



**HAL**  
open science

## Chaînes alternées dans les graphes arête-coloriés : k-linkage et arbres couvrants

Gervais Mendy

► **To cite this version:**

Gervais Mendy. Chaînes alternées dans les graphes arête-coloriés : k-linkage et arbres couvrants. Autre [cs.OH]. Université Paris Sud - Paris XI; Université Cheikh Anta Diop (Dakar, Sénégal ; 1957-..), 2011. Français. NNT : 2011PA112194 . tel-00769929

**HAL Id: tel-00769929**

**<https://theses.hal.science/tel-00769929>**

Submitted on 4 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre: 10359

# THÈSE

présentée pour obtenir

**Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES DE  
L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI U.F.R.**

**SCIENTIFIQUE D'ORSAY**

Spécialité: INFORMATIQUE

par

**Gervais MENDY**

Équipe d'accueil : Algorithmique/Complexité  
École Doctorale : Informatique de PARIS-SUD XI  
Composante universitaire : LRI

*Titre:*

**Chaînes alternées dans les graphes arête-coloriés :  
 $k$ -linkage et arbres couvrants**

Soutenue le 28 septembre 2011 devant la commission d'examen.  
Composition du jury :

***Rapporteurs:***

Myriam	PREISSMAN	Directeur de Recherche au CNRS, Laboratoire G-SCOP Grenoble
Papa Amar	SISSOKHO	Associate Professor, Illinois State University

***Examineurs:***

Dominique	BARTH	Professeur des Universités, Université de Versailles
Marina	GROSHAUS	Associate Professor, Universidad de Buenos Aires
Hao	LI	Directeur de Recherche au CNRS, Université Paris-Sud XI
Diaraf	SECK	Professeur, Université Cheikh Anta DIOP, Dakar (Directeur)
Yannis	MANOUSSAKIS	Professeur des Universités, Université Paris-Sud XI (Directeur)

Chaînes alternées dans les graphes  
arête-coloriés:  $k$ -linkage et arbres couvrants

Gervais MENDY

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>vi</b>
<b>Résumé</b>	<b>vii</b>
<b>Summary</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>xi</b>
<b>1 Définitions, terminologie, et Notations</b>	<b>1</b>
1.1 Concepts de base . . . . .	1
1.2 Définitions liées à la coloration . . . . .	4
1.3 Notions de k-linkage . . . . .	6
1.4 Notions d'arbres couvrants rattachées à la coloration . . . . .	7
<b>I Le k-linkage</b>	<b>10</b>
<b>2 État de l'art sur le k-linkage</b>	<b>12</b>
2.1 Algorithmique du k-linkage : Complexité et Approximation . .	12
2.1.1 Exemples de travaux effectués sur la complexité . . . .	12
2.1.2 Exemples de travaux effectués sur l'approximabilité . .	14
2.2 Aspects combinatoires . . . . .	15
2.3 Les applications . . . . .	16
2.4 Complexité du problème . . . . .	16

---

<b>3</b>	<b>Chaînes k-liées</b>	<b>18</b>
3.1	Approche méthodologique du k-linkage dans un graphe arête-colorié . . . . .	18
3.2	Conditions suffisantes sur les degrés coloriés . . . . .	19
3.3	Conditions suffisantes sur le nombre d'arêtes . . . . .	39
3.4	Conditions suffisantes mixtes sur le degré colorié et sur le nombre d'arêtes . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Chaînes k-arête-liées</b>	<b>57</b>
4.1	Conditions suffisantes sur le degré colorié . . . . .	57
4.2	Conditions suffisantes mixtes sur le degré colorié et sur le nombre d'arêtes . . . . .	60
<b>II</b>	<b>Les arbres couvrants</b>	<b>69</b>
<b>5</b>	<b>Les arbres couvrants propres</b>	<b>71</b>
5.1	Rappels et Généralités . . . . .	71
5.2	Résultats préliminaires . . . . .	72
5.3	Connexité et nombre minimum de couleurs . . . . .	75
5.4	Degré Rainbow et nombre minimum de couleurs . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Les arbres couvrants faiblement coloriés</b>	<b>85</b>
6.1	Connexité et nombre minimum de couleurs . . . . .	85
<b>7</b>	<b>Un cas particulier d'arbres couvrants propres : Chaînes Hamiltoniennes</b>	<b>89</b>
7.1	Couplages parfaits ou presque parfaits . . . . .	90
7.1.1	Condition suffisante sur la taille d'un graphe non colorié	90
7.1.2	Conditions suffisantes sur la taille et le rainbow degré d'un multigraphe 2-arête-colorié . . . . .	94

---

7.1.3	Chaînes propres maximum compatibles à un couplage . . . . .	96
7.2	Chaînes hamiltoniennes propres dans un multigraphe 2-arête-colorié . . . . .	100
7.2.1	Conditions suffisantes sur la taille et le rainbow degré . . . . .	100
7.2.2	Cycles propres . . . . .	103
7.2.3	Condition suffisante uniquement sur la taille du multigraphe . . . . .	105
7.3	Chaînes hamiltoniennes propres dans un multigraphe $c$ -arête-colorié, $c \geq 3$ . . . . .	106
7.3.1	Résultat préliminaire . . . . .	107
7.3.2	Conditions suffisantes uniquement sur la taille du multigraphe . . . . .	108
<b>8</b>	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>113</b>

# Table des figures

1.1	Trois chaînes sommet-disjointes dans le cas du 3-lié . . . . .	7
1.2	Trois chaînes arête-disjointes dans le cas du 3-arête-lié . . . . .	7
1.3	arbre couvrant proprement colorié . . . . .	8
1.4	arbre couvrant faiblement colorié avec racine $x$ . . . . .	9
3.1	A, B et C multigraphes complets $c$ -arête-coloriés d'ordres $\frac{n-2k+2}{2}$ , $2k-2$ , $\frac{n-2k+2}{2}$ . . . . .	20
3.2	graphe extrémal sur le nombre d'arêtes . . . . .	41
3.3	graphe extrémal général pour le cas mixte degré-arêtes . . . . .	43
3.4	graphe extrémal pour le cas mixte $H^c(1, n+2k-2r-3, r-2k+2, r-2k+2, 2k-2)$ . . . . .	45
3.5	graphe extrémal pour le cas mixte $H^c(1, 1, \frac{n}{2}-k, \frac{n}{2}-k, 2k-2)$ . . . . .	46
3.6	graphe extrémal pour le cas mixte $H^c(r-2k+3, n-r-1, 0, 0, 2k-2)$ . . . . .	46
4.1	Maximalité du degré dans le cas $k$ -arête-lié $ A  =  B  = \frac{n}{2}$ . . . . .	58
4.2	Maximalité du degré dans le cas $k$ -arête-lié $H^c(1, n-2r-1, r, r, 0)$ . . . . .	62
4.3	Cas mixte de non existence de chaîne 1-arête-lié $H^c(1, 1, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}-1, 0)$ . . . . .	62

## Remerciements

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de thèse, le Professeur Yannis Manoussakis, qui a accepté de m'encadrer, de me guider avec ses idées, ses encouragements et sa patience. Je suis tout simplement heureux de t'avoir rencontré, Professeur. Je remercie le Professeur Diaraf Seck, co-encadreur de cette thèse, qui m'a toujours prodigué d'excellents conseils. J'aimerais également remercier les Professeurs Myriam Preissmann et Papa Amar Sissokho d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Je remercie tout autant les Professeurs Dominique Barth, Hao Li, Marina Groshaus qui ont accepté de faire partie du jury. Je remercie mes collègues de l'équipe de recherche : Mohamed Dah, Jean-Marc Bécu, Valentin Borozan, Raquel Àguéda, Rahul Muhu, Léandro Pédro.

Comment ne pas remercier tous les membres administratifs et techniques du Laboratoire de Recherche en Informatique (LRI) qui m'ont permis de m'installer dans les meilleures conditions possibles.

Je ne saurais oublier de remercier mes collègues du département Génie Informatique de l'École Supérieure Polytechnique de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar pour leurs encouragements et les soutiens mutuels.

Enfin, je remercie toute ma famille, particulièrement ma femme et mes enfants, qui ont dû faire face à mes longues périodes d'absence et de sacrifice. Merci à vous tous, mes amis d'ici et d'ailleurs.

# Résumé

Un graphe *arête-colorié*  $G^c$  est un graphe dont les arêtes sont coloriées par un ensemble de couleurs données. Un sous-graphe de  $G^c$  est dit proprement colorié s'il ne contient pas d'arêtes adjacentes de même couleur.

Un graphe ou multigraphe arête-colorié  $G^c$ , est dit  $k$ -lié (respectivement  $k$ -arête-lié) si et seulement si quels que soient  $2k$  sommets distincts de  $V(G^c)$ , notés  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$ , il existe  $k$  chaînes élémentaires sommet-disjointes (respectivement arête-disjointes) *proprement arête-coloriées*, reliant  $x_1$  à  $y_1$ ,  $x_2$  à  $y_2$ ,  $\dots$ ,  $x_k$  à  $y_k$ .

Un *arbre couvrant propre* d'un graphe  $G^c$  est un sous-graphe de  $G^c$  qui est un arbre couvrant proprement colorié.

Un arbre *couvrant faiblement colorié* est une arborescence telle qu'il existe une chaîne proprement coloriée entre la racine et chaque sommet du graphe.

Dans la première partie de cette thèse, nous donnons des conditions suffisantes pour qu'un graphe arête-colorié soit  $k$ -lié. C'est un problème classique en théorie des graphes, avec des applications multiples. Ainsi, nous avons établi entre autres les résultats suivants.

**(A)** Tout multigraphe 2-arête-colorié d'ordre  $n \geq 242k$  tel que  $d^c(G^c) \geq \frac{n}{2} + k - 1$ , est  $k$ -lié.

**(B)** Tout multigraphe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n \geq 2k$  et de taille  $m \geq c \frac{n(n-1)}{2} -$

$c(n - 2k + 1) + 1$  est  $k$ -lié.

(C) Tout multigraphe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n \geq 2k$  tel que  $d^c(x) \geq \frac{n}{2}$  pour tout sommet  $x$ , est  $k$ -arête-lié.

(D) Tout multigraphe 2-arête-colorié d'ordre  $n \geq 2k \geq 10$  et de taille  $m \geq n^2 - 5n + 11$  tel que  $d^c(x) \geq 1$  pour tout sommet  $x$ , est  $k$ -arête-lié.

Dans la seconde partie de cette thèse, deux autres problèmes classiques en théorie des graphes sont traités dans la version arête-coloriée. Il s'agit des arbres couvrants et des chaînes hamiltoniennes. Nous donnons ci-dessous quelques résultats.

(E) Tout graphe simple  $c$ -arête-colorié  $k$ -connexe d'ordre  $n \geq \binom{k+1}{2} + k + 2$  avec  $c \geq \binom{n-k-1}{2} + k + 1$ , a un arbre couvrant propre.

(F) Tout graphe  $G^c$  connexe  $c$ -arête-colorié de degré rainbow  $rd(G^c) = k$  et d'ordre  $n \geq \binom{k+1}{2} + k + 2$  avec  $c \geq \binom{n-k-1}{2} + k + 1$ , possède un arbre couvrant propre.

(G) Tout graphe simple  $c$ -arête-colorié  $k$ -connexe d'ordre  $n \geq \frac{(k+j)^2 + 3(k+j) - 2}{2}$  avec  $c \geq \frac{(n-k-j)(n-k-j-1)}{2} + 2$ , où  $j = \lceil \frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2} \rceil$ , possède un arbre couvrant faiblement colorié.

(H) Tout multigraphe  $G^c$  d'ordre  $n \geq 14$  et de taille  $m \geq (n-3)(n-4) + 3n - 2$  tel que  $rd(G^c) = 2$ , possède une chaîne hamiltonienne propre.

(I) Tout multigraphe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n \neq 5, 7$  et de taille  $m \geq n^2 - 3n + 4$ , possède une chaîne hamiltonienne propre.

La plupart des résultats exposés, sont les meilleurs possibles relativement aux propriétés sur les conditions suffisantes.

**Mots clés :**  $c$ -arête-colorié,  $k$ -lié,  $k$ -arête-lié, arbre couvrant propre, arbre couvrant faiblement colorié, chaîne hamiltonienne propre.

## Summary

A  $c$ -edge-colored graph  $G^c$  is a graph whose edges are colored by a given set of colors. A subgraph of  $G^c$  is proper if no two adjacent edges have the same color. A  $c$ -edge-colored graph or multigraph  $G^c$  is  $k$ -linked (respectively  $k$ -edge-linked) if for any  $2k$  distinct vertices, say  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$ , there exist  $k$  vertex-disjoint (respectively edge-disjoint) proper paths joining  $x_1$  to  $y_1, x_2$  to  $y_2, \dots, x_k$  to  $y_k$ .

A *proper spanning tree* of a graph  $G^c$  is a spanning tree such that any two adjacent edges differ in colors.

A *weak spanning tree* is a spanning rooted tree such that there exists a proper path between the root and every vertex of the graph.

In the first part of this thesis, we provide conditions which are sufficient for an edge-colored graph to be  $k$ -linked. It is a classic problem in graph theory, with many applications. So, we established among others the following results.

**(A)** Every 2-edge-colored multigraph of order  $n \geq 242k$  such that  $d^c(G^c) \geq \frac{n}{2} + k - 1$ , is  $k$ -linked.

**(B)** Every  $c$ -edge-colored multigraph of order  $n \geq 2k$  and size  $m \geq c \frac{n(n-1)}{2} - c(n-2k+1) + 1$  is  $k$ -linked.

**(C)** Every  $c$ -edge-colored multigraph of order  $n \geq 2k$  is  $k$ -edge-linked if for each vertex  $x$ ,  $d^c(x) \geq \frac{n}{2}$ .

**(D)** Every 2-edge-colored multigraph of order  $n \geq 2k \geq 10$  and size  $m \geq n^2 - 5n + 11$  is  $k$ -edge-linked if for each vertex  $x$ ,  $d^c(x) \geq 1$ .

In the second part of this thesis, two other classic problems in graph theory are treated in edge-colored version : spanning trees and hamiltonian

paths. We give below some results.

**(E)** Every  $c$ -edge-colored simple  $k$ -connected graph of order  $n \geq \binom{k+1}{2} + k + 2$  with  $c \geq \binom{n-k-1}{2} + k + 1$  has a proper spanning tree.

**(F)** Every  $c$ -edge-colored connected graph  $G^c$  of rainbow degree  $rd(G^c) = k$  and order  $n \geq \binom{k+1}{2} + k + 2$  with  $c \geq \binom{n-k-1}{2} + k + 1$ , has a proper spanning tree.

**(G)** Every  $c$ -edge-colored simple  $k$ -connected graph of order  $n \geq \frac{(k+j)^2 + 3(k+j) - 2}{2}$  and  $c \geq \frac{(n-k-j)(n-k-j-1)}{2} + 2$ , with  $j = \lceil \frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2} \rceil$ , has a weak spanning tree.

**(H)** Every  $c$ -edge-colored multigraph  $G^c$  of order  $n \geq 14$  and size  $m \geq (n-3)(n-4) + 3n - 2$  such that  $rd(G^c) = 2$ , has a proper hamiltonian path.

**(I)** Every  $c$ -edge-colored multigraph of order  $n \neq 5, 7$  and size  $m \geq n^2 - 3n + 4$ , has a proper hamiltonian path.

Most of the given results are the best possible with regard to the properties on the sufficient conditions.

**Keywords** :  $c$ -edge-colored,  $k$ -linked,  $k$ -edge-linked, proper spanning tree, weak spanning tree, proper hamiltonian path.

# Introduction

L'étude des graphes arête-coloriés connaît un intérêt grandissant depuis un peu plus d'une dizaine d'années. Les problèmes posés et étudiés dans cette thèse ne sont pas des problèmes de coloration. Les arêtes des graphes ou des multigraphes sont coloriées par un nombre donné de couleurs. Les problèmes, dans ce domaine, s'énoncent facilement, mais nécessitent souvent un travail théorique considérable. La difficulté est qu'on ne connaît pas de méthodes générales efficaces pour déterminer les solutions, lorsqu'elles existent. D'importants travaux théoriques sont réalisés avec les graphes arête-coloriés. Ainsi, plusieurs résultats prouvés pour des graphes orientés sont étendus aux graphes arête-coloriés, à des graphes orientés arc-coloriés et des hypertournois [5]. Certains résultats restent les mêmes en ce qui concerne leur formulation, mais leurs preuves deviennent beaucoup plus élaborées. D'autres résultats ne tiennent pas du tout. La plupart des travaux effectués avec les graphes arête-coloriés, consiste à trouver des structures ayant des propriétés d'alternance par la couleur des arêtes, par exemple des chaînes ou des cycles alternés. La propriété d'alternance de couleurs est particulièrement proche d'une notion très importante en théorie des graphes, les couplages.

La théorie des graphes, on le sait, joue un important dans la modélisation de beaucoup de problèmes pratiques. Il en sera de même avec les graphes arête-coloriés qui vont apporter un supplément dans divers domaines tels que les transports, les réseaux de communications, les architectures informatiques, etc.

Le travail de cette thèse porte essentiellement sur le problème du  $k$ -linkage, une sorte de généralisation de la connexité, et sur les arbres couvrants, dans les graphes ou multigraphes arête-coloriés. Le premier problème évoqué, à savoir, celui du  $k$ -lié sera abordé de deux façons, l'une concernant les chaînes alternées (ou propres) sommet-disjointes, l'autre les chaînes propres arête-disjointes. L'étude des arbres couvrants coloriés se subdivise également en deux catégories : les arbres couvrants proprement coloriés et les arbres couvrants faiblement coloriés. Dans les deux thématiques développées, le point focal est mis sur les conditions suffisantes, pour un graphe arête-colorié, d'avoir une ou plusieurs de ces propriétés.

Cette thèse est composée de deux parties, la première qui traite le  $k$ -linkage et la seconde les arbres couvrants. Auparavant, toutes les définitions utiles ont été données dans le chapitre *Introduction*. Les concepts de base de la théorie des graphes sont rappelés conformément à l'orientation des besoins spécifiques des tâches à accomplir. On a défini dans ce chapitre introductif, les notions liées à la coloration des arêtes. La notion de  $k$ -linkage y est également bien définie dans ses versions sommet-disjoint et arête-disjoint. Les deux concepts d'arbres couvrants, à savoir proprement ou faiblement coloriés, sont également clairement définis dans ce premier chapitre, avec des schémas d'illustration.

La partie  $k$ -linkage comporte trois chapitres. Le premier chapitre fournit un état de l'art sur le problème. Dans cet état de l'art, l'algorithmique existante sur le  $k$ -linkage est revisitée. Certains aspects combinatoires de la question, apparaissant dans divers travaux ont été rappelés ainsi que certains aspects applicatifs. Des résultats sur le problème du  $k$ -linkage sur des graphes arête-coloriés sont également rappelés. Au niveau du chapitre 3, des conditions suffisantes sont déterminées pour garantir l'existence de  $k$  chaînes alternées sommet-disjointes reliant  $k$  paires de sommets donnés. Ces conditions portent d'abord sur le degré colorié du graphe, ensuite sur le nombre d'arêtes du

graphe et enfin sur les deux conditions à la fois. En ce qui concerne le chapitre 4, c'est un travail presque identique à celui du chapitre 3, mais avec la version arête-disjointe où les hypothèses sont moins fortes. Dans ces chapitres, des graphes extrémaux ainsi que des fonctions extrémales sont déterminés pour garantir la propriété du  $k$ -linkage.

Dans la deuxième partie sur les arbres couvrants, on trouve des conditions suffisantes, pour garantir l'existence d'arbres couvrants alternés proprement ou faiblement coloriés. Les conditions sur les deux premiers chapitres 5 et 6 de cette partie se rapportent à la connexité, nombre minimum de couleurs et au degré rainbow des graphes. Enfin, dans cette dernière partie, on traite au chapitre 7, les chaînes hamiltoniennes propres, qui constituent un cas particulier d'arbres couvrants.

# Chapitre 1

## Définitions, terminologie, et Notations

Nous débutons ce chapitre par un rappel des termes et concepts de base de la théorie des graphes. Dans le premier paragraphe, nous donnons les définitions de base et les notations. Au niveau du second paragraphe, nous allons fournir les mêmes définitions mais dans la version des graphes arête-coloriés. Enfin dans les deux derniers paragraphes, nous aborderons les notions de  $k$ -linkage et d'arbres couvrants qui sont les principaux domaines exploités dans cette thèse.

### 1.1 Concepts de base

Un graphe  $G$  est une paire d'ensembles  $(V(G), E(G))$  où  $E(G)$  est un ensemble de couples d'éléments de  $V(G)$ . Les éléments de  $V(G)$  sont appelés les *sommets* du graphe, et les éléments de  $E(G)$  sont appelés *arêtes*. Chaque sommet d'une arête est appelé *extrémité* de l'arête. Un graphe est représenté par un ensemble de points correspondant aux sommets, et de lignes reliant les sommets des arêtes.

Une arête d'extrémités  $x$  et  $y$  sera notée par  $xy$ . Les sommets  $x$  et  $y$  seront

appelés *voisins* l'un de l'autre. L'ensemble des voisins d'un sommet  $z$  est noté  $N(z)$ . De la même façon, le voisinage d'un ensemble  $X$  de sommets, noté  $N(X)$ , sera défini comme étant l'ensemble des voisins des éléments de  $X$  privés de  $X$ , c'est-à-dire,  $(\bigcup_{x \in X} N(x) - X)$ . Une arête  $e = xy$  sera dite *incidente* à chacune de ses extrémités  $x$  et  $y$ . Deux arêtes qui ont une extrémité commune, sont dites adjacentes.

Un *sous-graphe* de  $G = (V, E)$  est un graphe de la forme  $H = (V', E')$  où  $V' \subset V$  et  $E' \subset E$  tels que toute arête de  $E'$  a ses extrémités dans  $V'$ .

Soient  $H, K, G'$  des sous-graphes de  $G$ . Nous notons par  $N_H(x)$  l'ensemble des sommets voisins du sommet  $x \in V(G)$  dans  $H$ , c'est-à-dire, l'ensemble  $\{y \in V(H) \text{ tel que } xy \in E(G^e)\}$ . Nous écrirons  $N_H^{G'}(x)$  pour désigner l'ensemble des sommets voisins de  $x$  dans  $H$  qui sont reliés à  $x$  par des arêtes dans  $E(G')$ , c'est-à-dire,  $\{y \in V(H) \text{ telle que } xy \in E(G')\}$ . Nous donnerons également la définition suivante  $N_H(K) = \bigcup_{x \in K} N_H(x) - \bigcup_{x \in K} N_K(x)$ . Pareillement, nous avons  $N_H^{G'}(K) = \bigcup_{x \in K} N_H^{G'}(x) - \bigcup_{x \in K} N_K^{G'}(x)$ .

L'ensemble des arêtes qui relient le sommet  $x$  et un sommet dans  $V(H)$  est noté par  $E(x, H)$ , c'est-à-dire,  $E(x, H) =$

$\{xy \in E(G) \text{ tel que } y \in V(H)\}$  et on définit plus généralement  $E(K, H) = \bigcup_{x \in K} E(x, H)$ . Pour une meilleure lisibilité, à chaque fois que nous écrirons  $xy \in E(K, H)$ , le lecteur doit comprendre que le sommet  $x \in V(K)$  et le sommet  $y \in V(H)$ . Nous utilisons aussi les notations  $E(K)$  et  $c(E)$  en lieu et place de  $E(K, K)$  et  $\bigcup_{e \in E} c(E)$ , respectivement.

On appelle *degré* d'un sommet  $x$ , le cardinal de l'ensemble  $N(x)$ . Le degré d'un graphe  $G$ , noté  $\delta(G)$ , est le minimum des degrés des sommets de  $G$ . Le nombre de sommets  $|V(G)|$  d'un graphe  $G$  est appelé *ordre* de  $G$ , et est noté  $|V(G)|$ . Le nombre d'arêtes d'un graphe  $G$  est appelé *taille* de  $G$ , et est noté  $|E(G)|$ . Cependant on notera souvent, pour des raisons pratiques, l'ordre d'un graphe par  $n$ , la taille d'un graphe par  $m$ .

Soit  $X$  un ensemble de sommets du graphe  $G = (V, E)$ . On appelle *sous-*

*graphe induit* par  $X$ , noté  $G[X]$  le sous-graphe de  $G$  ayant comme ensemble de sommets  $X$  et contenant toute arête de  $G$  dont les deux extrémités sont dans  $X$ .  $G - X$  désigne le sous-graphe  $G[V - X]$ . Si  $X$  est réduit à un sommet singleton  $x$ , on écrira  $G - x$  à la place de  $G - \{x\}$ . Pour toute arête  $e$  dans  $G$ , le sous-graphe  $(V(G), E(G) - e)$  sera noté  $G - e$ .

Une chaîne d'un graphe  $G = (V, E)$  est une suite de la forme :

$$(x_0, e_1, x_1, \dots, e_j, x_j)$$

où  $j$  est un entier  $\geq 0$ , les  $x_i$  sont des sommets de  $G$  et les  $e_i$  sont des arêtes de  $G$  tels que pour  $i = 0, \dots, k - 1$ ,  $x_i$  et  $x_{i+1}$  sont les extrémités de  $e_{i+1}$ . Une chaîne entre les sommets  $x$  et  $y$ , sera notée  $x - y$ . La taille d'une chaîne est le nombre de ses arêtes.

Une chaîne est dite :

- élémentaire si elle ne passe qu'une seule fois par les sommets qui la composent.
- simple si elle ne passe qu'une seule fois par les arêtes qui la composent.

Des chaînes sont dites :

- sommet-disjointes si et seulement si elles n'ont pas de sommet commun.
- arête-disjointes si et seulement si elles n'ont pas d'arête commune.

Un graphe est dit :

- simple s'il y a au plus une arête entre deux sommets du graphe.
- stable s'il ne possède aucune arête.
- multigraphe s'il y a au moins deux sommets du graphe ayant au moins deux arêtes qui les relient.
- complet s'il existe une arête entre deux sommets quelconques du graphe.

Un graphe non vide est *connexe* si pour toute paire de sommets quelconques du graphe, il existe une chaîne élémentaire qui les relie. Un sous-graphe connexe maximal d'un graphe  $G$  est appelé composante connexe. Soit  $k$  un entier naturel non nul. Un graphe  $G$  est *k-connexe* si  $|V(G)| > k$  et  $G - X$  est

connexe pour tout sous-ensemble de sommets  $X$  de  $V(G)$  vérifiant  $|X| < k$ .

Un *séparateur* d'un graphe connexe  $G$  est un ensemble de sommets dont la suppression rend  $G$  non connexe. La *connectivité* est le nombre d'éléments du plus petit séparateur. Un graphe est également dit *k-connexe* si sa sommet-connectivité est supérieure ou égale à  $k$ . Des concepts analogues peuvent aussi être définis pour les arêtes. Un *isthme* dans  $E(G)$  est une arête dont la suppression augmente d'une unité le nombre de composantes connexes du graphe  $G$ . Si le graphe  $G$  est connexe, alors la suppression d'un isthme déconnecte le graphe. Ce concept s'applique aussi pour tout sous-graphe  $K$  de  $G$ . Nous écrirons  $B(K, H)$  pour désigner l'ensemble des isthmes dans  $E(K, H)$ . De façon plus générale, un *arête-séparateur* est un ensemble d'arêtes dont la suppression augmente aussi, le nombre de composantes connexes du graphe. L'*arête-connectivité* est la taille du plus petit arête-séparateur. On dit qu'un graphe est *k-arête-connexe* si son arête-connectivité est supérieure ou égale à  $k$ .

Un graphe est dit *k-lié* si et seulement si quels que soient  $2k$  sommets distincts de  $V(G)$ , notés  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$ , il existe  $k$  chaînes élémentaires sommet-disjointes, reliant  $x_1$  à  $y_1$ ,  $x_2$  à  $y_2$ ,  $\dots$ ,  $x_k$  à  $y_k$ .

Un graphe est dit *k-arête-lié* si et seulement si quels que soient  $2k$  sommets distincts de  $V(G)$ , notés  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$ , il existe  $k$  chaînes simples arête-disjointes, reliant  $x_1$  à  $y_1$ ,  $x_2$  à  $y_2$ ,  $\dots$ ,  $x_k$  à  $y_k$ .

## 1.2 Définitions liées à la coloration

Nous allons introduire dans ce chapitre les concepts liés à la coloration des arêtes. Un graphe *arête-colorié* est un graphe dont les arêtes sont coloriées par un ensemble de couleurs données. Toute l'étude dans cette thèse portera sur ces graphes et on ne cherchera pas à colorier les arêtes. Par contre, on

essaiera d'établir des propriétés dans les graphes arête-coloriés par rapport à certaines conditions liées par exemple au nombre de couleurs. Un multigraphe arête-colorié est un multigraphe dans lequel toutes les arêtes parallèles reliant deux sommets sont deux à deux de couleurs différentes. Nous supposons également qu'un multigraphe arête-colorié ne possède pas de composantes connexes isolées, c'est -à-dire que le graphe associé non colorié est connexe. De façon plus formelle, on considère un ensemble  $I_c = \{1, \dots, c\}$  de  $c$  couleurs données avec  $c \geq 2$ . Dans toute la suite du document, un graphe ou un multigraphe arête-colorié tel que chaque arête a une couleur  $i \in I_c$ , sera noté  $G^c$ . On parle aussi de graphe ou de multigraphe  $c$ -arête-colorié. Si  $G^c$  est complet et d'ordre  $n$ , il sera noté  $K_n^c$ , en référence à la définition classique des graphes complets d'ordre  $n$ . On dit que  $G^c$  est *rainbow* si toutes ses arêtes sont deux à deux de couleurs différentes. L'ensemble des sommets de  $G^c$  sera noté  $V(G^c)$  et  $E(G^c)$  désignera l'ensemble des arêtes de  $G^c$ . L'ensemble des arêtes de  $G^c$  ayant une couleur donnée  $i$ , sera noté  $E^i(G^c)$ . Les notations  $V$ ,  $E$  et  $E^i$  pourront être utilisées respectivement à la place de  $V(G^c)$ ,  $E(G^c)$  et  $E^i(G^c)$  s'il n'y a aucune ambiguïté à craindre.

Nous allons maintenant nous intéresser à la notion de degré colorié. Soit  $x$  un sommet du graphe  $G^c$  et  $H$  un sous-graphe de  $G^c$ . Nous notons par  $N_H^i(x)$  l'ensemble des sommets de  $H$  qui sont reliés à  $x$  par une arête de couleur  $i$ . Le  $i$ -degré colorié de  $x$  dans  $H$ , noté  $d_H^i(x)$ , est le cardinal  $|N_H^i(x)|$  de l'ensemble  $N_H^i(x)$ . Si  $H = G^c$ , nous utiliserons les notations simplifiées suivantes :  $N^i(x)$  et  $d^i(x)$ . Le degré colorié d'un sommet  $x$  du graphe  $G^c$  est défini par  $d^c(x) = \min_{i \in I_c} d^i(x)$  qui correspond au plus petit des  $i$ -degré de  $x$ . Le degré colorié du graphe  $G^c$  est le minimum des degrés coloriés de ses sommets donné par la formule  $\delta(G^c) = \min_{x \in V(G^c)} \{d^c(x)\}$ . Le degré *rainbow* d'un sommet  $x$  d'un graphe  $G^c$ , noté  $rd(x)$ , est le nombre de couleurs dénombrées parmi les arêtes incidentes au sommet  $x$ .

Une chaîne est *proprement coloriée* ou *alternée (par couleurs)* si et seulement

si deux arêtes adjacentes de la chaîne sont de couleurs différentes.

Nous adopterons pour la plupart du temps, la notation suivante  $c(xy) = i$ , pour désigner une arête  $xy$  de  $G^c$  de couleur  $i \in I_c$ . Cependant il peut arriver, pour des raisons pratiques, dans les preuves, d'utiliser :  $x \overset{i}{-} y$ .

### 1.3 Notions de $k$ -linkage

On revient dans ce paragraphe sur la propriété du  $k$ -linkage. En effet la définition reste valable, seulement on va l'adapter pour les chaînes proprement coloriées dans un graphe ou multigraphe  $G^c$ .

Un graphe ou multigraphe  $G^c$  est dit  $k$ -lié si et seulement si quels que soient  $2k$  sommets distincts de  $V(G^c)$ , notés  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$ , il existe  $k$  chaînes élémentaires sommet-disjointes *proprement arête-coloriées*, reliant  $x_1$  à  $y_1$ ,  $x_2$  à  $y_2$ ,  $\dots$ ,  $x_k$  à  $y_k$ .

Un graphe est dit  $k$ -arête-lié si et seulement si quels que soient  $2k$  sommets distincts de  $V(G^c)$ , notés  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$ , il existe  $k$  chaînes simples arête-disjointes *proprement arête-coloriées*, reliant  $x_1$  à  $y_1$ ,  $x_2$  à  $y_2$ ,  $\dots$ ,  $x_k$  à  $y_k$ .

Dans la suite du document, sauf mention expresse, il faut comprendre et retenir ces deux dernières définitions, partout où l'on lira que  $G^c$  est  $k$ -lié ou  $k$ -arête-lié.

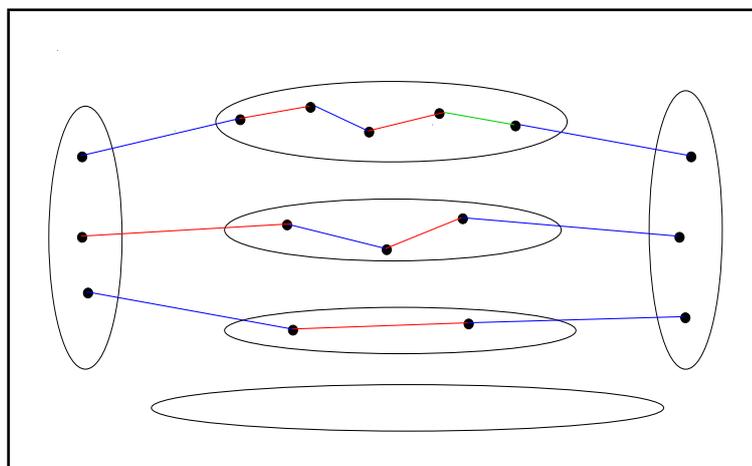


Figure 1.1: Trois chaînes sommet-disjointes dans le cas du 3-lié

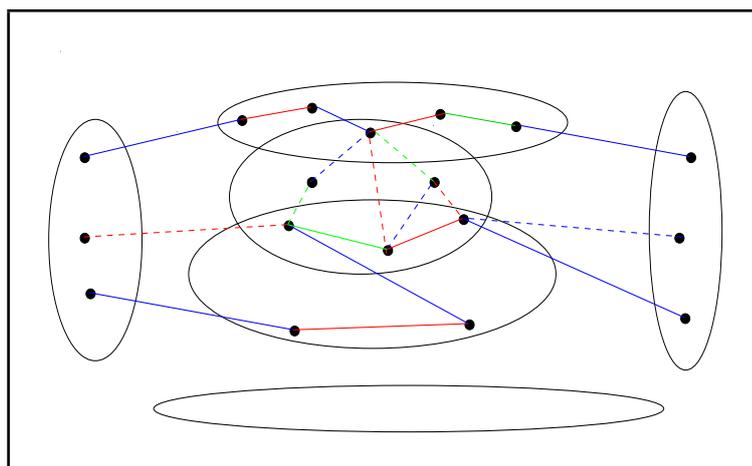


Figure 1.2: Trois chaînes arête-disjointes dans le cas du 3-arête-lié

## 1.4 Notions d'arbres couvrants rattachées à la coloration

Dans cette partie, on donnera la définition générale d'*arbres*, puis celles d'*arbres proprement coloriés*, d'*arbres couvrants proprement coloriés* et d'*arbres couvrants faiblement coloriés*.

Un graphe connexe sans cycle est appelé *arbre*. Soit  $G^c$  un graphe  $c$ -arête-colorié. Un arbre *proprement colorié* de  $G^c$  est un arbre tel que deux arêtes adjacentes sont de couleurs différentes. S'il contient tous les sommets de  $G^c$ , on dit qu'il est un *arbre couvrant proprement colorié*. De façon pratique, un sommet particulier peut être choisi comme le point de départ du parcours d'un arbre; on l'appellera *racine* de l'arbre. Un arbre avec une racine fixée, sera appelé *arborescence*. Un arbre *couvrant faiblement colorié* est une arborescence telle qu'il existe une chaîne proprement coloriée entre la racine et chaque sommet du graphe. Pour le parcours d'un arbre couvrant faiblement colorié, on peut à partir d'un sommet  $y$  joindre deux (ou plus) sommets de l'arbre avec des arêtes de même couleur incidentes à  $y$ . Cela n'est pas possible pour les arbres couvrants proprement coloriés. Les deux figures ci-dessous permettent d'illustrer la différence entre ces deux notions.

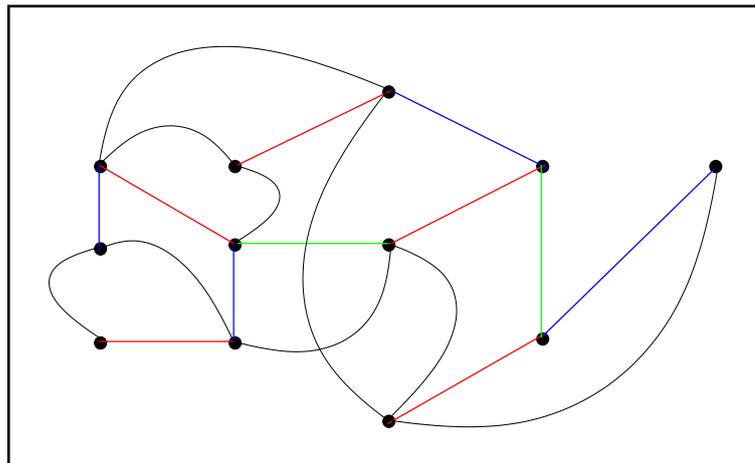


Figure 1.3: arbre couvrant proprement colorié

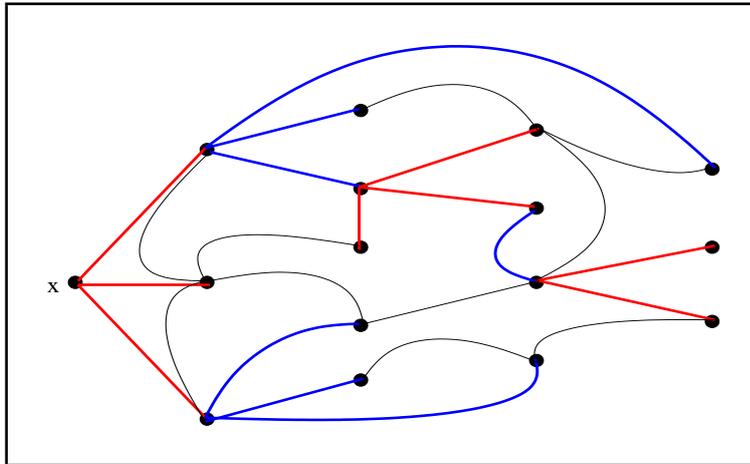


Figure 1.4: arbre couvrant faiblement colorié avec racine  $x$

# Première partie

## Le k-linkage



# Chapitre 2

## État de l'art sur le $k$ -linkage

Dans ce chapitre, nous allons voir ce qui a été fait par rapport à la question du  $k$ -linkage. Pour ce faire, nous explorerons successivement les aspects algorithmiques, combinatoires et applicatifs du  $k$ -linkage. Pratiquement toutes les études menées sur le sujet, jusqu'à aujourd'hui ont été faites sur des graphes non coloriés.

### 2.1 Algorithmique du $k$ -linkage : Complexité et Approximation

#### 2.1.1 Exemples de travaux effectués sur la complexité

Au milieu et vers la fin des années 1970, on assiste à une belle production scientifique d'un certain nombre de papiers sur la complexité du  $k$ -linkage. Cette période était très propice pour faire des études de complexité algorithmique car elle arrive juste après les importantes avancées au niveau du formalisme sur la théorie de la complexité, obtenues suite aux travaux de Stephen Cook [13] et de Richard Karp [24, 25]. Sur cette lancée, Even, Itai et Shamir [14] montrent que le problème du  $(k + 1)$ -arête-lié avec  $k$  chaînes

## 2.1 Algorithmique du k-linkage : Complexité et Approximation 13

élémentaires entre deux sommets  $s_1$  et  $t_1$  et une chaîne élémentaire entre deux sommets  $s_2$  et  $t_2$ , est *NP*-complet. Dans ce cas précis, les  $k$  paires de sommets se réduisent en une seule paire de sommets  $s_1$  et  $t_1$ . On sent ici l'utilisation du théorème de Menger qui permet de répondre à cette question de trouver  $k$  chaînes disjointes pour deux sommets. L'autre problème général qui consiste à trouver  $k$  chaînes deux à deux sommet-disjointes ou arête-disjointes entre  $k$  paires de sommets  $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_k, t_k)$ , est également *NP*-complet. La preuve peut se faire par réduction du problème du  $(k+1)$ -arête-lié précédent où les  $k+1$  chaînes deux à deux sommet-disjointes ou arête-disjointes sont requises entre les  $k+1$  paires de sommets  $(s_1, t_1), (s_1, t_1), \dots, (s_1, t_1), (s_2, t_2)$ . Cependant, il y a eu quelques résultats positifs de complexité, notamment grâce Y. Perl et Y. Shiloach, qui ont étudié le problème du 2-lié [31]. Ils considèrent quatre versions du problème correspondant aux cas suivants : le graphe  $G$  est orienté ;  $G$  n'est pas orienté ; les chaînes sont sommet-disjointes ; les chaînes sont arête-disjointes. Ils font les réductions polynomiales suivantes du problème 2-lié : le cas non orienté arête-disjointes se réduit au cas non orienté sommet-disjointes qui se réduit lui-même au cas orienté sommet-disjointes qui est équivalent au cas orienté arête-disjointes. Plus loin, ils montrent que dans le cas d'un graphe orienté sans cycle, le problème 2-lié est polynomial d'ordre de grandeur  $O(|V| |E|)$ . Cependant, de façon générale, pour un graphe orienté, le problème reste *NP*-complet pour  $k = 2$  [15]. Dans un autre papier paru [37] un an plus tard, Y. Shiloach montre que ce problème 2-lié, se résout de façon polynomiale pour les graphes non-orientés avec le même ordre de grandeur que précédemment. Au même moment presque, P.D. Seymour [36] obtient de bonnes caractérisations et de bons algorithmes non seulement pour  $k = 2$  mais surtout lorsque  $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_k, t_k)$  se réduisent en trois sommets distincts. Il s'appuie sur le théorème de Mader pour la solution. Cette recherche de chaînes sommet-disjointes ou arête-disjointes, se pour-

suit dans les années suivantes. Ainsi au milieu des années 1990, nous notons les remarquables travaux de Andrei Z. Broder et ses collaborateurs. Ils prouvèrent, dans un premier temps, des conditions suffisantes pour l'existence de  $k \leq \frac{n}{(\log n)^k}$  chaînes arête-disjointes dans les graphes expansibles [10], puis ils présentèrent un algorithme polynomial randomisé pour trouver le nombre optimal de chaînes arête-disjointes dans des graphes aléatoires [9]. Nous n'oublierons pas de mentionner le célèbre papier de Neil Robertson et de P.D. Seymour [35], dans lequel, ils montrent que, pour un entier  $k$  fixé, il existe un algorithme polynomial pour résoudre le problème du  $k$ -linkage, en utilisant le concept révolutionnaire de mineur des graphes. Leur algorithme utilise des constantes très énormes qui ne facilitent pas sa praticabilité. La preuve de correction de leur algorithme s'écrit également sur plus de trois cents pages. Cependant, en considérant  $k$ , comme un paramètre d'entrée, le problème demeure  $NP$ -complet [25]. On voit déjà, à travers ces quelques exemples, toute la délicatesse qu'il y a, à étudier le problème du  $k$ -linkage, mais également, on peut bien apprécier la profondeur d'analyse des résultats mis à notre disposition par ces illustres chercheurs.

### 2.1.2 Exemples de travaux effectués sur l'approximabilité

Face au caractère  $NP$ -complet du  $k$ -linkage, beaucoup d'algorithmes d'approximation ont vu le jour. Ainsi, pour une classe de graphes particulière, à savoir les graphes planaires denses, Jon Kleinberg et Éva Tardos [28, 29], obtiennent un algorithme d'approximation de facteur constant, pour le problème de recherche du nombre maximum de chaînes disjointes. Le premier auteur cité a fait beaucoup de recherches sur les algorithmes d'approximation concernant les chaînes disjointes [26]. Même s'il existe un algorithme

d'approximation de ratio  $O(\sqrt{m})$  pour les graphes non orientés, il est prouvé qu'il est difficile d'approximer le problème du nombre maximum de chaînes arête-disjointes pour les graphes orientés, avec  $m^{1/2-\epsilon}$ , pour  $\epsilon > 0$ , où  $m$  est la taille du graphe [17]. Ces taux d'approximation seront améliorés à la fois pour les graphes orientés ou non [11]. Pour les graphes planaires de degré pair, Kleinberg [27] obtient un algorithme d'approximation avec un taux  $O(\log^2 n)$ . Cette difficulté d'approximation s'applique également dans les graphes non orientés, pour le cas  $k$ -linkage avec sommets disjoints [4].

## 2.2 Aspects combinatoires

Les aspects théoriques de la question du  $k$ -lié ont été étudiés par un nombre important d'auteurs. Les différentes contributions ont permis des avancées notables en théorie des graphes surtout au niveau de la connexité et des graphes extrémaux. Parmi ces auteurs, nous citerons K. Kawarabayashi [20, 21] avec des co-auteurs qui ont eu à déterminer des conditions minimales sur le degré, pour qu'un graphe non colorié soit  $k$ -lié. Auparavant les techniques utilisées étaient de déterminer des fonctions  $f(k)$  telles que, si le graphe est  $f(k)$ -connexe, on conclut qu'il est  $k$ -lié. Plus tard Bollobas et Thomason [7] prouvèrent qu'on peut trouver des fonctions  $f(k)$  linéaires en  $k$  pour déterminer qu'un graphe est  $k$ -lié s'il est  $f(k)$ -connexe. Ils ont montré que tout graphe  $22k$ -connexe est  $k$ -lié. Cette borne linéaire sera améliorée dans [20] et ramenée à  $12k$ -connexe comme condition suffisante pour un graphe d'être  $k$ -lié. Paul Wollan et Thomas Robin [38] vont la ramener à  $10k$ . Des résultats généralisant le problème du  $k$ -lié vont être obtenus par Gould et les autres dans [16].

## 2.3 Les applications

Les domaines d'applications des graphes arête-coloriés dans la vie réelle, sont multiples et variés : les réseaux au sens large (transports, télécommunications,...), la robustesse des réseaux, la bio-informatique,  $\dots$ . En ajoutant la contrainte alternance de couleurs dans les chaînes, on enrichit non seulement la théorie mais aussi les aspects applicatifs. Ainsi sans entrer dans les détails, nous noterons les travaux significatifs de Pevzner [32, 33] en biologie génétique où ses modèles sont construits sur les arêtes coloriées. Jose R. Correa et Michel X. Goemans [22] ont travaillé dans les communications de données et systèmes informatiques parallèles qui sont largement utilisés dans les réseaux clos, à travers des structures d'alternance de couleurs des arêtes. La modélisation par les arêtes coloriées est également utilisée pour le contrôle de programme informatique et des études démographiques [19].

## 2.4 Complexité du problème

La littérature scientifique sur l'étude de la complexité algorithmique du problème du  $k$ -lié est assez fournie pour les graphes non coloriés. Cependant, en ce qui concerne les graphes arête-coloriés, les références bibliographiques sont très rares. Dans ce lot de rareté, on peut noter le papier de Yannis Manoussakis [30] dans lequel cette question a été abordée. Dans une section de son papier, il établit trois intéressants théorèmes sur les graphes arête-coloriés complets, qu'on va rappeler.

**Théorème 2.4.1.** [30] *Il existe un algorithme  $O(n^k)$ , pour trouver si possible,  $k$  chaînes élémentaires alternées deux à deux sommet-disjointes  $x_i - y_i$  dans  $K_n^c$ ,  $i = 1, \dots, k$ .*

**Théorème 2.4.2.** [30] *Il existe un algorithme  $O((n^7 / \log n)^{1/2})$ , pour trouver si possible,  $k$  chaînes élémentaires alternées deux à deux arête-disjointes  $x_i -$*

$y_i$  dans  $K_n^c$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

**Théorème 2.4.3.** [30] *Le problème suivant est NP-complet :*

**Instance :** Un graphe complet  $K_n^c$ , un ensemble ordonné de  $p$  couleurs distinctes  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$ ,  $p \geq 4$ , une fonction  $c : E(K_n^c) \rightarrow C$ , quatre sommets  $x_1, y_1, x_2, y_2 \in K_n^c$ .

**Question :**  $K_n^c$  possède-t-il deux chaînes alternées sommet-disjointes  $P_i : x_i - y_i$ ,  $i = 1, 2$ , dont les arêtes sont coloriées d'une façon telle que la séquence de couleurs  $\langle c_1, c_2, \dots, c_p \rangle$  est répétée dans chaque chaîne alternée  $P_i$  ?

La preuve de ce dernier théorème est basée sur la réduction du problème du 2-lié dans un graphe orienté, qui est connu comme étant NP-complet. Le cas  $k = 1$  est traité dans le même papier où il est prouvé polynomial. Des résultats similaires ont été trouvés dans d'autres articles de Yannis Manoussakis avec d'autres auteurs [12]. Ils y étudient le problème de trouver dans un graphe arête-colorié, une chaîne alternée joignant deux sommets donnés et passant par des sommets donnés. Ils montrent que ce problème est NP-complet dans le cas de graphes 2-arête-coloriés.

On en citera un qui s'apparente à notre question [12] en reposant le problème *CP* :

**Instance :** Un graphe  $G^c$  2-arête-colorié, trois sommets distincts  $x, y, z \in V(G^c)$

**Question :** Existe-il dans  $G^c$  une chaîne propre d'extrémités  $x$  et  $y$  qui passe par  $z$  ?

**Théorème 2.4.4.** [12] *le problème CP est NP-complet*

Compte tenu de tous ces résultats de complexité, il était important, d'étudier des conditions suffisantes pour un graphe  $c$ -arête-colorié d'être  $k$ -lié.

# Chapitre 3

## Chaînes $k$ -liées

### 3.1 Approche méthodologique du $k$ -linkage dans un graphe arête-colorié

Avec le problème du graphe  $k$ -lié, nous tenons un cas remarquable de problème NP-complet. Cette NP-complétude a fait l'objet de plusieurs recherches et résultats dont Seymour,  $\dots$ . Nous trouvons alors un intérêt réel d'étudier ce problème sous sa version arête-coloriée. Ainsi, nous nous sommes proposés d'explorer des conditions suffisantes pour parvenir à des conclusions concernant le cas  $k$ -lié ou le cas  $k$ -arête-lié. Dès lors, ces conditions vont porter une taille minimale, un ordre minimal, un degré minimal ou une conjonction de ces critères. L'approche méthodologique consiste à chercher, puis à établir des conjectures qui sont en relations avec les propriétés énoncées ci-haut. Ces conjectures recherchées seront de la forme suivante :

**Conjecture 3.1.1.** *Soit  $G^c$  un multigraphe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n$  et de taille  $m$ ,  $k$  et  $r$  deux entiers positifs. Il existe un entier  $n_0 = n_0(k, r, c)$  et une fonction  $f : \mathbb{N}^4 \rightarrow \mathbb{N}$  tel que si  $n \geq n_0$ ,  $d^c(G^c) \geq r$  et  $m \geq f(k, r, c, n)$ , alors  $G^c$  est  $k$ -lié (ou  $k$ -arête-lié).*

Cette démarche obéit à une certaine logique qu'il est utile de bien appréhender.

Pour déterminer les fonctions de la conjecture générique, nous serons amenés d'abord à passer par deux étapes.

- La première consiste à la recherche du graphe extrémal. En fait, nous essayons de construire un multigraphe  $c$ -arête-colorié qui dispose de toutes les propriétés souhaitables. Il est dit extrémal au sens de la ou des propriété(s) établie(s), c'est-à-dire, qu'on ne peut pas trouver un autre graphe meilleur que celui extrémal, au sens de cette ou de ces propriété(s).
- La deuxième étape va consister à essayer de trouver une démonstration de la conjecture.

En tenant compte des différentes hypothèses sur le multigraphe  $c$ -arête-colorié, soit on arrive à une démonstration de la conjecture, soit on n'y arrive pas. Cependant, on peut découvrir au cours d'une démonstration que notre graphe supposé au départ extrémal, ne l'est pas du tout. Dans ce cas, nous recommencerons alors à la première étape. Par contre si la deuxième étape est couronnée de succès, alors nous sommes certains que notre conjecture était la meilleure possible. En effet, cette méthode nous assure qu'un graphe respectant certaines conditions est  $k$ -lié (ou  $k$ -arête-lié) et qu'un graphe ne les respectant pas, peut ne pas être  $k$ -lié (ou  $k$ -arête-lié).

## 3.2 Conditions suffisantes sur les degrés coloriés

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à la question du  $k$ -lié. En restant fidèle à la description donnée plus haut, nous recherchons une conjecture dans laquelle seul le degré colorié apparaît comme condition suffisante. En des termes plus clairs, nous recherchons la plus petite fonction  $f(n, k)$  telle que la conjecture suivante soit vraie.

**Conjecture 3.2.1.** Soit  $G^c$  un multigraphe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n$  et de taille  $m$ ,  $k$  un entier. Si  $d^c(G^c) \geq f(n, k)$ , alors  $G^c$  est  $k$ -lié.

Pour y parvenir, il nous faut construire un multigraphe  $c$ -arête-colorié dont le degré colorié est maximal et qui n'est pas pour autant  $k$ -lié. Ainsi, nous avons pu trouver le graphe suivant : soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des multigraphes  $c$ -arête-coloriés complets pour toutes les couleurs d'ordres respectifs  $\frac{n-2k+2}{2}$ ,  $2k-2$ ,  $\frac{n-2k+2}{2}$ . Nous définissons ensuite  $G^c$  comme étant l'union disjointe de ces trois ensembles, à laquelle nous avons rajouté toutes les arêtes possibles de toutes les couleurs entre  $A \cup C$  et  $B$ . Le multigraphe résultant, que l'on appelle graphe extrémal, a un degré colorié égal à  $\frac{n}{2} + k - 2$ . En fait, chaque sommet de  $B$  est connecté à tous les autres sommets du graphe quelle que soit la couleur considérée. Par contre chaque sommet de  $A$  (respectivement de  $C$ ) est relié uniquement à tous les sommets de  $A \cup B$  (respectivement  $B \cup C$ ). C'est ce qui justifie le degré colorié du graphe extrémal. De plus, il est évident que ce graphe n'est pas  $k$ -lié. En effet, il suffit de considérer tous les  $2k-2$  sommets de  $B$ , que l'on désignera par  $x_i$  et  $y_i$ , puis prendre, par exemple  $x_1$  dans  $A$  et  $y_1$  dans  $C$ , pour se rendre compte qu'on sera bien obligé de passer par  $B$  et donc par un  $x_i$  ou  $y_i$  pour relier  $x_1$  à  $y_1$ .

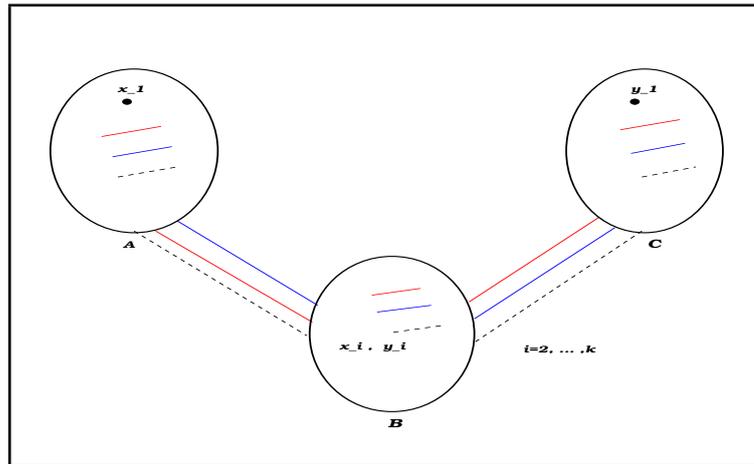


Figure 3.1:  $A$ ,  $B$  et  $C$  multigraphes complets  $c$ -arête-coloriés d'ordres  $\frac{n-2k+2}{2}$ ,  $2k-2$ ,  $\frac{n-2k+2}{2}$

Pour toutes ces raisons, il devient très légitime de poser la conjecture suivante :

**Conjecture 3.2.2.** *Soit  $G^c$  un multigraphe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n$  et  $k$  un entier naturel. Si  $d^c(G^c) \geq \frac{n}{2} + k - 1$ , alors  $G^c$  est  $k$ -lié.*

On voit bien que la fonction  $f(n, k)$  devient explicite. La connaissance de cette fonction minimisante, permet de débiter la recherche de preuve. Ainsi nous sommes parvenus à établir la preuve de cette conjecture à partir d'une certaine borne inférieure de  $n$ , qui est l'ordre du multigraphe. Le nombre de couleurs est quelconque dans ce premier résultat énoncé ci-dessous [6]. La taille du graphe n'est pas également précisée.

**Théorème 3.2.3.** *Soit  $G^c$  un multigraphe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n \geq 242k$ , et  $k$  un entier strictement positif. Si  $d^c(G^c) \geq \frac{n}{2} + k - 1$ , alors  $G^c$  est  $k$ -lié.*

**Preuve.** Il suffit de démontrer le prochain théorème qui aura les mêmes hypothèses.  $\square$

Le prochain théorème fournit un résultat puissant qui non seulement permet de conclure que le multigraphe  $G^c$  est  $k$ -lié, mais en plus, il montre que les chaînes élémentaires proprement coloriées sont de longueur au plus 8. La preuve de ce théorème sera longue et technique. Néanmoins, la démonstration sera détaillée avec des étapes sous forme d'assertions.

**Théorème 3.2.4.** *Soit  $G^c$  un multigraphe 2-arête-colorié d'ordre  $n \geq 242k$ , et  $k$  un entier strictement positif tel que  $d^c(G^c) \geq \frac{n}{2} + k - 1$ . Pour toutes  $k$  paires de sommets de  $G^c$ ,  $x_1, y_1, \dots, x_k, y_k$ , il existe  $k$  chaînes élémentaires sommet-disjointes proprement coloriées, de longueur au plus 8, reliant  $x_1$  à  $y_1$ ,  $x_2$  à  $y_2$ ,  $\dots$ ,  $x_k$  à  $y_k$ .*

**Preuve.** Nous allons faire une preuve par l'absurde en supposant que  $G^c$  vérifie toutes les hypothèses du théorème et que  $G^c$  n'est pas  $k$ -lié. Autrement dit, il existe  $2k$  sommets distincts  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$  tels qu'il n'y

ait pas  $k$  chaînes deux à deux sommet-disjointes, chaque chaîne connectant une paire de sommets  $x_i, y_i$ . Considérons, à présent, un ensemble d'entiers naturels  $I$ , tel qu'il y ait  $\|I\|$  chaînes deux à deux sommet-disjointes de longueur au plus 8 reliant les paires de sommets  $x_i, y_i$ , avec  $i \in I$ . On choisira  $I$  de telle sorte que son cardinal  $\|I\|$  soit le plus grand possible. Naturellement  $\|I\| < k$ , sinon la démonstration prend fin. Dans la suite de la preuve, nous allons montrer qu'on peut trouver plus de  $\|I\|$  chaînes deux à deux sommet-disjointes, aussi longtemps que  $\|I\|$  sera considéré strictement plus petit que  $k$ . Par conséquent, nous obtiendrons une contradiction concernant la propriété de maximalité de  $I$  ce qui terminera la preuve.

**Assertion 1.**  $\|I\| \geq 2$ .

**Preuve.** Supposons qu'il existe au moins un couple de sommets  $x_i, y_i$ , par exemple  $x_1$  et  $y_1$ , tels qu'il n'existe pas d'arête entre  $x_1$  et  $y_1$ . Dans le cas contraire, la preuve serait achevée car il suffirait de considérer les  $k$  chaînes définies par les  $k$  arêtes  $x_i y_i, i = 1, 2, \dots, k$ . Posons l'ensemble  $S = \{x_i, y_i, 1 \leq i \leq k\}$ . Nous noterons également par  $r$  (rouge) et  $b$  (bleu) deux couleurs fixées dans  $\{1, 2, \dots, c\}$ . Ainsi, nous obtenons  $d_{G-S}^r(x_1) \geq \frac{n}{2} + k - 1 - 2(k - 1) = \frac{n}{2} - k + 1$ . De façon identique, nous avons aussi  $d_{G-S}^b(y_1) \geq \frac{n}{2} - k + 1$ . Cependant  $\|N_{G-S}^r(x_1) \cup N_{G-S}^b(y_1)\| \leq n - 2k$ , donc  $\|N_{G-S}^r(x_1) \cap N_{G-S}^b(y_1)\| \geq 2$ . Par conséquent, nous pouvons trouver deux sommets distincts dans  $N_{G-S}^r(x_1) \cap N_{G-S}^b(y_1)$ , que l'on nommera  $u$  et  $v$ . Si maintenant, il y a une arête entre  $x_2$  et  $y_2$ , alors cette arête et la chaîne  $x_1 \overset{r}{-} u \overset{b}{-} y_1$  vont constituer la preuve que  $\|I\| \geq 2$ . Sinon, nous savons qu'il existe deux sommets distincts  $u'$  et  $v'$  dans  $N_{G-S}^r(x_2) \cap N_{G-S}^b(y_2)$ . Sans nuire à la généralité, nous allons supposer que  $u \neq v'$ , ce qui permet de trouver à nouveau deux chaînes  $x_1 \overset{r}{-} u \overset{b}{-} y_1$  et  $x_2 \overset{r}{-} v' \overset{b}{-} y_2$  et donc atteindre notre objectif.  $\square$

Puisque  $\|I\| < k$ , alors sans perte de généralité, nous supposons dans la suite, que  $1 \notin I$ . Autrement dit, il n'y a aucune chaîne proprement arête-coloriée de longueur au plus 8 entre  $x_1$  et  $y_1$ .

Soit  $X$  l'ensemble des sommets qui sont utilisés pour construire les  $\|I\|$  chaînes deux à deux sommet-disjointes de longueur au plus 8, chacune reliant un couple de sommets  $x_i$  et  $y_i$ , avec  $i \in I$ . Évidemment, on a  $\|X\| \leq 7k$ .

Nous allons à présent poser  $A = N^r(x_1) - (S \cup X)$  et  $B = N^b(y_1) - (S \cup X)$ . Ainsi nous avons  $A \cap B = \emptyset$ , sinon la présence d'un sommet  $z \in A \cap B$  impliquerait l'existence d'une chaîne  $x_1zy_1$  de longueur 2, et cela serait une contradiction par rapport à la façon dont le choix de  $x_1$  et  $y_1$  a été effectué.

L'inégalité suivante est vérifiée :  $\|A\| \geq \frac{n}{2} + k - 1 - \|X\| - \|S\| = \frac{n}{2} - 8k - 1$ .

De façon similaire, on a également  $\|B\| \geq \frac{n}{2} - 8k - 1$ .

Posons  $C = G - (A \cup B \cup X \cup S)$ . Naturellement on a aussi  $\|A\| \geq \frac{n}{2} - k - 1 - \|X\|$  et  $\|B\| \geq \frac{n}{2} - k - 1 - \|X\|$ . Ainsi, nous obtenons  $\|C\| = n - \|A\| - \|B\| - \|S\| - \|X\| \leq 2 + \|X\|$ , donc  $\|C\| \leq 8k - 1$  et  $k \geq 3$  (car  $k > \|I\| \geq 2$ ).

Nous allons maintenant considérer les deux cas (I) et (II) qui dépendent de  $A$  et  $B$ .

### (I) Il n'existe pas d'arête entre A et B.

Pour toute couleur  $i \in \{r, b\}$ , pour tous sommets  $x \in A$  et  $y \in B$ , on a :

$$d_{AUC}^i(x) = d_{G-(B \cup X \cup S)}^i(x) = d_{G-(X \cup S)}^i(x) \geq \frac{n}{2} + k - 1 - 7k - 2k = \frac{n}{2} - 8k - 1 \quad (3.1)$$

et

$$d_{BUC}^i(y) = d_{G-(A \cup X \cup S)}^i(y) = d_{G-(X \cup S)}^i(y) \geq \frac{n}{2} - 8k - 1 \quad (3.2)$$

**Assertion 2.** Pour chaque paire de sommets distincts  $u$  et  $v$  dans  $A$  (respectivement dans  $B$ ), Il existe au moins  $3k$  chaînes distinctes rouge-bleu entre  $u$  et  $v$  (l'ordre des couleurs est primordial ici) et au moins  $3k$  chaînes distinctes bleu-rouge entre  $u$  et  $v$ . Ces chaînes ne passent par aucun sommet de  $X \cup S$ .

**Preuve.** Nous allons prouver uniquement le cas rouge-bleu, car la preuve du cas bleu-rouge se fait de façon similaire en intervertissant les couleurs rouge et bleue et en appliquant les mêmes arguments. Soient  $u$  et  $v$  deux sommets de  $A$ . On a alors  $d_{G-(B \cup X \cup S)}^r(u) + d_{G-(B \cup X \cup S)}^b(v) \geq n - 16k - 2$ . Cependant  $\|G - (B \cup X \cup S)\| \leq \frac{n}{2} - k + 1$  et  $n - 16k - 2 - (\frac{n}{2} - k + 1) = \frac{n}{2} - 15k - 3 > 3k$ . Donc il y a au moins  $3k$  chaînes distinctes rouge-bleu entre  $u$  et  $v$ . Ces chaînes ne passent pas par les sommets de  $X \cup S$ . Les mêmes résultats seront obtenus pour le cas des chaînes bleu-rouge entre  $u$  et  $v$  dans  $B$ .  $\square$

**Assertion 3.**  $N^b(x_1) \cap B = \emptyset$  et  $N^r(y_1) \cap A = \emptyset$ .

**Preuve.** Supposons que  $N^b(x_1) \cap B$  n'est pas vide. Soit  $y$  un sommet dans  $N^b(x_1) \cap B$ . Comme  $\frac{n}{2} - 8k - 1 > 8k$ , on a l'inégalité  $d_{B \cup C}^r(y) \geq \frac{n}{2} - 8k - 1 \geq \|C\|$ . Donc il existe un sommet  $y' \in B$  telle que l'arête  $yy'$  est rouge. Ainsi nous pouvons alors considérer la chaîne  $x_1 \overset{b}{-} y \overset{r}{-} y' \overset{b}{-} y_1$ , ce qui est une contradiction à l'hypothèse selon laquelle il n'y a pas de chaîne de longueur plus petite que 8 entre  $x_1$  et  $y_1$  dans  $G^c$ . Le même résultat est obtenu quand  $N^r(y_1) \cap A \neq \emptyset$ . Ainsi la preuve de cette assertion est terminée.  $\square$

Posons maintenant  $\Phi = A \cap N^b(x_1)$  et  $\Psi = B \cap N^r(y_1)$ . Soient  $x \in \Phi$  et  $y \in \Psi$ . Pour  $i \in \{r, b\}$ , nous avons  $d_{G-S}^i(x) = d_{G-(B \cup S)}^i(x) \geq \frac{n}{2} + k - 1 - 2k + 1 = \frac{n}{2} - k$ , car  $x \notin N^i(y_1)$ . Pareillement, on a  $d_{G-S}^i(y) = d_{G-(A \cup S)}^i(y) \geq \frac{n}{2} + k - 1 - 2k + 1 = \frac{n}{2} - k$ , car  $y \notin N^i(x_1)$ . Donc il résulte l'inégalité  $d_{G-S}^r(x) + d_{G-S}^b(y) \geq n - 2k$ . De plus,  $(S \cup \{x, y\}) \cap (N_{G-S}^r(x) \cup N_{G-S}^b(y)) = \emptyset$  et

donc  $\|N_{G-S}^r(x) \cup N_{G-S}^b(y)\| \leq n - 2k - 2$ . Ainsi, les deux minoration suivantes sont obtenues :  $\|N_{G-S}^r(x) \cap N_{G-S}^b(y)\| \geq 2$  et  $\|N_{G-S}^b(x) \cap N_{G-S}^r(y)\| \geq 2$ . Si  $N_{G-S}^r(x) \cap N_{G-S}^b(y)$  n'est pas inclus dans  $X$ , alors en considérant un sommet  $z$  dans  $N_{G-S}^r(x) \cap N_{G-S}^b(y) - X$ , nous définissons la chaîne  $x_1 \overset{b}{-} x \overset{r}{-} z \overset{b}{-} y \overset{r}{-} y_1$  de longueur plus petite que 8, ce qui constitue une contradiction. Nous allons à présent supposer que  $N_{G-S}^r(x) \cap N_{G-S}^b(y) \subset X$  et  $N_{G-S}^b(x) \cap N_{G-S}^r(y) \subset X$ .

Soit  $\Gamma_{xy}$  un sous-ensemble de  $I$  tel que  $i \in \Gamma_{xy}$ , si et seulement si, il existe un sommet  $z \in (N_{G-S}^b(x) \cap N_{G-S}^r(y)) \cup (N_{G-S}^r(x) \cap N_{G-S}^b(y))$  tel que toute chaîne entre  $x_i$  et  $y_i$  passe par ce sommet  $z$ . On voit clairement que  $\Gamma_{xy}$  n'est pas vide. Nous définirons également  $\Gamma$  comme étant un sous-ensemble de  $I$  tel que  $i \in \Gamma$ , si et seulement si, il existe au moins deux paires de sommets distincts  $x, y$  et  $x', y'$ , avec  $x, x' \in \Phi$  et  $y, y' \in \Psi$  et avec  $i \in \Gamma_{xy} \cap \Gamma_{x'y'}$ .

Soit  $X_\Gamma$  l'ensemble des sommets qui sont utilisés dans la construction des  $\|\Gamma\|$  chaînes deux à deux sommet-disjointes de longueur au plus 8 reliant les paires de sommets  $x_i, y_i$ , avec  $i \in \Gamma$ . Ainsi on a  $X_\Gamma \subset X$ .

**Assertion 4.**  $\Gamma$  n'est pas vide.

**Preuve.** Nous avons  $\|\Phi\| \geq \frac{n}{2} - 8k - 7k > 3k$ . Cela se justifie par le fait que  $\Phi = A \cap N^b(x_1)$  et  $\|N_A^b(x_1)\| \geq \frac{n}{2} + k - 1 - \|X\| - \|C\| - \|S\| = \frac{n}{2} - 16k - 1 \geq 3k$ . Pour les mêmes raisons, on a  $\|\Psi\| > 3k$ . Donc on déduit qu'il y a au moins  $3k$  paires de sommets distincts dans  $\Phi \times \Psi$ . Par contre on a toujours  $\|I\| < k$ . Donc  $\Gamma$  n'est pas vide.  $\square$

**Assertion 5.** Pour tout  $i \in \Gamma$  et pour tout choix de deux couleurs différentes  $j, l \in \{r, b\}$ , on a  $(N^j(x_i) \cap \Phi = \emptyset$  ou  $N^l(y_i) \cap \Phi = \emptyset)$  et  $(N^l(y_i) \cap \Psi = \emptyset$  ou  $N^j(x_i) \cap \Psi = \emptyset)$ .

**Preuve.** Comme  $\|A \cup B\| > n - 16k - 2$ , nous pouvons considérer qu'il y a au moins trois sommets  $u$ ,  $u'$  et  $u''$  de  $N^r(x_i)$  qui appartiennent soit à  $A$  soit à  $B$ . Sinon on aurait  $d_A^r(x_i) \leq 2$  et  $d_B^r(x_i) \leq 2$  et par conséquent  $d^r(x_i) - 4 \leq \|G - A \cup B\| \leq 16k + 2$ , ce qui n'est pas possible. Supposons par exemple que tous ces trois sommets sont dans  $A$ . Il suffira alors de montrer qu'il n'existe aucune arête entre  $y_i$  et  $A$ , car  $\Phi \subset A$ . Pour cela, supposons qu'il existe l'arête  $vy_i$  dans  $G^c$ ,  $v \in A$ . Sans aucune perte de généralité, nous allons supposer que  $u \neq v$  et qu'il y a deux sommets  $x \in \Phi$  et  $y \in \Psi$  tels que  $i \in \Gamma_{xy}$  et que  $x \neq u$  et  $x \neq v$ . Si  $c(vy_i) = b$ , alors, par l'Assertion 2, il y a un sommet  $w$ , distinct de  $u$ ,  $v$ ,  $x$  tel que la chaîne  $x_i \overset{r}{-} u \overset{b}{-} w \overset{r}{-} v \overset{b}{-} y_i$  existe dans  $G^c$ . Si  $c(vy_i) = r$ , alors il y a un sommet  $w$  distinct de  $u$ ,  $v$ ,  $x$  dans  $A$  (voir (3.1)) et un sommet  $w'$  distinct de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $x$  dans  $A$  tel que la chaîne  $x_i \overset{r}{-} u \overset{b}{-} w' \overset{r}{-} w \overset{b}{-} v \overset{r}{-} y_i$  (Assertion 2) existe dans  $G^c$ . Ainsi, nous pouvons obtenir les chaînes  $x_1 \overset{b}{-} x \overset{r}{-} z \overset{b}{-} y \overset{r}{-} y_1$  ou  $x_1 \overset{r}{-} x \overset{b}{-} z \overset{r}{-} y \overset{b}{-} y_1$  (où  $z$  est un sommet déjà utilisé entre  $x_i$  et  $y_i$ ) ce qui contredit notre supposition à savoir qu'il n'existe pas de chaîne de longueur plus petite 8 entre  $x_1$  et  $y_1$ . Ceci complète la preuve de cette assertion.  $\square$

l'Assertion 5 implique qu'aucun sommet de  $\Phi$  (respectivement de  $\Psi$ ) ne peut être à la fois voisin de  $x_i$  et  $y_i$ , pour tout entier  $i \in \Gamma$ . Dès lors qu'il n'y a aucune arête entre  $\Phi$  et  $y_1$  et ni aucune arête entre  $\Psi$  et  $x_1$ , alors quelle que soit la couleur  $i \in \{r, b\}$ , et quels que soient les sommets  $x$  de  $\Phi$  et  $y$  de  $\Psi$ , nous avons

$$d_{G-S}^i(x) = d_{AUCUX}^i(x) \geq \frac{n}{2} + k - 1 - (2k - 1) + \|\Gamma\| = \frac{n}{2} - k + \|\Gamma\|$$

et

$$d_{G-S}^i(y) = d_{BUCUX}^i(y) \geq \frac{n}{2} - k + \|\Gamma\|.$$

En faisant la somme des deux inégalités ci-dessus, nous obtenons  $d_{G-S}^r(x) + d_{G-S}^b(y) \geq n - 2k + 2\|\Gamma\|$ . Nous avons aussi  $(S \cup \{x, y\}) \cap (N_{G-S}^r(x) +$

$N_{G-S}^b(y) = \emptyset$  et par conséquent  $\|N_{G-S}^r(x) \cup N_{G-S}^b(y)\| \leq n - 2k - 2$ . Pour être bref, on dira qu'on a  $\|N_{G-S}^r(x) \cap N_{G-S}^b(y)\| \geq 2 + 2\|\Gamma\|$  et  $\|N_{G-S}^b(x) \cap N_{G-S}^r(y)\| \geq 2 + 2\|\Gamma\|$ .

Maintenant, nous allons montrer qu'on peut construire  $\|I\| + 1$  chaînes disjointes, chacune de longueur au plus 8. A coup sûr, ce sera une contradiction par rapport à la propriété de maximalité de  $I$  et donc permettra de compléter et de terminer la preuve du cas (I).

Sans perte de généralité, nous posons  $\Gamma = \{2, 3, \dots, \|\Gamma\| + 1\}$ . De plus, nous avons pour tout  $i \in \Gamma$  et pour tous  $j, l \in \{r, b\}$ ,  $j \neq l$ ,  $N^j(x_i) \cap \Phi = \emptyset$  et  $N^l(y_i) \cap \Psi = \emptyset$ , puisque  $x_i$  et  $y_i$  jouent des rôles symétriques.

Comme  $\|N^r(x_i) \cap A\| \geq k$  et  $\|N^b(y_i) \cap B\| \geq k$  (car il n'y a pas d'arête entre  $x_i$  et  $B$ , ni entre  $y_i$  et  $A$ ), on pourra trouver  $\|\Gamma\| + 1$  sommets distincts  $x', x'_2, x'_3, \dots, x'_{\|\Gamma\|+1}$  dans  $A$  et  $\|\Gamma\| + 1$  sommets distincts  $y', y'_2, y'_3, \dots, y'_{\|\Gamma\|+1}$  dans  $B$  tels que  $c(x_i x'_i) = c(x_1 x') = r$  et  $c(y_i y'_i) = c(y_1 y') = b$ . Rappelons également que pour toute paire de sommets  $x \in \Phi$ ,  $y \in \Psi$ , on a  $\|N_{G-S}^b(x) \cap N_{G-S}^r(y)\| \geq 2 + 2\|\Gamma\|$ . On ajoute à cela les deux inégalités  $\|\Phi\| \geq 3k$  et  $\|\Psi\| \geq 3k$ . On arrive alors à trouver  $\|\Gamma\|$  sommets distincts  $x''_2, x''_3, \dots, x''_{\|\Gamma\|+1}$  dans  $A$ ,  $\|\Gamma\|$  sommets distincts  $y''_2, y''_3, \dots, y''_{\|\Gamma\|+1}$  dans  $B$  et  $\|\Gamma\| + 1$  sommets distincts  $z, z_2, z_3, \dots, z_{\|\Gamma\|+1}$  dans  $X_\Gamma$ . En effet, il y a au moins  $2k$  paires de sommets distincts dans  $\Phi \times \Psi$  et il y a au plus  $\|I\| - \|\Gamma\|$  paires de sommets distincts de  $\Phi \times \Psi$  qui sont reliés par les chaînes  $x''_i \overset{b}{-} z_i \overset{r}{-} y''_i$  et  $x' \overset{b}{-} z \overset{r}{-} y'$  de longueur 2 qui passent par  $X - X_\Gamma$  selon la définition de  $\Gamma$ . Tous les sommets de ces chaînes sont distincts des sommets précédents. D'après l'Assertion 2, nous pouvons enfin trouver  $\|\Gamma\|$  sommets distincts  $x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \dots, x_{\|\Gamma\|+1}^{(3)}$  dans  $A$  et  $\|\Gamma\|$  sommets distincts

$y_2^{(3)}, y_3^{(3)}, \dots, y_{\|\Gamma\|+1}^{(3)}$  dans  $B$ , tels que les chaînes  $x'_i \overset{b}{-} x_i^{(3)} \overset{r}{-} x''_i$  et  $y''_i \overset{b}{-} y_i^{(3)} \overset{r}{-} y'_i$  soient dans  $G^c$  et que tous les sommets de ces chaînes soient distincts des précédents.

Par ce moyen, nous venons de définir  $\|I\| + 1$  sommets distincts

$$x_i \overset{r}{-} x'_i \overset{b}{-} x_i^{(3)} \overset{r}{-} x''_i \overset{b}{-} z_i \overset{r}{-} y''_i \overset{b}{-} y_i^{(3)} \overset{r}{-} y'_i \overset{b}{-} y_i$$

et

$$x_1 \overset{r}{-} x' \overset{b}{-} z \overset{r}{-} y' \overset{b}{-} y_1.$$

Puisque toutes ces chaînes définies plus haut ont chacune une longueur plus petite que 8, alors l'hypothèse de la propriété de maximalité de  $I$  est contredite.

## (II) Il existe au moins une arête entre $A$ et $B$ .

**Assertion 6.** Il existe deux sous-ensembles  $D$  et  $E$  de  $V(G^c)$  tels que

- i)  $D \subset A$ ,  $E \subset B$ ,  $\|D\| \geq 3k$ ,  $\|E\| \geq 3k$  et  $\|D \cup E\| \geq \frac{n}{2} + k$ ,
- ii) Pour tout sommet  $x \in D$ ,  $N^b(x) \cap A = \emptyset$  et pour tout sommet  $y \in E$ ,  $N^r(y) \cap B = \emptyset$  et
- iii) quelque soit la paire de sommets  $x, x'$  de  $D$ ,  $\|N_B^r(x) \cup N_B^b(x')\| \geq 3k$  et quelque soit la paire de sommets  $y, y'$  de  $E$ ,  $\|N_A^r(y) \cup N_A^b(y')\| \geq 3k$ .

**Preuve.** Soit  $xy$  une arête entre  $A$  et  $B$ ,  $x \in A$ ,  $y \in B$ . Supposons sans perte de généralité, que la couleur de cette arête est bleue. Il n'existe alors aucune arête rouge entre  $y$  et  $B$ , sinon la chaîne  $x_1 \overset{r}{-} x \overset{b}{-} y \overset{b}{-} z \overset{b}{-} y_1$ ,  $z \in B$ , a une longueur inférieure à 8, ce qui est contradictoire par rapport aux suppositions. Ainsi, on a  $d_A^r(y) = d_{A \cup B}^r(y) \geq \frac{n}{2} + k - 1 - 9k - 8k + 1 = \frac{n}{2} - 16k$  et pour tout sommet  $x \in N_A^r(y)$ ,  $d_B^b(x) \geq \frac{n}{2} - 16k$ .

Soit  $E$  un sous-ensemble de  $B$  tel que tout sommet  $u$  de  $E$  a au moins  $\frac{2}{3}(\frac{n}{2} - 24k)$  voisins  $v$  dans  $N_A^r(y)$ , tels que la couleur de l'arête  $uv$  est bleue et que  $E$  soit aussi grand que possible. Il faudra alors qu'on vérifie que  $\|E\| \geq \frac{n}{2} - 60k \geq 3k$ . Le cardinal de l'ensemble  $B$  vérifie  $\|B\| \leq n - \|S\| - \min(\|A\|) \leq \frac{n}{2} + 6k$ . On se retrouve dans le pire des cas quand chaque sommet  $u$  de  $N_A^r(y)$  est relié de façon monochromatique à des arêtes

bleues à chaque sommet de  $E$  et, s'il y en a, le restant des couleurs est réparti sur les arêtes joignant  $u$  avec les autres sommets de  $B$ . En fait, nous devons montrer que la moyenne des arêtes bleues entre un sommet de  $B - E$  et  $N_A^r(y)$  est au moins égale à  $\frac{2}{3}(\frac{n}{2} - 24k)$ . En particulier, nous devons prouver si  $\|E\| = \frac{n}{2} - \alpha k$ , alors

$$\frac{(d_A^r(y) - \|E\|) * d_A^b(x)}{\max(\|B\|) - \|E\|} \geq \frac{2}{3}(\frac{n}{2} - 24k)$$

$$\frac{(\alpha - 16)k * (\frac{n}{2} - 16k)}{(\alpha + 6)k} \geq \frac{2}{3}(\frac{n}{2} - 24k)$$

$$\frac{\alpha n}{6} \geq 10n - 352k$$

Singulièrement, pour  $\|E\| = \frac{n}{2} - 60k$ , nous obtenons  $\alpha = 60$  et cela montre que l'équation précédente est vraie. On a également pour chaque sommet  $y \in E$ ,  $d_A^b(y) \geq \frac{2}{3}(\frac{n}{2} - 24k)$  et  $d_A^r(y) \geq \frac{n}{2} - 16k$ . Nous définissons, avec des arguments similaires le sous-ensemble  $D$  de  $A$ , tel que quel que soit un sommet  $x \in N_A^r(y)$ , chaque sommet  $u$  de  $D$  est connecté à au moins  $\frac{2}{3}(\frac{n}{2} - 24k)$  sommets  $v$  de  $N_A^b(x)$  par des arêtes rouges et  $D$  est aussi grand que possible. Il en résulte alors  $\|D\| \geq \frac{n}{2} - 60k \geq 3k$  et, pour tout sommet  $x \in D$ ,  $d_B^r(x) \geq \frac{2}{3}(\frac{n}{2} - 24k)$  et  $d_B^b(x) \geq \frac{n}{2} - 16k$ . De plus, pour chacun des sommets  $x \in D$ , on a  $N^b(x) \cap A = \emptyset$  et pour chacun des sommets  $y \in E$ , on a  $N^r(y) \cap B = \emptyset$ . Ajoutez à cela que pour chaque paire de sommets  $x, x'$  de  $D$ , on a  $d_B^r(x) \geq \frac{2}{3}(\frac{n}{2} - 24k)$  et  $d_B^b(x) \geq \frac{n}{2} - 16k$ . Ainsi on obtient  $d_B^r(x) + d_B^b(x) \geq \frac{5}{6}n - 32k$ . Cependant nous avons  $\|B\| \leq \frac{n}{2} + 6k$ . Donc on en déduit  $\|N_B^r(x) \cup N_B^b(x')\| \geq \frac{n}{3} - 38k \geq 3k$ . De manière similaire, pour toute paire de sommets  $y, y'$  de  $E$ , on a  $\|N_A^r(y) \cup N_A^b(y')\| \geq 3k$ . Ainsi on vérifie  $\|D \cup E\| \geq n + k$  car  $\|D \cup E\| \geq n - 120k \geq \frac{n}{2} + k$ . Ainsi on voit bien pourquoi  $n \geq 242k$ . Cela termine la preuve de cette assertion.  $\square$

Soient  $x, y$  deux sommets de  $G^c$ , avec  $x \in D, y \in E$ . L'intersection entre  $\{x_1, y_1\}$  et  $N^b(x)$  est clairement vide ( $\{x_1, y_1\} \cap N^b(x) = \emptyset$ ), sinon une des chaînes suivantes  $x_1 \overset{r}{-} x \overset{b}{-} y_1$  ou  $x_1 \overset{b}{-} x \overset{r}{-} y \overset{b}{-} y_1, y \in E$ , existe dans  $G^c$ , ce qui contredit notre supposition de départ à savoir qu'il n'existe aucune chaîne de longueur inférieure à 8 entre  $x_1$  et  $y_1$ . De la même façon, nous voyons que  $\{x_1, y_1\} \cap N^r(y) = \emptyset$ . Nous avons  $d_{G^c-(S \cup \{y\})}^b(x) \geq \frac{n}{2} + k - 1 - 2(k - 1) - 1 = \frac{n}{2} - k$ . Par analogie, on a  $d_{G^c-(S \cup \{x\})}^r(y) \geq \frac{n}{2} - k$ . Nous avons également  $d_{G^c-(S \cup \{y\})}^b(x) + d_{G^c-(S \cup \{x\})}^r(y) \geq n - 2k$  et  $(S \cup \{x, y\}) \cap (N_{G^c-(S \cup \{y\})}^b(x) \cup N_{G^c-(S \cup \{x\})}^r(y)) = \emptyset$ .

Ainsi on obtient  $\|N_{G^c-(S \cup \{y\})}^b(x) \cup N_{G^c-(S \cup \{x\})}^r(y)\| \leq n - 2k - 2$ . Nous obtiendrons finalement l'inégalité suivante :  $\|N_{G^c-(S \cup \{y\})}^b(x) \cup N_{G^c-(S \cup \{x\})}^r(y)\| \geq 2$ . Si  $N_{G^c-(S \cup \{y\})}^b(x) \cup N_{G^c-(S \cup \{x\})}^r(y)$  n'est pas un sous-ensemble de  $X$ , alors nous pourrions considérer la chaîne  $x_1 \overset{b}{-} x \overset{r}{-} z \overset{b}{-} y \overset{r}{-} y_1$ , ce qui contredit nos suppositions. De ce fait, nous supposons que  $N_{G^c-(S \cup \{y\})}^b(x) \cup N_{G^c-(S \cup \{x\})}^r(y) \subset X$ . Soit  $\Omega_{xy}$  un sous-ensemble de  $I$  tel que  $i \in \Omega_{xy}$ , si et seulement si, il existe un sommet  $z \in N_{G^c-(S \cup \{y\})}^b(x) \cup N_{G^c-(S \cup \{x\})}^r(y)$  telle que la chaîne entre  $x_i$  et  $y_i$  passe par  $z$ . L'ensemble  $\Omega_{xy}$  est non vide.

Nous définissons également un sous-ensemble  $\Omega$  de  $I$  tel que  $i \in \Omega$ , si et seulement si, il existe au moins quatre sommets distincts  $x, x', y, y'$  tels que  $x, x' \in D, y, y' \in E$  et  $i \in \Omega_{xy} \cap \Omega_{x'y'}$ . Soit  $X_\Omega$  l'ensemble des sommets qui sont utilisés dans le but de construire les  $\|\Omega\|$  chaînes deux à deux sommet-disjointes de longueur au plus 8 joignant les paires de sommets  $x_i, y_i$ , avec  $i \in \Omega$ . Donc l'inclusion suivante est vérifiée  $X_\Omega \subset X$ .

**Assertion 7 :**  $\Omega$  n'est pas vide.

**Preuve.** La preuve s'établit directement du fait que  $\|D\| \geq 2k, \|E\| \geq 2k$  et  $\|I\| \leq k$ .  $\square$

**Assertion 8 :** Pour tout entier  $i \in \Omega$ , on a  $((N^r(x_i) \cup N^r(y_i)) \cap E = \emptyset$  ou  $(N^r(x_i) \cup N^r(y_i)) \cap D = \emptyset$ ) et  $((N^b(x_i) \cup N^b(y_i)) \cap D = \emptyset$  ou  $(N^b(x_i) \cup N^b(y_i)) \cap E = \emptyset$ ).

**Preuve.** Puisque  $\|D \cup E\| > \frac{n}{2} + k$ , alors nous pouvons affirmer qu'il y a au moins trois sommets  $u, u'$  et  $u''$  de  $N^r(x_i)$  qui appartiennent soit à  $D$  ou  $E$ . Supposons que ces trois sommets sont dans  $A$ . Nous allons montrer par contradiction qu'il n'y a aucune arête rouge entre  $y_i$  et  $E$ . Supposons donc qu'il y a une arête rouge  $vy_i$  dans  $G^c$ , avec  $v \in E$ . Selon l'Assertion 6, il y a une arête bleue  $vw$  dans  $G^c$ ,  $w \in D$ . Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que  $u \neq w$  et qu'il y a deux sommets  $x \in D, y \in E$  tels que  $i \in \Omega_{xy}$ ,  $x \neq u, x \neq w$  et  $y \neq v$ . De plus, par l'Assertion 6, il existe un sommet  $t$  de  $E$  tel que  $t \neq u, t \neq y$ , et la chaîne  $u \overset{b}{-} t \overset{r}{-} w$  existe dans  $G^c$ . Mais cela voudrait tout simplement dire que nous pouvons définir les chaînes  $x_i \overset{r}{-} u \overset{b}{-} t \overset{r}{-} w \overset{b}{-} v \overset{r}{-} y_i$  et  $x_1 \overset{r}{-} x \overset{b}{-} z \overset{r}{-} y \overset{b}{-} y_1$ , où  $z$  est un sommet utilisé par la chaîne définie entre  $x_i$  et  $y_i$ , ce qui constitue une contradiction à nos suppositions. Ainsi on a soit  $(N^r(x_i) \cup N^r(y_i)) \cap E = \emptyset$  ou  $(N^r(x_i) \cup N^r(y_i)) \cap D = \emptyset$ . Avec des arguments identiques, nous avons  $(N^b(x_i) \cup N^b(y_i)) \cap E = \emptyset$  ou  $(N^b(x_i) \cup N^b(y_i)) \cap D = \emptyset$ . Supposons que  $(N^r(x_i) \cup N^r(y_i)) \cap E = \emptyset$  et  $(N^b(x_i) \cup N^b(y_i)) \cap E = \emptyset$ . Alors il y a deux sommets  $x \in D, y \in E$  tels que  $i \in \Omega_{xy}$ . De façon analogue, il y a deux sommets distincts  $u$  et  $v$  de  $D$  tels que  $x \neq u, v$  et  $u \in N^r(x_i)$  et  $v \in N^b(y_i)$ . De plus, par l'Assertion 6, il existe un sommet  $w$  de  $E$  tel que  $w \neq y$  et la chaîne  $u \overset{b}{-} t \overset{r}{-} v$  existe dans  $G^c$ . Mais alors nous pourrions définir l'ensemble des chaînes  $x_i \overset{r}{-} u \overset{b}{-} w \overset{r}{-} v \overset{b}{-} y_i$  et  $x_1 \overset{r}{-} x \overset{b}{-} z \overset{r}{-} y \overset{b}{-} x_1$ , où  $z$  est un sommet utilisé par la chaîne définie entre  $x_i$  et  $y_i$ , ce qui, à nouveau, est une contradiction à nos suppositions. Ainsi la preuve de l'Assertion 8 est bien établie.  $\square$

A présent, nous allons définir deux sous-ensembles  $\Omega^r$  et  $\Omega^b$  de  $\Omega$  comme

suit :  $i \in \Omega^r$  si et seulement si  $i \in \Omega$ ,  $(N^r(x_i) \cup N^r(y_i)) \cap E = \emptyset$  et  $(N^b(x_i) \cup N^b(y_i)) \cap D = \emptyset$ . Similairement,  $i \in \Omega^b$  si et seulement si  $i \in \Omega$ ,  $(N^r(x_i) \cup N^r(y_i)) \cap D = \emptyset$  et  $(N^b(x_i) \cup N^b(y_i)) \cap E = \emptyset$ . Selon l'Assertion 8, nous avons  $\Omega^r \cap \Omega^b = \emptyset$  et  $\Omega^r \cup \Omega^b = \Omega$ . De plus, on a  $\Omega^r \neq \emptyset$ , car  $\|N_{G^c-(S \cup \{y\})}^b(x) \cup N_{G^c-(S \cup \{x\})}^r(y)\| \geq 2$ . Avec les définitions ci-dessus, l'Assertion 8 signifie que, si on a  $i \in \Omega^r$ , alors il n'y a aucune arête bleue entre  $D$  et  $\{x_i, y_i\}$  et aucune arête rouge entre  $E$  et  $\{x_i, y_i\}$ . De la même manière, si on a l'entier  $i \in \Omega^b$ , alors il n'y a aucune arête rouge entre  $D$  et  $\{x_i, y_i\}$  et aucune arête bleue entre  $E$  et  $\{x_i, y_i\}$ .

Donc, pour chaque sommet  $x$  de  $D$ , nous avons :

$$d_{G^c-(S \cup \{y\})}^b(x) \geq \frac{n}{2} + k - 1 - 2(k - 1) - 1 + 2\|\Omega^r\| = \frac{n}{2} - k + 2\|\Omega^r\|,$$

$$d_{G^c-(S \cup \{y\})}^r(x) \geq \frac{n}{2} + k - 1 - 2k - 1 + 2\|\Omega^b\| = \frac{n}{2} - k + 2\|\Omega^b\| - 2.$$

De la même façon, nous avons, pour chaque sommet  $y$  in  $E$  :

$$d_{G^c-(S \cup \{x\})}^b(y) \geq \frac{n}{2} + k - 1 - 2k - 1 + 2\|\Omega^b\| = \frac{n}{2} - k + 2\|\Omega^b\| - 2,$$

$$d_{G^c-(S \cup \{x\})}^r(y) \geq \frac{n}{2} + k - 1 - 2(k - 1) - 1 + 2\|\Omega^r\| = \frac{n}{2} - k + 2\|\Omega^r\|.$$

A partir des inégalités ci-dessus, nous déduisons que

$$d_{G^c-(S \cup \{y\})}^b(x) + d_{G^c-(S \cup \{x\})}^r(y) \geq n - 2k + 4\|\Omega^r\|. \text{ En outre, on a } (S \cup \{x, y\}) \cap (N_{G^c-(S \cup \{y\})}^b(x) \cup N_{G^c-(S \cup \{x\})}^r(y)) = \emptyset.$$

Ainsi  $\|N_{G^c-(S \cup \{y\})}^b(x) \cup N_{G^c-(S \cup \{x\})}^r(y)\| \leq n - 2k - 2$ . Pour être brefs, nous obtenons  $\|N_{G^c-(S \cup \{y\})}^b(x) \cap N_{G^c-(S \cup \{x\})}^r(y)\| \geq 4\|\Omega^r\| + 2$  et  $\|N_{G^c-(S \cup \{y\})}^r(x) \cap N_{G^c-(S \cup \{x\})}^b(y)\| \geq 4\|\Omega^b\| - 2$ .

Nous pouvons maintenant considérer deux cas qui sont liés au cardinal de  $\Omega^b$ .

**Cas 1 :**  $\|\Omega^b\| = 0$ .

Comme  $\|\Omega^b\| = 0$ , il s'en suit que  $\|\Omega^r\| = \|\Omega\|$ . Nous allons maintenant définir

$\|\Omega\| + 1$  chaînes deux à deux sommet-disjointes, chacune de longueur au plus 8. Comme  $\Omega$  est un sous-ensemble de  $I$ , il y aura alors une contradiction par rapport à la maximalité de la propriété. Nous posons  $\Omega^r = \{2, 3, \dots, \|\Omega^r\| + 1\}$ . Puisque  $\|N^r(x_i) \cap D\| \geq k$  et  $\|N^b(y_i) \cap E\| \geq k$ , nous pouvons trouver  $\|\Omega^r\| + 1$  sommets distincts  $x', x'_2, x'_3, \dots, x'_{\|\Omega^r\|+1}$  de  $D$  et  $\|\Omega^r\| + 1$  sommets distincts  $y', y'_2, y'_3, \dots, y'_{\|\Omega^r\|+1}$  de  $B$  tel que  $c(x_i x'_i) = c(x_1 x') = r$  et  $c(y_i y'_i) = c(y_1 y') = b$ . Nous rappelons également que pour chaque paire de sommets  $x \in D, y \in E$ , nous avons  $\|N_{G^c - (S \cup \{y\})}^b(x) \cap N_{G^c - (S \cup \{x\})}^r(y)\| \geq 4\|\Omega^r\| + 2$  et  $\|D\| \geq 3k$  et  $\|E\| \geq 3k$ . Donc nous pouvons trouver  $\|\Omega^r\|$  sommets  $x''_2, x''_3, \dots, x''_{\|\Omega^r\|+1}$  de  $D$ ,  $\|\Omega^r\|$  sommets  $y''_2, y''_3, \dots, y''_{\|\Omega^r\|+1}$  de  $E$  et  $\|\Omega^r\| + 1$  sommets  $z, z_2, z_3, \dots, z_{\|\Omega^r\|+1}$  de  $X_\Omega$  tels que les différentes chaînes  $x''_i \overset{b}{-} z_i \overset{r}{-} y''_i$  et  $x' \overset{b}{-} z \overset{r}{-} y'$  existent dans  $G^c$ . Tous les ensembles de sommets susmentionnés existent dans  $G^c$ , car il y a au moins  $2k$  paires de sommets distincts de  $D \times E$  et il y a au plus  $\|I\| - \|\Omega^r\|$  paires de sommets distincts de  $D \times E$  qui sont reliés par une chaîne de longueur 2 passant par  $X - X_\Omega$  selon la définition de  $\Omega$ . Enfin, par l'Assertion 6, nous pouvons trouver  $\|\Omega^r\|$  sommets  $x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \dots, x_{\|\Omega^r\|+1}^{(3)}$  de  $D$  et  $\|\Omega^r\|$  sommets  $y_2^{(3)}, y_3^{(3)}, \dots, y_{\|\Omega^r\|+1}^{(3)}$  de  $E$ , telles que les chaînes  $x'_i \overset{b}{-} x_i^{(3)} \overset{r}{-} x''_i$  et  $y''_i \overset{b}{-} y_i^{(3)} \overset{r}{-} y'_i$  existent dans  $G^c$ . Cependant, avec cette approche, nous pouvons définir les  $\|\Omega^r\| + 1$  chaînes deux à deux sommet-disjointes suivantes

$$x_i \overset{r}{-} x'_i \overset{b}{-} x_i^{(3)} \overset{r}{-} x''_i \overset{b}{-} z_i \overset{r}{-} y''_i \overset{b}{-} y_i^{(3)} \overset{r}{-} y'_i \overset{b}{-} y_i$$

et

$$x_1 \overset{r}{-} x' \overset{b}{-} z \overset{r}{-} y' \overset{b}{-} y_1,$$

ce qui constitue une contradiction.

**Cas 2.**  $\|\Omega^b\| > 0$

La preuve de ce second cas sera basée sur les Assertions 9-12 ci-dessous.

**Assertion 9.** Il existe au moins trois paires de sommets distincts  $u_j$  et  $v_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , tels que  $\Omega_{u_j v_j} \cap \Omega^b \neq \emptyset$ .

**Preuve.** Soit  $X_{\Omega^r}$  un ensemble de sommets qui sont utilisés dans le but de définir  $\|\Omega^r\|$  chaînes deux à deux sommet-disjointes de longueur au plus 8, une chaîne par paire  $x_i, y_i$ , avec  $i \in \Omega^r$ . Alors on a l'inclusion  $X_{\Omega^r} \subset X_\Omega$ . En effet, supposons qu'il y a au plus deux paires distinctes de sommets  $u_j, v_j$  tels que  $\Omega_{u_j v_j} \cap \Omega^b \neq \emptyset$ ,  $j = 1, 2$ . Ainsi, en faisant usage d'arguments similaires à ceux du Cas 1, nous pouvons définir  $\|\Omega^r\| + 1$  chaînes deux à deux sommet-disjointes entre  $x_1$  et  $y_1$  et entre  $x_i$  et  $y_i$  de longueur au plus 8, pour tout entier  $i \in \Omega^r$ . Pour définir ces chaînes, nous avons besoin de trouver  $\|\Omega^r\|$  sommets  $x''_2, x''_3, \dots, x''_{\|\Omega^r\|+1}$  dans  $D$ ,  $\|\Omega^r\|$  sommets  $y''_2, y''_3, \dots, y''_{\|\Omega^r\|+1}$  dans  $E$  et  $\|\Omega^r\| + 1$  sommets  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{\|\Omega^r\|+1}$  dans  $X_{\Omega^r}$  telles que les chaînes suivantes  $x''_i \overset{b}{-} z_i \overset{r}{-} y''_i$  et  $x' \overset{b}{-} z \overset{r}{-} y'$  existent dans  $G^c$ . En effet, tous les ensembles de sommets susmentionnés existent dans  $G^c$  car, comme il y a au moins  $2k$  paires de sommets de  $D \times E$ , alors il y a au plus  $\|I\| - \|\Omega^r\|$  paires de sommets distincts de  $D \times E$  qui sont reliés par des chaînes de longueur 2 passant par  $X - X_\Omega$  selon la définition de  $\Omega$ . De même, comme il y a au plus 2 paires de sommets distincts de  $D \times E$  qui sont reliés par des chaînes de longueur 2 passant  $X - X_\Omega$ , alors il y a au moins  $\|\Omega^r\| + 1$  paires de sommets distincts  $(u'_j, v'_j)$  de  $D \times E$  tels que  $\Omega_{u'_j v'_j} \subset \Omega^r$  pour tout  $j$ . Ceci complète la preuve de l'Assertion.  $\square$

**Assertion 10.**  $N_{G^c - (S \cup \{y\})}^r(x) \cap N_{G^c - (S \cup \{x\})}^b(y) \subset X$ .

**Preuve.** Supposons qu'il y a un sommet  $z$  de  $N_{G^c - (S \cup \{y\})}^r(x) \cap N_{G^c - (S \cup \{x\})}^b(y)$  tel que  $z \in C \cup A \cup B$ . Puisque  $\|\Omega^b\| > 0$ , alors il y a un entier  $t \in \Omega^b$  tel que nous pouvons trouver quatre sommets distincts  $x', u' \in D$  et  $y', v' \in E$  tels que  $t \in \Omega_{x' y'}$ ,  $u \in N^b(x_t)$ . Nous pouvons également trouver un sommet  $v \in N^r(y_t)$  tel que  $x, x', u, z$  (respectivement  $y, y', v, z$ ) soient deux

à deux distincts. Soit  $z_t$  un sommet de la chaîne définie entre  $x_t$  et  $y_t$  tel que  $z_t \in N_{G^c-(S \cup \{y'\})}^b(x') \cap N_{G^c-(S \cup \{x'\})}^r(y')$ . En utilisant ce sommet  $z_t$  et selon l'Assertion 6, on peut trouver deux sommets  $u'$  et  $w'$  telles que les deux chaînes  $x_t \overset{b}{-} u \overset{r}{-} u' \overset{b}{-} x \overset{r}{-} z \overset{b}{-} y \overset{r}{-} v' \overset{b}{-} v \overset{r}{-} y_t$  et  $x_1 \overset{r}{-} x' \overset{b}{-} z_t \overset{r}{-} y' \overset{b}{-} y_1$  existent dans  $G^c$ .

Soit  $\Theta_{xy}$  un sous-ensemble de  $I$  tel que l'entier  $i \in \Theta_{xy}$ , si et seulement si, il existe un sommet  $z \in N_{G^c-(S \cup \{y\})}^r(x) \cup N_{G^c-(S \cup \{x\})}^b(y)$  tel que la chaîne définie entre  $x_i$  et  $y_i$  passe par  $z$ .  $\Theta_{xy}$  n'est pas vide, puisque  $\|N_{G^c-(S \cup \{y\})}^r(x) \cap N_{G^c-(S \cup \{x\})}^b(y)\| \geq 4\|\Omega^b\| - 2$  et  $\|\Omega^b\| > 0$ . Nous définissons également un sous-ensemble  $\Theta$  de  $I$  tel que l'entier  $i \in \Theta$  si et seulement si il existe au moins quatre sommets  $x, x' \in \Phi, y, y' \in \Psi$  avec  $x \neq x'$  et  $y \neq y'$  tels que  $i \in \Theta_{xy} \cap \Theta_{x'y'}$ . Soit  $X_\Theta$  un ensemble de sommets qui sont utilisés pour construire les  $\|\Theta\|$  chaînes deux à deux sommet-disjointes, chacune de longueur au plus 8 reliant les paires de sommets  $x_i, y_i$ , avec  $i \in \Theta$ . Clairement on voit que  $X_\Theta \subset X$ .  $\square$

**Assertion 11.**  $\Theta$  n'est pas vide.

**Preuve.** Comme  $\|D\| \geq 2k, \|E\| \geq 2k$  et  $\|I\| \leq k$ , alors la conclusion est automatique.  $\square$

**Assertion 12.** Pour tout entier  $i \in \Theta$ , on a  $((N^r(x_i) \cup N^r(y_i)) \cap E = \emptyset$  ou  $(N^r(x_i) \cup N^r(y_i)) \cap D = \emptyset$ ) et  $((N^b(x_i) \cup N^b(y_i)) \cap D = \emptyset$  ou  $(N^b(x_i) \cup N^b(y_i)) \cap E = \emptyset$ )

**Preuve.** Soit  $i \in \Theta$ . Si l'entier  $i \in \Omega$ , alors l'Assertion est vraie selon l'Assertion 7. Nous allons donc supposer que  $i \notin \Omega$ . Puisque  $\|D \cup E\| > \frac{n}{2} + k$ , il y a au moins trois sommets  $u, u'$  et  $u''$  de  $N^r(x_i)$  qui appartiennent soit à  $D$ , soit à  $E$ . Supposons maintenant que ces trois sommets sont dans  $D$ .

Nous devons montrer qu'il n'y a aucune arête rouge entre  $y_i$  et  $E$ . Supposons qu'il existe une arête rouge  $vy_i$  dans  $G^c$  avec  $v \in E$ . Selon l'Assertion 6, il y a une arête bleue  $vw$  dans  $G^c$ ,  $w \in D$ . Sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer que  $u \neq w$  et qu'il y a deux sommets  $x \in D$ ,  $y \in E$  tels que  $i \in \Theta_{xy}$ ,  $x \neq u$ ,  $x \neq w$  et  $y \neq v$ . Puisque  $\|\Omega^b\| > 0$ , par l'Assertion 10, nous pouvons trouver un entier  $t \in \Omega^b$  et deux sommets  $x'_t \in D$  et  $y'_t \in E$  tels que  $t \in \Omega_{x'_t y'_t}$ . De plus,  $x$ ,  $x'_t$ ,  $w$  (respectivement  $y$ ,  $y'_t$ ,  $v$ ) sont deux à deux distincts. Nous pouvons encore trouver deux autres sommets distincts  $x''_t$  et  $y''_t$  tels que  $x''_t \in N^b(x_t)$  et  $y''_t \in N^r(y_t)$ . Selon l'Assertion 6, il existe deux sommets  $w'$ ,  $x_i^{(3)}$  de  $E$  et un sommet  $x_t^{(3)}$  de  $D$ , distinct de ces sommets susmentionnés, et telles que les chaînes  $u \overset{b}{-} w' \overset{r}{-} w$ ,  $x''_t \overset{r}{-} x_t^{(3)} \overset{b}{-} x$  et  $y''_t \overset{r}{-} y_i^{(3)} \overset{b}{-} y$  existent dans  $G^c$ . Cependant, par cette approche, nous pourrions définir les chaînes  $x_i \overset{r}{-} u \overset{b}{-} w' \overset{r}{-} w \overset{b}{-} v \overset{r}{-} y_i$ ,  $x_1 \overset{r}{-} x'_t \overset{b}{-} z_t \overset{r}{-} y'_t \overset{b}{-} x_1$  et  $x_t \overset{b}{-} x''_t \overset{r}{-} x_t^{(3)} \overset{b}{-} x \overset{r}{-} z_i \overset{b}{-} y \overset{r}{-} y_i^{(3)} \overset{b}{-} y''_t \overset{r}{-} y_1$  ( $z_i$  est un sommet utilisé entre  $x_i$  et  $y_i$  et  $z_t$  un sommet utilisé entre  $x_t$  et  $y_t$ ) contredisant nos suppositions. Nous en déduisons alors que l'on a, soit  $(N^r(x_i) \cup N^r(y_i)) \cap E = \emptyset$  ou  $(N^r(x_i) \cup N^r(y_i)) \cap D = \emptyset$ . Par des arguments similaires, nous obtenons  $(N^b(x_i) \cup N^b(y_i)) \cap E = \emptyset$  or  $(N^b(x_i) \cup N^b(y_i)) \cap D = \emptyset$ . Afin de compléter la preuve, nous avons besoin d'exclure le cas  $(N^r(x_i) \cup N^r(y_i)) \cap E = \emptyset$  et  $(N^b(x_i) \cup N^b(y_i)) \cap E = \emptyset$ . Supposons donc que l'on a  $(N^r(x_i) \cup N^r(y_i)) \cap E = \emptyset$  et  $(N^b(x_i) \cup N^b(y_i)) \cap E = \emptyset$ . Il existe deux sommets  $x \in D$ ,  $y \in E$  tels que  $i \in \Omega_{xy}$ . De plus, il existe deux sommets distincts  $u$  et  $v$  de  $D$  tels que  $x \neq u$ ,  $v, u \in N^r(x_i)$  et  $v \in N^b(y_i)$ . Nous devrions cependant pouvoir définir les chaînes  $x_i \overset{r}{-} u \overset{b}{-} w \overset{r}{-} v \overset{b}{-} y_i$ ,  $x_1 \overset{r}{-} x'_t \overset{b}{-} z_t \overset{r}{-} y'_t \overset{b}{-} x_1$  et  $x_t \overset{b}{-} x''_t \overset{r}{-} x_t^{(3)} \overset{b}{-} x \overset{r}{-} z_i \overset{b}{-} y \overset{r}{-} y_i^{(3)} \overset{b}{-} y''_t \overset{r}{-} y_1$ , qui contredisent à nouveau nos suppositions. C'est par ce point qu'on termine la preuve de l'Assertion 12.  $\square$

Posons maintenant l'ensemble  $\Lambda = \Omega \cup \Theta$ . Nous définissons deux nouveaux

sous-ensembles  $\Lambda^r$  et  $\Lambda^b$  de  $I$  comme suit. Nous disons que l'entier  $i \in \Lambda^r$  si et seulement si  $i \in \Lambda$ ,  $(N^r(x_i) \cup N^r(y_i)) \cap E = \emptyset$  et  $(N^b(x_i) \cup N^b(y_i)) \cap D = \emptyset$ . Pareillement,  $i \in \Lambda^b$  si et seulement si  $i \in \Lambda$ ,  $(N^r(x_i) \cup N^r(y_i)) \cap D = \emptyset$  et  $(N^b(x_i) \cup N^b(y_i)) \cap E = \emptyset$ . D'après ces définitions et l'Assertion 8, nous avons  $\Lambda^r \cap \Lambda^b = \emptyset$  et  $\Lambda^r \cup \Lambda^b = \Lambda$ . Pour ce qui concerne  $\Lambda^r$  et  $\Lambda^b$ , les Assertions 8 et 13 signifient que si  $i \in \Lambda^r$ , alors il n'y a pas d'arêtes bleues entre  $D$  et  $\{x_i, y_i\}$  et ni d'arêtes rouges entre  $E$  et  $\{x_i, y_i\}$ . De façon identique, si  $i \in \Lambda^b$ , alors il n'y a pas d'arêtes rouges entre  $D$  et  $\{x_i, y_i\}$  et ni d'arêtes bleues entre  $E$  et  $\{x_i, y_i\}$ . Nous rappelons qu'il n'y a pas d'arêtes bleues entre  $D$  et  $\{x_1, y_1\}$  et ni d'arêtes rouges entre  $E$  et  $\{x_1, y_1\}$ .

Donc pour chaque sommet  $x$  de  $D$  nous avons,

$$d_{G^c-(S \cup \{y\})}^b(x) \geq \frac{n}{2} + k - 1 - 2(k - 1) - 1 + 2\|\Lambda^r\| = \frac{n}{2} - k + 2\|\Lambda^r\|,$$

$$d_{G^c-(S \cup \{y\})}^r(x) \geq \frac{n}{2} + k - 1 - 2k - 1 + 2\|\Lambda^b\| = \frac{n}{2} - k + 2\|\Lambda^b\| - 2.$$

De la même manière, pour chaque sommet  $y$  de  $E$ ,

$$d_{G^c-(S \cup \{x\})}^b(y) \geq \frac{n}{2} + k - 1 - 2k - 1 + 2\|\Lambda^b\| = \frac{n}{2} - k + 2\|\Lambda^b\| - 2,$$

$$d_{G^c-(S \cup \{x\})}^r(y) \geq \frac{n}{2} + k - 1 - 2(k - 1) - 1 + 2\|\Lambda^r\| = \frac{n}{2} - k + 2\|\Lambda^r\|.$$

En faisant la somme des deux inégalités ci-dessus, nous obtenons

$$d_{G^c-(S \cup \{y\})}^b(x) + d_{G^c-(S \cup \{x\})}^r(y) \geq n - 2k + 4\|\Lambda^r\|. \text{ On a aussi}$$

$$(S \cup \{x, y\}) \cap (N_{G^c-(S \cup \{y\})}^b(x) \cup N_{G^c-(S \cup \{x\})}^r(y)) = \emptyset.$$

Ainsi,  $\|N_{G^c-(S \cup \{y\})}^b(x) \cup N_{G^c-(S \cup \{x\})}^r(y)\| \leq n - 2k - 2$ . Nous concluons que  $\|N_{G^c-(S \cup \{y\})}^b(x) \cap N_{G^c-(S \cup \{x\})}^r(y)\| \geq 4\|\Lambda^r\| + 2$ . On a également de manière similaire,  $\|N_{G^c-(S \cup \{y\})}^r(x) \cap N_{G^c-(S \cup \{x\})}^b(y)\| \geq 4\|\Lambda^b\| - 2$ .

Soit  $X_\Lambda$  l'ensemble des sommets qui sont utilisés pour définir les  $\|\Lambda\|$  chaînes deux à deux sommet-disjointes de longueur au plus 8, reliant les paires de sommets  $x_i, y_i$ , pour tout entier  $i \in \Lambda$ . L'inclusion suivante  $X_\Lambda \subset X$  est vérifiée. Dans la suite, nous allons définir  $\|\Lambda\| + 1$  chaînes distinctes, chacune

de longueur au plus 8 . Cela constituera une contradiction sur la maximalité de la propriété de  $\Lambda$ , et permettra de compléter la preuve du théorème. Posons  $\Lambda = \{2, 3, \dots, \|\Lambda\| + 1\}$ . Rappelons que pour chaque entier  $i \in \Lambda^r$ ,  $\|N^r(x_i) \cap D\| \geq k$  et  $\|N^b(y_i) \cap E\| \geq k$ . Respectivement, on a pour tout entier  $i \in \Lambda^b$ ,  $\|N^b(x_i) \cap D\| \geq k$  et  $\|N^r(y_i) \cap E\| \geq k$ . Donc, nous pouvons trouver  $\|\Lambda\| + 1$  sommets distincts  $x', x'_2, x'_3, \dots, x'_{\|\Omega^r\|+1}$  in  $D$  et  $\|\Lambda\| + 1$  sommets  $y', y'_2, y'_3, \dots, y'_{\|\Omega^r\|+1}$  dans  $B$ . En outre, on a pour chaque  $i \in \Lambda^r$ ,  $c(x_1 x') = r$ ,  $c(y_1 y') = b$ ,  $c(x_i x'_i) = r$ . Nous avons aussi pour tout entier  $i \in \Lambda^b$ ,  $c(x_i x'_i) = b$ . En plus, il faut ajouter que pour chaque  $i \in \Lambda^r$ ,  $c(y_i y'_i) = b$ . Finalement, nous obtenons  $i \in \Lambda^b$ ,  $c(y_i y'_i) = r$ . En plus, nous pouvons trouver  $\|\Lambda\|$  sommets  $x''_2, x''_3, \dots, x''_{\|\Lambda\|+1}$  de  $D$ ,  $\|\Lambda\|$  sommets  $y''_2, y''_3, \dots, y''_{\|\Lambda\|+1}$  de  $E$  et  $\|\Lambda\| + 1$  sommets  $z, z_2, z_3, \dots, z_{\|\Lambda\|+1}$  de  $X_\Lambda$  tels que les chaînes  $x''_i \overset{b}{-} z_i \overset{r}{-} y''_i$  si  $i \in \Lambda^r$  ou  $x''_i \overset{r}{-} z_i \overset{b}{-} y''_i$  si  $i \in \Lambda^b$  et  $x' \overset{b}{-} z \overset{r}{-} y'$  existent dans  $G^c$ . En effet, il y a au moins  $2k$  paires de sommets distincts de  $D \times E$  et il y a au plus  $\|I\| - \|\Lambda\|$  paires de sommets distincts de  $D \times E$  qui sont reliés par une chaîne de longueur 2 passant par  $X - X_\Lambda$  d'après la définition de  $\Lambda$ . D'abord, supposons  $\|\Lambda^r\| \geq \|\Lambda^b\|$ . En premier lieu, nous considérons les sommets  $x''_i, y''_i, z_i$  avec  $i \in \Lambda^b$  (nous rappelons que pour  $x \in D$ ,  $y \in E$ , nous avons  $\|N^r_{G^c-(S \cup \{y\})}(x) \cap N^b_{G^c-(S \cup \{x\})}(y)\| \geq 4\|\Lambda^b\| - 2 \geq \Lambda^b$ ). Puis nous considérons les sommets  $x''_i, y''_i, z_i$  avec  $i \in \Lambda^r$  (ça tient encore pour  $x \in D$ ,  $y \in E$ ,  $\|N^b_{G^c-(S \cup \{y\})}(x) \cap N^r_{G^c-(S \cup \{x\})}(y)\| \geq 4\|\Lambda^r\| + 2 \geq \Lambda^b + \Lambda^r$ ). Ensuite, supposons  $\|\Lambda^r\| < \|\Lambda^b\|$ . Dans ce cas, nous considérons d'abord les sommets  $x''_i, y''_i, z_i$  avec  $i \in \Lambda^r$  (nous rappelons à nouveau que pour  $x \in D$ ,  $y \in E$ ,  $\|N^b_{G^c-(S \cup \{y\})}(x) \cap N^r_{G^c-(S \cup \{x\})}(y)\| \geq 4\|\Lambda^r\| + 2 \geq \Lambda^r$ ). Puis nous considérons les sommets  $x''_i, y''_i, z_i$  avec  $i \in \Lambda^b$  (comme pour  $x \in D$ ,  $y \in E$ , on a  $\|N^r_{G^c-(S \cup \{y\})}(x) \cap N^b_{G^c-(S \cup \{x\})}(y)\| \geq 4\|\Lambda^b\| - 2 \geq \Lambda^b + \Lambda^r$ ). Finalement, d'après l'Assertion 6, on peut trouver  $\|\Lambda\|$  sommets  $x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \dots, x_{\|\Lambda\|+1}^{(3)}$  de  $D$  et  $\|\Lambda\|$  sommets  $y_2^{(3)}, y_3^{(3)}, \dots, y_{\|\Lambda\|+1}^{(3)}$  de  $E$ . En utilisant ces sommets nous pouvons définir un ensemble de chaînes comme suit : si  $i \in \Lambda^r$ , nous définissons

les chaînes  $x'_i \overset{b}{-} x_i^{(3)} \overset{r}{-} x''_i$  ou si  $i \in \Lambda^b r$ , alors  $x'_i \overset{r}{-} x_i^{(3)} \overset{b}{-} x''_i$ . En outre, si  $i \in \Lambda^r$ , nous définissons  $y''_i \overset{b}{-} y_i^{(3)} \overset{r}{-} y'_i$  ou si  $i \in \Lambda^r$ , on définit  $y''_i \overset{r}{-} y_i^{(3)} \overset{b}{-} y'_i$ . Dans cette approche, nous pouvons définir  $\|\Lambda\| + 1$  chaînes distincts comme suit.

Pour tout entier  $i \in \Lambda^r$ , on a

$$x_i \overset{r}{-} x'_i \overset{b}{-} x_i^{(3)} \overset{r}{-} x''_i \overset{b}{-} z_i \overset{r}{-} y''_i \overset{b}{-} y_i^{(3)} \overset{r}{-} y'_i \overset{b}{-} y_i.$$

Pour tout entier  $i \in \Lambda^r$ , on a

$$x_i \overset{b}{-} x'_i \overset{r}{-} x_i^{(3)} \overset{b}{-} x''_i \overset{r}{-} z_i \overset{b}{-} y''_i \overset{r}{-} y_i^{(3)} \overset{b}{-} y'_i \overset{r}{-} y_i.$$

Enfin pour  $i = 1$ , nous avons

$$x_1 \overset{r}{-} x'_1 \overset{b}{-} z_1 \overset{r}{-} y'_1 \overset{b}{-} y_1.$$

Ceci contredit l'hypothèse de la propriété de maximalité de  $\Lambda$  et complète la preuve du théorème.  $\square$

Nous venons de faire la preuve de la Conjecture 3.2.2 avec  $c = 2$ . Cependant cette preuve est valable pour un nombre de couleurs  $c$  quelconque. Il suffira de considérer deux couleurs arbitraires parmi les  $c$  couleurs et de refaire la même démarche de preuve.

### 3.3 Conditions suffisantes sur le nombre d'arêtes

Dans ce paragraphe, nous proposons un résultat traitant uniquement les conditions suffisantes sur le nombre minimum d'arêtes pour garantir l'existence de la propriété du  $k$ -lié pour des multigraphes vérifiant ces conditions.

**Théorème 3.3.1.** *Soit  $G^c$  un multigraphe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n$ , de taille  $m$  et  $k$  un entier naturel non nul,  $n \geq 2k$ . Si  $m \geq c \frac{n(n-1)}{2} - c(n-2k+1) + 1$ , alors  $G^c$  est  $k$ -lié.*

**Preuve.** La preuve sera faite par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 2k$ , l'affirmation est vraie. En effet, dans ce cas particulier, il n'est pas difficile de voir que toutes les arêtes  $x_i y_i$  sont présentes dans  $G^c$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Le théorème est également vrai pour les petites valeurs de  $n$  et  $k$ . Nous allons fixer de façon arbitraire  $2k$  sommets distincts  $x_1, y_1, \dots, x_k, y_k$  in  $G^c$ .

D'abord, nous supposons que pour un entier  $i$  donné, par exemple  $i = 1$ , il existe une chaîne de longueur 1, entre  $x_1$  et  $y_1$  dans  $G^c$ . Considérons le graphe  $G' = G^c \setminus \{x_1, y_1\}$  contenant  $n - 2$  sommets. Ce graphe a au moins  $m - (2nc - 3c) = c \left( \frac{n^2 - 7n}{2} + 2k + 2 \right) + 1$  arêtes. Ainsi,  $G'$  est  $(k - 1)$ -lié par hypothèse d'induction. Donc nous pouvons trouver  $k - 1$  chaînes deux à deux sommet-disjointes entre chaque paire de sommets  $x_i, y_i$  dans  $G'$ ,  $i = 2, 3, \dots, k$ . Ces  $k - 1$  chaînes de  $G'$  avec l'arête  $x_1 y_1$  ensemble, définissent les  $k$  chaînes deux à deux sommet-disjointes dans  $G^c$ .

Supposons ensuite que pour un entier  $i$  donné, par exemple  $i = 1$ , il existe une chaîne proprement arête-coloriée longueur 2 entre  $x_1$  et  $y_1$  in  $G^c$ . Soit le sommet constitutif  $z$  de cette chaîne. Nous considérerons dans ce cas le graphe  $G' = G^c \setminus \{x_1, z, y_1\}$  ayant  $n - 3$  sommets. Il dispose au moins de  $m - [3c(n - 3) + 2c] = c \left[ \frac{n^2 - 9n}{2} + 2k + 6 \right] + 1$  arêtes, ainsi il est  $(k - 1)$ -lié par hypothèse de récurrence. Les  $k - 1$  chaînes de  $G'$  et la chaîne entre  $x_1$  et  $y_1$  passant par  $z$  définissent de nouveau les  $k$  chaînes deux à deux sommet-disjointes dans  $G^c$ .

Enfin, supposons que pour chaque entier  $i = 1, 2, \dots, k$ , il n'existe pas entre  $x_i$  et  $y_i$  de chaîne de longueur au plus deux dans  $G^c$ . Ainsi, il manque  $c$  arêtes dans  $G^c$  entre  $x_i$  et  $y_i$ , sinon une chaîne de longueur 1, pourrait être définie entre  $x_i$  et  $y_i$  dans  $G^c$ . De plus, pour chaque sommet  $z \notin \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , il y a au moins  $c$  arêtes manquantes entre  $z$  et

$\{x_i, y_i\}$  dans  $G^c$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . En faisant le décompte de ces arêtes manquantes pour une paire de sommets donnés  $x_i$  et  $y_i$ , nous obtenons  $c(n - 2k) + c$ . Donc pour les  $k$  paires de sommets, nous pouvons dire qu'au moins,  $kc(n - 2k + 1)$  arêtes sont manquantes dans  $G^c$ . Mais, le nombre d'arêtes de  $G^c$  est alors au plus  $c \frac{n(n-1)}{2} - kc(n - 2k + 1)$ . Pour  $k \geq 1$ , nous obtenons  $c \frac{n(n-1)}{2} - kc(n - 2k + 1) < c \frac{n(n-1)}{2} - c(n - 2k + 1) + 1$ , ce qui est une contradiction. Ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

Le théorème 3.3.1 ci-dessus est le meilleur possible en ce qui concerne la borne inférieure de la taille du multigraphe. En effet, il suffit de considérer un multigraphe  $c$ -arête-colorié avec  $n$  sommets,  $n \geq 2k \geq 2$ , construit comme suit. Considérons l'union disjointe d'un sommet isolé  $x_1$  et d'un multigraphe complet  $c$ -arête-colorié de  $n - 1$  sommets. Ensuite ajoutons toutes les arêtes possibles de toutes les couleurs possibles entre  $x_1$  et  $2k - 2$  sommets fixés, notés  $x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$ , du graphe. Le multigraphe résultant, malgré qu'il ait  $c \frac{n(n-1)}{2} - c(n - 2k + 1)$  arêtes, n'est pas  $k$ -lié. En fait, en choisissant un sommet  $y_1$  dans le graphe complet, autre que  $x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$ , on ne peut pas trouver  $k$  chaînes deux à deux sommet-disjointes, chacune pour une paire de sommets  $x_i$  et  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Car toute chaîne entre  $x_1$  et  $y_1$  passera par les sommets  $x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$ .

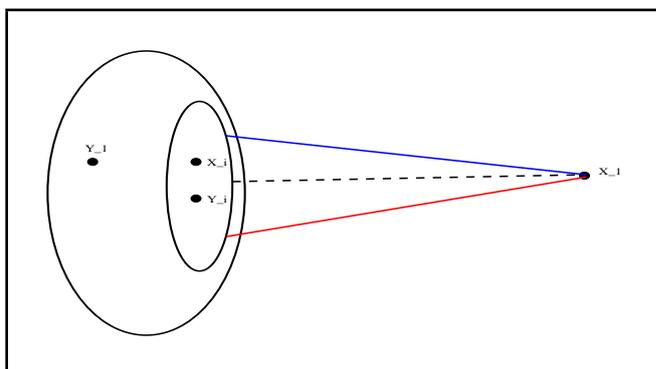


Figure 3.2: graphe extrémal sur le nombre d'arêtes

### 3.4 Conditions suffisantes mixtes sur le degré colorié et sur le nombre d'arêtes

Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresserons à la fois à la combinaison des deux critères suivants, à savoir, le degré colorié minimum et le nombre minimum d'arêtes, qui garantissent des conditions suffisantes pour un multigraphe donné, d'obtenir la propriété du  $k$ -lié.

De façon plus explicite, nous fixons le degré colorié minimum à la valeur de l'entier positif non nul  $r$ ,  $d^c(G^c) \geq r$ , pour  $k$ , un entier positif donné. Nous rechercherons la fonction  $f(n, r, k)$  qui représentera le nombre minimum d'arêtes suffisant pour garantir la propriété du  $k$ -lié. Ainsi la conjecture qui sera établie, aura la forme suivante :

**Conjecture 3.4.1.** *Soit  $G^c$  un multigraphe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n$  et de taille  $m$ ,  $r$  et  $k$  deux entiers strictement positifs. Si  $d^c(G^c) \geq r$  et  $m \geq f(n, r, k)$ , alors  $G^c$  est  $k$ -lié.*

Ainsi, nous allons nous atteler à la construction d'un graphe extrémal  $c$ -arête-colorié dont le degré colorié soit au moins le paramètre  $r$ . Cela veut dire que ce graphe, qui satisfait la condition du degré minimum colorié, aura un nombre maximal d'arêtes sans pour autant être  $k$ -lié. Pour ce faire, nous définissons un tel graphe qu'on nomme  $H^c(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$  (ou simplement  $H^c$ ), de la manière suivante :  $t_1, t_2, t_3, t_4$  et  $t_5$  désignent des entiers naturels strictement positifs. Nous considérons les cinq multigraphes  $c$ -arête-coloriés  $A_1, A_2, A_3, A_4$  et  $A_5$  d'ordres respectifs  $t_1, t_2, t_3, t_4$  et  $t_5$ . Les multigraphes  $A_1, A_2$  et  $A_5$  sont complets pour toutes les couleurs. Le graphe  $A_3$  (respectivement  $A_4$ ) est monochromatique et complet pour une couleur fixée, par exemple, rouge (respectivement bleue). Nous pouvons maintenant définir  $H^c$  comme étant l'union disjointe des multigraphes  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  en ajoutant toutes les arêtes possibles de toutes les couleurs entre  $A_5$  et

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ , toutes les arêtes bleues et rouges entre  $A_3$  et  $A_4$ , toutes les arêtes rouges entre  $A_1 \cup A_2$  et  $A_3$  et toutes les arêtes bleues entre  $A_1 \cup A_2$  et  $A_4$ .

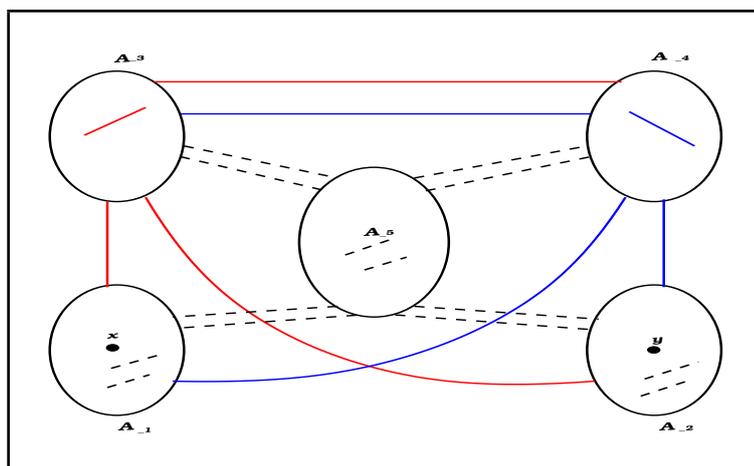


Figure 3.3: graphe extrémal général pour le cas mixte degré-arêtes

Ainsi le graphe  $H^c$  trouve son intérêt par rapport à l'intéressante propriété suivante :

**Propriété 3.4.2.** *Pour tout multigraphe  $c$ -arête-colorié  $H^c$ , toute chaîne simple entre un sommet  $x$  de  $A_1$  et un sommet  $y$  de  $A_2$ , si elle existe, passe nécessairement par  $A_5$*

**Preuve.** Il suffit de montrer qu'il n'existe pas de chaîne simple entre un sommet  $x$  de  $A_1$  et un sommet  $y$  de  $A_2$  dans le multigraphe  $H^c - A_5$ . Considérons le sommet  $x$  comme étant l'extrémité de départ de la chaîne souhaitée. Soit on va dans  $A_3$  avec une arête rouge, soit on passe dans  $A_4$  avec une arête bleue. Or une fois dans  $A_3$  (respectivement dans  $A_4$ ), on est obligé d'utiliser une arête bleue (respectivement rouge) et donc d'aller dans  $A_4$  avec une arête bleue (respectivement dans  $A_3$  avec une arête rouge). Ainsi, nous revenons à la situation de départ. D'où il est impossible d'atteindre l'ensemble  $A_2$  avec une chaîne simple.  $\square$

Cette propriété concerne les chaînes *simples*. Mais elle s'applique également pour les chaînes *élémentaires*, d'où le corollaire suivant, qui est exactement l'énoncé de la propriété, à l'exception du terme *simple* qui est remplacé par *élémentaire*.

**Corollaire 3.4.3.** *Pour tout multigraphe  $c$ -arête-colorié  $H^c$ , toute chaîne élémentaire entre un sommet  $x$  de  $A_1$  et un sommet  $y$  de  $A_2$ , si elle existe, passe nécessairement par  $A_5$*

L'intervalle de variation de  $r$  doit être géré avec parcimonie. En effet, dans le cas du problème  $k$ -lié, nous devrions avoir  $r < \frac{n}{2} + k - 1$ , étant donné que si  $r$  est supérieur ou égal à  $\frac{n}{2} + k - 1$ , alors le graphe est  $k$ -lié (voir Théorème 3.2.4). On aura également à bien gérer la borne inférieure de  $r$ . Compte tenu de ce qui précède, nous pouvons maintenant énoncer la conjecture suivante :

**Conjecture 3.4.4.** *Soit  $G^c$  un multigraphe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n$ , de taille  $m$ , et  $k, r$  deux entiers naturels strictement positifs. Supposons que pour tout sommet  $x$ ,  $d^c(x) \geq r$ ,  $2k - 1 \leq r \leq \frac{n}{2} + k - 2$ .*

*i) Si  $c = 2$ ,  $n \geq 6r - 10k + 14$ , et  $m \geq f_1(n, r, k) = n^2 - n(2r - 4k + 7) + (r - 2k + 2)(3r - 2k + 3) + 2(2r - 2k + 3) + 1$ ,*

*ii) Si  $c = 2$ ,  $n \leq 6r - 10k + 14$ , et  $m \geq f_2(n, r, k) = \frac{3n^2}{4} + n(k - \frac{5}{2}) - k(k - 3) + 11$ ,*

*iii) Si  $c \geq 3$  et  $m \geq f_3(n, r, k, c)$  avec*

$$f_3(n, r, k, c) = \frac{c}{2} [n^2 - n(2r - 4k + 7) + 2(r - 2k + 3)(r + 1)] + 1,$$

*alors  $G^c$  est  $k$ -lié.*

Si la conjecture 3.4.4 est vraie, alors elle est la meilleure possible. En effet, nous allons nous en rendre compte en utilisant les graphes extrémaux  $H^c$  suivants :

Pour le cas (i), nous considérons le graphe  $H^c(1, n + 2k - 2r - 3, r - 2k + 2, r - 2k + 2, 2k - 2)$  avec  $f_1(n, r, k) - 1$  arêtes. Nous choisirons ensuite  $k$

paires de sommets,  $x_1 \in A$ ,  $y_1 \in B$  et  $x_i, y_i \in E$ ,  $2 \leq i \leq k$ . Alors il n'y a pas de  $k$  chaînes deux à deux sommet-disjointes, chacune reliant une paire de sommets  $x_i, y_i$ , car toute chaîne entre  $x_1$  et  $y_1$  utilise les sommets de  $E$ . Cependant tous les sommets de  $E$  ont été déjà utilisés par les autres paires de sommets  $x_i, y_i$ ,  $i = 2, \dots, k$ .

Pour le cas (ii), nous considérons le graphe  $H^c(1, 1, \frac{n}{2} - k, \frac{n}{2} - k, 2k - 2)$ . Il a  $f_2(n, r, k) - 1$  arêtes. Cependant, comme dans le cas précédent, il n'y a pas  $k$  chaînes deux à deux sommet-disjointes proprement arête-coloriées, pour  $x_1 \in A$ ,  $y_1 \in B$  et  $x_i, y_i \in E$ , avec  $i = 2, \dots, k$ .

Enfin, pour le cas (iii), nous considérons le graphe  $H^c(r - 2k + 3, n - r - 1, 0, 0, 2k - 2)$  avec  $f_3(n, r, k, c) - 1$  arêtes. Une fois de plus, il n'y a pas  $k$  chaînes deux à deux sommet-disjointes proprement arête-coloriées,  $x_i, y_i$  pour  $x_1 \in A$ ,  $y_1 \in B$  et  $x_i, y_i \in E$ ,  $i = 2, \dots, k$ .

Dans la suite, nous allons prouver la conjecture 3.4.4 pour  $k = 1$  et  $r, c$  non fixés.

Les trois types de graphes extrémaux sont illustrés par les figures suivantes.

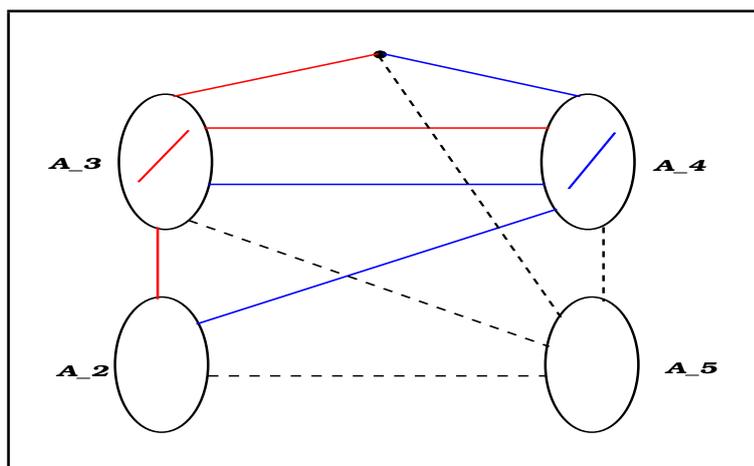


Figure 3.4: graphe extrémal pour le cas mixte  $H^c(1, n + 2k - 2r - 3, r - 2k + 2, r - 2k + 2, 2k - 2)$

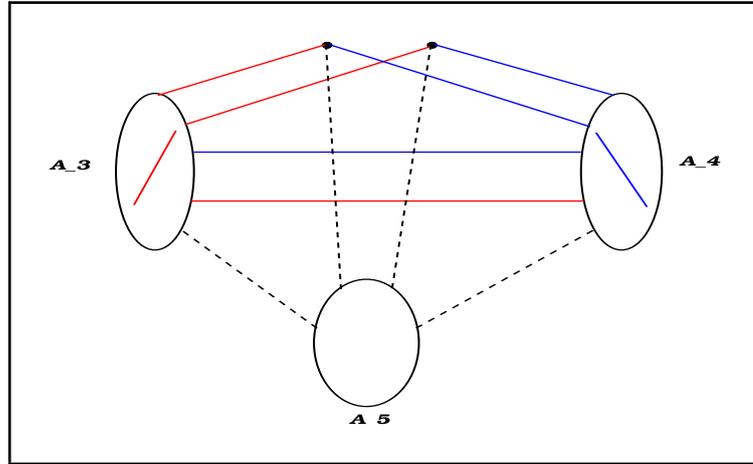


Figure 3.5: graphe extrémal pour le cas mixte  $H^c(1, 1, \frac{n}{2} - k, \frac{n}{2} - k, 2k - 2)$

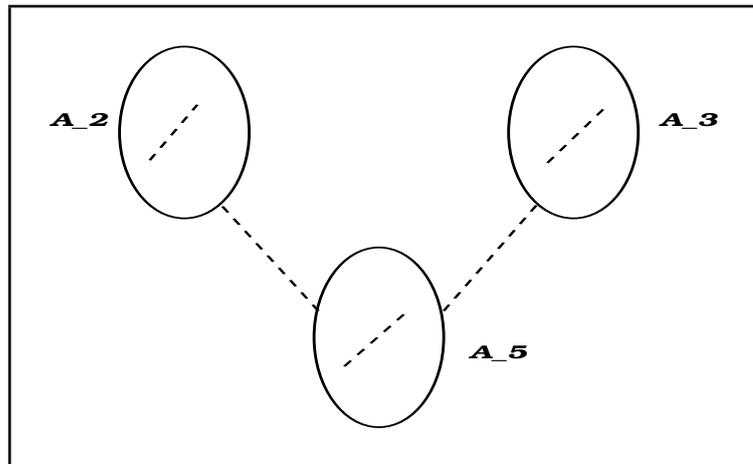


Figure 3.6: graphe extrémal pour le cas mixte  $H^c(r - 2k + 3, n - r - 1, 0, 0, 2k - 2)$

Mais pour des raisons pratiques, nous démontrerons les cas  $c = 2$ ,  $c = 3$  et  $c \geq 4$  séparément, dans les Théorèmes 3.4.5, 3.4.6, 3.4.7, respectivement.

**Théorème 3.4.5.** Soit  $G^c$  un multigraphe 2-arête-colorié d'ordre  $n$  et  $r$  un entier naturel strictement positif. Supposons que pour tout sommet  $x$ ,  $d^c(x) \geq r$ ,  $r \leq \frac{n}{2} - 1$ .

i) Si  $n \geq 6r + 4$  et  $m \geq n^2 - n(2r + 3) + 3r^2 + 5r + 3$ ,

ii) Si  $n \leq 6r + 4$  et  $m \geq \frac{3n^2}{4} - \frac{3n}{2} + 1$ , alors  $G^c$  est lié (1-lié).

**Preuve.** La preuve se fera par contradiction. Elle se déroulera en différentes étapes sous forme d'assertions. Supposons, quoique les conditions du théorème soient remplies, qu'il n'y ait pas de chaîne entre deux sommets quelconques  $x$  et  $y$  de  $G^c$ . Soit  $R$  une fonction calculant le nombre d'arêtes du graphe complémentaire de  $G^c$ . En d'autres termes,  $R$  représente le nombre d'arêtes à ajouter à  $G^c$  pour qu'il soit un multigraphe 2-arête-colorié complet d'ordre  $n$ . Évidemment, un multigraphe 2-arête-colorié complet de  $n$  sommets a  $n(n-1)$  arêtes. En considérant qu'il n'existe pas de chaîne entre  $x$  et  $y$ , il est alors suffisant de montrer que si  $n \geq 6r+4$  (respectivement  $n \leq 6r+4$ ), alors  $R$  est au moins égale à  $n(n-1) - [n^2 - n(2r+3) + 3r^2 + 5r + 2] = n(2r+2) - 3r^2 - 5r - 2$  (respectivement  $n(n-1) - [\frac{3n^2}{4} - \frac{3n}{2}] = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}$ ). Cela constitue une contradiction avec le nombre d'arêtes de  $G^c$ .

Considérons les quatre sous-ensembles suivants  $A^r, A^b, C, D$  de  $V(G^c)$  tel que :

- pour chaque  $z \in A^r$ , il y a une chaîne de  $x$  à  $z$  se terminant par une arête rouge et il n'y aucune chaîne de  $x$  à  $z$  se terminant par une arête bleue dans  $G^c$ .
- pour chaque  $z \in A^b$ , il y a une chaîne de  $x$  à  $z$  se terminant par une arête bleue et il n'y aucune chaîne de  $x$  à  $z$  se terminant par une arête rouge dans  $G^c$ .
- pour chaque  $z \in C$ , il y a au moins deux chaînes (pas nécessairement disjointes) de  $x$  à  $z$  dans  $G^c$ , la première chaîne se terminant par une arête rouge et la seconde par une arête bleue.
- $D = V(G^c) - (A^r \cup A^b \cup C \cup \{x\})$

D'après les définitions précédentes, les deux Assertions suivantes numérotées 1 et 2 sont évidentes.

**Assertion 1.** Il n'y a aucune arête bleue entre  $x$  et  $A^r$ , ni aucune arête rouge entre  $x$  et  $A^b$ .

**Assertion 2.** Il n'y a aucune arête entre  $D$  et  $C \cup \{x\}$ , ni aucune arête bleue entre  $D$  et  $A^r$ , ni aucune arête rouge entre  $D$  et  $A^b$ .

**Assertion 3.** Il n'y a pas d'arête bleue dans  $A^r$  et par symétrie il n'y a pas d'arête rouge dans  $A^b$ .

**Preuve.** Supposons qu'il y a une arête bleue, par exemple  $uv$ , dans  $A^r$ . On considère la chaîne  $P$  proprement arête-coloriée de  $x$  à  $u$  telle que la dernière arête de cette chaîne est rouge. Nous allons supposer que  $v$  n'est pas un sommet interne de  $P$ , sinon nous pourrions considérer  $v$  en lieu et place de  $u$  et alors considérer le segment de  $P$  entre  $x$  et  $v$  à la place de  $P$ . Ainsi la chaîne  $P \cup uv$  relie  $x$  à  $v$  dans  $G^c$  et sa dernière arête  $uv$  est bleue. Donc on conclut que le sommet  $v \in C$ , ce qui est une contradiction car  $A^r$  et  $C$  sont sommet-disjoints par définition.  $\square$

**Assertion 4.** Pour tout sommet  $z \in C$ , il y a au plus une arête bleue, que l'on note par exemple  $zu$ , entre  $z$  et  $A^r$  et si cette unique arête  $zu$  existe dans  $G^c$ , alors il n'y a pas d'arête rouge  $zx$  dans  $G^c$ .

**Preuve.** Supposons par contradiction qu'il existe au moins deux arêtes bleues, notées  $zu$  et  $zv$  dans  $G^c$   $u, v \in A^r$ . Considérons également une chaîne  $P$  de  $x$  à  $z$  dont la dernière arête est rouge. Trivialement, une telle chaîne existe dans  $G^c$ , d'après la définition de  $C$ . Si  $u$  n'est pas dans cette chaîne, alors le sommet  $u \in C$ , car  $P \cup zu$  définit une chaîne de  $x$  à  $u$  dont la dernière arête est bleue, ce qui contredit les définitions de  $A^r$  et  $C$ . Des arguments similaires demeurent si nous considérons le sommet  $v$  au

lieu du sommet  $u$ . Par conséquent, nous concluons que les deux sommets  $u$  et  $v$  appartiennent à  $P$ . Soit  $u^-$  (respectivement  $u^+$ ) le sommet désignant le prédécesseur (respectivement le successeur) de  $u$ , quand on parcourt la chaîne  $P$  du sommet  $x$  au sommet  $z$ . De façon analogue, nous définissons  $v^-$  et  $v^+$  et  $z^-$ . Comme  $u$  et  $v$  sont tous les deux, des sommets de  $A^r$ , les arêtes  $u^-u$  et  $v^-v$  sont toutes deux rouges. De plus, comme  $P$  est une chaîne proprement arête-coloriée, il s'ensuit que les deux arêtes  $uu^+$  et  $vv^+$  sont bleues. En considérant, à présent, la chaîne  $x \cdots u^-uzz^- \cdots v^-v$  entre  $x$  et  $v$ , nous concluons que le sommet  $v \in C$ , ce qui est une contradiction par rapport aux définitions de  $A^r$  et  $C$ . Ceci prouve qu'il existe au plus une arête entre chaque sommet  $z \in C$  et  $A^r$ . Il reste maintenant à prouver que si pour un sommet  $z \in C$ , cette unique arête, notée  $zu$ ,  $u \in A^r$  existe dans  $G^c$ , alors l'arête  $zx$  (si elle existe) n'est pas de couleur rouge. Supposons donc qu'une arête rouge  $xz$  existe dans  $G^c$ . Mais la chaîne  $x \overset{r}{-} z \overset{b}{-} u$  existe bel et bien dans  $G^c$  et sa dernière arête est bleue. Ainsi le sommet  $u \in C$ , ce qui est encore une contradiction, car  $A^r$  et  $C$  sont sommet-disjoints par définition. Ceci termine la preuve de l'assertion.  $\square$

**Assertion 5.** Pour tout sommet  $z \in C$ , il existe au plus une arête rouge entre  $z$  et  $A^b$  et si cette arête existe dans  $G^c$ , alors l'arête  $zx$  (si elle existe), n'est pas bleue.

**Preuve.** La preuve est similaire à celle de l'assertion précédente.  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer  $R$ . Posons  $\|A^r\| = a_r$ ,  $\|A^b\| = a_b$ ,  $\|C\| = c$  et  $\|D\| = d$ . On vérifie aisément l'égalité  $a_r + a_b + c + d = n - 1$ . Alors on a :

$$\begin{aligned} R &= a_r + a_b + 2d(c + 1) + d(a_r + a_b) + \frac{a_r(a_r - 1)}{2} + \frac{a_b(a_b - 1)}{2} + c(a_r + a_b) \\ &= 2d(c + 1) + (d + c + 1)(a_r + a_b) + \frac{a_r^2 + a_b^2}{2} - \frac{a_r + a_b}{2} \end{aligned}$$

$$= 2d(c+1) + (d+c+\frac{1}{2})(a_r+a_b) + \frac{(a_r+a_b)^2}{2} - a_r a_b.$$

Nous avons besoin de minimiser  $R$ . Nous allons d'abord fixer  $a_r + a_b$ . Nous posons  $a_r + a_b = a$  et considérons  $a_r = a_b = \frac{a}{2}$ . Alors nous avons

$$R = 2d(c+1) + a(d+c+\frac{1}{2}) + \frac{a^2}{4}$$

Comme  $a$  est fixé, alors  $d+c$  est également fixe, car  $a+c+d+1=n$ . Nous distinguerons deux cas qui dépendent de  $a$  et de  $r$ .

**Premier cas**  $a \geq 2r$

Pour  $c=0$  et  $d=n-1-a$ , nous obtenons

$$R = 2(n-1-a) + a(n-a-\frac{1}{2}) + \frac{a^2}{4} = -\frac{3a^2}{4} + a(n-\frac{5}{2}) + 2(n-1)$$

Si nous considérons  $R$  comme une fonction de  $a$ , alors les valeurs minimum de la fonction  $R$  sont obtenues pour  $a=2r$  ou pour  $a=n-2$ . En particulier, on a  $R(2r) = 2n(r+1) - 3r^2 - 5r - 2$  et  $R(n-2) = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}$ . En comparant  $R(2r)$  et  $R(n-2)$ , on se rend bien compte que pour  $n \geq 6r+4$ , on a l'inégalité  $R(2r) \geq R(n-2)$ . Sinon, si  $n \leq 6r+4$ , on a alors  $R(n-2) \geq R(2r)$ . Ce qui est en contradiction avec le nombre d'arêtes de  $G^c$  et partant, la preuve de ce cas est établie.

**Second cas**  $a < 2r$

Dans ce second cas, nous considérons  $c=r-\frac{a}{2}$  et  $d=n-r-\frac{a}{2}-1$ . Pour ces valeurs particulières de  $c$  et de  $d$ , nous obtenons,

$$R = 2(n-r-\frac{a}{2}-1)(r-\frac{a}{2}+1) + a(n-a-\frac{1}{2}) + \frac{a^2}{4} = -\frac{a^2}{4} - \frac{a}{2} + 2n(r+1) - 2(r+1)^2$$

Si nous considérons  $R$  comme une fonction de  $a$ , nous pouvons voir que les valeurs minimum de  $R$  sont obtenues pour  $a=2r-1$  ou  $a=2$ . De plus, on a  $R(2r-1) = 2n(r+1) - 2(r+1)^2 - 2$  et  $R(2) = 2n(r+1) - 3r^2 - 4r - \frac{7}{4}$ .

Comme chacune des deux valeurs est plus grande que  $n(2r+2) - 3r^2 - 5r - 2$ , cela contredit l'hypothèse sur le nombre d'arêtes de  $G^c$  et complète la preuve de ce cas et du théorème.  $\square$

**Théorème 3.4.6.** *Soit  $G^c$  un multigraphe 3-arête-colorié d'ordre  $n$  et  $r$  un entier naturel strictement positif. Supposons que pour tout sommet  $x$ ,  $d^c(x) \geq r$ ,  $r \leq \frac{n}{2} - 1$ . Si  $m \geq \frac{3}{2}[n^2 - n(2r+3) + 2r(r+2) + 2] + 1$ , alors  $G^c$  est lié.*

**Preuve.** Cette preuve également, se fera par contradiction et comportera différentes étapes sous forme d'assertions. Soient  $x$  et  $y$  deux sommets de  $G^c$ . Supposons qu'il n'existe aucune chaîne proprement arête-coloriée entre  $x$  et  $y$ . Comme pour le précédent théorème, nous allons considérer la fonction  $R$  pour le calcul du nombre d'arêtes du graphe complémentaire de  $G^c$ . De façon également triviale, le nombre d'arêtes d'un multigraphe 3-arête-colorié complet d'ordre  $n$  est  $3\frac{n(n-1)}{2}$ . On pose  $\lambda = 3\frac{n(n-1)}{2} - \frac{3}{2}[n^2 - n(2r+3) + 2r(r+2) + 2] = 3n(r+1) - 3r(r+2) - 3$ . Afin d'obtenir une contradiction, à travers l'hypothèse de non existence de chaîne entre  $x$  et  $y$ , il suffira de montrer que la fonction  $R$  est minorée par  $\lambda$ ,  $R \geq \lambda$ . Nous définissons également les cinq sous-ensembles  $A^i$ ,  $D$ ,  $E$  de  $V(G^c)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , tel que :

- Pour tout sommet  $z \in A^i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , il existe une chaîne de  $x$  à  $z$  se terminant par une arête de couleur  $i$  et il n'existe pas de chaîne de  $x$  à  $z$  se terminant par une arête de couleur différente de  $i$ .
- Pour tout sommet  $z \in D$ , il existe au moins deux chaînes (pas nécessairement disjointes) de  $x$  à  $z$ , la première se terminant par une arête de couleur  $i$  et la seconde par une arête de couleur  $j$ ,  $1 \leq j \neq i \leq 3$ .
- $E = V(G^c) - ((\cup_{1 \leq i \leq 3} A^i) \cup D \cup \{x\})$

D'après les définitions précédentes, les trois Assertions 1, 2, et 3 ci-dessous sont triviales.

**Assertion 1.** Pour tout entier  $i = 1, 2, 3$ , il n'existe pas d'arête de couleur  $j$  entre  $x$  et  $A^i$ ,  $1 \leq j \neq i \leq 3$ .

**Assertion 2.** Il n'existe pas d'arête entre  $E$  et  $D \cup \{x\}$ .

**Assertion 3.** Pour tout entier  $i = 1, 2, 3$ , il n'existe pas d'arête de couleur  $j$  entre  $E$  et  $A^i$ ,  $1 \leq j \neq i \leq 3$ .

**Assertion 4.** Pour tout entier  $i = 1, 2, 3$ , il n'existe pas d'arête de couleur  $j$  dans  $A^i$ ,  $1 \leq j \neq i \leq 3$ .

**Preuve.** Supposons qu'il existe une arête  $uv$  dans  $A^i$  de couleur  $j$ ,  $1 \leq j \neq i \leq 3$ . Nous notons par  $P$  une chaîne proprement arête-coloriée de  $x$  à  $u$  dans  $G^c$ . Nous allons supposer que le sommet  $v$  n'appartient pas à  $P$ , sinon, nous intervertissons  $u$  et  $v$  et, à la place de  $P$ , on considère le segment de  $P$  de  $x$  à  $v$ . En outre, la couleur de la dernière arête de  $P$  est  $i$ . Cependant on devrait conclure que la chaîne  $P \cup uv$  existe dans  $G^c$  et sa dernière arête est de couleur  $j$ . Donc on aboutit à la conclusion que le sommet  $v \in C$ , en contredisant les définitions de  $A$  et  $C$ .  $\square$

**Assertion 5.** Pour tous entiers  $i$  et  $j$ ,  $1 \leq i \neq j \leq 3$ , il n'existe pas d'arête de couleur  $l$  entre  $A^i$  et  $A^j$ ,  $l \neq i$  et  $l \neq j$ .

**Preuve.** Supposons qu'il existe une arête, notée  $uv$ , de couleur  $l$  entre  $A$  et  $A^j$ ,  $u \in A^i$  et  $v \in A^j$ ,  $l \neq i, j$ . On note par  $P$  une chaîne proprement arête-coloriée entre  $x$  et  $u$ . Sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer que le sommet  $v$  n'appartient pas à  $P$ , sinon, comme l'assertion précédente, nous pourrions permuter les sommets  $u$  et  $v$ . De plus, la couleur de la dernière arête de  $P$  est  $i$ . Dans ce cas, en considérant la chaîne  $P \cup uv$ , nous pouvons conclure que le sommet  $v \in C$ . Cela contredit les définitions de  $A^j$  et  $C$ .  $\square$

**Assertion 6.** Pour tout sommet  $z \in D$  et pour tout entier  $i = 1, 2, 3$ , il existe au plus une arête de couleur  $i$ , entre  $z$  et  $\cup_{j \neq i} A^j$ . De plus, si cette unique arête entre  $z$  et  $\cup_{j \neq i} A^j$  existe, alors il n'existe pas d'arête  $zx$  de couleur  $j$  dans  $G^c$ ,  $j \neq i$ .

**Preuve.** Supposons par contradiction qu'il existe deux arêtes distinctes, notées  $zu$  et  $zv$ , toutes les deux de couleur  $i$  entre  $z$  et  $\cup_{j \neq i} A^j$ ,  $u, v \in \cup_{j \neq i} A^j$ . Par la définition de  $D$ , il existe une chaîne, que nous notons  $P$ , de  $x$  à  $z$  dont la dernière arête est de couleur  $l$ ,  $l \neq i$ . Si le sommet  $u$  n'est pas dans  $P$ , alors  $u \in D$ , car  $P \cup zu$  est une chaîne de  $G^c$  reliant  $x$  à  $u$ . Des arguments similaires resteront valables pour le sommet  $v$ . Par conséquent, dans ce qui suit, nous allons supposer que les deux sommets  $u$  et  $v$  appartiennent ensemble à  $P$ . Nous supposons sans perte de généralité que le sommet  $u$  vient avant le sommet  $v$  lorsque nous parcourons la chaîne  $P$  du sommet  $x$  au sommet  $z$ . Soit  $u^-$  (respectivement  $u^+$ ) le prédécesseur (respectivement le successeur) de  $u$ . De la même façon, on définit  $v^-$  et  $v^+$  et  $z^-$ . Soit  $q$  (respectivement  $q'$ ) la couleur de l'arête  $u^-u$  (respectivement  $v^-v$ ). Comme  $u$  et  $v$  sont tous deux des sommets de  $\cup_{j \neq i} A^j$ , on a  $q \neq i$  et  $q' \neq i$ . De plus, puisque la chaîne  $P$  est proprement arête-coloriée, la couleur de l'arête  $vv^+$  est différente de  $q'$ . En considérant maintenant la chaîne  $x \cdots u^-uzz^- \cdots v^-v$  entre  $x$  et  $v$ , nous concluons que le sommet  $v \in D$ , ce qui est une contradiction aux définitions de  $A^j$ ,  $j \neq i$  et de  $D$ . Cela prouve qu'il existe au plus une arête entre chaque sommet  $z \in D$  et  $\cup_{j \neq i} A^j$ . Il reste à montrer que si pour un sommet  $z \in D$ , cette unique arête, notée  $zu$ ,  $u \in \cup_{j \neq i} A^j$  existe dans  $G^c$ , alors l'arête  $zx$  (si elle existe) n'est pas de couleur  $j$ ,  $j \neq i$ . Supposons donc qu'une arête  $xz$  de couleur  $j$  existe dans  $G^c$ . Cependant la chaîne  $x \overset{j}{-} z \overset{i}{-} u$  existe bien dans  $G^c$  et sa dernière arête est de couleur  $i$ . D'où on obtient l'appartenance du sommet  $u$  à  $D$ , ce qui constitue encore une contradiction, car  $\cup_{j \neq i} A^j$  et  $D$  sont sommet-disjoints par définition. Ainsi la preuve de cette assertion se

termine. □

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer  $R$ . Nous posons  $\|A^i\| = a_i$ ,  $\|D\| = d$  et  $\|E\| = e$ . De façon triviale, on a aussi  $\sum_{i=1}^3 a_i + d + e + 1 = n$ . Ainsi elle vaut,

$$R = 2 \sum_{i=1}^3 a_i + 3e(d+1) + 2e \sum_{i=1}^3 a_i + 2 \sum_{i=1}^3 \frac{a_i(a_i-1)}{2} + 2d \sum_{i=1}^3 a_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} a_i a_j,$$

c'est-à-dire,

$$R = 3e(d+1) + 2\left(e+d+\frac{1}{2}\right) \sum_{i=1}^3 a_i + 2 \sum_{i=1}^3 \frac{a_i^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} a_i a_j.$$

Posons  $\sum_{i=1}^3 a_i = a$ . Afin de minimiser  $R$ , avec  $a$  fixé, nous devons considérer  $a_i = \frac{a}{3}$ , pour tout entier  $i = 1, 2, 3$ . Pour ces valeurs particulières de  $a_i$ , nous obtenons

$$R = 3e(d+1) + 2a\left(e+d+\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}a^2$$

Comme  $a$  est fixé, nous pouvons supposer que  $d+e$  est aussi fixe, car  $a+d+e+1=n$ . Nous distinguerons trois cas qui dépendent de  $n$ ,  $r$  et  $a$ .

**Premier cas**  $n \geq 3r+2$  et  $a \geq 3r$ .

En choisissant  $d=0$  et  $e=n-1-a$ , nous obtenons,

$$R = 3(n-a-1) + 2a\left(n-a-\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}a^2 = -a^2\frac{4}{3} + a\left(2\left(n-\frac{1}{2}\right) - 3\right) + 3(n-1)$$

Si nous considérons  $R$  comme une fonction de variable  $a$ , nous pouvons voir que les valeurs minimum de  $R$  sont obtenues pour  $a=3r$  ou  $a=n-2$ . En particulier,  $R(n-2) = \frac{2}{3}n^2 + \frac{1}{3}n - \frac{1}{3}$  et  $R(3r) = -12r^2 + 3r\left(2\left(n-\frac{1}{2}\right) - 3\right) + 3(n-1) = 3n(2r+1) - 12r(r+1) - 3$ . Il suffit de montrer que  $R(n-2) - \lambda \geq 0$  et  $R(3r) - \lambda \geq 0$ . Cependant,  $R(n-2) - \lambda = \frac{2}{3}n^2 - \left(3r + \frac{8}{3}\right)n + 3r(r+2) + \frac{8}{3}$ .

Il est facile de voir que  $R(n-2) - \lambda \geq 0$ , si  $n \geq 3r+2$ . Similairement, pour  $n \geq 3r+2$ , on a  $R(a=3r) - \lambda = 3nr - 9r^2 - 6r \geq 0$ . Ainsi prend fin la preuve de ce cas.

**Second cas**  $n \geq 3r+2$  et  $a < 3r$

Pour  $d = r - \frac{a}{3}$  et  $e = n - r - \frac{2a}{3} - 1$ , on obtient

$$R = 3(n - r - a\frac{2}{3} - 1)(r - \frac{a}{3} + 1) + 2a(n - a - \frac{1}{2}) + \frac{2}{3}a^2$$

$$R = -\frac{2}{3}a^2 + a(n - r - 2) + 3n(r + 1) - 3(r + 1)^2$$

Nous pouvons voir que  $R$  atteint sa valeur minimum pour  $a = 0$  ou  $a = 3r$ .

De plus, on a  $R(0) = \lambda = 3(n - r - 1)(r + 1) = 3n(r + 1) - 3r(r + 2) - 3$ .

Nous allons à présent vérifier que  $R(3r) \geq R(0)$ . En effet,

$$R(3r) - R(0) = (n - 2)(\frac{n}{3} - r - \frac{2}{3})$$

Puisque  $n \geq 3r+2 \geq 2$ , il s'ensuit que  $R(3r) - R(0) \geq 0$ . Ainsi la preuve de ce second cas est complète.

**Troisième cas**  $n < 3r+2$ .

Par les hypothèses du théorème, on a  $n \geq 2r+2$ . Posons  $n = 3r+2 - \epsilon$  où  $\epsilon$  est un entier naturel strictement positif,  $0 < \epsilon \leq r$ . On a clairement l'égalité suivante  $a + d + e + 1 = 3r+2 - \epsilon = n$ . Afin de maximiser  $a$ , nous prenons  $a = 3(r - \epsilon)$ ,  $d = \epsilon$ ,  $e = \epsilon + 1$ . Cependant, pour  $d = r - \frac{a}{3}$ ,  $e = n - r - \frac{2a}{3} - 1$  et pour tout  $a < 3(r - \epsilon)$ , nous avons

$$R = 3(2r - \epsilon - \frac{2a}{3} + 1)(r - \frac{a}{3} + 1) + 2a(3r - \epsilon - a + \frac{3}{2}) + \frac{2}{3}a^2$$

$$R = -\frac{2}{3}a^2 + (2r - \epsilon)a + 3(2r^2 + 3r - \epsilon r - \epsilon + 1) f(\epsilon, r) + g(\epsilon, r)$$

Les valeurs minimum de  $R$  sont obtenues pour  $a = 0$  ou  $a = 3(r - \epsilon)$ .

En particulier,  $R(0) = 3(2r - \epsilon + 1)(r + 1) = 3[2r^2 + (3 - \epsilon)r + 1 - \epsilon]$  et

$R(3r-3\epsilon) = 3(2r^2 + 3r - \epsilon + 1 - \epsilon^2)$ . Mais on a  $R(3r-3\epsilon) - R(0) = 3\epsilon(r - \epsilon) \geq 0$ .

Ainsi prend fin la preuve de ce troisième et dernier cas en même temps que celle du théorème.  $\square$

Les précédents résultats concernaient au plus trois couleurs. Nous allons énoncer le théorème suivant qui traite plus de trois couleurs.

**Théorème 3.4.7.** *Soit  $G^c$  un multigraphe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n$ ,  $c > 3$  et un entier  $r \geq 1$ . Supposons que pour tout sommet  $x$ , on a  $d^c(x) \geq r$ ,  $1 \leq r \leq \frac{n}{2} - 1$ . Si  $m \geq \frac{c}{2} [n^2 - n(2r + 3) + 2r(r + 2) + 2] + 1$ , alors  $G^c$  est lié.*

**Preuve.** On fera une preuve par l'absurde. Soient  $x$  et  $y$  deux sommets de  $G^c$ . Supposons qu'il n'existe pas de chaîne entre  $x$  et  $y$  dans  $G^c$ . On considère la fonction  $R$  pour compter le nombre d'arêtes du graphe complémentaire de  $G^c$ . Le but principal est de montrer que  $R \geq c(n(r + 1) - r(r + 2) - 1)$  ce qui constituera une contradiction avec  $m$ . Puisqu'il n'existe pas de chaîne entre  $x$  et  $y$  dans  $G^c$ , nous allons supposer qu'il n'existe pas non plus de chaîne entre  $x$  et  $y$  dans le sous-graphe  $G_i^c$  de  $G^c$  qui contient les arêtes de couleurs  $i, i + 1$  et  $i + 2$  (*modulo*  $c$ ) de  $G^c$ , pour toute couleur fixée  $i = 1, 2, \dots, c$ . Comme pour  $R$ , nous définissons  $R_i$  pour chaque sous-graphe  $G_i^c$ . On a alors  $R_i \geq \frac{3}{2}(n(r + 1) - r(r + 2) - 1)$ . On a donc  $R = \frac{c}{3}R_i \geq c(n(r + 1) - r(r + 2) - 1)$ , car chaque couleur est utilisée trois fois. Ainsi cette preuve du théorème prend fin.  $\square$

# Chapitre 4

## Chaînes $k$ -arête-liées

Nous allons aborder, dans cette partie, l'étude des chaînes  $k$ -arête-liées. Dans un premier temps, cette étude sera orientée sur les conditions suffisantes d'existence de la propriété du  $k$ -arête-lié, en ce qui concerne le degré colorié. Ensuite, elle portera sur les conditions suffisantes sur le nombre d'arêtes pour garantir l'existence de la propriété du  $k$ -lié pour un multigraphe vérifiant ces dites conditions. Les conditions suffisantes sur le nombre d'arêtes sont souvent mixées avec des conditions sur le degré colorié.

### 4.1 Conditions suffisantes sur le degré colorié

Comme précédemment, nous procéderons à la recherche de graphe extrémal afin d'établir une conjecture autour de laquelle, nous devrions trouver quelques résultats. Ainsi, nous construirons un graphe  $c$ -arête-colorié  $G^c$  dont le degré colorié sera maximum, sans pour autant être  $k$ -arête-lié. Nous considérons le graphe défini comme suit : soient  $A$  et  $B$  deux multigraphes  $c$ -arête-coloriés, d'ordre  $\frac{n}{2}$ , complets pour toutes les couleurs. Nous définissons  $G^c$  comme étant l'union disjointe de ces deux ensembles  $A$  et  $B$ . Il en résulte alors que  $G^c$  a un degré colorié égal à  $\frac{n}{2} - 1$ , car tout sommet de  $A$  (respectivement  $B$ ) est uniquement relié à tous les autres sommets de  $A$  (respectivement  $B$ )

quelle que soit la couleur considérée. De plus, il est clair qu'un tel graphe n'est pas  $k$ -arête lié. Il suffit de prendre un sommet quelconque  $x_1$  dans  $A$  et un sommet quelconque  $y_1$  dans  $B$ , pour s'en rendre compte. C'est pour cette raison que la conjecture suivante semblait logique et légitime.

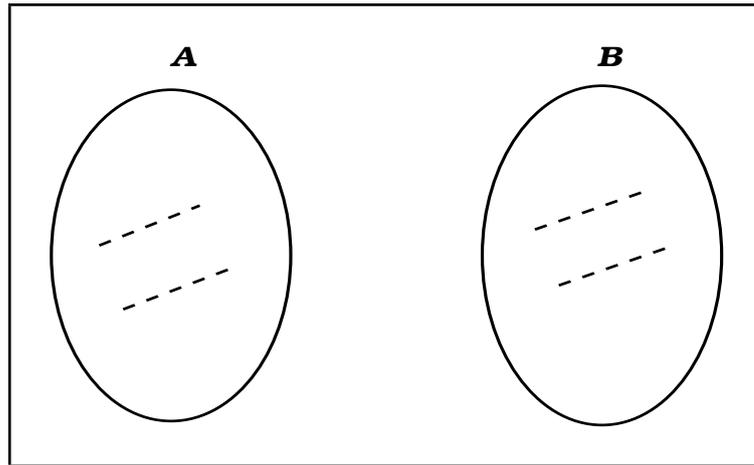


Figure 4.1: Maximalité du degré dans le cas  $k$ -arête-lié  $|A| = |B| = \frac{n}{2}$

**Conjecture 4.1.1.** Soit  $G^c$  un multigraphe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n$ , de taille  $m$  et  $k$  un entier naturel,  $k \leq \frac{n}{2}$ . Si  $d^c(G^c) \geq \frac{n}{2}$  alors  $G^c$  est  $k$ -arête-lié

Nous pouvons dire que cette conjecture est vraie, au vu des résultats que nous allons énoncer.

**Théorème 4.1.2.** Soit  $G^c$  un multigraphe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n$  et  $k$  un entier naturel non nul. Si pour tout sommet  $x$ ,  $d^c(x) \geq \frac{n}{2}$ , alors  $G^c$  est  $k$ -arête-lié

La preuve du théorème suivant, qui comportera plus de précisions, suffira comme preuve pour le Théorème 4.1.2.

**Théorème 4.1.3.** Soit  $G^c$  un multigraphe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n$  et  $k$  un entier naturel non nul. Si pour tout sommet  $x$ ,  $d^c(x) \geq \frac{n}{2}$ , alors pour toutes

$k$  paires de sommets de  $G^c$ ,  $x_1, y_1, \dots, x_k, y_k$ , il existe  $k$  chaînes élémentaires arête-disjointes de longueur au plus 2, reliant  $x_1$  à  $y_1, \dots, x_k$  à  $y_k$ .

Il suffit de faire la démonstration pour  $c = 2$ , c'est-à-dire, en utilisant seulement deux couleurs que nous choisirons rouge  $r$  et bleue  $b$ .

**Preuve.** Soient  $x_i, y_i, 1 \leq i \leq k$ ,  $2k$  sommets distincts de  $G^c$ . Supposons que pour un entier  $i$  donné, l'arête  $x_i y_i$  existe dans  $G^c$ . Alors cette arête en elle-même définit une chaîne entre  $x_i$  et  $y_i$ . Ce choix n'affectera pas le reste de la preuve car cette arête ne pourra pas être utilisée pour construire une chaîne de longueur deux pour une autre paire de sommets  $x_j, y_j, 1 \leq j \neq i \leq k$ . En effet, dans ce cas, la longueur d'une telle chaîne entre  $x_j, y_j$  passant par l'arête  $x_i y_i$  sera au moins trois.

Dans la suite, nous pouvons donc supposer qu'il n'y a pas d'arêtes  $x_i y_i$  dans  $E(G^c)$ , pour les entiers  $i = 1, 2, \dots, k$ . Pour fixer les idées, choisissons les deux couleurs comme étant  $r$  (rouge) et  $b$  (bleue). Comme  $d^r(x_i) \geq \frac{n}{2}$  et  $d^b(y_i) \geq \frac{n}{2}$ , il s'ensuit  $d^r(x_i) + d^b(y_i) \geq n$ , pour tout entier  $i = 1, \dots, k$ . Puisqu'il n'y a pas d'arête  $x_i y_i$ , nous pouvons trouver deux sommets distincts  $a_i, b_i$  in  $G^c$  tels que  $a_i \in N^r(x_i) \cap N^b(y_i)$  et  $b_i \in N^r(x_i) \cap N^b(y_i)$ . Si  $a_i \notin \{x_j, y_j, 1 \leq j \neq i \leq k\}$ , alors nous considérons la chaîne  $x_i \overset{r}{-} a_i \overset{b}{-} y_i$ . Ces deux arêtes  $x_i a_i$  et  $a_i y_i$  ne sont pas utilisées par les chaînes reliant les autres paires de sommets  $x_j, y_j, j \neq i$ , car on a supposé que la longueur des autres chaînes est au plus deux. Après le choix de telles chaînes, il suffit de construire des chaînes deux à deux arête-disjointes avec le reste des paires de sommets  $x_i, y_i$  tels que  $\{a_i, b_i, 1 \leq i \leq k\} \subset \{x_i, y_i, 1 \leq i \leq k\}$ .

Nous compléterons la preuve en montrant que, dans le pire des cas (qui est  $\{a_i, b_i, 1 \leq i \leq k\} \subset \{x_i, y_i, 1 \leq i \leq k\}$ ), nous pouvons construire  $k$  chaînes deux à deux arête-disjointes de longueur au plus deux, chacune pour une paire de sommets  $x_i, y_i$ , pour tout entier  $i = 1, \dots, k$ . Supposons donc que pour tous entiers  $i$  et  $j, 1 \leq j \neq i \leq k$ , nous avons  $x_j \in N^r(x_i) \cap N^b(y_i)$  ou

$y_j \in N^r(x_i) \cap N^b(y_i)$ . Maintenant, nous allons choisir et regrouper ensemble les chaînes proprement arête-coloriées de la forme  $x_i - x_{i+1} - y_i$  qui sont deux à deux arête-disjointes. Nous changeons l'ordre des paires de sommets  $x_q, y_q$  et permutons, si nécessaire,  $x_q$  et  $y_q$  et  $a_q$  avec  $b_q$  dans le but de rendre maximum le cardinal de chaque groupe. Soit  $d$  le cardinal du groupe maximal. Sans perte de généralité, ce groupe peut être considéré comme celui défini par  $x_1 - x_2 - y_1, \dots, x_d - x_{d+1} - y_d$  ( $d$  est considéré modulo  $k$ ). Si  $d = k$ , alors la preuve est finie car il y aura  $k$  chaînes deux à deux arête-disjointes de longueur au plus deux, chacune pour une paire de sommets  $x_i, y_i, i = 1, \dots, k$ , comme supposé. Sinon, nous utiliserons le même processus afin de trouver le prochain groupe maximal de chaînes deux à deux arête-disjointes pour le reste des paires de sommets  $x_i, y_i, i = d + 1, \dots, k$ . Cela est possible, car si  $a_i = x_j$ , avec  $i > d$  et  $j \leq d$ , alors nous pouvons considérer la chaîne  $x_i \overset{r}{-} x_j \overset{b}{-} y_i$ , qui utilise de nouvelles arêtes non encore utilisées par les groupes de chaînes définis précédemment. Ce processus est fini, car à chaque étape, le nombre de paires de sommets restants sans être reliés décroît strictement. Donc, à la fin du processus, nous aurons trouvé  $k$  chaînes deux à deux arête-disjointes de longueur au plus deux, chacune pour une paire de sommets  $x_i, y_i, i = 1, \dots, k$ . Ainsi la preuve de ce théorème prend fin.  $\square$

## 4.2 Conditions suffisantes mixtes sur le degré colorié et sur le nombre d'arêtes

Nous allons dans cette partie nous concentrer sur les conditions mixtes sur le degré minimum colorié et sur la taille minimale d'un multigraphe, suffisantes pour garantir la propriété du  $k$ -arête-lié. Les idées de base de la section 3.4 du Chapitre 2 resteront en vigueur, dans cette partie, en ce qui

concerne la recherche des conjectures. Il n'est pas inutile de rappeler qu'un multigraphe  $k$ -lié est clairement  $k$ -arête-lié. Sans plus tarder, nous allons formuler la conjecture suivante.

**Conjecture 4.2.1.** *Soit  $G^c$  un multigraphe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n$  et  $k$ ,  $r$  deux entiers naturels strictement positifs. Supposons que pour tout sommet  $x$ ,  $d^c(x) \geq r$ ,  $r \leq \frac{n}{2} - 1$ .*

*i) Si  $c = 2$ ,  $n \geq 6r + 4$  et  $m \geq g_1(n, k, r) = n^2 - n(2r + 3) + 3r^2 + 5r + 3$ ,*

*ii) Si  $c = 2$ ,  $n \leq 6r + 4$  et  $m \geq g_2(n, k, r) = \frac{3n^2}{4} - \frac{3n}{2} + 1$ ,*

*iii) Si  $c \geq 3$  et  $m \geq g_3(n, k, r, c) = \frac{c}{2} [n^2 - n(2r + 3) + 2r(r + 2) + 2] + \min(k - 1, r) + 1$ ,*

*alors  $G^c$  est  $k$ -arête-lié.*

Cette conjecture, si elle est vraie, est alors la meilleure possible en ce qui concerne la borne inférieure de la taille du multigraphe. Nous utiliserons pour la circonstance, les multigraphes  $H^c$  définis dans les pages précédentes. En effet :

Pour (i), nous considérons le multigraphe 2-arête-colorié  $H^c(1, n - 2r - 1, r, r, 0)$ . Malgré qu'il a  $g_1(n, k, r) - 1$  arêtes, le multigraphe  $H^c(1, n - 2r - 1, r, r, 0)$  n'est pas 1-arête-lié. En particulier, il n'existe pas de chaîne simple proprement arête-coloriée entre  $x_1$  et  $y_1$ , pour n'importe quel choix de sommets  $x_1 \in A$  et  $y_1 \in B$ .

Pour (ii), nous considérons le multigraphe 2-arête-colorié  $H^c(1, 1, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} - 1, 0)$  ayant  $g_2(n, k, r) - 1$  arêtes. Comme dans le cas (i) il n'existe pas de chaîne simple proprement arête-coloriée quelle que soit la paire de sommets  $x_1 \in A$ ,  $y_1 \in B$  ainsi choisie.

Enfin, pour (iii), nous considérons le multigraphe  $c$ -arête-colorié  $H^c(r + 1, n - r - 1, 0, 0, 0)$ . Si  $r + 1 \geq k$  alors nous ajoutons  $k - 1$  arêtes entre  $A$  et  $B$ . Nous considérons maintenant les sommets  $x_i \in A$  et  $y_i \in B$ ,  $1 \leq i \leq k$ , alors nous ne pourrions pas trouver  $k$  chaînes simples deux à deux arête-disjointes,

chacune reliant une seule paire de sommets  $x_i, y_i$ , car il y a au plus  $k - 1$  arêtes entre  $A$  et  $B$ . Ainsi  $H^c$  n'est pas  $k$ -arête-lié. Sinon, si  $r \leq k$ , alors nous ajoutons  $r$  arêtes entre  $A$  et  $B$ . Si nous sélectionnons  $x_i \in A$  et  $y_i \in B$ ,  $1 \leq i \leq r + 1$ , alors nous ne pourrions pas trouver  $r + 1$  chaînes simples deux à deux arête-disjointes, chacune reliant une seule paire de sommets  $x_i, y_i$ , car il y a au plus  $r$  arêtes entre  $A$  et  $B$ . Donc, quoique le multigraphe  $H^c$  a  $\frac{c[n^2 - n(2r + 3) + 2r(r + 2) + 2]}{2} + \min(k - 1, r)$  arêtes, il n'est pas  $(r + 1)$ -arête-lié pour  $r + 1 < k$ .

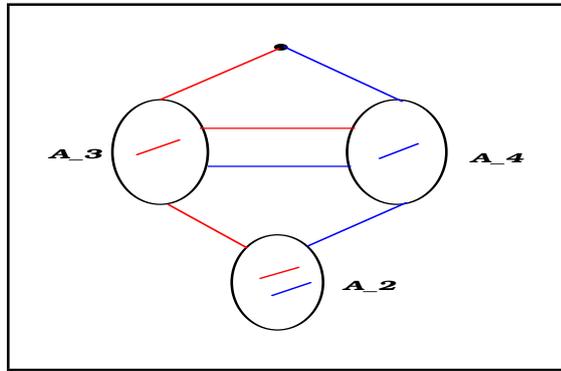


Figure 4.2: Maximalité du degré dans le cas  $k$ -arête-lié  $H^c(1, n - 2r - 1, r, 0)$

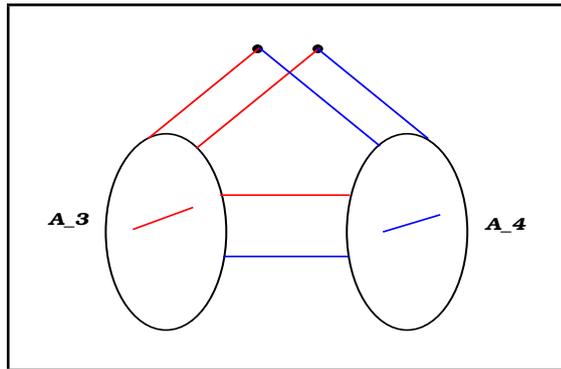


Figure 4.3: Cas mixte de non existence de chaîne 1-arête-lié  $H^c(1, 1, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} - 1, 0)$

On montrera à travers le Lemme 4.2.2, que la conjecture 4.2.1 ci-dessus, est vérifiée pour  $k = 1$  et pour les valeurs non fixées de  $r$  et  $c$ . Cette conjecture

restera également vraie pour les valeurs de  $r = 1$ ,  $c = 2$  et  $k$  non fixé, grâce au théorème 4.2.3 que nous allons énoncer et prouver un peu plus loin.

En vue de la démonstration du Théorème 4.2.3, nous allons prouver d'abord le lemme suivant.

**Lemme 4.2.2.** *Soit  $G^c$  un multigraphe 2-arête-colorié d'ordre  $n \geq 5$ . Supposons que pour tout sommet  $x$ ,  $d^c(x) \geq 1$ .*

i) *Si  $n \geq 10$ , et  $m \geq n^2 - 5n + 11$ ,*

ii) *Si  $n < 10$ , et  $m \geq \frac{3n^2}{4} - \frac{3n}{2} + 1$ ,*

*alors il existe une chaîne élémentaire propre arête-coloriée de longueur au plus quatre reliant deux sommets quelconques  $x$  et  $y$  de  $G^c$ .*

**Preuve.** Nous prouverons ce lemme par l'absurde. Soient  $x$  et  $y$  deux sommets fixés de  $G^c$ . Supposons qu'il n'existe pas de chaîne élémentaire proprement arête-coloriée de longueur au plus quatre entre  $x$  et  $y$ . Comme dans les théorèmes précédents, on note par  $R$  le nombre d'arêtes manquantes de  $G^c$ . Le fait que nous ne pouvons pas trouver de chaînes élémentaires entre  $x$  et  $y$  de longueur 1, 2, 3 et 4, donne une idée de comment on va déterminer  $R$ . Nous posons  $\lambda_1 = n(n-1) - [\frac{3n^2}{4} - \frac{3n}{2} + 1] = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} - 1$  et  $\lambda_2 = n(n-1) - [n^2 - 5n + 11] = 4n - 11$ . Posons également  $\alpha = \|N^b(x) \cap N^b(y)\|$  et  $\beta = \|N^r(x) \cap N^r(y)\|$ . Alors,

$$\begin{aligned} R &= 2 + (n-2-d^b(x)) + (n-2-d^r(x)) + (n-2-d^b(y)) + (n-2-d^r(y)) \\ &+ (d^b(x)-\alpha)(d^b(y)-\alpha) + \alpha(d^b(x)-\alpha) + \alpha(d^b(y)-\alpha) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \\ &+ (d^r(x)-\beta)(d^r(y)-\beta) + \beta(d^r(x)-\beta) + \beta(d^r(y)-\beta) + \frac{\beta(\beta-1)}{2} \\ &= 4n - 6 + f(d^b(x), d^b(y), \alpha) + g(d^r(x), d^r(y), \beta). \end{aligned}$$

Nous allons étudier deux cas qui dépendent des valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$  selon qu'ils soient nuls ou pas.

**Cas 1.**  $\alpha \neq 0$  et  $\beta \neq 0$

Afin de minimiser  $R$ , nous posons  $d^b(x) = d^b(y) = \alpha$  et  $d^r(x) = d^r(y) = \beta$ .

Ainsi

$$f(d^b(x), d^b(y), \alpha) = -2\alpha + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} = \frac{\alpha(\alpha - 5)}{2}$$

Comme  $\alpha + \beta \leq n - 2$  nous obtenons  $R = 4n - 6 + \frac{\alpha(\alpha - 5)}{2} + \frac{\beta(\beta - 5)}{2} = 4n - 6 + \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 5)}{2} - \alpha\beta$ .

Supposons d'abord que  $\alpha + \beta \leq 5$ . Nous pourrions simplement voir que  $R \geq 4n - 12$ , en utilisant toutes les différentes valeurs possibles de  $\alpha, \beta$ , qui sont,  $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3)$ . On pose  $R_{min} = 4n - 12$ .

La fonction  $\lambda_1 - R_{min} = \frac{n^2}{4} + \frac{7n}{2} + 11$  dispose de deux racines, notées  $n_1 = 7 - \sqrt{5}$  et  $n_2 = 7 + \sqrt{5}$ .

Donc, pour  $5 < n \leq 10$ , nous avons  $\lambda_1 < R_{min}$ , ce qui est une contradiction, car  $R_{min}$  devrait être plus petit que  $\lambda_1$ .

Supposons ensuite que  $\alpha + \beta > 5$ . En étudiant la fonction  $R(\alpha, \beta)$ , nous déduisons que  $R(\alpha, \beta) \geq R(3, 3)$ . Cela signifie que  $R(\alpha, \beta) \geq 4n - 12$ . Puisque  $n \geq 10$ , il existe au moins deux sommets différents  $z$  et  $z'$  qui ne sont pas dans  $N^b(y) \cup N^r(x) \cup N^b(x) \cup N^r(y) \cup \{x, y\}$ . Comme il n'existe pas de chaîne élémentaire proprement arête-coloriée de longueur 4 entre  $x$  et  $y$  dans  $G^c$ , nous déduisons que pour tout sommet  $u \in N^b(x)$  et pour tout sommet  $v \in N^r(y)$ , l'arête rouge  $uz$  (ou l'arête bleue  $zv$ ) est manquante dans  $G^c$ , sinon la chaîne élémentaire  $x \overset{b}{-} u \overset{r}{-} z \overset{b}{-} v \overset{r}{-} y$  (respectivement pour  $z'$ ) entre  $x$  et  $y$ , a une longueur égale à 4. Cela implique  $R(\alpha, \beta) \geq 4n - 10$ . Comme  $\lambda_2 = 4n - 11 < 4n - 10 \leq R(\alpha, \beta)$ , nous concluons que le nombre d'arêtes de  $G^c$  est au plus  $n^2 - 5n + 10$ , ce qui constitue une contradiction par rapport aux hypothèses du Cas (i).

**Cas 2.**  $\alpha = 0$  ou  $\beta = 0$

Nous supposons que  $\beta = 0$ . Alors on a  $R(\alpha) = 4n - 6 + \frac{\alpha(\alpha - 5)}{2}$ . On peut facilement voir que  $R(\alpha) \geq R(3) = 4n - 9$ . Puisque  $R(3) \geq \lambda_1$  et  $R(3) \geq \lambda_2$ ,

ceci est une contradiction à la fois pour les deux Cas (i) et (ii). Ainsi la preuve du lemme devient complète et prend fin.  $\square$

**Théorème 4.2.3.** *Soit  $G^c$  un multigraphe 2-arête-colorié et  $k$  un entier naturel strictement positif,  $n \geq 2k \geq 10$ . Supposons que pour tout sommet  $x$ ,  $d^c(x) \geq 1$ . Si  $m \geq n^2 - 5n + 11$ , alors  $G^c$  est  $k$ -arête-lié.*

**Preuve.** Soient  $2k$  sommets de  $G^c$ ,  $x_i$  et  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Nous allons essayer de trouver  $k$  chaînes élémentaires deux à deux arête-disjointes, chacune reliant une seule paire de sommets  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Grâce au lemme précédent, nous savons qu'il existe une chaîne élémentaire proprement arête-coloriée de longueur au plus quatre entre chaque paire de sommets  $x_i$  et  $y_i$ .

**Assertion.** Il existe au plus une paire de sommets  $x_i, y_i$  de sommets telle que la longueur de toute chaîne élémentaire entre  $x_i$  et  $y_i$  dans  $G^c$ , est plus grande que deux.

**Preuve.** Supposons par l'absurde qu'il existe au moins deux paires de sommets, par exemple  $x_1, y_1$  et  $x_2, y_2$ , telles que la longueur de toute chaîne élémentaire entre  $x_1$  et  $y_1$  (respectivement  $x_2$  et  $y_2$ ) est plus grande que deux. Alors, pour tout sommet  $z \in G^c - \{x_1, y_1\}$ , soit l'arête bleue  $x_1z$  est manquante, soit l'arête rouge  $y_1z$  est manquante dans  $G^c$ , sinon la chaîne élémentaire  $x_1 \overset{b}{-} z \overset{r}{-} y_1$  est de longueur deux entre  $x_1$  et  $y_1$ . De façon analogue, nous concluons que, soit l'arête rouge  $x_1z$  est manquante, soit l'arête bleue  $y_1z$  est manquante dans  $G^c$ . Des arguments similaires restent valides pour  $x_2$  et  $y_2$ . De plus, comme il n'existe pas de chaîne élémentaire de longueur 1 entre  $x_1$  et  $y_1$  (respectivement entre  $x_2$  et  $y_2$ ), alors il n'existe pas d'arête  $x_1y_1$  (respectivement  $x_2y_2$ ) dans  $G^c$ . En faisant maintenant la somme de toutes les arêtes manquantes, nous déduisons que  $G^c$  a moins de  $n(n-1) - [2(n-2) + 2(n-4) + 4] < n^2 - 5n + 11$  arêtes, ce qui est absurde.

Ainsi se termine la preuve de l'Assertion.  $\square$

D'après l'assertion précédente, pour au plus une paire de sommets  $x_i, y_i$ , il existe une chaîne élémentaire entre  $x_i$  et  $y_i$  de longueur plus grande que deux. En outre, d'après le lemme 4.2.2, la longueur d'une telle chaîne élémentaire est 3 ou 4.

Supposons dans un premier temps qu'il existe une chaîne élémentaire de longueur au plus deux entre  $x_i$  et  $y_i$  dans  $G^c$ , pour chaque  $i = 1, \dots, k$ . Pour tout entier  $i$ , posons  $Z^i = \{z_1^i, z_2^i, \dots, z_{p_i}^i\}$  comme l'ensemble des sommets de  $G^c$  tels qu'il existe une chaîne élémentaire entre  $x_i$  et  $y_i$  qui passe par un sommet de  $Z^i$ . En utilisant alors des arguments presque identiques à ceux de la preuve du théorème 4.1.2 (on remplace seulement  $\{a_i, b_i, 1 \leq i \leq k\}$  par  $Z^i = \{z_1^i, z_2^i, \dots, z_{p_i}^i\}$ ), nous allons trouver  $k$  chaînes élémentaires deux à deux arête-disjointes, comme souhaité.

Supposons ensuite que pour un entier  $1 \leq i \leq k$ , par exemple  $i = k$ , toute chaîne élémentaire entre  $x_k$  et  $y_k$  a une longueur 3 ou 4. D'après les arguments utilisés dans le cas précédent et dans la preuve du théorème 4.1.2, nous pouvons définir  $k - 1$  chaînes élémentaires deux à deux arête-disjointes pour les paires de sommets  $x_i, y_i, 1 \leq i \leq k - 1$ . Afin de compléter la preuve, il suffira de montrer à chaque fois qu'une chaîne élémentaire entre  $x_k$  et  $y_k$  partage une arête commune avec une chaîne élémentaire entre  $x_i$  et  $y_i, 1 \leq i \leq k - 1$ , alors on peut choisir, soit une autre chaîne élémentaire appropriée entre  $x_i$  et  $y_i$  ou une autre chaîne élémentaire appropriée entre  $x_k$  et  $y_k$ , dans le but d'obtenir ce qui est désiré, c'est-à-dire  $k$  chaînes élémentaires deux à deux arête-disjointes .

Supposons à nouveau que toute chaîne élémentaire entre  $x_k$  et  $y_k$  a une longueur 3. Comme il n'existe pas de chaîne élémentaire entre  $x_k$  et  $y_k$  de longueur au plus 2 dans  $G^c$ , et comme dans la preuve de l'assertion ci-dessus, nous pouvons conclure qu'il y a au moins  $2(n - 2) + 2$  arêtes manquantes dans

$G^c$ . Supposons d'abord que l'arête  $x_i y_i$  est l'arête commune entre la chaîne élémentaire reliant  $x_k$  à  $y_k$  et le reste de la chaîne élémentaire reliant les paires de sommets  $x_i, y_i, 1 \leq k \leq k-1$ . Alors  $\forall z \in G^c - \{x_k, x_i, x_{i-1}, y_k, y_i, y_{i-1}\}$ , aucune des  $(n-6)$  chaînes élémentaires  $x_i \overset{b}{-} z \overset{r}{-} y_i$  ou  $x_i \overset{r}{-} z \overset{b}{-} y_i$  de longueur deux, n'est présente dans  $G^c$ . De plus, une arête  $x_i y_i$ , une arête  $x_{i-1} y_{i-1}$  et au moins 2 arêtes pour la possible existence d'un cycle alterné c'est-à-dire proprement colorié,  $x_i x_{i-1} y_i y_{i-1} x_i$  sont manquantes dans  $G^c$ . La somme des arêtes manquantes susmentionnées est au moins égale à  $4n-10$ . Il s'ensuit que  $G^c$  a au plus  $n^2 - 5n + 10$ , ce qui est absurde. Supposons maintenant que seul le sommet  $x_i$  ou le sommet  $y_i$ , disons  $x_i$ , est adjacent à l'arête commune de la chaîne élémentaire reliant  $x_k$  et  $y_k$  et une des chaînes élémentaires reliant le reste des paires  $x_i, y_i, 1 \leq k \leq k-1$ . Ainsi, pour chaque sommet  $z$  dans  $G^c - \{x_k, x_i, x_{i-1}, y_k, y_i, y_{i-1}, z_l^k\}$ , où  $z_l^k \notin x_k, y_k, x_i$ , nous pouvons dénombrer  $2(n-7)$  arêtes manquantes, comme aucune des chaînes élémentaires  $x_i \overset{b}{-} z \overset{r}{-} y_i$  ou  $x_i \overset{r}{-} z \overset{b}{-} y_i$  n'est présente dans  $G^c$ . Alors il y a au moins 2 arêtes manquantes pour les paires de sommets  $x_i, y_i$  et  $x_{i-1}, y_{i-1}$ , une arête joignant  $x_i$  et  $y_i$  à travers  $z_l^k$  et enfin 2 arêtes entre  $x_i x_{i-1} y_i y_{i-1} x_i$ . Donc on en déduit qu'il y a au moins  $4n-9$  arêtes qui sont manquantes dans  $G^c$ , ce qui constitue une contradiction par rapport au fait que le multigraphe  $G^c$  a au moins  $n^2 - 5n + 11$  arêtes.

Enfin, nous supposons que la longueur de toute chaîne élémentaire entre  $x_k$  et  $y_k$  est 4. Nous compléterons la preuve en tenant compte des trois sous-cas suivants :

- $x_i y_i$  est une arête commune entre une chaîne élémentaire reliant  $x_k$  à  $y_k$  et une chaîne élémentaire reliant le reste des paires  $x_i, y_i, 1 \leq k \leq k-1$ .
- pour un entier  $1 \leq i \leq k-1$ , les deux arêtes de la chaîne élémentaire entre  $x_i$  et  $y_i$  de longueur deux, appartiennent ensemble à la chaîne élémentaire entre  $x_k$  et  $y_k$ .
- Seul le sommet  $x_i$  (ou  $y_i$ ) est adjacent à une arête commune de la chaîne

élémentaire reliant  $x_k$  à  $y_k$  et une chaîne élémentaire reliant le reste des paires  $x_i, y_i, 1 \leq k \leq k-1$ .

Comme il n'existe pas de chaîne élémentaire de longueur au plus 2 entre  $x_k$  et  $y_k$ , nous devons compter au moins  $2(n-2) + 2$  arêtes manquantes dans  $G^c$ . Il n'existe également pas de chaîne élémentaire de longueur 3 entre  $x_k$  et  $y_k$ . Donc nous ajoutons au dénombrement au moins deux arêtes supplémentaires parmi les manquantes. Ainsi jusqu'ici, au moins, on dénombre  $2(n-2) + 2 + 2 = 2n$  arêtes manquantes dans  $G^c$ .

Dans le premier sous-cas, on considère  $z_l^k, z_l^k \neq x_i, y_i$  comme le quatrième sommet qui complète la chaîne élémentaire entre  $x_k$  et  $y_k$ . Alors pour tout sommet  $z$  de  $G^c - \{x_k, x_i, x_{i-1}, y_k, y_i, y_{i-1}, z_l^k\}$ , nous pouvons compter un total de  $2(n-7)$  arêtes manquantes. Il y a aussi au moins 4 arêtes manquantes entre  $x_i x_{i-1} y_i y_{i-1} x_i$  et  $x_{i-1} x_{i-2} y_{i-1} y_{i-2} x_{i-1}$ .

Dans le second sous-cas, en plus du nombre compté dans le premier sous-cas, nous pouvons ajouter 2 arêtes manquantes  $x_i y_i$ .

Dans le dernier sous-cas, au lieu de  $2(n-7)$ , nous avons  $2(n-8)$  arêtes manquantes et nous avons également toutes les autres arêtes manquantes mentionnées dans le second sous-cas. Nous ajouterons aussi au moins 2 arêtes manquantes qui pourraient définir une chaîne élémentaire  $x_i - x_k - y_i$  et 2 arêtes pour la chaîne élémentaire  $x_i - y_k - y_i$ .

Pour chacun des cas ci-dessus, en faisant la somme de toutes les arêtes manquantes, nous trouvons qu'il y a au moins  $4n - 11$  arêtes dans  $G^c$ . Il s'ensuit que  $G^c$  a au plus  $n^2 - 5n + 10$  arêtes, ce qui est absurde. Ainsi la preuve de ce théorème est complète et prend fin.  $\square$

## Deuxième partie

### Les arbres couvrants



# Chapitre 5

## Les arbres couvrants propres

### 5.1 Rappels et Généralités

Dans cette deuxième partie, nous étudierons les arbres couvrants proprement coloriés. Les conditions que nous imposons sont les relations entre les différents paramètres des graphes arêtes-coloriées, tels que le nombre total de couleurs, le nombre de sommets, la taille du graphe, la connectivité et le nombre d'arêtes de couleurs différentes adjacentes à un sommet. Ces conditions spéciales sont d'un fort intérêt car il n'est pas possible d'avoir de bonnes caractérisations pour l'existence d'arbres couvrants en générale dans les graphes arête-coloriés, du fait du caractère NP-complet [2] de la question. Nous pouvons souligner des travaux assez proches de ce qui est traité dans ce chapitre [23]. Soient  $H$  et  $K$  deux sous-graphes de  $G^c$ . Nous notons par  $rd_H(x)$  le nombre de couleurs distinctes des arêtes incidentes au sommet  $x$  qui ont une extrémité dans  $H$ . En particulier, on a  $rd(x) = rd_{G^c}(x)$ . Soit  $rd_H(K)$  le nombre minimum dans  $\{rd_H(x) \text{ tel que } x \in V(K)\}$ , c'est-à-dire,  $rd(G^c) = \min\{rd(x) \text{ tel que } x \in V(G^c)\}$ . Nous utiliserons le terme *rainbow* graphe pour des graphes arête-coloriés dans lesquels il y a au plus une arête pour chaque couleur.

Nous traiterons principalement dans la première section 5.2, des lemmes qui serviront pour les autres parties du chapitre. Ainsi nous statuons sur quelques résultats généraux concernant sous les sous-graphes rainbow couvrants, contenant toutes les couleurs de  $G^c$ . Dans la section 5.3, nous donnons les conditions suffisantes sur le nombre minimum de couleurs du graphe  $G^c$  qui garantissent l'existence d'arbres couvrants proprement coloriés dans  $G^c$ . Dans cette section, le nombre de couleurs dépend de la connectivité. Dans la dernière section 5.4, nous établissons des conditions sur le nombre minimum de couleurs et sur le degré rainbow minimum du graphe pour garantir l'existence d'arbres couvrants proprement coloriés. Les résultats suivants sont déjà soumis à publication[34].

## 5.2 Résultats préliminaires

Comme nous l'avons mentionné dans la partie introductive, nous commencerons ici, par quelques résultats généraux sur les graphes connexes  $c$ -arête-coloriés, lesquels résultats seront bien exploités dans les prochaines sections. Nous considérons un sous-graphe rainbow couvrant contenant toutes les couleurs possibles de  $G^c$ . Un tel sous-graphe nous fournit des outils importants pour la construction d'arbres couvrants proprement arête-coloriée. Les lemmes suivants considèrent la plus grande composante connexe de ce sous-graphe rainbow couvrant et étudient leur ordre et leur connectivité.

**Lemme 5.2.1.** *Soit  $G^c$  un graphe connexe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n$  et soit  $k$  un entier donné. Si  $n > \binom{k+1}{2} + k + 2$  et  $c \geq \binom{n-k-1}{2} + k + 1$ , alors l'ordre de la plus grande composante connexe dans tout sous-graphe rainbow couvrant contenant toutes les couleurs, est au moins  $n - k - 1$ .*

**Preuve.** Considérons un sous-graphe rainbow couvrant  $\mathcal{H}_{rs}$  dans  $G^c$ , contenant toutes les couleurs. Nous utiliserons  $\mathcal{H}_0$  pour noter sa plus grande composante connexe et  $\mathcal{H}_1$  pour désigner le sous-graphe induit par le reste des

sommets. Soit  $p \geq 0$  le cardinal  $|V(\mathcal{H}_1)|$ . Donc on en déduit aisément que  $|V(\mathcal{H}_0)| = n - p$ . Comme le sous-graphe  $\mathcal{H}_{rs}$  est rainbow et contient toutes les couleurs qui sont présentes dans le graphe, alors le nombre d'arêtes d'un tel sous-graphe est égal au nombre de couleurs du graphe original dont la borne inférieure est  $\binom{n-k-1}{2} + k + 1$ . Nous dirons plus loin, que le nombre d'arêtes dans le sous-graphe doit être au plus  $\binom{p}{2} + \binom{n-p}{2}$ , en supposant présentes toutes les arêtes possibles avec les sommets de chaque composante de la partition. En combinant ces deux facteurs, nous obtenons l'inéquation,

$$\binom{p}{2} + \binom{n-p}{2} \geq \binom{n-k-1}{2} + k + 1$$

qui se réduit à l'inégalité suivante

$$2p^2 - 2np + 2n + 2nk - k^2 - 5k - 4 \geq 0$$

La résolution de cette inéquation de paramètre  $p$ , aboutit au domaine d'appartenance suivant :

$$p \in \{0, \dots, k+1\} \cup \{n-k-1, \dots, n\}.$$

De plus, puisque  $|V(\mathcal{H}_1)| = p$ , nous avons alors  $p \leq k+1$ . Sinon, nous allons supposer que  $p \geq n-k-1$ , et alors, l'ordre de la plus grande composante connexe  $\mathcal{H}_0$  (et donc l'ordre de chaque composante dans  $\mathcal{H}_{rs}$ ) est au maximum égal à  $k+1$ . Dans ce cas, le nombre total d'arêtes dans le sous-graphe est au plus égal à  $\frac{n}{k+1} \binom{k+1}{2} = \frac{nk}{2}$ , qui est strictement plus petit que  $\binom{n-k-1}{2} + k + 1$ , qui correspond à la borne inférieure du nombre total de couleurs pour  $n \geq \binom{k+1}{2} + k + 2$ . Ainsi, le lemme est prouvé.  $\square$

**Lemme 5.2.2.** *Soit  $G^c$  un graphe connexe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n$  et soit  $k$  un entier donné, avec  $n > \binom{k+1}{2} + k + 2$  et  $c \geq \binom{n-k-1}{2} + k + 1$ . Nous notons par  $\mathcal{H}_{rs}$  un sous-graphe rainbow couvrant, contenant toutes les couleurs de  $G^c$  et par  $\mathcal{H}_0$  sa plus grande composante connexe, où  $|\mathcal{H}_0| = n - p$ . Alors le nombre d'isthmes dans  $\mathcal{H}_0$  est inférieur ou égal à  $k - p + 1$ .*

**Preuve.** Rappelons que le nombre d'arêtes dans  $\mathcal{H}_{rs}$  est exactement  $c$ , qui est au moins égal à  $\binom{n-k-1}{2} + k + 1$ . Comme dans le lemme précédent,  $\mathcal{H}_1$  représente le sous-graphe induit par les sommets  $V(G^c) - V(\mathcal{H}_0)$ , ainsi  $|V(\mathcal{H}_1)| = p$  et le nombre d'arêtes dans  $\mathcal{H}_1$  est au plus égal à  $\binom{p}{2}$ . Supposons que le nombre d'isthmes dans  $E(\mathcal{H}_0)$  est supérieur ou égal à  $k - p + 2$ , donc le nombre d'arêtes dans  $\mathcal{H}_{rs}$  est inférieur ou égal à  $\binom{n-k-2}{2} + k - p + 2 + \binom{p}{2}$ , qui correspond au cas où la suppression de  $k - p + 2$  isthmes décompose  $\mathcal{H}_0$  en une grande composante connexe et  $k - p + 2$  singletons.

L'inégalité suivante reste valide :

$$\binom{n-k-1}{2} + k + 1 \leq \binom{n-k-2}{2} + k - p + 2 + \binom{p}{2}$$

Et elle peut se réduire à

$$n - k - 2 \leq \binom{p-1}{2}$$

Comme on a  $p \leq k + 1$ , elle implique

$$n - k - 2 \leq \binom{k}{2}$$

ce qui contredit les hypothèses  $n > \binom{k+1}{2} + k + 2$ . □

**Lemme 5.2.3.** *Soit  $G^c$  un graphe connexe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n$  avec  $n > \binom{k+1}{2} + k + 2$  et  $c \geq \binom{n-k-1}{2} + k + 1$ . Notons par  $\mathcal{H}_{rs}$  un sous-graphe rainbow couvrant contenant toutes les couleurs présentes dans  $G^c$  et par  $\mathcal{H}_0$  sa plus grande composante connexe. Si la suppression d'isthmes dans  $\mathcal{H}_0$  déconnecte  $\mathcal{H}_0$  en une composante connexe  $\tilde{\mathcal{H}}_0$  et  $s$  singletons, alors  $\tilde{\mathcal{H}}_0$  est au moins  $(k - s + 2)$ -arête-connexe.*

**Preuve.** Nous rappelons encore que le nombre d'arêtes dans  $\mathcal{H}_{rs}$  est exactement  $c$ , qui est supérieur ou égal à  $\binom{n-k-1}{2} + k + 1$ . Comme dans les précédents résultats,  $\mathcal{H}_1$  représente le sous-graphe induit par les sommets  $V(G^c) - V(\mathcal{H}_0)$ .

Le nombre d'arêtes dans  $\mathcal{H}_1$  est au plus égal à  $\binom{k+1}{2}$  car par le lemme 5.2.1, on a  $|V(\mathcal{H}_1)| \leq k+1$ . Nous avons  $s$  isthmes dans  $E(\mathcal{H}_0)$  connectant les  $s$  singletons à la plus grande composante connexe  $\tilde{\mathcal{H}}_0$ , ainsi que le nombre d'arêtes dans  $\tilde{\mathcal{H}}_0$  est au moins égal à  $\binom{n-k-1}{2} + k+1 - \binom{k+1}{2} - s$ . Donc au moins,  $\binom{n-k-1}{2} - \binom{k+1}{2}$  arêtes restent après la suppression de toutes les  $k-s+1$  arêtes de cette composante, car  $\binom{n-k-1}{2}$  correspond précisément au nombre d'arêtes dans un graphe complet de  $n-k-1$  sommets, la première suppression résulte du déficit d'au plus  $\binom{k+1}{2}$  arêtes. Dès lors qu'on a,  $n > \binom{k+1}{2} + k+2$ , nous avons  $\binom{k+1}{2} = \binom{k+1}{2} + k+2 - (k+2) < n-k-2$ , l'arête-connectivité d'un graphe complet de  $n-k-1$  sommets.  $\square$

### 5.3 Connexité et nombre minimum de couleurs

Dans cette section, nous considérons  $G^c$  comme un graphe simple  $k$ -connexe  $c$ -arête-colorié. Le principal résultat de cette section, à savoir le Théorème 5.3.3, est donné à la fin. Il est la conséquence directe de deux propositions qui traitent les différents cas dépendant du nombre d'isthmes qui peuvent apparaître dans la plus grande composante connexe du sous-graphe rainbow couvrant et contenant toutes les couleurs présentes dans  $G^c$ .

**Proposition 5.3.1.** *Soit  $G^c$  un graphe simple  $c$ -arête-colorié  $k$ -connexe à  $n$  sommets,  $n \geq \binom{k+1}{2} + k+2$  et  $c \geq \binom{n-k-1}{2} + k+1$ . Soit  $\mathcal{H}_{rs}$  un sous-graphe rainbow couvrant contenant toutes les couleurs présentes dans  $G^c$  et  $\mathcal{H}_0$  sa plus grande composante connexe, où  $|\mathcal{H}_0| = n-p$  et le nombre d'isthmes dans  $\mathcal{H}_0$  est  $s \leq k-p$ . Alors  $G^c$  a un arbre couvrant proprement arête-colorié.*

**Preuve.** Par le Lemme 5.2.1, on sait que  $\mathcal{H}_0$  a au moins  $n-k-1$  sommets. Dans ce cas de figure, nous considérons le paramètre  $k$  comme étant la

connectivité du graphe et, puisque le sous-graphe est rainbow, chaque arbre couvrant de ses composantes connexes est proprement colorié.

Soit  $\mathcal{H}_1$  pour désigner à nouveau, le sous-graphe induit par les sommets  $V(G^c) - V(\mathcal{H}_0)$ . Puisqu'on a l'égalité  $|V(\mathcal{H}_1)| = p$  et que  $G^c$  est  $k$ -connexe, alors l'ensemble des sommets de  $\mathcal{H}_0$  qui ont des sommets voisins à la fois dans  $\mathcal{H}_0$  et dans  $\mathcal{H}_1$  et soit  $\tilde{B}$  l'ensemble de tous les sommets de  $\tilde{B}_0$  qui vérifient :

$$\left\{ x \in \tilde{B}_0, \text{ tel que } E(x, \mathcal{H}_0) = B(x, \mathcal{H}_0) \text{ et } c(E(x, \mathcal{H}_0)) = c(E(x, \mathcal{H}_1)) \right\}.$$

Considérons à présent le graphe biparti

$$\tilde{G} := \left( V(G^c), E(G^c) - \left( E(\mathcal{H}_0) \cup E(\mathcal{H}_1) \cup E(\tilde{B}, \mathcal{H}_1) \right) \right).$$

Nous allons appliquer le théorème de Hall (voir [8]) au sous-graphe  $\tilde{G}$ . Ce sous-graphe contient un couplage de taille  $k$  qui traverse la coupe (séparateur)  $(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$  si et seulement si  $|S| \leq |N_{\tilde{\mathcal{H}}_0}^{\tilde{G}}(S)|$  pour tout sous-ensemble  $S$  de  $\mathcal{H}_1$  où  $N_{\tilde{\mathcal{H}}_0}^{\tilde{G}}(S)$  désigne l'ensemble des voisins de  $S$  dans  $\mathcal{H}_0$  reliés par des arêtes dans  $E(\tilde{G})$ , c'est-à-dire,

$$N_{\tilde{\mathcal{H}}_0}^{\tilde{G}}(S) = \left\{ x \in \mathcal{H}_0 \text{ tel que } xy \in E(\tilde{G}) \text{ avec } y \in S \right\}.$$

Pour s'en rendre compte, nous supposons qu'un tel couplage n'existe pas. Ainsi, il existe un sous-ensemble  $S$  de  $\mathcal{H}_1$  tel que  $|N_{\tilde{\mathcal{H}}_0}^{\tilde{G}}(S)| < |S| = r$ . Sous ces suppositions, nous étudierons l'ordre de  $N_G(S)$ . Ce nombre est donné par :

$$|N_G(S)| = |N_{\mathcal{H}_0}(S)| + |N_{\mathcal{H}_1}(S)| = |N_{\tilde{\mathcal{H}}_0}^{\tilde{G}}(S)| + |N_{\tilde{\mathcal{H}}_0}^{G-\tilde{G}}(S)| + |N_{\mathcal{H}_1}(S)|$$

$$< r + k - p + p - r = k$$

car  $|N_{\tilde{\mathcal{H}}_0}^{G-\tilde{G}}(S)|$  est borné par le nombre d'isthmes dans  $\mathcal{H}_0$ .

Cela contredit le fait que  $G$  est  $k$ -connexe, car il existe un sous-ensemble  $S$  de  $G^c$  qui peut être déconnecté du reste du graphe par la suppression d'un

nombre de sommets strictement inférieur à  $k$ . Donc nous avons prouvé que  $\tilde{G}$  contient un couplage de  $\mathcal{H}_0$  dans  $\mathcal{H}_1$  et par conséquent  $G^c$  contient un couplage de taille  $k$  qui traverse le séparateur  $(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$  où tous les problèmes pour attacher les sommets de  $\mathcal{H}_1$  vers  $\mathcal{H}_0$  ont été évités ou contournés, et le résultat reste valide.  $\square$

**Proposition 5.3.2.** *Soit  $G^c$  un graphe simple  $k$ -connexe  $c$ -arête-colorié tel que  $|V(G^c)| = n$  avec  $n \geq \binom{k+1}{2} + k + 2$  et  $c \geq \binom{n-k-1}{2} + k + 1$ . Soit  $\mathcal{H}_{r_s}$  un sous-graphe rainbow couvrant contenant toutes les couleurs présentes dans  $G^c$  et  $\mathcal{H}_0$  sa plus grande composante connexe, où  $|\mathcal{H}_0| = n - p$  et le nombre d'isthmes dans  $\mathcal{H}_0$  est  $s = k - p + 1$ . Alors  $G^c$  a un arbre couvrant propre.*

**Preuve.** Nous allons noter  $Y_0 = \{y_1, \dots, y_s\}$  l'ensemble des sommets dans  $\mathcal{H}_0$ , tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ , il existe un unique sommet  $x_i \in N_{\mathcal{H}_0}(y_i)$  et  $b_i = x_i y_i$  est un isthme. La suppression de  $\{b_1, \dots, b_s\}$  divise  $\mathcal{H}_0$  au total en  $s + 1$  composantes connexes où  $s$  parmi eux sont des singletons.

Nous donnons également la notation suivante

$\tilde{\mathcal{H}}_0 := (V(\mathcal{H}_0) - Y_0, E(\mathcal{H}_0) - \{b_1, \dots, b_s\})$ . Par le Lemme (5.2.3),  $\tilde{\mathcal{H}}_0$  est au moins  $(k - s + 2)$ -arête-connexe.

Puisque le graphe  $G^c$  est  $k$ -connexe, il existe un couplage de taille  $k$  traversant le séparateur  $(\tilde{\mathcal{H}}_0, Y_0 \cup \mathcal{H}_1)$ . Nous notons les arêtes de ce couplage par  $E_{\mathcal{M}} = \{b_1, \dots, b_s, e_{s+1}, \dots, e_k\}$ . Nous noterons également les extrémités de ces arêtes dans  $\tilde{\mathcal{H}}_0$  par respectivement  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$  et dans  $\tilde{\mathcal{H}}_1$  par  $Y_1 = \{y_{s+1}, \dots, y_k\}$ . Soit  $Y$  l'union  $Y_0 \cup Y_1$  et  $z$  un sommet non couplé dans  $\mathcal{H}_1$ , alors on a  $\tilde{\mathcal{H}}_1 := (V(\mathcal{H}_1) \cup Y_0, E(\mathcal{H}_1))$  où  $V(\mathcal{H}_1) \cup Y_0 = Y \cup \{z\}$ , et nous allons distinguer deux cas, suivant que  $N(z)$  soit inclus ou non dans  $X \cup Y$ .

**Cas 1 :**  $N(z) \not\subseteq X \cup Y$ .

Soit un sommet  $z' \in N_{\tilde{\mathcal{H}}_0}(z) - X$ . Dans ce cas, nous ajoutons  $zz'$  et  $b_1, \dots, b_s, e_{s+1}, \dots, e_k$  à  $\mathcal{H}_{r_s}$  et en même temps, nous supprimons toute arête

dans  $\mathcal{H}_{rs}$  qui est incidente à  $z'$  avec la même couleur que  $c(zz')$ , et aussi toute arête incidente à  $e_i$  ayant la couleur  $c(e_i)$  pour tout entier naturel  $i \in \{s+1, \dots, k\}$ . Toute telle suppression pour le compte de l'arête  $e_i$  a lieu exactement soit du côté du sommet adjacent  $x_i$  soit du côté de l'autre sommet adjacent  $y_i$ , mais pas sur les deux à la fois. Nous remarquons qu'il n'existe pas d'arête dans  $\tilde{\mathcal{H}}_0$ , incidente à  $b_i$  pour  $i \in \{1, \dots, s\}$  avec la couleur  $c(b_i)$  car  $b_i$  était l'unique arête dans  $\mathcal{H}_{rs}$  coloriée en  $c(b_i)$ . Ainsi, le processus complet conduit à la suppression d'au plus  $k-s+1$  arêtes de l'ensemble  $\tilde{\mathcal{H}}_0$ , lequel reste toujours connexe. Tous les sommets de  $\tilde{\mathcal{H}}_1$  ont été connectés à  $\tilde{\mathcal{H}}_0$  pour obtenir un sous-graphe couvrant proprement arête-colorié. Donc ce sous-graphe, mais aussi  $G^c$ , a un arbre couvrant proprement arête-colorié.

### Cas 2 : $\mathbf{N}(z) \subseteq \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$

S'il existe un sommet  $x_{i_0} \in N_X(z)$  tel que  $c(z, x_{i_0}) \neq c(b_{i_0})$  si  $i_0 \in \{1, \dots, s\}$  (respectivement,  $c(z, x_{i_0}) \neq c(e_{i_0})$  si  $i_0 \in \{s+1, \dots, k\}$ ), alors nous ajoutons simplement toutes les arêtes dans  $E_{\mathcal{M}}$  et  $(z, x_{i_0})$ , et supprimons en même temps toute arête incidente au sommet  $x_i$  et ayant la même couleur pour tout entier  $i \in \{s+1, \dots, k\}$  (rappelons encore qu'il n'existe pas d'arête dans  $\tilde{\mathcal{H}}_0$  incidente au sommet  $b_{i_0}$  pour tout entier  $i \in \{1, \dots, s\}$  avec la couleur  $c(b_i)$  car  $b_{i_0}$  était l'unique arête dans  $\mathcal{H}_{rs}$  coloriée en  $c(b_i)$ ). De façon similaire, s'il existe une arête de la forme  $(z, y_{i_0})$  avec  $c(z, y_{i_0}) \neq c(e_{i_0})$  si  $i_0 \in \{1, \dots, s\}$  (respectivement,  $c(z, x_{i_0}) \neq c(b_{i_0})$  si  $i_0 \in \{s+1, \dots, k\}$ ). Dans l'un ou l'autre cas, cela connecte tous les sommets de  $\tilde{\mathcal{H}}_1$  au reste du graphe, tandis que la connectivité de  $\tilde{\mathcal{H}}_0$  est préservée. Ceci produit un sous-graphe connexe couvrant proprement arête-colorié, ce qui implique l'existence d'arbre couvrant pour ce sous-graphe et partant pour le graphe  $G^c$ . Nous allons maintenant considérer le scénario où pour toutes arêtes  $(z, x_i)$  et  $(z, y_j)$  nous avons  $c(z, x_i) = c(e_i)$  et  $c(z, y_j) = c(e_j)$  pour tout entier  $i \in \{1, \dots, k\}$  tel que  $(z, x_i), (z, y_j) \in E(G^c)$ . Puisque le nombre d'arêtes dans  $\mathcal{H}_{rs}$  est exactement  $c$ , qui est au moins égal à  $\binom{n-k-1}{2} + k + 1$

et  $|V(\tilde{\mathcal{H}}_0)| \leq \binom{n-k-1}{2}$ , il existe au moins  $k+1$  arêtes différemment coloriées dans  $\tilde{\mathcal{H}}_1$ . Donc une de ces arêtes doit être de la forme  $(y_i, y_j)$  dans  $E(\tilde{\mathcal{H}}_1)$  où  $c(y_i, y_j) \notin c(E(z, Y_1))$ . Nous supposons, en renumérotant les arêtes dans  $E_{\mathcal{M}}$ , si nécessaire, avec leurs extrémités dans  $X$  et  $Y_2$ , que cette arête est en effet  $(y_{s+1}, y_{s+2})$ .

S'il existe un sommet  $z' \in N(z) \cap \{x_{s+1}, x_{s+2}, y_{s+1}, y_{s+2}\}$ , nous connectons  $z$  en utilisant  $e = zz'$  et en ajoutant  $(y_{s+1}, y_{s+2})$  et toutes les arêtes dans  $E_{\mathcal{M}}$  à l'exception de celle qui est incidente à  $e$  afin de connecter tous les points dans  $Y_1$ . Encore une fois, nous devons supprimer toutes les arêtes de  $\tilde{\mathcal{H}}_0$  qui sont incidentes à toute arête  $e_i$  et ayant la même couleur  $c(e_i)$  pour tout entier  $i \in \{s+1, \dots, k\}$ . En même la connectivité est préservée pour le sous-graphe  $\tilde{\mathcal{H}}_0$ , le sous-graphe résultant est couvrant, connexe et proprement arête-colorié.

Si  $N(z) \cap \{x_{s+1}, x_{s+2}, y_{s+1}, y_{s+2}\}$  est un ensemble vide, alors on a l'inclusion  $N_G(\mathcal{H}_1) \subseteq \{x_3, \dots, x_k\}$ . Ainsi nous déconnectons  $\mathcal{H}_1$  par la suppression  $k-2$  sommets du graphe original  $G^c$ , ce qui est contradictoire par rapport à la  $k$ -connectivité de  $G^c$ .  $\square$

**Théorème 5.3.3.** *Soit  $G^c$  un graphe simple  $c$ -arête-colorié  $k$ -connexe d'ordre  $n$ . Si  $n \geq \binom{k+1}{2} + k + 2$  et  $c \geq \binom{n-k-1}{2} + k + 1$ , alors  $G^c$  a un arbre couvrant propre.*

**Preuve.** Par le Lemme 5.2.2 le nombre d'isthmes de  $E(\mathcal{H}_0)$  est inférieur ou égal à  $k-p+1$ . Le résultat vient alors directement de la Proposition 5.3.1 et de la Proposition 5.3.2.  $\square$

Cette borne est la meilleure possible, dans le sens où il existe des graphes simples  $c$ -arête-coloriés  $k$ -connexes avec  $\binom{n-k-1}{2} + k$  couleurs et sans pour

autant avoir d'arbre couvrant proprement arête-colorié. De façon plus précise, considérons un graphe simple rainbow complet  $c$ -arête-colorié de  $n - k - 1$  sommets. Ajoutons  $k + 1$  nouveaux sommets  $x_1, \dots, x_{k+1}$ . Considérons aussi,  $k$  nouvelles couleurs, notées  $c_1, \dots, c_k$ , non encore utilisées dans le graphe rainbow complet. On choisit maintenant  $k$  sommets  $y_1, \dots, y_k$  dans le graphe complet et on ajoute alors toutes les arêtes monochromatiques de couleur  $c_i$ , entre chaque sommet  $x_i$  et tous les sommets  $y_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Enfin, on ajoute les arêtes  $x_{k+1}x_i$ , chacune de couleur  $c_i$ , pour tout entier  $i = 1, \dots, k$ . Le graphe résultant, quoiqu'ayant  $\binom{n-k-1}{2} + k$  couleurs, ne possède pas d'arbre couvrant propre, car le sommet  $x_{k+1}$  ne peut être ajouté à aucune composante d'une forêt couvrant proprement coloriée du reste du graphe.

## 5.4 Degré Rainbow et nombre minimum de couleurs

Dans cette section, nous considérons un graphe connexe  $G^c$  de degré rainbow  $rd(G^c) = k \geq 2$ , pour  $k$  fixé. Comme dans la section précédente, le principal résultat est le Théorème 5.4.3, présenté comme une conséquence de deux propositions qui traitent les différents cas qui sont corrélés à l'ordre de la plus grande composante connexe d'un sous-graphe rainbow couvrant contenant toutes les couleurs de  $G^c$ .

**Proposition 5.4.1.** *Soit  $G^c$  un graphe connexe  $c$ -arête-colorié de degré rainbow  $rd(G^c) = k$  tel que  $|V(G^c)| = n$  avec  $n \geq \binom{k+1}{2} + k + 2$  et  $c \geq \binom{n-k-1}{2} + k + 1$ . Soit  $\mathcal{H}_{rs}$  un sous-graphe rainbow couvrant contenant toutes les couleurs présentes dans  $G^c$  tel que l'ordre de sa plus grande composante connexe soit  $n - k - 1$ . Alors  $G^c$  possède un arbre couvrant propre.*

**Preuve.** Nous considérons à nouveau les notations précédentes ;  $\mathcal{H}_0$  désigne

la plus grande composante connexe de sous-graphe  $\mathcal{H}_{rs}$  et  $\mathcal{H}_1$  le sous-graphe induit par le reste des sommets. Puisque  $|V(\mathcal{H}_0)| = n - k - 1$ , on a  $|V(\mathcal{H}_1)| = k + 1$ . Soit  $X$  l'ensemble des sommets  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  et  $V(\mathcal{H}_1) = \{x\} \cup X$ .

Nous allons considérer deux différents cas dépendant de  $rd_{\mathcal{H}_1}(\mathcal{H}_1)$ .

**Cas 1 :**  $rd_{\mathcal{H}_1}(\mathcal{H}_1) = k$ .

Le graphe  $G^c$  est connexe, alors on a  $N_{\mathcal{H}_0}(\mathcal{H}_1) \neq \emptyset$ . Nous pouvons supposer sans perte de généralité qu'il existe  $N_{\mathcal{H}_0}(x) \neq \emptyset$ . Puisque  $rd_{\mathcal{H}_1}(x) = k$ , alors on a  $xx_i \in E(G^c)$  et  $c(xx_i) \neq c(xx_j)$  pour tous entiers naturels  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  tel que  $i \neq j$ .

Soit  $y \in N_{\mathcal{H}_0}(x)$  et  $e = xy$ . Dans ce cas nous pouvons considérer  $\mathcal{H}_0 \cup e \cup E(x, X)$  à moins qu'il n'existe une arête  $b \in E(\mathcal{H}_{rs})$ , adjacente à l'arête  $e$ , tel que  $c(b) = c(e)$ .

**1.A :** Si on a l'appartenance suivante  $b \in E(\mathcal{H}_0)$ , on considérera  $\mathcal{H}_0 \cup e \cup E(x, X) - b$ . Le sous-graphe  $\mathcal{H}_0$  reste connexe après la suppression de l'arête  $b$  car il est  $(k + 2)$ -arête-connexe (*cf* Lemme 5.2.3). Nous avons alors un sous-graphe connexe, couvrant et proprement arête-colorié, et nous pouvons extraire un arbre couvrant proprement arête-colorié.

**1.B. :** Si on a  $b \in E(\mathcal{H}_1)$ , *c'est-à-dire*,  $b$  est de la forme  $xx_i$  pour un entier naturel  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , par exemple  $i = 1$ . Nous considérons  $N_{\mathcal{H}_1}(x_2)$ , l'ensemble des sommets voisins de  $x_2$  dans  $\mathcal{H}_1$ . Puisque  $N_{\mathcal{H}_1}(x_2) = V(\mathcal{H}_1)$ , on a nécessairement  $x_1 \in N_{\mathcal{H}_1}(x_2)$ . Nous savons aussi que  $c(x_1x_2) \neq c(xx_2)$  car  $rd_{\mathcal{H}_1}(x_2) = k$ , alors nous relierons  $x_1$  à  $\mathcal{H}_0$  via la chaîne élémentaire  $yx_2x_1$ .

**Cas 2 :**  $rd_{\mathcal{H}_1}(\mathcal{H}_1) < k$ .

Nous allons ici, considérer deux cas :

**2.A. :** Il existe un  $(k + 1)$ -couplage  $\mathcal{M}$  entre  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$ .

Nous notons par  $E_{\mathcal{M}} = \{e, e_1, \dots, e_k\}$  l'ensemble des arêtes parcourant  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$ . Nous utiliserons ce couplage dans le but de joindre chaque sommet de  $V(\mathcal{H}_1)$  à  $\mathcal{H}_0$  et de supprimer toutes arêtes  $b, b_i \in E(\mathcal{H}_0)$  adjacente à  $e$  et à  $e_i$ , respectivement, tel que  $c(e) = c(b)$  et  $c(e_i) = c(b_i)$ . Il existe au plus

$k + 1$  telles arêtes, donc leur suppression ne fait pas perdre la connectivité de  $\mathcal{H}_0$  car  $\mathcal{H}_0$  est  $(k + 2)$ -arête-connexe.

**2.B.** : Il n'existe pas de  $(k + 1)$ -couplage  $\mathcal{M}$  entre  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$ .

Soit  $l \in \mathbb{N}$  tel que  $k - l$  est le degré rainbow maximum dans  $\mathcal{H}_1$  pour tous les sommets de  $V(\mathcal{H}_1)$ . Supposons encore sans aucune perte de généralité que  $k - l = rd_{\mathcal{H}_1}(x)$  et  $\{x_1, \dots, x_{k-l}\} = N_{\mathcal{H}_1}(x)$ . Puisque  $rd(x) \geq k$ , il existe aussi au moins  $l$  sommets,  $y_1, \dots, y_l$ , dans  $N_{\mathcal{H}_0}(x)$  tels que toutes les arêtes  $xx_i$  et  $xy_j$  sont deux à deux coloriées différemment. Soit  $Y$  l'ensemble  $\{y_1, \dots, y_l\}$ . Notre objectif est de connecter les sommets de l'ensemble  $V(\mathcal{H}_1) - (N_{\mathcal{H}_1}(x) \cup \{x\}) = \{x_{k-l+1}, \dots, x_k\}$  à  $\mathcal{H}_0$ . Pour une meilleure lisibilité, nous allons renommer cet ensemble par  $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_l\}$ . Comme  $rd_{\mathcal{H}_1}(z_i) \leq k - l$  et  $rd(z_i) \geq k$  pour tout entier  $i \in \{1, \dots, l\}$ , tous ces sommets doivent avoir au moins  $l$  voisins dans  $\mathcal{H}_0$  et donc nous pouvons toujours trouver un  $l$ -couplage  $(Z, N_{\mathcal{H}_0}(Z))$ . Si pour un entier  $i \in \{1, \dots, l\}$ , il existe  $y_{l+1} \in N_{\mathcal{H}_0}(z_i) - Y$ , alors il existe un  $(l + 1)$ -couplage  $(Z \cup x, N_{\mathcal{H}_0}(Z \cup x))$  et par suppression, si nécessaire, de toutes les arêtes adjacentes aux sommets extrêmes du couplage dans  $\mathcal{H}_0$  ayant une couleur identique, nous obtenons le résultat souhaité.

Sinon  $Y = N_{\mathcal{H}_0}(z_i) = N_{\mathcal{H}_0}(x)$  pour tout entier  $i \in \{1, \dots, l\}$ , et tous les sommets dans  $Z$  sauf un, disons  $z_1$ , sont connectés via les arêtes  $y_i z_i$  pour tous les entiers  $i \in \{2, \dots, l\}$  and  $y_1 x$ . Nous devons trouver une nouvelle façon de connecter  $z_1$  à  $\mathcal{H}_0$ .

Comme le nombre de couleurs dans  $c(E(\mathcal{H}_1))$  est supérieur ou égal à  $k + 1$ , il existe au moins une extra couleur différente de celles déjà présentes dans  $E(x, X)$ . Nous devons étudier les différents cas en rapport avec la façon de connecter l'arête ayant cette nouvelle couleur. Ainsi la nouvelle arête coloriée est de la forme :

- $z_i z_j$  ou  $z_i x_j$ . Alors nous pouvons ajouter l'arête  $z_1 y_i$ , supprimer l'arête  $y_i z_i$  du couplage et utiliser la chaîne élémentaire  $y_j z_j z_i$  ou  $y_1 x x_j z_i$ ,

respectivement pour reconnecter  $z_i$ .

- $x_i x_j$ , pour deux entiers  $i, j \in \{1, \dots, k-l\}$ . Dans ce cas, comme  $|N_{\mathcal{H}_1}(z_1)| = k-l$ , nous permutons simplement les rôles que les sommets  $x$  et  $z_1$  jouent et nous retournons au précédent cas.

□

**Proposition 5.4.2.** *Soit  $G^c$  un graphe connexe  $c$ -arête-colorié de degré rainbow  $rd(G^c) = k$  et d'ordre  $n$ ,  $n \geq \binom{k+1}{2} + k + 2$  et  $c \geq \binom{n-k-1}{2} + k + 1$ . Soit  $\mathcal{H}_{rs}$  un sous-graphe rainbow couvrant contenant toutes les couleurs présentes dans  $G^c$  tel que l'ordre de sa plus grande composante connexe soit supérieur à  $n - k - 1$ . Alors  $G^c$  possède un arbre couvrant proprement arête-colorié.*

**Preuve.** Soit  $\mathcal{H}_0$  la plus grande composante connexe de  $\mathcal{H}_{rs}$  et  $\mathcal{H}_1$  le sous-graphe induit par le reste des sommets. Soit l'entier  $p \in \mathbb{N}$ ,  $|V(\mathcal{H}_1)| = p$ , ainsi on a  $|V(\mathcal{H}_0)| = n - p$ . Soit l'entier  $l \in \mathbb{N}$  tel que  $p - l$  est le degré rainbow maximum dans  $\mathcal{H}_1$  pour tous les sommets de  $V(\mathcal{H}_1)$ . Soit  $x \in V(\mathcal{H}_1)$  un sommet tel que  $rd_{\mathcal{H}_1}(x) = p - l$ , alors on a  $|rd_{\mathcal{H}_0}(x)| \geq k - p + l$ . Ce nombre est supérieur ou égal à  $k - p + 1$ , qui est le nombre maximum d'isthmes qui peuvent apparaître dans  $E(\mathcal{H}_0)$  comme ce fut prouvé dans le Lemme (5.2.2).

Nous étudierons deux cas différents qui dépendent de la valeur de  $l$ .

**Cas 1 :**  $l = 1$ .

Comme  $rd_{\mathcal{H}_1}(x) = p - 1$ , le sommet  $x$  est adjacent à chaque point de  $V(\mathcal{H}_1)$  et les arêtes de type  $xx_i$  sont deux à deux différemment coloriées. Additivement, on a  $|rd_{\mathcal{H}_0}(x)| \geq k - p + 1 \geq 1$  car  $p \leq k$ . Donc, il existe un sommet  $y \in N_{\mathcal{H}_0}(x)$  tel que  $c(xy) \notin c(x, \mathcal{H}_1)$ . Le sous-graphe  $\mathcal{H}_0$  reste connexe après la suppression d'une possible arête dans  $E(\mathcal{H}_0)$  adjacente à l'arête  $xy$  et ayant la couleur  $c(xy)$ , ainsi nous obtenons le résultat souhaité.

**Cas 2 :**  $l > 1$ .

Nous posons l'ensemble  $N_{\mathcal{H}_1}(x) = \{x_1, x_2, \dots, x_{p-l}\}$ , car  $rd_{\mathcal{H}_0}(x) \geq k - p + l$  et le nombre d'isthmes dans  $\mathcal{H}_0$  est inférieur ou égal à  $k - p - 1$ . Il y a au moins  $l - 1$  sommets,  $y_1, y_2, \dots, y_{l-1}$ , dans  $N_{\mathcal{H}_0}(x)$  tels que toutes les arêtes  $xy_i$  sont deux à deux différemment coloriées et qu'il n'existe aucun isthme dans  $E(\mathcal{H}_0)$  incident à ces arêtes. Soit  $Y$  l'ensemble  $\{y_1, \dots, y_{l-1}\}$  ( $|Y| = l - 1$ ). Considérons  $Z = V(\mathcal{H}_1) - (N_{\mathcal{H}_1}(x) \cup \{x\}) = \{z_1, z_2, \dots, z_{l-1}\}$ . Notre objectif est à nouveau de connecter les sommets de l'ensemble  $Z$  à  $\mathcal{H}_0$ . Comme les degrés  $rd_{\mathcal{H}_0}(z_i)$  sont supérieurs ou égaux à  $k - p + l$  pour tout entier  $i \in \{1, 2, \dots, l - 1\}$ , il existe un  $(l - 1)$ -couplage entre  $N_{\mathcal{H}_0}(\{x\} \cup Z)$  et  $\mathcal{H}_0$  afin qu'aucune des arêtes adjacentes dans  $E(\mathcal{H}_0)$  ne soit un isthme. Alors seul un sommet, par exemple  $z_1$ , reste à relier. Comme  $rd(z_1) \geq k$  et  $rd_{\mathcal{H}_1}(z_1) \leq p - l$ , alors  $rd_{\mathcal{H}_0}(z_1) \geq k - p + l$  qui est supérieur ou égal à  $l$  car  $k \geq p$ . Donc il existe un sommet  $y \in V(\mathcal{H}_0) - Y$  tel que  $yz_1 \in E(G^c)$  et  $c(yz_1) \notin c(z_1, V(\mathcal{H}_1) \cup Y)$  et nous obtenons un  $l$ -couplage entre  $N_{\mathcal{H}_0}(\{x\} \cup Z)$  et  $\mathcal{H}_0$ . Ainsi la preuve de cette proposition prend fin.  $\square$

**Théorème 5.4.3.** *Soit  $G^c$  un graphe connexe  $c$ -arête-colorié de degré rainbow  $rd(G^c) = k$  et  $n \geq \binom{k+1}{2} + k + 2$ . Si  $c \geq \binom{n-k-1}{2} + k + 1$ , alors  $G^c$  possède un arbre couvrant propre.*

**Preuve.** Nous considérons un sous-graphe  $\mathcal{H}_{rs}$  rainbow couvrant dans  $G^c$  contenant toutes les couleurs. Nous notons par  $\mathcal{H}_0$  sa plus grande composante connexe et par  $\mathcal{H}_1$  le sous-graphe induit par le reste des sommets. Par le Lemme (5.2.1), nous savons que  $|V(\mathcal{H}_0)| \geq n - k - 1$ , ainsi la preuve du théorème est directement déduite à partir des Propositions 5.4.1 et 5.4.2.  $\square$

# Chapitre 6

## Les arbres couvrants faiblement coloriés

### 6.1 Connexité et nombre minimum de couleurs

Dans cette partie où l'on traite les arbres couvrants faiblement coloriés, on s'intéresse à des résultats du même type que ceux obtenus avec les arbres couvrants propres. Ainsi, pour un graphe simple  $c$ -arête-colorié  $k$ -connexe, nous établissons le théorème suivant.

**Theorem 6.1.1.** *Soit  $G^c$  un graphe simple  $c$ -arête-colorié  $k$ -connexe d'ordre  $n \geq \frac{(k+j)^2 + 3(k+j) - 2}{2}$  et  $c \geq \frac{(n-k-j)(n-k-j-1)}{2} + 2$ , avec  $j = \lceil \frac{1 + \sqrt{1+4k}}{2} \rceil$ . Alors  $G^c$  a un arbre couvrant faiblement colorié.*

**Preuve.** Nous utiliserons les précédentes définitions de  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$  avec la même signification. Soit  $p$  le nombre de sommets de  $\mathcal{H}_1$ . Ainsi nous avons  $|\mathcal{H}_0| = n - p$  et  $|\mathcal{H}_1| = p$ . Donc l'inéquation suivante sera vérifiée :

$$\frac{(n-p)(n-p-1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2} \geq \frac{(n-k-j)(n-k-j-1)}{2} + 2$$

$$2p^2 - 2np + (k + j)(2n - k - j - 1) - 4 \geq 0$$

L'étude de cette inéquation du second degré montre que  $p \in \{0, \dots, k + j\}$  puisque  $n \geq \frac{(k + j)^2 + 3(k + j) - 2}{2}$ . Donc l'ordre de  $\mathcal{H}_0$  vérifie  $|\mathcal{H}_0| \geq n - k - j$ . Nous pouvons maintenant considérer les deux cas suivants :

**cas 1 :**  $|\mathcal{H}_0| = n - k - j$

Nous allons porter notre attention sur la configuration de  $\mathcal{H}_1$  dont le nombre de sommets est  $|\mathcal{H}_1| = k + j$ . Soit  $k'$  le nombre de sommets de  $\mathcal{H}_1$  qui ont des voisins dans  $\mathcal{H}_0$  et  $j'$  le nombre de sommets de  $\mathcal{H}_1$  qui n'ont pas de voisins dans  $\mathcal{H}_0$ . Puisque  $G^c$  est  $k$ -connexe, alors les inégalités suivantes sont vérifiées :  $k' \geq k$  et  $j' \leq j$ . Nous allons montrer que ces inégalités sont en réalité des égalités. Définissons les ensembles suivants  $X = \{x_1, \dots, x_{k'}\}$  et  $Y = \{y_1, \dots, y_{j'}\}$ . Supposons que  $k' < k + j$ , autrement la preuve est terminée. Nous savons que le nombre minimum d'arêtes de  $\mathcal{H}_1$  à  $\mathcal{H}_0$  est  $j'(k - j + 1)$  et le nombre maximum d'arêtes de  $\mathcal{H}_0$  à  $\mathcal{H}_1$  est  $k'(j' - 1)$ . Cela nous permet donc d'obtenir l'inéquation  $j'(k - j + 1) \geq k'(j' - 1)$ . Posons  $k' = k + l$  et  $j' = j - l$ , avec  $l \in \{1, \dots, j - 1\}$ . Avec ce changement de variables, l'inéquation devient :

$$(j - l)(k - j + l + 1) \geq (k + l)(j - l - 1)$$

$$2jl - l^2 - (j^2 - j - k) \leq 0$$

Puisque  $j^2 - j - k = 0$  (Nous pouvons le voir en remplaçant  $j$  par sa valeur), nous obtenons  $2l - l^2 \leq 0$  ce qui est absurde car  $j > l$ . D'où l'on déduit que  $k' = k$  et  $j' = j$ . Nous allons à présent considérer les deux sous-cas suivants :

***Y est un sous-graphe complet***

Si  $Y$  n'est pas monochromatique, nous choisirons une racine de l'arborescence dans  $X$  pour obtenir un arbre couvrant faiblement colorié : à partir de la racine, on se connecte à  $\mathcal{H}_0$  pour couvrir les autres arêtes de  $X$ , et toujours à partir de la racine, nous arrivons à  $Y$  en utilisant une des extrémités de l'arête ayant une couleur pour couvrir les autres sommets de  $Y$ . Nous supposons

maintenant que  $Y$  est monochromatique. Dans ce cas, nous savons qu'il y a une nouvelle couleur non encore utilisée, que l'on note par  $nc$ , qui est soit dans  $X$  ou entre  $X$  et  $Y$ . Si  $nc$  est entre  $X$  et  $Y$ , alors l'arête correspondante est incidente à  $x_{i_0} \in X$  et à  $y_{i_0} \in Y$ . Donc on choisira le sommet  $y_{i_0} \in Y$  comme racine et l'arête  $y_{i_0}x_{i_0}$  permettra de joindre  $\mathcal{H}_0$  d'où l'on pourra atteindre tous les sommets de  $X - \{x_{i_0}\}$  et ainsi mettre la main sur l'arbre couvrant faiblement colorié. En supposant que la nouvelle couleur  $nc$  est dans  $X$ , on pose  $c(x_1x_2) = nc$ . Alors un voisin de  $x_1$  dans  $Y$  peut être choisi comme racine, car le sommet  $x_2$  est utilisé pour joindre  $\mathcal{H}_0$ .

***Y n'est pas un sous-graphe complet***

Il existe  $y_l \in Y$  et  $y_{l'} \in Y$  tels que  $d_Y(y_l) \leq j - 2$  et  $d_Y(y_{l'}) \leq j - 2$ . Supposons qu'aucun sommet de  $X$  n'est adjacent à tous les sommets de  $Y$ . En considérant le nombre minimum d'arêtes de  $Y$  à  $X$  et le nombre maximum d'arêtes de  $X$  à  $Y$ , suivant les hypothèses, les inéquations suivantes sont vérifiées :

$$(j - 2)(k - j + 1) + 2(k - j + 2) \leq k(j - 1)$$

$$-j^2 + j + k + 2 \leq 0$$

Ce qui signifie que  $2 \leq 0$  car  $-j^2 + j + k = 0$  et cela est absurde. Donc il existe un sommet de  $X$  qui est voisin de tous les sommets de  $Y$  et ce sommet peut être utilisé comme racine de l'arbre couvrant faiblement colorié.

***cas 2 :  $|\mathcal{H}_0| > n - k - j$***

Comme précédemment, soit  $k'$  le nombre de sommets de  $\mathcal{H}_1$  qui ont des voisins dans  $\mathcal{H}_0$  et  $j'$  le nombre des autres sommets de  $\mathcal{H}_1$ . On a alors les inégalités suivantes :  $k' \geq k$  et  $j' \leq j - 1$ . Supposons que  $j' \neq 0$ , autrement il devient évident de voir un arbre couvrant faiblement colorié. Le principal objectif est de prouver qu'il existe un sommet de  $X = \{x_1, \dots, x_{k'}\}$  qui est adjacent à tous les sommets de  $Y = \{y_1, \dots, y_{j'}\}$ . Supposons qu'un tel sommet n'existe pas. Ainsi en utilisant les mêmes techniques que dans le

sous-cas  $b$  du cas 1, on a les inéquations suivantes :

$$(j' - 1)(k - j' + 1) \leq k'(j' - 1)$$

$$(j - l - 1)(k - j + l + 2) \leq (k + l)(j - l - 2)$$

avec  $k' = k + l$  and  $j' = j - 1 - l$ . Nous obtenons  $-j^2 + j + k + (j - 1)(l + 2) \leq 0$ . Puisque  $-j^2 + j + k = 0$ , alors  $(j - 1)(l + 2) \leq 0$ . Cela est impossible car  $j > 1$ . D'où il existe un sommet de  $X$  qui est voisin de tous les sommets de  $Y$  et il peut être considéré comme racine d'un arbre couvrant faiblement colorié.  $\square$

# Chapitre 7

## Un cas particulier d'arbres couvrants propres : Chaînes Hamiltoniennes

Dans ce chapitre, nous étudions les conditions suffisantes d'existence de chaînes alternées hamiltoniennes dans un multigraphe  $c$ -arête-colorié. Les chaînes alternées hamiltoniennes sont des cas particuliers d'arbres couvrants propres. Ces conditions suffisantes se rattachent à la taille du multigraphe, son ordre, le rainbow degré, le nombre de couleurs, la connexité,  $\dots$ . Nous pouvons citer des travaux assez proches des thématiques traitées ici, notamment ceux de Anders Yeo [39] et de Gregory Gutin et Eun Jung Kim [18]. Dans un premier temps, nous nous intéressons aux couplages parfaits ou presque parfaits dans un graphe non-colorié, en mettant une condition sur la taille de celui-ci. Nous déterminons ensuite une condition suffisante sur la taille et le rainbow degré d'un multigraphe 2-arête-colorié pour qu'il ait des couplages parfaits ou presque parfaits en chacune des deux couleurs. Ces couplages vont être utilisés dans la section suivante pour déterminer les chaînes propres maximum compatibles à ces couplages. Enfin, nous nous appuyons

sur ces chaînes maximum propres compatibles aux couplages pour prouver l'existence de chaînes hamiltoniennes propres, en mettant des conditions sur la taille, la connexité et le degré rainbow du multigraphe. Dans la dernière partie du chapitre, les résultats obtenus avec 2 couleurs seront étendus aux multigraphes  $c$ -arête-colorié, avec  $c \geq 3$ . Tous les résultats suivants seront publiés prochainement [3]

## 7.1 Couplages parfaits ou presque parfaits

### 7.1.1 Condition suffisante sur la taille d'un graphe non colorié

**Lemme 7.1.1.** *Soit  $G$  un graphe connexe non colorié simple d'ordre  $n \geq 14$ . Si  $m \geq \frac{(n-3)(n-4)}{2} + 4$ , alors  $G$  a un couplage maximum  $M$  de taille  $|M| \geq \lceil \frac{n-2}{2} \rceil$ .*

**Preuve.** Considérons un graphe  $G$  d'ordre  $n$ . Soit  $M = \{e_1, \dots, e_q\}$  un couplage maximum dans  $G$ . Nous allons subdiviser la preuve en deux parties. Dans un premier temps, nous allons traiter le cas où  $n$  est pair, puis le cas où  $n$  est impair.

*On suppose que  $n$  est pair*

Soit  $q$  le nombre d'arêtes du couplage  $M$ . Nous devons montrer que  $q$  est supérieur ou égal  $\frac{n-2}{2}$ . Supposons que  $q$  est strictement inférieur à  $\frac{n-2}{2}$ . Nous allons montrer qu'on aboutit à une contradiction sur le nombre d'arêtes. Soit  $\bar{G}$  le complément de  $G$ . Le nombre d'arêtes de  $\bar{G}$  correspond au nombre d'arêtes qui ne sont pas présentes dans  $E(G)$ . Comme  $m \geq \frac{(n-3)(n-4)}{2} + 4$ , alors la taille de  $\bar{G}$  est au plus égale à  $3n - 10$ . Il suffira de montrer que le nombre d'arêtes manquantes dans  $G$ , c'est-à-dire celles de  $\bar{G}$ , est au moins égal à  $3n - 9$ . Soit  $I$  le nombre de sommets qui ne sont pas dans le couplage  $M$ . Alors  $I$  est un stable, c'est-à-dire un ensemble de sommets

indépendants. Le nombre d'éléments de  $I$  vaut  $n - 2q$ . Ainsi nous pouvons commencer le décompte des arêtes manquantes de  $G$ . Comme  $I$  est un stable, on peut dénombrer pour l'instant,  $\frac{(n - 2q)(n - 2q - 1)}{2}$  arêtes manquantes. Nous allons à présent déterminer le nombre d'arêtes manquantes entre le stable  $I$  et le couplage  $M$ . Pour chaque arête  $e_i$  de  $M$  et pour tout couple de sommets de  $I$ , il y a au maximum deux arêtes qui relient ce couple de sommets à l'arête  $e_i$  par une seule extrémité. Si les deux extrémités sont reliées, on remplace alors  $e_i$  par ces deux arêtes et on obtient un couplage de taille plus grande que  $M$ , ce qui constitue une contradiction. Si on a également plus de deux arêtes qui relient ce couple de sommets à  $e_i$ , alors les deux extrémités de  $e_i$  sont reliées et on aboutit à la même conclusion. Cela veut dire que la somme des degrés d'un couple de sommets de  $I$  vers une arête  $e_i$  de  $M$  est au plus égale à 2. En faisant la somme totale de ces degrés pour chaque arête, on obtient le nombre de combinaisons de 2 éléments dans un ensemble  $n - 2q$  éléments que l'on divise par  $n - 2q - 1$  qui est le nombre de répétitions de chaque degré de sommet de  $I$ . Comme on a  $q$  arêtes dans  $M$ , alors le nombre d'arêtes manquantes entre  $I$  et  $M$ , vaut au moins  $\frac{2q \binom{n-2q}{2}}{n-2q-1} = q(n-2q)$ . En additionnant encore les nombres calculés, on obtient  $\frac{(n-1)(n-2q)}{2}$  arêtes manquantes. On va comparer ce nombre avec  $3n - 9$ . Ainsi on a  $\frac{(n-1)(n-2q)}{2} - (3n-9) = \frac{n^2-n}{2} - (3+q)n + q + 9$ . Pour  $q = 2, \dots, \frac{n-6}{2}$ , cette différence est positive, ce qui signifie qu'il y a une contradiction sur le nombre d'arêtes. Il reste à voir le cas où  $q = \frac{n-4}{2}$  et pour lequel la différence n'est pas positive. Pour arriver à notre fin, on va distinguer les deux cas suivants :

***Le sous-graphe induit par les sommets du couplage  $M$  est une clique (i.e. complet)***

On affirme que deux sommets quelconques  $x$  et  $y$  de  $I$  ne peuvent pas avoir des voisins différents respectifs  $s$  et  $t$  dans le sous-graphe induit. Sinon on

remplace l'arête  $st$  par les deux arêtes  $xs$  et  $yt$  pour avoir un couplage plus grand que  $M$ . Donc il existe un seul sommet qui est voisin de tous les éléments du stable  $I$ . Entre  $I$  et  $M$ , il manque  $(n-2q)(2q-1)$  arêtes. À ce nombre, on ajoute les  $\frac{(n-2q)(n-2q-1)}{2}$  arêtes manquantes dans  $I$ . Ainsi on dénombre  $\frac{(n-2q)(n+2q-3)}{2}$  arêtes manquantes. On remplace  $q$  par  $\frac{n-4}{2}$  et on obtient  $4n-14$  qui est plus grand que  $3n-9$  pour  $n \geq 14$ .

***Le sous-graphe induit par les sommets du couplage  $M$  n'est pas une clique***

On affirme qu'il y a une clique formée par  $q-1$  arêtes du couplage  $M$ . Sinon entre deux arêtes quelconques du couplage, il manque au moins une arête. Ainsi on a  $\binom{q}{2} = \frac{q(q-1)}{2}$  arêtes manquantes dans le sous-graphe induit par  $M$ . On peut les ajouter aux  $\frac{(n-2q)(n-2q-1)}{2}$  arêtes manquantes de  $I$  et aux  $q(n-2q)$  arêtes manquantes entre  $I$  et  $M$ . On remplace  $q$  par  $\frac{n-4}{2}$  et on obtient  $\frac{(n-4)(n-6)}{8} + 2n - 2$ . On compare cette valeur à  $3n-9$ . On a

$$\frac{(n-4)(n-6)}{8} + 2n - 2 - (3n - 9) = \frac{n^2 - 18n + 80}{8}$$

Le trinôme  $\frac{n^2 - 18n + 80}{8}$  est positif pour  $n \geq 14$ , d'où une contradiction sur le nombre d'arêtes.

Comme précédemment, il ne peut pas y avoir deux sommets de  $I$  qui admettent deux voisins distincts dans la clique. Donc entre la clique et  $I$ , il manque au moins  $(n-2q)(2q-3)$  arêtes. Entre  $I$  et l'arête de  $M$  qui n'est pas dans la clique, il manque au moins  $n-2q$  arêtes, sinon on pourra construire un couplage plus grand que  $M$ . On fait la somme de ces arêtes manquantes sans oublier d'ajouter celles absentes dans le stable  $I$  et on obtient :  $(n-2q)(2q-3) + (n-2q) + \frac{(n-2q)(n-2q-1)}{2}$ . On remplace  $q$  par  $\frac{n-4}{2}$  et on a  $4n-18$  qui est plus grand que  $3n-9$  pour  $n \geq 14$ .

***On suppose que  $n$  est impair***

Dans cette seconde partie de la preuve, on va aller plus vite car il y a des

calculs et des analyses identiques sur lesquelles on ne s'attardera pas. Comme précédemment, on calcule le nombre d'arêtes manquantes dans  $I$  et puis le nombre d'arêtes manquantes entre  $I$  et  $M$ , ce qui donne une formule déjà rencontrée :  $\frac{(n-1)(n-2q)}{2}$ . La valeur minimale de cette fonction, pour  $q = 2, \dots, \frac{n-7}{2}$  est obtenue en  $q = \frac{n-7}{2}$  et elle vaut  $\frac{7n-7}{2}$  qui est plus grand  $3n-9$ . Ainsi on a deux cas critiques à étudier, avec  $q = \frac{n-5}{2}$  (ou  $|I| = 5$ ) et  $q = \frac{n-3}{2}$  (ou  $|I| = 3$ ). En supposant que le sous-graphe induit par  $M$  est une clique, on trouve  $3n-9$  arêtes manquantes pour le cas  $|I| = 3$ , et  $5n-20$  pour le cas  $|I| = 5$ . Ces deux chiffres apportent la contradiction sur le nombre d'arêtes. Nous allons maintenant supposer que le sous-graphe induit par  $M$  n'est pas une clique. Par contre on peut affirmer qu'il y a une clique induite par  $q-1$  arêtes de  $M$ . Supposons que ce ne soit pas le cas. Ainsi comme dans le cas pair, on trouvera pour  $|I| = 3$ ,  $X_3$  arêtes manquantes avec  $X_3 = \frac{(n-3)(n-2)}{8} + \frac{3n-9}{2} + 3$ . On compare la valeur avec  $3n-9$ . Ainsi  $X_3 - (3n-9) = \frac{n^2 - 20n + 75}{8} \geq 0$  si  $n \geq 15$ . Pour le cas  $|I| = 5$ , on trouve  $X_5 = \frac{n^2 + 8n + 15}{8}$  arêtes manquantes.  $X_5 - (3n-9) = \frac{n^2 - 16n + 87}{8}$  est toujours positif car le discriminant est négatif. Ainsi nous venons de montrer qu'il existe, dans les deux cas, une clique engendrée par  $q-1$  de  $M$ . De façon similaire au cas pair, le nombre d'arêtes manquantes vaut  $(n-2q)(2q-3) + (n-2q) + \frac{(n-2q)(n-2q-1)}{2}$  pour  $q = \frac{n-5}{2}, \frac{n-3}{2}$ . Pour  $q = \frac{n-5}{2}$ , on a  $5n-25$  qui est plus grand que  $3n-9$ . Cependant pour  $q = \frac{n-3}{2}$ , on trouve  $3n-12$  qui est inférieur à  $3n-9$ . On aura alors besoin d'utiliser d'autres arguments pour trouver des arêtes manquantes supplémentaires. Posons  $e_i = x_i y_i$ . Nous pouvons supposer que l'arête  $x_q y_q$  n'est pas dans la clique et que le sommet  $x_1$  est le seul de la clique qui relie  $I$  à celle-ci. Ainsi, entre chaque arête  $x_i y_i$  de la clique et  $x_q y_q$ , il manque une arête, sinon on remplace les arêtes  $x_1 y_1, x_i y_i, x_q y_q$  par

les arêtes  $x_1u, x_qv, x_iy_1, y_qy_i$  avec  $u, v \in I$  et cela contredit le fait que  $M$  est maximum. Donc on trouve  $\frac{n-5}{2}$  arêtes manquantes supplémentaires ce qui donne au total  $\frac{7n-29}{2} \geq (3n-9)$  car  $n \geq 15$ . Ce qui termine la preuve. □

### 7.1.2 Conditions suffisantes sur la taille et le rainbow degré d'un multigraphe 2-arête-colorié

**Lemme 7.1.2.** *Soit un multigraphe  $G^c$  d'ordre  $n \geq 14$  tel que  $rd(G^c) = 2$ . Si  $m \geq (n-3)(n-4) + 3n - 2$ , alors  $G^c$  a deux couplages  $M^r$  et  $M^b$  en couleurs,  $r$  comme rouge et  $b$  comme bleue, tels que  $|M^r| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  et  $|M^b| \geq \lceil \frac{n-2}{2} \rceil$ .*

**Preuve.** Nous notons par  $E^r(G^c)$  et  $E^b(G^c)$  les ensembles des arêtes coloriées respectivement en rouge et en bleu, de tailles  $|E^r(G^c)| = m^r$  et  $|E^b(G^c)| = m^b$ , respectivement. Comme  $rd(G^c) = 2$ , alors pour tout sommet  $x$  de  $G^c$ , nous avons  $d^i(x) \geq 1$  pour  $i \in \{r, b\}$ . Nous remarquons également que  $m^i \geq \frac{(n-3)(n-4)}{2} + 4$  pour  $i \in \{r, b\}$ , même si l'un des sous-graphes monochromatiques associés à  $G^c$  est complet. Pour appliquer le Lemme 7.1.1, il suffit de vérifier la connexité des sous-graphes monochromatiques associés à  $G^c$ . Soit  $G_i$  un sous-graphe monochromatique associé à  $G^c$  de couleur  $i$ . Supposons que  $G_i$  n'est pas connexe. Alors on ne peut pas avoir plus de trois composantes connexes, sinon on contredit le nombre d'arêtes  $m^i$ . La plus grande composante connexe de  $G_i$  est d'ordre au moins  $n-3$ , au risque de contredire encore  $m^i$ . Comme  $d^i(x) \geq 1$ , il ne peut pas y avoir de composante connexe constitué d'un seul sommet. Avec toutes ces contraintes,  $G_i$  admet uniquement deux composantes connexes  $C_1$  (on considère que  $C_1$  est la plus grande) et  $C_2$  avec les deux configurations possibles : ( $|V(C_1)| = n-3$  et  $|V(C_2)| = 3$ ) ou ( $|V(C_1)| = n-2$  et  $|V(C_2)| = 2$ ).

Si on a la première configuration, le nombre maximum d'arêtes de  $G_i$  ne peut pas dépasser  $\frac{(n-3)(n-4)}{2} + 3$  qui est strictement inférieure à  $m^i$ , d'où on a une contradiction. Donc il nous reste à étudier la deuxième configuration.

Comme la composante connexe  $C_2$  est constituée d'une seule arête, il serait plus logique de voir le couplage maximum dans  $C_1$  afin d'y rajouter l'arête de  $C_2$ . La taille de la composante connexe  $C_1$  d'ordre  $n-2$ , est de  $m^i - 1$ . Donc  $C_1$  vérifie toutes les conditions du Lemme 7.1.1. Ainsi pour  $n$  impair, on a dans  $C_1$ , un couplage de taille  $\frac{n-3}{2}$  auquel on ajoute l'arête de  $C_2$  pour obtenir un couplage de taille  $\frac{n-1}{2}$  pour chacune des couleurs  $r$  et  $b$ .

Supposons maintenant que  $n$  est pair. Supposons qu'aucun des couplages  $M^r$  et  $M^b$  n'est parfait. Il faudra alors être plus vigilant car on doit traiter les différents cas suivants :  $G_r$  et  $G_b$  ne sont pas connexes,  $G_r$  est connexe et  $G_b$  n'est pas connexe, et  $G_r$  et  $G_b$  sont connexes.

***$G_r$  et  $G_b$  ne sont pas connexes***

Pour chaque couleur, il manque  $2(n-2)$  arêtes entre  $C_1$  et  $C_2$ . À l'intérieur de  $C_1$ , le nombre d'arêtes manquantes pour chaque couleur vaut au moins  $\frac{(n'-1)(n'-2q)}{2}$  (cf. Lemme 7.1.1) avec  $n' = n-2$  et  $q = \frac{n-4}{2}$ . Au total on obtient  $3n-9$  arêtes manquantes pour chaque couleur. Or il suffisait d'en trouver pour les deux couleurs, plus de  $3n-10$  qui est le nombre maximum d'arêtes que peut avoir le graphe complémentaire de  $G^c$ .

***$G_r$  est connexe et  $G_b$  n'est pas connexe***

Comme  $G_b$  n'est pas connexe, on trouve  $3n-9$  arêtes manquantes de couleur  $b$ , juste ce qu'il faut pour avoir la contradiction sur le nombre d'arêtes.

***$G_r$  et  $G_b$  sont connexes***

On suppose qu'un des couplages, par exemple,  $G_b$  engendre une clique et dans ce cas, le nombre d'arêtes bleues manquantes est  $(n-2q)(2q-1)$  (cf. Lemme 7.1.1) avec  $q = \frac{n-2}{2}$ . On y ajoute 1 pour les deux sommets non couplés. Cela donne  $2n-5$  arêtes bleues manquantes. Pour la couleur rouge, on sait qu'on perd au moins  $\frac{(n-1)(n-2q)}{2}$  arêtes, c'est-à-dire  $n-1$  avec

$q = \frac{n-2}{2}$ . Au total, au moins  $3n - 6$  arêtes manquent dans  $G^c$  ce qui est suffisant pour apporter la contradiction.

Supposons maintenant qu'aucun des couplages n'engendre une clique. Ainsi pour chaque couleur, le nombre d'arêtes manquantes vaut  $\frac{q(q-1)}{2} + q(n-2q) + \frac{(n-2q)(n-2q-1)}{2}$  (cf. Lemme 7.1.1) ce qui donne  $\frac{(n-2)(n-4)}{8} + n-1$ , pour  $q = \frac{n-2}{2}$ . En le multipliant par 2, on obtient  $\frac{(n-2)(n-4)}{4} + 2(n-1)$  arêtes manquantes. Ce dernier chiffre étant plus grand que  $3n - 9$ , met fin à la preuve du lemme. □

### 7.1.3 Chaînes propres maximum compatibles à un couplage

**Lemme 7.1.3.** *Soit  $G^c$ ,  $c \geq 2$ , un multigraphe connexe  $c$ -arête-colorié tel que  $G^c$  contienne une chaîne propre  $P = x_1y_1x_2y_2 \dots x_p y_p$ ,  $p \geq 1$ , dont chaque arête  $x_i y_i$  est rouge. Si  $G^c$  ne contient pas de cycle propre  $C$  avec l'ensemble des sommets  $\{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_p, y_p\}$ , alors il y a au moins  $(c-1)(2p-2)$  arêtes manquantes dans  $G^c$ .*

**Preuve.** Soit  $P = x_1y_1x_2y_2 \dots x_p y_p$  une chaîne propre,  $p \geq 2$ , telle que chaque arête  $x_i y_i$  est rouge. Considérons l'autre couleur comme bleue. L'arête bleue  $x_1 y_p$  ne peut être dans  $G^c$ , sinon  $C = x_1 y_p \dots x_1$  est un cycle propre. Supposons que l'arête bleue  $x_1 x_i$  est présente dans  $G^c$ , pour  $i = 2, \dots, p$ . Alors, l'arête bleue  $y_{i-1} y_p$  ne peut pas être dans  $G^c$ , sinon nous avons le cycle propre  $C = x_1 x_i \dots y_p y_{i-1} \dots x_1$  qui contredit l'hypothèse. Donc pour chaque arête  $y_{i-1} x_i$  de la chaîne, une des arêtes bleues suivantes  $x_1 x_i, y_{i-1} y_p$  est absente. Ainsi il y a  $\frac{2p-2}{2}$  arêtes bleues manquantes. Maintenant, nous supposons que les arêtes bleues  $x_1 y_i$  sont présentes dans  $G^c$ , pour  $i = 3, \dots, p -$

2. Alors, les arêtes bleues  $x_{i+1}y_p$  ne peuvent pas être dans  $G^c$  en même temps que les arêtes  $x_iy_{i+1}$ ,  $y_{i-1}x_{i+2}$  ou  $y_{i-1}y_{i+1}$ ,  $x_ix_{i+2}$ , sinon nous avons les cycles propres suivants  $C = x_1y_ix_iy_{i+1}x_{i+1}y_p \dots x_{i+2}y_{i-1} \dots x_1$  ou  $C = x_1y_ix_ix_{i+2} \dots y_px_{i+1}y_{i+1}y_{i-1} \dots x_1$ . Le minimum ici, correspond au cas où on a une arête manquante  $x_{i+1}y_p$  pour chaque arête  $y_{i-1}x_i$  de la chaîne,  $i = 2, \dots, p-1$ . Donc, il y a  $\frac{2p-6}{2}$  arêtes bleues manquantes. Pour le moment nous avons  $2p-3$  arêtes bleues manquantes. Pour obtenir la dernière arête manquante, supposons que l'arête bleue  $x_2y_p$  est présente dans  $G^c$ . Alors, elle ne peut pas l'être en même temps que  $x_1y_2$ ,  $y_1x_3$  ou  $x_1x_3$ ,  $y_1y_2$ , sinon nous obtenons les cycles propres  $C = x_1y_2x_2y_p \dots x_3y_1x_1$  ou  $C = x_1x_3 \dots y_px_2 \dots y_2y_1x_1$ . Le minimum va correspondre au cas où on a une arête manquante  $x_2y_p$ . Nous remarquons que les arêtes bleues  $x_2y_p$ ,  $y_1y_2$  et  $y_1x_3$  n'étaient pas comptées avant. Les arêtes  $x_1x_3$  et  $x_1y_2$  sont supposées exister, sinon, pour obtenir la dernière arête manquante, nous considérons le cas symétrique, i.e., utilisant l'arête manquante  $y_{p-1}x_1$  (s'il existe). Au total, il y a  $\frac{2p-2}{2} + \frac{2p-6}{2} + 2 = (2p-2)$  arêtes bleues manquantes dans  $G^c$ . Comme nous avons  $c-1$  couleurs autres que rouge, cela donne  $(c-1)(2p-2)$  arêtes manquantes.

Notons que pour chaque couleur différente de rouge, le nombre d'arêtes manquantes vaut au moins  $2p-2$ .  $\square$

**Définition 7.1.4.** Une chaîne  $P$  est compatible à un couplage  $M$  si ses arêtes appartiennent alternativement à  $M$  et  $G^c \setminus M$ .

**Lemme 7.1.5.** Soit  $G^c$  un multigraphe connexe  $c$ -arête-colorié,  $c \geq 2$ . Soit  $M$  un couplage monochromatique de  $G^c$  en couleur rouge, par exemple, de taille  $|M| \geq \lceil \frac{n-2}{2} \rceil$ . Si  $P = x_1y_1x_2y_2 \dots x_py_p$ ,  $p \geq 2$ , est une chaîne propre maximum compatible à  $M$ , alors nous avons les différents cas suivants :

(1)  $n$  pair,  $|M| = \frac{n}{2}$  et  $2p < n$

- **(1a)** Si  $P$  n'est pas un cycle propre alors il y a au moins  $(n - 2 + pn - 2p^2)(c - 1)$  arêtes manquantes dans  $G^c$  de couleur différente de rouge et la valeur minimale de cette fonction est  $(2n - 4)(c - 1)$  pour  $p = \frac{n - 2}{2}$ .
  - **(1b)** Si  $P$  est un cycle propre alors il y a au moins  $(2pn - 4p^2)(c - 1)$  arêtes manquantes dans  $G^c$  de couleur différente de rouge et la valeur minimale de cette fonction est  $(2n - 4)(c - 1)$  pour  $p = \frac{n - 2}{2}$ .
- (2)**  $n$  impair,  $|M| = \frac{n - 1}{2}$  et  $2p < n - 1$
- **(2a)** Si  $P$  n'est pas un cycle propre alors il y a au moins  $(n - 3 - p + pn - 2p^2)(c - 1)$  arêtes manquantes dans  $G^c$  de couleur différente de rouge et la valeur minimale de cette fonction est  $(2n - 6)(c - 1)$  pour  $p = \frac{n - 3}{2}$ .
  - **(2b)** Si  $P$  est un cycle propre alors il y a au moins  $(2pn - 2p - 4p^2)(c - 1)$  arêtes manquantes dans  $G^c$  de couleur différente de rouge et la valeur minimale de cette fonction est  $(2n - 6)(c - 1)$  pour  $p = \frac{n - 3}{2}$ .

**Remarque :** pour  $n$  pair,  $|M| = \frac{n - 2}{2}$  et  $2p < n - 2$ , on a :

- (3a)** Si  $P$  n'est pas un cycle propre, alors il y a au moins  $(n - 4 - 2p + pn - 2p^2)(c - 1)$  arêtes manquantes dans  $G^c$  de couleur différente de rouge et la valeur minimale de cette fonction est  $(2n - 8)(c - 1)$  pour  $p = \frac{n - 4}{2}$ .
- (3b)** Si  $P$  est un cycle propre, alors il y a au moins  $(2pn - 4p - 4p^2)(c - 1)$  arêtes manquantes dans  $G^c$  de couleur différente de rouge et la valeur minimale de cette fonction est  $(2n - 8)(c - 1)$  pour  $p = \frac{n - 4}{2}$ .

**Preuve.** Avant de commencer la preuve, nous remarquons que les arêtes  $x_1y_1$  et  $x_py_p$  sont de couleur rouge. Sinon, nous pouvons aisément étendre la chaîne en ajoutant une arête du couplage à  $P$ .

Supposons d'abord que  $n$  est pair et  $2p < n$ . Puisque  $M$  est de taille  $\frac{n}{2}$ , il y a  $\frac{n - 2p}{2}$  arêtes rouges hors de  $P$ ; Notons ces arêtes par  $e_i$  pour  $i = 1, \dots, \frac{n - 2p}{2}$ . Supposons que  $P$  n'est pas un cycle propre. Considérons une autre couleur, disons bleu. Par le Lemme 7.1.3, il y a  $(2p - 2)$  arêtes

bleues manquantes. Comme la chaîne est maximum, nous ne pouvons pas étendre  $P$  avec une arête  $e_i$ , ni en début, ni en fin de chaîne; alors il n'y a pas d'arêtes bleues entre les sommets  $x_1, y_p$  et les arêtes  $e_i$ . Donc, il y a  $4\frac{n-2p}{2}$  arêtes bleues manquantes. Finalement, comme nous ne pouvons ajouter aucune arête  $e_i$  à l'intérieur de la chaîne, alors il y a au plus 2 arêtes bleues entre les arêtes  $e_i$  et les arêtes  $y_i x_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, p-1$ . Ainsi, il y a  $2\left(\frac{n-2p}{2}\right)\left(\frac{2p-2}{2}\right)$  arêtes bleues manquantes différentes de celle rouge. En additionnant et simplifiant tous ces nombres, sachant qu'on a  $c-1$  couleurs différentes de rouge, on arrive à  $(n-2+pn-2p^2)(c-1)$  arêtes manquantes dans  $G^c$  de couleur différente de rouge. La valeur minimum de cette fonction est  $(2n-4)(c-1)$  pour  $p = \frac{n-2}{2}$  et le cas **(1a)** est établi. Maintenant si  $P$  est aussi un cycle propre, alors il ne peut exister aucune arête du tout, de couleur différente de rouge entre tous les sommets de  $P$  et les arêtes  $e_i$  et donc il y a  $2\frac{n-2p}{2}2p(c-1) = (2pn-4p^2)(c-1)$  arêtes manquantes de couleur différente de rouge. En minimisant la fonction, nous obtenons le même résultat que ci-dessus et le cas **(1b)** est prouvé.

Supposons maintenant que  $n$  est impair,  $M = \frac{n-1}{2}$  et  $2p < n-1$ . Les mêmes arguments que précédemment s'appliquent et fournissent le résultat, en remplaçant  $n$  par  $n-1$  sur le nombre d'arêtes manquantes. C'est possible parce que nous avons  $n-1$  sommets couplés et un sommet non couplé.  $\square$

## 7.2 Chaînes hamiltoniennes propres dans un multigraphe 2-arête-colorié

### 7.2.1 Conditions suffisantes sur la taille et le rainbow degré

**Théorème 7.2.1.** *Soit un multigraphe  $G^c$  d'ordre  $n \geq 14$  tel que  $rd(G^c) = 2$ . Si  $m \geq (n-3)(n-4) + 3n - 2$ , alors  $G^c$  a une chaîne hamiltonienne propre.*

**Preuve.** Supposons que  $G^c$  n'a pas de chaîne hamiltonienne propre. Nous allons montrer que  $E(\overline{G^c})$  compte plus de  $3n - 10$  arêtes, i.e.,  $G^c$  a moins de  $(n-3)(n-4) + 3n - 2$  arêtes. Pour cela, nous allons distinguer deux cas :

**A :  $n$  pair**

Par le Lemme 7.1.2,  $G^c$  a deux couplages  $M^r, M^b$ , tel que  $|M^r| = \frac{n}{2}$  et  $|M^b| \geq \frac{n-2}{2}$ . Soit  $P = x_1y_1x_2y_2 \dots x_p y_p$  la plus longue chaîne propre compatible avec le couplage  $M^r$  et  $P' = x'_1y'_1x'_2y'_2 \dots x'_{p'}y'_{p'}$  la plus longue chaîne propre compatible avec le couplage  $M^b$ .

Supposons  $2p < n$  et  $2p' < n - 2$ . Puisque  $|M^r| = \frac{n}{2}$ , alors on a  $c(x_1y_1) = c(x_p y_p) = r$ . Sinon, nous pouvons l'étendre en ajoutant une arête du couplage à  $P$ . Nous avons également  $c(x'_1y'_1) = c(x'_{p'}y'_{p'}) = b$ . Comme  $P$  ( $P'$ ) est proprement colorié, les arêtes  $x_iy_i$  ( $x'_iy'_i$ ) sont rouges (bleues) pour  $i = 1, \dots, p$  ( $p'$ ) et les arêtes  $y_i x_{i+1}$  ( $y'_i x'_{i+1}$ ) sont bleues (rouges) pour  $i = 1, \dots, p-1$  ( $p'-1$ ). Nous avons à étudier les quatre possibilités suivantes :

- Ni  $P$ , ni  $P'$  ne sont des cycles propres.
- $P'$  est un cycle propre mais  $P$  ne l'est pas.
- $P$  est un cycle propre mais  $P'$  ne l'est pas.
- $P$  et  $P'$  sont toutes deux des cycles propres.

D'abord nous remarquons que quelque soit le cas, par le Lemme 7.1.5, il y a au moins  $2n - 4$  arêtes bleues manquantes et  $2n - 8$  rouges. Nous obtenons

$4n - 12 > 3n - 10$  arêtes manquantes. Ce qui est une contradiction. Donc nous avons l'égalité  $2p = 2p' = n - 2$ .

On affirme que  $P$  n'est pas un cycle propre. Sinon, soit  $e$  l'arête rouge du couplage qui n'est pas dans la chaîne  $P$ . S'il existe une arête bleue  $e'$  entre une extrémité de  $e$  et le cycle, nous obtenons aisément une chaîne hamiltonienne propre, en choisissant l'arête  $e$  comme le début de la chaîne. Puis en arrivant par  $e'$  dans le cycle  $P$ , on parcourt  $P$  par l'arête rouge qui est incidente à  $e'$ . Comme  $rd(G^c) = 2$ , il existe toujours une arête bleue entre  $e$  et  $P$ , sinon  $e$  serait une arête double dont une en bleu. Ainsi on contredit le fait que  $|M^b| \geq \frac{n-2}{2}$  puisque dans  $P$  on a un couplage en bleue de taille  $\frac{n-2}{2}$ . Ainsi il y aura une chaîne hamiltonienne propre.

Comme  $P$  n'est pas un cycle propre, alors, de nouveau, par le Lemme 7.1.5, il y a au moins  $2n - 4$  arêtes bleues manquantes. Soient les sommets  $v_1, w_1$  de  $G^c - P'$ . Il est clair que s'il existe une arête bleue joignant  $v_1$  et  $w_1$  (i.e.  $|M^b| \geq \frac{n}{2}$ ), alors nous sommes dans les mêmes conditions que pour le couplage rouge, et donc on obtient une contradiction sur le nombre d'arêtes, en multipliant  $2n - 4$  par 2. Sinon, nous comptons les arêtes rouges manquantes au cas où nous ne pouvons pas étendre  $P'$  à une chaîne hamiltonienne propre. Si nous avons au moins 3 arêtes rouges entre  $v_1, w_1$  et  $x'_1, y'_{p'}$ , alors nous avons une chaîne hamiltonienne et c'est ce qu'on recherchait. Ainsi, on suppose qu'il y a au moins 2 arêtes rouges manquantes. Si la chaîne  $P'$  n'est pas un cycle propre, par le Lemme 7.1.3 il y a  $2p' - 2 = n - 4$  arêtes rouges manquantes. À présent, nous combinons et faisons la somme de tous ces nombres et nous arrivons à  $2n - 4 + n - 4 + 2 = 3n - 6 > 3n - 10$  arêtes manquantes. Ce qui représente une contradiction. Finalement, on suppose que la chaîne  $P'$  est un cycle propre. S'il existe au moins 3 arêtes rouges entre  $v_1, w_1$  et les extrémités des arêtes rouges du cycle, alors nous pourrions ajouter les sommets  $v_1$  et  $w_1$  à la chaîne  $P'$  comme suit. Supposons sans perte de généralité que  $v_1$  est adjacent à  $y'_i$  et  $w_1$  à  $x'_{i+1}$ , avec des arêtes rouges et l'arête rouge  $y'_i x'_{i+1}$  est

présente dans le cycle . Ainsi, nous formons la chaîne hamiltonienne propre commençant par l'arête rouge  $v_1 y'_i$ , en suivant le cycle dans la direction de  $x'_i$  jusqu'à arriver à  $x'_{i+1}$  et enfin l'arête rouge  $x'_{i+1} w_1$ . Donc on suppose qu'il y a au plus deux arêtes rouges entre  $v_1, w_1$  et les extrémités des arêtes rouges du cycle. Ainsi, on trouve  $2 \frac{2p' - 2}{2} = n - 4$  arêtes rouges manquantes. Si nous faisons à nouveau la somme, on arrive à  $2n - 4 + n - 4 + 2 = 3n - 6 > 3n - 10$  arêtes manquantes. Ce qui constitue une contradiction.

***B : n impair***

À nouveau par le Lemme 7.1.2,  $G^c$  a deux couplages  $M^r, M^b$ , tel que  $|M^r| = |M^b| = \frac{n-1}{2}$ . Nous considérons les plus longues chaînes propres  $P$  et  $P'$  compatibles avec les couplages comme précédemment. On suppose  $2p < n - 1$  et  $2p' < n - 1$ . Comme pour le cas pair, nous avons exactement les mêmes quatre possibilités :

- Ni  $P$ , ni  $P'$  ne sont des cycles propres.
- $P'$  est un cycle propre mais  $P$  ne l'est pas.
- $P$  est un cycle propre mais  $P'$  ne l'est pas.
- $P$  et  $P'$  sont toutes deux des cycles propres.

Dans tous les cas, par le Lemme 7.1.5, il y a au moins  $2n - 6$  arêtes bleues manquantes et  $2n - 6$  rouges. Nous obtenons  $4n - 12 > 3n - 10$  arêtes manquantes. Ce qui est une contradiction. Donc nous avons  $2p = 2p' = n - 1$ . Nous compterons les arêtes bleues manquantes si on ne peut pas étendre  $P$  à une chaîne propre hamiltonienne. Le même argument tient pour les arêtes rouges puisque nous sommes dans les mêmes conditions. Soit  $v$  le sommet qui n'appartient pas à la chaîne  $P$ . Il est clair que si  $P$  est aussi un cycle propre, nous obtenons trivialement une chaîne hamiltonienne propre, puisque le graphe est connexe et  $rd(v) = 2$ . En considérant que  $P$  n'est pas un cycle propre, nous savons par le Lemme 7.1.3, qu'il y a  $2p - 2 = n - 3$  arêtes bleues manquantes. Si nous avons des arêtes bleues entre  $v$  et  $x_1$  ou  $y_p$ , nous avons alors une chaîne hamiltonienne et le résultat est fait. Ainsi, il y a deux

arêtes bleues manquantes. Finalement, s'il existe une arête bleue entre  $x_1$  et  $x_i$ ,  $i = 2, \dots, p$ , alors il ne peut pas exister d'arête bleue  $vy_{i-1}$ ,  $i = 2, \dots, p$ , sinon on forme la chaîne hamiltonienne propre  $vy_{i-1} \dots x_1x_i \dots y_p$ . De façon identique, si nous avons les arêtes bleues  $y_p$  et  $y_i$ , avec  $vx_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, p-1$ . Notons que puisque  $P$  n'est pas un cycle propre, nous ne pouvons pas avoir à la fois les arêtes bleues  $x_1x_i$  et  $y_py_{i-1}$ ,  $i = 2, \dots, p$ . Donc, il y a  $\frac{2p-2}{2} = \frac{n-3}{2}$  arêtes bleues manquantes. En conclusion, en faisant la somme et en multipliant par deux, car on a le même nombre d'arêtes rouges manquantes avec  $P'$ , nous obtenons  $2(n-3 + 2 + \frac{n-3}{2}) = 3n-5$  arêtes manquantes. Ce qui constitue une contradiction. Ainsi se termine la preuve.  $\square$

Le Théorème 7.2.1 est le meilleur possible. En effet, pour  $n$  impair,  $n \geq 14$ , considérons un graphe complet en bleu, soit  $A$ , en  $n-3$  sommets. Ajoutons 3 nouveaux sommets  $v_1, v_2, v_3$  et joignons les à un sommet  $v$  de  $A$  avec des arêtes bleues. Finalement, superposons le graphe obtenu avec un graphe complet en rouge de  $n$  sommets. Bien que le multigraphe 2-arête-colorié résultant ait  $(n-3)(n-4) + 3n-3$  arêtes, il n'a pas de chaîne hamiltonienne propre puisque un des sommets  $v_1, v_2, v_3$  ne peut pas appartenir à une telle chaîne.

### 7.2.2 Cycles propres

Les deux lemmes ci-dessous seront utiles pour établir la preuve du Théorème 7.2.4

**Lemme 7.2.2.** *Soit le multigraphe  $G^c$  contenant un cycle propre  $C$ , de longueur au plus  $n-2$  tel qu'il existe une arête rouge  $xy$  dans  $G^c - C$ . Si  $d_C^b(x) + d_C^b(y) > |V(C)|$ , alors  $G^c$  a un cycle propre de longueur  $|V(C)| + 2$  contenant  $xy$ .*

**Preuve.** Posons  $C = x_1y_1x_2y_2 \dots x_sy_sx_1$ , où les  $x_iy_i$  sont les arêtes rouges de  $C$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ . Alors on a  $d_{\{x_i, y_i\}}^b(x) + d_{\{x_i, y_i\}}^b(y) \leq 2$ , sinon si

$d_{\{x_i, y_i\}}^b(x) + d_{\{x_i, y_i\}}^b(y) \geq 3$ , alors le cycle  $x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_i x y y_i \dots x_s y_s x_1$  est celui qu'on cherchait. Il s'en suit que

$$\sum_{i=1}^s d_{\{x_i, y_i\}}^b(x) + d_{\{x_i, y_i\}}^b(y) \leq 2 \frac{|V(C)|}{2} = |V(C)|$$

est une contradiction de l'hypothèse du lemme. Ce qui complète la preuve. □

**Lemme 7.2.3.** *Soit  $G^c$  un multigraphe 2-arête-colorié de taille  $m \geq f_0(n) = (n-1)(n-2) + n$ . Alors  $G^c$  a un cycle hamiltonien propre si  $n$  est pair, sinon un cycle propre de longueur  $n-1$ .*

**Preuve.** Soient rouge et bleu les deux couleurs de  $G^c$ . La preuve se fait par induction sur  $n$ . Le théorème est vrai pour toutes les petites valeurs de  $n$ , à savoir  $n = 2, 3, 4$ . Supposons que  $n \geq 5$  et que le théorème est vrai jusqu'à  $n-1$ . Nous le prouvons pour  $n$ . Par un Théorème de [1], si pour tout sommet  $x$ ,  $d^r(x) \geq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$  et  $d^b(x) \geq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ , alors  $G^c$  a un cycle hamiltonien propre pour  $n$  pair et un cycle propre de longueur  $n-1$  pour  $n$  impair. Supposons donc que pour un sommet donné, soit  $x$ , et pour une couleur donnée, soit rouge,  $d^r(x) \leq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - 1$ . Notons maintenant que  $d^r(x) > 0$  et  $d^b(x) > 0$ , sinon, par exemple si  $d^r(x) = 0$ , alors  $m \leq n(n-1) - (n-1) = (n-1)^2 < (n-1)(n-2) + n$ , est une contradiction. De façon similaire,  $d^r(x) + d^b(x) \geq 3$ , sinon, si  $d^r(x) + d^b(x) \leq 2$ , alors  $m \leq n(n-1) - 2n + 4 = n^2 - 3n + 4 < (n-1)(n-2) + n$ , constitue à nouveau une contradiction. Ainsi nous devons conclure qu'il y a deux voisins distincts,  $y$  et  $z$ , de  $x$  tel que  $c(xy) = r$  et  $c(xz) = b$  dans  $G^c$ . En remplaçant les sommets  $x, y, z$  par un nouveau sommet  $s$  tel que  $N_{G^c - \{x, y, z\}}^b(s) = N_{G^c - \{x, y, z\}}^b(y)$  et  $N^r(s) = N_{G^c - \{x, y, z\}}^r(z)$ , on obtient un graphe  $G'$ , ayant  $n-2$  sommets et au moins  $(n-1)(n-2) + n - [(n-1) + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - 1 + 2(n-2)] = n^2 - \frac{11n}{2} + 8 >$

$f_0(n-2) = n^2 - 6n + 8$  arêtes. Par l'hypothèse d'induction,  $G'$  a un cycle hamiltonien propre pour  $n-2$  pair et un cycle propre de longueur  $n-3$  sinon. Si  $G'$  a un cycle hamiltonien propre, alors en revenant sur  $G^c$ , nous pouvons aisément trouver un cycle hamiltonien propre dans  $G^c$ . Supposons que  $n-2$  (et aussi  $n$ ) est impair. Soit  $C$  un cycle propre de longueur  $n-3$  dans  $G'$ . Si  $s$  appartient à  $C$ , alors comme précédemment nous pouvons aisément trouver un cycle propre de longueur  $n-1$  dans  $G^c$ . Supposons donc que  $s$  n'appartient pas à  $C$ . Par le Lemme 7.2.2, si  $d_C^b(x) + d_C^b(y) > |V(C)|$  ou  $d_C^r(x) + d_C^r(z) > |V(C)|$ , alors nous devons intégrer l'arête  $xy$  (respectivement  $xz$ ) dans  $C$  afin d'obtenir un cycle propre de longueur  $n-1$ . Supposons alors  $d_C^b(x) + d_C^b(y) \leq |V(C)|$  et  $d_C^r(x) + d_C^r(z) \leq |V(C)|$ . Comme le nombre d'arêtes de  $G^c$  est au plus  $n(n-1) - (n-3) - (n-3) = n^2 - 3n + 6 < f_0(n) = n^2 - 2n + 2$ , on a une contradiction. Ceci complète l'argument et finit la preuve.  $\square$

### 7.2.3 Condition suffisante uniquement sur la taille du multigraphe

**Théorème 7.2.4.** *Soit  $G^c$  un multigraphe 2-arête-colorié d'ordre  $n \neq 5, 7$  et de taille  $m \geq f_1(n) = n^2 - 3n + 4$ . Alors  $G^c$  a une chaîne hamiltonienne propre.*

**Preuve.** Par le Théorème 7.2.1, comme on a  $n^2 - 3n + 4 \geq (n-3)(n-4) + 3n - 2$ , il suffit de prouver que pour tout sommet  $x$  de  $G^c$ ,  $rd(x) = 2$ , i.e.,  $d^r(x) \neq 0$  et  $d^b(x) \neq 0$ . Mais on ne peut pas avoir, à la fois  $d^r(x) = 0$  et  $d^b(x) = 0$ , sinon il manquerait au moins  $2(n-1)$  arêtes ce qui est suffisant pour apporter la contradiction sur la taille du graphe. Supposons alors que l'un des degrés coloriés de  $x$ , par exemple,  $d^r(x) = 0$ . Dans ce cas,  $G^c - x$  a au moins  $n^2 - 3n + 4 - (n-1) = n^2 - 4n + 5 = [(n-1)-1][(n-1)-2] + (n-1)$  arêtes. Par le Lemme 7.2.3,  $G^c - x$  a soit un cycle hamiltonien propre ou un cycle propre

de longueur  $n - 2$ . Si  $G^c - x$  a un cycle hamiltonien propre, alors de façon triviale, nous joignons  $x$  au cycle afin d'obtenir une chaîne hamiltonienne propre. Supposons alors que  $n - 1$  est impair et que  $G^c - x$  a cycle propre  $C$ , de longueur  $n - 2$ . Soit  $y$  le sommet qui est hors de  $C$  dans  $G^c - x$ . En utilisant des arguments similaires à ceux du Lemme 7.2.2, nous devons montrer que  $d^r(x) + d^r(y) \leq |V(C)|$  et  $d^b(x) + d^b(y) \leq |V(C)|$ . On en déduit que le nombre d'arêtes de  $G^c$  est au plus  $n(n - 1) - 2(n - 2) + 2 = n^2 - 3n + 4$  ce qui constitue une contradiction sauf si toutes les inégalités deviennent des égalités. En particulier il y a une arête rouge et une arête bleue entre  $x$  et  $y$ . Dans ce cas, on trouve une chaîne propre commençant par  $x$ , et contenant tous les sommets de  $C$ . Ainsi on relie  $y$  à  $x$  en utilisant une arête  $xy$  avec la couleur appropriée. La chaîne propre obtenue est alors hamiltonienne.  $\square$

Le Théorème 7.2.4 est le meilleur possible pour  $n \neq 5, 7$ . En effet, considérons un multigraphe complet 2-arête-colorié de  $n - 2$  sommets avec  $n$  impair. Ajoutons deux nouveaux sommets  $x_1$  et  $x_2$ . Ensuite on ajoute l'arête rouge  $x_1x_2$  et toutes les arêtes rouges entre  $\{x_1, x_2\}$  et le graphe complet. Même si le graphe résultant a  $n^2 - 3n + 3$  arêtes, il n'a pas de chaîne hamiltonienne propre, car au moins un des sommets  $x_1$  ou  $x_2$  ne peut pas être attaché quelque soit la chaîne. En effet, pour  $n$  impair, les deux arêtes terminales de toute chaîne hamiltonienne propre doivent différer en couleurs. Si  $n = 5, 7$ , le Théorème 7.2.4 ne s'applique pas pour les graphes  $H_{k,k+3}$ ,  $k = 1, 2$ .

### 7.3 Chaînes hamiltoniennes propres dans un multigraphe $c$ -arête-colorié, $c \geq 3$

Dans la suite, nous traitons les multigraphes  $c$ -arête-coloriés, pour  $c \geq 3$ . Donc on a une généralisation sur le nombre de couleurs. Nous allons d'abord

donner un résultat préliminaire.

### 7.3.1 Résultat préliminaire

**Lemme 7.3.1.** *Soit  $G^c$  un multigraphe connexe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n$ ,  $c \geq 3$  et de taille  $m \geq cf(n) + 1$ . Il existe une couleur  $c_j$  tel que si on colorie les arêtes de couleur  $c_j$  par une autre couleur existante en supprimant les arêtes parallèles de même couleur, alors le multigraphe  $(c - 1)$ -arête-colorié résultant est connexe et de taille  $m' \geq (c - 1)f(n) + 1$ , tel que si  $G^{c-1}$  a une chaîne hamiltonienne propre alors  $G^c$  en a une aussi. De plus, si  $rd(G^c) = k$ ,  $1 \leq k \leq c$ , alors  $rd(G^{c-1}) = k - 1$ .*

**Preuve.** Soit  $c_i$  la couleur  $i$ ,  $i = 1, \dots, c$ , dans  $G^c$ , et  $|c_i|$  le nombre d'arêtes de couleur  $i$ . Soit  $c_j$  la couleur utilisant le moins d'arêtes. On colorie les arêtes de couleur  $c_j$  par une autre couleur  $c_l$  déjà utilisée, et on supprime (si nécessaire) les arêtes parallèles ayant cette couleur. On note le graphe obtenu par  $G^{c-1}$ . Ainsi on supprime au plus  $|c_j|$  arêtes. Il est évident que ce graphe reste connexe car seules les arêtes parallèles sont supprimées. Si  $G^{c-1}$  a une chaîne hamiltonienne propre, alors, cette chaîne est aussi une chaîne hamiltonienne propre de  $G^c$  avec peut-être quelques arêtes en couleur  $c_j$  (dans le cas recoloration par  $c_l$ ). Notons aussi que si  $rd(G^c) = k$  alors  $rd(G^{c-1}) = k - 1$  car seule la couleur  $c_j$  disparaît. Nous allons montrer que  $m' \geq (c - 1)f(n) + 1$ . Nous avons deux cas. D'abord, si  $|c_j| > f(n)$ , alors on a clairement  $m' \geq (c - 1)f(n) + 1$  car pour tout  $i$ ,  $|c_i| > f(n)$ . Pour le second cas, on a  $|c_j| \leq f(n)$ . On a  $m = \sum_{i=1}^c |c_i| \geq cf(n) + 1$  et donc  $\sum_{i=1, i \neq j}^c |c_i| \geq cf(n) - |c_j| + 1 = (c - 1)f(n) + f(n) - |c_j| + 1$ . Cette dernière expression est supérieure ou égale à  $(c - 1)f(n) + 1$  car  $f(n) - |c_j| \geq 0$ . Finalement, on a  $G^{c-1}$  de taille  $m' \geq (c - 1)f(n) + 1$ .  $\square$

### 7.3.2 Conditions suffisantes uniquement sur la taille du multigraphe

**Théorème 7.3.2.** *Soit  $G^c$  un multigraphe  $c$ -arête-colorié d'ordre  $n \geq 3$  et  $c \geq 3$ . Si  $m \geq \frac{c(n-1)(n-2)}{2} + 1$ , alors  $G^c$  a une chaîne hamiltonienne propre.*

**Preuve.** Tout d'abord par le Lemme 7.3.1, nous pouvons supposer que  $c = 3$  et donc  $m \geq \frac{3(n-1)(n-2)}{2} + 1$ . Puisqu'il existe une couleur, par exemple rouge, telle que le nombre d'arêtes est au moins  $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ , alors par un résultat de O. ORE cité dans [8], il existe une chaîne hamiltonienne rouge, et donc un couplage parfait ou presque parfait.

Comme  $m \geq \frac{3(n-1)(n-2)}{2} + 1$ , on a  $|E(\overline{G^c})|$  qui vaut au plus  $3n - 4$ . Maintenant, nous allons distinguer les deux cas suivants selon que  $n$  est pair ou impair.

**$n$  pair**

Soit  $M^r$  un couplage parfait de couleur rouge, i.e.  $|M^r| = \frac{n}{2}$ . Considérons la plus longue chaîne propre  $P = x_1y_1x_2y_2 \dots x_p y_p$  compatible au couplage  $M^r$ . Posons  $2p = |P|$ . Comme  $|M^r| = \frac{n}{2}$ , on a alors  $c(x_1y_1) = c(x_p y_p) = r$ . Sinon, nous pourrions facilement étendre la chaîne en ajoutant une arête du couplage à  $P$ . Comme  $P$  est proprement coloriée, les arêtes  $x_i y_i$  sont rouges  $i = 1, \dots, p$  et les arêtes  $y_i x_{i+1}$  sont de couleurs différentes de rouge  $i = 1, \dots, p-1$ . Par le Lemme 7.1.5, si  $2p < n$  (i.e.  $P$  n'est pas hamiltonienne), alors il y a au moins  $2(n-2+pn-2p^2)$  arêtes manquantes dans  $G^c$  de couleurs différentes de rouge si  $P$  n'est pas un cycle propre, et  $2(2pn-4p^2)$  sinon. Nous commençons par le premier cas.

**$P$  n'est pas un cycle propre.** Puisqu'il y a au moins  $2(n-2+pn-2p^2)$  arêtes manquantes non rouges, alors l'inégalité suivante doit être satisfaite :  $2(n-2+pn-2p^2) \leq 3n-4$ . Ainsi, en la résolvant, on remarque qu'elle est uniquement vérifiée pour  $n = 4$  et  $p = \frac{n-2}{2}$ . Donc, pour toutes les autres

valeurs, nous avons une contradiction sur le nombre d'arêtes de  $G^c$ . Le cas  $n = 4$  et  $p = \frac{n-2}{2}$  est facile à vérifier. Ainsi,  $P$  doit être une chaîne hamiltonienne propre.

**$P$  est un cycle propre.** Comme auparavant,  $2(2pn - 4p^2) \leq 3n - 4$  doit être satisfaite, et ça arrive seulement si  $n = 4$  et  $p = \frac{n-2}{2}$ . Finalement  $P$  est une chaîne hamiltonienne propre.

**$n$  impair**

Nous prouverons le résultat par induction. Les cas  $n = 3, 5$  sont faciles à vérifier. Soit  $M^r$  un couplage presque parfait en rouge, i.e.  $|M^r| = \frac{n-1}{2}$ .

Considérons la plus longue chaîne propre  $P = x_1y_1x_2y_2 \dots x_py_p$  compatible au couplage  $M^r$ . Comme dans le cas pair,  $c(x_1y_1) = c(x_py_p) = r$ . Par le Lemma 7.1.5, si  $2p < n - 1$ , alors il y a au moins  $2(n - 3 - p + pn - 2p^2)$  arêtes manquantes non rouges dans  $G^c$  si  $P$  n'est pas un cycle propre et  $2(2pn - 2p - 4p^2)$  sinon. Nous commençons par le premier cas.

**$P$  n'est pas un cycle propre.**

Puisqu'il y a au moins  $2(n - 3 - p + pn - 2p^2)$  arêtes manquantes non rouges, alors l'inégalité suivante doit être satisfaite :  $2(n - 2 + pn - 2p^2) \leq 3n - 4$ .

En la résolvant, on voit que c'est vrai pour  $n = 5, 7$  et  $p = \frac{n-3}{2}$ . Nous montrerons d'abord le cas où  $2p = n - 1$ , c'est-à-dire, nous avons juste un sommet, par exemple  $v$ , qui n'est pas dans la chaîne propre  $P$ . Nous avons les cas suivants selon le degré et le voisinage de  $v$ .

**$v$  a au moins deux voisins**, par exemple  $x$  et  $y$ , en deux couleurs différentes, que l'on note  $c_1$  et  $c_2$  respectivement. Si nous ne pouvons pas relier  $v$  à la chaîne  $P$ , nous aurions quatre arêtes non rouges manquantes entre  $v$  et les sommets  $x_1, y_p$ . Nous avons au plus deux arêtes non rouges entre  $v$  et les arêtes  $y_i, x_{i+1}$  de la chaîne. Donc il y a  $2\frac{n-3}{2}$  arêtes manquantes. En faisant l'addition, nous concluons que le degré de  $v$  en couleur non rouge est au plus  $n - 3$ . Ainsi, si nous contractons les trois sommets  $v, x, y$  à un nouveau sommet, noté  $v'$ , nous supprimerons les  $n - 3$  arêtes non rouges et  $n - 1$

arêtes rouges de  $v$ . Au plus  $n - 3$  arêtes de couleur  $c_1$  de  $x$ ,  $n - 3$  de couleur  $c_2$  de  $y$ , 3 arêtes parallèles entre  $x$  et  $y$ . Finalement pour toutes les arêtes de couleur  $c_3$  à partir de  $x$  mais non de  $y$ , nous supprimons juste les arêtes de couleur  $c_3$  qui ne sont pas incidentes à un voisin commun de  $x$  avec une couleur  $c_3$ . Le total est au plus  $n - 3$ . En additionnant tous ces nombres, nous arrivons, après la contraction, à supprimer  $5n - 10$  arêtes. Maintenant, c'est facile au nouveau multigraphe  $G'^c$  3-arête-colorié d'ordre  $n - 2$ , d'avoir au moins  $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 - (5n-10) \geq \frac{(n-3)(n-4)}{2} + 1$ , pour  $n \geq 5$ . Donc, par l'hypothèse d'induction, nous avons une chaîne hamiltonienne propre  $P'$  dans  $G'^c$ . Pour construire une chaîne hamiltonienne propre de  $G^c$ , nous avons les situations suivantes. Si  $v'$  est une extrémité de la chaîne  $P'$ , c'est-à-dire,  $v'P'' = P'$ , et que l'arête de la chaîne qui est incidente à  $v'$  est de couleur  $c_1$  ( $c_2$ ), cela signifie, à cause des arêtes supprimées, que cette arête doit être incidente à  $y$  ( $x$ ) dans le graphe  $G^c$ . Ainsi, on obtient la chaîne hamiltonienne propre  $xvyP''$  ( $yvxP''$ ) dans  $G^c$ , avec  $c(xv) = c_1$ ,  $c(vy) = c_2$  et  $c(yP'') = c_1$  (avec  $c(yv) = c_2$ ,  $c(vx) = c_1$  et  $c(xP'') = c_2$ ). Si l'arête de la chaîne  $P'$  qui est incidente à  $v'$  est de couleur  $c_3$ , nous avons alors une chaîne hamiltonienne propre  $xvyP''$  ou  $yvxP''$  dans  $G^c$ , car l'extrémité était un voisin commun de couleur  $c_3$  à  $x$  et  $y$ . Soient  $v_1, v_2$  les sommets de  $P_1, P_2$  respectivement adjacents à  $v'$ . Supposons que la chaîne  $P'$  est de la forme  $P_1v'P_2$ . Si ( $c(v_1v') = c_1$  et  $c(v'v_2) = c_2$ ) ou ( $c(v_1v') = c_1$  et  $c(v'v_2) = c_3$ ), alors nous avons, par la façon de supprimer des arêtes destinées à la contraction, la chaîne hamiltonienne propre dans  $G^c$ ,  $P_1yvxP_2$  avec  $c(v_1y) = c_1$ ,  $c(yv) = c_2$ ,  $c(vx) = c_1$  et  $c(xv_2) = c_2$ , ou  $P_1yvxP_2$  avec  $c(v_1y) = c_1$ ,  $c(yv) = c_2$ ,  $c(vx) = c_1$  et  $c(xv_2) = c_3$ . Les autres cas sont juste symétriques ou analogues.

**$v$  est monochromatique en rouge.** Nous avons les sous-cas suivants. D'abord, on a  $d(v) \leq n - 2$ , ensuite on considère  $G^c - \{v\}$ , puis on supprime un voisin  $w$  de  $v$ , et toutes les arêtes en deux couleurs afin d'avoir  $w$  monochromatique mais pas en rouge. Notons ce graphe  $G'^c$ . On remarque que nous

pouvons toujours le faire, car ce n'est pas possible d'avoir 2 sommets monochromatiques. Ainsi, nous supprimons au plus  $n - 2 + n - 2 + n - 2 = 3n - 6$  arêtes. Il est facile de voir que le graphe  $G'^c$  d'ordre  $n - 1$ , a au moins  $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 - (3n - 6) = \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1$ , et par le cas pair, nous avons une chaîne hamiltonienne propre  $P'$  dans  $G'^c$ .

Puisque  $w$  est monochromatique (pas en rouge),  $w$  est soit au début ou à la fin de  $P'$  et donc il est trivial d'ajouter  $v$  à  $P'$  afin de trouver une chaîne hamiltonienne propre dans  $G^c$ . Si ce n'est pas vérifié, on a  $d(v) = n - 1$ . Donc le graphe  $G^c - \{v\}$  d'ordre  $n - 1$ , est de taille au moins  $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 - (n-1) \geq \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1$ . Ainsi, nous avons une chaîne hamiltonienne propre  $P'$  dans  $G'^c$ . Si la chaîne commence ou termine avec une couleur différente de rouge, alors on ajoute simplement  $v$  à la chaîne. Sinon, si on peut considérer une arête parallèle à celle-ci sans perdre la propriété d'être proprement colorié, alors on peut ajouter le sommet  $v$  à la chaîne. Sinon, nous avons, sans perdre la généralité, le degré dans une certaine couleur, par exemple  $c_1$ , du premier sommet de la chaîne, par exemple  $w$ , qui est au plus  $n - 3$ . Alors, on retrouve le premier cas, car on considère le graphe  $G^c - \{v\}$  et on supprime, à partir de  $w$ , les arêtes de couleur  $c_1$  et dans une autre couleur afin d'avoir  $w$  monochromatique mais pas en rouge. Ainsi, on supprime  $n - 1 + n - 2 + n - 3 = 3n - 6$  arêtes. Finalement, on a le résultat exactement comme dans la première situation.

$v$  **a un voisin**, par exemple  $w$ , en au moins deux couleurs. Ce cas est analogue au dernier juste en prenant le graphe  $G^c - \{v\}$  et en supprimant à partir de  $w$ , des arêtes dans les deux couleurs appropriées pour le rendre monochromatique. Ainsi nous supprimons  $3 + 2(n - 2) = 2n + 1$  arêtes et nous avons  $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 - (2n + 1) \geq \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1$  pour  $n \geq 7$ . Comme  $n = 5$  était prouvé, alors ce cas est terminé.

Pour finir avec le cas où  $P$  n'est pas un cycle propre, nous devons juste vérifier pour  $n = 7$  et  $p = \frac{n-3}{2}$ . Soit  $P = x_1y_1x_2y_2$  la plus longue chaîne compatible

avec le couplage, et  $uv$  l'arête du couplage qui n'est pas dans la chaîne. Soit  $w$  le sommet non couplé. Comme  $P$  est maximum, on ne peut pas lui ajouter l'arête  $uv$ . Et comme  $P$  n'est pas un cycle propre, on peut vérifier que le degré de  $x_1$  est au plus 10 ou bien le degré de  $y_2$  est au plus 10. Ainsi, si nous contractons sans perte de généralité  $x_1, y_1$  et un voisin de  $x_1$  ou de  $y_1$ , nous supprimons au plus 25 arêtes. Nous pouvons vérifier que le nouveau graphe satisfait les hypothèses du théorème pour  $n = 5$  et le résultat se déduit avec le même argument qu'auparavant pour la contraction.

***P est un cycle propre***

Comme auparavant,  $2(2pn - 2p - 4p^2) \leq 3n - 4$  doit être vérifié, et c'est le cas seulement si  $n = 5, 7$  et  $p = \frac{n-3}{2}$ . Le cas où  $2p = n - 1$  est trivial, car comme le graphe est connexe, le seul sommet en dehors de la chaîne, doit être connecté à  $P$ . Comme la chaîne est aussi un cycle, nous pouvons obtenir une chaîne hamiltonienne propre juste, en prenant ce sommet connecté à la chaîne et en suivant le cycle dans la direction appropriée. Pour le cas  $n = 7$  et  $p = \frac{n-3}{2}$ , soit  $P = x_1y_1x_2y_2$  la chaîne compatible avec le couplage (c'est également un cycle propre). Soit  $uv$  l'arête du couplage en dehors de la chaîne et soit  $w$  le sommet non couplé. Comme  $P$  est maximum, on ne peut pas lui ajouter l'arête  $uv$ , ainsi nous avons juste des arêtes rouges entre les sommets  $u, v$  et les sommets de la chaîne, ce qui veut dire que le degré de  $u$  et  $v$  est au plus 10. Donc, on peut contracter les sommets  $u, v$  et un voisin de  $u$  ou de  $v$ , comme nous l'avons déjà fait. Nous supprimons ainsi au plus 25 arêtes. Le résultat tiendra avec le même argument que celui utilisé dans le dernier cas. Ainsi la preuve se termine.

□

# Chapitre 8

## Conclusions et Perspectives

Le  $k$ -linkage et les arbres couvrants sont des thématiques très importantes en théorie des graphes de façon générale. Dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés à ces deux grands sujets dans le cas des graphes arête-coloriés. Dans un premier temps nous avons pu fournir quelques résultats sur le  $k$ -linkage, puis sur les arbres couvrants et enfin sur les chaînes hamiltoniennes. Tous les résultats obtenus et traités dans ce document sont purement combinatoires.

Dans la première partie de cette thèse, on s'est focalisé sur la notion de  $k$ -linkage qu'on a abordé sous deux aspects : les chaînes sommet-disjointes et les chaînes arête-disjointes. Ainsi, sur les deux aspects de la question, nous avons pu établir des conditions suffisantes pour savoir qu'un graphe (multi-graphe) est  $k$ -lié ou  $k$ -arête-lié. Dans les cas du  $k$ -lié, ces conditions suffisantes portent sur deux propriétés du graphe : son degré colorié, son nombre d'arêtes. Avec uniquement le critère degré colorié du graphe, on a établi deux résultats puissants. Également, avec comme seul critère, le nombre d'arêtes du graphe, on a obtenu une condition suffisante pour que le graphe soit  $k$ -lié. Le document présente aussi des résultats similaires dans la cas  $k$ -arête-lié. Seulement dans ce dernier cas, les hypothèses sont souvent moins fortes du fait que, quand un graphe est  $k$ -lié alors il est forcément  $k$ -arête lié, alors que

la réciproque n'est pas toujours vérifiée. En mixant, les deux critères, des conditions suffisantes pour chacun des cas, ont été établies. Toutes ces conditions sont fournies sous forme de fonctions extrémales portant sur le ou les critère(s) cité(s) ci-dessus, qui garantissent les meilleurs résultats possibles, relativement à la (ou aux) propriété (s) considérée (s). Alors il fallait tout le temps, chercher et trouver des graphes extrémaux pour pouvoir déterminer ces fonctions.

Dans la deuxième partie, des conditions suffisantes pour obtenir des arbres couvrants sont présentées. Ainsi avec les concepts d'arbres couvrants propres ou d'arbres faiblement coloriés, des résultats sont obtenus par rapport aux propriétés suivantes : la connexité, le nombre de couleurs, la taille et le degré rainbow des graphes. Comme dans la première partie, grâce aux fonctions extrémales, les résultats fournis sur les arbres couvrants, sont les meilleurs possibles relativement à la (ou aux) propriété (s) considérée (s). En étudiant les chaînes hamiltoniennes, qui constituent un cas particulier d'arbres couvrants, des résultats, par rapport à des conditions suffisantes sur une ou des propriété (s) précitée (s) sont d'abord fournis dans le cas de graphes ayant deux couleurs puis ayant un nombre de couleurs supérieur à 2.

Pour autant, il y a encore du travail à faire au niveau des graphes arête-coloriés, notamment dans le domaine de la complexité algorithmique pour le problème du  $k$ -linkage. Les perspectives y sont énormes car tous les thèmes abordés dans les graphes ordinaires (sans couleur) peuvent être d'un intérêt considérable en les transposant dans les graphes arête-coloriés. Sans aucun doute, on voit clairement que l'étude des graphes arête-coloriés constitue un chantier très vaste et elle a un bel avenir devant elle.

# Bibliographie

- [1] A Abouelaoualim, C Das, W Fernandez de la Vega, M Karpinski, Y Manoussakis, C A Marthinon, and R Saad. Cycles and paths in edge-colored graphs with given degrees. *Graph Theory*, 64 :63–86, 2010.
- [2] Abdelfattah Abouelaoualim. *Exploration des graphes arêtes-colorées : topologie, algorithmes, complexité et (non)-approximabilité*. PhD thesis, Université de Paris-Sud U.F.R. Scientifique d’Orsay, Septembre 2007.
- [3] Raquel Àgueda, Valentin Borozan, Marina Groshaus, Yannis Manoussakis, Gervais Mendy, and Leandro Montero. Proper hamiltonian paths in edge-colored multigraphs. *To appear*.
- [4] M. Andrews and L. Zhang. Hardness of the undirected edge-disjoint paths problem. *Proceedings of the thirty-seventh annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 276–283, 2005.
- [5] Jørgen Bang-Jensen and Gregory Gutin. *Digraphs Theory, Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, August 2007.
- [6] J. M. Becu, M. Dah, Yannis Manoussakis, and G. Mendy. Links in edge-colored graphs. *European Journal of Combinatorics - EJC*, 31(2) :442–460, February 2010.
- [7] Béla Bollobás and Andrew Thomason. Highly linked graphs. *Combinatorica*, 16(3) :313–320, 1996.
- [8] John Adrian Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory With Applications*. Elsevier Science Ltd, 1976.

- [9] Andrei Z. Broder, Alan M. Frieze, Stephen Suen, and Eli Upfal. Optimal construction of edge-disjoint paths in random graphs. *Symposium on Discrete Algorithms*, Proceedings of the fifth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms :603–612, 1994.
- [10] Andrei Z. Broder, Alan M. Frieze, and Eli Upfal. Existence and construction of edge disjoint paths on expander graphs. *Journal of the ACM*, Proceedings of the 24'th annual ACM symposium on Theory of computing :140–149, 1992.
- [11] C. Chekuri and S. Khanna. Edge disjoint paths revisited. *In Proceedings of 45th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 115–124, 2004.
- [12] W. S. Chou, Y. Manoussakis, O. Megalaki, M. Spyratos, and Zs. Tuza and. Paths through fixed vertices in edge-colored graphs. *Mathématiques et sciences humaines*, 127 :49–58, 1994.
- [13] S. Cook. The complexity of theorem proving procedures. *Journal of the ACM*, Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing :151–158, 1971.
- [14] S. Even, A. Itai, and A. Shamir. On the complexity of time-table and multicommodity flow problems. *SIAM J. Comput*, 5 :691–703, 1976.
- [15] S. Fortune, J. E. Hopcroft, and J. Wyllie. The directed subgraph homeomorphism problem. *Theoretical Computer Science*, 10 :111–121, 1980.
- [16] Ronald J. Gould, Alexandr V. Kostochka, and Gexin Yu. On minimum degree implying that a graph is h-linked. *Siam Journal on Discrete Mathematics - SIAMDM*, 20(4) :829–840, 2006.
- [17] V. Guruswami, S. Khanna, R. Rajaraman, B. Shepherd, and M. Yannakakis. Near-optimal hardness results and approximation algorithms for edge-disjoint paths and related problems. *In Proceedings of 31st STOC*, pages 19–28, 1999.

- 
- [18] Gregory Gutin and Eun Jung Kim. Properly coloured cycles and paths : Results and open problems. *SpringerLink*, 5420 :200–208, 2009.
- [19] T.C. Hu and Y.S. Kuo. Graph folding and programmable logical arrays. *Networks*, 17 :19–37, 1987.
- [20] Ken ichi Kawarabayashi and Alexandr Kostochka. On sufficient degree conditions for a graph to be k-linked. *Combinatorics, Probability and Computing*, 15(5) :685–694, September 2006.
- [21] Ken ichi Kawarabayashi and Bruce A. Reed. Highly parity linked graphs. *Combinatorica*, 29(2) :215–225, 2009.
- [22] Jose R. Correa and Michel X. Goemans. An approximate konig’s theorem for edge-coloring weighted bipartite graphs. *STOC '04 Proceedings of the thirty-sixth annual ACM symposium on Theory of computing*, 2004.
- [23] Mikio Kano and Xueliang Li. Monochromatic and heterochromatic subgraphs in edge-colored graphs - a survey. *Graphs and Combinatorics*, 24 :237–263, 2008.
- [24] R. M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of Computer Computation*, R.E. Miller, J. W. Thatcher, Eds., New York : Plenum Press, pages 85–104, 1972.
- [25] R. M. Karp. On the computational complexity of combinatorial problems. *Networks*, 5 :45–68, 1975.
- [26] Jon Kleinberg. *Approximations algorithms for disjoint paths problem*. PhD thesis, MIT, Cambridge, MA, May 1996.
- [27] Jon Kleinberg. An approximation algorithm for the disjoint paths problem in even-degree planar graphs. *FOCS*, 46th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science :627–636, 2005.

- [28] Jon Kleinberg and Éva Tardos. Disjoint paths in densely embedded graphs. *FOCS*, 36th Annual Symposium on Foundations of Computer Science :52–61, 1995.
- [29] Jon Kleinberg and Éva Tardos. Approximations for the disjoint paths problem in high-diameter planar networks. *Journal of Computer and System Sciences*, 57 :61–73, 1998.
- [30] Yannis Manoussakis. Alternating paths in edge-colored complete graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 56 :297–309, 1995.
- [31] Y. Perl and Y. Shiloach. Finding two disjoint paths between two pairs of vertices in a graph. *Journal of the ACM*, 25(1) :1–9, 1978.
- [32] P. A. Pevzner. Dna physical mapping and properly edge colored eulerian cycles in colored graphs. *Algorithmica*, 13 :77–105, 1995.
- [33] P. A. Pevzner. *Computational Molecular Biology : An Algorithmic Approach* The MIT Press. The MIT Press, 2000.
- [34] R. Agueda, V. Borozan, Y. Manoussakis, G. Mendy, and R. Muthu. Sufficient conditions for the existence of spanning colored trees in edge-colored graphs. *submitted to Discrete Mathematics*, 2010.
- [35] N. Robertson and P. D. Seymour. Graph minors .xiii. the disjoint paths problem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 63(1) :65–110, 1995.
- [36] P. D. Seymour. Disjoint paths in graphs. *Discrete Math*, 29 :293–309, 1980.
- [37] Y. Shiloach. A polynomial solution to the undirected two paths problem. *Journal of the ACM*, 27(3) :445–456, 1980.
- [38] Paul Wollan. *Extremal Functions for Graph Linkages and Rooted Minors*. PhD thesis, School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, USA, Decembre 2005.

- [39] Anders Yeo. A note on alternating cycles in edge-coloured graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 69 :222–225, 1997.