluides mais une zone de transition de densité, les fluctuations de densités impliquent fluctuations de surface.

Dès 1913, les fluctuations thermiques interfaciales sont étudiées alors par Mandelstam [30] qui lie la remarque de Smoluchowski au théorème d'équipartition de l'énergie d'Einstein. Cette relation lui permet d'obtenir l'amplitude quadratique moyenne du déplacement de l'interface sous l'effet des fluctuations thermiques pour chaque mode de Fourier de la déformation, en prenant en compte les forces superficielles et de pesanteur comme forces de rappel. D'un point de vue expérimental, il considère chaque mode de Fourier de déformation comme un réseau diffusant la lumière. A

l'aide de la théorie de Rayleigh des réseaux, il prédit alors l'opalescence surfacique de la lumière due aux fluctuations thermiques de la surface dans le plan d'incidence. De nombreuses vérifications expérimentales s'en suivent et confirment le développement analytique de Mandelstam. Quelques dizaines d'années avant l'apparition du laser, les bases de l'étude statique des fluctuations thermiques de surface sont ainsi posées.

Cependant, les études et prédictions visaient essentiellement à expliquer la diffusion de lumière par les surfaces. Les résultats restent présentés dans l'espace réciproque et ne font pas intervenir clairement les échelles de longueur intrinsèques à l'interface. Ce n'est que dans l'article de 1965 de Buff, Lovett et Stillinger [8] à propos de la tension de surface que le déplacement quadratique moyen de l'interface est écrit dans l'espace réel et qu'on peut y discerner les deux échelles de longueur caractéristiques de l'interface, soit la rugosité (racine carrée du déplacement quadratique moyen) et la longueur capillaire, bien qu'aucune des deux ne soit ni explicitement nommée, ni discutée.

Dans les années 60-70, les développements du laser permettent l'étude de l'évolution temporelle des fluctuations thermiques de surface. Les mesures expérimentales se basent sur la relation de dispersion des perturbations interfaciales exposées dès 1952 par Levich dans son livre *Physicochemical Hydrodynamics* [28]. Deux régimes sont mis en évidence : à grande longueur d'onde, les ondes se propagent et sont légèrement amorties, il s'agit du régime périodique, à petite longueur d'onde, les ondes sont surarmorties, il s'agit du régime apériodique.

Cette période foisonnante en expériences de diffusion de la lumière par des surfaces liquides est résumée dans l'ouvrage *Light scattering by liquid surfaces and complementary techniques* édité par Dominique Langevin [27]. Pour plus de précisions sur l'historique des expériences de diffusion surfacique, je conseille au lecteur de consulter également la thèse de Jacques Meunier [32] qui résume très bien les étapes précédentes.

2.4.2 Propriétés statiques des fluctuations

Distributions de Boltzmann et spectre des fluctuations

Maintenant qu'on a admis cette image d'une interface qui fluctue sans cesse dans le temps, l'étape suivante consiste à déterminer la distribution des probabilités associée à chaque configuration. La physique statistique nous apprend qu'à température constante, la probabilité des fluctuations interfaciales suit la distribution de Boltzmann. La probabilité d'une fluctuation est proportionnelle à $\exp(-\beta H)$ avec H l'hamiltonien associé à la fluctuation et $\beta = 1/(k_B T)$, k_B étant la constante de Boltzmann. La constante de proportionnalité est imposée par la condition de normalisation des probabilités dont la somme sur toutes les réalisations est égale à 1.

L'hamiltonien capillaire étant donné par l'expression (2.14), le théorème d'Einstein conduit directement à

$$\langle |h_{\mathbf{q}}|^2 \rangle = \frac{k_B T}{2G(\mathbf{q})} \quad \text{et} \quad \langle h_{\mathbf{q}} h_{\mathbf{q}'} \rangle \stackrel{\mathbf{q}' \neq -\mathbf{q}}{=} 0$$

Finalement, on obtient

$$\langle h_{\mathbf{q}} h_{\mathbf{q}'} \rangle = \frac{k_B T}{\sigma(q^2 + l_c^{-2})} L_x L_y \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'} \quad (2.19)$$

Pour obtenir les informations dans l'espace direct, il suffit d'effectuer la somme sur tous les modes. Les différents modes sont séparés les uns des autres par les quantités $\Delta q_x = 2\pi/L_x$ et $\Delta q_y = 2\pi/L_y$: ils forment ainsi un continuum pour des systèmes très grands ($L_x, L_y \gg l_c$). La transformée de Fourier inverse s'exprime alors comme une intégrale

$$h(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} h_{\mathbf{q}} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}). \quad (2.20)$$

Dans cette description continue, les propriétés dans l'espace de Fourier deviennent

$$\langle h_{\mathbf{q}} h_{\mathbf{q}'} \rangle = \frac{k_B T}{\sigma(q^2 + l_c^{-2})} (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}'). \quad (2.21)$$

Propriétés dans l'espace réel : déplacement quadratique moyen et corrélations spatiales

La description continue dans l'espace des vecteurs d'onde est particulièrement avantageuse dans le but d'obtenir les propriétés de l'interface dans l'espace direct. Par exemple, le déplacement quadratique moyen est

$$\begin{aligned} \langle h^2(\mathbf{r}) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^2} \langle h_{\mathbf{q}} h_{\mathbf{q}'} \rangle e^{i(\mathbf{q}+\mathbf{q}') \cdot \mathbf{r}} \\ &= \frac{k_B T}{(2\pi)^2 \sigma} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{q}}{q^2 + l_c^{-2}} \end{aligned} \quad (2.22)$$

On constate alors un problème de divergence logarithmique quand la norme du vecteur d'onde \mathbf{q} tend vers l'infini. Cette singularité n'est en fait qu'une singularité mathématique puisque physiquement, la représentation de Monge est appropriée seulement si on se place à une échelle très grande devant l'échelle microscopique des particules (dont la taille est notée a) et de l'interface (donnée par son épaisseur ϵ). La longueur d'onde des fluctuations de surface est par conséquent limitée par les deux échelles a et ϵ . On introduit alors une longueur d'onde de coupure, notée ξ , en-dessous de laquelle aucune fluctuation n'a lieu, soit $q_{max} = 2\pi/\xi$. On réalise que malgré la certitude de l'existence de ξ , son interprétation physique pose encore des

questions et en pratique, les mesures expérimentales permettent de statuer sur ξ . Néanmoins, la compréhension de la notion « longueur de coupure » ξ est toujours un sujet de recherche actuel [18]. Le déplacement quadratique moyen dépend de cette longueur de coupure (« cut-off » en anglais)

$$\begin{aligned} \langle h^2(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{k_B T}{4\pi\sigma} \ln \left[1 + \left(\frac{2\pi l_c}{\xi} \right)^2 \right] \\ &\simeq \frac{k_B T}{2\pi\sigma} \ln \left(\frac{2\pi l_c}{\xi} \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

la dernière approximation étant due au fait que $l_c \gg \xi$. Pour revenir une dernière fois sur la longueur de coupure ξ , notons que la dépendance du déplacement quadratique moyen par rapport à ξ est très faible. Il ne s'agit en effet que d'une dépendance logarithmique d'un grand nombre.

En ce qui concerne la fonction de corrélation spatiale, on obtient

$$\begin{aligned} \langle h(\mathbf{r})h(\mathbf{0}) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^2} \langle h_{\mathbf{q}} h_{\mathbf{q}'} \rangle e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{k_B T}{(2\pi)^2 \sigma} \int_0^{+\infty} \frac{q dq}{q^2 + l_c^{-2}} \int_0^{2\pi} d\theta e^{iqr \cos \theta} \end{aligned}$$

où r représente la norme du vecteur \mathbf{r} et θ l'angle entre le vecteur fixé \mathbf{r} et le vecteur d'onde \mathbf{q} . Après intégration, on obtient

$$\langle h(\mathbf{r})h(\mathbf{0}) \rangle = \frac{k_B T}{2\pi\sigma} K_0 \left(\frac{r}{l_c} \right) \quad (2.24)$$

où $K_0(x)$ est la 2^{ième} fonction de Bessel modifiée. Quand x tend vers l'infini, elle tend vers $K_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\pi/(2x)} \exp(-x)$, comme le montre la fig. 2.7. Inversement, lorsque $x \rightarrow 0$, K_0 diverge comme $K_0 \sim \ln$: on retrouve dans cette limite la divergence logarithmique du déplacement quadratique mentionnée plus haut.

Ces deux propriétés mettent en évidence deux longueurs caractéristiques de l'interface.

- Tout d'abord, la longueur $\sqrt{k_B T/\sigma}$ est caractéristique de l'amplitude des fluctuations. Elle dépend de l'énergie thermique et croît avec la température : plus l'énergie thermique est importante, plus les fluctuations le sont. Elle dépend également de la tension de surface. Plus la tension de surface augmente, c'est-à-dire plus le travail fourni doit être important pour créer les fluctuations, moins l'amplitude des fluctuations est importante. Sachant qu'entre deux fluides classiques moléculaires la tension de surface est de l'ordre de $10^{-1} - 10^{-2} \text{ N.m}^{-1}$, à température ambiante ($k_B T \sim 4.10^{-21} \text{ J}$), la rugosité de l'interface est de l'ordre de quelques angströms. La tension de surface entre les deux fluides colloïdaux présentés dans le chapitre 4 est de l'ordre de 10^{-9} N.m^{-1} , ce qui donne une rugosité de l'interface due aux fluctuations thermiques de l'ordre du micromètre à température ambiante.

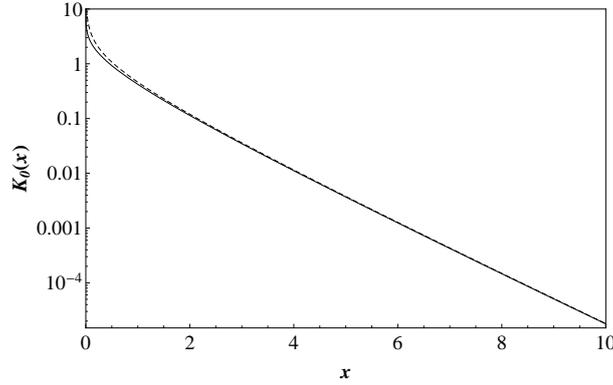


FIGURE 2.7 – Représentation de la 2^{ème} fonction de Bessel modifiée $K_0(x)$ en trait plein avec sa limite $\sqrt{\pi/(2x)} \exp(-x)$ (en $x \rightarrow +\infty$) en pointillés.

- Ensuite, l'expression de la fonction de corrélation spatiale montre que la longueur capillaire est également la longueur de corrélation des fluctuations. Cette longueur de corrélation est de l'ordre du millimètre pour une interface eau-air tandis que pour une interface colloïdale, la longueur capillaire est de l'ordre d'une petite dizaine de micromètres.

2.4.3 Dynamique

Dans le paragraphe 2.3, l'étude de l'évolution temporelle d'une petite déformation de l'interface a été effectuée. Le théorème de fluctuation-dissipation permet en effet de relier cette relation de dispersion avec les variations temporelles des fluctuations thermiques interfaciales. Il nous apprend que les fluctuations thermiques relaxent selon la réponse linéaire du système à une petite déformation. Les fluctuations thermiques vérifient la relation de dispersion.

La principale hypothèse du travail présenté est le faible nombre de Stokes de l'interface. On a vu en effet que pour une interface entre deux fluides colloïdaux, le nombre de Stokes est de l'ordre de $10^{-8} \ll 1$. On peut alors supposer que les fluctuations sont surarmorties avec le taux de relaxation $1/\tau_q = \sigma(q^2 + l_c^{-2})/(4\eta q)$ avec σ la tension de l'interface, q le module du vecteur d'onde considéré, l_c la longueur capillaire et η la viscosité moyenne des deux fluides définissant l'interface ($\eta = (\eta_1 + \eta_2)/2$). Alors, d'après le théorème de fluctuation-dissipation, chaque mode de Fourier évolue temporellement selon

$$\frac{\partial h_{\mathbf{q}}(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_q} h_{\mathbf{q}}(t) + \varphi_{\mathbf{q}}(t) \quad (2.25)$$

où le premier terme de droite est le terme de relaxation et le second terme est un terme de forçage aléatoire.

Afin de caractériser complètement la dynamique des fluctuations interfaciales, il est nécessaire de connaître les propriétés de la contribution stochastique. D'un côté, la distribution de Boltzmann nous indique le spectre statique des fluctuations, de l'autre l'équation précédente peut être résolue $h_{\mathbf{q}}(t) = \int_{-\infty}^t ds \exp(-(t-s)/\tau_q) \varphi_{\mathbf{q}}(s)$ et donner de même le spectre statique des fluctuations.

$$\begin{aligned} \langle |h_{\mathbf{q}}(t)h_{\mathbf{q}'}(t)| \rangle &= \frac{k_B T}{\sigma(q^2 + l_c^{-2})} (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \\ \langle |h_{\mathbf{q}}(t)h_{\mathbf{q}'}(t)| \rangle &= \int_{-\infty}^t ds \int_{-\infty}^t ds' e^{-\left(\frac{t-s}{\tau_q} + \frac{t-s'}{\tau_{q'}}\right)} \langle \varphi_{\mathbf{q}}(s)\varphi_{\mathbf{q}'}(s') \rangle \end{aligned} \quad (2.26)$$

En supposant que le terme de forçage aléatoire est un bruit blanc gaussien, soit sans corrélations temporelle ni spatiale, ce qui signifie plus précisément que $\langle \varphi_{\mathbf{q}}(t) \rangle = 0$ et $\langle \varphi_{\mathbf{q}}(t)\varphi_{\mathbf{q}'}(t') \rangle = C (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \delta(t - t')$ avec C une constante, on obtient le moment d'ordre 2 suivant

$$\langle \varphi_{\mathbf{q}}(t)\varphi_{\mathbf{q}'}(t') \rangle = \frac{2k_B T}{4\eta q} (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \delta(t - t'). \quad (2.27)$$

On peut aussi obtenir directement l'équation précédente en partant des équations hydrodynamiques fluctuantes : outre les contraintes visqueuses qui s'appliquent sur chaque particule de fluide, s'applique également une contrainte aléatoire due à l'agitation thermique. En supposant que le nombre de Stokes est petit soit que la dérivée partielle du champ de vitesse est négligeable devant le terme visqueux, on aboutit exactement à la même évolution temporelle des fluctuations thermiques interfaciales.

A l'aide de l'équation temporelle précédente, on peut obtenir les corrélations temporelles entre fluctuations thermiques. Dans cette optique, on passe dans l'espace de Fourier temporel :

$$h_{\mathbf{q}}(\omega) = R_q(\omega)\varphi_{\mathbf{q}}(\omega)$$

où $R_q(\omega) = \tau_q/(1 - i\tau_q\omega)$ est la fonction de réponse et $\varphi_{\mathbf{q}}(\omega)$ est la transformée de Fourier temporelle de $\varphi_{\mathbf{q}}(t)$. On établit alors le spectre des fluctuations

$$\langle h_{\mathbf{q}}(\omega)h_{\mathbf{q}'}(\omega') \rangle = \frac{\tau_q}{1 + \tau_q^2\omega^2} \frac{2k_B T}{\sigma(q^2 + l_c^{-2})} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \delta(\omega + \omega') \quad (2.28)$$

Ainsi la fonction de corrélation temporelle est donnée par (on suppose $t > 0$) :

$$\begin{aligned} \langle h(\mathbf{r}, t)h(\mathbf{r}, 0) \rangle &= \int_{\mathcal{R}^3} \frac{d\mathbf{q}d\omega}{(2\pi)^3} \int_{\mathcal{R}^3} \frac{d\mathbf{q}'d\omega'}{(2\pi)^3} e^{i((\mathbf{q}+\mathbf{q}')\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \langle h_{\mathbf{q}}(\omega)h_{\mathbf{q}'}(\omega') \rangle \\ &= \int_{\mathcal{R}^2} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{k_B T}{\sigma(q^2 + l_c^{-2})} e^{-t/\tau_q} \end{aligned}$$

En posant $\tau_q = \tau_c \times 2(ql_c)/(1 + (ql_c)^2)$, on obtient

$$\langle h(\mathbf{r}, t)h(\mathbf{r}, 0) \rangle = \frac{k_B T}{2\pi\sigma} \int_0^{+\infty} dQ \frac{Q}{1 + Q^2} e^{-(t/\tau_c) \times \frac{1+Q^2}{2Q}}$$

On reprend alors la démonstration de Villeneuve et ses collaborateurs [14]. On note $H(z)$ la fonction $H(z) = \int_0^{+\infty} dQ \frac{Q}{1+Q^2} e^{-z\frac{1+Q^2}{2Q}}$, alors $H'(z) = -K_1(z)$ ce qui signifie que $H(z) = K_0(z) + \text{constante}$. Avec la valeur en $z = +\infty$, on arrive à

$$\langle h(\mathbf{r}, t)h(\mathbf{r}, 0) \rangle = \frac{k_B T}{2\pi\sigma} K_0(t/\tau_c) \quad (2.29)$$

Le temps capillaire $\tau_c = 2\eta l_c/\sigma$ est également le temps de corrélation des fluctuations thermiques de l'interface.

Pour clore cette section sur les fluctuations interfaciales à l'équilibre, on peut souligner que les corrélations temporelles de l'interface dépendent de la viscosité alors que les propriétés stationnaires, non. La viscosité est qualifiée de dynamique puisqu'elle caractérise la résistance du fluide newtonien à une déformation. Il s'agit d'une propriété des systèmes à l'équilibre, seules les quantités dynamiques peuvent dépendre des propriétés dynamiques, les quantités stationnaires ne les font pas apparaître. Dans la suite, lorsqu'on aborde le coeur du travail qui est une interface sous cisaillement, on remarque que les propriétés stationnaires dépendent des viscosités et donc de propriétés dynamiques : il s'agit d'une signature du caractère hors d'équilibre du système.

Chapitre 3

Dynamique des fluctuations d'une interface sous cisaillement

Préambule

Après avoir rappelé les propriétés des interfaces, je vais maintenant décrire les résultats que j'ai obtenus sur les fluctuations hors d'équilibre. L'un des objectifs de cette thèse est de comprendre comment sont modifiées les fluctuations thermiques d'une interface sous l'effet d'un écoulement de cisaillement. Pour cela, on se place dans une géométrie simple en considérant un écoulement de Couette plan. Le système est hors d'équilibre puisque de l'énergie y est continûment injectée. De fait, les configurations ne suivent plus la loi de distribution de Boltzmann et l'on ne peut appliquer les méthodes habituelles de la physique statistique (telles que les théorèmes d'équipartition ou de fluctuation-dissipation). Afin d'établir les propriétés hors d'équilibre des fluctuations interfaciales, et en particulier les propriétés stationnaires, il est nécessaire de s'intéresser en premier lieu à leur dynamique. La dérivation de l'équation d'évolution temporelle vérifiée par les fluctuations constitue l'objet du présent chapitre.

Au voisinage de l'équilibre, l'évolution temporelle d'un mode de déformation de l'interface est donnée, dans le régime surarmorti, par une équation de Langevin :

$$\frac{\partial h_{\mathbf{q}}}{\partial t} = \boxed{-\frac{1}{\tau_q} h_{\mathbf{q}}} + \text{[bruit]} \quad (3.1)$$

Chaque mode relaxe vers l'équilibre avec le temps caractéristique τ_q :

$$\tau_q = \tau_c \times \frac{2ql_c}{1 + (ql_c)^2}$$

avec $l_c = \sqrt{\sigma/(\Delta\rho g)}$ la longueur capillaire et $\tau_c = 2\eta l_c/\sigma$ le temps capillaire. Les modes de déformations sont excités par le bruit thermique $\varphi_q(t)$. La variable aléatoire

$\varphi_q(t)$ suit une distribution gaussienne de moyenne nulle $\langle \varphi_q(t) \rangle = 0$ et de variance

$$\langle \varphi_q(t) \varphi_{q'}(t') \rangle = \frac{2k_B T}{4\eta q} (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \delta(t - t')$$

Avant de se lancer dans la résolution complète du problème, il est légitime de se demander quelles peuvent être les modifications induites par le cisaillement. Trois types de modifications sont envisageables :

- l'application d'un cisaillement peut affecter le temps de relaxation τ_q . La relaxation est en effet directement liée à la dissipation hydrodynamique dans l'ensemble du système.
- à l'équilibre, les propriétés statistiques du bruit thermique sont directement reliées à la dissipation. Il est donc également possible que l'écoulement perturbe la distribution vérifiée par le bruit thermique $\varphi_q(t)$.
- enfin, l'advection des modes de déformation est susceptible d'introduire une nouvelle contribution. Comme le représente le schéma de la fig. 3.1, on s'attend à ce que le « dépliage » des fluctuations par l'écoulement se traduise par un terme non-linéaire dans l'équation de Langevin.

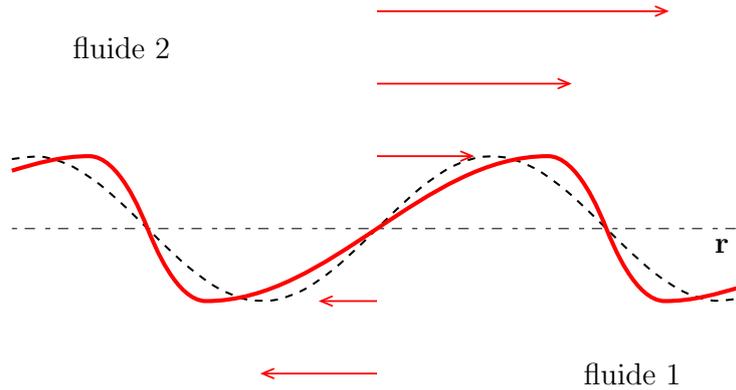


FIGURE 3.1 – Représentation schématique de l'aplatissement des modes par le cisaillement

L'objectif de ce chapitre est d'établir l'équation d'évolution temporelle des modes de fluctuations d'une interface cisillée. On procède en deux étapes. Dans un premier temps, on néglige les fluctuations et on étudie comment une déformation initiale de l'interface évolue sous l'effet du champ de vitesse. Dans un second temps, on caractérise la contribution aléatoire en incluant les fluctuations thermiques directement dans les équations hydrodynamiques. Finalement, on discute l'équation obtenue.

3.1 Description du système

Le point de départ de l'analyse consiste à décrire l'interface comme une surface mathématique d'épaisseur nulle. La position de l'interface est repérée par sa hauteur

$z = h(\mathbf{r}, t)$ au-dessus (ou en-dessous) du plan horizontal (xOy). L'utilisation de cette représentation dite de Monge néglige les surplombs éventuels des déformations de l'interface. Notons cependant qu'à l'équilibre, elle est suffisante et qu'elle est d'autant plus justifiée sous cisaillement que les expériences de Derks et ses collaborateurs montrent une diminution de l'amplitude des fluctuations [17].

L'interface est caractérisée par sa tension de surface σ . En accord avec les conventions du chapitre 2, on note η_1 et ρ_1 la viscosité et la densité du fluide 1, situé en-dessous de l'interface. De même au-dessus de l'interface, η_2 et ρ_2 sont respectivement la viscosité et la densité du fluide 2. On utilise également les viscosité $\eta = (\eta_1 + \eta_2)/2$ et densité $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$ moyennes. Pour des raisons de stabilité, on se place dans le cas où $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$ est positif.

Le système est limité verticalement par deux parois solides. L'épaisseur de la couche inférieure (respectivement supérieure) est notée L_1 (respectivement L_2), l'épaisseur totale du système est donc $L_1 + L_2$. Un schéma du système est tracé sur la fig. 3.2. Un écoulement de Couette plan est induit par un mouvement de translation horizontale des parois, les vitesses étant de sens opposés et de normes V_1 et V_2 respectivement. En supposant des conditions de non-glissement aux parois, le taux de cisaillement appliqué est donné par $\dot{\gamma}_{\text{app}} = (V_1 + V_2)/(L_1 + L_2)$. On note $\dot{\gamma}_1 = V_1/L_1$ (resp. $\dot{\gamma}_2 = V_2/L_2$) le taux de cisaillement dans le fluide inférieur (resp. supérieur). On a alors la relation géométrique suivante :

$$\dot{\gamma}_{\text{app}} = \frac{\dot{\gamma}_1 L_1 + \dot{\gamma}_2 L_2}{L_1 + L_2} \quad (3.2)$$

Les différentes quantités V_1 , V_2 , L_1 et L_2 sont ajustées de manière à ce que la vitesse soit nulle au niveau de la position moyenne de l'interface.

3.2 Formulation hydrodynamique

Le but de ce chapitre est d'établir les liens formels qui existent entre la dynamique des fluctuations et le champ de vitesse, afin de dériver l'équation d'évolution temporelle.

Pour cela, on raisonne de la manière suivante :

- on commence avec le seul fait établi à propos de l'interface : l'interface sépare deux fluides immiscibles. Cette simple définition permet de relier concrètement la vitesse de l'interface avec le champ de vitesse.
- le rôle de la vitesse étant précisé, il est nécessaire de le résoudre. L'équation hydrodynamique permet de plus d'un point de vue physique de souligner les hypothèses considérées dans la suite.
- le problème se ferme et forme un ensemble cohérent avec la prise en compte des conditions limites au niveau de l'interface.
- l'intégralité du problème révèle un fort couplage entre le champ de vitesse et les déformations interfaciales. Ce couplage est résolu en supposant faibles les

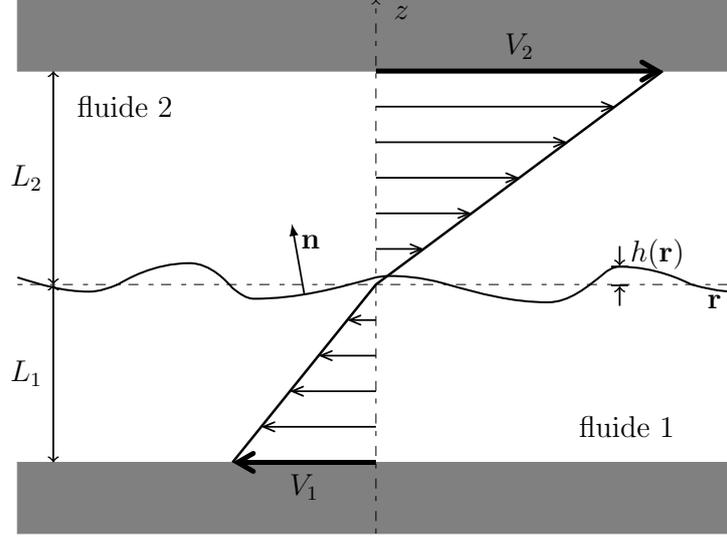


FIGURE 3.2 – Représentation schématique du système.

gradients de la déformation interfaciale.

3.2.1 Immiscibilité de l'interface

Les deux fluides sont considérés immiscibles l'un dans l'autre. En d'autres termes, chacun des deux fluides reste confiné à son demi-espace respectif ($z > h$ ou $z < h$) et aucune particule de fluide ne traverse l'interface. Plus précisément, cette condition d'immiscibilité signifie que le flux de matière à travers l'interface est nul. Le flux de matière ϕ_j à travers une petite surface dS de l'interface pendant l'intervalle de temps dt s'exprime pour chacun des deux fluides $j = 1, 2$ par $\phi_j = \rho_j dS (\mathbf{v}_j - \mathbf{u}) dt \cdot \mathbf{n}$ avec \mathbf{v}_j la vitesse du fluide j au niveau de l'interface, \mathbf{u} la vitesse de l'interface et \mathbf{n} la normale à l'interface. L'immiscibilité des deux fluides revient par conséquent à l'égalité des composantes normales à l'interface des champs de vitesse des deux fluides au niveau de l'interface avec celle de la vitesse de l'interface :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} \quad (3.3)$$

Afin d'explicitier cette condition d'immiscibilité, on recherche à exprimer le vecteur \mathbf{n} et la quantité $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ en fonction des déformations interfaciales. Le champ de vitesse des fluides est quant à lui l'objet du prochain paragraphe.

On commence par s'intéresser au vecteur normal unitaire \mathbf{n} qui pointe vers le haut. On a choisi de définir l'interface par son déplacement vertical $z = h(\mathbf{r}, t)$, on aurait également pu choisir de la caractériser par la nullité de la fonction $F(\mathbf{r}, z, t) = z - h(\mathbf{r}, t)$. Au-dessus de l'interface, au sein du fluide 2, la fonction F est strictement positive, en-dessous, au sein du fluide 1, elle est strictement négative. Le long de

l'interface, la différentielle de F est nulle, $dF = 0$. En notant $d\boldsymbol{\ell}$ un petit déplacement à t fixé le long de l'interface, $dF = 0 = \nabla F \cdot d\boldsymbol{\ell}$: on en déduit que le vecteur ∇F est normal à l'interface et donc proportionnel à \mathbf{n} . On pose

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla h)^2}} \begin{pmatrix} -\partial_x h \\ -\partial_y h \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Cette expression révèle que le vecteur \mathbf{n} normal à l'interface, dépend fortement de la configuration de l'interface.

Ensuite, pour préciser la composante normale de la vitesse de l'interface $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, il suffit de comparer la configuration de l'interface à l'instant t avec sa configuration à l'instant légèrement ultérieur $t + dt$: par définition, $F(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, z + dz, t + dt) = F(\mathbf{r}, z, t) = 0$. On note $d\boldsymbol{\ell}$ le petit déplacement de l'interface pendant le temps dt , soit $d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{u} dt$. $d\boldsymbol{\ell}$ est tel que sa projection verticale soit $d\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{e}_z = dz$ et sa projection horizontale $d\boldsymbol{\ell} - d\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{e}_z = d\mathbf{r}$. On en déduit

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial_t F}{|\nabla F|} = \frac{\partial_t h}{\sqrt{1 + (\nabla h)^2}} \quad (3.5)$$

L'expression obtenue est cohérente. Lorsque la composante normale de la vitesse de l'interface est positive, cela signifie que l'interface s'est élevée. Ainsi, le lieu spatial (\mathbf{r}, z) qui à t correspond à l'interface $F = 0$ correspond à $t + dt$ au fluide 1, soit $F < 0$, ce qui mène bien à une dérivée partielle temporelle négative de F , $\partial_t F < 0$. De même, de manière évidente, l'élévation de l'interface se traduit par une dérivée partielle temporelle de h positive, $\partial_t h > 0$. La description lagrangienne de l'interface (on suit la trajectoire d'un point de l'interface) a été arrangée afin de correspondre à une description eulérienne de l'interface (on s'intéresse à l'évolution temporelle de la déformation interfaciale au-dessus ou en-dessous d'un point donné \mathbf{r} du plan horizontal de référence (xOy)). Par ailleurs, la relation 3.5 montre que seule la composante normale de la vitesse de l'interface possède une signification physique. En l'absence de tensio-actifs qui peuvent matérialiser l'interface, l'interface reste seulement une surface mathématique et la composante tangentielle de sa vitesse ne correspond à aucune réalité physique.

En remplaçant les quantités \mathbf{n} et $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ par leur expression en fonction de la déformation interfaciale dans la condition d'immiscibilité, on obtient effectivement que la relaxation des fluctuations interfaciales dépend explicitement du champ de vitesse :

$$\partial_t h + \mathbf{v}_{j,\parallel} \cdot \nabla h = v_{j,z} \quad (3.6)$$

où $\mathbf{v}_{j,\parallel}$ est la projection horizontale de la vitesse du fluide j évaluée en $z = h$ et $v_{j,z}$ sa composante verticale. L'observation de cette relation peut d'ores et déjà révéler le fort couplage qui existe entre les fluctuations interfaciales et le champ de vitesse puisque le champ de vitesse provient de deux contributions : celle qui découle de l'application de l'écoulement extérieur, et également celle créée par les perturbations interfaciales.

3.2.2 Equations hydrodynamiques vérifiées par le champ de vitesse

Le champ de vitesse vérifie l'équation de Navier-Stokes. On suppose de plus un écoulement incompressible.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v}_j &= 0 \\ \rho_j \left(\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla) \mathbf{v}_j \right) &= -\nabla p_j + \eta_j \Delta \mathbf{v}_j - \rho_j g \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

avec p_j le champ de pression dans le fluide j . Les dépendances spatiales et temporelles ont été omises pour des raisons de lisibilité. On rappelle que la condition d'incompressibilité traduit le fait qu'une particule de fluide occupe tout le long de sa trajectoire le même volume et que l'équation de Navier-Stokes exprime la relation fondamentale de la dynamique pour une particule de fluide.

On se place dans le régime où

- l'échelle de longueur caractéristique est petite,
- les effets visqueux sont importants,
- et où la tension de surface de l'interface est faible.

En bref, le nombre de Reynolds est petit. Les interfaces colloïdales [17] sont en effet associées aux valeurs $\rho \simeq 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $l_c = 2,6 \text{ }\mu\text{m}$, $\dot{\gamma}_{\text{app}} \simeq \tau_c^{-1} \simeq 0,1 \text{ s}^{-1}$ et $\eta = 6,5 \text{ mPa.s}$ ce qui revient au nombre de Reynolds $Re \sim 10^{-7} \ll 1$. La faible tension de surface $\sigma = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ N.m}^{-1}$ mène au nombre de Stokes $St \simeq 10^{-7}$.

On en déduit que le champ de vitesse vérifie simplement l'équation de Stokes, réduction de l'équation de Navier-Stokes dans le régime visqueux.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v}_j &= 0 \\ -\nabla P_j + \eta_j \Delta \mathbf{v}_j &= 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

où on a posé $P_j = p_j + \rho_j g z$. L'avantage de l'équation de Stokes est son caractère linéaire.

3.2.3 Conditions limites au niveau de l'interface

Les équations hydrodynamiques précédentes permettent d'obtenir les formes générales des champs de vitesse et de pression dans les deux fluides, plus précisément leur dépendance en z . Afin de fermer le problème et de revenir au niveau de l'interface, des conditions limites sont nécessaires. Les conditions limites dictent la continuité ou la discontinuité de certaines quantités à travers l'interface. En d'autres mots, elles sont vérifiées en chaque instant en $z = h(\mathbf{r}, t)$. On les classe en deux catégories :

- les conditions limites cinématiques qui indiquent l'égalité des vitesses des deux fluides au niveau de l'interface,

- puis les conditions dynamiques qui traduisent l'équilibre des forces au niveau de l'interface.

Une première partie des conditions limites dites cinématiques a déjà été abordée. En effet, la discussion à propos de l'immiscibilité des deux fluides a mené à l'égalité des composantes normales à l'interface des vitesses des deux fluides évaluées en $z = h$, $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}$, avec \mathbf{n} le vecteur normal unitaire à l'interface. En outre, on suppose que le caractère visqueux des deux fluides implique une condition de non-glissement de chacun des deux fluides l'un par rapport à l'autre : on suppose l'égalité des composantes tangentielles des deux vitesses, toujours en $z = h$. En résumé, il y a continuité du champ de vitesse à travers l'interface :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \quad (3.8)$$

les vitesses étant évaluées en $z = h$.

Les conditions limites dites dynamiques décrivent l'équilibre des forces au niveau de l'interface. La dérivation de cet équilibre, bien que connu, présente quelques difficultés et est par conséquent l'objet de l'annexe B. De manière synthétique, on a équilibre entre 3 forces, celle due au fluide 2 sur l'interface, celle due au fluide 1 sur l'interface et celle due à la tension de surface. Cette relation s'écrit :

$$(\mathbb{T}_2 - \mathbb{T}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{n}) \quad (3.9)$$

avec $\mathbb{T}_{j=1,2}$ les tenseurs des contraintes dans les fluides $j = 1, 2$, évalués dans la relation ci-dessus en $z = h$. Il y a discontinuité des contraintes hydrodynamiques normales à l'interface due à la tension de surface, et continuité des contraintes hydrodynamiques tangentielles (en l'absence de gradient de tension). Comme on peut le constater dans l'annexe B, un gradient de tension de surface est à l'origine d'une discontinuité des contraintes hydrodynamiques tangentielles à l'interface. Les causes les plus courantes d'une variation de tension de surface sont un gradient thermique et un gradient de concentration de tensio-actifs. Le système est effectivement à température constante et les tensio-actifs en sont absents.

Après l'établissement de l'équation de Stokes vérifiée par les champs de vitesse assez simple puisque linéaire, l'écriture des conditions limites permet de réaliser la difficulté du problème avec le fort couplage qui apparaît entre champ de vitesse et déformations interfaciales. D'une part, les quantités hydrodynamiques comme la vitesse et le tenseur des contraintes sont considérées au niveau de l'interface, soit en $z = h$. D'autre part, le vecteur normal \mathbf{n} à l'interface qui dépend fortement aussi des déformations interfaciales intervient dans l'équilibre des contraintes 3.9.

3.2.4 Approximation des faibles gradients

On a déjà souligné que le couplage est fort entre les déformations interfaciales et le champ de vitesse. En d'autres termes, leurs relations font intervenir de nombreux

termes non-linéaires, rendant difficile une résolution analytique. Afin de rendre linéaires les dépendances mutuelles entre la configuration de l'interface et les champs hydrodynamiques, on se place dans l'approximation des faibles gradients. On suppose petit le gradient du déplacement vertical de l'interface $|\nabla h|$. L'ordre de grandeur du gradient $|\nabla h|$ est comparable au déplacement vertical caractéristique de l'interface divisé par une échelle de longueur caractéristique horizontale : le déplacement vertical est relié à la racine carrée du déplacement quadratique moyen de l'interface $\langle h^2 \rangle \propto k_B T / \sigma$ (revoir l'éq. (2.23)) tandis que la longueur caractéristique horizontale est reliée aux corrélations des fluctuations. Son ordre de grandeur est donc donné par le rapport des deux échelles de longueur caractéristiques de l'interface : la rugosité $\xi_T = \sqrt{k_B T / \sigma}$ et la longueur de corrélation des fluctuations, la longueur capillaire l_c (revoir l'éq. (2.24)). Le paramètre qui gouverne le développement est donc

$$\varepsilon = \frac{\xi_T}{l_c} = \sqrt{\frac{k_B T}{\sigma l_c^2}} \ll 1.$$

Le déplacement vertical est alors considéré comme petit et on pose

$$h(\mathbf{r}, t) = \varepsilon u(\mathbf{r}, t) \quad (3.10)$$

avec u une fonction décrivant les fluctuations interfaciales de l'ordre de l'unité $u \sim \mathcal{O}(1)$.

Les champs hydrodynamiques se décomposent en plusieurs contributions.

- Les champs à l'ordre 0 correspondent à l'écoulement de Couette plan dans une bicouche de fluide newtonien dont l'interface est confondue avec le plan horizontal de référence (xOy) .
- Les champs à l'ordre 1 en ε sont dus aux perturbations interfaciales.
- La perturbation interfaciale conduit également à des contributions d'ordres plus élevés en ε des champs hydrodynamiques en raison de leurs relations non-linéaires.

En résumé, on pose

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j(\mathbf{r}, z, t) &= \mathbf{v}_j^{(0)}(\mathbf{r}, z, t) + \varepsilon \mathbf{v}_j^{(1)}(\mathbf{r}, z, t) + \varepsilon^2 \mathbf{v}_j^{(2)}(\mathbf{r}, z, t) + \dots \\ P_j(\mathbf{r}, z, t) &= P_j^{(0)}(\mathbf{r}, z, t) + \varepsilon P_j^{(1)}(\mathbf{r}, z, t) + \varepsilon^2 P_j^{(2)}(\mathbf{r}, z, t) + \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

avec $j = 1, 2$ selon le fluide considéré.

L'approximation des faibles gradients est une approximation usuelle, appliquée en particulier au sein de la théorie des ondes capillaires. D'un point de vue expérimental, elle permet de modéliser avec un très bon accord les propriétés à l'équilibre des fluctuations thermiques de l'interface. Cette vérification concernant les interfaces colloïdales est l'objet de la référence [1]. On peut comprendre la validité de cette approximation à l'aide d'un rapide raisonnement sur le coût énergétique d'une déformation interfaciale. Imaginons une déformation interfaciale dont le gradient n'est

pas petit. L'excès d'aire de cette déformation par rapport à l'état de référence de l'interface, état confondu avec le plan horizontal (xOy), est significatif. Le coût énergétique dû à la tension de surface, nécessaire à l'existence de cette déformation, est alors élevé. D'après la distribution de Boltzmann, à l'équilibre, la probabilité d'une telle déformation est faible. Il s'en suit que la probabilité pour que l'approximation des faibles gradients ne soit pas valable est très faible. Hors équilibre, l'expérience permet de mesurer un déplacement quadratique moyen de l'interface qui diminue avec le cisaillement, l'approximation des faibles gradients n'en est que plus justifiée.

3.3 Relaxation d'une perturbation interfaciale

Dans cette partie, le but est d'établir la modification de la relaxation d'une perturbation de l'interface initiale fixée sous l'effet du cisaillement. Selon le développement présenté au-dessus, on raisonne méthodiquement et on considère le problème tout d'abord à l'ordre 0, puis à l'ordre 1, puis aux ordres successifs. On souhaite obtenir l'effet prédominant dû au cisaillement, la résolution du problème s'arrête par conséquent dès que la résolution de l'un des ordres conduit à une modification de la condition d'immiscibilité par le cisaillement.

3.3.1 Ecoulement de Couette plan

A l'ordre 0, les champs hydrodynamiques correspondent à un simple écoulement de Couette plan dans une bicouche de fluide dont l'interface est plane. Le champ de vitesse est alors schématisé sur la fig. 3.2. Il vérifie l'équation de Stokes et la condition d'incompressibilité 3.7, et surtout les conditions limites aux parois et à l'interface. Aux parois,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1^{(0)}(\mathbf{r}, -L_1, t) &= -V_1\mathbf{e}_x = -\dot{\gamma}_1 L_1\mathbf{e}_x \\ \mathbf{v}_2^{(0)}(\mathbf{r}, L_2, t) &= V_2\mathbf{e}_x = \dot{\gamma}_2 L_2\mathbf{e}_x\end{aligned}$$

A l'interface, on ajuste les vitesses V_1 et V_2 telles que le taux de cisaillement appliqué soit constant $\dot{\gamma}_{\text{app}} = (V_1 + V_2)/(L_1 + L_2)$ et telles que la vitesse en $z = 0$ soit nulle, soit

$$\mathbf{v}_1^{(0)}(\mathbf{r}, 0, t) = \mathbf{v}_2^{(0)}(\mathbf{r}, 0, t) = \mathbf{0}.$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_j^{(0)}(\mathbf{r}, z, t) &= \dot{\gamma}_j z\mathbf{e}_x \\ P_j^{(0)}(\mathbf{r}, z, t) &= P_0\end{aligned}\tag{3.12}$$

avec $j = 1, 2$ selon le fluide considéré et P_0 une constante.

Le champ de pression se réduit à la simple pression hydrostatique. L'évolution de la pression avec la hauteur est seulement due à la densité des deux fluides. Le champ

de vitesse est un écoulement de cisaillement. Les contraintes sont alors seulement tangentielles ce qui donne à travers l'interface l'égalité suivante :

$$\eta_1 \dot{\gamma}_1 = \eta_2 \dot{\gamma}_2. \quad (3.13)$$

On observe des taux de cisaillement dans les deux fluides différents étant donnée la stratification en viscosité.

3.3.2 Constante de relaxation linéaire

Suivant le plan fixé en début de section, on souhaite maintenant mettre en évidence le temps de relaxation des perturbations interfaciales. De manière pragmatique, cela signifie qu'on résout le problème à l'ordre 1. Méthodiquement, on effectue

- la résolution des équations hydrodynamiques à l'ordre 1,
- puis le développement des conditions limites afin d'obtenir l'expression des constantes définies par le champ de vitesse.

Ces deux étapes nous permettent de remplacer les composantes de la vitesse dans la condition d'immiscibilité 3.6 par leur expression en fonction de la perturbation interfaciale et par conséquent, d'obtenir la relaxation de cette dernière.

Forme générale du champ de vitesse

Le champ de vitesse vérifie les équations hydrodynamiques 3.7. Toutes deux, la condition d'incompressibilité et l'équation de Stokes, présentent l'avantage d'être linéaires. Le champ de vitesse de l'ordre 1 $\mathbf{v}_j^{(1)}$ est alors défini par ces mêmes équations hydrodynamiques 3.7. Cette remarque est valable quel que soit l'ordre considéré $\mathbf{v}_j^{(n)}$. La résolution suivante est donc utile à la fois en ce qui concerne la relaxation linéaire des perturbations interfaciales, et à la fois pour les contributions des ordres plus élevés. En d'autres termes, la forme générale du champ de vitesse mise en évidence dans ce paragraphe est réutilisée dans les paragraphes suivants à propos du problème aux ordres plus élevés.

Les paragraphes précédents, et en particulier celui du chapitre 2 sur la relation de dispersion, ont permis de souligner la commodité des représentations des perturbations interfaciales dans l'espace de Fourier. Les transformées de Fourier directe et inverse reliant les descriptions dans les espaces de Fourier et réel sont données par les égalités suivantes :

$$f(\mathbf{q}, z, t) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{r} f(\mathbf{r}, z, t) \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})$$

$$f(\mathbf{r}, z, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} f(\mathbf{q}, z, t) \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})$$

où f désigne la perturbation interfaciale u , le champ de vitesse $\mathbf{v}_j^{(1)}$ ou le champ de pression $P_j^{(1)}$. Les équations hydrodynamiques constituent alors un système de 4

équations à 4 inconnues (les 3 composantes de la vitesse et la pression). Il est possible de simplifier ce système en considérant la vitesse dans la base polaire $(\hat{q}, \hat{t}, \mathbf{e}_z)$ associée au vecteur d'onde \mathbf{q} .

- Le vecteur unitaire \hat{q} a les mêmes direction et sens que le vecteur d'onde \mathbf{q} : $\hat{q} = \mathbf{q}/q$ avec q la norme du vecteur d'onde.
- Le vecteur \mathbf{e}_z reste le vecteur unitaire vertical pointant vers le haut, vecteur suivant la direction du gradient de l'écoulement de Couette plan.
- Le vecteur unitaire \hat{t} est choisi tel que la base $(\hat{q}, \hat{t}, \mathbf{e}_z)$ forme un trièdre direct.

On repère les vecteurs \hat{q} et \hat{t} par rapport aux vecteurs de la base traditionnelle cartésienne sur la fig. 3.3. Les équations hydrodynamiques se décomposent alors en

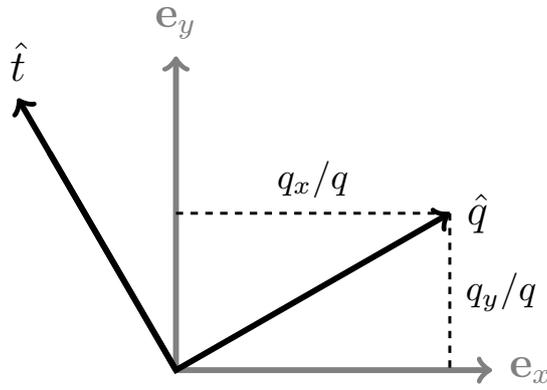


FIGURE 3.3 – Représentation schématique de la base polaire dans le plan horizontal.

deux systèmes :

- le premier porte sur $v_{j,t}^{(1)}$, projection de la vitesse sur la direction \hat{t} . L'équation de Stokes selon l'axe \hat{t} s'écrit :

$$\eta_j (\partial_z^2 - q^2) v_{j,t}^{(1)}(z) = 0 \quad (3.14)$$

Seule la dépendance en z est notée, convention qu'on généralise dans la suite pour des raisons de lisibilité.

- le second système implique les 3 quantités $v_{j,q}^{(1)}$, $v_{j,z}^{(1)}$ et $P_j^{(1)}$ avec $v_{j,q}^{(1)}$ la projection de la vitesse à l'ordre 1 sur la direction \hat{q} . La condition d'incompressibilité et l'équation de Stokes selon \hat{q} et \mathbf{e}_z se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} iq v_{j,q}^{(1)}(z) + \partial_z v_{j,z}^{(1)}(z) &= 0 \\ \eta_j (\partial_z^2 - q^2) v_{j,q}^{(1)}(z) - iq P_j^{(1)}(z) &= 0 \\ \eta_j (\partial_z^2 - q^2) v_{j,z}^{(1)}(z) - \partial_z P_j^{(1)}(z) &= 0 \end{aligned}$$

La condition d'incompressibilité relie $v_{j,q}^{(1)}$ à la dérivée première de la composante verticale de la vitesse : $v_{j,q}^{(1)}(z) = (i/q) \partial_z v_{j,z}^{(1)}(z)$. L'équation de Stokes

selon \hat{q} permet d'exprimer la pression, toujours en fonction de la composante verticale de la vitesse, expression qui fait intervenir sa dérivée troisième : $P_j^{(1)}(z) = (\eta_j/q^2)(\partial_z^3 - q^2\partial_z)v_{j,z}^{(1)}(z)$. En utilisant ces deux égalités, l'équation de Stokes selon \mathbf{e}_z devient une équation différentielle du 4^{ième} ordre vérifiée par $v_{j,z}^{(1)}$:

$$(\partial_z^4 - 2q^2\partial_z^2 + q^4)v_{j,z}^{(1)}(z) = 0 \quad (3.15)$$

Les deux équations 3.14 et 3.15 peuvent être résolues. Les solutions sont des sommes d'exponentielles. On suppose que le système a de grandes dimensions et par conséquent qu'on peut confondre les conditions limites au niveau des parois solides avec des conditions limites en $z \rightarrow \pm\infty$. Précisément, on suppose $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \mathbf{v}_j(z) = 0$. On obtient alors :

$$v_{j,t}^{(1)}(z) = \alpha_j^{(1)} e^{-q|z|} \quad (3.16)$$

$$v_{j,z}^{(1)}(z) = \left(A_j^{(1)} + B_j^{(1)} qz \right) e^{-q|z|} \quad (3.17)$$

où $\alpha_j^{(1)}$, $A_j^{(1)}$ et $B_j^{(1)}$ sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions limites. Cette première perturbation à l'écoulement de Couette, le champ de vitesse d'ordre 1, décroît de manière exponentielle lorsqu'on s'éloigne de l'interface. Cette décroissance a lieu sur une profondeur de l'ordre de la longueur d'onde. Il est possible alors de préciser ce qu'on entend par « grande » dimension du système ou ce qu'on entend aussi quand on affirme qu'on néglige les effets de confinement. On suppose que la perturbation des champs hydrodynamiques est négligeable au niveau des parois solides, soit que les vecteurs d'onde sont tels que $qL_j \gg 1$, avec $j = 1$ ou 2 . Ceci revient à affirmer que les épaisseurs des deux fluides L_j sont plus grandes que les longueurs d'onde considérées.

Conditions limites

On obtient l'expression des six constantes $\alpha_j^{(1)}$, $A_j^{(1)}$ et $B_j^{(1)}$ en fonction de la perturbation interfaciale à l'aide des conditions limites à l'interface. De manière cohérente avec le développement envisagé pour les champs hydrodynamiques, on développe les conditions limites à l'ordre 1. Les conditions limites étant vérifiées en $z = h$, deux types de termes rentrent alors en jeu.

- En premier lieu, il y a naturellement les contributions des champs à l'ordre 1. Le développement à l'ordre 1 identifie leur valeur en $z = h$ avec leur valeur en $z = 0$.
- Ensuite, les conditions limites ayant lieu en $z = h$, les champs de référence doivent aussi être pris en compte via leur développement autour de $z = 0$. Par exemple, $\mathbf{v}^{(0)}(h) = \mathbf{v}^{(0)}(0) + \varepsilon u \partial_z \mathbf{v}^{(0)}(0)$.

A l'ordre 1, la condition limite cinématique, soit la continuité des vitesses à travers l'interface, s'écrit :

$$\dot{\gamma}_1 u \mathbf{e}_x + \mathbf{v}_1^{(1)}(0) = \dot{\gamma}_2 u \mathbf{e}_x + \mathbf{v}_2^{(1)}(0). \quad (3.18)$$

La vitesse à l'ordre 1 est continue excepté selon la direction \mathbf{e}_x . La discontinuité de cette composante pallie la discontinuité de l'écoulement de référence en $z = h$.

Concernant les contraintes dynamiques, soit l'équilibre des forces à l'interface, le développement ressemble à celui du champ de vitesse. Il est important de se rappeler néanmoins que le champ de pression intervenant dans le tenseur des contraintes diffère du champ de pression « réduit » par un terme de gravité. Le développement du champ de pression fait alors intervenir un terme de gravité à l'ordre 1 :

$$p_j(h) = P_0 + \varepsilon [P_j^{(1)}(0) - \rho_j g u]$$

A l'interface, les contraintes sont alors reliées par :

$$\begin{aligned} T_{1,xz}^{(1)}(0) &= T_{2,zx}^{(1)}(0) \\ T_{1,yz}^{(1)}(0) &= T_{2,yz}^{(1)}(0) \\ T_{2,zz}^{(1)}(0) - T_{1,zz}^{(1)}(0) &= -\sigma \Delta u + \Delta \rho g u \end{aligned}$$

On retrouve que les contraintes horizontales sont continues à travers l'interface tandis que celles verticales sont discontinues. Cette discontinuité équilibre les effets stabilisants, dus à la tension de surface et à la gravité.

Notre but est l'expression des six constantes $\alpha_j^{(1)}$, $A_j^{(1)}$ et $B_j^{(1)}$. Dans cette optique, on représente à nouveau les champs hydrodynamiques dans l'espace de Fourier et on décompose à nouveau la vitesse dans la base polaire $(\hat{q}, \hat{t}, \mathbf{e}_z)$. On retrouve que la composante $v_{j,t}^{(1)}$ est découplée des autres quantités $v_{j,q}^{(1)}$, $v_{j,z}^{(1)}$ et $P_j^{(1)}$.

- Les deux constantes $\alpha_j^{(1)}$ sont données par la discontinuité de la vitesse à l'ordre 1 selon \hat{t} et la continuité des contraintes tangentielles selon \hat{t} .

$$v_{1,t}^{(1)}(0) - v_{2,t}^{(1)}(0) = -(\dot{\gamma}_2 - \dot{\gamma}_1)(q_y/q)u \quad (3.19)$$

$$\eta_2 \partial_z v_{2,t}^{(1)}(0) = \eta_1 \partial_z v_{1,t}^{(1)}(0) \quad (3.20)$$

- Les quatre constantes $A_j^{(1)}$ et $B_j^{(1)}$ sont obtenues à l'aide de la discontinuité de la vitesse selon \hat{q} , la continuité de la vitesse selon \mathbf{e}_z , la continuité des contraintes tangentielles selon \hat{q} et enfin la discontinuité des contraintes verticales.

$$\partial_z v_{1,z}^{(1)}(0) - \partial_z v_{2,z}^{(1)}(0) = i q_x (\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2) u \quad (3.21)$$

$$v_{1,z}^{(1)}(0) = v_{2,z}^{(1)}(0) \quad (3.22)$$

$$\eta_2 (\partial_z^2 + q^2) v_{2,z}^{(1)}(0) = \eta_1 (\partial_z^2 + q^2) v_{1,z}^{(1)}(0) \quad (3.23)$$

$$-\frac{\eta_2}{q^2} (\partial_z^3 - 3q^2 \partial_z) v_{2,z}^{(1)}(0) + \frac{\eta_1}{q^2} (\partial_z^3 - 3q^2 \partial_z) v_{1,z}^{(1)}(0) = \sigma (q^2 + l_c^{-2}) u \quad (3.24)$$

On a directement remplacé $v_{j,q}^{(1)}$ et $P_j^{(1)}$ par leur expression en fonction de $v_{j,z}^{(1)}$.

En exprimant les dérivées par leur expression en fonction des constantes, on obtient tout d'abord leur expression, puis l'expression générale du champ de vitesse en fonction de la perturbation interfaciale.

$$v_{1,t}^{(1)}(z) = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2\eta} \dot{\gamma}_1 \frac{q_y}{q} u \exp(qz) \quad (3.25)$$

$$v_{2,t}^{(1)}(z) = \frac{\eta_1 - \eta_2}{2\eta} \dot{\gamma}_2 \frac{q_y}{q} u \exp(-qz) \quad (3.26)$$

$$v_{1,z}^{(1)}(z) = -\frac{\sigma(q^2 + l_c^{-2})}{4\eta q} u(1 - qz) \exp(qz) + i \frac{\eta_2 - \eta_1}{2\eta} \dot{\gamma}_1 u q_x z \exp(qz) \quad (3.27)$$

$$v_{2,z}^{(1)}(z) = -\frac{\sigma(q^2 + l_c^{-2})}{4\eta q} u(1 + qz) \exp(-qz) + i \frac{\eta_1 - \eta_2}{2\eta} \dot{\gamma}_2 u q_x z \exp(-qz) \quad (3.28)$$

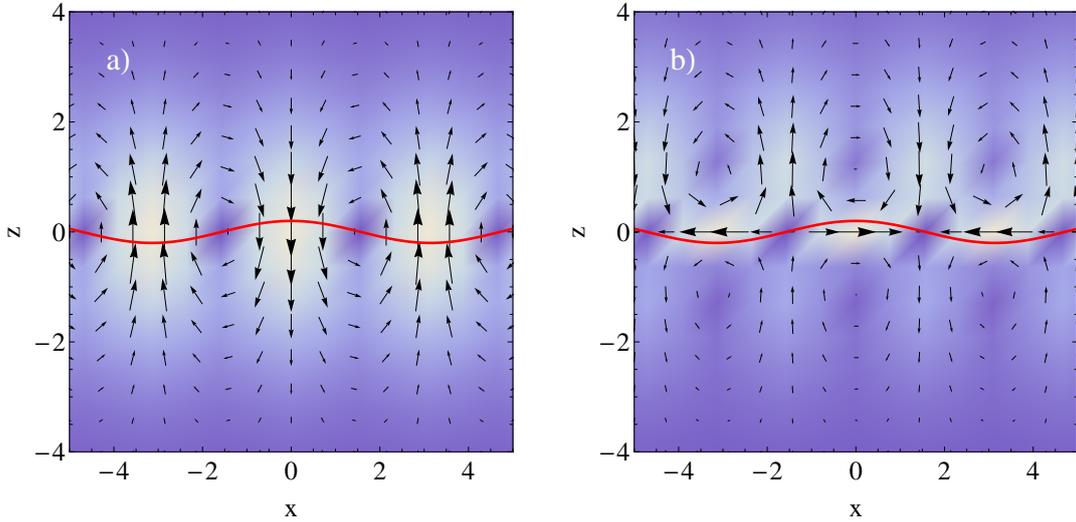


FIGURE 3.4 – Représentation schématique des deux contributions du champ de vitesse (en unité de l_c/τ_c) pour $\eta_2/\eta_1 = 0,5$, $\dot{\gamma}_1 = 1$, et $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{e}_x$ (soit $q = q_x = 1$ et $q_y = 0$). La ligne rouge correspond à la perturbation interfaciale $h/l_c = 0,1 \times \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})$. a) perturbation du champ de vitesse en l'absence de cisaillement, autrement dit $\mathbf{v}_j^{(1)}$ lorsque $\dot{\gamma}_{\text{app}} = 0$. b) contribution de la perturbation du champ de vitesse due à l'écoulement de cisaillement, soit $\mathbf{v}_j^{(1)}(\dot{\gamma}_{\text{app}}) - \mathbf{v}_j^{(1)}(0)$ où on note $\mathbf{v}_j^{(1)}(\dot{\gamma}_{\text{app}})$ le champ de vitesse à l'ordre 1 $\mathbf{v}_j^{(1)}$ lorsque le taux de cisaillement appliqué est $\dot{\gamma}_{\text{app}}$.

- $v_{1,t}^{(1)}$ est entièrement dû à l'écoulement de cisaillement. Il est proportionnel et en phase (à un signe près) avec le cisaillement, ou plutôt à la projection du cisaillement sur \hat{t} . Il est aussi entièrement dû à la stratification en viscosité.
- $v_{1,z}^{(1)}$ est la somme de deux termes. La première contribution existe même lorsque l'écoulement extérieur appliqué est nul ($\dot{\gamma}_{\text{app}} = 0$). Elle explique la relaxation

de la perturbation et est due, de même que la relaxation, aux effets stabilisants, la tension de surface et la gravité. Il s'agit d'une contribution en phase avec la perturbation interfaciale. La seconde contribution retranscrit l'advection due à l'écoulement de Couette, advection nulle en $z = 0$. Elle provient de la projection du cisaillement sur \hat{q} et est en quadrature de phase avec l'interface. Elle est également conditionnée par la stratification en viscosité.

Mise en évidence de la relaxation linéaire de la perturbation interfaciale

Afin d'établir l'équation d'évolution temporelle vérifiée par la perturbation interfaciale, on développe la condition d'immiscibilité 3.6 à l'ordre 1. On obtient que la dérivée partielle temporelle de la perturbation est simplement la composante verticale de la vitesse en $z = 0$: $\partial_t h = v_{j,z}(0)$. Peu importe que l'on choisisse $j = 1$ ou $j = 2$, puisque fondamentalement et pragmatiquement (continuité des composantes verticales de la vitesse à l'ordre 1), le résultat reste identique. Finalement, la perturbation interfaciale relaxe selon :

$$\partial_t h = -\frac{\sigma(q^2 + l_c^{-2})}{4\eta q} h \quad (3.29)$$

On retrouve une relaxation identique à la relaxation en l'absence d'écoulement appliqué (voir chapitre 2). L'expression du champ de vitesse est modifiée par le cisaillement mais pas au niveau de sa composante verticale en $z = 0$. La condition d'immiscibilité doit être considérée au moins à l'ordre 2. On peut prédire sans risque une modification de la dynamique à cet ordre car l'ordre 2 est couplé à l'ordre 1, où déjà le champ de vitesse présente des modifications.

3.3.3 Terme de couplage

Logiquement, le but est maintenant d'établir l'équation d'évolution temporelle d'une perturbation initiale fixée à l'ordre 2 en ε (rapport de la rugosité et de la longueur de corrélation). Pour cela, on raisonne de la même manière que dans le paragraphe précédent : on commence par résoudre la forme générale du champ de vitesse, puis on exprime les constantes ainsi introduites à l'aide des conditions limites à l'interface. En remplaçant le champ de vitesse par son expression en fonction de la perturbation de l'interface, on obtient l'équation qui nous intéresse.

Comme on l'a souligné dans le paragraphe précédent, les équations hydrodynamiques sont linéaires ce qui signifie qu'à tous les ordres, le champ de vitesse présente la même forme, soit :

$$v_{j,t}^{(2)}(z) = \alpha_j^{(2)} e^{-q|z|} \quad (3.30)$$

$$v_{j,z}^{(2)}(z) = \left(A_j^{(2)} + B_j^{(2)} qz \right) e^{-q|z|} \quad (3.31)$$

avec $v_{j,q}^{(2)}(z) = (i/q)\partial_z v_{j,z}^{(2)}(z)$ et $P_j^{(2)}(z) = (\eta_j/q^2)(\partial_z^3 - q^2\partial_z)v_{j,z}^{(2)}(z)$. On a à nouveau utilisé de manière cohérente le fait que les épaisseurs des deux fluides L_j sont beaucoup plus grandes que les longueurs d'onde considérées. En effet, si la perturbation des champs hydrodynamiques due à la petite déformation interfaciale à l'ordre 1 est négligeable au niveau des parois solides, la perturbation d'ordre 2 des champs hydrodynamiques, par définition plus petite, est a fortiori également négligeable au niveau des parois solides.

La difficulté provient de la résolution des conditions limites à l'interface dans le but d'obtenir les constantes définies par le champ de vitesse au-dessus. Les termes d'ordre 2 viennent effectivement des champs d'ordre 2, mais aussi du développement à l'ordre 1 autour de $z = 0$, termes de la forme $u\partial_z f^{(1)}(0)$ (où f désigne n'importe quelle quantité). Même si fondamentalement, la méthodologie pour la résolution de chaque ordre reste identique, la complexité des calculs augmente de plus en plus vite avec l'ordre considéré. Les calculs concernant le développement des conditions limites à l'ordre 2 sont détaillés en annexe C.

À l'ordre 2, le calcul des conditions limites se simplifie puisque finalement, on ne souhaite pas forcément dériver les six constantes $\alpha_j^{(2)}$, $A_j^{(2)}$ et $B_j^{(2)}$. On souhaite seulement résoudre celles qui interviennent dans la condition d'immiscibilité 3.6, développée à l'ordre 2. Cette équation se réduit alors à :

$$\varepsilon\partial_t u + \varepsilon^2 \left(\mathbf{v}_{\parallel,j}^{(1)}(0) + \dot{\gamma}_j u(\mathbf{r}) \mathbf{e}_x \right) \cdot \nabla \mathbf{u} = \varepsilon v_{j,z}^{(1)}(0) + \varepsilon^2 \left(v_{j,z}^{(2)}(0) + u(\mathbf{r}) \partial_z v_{j,z}^{(1)}(0) \right)$$

À l'ordre 2, seule la composante verticale de la vitesse en $z = 0$ nous importe donc, ce qui revient à la détermination des seules constantes $A_j^{(2)}$. Quelques simplifications proviennent aussi de la prise en compte des conditions limites à l'interface à l'ordre 1.

Une fois toutes les simplifications prises en compte, les deux conditions limites à propos de la continuité de la composante verticale de la vitesse et à propos de l'équilibre des composantes verticales des contraintes s'expriment :

$$v_{1,z}^{(2)}(0) - v_{2,z}^{(2)}(0) = -u \times [\partial_z v_{1,z}^{(1)}(0) - \partial_z v_{2,z}^{(1)}(0)] \quad (3.32)$$

$$T_{1,zz}^{(2)}(0) - T_{2,zz}^{(2)}(0) = -u \times \partial_z [T_{1,zz}^{(1)}(0) - T_{2,zz}^{(1)}(0)] \quad (3.33)$$

Toujours dans le but d'établir la dépendance des constantes $A_j^{(2)}$ par rapport aux déformations interfaciales, on exprime ces relations dans l'espace de Fourier et dans la base polaire $(\hat{q}, \hat{t}, \mathbf{e}_z)$. Les termes de droite, produits entre la déformation et les gradients verticaux des quantités, deviennent alors des produits de convolution, ou dit autrement, des termes de couplages de modes, termes non-linéaires par rapport aux déformations interfaciales. Les deux relations s'écrivent alors :

$$v_{1,z}^{(2)}(0) - v_{2,z}^{(2)}(0) = -i(\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2) \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} k_x u_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} \quad (3.34)$$

$$T_{1,zz}^{(2)}(0) - T_{2,zz}^{(2)}(0) = 0 \quad (3.35)$$

Au sein du terme de convolution, on a précisé le vecteur d'onde par souci de clarté. Dans la suite, on le précise lorsqu'il diffère de \mathbf{q} .

Sachant que $v_{j,z}^{(2)}(0) = A_j^{(2)}$ et que $T_{j,zz}^{(2)}(0) = 2\eta_j A_j^{(2)}$, on obtient :

$$A_1^{(2)} = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} ik_x \frac{\eta_2}{2\eta} (\dot{\gamma}_2 - \dot{\gamma}_1) u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} \quad (3.36)$$

$$A_2^{(2)} = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} ik_x \frac{\eta_1}{2\eta} (\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2) u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} \quad (3.37)$$

Ces deux constantes proviennent seulement de l'écoulement extérieur appliqué. Ce sont des termes de couplage de modes, chaque mode participant à ce couplage selon sa projection le long de la direction du cisaillement \mathbf{e}_x . On peut également considérer ces deux constantes comme des termes d'advection de la déformation interfaciale par un écoulement de cisaillement. Les deux taux de cisaillement ainsi mis en évidence sont conditionnés par la stratification en viscosité, de même que pour les composantes des champs de vitesse à l'ordre 1 dépendant de l'écoulement extérieur. De plus, les deux constantes sont cohérentes dans le sens où elles vérifient la symétrie des deux fluides 1 et 2. On retrouve les deux mêmes résultats avec la transformation réciproque $1 \leftrightarrow 2$.

Relaxation non-linéaire d'une perturbation interfaciale initiale fixée

On peut maintenant synthétiser les données obtenues à l'ordre 1 et 2 dans le but d'écrire la condition d'immiscibilité 3.6, exclusivement en fonction de la déformation interfaciale h . Les données étant dans l'espace de Fourier et dans la base polaire, on effectue les transformations adéquates au niveau de l'équation de départ 3.6. On obtient :

$$\varepsilon \partial_t u + \varepsilon^2 \left(\mathbf{v}_{\parallel,j}^{(1)}(0) + \dot{\gamma}_j u(\mathbf{r}) \mathbf{e}_x \right) \cdot \nabla u = \varepsilon v_{j,z}^{(1)}(0) + \varepsilon^2 \left(v_{j,z}^{(2)}(0) + u(\mathbf{r}) \partial_z v_{j,z}^{(1)}(0) \right) \quad (3.38)$$

Tout d'abord, on constate que tous les termes d'ordre 2 sont des termes de couplage de mode. Ensuite, cette équation laisse une ambiguïté : doit-on choisir $j = 1$ ou $j = 2$? Autrement dit, la limite du champ de vitesse en $z = 0$ est-elle prise lorsque z est négatif ou z est positif respectivement? Fondamentalement, l'équation d'évolution finale ne doit pas dépendre de j . Prendre $j = 1$ ou $j = 2$ doit mener au même résultat final puisqu'on a égalité entre les composantes normales des vitesses à l'interface, et la vitesse normale de l'interface. En pratique, on vérifie que chacune des deux valeurs de j , 1 et 2, aboutit au même résultat. Finalement, les perturbations interfaciales se comportent selon :

$$\partial_t h_{\mathbf{q}} = -\frac{\sigma(q^2 + l_c^{-2})}{4\eta q} h_{\mathbf{q}} - i \frac{\eta_1 \dot{\gamma}_1 + \eta_2 \dot{\gamma}_2}{\eta_1 + \eta_2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} ik_x h_{\mathbf{k}} h_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} \quad (3.39)$$

Le terme non-linéaire est un couplage entre le cisaillement et la viscosité. Une modification due au cisaillement est mise en évidence, le développement peut alors être arrêté à cet ordre.

3.3.4 Discussion

Le couplage entre l'écoulement de Couette plan et la déformation interfaciale prend la forme d'un terme non-linéaire. Il s'agit de la transformée de Fourier d'un terme d'advection assez intuitif $-\dot{\gamma}_{\text{eff}} h \partial_x h$ avec $\dot{\gamma}_{\text{eff}}$ un taux de cisaillement. La déformation de l'interface est transportée par un écoulement de cisaillement dont le champ de vitesse est de la forme « taux de cisaillement multiplié par la hauteur de l'interface ». La dérivée totale temporelle de l'interface est la somme de la dérivée partielle et de ce terme d'advection $\partial_t h \rightarrow \partial_t h + v_x^{(0)} \partial_x h$.

Cependant, bien que la forme du terme non-linéaire puisse être prédite, le calcul complet est indispensable car le taux de cisaillement est discontinu de part et d'autre de l'interface. Le terme d'advection ou de couplage de modes met en évidence un taux de cisaillement *effectif* qui diffère à la fois du taux de cisaillement appliqué et des taux de cisaillement dans les deux fluides. On peut concevoir ce taux de cisaillement effectif comme une moyenne entre les deux taux de cisaillement dans les deux fluides dont les poids sont déterminés par leur viscosité respective, soit

$$\dot{\gamma}_{\text{eff}} = \frac{\eta_1 \dot{\gamma}_1 + \eta_2 \dot{\gamma}_2}{\eta_1 + \eta_2}. \quad (3.40)$$

Le taux de cisaillement effectif $\dot{\gamma}_{\text{eff}}$ dépend des viscosités et est à ce titre une quantité dynamique du système. Dans la suite, le fait que les propriétés statiques de l'interface dépendent de ce cisaillement effectif souligne qu'il s'agit de situations hors d'équilibre.

On a noté que le taux de cisaillement effectif diffère du taux de cisaillement appliqué. Cependant, ces deux taux ne sont pas indépendants l'un de l'autre. La relation

$$\left(\frac{L_1}{\eta_1} + \frac{L_2}{\eta_2} \right) \dot{\gamma}_{\text{eff}} = \frac{L}{\eta} \dot{\gamma}_{\text{app}}. \quad (3.41)$$

les lie l'un à l'autre. L'égalité a lieu seulement quand la viscosité est continue à travers l'interface. Concrètement, cette relation implique que le taux de cisaillement effectif peut varier dans la gamme $0 \leq \dot{\gamma}_{\text{eff}} \leq 2\dot{\gamma}_{\text{app}}$ selon la géométrie du système.

3.4 Contribution stochastique de l'équation d'évolution

Préambule

La relaxation des déformations, et par conséquent des fluctuations thermiques, de l'interface a été obtenue dans la section précédente. Le but est maintenant de déterminer les propriétés de l'excitation de ces fluctuations due au bruit thermique, qui outre la relaxation, participe à l'évolution temporelle des déformations interfaciales. Il s'agit d'une variable aléatoire définie par sa distribution. A l'équilibre, ses

propriétés sont déterminées à l'aide du théorème de fluctuation-dissipation (voir le chapitre 2). On étudie dans ce chapitre une interface soumise à un écoulement de Couette plan, une situation hors d'équilibre. Notre stratégie pour établir les propriétés de la contribution aléatoire doit par conséquent être modifiée, le système étant dorénavant en dehors du domaine d'application du théorème de fluctuation-dissipation. La méthode proposée est de bénéficier des ordres de grandeur différents entre le temps caractéristique de l'interface et le temps caractéristique de diffusion des particules de fluide. L'excitation thermique est alors dérivée à partir de la modélisation hydrodynamique du mouvement brownien des particules de fluide. L'hydrodynamique modélisant l'agitation thermique des particules de fluide se nomme *hydrodynamique fluctuante*.

Dans un premier temps, on présente l'hydrodynamique fluctuante avec notamment la contribution aléatoire au tenseur des contraintes.

3.4.1 Hydrodynamique fluctuante

On cherche à représenter le mouvement brownien des particules constitutives des fluides dans le cadre des équations hydrodynamiques. De manière pragmatique, notre but est d'introduire une quantité, caractéristique des particules de fluide, au sein des équations hydrodynamiques, qui modélise ce mouvement aléatoire.

Cette quantité est l'ajout d'un terme au tenseur des contraintes, tenseur dont les composantes sont des variables aléatoires. On comprend l'existence d'une partie aléatoire du tenseur des contraintes en se plaçant à l'échelle des atomes, des molécules ou plus généralement des particules constitutives des fluides. Un fluide est un ensemble d'un très grand nombre (de l'ordre du nombre d'Avogadro) de particules élémentaires en collision les unes avec les autres. En raison du trop grand nombre de particules, même si chacune d'un point de vue mécanique vérifie la relation fondamentale de la dynamique, celles-ci semblent suivre une trajectoire erratique, plutôt qu'un mouvement prévisible : on nomme *agitation thermique* l'ensemble de ces mouvements imprévisibles et désordonnés.

À une plus grande échelle, celle des particules de fluide, il reste une signature de cette agitation thermique avec une fluctuation des quantités autour de leur valeur moyenne. En particulier, l'agitation thermique est due aux nombreuses collisions entre chaque particule « élémentaire » du fluide : la quantité originelle fluctuante et qui implique des fluctuations au niveau des autres quantités se trouve donc être les forces entre chaque particule de fluide, soit le tenseur des contraintes \mathbf{T} . Le tenseur des contraintes \mathbf{T} d'un fluide newtonien n'est donc plus simplement le résultat des contraintes visqueuses, noté \mathbf{t} dans la suite. À ces contraintes visqueuses s'ajoute un tenseur \mathbf{s} modélisant la partie stochastique des contraintes. L'équation de Stokes devient alors :

$$-\nabla P_j + \eta_j \Delta \mathbf{v}_j + \nabla \cdot \mathbf{s}_j = 0 \quad (3.42)$$

avec \mathbf{s}_j la partie aléatoire du tenseur des contraintes dans le fluide j .

A l'équilibre, on suppose que le tenseur \mathbf{s}_{eq} est un bruit blanc gaussien et les propriétés de ce tenseur sont données dans le cas d'un écoulement incompressible par [33] :

$$\langle s_{eq,\mu\nu}(\mathbf{r}, z, t) \rangle = 0 \quad (3.43a)$$

$$\begin{aligned} \langle s_{eq,\mu\nu}(\mathbf{r}, z, t) s_{eq,\mu'\nu'}(\mathbf{r}', z', t') \rangle &= 2k_B T \eta (\delta_{\mu,\mu'} \delta_{\nu,\nu'} + \delta_{\mu,\nu'} \delta_{\nu,\mu'}) \\ &\times \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(z - z') \delta(t - t') \end{aligned} \quad (3.43b)$$

avec $k_B T$ l'énergie thermique et η la viscosité du fluide considéré. On peut lire la démonstration de ces propriétés dans la réf. [26].

Hors équilibre, on suppose que le cisaillement appliqué est trop faible pour modifier le mouvement brownien des particules de fluide soit $\mathbf{s} = \mathbf{s}_{eq}$. On nomme le nombre de Péclet Pe le nombre qui compare le temps caractéristique du cisaillement $\dot{\gamma}_{app}^{-1}$ avec le temps caractéristique τ_b de l'agitation thermique du fluide. Le mouvement brownien étant un mouvement de diffusion, le temps caractéristique pour qu'une particule élémentaire de diamètre a se déplace d'une distance égale à son propre diamètre a vérifie $\tau_b = \eta a^3 / k_B T$ avec $k_B T / (\eta a)$ le coefficient de diffusion dans le fluide de viscosité η d'après le théorème de fluctuation-dissipation d'Einstein [37]. On a alors $Pe = \tau_b \dot{\gamma}_{app} = \eta a^3 \dot{\gamma}_{app} / (k_B T)$. Le cisaillement étant tel qu'il affecte l'interface, $\dot{\gamma}_{app} \tau_c \sim 1$ soit $Pe = \tau_b / \tau_c$. Dans le chapitre 2, on a vu que le temps capillaire est de l'ordre de la dizaine de secondes pour une interface colloïdale. Les fluides colloïdaux sont constitués de colloïdes de diamètre $a \sim 100$ nm ce qui mène à un temps de diffusion des colloïdes de l'ordre de la milliseconde. Le temps de diffusion des particules est effectivement largement inférieur au temps caractéristique de l'interface : les nombres de Péclet mis en jeu sont tels que $Pe \ll 1$. On retrouve une telle séparation d'ordre de grandeur entre les deux temps caractéristiques τ_c et τ_b également pour les fluides usuels moléculaires : $\tau_c \sim 10^{-4}$ s tandis que τ_b est de l'ordre de quelques nanosecondes avec $\eta \sim 10^{-3}$ kg.m⁻¹.s⁻¹ et a de l'ordre de quelques angströms. Il est justifié de supposer que les taux de cisaillement considérés ne sont pas assez élevés pour modifier le mouvement brownien des particules de fluide.

3.4.2 Modification de l'approximation à faible gradient par le tenseur des contraintes aléatoires

Dans le but d'obtenir la contribution aléatoire à l'évolution temporelle des déformations interfaciales, on raisonne de manière similaire à ce qui a été présenté à la section précédente puisque la modification est induite au niveau de l'équation de Stokes. Suivant la formulation hydrodynamique, on commence par établir la formule générale du champ de vitesse, puis on résout les conditions limites. On finit avec la condition d'immiscibilité qui permet d'établir l'équation d'évolution des fluctuations interfaciales qui nous intéressent. Les différences doivent être cependant soulignées :

- les champs hydrodynamiques sont maintenant excités par un tenseur aléatoire \mathbf{s} , ils ne proviennent donc plus seulement de l'injection d'énergie au niveau des conditions limites,
- l'équilibre des contraintes à l'interface fait intervenir ce tenseur aléatoire \mathbf{s} en plus des contraintes visqueuses et capillaires.

Le couplage entre les champs hydrodynamiques et les déformations interfaciales étant résolu à l'aide d'un développement à faible gradient, la première étape est de savoir quelle importance a ce tenseur des contraintes aléatoire \mathbf{s} au sein de ce développement. Une fois la contribution de \mathbf{s} connue, on peut mettre en évidence les modifications qu'il induit dans le développement des faibles gradients.

Importance du tenseur \mathbf{s} dans le cadre de l'approximation des faibles gradients

Les fluctuations interfaciales du modèle d'une interface infiniment fine traduisent les fluctuations de densités dans le modèle d'une couche d'épaisseur finie de transition entre les deux fluides. Ces fluctuations de densité sont directement liées au mouvement brownien des particules élémentaires. Par conséquent, il est logique de supposer que les fluctuations des tenseurs des contraintes \mathbf{s}_j sont du même ordre de grandeur que les fluctuations interfaciales, les deux étant reliés au même phénomène microscopique. De plus, on se souvient que le petit paramètre ε , contrôlant l'approximation des faibles gradients, vérifie $\varepsilon \propto \sqrt{k_B T}$. Ensuite, on vient de rappeler que les moments d'ordre 2 des composantes des tenseurs des contraintes aléatoires \mathbf{s}_j sont proportionnels à $k_B T$ (voir l'éq. (3.43b)), soit $\mathbf{s}_j \propto \sqrt{k_B T}$. On suppose donc que \mathbf{s} est d'ordre 1 (et seulement 1) dans le développement selon ε et on pose

$$\mathbf{s}_j = \varepsilon \mathbf{S}_j \quad (3.44)$$

avec $\mathbf{S}_j \sim \mathcal{O}(1)$.

En résumé, seul le développement à l'ordre 1 des équations hydrodynamiques est affecté par l'agitation thermique des particules de fluide. $\mathbf{v}_j^{(1)}$ et $P_j^{(1)}$ vérifient

$$-\nabla P_j^{(1)} + \eta_j \Delta \mathbf{v}_j^{(1)} + \nabla \cdot \mathbf{S}_j = 0 \quad (3.45)$$

tandis que les termes d'ordre plus élevé $n > 1$ vérifient toujours

$$-\nabla P_j^{(n)} + \eta_j \Delta \mathbf{v}_j^{(n)} = 0.$$

Les premières modifications interviennent au niveau de la forme générale des termes d'ordre 1 des champs de vitesse et de pression. Les champs hydrodynamiques sont dus à l'ordre 1 à l'injection d'énergie via les conditions limites et aux excitations thermiques. Aux ordres supérieurs, on retrouve la situation classique : les champs hydrodynamiques d'ordre n sont dus au couplage avec les ordres inférieurs $k < n$.

Modifications des champs hydrodynamiques à l'ordre 1

On commence avec la forme générale du champ de vitesse. Les champs hydrodynamiques étant excités par la divergence du tenseur S_j , on les décompose selon deux termes : la solution du système homogène et une solution particulière. Pour profiter du travail précédent, on travaille dans l'espace de Fourier dans la base polaire $(\hat{q}, \hat{t}, \mathbf{e}_z)$.

Afin d'exprimer la divergence du tenseur S_j dans cette base, on fait intervenir la matrice de rotation R suivante :

$$R = \begin{pmatrix} \frac{q_x}{q} & -\frac{q_y}{q} & 0 \\ \frac{q_y}{q} & \frac{q_x}{q} & 0 \\ \frac{q}{0} & \frac{q}{0} & 1 \end{pmatrix}$$

Les composantes de la base polaire du tenseur S_{polar} sont reliées aux composantes $S_{\text{cartesian}}$ dans la base cartésienne via la relation :

$$S_{\text{cartesian}} = R S_{\text{polar}} {}^t R$$

On retrouve que la composante $v_{j,t}^{(1)}$ est découplée des autres quantités. On exprime à nouveau $v_{j,q}^{(1)}$ et $P_j^{(1)}$ en fonction de $v_{j,z}^{(1)}$. Les projections de l'équation de Stokes selon \hat{t} et \mathbf{e}_z deviennent alors :

$$(\partial_z^2 - q^2) v_{j,t}^{(1)}(z) = -i \frac{q}{\eta_j} S_{j,qt}(z) - \frac{1}{\eta_j} \partial_z S_{j,tz}(z) \quad (3.46)$$

$$(\partial_z^4 - 2q^2 \partial_z^2 + q^4) v_{j,z}^{(1)}(z) = \frac{q^2}{\eta_j} \partial_z (S_{j,zz} - S_{j,qq})(z) + i \frac{q}{\eta_j} (\partial_z^2 + q^2) S_{j,qz}(z) \quad (3.47)$$

Les solutions particulières des champs hydrodynamiques sont obtenues par la méthode des fonctions de Green.

3.4.3 Dérivation des contributions stochastiques de l'équation d'évolution

La condition d'immiscibilité ne dépend pas directement de l'agitation thermique des particules de fluide, l'évolution des fluctuations interfaciales suit par conséquent l'équation déjà dérivée :

$$\varepsilon \partial_t u + \varepsilon^2 \left(\mathbf{v}_{\parallel,j}^{(1)}(0) + \dot{\gamma}_j u(\mathbf{r}) \mathbf{e}_x \right) \cdot \nabla u = \varepsilon v_{j,z}^{(1)}(0) + \varepsilon^2 \left(v_{j,z}^{(2)}(0) + u(\mathbf{r}) \partial_z v_{j,z}^{(1)}(0) \right).$$

Finalement, les fluctuations suivent la dynamique dictée par l'équation :

$$\begin{aligned} \partial_t h_{\mathbf{q}} = & -\frac{\sigma(q^2 + l_c^{-2})}{2\eta q} h_{\mathbf{q}} - i\dot{\gamma}_{\text{eff}} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} k_x h_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} h_{\mathbf{k}} + \varphi_{\mathbf{q}}(t) \\ & + \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} h_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} \Phi_{1,\mathbf{k}}(t) - \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} i(k_x q_y - k_y q_x) h_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} \Phi_{2,\mathbf{k}}(t) \end{aligned} \quad (3.48)$$

avec

$$\varphi_{\mathbf{q}}(t) = -\frac{q^2}{\eta} \int_{-\infty}^0 dz_1 \partial_{z_1} G(0, z_1) (s_{1,zz} - s_{1,qq} - 2is_{1,qz})(z_1) - \frac{q^2}{\eta} \int_0^{+\infty} dz_2 \partial_{z_2} G(0, z_2) (s_{2,zz} - s_{2,qq} - 2is_{2,qz})(z_2) \quad (3.49)$$

$$\Phi_{1,\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^0 dz_1 \partial_{z_1}^2 G(0, z_1) (s_{1,zz} - s_{1,qq} - 2is_{1,qz})(z_1) + \frac{1}{\eta} \int_0^{+\infty} dz_2 \partial_{z_2}^2 G(0, z_2) (s_{2,zz} - s_{2,qq} + 2is_{2,qz})(z_2) \quad (3.50)$$

$$\Phi_{2,\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^0 dz_1 g(0, z_1) (is_{1,qt} + s_{1,tz})(z_1) + \frac{1}{\eta} \int_0^{+\infty} dz_2 g(0, z_2) (is_{2,qt} - s_{2,tz})(z_2) \quad (3.51)$$

Les fonctions G et g intervenant dans les définitions ci-dessus des termes aléatoires de l'équation (3.48) sont les deux fonctions de Green définies dans l'annexe C. Cette annexe présente en détail le calcul des champs de vitesse (paragraphe C.1), directement en prenant en compte les contraintes aléatoires des particules de fluide les unes sur les autres. Ce calcul détaillé des champs de vitesse est suivi de leur détermination complète à l'aide des conditions limites (paragraphe C.2). La forme complète des champs de vitesse calculée dans cette annexe C permet effectivement de retrouver, une fois mise dans la condition d'immiscibilité, l'équation d'évolution temporelle (3.48) des fluctuations interfaciales (fin du paragraphe C.2).

A partir des propriétés du tenseur stochastique \mathbf{s} , on peut donc calculer les propriétés des trois termes aléatoires ci-dessus. Etant des combinaisons linéaires du tenseur \mathbf{s} , ce sont également des bruits blancs gaussiens caractérisés par les deux premiers moments. On remarque immédiatement qu'ils sont nuls en moyenne : $\langle \varphi_{\mathbf{q}}(t) \rangle = \langle \Phi_{1,\mathbf{q}}(t) \rangle = \langle \Phi_{2,\mathbf{q}}(t) \rangle = 0$. On calcule les moments d'ordre 2 suivants :

$$\langle \varphi_{\mathbf{q}}(t) \varphi_{\mathbf{q}'}(t') \rangle = \frac{2k_B T}{4\eta q} (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \delta(t - t') \quad (3.52)$$

$$\langle \Phi_{1,\mathbf{q}}(t) \Phi_{1,\mathbf{q}'}(t') \rangle = \frac{2k_B T}{4\eta q^3} (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \delta(t - t') \quad (3.53)$$

$$\langle \Phi_{2,\mathbf{q}}(t) \Phi_{2,\mathbf{q}'}(t') \rangle = \frac{2k_B T}{2\eta q^3} (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \delta(t - t'). \quad (3.54)$$

On peut aussi calculer les couplages entre les différents termes stochastiques, on obtient seulement des couplages nuls : $\langle \varphi_{\mathbf{q}}(t) \Phi_{1,\mathbf{q}'}(t') \rangle = 0$, $\langle \varphi_{\mathbf{q}}(t) \Phi_{2,\mathbf{q}'}(t') \rangle = 0$ et $\langle \Phi_{1,\mathbf{q}}(t) \Phi_{2,\mathbf{q}'}(t') \rangle = 0$.

On peut souligner l'absence de couplage entre les termes stochastiques et l'écoulement de cisaillement. On distingue deux types de termes stochastiques dans l'équation d'évolution temporelle des fluctuations interfaciales.

- Le terme $\varphi_{\mathbf{q}}(t)$ est du même ordre que les fluctuations interfaciales. Il s'agit de la contribution aléatoire déjà présente dans la description à l'équilibre des fluctuations interfaciales.
- Les deux termes $\Phi_{1,\mathbf{q}}(t)$ et $\Phi_{2,\mathbf{q}}(t)$ entraînent des contributions stochastiques plus petites que les fluctuations interfaciales. A l'équilibre, elles ne doivent

jouer aucun rôle, le théorème de fluctuation-dissipation étant vérifié sans ces contributions. Bien que ces contributions n'interviennent pas à l'équilibre, elles ne dépendent que des propriétés à l'équilibre du système.

L'équation obtenue est résolue à l'aide d'un développement d'ordre 2 de manière cohérente avec sa dérivation. En raison de l'absence de couplage entre les différents termes stochastiques, plus particulièrement entre $\varphi_{\mathbf{q}}(t)$ et les deux fonctions $\Phi_{\mu,\mathbf{q}}(t)$ (où $\mu = 1, 2$), on peut négliger les deux termes stochastiques d'ordre 2.

L'évolution temporelle de l'interface suit alors l'équation suivante

$$\partial_t h_{\mathbf{q}}(t) = -\frac{1}{\tau_q} h_{\mathbf{q}}(t) - i\dot{\gamma}_{\text{eff}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} k_x h_{\mathbf{k}}(t) h_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}(t) + \varphi_{\mathbf{q}}(t) \quad (3.55)$$

qui constitue le premier résultat significatif de cette thèse. Finalement, la contribution aléatoire $\varphi_{\mathbf{q}}(t)$ n'est pas affectée par le cisaillement et ses propriétés sont celles de l'équilibre : sa moyenne est nulle et sa variance est donnée par l'équation (2.27),

$$\langle \varphi(\mathbf{q}, t) \varphi(\mathbf{q}', t') \rangle = \frac{k_B T}{2\eta q} \delta(t - t') (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}') .$$

Même si le système est maintenant hors d'équilibre, aucun couplage n'a lieu entre l'agitation thermique et l'écoulement de Couette plan (tout du moins jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$).

3.5 Discussion

L'équation d'évolution de l'interface est une équation comportant un terme de relaxation, un terme de couplage de modes et un terme de forçage aléatoire. Elle appartient à la classe des équations de Kardar-Parisi-Zhang (KPZ). Cette classe d'équations a été introduite par les auteurs des mêmes noms [24] de manière phénoménologique dans le but de décrire l'évolution du profil d'une interface. Ils ont originellement travaillé sur une équation différentielle, locale, non-linéaire et stochastique la plus simple possible. Elle peut s'appliquer à de nombreux phénomènes, comme les fronts de solidification, la diffusion de fumée, la croissance des agrégats de colloïdes, des fronts d'incendie ou de tumeurs. Il s'en est suivi le nom général d'équation de KPZ pour les équations modélisant l'évolution temporelle d'une certaine quantité, constituées de l'addition de trois phénomènes : une augmentation de la quantité due à un forçage aléatoire, une perte due à un amortissement, et un gain ou perte dus à un couplage avec les autres modes [31]. Les équations de type KPZ ont été dans la suite abondamment étudiées, et introduites généralement de manière phénoménologique. Au contraire, le travail présenté établit un exemple d'équation de type KPZ dérivée de manière rigoureuse à partir des équations fondamentales de l'hydrodynamique. Comme autre rare exemple de travail démontrant une équation de type KPZ, on peut citer l'article de Park et Kahng [34].

Chapitre 4

Description des fluctuations hors d'équilibre

Préambule

L'objet de ce chapitre est la résolution de l'équation (3.55), qui décrit la dynamique des fluctuations thermiques de l'interface hors d'équilibre. Ainsi, on peut obtenir les modifications des propriétés de l'interface, induites par le cisaillement.

L'équation (3.55) est une équation stochastique non-linéaire. Pour traiter cette non-linéarité, deux choix sont possibles.

- A faible taux de cisaillement, on peut considérer la non-linéarité comme une perturbation de l'équilibre et effectuer par conséquent un développement autour de la situation sans écoulement extérieur ($\dot{\gamma}_{\text{eff}} = 0$).
- A grand taux de cisaillement, l'équation se résout numériquement. Cette étude est l'objet du chapitre 6.

Ce chapitre est consacré à l'établissement des propriétés interfaciales à petit taux de cisaillement.

On commence par préciser ce qu'on entend par « petit » taux de cisaillement en mettant en évidence le paramètre de contrôle du cisaillement. Ensuite, on résout l'équation à faible taux de cisaillement avant de calculer les propriétés des fluctuations interfaciales tout d'abord dans l'espace de Fourier, puis dans l'espace réel. On s'intéresse notamment au déplacement quadratique moyen de l'interface et aux corrélations spatiales. On finit par discuter les résultats obtenus. En particulier, on compare les conclusions du modèle hydrodynamique présenté avec les données expérimentales obtenues par D. Derks et ses collaborateurs à propos des interfaces colloïdales [17], après avoir introduit le système expérimental.

4.1 Paramètre de contrôle du cisaillement

Expression de la dynamique des fluctuations en fonction des quantités sans dimension

La première approche consiste à supposer que la non-linéarité, paramétrée par le taux de cisaillement $\dot{\gamma}_{\text{eff}}$, est petite. Avant de s'intéresser au développement, il est donc nécessaire de préciser ce que l'on entend par « petite » non-linéarité. Plus précisément, on souhaite mettre en évidence un paramètre sans dimension, dit paramètre de contrôle, qui gouverne le développement autour de la situation sans écoulement ($\dot{\gamma}_{\text{eff}} = 0$).

Dans cette optique, on réécrit l'équation d'évolution (3.55) avec des quantités sans dimension dont l'ordre de grandeur est l'unité. On note

- \tilde{h} , la déformation de l'interface dans l'espace réel divisée par son échelle caractéristique $\xi_T = \sqrt{k_B T / \sigma}$, soit $h = \xi_T \tilde{h}$,
- de même pour le vecteur d'onde $\tilde{\mathbf{q}} = l_c \mathbf{q}$,
- l'échelle de temps $t = \tau_c \tilde{t}$,
- et de manière cohérente avec l'introduction des quantités sans dimension précédentes, on définit également $\tilde{h}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{t}) = (l_c^2 \xi_T)^{-1} h(\mathbf{q}, t)$.

Travailler avec ces quantités sans dimension donne l'équation d'évolution suivante

$$\partial_{\tilde{t}} \tilde{h}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{t}) = -\frac{f_{\tilde{q}}}{2} \tilde{h}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{t}) - i\alpha \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2 \tilde{\mathbf{k}}}{(2\pi)^2} \tilde{k}_x \tilde{h}_{\tilde{\mathbf{k}}}(\tilde{t}) \tilde{h}_{\tilde{\mathbf{q}}-\tilde{\mathbf{k}}}(\tilde{t}) + \tilde{\varphi}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{t}) \quad (4.1)$$

avec $f_{\tilde{q}} = (1 + \tilde{q}^2) / \tilde{q}$ la relaxation sans dimension de chaque mode de déformation à un facteur 2 près (où, de même qu'avec le vecteur d'onde avec dimension, on note le module du vecteur d'onde $\tilde{q} = |\tilde{\mathbf{q}}|$) et $\tilde{\varphi}$ l'homologue sans dimension de l'excitation aléatoire : sa moyenne est nulle et sa variance est donnée par $\langle \tilde{\varphi}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{t}) \tilde{\varphi}_{\tilde{\mathbf{q}}'}(\tilde{t}') \rangle = (1/\tilde{q})(2\pi)^2 \delta(\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}') \delta(\tilde{t} - \tilde{t}')$.

Interprétations de α

On note le paramètre de contrôle α . Les changements de variables précédents donnent

$$\alpha = \frac{\xi_T}{l_c} \times \dot{\gamma}_{\text{eff}} \tau_c. \quad (4.2)$$

On a exprimé α sous la forme d'une combinaison entre deux nombres sans dimension.

- Le premier ξ_T / l_c est le rapport entre les deux longueurs caractéristiques de l'interface : celle typique de la rugosité ξ_T et celle typique des corrélations entre les déformations interfaciales l_c .
- Le second $\dot{\gamma}_{\text{eff}} \tau_c$ est le rapport entre les deux temps caractéristiques, celui de l'interface τ_c et celui de l'écoulement $\dot{\gamma}_{\text{eff}}^{-1}$.

Ainsi, selon les conditions expérimentales, α peut être petit sans pour autant que $\dot{\gamma}_{\text{app}} \tau_c$ le soit. Rappelons en outre que le second nombre sans dimension ξ_T / l_c est

le paramètre ε déjà utilisé dans la dérivation de la dynamique des fluctuations de l'interface, qui gouverne l'approximation des faibles gradients.

L'expression du paramètre de contrôle fait intervenir la longueur capillaire l_c qui n'est pas toujours la longueur la plus indiquée pour décrire les interfaces (par exemple quand les effets de gravité sont faibles). Néanmoins, il se trouve que α ne dépend pas explicitement des effets de gravité. En effet, en remplaçant l_c et τ_c par leur expression, on a $\alpha = 2\eta\dot{\gamma}_{\text{eff}}(k_B T)^{1/2}/\sigma^{3/2}$. Ce nombre sans dimension peut être interprété de différentes façons.

- D'une part, on peut l'aborder comme un nombre de Péclet : α est le rapport du temps caractéristique du cisaillement avec un temps τ_ξ , caractéristique du temps de diffusion de la rugosité de l'interface $\tau_\xi = \eta\xi_T^3/(k_B T)$.
- D'autre part, α peut être vu comme un nombre capillaire qui compare la vitesse d'advection de l'interface $V_{\xi_T} = \dot{\gamma}_{\text{eff}}\xi_T$ avec la vitesse d'amortissement des ondes capillaires σ/η .

L'analyse présentée dans la suite est valable pour des petits α , soit $0 \leq |\alpha| < 1$.

4.2 Résolution de l'équation d'évolution

Pour résoudre les propriétés de l'interface hors d'équilibre, on effectue un développement de la déformation de l'interface à faible cisaillement. On pose

$$\tilde{h}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{t}) = \tilde{h}_{\tilde{\mathbf{q}}}^{(0)}(\tilde{t}) + \alpha\tilde{h}_{\tilde{\mathbf{q}}}^{(1)}(\tilde{t}) + \alpha^2\tilde{h}_{\tilde{\mathbf{q}}}^{(2)}(\tilde{t}) + \dots \quad (4.3)$$

Avant de résoudre chaque ordre du développement en α , on sait que ce dernier doit être poussé à l'ordre 2. Effectivement, peu importe le sens du cisaillement, de la gauche vers la droite le long de l'axe (Ox) ou de la droite vers la gauche, le problème reste identique. En raison de cette symétrie, on prédit ainsi l'absence de modifications des propriétés des fluctuations thermiques à l'interface à l'ordre 1 du développement en α . Plus généralement, la symétrie par la transformation $\dot{\gamma}_{\text{app}} \leftrightarrow -\dot{\gamma}_{\text{app}}$ implique que l'ensemble des termes impairs du développement en α sont nuls. Par conséquent, le premier terme correctif (dans les propriétés finales de l'interface) dû au cisaillement est le terme d'ordre 2 en α .

Afin de résoudre l'éq. 4.1, on définit la transformée de Fourier temporelle par rapport à \tilde{t} . Soit \tilde{a} une fonction quelconque de $\tilde{\mathbf{q}}$ et de \tilde{t} , alors sa transformée de Fourier temporelle $\tilde{a}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\omega})$ vérifie

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\omega}) &= \int_{\mathbb{R}} d\tilde{t} \tilde{a}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{t}) e^{-i\tilde{\omega}\tilde{t}} \\ \tilde{a}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{t}) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tilde{\omega}}{2\pi} \tilde{a}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\omega}) e^{i\tilde{\omega}\tilde{t}} \end{aligned}$$

L'équation de couplage de mode devient alors

$$\tilde{h}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\omega}) = R_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\omega})\tilde{\varphi}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\omega}) - i\alpha R_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\omega}) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2\tilde{\mathbf{k}}}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tilde{\Omega}}{2\pi} \tilde{k}_x \tilde{h}_{\tilde{\mathbf{k}}}(\tilde{\Omega}) \tilde{h}_{\tilde{\mathbf{q}}-\tilde{\mathbf{k}}}(\tilde{\omega} - \tilde{\Omega}) \quad (4.4)$$

avec

$$R_{\tilde{q}}(\tilde{\omega}) = 2f_{\tilde{q}}^{-1}/(1 + i2f_{\tilde{q}}^{-1}\tilde{\omega})$$

$R_{\tilde{q}}(\tilde{\omega})$ est la fonction de réponse à l'équilibre. Il s'agit d'un filtre passe-bas qui sélectionne par conséquent les fluctuations temporelles évoluant plus lentement que $f_{\tilde{q}}/2$. $\tilde{\varphi}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\omega})$ est l'excitation aléatoire dans les espaces de Fourier spatial et temporel de moyenne nulle et de variance $\langle \tilde{\varphi}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\omega}) \tilde{\varphi}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\mathbf{q}}', \tilde{\omega}') \rangle = (1/\tilde{q})(2\pi)^3 \delta(\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}') \delta(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}')$.

A l'ordre 0 en α , on retrouve $\tilde{h}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\omega}) = R_{\tilde{q}}(\tilde{\omega}) \tilde{\varphi}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\omega})$ qui mène effectivement aux propriétés présentées précédemment dans le chapitre 2 et déjà bien connues des fluctuations thermiques interfaciales à l'interface. A l'ordre 1, on vérifie que l'expression ne mène à aucune modification de la quantité $\langle \tilde{h}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\omega}) \tilde{h}_{\tilde{\mathbf{q}}}'(\tilde{\omega}') \rangle$ par le cisaillement conformément à la symétrie du problème $\dot{\gamma}_{\text{app}} \leftrightarrow -\dot{\gamma}_{\text{app}}$. Finalement, le développement à l'ordre 2 aboutit à l'expression suivante

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\omega}) = & R_{\tilde{q}}(\tilde{\omega}) \tilde{\varphi}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\omega}) - i\alpha R_{\tilde{q}}(\tilde{\omega}) \iint_{\mathbb{R}^3} \frac{d^2 \tilde{\mathbf{k}} d\tilde{\Omega}}{(2\pi)^3} \begin{bmatrix} \tilde{k}_x \\ \times R_{\tilde{k}}(\tilde{\Omega}) R_{\tilde{q}-\tilde{k}}(\tilde{\omega} - \tilde{\Omega}) \\ \times \tilde{\varphi}_{\tilde{\mathbf{k}}}(\tilde{\Omega}) \tilde{\varphi}_{\tilde{\mathbf{q}}-\tilde{\mathbf{k}}}(\tilde{\omega} - \tilde{\Omega}) \end{bmatrix} \\ & - \alpha^2 R_{\tilde{q}}(\tilde{\omega}) \iiint_{\mathbb{R}^6} \frac{d^2 \tilde{\mathbf{k}} d^2 \tilde{\mathbf{k}}' d\tilde{\Omega} d\tilde{\Omega}'}{(2\pi)^6} \begin{bmatrix} \tilde{q}_x \tilde{k}'_x \\ \times R_{\tilde{k}}(\tilde{\Omega}) R_{\tilde{q}-\tilde{k}}(\tilde{\omega} - \tilde{\Omega}) R_{\tilde{k}'}(\tilde{\Omega}') R_{\tilde{k}-\tilde{k}'}(\tilde{\Omega} - \tilde{\Omega}') \\ \times \tilde{\varphi}_{\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{k}}}(\tilde{\omega} - \tilde{\Omega}) \tilde{\varphi}_{\tilde{\mathbf{k}}'}(\tilde{\Omega}') \tilde{\varphi}_{\tilde{\mathbf{k}} - \tilde{\mathbf{k}}'}(\tilde{\Omega} - \tilde{\Omega}') \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Le calcul détaillé est présenté au sein de l'annexe D. Le paragraphe D.1 est consacré au calcul de la fluctuation de l'interface $\tilde{h}_{\tilde{\mathbf{q}}}$ en fonction du terme aléatoire $\tilde{\varphi}_{\tilde{\mathbf{q}}}$.

4.3 Spectre des fluctuations dans l'espace de Fourier

A partir de l'expression précédente, on peut obtenir toutes les propriétés des fluctuations interfaciales. Tout d'abord, on calcule le spectre dynamique des fluctuations. Ensuite, en revenant dans l'espace réel temporel, on obtient le spectre statique des fluctuations. La seconde partie de l'annexe D, le paragraphe D.2, présente de manière plus détaillée les calculs qui mènent aux expressions des spectres présentées dans la suite.

Le spectre dynamique des fluctuations fait intervenir des moments d'ordre 4 du bruit. Pour calculer ces moments d'ordre 4, on applique le théorème de Wick qui indique que les moments d'ordre pair d'un bruit gaussien sont la somme sur toutes les permutations possibles des produits des moments d'ordre 2. Par exemple, en ce qui

concerne un des moments d'ordre 4 rencontré dans le spectre $\langle \tilde{h}(\tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\omega}_1) \tilde{h}(\tilde{\mathbf{q}}_2, \tilde{\omega}_2) \rangle$,

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{\varphi}(\tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\omega}_1) \tilde{\varphi}(\tilde{\mathbf{q}}_2 - \tilde{\mathbf{k}}_2, \tilde{\omega}_2 - \tilde{\Omega}_2) \tilde{\varphi}(\tilde{\mathbf{k}}'_2, \tilde{\Omega}'_2) \tilde{\varphi}(\tilde{\mathbf{k}}_2 - \tilde{\mathbf{k}}'_2, \tilde{\Omega}_2 - \tilde{\Omega}'_2) \rangle \\ &= 1/(\tilde{q}_1 \tilde{k}'_2) (2\pi)^6 \delta(\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2) \delta(\tilde{\mathbf{k}}_2) \delta(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2) \delta(\tilde{\Omega}_2) \\ &+ 1/(\tilde{q}_1 |\tilde{\mathbf{q}}_2 - \tilde{\mathbf{k}}_2|) (2\pi)^6 \delta(\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2) \delta(\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{k}}'_2) \delta(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2) \delta(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\Omega}'_2) \\ &+ 1/(\tilde{q}_1 |\tilde{\mathbf{q}}_2 - \tilde{\mathbf{k}}_2|) (2\pi)^6 \delta(\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2) \delta(\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{k}}_2 - \tilde{\mathbf{k}}'_2) \delta(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2) \delta(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\Omega}_2 - \tilde{\Omega}'_2) \end{aligned}$$

Le spectre $\langle \tilde{h}(\tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\omega}_1) \tilde{h}(\tilde{\mathbf{q}}_2, \tilde{\omega}_2) \rangle$ peut alors être calculé, tous les termes étant connus. Le paragraphe D.2 présente les calculs détaillés des spectres.

$$\begin{aligned} \langle \tilde{h}(\tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\omega}_1) \tilde{h}(\tilde{\mathbf{q}}_2, \tilde{\omega}_2) \rangle &= \frac{|R_{\tilde{q}_1}(\tilde{\omega}_1)|^2}{\tilde{q}_1} (2\pi)^3 \delta(\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2) \delta(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2) \\ &- \alpha^2 |R_{\tilde{q}_1}(\tilde{\omega}_1)|^2 (2\pi)^3 \delta(\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2) \delta(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2) \\ &\int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2 \tilde{\mathbf{k}}_1}{\pi^2} \frac{\frac{\tilde{q}_1 \tilde{k}_{1,x}}{|\tilde{\mathbf{q}}_1 - \tilde{\mathbf{k}}_1|} \left(\frac{2[1-4f_{\tilde{q}_1}^{-1}(f_{\tilde{k}_1} + f_{|\tilde{\mathbf{q}}_1 - \tilde{\mathbf{k}}_1|})^{-1} \tilde{\omega}_1^2]}{\tilde{q}_1 f_{\tilde{q}_1} (1+4f_{\tilde{q}_1}^{-2} \tilde{\omega}_1^2)} - \frac{1}{\tilde{k}_1 f_{\tilde{k}_1}} \right)}{f_{|\tilde{\mathbf{q}}_1 - \tilde{\mathbf{k}}_1|} (f_{\tilde{k}_1} + f_{|\tilde{\mathbf{q}}_1 - \tilde{\mathbf{k}}_1|}) [1 + 4(f_{\tilde{k}_1} + f_{|\tilde{\mathbf{q}}_1 - \tilde{\mathbf{k}}_1|})^{-2} \tilde{\omega}_1^2]} \end{aligned} \quad (4.6)$$

avec, rappelons-le, $f_{\tilde{q}} = (1 + \tilde{q}^2)/\tilde{q}$. On aboutit effectivement à une correction quadratique en α .

Le spectre statique des fluctuations est obtenu en revenant dans l'espace réel temporel en utilisant la relation

$$\langle \tilde{h}(\tilde{\mathbf{q}}_1, t) \tilde{h}(\tilde{\mathbf{q}}_2, t) \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\tilde{\omega}_1 d\tilde{\omega}_2}{(2\pi)^2} \exp(i(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)t) \langle \tilde{h}(\tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\omega}_1) \tilde{h}(\tilde{\mathbf{q}}_2, \tilde{\omega}_2) \rangle$$

En remplaçant le spectre dynamique par son expression, on a

$$\begin{aligned} \langle \tilde{h}(\tilde{\mathbf{q}}_1, t) \tilde{h}(\tilde{\mathbf{q}}_2, t) \rangle &= (2\pi)^2 \delta(\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2) (\tilde{q}_1 f_{\tilde{q}_1})^{-1} \\ &\left(1 - \alpha^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2 \tilde{\mathbf{k}}_1}{\pi^2} \frac{\frac{\tilde{q}_1 \tilde{q}_{1,x} \tilde{k}_{1,x}}{|\tilde{\mathbf{q}}_1 - \tilde{\mathbf{k}}_1|} f_{|\tilde{\mathbf{q}}_1 - \tilde{\mathbf{k}}_1|}^{-1} \left((\tilde{q}_1 f_{\tilde{q}_1})^{-1} - (\tilde{k}_1 f_{\tilde{k}_1})^{-1} \right)}{f_{\tilde{q}_1} + f_{\tilde{k}_1} + f_{|\tilde{\mathbf{q}}_1 - \tilde{\mathbf{k}}_1|}} \right) \end{aligned}$$

Afin d'étudier ce spectre statique, on introduit $\tilde{S}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\alpha)$ la densité spectrale des fluctuations défini par

$$\langle \tilde{h}_{\tilde{\mathbf{q}}}(t) \tilde{h}_{\tilde{\mathbf{q}}'}(t) \rangle = \tilde{S}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\alpha) (2\pi)^2 \delta(\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}') \quad (4.7)$$

Comme le démontre l'annexe D, au sein du terme correctif de la densité spectrale, les deux dépendances du vecteur d'onde, direction et norme, se factorisent.

- En notant θ_q l'angle du vecteur d'onde $\tilde{\mathbf{q}}$ par rapport à \mathbf{e}_x , la direction du cisaillement, on peut montrer que le terme correctif de la densité spectrale $\tilde{S}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\alpha)$ est proportionnel à $\cos^2 \theta_q$.

- La dépendance par rapport à la norme du vecteur d'onde \tilde{q} fait intervenir une fonction $\mathcal{I}(\tilde{q})$ donnée par l'expression

$$\mathcal{I}(\tilde{q}) = \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{k} d\tilde{k}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_k}{\pi} \frac{\frac{\tilde{q}^2 \tilde{k} \cos \theta_k}{\sqrt{\tilde{q}^2 + \tilde{k}^2 - 2\tilde{q}\tilde{k} \cos \theta_k}} f^{-1}}{f_{\tilde{q}} + f_{\tilde{k}} + f_{\sqrt{\tilde{q}^2 + \tilde{k}^2 - 2\tilde{q}\tilde{k} \cos \theta_k}}} \left(\frac{1}{\tilde{q} f_{\tilde{q}}} - \frac{1}{\tilde{k} f_{\tilde{k}}} \right) \quad (4.8)$$

Finalement, la correction de la densité spectrale due au cisaillement est

$$\tilde{S}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\alpha) = \tilde{S}_{\tilde{\mathbf{q}}}(0) (1 - \alpha^2 \cos^2 \theta_q \mathcal{I}(\tilde{q}) + \mathcal{O}(\alpha^4)) \quad (4.9)$$

avec $\tilde{S}_{\tilde{\mathbf{q}}}(0) = 2/(1 + \tilde{q}^2)$ la densité spectrale adimensionnée à l'équilibre des fluctuations.

La dépendance par rapport à la direction du vecteur d'onde θ_q est de forme assez simple. Elle indique que ce sont les vecteurs d'onde de même direction que le cisaillement qui sont les plus affectés par celui-ci. A l'opposé, les modes de déformation de vecteurs d'onde perpendiculaires au cisaillement ne voient pas leur comportement modifié par l'écoulement de Couette plan. Même si a priori, ces deux affirmations semblent naturelles, il est important de les souligner. Elles ne sont valables que dans l'espace de Fourier et les fonctions de corrélations spatiales requièrent plus d'attention, comme on le remarque dans le prochain paragraphe. En outre, ce terme permet de vérifier toutes les symétries du problème. La symétrie par rapport au sens du cisaillement $\dot{\gamma}_{\text{app}} \leftrightarrow -\dot{\gamma}_{\text{app}}$ revient à une symétrie selon le plan (xOz) , plan vertical tangent au cisaillement, et à une symétrie selon le plan (yOz) , plan vertical perpendiculaire au cisaillement.

La dépendance par rapport à la norme du vecteur d'onde \tilde{q} est plus difficile à appréhender. La fonction \mathcal{I} se présente sous la forme d'une intégrale. Son intégration numérique est donnée sur la fig. 4.1 dans l'encart tandis que le schéma principal représente la correction totale $\Delta\tilde{S} = \tilde{S}_{\tilde{\mathbf{q}}}(0) - \tilde{S}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\alpha)$ pour $\alpha = 1$ et $\theta_q = 0$. L'intégration numérique est effectuée à l'aide du logiciel MATHEMATICA 7.0, en décomposant le vecteur d'onde $\tilde{\mathbf{k}}$ en ses composantes polaires. L'intégration numérique ne peut se faire directement de 0 à $+\infty$ pour le module du vecteur d'onde \tilde{k} , on introduit une borne supérieure à cette intégration qui converge autour de 10^6 pour la borne supérieure (plus le vecteur d'onde \tilde{q} considéré est grand, plus la borne supérieure doit être grande pour que l'intégrale converge). On remarque que la densité spectrale est principalement corrigée autour de $ql_c \sim 1$. Ceci confirme bien que la longueur qui caractérise l'interface dans cette situation est la longueur capillaire. On constate de plus que la fonction correctrice \mathcal{I} tend vers une constante quand la norme du vecteur d'onde \tilde{q} tend vers l'infini, ceci signifie que la correction à la densité spectrale se comporte en \tilde{q}^{-2} quand $\tilde{q} \rightarrow +\infty$. Lorsque le vecteur d'onde est petit $\tilde{q} \rightarrow 0$, $\mathcal{I} \sim q^4$.

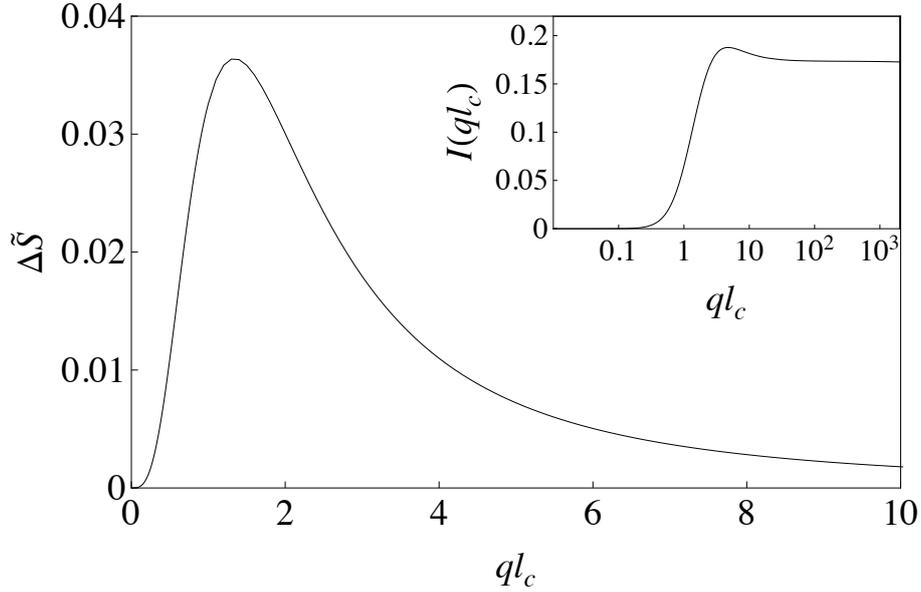


FIGURE 4.1 – Correction de la densité spectrale des fluctuations $\Delta\tilde{S}$ en fonction de la norme du vecteur d'onde \tilde{q} pour un vecteur d'onde parallèle au cisaillement ($\theta_q = 0$) et un cisaillement $\alpha = 1$. Dans l'encart, représentation de la fonction correctrice \mathcal{I} qui regroupe la dépendance par rapport au module du vecteur d'onde.

4.4 Propriétés statiques des fluctuations de l'interface

Dans la suite, on s'intéresse tout d'abord au déplacement quadratique moyen, puis aux corrélations spatiales.

4.4.1 Déplacement quadratique moyen

Le déplacement quadratique moyen est obtenu à partir de l'intégration sur tous les modes de déformation des fluctuations,

$$\langle \tilde{h}^2 \rangle (\alpha) = (2\pi)^{-2} \int \tilde{S}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\alpha) \tilde{q} d\tilde{q} d\theta_q.$$

De même qu'à l'équilibre, l'intégrale diverge à grands vecteurs d'onde d'où l'introduction à nouveau de la même longueur d'onde de coupure que dans le chapitre 2. On trouve, de même que dans l'espace de Fourier, que le déplacement quadratique moyen sous cisaillement est celui de l'équilibre corrigé par un terme quadratique en α :

$$\langle \tilde{h}^2(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) \rangle (\alpha) = \langle \tilde{h}^2(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) \rangle (0) [1 - K\alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^4)]. \quad (4.10)$$

$\tilde{\mathbf{r}}$ désigne, de manière cohérente avec le reste des notations, la position adimensionnée de la projection dans le plan horizontal (xOy) du point de l'interface considéré

$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/l_c$. De même, on note $\tilde{\xi} = \xi/l_c$ la longueur de coupure adimensionnée. K , le facteur mis en évidence par la correction quadratique en α , est donné par :

$$K = \frac{\int_0^{\frac{2\pi}{\tilde{\xi}}} \frac{\tilde{q}d\tilde{q}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_q}{2\pi} \cos^2 \theta_q \tilde{S}_{\tilde{\mathbf{q}}}(0) \mathcal{I}(\tilde{q})}{\int_0^{\frac{2\pi}{\tilde{\xi}}} \frac{\tilde{q}d\tilde{q}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_q}{2\pi} \tilde{S}_{\tilde{\mathbf{q}}}(0)} \quad (4.11)$$

K ne dépend que de la longueur de coupure. Comme le montre la fig. 4.2 obtenue toujours à l'aide de MATHEMATICA 7.0, K tend vers une quantité finie quand $\tilde{\xi} \rightarrow 0$. Le cisaillement n'induit pas d'autres divergences que celle présente à l'équilibre. On considère ainsi que le facteur K de correction est égal à sa limite quand la longueur de coupure tend vers 0. La constante K ne dépend alors d'aucun paramètre du système. Il s'agit d'une constante qu'on peut qualifier d'*universelle* dans le sens où elle ne dépend d'aucune propriété des deux fluides ni d'aucune constante élastique de l'interface. Toutes les caractéristiques du système se retrouvent factorisées dans le paramètre de contrôle α . Numériquement, on trouve $K = 0.084$.

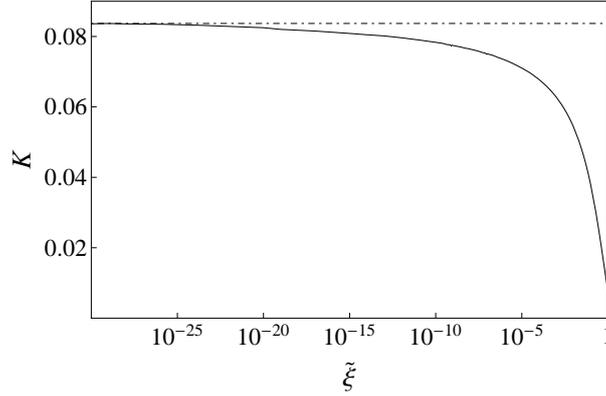


FIGURE 4.2 – Evolution du facteur correctif K en fonction de la longueur de coupure adimensionnée $\tilde{\xi} = \xi/l_c$. En pointillés, la courbe $K = 0.084$ est repérée.

4.4.2 Corrélations spatiales

Le spectre des fluctuations de l'espace de Fourier permet aussi d'obtenir les corrélations spatiales $\tilde{C}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) = \langle \tilde{h}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) \tilde{h}(\tilde{\mathbf{0}}, \tilde{t}) \rangle$ par intégration sur tous les modes de déformation. Cette somme sur tous les vecteurs d'onde mène à une correction par le cisaillement des corrélations spatiales de l'interface, et ceci même dans la direction de la vorticité (soit perpendiculairement au cisaillement), comportement qui diffère de ce qui se passe dans l'espace de Fourier.

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) &= \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{q}d\tilde{q}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_q}{2\pi} \exp(i\tilde{\mathbf{q}} \cdot \tilde{\mathbf{r}}) \tilde{S}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\alpha) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{q}d\tilde{q}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_q}{2\pi} e^{i\tilde{q}\tilde{r} \cos(\theta_q - \varphi)} \left(\frac{1}{1 + \tilde{q}^2} - \alpha^2 \cos^2 \theta_q \frac{\mathcal{I}(\tilde{q})}{1 + \tilde{q}^2} \right) \end{aligned}$$

où φ est l'angle du vecteur position $\tilde{\mathbf{r}}$ par rapport à la direction du cisaillement \mathbf{e}_x et \tilde{r} son module. En posant $\theta = \theta_q - \varphi$, on met en évidence les corrections des corrélations dans la direction du cisaillement, puis dans celle de la vorticité.

$$\tilde{C}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) = \frac{1}{2\pi} \left(K_0(\tilde{r}) - \alpha^2 \cos^2 \varphi \tilde{C}_x(\tilde{r}) - \alpha^2 \sin^2 \varphi \tilde{C}_y(\tilde{r}) \right) \quad (4.12)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{C}_x(\tilde{r}) &= \int_0^{+\infty} d\tilde{q} \left(\frac{J_1(\tilde{q}\tilde{r})}{\tilde{r}} - \tilde{q}J_2(\tilde{q}\tilde{r}) \right) \frac{\mathcal{I}(\tilde{q})}{1 + \tilde{q}^2} \\ \tilde{C}_y(\tilde{r}) &= \int_0^{+\infty} d\tilde{q} \frac{J_1(\tilde{q}\tilde{r})}{\tilde{r}} \frac{\mathcal{I}(\tilde{q})}{1 + \tilde{q}^2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

J_n sont les fonctions de Bessel de première espèce et K_0 est, de même que dans le chapitre précédent, la fonction de Bessel modifi e de deuxième espèce. Sur la fig. 4.3, les fonctions de corrélation dans la direction du cisaillement, puis dans celle de la vorticité, sont repr sent es pour différents cisaillements correspondant à $\alpha = 0.5; 0.8$ et 1 . Elles sont également compar es aux corrélations à l'équilibre. On constate plusieurs choses.

- Tout d'abord, qu'on considère la direction du cisaillement ou celle de la vorticité, les corrections aux fonctions de corrélation sont du même ordre de grandeur et ne présentent plus de comportement exponentielle à grand \tilde{r} .
- Ensuite, on constate deux corrections oppos es suivant les deux directions. Selon \mathbf{e}_x , les corrélations sont diminu es par le cisaillement tandis que selon \mathbf{e}_y , les corrélations sont renforc es par le cisaillement. Si on supposait que des longueurs de corrélation puissent être définies lorsque le système est cisailé, la longueur de corrélation dans la direction \mathbf{e}_x diminuerait sous l'effet du cisaillement et celle dans la direction \mathbf{e}_y augmenterait.

4.5 Discussion

4.5.1 Quelques précisions à propos de l'expérience sur les interfaces colloïdales.

Les interfaces colloïdales ont fait l'objet d'une publication dans *Science* en 2004 écrite par D. G. A. L. Arts et ses collaborateurs [1] : ils ont observé ces interfaces dans l'espace direct et ont mesuré leurs propriétés à l'équilibre, propriétés en accord avec la théorie capillaire des fluctuations thermiques. Les interfaces colloïdales sous cisaillement ont quant à elles fait l'objet d'un chapitre de la thèse de D. Derks [16].

Ce qu'on nomme « interface colloïdale » est logiquement une interface entre deux fluides colloïdaux. Dans l'expérience, les fluides colloïdaux sont des suspensions de sphères de PMMA (Poly(methyl methacrylate)) de rayon 71 nm et de polymères de polystyrène dont le rayon de giration est de 43 nm dans un solvant, le décaline. La

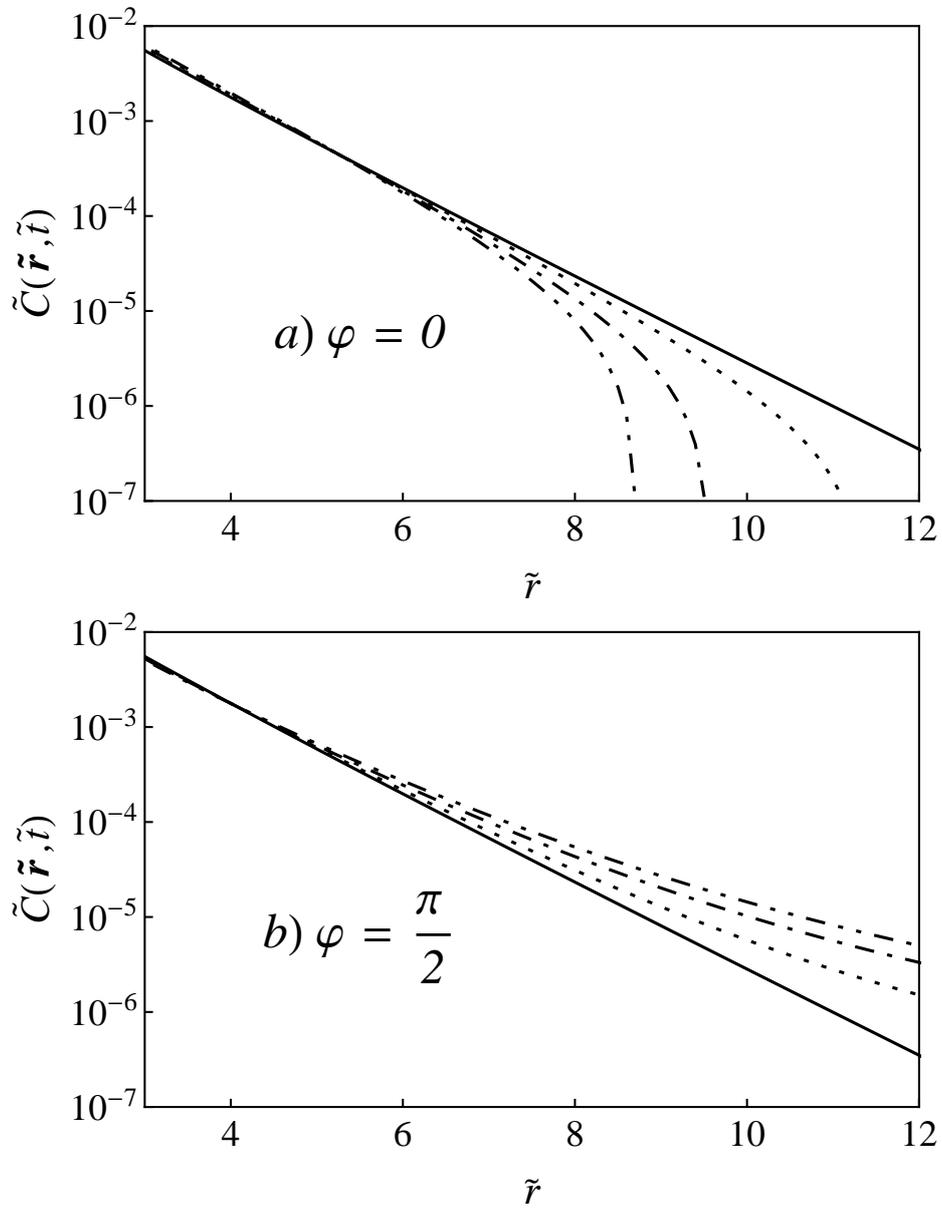


FIGURE 4.3 – Représentation des fonctions de corrélation dans la direction a) du cisaillement b) de la vortacité. La ligne continue correspond à la fonction de corrélation adimensionnée à l'équilibre, la lignée pointillée à $\alpha = 0.5$, les pointillés tiret-point à $\alpha = 0.8$ et ceux tiret-point-point à $\alpha = 1$.

taille des sphères de PMMA revient à les considérer comme des colloïdes. Sous certaines conditions de concentration, le mélange colloïdes-polymères-solvant se sépare en deux phases. Le diagramme de phase d'un tel système dépend des concentrations en colloïdes et en polymères. Les fractions volumiques totales (densité multipliée par le volume moyen d'une particule) utilisées lors des expériences sont de l'ordre de 0.1 pour les colloïdes, et de 0.6 pour les polymères (voir le diagramme de phase de la réf [1]). Le système est alors constitué :

- d'une phase riche en colloïdes et pauvre en polymères, nommée « liquide colloïdal »,
- d'une phase pauvre en colloïdes et riche en polymères, nommée « gaz colloïdal ».

Les interactions ont en effet été ajustées pour que le mélange colloïdes-polymères forme l'équivalent mésoscopique de la transition liquide-gaz des fluides moléculaires [36]. L'expérience a consisté à étudier deux systèmes binaires ainsi formés.

La différence principale avec les interfaces entre fluides moléculaires usuels est l'ordre de grandeur de la tension de surface. L'ordre de grandeur de la tension de surface est donné par le rapport entre l'énergie thermique et la taille caractéristique des particules élémentaires au carré (voir le chapitre 2). La taille caractéristique des colloïdes est ici leur rayon 71 nm ce qui conduit à une tension de surface de 10^{-6} N.m⁻¹. De plus, ce sont les fractions volumiques qui contrôlent l'éloignement du système biphasique au point critique (point qui correspond à une seule phase). La tension de surface est alors un véritable paramètre ajustable, entre 10^{-9} N.m⁻¹ et 10^{-6} N.m⁻¹. Rappelons que la taille des molécules est de l'ordre de quelques angströms, ce qui donne des tensions de surface de 10^{-2} N.m⁻¹ à 10^{-1} N.m⁻¹ à température ambiante pour les liquides moléculaires.

La rugosité de l'interface, due aux fluctuations thermiques, est inversement proportionnelle à la racine carrée de la tension de surface : elle est alors de l'ordre du micron ou d'un dixième de micron. Ainsi, avec des colloïdes fluorescents, il est possible d'étudier les interfaces colloïdales à l'aide de techniques expérimentales optiques. L'expérience est effectuée en pratique à l'aide un microscope confocal ainsi qu'à l'aide d'une cellule de Couette dans la géométrie cône-plan, cellule qui permet de cisailer l'interface. Le déplacement vertical de l'interface est alors déterminé à l'aide d'une régression sur chaque colonne de l'intensité par un profil de Vans der Waals, autrement dit par une tangente hyperbolique (profil représenté sur la fig. 2.3).

Ce montage permet de prendre des photos des interfaces colloïdales, comme l'illustre la fig. 4.4. On observe que le cisaillement diminue les fluctuations interfaciales (mise en évidence par une ligne claire sur la fig. 4.4).

Dans la suite, on compare les mesures de cette expérience avec le modèle analytique présenté dans ce chapitre.

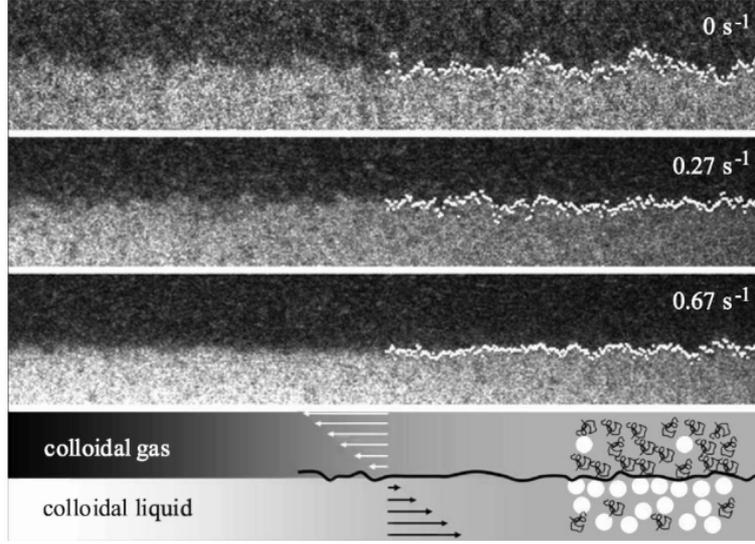


FIGURE 4.4 – Observations des interfaces colloïdales tirées de la réf [17]. En haut à droite sont précisés les taux de cisaillement appliqués $\dot{\gamma}_{\text{app}} = 0, 0.27, 0.67 \text{ s}^{-1}$ pour les 3 photos de haut en bas respectivement.

4.5.2 Comparaison à l'expérience

Déplacement quadratique moyen

L'étude précédente a révélé une diminution de l'amplitude des fluctuations thermiques d'une interface entre deux fluides très visqueux sous l'effet du cisaillement. Cette suppression met en évidence un facteur numérique, qualifié d'universel, $K = 0.084$. L'expérience de D. Derks et de ses collaborateurs [17] sur les interfaces colloïdales a aussi permis de mesurer une diminution des fluctuations thermiques de l'interface. A priori, dans une première approximation, les résultats expérimentaux peuvent être expliqués par le modèle hydrodynamique dérivé dans cette thèse puisque les hypothèses de travail sont vérifiées.

- A l'équilibre, les fluctuations thermiques sont surarmorties. Autrement dit, le nombre de Stokes $St \sim 10^{-7} \ll 1$ est petit.
- Les effets visqueux dominent les effets inertiels, le nombre de Reynolds $Re \sim 10^{-7} \ll 1$ est effectivement petit.
- De plus, les épaisseurs des fluides inférieur $L_1 = 50 \mu\text{m}$ et supérieur $L_2 = 350 \mu\text{m}$ sont importantes devant la longueur capillaire de l'interface $l_c = 2.6 \mu\text{m}$ en ce qui concerne la première série de mesures (échantillon A) et $l_c = 8 \mu\text{m}$ pour la seconde (échantillon B).

Néanmoins, parmi les points expérimentaux, seuls quelques-uns correspondent à la condition $\alpha < 1$. Dans le but d'ajuster les données mesurées à plus grand α , on suppose que la correction quadratique est le développement de la forme valable à

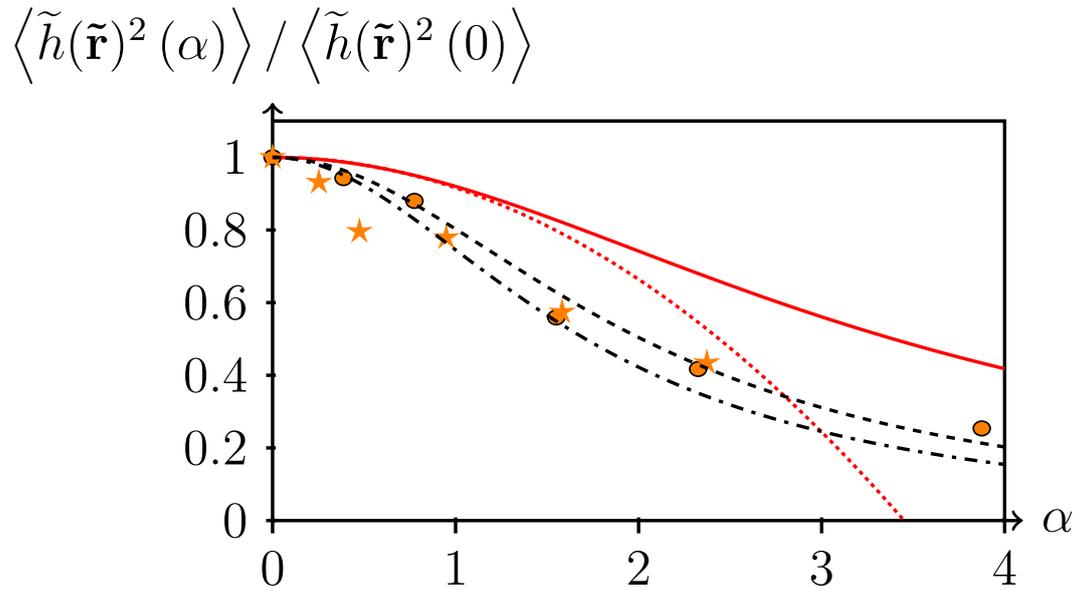


FIGURE 4.5 – Déplacement quadratique moyen adimensionné par sa valeur à l'équilibre en fonction du paramètre de contrôle α . Les disques pleins (échantillon A) et les étoiles (échantillon B) correspondent aux mesures expérimentales [17], les lignes solides et pointillées rouges renvoient aux prédictions théoriques des éq. (4.14) et (4.10) avec $K_{\text{théo}} = 0.084$. La courbe noire constituée de tirets représente l'éq. (4.14) avec $K_{\text{fit}} = 0.246$, et celle noire constituée alternativement de tirets et de points se réfère au modèle proposé par Derks et ses collaborateurs [17].

plus grand cisaillement

$$\langle \tilde{h}^2(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) \rangle (\alpha) = \langle \tilde{h}^2(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) \rangle (0) \frac{1}{1 + K\alpha^2} \quad (4.14)$$

Il s'agit de la forme fonctionnelle la plus simple, potentiellement valable à grand cisaillement. Fondamentalement, on aurait pu choisir n'importe quelle forme fonctionnelle positive à grand cisaillement et dont le développement à petit cisaillement redonne la correction quadratique (4.10). Sur la fig. 4.5, on compare la modification du déplacement quadratique moyen induit par le cisaillement prévue par le modèle hydrodynamique avec les mesures expérimentales. En rouge sont représentées les conclusions du modèle hydrodynamique et en orange, les mesures expérimentales. On représente les données expérimentales avec deux conventions différentes, les points et les étoiles, pour distinguer les mesures sur l'échantillon A (points) des mesures sur l'échantillon B (étoiles).

La première remarque à faire concerne sans doute le fait que les deux séries de mesures expérimentales s'ajustent convenablement le long d'une même courbe lorsque le déplacement quadratique moyen modifié par le cisaillement, divisé par sa valeur à l'équilibre, est tracé en fonction de α . Il semble effectivement que le paramètre de contrôle du cisaillement α mis en évidence par l'analyse hydrodynamique décrive de manière appropriée l'influence de l'écoulement de Couette plan. Seule une mesure expérimentale s'éloigne un peu de la courbe où s'aligne les autres mesures expérimentales : il s'agit de la mesure représenté par la 3^{ème} étoile en partant de la gauche. Le déplacement quadratique moyen mesuré diffère de 16% par rapport à celui qui s'alignerait sur la courbe. Cependant, rappelons que dans cette série de mesures, le déplacement quadratique moyen est de l'ordre de $0.1 \mu\text{m}^2$, qui s'associe à une rugosité de $0.3 \mu\text{m}$. Ainsi, un seul colloïde (rayon de 71 nm) entraîne une variation d'environ 20% de la rugosité. Le décalage d'une seule mesure expérimentale s'explique alors aisément. Ensuite, on observe une diminution du même ordre de grandeur entre l'analyse théorique et les mesures expérimentales.

Néanmoins, il est vrai que si l'on effectue une régression linéaire (toujours effectuée à l'aide de MATHEMATICA 7.0) de la quantité $[\langle \tilde{h}^2 \rangle (0) - \langle \tilde{h}^2 \rangle (\alpha)] / [\langle \tilde{h}^2 \rangle (0)]$ calculée à partir des données expérimentales en fonction de α^2 , on obtient le facteur numérique expérimental $K_{\text{fit}} = 0.246$, soit environ trois fois la valeur attendue. Le modèle hydrodynamique sous-estime environ d'un facteur 3 la suppression de la rugosité interfaciale observée sous l'influence du cisaillement.

Cependant, le modèle hydrodynamique présente quelques ingrédients qui devraient pouvoir le confirmer expérimentalement. L'étude analytique introduit un taux de cisaillement effectif $\dot{\gamma}_{\text{eff}}$ qui diffère du taux de cisaillement appliqué $\dot{\gamma}_{\text{app}}$. Dans la configuration de l'expérience, $\dot{\gamma}_{\text{eff}}/\dot{\gamma}_{\text{app}} \simeq 0.8$. Maintenant, supposons que l'expérience soit rééditée dans les mêmes conditions à l'exception des épaisseurs des fluides qui sont inversées de manière à être $L_1 = 350 \mu\text{m}$ et $L_2 = 50 \mu\text{m}$, alors le rapport $\dot{\gamma}_{\text{eff}}/\dot{\gamma}_{\text{app}} \simeq 1.2$ est modifié : pour un même cisaillement appliqué, α est

augmenté de 50%. La modification du déplacement quadratique moyen qui s'en suit devrait être suffisamment prononcée pour être observée expérimentalement. La mesure de cette modification serait une confirmation du modèle hydrodynamique.

Corrélations spatiales

En plus du déplacement quadratique moyen, les mesures ont porté sur les fonctions de corrélations spatiales. Quelques caractéristiques théoriques sont corroborées par des simulations de dynamique moléculaire [44, 46]. Dans l'espace de Fourier, les deux approches aboutissent au fait que le facteur de structure n'est pas affecté par le cisaillement dans la direction de la vorticité. Dans l'espace réel, elles s'accordent sur la tendance d'une longueur de corrélation décroissante en fonction du cisaillement selon la direction de l'écoulement. Cependant, ce dernier résultat est plutôt en contradiction avec les mesures de Derks et ses collaborateurs : ils observent une longueur de corrélation qui augmente avec le cisaillement. Cette constatation vient de l'ajustement des corrélations spatiales par la même forme fonctionnelle qu'à l'équilibre, soit la deuxième fonction de Bessel modifiée K_0 , ce qui signifie que la remarque concernant le sens d'évolution de la longueur de corrélation provient de mesures à courte distance. Au contraire, comme le souligne la représentation en échelle logarithmique des fonctions de corrélations théoriques, notre conclusion découle des comportements asymptotiques des fonctions de corrélation. A courte distance, les modifications des fonctions de corrélation sous cisaillement sont trop faibles pour être remarquées, au contraire de ce qui est mesuré.

Dans la suite, on établit la liste des points qui peuvent soulever des questions entre l'expérience sur les interfaces colloïdales et la théorie hydrodynamique.

4.5.3 Vérification des hypothèses du modèle hydrodynamique

Echelles de longueur ?

On peut tout d'abord penser que la validité du modèle hydrodynamique pour expliquer les expériences sur les interfaces colloïdales est remise en cause. Le modèle hydrodynamique implique effectivement des séparations d'échelle entre la rugosité ξ_T , la longueur capillaire l_c et les épaisseurs des deux fluides L_j , $\xi_T \ll l_c \ll L_j$ qui ne sont peut-être pas toujours parfaitement vérifiées dans les expériences. L' chantillon A vérifie $\xi_T \sim 1 \mu\text{m} \lesssim l_c = 2,6 \mu\text{m} \ll L_j = 50; 350 \mu\text{m}$. En ce qui concerne l'échantillon B, c'est la seconde séparation d'échelle de longueur qui peut poser problème puisque $\xi_T \sim 0.3 \mu\text{m} \ll l_c = 8 \mu\text{m} \lesssim L_j = 50; 350 \mu\text{m}$. Néanmoins, ces deux séparations d'échelles différentes plus ou moins vérifiées ne semblent pas avoir d'impact puisque les deux séries de mesure s'ajustent sur une même courbe alors que les causes de doute diff erent. De plus, l'échantillon A a été étudié à l'équilibre et est intégralement expliqu e par la théorie capillaire qui utilise déjà l'approximation $\xi_T \ll l_c$.

Pertinence des développements ?

Considérant les décalages entre expériences et modèle hydrodynamique, il nous a paru important de revenir sur la justesse des deux développements effectués précédemment. Le premier développement, aboutissant à l'équation d'évolution temporelle de la configuration de l'interface, suppose petit la norme du gradient de la déformation de l'interface. Il s'agit de la même hypothèse effectuée pour obtenir la relation de dispersion des perturbations de surface à l'équilibre. Dans l'expérience menée par D. Derks et ses collaborateurs, la situation à l'équilibre a naturellement été étudiée au préalable [1] et la théorie des fluctuations thermiques à l'équilibre a permis d'expliquer l'intégralité des observations. Sachant que sous cisaillement, le déplacement quadratique moyen diminue, le développement selon la norme du gradient de la déformation de l'interface n'en est que plus fondé.

Le validité du second développement en α , c'est-à-dire à petit cisaillement, est vérifiée à l'aide de l'étude numérique de l'équation (3.55) présentée dans le chapitre 6.

Tension de surface ?

Ensuite, on a supposé que quel que soit le taux de cisaillement appliqué, l'interface possède une tension de surface σ constante. Cependant, comme on l'a souligné dans le chapitre 2 sur la physique des interfaces, une interface n'est pas infiniment fine mais est une zone de transition continue entre les deux fluides, zone d'épaisseur ϵ très fine. Dans un modèle de champ continu, on rappelle que la tension de surface est directement proportionnelle à la largeur de l'interface ϵ . On peut penser alors que l'écoulement de Couette plan peut influencer sur cette zone de transition, et en particulier sur son épaisseur ϵ . Supposons que ϵ augmente avec le cisaillement alors σ augmente de même avec le cisaillement. Cette augmentation de la tension de surface expliquerait une diminution supplémentaire du déplacement quadratique moyen et l'augmentation de la longueur de corrélation sous cisaillement. Il s'agirait de plus d'une correction isotrope.

Toutefois, conformément aux symétries du problème, on prédit une correction quadratique de la tension de surface à l'ordre le plus bas. Au niveau de la modification du déplacement quadratique moyen de l'interface due au cisaillement, cette correction quadratique affecterait seulement dans un premier temps la rugosité caractéristique de l'équilibre $\sqrt{k_B T / \sigma}$, et non le paramètre de contrôle α .

Glissement à l'interface ?

Lors de la dérivation de l'équation (3.55), on a supposé que les composantes tangentielles de la vitesse étaient continues à travers l'interface. Il s'agit d'une hypothèse couramment utilisée et qui permet dans la grande majorité des cas d'expliquer les données expérimentales. On peut noter, dans le cadre qui nous intéresse, que la théorie des ondes capillaires (qui utilise cette hypothèse) modélise la dynamique des

fluctuations thermiques de l'interface observée [1].

Cependant, le phénomène de glissement des fluides visqueux à la surface des solides est un phénomène connu, auquel on associe la notion de longueur de glissement. La longueur de glissement est le résultat de la vitesse du fluide près du solide, divisée par le taux de cisaillement local. En ce qui concerne les interfaces fluide-fluide, la condition de non-glissement a été peu remise en cause. Récemment, G. Galliero a étudié la validité de cette hypothèse de non glissement à travers une interface fluide, lorsque cette dernière est justement soumise à un cisaillement. Il a effectué des simulations de dynamique moléculaire hors d'équilibre [19]. Il montre que la notion de longueur de glissement peut prendre une signification dans cette situation, autrement dit que le saut de vitesse à l'interface est plus important que celui attendu. Il interprète ces résultats en terme de viscosité apparente de la zone interfaciale, plus faible que les viscosités des fluides en volume. Ce sujet mérite probablement davantage d'études. En particulier, l'article évoqué [19] néglige les fluctuations thermiques de l'interface. Au niveau d'un solide, on sait que le caractère rugueux de la surface a plutôt tendance à supprimer le phénomène de glissement des liquides visqueux.

On peut se demander si la prise en compte d'un glissement à l'interface permet d'expliquer le décalage entre expériences et théorie. Pour que les données expérimentales concordent davantage avec l'expression analytique, il faudrait que les taux de cisaillement appliqués correspondent à des paramètres de contrôle α plus grands. Sachant que les temps et les longueurs capillaires sont mesurés à partir de l'interface à l'équilibre, il faudrait plus précisément que les taux de cisaillement appliqués correspondent à des taux de cisaillement plus grands ressentis par l'interface. Il s'agit de la tendance mise en évidence par G. Galliero, le taux de cisaillement effectivement ressenti par l'interface est plus important que celui attendu. En conclusion, il est peut-être possible d'expliquer le décalage entre théorie et expériences en levant l'hypothèse de non-glissement à l'interface.

Chapitre 5

Stabilité d'une interface cisailée : régime des grands nombres capillaires.

Préambule

Dans les chapitres précédents, nous avons discuté de l'effet du couplage entre cisaillement et viscosité sur les propriétés statistiques de l'interface. Cette étude révèle notamment que le déplacement quadratique moyen diminue avec le cisaillement. Cependant, nous avons négligé jusqu'ici les effets d'inertie. Ces derniers correspondent au terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes et peuvent dans certains cas déstabiliser les écoulements [10]. Cette question est particulièrement pertinente pour une interface colloïdale : en effet, la tension étant extrêmement faible, il est légitime de s'interroger quant à l'éventualité d'instabilités lorsque le taux de cisaillement augmente. Bien que la question de la stabilité des interfaces ait été très étudiée, très peu de travaux spécifiques sont consacrés à la limite des faibles tensions et des fortes viscosités. Or il se trouve que les interfaces colloïdales correspondent précisément à ce régime des grands nombres capillaires.

Dans ce chapitre, on discute d'abord les résultats de la littérature préexistante à notre travail. Ces quelques lignes permettent de souligner la complexité de ce problème. Les deux parties suivantes sont consacrées à l'analyse de stabilité de l'écoulement. Tout d'abord, on dérive la relation de dispersion généralisée. Les critères de stabilité sont ensuite mis en évidence. On finit le chapitre par une discussion des résultats obtenus, en rapport avec les expériences.

5.1 Contexte historique

L'étude des instabilités dans les couches de fluides newtoniens avec une stratification de la viscosité fait l'objet d'une littérature abondante. Dans ce chapitre, nous

limitons la discussion aux écoulements de Couette plan pour des fluides newtoniens dans la limite des petits nombres de Reynolds. Avant de résumer les résultats antérieurs, il est important de préciser qu'un écoulement de Couette plan d'un fluide unique est stable quel que soit le nombre de Reynolds, autrement dit quel que soit le taux de cisaillement appliqué. Ce résultat a été prouvé par Romanov en 1973 [41].

En ce qui concerne les systèmes stratifiés, l'article pionnier traitant des instabilités à petit nombre de Reynolds dans les fluides newtoniens a été publié par Yih en 1967 [50]. Il a montré qu'une bicouche de deux fluides newtoniens d'épaisseur et de viscosité différentes peut développer des instabilités à grande longueur d'onde, même à très petit nombre de Reynolds. En bref, l'écoulement est instable lorsque le fluide de plus faible épaisseur est le plus visqueux. L'analyse a été confirmée par Hooper [21] qui a étudié une bicouche dont l'un des fluides a une épaisseur finie alors que le second a une épaisseur beaucoup plus grande, considérée comme infinie. Le cas de deux fluides semi-infinis a été envisagé par Hooper et Boyd [22]. Dans cette situation, les auteurs montrent qu'une instabilité se développe à petite longueur d'onde au niveau de l'interface entre deux fluides de viscosités différentes. Le mécanisme de cette instabilité a été explicité par Hinch [20] en terme de vorticité.

Les travaux qui ont suivi sont résumés dans deux articles récapitulatifs des instabilités [3, 11] au sein des bicouches de fluides newtoniens soumis à un écoulement de Couette plan. L'article de revue [3] permet de clarifier et de relier entre elles les différentes approches et approximations d velopp es par les auteurs. En effet, bien que le système d'étude soit a priori relativement simple, il en est tout autre en pratique du fait du grand nombre de paramètres indépendants le décrivant. En particulier, ils ont montré que l'instabilité se développant à petite longueur d'onde au niveau d'une interface entre deux fluides visqueux semi-infinis, mise en évidence par Hooper et Boyd [22], n'a lieu que lorsque les effets de tension de surface et de gravité sont petits devant les effets inertiels (les nombres de Weber We et de Froude Fr , rapport entre l'inertie et la tension de surface, puis la gravité respectivement vérifient alors $We, Fr \gg 1$).

Ayant maintenant conscience des travaux antérieurs sur la stabilité des interfaces soumis à un écoulement de Couette plan, les questions abord es dans la suite sont :

1. Existe-t-il un taux de cisaillement critique au delà duquel une instabilité se développe au niveau d'une interface de faible tension (faible nombre de Stokes) ?
2. Sachant qu'en l'absence d'effet stabilisant, une interface entre deux fluides visqueux est d stabilis e par n'importe quel effet d'inertie, aussi petit soit-il, que se passe-t-il en présence d'effets stabilisants ?
 - (a) Les effets stabilisants suppriment-ils l'instabilité à petit nombre de Reynolds ?
 - (b) Faut-il que ces effets stabilisants suppriment l'instabilité à petit nombre de Reynolds, soient supérieurs à une valeur critique ?
 - (c) Dans le cas où l'instabilité à petit nombre de Reynolds est supprim e en

présence des effets stabilisants, existe-t-il un nombre de Reynolds critique au delà duquel les instabilités se développent tout de même ?

5.2 La relation de dispersion généralisée

Préambule

On modélise le système de la même façon que dans les chapitres précédents : une interface caractérisée par sa tension de surface σ sépare deux fluides newtoniens. Une perturbation de l'interface est définie par son déplacement vertical h par rapport au plan horizontal (xOy). Le fluide inférieur 1 occupe le demi-espace $z < h$, et le fluide supérieur 2 le demi-espace $z > h$. Ils sont tous deux supposés incompressibles et immiscibles l'un avec l'autre. Les caractéristiques des fluides telles que la viscosité et la densité sont repérées par l'indice 1 ou 2 respectivement. On définit également la viscosité moyenne $\eta = (\eta_1 + \eta_2)/2$, la densité moyenne $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$, la différence de densité (supposée positive) $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$, la longueur capillaire $l_c = \sqrt{\sigma/(\Delta\rho g)}$, et le temps capillaire $\tau_c = 2\eta l_c/\sigma$. En ce qui concerne l'écoulement de Couette plan, il est créé par la différence de vitesse ΔV des deux parois solides situées de part et d'autre de l'échantillon. Les deux taux de cisaillement dans les deux fluides sont notés $\dot{\gamma}_1$ et $\dot{\gamma}_2$ et l'on définit également $\dot{\gamma}_{\text{eff}} = (\eta_1\dot{\gamma}_1 + \eta_2\dot{\gamma}_2)/(2\eta)$. On rappelle que la continuité des contraintes tangentielles implique l'égalité $\eta_1\dot{\gamma}_1 = \eta_2\dot{\gamma}_2$. La fig. 5.1 présente de façon schématique le système d'étude.

On suppose une perturbation de la forme

$$h(x) = h_k \exp[i(kx - \omega_k t)].$$

Le choix d'une perturbation unidimensionnelle est commenté dans la section 5.2.2. L'écoulement est dit stable ou instable selon que la perturbation s'atténue ou s'amplifie dans le temps. En pratique, on souhaite établir une relation entre la pulsation ω_k et le vecteur d'onde de la perturbation k : cette relation est nommée *relation de dispersion*. On la qualifie de *généralisée* car la perturbation interfaciale est soumise à son propre champ de vitesse qu'elle crée au sein du fluide, mais aussi au champ de vitesse extérieur dû à l'écoulement de Couette. L'atténuation ou l'amplification de la perturbation sinusoïdale sont liées à la partie imaginaire de la pulsation ω_k : si celle-ci est positive, l'écoulement est instable alors que dans le cas contraire, l'écoulement est stable. Dans la suite, on se concentre par conséquent surtout sur la partie imaginaire de ω_k , la partie réelle reliée à la propagation n'étant pas essentielle à notre propos.

Avant d'établir la relation de dispersion généralisée, les hypothèses de travail sont rappelées. La dérivation de la relation de dispersion est constituée de deux étapes. On calcule d'abord quelques propriétés du champ de vitesse. Puis, à partir de ses dérivées, on détermine l'évolution temporelle de la perturbation interfaciale par le

biais des conditions aux limites à l'interface. Finalement, on discute la forme de la relation de dispersion.

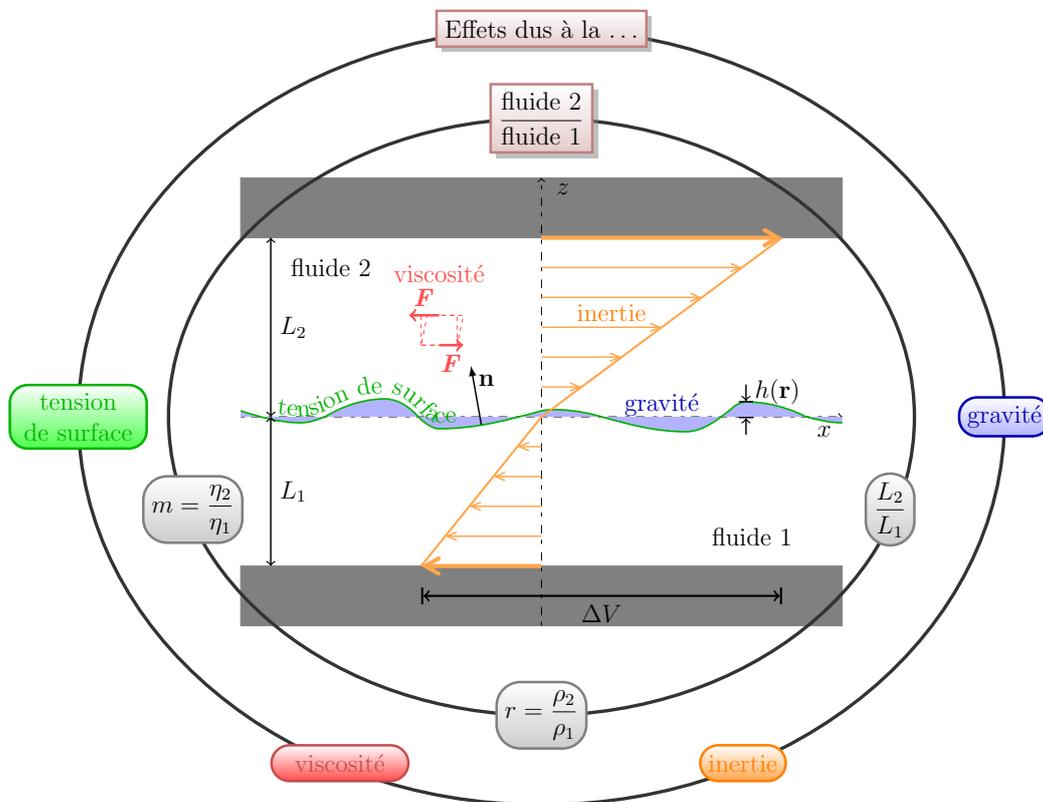


FIGURE 5.1 – Schéma de l'interface avec mise en évidence des paramètres

5.2.1 Hypothèses

Comme on l'a évoqué dans le précédent paragraphe, la difficulté du problème provient du nombre de paramètres indépendants. En effet, on s'attend à ce que les conditions de stabilité dépendent des deux viscosités η_1 et η_2 , des deux densités ρ_1 et ρ_2 , des deux épaisseurs L_1 et L_2 , ainsi que de la tension de surface σ . Notre attention se porte sur les instabilités intrinsèques à l'interface. Autrement dit, nous ne prenons pas en compte les effets de confinement et les épaisseurs des deux couches de fluides n'entrent pas en jeu dans la description du système. Par ailleurs, il est judicieux de caractériser le système à l'aide de nombres sans dimension. Ainsi, on définit :

- le rapport des viscosités $m = \eta_2/\eta_1$,
- le rapport des densités $r = \rho_2/\rho_1$

De plus, il est important de comparer les différents effets physiques que sont :

- l'inertie,
- la viscosité,

- la tension de surface
- et la gravité.

Pour cela, on définit trois nombres sans dimension indépendants. Dans la configuration qui nous intéresse, l'échelle de longueur est fixée par la longueur capillaire l_c . En ce qui concerne les échelles de temps, on a le choix entre le temps capillaire τ_c et l'inverse du taux de cisaillement $\dot{\gamma}_{\text{eff}}^{-1}$. Pour comparer les effets d'inertie et de viscosité, on introduit le nombre de Reynolds que l'on définit à partir du cisaillement comme :

$$Re = \frac{\rho l_c^2 \dot{\gamma}_{\text{eff}}}{\eta}.$$

On peut également définir un deuxième nombre sans dimension à partir du temps capillaire : il s'agit du nombre de Stokes donné par

$$St = 2 \frac{\rho l_c^2}{\eta \tau_c} = \frac{\rho \sigma l_c}{\eta^2}.$$

Finalement, le rapport entre ces deux nombres sans dimension, qui compare les effets d'inertie et de tension de surface, définit le nombre capillaire

$$Ca = \frac{Re}{St} = \frac{\eta l_c \dot{\gamma}_{\text{eff}}}{\sigma} = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{\text{eff}} \tau_c.$$

On pourrait également définir d'autres nombres sans dimension comparant les effets dus à la gravité, comme par exemple le nombre de Bond. Il se trouve que ces nombres peuvent tous être reliés aux quantités définies précédemment, on n'en parle donc pas davantage.

Pour résumer, le système étudié est caractérisé par cinq paramètres reliés entre eux par quatre nombres sans dimension : le rapport des viscosités m , le rapport des densités r , le nombre de Reynolds Re et le nombre de Stokes St (ou le nombre capillaire Ca). Notons que l'on suppose toujours dans la suite que le fluide inférieur est le plus dense (soit $0 \leq r \leq 1$), afin d'exclure toute instabilité de type Rayleigh-Taylor.

5.2.2 Formulation hydrodynamique

Afin d'obtenir la relation de dispersion, nous devons établir au préalable les propriétés du champ de vitesse. En effet, l'évolution temporelle de la perturbation interfaciale est directement reliée au champ de vitesse via les conditions aux limites. Dans un premier temps, on insiste sur les hypothèses propres au champ de vitesse. Ces quelques lignes ont pour but d'éviter toute confusion avec ce qui a été déjà présenté dans les chapitres 2 et 3. L'équation de Orr-Sommerfeld vérifiée par la composante verticale du champ de vitesse est obtenue dans un second temps, ce qui nous permet de formuler à une constante près les vorticités et les dérivées premières du champ de vitesse.

Ingrédients retenus dans les équations hydrodynamiques.

Dans ce chapitre, on suppose les champs de vitesse et de pression bidimensionnels. Cette réduction de dimension est justifiée puisque le théorème de Squire se généralise pour des bicouches de fluide [10, 50] : si une instabilité apparaît, elle apparaît en premier lieu pour des champs bidimensionnels. Ensuite, on néglige ici les fluctuations thermiques de l'interface, ce qui revient à négliger les fluctuations du champ de vitesse. Enfin, on prend en compte dans ce chapitre les effets d'inertie, autrement dit le terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes. Ce dernier est toutefois linéarisé. En effet, les méthodes de réponse linéaire supposent petites les perturbations des champs hydrodynamiques par rapport à l'écoulement de Couette plan.

L'équation de Orr-Sommerfeld vérifiée par le champ de vitesse.

Le champ de vitesse \mathbf{v} vérifie l'équation de Navier-Stokes

$$\rho_j [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = \eta_j \Delta \mathbf{v} - \nabla P \quad (5.1)$$

où $j = 1, 2$ selon que $z < h$ ou $z > h$ respectivement et où le champ $P = p + \rho_j g z$ inclut le champ de pression habituel p ainsi que le terme de gravité $-\rho_j g \mathbf{e}_z$. On nomme dorénavant ce champ P le champ de pression. Cette équation est résolue avec la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

On souhaite connaître la stabilité de l'écoulement de Couette plan défini par le champ de vitesse \mathbf{V}

$$\mathbf{V} = \dot{\gamma}_j z \mathbf{e}_x$$

avec $\dot{\gamma}_j = \dot{\gamma}_1$ si $z < 0$ et $\dot{\gamma}_j = \dot{\gamma}_2$ si $z > 0$, ainsi que par une pression P constante $P = P_0$. L'écoulement de Couette plan est stable ou instable selon qu'une petite perturbation des champs hydrodynamiques s'atténue ou s'amplifie. On écrit alors les champs de vitesse et de pression comme la somme des champs dus à l'écoulement de base avec leurs perturbations,

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \delta \mathbf{v} \quad P = P_0 + \delta p.$$

L'intérêt ne porte pas sur la totalité des champs mais sur les perturbations $\delta \mathbf{v}$ et δp . Les perturbations étant par définition petites, on peut développer le terme non-linéaire dans l'équation de Navier-Stokes. A l'ordre linéarisé, $\delta \mathbf{v}$ et δp sont solutions du système :

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{v} = 0 \quad (5.2a)$$

$$\rho_j (\partial_t \delta \mathbf{v} + \dot{\gamma}_j \delta v_z \mathbf{e}_x + \dot{\gamma}_j z \partial_x \delta \mathbf{v}) = \eta_j \Delta \delta \mathbf{v} - \nabla \delta p \quad (5.2b)$$

avec toujours la même convention pour l'indice j . Considérant une perturbation sinusoïdale de la forme $\delta f(x, z) = \delta f(z) \exp[i(kx - \omega t)]$, les amplitudes vérifient le

système d'équations différentielles :

$$ik\delta v_x + \partial_z \delta v_z = 0 \quad (5.3a)$$

$$-i\omega_k \delta v_x + i\dot{\gamma}_j k z \delta v_x + \dot{\gamma}_j \delta v_z = \nu_j (\partial_z^2 - k^2) \delta v_x - ik \delta p / \rho_j \quad (5.3b)$$

$$-i\omega_k \delta v_z + i\dot{\gamma}_j k z \delta v_z = \nu_j (\partial_z^2 - k^2) \delta v_z - \partial_z \delta p / \rho_j \quad (5.3c)$$

avec $\nu_j = \eta_j / \rho_j$ la viscosité cinématique dans chaque fluide.

- L'équation d'incompressibilité permet d'exprimer la composante horizontale de la vitesse en fonction de sa composante verticale :

$$\delta v_x = (i/k) \partial_z \delta v_z. \quad (5.4a)$$

- En remplaçant δv_x dans la projection selon \mathbf{e}_x de l'équation de Navier-Stokes, on formule δp en fonction de δv_z :

$$\delta p = \frac{\eta_j}{k^2} (\partial_z^2 - k^2) \partial_z \delta v_z + i \frac{\rho_j \dot{\gamma}_j}{k} (1 - z \partial_z) \delta v_z + i \frac{\rho_j \omega_k}{k^2} \partial_z \delta v_z. \quad (5.4b)$$

- Enfin, à l'aide de la dernière équation, projection sur \mathbf{e}_z de l'équation de Navier-Stokes, on obtient l'équation vérifiée par $\delta v_{j,z}$:

$$(\partial_z^2 - k^2)^2 \delta v_z = i \frac{\dot{\gamma}_j}{\nu_j} k z (\partial_z^2 - k^2) \delta v_z - i \frac{\omega_k}{\nu_j} (\partial_z^2 - k^2) \delta v_z. \quad (5.4c)$$

Equations sans dimension : limite des grands nombres capillaires.

Afin de comparer l'importance des différents termes dans la dernière équation, on remplace les quantités physiques par leurs homologues sans dimension. Plus précisément et de manière analogue au chapitre précédent, on pose $\tilde{z} = z/l_c$, $\tilde{k} = kl_c$, $\tilde{\omega} = \omega_k \tau_c$ et $\delta \tilde{v}_z = \delta v_z \times \tau_c / l_c$. On pose également $\zeta = kz = \tilde{k} \tilde{z}$. On obtient alors l'équation suivante pour la composante verticale de la vitesse :

$$(\partial_\zeta^2 - 1)^2 \delta \tilde{v}_z = i \frac{\rho_j \dot{\gamma}_j l_c^2}{\eta_j k^2} \tilde{k} \tilde{z} (\partial_\zeta^2 - 1) \delta \tilde{v}_z - i \frac{\rho_j \sigma l_c}{2\eta_j \eta k^2} \tilde{\omega} (\partial_\zeta^2 - 1) \delta \tilde{v}_z \quad (5.5)$$

On reconnaît les nombres sans dimension qui comparent la viscosité avec l'inertie Re , puis avec la tension de surface St ,

$$\mathcal{L}^2 \delta \tilde{v}_z = \frac{i}{\tilde{k}^2} (\varrho_j Re \zeta - \varsigma_j St \tilde{\omega}) \mathcal{L} \delta \tilde{v}_z \quad (5.6)$$

où \mathcal{L} est l'opérateur linéaire $\partial_\zeta^2 - 1$. ϱ_j et ς_j sont des facteurs numériques d'ordre 1 qui dépendent des propriétés des deux fluides : $\varrho_1 = (1+m)^2 / (2(1+r))$ et $\varrho_2 = (r/m^2) \varrho_1$, puis $\varsigma_1 = (1+m) / (2(1+r))$ et $\varsigma_2 = (r/m) \varsigma_1$.

L'équation (5.6) est une forme de l'équation de Orr-Sommerfeld, bien connue dans le contexte des interfaces cisillées. Avant d'appliquer les hypothèses discutées précédemment, les rôles joués par les nombres de Reynolds Re et de Stokes St doivent être distingués.

- D'une part, le nombre de Stokes St régit la relation de dispersion sans écoulement appliqué ($\dot{\gamma}_{\text{eff}} = 0$) : prendre ce terme en compte aboutit à une expression générale de la relation de dispersion valable alors aussi bien dans le régime surarmorti que dans le régime propagatif des perturbations interfaciales.
- D'autre part, le nombre de Reynolds Re , proportionnel au taux de cisaillement, décrit l'advection des perturbations par l'écoulement de base.

Le but est de décrire cette seconde contribution ce qui implique que le premier terme de la partie droite de l'équation (5.6) est pris en compte. Au contraire, on néglige le second terme de la partie droite de l'équation puisqu'on suppose la perturbation surarmortie sans écoulement extérieur. Autrement dit, comme on l'a souligné dans le paragraphe précédent, on suppose $St \ll 1$. Plus précisément, on suppose $St \ll Re$ ce qui revient à $Ca \gg 1$. Un grand nombre capillaire correspond effectivement à une petite tension de surface et une grande viscosité. En pratique, cela revient à négliger le terme $\partial_t \delta \tilde{\mathbf{v}}$ par rapport au terme de convection $(\delta \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \delta \tilde{\mathbf{v}}$. Dans cette limite, les champs de vitesse et de pression vérifient les équations :

$$\delta \tilde{v}_x = i \partial_\zeta \delta \tilde{v}_z \quad (5.7a)$$

$$\delta \tilde{p} = \tilde{k} \mathcal{L} \partial_\zeta \delta \tilde{v}_z + i \tilde{k} Re_j (1 - \zeta \partial_\zeta) \delta \tilde{v}_z \quad (5.7b)$$

$$\mathcal{L}^2 \delta \tilde{v}_z = i Re_j \zeta \mathcal{L} \delta \tilde{v}_z \quad (5.7c)$$

où l'homologue sans dimension $\delta \tilde{p}$ de la pression est défini par $\delta \tilde{p} = (\tau_c / \eta_j) \delta p$. On introduit les nombres de Reynolds des deux fluides $Re_j = \rho_j \dot{\gamma}_j / (\eta_j k^2)$ afin que la résolution suivante s'exprime plus aisément.

Expressions des vorticités et des dérivées premières

L'équation de Orr-Sommerfeld vérifiée par la vitesse étant maintenant obtenue, on la résout afin d'obtenir quelques propriétés du champ de vitesse. On remarque que $\delta \tilde{v}_z$ n'apparaît dans l'équation que par l'intermédiaire de $\mathcal{L} \delta \tilde{v}_z$. Il s'agit en fait de la vortacité : on note $\tilde{w} = \mathcal{L} \delta \tilde{v}_z$ qui vérifie donc $\mathcal{L} \tilde{w}(\zeta) = i Re_j \zeta \tilde{w}(\zeta)$. Les vorticités \tilde{w} s'écrivent alors comme des combinaisons de fonctions d'Airy. On applique directement que les perturbations des champs hydrodynamiques sont négligeables au niveau des parois. Ceci revient aux conditions aux limites en l'infini suivantes : $\lim_{z \rightarrow -\infty} \tilde{w} = 0$ et $\lim_{z \rightarrow +\infty} \tilde{w} = 0$. Les vorticités s'expriment alors par :

$$\tilde{w}(\zeta) = \begin{cases} C_1 \text{Ai}(e^{5i\pi/6} Re_1^{1/3} \zeta + e^{i\pi/3} Re_1^{-2/3}) & \text{pour } \zeta < h \\ C_2 \text{Ai}(e^{i\pi/6} Re_2^{1/3} \zeta + e^{-i\pi/3} Re_2^{-2/3}) & \text{pour } \zeta > h \end{cases} \quad (5.8)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration qui se déterminent à l'aide des conditions aux limites vérifiées à l'interface. La fig. 5.2 représente la vortacité par une échelle de couleurs, pour un système donné et une déformation interfaciale fixée. On constate qu'effectivement les perturbations sont concentrées près de l'interface. De plus, les vorticités positives alternent avec des vorticités négatives régulièrement.

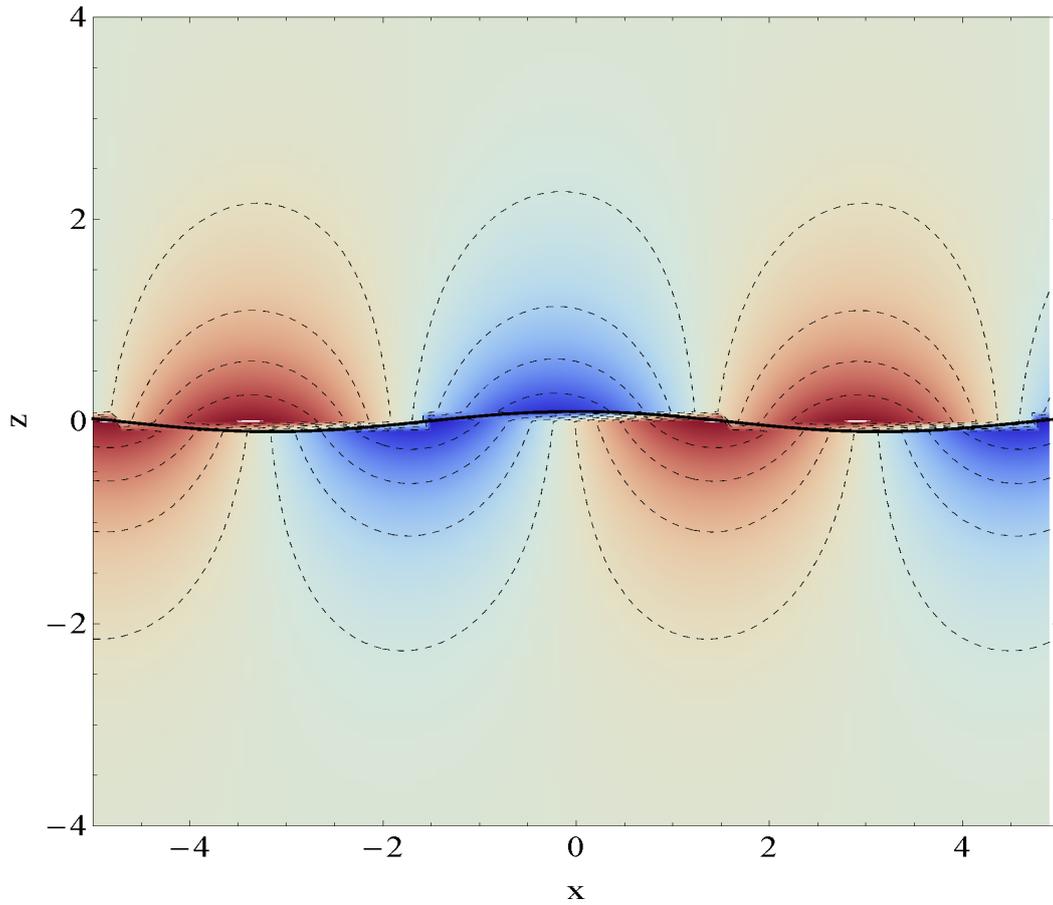


FIGURE 5.2 – Représentation schématique de la vorticité pour $r = 0.5$, $m = 0.75$, $St = 0.1$, $\dot{\gamma}_{\text{eff}} = \tau_c^{-1}$ et $\tilde{k} = 1$. Le rouge correspond à une vorticité positive tandis que le bleu correspond à une vorticité négative. En pointillés, quelques isocontours sont représentées.

Une vorticité positive signifie que l'écoulement induit une rotation des particules de fluide dans le sens trigonométrique. Au contraire, une vorticité négative revient à une rotation des particules de fluide dans le sens horaire.

Pour obtenir l'expression des dérivées premières de la composante verticale de la vitesse, on intègre les deux résultats précédents (5.8) sur la vorticité. Cette intégration peut s'effectuer de manière à n'introduire aucune constante d'intégration supplémentaire. Il suffit à nouveau de supposer directement que les perturbations sont négligeables au niveau des parois solides. Dans le fluide 1, on pose $\alpha_{1,-}(\zeta)e^{-\zeta} = (\partial_\zeta - 1)\delta\tilde{v}_z$ et dans le fluide 2, $\alpha_{2,+}(\zeta)e^\zeta = (\partial_\zeta + 1)\delta\tilde{v}_z$. Les fonctions $\alpha_{1,-}$ et $\alpha_{2,+}$ vérifient alors les équations différentielles suivantes

$$\partial_\zeta \alpha_{1,-} = C_1 e^\zeta \text{Ai}(e^{5i\pi/6} Re_1^{1/3} \zeta + e^{i\pi/3} Re_1^{-2/3}) \quad (5.9a)$$

$$\partial_\zeta \alpha_{2,+} = C_2 e^{-\zeta} \text{Ai}(e^{i\pi/6} Re_2^{1/3} \zeta + e^{-i\pi/3} Re_2^{-2/3}) \quad (5.9b)$$

qui, une fois intégrées, donnent :

$$(\partial_\zeta - 1)\delta\tilde{v}_z = C_1 e^{-\zeta} \int_{-\infty}^{\zeta} ds e^s \text{Ai}(e^{5i\pi/6} Re_1^{1/3} s + e^{i\pi/3} Re_1^{-2/3}) \quad \text{pour } \zeta < h \quad (5.10a)$$

$$(\partial_\zeta + 1)\delta\tilde{v}_z = -C_2 e^\zeta \int_{\zeta}^{+\infty} ds e^{-s} \text{Ai}(e^{i\pi/6} Re_2^{1/3} s + e^{-i\pi/3} Re_2^{-2/3}) \quad \text{pour } \zeta > h \quad (5.10b)$$

après la prise en compte des conditions limites en $z = -\infty$ dans la première équation et $z = +\infty$ dans la seconde équation.

On pourrait à nouveau intégrer les équations précédentes afin d'obtenir $\delta\tilde{v}_z$. Cependant, notre but est d'obtenir les seules informations nécessaires à l'établissement de l'équation d'évolution temporelle de l'interface, et non d'obtenir l'intégralité du champ de vitesse. On dérive l'équation d'évolution des perturbations interfaciales avec la prise en compte des conditions limites en $z = h$. Une des conditions limites traduit notamment l'immiscibilité des deux fluides au niveau de l'interface. Cette condition revient à l'égalité des composantes normales des vitesses à l'interface avec la composante normale de la vitesse de l'interface. Dans le cadre de la réponse linéaire, elle s'écrit $\partial_t h(x, t) = \delta v_z(x, 0, t)$. Peu importe que l'on suppose le champ de vitesse étant celui du fluide 1 ou du fluide 2, la condition reste identique. Au lieu d'intégrer les dérivées du champ vitesse pour obtenir le champ de vitesse en $z = 0$, on utilise simplement cette égalité qui permet de réduire la longueur et la complexité des calculs. Cette relation permet en effet de manipuler un nombre limité de constantes par rapport à la méthode générale.

5.2.3 Dérivation de la relation de dispersion

Expression des conditions limites

Afin d'établir la relation de dispersion généralisée, il est maintenant nécessaire de relier les champs hydrodynamiques à la perturbation interfaciale. Pour cela, on

considère les conditions aux limites au niveau de l'interface. Elles sont de deux types : continuité de la vitesse

$$\lim_{\substack{z > h \\ z \rightarrow h}} \mathbf{v}(z) = \lim_{\substack{z < h \\ z \rightarrow h}} \mathbf{v}(z) \quad (5.11a)$$

et équilibre des contraintes

$$\mathbb{T}_1(h) \cdot \mathbf{n} - \mathbb{T}_2(h) \cdot \mathbf{n} = -\sigma(\nabla \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \quad (5.11b)$$

Le tenseur des contraintes dans le fluide j \mathbb{T}_j représente ici le tenseur habituel des contraintes visqueuses $T_{j,\mu\nu} = -p\delta_{\mu,\nu} + \eta_j(\partial_\mu v_\nu + \partial_\nu v_\mu)$ où $\mu, \nu = x, z$. Le vecteur normal unitaire à l'interface \mathbf{n} en dimension 2 est, à l'ordre le plus bas, $\mathbf{n} = (-\partial_x h, 1)$. On développe au premier ordre en $\partial_x h$ les conditions limites puisqu'on s'est placé dans l'approximation des faibles gradients

$$\dot{\gamma}_1 h + \delta v_x|_{0-} = \dot{\gamma}_2 h + \delta v_x|_{0+} \quad (5.12a)$$

$$\partial_t h = \delta v_z|_{0-} = \delta v_z|_{0+} \quad (5.12b)$$

$$\eta_1(\partial_x \delta v_z|_{0-} + \partial_z \delta v_x|_{0-}) = \eta_2(\partial_x \delta v_z|_{0+} + \partial_z \delta v_x|_{0+}) \quad (5.12c)$$

$$\sigma \partial_x^2 h - \Delta \rho g h = -\delta p|_{0-} + 2\eta_1 \partial_z \delta v_z|_{0-} - (-\delta p|_{0+} + 2\eta_2 \partial_z \delta v_z|_{0+}) \quad (5.12d)$$

où les indices 0– et 0+ signifient que les quantités sont les limites lorsque z tend vers 0, soit par valeurs inférieures, soit par valeurs supérieures (c'est-à-dire lorsque le champ de vitesse est celui du fluide 1, ou du fluide 2 respectivement). Suivant la dérivation du champ de vitesse, on remplace la perturbation $h(x, t) = h_k \exp[i(kx - \omega_k t)]$, les champs de vitesse et de pression par leurs homologues sans dimension. On note $\tilde{h} = h_k/l_c$. Ensuite, pour relier les constantes C_1 et C_2 introduites par le champ de vitesse à la perturbation \tilde{h} ,

- on remplace $\delta \tilde{v}_x$ et $\delta \tilde{p}$ par leur expression en fonction de $\delta \tilde{v}_z$,
- puis on met en évidence $\mathcal{L}\delta \tilde{v}_z$, $(\partial_\zeta - 1)\delta \tilde{v}_z$ et $(\partial_\zeta + 1)\delta \tilde{v}_z$
- et enfin, on remplace les vitesses en $z = 0$ par la dérivée temporelle de la déformation de l'interface.

Les équations se réécrivent :

$$i(\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2)\tau_c \tilde{h} + 2i\tilde{\omega}\tilde{h} = (\partial_\zeta - 1)\delta \tilde{v}_z|_{0-} - (\partial_\zeta + 1)\delta \tilde{v}_z|_{0+} \quad (5.13a)$$

$$2i(1 - m)\tilde{\omega}\tilde{h} = \mathcal{L}\delta \tilde{v}_z|_{0-} - m\mathcal{L}\delta \tilde{v}_z|_{0+} \quad (5.13b)$$

$$\begin{aligned} -2\frac{1+\tilde{k}^2}{2\tilde{k}}\tilde{h} + 2i\tilde{\omega}\tilde{h} &= -\frac{1}{(1+m)}(\partial_\zeta \mathcal{L}\delta \tilde{v}_z|_{0-} - 2(\partial_\zeta - 1)\delta \tilde{v}_z|_{0-}) \\ + \frac{\tilde{k}e_1 - mRe_2}{1+m}\tilde{\omega}\tilde{h} &= +\frac{m}{(1+m)}(\partial_\zeta \mathcal{L}\delta \tilde{v}_z|_{0+} - 2(\partial_\zeta + 1)\delta \tilde{v}_z|_{0+}) \end{aligned} \quad (5.13c)$$

Expression de la relation de dispersion

Dans le souci d'être concis, on introduit les deux fonctions $G_\alpha(x)$ et $G_\beta(x)$

$$G_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} ds e^{-s} \frac{\text{Ai}(e^{i\pi/6} x^{1/3} s + e^{-i\pi/3} x^{-2/3})}{\text{Ai}(e^{-i\pi/3} x^{-2/3})} \quad (5.14)$$

$$G_\beta(x) = 2G_\alpha(x) + \frac{e^{i\pi/6} x^{1/3} \text{Ai}'(e^{-i\pi/3} x^{-2/3})}{\text{Ai}(e^{-i\pi/3} x^{-2/3})} \quad (5.15)$$

Les dérivées du champ de vitesse dans le fluide 2 s'expriment alors de manière intelligible si on pose $C_2 = C_2 \text{Ai}(e^{-i\pi/3} Re_2^{-2/3})$

$$\begin{aligned} (\partial_\zeta + 1)\delta\tilde{v}_z|_{0+} &= -C_2 G_\alpha(Re_2) & \mathcal{L}\delta\tilde{v}_z|_{0+} &= C_2 \\ \partial_\zeta \mathcal{L}\delta\tilde{v}_z|_{0+} &= C_2 (G_\beta(Re_2) - 2G_\alpha(Re_2)) \end{aligned} \quad (5.16)$$

En sachant que $\text{Ai}(u^*) = \text{Ai}^*(u)$, on exprime également les dérivées du champ de vitesse du fluide 1 en fonction de G_α et G_β . De manière analogue au changement de variable de C_2 , on pose $C_1 = C_1 \text{Ai}(e^{i\pi/3} Re_1^{-2/3})$:

$$\begin{aligned} (\partial_\zeta - 1)\delta\tilde{v}_z|_{0-} &= C_1 G_\alpha^*(Re_1) & \mathcal{L}\delta\tilde{v}_z|_{0-} &= C_1 \\ \partial_\zeta \mathcal{L}\delta\tilde{v}_z|_{0-} &= C_1 (2G_\alpha^*(Re_1) - G_\beta^*(Re_1)) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Les conditions limites s'expriment alors simplement sous la forme d'un système de trois équations à trois inconnues. Pour que les trois inconnues, dont la déformation de l'interface, puissent être non nulles, il est nécessaire que le déterminant soit nul. Cette condition définit la relation de dispersion généralisée de la déformation de l'interface. Avec les quantités physiques, la relation de dispersion s'écrit

$$i\omega_k = i\omega_k^{(0)} F_\sigma(r, m, Re_k) - \dot{\gamma}_{\text{eff}} F_\gamma(r, m, Re_k). \quad (5.18)$$

$i\omega_k^{(0)} = \sigma(k^2 + l_c^{-2})/(4\eta k)$ est le taux de relaxation de la perturbation sans écoulement extérieur appliqué. On constate que la relation de dispersion généralisée est constituée de deux termes, le premier proportionnel au taux de relaxation à l'équilibre et le second proportionnel au taux de cisaillement. Pour insister sur cette double contribution, on a défini

$$F_\sigma(Re_k, m, r) = \left(1 + i \frac{(r/m-1)(1+m)}{4(1+r)} Re_k - \frac{m}{1+m} \frac{G_\beta(\frac{r(1+m)^2}{2m^2(1+r)} Re_k) + G_\beta^*(\frac{(1+m)^2}{2(1+r)} Re_k)}{G_\alpha(\frac{r(1+m)^2}{2m^2(1+r)} Re_k) + mG_\alpha^*(\frac{(1+m)^2}{2(1+r)} Re_k)} \right)^{-1} \\ - \frac{1-m}{1+m} \frac{G_\beta^*(\frac{(1+m)^2}{2(1+r)} Re_k) G_\alpha(\frac{r(1+m)^2}{2m^2(1+r)} Re_k) - mG_\beta(\frac{r(1+m)^2}{2m^2(1+r)} Re_k) G_\alpha^*(\frac{(1+m)^2}{2(1+r)} Re_k)}{G_\alpha(\frac{r(1+m)^2}{2m^2(1+r)} Re_k) + mG_\alpha^*(\frac{(1+m)^2}{2(1+r)} Re_k)} \quad (5.19a)$$

$$F_\gamma(Re_k, m, r) = i \frac{1-m}{4} \times \frac{G_\beta(\frac{r(1+m)^2}{2m^2(1+r)} Re_k) + G_\beta^*(\frac{(1+m)^2}{2(1+r)} Re_k)}{G_\alpha(\frac{r(1+m)^2}{2m^2(1+r)} Re_k) + mG_\alpha^*(\frac{(1+m)^2}{2(1+r)} Re_k)} F_\sigma(Re_k, m, r) \quad (5.19b)$$

où on a posé $Re_k = \rho \dot{\gamma}_{\text{eff}} / (\eta k^2)$.

5.3 Critères d'instabilité

L'étude de la stabilité de l'écoulement de Couette plan dans une bicouche de fluides newtoniens ne nécessite pas de connaître l'intégralité de la relation de dispersion, elle exige seulement la connaissance de sa partie imaginaire. On décompose ω_k selon $\omega_k = \Omega_k - i\gamma_k$ avec

- Ω_k la partie réelle de ω_k , liée à la propagation le long de l'interface de la perturbation,
- et $-\gamma_k$ sa partie imaginaire, liée à l'atténuation ou l'amplification de la perturbation.

Avec les conventions choisies, si $\gamma_k > 0$ alors les déformations de l'interface sont amorties dans le temps et l'écoulement est stable. Au contraire, si $\gamma_k < 0$ alors les déformations de l'interface sont amplifiées et l'écoulement est instable. En l'absence de cisaillement, $\gamma_k = \gamma_k^{(0)} = \sigma(k^2 + l_c^{-2})/(4\eta k)$ qui naturellement est positif. Dans la suite, on se préoccupe seulement de la stabilité de l'écoulement donc de la relation

$$\gamma_k = \gamma_k^{(0)} \mathcal{R}(F_\sigma) - \dot{\gamma}_{\text{eff}} \mathcal{R}(F_\dot{\gamma}). \quad (5.20)$$

Le taux de relaxation ci-dessus souligne à nouveau la contribution de deux termes.

- Le premier terme $\gamma_k^{(0)} \mathcal{R}(F_\sigma)$ est proportionnel au taux de relaxation sans écoulement ($\dot{\gamma}_{\text{eff}} = 0$), on le note Γ_s .
- Le second terme $-\dot{\gamma}_{\text{eff}} \mathcal{R}(F_\dot{\gamma})$, noté Γ_d , disparaît avec la stratification de la viscosité.

$$\gamma_k = \Gamma_s + \Gamma_d \quad (5.21)$$

Limite lorsque $Re_k \rightarrow 0$

Avant de mettre en évidence les critères d'instabilité de l'écoulement, la première étape est de vérifier la cohérence de l'expression du taux de relaxation. On peut par exemple vérifier que quand le taux de cisaillement tend vers 0, autrement dit quand l'écoulement extérieur disparaît, le taux de relaxation γ_k tend vers $\gamma_k^{(0)}$. Cette limite correspond à $Re_k \rightarrow 0$ à k fixé. Les fonctions $\mathcal{R}(F_\sigma)$ et $\mathcal{R}(F_\dot{\gamma})$ font intervenir G_α et G_β . On commence donc par calculer les limites de $G_\alpha(x)$ et $G_\beta(x)$ à petit x . Pour un résumé complet des propriétés des fonctions d'Airy, on peut se reporter à la réf. [2]. D'après la section 10 de cette référence, on a à petit x :

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{2} - \frac{i}{8}x - \frac{9}{64}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

On peut procéder de même avec la fonction G_β .

$$G_\beta(x) = -\frac{i}{2}x - \frac{7}{16}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

Ainsi, le taux de relaxation à petit Re_k devient

$$\begin{aligned} \gamma_k = & \frac{\sigma(k^2 + l_c^{-2})}{4\eta k} \times \left(1 - \frac{(1+m)^2(m^3(23+5m) - 28m^2r + r^2(5+23m))}{64m^3(1+r)^2} Re_k^2 \right) \\ & - \dot{\gamma}_{\text{eff}} \frac{(m^2-1)(m^2-r)}{8m^2(1+r)} Re_k \end{aligned} \quad (5.22)$$

Premièrement, on retrouve bien qu'en l'absence de cisaillement, lorsque $Re_k \rightarrow 0$ à k fixé, le taux de relaxation γ_k se réduit au taux de relaxation en l'absence d'écoulement extérieur $\sigma(k^2 + l_c^{-2})/(4\eta k)$. Deuxièmement, on peut remarquer que le second ordre non nul du développement en Re_k est quadratique par rapport au taux de cisaillement $\dot{\gamma}_{\text{eff}}$, et ceci qu'il s'agisse du second terme du développement de Γ_s en Re_k^2 ou du développement de Γ_d en $\dot{\gamma}_{\text{eff}} \times Re_k$. Cette correction quadratique à petit cisaillement est conforme aux symétries du système. Que le système soit cisailé de la droite vers la gauche ou de la gauche vers la droite, il s'agit de la même situation physique.

Limite lorsque $Re_k \rightarrow +\infty$

La relation précédente, lue avec inattention, peut conduire à penser qu'une instabilité se développe aussi petit que soit le cisaillement, pourvu que la longueur d'onde de la perturbation soit assez grande. Il faut cependant rappeler que le développement précédent n'est pas un développement à petit cisaillement, mais un développement à petit Re_k . Ainsi, considérer le cas des grandes longueurs d'onde signifie un développement à grand Re_k . Pour obtenir le développement du taux de relaxation à grands Re_k , on procède comme dans le paragraphe précédent : on commence par développer $G_\alpha(x)$ et $G_\beta(x)$ à grand x avec l'aide de [2] avant de calculer les comportements asymptotiques de $\mathcal{R}(F_\sigma)$ et $\mathcal{R}(F_\dot{\gamma})$. On sait que $\text{Ai}(z) = \text{Ai}(z_0)(1 + \mathcal{O}(z - z_0))$, il s'en suit que

$$G_\alpha(x) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}\Gamma(2/3)}{3^{1/3}}x^{-1/3} + \mathcal{O}(x^{-2/3})$$

et

$$G_\beta(x) = -\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}3^{1/3}\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)}x^{1/3} + \mathcal{O}(x^{-1/3})$$

en développant la fonction d'Airy et sa dérivée au premier terme non nul autour de $z_0 = 0$. Dans les expressions ci-dessus, la fonction Γ est la fonction habituelle $\Gamma(z) = \int_{\mathbb{R}^+} dt t^{z-1} e^{-t}$.

En ce qui concerne le développement même du taux de relaxation, il est nécessaire de distinguer deux cas, le terme prédominant du dénominateur $i((r/m - 1)(1 + m))/(4(1+r))Re_k$ étant proportionnel à $r - m$. Considérons d'abord le cas général

lorsque $r \neq m$, alors le taux de relaxation tend vers

$$\begin{aligned} \gamma_k = \gamma_k^{(0)} \frac{2^{10/3} 3^{2/3}}{\Gamma(1/3)} \times \frac{1}{Re_k^{4/3}} \times \frac{rm^2(1+r)^{4/3} \left(\frac{r}{2} + \frac{r^{2/3}}{m^{1/3}} + \frac{r^{4/3}}{m^{2/3}} + \frac{r}{2m} \right)}{(r-m)^2(1+m)^{5/3} \left(r^2 + \frac{r^{5/3}}{m^{1/3}} + \frac{r^{4/3}}{m^{2/3}} \right)} \\ - \dot{\gamma}_{\text{eff}} \frac{3^{2/3}}{2^{2/3} \Gamma(1/3)} \times \frac{1-m}{m-r} \times \frac{1}{Re_k^{1/3}} \times \\ \frac{r^{1/3}(1+r)^{1/3}(1+m)^{1/3} \left(\frac{r}{2} + \frac{r^{2/3}}{m^{1/3}} + \frac{r^{4/3}}{m^{2/3}} + \frac{r}{2m} \right)}{\left(r^2 + \frac{r^{5/3}}{m^{1/3}} + \frac{r^{4/3}}{m^{2/3}} \right)} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Etablissons maintenant le comportement asymptotique du taux de relaxation lorsque $r = m$, ce qui suppose $m < 1$. Le taux de relaxation est exprimé en fonction de Re_k et m

$$\begin{aligned} \gamma_k = \gamma_k^{(0)} \left(\frac{\Gamma(1/3)}{2^{1/3} 3^{2/3}} \frac{(1+m)^{1/3}(1+m^{1/3})}{m^{1/3}} \frac{1}{Re_k^{2/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Re_k}\right) \right) \\ - \dot{\gamma}_{\text{eff}} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} (m-1)^2 \frac{(1+m)^{2/3} \Gamma(2/3)}{4m^{4/3}} \frac{1}{Re_k^{1/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Re_k^{2/3}}\right) \right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Résumé des développements

Dans l'optique de déterminer facilement quelle contribution prédomine au sein du taux de relaxation, puis si cette contribution dominante conduit à une instabilité, seuls deux points nous intéressent en pratique. Tout d'abord, on souhaite savoir dans chaque limite quel terme prédomine entre Γ_s et Γ_d , ce qui est donné par la puissance de Re_k . Ensuite, on souhaite savoir si ce terme prédominant conduit à un écoulement stable ou à un écoulement instable, ce qui est donné par son signe. On insiste donc dans chaque cas seulement sur le signe des contributions ainsi que sur la puissance de Re_k .

- Lorsque Re_k est petit, ce qui signifie cisaillement petit ou petite longueur d'onde,

$$\mathcal{R}[F_\sigma(r, m, Re_k)] = 1 \quad \mathcal{R}[F_\gamma(r, m, Re_k)] \propto (m-1)(m^2-r)Re_k \quad (5.25a)$$

- Lorsque $Re_k \gg 1$, selon que $r \neq m$ ou $r = m$,

	$r \neq m$	$r = m$	
$\mathcal{R}[F_\sigma(r, m, Re_k)]$	$\propto \frac{1}{(r-m)^2} Re_k^{-4/3}$	$\propto Re_k^{-2/3}$	(5.25b)
$\mathcal{R}[F_\gamma(r, m, Re_k, m)]$	$\propto \frac{1-m}{m-r} Re_k^{-1/3}$	$\propto (1-m)^2 Re_k^{-1/3}$	

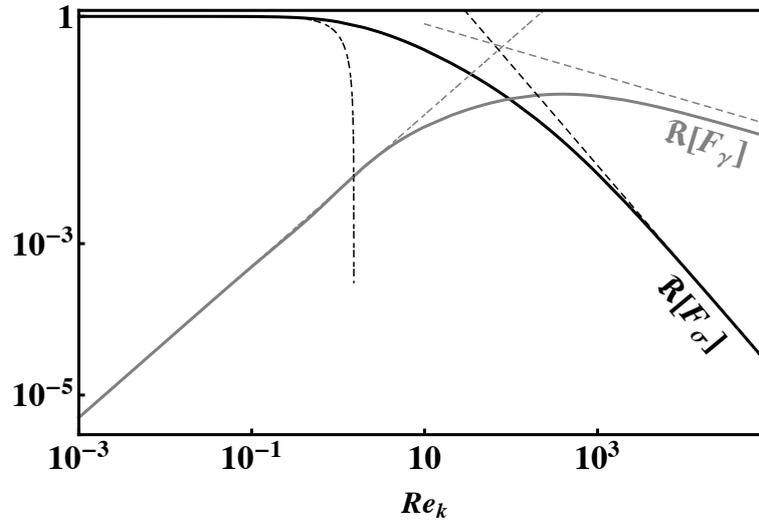


FIGURE 5.3 – Représentations des deux fonctions $\mathcal{R}(F_\sigma(Re_k, m, r))$ en noir et $\mathcal{R}(F_\gamma(Re_k, m, r))$ en gris pour $r = 0.55$ et $m = 0.7$ en fonction du nombre de Reynolds Re_k . Les courbes en tirets et pointillés représentent leur limite lorsque $Re_k \rightarrow 0$ avec le même code couleur et celles en tirets leur limite lorsque $Re_k \rightarrow +\infty$.

Finalement,

- la première contribution Γ_s est toujours positive : elle stabilise l'écoulement quel que soit le taux de cisaillement d'où l'indice « s ». Le cisaillement a pour effet de ramollir les modes, les temps de vie des perturbations sont de plus en plus longs avec le cisaillement. Cette augmentation du temps de relaxation des perturbations est d'autant plus prononcée que la longueur d'onde est grande.
- Au contraire, le signe de la seconde contribution Γ_d dépend des propriétés des deux fluides : elle est potentiellement déstabilisante d'où l'indice « d ». Son influence augmente avec le cisaillement. Cette contribution peut rendre perplexe car même si elle est déstabilisante, son existence est due à la stratification en viscosité alors qu'on perçoit généralement la viscosité comme un effet exclusivement stabilisant.

Organisation de la section

Le taux de relaxation a été établi en fonction des propriétés des deux fluides et du cisaillement. L'étude de stabilité nécessite maintenant de déterminer

- si à grand cisaillement, le taux de relaxation des perturbations interfaciales est négatif, ce qui traduit le caractère instable de l'écoulement de Couette,
- si l'écoulement de Couette est effectivement instable à grand cisaillement, l'étude se poursuit par la recherche du taux de cisaillement critique : si le taux de cisaillement y est inférieur, l'écoulement est stable tandis que si le taux de cisaillement y est supérieur, l'écoulement est instable.

Ces deux questions sont abordées en fonction des propriétés des fluides, le rapport des densités r , le rapport des viscosités m et la tension de surface σ . On vient de souligner, par l'étude asymptotique des contributions stabilisante et potentiellement déstabilisante, que le caractère stable ou instable de l'écoulement résulte d'un équilibre subtil entre les effets d'inertie, de viscosité et de tension de surface. Afin de dégager clairement les critères d'instabilité, on commence par négliger complètement les effets stabilisants (tension et gravité). Cette première section se ramène à l'étude effectuée par Hooper et Boyd [22]. Bien qu'elle puisse paraître formelle au premier abord, elle présente deux avantages. Elle permet une comparaison du taux de relaxation dérivé ici avec celui dérivé par Hooper ce qui tient lieu d'une vérification plus complète que la limite $\dot{\gamma}_{\text{eff}} \rightarrow 0$. Ensuite, les effets stabilisants étant négligés, leur influence est d'autant plus frappante dans la suite. En effet, naturellement, on continue par l'étude du cas général avec prise en compte de tous les effets : inertie, viscosité, tension de surface et gravité. On achève cette section par l'analyse de stabilité dans le cas marginal $r = m$ mis en évidence par l'étude du comportement asymptotique du taux de relaxation.

5.3.1 Sans tension, ni gravité

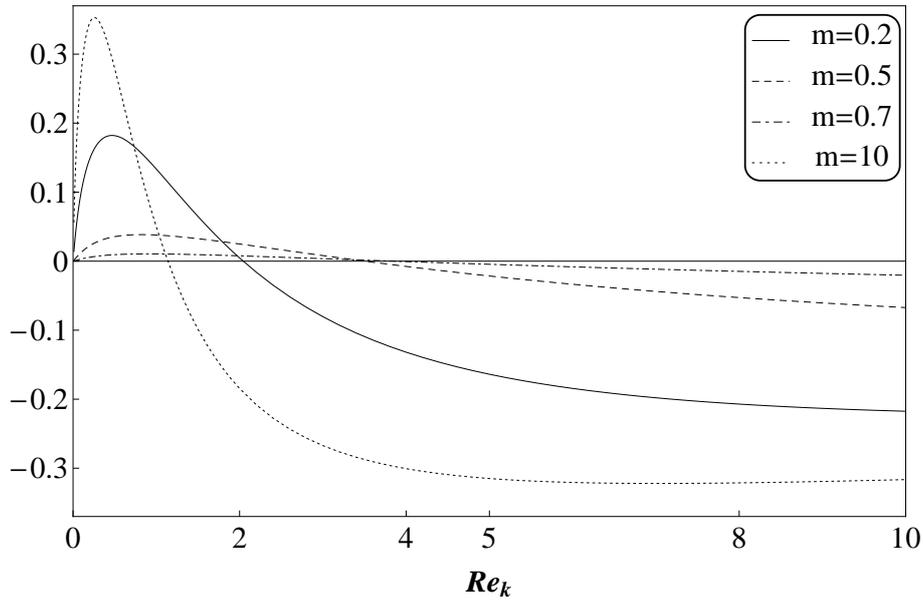


FIGURE 5.4 – Représentation de $\mathcal{R}(F_\gamma)$ en fonction de Re_k pour différents rapports de viscosité.

En l'absence d'effet stabilisant, le taux de relaxation $\gamma_k^{(0)}$ sans écoulement extérieur disparaît et le taux de relaxation se réduit à sa seconde contribution Γ_d . Le fluide inférieur peut alors se retrouver au-dessus du fluide supérieur sans coût énergétique : l'énergie de pesanteur est nulle puisque les deux fluides ont la même

densité ($r = 1$) et l'énergie de surface est nulle, comme la tension de surface, $\sigma = 0$. Dans ces conditions, les comportements asymptotiques de $\mathcal{R}(F_\gamma)$ sont

$$\begin{aligned}\mathcal{R}[F_\gamma(1, m, Re_k)] &\underset{Re_k \ll 1}{\propto} (m-1)^2(m+1)Re_k \\ \mathcal{R}[F_\gamma(1, m, Re_k)] &\underset{Re_k \gg 1}{\propto} -Re_k^{-1/3}\end{aligned}\quad (5.26)$$

Quel que soit le rapport des viscosités m , la conclusion reste identique : à grand Re_k , $\Gamma_d = -\dot{\gamma}_{\text{eff}}\mathcal{R}(F_\gamma)$ est positif et s'associe à un écoulement stable tandis qu'à petit Re_k , Γ_d négatif témoigne d'un écoulement instable. Pour résumer, l'interface est instable quelles que soient les viscosités des deux fluides pourvu qu'elles soient différentes. L'instabilité se développe à n'importe quel cisaillement, aussi petit soit-il, et à petite longueur d'onde.

On retrouve bien l'instabilité mise en évidence par Hooper et Boyd [22]. La compréhension de cette instabilité est loin d'être triviale. Tout d'abord, elle est entièrement due à la différence de viscosités entre les deux fluides. La fig. 5.4 montre bien que plus la différence de viscosité est importante, plus $\mathcal{R}(F_\gamma)$ est important et par conséquent plus Γ_d possède une influence déstabilisante. Dans la grande majorité des cas, la viscosité est plutôt source de stabilisation des écoulements. De plus, l'instabilité se développe à petite longueur d'onde, or à cette échelle les effets visqueux prédominent sur les effets inertiels. L'instabilité résulte par conséquent d'une combinaison subtile entre viscosité et inertie.

5.3.2 Effets de la tension et de la gravité

La prise en compte des effets stabilisants complique l'étude. Dans le but de dégager les critères d'instabilité, on effectue une étude des comportements asymptotiques. On rappelle alors les limites suivantes valables dans le cas général ($r \neq m$) :

	$\mathcal{R}[F_\sigma(r, m, Re_k)]$	$\mathcal{R}[F_\sigma(r, m, Re_k)]$
$Re_k \rightarrow 0$	1	$(m-1)(m^2-r)Re_k$
$Re_k \rightarrow +\infty$	$\frac{1}{(r-m)^2}Re_k^{-4/3}$	$\frac{1-m}{m-r}Re_k^{-1/3}$

L'étude se scinde en deux étapes. On commence par étudier le comportement à petit et grand cisaillement en supposant le vecteur d'onde k fixé. Puis on poursuit par l'étude du taux de relaxation à petit et grand k à cisaillement fixé.

Dans un premier temps, on s'intéresse à la variation du taux de relaxation avec le cisaillement, k étant fixé. A petit cisaillement, on obtient à partir des premières limites ci-dessus

$$\Gamma_s \propto \dot{\gamma}_{\text{eff}}^0 \gg |\Gamma_d| \propto \dot{\gamma}_{\text{eff}}^2. \quad (5.27)$$

On en déduit qu'à petit cisaillement, la contribution stabilisante est toujours celle qui importe : l'interface et donc l'écoulement sont stables. Dans la comparaison, on

a considéré la valeur absolue de Γ_d car son signe change avec les propriétés des deux fluides. A grand cisaillement, la hiérarchie est modifiée, on détermine

$$\Gamma_s \propto \dot{\gamma}_{\text{eff}}^{-4/3} \ll |\Gamma_d| \propto \dot{\gamma}_{\text{eff}}^{2/3}. \quad (5.28)$$

L'écoulement est stable ou instable selon le signe de Γ_d . La limite de $\mathcal{R}(F_{\dot{\gamma}})$ à grand Re_k indique que le signe de Γ_d à grand cisaillement et à k fixé est donné par $(1 - m)/(r - m)$. Γ_d est négatif lorsque $r < m < 1$. Si les propriétés du fluide sont telles que $r < m < 1$ alors l'interface est instable à grand cisaillement. L'interface étant stable à petit cisaillement, on en déduit l'existence d'un taux de cisaillement critique au-delà duquel l'interface est instable. L'étude menée l'a été à k fixe, le taux de cisaillement critique est donc une fonction du vecteur d'onde $\dot{\gamma}_c(k)$. Au contraire, si les propriétés du fluide vérifient $m < r$ ou $m > 1$, l'interface est stable à grand cisaillement. L'interface l'étant aussi à petit cisaillement, on peut sans beaucoup de risques généraliser la stabilité de l'écoulement quel que soit le taux de cisaillement, aussi grand soit-il en particulier. Cette brève étude du comportement asymptotique en $\dot{\gamma}_{\text{eff}}$ nous a permis de mettre en évidence un critère simple d'instabilité : si le système vérifie $r < m < 1$, alors une instabilité se développe si le taux de cisaillement appliqué est suffisamment important.

Il reste à savoir dorénavant à quelle longueur d'onde cette instabilité se développe. Dans cette optique, on réitère l'étude du comportement asymptotique du taux de relaxation mais cette fois, k est supposé grand puis petit à $\dot{\gamma}_{\text{eff}}$ fixé. A grand k , la contribution stabilisante Γ_s prime sur la seconde contribution potentiellement déstabilisante Γ_d puisque

$$\Gamma_s \propto k^\alpha \gg |\Gamma_d| \propto k^{-2}. \quad (5.29)$$

avec $\alpha = 1$ si $\sigma \neq 0$ et $\alpha = -1$ si $\sigma = 0$. On remarque que n'importe quel effet stabilisant supprime l'instabilité évoquée dans le paragraphe précédent à petite longueur d'onde. Dans le cas où la tension de surface (effet qui stabilise usuellement les petites longueurs d'onde) est nulle, la gravité (associée généralement aux grandes longueurs d'onde) est encore assez importante à petites longueurs d'onde pour stabiliser ces dernières. On montre ainsi que l'instabilité mise en évidence par Hooper et Boyd [22] est supprimée quel que soit l'effet stabilisant. A petit k , la hiérarchie à nouveau est modifiée

$$\Gamma_s \propto k^\beta \ll |\Gamma_d| \propto k^{2/3}. \quad (5.30)$$

avec $\beta = 5/3$ si $r \neq 1$ et $\beta = 11/3$ si $r = 1$. On retrouve qu'une instabilité se développe ou non selon le signe de Γ_d . Comme il s'agit du même développement asymptotique selon Re_k , le signe de Γ_d est une nouvelle fois donné par $(1 - m)/(r - m)$. Une instabilité se développe à petits k si les propriétés du fluide vérifient $r < m < 1$. L'interface étant stable à grands k , on en déduit l'existence d'un vecteur d'onde critique k_c en dessous duquel l'instabilité se développe. Au cours de cette étude, le taux de cisaillement $\dot{\gamma}_{\text{eff}}$ a été supposé fixe, le vecteur d'onde critique k_c est donc une fonction de $\dot{\gamma}_{\text{eff}}$, $k_c(\dot{\gamma}_{\text{eff}})$ fonction réciproque de la fonction $\dot{\gamma}_c(k)$.

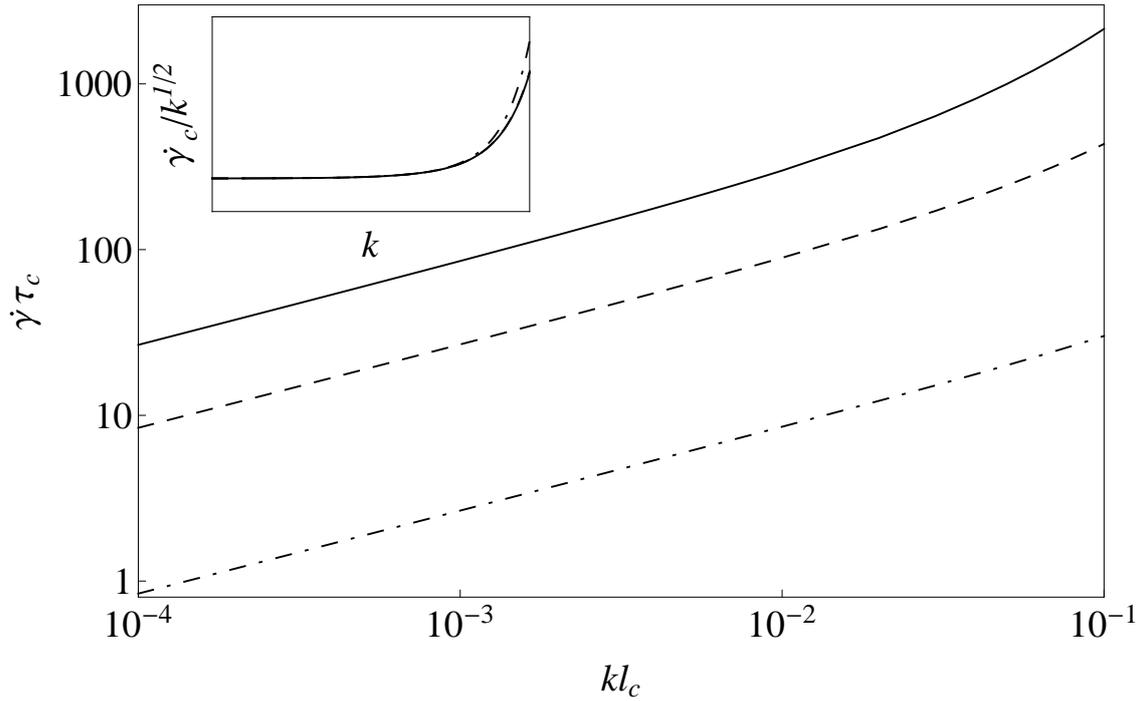


FIGURE 5.5 – Représentations de la frontière entre les régions instable (au-dessus de la courbe) et stable (en-dessous de la courbe) pour $r = 0.5$ et $m = 0.75$. Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de la tension de surface $\sigma = 10^{-7} \text{ N.m}^{-1}$ en continu, $\sigma = 10^{-6} \text{ N.m}^{-1}$ en tirets et $\sigma = 10^{-5} \text{ N.m}^{-1}$ en pointillés-tirets. Dans l'encart, on représente le taux de cisaillement renormalisé par la racine carrée du vecteur d'onde (échelle linéaire), en fonction de k (échelle logarithmique) en unités arbitraires, avec l'utilisation des mêmes conventions pour les différentes courbes correspondant à différentes valeurs de la tension de surface.

Les deux raisonnements précédents montrent que l'écoulement de Couette plan d'une bicouche de fluides newtoniens présente une instabilité due à l'interface lorsque les propriétés du fluide remplissent la condition $r < m < 1$. Cette instabilité se développe à grand cisaillement $\dot{\gamma}_{\text{eff}}$ et à petits vecteurs d'onde k . La frontière entre les deux régions, celle stable et celle instable, dans le plan $(k, \dot{\gamma}_{\text{eff}})$ est alors définie par l'égalité

$$\gamma_k^{(0)} \mathcal{R}[F_\sigma(r, m, Re_k)] = \dot{\gamma}_{\text{eff}} \mathcal{R}[F_{\dot{\gamma}}(r, m, Re_k)]. \quad (5.31)$$

On présente ces deux régions sur la fig. 5.5 dans le plan $(kl_c, \dot{\gamma}_{\text{eff}}\tau_c)$ dans le cas particulier $r = 0.5$ et $m = 0.75$ avec $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\eta = 10^{-2} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$. Au-dessus de la courbe $\dot{\gamma}_c(k)$ (grand cisaillement $\dot{\gamma}_{\text{eff}}$ et petit vecteur d'onde k), l'interface est instable tandis qu'elle est stable en-dessous (petit cisaillement $\dot{\gamma}_{\text{eff}}$ et grand vecteur d'onde k). Comme prévu, le taux de cisaillement critique $\dot{\gamma}_c$ augmente avec le vecteur d'onde pour une tension de surface donnée. Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de la tension de surface $\sigma = 10^{-7}, 10^{-6}$ et 10^{-5} N.m^{-1} . Ces différentes courbes peuvent donner l'impression que plus la tension de surface augmente, plus le taux de cisaillement critique diminue : résultat qui laisse perplexe. Cette impression est juste due à la façon de représenter les résultats dans le plan adimensionné $(kl_c, \dot{\gamma}_{\text{eff}}\tau_c)$ avec, rappelons-le, l_c et τ_c qui dépendent eux-mêmes de la tension de surface. Afin de lever cette perplexité, on a représenté dans l'encart de la fig. 5.5 $\dot{\gamma}_c/k^{1/2}$ en fonction de k en unités arbitraires pour les différentes valeurs de tensions de surface déjà considérées. A petit k , les courbes se réduisent à une seule. La tension de surface n'a pas beaucoup d'importance ce qui est logique car à cette échelle, la gravité prévaut sur la tension de surface. A plus grand k , on observe que plus σ augmente, plus $\dot{\gamma}_c$ augmente également ce qui est cohérent avec l'effet stabilisant de la tension de surface.

L'étude selon k du taux de relaxation est valable quel que soit le cisaillement, aussi petit soit-il. Néanmoins, si le cisaillement est petit, le vecteur d'onde doit être d'autant plus petit. On en déduit

$$\lim_{k \rightarrow 0} \dot{\gamma}_c(k) = 0 \quad (5.32)$$

Plus précisément, le taux de cisaillement se comporte avec la loi d'échelle $\dot{\gamma}_c(k) \propto k^{1/2}$, comme le montre l'encart de la fig. 5.5. On reviendra sur la signification de cette limite dans la discussion qui suit.

5.3.3 Cas marginal $r = m$

On effectue maintenant l'étude du cas marginal manquant $r = m$. De même que le travail précédent, on discute le comportement du taux de relaxation selon $\dot{\gamma}_{\text{eff}}$ pour k fixé, puis selon k pour $\dot{\gamma}_{\text{eff}}$ fixé. On rappelle brièvement les comportements

asymptotiques.

	$\mathcal{R}[F_\sigma(r, m, Re_k)]$	$\mathcal{R}[F_\sigma(r, m, Re_k)]$
$Re_k \rightarrow 0$	1	$(1 - m)^2 Re_k$
$Re_k \rightarrow +\infty$	$Re_k^{-2/3}$	$(1 - m)^2 Re_k^{-1/3}$

Comportements asymptotiques du taux de relaxation

Le comportement à petit cisaillement, correspondant au développement à petit Re_k , reste identique : la contribution stabilisante $\Gamma_s \propto \dot{\gamma}_{\text{eff}}^0$ reste dominante par rapport à la seconde contribution $\Gamma_d \propto \dot{\gamma}_{\text{eff}}^2$. A grand cisaillement, même si les comportements de Γ_s et Γ_d sont modifiés, la hiérarchie par rapport au cas général reste identique

$$\Gamma_s \propto \dot{\gamma}_{\text{eff}}^{-2/3} \ll -\Gamma_d \propto (1 - m)^2 \dot{\gamma}_{\text{eff}}^{2/3}. \quad (5.33)$$

Γ_d prévaut sur la contribution stabilisante Γ_s . De plus, dans le cas $r = m$, son signe pour des grands cisaillements est toujours négatif et l'écoulement instable, quel que soit le rapport des viscosités. De même que dans le paragraphe précédent, la fonction $\dot{\gamma}_c(k)$ décrit le taux de cisaillement critique au-delà duquel une instabilité se développe pour chaque vecteur d'onde. La prochaine question concerne la détermination de la longueur d'onde à laquelle cette instabilité se développe.

Le comportement à grand k de Γ_s et Γ_d reste inchangé puisqu'il correspond au développement à petit Re_k . On a toujours $\Gamma_s \propto k^\alpha$ avec $\alpha = 1$ ou -1 selon que $\sigma \neq 0$ ou $\sigma = 0$ qui prédomine sur $\Gamma_d \propto k^{-2}$. La modification majeure par rapport à l'étude du cas général concerne le comportement à petit k où on montre dans ce cas marginal $r = m$ que la contribution stabilisante Γ_s prime à nouveau sur la contribution potentiellement déstabilisante Γ_d

$$\Gamma_s \propto k^{1/3} \gg |\Gamma_d| \propto k^{2/3}. \quad (5.34)$$

Dans ce cas marginal, la gravité par définition ne disparaît pas, $r \neq 1$ (dans le cas contraire, la stratification en viscosité disparaîtrait aussi avec la contribution potentiellement déstabilisante et la possibilité d'instabilité). Pour résumer, si l'interface séparait deux fluides avec $r = m = 1$, l'interface ne serait définie que par sa tension qui ne serait alors que stabilisante.

Définition du seuil de l'instabilité

Pour résumer, on sait qu'une instabilité se développe au-delà d'un taux de cisaillement critique $\dot{\gamma}_c(k)$. De plus, cette instabilité n'a lieu ni à petit vecteur d'onde, ni à grand vecteur d'onde. Par élimination, on en déduit que l'instabilité se développe à vecteurs d'onde fini k avec $k_{c,1} \leq k \leq k_{c,2}$ et $\dot{\gamma}_c(k_{c,1}) = \dot{\gamma}_c(k_{c,2}) = 0$ si le taux de cisaillement est suffisamment important. La fonction $\dot{\gamma}_c(k)$ possède alors un minimum global, noté simplement $\dot{\gamma}_c$ en $k = k_c$ puisque comme le montre l'étude en

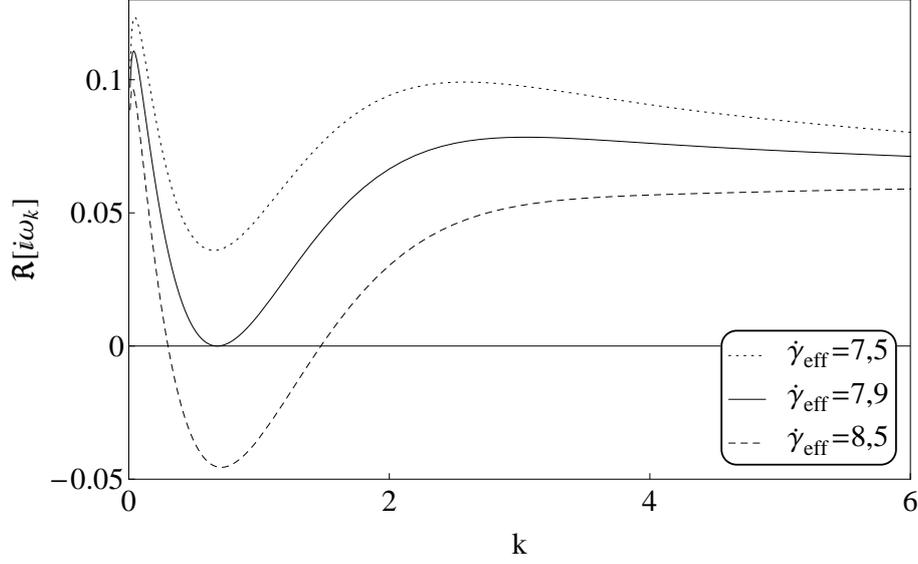


FIGURE 5.6 – Représentation du taux de relaxation de la perturbation γ_k en fonction du vecteur d'onde k pour $m = 0.5$ et $St = 0$. Ils sont calculés en unités de τ et L . Les trois courbes correspondent à un taux de cisaillement légèrement inférieur au taux de cisaillement critique, au taux de cisaillement critique, puis à un taux de cisaillement légèrement supérieur au taux de cisaillement critique.

k , $\lim_{k \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty} \dot{\gamma}_c(k) = +\infty$. Ainsi, si le cisaillement est légèrement supérieur à $\dot{\gamma}_c$, seuil de l'instabilité, on observe l'apparition d'une déformation de longueur d'onde $2\pi/k_c$. Le comportement ultérieur de ces déformations nécessiterait d'aller au-delà de l'analyse linéaire. La détermination des deux quantités $\dot{\gamma}_c$ et k_c caractéristiques du seuil de l'instabilité, est effectuée à l'aide des deux équations suivantes :

$$\gamma_{k_c} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_k \gamma_{k_c} = 0$$

$$\text{soit} \quad \gamma_{k_c}^{(0)} \mathcal{R}[F_\sigma(Re_{k,c}, m, m)] = \dot{\gamma}_c \mathcal{R}[F_\dot{\gamma}(Re_{k,c}, m, m)] \quad (5.35a)$$

$$\text{et} \quad \partial_k \left(\gamma_k^{(0)} \mathcal{R}[F_\sigma(Re_k, m, m)] \right)_{k=k_c}^{\dot{\gamma}_{\text{eff}}=\dot{\gamma}_c} = \dot{\gamma}_c \partial_k \left(\mathcal{R}[F_\dot{\gamma}(Re_k, m, m)] \right)_{k=k_c}^{\dot{\gamma}_{\text{eff}}=\dot{\gamma}_c} \quad (5.35b)$$

avec $Re_{k,c} = \rho \dot{\gamma}_c / (\eta k_c^2)$. La première identité découle de l'étude en $\dot{\gamma}_{\text{eff}}$, il s'agit de la frontière entre la situation stable à petit cisaillement et celle instable à grand cisaillement, comme le montrent les 3 courbes différentes de la fig. 5.6. La seconde égalité vient de l'étude en k lorsque $\dot{\gamma}_{\text{eff}} = \dot{\gamma}_c$. A petits et grands k , l'interface est stable, c'est-à-dire le taux de relaxation est positif. On sait par définition qu'il existe k_c tel que $\dot{\gamma}_c(k) = \dot{\gamma}_c$, ainsi par définition, le taux de relaxation est nul en k_c et est également un minimum de la fonction γ_k : la dérivée par rapport à k du taux de relaxation en $k = k_c$ est par conséquent nulle.

Temps et longueur caractéristiques à tension de surface nulle

Les deux égalités précédentes permettent d'obtenir $\dot{\gamma}_c$ et k_c en fonction du rapport des viscosités m et de la tension de surface σ . Afin d'insister sur les effets éventuels de la tension de surface, on commence par représenter $\dot{\gamma}_c$ et k_c en fonction de m à tension de surface nulle, représentations exposées à l'aide de la fig. 5.7. Ensuite, sur la fig. 5.8, l'influence de la tension est mise en évidence avec les représentations de $\dot{\gamma}_c$ et k_c en fonction du nombre de Stokes St .

Avant de discuter de ces représentations, il est important de prendre conscience d'un problème préalable aux tracés de ces courbes. Les quantités $\dot{\gamma}_c$ et k_c ne peuvent être comptées à l'aide des unités usuelles des interfaces. En effet, le temps capillaire τ_c et la longueur capillaire l_c , dépendent de la tension de surface. A tension de surface nulle, $l_c = 0$ et τ_c diverge. On recherche par conséquent un temps τ et une longueur L caractéristiques du système sans écoulement et sans tension de surface. Les effets à prendre en compte sont les seuls effets de gravité et de viscosité. La viscosité et la diffusion du moment associée implique $L^2 = (\rho/\eta)\tau$, alors $Re_k = \dot{\gamma}_{\text{eff}}\tau/(kL)^2$. Le taux de relaxation sans écoulement et sans tension se réduit à $\gamma_k^{(0)} = \Delta\rho g/(4\eta k) = 1/[\tau \times (kL)]$. On obtient les échelles de temps et de longueur suivantes :

$$\tau = \sqrt[3]{\frac{16\rho\eta}{(\Delta\rho g)^2}} \qquad L = \sqrt[3]{\frac{4\eta^2}{\rho\Delta\rho g}} \qquad (5.36)$$

Pour $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $\Delta\rho = 10^2 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\eta = 10^{-2} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, on obtient τ de l'ordre de la milliseconde et L de l'ordre du millimètre.

Représentation du seuil

La fig. 5.7 concerne la situation où la tension de surface est strictement nulle $St = 0$. Elle est constituée de deux parties. Elle présente d'une part l'évolution du taux de cisaillement critique $\dot{\gamma}_c$, et d'autre part l'évolution du vecteur d'onde critique k_c en fonction de m . m varie de 0 à 1 puisque $m = r$. Le taux de cisaillement critique $\dot{\gamma}_c$ diverge lorsque m tend vers 1. En effet, lorsque la stratification de la viscosité disparaît, la contribution déstabilisante du taux de relaxation est également éliminée. Lorsque m tend vers 0, l'instabilité se développe à très petit taux de cisaillement et à grande longueur d'onde.

Ensuite, la fig. 5.8 montre l'influence de la tension de surface. Elle présente les courbes de $\dot{\gamma}_c$ et k_c en fonction du nombre de Stokes, pour différentes valeurs du rapport des viscosités m . Notons que le taux de relaxation sans écoulement adimensionnée par τ est

$$\tau \times \gamma_k^{(0)} = \frac{1 + (St/4)^{2/3}(kL)^2}{kL}$$

On constate que le seuil des instabilités dépend peu de la tension de surface. En ce qui concerne le taux de cisaillement seuil au-delà duquel une instabilité se développe,

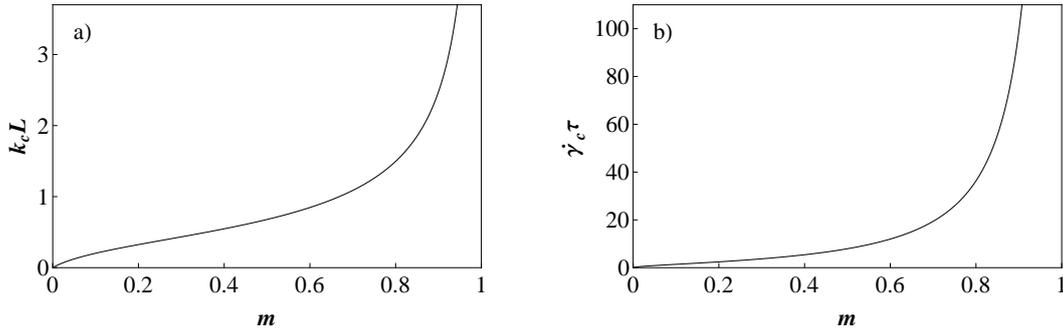


FIGURE 5.7 – Représentation du seuil de l’instabilité en fonction du rapport des viscosités m pour $St = 0$, seuil représenté en unités de τ et L . a) vecteur d’onde critique k_c , b) taux de cisaillement critique $\dot{\gamma}_c$.

la tension de surface ne l’augmente que très légèrement. Par exemple, pour $m = 0.7$, le taux de cisaillement seuil sans dimension en l’absence de tension de surface est d’environ 20 et avec une tension de surface tel que $St = 1$, ce taux est d’environ 23, ce qui correspond à une augmentation relative de seulement 15%. L’influence de la tension de surface sur le vecteur d’onde seuil est plus sensible. Le vecteur d’onde seuil diminue par exemple d’un facteur 2 pour $m = 0.7$ entre $St = 0$ et $St = 1$. La tension de surface stabilise logiquement les grands vecteurs d’onde, et entraîne par conséquent un glissement vers les grandes longueurs d’onde de la longueur d’onde seuil caractéristique de l’instabilité.

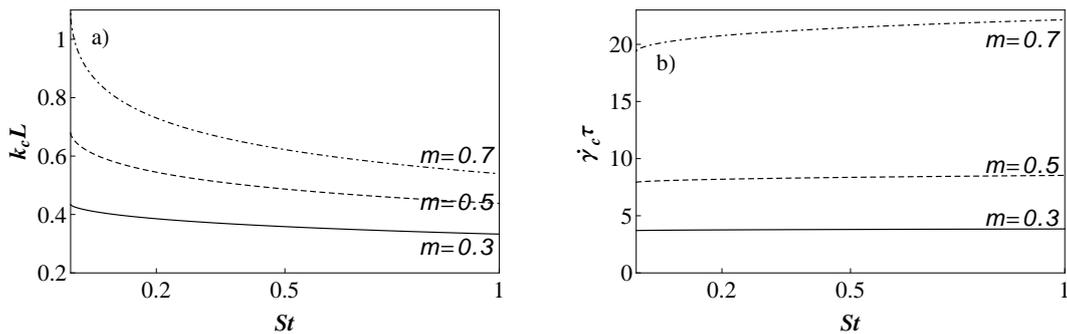


FIGURE 5.8 – Représentation du seuil de l’instabilité en fonction de la tension de surface St pour différents rapports de viscosité m , seuil représenté en unités de τ et L . a) vecteur d’onde critique k_c , b) taux de cisaillement critique $\dot{\gamma}_c$.

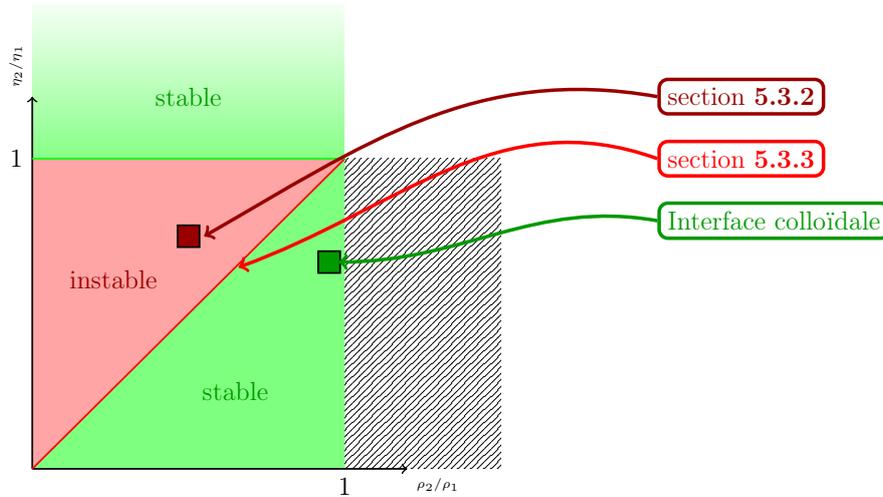


FIGURE 5.9 – Diagramme de stabilité

5.4 Discussion

Dans ce chapitre, on étudie la stabilité d'une petite perturbation interfaciale soumise à un écoulement de Couette plan. On suppose qu'en l'absence d'écoulement extérieur, les perturbations interfaciales sont surarmorties, ce qui correspond à une faible tension de surface et à de forts effets visqueux. Cette variété d'interfaces est depuis quelques années d'actualité avec la mise en place d'interfaces entre fluides colloïdaux [1].

Sans effet stabilisant, on retrouve l'instabilité à petite longueur d'onde révélée par Hooper et Boyd. Cependant, peu importe l'effet stabilisant au niveau de l'interface - tension ou gravité -, cette instabilité est supprimée. Dans le cas général, malgré le nombre d'effets qui importent, des critères d'instabilité assez simples sont mis en évidence. Il faut tout d'abord que le fluide le plus lourd soit aussi le plus visqueux (au sens de la viscosité dynamique). Il s'agit d'une condition nécessaire et non suffisante. Il est nécessaire ensuite que le fluide le plus lourd présente la viscosité cinématique (coefficient de diffusion de la quantité de mouvement) la plus faible. Avec r et m le rapport des densités et des viscosités entre le fluide situé au-dessus et celui du dessous, ces deux conditions se réduisent aux deux inégalités $r < m < 1$. Si le fluide le plus léger est le plus visqueux ($m > 1$) ou si la viscosité cinématique la plus importante est celle du fluide inférieur ($r > m$), alors l'écoulement est stable quel que soit le taux de cisaillement appliqué, en particulier aussi grand soit-il. La fig. 5.9 présente un diagramme de stabilité récapitulatif.

Dans l'expérience effectuée par Derks et ses collaborateurs [17], le rapport des viscosités est $m \simeq 0.66$ et on ne connaît pas exactement le rapport des densités mais on sait que $\Delta\rho \simeq 10^2 \text{ kg.m}^{-3}$ est très petit devant la densité moyenne $\rho \sim 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, soit $r \lesssim 1$. L'interface utilisée dans les expériences ne vérifie donc pas $r < m < 1$,

et le travail effectué prévoit par conséquent un écoulement de Couette plan stable même à grand cisaillement. Plus généralement, on peut s'interroger sur l'existence d'interfaces de faible tension remplissant la condition $r < m < 1$. Il semble que jusqu'à présent, les interfaces présentant des valeurs extrêmement faibles de la tension de surface soient des interfaces colloïdales. Un solvant fait office d'environnement commun aux deux fluides colloïdaux et le rapport des densités est par conséquent proche de l'unité. Une autre manière de faire tendre la tension vers 0 est de jouer avec la température. Lorsque la température se rapproche de la température critique, les différences entre les deux fluides s'amenuisent pour disparaître complètement une fois la température critique dépassée. Près du point critique, les rapports des densités et des viscosités tendent alors vers 1. Néanmoins, J. Meunier a montré dans sa thèse [32] que les perturbations interfaciales ne se situent alors ni dans le régime propagatif, ni dans le régime surarmorti mais dans le régime intermédiaire.

Lorsque les deux fluides définissant l'interface vérifient $r < m < 1$, l'instabilité se développe à grande longueur d'onde. On en déduit plusieurs choses. Tout d'abord, comme le confirme l'encart de la fig. 5.5, une fois les effets stabilisants non nuls, la valeur de la tension de surface ne présente pas beaucoup d'importance, la tension de surface étant surtout significative à petite longueur d'onde. Effectivement, les courbes correspondant à différentes tensions de surface se confondent finalement en une seule. Ensuite, on a établi que $\lim_{k \rightarrow 0} \dot{\gamma}_c(k) = 0$. Néanmoins, on n'affirme surtout pas que quelque soit le cisaillement, aussi petit soit-il, l'interface est instable. En effet, à grande longueur d'onde, quelques critiques sont à émettre sur le modèle présenté. D'une part, on a négligé les effets de confinement, ce qui n'est pas justifié à très grandes longueurs d'onde. D'autre part, on a supposé les perturbations surarmorties en l'absence d'écoulement extérieur, ce qui n'est pas valable non plus à très grande longueur d'onde. Ces deux hypothèses peuvent être levées afin d'obtenir une situation physique plus satisfaisante intuitivement. D'après l'article de Charru et Hinch [11], la première hypothèse à revoir serait celle à propos des effets de confinements négligeables.

Si toutefois la prise en compte des effets de confinement et de l'intégralité de la relation de dispersion ne modifie pas la conclusion $\lim_{k \rightarrow 0} \dot{\gamma}_c(k) = 0$, cette limite signifie qu'avec l'ajout des termes non-linéaires, les perturbations deviennent des ondes d'amplitude finie, amplitude qui tendrait alors vers 0 avec le taux de cisaillement appliqué.

Chapitre 6

Etude numérique des fluctuations hors équilibre

Préambule

Dans ce dernier chapitre, on revient sur les fluctuations thermiques de l'interface soumise à un écoulement de Couette plan que l'on étudie de façon numérique par des simulations de dynamique brownienne. Les hypothèses de travail sont les mêmes que dans les chapitres 3 et 4 : les modifications des fluctuations sont supposées être gouvernées par le couplage entre le cisaillement et la viscosité, les effets inertiels étant négligés (Re considéré comme nul). Pour des raisons pratiques de temps de calcul, on considère que le système est invariant par translation selon la direction y perpendiculaire à l'écoulement.

Avec ces simulations, on se fixe deux objectifs. Tout d'abord, on souhaite vérifier l'analyticité du développement par rapport au paramètre de contrôle du cisaillement α . Ensuite, cette étude numérique doit nous permettre d'appréhender le comportement des fluctuations lorsque α commence à être de l'ordre de l'unité, régime qui n'est pas accessible par notre analyse perturbative du chapitre 4.

Après avoir vérifié que la méthode de simulation présentée permet de retrouver les propriétés des fluctuations à l'équilibre, on s'intéresse à l'évolution du déplacement quadratique moyen lorsque $\alpha \geq 1$. Une fois l'algorithme implémenté dans son intégralité, il est aisé de se préoccuper d'autres quantités telles que les incréments ou les densités de probabilités, riches en informations.

6.1 Fluctuations à l'équilibre

La première étape consiste déjà à simuler les fluctuations interfaciales lorsqu'aucun écoulement extérieur n'est appliqué. Une étude numérique impose de considérer des quantités sans dimension. Ces dernières représentent les quantités physiques et leur unité de mesure dépend par conséquent des échelles caractéristiques du système.

Dans l'optique de définir consciencieusement les relations entre quantités sans dimension et quantités physiques, on commence par recalculer brièvement les propriétés à l'équilibre des fluctuations thermiques interfaciales. Le changement de dimension affecte notamment l'amplitude de l'excitation stochastique des fluctuations en représentation de Fourier. L'équation d'évolution est ensuite intégrée sur un petit pas de temps afin d'être simulée. Finalement, on montre qu'on retrouve bien les propriétés des fluctuations à l'équilibre numériquement.

6.1.1 Description analytique d'une interface à 1 dimension

Hamiltonien capillaire

L'interface est considérée dans ce chapitre comme une ligne frontière de dimension 1 séparant deux fluides dans un plan à 2 dimensions. Ceci signifie que les fluctuations interfaciales dépendent d'une seule direction, notée (Ox) , direction tangente à l'interface physique et qu'elles sont « gelées » dans la seconde direction tangente à l'interface (physique), notée (Oy) . On associe à ces deux directions L_x et L_y les longueurs respectives du domaine considéré. L'hamiltonien s'écrit alors

$$H = \frac{L_y}{L_x} \sum_q \frac{\sigma}{2} (q^2 + l_c^{-2}) |h_q(t)|^2 \quad (6.1)$$

où h_q est la représentation en série de Fourier unidimensionnelle selon la direction (Ox) de la fluctuation de l'interface (qui ne dépend alors plus que de la coordonnée x).

$$h_q(t) = \int_0^{L_x} dx h(x, t) \exp(-iqx) \quad (6.2)$$

$$h(x, t) = \frac{1}{L_x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_q(t) \exp(iqx) \quad (6.3)$$

avec $q = n \times 2\pi/L_x$.

De manière cohérente avec la dimension de l'interface, l'hamiltonien ne fait plus intervenir la tension de surface σ exprimée en N.m^{-1} mais une tension de ligne $\sigma' = \sigma \times L_y$, dont l'unité est alors le N.

$$H = \frac{1}{L_x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma'}{2} (q^2 + l_c^{-2}) |h_q(t)|^2 \quad (6.4)$$

Le spectre des fluctuations est obtenu en appliquant le théorème d'Einstein

$$\langle h_q(t) h_{q'}(t) \rangle = \frac{k_B T}{\sigma' (q^2 + l_c^{-2})} \times L_x \delta_{q+q'} \quad (6.5)$$

En revenant dans l'espace réel, on calcule

$$\langle h^2(x, t) \rangle = \frac{k_B T l_c}{2\sigma'} \times \left(\coth \left(\frac{L_x/l_c}{2} \right) - \frac{2}{L_x/l_c} \right) \xrightarrow{L_x/l_c \rightarrow +\infty} \frac{k_B T l_c}{2\sigma'} \quad (6.6a)$$

$$\langle h(x)h(0) \rangle = \frac{k_B T l_c}{2\sigma'} \times \frac{1}{L_x/l_c} \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4 \cos(n \frac{2\pi}{L_x/l_c} (x/l_c))}{1 + n^2 \frac{4\pi^2}{(L_x/l_c)^2}} \xrightarrow{L_x/l_c \rightarrow +\infty} \frac{k_B T l_c}{2\sigma'} e^{-|x/l_c|} \quad (6.6b)$$

De même que pour une interface à 2 dimensions, deux échelles de longueur caractéristiques sont mises en évidence. La première, $\sqrt{k_B T l_c / (2\sigma')}$ donne un ordre de grandeur de la rugosité de l'interface due aux fluctuations thermiques. Remarquons qu'elle fait intervenir la tension de ligne σ' . Quant à la seconde, il s'agit toujours de la longueur capillaire l_c dont la définition n'est pas modifiée. Cette dernière s'interprète à nouveau comme la longueur de corrélation des fluctuations.

Il est intéressant de noter qu'aucun problème de divergence à grands vecteurs d'onde n'apparaît à 1 dimension : on n'a pas besoin d'introduire de longueur d'onde de coupure. Il est aussi important de remarquer que le poids des fluctuations à bas vecteur d'onde diffère entre la dimension 1 et la dimension 2. Tandis que pour une interface à 2 dimensions, le poids de chaque mode tend vers 0 quand le vecteur d'onde tend vers 0, pour une interface unidimensionnelle, le poids de chaque mode ne dépend pas de la norme du vecteur d'onde dans cette limite. Il est alors nécessaire de préciser qu'on s'intéresse au déplacement de l'interface par rapport à sa position moyenne, la position globale de l'interface étant supposée nulle, autrement dit $(1/L_x) \int_0^{L_x} dx h(x) = 0$.

Mise sous forme adimensionnée

Dans le but de manipuler des quantités sans dimension, on procède de manière classique et on exprime

- les longueurs en unité de l_c ,
- les temps en unité de τ_c (dont la définition n'est pas modifiée $\tau_c = 2\eta l_c / \sigma$ avec σ la tension de surface),
- et la rugosité de l'interface en unité de $\sqrt{k_B T l_c / (2\sigma')}$. Le facteur 2 provient du fait qu'on pose le déplacement quadratique moyen sans dimension égal à l'unité lorsque $L_x \rightarrow +\infty$.

Pour éviter d'alourdir les notations, les quantités sans dimension sont notées comme leurs homologues physiques. En effet, la suite du chapitre concerne surtout les quantités sans dimension ce qui devrait supprimer d'éventuelles confusions. Il s'ensuit que l'équation d'évolution temporelle des fluctuations vérifie

$$\frac{\partial h_q}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_q} h_q + \varphi_q(t) \quad (6.7)$$

avec $\langle \varphi_q(t) \rangle = 0$ et

$$\langle \varphi_q(t) \varphi_{q'}(t') \rangle = \frac{2L_x}{q} \delta_{q+q'} \delta(t - t')$$

Dans cette expression, L_x désigne la taille du système selon la direction (Ox) divisée par la longueur capillaire l_c .

6.1.2 Algorithme

L'algorithme donnant l'évolution temporelle des fluctuations à l'équilibre pose peu de questions puisque l'équation différentielle 6.7 se résout exactement :

$$h_q(t + dt) = \exp(-\tau_q dt) [h_q(t) + \xi_{q,dt}(t)]$$

$$\text{avec } \xi_{q,dt}(t) = \int_t^{t+dt} ds \exp(\tau_q s) \varphi_q(s) \quad (6.8)$$

$\xi_{q,dt}(t)$ est un terme aléatoire de distribution gaussienne, caractérisée par sa moyenne nulle et son moment d'ordre 2 $\langle \xi_{q,dt}(t) \xi_{q',dt}(t') \rangle = [\exp(2\tau_q dt) - 1] 2L_x / (1 + q^2) \delta_{q+q'} \delta_{t,t'}$ avec t et t' des multiples entiers du pas de temps dt . La discrétisation en temps, inhérente à l'outil informatique, ne pose donc pour l'instant aucune difficulté. La génération de la variable aléatoire $\xi_{q,dt}$ demande un peu plus d'attention, on en dit quelques mots dans l'encadré ci-dessous.

Pour des raisons évoquées dans la prochaine section, l'algorithme est simulé avec les paramètres suivants :

- on choisit $L_x = 20$ et les conditions limites en $x = 0$ et $x = L_x$ sont supposées périodiques ;
- les paramètres de discrétisation sont pour le pas d'espace $dx = 0,002$ et pour le pas de temps $dt = 0,002$;
- on cherche à étudier la situation à l'équilibre, les conditions initiales doivent être « oubliées », on considère les déformations de l'interface décrivant les fluctuations seulement pour $t \geq 5$.
- les fluctuations sont caractérisées par des moyennes de certaines quantités, comme l'espérance (moyenne de la déformation), la variance (reliée à la moyenne des carrés des déformations), ... Chaque calcul de quantité moyenne résulte d'une moyenne effectuée sur 20 000 configurations temporelles différentes, chaque « expérience » numérique est en outre répétée 20 fois. Au cours d'un calcul numérique, on intègre $20 \times (5/0,002 + 20000) = 450\,000$ fois l'équation 6.7 sur le pas de temps dt .

6.1.3 Résultats

L'algorithme ci-dessus permet effectivement de retrouver les propriétés connues des fluctuations thermiques interfaciales à l'équilibre. En utilisant la représentation

**Génération de variables aléatoires de distribution
gaussienne [38, 25]**

Même si les ordinateurs ne fournissent que des générations de nombres quasi-aléatoires, on suppose qu'on dispose d'une fonction `rand` dont le résultat est un nombre entier compris entre 0 et `RAND_MAX`, chacune des valeurs étant équiprobable et `RAND_MAX` étant très grand (au moins égal à 32 767). Une distribution homogène de réels appartenant à $]0, 1]$ dérive alors avec une très bonne approximation de la transformation

$$x = 1 - \frac{\text{rand}()}{1 + \text{RAND_MAX}}$$

A partir de deux tirages, notés x_1 et x_2 , de cette distribution homogène de réels entre 0 et 1, deux tirages, notés y_1 et y_2 , de distribution gaussienne normale (moyenne nulle et variance unité) sont dérivés à partir des changements de variables utilisés pour calculer l'intégrale d'une fonction gaussienne.

$$y_1 = \sqrt{-2 \ln x_1} \cos 2\pi x_2$$

$$y_2 = \sqrt{-2 \ln x_1} \sin 2\pi x_2$$

Un nombre complexe z stochastique de distribution gaussienne normale est obtenu par

$$z = \sqrt{-\ln x_1} \cos 2\pi x_2 + i\sqrt{-\ln x_1} \sin 2\pi x_2$$

Un tel nombre complexe vérifie bien $\langle z^2 \rangle = 0$ et $\langle zz^* \rangle = 1$. Pour modifier la variance, il suffit de multiplier z par la racine carrée de la variance souhaitée.

Remarque : on a choisi comme étape une distribution homogène sur le segment $]0, 1]$ et non sur le segment $[0, 1[$ en raison de la fonction \ln qui intervient dans la suite.

de Fourier, on retrouve le spectre des fluctuations comme le montre la fig. 6.1 : $\langle h_q(t)h_{q'}(t) \rangle = 2L_x/(1+q^2)\delta_{q+q'}$. La fig. 6.1 compare le résultat théorique du spectre des fluctuations $\langle |h_q(t)|^2 \rangle = 2L_x/(1+q^2)$ avec les calculs numériques de la moyenne de la quantité associée $|h_q(t)|^2$. On constate un très bon accord entre théorie et résultat numérique sur l'ensemble de la gamme des vecteurs d'onde allant de $q_{min} \simeq 0,314$ à $q_{max} \simeq 3100$, ce qui revient à une vérification du spectre sur plus de 5 ordres de grandeur.

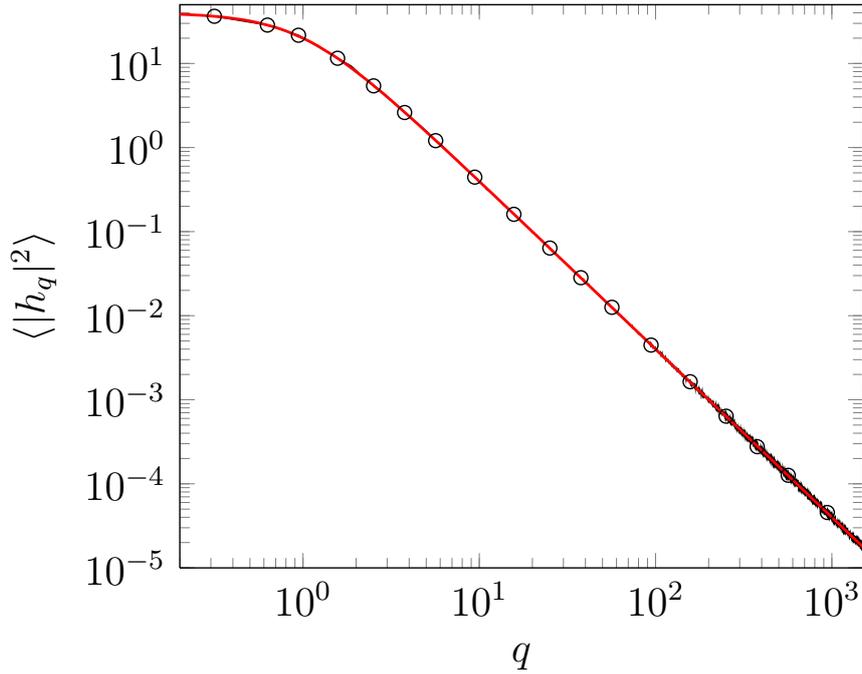


FIGURE 6.1 – Spectre statique des fluctuations $\langle |h_q^2| \rangle$ en fonction du vecteur d'onde q . Les données numériques sont représentées à l'aide des points noirs et l'expression théorique à l'aide de la courbe continue rouge.

Dans l'espace réel, les propriétés des fluctuations sont vérifiées tout d'abord en calculant la fonction de densité de probabilités (représentée sur la fig. 6.2). On retrouve comme le prédit la théorie une distribution gaussienne de moyenne nulle de variance 0.9 (valeur de $\coth(L_x/2) - 2/L_x$ pour $L_x = 20$). La fig. 6.2 compare l'expression théorique avec les données numériques. A nouveau, il est difficile de distinguer la courbe représentative de l'expression analytique des points repérant les données numériques. La seconde partie de la fig. 6.2 permet de quantifier la précision des données numériques : on obtient une très bonne estimation de la pdf de h jusqu'à des valeurs de l'ordre de 10^{-4} ($e^{-8} \simeq 3.10^{-4}$).

Les simulations numériques sont également corroborées par le calcul de la fonction de corrélation spatiale $\langle h(x)h(0) \rangle$. La fig. 6.3 compare les données numériques,

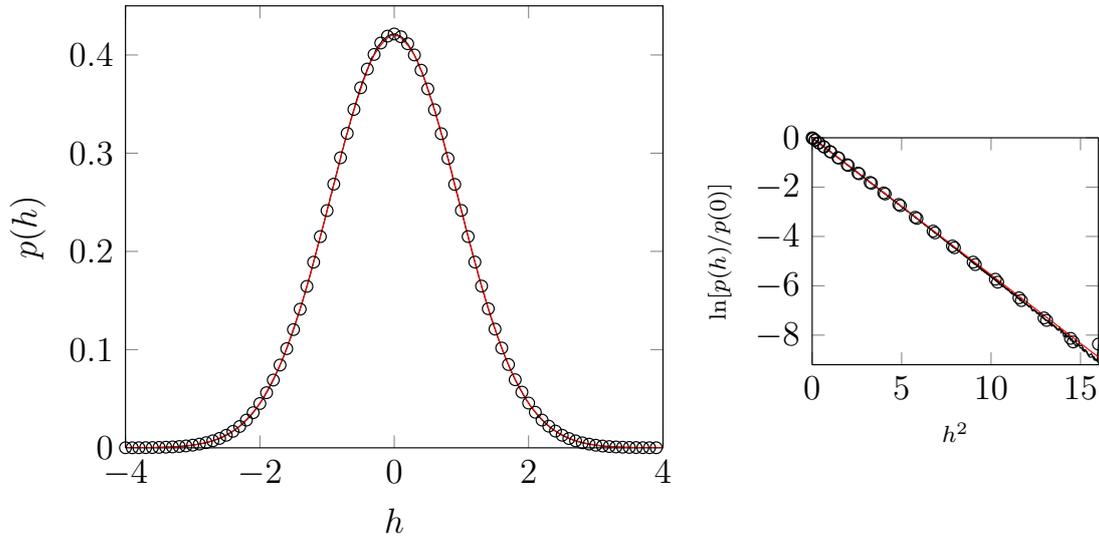


FIGURE 6.2 – Densité de probabilité de la déformation $p(h)$ en fonction de h : comparaison des données numériques représentées en noir avec l'expression analytique tracée à l'aide d'une ligne continue rouge.

moyenne de la quantité $h(x, t)h(0, t)$ avec la formule analytique (6.6b) : $(4/L_x) \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n2\pi x/L_x)/(1 + n^2 4\pi^2/L_x^2)$. La fig. 6.3 représente les données pour x allant de 0 à 10 car les conditions aux limites périodiques en $x = 0$ et $x = 20$ impliquent la symétrie des données par rapport à $x = 10$. Cette symétrie ressort effectivement des données numériques. On observe une nouvelle fois une très bonne adéquation entre théorie et modélisation numérique. Par ailleurs, on remarque, toujours à partir de la fonction de corrélation spatiale représentée sur la fig. 6.3, que les fluctuations sont anti-corrélées lorsque $x \gtrsim 2$. Ces corrélations négatives s'expliquent par la taille finie du système dans la direction (Ox) . En effet, lorsque le système est infini, autrement dit lorsque $L_x \rightarrow +\infty$, les corrélations présentent seulement une décroissance exponentielle : les fluctuations sont corrélées à courte distance tandis qu'elles sont indépendantes les unes des autres à grande distance. Dans le cadre étudié, la taille est finie et l'on s'intéresse aux déformations de l'interface. En particulier, on pose $(1/L_x) \int_0^{L_x} dx h(x) = 0$ ce qui implique également $(1/L_x) \int_0^{L_x} dx \langle h(x)h(0) \rangle = 0$. Les corrélations positives à courte portée doivent donc être contrebalancées par des corrélations négatives à plus longue portée.

La vérification de la validité des simulations s'achève avec l'étude des corrélations temporelles. La fig. 6.4 compare les données numériques de $\langle h_q(t)h_q^*(0) \rangle$ pour plusieurs q avec leur expression analytique. Cette vérification nécessite davantage de temps de calcul que les précédentes. Les moyennes s'effectuent maintenant sur plusieurs fenêtres temporelles, chacune étant composée de plusieurs configurations (ici, une fenêtre temporelle correspond à 1000 configurations successives). Chaque expé-

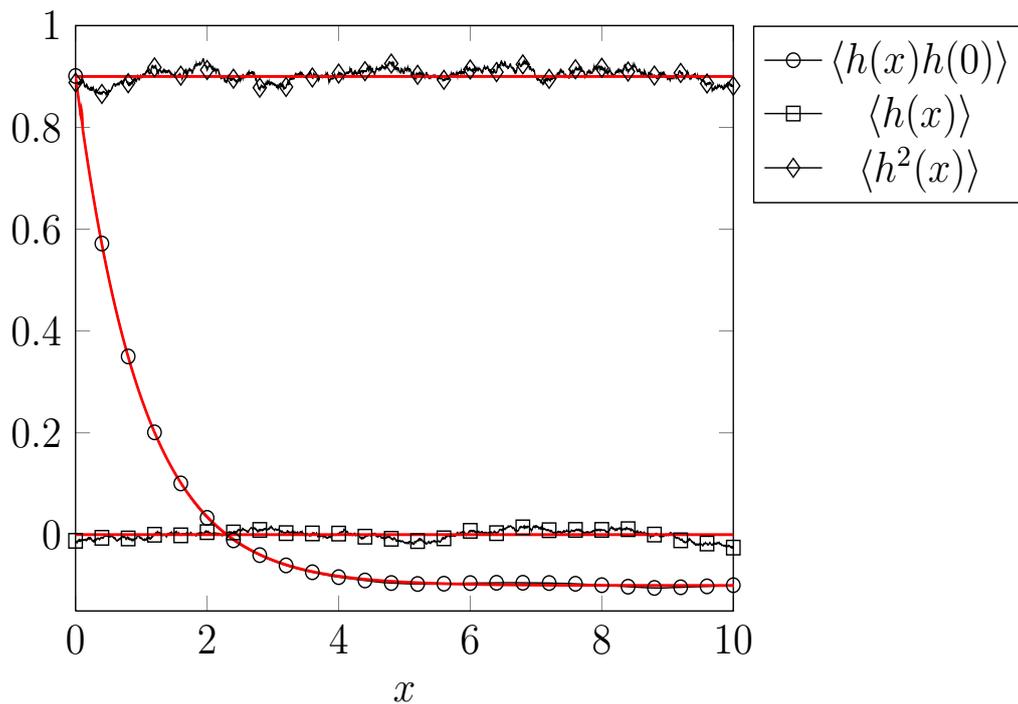


FIGURE 6.3 – Fonction de corrélation spatiale $\langle h(x)h(0) \rangle$ en fonction de x : comparaison entre les données numériques en noir et l'expression analytique en rouge et continu. La moyenne et la variance de la déformation sont aussi représentées avec les mêmes conventions : noir pour les données numériques et rouge pour les expressions analytiques.

rience numérique prend en compte 5000 fenêtres (le décompte commence seulement lorsque les conditions initiales n'influencent plus les propriétés. Dans ce but, les données sont prises en compte seulement lorsque $t \geq 5$, ce qui résulte d'un compromis entre le temps de calcul et l'« oubli » des conditions initiales). On renouvelle chaque expérience numérique 10 fois. Le temps de calcul est alors d'environ 2 jours. Les

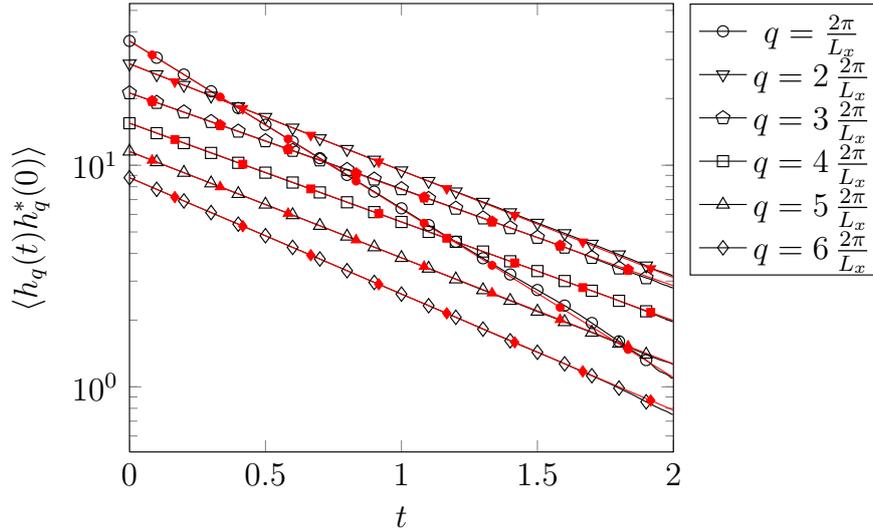


FIGURE 6.4 – Corrélations temporelles $\langle h_q(t)h_q^*(0) \rangle$ en fonction de t pour plusieurs vecteurs d'onde q : comparaison des données numériques représentées en noir avec des repères creux avec les expressions analytiques tracées en rouge avec des repères pleins.

expressions analytiques permettent d'ajuster une nouvelle fois presque parfaitement les résultats numériques.

6.2 Comportement des fluctuations sous cisaillement

Notre ambition est maintenant de simuler le comportement des fluctuations sous cisaillement.

Après avoir mis sous forme adimensionnée l'équation d'évolution de l'interface, on présente brièvement sa résolution : le changement de dimension modifie la valeur du paramètre K . De plus, cette résolution avec l'expression de K nous guide dans le choix des paramètres de discrétisation du système, abordé dans une deuxième partie. Enfin, on profite de l'implémentation complète de l'algorithme pour calculer certaines propriétés des fluctuations, comme leur déplacement quadratique moyen. Le premier objectif qui est de vérifier l'analyticité du développement analytique en α est alors traité.

6.2.1 Description analytique du terme de couplage de mode

Les déformations de l'interface à 1 dimension dues aux fluctuations thermiques vérifient la même équation que dans le cas d'une interface à 2 dimensions, à part que le produit de convolution est maintenant une somme sur une seule variable :

$$\frac{\partial h_q(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_q} h_q(t) - i\gamma_{\text{eff}} \frac{1}{L_x} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} k_m h_{k_m}(t) h_{q-k_m}(t) + \varphi_q(t) \quad (6.9)$$

L'équation d'évolution avec les quantités sans dimension prend la forme :

$$\partial_t h_q(t) = -\frac{1}{\tau_q} h_q(t) - i \frac{\alpha}{\sqrt{2}L_x} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} k_m h_{k_m}(t) h_{q-k_m}(t) + \varphi_q(t) \quad (6.10)$$

Le paramètre de contrôle du cisaillement α est l'équivalent de l'ancien paramètre de contrôle α^1 qui dépend non plus de σ mais de σ' : $\alpha = \dot{\gamma}_{\text{eff}} \tau_c \times \sqrt{k_B T / (\sigma' l_c)}$. On remarque le facteur $\sqrt{2}$ devant le terme d'advection. Ce dernier vient du fait qu'on manipule les quantités sans dimension et parmi celles-ci la déformation interfaciale a été exprimée en unité de $\sqrt{k_B T l_c / 2\sigma'}$ et non simplement en unité de $\sqrt{k_B T l_c / \sigma'}$. Signalons de plus que, dans le terme de couplage de modes, k_m note simplement $k_m = m \times 2\pi / L_x$.

Le calcul présenté dans le chapitre 3 est répété dans le cas d'une interface à 1 dimension. La modification principale est le domaine sur lequel s'effectue les sommes des produits de convolution. On obtient le spectre des fluctuations suivants :

$$\begin{aligned} \langle h_q(t) h_{q'}(t) \rangle &= \frac{2L_x}{(1+q^2)} \delta_{q+q'} + 8\alpha^2 \delta_{q+q'} \\ &\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{q^3 k_m |k_m| |q-k_m|}{(1+q^2)(1+(q-k_m)^2)} \left(\frac{1}{1+k_m^2} - \frac{1}{1+q^2} \right)}{|q| |k_m| (1+(q-k_m)^2) + |q| |q-k_m| (1+k_m^2) + |k_m| |q-k_m| (1+q^2)} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Dans l'espace réel, on retrouve logiquement une correction quadratique en α du déplacement quadratique moyen des fluctuations interfaciales. Cette correction fait intervenir un facteur numérique K_{1d} dont la valeur diffère de celle du chapitre 4. On montre

$$\langle h^2 \rangle (\dot{\gamma}_{\text{eff}}) = \langle h^2 \rangle (0) - K_{1d} \alpha^2 \quad (6.12)$$

et $K_{1d} = 0.025$. De même que dans le cas d'une interface 2d, ce résultat pour une interface 1d provient du calcul numérique de la somme sur tous les vecteurs d'onde q de la correction mise en évidence dans l'espace de Fourier de l'éq. (6.11).

1. En notant α_{1D} la paramètre de contrôle de l'interface unidimensionnelle et α_{2D} celui de l'interface bidimensionnelle, on a : $\alpha_{1D} = \alpha_{2D} / \sqrt{L_y / l_c}$

6.2.2 Algorithme et paramètres de discrétisation

Le pas d'espace dx

La discrétisation en espace obéit principalement à une seule contrainte : elle doit permettre de calculer la correction du déplacement quadratique moyen de l'interface à petit α , autrement dit K_{1d} . Le facteur numérique K_{1d} est une somme sur l'ensemble des vecteurs d'onde. La discrétisation de l'espace de pas dx introduit un vecteur d'onde maximum $q_{max} = 2\pi/dx = N_t \times 2\pi/L_x$. Le facteur $K_{1d,num}$ calculé numériquement diffère du facteur K_{1d} analytique dans le sens où la somme sur les vecteurs d'onde $q_n = n \times 2\pi/L_x$ ne s'effectue pas pour n allant de $-\infty$ à $+\infty$ mais de $-N_t$ à N_t . dx , ou plutôt N_t est choisi le plus grand possible, ou le plus petit possible respectivement tel que $K_{1d,num} = K_{1d}$. Sur la fig. 6.5, on représente $K_{1d,num}$ en fonction de N_t pour différentes longueurs totales L_x . On suppose que $K_{1d,num} = K_{1d}$ lorsqu'on observe une convergence de $K_{1d,num}$. On constate que la gamme des N_t satisfaisant la contrainte $K_{1d,num} = K_{1d}$ admet un minimum croissant avec L_x . Ainsi, plus L_x est grand, plus le temps de calcul s'allonge. On choisit le compromis suivant :

$$L_x = 20 \quad \text{et} \quad N_t = 10^4 \quad \text{soit} \quad dx = 0.002.$$

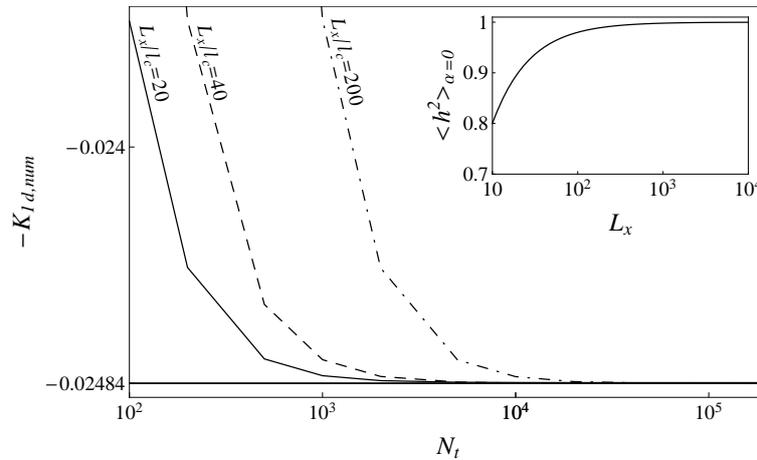


FIGURE 6.5 – Calcul numérique discret de la somme finie $-K_{1d,num}$ dont la limite $N_t \rightarrow +\infty$ donne le facteur K_{1d} de correction. Dans l'encart, on rappelle la convergence vers 1 du déplacement quadratique moyen sans dimension quand la taille de l'échantillon est de plus en plus grande.

Le terme non-linéaire

Le but est de déterminer la configuration de la déformation interfaciale à $t + dt$, $h(t + dt)$, à partir de celle à t , $h(t)$ sachant que la configuration de l'interface h vérifie l'équation (6.10). Au sein de cette équation différentielle, on porte une

attention particulière au terme non-linéaire. En représentation de Fourier, le terme non-linéaire est un terme de couplage de modes : autrement dit en terme numérique, il s'agit pour chaque vecteur d'onde d'une somme de N_t termes. L'estimation de la contribution non-linéaire pour l'ensemble de la déformation (définie par N_t modes) introduit par conséquent un temps de calcul proportionnel à N_t^2 . Il est alors plus judicieux de considérer le terme non-linéaire lorsque la déformation interfaciale est décrite dans l'espace réel. Le terme non-linéaire y est un terme d'advection, et en terme numérique une simple multiplication. L'équivalent de l'équation d'évolution temporelle des fluctuations

$$\partial_t h_q(t) = -\frac{1}{\tau_q} h_q(t) - i \frac{\alpha}{\sqrt{2} L_x} \sum_m k_m h_{k_m} h_{q-k_m} + \varphi_q(t) \quad (6.13)$$

est dans l'espace réel

$$\partial_t h(x, t) + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} h(x, t) \partial_x h(x, t) = \mathcal{L} h(x, t) + \varphi(x, t) \quad (6.14)$$

avec \mathcal{L} l'opérateur linéaire de relaxation et $\varphi(x, t)$, la contribution aléatoire, transformée de Fourier inverse de $\varphi_q(t)$. Une fois dans l'espace réel, le temps d'estimation du terme d'advection est proportionnel à N_t pour l'intégralité de la déformation interfaciale.

La prochaine tâche est par conséquent de savoir comment calculer le terme d'advection $(\alpha/\sqrt{2})h(x, t)\partial_x h(x, t)$. Ce dernier fait intervenir une dérivée spatiale $\partial_x h(x, t)$. Une des méthodes usuelles pour calculer numériquement les dérivées spatiales est d'utiliser le schéma centré d'ordre 2 suivant : $\partial_x h(x, t) = [h(x + dx, t) - h(x - dx, t)]/[2dx]$. Dans la situation présente, ce schéma pourrait être qualifié de « naïf » puisqu'il ne mène qu'à des instabilités numériques [39]. La dérivée spatiale doit être calculée à partir de schéma décentré en raison du couplage qui existe entre temps et espace. Physiquement, un terme d'advection signifie que l'« information » vient de la gauche ou (le « ou » étant exclusif) de la droite selon le signe de la vitesse (introduite par le terme d'advection). Une des méthodes les plus simples pour calculer correctement le terme d'advection est d'utiliser un schéma décentré amont (« upwind » en anglais se traduit mot à mot par « dans le vent ») :

$$\partial_x h(x, t) = [h(x, t) - h(x \mp dx, t)]/[\pm dx]$$

selon que $\alpha h(x, t)$ soit positif ou négatif respectivement. $\alpha h(x, t)/\sqrt{2}$ est effectivement la vitesse d'advection introduite par le terme non-linéaire : une vitesse positive signifie que l'information se déplace de la gauche vers la droite (sens des x positifs) alors $\partial_x h(x, t) = [h(x, t) - h(x - dx, t)]/dx$, au contraire une vitesse négative signifie que l'information se déplace de la droite vers la gauche (sens des x négatifs) d'où $\partial_x h(x, t) = [h(x + dx, t) - h(x, t)]/dx$.

Notons qu'en pratique, on calcule $[\alpha/(2\sqrt{2})]\partial_x h^2(x, t)$.

Le pas de temps dt : condition CFL

On aborde la discrétisation du temps à la suite de la discussion sur le terme non-linéaire puisque la contrainte sur le pas de temps résulte d'une comparaison entre la vitesse numérique dx/dt et la vitesse d'advection $(\alpha/\sqrt{2})h(x,t)$. La vitesse d'évolution numérique dx/dt doit être supérieure à la vitesse du transport de l'information $(\alpha/\sqrt{2})h(x,t)$ en valeur absolue (l'information ne doit pas se déplacer plus vite que ce qu'on est capable d'atteindre). Il s'agit de la condition de Courant, Friedrichs et Levy (CFL) [39]. La comparaison des vitesses conduit à $dt < \sqrt{2}dx/|\alpha h|$. Les fluctuations thermiques interfaciales étant de l'ordre de l'unité, on pose

$$dt = \min(0.002; 0.1 \times \frac{dx}{|\alpha|}).$$

On retrouve le pas de temps $dt = 0.002$ de l'équilibre. Rigoureusement, on pose le pas de temps comme étant le pas de temps minimum entre celui de l'équilibre et celui provenant de la condition CFL, bien que dès que $\alpha > 0.1$, la condition CFL gouverne ce dernier. Comme précaution supplémentaire, on inclut au programme un test de la CFL. Il suffit en effet que cette condition ne soit pas remplie une fois pour que les résultats numériques ne soient plus représentatifs. La condition ci-dessus permet de remplir la condition CFL à chaque pas de temps.

Le schéma décentré amont avec le pas de temps dt défini à partir de la CFL permet de modéliser le terme d'advection $\alpha h \partial_x h$, comme le confirme la fig. 6.6 ci-dessous.

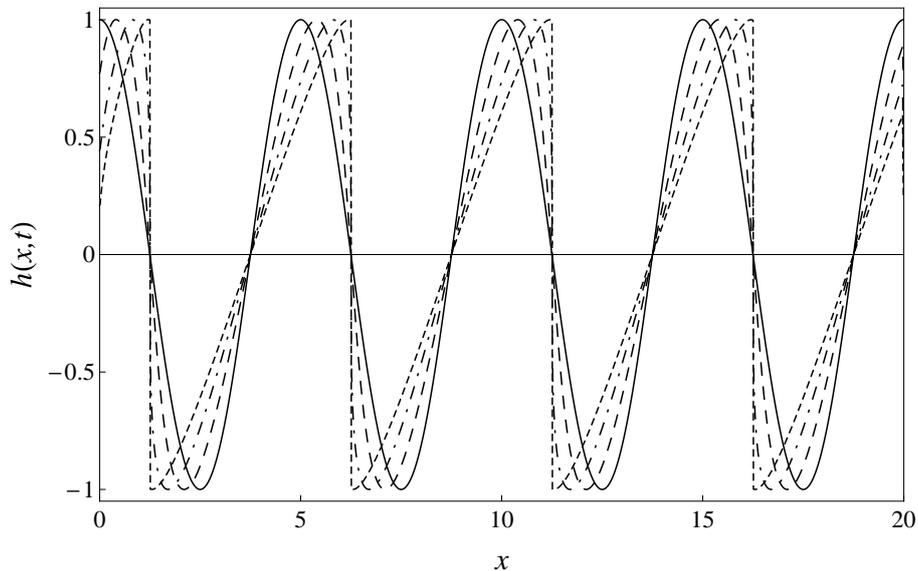


FIGURE 6.6 – Modélisation du terme de transport $\partial_t h + h \partial_x h = 0$ lorsque le temps augmente $t = 0; 0,4; 0,8$ et $1,2$.

Algorithme complet

initialisation : définir h dans l'espace réel et calculer sa série de Fourier ou inversement.

Calcul : pour \mathbf{t} allant de 0 à $\mathbf{t}_{\text{final}}$:

- ajout de la première partie du terme d'advection sur $dt/2$ (dans l'espace réel),
pour \mathbf{x} de 0 à L_x , $h \rightarrow h - (dt/2) \times [\alpha/(2\sqrt{2})]\partial_x h^2$,
- passage en série de Fourier,
- ajout du terme de relaxation et du terme aléatoire sur dt (dans l'espace de Fourier),
pour \mathbf{q} de $2\pi/L_x$ à $2\pi/dx$, $h \rightarrow \exp(-\tau_q dt) \times (h + \xi_{dt})$,
- passage en représentation réelle,
- ajout de la seconde partie du terme d'advection sur $dt/2$ (dans l'espace réel),
pour \mathbf{x} de 0 à L_x , $h \rightarrow h - (dt/2) \times [\alpha/(2\sqrt{2})]\partial_x h^2$,
- calcul de la série de Fourier si nécessaire.

Remarques : L'ajout du terme d'advection est scindé en deux parties entre les première et avant-dernière étapes qui semblent alors identiques. Cependant, il est important de noter qu'entre ces deux étapes, il y a eu ajout du terme de relaxation et de la variable aléatoire : la déformation interfaciales advectée est différente d'une étape à l'autre. Physiquement, les trois termes, relaxation, forçage aléatoire et advection, ont lieu en même temps. Numériquement, il n'est pas possible d'effectuer les trois étapes en même temps. Dans le but de pallier cet inconvénient, la déformation de l'interface est advectée en deux fois : une première fois sans la prise en compte de la relaxation et de l'excitation stochastique, puis une seconde fois, avec la prise en compte de ces deux termes. On a préféré joué sur le terme d'advection plutôt que sur les deux autres termes car l'intégration de ces deux derniers termes se résout exactement.

Pour obtenir les propriétés statistiques, on effectue différentes moyennes de même que pour la vérification des propriétés des fluctuations à l'équilibre : on prend en compte $\text{NB_PTS} = 20\,000$ configurations issues de la même évolution temporelle et $\text{NB_ENS} = 20$ évolutions temporelles différentes. Seules les données au-delà de $t = 5$ sont prises en compte afin de minimiser le plus possible l'influence de la configuration initiale (on pose $h = 0$ à $t = 0$). De plus, on ne considère pas toutes les configurations de l'interface tous les dt à cause des corrélations temporelles. Un délai sépare deux configurations utiles. Le pas de temps dt étant inversement proportionnel à α dès que $\alpha > 0.1$, un délai fixe quel que soit le cisaillement peut vite aboutir à de longs temps de calcul. Pour des soucis d'efficacité, ce délai est raccourci avec le cisaillement.

6.2.3 Résultats

Avant de s'intéresser à des données quantitatives, on regarde quelle est l'allure présentée par l'interface : on compare son allure à l'équilibre avec celle sous cisaillement. Ensuite, la présentation des données qualitatives suit la même logique qu'à l'équilibre : dans l'espace de Fourier, on s'intéresse au spectre et aux corrélations temporelles et dans l'espace réel, au déplacement quadratique moyen.

Visualisation de l'interface

La fig. 6.7 permet de comparer l'évolution temporelle des fluctuations interfaciales sans cisaillement (colonne de gauche) et avec cisaillement ($\alpha = 10$, colonne de droite) à partir d'une même condition initiale.

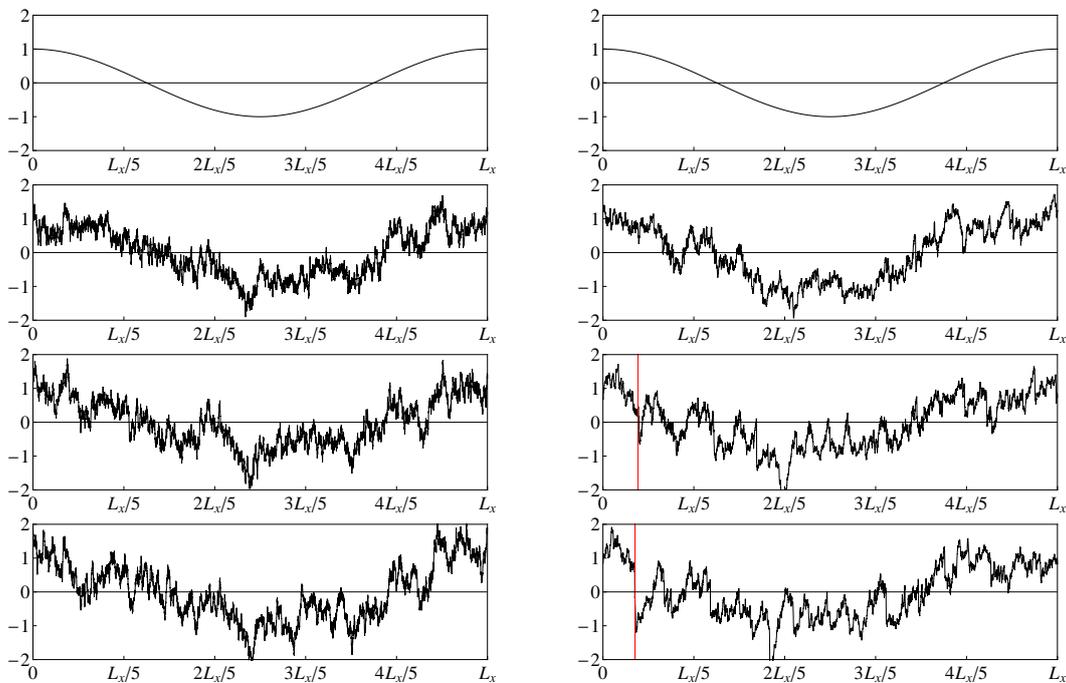


FIGURE 6.7 – Déformations de l'interface à $t = 0$ (en haut), $t = 0.04$, $t = 0.08$ et $t = 0.12$ (en bas) à l'équilibre (colonne de gauche) et pour $\alpha = 10$ (colonne de droite).

A l'équilibre : On observe l'existence des corrélations temporelles puisque lorsque le temps augmente, la forme de l'interface conserve des signatures de la forme sinusoïdale initiale. En outre, les fluctuations semblent abruptes. Il faut se rappeler néanmoins que les deux échelles, verticales et horizontales, sont différentes, le rapport entre les deux étant ε le petit paramètre du développement des faibles gradients. Puis, il faut réaliser que la variance des dérivées dépend

de la discrétisation spatiale envisagée car $\langle |\nabla h|^2 \rangle \propto \sum_q q^2 |h_q|^2$, donc la variance dépend de q_{max} .

Sous cisaillement : On repère à nouveau l'existence de corrélations temporelles avec la conservation dans le temps de la signature de la sinusoïde initiale. On note par contre la présence de discontinuités : on en a repéré une sur la dernière partie (en bas à droite) de la fig. 6.7 à l'aide d'un trait vertical rouge. Des discontinuités apparaissent dans le cadre des modèles de turbulence et par analogie avec ces modèles (par exemple, la référence [7] étudie les discontinuités des champs de vitesse), on associe aux discontinuités les notions de chocs (les discontinuités) et de préchocs (naissance des discontinuités). On repère sur l'avant-dernière partie de la fig. 6.7 le préchoc à l'origine du choc repéré sur la dernière partie de la fig. 6.7 à l'aide d'un trait vertical rouge.

Les remarques découlant de la visualisation de l'interface restent sommaires. Dans la suite, on envisage des études quantitatives qui permettent des conclusions plus précises.

Dans l'espace de Fourier

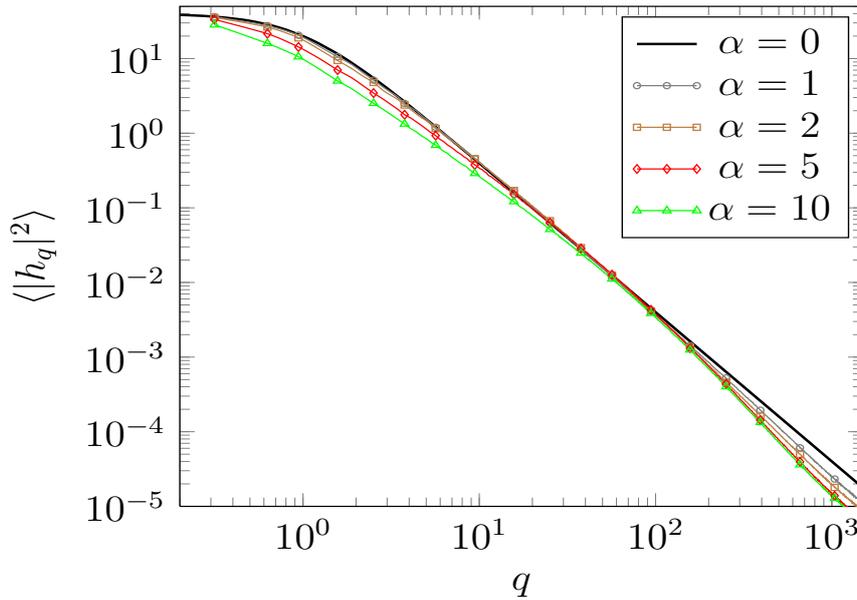


FIGURE 6.8 – Spectre statique des fluctuations $\langle |h_q|^2 \rangle$ en fonction du vecteur d'onde q pour différents cisaillements. La courbe continue noire repère la dépendance du spectre à l'équilibre par rapport au vecteur d'onde q , soit $2L_x/(1+q^2)$.

On commence par calculer le spectre des fluctuations pour différents cisaillements, spectres représentés sur la fig. 6.8. On constate deux modifications provenant du cisaillement. La première à apparaître est une diminution de l'amplitude du

spectre à grands vecteurs d'onde : les petites longueurs d'onde sont les premières à être affectées par le cisaillement. Cette diminution semble saturer lorsque $\alpha \geq 5$, elle ralentit tout au moins. Ensuite, quand le cisaillement augmente, on remarque une suppression des vecteurs d'onde $q \sim 1$. Au contraire de l'effet précédent, cet effet est presque nul à petit cisaillement et s'accélère quand le cisaillement augmente. Les vecteurs d'onde tel que $q \sim 50$ ne semblent pas être affectés par le cisaillement.

Dans l'espace de Fourier, on s'intéresse également pour différents vecteurs d'onde aux fonctions de corrélations temporelles. Le temps de calcul limite la précision obtenue. Les courbes présentées sur la fig. 6.9 résultent déjà de 3 calculs de 55h et d'un dernier d'une vingtaine d'heures. On pourrait sans doute contourner cet inconvénient via des techniques de calculs parallèles.

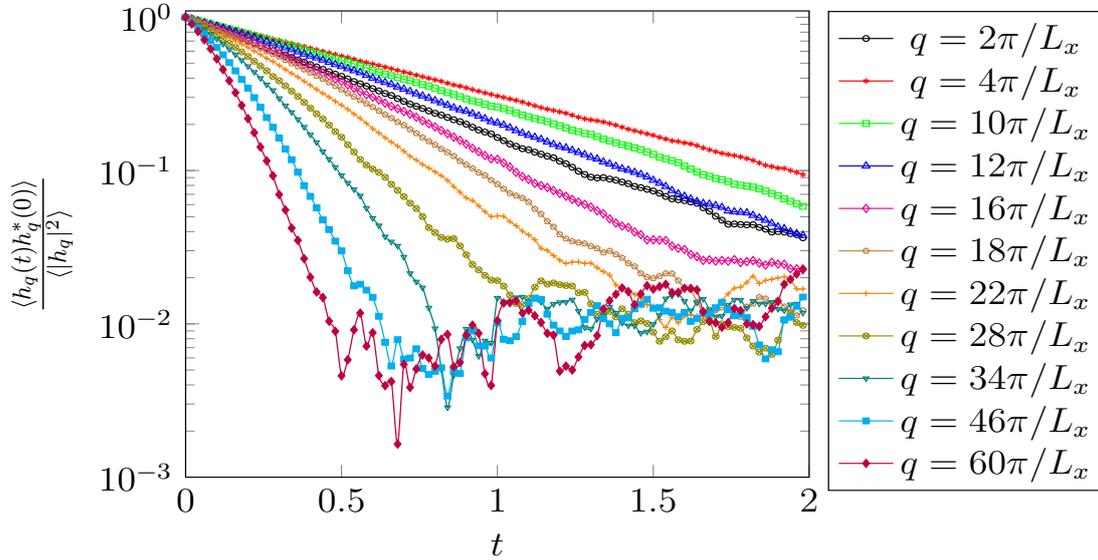


FIGURE 6.9 – Corrélation temporelle $\langle h_q(t)h_q^*(0) \rangle / \langle |h_q|^2 \rangle$ en fonction du temps t pour un taux de cisaillement $\alpha = 1$.

Les courbes de la fig. 6.9 permettent de comparer l'explication émise par D. Derks et ses collaborateurs [17] avec le modèle hydrodynamique. Ils ont effectivement émis l'hypothèse que les fluctuations étaient supprimées par le cisaillement si $\tau_q \dot{\gamma}_{\text{app}} > 1$. Plus précisément, les fluctuations de temps de vie τ_q à l'équilibre ont un temps de vie nul si τ_q vérifie $\tau_q \dot{\gamma}_{\text{app}} > 1$. On se rappelle que les temps de vie maximum à l'équilibre sont pour les modes tel que $ql_c \simeq 1$, ainsi les premiers modes à être affectés et supprimés par le cisaillement sont les modes de vecteurs d'onde $ql_c \simeq 1$. On a schématisé cette explication sur le graphe 6.10. On souhaite donc savoir comment sont modifiées les temps de relaxation sous l'effet du cisaillement ce qui peut être obtenu à l'aide de la fig. 6.9.

A l'aide des courbes représentées sur la fig. 6.9 correspondant à un cisaillement

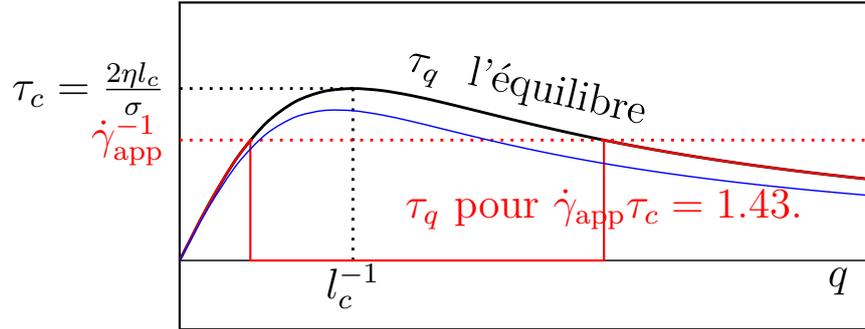


FIGURE 6.10 – Représentation schématique de l’explication émise par D. Derks et ses collaborateurs dans la réf. [17]. En noir et gras, on a représenté les temps de relaxation de l’équilibre. La courbe en rouge et un peu plus fine est associée à l’explication de l’article expérimental [17]. Enfin, la fine courbe bleue représente la tendance des temps de relaxation tirée des ajustements autour de $t = 0$ des fonctions de corrélation temporelle $\langle h_q(t)h_q^*(0) \rangle$ à l’aide d’une exponentielle.

$\alpha = 1$, on remarque tout d’abord que la définition des temps de relaxation associée à la situation à l’équilibre n’a plus de signification, les décroissances des fonctions de corrélation n’étant plus exponentielles à grands vecteurs d’onde. Cette difficulté à définir des temps de relaxation sous cisaillement n’est pas abordée dans le modèle de D. Derks et ses collaborateurs. Ensuite, en définissant toutefois des temps de relaxation par rapport au comportement des corrélations autour de $t = 0$, on peut remarquer que les temps de relaxation ont tendance à diminuer pour tous les vecteurs d’onde excepté dans notre cas pour le vecteur d’onde le plus petit $q = 2\pi/L_x$. On observe effectivement une « coupure » des temps de relaxation, même si celle-ci n’est pas totale par analogie avec la modèle de la réf. [17]. Cette coupure est représentée sommairement sur la fig. 6.10. Néanmoins, les calculs du temps de relaxation dépendent du nombre de points utilisés d’où l’absence de la courbe τ_q pour $\alpha = 1$. Enfin, on peut noter, que de manière analogue à l’étude du spectre statique, plus le vecteur d’onde est grand, plus les corrélations temporelles des déformations interfaciales sont affectées par le cisaillement.

Déplacement quadratique des déformations

On s’intéresse au déplacement quadratique moyen de l’interface. Son calcul numérique permet de valider ou de réfuter le développement analytique effectué pour α petit. Sur la fig. 6.11, on compare les données obtenues par résolution numérique de $\langle h^2(x, t) \rangle$ avec son expression analytique obtenue suite au développement de l’équation d’évolution à petit cisaillement. On constate que les données numériquement s’accordent parfaitement avec l’expression analytique. On peut de plus estimer que l’expression analytique est valable au-delà de $\alpha = 1$ jusqu’à $\alpha \simeq 1.5$.

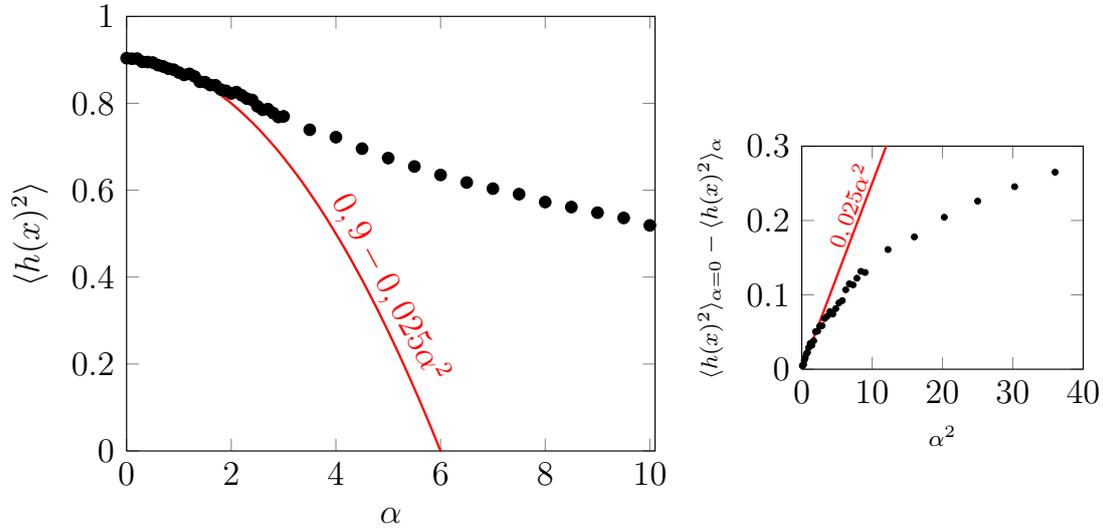


FIGURE 6.11 – Comparaison des données $\langle h^2 \rangle(\alpha)$ obtenues à la suite de la résolution numérique concernant le déplacement quadratique moyen avec son expression analytique établie à l'aide d'un développement de l'équation d'évolution. Dans l'encart, il s'agit d'une seconde représentation des mêmes données : la diminution du déplacement quadratique moyen en fonction du paramètre de contrôle au carré α^2 .

L'étude numérique confirme la validité de la résolution à petit α de l'équation d'évolution des fluctuations de l'interface. Aucune singularité n'apparaît dans le déplacement quadratique moyen de l'interface en fonction du cisaillement. Le comportement est au contraire particulièrement bien régulier et continu. Le décalage entre mesures expérimentales et modèle hydrodynamique ne s'explique par conséquent pas par le développement analytique en α .

6.3 Au-delà de la rugosité de l'interface

Lorsque α est de l'ordre de l'unité, la résolution de l'équation d'évolution s'effectue exclusivement numériquement. Lorsque le cisaillement augmente, on peut se poser la question de la conservation du caractère gaussien des fluctuations.

Pour cela, on compare le moment d'ordre 4 des déformations avec le carré du moment d'ordre 2 : le caractère gaussien des fluctuations semble confirmer. Cependant, la résolution numérique nous permet d'accéder directement à la densité de probabilité des déformations que nous présentons dans un second temps : le caractère gaussien des fluctuations est alors définitivement remis en cause. Enfin, on utilise des outils communs avec les modèles de turbulence comme les incréments de déformation. Ces propriétés permettent en effet de caractériser les discontinuités, mises en évidence avec la visualisation de l'interface sous cisaillement.

6.3.1 Moment d'ordre 4 de la déformation

Pour tester le caractère gaussien des fluctuations, on s'intéresse tout d'abord au moment d'ordre 4 de la déformation, $\langle h^4 \rangle$. En particulier, on le compare avec le carré de la variance de cette même déformation $\langle h^2 \rangle^2$. Il est connu en effet que pour une distribution gaussienne, la relation $\langle h^4 \rangle = 3\langle h^2 \rangle^2$ est vérifiée. Ainsi la fig. 6.12 justapose les deux séries de données numériques, $\langle h^4 \rangle$ d'une part et $3\langle h^2 \rangle^2$ d'autre part, calculées lors des mêmes expériences numériques.

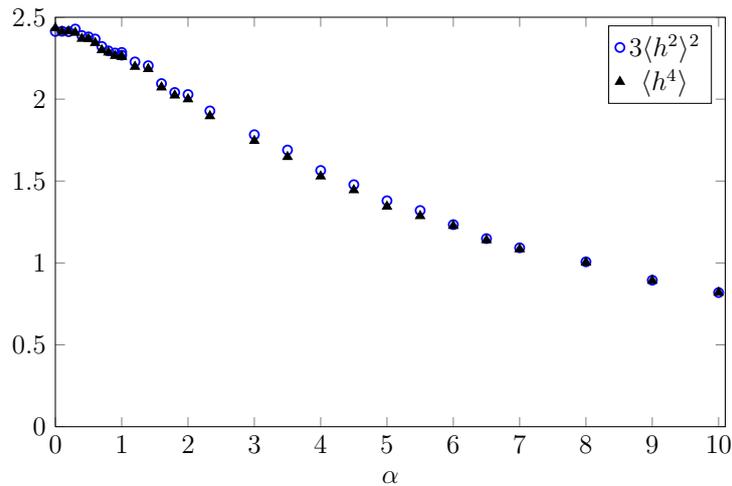


FIGURE 6.12 – Comparaison du moment d'ordre 4 $\langle h^4 \rangle$ (α) en triangles noirs avec $3\langle h^2 \rangle^2$ en cercles bleus en fonction du cisaillement α .

On constate que les deux séries de données s'accordent parfaitement l'une avec l'autre. La comparaison semble indiquer une conservation du caractère gaussien des fluctuations, même à assez grand cisaillement (jusqu'à $\alpha = 10$ au moins). La situation est cependant beaucoup plus complexe qu'elle ne paraît à ce stade.

6.3.2 Densité de probabilité des déformations

Courbes

Méthodiquement, dans l'espace réel, on s'intéresse dans un premier temps aux propriétés instantanées et locales des fluctuations. Toutes ces propriétés sont regroupées au sein de la fonction de densité de probabilité (pdf) des déformations interfaciales h . On la calcule alors pour plusieurs cisaillements, α allant de 0 à 10, et on représente ces pdf sur la fig. 6.13. On note tout d'abord qu'on retrouve les principales caractéristiques mises en évidence jusqu'ici :

- moyenne nulle de la déformation de l'interface, $\langle h \rangle = 0$,
- diminution de la variance $\langle h^2 \rangle$ avec le cisaillement,

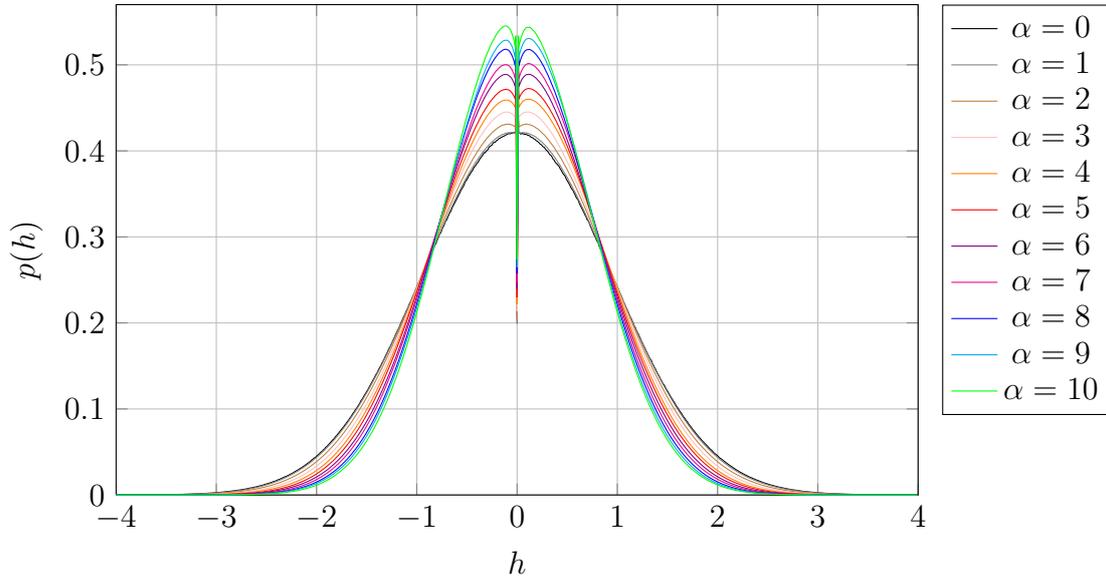


FIGURE 6.13 – Densité de probabilité de la déformation de l'interface h pour différents cisaillements.

– et symétrie entre les valeurs positives de la déformation et celles négatives.

Néanmoins, on remarque que la valeur la plus probable n'est pas $h = 0$ mais deux valeurs $h = \pm h_{max}$. Il semble y avoir bifurcation de la valeur la plus probable. α le paramètre de contrôle du cisaillement est également le paramètre de contrôle de cette bifurcation. Localement dans le temps et dans l'espace, en raison des corrélations, cette bifurcation s'associe probablement à une brisure de symétrie : les valeurs de la déformation h se situent soit aux alentours de $h = +h_{max}$, soit aux alentours de $h = -h_{max}$. Cependant, à plus grande échelle (en temps et espace), les fluctuations deviennent indépendantes les unes des autres et explorent une plus grande plage de déformations possibles : la symétrie est restaurée entre les valeurs positives et négatives de la déformation.

Par ailleurs, l'allure complète des pdf permet de comprendre pourquoi les moments d'ordre 4, $\langle h^4 \rangle$, ne retranscrivent pas le caractère non gaussien des fluctuations lorsque le cisaillement augmente. La pdf s'éloigne d'une distribution gaussienne seulement sur une zone relativement faible autour de $h = 0$. A l'échelle de l'intégrale sur l'ensemble des valeurs de h , l'influence de cette zone est donc limitée.

Dans le prochain paragraphe, on caractérise cette bifurcation.

h_{max}

Afin de caractériser la bifurcation de la valeur la plus probable de la déformation, la première étape est de définir la valeur h_{max} . Rigoureusement, h_{max} et $-h_{max}$ sont les valeurs où la dérivée de la pdf de h s'annule. Cependant, on ne peut procéder tel

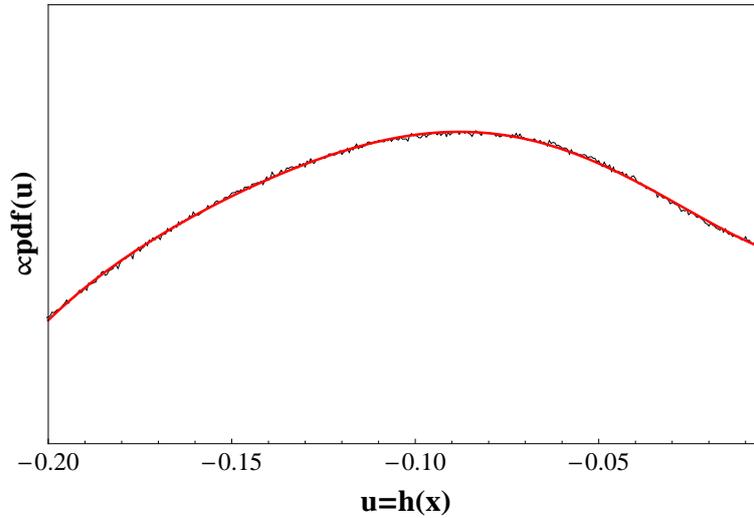


FIGURE 6.14 – Agrandissement de la fonction de densité de probabilité de h pour $\alpha = 1.8$ autour de la valeur négative de h la plus probable. En rouge, un polynôme d'ordre 5 suit la fonction de densité de probabilité de h représentée en noir.

quel car la pdf de h est fortement bruitée à petite échelle en raison de la contribution stochastique de l'équation d'évolution. On a choisi la procédure suivante :

- on se focalise sur les deux zones $[-0.2; -0.02]$ et $[0.02; 0.2]$ (la zone autour de $h = 0$ présente des artefacts numériques),
- on ajuste deux polynômes d'ordre 5 sur la pdf de h (pour les deux zones distinctes). Le polynôme pour $\alpha = 1.8$ et pour les valeurs négatives de h est représenté en rouge sur la fig. 6.14,
- on calcule pour quels h la dérivée des polynômes d'ordre 5 s'annule, on obtient 4 valeurs dont 2 sont complexes conjuguées et une autre dont la valeur ne se situe pas dans le domaine concerné : il reste une seule racine de la dérivée de chaque polynôme.

Avec la procédure qu'on vient de présenter, on obtient les valeurs les plus probables de h en fonction du cisaillement, courbe représentée sur la fig. 6.15. Sur la deuxième partie de la fig. 6.15, on renormalise h_{max} par le déplacement quadratique moyen en fonction du cisaillement : $h_{max}^2 / \langle h^2 \rangle$ est représenté en fonction de α . Il a été vérifié pour chaque valeur du cisaillement, que les deux polynômes d'ordre 5 concordent parfaitement avec les données numériques. Il semble que la bifurcation soit discontinue. Même si on a dérivé ce résultat rigoureusement, on le considère avec précaution puisque lorsque le cisaillement diminue, h_{max} tend bien sûr vers 0 mais surtout la valeur de la pdf en h_{max} tend encore plus vite vers sa valeur en 0. Par ailleurs, un artefact numérique empêche d'être précis lorsque $h \rightarrow 0$.

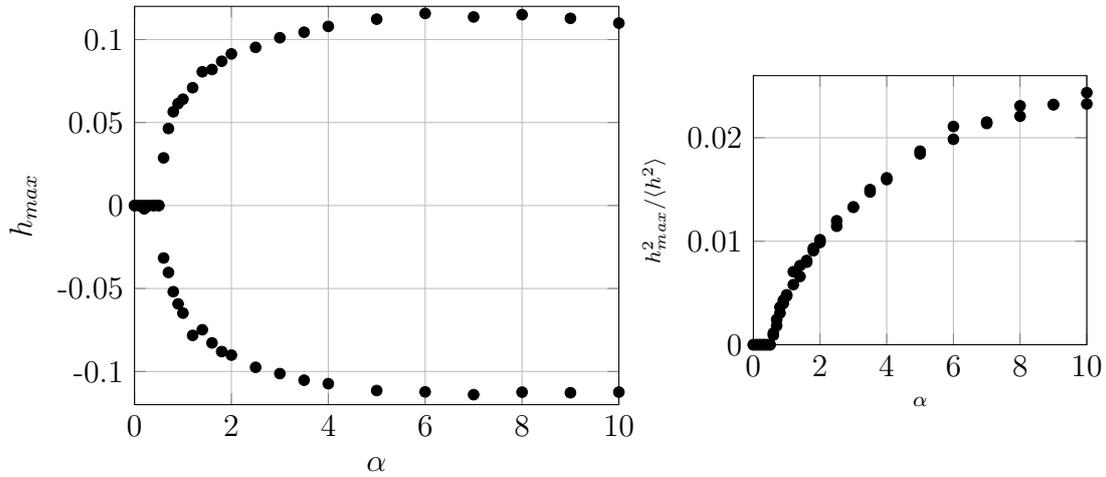


FIGURE 6.15 – Valeur la plus probable de la déformation h_{max} en fonction du cisaillement avec à droite sa renormalisation par le déplacement quadratique moyen.

6.3.3 Incréments de déformation

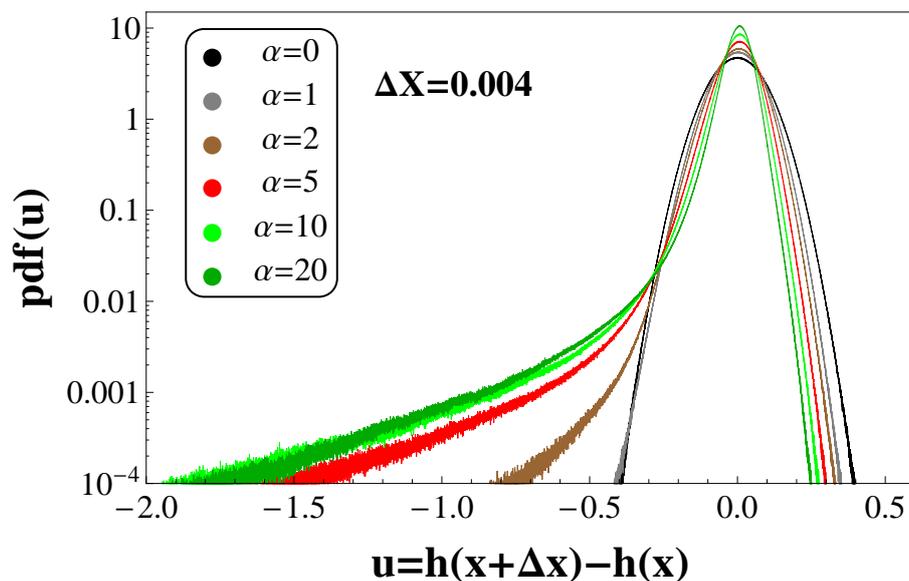
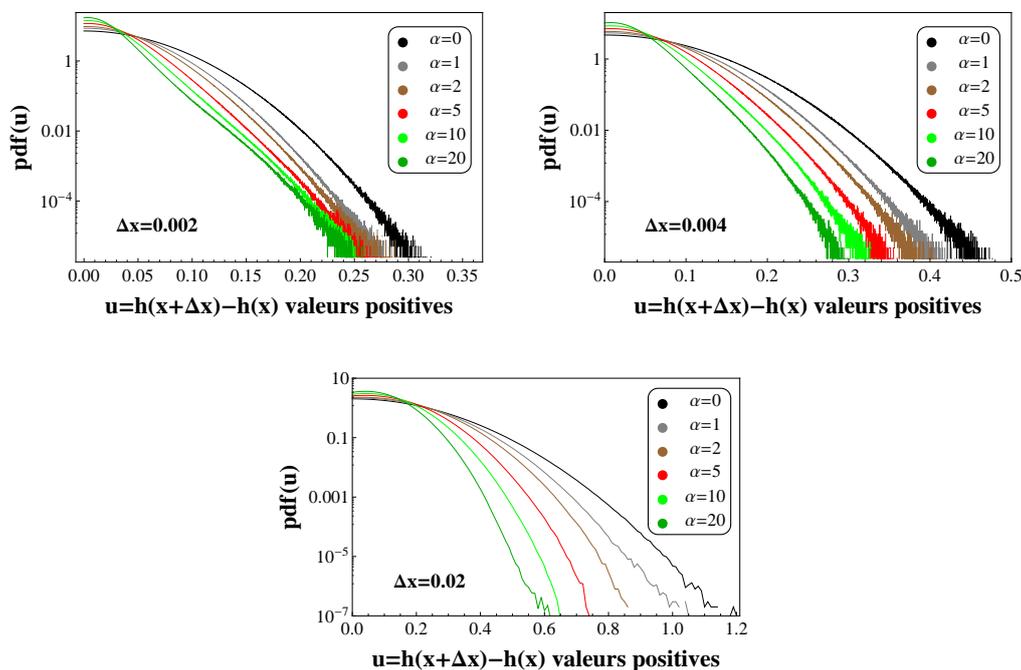
Le terme non-linéaire de l'équation d'évolution temporelle des fluctuations sous cisaillement s'écrit dans l'espace réel comme un terme non-linéaire de convection. Par analogie avec les études sur la turbulence dans le cadre de l'équation de Burgers, on s'intéresse aux incréments de déformation $h(x + \Delta x) - h(x)$ [48].

D'une part, on s'intéresse aux pdf des incréments de déformation pour différentes échelles (différents Δx) quand α s'accroît. D'autre part, on étudie le comportement en loi d'échelle des moments d'ordre p des incréments. Ces lois d'échelle mettent en évidence un exposant ζ_p qui présente des caractéristiques intéressantes au fur et à mesure que le cisaillement augmente.

Densité de probabilité des incréments

On calcule les pdf des incréments pour différents Δx et différents cisaillements. Par exemple, la fig. 6.16 présente la pdf des incréments associés à $\Delta x = 0.004$. Plus le cisaillement augmente, plus la pdf s'éloigne de la distribution gaussienne, caractéristique de l'équilibre. La particularité la plus frappante à grand cisaillement est la dissymétrie des pdf entre les probabilités des valeurs positives des incréments et les probabilités des valeurs négatives. Dans la suite on distingue l'étude des incréments positifs et des incréments négatifs.

Valeurs positives des incréments : La fig. 6.17 présente la moitié des pdf des incréments associés respectivement à $\Delta x = 0.002$, $\Delta x = 0.004$ et $\Delta x = 0.02$, moitié correspondant aux valeurs positives des incréments. La fig. 6.17 utilise une représentation en échelle semi-logarithmique (échelles linéaire en abscisse et logarithmique en ordonnée). Lorsque le cisaillement augmente,

FIGURE 6.16 – pdf de $h(x + \Delta x) - h(x)$ pour $\Delta x = 0.004$.FIGURE 6.17 – Densité de probabilité des incréments $h(x + \Delta x) - h(x)$ correspondant aux valeurs *positives* de ces derniers. Les trois graphes correspondent respectivement à $\Delta x = 0.002; 0.004$ et 0.02 .

- les valeurs des faibles incréments sont de plus en plus probables,
- tandis qu'il est de plus en plus rare d'observer des grands incréments.

La frontière entre faible et grand incréments augmente avec l'échelle : pour $\Delta x = 0.002$ elle est d'environ 0.04, pour $\Delta x = 0.004$ elle est d'environ 0.08 et pour $\Delta x = 0.02$ elle est d'environ 0.2. Cette tendance est cohérente : plus l'échelle considérée est grande, plus les incréments ont de chance d'être grands vu que les corrélations spatiales diminuent.

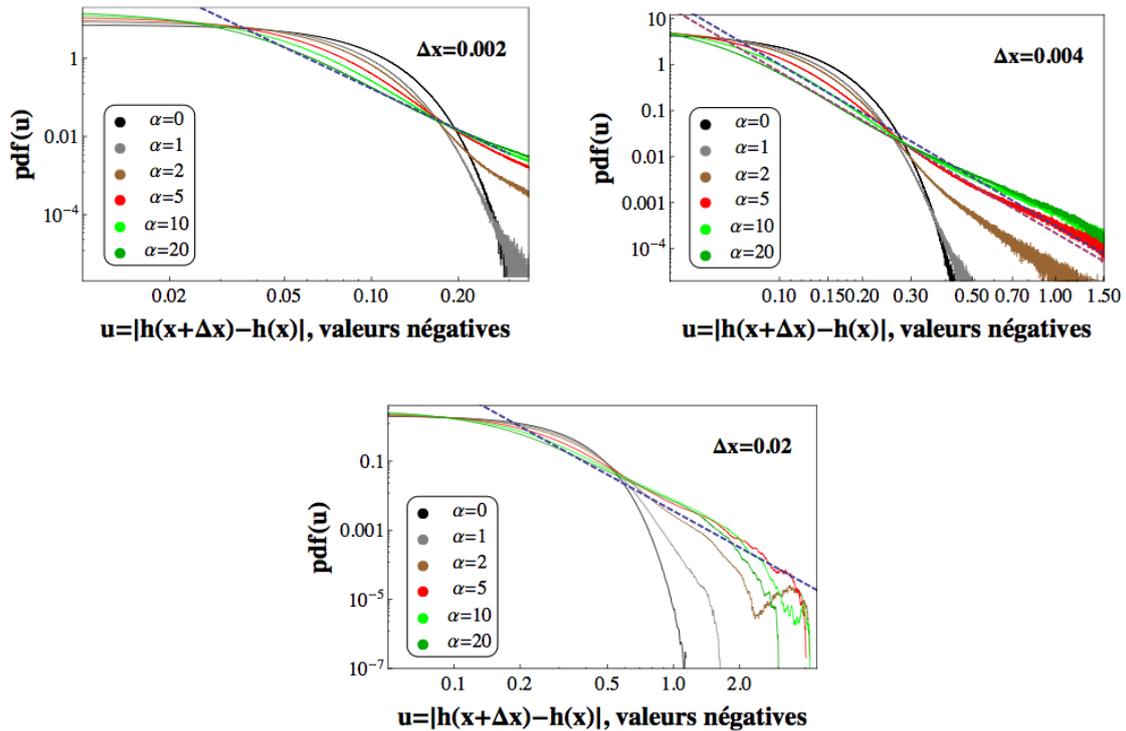


FIGURE 6.18 – Densité de probabilité des incréments $|h(x + \Delta x) - h(x)|$ correspondant aux valeurs *negatives* de ces derniers. Les trois graphes correspondent respectivement à $\Delta x = 0.002$; 0.004 et 0.02.

Valeurs négatives des incréments : La fig. 6.18 présente la seconde moitié des pdf des incréments, moitié correspondant aux valeurs négatives. De manière cohérente, la fig. 6.18 se focalise sur les trois échelles $\Delta x = 0.002$, $\Delta x = 0.004$ et $\Delta x = 0.02$. Les données sont représentées en échelle logarithmique (échelle logarithmique à la fois pour les ordonnées et pour les abscisses qui correspondent alors aux valeurs absolues des incréments). On retrouve les mêmes résultats que précédemment : faibles incréments surreprésentés par rapport à l'équilibre et incréments un peu plus importants sous-représentés par rapport à l'équilibre. Cependant, un troisième phénomène apparaît : les très grandes différences de déformation deviennent de plus en plus répandues avec le cisaille-

ment. Même si ces évènements restent très rares, le comportement exponentiel devient un comportement en loi d'échelle : la pdf est proportionnelle à une puissance négative de l'incrément $h(x + \Delta x) - h(x)$. Les lignes en pointillés sur la fig. 6.18 mettent en évidence la loi d'échelle associée à l'exposant $-7/2$. Ces évènements rares qui le deviennent de moins en moins et qui présentent un comportement en loi d'échelle sont caractéristiques des discontinuités observées lors de la visualisation de l'interface. Le comportement en loi d'échelle des pdf des incréments négatifs, en tant que signature de discontinuités, est discuté dans la réf. [7]. Dans cette référence, les auteurs considèrent en particulier les incréments de vitesse. Ils sont de plus généralement observés dans la cadre des modèles de turbulence des fluides.

Moments S_p

Une autre particularité des modèles de turbulence concerne les moments

$$S_p = \langle |h(x + \Delta x) - h(x)|^p \rangle$$

On les suppose se comporter en loi de puissance par rapport à Δx et on note ζ_p l'exposant : $S_p \propto \Delta x^{\zeta_p}$. Par exemple, la fig. 6.19 présente S_2 en fonction de Δx . Aux échelles intermédiaires, S_2 semble effectivement proportionnel à Δx , et ceci quel que soit le cisaillement. Les comportements à petites et grandes échelles s'éloignent de cette proportionnalité. Ce décalage aux échelles extrêmes entre le comportement observé et un comportement en loi d'échelle peut sans beaucoup de risques être associé d'une part à la discrétisation de l'espace et d'autre part à la taille finie selon (Ox) du système. Dans la suite, on suppose que l'exposant critique pour le moment d'ordre 2 S_2 est $\zeta_2 = 1$.

Une astuce pour limiter les effets de bord est alors de considérer les moments S_p comme une fonction de S_2 . Les exposants de la loi d'échelle de la fonction $S_p(S_2)$ sont effectivement a priori les mêmes que les exposants de la fonction $S_p(\Delta x)$ puisque S_2 et Δx sont identiques à une constante près. La fig. 6.20 représente les six premiers moments en fonction de S_2 pour différents cisaillements. On calcule les exposants ζ_p , fonction de p , pour différents cisaillements, par l'ajustement des données numériques à l'aide de lois d'échelles. L'intégralité des échelles est alors considérée. Au premier abord, il semble que plus l'ordre du moment est élevé, plus l'écart par rapport au comportement sans cisaillement est important. Ce constat est confirmé de manière quantitative dans le prochain paragraphe sur les exposants ζ_p .

Exposants ζ_p

Les courbes des moments permettent effectivement d'obtenir des exposants, fonction de l'ordre du moment p , avec pour paramètre le cisaillement. A l'équilibre, on peut montrer qu'on a $S_p \propto \Delta x^{p/2}$, soit $\zeta_p = p/2$. La fig. 6.21 représente les exposants ζ_p en fonction de p , et met effectivement en évidence la fonction $\zeta_p = p/2$

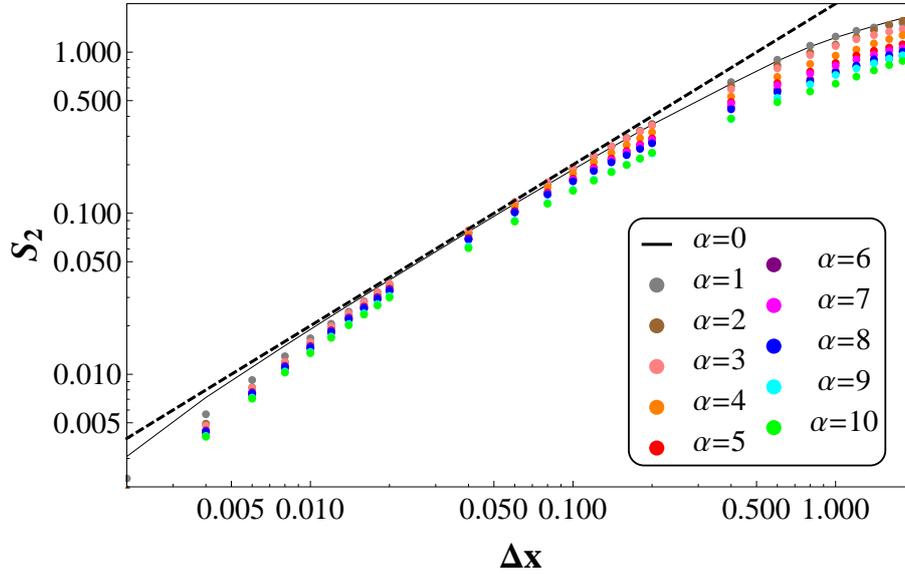


FIGURE 6.19 – S_2 en fonction de Δx pour différents cisaillements. La ligne noire en pointillés est la fonction $2\Delta x$, ligne qui repère le comportement en loi d'échelle d'exposant $\zeta_2 = 1$.

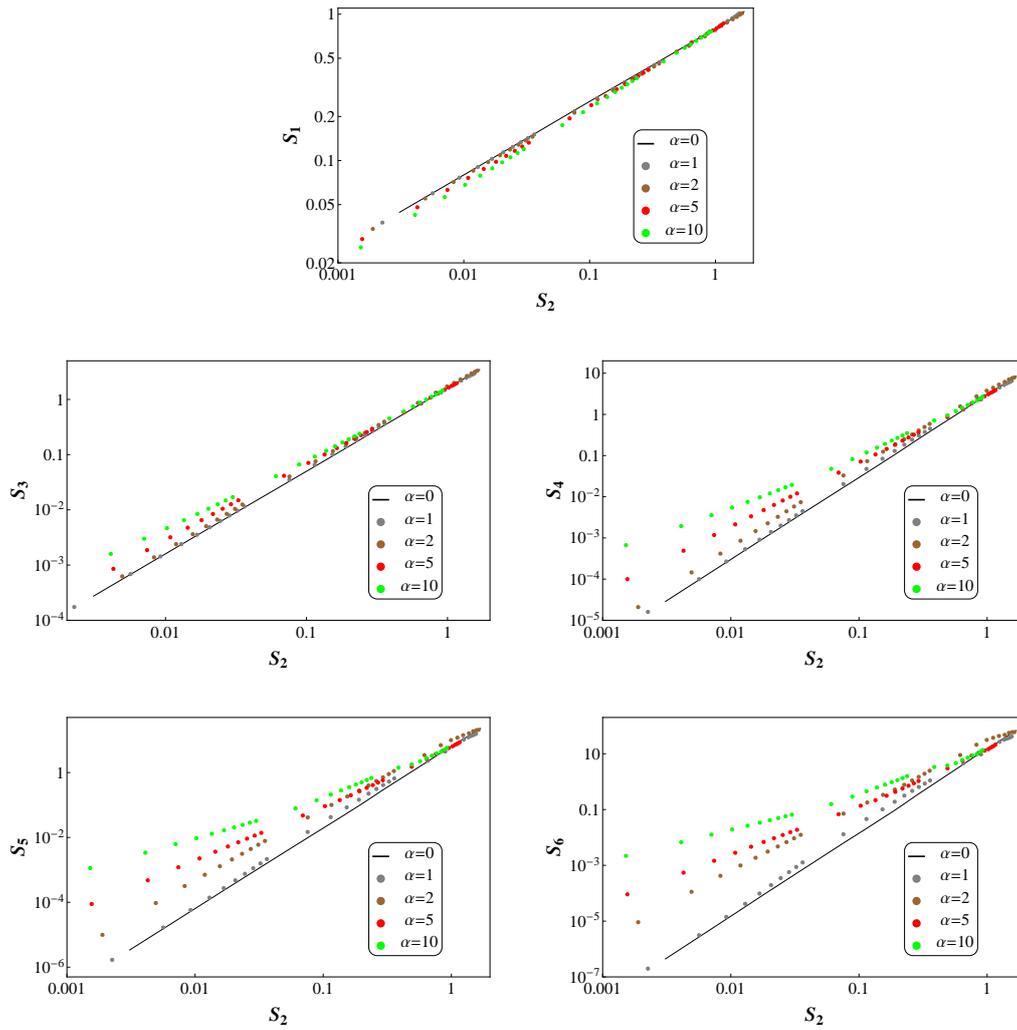
avec les données des exposants à l'équilibre (cercles noirs). Finalement, à l'équilibre, les exposants s'alignent conformément à ce qui était attendu le long d'une droite de pente $1/2$, droite repérée par des pointillés. Plus le cisaillement augmente, plus la courbe des exposants s'éloigne de ce comportement linéaire avec l'ordre p . Les exposants augmentent moins vite que linéairement. De plus, il semble que lorsque le cisaillement devient important, la courbe des exposants présente une saturation autour de $\zeta_p = 1.2$, saturation mise en évidence par la seconde ligne pointillée horizontale. Cette saturation avec p des exposants ζ_p est aussi présente dans le cadre de certains modèles de turbulence, comme on peut le voir dans la réf. [7].

6.4 Discussion

La résolution numérique de l'équation non-linéaire d'évolution temporelle des fluctuations a été implémentée. Après avoir vérifié sa validité à l'aide des propriétés des fluctuations à l'équilibre, on a pu calculer les propriétés des fluctuations avec le cisaillement :

- à petit cisaillement, on a pu vérifier la validité du développement analytique effectué dans le chapitre 3.
- à plus grand cisaillement, différentes caractéristiques intéressantes ont été mises en évidence.

Tout d'abord, à l'aide des incréments de déformation, plus précisément à l'aide

FIGURE 6.20 – S_p pour $p = 1, 3, 4, 5$ et 6 en fonction de S_2 .

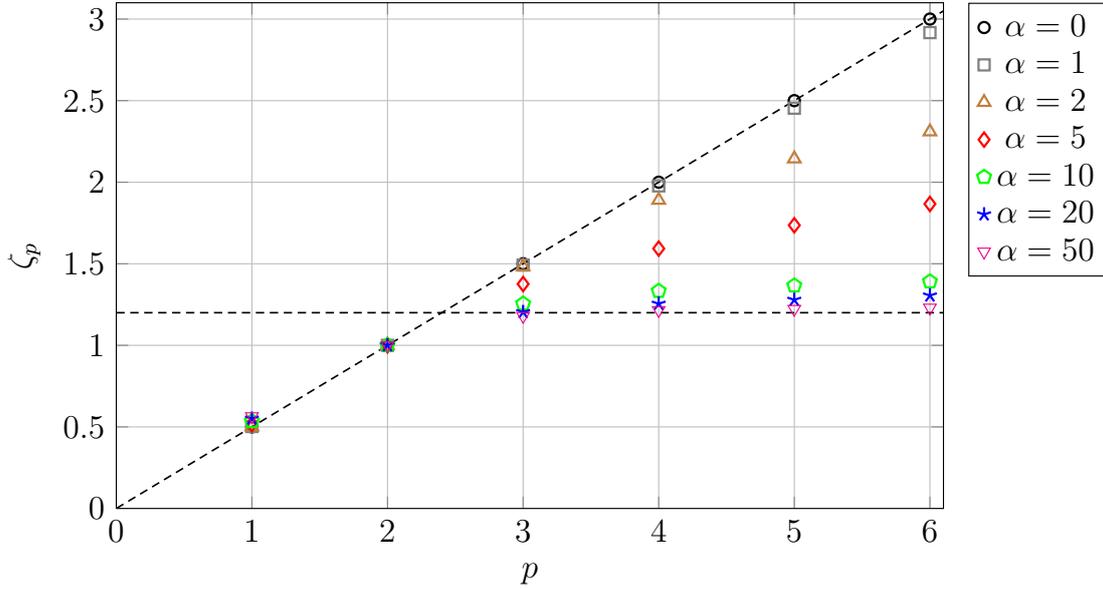


FIGURE 6.21 – ζ_p , exposant des moments S_p en fonction de p , ordre du moment, pour différents cisaillements. La ligne diagonale grise en pointillés repère le comportement des exposants caractéristique de l'équilibre $\zeta_p = p/2$ tandis que la ligne horizontale noire en pointillés repère la saturation des exposants à grands p autour de $\zeta_p = 1.2$.

- des pdf des incréments de valeurs négatives,
 - et des exposants ζ_p liés à la relation entre les moments S_p et l'échelle Δx ,
- des analogies avec la phénoménologie de Burgers ont été montrées. D'une part, un comportement en loi d'échelle a été mis en évidence, d'autre part on observe une saturation des exposants ζ_p lorsque l'ordre du moment p augmente. Cette similarité avec un des premiers modèles de la turbulence est d'autant plus surprenante que, dans notre situation, les fluctuations sont étudiées sans effet d'inertie, à $Re = 0$. La phénoménologie de Burgers correspond à la situation inverse, la viscosité est négligée et $Re \rightarrow +\infty$. Une comparaison immédiate avec la phénoménologie de Burgers est cependant loin d'être évidente.
- Dans la situation présente, la quantité soumise à la non-linéarité de Burgers est la déformation de l'interface h . Usuellement, les déformations vérifient plutôt une équation [7] du type

$$\partial_t h - \frac{1}{2} |\nabla h|^2 = \nu \nabla^2 h + F$$

où le premier terme de droite est un terme de relaxation et le second terme F est une contribution stochastique. La quantité vérifiant alors l'équation de Burgers est la vitesse de la déformation.

- De plus, la littérature s'est jusqu'à présent intéressée exclusivement au cas

d'une viscosité nulle : un terme visqueux n'est introduit que pour garantir la stabilité du schéma numérique. L'équation, objet du présent chapitre, $\partial_t h + \alpha h \partial_x h = \mathcal{L}h + \varphi$ ne peut être étudiée en négligeant, même à grand cisaillement, la relaxation. Ce constat est mis en évidence avec le changement de variables $h \rightarrow \alpha h$.

- Enfin, la saturation des exposants ζ_p semble avoir lieu autour de 1.2 (en tout cas autour d'une valeur strictement plus grande que 1) alors que dans le cadre des équations de Burgers sans viscosité, cette saturation a lieu plutôt autour de $\zeta_p = 1$.

Par ailleurs, la phénoménologie associée à l'équation de Burgers est encore un sujet d'actualité. En particulier, la puissance de la loi d'échelle des pdf des incréments négatifs est toujours discutée [7].

Ensuite, l'étude des pdf des déformations a révélé que la valeur la plus probable de la déformation n'est plus $h = 0$ mais $h = \pm h_{max}$, lorsque le cisaillement est assez grand. On peut penser que cette bifurcation est liée aux vitesses caractéristiques de l'interface. D'une part, la bifurcation semble avoir lieu pour $\alpha = 0.5$. D'autre part, le rapport entre la vitesse d'advection des fluctuations $\dot{\gamma}_{\text{eff}} \sqrt{\langle h^2 \rangle}$ et la vitesse de relaxation des déformations $\sim l_c / \tau_c$ devient plus grand que l'unité lorsque $\alpha(1 - K_{1d}\alpha^2) > 1$, autrement dit lorsque $\alpha \gtrsim 1$.

En prenant en compte les phénomènes d'intermittence inhérents aux modèles de turbulence, on peut se demander si les fluctuations interfaciales n'oscillent pas entre deux valeurs h_{max} et $-h_{max}$, l'échelle de temps et de longueur entre ces deux valeurs étant plutôt longue. Autour de ces deux valeurs $\pm h_{max}$, l'interface fluctue sur des échelles de temps et de longueurs plus petites. Néanmoins, il faut se rappeler que pour les cisaillements considérés, la rugosité de l'interface est toujours plus grande que h_{max} d'où la difficulté d'observer des déformations soit strictement positives soit strictement négatives durant un certain temps ou sur une certaine longueur : pour $\alpha = 10$, $h_{max} / \sqrt{\langle h^2 \rangle} \simeq 0.1$.

Chapitre 7

Conclusion et perspectives

Dans le cadre de cette thèse, nous avons étudié des interfaces séparant deux fluides visqueux soumis à un écoulement de cisaillement. Nous avons considéré le régime des faibles tensions interfaciales, ce qui revient à se placer dans le régime des grands nombres capillaires.

Tout d’abord, nous avons montré que la dynamique des fluctuations thermiques des interfaces suit une équation de type Kardar-Parisi-Zhang [24]. Au cours du temps,

- les fluctuations sont amorties par un terme de relaxation linéaire,
- les fluctuations sont excitées par le bruit thermique,
- les différents modes de déformation sont couplés les uns aux autres par un terme non-linéaire, impliquant un transfert d’énergie entre les modes.

La dynamique des fluctuations révèle également que le taux de cisaillement ressenti par l’interface diffère du taux de cisaillement appliqué. Notons de plus que cette équation non-linéaire a été obtenue de manière rigoureuse à partir des équations de l’hydrodynamique, et non de manière phénoménologique.

Dans un second temps, nous avons résolu l’équation d’évolution des fluctuations de l’interface sous cisaillement. En développant la solution à faible taux de cisaillement, nous avons obtenu une expression analytique des modifications des propriétés de l’interface. La correction est quadratique par rapport au taux de cisaillement, conformément aux symétries du système d’étude. Elle révèle de plus un facteur universel dans le sens où toutes les propriétés du système se factorisent dans un seul paramètre de contrôle sans dimension.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux effets inertiels, et en particulier, aux éventuelles instabilités pouvant se développer au sein de l’écoulement. Pour cela, nous avons effectué une analyse de stabilité ce qui nous a permis de mettre en évidence des critères relativement simples. La possibilité pour qu’un écoulement de Couette plan dans une bicouche de fluides newtoniens soit instable ne dépend en effet que des rapports des densités et des viscosités. La tension de surface, en elle-même, ne modifie pas le diagramme de stabilité mais elle affecte le seuil de l’instabilité.

Finalement, nous nous sommes préoccupés à nouveau des fluctuations interfa-

ciales, que l'on étudie numériquement cette fois-ci. L'objectif est alors double. D'une part, on veut vérifier l'analyticité du développement à petit cisaillement. D'autre part, on souhaite comprendre la phénoménologie à grand taux de cisaillement associée à l'équation dérivée dans le chapitre 3. Les résultats sont les suivants :

- à petit taux de cisaillement, les données numériques concordent parfaitement avec les expressions analytiques.
- Puis, à plus fort taux de cisaillement, l'étude des densités de probabilités de la déformation en elle-même, puis des incréments met en évidence des caractéristiques intéressantes, semblables à ce qui est obtenu dans des modèles de turbulence.

Par la suite, plusieurs points pourront être développés. Dans le chapitre 4, nous avons obtenu en particulier l'évolution du déplacement quadratique moyen des fluctuations interfaciales en fonction du cisaillement. Nous avons alors comparé cette prédiction avec les mesures expérimentales de D. Derks et ses collaborateurs [17]. Bien que l'analyse théorique mette en évidence le bon paramètre de contrôle, on constate que la théorie hydrodynamique sous-estime la correction due au cisaillement d'environ un facteur 3. A priori, ce décalage doit s'expliquer par un ingrédient absent de la théorie hydrodynamique. En particulier, il est possible que la valeur même de la tension de surface soit affectée par le cisaillement. En effet, on sait que cette valeur est reliée à l'épaisseur réelle (microscopique) de la zone interfaciale, notée ϵ dans le chapitre 2, que nous avons négligée dans le modèle. Cependant, il est fort probable que l'écoulement de Couette affecte cette zone. Afin d'éclaircir ce point, l'interface doit être considérée comme une région d'épaisseur finie, très petite mais non nulle. Pour ce faire, j'ai commencé à mettre en place une étude numérique en collaboration avec T. Biben. Cette étude numérique couple les champs hydrodynamiques à un paramètre de phase, décrivant le passage continu d'un fluide à l'autre. On souhaite ainsi obtenir la dépendance de la tension interfaciale en fonction du taux de cisaillement.

Ensuite, lors de l'analyse de stabilité, des critères simples d'instabilité ont été mis en évidence. On prévoit que l'interface étudiée par D. Derks et ses collaborateurs soit stable, quelle que soit la valeur du taux de cisaillement. Il serait intéressant de tester cette prédiction à grand cisaillement, même si cela présente certaines difficultés expérimentales. Ensuite, on prédit que l'écoulement est instable lorsque le fluide le plus dense a, d'une part, la viscosité dynamique la plus grande, et, d'autre part, la viscosité cinématique la plus faible. Il serait intéressant d'étudier la possibilité d'un tel système. En outre, le comportement du taux de cisaillement critique doit être approfondi à petit vecteur d'onde du fait de l'influence des parois solides lorsque la longueur d'onde devient comparable à l'épaisseur des couches de fluide.

Enfin, nous avons étudié le comportement des fluctuations interfaciales lorsque le taux de cisaillement commence à être conséquent. Des caractéristiques assez originales ont alors été montrées. D'une part, il semble y avoir une bifurcation de la valeur la plus probable de la déformation lorsque le cisaillement augmente. D'autre part, les

incréments de déformation présentent des caractéristiques communes avec certains modèles de turbulence, comme l'augmentation des événements très rares que sont les grands incréments négatifs et la saturation des exposants des lois d'échelle des moments. Le fait que la solution de nos équations, valable dans le régime visqueux et à très faible nombre de Reynolds, présente des similitudes avec des modèles de turbulence, correspondant au régime non visqueux et aux grands nombres de Reynolds, nécessite encore des efforts de compréhension.

Finalement, nous avons obtenu les propriétés statistiques d'une interface soumise à un écoulement de cisaillement. Cette étude pourrait être étendue à d'autres types d'interfaces, en particulier les bicouches lipidiques [29]. Également, il serait intéressant de généraliser ces résultats à d'autres systèmes hors d'équilibre, comme les interfaces des milieux granulaires en écoulement [4].

Annexes

Annexe A

Quelques précisions sur la relation de dispersion d'une perturbation interfaciale

A.1 Développements de la relation de dispersion

On considère toujours pour des raisons de logique une perturbation de la forme $\mathcal{R}[h_{\mathbf{q}} \exp(i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t))]$ à la surface libre d'un fluide de densité ρ et de viscosité η . On note \mathbf{v} le champ de vitesse créé par la perturbation interfaciale et p le champ de pression associé. On note P_0 la pression constante qui règne au-dessus du fluide. On suppose que l'épaisseur totale de l'échantillon est très grande devant la longueur d'onde considérée. On néglige les effets de confinement.

Forme générale du champ de vitesse

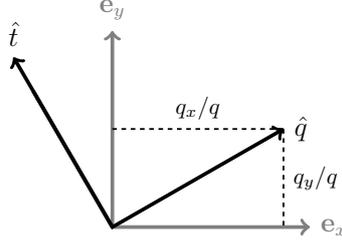
Dans la partie principale, on a vu que la relation de dispersion est reliée au champ de vitesse \mathbf{v} . Le champ de vitesse \mathbf{v} est défini par la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ et l'équation de Navier-Stokes

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P + \eta \Delta \mathbf{v} \quad (\text{A.1})$$

où P est le champ de pression à une constante près, $P + P_0 = p + \rho g z$ avec p le champ de pression. Le terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes a été négligé car on s'intéresse aux petites déformations de l'interface. La perturbation étant $\mathcal{R}[h_{\mathbf{q}} \exp(i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t))]$, les champs de vitesse et de pression prennent aussi la forme $\mathcal{R}[\mathbf{v} \exp(i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t))]$ et $\mathcal{R}[P \exp(i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t))]$ respectivement. Les équations du champ de vitesse deviennent

$$iq_x v_x + iq_y v_y + \partial_z v_z = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$-i\rho\omega\mathbf{v} = -iq_x P \mathbf{e}_x - iq_y P \mathbf{e}_y - (\partial_z P) \mathbf{e}_z - \eta q_x^2 \mathbf{v} - \eta q_y^2 \mathbf{v} + \eta \partial_z^2 \mathbf{v} \quad (\text{A.3})$$

FIGURE A.1 – Présentation de la base de travail (\hat{q}, \hat{t})

avec \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y et \mathbf{e}_z les vecteurs unitaires dans les directions (Ox) , (Oy) définissant l'interface à l'équilibre et dans la direction (Oz) perpendiculaire à la configuration d'équilibre de l'interface, respectivement. Vu la forme des équations, on devine une base de travail plus pratique que la base cartésienne classique. On remplace les vecteurs unitaires $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ par les vecteurs unitaires (\hat{q}, \hat{t}) où \hat{q} est le vecteur unitaire selon la direction du vecteur d'onde \mathbf{q} . On obtient alors :

$$iqv_q + \partial_z \tilde{v}_z = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$-i\rho\omega v_q = -\eta q^2 v_q + \eta \partial_z^2 v_q - iqP \quad (\text{A.5})$$

$$-i\rho\omega v_t = -\eta q^2 v_t + \eta \partial_z^2 v_t \quad (\text{A.6})$$

$$-i\rho\omega v_z = -\eta q^2 v_z + \eta \partial_z^2 v_z - \partial_z P \quad (\text{A.7})$$

Soit :

$$v_q = \frac{i}{q} \partial_z v_z \quad (\text{A.8})$$

$$iqP = i\rho\omega v_q - \eta q^2 v_q + \eta \partial_z^2 v_q \quad (\text{A.9})$$

$$-l^2 v_t + \partial_z^2 v_t = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\eta l^2 v_z - \eta \partial_z^2 v_z + \partial_z P = 0 \quad (\text{A.11})$$

où $l = q\sqrt{1 - i\omega/(\nu q^2)}$. Au niveau de ces équations, on remarque que la composante \tilde{v}_t est découplée des autres composantes (\tilde{v}_q , \tilde{v}_z et p). L'équation A.10 indique la forme suivante pour \tilde{v}_t : $\tilde{v}_t = B e^{lz}$ où B est une constante que l'on va déterminer à l'aide des conditions limites. Seule la racine $+l$ a été prise en compte (la racine $-l$ a été laissée de côté) à cause de la condition limite en $-\infty$, $\lim_{z \rightarrow +\infty} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, l'écoulement ne ressent plus la déformation de l'interface loin de cette dernière.

Les autres composantes vérifient alors le système suivant :

$$v_q = \frac{i}{q} \partial_z v_z \quad (\text{A.12})$$

$$P = -\frac{i\eta}{q} \left(\partial_z^2 \tilde{v}_q - \underbrace{q^2 \left(1 - i \frac{\rho\omega}{\eta q^2} \right)}_{l^2} \tilde{v}_q \right) \quad (\text{A.13})$$

$$\partial_z^2 \tilde{v}_z - l^2 \tilde{v}_z - \frac{1}{\eta} \partial_z P = 0 \quad (\text{A.14})$$

Soit :

$$v_q = \frac{i}{q} \partial_z v_z \quad \text{et} \quad P = \frac{\eta}{q^2} (\partial_z^3 \tilde{v}_z - l^2 \partial_z \tilde{v}_z)$$

Ce qui permet d'obtenir l'équation suivante vérifiée par \tilde{v}_z :

$$\partial_z^4 \tilde{v}_z - (q^2 + l^2) \partial_z^2 \tilde{v}_z + q^2 l^2 \tilde{v}_z = 0 \quad (\text{A.15})$$

Ainsi la composante \tilde{v}_z est de la forme :

$$\tilde{v}_z = A_1 e^{qz} + A_2 e^{lz} \quad (\text{A.16})$$

où les constantes A_1 et A_2 sont déterminées à l'aide des conditions limites. On a retenu à nouveau que les racines à parties réelles positives à cause de la condition limite sur le champ de vitesse en $-\infty$.

Les conditions limites

Les conditions limites sont de plusieurs types. Tout d'abord, les conditions limites de type cinématique traduisent le fait que l'écoulement ne ressent plus la déformation de l'interface loin de celle-ci : $\lim_{z \rightarrow +\infty} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ et l'imperméabilité de l'interface en identifiant la vitesse de l'interface avec la vitesse normale du fluide en l'interface, ce qui donne à l'ordre 1 par rapport à la déformation de l'interface $\partial_t h = v_z|_0$. Ensuite, il doit y avoir équilibre des contraintes à l'interface ce qui se traduit par : $P_0 \mathbf{n} + \bar{T} \cdot \mathbf{n} = \sigma \Delta h \mathbf{n}$ où \mathbf{n} est le vecteur normal unitaire à l'interface qui pointe vers l'air (à l'ordre 1, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$), \bar{T} le tenseur des contraintes dans la phase inférieure ($T_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$). La première condition limite est déjà vérifiée. Les conditions limites se mettent à l'ordre 1 par rapport à la déformation de l'interface sous la forme :

- $\partial_t h(\mathbf{r}, t) = v_z(\mathbf{r}, 0, t)$
- $\partial_z v_x(\mathbf{r}, 0, t) + \partial_x v_z(\mathbf{r}, 0, t) = 0$
- $\partial_z v_y(\mathbf{r}, 0, t) + \partial_y v_z(\mathbf{r}, 0, t) = 0$
- $\rho g h(\mathbf{r}, t) - p(\mathbf{r}, 0, t) + 2\eta \partial_z v_z(\mathbf{r}, 0, t) = \sigma \Delta h(\mathbf{r}, t)$

Soit dans l'espace de Fourier temporel et spatial et en fonction de \tilde{v}_q et \tilde{v}_t

$$-i\omega\tilde{h}(\mathbf{q}, \omega) = \tilde{v}_z(\mathbf{q}, 0, \omega) \quad (\text{A.17})$$

$$\partial_z\tilde{v}_q(\mathbf{q}, 0, \omega) + iq\tilde{v}_z(\mathbf{q}, 0, \omega) = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\partial_z\tilde{v}_t(\mathbf{q}, 0, \omega) = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\rho g\tilde{h}(\mathbf{q}, \omega) - P(\mathbf{q}, 0, \omega) + 2\eta\partial_z\tilde{v}_z(\mathbf{q}, 0, \omega) = -\sigma q^2\tilde{h}(\mathbf{q}, \omega) \quad (\text{A.20})$$

La condition (A.19) impose $B = 0$. On laisse de côté la composante \tilde{v}_t qui est complètement découplée des autres composantes et est nulle ici. Le problème se résume alors à :

$$v_q(\mathbf{q}, z, \omega) = \frac{i}{q}\partial_z v_z(\mathbf{q}, z, \omega) \quad (\text{A.21})$$

$$\tilde{v}_z(\mathbf{q}, z, \omega) = A_1 e^{qz} + A_2 e^{lz} \quad (\text{A.22})$$

$$P(\mathbf{q}, z, \omega) = \frac{\eta}{q^2} (\partial_z^3 \tilde{v}_z(\mathbf{q}, z, \omega) - l^2 \partial_z \tilde{v}_z(\mathbf{q}, z, \omega)) \quad (\text{A.23})$$

$$\partial_z \tilde{v}_q(\mathbf{q}, 0, \omega) + iq\tilde{v}_z(\mathbf{q}, 0, \omega) = 0 \quad (\text{A.24})$$

$$-P(\mathbf{q}, 0, \omega) + 2\eta\partial_z \tilde{v}_z(\mathbf{q}, 0, \omega) = -\sigma(q^2 + l_c^{-2})\tilde{h}(\mathbf{q}, \omega) \quad (\text{A.25})$$

$$-i\omega\tilde{h}(\mathbf{q}, \omega) = \tilde{v}_z(\mathbf{q}, 0, \omega) \quad (\text{A.26})$$

où $l_c = \sqrt{\sigma/(\rho g)}$ est la longueur capillaire. On peut tout exprimer en fonction de la composante \tilde{v}_z :

$$\tilde{v}_z(\mathbf{q}, z, \omega) = A_1 e^{qz} + A_2 e^{lz} \quad (\text{A.27})$$

$$\partial_z^2 \tilde{v}_z(\mathbf{q}, 0, \omega) + q^2 \tilde{v}_z(\mathbf{q}, 0, \omega) = 0 \quad (\text{A.28})$$

$$\partial_z^3 \tilde{v}_z(\mathbf{q}, 0, \omega) - (l^2 + 2q^2) \partial_z \tilde{v}_z(\mathbf{q}, 0, \omega) = \frac{\sigma q^2}{\eta} (q^2 + l_c^{-2}) \tilde{h}(\mathbf{q}, \omega) \quad (\text{A.29})$$

$$-\tilde{v}_z(\mathbf{q}, 0, \omega) + i\omega\tilde{h}(\mathbf{q}, \omega) = 0 \quad (\text{A.30})$$

La relation de dispersion

On se place à \mathbf{q} et ω fixés, ainsi \tilde{h} est une constante que l'on va noter H . De plus, $\tilde{v}_z(\mathbf{q}, z, \omega) = A_1 e^{qz} + A_2 e^{lz}$. Ainsi :

$$\tilde{v}_z(\mathbf{q}, 0, \omega) = A_1 + A_2 \quad (\text{A.31})$$

$$\partial_z \tilde{v}_z(\mathbf{q}, 0, \omega) = qA_1 + lA_2 \quad (\text{A.32})$$

$$\partial_z^2 \tilde{v}_z(\mathbf{q}, 0, \omega) = q^2 A_1 + l^2 A_2 \quad (\text{A.33})$$

$$\partial_z^3 \tilde{v}_z(\mathbf{q}, 0, \omega) = q^3 A_1 + l^3 A_2 \quad (\text{A.34})$$

On a donc le système à 3 inconnues suivant :

$$\begin{array}{rcl} 2q^2 A_1 & + (q^2 + l^2) A_2 & = 0 \\ -q(q^2 + l^2) A_1 & - 2q^2 l A_2 & - \frac{\sigma q^2}{\eta} (q^2 + l_c^{-2}) H = 0 \\ A_1 & + A_2 & + i\omega H = 0 \end{array}$$

C'est un système de 3 équations à 3 inconnues, ces dernières ne sont pas nulles seulement si le déterminant est nul soit :

$$\begin{vmatrix} 2q^2 & q^2 + l^2 & 0 \\ q^2 + l^2 & 2ql & \frac{\sigma q}{\eta} (q^2 + l_c^{-2}) \\ 1 & 1 & i\omega \end{vmatrix} = 0$$

En remplaçant l par sa valeur, en divisant la première et la deuxième ligne par q^2 et en posant $X = \omega / (\nu q^2)$ avec $\nu = \eta / \rho$ la viscosité cinématique, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 - iX & 0 \\ 2 - iX & 2\sqrt{1 - iX} & \frac{\sigma}{\eta q} (q^2 + l_c^{-2}) \\ 1 & 1 & i\nu q^2 X \end{vmatrix} = 0$$

X vérifie l'équation suivante :

$$4i\nu q^2 X \sqrt{1 - iX} + \frac{\sigma}{\eta q} (q^2 + l_c^{-2}) (2 - iX) - \frac{2\sigma}{\eta q} (q^2 + l_c^{-2}) - i\nu q^2 X (2 + iX)^2 = 0 \quad (\text{A.35})$$

Après quelques simplifications, en notant le nombre sans dimension $\rho\sigma l_c / \eta^2 = St$ et la fonction sans dimension $f(ql_c) = (1 + (l_c q)^2) / ((l_c q)^3)$, on réécrit l'équation :

$$(2 - iX)^2 + Stf(ql_c) = 4\sqrt{1 - iX} \quad (\text{A.36})$$

qui est la relation de dispersion.

A.2 Etude de la transition entre les deux régimes de l'évolution temporelle de l'interface

Afin de compléter l'étude de la relation de dispersion, il est nécessaire de connaître le vecteur d'onde de transition entre les ondes de surface propagatives et les perturbations surarmorties, notamment sa dépendance par rapport au nombre de Stokes St . Pour cela, on pose $\beta = iX$, la relation de dispersion devient donc $(2 - \beta)^2 + Stf(ql_c) = 4\sqrt{1 - \beta}$. Le terme de gauche est un polynôme de degré deux par rapport à β et le terme de droite n'est défini dans les réels pour β réel que pour $\beta < 1$. Cette relation possède deux solutions. Supposons que les deux solutions β soient réelles soit les deux fonctions de β possèdent deux points d'intersection, alors cela signifie que la pulsation est purement imaginaire ce qui correspond à des perturbations surarmorties. La relation étant à coefficients réels, si les deux solutions β ne sont pas réelles (les deux fonctions de β ne possèdent pas de points d'intersection), elles sont complexes conjuguées. Les deux pulsations ont des parties réelles opposées et des parties imaginaires égales ce qui correspond aux modes propagatifs. Sur le graphe A.2, on peut voir que les solutions sont complexes conjuguées si la

constante $St \times f(q_l c)$ du terme de gauche est trop grand tandis que les deux termes possèdent deux points d'intersection en fonction de β si la constante $St \times f(q_l c)$ n'est pas trop grande, sachant que par définition cette constante est strictement positive. La fonction $f(q_l c)$ étant une fonction décroissante du vecteur d'onde, on retrouve

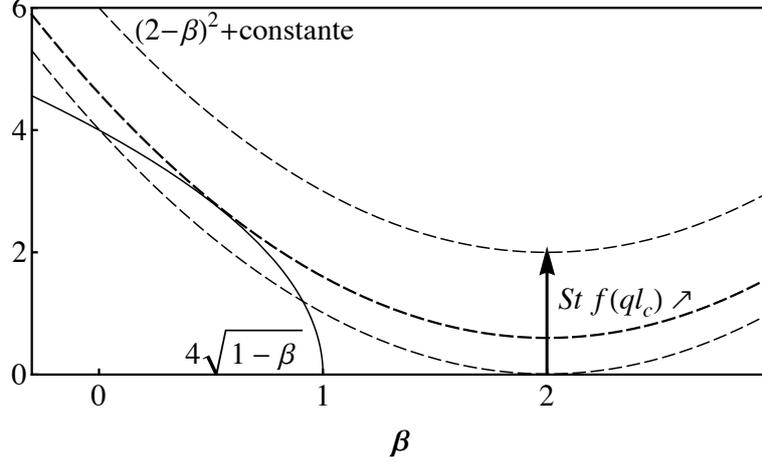


FIGURE A.2 – Représentation des deux termes de la relation de dispersion en fonction de $\beta = iX$

qu'à petit vecteur d'onde (soit pour $St \times f(q_l c)$ assez grand), les ondes de surface se propagent tandis qu'à grand vecteur d'onde (soit la constante $St \times f(q_l c)$ assez petite) les perturbations de la surface sont surarmorties. Au vecteur d'onde frontière séparant les deux régimes d'évolution temporelle des déformations de l'interface, les deux termes, fonction de β n'ont alors plus qu'un seul point d'intersection. Le vecteur d'onde frontière est donc défini par l'égalité des deux termes mais aussi par l'égalité de la tangente (dérivée par rapport à β). Au vecteur d'onde frontière q_f , on pose $\beta = \beta^*$ et les égalités suivantes sont vérifiées

$$\begin{aligned} (2 - \beta^*)^2 + 2Stf(q_f l_c) &= 4\sqrt{1 - \beta^*} \\ -2(2 - \beta^*) &= -2\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^*}} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

On obtient :

$$\beta^* = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{29 - 3\sqrt{93}}} - \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{29 - 3\sqrt{93}}{2}} \simeq 0.53 \quad (\text{A.38})$$

$$Stf(q_f l_c) \simeq 0.58$$

A partir de la 2^{de} égalité, on peut obtenir le vecteur d'onde adimensionné $q_f l_c$ en fonction du nombre de Stokes comme le montre la fig. A.3. Analytiquement, on peut aussi obtenir facilement les limites St grand et St petit. Quand $St \gg 1$, on peut

supposer q_f grand ou petit et par un raisonnement par l'absurde, on trouve que q_f est grand et est proportionnel à St : $q_f l_c \propto St$. De même, quand $St \ll 1$, q_f est petit et suit la loi $q_f l_c \propto St^{1/3}$.

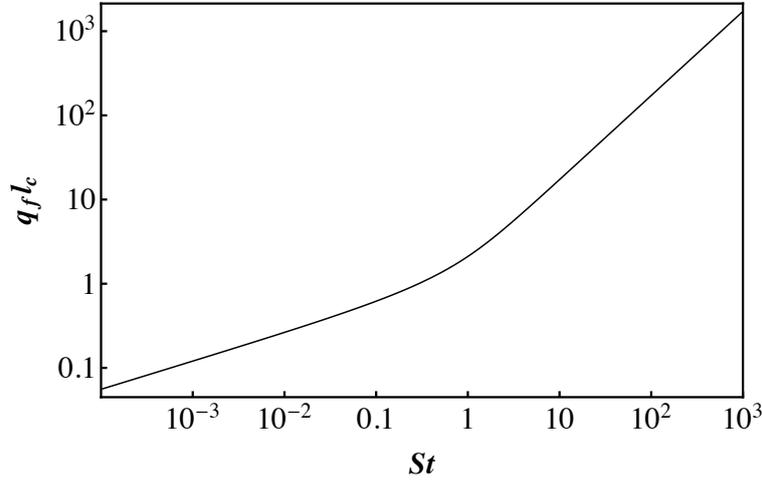


FIGURE A.3 – Vecteur d'onde limite entre les deux régimes en fonction du nombre de Stokes de l'interface.

A.3 Relaxation volumique des déformations de l'interface

Lors de la recherche de la relation de dispersion, le champ de vitesse a été établi comme la somme de deux termes spatiaux (dépendance en z , coordonnée verticale). Le premier terme, proportionnel à $\exp(-qz)$, met en évidence une première longueur caractéristique de l'atténuation des déformations de l'interface en volume, la longueur d'onde. Le deuxième terme, proportionnel à $\exp(-lz)$, fait ressortir une seconde longueur d'atténuation $1/\mathcal{R}(l)$. Rappelons que $l = q\sqrt{1 - i\omega/(\nu q^2)}$, ce second taux caractéristique de l'atténuation en volume des ondes de surface dépend donc de la pulsation. En particulier, dans le cas des ondes surarmorties où deux modes physiques coexistent, deux taux d'atténuation spatiaux coexistent aussi. Sur la fig. A.4, ce second taux d'atténuation $\mathcal{R}(l)l_c$ est représenté avec les mêmes conventions de représentation pour les modes « rampant » et « visqueux ». D'une part, le mode rampant, qui relaxe le plus lentement temporellement au niveau de l'interface, est le mode qui relaxe le plus rapidement spatialement avec l'éloignement à l'interface. Il est qualifié de mode « surfacique ». D'autre part, le mode visqueux, qui relaxe rapidement temporellement au niveau de l'interface, est le mode qui relaxe le plus lentement spatialement : c'est le mode qui « est ressenti le plus en profondeur » par le fluide. Ce mode est qualifié de « volumique ».

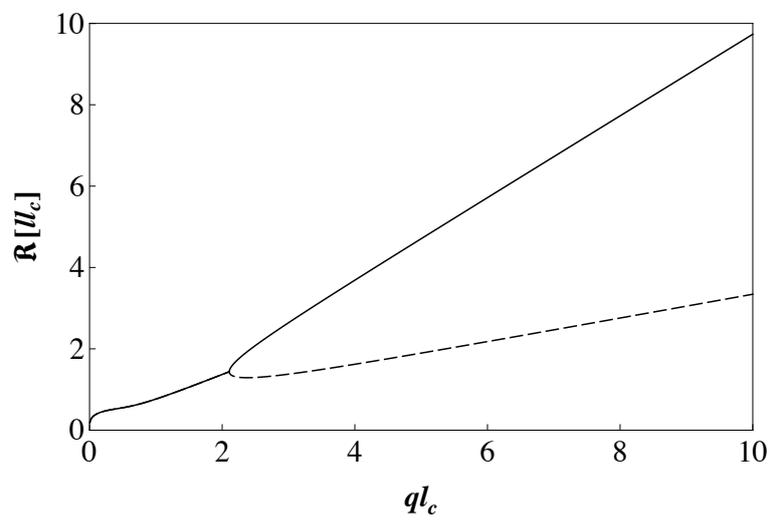


FIGURE A.4 – Représentation des taux d'atténuation spatiaux en volume des déformations de l'interface.

Annexe B

Dérivation des conditions limites dynamiques au niveau d'une interface fluide

L'établissement de l'équilibre des forces au niveau de l'interface présente quelques subtilités. Comme le schématise la fig. B.1, trois forces surfaciques sont impliquées : celle due aux contraintes du fluide supérieur, celle due aux contraintes du fluide inférieur et celle due à la tension de surface. Pour établir une relation entre ces trois forces, on considère un petit volume \mathcal{V} en forme de camembert dont les bases sont des disques de diamètre ε et dont la hauteur est de l'ordre de ε^2 . La relation entre les deux tenseurs de contraintes des deux fluides provient de la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Listons

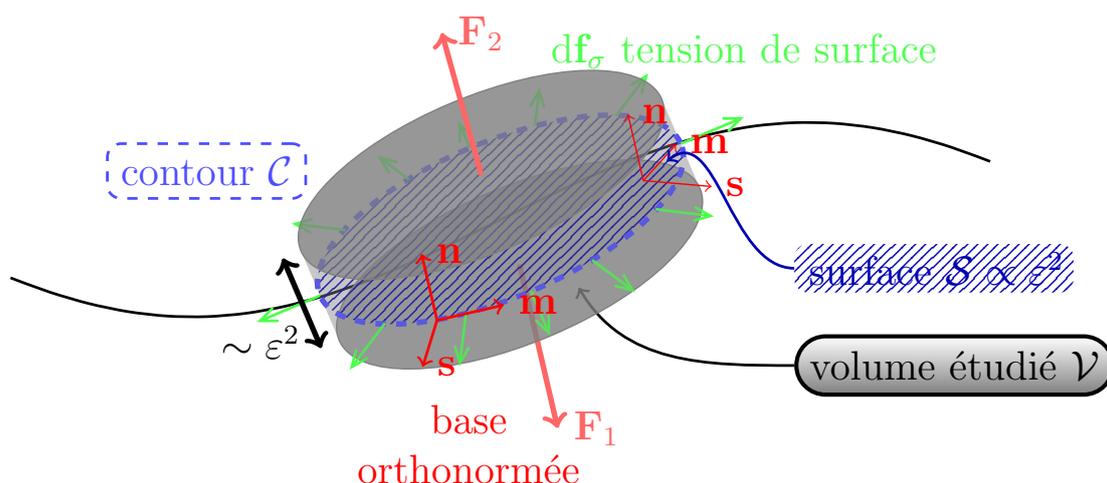


FIGURE B.1 – Equilibre des forces au niveau de l'interface

les forces s'appliquant sur le volume \mathcal{V} :

- La force du fluide supérieur 2 sur le volume \mathcal{V} étudié provient de deux contributions. La première contribution \mathbf{F}_2 est l'intégrale sur la surface supérieure, noté \mathcal{S}_2 , du volume étudié de la contrainte $\mathbb{T}_2 \cdot \mathbf{n}$ (ε étant supposé petit, la normale à la surface supérieure est identique à la normale à l'interface) avec \mathbb{T}_2 le tenseur des contraintes du fluide 2. La seconde contribution $\mathbf{F}_{2,sup}$ vient aussi de l'intégrale sur une surface des contraintes $\mathbb{T}_2 \cdot \mathbf{s}$, mais cette fois la surface concernée est la surface latérale du volume étudié qui se situe dans le fluide 2. On note cette surface $S_{lat,2}$ et la normale à cette surface \mathbf{s} .

$$\mathbf{F}_2 = \iint_{\mathcal{S}_2} dS \mathbb{T}_2 \cdot \mathbf{n} \qquad \mathbf{F}_{2,sup} = \iint_{S_{lat,2}} dS \mathbb{T}_2 \cdot \mathbf{s}$$

- En ce qui concerne le fluide inférieur 1, par analogie, on décompose aussi la force qu'il exerce sur \mathcal{V} en deux contributions : $\mathbf{F}_1 = -\iint_{\mathcal{S}_1} dS \mathbb{T}_1 \cdot \mathbf{n}$ et $\mathbf{F}_{1,sup} = \iint_{S_{lat,1}} dS \mathbb{T}_1 \cdot \mathbf{s}$ avec \mathcal{S}_1 la surface inférieure du volume étudié, \mathbb{T}_1 le tenseur des contraintes du fluide 1, $S_{lat,1}$ la surface latérale du volume étudié située dans le fluide 1. \mathbf{F}_1 apparaît avec un signe négatif car la normale sortante de la surface inférieure n'est pas \mathbf{n} mais $-\mathbf{n}$.
- La force due à la tension de surface \mathbf{F}_σ est la somme sur le contour \mathcal{C} , intersection entre l'interface et la surface latérale du volume \mathcal{V} , des forces capillaires $d\mathbf{f}_\sigma = \sigma d\mathbf{l}$ où l est l'abscisse curviligne le long de \mathcal{C} . A l'aide du théorème de Stokes, l'intégrale fermée sur le contour \mathcal{C} peut s'exprimer à l'aide d'une intégrale sur la surface \mathcal{S} .

$$\mathbf{F}_\sigma = \oint_{\mathcal{C}} \sigma d\mathbf{l} = \iint_{\mathcal{S}} dS [\nabla \sigma - \sigma \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n})] \qquad (\text{B.1})$$

Démonstration Soit \mathbf{A} un vecteur quelconque, alors le théorème de Stokes affirme

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S dS \mathbf{n} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A})$$

avec $d\mathbf{l}$ un petit déplacement le long du contour \mathcal{C} . En notant \mathbf{m} le vecteur tangent au contour, $d\mathbf{l} = \mathbf{m}dl$. Le vecteur \mathbf{A} étant quelconque, on peut le poser égal à $\mathbf{A} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ avec \mathbf{b} un vecteur constant quelconque.

$$\oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{m} dl = \iint_S dS \mathbf{n} \cdot [\nabla \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})]$$

Les identités vectorielles standards comprennent $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{m} = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{m})$ et $\nabla \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = -\mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a}$, le vecteur \mathbf{b} étant constant. Les deux termes se mettent sous la forme d'un produit scalaire avec \mathbf{b} , celui-ci étant quelconque, l'égalité suivante est vérifiée

$$\oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{m}) \cdot \mathbf{b} dl = \iint_S dS [\mathbf{b} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{n} - \mathbf{b} \cdot (\nabla \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}]$$

Afin de retrouver l'égalité qui nous intéresse, on pose $\mathbf{a} = \sigma \mathbf{n}$. Sachant que $(\mathbf{s}, \mathbf{m}, \mathbf{n})$ forme un trièdre direct, $\mathbf{n} \wedge \mathbf{m} = -\mathbf{s}$, soit

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \sigma \mathbf{s} \cdot \mathbf{b} dl &= \iint_S dS [\mathbf{b} \cdot (\nabla(\sigma \mathbf{n})) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{b} \cdot (\nabla \cdot (\sigma \mathbf{n})) \cdot \mathbf{n}] \\ &= \iint_S dS [\mathbf{b} \cdot \nabla \sigma + \underbrace{\sigma (\nabla \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}}_{\frac{1}{2} \nabla \mathbf{n}^2 = 0} - \underbrace{(\nabla \sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}}_{=0} - \sigma (\nabla \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}] \\ &= \iint_S dS [\mathbf{b} \cdot \nabla \sigma - \sigma (\nabla \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}] \end{aligned}$$

$(\nabla \sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = 0$ car \mathbf{n} est par définition normal à l'interface. On retrouve effectivement l'égalité donnée auparavant.

- Une dernière force $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}$ vient compléter la liste, le poids du volume \mathcal{V} . Il s'agit d'une contribution volumique. En notant \mathcal{V}_1 la partie du volume \mathcal{V} appartenant au fluide 1, et \mathcal{V}_2 celle dans le fluide 2, $\mathbf{F}_{\mathcal{V}} = \iiint_{\mathcal{V}_1} dV \rho_1 g z + \iiint_{\mathcal{V}_2} dV \rho_2 g z$. La somme des forces qui ont été énumérées vérifie la relation fondamentale de la dynamique. En notant \mathbf{P} la quantité de mouvement du volume \mathcal{V} ,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{2,sup} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{1,sup} + \mathbf{F}_{\sigma} + \mathbf{F}_{\mathcal{V}}$$

Différentes contributions d'ordres de grandeur différents participent à cette relation :

- les contributions volumiques $d_t \mathbf{P}$ et $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}$ sont par définition des intégrales sur le volume \mathcal{V} . Le volume \mathcal{V} étant proportionnel à ε^4 , $d_t \mathbf{P}$ et $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}$ sont de l'ordre de ε^4 ;
- les contributions dues à la surface latérale, $\mathbf{F}_{2,sup}$ et $\mathbf{F}_{1,sup}$, sont du même ordre de grandeur que la surface latérale $S_{lat,1} + S_{lat,2}$, soit de l'ordre de ε^3 ;
- les contributions dues aux surfaces parallèles à l'interface, \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_{σ} , sont également du même ordre de grandeur que la surface \mathcal{S} , soit de l'ordre de ε^2 .

La limite $\varepsilon \rightarrow 0$ de la relation fondamentale de la dynamique au niveau de l'interface aboutit alors à la relation suivante entre les forces surfaciques :

$$\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_\sigma = 0$$

$$\iint_{\mathcal{S}_2} dS \mathbb{T}_2 \cdot \mathbf{n} - \iint_{\mathcal{S}_1} dS \mathbb{T}_1 \cdot \mathbf{n} + \iint_{\mathcal{S}} dS [\nabla \sigma - \sigma \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n})] = 0$$

La surface \mathcal{S} étant quelconque, l'égalité précédente se transpose aux intégrandes :

$$(\mathbb{T}_2 - \mathbb{T}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n}) - \nabla \sigma \quad (\text{B.2})$$

Annexe C

Dérivation de l'équation d'évolution des fluctuations interfaciales sous cisaillement

Le but est d'établir l'évolution temporelle des fluctuations thermiques de l'interface soumise à un écoulement de Couette plan, Dans un premier temps, on résout le champ de vitesse. Dans un second temps, on explicite les relations entre le champ de vitesse et la déformation interfaciale à l'aide des conditions limites (à l'interface).

On rappelle :

- l'approximation des faibles gradients. On suppose $\varepsilon = \xi_T/l_c$ petit, la déformation interfaciale h est alors d'ordre 1 en ε : $h = \varepsilon u$ avec $u = \mathcal{O}(1)$ et on développe les champs hydrodynamiques par rapport à ε jusqu'à l'ordre 2.
- l'écoulement à l'ordre 0 en ε . Il s'agit d'un écoulement de Couette plan d'une bicouche de fluides dont l'interface est plane $h = 0$, soit $\mathbf{v}_j^{(0)} = \dot{\gamma}_j z \mathbf{e}_x$ et $p_j^{(0)} = P_0 - \rho_j g z$ avec $j = 1, 2$.
- la linéarité des équations hydrodynamiques. Les différents ordres des champs hydrodynamiques possèdent alors la même forme.

C.1 Forme générale du champ de vitesse

Les champs hydrodynamiques vérifient les équations :

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0 \tag{C.1a}$$

$$-\nabla P_j + \eta_j \Delta \mathbf{v}_j + \nabla \cdot \mathbf{s}_j = \mathbf{0} \tag{C.1b}$$

avec \mathbf{s}_j la contribution aléatoire du tenseur des contraintes : $\langle s_{j,\mu\nu} \rangle = 0$ et

$$\begin{aligned} \langle s_{j,\mu\nu}(\mathbf{r}, z, t) s_{j,\mu'\nu'}(\mathbf{r}', z', t') \rangle &= 2k_B T \eta_j (\delta_{\mu,\mu'} \delta_{\nu,\nu'} + \delta_{\mu,\nu'} \delta_{\mu',\nu}) \\ &\quad \times \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(z - z') \delta(t - t'). \end{aligned}$$

Ainsi chaque ordre n du champ de vitesse $\mathbf{v}_j^{(n)}$ et du champ de pression $P_j^{(n)}$ vérifie :

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_j^{(n)} = 0 \quad (\text{C.2a})$$

$$-\nabla P_j^{(n)} + \eta_j \Delta \mathbf{v}_j^{(n)} + \nabla \cdot \mathbf{S}_j^{(n)} = \mathbf{0} \quad (\text{C.2b})$$

avec $\mathbf{S}_j^{(n)}$ le terme d'ordre n du tenseur des contraintes \mathbf{s}_j . On le suppose de l'ordre 1, $\mathbf{s}_j = \varepsilon \mathbf{S}_j$ ainsi $\mathbf{S}_j^{(1)} = \mathbf{S}_j$ et $\mathbf{S}_j^{(2)} = \mathbf{0}$. En représentation de Fourier, les équations hydrodynamiques s'écrivent :

$$iq_x v_{j,x}^{(n)} + iq_y v_{j,y}^{(n)} + \partial_z v_{j,z}^{(n)} = 0 \quad (\text{C.3a})$$

$$\eta_j (\partial_z^2 - q^2) v_{j,x}^{(n)} - iq_x P_j^{(n)} + iq_x S_{j,xx}^{(n)} + iq_y S_{j,xy}^{(n)} + \partial_z S_{j,xz}^{(n)} = 0 \quad (\text{C.3b})$$

$$\eta_j (\partial_z^2 - q^2) v_{j,y}^{(n)} - iq_y P_j^{(n)} + iq_x S_{j,yx}^{(n)} + iq_y S_{j,yy}^{(n)} + \partial_z S_{j,yz}^{(n)} = 0 \quad (\text{C.3c})$$

$$\eta_j (\partial_z^2 - q^2) v_{j,z}^{(n)} - \partial_z P_j^{(n)} + iq_x S_{j,xz}^{(n)} + iq_y S_{j,yz}^{(n)} + \partial_z S_{j,zz}^{(n)} = 0 \quad (\text{C.3d})$$

Ce système de 4 équations à 4 inconnues se ramènent à deux systèmes découplés l'un de l'autre en exprimant les composantes de la vitesse dans la base polaire liée au vecteur d'onde \mathbf{q} , la base $(\hat{q}, \hat{t}, \mathbf{e}_z)$ avec $\hat{q} = \mathbf{q}/q$ et $\hat{t} = \mathbf{e}_z \wedge \hat{q}$. De manière cohérente, on exprime également les termes d'ordre n du tenseur des contraintes aléatoires dans la base polaire. Pour cela, on utilise la matrice de rotation \mathbf{R} entre la base cartésienne traditionnelle et la base polaire

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{q_x}{q} & -\frac{q_y}{q} & 0 \\ \frac{q_y}{q} & \frac{q_x}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les composantes d'un tenseur dans la base polaire \mathbf{S}_{pol} sont reliées aux composantes du même tenseur dans la base cartésienne \mathbf{S}_{cart} par la relation :

$$\mathbf{S}_{\text{cart}} = \mathbf{R} \mathbf{S}_{\text{pol}} {}^t \mathbf{R}$$

La composante de la vitesse selon \hat{t} , $v_{j,t}^{(n)}$, est alors découplée des autres quantités, elle vérifie :

$$\eta_j (\partial_z^2 - q^2) v_{j,t}^{(n)} = -iq S_{j,qt}^{(n)} - \partial_z S_{j,tz}^{(n)} \quad (\text{C.4a})$$

tandis que les trois autres quantités, la composante de la vitesse selon \hat{q} , $v_{j,q}^{(n)}$, avec $v_{j,z}^{(n)}$ et $P_j^{(n)}$ forment le système suivant :

$$iq v_{j,q}^{(n)} + \partial_z v_{j,z}^{(n)} = 0 \quad (\text{C.4b})$$

$$\eta_j (\partial_z^2 - q^2) v_{j,q}^{(n)} - iq P_j^{(n)} + iq S_{j,qq}^{(n)} + \partial_z S_{j,qz}^{(n)} = 0 \quad (\text{C.4c})$$

$$\eta_j (\partial_z^2 - q^2) v_{j,z}^{(n)} - \partial_z P_j^{(n)} + iq S_{j,qz}^{(n)} + \partial_z S_{j,zz}^{(n)} = 0 \quad (\text{C.4d})$$

C.1.1 Détermination de $v_{j,t}^{(n)}$

$v_{j,t}^{(n)}$ vérifie

$$(\partial_z^2 - q^2)v_{j,t}^{(n)} = -\frac{1}{\eta_j} \left(iqS_{j,qt}^{(n)} + \partial_z S_{j,tz}^{(n)} \right) \quad (\text{C.5})$$

$v_{j,t}^{(n)}$ est donc la somme de deux termes, la solution de l'équation homogène liée à l'opérateur linéaire $\mathcal{L} = \partial_z^2 - q^2$ et une solution particulière de l'équation avec second membre. Pour obtenir la solution particulière, on utilise la méthode des fonctions de Green. On note $g(z, z')$ la fonction de Green liée à l'opérateur $-\mathcal{L}$, alors $v_{j,t}^{(n)}$ est :

$$v_{j,t}^{(n)} = \alpha_j^{(n)} e^{-q|z|} + \frac{1}{\eta_j} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_j g(z, z_j) \left[iqS_{j,qt}^{(n)}(z_j) + \partial_z S_{j,tz}^{(n)}(z_j) \right] \quad (\text{C.6})$$

On utilise directement le fait que les perturbations des champs hydrodynamiques sont négligeables au niveau des parois qui délimitent le système. Dans le membre de droite, on a précisé la dépendance en z_j des termes du tenseur des contraintes aléatoires par souci de clarté.

$g(z, z')$ vérifie

$$\mathcal{L}g(z, z') = -\delta(z - z')$$

Ainsi $g(z, z')$ est de la forme $g(z, z') = \text{constante} \times \exp(-q|z - z'|)$. Pour obtenir la constante, on intègre l'équation ci-dessus entre $z' - \epsilon$ et $z' + \epsilon$, puis on fait tendre ϵ vers 0. On obtient alors :

$$g(z, z') = \frac{1}{2q} e^{-q|z - z'|} \quad (\text{C.7})$$

C.1.2 Détermination de $v_{j,q}^{(n)}$, $v_{j,z}^{(n)}$ et $P_j^{(n)}$

$v_{j,q}^{(n)}$, $v_{j,z}^{(n)}$ et $P_j^{(n)}$ vérifient le système :

$$iqv_{j,q}^{(n)} + \partial_z v_{j,z}^{(n)} = 0 \quad (\text{C.8a})$$

$$\eta_j(\partial_z^2 - q^2)v_{j,q}^{(n)} - iqP_j^{(n)} + iqS_{j,qq}^{(n)} + \partial_z S_{j,qz}^{(n)} = 0 \quad (\text{C.8b})$$

$$\eta_j(\partial_z^2 - q^2)v_{j,z}^{(n)} - \partial_z P_j^{(n)} + iqS_{j,qz}^{(n)} + \partial_z S_{j,zz}^{(n)} = 0 \quad (\text{C.8c})$$

- La condition d'incompressibilité permet d'exprimer $v_{j,q}^{(n)}$ en fonction de $v_{j,z}^{(n)}$: $v_{j,q}^{(n)} = (i/q)\partial_z v_{j,z}^{(n)}$.
- La projection de l'équation de Stokes sur \hat{q} permet d'exprimer $P_j^{(n)}$ en fonction de $v_{j,z}^{(n)}$: $P_j^{(n)} = (\eta_j/q^2)(\partial_z^3 - q^2\partial_z)v_{j,z}^{(n)} + S_{j,qq}^{(n)} - i(\partial_z/q)S_{j,qz}^{(n)}$.
- Finalement, on obtient une équation différentielle d'ordre 4 pour $v_{j,z}^{(n)}$:

$$\mathcal{L}^2 v_{j,z}^{(n)} = \frac{q^2}{\eta_j} \left(\partial_z S_{j,zz}^{(n)} - \partial_z S_{j,qq}^{(n)} \right) + \frac{iq}{\eta_j} (q^2 + \partial_z^2) S_{j,qz}^{(n)} \quad (\text{C.9})$$

Pour obtenir $v_{j,z}^{(n)}$, on procède de la même façon que dans la paragraphe précédent à propos de $v_{j,t}^{(n)}$. Pour la solution homogène, on utilise directement le fait que les perturbations des champs hydrodynamiques sont négligeables au niveau des parois solides. Pour la solution particulière, on utilise la méthode des fonctions de Green : on note $G(z, z')$ la fonction de Green associée à l'opérateur \mathcal{L}^2 . $v_{j,z}^{(n)}$ se met alors sous la forme :

$$\begin{aligned} v_{j,z}^{(n)} &= (A_j^{(n)} + B_j^{(n)} qz) e^{-q|z|} \\ &+ \frac{1}{\eta_j} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_j G(z, z_j) \left[q^2 \left(\partial_z S_{j,zz}^{(n)}(z_j) - \partial_z S_{j,qq}^{(n)}(z_j) \right) + iq(q^2 + \partial_z^2) S_{j,qz}^{(n)}(z_j) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$G(z, z')$ vérifie

$$\mathcal{L}^2 G(z, z') = \delta(z - z')$$

$G(z, z')$ s'exprime alors sous la forme $G(z, z') = (\text{cte}_1 + \text{cte}_2 q|z - z'|) \exp(-q|z - z'|)$. On obtient les constantes par continuité de la fonction de Green et de ses deux premières dérivées en $z = z'$, et par la discontinuité de la dérivée troisième en $z = z'$ qui est donnée par l'intégration entre z'^- et z'^+ . Finalement

$$G(z, z') = \frac{1 + q|z - z'|}{4q^3} e^{-q|z - z'|} \quad (\text{C.11})$$

C.1.3 Synthèse de la forme des champs hydrodynamiques

A l'ordre 1 :

$$P_j^{(1)} = \frac{\eta_j}{q^2} (\partial_z^3 - q^2 \partial_z) v_{j,z}^{(1)} + S_{j,qq} - i \frac{\partial_z}{q} S_{j,qz} \quad v_{j,q}^{(1)} = \frac{i}{q} \partial_z v_{j,z}^{(1)} \quad (\text{C.12a})$$

$$v_{j,t}^{(1)} = \alpha_j^{(1)} e^{-q|z|} + \frac{1}{\eta_j} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_j g(z, z_j) [iq S_{j,qt}(z_j) + \partial_z S_{j,tz}(z_j)] \quad (\text{C.12b})$$

$$\begin{aligned} v_{j,z}^{(1)} &= (A_j^{(1)} + B_j^{(1)} qz) e^{-q|z|} \\ &+ \frac{1}{\eta_j} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_j G(z, z_j) \left[q^2 (\partial_z S_{j,zz}(z_j) - \partial_z S_{j,qq}(z_j)) + iq(q^2 + \partial_z^2) S_{j,qz}(z_j) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.12c})$$

A l'ordre 2 :

$$P_j^{(2)} = \frac{\eta_j}{q^2} (\partial_z^3 - q^2 \partial_z) v_{j,z}^{(2)} \quad v_{j,q}^{(2)} = \frac{i}{q} \partial_z v_{j,z}^{(2)} \quad (\text{C.13a})$$

$$v_{j,t}^{(2)} = \alpha_j^{(2)} e^{-q|z|} \quad v_{j,z}^{(2)} = (A_j^{(2)} + B_j^{(2)} qz) e^{-q|z|} \quad (\text{C.13b})$$

C.2 Conditions limites à l'interface

La difficulté de résolution du problème vient du fort couplage (=nombreuses dépendances non-linéaires) entre le champ de vitesse et la déformation interfaciale. Dans le but de traiter ce couplage, on développe les conditions limites à l'ordre 2 en ε . Ensuite, dans l'optique d'exprimer explicitement les constantes introduites dans la section précédente en fonction de la déformation interfaciale, on exprime chaque ordre des conditions limites en représentation de Fourier et dans la base polaire. On traite alors les ordres 1 et 2 successivement.

C.2.1 Développement des conditions limites à l'interface

A l'interface, on peut distinguer deux types de conditions limites, les conditions cinématiques ou la continuité de la vitesse à travers l'interface, et les conditions limites dynamiques ou l'équilibre des contraintes à l'interface. Il s'agit des deux égalités suivantes :

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, h(\mathbf{r})) = \mathbf{v}_2(\mathbf{r}, h(\mathbf{r})) \quad (\text{C.14a})$$

$$[\mathbb{T}_2(\mathbf{r}, h(\mathbf{r}))] \cdot \mathbf{n} - [\mathbb{T}_1(\mathbf{r}, h(\mathbf{r}))] \cdot \mathbf{n} = \sigma(\nabla \cdot \mathbf{n}) \quad (\text{C.14b})$$

Lors du développement en ε , deux types de termes interviennent à chaque ordre n :

- les champs hydrodynamiques d'ordre n en $z = 0$,
- le développement des champs hydrodynamiques en $z = h$ d'ordre $k < n$ autour de $z = 0$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j(\mathbf{r}, h(\mathbf{r})) = & \mathbf{v}_j^{(0)}(\mathbf{r}, 0) + \varepsilon [\mathbf{v}_j^{(1)}(\mathbf{r}, 0) + u(\mathbf{r}) \partial_z \mathbf{v}_j^{(0)}(\mathbf{r}, 0)] \\ & + \varepsilon^2 [\mathbf{v}_j^{(2)}(\mathbf{r}, 0) + u(\mathbf{r}) \partial_z \mathbf{v}_j^{(1)}(\mathbf{r}, 0) + \frac{u^2(\mathbf{r})}{2} \partial_z^2 \mathbf{v}_j^{(0)}(\mathbf{r}, 0)] + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (\text{C.15a})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_j(\mathbf{r}, h(\mathbf{r})) = & \mathbb{T}_j^{(0)}(\mathbf{r}, 0) + \varepsilon [\mathbb{T}_j^{(1)}(\mathbf{r}, 0) + u(\mathbf{r}) \partial_z \mathbb{T}_j^{(0)}(\mathbf{r}, 0)] \\ & + \varepsilon^2 [\mathbb{T}_j^{(2)}(\mathbf{r}, 0) + u(\mathbf{r}) \partial_z \mathbb{T}_j^{(1)}(\mathbf{r}, 0) + \frac{u^2(\mathbf{r})}{2} \partial_z^2 \mathbb{T}_j^{(0)}(\mathbf{r}, 0)] + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (\text{C.15b})$$

En ce qui concerne le vecteur normal à l'interface \mathbf{n} et la contrainte due à la tension de surface $\sigma(\nabla \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$, ces quantités ne requièrent qu'un développement par rapport à la déformation interfaciale :

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \partial_x u \\ -\varepsilon \partial_y u \\ 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad \text{et} \quad \sigma(\nabla \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \sigma \begin{pmatrix} \varepsilon^2 \Delta u \partial_x u \\ \varepsilon^2 \Delta u \partial_y u \\ -\varepsilon \Delta u \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

En remplaçant les champs hydrodynamiques d'ordre 0 par leur expression, on obtient les développements des conditions limites.

• **A l'ordre 1,**

$$v_{2,x}^{(1)}(0) - v_{1,x}^{(1)}(0) = (\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2)u \quad (\text{C.17a})$$

$$v_{2,y}^{(1)}(0) - v_{1,y}^{(1)}(0) = 0 \quad (\text{C.17b})$$

$$v_{2,z}^{(1)}(0) - v_{1,z}^{(1)}(0) = 0 \quad (\text{C.17c})$$

et

$$T_{2,xz}^{(1)}(0) - T_{1,xz}^{(1)}(0) = 0 \quad (\text{C.17d})$$

$$T_{2,yz}^{(1)}(0) - T_{1,yz}^{(1)}(0) = 0 \quad (\text{C.17e})$$

$$T_{2,zz}^{(1)}(0) - T_{1,zz}^{(1)}(0) = -\sigma\Delta u + \Delta\rho gu \quad (\text{C.17f})$$

- **A l'ordre 2,** seule la composante verticale de la vitesse nous intéresse. Elle est donnée par les deux conditions limites verticales :

$$v_{2,z}^{(2)}(0) - v_{1,z}^{(2)}(0) = u[\partial_z v_{1,z}^{(1)}(0) - \partial_z v_{2,z}^{(1)}(0)] \quad (\text{C.18a})$$

et

$$\begin{aligned} -\partial_x u[T_{2,xz}^{(1)}(0) - T_{1,xz}^{(1)}(0)] - \partial_y u[T_{2,yz}^{(1)}(0) - T_{1,yz}^{(1)}(0)] + T_{2,zz}^{(2)}(0) - T_{1,zz}^{(2)}(0) \\ = -u\partial_z[T_{2,zz}^{(1)}(0) - T_{1,zz}^{(1)}(0)] \end{aligned}$$

ce qui revient à

$$T_{2,zz}^{(2)}(0) - T_{1,zz}^{(2)}(0) = -u\partial_z[T_{2,zz}^{(1)}(0) - T_{1,zz}^{(1)}(0)] \quad (\text{C.18b})$$

C.2.2 Détermination des constantes du champ de vitesse

A l'ordre 1

Pour déterminer les constantes, on exprime les conditions limites en représentation de Fourier.

$$v_{2,x}^{(1)}(0) - v_{1,x}^{(1)}(0) = (\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2)u \quad (\text{C.19a})$$

$$v_{2,y}^{(1)}(0) - v_{1,y}^{(1)}(0) = 0 \quad (\text{C.19b})$$

$$v_{2,z}^{(1)}(0) - v_{1,z}^{(1)}(0) = 0 \quad (\text{C.19c})$$

$$\eta_2[iq_x v_{2,z}^{(1)}(0) + \partial_z v_{2,x}^{(1)}(0)] - \eta_1[iq_x v_{1,z}^{(1)}(0) + \partial_z v_{1,x}^{(1)}(0)] = S_{1,xz}(0) - S_{2,xz}(0) \quad (\text{C.19d})$$

$$\eta_2[iq_y v_{2,z}^{(1)}(0) + \partial_z v_{2,y}^{(1)}(0)] - \eta_1[iq_y v_{1,z}^{(1)}(0) + \partial_z v_{1,y}^{(1)}(0)] = S_{1,yz}(0) - S_{2,yz}(0) \quad (\text{C.19e})$$

$$\begin{aligned} -P_2^{(1)}(0) + 2\eta_2\partial_z v_{2,z}^{(1)}(0) + P_1^{(1)}(0) - 2\eta_1\partial_z v_{1,z}^{(1)}(0) = \sigma(q^2 + l_c^{-2})u + \\ S_{1,zz}(0) - S_{2,zz}(0) \end{aligned} \quad (\text{C.19f})$$

Pour exprimer les conditions limites dans la base polaire, on se souvient que $v_q = (q_x/q)v_x + (q_y/q)v_y$ et $v_t = -(q_y/q)v_x + (q_x/q)v_y$. Ainsi, pour la première condition limite sur les contraintes, on effectue $(q_x/q) \times (C.19d) + (q_y/q) \times (C.19e)$ tandis que pour la seconde, on effectue $-(q_y/q) \times (C.19d) + (q_x/q) \times (C.19e)$.

$$v_{2,q}^{(1)}(0) - v_{1,q}^{(1)}(0) = (\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2) \frac{q_x}{q} u \quad (C.20a)$$

$$v_{2,t}^{(1)}(0) - v_{1,t}^{(1)}(0) = -(\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2) \frac{q_y}{q} u \quad (C.20b)$$

$$v_{2,z}^{(1)}(0) - v_{1,z}^{(1)}(0) = 0 \quad (C.20c)$$

$$\eta_2 [iqv_{2,z}^{(1)}(0) + \partial_z v_{2,q}^{(1)}(0)] - \eta_1 [iqv_{1,z}^{(1)}(0) + \partial_z v_{1,q}^{(1)}(0)] = S_{1,qz}(0) - S_{2,qz}(0) \quad (C.20d)$$

$$\eta_2 \partial_z v_{2,t}^{(1)}(0) - \eta_1 \partial_z v_{1,t}^{(1)}(0) = S_{1,tz}(0) - S_{2,tz}(0) \quad (C.20e)$$

$$-P_2^{(1)}(0) + 2\eta_2 \partial_z v_{2,z}^{(1)}(0) + P_1^{(1)}(0) - 2\eta_1 \partial_z v_{1,z}^{(1)}(0) = \sigma(q^2 + l_c^{-2})u + S_{1,zz}(0) - S_{2,zz}(0) \quad (C.20f)$$

$\mathbf{v}_{j,t}^{(1)}(\mathbf{0})$ est à nouveau découplée des autres quantités. Les deux constantes $\alpha_j^{(1)}$ sont définies par

$$\begin{aligned} & \alpha_2^{(1)} + \frac{1}{\eta_2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 g(0, z_2) [iqS_{2,qt}(z_2) + \partial_z S_{2,tz}(z_2)] \\ & - \left(\alpha_1^{(1)} + \frac{1}{\eta_1} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 g(0, z_1) [iqS_{1,qt}(z_1) + \partial_z S_{1,tz}(z_1)] \right) = -(\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2) \frac{q_y}{q} u \end{aligned} \quad (C.21a)$$

$$\begin{aligned} & -\eta_2 q \alpha_2^{(1)} + \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 \partial_z g(0, z_2) [iqS_{2,qt}(z_2) + \partial_z S_{2,tz}(z_2)] \\ & - \left(\eta_1 q \alpha_1^{(1)} + \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \partial_z g(0, z_1) [iqS_{1,qt}(z_1) + \partial_z S_{1,tz}(z_1)] \right) = S_{1,tz}(0) - S_{2,tz}(0) \end{aligned} \quad (C.21b)$$

On obtient

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} + \frac{1}{\eta_1} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 g(0, z_1) [iqS_{1,qt}(z_1) + \partial_z S_{1,tz}(z_1)] = \\ \frac{q_y(\eta_2 - \eta_1)}{2q\eta} \dot{\gamma}_1 u + \frac{q}{\eta} \int_{-\infty}^0 dz_1 g(0, z_1) (iS_{1,qt}(z_1) + S_{1,tz}(z_1)) \\ + \frac{q}{\eta} \int_0^{+\infty} dz_2 g(0, z_2) (iS_{2,qt}(z_2) - S_{2,tz}(z_2)) \end{aligned} \quad (C.22a)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2^{(1)} + \frac{1}{\eta_2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 g(0, z_2) [iqS_{2,qt}(z_2) + \partial_z S_{2,tz}(z_2)] = \\ \frac{q_y(\eta_1 - \eta_2)}{2q\eta} \dot{\gamma}_2 u + \frac{q}{\eta} \int_{-\infty}^0 dz_1 g(0, z_1) (iS_{1,qt}(z_1) + S_{1,tz}(z_1)) \\ + \frac{q}{\eta} \int_0^{+\infty} dz_2 g(0, z_2) (iS_{2,qt}(z_2) - S_{2,tz}(z_2)) \end{aligned} \quad (C.22b)$$

en prenant en compte que

$$\partial_z g(z, z') = \begin{cases} qg(z, z') & \text{si } z' > z \\ -qg(z, z') & \text{si } z' < z \end{cases}$$

$\mathbf{v}_{j,z}^{(1)}(\mathbf{0})$ vérifient les quatre équations restantes lorsqu'on remplace $\mathbf{v}_{j,q}^{(1)}(\mathbf{0})$ et $\mathbf{P}_j^{(1)}(\mathbf{0})$ par leur expression en fonction de $v_{j,z}^{(1)}(0)$

$$\partial_z v_{2,z}^{(1)}(0) - \partial_z v_{1,z}^{(1)}(0) = (\dot{\gamma}_2 - \dot{\gamma}_1) i q_x u \quad (\text{C.23a})$$

$$v_{2,z}^{(1)}(0) - v_{1,z}^{(1)}(0) = 0 \quad (\text{C.23b})$$

$$\eta_2(q^2 + \partial_z^2)v_{2,z}^{(1)}(0) - \eta_1(q^2 + \partial_z^2)v_{1,z}^{(1)}(0) = iq[S_{2,qz}(0) - S_{1,qz}(0)] \quad (\text{C.23c})$$

$$\begin{aligned} \eta_2(\partial_z^3 - 3q^2\partial_z)v_{2,z}^{(1)}(0) - \eta_1(\partial_z^3 - 3q^2\partial_z)v_{1,z}^{(1)}(0) &= -\sigma q^2(q^2 + l_c^{-2})u \\ + q^2[S_{1,qq}(0) - S_{1,zz}(0) - (S_{2,qq}(0) - S_{2,zz}(0))] - iq\partial_z[S_{1,qz}(0) - S_{2,qz}(0)] \end{aligned} \quad (\text{C.23d})$$

- La continuité de la vitesse verticale et la discontinuité des contraintes normales à travers l'interface permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} v_{1,z}^{(1)}(0) = v_{2,z}^{(1)}(0) &= A_1^{(1)} + \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \frac{1}{\eta_1} G(0, z_1) \left[\begin{aligned} &q^2 \partial_z (S_{1,zz} - S_{1,qq})(z_1) \\ &+ iq(\partial_z^2 + q^2) S_{1,qz}(z_1) \end{aligned} \right] \\ &= A_2^{(1)} + \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 \frac{1}{\eta_2} G(0, z_2) \left[\begin{aligned} &q^2 \partial_z (S_{2,zz} - S_{2,qq})(z_2) \\ &+ iq(\partial_z^2 + q^2) S_{2,qz}(z_2) \end{aligned} \right] \\ &= -\frac{\sigma(q^2 + l_c^{-2})}{2\eta q} u - \frac{q^2}{\eta} \int_{-\infty}^0 dz_1 \partial_{z_1} G(0, z_1) (S_{1,zz} - S_{1,qq} - 2iS_{1,qz})(z_1) \\ &\quad - \frac{q^2}{\eta} \int_0^{+\infty} dz_2 \partial_{z_2} G(0, z_2) (S_{2,zz} - S_{2,qq} - 2iS_{2,qz})(z_2) \quad (\text{C.24}) \end{aligned}$$

à l'aide d'intégrations par parties et des remarques

$$(\partial_z^3 - 3q^2\partial_z)G(z, z') = \begin{cases} 2q^3 G(z, z') & \text{si } z > z' \\ -2q^3 G(z, z') & \text{si } z < z' \end{cases}$$

$$\text{et } (\partial_{z'}^2 + q^2)G(z, z') = \begin{cases} -2q\partial_{z'} G(z, z') & \text{si } z' > z \\ 2q\partial_{z'} G(z, z') & \text{si } z' < z \end{cases}$$

- Les continuités de la vitesse et de la contrainte selon la direction tangentielle \hat{q} mènent à

$$\begin{aligned} \frac{\partial_z}{q} v_{1,z}^{(1)}(0) &= \left(A_1^{(1)} + B_1^{(1)} \right) + \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \frac{\partial_z}{\eta_1 q} G(0, z_1) \left[\begin{aligned} &q^2 \partial_z (S_{1,zz} - S_{1,qq})(z_1) \\ &+ iq(\partial_z^2 + q^2) S_{1,qz}(z_1) \end{aligned} \right] \\ &= \frac{\eta_2 - \eta_1}{2\eta} \dot{\gamma}_1 i \frac{q_x}{q} u + \frac{q}{\eta} \int_{-\infty}^0 dz_1 \partial_{z_1}^2 G(0, z_1) (S_{1,zz} - S_{1,qq} - 2iS_{1,qz})(z_1) \\ &\quad + \frac{q}{\eta} \int_0^{+\infty} dz_2 \partial_{z_2}^2 G(0, z_2) (S_{2,zz} - S_{2,qq} + 2iS_{2,qz})(z_2) \quad (\text{C.25a}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial_z}{q}v_{2,z}^{(1)}(0) &= \left(A_2^{(1)} - B_2^{(1)}\right) - \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 \frac{\partial_z}{\eta_2 q} G(0, z_2) \left[\begin{aligned} &q^2 \partial_z (S_{2,zz} - S_{2,qq})(z_2) \\ &+ iq(\partial_z^2 + q^2)S_{2,qz}(z_2) \end{aligned} \right] \\
&= \frac{\eta_2 - \eta_1}{2\eta} \dot{\gamma}_2 i \frac{q_x}{q} u - \frac{q}{\eta} \int_{-\infty}^0 dz_1 \partial_{z_1}^2 G(0, z_1) (S_{1,zz} - S_{1,qq} - 2iS_{1,qz})(z_1) \\
&\quad - \frac{q}{\eta} \int_0^{+\infty} dz_2 \partial_{z_2}^2 G(0, z_2) (S_{2,zz} - S_{2,qq} + 2iS_{2,qz})(z_2) \quad (\text{C.25b})
\end{aligned}$$

A l'ordre 2

Les deux relations permettant d'obtenir les constantes $A^{(2)}$ font intervenir des produits de convolution dans l'espace de Fourier.

$$\begin{aligned}
v_{1,z}^{(2)}(0) - v_{2,z}^{(2)}(0) &= - \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} u_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} \underbrace{\partial_z [v_{1,z}^{(1)}(\mathbf{k}, 0) - v_{2,z}^{(1)}(\mathbf{k}, 0)]}_{=ik_x(\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2)u_{\mathbf{k}}} \\
T_{1,zz}^{(2)}(0) - T_{2,zz}^{(2)}(0) &= - \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} u_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} \underbrace{\partial_z [T_{1,zz}^{(1)}(\mathbf{k}, 0) - T_{2,zz}^{(1)}(\mathbf{k}, 0)]}_{\substack{-\eta_1(\partial_z^2 + q^2)v_{1,z}^{(1)}(0) + iqS_{1,qz}(0) \\ +\eta_2(\partial_z^2 + q^2)v_{2,z}^{(1)}(0) - iqS_{2,qz}(0) \\ = 0}}
\end{aligned}$$

Sachant que $T_{1,zz}^{(2)}(0) = 2\eta_1 q A_1^{(2)}$ et $T_{2,zz}^{(2)}(0) = -2\eta_2 q A_2^{(2)}$, on trouve :

$$A_1^{(2)} = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} ik_x \frac{\eta_2}{2\eta} (\dot{\gamma}_2 - \dot{\gamma}_1) u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} \quad (\text{C.26a})$$

$$A_2^{(2)} = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} ik_x \frac{\eta_1}{2\eta} (\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2) u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} \quad (\text{C.26b})$$

Le remplacement de ces constantes dans la condition d'immiscibilité développée à l'ordre 2 conduit effectivement à l'équation d'évolution temporelle 3.55 vérifiée par les fluctuations thermiques de l'interface.

Annexe D

Résolution de la dynamique des fluctuations à petit cisaillement

Dans cette annexe, on omet les \sim qui permettent de repérer les quantités adimensionnées pour plus de lisibilité. On a l'équation suivante :

$$\frac{\partial h_q(t)}{\partial t} = -\frac{f_q}{2}h_q(t) - i\alpha \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} k_x h_k(t) h_{q-k}(t) + \varphi_q(t) \quad (\text{D.1})$$

où $\varphi_q(t)$ est une variable aléatoire gaussienne avec $\langle \varphi_q(t) \rangle = 0$ et $\langle \varphi_q(t) \varphi_{q'}(t') \rangle = (1/q)(2\pi)^2 \delta(\vec{q} + \vec{q}') \delta(t - t')$ et où $\frac{f_q}{2} = \frac{\sigma(q^2 + l_c^{-2})}{4\eta q}$.

Après la transformée de Fourier temporelle :

$$i\omega h_q(\omega) = -\frac{f_q}{2}h_q(\omega) - i\alpha \iint \frac{d\mathbf{k}d\Omega}{(2\pi)^3} k_x h_k(\Omega) h_{q-k}(\omega - \Omega) + \varphi_q(\omega) \quad (\text{D.2})$$

où $\langle \varphi_q(\omega) \varphi_{q'}(\omega') \rangle = (1/q)(2\pi)^3 \delta(\vec{q} + \vec{q}') \delta(\omega + \omega')$.

Ainsi $h_q(\omega)$ vérifie :

$$h_q(\omega) = R_q(\omega) \varphi_q(\omega) - i\alpha R_q(\omega) \iint \frac{d\mathbf{k}d\Omega}{(2\pi)^3} k_x h_k(\Omega) h_{q-k}(\omega - \Omega) \quad (\text{D.3})$$

où $R_q(\omega) = \frac{1}{\frac{f_q}{2}(1+i\frac{2\omega}{f_q})}$. On considère que le petit paramètre est α et donc que le produit de convolution est d'ordre 1.

D.1 Obtention de $h_q(\omega)$

A l'ordre 0, $h_q(\omega)^{(0)} = R_q(\omega) \varphi_q(\omega)$. A l'ordre 1, on remplace h dans le produit de convolution par son expression à l'ordre 0.

$$h_q^{(0)}(\omega) + \alpha h_q^{(1)}(\omega) = R_q(\omega) \varphi_q(\omega) - i\alpha R_q(\omega) \iint \frac{d\mathbf{k}d\Omega}{(2\pi)^3} k_x R_k(\Omega) R_{q-k}(\omega - \Omega) \varphi_k(\Omega) \varphi_{q-k}(\omega - \Omega)$$

A l'ordre 2, on remplace h dans le produit de convolution par son expression à l'ordre 1.

$$\begin{aligned}
h_q^{(0)}(\omega) + \alpha h_q^{(1)}(\omega) + \alpha^2 h_q^{(2)}(\omega) = & \\
& R_q(\omega) \varphi_q(\omega) - i\alpha R_q(\omega) \iint \frac{d\mathbf{k}d\Omega}{(2\pi)^3} k_x \\
& \times \left[R_k(\Omega) \varphi_k(\Omega) - i\alpha R_k(\Omega) \iint \frac{d\mathbf{k}'d\Omega'}{(2\pi)^3} \begin{pmatrix} k'_x R_{k'}(\Omega') R_{k-k'}(\Omega - \Omega') \\ \varphi_{k'}(\Omega') \varphi_{k-k'}(\Omega - \Omega') \end{pmatrix} \right] \\
& \times \left[R_{q-k}(\omega - \Omega) \varphi_{q-k}(\omega - \Omega) \right. \\
& \quad \left. - i\alpha R_{q-k}(\omega - \Omega) \iint \frac{d\mathbf{k}'d\Omega'}{(2\pi)^3} \begin{pmatrix} k'_x \\ R_{k'}(\Omega') R_{q-k-k'}(\omega - \Omega - \Omega') \\ \varphi_{k'}(\Omega') \varphi_{q-k-k'}(\omega - \Omega - \Omega') \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}$$

soit en mettant en évidence les différents ordres

$$\begin{aligned}
h_q^{(0)}(\omega) + \alpha h_q^{(1)}(\omega) + \alpha^2 h_q^{(2)}(\omega) & \\
= R_q(\omega) \varphi_q(\omega) & \\
- i\alpha R_q(\omega) \iint \frac{d\mathbf{k}d\Omega}{(2\pi)^3} k_x R_k(\Omega) R_{q-k}(\omega - \Omega) \varphi_k(\Omega) \varphi_{q-k}(\omega - \Omega) & \\
- \alpha^2 R_q(\omega) \iint \frac{d\mathbf{k}d\Omega d\mathbf{k}'d\Omega'}{(2\pi)^6} \frac{k_x k'_x}{R_k(\Omega) R_{q-k}(\omega - \Omega) R_{k'}(\Omega') R_{k-k'}(\Omega - \Omega')} & \\
\varphi_{q-k}(\omega - \Omega) \varphi_{k'}(\Omega') \varphi_{k-k'}(\Omega - \Omega') & \\
- \alpha^2 R_q(\omega) \iint \frac{d\mathbf{k}d\Omega d\mathbf{k}'d\Omega'}{(2\pi)^6} \frac{k_x k'_x}{R_k(\Omega) R_{q-k}(\omega - \Omega) R_{k'}(\Omega') R_{q-k-k'}(\omega - \Omega - \Omega')} & \\
\varphi_k(\Omega) \varphi_{k'}(\Omega') \varphi_{q-k-k'}(\omega - \Omega - \Omega') &
\end{aligned}$$

En posant $\mathbf{k} = \mathbf{q} - \mathbf{k}$ dans la dernière intégrale, l'ordre 2 se simplifie

$$\begin{aligned}
h_q^{(0)}(\omega) + \alpha h_q^{(1)}(\omega) + \alpha^2 h_q^{(2)}(\omega) & \\
= R_q(\omega) \varphi_q(\omega) & \\
- i\alpha R_q(\omega) \iint \frac{d\mathbf{k}d\Omega}{(2\pi)^3} k_x R_k(\Omega) R_{q-k}(\omega - \Omega) \varphi_k(\Omega) \varphi_{q-k}(\omega - \Omega) & \\
- \alpha^2 R_q(\omega) \iint \frac{d\mathbf{k}d\Omega d\mathbf{k}'d\Omega'}{(2\pi)^6} \left[\begin{array}{l} q_x k'_x \\ R_k(\Omega) R_{q-k}(\omega - \Omega) R_{k'}(\Omega') R_{k-k'}(\Omega - \Omega') \\ \varphi_{q-k}(\omega - \Omega) \varphi_{k'}(\Omega') \varphi_{k-k'}(\Omega - \Omega') \end{array} \right] & \\
& \tag{D.4}
\end{aligned}$$

D.2 Calcul du spectre

D.2.1 Dynamique

Le but est de calculer la quantité $\langle h_{q_1}(\omega_1)h_{q_2}(\omega_2) \rangle$ à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
h_{q_1}(\omega_1)h_{q_2}(\omega_2) = & \\
& \left(\begin{array}{l} R_{q_1}(\omega_1)\varphi_{q_1}(\omega_1) \\ -i\alpha R_{q_1}(\omega_1) \\ \times \iint \frac{d\mathbf{k}_1 d\Omega_1}{(2\pi)^3} k_{1,x} R_{k_1}(\Omega_1)R_{q_1-k_1}(\omega_1 - \Omega_1) \varphi_{k_1}(\Omega_1)\varphi_{q_1-k_1}(\omega_1 - \Omega_1) \\ -\alpha^2 R_{q_1}(\omega_1) \\ \times \iint \frac{d\mathbf{k}_1 d\Omega_1 d\mathbf{k}'_1 d\Omega'_1}{(2\pi)^6} \left[\begin{array}{l} q_{1,x}k'_{1,x} \\ R_{k_1}(\Omega)R_{q_1-k_1}(\omega_1 - \Omega_1)R_{k'_1}(\Omega'_1)R_{k_1-k'_1}(\Omega_1 - \Omega'_1) \\ \varphi_{q_1-k_1}(\omega_1 - \Omega_1)\varphi_{k'_1}(\Omega'_1)\varphi_{k_1-k'_1}(\Omega_1 - \Omega'_1) \end{array} \right] \end{array} \right) \\
& \times \left(\begin{array}{l} R_{q_2}(\omega_2)\varphi_{q_2}(\omega_2) \\ -i\alpha R_{q_2}(\omega_2) \\ \times \iint \frac{d\mathbf{k}_2 d\Omega_2}{(2\pi)^3} k_{2,x} R_{k_2}(\Omega_2)R_{q_2-k_2}(\omega_2 - \Omega_2) \varphi_{k_2}(\Omega_2)\varphi_{q_2-k_2}(\omega_2 - \Omega_2) \\ -\alpha^2 R_{q_2}(\omega_2) \\ \times \iint \frac{d\mathbf{k}_2 d\Omega_2 d\mathbf{k}'_2 d\Omega'_2}{(2\pi)^6} \left[\begin{array}{l} q_{2,x}k'_{2,x} \\ R_{k_2}(\Omega_2)R_{q_2-k_2}(\omega_2 - \Omega_2)R_{k'_2}(\Omega'_2)R_{k_2-k'_2}(\Omega_2 - \Omega'_2) \\ \varphi_{q_2-k_2}(\omega_2 - \Omega_2)\varphi_{k'_2}(\Omega'_2)\varphi_{k_2-k'_2}(\Omega_2 - \Omega'_2) \end{array} \right] \end{array} \right)
\end{aligned}$$

soit en mettant les différents ordres en évidence :

$$\begin{aligned}
\langle h_{q_1}(\omega_1)h_{q_2}(\omega_2) \rangle = & R_{q_1}(\omega_1)R_{q_2}(\omega_2)\langle \varphi_{q_1}(\omega_1)\varphi_{q_2}(\omega_2) \rangle \\
& - \alpha^2 \iint \frac{d\mathbf{k}_1 d\Omega_1 d\mathbf{k}_2 d\Omega_2}{(2\pi)^6} \left[\begin{array}{l} k_{1,x}k_{2,x} \\ R_{q_1}(\omega_1)R_{q_2}(\omega_2)R_{k_1}(\Omega_1) \\ R_{q_1-k_1}(\omega_1 - \Omega_1)R_{k_2}(\Omega_2)R_{q_2-k_2}(\omega_2 - \Omega_2) \\ \langle \varphi_{k_1}(\Omega_1)\varphi_{q_1-k_1}(\omega_1 - \Omega_1)\varphi_{k_2}(\Omega_2)\varphi_{q_2-k_2}(\omega_2 - \Omega_2) \rangle \end{array} \right] \\
& - \alpha^2 \iint \frac{d\mathbf{k}_2 d\Omega_2 d\mathbf{k}'_2 d\Omega'_2}{(2\pi)^6} \left[\begin{array}{l} q_{2,x}k'_{2,x} \\ R_{q_1}(\omega_1)R_{q_2}(\omega_2)R_{k_2}(\Omega_2) \\ R_{q_2-k_2}(\omega_2 - \Omega_2)R_{k'_2}(\Omega'_2)R_{k_2-k'_2}(\Omega_2 - \Omega'_2) \\ \langle \varphi_{q_1}(\omega_1)\varphi_{q_2-k_2}(\omega_2 - \Omega_2)\varphi_{k'_2}(\Omega'_2)\varphi_{k_2-k'_2}(\Omega_2 - \Omega'_2) \rangle \end{array} \right] \\
& - \alpha^2 \iint \frac{d\mathbf{k}_1 d\Omega_1 d\mathbf{k}'_1 d\Omega'_1}{(2\pi)^6} \left[\begin{array}{l} q_{1,x}k'_{1,x} \\ R_{q_1}(\omega_1)R_{q_2}(\omega_2)R_{k_1}(\Omega) \\ R_{q_1-k_1}(\omega_1 - \Omega_1)R_{k'_1}(\Omega'_1)R_{k_1-k'_1}(\Omega_1 - \Omega'_1) \\ \langle \varphi_{q_2}(\omega_2)\varphi_{q_1-k_1}(\omega_1 - \Omega_1)\varphi_{k'_1}(\Omega'_1)\varphi_{k_1-k'_1}(\Omega_1 - \Omega'_1) \rangle \end{array} \right]
\end{aligned}$$

L'ordre 1 est effectivement nul puisqu'il fait intervenir des moments d'ordre 3 de variables gaussiennes. L'ordre 2 est constitué de 3 termes : la multiplication des

deux ordres 1 de h_{q_j} entre eux, le produit de l'ordre 0 de h_{q_1} avec l'ordre 2 de h_{q_2} et inversement, le produit de l'ordre 2 de h_{q_1} avec l'ordre 0 de h_{q_2} .

L'ordre 2 est calculé à partir des moments d'ordre 4 des variables gaussiennes φ . Ces derniers sont donnés par le théorème de Wick : un moment d'ordre 4 de variables gaussiennes est la somme sur toutes les permutations des produits des moments d'ordre 2. Par exemple,

$$\begin{aligned}
& \langle \varphi_{k_1}(\Omega_1) \varphi_{q_1-k_1}(\omega_1 - \Omega_1) \varphi_{k_2}(\Omega_2) \varphi_{q_2-k_2}(\omega_2 - \Omega_2) \rangle \\
&= \langle \varphi_{k_1}(\Omega_1) \varphi_{q_1-k_1}(\omega_1 - \Omega_1) \rangle \langle \varphi_{k_2}(\Omega_2) \varphi_{q_2-k_2}(\omega_2 - \Omega_2) \rangle \\
&\quad + \langle \varphi_{k_1}(\Omega_1) \varphi_{k_2}(\Omega_2) \rangle \langle \varphi_{q_1-k_1}(\omega_1 - \Omega_1) \varphi_{q_2-k_2}(\omega_2 - \Omega_2) \rangle \\
&\quad + \langle \varphi_{k_1}(\Omega_1) \varphi_{q_2-k_2}(\omega_2 - \Omega_2) \rangle \langle \varphi_{k_2}(\Omega_2) \varphi_{q_1-k_1}(\omega_1 - \Omega_1) \rangle \\
&= \frac{1}{k_1 k_2} (2\pi)^6 \delta(\mathbf{q}_1) \delta(\omega_1) \delta(\mathbf{q}_2) \delta(\omega_2) \\
&\quad + \frac{1}{k_1 |\mathbf{q}_1 - \mathbf{k}_1|} (2\pi)^6 \left[\begin{array}{l} \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) \\ \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(\Omega_1 + \Omega_2) \end{array} \right] \\
&\quad + \frac{1}{k_1 |\mathbf{q}_1 - \mathbf{k}_1|} (2\pi)^6 \left[\begin{array}{l} \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) \\ \delta(\mathbf{q}_1 - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \Omega_1 + \Omega_2) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

En remplaçant les moments d'ordre 4 des variables φ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle h_{q_1}(\omega_1) h_{q_2}(\omega_2) \rangle &= \frac{|R_{q_1}(\omega_1)|^2}{q_1} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) \\
&\quad - \alpha^2 (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) |R_{q_1}(\omega_1)|^2 \\
&\quad \times \iint \frac{d\mathbf{k}_1 d\Omega_1}{(2\pi)^3} \left[\frac{-q_{1,x} k_{1,x}}{k_1 |\mathbf{q}_1 - \mathbf{k}_1|} |R_{k_1}(\Omega_1)|^2 |R_{q_1-k_1}(\omega_1 - \Omega_1)|^2 \right] \\
&\quad - \alpha^2 (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) |R_{q_1}(\omega_1)|^2 \\
&\quad \times \iint \frac{d\mathbf{k}_2 d\Omega_2}{(2\pi)^3} \left[\frac{-q_{1,x} k_{2,x}}{q_1 |\mathbf{q}_1 + \mathbf{k}_2|} R_{q_1}^*(\omega_1) R_{k_2}(\Omega_2) |R_{q_1+k_2}(\omega_1 + \Omega_2)|^2 \right] \\
&\quad - \alpha^2 (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) |R_{q_1}(\omega_1)|^2 \\
&\quad \times \iint \frac{d\mathbf{k}_1 d\Omega_1}{(2\pi)^3} \left[\frac{q_{1,x} k_{1,x}}{q_1 |\mathbf{q}_1 - \mathbf{k}_1|} R_{q_1}(\omega_1) R_{k_1}(\Omega_1) |R_{q_1-k_1}(\omega_1 - \Omega_1)|^2 \right]
\end{aligned}$$

On montre que la seconde intégrale est le complexe conjugué de la troisième en y posant $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$ et $\Omega_1 = -\Omega_2$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\langle h_{q_1}(\omega_1) h_{q_2}(\omega_2) \rangle &= \frac{|R_{q_1}(\omega_1)|^2}{q_1} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) \\
&\quad - \alpha^2 (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) |R_{q_1}(\omega_1)|^2 \iint \frac{d\mathbf{k}_1 d\Omega_1}{(2\pi)^3} \frac{q_{1,x} k_{1,x}}{|\mathbf{q}_1 - \mathbf{k}_1|} \\
&\quad \times |R_{q_1-k_1}(\omega_1 - \Omega_1)|^2 \left[\frac{R_{q_1}(\omega_1) R_{k_1}(\Omega_1) + R_{q_1}^*(\omega_1) R_{k_1}^*(\Omega_1)}{q_1} - \frac{|R_{k_1}(\Omega_1)|^2}{k_1} \right]
\end{aligned}$$

On effectue l'intégrale sur Ω_1

$$\begin{aligned} \langle h_{q_1}(\omega_1)h_{q_2}(\omega_2) \rangle &= \frac{|R_{q_1}(\omega_1)|^2}{q_1} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) \\ &\quad - 4\alpha^2 (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) |R_{q_1}(\omega_1)|^2 \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^2} \frac{q_{1,x}k_{1,x}}{|\mathbf{q}_1 - \mathbf{k}_1|} \\ &\quad \times \frac{\frac{1}{f_{q_1-k_1}(f_{k_1}+f_{q_1-k_1})}}{1 + \frac{4\omega_1^2}{(f_{k_1}+f_{q_1-k_1})^2}} \left[\frac{2(1 - \frac{4\omega_1^2}{f_{q_1}(f_{k_1}+f_{q_1-k_1})})}{q_1 f_{q_1} (1 + \frac{4\omega_1^2}{f_{q_1}^2})} - \frac{1}{k_1 f_{k_1}} \right] \end{aligned} \quad (D.5)$$

D.2.2 Statique

On calcule maintenant la quantité $\langle h_{q_1}(t)h_{q_2}(t) \rangle$ en effectuant une transformée de Fourier inverse.

$$\langle h_{q_1}(t)h_{q_2}(t) \rangle = \iint \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} e^{i(\omega_1+\omega_2)t} \langle h_{q_1}(\omega_1)h_{q_2}(\omega_2) \rangle \quad (D.6)$$

En remplaçant $\langle h_{q_1}(\omega_1)h_{q_2}(\omega_2) \rangle$ par son expression, on obtient

$$\begin{aligned} \langle h_{q_1}(t)h_{q_2}(t) \rangle &= (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \int \frac{d\omega_1}{(2\pi)} \\ &\quad \left(\frac{|R_{q_1}(\omega_1)|^2}{q_1} - 4\alpha^2 |R_{q_1}(\omega_1)|^2 \right. \\ &\quad \left. \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^2} \frac{\frac{q_{1,x}k_{1,x}}{|\mathbf{q}_1 - \mathbf{k}_1| f_{q_1-k_1}(f_{k_1}+f_{q_1-k_1})}}{1 + \frac{4\omega_1^2}{(f_{k_1}+f_{q_1-k_1})^2}} \left[\frac{2(1 - \frac{4\omega_1^2}{f_{q_1}(f_{k_1}+f_{q_1-k_1})})}{q_1 f_{q_1} (1 + \frac{4\omega_1^2}{f_{q_1}^2})} - \frac{1}{k_1 f_{k_1}} \right] \right) \end{aligned} \quad (D.7)$$

L'intégration sur ω_1 donne

$$\begin{aligned} \langle h_{q_1}(t)h_{q_2}(t) \rangle &= (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \\ &\quad \left[\frac{1}{q_1 f_{q_1}} - \alpha^2 \frac{1}{f_{q_1}} \int \frac{d\mathbf{k}_1}{\pi^2} \frac{q_{1,x}k_{1,x}}{|\mathbf{q}_1 - \mathbf{k}_1| f_{q_1-k_1}(f_{q_1} + f_{k_1} + f_{q_1-k_1})} \left(\frac{1}{q_1 f_{q_1}} - \frac{1}{k_1 f_{k_1}} \right) \right] \end{aligned} \quad (D.8)$$

La densité spectrale $S_q(\alpha)$, définie par $\langle h_q(t)h_{q'}(t) \rangle = S_q(\alpha)(2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}')$, est donnée par :

$$S_q(\alpha) = \frac{1}{q f_q} \left[1 - \frac{\alpha^2}{\pi^2} \int d\mathbf{k} \frac{k_x q_x q [(q f_q)^{-1} - (k f_k)^{-1}]}{|\mathbf{q} - \mathbf{k}| f_{q-k} (f_q + f_k + f_{q-k})} \right] \quad (D.9)$$

On peut extraire la dépendance par rapport à l'angle du vecteur d'onde θ_q en exprimant l'intégrale donnant la correction de la densité spectrale par le cisaillement en fonction des coordonnées polaires. On note θ_k l'angle du vecteur d'onde \mathbf{k} par

rapport à la direction du cisaillement.

$$\int d\mathbf{k} \frac{k_x q_x q [(qf_q)^{-1} - (kf_k)^{-1}]}{|\mathbf{q} - \mathbf{k}| f_{q-k} (f_q + f_k + f_{q-k})} =$$

$$\int d\mathbf{k} \frac{kq^2 \cos \theta_q \cos \theta_k [(qf_q)^{-1} - (kf_k)^{-1}]}{\sqrt{q^2 + k^2 - 2qk \cos(\theta_k - \theta_q)} f_{\sqrt{q^2 + k^2 - 2qk \cos(\theta_k - \theta_q)}} (f_q + f_k + f_{\sqrt{q^2 + k^2 - 2qk \cos(\theta_k - \theta_q)}})}$$

On pose $\theta_k = \theta_k - \theta_q$

$$\int d\mathbf{k} \frac{k_x q_x q [(qf_q)^{-1} - (kf_k)^{-1}]}{|\mathbf{q} - \mathbf{k}| f_{q-k} (f_q + f_k + f_{q-k})}$$

$$= \int d\mathbf{k} \frac{kq^2 \cos \theta_q \cos(\theta_k + \theta_q) [(qf_q)^{-1} - (kf_k)^{-1}]}{\sqrt{q^2 + k^2 - 2qk \cos \theta_k} f_{\sqrt{q^2 + k^2 - 2qk \cos \theta_k}} (f_q + f_k + f_{\sqrt{q^2 + k^2 - 2qk \cos \theta_k}})}$$

$$= \cos^2 \theta_q \int d\mathbf{k} \frac{kq^2 \cos \theta_k [(qf_q)^{-1} - (kf_k)^{-1}]}{\sqrt{q^2 + k^2 - 2qk \cos \theta_k} f_{\sqrt{q^2 + k^2 - 2qk \cos \theta_k}} (f_q + f_k + f_{\sqrt{q^2 + k^2 - 2qk \cos \theta_k}})}$$

où on a développé $\cos(\theta_q + \theta_k)$ en $\cos \theta_q \cos \theta_k - \sin \theta_q \sin \theta_k$. Le terme proportionnel à $\sin \theta_k$ est nul en raison des propriétés de parité.

On trouve effectivement

$$S_q(\alpha) = \frac{1}{qf_q} (1 - \alpha^2 \cos^2 \theta_q \mathcal{I}(q)) \quad (\text{D.10})$$

avec

$$\mathcal{I}(q) = \int_0^{+\infty} \frac{dk}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_k}{\pi} \frac{kq^2 \cos \theta_k [(qf_q)^{-1} - (kf_k)^{-1}]}{|\mathbf{q} - \mathbf{k}| f_{|\mathbf{q}-\mathbf{k}|} (f_q + f_k + f_{|\mathbf{q}-\mathbf{k}|})}$$

$$\text{et } |\mathbf{q} - \mathbf{k}| = \sqrt{q^2 + k^2 - 2qk \cos \theta_k} \quad (\text{D.11})$$

Bibliographie

- [1] Dirk G. A. L. Aarts, Matthias Schmidt, and Henk N. W. Lekkerkerker. Direct visual observation of thermal capillary waves. *Science*, 304(5672) :847–850, 2004.
- [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions : with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 1965.
- [3] F. Albert and F. Charru. Small Reynolds number instabilities in two-layer Couette flow. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 19(2) :229 – 252, 2000.
- [4] Y. Amarouchene, J.-F. Boudet, and H. Kellay. Capillarylike fluctuations at the interface of falling granular jets. *Phys. Rev. Lett.*, 100(21) :218001, May 2008.
- [5] J.-L. Barrat and J.-P. Hansen. *Basic Concepts for Simple and Complex Liquids*. Cambridge University Press, 2003.
- [6] A. Baule and R. M. L. Evans. Invariant quantities in shear flow. *Phys. Rev. Lett.*, 101(24) :240601, Dec 2008.
- [7] J. Bec and K. Khanin. Burgers turbulence. *Physics Reports*, 447(1-2) :1 – 66, 2007.
- [8] F. P. Buff, R. A. Lovett, and F. H. Stillinger. Interfacial density profile for fluids in the critical region. *Phys. Rev. Lett.*, 15(15) :621–623, Oct 1965.
- [9] M. E. Cates and M. R. Evans. *Soft and Fragile Matter : Nonequilibrium Dynamics, Metastability and Flow*. Institut of Physics, Bristol, Philadelphia et Scottish Universities Summer School in Physics, Edinburgh, Scotland, 2000.
- [10] F. Charru. *Instabilités Hydrodynamiques*. CNRS Éditions, EDP Sciences, 2007.
- [11] F. Charru and E. J. Hinch. ‘Phase diagram’ of interfacial instabilities in a two-layer Couette flow and mechanism of the long-wave instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 414 :195–223, 2000.
- [12] Leticia F. Cugliandolo, Jorge Kurchan, and Luca Peliti. Energy flow, partial equilibration, and effective temperatures in systems with slow dynamics. *Phys. Rev. E*, 55(4) :3898–3914, Apr 1997.
- [13] P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quéré. *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Échelles, Belin, Paris, 2005.

- [14] V. W. A. de Villeneuve, J. M. J. van Leeuwen, W. van Saarloos, and H. N. W. Lekkerkerker. Statistics of fluctuating colloidal fluid-fluid interfaces. *arXiv*, Jun 2008.
- [15] R. Delgado-Buscalioni, E. Chacon, and P. Tarazona. Hydrodynamics of nanoscopic capillary waves. *Phys. Rev. Lett.*, 101(10) :106102, Sep 2008.
- [16] D. Derks. *Colloidal Suspensions in Shear Flow : a Real Space Study*. PhD thesis, Utrecht University, 2006.
- [17] D. Derks, Dirk G. A. L. Aarts, D. Bonn, H. N. W. Lekkerkerker, and A. Imhof. Suppression of thermally excited capillary waves by shear flow. *Phys. Rev. Lett.*, 97(3) :038301, Jul 2006.
- [18] C. Fradin, A. Braslau, D. Luzet, D. Smilgies, M. Alba, N. Boudet, K. Mecke, and J. Daillant. Reduction in the surface energy of liquid interfaces at short length scales. *Nature*, 403 :871, 2000.
- [19] Guillaume Galliero. Lennard-Jones fluid-fluid interfaces under shear. *Phys. Rev. E*, 81(5) :056306, May 2010.
- [20] E. J. Hinch. A note on the mechanism of the instability at the interface between two shearing fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 144 :463–465, 1984.
- [21] A. P. Hooper. Long-wave instability at the interface between two viscous fluids : Thin layer effects. *Physics of Fluids*, 28(6) :1613–1618, 1985.
- [22] A. P. Hooper and W. G. C. Boyd. Shear-flow instability at the interface between two viscous fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 128 :507–528, 1983.
- [23] J. N. Israelachvili. *Intermolecular and surface forces*. Academic Press, 1991.
- [24] Mehran Kardar, Giorgio Parisi, and Yi-Cheng Zhang. Dynamic scaling of growing interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 56(9) :889–892, Mar 1986.
- [25] W. Krauth. *Statistical Mechanics : Algorithms and Computations*. Oxford University Press, 2006.
- [26] L. D. Landau and L. P. Pitaevskii. *Statistical Physics, Part 2*. Pergamon Press, 1980.
- [27] D. Langevin. *Light scattering by liquid surfaces and complementary techniques*. M. Dekker, New-York, 1992.
- [28] V. G. Levich. *Physicochemical Hydrodynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
- [29] Lawrence C.-L. Lin and Frank L. H. Brown. Brownian dynamics in Fourier space : Membrane simulations over long length and time scales. *Phys. Rev. Lett.*, 93(25) :256001, Dec 2004.
- [30] L. Mandelstam. Über die rauigkeit freier flüssigkeitsoberflächen. *Annalen der Physik*, 346(8) :609–624, 1913.
- [31] W. D. McComb. *Renormalisation methods : a guide for beginners*. Clarendon Press, Oxford, 2004.

- [32] J. Meunier. *Analyse spectrale de la lumière diffusée par les fluctuations thermiques d'une interface liquide. Etude de l'anhydride carbonique près du point critique*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1971.
- [33] J. M. Ortiz de Zarate and J. V. Sengers. *Hydrodynamic Fluctuations in Fluids and Fluid Mixtures*. Elsevier, 2006.
- [34] K. Park and B. Kahng. Exact derivation of the Kardar-Parisi-Zhang equation for the restricted solid-on-solid model. *Phys. Rev. E*, 51 :796–798, Jan 1995.
- [35] M. Plischke and B. Bergersen. *Equilibrium Statistical Physics*. World Scientific, Singapore, 1994.
- [36] W. C. K. Poon. The physics of a model colloid–polymer mixture. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 14(33) :R859, 2002.
- [37] N. Pottier. *Physique statistique hors d'équilibre : équation de Boltzmann, réponse linéaire*. CNRS Éditions, EDP Sciences, 2000.
- [38] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing, Second Edition*. Cambridge University Press, 1992.
- [39] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.
- [40] A. Rey. *Le Grand Robert de la Langue Française*.
- [41] V. A. Romanov. Stability of plane-parallel Couette flow. *Functional Analysis and Its Applications*, 7 :137–146, 1973. 10.1007/BF01078886.
- [42] J. S. Rowlinson and B. Widom. *Molecular theory of capillarity*. Dover Publications, 2002.
- [43] U. Seifert and T. Speck. Fluctuation-dissipation theorem in nonequilibrium steady states. *EPL (Europhysics Letters)*, 89(1) :10007, 2010.
- [44] Thomas H. R. Smith, Oleg Vasilyev, Douglas B. Abraham, Anna Maciołek, and Matthias Schmidt. Interfaces in driven Ising models : Shear enhances confinement. *Phys. Rev. Lett.*, 101(6) :067203, Aug 2008.
- [45] Thomas Speck and Udo Seifert. Extended fluctuation-dissipation theorem for soft matter in stationary flow. *Phys. Rev. E*, 79(4) :040102, Apr 2009.
- [46] Amol K. Thakre, J. T. Padding, W. K. den Otter, and W. J. Briels. Finite system size effects in the interfacial dynamics of binary liquid films. *The Journal of Chemical Physics*, 129(4) :044701, 2008.
- [47] M. von Smoluchowski. Molekular-kinetische theorie der opaleszenz von gasen im kritischen zustande, sowie einiger verwandter erscheinungen. *Annalen der Physik*, 330(2) :205–226, 1908.

- [48] E. Weinan, K. Konstantin, M. Alexandre, and S. Yakov. Probability distribution functions for the random forced Burgers equation. *Phys. Rev. Lett.*, 78(10) :1904–1907, Mar 1997.
- [49] B. Widom. Surface tension and molecular correlations near the critical point. *The Journal of Chemical Physics*, 43 :3892–3897, Dec 1965.
- [50] C.-S. Yih. Instability due to viscosity stratification. *Journal of Fluid Mechanics*, 27(02) :337–352, 1967.