

Introduction

Ces dernières années ont vu une révolution en physique de la matière condensée. Celle-ci a consisté en la découverte d'une multitude de nouvelles phases de la matière qui ne sont pas distinguées par leurs symétries spatiales ou de jauge, mais plutôt à partir de la topologie des fonctions d'onde décrivant le système. Parmi la multitude de phases topologiques, cette thèse se concentre sur l'étude de systèmes sans interaction présentant des phases topologiques isolantes ou supraconductrices. Ces systèmes peuvent posséder des phases gappées (isolantes ou supraconductrices) non équivalentes bien qu'aucune brisure de symétrie ne soit nécessaire pour passer d'une phase à une autre. Par ailleurs, lorsque deux phases non équivalentes sont mises en contact, il apparaît alors des états d'interfaces chiraux et donc robustes au désordre et aux perturbations qui ne changent pas la classe de symétrie de l'hamiltonien (c'est-à-dire la classification des hamiltoniens quadratiques fermioniques, souvent nommée la «ten-fold way»,¹ qui utilise les symétries discrètes de renversement temporel (SRT), particule-trou (SPT) et chirale (SC)). Ces états d'interface ont des énergies situées nécessairement dans le gap (bande interdite) de volume. Ces caractéristiques révèlent la nature topologique des phases mises en contact.

La présente thèse est organisée en deux parties. Dans la première partie nous traitons des isolants topologiques à deux bandes dans l'approximation des liaisons fortes. Plus précisément nous considérons des systèmes bidimensionnels présentant un effet Hall quantique en l'absence de champ magnétique extérieur : on parle alors d'effet Hall quantique anormal (HQA). Ces systèmes sont caractérisés dans le volume par un invariant topologique (le nombre de Chern) qui est proportionnel au nombre d'états de bord qui se forment lorsque le système est en contact avec le vide (un isolant topologique trivial). La problématique principale de cette partie est la suivante : comment peut-on manipuler l'invariant topologique afin d'obtenir un nombre arbitraire d'états bord, tout en gardant un système à deux bandes. La deuxième partie porte sur les phases topologiques qui apparaissent dans certains modèles de supraconducteurs unidimensionnels. Dans ces systèmes il est établi que les états de bords constituent une réalisation physique des fermions de Majorana. Dans ce travail nous étudions plutôt une proposition particulière pour la réalisation des fermions de Majorana ; il s'agit d'un modèle de fil semiconducteur présentant un fort couplage spin-orbite et à proximité d'un supraconducteur d'onde s .² L'objectif de cette partie est de caractériser le comportement des fermions de Majorana dans des géométries linéaires et annulaires, dans des géométries supraconducteur-métal normal (SN) et (supraconducteur-métal normal-supraconducteur) SNS. Pour terminer nous explorons un système qui présente des fermions de Majorana multiple sur un bord. Ici nous examinons si l'effet Josephson anormal conserve sa nature fractionnaire dans une jonction SNS.

1. Altland and Zirnbauer (1997)

2. Lutchyn, Sau, and Das Sarma (2010); Oreg, Refael, and von Oppen (2010)

Isolants topologiques de Chern

Un isolant HQA réalise la physique de l'effet Hall quantique en l'absence d'un champ magnétique. Dans ce système, le SRT est brisée par la présence d'un flux magnétique inhomogène qui est nul en moyenne sur la maille élémentaire de sorte qu'il n'y a pas de champ magnétique net. Le système est alors caractérisé par un invariant topologique : le nombre de Chern. Une telle phase isolant de Chern est caractérisée par la présence d'états de bord chiraux localisés à l'interface entre l'isolant topologique et le vide (isolant non topologique). Ainsi, on peut avoir accès aux propriétés de transport particulières des états bord de l'effet Hall quantique en l'absence de niveaux de Landau.³

Afin de comprendre comment il est possible de modifier le nombre de Chern, il est nécessaire de prendre le plus simples modèles d'isolants HQA bidimensionnels : des modèles à deux bandes. Lorsque le système est invariant par translation, on peut exprimer le nombre de Chern en fonction de l'hamiltonien de Bloch $\mathcal{H}(\mathbf{k}) = \mathbf{h}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$ où \mathbf{k} est le quasi-moment dans la zone de Brillouin (BZ) 2D et $\boldsymbol{\sigma}$ les matrices de Pauli. En fonction du vecteur hamiltonien normé $\hat{\mathbf{h}}$ ce nombre de Chern est donné par :

$$\mathcal{C} = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{BZ}} d^2\mathbf{k} \hat{\mathbf{h}} \cdot (\partial_{k_x} \hat{\mathbf{h}} \times \partial_{k_y} \hat{\mathbf{h}}).$$

On montre que l'invariant topologique admet aussi une formulation discrète quand il est interprété comme le degré de la fonction $\hat{\mathbf{h}}$. Théoriquement, l'isolant peut être décomposé en deux parties $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. La première partie \mathcal{H}_1 constitue un modèle réduit où les deux bandes se touchent pour un nombre fini de points de la zone de Brillouin ; si la dispersion de l'énergie est linéaire dans la proximité du contact des bandes, alors on parle de fermions de Dirac. La seconde partie \mathcal{H}_2 va jouer le rôle de terme de masse et va ouvrir un gap aux différents points de contact entre les bandes de la partie \mathcal{H}_1 . Dans le premier chapitre on montre que le nombre de Chern résulte comme une somme sur tous les points de Dirac, du produit de la chiralité de ces fermions de Dirac par le signe de la masse en chacun de ces points. Cette formulation a l'avantage de comprendre le nombre de Chern comme une somme finie ; ce qui rend son calcul efficace, souvent accessible analytiquement. En outre, cela permet de proposer un schéma pour varier l'invariant topologique dans les systèmes à deux bandes.⁴ On a besoin de déformer le spectre d'énergie pour produire une prolifération des points de Dirac. Ceci peut être réalisé dans les modèles à deux bandes en considérant des intégrales de saut à longue distance. Le nombre de points de Dirac de la partie \mathcal{H}_1 est toujours pair et la somme totale des chiralités des points de Dirac est nécessairement nulle. Afin de faire varier le nombre de Chern on a en donc besoin d'une masse qui peut changer de signe entre les points de Dirac, on parle alors de masse inversée. Cette formulation de l'invariant topologique a certaines limitations due au fait que le contact des bandes peut aussi avoir lieu avec une dispersion non linéaire. Néanmoins, tant que les contacts des bande

3. Haldane (1988)

4. Sticlet, Piéchon, Fuchs, Kalugin, and Simon (2012a)

sont ponctuelles, ils peuvent être interprétés dans un scénario de collision de points de Dirac, où la chiralité du résultat est tout simplement la somme des chiralités des points de Dirac en collision.

Le formulation de l'invariant topologique comme somme finie nous permet de proposer des modèles à deux bandes avec un nombre de Chern variable. Pour une partie \mathcal{H}_1 avec $2n$ points de Dirac, l'invariant topologique après l'addition du terme de masse \mathcal{H}_2 aura un nombre de Chern maximal n . Pour illustrer la théorie nous avons réalisé un modèle avec des phase de Chern entre -2 et 2 . Ces considérations concernant les phases topologiques en volume sont complétés par une analyse des états de bords qui apparaissent lorsque le modèle est réalisé dans un réseau triangulaire enroulé dans un cylindre de hauteur finie. Les états de bords qui se forment aux extrémités du cylindre peuvent être déterminés numériquement et analytiquement, ce qui prouve encore la correspondance entre l'invariant topologique de volume et le nombre d'états de bords robustes sous cette forme.

Enfin nous avons aussi considéré l'isolant HQA paradigmatique constitué par le modèle de Haldane.⁵ Dans ce cas le modèle semi-métallique sous-jacent \mathcal{H}_1 est le graphène. En considérant des intégrales de saut entre des sites lointains nous avons pu décrire l'apparition de points de Dirac multiples. Leur mouvement dans la BZ est analysé en détail et nous mettons en évidence une fusion ponctuelles des ces fermion Dirac, avec un charge topologique (chiralité) basse par rapport à une dispersion d'ordre élevé. En conséquence on montre que l'on peut multiplier les phases topologiques en ajoutant une masse qui oscille de plus en plus vite sous l'action de termes de saut lointains.⁶

L'utilité de l'invariant topologique à deux bandes peut également être étendue à de modèles à quatre bandes. Deux exemples d'extensions sont traitées ici. D'abord, il s'agit d'une extension vers un isolant \mathbb{Z}_2 , qui contient deux copies d'isolants de Chern conjuguées par renversement du temps. La seconde extension consiste dans la construction théorique d'un isolant de Chern de maille élémentaire double du à la variation périodique d'un paramètre caractéristique. On obtient alors un "isolant topologique spatialement texturé" de sorte qu'une rainure contenant une phase Chern N alterne avec une rainure de phase Chern N' . Le diagramme de phase du système complet peut être compris à partir du diagramme de phase de chacune des phases Chern N et N' .

La nécessité de saut vers des voisins lointain rend ces modèles irréalistes et leur intérêt est plutôt académique. Cependant nous pensons que la phénoménologie «basse énergie» obtenue sur ces modèles a un caractère universelle et pourrait très bien rendre compte de la physique basse énergie de sorte de certains systèmes multi-couche ou multibandes. Cela a d'ailleurs été récemment illustré dans le cadre du graphène où la physique basse énergie du modèle bi-couche peut être reproduite par un modèle mono-couche avec saut troisième voisins pour des paramètres proche du point de fusion de quatre points de Dirac.⁷ L'étude des états de bord dans les modèles topologiques s'avère plus difficile que la détermination des phases

5. Haldane (1988)

6. Sticlet and Piéchon (2012)

7. Montambaux (2012)

topologiques en volume. Les conditions d'existence pour les états de bord peuvent être déduites à partir de l'hamiltonien en volume seulement pour des géométries particulières. La solution générale nécessite des études plus approfondies dans le futur.

Fermions de Majorana

Les fermions de Majorana sont des particules qui sont leur propre anti-particules. Jusqu'à présent, ils n'ont pas été découverts parmi les particules fondamentales du modèle standard. Néanmoins, ils ont été proposés comme des excitations émergentes dans les systèmes de la matière condensée. La plupart des propositions invoquent la supraconductivité. Ceci est tout à fait naturel vu que la particule et le trou sont conjugués les uns des autres. Toutefois, la première proposition exigeait la présence de supraconducteurs non-conventionnels ou de matériaux exotiques comme les isolants topologiques. Un nouvel enthousiasme dans le champ théorique et expérimental provient de la proposition d'une réalisation de fermions de Majorana dans des fils quantiques avec un fort couplage spin-orbite (de type Rashba), sous champ magnétique et en proximité d'un supraconducteur d'onde s .⁸

Dans le chapitre 4, on se concentre sur ce système et on considère l'effet supplémentaire d'un couplage spin-orbite de type Dresselhaus. On propose une nouvelle mesure théorique de la présence de fermions de Majorana : la polarisation Majorana. Cette polarisation mesure directement le recouvrement entre la quasiparticule et son partenaire conjugué par la symétrie de charge dans le hamiltonien Bogoliubov-de Gennes (BdG) qui décrit le système. Dans le cas d'un fermion de Majorana, ce recouvrement est maximal et traduit l'identité entre une quasi-particule et son anti-quasiparticule. Une telle mesure peut être utilisée pour détecter la présence d'un fermion de Majorana à zéro énergie dans les états de bord. Cette polarisation de Majorana permet de suivre le comportement des états liés au bord du fil à travers de transition de phase topologique qui peut mener à leur destruction. Ainsi on montre que la condition d'existence pour les Majorana n'est pas affectée par la présence de l'interaction spin-orbite Dresselhaus. Nous prouvons également qu'il a une texture de spin associée aux degrés de liberté électroniques qui forment les fermions de Majorana. Cette texture répond à l'orientation des deux vecteur caractérisant les contributions spin-orbite. La polarisation de spin dans le plan de deux vecteurs est toujours opposée pour les fermions de Majorana liés au bord du fil. Cette observation est encourageante pour la recherche d'une signature expérimentale de ces états d'énergie zéro.⁹

Dans le chapitre 5 nous considérons le fil à fort couplage spin-orbite dans différentes géométries et explorons le comportement de fermions de Majorana. Ainsi dans une jonction SN nous montrons qu'il y a une extension des fermions de Majorana dans la partie normale. En outre, si les corrélations supraconductrices pénètrent profondément dans la

8. Lutchyn, Sau, and Das Sarma (2010); Oreg, Refael, and von Oppen (2010)

9. Sticlet, Bena, and Simon (2012a)

partie normale alors cela donne une localisation croissante des fermions de Majorana.¹⁰ Un autre cas intéressant est traité dans une jonction SNS (Josephson) longue. Quand il y a une différence de phase entre les régions supraconductrices, l'effet Josephson normal est modifié par la présence de Majorana; il apparaît alors un effet Josephson fractionnaire caractérisé par une périodicité de 4π du courant Josephson (citation). Il y a alors une évolution des états d'Andreev qui se forment dans la région normale, et ils suivent aussi cette périodicité anormale. Pour une différence de phase π entre les deux parties supraconductrices, il y a des fermions de Majorana étendus qui se développent dans la partie métal normal de la jonction. Encore une fois cette mutation des états d'Andreev en fermions de Majorana est suivie à l'aide de la polarisation Majorana.¹¹ Enfin, on considère l'effet d'un gradient de phase supraconductrice dans les géométries linéaires et annulaires. Le gradient de la phase supraconductrice peut détruire les états Majorana.¹² Ici, nous essayons de comparer la géométrie de type anneau avec une région métal normal avec une jonction SNS étendue formée par la torsion de la phase supraconductrice. Comme attendu, quand la différence de phase est proche de au deux bouts de la partie normale alors des fermions de Majorana étendus qui se forment dedans. De plus nous constatons que des Majoranas se forment pour d'autres valeurs très larges de la différence de phase mais alors ils ne suivent pas la périodicité prédite.¹³ Ce phénomène reste inexpliqué pour le moment.

Dans le dernier chapitre de la thèse on étudie un système à deux bandes topologique supraconducteur qui héberge à chaque bord plusieurs fermions de Majorana liés. Les fils semi-conducteurs à fort couplage spin-orbite des chapitres précédents ont des phases topologiques \mathbb{Z}_2 , où les modes de Majorana apparaissent par un effet de proximité à un supraconducteur d'onde s. L'indice \mathbb{Z}_2 signifie que les fermions de Majorana sont essentiellement des modes d'énergie zéro solitaires qui vivent sur l'interface du fil avec le vide (un isolant trivial). Les modes s'hybrident par un couplage avec d'autres fermions de Majorana et forment des fermions complexes à énergie finie. Néanmoins, la présence de la symétrie chirale peut protéger des fermions de Majorana adjacents et les empêcher de se recombiner. Nous étudions un système à deux bandes avec paramètres supraconducteurs à longue portée. Ce système rappelle les isolants topologiques traité précédemment. La présence de plusieurs fermions de Majorana à une même extrémité peut être expliquée par des considérations similaires. La présence de couplages à longue distance rend disponibles plusieurs phases de topologiques avec un invariant topologique (le nombre d'enroulement) élevé. Nous étudions en particulier des jonctions Josephson courtes, qui relient des régions topologiques avec plusieurs fermions de Majorana. La question centrale est de savoir si la nature fractionnaire de l'effet Josephson est maintenue dans ce cas. La diagonalisation exacte du système dans l'approximation des liaisons fortes montre que la dispersion d'énergie a la bonne forme pour la préservation de l'effet fractionnaire. De plus, l'étude de modèles de plusieurs jonctions

10. Chevallier, Sticlet, Simon, and Bena (2012b)

11. Chevallier, Sticlet, Simon, and Bena (2012a)

12. Romito, Alicea, Refael, and von Oppen (2012)

13. Chevallier, Sticlet, Simon, and Bena (2012b)

entre des régions supraconductrices caractérisées par des invariants topologiques diverses (1-1, 1-2, 2-2), dans l'approximation de basse énergie, permettent de montrer que l'effet de Josephson reste protégé. En outre, lorsqu'il y a quatre fermions de Majorana dans la jonction, ils vont fusionner en deux fermions complexes avec un nombre d'occupation bien défini et avec quatre états à deux particules. Alors pour une différence de phase π de la jonction, la dispersion de ces modes passe par zéro et le croisement est protégé.¹⁴

Il convient de noter, à nouveau, que des couplages très forts entre des voisins lointains sont nécessaires pour produire des fermions de Majorana multiples, ce qui pose un problème pour une réalisation expérimentale. De plus le système étudié requiert à la fois la SC et la SRT, et en conséquence on s'attend à ce que les états Majorana de bord soient fragiles. Néanmoins, la périodicité anormale de l'effet Josephson devrait encore fournir une signature de la présence de fermions de Majorana.

Références

- A. Altland and M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. B **55**, 1142 (1997).
- R. M. Lutchyn, J. D. Sau, and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **105**, 077001 (2010).
- Y. Oreg, G. Refael, and F. von Oppen, Phys. Rev. Lett. **105**, 177002 (2010).
- F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **61**, 2015 (1988).
- D. Sticlet, F. Piéchon, J.-N. Fuchs, P. Kalugin, and P. Simon, Phys. Rev. B **85**, 165456 (2012a).
- D. Sticlet and F. Piéchon, (2012), arXiv:1212.4046 [cond-mat.mes-hall] .
- G. Montambaux, Eur. Phys. J. B **85**, 1 (2012).
- D. Sticlet, C. Bena, and P. Simon, Phys. Rev. Lett. **108**, 096802 (2012b).
- D. Chevallier, D. Sticlet, P. Simon, and C. Bena, (2012), arXiv:1210.6818 (2012) [cond-mat.mes-hall] .
- D. Chevallier, D. Sticlet, P. Simon, and C. Bena, Phys. Rev. B **85**, 235307 (2012).
- A. Romito, J. Alicea, G. Refael, and F. von Oppen, Phys. Rev. B **85**, 020502 (2012).
- D. Sticlet, C. Bena, and P. Simon, (2012), arXiv:1211.3070 [cond-mat.mes-hall] .

14. Sticlet, Bena, and Simon (2012b)