

*Académie de Nantes*

Université du Maine, Le Mans, France

**École Doctorale Sciences pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture**

**Thèse de Doctorat**

*spécialité : Acoustique*

Présentée par

**Aurélien Merkel**

pour obtenir le grade de Docteur d'Université

---

**Étude Théorique et Expérimentale de la Propagation Acoustique  
dans les Cristaux Phononiques Granulaires Tridimensionnels**

---

Soutenue le 14 décembre 2010

devant le jury composé de :

<b>J. Vasseur</b>	Professeur, IEMN, Université de Lille I	Rapporteur
<b>V. Sanchez Morcillo</b>	Professeur, Universidad Politecnica de Valencia, Spain	Rapporteur
<b>B. Gilles</b>	Maitre de Conférence, INSERM, Université de Lyon I	Examineur
<b>J.-M Conoir</b>	Directeur de Recherche CNRS, IJRA, UPMC, Paris	Examineur
<b>S. Job</b>	Maitre de Conférence, SUPMECA, Paris	Examineur
<b>P. Johnson</b>	Directeur de Recherche, Los Alamos Nat. Lab. , USA	Invité
<b>V. Tournat</b>	Chargé de Recherche CNRS, LAUM, Université du Maine	Directeur de thèse
<b>V. Gusev</b>	Professeur, LPEC, Université du Maine	Co-directeur de thèse



# Remerciements

Ce travail de thèse a pu être mené grâce au concours de nombreuses personnes que je tiens à remercier chaleureusement pour leurs aides et leurs soutiens.

Tout d'abord, je remercie très sincèrement mes directeurs de thèse, Vincent Tournat et Vitalyi Gusev, pour m'avoir proposé ce sujet de recherche, pour leur accompagnement, leur aide et leur confiance. Ils m'ont partagé sans retenue leur passion de la recherche et leur expérience, je leur en suis extrêmement reconnaissant.

Je remercie les personnes qui m'ont fait avancer scientifiquement au cours de discussions, Laurent Simon, et les personnes (passées ou présentes) de l'équipe granulaire, et particulièrement Claude Inserra, Xavier Jacob, Nikolai Chigarev et Jean-Baptiste Legland. Je tiens aussi à remercier les responsables de l'instrumentation pour leur disponibilité et sans lesquels les expériences auraient été impossibles à mener, James Blondeau, Emmanuel Brasseur et Stéphane Lebon.

Je tiens à saluer l'excellente ambiance de travail au LAUM, et donc tous ses membres (tous ceux que je n'ai pas cités) qui chacun, contribue à insuffler dans le laboratoire une énergie positive pour la recherche et l'enseignement.

Je remercie Jérôme Vasseur et Victor Sanchez-Morcillo d'avoir accepté de rapporter ce manuscrit de thèse, Jean-Marc Conoir d'avoir présidé le jury de thèse, Stéphane Job, Bruno Gilles d'avoir participé au jury en tant qu'examineurs et Paul Johnson pour sa participation en tant qu'invité.

Je tiens à souligner la patience et les efforts de Christophe Ayrault et Olivier Richoux pour m'avoir supporté dans le bureau pendant les années de cette thèse, et aussi pour n'avoir jamais parler de musique ou de tout et de rien afin que je puisse rester concentré... Je les remercie d'avoir partagé leur expérience et leur bonne humeur.

Il me reste encore à remercier Jean-philippe Groby, Allan Geslain, Thomas Lavergne, Aroune Duclos, Bertrand Lihoreau, Cyril Desjouy, toute l'équipe des moniteurs avec qui j'ai partagé les magnifiques stages CIES, Amadine Cadiou, Elise Lejeune, Yassine El Mendili, Amandine Gatien, François Thirion, Sarah Le Duigou, Bruno Pattier, Patrice Tamkam, Tony Valier-Brasier, Vincent Jousse, Cécile Lorentz et Mathilde Adelinet, pour les moments passés ensemble. Je remercie également Adrien Pelat pour ses coups de mains et enfin Muriel pour tous les cafés (et il y en a eu beaucoup).

Le travail de thèse étant assez prenant, je me suis évadé de temps à autres à travers la musique. Pour cela, je remercie tous les membres de Nomades Expression et Mel-P. Je remercie tout les membres passés, présents et futurs de l'association Uto'pitre. Je remercie également les membres d'Ophonius, de l'AOUM, Dave Golitin et tout ceux que j'oublie.

Je tiens au final à remercier ma famille pour son soutien et sa présence.

*Dédié à Morgane.*

*Calling the subject nonlinear dynamics is like calling zoology "nonelephant studies".*  
*S. Ulam*

# Table des matières

Bibliographie . . . . .	3
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 L'acoustique des cristaux phononiques granulaires</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Théorie du contact de Hertz-Mindlin . . . . .	6
1.3 Modes normaux de propagation dans une chaîne unidimensionnelle masses-ressorts . . . . .	9
1.3.1 Modes normaux d'un réseau monoatomique unidimensionnel . . . . .	9
1.3.2 Modes normaux d'un réseau unidimensionnel à motif . . . . .	11
1.4 La structure hexagonale compacte . . . . .	15
1.5 Propagation acoustique dans les granulaires . . . . .	18
1.5.1 Désordre . . . . .	18
1.5.2 Modes supérieurs . . . . .	19
1.5.3 Non-linéarités . . . . .	20
1.5.4 Matériau granulaire comme milieu effectif . . . . .	21
1.5.5 Théorie de Cosserat et les milieux granulaires . . . . .	23
1.6 Conclusion . . . . .	24
Bibliographie . . . . .	25
<b>2 Elastic waves in noncohesive frictionless granular crystals</b>	<b>31</b>
2.1 Introduction . . . . .	32
2.2 Bulk mode dispersion relations . . . . .	32
2.3 Eigenmodes along $z$ direction . . . . .	36
2.4 Theoretical estimations for experiments . . . . .	36
2.5 Experimental results . . . . .	38
2.6 Influence of disorder . . . . .	38
2.7 Discussion . . . . .	39
Bibliographie . . . . .	43
<b>3 Dispersion of elastic waves in three-dimensional noncohesive granular phononic crystals : properties of rotational modes.</b>	<b>45</b>
3.1 Introduction . . . . .	46
3.2 Bulk mode dispersion relations . . . . .	47
3.2.1 Hexagonal close-packed structure . . . . .	47
3.2.2 Equations of motion for translation and rotation . . . . .	47
3.2.3 Hertz-Mindlin theory . . . . .	48
3.2.4 Projection of forces and torques . . . . .	49
3.2.5 Bloch theorem . . . . .	50
3.2.6 Evaluation of the dynamical matrix and its eigenvalues . . . . .	50

3.3	Study of the eigenmodes propagating along $z$ direction . . . . .	52
3.3.1	Dispersion relations when rotation is not included . . . . .	52
3.3.2	Dispersion relations when rotation is included . . . . .	54
3.3.3	Influence of the moment of inertia . . . . .	56
3.3.4	Anisotropic loading on the crystal . . . . .	58
3.3.5	Group velocities . . . . .	58
3.3.6	Study of the frequency band gap between the modes $LO$ and $RT_2$ . . . . .	60
3.4	Conclusion . . . . .	61
	Bibliographie . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Observation of rotational waves in granular crystal : experimental validation of the Cosserat continuum theory</b>	<b>65</b>
4.1	Introduction . . . . .	66
4.2	Experimental setup and theoretical predictions . . . . .	67
4.3	Experimental results . . . . .	68
4.4	conclusion . . . . .	70
	Bibliographie . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Non-linéarités et inhomogénéités</b>	<b>75</b>
5.1	Introduction . . . . .	75
5.2	Le dispositif expérimental . . . . .	76
5.3	Amplitude de l'onde démodulée en fonction de la fréquence de l'onde de pompage .	76
5.4	Amplitude de l'onde démodulée en fonction de l'amplitude des ondes de pompage .	79
5.5	Autres non-linéarités et perspectives . . . . .	81
5.6	Conclusion . . . . .	82
	Bibliographie . . . . .	83
	<b>Conclusion générale</b>	<b>85</b>
<b>A</b>		<b>87</b>
A.1	Introduction . . . . .	88
A.2	Model . . . . .	88
A.2.1	Shear rigidity of the contacts . . . . .	89
A.2.2	Bending rigidity of the contacts . . . . .	92
A.2.3	Normal contact with a rigid surface . . . . .	95
A.2.4	Conclusions . . . . .	95
	Bibliographie . . . . .	99

# Introduction générale

En prenant une cuve aux dimensions soigneusement choisies et des billes de même diamètre (monodisperses), l'assemblage ordonné et périodique de ces billes dans cette cuve forme un cristal phononique granulaire. L'idée fondatrice de ce travail de thèse est d'étudier le comportement dynamique (ou acoustique) d'un cristal phononique granulaire. Les milieux granulaires peuvent avoir un comportement de gaz (par exemple, des billes qui s'entrechoquent dans une boîte), de liquide (un matériau granulaire dans une cuve prend la forme de la cuve) ou solide (du sable mouillé par exemple) [I.1]. Dans leurs comportements solides, ils se caractérisent par les multiples échelles qui doivent être prises en compte dans leurs descriptions. En premier lieu, le contact entre les grains se situe à l'échelle microscopique et contribue au comportement macroscopique d'un assemblage. La deuxième échelle est définie par la taille des billes. Ensuite, il faut également tenir compte de l'échelle mésoscopique de la taille d'un ensemble de grains, échelle caractéristique pour les chaînes de forces dans le milieu avant d'arriver à l'échelle macroscopique où le matériau granulaire peut être considéré comme un milieu homogène effectif. Dans le cadre d'une étude acoustique, l'arrangement périodique des cristaux granulaires autorise, sous certaines hypothèses, l'utilisation des mêmes outils que ceux développés pour les cristaux, en vue de décrire leurs comportements vibratoires. En effet, les billes forment une structure cristalline qui a des symétries et un caractère discret, induisant une forte dispersion (vitesse de propagation différente suivant la fréquence de l'onde) dans la propagation des différents modes possibles pour une onde acoustique (mode transverse ou longitudinal par exemple). Des phénomènes similaires sont décrits dans la théorie harmonique du cristal de la physique des solides [I.2] et des analogies importantes peuvent être faites avec les cristaux photoniques en optique (d'ailleurs, le nom *phononique* vient de l'analogie avec les cristaux *photoniques*). En plus des phénomènes provenant de la périodicité de la structure, les assemblages non cohésifs de grains sont connus pour avoir un comportement très fortement non linéaire dû aux interactions entre les billes caractérisées par des relations force-déplacement non linéaires. Les non-linéarités de contact sont multiples (non-linéarité d'origine géométrique, friction, adhésion...) et se traduisent par des comportements non linéaires variés (non-linéarité quadratique, cubique, hystérétique, clappement...). La richesse des comportements non linéaires rend l'étude des assemblages granulaires particulièrement intéressante au niveau fondamental. Un autre élément influent de l'acoustique des cristaux granulaires réels est la présence de désordre. Malgré l'apparente périodicité au niveau macroscopique, la polydispersité des billes (même faible) ou les imperfections de la cuve font que tous les contacts ne sont pas équivalents, ils sont chargés de manière hétérogène. Le réseau complexe de contacts à l'intérieur du cristal se distingue par la grande difficulté de comparer les résultats théoriques avec les résultats expérimentaux de manière quantitative. Le comportement dynamique d'un cristal phononique granulaire réel dépend de ces trois facteurs, ce qui le rend très complexe. Il est encore mal connu et mal compris.

L'élasticité des matériaux granulaires diffère de l'élasticité classique [I.3] à cause du caractère microstructuré de l'assemblage. Une nuance est de considérer que les descriptions du comportement élastique nécessitent de prendre en compte les degrés de liberté de rotation de chaque bille. Dans l'élasticité classique des matériaux, les rotations des éléments infinitésimaux ne sont pas considérées. Cette généralisation de la théorie classique de l'élasticité, appelée théorie de Cosserat ou théorie micropo-

laire, a été proposée pour la première fois par les frères Cosserat en 1909 [I.4]. Cette théorie a été oubliée pendant la première moitié du vingtième siècle parce qu'elle semblait peu adaptée à la description élastique des matériaux classiques. L'intérêt s'est de nouveau porté sur cette généralisation dans les années 1960 lorsque la théorie classique de l'élasticité échouait à décrire le comportement des matériaux micro-structurés tels que les solides poreux ou les cristaux liquides [I.5]. D'autres théories généralisées ont également vu le jour [I.5–I.7], elles diffèrent de la théorie classique par les différents degrés de liberté supplémentaires pris en compte pour chaque particule (par exemple pour tenir compte d'éventuelles déformations des particules). Le formalisme de Cosserat a été adapté à la description des milieux granulaires à partir des années 1980. Cependant, bien que les travaux sur la théorie de Cosserat eut été nombreux [I.6–I.10], il n'y a jamais eu de preuves expérimentales indiscutables de sa validité dans les milieux granulaires. Une des caractéristiques de la théorie de Cosserat réside dans la prédiction de nouveaux modes de propagation, les modes rotationnels. Ces nouveaux modes découlent directement de l'introduction des degrés de liberté de rotation de chaque élément. Cent ans après les frères Cosserat et bien que prédit théoriquement dans les milieux granulaires, ces modes représentent toujours une possibilité mathématique admise mais ils n'ont jamais été observés expérimentalement [I.10]. Ce manuscrit expose une validation théorique et expérimentale de l'application de la théorie de Cosserat aux milieux granulaires au travers, notamment, de l'observation expérimentale des modes rotationnels se propageant dans un cristal phononique granulaire.

Cette thèse est composée de cinq chapitres. Elle contient deux articles publiés en place des chapitres 2 et 3, et un article prochainement soumis en place du chapitre 4. Le premier chapitre rappelle quelques notions utiles à la compréhension des phénomènes rencontrés dans les milieux granulaires non cohésifs. Ensuite, un aperçu de la littérature sur les milieux granulaires est donné avec les études sur le désordre, la propagation d'ondes hautes fréquences, les non-linéarités, le comportement quasistatique ou très basses fréquences et l'application de la théorie de Cosserat dans les milieux granulaires. Le deuxième chapitre est consacré à la description théorique de la propagation d'ondes de volume dans un cristal hexagonal compact de billes où la friction au niveau des contacts a été négligée. Cette hypothèse permet de considérer l'élasticité de l'assemblage sans tenir compte des degrés de liberté de rotation. La friction au niveau des contacts, qui suit la loi de frottement de Coulomb, est en effet la source du caractère micropolaire des assemblages granulaires. Une comparaison des résultats expérimentaux avec les prédictions théoriques obtenues montre la difficulté de prédire quantitativement les résultats expérimentaux. Le troisième chapitre expose l'étude théorique des vibrations de modes normaux d'un cristal hexagonal compact granulaire en incluant les degrés de liberté de rotation. L'analyse théorique permet de démontrer la nécessité d'inclure les degrés de libertés de rotation dès que la friction est prise en compte. L'hypothèse que les billes n'interagissent pas lorsqu'elles pivotent sur elles mêmes rigidifie artificiellement l'assemblage et peut induire des résultats erronés. L'étude théorique permet d'identifier les effets du caractère micropolaire de l'assemblage et d'identifier les modes, leur polarisation et leur bande de fréquence de propagation, pour permettre une comparaison quantitative avec des résultats expérimentaux. Le quatrième chapitre expose la comparaison des résultats théoriques du chapitre 3 avec les résultats expérimentaux. Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec les prédictions théoriques, ce qui permet de présenter la première observation expérimentale d'un mode rotationnel dans un milieu granulaire plus de cent années après le mémoire des frères Cosserat. Le cinquième et dernier chapitre présente des perspectives concernant les effets non linéaires dans les cristaux phononiques granulaires. Il présente quelques résultats expérimentaux sur des phénomènes particuliers se produisant dans ce type de matériaux.



## Bibliographie

- [I.1] H. Hinrichsen and D. E. Wolf. *The physics of Granular Media*. Wiley-VCH, Weinheim, 2004.
- [I.2] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin. *Solid State Physics*. Saunders College Publishing, Philadelphia, 1976.
- [I.3] L. Landau and E. Lifchitz. *Theory of Elasticity*. Mir, Moscow, 1967.
- [I.4] E. and F. Cosserat. *Théorie des Corps Déformables*. Herman et Fils, Paris, 1909.
- [I.5] A. Eringen. *Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [I.6] I. A. Kunin. *Elastic Media with Microstructure Vol. I and II*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1982.
- [I.7] H. Mühlhaus. *Continuum Models for Materials with Micro-structure*. J. Wiley, New York, 1995.
- [I.8] O. Brulin and R. K. T. Hsieh. *Mechanics of Micropolar Media*. World Scientific Publishing, Singapore, 1981.
- [I.9] W. Nowacki. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Pergamon, Oxford, 1986.
- [I.10] G. A. Maugin and A. V. Metrikine. *Mechanics of Generalized Continua : One Hundred Years After the Cosserats*. Springer-Verlag, New York, 2010.



# Chapitre 1

## L'acoustique des cristaux phononiques granulaires

### 1.1 Introduction

La famille des milieux granulaires désigne un ensemble d'éléments très différents de matériaux. Du sable à la neige en passant par les sédiments marins ou encore des poudres pharmaceutiques aux assemblages de nanosphères, les milieux granulaires interviennent dans de nombreux domaines, de la géophysique à la physique des nanomatériaux [1.1–1.3]. Malgré la diversité de formes, les différents matériaux montrent des propriétés physiques similaires. L'objet de ce premier chapitre est un rappel des notions utiles à la compréhension des résultats exposés par la suite. Un point cependant nécessite d'être éclairci immédiatement. Les matériaux granulaires sont des matériaux biphasiques, avec une phase solide composée par les grains et une phase fluide représentant le fluide saturant les pores entre les grains. Pour l'étude de la propagation d'onde dans un assemblage de grains, les couplages avec le fluide environnant sont souvent négligés, considérant que la différence d'impédance acoustique et les différences de masses entre les deux milieux sont suffisamment importantes. Le présent mémoire est consacré uniquement aux ondes se propageant dans la phase solide (dans les billes). Cette étape est nécessaire à la prise en compte des couplage fluide-structure, notamment dans le cadre de la théorie de Biot par exemple [1.4].

En premier lieu, le comportement macroscopique d'un assemblage granulaire dépend de l'interaction mécanique au niveau microscopique entre les grains. La modélisation de cette interaction par la théorie de Hertz-Mindlin, présentée dans la première section, est une base essentielle de la physique des matériaux granulaires. Ensuite, les propriétés physiques liées à la structure régulière et périodique d'un cristal granulaire sont décrites dans les cas simples d'une chaîne monoatomique unidimensionnelle puis d'une chaîne diatomique unidimensionnelle. L'étude de ces cas simplifiés permet de comprendre le raisonnement utilisé pour modéliser la propagation des ondes dans un cristal granulaire tridimensionnel. La structure cristalline considérée dans ce document, la structure hexagonale compacte, est présentée avec ses propriétés de symétrie utiles à la modélisation. Bien que l'arrangement granulaire soit géométriquement régulier, un désordre élastique peut apparaître au niveau microscopique des contacts. Ceci joue un rôle important dans l'acoustique des cristaux granulaires, et les origines et les implications de ce désordre sont abordés. La fin du chapitre porte sur une revue non exhaustive de travaux effectués sur les assemblages granulaires permettant de situer le contexte de cette étude.

## 1.2 Théorie du contact de Hertz-Mindlin

La première description consistante du contact entre deux sphères vient de Hertz [1.5] en 1881 qui étudiait les franges d'interférences optiques de Newton entre deux lentilles de verres en contact. Il s'est intéressé plus particulièrement à une possible déformation élastique au niveau du contact de deux sphères soumises à une contrainte dirigée suivant l'axe formé par les deux centres des deux sphères. Il mit en évidence la relation entre la déformation au niveau du contact et la contrainte appliquée. Ces résultats ont été validés expérimentalement [1.6] et sont toujours utilisés aujourd'hui pour décrire la relation force-déplacement normale. Cette théorie a ensuite été étendue avec la relation force-déplacement dans les directions parallèles au contact par Mindlin [1.7–1.11].

La théorie comporte les hypothèses suivantes. La surface de contact est plane, ce qui permet de découpler les relations force-déplacement normales des relations tangentielles, et de forme elliptique dans le cas général (elle est de forme circulaire si deux sphères sont en contact). Les dimensions de la surface de contact sont petites devant les dimensions des sphères, ce qui permet de considérer que les contraintes et les déformations sont localisées au niveau des contacts et ainsi découplées des contraintes à l'intérieur du volume des sphères. La théorie donne la composante normale du champ de contraintes, elle est maximum au centre du contact et s'annule à la périphérie.

Suivant le problème schématisé sur la figure 1.1, le rayon  $r$  de la surface de contact entre deux sphères identiques s'écrit [1.9]

$$r = \left( \frac{3(1 - \nu^2)aN}{8E} \right)^{1/3} \quad (1.1)$$

où  $a$  est le diamètre des billes,  $N$  la force normale appliquée sur les contacts,  $\nu$  et  $E$  sont respectivement le coefficient de Poisson et le module d'Young du matériau constituant les billes. Dans les expériences présentées dans ce document, des billes d'acier inoxydable, de module d'Young  $E = 200$  GPa et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , sont utilisées. La première expérience utilise des billes de 7.938 mm de diamètre et la force maximale appliquée sur les contacts est de 0.222 N, ce qui donne un rayon de la surface de contact de 14.4  $\mu\text{m}$ . La deuxième expérience utilise des billes de 2 mm de diamètre et la force maximale appliquée sur les contacts est de 10 mN, ce qui donne un rayon de la surface de contact de 3.2  $\mu\text{m}$ . Les rayons des surfaces de contacts sont très inférieures aux rayons des billes, l'hypothèse de petites surfaces de contacts est respectée. La relation entre le déplacement relatif normal des billes  $h$  et la composante normale de la force appliquée  $N$  s'écrit alors

$$h = 2 \left[ \frac{3(1 - \nu^2)N}{4E\sqrt{a/2}} \right]^{2/3}. \quad (1.2)$$

Cette relation force-déplacement est non linéaire, le déplacement est proportionnel à la puissance 2/3 de la force normale appliquée. Cette non-linéarité provient uniquement de la géométrie du problème, elle est induite par l'augmentation de la surface de contact (et donc du volume de matériau à déformer) avec la force normale. Ceci implique une importance des effets non linéaires dans la propagation des ondes dans les milieux granulaires.

L'hypothèse de surface de contact plane permet de traiter séparément le déplacement relatif tangentiel du déplacement relatif normal. A cause de la friction au niveau de la surface de contact, il est possible d'appliquer une force tangentielle tout en maintenant le contact entre les deux billes. D'après la loi de frottement de Coulomb, si  $T < \mu_f N$ , où  $\mu_f$  est le coefficient de friction, les deux billes restent en contact. Contrairement au problème normal, les contraintes tangentielles appliquées à la surface sont nulles au centre du contact et augmentent en s'écartant du centre. Dans le cas général, la surface de contact est donc habituellement séparée en deux parties, une surface d'adhérence au centre et un anneau extérieur de glissement. C'est le phénomène d'adhésion/glissement ou *stick/slip* en anglais. La relation entre le déplacement relatif tangentiel des billes  $\delta$ , la composante tangentielle de la force

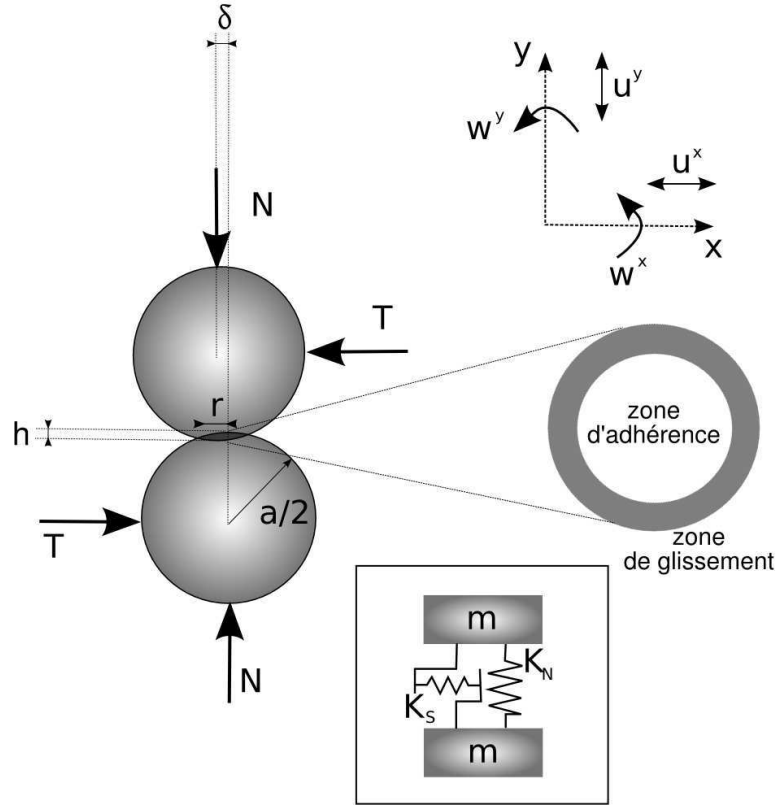


FIG. 1.1 – Schéma du contact entre deux billes avec une représentation de la surface de contact faisant apparaître le phénomène d’adhésion/glissement. Les échelles des déplacements relatifs  $h$  et  $\delta$  sont exagérées. En encadré, le problème est linéarisé pour permettre une modélisation du problème par deux masses reliées par deux ressorts.

$T$  et la composante normale  $N$  de la force appliquée s’écrit alors

$$\delta = \mu_f(2 - \nu)(1 + \nu) \left( \frac{9}{8} \frac{N^2}{a(1 - \nu^2)E^2} \right)^{\frac{1}{3}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{T}{\mu_f N} \right)^{\frac{2}{3}} \right], \quad (1.3)$$

Cette relation est également non linéaire, mais ici, les possibilités de glissement peuvent faire apparaître un effet d’hystérésis [1.8].

Dans le cas de petites perturbations autour d’un chargement statique appliquée sur le contact (avec une force statique appliquée  $N_0$  et  $T \ll \mu_f N_0$ ), les relations de Hertz-Mindlin peuvent être linéarisées. En prenant l’exemple de la force normale appliquée par une bille 2 sur une bille 1, la relation force-déplacement s’écrit

$$N^{2 \rightarrow 1} = \frac{E\sqrt{a}}{3(1 - \nu^2)} h^{3/2}. \quad (1.4)$$

En décomposant le déplacement relatif  $h = h_0 + h'$  en une partie statique  $h_0$  et une partie dynamique  $h'$  avec  $h' \ll h_0$ , un développement de Taylor autour de  $h_0$  à l’ordre 1 de l’équation (1.4) donne

$$N^{2 \rightarrow 1} = N^{2 \rightarrow 1}(h_0) + \frac{\partial N^{2 \rightarrow 1}}{\partial h} \Big|_{h_0} (h - h_0) + R((h - h_0)^2) = N_0 + \left( \frac{3a}{8} N_0 \right)^{\frac{1}{3}} E^{\frac{2}{3}} (1 - \nu^2)^{-\frac{2}{3}} h' + R(h'^2). \quad (1.5)$$

Dans le cas d'un système en équilibre, les forces statiques appliquées par les billes voisines sur une bille s'annulent, ce qui permet de ne considérer que la partie dépendante de  $h'$  de l'équation (1.5) dans la résolution du problème dynamique. Ceci permet de considérer chaque contact comme deux simples ressorts, un premier ressort pour les interactions normales avec la raideur

$$K_N = \left( \frac{3a}{8} N_0 \right)^{\frac{1}{3}} E^{\frac{2}{3}} (1 - \nu^2)^{-\frac{2}{3}}, \quad (1.6)$$

et un raisonnement similaire permet de considérer un deuxième ressort pour les interactions transverses avec la raideur

$$K_S = (3aN_0)^{\frac{1}{3}} E^{\frac{2}{3}} \frac{(1 - \nu^2)^{\frac{1}{3}}}{(1 + \nu)(2 - \nu)}. \quad (1.7)$$

Dans ce cas, la variation de force induite par de petits déplacements est considérée proportionnelle aux déplacements relatifs. La dépendance importante des rigidités sur la force normale statique appliquée induit la propriété intéressante qu'il est possible de modifier les propagations d'ondes de volumes en modifiant le chargement extérieur appliqué sur le cristal. A l'aide des formules (1.6) et (1.7), il est possible de modéliser le cristal granulaire comme une chaîne masses-ressorts, ce qui se rapproche de la théorie classique du cristal harmonique de la physique des solides (dans le cadre où seule l'interaction avec les proches voisins est prise en compte) [1.12, 1.13].

Le problème du spectre des modes normaux de vibration d'un cristal peut être abordé avec les exemples simples de la propagation d'ondes dans une chaîne masses-ressorts unidimensionnelle qui sont exposés dans la section suivante.

## 1.3 Modes normaux de propagation dans une chaîne unidimensionnelle masses-ressorts

### 1.3.1 Modes normaux d'un réseau monoatomique unidimensionnel

Les linéarisations des relations force-déplacement de la théorie de Hertz-Mindlin permettent de considérer l'assemblage granulaire comme un réseau masses-ressorts. Pour traiter la propagation d'onde dans un assemblage discret et périodique, le réseau de Bravais monoatomique unidimensionnel défini par la chaîne unidimensionnelle masses-ressorts infinie, schématisée sur la figure 1.2, représente le cas le plus simple. Considérons une chaîne de masse  $m_b$  reliées par des ressorts de raideur  $K$ . Deux masses successives sont séparées d'une distance  $a$ , qui représente la cellule élémentaire du réseau (dans le cas d'une chaîne de billes,  $a$  est égal au diamètre d'une bille). La cellule élémentaire représente la translation la plus petite permettant de retrouver exactement le même voisinage autour du point d'arrivée que le voisinage autour du point de départ. Enfin, le seul mouvement  $u_n$  de la masse  $n$  autorisé des masses autour de la position d'équilibre est la translation suivant l'axe de la chaîne.

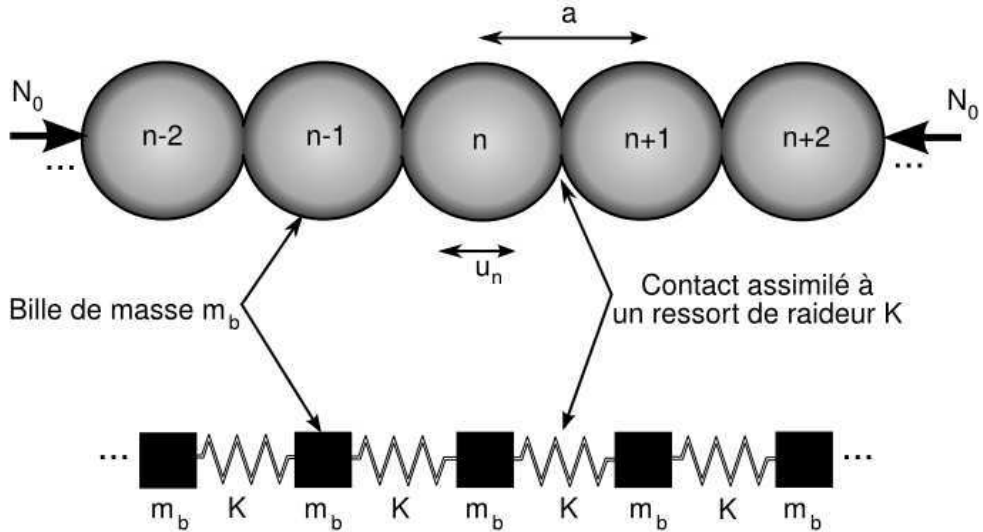


FIG. 1.2 – Représentation de la chaîne unidimensionnelle monoatomique avec la modélisation par une chaîne masses-ressorts.

L'énergie potentielle harmonique est donnée par [1.12]

$$E = \frac{1}{2}K \sum_n [u_n - u_{n+1}]^2. \quad (1.8)$$

L'équation du mouvement s'écrit alors

$$m_b \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = -\frac{\partial E}{\partial u_n} = K[u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n], \quad (1.9)$$

où  $t$  est le temps. En cherchant la solution de l'équation (1.9) sous la forme

$$u_n = Ae^{i(\omega t - kna)}, \quad (1.10)$$

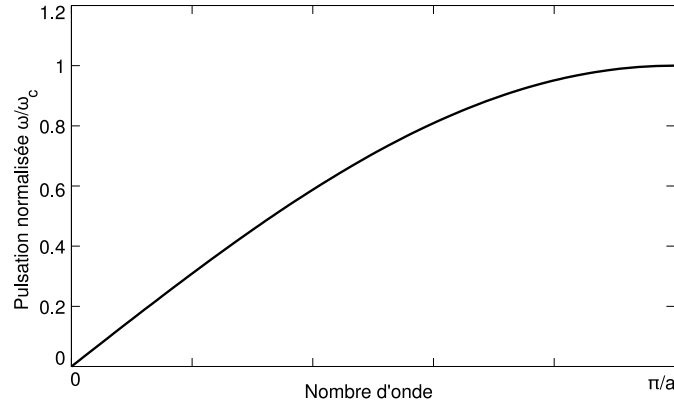


FIG. 1.3 – Relation de dispersion du mode longitudinal dans la chaîne unidimensionnelle monoatomique.

où  $\omega$  est la pulsation de l'onde et  $k$  le nombre d'onde, la substitution de cette solution dans l'équation du mouvement (1.9) donne la relation de dispersion suivante

$$\omega^2 = \frac{4K}{m_b} \sin^2\left(\frac{1}{2}ka\right). \quad (1.11)$$

Cette relation, représentée sur la figure 1.3, est périodique, la courbe de dispersion peut donc être limitée aux valeurs de nombre d'onde comprises entre 0 et  $\pi/a$ . Le segment  $[0, \pi/a]$  du nombre d'onde est appelé première zone de Brillouin [1.14] du réseau réciproque. Le réseau réciproque d'un réseau de Bravais définit la périodicité de ce réseau dans l'espace des nombres d'onde. Le réseau réciproque d'un réseau de Bravais est également un réseau de Bravais. Dans une structure cristalline, grâce aux considérations de symétrie et de la théorie des groupes, il suffit de définir les relations de dispersion dans la première zone de Brillouin pour définir toutes les relations de dispersion des modes normaux dans le cristal.

L'équation (1.11) montre une pulsation de coupure  $\omega_c = 2\sqrt{K/m_b}$  au delà de laquelle le nombre d'onde n'est plus un nombre réel. En dessous de cette pulsation de coupure  $\omega \leq \omega_c$ , le nombre d'onde est réel et s'écrit

$$k = \pm \frac{2}{a} \arcsin\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right). \quad (1.12)$$

Le signe *plus* correspond aux ondes se propageant dans la direction des  $n$  croissants, le signe *moins* correspond aux ondes se propageant dans la direction des  $n$  décroissants (la pulsation est considérée toujours positive). Au dessus de la pulsation de coupure  $\omega > \omega_c$ , le nombre d'onde se décompose en une partie réelle et une partie imaginaire

$$k = k' + ik'' = \frac{\pi}{a} - i \frac{2}{a} \operatorname{arccosh}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right). \quad (1.13)$$

Au dessus de cette pulsation de coupure, le nombre d'onde est donc un nombre complexe, ce qui signifie que l'onde est évanescente. La zone au dessus de la pulsation de coupure est appelée bande interdite et est le siège de phénomènes particuliers dans les cristaux photoniques ou phononiques [1.15–1.17].

La relation de dispersion (1.11) permet de définir la vitesse de phase  $c_\phi = \omega/k$  qui s'écrit en fonction de  $\omega$

$$c_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{a\omega}{2\arcsin(\omega/\omega_c)} \quad (1.14)$$



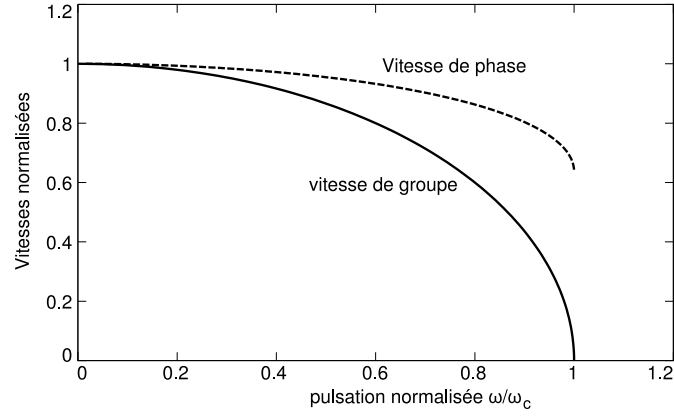


FIG. 1.4 – Vitesses de groupe et de phase du mode longitudinal dans la chaîne monoatomique unidimensionnelle.

et la vitesse de groupe  $c_g = \partial\omega/\partial k$  qui s'écrit en fonction de  $\omega$

$$c_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = a\sqrt{\frac{K}{m_b}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)}. \quad (1.15)$$

Les vitesses de phase et de groupe, normalisées par la vitesse de phase maximale  $c_{\phi c} = a\omega_c/2$ , sont représentées sur la figure 1.4. A infiniment basse fréquence, la vitesse de phase est égale à la vitesse de groupe, l'onde se propage de manière non dispersive. Au fur et à mesure que la fréquence augmente, les vitesses de phase et de groupe diminuent et l'écart entre la vitesse de groupe et la vitesse de phase augmente. La vitesse de groupe diminue plus rapidement que la vitesse de phase. A la frontière de la zone de Brillouin,  $k = \pi/a$  ou  $\omega = \omega_c$ , la vitesse de groupe s'annule.

### 1.3.2 Modes normaux d'un réseau unidimensionnel à motif

Après le réseau unidimensionnel monoatomique où la cellule élémentaire ne comporte qu'un seul atome, il est intéressant d'étudier la propagation des ondes dans un réseau de Bravais à motif, ce qui signifie que la cellule élémentaire du réseau comporte plusieurs atomes. La chaîne unidimensionnelle diatomique représente le cas le plus simple et permet de comprendre l'impact d'une cellule élémentaire comportant plusieurs atomes sur le spectre des modes normaux de vibrations. Le problème étudié, schématisé sur la figure 1.5, considère une chaîne masses-ressorts avec deux masses différentes  $m_b$  et  $M_b$  dans la cellule élémentaire. La taille  $a$  de la cellule élémentaire représente la distance séparant deux masses identiques. Le seul degré de liberté autorisé est la translation suivant l'axe de la chaîne. Le déplacement d'une masse  $m_b$  s'écrit  $u_n$ ,  $n$  indiquant le numéro de la cellule élémentaire considérée, et le déplacement d'une masse  $M_b$  s'écrit  $U_n$ .

L'énergie potentielle harmonique est donnée par [1.12]

$$E = \frac{1}{2}K \sum_n [u_n - U_n]^2 + [U_n - u_{n+1}]^2. \quad (1.16)$$

Les équations du mouvement pour chacune des masses de la cellule élémentaire s'écrivent

$$m_b \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = -\frac{\partial E}{\partial u_n} = K(U_{n-1} + U_n - 2u_n), \quad (1.17)$$

$$M_b \frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} = -\frac{\partial E}{\partial U_n} = K(u_{n+1} + u_n - 2U_n). \quad (1.18)$$

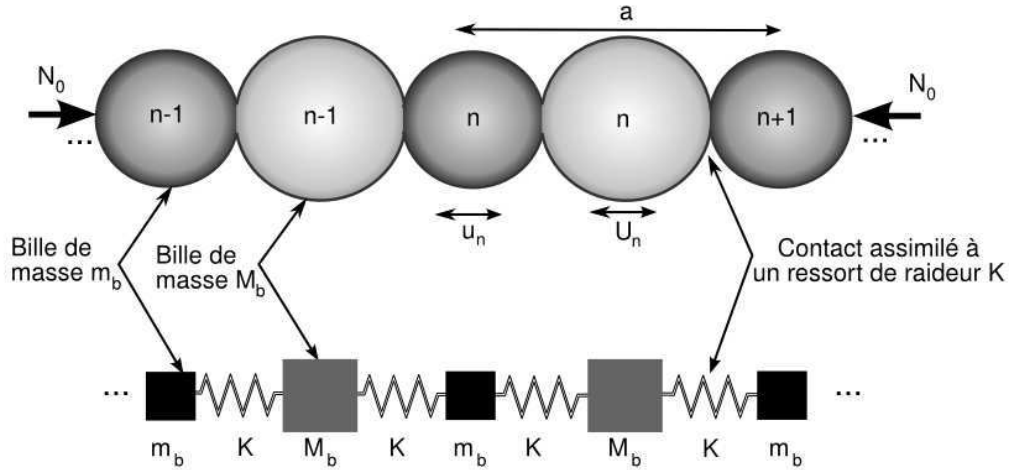


FIG. 1.5 – Représentation de la chaîne unidimensionnelle diatomique avec la modélisation par une chaîne masses-ressorts avec deux masses différentes.

La forme de solutions recherchée est similaire aux solutions (1.10) de la chaîne unidimensionnelle monoatomique

$$u_n = Ae^{i(\omega t - kna)}, \quad (1.19)$$

$$U_n = Be^{i(\omega t - kna)}, \quad (1.20)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes complexes à déterminer. Leur rapport donne les amplitudes et les phases relatives des vibrations des atomes dans une cellule élémentaire. En substituant les solutions dans les équations du mouvement, le système d'équations suivant est obtenu

$$\begin{aligned} -m_b\omega^2 A &= K(B(e^{ika} + 1) - 2A), \\ -M_b\omega^2 B &= K(A(e^{-ika} + 1) - 2B). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Ce système d'équations peut être réécrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \frac{2K}{m_b} - \omega^2 & -\frac{K}{m_b}(e^{ika} + 1) \\ \frac{K}{M_b}(e^{-ika} + 1) & \frac{2K}{M_b} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow [\mathbf{D}] \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0. \quad (1.22)$$

$\mathbf{D}$  est appelée matrice dynamique. Pour que les solutions de  $A$  et  $B$  soient non triviales, le déterminant de la matrice dynamique doit être nul. Les valeurs propres de la matrice dynamique donnent les dépendances de la pulsation  $\omega$  sur les nombre d'onde  $k$ . Finalement, les valeurs propres de la matrice dynamique donnent les relations de dispersion des modes normaux du réseau. La matrice dynamique  $\mathbf{D}$  est Hermitique, ce qui assure que les valeurs propres sont réelles. La recherche de valeurs propres donne deux relations de dispersion, appelées branches, qui s'écrivent

$$\omega_{1,2}^2 = \left( \frac{1}{m_b} + \frac{1}{M_b} \right) K \pm K \sqrt{\left( \frac{1}{m_b} + \frac{1}{M_b} \right)^2 - \frac{4}{m_b M_b} \sin^2 \frac{ka}{2}}. \quad (1.23)$$

La branche supérieure [signe *plus* de l'équation (1.23)] est appelée branche ou mode optique, la pulsation est différente de zéro lorsque le nombre d'onde est nul. Pour un nombre d'onde proche de

zéro, les deux atomes de la cellule élémentaire oscillent en opposition de phase. La vitesse de phase de ce mode tend vers l'infini lorsque le nombre d'onde tend vers zéro. La branche inférieure [signe *moins* de l'équation (1.23)] est appelé branche ou mode acoustique, la pulsation est égale à zéro lorsque le nombre d'onde est nul. Lorsque le nombre d'onde est proche de zéro, le deux atomes de la cellule élémentaire oscillent en phase. Les relations de dispersion (1.23) sont tracées sur la figure 1.6 et les vitesses de phase et de groupe des deux modes sont représentées sur la figure 1.7.

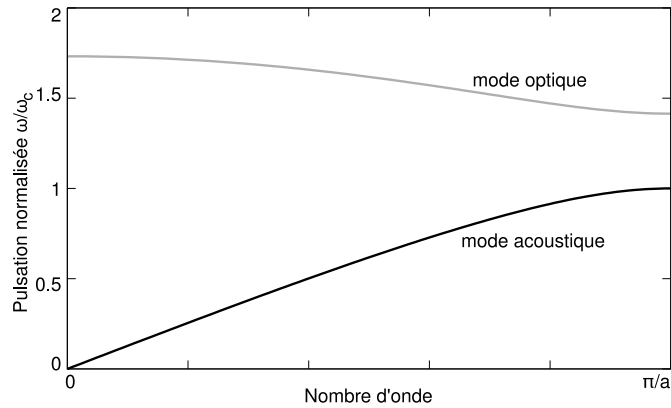


FIG. 1.6 – Relations de dispersion des modes longitudinaux optique et acoustique dans la chaîne unidimensionnelle diatomique.

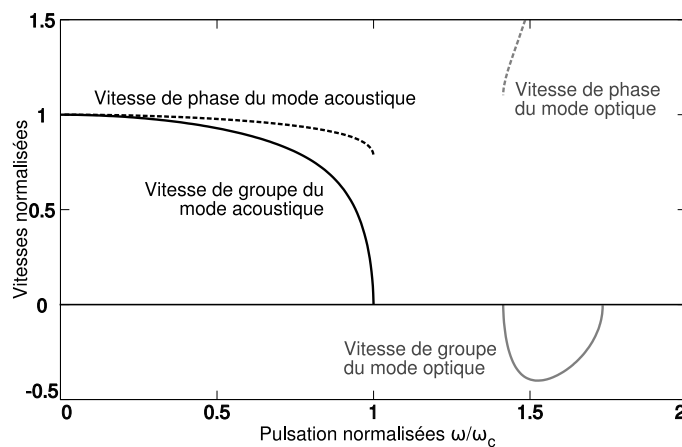


FIG. 1.7 – Vitesses de phase et de groupe des modes longitudinaux optique et acoustique dans la chaîne unidimensionnelle diatomique. Les vitesses de groupe et de phase du mode optique sont de signe opposé, le choix du signe étant arbitraire.

Dans le cas où les masses des atomes sont égales  $m_b = M_b$ , la chaîne diatomique revient alors à une chaîne monoatomique. Cependant la zone de Brillouin considérée est deux fois plus petite que la zone de Brillouin considérée dans la section 1.3.1. Les relations de dispersion de la figure 1.8 ne correspondent pas (2 branches sont obtenues) à la relation de dispersion de la figure 1.3. Cependant, à la limite de la zone de Brillouin, la pente de la relation de dispersion (ou la vitesse de groupe) doit tendre vers zéro. A noter que ceci est vrai dans les cas de hautes symétries où le vecteur d'onde est orthogonal à la surface de la zone de Brillouin. Dans le cas général, seul le gradient de la composante normale tend vers zéro. La figure 1.8 ne respecte pas cette règle. En réalité, le traitement effectué (en considérant deux atomes dans la cellule élémentaire) a replié les courbes de dispersion et il faut

déplier les courbes obtenues pour retrouver la courbe de la figure 1.3 [1.18]. Ce cas est retrouvé dans les cristaux qui présentent un groupe d'espace d'axe de vis ou de plan glissant (opération de symétrie combinant une rotation avec une translation).

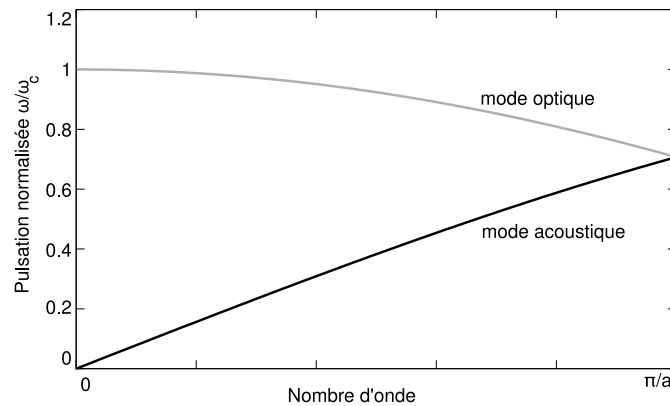


FIG. 1.8 – Relations de dispersion des modes longitudinaux optique et acoustique dans le cas particulier où les deux masses de la chaîne diatomique sont égales.

Le nombre de modes est directement relié au nombre de degrés de liberté autorisés ainsi qu'au nombre d'atomes dans la cellule élémentaire. La théorie classique de l'élasticité considère uniquement les trois degrés de liberté en translation. Pour un réseau de bravais monoatomique, la théorie prévoit l'existence de trois modes, de type acoustique avec trois polarisations (direction du mouvement des atomes par rapport à la direction de propagation) différentes, un mode longitudinal (les atomes oscillent dans la direction de propagation) et deux modes transversaux (les atomes oscillent dans des directions perpendiculaires à la direction de propagation). Dans le cas où la propagation de l'onde ne suit pas une direction de symétrie du cristal, les modes ne sont plus polarisés de façon pure, la théorie prévoit donc l'existence d'un mode quasi-longitudinal (mélange de polarisations longitudinale et transversale mais avec une amplitude longitudinale plus grande) et de deux modes quasi-transverses. Dans le cas général de la théorie de l'élasticité classique, dans un cristal tridimensionnel avec  $Z$  atomes par cellule élémentaire, le nombre de modes prédit est égal à  $3Z$ . Par extension, si  $N$  degrés de libertés sont pris en compte pour un cristal avec  $Z$  atomes par cellule élémentaire, le nombre de mode prédits est égal à  $N \times Z$ .

## 1.4 La structure hexagonale compacte

L'utilisation de billes monodisperses permet de les disposer de manière ordonnée. Elles forment alors une structure cristalline. Les arrangements les plus faciles à construire sont les arrangements compacts et notamment la structure hexagonale compacte (*hexagonal close-packed* en anglais) qui est la structure étudiée dans cette thèse. Les structures compacts sont les structures de plus basse énergie potentielle où la distance entre les atomes est la plus petite possible, c'est-à-dire que la compacité est la plus importante (par exemple, elle est de 0.74 pour la structure hexagonale compacte). Sur un plan bidimensionnel, il n'y a qu'une seule possibilité d'arrangement compact, à savoir l'arrangement hexagonal. Chaque atome est en contact avec six autres, comme illustré sur la figure 1.9, et l'ensemble forme le réseau de Bravais hexagonal (parfois appelé triangulaire). En trois dimensions, les arrangements compacts se forment avec une succession verticale de couches hexagonales, chaque bille est en contact avec douze voisines. A partir d'une première couche hexagonale A, une deuxième couche hexagonale B peut être placée légèrement décalée par rapport à la première couche de manière à ce que chaque atome de la couche B repose sur trois billes de la couche A (position de plus basse énergie potentielle). Pour la troisième couche, il existe deux possibilités de placement. La troisième couche peut se placer dans une position C (les billes se positionnent au dessus de l'interstice commun des couches A et B). L'empilement vertical de couches hexagonales suivant la séquence ABCABCABC... forme la structure cubique à faces centrées. Cette structure forme un réseau de Bravais monoatomique. La deuxième possibilité est de placer la troisième couche à la verticale de la première couche en formant donc une couche A. Cet empilement vertical de couches hexagonales suivant une séquence ABABAB... forme la structure hexagonale compacte comme exposée sur la figure 1.10. Les possibilités d'arrangements compacts sont donc infinies suivant l'enchaînement des couches A, B ou C. La structure hexagonale compacte ne forme pas un réseau de Bravais monoatomique. L'arrangement et l'orientation du réseau diffère suivant le point à partir duquel le réseau est vu. Cette structure forme néanmoins un réseau de Bravais à motif avec une cellule élémentaire composée de deux billes en contact, l'une sur une couche A, l'autre sur une couche B. La structure hexagonale compacte présente une symétrie d'ordre six de rotation-inversion suivant l'axe perpendiculaire aux couches horizontales hexagonales. Cet axe est également un axe de vis.

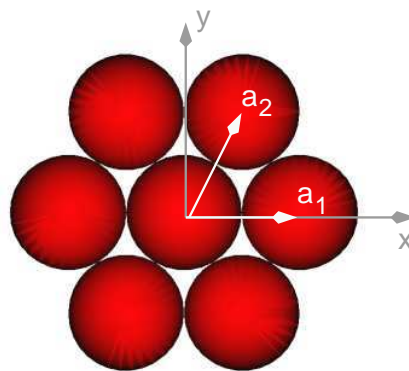


FIG. 1.9 – Le réseau de Bravais hexagonal bidimensionnel.

Les trois vecteurs primitifs de la maille hexagonale compacte sont définis par

$$\mathbf{a}_1 = a\mathbf{x}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}\mathbf{x} + \frac{\sqrt{3}a}{2}\mathbf{y}, \quad \mathbf{a}_3 = c\mathbf{z}, \quad (1.24)$$

où  $a$  est le diamètre des billes et  $c = \sqrt{8/3}a$  est la hauteur de la maille. Cette valeur de  $c$  représente la valeur idéale de la hauteur de la maille. Dans les cristaux réels, cette hauteur peut varier.

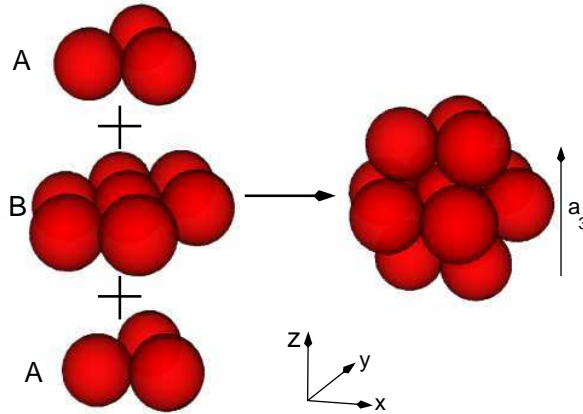


FIG. 1.10 – La structure hexagonale compacte.

A l'aide des vecteurs primitifs du réseau direct, il est possible de définir les vecteurs primitifs du réseau réciproque suivant les formules

$$\mathbf{b}_1 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3)}, \quad \mathbf{b}_2 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3)}, \quad \mathbf{b}_3 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3)}. \quad (1.25)$$

Suivant ces formules, les vecteurs primitifs du réseau réciproque du réseau hexagonal compact s'écrivent

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{a} \mathbf{k}_x - \frac{2\pi}{\sqrt{3}a} \mathbf{k}_y, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a} \mathbf{k}_y, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{2\pi}{c} \mathbf{k}_z. \quad (1.26)$$

La première zone de Brillouin est définie à mi-distance des points voisins du réseau réciproque. La figure 1.11 représente les vecteurs primitifs du réseau réciproque et le contour de la première zone de Brillouin sur un plan  $(x, y)$  et la figure 1.12 représente la première zone de Brillouin en trois dimensions.

En utilisant la symétrie d'ordre 6 de rotation-inversion autour de l'axe  $z$ , qui est également un axe de vis d'ordre 6, il est possible de réduire la zone utile d'étude pour les spectres des modes normaux. La zone la plus petite possible qui permet de reconstruire la première zone de Brillouin par opération de symétrie du groupe ponctuel de symétrie de la maille est appelée zone irréductible de Brillouin. Les points limites du contour de la zone irréductible de Brillouin de la structure hexagonale compacte se situent aux coordonnées [1.19]

$$\Gamma = (0, 0, 0), \quad K = \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{a}, 0\right), \quad M = \left(\frac{2}{3} \frac{\pi}{a}, \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{a}, 0\right), \quad A = \left(0, 0, \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{\pi}{a}\right). \quad (1.27)$$

Pour le calcul des forces appliquées sur une bille par ses douze voisines, un vecteur de position explicité au chapitre suivant sera préféré aux vecteurs primitifs du réseau direct par commodité de calcul.

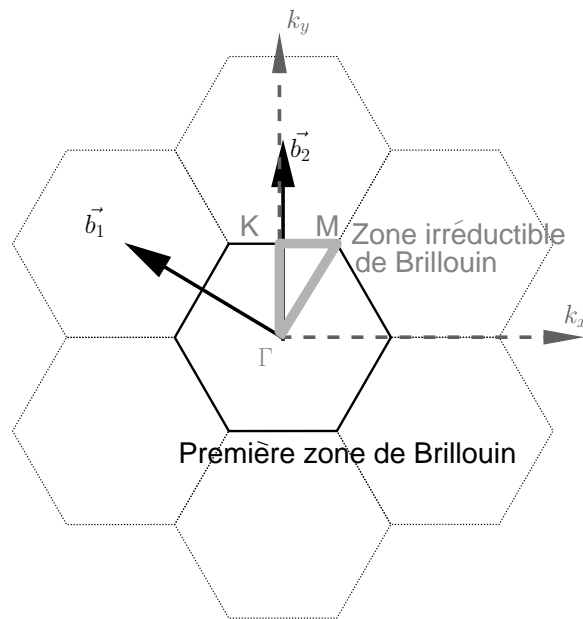


FIG. 1.11 – Représentation dans l'espace réciproque (ou espace des nombres d'onde) de la première zone de Brillouin de la structure hexagonale sur un plan  $(x, y)$  avec la représentation de la zone irréductible de Brillouin.

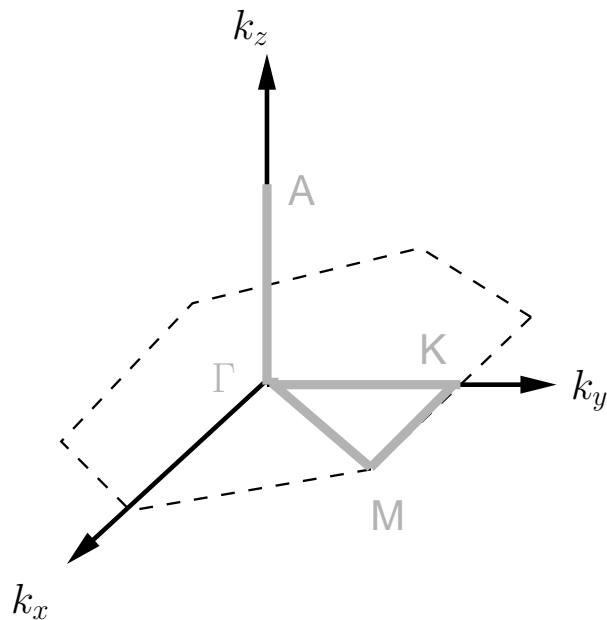


FIG. 1.12 – Représentation schématique de la première zone de Brillouin de la structure hexagonale compacte avec la zone irréductible de Brillouin.



## 1.5 Propagation acoustique dans les granulaires

Le problème de la propagation d'une onde acoustique dans un milieu granulaire est rendu complexe par la diversité de comportements physiques possibles. Par exemple, suivant les bandes fréquentielles étudiées ou le rapport entre la contrainte statique et la contrainte acoustique, la propagation d'onde obéit à des règles différentes. Par exemple, si la bande de fréquence étudiée se situe au niveau des résonances internes des billes, la description du comportement dynamique diffère très fortement des problèmes simples exposés au paragraphe 1.3 par le fait que l'hypothèse de billes modélisées par des masses rigides n'est plus valable. Si les hypothèses de linéarisation de la modélisation du contact de Hertz-Mindlin ne sont plus valables, un assemblage granulaire présente de forts phénomènes non linéaires au cours de la propagation de l'onde acoustique. Les phénomènes observés peuvent ainsi être très diverses dans le cadre où seule la propagation des ondes dans les chaînes de billes est considérée (la propagation dans le fluide saturant l'assemblage granulaire n'est pas étudiée et les interactions entre le fluide et les billes sont négligées), et où seule la théorie du contact de Hertz-Mindlin est utilisée (les contacts sont considérés secs, il n'y a pas de ponts liquides entre les billes). Cette section rappelle quelques propriétés connues de la propagation d'ondes dans des assemblages granulaires. En premier lieu, les causes du désordre qui existe même dans les milieux géométriquement ordonnés et qui représente une caractéristique essentielle dans l'acoustique des milieux granulaires sont décrites. En deuxième lieu, la propagation d'ondes hautes fréquences puis les possibles non-linéarités et leurs effets sont décrits. De nombreux travaux sur la caractérisation d'un assemblage granulaire en tant que milieu effectif ont été effectués avec notamment la recherche de constantes élastiques effectives. Ces travaux portent sur le comportement quasistatique des assemblages et parfois, sur la propagation d'onde à très basses fréquences. La fin de cette section montre la complexité de la modélisation d'un assemblage granulaire au travers d'une revue non exhaustive de ces travaux avant de finir sur une revue non exhaustive des bases de la théorie de Cosserat et de ses applications dans les milieux granulaires.

### 1.5.1 Désordre

Le désordre représente un facteur majeur de la propagation d'ondes dans les milieux granulaires. Même si, au niveau macroscopique, l'arrangement de billes est régulier, la polydispersité (même faible) dans le diamètre des billes ou les imperfections de la cuve contenant le cristal créent des réseaux de contacts forts et des réseaux de contacts plus faibles [1.20, 1.21]. Les chaînes de force observées dans les milieux désordonnés [1.1, 1.22–1.24] se retrouvent dans les milieux ordonnés. La figure 1.13 montre les chaînes de forces normales obtenues numériquement dans un réseau hexagonal de disques de même diamètre où la contrainte appliquée sur quelques contacts a été annulée pour simuler le désordre. Comme les rigidités des contacts dépendent de la force statique appliquée, la propagation d'une onde acoustique va être perturbée par le réseau complexe de forces statiques. En effet, un défaut dans la géométrie du cristal peut détruire les symétries du cristal [1.25] et modifier les relations de dispersion de modes normaux du cristal. Une manière de réduire le désordre est d'appliquer une contrainte statique très grande sur le cristal [1.20, 1.21]. Les mesures acoustiques sont extrêmement sensibles au réseau de forces de contacts, les effets du désordre se retrouvent sous différentes formes. Le désordre induit une atténuation pour les ondes de petites longueur d'ondes (plus sensibles au caractère discret du milieu) [1.27]. Le désordre crée également des modes localisés, qui peuvent se situer dans une bande interdite ou dans une bande propagative [1.25, 1.28]. Pour l'étude de la propagation d'ondes acoustiques dans un cristal granulaire, les signaux temporels mesurés peuvent être décomposés en deux parties [1.20, 1.21, 1.29, 1.30]. La première partie (tête du signal) est reproductible suivant les configurations de contacts alors que la deuxième partie (queue du signal) n'est pas reproductible et semble plus sensible à la configuration instantanée du réseau de contacts. Dans



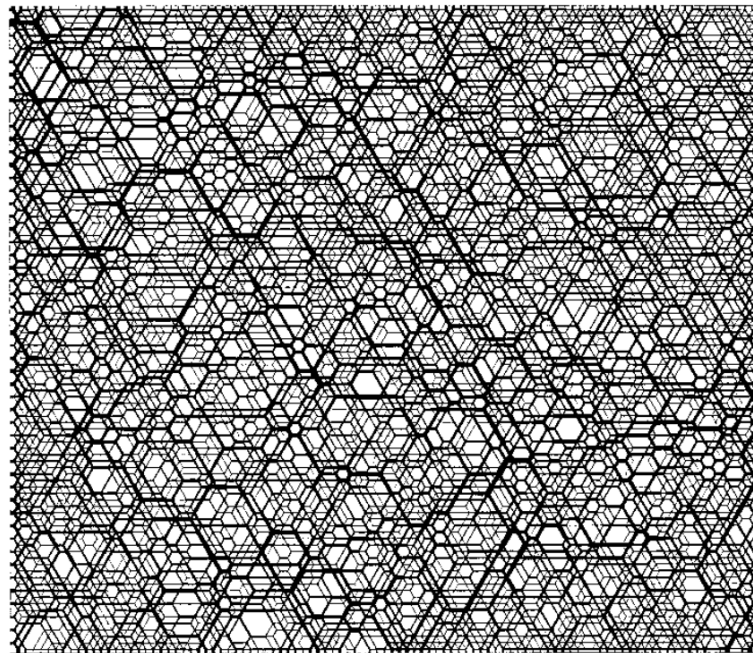


FIG. 1.13 – Simulation du réseau de forces normales dans un assemblage régulier hexagonal de 15000 disques identiques. Pour modéliser le désordre, l'absence de forces normales appliquées sur certains contacts a été imposée. Cette figure est extraite de [1.26].

les mesures de la dispersion des vitesses de propagation, les résultats reproductibles ne sont obtenus qu'avec le début des signaux reçus. Egalement, dans le cas de l'étude de la propagation non linéaire quadratique, la sollicitation des contacts plus faibles induit une augmentation de l'amplitude des harmoniques ou de l'onde démodulée avec l'amplitude d'excitation qui diffère de la puissance 2. Les contacts faibles finissent par s'ouvrir (clappement des contacts) avec l'amplitude d'excitation et donnent de nouveaux comportements non linéaires [1.31].

Enfin, la fonction de transfert acoustique d'un assemblage granulaire dépend fortement de la configuration de contacts [1.32] comme montré sur la figure 1.14 où la fonction de transfert acoustique d'un cristal composé de billes de 7.938 mm de diamètre (l'expérience sera décrite plus en détail au chapitre suivant) est mesurée dans une centaine de configurations différentes. Entre chaque mesure de fonction de transfert acoustique, un pot vibrant *tape* sur le cristal pour réarranger légèrement les billes et ainsi modifier les chaînes de forces. Les amplitudes des fonctions de transfert acoustique obtenues diffèrent fortement les unes des autres et les résonances observées semblent être plus caractéristiques des défauts du cristal que de la propagation reproductible de l'onde acoustique. S'il n'y a pas de sollicitations mécaniques entre deux mesures de fonction de transfert acoustique, les résultats successifs obtenus sont très proches. La mesure de réponse en fréquence d'un assemblage granulaire est donc répétable mais non reproductible [1.32].

Le réseau complexe des forces normales de contact est une source majeure de difficultés pour la mesure dans les cristaux granulaires. La réponse du cristal à une excitation dépend fortement de l'état initial du cristal (configuration du réseau de contacts). Il n'existe actuellement pas de possibilité de prédire ou de caractériser la configuration du réseau de contacts.

## 1.5.2 Modes supérieurs

Les modes de vibrations d'une sphère individuelle homogène ont été l'objet de recherches approfondies [1.33–1.37]. Les modes de vibrations peuvent être séparés en deux familles. La première famille inclue les modes appelés modes sphéroïdaux. Cette famille regroupe trois types de modes qui

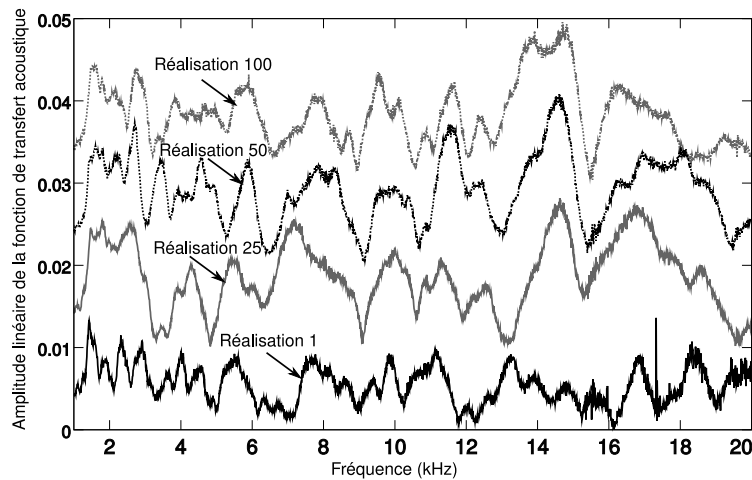


FIG. 1.14 – Influence du désordre sur la mesure des fonctions de transfert acoustique.

modifie la forme de la sphère par des vibrations dans la direction radiale. Le premier type de modes est appelé mode de Rayleigh, qui correspond aux ondes se propageant sur la surface de la sphère alors que le centre de la sphère reste immobile. Le deuxième type de modes est appelé mode de galerie à écho (*whispering gallery* en anglais) qui correspond à une vibration interne de la sphère alors que la surface reste immobile. Ces modes ne déforment pas extérieurement la sphère mais la vibration radiale les inclut dans la famille des modes sphéroïdaux. Le troisième et dernier type de modes est appelé mode de respiration qui correspond à une vibration radiale de la sphère. La seconde famille inclut les modes appelés modes de torsion qui correspondent à des mouvements de rotation de la sphère (en excluant la rotation de corps rigide).

Des ondes acoustiques peuvent se propager dans un réseau de billes autour des fréquences propres de ces modes [1.36, 1.38–1.40]. Ces modes sont donc hautes fréquences : la première fréquence de résonance d'une bille de 8 mm de diamètre se situe autour de 300 kHz [1.36]. Une estimation qualitative permet de déterminer grossièrement l'écart entre les fréquences de propagation des modes normaux de la structure et les fréquences de propagation des modes supérieurs [1.41]. En reprenant le problème de la section 1.3.1, la pulsation de coupure de propagation du mode normal dans la chaîne unidimensionnelle monoatomique dépend du module de cisaillement  $G$  des matériaux constituant la bille de masse  $m_b$  avec  $G = E/(2(1 + \nu))$  où  $E$  est le module d'Young, et de la rigidité du contact  $K$  qui dépend du rayon  $r$  de la surface du contact  $K \propto Gr$ . La pulsation de coupure peut être estimée avec  $\omega_c \propto \sqrt{K/m_b} \propto \sqrt{Gr/(\rho(a/2)^3)}$  où  $\rho$  est la masse volumique du matériau constituant la sphère et  $a$  le diamètre des sphères. La première fréquence de résonance de la sphère  $\omega_{res}$  peut être estimée comme l'inverse du temps mis par une onde pour parcourir le diamètre  $a$  d'une sphère  $\omega_{res} \propto \sqrt{G/\rho}/a \propto \sqrt{G/(\rho a^2)}$ . En conséquence  $\omega_c/\omega_{res} \propto \sqrt{r/a}$  et sous la condition  $r \ll a$ , les bandes de fréquences de propagation des modes normaux sont clairement distinctes des bandes de fréquences de propagation des modes supérieurs.

### 1.5.3 Non-linéarités

En revenant sur le modèle du contact de Hertz-Mindlin de la section 1.2, les relations force-déplacement sont fortement non linéaires. Le développement de Taylor de la relation force-déplacement normale peut inclure les termes quadratiques et cubiques (les termes d'ordres supérieurs sont souvent négligés). Les non-linéarités quadratiques et cubiques sont appelées non-linéarités

classiques. Ces non-linéarités expliquent les phénomènes de génération d’harmoniques, d’auto-démodulation et, si la propagation d’onde est dispersive, de soliton par exemple [1.42–1.45]. La propagation de solitons est prédite théoriquement dans deux cas. Le premier cas concerne une onde de grande longueur d’onde par rapport à la taille des billes se propageant dans une chaîne de billes. La solution de l’équation de propagation qui prend en compte les termes quadratiques satisfait l’équation de Korteweg-de Vries, il s’agit d’une onde solitaire [1.42]. Dans le deuxième cas, la force induite par l’onde acoustique est très supérieure à la force statique appliquée sur les contacts ( $h_0 \ll h'$ ). La longueur du soliton est alors de l’ordre de grandeur de quelques diamètres de billes. Le soliton est un type d’onde dont le profil reste identique au cours de la propagation et dont la vitesse de propagation dépend de l’amplitude : le milieu de propagation est nécessairement non linéaire et dispersif. Un soliton peut se propager dans une chaîne de billes même si aucune contrainte statique n’est appliquée [1.46, 1.47]. Dans ce cas, les rigidités modélisant les contacts sont nulles et aucune onde longitudinale de faible amplitude ne peut se propager (cas du *vide sonique*). L’étude de ce cas de milieu fortement non linéaire a abouti à l’observation d’absorbeur de choc [1.48] ou d’effet de *diode acoustique* [1.49] notamment.

La relation force-déplacement transverse met en évidence des non-linéarités dites non classiques comme l’hystérésis. Dans le cas où l’hypothèse  $T \ll \mu_f N_0$  n’est plus respectée, le phénomène d’adhésion/glissement n’est plus négligeable. Le déplacement relatif à un moment donné ne dépend non plus de la force tangentielle appliquée à cet instant mais de l’historique des forces appliquées : il s’agit d’un effet mémoire. La non-linéarité hystérétique peut être prise en compte à l’aide d’un modèle phénoménologique de type Preisach-Mayergoyz [1.50–1.53], ou de manière plus analytique [1.54]. Un autre type de non-linéarité non classique, déjà mentionné, apparaît avec le clappement [1.31, 1.55]. Si la contrainte acoustique devient trop forte, les contacts peuvent s’ouvrir, ce qui tronque le signal acoustique et génère ainsi des harmoniques voire du bruit. Ce phénomène induit des comportements de type chaotique (bifurcation, doublement de période). Également, des non-linéarités due à la dissipation thermo-élastique au niveau des contacts peuvent apparaître [1.56]. La figure 1.15 présente des exemples de relations contrainte-déformation non linéaires.

Les possibilités de phénomènes non linéaires siégeant dans les matériaux granulaires sont larges et ce paragraphe est non exhaustif. Cela démontre la très forte complexité du comportement dynamique de ces matériaux et l’étendue des sujets possibles d’étude.

#### 1.5.4 Matériau granulaire comme milieu effectif

Pour revenir à une description plus macroscopique d’un matériau granulaire, de nombreuses études ont porté sur la description d’un assemblage granulaire comme milieu effectif. Ces descriptions ont notamment un grand intérêt en géophysique où les matériaux granulaires sont très présents (sédiments). Les caractéristiques des milieux sont souvent recherchées à l’aide des mesures de vitesses des ondes de compression et transverse [1.57–1.60]. La propagation de ces ondes est étudiée en très basses fréquences et pour de grandes longueurs d’ondes, le milieu peut alors être homogénéisé. Le comportement élastique a d’abord été décrit à l’aide d’une approximation de déformation uniforme à toute les échelles [1.57, 1.61, 1.62]. L’hypothèse de déformation moyenne suppose aussi que le champ de déplacement des grains est affine avec la déformation macroscopique du milieu (le déplacement des grains est parallèle à la direction des déformations d’ensemble). Cette description prévoit des modules élastiques effectifs  $\bar{G}$  et  $\bar{K}$  (respectivement module de cisaillement et module d’élasticité isostatique) en fonction de la pression externe  $p_0$ , de la fraction volumique  $\phi$ , du nombre moyen de coordination par grain  $\bar{Z}$  (nombre moyen de contact avec d’autres grains) ainsi que des constantes élastiques du matériau constituant les grains. En particulier, le rapport entre les modules de cisaillement et d’élasticité isostatique est indépendant du nombre moyen de coordination et de la pression appliquée  $\bar{G} \propto \bar{K} \propto p_0^{1/3}$ . Les comparaisons avec les mesures acoustiques ou les résultats

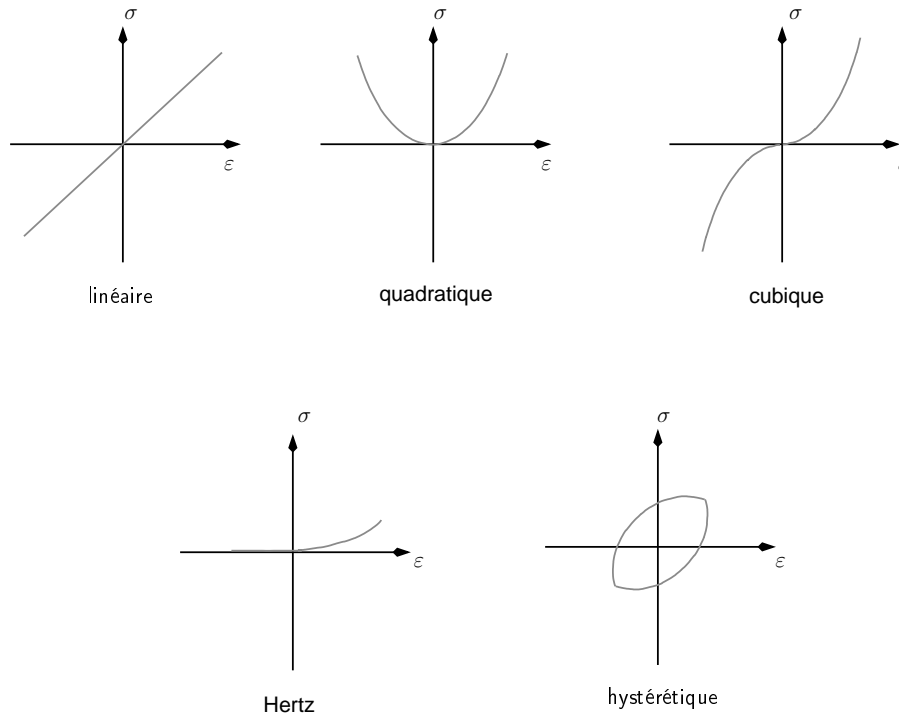


FIG. 1.15 – Représentations schématiques des relations contrainte-déformation susceptibles d'apparaître dans les milieux granulaires.

numériques [1.63–1.65] montrent que la dépendance des modules élastiques suivant la pression ne suit pas les prédictions théoriques obtenues avec l'hypothèse de déformation uniforme. Cependant les prédictions de module d'élasticité isostatique sont en accord relatif avec les résultats expérimentaux. La plus grande divergence est observée avec le module de cisaillement. Les prédictions théoriques ne correspondent pas aux résultats numériques ou expérimentaux [1.65–1.67]. L'hypothèse que le nombre de coordination est indépendant de la pression a été remise en cause [1.68] et les améliorations de cette description ont intégré la possibilité que le mouvement des grains soit non affines (la direction du déplacement n'est plus obligatoirement parallèle aux déformations d'ensemble) [1.65, 1.67, 1.69–1.77]. Ces fluctuations du mouvement des grains impliquent que le nombre de coordination est dépendant de la pression et que le rapport entre le module d'élasticité isostatique et le module de cisaillement dépend de la pression et du nombre de coordinations. Ces prédictions théoriques sont alors plus proches des simulations numérique [1.76]. De plus, la différence entre la dépendance en pression des vitesses de propagation des ondes basses fréquences a été attribué aux fluctuations de contrainte dans le milieu granulaire [1.78].

Dans les premiers travaux [1.61, 1.62], les degrés de liberté de rotation des grains ne sont pas explicitement considérés. Cependant, des travaux incluant explicitement les degrés de liberté de rotation [1.79] donnent des résultats comparables. Ensuite, les degrés de liberté de rotation sont explicitement intégrés dans le calcul des fluctuations [1.69]. Suivant ces travaux, une description pertinente du comportement mécanique des milieux granulaires nécessite de prendre en compte les degrés de liberté de rotation. Les milieux granulaires sont alors décrit par une théorie généralisée de l'élasticité appelé théorie de Cosserat ou théorie des milieux micropolaires. L'utilisation de cette théorie n'est pourtant pas explicite dans les publications citées dans cette section (exception faite de [1.78, 1.79]). Les travaux se sont concentrés sur la modélisation de deux modules élastiques effectifs, suffisants pour la théorie classique de l'élasticité pour un milieu isotrope, alors que la théorie de Cosserat demande six constantes élastiques indépendantes pour décrire le comportement élastique d'un matériau isotrope. Cette question reste ouverte à l'heure actuelle.



Les travaux appliquant la théorie de Cosserat aux milieux granulaires sont présentés plus en détails dans la section suivante.

### 1.5.5 Théorie de Cosserat et les milieux granulaires

L'application de la théorie de Cosserat aux matériaux granulaires provient d'arguments qualitatifs simples. Dans un matériau classique, la taille des particules vibrantes (noyau des atomes) est négligeable par rapport aux distances entre les atomes. La modélisation la plus simple consiste à considérer le matériau comme une chaîne de masses ponctuelles connectées par des ressorts. Les degrés de liberté de rotation des masses ne sont alors pas pris en compte à cause de leur influence négligeable. Dans les granulaires en revanche, la taille des masses est comparable à la distance entre deux grains. Les forces s'appliquent aux niveaux des contacts et le comportement du contact fait apparaître une rigidité perpendiculaire à l'axe reliant les deux centres des deux billes en contact. Les degrés de liberté de rotation doivent alors être traités au même niveau que les degrés de liberté en translation. Ces considérations représentent le point de départ des études théoriques des milieux granulaires suivant la théorie micropolaire ou théorie de Cosserat [1.69, 1.79–1.82].

La rotation a deux effets majeurs sur les modes de propagation des ondes. Le premier est l'apparition des modes rotationnels [1.79, 1.83, 1.84]. Ces modes sont prédits théoriquement mais ont toujours été considérés comme une possibilité mathématique et aucune observation expérimentale n'a été rapportée jusqu'à aujourd'hui. Il s'agit pourtant d'une preuve indiscutable de la validité de la théorie micropolaire. Le deuxième effet porte sur les ondes transverses. La rotation a un effet important sur la vitesse de propagation des ondes et sur leur dispersion [1.78, 1.85–1.87]. Sur le comportement mécanique macroscopique d'un assemblage granulaire, le fait de négliger les degrés de liberté de rotation revient à rigidifier artificiellement l'assemblage et peut donner des résultats erronés. En revanche, la rotation n'a aucune influence sur les ondes longitudinales ou de compression. Également, si une contrainte isotrope est appliquée sur l'assemblage, les rotations des billes ne sont pas sollicitées [1.88]. La plupart des travaux cités portent sur l'homogénéisation des relations pour décrire le comportement élastique macroscopique de l'assemblage granulaire ou pour de petits nombres d'onde (lorsque les longueurs d'ondes sont très grandes devant la taille des grains). Quelques études ont également porté sur la déformation plastique d'un assemblage granulaire [1.89, 1.90]. Lors de simulation numérique, les relations de dispersion des modes rotationnels ont été retrouvées dans un cristal cubique à faces centrées [1.27].

## 1.6 Conclusion

La propagation d'une onde acoustique à basses fréquences (en dessous de la première résonance individuelle des billes) dans un cristal phononique granulaire peut donc dépendre de nombreux facteurs qui peuvent être classés en trois familles, le désordre, les non-linéarités, et la dispersion due à la périodicité de la géométrie. Avant de passer à la description théorique des modes normaux dans un cristal phononique granulaire incluant les degrés de liberté de rotation au chapitre 4, le chapitre suivant présente la description théorique des modes normaux dans le seul cas où les degrés de liberté de rotation ne sont pas pris en compte. C'est le cas où les contacts sont considérés sans friction. Dans ce cas, le contact entre les billes est modélisé par une seule rigidité, la rigidité normale. L'influence des degrés de liberté de rotation demande obligatoirement la prise en compte d'une rigidité transverse. Après les études théoriques des chapitres 3 et 4, les résultats expérimentaux validant la théorie de Cosserat dans les milieux granulaires sont présentés. Le chapitre 5 présente les perspectives sur les effets des non-linéarités.

## Bibliographie

- [1.1] H. M. Jaeger, S. R. Nagel, and R. P. Behringer. The physics of granular materials. *Phys. Today*, 19 :32–38, 1996.
- [1.2] A. van Blaaderen, R. Ruel, and P. Wiltzius. Template-directed colloidal crystallization. *Nature*, 385 :321–324, 1997.
- [1.3] P. G. de Gennes. Granular matter : a tentative view. *Rev. Mod. Phys.*, 71 :s374–s382, 1999.
- [1.4] O. Dazel and V. Tournat. Nonlinear Biot waves in porous media with application to unconsolidated granular media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 127 :692–702, 2010.
- [1.5] H. Hertz. On the contact of elastic solids. *J. Reine Angew. Math.*, 92, 1882.
- [1.6] C. Coste and B. Gilles. On the validity of Hertz contact law for granular material acoustics. *Eur. Phys. J. B*, 7 :155–168, 1998.
- [1.7] R. D. Mindlin. Compliance of elastic bodies in contact. *ASME J. Appl. Mech.*, 16 :259–268, 1949.
- [1.8] R. D. Mindlin and H. Deresiewicz. Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *ASME J. Appl. Mech.*, 75 :327–342, 1953.
- [1.9] J. Duffy and R. D. Mindlin. Stress-strain relations and vibrations of a granular medium. *ASME Trans. J. Appl. Mech.*, 24 :585–593, 1958.
- [1.10] L. Landau and E. Lifchitz. *Theory of Elasticity*. Mir, Moscow, 1967.
- [1.11] K. L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [1.12] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin. *Solid State Physics*. Saunders College Publishing, Philadelphia, 1976.
- [1.13] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley and Sons, New York, 1966.
- [1.14] L. Brillouin. *Wave Propagation in Periodic Structures*. Dover Publications, New York, 1953.
- [1.15] S. Yang, J. H. Page, Z. Liu, M. L. Cowan, C. T. Chang, and P. Cheng. Ultrasound tunneling through 3D granular phononic crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 88 :104301, 2002.
- [1.16] S. Yang, J. H. Page, Z. Liu, M. L. Cowan, C. T. Chang, and P. Cheng. Focusing of sound in a 3D phononic crystal. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :024301, 2004.
- [1.17] J. O. Vasseur, P. A. Deymier, B. Djafari-Rouhani, Y. Pennec, and A.-C. Hladky-Hennion. Absolute forbidden bands and wave guiding in two-dimensional phononic crystal plates. *Phys. Rev. B*, 77 :085415, 2008.
- [1.18] M. T. Dove. *Introduction to Lattice Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [1.19] L. J. Raubenheimer and G. Gilat. Accurate numerical method of calculating frequency distribution functions in solids. II. Extension to hcp crystals. *Phys. Rev.*, 157 :586–599, 1967.
- [1.20] B. Gilles and C. Coste. Low-frequency behavior of beads constrained on a lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 90 :174302, 2003.
- [1.21] C. Coste and B. Gilles. Sound propagation in a constrained lattice of beads : high-frequency behavior and dispersion relation. *Phys. Rev. E*, 77 :021302, 2008.
- [1.22] F. Radjai, M. Jean, J.-J. Moreau, and S. Roux. Force distributions in dense two-dimensional granular systems. *Phys. rev. Lett.*, 77 :274–277, 1996.
- [1.23] J. F. Peters, J. Muthuswamy, J. Wibowo, and A. Tordesillas. Characterization of force chains in granular material. *Phys. Rev. E*, 72 :041307, 2005.

- [1.24] T. S. Majmudar and R. P. Behringer. Contact force measurements and stress-induced anisotropy in granular materials. *Nature*, 435 :1079–1082, 2005.
- [1.25] G. P. Srivastava. *The Physics of Phonons*. Taylor and Francis Group, New York, 1990.
- [1.26] F. Radjai, S. Roux, and J.-J Moreau. Contact forces in a granular packing. *Chaos*, 9 :544–550, 1999.
- [1.27] O. Mouraille. *Sound Propagation in Dry Granular Materials : Discrete Element Simulations, Theory, and Experiments*. PhD thesis, University of Twente, 2008.
- [1.28] G. Theocharis, M. Kavousanakis, P. G. Kevrekidis, C. Daraio, M. A. Porter, and I. G. Kevrekidis. Localized breathing modes in granular crystals with defects. *Phys. Rev. E*, 80 :066601, 2009.
- [1.29] X. Jia, C. Caroli, and B. Velicky. Ultrasound propagation in externally stressed granular media. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :1863–1866, 1999.
- [1.30] E. Somfai, J.-N. Roux, J. H. Snoeijer, M. van Hecke, and W. van Saarloos. Elastic wave propagation in confined granular systems. *Phys. Rev. E*, 72 :021301, 2005.
- [1.31] V. Tournat, C. Inserra, and V. Gusev. Non-cascade frequency-mixing processes for elastic waves in unconsolidated granular materials. *Ultrasonics*, 48 :492–497, 2008.
- [1.32] C.-h. Liu and S. R. Nagel. Sound in sand. *Phys. Rev. Lett.*, 68 :2301–2304, 1992.
- [1.33] H. Lamb. On the vibration of an elastic sphere. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 13 :61–68, 1882.
- [1.34] A. E. H. Love. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover, New York, 1944.
- [1.35] Z. Ye. On the low frequency elastic response of a spherical particle. *Chin. J. Phys.*, 38 :103–110, 2000.
- [1.36] A.-C. Hladky-Hennion, F. Cohen-Tenoudji, A. Devos, and M. de Billy. On the existence of subresonance generated in one-dimensional chain of identical spheres. *J. Acous. Soc. Am.*, 112 :850–855, 2002.
- [1.37] J. Anfosso. *Propagation Acoustique dans des Milieux Granulaires de Billes de Verres et d'Acier*. PhD thesis, Université de Paris 7, 2003.
- [1.38] M. de Billy. Experimental study of sound propagation in a chain of spherical beads. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108 :1486–1495, 2000.
- [1.39] M. de Billy. Frequency analysis of the acoustic signal transmitted through a one-dimensional chain of metallic spheres. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110 :710–716, 2001.
- [1.40] J. Anfosso and V. Gibiat. Elastic wave propagation in a three-dimensional periodic granular medium. *Europhys. Lett.*, 67 :376–382, 2004.
- [1.41] V. Gusev and V. Tournat. How acoustic waves are guided in buried subsurface channels in unconsolidated granular medium. *Phys. Rev. E*, 78 :036602, 2008.
- [1.42] V. F. Nesterenko. Propagation of nonlinear compression pulses in granular media. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 25, 1983.
- [1.43] V. F. Nesterenko. *Dynamics of Heterogeneous Materials*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [1.44] V. Tournat, V. E. Gusev, V. Y. Zaitsev, and B. Castagnède. Acoustic second-harmonic generation with shear to longitudinal mode conversion in granular media. *Europhys. Lett.*, 66 :798–804, 2004.
- [1.45] V. Tournat, V. E. Gusev, and B. Castagnède. Self-demodulation of elastic waves in one-dimensional granular chain. *Phys. Rev. E*, 70 :056603, 2004.



- [1.46] S. Job, F. Santibanez, F. Tapia, and F. Melo. Nonlinear waves in dry and wet Hertzian granular chain. *Ultrasonics*, 48 :506–514, 2008.
- [1.47] S. Job, F. Santibanez, F. Tapia, and F. Melo. Wave localization in strongly nonlinear Hertzian chains with mass defect. *Phys. Rev. E*, 80 :025602(R), 2009.
- [1.48] C. Daraio, V. F. Nesterenko, E. B. Herbold, and S. Jin. Energy trapping and shock disintegration in a composite granular medium. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :058002, 2006.
- [1.49] V. F. Nesterenko, C. Daraio, E. B. Herbold, and S. Jin. Anomalous wave reflection at the interface of two strongly nonlinear granular media. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :158702, 2005.
- [1.50] I. D. Mayergoyz. Mathematical models of hysteresis. *Phys. Rev. Lett.*, 56 :1518–1521, 1986.
- [1.51] R. A. Guyer, K. R. McCall, and G. N. Boitnott. Hysteresis, discrete memory and nonlinear wave propagation in rock : a new paradigm. *Phys. Rev. Lett.*, 74 :3491–3494, 1995.
- [1.52] V. Gusev. Amplitude- and frequency-dependent nonlinearities in the presence of thermally-induced transitions in the Preisach model of acoustic hysteresis. *Phys. Rev. B*, 72 :054104, 2005.
- [1.53] V. Aleshin and K. Van Den Abeele. Preisach analysis of the Hertz-Mindlin system. *J. Mech. Phys. Solids*, 57 :657–672, 2009.
- [1.54] V. Gusev. Theory of non-collinear interactions of acoustic waves in an isotropic material with quadratic hysteretic nonlinearity. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111 :80–94, 2002.
- [1.55] V. Tournat, V. E. Gusev, and B. Castagnède. Subharmonics and noise excitation in transmission of acoustic wave through unconsolidated granular medium. *Phys. Lett. A*, 326 :340–348, 2004.
- [1.56] L. Fillinger, V. Yu. Zaitsev, V. Gusev, and B. Castagnède. Nonlinear relaxational absorption/transparency for acoustic waves due to thermoelastic effect. *Acust. Acta Acust.*, 92 :24–34, 2006.
- [1.57] K. W. Winkler. Contact stiffness in granular porous materials : comparison between theory and experiment. *Geophys. Res. Lett.*, 10 :1071–1076, 1983.
- [1.58] J. P. Castagna, M. L. Batzle, and R. L. Eastwood. Relationships between compressional-wave and shear-wave velocities in clastic silicate rocks. *Geophysics*, 50, 1985.
- [1.59] W. F. Murphy, K. W. Winkler, and R. L. Kleinberg. Acoustic relaxation in sedimentary rocks : dependence on grain contacts and fluid saturation. *Geophysics*, 51 :757–766, 1986.
- [1.60] R. Bachrach, J. Dvorkin, and A. M. Nur. Seismic velocities and Poisson’s ratio in shallow unconsolidated sands. *Geophysics*, 65 :556–564, 2000.
- [1.61] P. J. Digby. The effective elastic moduli of porous granular rocks. *ASME J. Appl. Mech.*, 48 :803–808, 1981.
- [1.62] K. Walton. The effective elastic moduli of a random packing of spheres. *J. Mech. Phys. Solids*, 35 :213–226, 1987.
- [1.63] S. N. Domenico. Elastic properties of unconsolidated porous sand reservoirs. *Geophysics*, 42 :1339, 1977.
- [1.64] J. T. Jenkins, P. A. Cundall, and I. Ishibashi. Micromechanical modeling of granular materials with the assistance of experiments and numerical simulations. In J. Biarez and R. Grouve, editors, *Powder and Grains*. Balkema, Rotterdam, 1989.
- [1.65] H. A. Makse, N. Gland, D. L. Johnson, and L. M. Schwartz. Why effective medium theory fails in granular materials. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :5070–5073, 1999.

- [1.66] I. Agnolin, J.-N. Roux, P. Massaad, X. Jia, and P. Mills. Sound waves velocities in dry and lubricated granular packings : numerical simulations and experiments. In R. Garcia-Rojo, H. J. Hermann, and S. McNamara, editors, *Powders and Grains*. Taylor & Francis Group, London, 2005.
- [1.67] L. La Ragione and J. T. Jenkins. The initial response of an idealized granular material. *Proc. R. Soc. A.*, 463 :735–758, 2007.
- [1.68] P. A. Cundall. Computer simulations of dense spheres assemblies. In M. Satake and J. T. Jenkins, editors, *Micromechanics of Granular Materials*. Balkema, Rotterdam, 1988.
- [1.69] M. A. Koenders. The incremental stiffness of an assembly of particles. *Acta Mechanica*, 70 :31–49, 1987.
- [1.70] F. Trentadue. An equilibrium-based approach for the micromechanical modelling of a non-linear elastic granular material. *Mechanics of Materials*, 36 :323–334, 2004.
- [1.71] J. T. Jenkins and M. A. Koenders. The incremental response of random aggregates of round particles. *Europhys. Phys. J. E*, 13 :113–123, 2004.
- [1.72] J. T. Jenkins, D. Johnson, L. La Ragione, and H. Makse. Fluctuations and the effective moduli of an isotropic, random aggregate of identical, frictionless spheres. *J. Mech. Phys. Solids*, 53 :197–225, 2005.
- [1.73] I. Agnolin and J.-N. Roux. Internal states of model isotropic granular packings. I. Assembling process, geometry, and contact networks. *Phys. Rev. E*, 76 :061302, 2007.
- [1.74] I. Agnolin and J.-N. Roux. Internal states of model isotropic granular packings. II. Compression and pressure cycles. *Phys. Rev. E*, 76 :061303, 2007.
- [1.75] I. Agnolin and J.-N. Roux. Internal states of model isotropic granular packings. III. Elastic properties. *Phys. Rev. E*, 76 :061304, 2007.
- [1.76] V. Magnanimo, L. La Ragione, J. T. Jenkins, P. Wang, and H. A. Makse. Characterizing the shear and bulk moduli of an idealized granular material. *EPL*, 81 :34006, 2008.
- [1.77] I. Agnolin and J.-N. Roux. On the elastic moduli of three-dimensional assemblies of spheres : characterization and modeling of fluctuations in the particle displacement and rotation. *Int. J. Solids Struct.*, 45 :1101–1123, 2008.
- [1.78] B. Velicky and C. Caroli. Pressure dependence of the sound velocity in a two-dimensional lattice of Hertz-Mindlin balls : mean-field description. *Phys. Rev. E*, 65 :021307, 2002.
- [1.79] L. M. Schwartz, D. L. Johnson, and S. Feng. Vibrational modes in granular media. *Phys. Rev. Lett.*, 52 :831–834, 1984.
- [1.80] A. S. J. Suiker, R. de Borst, and C. S. Chang. Micro-mechanical modelling of granular material. part 1 : derivation of second-gradient micro-polar constitutive theory. *Acta Mechanica*, 149 :161–180, 2001.
- [1.81] A. S. J. Suiker, R. de Borst, and C. S. Chang. Micro-mechanical modelling of granular material. part 2 : plane wave propagation in infinite media. *Acta Mechanica*, 149 :181–200, 2001.
- [1.82] A. S. J. Suiker and R. de Borst. Enhanced continua and discretized lattice for modelling granular assemblies. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 363 :2543–2580, 2005.
- [1.83] S. A. Lisina, A. I. Potapov, and V. F. Nesterenko. A nonlinear granular medium with particle rotation : a one-dimensional model. *Acoust. Phys.*, 47 :598–606, 2001.
- [1.84] I. S. Pavlov, A. I. Potapov, and G. A. Maugin. A 2D granular medium with rotating particles. *Int. J. Solids Struct.*, 43 :6194–6207, 2006.

- [1.85] C. S. Chang and J. Gao. Non-linear dispersion of plane wave in granular media. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 30 :111–128, 1995.
- [1.86] A. S. J. Suiker, A. V. Metrikine, and R. de Borst. Dynamic behaviour of a layer of discrete particles, part 1 : analysis of body waves and eigenmodes. *J. Sound Vibration*, 240 :1–18, 2001.
- [1.87] A. S. J. Suiker, A. V. Metrikine, and R. de Borst. Dynamic behavior of a layer of discrete particles, part 2 : response to a uniformly moving, harmonically vibrating load. *J. Sound Vibration*, 240 :19–39, 2001.
- [1.88] H.-B. Mühlhaus and F. Oka. Dispersion and propagation in discrete and continuous models for granular materials. *Int. J. Solids Struct.*, 33 :2841–2858, 1996.
- [1.89] H. Arslan and S. Sture. Evaluation of a physical length scale for granular materials. *Comput. Mat. Sci.*, 42 :525–530, 2008.
- [1.90] H. Arslan and S. Sture. Finite element simulation of localization in granular materials by micropolar microcontinuum approach. *Comput. Geotech.*, 35 :548–562, 2008.



## Chapitre 2

# Elastic waves in noncohesive frictionless granular crystals

Ce chapitre, rédigé en anglais, est la transcription d'un article publié dans le journal *Ultrasonics*<sup>1</sup>. Il présente une première étude théorique de la propagation d'ondes de volume dans un cristal phononique granulaire tridimensionnel non cohésif en considérant que les contacts entre les différentes billes s'effectuent sans friction. L'hypothèse de friction négligeable permet d'écrire les relations dynamiques sans tenir compte des degrés de liberté de rotation des billes. Les résultats théoriques obtenus sont alors comparés aux mesures expérimentales de fonctions de transfert acoustiques.

### abstract

An ordered structure of noncohesive spherical beads constitutes a phononic crystal. This type of media combines the properties of wave propagation in phononic crystals (dispersion due to the geometrical periodicity) with the properties of wave propagation in granular media (nonlinearities, rotational degree of freedom) and give the opportunity to have interesting features as tunable frequency band gaps for example.

In this work, the acoustic bulk modes of a hexagonal close packed (hcp) structure of beads, considered as rigid masses connected by springs, are theoretically evaluated and their associated resonance frequencies are compared to experimental results. When friction is neglected, the elastic interaction between the beads are reduced to a normal spring interaction given by the Hertz theory. According to this theory, the rigidity of the contact depends on its static loading. The theory predicts the existence of elastic transverse and longitudinal acoustical-type modes and transverse and longitudinal optical-type modes.

The acoustic transfer function of a hcp crystal slab built with stainless steel beads is measured and its resonance frequencies are compared to the theoretical predictions. Despite some differences between theory and experiments which could come for instance from the disordered character of the contact loads, the developed theory and the experimental results show relatively good agreement.

---

<sup>1</sup>A. Merkel, V. Tournat and V. Gusev. Elastic waves in noncohesive frictionless granular crystals. *Ultrasonics*, 50 :133–138, 2010.

## 2.1 Introduction

The macroscopic mechanical behavior of random noncohesive granular aggregates has been studied considering the granular aggregate as an effective medium [2.1–2.4]. Even the quasistatic behavior is complex. But the dynamical behavior of granular assemblies is even more complex and less understood [2.5, 2.6] because of the discrete character of granular media which causes dispersion. There exists a consensus that the complexity of mechanical phenomena comes, at least partially, from the disordered character of granular assemblies at the microscopic level [2.5, 2.7–2.10]. Disorder is at the origin of the non-affine response of granular assemblies to external loading [2.7, 2.8] and is at the origin of a complex distribution of contact forces [2.5, 2.9, 2.11] for example. Recently, various mechanical methods of ordering (crystallization) of granular assemblies composed of monodisperse spheres have been developed including vibration driven epitaxial growth [2.12, 2.13] and vibrational annealing [2.13, 2.14]. Even earlier, 3D periodic arrangements of nanospheres and microspheres could have been efficiently prepared by self-assembly of colloidal suspensions of spheres [2.15–2.17]. Most of the existing applications require consolidated granular crystals, which could be obtained by additional processing from noncohesive ones. For example synthetic opals for optical (photonics) [2.16, 2.18, 2.19] and acousto-optical (phononics-photonics) [2.19] applications are obtained by sintering self-assembled noncohesive structures of silica nanospheres [2.17].

It is highly desirable to propose and to develop acoustic methods of diagnosis of the quality of granular crystals before their consolidation. Surprisingly, although a general theoretical approach to evaluation of elastic waves in discrete periodic structures was proposed [2.20], the theoretical formulas have not been developed to the level necessary for practical applications of these waves in non-destructive testing. Below we provide a theoretical description of elastic eigenmodes in hexagonal granular crystals composed of monodisperse frictionless elastic spheres in contact. In the absence of friction the contact interactions between the spheres reduce to central forces only and the elastic eigenmodes of granular crystals become similar to acoustical and optical phonons in monoatomic hexagonal crystals [2.21, 2.22]. As a result the optical phonons and the dispersion of acoustic phonons can be studied in granular crystals at the nanoscale or microscale in opals or even at macroscale when the grain diameter exceeds a millimeter. Importantly the elastic contact interaction between the spheres is well described by the Hertz theory [2.23]. This provides us opportunity to predict the dependence of eigenmodes in noncohesive granular crystals on external loading, in particular on pressure. We apply the developed theory to explain resonance frequencies of ordered granular layers observed in our experiments. It is worth noting that, although there can be found multiple publications on acoustical-type elastic modes in granular crystals [2.24–2.29], the theoretical analysis is restricted to continuous (dispersionless) elasticity limit. The optical-type elastic modes are completely absent in these theories. The developed here 3D theory is a preliminary and necessary step for the analysis of the rotational elastic eigenmodes in granular crystals, because earlier theories have studied these modes only in 1D [2.30–2.32] or 2D [2.33–2.36] geometries.

## 2.2 Bulk mode dispersion relations

Approximately 30 chemical elements crystallize in the hexagonal close packed form. This structure is a stacking of hexagonal layers A and B, which are in the closest possible position relative to each others. Then, the 3D hcp structure consists of two interpenetrating simple 2D hexagonal Bravais lattices shifted parallel to the layers [2.37] as exposed on Fig.2.1.

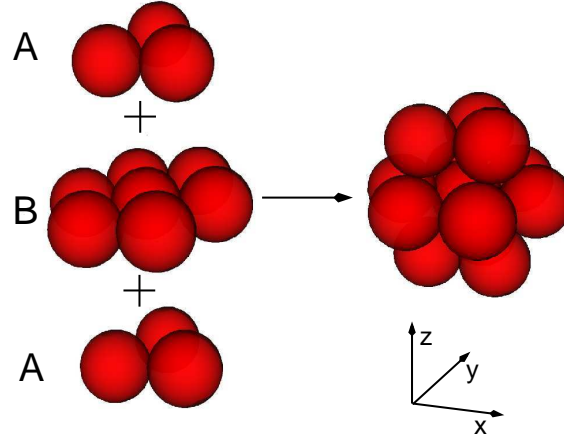


FIG. 2.1 – The hexagonal close packed structure.

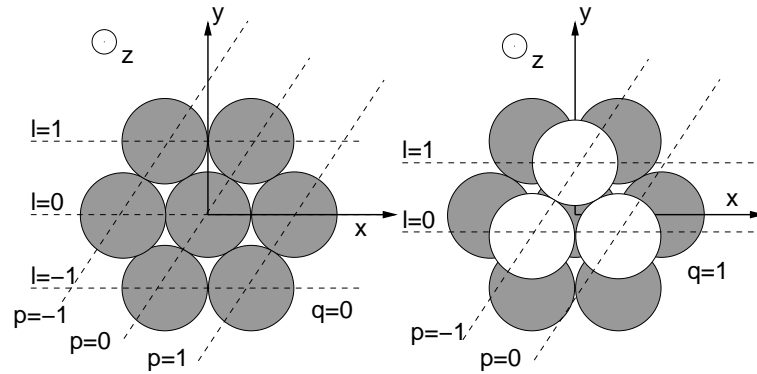


FIG. 2.2 – Coordinate system for the bead's position vector.

The hcp structure can be seen as a hexagonal Bravais lattice with a basic cell of two contacting beads (one on the layer A and one on the layer B). The position of the different beads in the hcp structure is given by the vector

$$\mathbf{R}^{l,p,q} = a\left(\frac{l}{2} + p + \frac{1 - (-1)^q}{4}\right)\vec{x} + a\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2l - \frac{1 - (-1)^q}{3}\right)\vec{y} + a\sqrt{\frac{2}{3}}q\vec{z}, \quad (2.1)$$

where  $l, p, q$  are the indexes of the beads following the coordinate system of Fig.2.2 and  $a$  is the diameter of the beads.

The dispersion relations are deduced from the equations of motion calculated for the two contacting beads of the basic cell, which can be written as

$$m_b \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{l,p,q}}{\partial t^2} = \sum_{l',p',q'} \mathbf{F}_{l,p,q}^{l',p',q'}, \quad (2.2)$$

where  $F_{l,p,q}^{l',p',q'}$  is the force applied by the bead  $(l', p', q')$  on the bead  $(l, p, q)$ ,  $u^{l,p,q}$  is the displacement of the bead  $(l, p, q)$  and  $m_b$  is the mass of one bead.

Using the linear approximation of the Hertz law for a contact between two elastic spheres and neglecting friction allows to consider the contact as a simple spring, and the projections on  $x, y, z$



axis of the normal forces applied by a bead  $(l', p', q')$  on a bead  $(l, p, q)$  can be written as

$$F_\alpha = K_{\alpha\beta}(u_\beta^{l',p',q'} - u_\beta^{l,p,q}), \quad (2.3)$$

with  $\alpha, \beta = x, y, z$ , where  $\beta$  is the summation index.  $K_{\alpha\beta}$  is the linear rigidity tensor of the contact given by

$$K_{\alpha\beta} = K_N n_\alpha n_\beta, \quad (2.4)$$

where  $n_{\alpha,\beta}$  are the coordinates of the unit vector  $\mathbf{n}$  normal to the contact surface which is deduced from the vector (2.1).  $K_N$  is the linear approximation of the normal rigidity of the contact given by the Hertz law [2.25]

$$K_N = \left(\frac{3a}{8} N_0\right)^{1/3} E^{2/3} ((1 - \nu^2))^{-2/3}, \quad (2.5)$$

where  $N_0$  is the static normal force between the beads in contact,  $E$  is the Young's modulus and  $\nu$  is the Poisson's coefficient of the material which constitutes the beads. The dependence of the normal rigidity on the static normal force induces the interesting property that it is possible to modify the properties of bulk modes propagation by an external loading applied on the crystal.

Equation (2.2) is written for the bead  $(0, 0, 0)$  (the first bead of the basic cell) with the contact forces applied by the twelve neighbor beads, and displacements in the form of plane waves are substituted with

$$u_\alpha^{l,p,q} = A_\alpha^c e^{-ik_\beta(R_\beta^{l,p,q} - R_\beta^{0,0,0})} e^{i\omega t}, \quad (2.6)$$

where  $c = 0, 1$ , respectively, if the bead belongs to the even layers (including the layer 0) or odd layers,  $A$  is the amplitude and  $\omega$  is the cyclic frequency.

Similarly, (2.2) is written for the bead  $(0, 0, 1)$  (the second bead of the basic cell) and displacements in the form of plane waves are substituted with

$$u_\alpha^{l,p,q} = A_\alpha^c e^{-ik_\beta(R_\beta^{l,p,q} - R_\beta^{0,0,1})} e^{i\omega t}. \quad (2.7)$$

The projections of the two evaluated equations of motion give a set of six equations. From this set, the dynamic matrix  $[\mathbf{D}]$  (given in appendix) is built, and its eigenvalues give the dispersion relations of the bulk modes propagating in the crystal.

The dispersion curves corresponding to the first Brillouin zone shown in Fig.2.3 are plotted in Fig.2.4. The cyclic frequency  $\Omega = \omega/\omega_c$  is normalized to the cut-off cyclic frequency

$$\omega_c = \sqrt{\frac{8K_N}{m_b}}. \quad (2.8)$$

The coordinate of the boundary points of the first Brillouin zone are

$$\Gamma = (0, 0, 0), \quad K = (0, \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{a}, 0), \quad M = (\frac{2}{3} \frac{\pi}{a}, \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{a}, 0), \quad A = (0, 0, \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{\pi}{a}). \quad (2.9)$$



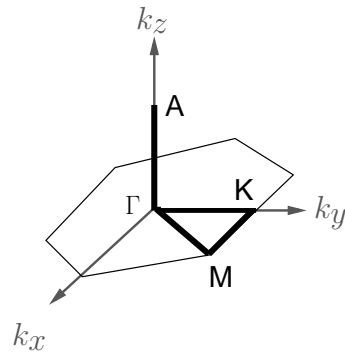


FIG. 2.3 – Contour of the first Brillouin zone of the hcp structure.

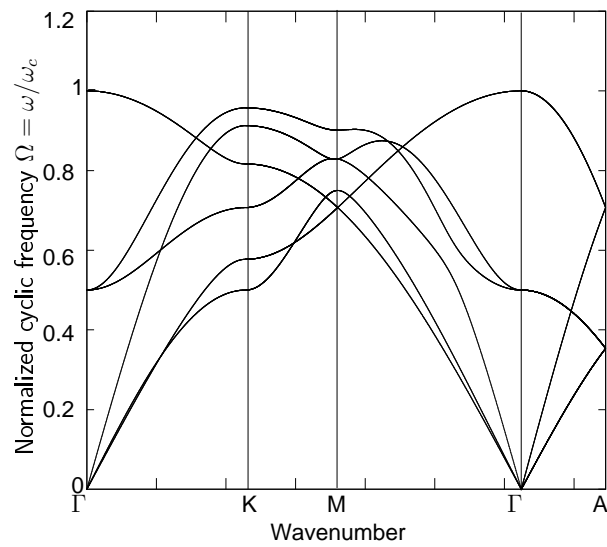


FIG. 2.4 – Phonon dispersion curves of a hcp crystal.

### 2.3 Eigenmodes along $z$ direction

Considering only the waves propagating along the  $z$  direction (part  $\Gamma - A$  of the contour,  $k_y = k_x = 0$ ), it is possible to find analytically the eigenvalues of the dynamic matrix which give the following dispersion relations

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{4} \sin^2(\kappa), \quad (2.10)$$

$$\Omega_3^2 = \sin^2(\kappa), \quad (2.11)$$

$$\Omega_{4,5}^2 = \frac{1}{4} \cos^2(\kappa), \quad (2.12)$$

$$\Omega_6^2 = \cos^2(\kappa), \quad (2.13)$$

where  $\kappa = k_z a / \sqrt{6}$  is the normalized wavenumber.

The evaluation of the eigenvectors allows to identify that (2.10) corresponds to the dispersion relation of the two degenerated acoustical-type transverse modes (one polarized along  $x$  direction and one polarized along  $y$  direction), (2.11) corresponds to the dispersion relation of the acoustical-type longitudinal mode, (2.12) corresponds to the dispersion relation of the two degenerated optical-type transverse modes (with the same polarization as the acoustical-type transverse modes) and (2.13) corresponds to the dispersion relation of the optical-type longitudinal mode.

The existence of optical-type modes is predicted because of the geometry of the hcp structure (basic cell of two beads). Well known in solid state physics [2.37], there is actually no experimental observation of these modes in macroscopic granular crystals.

The normalized wavenumbers  $\kappa(\omega)$  for the acoustical-type transverse modes (2.10) and the acoustical-type longitudinal mode (2.11) can be deduced, respectively, from the dispersion relations

$$\kappa_{1,2} = \arcsin(2\Omega_{1,2}), \quad (2.14)$$

$$\kappa_3 = \arcsin(\Omega_3). \quad (2.15)$$

The phase velocities  $c_\phi(\omega)$  of the acoustical-type transverse and longitudinal waves are, respectively, calculated from (2.10) and (2.14) and from (2.11) and (2.15) in the form

$$c_{\phi_{1,2}} = \frac{\Omega_{1,2}}{\kappa_{1,2}} = \frac{\Omega_{1,2}}{\arcsin(2\Omega_{1,2})}, \quad (2.16)$$

$$c_{\phi_3} = \frac{\Omega_3}{\kappa_3} = \frac{\Omega_3}{\arcsin(\Omega_3)}, \quad (2.17)$$

and the dependence of the wavelength on frequency  $f$  can be determined.

### 2.4 Theoretical estimations for experiments

The resonances of the acoustical-type longitudinal mode in a crystal of finite thickness of nine layers along  $z$  direction are estimated considering the same mechanical impedance on both sides of the crystal. The assumption is made that the resonance frequencies are found to be multiple of the half wavelength, so they can be estimated with a recursive calculus from (2.17) with the thickness of the crystal.

This calculation is made considering a hcp arrangement of stainless steel beads ( $a = 7.938$  mm,  $\rho = 7.78 \cdot 10^3$  kg.m<sup>-3</sup>,  $E = 200 \times 10^9$  Pa,  $\nu = 0.3$ ) and for static normal forces from  $N_0 = 0.074$  N

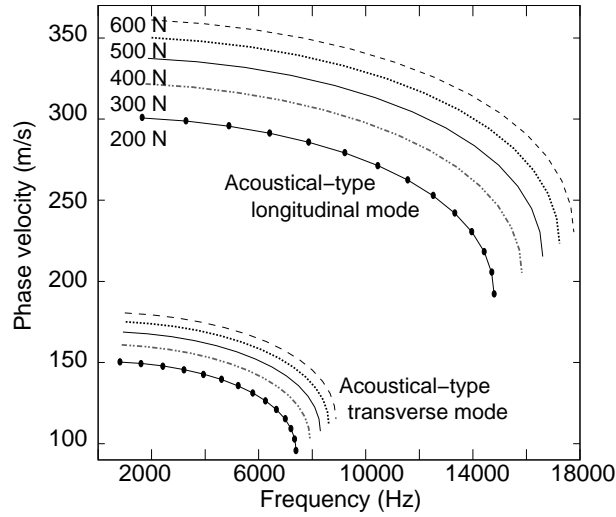


FIG. 2.5 – Phase velocity of the acoustical-type longitudinal and transverse modes for different external loadings (from 200 N to 600 N).

( $K_N = 2.2 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ) to  $F_0 = 0.222 \text{ N}$  ( $K_N = 3.18 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ). The first resonance of the acoustical-type longitudinal mode given in the Table 1 is calculated for different external loadings.

**Table 1.** Theoretical evaluation of the first resonance frequency of the longitudinal acoustical-type eigenmode

External loading	$N_0$	Resonance frequency
200 N	0.074 N	2505 Hz
300 N	0.111 N	2680 Hz
400 N	0.148 N	2812 Hz
500 N	0.185 N	2918 Hz
600 N	0.222 N	3008 Hz

For an external loading of 600 N, the second and third resonances are evaluated at 5931 Hz and 8681 Hz.

The evolution of the resonance frequency with loading follows the Hertz law  $f_{res} \sim N_0^{1/6}$

The phase velocities of the acoustical-type modes along  $z$  direction are plotted in Fig.2.5 as a function of frequency for different external loadings which correspond to the experimental configuration.

The velocity of these modes is much lower than the one of the waves propagating in the material constituting the beads because of the low rigidity of the contacts (2.5).

In these estimations, the highest cut-off frequency (for an external loading of 600 N) is  $f_c = \omega_c/2\pi = 17.8 \text{ kHz}$ . The frequency range for the existence of the predicted modes is consequently far below the first vibration resonance of the beads (around 300 kHz).

## 2.5 Experimental results

Fig.2.6 gives the scheme of the experimental setup. A hcp crystal of 9 layers of stainless steel beads is built inside a plexiglas rectangular container. The acoustic transfer function (ATF) of the crystal is found by exciting from the bottom using a piezoelectric transducer and detecting with a laser vibrometer focused on one single bead of the penultimate layer. An external loading is applied on top of the crystal in the  $z$  direction in order to modify the static contact stress which changes the normal rigidity of the contact as seen in (2.5).

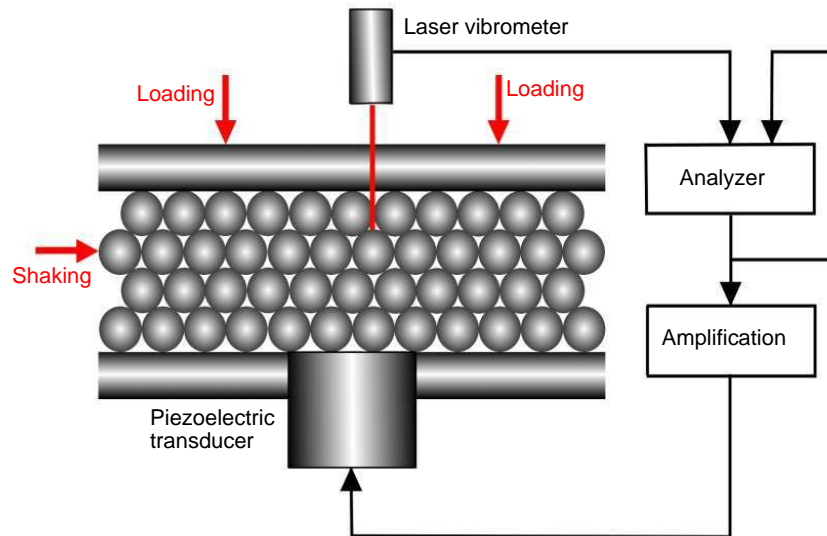


FIG. 2.6 – Schematics of the experimental setup.

The properties of the acoustic excitation are measured on a 2 layers crystal with the laser beam focused on one bead of the first layer, at different external loadings. This setup shows the behavior of the first layer in the same conditions of contact as the following experimental results, demonstrating a resonance near 1500 Hz as shown in Fig.2.7, which is also found when there is only one hexagonal layer. This resonance is the response of the system (including the container) and is observed in all the following experimental results.

In order to minimize the effects of disorder, a shaker gives a mechanical tap to the crystal to rearrange the distribution of contact forces between each measurement. The acoustic transfer function (ATF) of the crystal as shown in Fig.2.8 is averaged over 100 realizations.

The acoustic transfer functions show that the crystal introduces resonances which are analogous to crystalline resonance in solid state physics. The resonance frequencies could be identified to the dispersion relations found theoretically. The theoretical evaluation of the first resonance of the acoustical-type longitudinal mode are close to experimental resonances and follow the expected behavior with external loading. These results will be more discussed in part 7.

## 2.6 Influence of disorder

The complex distribution of contact forces may destroy the translational symmetry of the crystal [2.38]. This alters the frequencies of the eigenmodes of the crystal. Disorder could have a large influence on the measured acoustic transfer functions as shown in Fig.2.9.

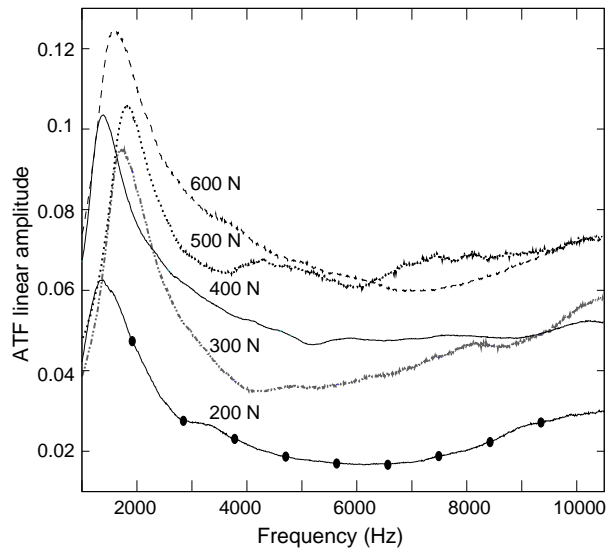


FIG. 2.7 – Acoustic transfer function measured on a bead of the first layer for a crystal of two layers. The different transfer functions are shifted vertically for more lisibility.

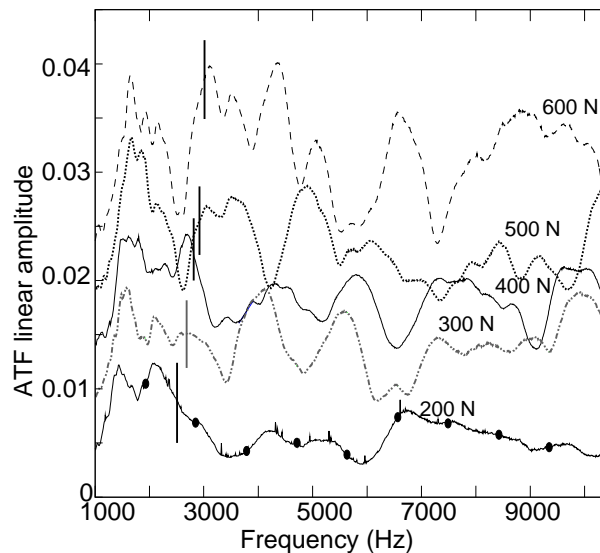


FIG. 2.8 – Experimental acoustic transfer function of the crystal with different external loadings (200 N to 600 N). The theoretical estimations of the first longitudinal resonance frequencies are reported as vertical bars on the corresponding curves.

In Fig.2.9, the variations in the amplitude of the acoustic transfer function due to disorder are of comparable amplitude to the resonances of the eigenmodes. The mechanical disorder induces here resonance modes characteristic of impure and mixed crystals [2.38]. The averaging is necessary to minimize the influence of disorder for comparison with the theoretical predictions which do not include disorder.

## 2.7 Discussion

The identification of experimental resonances to theoretical predictions is difficult. There are more resonances measured than predicted and the predicted resonance frequencies do not always match with resonances in the experimental curves. For example, the second resonance of the acoustical-type

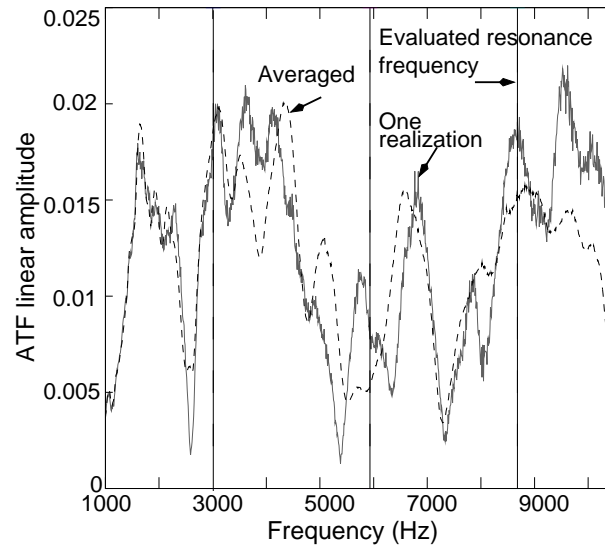


FIG. 2.9 – Average acoustic transfer function compared to one example of a single measurement.

longitudinal mode does not appear at the predicted frequency on the average experimental curve in Fig.2.9.

Discrepancies can be caused by the assumptions made in the model. First, only the normal contact rigidity is taken into account, and considering frictionless contact is certainly too restrictive. The friction will introduce more rigidity in the contact and this could explain why the resonance frequencies are currently underestimated. Including friction requires also to take into account the rotational degrees of freedom of the beads in the theory and implies the existence of rotational waves.

Second, the normal rigidity is supposed to be the same for all the contacts, assuming that the magnitude of static normal forces between all the beads in contact are equal. In reality, it is not necessary the case because of the different orientations of the contact surfaces in space and the uniaxial loading applied along  $z$  direction in the present paper (anisotropy of stress). However, because of the uniaxial loading along  $z$  direction, the contacts of two categories can be distinguished : the first one with the contacts between beads belonging to the same horizontal layer (the contact planes are vertical), the second one with the contacts between beads belonging to different horizontal layers (the contact planes are not vertical). These two categories of contacts have two different rigidities. For the plane waves propagating along  $z$  direction, there is no relative displacement between beads belonging to the same horizontal layer. Thus in a frictionless granular crystal, the rigidity of the first category of contact (contact between beads of the same horizontal layer) has no effect on the dispersion relations of the plane waves propagating along  $z$  direction and all the contacts contributing to this motion are equally loaded as in the case of hydrostatic (isotropic) loading.

Third, the boundary conditions have been simplified. The resonance frequencies are estimated considering the same impedance on both sides of the crystal and, therefore, the resonance frequencies are found to be multiple of the half wavelength. This assumption does not include the peculiar movement of the boundary beads, which are in contact with a plane surface of plexiglas. These contacts induce another rigidity that needs to be taken into account in the boundary conditions.

Disorder plays also an important role in the global behavior of a granular crystal in two different ways [2.36, 2.38, 2.39]. First, the Hertzian behavior of wave velocity with loading is observed only for important static force where the disorder becomes weak. For lower stress, the evolution of the velocity with loading differs from the Hertz-Mindlin theory. Second, disorder can be at the origin of resonance (resonance modes) in the propagating frequency band or in the forbidden frequency band gap (localised modes). The implementation of a method for disorder's diagnosis can have an interest,

especially for nanomaterials.

Despite all these limitations, the results obtained indicate that it is possible to identify the resonance frequencies of noncohesive granular crystals using the formulation of lattice dynamics of solid state physics, and will improve the understanding of the macroscopic mechanical behaviour of these media.

## **Acknowledgement**

This work has been supported by ANR project “grANuLaR” 2006–2009.

## Appendix

The dynamic matrix [D] is composed of the elements

$$D_{1,1} = -\frac{K_N}{m_b} \left[ \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}k_y a}{2}\right) + 2 \cos(k_x a) \right. \\ \left. - 4 \right] - \omega^2,$$

$$D_{1,2} = \frac{K_N}{m_b} \sqrt{3} \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}k_y a}{2}\right),$$

$$D_{1,3} = 0,$$

$$D_{1,4} = -\frac{K_N}{m_b} e^{i\frac{k_y a}{2\sqrt{3}}} \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right),$$

$$D_{1,5} = -\frac{K_N}{m_b} \frac{i e^{i\frac{k_y a}{2\sqrt{3}}}}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right),$$

$$D_{1,6} = \frac{K_N}{m_b} \sqrt{\frac{8}{3}} e^{i\frac{k_y a}{2\sqrt{3}}} \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right),$$

$$D_{2,1} = \frac{K_N}{m_b} \sqrt{3} \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}k_y a}{2}\right),$$

$$D_{2,2} = -\frac{K_N}{m_b} \left[ 3 \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}k_y a}{2}\right) - 4 \right] - \omega^2,$$

$$D_{2,3} = 0,$$

$$D_{2,4} = -\frac{K_N}{m_b} \frac{i e^{i\frac{k_y a}{2\sqrt{3}}}}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right),$$

$$D_{2,5} = -\frac{K_N}{m_b} \left[ \frac{e^{i\frac{k_y a}{2\sqrt{3}}}}{3} \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right) \right. \\ \left. + \frac{2e^{-i\frac{k_y a}{\sqrt{3}}}}{3} \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right) \right],$$

$$D_{2,6} = -i \frac{K_N}{m_b} \frac{\sqrt{8}}{3} \left[ e^{i\frac{k_y a}{2\sqrt{3}}} \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right) \right. \\ \left. - e^{-i\frac{k_y a}{\sqrt{3}}} \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right) \right],$$

$$D_{3,1} = 0,$$

$$D_{3,2} = 0,$$

$$D_{3,3} = 4 \frac{K_N}{m_b} - \omega^2,$$

$$D_{3,4} = \frac{K_N}{m_b} \sqrt{\frac{8}{3}} \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right) e^{i\frac{k_y a}{2\sqrt{3}}},$$

$$D_{3,5} = -i \frac{K_N}{m_b} \frac{\sqrt{8}}{3} \left[ e^{i\frac{k_y a}{2\sqrt{3}}} \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right) \right. \\ \left. - \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right) e^{-i\frac{k_y a}{\sqrt{3}}} \right],$$

$$D_{3,6} = -\frac{K_N}{m_b} \left[ \frac{8}{3} \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right) e^{i\frac{k_y a}{2\sqrt{3}}} \right. \\ \left. + \frac{4}{3} \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right) e^{-i\frac{k_y a}{\sqrt{3}}} \right],$$

$$D_{4,1} = -\frac{K_N}{m_b} e^{-i\frac{k_y a}{2\sqrt{3}}} \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right),$$

$$D_{4,2} = \frac{K_N}{m_b} \frac{i e^{-i\frac{k_y a}{2\sqrt{3}}}}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right),$$

$$D_{4,3} = \frac{K_N}{m_b} \sqrt{\frac{8}{3}} e^{-i\frac{k_y a}{2\sqrt{3}}} \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right),$$

$$D_{4,4} = -\frac{K_N}{m_b} \left[ \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}k_y a}{2}\right) + 2 \cos(k_x a) - 4 \right] \\ - \omega^2,$$

$$D_{4,5} = \frac{K_N}{m_b} \sqrt{3} \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}k_y a}{2}\right),$$

$$D_{4,6} = 0,$$

$$D_{5,1} = \frac{K_N}{m_b} \frac{i e^{-i\frac{k_y a}{2\sqrt{3}}}}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right),$$

$$D_{5,2} = -\frac{K_N}{m_b} \left[ \frac{e^{-i\frac{k_y a}{2\sqrt{3}}}}{3} \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right) \right. \\ \left. + \frac{2e^{i\frac{k_y a}{\sqrt{3}}}}{3} \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right) \right],$$

$$D_{5,3} = -i \frac{K_N}{m_b} \frac{\sqrt{8}}{3} \left[ -e^{-i\frac{k_y a}{2\sqrt{3}}} \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right) \right. \\ \left. + \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right) e^{i\frac{k_y a}{\sqrt{3}}} \right],$$

$$D_{5,4} = \frac{K_N}{m_b} \sqrt{3} \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}k_y a}{2}\right),$$

$$D_{5,5} = -\frac{K_N}{m_b} \left[ 3 \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}k_y a}{2}\right) - 4 \right] - \omega^2,$$

$$D_{5,6} = 0,$$

$$D_{6,1} = \frac{K_N}{m_b} \sqrt{\frac{8}{3}} \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right) e^{-i\frac{k_y a}{2\sqrt{3}}},$$

$$D_{6,2} = -i \frac{K_N}{m_b} \frac{\sqrt{8}}{3} \left[ -e^{-i\frac{k_y a}{2\sqrt{3}}} \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right) \right. \\ \left. + \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right) e^{i\frac{k_y a}{\sqrt{3}}} \right],$$

$$D_{6,3} = -\frac{K_N}{m_b} \left[ \frac{8}{3} \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right) e^{-i\frac{k_y a}{2\sqrt{3}}} \right. \\ \left. + \frac{4}{3} \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}k_z a\right) e^{i\frac{k_y a}{\sqrt{3}}} \right],$$

$$D_{6,4} = 0,$$

$$D_{6,5} = 0,$$

$$D_{6,6} = 4 \frac{K_N}{m_b} - \omega^2.$$



## Bibliographie

- [2.1] H. A. Makse, N. Gland, D. L. Johnson, and L. M. Schwartz. Why effective medium theory fails in granular materials. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :5070–5073, 1999.
- [2.2] J. Jenkins, D. Johnson, L. La Ragione, and H. Makse. Fluctuations and the effective moduli of an isotropic, random aggregate of identical, frictionless spheres. *J. Mech. Phys. Solids*, 53 :197–225, 2005.
- [2.3] L. La Ragione and J. T. Jenkins. The initial response of an idealized granular material. *Proc. R. Soc. A*, 463 :735–758, 2006.
- [2.4] V. Magnanimo, L. La Ragione, J. T. Jenkins, P. Wang, and H. A. Makse. Characterizing the shear and bulk moduli of an idealized granular material. *EPL*, 81 :34006, 2008.
- [2.5] H. M. Jaeger, S. R. Nagel, and R. P. Behringer. The physics of granular materials. *Physics Today*, 49 :32–38, 1996.
- [2.6] P. G. de Gennes. Granular matter : a tentative view. *Rev. Mod. Phys.*, 71 :s374–s382, 1999.
- [2.7] W. Wyart. On the rigidity of amorphous solids. *Ann. Phys. Fr.*, 30 :3–96, 2005.
- [2.8] W. G. Ellenbroek, E. Somfai, M. van Hecke, and W. van Saarloos. Critical scaling in linear response of frictionless granular packings near jamming. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :258001, 2006.
- [2.9] C.-h. Liu, S. R. Nagel, D. A. Schecter, S. M. Coppersmith, S. Majumbar, O. Narayan, and T. A. Witten. Force fluctuations in beads packs. *Science*, 269 :513–515, 1995.
- [2.10] J. Anfosso and V. Gibiat. Elastic wave propagation in a three-dimensional periodic granular medium. *Europhys. Lett.*, 67 :376–382, 2004.
- [2.11] D. L. Blair, N. W. Mueggenbur, A. H. Marshall, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel. Force distributions in three-dimensional granular assemblies : effects of packing order and interparticle friction. *Phys. Rev. E*, 63 :041304, 2001.
- [2.12] Y. Nahmad-Molinari and J. C. Ruiz-Suarez. Epitaxial growth of granular single crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 89 :264302, 2002.
- [2.13] A. B. Yu, X. Z. An, R. P. Zou, R. Y. Yang, and K. Kendall. Self-assembly of particles for densest packing by mechanical vibration. *Phys. Rev. Lett.*, 97 :265501, 2006.
- [2.14] O. Carvente and J. C. Ruiz-Suarez. Crystallization of confined non-brownian spheres by vibrationnal annealing. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :018001, 2005.
- [2.15] Z. Cheng, W. B. Russel, and P. M. Chaikin. Controlled growth of hard-sphere colloidal crystals. *Nature*, 401 :893–895, 1999.
- [2.16] J. D. Joannopoulos. Photonics self-assembly lights up. *Nature*, 414 :257–258, 2001.
- [2.17] A. van Blaaderen, R. Ruel, and P. Wiltzius. Template-directed colloidal crystallisation. *Nature*, 385 :321–324, 1997.
- [2.18] I. I. Tarhan and G. H. Watson. Photonic band structure of fcc colloidal crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 76 :315–318, 1996.
- [2.19] A. V. Akimov et al. Hypersonic modulation of light in three-dimensional photonic and phononic band-gap materials. *Phys. Rev. Lett.*, 101 :033902, 2008.
- [2.20] I. A. Kunin. *Elastic Media with Microstructure, vol. 2, Three-Dimensional Models*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1983.
- [2.21] L. J. Raubenheimer and G. Gilat. Accurate numerical method of calculating frequency distribution functions in solids. II. Extension to hcp crystals. *Phys. Rev.*, 157 :586–599, 1967.

- [2.22] V. Tozzini and M. P. Tosi. Lattice vibrations and elastic constants of crystalline  $^4\text{He}$  and  $^3\text{He}$  near low-temperature melting. *Physica B*, 262 :369–380, 1999.
- [2.23] K. L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [2.24] F. Gassmann. Elastic waves through a packing of spheres. *Geophysics*, 16 :673–685, 1951.
- [2.25] J. Duffy and R. D. Mindlin. Stress-strain relations and vibrations of a granular medium. *ASME Trans. J. Appl. Mech.*, 24 :585–593, 1958.
- [2.26] R. D. Stroll. *Sediment Acoustics*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [2.27] J. E. White. *Underground Sound*. Elsevier, Amsterdam, 1983.
- [2.28] V. Gusev and V. Tournat. How acoustic waves are guided in buried subsurface channels in unconsolidated granular media. *Phys. Rev. E*, 78 :036602, 2008.
- [2.29] O. Mouraille and S. Luding. Sound wave propagation in weakly polydisperse granular materials. *Ultrasonics*, 48 :498–505, 2008.
- [2.30] L. M. Schwartz, D. L. Johnson, and S. Feng. Vibrational modes in granular crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 51 :831–834, 1984.
- [2.31] A. N. Bogdanov and A. T. Skvortsov. Nonlinear shear waves in granular medium. *Sov. Phys. Acoust.*, 38 :224–226, 1992.
- [2.32] V. Tournat, V. E. Gusev, and B. Castagnede. Self-demodulation of elastic waves in a one-dimensional granular chain. *Phys. Rev. E*, 70 :056603, 2004.
- [2.33] A. S. J. Suiker, A. V. Metrikine, and R. de Borst. Comparison of wave propagation characteristics of the cosserat continuum model and corresponding discrete lattice models. *Int. J. Solids Struct.*, 38 :1563–1583, 2001.
- [2.34] I. S. Pavlov, A. I. Potapov, and G. A. Maugin. A 2D granular medium with rotating particles. *Int. J. Solids Struct.*, 43 :6194–6207, 2006.
- [2.35] C. Inserra, V. Tournat, and V. Gusev. A method of controlling wave propagation in initially periodic media. *EPL*, 78 :44001, 2007.
- [2.36] C. Coste and B. Gilles. Sound propagation in a constrained lattice of beads : high frequency behavior and dispersion relation. *Phys. Rev. E*, 77 :021302, 2008.
- [2.37] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin. *Solid State Physics*. Saunders College Publishing, Philadelphia, 1976.
- [2.38] G. P. Srivastava. *The Physics of Phonons*. Taylor and Francis Group, New York, 1990.
- [2.39] B. Velicky and C. Caroli. Pressure dependence of the sound velocity in a two-dimensional lattice of Hertz-Mindlin balls : Mean-field description. *Phys. Rev. E*, 65 :021307, 2002.

## Chapitre 3

# Dispersion of elastic waves in three-dimensional noncohesive granular phononic crystals : properties of rotational modes.

Ce chapitre, rédigé en anglais, est la transcription d'un article publié dans le journal *Physical Review E*<sup>1</sup>. L'étude théorique du chapitre précédent néglige les interactions transverses au niveau des contacts entre les billes. Dans ce chapitre, l'interaction transverse est prise en compte et il est montré qu'une description consistante de la propagation des modes de volumes dans le cristal nécessite la prise en compte des degrés de liberté de rotation de chaque bille. L'étude des relations de dispersion sur une direction de propagation particulière permet d'identifier les modes, leurs symétries, et les composantes de déplacements mises à contribution dans chacun d'eux. L'effet d'un chargement statique externe anisotrope sur le spectre des modes normaux est étudié. La théorie est écrite dans le but d'effectuer des comparaisons quantitatives avec des résultats expérimentaux, elle se base sur les descriptions connues et validées des milieux granulaires.

### Abstract

The dispersion relations of bulk modes propagating within a hexagonal close-packed structure of noncohesive monodisperse spherical elastic beads are derived. The contacts are modeled by two springs with stiffnesses given by the Hertz-Mindlin theory, one for normal interactions and one for transverse interactions. The existence of the transverse interaction requires to take into account the rotational degrees of freedom of the beads in the analysis. This leads to the prediction of translational modes and, due to the rotational degrees of freedom, of rotational modes and coupled rotational and translational modes. The study of the dispersion relations in a direction of high symmetry allows to identify the different modes and the influence of the rotational degrees of freedom on the bulk mode propagation. The evaluated dispersion relations provide guidelines for the experimental observation of rotational modes. Opportunities for controlling the dispersion laws of the modes by an external loading on the granular structure are discussed.

---

<sup>1</sup>A. Merkel, V. Tournat and V. Gusev. Dispersion of elastic waves in three-dimensional noncohesive granular phononic crystals : properties of rotational modes. *Phys. Rev. E*, 82 :031305, 2010

### 3.1 Introduction

A precompressed regular arrangement of monodisperse beads forms a granular phononic crystal. Thanks to the combination of the phononic properties (these imply that the crystal is precompressed externally and the acoustic perturbations are small compared to the static loading) with the nonlinear behavior of the granular assemblies [3.1], a growing number of applications involving granular crystals is expected [3.2]. Such media are available at different scales, from periodic arrangements of nanospheres to centimeter scale packings. Therefore, the frequency range covered by the acoustic applications could be wide.

Nevertheless, in the case of noncohesive aggregates, even the quasistatic behavior is complex [3.3–3.5]. But the dynamical behavior is even more complex and less understood because of the discrete character of the medium which causes wave dispersion [3.6, 3.7]. Also, the macroscopic dynamical behavior depends on the peculiar contact interactions between the spheres at the microscopic level, which is well described by the Hertz-Mindlin theory of contact [3.8–3.10]. According to this theory, and in the first approximation, a granular crystal can be reduced to a mass-spring structure (the contacts between the spheres are considered as springs), and the description of wave propagation shows analogies with lattice dynamics of the solid state physics [3.11–3.14].

However, in the dynamics of solids where the size of the mass is assumed to be negligible compared to the distance between particles, the rotational degrees of freedom of individual atoms are not included in the calculation of phonon dispersion relations. In contrast, the size of the mass in the case of granular media is comparable to the distance between neighbors. This is why, considering the existence of a shear rigidity, a consistent description of the dynamics of granular media needs to take into account the rotational degrees of freedom of the beads [3.15]. Rotation is usually included in the description of the static behavior of granular media [3.16, 3.17]. There exist studies of dispersion including rotation in two-dimensional mass-spring structures [3.18, 3.19]. The obtained results are compared to the Cosserat microcontinuum theory. These works make use of contact models different from the (widely used in granular media) Hertz-Mindlin contact model between noncohesive solid spheres. In the studies on the dynamical behavior of two-dimensional granular structures, rotation is rarely included and, when it is, the works are limited to the long wavelength behavior [3.20]. In three-dimensional granular crystals, some phononic features have been reported [3.21–3.23] with a focus on the wave propagation in the fluid saturating the structure, but without any physical description of the modes propagating within the crystal. There are few studies of the dispersion relations of granular crystals [3.24] but, to the best of our knowledge, there is no description of the bulk mode dispersion for the hexagonal close-packed structure which is stable and easy to build experimentally. Furthermore, the addition of the rotation in the calculation allows to predict the existence of rotational waves.

In addition, from the Hertz-Mindlin theory of contact, the rigidities of the springs connecting the masses depend on the static loading applied on the contact. The dispersion laws can significantly change between an isotropic static loading and an anisotropic loading. There is currently a growing interest to the realization of tunable photonic or phononic crystals. The influence of the acoustic waves [3.25] and static deformation [3.26] on the optical properties of the photonic crystals composed of spherical particles was demonstrated. It was also demonstrated that hypersonic band gaps in colloidal crystals can be tuned by changing the particle size or the sound velocity in the infiltrated fluid [3.27]. In granular media, the tunability of wave propagation properties in linear and nonlinear regime in a one-dimensional chain of beads has been reported [3.28, 3.29]. Below, our theoretical predictions shows that the acoustic band gaps and propagation windows in noncohesive granular crystals can be efficiently modified by the mechanical external loading.

Another key feature for wave propagation in real granular crystals is the existence of a complex distribution of contact forces within the crystal [3.30]. Consequently, even for geometrically ordered structures, there exists a disorder in the static contact network. Recently, some crystallization (or

ordering) methods for granular media with vibration driven epitaxial growth and vibrational annealing have been developed [3.31–3.33], and also, three-dimensional periodic arrangement of nanospheres or microspheres have been efficiently prepared by self-assembly of colloidal suspensions of spheres [3.34–3.36]. A consistent description of the wave propagation in perfectly ordered granular crystals is expected to contribute to the diagnosis of disorder in such real structures although the contact interactions at the micro- and nano-scale involving different physical mechanisms can differ from the Hertz-Mindlin theory of contact.

The first part of the present paper exposes the general theoretical evaluation of the dispersion relations of the bulk eigenmodes in a hexagonal close-packed (hcp) granular structure considering the degrees of freedom in translation [3.37] and, importantly, also in rotation. The second part focuses on the description of the eigenmodes along the  $z$  axis for which we found analytically compact dispersion relations. The influence of the external loading on the dispersion of the wave in the structure is finally emphasized. The obtained results are enough realistic to allow quantitative comparison with experiments.

## 3.2 Bulk mode dispersion relations

### 3.2.1 Hexagonal close-packed structure

The considered crystalline structure is the hexagonal close-packed (hcp) structure, which is stable and easy to build experimentally. This structure is a vertical stacking of hexagonal layers A and B (see Fig. 3.1), which are in the closest possible position relative to each others, in an ABAB... sequence. Then, the 3D hcp structure consists of two interpenetrating simple 2D hexagonal Bravais lattices shifted parallel to the horizontal layers [3.11, 3.12].

The hcp structure can be seen as a hexagonal Bravais lattice with a basis of two contacting beads (one on the layer A and one on the layer B). In order to describe the geometry of the structure, we derive the following vector, which gives the position of the different beads in the hcp structure,

$$\mathbf{R}^{l,p,q} = a\left(\frac{l}{2} + p + \frac{1 - (-1)^q}{4}\right)\mathbf{x} + a\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2l - \frac{1 - (-1)^q}{3}\right)\mathbf{y} + a\sqrt{\frac{2}{3}}q\mathbf{z}, \quad (3.1)$$

where  $l, p, q$  are the integer indexes of the bead  $(l, p, q)$  and  $a$  is the diameter of the beads. The vectors  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ , and  $\mathbf{z}$  form a Cartesian system of coordinates. The vector  $\mathbf{z}$  is perpendicular to the horizontal hexagonal layers and the vectors  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{y}$  are in the plane of the horizontal hexagonal layers as shown in Fig. 3.1. The distances between the centers of two neighboring beads given by the vector of position have been checked to be always equal to the diameter of the beads. It should be noticed that the vector (3.1) is different from the vector of bead position in [3.38].

### 3.2.2 Equations of motion for translation and rotation

The dispersion relations are deduced from the equations of motion for translation and rotation for the two contacting beads of the basic cell. The equations of motion for translation can be written as

$$m_b \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{l,p,q}}{\partial t^2} = \sum_{l',p',q'} \mathbf{F}^{(l',p',q')(l,p,q)}, \quad (3.2)$$

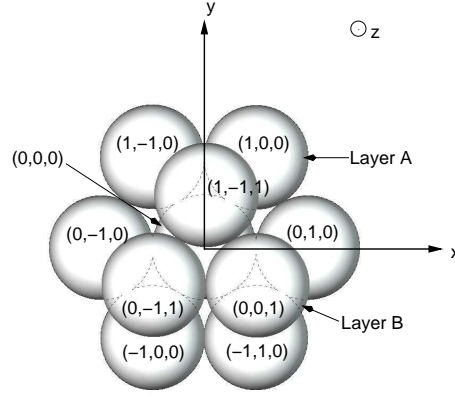


FIG. 3.1 – The hexagonal close-packed structure with the coordinate system for the position vector of the beads.

where  $\mathbf{F}^{(l',p',q')(l,p,q)}$  is the force applied by the bead  $(l',p',q')$  on the bead  $(l,p,q)$ ,  $\mathbf{u}^{l,p,q}$  is the displacement of the bead  $(l,p,q)$ , and  $m_b$  is the mass of one bead. The equations of motion for rotation calculated for the two contacting beads of the basic cell can be written as

$$I \frac{\partial^2 \mathbf{w}^{l,p,q}}{\partial t^2} = \sum_{l',p',q'} \mathbf{M}^{(l',p',q')(l,p,q)}, \quad (3.3)$$

where  $\mathbf{M}^{(l',p',q')(l,p,q)}$  is the torque applied by the bead  $(l',p',q')$  on the bead  $(l,p,q)$ ,  $\mathbf{w}^{l,p,q}$  is the rotation angle of the bead  $(l,p,q)$ , and  $I$  is the moment of inertia. The moment of inertia represents the inertia of a rigid body with respect to its rotation, and it depends on the distance between the distribution of the mass and the axes of rotation. The moment of inertia of a homogeneous sphere is equal to  $I_0 = (2/5)m_b(a/2)^2$ . In order to carry out the calculations for a crystal composed of spheres with radial inhomogeneity of density, the moment of inertia is written here as  $I = \epsilon_I I_0$  with  $0 \leq \epsilon_I \leq 5/3$ . This will be more discussed in Sec. 3.3.3.

### 3.2.3 Hertz-Mindlin theory

According to the Hertz-Mindlin theory [3.9] for a contact between two elastic spheres with the same diameter  $a$ , the force-displacement relations can be splitted between normal displacements and shear displacements. The relation between the normal relative displacement  $h$  and the normal component of the applied contact force  $N$  can be written as

$$h = 2 \left[ \frac{3(1-\nu^2)N}{4E\sqrt{a/2}} \right]^{2/3}, \quad (3.4)$$

where  $E$  is the Young's modulus and  $\nu$  is the Poisson's ratio of the material constituting the beads. The relation between the shear relative displacement  $\delta$ , the shear component of the contact force  $T$ , and the normal component of the contact force  $N$  can be written as

$$\delta = \mu_f(2-\nu)(1+\nu) \left( \frac{9N^2}{8a(1-\nu^2)E^2} \right)^{1/3} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{T}{\mu_f N} \right)^{2/3} \right], \quad (3.5)$$

where  $\mu_f$  is the coefficient of friction.

These relations (3.4) and (3.5) are nonlinear. In the case of small perturbations around a static loading



applied on the contact (with an applied static normal force  $N_0$  and  $T \ll \mu_f N_0$ ), the Hertz-Mindlin laws can be linearized. This allows to consider each contact as two simple springs [3.9], one for normal interactions with the stiffness

$$K_N = \left( \frac{3a}{8} N_0 \right)^{1/3} E^{2/3} (1 - \nu^2)^{-2/3}, \quad (3.6)$$

and one for shear interactions with the stiffness

$$K_S = (3aN_0)^{1/3} E^{2/3} \frac{(1 - \nu^2)^{1/3}}{(1 + \nu)(2 - \nu)}. \quad (3.7)$$

In this case, the incremental force induced by the small motions is assumed to be proportional to the relative displacements. The dependences of the rigidities on the static normal force induce the interesting property that it is possible to modify the bulk mode propagation by an external loading applied on the crystal [3.39] as it will be shown in Sec. 3.3.4.

### 3.2.4 Projection of forces and torques

In order to evaluate the projections of the forces and the torques, it is convenient to use at the contact between two spheres a local Cartesian system of coordinates [3.40] defined by the unit vectors  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{t}$

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{1}{a} (\mathbf{R}^{l',p',q'} - \mathbf{R}^{l,p,q}) = \sin \phi \cos \theta \mathbf{x} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{y} + \cos \phi \mathbf{z}, \\ \mathbf{s} &= \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \phi} = \cos \phi \cos \theta \mathbf{x} + \cos \phi \sin \theta \mathbf{y} - \sin \phi \mathbf{z}, \\ \mathbf{t} &= \mathbf{n} \times \mathbf{s} = -\sin \theta \mathbf{x} + \cos \theta \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

where  $\phi = \arccos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{z})$  and  $\theta = \arccos[\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} / \sin(\phi)]$ . The vector  $\mathbf{n}$  is normal to the contact plane and the vectors  $\mathbf{s}$  and  $\mathbf{t}$  are in the contact plane.

With the local system of coordinates and the linearization of Hertz-Mindlin laws [Eqs. (3.6) and (3.7)], the projections on  $x, y, z$  axes of the forces applied by a bead  $(l', p', q')$  on a bead  $(l, p, q)$  read [3.16]

$$\begin{aligned} F_\alpha^{(l',p',q')(l,p,q)} &= K_N n_\alpha n_\beta (u_\beta^{l',p',q'} - u_\beta^{l,p,q}) + K_S (s_\alpha s_\beta + t_\alpha t_\beta) \left[ (u_\beta^{l',p',q'} - u_\beta^{l,p,q}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\gamma\iota} D_\gamma^{(l',p',q')(l,p,q)} (w_\iota^{l',p',q'} + w_\iota^{l,p,q}) \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

where the subscripts  $\alpha, \beta, \gamma$  and  $\iota$  denote the Cartesian vector components  $x, y$  and  $z$ ,  $\varepsilon_{\beta\gamma\iota}$  is the Levi-Civita (permutation) symbol, and

$$\mathbf{D}^{(l',p',q')(l,p,q)} = \mathbf{R}^{l',p',q'} - \mathbf{R}^{l,p,q}. \quad (3.10)$$

Equation (3.9) uses the Einstein convention of summation over the repeated indexes. In Eq. (3.9), relative displacements at the contact are deduced from the relative rotation angles with the help of a vectorial cross product, and are then included in the calculus of the applied force. The relation (3.9) takes into account that bending rigidity of noncohesive contacts is negligible.

The projections on  $x, y, z$  axis of the torque applied by a bead  $(l', p', q')$  on a bead  $(l, p, q)$  are given by

$$M_\alpha^{(l',p',q')(l,p,q)} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} D_\beta^{(l',p',q')(l,p,q)} F_\gamma^{(l',p',q')(l,p,q)}. \quad (3.11)$$

### 3.2.5 Bloch theorem

The solutions of Eqs. (3.2) and (3.3) can be found using a plane wave substitution. Displacements are substituted in the form [3.11–3.14]

$$u_{\alpha}^{l,p,q} = A_{\alpha}^c e^{-ik_{\beta}(R_{\beta}^{l,p,q} - R_{\beta}^{0,0,0})} e^{i\omega t}, \quad (3.12)$$

and rotation angles are substituted in the form

$$w_{\alpha}^{l,p,q} = B_{\alpha}^c e^{-ik_{\beta}(R_{\beta}^{l,p,q} - R_{\beta}^{0,0,0})} e^{i\omega t}, \quad (3.13)$$

in Eqs. (3.2) and (3.3) for the bead  $(0, 0, 0)$  (the first bead of the basic cell) with the contact forces applied by the twelve neighbor beads. The index  $c$  is equal to 0 or 1 if the bead belongs to the even layers (including the layer 0) or odd layers, respectively.  $A$  and  $B$  are the amplitudes and  $\omega$  is the cyclic frequency. Similarly, displacements are substituted in the form

$$u_{\alpha}^{l,p,q} = A_{\alpha}^c e^{-ik_{\beta}(R_{\beta}^{l,p,q} - R_{\beta}^{0,0,1})} e^{i\omega t}, \quad (3.14)$$

and rotation angles are substituted in the form

$$w_{\alpha}^{l,p,q} = B_{\alpha}^c e^{-ik_{\beta}(R_{\beta}^{l,p,q} - R_{\beta}^{0,0,1})} e^{i\omega t}, \quad (3.15)$$

in Eqs. (3.2) and (3.3) for the bead  $(0, 0, 1)$  (the second bead of the basic cell).

### 3.2.6 Evaluation of the dynamical matrix and its eigenvalues

The projections of the four evaluated equations of motion (two equations for each of the two beads of the basis) give a set of 12 equations (six degrees of freedom for each of the two beads of the basis) and yields

$$[\mathbf{D}]\mathbf{X} - \omega^2\mathbf{X} = 0, \quad (3.16)$$

where  $[\mathbf{D}]$  is the dynamical matrix [3.11–3.14] and

$$\mathbf{X} = [u_x^{0,0,0}, u_y^{0,0,0}, u_z^{0,0,0}, u_x^{0,0,1}, u_y^{0,0,1}, u_z^{0,0,1}, w_x^{0,0,0}, w_y^{0,0,0}, w_z^{0,0,0}, u_x^{0,0,1}, u_y^{0,0,1}, u_z^{0,0,1}]. \quad (3.17)$$

The eigenvalues of the Hermitian matrix  $[\mathbf{D}]$  provide the dependences of  $\omega^2$  on the wave numbers  $k_{\alpha}$ . In other words, the eigenvalues of  $[\mathbf{D}]$  provide the dispersion relations of the bulk modes propagating in the crystal.

The dispersion curves corresponding to the irreducible Brillouin zone [3.41] are plotted in Fig. 3.3 and compared to the dispersion relations of Fig. 3.2 when rotation is not included. The coordinates of the boundary points in the reciprocal space  $(k_x, k_y, k_z)$  of the first Brillouin zone are

$$\Gamma = (0, 0, 0), \quad K = (0, \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{a}, 0), \quad M = (\frac{2}{3}\frac{\pi}{a}, \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{a}, 0), \quad A = (0, 0, \sqrt{\frac{3}{8}}\frac{\pi}{a}). \quad (3.18)$$

The cyclic frequency  $\omega$  is normalized to the cut-off cyclic frequency

$$\omega_c = \sqrt{\frac{8K_N + 4K_S}{m_b}}, \quad \text{i.e., } \omega' = \frac{\omega}{\omega_c}, \quad (3.19)$$



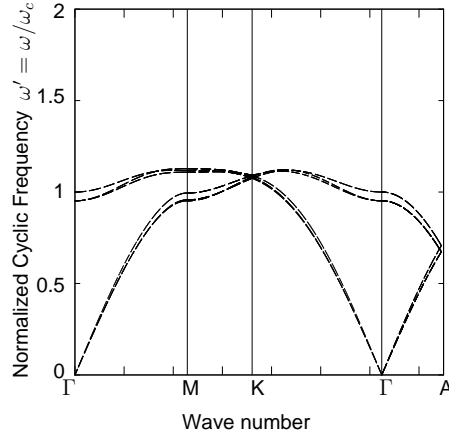


FIG. 3.2 – Normalized dispersion curves of a hcp granular crystal without the rotational degrees of freedom of the beads, along the contour of the first Brillouin zone, with  $\nu = 0.3$  and  $\epsilon_I = 1$ .

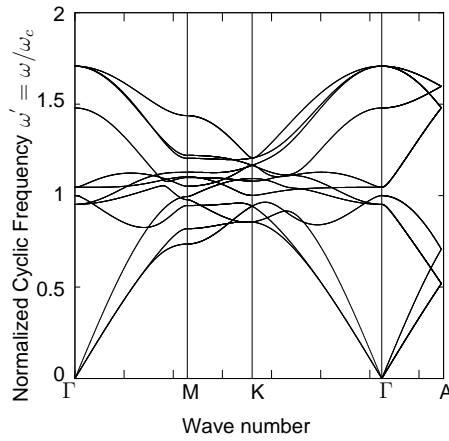


FIG. 3.3 – Normalized dispersion curves of a hcp granular crystal including the rotational degrees of freedom of the beads, along the contour of the first Brillouin zone, with  $\nu = 0.3$  and  $\epsilon_I = 1$ .

which is the highest cyclic frequency at the point  $\Gamma$  of the contour of the irreducible Brillouin zone when rotation is not taken into account. From Eqs. (3.6) and (3.7), the dispersion relations are evaluated considering the ratio

$$\Delta_K = \frac{K_S}{K_N} = \frac{2(1-\nu)}{2-\nu} \quad (3.20)$$

with  $\nu = 0.3$  (e.g., value of  $\nu$  for steel) and  $\epsilon_I = 1$ .

In the hcp structure, the unit cell is composed of two masses and, from this peculiarity, when rotation is neglected, the theory predicts the existence of two different types of modes. At the point  $\Gamma$  of the contour of the Brillouin zone ( $k = 0$ ), the cyclic frequency of the first type of modes is zero, these modes are called acoustical-type modes. The cyclic frequency of the second type of modes is different from zero, these modes are called optical-type modes (see Figs. 3.2 and 3.3).

In the long wavelength limit ( $ka \ll 1$ ) for the acoustical-type modes, the propagation of vibration can be decomposed in compressional and shear waves. In the case when the rotation is not included, the ratio of compressional to shear wave velocities in the direction of propagation  $z$  for  $\epsilon_I = 1$  is given by

$$\frac{V_L}{V_S} = \left[ 4 \frac{3-2\nu}{12-11\nu} \right]^{1/2}. \quad (3.21)$$

In this case, for  $\nu = 0.3$ ,  $V_L/V_S \simeq 1.05$ . To the best of our knowledge, a ratio  $V_L/V_S \simeq 1$  has never been measured in experiments in granular media and it currently looks unrealistic. The effect of rotation is thus supposed to play an important role even for translational modes. In the case when the rotation is included, the ratio of compressional to shear wave velocities in the direction of propagation  $z$  for  $\epsilon_I = 1$  is given by

$$\frac{V_L}{V_S} \simeq \left[ 4 \frac{3 - 2\nu}{6 - 5\nu} \right]^{1/2}, \quad (3.22)$$

which is consistent with previous results [3.42]. Here, for  $\nu = 0.3$ ,  $V_L/V_S \simeq 1.46$ , which currently looks more realistic than Eq. 3.21.

In conclusion, when the rotational degrees of freedom are included, it allows the prediction of rotational modes, but it has also an influence on the translational modes as emphasized in the study of the eigenmodes in the direction  $z$  of propagation in the next section.

### 3.3 Study of the eigenmodes propagating along $z$ direction

#### 3.3.1 Dispersion relations when rotation is not included

Along the direction of high symmetry  $z$  (segment  $\Gamma - A$  of the contour of the Brillouin zone), compact eigenvalues of the dynamical matrix can be found analytically. In the case of an anisotropic loading applied on the crystal, and because of the different orientations of the contact planes in space, the static loading on the contacts can differ from one contact to another. As seen in Eqs. (3.6) and (3.7), the stiffnesses of the contacts depend on the static loading. An anisotropic loading can be taken into account considering different rigidities for the different contacts depending on their orientations in space. In order to consider an uniaxial loading along the direction of propagation of the waves, contacts of two categories can be distinguished : the first one for the beads belonging to the same horizontal layer (the contact planes are vertical), the second one for the beads belonging to different horizontal layers (the contact planes are not vertical). These two categories of contacts have two different rigidities  $K_N, K_S$  and  $K'_N, K'_S$  respectively. The ratio of the rigidities of the two categories is

$$\epsilon_K = \frac{K_N}{K'_N} = \frac{K_S}{K'_S}, \quad 0 \leq \epsilon_K. \quad (3.23)$$

The cyclic frequency  $\omega$  in the dispersion relations is normalized to the cyclic frequency

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{K'_N}{m_b}}, \quad \text{i.e., } \Omega = \frac{\omega}{\Omega_c}. \quad (3.24)$$

From the eigenvalues of the dynamical matrix and their associated eigenvectors, the following modes with their dispersion relations are found when the rotational degrees of freedom are not taken into account :

- two pure longitudinal modes, one acoustical-type (the nonzero components of the eigenvector are  $u_z^{0,0,0} = u_z^{0,0,1} = 1$ )

$$\Omega_{LA}^2 = 4(2 + \Delta_K) \sin^2(\kappa), \quad (3.25)$$

and one optical-type (the nonzero components of the eigenvector are  $u_z^{0,0,0} = -u_z^{0,0,1} = 1$ )

$$\Omega_{LO}^2 = 4(2 + \Delta_K) \cos^2(\kappa), \quad (3.26)$$

where  $\kappa = k_z a / \sqrt{6}$  is the normalized wave number,

- two branches each composed of two degenerated transverse modes, one acoustical-type branch (the nonzero components of the eigenvectors are  $u_x^{0,0,0} = u_x^{0,0,1} = 1$  and  $u_y^{0,0,0} = u_y^{0,0,1} = 1$ )

$$\Omega_{TA}^2 = 2(1 + 5\Delta_K) \sin^2(\kappa), \quad (3.27)$$

and one optical-type branch (the nonzero components of the eigenvectors are  $u_x^{0,0,0} = -u_x^{0,0,1} = 1$  and  $u_y^{0,0,0} = -u_y^{0,0,1} = 1$ )

$$\Omega_{TO}^2 = 2(1 + 5\Delta_K) \cos^2(\kappa), \quad (3.28)$$

For the plane waves propagating along  $z$  direction, there is no relative displacement between the beads belonging to the same horizontal layer. This is why the first category of contacts does not contribute to the dispersion relations when the rotational degrees of freedom are not included.

The dispersion curves are plotted in the case of an isotropic loading with different values of the Poisson's ratio  $\nu$  in Figs. 3.4-3.6.

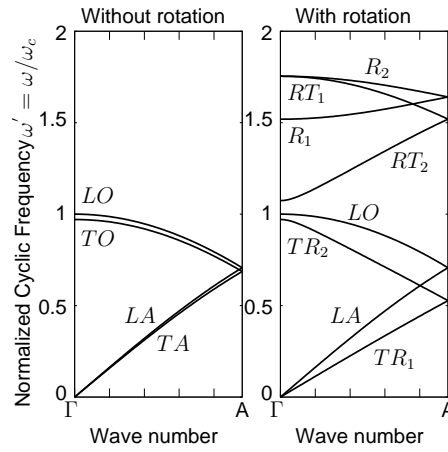


FIG. 3.4 – Comparison between the dispersion relations along  $z$  axis without and with the rotational degrees of freedom, with  $\nu = 0.2$ ,  $\epsilon_I = 1$ , and  $\epsilon_K = 1$ .

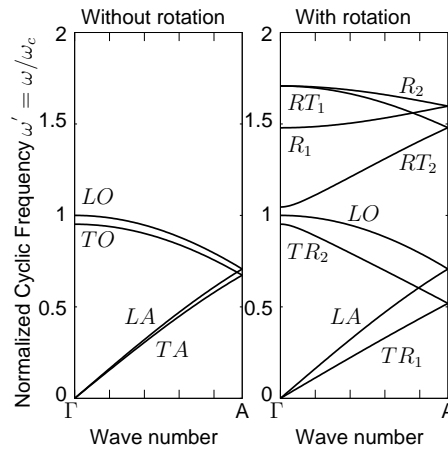


FIG. 3.5 – Comparison between the dispersion relations along  $z$  axis without and with the rotational degrees of freedom, with  $\nu = 0.3$ ,  $\epsilon_I = 1$ , and  $\epsilon_K = 1$ .

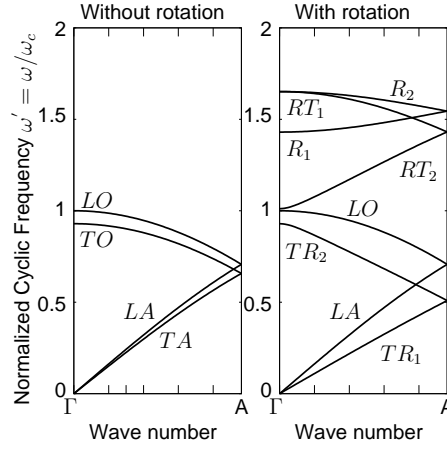


FIG. 3.6 – Comparison between the dispersion relations along  $z$  axis without and with the rotational degrees of freedom, with  $\nu = 0.4$ ,  $\epsilon_I = 1$ , and  $\epsilon_K = 1$ .

### 3.3.2 Dispersion relations when rotation is included

The dispersion relations (3.25)-(3.28) can be compared to those obtained when the rotational degrees of freedom are taken into account. The following dispersion relations are found in the latter case :

- two pure longitudinal modes, one acoustical-type

$$\Omega_{LA}^2 = 4(2 + \Delta_K) \sin^2(\kappa), \quad (3.29)$$

and one optical-type

$$\Omega_{LO}^2 = 4(2 + \Delta_K) \cos^2(\kappa), \quad (3.30)$$

- two pure rotational modes (rotation along  $z$  direction), one with out-of-phase rotations between the beads of the layers A and B (the nonzero components of the eigenvector are  $w_z^{0,0,0} = -w_z^{0,0,1} = 1$  as exposed on Fig. 3.7)

$$\Omega_{R_1}^2 = 10 \frac{\Delta_K}{\epsilon_I} [3\epsilon_K + \sin^2(\kappa)], \quad (3.31)$$

and one with in-phase rotations between the beads of the layers A and B (the nonzero components of the eigenvector are  $w_z^{0,0,0} = w_z^{0,0,1} = 1$  as exposed on Fig. 3.7)

$$\Omega_{R_2}^2 = 10 \frac{\Delta_K}{\epsilon_I} [3\epsilon_K + \cos^2(\kappa)], \quad (3.32)$$

- four branches each composed of two degenerated coupled transverse and rotational modes (the nonzero components of the eigenvectors are  $u_x^{0,0,0}$ ,  $u_x^{0,0,1}$ ,  $w_y^{0,0,0}$ ,  $w_y^{0,0,1}$  and  $u_y^{0,0,0}$ ,  $u_y^{0,0,1}$ ,  $w_x^{0,0,0}$ ,  $w_x^{0,0,1}$ )

$$\begin{aligned} \Omega_{RT_1, TR_1}^2 = & (1 + 5\Delta_K) \sin^2(\kappa) + \frac{1}{\epsilon_I} \left\{ \frac{25\Delta_K}{2} \cos^2(\kappa) + \frac{15\epsilon_K \Delta_K}{2} \pm \left[ \left( \frac{25\Delta_K}{2} \cos^2(\kappa) + \frac{15\epsilon_K \Delta_K}{2} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - 5\epsilon_I \Delta_K \left( (5 - 23\Delta_K) \cos^2(\kappa) + 3\epsilon_K (1 + 5\Delta_K) \right) \sin^2(\kappa) + \epsilon_I^2 (1 + 5\Delta_K)^2 \sin^4(\kappa) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

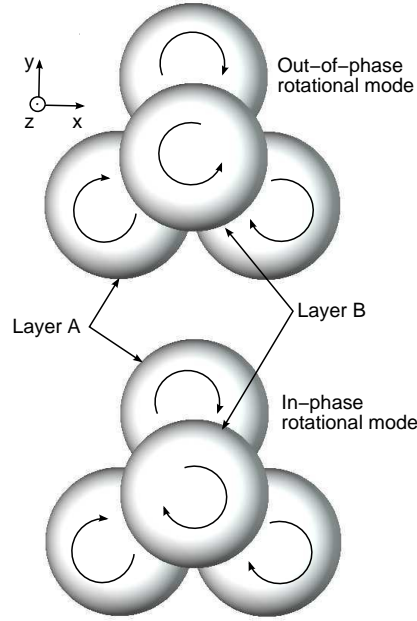


FIG. 3.7 – Rotations of the beads of the two layers for the out-of-phase rotational mode  $R_1$  and for the in-phase rotational mode  $R_2$ .

and

$$\Omega_{RT_2, TR_2}^2 = (1 + 5\Delta_K) \cos^2(\kappa) + \frac{1}{\epsilon_I} \left\{ \frac{25\Delta_K}{2} \sin^2(\kappa) + \frac{15\epsilon_K \Delta_K}{2} \pm \left[ \left( \frac{25\Delta_K}{2} \sin^2(\kappa) + \frac{15\epsilon_K \Delta_K}{2} \right)^2 - 5\epsilon_I \Delta_K \left( (5 - 23\Delta_K) \sin^2(\kappa) + 3\epsilon_K (1 + 5\Delta_K) \right) \cos^2(\kappa) + \epsilon_I^2 (1 + 5\Delta_K)^2 \cos^4(\kappa) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (3.34)$$

The dispersion relations of the longitudinal modes  $LA$  and  $LO$  are the same as those in the absence of rotation [Eqs. (3.27) and (3.28)]. The addition of the rotational degrees of freedom in the calculation has no influence because, from symmetry considerations, a longitudinal relative displacement cannot be coupled with a relative rotation angle. Importantly, when the rotational degrees of freedom are taken into account, two new pure rotational modes  $R_1$  and  $R_2$  are predicted.

In the case of an isotropic loading, at the point  $\Gamma$  of the contour of the Brillouin zone ( $\kappa = 0$ ), the cyclic frequency of the branch  $TR_1$  (minus sign of the dispersion relations [Eq. (3.33)]) is zero : it is an acoustical-type mode. The cyclic frequencies of the other branches  $RT_1$  (plus sign of the dispersion relations [Eq. (3.33)]),  $TR_2$  and  $RT_2$  (minus and plus sign, respectively, of the dispersion relation [Eq. (3.34)]) are different from zero : these modes are optical-type modes. The cyclic frequency of the mode  $TR_2$  is equal to the cyclic frequency of the transverse optical-type mode  $TO$ . On the segment  $\Gamma - A$  of the contour of the Brillouin zone, the frequency range covered by the modes  $TR_1$  and  $TR_2$  is equal to the frequency range covered by the modes  $TA$  and  $TO$ . The modes  $TR_1$  and  $TR_2$  are called transverse-rotational modes. The order of the words transverse-rotational is here chosen to emphasize the similarities of the dispersion relations of the modes  $TR_1$  and  $TR_2$  with the dispersion relations of the modes  $TA$  and  $TO$ . The modes  $TR_1$  and  $TR_2$  can be considered as transverse modes, modified by the presence of rotation.

The branches  $RT_1$  and  $RT_2$  with the plus sign of the dispersion relations [Eqs. (3.33) and (3.34)] represent the rotational-transverse modes. The order of the word rotational-transverse is chosen to emphasize that there is no similar modes when the rotational degrees of freedom are not taken into account. The cyclic frequencies of these two modes  $RT_1$  and  $RT_2$  are higher than the

cyclic frequencies of the modes  $TR_1$  and  $TR_2$ . In the literature, these modes are sometimes called microrotation waves [3.43]. Nevertheless, it is important to note that the modes  $TR_2$  and  $RT_2$  have the same symmetry. It is possible to assign a symmetry to each vibrational mode, which labels the symmetry operations that are not removed by the vibrations. In the language of group theory, each vibrational mode corresponds to a single irreducible representation of the point group of the particular wave vector [3.13]. This means that these modes can interact and their dispersion curves cannot cross. The point where the dispersion curves of modes  $RT_2$  and  $TR_2$  repel each other can be brought to light for  $\kappa = 0$  with the condition

$$C_{ac} \equiv \frac{15\epsilon_K(1-\nu)}{12-11\nu} - \epsilon_I = 0. \quad (3.35)$$

In the case of an isotropic loading ( $\epsilon_K = 1$ ) with a crystal of homogeneous rigid spheres ( $\epsilon_I = 1$ ), the point of anti-crossing cannot be reached with a physically valid value of  $\nu$  ( $\nu$  must be higher than 0.5). This anti-crossing effect is illustrated in Fig. 3.8, the cyclic frequencies for  $\kappa = 0$  of the modes  $TR_2$  and  $RT_2$  have been plotted as a function of  $\epsilon_K$ . If  $C_{ac} < 0$ , the cyclic frequency  $TR_2$  for  $\kappa = 0$  is below the cyclic frequency of the mode  $TO$  and the frequency range covered by the modes  $TR_1$  and  $TR_2$  is smaller than the frequency range covered by the modes  $TA$  and  $TO$ .

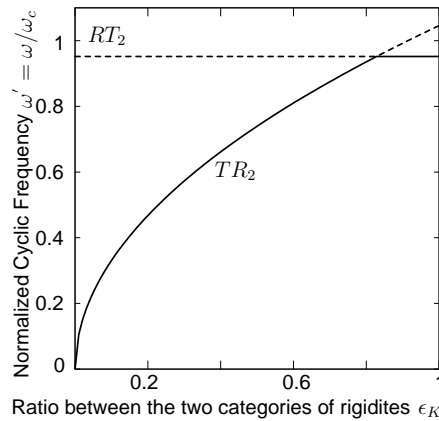


FIG. 3.8 – Illustration of the anti-crossing effect with the dependence of the cyclic frequencies of the modes  $RT_2$  (dashed line) and  $TR_2$  (full line) at the point  $\Gamma$  of the contour ( $\kappa = 0$ ) on the ratio  $\epsilon_K$ , with  $\epsilon_I = 1$ , and  $\nu = 0.3$ .

Similarly, the modes  $RT_1$  and  $TR_1$  have the same symmetry, the point where these modes repel can be brought to light for  $\kappa = \pi/2$  with the same condition (3.35).

### 3.3.3 Influence of the moment of inertia

In order to analyze the effects of rotation, the moment of inertia of the beads can be changed. If  $\epsilon_I$  is equal to 1, the moment of inertia is the one of a homogeneous sphere. The maximum moment of inertia for a sphere is reached in the case where the total mass is localized at its surface. In this case  $\epsilon_I$  is equal to  $5/3$ . The corresponding dispersion curves are shown in Fig. 3.9.

In the case where the mass is localized at the center of the sphere,  $\epsilon_I$  tends to zero. This latter case is closer to the model of an atom. If  $\epsilon_I$  tends to zero, the dispersion curves of the longitudinal modes  $LA$  and  $LO$  remain the same as illustrated in Fig. 3.10. The cyclic frequencies of the two pure rotational modes  $R_1$  and  $R_2$  and the two rotational-transverse modes  $RT_1$  and  $RT_2$  tend to infinity. The dispersion relations of the transverse-rotational modes can be found through a Taylor expansion of Eqs. (3.33) and (3.34) with  $\epsilon_I \rightarrow 0$  and read

$$\Omega_{TR_1}^2 \approx \left( 2 + 5\Delta_K + \Delta_K \frac{15\epsilon_K - 23 \cos^2(\kappa)}{3\epsilon_K + 5 \cos^2(\kappa)} \right) \sin^2(\kappa), \quad (3.36)$$

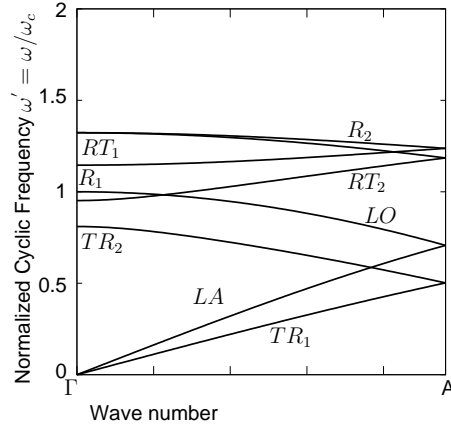


FIG. 3.9 – Normalized dispersion curves along  $z$  direction within a hcp crystal composed of beads for which the moment of inertia is set at the maximum :  $\epsilon_I = 5/3$ , with  $\epsilon_K = 1$  and  $\nu = 0.3$ .

and

$$\Omega_{TR_2}^2 \approx \left( 2 + 5\Delta_K + \Delta_K \frac{15\epsilon_K - 23 \sin^2(\kappa)}{3\epsilon_K + 5 \sin^2(\kappa)} \right) \cos^2(\kappa). \quad (3.37)$$

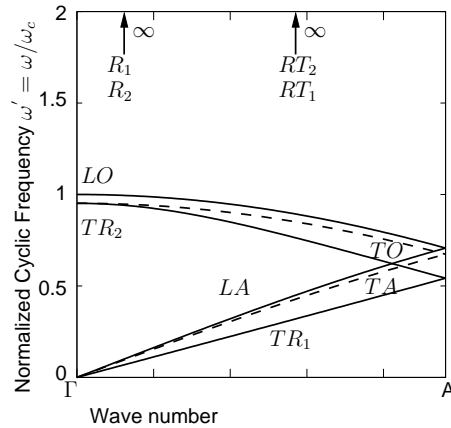


FIG. 3.10 – Normalized dispersion curves along  $z$  direction within a hcp crystal composed of beads for which the moment of inertia is set at the minimum :  $\epsilon_I \rightarrow 0$  (full line). Comparison with the dispersion curves of the modes  $TA$  and  $TO$  when the rotational degrees of freedom are not taken into account (dashed line), with  $\nu = 0.3$  and  $\epsilon_K = 1$ .

The comparison between Eqs. (3.36) and (3.37) on one hand with Eqs. (3.27) and (3.28) on the other hand, which are clearly different, confirms the expectation that the limit  $I \rightarrow 0$  does not correspond to freezing of the rotational degrees of freedom. In the case  $I \rightarrow 0$ , Eqs. (3.2) and (3.9) provide the kinematic (geometrical) relations between displacement and rotation angles. The influence of the rotation angles comes from the nonzero distance between the center of the spheres and the points where the forces are applied, i.e.  $D^{(l',p',q')}(l,p,q)$  in Eq. (3.9). The rotation dominated modes still exist although their frequencies are asymptotically becoming infinitely high. The rotational degrees of freedom could be formally frozen considering  $I \rightarrow \infty$ , but this limit is not meaningful physically, because it is impossible to infinitely increase the moment of inertia of a sphere with a fixed mass and diameter. In granular matter, the rotational degrees of freedom can be frozen in the case of frictionless beads where the shear interactions are negligible. The dispersion relations of a hcp structure of noncohesive frictionless beads are given in [3.37]. In conclusion, the obtained results



clearly demonstrate that it is necessary to take into account the rotational degrees of freedom when there is a shear contact rigidity in order to correctly describe the shear dominated modes.

### 3.3.4 Anisotropic loading on the crystal

In the case of an isotropic external loading, the cyclic frequencies of the modes can be modified by increasing or decreasing the external loading but the dispersion structure remains the same. If an anisotropic loading is applied, for instance if the loading is applied along only one peculiar direction, the dispersion relations are significantly modified. This section exposes the example of one configuration of loading, different from the isotropic loading. In an infinite crystal along  $x$  and  $y$  axes, in the case of an uniaxial loading along  $z$  direction (for instance by the gravity), the components in the  $x, y$  plane of the forces applied by three beads of a layer B, each of them submitted to a same vertical force, to a bead of a neighboring layer A cancel each other out as illustrated in Fig. 3.11.

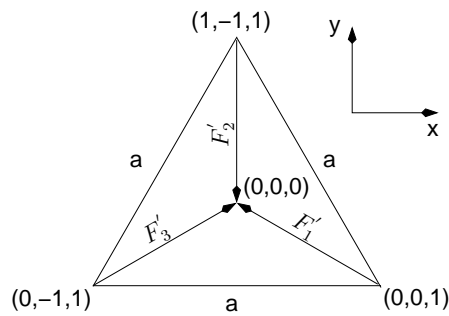


FIG. 3.11 – Components  $F'_1$ ,  $F'_2$  and  $F'_3$  on  $x, y$  plane of the forces applied on a bead of the layer A by three beads of the layer B. All the beads of the layer B are loaded by the same vertical force.

This can be easily generalized to each bead within the crystal and therefore, each bead location within the crystal is determined only by the six contacts with the beads from the neighboring horizontal layers (position of minimum potential). In the Hertz-Mindlin theory the strain is assumed to be strongly localized near the loaded contacts, while the rest of the sphere is not deformed. Thus the deformation of the loaded contacts from beads of different horizontal layers does not lead to any displacement of the contacts between the beads of the same horizontal layer, which are sufficiently separated from the loaded contacts. Thus the vertical contacts (between beads of the same horizontal layer) remain unstrained and unloaded. The dispersion relations are evaluated considering that  $\epsilon_K = K_N = K_S = 0$  and are shown in Fig. 3.12.

With the anisotropic loading, the dispersion relations of the longitudinal modes  $LA$  and  $LO$  are not modified. The cyclic frequencies of all the others modes depend on the ratio  $\epsilon_K$ . The anisotropy has a strong influence on the dispersion of the modes  $R_1$  and  $TR_2$  for which the cyclic frequency at  $\kappa = 0$  is controlled by the vertical stiffnesses. The modes  $R_1$  and  $TR_2$ , which are optical-type in the case of an isotropic static loading, are acoustical-type in this configuration of loading (their cyclic frequencies are zero for  $\kappa = 0$ ). It follows from the modifications of the dispersion curves that the phase and group velocities of the modes depend on the loading as emphasized in the next section.

### 3.3.5 Group velocities

The analytical expressions of the dispersion relations allow easy evaluations of phase velocities  $c_\phi = \omega/k$  and group velocities  $c_g = \partial\omega/\partial k$  of the modes. Figure 3.13 shows the group velocities of the modes for which the phase and group velocities have the same sign (modes  $LA$ ,  $R_1$ ,  $TR_1$ , and  $RT_2$ ) in the case of an isotropic loading. For comparison, Fig. 3.14 shows the group velocities of



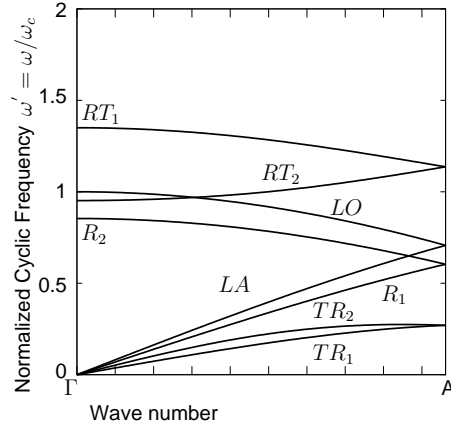


FIG. 3.12 – Normalized dispersion curves along  $z$  direction in the case of an uniaxial external loading along the  $z$  direction :  $\epsilon_K = 0$ , with  $\nu = 0.3$ , and  $\epsilon_I = 1$ .

the same modes in the case of an uniaxial loading along the  $z$  direction. The group velocities  $v_g$  are normalized by the group velocity  $v_{gc}$  of the mode  $LA$  at the point  $\Gamma$  of the contour :

$$v_{gc} = a\Omega_c \sqrt{\frac{2(2 + \Delta_K)}{3}}. \quad (3.38)$$

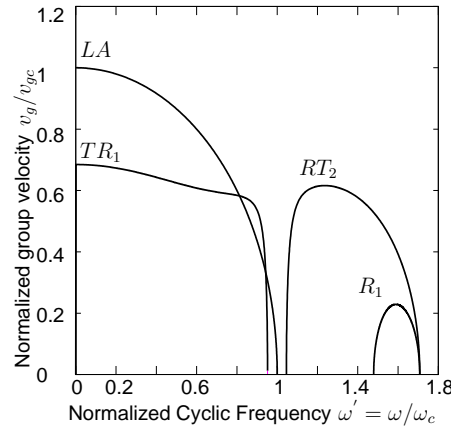


FIG. 3.13 – Normalized group velocities of the modes  $LA$ ,  $TR_1$ ,  $RT_2$ , and  $R_1$  along the  $z$  direction in the case of an isotropic loading :  $\epsilon_K = 1$ , with  $\nu = 0.3$  and  $\epsilon_I = 1$ .

In the case of an isotropic loading, the maxima of the group velocities of the modes  $TR_1$  and  $RT_2$  are nearly equal to  $0.7v_{gc}$  and  $0.6v_{gc}$  respectively. In the case of an uniaxial loading along  $z$  direction, the maxima of the modes  $TR_1$  and  $RT_2$  are nearly equal to  $0.45v_{gc}$ . The most significant change is for the maximum of the group velocity of the mode  $R_1$ , which is nearly equal to  $0.2v_{gc}$  in the case of an isotropic loading, while it reaches nearly  $0.85v_{gc}$  when only an uniaxial loading is applied. These results demonstrate that the frequency band and the group velocities of the bulk modes propagating within a granular crystal can be controlled externally with different configurations of loading applied on the crystal. The evaluation of these group velocities as function of frequency could allow for comparison with experiments, especially in the study of acoustic wave packet propagation.

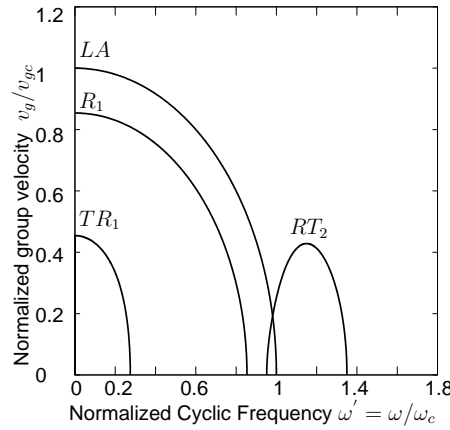


FIG. 3.14 – Normalized group velocities of the modes  $LA$ ,  $TR_1$ ,  $RT_2$ , and  $R_1$  along the  $z$  direction in the case of an uniaxial loading along the  $z$  direction :  $\epsilon_K = 0$ , with  $\nu = 0.3$  and  $\epsilon_I = 1$ .

### 3.3.6 Study of the frequency band gap between the modes $LO$ and $RT_2$

As seen in Figs. 3.4-3.6, a frequency band gap can appear between the modes  $LO$  and  $RT_2$ . If  $C_{ac} > 0$ , the width at the point  $\Gamma$  ( $\kappa = 0$ ) of the frequency band gap is written as

$$\Delta_\omega = \frac{\omega_{RT_2} - \omega_{LO}}{\omega_{RT_2}} = \left( \frac{15 \epsilon_K (1 - \nu)}{4 \epsilon_I (3 - 2\nu)} \right)^{1/2} - 1. \quad (3.39)$$

With decreasing values of  $\nu$ , the ratio  $\Delta_K$  and the width of the frequency band gap between  $LO$  and  $RT_2$  increase. Moreover, the maximum cyclic frequency increases as well (cyclic frequency of the modes  $RT_1$  for  $\kappa = 0$ ). For  $\nu = 0.2$  (e.g., values of  $\nu$  for glass) in the case of an isotropic loading, the width of the band gap  $\Delta_\omega$  is nearly equal to 7.4%. The highest frequency of bulk mode propagation is about  $1.75\omega_c$ . For  $\nu = 0.3$  (e.g., values of  $\nu$  for steel),  $\Delta_\omega$  is about 4.6% and the highest cyclic frequency is about  $1.71\omega_c$ . For  $\nu = 0.4$  (e.g., values of  $\nu$  for Plexiglas),  $\Delta_\omega$  is about 1.1% and the highest cyclic frequency is about  $1.65\omega_c$ . The width of the frequency band gap is also dependent on the ratio  $\epsilon_K$ , i.e., it can be controlled externally with the applied external loading.

## 3.4 Conclusion

The dispersion relations of the bulk modes propagating in a hcp granular crystal have been theoretically evaluated considering all degrees of freedom of the beads. It is demonstrated that the presence of a shear rigidity requires to take into account the rotational degrees of freedom for a correct description of shear dominated modes. The theory predicts the existence of translational, rotational, and coupled translational and rotational modes. By including the rotational degrees of freedom, the two dispersion curves in the direction perpendicular to the horizontal layers of the transverse modes are splitted into two coupled rotational and transverse branches, yielding four branches of coupled rotational and transverse modes. In the case of an isotropic loading, the two modes covering the same frequency range as the transverse optical-type and acoustical-type modes are called transverse-rotational modes. The two branches that are of higher frequencies correspond to rotational-transverse modes. This distinction is made to emphasize the differences between the dispersion relations of the four branches, although this distinction is not linked to the symmetry of the modes. Additionally, two new pure rotational modes are predicted. Finally, we show that the longitudinal modes remain unchanged when rotation is included. The evaluation of the dispersion relations shows that the wave propagation within the crystal is highly dispersive and could allow for better comparison with experiments. For instance, due to the existence of coupled rotational and transverse modes, measurements of the shear component of the waves could reveal the influence of the rotational degrees of freedom. In addition, it is shown that there is an opportunity to highly modify the group velocities of the modes with different configurations of external loading. The theoretical study of the linear wave propagation in perfectly ordered crystal is a necessary step before inserting into the theory such improvement as the nonlinear effects of propagation or the disorder in the static contact network. It is expected that this work will contribute to a better understanding of the dynamical behavior of noncohesive granular crystals [3.6, 3.7].

## acknowledgments

This work has been supported by ANR project "grANuLar" Project No. NT05-3 41989.

## Bibliographie

- [3.1] V. F. Nesterenko. *Dynamics of Heterogeneous Materials*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [3.2] V. Tournat and V. Gusev. Acoustics of unconsolidated "model" granular media : an overview of recent results and several open problems. *Acta Acustica united with Acustica*, 96 :208, 2010.
- [3.3] H. A. Makse, N. Gland, D. L. Johnson, and L. M. Schwartz. Why effective medium theory fails in granular media. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :5070–5073, 1999.
- [3.4] L. La Ragione and J. T. Jenkins. The initial response of an idealized granular material. *Proc. R. Soc. A*, 463 :735–758, 2007.
- [3.5] V. Magnanimo, L. La Ragione, J. T. Jenkins, P. Wang, and H. A. Makse. Characterizing the shear and bulk moduli of an idealized granular material. *EPL*, 81 :34006, 2008.
- [3.6] H. M. Jaeger, S. R. Nagel, and R. P. Behringer. The physics of granular materials. *Physics Today*, 49 (4) :32–38, 1996.
- [3.7] P. G. de Gennes. Granular matter : a tentative view. *Rev. Mod. Phys.*, 71 :s374–s382, 1999.
- [3.8] R. D. Mindlin and H. Deresiewicz. Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *ASME J. Appl. Mech.*, 75 :327–344, 1953.
- [3.9] J. Duffy and R. D. Mindlin. Stress-strain relations and vibrations of a granular medium. *ASME Trans. J. Appl. Mech.*, 24 :585–593, 1958.
- [3.10] V. Tournat, V. E. Gusev, and B. Castagnède. Self-demodulation of elastic waves in one-dimensional granular chain. *Phys. Rev. E*, 70 :056603, 2004.
- [3.11] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin. *Solid State Physics*. Saunders College Publishing, Philadelphia, 1976.
- [3.12] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley and Sons, New York, 1966.
- [3.13] M. T. Dove. *Introduction to Lattice Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [3.14] G. P. Srivastava. *The Physics of Phonons*. Taylor and Francis Group, New York, 1990.
- [3.15] L. M. Schwartz, D. L. Johnson, and S. Feng. Vibrational modes in granular media. *Phys. Rev. Lett.*, 52 :831–834, 1984.
- [3.16] J. T. Jenkins and M. A. Koenders. The incremental response of random aggregates of round particles. *Eur. Phys. J. E*, 13 :113–123, 2004.
- [3.17] I. Agnolin and J.-N. Roux. On the elastic moduli of three-dimensional assemblies of spheres : characterization and modeling fluctuations in the particle displacement and rotation. *Int. J. Solids Struct.*, 45 :1101–1123, 2008.
- [3.18] A. S. J. Suiker, A. V. Metrikine, , and R. de Borst. Comparison of wave propagation characteristics of the Cosserat continuum model and corresponding discrete lattice models. *Int. J. Solids Struct.*, 38 :1563–1583, 2001.
- [3.19] I. S. Pavlov, A. I. Potapov, , and G. A. Maugin. A 2D granular medium with rotating particles. *Int. J. Solids Struct.*, 43 :6194–6207, 2006.
- [3.20] B. Velicky and C. Caroli. Pressure dependence of the sound velocity in a two-dimensional lattice of Hertz-Mindlin balls : mean-field description. *Phys. Rev. E*, 65 :021307, 2002.
- [3.21] Z. Liu, C. T. Chan, P. Cheng, A. L. Goertzen, and J. H. Page. Elastic wave scattering by periodic structures of spherical objects : theory and experiment. *Phys. Rev. B*, 62 :2446–2457, 2000.

- [3.22] S. Yang, J. H. Page, Z. Liu, M. L. Cowan, C. T. Chan, and P. Sheng. Ultrasound tunneling through 3D phononic crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 88 :104301, 2002.
- [3.23] S. Yang, J. H. Page, Z. Liu, M. L. Cowan, C. T. Chan, and P. Sheng. Focusing sound in a 3D phononic crystal. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :024301, 2004.
- [3.24] O. Mouraille, W. A. Mulder, and S. Luding. Sound wave acceleration in granular materials. *J. Stat. Mech. , Theory Exp.*, page P07023, 2006.
- [3.25] V. A. Akimov et al. Hypersonic modulation of light in three-dimensional photonic and phononic band-gap materials. *Phys. Rev. Lett.*, 101 :033902, 2008.
- [3.26] A. C. Arsenault et al. From colour fingerprinting to the control of photoluminescence in elastic photonic crystals. *Nature Materials*, 5 :179–184, 2006.
- [3.27] W. Cheng, J. Wang, U. Jonas, G. Fytas, and N. Stefanou. Observation of tuning of hypersonic bandgaps in colloidal crystals. *Nature Materials*, 5 :830–836, 2006.
- [3.28] E. B. Herbold, J. Kim, V. F. Nesterenko, S. Y. Wang, and C. Daraio. Pulse propagation in linear and nonlinear diatomic periodic chain : effects of acoustic frequency band-gap. *Acta Mech*, 205 :85–103, 2009.
- [3.29] C. Daraio, V. F. Nesterenko, E. B. Herbold, and S. Jin. Tunability of solitary wave properties in one-dimensional strongly nonlinear phononic crystals. *Phys. Rev. E*, 73 :026610, 2006.
- [3.30] C. Coste and B. Gilles. Sound propagation in a constrained lattice of beads : high-frequency behavior and dispersion relation. *Phys. Rev. E*, 77 :021302, 2008.
- [3.31] Y. Nahmad-Molinari and J. C. Ruiz-Suarez. Epitaxial growth of granular single crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 89 :264302, 2002.
- [3.32] A. B. Yu, X. Z. An, R. P. Zou, R. Y. Yang, and K. Kendall. Self-assembly of particles for densest packing by mechanical vibration. *Phys. Rev. Lett.*, 97 :265501, 2006.
- [3.33] O. Carvente and J. C. Ruiz-Suarez. Crystallization of confined non-brownian spheres by vibrational annealing. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :018001, 2005.
- [3.34] Z. Cheng, W. B. Russel, and P. M. Chaikin. Control growth of hard-sphere colloidal crystals. *Nature*, 401 :893–895, 1999.
- [3.35] J. D. Joannopoulos. Self-assembly lights up. *Nature*, 414 :257–258, 2001.
- [3.36] A. van Blaaderen, R. Ruel, and P. Wiltzius. Template-directed colloidal crystallization. *Nature*, 385 :321–324, 1997.
- [3.37] A. Merkel, V. Tournat, and V. Gusev. Elastic waves in noncohesive granular crystals. *Ultrasonics*, 50 :133–138, 2010.
- [3.38] F. Gassmann. Elastic waves through a packing of spheres. *Geophysics*, 16 :673–685, 1951.
- [3.39] C. Inserra, V. Tournat, and V. Gusev. A method of controlling wave propagation in initially spatially periodic media. *EPL*, 78 :44001, 2007.
- [3.40] C. S. Chang and J. Gao. Non-linear dispersion of plane wave in granular media. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 30 :111–128, 1995.
- [3.41] L. J. Raubenheimer and G. Gilat. Accurate numerical method of calculating frequency distribution functions in solids. II. Extension to hcp crystals. *Phys. Rev.*, 157 :586–599, 1967.
- [3.42] J. P. Castagna, M. L. Batzle, and R. L. Eastwood. Relationships between compressional-wave and shear-wave velocities in clastic silicate rock. *Geophysics*, 50, 1985.
- [3.43] R. de Borst and L. J. Sluys. Localisation in a Cosserat continuum under static and dynamic loading conditions. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 90 :805–827, 1991.



## Chapitre 4

# Observation of rotational waves in granular crystal : experimental validation of the Cosserat continuum theory

Ce chapitre, rédigé en anglais, est la transcription d'un article qui sera prochainement soumis. L'objectif est de comparer les résultats théoriques obtenus au chapitre 3 avec des mesures expérimentales. Afin de valider la description théorique de la propagation de modes de volume dans un cristal granulaire, la propagation d'ondes acoustiques est étudiée expérimentalement sur la direction de propagation analysée théoriquement. Les fréquences de coupure observées expérimentalement sont comparées avec celles prédites théoriquement et les composantes des ondes transmises à travers le cristal sont recherchées afin de vérifier les correspondances avec les prédictions théoriques. Les relations de dispersion théoriques sont comparées plus précisément aux résultats expérimentaux à travers l'étude des temps d'arrivée en fonction de la fréquence.

### **abstract**

A generalized theory of elasticity has been developed at the beginning of the twentieth century by the Cosserat brothers. This theory, also called micropolar theory, takes into account the rotational degrees of freedom of the point bodies constituting the continuum. The theory predicts the existence of new types of elastic wave modes, pure rotational modes and coupled rotational-translational modes. This theory has been widely used to describe the behavior of solids with microstructure but there still exists no convincing experimental evidence of its validity in granular media. We report here the experimental observation of the coupled rotational-translational modes in a noncohesive granular phononic crystal of monodisperse elastic beads.



## 4.1 Introduction

One hundred years ago, the Cosserat brothers have developed a continuum elasticity theory accounting for the rotational degrees of freedom of point bodies (infinitesimal particles) constituting deformable solids [4.1]. Currently, this theory is known as the Cosserat theory and the related and advanced theories are known as the theories of Cosserat continuum or as the theories of micropolar continuum [4.2]. In the Cosserat theory, each material point has six degrees of freedom, three of which correspond to the translations as in the classical theory of elasticity, and the three others correspond to rotations. The stress tensor is asymmetric and an additional couple-stress tensor is introduced, which plays the same role for torques as the stress tensor plays for forces.

The Cosserat theory predicts the contribution of rotations to the elastic response of the material to external loading, which becomes dependent on the sample dimensions. It predicts also a contribution to the dispersion of the shear elastic wave velocity as well as the existence of additional rotational wave modes [4.3]. For the description of an isotropic medium, the classical elasticity requires the knowledge of the elastic constants  $\lambda$  and  $\mu$  (the Lamé constants) and the material density  $\rho$ . The Cosserat theory requires four additional elastic constants  $\alpha, \varepsilon, \gamma, \beta$  describing the microstructure and the density of the momentum of inertia  $J$  [4.2, 4.4]. However, even one hundred years after the Cosserats, the experimental evidence of the Cosserat effects are rare, difficult to obtain and submitted to criticisms [4.2, 4.3, 4.5]. The determination and calibration of the additional Cosserat elastic constants from static or quasistatic experiments is delicate. The determination of the Cosserat constant based on size effects requires in many cases the preparation of very small samples where the effect of surface preparation can be important. The velocity dispersion of shear waves predicted in the Cosserat continuum is difficult to distinguish in experiments from contributions due to other possible physical mechanisms such as viscoelasticity for instance [4.3, 4.5]. Expected additional frequency resonances in the vibration of micropolar elastic bodies [4.6] have never been experimentally observed. The rotational wave modes, in addition of the classical wave modes, have been detected in crystalline solids [4.2]. The detection of rotational waves in other materials [4.7] is subject to criticisms [4.3]. This latter phenomenon is, in our opinion, the most crucial observation that can provide convincing experimental evidence of the effect of the rotational degrees of freedom. The classical elasticity as well as the other generalized continuum theories such as void elasticity or nonlocal elasticity do not predict the existence of the rotational modes [4.3]. The rotational waves in the Cosserat continuum theory is often considered as an admitted mathematical possibility, but proving their actual existence by experiments constitute a serious endeavor [4.8].

In granular media, the macroscopic dynamical behavior depends on the peculiar contact interactions between the spheres at the microscopic level, which is well described by the Hertz-Mindlin theory of contact [4.9]. According to this theory, in the first approximation, a weakly precompressed granular crystal can be reduced to a mass-spring structure (the contact points between the spheres are modeled by two springs, one for normal interactions and one for shear interactions). The size of the grains is comparable to the distance between neighbors and a consistent description of the dynamics of granular media necessitates to take into account the rotational degrees of freedom of the beads [4.10, 4.11]. The rotational degrees of freedom are included in studies of homogeneously loaded granular assemblies [4.12], but the studies are limited to low-frequency acoustical-type modes and do not mention the rotational modes. In numerical [4.13] and analytical [4.11] studies, the rotational modes have been predicted in a face centered cubic and hexagonal closed-packed granular crystals, respectively. However, until now, there is no direct experimental proof of the existence of the rotational waves in solids with granular structure [4.8].

Here we report the experimental observations of rotational elastic waves. In a hexagonal closed-packed (hcp) structure of monodisperse elastic beads, the theory predicts the existence of translational modes, rotational modes and coupled rotational and translational modes [4.11]. The existence of cou-

pled rotational and translational modes provides an opportunity to observe these waves through the detection of their translational components. The periodicity of the structure allows to find the dispersion relations of the modes and define frequency bands for propagation of the different modes which ease the identification of the propagation modes. To the best of our knowledge, the frequency band of the propagating elastic waves induced by the rotation of the beads in granular crystals have never been investigated experimentally. At frequencies much lower than the rotational frequency bands, only the dispersionless longitudinal and shear acoustic waves had been monitored in the classical experiments [4.9]. At frequencies much higher than the rotational frequency bands, the elastic signals related to torsional and spheroidal resonances of the individual beads and Rayleigh wave propagation on the surface of the individual beads had been detected [4.14, 4.15]. In our experiments, due to the relatively weak static loading applied on the crystal, the rotational waves frequencies are about ten times lower than the lowest vibrational resonances of the individual beads. The difficulties of the investigations of the wave propagation in granular crystal come in particular from the existence of a complex distribution of contact forces within the crystal. Even for ordered structures, disorder at the microscopic level of the contacts exists. A weak polydispersity of the beads induces chain forces within the crystal and this could significantly influence the propagation of acoustic waves. The correlation between theoretical dispersion relations and experimental results is difficult and, to the best of our knowledge, convincing results have been reported only for two-dimensional lattice of elastic beads [4.16].

## 4.2 Experimental setup and theoretical predictions

A hcp crystal of 27 layers of noncohesive stainless steel beads is built inside a plexiglas cell of an equilateral triangular base in which an exact number of particle fits in the first layer as shown in Fig. 4.1(a). The bottom of the container is a aluminium plate with an imprint of a hexagonal lattice. The diameter of the beads is 2 mm and the vertical distance of propagation is nearly 44 mm. The crystal is carefully built layer by layer removing manually the defects. The crystal is excited from the bottom with a shear transducer. In order to discriminate the translational components of the transmitted acoustic waves, two different transducers, which are in contact with the beads, are used for the detection at the top of the crystal, a compressional transducer which is sensitive only to the longitudinal modes and a shear transducer which is sensitive to both longitudinal and shear modes. The comparison of the spectrum of the two received signals allows to determine the polarization of the wave at a given frequency. The elastic waves propagate in the direction perpendicular to the horizontal hexagonal layers i.e., in the  $z$  direction as exposed in Fig. 4.1(a). In this direction of propagation, the theory [4.11] predicts the existence of two pure longitudinal modes  $LA$  and  $LO$ , two pure rotational modes  $R_1$  and  $R_2$  and four coupled transverse and rotational modes  $RT_1$ ,  $TR_1$ ,  $RT_2$  and  $TR_2$ . The four coupled transverse and rotational modes can be splitted in two categories, the transverse-rotational modes ( $TR$ ), which are modified transverse modes, and the rotational-transverse modes ( $RT$ ) which do not exist if the rotational degrees of freedom are not taken into account. The dispersion relations in the  $z$  direction are exposed in Fig. 4.1(b) with the dispersion curves corresponding to the segment from the point  $\Gamma = (0, 0, 0)$  to the point  $A = (0, 0, \sqrt{3}\pi/[\sqrt{8}a])$  of the irreducible Brillouin zone in the reciprocal space  $(k_x, k_y, k_z)$ . The space group of the hcp structure contains a sixfold screw axis (or a sixfold axis of rotation-inversion) along the  $z$  axis. A screw axis is a symmetry operation with a combination of a rotation about an axis and a translation parallel to that axis that leaves the crystal unchanged. From this, the frequencies of pair branches at the boundary along the  $z$  axis of the irreducible Brillouin zone become degenerate [4.17, 4.18], the gradient of the upper branch is equal to the negative of the gradient of the lower branch. All pair of modes whose dispersion curves cross at

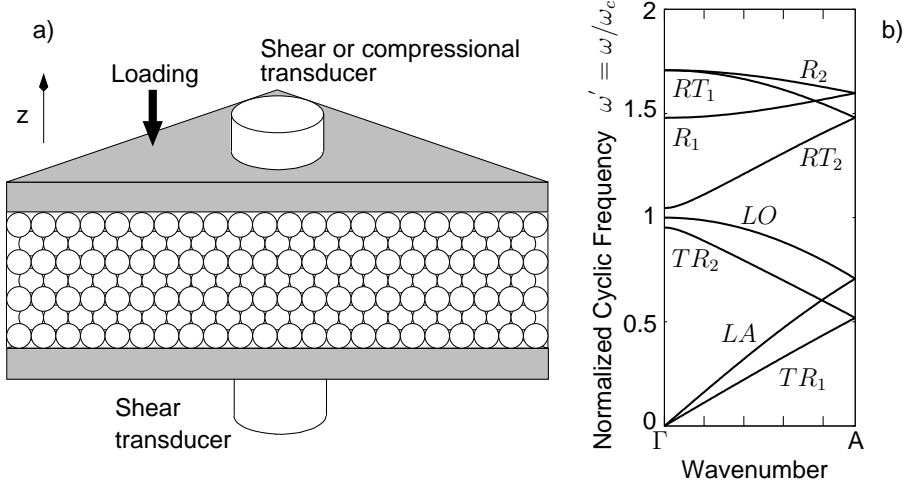


FIG. 4.1 – a) scheme of the experimental setup. b) theoretical dispersion relations in the  $z$  direction in hcp granular crystal. The cyclic frequency is normalized to the cut-off cyclic frequency of the mode  $LO$ .

the point  $A$  of the contour degenerate at this point (the modes  $LO$  and  $LA$  for instance). It is therefore possible to consider the dispersion relations in an extended zone, from the point  $\Gamma$  to the point  $2A$ , and unfold the dispersion curves of a modes pair to obtain a complete dispersion curve. This leads to four dispersion relations for the modes  $L$ ,  $TR$ ,  $RT$  and  $R$ , which include the mode pairs  $LA$  and  $LO$ ,  $TR_1$  and  $TR_2$ ,  $RT_1$  and  $RT_2$ ,  $R_1$  and  $R_2$ , respectively. The modes  $L$  and  $RT$  have the highest cut-off frequencies for the translational and rotational frequency range, respectively (the cut-off frequency of the mode  $RT$  merges with the one of the mode  $R$ ). The propagative frequency bands depend on the rigidities of the contacts which depend on the static loading applied on the contacts. The cut-off frequency of the mode  $L$  is given by [4.11]

$$F_L^c = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{2(2 + \Delta_K)(3aN_0)^{\frac{1}{3}} E^{\frac{2}{3}}}{m_b(1 - \nu^2)^{\frac{2}{3}}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.1)$$

where  $m_b$  is the mass of one bead,  $a$  is the diameter of the beads,  $E$  and  $\nu$  are the Young's modulus and Poisson's ratio of the material constituting the beads, respectively,  $N_0$  is the static normal forces applied on the contacts and  $\Delta_K = 2(1 - \nu)/(2 - \nu)$  is the ratio of shear to normal rigidities of the contacts [4.9]. The cut-off frequency of the mode  $RT$ , which is the highest frequency for which the corresponding wavenumber is real, is given by  $F_{RT}^c = [10\Delta_K/(2 + \Delta_K)]^{\frac{1}{2}} F_L^c$ .

### 4.3 Experimental results

The measurement are carried out with three different external loadings corresponding to three values of static force applied on the contacts, 2 mN, 5 mN and 10 mN per contact. The applied normal force  $N_0$  is assumed to be the same for all the contacts. From these loadings, the evaluated cut-off frequencies [Eq. (4.1)] for the mode  $L$  are between 60 kHz and 79 kHz, and the evaluated cut-off frequencies of the mode  $RT$  are between 103 kHz and 135 kHz. For the estimations, we used  $\nu = 0.3$ ,  $E = 200$  GPa and  $m_b = 3.6 \cdot 10^{-2}$  g. The  $z$  direction is also the direction of gravity, the cut-off frequencies are estimated twice, once with the static loading at the top of the crystal and the second time with the weight of the crystal at the bottom added to the static loading. The source signal is a burst wave with a central frequency increasing from 40 kHz to 200 kHz by step of 2.5 kHz with a gaussian envelope leading to a 3.5 kHz width of burst at -3 dB. The amplitude is chosen to be

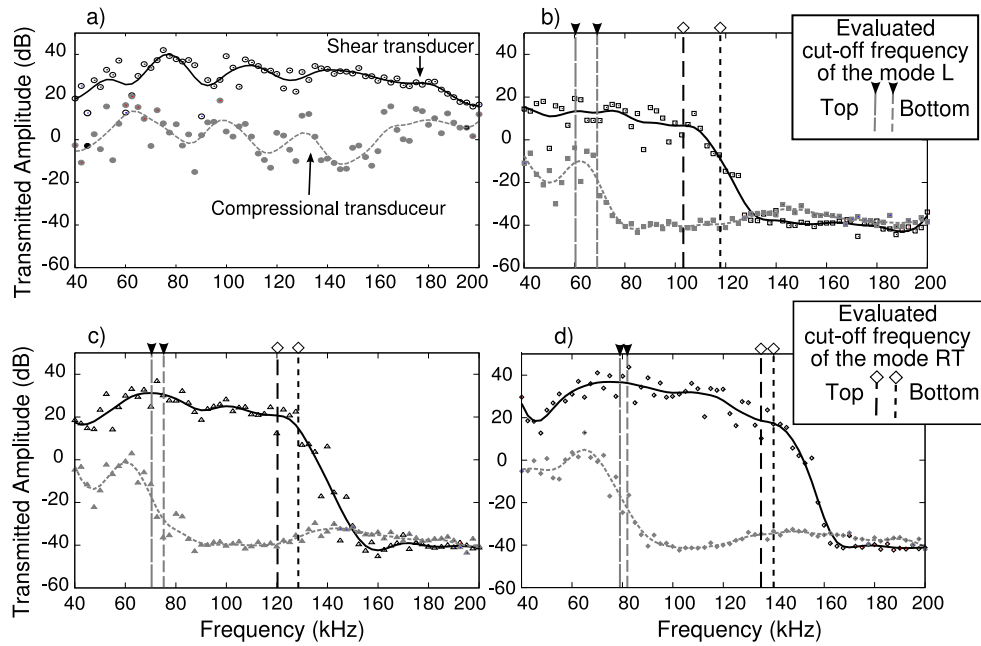


FIG. 4.2 – Transmitted amplitude versus frequency measured with the shear (black line), and compressional (gray dashed line) transducers. (a) : The wave transmittance in the absence of granular crystal. (b), (c), (d) : the transmittance measured under a static loading of 2 mN, 5 mN and 10 mN per contact, respectively. The corresponding loading at the bottom are 4.4 mN, 7.4 mN and 12.4 mN per contact, respectively.

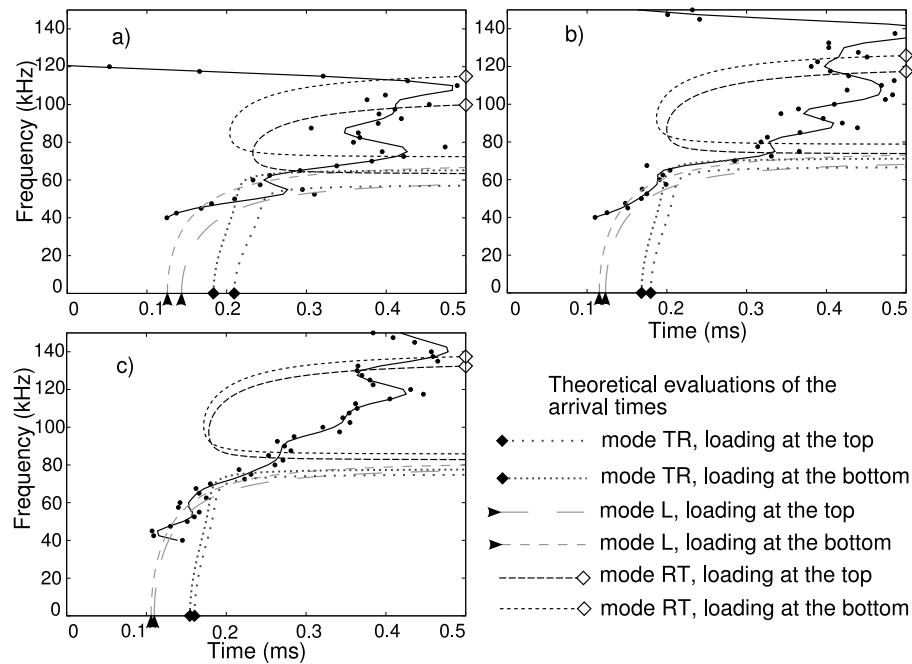


FIG. 4.3 – Comparison of the arrival time of the different experimental pulses detected with a shear transducer with the theoretical evaluation of the arrival times. (a), (b), (c) : the arrival times measured under a static loading of 2 mN, 5 mN and 10 mN per contact, respectively. The corresponding loading at the bottom are 4.4 mN, 7.4 mN and 12.4 mN per contact, respectively.

small enough to avoid nonlinear effects. The amplitude at the central frequency of the spectrum of the received signal is measured. The transmitted amplitudes are reported in Fig. 4.2 and a smoothed spectrum is plotted. The transmitted amplitudes are compared to the evaluated cut-off frequencies for the three different loadings.

The evaluation of the cut-off frequencies reported on Fig. 4.2 are in agreement with the measurements. When the receiving transducer is sensible only to compression (mode  $L$ ), the results show cut-off frequencies in transmission between 60 kHz and 80 kHz, which correspond to the cut-off frequencies of the mode  $L$ . When the receiving transducer is sensible to longitudinal and shear displacements, the cut-off frequencies in the measurement are situated between 110 kHz and 140 kHz, which correspond to the cut-off frequencies of the mode  $RT$ . The mode  $RT$  is detected through the detection of its translational motion (which in theory is accompanying its rotational motion).

In order to compare the dispersion relations, the burst signals allow to measure the arrival times of the received signals for comparison to the theoretical arrival times as shown in Fig. 4.3. Because of the complex distribution of contact forces within the crystal, the received signal can be decomposed in two parts, a coherent signal which is reproducible, and an incoherent signal which exhibits a dependence on the configuration of contact forces. The coherent signal is the head of the signal and the incoherent signal is at the tail of the signal [4.16]. Because of this peculiarity of wave propagation within a granular crystal, the chosen procedure is a comparison of the experimental arrival times with the ones theoretically evaluated using the group velocities. The arrival times are found with the following procedure. The envelopes of the signals (low frequency variation of the amplitude of the signal) are evaluated and normalized with their respective maximum values. The arrival times are defined when the envelopes of the signals reach a test value as low as possible (the test value is defined at the limit above the noise level). In Fig. 4.3, The theoretical arrival times of the mode  $L$  are in good agreement with the experimental arrival times but the experimental arrival times of the mode  $RT$  are much longer than the ones predicted. The procedure for the determination of the experimental arrival times is highly sensitive to the signal to noise ratio, this could explain the discrepancies between theory and experiments. In order to better evaluate the arrival times for the mode  $RT$ , the transmission through the granular crystal is measured with a broad band signal i.e., a short pulse centered at 80 kHz with a 60 kHz width at -3 dB. The transmitted pulse is found by exciting the crystal at the top with a shear transducer and measured with a shear transducer at the bottom. The received signal is treated through a time-frequency analysis. The reassigned spectrogram (see Appendix) of the received signal [4.19] measured with a external loading of 5 mN per contact, allowing to localize precisely the energy in the time-frequency space, is shown in Fig. 4.4. The experimental arrival times are in good agreement with the theoretical predictions. The experimental arrival times of the mode  $L$  corresponds to those found in Fig. 4.3. The measured arrival times of the mode  $RT$  are close to the theoretical evaluations.

## 4.4 conclusion

This paper describes the observation of a coupled rotational-translational mode, which has been widely predicted theoretically in granular media but has never been measured experimentally before. The obtained results prove that a consistent description of the a granular crystal needs to take into account the rotational degrees of freedom of the beads. The experimental observation of the rotational-transverse mode is a convincing evidence of the validity of the Cosserat theory for granular materials. The good correlation between theory and experiment for the linear reproducible signal is a step before studying the nonlinear effects in the wave propagation or the effects of disorder.

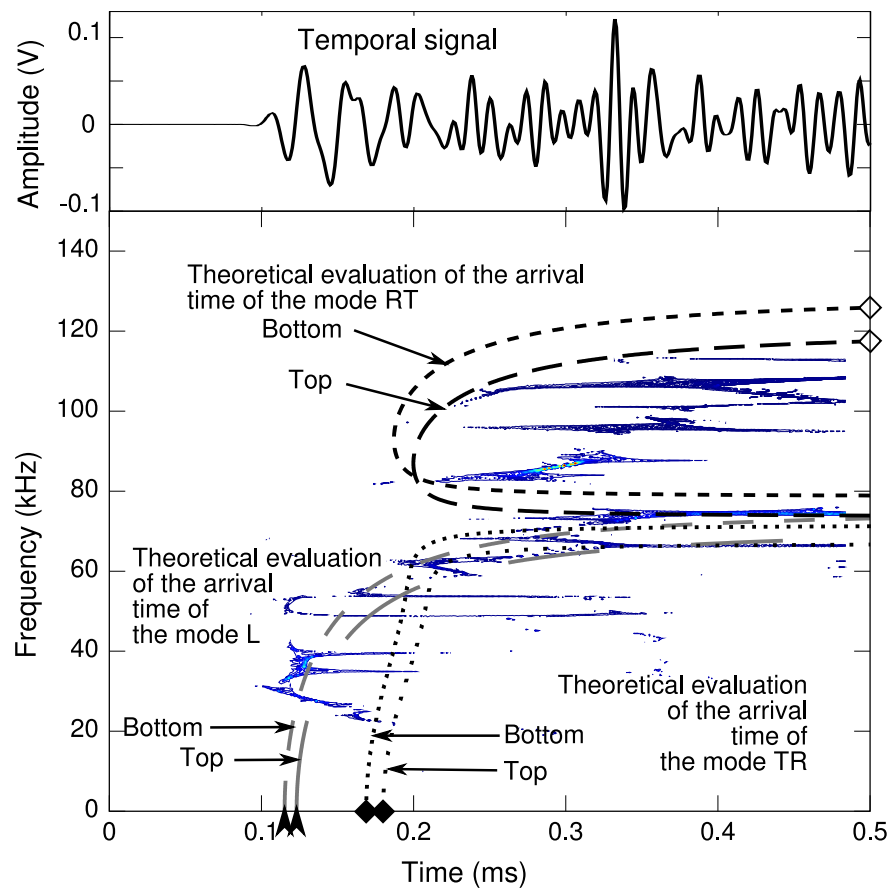


FIG. 4.4 – Reassigned spectrogram of a pulse centered at 80 kHz with a static loading of 5 mN per contact (7.4 mN at the bottom).

## acknowledgments

The authors would like to like to acknowledge Laurent Simon for fruitful discussions.



## Appendix : spectrogram and reassigned spectrogram

The time-frequency representations are widely used for nonstationary signal analysis. The spectrogram, which is commonly used, is one of the earliest existing representations. The spectrogram is defined as the square modulus of the short-time Fourier transform. The spectrogram  $S_h$  of a signal  $x(t)$  is written [4.19]

$$S_h(x; t, \omega) = \left| \int x(u)h^*(t-u)e^{-i\omega u} du \right|^2, \quad (4.2)$$

where  $h(t)$  is the time window where the Fourier transform is performed and  $h^*(t)$  its complex conjugate. The spectrogram of the signal, for which the reassigned spectrogram is exposed in Fig. 4.4, is shown in Fig. 4.5. This representation has severe drawbacks. For instance, the Gabor-Heisenberg inequality makes a compromise between temporal and spectral resolutions unavoidable. Practically, the localization in the time-frequency space is not precise as it could be seen in Fig. 4.5. A proposed improvement [4.19] is to use the reassignment method. The aim of the reassignment method is to increase the signal components concentration using the center of gravity of the signal energy located in a bounded domain centered on  $(t, \omega)$ . The reassigned spectrogram  $MS_h$  of a signal  $x(t)$  is defined with

$$MS_h(x; t', \omega') = \iint S_h(x; t, \omega) \delta(t' - \hat{t}(x; t, \omega)) \delta(\omega' - \hat{\omega}(x; t, \omega)) dt \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (4.3)$$

where  $\delta(t)$  denotes the Dirac impulse.  $\hat{t}(x; t, \omega)$  and  $\hat{\omega}(x; t, \omega)$  represent the coordinates of the centers of gravity of the energy contributions and are defined, in the case of the reassigned spectrogram, using the following expression of the short-time Fourier transform

$$\int x(u)h^*(t-u)e^{-i\omega u} du = M_h(x; t, \omega) e^{i\Phi_h(x; t, \omega)}. \quad (4.4)$$

The coordinates of the centers of gravity of the energy contributions are written

$$\hat{t}(x; t, \omega) = -\frac{\partial}{\partial \omega} [\Phi_h(x; t, \omega)] \quad (4.5)$$

and

$$\hat{\omega}(x; t, \omega) = \omega + \frac{\partial}{\partial t} [\Phi_h(x; t, \omega)]. \quad (4.6)$$

From Eqs (4.5) and (4.6), it follows that the phase information of the short-time Fourier transform, which is unused when the spectrogram is formed, is used to form the reassigned spectrogram. In Fig. 4.4, the result of the reassignment method shows a more precise time-frequency representation that is useful for nonstationary signal analysis. Furthermore, the reassignment method retains all the properties of the spectrogram except the bilinearity [4.20], which is compensated by the precision improvements of the method.



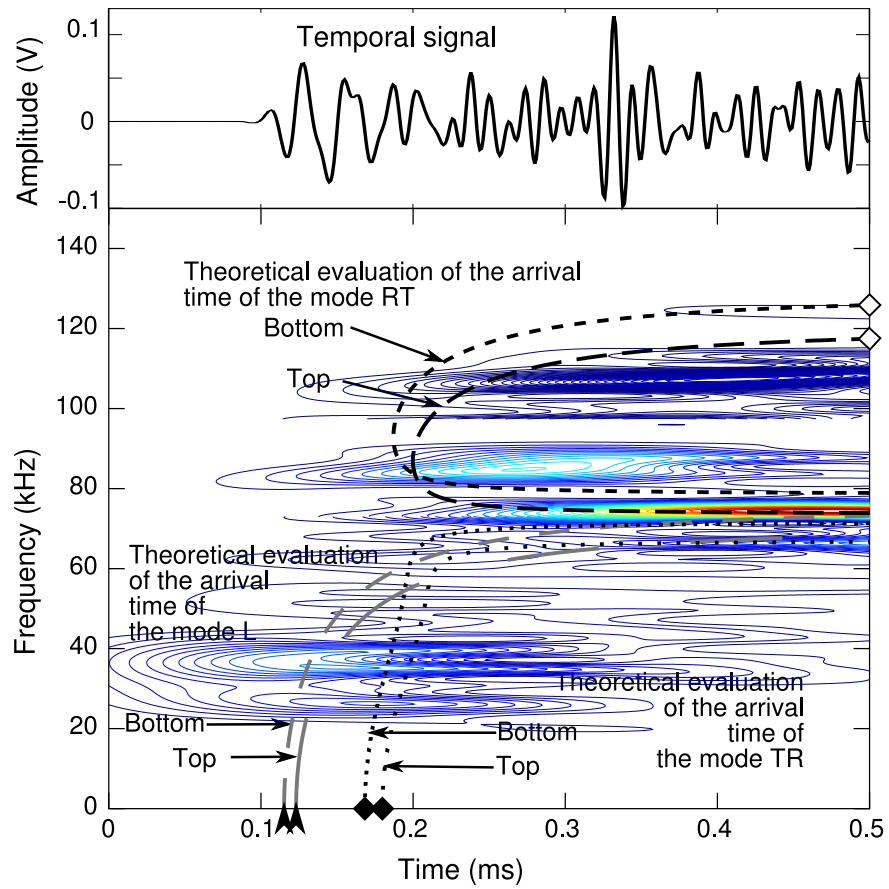


FIG. 4.5 – Spectrogram of a pulse centered at 80 kHz with a static loading of 5 mN per contact (7.4 mN at the bottom).

## Bibliographie

- [4.1] E. Cosserat and F. Cosserat. *Théorie des Corps Déformables*. Hermann et Fils, Paris, 1909.
- [4.2] A. Eringen. *Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [4.3] R. Lakes. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua. In H. Mühlhaus, editor, *Continuum Models for Materials with Microstructure*. John Wiley and Sons, New York, 1995.
- [4.4] W. Nowacki. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Pergamon, Oxford, 1986.
- [4.5] E. Pasternak and A. Dyskin. Measuring of Cosserat effects and reconstruction of moduli using dispersive waves. In G.A. Maugin and A.V. Metrikine, editors, *Mechanics of Generalized Continua : One Hundred After the Cosserats*. Springer-Verlag, New York, 2010.
- [4.6] A. Kiris and E. Inan. On the identification of microstretch elastic moduli of materials by using vibration data of plates. *Int. J. Eng. Sci.*, 46 :585–597, 2008.
- [4.7] R. D. Gauthier. Experimental investigations on micropolar media. In O. Brulin and R. K. T. Hsieh, editors, *Mechanics of Micropolar Media*. World Scientific Publishing, Singapore, 1982.
- [4.8] I. S. Pavlov, A. I. Potapov, and G. A. Maugin. A 2D granular medium with rotating particles. *Int. J. Solids Struct.*, 43 :6194–6207, 2006.
- [4.9] J. Duffy and R. D. Mindlin. Stress-strain relations and vibrations of a granular medium. *ASME Trans. J. Appl. Mech.*, 24 :585–593, 1958.
- [4.10] L. M. Schwartz, D. L. Johnson, and S. Feng. Vibrational modes in granular media. *Phys. Rev. Lett.*, 52 :831–834, 1984.
- [4.11] A. Merkel, V. Tournat, and V. Gusev. Dispersion of elastic waves in three-dimensional noncohesive granular phononic crystals : properties of rotational modes. *Phys. Rev. E*, 82 :031305, 2010.
- [4.12] I. Agnolin and J.-N. Roux. On the elastic moduli of three-dimensional assemblies of spheres : characterization and modeling fluctuations in the particle displacement and rotation. *Int. J. Solids Struct.*, 45 :1101–1123, 2008.
- [4.13] O. Mouraille. *Sound Propagation in Dry Granular Materials : Discrete Element Simulations, Theory, and Experiments*. PhD thesis, University of Twente, 2009.
- [4.14] M. de Billy. Frequency analysis of the acoustic signal transmitted through a one-dimensional chain of metallic spheres. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110 :710–716, 2001.
- [4.15] J. Anfosso and V. Gibiat. Elastic wave propagation in a three-dimensional periodic granular medium. *Europhys. Lett.*, 67 :376–382, 2004.
- [4.16] C. Coste and B. Gilles. Sound propagation in a constrained lattice of beads : high-frequency behavior and dispersion relation. *Phys. Rev. E*, 77 :021302, 2008.
- [4.17] M. T. Dove. *Introduction to Lattice Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [4.18] L. J. Raubenheimer and G. Gilat. Accurate numerical method of calculating frequency distribution functions in solids. II. Extension to hcp crystals. *Phys. Rev.*, 157 :586–599, 1967.
- [4.19] F. Auger and P. Flandrin. Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 43 :1068–1089, 1995.
- [4.20] P. Flandrin. *Time-Frequency / Time-Scale Analysis*. Academic Press, San Diego, London, 1999.

# Chapitre 5

## Non-linéarités et inhomogénéités

### 5.1 Introduction

Après l'étude expérimentale du chapitre 4 sur propagation linéaire dans le cristal granulaire qui valide la description théorique du chapitre 3, ce chapitre s'intéresse aux effets non linéaires se produisant au cours de la propagation d'une onde acoustique dans un cristal phononique granulaire et les liens éventuels avec l'inhomogénéité des contraintes statiques à l'intérieur du cristal du fait de la gravité. Les forces statiques normales appliquées sur les contacts sont inhomogènes, elles augmentent avec la profondeur. L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques résultats expérimentaux en guise de perspectives, afin d'ouvrir la voie à d'éventuels travaux futurs.

L'étude se porte sur le phénomène d'auto-démodulation d'amplitude ou rectification. Ce phénomène représente le principe de fonctionnement de base de l'antenne paramétrique et découle, de manière prépondérante, des termes non linéaires quadratiques des relations forces-déplacements. Le principe de l'auto-démodulation a été décrit théoriquement à partir des années 1960 [5.1–5.4], il a été étudié plus récemment dans les milieux granulaires [5.5–5.7]. Si le milieu est excité avec un signal appelé onde de pompage (ou onde primaire), contenant deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  (avec  $f_1 > f_2$ ), les non-linéarités induisent des transferts d'énergie en première interaction vers des fréquences  $2f_1$ ,  $2f_2$ ,  $f_1 + f_2$ , 0 et  $f_1 - f_2$ . Cette dernière fréquence (fréquence différence) est appelée onde démodulée (ou onde secondaire). L'onde de pompage représente la source de l'onde démodulée. Les effets non linéaires montrent une grande sensibilité aux paramètres du milieu de propagation et notamment aux microstructures d'un milieu. Par exemple, il a été montré dans les milieux granulaires que l'augmentation de l'amplitude de l'onde démodulée avec l'amplitude des ondes de pompage donne des informations sur le comportements des contacts et notamment sur leur éventuelle ouverture (clappement) [5.8]. L'inhomogénéité des contraintes statiques à l'intérieur du cristal n'est pas mise en évidence avec l'étude de la propagation linéaire d'une acoustique. La question posée pour débiter ce chapitre est la suivante :

Est-il possible d'observer ou d'obtenir des informations sur la structure interne du réseau de forces de contact à l'intérieur du cristal phononique granulaire à l'aide de l'étude de l'effet d'auto-démodulation d'amplitude ?

## 5.2 Le dispositif expérimental

Le dispositif expérimental utilisé est celui du chapitre 4. Un cristal hexagonal compact de 27 couches de billes de 2 mm de diamètre (la distance de propagation est alors de l'ordre de 44 mm) est excité à l'aide d'un transducteur en cisaillement. La transmission est mesurée également avec un transducteur en cisaillement. Le transducteur qui est placé sous le cristal est en contact avec la plaque d'aluminium qui porte le cristal (du miel est utilisé comme couplant entre le transducteur et la plaque d'aluminium). Le transducteur qui est placé au dessus du cristal est directement en contact avec le cristal (sans couplant). La nature différente du contact entre les deux transducteurs et le cristal peut induire une différence dans l'effet d'auto-démodulation. La transmission acoustique est mesurée suivant les deux chemins de propagation, de haut en bas et de bas en haut. En suivant la même procédure expérimentale qu'au chapitre 4, le signal d'excitation utilisé est un sinus fenêtré avec une fréquence centrale qui augmente de 40 kHz à 200 kHz par pas de 2.5 kHz. L'enveloppe du signal est une gaussienne, la largeur du pic à -3 dB est de 3.5 kHz. Les amplitudes à la fréquence centrale des spectres des signaux transmis sont mesurées. Pour déterminer l'amplitude de l'onde démodulée, les signaux transmis sont filtrés passe-bas à 20 kHz et les amplitudes maximum et minimum de la tête du signal, comme illustré sur la figure 5.1, sont déterminées. Cette méthode permet de s'affranchir de la recherche des fréquences présentes dans le signal démodulé en ne recherchant que l'amplitude. Les mesures sont effectuées pour 3 chargements externes différents, les forces normales statiques appliquées sur les contacts sont de 2 mN, 5 mN et 10 mN en haut du cristal. Avec l'effet de la gravité, les forces normales appliquées sur les contacts sont respectivement de 4.4 mN, 7.4 mN et 12.4 mN en bas du cristal.

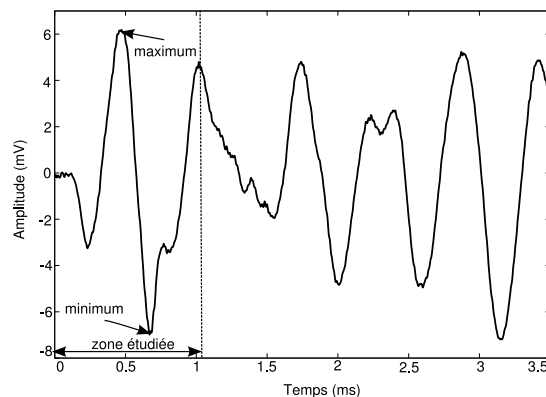


FIG. 5.1 – Exemple de signal détecté, filtré passe-bas à 20 kHz.

## 5.3 Amplitude de l'onde démodulée en fonction de la fréquence de l'onde de pompage

Les figures 5.2-5.4 exposent les amplitudes transmises à la fréquence de pompage et pour l'onde démodulée pour les deux chemins de propagation (de haut en bas ou de bas en haut). Les résultats pour la transmission linéaire sont équivalents suivant les chemins de propagation. Par contre, l'amplitude de l'onde démodulée est différente suivant les chemins de propagation. En dessous de la fréquence de coupure du cristal (fréquence maximale des modes  $R$  et  $RT$  à partir de laquelle les modes de volume sont évanescents), l'amplitude de l'onde démodulée est plus grande suivant le chemin du bas vers le haut. Au dessus de la fréquence de coupure, le comportement est inversé, l'amplitude de l'onde

démodulée est plus grande suivant le chemin du haut vers le bas. La génération de l'onde démodulée n'est donc pas réciproque et elle est liée au caractère propagatif ou évanescent de la propagation d'ondes de volume de pompe dans le cristal.

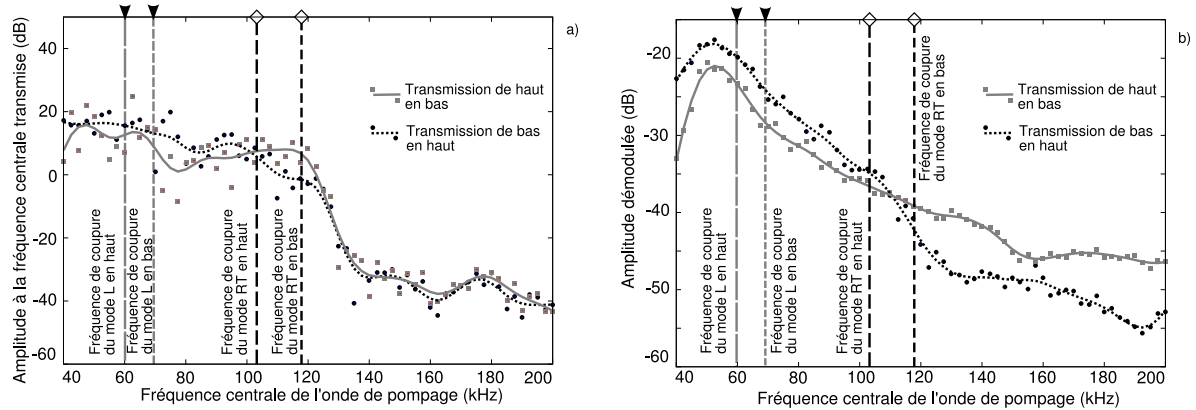


FIG. 5.2 – Amplitude transmise en fonction de la fréquence centrale d'excitation pour un chargement statique sur les contacts de 2 mN en haut du cristal (4.4 mN en bas du cristal). (a) Transmission pour la fréquence de pompe. (b) Amplitude de l'onde démodulée.

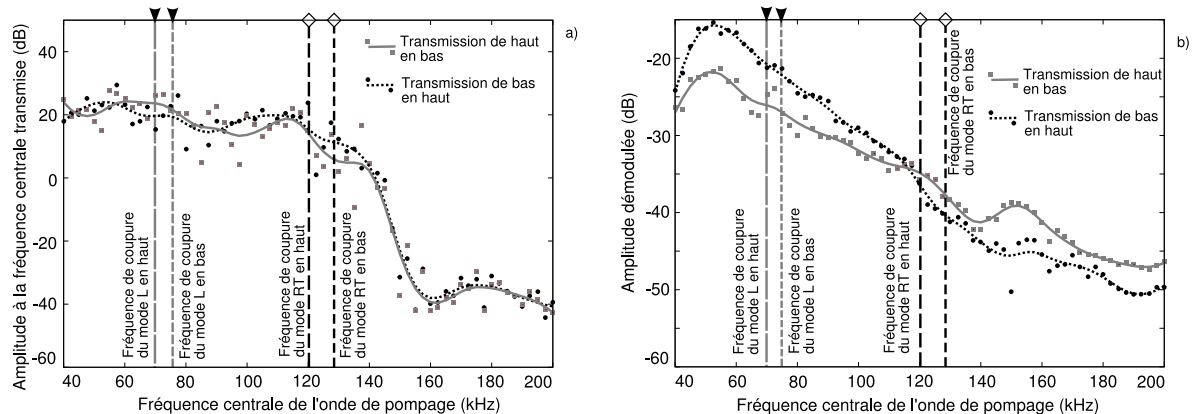


FIG. 5.3 – Amplitude transmise en fonction de la fréquence centrale d'excitation pour un chargement statique sur les contacts de 5 mN en haut du cristal (7.4 mN en bas du cristal). (a) Transmission pour la fréquence de pompe. (b) Amplitude de l'onde démodulée.

La forme de l'onde démodulée dépend faiblement de la fréquence de l'onde de pompe, comme illustré sur la figure 5.5, et donc dépend faiblement du mode de propagation de l'onde de pompe et de son caractère propagatif ou évanescent. Le temps d'arrivée correspond au temps d'arrivée théorique du mode  $L$  en très basses fréquences. Le phénomène non linéaire observé correspond au phénomène de dilatance non linéaire.

L'amplitude de l'onde démodulée baisse avec la fréquence de l'onde de pompe mais ne montre pas de coupure brutale lorsque l'onde de pompe devient évanescente contrairement à ce qui pouvait être attendu [5.9]. Lorsque la fréquence de l'onde de pompe est basse, la vitesse de propagation de l'onde démodulée est similaire à la vitesse de propagation de l'onde de pompe. Le processus de démodulation est synchrone avec la propagation linéaire. Au fur et à mesure que la fréquence de l'onde de pompe augmente, la différence entre les vitesses de propagation de l'onde démodulée et de l'onde de pompe augmente. Le processus de génération devient asynchrone. Ceci peut expliquer la baisse de l'amplitude de l'onde démodulée avec l'augmentation de la fréquence de pompe. Au bord

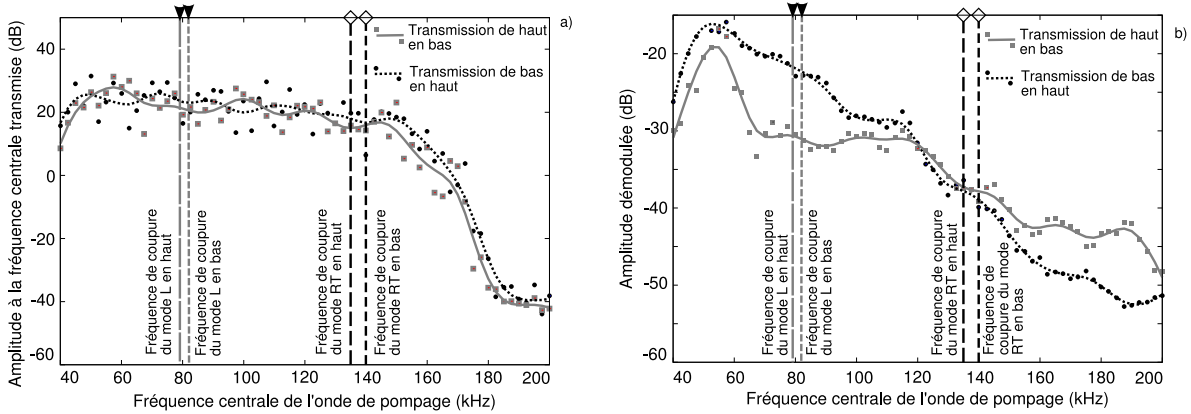


FIG. 5.4 – Amplitude transmise en fonction de la fréquence centrale d'excitation pour un chargement statique sur les contacts de 10 mN en haut du cristal (12.4 mN en bas du cristal). (a) Transmission pour la fréquence de pompe. (b) Amplitude de l'onde démodulée.

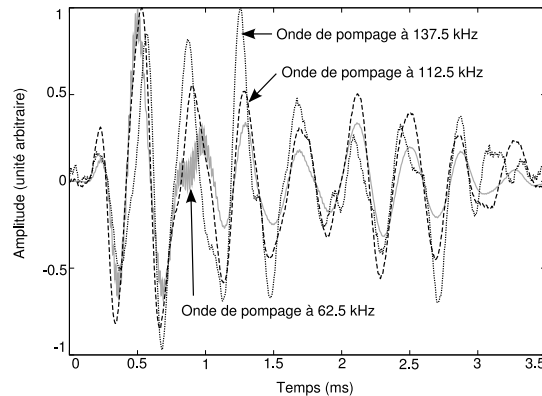


FIG. 5.5 – Forme du signal démodulé (après filtrage passe-bas) en fonction de la fréquence de l'onde de pompe. Lorsque l'onde de pompe est centrée à 62.5 kHz, les modes de propagation linéaire excités sont le mode  $L$  et le mode  $TR$ . Lorsque l'onde de pompe est centrée à 112.5 kHz, le mode de propagation linéaire excité est le mode  $RT$ . Lorsque l'onde de pompe est centrée à 137.5 kHz, les modes de volumes sont évanescents. Les amplitudes des signaux sont normalisées par leurs maxima respectifs.

de la bande propagative (lorsque la fréquence de pompe est proche de la fréquence de coupure des modes  $RT$  et  $R$ ), l'asynchronisme des propagations de l'onde démodulée et de l'onde de pompe est important. Le processus de démodulation lorsque l'onde de pompe est évanescence est également asynchrone. Pour expliquer l'absence de coupure brutale entre le niveau de démodulation lorsque l'onde de pompe est propagative et lorsqu'elle est évanescence, une hypothèse est de considérer que l'amplitude de l'onde démodulée dépend de la synchronisation entre la propagation de l'onde de pompe et la propagation de l'onde démodulée. Si les deux ondes se propagent de manière synchrone, l'effet cumulatif de la démodulation induit une amplitude de l'onde démodulée plus grande que si les propagations sont asynchrones.

Dans le phénomène d'auto-démodulation d'amplitude, plusieurs phénomènes se compensent mutuellement. L'onde de pompe est la source de l'onde démodulée, l'amplitude de l'onde démodulée dépend donc de l'atténuation de l'onde de pompe. Dans les milieux granulaires, plus les contacts entre les grains sont forts, plus l'atténuation de l'onde primaire est faible. Sur les figures 5.2(a), 5.3(a) et 5.4(a), plus la charge statique est importante, plus l'amplitude de l'onde primaire est im-



portante. Lorsque le chargement statique est de 2 mN, l'amplitude à la fréquence centrale transmise est comprise en 0 et 20 dB dans la bande propagative. Lorsque le chargement statique est de 10 mN, l'amplitude à la fréquence centrale transmise est comprise entre 20 et 30 dB. L'amplitude de l'onde démodulée est donc plus grande si les contacts sont fortement chargés. Inversement, les termes non linéaires des relations forces-déplacements deviennent prépondérants lorsque l'écart entre la contrainte statique et la contrainte dynamique se réduit. Les phénomènes non linéaires sont plus importants pour les contacts faiblement chargés [5.10, 5.11]. L'efficacité de la génération non linéaire dépend de l'importante respective de ces deux facteurs (atténuation et non-linéarité) dont les effets sont contradictoires [5.12]. Dans le premier cas, lorsque l'onde de pompage est évanescence, l'atténuation de l'onde primaire est très grande quelque soit le chemin de propagation, la génération de l'onde démodulée se situe dans les premiers contacts. Les contacts du haut du cristal sont les plus faiblement chargés, leur comportement non linéaire est donc plus important, ce qui explique que l'amplitude de l'onde démodulée est plus grande suivant le chemin de propagation du haut vers le bas que suivant le chemin de propagation du bas vers le haut. Dans le deuxième cas, lorsque l'onde de pompage est propagative, l'atténuation de l'onde primaire est plus faible en bas du cristal qu'en haut. Le fait que l'amplitude de l'onde démodulée soit différente suivant le chemin de propagation montre que les variations de la non-linéarité et de l'atténuation avec la profondeur ne se compensent pas dans la génération de l'onde démodulée. L'amplitude de l'onde démodulée suivant le chemin de propagation du bas vers le haut est plus grande que suivant le chemin de propagation du haut vers le bas. L'atténuation de l'onde primaire est donc beaucoup plus faible en bas du cristal qu'en haut. En conclusion, ces résultats montrent que l'atténuation de l'onde de pompage diminue plus fortement avec la profondeur dans le cristal que le comportement non linéaire des contacts.

## 5.4 Amplitude de l'onde démodulée en fonction de l'amplitude des ondes de pompage

La variation d'amplitude de l'onde démodulée en fonction de l'amplitude de l'onde de pompage permet d'obtenir des informations sur le milieu granulaire [5.8]. La démodulation provient ici, de manière prépondérante, de la non-linéarité quadratique des relations forces-déplacements. L'amplitude de l'onde démodulée doit dans ce cas augmenter de manière quadratique avec l'amplitude de l'onde de pompage (augmentation de l'amplitude en puissance 2). Cela correspond à une pente de l'amplitude égale à 2 dans le cadre d'une représentation logarithmique. Avec l'augmentation de l'amplitude d'excitation, les contacts les plus faiblement chargés peuvent s'ouvrir, le mouvement des billes rentre dans un régime de clappement. La dynamique de l'amplitude de l'onde démodulée dans un régime de clappement se distingue par une augmentation de l'amplitude de l'onde démodulée suivant une puissance  $3/2$  [5.8]. La transition du régime sans clappement au régime de clappement demande qu'entre un dixième et la moitié des contacts s'ouvrent au cours de la période d'oscillation acoustique. La dynamique de l'amplitude de l'onde démodulée peut également dépendre de l'hystérésis et des phénomènes d'atténuation.

La dynamique de l'onde démodulée est mesurée pour deux fréquences de pompage distinctes. La première fréquence se situe dans la bande propagative des modes  $L$  et  $TR$ . La deuxième fréquence se situe au dessus de la fréquence de coupure du cristal. Les résultats sont exposés sur les figures 5.6-5.8 pour des forces statiques appliquées sur les contacts en haut du cristal respectivement de 2 mN, 5 mN et 10 mN.

L'évolution de l'amplitude de l'onde démodulée en fonction du chemin de propagation et en fonction de l'amplitude de l'onde de pompage dépend du caractère propagatif ou évanescence de la propagation de l'onde de pompage. Sur les figures 5.6(a), 5.7(a) et 5.8(a), la fréquence centrale de l'onde de pompage se situe dans une bande propagative. Sur les figures 5.6(b), 5.7(b) et 5.8(b),



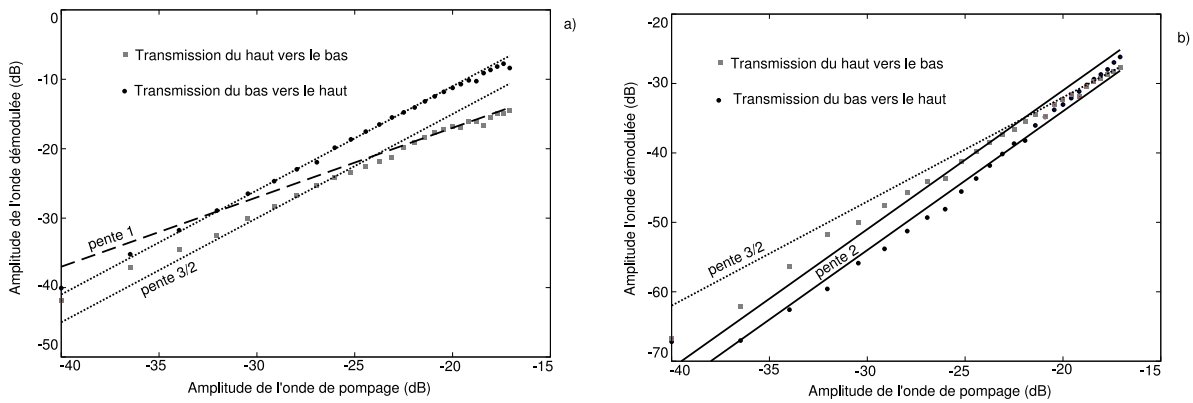


FIG. 5.6 – Evolution de l'amplitude de l'onde démodulée avec l'amplitude de l'onde de pompe pour une force statique normale de 2 mN en haut du cristal (4.4 mN en bas de cristal). (a) Fréquence centrale de l'onde de pompe à 60 kHz. (b) Fréquence centrale de l'onde de pompe à 140 kHz.

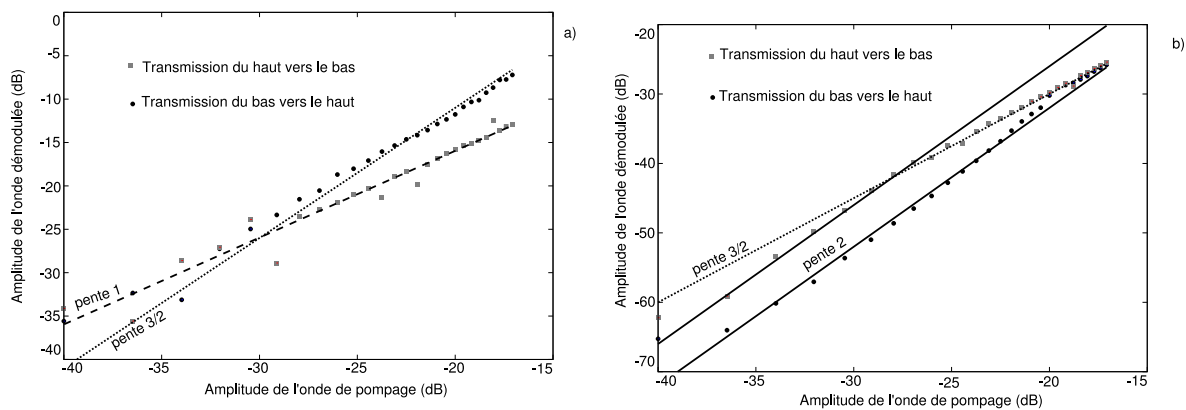


FIG. 5.7 – Evolution de l'amplitude de l'onde démodulée avec l'amplitude de l'onde de pompe pour une force statique normale de 5 mN en haut du cristal (7.4 mN en bas de cristal). (a) Fréquence centrale de l'onde de pompe à 60 kHz. (b) Fréquence centrale de l'onde de pompe à 150 kHz.

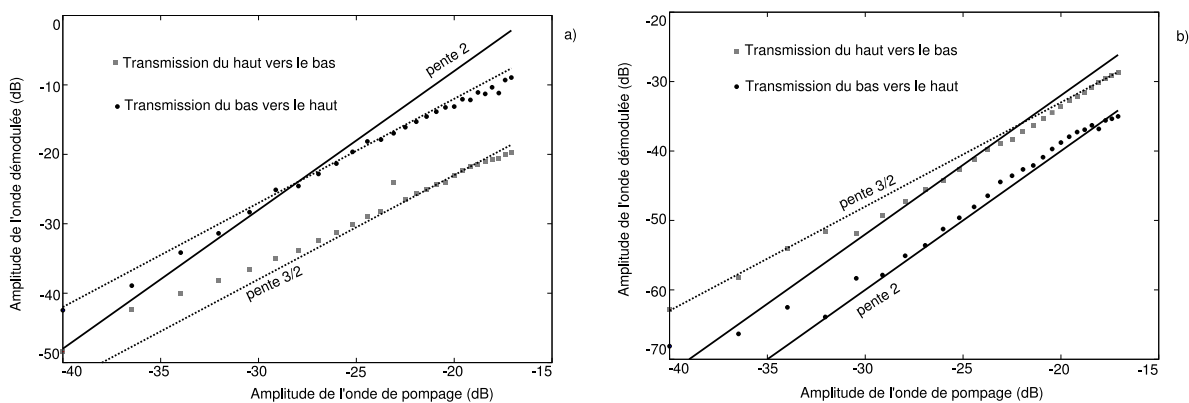


FIG. 5.8 – Evolution de l'amplitude de l'onde démodulée avec l'amplitude de l'onde de pompe pour une force statique normale de 10 mN en haut du cristal (12.4 mN en bas de cristal). (a) Fréquence centrale de l'onde de pompe à 70 kHz. (b) Fréquence centrale de l'onde de pompe à 180 kHz.

la fréquence centrale d'excitation se situe dans une bande évanescente. Lorsque la fréquence de l'onde de pompage se situe dans une bande évanescente, l'amplitude de l'onde démodulée augmente plus fortement avec l'amplitude de l'onde de pompage que lorsque la fréquence centrale de l'onde de pompage se situe dans une bande propagative. Ces mesures mettent également en valeur la différence dans la dynamique de la génération non linéaire avec l'inhomogénéité des contraintes statiques. L'augmentation de l'amplitude de l'onde démodulée dépend du chemin de propagation. Les dynamiques d'amplitudes de l'onde démodulée peuvent être caractéristique du type de non-linéarité (quadratique, hystérétique, clappement...) mise en jeu. Dans la dynamique d'amplitude de l'onde démodulée, trois comportements sont retrouvés. L'augmentation de l'amplitude démodulée suivant une puissance 2 est retrouvée, ce qui correspond au comportement quadratique de la non-linéarité. L'augmentation de l'amplitude démodulée suivant une puissance  $3/2$  est retrouvée, cette augmentation peut être attribuée au clappement des contacts faibles [5.8]. Cependant, les effets des pertes thermo-élastiques non linéaires [5.13] et de l'hystérésis peuvent également jouer un rôle dans ce comportement. Les connaissances ne sont pas suffisantes pour identifier ce comportement, de même pour l'augmentation de l'amplitude démodulée suivant une puissance 1 (augmentation linéaire avec l'augmentation de l'amplitude de l'onde de pompage).

## 5.5 Autres non-linéarités et perspectives

Les phénomènes non linéaires susceptibles de se produire dans un cristal granulaire sont nombreux. Au cours des expériences effectuées, d'autres phénomènes non linéaires ont été observés. La complexité du comportement linéaire du cristal et le grand nombre de types de non-linéarités induit une grande difficulté à prédire quantitativement l'effet des différents types de non-linéarités et leurs importances respectives. Le comportement non linéaire des cristaux phononiques granulaires constitue des perspectives intéressantes d'études. Les comportements prédits à l'aide de non-linéarités dites classiques sont retrouvés. Les signaux détectés montrent l'apparition d'harmoniques supérieures, qui peuvent être expliquées par les termes quadratiques des relations forces-déplacements. Cependant, l'ensemble des fréquences, absentes du signal d'excitation, générées au cours de la propagation dans le cristal ne peuvent pas toutes être expliquées par des non-linéarités classiques. Certaines fréquences et notamment du bruit basse fréquence peut être expliqué par le clappement. Il a également été observé des comportements du type chaotique avec doublement de période pour une excitation harmonique et dans certains cas, une très grande instabilité du signal détecté. La réponse du cristal est fortement dépendante de l'amplitude d'excitation. En modifiant l'amplitude d'excitation, un décalage non linéaire des fréquences de résonances a été observé, ainsi qu'un déphasage dans le cadre d'une excitation harmonique. Dans certains cas, l'amplitude du signal détecté à la fréquence centrale de l'excitation ne varie pas linéairement en fonction de l'amplitude d'excitation, il s'agit d'un phénomène d'auto-action. Ces phénomènes peuvent être expliqués par l'hystérésis ou les pertes visco-élastiques non linéaires notamment. L'ensemble de ces phénomènes a été observé expérimentalement et ils nécessitent une étude plus poussée pour comprendre les mécanismes influents ainsi que leurs éventuelles interactions. L'étude théorique du chapitre 3 montre que les différents modes de propagation sollicitent des contacts différents. Dans la direction  $z$ , le mode longitudinal ne sollicite que les contacts entre billes de différentes couches horizontales, alors que les modes transverses (rotationnel-transverse et transverse-rotationnel) sollicitent tout les contacts. Cela peut induire des sensibilités différentes aux non-linéarités de type hystérétiques et pertes visco-élastiques par exemple.

## 5.6 Conclusion

Les mesures sur l'auto-démodulation d'une onde dans un cristal phononique granulaire montrent le caractère non réciproque de la génération non linéaire dans le milieu. Les différences d'amplitude de l'onde démodulée peuvent venir de l'inhomogénéité des contraintes statiques appliquées sur les contacts du fait de la gravité et de la différence entre les contacts entre les transducteurs et le cristal (les contacts sont différents de part et d'autre du cristal). Cependant, le comportement linéaire du cristal semble être un facteur important, puisque le processus de génération non linéaire dépend du caractère propagatif ou évanescent de l'onde de pompage. Si l'onde de pompage est propagative, l'amplitude de l'onde démodulée est plus grande dans la direction de propagation opposée à la direction de la gravité. Si l'onde de pompage est évanescente, l'amplitude de l'onde démodulée est plus grande dans la direction de propagation qui correspond à la direction de la gravité. Ces mesures montrent que l'atténuation de l'onde de pompage diminue plus fortement avec la profondeur que les non-linéarités. L'étude de la dynamique de l'amplitude de l'onde démodulée permet également de mettre en évidence le type de non-linéarité influente entre le bas du cristal et le haut. Ce chapitre introduit l'étude des effets non linéaires dans un cristal phononique granulaire et notamment du phénomène d'auto-démodulation. L'étude d'autres comportements non linéaires, tels que la génération de sous harmoniques, l'auto-action, les résonances non linéaires, permettraient peut être d'obtenir plus d'informations sur la constitution interne du cristal.

## Bibliographie

- [5.1] P. J. Westervelt. Parametric acoustic array. *J. Acoust. Soc. Am.*, 35 :535–537, 1963.
- [5.2] H. O. Bertkay. Possible exploitation on non-linear acoustics in underwater transmitting applications. *J. Sound Vib.*, 2 :435–461, 1965.
- [5.3] B. K. Novikov, O. V. Rudenko, and V. I. Timochenko. *Nonlinear Underwater Acoustics*. ASA, New York, 1987.
- [5.4] V. A. Zverev. How the idea of a parametric acoustic array was conceived. *Acoust. Phys.*, 45 :611–618, 1999.
- [5.5] V. Yu. Zaitsev, A. B. Kolpakov, and V. E. Nazarov. Detection of acoustic pulse in river sand : Experiment. *Acoust. Phys.*, 45 :202–208, 1999.
- [5.6] V. Yu. Zaitsev, A. B. Kolpakov, and V. E. Nazarov. Detection of acoustic pulse in river sand : Theory. *Acoust. Phys.*, 45 :305–310, 1999.
- [5.7] V. Tournat. *Effet Non-linéaires d'Auto-démodulation d'Amplitude dans les Milieux Granulaires : Théories et Expériences*. PhD thesis, Université du Maine, Le Mans, 2004.
- [5.8] V. Tournat, V. Zaitsev, V. Gusev, V. Nazarov, P. Béquin, and B. Castagnède. Probing weak forces in granular media through nonlinear dynamic dilatancy : Clapping contacts and polarization anisotropy. *Phys. Rev. Lett.*, 92 :085502, 2004.
- [5.9] V. Tournat, V. E. Gusev, and B. Castagnède. Self-demodulation of elastic waves in a one-dimensional granular chain. *Phys. rev. E*, 70 :056603, 2004.
- [5.10] V. Yu. Zaitsev. A model of anomalous elastic nonlinearity of microinhomogeneous media. *Acoust. Lett.*, 19 :171–174, 1996.
- [5.11] I. Yu. Belyaeva and V. Yu Zaitsev. Nonlinear elastic properties of microinhomogeneous hierarchically structured media. *Acoust. phys.*, 43 :510–515, 1997.
- [5.12] C. Inserra. *Caratérisation de la Compaction Granulaire par des Méthodes d'Acoustique Linéaires et Non Linéaires*. PhD thesis, Université du Maine, Le Mans, 2007.
- [5.13] L. Fillinger, V.Yu. Zaitsev, V. Gusev, and B. Castagnède. Nonlinear relaxational absorption/transparency for acoustic waves due to thermoelastic effect. *Acust. Acta Acust.*, 92 :24–34, 2006.



# Conclusion générale

L'objectif de ce travail de thèse était de comprendre la propagation d'une onde acoustique dans un cristal phononique granulaire tridimensionnel. Les effets combinés de la périodicité et du caractère discret de la structure, des forts phénomènes non linéaires se produisant dans les matériaux granulaires avec ceux du désordre étaient attendus mais leurs importances relatives n'étaient pas connues. De plus, la question de la validité de la théorie de Cosserat dans les milieux granulaires était toujours ouverte. De nombreux travaux théoriques ont porté sur l'application de la théorie micropolaire mais aucune preuve expérimentale n'a été montrée jusqu'alors. L'obstacle majeur de l'utilisation de la théorie de Cosserat réside dans la grande difficulté de déterminer les modules élastiques de Cosserat à partir des résultats expérimentaux. Cette difficulté est telle que l'utilisation de cette théorie est remise en cause pour les milieux granulaires. Une des caractéristiques de la théorie de Cosserat est de prédire l'existence d'ondes rotationnelles, pourtant, l'observation expérimentale de ces ondes dans les milieux granulaires n'a jamais été rapportée.

Après un rappel de notions utiles pour l'acoustique des milieux granulaires, une modélisation théorique de la propagation des modes de volume dans un cristal hexagonal compact granulaire non cohésif est développée. En modélisant les interactions au niveau de contact entre deux sphères élastiques à l'aide de la théorie de Hertz-Mindlin, la structure est modélisée par une structure masses-ressorts. Les billes sont considérées comme des masses rigides et les contacts entre elles sont considérés comme des ressorts. Les contacts sont modélisés par deux ressorts, un ressort pour les interactions normales et un ressort pour les interactions transverses. Les rigidités des ressorts dépendent de la force normale statique appliquée sur les contacts. Dans un premier temps, la friction au niveau des contacts est négligée, seules les interactions normales au niveau des contacts sont considérées, ce qui permet de ne pas prendre en compte les degrés de liberté de rotation des billes. Le spectre des modes normaux est défini et une étude sur une direction de propagation particulière permet d'identifier les modes de propagation. Grâce aux relations de dispersion, les résonances du cristal peuvent être estimées et comparées avec les mesures expérimentales de fonctions de transfert acoustiques. La présence d'une distribution complexe des forces normales appliquées au niveau des contacts entre les billes dans un cristal réel rend les comparaisons théorie-expérience délicates. De plus, l'hypothèse du contact sans friction entre les billes n'est pas justifiée dans le cadre des expériences effectuées. S'il est possible de supprimer, ou du moins limiter, expérimentalement la friction au niveau des contacts, des mesures expérimentales pourraient être comparées avec cette première modélisation. Dans ce cas, le comportement dynamique du cristal phononique granulaire ne dépend pas des rotations individuelles des billes et n'entre pas dans le cadre de la théorie de Cosserat. Cette première modélisation est ensuite étendue au cas où la friction au niveau des contacts n'est plus négligée. Les interactions transverses au niveau des contacts sont ajoutées dans les projections des forces appliquées par les billes sur leurs voisines. La description de la propagation d'onde de volume nécessite alors la prise en compte des degrés de liberté de rotation. L'étude dans une direction de propagation particulière permet d'identifier l'effet de la rotation sur les modes de propagation. La théorie prédit l'existence de modes de translation, des modes de rotation et des modes couplés translation-rotation. L'existence des modes couplés translation-rotation offre une opportunité d'observer les modes de rotation grâce à leur composante

en translation. L'étude expérimentale de la transmission d'onde à travers un cristal granulaire permet de confirmer que les bandes de fréquences propagatives observées correspondent aux prédictions théoriques dans le cas où les degrés de liberté de rotation sont pris en compte. En comparant les mesures effectuées à l'aide d'un transducteur sensible uniquement à la compression (ondes longitudinales) avec les mesures effectuées à l'aide d'un transducteur sensible à la compression et au cisaillement, la bande de propagation du mode rotationnel-transverse est retrouvée expérimentalement. Une mesure des temps d'arrivée en fonction de la fréquence des ondes permet de retrouver expérimentalement les temps d'arrivée qui correspondent aux relations de dispersion théoriques. Ces mesures présentent une preuve expérimentale de l'existence des ondes rotationnelles. Elles permettent de valider la description théorique effectuée de la propagation d'onde acoustique dans un cristal phononique granulaire non cohésif.

Une étude sur la génération non linéaire d'une onde démodulée montre le caractère non réciproque du comportement non linéaire du cristal. Du fait de la gravité, les contraintes statiques appliquées sur les contacts dans le cristal sont inhomogènes, elles augmentent avec la profondeur. Cette inhomogénéité induit une différence d'amplitude de l'onde démodulée en fonction du sens de propagation des ondes par rapport à la gravité. Cette mise en évidence de la non réciprocity du phénomène non linéaire d'auto-démodulation nécessite une étude plus poussée pour comprendre l'ensemble des phénomènes mis en jeu dans ce comportement non linéaire d'un cristal phononique granulaire. Les questions sur les autres effets non linéaires dans les cristaux phononiques granulaires tridimensionnels restent ouvertes.

La validation expérimentale de la description théorique incluant les degrés de liberté de rotation des billes pour la propagation des ondes de volume dans un cristal phononique granulaire tridimensionnel représente une étape importante pour la description du comportement dynamique des cristaux granulaires. L'importance démontrée des degrés de liberté de rotation permet d'envisager l'application de la théorie de continuum de Cosserat pour les milieux granulaires, ordonnés ou non. Cette théorie permet de décrire le comportement dynamique pour de grandes longueurs d'ondes du milieu en tant que continuum (le milieu granulaire est alors décrit comme un milieu effectif). L'utilisation de ce formalisme peut aider à mieux décrire le comportement dynamique des milieux granulaires. Enfin, la description de la propagation des modes de volumes dans un cristal parfait (sans désordre) est une étape nécessaire pour aborder les effets du désordre. Dans le but de diagnostiquer un éventuel désordre dans un cristal granulaire non cohésif, la connaissance des processus de propagation dans un milieu parfaitement ordonné sont nécessaires.



# Annexe A

Article soumis à publication sur la propagation d'ondes dans une membrane granulaire. La propagation des modes hors plan est analysée théoriquement en tenant compte des degrés de liberté de rotation et de différentes lois de contact entre les billes.

## **Out-of-plane elastic waves in phononic monolayer granular membranes**

Vincent Tournat<sup>1</sup>, Isabel Pèrez-Arjona<sup>2</sup>, Aurélien Merkel<sup>1</sup>, Victor Sanchez-Morcillo<sup>2</sup>, Vitalyi Gusev<sup>3</sup>

<sup>1</sup>LAUM, CNRS, Université du Maine, Av. O. Messiaen, 72085 Le Mans, France.

<sup>2</sup>IGIC, Universidad Politècnica de Valencia, Crta. Natzaret-Oliva s/n, 46730, Grau de Gandia, Spain.

<sup>3</sup>LPEC, CNRS, Université du Maine, Av. O. Messiaen, 72085 Le Mans, France.

## **Abstract**

The dispersion of out-of-plane elastic waves in hexagonal monolayer granular membranes is studied theoretically. The predicted propagation modes involve an out-of-plane displacement and two rotations with axes in the membrane plane. Shear and bending rigidities at the contact between beads are considered. Both the cases of freely suspended membranes and membranes coupled to a rigid substrate are analyzed. Dispersion relations and the existence of band gaps are presented and discussed for various contact properties. For freely suspended membranes with sufficient contact bending rigidity, it is shown that complete band-gaps exist. The obtained results may be of interest for testing with acoustic waves the elasticity of recently developed granular membranes composed of nano-particles, and more generally for designing devices for membrane wave propagation control.

## A.1 Introduction

The interest to the analysis of acoustic waves in periodic structures composed of interacting particles is first due to the necessity of modeling elastic behavior of crystals at high frequencies where the continuous approximation in the elasticity theory becomes inadequate and the discrete nature of the crystals should be explicitly taken into account [A.1, A.2]. In this application, for most of the cases, the particles can be considered as point masses interacting through central forces. The second reason for this analysis comes from the necessity of modeling elastic behavior of granular crystals composed of a finite size particles interacting through the forces located in the points of the contact between the particles [A.3–A.6]. In this application the particle dimensions and its finite rotational inertia (rotational degrees of freedom) as well as the interactions through non-central forces can be important. In particular, in addition to shear and longitudinal acoustic modes, rotational (micro-rotational) modes are predicted [A.7, A.8].

The results of the theories for elastic wave propagation in ordered granular structures (assemblages) are used for comparison in low-frequency limit with the predictions of the Cosserat continuum theory (micropolar elasticity) [A.9–A.11], which incorporates in continuous elasticity possible rotations of micro-mechanical elements composing micro-inhomogeneous materials such as microcrystalline materials, for example. This comparison provides opportunity to identify micro-mechanical interactions contributing to particular elastic constants appearing in Cosserat-type theories of micro-inhomogeneous but macroscopically homogeneous and isotropic materials in addition to two constants of classical linear elasticity of micro-homogeneous isotropic materials [A.12–A.14]. It should be mentioned that, although a general theoretical approach for the analysis of acoustic waves in discrete periodic systems has been presented [A.15], the analysis of the two- and three-dimensional (2D-3D) structures composed of finite size particles has been mostly limited to the predictions of the properties of bulk longitudinal and shear acoustic-type elastic modes [A.16–A.19], and guided shear acoustic modes in macroscopically inhomogeneous granular crystals [A.20–A.22]. Only quite recently the rotational, coupled rotational/transversal and transversal/rotational modes have been included in the analysis [A.23–A.25]. The analysis of two-dimensional (2D) structures, which includes rotational degrees of freedom in particles motion, has been reported only for the in-plane motion [A.12–A.14]. The out-of-plane motion has been analyzed only for surface acoustic waves on discrete structures of point masses [A.2] and in the frame of Cosserat continuum models [A.26, A.27]. Recently there have been developed technologies for building crystals composed of nanoparticles [A.28–A.32], ordered monolayer of particles [A.33–A.35] and freely suspended membranes composed of a single layer of periodically ordered particles [A.36–A.38]. Here we present the results of the theoretical investigation of the elastic modes in freely suspended granular membranes and in membranes interacting with a substrate. The out-of-plane motion incorporating rotations of particles is analyzed for the first time. The developed theory provides the basis for the application of the elastic waves in nondestructive evaluation and testing of granular membranes and testing of the adhesion of a particle monolayer to a substrate.

## A.2 Model

We consider an infinite monolayer membrane composed of periodically ordered spherical particles, arranged in a hexagonal lattice (Fig.1a). The structure is supposed to consist of homogeneous spheres with radius  $R$ , and is characterized by a lattice constant  $a = 2R$ . The corresponding first Brillouin zone is shown in Fig.1b, and the modulus of the reciprocal vector  $k$  is  $4\pi/(\sqrt{3}a)$ .

### A.2.1 Shear rigidity of the contacts

In order to analyze the out-of-plane modes of the membrane, we model the shear forces at the contacts as springs, characterized by a constant shear rigidity  $\xi$  at the contact. The elongation of the springs introduces forces and momenta which induce the motion of the particles : out-of-plane displacement ( $\mathbf{u}$ ) and in-plane rotation angles  $\varphi$  and  $\psi$  ( $\varphi$ -rotation with the axis in the  $x$  direction and  $\psi$ -rotation with the axis in the  $y$  direction, Fig. A.1b).

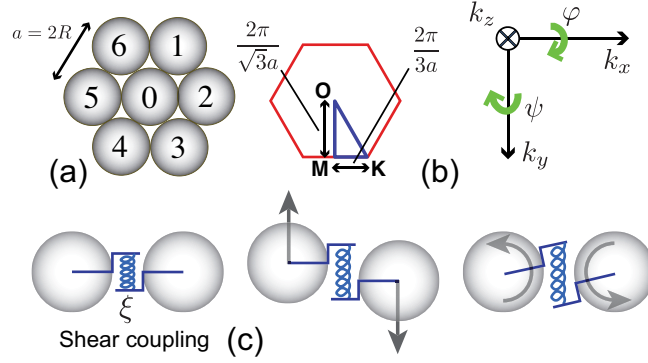


FIG. A.1 – a) Geometrical arrangement of the beads in the elementary cell of the hexagonal membrane crystal. b) Definitions of the Brillouin zone and coordinate axes. c) Activation of shear rigidity by particle displacements and rotations.

We present the equations of motion for the central particle, which are given by the equation for the displacement  $u_0$  of the center of the central particle, and the equations for the rotations  $\varphi_0$  and  $\psi_0$  :

$$m\ddot{u}_0 = -\xi [(\delta u_1 + \delta u_4) + (\delta u_3 + \delta u_6) + (\delta u_2 + \delta u_5)], \quad (\text{A.1})$$

$$I\ddot{\varphi}_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\xi R [(\delta u_1 - \delta u_4) - (\delta u_3 - \delta u_6)], \quad (\text{A.2})$$

$$I\ddot{\psi}_0 = \frac{R}{2}\xi [(\delta u_1 - \delta u_4) + (\delta u_3 - \delta u_6)] + R\xi [\delta u_2 - \delta u_5], \quad (\text{A.3})$$

where  $m$  is the mass of the particle and, for the particular case of homogeneous spheres, the momentum of inertia is  $I = \frac{2}{5}mR^2$ . The term  $\delta u_i$  denotes the elongation of the spring at the contact between the central and  $i$ -particle, that is, the relative displacement between 0 and  $i$ -particle at the contact point. The form of relative displacements  $\delta u_i$  can be given in terms of particle displacements in  $z$ -direction and rotations. For the six particles rounding the central one in a cell of the lattice, relative displacements are explicitly given by the expressions :

$$\begin{aligned} \delta u_1 &= u_{0/1} - u_{1/1} = u_0 - u_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}R(\varphi_0 + \varphi_1) - \frac{1}{2}R(\psi_0 + \psi_1), \\ \delta u_4 &= u_{0/4} - u_{4/4} = u_0 - u_4 + \frac{\sqrt{3}}{2}R(\varphi_0 + \varphi_4) + \frac{1}{2}R(\psi_0 + \psi_4), \\ \delta u_3 &= u_{0/3} - u_{3/3} = u_0 - u_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}R(\varphi_0 + \varphi_3) - \frac{1}{2}R(\psi_0 + \psi_3), \\ \delta u_6 &= u_{0/6} - u_{6/6} = u_0 - u_6 - \frac{\sqrt{3}}{2}R(\varphi_0 + \varphi_6) + \frac{1}{2}R(\psi_0 + \psi_6), \\ \delta u_2 &= u_{0/2} - u_{2/2} = u_0 - u_2 - R(\psi_0 + \psi_2), \\ \delta u_5 &= u_{0/5} - u_{5/5} = u_0 - u_5 + R(\psi_0 + \psi_2), \end{aligned}$$

where the expressions for the displacements of particle  $i$  in contact point with particle  $j$  ( $u_{i/j}$ ) are given in the Appendix, and  $\varphi_i$  and  $\psi_i$  are the rotations of the  $i$  particle with the axes collinear to  $x$  and  $y$  directions respectively.

The motion equations can be written for the new variables  $\Phi = R\varphi$  and  $\Psi = R\psi$  (the arcs on the particle surface) and solved in the form of plane waves

$$\begin{aligned} \vec{\nu} = \begin{pmatrix} u(x, t) \\ \Phi(x, t) \\ \Psi(x, t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u \\ \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} e^{i\omega t - ik_x x - ik_y y} \\ &= \begin{pmatrix} u \\ \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} e^{i\omega t - ik_x x_0 - ik_y y_0} e^{-ik_x \Delta x - ik_y \Delta y}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

where  $(x_0, y_0)$  are the coordinates of the central particle. We note that only the relative coordinates  $(\Delta x, \Delta y)$  between the central particle and the neighbor particles are involved in the out-of-plane modes of the membrane. The equation of motion can be written in the form

$$\mathbf{S} \vec{\nu} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Normalizing the distances to the lattice constant,  $a$ , the elements of the matrix  $\mathbf{S}$  are given by

$$\begin{aligned} S_{11} &= \Omega^2 - \sin^2(\alpha - \beta) - \sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(2\alpha), \\ S_{12} &= -i \frac{\sqrt{3}}{4} \{ \sin[2(\alpha + \beta)] - \sin[2(\alpha - \beta)] \}, \\ S_{13} &= \frac{i}{4} \{ \sin[2(\alpha - \beta)] + \sin[2(\alpha + \beta)] + 2 \sin(4\alpha) \}, \\ S_{21} &= i \frac{\sqrt{3}}{4} \{ \sin[2(\alpha + \beta)] - \sin[2(\alpha - \beta)] \}, \\ S_{22} &= \frac{2}{5} \Omega^2 - \frac{3}{4} [ \cos^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) ], \\ S_{23} &= \frac{\sqrt{3}}{4} [ \cos^2(\alpha + \beta) - \cos^2(\alpha - \beta) ], \\ S_{31} &= -\frac{i}{4} \{ \sin[2(\alpha + \beta)] + \sin[2(\alpha - \beta)] + 2 \sin(4\alpha) \}, \\ S_{32} &= \frac{\sqrt{3}}{4} [ \cos^2(\alpha + \beta) - \cos^2(\alpha - \beta) ], \\ S_{33} &= \frac{2}{5} \Omega^2 - \frac{1}{4} [ \cos^2(\alpha - \beta) + 4 \cos^2(2\alpha) + \cos^2(\alpha + \beta) ], \end{aligned}$$

where we have defined  $\Omega^2 = \omega^2 / (4\omega_0^2)$  with  $\omega_0^2 = \xi/m$ , and  $\alpha = \frac{1}{4}k_x a$ ,  $\beta = \frac{\sqrt{3}}{4}k_y a$ .

The  $\Omega - k$  dispersion curves shown in Fig.A.2 are obtained from  $\det(\mathbf{S}) = 0$ . The dispersion relation is depicted, as usual, following the  $OMKO$  path in the first Brillouin zone, shown in Fig.A.1b. In the new normalization ( $a = 1$ ) these points correspond, in the reciprocal space, to  $O \equiv (0, 0)$ ,  $M \equiv (0, \pi/2)$  and  $K \equiv (\pi/6, \pi/2)$ . The segments  $OM$  and  $OK$  correspond to waves propagating along the  $y$  direction and the one equivalent to  $x$  direction (due to the 6-axis symmetry of the structure), respectively. In Fig.A.2, different propagation directions are separated by dashed lines and the nature of the modes is labeled. The frequencies  $\Omega$  satisfying  $\det(\mathbf{S}) = 0$  for

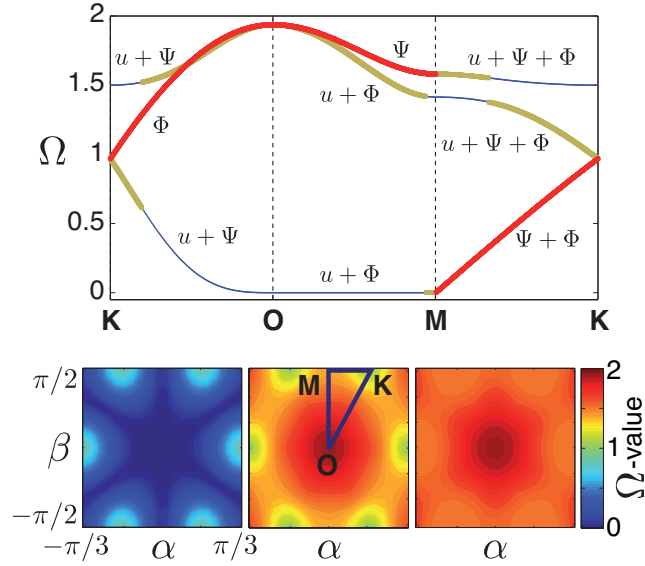


FIG. A.2 – (top) Dispersion relations along the path (OMKO) in the case where only shear forces between beads are taken into account. Red curves correspond to pure rotation modes, blue curves to coupled displacement-rotation modes (with predominance of displacement), yellow curves to couple displacement-rotation modes (with predominance of rotation). (bottom) Iso-surface plots for  $\Omega$  for the lowest eigenvalue (left), the middle eigenvalue (center) and the highest eigenvalue (right), obtained for each couple  $(\alpha, \beta)$ .

any propagation direction in the plane  $(\alpha, \beta)$  are shown in the bottom of Fig.A.2. The eigen-modes of the infinite membrane motion are consisting, in general, of three different components (the out-of-plane displacement and two in-plane rotation angles). Nevertheless, for particular propagation directions one of the components is decoupled from the others. In the case of a propagative wave in the  $k_x$  (respectively  $k_y$ ) direction, a mode called  $\Phi$ -mode (respectively  $\Psi$ -mode) and shown in red in fig.A.2, appears uncoupled to the mixed modes  $(u + \Psi)$  (respectively  $(u + \Phi)$ ). In the case of waves propagating along  $y$  direction ( $0 < \beta < \pi/2$ ), we note a zero frequency  $(u + \Phi)$ -mode, whereas two other modes corresponding to  $u + \Phi$  and  $\Psi$ -modes propagate with frequencies  $\Omega^2 = \frac{15}{4}(1 - \frac{7}{15} \sin^2 \beta)$  and  $\Omega^2 = \frac{15}{4}(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \beta)$ , respectively. For the  $x$  direction, compact presentation of the dispersion relation can be obtained for the uncoupled  $\Phi$ -mode :  $\Omega^2 = \frac{15}{4}(1 - \sin^2 \alpha)$ , where  $0 < \alpha \leq \pi/3$ . For the particular plane vibrations with  $k_x = 0$ ,  $k_y = 0$ , the three components are decoupled from each other : the two modes corresponding to rotations have the same eigenfrequency given by  $\Omega^2 = 15/4$ , whereas the displacement mode has a zero frequency.

The zero frequency  $u + \Phi$ -mode (non propagative mode of zero group velocity) exists because there are such combinations of displacements and rotations of the particles which do not lead to the loading of the contact (to the elongation of the shear spring). In other words in the model presented above, there are configurations of the displaced and rotated particles, which have the same energy as the background configuration with zero displacement and zero rotation. The analysis demonstrates that the zero mode is allowed, in particular because in the model developed above (Fig. A.1(c)), the rotations of two neighbor particles with the same angle but in opposite directions does not cause any loading of the contact. In reality, it is the bending rigidity of the contacts that counteracts this type of motion (Fig. A.3(c)). While the bending rigidity plays negligible role in comparison with shear rigidity in unconsolidated granular crystals [A.23–A.25], it plays an important role when the contacts are consolidated (sintered).

### A.2.2 Bending rigidity of the contacts

We model in the following the bending rigidity of sintered contacts of radius  $r \simeq R\theta \ll R$  by including in the contact description (additionally to the shear spring), two springs with normal rigidities  $\xi_B$  (see Fig. A.3(c)). They are oriented in the membrane plane and located at the lowest and the highest points of the contact along the  $z$ -direction.

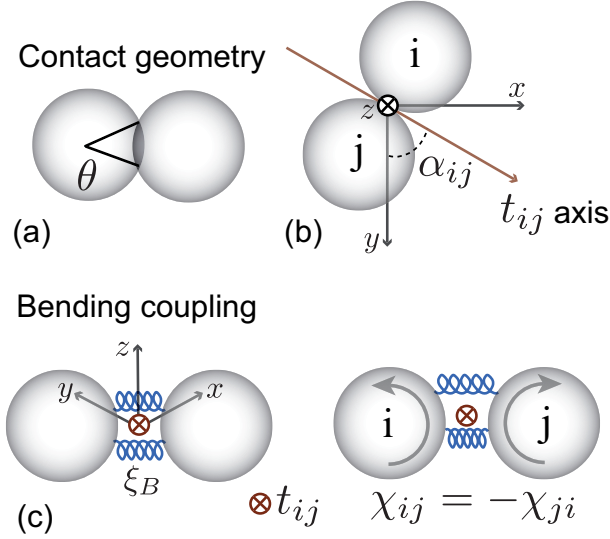


FIG. A.3 – Schematics of the contacts with bending rigidity and definition of the angles and axes.

In this extremely simplified presentation of the physical nature of bending rigidity, even the rotations of the neighbor particles in opposite directions with the same angle will cause elongation of one of the springs and contraction of the other. The corresponding forces have non zero momenta relative to rotation axes and will try to make the particles return to their equilibrium state. For example, an additional (bending related) momentum of forces acting on the particle 0 because of rotations of particles 0 and 2 relative to the  $y$ -axis can be described by

$$M_{02}^{\Psi} = -\frac{r^2}{2}\xi_B(\Psi_0 - \Psi_2). \quad (\text{A.6})$$

In the proposed simple model, bending related momenta are not effective only for contacts located on the rotation axis (i.e. for instance for the contact between particle 0 and 2 in the case of their rotation along  $x$  axis). In the latter case, spin (torsional) rigidity of the contact [A.39] could play a role.

As a consequence of the contact bending rigidity, which is a function of both  $\xi_B$  and the dimension  $R\theta$  of the contact along  $z$  axis (where  $\theta$  is the contact angular dimension, see Fig. A.3(a)), there is a moment along the  $t_{ij}$ -axis tangent to the contact between neighbor beads  $i$  and  $j$  in the  $x - y$  plane. This moment exists even if the beads rotate relative to the direction  $t_{ij}$  to exactly opposite angles  $\chi_{ij} = -\chi_{ji}$  (Fig. A.3(c)).

Here the angle  $\chi_{ij}$  of rotation of the bead  $i$  relative to the axis  $t_{ij}$  is equal to

$$\chi_{ij} = \varphi_i \sin \alpha_{ij} + \psi_i \cos \alpha_{ij}, \quad (\text{A.7})$$

where  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$  is the angle between  $t_{ij}$  axis and  $y$  axis ( $\alpha_{01} = \alpha_{04} = \pi/3$ ,  $\alpha_{03} = \alpha_{06} = 2\pi/3$ ,  $\alpha_{02} = \alpha_{05} = 0$ ).



Due to bending rigidity, the sum of the bending momenta provides the following contributions to the momenta rotating the central beads ( $j = 0$ ) along the  $x$  and  $y$  axes :

$$M_\varphi = \frac{\theta^2}{2} \xi_B R^2 [(\chi_{10} - \chi_{01} - \chi_{04} + \chi_{40}) \sin(\pi/3) + (\chi_{30} - \chi_{03} - \chi_{06} + \chi_{60}) \sin(\pi/3)] \quad (\text{A.8})$$

$$M_\psi = \frac{\theta^2}{2} \xi_B R^2 [(\chi_{10} - \chi_{01} - \chi_{04} + \chi_{40}) \cos(\pi/3) + (\chi_{30} - \chi_{03} - \chi_{06} + \chi_{60}) \cos(2\pi/3) + (\chi_{20} - \chi_{02} - \chi_{05} + \chi_{50})]. \quad (\text{A.9})$$

Matrix  $S$  is modified in the following additional terms

$$\Delta S_{22} = -\frac{3}{4} p_B [\sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)], \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{23} &= \Delta S_{32} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} p_B [\sin^2(\alpha - \beta) - \sin^2(\alpha + \beta)] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{33} &= -p_B \{ [\sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)] / 4 \\ &\quad + \sin^2(2\alpha) \}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

where the nondimensional bending parameter  $p_B$  has been defined as  $p_B = \frac{\theta^2 \xi_B}{2 \xi}$ . By considering bending rigidity of the contact, the rotation around  $x$  axis influences the rotation around  $y$  axis and vice versa. The dispersion relations of the membrane are modified by the presence of bending rigidity, as can be noted in the modes corresponding to the propagation along the  $y$ -axis (OM segment), where a second coupled mode propagates even for small values of the bending parameter (Fig. 4).

The frequencies of all the modes in the points M, K and O can be found analytically. Their analysis demonstrates that a forbidden frequency gap for wave propagation along  $y$ -direction (path OM) always exists. For  $0 \leq p_B \leq 8/15$  the forbidden gap  $(\sqrt{15}/2)p_B \leq \Omega \leq \sqrt{2}$  shrinks with increasing  $p_B$ . For  $8/15 \leq p_B \leq 1$  the width of the forbidden gap  $\sqrt{2} \leq \Omega \leq (\sqrt{15}/2)p_B$  grows. It stabilizes at  $\sqrt{2} \leq \Omega \leq \sqrt{15}/2$  for  $p_B \geq 1$ . For waves propagating in the  $x$ -direction (path OK), the forbidden gap  $3/2 \leq \Omega \leq \sqrt{15}(1 + 3p_B)/4$  opens for  $p_B \geq 7/15$  and its width increases till  $p_B = 1$ . Combining the information of the mode frequencies in the critical points M, K and O, it can be predicted that a complete band gap opens above  $\Omega = 3/2$  for  $p_B > 3/5$  and its width grows up to  $3/2 \leq \Omega \leq \sqrt{15}/2$  when  $p_B = 1$ . These theoretical predictions agree with the numerical results presented in Fig. A.4.

For small values of the parameter  $p_B$ , the frequency of the lowest mode is proportional to the square root of  $p_B$ ,

$$\Omega^2 \simeq 2p_B \sin^4 \beta / [1 - (7/15) \sin^2 \beta]. \quad (\text{A.13})$$

demonstrating that propagation of this mode is due to the bending rigidity of the contacts. Measurements of the velocity of this mode provides direct access to the evaluation of bending rigidity.

Analytical expressions for some symmetry directions of propagation can be obtained. In particular, for waves propagating along  $y$  direction the rotation mode frequency is given by

$$\Omega_\Psi^2 = \frac{5}{4} [3 + (p_B - 1) \sin^2(\beta)], \quad (\text{A.14})$$

and for waves propagating along  $x$  direction, the frequency of the rotation mode is

$$\Omega_\Phi^2 = \frac{15}{4} [1 + (p_B - 1) \sin^2(\alpha)]. \quad (\text{A.15})$$

Dispersion relations for some different bending parameter values are shown in Fig.A.4.



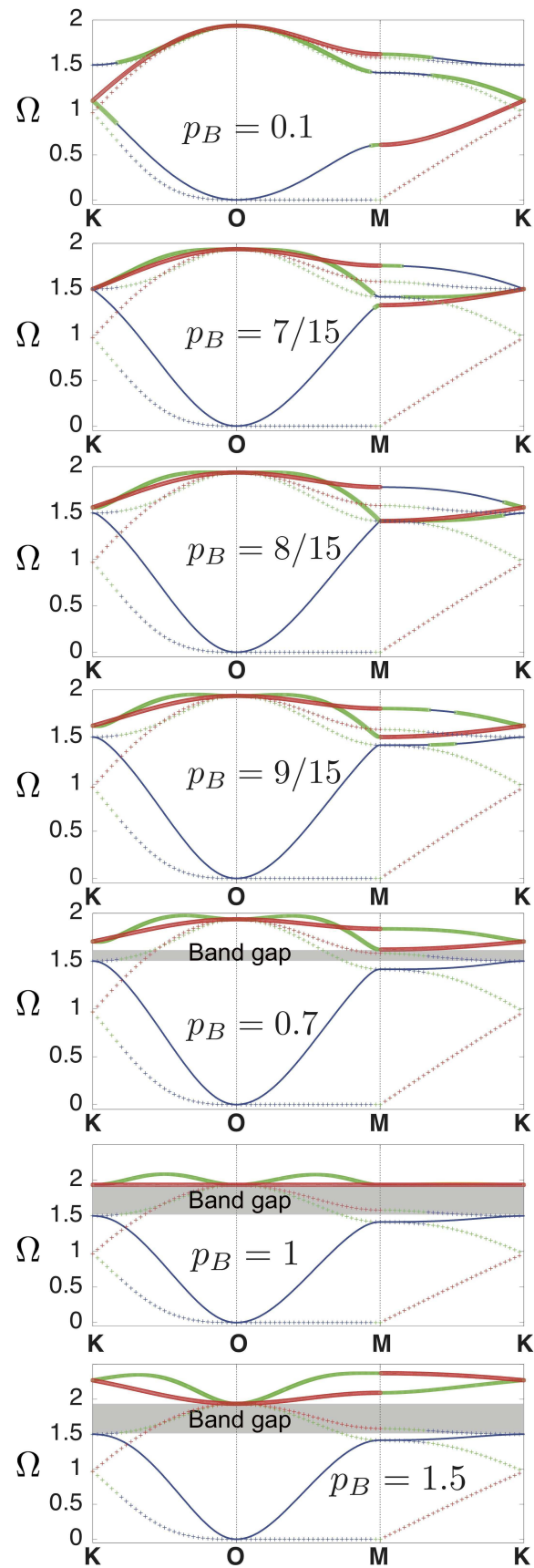


FIG. A.4 – Dispersion curves obtained for different values of the parameter  $p_B$  of bending rigidity. Dotted lines correspond to the case of no bending rigidity, as in Fig. A.2. The complete band gap is shown by the gray shaded zone.

### A.2.3 Normal contact with a rigid surface

We have analyzed the out-of-plane modes of a free suspended membrane considering both the rotational degrees of freedom of the particles and the finite size of the contact between beads. We include now the interaction with an infinitely rigid substrate supporting the membrane. The interaction with the substrate gives rise to the existence of additional forces and momenta at the contact between an individual particle and the substrate, which are modeled as springs with their corresponding stiffness constant.

An additional returning force appears due to the motion along  $z$ -axes, related to the normal rigidity of the contact of a sphere with the substrate  $\xi'_N$  (the symbol ' refers to the interaction with the rigid substrate).

This introduces modifications in only one term of  $S$ , given explicitly by

$$\Delta S'_{11} = -p'_N, \quad (\text{A.16})$$

where we have defined the adimensional parameter  $p'_N$  as  $p'_N = \xi'_N/\xi$ . The contact of the membrane with a rigid substrate has influence on the dispersion relations.

The effect of normal rigidity in the absence of bending rigidity is shown in Fig.A.5 : when the membrane is on a rigid substrate it is composed rather of interacting oscillators than of oscillating masses. This manifests, in particular, in the fact that the wave with  $\vec{k} = \vec{0}$ , which corresponds to pure displacements without rotations, has now a non-zero frequency.

The growth of the frequency of the displacement dominated lowest mode in point O is described by  $\Omega^2 = p'_N$  and is independent of the bending rigidity of the inter-bead contacts.

As it follows from our analytical evaluations and Fig. A.4 above, the displacement dominated mode in the case  $p'_N = 0$  becomes the lowest (in frequency) mode for  $p_B \geq 7/15$  in the point K and for  $p_B \geq 8/15$  in the point M. The analysis demonstrates that at larger values of  $p_B$  and non-zero values of  $p'_N$  the frequency of the lowest mode in these points depend only on the bead / substrate normal interactions :  $\Omega^2 = (3/2)^2 + p'_N$  and  $\Omega^2 = 2 + p'_N$  in the points K and M respectively. Thus the continuous increase of  $p'_N$  for a fixed value of  $p_B > 9/15$ , where the complete band gap exists in the free-standing ( $p'_N = 0$ ) membrane, will lead to closing of the complete gap. For  $3/5 < p_B < 1$  the complete gap closes because the frequency of the first (lowest) mode in point K becomes higher than the frequency of the second mode in point M. This happens when  $p'_N = \frac{3}{4}[5p_B - 3]$ .

For  $p_B \geq 1$  the complete band gap associated to bending rigidity (see Fig. A.4) closes when  $p'_N$  becomes larger than  $3/2$  because the frequency of the first (lowest) mode in point K becomes higher than the coincident frequencies of the second and the third modes in point O. In Figure 6, we illustrate for  $p_B = 1.5$  the closing of this complete gap, which is caused by the increased normal rigidity of the contacts between the beads constituting the membrane and the substrate. While this complete gap closes, it is observed also the opening of a low frequency complete band gap. This low-frequency complete band gap exists only if both bending rigidity of contacts between beads and normal rigidity of bead-substrate contacts are simultaneously non zero. The bending rigidity is necessary to open a local low-frequency band gap in point M, while the normal rigidity is necessary to open a local low-frequency band gap in point O. For small values of the rigidities  $p_B$  and  $p'_N$ , these local gaps grow proportionally to corresponding rigidities (as  $0 \leq \Omega \leq 15p_B/4$  and  $0 \leq \Omega \leq p'_N$ , respectively). Thus for  $p_B \ll 1$  and  $p'_N \ll 1$  the complete low-frequency band gap is controlled by  $\max(15p_B/4, p'_N)$  and experimental determination of the complete gap could provide the measure of either the bending rigidity of the contacts between the beads or of the normal rigidity of the bead-substrate contacts.

### A.2.4 Conclusions

The above presented results on the analytical and numerical evaluation of the out-of-plane motion of free standing membranes composed of a single layer of ordered spherical particles demonstrate that,

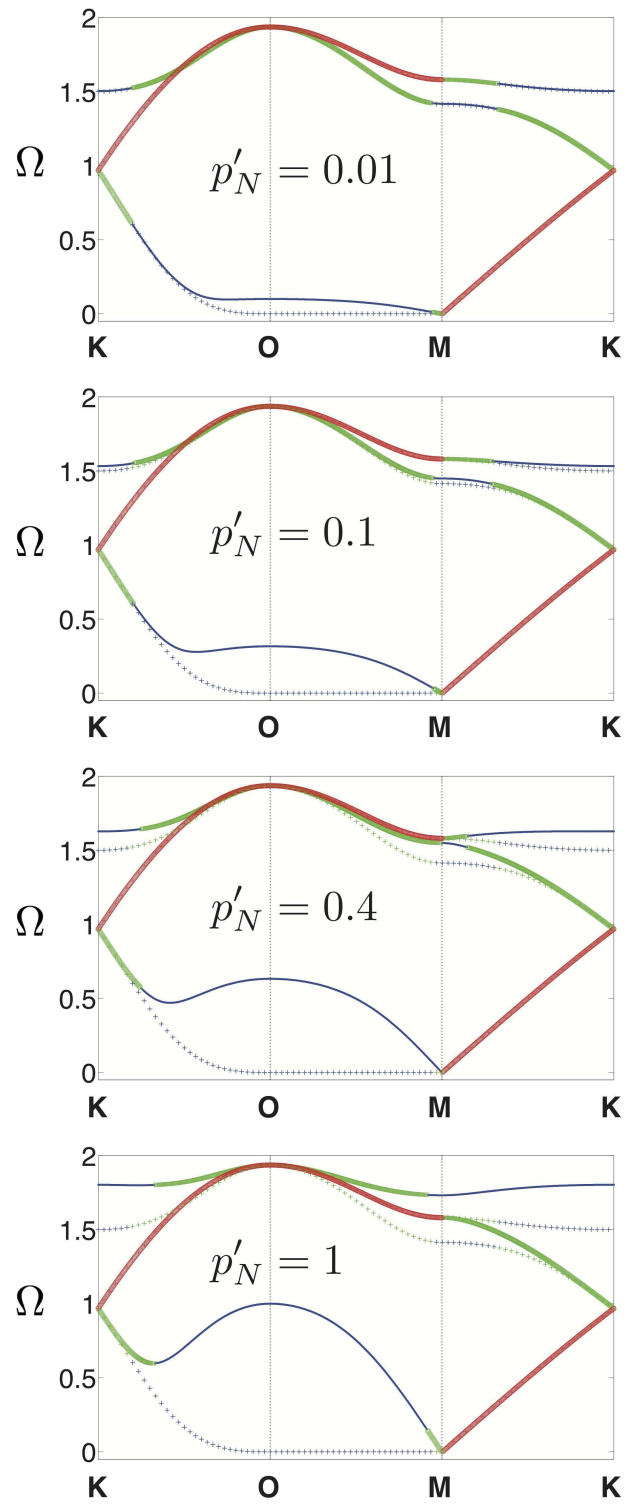


FIG. A.5 – Dispersion curves obtained for different values of the parameter  $p'_N$  (normal rigidity between beads and the substrate) and zero bending rigidity.

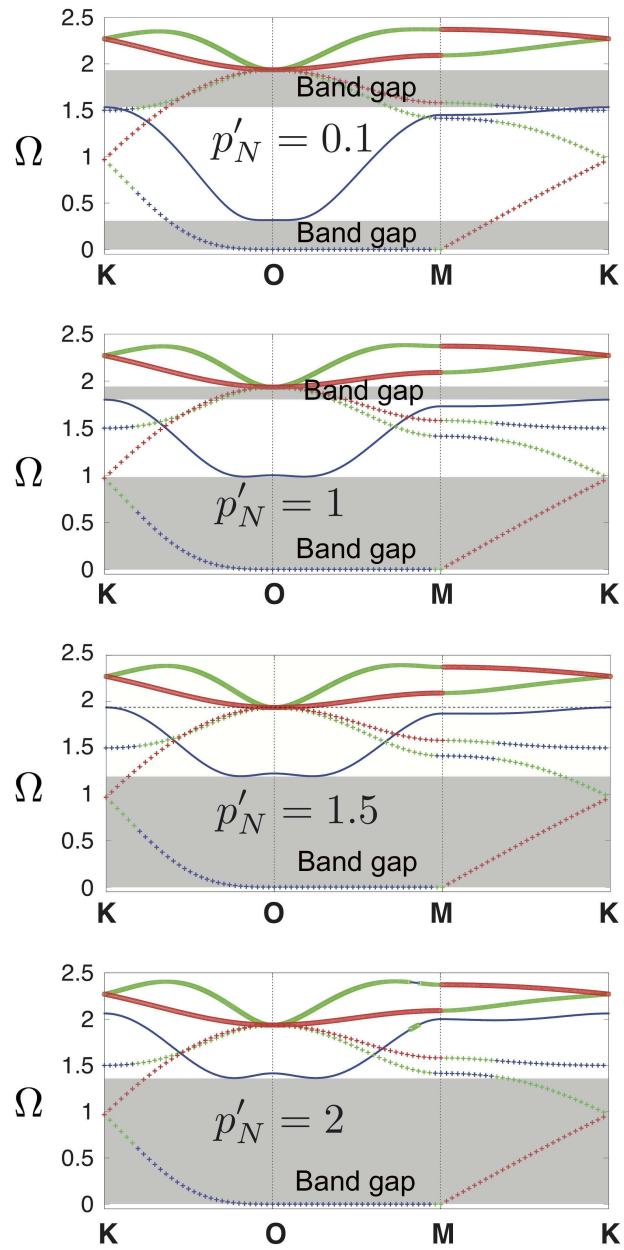


FIG. A.6 – Dispersion relations obtained for different values of the parameter  $p'_N$  (normal rigidity between beads and the substrate) and for a fixed  $p_B = 1.5$  (bending rigidity between the beads).

above a critical value of the ratio of bending to shear rigidity of the inter-particle contacts, a complete forbidden band gap for the elastic wave propagation exists. This complete band gap may disappear in the membranes supported by a substrate. The closing of the high-frequency ('optical') complete gap with increasing normal rigidity of the contacts between the particles and the rigid substrate has been predicted. Also, it has been predicted the existence of a low-frequency ('acoustical') complete band gap when the bending rigidity of contacts between beads and the normal rigidity of bead-substrate contacts are both important. More complex phenomena are expected if the shear rigidity of the contacts between the particles and the substrate are taken into consideration, because the shear rigidity of the particle-substrate contact couples the out-of-plane motion in the supported membranes to the in-plane motions. It would be also interesting in the future to investigate the role of the spin (torsional) rigidity of the inter-particle contacts. The theoretical results presented above will guide the development of opto-acoustical methods for the non destructive non contact evaluation of the elastic properties of free-standing and supported monolayer particle membranes [A.30–A.38], which are based on the all-optical monitoring of the elastic waves through both their generation and detection by lasers [A.40–A.42].

## **Aknowledgements**

This work is supported by Project "STABINGRAM" ANR-2010-BLAN-0927-03, by the MEC of the Spanish Government under Project No. FIS2008-06024-C03-03 and under Jose Catillejo Program. Vincent Tournat acknowledges the research visit fellowship of the Universidad Politecnica de Valencia.

## Appendix

The elongation of the spring which models the contact is equal to the relative displacement  $\delta u_i$  of the 0 and  $i$ -particles in this contact. This displacement is given by  $\delta u_i = u_{0/i} - u_{i/i}$ , where  $u_{i/j}$  refers to the displacement of the  $i$ -particle in the  $j$ -contact. Explicitly, these displacement are given by

$$\begin{aligned}
 u_{0/1} &= u_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}R\varphi_0 - \frac{1}{2}R\psi_0, \\
 u_{1/1} &= u_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}R\varphi_1 + \frac{1}{2}R\psi_1, \\
 u_{0/4} &= u_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}R\varphi_0 + \frac{1}{2}R\psi_0, \\
 u_{4/4} &= u_4 - \frac{\sqrt{3}}{2}R\varphi_4 - \frac{1}{2}R\psi_4, \\
 u_{0/3} &= u_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}R\varphi_0 - \frac{1}{2}R\psi_0, \\
 u_{3/3} &= u_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}R\varphi_3 + \frac{1}{2}R\psi_3, \\
 u_{0/6} &= u_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}R\varphi_0 + \frac{1}{2}R\psi_0, \\
 u_{6/6} &= u_6 + \frac{\sqrt{3}}{2}R\varphi_6 - \frac{1}{2}R\psi_6, \\
 u_{0/2} &= u_0 - R\psi_0, \\
 u_{2/2} &= u_2 + R\psi_2, \\
 u_{0/5} &= u_0 + R\psi_0, \\
 u_{5/5} &= u_5 - R\psi_5.
 \end{aligned}$$

## Bibliographie

- [A.1] C. Kittel, Introduction to Solid State Physics, 8th edition. (Wiley, Univ. of California, Berkeley, 2004).
- [A.2] A. A. Maradudin, Surface Phonons and Polaritons (Garland STPM Press, New York, 1980).
- [A.3] D. L. Blair, N. W. Mueggenburg, A. H. Marshall, H. M. Jaeger, S. R. Nagel, Phys. Rev. E 63, 041304 (2001).
- [A.4] Y. Nahmad-Molinari, J. C. Ruiz-Suarez, Phys. Rev. Lett. 89, 264302 (2002).
- [A.5] A. B. Yu, X. Z. An, R. P. Zou, R. Y. Yang, K. Kendall, Phys. Rev. Lett. 97, 265501 (2006).
- [A.6] O. Carvente, J. C. Ruiz-Suarez, Phys. Rev. Lett. 95, 018001 (2005).
- [A.7] L. M. Schwartz, D. L. Johnson, S. Feng, Phys. Rev. Lett. 52, 831-834 (1984).
- [A.8] A. N. Bogdanov, A. T. Skvortsov, Sov. Phys. Acoust. 38 224-226 (1992).
- [A.9] E. Cosserat, F. Cosserat, Théorie des Corps déformables (Herman et fils, Paris, 1909).
- [A.10] A. C. Eringen, Microcontinuum Field Theories. 1 : Foundations and Solids (Springer Verlag Inc., New York, 1999).
- [A.11] A. C. Eringen, Theory of micropolar elasticity. In : H. Liebowitz (Ed.), Fracture, vol. II, Chapter 7, pp. 622-729 (Academic Press, New York, 1968).

- [A.12] A. Askar, A. S. Cakmak, *Int. J. Engng. Sci.* 6, 583-589 (1968).
- [A.13] A. S. J. Suiker, A. V. Metrikine, R. de borst, *Int. J. Solids and structures* 38, 1563-1583 (2001).
- [A.14] I. S. Pavlov, A. I. Potapov, G. A. Maugin, *Int. J. Solids and Structures* 43, 6194-6207 (2006).
- [A.15] I. A. Kunin, *Elastic Media with Microstructure*, vol. 2, *Three-Dimensional Models* (Springer, Berlin, 1983).
- [A.16] F. Gassmann, *Geophysics* 16, 673-685 (1951).
- [A.17] J. Duffy, R. D. Mindlin, *J. Appl. Mech. Trans., ASME* 24, 585-593 (December 1957).
- [A.18] R. D. Stroll, *Sediment Acoustics* (Springer-Verlag, Berlin, 1989).
- [A.19] J. E. White, *Underground sound* (Elsevier, Amsterdam, 1983).
- [A.20] C. Inserra, V. Tournat, and V. Gusev, *EPL* 78, 44001 (2007).
- [A.21] V. Tournat and V. E. Gusev, *Acta-Acustica United with Acustica* 96, 208-224 (2010).
- [A.22] V.E. Gusev and V. Tournat, *Phys. Rev. E* 78, 036602 (2008).
- [A.23] O. Mouraille, W. A. Mulder, and S. Luding, *J. Stat. Mech. : Theory Exp.*, P07023 (2006).
- [A.24] A. Merkel, V. Tournat and V. E. Gusev, *Ultrasonics* 50, 133-138 (2010).
- [A.25] A. Merkel, V. Tournat and V. E. Gusev, *Phys. Rev. E* 82, 031305 (2010).
- [A.26] A. E. Lyalin, V. A. Pirozhkov, R. D. Stepanov, *Sov. Phys. Acoust.* 28, 494-495 (1982).
- [A.27] M. A. Kulesh, V. P. Matveenko, I. N. Shardakov, *J. Appl. Mech and tech. Phys.*, 46, 556-563 (2005).
- [A.28] Z. Cheng, W. B. Russel, P. M. Chalkin, *Nature* 401,893-895 (1999).
- [A.29] J. D. Joannopoulos, *Nature* 414, 257-258 (2001).
- [A.30] A. van Blaaden, R. Ruel, P. Wiltzius, *Nature* 385, 321-324 (1997).
- [A.31] E. V. Shevchenko, D. V. Talapin, S. O'Brien, C. B. Murray, *J. Am. Chem. Soc.* 127, 8741-8744 (2005).
- [A.32] E. V. Shevchenko, D. V. Talapin, C. B. Murray, S. O'Brien, *J. Am. Chem. Soc.* 128, 3620-3637 (2006).
- [A.33] T. P. Bigioni, X-M. Lin, T. T. Ngugen, E. I. Corwin, T. A. Witten, H. M. Jaeger, *Nature Materials* 5, 265-270 (2006).
- [A.34] M. K. Hossain, K. Shibamoto, K. Ishioka, M. Kitajima, T. Mitani, S. Nakashima, *J. Luminescence* 122-123, 792-795 (2007).
- [A.35] B.D. Leahy et al., *Phys. Rev. Lett.* 105, 058301 (2010).
- [A.36] K. E. Mueggenburg, X-M. lin, R. H. Goldsmith, H. M. Jaeger, *Nature Materials* 6, 656-660 (2007).
- [A.37] W. Cheng, M. J. Campolongo, J. J. Cha, S. J. Tan, C. C. Umbach, D. A. Muller, D. Luo, *Nature Materials* 8, 519-525 (2009).
- [A.38] W. Cheng et al., *Nature Materials* 8, 519 (2009).
- [A.39] K. L. Johnson, *Contact Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge U.K., 1985).
- [A.40] C. Thomsen, H. T. Grahn, H. J. Maris, J. Tauc, *Phys. Rev. B* 34, 4129 (1986).
- [A.41] C. B. Scruby and L. E. Drain, *Laser Ultrasonic Technique & Applications* (Adam Hilger, 1990).
- [A.42] V. E. Gusev and A. A. Karabutov, *Laser Optoacoustics* (AIP, New-York, 1993).





## Résumé

Une structure ordonnée, périodique et non cohésive de billes sphériques monodisperses forme un cristal phononique granulaire. L'objet de ce travail de thèse porte sur la propagation d'une onde acoustique à l'intérieur de ce type de structure. Lors de la propagation d'une onde acoustique à travers un cristal granulaire, les propriétés des cristaux phononiques (dispersion due à la périodicité géométrique) sont combinées avec les propriétés de propagation dans les milieux granulaires (non-linéarités, degrés de liberté de rotation). Dans ce travail de thèse, les relations de dispersion des modes de volumes se propageant dans une structure granulaire hexagonale compacte sont déterminées théoriquement. La structure est modélisée par une structure masses-ressorts. Deux ressorts modélisent les interactions au niveau du contact entre deux billes, alors considérées comme des masses rigides, suivant la théorie de Hertz-Mindlin, avec un ressort pour les interactions normales et un ressort pour les interactions transverses. Dans un premier temps, le spectre des modes de volume est déterminé dans le cas où les interactions transverses sont négligées, les relations de dispersion des modes de translation se propageant dans le cristal sont obtenues. Dans un deuxième temps, les rigidités transverses sont prises en compte. L'existence de l'interaction transverse ainsi que la distance non nulle séparant les contacts des centres de billes nécessitent la prise en compte des degrés de liberté de rotation de chaque bille. La modélisation de la structure s'inscrit alors dans le cadre d'une théorie généralisée de l'élasticité appelée théorie de Cosserat ou théorie micropolaire. Ceci conduit à la prédiction de modes de translation, de modes de rotation et de modes couplés de rotation-translation. Les modes induits par la théorie de Cosserat (modes de rotation et modes couplés translation-rotation) n'ont auparavant pas été observés expérimentalement dans les milieux granulaires. Après l'étude théorique de la propagation des ondes dans une direction particulière, l'observation expérimentale de modes couplés rotation-translation dans cette direction dans un cristal phononique granulaire est reportée, validant ainsi les effets de la théorie de Cosserat dans les milieux granulaires. Finalement, la non-réciprocité de l'effet non linéaire classique d'auto-démodulation par rapport à la direction de propagation de l'onde acoustique dans un cristal granulaire soumis à la gravité est démontrée.

**Mots-clés : cristal phononique granulaire, modes rotationnels, Cosserat, non-linéarités.**

## Abstract

A periodic, ordered and noncohesive structure of monodisperse spherical beads forms a granular phononic crystal. This work is devoted to the propagation of an acoustic wave within this kind of structure. During the propagation of an acoustic wave through a granular crystal, the properties of the phononic crystals (dispersion due to the geometrical periodicity) are combined with the properties of wave propagation in granular media (nonlinearities, rotational degrees of freedom). In this thesis, the dispersion relation of the bulk modes propagating in a hexagonal close-packed structure are theoretically derived. The structure is modeled by a mass-spring structure. The contact interactions between two beads (considered as rigid masses) are modeled by two springs obeying the Hertz-Mindlin theory, with one stiffness for the normal interactions and one for the transverse interactions. In the first part, the spectrum of bulk modes is determined in the case where the transverse interactions are neglected. The dispersion relations of the translational modes propagating within the crystals are derived. In the second part, the transverses rigidities are taken into account. The existence of the transverse interaction associated with the nonzero distance between the centers of the beads and the contact points requires to take into account the rotational degrees of freedom of each individual bead. In the description of continuum elastic media, the rotational degrees of freedom are included in the generalized theory of elasticity which is also known as the Cosserat or micropolar theory. Experimental observations in granular materials of the modes predicted by the Cosserat theory (rotational modes and coupled rotational-translational modes) have not been reported before. After the theoretical investigations in a peculiar direction of propagation, the experimental observation of coupled rotational-translational modes in this direction is reported, and constitute a convincing evidence of the phenomena predicted by the Cosserat theory for the granular media. Finally, in this work, we also demonstrated the asymmetry of the classical nonlinear acoustic effect of self-demodulation relative to the direction of the acoustic wave propagation in noncohesive granular crystal under gravity.

**Keywords : granular phononic crystal, rotational modes, Cosserat, nonlinearities.**