



HAL
open science

Classification des algèbres de Lie sous-riemanniennes et intégrabilité des équations géodésiques associées.

Khaled Dahamna

► **To cite this version:**

Khaled Dahamna. Classification des algèbres de Lie sous-riemanniennes et intégrabilité des équations géodésiques associées.. Mathématiques générales [math.GM]. INSA de Rouen, 2011. Français. NNT : 2011ISAM0012 . tel-00769931

HAL Id: tel-00769931

<https://theses.hal.science/tel-00769931>

Submitted on 4 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

en vue de l'obtention du titre de

Docteur de l'Institut National des Sciences Appliquées de
Rouen

Discipline : Mathématiques appliquées

Spécialité : Géométrie et contrôle optimal

présentée par

KHALED DAHAMNA

Sujet :

CLASSIFICATION DES ALGÈBRES DE LIE
SOUS-RIEMANNIENNES ET INTÉGRABILITÉ DES
ÉQUATIONS GÉODÉSIQUES ASSOCIÉES.

Soutenue le 23 septembre 2011

Composition du Jury :

Jean-Paul GAUTHIER Professeur à l'Université de Toulon, rapporteur

Emmanuel TRÉLAT Professeur à l'Université de Paris 6, rapporteur

Erik LENGART Professeur à l'INSA de Rouen, examinateur

Andrzej MACIEJEWSKI Professeur à l'Université de Zielona Gora (Pologne), examinateur

Witold RESPONDEK Professeur à l'INSA de Rouen, directeur de thèse

Rachida EL ASSOUDI Maître de conférences à l'INSA de Rouen, co-encadrante

Thèse préparée à l'INSA de Rouen
Laboratoire de Mathématiques de l'INSA, EA 3226.

Remerciements

Je souhaite en premier lieu remercier de manière très chaleureuse mes responsables de thèse, à savoir Rachida El Assoudi et Witold Respondek qui sont à l'origine de ce travail. C'est un honneur pour moi d'avoir pu travailler en leur compagnie et je n'ai pu qu'admirer leurs talents dans bien des domaines. Ils ont dirigé ma thèse de doctorat avec beaucoup de patience et ont consacré beaucoup de temps à mon travail en étant toujours très disponibles, ce qui m'encouragea énormément. Je les remercie également pour avoir lu et corrigé très sérieusement la version finale de mes travaux de recherche ; en effet, leurs remarques et corrections ont donné beaucoup plus de clarté aux résultats de ce mémoire.

Par ailleurs, je remercie les professeurs Jean-Paul Gauthier et Emmanuel Trélat, qui m'ont fait l'honneur d'accepter de rapporter mon mémoire de thèse de doctorat et de m'apporter des propositions de corrections. Je remercie également les professeurs Erik Lengart et Andrzej Maciejewski de m'avoir fait l'honneur d'être examinateurs.

J'adresse mes remerciements à tous ceux qui m'ont entouré, permanents ou doctorants du LMI pour les bons moments partagés ensemble. En particulier, je tiens à saluer Mohamed, Lamia, Benoit, Yi-shuai, Shunjie-Li, Mamadou, Omar, Sandra et tous ceux avec qui j'ai partagé mes années de doctorat.

Je remercie également mon épouse Myriam, pour m'avoir beaucoup aidé durant cette thèse de doctorat et dont le soutien m'a été plus qu'important pendant ces années de doctorat au LMI.

Enfin, je voudrais dédier cette thèse à mon défunt père qui me manque énormément et pour lequel j'ai toujours une pensée. Il a été le premier à m'encourager à aller si loin dans les études et m'a inculqué le goût du travail et de la rigueur.

Table des matières

Remerciements	3
Introduction	9
1 Préliminaires	17
1.1 Variété sous-riemannienne	17
1.2 Principe du maximum de Pontryagin et géodésiques	22
1.3 Groupes et algèbres de Lie sous-riemanniens	27
1.3.1 Le principe du maximum de Pontryagin sur les groupes de Lie	28
1.3.2 Système adjoint de Lie-Poisson et géodésiques	30
2 Classification des algèbres de Lie sous-riemanniennes nilpotentes d'ordre 2	33
2.1 Algèbres de Lie nilpotentes	33
2.2 Algèbres de Lie sous-riemanniennes	36
2.3 Classification des SR-algèbres de Lie telles que $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = 1$	39
2.4 Classification des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2	42
2.4.1 Classification des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 de dimension $n = 5$	42
2.4.2 Classification des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 de dimension $n = 6$	44
2.4.3 Classification des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 de dimension $n = 7$	48
2.5 Preuves des Théorèmes en dimension 6 et 7	51
2.5.1 Preuve du Théorème 2.21	51
2.5.2 Preuve du Théorème 2.22 et de la SR-invariance des paramètres	59
2.5.3 Preuve du Théorème 2.24	62

2.5.4	Preuve du Théorème 2.25	63
2.6	Preuves des lemmes	70
2.6.1	Preuve du Lemme 2.5	70
2.6.2	Preuve du Lemme 2.8	71
2.7	SR-algèbres de Lie de contact et de quasi-contact	72
2.8	Groupe des symétries infinitésimales sous-riemanniennes	75
3	Géodésiques associées à des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2	83
3.1	Intégrales premières et intégrabilité	83
3.1.1	Intégrabilité d'un système linéaire autonome	87
3.1.2	Intégrabilité d'un système hamiltonien	94
3.2	Système hamiltonien sous-riemannien	95
3.3	Équation adjointe pour des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 et sa résolution	98
3.4	Intégrabilité des équations adjointes associées aux modèles $\mathfrak{g}_{(n,c,d)}$ pour $n \leq 7$	103
3.4.1	Étude du cas $n = 5$	103
3.4.2	Étude du cas $n = 6$	108
3.4.3	Étude du cas $n = 7$	113
3.5	Intégrabilité des équations adjointes associées à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ lorsque $\dim \mathcal{D}(\mathfrak{g}) = 1$	123
3.6	Géodésiques sur des groupes de Lie nilpotents d'ordre 2	124
3.6.1	Intégrabilité du système hamiltonien sur un modèle de \mathbb{R}^n	124
3.6.2	Modèle matriciel d'une SR-algèbre de Lie de Heisenberg	131
3.6.3	Modèle matriciel pour $\mathfrak{g}_{(n,c,d)}$	134
4	Intégrabilité des équations adjointes associées à $\mathfrak{so}(4)$ et à $\mathfrak{so}(2, 2)$.	137
4.1	SR-algèbre de Lie involutive de contact	137
4.2	SR-algèbres de Lie $\mathfrak{so}(4)$ et $\mathfrak{so}(2, 2)$	138
4.2.1	Métrique ad_k invariante	139
4.2.2	Preuve du Théorème 4.1	140
4.3	Système adjoint et intégrales premières pour $\mathfrak{so}(4)$	144
4.3.1	Le cas $\lambda = \mu$	147
4.3.2	Le cas $\lambda \neq \mu$	151
4.3.3	Preuve du Théorème 4.15(i)	153

4.3.4	Fonction elliptique de Weierstrass et preuve du Théorème 4.15(ii).	154
4.3.5	Méthode de Ferrari pour obtenir une racine x_r .	157
4.3.6	Preuve du Théorème 4.15(iii).	158
Annexe du Chapitre 3		163
	Preuve du Lemme 3.16	163
	Liste complète des intégrales premières d'un système $\dot{P}(t) = AP(t)$ avec $P \in \mathbb{R}^4$ et A matrice antisymétrique non nulle à coefficients réels constants.	165
Conclusions		175
Références		179

Introduction

La géométrie sous-riemannienne a pour objet l'étude d'un triplet (M, \mathcal{D}, B) (dite une variété sous-riemannienne), où M est une variété différentiable réelle de dimension n et de classe C^∞ , \mathcal{D} est une distribution sur M de classe C^∞ et B est une forme bilinéaire définissant un produit scalaire dans chaque \mathcal{D}_q , $q \in M$. On considère une courbe horizontale $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ telle que $\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}$ presque partout. Si l'algèbre de Lie \mathcal{G} engendrée par les sections de \mathcal{D} satisfait $\mathcal{G}(q) = T_q M$, pour tout $q \in M$, alors on peut joindre n'importe quels deux points q_0 et q_1 de M par une courbe horizontale (théorème de Rashevsky et Chow). En géométrie sous-riemannienne, on explore la nature de M en suivant seulement les courbes horizontales, en particulier la distance sous-riemannienne qui est définie comme l'infimum des longueurs (mesurée à l'aide de B) des courbes horizontales en joignant des points donnés.

L'étude systématique de la géométrie sous-riemannienne a été introduite par de célèbres mathématiciens tels que Strichartz dans [86], [87] où il a introduit ce concept d'une manière très générale, ou par Vershik et Gershkovich dans [90] où ils étudient la géométrie sous-riemannienne et ses relations avec la dynamique non holonome, ou par Gromov qui a développé l'approche basée sur les espaces métriques dans [46]. Il est aussi important de signaler que les ouvrages, respectifs, de Bellaïche et Risler [13], Montgomery [67] et de Calin et Chang [24], constituent des références fondamentales dans l'étude de la géométrie sous-riemannienne.

L'importance de la géométrie sous-riemannienne provient essentiellement de ses applications riches et multiples, citons quelques une des plus importantes : l'approche géométrique à la thermodynamique par Carathéodory (voir Boyling [21], Hermann [48] et Flankel [33]) peut être considérée comme le début de la géométrie sous-riemannienne (théorème de Chow [25], obtenu aussi indépendamment par Rashevsky [76]); la théorie des opérateurs hypoelliptiques sur des groupes de Lie

nilpotents d'ordre 2 étudiée, par exemple, par Gaveau dans [41] (où il a établi des relations entre le problème variationnel et le problème de contrôle optimal); la mécanique non holonome et ses relations multiples avec le contrôle et le calcul variationnel sous contraintes (voir le livre de Bloch [15] et ses références); le problème classique d'élasticité introduit par Euler [29] puis étudié par Jurdjevic [54] et [56] ou par Sachkov [80], [81] et [82]; les contrôles de systèmes quantiques étudiés notamment par Gauthier et ses collaborateurs [36], [37], [38] ou par Khaneja, Brockett et Glaser dans [58].

Dans ce mémoire, nous considérons les variétés sous-riemanniennes (M, \mathcal{D}, B) , où la variété M est un groupe de Lie G simplement connexe, \mathcal{D} est une distribution analytique invariante et de rang constant (vérifiant la condition de Hörmander) et B est une forme bilinéaire symétrique définie positive invariante sur \mathcal{D} . Nous allons les noter (G, \mathcal{D}, B) et nous les appellerons des groupes de Lie sous-riemanniens.

Nous étudions dans toute la thèse deux classes de (G, \mathcal{D}, B) . La première classe étant le cas où G est un groupe de Lie nilpotent d'ordre deux. Notons que la géométrie riemannienne sur les groupes nilpotents d'ordre 2 fait l'objet d'études détaillées de Eberlein [26], [27]. La géométrie sous-riemannienne sur les groupes nilpotents, dont les applications sont très riches, intéresse de nombreux auteurs. Le modèle basique, retrouvé partout, est le groupe de Heisenberg (qui est nilpotent d'ordre 2) de dimension 3 puis celui de dimension n voir, par exemple, Anzaldo et Monroy [8], Brockett [23], Liu et Sussmann [64] ou Vershik et Gershkovich [90]. La deuxième classe de (G, \mathcal{D}, B) correspondent aux variétés sous-riemanniennes symétriques de contact étudiées par Falbel et ses collaborateurs dans [30], [31] et [32]. En fait, dans [31], Falbel et Gorodski classifient les espaces sous-riemanniens symétriques de contact en dimension 3 et 4, puis dans [32], Bieliavsky, Falbel et Gorodski élargissent la classification à la dimension n . Dans cette thèse, nous nous intéresserons à uniquement deux cas de cette classification (de variétés symétriques de contact) : $SO(4)/SO(2)$ et $SO(2, 2)/SO(2)$.

Il est intéressant de s'attarder quelques peu sur un point passionnant de la théorie du contrôle qui est l'approximation nilpotente. Cette dernière consiste à approximer (dans un sens approprié) les champs de vecteurs d'un système par des champs qui engendrent une algèbre de Lie nilpotente. En terme d'application, on construit une commande qui contrôle exactement le système nilpotent qui approxime le système d'origine et on applique cette commande à ce dernier. Dans la littérature des résultats sur les approximations nilpotentes et leurs applications sont nombreux, au début dans les travaux de Krener [59], puis ceux (consacrés

au problème de contrôlabilité locale) de Hermes [49], [50], Kawski [57], Bianchini et Stefani [14], Agrachev et al [6], ainsi que ceux de Murray [72] (pour la planification de trajectoires). Jean dans [51] ou Laumond dans [61], [62] appliquent ces méthodes d'approximations nilpotentes des systèmes de contrôles dans le but de résoudre certains problèmes appliquées à l'ingénierie.

Pour une variété sous-riemannienne (M, \mathcal{D}, B) nous construisons l'approximation nilpotente de la façon suivante. Soit (X_1, \dots, X_k) un repère local orthonormé, c'est-à-dire X_1, \dots, X_k engendrent localement \mathcal{D} et $B(X_i, X_j) = \delta_{ij}$. Autour d'un point q donné, on considère des coordonnées privilégiées (voir [12], [53]) dans lesquelles X_i sont d'ordres ≥ -1 et on peut les représenter en série de champs de vecteurs homogènes de la forme $X_i = X_i^{-1} + X_i^0 + X_i^1 + \dots$. On pose $\hat{X}_i = X_i^{-1}$, $i = 1, \dots, k$ et le système de champs de vecteurs $(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_k)$ est appelé l'approximation nilpotente canonique homogène du système (X_1, \dots, X_k) en q . On a $X_i = \hat{X}_i + R_i$, $i = 1, \dots, k$, où \hat{X}_i est homogène d'ordre -1 et R_i est d'ordre ≥ 0 en q et c'est en ce sens que les \hat{X}_i approximent les X_i . L'approximation nilpotente canonique homogène n'est pas unique car elle dépend du choix des coordonnées privilégiées mais pour deux approximations nilpotentes $(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_k)$ et $(\hat{X}'_1, \dots, \hat{X}'_k)$ correspondant à deux systèmes de coordonnées privilégiées, leurs algèbres de Lie $Lie(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_k)$ et $Lie(\hat{X}'_1, \dots, \hat{X}'_k)$ sont isomorphes ([12]). On considère l'approximation nilpotente de (M, \mathcal{D}, B) en définissant la variété sous-riemannienne $(\mathbb{R}^n, \hat{\mathcal{D}}, \hat{B})$, où $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_k$ engendrent $\hat{\mathcal{D}}$ et sont orthonormés par rapport à \hat{B} . La distribution \mathcal{D} satisfaisant la condition de Chow implique que $\hat{\mathcal{D}}$ la satisfait aussi et, en plus, la distance \hat{d} , définie par \hat{B} , est homogène d'ordre 1 et satisfait $\frac{1}{c}\|z\| \leq \hat{d}(0, z) \leq c\|z\|$, pour tous $z \in \mathbb{R}^n$ et une certaine constante c . Ces approximations nilpotentes ont été utilisé, par exemple, en robotique [89], géométrie sous-riemannienne [5], planification de trajectoires [35],[39], [40], [52], l'étude de volume de Hausdorff [2] ainsi qu'en théorie des opérateurs hypoelliptiques depuis les travaux de Rothschild et Stein [77] et de Goodman [42].

A (G, \mathcal{D}, B) un groupe de Lie sous-riemannien nilpotent d'ordre 2, on peut associer le triplet $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$, dite une algèbre de Lie sous-riemannienne, en prenant $\mathfrak{g} = T_e G$ l'algèbre de Lie de G (aussi nilpotente d'ordre 2), \mathfrak{p} le sous espace vectoriel de \mathfrak{g} donné par $\mathfrak{p} = \mathcal{D}_e$ et $\mathcal{B} = B_e$ où \mathcal{B} est la forme bilinéaire symétrique définie positive sur \mathfrak{p} (définie comme la restriction de B à $\mathfrak{p} = \mathcal{D}_e$). Un premier objectif de cette thèse est de donner la classification (en mettant en évidence les invariants algébriques et géométriques) de ces algèbres de Lie sous-riemanniennes nilpotentes d'ordre 2 de dimension n dans le cas où $3 \leq n \leq 7$, et celles de dimension arbitraire

n telles que l'algèbre dérivée est de dimension une. Remarquons que le problème de classifier les algèbres de Lie nilpotentes au sens algébrique est résolu en petite dimension jusqu'à la dimension 7, voir e.g., [74]. Pour les dimensions inférieures ou égales à 6, il n'existe, à un isomorphisme près, qu'un nombre fini d'algèbres de Lie nilpotentes, tandis que dans notre étude des familles à paramètres continue apparaissent dès la dimension 5. Le nombre d'algèbres de Lie nilpotentes non isomorphes monte moins vite dans la classification algébrique que dans la classification au sens sous-riemannien (notre étude), car notre classification est plus subtile au sens où les transformations que nous effectuons sont orthogonales. Pour la classe (G, \mathcal{D}, B) des variétés sous-riemanniennes symétriques données par $SO(4)/SO(2)$ et $SO(2, 2)/SO(2)$, nous passons aux algèbres de Lie sous-riemanniennes correspondantes, qui nous amène à l'étude de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathfrak{k}, \mathcal{B})$, où soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4)$, soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 2)$, \mathfrak{p} est un sous espace vectoriel de \mathfrak{g} de dimension 4, $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$ est une sous algèbre de Lie compacte de \mathfrak{h} de codimension 1 (où \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} telle que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ et $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}$) et \mathcal{B} définit un produit scalaire sur \mathfrak{p} . Nous objectif initial étant de donner un modèle canonique pour ces algèbres de Lie sous-riemanniennes.

Dans une seconde partie de la thèse, on étudie les équations géodésiques associées aux algèbres de Lie sous-riemanniennes obtenues dans notre classement. En utilisant le principe du maximum de Pontryagin (qui est basé sur la structure symplectique du fibré cotangent T^*G), l'équation géodésique sur une variété sous-riemannienne est un système hamiltonien sur T^*G qu'on identifie à $G \times \mathfrak{g}^*$ voir le livre de Jurdjevic [54] (nous ne considérons pas les courbes anormales). Ce système se décompose en un système adjoint de Lie-Poisson sur \mathfrak{g}^* et en un système sur G . On s'intéressera particulièrement au système adjoint de Lie-Poisson sur \mathfrak{g}^* et notre but sera d'étudier l'intégrabilité de ce système. Il est connu que sur H_3 (Heisenberg de dimension 3) les solutions du système adjoint de Lie-Poisson sont des fonctions trigonométriques, cependant dans d'autres cas plus complexes à l'étude mais plus intéressants, les solutions sont exprimables en termes de fonctions elliptiques. Beaucoup d'auteurs se sont intéressés aux fonctions elliptiques dans l'intégrabilité des problèmes sous-riemanniens : Brockett et Dai, dans [22], ont découvert l'importance des fonctions elliptiques ; Jurdjevic, dans [55], étudie plusieurs problèmes sous-riemanniens et donne les solutions de l'équation adjointe à l'aide des fonctions elliptiques ; Gauthier, Boscain, Chambrier et al s'intéressent au problème sous-riemannien dans les systèmes quantiques et sa résolution (d'abord grâce à la décomposition de Cartan [36] et après à l'aide des fonctions elliptiques [37] et [38] ; Bonnard, Chyba et Trélat ont intégré dans [17], à l'aide des fonctions

elliptiques, la cas de Martinet (qui est la dégénération générique du cas de Martinet). L'intégration de l'équation géodésique est effectuée en détail pour $SO(3)$ et $SL(2)$ dans [19] et pour $SE(2)$ dans [78]. Enfin, il est important de signaler qu'il existe des problèmes (nilpotents) qui sont non-intégrables, en effet, Montgomery et al [68] ont découvert une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 3 telle que l'équation adjointe n'est pas Liouville-intégrable dans la catégorie de fonctions méromorphes.

Maciejewski, Pasillas-Lepine, Respondek, et Strelcyn [65] ont donné la liste complète des équations adjointes intégrables (à l'aide des fonctions elliptiques) des espaces SR-symétriques en dimension 3. Ensuite, El Assoudi et Gerber [28] ont classifié complètement les espaces homogènes et étudié l'intégrabilité des équations géodésiques associées en dimension 4. Ces résultats fut une source de départ pour notre étude et ont aussi servi de pont entre le chapitre 2 (classification) et le chapitre 3 (intégrabilité) de ce mémoire de thèse de doctorat. En effet, en dimension 3 et 4, ces auteurs ont prouvé la relation entre la géométrie du problème sous-riemannien (espaces symétriques sous-riemanniens) et l'intégrabilité la plus élémentaire, c'est-à-dire, l'existence d'intégrales premières quadratiques. On voudrait analyser comment les paramètres de notre classification correspondent à des catégories différentes d'intégrabilité, c'est-à-dire, comment les similitudes se prolongent en dimensions plus grande.

Ce mémoire de thèse se divise en quatre chapitres comme suit.

Chapitre 1. Dans le Chapitre 1, on rappelle les définitions et les notions dont nous avons besoin pour la suite. On commence par la géométrie sous-riemannienne, on fait le lien avec le principe du maximum de Pontryagin, présenté dans [75], et les problèmes du contrôle optimal, puis les propriétés d'intégrabilité d'un système hamiltonien.

Chapitre 2. Le Chapitre 2 est consacré à la classification des algèbres de Lie sous-riemanniennes $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ nilpotentes d'ordre 2 et \mathfrak{p} est de codimension un. On réalise la classification complète des algèbres de Lie sous-riemanniennes de dimension n lorsque la dimension de l'algèbre dérivée vaut 1, ainsi que celle des algèbres de Lie sous-riemanniennes de dimension n , avec $3 \leq n \leq 7$, dans le cas nilpotent d'ordre 2 et on s'arrête à $\dim \mathfrak{g} = n \leq 7$ après avoir montré que la méthode est applicable à $n \geq 3$ (sauf que le nombre de classes ou de modèles croit très vite). Ce chapitre est primordial dans le sens où il met en évidence l'importance de la

dimension du centre de l'algèbre de Lie et de la dimension de l'algèbre dérivée pour réaliser la classification. On met en évidence les invariants algébriques et géométriques qui donnent la classification. Ces invariants dépendent des dimensions du centre et de l'algèbre dérivée de \mathfrak{g} ainsi que du rang de la matrice de Poisson et des constantes de structure de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Une fois la classification réalisée, on souhaite distinguer les algèbres de Lie sous-riemanniennes de contact et de quasi-contact. Une paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ est dite une algèbre de Lie de contact si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie de dimension n et \mathfrak{p} un sous-espace de \mathfrak{g} de dimension $n - 1$ telle que l'application (forme de Levi) $\mathcal{L} : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ est non-dégénérée. Pour une algèbre de Lie de quasi-contact la définition est plus subtile (voir chapitre 2 section 2.7). On met en place deux théorèmes caractérisant les algèbres de Lie sous-riemanniennes de contact et de quasi-contact. Enfin, on calcule, pour tous les modèles en dimension 5, le groupe des symétries infinitésimales sous-riemanniennes.

Chapitre 3. Basé sur la classification du Chapitre 2, nous étudions l'intégrabilité des systèmes adjoints de Lie-Poisson associés à chaque modèle d'algèbres de Lie sous-riemanniennes nilpotentes d'ordre 2 de dimension n . En fait, on détermine le nombre exact et la nature des intégrales premières (qui dépendent des invariants algébriques et géométriques) de ces systèmes adjoints (de la forme $\dot{P} = BP$, linéaires et à paramètres) en les reliant aux relations de \mathbb{N} -résonances. Le rang de B vaut $2r$ et on montre que l'on a exactement $n - 2r$ relations de \mathbb{N} -résonances d'ordre 1, ce qui donnent des intégrales premières indépendantes (fonctions de Casimir) I_j , $1 \leq j \leq n - 2r$. Le feuilletage symplectique est alors de dimension $2r$ et est donné par les variétés $I_j = \text{const}$. De plus, on montre qu'il existe au moins r relations de \mathbb{N} -résonances d'ordre 2 ce qui nous amènent à au moins r intégrales premières quadratiques indépendantes (ou polynomiales) et donc à la Liouville-intégrabilité sur chaque feuille (dans la catégorie polynomiale) du système. On montre qu'il existe des intégrales premières polynomiales ou logarithmiques additionnelles qui nous donnent toujours la super-intégrabilité dans la catégorie logarithmique (on donne même explicitement ces intégrales premières dans tous les cas sauf un). Par ailleurs, on étudie également dans ce chapitre les solutions de ces systèmes adjoints de Lie-Poisson, c'est-à-dire les contrôles optimaux, et on montre qu'il s'agit de polynômes trigonométriques. Enfin, dans la dernière section de ce chapitre, on cherche les géodésiques sous-riemanniennes.

Chapitre 4. Nous étudions dans le détail le cas des espaces sous-riemanniens symétriques $SO(4)/SO(2)$ et $SO(2, 2)/SO(2)$ qui sont de dimension 5. Nous pas-

sons à la SR-algèbre de Lie correspondante, qui nous amène à l'étude de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathfrak{k}, \mathcal{B})$, où soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4)$, soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 2)$. On cherche dans un premier temps un modèle canonique pour ces algèbres de Lie sous-riemanniennes. Ensuite, nous étudions les valeurs propres de la matrice associée à la forme bilinéaire \mathcal{B} qui sont en fait soit deux à deux égales soit toutes égales, i.e., $\lambda = \mu$ ou $\lambda \neq \mu$. Nous nous consacrons ensuite à l'intégrabilité (Liouville-intégrabilité ou super-intégrabilité) des systèmes adjoint de Lie-Poisson associés aux modèles obtenus. On montre qu'en fonction des cas ($\lambda = \mu$ ou $\lambda \neq \mu$), l'analyse est totalement différente. En fait, dans le cas $\lambda = \mu$, la métrique est un multiple scalaire de la forme de Killing et il existe une formule explicite générale qui donne les géodésiques, voir [36]. En effet dans ce cas le système adjoint est linéaire et ses solutions sont trigonométriques. Dans l'autre cas $\lambda \neq \mu$, le système adjoint n'est pas linéaire et son étude est beaucoup plus intéressante dans le sens où ses solutions sont exprimables à l'aide des fonctions elliptiques.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Variété sous-riemannienne

Soit M une variété différentiable réelle de dimension n et de classe C^∞ . Une distribution \mathcal{D} sur M est une application qui à chaque point q de M associe un sous espace vectoriel \mathcal{D}_q de l'espace tangent à M en ce point T_qM . La distribution \mathcal{D} est dite de rang constant k si la dimension de \mathcal{D}_q est constante partout sur M et égale à k . Une distribution \mathcal{D} de rang constant k est de classe C^∞ si, autour de chaque point $q \in M$, il existe des champs de vecteurs X_1, \dots, X_k sur M de classe C^∞ tels que :

$$\mathcal{D}_q = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{X_1(q), \dots, X_k(q)\}; \text{ on notera } \mathcal{D} = \text{span}\{X_1, \dots, X_k\}.$$

Soit X un champ de vecteurs sur M , on dira que X appartient à la distribution \mathcal{D} si $X(q) \in \mathcal{D}_q$ pour tout $q \in M$.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que toutes les distributions sont de classe C^∞ et de rang constant k tel que $2 \leq k \leq n - 1$.

Exemple 1.1. Considérons la distribution \mathcal{D} de rang 2 dans \mathbb{R}^3 , muni des coordonnées (x, y, z) , engendrée par $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ et $X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}$. Le champ de plans définis par \mathcal{D} est illustré dans la Figure 1 ci-dessous :

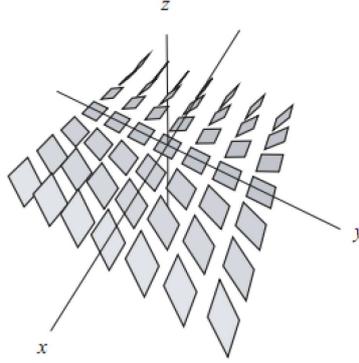


FIGURE 1.1 – Exemple de distribution dans \mathbb{R}^3 , voir [63]

On pose $\mathcal{D}^1 = \mathcal{D}$ et pour $r \geq 1$

$$\mathcal{D}^{r+1} = \mathcal{D}^r + [\mathcal{D}^1, \mathcal{D}^r] \text{ où } [\mathcal{D}^1, \mathcal{D}^r] = \text{span} \{[X, Y] : X \in \mathcal{D}^1, Y \in \mathcal{D}^r\},$$

on note $\bar{\mathcal{D}} = \bigcup_{r \geq 1} \mathcal{D}^r$ l'adhérence de Lie de la distribution \mathcal{D} .

Choisissons des champs de vecteurs X_1, \dots, X_k engendrant localement \mathcal{D} , i.e., $\mathcal{D} = \text{span} \{X_1, \dots, X_k\}$. Pour un multi-index $I = (i_1, \dots, i_l)$, $1 \leq i_j \leq k$, on définit $|I| = l$ et $X_I = [X_{i_1}, [\dots, [X_{i_{l-1}}, X_{i_l}]\dots]]$. On a

$$\mathcal{D}^r = \text{span}\{X_I : |I| \leq r\}.$$

Autrement dit, \mathcal{D}^1 est engendrée par X_i pour $1 \leq i \leq k$, \mathcal{D}^2 est engendrée par X_i et $[X_i, X_j]$ pour $1 \leq i < j \leq k$ et \mathcal{D}^3 est engendrée par X_i , $[X_i, X_j]$ et $[X_i, [X_j, X_l]]$, ainsi de suite.

Définition 1.2. On dit que la distribution \mathcal{D} satisfait la *condition de Hörmander* (ou génère les crochets) au point q s'il existe un entier $m = m_q$ tel que $\dim \mathcal{D}_q^m = n$.

Une courbe absolument continue $\gamma(t) : [0, T] \rightarrow M$ est dite *horizontale* (ou *admissible*) si son vecteur tangent vérifie $\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}$ presque pour tout $t \in [0, T]$. Toutes les courbes ne sont pas admissibles, comme l'illustre l'exemple 1.4 suivant.

Théorème 1.3. (*Chow et Rashevsky*)

Soit M une variété réelle connexe de dimension n , de classe C^∞ , et soit \mathcal{D} une distribution sur M qui vérifie la condition de Hörmander partout. Alors pour tous points $q_0, q_1 \in M$, il existe une courbe horizontale $\gamma : [0, T] \rightarrow M$, telle que $\gamma(0) = q_0$ et $\gamma(T) = q_1$.

On peut trouver la démonstration de ce théorème par exemple dans le livre de Montgomery [67] ou dans [53]. Dans le cas analytique cette condition est nécessaire et suffisante. En théorie du contrôle, la condition de Hörmander est appelée aussi la *condition du rang de Lie*.

Exemple 1.4. On considère le modèle du monocycle. Pour simplifier, on étudie sa projection sur le plan. Considérons (x, y) le point de contact avec le plan horizontal et θ l'angle qui caractérise l'orientation du monocycle.

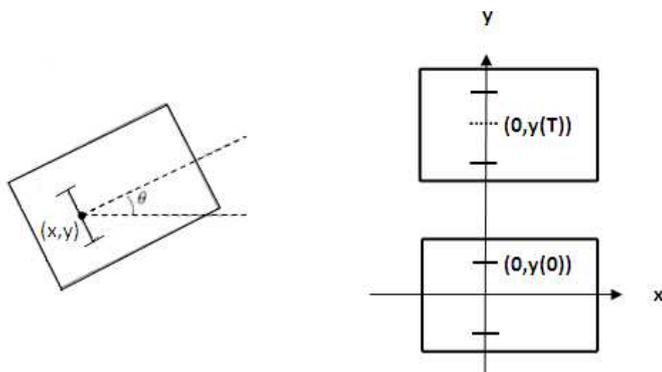


FIGURE 1.2 – Le monocycle projeté dans le plan ainsi que sa position initiale et finale.

L'espace de configuration est alors $Q = \mathbb{R}^2 \times S^1 \ni (x, y, \theta)$. La vitesse instantanée du monocycle est parallèle à son axe, alors le monocycle ne peut se déplacer transversalement par rapport à son axe. Le système est donc soumis à une contrainte non-holonome donnée par la forme différentielle suivante :

$$\omega = \sin \theta dx - \cos \theta dy,$$

qui annule la vitesse $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})^\top$. On définit alors la distribution comme l'annulateur de la contrainte (le noyau de ω) :

$$\mathcal{D} = \text{span} \left\{ \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\}.$$

On note $X_1 = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}$ et $X_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}$. Toutes les courbes admissibles (horizontales) $(x(t), y(t), \theta(t))$ satisfont alors :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = u_1(t) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + u_2(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où les fonctions réelles $u_i(t)$, $i = 1, 2$, sont appelées contrôles. On calcule les crochets de Lie et on trouve :

$$[X_1, X_2] = \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad [X_1, [X_1, X_2]] = 0 \text{ et } [X_2, [X_1, X_2]] = X_1.$$

Il est clair que la dimension de $\text{span}\{X_1, X_2, [X_1, X_2]\}$ est égale à 3 partout. La condition de Hörmander est donc satisfaite et implique que pour tout $(x_0, y_0, \theta_0) = q_0$ et $(x_T, y_T, \theta_T) = q_T$, il existe alors une courbe horizontale $\gamma : [0, T] \rightarrow Q$, telle que $\gamma(0) = q_0$ et $\gamma(T) = q_T$. Prenons $q_0 = (0, 0, 0)$ et $q_{2\pi} = (0, 1, 0)$ et, supposons pour simplifier, que $T = 2\pi$. Posons $u_i(t)$, $t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{1}{2} \text{ pour } t \in [0, 2\pi] \\ u_2(t) &= \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [0, \pi[\\ -1 & \text{pour } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

et on peut vérifier, par le calcul direct, que la trajectoire $\gamma(t)$ correspondant à $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ joint q_0 et $q_{2\pi}$.

Définition 1.5. Une *variété sous-riemannienne* est un triplet (M, \mathcal{D}, B) , où M est une variété différentiable réelle de dimension n et de classe C^∞ orientable, \mathcal{D} est une distribution orientée sur M de classe C^∞ et de rang constant k tel que $2 \leq k \leq n - 1$ et B est une forme bilinéaire sur \mathcal{D} symétrique définie positive et dépendante C^∞ -différentiablement de $q \in M$ (i.e., $q \mapsto B_q$ est C^∞ et B_q est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur \mathcal{D}_q).

Nous allons définir une métrique sous-riemannienne. Considérons une courbe horizontale $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ (satisfaisant $\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}$ presque partout), on définit sa longueur $l(\gamma)$ par :

$$l(\gamma) = \int_0^T (B(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)))^{\frac{1}{2}} dt. \quad (1.1)$$

Étant donné deux points q_0 et q_1 de M , on définit la distance $d(q_0, q_1)$ de q_0 et q_1 comme étant l'infimum des longueurs de toutes les courbes horizontales joignant ces deux points :

$$d(q_0, q_1) = \inf\{l(\gamma) : \gamma(0) = q_0, \gamma(T) = q_1, \gamma\text{-horizontale}\}. \quad (1.2)$$

Si la distribution \mathcal{D} satisfait la condition de Hörmander, on peut joindre n'importe quels deux points par une courbe horizontale et la distance d définit alors

une métrique sur M , dite une *métrique sous-riemannienne*. Pour toute la suite, on suppose que la distribution \mathcal{D} vérifie la condition de Hörmander.

Par ailleurs, si une courbe horizontale γ réalise la distance, i.e., $l(\gamma) = d(\gamma(0), \gamma(T))$, alors γ est appelée une *courbe minimisante* ou une *géodésique sous-riemannienne*.

Remarque 1.6. Il est clair que lorsque $k = n$, (M, \mathcal{D}, B) est une variété riemannienne.

Soient M et \tilde{M} deux variétés différentiables réelles de classes C^∞ et de même dimension. On considère ϕ un difféomorphisme de M dans \tilde{M} . Soit X un champ de vecteurs sur M , l'image de X par ϕ est un champ de vecteurs sur \tilde{M} , noté ϕ_*X , défini par :

$$(\phi_*X)(\tilde{q}) = D\phi_q(X(q)),$$

où $\tilde{q} = \phi(q)$ et $D\phi_q : T_qM \rightarrow T_{\tilde{q}}\tilde{M}$ est la différentielle de ϕ en $q \in M$.

Définition 1.7. Soit (M, \mathcal{D}, B) une variété sous-riemannienne. Une *symétrie sous-riemannienne* est un difféomorphisme $\phi : M \rightarrow M$ qui préserve la distribution \mathcal{D} et la forme B , i.e., $\phi_*(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$, $B = \phi^*(B)$ et ϕ préserve l'orientation.

Rappelons que ϕ^* , l'image réciproque de ϕ ("pull-back"), est donnée par

$$(\phi^*(B))_q(X_i(q), X_j(q)) = B_{\tilde{q}}(\phi_*(X_i)(\tilde{q}), \phi_*(X_j)(\tilde{q})),$$

où $\tilde{q} = \phi(q)$.

Définition 1.8. Une variété sous-riemannienne est dite *homogène* si le groupe des symétries sous-riemanniennes est un groupe de Lie qui agit de manière lisse et transitive sur la variété.

Définition 1.9. Une variété sous-riemannienne homogène est dite *symétrique* si, pour chaque point $q \in M$, il existe une symétrie sous-riemannienne ϕ telle que $\phi(q) = q$ et $\phi_*|_{\mathcal{D}_q} = -\text{Id}$.

Soit (M, \mathcal{D}, B) une variété sous-riemannienne simplement connexe homogène. Puisque le groupe des symétries sous-riemanniennes est toujours un groupe de Lie qui agit transitivement sur M , alors la variété M peut être représentée comme l'espace quotient G/K , où G est le groupe de toutes les symétries sous-riemanniennes de M et K est le sous-groupe de G d'isotropie, voir, e.g., Falbel et Gorodski dans [30]. La classification des espaces G/K sous-riemanniens symétriques de contact est faite par Bieliavsky, Falbel et Gorodski dans [31].

1.2 Principe du maximum de Pontryagin et géodésiques

Nous allons définir l'hamiltonien et l'équation géodésique associés à une variété sous-riemannienne (M, \mathcal{D}, B) , voir le livre de Montgomery [67] pour d'avantages de détails. Pour tout point $q \in M$, l'espace tangent $T_q M$ est isomorphe à son dual $T_q^* M$ et B_q est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur \mathcal{D}_q un sous espace vectoriel de $T_q M$ de dimension $k \leq n - 1$. On considère l'application linéaire $\psi_q : T_q^* M \rightarrow T_q M$ telle que, pour $p \in T_q^* M$, $\psi_q p$ satisfait, pour tout $v \in \mathcal{D}_q$

$$B_q(v, \psi_q p) = \langle p, v \rangle, \quad (1.3)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est la forme bilinéaire de dualité définie par $\langle p, v \rangle = p(v)$.

L'application linéaire $\psi : q \mapsto \psi_q$ est de classe C^∞ et est appelée *cométrieque* pour la variété sous-riemannienne (M, \mathcal{D}, B) . Elle vérifie $\psi_q = \psi_q^*$, où ψ_q^* est l'application adjointe $\psi_q^* : T_q^* M \rightarrow T_q^{**} M = T_q M$. La cométrieque ψ pour la variété sous-riemannienne (M, \mathcal{D}, B) est uniquement définie par la condition (1.3), l'image de ψ_q est \mathcal{D}_q et son noyau est l'annulateur de \mathcal{D}_q . Réciproquement, étant donné une cométrieque de rang constant $\psi_q : T_q^* M \rightarrow T_q M$ dont l'image est \mathcal{D}_q , il existe une unique forme bilinéaire symétrique définie positive B_q sur \mathcal{D}_q satisfaisant (1.3), voir [67].

Définition 1.10. La fonction définie sur le fibré cotangent $T^* M$ par $H(q, p) = \frac{1}{2} \langle p, \psi_q p \rangle$ pour tous $q \in M$ et $p \in T_q^* M$, est appelée *hamiltonien sous-riemannien*.

Définition 1.11. Soit X un champ de vecteurs sur M . La fonction $P_X : T^* M \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $P_X(q, p) = p(X(q)) = \langle p, X(q) \rangle$, pour $p \in T_q^* M$ et $q \in M$, est appelée *fonction moment* de X .

Pour calculer l'hamiltonien sous-riemannien associé à (M, \mathcal{D}, B) , choisissons k champs de vecteurs orthonormés par rapport à B , notés X_1, \dots, X_k , engendrant localement \mathcal{D} . Soit P_{X_i} la fonction moment de X_i , pour $1 \leq i \leq k$. On a pour tous $q \in M$ et $p \in T_q^* M$, $P_{X_i}(q, p) = p(X_i(q)) = \langle p, X_i(q) \rangle$. Alors H est quadratique sur les fibres et H est donné par

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k P_{X_i}^2(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \langle p, X_i(q) \rangle^2. \quad (1.4)$$

On écrit, par abus de notation,

$$H(p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k P_i^2 \quad \text{où } P_i = P_{X_i}.$$

Comme toutes fonctions de classes C^∞ sur le fibré cotangent, la fonction H génère un système d'équations différentielles hamiltoniennes :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (1.5)$$

Définition 1.12. Les équations différentielles hamiltoniennes (1.5) sont appelées aussi les *équations géodésiques*.

Maintenant nous allons donner le lien entre ces équations géodésiques (1.5) définies par l'hamiltonien H associé à une variété sous-riemannienne (M, \mathcal{D}, B) et le principe du maximum de Pontryagin, voir pour plus de détails, le livre de Pontryagin et al. [75], le livre de Bonnard, Faubourg et Trélat [18] ainsi que le livre de Trélat [88].

Le but est de trouver les courbes horizontales γ réalisant la distance sous-riemannienne, autrement dit, minimisant la longueur

$$l(\gamma) = \int_0^T (B(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)))^{\frac{1}{2}} dt.$$

Étant donné une courbe horizontale $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ joignant deux points q_0 et q_1 de M , considérons son énergie

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^T B(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

Il est clair qu'il est plus simple de minimiser l'énergie $E(\gamma)$ parmi toutes les courbes horizontales $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ joignant deux points de M , plutôt que sa longueur $l(\gamma)$. On peut montrer que les courbes minimisant la longueur et l'énergie sont (comme en géométrie riemannienne) les mêmes, voir [67]. Plus précisément, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$l(\gamma) = \int_0^T 1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt \leq \sqrt{T} \left(\int_0^T \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2TE(\gamma)}.$$

On a égalité si et seulement si γ est une courbe de vitesse constante $\|\dot{\gamma}(t)\| = c$. Ceci prouve que la courbe horizontale γ minimise l'énergie le long de toutes courbes joignant q_0 à q_1 au temps T si et seulement si γ minimise la longueur le long de toutes courbes joignant q_0 à q_1 et est paramétrée pour avoir la vitesse constante $c = \frac{d(q_0, q_1)}{T}$. Minimiser l'énergie $E(\gamma)$ d'une courbe horizontale est équivalent à minimiser sa longueur $l(\gamma)$.

Pour trouver les courbes horizontales qui minimisent $E(\gamma)$, choisissons k champs orthonormés par rapport à B , notés X_1, \dots, X_k , engendrant localement \mathcal{D} . Toute courbe horizontale γ satisfait (presque partout) l'équation différentielle :

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^k X_i(\gamma(t))u_i(t), \text{ où } u_i(t) \in \mathbb{R}, \text{ pour } 1 \leq i \leq k. \quad (1.6)$$

Ces fonctions $u_i(t)$ sont dites *les fonctions de contrôle* qui sont des fonctions mesurables, essentiellement bornées du temps t . On a :

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^T \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^T B(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^k u_i^2(t) dt, \quad (1.7)$$

car puisque les champs X_1, \dots, X_k sont orthonormés, on a

$$B(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = \sum_{1 \leq i, j \leq k} u_i(t)u_j(t)B(X_i(\gamma(t)), X_j(\gamma(t))) = \sum_{i=1}^k u_i^2(t).$$

Maintenant nous allons formuler le principe du maximum de Pontryagin qui permettra d'écrire les courbes minimisant l'énergie $E(\gamma)$.

On considère le système $\dot{q}(t) = \sum_{i=1}^k X_i(q(t))u_i(t)$ où $u_i(t) \in \mathbb{R}$ et on veut minimiser le coût $E = \frac{1}{2} \int_I \sum_{i=1}^k u_i^2(t) dt$. On définit pour tous $q \in M$ et $p \in T_q^*M$, la fonction hamiltonienne \hat{H} par :

$$\begin{aligned} \hat{H} : T^*M \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q, p, u) &\longrightarrow \langle p, \sum_{i=1}^k X_i(q)u_i \rangle - p_0 \sum_{i=1}^k u_i^2. \end{aligned}$$

Grâce à l'homogénéité, on prend $p_0 = \frac{1}{2}$ (voir Remarque 1.14 ci-dessous). L'hamiltonien maximisé H est défini par

$$H(q, p) = \max_{u \in \mathbb{R}^k} \widehat{H}(q, p, u).$$

L'hamiltonien \widehat{H} est une fonction quadratique de u_i , son maximum est atteint lorsque

$$\frac{\partial \widehat{H}}{\partial u_i} = \langle p, X_i \rangle - u_i = 0.$$

On trouve :

$$u_i = \langle p, X_i \rangle, \quad (1.8)$$

appelés les contrôles optimaux qui sont alors les fonctions moment de X_i . On retrouve, voir la relation (1.4),

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \langle p, X_i(q) \rangle^2. \quad (1.9)$$

On donne le théorème du principe du maximum de Pontryagin que nous allons utiliser dans notre cas. On considère le système de contrôle sur M donné par

$\dot{q}(t) = \sum_{i=1}^k X_i(q(t))u_i(t)$, où $q : [0, T] \rightarrow M$ et $u_i(t) \in \mathbb{R}$, pour $1 \leq i \leq k$.

Soient $q(0) = q_0$ et $q(T) = q_1$ deux points de M . On veut minimiser l'énergie $E = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^k u_i^2(t) dt$ parmi toutes les courbes horizontales $q(t)$ joignant q_0 à q_1 au temps T .

Théorème 1.13 (PMP). *Si un contrôle $u(t)$ et la courbe horizontale correspondante $q(t)$ minimisent l'énergie E parmi toutes courbes joignant q_0 à q_1 au temps T , alors il existe une courbe $p(t) \in T_{q(t)}^* M$ dans le fibré cotangent telle que $q(t)$ et $p(t)$ satisfont les équations hamiltoniennes suivantes :*

$$\dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t)) \quad (1.10)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t)), \quad (1.11)$$

où H est l'hamiltonien maximisé. En plus, $u_i(t) = \langle p(t), X_i(q(t)) \rangle$, pour $1 \leq i \leq k$, sont les contrôles optimaux.

Observons que les équations (1.10)-(1.11) données par le principe du maximum de Pontryagin sont les équations hamiltoniennes (1.5). L'équation (1.11) est appelée *l'équation adjointe*.

La figure suivante illustre l'aspect géométrique du principe du maximum de Pontryagin.

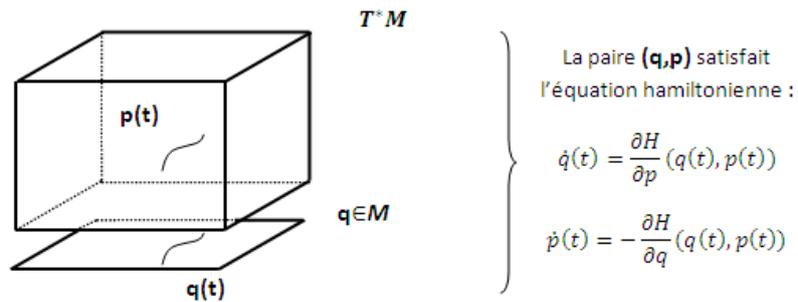


FIGURE 1.3 – Visualisation du PMP

Remarque 1.14. Par homogénéité, si $p_0 \neq 0$, on peut toujours prendre $p_0 = \frac{1}{2}$ (le cas normal). Si $p_0 = 0$, ce cas est dit anormal. En général, les courbes anormales peuvent minimiser (voir [67] pour une analyse détaillée) mais dans notre cas, on s'intéresse seulement aux courbes minimisantes normales.

1.3 Groupes et algèbres de Lie sous-riemanniens

On s'intéresse au cas où la variété différentiable est un groupe de Lie noté G , i.e., une variété différentiable analytique réelle de dimension n , munie d'une structure de groupe et les opérations de groupe sont analytiques.

Définition 1.15. Un champ de vecteurs X sur G est dit *invariant à droite* s'il est invariant par toute translation à droite R_g , où $g \in G$, i.e., $(R_g)_*X = X$.

Un champ de vecteurs invariant à droite X sur G est déterminé par sa valeur en e , élément neutre de G , $X(e) \in T_eG$ où T_eG est l'espace tangent de G en e . Soit $v \in T_eG$, on définit un champ de vecteurs invariant à droite X sur G par $X(g) = (R_g)_*(v)$ pour chaque $g \in G$. On identifie ainsi l'espace tangent T_eG à G en e avec l'ensemble des champs de vecteurs invariants à droite sur G , noté \mathfrak{g} et appelé l'algèbre de Lie de G .

Une distribution \mathcal{D} analytique et de rang constant k sur G est dite invariante à droite si elle est engendrée par des champs de vecteurs invariants à droite. Une forme bilinéaire symétrique définie positive B sur une distribution \mathcal{D} invariante est dite invariante si pour tout $g \in G$ on a $(R_g)^*B = B$.

Définition 1.16. Soient G un groupe de Lie, \mathcal{D} une distribution analytique orientée invariante et de rang constant k , avec $2 \leq k \leq n - 1$, vérifiant la condition de Hörmander et B une forme bilinéaire symétrique définie positive invariante sur \mathcal{D} . Le triplet (G, \mathcal{D}, B) est appelé un *groupe de Lie sous-riemannien*, brièvement appelé un SR-groupe de Lie.

Exemple 1.17. Un exemple de groupe de Lie sous-riemannien est le modèle de Heisenberg (voir, e.g., [60], [67]). Sur \mathbb{R}^3 , muni des coordonnées (x, y, z) , on définit la structure d'un groupe, noté H_3 , par :

$$(x, y, z) \bullet (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y)),$$

\mathcal{D} est la distribution invariante à droite sur \mathbb{R}^3 , définie en l'élément neutre $0 \in \mathbb{R}^3$ comme le noyau de la forme dz et B est la forme bilinéaire symétrique définie positive invariante à droite sur \mathcal{D} , définissant la métrique sous-riemannienne, dont la valeur en 0 est $dx \otimes dx + dy \otimes dy$. On trouve

$$\mathcal{D} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}y \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial z} \right\}.$$

Remarquons que l'on retrouve les champs de vecteurs donnés dans l'exemple 1.1 en appliquant le difféomorphisme $z \mapsto z - \frac{1}{2}xy$ qui laisse invariant x et y .

Au triplet (G, \mathcal{D}, B) définissant un groupe de Lie sous-riemannien, on peut associer le triplet $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ en prenant $\mathfrak{g} = T_e G$ l'algèbre de Lie de G , \mathfrak{p} le sous espace vectoriel de \mathfrak{g} donné par $\mathfrak{p} = \mathcal{D}_e$ et $\mathcal{B} = B_e$ où \mathcal{B} est la forme bilinéaire symétrique définie positive sur \mathfrak{p} (définie comme la restriction de B à $\mathfrak{p} = \mathcal{D}_e$). Notons que $\mathfrak{p} = \mathcal{D}_e$ possède l'orientation induite par celle de \mathcal{D} .

Définition 1.18. Une *algèbre de Lie sous-riemannienne*, brièvement appelée une SR-algèbre de Lie, est un triplet $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie de dimension n , \mathfrak{p} est un sous espace vectoriel de \mathfrak{g} de dimension $\leq n - 1$ qui engendre \mathfrak{g} en tant qu'algèbre de Lie, \mathfrak{p} est orienté et \mathcal{B} est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur \mathfrak{p} .

Réciproquement, soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie. On considère G l'unique groupe de Lie connexe et simplement connexe tel que $T_e G = \mathfrak{g}$, \mathcal{D} une distribution invariante sur G telle que $\mathcal{D}_e = \mathfrak{p}$ et B est la forme bilinéaire symétrique définie positive invariante et définie sur \mathcal{D} par $B_e = \mathcal{B}$. Il est clair que l'orientation de l'espace vectoriel $\mathcal{D}_e = \mathfrak{p}$ définit une orientation sur la distribution \mathcal{D} qui est invariante par translation. Le triplet (G, \mathcal{D}, B) est le groupe de Lie sous-riemannien associé à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$.

1.3.1 Le principe du maximum de Pontryagin sur les groupes de Lie

Maintenant on s'intéresse au problème de trouver les géodésiques pour un groupe de Lie sous-riemannien (G, \mathcal{D}, B) de dimension n . Conformément à l'analyse présentée en section 1.2, on considère le système :

$$\dot{q}(t) = \sum_{i=1}^k X_i(q(t))u_i(t), \text{ où } q : [0, T] \rightarrow G \text{ et } u_i(t) \in \mathbb{R}, \text{ pour } 1 \leq i \leq k.$$

Les champs de vecteurs X_i invariants à droite sont orthonormés par rapport à B et engendrent \mathcal{D} . Pour minimiser l'énergie $\frac{1}{2} \int_I \sum_{i=1}^k u_i^2(t) dt$ parmi toutes les courbes horizontales q joignant deux points $q_0, q_1 \in G$, il faut résoudre les équations hamiltoniennes (1.10)-(1.11) données par le principe du maximum de Pontryagin

(Théorème 1.13). Ces équations se simplifient dans le cas où la variété M est un groupe de Lie car le système hamiltonien évolue sur le fibré cotangent T^*G qu'on identifie à $G \times \mathfrak{g}^*$ et on peut utiliser la structure de Poisson sur \mathfrak{g}^* , le dual de \mathfrak{g} .

On considère $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ la SR-algèbre de Lie associée à (G, \mathcal{D}, B) . On note \mathfrak{g}^* l'espace vectoriel dual de \mathfrak{g} et $(\mathfrak{g}^*)^*$ s'identifie naturellement à \mathfrak{g} . On note $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ l'ensemble des fonctions de classes C^∞ sur \mathfrak{g}^* à valeurs réelles. Pour $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, on définit le *crochet de Poisson* $\{f_1, f_2\}$ par

$$\{f_1, f_2\}(p) = \langle p, [df_1, df_2](p) \rangle, \text{ pour tout } p \in \mathfrak{g}^*, \quad (1.12)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est la forme bilinéaire de dualité définie pour $z \in \mathfrak{g}$ par $\langle p, z \rangle = p(z)$ et où $df_1(p), df_2(p) \in (\mathfrak{g}^*)^* \simeq \mathfrak{g}$ (df_i désigne la différentielle de f_i).

Rappelons que le crochet de Poisson sur \mathfrak{g}^* est une application bilinéaire anti-symétrique $\{ \cdot, \cdot \} : C^\infty(\mathfrak{g}^*) \times C^\infty(\mathfrak{g}^*) \mapsto C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ qui vérifie l'identité de Jacobi :

$$\{\{f_1, f_2\}, f_3\} + \{\{f_2, f_3\}, f_1\} + \{\{f_3, f_1\}, f_2\} = 0,$$

et la propriété de dérivation de Leibniz :

$$\{f_1, f_2 f_3\} = \{f_1, f_2\} f_3 + f_2 \{f_1, f_3\} \text{ pour tout } f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(\mathfrak{g}^*). \quad (1.13)$$

Remarque 1.19. Nous nous intéresserons pour la suite aux SR-algèbres de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ réelles de dimension $n \geq 3$ qui vérifient $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$. Dans les chapitres 2 et 3, on considère \mathfrak{g} soit nilpotente d'ordre 2, soit vérifiant $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = 1$, avec $\dim \mathfrak{p} = n - 1$. Dans le Chapitre 4, on s'intéresse aux cas où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie semi-simple, en particulier $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4)$ ou bien $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 2)$ de dimension $n = 6$ avec \mathfrak{p} de codimension 2 (i.e., $\dim \mathfrak{p} = n - 2 = 4$).

Soit (e_1, e_2, \dots, e_k) une base orthonormée de \mathfrak{p} par rapport à \mathcal{B} où $e_i = X_i(e)$, rappelons que X_1, \dots, X_k sont des champs de vecteurs invariants à droite et orthonormés par rapport à B . Puisque $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$, avec $\dim \mathfrak{g} = n$ et $\dim \mathfrak{p} = k$, il existe $n - k$ crochets $[e_l, e_m] \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ indépendants modulo \mathfrak{p} , avec $1 \leq l, m \leq k$, que l'on note e_j pour $k + 1 \leq j \leq n$. On obtient (e_1, e_2, \dots, e_n) une base de \mathfrak{g} .

Plus précisément, lorsque $k = n - 1$, on posera $e_n := [e_1, e_2]$ et si $k = n - 2$, on posera $e_5 := [e_1, e_2] = k$ et $e_6 := [e_1, e_3] = \varepsilon e_0$, voir la Proposition 4.1 du Chapitre 4.

Soit (e^1, e^2, \dots, e^n) la base de \mathfrak{g}^* , duale par rapport à (e_1, e_2, \dots, e_n) . On considère l'hamiltonien sous-riemannien donné par la relation (1.4) associé à (G, \mathcal{D}, B) (voir aussi (1.9)) :

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \langle p, X_i(q) \rangle^2.$$

En $q = e$, élément neutre de G , on a

$$H(p) = H(e, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \langle p, X_i(e) \rangle^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \langle p, e_i \rangle^2.$$

Écrivons $p = \sum_{i=1}^n p_i e^i$ avec $p_i = \langle p, e_i \rangle \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. On obtient :

$$H(p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n p_j \langle e^j, e_i \rangle^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k p_i^2, \quad (1.14)$$

puisque $\langle e^j, e_i \rangle = \delta_{ij}$ (où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ sinon). En calculant le crochet de Poisson, pour $p_j \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, $1 \leq j \leq n$, et $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, on trouve en utilisant la propriété (1.13) :

$$\{p_j, H\} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \{p_j, p_i^2\} = \sum_{i=1}^k p_i \{p_j, p_i\}. \quad (1.15)$$

1.3.2 Système adjoint de Lie-Poisson et géodésiques

Dans le cas général, sur une variété M , résoudre les équations hamiltoniennes (1.10) et (1.11), qui forment un système de dimension $2n$, est compliqué. Pour le cas d'un groupe de Lie, ceci est plus simple. En effet, lorsque la variété différentiable est un groupe de Lie, on peut représenter le système hamiltonien (1.10)-(1.11) sur le fibré cotangent T^*G comme le système suivant, défini sur $G \times \mathfrak{g}^*$ (voir le livre de Jurdjevic [54] et Agrachev et Sachkov [7] pour plus de détails) par :

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^k p_i X_i(q), \quad q \in G \quad (1.16)$$

$$\dot{p}_j = \sum_{i=1}^k p_i \{p_j, p_i\}, \quad p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathfrak{g}^*. \quad (1.17)$$

Notons que les n dernières équations (1.17) sont définies sur \mathfrak{g}^* et ne dépendent pas de l'évolution de $q(t)$ sur G .

Définition 1.20. Le système (1.17) est appelé *système adjoint de Lie-Poisson* associé à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$.

Le système (1.16)-(1.17) désigne *les équations géodésiques* et les solutions $q(t)$ sont les géodésiques normales ou les trajectoires optimales.

Il suffit de résoudre d'abord le système adjoint de Lie-Poisson (1.17) de dimension n et ensuite on introduit ses solutions $p_j = p_j(t)$, $1 \leq j \leq n$, qui sont les contrôles optimaux (voir (1.8)), dans le système $\dot{q} = \sum_{i=1}^k p_i(t) X_i(q)$ pour déterminer les géodésiques. On va montrer que dans le cas d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} nilpotente d'ordre 2 (voir Proposition 3.24 du Chapitre 3), le système adjoint de Lie-Poisson associé se réduit à un système linéaire de la forme $\dot{P} = BP$ où B est une matrice antisymétrique paramétrée linéairement par les fonctions moments d'éléments du centre de \mathfrak{g} . Mais avant, nous allons donner dans le chapitre suivant, la classification des algèbres de Lie sous-riemanniennes nilpotentes d'ordre 2 de dimension n , avec $3 \leq n \leq 7$, et celle des algèbres de Lie sous-riemanniennes de dimension n telle que la dimension de l'algèbre dérivée est égale à un. Ceci nous permettra d'écrire les équations géodésiques normales associées à une SR-algèbre de Lie. Puis, dans le Chapitre 3, nous allons étudier l'intégrabilité de ces équations géodésiques sous-riemanniennes. Nous montrerons que, dans le cas nilpotent d'ordre 2, les solutions du système adjoint de Lie-Poisson sont des combinaisons linéaires de fonctions trigonométriques et constantes et que les solutions des équations géodésiques s'expriment à l'aide des fonctions trigonométriques et polynomiales du temps.

Dans le Chapitre 4, on montrera que les solutions du système adjoint de Lie-Poisson lorsque \mathfrak{g} est semi-simple, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4)$ s'expriment à l'aide des fonctions elliptiques. Cependant, les géodésiques sont plus compliquées à déterminer.

Chapitre 2

Classification des algèbres de Lie sous-riemanniennes nilpotentes d'ordre 2

2.1 Algèbres de Lie nilpotentes

On considère dans toute la suite, \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle de dimension n , i.e., un espace vectoriel sur \mathbb{R} , muni d'une application bilinéaire antisymétrique $(x, y) \mapsto [x, y]$ qui vérifie l'identité de Jacobi :

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \text{ pour tout } x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

On note $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ le centre et l'algèbre dérivée de \mathfrak{g} , respectivement :

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0 \text{ pour tout } y \in \mathfrak{g}\},$$

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{[x, y] : x, y \in \mathfrak{g}\}.$$

On pose $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ et pour tout entier $i \geq 1$, $\mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}]$. Notons que $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$.

Définition 2.1. Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite nilpotente s'il existe un entier $i \geq 1$ tel que $\mathfrak{g}^i = \{0\}$. Une algèbre de Lie nilpotente \mathfrak{g} est dite nilpotente d'ordre k si $\mathfrak{g}^k = \{0\}$ mais $\mathfrak{g}^{k-1} \neq 0$.

Nous nous intéresserons aux cas des algèbres de Lie \mathfrak{g} nilpotentes d'ordre 2 (dites aussi métabéliennes), i.e., $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1] = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = \{0\}$ mais $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq 0$. Il est évident que dans ce cas \mathfrak{g} est non abélienne et que $\mathfrak{D}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ et alors $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$. Notons que l'identité de Jacobi est dans ce cas triviale.

Exemple 2.2. L'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension impaire $n = 2m + 1$, notée \mathfrak{h}_n , donnée dans une base $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m, z)$, par les crochets non nuls $[x_i, y_i] = z$ pour $1 \leq i \leq m$ est évidemment nilpotente d'ordre 2 et elle vérifie $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{h}_n) = \dim \mathfrak{D}(\mathfrak{h}_n) = 1$.

La proposition suivante donne certaines propriétés des dimensions de $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ pour des algèbres de Lie \mathfrak{g} nilpotentes d'ordre 2 que nous utiliserons pour la classification.

Proposition 2.3. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 de dimension n . On a les propriétés suivantes :*

- (i) $n \geq 3$ et $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) \leq n - 2$.
- (ii) Si $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = n - 2$ alors $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = 1$.
- (iii) $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = n - 2$ si et seulement si \mathfrak{g} est isomorphe à la somme directe $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$, où \mathfrak{h}_3 est l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension 3.
- (iv) Si $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = n - 3$ alors $2 \leq \dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) \leq 3$.
- (v) Pour $n = 4$ on a $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 2$.

Démonstration. On note E un sous espace vectoriel de \mathfrak{g} complémentaire de $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ dans \mathfrak{g} et on écrit $\mathfrak{g} = E \oplus \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$.

(i) Il est clair que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [E, E] = \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$. Puisque \mathfrak{g} n'est pas abélienne, on a $\dim [E, E] \geq 1$ et $\dim E \geq 2$, donc $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) \leq n - 2$. Par ailleurs, $[E, E]$ est inclus dans $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$, donc $n \geq 3$.

(ii) Si $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = n - 2$ alors $\dim E = 2$; on a clairement $\dim [E, E] = 1$ et on sait que $[E, E] = \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$. On en déduit alors facilement le (iii).

(iv) Si $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = n - 3$, alors $\dim E = 3$. Dans une base (e_1, e_2, e_3) de E , on a $[E, E]$ engendré par $[e_1, e_2]$, $[e_1, e_3]$ et $[e_2, e_3]$, on en déduit que $\dim [E, E] \leq 3$. D'où $1 \leq \dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) \leq 3$. Pour montrer que $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) \geq 2$, supposons $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = 1$, alors dans une base (e_1, e_2, e_3) de E on a les relations $[e_1, e_2] = ax$, $[e_1, e_3] = bx$ et $[e_2, e_3] = cx$ avec $x \neq 0$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Si $a \neq 0$, on vérifie que dans la base (e_1, e_2, \tilde{e}_3) avec $\tilde{e}_3 = ce_1 - be_2 + ae_3$, on trouve $[e_1, \tilde{e}_3] = 0$ et $[e_2, \tilde{e}_3] = 0$, donc $\tilde{e}_3 \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ ce qui est absurde car $E \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Si $a = 0$ et $b \neq 0$ (resp. $c \neq 0$) dans la base (e_1, \tilde{e}_2, e_3) où $\tilde{e}_2 = ce_1 - be_2$, on vérifie que $\tilde{e}_2 \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ (resp. dans la base (\tilde{e}_1, e_2, e_3) où $\tilde{e}_1 = ce_1 - be_2$, on vérifie que $\tilde{e}_1 \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$) ce qui est absurde. On a alors $2 \leq \dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) \leq 3$.

(v) Si $n = 4$, par le (i) on a $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) \leq 2$. Si $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 1$ alors $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = 1$ et $\dim E = 3$. Comme précédemment on montre que c'est impossible donc $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 2$. \square

On donne le Lemme 2.5 suivant que nous utiliserons souvent pour la classification et dont la preuve, assez technique, est faite dans la Section 2.6 (Preuves des lemmes).

Définition 2.4. Soit (e_1, \dots, e_n) une base d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} . Une rotation du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_j, e_k\}$, pour $j \neq k$ et $1 \leq j, k \leq n$, est un isomorphisme $R : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, telle que $Re_l = \tilde{e}_l = e_l$ pour $l \neq j, k$ et

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_j \\ \tilde{e}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_j \\ e_k \end{pmatrix}$$

où $\varphi \in \mathbb{R}$ est l'angle de la rotation.

Lemme 2.5. Soit (e_1, \dots, e_n) une base d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} .

(i) Soient $1 \leq i < j < k \leq n$ tels que

$$[e_i, e_j] = ax + by \quad \text{et} \quad [e_i, e_k] = cx + dy,$$

où x, y sont deux éléments indépendants de \mathfrak{g} et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Si $(a, c) \neq (0, 0)$, alors il existe une rotation R du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_j, e_k\}$, telle que

$$[\tilde{e}_i, \tilde{e}_j] = \tilde{a}\tilde{x} + \tilde{b}\tilde{y} \quad \text{et} \quad [\tilde{e}_i, \tilde{e}_k] = \tilde{d}\tilde{y},$$

où $\tilde{x} = Rx$, $\tilde{y} = Ry$ et $\tilde{a} > 0$ ($\tilde{b}, \tilde{d} \in \mathbb{R}$).

(ii) Soient $1 \leq l < m \leq n$. Écrivons $[e_l, e_m] = \sum_{i=1}^n c_i e_i$ avec $c_i \in \mathbb{R}$. Si $(c_j, c_k) \neq (0, 0)$, alors il existe une rotation du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_j, e_k\}$ telle que

$$[\tilde{e}_l, \tilde{e}_m] = \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i \tilde{e}_i \quad \text{où} \quad \tilde{c}_j = 0.$$

2.2 Algèbres de Lie sous-riemanniennes

Rappelons, voir la Section 1.3, qu'une *algèbre de Lie sous-riemannienne*, brièvement appelée une SR-algèbre de Lie, est un triplet $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie réelle de dimension n , \mathfrak{p} est un sous espace vectoriel de \mathfrak{g} de dimension $\leq n - 1$ qui engendre \mathfrak{g} en tant qu'algèbre de Lie, \mathfrak{p} est orienté et \mathcal{B} est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur \mathfrak{p} .

Définition 2.6. Deux SR-algèbres de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ et $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathcal{B}})$ sont dites SR-isomorphes s'il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ telle que :

- (i) $\varphi(\mathfrak{p}) = \tilde{\mathfrak{p}}$ et φ préserve l'orientation.
- (ii) $\varphi|_{\mathfrak{p}}$ satisfait $\mathcal{B}(x, y) = \tilde{\mathcal{B}}(\varphi(x), \varphi(y))$ pour tout $x, y \in \mathfrak{p}$.

Remarque 2.7. La transformation $\varphi|_{\mathfrak{p}}$ est un élément du groupe spécial orthogonal $SO(n - 1)$.

Pour toute la suite, dans les chapitres 2 et 3, on s'intéresse au cas où \mathfrak{p} est de *codimension un* (i.e., \mathfrak{p} de dimension $n - 1$). Il est clair qu'alors $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \not\subset \mathfrak{p}$ et on peut écrire $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$. Il est évident que \mathfrak{g} est non abélienne.

Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 de dimension $n \geq 3$. Considérons l'application (la forme de Levi)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} &\rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \\ (v, w) &\mapsto [v, w] \text{ modulo } \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

Cette application dont le rang mesure la distance entre \mathfrak{p} et une algèbre de Lie, peut-être représentée en coordonnées de la façon suivante. Choisissons une base $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ de \mathfrak{g} telle que $\mathfrak{p} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ et $[e_1, e_2] = e_n$, et considérons les relations de commutations :

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k, \text{ avec } c_{ij}^k \in \mathbb{R} \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n - 1. \quad (2.1)$$

Soit (e^1, \dots, e^n) la base duale. L'application \mathcal{L} est représentée par la matrice (C_{ij}) , $1 \leq i, j \leq n - 1$, définie par

$$C_{ij} = e^n([e_i, e_j]) = c_{ij}^n,$$

où la constante c_{ij}^n est donnée par (2.1). La matrice $C = (C_{ij})$ est antisymétrique et de rang pair $2r$ (avec $r \geq 1$) et peut être normalisée de la façon suivante (voir, e.g., [34]) :

Lemme 2.8. *La matrice C étant antisymétrique de rang $2r$ à coefficients réels, il existe alors une matrice orthogonale R , à coefficients réels telle que $R^{-1}CR = \text{Diag}(\omega_1 J, \dots, \omega_r J, O)$ avec $\omega_i \in \mathbb{R}^*$ pour $1 \leq i \leq r$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et O est la matrice nulle de taille $(n - 2r) \times (n - 2r)$. On peut supposer que $|\omega_1| \leq \dots \leq |\omega_r|$.*

La preuve de ce lemme est donnée dans la Section 2.6 (Preuve des lemmes).

Notation 2.9. Dans toute la suite, on note $c = \dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$, $d = \dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ et le rang $\mathcal{L} = 2r = \text{rang } C$.

Proposition 2.10. *Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2. On a $1 \leq d \leq c \leq n - 2r$ et il existe une base (e_1, \dots, e_n) de \mathfrak{g} telle que :*

- (i) (e_1, \dots, e_{n-1}) est une base orthonormée directe de \mathfrak{p} et $[e_1, e_2] = e_n$.
- (ii) $\mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_{n-d+1}, \dots, e_{n-1}, e_n\}$ et $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_{n-c+1}, \dots, e_{n-1}, e_n\}$.
- (iii) Les relations de commutations sont

$$[e_1, e_2] = e_n \quad \text{et} \quad [e_i, e_j] = \sum_{k=n-d+1}^{n-1} a_{ij}^k e_k + c_{ij} e_n, \quad 1 \leq i, j \leq n - c \quad (2.2)$$

et tous les autres crochets sont nuls, où la matrice $(c_{ij}) = \text{Diag}(c_1 J, \dots, c_r J, O)$ avec $c_1 = 1$, $c_i \in \mathbb{R}^*$, pour $1 \leq i \leq r$ et $c_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1}$, $1 \leq i \leq r$, où $\pm\lambda_1, \dots, \pm\lambda_r$, sont les valeurs propres, non nulles, de la matrice antisymétrique $C = (c_{ij})$.

Définition 2.11. Une base (e_1, \dots, e_n) de \mathfrak{g} satisfaisant (i), (ii), (iii) sera appelée une base adaptée à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$.

Remarque 2.12. Si $c > d$, on peut écrire $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{R}^{c-d}$ où $\mathbb{R}^{c-d} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_{n-c+1}, \dots, e_{n-d}\}$ et $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{R}^{c-d}$ où $\tilde{\mathfrak{g}} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, \dots, e_{n-c}, e_{n-d+1}, \dots, e_n\}$ avec les relations de commutations données par (2.2), où, en effet, les éléments $e_{n-c+1}, \dots, e_{n-d}$ n'interviennent pas. L'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ est nilpotente d'ordre 2 de dimension $n - (c - d)$ et elle vérifie $\dim \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{g}}) = \dim \mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{g}}) = \dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = d$.

On note $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cap \tilde{\mathfrak{g}}$, et $\tilde{\mathfrak{p}}$ possède l'orientation induite par celle de \mathfrak{p} , et $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}|_{\tilde{\mathfrak{p}}}$.

Notation 2.13. Pour toute la suite, par abus d'écriture, on note \mathbb{R}^{c-d} le triplet $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$, où \mathfrak{g} est l'algèbre abélienne \mathbb{R}^{c-d} , le sous espace \mathfrak{p} est, en fait, $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} = \mathbb{R}^{c-d}$ et \mathcal{B} est la métrique euclidienne sur \mathbb{R}^{c-d} .

Corollaire 2.14. Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2. Si $c > d$, alors $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathcal{B}}) \oplus \mathbb{R}^{c-d}$, où $\tilde{\mathfrak{g}} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, \dots, e_{n-c}, e_{n-d+1}, \dots, e_n\}$ vérifiant les relations (2.2), et $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cap \tilde{\mathfrak{g}}$ de codimension un dans $\tilde{\mathfrak{g}}$, avec $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}|_{\tilde{\mathfrak{p}}}$. La SR-algèbre de Lie $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathcal{B}})$ est nilpotente d'ordre 2 de dimension $n - (c - d)$.

Notons que par ce corollaire, la classification des SR-algèbres de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ se ramène à celles des $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathcal{B}})$ et donc on peut s'intéresser au cas où le centre et l'algèbre dérivée ont la même dimension.

Démonstration. de la Proposition 2.10. (i) et (ii). On sait que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ et on a une forme bilinéaire symétrique définie positive sur \mathfrak{p} . Il est évident que $\dim \mathfrak{p} \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = c - 1$ et $\dim \mathfrak{p} \cap \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = d - 1$. Notons $E_3 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ et soit E_2 le complément orthogonal, par rapport à \mathcal{B} , de E_3 dans $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$, i.e., $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = E_2 \oplus E_3$. Soit ensuite E_1 le complément orthogonal de $E_2 \oplus E_3 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ dans \mathfrak{p} , i.e., $\mathfrak{p} = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$. Il est clair que E_2 et E_3 sont abéliens et $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = [E_1, E_1]$ et il existe deux vecteurs $v, w \in E_1$ tels que $[v, w] \notin \mathfrak{p}$. On considère le plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{v, w\}$ dans \mathfrak{p} et choisissons dans ce plan deux vecteurs orthonormés e_1 et e_2 . On peut écrire $e_1 = \alpha v + \beta w$ et $e_2 = \gamma v + \delta w$ avec $[e_1, e_2] = (\alpha\delta - \gamma\beta)[v, w]$ telle que $(\alpha\delta - \gamma\beta) \neq 0$ car ces deux vecteurs sont indépendants. Puisque $[v, w] \notin \mathfrak{p}$, on en déduit que $[e_1, e_2] \notin \mathfrak{p}$ et alors on définit $e_n := [e_1, e_2]$. Complétons ensuite la paire (e_1, e_2) à une base orthonormée directe (e_1, \dots, e_{n-1}) , par rapport à \mathcal{B} , de \mathfrak{p} de telle façon que (e_1, \dots, e_{n-c}) soit une base de E_1 , $(e_{n-c+1}, \dots, e_{n-d})$ soit une base de E_2 et $(e_{n-d+1}, \dots, e_{n-1})$ soit une base de E_3 :

$$\underbrace{e_1, \dots, e_{n-c}}_{E_1}, \underbrace{e_{n-c+1}, \dots, e_{n-d}}_{E_2}, \underbrace{e_{n-d+1}, \dots, e_{n-1}}_{E_3 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{D}(\mathfrak{g})}$$

(iii). Par le Lemme 2.8, il existe une transformation orthogonale $R : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ telle que $\text{RCR}^{-1} = \text{Diag}(\omega_1 J, \dots, \omega_r J, O)$, avec $\omega_i \in \mathbb{R}^*$, pour $1 \leq i \leq r$, où O est la matrice nulle de taille $(n - c - 2r) \times (n - c - 2r)$. Changeons la base (e_1, \dots, e_n) par la transformation orthogonale R en posant $\tilde{e}_i = \sum_{l=1}^{n-1} R_{il}^l e_l$. On a $[\tilde{e}_i, \tilde{e}_j] = \tilde{c}_{ij} e_n$ modulo \mathfrak{p} et

on vérifie par le calcul direct que la matrice de constantes de structure $\tilde{C} = (\tilde{c}_{ij})$ se transforme en $\tilde{C} = \text{RCR}^{-1}$. En plus $[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2] = \tilde{c}_{12} e_n + p$, où $p \in \mathfrak{p}$ et on pose $\tilde{c}_{12} e_n + p = \tilde{e}_n$ (notons que $\tilde{c}_{12} \neq 0$). Ce qui achève la preuve de (iii). Si la base $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{n-1})$ n'est pas directe, il suffit de considérer la base $(\tilde{e}_2, \tilde{e}_1, \tilde{e}_3, \dots, \tilde{e}_{n-1})$ qui est directe et toutes les propriétés de la proposition restent valables. \square

2.3 Classification des SR-algèbres de Lie telles que $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = 1$

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux SR-algèbres de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ de dimension n avec $\dim \mathfrak{p} = n-1$, telles que l'algèbre dérivée $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ est de dimension 1. L'algèbre de Lie \mathfrak{g} peut être nilpotente d'ordre 2 ou non. Nous allons montrer que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ peut appartenir à seulement deux classes.

Définition 2.15. On appelle une SR-algèbre de Lie de Heisenberg de dimension $n = 2m+1$, notée $(\mathfrak{h}_n, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}})$ une SR-algèbre de Lie telle qu'il existe une base adaptée (e_1, \dots, e_n) dans laquelle \mathfrak{h}_n est donnée par les crochets non nuls $[e_{2i-1}, e_{2i}] = c_i e_n$ avec $c_i \neq 0$ pour $i = 1, \dots, m$ et $c_1 = 1$, $\mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}$ est engendré par les $2m$ générateurs (e_1, \dots, e_{2m}) , et où $\mathcal{B}^{\mathfrak{h}}$ est la forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}$, donnant la métrique sous-riemannienne décrite dans la base duale (e^1, \dots, e^{2m}) par
$$\sum_{i=1}^m (e^{2i-1} \otimes e^{2i-1} + e^{2i} \otimes e^{2i}).$$

Il est clair que $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{h}_m) = \dim \mathfrak{C}(\mathfrak{h}_m) = 1$.

Théorème 2.16. Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie de dimension $n \geq 3$ telle que $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = 1$. Alors

- (i) soit \mathfrak{g} est nilpotente d'ordre 2 et dans ce cas $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_{n-c+1}, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^{c-1}$ où \mathfrak{h}_{n-c+1} est l'algèbre de Lie de Heisenberg, nilpotente d'ordre 2 de dimension $n - c + 1$ avec $c = n - 2r = \dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$.
- (ii) soit \mathfrak{g} n'est pas nilpotente et dans ce cas $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{p}}, \hat{\mathcal{B}}) \oplus \mathbb{R}^{n-3}$, où $(\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{p}}, \hat{\mathcal{B}})$ est une SR-algèbre de Lie de dimension 3 (qui n'est pas nilpotente) donnée dans une base adaptée par $[e_1, e_2] = e_n$ et $[e_1, e_n] = ae_n$, avec $a > 0$ et $a > 0$ est un SR-invariant.

Démonstration. On choisit une base (e_1, \dots, e_{n-1}) orthonormée directe de \mathfrak{p} telle que $[e_1, e_2] \notin \mathfrak{p}$, on pose $e_n = [e_1, e_2]$; on a $\mathfrak{g} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, \dots, e_n\}$. Il est clair que $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ est engendrée par e_n . Les relations de commutations de \mathfrak{g} s'écrivent $[e_i, e_j] = c_{ij}e_n$, avec $c_{ij} \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ tels que : $c_{ij} = -c_{ji}$ et $c_{12} = 1$. L'identité de Jacobi $[e_i, [e_j, e_k]] + [e_j, [e_k, e_i]] + [e_k, [e_i, e_j]] = 0$ donne les conditions :

$$c_{in}c_{jk} + c_{jn}c_{ki} + c_{kn}c_{ij} = 0 \text{ pour } 1 \leq i, j, k \leq n. \quad (2.3)$$

On applique le Lemme 2.8 à la matrice $C = (c_{ij})$ pour $1 \leq i, j \leq n-1$ et par une transformation orthogonale, on peut écrire $C = \text{Diag}(c_1 J, \dots, c_r J, O)$ avec

$c_i \neq 0$. Si la base orthonormée $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{n-1})$ de \mathfrak{p} où $\tilde{e}_i = \operatorname{Re} e_i$ pour $i = 1, \dots, n-1$ n'est pas directe, il suffit de considérer la base $(\tilde{e}_2, \tilde{e}_1, \tilde{e}_3, \dots, \tilde{e}_{n-1})$ qui est directe. Dans cette base que l'on notera (e_i) pour simplifier, \mathfrak{g} est donnée par les relations de commutations suivantes :

$$\begin{aligned} [e_{2i-1}, e_{2i}] &= c_i e_n, & c_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq r, \\ [e_l, e_n] &= b_l e_n, & b_l \in \mathbb{R} \text{ pour } 1 \leq l \leq n-1, \end{aligned}$$

et tous les autres crochets sont nuls. En plus, les constantes c_i et b_l vérifient les conditions de l'identité de Jacobi (2.3). En particulier, $[e_j, [e_1, e_2]] + [e_2, [e_j, e_1]] + [e_1, [e_2, e_j]] = 0$ donne les conditions $c_1 b_j = 0$ pour $3 \leq j \leq n-1$ (car $[e_1, e_j] = [e_2, e_j] = 0$). Puisque $c_1 \neq 0$, on en déduit que $b_j = 0$ pour $3 \leq j \leq n-1$. Il reste les constantes réelles b_1 et b_2 . On obtient les relations de commutations :

$$\begin{aligned} [e_{2i-1}, e_{2i}] &= c_i e_n, & c_i \neq 0 \text{ et } 1 \leq i \leq r, \\ [e_1, e_n] &= b_1 e_n, \\ [e_2, e_n] &= b_2 e_n \text{ avec } b_1, b_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

et tous les autres crochets sont nuls. On vérifie facilement que \mathfrak{g} est nilpotente d'ordre 2 si et seulement si $(b_1, b_2) = (0, 0)$.

1) Si $(b_1, b_2) = (0, 0)$, \mathfrak{g} est donnée par les crochets non nuls

$$[e_{2i-1}, e_{2i}] = c_i e_n \text{ avec } c_i \neq 0 \text{ et } 1 \leq i \leq r. \quad (2.4)$$

Il est alors évident que :

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_{2r+1}, \dots, e_n\} \text{ et } \dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = c = n - 2r. \quad (2.5)$$

On écrit alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_{n-c+1} \oplus \mathbb{R}^{c-1}$ où $\mathfrak{h}_{n-c+1} = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, \dots, e_{2r}, e_n\}$ est l'algèbre de Lie de Heisenberg (de dimension $2r + 1 = n - c + 1$) donnée par les relations de commutations $[e_{2i-1}, e_{2i}] = c_i e_n$ pour $1 \leq i \leq r$ et $c_i \neq 0$.

2) Si $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$, alors en utilisant le Lemme 2.5(i), par une rotation du plan $\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$, on peut supposer que $b_2 = 0$ et $b_1 \neq 0$. Dans ce cas l'identité de Jacobi (2.3), appliquée au triplet $(i, j, k) = (1, 2l-1, 2l)$ pour $2 \leq l \leq r$, implique que $c_l = 0$. On obtient alors les seuls crochets non nuls $[e_1, e_2] = e_n$ et $[e_1, e_n] = b_1 e_n$. Alors il est évident que \mathfrak{g} n'est pas nilpotente et que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{p}}, \hat{\mathcal{B}}) \oplus \mathbb{R}^{n-3}$, où $\hat{\mathfrak{g}}$ est une algèbre de Lie de dimension 3 qui n'est pas nilpotente, donnée par les crochets non triviaux $[e_1, e_2] = e_n$ et $[e_1, e_n] = a e_n$, avec $a \in \mathbb{R}^*$. On peut toujours supposer que $a > 0$; en effet, si $a < 0$, il suffit

d'utiliser la symétrie $e_1 \mapsto -e_1$, $e_2 \mapsto -e_2$ et $e_3 \mapsto e_3$ qui préserve l'orientation et on trouve $a > 0$. \square

Le corollaire suivant découle immédiatement du Théorème 2.16 :

Corollaire 2.17. *Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2.*

- (i) $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = n - 2$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^{n-3}$, où \mathfrak{h}_3 est l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension 3.
- (ii) Pour $n = 4$, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}$, où \mathfrak{h}_3 est l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension 3.

Démonstration. (i) On sait par la Proposition 2.3(i) que si $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = n - 2$ alors $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = 1$. Il suffit alors d'appliquer le Théorème 2.16.

(ii) Pour $n = 4$, on sait par la Proposition 2.3(v) que $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = n - 2 = 2$ et on applique le (i). \square

2.4 Classification des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2

Pour toute la suite, pour simplifier, on note $\mathfrak{g}_{(n,c,d)}$ une SR-algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 de dimension n telle que $c = \dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ et $d = \dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ ($d \leq c$), \mathfrak{p} est un sous-espace de \mathfrak{g} orienté de dimension $n - 1$ et \mathcal{B} une forme bilinéaire symétrique définie positive sur \mathfrak{p} .

On considère l'application (la forme de Levi) $\mathcal{L} : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ définie, pour $v, w \in \mathfrak{p}$, par $\mathcal{L}(v, w) = [v, w]$ modulo \mathfrak{p} (voir le début de la section 2.2). On note C la matrice de l'application bilinéaire antisymétrique \mathcal{L} , on pose $\text{rang } \mathcal{L} = 2r$ et $\pm\lambda_j = \pm i\omega_j$, pour $1 \leq j \leq r$, avec $\omega_j \neq 0$, les valeurs propres imaginaires pures de C . On peut toujours supposer (Lemme 2.8) que $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_r|$.

Maintenant, en utilisant la Proposition 2.10 et le Théorème 2.16, nous allons faire la classification des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 pour $n = 5$, $n = 6$ et $n = 7$. On utilise les entiers c, d et r , qui sont des invariants géométriques, pour réaliser cette classification. On rappelle que $1 \leq d \leq c \leq n - 2r$.

Considérons une SR-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{(n,c,d)}$ et choisissons une base adaptée (e_1, \dots, e_n) qui donne les relations de commutations (voir Proposition 2.10)

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=n-d+1}^{n-1} a_{ij}^k e_k + c_{ij} e_n, \text{ avec } a_{ij}^k \in \mathbb{R}^*, \ 1 \leq i, j \leq n - c, \quad (2.6)$$

où la matrice $C = (c_{ij}) = \text{Diag}(c_1 J, \dots, c_r J, O)$ avec $c_1 = 1$ et $c_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq r$.

Définition 2.18. On dit que les constantes a_{ij}^k et c_l , pour $1 \leq i, j \leq n - c$, $n - d + 1 \leq k \leq n - 1$ et $1 \leq l \leq r$, sont des *SR-invariants* si pour chaque base adaptée $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ telle que $(c_1, \dots, c_r) = (\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_r)$, et aussi si $a_{ij}^k = 0$ implique que $\tilde{a}_{ij}^k = 0$, alors on a $a_{ij}^k = \tilde{a}_{ij}^k$.

2.4.1 Classification des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 de dimension $n = 5$

Théorème 2.19. Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 de dimension $n = 5$. Alors $(c, d) \in \{(1, 1), (2, 2), (3, 1)\}$, où $c = \dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ et $d = \dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$.

- (i) $(c, d) = (1, 1)$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}^h, \mathcal{B}^h)$, où \mathfrak{h}_5 est l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension 5 donnée par $[e_1, e_2] = e_5$

et $[e_3, e_4] = c_2 e_5$, avec $c_2 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|c_2| = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| \geq 1$, où (e_1, \dots, e_5) est une base adaptée. De plus, $|c_2| \geq 1$ est un SR-invariant.

- (ii) $(c, d) = (2, 2)$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$ donnée par $[e_1, e_2] = e_5$ et $[e_1, e_3] = a_1 e_4$ avec $a_1 > 0$, où (e_1, \dots, e_5) est une base adaptée. En plus, $a_1 > 0$ est un SR-invariant.
- (iii) $(c, d) = (3, 1)$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^h, \mathcal{B}^h) \oplus \mathbb{R}^2$, où \mathfrak{h}_3 est l'algèbre de Heisenberg de dimension 3 donnée par $[e_1, e_2] = e_5$, où (e_1, \dots, e_5) est une base adaptée.

Démonstration. Si $n = 5$, déterminons les possibilités pour (c, d) . On sait que $1 \leq d \leq c \leq n - 2r = 5 - 2r$ (par la Proposition 2.10), donc $r = 1$ ou $r = 2$ et $1 \leq d \leq c \leq 3$. Si $d = 1$, on utilise le Théorème 2.16 et on a vu que dans ce cas $(c, d) = (3, 1)$ ou $(c, d) = (1, 1)$. Rappelons que si $c = 3$, d'après la Proposition 2.3(ii) nous avons vu qu'alors $d = 1$ (de même si $c = 1$ alors $d = 1$). Si $c = 2$, alors d'après la Proposition 2.3(iv) on a $2 \leq d \leq 3$ et puisque $c \geq d$, nous obtenons $(c, d) = (2, 2)$.

Les preuves de (\Leftarrow) sont évidentes. On va montrer les implications (\Rightarrow) .

Pour (i) et (iii), on est dans le cas où $d = 1$, il suffit d'utiliser le Théorème 2.16 pour démontrer que si $(c, d) = (1, 1)$ alors $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}^h, \mathcal{B}^h)$ et que si $(c, d) = (3, 1)$ alors $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^h, \mathcal{B}^h) \oplus \mathbb{R}^2$. De plus, pour le (i), par le Lemme 2.8, on sait que $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ et on écrit $C = \text{Diag}(\omega_1 J, \omega_2 J)$ ($\pm \lambda_j = \pm i \omega_j$). En prenant $\tilde{e}_5 = \omega_1 e_5$, on trouve $C = \text{Diag}(J, \frac{\omega_2}{\omega_1} J)$, i.e., $|c_2| = \left| \frac{\omega_2}{\omega_1} \right| \geq 1$. Il est clair que (ω_1, ω_2) sont SR-invariants par rapport aux rotations dans \mathfrak{p} et $|c_2| = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| = \left| \frac{\omega_2}{\omega_1} \right|$ est invariant par rapport à la translation $e_5 \mapsto k e_5$, $k \in \mathbb{R}$.

Pour (ii), nous avons $(c, d) = (2, 2)$ et donc $r = 1$. Grâce à la Proposition 2.10, il existe une base adaptée (e_1, \dots, e_5) telle que $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_4, e_5\}$ et les relations de commutations s'écrivent :

$$[e_1, e_2] = e_5, \quad [e_1, e_3] = c_{13}^4 e_4, \quad [e_2, e_3] = c_{23}^4 e_4,$$

avec $c_{13}^4, c_{23}^4 \in \mathbb{R}$ tels que $(c_{13}^4, c_{23}^4) \neq (0, 0)$ (car $d = 2$). On utilise alors le Lemme 2.5(i), et par une rotation du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$, on peut supposer d'abord que

$c_{13}^4 \neq 0$, puis que $c_{23}^4 = 0$. On obtient, en posant $a_1 = c_{13}^4$, le modèle $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$, donné par les relations de commutations $[e_1, e_2] = e_5$ et $[e_1, e_3] = a_1 e_4$, avec $a_1 \in \mathbb{R}^*$.

On peut toujours supposer que $a_1 > 0$, en effet, si $a_1 < 0$, il suffit d'utiliser la symétrie $e_1 \mapsto -e_1$, $e_2 \mapsto -e_2$ et $e_3 \mapsto e_3$ (qui préserve l'orientation) et on trouve $a_1 > 0$.

Montrons que $a_1 > 0$ est un SR-invariant. En effet, on a $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est une base adaptée avec $E_1 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_4, e_5\}$, $E_2 = 0$ et $E_3 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_4\}$. On trouve $\ker C = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$, et $\ker C \cap E_1 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3\}$, i.e., pour tout e_i , $[e_i, e_3] = 0$ modulo E_1 . La direction e_3 est définie géométriquement et doit donc être préservée. Le complément orthogonal de $\ker C \cap E_1$ dans E_1 , i.e., $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$, doit aussi être préservé. Alors les transformations disponibles sont des rotations de $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ ainsi que la symétrie $e_i \mapsto -e_i$ pour $i = 3, 4$ qui n'ont pas d'influence (au signe près) sur les relations de commutations. Donc $a_1 > 0$ est un SR-invariant. \square

Remarque 2.20. Il est clair qu'en dimension $n = 3$ (resp. $n = 4$), qui correspond à l'algèbre de Lie d'Heisenberg \mathfrak{h}_3 (resp. $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$), il y a un seul modèle de SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 de dimension n et il n'y a pas de SR-invariants. Notons qu'en dimension $n = 5$, nous avons trouvé 3 modèles et, au plus, un seul SR-invariant dans chaque modèle. Nous allons montrer que pour $n = 6$, on obtient plusieurs modèles et d'avantages de SR-invariants.

2.4.2 Classification des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 de dimension $n = 6$

Pour cela, nous allons donner deux théorèmes, le premier correspond à la classification des modèles $\mathfrak{g}_{(n,c,d)}$ pour $n = 6$ en précisant les SR-invariants et le second pour interpréter ces SR-invariants (pour le cas restant $c = d = 2$).

Théorème 2.21 (Classification en dimension 6). *Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 de dimension $n = 6$. Alors $(c, d) \in \{(2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3), (4, 1)\}$.*

- (i) $(c, d) = (4, 1)$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^h, \mathcal{B}^h) \oplus \mathbb{R}^3$ où $(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^h, \mathcal{B}^h)$ est la SR-algèbre de Lie de Heisenberg de dimension 3.
- (ii) $(c, d) = (2, 1)$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}^h, \mathcal{B}^h) \oplus \mathbb{R}$ où $(\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}^h, \mathcal{B}^h)$ est la SR-algèbre de Lie de Heisenberg de dimension 5 donnée par $[e_1, e_2] = e_6$ et $[e_3, e_4] = c_2 e_6$, avec $c_2 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|c_2| = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \geq 1$, où (e_1, \dots, e_6) est une base adaptée. De plus, $|c_2| \geq 1$ est un SR-invariant.

- (iii) $(c, d) = (3, 2)$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $\mathfrak{g}_{(5,2,2)} \oplus \mathbb{R}$, où $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$ est donnée par : $[e_1, e_2] = e_6$ et $[e_1, e_3] = a_1 e_5$ avec $a_1 > 0$, où (e_1, \dots, e_6) est une base adaptée. En plus, $a_1 > 0$ est un SR-invariant.
- (iv) $(c, d) = (3, 3)$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $\mathfrak{g}_{(6,3,3)}$ donnée par $[e_1, e_2] = e_6$, $[e_1, e_3] = a_4 e_4$, $[e_2, e_3] = a_5 e_5$, avec $a_4 > 0$ et $a_5 > 0$, où (e_1, \dots, e_6) est une base adaptée. En plus, $a_4 > 0$ et $a_5 > 0$ sont des SR-invariants.
- (v) $(c, d) = (2, 2)$ et $r = 1$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $[e_1, e_2] = e_6$, $[e_1, e_3] = a_1 e_5$, $[e_2, e_4] = a_2 e_5$, $[e_3, e_4] = a_3 e_5$, où (e_1, \dots, e_6) est une base adaptée, avec :
- $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^1$: $a_1 = a_2 = 0$ et $a_3 > 0$.
 $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^2$: $a_2 = 0$, $a_1 > 0$ et $a_3 > 0$.
 $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^3$: $a_3 = 0$, $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$.
 $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^4$: $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ et $a_3 > 0$.

En plus, toutes les constantes $a_j > 0$, pour $1 \leq j \leq 3$, sont des SR-invariants pour chaque modèle $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^i$ pour $1 \leq i \leq 4$.

- (vi) $(c, d) = (2, 2)$ et $r = 2$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $[e_1, e_2] = e_6$, $[e_1, e_3] = a_1 e_5$, $[e_2, e_4] = a_2 e_5$, $[e_3, e_4] = a_3 e_5 + c_2 e_6$, avec $|c_2| \geq 1$ où (e_1, \dots, e_6) est une base adaptée, avec :
- $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^5$: $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 > 0$ et $c_2 > 0$.
 $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^6$: $a_2 = a_3 = 0$, $a_1 > 0$ et $c_2 > 0$.
 $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^7$: $a_2 = 0$, $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ et $c_2 > 0$.
 $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^8$: $a_3 = 0$, $a_i > 0$ et $c_2 \in \mathbb{R}^*$ pour $i = 1, 2$ ou bien $c_2 > 0$ et l'un des $a_i > 0$.
 $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^9$: $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^*$.

En plus, c_2 et toutes les constantes a_j , pour $1 \leq j \leq 3$, sont des SR-invariants pour chaque modèle $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^i$ pour $5 \leq i \leq 9$.

Les modèles donnés dans (i), (ii), (iii) et (iv) sont distingués géométriquement par les invariants (c, d) . Pour les modèles donnés dans (v) et (vi), on a toujours $(c, d) = (2, 2)$. Deux groupes sont distingués par la valeur de r ($r = 1$ ou $r = 2$), mais parmi ces groupes, on veut caractériser géométriquement chacune des SR-algèbres de Lie obtenues. Pour cela, rappelons que dans la démonstration de la Proposition 2.10, nous avons défini $E_3 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$, E_2 le complément orthogonal de E_3 dans $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ et E_1 le complément orthogonal de $E_2 \oplus E_3$ dans \mathfrak{p} (l'orthogonalité est toujours considérée par rapport à \mathcal{B}). Nous avons alors $\mathfrak{p} = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ et, en particulier, $E_2 = E_3$ si $c = d$. On note

$$E_1^0 = \ker C \cap E_1 = \{v \in E_1 : [v, w] = 0 \text{ modulo } \mathfrak{p}, \forall w \in E_1\}$$

et E_1^λ le complément orthogonal de E_1^0 dans E_1 , i.e., $E_1 = E_1^0 \oplus E_1^\lambda$.

Si $c = 2$ et $r = 1$ alors $\dim E_1^0 = \dim E_1^\lambda = 2$, où E_1^0 et E_1^λ sont les sous-espaces invariants de la restriction de l'application \mathcal{L} à $E_1 \times E_1$, correspondant, respectivement, aux valeurs propres 0 et $\pm\lambda \neq 0$.

Si $c = 2$ et $r = 2$ alors $\ker C \cap E_1 = 0$ et $E_1 = E_1^{\lambda_1} \oplus E_1^{\lambda_2}$, où $\dim E_1^{\lambda_1} = \dim E_1^{\lambda_2} = 2$ et $E_1^{\lambda_1}, E_1^{\lambda_2}$ sont les sous-espaces invariants de la restriction de l'application \mathcal{L} à $E_1 \times E_1$, correspondant, respectivement, aux valeurs propres $\pm\lambda_1 \neq 0$, $\pm\lambda_2 \neq 0$ telles que $|\lambda_2| > |\lambda_1|$.

On utilise le Théorème 2.22, ci-dessous, pour montrer que les constantes des modèles du Théorème 2.21(v) et (vi) sont des SR-invariants. En effet, le Théorème 2.22 donne la description des SR-invariants en dimension 6 pour tous les cas où $(c, d) = (2, 2)$.

Théorème 2.22 (Description des SR-invariants en dimension 6 lorsque $(c, d) = (2, 2)$).
Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 de dimension $n = 6$.

1. Si $(c, d) = (2, 2)$ et $r = 1$, alors :

- (i) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^1$ si et seulement si $[E_1^\lambda, E_1^0] = 0$.
- (ii) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^2$ si et seulement si il existe $v \in E_1^\lambda$ tel que $[v, E_1^0] = 0$ et il existe $w \in E_1^0$ tel que $[w, E_1^\lambda] = 0$.
- (iii) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^3$ si et seulement si $[E_1^0, E_1^0] = 0$ et il existe deux paires de vecteurs orthonormés $(e_2, e_3) \in E_1^\lambda \times E_1^0$ et $(e_1, e_4) \in E_1^\lambda \times E_1^0$, commutatives, i.e., $[e_2, e_3] = [e_1, e_4] = 0$, où $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est une base adaptée.
- (iv) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^4$ si et seulement si $[E_1^0, E_1^0] \neq 0$ et il existe deux paires $(e_2, e_3) \in E_1^\lambda \times E_1^0$ et $(e_1, e_4) \in E_1^\lambda \times E_1^0$, commutatives, i.e., $[e_2, e_3] = [e_1, e_4] = 0$, où $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est une base adaptée.

2. Si $(c, d) = (2, 2)$, $r = 2$ et $|c_2| \neq 1$, alors :

- (i) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^5$ si et seulement si il existe $E_1^{\lambda_1} \oplus E_1^{\lambda_2}$ tel que $[E_1^{\lambda_1}, E_1^{\lambda_2}] = 0$.
- (ii) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^6$ si et seulement si il existe $v \in E_1^{\lambda_1}$ tel que $[v, E_1^{\lambda_2}] = 0$ et il existe $w \in E_1^{\lambda_2}$ tel que $[w, E_1^{\lambda_1}] = 0$ et $[E_1^{\lambda_1}, E_1^{\lambda_1}]$ est parallèle à $[E_1^{\lambda_2}, E_1^{\lambda_2}]$.
- (iii) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^7$ si et seulement si il existe $v \in E_1^{\lambda_1}$ tel que $[v, E_1^{\lambda_2}] = 0$ et il existe $w \in E_1^{\lambda_2}$ tel que $[w, E_1^{\lambda_1}] = 0$ et $[E_1^{\lambda_1}, E_1^{\lambda_1}]$ n'est pas parallèle à $[E_1^{\lambda_2}, E_1^{\lambda_2}]$.

- (iv) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est *SR-isomorphe* à $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^8$ si et seulement si $[\mathbf{E}_1^{\lambda_1}, \mathbf{E}_1^{\lambda_1}]$ est parallèle à $[\mathbf{E}_1^{\lambda_2}, \mathbf{E}_1^{\lambda_2}]$ et il existe deux paires de vecteurs orthonormés $(e_2, e_3) \in \mathbf{E}_1^{\lambda_1} \times \mathbf{E}_1^{\lambda_2}$ et $(e_1, e_4) \in \mathbf{E}_1^{\lambda_1} \times \mathbf{E}_1^{\lambda_2}$, commutatives, i.e., $[e_2, e_3] = [e_1, e_4] = 0$, où $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est une base adaptée.
- (v) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est *SR-isomorphe* à $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^9$ si et seulement si $[\mathbf{E}_1^{\lambda_1}, \mathbf{E}_1^{\lambda_1}]$ n'est pas parallèle à $[\mathbf{E}_1^{\lambda_2}, \mathbf{E}_1^{\lambda_2}]$ et il existe deux paires $(e_2, e_3) \in \mathbf{E}_1^{\lambda_1} \times \mathbf{E}_1^{\lambda_2}$ et $(e_1, e_4) \in \mathbf{E}_1^{\lambda_1} \times \mathbf{E}_1^{\lambda_2}$, commutatives, i.e., $[e_2, e_3] = [e_1, e_4] = 0$, où $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est une base adaptée.

Remarque 2.23. Le cas où $|c_2| = 1$ est plus délicat puisque dans ce cas n'importe quelle rotation du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est possible. L'étude de ce cas reste un problème ouvert, qui sera étudié ultérieurement.

2.4.3 Classification des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 de dimension $n = 7$

Pour $n = 7$, on donne la classification des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 sous la forme de deux théorèmes. Le Théorème 2.24 correspond au cas où $c = d = 1$ et au cas où $c > d$. Le Théorème 2.25 correspond au cas où $c = d \geq 2$.

Théorème 2.24. *Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 de dimension $n = 7$. Alors $(c, d, r) \in \{(5, 1, 1), (4, 3, 1), (4, 2, 1), (3, 3, 2), (3, 3, 1), (3, 2, 2), (3, 2, 1), (3, 1, 2), (2, 2, 2), (2, 2, 1), (1, 1, 3)\}$.*

- (i) $(c, d, r) = (5, 1, 1)$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^4$.
- (ii) $(c, d, r) = (3, 1, 2)$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^2$ où \mathfrak{h}_5 est l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension 5 donnée par $[e_1, e_2] = e_7$ et $[e_3, e_4] = c_2 e_7$, avec $c_2 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|c_2| = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \geq 1$ et (e_1, \dots, e_7) est une base adaptée. De plus, $|c_2| \geq 1$ est un SR-invariant.
- (iii) $(c, d, r) = (1, 1, 3)$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_7, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}})$, où \mathfrak{h}_7 est l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension 7, donnée par les crochets $[e_1, e_2] = e_7$, $[e_3, e_4] = c_2 e_7$ et $[e_5, e_6] = c_3 e_7$, avec $c_2, c_3 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|c_3| = \frac{|\lambda_3|}{|\lambda_1|} \geq |c_2| = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \geq 1$, où (e_1, \dots, e_7) est une base adaptée. De plus, $|c_3| \geq |c_2| \geq 1$ sont des SR-invariants.
- (iv) $(c, d, r) = (4, 3, 1)$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $\mathfrak{g}_{(6,3,3)} \oplus \mathbb{R}$ donnée par $[e_1, e_2] = e_7$, $[e_1, e_3] = a_4 e_5$ et $[e_2, e_3] = a_5 e_6$, avec $a_4 > 0$ et $a_5 > 0$, où (e_1, \dots, e_7) est une base adaptée. En plus, $a_4 > 0$ et $a_5 > 0$ sont des SR-invariants.
- (v) $(c, d, r) = (4, 2, 1)$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $\mathfrak{g}_{(5,2,2)} \oplus \mathbb{R}^2$, où $\mathfrak{g}_{(5,2,2)} \oplus \mathbb{R}^2$ est donnée par $[e_1, e_2] = e_7$ et $[e_1, e_3] = a_1 e_6$ avec $a_1 > 0$ où (e_1, \dots, e_7) est une base adaptée. En plus, $a_1 > 0$ est un SR-invariant.
- (vi) $(c, d, r) = (3, 2, 1)$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à
 - $[e_1, e_2] = e_7$, $[e_1, e_3] = a_1 e_6$, $[e_2, e_4] = a_2 e_6$, $[e_3, e_4] = a_3 e_6$,
 - où (e_1, \dots, e_7) est une base adaptée, avec :
 - $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^1 \oplus \mathbb{R} : a_1 = a_2 = 0$ et $a_3 > 0$.
 - $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^2 \oplus \mathbb{R} : a_2 = 0$, $a_1 > 0$ et $a_3 > 0$.
 - $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^3 \oplus \mathbb{R} : a_3 = 0$, $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$.
 - $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^4 \oplus \mathbb{R} : a_1 > 0$, $a_2 > 0$ et $a_3 > 0$.
- (vii) $(c, d, r) = (3, 2, 2)$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à
 - $[e_1, e_2] = e_7$, $[e_1, e_3] = a_1 e_6$, $[e_2, e_3] = a_2 e_6$, $[e_3, e_4] = a_3 e_6 + c_2 e_7$,

avec $|c_2| \geq 1$, où (e_1, \dots, e_7) est une base adaptée, avec :

$$\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^5 \oplus \mathbb{R} : a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 > 0 \text{ et } c_2 > 0.$$

$$\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^6 \oplus \mathbb{R} : a_2 = a_3 = 0, \quad a_1 > 0 \text{ et } c_2 > 0.$$

$$\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^7 \oplus \mathbb{R} : a_2 = 0, \quad a_1 > 0, \quad a_3 > 0 \text{ et } c_2 > 0.$$

$$\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^8 \oplus \mathbb{R} : a_3 = 0, \quad a_i > 0 \text{ et } c_2 \in \mathbb{R}^* \text{ pour } i = 1, 2 \text{ ou bien } c_2 > 0 \text{ et l'un des } a_i > 0.$$

$$\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^9 \oplus \mathbb{R} : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^*.$$

Évidemment, pour tous les cas, à l'exception de $(\mathfrak{h}_7, \mathfrak{p}^h, \mathcal{B}^h)$ décrit par (iii), le Théorème 2.22 de description des SR-invariants est applicable ici (car on se ramène à la dimension 6).

Théorème 2.25. Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 de dimension $n = 7$ telle que $c = d \geq 2$.

(i) $(c, d, r) = (2, 2, 1)$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7, & [e_1, e_3] &= a_1 e_6, & [e_1, e_5] &= a_2 e_6 \\ [e_2, e_3] &= a_3 e_6, & [e_2, e_4] &= a_4 e_6, & [e_3, e_4] &= a_5 e_6 \\ [e_3, e_5] &= a_6 e_6, & [e_4, e_5] &= a_7 e_6, \end{aligned}$$

où (e_1, \dots, e_7) est une base adaptée, avec :

soit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^*$, et $a_i \in \mathbb{R}$ pour $3 \leq i \leq 7$ telle que $(a_4, a_5, a_7) \neq (0, 0, 0)$ et $(a_3, a_5, a_6, a_7) \neq (0, 0, 0, 0)$.

soit $a_1 = a_4 = 0$, $a_2, a_3 \in \mathbb{R}^*$ et $a_5, a_6, a_7 \in \mathbb{R}$ tel que $(a_5, a_7) \neq (0, 0)$.

soit $a_1 = a_3 = a_4 = a_7 = 0$, $a_2, a_5, a_6 \in \mathbb{R}^*$.

soit $a_1 = a_3 = a_4 = a_6 = a_7 = 0$, $a_2, a_5 \in \mathbb{R}^*$.

(ii) $(c, d, r) = (3, 3, 1)$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7, & [e_1, e_3] &= a_1 e_5 + a_2 e_6, & [e_1, e_4] &= a_3 e_5, \\ [e_2, e_3] &= a_4 e_5 + a_5 e_6, & [e_2, e_4] &= a_6 e_5 + a_7 e_6, & [e_3, e_4] &= a_8 e_5 \end{aligned}$$

où (e_1, \dots, e_7) est une base adaptée, avec :

soit $a_2, a_8 \in \mathbb{R}^*$ et $a_1, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in \mathbb{R}$.

soit $a_8 = 0$, $a_2 \in \mathbb{R}^*$ et $a_i \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq 7$, $i \neq 2$ tels que $(a_1, a_3, a_4, a_6) \neq (0, 0, 0, 0)$ et $(a_3, a_6, a_7) \neq (0, 0, 0)$.

(iii) $(c, d, r) = (2, 2, 2)$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7, & [e_1, e_3] &= a_1 e_6, & [e_1, e_5] &= a_2 e_6, \\ [e_2, e_3] &= a_3 e_6, & [e_2, e_4] &= a_4 e_6, & [e_3, e_4] &= a_5 e_6 + c_2 e_7, \\ [e_3, e_5] &= a_6 e_6, & [e_4, e_5] &= a_7 e_6, \end{aligned}$$

avec $|c_2| \geq 1$, où (e_1, \dots, e_7) est une base adaptée, avec :

soit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^*$, et $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in \mathbb{R}$.
 soit $a_1 = a_4 = 0$, $a_2, a_3 \in \mathbb{R}^*$ et $a_5, a_6, a_7 \in \mathbb{R}$.
 soit $a_1 = a_3 = a_4 = a_7 = 0$, $a_2, a_6 \in \mathbb{R}^*$ et $a_5 \in \mathbb{R}$.
 soit $a_1 = a_3 = a_4 = a_6 = a_7 = 0$, $a_2 \in \mathbb{R}^*$ et $a_5 \in \mathbb{R}$.
 soit $a_2 = a_7 = 0$, $a_4, a_6 \in \mathbb{R}^*$ et $a_1, a_3, a_5 \in \mathbb{R}$.
 soit $a_2 = a_3 = a_4 = a_7 = 0$, $a_1, a_6 \in \mathbb{R}^*$ et $a_5 \in \mathbb{R}$.
 soit $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_7 = 0$, $a_6 \in \mathbb{R}^*$ et $a_5 \in \mathbb{R}$.

(iv) $(c, d, r) = (3, 3, 2)$ si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à

$$\begin{aligned}
 [e_1, e_2] &= e_7, & [e_1, e_3] &= a_1 e_5 + a_2 e_6, & [e_1, e_4] &= a_3 e_5, \\
 [e_2, e_3] &= a_4 e_5 + a_5 e_6, & [e_2, e_4] &= a_6 e_5 + a_7 e_6, & [e_3, e_4] &= a_8 e_5 + c_2 e_7
 \end{aligned}$$

avec $|c_2| \geq 1$, où (e_1, \dots, e_7) est une base adaptée, avec :

soit $a_2, a_8 \in \mathbb{R}^*$ et $a_1, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in \mathbb{R}$.

soit $a_8 = 0$, $a_2 \in \mathbb{R}^*$ et $a_i \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq 7$, $i \neq 2$ tels que $(a_1, a_3, a_4, a_6) \neq (0, 0, 0, 0)$.

Remarque 2.26. Pour $n = 5$ (resp. $n = 6$) nous avons obtenu 3 (resp. 13) classes de SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2. Pour $n = 7$, le nombre de classes est beaucoup plus important. On a donné les résultats sous formes regroupées. Pour $n = 7$, dans le cas où $c = d \geq 2$, on n'étudie pas les SR-invariants et les distinctions géométriques puisque le nombre de classes obtenues est trop important. Pour $n \geq 8$ on peut obtenir la classification en utilisant la même méthode (Proposition 2.10 et les autres propositions), cependant, on arrête la classification à $n = 7$ car pour $n \geq 8$ les classes sont beaucoup trop nombreuses.

2.5 Preuves des Théorèmes en dimension 6 et 7

2.5.1 Preuve du Théorème 2.21

Démonstration. Si $n = 6$, on sait que $1 \leq d \leq c \leq n - 2r = 6 - 2r$ (par la Proposition 2.10), donc $r = 1$ ou $r = 2$ et alors $1 \leq d \leq c \leq 4$. Rappelons que si $c = 4$, d'après la Proposition 2.3(ii) nous avons vu que $d = 1$. Si $c = 3$, en utilisant la Proposition 2.3(iv) on obtient $2 \leq d \leq 3$, d'où les couples $(c, d) = (3, 2)$ ou $(c, d) = (3, 3)$. Si $c = 2$ et $d \geq 2$, alors $d = 2$, d'où le couple $(c, d) = (2, 2)$. Le cas $c = 1$ ne se présente pas en dimension $n = 6$ (en effet si $c = 1$, alors $d = 1$, et d'après le Théorème 2.16 on a alors $c \geq 2$).

Les preuves de (\Leftarrow) sont évidentes. On va montrer les implications (\Rightarrow) .

(i), (ii) correspondent au cas $d = 1$ et il suffit d'utiliser le Théorème 2.16. Pour la preuve de $|c_2| \geq 1$ est un SR-invariant, voir le Théorème 2.19.

(iii). On a $(c, d) = (3, 2)$ alors $r = 1$, et en utilisant la Proposition 2.10, on peut choisir une base adaptée (e_1, \dots, e_6) telle que $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_4, e_5, e_6\}$ et $\mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_5, e_6\}$. Les relations de commutations sont :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_6, \\ [e_1, e_3] &= c_{13}^5 e_5, \\ [e_2, e_3] &= c_{23}^5 e_5 \text{ avec } c_{13}^5, c_{23}^5 \in \mathbb{R} \text{ tel que } (c_{13}^5, c_{23}^5) \neq (0, 0) \text{ car } d = 2. \end{aligned}$$

Alors en appliquant le Lemme 2.5(i), par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$, on peut supposer d'abord que $c_{13}^5 \neq 0$, puis que $c_{23}^5 = 0$. On obtient le modèle $\mathfrak{g}_{(5,2,2)} \oplus \mathbb{R}$. On a $a_1 = c_{13}^5 > 0$ et $a_1 > 0$ est un SR-invariant (pour la preuve voir Théorème 2.19).

(iv). Si $(c, d) = (3, 3)$, alors $r = 1$ et en utilisant la Proposition 2.10, on peut choisir une base adaptée (e_1, \dots, e_6) telle que $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_4, e_5, e_6\}$. Les relations de commutations sont :

$$[e_1, e_2] = e_6, [e_1, e_3] = c_{13}^4 e_4 + c_{13}^5 e_5 \text{ et } [e_2, e_3] = c_{23}^4 e_4 + c_{23}^5 e_5,$$

avec $c_{13}^4, c_{13}^5, c_{23}^4, c_{23}^5 \in \mathbb{R}$ tel que $c_{13}^4 c_{23}^5 - c_{23}^4 c_{13}^5 \neq 0$ (car $d = 3$). En appliquant le Lemme 2.5(i), par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$, on peut supposer que $c_{13}^4 \neq 0$, puis que $c_{23}^5 = 0$. Dans ce cas c_{23}^4 est non nul car sinon $d \leq 2$. Les relations de commutations deviennent alors :

$$[e_1, e_2] = e_6, \quad [e_1, e_3] = c_{13}^4 e_4 + c_{13}^5 e_5, \quad [e_2, e_3] = c_{23}^5 e_5$$

et les autres crochets nuls, avec $c_{13}^4, c_{23}^5 \in \mathbb{R}^*$ et $c_{13}^5 \in \mathbb{R}$.

De plus, on a $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ une base adaptée avec $E_1 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4, e_5\}$, $E_2 = 0$ et $E_3 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_4, e_5\}$. On trouve $\ker C = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4, e_5\}$ et $\ker C \cap E_1 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3\}$. La direction e_3 est définie géométriquement et doit donc être préservée. Le complément de $\ker C \cap E_1$ dans E_1 , i.e., $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$, doit aussi être préservé. Soit il existe $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) \in \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ tel que $[\tilde{e}_1, e_3] \perp [\tilde{e}_2, e_3]$ soit non. Pour simplifier la notation, on pose $a_4 = c_{13}^4$, $a_5 = c_{23}^5$ et $a_6 = c_{13}^5$. Si $a_6 = 0$, on a déjà $[e_1, e_3] \perp [e_2, e_3]$. Si $a_6 \neq 0$, on cherche une base orthonormée

$$\tilde{e}_1 = \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2 \quad \text{et} \quad \tilde{e}_2 = -\sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_2 \quad (2.7)$$

du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ telle que $[\tilde{e}_1, e_3]$ et $[\tilde{e}_2, e_3]$ soient orthogonaux. On calcule

$$\begin{aligned} [\tilde{e}_1, e_3] &= [\cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2, e_3] \\ &= \cos \varphi [e_1, e_3] + \sin \varphi [e_2, e_3] \\ &= a_4 \cos \varphi e_4 + (a_6 \cos \varphi + a_5 \sin \varphi) e_5 = v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\tilde{e}_2, e_3] &= [-\sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_2, e_3] \\ &= -\sin \varphi [e_1, e_3] + \cos \varphi [e_2, e_3] \\ &= -a_4 \sin \varphi e_4 + (-a_6 \sin \varphi + a_5 \cos \varphi) e_5 = w. \end{aligned}$$

Nous avons $\mathcal{B}(e_4, e_5) = 0$, $\mathcal{B}(e_4, e_4) = \mathcal{B}(e_5, e_5) = 1$ ce qui implique que

$$\mathcal{B}(v, w) = -a_4^2 \sin \varphi \cos \varphi + (a_6 \cos \varphi + a_5 \sin \varphi)(-a_6 \sin \varphi + a_5 \cos \varphi).$$

La condition $\mathcal{B}(v, w) = 0$ entraîne

$$a_4^2 = (a_6 + a_5 \tan \varphi)(-a_6 + a_5 \cotan \varphi).$$

On note $\tan \varphi = x$ et alors

$$a_4^2 = (a_6 + a_5 x)(-a_6 + \frac{a_5}{x}).$$

Ceci est équivalent à

$$-a_5 a_6 x^2 + x(-a_4^2 + a_5^2 - a_6^2) + a_5 a_6 = 0$$

qui possède deux solutions réelles x_1 et x_2 car le discriminant $\Delta = (-a_4^2 + a_5^2 - a_6^2)^2 + 4a_5^2 a_6^2 > 0$.

On pose $\varphi = \arctan x_1$. On peut supposer que l'orientation de (e_4, e_5) est la même que celle de (v, w) (sinon on remplace v par $-v$). On définit $\tilde{e}_4 = \frac{v}{\|v\|}$ et $\tilde{e}_5 = \frac{w}{\|w\|}$. La rotation donnée par la relation (2.7) où $\varphi = \arctan x_1$, suivie par la rotation qui transforme la paire (e_4, e_5) sur la paire $(\tilde{e}_4, \tilde{e}_5)$, permet d'obtenir $\tilde{a}_6 = 0$ avec $\tilde{a}_4 = \|v\|$ et $\tilde{a}_5 = \|w\|$.

On a ainsi montré que l'on peut supposer les relations de commutations comme :

$$[e_1, e_2] = e_6, \quad [e_1, e_3] = a_4 e_4, \quad [e_2, e_3] = a_5 e_5,$$

et les autres crochets nuls, avec $a_4, a_5 \in \mathbb{R}^*$. De plus, on peut supposer $a_4 > 0$ et $a_5 > 0$. En effet, si $a_4 > 0$, $a_5 < 0$, on remplace e_1 par $-e_1$, e_3 par $-e_3$ et e_6 par $-e_6$; si $a_4 < 0$, $a_5 > 0$, on remplace e_2 par $-e_2$, e_3 par $-e_3$ et e_6 par $-e_6$; si $a_4 < 0$, $a_5 < 0$, on remplace e_1 par $-e_1$ et e_2 par $-e_2$.

Maintenant que l'on a montré que l'on peut obtenir $a_6 = 0$ et $a_4 > 0$ et $a_5 > 0$, on veut montrer que $a_4 > 0$ et $a_5 > 0$ sont des SR-invariants. Autrement dit, on veut savoir comment la transformation $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ influence les crochets. En effectuant une rotation du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ et en utilisant la même démarche qu'au dessus pour $a_6 = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(v, w) &= -a_4^2 \sin \varphi \cos \varphi + a_5^2 \sin \varphi \cos \varphi. \\ &= (a_5^2 - a_4^2) \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

La condition $\mathcal{B}(v, w) = 0$ entraîne soit

$$a_4^2 \neq a_5^2 \text{ et } \varphi = 0, \text{ ou } \varphi = \pi \text{ ou } \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \quad (2.8)$$

soit

$$a_4 = a_5 = a \quad (a_4 > 0, a_5 > 0) \quad (2.9)$$

Dans le cas (2.8), les rotations d'angles $\varphi = 0, \pi$ ou $\pm \frac{\pi}{2}$ n'ont pas d'influence (au signe près) sur les crochets. Dans le cas (2.9), on trouve

$$[\tilde{e}_1, e_3] = a(\cos \varphi e_4 + \sin \varphi e_5)$$

$$[\tilde{e}_2, e_3] = -a(\sin \varphi e_4 + \cos \varphi e_5).$$

On pose $\tilde{e}_4 = \cos \varphi e_4 + \sin \varphi e_5$ et $\tilde{e}_5 = \sin \varphi e_4 + \cos \varphi e_5$ et on voit que cette transformation change juste les signes des crochets. Donc $a_4 > 0$ et $a_5 > 0$ sont des SR-invariants.

(v). Si $(c, d) = (2, 2)$ et $r = 1$, alors en utilisant la Proposition 2.10, on peut choisir une base adaptée (e_1, \dots, e_6) telle que $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_5, e_6\}$. Les relations de commutations sont :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_6 & [e_1, e_3] &= c_{13}^5 e_5 & [e_1, e_4] &= c_{14}^5 e_5 \\ [e_2, e_3] &= c_{23}^5 e_5 & [e_2, e_4] &= c_{24}^5 e_5 & [e_3, e_4] &= c_{34}^5 e_5, \end{aligned}$$

et tous les autres crochets nuls, avec $c_{lj}^5 \in \mathbb{R}$, pour $1 \leq l < j \leq 4$, telles que $(c_{13}^5, c_{23}^5, c_{34}^5) \neq (0, 0, 0)$ et $(c_{14}^5, c_{24}^5, c_{34}^5) \neq (0, 0, 0)$ car $c = d = 2$.

1^{er} cas : Si tous les coefficients c_{lj}^5 sont nuls, pour $1 \leq l < j \leq 4$, tel que $(l, j) \notin \{(1, 2), (3, 4)\}$, alors $c_{34}^5 \neq 0$. Dans ce cas on obtient le modèle $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^1$ donné par $[e_1, e_2] = e_6$ et $[e_3, e_4] = a_3 e_5$ avec $a_3 = c_{34}^5 \in \mathbb{R}^*$. En remplaçant e_1 par $-e_1$, e_3 par $-e_3$ et e_6 par $-e_6$, on obtient $a_3 > 0$.

2^{eme} cas : Si au moins un coefficient c_{lj}^5 est non nul, pour $1 \leq l < j \leq 4$, tel que $(l, j) \notin \{(1, 2), (3, 4)\}$, alors en appliquant le Lemme 2.5(i), par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ et du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$ on peut supposer d'abord que $c_{13}^5 \neq 0$, puis que $c_{14}^5 = 0$. On obtient les relations de commutations suivantes :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_6 & [e_1, e_3] &= c_{13}^5 e_5 & [e_1, e_4] &= 0 \\ [e_2, e_3] &= c_{23}^5 e_5 & [e_2, e_4] &= c_{24}^5 e_5 & [e_3, e_4] &= c_{34}^5 e_5, \end{aligned}$$

et tous les autres crochets nuls, avec $c_{13}^5 \in \mathbb{R}^*$ et $c_{23}^5, c_{24}^5, c_{34}^5 \in \mathbb{R}$ telle que $(c_{24}^5, c_{34}^5) \neq (0, 0)$.

On distingue trois cas possibles selon les valeurs des constantes $c_{23}^5, c_{24}^5, c_{34}^5$.

Si un seul des coefficients $c_{23}^5, c_{24}^5, c_{34}^5$ est non nul :

- Soit $c_{24}^5 \neq 0$ et $c_{23}^5 = c_{34}^5 = 0$, on obtient le modèle $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^3$. On pose $a_1 = c_{13}^5$ et $a_2 = c_{24}^5$. On peut toujours avoir $a_1 > 0$ (sinon, on remplace e_5 par $-e_5$ et e_4 par $-e_4$) et $a_2 > 0$ (sinon, on remplace e_5 par $-e_5$ et e_3 par $-e_3$).
- Soit $c_{34}^5 \neq 0$ et $c_{23}^5 = c_{24}^5 = 0$, on obtient le modèle $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^2$. On pose $a_1 = c_{13}^5$ et $a_3 = c_{34}^5$. On peut toujours obtenir $a_1 > 0$ (sinon, on remplace e_1 par $-e_1$ et e_2 par $-e_2$) et $a_3 > 0$ (sinon, on remplace e_2 par $-e_2$, e_4 par $-e_4$ et e_6 par $-e_6$).

Si exactement deux des coefficients $c_{23}^5, c_{24}^5, c_{34}^5$ sont non nuls :

- Soit $c_{23}^5 \cdot c_{24}^5 \neq 0$ et $c_{34}^5 = 0$, on note ce modèle $\tilde{\mathfrak{g}}_{(6,2,2)}^3$.
- Soit $c_{23}^5 \cdot c_{34}^5 \neq 0$ et $c_{24}^5 = 0$, alors on applique le Lemme 2.5(i) et on peut supposer par une rotation du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ que $c_{23}^5 = 0$, on obtient le modèle $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^2$.
- Soit $c_{24}^5 \cdot c_{34}^5 \neq 0$ et $c_{23}^5 = 0$ on obtient le modèle $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^4$. On pose $a_1 = c_{13}^5$, $a_2 = c_{24}^5$ et $a_3 = c_{34}^5$. On peut toujours avoir $a_i > 0$ car on obtient $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ comme pour $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^3$ et si $a_3 < 0$ on remplace e_3 par $-e_3$, e_1 par $-e_1$ (on garde $a_1 > 0$ alors) et e_6 par $-e_6$.

Si les trois coefficients $c_{23}^5, c_{24}^5, c_{34}^5$ sont non nuls, on note ce modèle $\tilde{\mathfrak{g}}_{(6,2,2)}^4$.

• Les modèles $\tilde{\mathfrak{g}}_{(6,2,2)}^3$ et $\tilde{\mathfrak{g}}_{(6,2,2)}^4$ sont SR-isomorphes, respectivement, aux modèles $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^3$ et $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^4$. En fait, on va montrer que pour les deux il existe un couple de paires (e_2, e_3) et (e_1, e_4) commutatives, i.e., $[e_2, e_3] = [e_1, e_4] = 0$ (autrement dit, deux plans commutatifs). Soit les relations de commutations :

$$[e_1, e_2] = e_6, [e_1, e_3] = a_1 e_5, [e_2, e_3] = a_2 e_5, [e_2, e_4] = b e_5,$$

($[e_3, e_4] = 0$ ou $\neq 0$ ne joue aucun rôle) On applique deux rotations

$$\begin{aligned}\tilde{e}_1 &= \cos \phi e_1 + \sin \phi e_2 \\ \tilde{e}_2 &= -\sin \phi e_1 + \cos \phi e_2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{e}_3 &= \cos \psi e_3 + \sin \psi e_4 \\ \tilde{e}_4 &= -\sin \psi e_3 + \cos \psi e_4.\end{aligned}$$

On veut

$$[\tilde{e}_2, \tilde{e}_3] = (-a_1 \sin \phi \cos \psi + a_2 \cos \phi \cos \psi + b \cos \phi \sin \psi) e_5 = A e_5 = 0$$

et

$$[\tilde{e}_1, \tilde{e}_4] = (-a_1 \cos \phi \sin \psi - a_2 \sin \phi \sin \psi + b \sin \phi \cos \psi) e_5 = B e_5 = 0.$$

En divisant les deux coefficients (A et B) par $\cos \phi \cos \psi$, en notant $\tan \phi = x$ et $\tan \psi = y$ et en calculant $bA + a_1 B$ et $a_1 A + bB$ on obtient

$$\begin{aligned}(b^2 - a_1^2)y + a_2 b - a_1 a_2 x y &= 0 \\ (b^2 - a_1^2)x + a_1 a_2 - a_2 b x y &= 0.\end{aligned}$$

On élimine x et si $b^2 - a_1^2 \neq 0$, on obtient

$$-a_2by^2 + y(b^2 - a_1^2 - a_2^2) + a_2b = 0.$$

Cette équation possède toujours deux solutions réelles car $\Delta = (b^2 - a_1^2 - a_2^2)^2 + 4a_2^2b^2$ est positif. On prend une de ces solutions ainsi que $x = \frac{1}{a_1}(by + a_2)$. Dans ce cas, on prend $\phi = \arctan x$ et $\psi = \arctan y$ et on obtient $A = B = 0$, ce qui montre l'isomorphisme.

Maintenant, on considère le cas particulier $b^2 - a_1^2 = 0$, i.e., $a_1 = b = a$ (car $a_1 > 0$ et $b > 0$), et on veut que $A = B = 0$. En divisant les deux coefficients A et B par $\cos \phi \cos \psi$ (supposé $\neq 0$) on trouve :

$$a(y - x) + a_2 = 0 \tag{2.10}$$

$$a(x - y) - a_2xy = 0. \tag{2.11}$$

La relation (2.10) implique que $x - y = \frac{a_2}{a}$, en substituant ce résultat dans (2.11) on trouve $a_2(1 - xy) = 0$, i.e., $xy = 1$ car $a_2 \neq 0$. On a forcément $y \neq 0$ et on exprime donc x comme $x = \frac{1}{y}$. En éliminant x dans (2.10), on trouve l'équation du second degré

$$ay^2 + a_2y - a = 0.$$

Cette équation possède toujours deux solutions réelles car $\Delta = a_2^2 + 4a^2$ est toujours positif. Il existe donc ψ et ϕ telle que $A = B = 0$, d'où l'isomorphisme dans le cas particulier où $b^2 = a_1^2$.

(vi). Si $(c, d) = (2, 2)$ et $r = 2$, alors en utilisant la Proposition 2.10, on peut choisir une base adaptée (e_1, \dots, e_6) telle que $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_5, e_6\}$. Les relations de commutations sont :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_6 & [e_1, e_3] &= c_{13}^5 e_5 & [e_1, e_4] &= c_{14}^5 e_5 \\ [e_2, e_3] &= c_{23}^5 e_5 & [e_2, e_4] &= c_{24}^5 e_5 & [e_3, e_4] &= c_{34}^5 e_5 + c_{34}^6 e_6, \end{aligned}$$

et tous les autres crochets nuls, avec $c_{34}^6 \in \mathbb{R}^*$ et $c_{ij}^5 \in \mathbb{R}$, pour $1 \leq l < j \leq 4$ telles que $(c_{13}^5, c_{14}^5, c_{23}^5, c_{24}^5, c_{34}^5) \neq (0, 0, 0, 0, 0)$ car $d = 2$.

On peut toujours avoir $c_2 := c_{34}^6$ satisfaisant $|c_2| \geq 1$ (sinon on pose $e_6 := [e_3, e_4]$ et on permute e_1 avec e_3 et e_2 avec e_4).

1^{er} cas : Si tous les coefficients c_{lj}^5 sont nuls, pour $1 \leq l < j \leq 4$, tel que $(l, j) \notin \{(1, 2), (3, 4)\}$, alors $c_{34}^5 \neq 0$. Dans ce cas on obtient le modèle $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^5$ donné par $[e_1, e_2] = e_6$ et $[e_3, e_4] = a_3 e_5 + c_2 e_6$, avec $a_3 = c_{34}^5 \in \mathbb{R}^*$ et $c_2 = c_{34}^6$ satisfaisant $|c_2| \geq 1$. En remplaçant e_1 par $-e_1$, e_3 par $-e_3$ et e_6 par $-e_6$, on obtient $a_3 > 0$ et en remplaçant e_3 par $-e_3$, e_5 par $-e_5$, on obtient $c_2 > 0$.

2^{eme} cas : Si au moins un coefficient c_{lj}^5 est non nul, pour $1 \leq l < j \leq 4$ tel que $(l, j) \notin \{(1, 2), (3, 4)\}$, alors en appliquant le Lemme 2.5(i), par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ et du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$ on peut supposer d'abord que $c_{13}^5 \neq 0$, puis que $c_{14}^5 = 0$. On obtient les relations de commutations suivantes :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_6 & [e_1, e_3] &= c_{13}^5 e_5 & [e_1, e_4] &= 0 \\ [e_2, e_3] &= c_{23}^5 e_5 & [e_2, e_4] &= c_{24}^5 e_5 & [e_3, e_4] &= c_{34}^5 e_5 + c_2 e_6 \end{aligned}$$

et les autres crochets nuls, avec $c_2 = c_{34}^6$ satisfaisant $|c_2| \geq 1$, $c_{13}^5 \in \mathbb{R}^*$ et $c_{23}^5, c_{24}^5, c_{34}^5 \in \mathbb{R}$. On distingue les cas possibles selon les valeurs des constantes $c_{23}^5, c_{24}^5, c_{34}^5$:

Si tous les coefficients $c_{ij}^5 \in \mathbb{R}$ pour $2 \leq i < j \leq 4$ sont nuls, on obtient le modèle $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^6$. On pose $a_1 = c_{13}^5$ et $c_2 = c_{34}^6$. On peut toujours obtenir $a_1 > 0$ (sinon, on remplace e_1 par $-e_1$ et e_2 par $-e_2$) et $c_2 > 0$ (sinon, on remplace e_1 par $-e_1$, e_2 par $-e_2$, e_4 par $-e_4$ et e_5 par $-e_5$).

Si un seul des coefficients $c_{ij}^5 \in \mathbb{R}$ pour $2 \leq i < j \leq 4$ est non nul :

- Soit $c_{23}^5 \neq 0$ et $c_{24}^5 = c_{34}^5 = 0$, on applique le Lemme 2.5(i) et on peut supposer par une rotation du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ que $c_{23}^5 = 0$ et on obtient le modèle $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^6$.
- Soit $c_{24}^5 \neq 0$ et $c_{23}^5 = c_{34}^5 = 0$, on obtient le modèle $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^8$. On pose $a_1 = c_{13}^5$ et $a_2 = c_{24}^5$. On peut toujours obtenir $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$ (sinon, on remplace e_3 par $-e_3$ et e_4 par $-e_4$) ou $a_2 > 0$ et $c_2 > 0$ (sinon, on remplace e_3 par $-e_3$ et e_5 par $-e_5$) ou $a_1 > 0$ et $c_2 > 0$ (sinon, on remplace e_4 par $-e_4$ et e_5 par $-e_5$).
- Soit $c_{34}^5 \neq 0$ et $c_{23}^5 = c_{24}^5 = 0$, on obtient le modèle $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^7$. On pose $a_1 = c_{13}^5$ et $a_3 = c_{34}^5$. On peut toujours obtenir $a_1 > 0$ (sinon, on remplace e_1 par $-e_1$ et e_2 par $-e_2$), $a_3 > 0$ (sinon, on remplace e_2 par $-e_2$, e_4 par $-e_4$ et e_6 par $-e_6$) et $c_2 > 0$ (sinon, on remplace e_1 par $-e_1$, e_2 par $-e_2$, e_4 par $-e_4$ et e_5 par $-e_5$).

Si exactement deux des coefficients $c_{ij}^5 \in \mathbb{R}$ pour $2 \leq i < j \leq 4$ sont non nuls :

- Soit $c_{23}^5 \cdot c_{24}^5 \neq 0$ et $c_{34}^5 = 0$, on note ce modèle $\tilde{\mathfrak{g}}_{(6,2,2)}^8$.
- Soit $c_{23}^5 \cdot c_{34}^5 \neq 0$ et $c_{24}^5 = 0$, on applique le Lemme 2.5(i) et on peut supposer

par une rotation du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ que $c_{23}^5 = 0$ et on obtient le modèle $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^7$.

– Soit $c_{24}^5 \cdot c_{34}^5 \neq 0$ et $c_{23}^5 = 0$, on obtient le modèle $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^9$.

Si tous les coefficients $c_{ij}^5 \in \mathbb{R}$ pour $2 \leq i < j \leq 4$ sont non nuls, on note ce modèle $\tilde{\mathfrak{g}}_{(6,2,2)}^9$.

• Les modèles $\tilde{\mathfrak{g}}_{(6,2,2)}^8$ et $\tilde{\mathfrak{g}}_{(6,2,2)}^9$ sont SR-isomorphes, respectivement, aux modèles $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^8$ et $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^9$ pour la même raison que $\tilde{\mathfrak{g}}_{(6,2,2)}^3$ et $\tilde{\mathfrak{g}}_{(6,2,2)}^4$ sont SR-isomorphes, respectivement, aux modèles $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^3$ et $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^4$.

La preuve de la SR-invariance des paramètres a_i et c_2 est présentée dans la démonstration du Théorème 2.22 car nous utilisons les descriptions des SR-invariants des modèles $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^i$.

□

2.5.2 Preuve du Théorème 2.22 et de la SR-invariance des paramètres

1. On considère le cas $(c, d) = (2, 2)$ et $r = 1$. On a $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ une base adaptée avec $E_1 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_5, e_6\}$, $E_2 = 0$ et $E_3 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_5\}$. Puisque $r = 1$, on a $\text{rang } C = 2$ et $\dim(\ker C) = 3$. Donc $\dim(\ker C \cap E_1) = 2$. On trouve

$$E_1^0 = \ker C \cap E_1 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\} \quad \text{et} \quad E_1^\lambda = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}.$$

L'espace $E_1^0 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$ est défini géométriquement et doit donc être préservée par toutes les transformations orthogonales. Le complément de $\ker C \cap E_1$ dans E_1 , i.e., $E_1^\lambda = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$, doit aussi être préservé. Alors les transformations disponibles sont des rotations de $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ et de $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$.

Les relations de commutations dans n'importe quelle base adaptée dans le cas $(c, d) = (2, 2)$, $r = 1$ sont (comparer la démonstration du Théorème 2.21(v) :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_6 & [e_1, e_3] &= c_{13}^5 e_5 & [e_1, e_4] &= c_{14}^5 e_5 \\ [e_2, e_3] &= c_{23}^5 e_5 & [e_2, e_4] &= c_{24}^5 e_5 & [e_3, e_4] &= c_{34}^5 e_5, \end{aligned}$$

et tous les autres crochets nuls, avec $c_{lj}^5 \in \mathbb{R}$, pour $1 \leq l < j \leq 4$, telles que $(c_{13}^5, c_{23}^5, c_{34}^5) \neq (0, 0, 0)$ et $(c_{14}^5, c_{24}^5, c_{34}^5) \neq (0, 0, 0)$ car $c = d = 2$.

1.(i). La description des SR-invariants de $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^1$ est évidente. Puisque les rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ et du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$ n'ont pas d'influence sur les relations de commutations (à un signe près), on trouve que $a_3 > 0$ est un SR-invariant.

1.(ii). Il est évident que pour $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^2$, nous avons $[v, E_1^0] = 0$ pour $v = e_2$ et $[w, E_1^\lambda] = 0$ pour $w = e_4$. Réciproquement, choisissons une base adaptée telle que $e_2 = v$, $e_4 = w$, e_1 le complément orthogonal à e_2 dans E_1^λ et e_3 le complément orthogonal à e_4 dans E_1^0 , ce qui donne le modèle $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^2$. La paire (a_1, a_3) , $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, est SR-invariante car toutes les directions sont invariantes : e_2 (colinéaire avec v), e_1 (orthogonal à e_2 dans E_1^λ), e_4 (colinéaire avec w), e_3 (orthogonal à e_4 dans E_1^0).

1.(iii). La description des SR-invariants de $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^3$ est évidente. La paire (a_1, a_2) , $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, est SR-invariante car toutes les directions (celles de e_1, e_2, e_3 et e_4)

sont invariantes. Pour le prouver, on va montrer que si deux paires (à un signe près) $(e_2, e_3) \in E_1^\lambda \times E_1^0$ et $(e_1, e_4) \in E_1^\lambda \times E_1^0$, commutatives, i.e., $[e_2, e_3] = [e_1, e_4] = 0$, existent, il n'y en a pas d'autres. Soit $(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ et $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_4)$ un autre couple de paires commutatives. On a

$$\begin{aligned}\tilde{e}_1 &= \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2 \\ \tilde{e}_2 &= -\sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_2 \\ \tilde{e}_3 &= \cos \psi e_3 + \sin \psi e_4 \\ \tilde{e}_4 &= -\sin \psi e_3 + \cos \psi e_4\end{aligned}$$

On considère $a_1^2 \neq a_2^2$ et on veut

$$\begin{aligned}[\tilde{e}_2, \tilde{e}_3] &= (-a_1 \sin \varphi \cos \psi + a_2 \cos \varphi \sin \psi)e_5 = 0 \\ [\tilde{e}_1, \tilde{e}_4] &= (-a_1 \cos \varphi \sin \psi + a_2 \sin \varphi \cos \psi)e_5 = 0.\end{aligned}$$

Alors $(a_2^2 - a_1^2) \cos \varphi \sin \psi = 0$ et, puisque $a_1^2 \neq a_2^2$, on a $\cos \varphi \sin \psi = 0$. De même $\cos \psi \sin \varphi = 0$. Donc soit $\psi = 0$ ou π et $\varphi = 0$ ou π soit $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ et $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$.

Si $a_1 = a_2 = a > 0$, on a

$$[\tilde{e}_2, \tilde{e}_3] = -a \sin(\varphi - \psi)e_5 = 0 \quad \text{et} \quad [\tilde{e}_1, \tilde{e}_4] = a \sin(\varphi - \psi)e_5 = 0$$

et $\varphi - \psi = 0$ ou $\varphi - \psi = \pi$. Par un simple calcul, on trouve

$$[\tilde{e}_1, \tilde{e}_3] = a \cos(\varphi - \psi)e_5 \quad \text{et} \quad [\tilde{e}_2, \tilde{e}_4] = a \cos(\varphi - \psi)e_5$$

où $\cos(\varphi - \psi) = \pm 1$ et $a > 0$ est préservé.

Observons que si $a_1 = a_2 = a$, toutes les rotations par l'angle φ dans l'espace $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ et par le même angle $\psi = \varphi$ dans l'espace $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$ produisent un couple de paires $(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ et $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_4)$ commutatives mais toutes ces rotations préservent a et on montre que $a > 0$ est, en effet, un SR-invariant.

1.(iv). La description des SR-invariants de $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^4$ est évidente. Si $a_1^2 \neq a_2^2$, on montre que le couple de paires est unique (par le même argument que pour $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^3$ car $[e_3, e_4]$ n'intervient pas dans le calcul de $[e_2, e_3]$ ou $[e_1, e_4]$). Il en est de même si $a_1 = a_2$. De plus, $a_3 > 0$ est un SR-invariant car le crochet $[e_1, e_2]$ n'intervient pas dans les rotations.

2. On considère le cas $(c, d) = (2, 2)$ et $r = 2$. On a $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ une base adaptée avec $E_1 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_5, e_6\}$, $E_2 = 0$

et $E_3 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_5\}$. Puisque $r = 2$, on a $\text{rang } C = 4$ et $\dim(\ker C) = 1$. Si $|\omega_1| \neq |\omega_2|$, on peut décomposer \mathfrak{p} telle que $\mathfrak{p} = E_1^{\lambda_1} \oplus E_1^{\lambda_2} \oplus E_3$ où $\dim E_1^{\lambda_1} = \dim E_1^{\lambda_2} = 2$ et $E_1^{\lambda_1}, E_1^{\lambda_2}$ sont les sous-espaces invariants de la restriction de l'application \mathcal{L} à $E_1 \times E_1$, correspondant, respectivement, aux valeurs propres $\pm\lambda_1 \neq 0$ et $\pm\lambda_2 \neq 0$ ($\pm\lambda_j = \pm i\omega_j$) telles que $|\lambda_2| \geq |\lambda_1|$ et où $E_3 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_5\}$. On trouve $E_1^{\lambda_1} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ et $E_1^{\lambda_2} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$. Les espaces $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ et $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$ sont définis géométriquement et doivent donc être préservés par toutes les transformations orthogonales. Alors les transformations disponibles sont des rotations de $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ et de $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$.

Les descriptions des SR-invariants de tous les modèles $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^i$, $5 \leq i \leq 9$, sont évidentes. Notons seulement que dans le cas de $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^6$ et $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^7$ on pose $e_2 = v$ et $e_4 = w$.

2.(i). On applique le même raisonnement que pour $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^1$. Puisque les rotations de $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ et de $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$ n'ont pas d'influence sur les relations de commutations (au signe près), on trouve $a_3 > 0$ et $c_2 > 0$ sont des SR-invariants.

2.(ii). La paire (a_1, c_2) , $a_1 > 0$, $c_2 > 0$, est SR-invariante car toutes les directions sont invariantes : e_2 (colinéaire avec v), e_1 (orthogonal à e_2 dans $E_1^{\lambda_1}$), e_4 (colinéaire avec w), e_3 (orthogonal à e_4 dans $E_1^{\lambda_2}$). Dans une base adaptée, on a $[e_1, e_2], [e_3, e_4] \notin \mathfrak{p}$ (colinéaire à e_6) et puisque les rotations disponibles sont $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ et $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$ on laisse ces crochets invariants (au signe près).

2.(iii). Les constantes $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ et $c_2 > 0$ sont SR-invariantes car toutes les directions sont invariantes : e_2 (colinéaire avec v), e_1 (orthogonal à e_2 dans $E_1^{\lambda_1}$), e_4 (colinéaire avec w), e_3 (orthogonal à e_4 dans $E_1^{\lambda_2}$). Dans une base adaptée, on a $[e_1, e_2] \notin \mathfrak{p}$ (non colinéaire à e_6) et $[e_3, e_4] \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$. Puisque les rotations disponibles sont $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ et $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$, on laisse ces crochets invariants (au signe près).

2. (iv). On montre que le couple de paires est unique (par le même argument que pour $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^3$ car $[e_3, e_4]$ n'intervient pas dans le calcul de $[e_2, e_3]$ ou $[e_1, e_4]$). La constante c_2 est un SR-invariant car les rotations disponibles sont $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ et $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$ et laissent le crochet $[e_3, e_4]$ invariant (au signe près).

2. (v). Démonstration similaire à (iv) avec $[e_1, e_2]$ et $[e_3, e_4]$ non colinéaires et

ces crochets sont laissés invariants par les rotations disponibles.

2.5.3 Preuve du Théorème 2.24

On donne les possibilités de r suivant les valeurs de c .

On sait que $1 \leq d \leq c \leq n - 2r = 7 - 2r$ avec $r \geq 1$. Donc $1 \leq d \leq c \leq 5$. Si $d = 1$ alors on utilise le Théorème 2.16 et ceci est équivalent à $(c, d, r) = (5, 1, 1)$ ou bien $(c, d, r) = (3, 1, 2)$ ou bien $(c, d, r) = (1, 1, 3)$. Rappelons que si $c = 5$, d'après la Proposition 2.3(ii), nous avons $d = 1$ (de même si $c = 1$ alors $d = 1$). Dans le cas où $d \geq 2$ on a les possibilités suivantes :

Si $c = 4$ alors $r = 1$, et d'après la Proposition 2.3(iv), nous avons aussi $2 \leq d \leq 3$, d'où les triplets $(c, d, r) = (4, 2, 1)$ et $(c, d, r) = (4, 3, 1)$.

Si $c = 3$ alors $1 \leq r \leq 2$, et de plus $d \leq 3$ d'où les triplets $(c, d, r) = (3, 3, 2)$, $(c, d, r) = (3, 3, 1)$, $(c, d, r) = (3, 2, 2)$ et $(c, d, r) = (3, 2, 1)$.

Si $c = 2$ alors $d = 2$ (et alors $1 \leq r \leq 2$), d'où les triplets $(c, d, r) = (2, 2, 1)$ et $(c, d, r) = (2, 2, 2)$.

Pour montrer que l'on peut supposer les constantes $a_i > 0$ et pour montrer qu'ils s'agit de SR-invariants, on utilise les Théorèmes 2.21 et 2.22, sauf pour le cas du SR-algèbre de Heisenberg $(\mathfrak{h}_7, \mathfrak{p}^h, \mathcal{B}^h)$.

Les cas (i), (ii), (iii) correspondent à $d = 1$ et il suffit d'utiliser le Théorème 2.16. Pour (iii), on peut toujours supposer que les valeurs propres non nulles de la matrice C ($\pm\lambda_j = \pm i\omega_j$) sont rangées dans l'ordre croissant $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$. On trouve $C = \text{Diag}(J, \frac{\omega_2}{\omega_1}J, \frac{\omega_3}{\omega_1}J)$, i.e., $|c_3| = \frac{|\lambda_3|}{|\lambda_1|} \geq |c_2| = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \geq 1$. Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont préservées par les rotations de \mathfrak{p} et les fractions $|c_2| = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$ et $|c_3| = \frac{|\lambda_3|}{|\lambda_1|}$ sont invariantes par rapport aux transformations $e_7 \mapsto ke_7$, $k \in \mathbb{R}^*$.

Pour les cas (iv), (v), (vi) et (vii), on a $c > d$; alors par le Corollaire 2.14, on obtient (dans tous les cas) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathcal{B}}) \oplus \mathbb{R}^{c-d}$, où $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathcal{B}})$ est un des modèles $\mathfrak{g}_{(6,3,3)}$, $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$ ou $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^1$.

2.5.4 Preuve du Théorème 2.25

(i). On a $(c, d, r) = (2, 2, 1)$ et en utilisant la Proposition 2.10, on peut choisir une base adaptée (e_1, \dots, e_7) telle que $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_6, e_7\}$ et $\mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_6, e_7\}$. Les relations de commutations sont :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7 & [e_2, e_4] &= c_{24}^6 e_6 \\ [e_1, e_3] &= c_{13}^6 e_6 & [e_2, e_5] &= c_{25}^6 e_6 \\ [e_1, e_4] &= c_{14}^6 e_6 & [e_3, e_4] &= c_{34}^6 e_6 \\ [e_1, e_5] &= c_{15}^6 e_6 & [e_3, e_5] &= c_{35}^6 e_6 \\ [e_2, e_3] &= c_{23}^6 e_6 & [e_4, e_5] &= c_{45}^6 e_6 \end{aligned} \tag{2.12}$$

et les autres crochets nuls, avec $c_{ij}^6 \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i < j \leq 5$, telles qu'au moins un coefficient c_{ij}^6 soit non nul (car $d = 2$).

On distingue deux cas : $(c_{15}^6, c_{25}^6) \neq (0, 0)$ ou bien $(c_{15}^6, c_{25}^6) = (0, 0)$.

1^{er} cas : Si $(c_{15}^6, c_{25}^6) \neq (0, 0)$. D'après le Lemme 2.5(i), par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$, on peut supposer que $c_{15}^6 \neq 0$ et $c_{25}^6 = 0$. Nous avons les deux possibilités suivantes :

- Si $(c_{13}^6, c_{14}^6) \neq (0, 0)$. D'après le Lemme 2.5(i) par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$, on peut supposer que $c_{13}^6 \neq 0$ et $c_{14}^6 = 0$. Les relations de commutations (2.12) deviennent :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7 & [e_2, e_4] &= c_{24}^6 e_6 \\ [e_1, e_3] &= c_{13}^6 e_6 & [e_3, e_4] &= c_{34}^6 e_6 \\ [e_1, e_5] &= c_{15}^6 e_6 & [e_3, e_5] &= c_{35}^6 e_6 \\ [e_2, e_3] &= c_{23}^6 e_6 & [e_4, e_5] &= c_{45}^6 e_6 \end{aligned} \tag{2.13}$$

et les autres crochets nuls, avec $c_{13}^6, c_{15}^6 \in \mathbb{R}^*$ et les autres $c_{ij}^6 \in \mathbb{R}$ telles que $(c_{24}^6, c_{34}^6, c_{45}^6) \neq (0, 0, 0)$ et $(c_{23}^6, c_{35}^6, c_{45}^6) \neq (0, 0, 0)$ (car $c = 2$).

- Si $(c_{13}^6, c_{14}^6) = (0, 0)$. On a alors :

· Soit $(c_{23}^6, c_{24}^6) \neq (0, 0)$. D'après le Lemme 2.5(i), par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$, on peut supposer que $c_{24}^6 = 0$ et $c_{23}^6 \neq 0$. Les relations de commutations (2.12) deviennent :

$$[e_1, e_2] = e_7 \quad [e_3, e_4] = c_{34}^6 e_6$$

$$\begin{aligned} [e_1, e_5] &= c_{15}^6 e_6 & [e_3, e_5] &= c_{35}^6 e_6 \\ [e_2, e_3] &= c_{23}^6 e_6 & [e_4, e_5] &= c_{45}^6 e_6 \end{aligned}$$

et les autres crochets nuls, avec $c_{15}^6, c_{23}^6 \in \mathbb{R}^*$ et les autres $c_{ij}^6 \in \mathbb{R}$, telles que c_{34}^6 et c_{45}^6 ne soient pas tous les deux nuls (car $c = 2$).

· Soit $(c_{23}^6, c_{24}^6) = (0, 0)$ et dans ce cas on a deux possibilités. Si $(c_{35}^6, c_{45}^6) \neq (0, 0)$, d'après le Lemme 2.5(i), par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$, on peut supposer $c_{35}^6 \neq 0$ et $c_{45}^6 = 0$. Les relations de commutations (2.12) deviennent :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7 & [e_3, e_4] &= c_{34}^6 e_6 \\ [e_1, e_5] &= c_{15}^6 e_6 & [e_3, e_5] &= c_{35}^6 e_6, \end{aligned}$$

et les autres crochets nuls, avec $c_{15}^6, c_{35}^6 \in \mathbb{R}^*$ et $c_{34}^6 \in \mathbb{R}^*$ (car $c = 2$).

Si $(c_{35}^6, c_{45}^6) = (0, 0)$, alors les relations de commutations (2.12) deviennent :

$$[e_1, e_2] = e_7 \quad [e_1, e_5] = c_{15}^6 e_6, \quad [e_3, e_4] = c_{34}^6 e_6,$$

et les autres crochets nuls, avec $c_{15}^6 \in \mathbb{R}^*$ et $c_{34}^6 \in \mathbb{R}^*$ (car $c = 2$).

2^{eme} cas : Si $(c_{15}^6, c_{25}^6) = (0, 0)$. On a obligatoirement $(c_{35}^6, c_{45}^6) \neq (0, 0)$ car sinon $c > 2$. D'après le Lemme 2.5(i) par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$, on peut supposer que $c_{35}^6 \neq 0$ et $c_{45}^6 = 0$. On obtient les relations de commutations suivantes :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7 & [e_2, e_4] &= c_{24}^6 e_6 \\ [e_1, e_3] &= c_{13}^6 e_6 & [e_3, e_4] &= c_{34}^6 e_6 \\ [e_1, e_4] &= c_{14}^6 e_6 & [e_3, e_5] &= c_{35}^6 e_6, \\ [e_2, e_3] &= c_{23}^6 e_6, \end{aligned} \tag{2.14}$$

et les autres crochets nuls, avec $c_{35}^6 \in \mathbb{R}^*$ et les autres $c_{ij}^6 \in \mathbb{R}$ telles que c_{14}^6, c_{24}^6 et c_{34}^6 ne soient pas tous nuls (car $c = 2$). En appliquant le Lemme 2.5(i), par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ on montre que $(c_{14}^6, c_{24}^6) = (0, 0)$ n'est pas possible, donc $(c_{14}^6, c_{24}^6) \neq (0, 0)$. On applique alors le Lemme 2.5(i) et par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ on peut supposer que $c_{14}^6 = 0$ et $c_{24}^6 \neq 0$. Les relations de commutations (2.18) deviennent :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7 & [e_2, e_4] &= c_{24}^6 e_6 \\ [e_1, e_3] &= c_{13}^6 e_6 & [e_3, e_4] &= c_{34}^6 e_6 \\ [e_2, e_3] &= c_{23}^6 e_6 & [e_3, e_5] &= c_{35}^6 e_6, \end{aligned} \tag{2.15}$$

et les autres crochets nuls, avec $c_{24}^6, c_{35}^6 \in \mathbb{R}^*$ et $c_{13}^6, c_{23}^6, c_{34}^6 \in \mathbb{R}$.

Ce cas se réduit aux cas précédent : en permutant dans (2.15) e_1 et e_2 ainsi que e_4 et e_5 (les espaces invariants sont $\mathfrak{p} \cap \ker C = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4, e_5\}$ et son complémentaire $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$). Les relations de commutations (2.15) deviennent (avec les nouvelles constantes) :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7 & [e_1, e_5] &= c_{15}^6 e_6 \text{ (ancien } c_{24}^6) \\ [e_1, e_3] &= c_{13}^6 e_6 & [e_3, e_5] &= c_{35}^6 e_6 \text{ (ancien } c_{34}^6) \\ [e_2, e_3] &= c_{23}^6 e_6 & [e_3, e_4] &= c_{34}^6 e_6 \text{ (ancien } c_{35}^6) \end{aligned}$$

avec $c_{15}^6 \neq 0$ et $c_{34}^6 \neq 0$.

Il s'agit de la liste (2.13) avec l'hypothèse $c_{15}^6 \neq 0$ (et avec, additionnellement $c_{14}^6 = c_{24}^6 = 0$). Alors, si $c_{13}^6 \neq 0$ on retrouve la première famille et si $c_{13}^6 = 0$ donc $(c_{13}^6, c_{14}^6) = (0, 0)$ alors on retrouve la deuxième famille ou la quatrième.

(ii). On a $(c, d, r) = (3, 3, 1)$ et en utilisant la Proposition 2.10, on peut choisir une base adaptée (e_1, \dots, e_7) telle que $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_5, e_6, e_7\}$. Les relations de commutations sont :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7 & [e_1, e_3] &= c_{13}^5 e_5 + c_{13}^6 e_6 \\ [e_1, e_4] &= c_{14}^5 e_5 + c_{14}^6 e_6 & [e_2, e_3] &= c_{23}^5 e_5 + c_{23}^6 e_6 \\ [e_2, e_4] &= c_{24}^5 e_5 + c_{24}^6 e_6 & [e_3, e_4] &= c_{34}^5 e_5 + c_{34}^6 e_6, \end{aligned} \quad (2.16)$$

et les autres crochets nuls, avec $c_{ij}^5, c_{ij}^6 \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i < j \leq 4$ tels que les vecteurs (c_{ij}^5) et (c_{ij}^6) , $1 \leq i < j \leq 4$, soient indépendants et au moins un des coefficients $(c_{13}^5, c_{13}^6, c_{23}^5, c_{23}^6, c_{34}^5, c_{34}^6)$ est non nul (sinon $e_3 \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$) et au moins un des coefficients $(c_{14}^5, c_{14}^6, c_{24}^5, c_{24}^6, c_{34}^5, c_{34}^6)$ est non nul (sinon $e_4 \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$).

Soit $(c_{34}^5, c_{34}^6) \neq (0, 0)$ et on applique le Lemme 2.5(ii), par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_5, e_6\}$, on peut supposer que $c_{34}^6 = 0$ et $c_{34}^5 \neq 0$ puis en utilisant le Lemme 2.5(i), par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$, on peut supposer que $c_{13}^6 \neq 0$, puis que $c_{14}^6 = 0$. Les relations de commutations (2.16) deviennent :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7 & [e_1, e_3] &= c_{13}^5 e_5 + c_{13}^6 e_6 \\ [e_1, e_4] &= c_{14}^5 e_5 & [e_2, e_3] &= c_{23}^5 e_5 + c_{23}^6 e_6 \\ [e_2, e_4] &= c_{24}^5 e_5 + c_{24}^6 e_6 & [e_3, e_4] &= c_{34}^5 e_5, \end{aligned}$$

et tous les autres crochets nuls, avec $c_{13}^6, c_{34}^5 \in \mathbb{R}^*$ et les autres $c_{ij}^5, c_{ij}^6 \in \mathbb{R}$.

Soit $(c_{34}^5, c_{34}^6) = (0, 0)$ alors on applique le Lemme 2.5(i) et par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$, on peut supposer que $c_{13}^6 \neq 0$ et $c_{14}^6 = 0$. Les relations de commutations (2.16) deviennent :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7 & [e_1, e_3] &= c_{13}^5 e_5 + c_{13}^6 e_6 \\ [e_1, e_4] &= c_{14}^5 e_5 & [e_2, e_3] &= c_{23}^5 e_5 + c_{23}^6 e_6 \\ [e_2, e_4] &= c_{24}^5 e_5 + c_{24}^6 e_6 & [e_3, e_4] &= 0, \end{aligned}$$

et tous les autres crochets nuls, avec $c_{13}^6 \in \mathbb{R}^*$ et les autres $c_{ij}^5, c_{ij}^6 \in \mathbb{R}$ tels que $(c_{13}^5, c_{14}^5, c_{23}^5, c_{24}^5) \neq (0, 0, 0, 0)$ car $d = 3$ et $(c_{14}^5, c_{24}^5, c_{24}^6) \neq (0, 0, 0)$ car $c = 3$.

(iii). On a $(c, d, r) = (2, 2, 2)$ et en utilisant la Proposition 2.10, on peut choisir une base adaptée (e_1, \dots, e_7) telle que $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_6, e_7\}$. Les relations de commutations sont :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7 & [e_2, e_4] &= c_{24}^6 e_6 \\ [e_1, e_3] &= c_{13}^6 e_6 & [e_2, e_5] &= c_{25}^6 e_6 \\ [e_1, e_4] &= c_{14}^6 e_6 & [e_3, e_4] &= c_{34}^6 e_6 + c_{34}^7 e_7 \\ [e_1, e_5] &= c_{15}^6 e_6 & [e_3, e_5] &= c_{35}^6 e_6 \\ [e_2, e_3] &= c_{23}^6 e_6 & [e_4, e_5] &= c_{45}^6 e_6 \end{aligned} \tag{2.17}$$

et les autres crochets nuls, avec $c_{34}^7 \in \mathbb{R}^*$ et $c_{ij}^6 \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i < j \leq 5$, telles que $(c_{15}^6, c_{25}^6, c_{35}^6, c_{45}^6) \neq (0, 0, 0, 0)$ (car $c = d = 2$).

On distingue deux cas : $(c_{15}^6, c_{25}^6) \neq (0, 0)$ ou bien $(c_{15}^6, c_{25}^6) = (0, 0)$. Nous avons les deux possibilités suivantes :

1^{er} cas : Si $(c_{15}^6, c_{25}^6) \neq (0, 0)$. D'après le Lemme 2.5(i), par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$, on peut supposer que $c_{15}^6 \neq 0$ et $c_{25}^6 = 0$.

- Si $(c_{13}^6, c_{14}^6) \neq (0, 0)$. D'après le Lemme 2.5(i), par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$, on peut supposer que $c_{13}^6 \neq 0$ et $c_{14}^6 = 0$. Les relations de commutations deviennent :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7 & [e_2, e_4] &= c_{24}^6 e_6 \\ [e_1, e_3] &= c_{13}^6 e_6 & [e_3, e_4] &= c_{34}^6 e_6 + c_{34}^7 e_7 \\ [e_1, e_5] &= c_{15}^6 e_6 & [e_3, e_5] &= c_{35}^6 e_6 \\ [e_2, e_3] &= c_{23}^6 e_6 & [e_4, e_5] &= c_{45}^6 e_6 \end{aligned}$$

et les autres crochets nuls, avec $c_{13}^6, c_{15}^6, c_{34}^7 \in \mathbb{R}^*$ et les autres $c_{ij}^6 \in \mathbb{R}$.

• Si $(c_{13}^6, c_{14}^6) = (0, 0)$. Dans ce cas, on a :

· Soit $(c_{23}^6, c_{24}^6) \neq (0, 0)$ et d'après le Lemme 2.5(i), par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$, on peut supposer que $c_{24}^6 = 0$ et $c_{23}^6 \neq 0$. Les relations de commutations deviennent :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7 & [e_3, e_4] &= c_{34}^6 e_6 + c_{34}^7 e_7 \\ [e_1, e_5] &= c_{15}^6 e_6 & [e_3, e_5] &= c_{35}^6 e_6 \\ [e_2, e_3] &= c_{23}^6 e_6 & [e_4, e_5] &= c_{45}^6 e_6, \end{aligned}$$

et les autres crochets nuls, avec $c_{15}^6, c_{23}^6, c_{34}^7 \in \mathbb{R}^*$ et les autres $c_{ij}^6 \in \mathbb{R}$.

· Soit $(c_{23}^6, c_{24}^6) = (0, 0)$ et si $(c_{35}^6, c_{45}^6) \neq (0, 0)$, d'après le Lemme 2.5(i), par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$, on peut supposer $c_{35}^6 \neq 0$ et $c_{45}^6 = 0$. Les relations de commutations deviennent :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7 & [e_3, e_4] &= c_{34}^6 e_6 + c_{34}^7 e_7 \\ [e_1, e_5] &= c_{15}^6 e_6 & [e_3, e_5] &= c_{35}^6 e_6, \end{aligned}$$

et les autres crochets nuls, avec $c_{15}^6, c_{34}^7, c_{35}^6 \in \mathbb{R}^*$ et $c_{34}^6 \in \mathbb{R}$. Si $(c_{35}^6, c_{45}^6) = (0, 0)$, alors les relations de commutations deviennent :

$$[e_1, e_2] = e_7, \quad [e_1, e_5] = c_{15}^6 e_6, \quad [e_3, e_4] = c_{34}^6 e_6 + c_{34}^7 e_7,$$

et les autres crochets nuls, avec $c_{15}^6, c_{34}^7 \in \mathbb{R}^*$ et $c_{34}^6 \in \mathbb{R}$.

2^{eme} cas : Si $(c_{15}^6, c_{25}^6) = (0, 0)$, alors obligatoirement $(c_{35}^6, c_{45}^6) \neq (0, 0)$ car sinon $c > 2$. D'après le Lemme 2.5(i), par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$, on peut supposer que $c_{35}^6 \neq 0$ et $c_{45}^6 = 0$. On obtient les relations de commutations suivantes :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7 & [e_2, e_4] &= c_{24}^6 e_6 \\ [e_1, e_3] &= c_{13}^6 e_6 & [e_3, e_4] &= c_{34}^6 e_6 + c_{34}^7 e_7 \\ [e_1, e_4] &= c_{14}^6 e_6 & [e_3, e_5] &= c_{35}^6 e_6 \\ [e_2, e_3] &= c_{23}^6 e_6 \end{aligned} \tag{2.18}$$

et les autres crochets nuls, avec $c_{34}^7, c_{35}^6 \in \mathbb{R}^*$ et les autres $c_{ij}^6 \in \mathbb{R}$. Nous avons les deux possibilités suivantes :

• Si $(c_{14}^6, c_{24}^6) \neq (0, 0)$. On applique le Lemme 2.5(i) et par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$, on peut supposer que $c_{14}^6 = 0$ et $c_{24}^6 \neq 0$. Les relations de commutations (2.18) deviennent :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7 & [e_2, e_4] &= c_{24}^6 e_6 \\ [e_1, e_3] &= c_{13}^6 e_6 & [e_3, e_4] &= c_{34}^6 e_6 + c_{34}^7 e_7 \end{aligned}$$

$[e_2, e_3] = c_{23}^6 e_6$ $[e_3, e_5] = c_{35}^6 e_6$,
et les autres crochets nuls, avec $c_{24}^6, c_{34}^7, c_{35}^6 \in \mathbb{R}^*$ et les autres $c_{ij}^6 \in \mathbb{R}$.

• Si $(c_{14}^6, c_{24}^6) = (0, 0)$. Soit $(c_{13}^6, c_{23}^6) \neq (0, 0)$ et on applique le Lemme 2.5(i) et par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$, on peut supposer $c_{23}^6 = 0$ et $c_{13}^6 \neq 0$. On obtient les relations de commutations suivantes :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7 & [e_1, e_3] &= c_{13}^6 e_6 \\ [e_3, e_4] &= c_{34}^6 e_6 + c_{34}^7 e_7 & [e_3, e_5] &= c_{35}^6 e_6, \end{aligned}$$

et les autres crochets nuls, avec $c_{13}^6, c_{34}^7, c_{35}^6 \in \mathbb{R}^*$ et $c_{34}^6 \in \mathbb{R}$. Soit $(c_{13}^6, c_{23}^6) = (0, 0)$ et alors on obtient les relations de commutations suivantes :

$$[e_1, e_2] = e_7, \quad [e_3, e_4] = c_{34}^6 e_6 + c_{34}^7 e_7, \quad [e_3, e_5] = c_{35}^6 e_6,$$

et les autres crochets nuls, avec $c_{34}^7, c_{35}^6 \in \mathbb{R}^*$ et $c_{34}^6 \in \mathbb{R}$.

(iv). On a $(c, d, r) = (3, 3, 2)$ et en utilisant la Proposition 2.10, on peut choisir une base adaptée (e_1, \dots, e_7) telle que $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_5, e_6, e_7\}$ et $\mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_5, e_6, e_7\}$. Les relations de commutations sont :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7 & [e_1, e_3] &= c_{13}^5 e_5 + c_{13}^6 e_6 \\ [e_1, e_4] &= c_{14}^5 e_5 + c_{14}^6 e_6 & [e_2, e_3] &= c_{23}^5 e_5 + c_{23}^6 e_6 \\ [e_2, e_4] &= c_{24}^5 e_5 + c_{24}^6 e_6 & [e_3, e_4] &= c_{34}^5 e_5 + c_{34}^6 e_6 + c_{34}^7 e_7 \end{aligned} \quad (2.19)$$

et les autres crochets nuls, avec $c_{34}^7 \in \mathbb{R}^*$ et $c_{ij}^5, c_{ij}^6 \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i < j \leq 4$ vérifiant $d = 3$ et $c = 3$. Nous avons les deux possibilités suivantes :

• Si $(c_{34}^5, c_{34}^6) \neq (0, 0)$. On applique le Lemme 2.5(ii) et par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_5, e_6\}$, on peut supposer que $c_{34}^6 = 0$ et $c_{34}^5 \neq 0$. Puis en utilisant le Lemme 2.5(i), on peut supposer par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ et du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$ que $c_{13}^6 \neq 0$ et par une rotation du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$ que $c_{14}^6 = 0$. On a les relations de commutations :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7 & [e_1, e_3] &= c_{13}^5 e_5 + c_{13}^6 e_6 \\ [e_1, e_4] &= c_{14}^5 e_5 & [e_2, e_3] &= c_{23}^5 e_5 + c_{23}^6 e_6 \\ [e_2, e_4] &= c_{24}^5 e_5 + c_{24}^6 e_6 & [e_3, e_4] &= c_{34}^5 e_5 + c_{34}^7 e_7, \end{aligned}$$

et tous les autres crochets nuls, avec $c_{13}^6, c_{34}^5, c_{34}^7 \in \mathbb{R}^*$ et tous les autres coefficients $c_{ij}^5, c_{ij}^6 \in \mathbb{R}$.

• Si $(c_{34}^5, c_{34}^6) = (0, 0)$. On applique le Lemme 2.5(i), par des rotations du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4\}$, on peut supposer d'abord que $c_{13}^6 \neq 0$ puis que $c_{14}^6 = 0$. On a les relations de commutations :

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= e_7 & [e_1, e_3] &= c_{13}^5 e_5 + c_{13}^6 e_6 \\
[e_1, e_4] &= c_{14}^5 e_5 & [e_2, e_3] &= c_{23}^5 e_5 + c_{23}^6 e_6 \\
[e_2, e_4] &= c_{24}^5 e_5 + c_{24}^6 e_6 & [e_3, e_4] &= c_{34}^7 e_7,
\end{aligned}$$

et tous les autres crochets nuls, avec $c_{13}^6, c_{34}^7 \in \mathbb{R}^*$ et tous les autres coefficients $c_{ij}^5, c_{ij}^6 \in \mathbb{R}$ tels que $(c_{13}^5, c_{14}^5, c_{23}^5, c_{24}^5) \neq (0, 0, 0, 0)$.

2.6 Preuves des lemmes

2.6.1 Preuve du Lemme 2.5

(i). Soit (e_1, \dots, e_n) une base d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} . Soient $1 \leq i < j < k \leq n$ tels que $[e_i, e_j] = ax + by$ et $[e_i, e_k] = cx + dy$, où x, y sont deux éléments indépendants de \mathfrak{g} et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On considère une rotation R du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_j, e_k\}$ qui laisse invariant chaque e_l , pour $l \neq j, k$, i.e.,

$$Re_l = \tilde{e}_l = e_l \text{ et } \begin{pmatrix} \tilde{e}_j \\ \tilde{e}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_j \\ e_k \end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} [\tilde{e}_i, \tilde{e}_j] &= (a \cos \varphi + c \sin \varphi) \tilde{x} + (b \cos \varphi + d \sin \varphi) \tilde{y}, \\ [\tilde{e}_i, \tilde{e}_k] &= (-a \sin \varphi + c \cos \varphi) \tilde{x} + (-b \sin \varphi + d \cos \varphi) \tilde{y}, \end{aligned}$$

avec $\tilde{x} = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \tilde{e}_i$ tel que $\tilde{x}_l = x_l$ pour $l \neq j, k$ et

$$\tilde{x}_j = x_j \cos \varphi + x_k \sin \varphi \text{ et } \tilde{x}_k = x_k \cos \varphi - x_j \sin \varphi,$$

et $\tilde{y} = \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i \tilde{e}_i$ tel que $\tilde{y}_l = y_l$ pour $l \neq j, k$ et

$$\tilde{y}_j = y_j \cos \varphi + y_k \sin \varphi \text{ et } \tilde{y}_k = y_j \sin \varphi - y_k \cos \varphi.$$

Si $(a, c) \neq (0, 0)$, il suffit de choisir φ tel que $-a \sin \varphi + c \cos \varphi = 0$. On prend :

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \text{ et } \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}},$$

et on obtient, dans la base $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$, les relations de commutations

$$[\tilde{e}_i, \tilde{e}_j] = \tilde{a} \tilde{x} + \tilde{b} \tilde{y} \text{ et } [\tilde{e}_i, \tilde{e}_k] = \tilde{d} \tilde{y},$$

avec $\tilde{a} = \sqrt{a^2 + c^2} > 0$, $\tilde{b} = \frac{ab + cd}{\sqrt{a^2 + c^2}}$, et $\tilde{d} = \frac{-bc + ad}{\sqrt{a^2 + c^2}}$.

(ii). Soient $1 \leq l < m \leq n$. Écrivons $[e_l, e_m] = \sum_{i=1}^n c_i e_i$ avec $c_i \in \mathbb{R}$. On considère une rotation R du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_j, e_k\}$, et on obtient :

$$[\tilde{e}_l, \tilde{e}_m] = \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i \tilde{e}_i, \text{ avec } \tilde{c}_i = c_i \text{ pour } i \neq j, k \text{ et}$$

$$\tilde{c}_j = c_j \cos \varphi + c_k \sin \varphi \text{ et } \tilde{c}_k = -c_j \sin \varphi + c_k \cos \varphi.$$

Si $(c_j, c_k) \neq (0, 0)$, il suffit de choisir φ tel que $c_j \cos \varphi + c_k \sin \varphi = 0$. On prend :

$$\cos \varphi = \frac{c_k}{\sqrt{c_j^2 + c_k^2}} \text{ et } \sin \varphi = -\frac{c_j}{\sqrt{c_j^2 + c_k^2}}.$$

On obtient $\tilde{c}_i = c_i$ pour $i \neq j, k$ et $\tilde{c}_k = \sqrt{c_j^2 + c_k^2}$ et $\tilde{c}_j = 0$. Ce qui finit la démonstration du Lemme 2.5.

2.6.2 Preuve du Lemme 2.8

La matrice C est antisymétrique à coefficients réels de rang $2r$. Par le théorème réel de Jordan, il existe une matrice inversible M telle que $\tilde{C} = M^{-1}CM$ où \tilde{C} est sous la forme de bloc, $\tilde{C} = \text{Diag}(\omega_1 J, \dots, \omega_r J, O)$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\omega_i \in \mathbb{R}$ et O est la matrice nulle de taille $(n - 2r) \times (n - 2r)$. On peut supposer que, pour $i = 1, \dots, r$, on a $|\omega_1| \leq \dots \leq |\omega_r|$ car il suffit de permuter les blocs $\omega_i J$. Notons que chaque permutation de deux blocs $\omega_i J$ et $\omega_j J$ est de signature paire donc elle respecte l'orientation. La matrice \tilde{C} est aussi antisymétrique et on obtient, par la transposée, $-M^T C (M^{-1})^T = -M^{-1} C M$ et on en déduit que $MM^T C = CMM^T$, alors C commute avec MM^T qui est une matrice symétrique définie positive. Par le théorème de décomposition polaire, voir le livre de Mneime et Testard [66], on sait qu'il existe deux matrices $S = \sqrt{MM^T}$ symétrique définie positive et O orthogonale telles que $M = SO$ et C commute avec S . On en déduit alors que $\tilde{C} = O^{-1}CO$, ce qui signifie que C et \tilde{C} sont semblables par une matrice orthogonale O .

2.7 SR-algèbres de Lie de contact et de quasi-contact

Dans cette section, on va caractériser les SR-algèbres de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ nilpotentes d'ordre 2 de dimension n , où \mathfrak{p} est un sous espace vectoriel de \mathfrak{g} de codimension un, qui sont de contact ou de quasi-contact. Rappelons la notion de forme de Levi définie dans la section 2.2.

Définition 2.27. Une paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ est dite une *algèbre de Lie de contact* si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie de dimension n et \mathfrak{p} un sous-espace de \mathfrak{g} de dimension $n - 1$ tels que l'application (la forme de Levi) $\mathcal{L} : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, définie par $\mathcal{L}(x, y) = [x, y]$ modulo \mathfrak{p} , est non-dégénérée.

La définition entraîne que $n = 2m + 1$ est impair et que $\text{rang } \mathcal{L} = 2m$.

Soit G un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est \mathfrak{g} . Cette définition dit que la distribution \mathcal{D} invariante à droite telle que $\mathcal{D}_e = \mathfrak{p}$ est une distribution de contact sur G , i.e., $\omega \wedge (d\omega)^m \neq 0$, où $\omega \neq 0$ est une 1-forme différentielle annihilant \mathcal{D} , ce qui signifie, $\mathcal{D} = \ker \omega$.

Définition 2.28. Une paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ est dite une algèbre de Lie de quasi-contact si $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{R}$ où $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{p}})$ est une algèbre de contact avec $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cap \tilde{\mathfrak{g}}$.

Il est immédiat d'observer que la Définition 2.28 est équivalente à la propriété suivante :

Proposition 2.29. Une paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ est dite une algèbre de Lie de quasi-contact si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie de dimension n , \mathfrak{p} est un sous-espace de \mathfrak{g} de dimension $n - 1$, $\text{rang } \mathcal{L} = n - 2$ et il existe $\tilde{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{p}$ satisfaisant $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}} \oplus \ker \mathcal{L}$ tel que $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{p}})$ est une algèbre de Lie de contact où $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{p}} + [\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}}]$.

Le rang de \mathcal{L} , qui est une application antisymétrique, est pair, posons $\text{rang } \mathcal{L} = 2m - 2$ alors $n = 2m$ et $\dim \mathfrak{p} = 2m - 1$. Le noyau $\ker \mathcal{L}$ est donc de dimension un et engendré par le centre $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} . Observons que le choix de $\tilde{\mathfrak{p}}$ dans la décomposition $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}} \oplus \ker \mathcal{L}$ n'est pas unique (c'est seulement une somme directe car aucune notion d'orthogonalité n'est utilisée) mais si \mathfrak{g} est nilpotente d'ordre deux, la définition ne dépend pas du choix de $\tilde{\mathfrak{p}}$. En fait, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = [\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}}]$ est de dimension un (sinon $\text{rang } \mathcal{L}$ est plus petit que $2m - 2$) et notons par z un élément non nul $z \in [\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}}]$. Fixons une base x_1, \dots, x_{2m-2} de $\tilde{\mathfrak{p}}$. Si $\hat{\mathfrak{p}}$ est un autre espace tel que $\mathfrak{p} = \hat{\mathfrak{p}} + \ker \mathcal{L}$ alors $\hat{\mathfrak{p}} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{x_1 + a_1v, \dots, x_{2m-2} + a_{2m-2}v\}$, où $a_i \in \mathbb{R}$ et $v \in \ker \mathcal{L}$, $v \neq 0$. Si $\tilde{\mathfrak{p}} + [\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}}]$ est une algèbre de Lie de contact, alors $\hat{\mathfrak{p}} + [\hat{\mathfrak{p}}, \hat{\mathfrak{p}}]$

est aussi une algèbre de Lie de contact car $[x_i + a_i v, x_j + a_j v] = [x_i, x_j] \in \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{z\}$.

La définition d'une algèbre de Lie de quasi-contact est plus subtile que celle de contact. En fait, une paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$, où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie et \mathfrak{p} un sous-espace de \mathfrak{g} de codimension un, est une algèbre de Lie de contact si et seulement si la distribution invariante à droite \mathcal{D} telle que $\mathcal{D}_e = \mathfrak{p}$ est de contact. En revanche, soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ une paire où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie et \mathfrak{p} est un sous-espace de codimension un telle que la distribution \mathcal{D} invariante à droite, satisfaisant $\mathcal{D}_e = \mathfrak{p}$, soit de quasi-contact, alors en général $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ n'est pas une algèbre de Lie de quasi-contact. Comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.30. Considérons les champs de vecteurs sur \mathbb{R}^6

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1}, & e_2 &= \frac{\partial}{\partial y_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial z}, & e_3 &= \frac{\partial}{\partial x_2} \\ e_4 &= \frac{\partial}{\partial y_2} + a_2 x_2 \frac{\partial}{\partial z} + a_1 x_2 \frac{\partial}{\partial w} & \text{et } e_5 &= \frac{\partial}{\partial w}, & e_6 &= \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

où $a_1, a_2 \neq 0$.

Posons $\mathfrak{p} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Prenons $\mathcal{B}(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 5$. Notons que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe au modèle $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^5$ de la classification. On a $\ker \mathcal{L} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_5\}$. Choisissons $\tilde{\mathfrak{p}} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et alors $\tilde{\mathfrak{p}} + [\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}}] = \tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$ et alors la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ n'est pas une algèbre de Lie de quasi-contact car $\dim \tilde{\mathfrak{p}} = 4$ mais $\dim \tilde{\mathfrak{g}} = 6$ (voir la Proposition 2.29). En revanche la distribution

$$\mathcal{D} = \text{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y_2} + a_2 x_2 \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial w}\right\}$$

est de quasi-contact, i.e., son annulateur ω satisfait $\omega \wedge (d\omega)^2 \neq 0$.

Définition 2.31. On dira qu'une SR-algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est de contact (resp. quasi-contact) si la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ est de contact (resp. quasi-contact).

Théorème 2.32. *Considérons une SR-algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ nilpotente d'ordre 2 où $\dim \mathfrak{g} = n$ et $\dim \mathfrak{p} = n - 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est de contact.
- (ii) $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 1$.
- (iii) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à la SR-algèbre de Lie de Heisenberg $(\mathfrak{h}_n, \mathfrak{p}^h, \mathcal{B}^h)$.

Démonstration. On va prouver que (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i).

(i) \Rightarrow (ii). On a $\dim \mathfrak{p} = n - 1$. Puisque $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$, alors $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) \geq 1$ et par suite $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) \geq \dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) \geq 1$. Par ailleurs, $\text{rang } \mathcal{L} = 2m$ et donc $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 0$ alors $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) \leq 1$. D'où $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 1$.

(ii) \Rightarrow (iii). D'après la Proposition 2.10(i) et (iii), on peut choisir une base adaptée telle que $\mathfrak{p} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$, la matrice C de l'application \mathcal{L} s'écrit dans cette base $C = \text{Diag}(c_1 J, \dots, c_m J)$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $c_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq m$. Ce qui définit la SR-algèbre de Lie de Heisenberg donnée, dans la Section 2.3, par les relations de commutations (2.4) suivantes : $[e_{2i-1}, e_{2i}] = c_i e_n$, $c_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq m$, et \mathcal{B}^h est la forme bilinéaire symétrique définie positive sur \mathfrak{p}^h , définissant la métrique sous-riemannienne $\sum_{i=1}^m (e^{2i-1} \otimes e^{2i-1} + e^{2i} \otimes e^{2i}) = \sum_{j=1}^{2m} e^j \otimes e^j$.

(iii) \Rightarrow (i). Il est clair que $(\mathfrak{h}_n, \mathfrak{p}^h, \mathcal{B}^h)$ est de contact. \square

Théorème 2.33. *Considérons une SR-algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ nilpotente d'ordre 2 où $\dim \mathfrak{g} = n$ et $\dim \mathfrak{p} = n - 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est de quasi-contact.
- (ii) $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = 1$ et $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 2$.
- (iii) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_{n-1}, \mathfrak{p}^h, \mathcal{B}^h) \oplus \mathbb{R}$ où $(\mathfrak{h}_{n-1}, \mathfrak{p}^h, \mathcal{B}^h)$ est une SR-algèbre de Lie de Heisenberg de dimension $n - 1$.

Démonstration. On va prouver que (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i).

(i) \Rightarrow (ii). On a $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ de quasi-contact alors, par la Proposition 2.29, il existe $\tilde{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{p}$ de codimension un tel que $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}} + \ker \mathcal{L}$ et $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{p}})$ est de contact, où $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{p}} + [\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}}]$, et donc $\dim \mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{g}}) = 1$ (grâce au Théorème 2.32). On voit que $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}} + \ker \mathcal{L}$ alors $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = 1$ et $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 2$ car $\ker \mathcal{L} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$.

(ii) \Rightarrow (iii). Les conditions $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = 1$ et $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 2$ impliquent, par le corollaire de la Proposition 2.10, que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B}) = (\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathcal{B}}) \oplus \mathbb{R}$. La SR-algèbre de Lie $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathcal{B}})$ satisfait la condition (ii) du Théorème 2.32 (car $\dim \mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{g}}) = \dim \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{g}}) = 1$ et $\tilde{\mathfrak{g}}$ est nilpotente d'ordre deux) alors $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathcal{B}})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_{n-1}, \mathfrak{p}^h, \mathcal{B}^h)$.

(iii) \Rightarrow (i). Si \mathfrak{g} est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_{n-1}, \mathfrak{p}^h, \mathcal{B}^h) \oplus \mathbb{R}$, le noyau de \mathcal{L} est la droite \mathbb{R} . On prend alors $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^h$ et $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{p}} + [\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}}] = \mathfrak{h}_{n-1}$ donc $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est de quasi-contact. \square

Exemple 2.34. (Continuation de l'exemple 2.30). Nous avons $[e_1, e_2] = e_6$ et $[e_3, e_4] = a_1 e_5 + a_2 e_6$ alors $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = 2$, donc la condition (ii) du Théorème 2.33 n'est pas satisfaite, ce qui confirme que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ n'est pas de quasi-contact.

2.8 Groupe des symétries infinitésimales sous-riemanniennes

Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie réelle de dimension $n \geq 3$. Soit G le groupe de Lie connexe et simplement connexe admettant \mathfrak{g} pour algèbre de Lie. Soit \mathcal{D} la distribution de rang $n - 1$ invariante à droite sur G telle que $\mathcal{D}_e = \mathfrak{p}$ et soit B la forme bilinéaire symétrique définie positive invariante sur \mathcal{D} telle que $B_e = \mathcal{B}$. Le triplet (G, \mathcal{D}, B) est un groupe de Lie sous-riemannien associé à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$.

Rappelons la Définition 1.7.

Définition 2.35. Une *symétrie* d'une variété sous-riemannienne (G, \mathcal{D}, B) , est un difféomorphisme ϕ de G tel que $\phi_*\mathcal{D} = \mathcal{D}$, $\phi^*B = B$ et ϕ préserve l'orientation.

Soit v un champ de vecteurs sur G , on note (γ_v^t) le flot de v au temps t . On dit que v est une *symétrie infinitésimale sous-riemannienne* de (G, \mathcal{D}, B) , brièvement appelée une SR-symétrie infinitésimale, si $(\gamma_v^t)_*\mathcal{D} = \mathcal{D}$ et $(\gamma_v^t)^*B = B$, pour tout réel t , pour lequel (γ_v^t) existe.

On note $\text{ISym}(G, \mathcal{D}, B)$ l'algèbre de Lie des SR-symétries infinitésimales de la variété sous-riemannienne (G, \mathcal{D}, B) . On dira que $\text{ISym}(G, \mathcal{D}, B)$ est aussi l'algèbre de Lie des SR-symétries infinitésimales de la SR-algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$.

La proposition suivante caractérise les symétries infinitésimales (voir, e.g., [16] et [79]) :

Proposition 2.36. Soit v un champ de vecteurs sur G . On a $v \in \text{ISym}(G, \mathcal{D}, B)$ si et seulement si l'application linéaire $ad_v : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_g$, donnée par $ad_v u = [v, u](g)$, satisfait $ad_v(\mathcal{D}) \subset \mathfrak{so}(\mathcal{D}_g)$.

On va déterminer l'algèbre de Lie des SR-symétries infinitésimales pour toutes les SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 en dimension $n = 5$ (pour $n \geq 6$, la méthode est similaire avec plus de calculs).

Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 réelle et de dimension $n = 5$. Soit (e_1, \dots, e_5) une base adaptée à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ (voir Définition 2.11). En particulier, $\mathcal{D}_e = \text{span}\{e_1, \dots, e_4\}$ et les champs e_1, \dots, e_4 sont orthonormés par rapport à \mathcal{B} . On considère $v \in \text{ISym}(G, \mathcal{D}, B)$, on a $ad_v \in \mathfrak{so}(\mathcal{D}_e)$ pour $1 \leq i \leq 4$, alors v vérifie les crochets de Lie suivants :

$$[e_1, v] = \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3 + \alpha_3 e_4$$

$$\begin{aligned}
[e_2, v] &= -\alpha_1 e_1 + \alpha_4 e_3 + \alpha_5 e_4 \\
[e_3, v] &= -\alpha_2 e_1 - \alpha_4 e_2 + \alpha_6 e_4 \\
[e_4, v] &= -\alpha_3 e_1 - \alpha_5 e_2 - \alpha_6 e_3,
\end{aligned}$$

où α_i sont des fonctions C^∞ , pour $1 \leq i \leq 6$. On note A la matrice antisymétrique de ad_v dans la base (e_1, \dots, e_4) de \mathcal{D}_e :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ -\alpha_2 & -\alpha_4 & 0 & \alpha_6 \\ -\alpha_3 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous allons déterminer les algèbres des SR-symétries infinitésimales associés à toutes les SR-algèbres de Lie de dimension 5 nilpotentes d'ordre 2 dont la classification a été donnée par le Théorème 2.19 dans la Section 2.4.1. Nous avons obtenu trois modèles $\mathfrak{g}_{(5,1,1)} = (\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}})$, $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$ et $\mathfrak{g}_{(5,3,1)} = (\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^2$. On calcule ces algèbres des SR-symétries infinitésimales sur des modèles dans \mathbb{R}^5 .

- Pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{(5,1,1)}$, dont les relations de commutations sont

$$[e_1, e_2] = e_5 \text{ et } [e_3, e_4] = c_2 e_5 \text{ avec } |c_2| \geq 1,$$

on considère dans \mathbb{R}^5 , muni des coordonnées (q_1, \dots, q_5) , le modèle suivant

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial q_1}, e_2 = \frac{\partial}{\partial q_2} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_5}, e_3 = \frac{\partial}{\partial q_3}, e_4 = \frac{\partial}{\partial q_4} + c_2 q_3 \frac{\partial}{\partial q_5} \text{ et } e_5 = \frac{\partial}{\partial q_5},$$

où (e_1, \dots, e_5) est une base adaptée de $\mathfrak{g}_{(5,1,1)}$.

- Pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$, dont les relations de commutations sont

$$[e_1, e_2] = e_5 \text{ et } [e_1, e_3] = a_1 e_4 \text{ avec } a_1 > 0,$$

on considère dans \mathbb{R}^5 , muni des coordonnées (q_1, \dots, q_5) , le modèle suivant

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial q_1}, e_2 = \frac{\partial}{\partial q_2} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_5}, e_3 = \frac{\partial}{\partial q_3} + a_1 q_1 \frac{\partial}{\partial q_4}, e_4 = \frac{\partial}{\partial q_4} \text{ et } e_5 = \frac{\partial}{\partial q_5},$$

où (e_1, \dots, e_5) est une base adaptée de $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$.

- Pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{(5,3,1)}$, dont les relations de commutations sont

$$[e_1, e_2] = e_5 \text{ et tous les autres crochets nuls,}$$

on considère dans \mathbb{R}^5 , muni des coordonnées (q_1, \dots, q_5) , le modèle suivant

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial q_1}, e_2 = \frac{\partial}{\partial q_2} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_5}, e_3 = \frac{\partial}{\partial q_3}, e_4 = \frac{\partial}{\partial q_4} \text{ et } e_5 = \frac{\partial}{\partial q_5},$$

où (e_1, \dots, e_5) est une base adaptée de $\mathfrak{g}_{(5,3,1)}$.

Théorème 2.37. *Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 de dimension 5.*

- (i) *L'algèbre des SR-symétries infinitésimales du modèle $\mathfrak{g}_{(5,1,1)}$ est de dimension 7 (resp. 8 et 9) si $|c_2| > 1$ (resp. si $c_2 = -1$; si $c_2 = 1$) et est donnée par 5 translations et 2 rotations (resp. 3 rotations; 4 rotations).*

Les translations sont

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial q_2}, v_2 = -\frac{\partial}{\partial q_1} - q_2 \frac{\partial}{\partial q_5}, v_3 = \frac{\partial}{\partial q_4}, v_4 = -\frac{\partial}{\partial q_3} - c_2 q_4 \frac{\partial}{\partial q_5}, v_5 = \frac{\partial}{\partial q_5},$$

les 2 rotations sont

$$v_6 = q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2) \frac{\partial}{\partial q_5} \quad \text{et} \quad v_7 = q_3 \frac{\partial}{\partial q_4} - q_4 \frac{\partial}{\partial q_3} + \frac{c_2}{2}(q_3^2 - q_4^2) \frac{\partial}{\partial q_5};$$

si $c_2 = -1$ on a une rotation supplémentaire donnée par

$$v_8 = q_4 \frac{\partial}{\partial q_2} - q_2 \frac{\partial}{\partial q_4} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_3} - q_3 \frac{\partial}{\partial q_1},$$

si $c_2 = 1$ on a deux rotations supplémentaires données par

$$v_8 = q_3 \frac{\partial}{\partial q_2} - q_2 \frac{\partial}{\partial q_3} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_4} - q_4 \frac{\partial}{\partial q_1} \quad \text{et} \quad v_9 = q_1 \frac{\partial}{\partial q_3} - q_3 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial q_4} - q_4 \frac{\partial}{\partial q_2}.$$

- (ii) *L'algèbre des SR-symétries infinitésimales du modèle $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$ est de dimension 6 et est donnée par 5 translations et une rotation :*

$$v_1 = -\frac{\partial}{\partial q_1} - a_1 q_3 \frac{\partial}{\partial q_4} - q_2 \frac{\partial}{\partial q_5}, \quad v_2 = \frac{\partial}{\partial q_2}, \quad v_3 = \frac{\partial}{\partial q_3}, \quad v_4 = \frac{\partial}{\partial q_4},$$

$$v_5 = -\frac{\partial}{\partial q_5} \quad \text{et} \quad v_6 = q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2) \frac{\partial}{\partial q_5}$$

- (iii) *L'algèbre des SR-symétries infinitésimales du modèle $\mathfrak{g}_{(5,3,1)}$ est de dimension 7 et est donnée par 5 translations et 2 rotations :*

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial q_2}, \quad v_2 = \frac{\partial}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial q_5}, \quad v_3 = \frac{\partial}{\partial q_3}, \quad v_4 = \frac{\partial}{\partial q_4}, \quad v_5 = \frac{\partial}{\partial q_5},$$

$$v_6 = q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2) \frac{\partial}{\partial q_5} \quad \text{et} \quad v_7 = q_3 \frac{\partial}{\partial q_4} - q_4 \frac{\partial}{\partial q_3}.$$

Démonstration. On donne la preuve pour le (i). Pour le (ii) et (iii), la démonstration est similaire. Soit v une symétrie infinitésimale, on écrit pour $q = (q_1, \dots, q_5) \in \mathbb{R}^5$,

$$v = P(q) \frac{\partial}{\partial q_1} + Q(q) \frac{\partial}{\partial q_2} + R(q) \frac{\partial}{\partial q_3} + S(q) \frac{\partial}{\partial q_4} + T(q) \frac{\partial}{\partial q_5}.$$

On applique la Proposition 2.36 et on obtient en notant $F_{q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i}$, le système aux dérivées partielles du premier ordre suivant :

$$\begin{array}{ll}
P_{q_1} = 0, & P_{q_2} + q_1 P_{q_5} = -\alpha_1, \\
Q_{q_1} = \alpha_1, & Q_{q_2} + q_1 Q_{q_5} = 0, \\
R_{q_1} = \alpha_2, & R_{q_2} + q_1 R_{q_5} = \alpha_4, \\
S_{q_1} = \alpha_3, & S_{q_2} + q_1 S_{q_5} = \alpha_5, \\
T_{q_1} = \alpha_1 q_1 + c_2 \alpha_3 q_3, & T_{q_2} + q_1 T_{q_5} - P = c_2 \alpha_5 q_3, \\
\\
P_{q_3} = -\alpha_2, & P_{q_4} + c_2 q_3 P_{q_5} = -\alpha_3. \\
Q_{q_3} = -\alpha_4, & Q_{q_4} + c_2 q_3 Q_{q_5} = -\alpha_5. \\
R_{q_3} = 0, & R_{q_4} + c_2 q_3 R_{q_5} = -\alpha_6. \\
S_{q_3} = \alpha_6, & S_{q_4} + c_2 q_3 S_{q_5} = 0. \\
T_{q_3} = -\alpha_4 q_1 + c_2 \alpha_6 q_3, & T_{q_4} + c_2 q_3 T_{q_5} - c_2 R = -\alpha_5 q_1.
\end{array}$$

On pose $f(q) = \int Q dq_1$ et alors $Q = f_{q_1}$. On va exprimer toutes les composantes P, Q, R, S et T en fonction de f .

On exprime T en fonction de f et de S :

on a $T_{q_1} = \alpha_1 q_1 + c_2 \alpha_3 q_3$ avec $\alpha_1 = Q_{q_1}$ et $\alpha_3 = S_{q_1}$. On intègre par partie en fonction de q_1 et on obtient

$$T = q_1 f_{q_1} - f + c_2 q_3 S.$$

On exprime P en fonction de f :

on sait que $P = T_{q_2} + q_1 T_{q_5} - c_2 \alpha_5 q_3$ avec $\alpha_5 = S_{q_2} + q_1 S_{q_5}$, par conséquent

$$P = q_1 f_{q_1 q_2} - f_{q_2} + q_1^2 f_{q_1 q_5} - q_1 f_{q_5}.$$

On montre que f ne dépend pas de q_5 :

on dérive P par rapport à q_1 et on utilise $P_{q_1} = 0$, puis on utilise la relation $Q_{q_2} + q_1 Q_{q_5} = 0$, en dérivant cette expression par rapport à q_1 et multipliant le résultat par q_1 . On trouve que $f = f(q_1, q_2, q_3, q_4)$. Et on en déduit que

$$f_{q_1 q_2} = 0, \quad P = -f_{q_2} \quad \text{et} \quad f_{q_1 q_1} = f_{q_2 q_2}.$$

On exprime R en fonction de f :

on sait que $R = \frac{1}{c_2}(T_{q_4} + c_2 q_3 T_{q_5} + \alpha_5 q_1)$, or $T_{q_5} = c_2 q_3 S_{q_5}$, $S_{q_4} + c_2 q_3 S_{q_5} = 0$ et $Q_{q_4} + c_2 q_3 Q_{q_5} = -\alpha_5$, donc $R = -\frac{f_{q_4}}{c_2}$.

On exprime S et T en fonction de f :

on sait que $T_{q_3} = -\alpha_4 q_1 + c_2 \alpha_6 q_3$, $S_{q_3} = \alpha_6$ et $\alpha_4 = -f_{q_1 q_3}$, donc

$$S = \frac{f_{q_3}}{c_2} \text{ et } T = q_1 f_{q_1} + q_3 f_{q_3} - f.$$

On peut vérifier facilement que $f_{q_3 q_4} = 0$ et $f_{q_3 q_3} = f_{q_4 q_4}$.

Et finalement on trouve que

$$v = -f_{q_2} \frac{\partial}{\partial q_1} + f_{q_1} \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{f_{q_4}}{c_2} \frac{\partial}{\partial q_3} + \frac{f_{q_3}}{c_2} \frac{\partial}{\partial q_4} + (q_1 f_{q_1} + q_3 f_{q_3} - f) \frac{\partial}{\partial q_5}.$$

On cherche à présent f : en utilisant $f_{q_1 q_2} = 0$, $f_{q_1 q_1} = f_{q_2 q_2}$, $f_{q_3 q_4} = 0$ et $f_{q_3 q_3} = f_{q_4 q_4}$, on exprime f en fonction polynomiale de q_1, q_2, q_3 et q_4 :

$$f(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) \left(\frac{d_1}{2}(q_3^2 + q_4^2) + d_2 q_3 + d_3 q_4 + d_4 \right) + q_1 \left(\frac{d_5}{2}(q_3^2 + q_4^2) + d_6 q_3 + d_7 q_4 + d_8 \right) + q_2 \left(\frac{d_9}{2}(q_3^2 + q_4^2) + d_{10} q_3 + d_{11} q_4 + d_{12} \right) + \frac{d_{13}}{2}(q_3^2 + q_4^2) + d_{14} q_3 + d_{15} q_4 + d_{16}$$

avec $d_i \in \mathbb{R}$, pour $1 \leq i \leq 16$.

De plus, on sait que : $f_{q_1 q_3} = \frac{f_{q_2 q_4}}{c_2}$, $f_{q_2 q_3} = -\frac{f_{q_1 q_4}}{c_2}$, $f_{q_2 q_4} = \frac{f_{q_1 q_3}}{c_2}$ et $f_{q_1 q_4} = -\frac{f_{q_2 q_3}}{c_2}$. On en déduit que

$$f_{q_2 q_4} (1 - c_2^2) = 0 \text{ et } f_{q_1 q_4} (c_2^2 - 1) = 0.$$

• Si $|c_2| > 1$ on montre par identification que f s'écrit

$$f(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\alpha_1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{c_2 \alpha_6}{2}(q_3^2 + q_4^2) + d_8 q_1 + d_{12} q_2 + d_{14} q_3 + d_{15} q_4 + d_{16},$$

et donc

$$v = -(\alpha_1 q_2 + d_{12}) \frac{\partial}{\partial q_1} + (\alpha_1 q_1 + d_8) \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{1}{c_2} (c_2 \alpha_6 q_4 + d_{15}) \frac{\partial}{\partial q_3} + \frac{1}{c_2} (c_2 \alpha_6 q_3 + d_{14}) \frac{\partial}{\partial q_4} + \left(\frac{\alpha_1}{2}(q_1^2 - q_2^2) + \frac{c_2 \alpha_6}{2}(q_3^2 - q_4^2) - d_{12} q_2 - d_{15} q_4 - d_{16} \right) \frac{\partial}{\partial q_5},$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $d_j \in \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, 6\}$ et $j \in \{8, 12, 14, 15, 16\}$.

• Si $c_2 = -1$ on montre par identification que f s'écrit

$$f(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\alpha_1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \alpha_2 (q_1 q_4 + q_2 q_3) - \frac{\alpha_6}{2}(q_3^2 + q_4^2) + d_8 q_1 + d_{12} q_2 + d_{14} q_3 + d_{15} q_4 + d_{16},$$

et donc

$$v = -(\alpha_1 q_2 + \alpha_2 q_3 + d_{12}) \frac{\partial}{\partial q_1} + (\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_4 + d_8) \frac{\partial}{\partial q_2} + (\alpha_2 q_1 - \alpha_6 q_4 + d_{15}) \frac{\partial}{\partial q_3} + (-\alpha_2 q_2 + \alpha_6 q_3 - d_{14}) \frac{\partial}{\partial q_4} + \left(\frac{\alpha_1}{2}(q_1^2 - q_2^2) - \frac{\alpha_6}{2}(q_3^2 - q_4^2) - d_{12} q_2 - d_{15} q_4 - d_{16} \right) \frac{\partial}{\partial q_5},$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $d_j \in \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, 2, 6\}$ et $j \in \{8, 12, 14, 15, 16\}$.

- Si $c_2 = 1$ on montre par identification que f s'écrit

$$f(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\alpha_1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \alpha_3(q_1 q_3 + q_2 q_4) - \alpha_2(q_1 q_4 - q_2 q_3) + \frac{\alpha_6}{2}(q_3^2 + q_4^2) + d_8 q_1 + d_{12} q_2 + d_{14} q_3 + d_{15} q_4 + d_{16},$$

et donc

$$v = -(\alpha_1 q_2 + \alpha_2 q_3 + \alpha_3 q_4 + d_{12}) \frac{\partial}{\partial q_1} + (\alpha_1 q_1 - \alpha_2 q_4 - \alpha_3 q_4 + d_8) \frac{\partial}{\partial q_2} + (\alpha_2 q_1 - \alpha_3 q_2 - \alpha_6 q_4 - d_{15}) \frac{\partial}{\partial q_3} + (\alpha_3 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_6 q_3 + d_{14}) \frac{\partial}{\partial q_4} + \left(\frac{\alpha_1}{2}(q_1^2 - q_2^2) + \frac{\alpha_6}{2}(q_3^2 - q_4^2) + \alpha_3(q_1 q_3 - q_2 q_4) - d_{12} q_2 - d_{15} q_4 - d_{16} \right) \frac{\partial}{\partial q_5},$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $c_j \in \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, 2, 3, 6\}$ et $j \in \{8, 12, 14, 15, 16\}$.

- On a ainsi la matrice A de ad_v qui s'écrit $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ -\alpha_1 & 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \alpha_6 \\ -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_6 & 0 \end{pmatrix}$, avec

$\alpha_i \in \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, 2, 3, 6\}$. Et on a les trois cas suivants :

- Si $|c_2| > 1$ alors $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ et l'algèbre des SR-symétries infinitésimales est de dimension 7.
- Si $c_2 = -1$ alors $\alpha_3 = 0$ et $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ et l'algèbre des SR-symétries infinitésimales est de dimension 8.
- Si $c_2 = 1$ alors $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ et l'algèbre des SR-symétries infinitésimales est de dimension 9.

Pour c_2 quelconque, on trouve 5 translations

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial q_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial}{\partial q_1} - q_2 \frac{\partial}{\partial q_5}, \quad v_3 = \frac{\partial}{\partial q_4}, \quad v_4 = -\frac{\partial}{\partial q_3} - c_2 q_4 \frac{\partial}{\partial q_5}, \quad v_5 = \frac{\partial}{\partial q_5},$$

et 2 rotations :

$$v_6 = q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2) \frac{\partial}{\partial q_5} \quad \text{et} \quad v_7 = q_3 \frac{\partial}{\partial q_4} - q_4 \frac{\partial}{\partial q_3} + \frac{c_2}{2}(q_3^2 - q_4^2) \frac{\partial}{\partial q_5}.$$

Si $c_2 = -1$ on a une rotation supplémentaire

$$v_8 = q_4 \frac{\partial}{\partial q_2} - q_2 \frac{\partial}{\partial q_4} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_3} - q_3 \frac{\partial}{\partial q_1}$$

Si $c_2 = 1$ on a deux rotations supplémentaires

$$v_8 = q_3 \frac{\partial}{\partial q_2} - q_2 \frac{\partial}{\partial q_3} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_4} - q_4 \frac{\partial}{\partial q_1} \quad \text{et} \quad v_9 = q_1 \frac{\partial}{\partial q_3} - q_3 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial q_4} - q_4 \frac{\partial}{\partial q_2}$$

□

Le groupe G , connexe et simplement connexe, de l'algèbre $\mathfrak{g}_{(5,1,1)}$ peut être représenté comme le groupe nilpotent de matrices sous-diagonales :

$$G \cong \left\{ g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q_2 & 1 & 0 & 0 \\ q_4 & 0 & 1 & 0 \\ q_5 & q_1 & c_2 q_3 & 1 \end{pmatrix} : q_1, \dots, q_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Son algèbre de Lie est

$$\mathfrak{g} = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_1 & a_3 & 0 \end{pmatrix} : a_1, \dots, a_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soit E_i la matrice nilpotente, définie par $a_i = 1$ et $a_j = 0$, pour $j \neq i$. Considérons le champ invariant à gauche gE_i correspondant à E_i . En identifiant $G \cong \mathbb{R}^5$, muni des coordonnées (q_1, \dots, q_5) , on peut identifier l'algèbre de Lie des champs invariants à gauche $\mathfrak{g} \cong \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{gE_1, \dots, gE_5\}$ avec l'algèbre de Lie engendrée par les champs $e_1 = \frac{\partial}{\partial q_1}$, $e_2 = \frac{\partial}{\partial q_2} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_5}$, $e_3 = \frac{\partial}{\partial q_3}$, $e_4 = \frac{\partial}{\partial q_4} + c_2 q_3 \frac{\partial}{\partial q_5}$ et $e_5 = \frac{\partial}{\partial q_5}$.

Tout champ de vecteurs invariant à droite v commute avec tous les champs invariants à gauche et alors v est une SR-symétrie infinitésimale. En fait, on peut vérifier par un calcul direct que les champs v_1, \dots, v_5 du Théorème 2.37(i) sont, respectivement, les champs invariants à droite $v_i = E_i g$.

L'analyse similaire montre que pour $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$ et $\mathfrak{g}_{(5,3,1)}$, si on identifie les champs e_1, \dots, e_5 avec des champs invariants à gauche alors les champs v_1, \dots, v_5 du Théorème 2.37(ii) et (iii) sont des champs invariants à droite respectifs.

La nature des champs v_i , $i \geq 6$, est différente : la projection de leurs flots sur l'espace \mathfrak{p} donne des rotations. Rappelons (voir la Définition 1.9) qu'un espace SR-homogène (M, \mathcal{D}, B) est dit symétrique si pour chaque point $q \in M$, il existe une SR-symétrie ϕ telle que $\phi(q) = q$ et $\phi_*|_{\mathcal{D}_q} = -\text{Id}$. Notons par $H_5 = G_{(5,1,1)}$, $H_3 \times \mathbb{R}^2 = G_{(5,3,1)}$ et $G_{(5,2,2)}$ les groupes connexes et simplement connexes correspondant, respectivement, à $\mathfrak{g}_{(5,1,1)}$, $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$ et $\mathfrak{g}_{(5,3,1)}$. Le Théorème 2.37 nous donne alors le résultat suivant.

Corollaire 2.38. *Les SR-espaces $H_5 = G_{(5,1,1)}$ et $H_3 \times \mathbb{R}^2 = G_{(5,3,1)}$ sont symétriques, le SR-espace $G_{(5,2,2)}$ ne l'est pas.*

Chapitre 3

Géodésiques associées à des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2

Dans le Chapitre 2, nous avons obtenu la classification des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 de dimension n , avec $3 \leq n \leq 7$, ainsi que la classification des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 de dimension $n \geq 3$, telles que $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = 1$. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude du système hamiltonien (1.16) et (1.17) associé à ces SR-algèbres de Lie. Nous commençons par l'étude du système adjoint de Lie-Poisson (1.17). Nous allons montrer que, dans tous les cas de la classification, ce système est linéaire à paramètres et, en plus, Liouville-intégrable dans la catégorie polynomiale et super-intégrable dans la catégorie logarithmique. Par ailleurs, nous allons donner explicitement les intégrales premières polynomiales (en particulier, linéaires et quadratiques) et logarithmiques, que le système adjoint admet. Dans un premier temps, nous rappelons des définitions et des propriétés d'intégrabilité, que nous utiliserons pour la suite. Pour ces notions, on peut se référer aux livres de Arnold [9], Arnold et Novikov [10], Audin [11], Goriely [44] et Jurdjevic [54].

3.1 Intégrales premières et intégrabilité

Dans cette partie, on rappelle certaines définitions d'intégrabilité pour un système d'équations différentielles d'ordre 1 sur le corps \mathbb{K} où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} . On

considère un système :

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \text{ où } x(t) \in \mathbb{K}^N \text{ et } F \text{ est de classe } C^\infty. \quad (3.1)$$

On note $L_F = \sum_{i=1}^N F_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ la dérivation définie par le champ de vecteurs F associé à ce système. On veut caractériser les fonctions des variables x_1, \dots, x_N qui sont constantes sur les trajectoires du système (3.1). L'intérêt de ces fonctions, qui sont les intégrales premières, est le fait que les trajectoires de ce système restent dans leurs ensembles de niveaux constants.

Définition 3.1. Soit $I : U \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe C^∞ , où U est un ouvert de \mathbb{K}^N . On dit que I est une *intégrale première* du système (3.1) si

$$L_F(I) = \sum_{i=1}^N F_i \frac{\partial I}{\partial x_i} = 0 \text{ sur } U.$$

Il est clair que, si I est une intégrale première de (3.1), toute fonction $f(I)$ où f est de classe C^∞ , est aussi une intégrale première de (3.1) mais I et $f(I)$ sont fonctionnellement dépendantes.

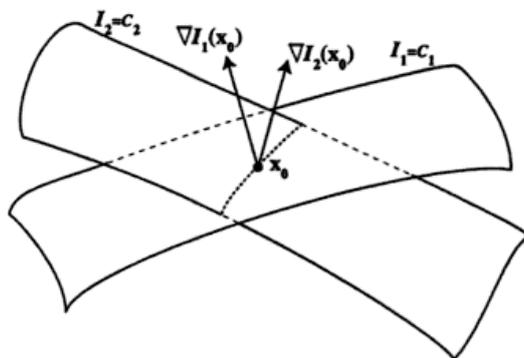


FIGURE 3.1 – [44]. Indépendance des intégrales premières : ensembles de niveaux constants de I_1 et I_2 et leur intersection autour de x_0

Définition 3.2. Soient k intégrales premières I_1, I_2, \dots, I_k de (3.1) définies sur des ouverts, U_1, \dots, U_k , de \mathbb{K}^N tels que $U = \bigcap_{i=1}^k U_i$ est non vide. On dit que les intégrales premières I_1, \dots, I_k sont fonctionnellement indépendantes s'il existe un ouvert dense \tilde{U} de U tel que pour tous points $x_0 \in \tilde{U}$ nous avons $(dI_1 \wedge \dots \wedge dI_k)(x_0) \neq 0$.

Les intégrales premières d'un système, lorsqu'elles existent, appartiennent à des classes de fonctions différentes (polynomiales, rationnelles, algébriques, logarithmiques,...). Pour illustrer ceci, on donne l'exemple suivant d'un système dépendant de paramètres qui, selon leurs valeurs, peut admettre différents types d'intégrales premières.

Exemple 3.3. Lotka-Volterra ABC system (voir Bountis et al. [20]) :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(Cy + z), \\ \dot{y} &= y(x + Az), \\ \dot{z} &= z(Bx + y),\end{aligned}$$

où $A, B, C \in \mathbb{R}$ sont des paramètres constants. L'intégrabilité et la non-intégrabilité de ce système quadratique a été étudié par beaucoup d'auteurs au cours de ces dernières années : pour l'intégrabilité, par Strelcyn et Wojciechowski [85] et Grammaticos et al. [45] ; et pour la non-intégrabilité, par Moulin-Ollagnier [69] ; Moulin-Ollagnier [70] ; Moulin-Ollagnier et Nowicki [71]. Pour différentes valeurs des paramètres (A, B, C) , ce système admet une intégrale première I quadratique ou rationnelle ou logarithmique :

$$\begin{aligned}(A, B, C) = \left(-\frac{1}{2}, -2, 1\right), \quad I &= x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} - 2xy + yz + xz, \\ (A, B, C) = (1, 1, 1), \quad I &= \frac{(x-y)(y-z)}{y}, \\ (A, B, C) = (1, 1, 0), \quad I &= \frac{y}{x} + \log\left(1 - \frac{y}{z}\right), \\ (A, B, C) = (1, -\sqrt{2}, 1), \quad I &= \frac{z(y-x)^{\sqrt{2}+1}}{xy^{\sqrt{2}}}.\end{aligned}$$

$$ABC + 1 = 0, \quad I = -AB \log|x| + B \log|y| - \log|z| + (AB + 1) \log|x - Cy + Az|.$$

Nous allons maintenant formaliser ceci de la manière suivante.

Notation 3.4. On note $\mathbb{K}[x] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$ l'anneau des polynômes à N variables à coefficients dans \mathbb{K} et $\mathbb{K}(x) = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_N)$ l'ensemble des quotients d'éléments de $\mathbb{K}[x]$, i.e., quotients de polynômes en x , ça veut dire, fonctions rationnelles en x .

Définition 3.5. Une intégrale première I d'un système (3.1) est *polynomiale* si $I \in \mathbb{K}[x]$, elle est *rationnelle* si $I \in \mathbb{K}(x)$. Une intégrale première I est dite *algébrique* sur \mathbb{K} s'il existe des polynômes $p_0, p_1, \dots, p_s \in \mathbb{K}[x]$, $s \geq 1$, tels que

$$p_0 + p_1 I + p_2 I^2 + \dots + p_s I^s = 0, \quad (3.2)$$

i.e., $p_0 + p_1C + p_2C^2 + \dots + p_sC^s = 0$ où $I(x(t)) = C$ constante de niveau et $x(t)$ solution de (3.1).

Il est clair que si $s = 1$ et $p_1 \in \mathbb{K}$, une intégrale première I qui vérifie (3.2) est polynomiale. Si $s = 1$ et $p_1 \notin \mathbb{K}$, elle est rationnelle.

Définition 3.6. Une intégrale première I est dite *logarithmique* s'il existe J_0, \dots, J_s , $s \geq 1$, des fonctions algébriques sur \mathbb{K} et $c_1, \dots, c_s \in \mathbb{K}$ tels que

$$I = J_0 + \sum_{i=1}^s c_i \log J_i.$$

Il est clair que si $s = 0$, I est algébrique sur \mathbb{K} .

Remarque 3.7. Les fonctions trigonométriques et leurs fonctions inverses s'expriment à l'aide de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme à variables complexes, en particulier la fonction arctan que nous allons utiliser dans la suite (voir Lemme 3.16). On sait que pour $z = x + iy$, on a $\arg(x + iy) = \arctan \frac{y}{x}$ si $x > 0$ (si $x < 0$ on ajoute $\pm\pi$ suivant le signe de y). Par ailleurs, la fonction logarithme à variable complexe est définie par $\log z = \log |z| + i \arg(z)$.

Fixons une catégorie \mathcal{C} de fonctions (polynomiales, rationnelles, algébriques, logarithmiques). La première définition d'intégrabilité fondamentale pour nous, est la suivante.

Définition 3.8. Le système (3.1) est dit *super-intégrable* dans la catégorie \mathcal{C} s'il admet $N - 1$ intégrales premières indépendantes appartenant à la catégorie \mathcal{C} .

3.1.1 Intégrabilité d'un système linéaire autonome

On considère un système linéaire à coefficients constants dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} ,

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in M_N(\mathbb{K}), \quad x \in \mathbb{K}^N. \quad (3.3)$$

Nous rappelons les définitions et résultats d'intégrabilité suivants que nous utiliserons par la suite. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$, les valeurs propres de la matrice A .

Définition 3.9. On dit que $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ sont E -indépendants, où $E = \mathbb{N}$ ou $E = \mathbb{Z}$ ou $E = \mathbb{Q}$, si $\sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_i = 0$, pour $\alpha_i \in E$, implique que $\alpha_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$.

Remarque 3.10. Il est clair que $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont \mathbb{Q} -indépendants si et seulement si $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont \mathbb{Z} -indépendants.

Définition 3.11. Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ de la matrice A ne sont pas E -indépendantes ($E = \mathbb{N}$ ou $E = \mathbb{Z}$), on appelle *une relation de E -résonance* pour le système (3.3), un N -uplet $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ satisfaisant $\sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_i = 0$ tel que $\alpha \neq 0$ et $\alpha_i \in E$.

Définition 3.12. On appelle *ordre de la relation de \mathbb{N} -résonance* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, noté $\text{ord}(\alpha)$, la somme des α_i , i.e., $\text{ord}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i$.

Définition 3.13. On dit que m N -uplets $(\alpha_1^1, \dots, \alpha_N^1), \dots, (\alpha_1^m, \dots, \alpha_N^m)$ sont indépendants si le rang de la matrice formée par ces coefficients est plein, i.e.,

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \dots & \alpha_1^m \\ \alpha_2^1 & & & \alpha_2^m \\ \dots & & & \dots \\ \alpha_N^1 & \dots & \dots & \alpha_N^m \end{pmatrix} = m.$$

L'existence d'intégrales premières polynomiales ou rationnelles pour le système (3.3) est donnée par le théorème suivant et ses corollaires :

Théorème 3.14. [44]. *Considérons un système linéaire à coefficients constants $\dot{x} = Ax$ où A est une matrice semi-simple et $x \in \mathbb{C}^N$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ désignent les valeurs propres de A . Alors :*

- (i) le système admet m intégrales premières polynomiales indépendantes si et seulement si il existe m relations de \mathbb{N} -résonances α^i , pour $i = 1, \dots, m$, données par m N -uplets $\alpha^i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_N^i)$ indépendantes. En plus, les degrés des intégrales premières sont, respectivement, les ordres des résonances.
- (ii) le système admet m intégrales premières rationnelles indépendantes si et seulement si il existe m relations de \mathbb{Z} -résonances données par m N -uplets $\alpha^i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_N^i)$, $1 \leq i \leq m$, indépendantes.

Nous allons démontrer l'assertion (i) de ce théorème car nous aurons besoin des résultats et du raisonnement de cette démonstration pour la suite. On suppose que la matrice \tilde{A} est diagonale (on peut toujours diagonaliser A sur \mathbb{C} car elle est semi-simple), i.e.,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix}$$

et soit $\tilde{I} = z_1^{\alpha_1} \dots z_N^{\alpha_N}$ (où $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$) un monome de degré $\alpha_1 + \dots + \alpha_N$. La dérivée de \tilde{I} le long de champ de vecteurs linéaire $\tilde{A}z$ est

$$L_{\tilde{A}z} \tilde{I} = (\alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_N \lambda_N) z_1^{\alpha_1} \dots z_N^{\alpha_N}$$

et alors \tilde{I} est une intégrale première de l'équation différentielle $\dot{z} = \tilde{A}z$ si et seulement si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ définit une relation de \mathbb{N} -résonance. Si l'équation $\dot{z} = \tilde{A}z$ est représentée dans une base quelconque (pas nécessairement propre) comme $\dot{x} = Ax$ et si V_1, \dots, V_N sont des vecteurs propres indépendants de A alors l'intégrale première \tilde{I} de $\dot{z} = \tilde{A}z$ définit, en coordonnées x , l'intégrale première $I = v_1^{\alpha_1} \dots v_N^{\alpha_N}$, où $v_i = \langle x, V_i \rangle$. Pour obtenir une intégrale première réelle, il suffit d'observer que si le système $\dot{x} = Ax$ est réel ($x \in \mathbb{R}^N$) alors les parties réelles et imaginaires de ces intégrales premières complexes sont des intégrales premières réelles. On a ainsi montré qu'à chaque intégrale première polynomiale il correspond une \mathbb{N} -relation de résonance et à chaque relation de \mathbb{N} -résonance il correspond une intégrale première polynomiale.

Montrons à présent que l'existence de m relations de \mathbb{N} -résonances α^i , $1 \leq i \leq m$, indépendantes, est équivalent au fait que le système admet m intégrales premières polynomiales indépendantes. Dans un premier temps, on suppose qu'il existe m relations de \mathbb{N} -résonances α^i , $1 \leq i \leq m$, indépendantes. Dans ce cas on a $\sum_{j=1}^N \alpha_j^i \lambda_j = 0$ pour $1 \leq i \leq m$, et puisque à chaque relation de \mathbb{N} -résonance il

correspond une intégrale première polynomiale donnée par $z_1^{\alpha_1} \dots z_N^{\alpha_N}$, on a m intégrales premières $I_i(z) = z_1^{\alpha_1^i} \dots z_N^{\alpha_N^i}$ polynomiales, respectivement, de degré $\sum_{j=1}^N \alpha_j^i$.

On calcule le rang de la matrice $\left(\frac{\partial I}{\partial z}\right)$, où $I = (I_1, \dots, I_m)^\top$, et pour cela on peut diviser chaque ligne i par $z_1^{\alpha_1^i-1} \dots z_N^{\alpha_N^i-1}$, puis chaque colonne j par $z_1 \dots z_{j-1} z_{j+1} \dots z_N$ pour $1 \leq j \leq N$ et on montre que, sur un ouvert dense, le rang de la matrice $\left(\frac{\partial I}{\partial z}\right)$ est égale au rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_N^1 \\ \alpha_1^2 & \dots & \alpha_N^2 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^m & \dots & \alpha_N^m \end{pmatrix}.$$

Puisque les m relations de \mathbb{N} -résonances α^i sont indépendantes, le rang de la matrice est m et donc le système admet m intégrales premières polynomiales indépendantes. Maintenant supposons que le système admet m intégrales premières polynomiales indépendantes I_i , $1 \leq i \leq m$. La matrice \tilde{A} est diagonale et donc chaque monome de I_i est aussi une intégrale première. Il existe alors $\mu \geq m$ monomes qui sont aussi des intégrales premières polynomiales de la forme $z_1^{\alpha_1^i} \dots z_N^{\alpha_N^i}$ pour $1 \leq i \leq \mu$. On recalcule le rang de la matrice donnée par $\left(\frac{\partial I}{\partial z}\right)$, où $I = (I_1, \dots, I_\mu)^\top$, et avec les mêmes astuces de calcul, on montre que le rang de cette matrice est égal au nombre de relation de \mathbb{N} -résonances indépendantes, ce rang est donc au moins m . Il existe alors au moins m relations de \mathbb{N} -résonances indépendantes ; ce qui finit la démonstration.

Corollaire 3.15. (*Nowicki, [73]*). *Considérons un système linéaire à coefficients constants $\dot{x} = Ax$ où A est une matrice semi-simple et $x \in \mathbb{C}^N$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont les valeurs propres de A . Alors :*

- (i) $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, sont \mathbb{N} -indépendants si et seulement si ce système n'admet pas d'intégrale première polynomiale.
- (ii) $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, sont \mathbb{Z} -indépendants si et seulement si ce système n'admet pas d'intégrale première rationnelle.

L'intégrabilité des systèmes linéaires (3.3) est étudiée en détails par Gorbuzov et Pranevish dans [43], où ils donnent, en utilisant la méthode des valeurs propres, la forme explicite des intégrales premières polynomiales, rationnelles et d'autres

exprimées à l'aide de la fonction arctan.

On utilisera le lemme suivant dans la suite, sa preuve est simple mais technique, elle sera donnée pour compléter cette partie dans l'annexe du Chapitre 3.

Lemme 3.16. *Si un système linéaire $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{C}^N$, à coefficients constants, admet une intégrale première I de la forme*

$$I(x) = \arctan y_1(x) + \alpha \arctan y_2(x), \quad (3.4)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $y_i(x) \in \mathbb{K}(x)$, le corps des fonctions rationnelles en x , pour $i = 1, 2$, alors ce système admet une intégrale première I_1 (étant une fonction de I) qui est rationnelle si α est rationnelle et logarithmique si α est irrationnelle.

Le résultat suivant est fondamental pour notre étude sur l'intégrabilité.

Théorème 3.17. *Considérons un système linéaire à coefficients constants $\dot{x} = Ax$ où A est une matrice antisymétrique, de rang $2r$, et $x \in \mathbb{R}^N$. Alors :*

- (i) *Il y a $N - 2r$ relations de \mathbb{N} -résonances d'ordre 1 indépendantes et alors le système $\dot{x} = Ax$ admet $N - 2r$ intégrales premières linéaires indépendantes.*
- (ii) *Il y a au moins r relations de \mathbb{N} -résonances d'ordre 2 indépendantes et alors le système $\dot{x} = Ax$ admet au moins r intégrales premières quadratiques indépendantes.*
- (iii) *Le système $\dot{x} = Ax$ admet $2r - d(A)$ intégrales premières polynomiales indépendantes de degrés au moins 2, où $d(A) = \dim \text{Vect}_{\mathbb{Q}}\{\lambda_i : \lambda_i \in \sigma(A)\}$.*
- (iv) *Le système $\dot{x} = Ax$ admet $N - 1$ intégrales premières logarithmiques indépendantes dont $N - 2r$ sont linéaires, au moins r sont quadratiques et les autres sont logarithmiques (peuvent être polynomiales suivant $d(A)$).*

Démonstration. Considérons l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

où A est une matrice antisymétrique à coefficients réels constants. La matrice A étant antisymétrique (et de rang $2r$ pair), alors ces valeurs propres sont soit nulles soit imaginaires pures conjuguées deux à deux ; on note les valeurs propres par

$$\lambda_{2j-1} = +i\omega_j \quad \text{et} \quad \lambda_{2j} = -i\omega_j \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq r,$$

où $\omega_j > 0$ et $\lambda_j = 0$, pour $2r + 1 \leq j \leq N$.

Puisque la matrice A est antisymétrique, d'après le Lemme 2.8, il existe une matrice orthogonale R à coefficients réels telle que $RAR^{-1} = \tilde{A}$, où

$$\tilde{A} = \text{Diag}(\omega_1 J, \omega_2 J, \dots, \omega_r J, O) \text{ et } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \omega_j > 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq r.$$

On change les variables en posant $\tilde{x} = Rx$ et on va considérer dans la suite le système différentiel linéaire suivant

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t), \text{ où } \tilde{x} \in \mathbb{R}^N, \quad (3.5)$$

appelée *forme normale de Jordan*. En coordonnées, on écrit le système sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{2j-1}(t) &= \omega_j \tilde{x}_{2j}(t) \\ \dot{\tilde{x}}_{2j}(t) &= -\omega_j \tilde{x}_{2j-1}(t) \end{aligned} \right\} \text{ pour } 1 \leq j \leq r \text{ et } \omega_i > 0,$$

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = 0 \quad \text{pour } 2r+1 \leq j \leq N.$$

Les assertions (i) et (ii) sont des corollaires immédiats du Théorème 3.14. En effet, nous avons $N - 2r$ relations de \mathbb{N} -résonances d'ordre un, $1 \cdot \lambda_j = 0$, pour $2r+1 \leq j \leq N$ qui nous donne les $N - 2r$ intégrales premières linéaires $I_j(\tilde{x}) = \tilde{x}_j$, pour $2r+1 \leq j \leq N$. Nous avons aussi r relations de \mathbb{N} -résonances d'ordre 2 indépendantes définies par $1 \cdot \lambda_{2j-1} + 1 \cdot \lambda_{2j} = 0$, $1 \leq j \leq r$, qui nous amènent aux intégrales premières

$$I_j(\tilde{x}) = \tilde{x}_{2j-1}^2 + \tilde{x}_{2j}^2, \text{ pour } 1 \leq j \leq r.$$

(iii). D'abord on va relier la dimension $d(A)$ avec les \mathbb{Z} -résonances. On suppose qu'il existe m relations de \mathbb{Z} -résonances α^i , indépendantes, d'ordre supérieur ou égal à deux. Ces relations de \mathbb{Z} -résonances vérifient, pour $1 \leq i \leq m$, $\sum_{j=1}^{2r} \alpha_j^i \lambda_j = 0$.

Autrement dit, matriciellement, en notant $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2r})^\top$ et $\mathcal{A} = (\alpha_j^i)$, pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq 2r$ on a $\mathcal{A}\lambda = 0$. En permuttant si besoin les valeurs propres, on peut supposer que $\mathcal{A}\lambda = 0$ s'écrit comme $(\bar{\mathcal{A}}, \bar{\bar{\mathcal{A}}})\lambda = 0$ où $\bar{\mathcal{A}}$ est une matrice de taille $m \times m$ de rang m (la matrice $\bar{\bar{\mathcal{A}}}$ est alors inversible). En multipliant à gauche par $\bar{\mathcal{A}}^{-1}$, on obtient

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}}^{-1}(\bar{\mathcal{A}}, \bar{\bar{\mathcal{A}}})\lambda &= 0, \text{ i.e.,} \\ (\text{Id}, \Gamma)\lambda &= 0, \end{aligned}$$

où $\Gamma = \bar{\mathcal{A}}^{-1}\bar{\bar{\mathcal{A}}}$. Ainsi, pour $1 \leq i \leq m$, on a $\lambda_i + \sum_{j>m} \gamma_j^i \lambda_j = 0$ où $\Gamma = (\gamma_j^i)$. Par conséquent, $\text{Vect}_{\mathbb{Q}}\{\lambda_i, 1 \leq i \leq 2r\} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}\{\lambda_i, m+1 \leq i \leq 2r\}$, i.e., $d(A) \leq 2r - m$.

Maintenant si $\text{Vect}_{\mathbb{Q}}\{\lambda_i\} = d(A)$ alors il existe $d(A)$ valeurs propres \mathbb{Q} -indépendantes que l'on peut supposer être $\lambda_1, \dots, \lambda_{d(A)}$. Alors toutes les autres valeurs propres sont des combinaisons de ces valeurs propres, i.e., $\lambda_i = \sum_{j=1}^{d(A)} \gamma_j^i \lambda_j$ pour $i > d(A)$. Il existe alors $2r - d(A)$ relations de \mathbb{Z} -résonances et donc $m \leq 2r - d(A)$, i.e., $d(A) \leq 2r - m$. On en conclut que $d(A) = 2r - m$ et que le nombre de relations de \mathbb{Z} -résonances indépendantes est donc $2r - d(A)$.

Par ailleurs, le nombre de \mathbb{Z} -résonances indépendantes est égal au nombre de \mathbb{N} -résonances indépendantes (dans le cas où A est antisymétrique). Pour montrer cela, on suppose que $\lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1}$, pour $1 \leq j \leq r$, et on considère m relations de \mathbb{Z} -résonances indépendantes données par

$$\sum_{j=1}^{2r} \alpha_j^i \lambda_j = 0, \text{ pour } 1 \leq i \leq m \text{ et } \alpha_j^i \in \mathbb{Z}.$$

On peut regrouper ces relations de \mathbb{Z} -résonances telles que les r premières relations sont les \mathbb{N} -résonances données par

$$1 \cdot \lambda_{2j-1} + 1 \cdot \lambda_{2j} = 0, \text{ i.e., } \left. \begin{array}{l} \alpha_{2i-1}^i = \alpha_{2i}^i = 1 \\ \alpha_j^i = 0, \quad j \neq 2i-1, 2i \end{array} \right\} \text{ pour } 1 \leq j \leq r,$$

suivies par $m - r$ relations de \mathbb{Z} -résonances $\langle \alpha^i, \lambda \rangle = \sum_{j=1}^{2r} \alpha_j^i \lambda_j$ pour $r+1 \leq i \leq m$.

Supposons qu'il existe $i > r$ et qu'il existe $1 \leq j \leq r$ tels que au moins un coefficient parmi α_{2j-1}^i et α_{2j}^i est négatif, i.e., soit $\alpha_{2j-1}^i < 0$, soit $\alpha_{2j}^i < 0$, soit les deux négatifs. On définit $\beta_j^i = \min\{\alpha_{2j-1}^i, \alpha_{2j}^i\}$ et on remplace la \mathbb{Z} -résonance $\alpha^i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_{2r}^i)$ par $\alpha^i + \beta_j^i \alpha^j = \tilde{\alpha}^i$. Dans ce cas, un coefficient parmi $\tilde{\alpha}_{2j-1}^i$ et $\tilde{\alpha}_{2j}^i$ sera nul et l'autre forcément positif. On répète l'opération pour toutes les paires α_{2j-1}^i et α_{2j}^i parmi lesquelles au moins un coefficient est négatif. Dans tous les cas on se ramène à des coefficients naturels, et alors à chaque ensemble de m relations de \mathbb{Z} -résonances indépendantes on associe un ensemble de m relations de \mathbb{N} -résonances indépendantes. Ce qui finit la démonstration de (iii).

(iv) Le système $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x}$ admet toujours $N - 2r$ intégrales premières linéaires (voir (i)) et r intégrales premières quadratiques, correspondant aux relations de \mathbb{N} -résonances $1 \cdot \lambda_{2j-1} + 1 \cdot \lambda_{2j} = 0$ (voir (ii)). En plus, il admet toujours $r - 1$

intégrales premières

$$I_j(\tilde{x}) = \arctan\left(\frac{\tilde{x}_{2j-1}}{\tilde{x}_{2j}}\right) - \frac{\omega_j}{\omega_1} \arctan\left(\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_2}\right), \text{ pour } 2 \leq j \leq r, \quad (3.6)$$

indépendantes de ceux citées précédemment. Maintenant, il suffit d'appliquer le Lemme 3.16 pour conclure que I_j , $2 \leq j \leq r$, engendrant $r - 1$ intégrales premières logarithmiques indépendantes. Ces intégrales additionnelles I_j peuvent engendrer des intégrales premières polynomiales (dont le nombre est $r - d(A)$), voir le Lemme 3.16. \square

3.1.2 Intégrabilité d'un système hamiltonien

Soit (M, ω) une variété symplectique réelle de dimension $2n$. Un système hamiltonien est un système différentiel associé à une fonction H sur M . La forme symplectique ω permet d'associer à H un champ de vecteurs X_H , défini par la relation suivante (voir [11]) :

$$\omega_x(y, X_H(x)) = (dH)_x(y) \text{ pour tous } x \in M, y \in T_x M. \quad (3.7)$$

Le système hamiltonien associé à la fonction H est le système d'équations différentielles donné par :

$$\dot{x} = X_H(x), \quad x \in M. \quad (3.8)$$

On remarque que la fonction H est constante sur les trajectoires ou les courbes intégrales du champ X_H ; en effet, comme la forme ω_x est alternée, on a :

$$\omega_x(X_H(x), X_H(x)) = (dH)_x(X_H(x)) = 0.$$

Par ailleurs, pour une variété symplectique M , la forme ω définit un crochet de Poisson (voir la section 1.3.1) sur $C^\infty(M)$ par la relation suivante :

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = dg(X_f) \text{ pour } f, g \in C^\infty(M). \quad (3.9)$$

Rappelons qu'une fonction $I : U \rightarrow \mathbb{R}$, où U est un ouvert de M , est dite une intégrale première d'un champ de vecteurs F sur une variété M si $L_F I = \sum_{i=1}^N F_i \frac{\partial I}{\partial x_i} = 0$ (voir la Définition 3.1). Bien évidemment, $L_F I = 0$ signifie que I est constante sur les trajectoires de l'équation différentielle $\dot{x} = F(x)$. Dans le cas où M est une variété symplectique et F un champ hamiltonien X_H sur M , la condition $L_{X_H} I = (dI)X_H = 0$ est équivalente à $\{I, H\} = 0$. Bien évidemment, on a $\{H, H\} = 0$ ce qui justifie, d'une autre façon, le fait que H est une intégrale première de (3.8).

Soient I_1, \dots, I_k des intégrales premières, définies sur M , d'un système hamiltonien. On rappelle (voir la Définition 3.2) que I_1, \dots, I_k sont fonctionnellement indépendantes si il existe un ouvert dense \tilde{M} de M tel que $(dI_1 \wedge \dots \wedge dI_k)(x_0) \neq 0$, pour tous points $x_0 \in \tilde{M}$. Si $\{I_i, I_j\} = 0$ pour $1 \leq i, j \leq k$, on dit que les intégrales premières I_i et I_j *commutent* ou sont en *involution*.

Fixons une catégorie \mathcal{C} de fonctions (polynomiales, rationnelles, algébriques, logarithmiques).

Définition 3.18. Un système hamiltonien (3.8) sur une variété symplectique M de dimension $2n$ est dit *complètement intégrable* dans la catégorie \mathcal{C} au sens de Liouville (brièvement, Liouville-intégrable) s'il possède n intégrales premières indépendantes en involution et appartenant à la catégorie \mathcal{C} .

3.2 Système hamiltonien sous-riemannien

Dans cette section, on considère $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie réelle de dimension $n \geq 3$, où \mathfrak{p} est un sous espace vectoriel orienté de \mathfrak{g} de dimension k , $2 \leq k \leq n - 1$, tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ et \mathcal{B} est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur \mathfrak{p} . On considère G l'unique groupe de Lie connexe et simplement connexe, tel que $T_e G = \mathfrak{g}$, muni de la distribution invariante \mathcal{D} sur G définie par $\mathcal{D}_e = \mathfrak{p}$ et B est la forme bilinéaire symétrique définie positive invariante, définie sur \mathcal{D} par $B_e = \mathcal{B}$.

On considère une base (e_1, e_2, \dots, e_k) de \mathfrak{p} orthonormée par rapport à \mathcal{B} . Soient X_1, \dots, X_k les champs de vecteurs invariants à droite et orthonormés par rapport à B définis par $X_i(e) = e_i$ pour $i = 1, \dots, k$. En utilisant la relation (1.14), on écrit l'hamiltonien sous-riemannien associé à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ qui est une fonction quadratique :

$$H(p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k p_i^2, \quad p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathfrak{g}^*. \quad (3.10)$$

De plus, le système hamiltonien associé à H sur le fibré cotangent T^*G (que l'on peut identifier à $G \times \mathfrak{g}^*$, et qui est une variété symplectique de dimension $2n$), est donné par les relations (1.16)-(1.17). Dans le cas qui nous intéresse dans cette partie, $k = n - 1$ et en posant $e_n = [e_1, e_2]$, on obtient :

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^{n-1} p_i X_i(q), \quad q \in G \quad (3.11)$$

$$\dot{p}_j = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \{p_j, p_i\}, \quad p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathfrak{g}^*. \quad (3.12)$$

Le système (3.12) est le système adjoint de Lie-Poisson associé à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ (voir Définition 1.20) et ses solutions $p_j(t) = \langle p(t), e_j \rangle$ sont les contrôles optimaux. Le système (3.11)-(3.12) décrit l'équation géodésique et les solutions de (3.11) sont les trajectoires optimales (les géodésiques).

Remarquons que pour ce système hamiltonien donné par les équations (3.11)-(3.12), le système adjoint de Lie-Poisson (3.12) ne dépend que des variables $p = (p_1, \dots, p_n)$. Il suffit alors d'intégrer d'abord ce système (3.12), on obtient les contrôles optimaux que nous utiliserons après dans l'équation (3.11) pour déterminer les trajectoires optimales. On utilisera les définitions suivantes pour la suite :

Définition 3.19. Une *intégrale première* du système adjoint de Lie-Poisson (3.12) est une fonction $I \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ qui vérifie $\{I, H\} = 0$.

Définition 3.20. Une *fonction de Casimir* du système adjoint de Lie-Poisson (3.12) est une fonction $C \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ telle que $\{f, C\} = 0$, pour tout $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$.

Nous allons étudier dans la section suivante le système adjoint de Lie-Poisson (3.12) associé à une SR-algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ nilpotente d'ordre 2.

Observons que le système (3.12) s'écrit comme

$$\dot{p} = J(p)\nabla H(p), \quad (3.13)$$

où $H(p)$ est l'hamiltonien du système, ∇H le gradient de H , et où $J(p)$ est la matrice définissant la structure de Poisson sur \mathfrak{g}^* , dépendant linéairement de p et donnée par

$$J_{ij}(p) = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k p_k \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n,$$

où les coefficients c_{ij}^k sont les constantes de structure de la SR-algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ de dimension n . On obtient immédiatement la proposition suivante :

Proposition 3.21. Une fonction C sur \mathfrak{g}^* est une fonction de Casimir de (3.13) si et seulement si elle satisfait $J(p)\nabla C(p) = 0$.

Notons que les fonctions de Casimir dépendent seulement de la matrice de Poisson $J(p)$ (et pas de l'hamiltonien H). Elles sont données par l'équation aux dérivées partielles $J(p)\nabla C(p) = 0$ et, comme la Proposition 3.21 assure, elles Poisson-commutent avec toutes les fonctions $f(p)$, i.e., $\{C(p), f(p)\} = 0$.

La matrice de Poisson $J(p)$ du système $\dot{p} = J(p)\nabla H(p)$ étant antisymétrique, son rang en chaque p est pair, que l'on note $2r(p) \in \mathbb{N}$, avec $2r(p) \leq n$, où n est la dimension de l'algèbre de Lie. On appelle le rang de la matrice (ou de la structure)

de Poisson $\max_{p \in \mathfrak{g}^*} 2r(p)$ et on le note $2r$.

La deuxième définition fondamentale (après celle de la super-intégrabilité) est la suivante :

Définition 3.22. Fixons une catégorie \mathcal{C} de fonctions sur \mathfrak{g}^* (polynomiales, rationnelles, algébriques, logarithmiques, etc...). On dit qu'un système de Lie-Poisson de dimension n , avec une structure de Poisson de rang $2r$, est Liouville-intégrable dans la catégorie \mathcal{C} s'il admet $n-r$ intégrales premières fonctionnellement indépendantes $C_1, \dots, C_{n-2r}, I_1, \dots, I_r$ appartenant à la catégorie \mathcal{C} et tels que C_1, \dots, C_{n-2r} sont des fonctions de Casimir de la structure et I_1, \dots, I_r sont deux à deux commutatives.

Cette définition dit que les systèmes hamiltoniens obtenus par la restriction du système de Lie-Poisson aux feuilles symplectiques sont complètement Liouville-intégrables dans la catégorie \mathcal{C} , précisé dans la Définition 3.18 et, en plus, que le feuilletage symplectique est aussi défini par des fonctions appartenant à \mathcal{C} .

3.3 Équation adjointe pour des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 et sa résolution

Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie réelle de dimension $n \geq 3$. On considère (e_1, \dots, e_{n-1}) une base orthonormée de \mathfrak{p} et $[e_1, e_2] = e_n$. On rappelle le système adjoint de Lie-Poisson associé :

$$\dot{p}_i = \sum_{j=1}^{n-1} p_j \{p_i, p_j\}, \quad p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathfrak{g}^*. \quad (3.14)$$

Ce système est toujours quadratique (voir ci-dessous) mais, dans certains cas, il peut se réduire à un système linéaire.

Définition 3.23. Le système adjoint de Lie-Poisson (3.14) est dit linéaire s'il existe une transformation linéaire $P = pM$, où M est une matrice inversible à coefficients réels et une partition $P = (P^1, P^0)$ telles que (3.14) devient

$$\begin{aligned} \dot{P}^1 &= P^1 A \\ \dot{P}^0 &= 0, \end{aligned}$$

où la matrice $A = (A_{ij})$ est linéaire par rapport aux composantes de P^0 (i.e., $A_{ij} = \sum_k A_{ij}^k P_k^0$) et donc constante.

On montre la proposition suivante qu'on utilisera dans la suite. On rappelle que $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ désigne le centre de \mathfrak{g} .

Proposition 3.24. Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie de dimension $n \geq 3$. Alors :

- (i) Le système adjoint de Lie-Poisson (3.14) est toujours quadratique.
- (ii) Si $e_i \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$, pour un certain $1 \leq i \leq n$, alors $\{p_i, p_j\} = 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$ et $\langle p(t), e_i \rangle = p_i(t) = \text{constante}$ le long des solutions de (3.14).
- (iii) Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2, alors le système adjoint de Lie-Poisson associé est linéaire.

Remarque 3.25. Notons que si $e_i \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$, par le (ii) on a $p_i(t)$ est une fonction de Casimir puisque pour tout $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ on a $\{f, p_i\} = 0$.

Démonstration. (i). Pour tout $1 \leq j \leq n$, on a $\dot{p}_j = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \{p_j, p_i\}$. On rappelle que

$\{p_j, p_i\} = \langle p, [e_j, e_i] \rangle$ (voir la section 1.3.1) et on écrit $[e_j, e_i] = \sum_{k=1}^n c_{ji}^k e_k$ où $c_{ji}^k \in \mathbb{R}$.

Puisque $\langle p, e_k \rangle = p_k$ on obtient $\dot{p}_j = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n c_{ji}^k p_k p_i$ qui est quadratique.

(ii). Soit $e_i \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$. On a $[e_k, e_i] = 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$ et alors $\{p_k, p_i\} = 0$, donc $\dot{p}_i = 0$, ce qui signifie $p_i(t) = \text{constante}$.

(iii). Si l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est nilpotente d'ordre 2, en utilisant la Proposition 2.10, il existe une base adaptée (e_1, e_2, \dots, e_n) telle que $\mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_{n-d+1}, \dots, e_n\}$ et $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_{n-c+1}, \dots, e_{n-1}, e_n\}$ où $d = \dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ et $c = \dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ avec $1 \leq d \leq c \leq n - 2$. On pose :

$$P^1 = (p_1, \dots, p_{n-c})^\top \text{ et } P^0 = (p_{n-c+1}, \dots, p_n)^\top.$$

Par le (ii), on a $\dot{P}^0 = 0$, i.e., P^0 est constant. On utilise les relations de la Proposition 2.10 qui donnent les crochets $[e_i, e_j]$, éléments de $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$, par

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=n-d+1}^{n-1} a_{ij}^k e_k + c_{ij} e_n, \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n - c,$$

et tous les autres crochets sont nuls, où la matrice $C = (c_{ij}) = \text{Diag}(c_1 J, \dots, c_r J, O)$ avec $c_1 = 1$, $c_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq r$. On rappelle que $\{p_i, p_j\} = \langle p, [e_i, e_j] \rangle$, alors :

$$\begin{aligned} \{p_i, p_j\} &= \langle p, \sum_{k=n-d+1}^{n-1} a_{ij}^k e_k + c_{ij} e_n \rangle = \sum_{k=n-d+1}^{n-1} a_{ij}^k \langle p, e_k \rangle + c_{ij} \langle p, e_n \rangle \\ &= \sum_{k=n-d+1}^{n-1} a_{ij}^k p_k + c_{ij} p_n. \end{aligned}$$

Le système adjoint de Lie-Poisson (3.14) devient :

$$\dot{p}_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=n-d+1}^{n-1} a_{ij}^k p_k + c_{ij} p_n \right) p_j, \text{ pour } 1 \leq i \leq n. \quad (3.15)$$

Le système (3.15) se décompose alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{p}_i^1 &= \sum_{j=1}^{n-c} \left(\sum_{k=n-d+1}^{n-1} a_{ij}^k p_k^0 + c_{ij} p_n^0 \right) p_j^1, \text{ pour } 1 \leq i \leq n - c, \text{ et} \\ \dot{p}_i^0 &= 0 \text{ pour } n - c + 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ce système (3.16) est linéaire (voir Définition 3.23) car $\dot{P}^0 = 0$ et $\dot{P}^1 = P^1 A$ où $A = (A_{ij})$ est donnée par $A_{ij} = \sum_{k=n-d+1}^n A_{ij}^k P_k^0$ et donc est une matrice constante, ce qui montre la proposition. \square

Remarque 3.26. Il est clair que la matrice $(A_{ij}) = (A_{ij}(P^0))$ est antisymétrique.

On va résoudre le système adjoint de Lie-Poisson (3.14), c'est-à-dire, donner les contrôles optimaux.

Théorème 3.27. *Les solutions du système adjoint de Lie-Poisson*

$$\dot{p}_i = \sum_{j=1}^{n-1} p_j \{p_i, p_j\}, \quad p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathfrak{g}^*,$$

sont des combinaisons linéaires de fonctions trigonométriques et constantes.

Démonstration. En utilisant la Proposition 3.24, on écrit le système (3.14) sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{P}^1 &= P^1 A \\ \dot{P}^0 &= 0, \end{aligned}$$

où la matrice $A = (A_{ij})$ est linéaire par rapport aux composantes de P^0 et donc constante. Les solutions du système $\dot{P}^0 = 0$ sont des constantes et celles du système $\dot{P}^1(t) = AP^1(t)$ sont $P^1(t) = e^{At}P^1(0)$. Fixons des valeurs de P^0 . On sait que si A est une matrice antisymétrique, alors e^{At} est une matrice orthogonale. De plus, on note $\{\pm i\omega_j\}$ pour $1 \leq j \leq 2r$, les valeurs propres de A non nulles qui sont imaginaires pures conjuguées deux à deux, avec $\omega_j \neq 0$ dépendant des paramètres P^0 de la matrice A . On applique le Théorème réel de Jordan, il existe alors une matrice inversible R à coefficients réels telle que $R\tilde{A}R^{-1}=A$, où $\tilde{A} = \text{Diag}(\omega_1 J, \omega_2 J, \dots, \omega_r J, 0)$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $J^2 = -\text{Id}_2$. Alors on a $e^{At} = \text{Re}^{t\tilde{A}}R^{-1}$ avec $e^{t\tilde{A}} = \text{Diag}(e^{\omega_1 Jt}, e^{\omega_2 Jt}, \dots, e^{\omega_r Jt}, \text{Id})$. On obtient par bloc, pour tout $1 \leq i \leq 2r$:

$$e^{\omega_i Jt} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_i t) & \sin(\omega_i t) \\ -\sin(\omega_i t) & \cos(\omega_i t) \end{pmatrix}.$$

Et R étant une matrice à coefficients réels constants, les solutions $P^1(t) = e^{tA}P^1(0)$ où $e^{tA} = \text{Re}^{t\tilde{A}}R^{-1}$ sont des combinaisons de fonctions trigonométriques et constantes (les $p_j(t)$ sont des fonctions trigonométriques pour $1 \leq j \leq 2r$ et constantes pour $2r + 1 \leq j \leq n$). \square

On va maintenant étudier l'intégrabilité du système adjoint de Lie-Poisson (3.14) qui est de la forme

$$\begin{aligned} \dot{P}^1 &= P^1 A \\ \dot{P}^0 &= 0, \end{aligned} \tag{3.17}$$

où $P = (P^1, P^0) \in \mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^n$ et la matrice $A = (A_{ij})$ est antisymétrique et linéaire par rapport aux composantes de P^0 (i.e., $A_{ij} = \sum_k A_{ij}^k P_k^0$). Pour cela, on va utiliser les propriétés d'intégrabilité d'un système linéaire rappelées dans les Sections 3.1.1 et 3.1.2.

Notons $P = (P^1, P^0)^\top$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^\top \end{pmatrix}$ alors le système adjoint de Lie-Poisson (3.17) s'écrit

$$\dot{P} = BP, \quad P \in \mathfrak{g}^*,$$

où B est une matrice antisymétrique qui dépend linéairement de P^0 .

Pour P^0 fixé, le système $\dot{P} = BP$ est un système linéaire à coefficients réels constants et on peut appliquer explicitement le Théorème 3.17. Pour P^0 dans un ouvert dense, le rang de B vaut $2r$ et on a exactement $n - 2r$ valeurs propres nulles, $\lambda_j = 0$ pour $2r + 1 \leq j \leq n$; les autres valeurs propres sont de la forme $\lambda_{2j-1} = i\omega_j$ et $\lambda_{2j} = -i\omega_j$, pour $1 \leq j \leq r$. On a $n - 2r$ relations de \mathbb{N} -résonances d'ordre 1 définies par $1 \cdot \lambda_j = 0$, pour $2r + 1 \leq j \leq n$, qui donnent les intégrales premières (fonctions de Casimir) I_{j-2r} (et pas d'autre fonction de Casimir car $\text{rang } J(p) = 2r$). Le feuilletage symplectique est de dimension $2r$ et est donné par les variétés $I_{j-2r} = \text{const}$, pour $2r + 1 \leq j \leq n$. Il existe au moins r relations de \mathbb{N} -résonances d'ordre 2 définies par $\lambda_{2j-1} + \lambda_{2j} = 0$, pour $1 \leq j \leq r$, qui nous amènent aux intégrales premières quadratiques I_{n-2r+j} , pour $1 \leq j \leq r$. Le système hamiltonien est donc Liouville-intégrable sur chaque feuille (dans la catégorie polynomiale).

Si on fait varier P^0 , alors tous les objets que nous avons définis et utilisés (les valeurs propres, les résonances, les espaces invariants, etc...) peuvent, en général, changer même si la nature de ces objets restera invariante. Pour illustrer ceci, observons que nous avons $n - 2r$ valeurs propres nulles donnant $n - 2r$ relations de \mathbb{N} -résonances d'ordre 1. Bien évidemment, ces valeurs propres et leurs résonances ne change pas si P^0 varie. En revanche, l'espace invariant correspondant à la valeur propre nulle (de multiplicité $n - 2r$), autrement dit, le noyau de B , peut changer. En fait, c vecteurs engendrant le centre $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ de dimension c ne changent pas mais les autres $n - 2r - c$ vecteurs engendrant le noyau de B (et correspondant, en fait, au noyau de A) dépendent linéairement de P^0 . Les intégrales premières qui leurs correspondent s'élèvent en degré même si leurs \mathbb{N} -résonances d'ordre 1

ne change pas. Dans la section suivante, nous analyserons ces changements (des valeurs propres, intégrales premières et leurs degrés, résonances, etc...) en fonction de P^0 , dans le détail cas par cas.

3.4 Intégrabilité des équations adjointes associées aux modèles $\mathfrak{g}_{(n,c,d)}$ pour $n \leq 7$

Dans cette partie, nous allons donner explicitement les intégrales premières fonctionnellement indépendantes pour les systèmes adjoints de Lie-Poisson associés à chaque modèle $\mathfrak{g}_{(n,c,d)}$ d'une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 pour $n \leq 7$. On utilise la classification faite dans le chapitre précédent. On a le résultat suivant.

Théorème 3.28. *Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 de dimension n où $3 \leq n \leq 7$.*

- (i) *L'équation adjointe (3.14) est toujours Liouville-intégrable (en tant qu'un système de Lie-Poisson) dans la catégorie de polynômes.*
- (ii) *L'équation adjointe (3.14) est toujours super-intégrable (en tant qu'un système d'équations différentielles) dans la catégorie logarithmique.*

La démonstration se fait cas par cas et alors elle est donnée dans les sous-sections 3.4.1, 3.4.2 et 3.4.3, où on étudie l'intégrabilité pour chaque cas de notre classement. En fait, le Théorème 3.28 englobe les Théorèmes 3.29, 3.30 et 3.31 qui donnent explicitement le nombre et la nature des intégrales premières dans chaque cas (notons que si $n = 3$ ou $n = 4$, on sait que $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = 1$ (voir Corollaire 2.17) et ce cas sera étudié par la suite en dimension arbitraire n dans la section 3.5).

Notons que le Théorème 3.17 décrit toutes les propriétés qualitatives de l'intégrabilité de l'équation $\dot{P}(t) = BP(t)$, avec $P \in \mathbb{R}^N$ et $B \in M_N(\mathbb{R})$ antisymétrique non nulle. Dans l'Appendix du Chapitre 3 on donne une liste explicite de toutes les intégrales premières de ce système dans le cas où $N = 4$; cette liste sera utile pour donner explicitement les intégrales premières en dimension 5, 6 et 7.

3.4.1 Étude du cas $n = 5$

Dans la classification des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2, pour $n = 5$, nous avons obtenu 3 modèles qui sont donnés dans une base adaptée (e_1, \dots, e_5) par les crochets non nuls suivants (Théorème 2.19) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{(5,3,1)} &= (\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^2 : [e_1, e_2] = e_5. \\ \mathfrak{g}_{(5,1,1)} &= (\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) : [e_1, e_2] = e_5 \text{ et } [e_3, e_4] = c_2 e_5 \text{ avec } |c_2| \geq 1. \\ \mathfrak{g}_{(5,2,2)} &: [e_1, e_2] = e_5 \text{ et } [e_1, e_3] = a_1 e_4 \text{ avec } a_1 > 0. \end{aligned}$$

Pour chaque modèle, nous écrivons le système adjoint de Lie-Poisson en utilisant la relation (3.16) de la Section 3.3 et nous donnons les intégrales premières indépendantes explicitement.

A la fin de cette sous-section (après la démonstration) nous donnerons une courte description de la géométrie du système adjoint de Lie-Poisson correspondant à chaque modèle de dimension 5.

Théorème 3.29. *Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 de dimension $n = 5$.*

- (i) *Si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^2$, alors le système adjoint de Lie-Poisson associé admet 3 intégrales premières **linéaires** et une **quadratique** indépendantes.*
- (ii) *Si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$, alors le système adjoint de Lie-Poisson associé admet 2 intégrales premières **linéaires** et 2 intégrales premières **quadratiques** indépendantes.*
- (iii) *Si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}})$ alors le système adjoint de Lie-Poisson associé admet $n - 1 = 4$ intégrales premières indépendantes dont 1 intégrale première **linéaire**, 2 intégrales premières **quadratiques** et soit une intégrale première **polynomiale** de degré $|m| + q$ lorsque c_2 est rationnel, $c_2 = \frac{m}{q}$ irréductible ($q > 0$), soit une intégrale première **logarithmique** si c_2 est irrationnel.*

Démonstration. (i). Le système adjoint de Lie-Poisson associé à la SR-algèbre de Lie $(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^2$ s'écrit :

$$\dot{p}_1(t) = p_2(t)p_5(t), \quad \dot{p}_2(t) = -p_1(t)p_5(t) \quad \text{et} \quad \dot{p}_3(t) = \dot{p}_4(t) = \dot{p}_5(t) = 0.$$

Ce système admet 4 intégrales premières indépendantes dont 3 fonctions linéaires qui sont des fonctions de Casimir $I_i(p)$ pour $i = 1, 2, 3$ (voir la Remarque 3.25) et l'hamiltonien $H = I_4$:

$$I_1(p) = p_3, \quad I_2(p) = p_4, \quad I_3(p) = p_5 \quad \text{et} \quad I_4(p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2).$$

(ii). Le système adjoint de Lie-Poisson associé au modèle $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$ s'écrit :

$$\dot{p}_1(t) = p_2(t)p_5(t) + a_1p_3(t)p_4(t), \quad \dot{p}_2(t) = -p_1(t)p_5(t), \quad \dot{p}_3(t) = -a_1p_1(t)p_4(t),$$

et $\dot{p}_4(t) = \dot{p}_5(t) = 0$, avec $a_1 > 0$.

Ce système adjoint de Lie-Poisson admet 4 intégrales premières quadratiques indépendantes dont 3 fonctions de Casimir I_1, I_2 et I_3 et l'hamiltonien $H = I_4$ donnés par :

$$\begin{aligned} I_1(p) &= p_4, & I_2(p) &= p_5, & I_3(p) &= -a_1 p_2 p_4 + p_3 p_5 \text{ et} \\ I_4(p) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2). \end{aligned}$$

(iii). Le système adjoint de Lie-Poisson associé à la SR-algèbre de Lie $(\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}^b, \mathcal{B}^b)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= p_2(t)p_5, & \dot{p}_2(t) &= -p_1(t)p_5, & \dot{p}_3(t) &= c_2 p_4(t)p_5, \\ \dot{p}_4(t) &= -c_2 p_3(t)p_5 & \text{et } \dot{p}_5(t) &= 0 \text{ où } |c_2| \geq 1. \end{aligned}$$

En posant $P^1 = (p_1, p_2, p_3, p_4)^\top$, ce système s'écrit alors $\dot{P}^1(t) = AP^1(t)$, avec $A = p_5 \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & c_2 J \end{pmatrix}$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On trouve une intégrale première linéaire qui est I_1 (une fonction de Casimir) et deux intégrales premières quadratiques indépendantes, données par :

$$I_1(p) = p_5, \quad I_2(p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2), \quad I_3(p) = \frac{1}{2}(p_3^2 + p_4^2).$$

L'hamiltonien est donné par $H = I_2 + I_3$. Il existe une quatrième intégrale première I_4 indépendante des trois autres ; I_4 est polynomiale ou logarithmique suivant le paramètre c_2 . On utilise le Théorème 3.17(iii) et le Lemme 3.16 et on obtient I_4 , polynomiale s'il existe une autre relation de \mathbb{N} -résonance indépendante, i.e., c_2 rationnel et dans ce cas on peut le représenter comme $c_2 = \frac{m}{q}$ irréductible et $q > 0$ et la résonance est $m\lambda_1 + q\lambda_4 = 0$, si $m > 0$, et $-m\lambda_1 + q\lambda_3 = 0$, si $m < 0$. Ces résonances donnent l'intégrale première polynomiale :

$$\begin{aligned} I_4 &= \operatorname{Re}((-ip_1 + p_2)^m (ip_3 + p_4)^q) \text{ si } m > 0, \\ I_4 &= \operatorname{Re}((ip_1 + p_2)^m (-ip_3 + p_4)^q) \text{ si } m < 0. \end{aligned}$$

Si c_2 est irrationnel, I_4 est une intégrale première logarithmique (voir Théorème 3.17(iv) et le Lemme 3.16 et sa preuve). \square

Analysons les résultats obtenus :

- Pour $\mathfrak{g}_{(5,3,1)}$, on a $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 3$ et $p_3 = \langle p, e_3 \rangle$, $p_4 = \langle p, e_4 \rangle$, $p_5 = \langle p, e_5 \rangle$ où $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_3, e_4, e_5\}$ qui donnent les trois fonctions de Casimir : $I_1 = p_3$, $I_2 = p_4$ et $I_3 = p_5$.

Les valeurs propres sont $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ et $\lambda_{1,2} = \pm ip_5$. Les valeurs propres dépendent de $P^0 = (p_3, p_4, p_5)$ mais les résonances non. Notons $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_5)$, on a trois \mathbb{N} -résonances d'ordre 1 :

$$1 \cdot \lambda_3 = 0 \text{ donnant } \alpha = (0, 0, 1, 0, 0),$$

$$1 \cdot \lambda_4 = 0 \text{ donnant } \alpha = (0, 0, 0, 1, 0),$$

$$1 \cdot \lambda_5 = 0 \text{ donnant } \alpha = (0, 0, 0, 0, 1),$$

et une \mathbb{N} -résonance, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, d'ordre 2 correspondant à $\alpha = (1, 1, 0, 0, 0)$, et donnant l'intégrale première $I_4 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$. Le feuilletage symplectique est formé par $p_i = \text{const}$, $3 \leq i \leq 5$, et sur chaque feuille on a un système intégrable avec l'intégrale première $I_4 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$, la même sur chaque feuille.

- Pour $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$, on a $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 2$. Les valeurs propres sont $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ et $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{a_1^2 p_4^2 + p_5^2}$. On a trois \mathbb{N} -résonances, $1 \cdot \lambda_3 = 0$, $1 \cdot \lambda_4 = 0$ et $1 \cdot \lambda_5 = 0$, d'ordre 1, et une \mathbb{N} -résonance, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, d'ordre 2. L'espace propre correspondant à $\lambda = 0$ (i.e., le noyau de B) dépend explicitement de p_4 et p_5 . En fait, cet espace propre est engendré par e_4 , e_5 et $a_1 p_4 e_2 - p_5 e_3$ qui donnent, respectivement (voir l'analyse réalisée dans la démonstration du Théorème 3.14(i)) les intégrales premières (fonctions de Casimir) $I_1 = p_4$, $I_2 = p_5$ et $I_3 = -a_1 p_2 p_4 + p_3 p_5$. Observons que pour toutes les valeurs fixées de p_4 et p_5 , la fonction de Casimir I_3 est linéaire mais elle est quadratique en tant qu'une fonction sur $\mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^5$. Le feuilletage symplectique est formé par les surfaces $I_i = \text{const}$, $1 \leq i \leq 3$, et sur chacune nous avons l'intégrale première quadratique I_4 correspondant à la \mathbb{N} -résonance $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

- Pour $\mathfrak{g}_{(5,1,1)}$, on a $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 1$. Les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = \pm ip_5$, $\lambda_{3,4} = \pm ip_5 c_2$, $\lambda_5 = 0$. On a une \mathbb{N} -résonance d'ordre 1 donnée par $1 \cdot \lambda_5 = 0$ définissant l'intégrale première (fonction de Casimir) $I_1 = p_5$ (et pas d'autre fonction de Casimir car $\text{rang } J(p) = 4$). Le feuilletage symplectique est de dimension quatre et est donné par les variétés $I_1 = p_5 = \text{const}$. Il existe au moins deux relations de \mathbb{N} -résonances d'ordre 2 définies par $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 + \lambda_4 = 0$ qui donnent les intégrales premières $I_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$ et $I_3 = \frac{1}{2}(p_3^2 + p_4^2)$. L'hamiltonien est donné par $H = I_2 + I_3$ et le système hamiltonien est Liouville-intégrable sur chaque feuille (dans la catégorie polynomiale).

Il peut exister une quatrième résonance qui donne la super-intégrabilité dans la catégorie polynomiale. En fait, une quatrième résonance existe si et seulement si c_2 est rationnel (où les valeurs propres sont $\lambda_1 = ip_5$, $\lambda_2 = -ip_5$, $\lambda_3 = ip_5 c_2$,

$\lambda_4 = -ip_5c_2$). Dans ce cas on peut le représenter comme $c_2 = \frac{m}{q}$ irréductible et $q > 0$ et la résonance est $m\lambda_1 + q\lambda_4 = 0$, si $m > 0$, et $-m\lambda_1 + q\lambda_3 = 0$, si $m < 0$. Ces résonances donnent l'intégrale première polynomiale :

$$\begin{aligned} I_4 &= \operatorname{Re}((-ip_1 + p_2)^m(ip_3 + p_4)^q) \text{ si } m > 0, \\ I_4 &= \operatorname{Re}((ip_1 + p_2)^m(-ip_3 + p_4)^q) \text{ si } m < 0. \end{aligned}$$

Enfin, nous avons démontré, voir Proposition 3.27, que les solutions des systèmes adjoints, qui sont les contrôles optimaux, sont des fonctions trigonométriques du temps ou des constantes. Pour compléter ce résultat, en dimension $n = 5$, on calcule explicitement les solutions de ces systèmes.

• Pour $(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^h, \mathcal{B}^h) \oplus \mathbb{R}^2$, nous avons p_3, p_4 et p_5 sont constantes et les solutions $p_1(t)$ et $p_2(t)$ sont données par :

$$\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(p_5t) & \sin(p_5t) \\ -\sin(p_5t) & \cos(p_5t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix}$$

• Pour $(\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$, nous avons p_5 est constante et les solutions $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ et $p_4(t)$ sont données par :

$$\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ p_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(p_5t) & \sin(p_5t) & 0 & 0 \\ -\sin(p_5t) & \cos(p_5t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(c_2p_5t) & \sin(c_2p_5t) \\ 0 & 0 & -\sin(c_2p_5t) & \cos(c_2p_5t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ p_3(0) \\ p_4(0) \end{pmatrix}$$

• Pour $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$, on a p_4 et p_5 sont constantes. Il est évident que si $p_4 = p_5 = 0$, on a le système $\dot{p} = 0$, donc on peut supposer que $(p_4, p_5) \neq (0, 0)$. Posons $\omega_1 = \sqrt{a_1^2p_4^2 + p_5^2}$. Les solutions $p_1(t), p_2(t)$ et $p_3(t)$ sont données par :

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \cos(\omega_1t)p_1(0) + (a_1p_4p_3(0) + p_5p_2(0))\frac{\sin(\omega_1t)}{\omega_1}, \\ p_2(t) &= -p_5\frac{\sin(\omega_1t)}{\omega_1}p_1(0) + \frac{1}{\omega_1^2}(-a_1^2p_4^2 + p_5^2\cos(\omega_1t))p_2(0) \\ &\quad + \frac{1}{\omega_1^2}(-a_1p_5p_4\cos(\omega_1t) + a_1p_5p_4p_3(0)), \\ p_3(t) &= -a_1p_4\frac{\sin(\omega_1t)}{\omega_1}p_1(0) - \frac{a_1p_5p_4}{\omega_1^2}\cos(\omega_1t) + \frac{a_1p_5p_4}{\omega_1^2}p_2(0) \\ &\quad + \left(-\frac{p_5^2}{\omega_1^2} - \frac{a_1^2p_4^2}{\omega_1^2}\cos(\omega_1t)\right)p_3(0). \end{aligned}$$

3.4.2 Étude du cas $n = 6$

Pour $n = 6$, on utilise la classification faite dans le Théorème 2.21. A la fin de cette sous-section (après la démonstration) nous donnerons une courte description de la géométrie du système adjoint de Lie-Poisson correspondant à chaque modèle de dimension 6.

Théorème 3.30. *Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 de dimension $n = 6$.*

- (i) *Si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^3$ ou à $\mathfrak{g}_{(5,2,2)} \oplus \mathbb{R}$ ou à $\mathfrak{g}_{(6,3,3)}$, alors le système adjoint de Lie-Poisson associé admet $n - 1 = 5$ intégrales premières **quadratiques** indépendantes (dont 3 ou 4 sont linéaires selon les cas).*
- (ii) *Si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}$ alors le système adjoint de Lie-Poisson associé admet $n - 1 = 5$ intégrales premières indépendantes, dont 2 intégrales premières **linéaires**, 2 intégrales premières **quadratiques** et soit une intégrale première **polynomiale** de degré $|m| + q$ si c_2 est rationnel ($c_2 = \frac{m}{q}$ irréductible avec $q > 0$), soit une intégrale première **logarithmique** si c_2 est irrationnel.*
- (iii) *Si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^1$ ou à $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^5$, alors le système adjoint de Lie-Poisson associé admet $n - 1 = 5$ intégrales premières indépendantes, dont 2 intégrales premières **linéaires**, 2 intégrales premières **quadratiques** et une intégrale première **logarithmique**.*
- (iv) *Si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^i$, pour $2 \leq i \leq 9$ et $i \neq 5$, alors le système adjoint de Lie-Poisson associé admet $n - 1 = 5$ intégrales premières indépendantes, dont 2 intégrales premières **linéaires**, une intégrale première **quadratique**, une intégrale première **polynomiale** degré 4 et une intégrale première **logarithmique**.*

Démonstration. (i). Nous avons $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 3$. Dans ce cas on a $P^0 = (p_4, p_5, p_6)^\top$ avec $\dot{P}^0 = 0$. Par conséquent les systèmes adjoints associés admettent 3 fonctions linéaires qui sont des fonctions de Casimir :

$$I_i(p) = p_{i+3}, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

Notons que pour $(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^3$ ou $\mathfrak{g}_{(5,2,2)} \oplus \mathbb{R}$, on se ramène au cas où \mathfrak{g} est de dimension 5. La quatrième intégrale première est une fonction de Casimir donnée par :

$$I_4(p) = p_3, \text{ pour } (\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^3,$$

et

$$I_4(p) = -a_1 p_2 p_5 + p_3 p_6 \text{ pour } \mathfrak{g}_{(5,2,2)} \oplus \mathbb{R}.$$

De plus, nous avons l'hamiltonien $H = I_5$ donné par :

$$I_5(p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2)$$

Pour $\mathfrak{g}_{(6,3,3)}$, le système adjoint de Lie-Poisson associé est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= p_2(t)p_6 + a_1 p_3(t)p_4, \\ \dot{p}_2(t) &= -p_1(t)p_6 + a_2 p_3(t)p_5, \\ \dot{p}_3(t) &= -a_1 p_1(t)p_4 - a_2 p_2(t)p_5, \text{ avec } a_1 > 0, a_2 > 0 \\ \text{et } \dot{p}_4 &= \dot{p}_5 = \dot{p}_6 = 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

On a 4 fonctions de Casimir indépendantes données par $I_i = p_{i+3}$ pour $i = 1, 2, 3$ et

$$I_4(p) = a_2 p_1 p_5 - a_1 p_2 p_4 + p_3 p_6 \text{ avec } a_1 > 0 \text{ et } a_2 > 0,$$

et l'hamiltonien

$$H = I_5(p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2).$$

(ii). On se ramène à $(\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}})$ étudié dans le Théorème 3.29(ii) pour $n = 5$ et nous avons en plus $\dot{p}_6 = 0$, qui donne une intégrale première linéaire.

Pour (iii) et (iv), on est dans le cas où $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 2$ avec $\dot{p}_5 = \dot{p}_6 = 0$. Donc p_5 et p_6 sont des intégrales premières linéaires qui sont des fonctions de Casimir.

• Pour (iii), le système adjoint associé est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= p_2(t)p_6, \\ \dot{p}_2(t) &= -p_1(t)p_6, \\ \dot{p}_3(t) &= b_1 p_4(t)p_5 + b_2 p_4(t)p_6, \\ \dot{p}_4(t) &= -b_1 p_3(t)p_5 - b_2 p_3(t)p_6, \text{ avec } b_1, b_2 > 0 \\ \text{et } \dot{p}_5 &= \dot{p}_6 = 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

En posant $P^1 = (p_1, p_2, p_3, p_4)^\top$, le système adjoint est de la forme $\dot{P}^1(t) = AP^1(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} aJ & 0 \\ 0 & bJ \end{pmatrix}$, où $a = p_6$ et $b = b_1 p_5 + b_2 p_6$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On applique le Théorème 3.17 et on utilise l'annexe du Chapitre 3 pour conclure que ce système possède 2 intégrales premières linéaires (qui sont des fonctions de Casimir) et deux intégrales premières quadratiques indépendantes :

$$I_1(p) = p_5, \quad I_2(p) = p_6, \quad I_3(p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) \text{ et } I_4(p) = \frac{1}{2}(p_3^2 + p_4^2),$$

et une intégrale première $I_5(p)$ indépendante des quatre autres, définie lorsque $p_2 \neq 0$ et $p_4 \neq 0$ donnée par :

$$I_5(p) = p_6 \arctan\left(\frac{p_3}{p_4}\right) - (b_1 p_5 + b_2 p_6) \arctan\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Il suffit d'utiliser le Lemme 3.16 pour montrer qu'il existe une intégrale première logarithmique indépendante de $I_i(p)$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

• Pour (iv), on regroupe les relations de commutations des algèbres de Lie associées aux modèles $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^i$, pour $2 \leq i \leq 9$ et $i \neq 5$, sous la forme générale suivante :

$$[e_1, e_2] = e_6, \quad [e_1, e_3] = b_1 e_5, \quad [e_2, e_4] = b_2 e_5, \quad [e_3, e_4] = b_3 e_5 + b_4 e_6,$$

avec $b_i \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq 4$ qui vérifient les conditions du Théorème 2.21. On regroupe ainsi les systèmes adjoints associés sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= p_2(t)p_6 + b_1 p_3(t)p_5 \\ \dot{p}_2(t) &= -p_1(t)p_6 + b_2 p_4(t)p_5 \\ \dot{p}_3(t) &= -b_1 p_1(t)p_5 + b_3 p_4(t)p_5 + b_4 p_4(t)p_6 \\ \dot{p}_4(t) &= -b_2 p_2(t)p_5 - b_3 p_3(t)p_5 - b_4 p_3(t)p_6 \text{ et } \dot{p}_5 = \dot{p}_6 = 0, \end{aligned} \tag{3.20}$$

avec $b_i \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq 4$ vérifiant les conditions du Théorème 2.21.

En posant $P^1 = (p_1, p_2, p_3, p_4)^\top$, le système adjoint (3.20) s'écrit $\dot{P}^1(t) = AP^1(t)$, il suffit d'utiliser le Théorème 3.17 et l'annexe du Chapitre 3 avec $A = \begin{pmatrix} aJ & M \\ -M^T & bJ \end{pmatrix}$

et $M = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ où $a = p_6$, $b = b_3 p_5 + b_4 p_6$, $d_1 = b_1 p_5$ et $d_2 = b_2 p_5$.

Les systèmes adjoints associés aux algèbres de Lie notées $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^i$, pour $2 \leq i \leq 9$, $i \neq 5$, possèdent 2 intégrales premières linéaires et une quadratique indépendantes :

$$I_1(p) = p_5, \quad I_2(p) = p_6 \text{ et } I_3(p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2),$$

et une quatrième intégrale première polynomiale de degré 4 indépendante des autres. On note cette intégrale première I_4 . Elle dépend des coefficients b_i , $1 \leq i \leq 4$ et de d_1, d_2 (vérifiant les conditions du Théorème 2.21) et est donnée par (voir l'annexe du Chapitre 3) :

$$\begin{aligned}
I_4(p) &= p_5^2(-b_1^2 + b_2^2)p_2^2 + (p_5^2 - p_6^2 + (b_3p_5 + b_4p_6)^2)p_3^2 \\
&+ (-b_1^2p_5^2 + b_2^2p_5^2 - p_6^2 + (b_3p_5 + b_4p_6)^2)p_4^2 + 2p_5(b_1p_6 + b_2(b_3p_5 + b_4p_6))p_2p_3 \\
&- 2p_5(b_2p_6 + b_1(b_3p_5 + b_4p_6))p_1p_4
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Une cinquième intégrale première I_5 est donnée par :

$$I_5(p) = \sqrt{\alpha_1} \arctan \left(\frac{\gamma_1^2 p_1 + \gamma_4^2 p_4}{\beta_2^2 p_2 + \beta_3^2 p_3} \right) - \sqrt{\alpha_2} \arctan \left(\frac{\gamma_1^1 p_1 + \gamma_4^1 p_4}{\beta_2^1 p_2 + \beta_3^1 p_3} \right),$$

(lorsque $\beta_2^2 p_2 + \beta_3^2 p_3 \neq 0$ et $\beta_2^1 p_2 + \beta_3^1 p_3 \neq 0$) où les valeurs propres de A sont $\pm i\sqrt{\alpha_1}$ et $\pm i\sqrt{\alpha_2}$ et $\gamma_1^2, \gamma_4^2, \beta_2^2, \beta_3^2, \gamma_1^1, \gamma_4^1, \beta_2^1, \beta_3^1$ sont des constantes réelles qui sont données en détails dans l'annexe du Chapitre 3. Il suffit d'appliquer le Lemme 3.16 pour en déduire une intégrale première logarithmique. \square

Analysons les résultats obtenus :

- L'étude des cas $(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{g}_{(5,2,2)} \oplus \mathbb{R}$ et $(\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}$ est similaire à celle réalisée en dimension 5 avec en plus une fonction de Casimir supplémentaire donnée par p_6 .

- Pour $\mathfrak{g}_{(6,3,3)}$, on a $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 3$. Les valeurs propres sont $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$ et $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{a_1^2 p_4^2 + a_2^2 p_5^2 + p_6^2}$. On a quatre \mathbb{N} -résonances d'ordre 1 données par $1 \cdot \lambda_3 = 0$, $1 \cdot \lambda_4 = 0$, $1 \cdot \lambda_5 = 0$, et $1 \cdot \lambda_6 = 0$, et une \mathbb{N} -résonance, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, d'ordre 2. L'espace propre correspondant à $\lambda = 0$ (i.e., le noyau de B) dépend explicitement de p_4 , p_5 et p_6 . En fait, on a les intégrales premières (fonctions de Casimir) $I_1 = p_4$, $I_2 = p_5$, $I_3 = p_6$ et $I_4 = a_2 p_1 p_5 - a_1 p_2 p_4 + p_3 p_6$. Observons que pour toutes les valeurs fixées de p_4 , p_5 et p_6 , la fonction de Casimir I_4 est linéaire mais elle est quadratique en tant qu'une fonction sur $\mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^6$. Le feuilletage symplectique est formé par les surfaces $I_i = \text{const}$, $1 \leq i \leq 4$, et sur chacune nous avons l'intégrale première quadratique I_5 correspondant à la \mathbb{N} -résonance $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

- Pour $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^1$ et $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^5$, on a $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 2$. Les valeurs propres sont $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$ et $\lambda_{1,2} = \pm i p_6$ et $\lambda_{3,4} = \pm i(b_1 p_5 + b_2 p_6)$. On a deux \mathbb{N} -résonances d'ordre 1 définies par $1 \cdot \lambda_5 = 0$ et $1 \cdot \lambda_6 = 0$ qui donnent les intégrales premières (fonctions de Casimir) $I_1 = p_5$ et $I_2 = p_6$ (et pas d'autre fonction de Casimir car $\text{rang } J(p) = 4$).

Le feuilletage symplectique est de dimension quatre et est donné par les variétés $I_1 = p_5 = \text{const}$ et $I_2 = p_6 = \text{const}$. Il existe au moins deux relations de \mathbb{N} -résonances d'ordre 2 définies par $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 + \lambda_4 = 0$ qui nous amènent aux intégrales premières $I_3 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$ et $I_4 = \frac{1}{2}(p_3^2 + p_4^2)$. L'hamiltonien est donné par $H = I_3 + I_4$ et le système hamiltonien est Liouville-intégrable sur chaque feuille (dans la catégorie polynomiale).

Il existe une cinquième intégrale première qui donne la super-intégrabilité dans la catégorie logarithmique construite à partir de l'intégrale (à l'aide du Lemme 3.16)

$$I_5 = p_6 \arctan\left(\frac{p_3}{p_4}\right) - (b_1 p_5 + b_2 p_6) \arctan\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

• Pour $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^i$, où $2 \leq i \leq 9$ et $i \neq 5$, on a $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 2$. Les valeurs propres sont $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$ et $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$ et $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$ où ω_1 et ω_2 dépendent de p_5 et p_6 . On a deux \mathbb{N} -résonances, $1 \cdot \lambda_5 = 0$ et $1 \cdot \lambda_6 = 0$, d'ordre 1 qui nous amènent aux intégrales premières (fonctions de Casimir) $I_1 = p_5$ et $I_2 = p_6$ (et pas d'autre fonction de Casimir car $\text{rang } J(p) = 4$). Le feuilletage symplectique est de dimension quatre et est donné par les variétés $I_1 = p_5 = \text{const}$ et $I_2 = p_6 = \text{const}$. Il existe au moins deux relations de \mathbb{N} -résonances d'ordre 2 définies par $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 + \lambda_4 = 0$ qui nous amènent aux intégrales premières $I_3 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2)$ et I_4 donnée par (3.21). La raison pour laquelle les résonances d'ordre deux nous produisent les intégrales dont une est de degré plus haut que deux (quatre dans ce cas) est que les espaces invariants (correspondant, respectivement à $\lambda_{1,2}$ et $\lambda_{3,4}$) dépendent explicitement de p_5 et p_6 . Alors cette intégrale I_4 , pour toutes les valeurs fixées de p_5 et p_6 , est quadratique mais elle est polynomiale de degré 4 en tant qu'une fonction sur $\mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^6$. L'hamiltonien est donné par I_3 et le système hamiltonien est Liouville-intégrable sur chaque feuille (dans la catégorie polynomiale).

Il existe une cinquième intégrale première qui donne la super-intégrabilité dans la catégorie logarithmique construite à partir de l'intégrale (à l'aide du Lemme 3.16)

$$I_5(p) = \omega_1 \arctan\left(\frac{\gamma_1^2 p_1 + \gamma_4^2 p_4}{\beta_2^2 p_2 + \beta_3^2 p_3}\right) - \omega_2 \arctan\left(\frac{\gamma_1^1 p_1 + \gamma_4^1 p_4}{\beta_2^1 p_2 + \beta_3^1 p_3}\right),$$

(lorsque $\beta_2^2 p_2 + \beta_3^2 p_3 \neq 0$ et $\beta_2^1 p_2 + \beta_3^1 p_3 \neq 0$) où les valeurs propres de A sont $\pm i\omega_1$ et $\pm i\omega_2$ et $\gamma_1^2, \gamma_4^2, \beta_2^2, \beta_3^2, \gamma_1^1, \gamma_4^1, \beta_2^1, \beta_3^1$ sont des constantes réelles qui sont données explicitement dans l'annexe du Chapitre 3. Il suffit d'appliquer le Lemme 3.16 pour en déduire une intégrale première logarithmique.

3.4.3 Étude du cas $n = 7$

A la fin de cette sous-section (après la démonstration) nous donnerons une courte description de la géométrie du système adjoint de Lie-Poisson correspondant à chaque modèle de dimension 7. Rappelons que par $d(A)$ on note $\dim \text{Vect}_{\mathbb{Q}}\{\lambda_i \in \sigma(A)\}$, où $\sigma(A)$ est le spectre de la matrice A définissant l'équation $\dot{P}^1 = AP^1$.

Théorème 3.31. *Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 de dimension $n = 7$.*

- (i) *Si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^4$ ou à $\mathfrak{g}_{(5,2,2)} \oplus \mathbb{R}^2$ ou à $\mathfrak{g}_{(6,3,3)} \oplus \mathbb{R}$ ou à l'une des deux SR-algèbres de Lie données dans une base adaptée (e_1, \dots, e_7) par $[e_1, e_2] = e_7$, $[e_1, e_3] = b_1 e_5 + b_2 e_6$ et $[e_1, e_4] = b_3 e_5$, avec $b_2, b_3 \in \mathbb{R}^*$ et $b_1 \in \mathbb{R}$, alors le système adjoint de Lie-Poisson associé admet $n - 1 = 6$ intégrales premières **quadratiques** indépendantes (dont 3, 4 ou 5 sont **linéaires** selon les cas).*
- (ii) *Si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^2$ alors le système adjoint de Lie-Poisson associé admet $n - 1 = 6$ intégrales premières indépendantes, dont 3 intégrales premières **linéaires**, 2 intégrales premières **quadratiques** et soit une intégrale première **polynomiale** de degré $|m| + q$ si c_2 est rationnel ($c_2 = \frac{m}{q}$ irréductible avec $q > 0$), soit une intégrale première **logarithmique** si c_2 est irrationnel.*
- (iii) *Si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_7, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}})$ alors le système adjoint de Lie-Poisson associé admet $n - 1 = 6$ intégrales premières indépendantes, dont une intégrale première **linéaire**, 3 intégrales premières **quadratiques** et 2 intégrales premières additionnelles **logarithmiques**. On peut remplacer une (resp. deux) de ces intégrales premières **logarithmiques** par une (resp. deux) intégrale(s) première(s) **polynomiale(s)** si et seulement si $d(A) = 2$ (resp. $d(A) = 1$).*
- (iv) *Pour tous les autres cas, le système adjoint de Lie-Poisson associé admet $n - 1 = 6$ intégrales premières indépendantes. Plus précisément, si $(c, d) = (3, 2)$, on a 3 intégrales premières **linéaires** et soit 2 intégrales premières **quadratiques** et une intégrale première **logarithmique**, soit une intégrale première **quadratique**, une intégrale première **polynomiale** de degré 4 et une intégrale première **logarithmique**; si $(c, d) = (3, 3)$, on a 3 intégrales premières **linéaires**, une intégrale première **quadratique**, une intégrale première **polynomiale** de degré 4 et une intégrale première **logarithmique**; si $(c, d) = (2, 2)$, on a 2 intégrales premières **linéaires**, une intégrale première **quadratique**, 2 intégrales premières **polynomiales** de degré, respectivement,*

3 et 4 et une intégrale première **logarithmique**.

Démonstration. (i). Pour $(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^4$, on a $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 5$. Dans ce cas $P^0 = (p_3, p_4, p_5, p_6, p_7)^\top$ et $\dot{P}^0 = 0$. Par conséquent le système adjoint de Lie-Poisson associé admet 5 fonctions linéaires qui sont des fonctions de Casimir :

$$I_i(p) = p_{i+2}, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 5,$$

et l'hamiltonien $H = I_6$ donnée par :

$$I_6(p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2).$$

Notons que pour $\mathfrak{g}_{(5,2,2)} \oplus \mathbb{R}^2$ ou $\mathfrak{g}_{(6,3,3)} \oplus \mathbb{R}$ on se ramène au cas où \mathfrak{g} est de dimension 6. On a $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 4$, et donc les systèmes adjoints de Lie-Poisson associés admettent 4 fonctions de Casimir données par

$$I_i(p) = p_{i+3}, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 4,$$

et on a une fonction de Casimir supplémentaire donnée par

$$I_5(p) = a_5 p_1 p_6 - a_4 p_2 p_5 - a_1 p_2 p_6 + p_3 p_7.$$

Dans la classification, si $a_4 = a_5 = 0$ et $a_1 \neq 0$ alors $I_5(p) = -a_1 p_2 p_6 + p_3 p_7$ est la cinquième intégrale première quadratique du système adjoint de Lie-Poisson associé à $\mathfrak{g}_{(5,2,2)} \oplus \mathbb{R}^2$.

Si $a_4 a_5 \neq 0$ et $a_1 = 0$ alors $I_5(p) = a_5 p_1 p_6 - a_4 p_2 p_5 + p_3 p_7$ est la cinquième intégrale première quadratique du système adjoint de Lie-Poisson associé à $\mathfrak{g}_{(6,3,3)} \oplus \mathbb{R}$.

De plus, l'hamiltonien $H = I_6$ est donné par

$$I_6(p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2).$$

Considérons les algèbres de Lie données par les crochets non nuls :

$$[e_1, e_2] = e_7, \quad [e_1, e_3] = b_1 e_5 + b_2 e_6 \quad \text{et} \quad [e_1, e_4] = b_3 e_5, \quad \text{avec } b_2, b_3 \in \mathbb{R}^* \quad \text{et } b_1 \in \mathbb{R}.$$

On a $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 3$; les systèmes adjoints de Lie-Poisson associés s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= p_2(t)p_7 + b_1 p_3(t)p_5 + b_2 p_3(t)p_6 + b_3 p_4(t)p_5 \\ \dot{p}_2(t) &= -p_1(t)p_7 \\ \dot{p}_3(t) &= -b_1 p_1(t)p_5 - b_2 p_1(t)p_6 \\ \dot{p}_4(t) &= -b_3 p_1(t)p_5 \quad \text{et} \quad \dot{p}_5 = \dot{p}_6 = \dot{p}_7 = 0 \end{aligned} \tag{3.22}$$

avec $b_2, b_3 \in \mathbb{R}^*$ et $b_1 \in \mathbb{R}$. Ces systèmes admettent 5 fonctions de Casimir (car $\text{rang } J(p) = 2$) :

$$I_i(p) = p_{i+4}, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 3,$$

et

$$I_4(p) = b_3 p_2 p_5 - p_4 p_7 \quad \text{et} \quad I_5(p) = b_2 b_3 p_2 p_6 - b_3 p_3 p_7 + b_1 p_4 p_7 \quad \text{pour } b_1 \in \mathbb{R}.$$

De plus, ces systèmes adjoints admettent l'hamiltonien comme intégrale première quadratique

$$H = I_6(p) = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2.$$

(ii). Pour le cas $(\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}^b, \mathcal{B}^b) \oplus \mathbb{R}^2$, on se ramène à $(\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}^b, \mathcal{B}^b)$ en dimension 5 avec en plus $\dot{p}_6 = \dot{p}_7 = 0$, ce qui donne 2 intégrales premières linéaires indépendantes, qui sont des fonctions de Casimir et qui s'ajoutent aux intégrales premières obtenues pour $(\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}^b, \mathcal{B}^b)$.

(iii). Le système adjoint de Lie-Poisson associé à l'algèbre de Lie $(\mathfrak{h}_7, \mathfrak{p}^b, \mathcal{B}^b)$ est le suivant :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= p_2(t)p_7, & \dot{p}_2(t) &= -p_1(t)p_7, & \dot{p}_3(t) &= c_2 p_4(t)p_7, \\ \dot{p}_4(t) &= -c_2 p_3(t)p_7, & \dot{p}_5(t) &= c_3 p_6(t)p_7, & \dot{p}_6(t) &= -c_3 p_5(t)p_7 \\ \text{et } \dot{p}_7 &= 0 \text{ où } |c_3| \geq |c_2| \geq 1. \end{aligned}$$

En posant $P^1 = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)^\top$, le système adjoint de Lie-Poisson associé est donc de la forme normale de Jordan $\dot{P}^1(t) = AP^1(t)$, avec

$$A = p_7 \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & c_2 J & 0 \\ 0 & 0 & c_3 J \end{pmatrix} \quad \text{où } p_7 \text{ est constante et } |c_3| \geq |c_2| \geq 1.$$

On trouve 4 intégrales premières quadratiques indépendantes, dont une fonction linéaire I_1 (une fonction de Casimir), données par :

$$\begin{aligned} I_1(p) &= p_7, \\ I_2(p) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2), & I_3(p) &= \frac{1}{2}(p_3^2 + p_4^2), & \text{et } I_4(p) &= \frac{1}{2}(p_5^2 + p_6^2). \end{aligned}$$

L'Hamiltonien s'exprime comme $H = I_2 + I_3 + I_4$. Il existe une cinquième (resp. et une sixième) intégrale(s) première(s) indépendante(s) suivant les paramètres c_2 et c_3 , si et seulement si $d(A) = 2$ (resp. $d(A) = 1$) (voir le Théorème 3.17(iii)). Par exemple pour des paramètres c_2 et c_3 rationnels, qu'on peut représenter comme

$c_2 = \frac{m_1}{q_1}$ et $c_3 = \frac{m_2}{q_2}$ irréductibles et $q_i > 0$, les résonances sont $m_1\lambda_1 + q_1\lambda_4$, si $m_1 > 0$, et $-m_1\lambda_1 + q_1\lambda_3$, si $m_1 < 0$, et $m_2\lambda_1 + q_2\lambda_6$, si $m_2 > 0$, et $-m_2\lambda_1 + q_2\lambda_5$, si $m_2 < 0$. Ces résonances donnent, respectivement, les intégrales premières polynomiales :

$$\begin{aligned} I_5 &= \operatorname{Re}((-ip_1 + p_2)^{m_1}(ip_3 + p_4)^{q_1}) \text{ si } m_1 > 0, \\ I_5 &= \operatorname{Re}((ip_1 + p_2)^{m_1}(-ip_3 + p_4)^{q_1}) \text{ si } m_1 < 0. \\ I_6 &= \operatorname{Re}((-ip_1 + p_2)^{m_2}(ip_5 + p_6)^{q_2}) \text{ si } m_2 > 0, \\ I_6 &= \operatorname{Re}((ip_1 + p_2)^{m_2}(-ip_5 + p_6)^{q_2}) \text{ si } m_2 < 0. \end{aligned}$$

Dans tous les cas (même si $d(A) = 3$), le système adjoint admet deux intégrales premières logarithmiques indépendantes (voir le Théorème 3.17(iv)) engendrées, via le Lemme 3.16, par :

$$\begin{aligned} I_5(p) &= p_7 \arctan\left(\frac{p_3}{p_4}\right) - c_2 p_7 \arctan\left(\frac{p_1}{p_2}\right), \\ I_6(p) &= p_7 \arctan\left(\frac{p_5}{p_6}\right) - c_3 p_7 \arctan\left(\frac{p_1}{p_2}\right). \end{aligned}$$

(iv). On considère $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^i \oplus \mathbb{R}$, pour $1 \leq i \leq 9$; les crochets de Lie regroupés sont alors donnés par :

$$[e_1, e_2] = e_7, \quad [e_1, e_3] = b_1 e_6, \quad [e_2, e_4] = b_2 e_6, \quad [e_3, e_4] = b_3 e_6 + b_4 e_7,$$

avec $b_i \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq 4$ vérifiant les conditions de relations de commutations du Théorème 2.24. Les systèmes adjoints associés sont sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= p_2(t)p_7 + b_1 p_3(t)p_6, \\ \dot{p}_2(t) &= -p_1(t)p_7 + b_2 p_4(t)p_6 \\ \dot{p}_3(t) &= -b_1 p_1(t)p_6 + b_3 p_4(t)p_6 + b_4 p_4(t)p_7, \\ \dot{p}_4(t) &= -b_2 p_2(t)p_6 - b_3 p_3(t)p_6 - b_4 p_3(t)p_7 \\ \text{et } \dot{p}_5 &= \dot{p}_6 = \dot{p}_7 = 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

avec $b_i \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq 4$ qui vérifient les conditions du Théorème 2.24. On se ramène au cas où \mathfrak{g} est de dimension 6 (voir cas $n = 6$). On a, en plus, p_7 qui est une fonction de Casimir d'où on obtient le résultat.

Maintenant, pour étudier les autres cas restants qui correspondent à $d = c$ avec $d \in \{2, 3\}$, on distingue les cas $(c, d) = (3, 3)$ et $(c, d) = (2, 2)$.

1^{er} cas : Si $(c, d) = (3, 3)$, les systèmes adjoints associés admettent 3 fonctions linéaires qui sont des fonctions de Casimir :

$$I_i(p) = p_{i+4}, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 3.$$

On regroupe les formes générales obtenues dans le Théorème 2.25 sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_7, & [e_1, e_3] &= b_1 e_5 + b_2 e_6, & [e_1, e_4] &= b_3 e_5, \\ [e_2, e_3] &= b_4 e_5 + b_5 e_6, & [e_2, e_4] &= b_6 e_5 + b_7 e_6, & [e_3, e_4] &= b_8 e_5 + b_9 e_7 \end{aligned}$$

et tous les autres crochets nuls, avec $b_i \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq 9$ satisfaisant les conditions du Théorème 2.25. Les systèmes adjoints de Lie-Poisson associés sont donnés par :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= p_2(t)p_7 + b_1 p_3(t)p_5 + b_2 p_3(t)p_6 + b_3 p_4(t)p_5 \\ \dot{p}_2(t) &= -p_1(t)p_7 + b_4 p_3(t)p_5 + b_5 p_3(t)p_6 + b_6 p_4(t)p_5 + b_7 p_4(t)p_6 \\ \dot{p}_3(t) &= -b_1 p_1(t)p_5 - b_2 p_1(t)p_6 - b_4 p_2(t)p_5 - b_5 p_2(t)p_6 + b_8 p_4(t)p_5 + b_9 p_4(t)p_7 \\ \dot{p}_4(t) &= -b_3 p_1(t)p_5 - b_6 p_2(t)p_5 - b_7 p_2(t)p_6 - b_8 p_3(t)p_5 - b_9 p_3(t)p_7 \\ \dot{p}_5(t) &= \dot{p}_6(t) = \dot{p}_7(t) = 0 \end{aligned} \tag{3.24}$$

avec $b_i \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq 9$ satisfaisant les conditions du Théorème 2.25. En posant $P^1 = (p_1, p_2, p_3, p_4)^\top$, le système (3.24) s'écrit sous la forme $\dot{P}^1(t) = AP^1(t)$, avec $A = \begin{pmatrix} aJ & M \\ -M^T & bJ \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} d_1 & d_4 \\ d_3 & d_2 \end{pmatrix}$ non nulle. On utilise le Théorème 3.17 et l'annexe du Chapitre 3, en posant $a = p_7$, $b = b_8 p_5 + b_9 p_7$, $d_1 = b_1 p_5 + b_2 p_6$, $d_2 = b_6 p_5 + b_7 p_6$, $d_3 = b_4 p_5 + b_5 p_6$ et $d_4 = b_3 p_5$.

On obtient l'hamiltonien $H = I_4(p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2)$, et une intégrale première polynomiale de degré 4 donnée par :

$$\begin{aligned}
I_5(p) = & 2b_1b_4p_1p_2p_5^2 + 2b_3b_6p_1p_2p_5^2 - b_1^2p_2^2p_5^2 - b_3^2p_2^2p_5^2 + b_4^2p_2^2p_5^2 \\
& + b_6^2p_2^2p_5^2 + 2b_3b_8p_1p_3p_5^2 + 2b_6b_8p_2p_3p_5^2 - b_3^2p_3^2p_5^2 + b_4^2p_3^2p_5^2 + b_8^2p_3^2p_5^2 \\
& - 2b_1b_8p_1p_4p_5^2 - 2b_4b_8p_2p_4p_5^2 + 2b_1b_3p_3p_4p_5^2 + 2b_4b_6p_3p_4p_5^2 - b_1^2p_4^2p_5^2 + b_6^2p_4^2p_5^2 \\
& + b_8^2p_4^2p_5^2 + 2b_2b_4p_1p_2p_5p_6 + 2b_1b_5p_1p_2p_5p_6 + 2b_3b_7p_1p_2p_5p_6 - 2b_1b_2p_2^2p_5p_6 \\
& + 2b_4b_5p_2^2p_5p_6 + 2b_6b_7p_2^2p_5p_6 + 2b_7b_8p_2p_3p_5p_6 + 2b_4b_5p_3^2p_5p_6 - 2b_2b_8p_1p_4p_5p_6 \\
& - 2b_5b_8p_2p_4p_5p_6 + 2b_2b_3p_3p_4p_5p_6 + 2b_5b_6p_3p_4p_5p_6 + 2b_4b_7p_3p_4p_5p_6 - 2b_1b_2p_4^2p_5p_6 \\
& + 2b_6b_7p_4^2p_5p_6 + 2b_2b_5p_1p_2p_6^2 - b_2^2p_2^2p_6^2 + b_5^2p_2^2p_6^2 + b_7^2p_2^2p_6^2 \\
& + b_5^2p_3^2p_6^2 + 2b_5b_7p_3p_4p_6^2 - b_2^2p_4^2p_6^2 + b_7^2p_4^2p_6^2 + 2b_9b_3p_1p_3p_5p_7 \\
& - 2b_4p_1p_3p_5p_7 + 2b_1p_2p_3p_5p_7 + 2b_9b_7p_2p_3p_5p_7 + 2b_9b_8p_3^2p_5p_7 - 2b_1b_9p_1p_4p_5p_7 \\
& - 2b_6p_1p_4p_5p_7 + 2b_3p_2p_4p_5p_7 - 2b_8b_4p_2p_4p_5p_7 + 2b_9b_8p_4^2p_5p_7 - 2b_5p_1p_3p_6p_7 \\
& + 2b_2p_2p_3p_6p_7 + 2b_9b_7p_2p_3p_6p_7 - 2b_9b_2p_1p_4p_6p_7 - 2b_7p_1p_4p_6p_7 - 2b_9b_5p_2p_4p_6p_7 \\
& - p_3^2p_7^2 + b_9^2p_3^2p_7^2 - p_4^2p_7^2 + b_9^2p_4^2p_7^2. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} J & M \\ -M^\top & 2J \end{pmatrix}$ où $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (resp. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$), on trouve :

$$I_5(p) = 2p_1p_3 + 3p_3^2 - 2p_2p_4 + 3p_4^2 \text{ (resp. } I_5(p) = -2p_2p_3 - p_3^2 + 2p_1p_4 - p_4^2\text{)}.$$

En plus, on obtient I_6 une intégrale logarithmique donnée par le Théorème 3.17(iv) et le Lemme 3.16, voir l'annexe du Chapitre 3.

2^{eme} cas : Si $(c, d) = (2, 2)$, les systèmes adjoints de Lie-Poisson associés admettent 2 fonctions linéaires qui sont des fonctions de Casimir :

$$I_i(p) = p_{i+5}, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 2.$$

On regroupe les relations de commutations obtenues dans le Théorème 2.25 sous la forme :

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= e_7, & [e_1, e_3] &= b_1e_6, & [e_1, e_5] &= b_2e_6, & [e_2, e_3] &= b_3e_6, \\
[e_2, e_4] &= b_4e_6, & [e_3, e_4] &= b_5e_6 + b_6e_7, & [e_3, e_5] &= b_7e_6, & [e_4, e_5] &= b_8e_6,
\end{aligned}$$

et tous les autres crochets nuls, avec $b_i \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq 8$ satisfaisant les conditions du Théorème 2.25. On regroupe les systèmes adjoints de Lie-Poisson

associés :

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1(t) &= p_2(t)p_7 + b_1p_3(t)p_6 + b_2p_5(t)p_6 \\
\dot{p}_2(t) &= -p_1(t)p_7 + b_3p_3(t)p_6 + b_4p_4(t)p_6 \\
\dot{p}_3(t) &= -b_1p_1(t)p_6 - b_3p_2(t)p_6 + b_5p_4(t)p_6 + b_6p_4(t)p_7 + b_7p_5(t)p_6 \\
\dot{p}_4(t) &= -b_4p_2(t)p_6 - b_5p_3(t)p_6 - b_6p_3(t)p_7 + b_8p_5(t)p_6 \\
\dot{p}_5(t) &= -b_2p_1(t)p_6 - b_7p_3(t)p_6 - b_8p_4(t)p_6 \\
\dot{p}_6(t) &= 0 \\
\dot{p}_7(t) &= 0
\end{aligned} \tag{3.26}$$

avec $b_i \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq 8$ satisfaisant les conditions du Théorème 2.25. En posant $P^1 = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)^\top$, ce système (3.26) s'écrit $\dot{P}^1(t) = AP^1(t)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p_7 & b_1p_6 & 0 & b_2p_6 \\ -p_7 & 0 & b_3p_6 & b_4p_6 & 0 \\ -b_1p_6 & -b_3p_6 & 0 & b_5p_6 + b_6p_7 & b_7p_6 \\ 0 & -b_4p_6 & -b_5p_6 - b_6p_7 & 0 & b_8p_6 \\ -b_2p_6 & 0 & -b_7p_6 & -b_8p_6 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve une intégrale première I_4 polynomiale de degré 3 qui est une fonction de Casimir

$$\begin{aligned}
I_3(p) &= -b_4b_7p_1p_6^2 + b_3b_8p_1p_6^2 - b_2b_5p_2p_6^2 - b_1b_8p_2p_6^2 + b_2b_4p_3p_6^2 - b_2b_3p_4p_6^2 - b_1b_4p_5p_6^2 \\
&\quad - b_2b_6p_2p_6p_7 + b_8p_3p_6p_7 - b_7p_4p_6p_7 + b_5p_5p_6p_7 + b_6p_5p_7^2,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

l'hamiltonien $H = I_4$

$$I_3(p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2),$$

et une intégrale première I_5 polynomiale de degré 4 donnée par

$$\begin{aligned}
I_5(p) &= 2b_1b_3p_1p_2p_6^2 - b_1^2p_2^2p_6^2 - b_2^2p_2^2p_6^2 + b_3^2p_2^2p_6^2 + b_4^2p_2^2p_6^2 + 2b_2b_7p_1p_3p_6^2 + 2b_4b_5p_2p_3p_6^2 \\
&\quad - b_2^2p_3^2p_6^2 + b_3^2p_3^2p_6^2 + b_5^2p_3^2p_6^2 + b_7^2p_3^2p_6^2 - 2b_1b_5p_1p_4p_6^2 + 2b_2b_8p_1p_4p_6^2 - 2b_3b_5p_2p_4p_6^2 \\
&\quad + 2b_3b_4p_3p_4p_6^2 + 2b_7b_9p_3p_4p_6^2 - b_1^2p_4^2p_6^2 - b_2^2p_4^2p_6^2 + b_4^2p_4^2p_6^2 + b_5^2p_4^2p_6^2 + b_8^2p_4^2p_6^2 \\
&\quad - 2b_1b_7p_1p_5p_6^2 - 2b_3b_7p_2p_5p_6^2 - 2b_5b_8p_2p_5p_6^2 + 2b_1b_2p_3p_5p_6^2 - 2b_5b_8p_3p_5p_6^2 \\
&\quad + 2b_5b_7p_4p_5p_6^2 - b_1^2p_5^2p_6^2 + b_7^2p_5^2p_6^2 + b_8^2p_5^2p_6^2 - 2b_3p_1p_3p_6p_7 + 2b_1p_2p_3p_6p_7 + 2b_4b_6p_2p_3p_6p_7 \\
&\quad + 2b_5b_6p_3^2p_6p_7 - 2b_4p_1p_4p_6p_7 - 2b_1b_6p_1p_4p_6p_7 - 2b_3b_6p_2p_4p_6p_7 + 2b_5b_6p_4^2p_6p_7 + 2b_2p_2p_5p_6p_7 \\
&\quad - 2b_6b_8p_3p_5p_6p_7 + 2b_6b_7p_4p_5p_6p_7 - p_3^2p_7^2 + b_6^2p_3^2p_7^2 - p_4^2p_7^2 + b_6^2p_4^2p_7^2 - p_5^2p_7^2.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

En plus, le Théorème 3.17 montre qu'il existe une intégrale première I_6 qui est logarithmique indépendante des autres (en utilisant le Lemme 3.16). \square

Remarque 3.32. Il est clair que pour $\dim \mathfrak{g} = n = 7$, on obtient plusieurs modèles des SR-algèbres de Lie $\mathfrak{g}_{(5,c,d)} \oplus \mathbb{R}^2$ et $\mathfrak{g}_{(6,c,d)} \oplus \mathbb{R}$. Dans le cas où $c = d$, on ne peut pas se ramener à des dimensions plus petites (en plus, le calcul des intégrales devient plus lourd). Pour cette raison, on s'arrête à $n = 7$. Pour $n \geq 8$ la méthode de classification utilise les mêmes propriétés. L'étude de l'intégrabilité des systèmes adjoints de Lie-Poisson associés est similaire. Par contre, pour $n \geq 3$ et lorsque $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = 1$ on donne le résultat général dans la section suivante.

Analysons les résultats obtenus :

- L'étude des cas $(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^4$, $\mathfrak{g}_{(5,2,2)} \oplus \mathbb{R}^2$, $(\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{g}_{(6,3,3)} \oplus \mathbb{R}$ et $\mathfrak{g}_{(6,2,2)}^i \oplus \mathbb{R}$, où $1 \leq i \leq 9$, est similaire à celle réalisée en dimension 6 avec en plus une fonction de Casimir supplémentaire donnée par p_7 .

- Pour les algèbres de Lie données par les crochets non nuls :

$$[e_1, e_2] = e_7, \quad [e_1, e_3] = b_1 e_5 + b_2 e_6 \quad \text{et} \quad [e_1, e_4] = b_3 e_5, \quad \text{avec} \quad b_2, b_3 \in \mathbb{R}^* \quad \text{et} \quad b_1 \in \mathbb{R}.$$

On a $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 3$, les valeurs propres sont $\lambda_i = 0$, pour $3 \leq i \leq 7$, et $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$ où ω_1 dépend de p_5, p_6 et p_7 . On a cinq \mathbb{N} -résonances $1 \cdot \lambda_i = 0$, pour $3 \leq i \leq 7$, d'ordre 1. En fait, on a les intégrales premières (fonctions de Casimir) $I_1 = p_5$, $I_2 = p_6$ et $I_3 = p_7$ et $I_4(p) = b_3 p_2 p_5 - p_4 p_7$, et $I_5(p) = b_2 b_3 p_2 p_6 - b_3 p_3 p_7 + b_1 p_4 p_7$. Les deux dernières sont linéaires par rapport à p_1, p_2, p_3, p_4 mais quadratiques par rapport à $p \in \mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^7$ car le noyau de B dépend explicitement de p_5, p_6 et p_7 . Le feuilletage symplectique est formé par les surfaces $I_i = \text{const}$, $1 \leq i \leq 5$. La relation de \mathbb{N} -résonance d'ordre 2 donnée par $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ définit l'hamiltonien I_6 et le système hamiltonien est super-intégrable sur chaque feuille (dans la catégorie polynomiale).

- Pour $(\mathfrak{h}_7, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}})$, on a $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = 1$. Les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = \pm i p_7$, $\lambda_{3,4} = \pm i p_7 c_2$, $\lambda_{5,6} = \pm i p_7 c_3$ et $\lambda_7 = 0$. On a une \mathbb{N} -résonance d'ordre 1 donnée par $1 \cdot \lambda_7 = 0$ définissant l'intégrale première (fonction de Casimir) $I_1 = p_7$ (et pas d'autre fonction de Casimir car $\text{rang } J(p) = 6$). Le feuilletage symplectique est de dimension six et est formé par les variétés $I_1 = p_7 = \text{const}$. Il existe au moins trois relations de \mathbb{N} -résonances d'ordre 2 définies par $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 + \lambda_4 = 0$ et $\lambda_5 + \lambda_6 = 0$ qui donnent les intégrales premières $I_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$ et $I_3 =$

$\frac{1}{2}(p_3^2 + p_4^2)$ et $I_4 = \frac{1}{2}(p_5^2 + p_6^2)$. L'hamiltonien est donné par $H = I_2 + I_3 + I_4$ et le système hamiltonien est Liouville-intégrable sur chaque feuille (dans la catégorie polynomiale).

Il peut exister une cinquième et une sixième résonance qui donnent la super-intégrabilité dans la catégorie polynomiale. En fait, une cinquième (resp. et une sixième) résonance(s) existe(nt) si et seulement si $d(A) = 2$ (resp. $d(A) = 1$), voir Théorème 3.17. Par exemple pour des paramètres c_2 et c_3 rationnels, qu'on peut représenter comme $c_2 = \frac{m_1}{q_1}$ et $c_3 = \frac{m_2}{q_2}$ irréductibles et $q_i > 0$, les résonances sont $m_1\lambda_1 + q_1\lambda_4$, si $m_1 > 0$, et $-m_1\lambda_1 + q_1\lambda_3$, si $m_1 < 0$, et $m_2\lambda_1 + q_2\lambda_6$, si $m_2 > 0$, et $-m_2\lambda_1 + q_2\lambda_5$, si $m_2 < 0$. Ces résonances donnent, respectivement, les intégrales premières polynomiales :

$$\begin{aligned} I_5 &= \operatorname{Re}((-ip_1 + p_2)^{m_1}(ip_3 + p_4)^{q_1}) \text{ si } m_1 > 0, \\ I_5 &= \operatorname{Re}((ip_1 + p_2)^{m_1}(-ip_3 + p_4)^{q_1}) \text{ si } m_1 < 0. \\ I_6 &= \operatorname{Re}((-ip_1 + p_2)^{m_2}(ip_5 + p_6)^{q_2}) \text{ si } m_2 > 0, \\ I_6 &= \operatorname{Re}((ip_1 + p_2)^{m_2}(-ip_5 + p_6)^{q_2}) \text{ si } m_2 < 0. \end{aligned}$$

Notons qu'une \mathbb{N} -résonance peut exister même si c_2 et c_3 ne sont pas rationnelles. Par exemple, les valeurs propres $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$, $\lambda_{3,4} = \pm i(\sqrt{2} + 1)$ et $\lambda_{5,6} = \pm i$ donnent la \mathbb{N} -résonance $1 \cdot (i\sqrt{2}) + 1 \cdot i(-\sqrt{2} - 1) + 1 \cdot (i) = 0$.

- Si $(c, d) = (3, 3)$, les valeurs propres sont $\lambda_i = 0$, pour $5 \leq i \leq 7$, et $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$ et $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$ où ω_1 et ω_2 dépendent de p_5, p_6 et p_7 . On a trois \mathbb{N} -résonances $1 \cdot \lambda_i = 0$, pour $5 \leq i \leq 7$, d'ordre 1. En fait, on a les intégrales premières (fonctions de Casimir) $I_1 = p_5$, $I_2 = p_6$ et $I_3 = p_7$ (et pas d'autres car $\operatorname{rang} J(p) = 4$). Le feuilletage symplectique est formé par les variétés $I_i = \text{const}$, $1 \leq i \leq 3$. Les deux relations de \mathbb{N} -résonances d'ordre 2 définies par $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 + \lambda_4 = 0$ nous amènent aux intégrales premières $H = I_4(p)$ et $I_5(p)$ donnée par (3.25). Le système hamiltonien est donc Liouville-intégrable sur chaque feuille (dans la catégorie polynomiale). Observons que pour toutes les valeurs fixées de p_5, p_6 et p_7 (autrement dit, sur chaque feuille symplectique), l'intégrale première I_5 est quadratique mais elle est polynomiale de degré 4 en tant qu'une fonction sur $\mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^7$. De plus, on obtient une intégrale première logarithmique I_6 donnée par le Théorème 3.17 et le Lemme 3.16 qui montre la super-intégrabilité dans la catégorie logarithmique.

- Si $(c, d) = (2, 2)$, les valeurs propres sont $\lambda_i = 0$, pour $5 \leq i \leq 7$, et $\lambda_{1,2} =$

$\pm i\omega_1$ et $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$ où ω_1 et ω_2 dépendent de p_6 et p_7 . On a trois \mathbb{N} -résonances $1 \cdot \lambda_i = 0$, pour $5 \leq i \leq 7$ d'ordre 1. En fait, on a les intégrales premières (fonctions de Casimir) $I_1 = p_6$ et $I_2 = p_7$ et $I_3(p)$ donnée par (3.27). La dernière est linéaire par rapport aux composantes p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5 de P^1 mais polynomiale de degré 3 par rapport à $p \in \mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^7$ car le noyau de B dépend explicitement de p_6 et p_7 . Le feuilletage symplectique est formé par les variétés $I_i = \text{const}$, $1 \leq j \leq 3$. Les deux relations de \mathbb{N} -résonances d'ordre 2 données par $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 + \lambda_4 = 0$ nous amènent aux intégrales premières $H = I_4(p)$ et $I_5(p)$ définies par (3.28). Le système hamiltonien est donc Liouville-intégrable sur chaque feuille (dans la catégorie polynomiale). Observons que pour toutes les valeurs fixées de p_6 et p_7 , l'intégrale première I_5 est quadratique mais elle est polynomiale de degré 4 en tant qu'une fonction sur $\mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^7$. De plus, on obtient une intégrale première logarithmique I_6 donnée par le Théorème 3.17 et le Lemme 3.16 qui montre la super-intégrabilité dans la catégorie logarithmique.

3.5 Intégrabilité des équations adjointes associées à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ lorsque $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = 1$

Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 de dimension $n \geq 3$, telle que $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = d = 1$. On a vu, dans le Théorème 2.16(i) du Chapitre 2, qu'alors $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_{n-c+1}, \mathfrak{p}^b, \mathcal{B}^b) \oplus \mathbb{R}^{c-1}$ où \mathfrak{h}_{n-c+1} est une algèbre de Lie de Heisenberg de dimension $n - c + 1$, où $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = c$, donnée par les relations (2.4) :

$$[e_{2i-1}, e_{2i}] = c_i e_n \text{ avec } c_1 = 1 \text{ et } c_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq r, \text{ où } r = \frac{n-c}{2}.$$

Le système adjoint de Lie-Poisson associé s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{p}_{2i-1}(t) &= c_i p_{2i}(t) p_n(t), \\ \dot{p}_{2i}(t) &= -c_i p_{2i-1}(t) p_n(t), \text{ avec } c_1 = 1 \text{ et } c_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq r, \\ \dot{p}_j(t) &= 0, \text{ pour } n - c + 1 \leq j \leq n. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Le système (3.29) est un système linéaire de la forme $\dot{P}(t) = BP(t)$ avec $B = p_n \text{Diag}(c_1 J, c_2 J, \dots, c_r J, O)$ où $c_1 = 1$, $c_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq r$ et p_n est non nulle. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.33. *Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 de dimension $n \geq 3$, telle que $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = 1$, alors le système adjoint de Lie-Poisson associé est Liouville-intégrable (dans la catégorie de polynômes de degré 2) et super-intégrable (dans la catégorie logarithmique).*

Démonstration. Il suffit d'appliquer directement le Théorème 3.17. Notons qu'en fait, le système admet $r - d(A)$ intégrales premières polynomiales additionnelles ; en particulier si $d(A) = 1$ le système adjoint de Lie-Poisson est super-intégrable dans la catégorie polynomiale. \square

3.6 Géodésiques sur des groupes de Lie nilpotents d'ordre 2

Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 de dimension $n \geq 3$. Soit (G, \mathcal{D}, B) le groupe de Lie sous-riemannien associé à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ où G est l'unique groupe de Lie connexe et simplement connexe tel que $T_e G = \mathfrak{g}$, \mathcal{D} est la distribution invariante sur G telle que $\mathcal{D}_e = \mathfrak{p}$ et B est la forme bilinéaire symétrique définie positive invariante sur \mathcal{D} telle que $B_e = \mathcal{B}$. Le groupe de Lie G est nilpotent d'ordre 2 car \mathfrak{g} est une algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2. On rappelle que dans le cas où \mathfrak{g} est nilpotente, l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ est un difféomorphisme [83].

On considère $\mathfrak{g} = \{N_1, \dots, N_k\}_{L.A}$ l'algèbre de Lie engendrée par des matrices nilpotentes N_i , $i = 1, \dots, k$ pour $2 \leq k \leq n - 1$, où $\mathfrak{p} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{N_1, \dots, N_k\}$. On peut représenter le système hamiltonien associé sur T^*G (voir (1.16)-(1.17) lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$), comme le système suivant défini sur $G \times \mathfrak{g}^*$:

$$\dot{X} = \sum_{i=1}^k p_i N_i X, \quad X \in G \quad (3.30)$$

$$\dot{p}_j = \sum_{i=1}^k p_i \{p_j, p_i\}, \quad p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathfrak{g}^*, \quad (3.31)$$

où $N_i X$ sont les champs invariants à droite correspondant à $N_i \in \mathfrak{g}$. Les géodésiques du problème sous-riemannien sont solutions de l'équation (3.30).

L'équation adjointe (3.31) a été résolue dans le Chapitre 3 lorsque \mathfrak{g} est nilpotente d'ordre 2. On a obtenu que les solutions de cette équation, qui correspondent aux contrôles optimaux, sont des combinaisons linéaires de fonctions trigonométriques et constantes du temps. On va intégrer le système hamiltonien sous-riemannien en utilisant des modèles sur \mathbb{R}^n et des modèles matriciels.

Remarque 3.34. Dans le cas nilpotent d'ordre 3, il y a des cas pour lesquels le système adjoint de Lie-Poisson (3.31) n'est pas intégrable, voir, e.g., [68].

3.6.1 Intégrabilité du système hamiltonien sur un modèle de \mathbb{R}^n .

Dans cette sous-section on calcule explicitement les géodésiques pour le cas où $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = 1$ et $n \geq 3$, puis le cas où $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) \geq 1$ avec $n = 5$ et $n = 6$.

1) Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 de dimension $n \geq 3$, telle que $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = d = 1$. On sait (le Théorème 2.16) que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_{n-c+1}, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^{c-1}$ où \mathfrak{h}_{n-c+1} est une algèbre de Lie de Heisenberg de dimension $n - c + 1$, où $\dim \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = c$, donnée par :

$$[e_{2i-1}, e_{2i}] = c_i e_n \text{ avec } c_1 = 1 \text{ et } |c_i| \geq 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq \frac{n-c}{2}.$$

On va utiliser un modèle sur \mathbb{R}^n , qui correspond à la SR-algèbre de Lie $(\mathfrak{h}_{n-c+1}, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^{c-1}$, pour intégrer le système hamiltonien.

La solution du problème sous-riemannien sur le groupe de Heisenberg est bien connue (voir, par exemple, Agrachev et Gauthier [3], [4]) mais pour que notre présentation soit complète, on va l'exposer ci-dessous.

On considère, dans \mathbb{R}^n , muni des coordonnées (q_1, \dots, q_n) , la base adaptée (e_1, \dots, e_n) suivante :

$$e_{2i-1} = \frac{\partial}{\partial q_{2i-1}} - \frac{1}{2} c_i q_{2i} \frac{\partial}{\partial q_n}, \quad e_{2i} = \frac{\partial}{\partial q_{2i}} + \frac{1}{2} c_i q_{2i-1} \frac{\partial}{\partial q_n}, \quad \text{et} \quad e_j = \frac{\partial}{\partial q_j},$$

où $|c_i| \geq 1$, pour $1 \leq i \leq \frac{n-c}{2}$ et pour tout $n - c + 1 \leq j \leq n$.

On sait que $\dot{q}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} u_i(t) e_i(q(t))$ où $u_i(t) \in \mathbb{R}$, pour $1 \leq i \leq n - 1$, sont des contrôles. On obtient alors :

$$\dot{q}_j = u_j, \text{ pour } 1 \leq j \leq n - 1, \text{ et } \dot{q}_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\frac{n-c}{2}} c_i (q_{2i-1} u_{2i} - q_{2i} u_{2i-1}).$$

L'hamiltonien est donné par $H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2$, où $u_i(t)$ vérifie $u_i(t) = \langle p(t), e_i(q(t)) \rangle$ pour $1 \leq i \leq n - 1$ (u_i sont les contrôles optimaux). Pour ce modèle, on trouve :

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\frac{n-c}{2}} \left[\left(p_{2i-1} - \frac{c_i p_n q_{2i}}{2} \right)^2 + \left(p_{2i} + \frac{c_i p_n q_{2i-1}}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=n-c+1}^{n-1} p_j^2,$$

On pose :

$$P_{2i-1} = p_{2i-1} - \frac{c_i p_n q_{2i}}{2}, \quad P_{2i} = p_{2i} + \frac{c_i p_n q_{2i-1}}{2} \text{ et } P_j = p_j,$$

pour $1 \leq i \leq \frac{n-c}{2}$ et $n-c+1 \leq j \leq n$. L'hamiltonien devient alors :

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} P_i^2.$$

En appliquant le principe du maximum de Pontryagin, le système hamiltonien est :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \dot{q}_j = P_j, \text{ pour } 1 \leq j \leq n-1 \quad \text{et} \quad \dot{q}_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\frac{n-c}{2}} c_i (q_{2i-1} P_{2i} - q_{2i} P_{2i-1}), \\ \dot{P}_{2i-1} = -\frac{1}{2} c_i P_n P_{2i}, \quad \dot{P}_{2i} = \frac{1}{2} c_i P_n P_{2i-1} \quad \text{et} \quad \dot{P}_j = 0, \end{aligned}$$

pour $1 \leq i \leq \frac{n-c}{2}$ et $n-c+1 \leq j \leq n$.

On a P_j sont constantes pour $n-c+1 \leq j \leq n$ et on trouve :

$$\ddot{q}_{2i-1}(t) + \frac{1}{2} c_i P_n \dot{q}_{2i}(t) = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{q}_{2i}(t) - \frac{1}{2} c_i P_n \dot{q}_{2i-1}(t) = 0, \quad |c_i| \geq 1 \quad \text{et} \quad 1 \leq i \leq \frac{n-c}{2}.$$

Il s'agit de sous-systèmes linéaires, il s'intègre facilement et les solutions sont des fonctions trigonométriques. En effet :

$$\begin{aligned} \dot{q}_{2i-1}(t) &= \cos\left(\frac{c_i P_n t}{2}\right) \dot{q}_{2i-1}(0) - \sin\left(\frac{c_i P_n t}{2}\right) \dot{q}_{2i}(0), \\ \dot{q}_{2i}(t) &= \sin\left(\frac{c_i P_n t}{2}\right) \dot{q}_{2i-1}(0) + \cos\left(\frac{c_i P_n t}{2}\right) \dot{q}_{2i}(0), \\ \dot{q}_j(t) &= b_j, \end{aligned}$$

pour $1 \leq i \leq \frac{n-c}{2}$ et $n-c+1 \leq j \leq n$ où $|c_i| \geq 1$ et $b_j \in \mathbb{R}$. Par conséquent les solutions sont :

$$\begin{aligned} q_{2i-1}(t) &= \frac{2}{c_i P_n} \left(\sin\left(\frac{c_i P_n t}{2}\right) P_{2i-1}(0) + \cos\left(\frac{c_i P_n t}{2}\right) P_{2i}(0) \right) + d_{2i-1}, \\ q_{2i}(t) &= \frac{2}{c_i P_n} \left(\cos\left(\frac{c_i P_n t}{2}\right) P_{2i-1}(0) - \sin\left(\frac{c_i P_n t}{2}\right) P_{2i}(0) \right) + d_{2i}, \\ q_j(t) &= b_j t + d_j, \end{aligned}$$

pour $1 \leq i \leq \frac{n-c}{2}$ et $n-c+1 \leq j \leq n$, avec $d_{2i-1}, d_{2i}, b_j, d_j \in \mathbb{R}$. Pour terminer l'intégration du système hamiltonien, il faut calculer $q_n(t)$. Pour le calculer, on utilise la relation suivante :

$$\dot{q}_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\frac{n-c}{2}} c_i (q_{2i-1} P_{2i} - q_{2i} P_{2i-1}),$$

On trouve :

$$q_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\frac{n-c}{2}} \int c_i (q_{2i-1} P_{2i} - q_{2i} P_{2i-1}) dt, \text{ i.e. :}$$

$$q_n(t) = \sum_{i=1}^{\frac{n-c}{2}} \frac{1}{P_n} [P_{2i-1}^2(0)t + P_{2i}^2(0)t - (d_{2i-1} P_{2i-1}(0) + d_{2i} P_{2i}(0)) \cos\left(\frac{c_i P_n t}{2}\right) + (d_{2i-1} P_{2i}(0) - d_{2i} P_{2i-1}(0)) \sin\left(\frac{c_i P_n t}{2}\right)] + C,$$

avec $|c_i| \geq 1$ et $d_{2i-1}, d_{2i} \in \mathbb{R}$, pour $1 \leq i \leq \frac{n-c}{2}$, et $C \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, dans le cas où $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = 1$ quel que soit $n \geq 3$, les trajectoires optimales sont des sommes de fonctions trigonométriques et de fonctions affines du temps.

2) Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 2 de dimension $n = 5$ ou $n = 6$.

• Pour $n = 5$, en utilisant la classification, on a trouvé trois classes. Pour $(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^b, \mathcal{B}^b) \oplus \mathbb{R}^2$ et $(\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}^b, \mathcal{B}^b)$, ils sont étudiés précédemment. On s'intéresse à $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$ donnée dans une base adaptée par $[e_1, e_2] = e_5$ et $[e_1, e_3] = a_1 e_4$ avec $a_1 > 0$. On considère, dans \mathbb{R}^5 , muni des coordonnées (q_1, \dots, q_5) , la base adaptée (e_1, \dots, e_5) suivante :

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{1}{2} a_1 q_3 \frac{\partial}{\partial q_4} - \frac{1}{2} q_2 \frac{\partial}{\partial q_5}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{1}{2} q_1 \frac{\partial}{\partial q_5},$$

$$e_3 = \frac{\partial}{\partial q_3} + \frac{1}{2} a_1 q_1 \frac{\partial}{\partial q_4}, \quad e_4 = \frac{\partial}{\partial q_4}, \quad \text{et} \quad e_5 = \frac{\partial}{\partial q_5}, \quad \text{où } a_1 > 0.$$

L'hamiltonien est donnée par $H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 u_i^2$, et nous posons $P_1 = \langle p, e_1 \rangle = p_1 - \frac{a_1 p_4 q_3}{2} - \frac{p_5 q_2}{2}$, $P_2 = \langle p, e_2 \rangle = p_2 + \frac{p_5 q_1}{2}$, $P_3 = \langle p, e_3 \rangle = p_3 + \frac{a_1 p_4 q_1}{2}$, $P_4 = \langle p, e_4 \rangle = p_4$ et $P_5 = \langle p, e_5 \rangle =$

p_5 . Alors, nous obtenons le système hamiltonien suivant :

$$\dot{q}_i = P_i, \text{ pour } 1 \leq i \leq 3, \quad \dot{q}_4 = \frac{a_1}{2}(q_1 P_3 - q_3 P_1) + P_4, \quad \dot{q}_5 = \frac{1}{2}(q_1 P_2 - q_2 P_1) \quad (3.32)$$

On sait que les composantes P_1, P_2 et P_3 sont des combinaisons des fonctions trigonométriques et les composantes P_5 et P_6 sont constantes. Les solutions du système (3.32) donnent les géodésiques. Les composantes q_1, q_2, q_3 sont des fonctions trigonométriques puisque les primitives des fonctions trigonométriques P_1, P_2, P_3 sont des fonctions trigonométriques. Par ailleurs, \dot{q}_4 et \dot{q}_5 sont des combinaisons des fonctions P_i , pour $1 \leq i \leq 4$, et des fonctions q_1, q_2, q_3 , par conséquent q_4 et q_5 sont des sommes de fonctions trigonométriques et de fonctions affines du temps.

• Pour $n = 6$, en utilisant la classification, on s'intéresse à 3 cas qui correspondent à $d \geq 2$ ($d = 2$ ou $d = 3$) avec $c = d$:

1^{er} cas : Pour $\mathfrak{g}_{(5,2,2)} \oplus \mathbb{R}$, on se ramène à $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$, ce cas est déjà étudié.

2^{eme} cas : On considère les algèbres de Lie $\mathfrak{g}_{(6,3,3)}$ donnée dans une base adaptée par $[e_1, e_2] = e_6$, $[e_1, e_3] = a_4 e_4$ et $[e_2, e_3] = a_5 e_5$ avec $a_4, a_5 > 0$. On considère, dans \mathbb{R}^6 , muni des coordonnées (q_1, \dots, q_6) , la base adaptée (e_1, \dots, e_6) suivante :

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{1}{2} a_4 q_3 \frac{\partial}{\partial q_4} - \frac{1}{2} q_2 \frac{\partial}{\partial q_6}, \\ e_2 &= \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{1}{2} a_5 q_3 \frac{\partial}{\partial q_5} + \frac{1}{2} q_1 \frac{\partial}{\partial q_6}, \\ e_3 &= \frac{\partial}{\partial q_3} + \frac{1}{2} a_4 q_1 \frac{\partial}{\partial q_4} + \frac{1}{2} a_5 q_2 \frac{\partial}{\partial q_5}, \\ e_4 &= \frac{\partial}{\partial q_4}, \quad e_5 = \frac{\partial}{\partial q_5} \quad \text{et} \quad e_6 = \frac{\partial}{\partial q_6}, \end{aligned}$$

où $a_4, a_5 > 0$ vérifiant les conditions du Théorème 2.21. On sait que $\dot{q}(t) = \sum_{i=1}^5 u_i(t) e_i(q(t))$ où $u_i(t) \in \mathbb{R}$, pour $1 \leq i \leq 5$, sont les contrôles. Alors on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= u_i, \text{ pour } 1 \leq i \leq 3 \\ \dot{q}_4 &= \frac{1}{2} [a_4 (q_1 u_3 - q_3 u_1)] \\ \dot{q}_5 &= \frac{1}{2} [a_5 (q_2 u_3 - q_3 u_2)] \end{aligned}$$

$$\dot{q}_6 = \frac{1}{2}[(q_1 u_2 - q_2 u_1)]$$

L'hamiltonien est donné par $H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 u_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 \langle p, e_i \rangle^2$, puisque $u_i(t)$ vérifie $u_i(t) = \langle p(t), e_i(q(t)) \rangle$ pour $1 \leq i \leq 5$ (u_i sont les contrôles optimaux). On a : $H = (p_1 - \frac{1}{2}q_2 p_6 - \frac{1}{2}a_4 q_3 p_4)^2 + (p_2 + \frac{1}{2}q_1 p_6 - \frac{1}{2}a_5 q_3 p_5)^2 + (p_3 + \frac{1}{2}a_4 q_1 p_4 + \frac{1}{2}a_5 q_2 p_5)^2 + p_4^2 + p_5^2$. On considère alors les notations suivantes :

$$\begin{aligned} P_1 &= \langle p, e_1 \rangle = p_1 - \frac{1}{2}q_2 p_6 - \frac{1}{2}a_4 q_3 p_4, \\ P_2 &= \langle p, e_2 \rangle = p_2 + \frac{1}{2}q_1 p_6 - \frac{1}{2}a_5 q_3 p_5, \\ P_3 &= \langle p, e_3 \rangle = p_3 + \frac{1}{2}a_4 q_1 p_4 + \frac{1}{2}a_5 q_2 p_5, \\ P_4 &= \langle p, e_4 \rangle = p_4, \quad P_5 = \langle p, e_5 \rangle = p_5 \quad \text{et} \quad P_6 = \langle p, e_6 \rangle = p_6. \end{aligned}$$

En utilisant le principe du maximum de Pontryagin, on obtient le système hamiltonien suivant :

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= P_i, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 3 \\ \dot{q}_4 &= \frac{a_4}{2}(q_1 P_3 - q_3 P_1) + P_4, \\ \dot{q}_5 &= \frac{a_5}{2}(q_2 P_3 - q_3 P_2), \\ \dot{q}_6 &= \frac{1}{2}(q_1 P_2 - q_2 P_1). \end{aligned} \tag{3.33}$$

On a montré précédemment que les contrôles optimaux étaient des fonctions trigonométriques ou constantes. Les composantes P_1, P_2 et P_3 sont trigonométriques et les composantes P_4, P_5 et P_6 sont constantes. Les solutions du système (3.33) donnent les géodésiques. En utilisant le même raisonnement que précédemment, on montre que les géodésiques sont des sommes de fonctions trigonométriques et de fonctions affines du temps.

3^{eme} cas : On considère enfin les algèbres de Lie telles que $(c, d) = (2, 2) : \mathfrak{g}_{(6,2,2)}^i$ pour $1 \leq i \leq 9$. On considère, dans \mathbb{R}^6 , muni des coordonnées (q_1, \dots, q_6) , la base adaptée (e_1, \dots, e_6) suivante :

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{1}{2}q_2 \frac{\partial}{\partial q_6} - \frac{1}{2}a_1 q_3 \frac{\partial}{\partial q_5}, \\ e_2 &= \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{1}{2}q_1 \frac{\partial}{\partial q_6} - \frac{1}{2}a_2 q_4 \frac{\partial}{\partial q_5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_3 &= \frac{\partial}{\partial q_3} + \frac{1}{2}a_1q_1 \frac{\partial}{\partial q_5} - \frac{1}{2}a_3q_4 \frac{\partial}{\partial q_5} - \frac{1}{2}c_2q_4 \frac{\partial}{\partial q_6}, \\
e_4 &= \frac{\partial}{\partial q_4} + \frac{1}{2}a_2q_2 \frac{\partial}{\partial q_5} + \frac{1}{2}a_3q_3 \frac{\partial}{\partial q_5} + \frac{1}{2}c_2q_3 \frac{\partial}{\partial q_6}, \\
e_5 &= \frac{\partial}{\partial q_5} \text{ et } e_6 = \frac{\partial}{\partial q_6},
\end{aligned}$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$ vérifiant les conditions du Théorème 2.21. On a :

$$\begin{aligned}
\dot{q}_i &= u_i, \text{ pour } 1 \leq i \leq 4 \\
\dot{q}_5 &= \frac{1}{2}[a_1(q_1u_3 - q_3u_1) + a_2(q_2u_4 - q_4u_2) + a_3(q_3u_4 - q_4u_3)] + u_5 \\
\dot{q}_6 &= \frac{1}{2}[(q_1u_2 - q_2u_1) + c_2(q_3u_4 - q_4u_3)]
\end{aligned}$$

On prend $H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 u_i^2$, où $u_i(t)$ vérifie $u_i(t) = \langle p(t), e_i(q(t)) \rangle$ pour $1 \leq i \leq 5$.

On écrit alors l'hamiltonien comme $H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 \langle p, e_i \rangle^2$, où $p \in \mathbb{R}^6$, et on a :

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \left(\left(p_1 - \frac{1}{2}q_2p_6 - \frac{1}{2}a_1q_3p_5 \right)^2 + \left(p_2 + \frac{1}{2}q_1p_6 - \frac{1}{2}a_2q_4p_5 \right)^2 + \left(p_3 + \frac{1}{2}a_1q_1p_5 - \frac{1}{2}a_3q_4p_5 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1}{2}c_2q_4p_6 \right)^2 + \left(p_4 + \frac{1}{2}a_2q_2p_5 + \frac{1}{2}a_3q_3p_5 + \frac{1}{2}c_2q_3p_6 \right)^2 + p_5^2 \right).
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
P_1 &= \langle p, e_1 \rangle = p_1 - \frac{1}{2}q_2p_6 - \frac{1}{2}a_1q_3p_5, \\
P_2 &= \langle p, e_2 \rangle = p_2 + \frac{1}{2}q_1p_6 - \frac{1}{2}a_2q_4p_5 \\
P_3 &= \langle p, e_3 \rangle = p_3 + \frac{1}{2}a_1q_1p_5 - \frac{1}{2}a_3q_4p_5 - \frac{1}{2}c_2q_4p_6 \\
P_4 &= \langle p, e_4 \rangle = p_4 + \frac{1}{2}a_2q_2p_5 + \frac{1}{2}a_3q_3p_5 + \frac{1}{2}c_2q_3p_6, & P_5 &= \langle p, e_5 \rangle = p_5 & \text{et} \\
P_6 &= \langle p, e_6 \rangle = p_6.
\end{aligned}$$

En utilisant le principe du maximum de Pontryagin, on obtient le système hamiltonien suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{q}_i &= P_i, \text{ pour } 1 \leq i \leq 4 \\
\dot{q}_5 &= \frac{a_1}{2}(q_1P_3 - q_3P_1) + \frac{a_2}{2}(q_2P_4 - q_4P_2) + \frac{a_3}{2}(q_3P_4 - q_4P_3) + P_5, \\
\dot{q}_6 &= \frac{1}{2}(q_1P_2 - q_2P_1) + \frac{c_2}{2}(q_3P_4 - q_4P_3).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

En utilisant le même raisonnement que précédemment, on montre que les trajectoires optimales sont des sommes de fonctions trigonométriques et de fonctions affines.

3.6.2 Modèle matriciel d'une SR-algèbre de Lie de Heisenberg

On considère l'algèbre de Lie de Heisenberg \mathfrak{h}_{2m+1} , en tant qu'espace vectoriel matriciel formé par des matrices nilpotentes de tailles $(m+2) \times (m+2)$ de la forme :

$$\mathfrak{h}_{2m+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdots & \cdot & 0 \\ f_1 & \cdot & & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & & \cdot \\ f_m & & & \cdot & \cdot \\ h & c_1 g_1 & \cdots & c_m g_m & 0 \end{pmatrix} : f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_m, h \in \mathbb{R}, c_i \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Une base de l'algèbre de Lie \mathfrak{h}_{2m+1} est :

$$\begin{aligned} N_i &= E^{i+1,1}, & N_{i+m} &= c_i E^{m+2,i+1}, \\ \text{et } N_{2m+1} &= -E^{m+2,1} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m, \end{aligned} \quad (3.35)$$

où E^{ij} est la matrice (e^{ij}) , pour $1 \leq i, j \leq m+2$, tel que l'élément $e^{i+1,1} = 1$ et les autres coefficients sont nuls. Cette base vérifie les relations de commutations non triviale de l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension $2m+1$, qui sont :

$$[N_i, N_{i+m}] = c_i N_{2m+1}, \quad \text{avec } c_i \in \mathbb{R}^* \text{ pour } 1 \leq i \leq m \text{ et on pose } c_1 = 1.$$

Pour un élément $N \in \mathfrak{h}_{2m+1}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdots & \cdot & 0 \\ f_1 & \cdot & & \circ & \cdot \\ \cdot & \circ & \cdot & & \cdot \\ f_m & & & \cdot & \cdot \\ h & c_1 g_1 & \cdots & c_m g_m & 0 \end{pmatrix}$, on trouve

$$\exp N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ x_1 & 1 & & \circ & \cdot \\ \cdot & \circ & \cdot & & \cdot \\ x_m & & & \cdot & 0 \\ z & a_1 y_1 & \cdots & a_m y_m & 1 \end{pmatrix},$$

avec $x_i = f_i$, $y_i = c_i g_i$, $i \leq i \leq m$ et $z = h + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m c_i f_i g_i$.

Par conséquent, le groupe de Heisenberg, noté H_{2m+1} , est un groupe des matrices triangulaires inférieures de taille $(m+2) \times (m+2)$, avec le produit de matrice usuel, de la forme :

$$H_{2m+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & 1 & & \circ & \cdot \\ \cdot & \circ & \cdot & & \cdot \\ x_m & & & \cdot & 0 \\ z & y_1 & \cdots & y_m & 1 \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m, z \in \mathbb{R} \right\} \subset GL(m+2, \mathbb{R}),$$

Notons par X les matrices nilpotentes appartenant à H_{2m+1} . Les géodésiques sur le groupe H_{2m+1} sont données par

$$\dot{X} = \sum_{i=1}^{2m} P_i N_i X, \quad (3.36)$$

où $N_i \in \mathfrak{h}_{2m+1}$ sont définies par (3.35). Le groupe H_{2m+1} est isomorphe à \mathbb{R}^{2m+1} muni des coordonnées $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m, z$ dans lesquelles l'équation (3.36) est représentée comme

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= P_j \quad 1 \leq j \leq m \\ \dot{y}_j &= c_j P_{m+j} \quad 1 \leq j \leq m \\ \dot{z} &= \sum_{i=1}^m c_i x_i P_{i+m} \end{aligned}$$

Ce système est équivalent au système analysé dans la Section 3.6.1.

Si on identifie H_{2m+1} à \mathbb{R}^{2m+1} de la façon suivante

$$H_{2m+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & \cdot & & \circ & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ x_m & & & \cdot & 0 \\ z & y_1 & \cdots & y_m & 1 \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m, z \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^{2m+1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \\ y_m \\ z \end{pmatrix},$$

alors la multiplication se faisant par la multiplication matricielle usuelle, on trouve :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & \cdot & & \circ & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ x_m & & & \cdot & 0 \\ z & y_1 & \cdots & y_m & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x'_1 & \cdot & & \circ & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ x'_m & & & \cdot & 0 \\ z' & y'_1 & \cdots & y'_m & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 + x'_1 & \cdot & & \circ & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ x_m + x'_m & & & \cdot & 0 \\ z + z' + \sum_{i=1}^m x_i y_i & y_1 + y'_1 & \cdots & y_m + y'_m & 1 \end{pmatrix},$$

et l'inverse est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & \cdot & & \circ & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ x_m & & & \cdot & 0 \\ z & y_1 & \cdots & y_m & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_1 & \cdot & & \circ & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ -x_m & & & \cdot & 0 \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i - z & -y_1 & \cdots & -y_m & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc dans \mathbb{R}^{2m+1} on trouve :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \\ y_m \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_m \\ y'_m \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ y_1 + y'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m + x'_m \\ y_m + y'_m \\ z + z' + \sum_{i=1}^m x_i y_i \end{pmatrix}.$$

On peut symétriser cette loi en utilisant la transformation $z = \tilde{z} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m x_i y'_i$ et

$z' = \tilde{z}' - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m x'_i y_i$, on trouve :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \\ y_m \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_m \\ y'_m \\ \tilde{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ y_1 + y'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m + x'_m \\ y_m + y'_m \\ \tilde{z} + \tilde{z}' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (x_i y'_i - x'_i y_i) \end{pmatrix}.$$

3.6.3 Modèle matriciel pour $\mathfrak{g}_{(n,c,d)}$

Pour $n = 5$, on s'intéresse à $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$. Les modèles matriciels des SR-algèbres de Lie $(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{p}^b, \mathcal{B}^b) \oplus \mathbb{R}^2$ et $(\mathfrak{h}_5, \mathfrak{p}^b, \mathcal{B}^b)$ ont été étudié précédemment (en prenant $m = 1$ et $m = 2$ dans le cas général), on étudie maintenant $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$.

On considère une base adaptée matricielle formée par les matrices triangulaires inférieures, de taille 4×4 , suivantes :

$$N_1 = E^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = E^{42} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_3 = bE^{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_4 = E^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_5 = E^{41} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette base vérifie en effet les relations de commutations non triviale de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$, à savoir :

$$[N_1, N_2] = N_5, \quad [N_1, N_3] = bN_4.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{(5,2,2)}$ est donc donnée par

$$\mathfrak{g}_{(5,2,2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & ba_3 & 0 & 0 \\ a_5 & a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Pour un élément $N \in \mathfrak{g}_{(5,2,2)}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & ba_3 & 0 & 0 \\ a_5 & a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\exp N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & x_3 & 1 & 0 \\ x_5 & x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $x_3 = ba_3$, $x_4 = a_4 + \frac{1}{2}ba_1a_3$ et $x_5 = a_5 + \frac{1}{2}a_1a_2$.

Le groupe de Lie associé, noté $G_{(5,2,2)}$, est un groupe de taille 4×4 des matrices triangulaires inférieures, avec le produit de matrice usuel, de la forme :

$$G_{(5,2,2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & x_3 & 1 & 0 \\ x_5 & x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\} \subset GL(4, \mathbb{R}).$$

Maintenant pour $X = (x_{i,j}) \in G_{(5,2,2)}$, $1 \leq i, j \leq 4$, et pour $N_i \in \mathfrak{g}_{(5,2,2)}$ définie au-dessus ; on obtient l'équation géodésique

$$\dot{X} = \sum_{i=1}^4 P_i N_i X.$$

On a $G_{(5,2,2)} \cong \mathbb{R}^5$, muni des coordonnées $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ et on peut réécrire cette équation comme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= P_1 \\ \dot{x}_2 &= P_2 \\ \dot{x}_3 &= bP_3 \\ \dot{x}_4 &= P_4 + bP_3x_1 \\ \dot{x}_5 &= P_5 + P_2x_1 \end{aligned}$$

Ce système est équivalent au système (3.32).

Chapitre 4

Intégrabilité des équations adjointes associées à $\mathfrak{so}(4)$ et à $\mathfrak{so}(2, 2)$.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'étude d'une algèbre de Lie sous-riemannienne $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$, lorsque \mathfrak{g} est semi-simple involutive et de contact. Ces SR-algèbres ont été étudiées dans la classification des espaces sous-riemanniens simplement connexes, symétriques et de contact G/K , faite par Bieliavsky, Falbel et Gorodski dans [31]. Nous nous intéresserons au cas particulier où \mathfrak{g} est en plus non simple de dimension 6 et \mathfrak{p} de dimension 4, qui correspond aux espaces sous-riemanniens symétriques simplement connexes, de contact $SO(4)/SO(2)$ et $SO(2, 2)/SO(2)$. Pour la classification complète voir la liste dans [31].

Nous donnons l'équation adjointe associée à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4)$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 2)$ et nous montrons que les solutions de cette équation s'expriment à l'aide de fonctions elliptiques, ce qui est différent du cas où $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est nilpotente d'ordre 2, pour lequel les solutions sont des polynômes trigonométriques.

4.1 SR-algèbre de Lie involutive de contact

Une algèbre de Lie réelle \mathfrak{g} de dimension n est dite involutive si il existe un automorphisme d'algèbre σ de \mathfrak{g} involutif (i.e., $\sigma^2 = \text{Id}$ et σ non trivial); on peut alors décomposer \mathfrak{g} en somme directe des espaces propres associés aux valeurs propres ± 1 (décomposition de Cartan). On écrit $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$, où

$$\mathfrak{p} = \{x \in \mathfrak{g} : \sigma(x) = -x\} \text{ et } \mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} : \sigma(x) = x\}.$$

Il est clair que, \mathfrak{p} est un sous-espace vectoriel de \mathfrak{g} , de dimension $\leq n - 1$; \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} , $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ et $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}$.

En suivant Falbel et ses collaborateurs [31], [30] et [32], on dit qu'un triplet $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathfrak{k})$ est de contact si $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$ est une sous algèbre de Lie compacte de \mathfrak{h} de codimension 1, \mathfrak{k} agit transitivement sur \mathfrak{p} par la représentation adjointe ad (pour tout $k \in \mathfrak{k}$, ad_k est un endomorphisme de \mathfrak{p} , défini par $ad_k(x) = [k, x]$). Donc on a $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{p}$ et la forme bilinéaire antisymétrique $\Omega : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{h}/\mathfrak{k}$ définie par $\Omega(x, y) = [x, y]$ modulo \mathfrak{k} est non dégénérée.

Une SR-algèbre de Lie réelle, involutive et de contact, sera notée par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathfrak{k}, \mathcal{B})$; dans les travaux de Falbel et al [31], [30] et [32] une telle algèbre est appelée Sub-OIL-algèbre, où \mathcal{B} est une forme bilinéaire symétrique définie positive non dégénérée sur \mathfrak{p} et \mathcal{B} est $ad_{\mathfrak{k}}$ invariante, ce qui signifie :

$$\mathcal{B}([k, x], y) + \mathcal{B}(x, [k, y]) = 0, \text{ pour tous } x, y \in \mathfrak{p} \text{ et } k \in \mathfrak{k}.$$

Les algèbres de Lie involutives sont les objets linéaires naturellement associés aux espaces riemanniens symétriques. Une Sub-OIL-algèbre est la linéarisation de la structure des espaces sous-riemanniens symétriques. Ces espaces sous-riemanniens symétriques ont été étudiés par Strichartz [86], [87], puis ensuite par Falbel, Gorodski et Bieliavsky [31], [30] et [32].

On s'intéresse au cas où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie réelle semi-simple et non simple, involutive et de contact de dimension $n = 6$ et \mathfrak{p} est un sous espace vectoriel de \mathfrak{g} de dimension 4. On sait (tous les détails se trouvent dans [31]) que dans ce cas on a $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(2)$ de dimension 1 et \mathfrak{h} est une sous algèbre abélienne maximale de \mathfrak{g} de dimension 2 avec $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{h}$ et $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{p}$.

Soit k un élément non nul qui engendre \mathfrak{k} , l'application $ad_k : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ est antisymétrique de rang 4 et la forme bilinéaire \mathcal{B} sur \mathfrak{p} est ad_k invariante.

Nous allons montrer que \mathfrak{g} , en tant qu'une algèbre de Lie, est isomorphe soit à $\mathfrak{so}(4)$, soit à $\mathfrak{so}(2, 2)$ et nous donnerons la liste des modèles des SR-algèbres de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathfrak{k}, \mathcal{B})$, involutives et de contact, dans les deux cas. Rappelons que ce résultat est donné dans [31] mais la preuve lorsque $\dim \mathfrak{p} = 4$ n'est pas faite.

4.2 SR-algèbres de Lie $\mathfrak{so}(4)$ et $\mathfrak{so}(2, 2)$.

Le théorème ci-dessous donne la classification des SR-algèbres de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathfrak{k}, \mathcal{B})$ involutives de contact lorsque $\dim \mathfrak{p} = 4$ et \mathfrak{g} est semi-simple et non simple (de dimension 6). De plus, on obtient deux modèles canoniques correspondant à $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}(4)$ et $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}(2, 2)$.

Théorème 4.1. Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathfrak{k}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie involutive de contact où \mathfrak{g} est semi-simple et non simple de dimension 6 et $\dim \mathfrak{p} = 4$. Alors \mathfrak{g} est isomorphe (en tant qu'une algèbre de Lie) soit à $\mathfrak{so}(4)$, soit à $\mathfrak{so}(2, 2)$ et, en plus, il existe une base orthogonale (e_1, e_2, e_3, e_4) de \mathfrak{p} par rapport à \mathcal{B} dans laquelle la matrice de ad_k s'écrit par bloc $\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice de ad_{e_0} s'écrit par bloc $\begin{pmatrix} 0 & \text{Id}_2 \\ -\text{Id}_2 & 0 \end{pmatrix}$ où $e_0 \in \mathfrak{h}$ est indépendant de k et $\text{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et \mathfrak{g} vérifie les crochets de Lie suivants :

$$[e_1, e_2] = [e_3, e_4] = \varepsilon k, \quad [e_1, e_4] = 0 \quad \text{et} \quad [e_1, e_3] = \varepsilon e_0,$$

et $\varepsilon = \pm 1$ tel que $\varepsilon = 1$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4)$ et $\varepsilon = -1$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 2)$.

Pour montrer ce théorème, on donne la proposition suivante qui caractérise les propriétés de \mathcal{B} qui est ad_k invariante.

Notation 4.2. On note $\{\pm i\alpha_1, \pm i\alpha_2\}$, avec $\alpha_1 \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, les valeurs propres de l'application $ad_k : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ qui est antisymétrique de rang 4.

4.2.1 Métrique ad_k invariante

Proposition 4.3. Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathfrak{k}, \mathcal{B})$ une SR-algèbre de Lie réelle involutive de contact avec $\dim \mathfrak{p} = 4$, \mathcal{B} est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur \mathfrak{p} qui est ad_k invariante ($k \in \mathfrak{h}$). Soient $x, y, z, w \in \mathfrak{p}$ tels que

$$[k, x] = \alpha_1 y, \quad [k, y] = -\alpha_1 x, \quad [k, z] = \alpha_2 w, \quad \text{et} \quad [k, w] = -\alpha_2 z, \quad \alpha_1 \alpha_2 \neq 0.$$

Alors :

- (i) $\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}(z, w) = 0$, $\mathcal{B}(x, x) = \mathcal{B}(y, y)$ et $\mathcal{B}(z, z) = \mathcal{B}(w, w)$.
- (ii) Si $\alpha_1^2 \neq \alpha_2^2$, alors la base (x, y, z, w) de \mathfrak{p} est orthogonale par rapport à \mathcal{B} et donc on a une famille à deux paramètres pour \mathcal{B} , i.e., $\mathcal{B}(x, x) = \mathcal{B}(y, y) = \lambda > 0$ et $\mathcal{B}(z, z) = \mathcal{B}(w, w) = \mu > 0$.
- (iii) Si $\alpha_1^2 = \alpha_2^2$, alors la forme bilinéaire \mathcal{B} est donnée par quatre paramètres.

Démonstration. Cette proposition est donnée dans [31] sans preuve. Nous présentons ici une démonstration détaillée. Puisque \mathcal{B} est ad_k invariante, il est clair que pour tout $x \in \mathfrak{p}$, $\mathcal{B}([k, x], x) = -\mathcal{B}(x, [k, x]) = 0$, de plus, $\alpha_1 \mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}(x, [k, x])$ avec $\alpha_1 \neq 0$ donc $\mathcal{B}(x, y) = 0$ (de même $\mathcal{B}(z, w) = 0$). On a $\alpha_1 \mathcal{B}(y, y) = \mathcal{B}([k, x], y) = -\mathcal{B}(x, [k, y]) = \alpha_1 \mathcal{B}(x, x)$ ce qui implique que $\mathcal{B}(x, x) = \mathcal{B}(y, y)$ car $\alpha_1 \neq 0$ (de même on vérifie que $\mathcal{B}(z, z) = \mathcal{B}(w, w)$). Ce qui montre le (i).

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\alpha_1 \mathcal{B}(y, z) &= \mathcal{B}([k, x], z) = -\mathcal{B}(x, [k, z]) = -\alpha_2 \mathcal{B}(x, w) \text{ et} \\ -\alpha_2 \mathcal{B}(y, z) &= \mathcal{B}(y, [k, w]) = -\mathcal{B}([k, y], w) = \alpha_1 \mathcal{B}(x, w).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathcal{B}(y, z) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \mathcal{B}(x, w) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mathcal{B}(x, w).$$

De la même façon on vérifie que

$$\mathcal{B}(x, z) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mathcal{B}(y, w) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \mathcal{B}(y, w).$$

Ceci implique que $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ et alors $\alpha_1^2 = \alpha_2^2$ d'où $\alpha_1 = \pm\alpha_2$, ou bien $\alpha_1^2 \neq \alpha_2^2$ ce qui implique que $\mathcal{B}(x, w) = 0$ et $\mathcal{B}(y, w) = 0$ et donc $\mathcal{B}(y, z) = \mathcal{B}(x, z) = 0$. Ceci signifie que $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{x, y\}$ est orthogonal à $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{z, w\}$ par rapport à \mathcal{B} et par le (i) la base (x, y, z, w) est orthogonale. Dans le cas $\alpha_1^2 \neq \alpha_2^2$, \mathcal{B} dépend alors de deux paramètres $\mathcal{B}(x, x) = \mathcal{B}(y, y) = \lambda$ et $\mathcal{B}(z, z) = \mathcal{B}(w, w) = \mu$, ce qui montre (ii).

Il est évident que si $\alpha_1 = \pm\alpha_2$, on a $\mathcal{B}(y, z) = \pm\mathcal{B}(x, w)$ et $\mathcal{B}(x, z) = \mathcal{B}(y, w)$ et alors la forme de \mathcal{B} dépend des quatre paramètres : $\mathcal{B}(x, x)$, $\mathcal{B}(x, z)$, $\mathcal{B}(x, w)$ et $\mathcal{B}(z, z)$. Ce qui finit la preuve de cette proposition. \square

4.2.2 Preuve du Théorème 4.1

Notons par A et F , respectivement, les matrices de \mathcal{B} et ad_k , i.e., $\mathcal{B}(x, y) = x^\top Ay$ et $ad_k y = Fy$, pour $x, y \in \mathfrak{p}$. Puisque \mathcal{B} est ad_k invariante, les matrices A de \mathcal{B} et F de ad_k commutent. En effet, pour tout $x, y \in \mathfrak{p}$, on a $\mathcal{B}([k, x], y) + \mathcal{B}(x, [k, y]) = 0$. On en déduit que $x^\top F^\top Ay + x^\top AFy = 0$, en particulier pour tout $x \in \mathfrak{p}$ on a $x^\top (F^\top A + AF)x = 0$, ce qui implique que $FA = AF$ (car $F^\top = -F$, F^\top étant la transposée de F). Rappelons que si $\alpha_1^2 \neq \alpha_2^2$, il existe une base (x, y, z, w) orthogonale par rapport à \mathcal{B} (la propriété (ii) de la Proposition 4.3).

On va montrer que lorsque $\alpha_1 = \pm\alpha_2$, il existe une base de \mathfrak{p} orthogonale dans laquelle $A = \begin{pmatrix} \lambda \text{Id}_2 & 0 \\ 0 & \mu \text{Id}_2 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et on a les relations de commutations du Théorème 4.1.

Les matrices A et F commutent, A est symétrique et F est antisymétrique (A et F sont diagonalisables dans \mathbb{C}), il existe alors une base (x_1, x_2, x_3, x_4) de \mathfrak{p} dans laquelle A et F sont diagonalisables simultanément. Il est clair que (x_1, x_2, x_3, x_4) est orthogonale par rapport à \mathcal{B} . On écrit $F = \text{Diag}(i\alpha_1, -i\alpha_1, i\alpha_2, -i\alpha_2)$. On prend $x = x_1 + x_2$, $y = i(x_1 - x_2)$, $z = x_3 + x_4$ et $w = i(x_3 - x_4)$. On trouve $Fx = \alpha_1 y$, $Fy = -\alpha_1 x$, $Fz = \alpha_2 w$ et $Fw = -\alpha_2 z$. On utilise la Proposition

4.3(i), on en déduit que $\mathcal{B}(x, x) = \mathcal{B}(y, y)$, $\mathcal{B}(x, y) = 0$, $\mathcal{B}(z, z) = \mathcal{B}(w, w)$ et $\mathcal{B}(z, w) = 0$. On vérifie facilement que (x, y, z, w) est une base orthogonale de \mathfrak{p} (car $\mathcal{B}(x, z) = \mathcal{B}(x, w) = 0$ et $\mathcal{B}(y, z) = \mathcal{B}(y, w) = 0$, puisque $\mathcal{B}(x_i, x_j) = 0$ pour $i \neq j$ avec $1 \leq i, j \leq 4$).

On obtient (x, y, z, w) base orthogonale de \mathfrak{p} satisfaisant

$$[k, x] = \alpha_1 y, \quad [k, y] = -\alpha_1 x, \quad [k, z] = \alpha_2 w \quad \text{et} \quad [k, w] = -\alpha_2 z.$$

Dans cette base, les matrices A et F s'écrivent

$$A = \begin{pmatrix} \lambda \text{Id}_2 & 0 \\ 0 & \mu \text{Id}_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} \alpha_1 \text{J} & 0 \\ 0 & \alpha_2 \text{J} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = \pm \alpha_2.$$

Par ailleurs, en utilisant l'identité de Jacobi on vérifie facilement que :

$$[x, z] = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} [y, w] \quad \text{et} \quad [x, w] = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} [z, y].$$

En effet $[x, z] = -\frac{1}{\alpha_2} [x, [k, w]] = \frac{1}{\alpha_2} [w, [x, k]] = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} [y, w]$ (car $[x, w] \in \mathfrak{h}$ qui est abélienne) et $[x, w] = \frac{1}{\alpha_2} [x, [k, z]] = -\frac{1}{\alpha_2} [z, [x, k]] = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} [z, y]$. On en déduit que $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ est engendré par les crochets $[x, y]$, $[x, z]$, $[x, w]$ et $[z, w]$. On veut écrire les autres crochets de \mathfrak{g} .

Remarque 4.4. Notons que l'espace \mathfrak{p} s'écrit $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_2}$ où les \mathfrak{p}_{α_i} pour $i = 1, 2$ sont les espaces invariants réels de ad_k qui correspondent aux espaces propres complexes associés aux valeurs propres $\pm i\alpha_1$ et $\pm i\alpha_2$. Ces espaces \mathfrak{p}_{α_1} et \mathfrak{p}_{α_2} sont aussi des *espaces de racines* pour une algèbre de Lie semi-simple [47]. On sait que :

- Si $\alpha_1 = \pm \alpha_2$, les crochets $[x, y]$ et $[z, w]$ qui engendrent respectivement $[\mathfrak{p}_{\alpha_1}, \mathfrak{p}_{\alpha_1}]$ et $[\mathfrak{p}_{\alpha_2}, \mathfrak{p}_{\alpha_2}]$ sont non nuls et appartiennent à \mathfrak{k} et en plus $[\mathfrak{p}_{\alpha_1}, \mathfrak{p}_{\alpha_2}] \neq \{0\}$.
- Si $\alpha_1^2 \neq \alpha_2^2$ alors $|\alpha_1|$ et $|\alpha_2|$ sont deux racines positives distinctes. On a $[\mathfrak{p}_{\alpha_1}, \mathfrak{p}_{\alpha_2}] = \{0\}$ car $\pm(\alpha_1 + \alpha_2)$ et $\pm(\alpha_1 - \alpha_2)$ ne sont pas des racines de \mathfrak{g} ($\dim \mathfrak{h} = 2$). Dans ce cas, la forme $\Omega(x, y) = [x, y]$ modulo \mathfrak{k} est dégénérée et alors $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathfrak{k})$ n'est pas de contact.

Dans toute la suite, on s'intéresse au cas où $\alpha_1^2 = \alpha_2^2$ car $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathfrak{k})$ est de contact.

Remarque 4.5. Il est clair que (pour $\alpha_1 = \pm \alpha_2$), on peut supposer que $\alpha_1 = \alpha_2$ (et $\alpha_1 > 0$), il suffit de permuter les éléments de la base.

Remarque 4.6. On peut supposer que $\alpha_1 = 1$, il suffit de normaliser l'élément $k \in \mathfrak{k}$, en prenant $\frac{k}{\alpha_1}$ à la place de k . Il est clair que, pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, les paires (x, y) et (z, w) jouent le même rôle (une permutation de \mathfrak{p}_{α_1} et \mathfrak{p}_{α_2}). Donc $[x, y] = [z, w]$. On pose $[x, y] = \alpha k$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Par ailleurs, on peut supposer que $\alpha = \pm 1$. En effet, sans perdre de généralités, il suffit de diviser les éléments x, y, z et w par $\sqrt{|\alpha|}$.

On sait que $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{h}$, où \mathfrak{h} est une algèbre abélienne maximale de dimension 2, contenant k . Soit x_0 un élément non nul de \mathfrak{h} , indépendant de k . Écrivons alors $[x, z] = ak + bx_0$ et $[x, w] = ck + dx_0$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Puisque $[x, y], [z, w] \in \mathfrak{k}$ et $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ est engendrée par $[x, y], [z, w], [x, z]$ et $[x, w]$, il est clair que $(b, d) \neq (0, 0)$.

Maintenant on montre que, par des rotations dans \mathfrak{p} , on peut se ramener au cas où $[x, w] = 0$ et $[x, z]$ est un élément non nul de \mathfrak{h} indépendant de k , en utilisant le Lemme 2.5(i). En effet :

Si $d \neq 0$, on a $[x, z] = ak + bx_0$ et $[x, w] = ck + dx_0$. On considère une rotation du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{z, w\}$ d'angle φ , qui laisse invariant x et y . Les deux crochets $[x, y]$ et $[z, w]$ ne changent pas par cette rotation. On veut annuler le coefficient d . On pose :

$$\tilde{z} = \cos \varphi z + \sin \varphi w \quad \text{et} \quad \tilde{w} = -\sin \varphi z + \cos \varphi w.$$

Par de simples calculs, on obtient, en choisissant φ tel que $\cos \varphi = \frac{b}{d} \sin \varphi$:

$$[x, \tilde{z}] = \tilde{a}k + \tilde{b}x_0 \quad \text{et} \quad [x, \tilde{w}] = \tilde{c}k$$

$$\text{avec} \quad \tilde{a} = \frac{ab + cd}{d} \sin \varphi, \quad \tilde{b} = \frac{b^2 + d^2}{d} \sin \varphi \neq 0 \quad \text{et} \quad \tilde{c} = \frac{-ad + bc}{d} \sin \varphi.$$

Remarquons que cette transformation conserve l'action de ad_k sur l'espace $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{z, w\}$, i.e., $[k, \tilde{z}] = \tilde{w}$ et $[k, \tilde{w}] = -\tilde{z}$.

On montre maintenant que le coefficient \tilde{c} est nécessairement nul. Supposons que $\tilde{c} \neq 0$. On fait une rotation du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{x, \tilde{z}\}$ d'angle ϕ et une rotation du plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{y, \tilde{w}\}$ de même angle ϕ . On pose :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \cos \phi x + \sin \phi \tilde{z} & \text{et} & \quad \hat{z} = -\sin \phi x + \cos \phi \tilde{z}, \\ \hat{y} &= \cos \phi y + \sin \phi \tilde{w} & \text{et} & \quad \hat{w} = -\sin \phi y + \cos \phi \tilde{w} \end{aligned}$$

On vérifie facilement que :

$$[k, \hat{x}] = \hat{y}, [k, \hat{y}] = -\hat{x} \text{ et } [k, \hat{z}] = \hat{w}, [k, \hat{w}] = -\hat{z}, \\ [\hat{x}, \hat{z}] = \tilde{a}k + \tilde{b}x_0 \text{ (avec } \tilde{b} \neq 0) \text{ et } [\hat{x}, \hat{w}] = (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)\tilde{c}k.$$

Il suffit de choisir ϕ tel que $\cos^2 \phi = \sin^2 \phi$ et on a $[\hat{x}, \hat{w}] = 0$. Par ailleurs, on trouve que :

$$[\hat{x}, \hat{y}] = \hat{\alpha}k \text{ et } [\hat{z}, \hat{w}] = \hat{\beta}k \text{ où } \hat{\alpha} = \alpha + \tilde{c} \sin 2\phi \text{ et } \hat{\beta} = \alpha - \tilde{c} \sin 2\phi.$$

Mais, en utilisant la Remarque 4.4, on sait que $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, ce qui implique que $\tilde{c} = 0$, puisque $\sin 2\phi \neq 0$. Ce qui est absurde.

On obtient ainsi une base $(x, y, \tilde{z}, \tilde{w})$ orthogonale de \mathfrak{p} dans laquelle la matrice de \mathcal{B} s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda \text{Id}_2 & 0 \\ 0 & \mu \text{Id}_2 \end{pmatrix}$ et la matrice de ad_k s'écrit $\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$, et elle vérifie les relations de commutations suivantes :

$$[x, y] = [\tilde{z}, \tilde{w}] = \varepsilon k \text{ avec } \varepsilon = \pm 1 \\ [x, \tilde{w}] = 0 \text{ et } [x, \tilde{z}] = \tilde{a}k + \tilde{b}x_0, \text{ avec } \tilde{b} \neq 0.$$

On note $\tilde{a}k + \tilde{b}x_0 = \tilde{x}_0$ un élément de \mathfrak{h} indépendant de k .

Remarque 4.7. L'application $ad_{\tilde{x}_0}$ est donnée par l'identité de Jacobi.

$$\text{En effet : } [\tilde{x}_0, y] = [[x, \tilde{z}], y] = -[[y, x], \tilde{z}] = -[k, \tilde{z}] = \tilde{w}, \\ [\tilde{x}_0, x] = -[\tilde{x}_0, [k, y]] = [k, [y, \tilde{x}_0]] = -[k, \tilde{w}] = \tilde{z}, \\ [\tilde{x}_0, \tilde{w}] = [[x, \tilde{z}], \tilde{w}] = -[[\tilde{z}, \tilde{w}], x] = -[k, x] = -y, \\ [\tilde{x}_0, \tilde{z}] = -[\tilde{x}_0, [k, \tilde{w}]] = [k, [\tilde{w}, \tilde{x}_0]] = [k, y] = -x.$$

Notons que l'application ad_k laisse invariant chacun des plans $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{x, y\}$ et $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{\tilde{z}, \tilde{w}\}$, mais l'application $ad_{\tilde{x}_0}$ permute ces deux plans.

On pose $e_1 = x, e_2 = y, e_3 = \tilde{z}, e_4 = \tilde{w}$ et $\varepsilon e_0 = \tilde{x}_0$ et on obtient les relations de commutations du Théorème 4.1 qui sont : $[e_1, e_2] = [e_3, e_4] = \varepsilon k, [e_1, e_4] = 0$ et $[e_1, e_3] = \varepsilon e_0$.

Montrons que si $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = -1$), on obtient $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4)$ (resp. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 2)$) :

Pour $\mathfrak{so}(4)$, on note E_{ij} la matrice antisymétrique (a_{lm}) , pour $1 \leq l, m \leq 4$, telle que $a_{ij} = 1, a_{ji} = -1$ et les autres coefficients sont nuls, on prend pour base de $\mathfrak{so}(4)$ les éléments suivants :

$$e_1 = E_{13}, e_2 = E_{14}, e_3 = E_{23}, e_4 = E_{24}, k = -E_{34} \text{ et } e_0 = -E_{12}.$$

On obtient les relations de commutations du Théorème 4.1 avec $\varepsilon = 1$.

Pour $\mathfrak{so}(2, 2)$, on note E^{ij} la matrice (a_{lm}) , pour $1 \leq l, m \leq 4$, telle que la matrice $a_{ij} = 1$ et les autres coefficients sont nuls, on prend pour base de $\mathfrak{so}(2, 2)$ les éléments suivants :

$$e_1 = E^{14} + E^{41}, e_2 = E^{13} + E^{31}, e_3 = E^{24} + E^{42}, e_4 = E^{23} + E^{32}, k = E_{34} \text{ et } e_0 = -E_{12}.$$

On obtient les relations de commutations du Théorème 4.1 avec $\varepsilon = -1$. Ce qui finit la démonstration de ce théorème.

Remarque 4.8. L'élément e_0 est dit l'élément caractéristique dans la classification de Bielavsky, Falbel et Gorodski, qui caractérise la structure de contact. Pour plus de détails, voir [31].

Le Théorème 4.1 nous donne le modèle des relations de commutations $[e_i, e_j]$ pour $\mathfrak{so}(4)$ et $\mathfrak{so}(2, 2)$ (qui correspond respectivement à $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = -1$) présenté sous la forme suivante (dans l'ordre $e_1, e_2, e_3, e_4, k, e_0$ en ligne et en colonne) :

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon k & \varepsilon e_0 & 0 & -e_2 & -e_3 \\ -\varepsilon k & 0 & 0 & \varepsilon e_0 & e_1 & -e_4 \\ -\varepsilon e_0 & 0 & 0 & \varepsilon k & -e_4 & e_1 \\ 0 & -\varepsilon e_0 & -\varepsilon k & 0 & e_3 & e_2 \\ e_2 & -e_1 & e_4 & -e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & e_4 & -e_1 & -e_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

4.3 Système adjoint et intégrales premières pour $\mathfrak{so}(4)$.

On va étudier l'intégrabilité du système adjoint de Lie-Poisson associé à la SR-algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4)$. Le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 2)$ est similaire. On obtient les mêmes résultats à un signe près de ε dans (4.1).

Nous utiliserons la base orthogonale (e_1, e_2, e_3, e_4) de \mathfrak{p} donnée par le Théorème 4.1 dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4)$. L'hamiltonien sous-riemannien donné par (1.14), dans le cas où les champs de vecteurs sont orthogonaux, s'écrit :

$$H(p) = \lambda p_1^2 + \lambda p_2^2 + \mu p_3^2 + \mu p_4^2,$$

avec λ, μ réels strictement positifs qui sont les valeurs propres de \mathcal{B} .

On écrit les crochets de Lie de la SR-algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ en utilisant (4.1) avec $\varepsilon = 1$ et en notant, pour simplifier, $-k = e_5$ et $e_0 = e_6$:

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^6 c_{ij}^k e_k, \quad (4.2)$$

avec $[e_1, e_2] = [e_3, e_4] = -e_5$, $[e_1, e_3] = [e_2, e_4] = e_6$, $[e_1, e_4] = [e_3, e_2] = 0$, $[e_5, e_1] = -e_2$, $[e_5, e_2] = -e_1$, $[e_5, e_3] = -e_4$, $[e_5, e_4] = -e_3$, $[e_6, e_1] = e_3$, $[e_6, e_2] = e_4$, $[e_6, e_3] = -e_1$, $[e_6, e_4] = -e_2$ et $[e_6, e_5] = 0$.

Dans la base $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$, on écrit l'équation adjointe en utilisant la relation (1.17), i.e., $\dot{p}_j = \sum_{i=1}^4 p_i \{p_j, p_i\}$, pour $1 \leq j \leq 6$, où $(p_1, \dots, p_6) = p \in \mathfrak{g}^*$.

Notation 4.9. Dans cette partie, pour simplifier les notations, un élément $p \in \mathfrak{g}^*$ sera noté $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ et un élément $P \in \mathfrak{p}$ sera noté $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$.

On trouve le système adjoint de Lie-Poisson associé à l'hamiltonien $H(x) = \lambda(x_1^2 + x_2^2) + \mu(x_3^2 + x_4^2)$:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\lambda x_2 x_5 + \mu x_3 x_6 \\
\dot{x}_2 &= \lambda x_1 x_5 + \mu x_4 x_6 \\
\dot{x}_3 &= -\lambda x_1 x_6 - \mu x_4 x_5 \\
\dot{x}_4 &= -\lambda x_2 x_6 + \mu x_3 x_5 \\
\dot{x}_5 &= 0 \\
\dot{x}_6 &= (\lambda - \mu)(x_1 x_3 + x_2 x_4).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

On veut étudier l'intégrabilité de ce système quadratique (4.3). On va déterminer les intégrales premières fonctionnellement indépendantes de ce système, d'abord dans le cas où $\lambda = \mu$, ce qui donne un système linéaire, puis on étudiera le cas où $\lambda \neq \mu$, qui donne un système non linéaire. Nous montrerons que les solutions de ce système (4.3) sont trigonométriques (ou constantes) dans le cas linéaire $\lambda = \mu$ et elles s'expriment à l'aide de fonctions elliptiques dans le cas non linéaire.

On utilise les propriétés d'intégrabilité rappelées dans la section 3.1.

Le système de Lie-Poisson (4.3) s'écrit comme $\dot{x} = J(x)\nabla H(x)$, où $H(x)$ est l'hamiltonien du système, ∇H le gradient de H , et où $J(x)$ est la matrice définissant la structure de Poisson et elle dépend linéairement de x , i.e.,

$$J_{ij}(x) = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k x_k \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n,$$

où les coefficients c_{ij}^k sont les constantes de structure de la SR-algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ de dimension n (dans notre cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4)$, $n = 6$ et c_{ij}^k sont données

par (4.2)).

Rappelons les définitions de l'intégrabilité données dans la Section 3.2.

Définition 4.10. Une fonction de Casimir d'une matrice de Poisson $J(x)$ est une fonction $C(x)$ satisfaisant $J(x)\nabla C(x) = 0$.

Notons que les fonctions de Casimir dépendent seulement de la matrice de Poisson $J(x)$ (et pas de l'hamiltonien H). Elles sont données par l'équation aux dérivées partielles $J(x)\nabla C(x) = 0$ et elles Poisson-commutent avec toutes les fonctions $f(x)$, i.e., $\{C(x), f(x)\} = 0$.

La matrice de Poisson $J(x)$ du système $\dot{x} = J(x)\nabla H(x)$ étant antisymétrique, son rang en x est pair, que l'on note $2r(x)$, $r(x) \in \mathbb{N}$, avec $2r(x) \leq n$, où n est la dimension de l'algèbre de Lie. On appelle le rang de la matrice de Poisson $\max_{x \in \mathfrak{g}^*} 2r(x)$ et on le note $2r$.

Définition 4.11. On dit qu'un système adjoint de Lie-Poisson de dimension n , avec une structure de Poisson de rang $2r$, est Liouville-intégrable si ce système admet $n-r$ intégrales premières fonctionnellement indépendantes $C_1, \dots, C_{n-2r}, I_1, \dots, I_r$ tels que C_1, \dots, C_{n-2r} sont des fonctions de Casimir de la structure et I_1, \dots, I_r sont deux à deux commutatives.

Rappelons qu'un système adjoint de Lie-Poisson de dimension n est dit super-intégrable s'il admet $n-1$ intégrales premières logarithmiques fonctionnellement indépendantes.

La matrice de Poisson associée au système adjoint de Lie-Poisson (4.3) est donnée par les relations de commutations (4.2) :

$$J(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x_5 & x_6 & 0 & x_2 & -x_3 \\ x_5 & 0 & 0 & x_6 & -x_1 & -x_4 \\ -x_6 & 0 & 0 & -x_5 & x_4 & x_1 \\ 0 & -x_6 & x_5 & 0 & -x_3 & x_2 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 & 0 & 0 \\ x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\text{rang } J(x) = 4$, par conséquent, d'après la définition 4.11, le système doit admettre 2 fonctions de Casimir et deux intégrales premières supplémentaires qui commutent pour être Liouville-intégrable. En effet, dans ce cas, les ensembles

de niveau constant de deux fonctions de Casimir sont des variétés de dimension quatre et la structure de Poisson restreinte à ces variétés donne une structure symplectique. Pour avoir l'intégrabilité sur chaque feuille nous avons besoin de deux autres intégrales premières fonctionnellement indépendantes qui commutent.

4.3.1 Le cas $\lambda = \mu$

Dans cette partie, on va étudier le système adjoint de Lie-Poisson (4.3) dans le cas $\lambda = \mu$. Ce qui signifie que la matrice de la métrique définie par \mathcal{B} est égale à λId_4 . Notons que dans le cas de la décomposition de Cartan pour une algèbre semi-simple (ce qui est notre cas), où la métrique est un multiple scalaire de la forme de Killing (ce qui correspond à notre situation $\lambda = \mu$ où la métrique est λId_4), il y a une formule explicite générale pour les géodésiques, voir [36]. En effet, Gauthier et ses collaborateurs appliquent dans [36] les techniques de la géométrie sous-riemannienne sur les groupes de Lie dans un système quantique à trois niveaux (laser-induit). Ces auteurs prouvent en particulier que le système hamiltonien donné par le principe du maximum de Pontryagin est dans ce cas complètement intégrable. Pour cela, ils utilisent le fait que ce problème peut être exposé sur un groupe de Lie semi-simple dont l'algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} admet une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ de Cartan, alors $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{p}$ et $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{k}$. Les équations sont données par la forme de Lax-Poincaré :

$$\frac{dM(t)}{dt} = [dH(P(t)), M(t)],$$

où on a la décomposition $M = M_{\mathfrak{p}} + M_{\mathfrak{k}}$, avec $M_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{p}$, $M_{\mathfrak{k}} \in \mathfrak{k}$ et H est l'hamiltonien du problème. En fait ils montrent que les candidats pour les trajectoires optimales pour ce problème dont $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ sont seulement les géodésiques normales et sont données par la formule suivante :

$$q(t) = e^{-A_{\mathfrak{k}}t} e^{(A_{\mathfrak{k}} + A_{\mathfrak{p}})t} q(0),$$

où $A_{\mathfrak{p}} := M_{\mathfrak{p}}(0)$, $A_{\mathfrak{k}} := M_{\mathfrak{k}}(0)$.

En revanche le cas $\lambda \neq \mu$, analysé dans la section suivante, est beaucoup plus riche et nous allons donc lui prêter davantage d'attention.

Théorème 4.12. *Si $\lambda = \mu$, alors :*

- (i) *Le système adjoint de Lie-Poisson (4.3) est Liouville-intégrable dans la catégorie de polynômes de degré deux.*

- (ii) *Le système adjoint de Lie-Poisson (4.3) est toujours super-intégrable dans la catégorie logarithmique.*
 (iii) *Ses solutions sont des fonctions trigonométriques du temps ou des constantes.*

Démonstration. Si $\lambda = \mu$, alors le système adjoint de Lie-Poisson (4.3) est donné par :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \lambda(-x_2x_5 + x_3x_6) \\
 \dot{x}_2 &= \lambda(x_1x_5 + x_4x_6) \\
 \dot{x}_3 &= \lambda(-x_1x_6 - x_4x_5) \\
 \dot{x}_4 &= \lambda(-x_2x_6 + x_3x_5) \\
 \dot{x}_5 &= 0, \\
 \dot{x}_6 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Preuve de (i). Le système adjoint de Lie-Poisson (4.4) admet 4 intégrales premières indépendantes qui sont données par :

$$\begin{aligned}
 I_1(x) &= C_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \\
 I_2(x) &= C_2(x) = -x_2x_3 + x_1x_4 + x_6x_5 \\
 I_3(x) &= x_6 \\
 I_4(x) &= x_5,
 \end{aligned}$$

dont $I_1 = C_1$ et $I_2 = C_2$ sont des fonctions de Casimir. De plus les intégrales premières I_1, I_2, I_3 et I_4 sont commutatives. Ceci prouve la Liouvill-intégrabilité dans la catégorie de polynômes de degré deux.

Preuve de (ii). Pour montrer la super-intégrabilité dans la catégorie logarithmique, on va chercher une cinquième intégrale première indépendante I_5 . Bien évidemment, les trajectoires $x_5(t)$ et $x_6(t)$ sont des fonctions constantes du temps. Par conséquent, pour simplifier l'étude, il suffit d'étudier le sous-système de dimension 4 qui est linéaire donné par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & -x_5 & x_6 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & x_6 \\ -x_6 & 0 & 0 & -x_5 \\ 0 & -x_6 & x_5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Ce système s'écrit sous la forme $\dot{X}(t) = \lambda AX(t)$ où A est une matrice antisymétrique donnée par $\begin{pmatrix} -x_5J & x_6\text{Id}_2 \\ -x_6\text{Id}_2 & -x_5J \end{pmatrix}$ avec $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^\top$ et où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

et Id_2 est la matrice identité de taille 2×2 .

Par homogénéité ($\lambda \neq 0$), on peut supposer $\lambda = 1$. On a vu dans l'annexe du Chapitre 3 que ce système (4.5) admet une intégrale première, notée I_5 , donnée, lorsque $x_1 \neq \pm x_4$, par

$$I_5(x) = (x_5 + x_6) \arctan\left(\frac{-x_2 + x_3}{x_1 + x_4}\right) - (-x_5 + x_6) \arctan\left(\frac{-x_2 - x_3}{-x_1 + x_4}\right). \quad (4.6)$$

Il est clair que si $x_1(t) = \pm x_4(t)$ alors $\dot{x}_1 = \pm \dot{x}_4$, ce qui est équivalent à $(x_2 \pm x_3)(x_6 \pm x_5) = 0$. Par conséquent on a soit $x_2 \pm x_3 = 0$, soit $x_6 \pm x_5 = 0$.

Il suffit d'utiliser le Lemme 3.16, et on en déduit l'existence d'une intégrale première I_5 , indépendante de I_1, I_2, I_3, I_4 , ce qui prouve la super-intégrabilité dans la catégorie logarithmique.

Preuve de (iii). Pour simplifier la démonstration, on considère le système (4.5), avec $\lambda = 1$:

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} -x_5 J & x_6 \text{Id}_2 \\ -x_6 \text{Id}_2 & -x_5 J \end{pmatrix} X(t) = AX(t), \quad (4.7)$$

La matrice A étant antisymétrique, on sait que les solutions de ce système sont des combinaisons linéaires de fonctions trigonométriques et constantes, pour montrer ceci voir la preuve du Théorème 3.27 du Chapitre 3. On donne les solutions explicitement dans ce qui suit. On considère la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix},$$

où V est la matrice de passage diagonalisant la matrice J , i.e.,

$$V^{-1} J V = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

$$B = \begin{pmatrix} -ix_5 & 0 & x_6 & 0 \\ 0 & ix_5 & 0 & x_6 \\ -x_6 & 0 & -ix_5 & 0 \\ 0 & -x_6 & 0 & ix_5 \end{pmatrix},$$

Par ailleurs, puisque

$$\dot{X}(t) = AX(t) \text{ et que } A = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{pmatrix},$$

on a alors

$$\begin{pmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{pmatrix} \dot{X}(t) = B \begin{pmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{pmatrix} X(t).$$

On pose

$$Y(t) = \begin{pmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{pmatrix} X(t)$$

et on obtient $\dot{Y}(t) = BY(t)$, i.e. ;

$$\dot{y}_1 = -ix_5y_1 + x_6y_3 \quad (4.8)$$

$$\dot{y}_3 = -x_6y_1 - ix_5y_3 \quad (4.9)$$

$$\dot{y}_2 = ix_5y_2 + x_6y_4 \quad (4.10)$$

$$\dot{y}_4 = -x_6y_2 + ix_5y_4 \quad (4.11)$$

En multipliant (4.9) par x_6 et en dérivant (4.8) par rapport au temps, on trouve

$$\ddot{y}_1 = -2ix_5\dot{y}_1 + (x_5^2 - x_6^2)y_1 \quad (4.12)$$

De même on obtient

$$\ddot{y}_2 = 2ix_5\dot{y}_2 + (x_5^2 - x_6^2)y_2 \quad (4.13)$$

On résoud ces équations différentielles du second ordre à coefficients constants sans second membre, on obtient $y_1(t)$, puis $y_3(t)$ et $y_2(t)$, puis $y_4(t)$. Puis en utilisant le changement linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix},$$

on trouve l'ensemble des solutions du système (4.5). Ses solutions sont données sous la forme :

$$X(t) = \phi(t)X(0),$$

où $X(0) \in \mathbb{R}^4$ et $\phi(t)$ est la solution fondamentale donnée par

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \sin(x_6 - x_5)t & -\cos(x_6 - x_5)t & \cos(x_6 - x_5)t & \sin(x_6 - x_5)t \\ \cos(x_6 - x_5)t & \sin(x_6 - x_5)t & -\sin(x_6 - x_5)t & \cos(x_6 - x_5)t \\ \sin(x_6 + x_5)t & \cos(x_6 + x_5)t & \cos(x_6 + x_5)t & -\sin(x_6 + x_5)t \\ (\cos(x_6 + x_5)t & -\sin(x_6 + x_5)t & -\sin(x_6 + x_5)t & -\cos(x_6 + x_5)t \end{pmatrix}.$$

□

4.3.2 Le cas $\lambda \neq \mu$

Dans le cas $\lambda \neq \mu$, le système adjoint de Lie-Poisson (4.3) est quadratique (non linéaire) et la matrice de \mathcal{B} s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda \text{Id}_2 & 0 \\ 0 & \mu \text{Id}_2 \end{pmatrix}$. Pour étudier ce cas, nous allons utiliser les propriétés des fonctions elliptiques de Weierstrass, voir le livre de Watson et Whittaker [92] ou le livre de Siegel [84].

Définition 4.13. Une fonction elliptique est une fonction méromorphe f définie sur \mathbb{C} pour laquelle il existe deux nombres complexes non nuls a et b (les périodes) tels que $\frac{a}{b} \notin \mathbb{R}$ et $f(z + a) = f(z + b) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Une classe très importante de fonctions elliptiques est celle des fonctions elliptiques de Weierstrass que nous allons utiliser par la suite. Les fonctions elliptiques de Weierstrass, notées $\wp(z)$, sont des fonctions elliptiques qui ont un pôle d'ordre 2 en $z = 0$. De manière plus explicite, on les définit comme suit.

Définition 4.14. La fonction elliptique $\wp(z) = \wp(z; \omega_1, \omega_2)$ de Weierstrass, avec $2\omega_1$ et $2\omega_2$ qui sont les périodes, est

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n} \left\{ \frac{1}{(z - 2m\omega_1 - 2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} \right\}.$$

En effet, $\wp(z) = \wp(z; \omega_1, \omega_2)$ est double-périodique, avec les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$, i.e., $\wp(z + 2\omega_1) = \wp(z + 2\omega_2) = \wp(z)$ (voir [92] p. 434 pour plus de détails).

On sait que, voir [84], tout quotient de fonctions polynomiales de \wp et de sa dérivée est une fonction elliptique. De plus, toute fonction elliptique s'écrit comme un quotient de deux polynômes de \wp et de sa dérivée à coefficients constants.

Par ailleurs, en posant $\Theta_{m,n} = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$, on définit les invariants elliptiques par (voir [92] p. 436 pour plus de détails) :

$$\begin{aligned} g_2 &= 60 \sum \Theta_{m,n}^{-4}, \\ g_3 &= 140 \sum \Theta_{m,n}^{-6}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on notera aussi $\wp(z) = \wp(z; \omega_1, \omega_2) = \wp(z; g_2, g_3)$.

Nous serons également amené à utiliser les fonctions sigma et zeta de Weierstrass. La fonction sigma de Weierstrass, notée par $\sigma(z)$, est définie par

$$\sigma(z) = z \prod_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{m\pi}\right) e^{z/m\pi} \right\}.$$

La fonction zeta de Weierstrass, notée par $\zeta(z)$, est définie par

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}.$$

Théorème 4.15. *Considérons le système de Lie-Poisson (4.3), dont l'hamiltonien est $H = \lambda x_1^2 + \lambda x_2^2 + \mu x_3^2 + \mu x_4^2$ et supposons $\lambda \neq \mu$. Alors :*

- (i) *Le système adjoint de Lie-Poisson (4.3) est Liouville-intégrable dans la catégorie de polynômes quadratiques, des intégrales premières étant*

$$\begin{aligned} I_1 &= C_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \\ I_2 &= C_2 = x_1 x_4 - x_2 x_3 + x_6 x_5 \\ I_3 &= H = \lambda x_1^2 + \lambda x_2^2 + \mu x_3^2 + \mu x_4^2 \\ I_4 &= x_5 \end{aligned}$$

- (ii) $x_6(t)$ est exprimable à l'aide de la fonction elliptique de Weierstrass $\wp(t; g_2, g_3)$.
 (iii) $x_5(t)$ est constante et $x_i(t)$ pour $1 \leq i \leq 4$ sont exprimables en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= R(t) \sin \psi(t), & x_2(t) &= R(t) \cos \psi(t), \\ x_3(t) &= r(t) \sin \phi(t), & x_4(t) &= r(t) \cos \phi(t), \end{aligned}$$

avec

$$r^2 = \frac{\lambda}{\lambda - \mu} \left(C_1 - x_6^2 - I_4^2 - \frac{H}{\lambda} \right) \text{ et } R^2 = \frac{\mu}{\mu - \lambda} \left(C_1 - x_6^2 - I_4^2 - \frac{H}{\mu} \right),$$

où $\psi(t)$ et $\phi(t)$ s'écrivent comme la somme d'une fonction linéaire du temps t et de la composée des fonctions elliptiques $\sigma(t)$ et $\zeta(t)$ de Weierstrass, donnée

par la forme générale suivante :

$$\alpha_1 t + \alpha_2 \left(\frac{A \ln \left(\frac{\sigma(t) - b_1}{\sigma(t) + b_1} \right) + 2At\zeta(b_1)}{\sqrt{-g_3 + Bg_2 - 4B^3}} + \frac{C \ln \left(\frac{\sigma(t) - b_2}{\sigma(t) + b_2} \right) + 2Ct\zeta(b_2)}{\sqrt{-g_3 + Dg_2 - 4D^3}} \right)$$

où b_1 et b_2 sont respectivement les uniques racines des équations :

$$\wp(t; g_2, g_3) + B = 0 \text{ et } \wp(t; g_2, g_3) + D = 0,$$

et $\alpha_1, \alpha_2, A, B, C, D$ sont des constantes.

4.3.3 Preuve du Théorème 4.15(i)

On vérifie, par un simple calcul, que les I_i , pour $1 \leq i \leq 4$, sont des intégrales premières indépendantes du système adjoint de Lie-Poisson (4.3) ($\lambda \neq \mu$).

On a de plus, $\{I_i, I_j\} = 0$, pour tout $1 \leq i \leq 4$, ce qui signifie que toutes les intégrales premières commutent entre elles.

Il est bien connu, voir par exemple [1], que pour une structure standard de Poisson définie sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(n)$, le nombre de fonctions de Casimir est donné par $\left[\frac{n}{2} \right]$, où $\left[\frac{n}{2} \right]$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$ et que les fonctions de Casimir sont données par $\text{Tr } x^{2i}$ pour $1 \leq i \leq \left[\frac{n}{2} \right]$ pour $x \in \mathfrak{so}(n)$.

L'algèbre $\mathfrak{so}(4)$ est un espace vectoriel de dimension 6 engendré par l'ensemble des matrices réels antisymétriques de taille 4×4 . Soit $x \in \mathfrak{so}(4)$, alors on a

$$x = x_1 E_{12} + x_2 E_{13} + x_3 E_{24} + x_4 E_{34} + x_5 E_{14} + x_6 E_{23},$$

où E_{ij} est la matrice antisymétrique (a_{lm}) , pour $1 \leq l, m \leq 4$, telle que $a_{ij} = 1$, $a_{ji} = -1$ et les autres coefficients sont nuls.

Il existe deux fonctions de Casimir qui sont données par :

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{2} \text{Tr } x^2 = x_6^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \text{ et} \\ \tilde{C}_2 &= \text{Tr } x^4 = (-x_1^2 - x_2^2 - x_5^2)^2 + 2(-x_6 x_2 - x_3 x_5)^2 + 2(x_6 x_1 - x_4 x_5)^2 \\ &+ 2(x_1 x_3 + x_2 x_4)^2 + (-x_6^2 - x_1^2 - x_3^2)^2 + 2(-x_1 x_2 - x_3 x_4)^2 \\ &+ 2(-x_1 x_5 + x_6 x_4)^2 + (-x_6^2 - x_2^2 - x_4^2)^2 + 2(-x_2 x_5 - x_6 x_3)^2 \\ &+ (-x_3^2 - x_4^2 - x_5^2)^2, \end{aligned}$$

Il est alors facile de montrer que :

$$C_1 = I_1 \quad \text{et} \quad C_2^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{C_1^2}{2} - \tilde{C}_2 \right).$$

On remarque alors que $I_1 = C_1$ et $I_2 = C_2$ sont des fonctions de Casimir. Ainsi le système adjoint de Lie-Poisson (4.3) admet deux fonctions de Casimir indépendantes et deux autres intégrales premières (une linéaire et l'hamiltonien quadratique) indépendants et commutant toutes entres elles. Ce système de Lie-Poisson est donc Liouville-intégrable dans la catégorie de polynomes de degré deux.

4.3.4 Fonction elliptique de Weierstrass et preuve du Théorème 4.15(ii).

En calculant la dérivée seconde de x_6 , nous obtenons :

$$\ddot{x}_6 = (\lambda - \mu)^2(x_1x_4 - x_2x_3)x_5 + (\lambda - \mu)x_6[-\lambda(x_1^2 + x_2^2) + \mu(x_3^2 + x_4^2)] \quad (4.14)$$

Or, les intégrales premières étant constantes le long des trajectoires, on a

$$\begin{aligned} x_3^2 + x_4^2 &= \frac{\lambda}{\lambda - \mu} \left(C_1 - x_6^2 - I_4^2 - \frac{H}{\lambda} \right) \\ x_1^2 + x_2^2 &= \frac{\mu}{\mu - \lambda} \left(C_1 - x_6^2 - I_4^2 - \frac{H}{\mu} \right) \\ x_1x_4 - x_2x_3 &= I_2 - x_6x_5. \end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans (4.14), on obtient :

$$\ddot{x}_6 = (\lambda - \mu)^2 C_2 I_4 + x_6 [-(\lambda - \mu)^2 I_4^2 - 2\lambda\mu(C_1 - I_4^2) - (\lambda + \mu)H] - 2\mu\lambda x_6^3 \quad (4.15)$$

Nous avons donc transformé l'équation différentielle (4.14) en l'équation différentielle (4.15), définie par un polynome de x_6 de degré trois. On peut alors noter cette équation sous la forme

$$\ddot{x}_6(t) = A + Bx_6(t) + Cx_6^3(t) \text{ avec } A, B \text{ et } C \text{ constantes} \quad (4.16)$$

On peut résoudre l'équation (4.16) à l'aide de la fonction elliptique de Weierstrass en utilisant la méthode présentée dans [92]. En intégrant l'équation (4.16) par rapport à x_6 , nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\dot{x}_6^2 = (Ax_6 + \frac{1}{2}Bx_6^2 + \frac{1}{4}Cx_6^4) + E, \text{ avec } E \text{ constante,}$$

i.e.,

$$\int_{x_6}^{x_6(t)} \frac{dx_6}{\sqrt{2E + 2(Ax_6 + \frac{1}{2}Bx_6^2 + \frac{1}{4}Cx_6^4)}} = t - t_0. \quad (4.17)$$

Le problème concerne l'intégration de la fonction $(a_0x_6^4 + 4a_1x_6^3 + 6a_2x_6^2 + 4a_3x_6 + a_4)^{-\frac{1}{2}}$. Ce problème d'intégration, qui ne se résoud pas en utilisant seulement le moyen des fonctions élémentaires, peut être résolu en utilisant la fonction $\wp(t)$ de Weierstrass (voir Définition 4.14).

Reécrivons notre équation différentielle comme $\dot{x}^2 = f(x)$, où

$$f(x) = \frac{1}{2}Cx^4 + Bx^2 + 2Ax + 2E = \frac{1}{2}C \prod_{i=1}^4 (x - x_{r_i})$$

le polynôme de degré 4 qui n'a que des racines simples. Rappelons que pour l'équation (4.15) on a

$$A = (\lambda - \mu)^2 C_2 I_4, \quad B = -(\lambda - \mu)^2 I_4^2 - 2\lambda\mu(C_1 - I_4^2) - (\lambda + \mu)H, \quad C = -2\mu\lambda.$$

Soient g_2 et g_3 les invariants de Weierstrass :

$$\begin{aligned} g_2 &\equiv a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2, \\ g_3 &\equiv a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 \end{aligned}$$

où

$$a_0 = \frac{1}{2}C, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{B}{6}, \quad a_3 = \frac{A}{2} \quad \text{et} \quad a_4 = 2E$$

Les invariants sont alors donnés par

$$\begin{aligned} g_2 &= CE + \frac{B^2}{12} \\ &= -2\mu\lambda E + \frac{(-(\lambda - \mu)^2 I_4^2 - 2\lambda\mu(C_1 - I_4^2) - (\lambda + \mu)H)^2}{12} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_3 &= \frac{CBE}{6} - \frac{B^2}{36} - \frac{CA^2}{8} \\ &= \frac{-2\mu\lambda E(-(\lambda - \mu)^2 I_4^2 - 2\lambda\mu(C_1 - I_4^2) - (\lambda + \mu)H)}{6} \\ &\quad - \frac{(-(\lambda - \mu)^2 I_4^2 - 2\lambda\mu(C_1 - I_4^2) - (\lambda + \mu)H)^2}{36} + \frac{2\mu\lambda(\lambda - \mu)^4 C_2^2 I_4^2}{8}. \end{aligned}$$

Soit $t = \int_{x_r}^{x_6} (f(x))^{-\frac{1}{2}} dx$, où x_r est une racine de l'équation $f(x) = 0$. Dans la

section suivante, nous allons rappeler la méthode de Ferrari qui permet de trouver les racines des polynômes de degré quatre. Alors, si la fonction $\wp(t)$ est construite avec les invariants g_2 et g_3 , il est possible d'exprimer x_6 comme une fonction rationnelle de $\wp(t; g_2, g_3)$. C'est ce que l'on va faire dans la suite.

Par le théorème de Taylor, nous avons

$$f(x) = 4A_3(x - x_r) + 6A_2(x - x_r)^2 + 4A_1(x - x_r)^3 + A_0(x - x_r)^4, \quad (4.18)$$

(comme $f(x_r) = 0$), où :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2}C, & A_1 &= \frac{1}{2}Cx_r, \\ A_2 &= \frac{1}{2}Cx_r^2 + \frac{B}{6}, & A_3 &= \frac{1}{2}Cx_r^3 + \frac{B}{2}x_r + \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

En écrivant $(x - x_r)^{-1} = \tau$, $(x_6 - x_r)^{-1} = \eta$, et en posant pour simplifier $t_0 = 0$, nous avons pour (4.17) :

$$t = \int_{\eta}^{\infty} (4A_3\tau^3 + 6A_2\tau^2 + 4A_1\tau + A_0)^{-\frac{1}{2}} d\tau.$$

Pour enlever le deuxième terme dans la partie cubique, nous écrivons

$$\tau = A_3^{-1} \left(\xi - \frac{1}{2}A_2 \right), \quad \eta = A_3^{-1} \left(s - \frac{1}{2}A_2 \right),$$

et nous obtenons

$$t = \int_s^{\infty} (4\xi^3 - (3A_2^2 - 4A_1A_3)\xi - (2A_1A_2A_3 - A_2^3 - A_0A_3^2))^{-\frac{1}{2}} d\xi$$

Il est facile de vérifier que

$$3A_2^2 - 4A_1A_3 \quad \text{et} \quad 2A_1A_2A_3 - A_2^3 - A_0A_3^2$$

sont respectivement égale à g_2 et g_3 , les invariants du polynôme originale de degré 4, et donc $s = \wp(t; g_2, g_3)$. Maintenant :

$$x_6 = x_r + A_3 \left(s - \frac{1}{2}A_2 \right)^{-1},$$

et donc x_6 a été exprimé comme une fonction rationnelle de $\wp(t; g_2, g_3)$:

$$x_6 = x_r + \frac{\frac{1}{4}f'(x_r)}{\wp(t; g_2, g_3) - \frac{1}{24}f''(x_r)},$$

ce qui prouve (ii).

4.3.5 Méthode de Ferrari pour obtenir une racine x_r .

Pour compléter l'analyse présentée dans la section précédente, nous allons rappeler la méthode classique de Ferrari, voir e.g. [91], qui permet de trouver les racines des polynômes de degré quatre. On cherche une racine du polynôme $f(x) = \frac{1}{2}Cx^4 + Bx^2 + 2Ax + 2E$. L'équation $f(x) = 0$ est équivalente à :

$$x^4 + \frac{2B}{C}x^2 + \frac{4A}{C}x + \frac{4E}{C} = 0.$$

Pour simplifier, on note $p = \frac{2B}{C}$, $q = \frac{4A}{C}$ et $r = \frac{4E}{C}$. Cette fonction polynômiale ne contient pas de terme en x^3 , ce qui simplifie la méthode. Le point central de la méthode de Ferrari consiste à remplacer le monôme x^4 par le polynôme $(x^2 + y)^2 - 2yx^2 - y^2$, paramétré par y , et de trouver une valeur de y convenable, qui permette, via une identité remarquable, de factoriser l'expression :

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + y)^2 - (2y - p)x^2 + qx - y^2 + r.$$

Plus précisément, il s'agit de déterminer y de façon à ce que le terme $(2y - p)x^2 - qx + y^2 - r$, vu comme polynôme en x , s'écrive sous forme d'un carré, ce qui est équivalent à l'annulation de son discriminant $q^2 - 4(2y - p)(y^2 - r)$. En effet, si le discriminant est nul et que $(2y - p)$ ne l'est pas, il s'agit d'une propriété du polynôme du second degré, si le discriminant est nul et si $2y - p$ l'est aussi, le coefficient devant x est nécessairement nul et le polynôme est constant, carré d'une constante éventuellement complexe. Cette annulation équivaut à :

$$8y^3 - 4py^2 - 8ry + 4rp - q^2 = 0.$$

Cette équation se résoud par radicaux en utilisant, par exemple, la méthode de Cardan, qui donne au moins une valeur réelle y_0 convenable. On pose $\alpha = -288pr + 108q^2 + 8p^3$ et $\beta = -768r^3 + 384r^2p^2 - 48rp^4 - 432prq^2 + 81q^4 + 12q^2p^3$ et on trouve :

$$y_0 = \frac{1}{12}(\alpha + 12\sqrt{\beta})^{\frac{1}{3}} - \frac{3(-\frac{4}{3}r - \frac{1}{9}p^2)}{(\alpha + 12\sqrt{\beta})^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{6}p.$$

En reportant la valeur y_0 obtenue dans l'équation précédente, on obtient :

$$(x^2 + y_0)^2 - (a_0x + b_0)^2 = 0$$

avec a_0 (réel ou complexe) tel que

$$a_0^2 = -p + 2y_0$$

et b_0 tel que

$$b_0 = \begin{cases} -\frac{q}{2a_0} & \text{si } 2y_0 - p \neq 0 \\ y_0^2 - r & \text{si } 2y_0 - p = 0 \end{cases}$$

et, par une identité remarquable, cette égalité est équivalente à

$$(x^2 + y_0 - a_0x - b_0)(x^2 + y_0 + a_0x + b_0) = 0$$

ce qui équivaut à l'annulation d'un des deux facteurs du second degré en x :

$$x^2 + y_0 - a_0x - b_0 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y_0 + a_0x + b_0 = 0.$$

Chacune de ces deux équations fournit deux valeurs pour x , soit quatre valeurs en tout pour x .

4.3.6 Preuve du Théorème 4.15(iii).

L'idée principale est de représenter les variables x_1, x_2, x_3 et x_4 comme :

$$x_1 = R \sin \psi, \quad x_2 = R \cos \psi, \quad x_3 = r \sin \phi, \quad x_4 = r \cos \phi.$$

Nous avons calculé $x_6 = x_6(t)$ dans la Section 4.3.4 et nous connaissons aussi les intégrales premières

$$I_1 = C_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$$

$$I_2 = C_2 = x_1x_4 - x_2x_3 + x_6x_5$$

$$I_3 = H = \lambda x_1^2 + \lambda x_2^2 + \mu x_3^2 + \mu x_4^2$$

$$I_4 = x_5$$

Nous obtenons alors les relations suivantes :

$$r^2 = \frac{\lambda}{\lambda - \mu} \left(C_1 - x_6^2 - I_4^2 - \frac{H}{\lambda} \right) \quad (4.19)$$

$$R^2 = \frac{\mu}{\mu - \lambda} \left(C_1 - x_6^2 - I_4^2 - \frac{H}{\mu} \right) \quad (4.20)$$

$$C_2 - x_6x_5 = rR \sin \alpha, \quad \text{où } \alpha = \phi - \psi \quad (4.21)$$

D'où toutes les solutions sont paramétrées en termes de deux fonctions $\phi(t)$ et $x_6(t)$ et de quatre intégrales premières. En effet :

$$x_1 = R \sin(\phi - \alpha), x_2 = R \cos(\phi - \alpha), x_3 = r \sin \phi, x_4 = r \cos \phi,$$

où r, R , et α sont données en fonction de $x_6(t)$ et des valeurs de quatre intégrales premières $I_1 = C_1, I_2 = C_2, I_3 = H$ et I_4 , comme ci-dessus.

En coordonnées polaires, le système (4.3) devient :

$$\dot{R} \sin \psi + \dot{\psi} R \cos \psi = -\lambda R x_5 \cos \psi + \mu r x_6 \sin \phi \quad (4.22)$$

$$\dot{R} \cos \psi - \dot{\psi} R \sin \psi = \lambda R x_5 \sin \psi + \mu r x_6 \cos \phi \quad (4.23)$$

$$\dot{r} \sin \phi + \dot{\phi} r \cos \phi = -\lambda R x_6 \sin \psi - \mu r x_5 \cos \phi \quad (4.24)$$

$$\dot{r} \cos \phi - \dot{\phi} r \sin \phi = -\lambda R x_6 \cos \psi + \mu r x_5 \sin \phi \quad (4.25)$$

et les intégrales premières sont données par

$$I_1(x) = C_1 = x_6^2 + r^2 + R^2 + x_5^2 \quad (4.26)$$

$$I_2(x) = C_2 = Rr \sin(\phi - \psi) + x_6 x_5 \quad (4.27)$$

$$I_3(x) = H = \lambda R^2 + \mu r^2 \quad (4.28)$$

$$I_4(x) = x_5 \quad (4.29)$$

En multipliant (4.22) par $\cos \psi$ et (4.23) par $-\sin \psi$ et en calculant la somme, on obtient :

$$\dot{\psi} R = -\lambda R x_5 + \mu r x_6 \sin(\psi - \phi)$$

et en multipliant (4.24) par $\cos \phi$ et (4.25) par $-\sin \phi$ et en calculant la somme, on obtient :

$$\dot{\phi} r = -\mu r x_5 + \lambda R x_6 \sin(\psi - \phi).$$

Si R et r sont non nuls, alors :

$$\psi(t) = \int (-\lambda x_5 + \frac{\mu r x_6}{R} \sin(\psi - \phi)) dt$$

et en notant les valeurs des intégrales premières, respectivement, par $I_1(x) = h_1$, $I_2(x) = h_2$, $I_3(x) = h_3$, $I_4(x) = h_4$ et en utilisant (4.27), nous obtenons :

$$\psi(t) = -\lambda h_4 t + \mu \int \frac{x_6(x_6 h_4 - h_2)}{R^2} dt$$

i.e., en utilisant (4.20) nous avons :

$$\psi(t) = -\lambda h_4 t + \frac{(\lambda - \mu)^2}{\mu} \int \frac{x_6^2 h_4 - x_6 h_2}{x_6^2 - h_1 + h_4^2 + \frac{h_3}{\mu}} dt.$$

En utilisant la même démarche nous obtenons :

$$\phi(t) = -\mu h_4 t + \lambda \int \frac{x_6(x_6 h_4 - H_2)}{r^2} dt$$

i.e., en utilisant (4.19) nous avons :

$$\phi(t) = -\mu h_4 t + (\lambda - \mu) \int \frac{x_6^2 h_4 - x_6 h_2}{-x_6^2 + h_1 - h_4^2 - \frac{h_3}{\lambda}} dt. \quad (4.30)$$

Pour simplifier, on pose $\tilde{h} = h_1 - h_4^2 - \frac{h_3}{\lambda}$. On transforme l'expression de $\phi(t)$ donnée par (4.30) en utilisant l'astuce de calcul suivante :

$$\phi(t) = -\mu h_4 t + (\lambda - \mu) \int \frac{x_6^2 h_4 - h_2 x_6 - \tilde{h} h_4 + \tilde{h} h_4}{-x_6^2 + \tilde{h}} dt$$

i.e.,

$$\phi(t) = -\mu h_4 t + (\lambda - \mu) \int -h_4 + \frac{\tilde{h} h_4 - h_2 x_6}{-x_6^2 + \tilde{h}} dt$$

En simplifiant, nous trouvons :

$$\phi(t) = -\lambda h_4 t + (\lambda - \mu) \int \frac{\tilde{h} h_4 - h_2 x_6}{-x_6^2 + \tilde{h}} dt.$$

Nous allons décomposer la fraction rationnelle obtenue en éléments simples. Pour cela, on note r_1 et r_2 les racines du polynôme de degré 2 en x_6 donné par $x_6^2 - \tilde{h}$. On a alors la factorisation $x_6^2 - \tilde{h} = (x_6 - r_1)(x_6 - r_2)$ et on décompose la fraction comme suit :

$$\frac{A}{x_6 - r_1} + \frac{B}{x_6 - r_2} = \frac{-h_2 x_6 + \tilde{h} h_4}{(x_6 - r_1)(x_6 - r_2)},$$

où

$$A = \frac{-h_2 r_1 + \tilde{h} h_4}{r_1 - r_2} \quad \text{et} \quad B = \frac{-h_2 r_2 + \tilde{h} h_4}{r_2 - r_1}.$$

Dans ce cas,

$$\phi(t) = -\lambda h_4 t + (\lambda - \mu) \int \left(\frac{A}{x_6 - r_1} + \frac{B}{x_6 - r_2} \right) dt$$

or puisque $x_6(t) = x_r + \frac{\frac{1}{4}f'(x_r)}{\wp(t; g_2, g_3) - \frac{1}{24}f''(x_r)}$, où $f(x)$ est donnée par (4.18), nous trouvons

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{x_6 - r_1} dt &= \int \frac{A\wp(t; g_2, g_3) - \frac{A}{24}f''(x_r)}{(x_r - r_1)\wp(t; g_2, g_3) - \frac{1}{24}(x_r - r_1)f'(x_r) + \frac{1}{4}f'(x_r)} dt \\ &= \int \frac{A\wp(t; g_2, g_3) - \frac{A}{24}f''(x_r) - A\left(\frac{1}{24}f''(x_r) - \frac{\frac{1}{4}f'(x_r)}{x_r - r_1}\right) + A\left(\frac{1}{24}f''(x_r) - \frac{\frac{1}{4}f'(x_r)}{x_r - r_1}\right)}{(x_r - r_1)\wp(t; g_2, g_3) - \frac{1}{24}f''(x_r) + \frac{\frac{1}{4}f'(x_r)}{x_r - r_1}} dt \\ &= \int \frac{A}{x_r - r_1} dt + \int \frac{-\frac{A}{24}f''(x_r) + A\left(\frac{1}{24}f''(x_r) - \frac{\frac{1}{4}f'(x_r)}{x_r - r_1}\right)}{(x_r - r_1)\wp(t; g_2, g_3) - \frac{1}{24}f''(x_r) + \frac{\frac{1}{4}f'(x_r)}{x_r - r_1}} dt \end{aligned}$$

On pose :

$$\tilde{A} = \frac{-\frac{A}{24}f''(x_r) + A\left(\frac{1}{24}f''(x_r) - \frac{\frac{1}{4}f'(x_r)}{x_r - r_1}\right)}{x_r - r_1} \text{ et } \tilde{B} = -\frac{1}{24}f''(x_r) + \frac{\frac{1}{4}f'(x_r)}{x_r - r_1}$$

et on trouve :

$$\int \frac{A}{x_6 - r_1} dt = \frac{A}{x_r - r_1} t + \int \frac{\tilde{A}}{\wp(t; g_2, g_3) + \tilde{B}} dt$$

Nous pouvons intégrer cette expression comme suit :

$$\int \frac{A}{x_6 - r_1} dt = \frac{A}{x_r - r_1} t + \frac{\tilde{A} \ln\left(\frac{\sigma(t) - b_1}{\sigma(t) + b_1}\right) + 2\tilde{A}t\zeta(b_1)}{\sqrt{-g_3 + \tilde{B}g_2 - 4\tilde{B}^3}},$$

où b_1 est l'unique racine de l'équation $\wp(t; g_2, g_3) + \tilde{B} = 0$ et où σ et ζ sont respectivement les fonctions elliptiques sigma et zeta de Weierstrass.

De même on trouve :

$$\int \frac{B}{x_6 - r_2} dt = \frac{B}{x_r - r_2} t + \frac{\tilde{C} \ln\left(\frac{\sigma(t) - b_2}{\sigma(t) + b_2}\right) + 2\tilde{D}t\zeta(b_2)}{\sqrt{-g_3 + \tilde{D}g_2 - 4\tilde{D}^3}}$$

avec

$$\tilde{C} = \frac{-\frac{B}{24}f''(x_r) + B\left(\frac{1}{24}f''(x_r) - \frac{\frac{1}{4}f'(x_r)}{x_r - r_2}\right)}{x_r - r_2} \text{ et } \tilde{D} = -\frac{1}{24}f''(x_r) + \frac{\frac{1}{4}f'(x_r)}{x_r - r_2},$$

où b_2 est l'unique racine de l'équation $\wp(t; g_2, g_3) + \tilde{D} = 0$.

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \phi(t) = & -\lambda h_4 t + (\lambda - \mu) \left(\frac{A}{x_r - r_1} + \frac{B}{x_r - r_2} \right) t \\ & + (\lambda - \mu) \left(\frac{\tilde{A} \ln \left(\frac{\sigma(t) - b_1}{\sigma(t) + b_1} \right) + 2\tilde{A}t\xi(b_1)}{\sqrt{-g_3 + \tilde{B}g_2 - 4\tilde{B}^3}} + \frac{\tilde{C} \ln \left(\frac{\sigma(t) - b_2}{\sigma(t) + b_2} \right) + 2\tilde{C}t\xi(b_2)}{\sqrt{-g_3 + \tilde{D}g_2 - 4\tilde{D}^3}} \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, avec un raisonnement analogue, on montre que $\psi(t)$ s'écrit sous une forme similaire à celle de $\phi(t)$. Nous ne donnerons pas le détail du calcul dans ce cas, en effet il suffit de reproduire le calcul de $\phi(t)$.

Ceci finit la démonstration du Théorème 4.15(iii) et donc du Théorème 4.15.

Annexe du Chapitre 3

Dans cette partie, on montre en détail le Lemme 3.16 dont la preuve est assez technique et on donne la liste des intégrales premières d'un système $\dot{P}^1(t) = AP^1(t)$ avec $P^1 \in \mathbb{R}^4$ et A matrice antisymétrique non nulle à coefficients réels constants.

Preuve du Lemme 3.16

On rappelle l'énoncé de ce lemme :

Lemme 3.16. Si un système linéaire $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{C}^N$, à coefficients constants, admet une intégrale première I de la forme

$$I(x) = \arctan y_1(x) + \alpha \arctan y_2(x), \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \quad (4.31)$$

et $y_i(x)$ est un quotient de polynômes en x pour $i = 1, 2$, alors ce système admet une intégrale première I_1 (qui est une fonction de I) rationnelle si α est rationnel, logarithmique si le réel α est irrationnel.

Démonstration. On pose pour $j = 1, 2$, $\arctan y_j = x_j$ ce qui est équivalent à $\tan x_j = y_j$ avec $x_j \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et on vérifie facilement, en exprimant $\tan x_j$ en fonction de e^{ix_j} , que

$$e^{2ix_j} = \frac{1 + iy_j}{1 - iy_j} = \frac{(1 + iy_j)^2}{1 + y_j^2},$$

et alors

$$\log e^{2ix_j} = 2ix_j + 2i\pi m_j, \text{ où } m_j \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit que

$$x_j = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{1 + iy_j}{1 - iy_j} \right) - m_j \pi.$$

On écrit

$$I = \arctan y_1 + \alpha \arctan y_2 = x_1 + \alpha x_2$$

et on obtient

$$I = \frac{1}{2i} \left(\log \left(\frac{1 + iy_1}{1 - iy_1} \right) + \alpha \log \left(\frac{1 + iy_2}{1 - iy_2} \right) \right) - \pi(m_1 + m_2 \alpha). \quad (4.32)$$

On peut écrire I sous la forme

$$I = -\frac{i}{2} \log \frac{(1 + iy_1)^2 (1 + iy_2)^{2\alpha}}{(1 + y_1^2)(1 + y_2^2)^\alpha} + \beta \quad (\beta \in \mathbb{C}), \quad (4.33)$$

et on en déduit que $I_1 = \left(\frac{(1 + iy_1)^2}{1 + y_1^2} \right) \left(\frac{(1 + iy_2)^2}{1 + y_2^2} \right)^\alpha$ est aussi une intégrale première.

Il est clair que si α est un entier, I_1 est rationnelle à coefficients complexes. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, on pose $\alpha = \frac{q}{m}$ irréductible, avec $q, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$. On voit que I_1^m est aussi une intégrale première rationnelle. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, on utilise I sous la forme (4.33) et on en déduit que $2 \log(1 + iy_1) - \log(1 + y_1^2) + \alpha(2 \log(1 + iy_2) - \log(1 + y_2^2))$, est une intégrale première. Puisque $y_i(x) = \frac{P_i(x)}{Q_i(x)}$, pour $i = 1, 2$, quotient de deux polynômes, on écrit :

$$\log(1 + iy_1) = \log \frac{Q_1 + iP_1}{Q_1} = \log(Q_1 + iP_1) - \log Q_1 + \gamma \quad (\gamma \in \mathbb{C}).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \log(Q_1 + iP_1) - \log Q_1 - \log(Q_1^2 + P_1^2) + \log Q_1^2 \\ &\quad + \alpha(2 \log(Q_2 + iP_2) - \log Q_2 - \log(Q_2^2 + P_2^2) + \log Q_2^2) \end{aligned}$$

est une intégrale première logarithmique à coefficients dans \mathbb{C} . □

Liste complète des intégrales premières d'un système $\dot{P}(t) = AP(t)$ avec $P \in \mathbb{R}^4$

Dans cet appendix, on va donner explicitement les trois intégrales premières indépendantes d'un système $\dot{P} = AP$ avec $P \in \mathbb{R}^4$ et A une matrice antisymétrique non nulle à coefficients réels constants, que l'on écrit sous la forme

$$\dot{P} = \begin{pmatrix} aJ & M \\ -M^T & bJ \end{pmatrix} P \text{ où } M = \begin{pmatrix} d_1 & d_4 \\ d_3 & d_2 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

où $a, b, d_i \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq 4$.

Remarquons que lorsque la matrice M est nulle, on a $A = \text{Diag}(aJ, bJ)$. Les intégrales premières de $\dot{P} = \begin{pmatrix} aJ & 0 \\ 0 & bJ \end{pmatrix} P$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ sont données par :

$$I_1(p) = p_1^2 + p_2^2, \quad I_2(p) = p_3^2 + p_4^2 \quad \text{et} \quad I_3(p) = b \arctan\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - a \arctan\left(\frac{p_3}{p_4}\right),$$

où $I_3(p)$ est définie lorsque $p_2 p_4 \neq 0$.

Le Théorème 3.17 donne le nombre et la nature des intégrales premières indépendantes (polynomiales ou logarithmiques). Maintenant, on va calculer explicitement les intégrales premières dans le cas où $M \neq 0$. Par un simple calcul, on trouve que le polynôme caractéristique de la matrice A est

$$\lambda^4 + (a^2 + b^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2)\lambda^2 + (d_3 d_4 - d_1 d_2 + ab)^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation bicarrée est donné par

$$\begin{aligned} \Delta &= (b^2 - a^2)^2 + (d_2^2 - d_1^2)^2 + 2(d_2 a + d_1 b)^2 + 2(d_1 a + d_2 b)^2 + (d_3^2 - d_4^2)^2 \\ &+ 2(d_1 d_3 + d_2 d_4)^2 + 2(d_4 d_1 + d_2 d_3)^2 + 2(d_4 a - d_3 b)^2 + 2(d_4 b - d_3 a)^2. \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + \sqrt{\Delta}) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 - \sqrt{\Delta}). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Les valeurs propres de A sont alors $\lambda_1 = i\omega_1$, $\lambda_2 = -i\omega_1$, $\lambda_3 = i\omega_2$, $\lambda_4 = -i\omega_2$, où $\omega_j = \sqrt{\alpha_j}$, pour $j = 1, 2$.

Il est évident que puisque la matrice A est non nulle, on a $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 \geq 0$. On a $\alpha_2 = 0$ si et seulement si il existe une valeur propre nulle et $\alpha_1 = \alpha_2$ si et seulement si il y a deux paires de valeurs propres doubles. Dans les cas $\alpha_2 = 0$ et $\alpha_1 = \alpha_2$ on trouve trois intégrales premières indépendantes quadratiques correspondant aux \mathbb{N} -résonances $1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 = 0$, $1 \cdot \lambda_3 + 1 \cdot \lambda_4 = 0$ et à, respectivement, $1 \cdot \lambda_3 = 0$ ou à $1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_4 = 0$. Si $\alpha_2 \neq 0$ et $\alpha_1 \neq \alpha_2$, on trouve trois intégrales premières indépendantes : deux intégrales premières quadratiques et une troisième logarithmique. L'obtention des formes explicites de ces intégrales premières est lourd en calcul et on va les chercher cas par cas.

1^{er} cas : $\alpha_2 = 0$ ce qui est équivalent à $d_3d_4 - d_1d_2 + ab = 0$. On va considérer plusieurs cas et leurs sous-cas.

1) • Si $\alpha_2 = 0$ et $d_4 \neq 0$ alors $d_3 = \frac{d_1d_2 - ab}{d_4}$ avec $a, b, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. On trouve dans ce cas

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2), \\ I_2(p) &= bp_1 - d_4p_3 + d_1p_4, \\ I_3(p) &= (-d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - d_4^2)p_2^2 + (-a^2 + b^2 + d_3^2 - d_4^2)p_3^2 \\ &\quad + (-a^2 + b^2 - d_1^2 + d_2^2)p_4^2 + 2(d_1d_3 + d_2d_4)p_1p_2 + 2(-ad_3 + bd_4)p_1p_3 \\ &\quad + 2(ad_1 + bd_2)p_2p_3 - 2(bd_1 - ad_2)p_1p_4 + 2(-bd_3 + ad_4)p_2p_4 + 2(d_2d_3 + d_1d_4)p_3p_4. \end{aligned}$$

2) • Si $\alpha_2 = d_4 = 0$, alors $ab - d_1d_2 = 0$ (avec $d_3 \in \mathbb{R}$). On distingue trois sous-cas :

2.1) Si $a = d_2 = d_4 = 0$ et $b, d_1, d_3 \in \mathbb{R}$ non tous nuls, alors la matrice M du système (4.34) est $M = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ d_3 & 0 \end{pmatrix}$ (avec $a = 0$). On trouve

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2), \\ I_2(p) &= bp_1 + d_1p_4, \\ I_3(p) &= (-d_1^2 + d_3^2)p_2^2 + (b^2 + d_3^2)p_3^2 + (b^2 - d_1^2)p_4^2 + 2d_1d_3p_1p_2 - 2bd_1p_1p_4 - 2bd_3p_2p_4. \end{aligned}$$

2.2) Si $a = d_1 = d_4 = 0$ et $b, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ non tous nuls, alors la matrice M du système (4.34) est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d_3 & d_2 \end{pmatrix}$ (avec $a = 0$). On trouve

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2), \\ I_2(p) &= p_1, \\ I_3(p) &= (d_2^2 + d_3^2)p_2^2 + (b^2 + d_3^2)p_3^2 + (b^2 + d_2^2)p_4^2 + 2bd_2p_2p_3 - 2bd_3p_2p_4 + 2d_2d_3p_3p_4. \end{aligned}$$

2.3) Si $a \neq 0$, alors $b = \frac{d_1 d_2}{a}$ et on trouve

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2), \\ I_2(p) &= d_2 p_1 + a p_4, \\ I_3(p) &= (-d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)p_2^2 + (-a^2 + b^2 + d_3^2)p_3^2 + (-a^2 + b^2 - d_1^2 + d_2^2)p_4^2 \\ &\quad + 2(d_1 d_3)p_1 p_2 - 2a d_3 p_1 p_3 + 2(d_1 a + b d_2)p_2 p_3 - 2(b d_1 + d_2 a)p_1 p_4 \\ &\quad + 2(-b d_3 + d_2 d_3)(-d_1 + a)p_3 p_4. \end{aligned}$$

2^{eme} cas : $\alpha_1 = \alpha_2$. La matrice A possède deux paires de valeurs propres doubles si et seulement si $\alpha_1 = \alpha_2$. Bien évidemment ceci signifie que $\Delta = 0$ (et alors $\alpha_2 \neq 0$) et on obtient que

$$a^2 = b^2, \quad d_1^2 = d_2^2, \quad d_3^2 = d_4^2, \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} a d_2 + b d_1 &= 0, \quad a d_1 + b d_2 = 0, \quad d_1 d_3 + d_2 d_4 = 0, \quad d_1 d_4 + d_2 d_3 = 0, \\ a d_4 - b d_3 &= 0 \text{ et } b d_4 - a d_3 = 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

La relation (4.36) implique que $a = \pm b$, $d_1 = \pm d_2$ et $d_3 = \pm d_4$. On distingue les cas selon $a = b$ ou $a = -b$.

1) • Si $a = b$, on va distinguer les cas suivants :

1.1) Si $a = 0$, alors $b = 0$. Les relations (4.36) et (4.37) deviennent : $d_1^2 = d_2^2$, $d_3^2 = d_4^2$, $d_1 d_3 + d_2 d_4 = 0$ et $d_1 d_4 + d_2 d_3 = 0$. Dans ce cas, on distingue des sous-cas :

1.1.1) Si $d_1 = d_2$, alors $d_1(d_3 + d_4) = 0$, donc soit $d_1 = 0$ (et donc $d_2 = 0$ et $d_3^2 = d_4^2$), soit $d_3 = -d_4$.

• Si $d_1 = 0$ (et donc $d_2 = 0$ et $d_3^2 = d_4^2$, on prend $d_3 = d_4$, le cas $d_3 = -d_4$ étant similaire), on obtient trois intégrales premières quadratiques indépendantes

$$\begin{aligned} I_1(p) &= p_1^2 + p_4^2, \\ I_2(p) &= p_1 p_2 + p_3 p_4, \\ I_3(p) &= p_1 p_3 - p_2 p_4. \end{aligned}$$

• Si $d_3 = -d_4$ (et $a = b = 0$ et $d_1 = d_2$), on obtient trois intégrales premières quadratiques indépendantes

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2), \\ I_2(p) &= d_2^2 p_1^2 + d_4^2 p_1^2 + d_2^2 p_3^2 + 2d_2 d_4 p_3 p_4 + d_4^2 p_4^2, \\ I_3(p) &= d_2^2 p_1 p_2 + d_4^2 p_1 p_2 - d_2 d_4 p_3^2 + d_2^2 p_3 p_4 - d_4^2 p_3 p_4 + d_2 d_4 p_4^2. \end{aligned}$$

1.1.2) Si $d_1 = -d_2$, alors $d_1(d_3 - d_4) = 0$, donc soit $d_1 = 0$ (et donc $d_2 = 0$ et $d_3^2 = d_4^2$), soit $d_3 = d_4$.

· Si $d_1 = 0$ (et donc $d_2 = 0$ et $d_3^2 = d_4^2$) voir le cas au dessus.

· Si $d_3 = d_4$ (et $a = b = 0$ et $d_1 = -d_2$), on obtient trois intégrales premières quadratiques indépendantes

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2), \\ I_2(p) &= d_2^2 p_1^2 + d_4^2 p_1^2 + d_2^2 p_3^2 - 2d_2 d_4 p_3 p_4 + d_4^2 p_4^2, \\ I_3(p) &= d_2^2 p_1 p_2 + d_4^2 p_1 p_2 - d_2 d_4 p_3^2 - d_2^2 p_3 p_4 + d_4^2 p_3 p_4 + d_2 d_4 p_4^2. \end{aligned}$$

1.2) Si $a \neq 0$, on a $d_1 = -d_2 \in \mathbb{R}$ (car $ad_2 + bd_1 = 0$) et $d_3 = d_4 \in \mathbb{R}$ (car $ad_4 - bd_3 = 0$). On obtient trois intégrales premières quadratiques indépendantes

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2), \\ I_2(p) &= d_2^2 p_1^2 + d_4^2 p_1^2 - 2bd_2 p_2 p_3 - b^2 p_3^2 + d_2^2 p_3^2 + 2bd_4 p_2 p_4 - 2d_2 d_4 p_3 p_4 - b^2 p_4^2 + d_4^2 p_4^2, \\ I_3(p) &= d_2^2 d_4 p_1 p_2 + d_4^3 p_1 p_2 - bd_2^2 p_2 p_3 + bd_4^2 p_2 p_3 - b^2 d_2 p_3^2 - d_2 d_4^2 p_3^2 - bd_2^2 p_1 p_4 - bd_4^2 p_1 p_4 \\ &+ 2bd_2 d_4 p_2 p_4 - d_2^2 d_4 p_3 p_4 + d_4^3 p_3 p_4 - b^2 d_2 p_4^2 + d_2 d_4^2 p_4^2. \end{aligned}$$

2) • Supposons que $a = -b$, alors si $a \neq 0$, on a $d_1 = d_2$ et $d_3 = -d_4$. On obtient trois intégrales premières quadratiques indépendantes

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2), \\ I_2(p) &= d_2^2 p_1^2 + d_4^2 p_1^2 - 2bd_2 p_2 p_3 - b^2 p_3^2 + d_2^2 p_3^2 - 2bd_4 p_2 p_4 + 2d_2 d_4 p_3 p_4 - b^2 p_4^2 + d_4^2 p_4^2, \\ I_3(p) &= d_2^2 d_4 p_1 p_2 + d_4^3 p_1 p_2 - bd_2^2 p_2 p_3 + bd_4^2 p_2 p_3 - b^2 d_2 p_3^2 - d_2 d_4^2 p_3^2 + bd_2^2 p_1 p_4 + bd_4^2 p_1 p_4 \\ &- 2bd_2 d_4 p_2 p_4 + d_2^2 d_4 p_3 p_4 - d_4^3 p_3 p_4 - b^2 d_2 p_4^2 + d_2 d_4^2 p_4^2. \end{aligned}$$

Si $a = 0$, alors $b = 0$ et on a $d_1^2 = d_2^2$, $d_3^2 = d_4^2$, $d_1 d_3 + d_2 d_4 = 0$ et $d_1 d_4 + d_2 d_3 = 0$. On se ramène à la même étude que pour le 1).

3^{eme} cas : $\alpha_1 \neq \alpha_2$ et $\alpha_2 \neq 0$. Nous allons donner les trois intégrales premières indépendantes dans ce cas : deux intégrales premières, I_1 et I_2 , sont quadratiques et nous les donnerons dans chaque cas, de plus, nous montrerons qu'il existe une troisième intégrale première logarithmique (voir Théorème 3.17(iv)). Pour trouver cette troisième intégrale première, on va utiliser la méthode du spectre de la matrice A proposée par V.N. Gorbuzov et A.F. Pranevish dans [43] pour une matrice A quelconque. Dans notre cas, la matrice A est antisymétrique non nulle.

Soient V_1 et $V_2 \in \mathbb{C}^4$ deux vecteurs propres associés aux deux valeurs propres distinctes et non nulles $i\sqrt{\alpha_1}$ et $i\sqrt{\alpha_2}$ de la matrice A . On a $V_1 = (v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^1)^T$ et $V_2 = (v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_4^2)^T$ où $v_j^1 = \beta_j^1 + i\gamma_j^1$ et $v_j^2 = \beta_j^2 + i\gamma_j^2$ pour $1 \leq j \leq 4$ ($i \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$). La forme générale d'une intégrale première, notée I_3 , est donnée par l'expression suivante (voir [43] et la formule (3.6) dans la démonstration du Théorème 3.17(iv)) :

$$I_3(p) = \sqrt{\alpha_1} \arctan \frac{\sum_{i=1}^4 \gamma_i^2 p_i}{\sum_{i=1}^4 \beta_i^2 p_i} - \sqrt{\alpha_2} \arctan \frac{\sum_{i=1}^4 \gamma_i^1 p_i}{\sum_{i=1}^4 \beta_i^1 p_i}, \quad (4.38)$$

où $I_3(p)$ est définie lorsque $\sum_{i=1}^4 \beta_i^2 p_i \neq 0$ et $\sum_{i=1}^4 \beta_i^1 p_i \neq 0$.

Dans notre cas, la matrice A est représentée comme $A = \begin{pmatrix} aJ & M \\ -M^T & bJ \end{pmatrix}$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} d_1 & d_4 \\ d_3 & d_2 \end{pmatrix}$. Nous allons distinguer les différents cas pour calculer $I_3(p)$ suivant $d_4 = 0$ ou $d_4 \neq 0$, en commençant par des cas particuliers. Nous calculons $I_3(p)$ en trouvant les composantes γ_i^1, β_i^1 et γ_i^2, β_i^2 , des vecteurs propres V_i , pour $1 \leq i \leq 4$. Puis il suffit d'utiliser le Lemme 3.16 et on en déduit une intégrale première logarithmique.

1^{er} cas : On suppose $d_4 = 0$. On étudie les possibilités suivantes :

1) • Si $ad_1 + bd_2 = 0$ et $d_3 = 0$, on obtient deux sous-cas :

1.1) Si $a = 0$ et $d_2 \neq 0$, alors $b = 0$ (car le cas où $d_2 = 0$ a été étudié précédemment). On obtient $\alpha_1 = \frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2 + |d_2^2 - d_1^2|)$ et $\alpha_2 = \frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2 - |d_2^2 - d_1^2|)$ (alors $d_1 \neq d_2$). On trouve 3 intégrales premières indépendantes données par

$$\begin{aligned} I_1(p) &= p_1^2 + p_3^2, \\ I_2(p) &= p_2^2 + p_4^2, \\ I_3(p) &= d_2 \arctan\left(\frac{p_1}{p_3}\right) - d_1 \arctan\left(\frac{p_2}{p_4}\right). \end{aligned}$$

1.2) Si $a \neq 0$, alors $d_1 = -\frac{b^2 d_2^2}{a^2}$, on en déduit que $\alpha_1 = a^2 + d_2^2$ et

$\alpha_2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 + d_2^2)$. Dans ce cas $d_2 \neq 0$ (car sinon M est nulle), on trouve

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2), \\ I_2(p) &= (-d_1 + d_2^2)p_2^2 + (-a^2 + b^2)p_3^2 + (-a^2 + b^2 - d_1 + d_2^2)p_4^2 - 2\left(-\frac{b^2d_2}{a} + ad_2\right)p_1p_4, \\ I_3(p) &= \sqrt{\alpha_1} \left(\arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{\alpha_1}}{a}p_3}{\frac{d_2}{a}p_1 + p_4}\right) - \frac{b}{a} \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{\alpha_1}}{d_2}p_2}{\frac{-a}{d_2}p_1 + p_4}\right) \right). \end{aligned}$$

2) • Si $d_4 = 0$ et $(ad_1 + bd_2, d_3) \neq (0, 0)$, on obtient

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2), \\ I_2(p) &= (-d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)p_2^2 + (-a^2 + b^2 + d_3^2)p_3^2 + (-a^2 + b^2 - d_1^2 + d_2^2)p_4^2, \\ &\quad + 2d_1d_3p_1p_2 - 2ad_3p_1p_3 + 2(ad_1 + bd_2)p_2p_3 - 2(bd_1 + ad_2)p_1p_4 - 2bd_3p_2p_4 + 2d_2d_3p_3p_4, \\ I_3(p) &\text{ est donnée par (4.38) avec } \gamma_2^1 = \gamma_2^2 = 0 \text{ et telle que } \gamma_1^2, \gamma_3^2, \gamma_4^2, \beta_1^2, \beta_2^2, \beta_3^2, \beta_4^2 \\ &\text{ et } \gamma_1^1, \gamma_3^1, \gamma_4^1, \beta_1^1, \beta_2^1, \beta_3^1, \beta_4^1 \text{ sont des constantes réelles données dans la Liste (*) à} \\ &\text{ la fin de l'annexe.} \end{aligned}$$

2^{eme} cas : Si $d_4 \neq 0$, on distingue les cas $a = 0$ et $a \neq 0$.

1) • Si $a = 0$, alors on a deux sous-cas :

1.1) Soit $b = 0$ et $d_1 = -\frac{d_2d_3}{d_4}$. Dans ce cas $\alpha_1 = \frac{(d_2^2 + d_4^2)d_3^2}{d_4^2}$ et $\alpha_2 = d_2^2 + d_4^2$ et on trouve

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2), \\ I_2(p) &= -(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - d_4^2)p_2^2 + (d_3^2 - d_4^2)p_3^2 - (d_1^2 + d_2^2)p_4^2 + 2(d_1d_3 + d_2d_4)p_1p_2 \\ &\quad + 2(d_2d_3 + d_1d_4)p_3p_4, \\ I_3(p) &= \sqrt{\alpha_1} \arctan \frac{\sqrt{\alpha_2}(d_4p_1 + d_2p_2)}{p_4} - \sqrt{\alpha_2} \arctan \frac{\sqrt{\alpha_2}(-d_2p_1 + d_4p_2)}{p_3} \end{aligned}$$

1.2) Soit $d_1d_4 + d_2d_3 \neq 0$ et $b \neq 0$, on trouve

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2), \\ I_2(p) &= (-d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - d_4^2)p_2^2 + (b^2 + d_3^2 - d_4^2)p_3^2 + (b^2 - d_1^2 + d_2^2)p_4^2 + 2(d_1d_3 + d_2d_4)p_1p_2 \\ &\quad + 2bd_4p_1p_3 + 2bd_2p_2p_3 - 2bd_1p_1p_4 - 2bd_3p_2p_4 + 2(d_2d_3 + d_1d_4)p_3p_4, \\ I_3(p) &\text{ est donnée par (4.38) avec } \gamma_2^1 = \gamma_2^2 = 0 \text{ et telle que } \gamma_1^2, \gamma_3^2, \gamma_4^2, \beta_1^2, \beta_2^2, \beta_3^2, \beta_4^2 \\ &\text{ et } \gamma_1^1, \gamma_3^1, \gamma_4^1, \beta_1^1, \beta_2^1, \beta_3^1, \beta_4^1 \text{ sont des constantes réelles données dans la Liste (**)} \\ &\text{ à la fin de l'annexe.} \end{aligned}$$

2) • Si $a \neq 0$, alors on a deux sous-cas.

2.1) Soit $d_1 = d_3 = 0$ et on trouve

$$I_1(p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2),$$

$$I_2(p) = (d_2^2 - d_4^2)p_2^2 + (-a^2 + b^2 - d_4^2)p_3^2 + (-a^2 + b^2 + d_2^2)p_4^2 + 2d_2d_4p_1p_2 + 2bd_4p_1p_3 \\ + 2bd_2p_2p_3 - 2ad_2p_1p_4 + 2ad_4p_2p_4,$$

$I_3(p)$ est donnée par (4.38) avec :

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= a\alpha_2(d_2^2 + d_4^2), \quad \gamma_2^2 = 0, \quad \gamma_3^2 = (-a^2 + \alpha_2)bad_4, \quad \gamma_4^2 = -(-a^2 + \alpha_2)d_2\alpha_2, \\ \beta_1^2 &= \alpha_2d_2d_4(-a^2 + \alpha_2), \quad \beta_2^2 = \sqrt{\alpha_2}(a^2d_4^2 + d_2^2\alpha_2), \quad \beta_3^2 = \sqrt{\alpha_2}(-a^2 + \alpha_2)bd_2, \\ \beta_4^2 &= \sqrt{\alpha_2}(-a^2 + \alpha_2)ad_4p_4, \quad \gamma_1^1 = a\alpha_1(d_2^2 + d_4^2), \quad \gamma_2^1 = 0, \quad \gamma_3^1 = (-a^2 + \alpha_1)bad_4, \\ \gamma_4^1 &= -(-a^2 + \alpha_1)d_2\alpha_1, \quad \beta_1^1 = \sqrt{\alpha_1}(d_2d_4(-a^2 + \alpha_1)), \quad \beta_2^1 = \sqrt{\alpha_1}(a^2d_4^2 + d_2^2\alpha_1), \\ \beta_3^1 &= \sqrt{\alpha_1}(-a^2 + \alpha_1)bd_2p_3, \quad \beta_4^1 = \sqrt{\alpha_1}(-a^2 + \alpha_1)ad_4p_4. \end{aligned}$$

2.2) Soit $a \neq 0$ et $(d_1, d_3) \neq (0, 0)$, alors on trouve

$$I_1(p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2),$$

$$I_2(p) = (-d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - d_4^2)p_2^2 + (-a^2 + b^2 + d_3^2 - d_4^2)p_3^2 + (-a^2 + b^2 - d_1^2 + d_2^2)p_4^2 \\ + 2(d_1d_3 + d_2d_4)p_1p_2 + 2(-ad_3 + bd_4)p_1p_3 + 2(ad_1 + bd_2)p_2p_3 - 2(bd_1 - ad_2)p_1p_4 \\ + 2(-bd_3 + ad_4)p_2p_4 + 2(d_2d_3 + d_1d_4)p_3p_4,$$

$I_3(p)$ est donnée par (4.38) avec $\gamma_2^1 = \gamma_2^2 = 0$ et telle que $\gamma_1^2, \gamma_3^2, \gamma_4^2, \beta_1^2, \beta_2^2, \beta_3^2, \beta_4^2$ et $\gamma_1^1, \gamma_3^1, \gamma_4^1, \beta_1^1, \beta_2^1, \beta_3^1, \beta_4^1$ sont des constantes réelles données dans la Liste (***) à la fin de l'annexe.

Les constantes de I_3 sont :

Liste (*) :

$$\gamma_1^2 = \alpha_2ad_3^2 + \alpha_2ad_1^2 + \alpha_2d_2d_1b - d_2^3d_1b - ad_1^2d_2^2 + d_2a^2d_1b + b^2ad_2^2,$$

$$\gamma_3^2 = \alpha_2(-\alpha_2d_3 + d_3d_2^2 + d_3a^2), \quad \beta_1^2 = d_1d_3\sqrt{\alpha_2}(\alpha_2 - a^2 - d_2^2),$$

$$\gamma_4^2 = -(d_2a^2d_1^2 + d_2^2ad_1b + b\alpha_2ad_1 + b^2\alpha_2d_2 - ba^3d_1 - b^2a^2d_2 + d_2d_3^2\alpha_2),$$

$$\beta_2^2 = \sqrt{\alpha_2}((ad_1 + bd_2)^2 + \alpha_2d_3^2), \quad \beta_4^2 = -bd_3\sqrt{\alpha_2}(-d_2^2 + \alpha_2 - a^2)$$

$$\beta_3^2 = \sqrt{\alpha_2}(ad_1\alpha_2 + \alpha_2bd_2 - a^3d_1 - a^2bd_2 - d_2^3b - d_2^2ad_1),$$

$$\gamma_1^1 = \alpha_1 a d_3^2 + \alpha_1 a d_1^2 + \alpha_1 d_2 d_1 b - d_2^3 d_1 b - a d_1^2 d_2^2 + d_2 a^2 d_1 b + b^2 a d_2^2,$$

$$\gamma_3^1 = \alpha_1(-\alpha_1 d_3 + d_3 d_2^2 + d_3 a^2), \quad \beta_1^1 = d_1 d_3 \sqrt{\alpha_1}(\alpha_1 - a^2 - d_2^2)$$

$$\gamma_4^1 = -(d_2 a^2 d_1^2 + d_2^2 a d_1 b + b \alpha_1 a d_1 + b^2 \alpha_1 d_2 - b a^3 d_1 - b^2 a^2 d_2 + d_2 d_3^2 \alpha_1),$$

$$\beta_2^1 = \sqrt{\alpha_1}((a d_1 + b d_2)^2 + \alpha_1 d_3^2), \quad \beta_4^1 = -b d_3 \sqrt{\alpha_1}(-d_2^2 + \alpha_1 - a^2)$$

$$\beta_3^1 = \sqrt{\alpha_1}(a d_1 \alpha_1 + \alpha_1 b d_2 - a^3 d_1 - a^2 b d_2 - d_2^3 b - d_2^2 a d_1).$$

Liste (**):

$$\gamma_1^2 = d_1^2 d_2 d_3 d_4 + d_1 d_2^2 d_3^2 - d_4^2 d^2 d_1 - d_4 d_3^3 d_2 + d_4^2 \alpha_2 d_1 + d_4 \alpha_2 d_2 d_3 + d_1 b^2 \alpha_2,$$

$$\gamma_3^2 = d_3 d_1^2 d_4^2 + d_1 d_4 d_2 d_3^2 + d_3 b^2 \alpha_2 - d_2 d_1^3 d_4 - d_1^2 d_2^2 d_3 + d_2 \alpha_2 d_1 d_4 + \alpha_2 d_2^2 d_3$$

$$\gamma_4^2 = -\alpha_2 b(-d_1^2 - d_3^2 + \alpha_2), \quad \beta_1^2 = b \sqrt{\alpha_2}(-d_1^2 d_4 - d_4 d_3^2 + \alpha_2 d_4),$$

$$\beta_2^2 = d_2 b \sqrt{\alpha_2}(-d_1^2 - d_3^2 + \alpha_2) = -\frac{d_2}{\sqrt{\alpha_2}} \gamma_4^2, \quad \beta_3^2 = \sqrt{\alpha_2}((d_1 d_4 + d_2 d_3)^2 + b^2 \alpha_2)$$

$$\beta_4^2 = -\sqrt{\alpha_2}(-d_1^2 - d_3^2 + \alpha_2)(-d_1 d_4 - d_2 d_3)$$

$$\gamma_1^1 = d_1^2 d_2 d_3 d_4 + d_1 d_2^2 d_3^2 - d_4^2 c^2 d_1 - d_4 d_3^3 d_2 + d_4^2 \alpha_1 d_1 + d_4 \alpha_1 d_2 d_3 + d_1 b^2 \alpha_1,$$

$$\gamma_3^1 = d_3 d_1^2 d_4^2 + d_1 d_4 d_2 d_3^2 + d_3 b^2 \alpha_1 - d_2 d_1^3 d_4 - d_1^2 d_2^2 d_3 + d_2 \alpha_1 d_1 d_4 + \alpha_1 d_2^2 d_3$$

$$\gamma_4^1 = -\alpha_1 b(-d_1^2 - d_3^2 + \alpha_1), \quad \beta_1^1 = b \sqrt{\alpha_1}(-d_1^2 d_4 - d_4 d_3^2 + \alpha_1 d_4),$$

$$\beta_2^1 = d_2 b \sqrt{\alpha_1}(-d_1^2 - d_3^2 + \alpha_1) = -\frac{d_2}{\sqrt{\alpha_1}} \gamma_4^1, \quad \beta_3^1 = \sqrt{\alpha_1}((d_1 d_4 + d_2 d_3)^2 + b^2 \alpha_1)$$

$$\beta_4^1 = -\sqrt{\alpha_1}(-d_1^2 - d_3^2 + \alpha_1)(-d_1 d_4 - d_2 d_3).$$

Liste (***) :

$$\gamma_1^2 = -\sqrt{\alpha_2} d_4^2 b d_1 d_2 + d_3 \sqrt{\alpha_2} d_4 d_2^2 b + \sqrt{\alpha_2} a^2 d_1 b d_2 + \sqrt{\alpha_2} a b^2 d_2^2 - \sqrt{\alpha_2} d_2^3 d_1 b - d_3^2 \sqrt{\alpha_2} a d_4^2 + \sqrt{\alpha_2} d_4^2 b^2 a - \sqrt{\alpha_2} d_2^2 d_1^2 a - \alpha_2^{\frac{3}{2}} d_3 d_4 b + \alpha_2^{\frac{3}{2}} d_1 b d_2 - d_3 \sqrt{\alpha_2} a^2 b d_4 + d_3 \sqrt{\alpha_2} d_4^3 b +$$

$$2d_3\sqrt{\alpha_2}ad_1d_2d_4 + \alpha_2^{\frac{3}{2}}d_3^2a + \alpha_2^{\frac{3}{2}}d_1^2a,$$

$$\begin{aligned} \gamma_3^2 = & -\sqrt{\alpha_2}ad_4d_2^2b - \alpha_2^{\frac{3}{2}}d_1d_2d_4 - \sqrt{\alpha_2}d_4^3ab + \alpha_2^{\frac{3}{2}}d_3a^2 - d_3\sqrt{\alpha_2}d_4^4 + \alpha_2^{\frac{3}{2}}d_3d_2^2 - \\ & d_3\sqrt{\alpha_2}d_2^2d_4^2 + \alpha_2^{\frac{3}{2}}abd_4 - d_3\sqrt{\alpha_2}a^2d_4^2 - \alpha_2^{\frac{5}{2}}d_3 + 2\alpha_2^{\frac{3}{2}}d_3d_4^2 + \sqrt{\alpha_2}d_2^3d_1d_4 - \sqrt{\alpha_2}a^3bd_4 + \\ & \sqrt{\alpha_2}a^2d_4d_2d_1 + \sqrt{\alpha_2}d_1d_2d_4^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_4^2 = & -\sqrt{\alpha_2}d_1^2d_4^2d_2 - \sqrt{\alpha_2}d_2^2d_3d_1d_4 - \alpha_2^{\frac{3}{2}}d_1d_4d_3 - \sqrt{\alpha_2}ad_1d_2^2b - \sqrt{\alpha_2}a^2d_1^2d_2 - \\ & \alpha_2^{\frac{3}{2}}bad_1 + \sqrt{\alpha_2}d_1d_4^3d_3 + \sqrt{\alpha_2}d_1d_4^2ab + \sqrt{\alpha_2}d_2d_3^2d_4^2 + 2\sqrt{\alpha_2}d_2d_3abd_4 + \sqrt{\alpha_2}a^2d_3d_4d_1 + \\ & \sqrt{\alpha_2}a^2b^2d_2 + \sqrt{\alpha_2}a^3bd_1 - \alpha_2^{\frac{3}{2}}b^2d_2 - \alpha_2^{\frac{3}{2}}d_2d_3^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1^2 = & -\alpha_2d_2^2d_1d_3 + \alpha_2d_3^2d_4d_2 + d_3d_1\alpha_2^2 - d_4^3d_2d_3^2 - d_2^3d_1^2d_4 - b^2a^2d_2d_4 - 2d_3abd_2d_4^2 + \\ & 2abd_2^2d_1d_4 - \alpha_2d_3d_1d_4^2 + 2d_3d_4^2d_2^2d_1 + \alpha_2d_4b^2d_2 - \alpha_2d_3a^2d_1 + \alpha_2d_1^2d_2d_4, \end{aligned}$$

$$\beta_2^2 = (d_4(d_3d_4 - d_1d_2 + ab) - \alpha_2d_3)^2 + \alpha_2(d_2b + ad_1)^2,$$

$$\beta_3^2 = \alpha_2^2bd_2 + \alpha_2^2ad_1 - \alpha_2ad_1d_4^2 - \alpha_2bd_2d_4^2 - \alpha_2d_2a^2b - \alpha_2d_2^3b - \alpha_2a^3d_1 - \alpha_2d_2^2ad_1,$$

$$\begin{aligned} \beta_4^2 = & -\alpha_2^2bd_3 - ad_3^2d_4^3 - a^3b^2d_4 + \alpha_2bd_3d_4^2 + \alpha_2d_1^2d_4a + \alpha_2d_2^2d_3b - 2a^2d_3d_4^2b + \\ & a^2b\alpha_2d_3 + ad_3^2d_4\alpha_2 + \alpha_2b^2ad_4 - ad_1^2d_2^2d_4 + 2d_3ad_4^2d_1d_2 + 2a^2d_1d_2bd_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1^1 = & -\sqrt{\alpha_1}d_4^2bd_1d_2 + d_3\sqrt{\alpha_1}d_4d_2^2b + \sqrt{\alpha_1}a^2d_1bd_2 + \sqrt{\alpha_1}ab^2d_2^2 - \sqrt{\alpha_1}d_2^3d_1b - \\ & d_3^2\sqrt{\alpha_1}ad_4^2 + \sqrt{\alpha_1}d_4^2b^2a - \sqrt{\alpha_1}d_2^2d_1^2a - \alpha_1^{\frac{3}{2}}d_3d_4b + \alpha_1^{\frac{3}{2}}d_1bd_2 - d_3\sqrt{\alpha_1}a^2bd_4 + d_3\sqrt{\alpha_1}d_4^3b + \\ & 2d_3\sqrt{\alpha_1}ad_1d_2d_4 + \alpha_1^{\frac{3}{2}}d_3^2a + \alpha_1^{\frac{3}{2}}d_1^2a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3^1 = & -\sqrt{\alpha_1}ad_4d_2^2b - \alpha_1^{\frac{3}{2}}d_1d_2d_4 - \sqrt{\alpha_1}d_4^3ab + \alpha_1^{\frac{3}{2}}d_3a^2 - d_3\sqrt{\alpha_1}d_4^4 + \alpha_1^{\frac{3}{2}}d_3d_2^2 - \\ & d_3\sqrt{\alpha_1}d_2^2d_4^2 + \alpha_1^{\frac{3}{2}}abd_4 - d_3\sqrt{\alpha_1}a^2d_4^2 - \alpha_1^{\frac{5}{2}}d_3 + 2\alpha_1^{\frac{3}{2}}d_3d_4^2 + \sqrt{\alpha_1}d_2^3d_1d_4 - \sqrt{\alpha_1}a^3bd_4 + \\ & \sqrt{\alpha_1}a^2d_4d_2d_1 + \sqrt{\alpha_1}d_1d_2d_4^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_4^1 = & -\sqrt{\alpha_1}d_1^2d_4^2d_2 - \sqrt{\alpha_1}d_2^2d_3d_1d_4 - \alpha_1^{\frac{3}{2}}d_1d_4d_3 - \sqrt{\alpha_1}ad_1d_2^2b - \sqrt{\alpha_1}a^2d_1^2d_2 - \\ & \alpha_1^{\frac{3}{2}}bad_1 + \sqrt{\alpha_1}d_1d_4^3d_3 + \sqrt{\alpha_1}d_1d_4^2ab + \sqrt{\alpha_1}d_2d_3^2d_4^2 + 2\sqrt{\alpha_1}d_2d_3abd_4 + \sqrt{\alpha_1}a^2d_3d_4d_1 + \\ & \sqrt{\alpha_1}a^2b^2d_2 + \sqrt{\alpha_1}a^3bd_1 - \alpha_1^{\frac{3}{2}}b^2d_2 - \alpha_1^{\frac{3}{2}}d_2d_3^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1^1 = & -\alpha_1d_2^2d_1d_3 + \alpha_1d_3^2d_4d_2 + d_3d_1\alpha_1^2 - d_4^3d_2d_3^2 - d_2^3d_1^2d_4 - b^2a^2d_2d_4 - 2d_3abd_2d_4^2 + \\ & 2abd_2^2d_1d_4 - \alpha_1d_3d_1d_4^2 + 2d_3d_4^2d_2^2d_1 + \alpha_1d_4b^2d_2 - \alpha_1d_3a^2d_1 + \alpha_1d_1^2d_2d_4, \end{aligned}$$

$$\beta_2^1 = (d_4(d_3d_4 - d_1d_2 + ab) - \alpha_1d_3)^2 + \alpha_1(d_2b + ad_1)^2,$$

$$\beta_3^1 = \alpha_1^2bd_2 + \alpha_1^2ad_1 - \alpha_1ad_1d_4^2 - \alpha_1bd_2d_4^2 - \alpha_1d_2a^2b - \alpha_1d_2^3b - \alpha_1a^3d_1 - \alpha_1d_2^2ad_1,$$

$$\beta_4^1 = -\alpha_1^2bd_3 - ad_3^2d_4^3 - a^3b^2d_4 + \alpha_1bd_3d_4^2 + \alpha_2d_1^2d_4a + \alpha_1d_2^2d_3b - 2a^2d_3d_4^2b + a^2b\alpha_1d_3 + ad_3^2d_4\alpha_1 + \alpha_1b^2ad_4 - ad_1^2d_2^2d_4 + 2d_3ad_4^2d_1d_2 + 2a^2d_1d_2bd_4.$$

Conclusions

Nous pouvons essentiellement distinguer l'étude réalisée dans ce mémoire en deux parties : la classification des algèbres de Lie sous-riemanniennes nilpotentes d'ordre 2 et l'intégrabilité du système hamiltonien associée, puis l'étude des espaces sous-riemanniens symétriques $SO(4)/SO(2)$ et $SO(2,2)/SO(2)$ et l'étude de l'équation géodésique associée sur $\mathfrak{so}(4)$ et $\mathfrak{so}(2,2)$. Nous résumons dans cette partie nos résultats principaux.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions la classification des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 et de dimension n , avec $3 \leq n \leq 7$, ainsi que la classification des SR-algèbres de Lie de dimension $n \geq 3$, telles que la dimension de l'algèbre dérivée vaut 1. Nous avons réalisé la classification complète de ces algèbres en dimension 5 et 6, voir les Théorèmes 2.19, 2.21 et 2.22. Dans les Théorèmes 2.19 et 2.22, nous avons donné la description géométrique complète des SR-invariants pour chaque SR-algèbres de Lie. Nous avons aussi classifié les algèbres de Lie sous-riemanniennes de dimension n lorsque la dimension de l'algèbre dérivée vaut 1, voir Théorème 2.16. On obtient que, soit \mathfrak{g} est nilpotente d'ordre 2 et dans ce cas $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\mathfrak{h}_{n-c+1}, \mathfrak{p}^{\mathfrak{h}}, \mathcal{B}^{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{R}^{c-1}$ où \mathfrak{h}_{n-c+1} est l'algèbre de Lie de Heisenberg, nilpotente d'ordre 2 de dimension $n - c + 1$ avec la dimension du centre de \mathfrak{g} égale à $c = n - 2r$; soit \mathfrak{g} n'est pas nilpotente et dans ce cas $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathcal{B})$ est SR-isomorphe à $(\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{p}}, \hat{\mathcal{B}}) \oplus \mathbb{R}^{n-3}$, où $(\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{p}}, \hat{\mathcal{B}})$ est une SR-algèbre de Lie de dimension 3 (qui n'est pas nilpotente) donnée dans une base adaptée par $[e_1, e_2] = e_n$ et $[e_1, e_n] = ae_n$, avec un SR-invariant $a > 0$. Nous avons également classifié, cette fois-ci, par groupement de classes, les algèbres de Lie sous-riemanniennes nilpotentes d'ordre 2 et de dimension 7, voir Théorèmes 2.24 et 2.25. Nous avons vu que l'étude en dimension supérieure était trop compliquée du fait des nombreuses classes obtenues. De plus, nous avons distingué les algèbres de Lie sous-riemanniennes de contact et de quasi-contact et on les a caractérisées, voir Théorèmes 2.32 et 2.33. Enfin, nous avons calculé, en dimension 5, le groupe des symétries infinitésimales

sous-riemanniennes et nous avons montré que la dimension de ce groupe peut dépendre des paramètres de la classification, voir Théorème 2.37.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié dans un premier temps l'intégrabilité des systèmes adjoints de Lie-Poisson associés à chaque modèle $\mathfrak{g}_{(n,c,d)}$ de SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 (la classification de ces modèles étant faite dans le chapitre précédent). Nous avons démontré que tous ces systèmes adjoints de Lie-Poisson se ramènent à des systèmes linéaires à paramètres et que leurs solutions (les contrôles optimaux) étaient des combinaisons linéaires de fonctions trigonométriques et de constantes. Nous avons en particulier donné un des résultats fondamentaux de ce chapitre, le Théorème 3.17, qui donne le nombre exact et la nature des intégrales premières d'un système linéaire à coefficients constants $\dot{x} = Ax$ où A est une matrice antisymétrique, de rang $2r$, et $x \in \mathbb{R}^N$ (en reliant les intégrales premières aux relations de N-résonances). En utilisant ce théorème, nous montrons que les systèmes adjoints de Lie-Poisson associés à chaque modèle $\mathfrak{g}_{(n,c,d)}$ de SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 obtenus dans la classification sont toujours Liouville-intégrables dans la catégorie de polynômes et toujours super-intégrables dans la catégorie logarithmique. De plus, nous avons aussi résolu les systèmes hamiltoniens (et donc l'équation géodésique) associés aux SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 classifiées précédemment en dimension 5 et 6. Pour calculer les géodésiques nous avons utilisé les modèles sur \mathbb{R}^5 et \mathbb{R}^6 .

Dans le quatrième chapitre, nous avons étudié dans le détail, les cas des espaces sous-riemanniens symétriques $SO(4)/SO(2)$ et $SO(2,2)/SO(2)$ qui sont de dimension 5. Nous passons à la SR-algèbre de Lie correspondante, qui nous amène à l'étude de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathfrak{k}, \mathcal{B})$, où soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4)$, soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,2)$, \mathfrak{p} est un sous-espace vectoriel de \mathfrak{g} de dimension 4, $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie compacte de \mathfrak{h} de codimension 1 (où \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} telle que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ et $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}$) et \mathcal{B} définit un produit scalaire sur \mathfrak{p} . Nous avons donné un modèle canonique pour ces SR-algèbres de Lie, voir Théorème 4.1, et nous avons montré que les valeurs propres de la matrice de la forme bilinéaire symétrique définie positive étaient soit deux à deux égales soit toutes égales, i.e., $\lambda = \mu$ ou $\lambda \neq \mu$. Nous avons ensuite montré que les systèmes adjoints de Lie-Poisson associés aux modèles étaient toujours Liouville-intégrables dans la catégorie de polynômes de degré deux. De plus, dans le cas où $\lambda = \mu$, nous montrons que le système de Lie-Poisson est un système linéaire à paramètres et est toujours super-intégrable dans la catégorie logarithmique. Les solutions de ce système sont des fonctions trigonométriques

du temps ou constantes. Pour le cas où $\lambda \neq \mu$, nous montrons que les solutions $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ de ce système sont telles que $x_6(t)$ est exprimable à l'aide de la fonction elliptique de Weierstrass $\wp(t; g_2, g_3)$, $x_5(t)$ est constante, et x_1, x_2, x_3, x_4 sont exprimables en coordonnées polaires dont les composantes s'écrivent comme la somme d'une fonction linéaire du temps t et de la composée des fonctions elliptiques $\sigma(t)$ et $\zeta(t)$ de Weierstrass.

Perspectives.

A l'issue de cette thèse, certains problèmes liés à nos études demeurent encore non-résolus et indiquent de possibles directions de recherche pour l'avenir :

(1). Dans le deuxième chapitre, nous avons donné la classification complète des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 en dimension 5 et 6. Nous avons donné la description invariante pour tous les modèles classifiés, voir Théorème 2.22. Cependant, le cas où les valeurs propres de la matrice C sont égales ($\omega_1 = \pm\omega_2$) i.e., $c_1 = c_2 = 1$, est un problème ouvert. En effet, dans ce cas n'importe quelle rotation dans l'espace (e_1, e_2, e_3, e_4) est applicable. Deux problèmes intéressants se posent : (i) Est-ce que, dans le cas où $c_1 = c_2 = 1$, les différents modèles obtenus sont SR-isomorphes ou non ? (ii) Est-ce que les constantes de la structure de chaque modèles sont des SR-invariants ?.

(2). Dans le deuxième chapitre, nous avons donné la classification en dimension 7 dans le cas où $c = d \geq 2$ en regroupant par classe les modèles, voir Théorème 2.25. Peut-on distinguer chaque modèle ? Et dans chaque cas peut-on étudier les SR-invariants ?.

(3). Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié la classification des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2. Qu'en est-il de la classification des SR-algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 3 et même nilpotente d'ordre quelconque. Le problème naturel est ensuite d'étudier l'intégrabilité de l'équation géodésiques associée et en particulier de l'équation adjointe mais l'intégrabilité se complique ; Montgomery et al [68] ont découvert une SR-algèbre de Lie nilpotente d'ordre 3 telle que l'équation adjointe n'est pas Liouville-intégrable dans la catégorie de fonctions méromorphes. On peut également s'intéresser à la classification des SR-algèbres de Lie pas forcément nilpotentes en dimension 5 et en plus grande dimension.

(4). Dans le quatrième chapitre, nous pouvons nous intéresser aux autres espaces sous-riemanniens symétriques classifiés dans [31]. Quel modèle existe-t-il pour les algèbres de Lie associées ? Est-ce que le système adjoint de Lie-Poisson associé est intégrable ? Si oui, de quel type sont les solutions ? trigonométriques ? elliptiques ? ou autres ? Nous avons étudié l'espace sous-riemannien symétrique $SO(5)/SO(3)$ et la SR-algèbre de Lie correspondante (où $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(5)$) et les difficultés se manifestent dans les deux points ; d'un côté nous n'avons pas réussi à exprimer les solutions du système de Lie-Poisson en terme de fonctions elliptiques ; et de l'autre côté l'algèbre des intégrales premières n'est pas commutative et ne permet donc pas d'obtenir l'intégrabilité au sens de Liouville.

Bibliographie

- [1] M. Adler and P. Van Moerbeke. The algebraic integrability of geodesic flow on $so(4)$. *Invent. Math.*, 67 :297–326, 1982.
- [2] A. Agrachev, D. Barilari, and U. Boscain. On the Hausdorff volume in sub-Riemannian geometry. *Accepté dans Calculus of Variations and PDE's*, 526, 2011.
- [3] A. Agrachev and J. P. Gauthier. Sub-Riemannian metrics and isoperimetric problems in the contact case. *In honor of L. Pontryaguine, 90th birthday commemoration, Contemporary Mathematics*, 64 :5–48, 1999.
- [4] A. Agrachev and J. P. Gauthier. Sub-Riemannian metrics and isoperimetric problems. *Journal of Mathematical Sciences*, 103(6) :639–663, 2001.
- [5] A. Agrachev, J. P. Gauthier, and H. Chakir. Subriemannian metrics on \mathbb{R}^3 . Geometric control and nonholonomic mechanics. *Proceedings of Canad. Math. Soc.*, pages 29–76, 1998.
- [6] A.A. Agrachev, R.V. Gamkrelidze, and A.V. Sarychev. Local invariants of smooth control systems. *Acta Appl. Math.*, 3 :191–237, 1989.
- [7] A.A. Agrachev and Y.L. Sachkov. *Lectures on Geometric Control Theory*. Springer Verlag, 2004.
- [8] A. Anzaldo-Meneses and F. Monroy-Pérez. Optimal control in the Heisenberg group. *J. Dynam. Control Systems*, 5 :473–499, 1999.
- [9] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, volume 60. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1989.
- [10] V.I. Arnold and S.P. Novikov. *Dynamical Systems IV : Symplectic Geometry and its Applications*. Springer-Verlag, 2001.
- [11] M. Audin. *Symplectic Geometry of Integrable Hamiltonian Systems*. Birkhäuser, 2003.

- [12] A. Bellaïche. The tangent space in sub-Riemannian geometry. In *Sub-Riemannian Geometry*, pages 4–84. A. Bellaïche and J-J. Risler (eds). Birkhäuser, Basel, 1996.
- [13] A. Bellaïche and J-J Risler. *Sub-Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Basel, 1996.
- [14] R.M. Bianchini and G. Stefani. Controllability along a trajectory : a variational approach. *SIAM J. Control Optim.*, 31 :900–927, 1993.
- [15] A. M. Bloch. *Nonholonomic Mechanics and Control*. Springer Verlag, 2003.
- [16] A.V. Bocharov, A.M. Verbovetsky, and al. *Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics*. Amer Mathematical Society, 1999.
- [17] B. Bonnard, M. Chyba, and Trélat E. Sub-Riemannian geometry : one-parameter deformation of the Martinet flat case. *J. Dyn. Control Systems* 4, 1 :59–76, 1998.
- [18] B. Bonnard, L. Faubourg, and E. Trélat. *Mécanique Céleste et Contrôle des Véhicules Spatiaux*. Springer-Verlag, 2000.
- [19] U. Boscaïn and F. Rossi. Invariant Carnot-Caratheodory metrics on S^3 , $SO(3)$, $SL(2)$, and Lens space. *SIAM J. Control Optim.*, 47(4) :1851–1878, 2008.
- [20] T. Bountis, M. Bier, and J. Hijmans. On the integrability of some generalized Lotka-Volterra systems. *Phys. Lett. A*, 97 :11–14, 1983.
- [21] J.B. Boyling. An axiomatic approach to classical thermodynamics. *Proc. R. Soc. London, A* 329 :35–70, 1972.
- [22] R. Brockett and L. Dai. Nonholonomic kinematics and the role of elliptic functions in constructive controllability. *Nonholonomic Motion Planning (Z. Li and J. Canny, eds.)*, Kluwer, Boston, pages 1–21, 1993.
- [23] R.W. Brockett. *Control Theory and Singular Riemannian Geometry*. Springer-Verlag, 1981.
- [24] O. Calin and D.C. Chang. *Sub-Riemannian Geometry : General Theory and Examples*. Cambridge University Press, 2009.
- [25] W. L. Chow. Über system von linearen partiellen differentialgleichungen erster ord- nung. *Math. Ann.*, 117 :98–105, 1939.
- [26] P. Eberlein. Geometry of 2-step nilpotent groups with a left-invariant metric. *Ann. Ecole Norm. Super.*, 27 :611–660, 1994.

- [27] P. Eberlein. Geometry of 2-step nilpotent groups with a left-invariant metric, II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 342 :805–828, 1994.
- [28] R. El Assoudi and A. Gerber. Geodesic flow on 4-dimensional sub-homogeneous spaces, integrability and elliptic functions, preprint.
- [29] L. Euler. *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes, Sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu Accepti.* 1744.
- [30] E. Falbel and C. Gorodski. On contact sub-Riemannian symmetric spaces. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 28 no. 5 :571–589, 1995.
- [31] E. Falbel, C. Gorodski, and P. Bieliavsky. The classification of simply-connected contact sub-Riemannian symmetric spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 188 :65–82, 1999.
- [32] E. Falbel, C. Gorodski, and M. Rumin. Holonomy of sub-Riemannian manifolds. *Intern. J. Math*, 8(3), pages 317–344, 1997.
- [33] T. Frankel. *The Geometry of Physics. An introduction.* Cambridge University Press, 1997.
- [34] F.R. Gantmakher. *The Theory of Matrices.* New York : Chelsea Publishing Company, 1977.
- [35] J. P. Gauthier. Nonholonomic interpolation for kinematic problems, entropy and complexity. *Mathematical Control Theory and Finance, Springer*, 48 (5) :187–210, 2008.
- [36] J. P. Gauthier, U. Boscain, and T. Chambrion. On the K+P problem for a three-level quantum system : Optimality implies resonance. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 8 :547–572, 2002.
- [37] J. P. Gauthier, U. Boscain, and T. Chambrion. Optimal control on a n-level quantum system. In *Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control*, pages 129–134. 2003.
- [38] J. P. Gauthier, U. Boscain, G. Charlot, S. Guérin, and H. Jauslin. Optimal control in laser-induced population transfer for two and three level quantum systems. *Journal of Mathematical Physics*, 43 :2107–2132, 2002.
- [39] J. P. Gauthier, B. Jakubczyk, and V. Zakalyukin. Motion planning and fastly oscillating controls. *SIAM Journ. On Control and Opt.*, 48 (5) :3433–3448, 2010.

- [40] J. P. Gauthier and V. Zakalyukin. On the motion planning problem, complexity, entropy and nonholonomic interpolation. *Dynamical and Control Systems*, 12 (3) :3433–3448, 2006.
- [41] B. Gaveau. Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous elliptiques sur certains groupes nilpotents. *Acta Math.*, 30 :94–153, 1977.
- [42] N. Goodman. *Nilpotent Lie groups*. Springer-Verlag, 1976.
- [43] V.N. Gorbuzov and A.F. Pranevich. First integrals of linear differential systems. *Classical Analysis and ODEs, Mathematics - Dynamical Systems*, 2008.
- [44] A. Goriely. *Integrability and Nonintegrability of Dynamical Systems*, volume 19. Advanced series in nonlinear dynamics, 2001.
- [45] B. Grammaticos, J. Moulin-Ollagnier, A. Ramani, J.M. Strelcyn, and S. Wojciechowski. Integrals of quadratic ordinary differential equations in \mathbb{R}^3 : The Lokta-Volterra system. *Physica A*, 163,8, 1990.
- [46] M. Gromov. Carnot-Carathéodory spaces seen from within. In *Sub-Riemannian Geometry*, pages 85–320. A. Bellaïche and J-J. Risler (eds). Birkhäuser, Basel, 1996.
- [47] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. Academic Press, New York, 1978.
- [48] R. Hermann. *Differential Geometry and the Calculus of Variations*. Mathematical Science Press, 1977.
- [49] H. Hermes. Control systems which generate decomposable Lie algebras. *J. Diff. Eqns*, 44 :166–187, 1982.
- [50] H. Hermes. Nilpotent approximations of control systems and distribution. *SIAM J. Control Optim.*, 24 :731–736, 1986.
- [51] F. Jean. The car with n trailers : Characterisation of the singular configurations. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 1 (2) :241–266, 1996.
- [52] F. Jean. Entropy and complexity of a path in sub-Riemannian geometry. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 9 :485–506, 2003.
- [53] F. Jean. Sub-Riemannian geometry. Technical report, Lectures given at the Trimester on Dynamical and Control Systems, Trieste, 2003.
- [54] V. Jurdjevic. *Geometric Control Theory*. Cambridge University Press, 1997.
- [55] V. Jurdjevic. Hamiltonian point of view of non-euclidean geometry and elliptic functions. *Systems Control Letters*, 43 :25–41, 2001.

- [56] V. Jurdjevic. *Integrable Hamiltonian Systems on Complex Lie Groups*. Memoirs of the American Mathematical Society, numéro 838, 2005.
- [57] M. Kawski. Nonlinear control and combinatorics of words. In *Nonlinear Feedback and Optimal Control*, B. Jakubczyk and W. Respondek (eds). Dekker, 1998.
- [58] N. Khaneja, S. J. Glaser, and R. Brockett. Sub-Riemannian geometry and time optimal control of three spin systems : Quantum gates and coherence transfer. *Phys. Rev. A*, 71.039906, 2005.
- [59] A. Krener. Bilinear and nonlinear realizations of input-output maps. *SIAM J. Control Optim*, 13 :827–834, 1975.
- [60] I. Kupka. Géométrie sous-riemannienne. *Séminaire N. Bourbaki, exp. N° 817*, pages 351–380, 1995-96.
- [61] J.P. Laumond. Controllability of a multibody robot. *IEEE Transactions Robotics and Automation*, 9 :755–763, 1991.
- [62] J.P. Laumond. *Robot Motion Planning and Control*, volume Lecture Notes on Control and Information Sciences, 229. Springer-Verlag, 1997.
- [63] E. Le Donne. Lecture notes on sub-Riemannian geometry. Technical report, Lectures Notes, 2009.
- [64] W. Liu and H. Sussmann. Shortest paths for sub-Riemannian metrics on rank-two distributions. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 118, 1995.
- [65] A. Maciejewski, W. Pasillas-Lepine, W. Respondek, and J-M. Strelcyn. Integrability properties of the geodesic flow for 3-dimensional sub-Riemannian homogeneous spaces, preprint.
- [66] R. Mneimné and F. Testard. *Introduction à la Théorie des Groupes de Lie Classiques*. Hermann, éditeurs des sciences et des arts, 1986.
- [67] R. Montgomery. *A tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*. American Mathematical Society, 2002.
- [68] R. Montgomery, M. Shapiro, and A. Stolin. A nonintegrable subriemannian geodesic flow on a Carnot group. *Journal of dynamical and control systems*, 3 :519–530, 1997.
- [69] J. Moulin-Ollagnier. Polynomial first integrals of the Lotka-Volterra system. *Bull. Sci. math.*, 121 :463–476, 1997.
- [70] J. Moulin-Ollagnier. Rational integration of the Lotka-Volterra system. *Bull. Sci. math.*, 123 :437–466, 1999.

- [71] J. Moulin-Ollagnier and A. Nowicki. Polynomial rings of constants of the Lotka-Volterra system. *Colloquium Mathematicum*, 81 :263–270, 1999.
- [72] R.M. Murray. Nilpotent bases for a class of nonintegrable distributions with applications to trajectory generation for nonholomic systems. *Math. Control Signals Systems*, 7 :58–75, 1994.
- [73] A. Nowicki. On the nonexistence of rational first integrals for systems of linear differential equations. *Linear algebra and its applications*, 235 :107–120, 1996.
- [74] A. L. Onishchik and E. B. Vinberg. *Lie groups and Lie algebras III : structure of Lie groups and Lie algebras*, volume 41. Springer-Verlag, 1994.
- [75] L.S. Pontryagin, V. Boltyanskii, R. Gamkrelidze, and E. Mischenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Oxford, New York, Pergamon Press, 1964.
- [76] P. K. Rashevsky. About connecting two points of a completely nonholonomic space by admissible curve. *Uch. Zapiski Ped. Inst. Libknechta 2*, pages 83–94, 1938.
- [77] L. P. Rothschild and E. M. Stein. Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. *Acta Math*, 137 :247–320, 1976.
- [78] Y. L. Sachkov. Conjugate and cut time in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations.*, 16(4) :1018–1039, 2010.
- [79] Y.L. Sachkov. Symmetries of flat rank two distributions and sub-Riemannian structures. *Transactions of the American mathematical society*, 356 no. 2 :457–494, 2003.
- [80] Yu. L. Sachkov. Optimality of Euler elasticae. *Doklady Mathematics*, 417 :23–25, 2007.
- [81] Yu. L. Sachkov. Conjugate points in Euler’s elastic problem. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 14 :409–439, 2008.
- [82] Yu. L. Sachkov. Maxwell strata in Euler’s elastic problem. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 14 :169–234, 2008.
- [83] J.P. Serre. *Lie Algebras and Lie Groups*. Lectures given at Harvard University, 1964.
- [84] C.L. Siegel. *Topics in Complex Function Theory I, Elliptic Functions and Uniformization Theory*, volume 1. Addison-Wesley, 1962.

- [85] J.-M. Strelcyn and S. Wojciechowski. A method of finding integrals of 3-dimensional dynamical systems. *Phys. Letters*, 133, 1988.
- [86] R.S. Strichartz. Sub-Riemannian geometry. *Differential Geometry* 24(2), pages 221–263, 1986.
- [87] R.S. Strichartz. Sub-Riemannian geometry : Corrections. *Differential Geometry* 30(2), pages 595–596, 1989.
- [88] E. Trélat. *Contrôle Optimal, Théorie et Applications*. Vuibert, Mathématiques Concrètes, 2005.
- [89] M. Vendittelli, G. Oriolo, F. Jean, and J-P. Laumond. Nonhomogeneous nilpotent approximations for systems with singularities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49 (2) :261–266, 2004.
- [90] A.M. Vershik and V.Ya. Gershkovich. *Nonholomic Dynamical Systems, Geometry of Distributions and Variational Problems*. Springer-Verlag, 1991.
- [91] H. Vogt. Leçons sur la résolution algébrique des équations. *Acta Math.*, 30 :94–153, 1977.
- [92] E.T. Whittaker and G.N. Watson. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, 1927.