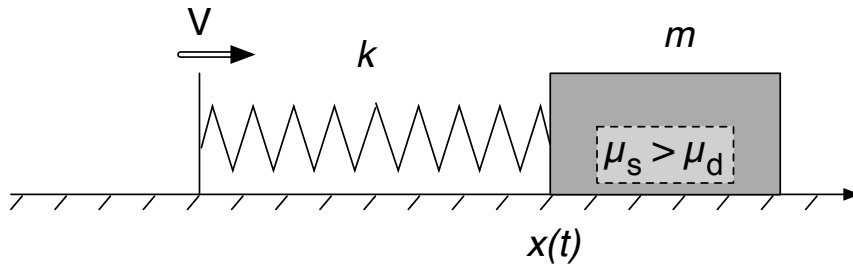


Annexe A

Instabilité de Stick-Slip.

Nous allons développer un calcul classique qui établit la fréquence et surtout l'amplitude des oscillations. On considère une masse m accrochée à un ressort de longueur à vide l_0 , de raideur k . Le support avance à la vitesse constante V . Dans la mesure où on suppose que le ressort reste toujours dans un régime linéaire, la longueur à vide n'est pas un paramètre pertinent, donc nous la prendrons arbitrairement égale à zéro. On écrit alors le principe fondamental de la dynamique



dans le référentiel du laboratoire :

$$m\ddot{x} = -k(x - Vt) + F_{sol} \quad , \quad (\text{A.1})$$

où F_{sol} désigne la force de frottement solide. En notant $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ la pulsation caractéristique du ressort, on peut réécrire cette équation ainsi :

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2(x - Vt) = F_{sol} \quad (\text{A.2})$$

Cette force de frottement, de type Coulomb, dépend de la somme des autres forces exercées sur la masse, somme dont on note T la composante horizontale et N la composante verticale.

Cette dépendance se décompose en deux états : un état statique, où la masse ne bouge pas, caractérisé par un coefficient de frottement μ_s , et un état dynamique où la masse bouge, caractérisé par un coefficient de frottement μ_d .

$$F_{sol} = \begin{cases} -T & \text{si } |T| < \mu_s |N| \text{ et } V = 0 \\ -\text{sign}(V)\mu_d N & \text{si } |V| > 0 \end{cases}, \quad (\text{A.3})$$

A $t = 0$ le support du ressort commence à se déplacer à la vitesse V dans le sens des x croissants. On prend pour conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$. On est alors dans le cas statique, et la force de frottements solides va compenser la poussée du ressort, c'est à dire

$$F_{sol} = m\omega_0^2(x - Vt) \quad \text{et} \quad x = 0 \quad (\text{A.4})$$

Cette solution dure jusqu'à ce que la condition de frottement statique soit brisée, c'est à dire lorsque

$$T = \mu_s mg$$

soit pour un temps τ_1 qui vérifie :

$$\begin{aligned} m\omega_0^2 V \tau_1 &= \mu_s mg \\ \tau_1 &= \mu_s \frac{g}{V\omega_0^2} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A ce moment là, le patin va se mettre en mouvement, et la force de frottement va immédiatement basculer pour trouver sa valeur dynamique. Pour simplifier, on décale l'origine des temps en changeant de variable : $t = t' + \tau_1$. Notons alors que l'équation horaire du support du ressort devient : $x_0(t') = V(t' + \tau_1)$ L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2(x - Vt') = -\mu_d mg \quad . \quad (\text{A.6})$$

Les solutions de cette équation s'écrivent de manière générale :

$$x(t) = V(t' + \tau_1) + A \cos(\omega_0(t' - \tau_1)) + B \sin(\omega_0(t' - \tau_1)) - \frac{\mu_d g}{\omega_0^2}$$

et les conditions initiales s'écrivent :

$$\begin{cases} x(0) = 0 \text{ soit } V\tau_1 + A - \frac{\mu_d g}{\omega_0^2} \\ x'(0) = 0 \text{ soit } \omega_0 B = -V \end{cases}, \quad (\text{A.7})$$

On revient à la variable temporelle initiale t et on écrit :

$$x(t) = Vt + (\mu_d - \mu_s) \frac{g}{\omega_0^2} \cos(\omega_0(t - \tau_1)) - \frac{V}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - \tau_1)) - \frac{\mu_d g}{\omega_0^2} \quad (\text{A.8})$$

La masse avance alors d'un coup jusqu'à ce que sa vitesse par rapport au sol s'annule. Le mouvement peut donc s'arrêter au bout d'un temps τ_2 qui vérifie $\dot{x}(\tau_2) = 0$, c'est à dire :

$$V - (\mu_d - \mu_s) \frac{g}{\omega_0} \sin(\omega_0(\tau_2 - \tau_1)) - V \cos(\omega_0(\tau_2 - \tau_1))$$

$$V(1 - \cos(\omega_0(t - \tau_1))) = (\mu_d - \mu_s) \frac{g}{\omega_0} \sin(\omega_0(\tau_2 - \tau_1))$$

Pour résoudre cette équation, on va supposer que V est très petit devant g/ω_0 , dans ce cas l'équation se résume à :

$$\sin(\omega_0(\tau_2 - \tau_1)) = 0 \quad \text{soit :} \quad \tau_2 = \tau_1 + n \frac{\pi}{\omega_0}, \quad n \in \mathbb{N} \quad .$$

Au premier temps (i.e. pour $n = 1$), on a

$$|T(\tau_2)| = k|(x(\tau_2) - V\tau_2)| = k|(\mu_d - \mu_s) \frac{g}{\omega_0^2} \cos(\pi) - \mu_d \frac{g}{\omega_0^2}|$$

$$|T(\tau_2)| = (2\mu_d - \mu_s)mg \quad .$$

En remarquant que $2\mu_d - \mu_s = \mu_d - (\mu_s - \mu_d) < \mu_d < \mu_s$, on en déduit que $|T(\tau_2)| < \mu_s mg$ ce qui veut dire qu'on est à nouveau dans le cas statique et que la masse s'arrête de bouger. Pour résumer, calculons maintenant le mouvement relatif de la masse par rapport au support

du ressort $\tilde{x} = x(t) - Vt$. On a alors :

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = -Vt \text{ si } t < \tau_1 \\ \tilde{x}(t) = (\mu_d - \mu_s)\frac{g}{\omega_0^2} \cos(\omega_0(t - \tau_1)) - \mu_d\frac{g}{\omega_0^2} \text{ si } \tau_1 < t < \tau_2 \end{cases}, \quad (\text{A.9})$$

Une fois le patin arrêté, il y a alors de nouveau un chargement du ressort jusqu'à ce que la condition statique ne soit plus vérifiée, et le patin lâche à nouveau, rendant le processus cyclique. On voit alors que une fois que le cycle s'est installé, les valeurs de déplacement relatif extrémales sont

$$x_{min} = -\mu_s mg/k = (\mu_d + (\mu_s - \mu_d))mg/k$$

et

$$x_{max} = -(2\mu_d - \mu_s)mg/k = -(\mu_d - (\mu_s - \mu_d))mg/k,$$

ce qui correspond à une oscillation avec comme valeur moyenne $\mu_d mg/k$ et d'amplitude $(\mu_s - \mu_d)mg/k$

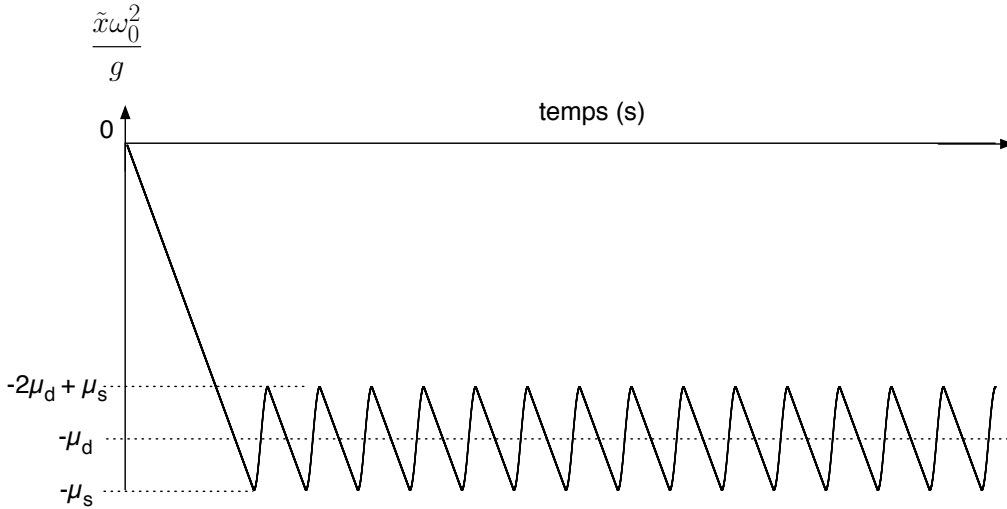


FIG. A.1: Courbe théorique d'un signal de stick-slip, dans le cas où la vitesse est faible devant la vitesse caractéristique de l'oscillation. On voit apparaître dans l'amplitude du mouvement les deux coefficients de frottements solide.

Pour mesurer μ_d et μ_s , on peut alors mesurer la valeur moyenne de l'oscillation ainsi que sa déviation standard, ce qui nous donnera l'amplitude de l'oscillation. En effet, on approxime

l'oscillation à une fonction dents-de-scie de période T et d'amplitude A , la déviation standard vaut :

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \left(1 - 2\frac{t}{T}\right)^2 dt = \frac{A^2}{3} .$$

Du coup, les coefficients de frottements sont déduits des moments d'ordre 1 et 2 du signal de \tilde{x} :

$$\mu_d = \langle \tilde{x} \rangle = \frac{k}{mg} \quad (\text{A.10})$$

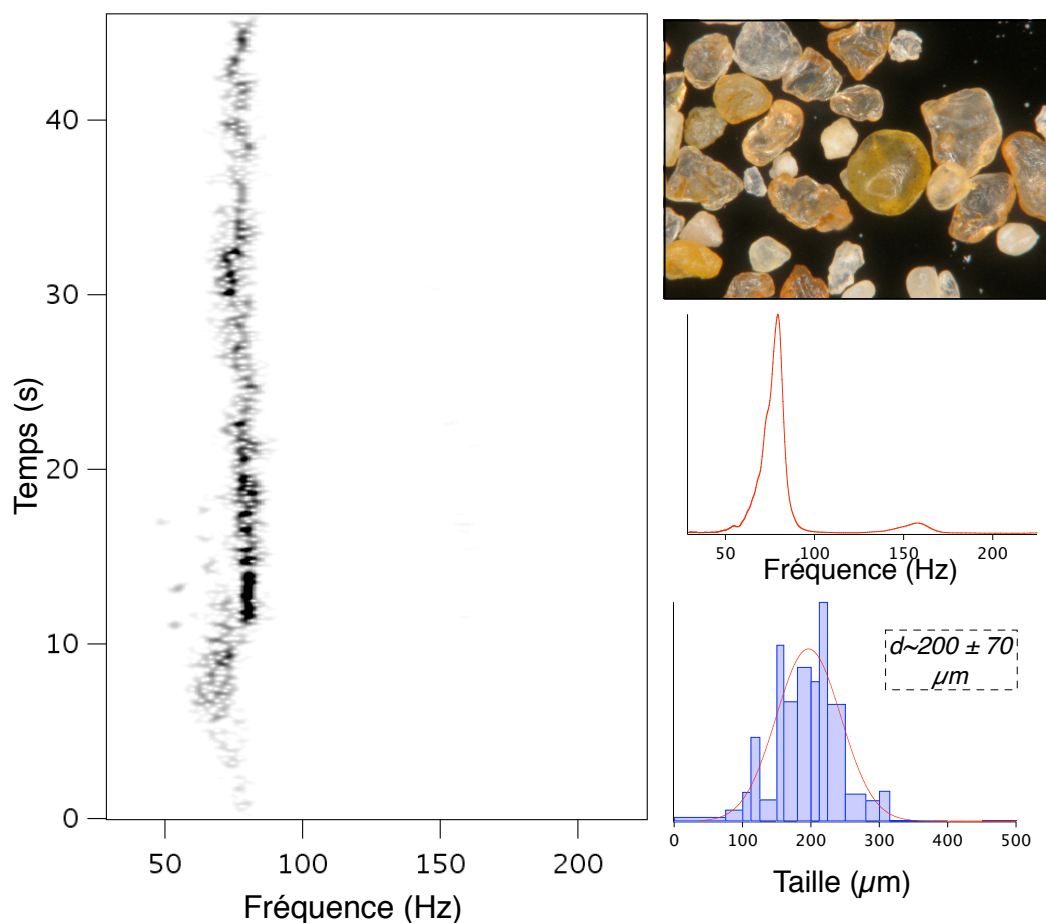
$$\mu_s = \langle \tilde{x} \rangle = \frac{k}{mg} + \sqrt{3} \langle (\tilde{x} - \langle \tilde{x} \rangle)^2 \rangle = \frac{k}{mg} \quad (\text{A.11})$$

Annexe B

Grains et Sons.

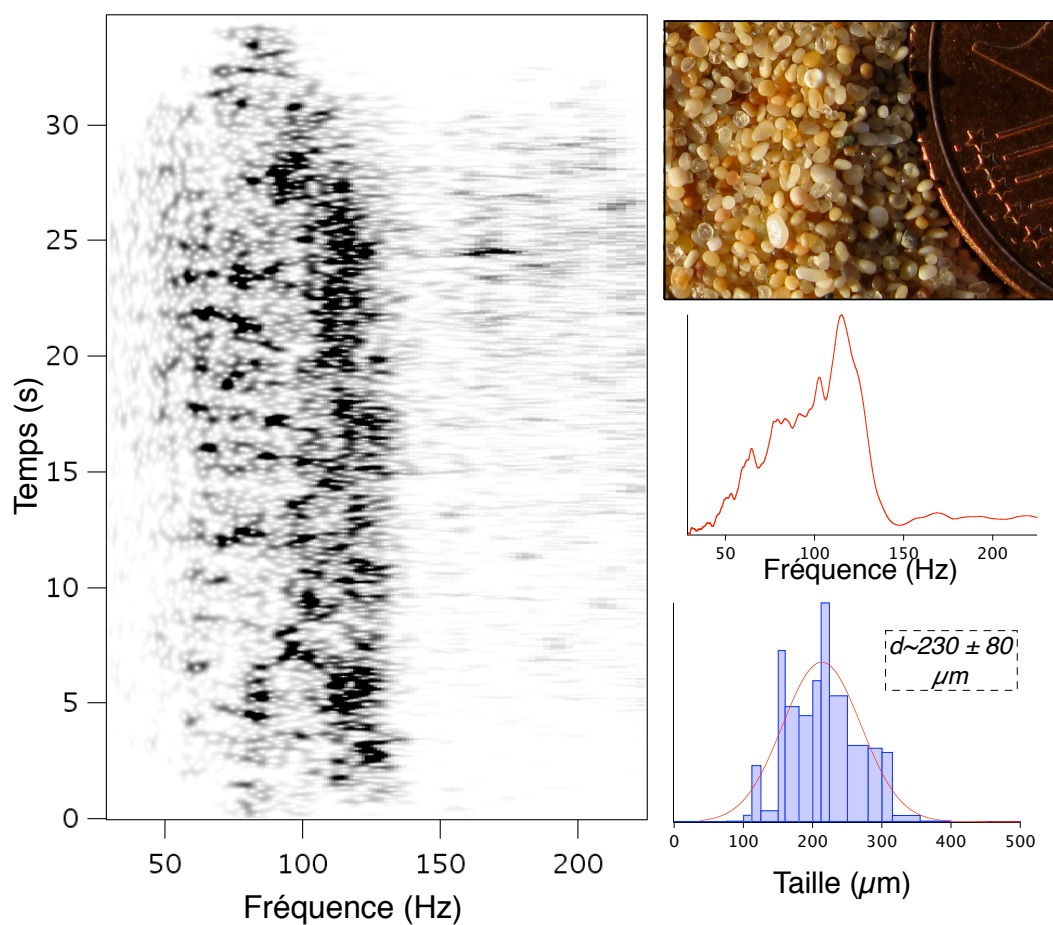
Dans cette section, nous allons présenter quelques dunes chantantes, avec des photos de leurs grains ainsi que quelques sonogrammes et spectres mesurés. Les tailles moyennes et les écarts-types sont calculées grâce à un fit gaussien de l'histogramme des tailles. Les sonogrammes et les spectres sont calculés par transformées en ondelettes.

Dune d'Al-Wagan



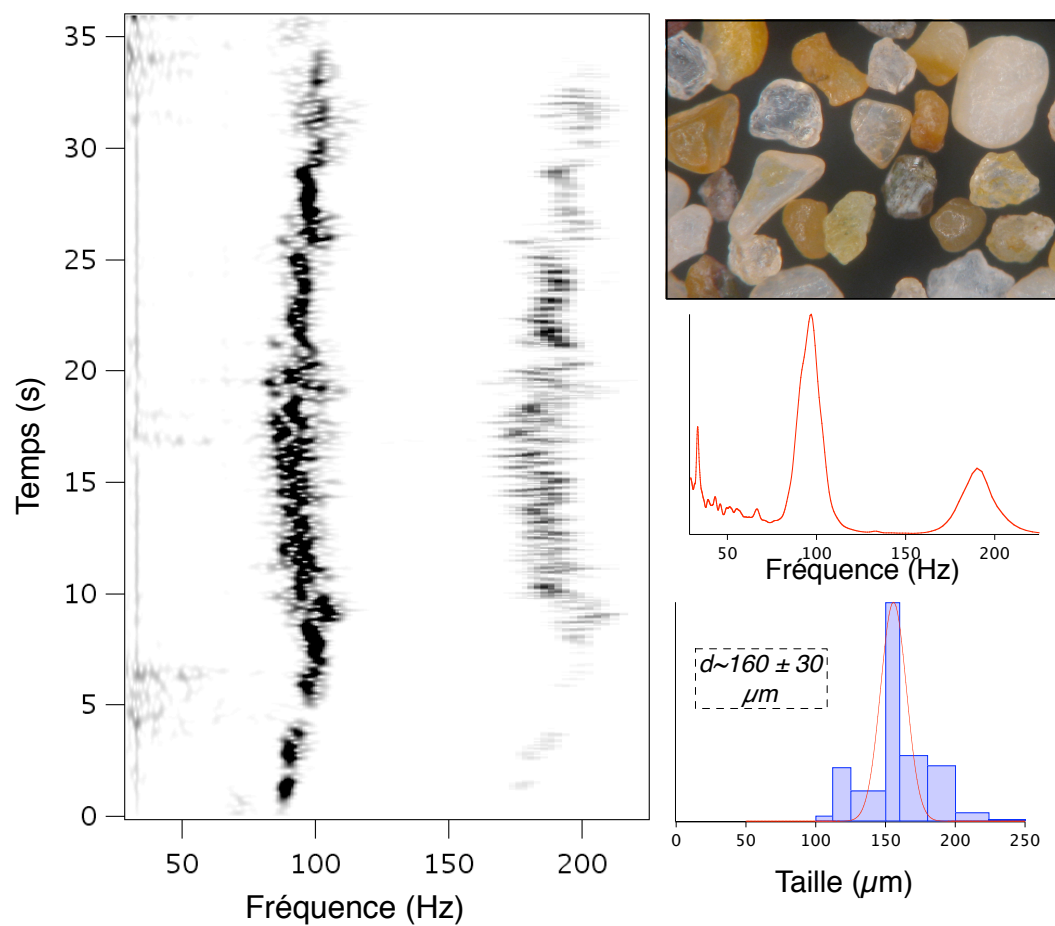
La dune étoile d'Al-Wagan, au nord-ouest d'Oman, à la frontière avec les Émirats Arabes Unis. Son sable est assez mal trié et comporte plusieurs pics de granulométrie, dont un assez faible autour de 300 μm , qui correspond à la fréquence enregistrée. Il faut être à trois pour produire une avalanche au débit suffisamment fort pour la faire chanter.

Double-Barchane d'Al-Askharah



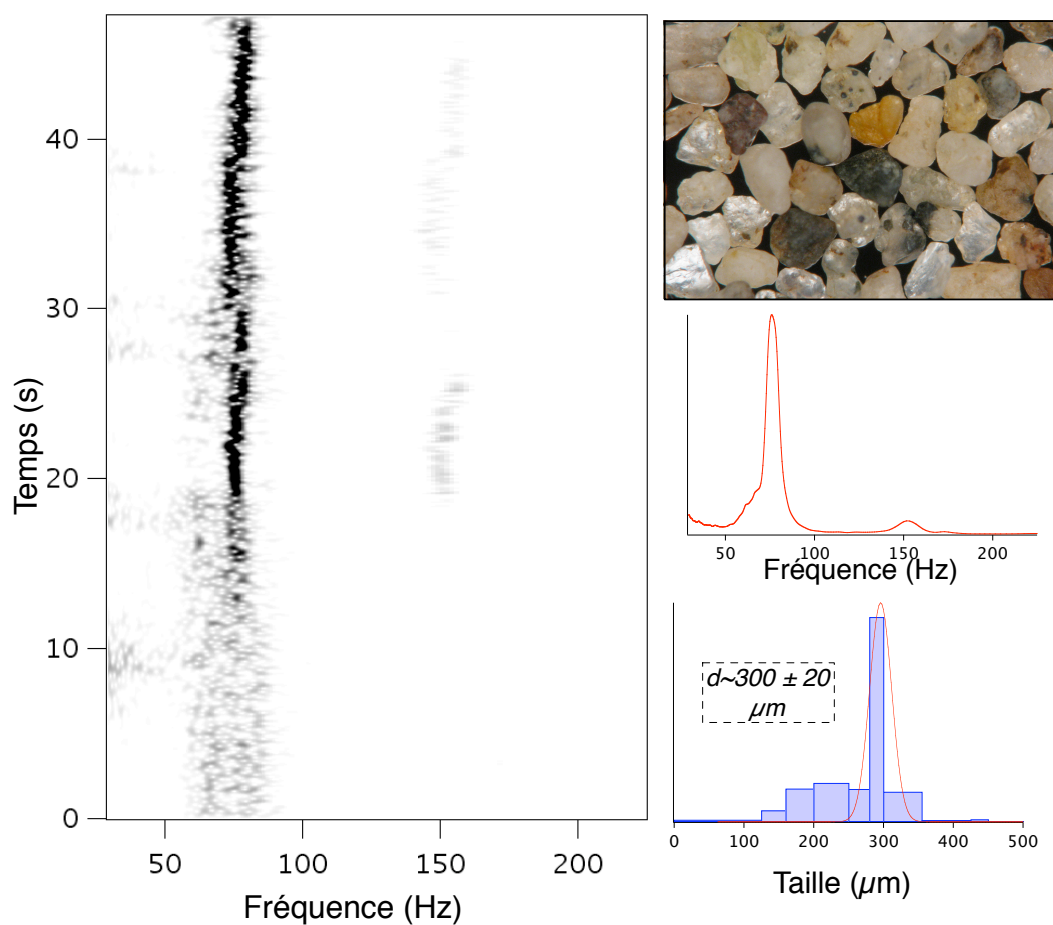
La dune d'Al-Askharah, située aux confins de la ville, chante remarquablement bien, malgré sa forte dispersion en taille. Le sonogramme présenté est un des plus bruités, et toutes les fréquences y sont représentées. L'histogramme présenté correspond à peu près à une moyenne sur les différents endroits de la dune, mais localement, la répartition peut être légèrement différente, ce qui explique que d'autres enregistrements font apparaître des fréquences différentes, plus marquées que dans celui présenté ci-dessus.

Méga-Barchane de Tarfaya



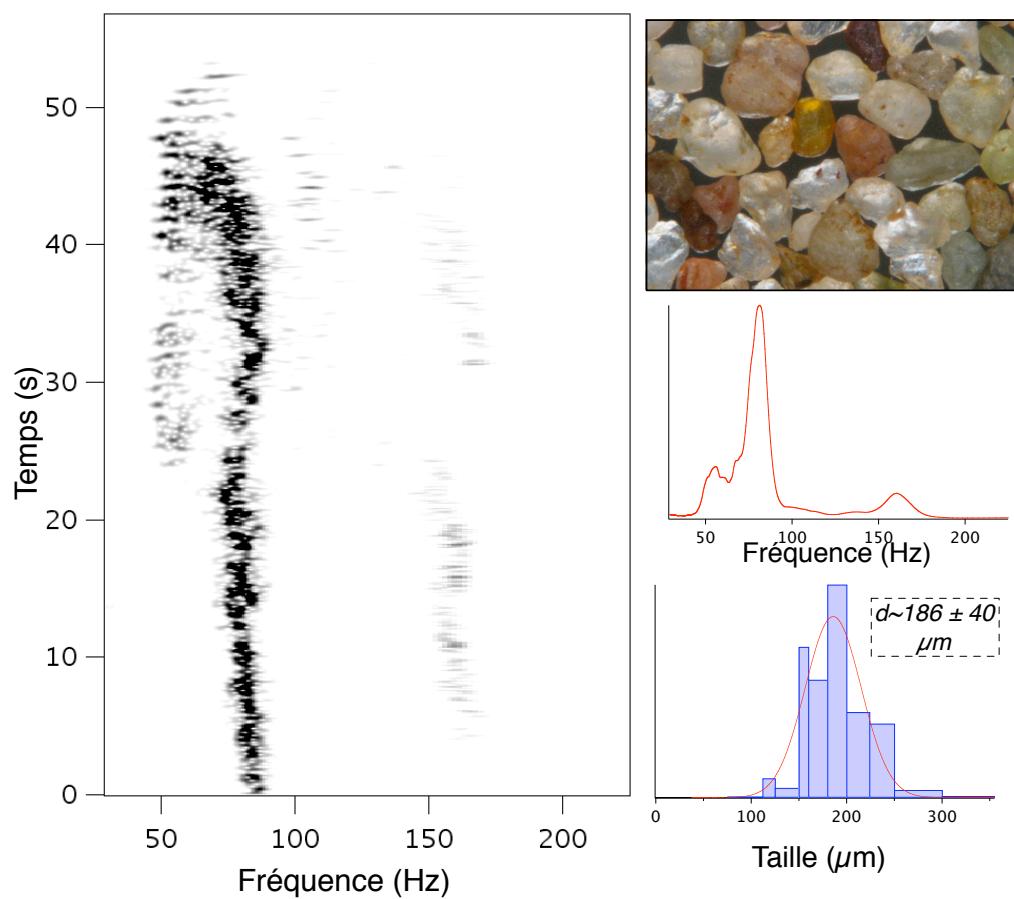
La dune $\Omega 1$ est une des mieux triées des dunes chantantes que nous avons pu voir. En conséquence, son chant est très monofréquenciel et on peut même voir une harmonique (si on regarde un spectre de Fourier, on en voit au moins trois), ce qui n'est pas vraiment le cas des dunes où la dispersion est forte.

Dune du Cerro Bramador



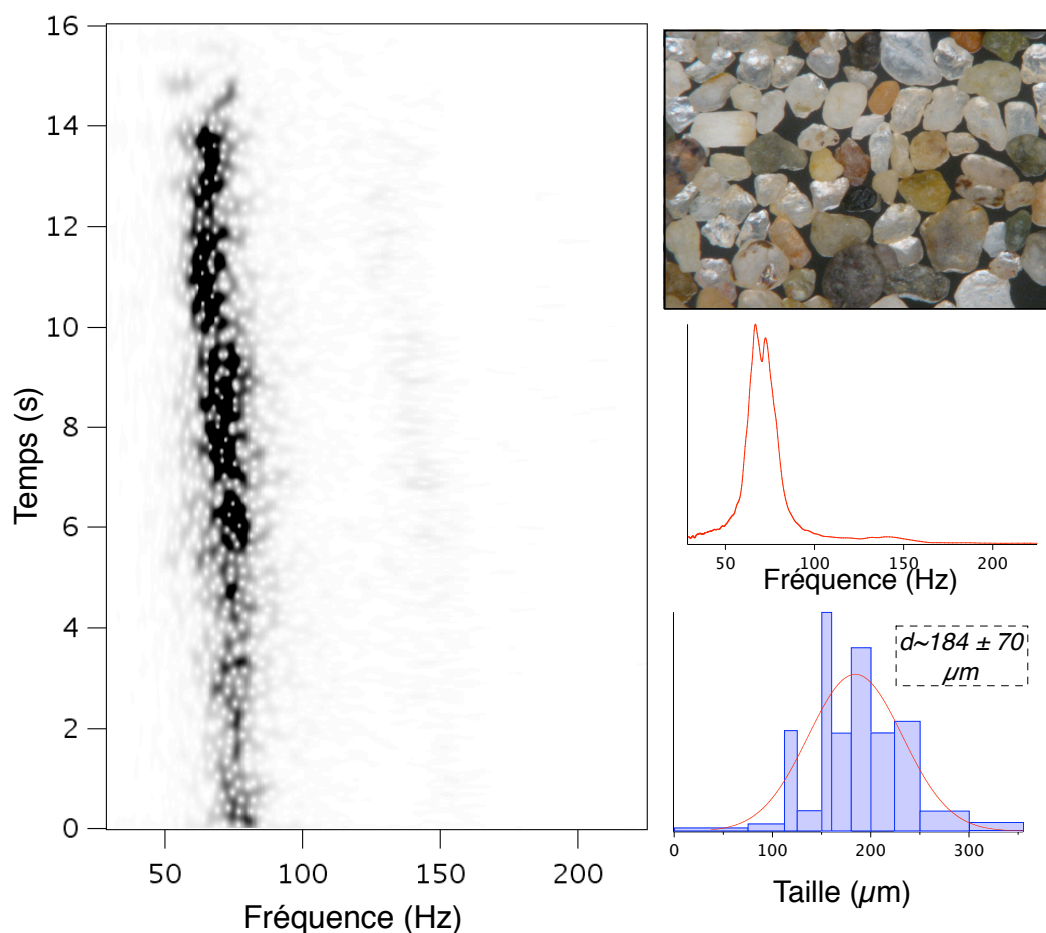
La pente du Cerro Bramador est faite de sable très noir, avec beaucoup de débris basaltiques, qui est déposé par le vent sur le flanc de la montagne. Le vent de la côte ouest du désert de l'Atacama vient pousser ces grains contre la montagne où ils s'agglomèrent. Les plus gros grains sont situés en haut de la pente, d'où est extrait l'échantillon dont on a mesuré l'historgramme des tailles. Le pic de granulométrie correspond bien à la fréquence principale du sonogramme. Toutefois, lorsque l'on mesure l'historgramme des tailles plus bas dans la pente, la dispersion est plus importante et le pic est relativement moins important (comme pour la dune d'Al-Wagan).

Dune de Baidan Jirin



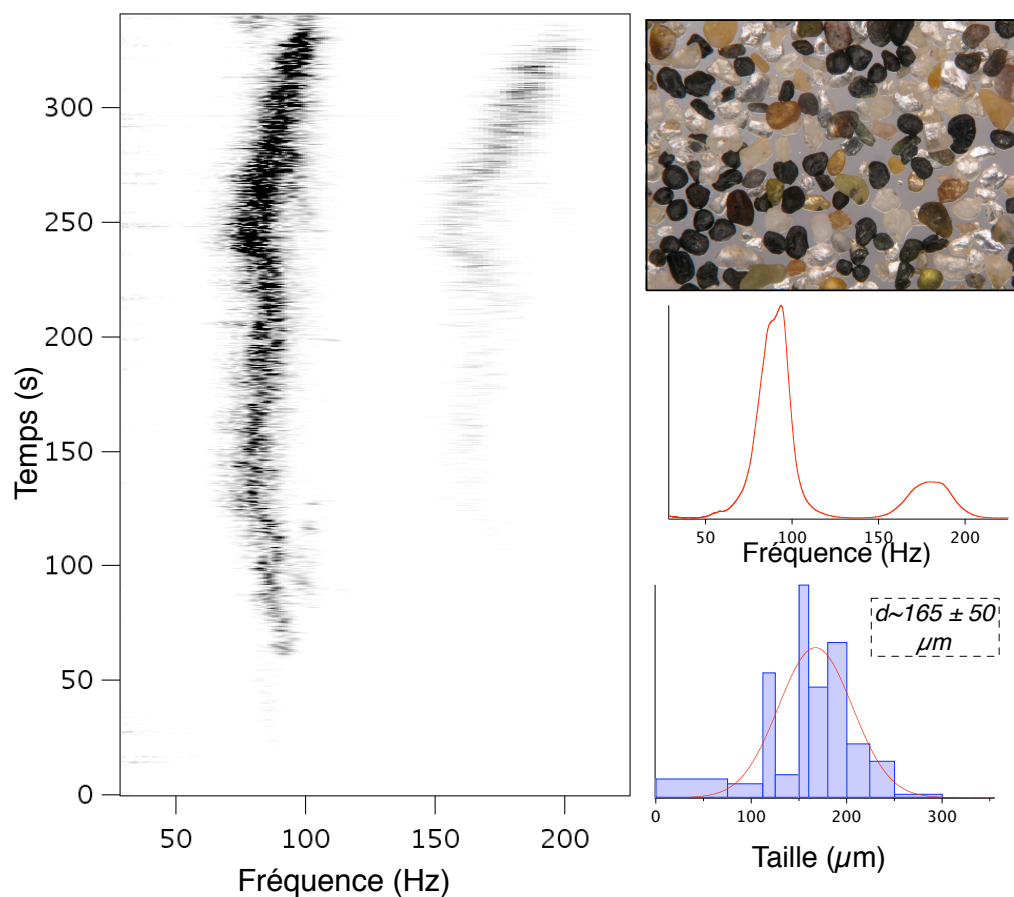
Les dunes étoiles de Baidan Jirin sont composées de beaucoup de minéraux différents, du quartz pur aux calcaires vernis, ou même des grains verts (olivine ?), ce qui reflète leur situation centrale alimentée par les vents venant de plusieurs bassins sources de grains.

Dune de Mingsha Shan



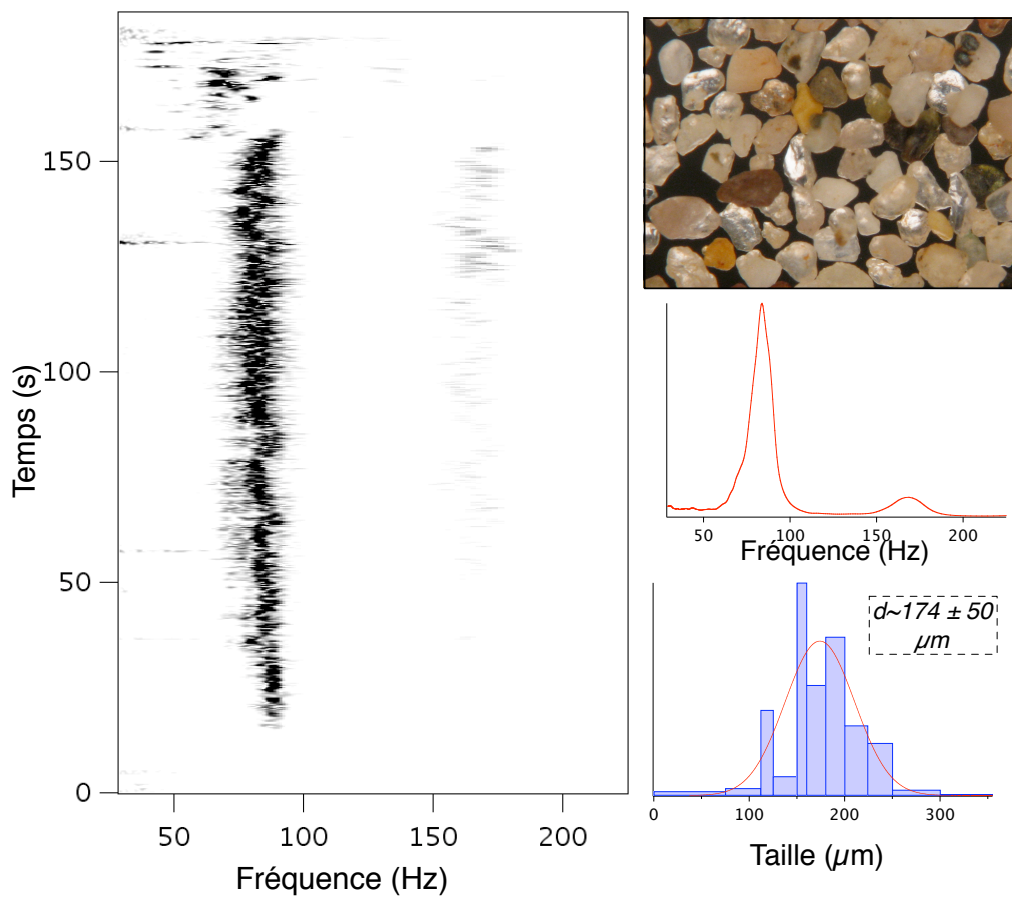
Comme Baidan Jirin, la dune de Mingsha Shan comporte beaucoup de grains différents. Contrairement aux autres dunes à dispersions forte en taille, celle-ci a une fréquence qui baisse au cours du temps. Il est possible que cela tienne à l'histoire récente de la dune : par exemple une avalanche s'est peut-être déjà produite au même endroit, ou encore le vent a changé récemment de direction ce qui a changé le tri habituel de la dune.

Dune d'Eureka



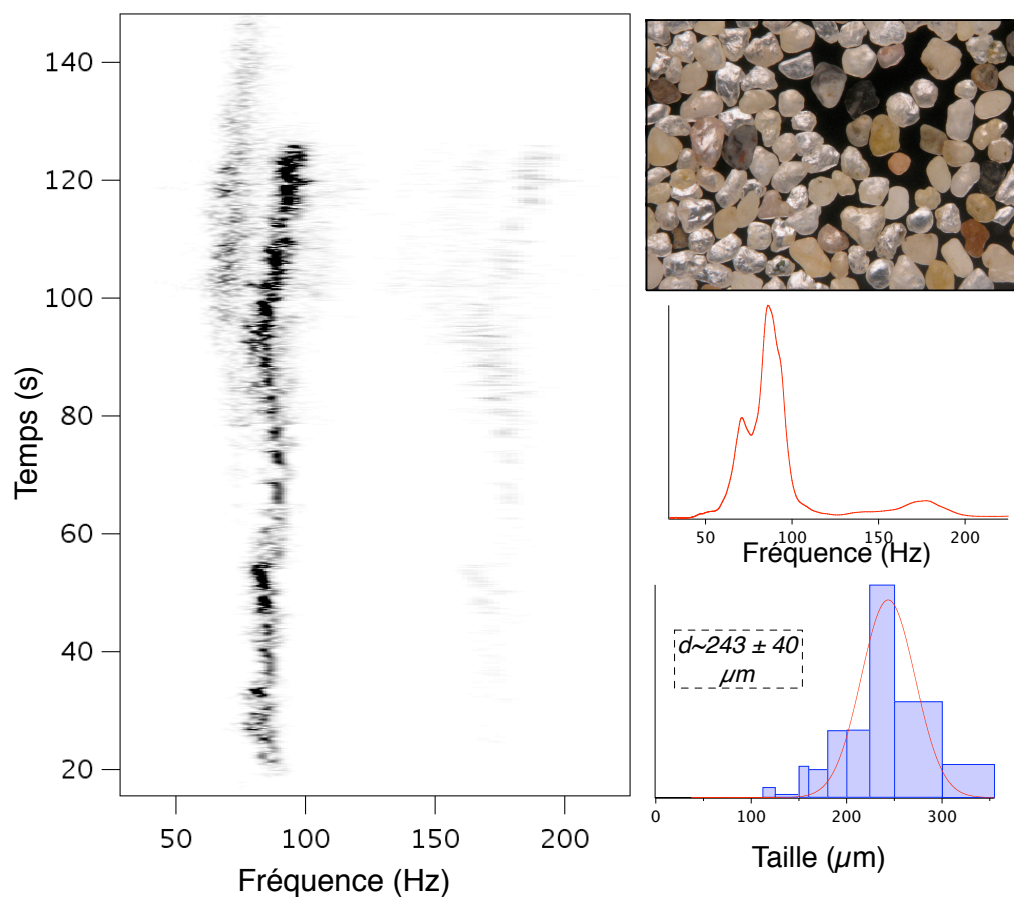
La dune d'Eureka est composée d'une majorité de grains noirs (haute composition en fer) et de grains transparents (quartz). A la fin la fréquence remonte, mais comme précédemment, il s'agit sans doute d'une variation dans le tri des grains (l'intensité reste trop forte pour pouvoir penser qu'il s'agit de la remontée en fréquence prédite près du seuil). Cette avalanche est exceptionnellement longue (10 minutes!), et a été coupée en deux pour le traitement (le sonogramme affiché ici n'en montre que la moitié).

Dunes de Dumont



La dune de Dumont est composée de quartz arrondis (donc assez vieux), pas très bien vernis (en témoigne le grain en haut à gauche de la photo, recouvert de noir sur deux arêtes seulement). La fréquence enregistrée est à peu près constante, mais d'après Vriend et al. (cité au chapitre 7), la dune est capable d'émettre d'autres fréquences. La fréquence mesurée ne correspond pas à la taille moyenne de ces grains, mais plus au second pic dans la granulométrie, comme pour la dune d'Al-Askharah à Oman.

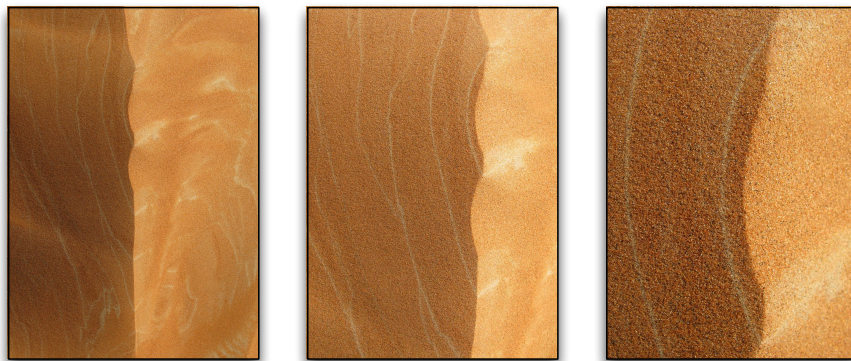
Dune de Sand Mountain



Beaucoup de grains de quartz arrondis pour la dune de Sand Mountain, certains vernis (opaques) d'autres non (brillants). Le sonogramme comporte une fréquence bien définie au début, qui se dédouble à la fin, la fréquence basse étant beaucoup plus faible en intensité. A l'écoute de l'enregistrement, on s'aperçoit qu'il s'agit en fait probablement d'une autre avalanche déclenchée non loin (impossible de savoir si elle est accidentelle ou non).

D'autres photos de grains

Al-Wagan



Les grains d'Al-wagan sont assez dispersés en taille, ce qui peut donner lieu à des phénomènes de ségrégation : les grains, déposés par avalanches successives, se regroupent selon leur taille. Comme ceux-ci possèdent en plus des couleurs différentes, on voit très bien les strates apparaître lorsque l'intérieur de la dune est mis à nu après une avalanche.

Al-Askharah



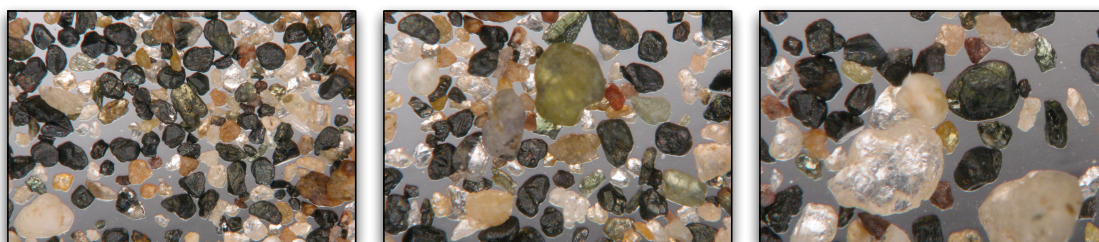
A gauche : photo prise sur le terrain, avec une pièce d'1 cent.

Cerro Bramador

Haut de la pente



Milieu de la pente

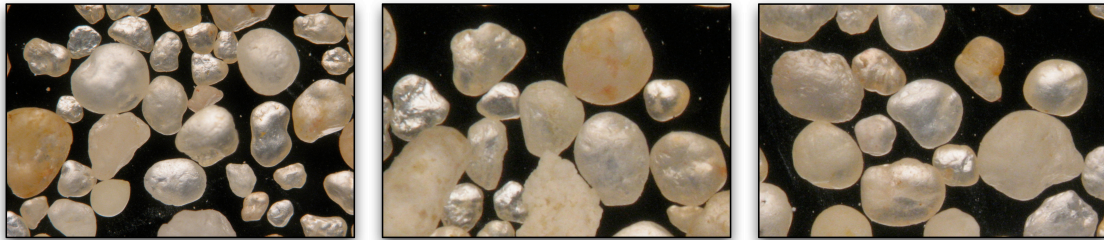


Bas de la pente



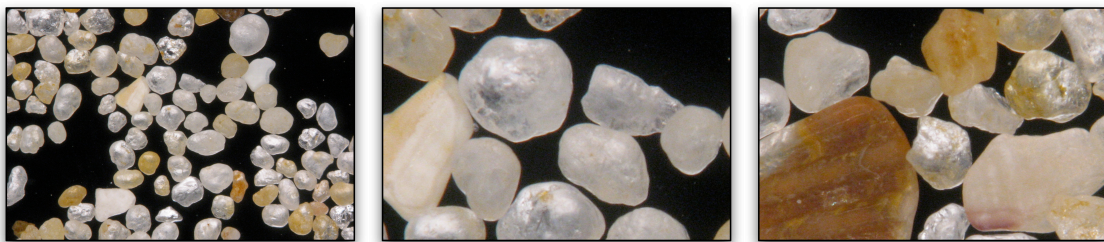
Les photos ci-dessus sont des photos de grains de la pente sableuse du Cerro Bramador, au chili. Les grossissements, bien que non mesurés, sont les mêmes sur toutes ces photos, et les photos sont zoomées de gauche à droite à 20, 30 et 40 %. On voit qu'au fur et à mesure que l'on descend la pente, les gros grains de quartz vernis et arrondis laissent la place à de plus petits grains noirs ainsi qu'à de plus petits grains de quartz.

Désert Blanc (Egypte)



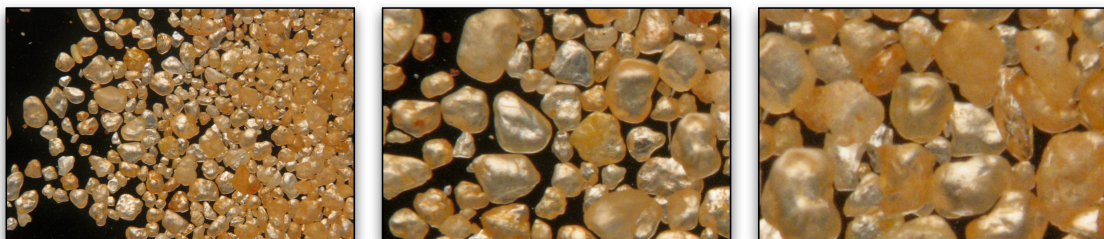
Ces grains sont composés principalement de quartz, parfois gros et arrondis, ou petits et plus anguleux. Ces grains ne chantent pas à notre connaissance.

Landes



Grains des landes (Moliet-et-Maa). Ces grains sont assez semblables d'aspect à ceux du désert blanc, mais on y trouve aussi des fragments de coquillages.

Mauritanie



Ces grains de quartz sont assez arrondis et partiellement vernis, mais leur grande dispersion

en taille les empêche probablement de chanter.

Merzouga (est du maroc)



Comme les grains de Mauritanie, ces grains sont partiellement vernis (surtout dans les anfractuosités), et ne chantent pas à notre connaissance.

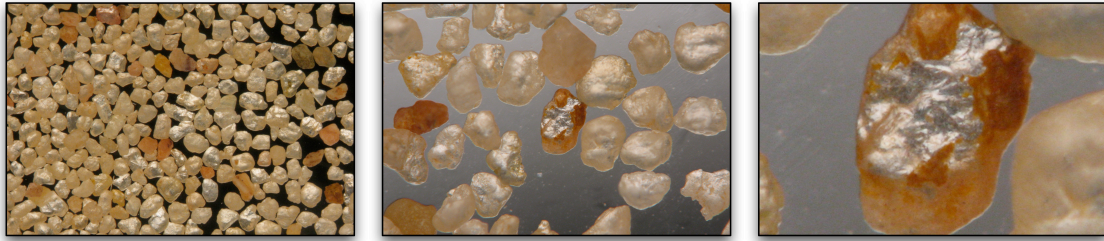
“Point P”



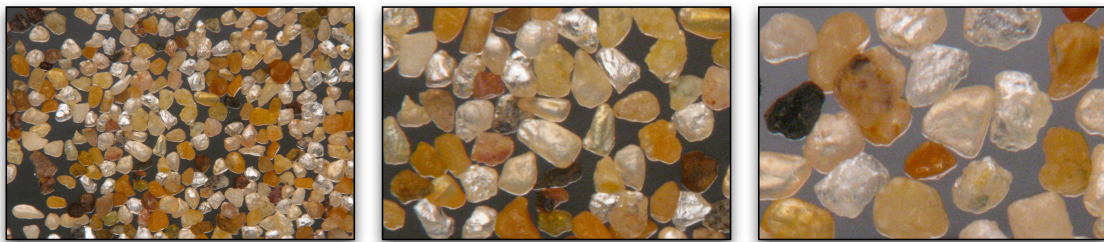
Achetés à Paris sur les quais de la seine, ce sable est issu de carrières et est à la base très mal trié (sur les photos, il a été tamisé entre 200 et 250 μm). Il est composé de quartz jeune, très rugueux — qui apparaît transparent ici car il n’y a pas d’éclairage par en-dessous. Il ne chante pas, naturellement.

Sinaiï

Ces grains de quartz très jeunes et très rugueux ne chantent pas, malgré leur vernis partiel. Il est intéressant de noter un des grains à moitié recouvert de vernis, dont le coeur de quartz apparaît argenté par l’éclairage.



Dune $\Omega 2$



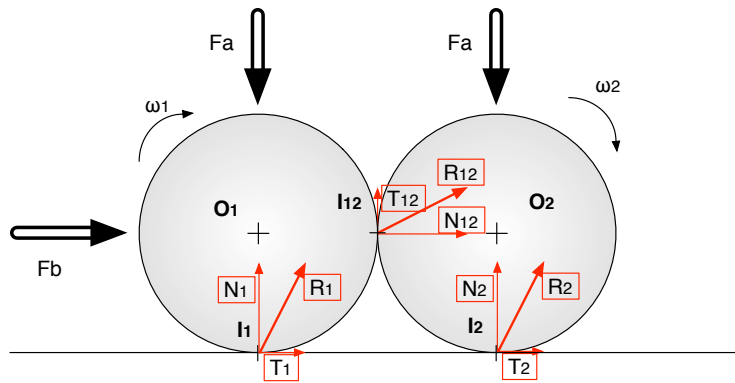
Cette dune possède des grains de beaucoup d'origines différentes — comme sa grande soeur $\Omega 1$, avec principalement du quartz, des débris de coquillages et des roches volcaniques (noires). Peut-être que sa moindre capacité à chanter s'explique par une plus grande dispersion en taille, ou bien plus de grains de quartz jeune, plus anguleux et moins vernis.

Annexe C

Synchronisation par frottement - première pistes

Avant d'élaborer le modèle du bloc solide et de l'interaction avec la rotation des chaînes de force, l'idée de la synchronisation du mouvement des grains par le frottement solide a déjà été développée dans un calcul avec deux grains poussés sur un côté. Le système considéré est assez sommaire - deux boules en contact, soumises à un poids, et poussées par un des côtés. L'idée était de passer ensuite à un système plus grand, en transposant certaines propriétés de synchronisation de la rotation calculées dans le système à deux grains. Malheureusement cette démarche n'a pas abouti car ce raisonnement n'est pas vraiment possible, tout d'abord parce qu'il donnait des résultats faux, ensuite parce que le nombre d'états possibles croît très rapidement avec le nombre de grains, et enfin parce que le calcul n'est pas du tout le même lorsque les grains sont en 2D au lieu d'1D (4 contacts au lieu de 2). Cependant, ce calcul aboutit tout de même à un étonnant diagramme de phase, aussi nous le rajoutons en annexe de cette thèse.

Soient deux boules homogènes de masse m et de rayon r , de centres \mathbf{O}_1 et \mathbf{O}_2 , au contact l'une de l'autre, posées toutes les deux sur le sol, sur lequel elles sont maintenues par une force \vec{F}_a , et on applique de gauche à droite une force \vec{F}_b à la boule de gauche. On appellera $\vec{R}_1 = N_1\vec{e}_z + T_1\vec{e}_x$ la réaction du sol sur la boule 1, $\vec{R}_2 = N_2\vec{e}_z + T_2\vec{e}_x$ la réaction du sol sur la boule 2, et $\vec{R}_{12} = N_{12}\vec{e}_z + T_{12}\vec{e}_x$ la réaction de la boule 1 sur la boule 2, respectivement aux points de contacts \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 et \mathbf{I}_{12}



On suppose que les boules frottent sur le sol et en elles avec un coefficient de friction dynamique et statique μ .

Théorème de la résultante cinétique

L'équilibre des forces pour la boule n°1 nous donne la vitesse \vec{V}_1 du centre de masse \mathbf{O}_1 : L'équilibre des forces pour la boule n°2 nous donne la vitesse \vec{V}_2 du centre de masse \mathbf{O}_2 :

$$\vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{R}_1 - \vec{R}_{12} = m\dot{\vec{V}}_1 \quad (\text{C.1})$$

$$\vec{F}_a + \vec{R}_2 + \vec{R}_{12} = m\dot{\vec{V}}_2 \quad (\text{C.2})$$

Théorème du moment cinétique

Le moment cinétique d'une boule homogène de masse m par rapport à un axe passant par son centre s'écrit :

$$J_o = \frac{2}{5}mr^2$$

Le théorème du moment cinétique s'écrit donc pour la boule 1 :

$$J_o\dot{\omega}_1 = rT_{12} - rT_1$$

Ce qui donne :

$$mr\dot{\omega}_1 = \frac{5}{2}(T_{12} - T_1) \quad (\text{C.3})$$

et pour la boule 2 :

$$mr\dot{\omega}_2 = \frac{5}{2}(T_{12} - T_2) \quad (\text{C.4})$$

De plus, on suppose toujours les boules au contact entre elles et au sol, c'est à dire

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = v\vec{e}_x \quad (\text{C.5})$$

On projette les théorèmes de la résultante cinétique sur \vec{e}_x et \vec{e}_z , et on obtient le set d'équations suivant :

$$F_b + T_1 - N_{12} = m\dot{v}_1 \quad (\text{C.6})$$

$$N_1 - F_a - T_{12} = 0 \quad (\text{C.7})$$

$$mr\dot{\omega}_1 = \frac{5}{2}(T_{12} - T_1) \quad (\text{C.8})$$

$$N_{12} + T_2 = m\dot{v}_2 \quad (\text{C.9})$$

$$N_2 - F_a + T_{12} = 0 \quad (\text{C.10})$$

$$mr\dot{\omega}_2 = \frac{5}{2}(T_{12} - T_2) \quad (\text{C.11})$$

Plusieurs cas sont à considérer selon si on suppose ou non un glissement aux points \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 et \mathbf{I}_{12} . On représentera schématiquement \times si le contact est non glissant, et O s'il y a glissement.

Cas statique

C'est le cas où il y a roulement sans glissement pour tous les points de contact \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 et \mathbf{I}_{12} . Dans ce cas, on a les relations suivantes : $v_1 = r\omega_1$, $v_2 = r\omega_2$ et $\omega_1 + \omega_2 = 0$, d'où évidemment :

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 0 \quad (\text{C.12})$$

Les théorèmes dynamique se simplifient tous et on a :

$$T_1 = T_2 = T_{12} = -\frac{F_b}{2}$$

$$N_1 = F_a - \frac{F_b}{2} \quad N_2 = F_a + \frac{F_b}{2} \quad N_{12} = \frac{F_b}{2}$$

Il faut maintenant discuter de la viabilité de ce cas : la loi de Coulomb impose :

$$|T_1| < \mu|N_1| \quad |T_2| < \mu|N_2| \quad |T_{12}| < \mu|N_{12}|$$

La troisième condition s'écrit :

$$\frac{F_b}{2} < \mu \frac{F_b}{2}$$

ce qui, pour $F_b > 0$ se simplifie en $\boxed{\mu > 1}$ La première condition est plus restrictive que la deuxième, et s'écrit :

$$\frac{F_b}{2} < \mu(F_a - \frac{F_b}{2}), \text{ soit :}$$

$$\boxed{F_b < \frac{2\mu}{1+\mu} F_a} \quad (\text{C.13})$$

Si $\mu < 1$, la condition de non glissement sur \mathbf{I}_{12} n'est pas respectée, c'est donc là qu'il y aura glissement en premier, et ça sera le cas numéro 2. Si $\mu > 1$, par contre, c'est le point \mathbf{I}_1 qui lâche en premier, comme il sera considéré dans le cas numéro 4.

frottement entre les deux boules et roulement sans glissement au sol.

On a les relation suivantes :

$$r\omega_1 = v_1, \quad r\omega_2 = v_2, \quad T_{12} = -\mu N_{12}, \quad v_1 = v_2 \quad (\text{C.14})$$

Les équations C.6 et C.9 deviennent alors :

$$T_1 = T_2 \quad \text{et} \quad N_{12} = \frac{F_b}{2} \quad (\text{C.15})$$

On déduit alors des relations C.7 et C.10 les égalités :

$$T_{12} = -\mu \frac{F_b}{2}, \quad N_1 = F_a - \mu \frac{F_b}{2}, \quad \text{et} \quad N_2 = F_a + \mu \frac{F_b}{2} \quad (\text{C.16})$$

Enfin les équations C.9 et C.11 se combinent pour nous permettre de trouver T_1 et T_2 :

$$N_{12} + T_2 = \frac{5}{2}(T_{12} - T_2)$$

soit :

$$T_1 = T_2 = -\frac{2 + 5\mu}{14} F_b \quad (\text{C.17})$$

Il faut maintenant discuter de la viabilité de ce cas : la loi de Coulomb impose :

$$|T_1| < \mu |N_1| \quad |T_2| < \mu |N_2|$$

La première condition est plus restrictive et s'écrit :

$$\frac{2 + 5\mu}{14} F_b < \mu \left(F_a - \mu \frac{F_b}{2} \right)$$

ce qui se simplifie en :

$$\boxed{\frac{F_b}{F_a} < \frac{14\mu}{2 + 5\mu + 7\mu^2}} \quad (\text{C.18})$$

Comme c'est la première inégalité qui est la plus restrictive, si elle n'est pas respectée, cela signifie que c'est le point \mathbf{I}_1 qui lâchera en premier. Cet état peut donc évoluer vers un état où \mathbf{I}_1 et \mathbf{I}_{12} glissent, et où \mathbf{I}_2 roule sans glisser. Par ailleurs, on a

$$m\dot{v} = N_{12} + T_2 = \frac{F_b}{2} - \frac{2 + 5\mu}{14} F_b$$

soit :

$$m\dot{v} = \frac{5}{28}(1 - \mu)F_b \quad (\text{C.19})$$

et on voit tout de suite que le contact \mathbf{I}_{12} ne peut devenir non-glissant que si $v = 0$, ce qui n'est possible, avec une vitesse initiale positive, que si $\dot{v} < 0$, ce qui signifie pour

$$\boxed{\mu > 1} \quad (\text{C.20})$$

On retrouve bien la condition de passage du cas statique.

Glissement de toutes les boules.

On a les relation suivantes :

$$T_1 = -\mu N_1, \quad T_2 = -\mu N_2, \quad T_{12} = -\mu N_{12}, \quad v_1 = v_2 \quad (\text{C.21})$$

Les équations C.6, C.7, C.9 et C.10 se simplifient en :

$$F_b + \mu(N_2 - N_1) = 2 * N_{12} \quad (\text{C.22})$$

$$N_1 + \mu N_{12} = F_a \quad (\text{C.23})$$

$$N_2 - \mu N_{12} = F_a \quad (\text{C.24})$$

et donc on a :

$$N_{12} = \frac{F_b}{2(1 - \mu^2)}, \quad T_{12} = \frac{-\mu F_b}{2(1 - \mu^2)}, \quad N_1 = F_a - \frac{\mu F_b}{2(1 - \mu^2)}, \quad (\text{C.25})$$

$$N_2 = F_a + \frac{-\mu F_b}{2(1 - \mu^2)}, \quad T_1 = -\mu F_a + \frac{\mu^2 F_b}{2(1 - \mu^2)}, \quad T_2 = -\mu F_a - \frac{\mu^2 F_b}{2(1 - \mu^2)}$$

On en déduit les vitesses de rotation des boules, ainsi que leurs vitesses de translation :

$$m\dot{v} = \frac{F_b}{2} - \mu F_a, \quad mr\omega_1 = \frac{5}{2}\mu \left(F_a - \frac{F_b}{2(1 - \mu)} \right), \quad mr\omega_2 = \frac{5}{2}\mu \left(F_a - \frac{F_b}{2(1 + \mu)} \right) \quad (\text{C.26})$$

L'hypothèse de glissement entre deux solides impose que la vitesses relative d'un des solides par rapport à l'autre soit non nulle, et ne sera pas vérifiée si son accélération change de signe. Pour

les points \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 et \mathbf{I}_{12} , cette condition s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned}
 m\dot{v} - mr\dot{\omega}_1 &\geq 0 && \text{pour le point } \mathbf{I}_1 \\
 m\dot{v} - mr\dot{\omega}_2 &\geq 0 && \text{pour le point } \mathbf{I}_2 \\
 mr(\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2) &\geq 0 && \text{pour le point } \mathbf{I}_{12}
 \end{aligned}
 \tag{C.27}$$

On vérifie aisément qu'on a toujours $\dot{\omega}_2 \geq \dot{\omega}_1$, par conséquent la deuxième inégalité est plus restrictive que la première. Elle devient la condition suivante :

$$\frac{F_b}{2} - \mu F_a \geq \frac{5}{2}\mu \left(F_a - \frac{F_b}{2(1-\mu)} \right)$$

soit :

$$\boxed{\frac{F_b}{F_a} \geq \frac{14\mu(1+\mu)}{2+7\mu}}
 \tag{C.28}$$

Enfin, la condition sur \mathbf{I}_{12} s'écrit :

$$\left(F_a - \frac{F_b}{2(1-\mu)} \right) + \left(F_a - \frac{F_b}{2(1+\mu)} \right) \geq 0$$

soit :

$$\boxed{\frac{F_b}{F_a} \geq 2(1-\mu^2)}
 \tag{C.29}$$

Glissement au sol de la boule n°1 et roulement sans glissement ailleurs

On a les relation suivantes :

$$T_1 = -\mu N_1 , \quad r\omega_2 = v_2 , \quad \omega_1 + \omega_2 = 0 , \quad v_1 = v_2
 \tag{C.30}$$

Ce qui donne les équations suivantes :

$$T_{12} = \frac{T_1 + T_2}{2} , \quad N_{12} + T_2 = \frac{5}{2}(T_{12} - T_2)
 \tag{C.31}$$

Combinées aux équations C.6 et C.9, cela donne :

$$\frac{5}{4}(T_1 - T_2) = \frac{F_b}{2} + \frac{T_1 - T_2}{2} + T_2 ,$$

soit :

$$3T_1 = 2F_b + 7T_2 .$$

Combinée aux autres, cette équation permet d'exprimer T_2 en fonction de T_1 dans l'équation C.31 et, avec l'équation C.30, on obtient enfin :

$$N_1 = \frac{7F_a - F_b}{7 + 5\mu} \quad (\text{C.32})$$

On en déduit les valeurs des autres forces :

$$\begin{aligned} T_1 &= -\mu \frac{7F_a - F_b}{7 + 5\mu} , & T_{12} &= -\frac{5\mu F_a + F_b}{7 + 5\mu} , & N_{12} &= \frac{F_b}{2} + \frac{(1 + \mu)F_b - 2\mu F_a}{7 + 5\mu} \\ T_2 &= -\frac{3\mu F_a + (2 + \mu)F_b}{7 + 5\mu} , & N_2 &= \frac{(7 + 10\mu)F_a + F_b}{7 + 5\mu} \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

Occupons nous maintenant des limites de la validité de ce cas : le roulement sans glissement suit la première loi de Coulomb, et on doit avoir pour les points \mathbf{I}_2 et \mathbf{I}_{12} :

$$|T_{12}| \leq \mu |N_{12}| \quad \text{et} \quad |T_2| \leq \mu |N_2|$$

soit :

$$\frac{5\mu F_a + F_b}{7 + 5\mu} \leq \mu \left(\frac{F_b}{2} + \frac{(1 + \mu)F_b - 2\mu F_a}{7 + 5\mu} \right) \quad \text{et} \quad \frac{3\mu F_a + (2 + \mu)F_b}{7 + 5\mu} \leq \mu \frac{(7 + 10\mu)F_a + F_b}{7 + 5\mu}$$

ce qui donne pour le point \mathbf{I}_2 :

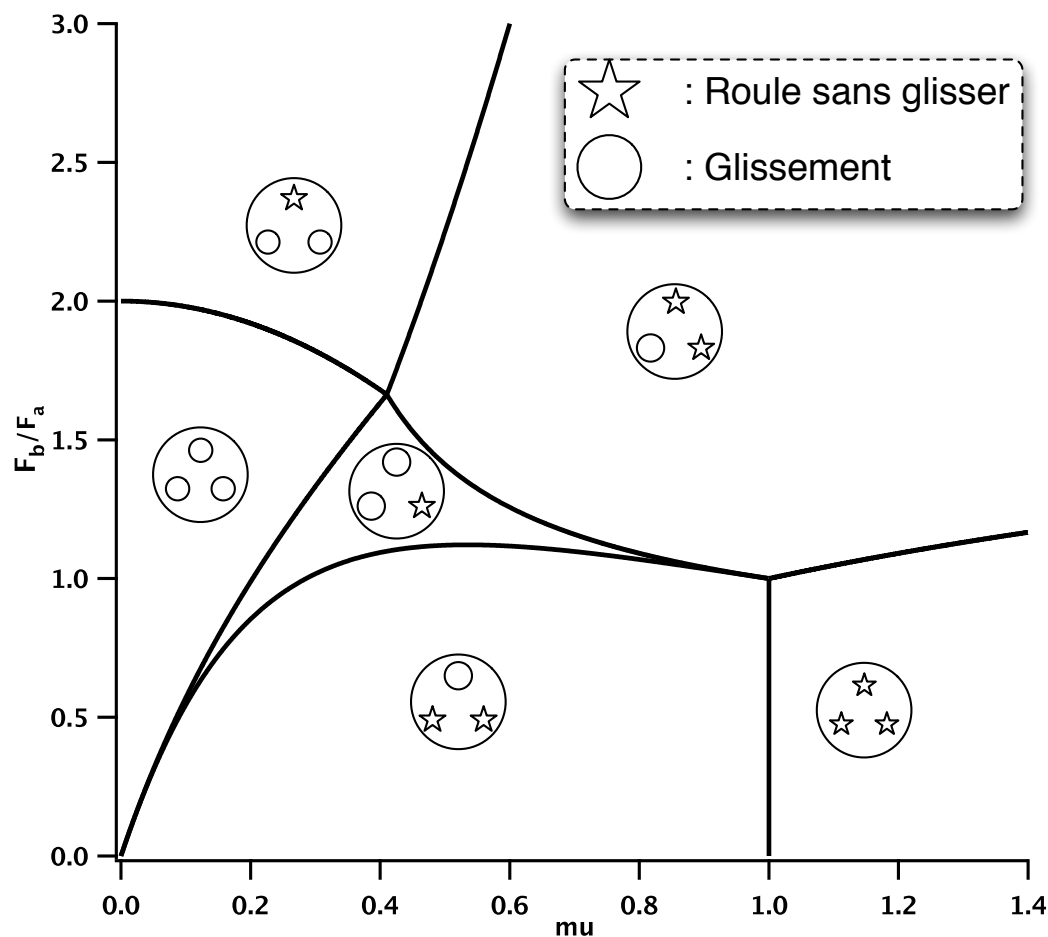
$$\boxed{\frac{F_b}{F_a} \leq \mu(2 + 5\mu)} \quad (\text{C.34})$$

et pour le point \mathbf{I}_{12} :

$$\boxed{\frac{F_b}{F_a} \geq \frac{\mu(10 + 4\mu)}{7\mu^2 + 9\mu - 2}} \quad (\text{C.35})$$

Diagramme de phase

Une fois que nous avons établi toutes les frontières entre les différentes phases, on peut dresser le diagramme de phase : Ce diagramme, étonnant par ses points quadruples, possède



6 phases distinctes. Les points quadruples traduisent en fait l'idée qu'il est impossible pour le système de changer d'état deux contacts en même temps. Parmi ces phases, seules celles qui sont symétrique par rapport à la verticale sont susceptibles d'être extensibles à un ensemble infini 1d de grains, les autres posant des problèmes de rotations et contra-rotations. Toutefois cet agrandissement du système ne peut pas se faire simplement de manière qualitative : en effet, lorsque l'on pousse une collection de grains sur une ligne, on s'aperçoit que la contrainte normale horizontale décroît exponentiellement, ce qui complique l'interprétation. (les calculs ont été développés dans la thèse de Y. Khidas, indiquée dans les références bibliographiques).

Annexe D

Compaction dans un tube

Nous allons maintenant présenter des expériences qui n'ont malheureusement pas abouti. L'idée initiale ainsi que le matériel expérimental ont été apporté par P. Mills en juillet 2009 : il s'agissait de tester l'adhésion entre les grains de sable qui chantent au moyen d'expériences de compactations dans un tube : si les grains sont adhésifs, cela devrait logiquement se traduire par un petit effet, sans doute très faible, sur les états initiaux et finaux de compaction. Suivent alors les quatre pages d'un petit rapport que j'ai écrit après 2 mois d'expériences infructueuses. Le rapport est inclus tel quel, et les photos finales ont été enlevées car elles sont toutes déjà dans l'annexe B.

Compaction dans un tube

Ceci est une description (presque) chronologique des manip de compaction de grains dans un tube.

Premiers pas :

Tout d'abord, j'ai fait quelques expériences préliminaires en filmant le tube de côté et en l'agitant avec un moteur transformé en vibreur au moyen d'une masse excentrée. Mais malheureusement les moteurs vieillissent, et au bout d'une semaine, le moteur imposait une accélération environs 3 fois moins grande pour une même intensité en entrée.

Dispositif :

J'ai donc changé le dispositif et j'ai utilisé un pot vibrant, en repérant la hauteur de sable à l'aide d'un détecteur laser de position.

J'ai fait plusieurs séries de manip avec plusieurs sables, aux propriétés différentes.

Les sables :

- Oman : du sable de la dune Al-Askharah, à Oman
- Omega1 : du sable du maroc, pris sur la plus grosse des mega-barchanes près de tarfaya. C'est celui qui chante le mieux.
- Omega2 : du sable du même endroit, mais qui est usé et ne chante qu'à très faible densité.
- Verre : des billes de verre, qui ne chantent pas
- Verre Traité : des billes de verre rendues chantante au moyen d'un vernis.
- Point P : du sable du commerce, acheté chez point p, qui ne chante pas du tout

Tous les échantillons ont été tamisés entre 250 et 280 μm , SAUF les Omega 1 et 2, qui sont tamisés entre 150 et 175 μm .

J'ai aussi mesuré la densité (bulk) des sables des échantillons afin d'en déduire la *fraction volumique* des grains (que j'appelle densité dans la suite). A noter que cette densité est de 2.7 pour les "vrais" sables et 2.5 pour les billes de verre et le point p, qui ne chantent pas.

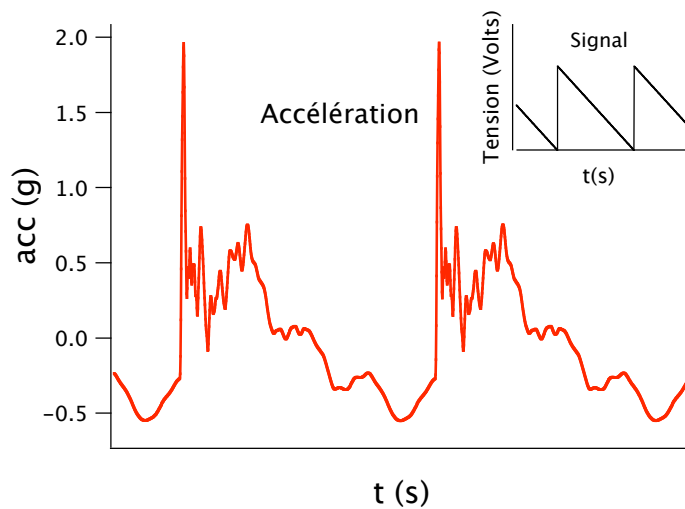
Expériences avec décollage

D'abord, j'ai secoué avec des morceaux de sinusoïdes séparées par un temps de repos, un peu comme dans un article de Nagel de 1995 sur un tube vibré verticalement (http://prola.aps.org/abstract/PRE/v51/i5/p3957_1).

Les résultats sont difficilement interprétables, et je crois que cela est du

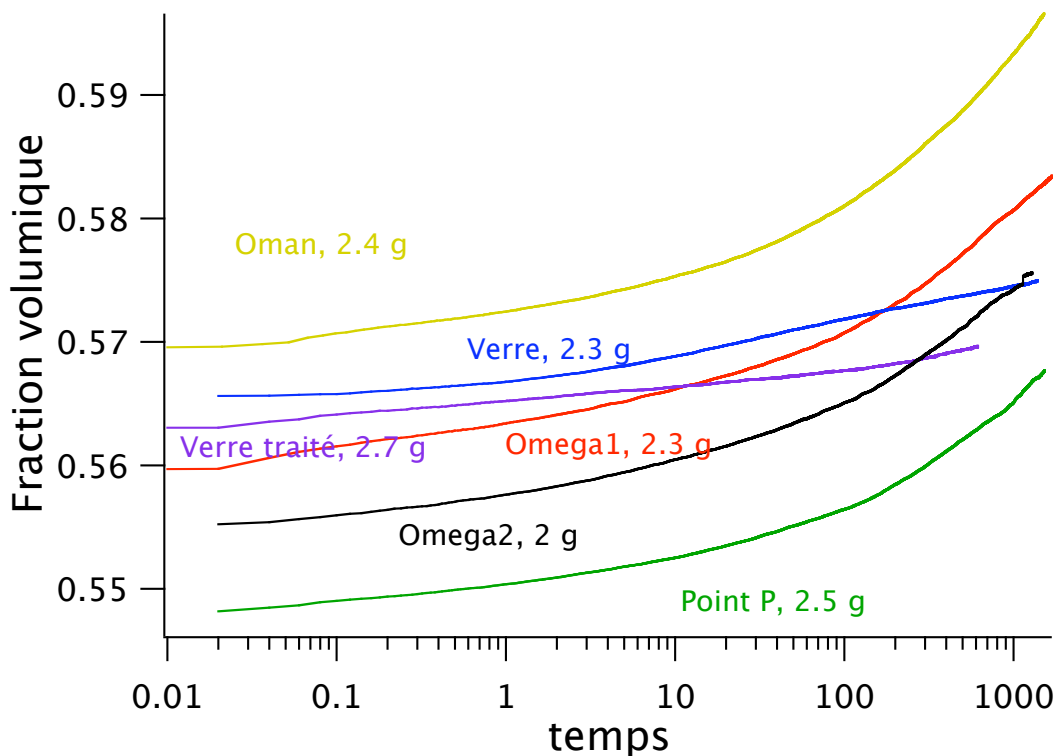
à la forme du signal : l'accélération fait des pics, dont une partie en-dessous de -g, ce qui signifie que les grains décollent du fond, et qu'il y a un choc après, et je crois que l'essentiel de la compaction se passe là, lorsque les grains se décollent les uns des autres, et du coup que le frottement n'intervient plus trop.

J'ai donc changé le signal envoyé au pot vibrant pour envoyer une rampe de tension, ce qui correspond à un pic d'accélération vers le haut, et très peu d'accélération vers le bas.



Expériences sans décollage

- Avec cette nouvelle façon de compacter, les résultats sont reproductibles, mais assez durs à interpréter toujours. Les courbes de compacité en fonction du temps semblent dépendre de plusieurs paramètres.



les compactions initiales :

Je me suis rendu compte que le système pour décompacter le sable (la grille reliée à un fil) ne marchait pas très bien : en remontant, la grille fait vibrer le tube, et cela produit des compactions initiales assez variables. De plus, le sable ainsi décompacté est en fait plus compact que lorsqu'on le verse dans le tube. J'ai donc arrêté d'utiliser la grille.

Les compactions initiales semblent être assez arbitraire :

Pont P < Omega2 < verre traité < Omega1 < Verre < Oman . (voir schéma)

La très faible compaction du point P s'explique, à mon avis, par l'extrême angulosité des grains, qui ont des angles beaucoup plus raides que tous les autres types de grains testés.

Mais sinon, il n'y a pas de claire séparation entre sable chantant et sable non chantant.

Les compactions finales

Je ne les ai pas mesurées, car je ne les ai pas atteintes, entre autres car je n'osais pas trop laisser le vibreur tourner pendant des jours car il chauffe beaucoup et il n'est pas à nous...

Les taux de compaction

La variation de densité n'est pas une caractéristique clairement mesurable. Si on trace la courbe de densité en fonction du logarithme du temps, elle suit à peu près une droite dans les temps longs, mais pas vraiment non plus.

Ces taux de compaction dépendent de beaucoup de paramètres :

- L'accélération : à plus forte accélération, la compaction est plus rapide, comme attendu.
- la compacité initiale : un sable déjà compacté se compacte moins vite.
- de l'échantillon utilisé : selon le sable, les taux de compaction sont plus ou moins grands, et ils ont l'air plus importants pour le sable qui chante que pour les sables qui ne chantent pas (la surprise : les billes de verre, qui se compactent très mal de cette façon)

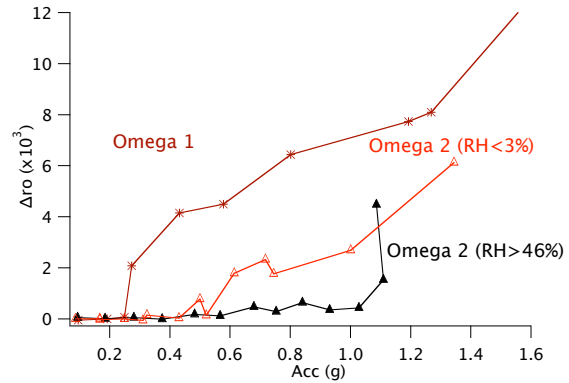
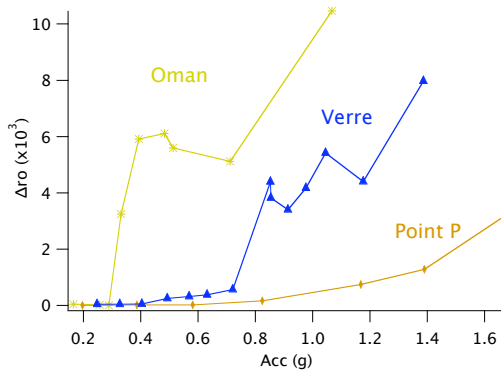
La multiplicité des paramètres dont dépendent ces courbes ne rend pas simple l'interprétation, donc j'ai pensé à regarder quelque chose de plus simple à analyser : les seuils. En effet, si on secoue le tube trop doucement, il ne se passe rien.

Les seuils :

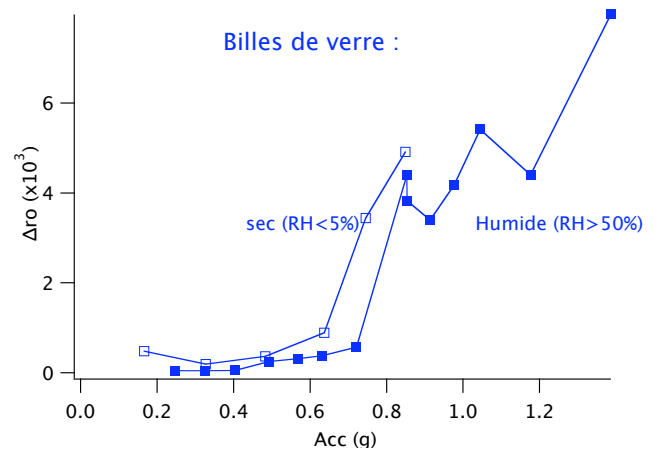
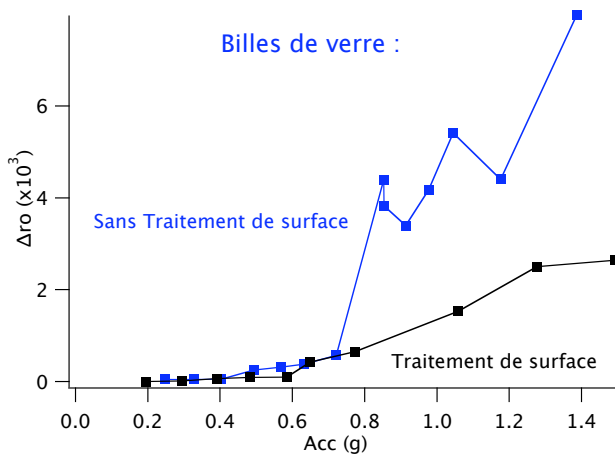
On prépare les échantillons à une compacité donnée (principalement, la moins dense possible atteignable par tous les échantillons)

La, c'est assez clair : les sables qui chantent se compactent beaucoup mieux que les sables qui ne chantent pas, et pour des accélérations beaucoup plus faible . Par exemple, si on compare Point P, Verre et Oman (qui ont la même taille de grains) Oman se compacte largement mieux.

Ou encore, si on compare Omega1 et Omega2, c'est à dire deux échantillons du même sable (il est impossible de les différencier à la loupe), dont la seule différence est



justement la chantabilité, Omega1 (celui qui chante) se compacte mieux. Plus flagrant encore, si on compare Omega2 humide et Omega2 sec, il y a une importante différence de seuil (alors qu'il n'y a pratiquement pas de différence entre les billes de verre humide et les billes de verre sèches).



Le bémol :

Les billes de verre traitées, elles, ne suivent pas la tendance des autres granulaires chantants : le seuil est plus haut, et elles se compactent moins vite que leur homologue non traité.

Ce résultat est assez inexplicable, et la seule piste que je vois c'est que peut-être le vernis a rendu les billes de verre plus rugueuses et plus anguleuses...

Photos :

