



HAL
open science

Imagerie acoustique par approximations parcimonieuses des sources

Antoine Peillot

► **To cite this version:**

Antoine Peillot. Imagerie acoustique par approximations parcimonieuses des sources. Acoustique [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2012. Français. NNT : . tel-00772600

HAL Id: tel-00772600

<https://theses.hal.science/tel-00772600>

Submitted on 10 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**École Doctorale Sciences Mécaniques, Acoustiques,
Electroniques et Robotiques Paris 6**

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Acoustique

présentée par

Antoine PEILLOT

**Imagerie acoustique par approximations
parcimonieuses des sources**

dirigée par Laurent DAUDET

Soutenue le 20 novembre 2012 devant le jury composé de :

M. Jérôme ANTONI	Professeur, INSA-Lyon	rapporteur
M. Laurent DAUDET	Professeur, Université Paris Diderot	directeur
M. Julien DE ROSNY	Chargé de recherche, CNRS	examineur
M. Alexandre GARCIA	Professeur, CNAM	rapporteur
M. Régis MARCHIANO	Professeur, UPMC	examineur
M. François OLLIVIER	Maître de conférence, UPMC	co-directeur
M. Franck POISSON	Chargé de recherche, SNCF	examineur

Institut Jean le Rond d'Alembert
site de Saint-Cyr l'École
2, place de la gare de ceinture
78 210 Saint-Cyr l'École

École doctorale SMAER
4 place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

Résumé

La description parcimonieuse des sources permet une approche nouvelle de l'analyse des champs acoustiques. Durant ce projet, nous avons appliqué ce principe à plusieurs scénarios classiques : l'holographie acoustique de champ proche, la localisation de sources simples ou complexes et l'identification de directivité de sources. Ces méthodes d'imagerie exigent la résolution de problèmes inverses, souvent mal posés, qui nécessitent l'utilisation conjointe de techniques de régularisation. De plus, pour capter l'information utile et assurer de bonnes performances de reconstruction, les techniques traditionnelles d'antennerie nécessitent le déploiement d'un grand nombre de microphones.

Dans ces travaux, nous avons envisagé une approche originale de l'analyse des champs acoustiques basée sur l'approximation parcimonieuse des sources, ce qui agit comme un principe de régularisation. Cette formulation permet en outre de tirer profit de la méthode de "compressive sampling" (CS), qui permet de restreindre le nombre de mesures utiles à la résolution du problème inverse si la source à reconstruire admet une représentation suffisamment parcimonieuse.

On montre que l'application du CS à l'holographie en champ proche de plaques homogènes et isotropes permet non seulement de mieux régulariser le problème par rapport aux techniques génériques classiques, mais également de diminuer fortement le nombre de microphones en sous-échantillonnant l'hologramme au-delà de la limite imposée par la théorie de Shannon.

Le problème de localisation de sources, envisagée comme un problème parcimonieux, permet la localisation avec une haute résolution de sources corrélés, en champ proche comme en champ lointain. Les méthodes de reconstruction parcimonieuse permettent de structurer la base de parcimonie en l'enrichissant avec un modèle de décomposition des sources en harmoniques sphériques pour localiser et identifier la directivité de sources complexes. Ces études ont finalement nécessité le développement de techniques rapides de calibration en position et en gain d'antennes composées d'un grand nombre de microphones.

Mots-clés

Représentations parcimonieuses, acquisition compressée, holographie acoustique de champ proche, localisation de sources, diagramme de directivité, calibration, imagerie acoustique

Acoustic sources imaging in the sparsity framework

Abstract

In this work the principle of sparsity-based techniques have been applied to acoustic imaging issues. It includes nearfield acoustic holography (NAH), complex sources localization and directivity pattern identification. These techniques consist in the inversion of ill-posed problems which involve the use of regularization schemes. Moreover, standard regularization methods often require a huge number of microphones in order to oversample the acoustic field and therefore avoiding aliasing effects.

To overcome these problems, we investigate sparse regularization principles and/or compressive sampling (CS) for the analysis of acoustic fields. CS states that, under the sparsity assumption of the source to recover, it is possible to significantly reduce the number of measurements (i.e., microphones), even well below spatial Nyquist rates.

It is shown that sparsity-based NAH techniques lead to significant improvements over standard NAH techniques. A sub-Nyquist random sampling combined with sparse regularization allows the precise source reconstruction. The problem of source localization can be recast in a sparse framework. It acts as a high-resolution localisation method for correlated and uncorrelated sources that lie in the near field or in the far field. The use of sparsity-promoting algorithms allows the localization of complex sources by improving the sparse model with a spherical harmonic dictionary. This method is applied to the identification of sources directivity pattern. Finally, microphone position self-calibration methods are investigated to experimentally manage large microphone arrays.

Keywords

Sparse representations, compressive sampling, nearfield acoustical holography, sources localization, directivity pattern, self-calibration, acoustic imaging

Remerciements

Ces trois années de thèse ont été tour à tour intenses, agréables, parfois laborieuses (oui quand même!), mais toujours intéressantes. J'ai d'ailleurs l'impression que le temps s'est accéléré pendant cette période. Il en ressort des résultats très encourageant qui sont le fruit d'une collaboration avec les différentes équipes du projet ECHANGE dont je remercie tous les membres : Laurent Daudet, mon directeur de thèse, François Ollivier, mon encadrant et mentor pour la partie expérimentale du projet, Jacques, et évidemment Gilles compagnon de thèse, Rémi, Albert, et l'équipe de Rennes, Nancy, Rémi organisateur du projet, Valentin (la soirée à la graves c'était bien!), Nikos et Jules, organisateur de talent!

Je n'oublie pas non plus les collègues de Saint-Cyr l'Ecole. Je remercie d'abord ceux qui ont participé de près ou de loin à la construction des antennes que j'ai utilisé et qui m'ont été d'une aide précieuse : Dominique, Christian, Hélène, et Pierre Alais. Je les remercie également pour leur bonne humeur, surtout Christian pour ses blagues de haut niveau que l'on peut entendre dans tous le labo rond, et Dominique très blagueuse aussi surtout quand il s'agit de monter et démonter des antennes d'holographie en un temps record! Ensuite je remercie ceux qui ont participé à la vie collective agréable du labo : Jean-François, Jean-Philippe, Jean-François l'homme préposé au café, Pierre, Frédéric pour ses conseils, encore François et Jacques, les secrétaires toujours sympathiques Anne et Evelyne, et Vincent qui a été mon encadrant de stage et avec qui les échanges ont toujours été intéressants et constructifs. Enfin Pierre-Yves qui s'est souvent motivé pour aller à pied à la cantine (mais qui se dégonfle en hiver...), et les autres compagnons de thèses du labo Kashif, Than, Lucilla. Je remercie spécialement Lucilla qui a apporté le soleil italien par sa présence au labo, surtout en hiver où l'atmosphère générale est un peu déprimante, et qui nous a gâté avec ses nombreux repas à base de pattes!

Je remercie également Alex qui a circulé quelque temps au labo et qui a été un excellent compagnon de congrès, notamment à Rio.

Je remercie chaleureusement François (que j'ai déjà remercié deux fois!) qui a été plus qu'un encadrant mais un collègue avec qui ça a été un vrai plaisir de travailler et aussi de partager quelques verres, parce qu'il y a un temps pour tout.

Une spéciale dédicace aux collocs Aurel et Sandra, en particulier Sandra qui venait de galérer pour finir la rédaction de sa thèse quand ça a été mon tour et qui m'a motivé pour que je m'active.

Je salue également toute l'équipe de "gnaffres", qui ont atterri un peu partout en France et dans le monde (la liste est un peu longue alors vous vous reconnaitrez!). Un spéciale Zah pour les deux autres parigots Guiz et JB qui viennent de finir leur thèse en même temps que moi, et avec qui les discussions "scientifiques de comptoir" autour de picon bières ont toujours été réconfortantes. Dans l'équipe des "gnaffres" il y en a un qui s'est tiré un peu trop vite de cette terre. Grati je renverse mon verre à ta santé, je suis sûr que tu aurais fait un grand docteur foutaisique!

Finalement mes parents qui m'ont toujours encouragé dans mes études ont leur place, et pas la moindre, dans cette page de remerciements. Je leur suis reconnaissant car sans leur soutien, je n'aurais pas pu aller bien loin. Il est maintenant temps de passer à autre chose. Ce manuscrit de thèse clôt d'ailleurs ma période de vie étudiante.

Table des matières

Introduction	1
1 Régularisation parcimonieuse des problèmes inverses	7
1.1 Résolution classique de problèmes inverses	7
1.2 Approximations parcimonieuses des signaux	10
1.2.1 Représentations parcimonieuses des signaux	10
1.2.2 Exploitation de la parcimonie et algorithmes de reconstruction . . .	12
1.3 Principe de l'acquisition compressée ou compressive sampling	16
1.4 Conclusion	19
2 Holographie acoustique compressée	21
2.1 Processus expérimental	23
2.1.1 Présentation des sources vibrantes	23
2.1.2 Mesure sur le plan hologramme	25
2.1.3 Traitement des signaux	25
2.1.4 Évaluation des performances	26
2.2 Formulation mathématique de la NAH	27
2.3 Approche standard de la NAH : régularisation de Tikhonov	30
2.3.1 Troncature et discrétisation du plan de mesure	30
2.3.2 Régularisation de Tikhonov	31
2.3.3 Régularisation adaptée à la NAH	32
2.4 Régularisation parcimonieuse	33
2.4.1 Choix du dictionnaire de décomposition	34
2.4.2 Algorithmes de reconstruction	38
2.5 Analyse et comparaison des résultats	40
2.5.1 Sensibilité de la méthode aux erreurs de calibrations	42
2.5.2 Extension de l'hologramme	43
2.5.3 Recouvrement spectral	43
2.5.4 Efficacité de la régularisation en hautes fréquences	44
2.5.5 Complexité des algorithmes	44
2.5.6 Robustesse du dictionnaire	45
2.6 Compressive sampling appliqué à la NAH	45
2.6.1 Construction d'une antenne aléatoire	47

2.6.2	Influence de l'échantillonnage spatial	48
2.7	Conclusion	52
3	Localisation par représentation parcimonieuse de sources	55
3.1	État de l'art des techniques en champ lointain	56
3.1.1	Modélisation du problème	56
3.1.2	Méthode de formation de voies ou "beamforming"	58
3.1.3	Méthode Capon	59
3.1.4	Méthode sous-espace MUSIC (MUltiple Signal Classification)	60
3.1.5	Algorithme CLEAN	61
3.1.6	Algorithmes basés sur la minimisation de la norme ℓ_1 du vecteur source	62
3.2	Exploitation de la parcimonie des sources par OMP	63
3.2.1	Traitement des signaux	63
3.2.2	Algorithme de localisation par OMP	64
3.3	Simulations en champ lointain	66
3.3.1	Régularisation parcimonieuse avec un réseau régulier	66
3.3.2	Réseau irrégulier et compressive sampling	69
3.4	Localisation expérimentale de sources omnidirectionnelles en champ proche	70
3.4.1	Traitement harmonique des sources	71
3.4.2	Extension à la localisation large bande	76
3.5	Conclusions	79
4	Localisation et identification de sources complexes	81
4.1	Décomposition en harmoniques sphériques	81
4.2	Modélisation du problème de localisation de sources complexes par parcimonie structurée	83
4.3	Adaptation des algorithmes de reconstruction parcimonieuse	84
4.3.1	Groupe OMP	84
4.3.2	Groupe BPDN	85
4.3.3	Résultats expérimentaux	86
4.4	Application à la mesure de directivité 3D par groupe OMP	90
4.4.1	Motivations	90
4.4.2	Évaluation numérique des performances de groupe OMP pour l'identification de directivité	91
4.4.3	Procédure de calibration des sources	98
4.4.4	Résultats expérimentaux	99
4.4.5	Mesure de directivité et Compressive Sampling	105
4.5	Conclusion	106
5	Calibration et localisations conjointes des sources et des microphones	109
5.1	Matrice de calibration diagonale	110
5.2	Estimation aveugle de la position des microphones	113

5.3	Calibration de la position de sources par exploitation de la parcimonie spatiale des sources	115
5.3.1	Algorithme de calibration	115
5.3.2	Résultats de simulations	119
5.3.3	Sources omnidirectionnelles	119
5.3.4	Sources complexes	121
5.4	Extension de dictionnaire par approximation de Taylor	125
5.5	Conclusion	128
	Conclusion générale	131
	A Détection des temps d'arrivées par inter-corrélation généralisée	135
	B Représentation de quelques harmoniques sphériques	137
	Table des figures	139
	Bibliographie	145

Introduction

L'analyse des champs acoustiques à l'aide d'antennes de microphones est pratiquée dans des domaines industriels et de recherche fondamentale très variés. L'étude des sources aéroacoustiques dans l'industrie des transports, aériens en particulier, génère une littérature importante [Sij07, FB11]. Les antennes de microphones servent alors à l'imagerie des sources pour leur localisation, et mettent en œuvre des techniques de traitement du signal d'antenne plus ou moins évoluées et dérivées de la "formation de voie" originelle. Ces techniques sont limitées physiquement en résolution et en dynamique et l'essentiel des recherches tend à repousser ces limites. Plus récemment, dans la suite de ces évolutions en imagerie, on a commencé à s'intéresser à l'identification des sources pour tenter de connaître les phénomènes physiques qui les engendrent. Des modèles théoriques de source interviennent alors dans l'analyse des champs mesurés pour enrichir les techniques d'imagerie [WA80, Raf05, HPVR11]. Un autre moyen sensiblement différent dans son principe d'analyse vise à identifier les sources vibratoires, il s'agit de l'holographie acoustique de champ proche, qui a donné lieu depuis les années 80 à une littérature très abondante [MWL85, Hal03, SHRH03], traitant en particulier de l'optimisation des techniques de régularisation dont ce problème inverse est fortement dépendant pour produire des résultats satisfaisants. Le point commun à toutes ces techniques est l'utilisation d'une antenne de microphones dont la première limitation en pratique est le nombre de microphones, pour des questions d'encombrement, et accessoirement de coût. Cette limitation engendre des problèmes de sous-échantillonnage des champs mesurés, de résolution, de dynamique,... Dans le cadre du projet ANR-ECHANGE (ECHantillonnage Acoustique Nouvelle GÉNération)¹, nous avons envisagé une approche nouvelle de l'analyse des champs acoustiques dans l'espoir d'évaluer de combien la connaissance d'*a priori* de parcimonie sur le signal à acquérir peut nous aider à dépasser certaines de ces contraintes. Cette approche est basée sur l'approximation parcimonieuse des sources acoustiques et sur les principes du "compressive sampling" [CW08, Rom08, LDSP08], qui propose de mesurer des champs acoustiques au moyen d'un nombre limité de mesures ponctuelles (i.e. de microphones) mais au prix d'une complexité algorithmique plus importante. Toutefois, les puissances de calculs à disposition permettent de nos jours la résolution de problèmes numériques de plus en plus complexes.

Dans le cadre d'ECHANGE, plusieurs scénarios ont été envisagés afin d'appliquer les

1. <http://exchange.inria.fr/>

méthodes d'approximations parcimonieuses à des problèmes de vibrations (holographie), d'acoustique sous-marine (imagerie des fonds marins), et aérienne (mesures de réponses impulsionnelles, localisation de sources...). Dans cette thèse, nous nous sommes focalisés sur trois scénarios d'imagerie de sources de sons :

- La détermination des composantes vibratoires d'une source par holographie acoustique de champ proche. Cette technique consiste à rétro-propager sur la source le champ acoustique mesuré à proximité de celle-ci. Elle est utilisée pour la caractérisation de sources dans des structures vibrantes complexes telles que des instruments de musique ou n'importe quel type de machines soumises à des vibrations mécaniques.
- La localisation de sources en champ lointain ou en champ proche. Cette technique peut être sollicitée dans des applications aussi diverses que la localisation d'avalanche, ou la lutte contre la pollution sonore. Dans ce dernier cas, la localisation de sources de bruits sur des véhicules motorisés, des trains, ou encore des avions permet d'agir directement sur la source afin de rendre les systèmes plus silencieux.
- L'identification de la directivité d'une source. Cette technique permet d'avoir une meilleure connaissance sur le rayonnement des sources. Elle peut être employée pour reproduire le rayonnement d'instruments de musique ou pour réduire plus efficacement l'émission de bruit.

Les scénarios cités ont un point commun : ils consistent à résoudre un problème inverse mal posé. Les mesures acoustiques sont en effet souvent incomplètes, bruitées et les modèles de propagation acoustique qui permettent d'extraire l'information nécessaire pour l'identification des sources sont soumis à un certain nombre d'incertitudes. Les techniques classiques de résolution font appel à des méthodes de régularisation du problème afin de rendre les solutions stables. Elles sont cependant limitées par le théorème de Shannon-Nyquist qui impose d'échantillonner les champs acoustiques à une fréquence spatiale au moins égale au double de la fréquence maximale du phénomène physique observé. Le nombre de transducteurs associés aux dispositifs d'acquisition et de stockage des données peuvent être importants. Ces contraintes posent des problèmes de faisabilité qui peuvent entraîner des conséquences lourdes sur le plan économique et humain (construction d'antennes complexes, main d'œuvre importante, temps d'acquisitions longs).

C'est dans ce contexte que nous appliquons les concepts de "compressive sampling" aux trois scénarios précédemment cités : l'holographie acoustique, la localisation de sources, et l'identification de directivité. Le "compressive sampling", ou acquisition compressée, est un outil issu de théories mathématiques récentes qui propose une nouvelle manière de mesurer des champs complexes en utilisant des connaissances *a priori* sur les champs étudiés dès la phase d'échantillonnage. Il est fondé sur deux concepts :

- La parcimonie du champ à reconstruire, c'est-à-dire que le fait qu'il puisse être représenté ou approché dans une base (ou dictionnaire redondant) connue *a priori* par un faible nombre de coefficients inconnus.
- L'incohérence de l'espace des mesures avec la base de parcimonie.

Le principe des approximations parcimonieuses, qui est au cœur de cette thèse, est de représenter des données de grandes dimensions par une combinaison de peu d'éléments, les

atomes, sélectionnés parmi une large collection, le dictionnaire. La première étape critique est la recherche d'un modèle de parcimonie, donc un dictionnaire d'atomes, qui décrit au mieux les données. La sélection des atomes fait appel à des algorithmes de reconstruction parcimonieuse dont la complexité algorithmique peut être très lourde numériquement. Cependant, durant ces dernières années, une intense activité de recherche pluridisciplinaire (traitement du signal, mathématiques appliquées, informatique théorique) a permis le développement de méthodes de reconstruction parcimonieuse moins coûteuses du point de vue algorithmique.

La deuxième étape consiste à définir une stratégie de mesure adaptée aux méthodes de "compressive sampling". Par exemple, on acquiert des échantillons dans des directions faiblement corrélées à l'espace de représentation parcimonieuse des signaux, par exemple à l'aide de projections aléatoires. Sous ces hypothèses (parcimonie et incohérence), la théorie du "compressive sampling" affirme que l'on peut réduire considérablement le nombre de mesures, par rapport à l'échantillonnage classique, pour une précision de reconstruction sensiblement équivalente. Le nombre de mesures nécessaire n'est alors plus dicté par la bande passante du signal, mais par la quantité d'information qu'il porte réellement. Les contraintes de mesures classiques peuvent être assouplies et ainsi permettre des temps d'acquisitions de mesures plus faibles. Par exemple, en imagerie médicale, Lustig et *Al* [LDSP08] ont implémenté le "compressive sampling" sur des IRM, permettant ainsi de diviser le temps d'exposition du sujet par un facteur 3. Cependant, selon les applications, les modèles de décomposition parcimonieuse ne sont pas toujours disponibles. Dans ces cas là l'application du "compressive sampling" est exclue.

Les objectifs de cette thèse sont multiples. Il s'agit premièrement d'adapter les principes algorithmiques des méthodes parcimonieuses et du "compressive sampling" à la résolution des problèmes inverses que sont l'holographie acoustique de champ proche, la localisation de sources simples ou complexes et l'identification de directivité de sources. Cette étape inclut la création de modèles parcimonieux pour chacun des scénarios. Dans un second temps, les dispositifs expérimentaux correspondant aux trois scénarios sont mis en œuvre. Ils font appel à la conception et la construction d'antennes de microphones compatibles avec le modèle parcimonieux. Nous évaluons alors expérimentalement à partir de mesures de champs acoustiques la pertinence et les limites des méthodes de reconstructions parcimonieuses des sources.

Dans cette thèse, les applications des méthodes parcimonieuses sont traitées selon une approche expérimentale. Les résultats et interprétations qui en découlent sont issus d'observations plutôt que de considérations théoriques. Les fondements mathématiques de ces méthodes sont complexes et font l'objet d'une littérature abondante. Nous n'en fournissons que les résultats principaux qui nous ont permis d'être exploités dans des cas concrets. Le lecteur intéressé par la théorie mathématique des approximations parcimonieuses dans le cadre de l'acoustique est invité à lire le manuscrit de thèse de Gilles Chardon [Cha12] également effectuée dans le cadre du projet ECHANGE. Elle traite des aspects mathématiques d'approximation de solutions d'équations aux dérivées partielles

pour la détermination de modèles parcimonieux de rayonnements acoustiques et de vibration de plaques.

Le mémoire de thèse qui suit est scindé en cinq chapitres. Il présente d'une part les outils nécessaires à l'approximation parcimonieuse des signaux et leur reconstruction, et d'autre part la mise en œuvre expérimentale de ces outils pour les scénarios d'holographie acoustique de champ proche, de localisation de sources, et d'identification de directivité. Par ailleurs, les études expérimentales ont motivé la recherche de techniques de calibration pour estimer simultanément la position précise de tous les transducteurs de l'antenne. Nous développons une méthode de correction de la position des microphones fondée sur l'approximation parcimonieuse des sources de calibration.

Dans le premier chapitre, on introduit la notion de problème inverse ainsi que les bases des méthodes de résolution. La technique standard de résolution par régularisation de Tikhonov est présentée. Elle est comparée aux méthodes de régularisation parcimonieuse. On expose enfin les résultats principaux du "compressive sampling" qui permet de limiter le nombre de mesures en exploitant le caractère parcimonieux, lorsqu'il existe, de certains signaux. Les applications des outils qui constituent les méthodes parcimonieuses sont ensuite décrites dans les chapitres suivants.

Le chapitre 2 formule le premier scénario d'imagerie acoustique, l'holographie acoustique de champ proche, comme un problème parcimonieux. On restreint le problème à l'holographie plane. Les sources utilisés dans le dispositif expérimental sont des plaques minces homogènes et isotropes. On résout le problème inverse par régularisation parcimonieuse et on compare des résultats expérimentaux de reconstruction des sources avec les résultats obtenus par régularisation de Tikhonov. La construction d'une antenne de microphones disposés aléatoirement sur le plan de mesure permet d'exploiter les concepts du "compressive sampling" pour sous-échantillonner le champ par rapport au critère de Shannon/Nyquist.

Lorsque les sources sont placées suffisamment loin de l'antenne, on les assimile à des sources ponctuelles. Le chapitre 3 se focalise sur la localisation de sources de directivités simples. Après un état de l'art des méthodes existantes, nous nous appuyons sur le caractère parcimonieux des sources dans l'espace (on fait l'hypothèse que le nombre de sources est faible par rapport au nombre de sources candidates) pour proposer une méthode robuste de localisation. On montre que le problème de localisation de sources est assimilable à un problème de "compressive sampling". Des résultats expérimentaux sont tirés de mesures en chambre anéchoïque et en environnement réverbérant. Les sources utilisées sont des modèles simples de haut-parleurs dont le rayonnement est supposé omnidirectionnel. La localisation est réalisée d'une part sur des signaux harmoniques, et d'autre part sur des signaux large bande qui imposent l'utilisation d'un modèle structuré de parcimonie.

Le chapitre 4 est une extension du chapitre 3 à des sources de rayonnements complexes. On structure le modèle de parcimonie en incluant une décomposition en harmoniques sphériques des sources. Les méthodes modifiées de localisation parcimonieuse permettent l'identification simultanée des composantes élémentaires de rayonnement des sources localisées. On applique ces méthodes à la mesure de directivité en 3 dimensions.

Pour la validation expérimentale on utilise deux sources de types cardioïde et dipolaire. On construit une antenne circulaire permettant la calibration des sources et une antenne tridimensionnelle de structure cubique pour valider les méthodes d'identification de directivité.

Les études expérimentales des scénarios précédent ont été contraintes à une calibration précise des microphones composant les antennes de mesures. La calibration inclut la correction de sensibilité des microphones et la correction des erreurs de localisation des micros. Les méthodes de localisation de sources complexes sont très sensibles à ces erreurs. Elles ont motivé le développement d'une méthode de calibration originale que nous développons dans le chapitre 5. Cette méthode propose la localisation conjointe de microphones et de sources en exploitant le caractère parcimonieux des sources dans l'espace. La méthode est comparée à une technique existante d'estimation aveugle de la position des micros.

Chapitre 1

Régularisation parcimonieuse des problèmes inverses

Dans ce premier chapitre nous introduisons les concepts de problèmes inverses qui sont la base des études d'imagerie acoustique par antennerie. Une façon générale de résoudre ces problèmes est décrite. Nous montrons ensuite comment des *a priori* de parcimonie sur les signaux à reconstruire permettent de résoudre de manière originale ces problèmes. La parcimonie est exploitée grâce au "compressive sampling" qui propose une nouvelle manière de mesurer des signaux en réduisant le nombre d'échantillons habituellement dicté par le critère de Shannon/Nyquist.

1.1 Résolution classique de problèmes inverses

Un problème inverse consiste à reconstruire une grandeur physique qui n'est pas directement mesurable à partir d'un ensemble de mesures d'une autre grandeur physique. La mesure et la quantité à reconstruire sont liés par un processus de transformation. Celui-ci est généralement connu et modélisable mathématiquement. La reconstruction consiste alors à inverser numériquement le modèle. Les domaines d'applications sont nombreux, on peut citer par exemple :

- Imagerie médicale (échographie, tomographie, ...)
- Acoustique sous-marine (identification d'objets immergés, bathymétrie ...)
- Traitement d'images (détection de contours, défloutage ...)
- Traitement des signaux (débruitage, annulation d'écho, séparation de sources ...)
- Acoustique aérienne (identification de sources, détection de modes d'une structure vibrante, reconstruction de conditions aux limites inaccessibles ...) etc ...

La résolution de ces problèmes inverses repose sur la connaissance du phénomène physique qui les a engendrés, autrement dit le problème direct, et de sa description précise par un modèle mathématique. On se place dans un cadre discret. Notons $\{y_m, m = 1 \dots M\}$ la série d'observations et $\{x_n, n = 1 \dots N\}$ les données à reconstruire. Le modèle mathématique est matérialisé par un opérateur A qui permet le calcul explicite des y_m en fonction

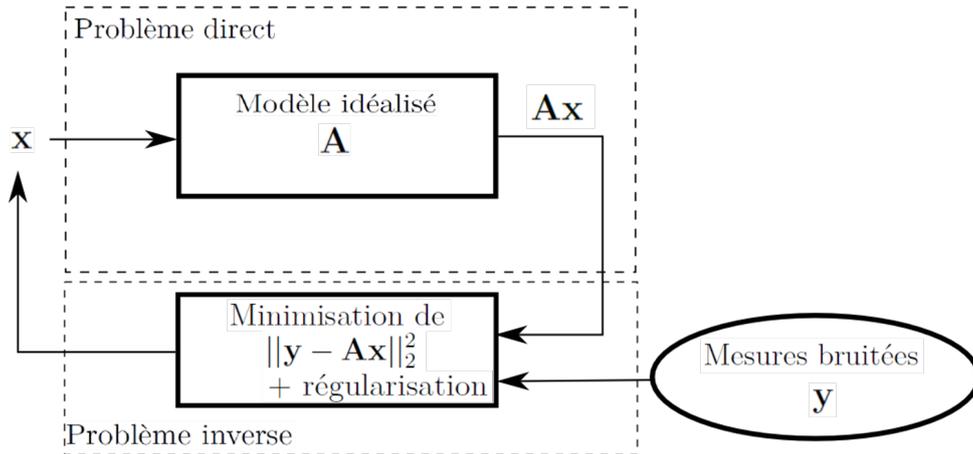


FIGURE 1.1 – Modélisation d’un problème inverse : estimation de \mathbf{x} à partir de mesures bruitées \mathbf{y} et d’un opérateur linéaire \mathbf{A} .

des x_n . Dans beaucoup de cas, il existe une relation de linéarité entre les observations et les données à estimer ce qui conduit à la résolution de grands systèmes linéaires que l’on représente matriciellement par l’équation

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.1)$$

La structure et la nature de A dépendent du problème linéaire à résoudre.

Dans le cas idéal, les mesures sont obtenues sans aucune incertitude, la matrice \mathbf{A} représente parfaitement le phénomène physique qui transforme \mathbf{x} en \mathbf{y} , et le nombre d’observations est égal ou supérieur au nombre de données à reconstruire. \mathbf{A} est alors inversible et on peut résoudre le problème inverse $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ sans soucis d’indétermination. Mais la réalité est tout autre. Premièrement, les observations sont en général incomplètes. \mathbf{A} n’est pas inversible et le système 1.1 étant sous-déterminé, il existe une infinité de solutions. Les observations de nature expérimentale sont bruitées ce qui inclut des erreurs de mesures. Le modèle lui-même est issu d’une idéalisation de la réalité physique et repose sur des hypothèses simplificatrices, il est donc également source d’incertitudes. Afin de mieux décrire le problème direct 1.1 on prend en compte un bruit b qui décrit les incertitudes du modèle et les erreurs intrinsèques à la mesure :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (1.2)$$

Le problème d’estimation de \mathbf{x} est résumé sur la figure 1.1. La solution exacte au problème n’existe pas mais peut être approchée en considérant, parmi toutes les solutions possibles, celle produisant le plus exactement les données mesurées. Cela se traduit mathématiquement par la minimisation d’une fonctionnelle d’erreur entre les mesures réelles et la solution du problème direct. \mathbf{x} est estimé en minimisant le critère des moindres carrés suivant :

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \quad (1.3)$$

La solution analytique donne

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{y} \quad (1.4)$$

où \dagger indique l'inverse généralisée (ou pseudo-inverse de Moore-Penrose) : $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1}\mathbf{A}^H$. L'exposant H indique la transposée conjuguée de la matrice.

Cette inversion est cependant naïve car le mauvais conditionnement de la matrice \mathbf{A} rend la solution instable. On dit alors que le problème est mal posé, ce qui est chose courante en traitement du signal. Afin de mieux comprendre le concept de conditionnement, décomposons \mathbf{A} en valeurs singulières (SVD) :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H \quad (1.5)$$

$\mathbf{\Sigma}$ est une matrice diagonale composée des valeurs singulières σ_i . La solution de l'équation 1.4 peut se réécrire avec la SVD

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{U}^H\mathbf{y} \quad (1.6)$$

où les éléments de la matrice diagonale \mathbf{D} , inverse de $\mathbf{\Sigma}$ sont $D_{ii} = 1/\sigma_i$. Le problème de conditionnement intervient lorsque des valeurs singulières sont très faibles par rapport à la plus grande valeur. Lors de l'inversion, ces petites valeurs propres vont en effet amplifier considérablement les petites perturbations sur \mathbf{y} rendant l'estimation de \mathbf{x} instable.

Pratiquement, le nombre de conditionnement $K(\mathbf{A})$ permet d'identifier si un problème est mal posé ou non [GL96]. Il est défini comme le rapport entre la plus grande valeur propre et la plus petite et vérifie la relation :

$$\frac{\delta x}{\|\mathbf{x}\|_2} \leq K(\mathbf{A}) \frac{\delta y}{\|\mathbf{y}\|_2} \quad (1.7)$$

Lorsque $K(\mathbf{A})$ est proche de 1, la matrice est bien conditionnée. Dans le cas contraire, une petite variation sur \mathbf{y} entraîne une grande variation sur \mathbf{x} et par conséquent, un échec de reconstruction.

Toutefois, un problème mal posé peut être résolu avec une bonne approximation s'il est régularisé. La régularisation peut être vue comme l'ajout, dans le programme de minimisation, d'une information *a priori* sur le signal que l'on cherche à reconstruire. Une technique bien connue est la régularisation de Tikhonov [TA77], qui ajoute un terme de pénalisation de la norme ℓ_2 de la solution. \mathbf{x} est solution du problème d'optimisation quadratique :

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{T}\mathbf{x}\|_2^2 \text{ tel que } \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \leq \varepsilon \quad (1.8)$$

\mathbf{T} est la matrice de Tikhonov. Ce problème de minimisation est convexe. Autrement dit, il existe un minimum global pour lequel $\hat{\mathbf{x}}$ approxime au mieux le signal source. La solution analytique de ce problème peut être calculée comme solution de la minimisation du Lagrangien :

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{T}\mathbf{x}\|_2^2 \quad (1.9)$$

λ est le paramètre de régularisation, fonction de ε . Il définit le niveau de régularisation. Il permet d'établir un compromis sur la solution entre régularité et fidélité aux mesures. L'estimation linéaire de \mathbf{x} est finalement donnée par :

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^H\mathbf{A} + \lambda\mathbf{T}^H\mathbf{T})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{y} \quad (1.10)$$

Des connaissances *a priori* sur les données à reconstruire permettent de déterminer la matrice \mathbf{T} . Lorsque \mathbf{T} est la matrice identité, on obtient la régularisation standard de Tikhonov qui sélectionne la solution d'énergie minimale. En reprenant l'expression de $\hat{\mathbf{x}}$ dans l'équation 1.6 après décomposition de \mathbf{A} par SVD, les éléments de la matrice diagonale \mathbf{D} sont, après régularisation :

$$D_{ii} = \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \quad (1.11)$$

L'effet de la régularisation est donc de rajouter un terme, le paramètre de régularisation, dans la matrice des valeurs singulières. L'énergie des plus faibles valeurs est augmentée tandis que la modification des grandes valeurs est négligeable. Le problème est ainsi stabilisé en étant beaucoup moins sensible aux petites variations sur les mesures.

Les problèmes inverses sont ainsi traités ici dans un cadre énergétique. Il est également possible de traiter le problème en utilisant des *a priori* probabilistes. Cette approche est référencée dans la littérature comme approche bayésienne et est décrite précisément dans l'ouvrage de Idier [Idi01]. Elle permet entre autre de remonter à la régularisation de Tikhonov et fournit d'autres possibilités intéressantes de régularisation de problèmes inverses. Nous nous concentrons dans la suite sur une technique de régularisation qui exploite l'hypothèse d'un caractère parcimonieux de la solution.

1.2 Approximations parcimonieuses des signaux

1.2.1 Représentations parcimonieuses des signaux

Un signal admet une représentation parcimonieuse s'il peut être décrit par peu de coefficients non nuls après transformation dans une base potentiellement redondante de fonctions. Une grande majorité des signaux, par exemple les échantillons temporels d'un signal audio ou les pixels d'une image, représente un volume important de données parmi lesquelles l'information utile a souvent un support réduit. Une représentation parcimonieuse de ces signaux permet de révéler un faible nombre de coefficients qui portent l'information. De telles représentations sont construites en décomposant les signaux dans une base de vecteurs élémentaires appelés atomes. On choisira la base d'atomes selon la nature du signal à décomposer.

Considérons un signal discret \mathbf{s} de dimension N et Φ une base de décomposition adaptée, dont les atomes $\phi_{\mathbf{n}}$ constituent les vecteurs colonnes. Les composantes de \mathbf{s} s'écrivent comme une combinaison linéaire des atomes de Φ :

$$\mathbf{s} = \Phi \mathbf{x} \quad (1.12)$$

où \mathbf{x} est le vecteur des coefficients de la décomposition. Le signal \mathbf{s} est parcimonieux dans la base Φ si \mathbf{x} contient un nombre K très faible de coefficients non nuls, tel que $K \ll N$. Il s'écrit ainsi comme une combinaison linéaire de seulement K atomes :

$$\mathbf{s} = \sum_{j \in J} \mathbf{x}_j \phi_j \quad (1.13)$$

où J est un sous-ensemble de $\{1 \dots N\}$ tel que $\text{Card}(J) = K$.

On s'intéressera également aux signaux qui ne sont pas parfaitement parcimonieux mais compressibles. Un signal compressible peut être approximé par un signal parcimonieux dans le sens où il ne contient qu'une petite quantité de coefficients dont l'énergie est significative. Ces coefficients portent la majorité de l'information. Le fait que des signaux compressibles puissent être bien approximés par peu de coefficients non nuls est la base des algorithmes de compression (avec pertes) des signaux [Mal09].

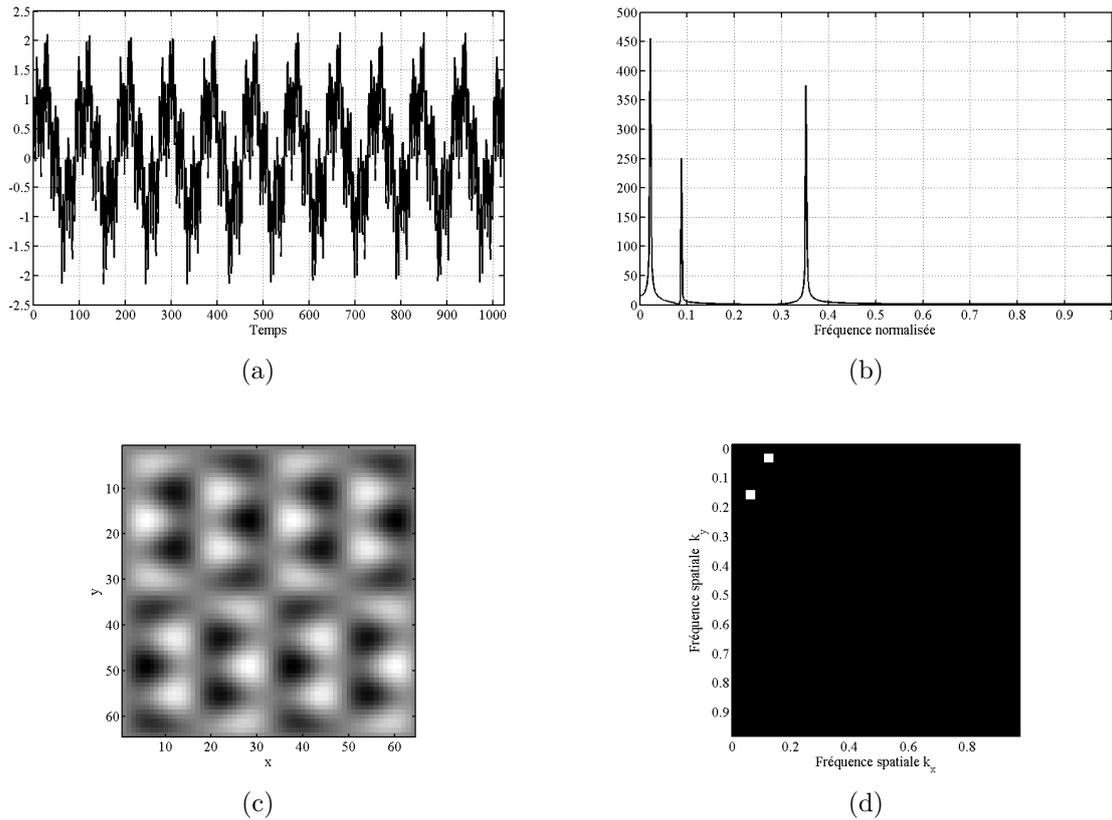


FIGURE 1.2 – Exemple de signaux parcimonieux (a) dans la base de Fourier discrète et (c) dans la base de Fourier 2D. (b) et (d) sont les coefficients correspondants.

Afin d'illustrer le concept de parcimonie, nous utilisons une base de décomposition utilisée très largement en physique et en traitement du signal : la base de Fourier. Elle permet de décomposer des signaux stationnaires en fonctions sinusoïdales qui révèlent leur contenu harmonique. La figure 1.2 illustre deux exemples de signaux parcimonieux dans des bases de Fourier. Sur la figure (a), s est un signal temporel périodique. Sa représentation \mathbf{x} (figure (b)) dans la base de Fourier discrète $\{e^{i2\pi \frac{k}{N} n}\}_{0 \leq k < N}$ est parcimonieuse avec seulement trois composantes principales. Notons que la transformée de Fourier étant symétrique, on n'illustre que la partie des fréquences positives. Sur la figure (c), s est un champ spatial de structure périodique qui, malgré son apparence complexe, ne contient que deux composantes non nulles dans l'espace des fréquences spatiales (figure (d)) obtenu par décom-

position du signal dans la base discrète de Fourier 2D $\{e^{i2\pi \frac{k_x}{N_x} n_x} e^{i2\pi \frac{k_y}{N_y} n_y}\}_{0 \leq k_x < N_x, 0 \leq k_y < N_y}$.

La transformée de Fourier est adaptée à la représentation parcimonieuse de signaux à structures périodiques. Pour d'autres types de signaux, d'autres bases doivent être envisagées. Mallat [Mal09] expose certaines décompositions favorables à la parcimonie en fonction des applications. Par exemple, la décomposition dans une base d'ondelettes, formes d'ondes oscillantes obtenues par dilatation et translation d'ondes mères [CDF92], fournit une représentation parcimonieuse de signaux transitoires. Les ondelettes bidimensionnelles sont couramment utilisées en traitement d'image, car relativement bien adaptées à la représentation des contours. Elles constituent en particulier la base de l'algorithme de compression JPEG2000.

Une base orthogonale bien choisie admet une décomposition unique du signal. Cependant, la famille d'atomes la composant n'est souvent pas assez riche pour décomposer certains signaux de façon suffisamment parcimonieuse. L'idée est donc d'agrandir la famille de vecteurs composant la base afin d'obtenir un dictionnaire redondant d'atomes de taille bien supérieure à la dimension de la base. L'avantage est que la décomposition dans ce dictionnaire est beaucoup plus parcimonieuse mais elle n'est plus unique. La section suivante présente des méthodes qui cherchent la solution la plus parcimonieuse parmi toutes celles possibles.

1.2.2 Exploitation de la parcimonie et algorithmes de reconstruction

Le problème de base est le suivant : On dispose d'un signal \mathbf{y} et d'un dictionnaire d'atomes $\{\mathbf{a}_n\}_{n=1 \dots N}$ de la taille de \mathbf{y} , colonnes de \mathbf{A} . On souhaite écrire \mathbf{y} comme une combinaison linéaire d'un petit nombre d'éléments \mathbf{a}_n ou au moins approcher \mathbf{y} par une telle combinaison linéaire. \mathbf{x} est le vecteur parcimonieux des coefficients. Le processus d'estimation des coefficients fait appel à des algorithmes dédiés qui ont pour but d'extraire parmi un ensemble fini ou infini de solutions celle qui est la plus parcimonieuse.

La manière la plus évidente de procéder est de mesurer la parcimonie du signal à reconstruire, autrement dit, compter le nombre de coefficients non nuls. Le nombre d'éléments non nuls de \mathbf{x} se traduit par le calcul de la norme ℓ_0 : $\|\mathbf{x}\|_0 = \text{Card}\{k, \text{tel que } x_k \neq 0\}$ (elle est appelée norme par abus de langage car elle ne vérifie pas toutes les propriétés d'une norme). Le signal est estimé en résolvant le problème de minimisation

$$\hat{\mathbf{x}} = \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \text{ tel que } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.14)$$

La calcul de la norme ℓ_0 est un problème combinatoire difficile à résoudre voir impossible pour des tailles usuelles de dictionnaires. En effet, pour résoudre le problème 1.14 directement, il faut tester toutes les combinaisons possibles de coefficients non nuls d'amplitudes différentes dans \mathbf{x} . Heureusement, plusieurs algorithmes sont disponibles pour approximer la solution avec des temps de calcul raisonnables.

1.2.2.1 Relaxation de la norme ℓ_0 par ℓ_1

Une première solution consiste à remplacer dans 1.14 la norme ℓ_0 par la norme ℓ_1 qui est la fonction convexe la plus proche de la norme ℓ_0 . On rappelle que la norme ℓ_1 d'un signal \mathbf{x} est : $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{n=1}^N |x_n|$. Cette substitution de norme est identifiée par Tropp [Tro06] comme une "relaxation" convexe : elle consiste à approcher un problème difficilement soluble, la minimisation de la norme ℓ_0 , par un problème voisin plus simple au sens de la complexité algorithmique, la minimisation de la norme ℓ_1 . Si certaines conditions sur la matrice \mathbf{A} sont vérifiées, alors il a été montré que les solutions obtenues par ces deux normes, ℓ_0 et ℓ_1 , coïncident [CT05, CRT06]. Ces conditions se réfèrent au concept de "compressive sampling" développé dans la section suivante. L'expression 1.14 est ainsi approximée par le problème d'optimisation convexe appelé Basis pursuit (BP) [CDS98] :

$$\hat{\mathbf{x}} = \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \text{ tel que } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.15)$$

Le problème 1.15 peut être reformulé comme un problème de programmation linéaire rendant la résolution efficace.

Une représentation géométrique en 2D peut aider à comprendre le comportement de la norme ℓ_1 d'un vecteur \mathbf{x} . On la compare à la norme ℓ_2 sur la figure 1.3. Les deux normes sont convexes, mais la minimisation de $\|\mathbf{x}\|_1$, contrairement à $\|\mathbf{x}\|_2$, permet d'estimer la solution $\hat{\mathbf{x}}_{\ell_1}$ la plus parcimonieuse (ici sur un des axes), parmi un ensemble H de solutions potentielles.

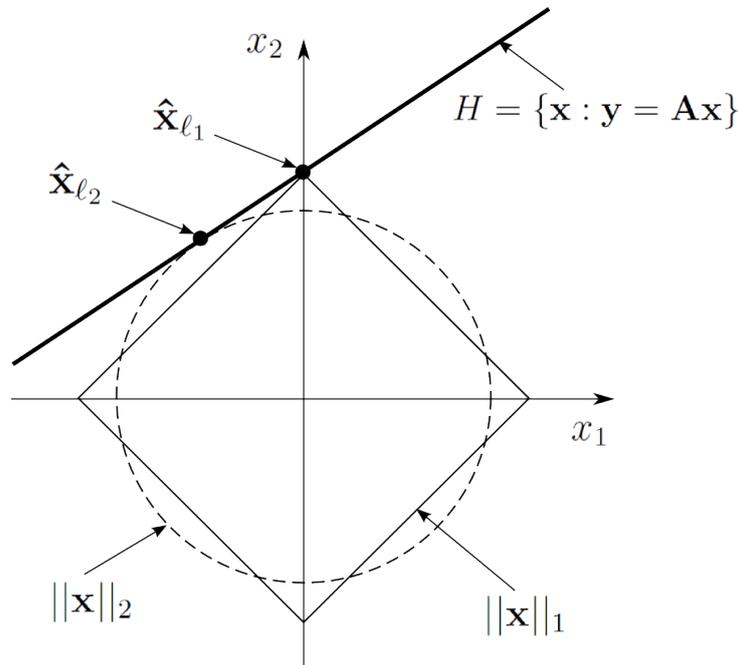


FIGURE 1.3 – Comparaison de l'estimation de \mathbf{x} par minimisation ℓ_1 et ℓ_2 en dimension 2

Dans le cas de signaux bruités, la problématique Basis Pursuit Denoising (BPDN) autorise une contrainte d'erreur plus souple dans le problème de minimisation [CDS98] :

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \text{ tel que } \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \leq \varepsilon \quad (1.16)$$

où ε est une petite constante proportionnelle au bruit de mesure. Elle ne peut donc pas excéder la norme du vecteur de mesure $\|y\|_2$. Pratiquement, on fixe ε arbitrairement à une fraction de $\|y\|_2$.

Une méthode alternative, équivalente à BPDN, est de rajouter un terme de pénalité sur la norme ℓ_1 plutôt qu'une contrainte sur l'erreur. L'algorithme qui en découle est LASSO [Tib94] :

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \quad (1.17)$$

λ peut être vu comme un terme de régularisation. On remarque l'analogie avec la régularisation standard de Tikhonov du problème 1.9, où seul le choix de la norme différencie fondamentalement les deux approches : ici la régularité n'est pas sur l'énergie de la solution, mais sur sa parcimonie. Les coefficients des représentations parcimonieuses révèlent en effet une certaine forme de régularité sur les signaux, par exemple la périodicité lorsque la base de décomposition est la base de Fourier.

Les problèmes de minimisation ℓ_1 (BP, BPDN et LASSO) peuvent être avantageusement résolus par des algorithmes génériques disponibles dans la communauté mathématique. On peut citer SPGL1 [vdBF07] qui nécessite un temps de calcul raisonnable pour les dimensions de problèmes abordés ici, et qui a été utilisé durant cette thèse pour résoudre les problèmes de minimisation ℓ_1 .

1.2.2.2 Algorithmes d'optimisation itératifs

Une autre méthode pour approximer la solution du problème 1.14 est d'estimer une composante de \mathbf{x} à chaque itération du processus d'optimisation. L'algorithme itératif Matching Pursuit (MP) et sa variante orthogonale, Orthogonal Matching Pursuit (OMP) sont deux méthodes populaires en traitement du signal utilisées dans ce cas. Un optimum local est sélectionné à chaque itération afin d'estimer une solution après un certain nombre d'itérations (notons qu'il n'y a pas en général de garantie d'obtenir l'optimum global, sauf dans des cas très restrictifs). MP propose une approche simple qui consiste à estimer l'atome \mathbf{a}_j le plus corrélé au signal \mathbf{y} . On obtient alors une estimation de la composante x_j telle que $x_j = \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{y} \rangle$. On soustrait à \mathbf{y} sa projection sur \mathbf{a}_j et on ré-itére i fois l'opération sur le résidu $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{a}_j \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{y} \rangle$. Le nombre d'itérations est fixé par l'utilisateur en fonction d'un critère d'arrêt.

MP donne des résultats probants lorsque les composantes $\{\mathbf{a}_n\}_{n=1\dots N}$ sont orthogonales (on suppose qu'elles sont normalisées). Dans une majorité de problèmes, il n'y a aucune raison qu'elles le soient. Quand on soustrait la projection du résidu $\mathbf{r}^{(i)}$ sur \mathbf{a}_j , l'algorithme introduit de nouvelles composantes dans les directions des atomes déjà sélectionnés. Ce phénomène est évité en soustrayant au résidu $\mathbf{r}^{(i)}$ la projection du signal \mathbf{y} sur l'espace engendré par tous les atomes précédemment sélectionnés. Cela revient à calculer le résidu comme la projection de \mathbf{y} sur l'orthogonal de l'espace engendré par les $\mathbf{A}_{J^{(i)}} = \{\mathbf{a}_j\}_{j \in J^{(i)}}$. On appelle $J^{(i)}$ l'ensemble des indices correspondant aux atomes déjà sélectionnés à l'itération i . OMP a été proposé par Davis *et Al* [DMZ94] et est apparu à la même époque dans le papier de Pati *et Al* [PRK93]. Il est une amélioration de l'algorithme

MP proposé par Mallat [MZ93].

Décrivons les étapes de l'algorithme OMP : on initialise le résidu $\mathbf{r}^0 = \mathbf{y}$, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et $J^{(0)} = \emptyset$. A chaque itération i ,

1. Sélection de l'atome le plus corrélé avec le résidu $\mathbf{r}^{(i)}$:

$$j = \arg \max_n |\mathbf{a}_n^H \mathbf{r}^{(i-1)}| \quad (1.18)$$

2. Mise à jour de l'ensemble des indices correspondant à la position des atomes sélectionnés :

$$J^{(i)} = J^{(i-1)} \cup j \quad (1.19)$$

3. Calcul de l'opérateur de projection sur l'espace vectoriel engendré par les atomes sélectionnés :

$$\mathbf{P}_{J^{(i)}} = \mathbf{A}_{J^{(i)}} \mathbf{A}_{J^{(i)}}^\dagger \quad (1.20)$$

4. Calcul du résidu :

$$\mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{r}^{(i-1)} - \mathbf{P}_{J^{(i)}} \mathbf{r}^{(i-1)} \quad (1.21)$$

5. On itère $i = i + 1$ jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit atteint

Les coefficients de la solution sont finalement estimés par l'opération : $\hat{\mathbf{x}}_J = \mathbf{A}_J^\dagger \mathbf{y}$. Le nombre total d'itérations correspond à la parcimonie du signal à reconstruire. Le critère d'arrêt peut être la chute de l'énergie du résidu en dessous d'un certain seuil quand suffisamment d'atomes approximent le signal.

L'algorithme, comme décrit ci-dessus, ne présente pas une stratégie optimale de résolution. De plus, il requiert le calcul d'une inverse généralisée à chaque itération. OMP peut être implémenté de manière beaucoup plus efficace en orthogonalisant les atomes une fois qu'ils ont été sélectionnés au lieu de recalculer une projection orthogonale à chaque itération. Un algorithme basé sur une décomposition QR de la famille des atomes sélectionnés mise à jour à chaque étape de l'algorithme [BD08] a été utilisé au cours cette thèse.

Le principal intérêt d'OMP par rapport aux algorithmes de minimisation ℓ_1 est sa rapidité de calcul quand le signal est très parcimonieux, car il faut alors très peu d'itérations. En comparaison, le processus de minimisation convexe de BPDN rend le temps de convergence relativement lent. En revanche, dans des dictionnaires trop redondants où une combinaison linéaire de plusieurs atomes, par exemple \mathbf{a}_p et \mathbf{a}_q , peut être fortement corrélée avec un autre atome \mathbf{a}_r , OMP échoue. En effet, l'algorithme va sélectionner \mathbf{a}_r au lieu de sélectionner \mathbf{a}_p et \mathbf{a}_q , conduisant à un mauvais choix initial. Les atomes sélectionnés par la suite ne vont faire qu'aggraver l'estimation finale de \mathbf{x} .

Exploiter la parcimonie d'un signal à reconstruire permet de régulariser un problème inverse. Comme nous allons le voir dans la section suivante qui présente le concept de compressive sampling, la vérification de certaines conditions sur la matrice \mathbf{A} permet d'acquérir un signal parcimonieux avec un faible nombre de mesures.

1.3 Principe de l'acquisition compressée ou compressive sampling

L'acquisition compressée ou "compressive sampling" (CS) [CW08, Rom08], encore appelée "compressed sensing" dans la littérature [Don06], est une application spectaculaire des approximations parcimonieuses. Elle a récemment émergé du domaine des mathématiques pour proposer de nouvelles manières de mesurer des signaux qui ordinairement nécessitent une acquisition lourde d'échantillons. Classiquement, les signaux temporels ou spatiaux sont échantillonnés en suivant le théorème de Shannon/Nyquist qui garantit une reconstruction parfaite du signal. En suivant ce principe, un signal contenant une composante fréquentielle f_{max} doit être échantillonné à une fréquence au moins supérieure à la fréquence de Nyquist $f_N = 2 \times f_{max}$. Cette opération peut engendrer un volume de données important et, dans le cas de signaux échantillonnés spatialement, nécessiter un grand nombre de capteurs et de voies d'acquisitions associées. Prenons le cas de signaux dont le support spectral (inconnu) est d'étendue réduite, donc parcimonieux dans la base de Fourier, mais contenant des composantes hautes fréquences. L'acquisition de tels signaux au sens de Shannon nécessite un nombre très important d'échantillons. Au contraire, le CS propose d'utiliser un nombre de mesures qui dépend non pas de la fréquence maximale, mais de la quantité d'information contenue dans le spectre du signal, qui dans ce cas est faible. Le nombre de mesures peut donc être très inférieur à celui dicté par la théorie de Shannon/Nyquist si certaines conditions sur les mesures sont vérifiées. On parle à juste titre d'acquisition compressée. Ainsi, le concept de compressive sampling peut être avantageusement appliqué pour la résolution de problèmes inverses où le nombre d'observations est souvent réduit.

Considérons un signal \mathbf{s} de taille N parcimonieux dans un dictionnaire Φ . Le vecteur \mathbf{x} est la représentation parcimonieuse de \mathbf{s} . Il contient un faible nombre K de coefficients non nuls. \mathbf{s} est inaccessible directement mais on veut le reconstruire à partir d'une série de M observations \mathbf{y} . On dispose également d'un opérateur Θ tel que $\mathbf{y} = \Theta \mathbf{s}$. Le problème que l'on souhaite inverser est

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} \tag{1.22}$$

où $\mathbf{A} = \Theta \Phi$. On se place dans le cas intéressant où le nombre de mesure est très faible et vérifie $M \ll N$. La théorie du compressive sampling est la suivante : la résolution du problème 1.22 est garantie si \mathbf{x} est suffisamment parcimonieux et si les matrices Θ et Φ sont incohérentes (dans un sens défini précisément ci-dessous). Le nombre suffisant de mesures M est alors proportionnel à la parcimonie $K \ll N$. On utilise alors les algorithmes de reconstruction parcimonieuse comme OMP ou BPDN pour sélectionner la solution la plus parcimonieuse $\hat{\mathbf{x}}$. On reconstruit ensuite le signal $\mathbf{s} = \Phi \hat{\mathbf{x}}$.

Le problème étant posé, la conception d'un dictionnaire Φ d'atomes dans lequel la solution est la plus parcimonieuse possible est un premier défi. Par ailleurs, il faut définir une stratégie de mesure afin d'assurer l'incohérence entre les deux matrices. Il est possible de mesurer cette incohérence. On définit la cohérence qui mesure la plus grande corrélation

de mesure aléatoires est qu'elles sont "universelles", c'est-à-dire incohérentes avec forte probabilité avec n'importe quelle autre base.

Une autre solution est de tirer aléatoirement des vecteurs choisis dans la base Θ très incohérente avec la base de parcimonie Φ . Candès et Wakin [CW08] proposent d'optimiser les convertisseurs analogiques-numériques pour l'échantillonnage de signaux parcimonieux dans la base de Fourier. Un échantillonnage uniforme au taux de Nyquist peut être remplacé par un processus de sélection aléatoire d'échantillons dans le temps. La base de Fourier est en effet très incohérente avec la base des diracs qui caractérise le domaine temporel de mesure. Si le signal est suffisamment parcimonieux dans le domaine fréquentiel, le nombre d'échantillons à récolter est bien inférieur à celui imposé par le taux de Nyquist. L'économie de stockage des données réalisée peut être significative. La figure 1.5 illustre les performances du CS pour l'échantillonnage d'un signal parcimonieux dans la base Fourier discrète. Le signal temporel (cf. figure 1.5 (a)) est simulé à partir de la combinaison linéaire de 5 coefficients fréquentiels (cf. figure 1.5 (b)). On sélectionne aléatoirement 20 échantillons (points oranges) sur le signal temporel qui en comprend 512. On souhaite reconstruire le signal avec seulement ces 20 mesures. La résolution par minimisation de la norme ℓ_1 du signal parcimonieux permet d'estimer précisément les 5 coefficients. La reconstruction du signal est illustrée sur la figure 1.5 (d). Le signal original et sa reconstruction se superposent quasiment parfaitement. Lorsque l'on résout le problème par minimisation de la norme ℓ_2 , on voit que l'on ne réussit à reconstruire que les échantillons qui ont été observés (cf. figure 1.5 (c)). Le reste du signal a une norme quasiment nulle.

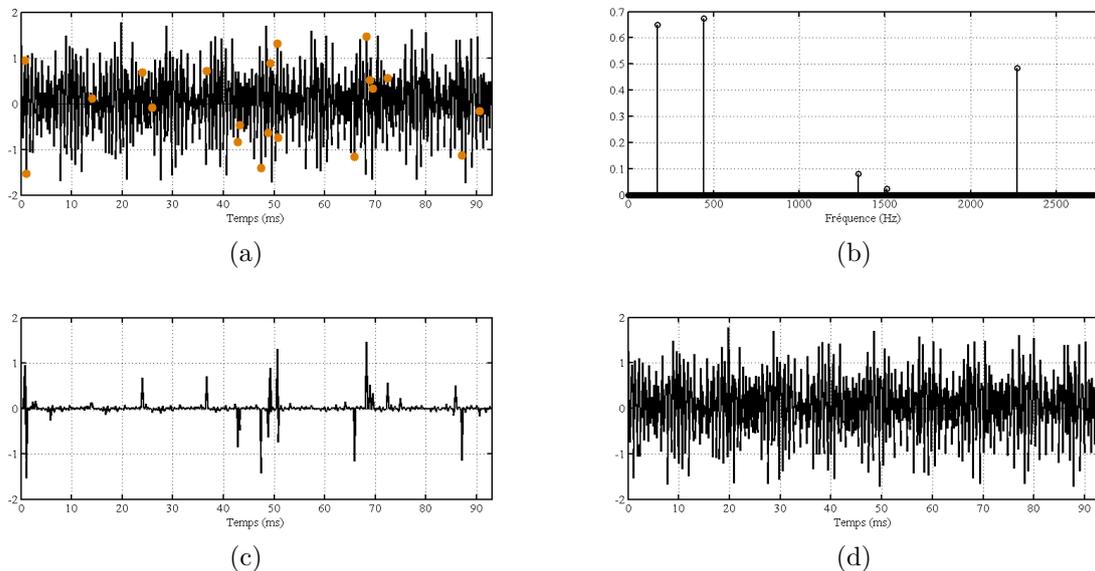


FIGURE 1.5 – Exemple d'application du compressive sampling. (a) un signal temporel parcimonieux dans la base de Fourier. (b) les coefficients correspondants dans la base de Fourier (c) reconstruction du signal par minimisation ℓ_2 avec 20 échantillons (points orange) (d) reconstruction par minimisation ℓ_1 (BP) avec les mêmes échantillons.

De nombreux résultats théoriques ont été développés pour garantir les succès de reconstruction avec un nombre faible de mesures. Le plus important est sans doute la propriété d'isométrie restreinte RIP [CT05] de la matrice \mathbf{A} . Pour tout \mathbf{x} dont la taille du support est K , \mathbf{A} vérifie la RIP si,

$$(1 - \delta_K) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (1.24)$$

où δ_K , la constante d'isométrie restreinte, est la plus petite quantité qui vérifie l'équation. Plusieurs bornes sur δ_K sont envisagées dans la littérature. Candes et Tao [CT05] ont montré que si $K \ll N$, et que la RIP est vérifiée par la matrice \mathbf{A} , alors la résolution du problème 1.22 par Basis Pursuit est exacte. Ce résultat important dévoile la condition pour laquelle la norme ℓ_0 et la norme ℓ_1 ont exactement le même comportement. Pourtant la RIP est souvent impossible à vérifier en pratique à cause de problèmes combinatoires, au même titre que la minimisation de la norme ℓ_0 d'ailleurs.

D'autres études théoriques se sont appuyés sur l'incohérence des matrices Θ et Φ . Par exemple Tropp [Tro04] a démontré que si la cohérence $\mu(\Theta, \Phi)$ est la plus petite possible, alors BP et OMP peuvent reconstruire exactement un signal suffisamment parcimonieux.

Finalement Candes, Romberg, et Tao [CRT06] ont montré que si \mathbf{x} est K -parcimonieux avec $K \ll N$ et que les mesures sont des vecteurs choisis au hasard parmi une base de décomposition parcimonieuse, la RIP est vérifiée avec une très grande probabilité si le nombre M de mesures vérifie

$$M \geq C \cdot K \log N \quad (1.25)$$

C est une petite constante sans valeur fixe. Autrement dit, la minimisation ℓ_1 reconstruit exactement \mathbf{x} avec une grande probabilité si le nombre de mesures est de l'ordre de la parcimonie.

En pratique toutefois, nous ne serons jamais en mesure de vérifier ces garanties théoriques sur le succès de la reconstruction par CS. Cependant, comme on le verra dans les applications du CS à la NAH ou à la localisation de sources, les résultats de reconstructions obtenus au moyen d'une répartition aléatoire d'un petit nombre de mesures restent bons. Notons que les garanties théoriques comme la RIP sont des conditions suffisantes, et non nécessaires, et qu'en pratique la plage de paramètres dans laquelle le CS fonctionne est souvent largement plus étendue.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu qu'un problème inverse mal posé n'est au premier abord pas soluble sans connaissances *a priori* sur le signal à reconstruire. Si l'on rajoute une condition de parcimonie sur ce signal, une bonne approximation de la solution est envisageable. De plus, l'*a priori* de parcimonie sur la solution permet non seulement de mieux régulariser le problème inverse, mais également de réduire significativement le nombre de mesures à récolter en exploitant les concepts d'acquisition compressée. Les

performances de reconstruction sont alors supérieures à celles obtenues par régularisation classique du genre Tikhonov, à nombre de mesures fixé.

Le CS donne de nouvelles perspectives de résolutions de problèmes inverses en permettant la reconstruction de signaux avec une haute résolution à partir d'observations très peu nombreuses. Il a déjà été appliqué expérimentalement en imagerie par résonance magnétique IRM [LDSP08], domaine précurseur dans lequel le CS a fait son apparition. Le CS peut être appliqué à un grand nombre de problèmes inverses, du moment où une base de parcimonie du signal à reconstruire est disponible.

La théorie mathématique derrière le concept de compressive sampling est riche et complexe. Ce chapitre n'a exposé que les résultats principaux qui vont nous permettre de résoudre efficacement des problèmes inverses en acoustique dans le cadre expérimental. Pratiquement, on parlera de reconstruction CS lorsque l'hypothèse de parcimonie sur le signal source à estimer est vérifiée, et qu'un échantillonnage aléatoire du signal est réalisé dans une autre base que celle dans laquelle le signal est parcimonieux.

Chapitre 2

Holographie acoustique compressée

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'imagerie de structures vibrantes par holographie acoustique de champ proche (nearfield acoustical holography (NAH)). Cette technique, introduite par Maynard *et al* [MWL85], consiste à mesurer le champ acoustique à proximité de la structure pour obtenir un hologramme que l'on rétro-propage afin de reconstruire les composantes vibratoires de la source. Son champ d'applications est vaste : cette technique est utilisée de manière courante dans l'industrie automobile, aéronautique et dans la recherche en général. La NAH est notamment utilisée pour localiser des points de rayonnement fort sur des structures susceptibles de produire des bruits nuisibles, par exemple sur des moteurs. Dans le cas où l'on contrôle l'excitation de la structure, elle permet l'étude des modes de vibrations par analyse modale. Cette application est intéressante pour la recherche en acoustique musicale. Le Moyne *et Al* [LMLCO⁺12] ont par exemple utilisé la NAH pour étudier les modes de vibrations d'un clavecin dans le but de le restaurer. La figure 2.1 illustre la mise en œuvre expérimentale de la méthode sur un piano forte.

La NAH est un problème inverse pouvant être sujet à un mauvais conditionnement, il nécessite donc une opération de régularisation afin d'être efficace. La méthode de régularisation la plus répandue en NAH est la méthode de Tikhonov qui agit comme un filtre passe-bas sur le spectre spatial de l'hologramme. Le filtrage a pour effet d'éliminer les hautes fréquences spatiales. Cela implique généralement une mauvaise reconstruction des bords. De plus, la technique standard de NAH nécessite un bon échantillonnage de la pression sur le plan de l'hologramme, faute de quoi des effets de repliement spectral apparaissent. Pour limiter ces effets, la méthode exige le déploiement d'un grand nombre de microphones. Ces limitations motivent le développement de l'holographie acoustique compressée basée sur l'approximation parcimonieuse de la source que nous allons présenter dans ce chapitre.

Des méthodes alternatives basées sur des modèles de vibration ou de rayonnement ont vu le jour afin de permettre des reconstructions de sources plus efficaces qu'avec la méthode de Tikhonov. Par exemple, la méthode HELS [ZW05] est basée sur un modèle de rayonnement sphérique prenant en compte les conditions aux limites du problème. La source est ensuite reconstruite par la méthode des moindres carrés. La méthode

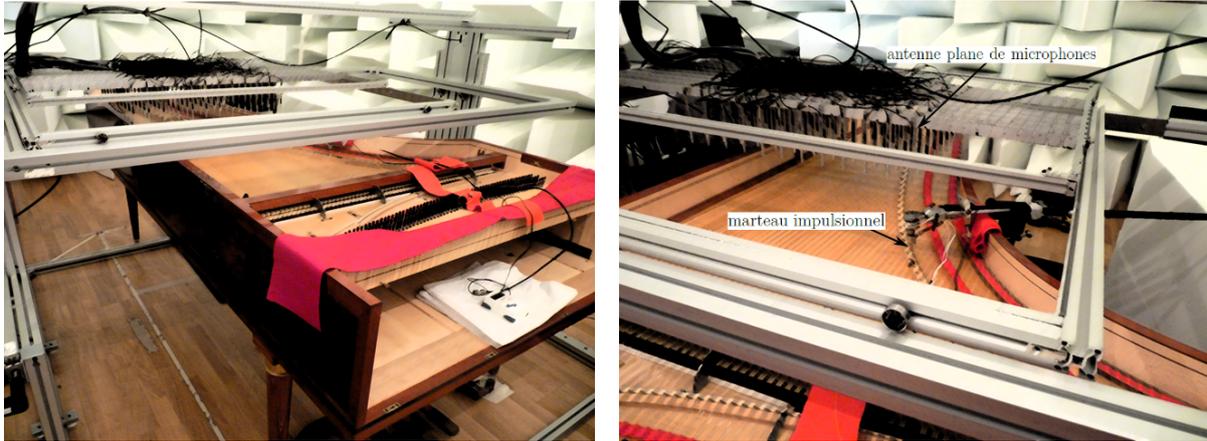


FIGURE 2.1 – Illustration du système d’holographie acoustique de champ proche pour la mesure de vibrations d’une table d’harmonie de piano forte. Photo prise à la Cité de la Musique de Paris

IBEM [SHRH03, VE06] basée sur la formulation intégrale de la théorie de rayonnement permet d’étudier des structure avec des conditions aux limites plus complexes. Hald a introduit la méthode SONAH [Hal03] basée sur une optimisation statistique de la matrice de propagation entre la source et l’hologramme. Cette méthode permet la mesure du champ acoustique avec des antennes plus petites que la source en limitant les effets de troncatures spatiales. Antoni a récemment proposé l’utilisation d’*a priori* probabilistes sur les distributions de sources dans un formalisme bayésien [Ant12]. Il montre que la résolution de reconstruction de la source vibrante peut être considérablement améliorée par rapport aux techniques classiques qui utilisent la régularisation de Tikhonov.

Nous présentons dans ce chapitre une méthode alternative basé sur l’approximation parcimonieuse de la source. La régularisation du problème de NAH par parcimonie est basée sur un modèle *a priori* de décomposition de la source. Il s’agit de concevoir un dictionnaire d’atomes adapté au problème dans lequel la source est la plus parcimonieuse. Les méthodes basées sur l’approximation parcimonieuse de la source fournissent une approche originale au problème de NAH. Elles permettent par ailleurs la réduction du nombre de micros nécessaires à une résolution précise du problème en exploitant les concepts d’acquisition compressée.

Nous adoptons une approche entièrement expérimentale de la NAH afin de valider la méthode de régularisation parcimonieuse. Le dispositif expérimental utilisé pour l’évaluation des performances des méthodes décrites est d’abord présenté. Le concept de NAH et la technique de référence qui utilise la régularisation de Tikhonov sont ensuite formalisés mathématiquement. Nous décrivons l’adaptation de la méthode au formalisme parcimonieux. A l’aide de mesures sur deux types de plaques homogènes et isotropes, nous montrons les avantages et limitations de la régularisation parcimonieuse et du compressive sampling appliqués à la NAH par rapport à la méthode traditionnelle de Tikhonov.

2.1 Processus expérimental

Afin d'évaluer expérimentalement les performances des différentes méthodes NAH, on utilise des plaques minces que l'on excite avec un marteau. Le champ acoustique rayonné est capté par une antenne plane de microphones (cf. figure 2.2 c)).

2.1.1 Présentation des sources vibrantes

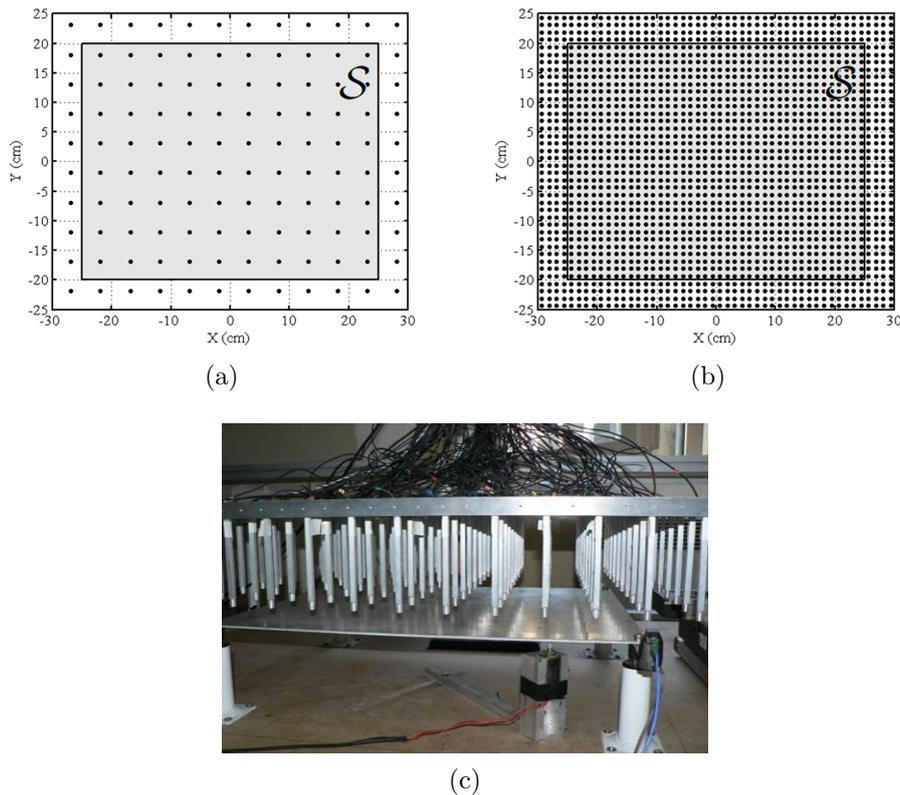


FIGURE 2.2 – Positionnement de l'antenne plane de mesure par rapport à la plaque rectangulaire : (a) disposition des 120 micros de l'antenne, (b) construction d'un maillage de 1920 mesures par déplacement de l'antenne, (c) dispositif expérimental

La première structure vibrante est une plaque rectangulaire en aluminium, de dimensions $4\text{mm} \times 500\text{mm} \times 400\text{mm}$. Ses quatre coins sont fixés sur des silent blocks en caoutchouc de telle sorte que des conditions de plaque à bords libres soient approchées. Elle est illustrée sur la figure 2.2 c). La seconde structure est une plaque en forme de D faite d'un disque segmenté à une extrémité comme illustré sur la figure 2.3. Cette forme de plaque est choisie pour son comportement modal complexe. Elle est faite d'acier d'épaisseur 4mm. Le rayon du disque est de 220mm et un segment est découpé à 300mm d'une extrémité. La plaque est encastrée par une portion de bord de 20 centimètres carrés pour obtenir des conditions aux limites mixtes.

Ces structures sont en vibrations de flexions à des fréquences multiples grâce à l'impact d'un marteau impulsif automatique placé sous les plaques. Le marteau est commandé par un électro-aimant avec une amplitude constante qui permet des excitations reproductibles. Le point d'impact est positionné afin d'exciter un maximum de modes de vibrations, ce qui permet l'analyse modale de la structure. Les réponses acoustiques

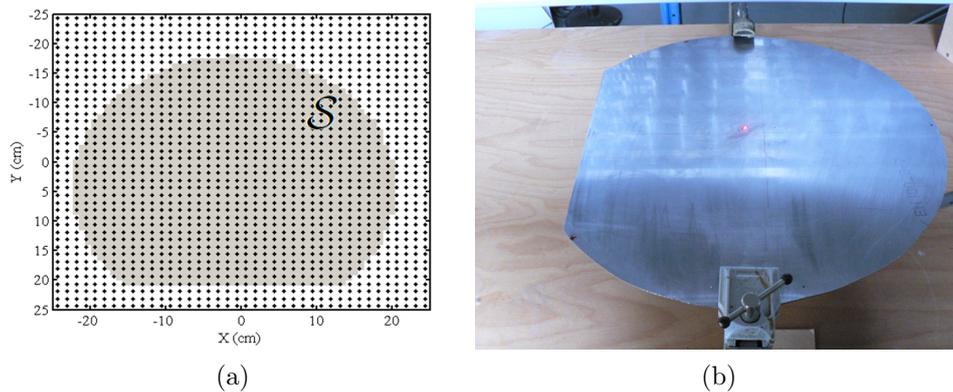


FIGURE 2.3 – Disposition des 1920 micros sur la plaque en forme de D (a). Photo de la plaque (b).

impulsionnelles sont mesurées en environnement réel où la réverbération peut perturber les enregistrements. Cependant, on négligera le champ réverbéré car, étant donné la proximité de l'antenne avec les plaques, le rapport entre le signal direct enregistré et le champ diffus est grand.

Dans nos expériences, la validation des reconstructions des sources à partir des mesures acoustiques se fait par comparaison avec les mesures directes des vitesses normales de la structure vibrante. Ces vitesses sont mesurées par voie optique à l'aide d'un vibromètre laser à balayage suivant une grille régulière suffisamment fine. Le vibromètre laser mesure, par interférométrie, l'effet Doppler dû à la vibration entre le signal émis (lumière monochromatique) et le signal réfléchi. On mesure donc directement l'amplitude réelle des vitesses de vibrations en chaque point de mesure. Pour la plaque rectangulaire, le pas de grille est de 10 mm selon les deux axes de coordonnées. On obtient $50 \times 40 = 2000$ réponses impulsionnelles vibratoires qui constituent les mesures de référence. Pour la plaque en D, 1979 mesures sont situées sur la plaque avec des pas de 8.5mm et 8.2mm respectivement selon l'axe des x et y . Chaque mesure correspond à une excitation de la plaque. Le processus d'acquisition au vibromètre laser est donc très long. Dans le cas de la plaque rectangulaire, après une excitation, le temps typique au bout duquel les ondes de flexions sont suffisamment amorties pour passer à la mesure suivante est de l'ordre de 10s. Ainsi, le temps d'acquisition des vitesses sur 2000 points est d'environ 5h.

2.1.2 Mesure sur le plan hologramme

Les mesures de pressions dans le plan hologramme sont réalisées avec une antenne plane rectangulaire de 120 microphones à electret. Les signaux sont enregistrés avec un enregistreur numérique de 128 voies fabriqué au laboratoire. Les micros sont répartis régulièrement selon une matrice 12×10 avec un pas de 50 mm ce qui conduit à une antenne de dimensions 550 mm \times 450 mm. Afin d'améliorer l'échantillonnage spatial du champ acoustique, l'antenne de base est déplacée selon 16 positions entrelacées pour construire une grille de $48 \times 40 = 1920$ points de mesures avec un pas de 12.5 mm. Les signaux sont synchronisés pour une position d'antenne. Afin de synchroniser les 1920 signaux, la phase de chacune des 16 mesures est recalée par rapport à un signal de référence qui dans notre cas est un capteur de force fixé sur le marteau d'impact.

L'antenne est placée à $z_0 = 20$ mm au-dessus de la plaque rectangulaire et à $z_0 = 30$ mm de la plaque en D (la taille du système d'encastrement ne nous a pas permis de conserver la même hauteur de mesure).

Remarquons que l'on utilise ici des capteurs de pression pour mesurer le champ acoustique et reconstruire des vitesses de vibrations. D'autres travaux de recherche récents ont mis en évidence l'avantage que peut représenter pour la NAH l'utilisation de capteurs de vitesses particulières dans le champ rayonné [ZJBC09, JL05, JJ06].

Bien que le déplacement de l'antenne à 16 reprises soit fastidieux, le temps d'acquisition par rapport à une mesure au vibromètre laser est considérablement réduit (16 mesures au lieu de 2000). On verra dans la section 2.6.1 qu'il est possible de réduire encore le temps d'acquisition grâce à une mesure unique mettant en œuvre une antenne aléatoire.

2.1.3 Traitement des signaux

Les mesures par antennerie produisent des hologrammes temporels qui sont traités par transformée de Fourier. On obtient des hologrammes harmoniques, qui constituent la base du processus de NAH. Notons que les amplitudes des signaux enregistrés après l'impact du marteau sont amorties de manière exponentielle comme le montre la figure 2.4 qui illustre un exemple de mesure sur la plaque rectangulaire. Il pourrait être judicieux de décomposer les signaux non pas sur une base de sinusoides infinies (éléments de la base de Fourier), mais plutôt sur une base de sinusoides amorties. Chardon et Daudet ont d'ailleurs proposé un algorithme basé sur OMP pour décomposer de tels signaux [CD10] afin d'augmenter la résolution harmonique. Nous traitons cependant les signaux par FFT classique qui donne de bons résultats. La figure 2.5 (a) illustre un exemple de spectre obtenu pour une mesure sur la plaque rectangulaire.

Pour assurer un meilleur rapport signal-sur-bruit, nous ne traitons que les fréquences ayant une énergie significative dans le domaine de Fourier. Elles correspondent au rayonnement de déformés opérationnelles (ODS) qui sont des combinaisons de modes de plaque. Ces ODS sont simplement sélectionnées aux pics du spectre moyen des réponses impulsionnelles réparties sur une plage de fréquences allant de 50 Hz à 4000 Hz. La figure 2.5 (b) illustre le spectre moyen pour la plaque rectangulaire. Remarquons que les pics du

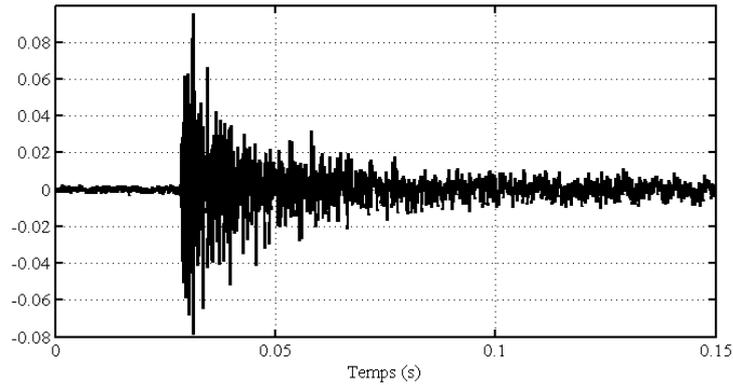


FIGURE 2.4 – Exemple d’un signal temporel enregistré par un microphone

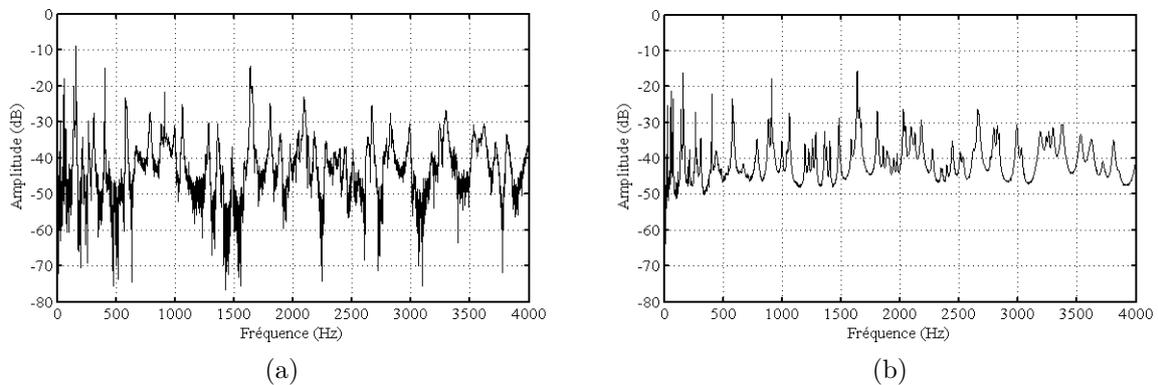


FIGURE 2.5 – Exemple de spectre (a) et de spectre moyen (b) pour la plaque rectangulaire

spectre moyen qui sont absents sur le spectre d’une mesure indiquent qu’à ces fréquences particulières, la mesure est sur un nœud de vibration.

2.1.4 Évaluation des performances

La reconstruction du champ des vitesses $\hat{\mathbf{w}}$ est comparée avec les mesures de références que l’on note $\dot{\mathbf{w}}$. Le pas spatial de la carte des vitesses reconstruites par NAH et celui de la mesure par vibrométrie n’étant pas identique, on a recours à une interpolation simple de Fourier afin de comparer précisément les résultats. Les performances des méthodes NAH développées dans cette thèse sont évaluées en calculant un coefficient de corrélation, utilisé classiquement en analyse modale expérimentale et défini par :

$$C := \max_{i,j} \frac{|\hat{\mathbf{w}}^H \dot{\mathbf{w}}_{i,j}|}{\|\hat{\mathbf{w}}\|_2 \cdot \|\dot{\mathbf{w}}\|_2} \quad (2.1)$$

où $\dot{\mathbf{w}}_{i,j}$ est la version de $\dot{\mathbf{w}}$ décalée de i pixels selon l’axe x et de j pixels selon l’axe y . Ce décalage s’explique du fait de la non superposition entre les grilles de reconstruction par NAH et la grille de vitesses mesurées par vibrométrie laser.

Le processus expérimental complet est résumé sur la figure 2.6. Les déformées opérationnelles reconstruites par NAH à partir des mesures acoustiques sur le plan hologramme sont comparées aux mesures directes par vibrométrie laser.

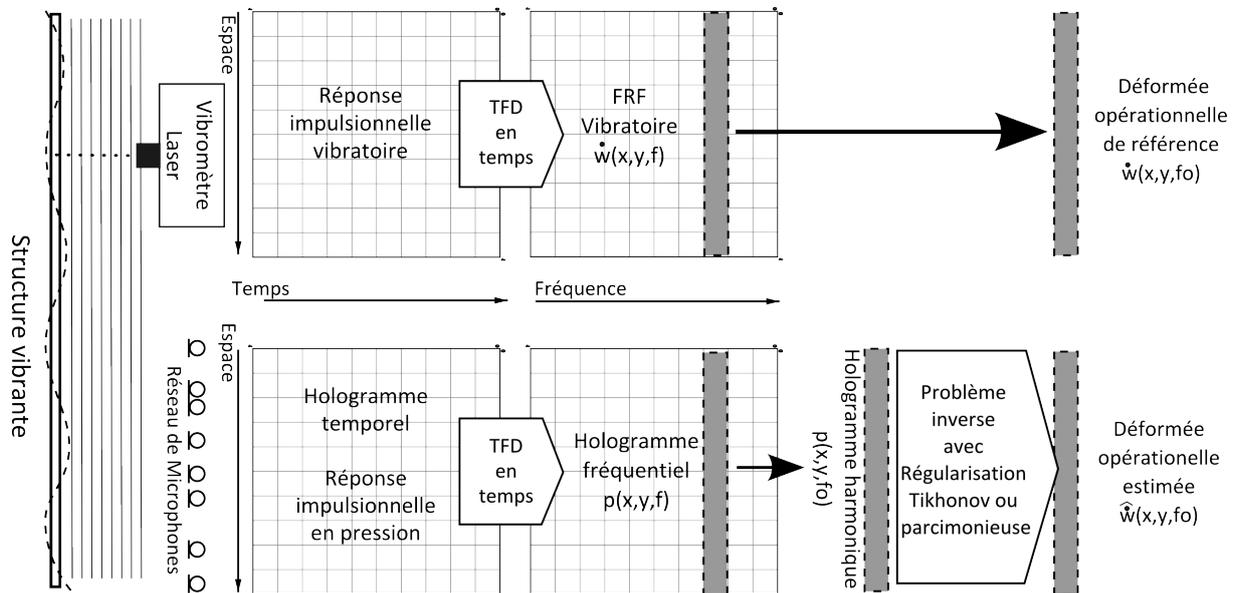


FIGURE 2.6 – Processus expérimental de l'acquisition des données (acoustiques et vibrométriques), du traitement harmonique des signaux, et de la reconstruction par NAH de la source vibrante

2.2 Formulation mathématique de la NAH

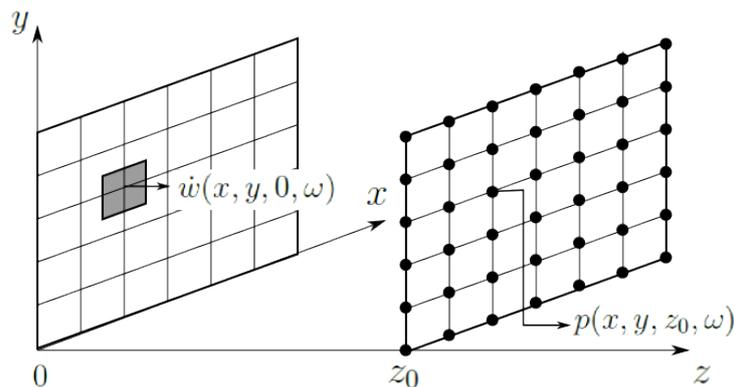


FIGURE 2.7 – Géométrie du problème de NAH

Nous décrivons ici le problème direct. On considère une surface plane infinie en $z = 0$ soumise à des vibrations qui engendrent le rayonnement d'un champ acoustique dans le demi-espace $z \geq 0$. Les vibrations de la source sont caractérisées par une distribution normale de vitesses $\dot{w}(x, y, 0, \omega)$ à la pulsation ω . Le rayonnement est décrit par des ondes

planes progressives dans le sens des z croissants. La pression $p(x, y, z_0, \omega)$ rayonnée sur un plan en z_0 parallèle au plan source est appelé l'hologramme. La géométrie du problème est illustrée sur la figure 2.7. Dans la suite on simplifie l'écriture en omettant la dépendance explicite des champs de pressions et de vitesses en ω . L'expression de la pression en fonction de la distribution de vitesses sur la source est donnée par la première intégrale de Rayleigh :

$$p(x, y, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x - x', y - y', z_0) \dot{w}(x', y', 0) dx' dy' \quad (2.2)$$

L'opérateur $g(x - x', y - y', z_0)$ est la fonction de Green en champ libre qui traduit la propagation entre une surface élémentaire de la source vibrante et un point de mesure :

$$g(x - x', y - y', z_0) = -i\rho ck \frac{e^{ik\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|_2}}{2\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|_2} \quad (2.3)$$

où c indique la vitesse de propagation des ondes, ρ la densité de l'air et $k = \omega/c$ le nombre d'onde. On assimile ainsi chaque surface élémentaire de la source à un monopole. \mathbf{r} et \mathbf{r}' désignent respectivement les vecteurs correspondants aux points de coordonnées (x, y, z_0) et $(x', y', 0)$. L'équation 2.2 décrit la convolution du champ de vitesses normales de la source avec un propagateur ce qui implique que tous les points sources $(x', y', 0)$ contribuent à un point de pression rayonnée (x, y, z_0) .

Dans le domaine de Fourier spatial, le produit de convolution dans l'expression 2.2 devient un produit simple :

$$P(k_x, k_y, z_0) = G(k_x, k_y, z_0) \dot{W}(k_x, k_y, 0) \quad (2.4)$$

$P(k_x, k_y, z_0)$ et $\dot{W}(k_x, k_y, 0)$ sont respectivement les spectres de nombre d'onde de la pression mesurée et de la vitesse source obtenues par transformée de Fourier spatiale dans le plan xy . k_x et k_y sont les nombres d'ondes dans les directions x et y . $G(k_x, k_y, z_0)$ est le propagateur qui a pour expression dans la base de Fourier :

$$G(k_x, k_y, z_0) = \frac{\rho_0 ck}{k_z} e^{-ik_z z_0} \quad (2.5)$$

k_z est obtenu par l'équation de dispersion $k_z^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2$. Deux cas sont à distinguer en fonction de la valeur de $k_x^2 + k_y^2$: si $k_x^2 + k_y^2 \leq k^2$ alors k_z est réel, si $k_x^2 + k_y^2 > k^2$, alors k_z est imaginaire pur. On obtient deux expressions différentes du propagateur :

$$G(k_x, k_y, z_0) = \begin{cases} e^{-iz_0 \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} & \text{si } k_x^2 + k_y^2 \leq k^2 \\ e^{-z_0 \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}} & \text{si } k_x^2 + k_y^2 > k^2 \end{cases} \quad (2.6)$$

Le propagateur fait donc la distinction entre deux types d'ondes : les ondes propagatives et les ondes évanescentes. Dans le plan des nombres d'ondes, on définit le cercle de rayonnement de rayon $k = \omega/c$. La figure 2.8 montre la répartition, dans le plan des nombres d'ondes $P(k_x, k_y, z_0)$, des ondes propagatives et évanescentes de part et d'autre du cercle

de rayonnement. Les composantes situées à l'intérieur de ce cercle (basses fréquences spatiales) correspondent à des ondes planes se propageant selon les z croissants. Leur amplitude ne varie pas mais elles subissent une rotation de phase fonction de k_z et z . Les composantes situées à l'extérieur du cercle (hautes fréquences spatiales) correspondent à des ondes évanescentes dont l'amplitude décroît de façon exponentielle en fonction de la distance de propagation. On remarque sur la figure 2.8 que les ondes évanescentes, caractérisant le champ proche de l'antenne, portent une grande partie de l'information. Il est donc nécessaire de placer l'hologramme de mesure dans le champ proche de la source afin de capter ces hautes fréquences.

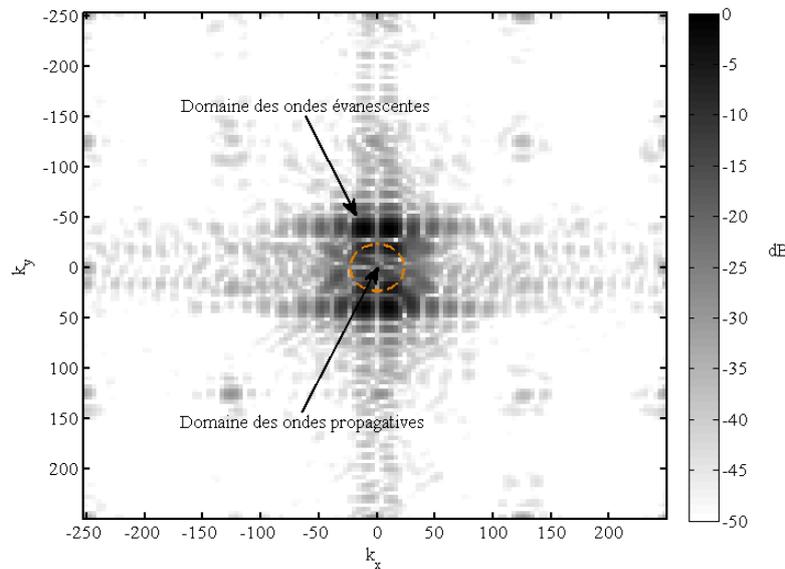


FIGURE 2.8 – Spectre de nombre d'onde de la pression mesurée à une fréquence de 1257Hz

L'intérêt d'utiliser la transformée de Fourier spatiale est qu'elle fournit une représentation plus simple du problème et permet une implémentation rapide. Il est cependant nécessaire de discrétiser le problème. En effet, le champ de pression sur l'hologramme est échantillonné par une antenne plane. Le champ de vitesses sur la surface source est également échantillonné à la même fréquence spatiale que le champ de pression. Leur représentation dans le domaine des fréquences spatiales est approximée par une transformée de Fourier discrète (DFT). L'écriture matricielle de l'équation 2.4 est :

$$\mathbf{F}\mathbf{p} = \mathbf{G}\mathbf{F}\dot{\mathbf{w}} \quad (2.7)$$

où $\dot{\mathbf{w}}$ indique le vecteur source des vitesses à estimer, échantillonné sur une grille rectangulaire et régulière, \mathbf{p} est le vecteur de pression échantillonné sur le plan hologramme, \mathbf{F} est l'opérateur de DFT 2D spatial, et \mathbf{G} la matrice de propagation. C'est une matrice diagonale dont les éléments sont les $G(k_x, k_y, z_0)$. La pression en fonction des vitesses sources est donc :

$$\mathbf{p} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{F}\dot{\mathbf{w}} \quad (2.8)$$

Le produit des matrices $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{F}$ est noté \mathbf{A} .

La NAH consiste à inverser le problème 2.8 afin d'estimer les vitesses normales $\hat{\mathbf{w}}$ de la source vibrante à partir des mesures \mathbf{p} de pressions sur l'hologramme. Une première solution est d'inverser "naïvement" l'équation (2.8) :

$$\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{p} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p} \quad (2.9)$$

La matrice \mathbf{G} étant diagonale, elle est inversible. Cependant, elle est mal conditionnée ce qui rend l'inversion instable et conduit à une mauvaise estimation de $\hat{\mathbf{w}}$. En effet, à cause de l'amortissement exponentiel des ondes évanescentes, les petites erreurs, dont le bruit de mesure, sont amplifiées exponentiellement lors du processus d'inversion. Il est donc nécessaire de régulariser le problème. La technique de régularisation de Tikhonov largement employée en NAH est décrite à la section suivante.

En considérant des structures planes, la formulation mathématique de la NAH et son implémentation numérique sont simples et permettent d'exploiter les algorithmes rapides de FFT. Pour des structures cylindriques ou sphériques, une adaptation en fonction de la géométrie de la source permet également une implémentation simple et rapide du problème. Les méthodes standard de résolution pour ces types de géométrie ont été décrites par Williams [Wil99].

2.3 Approche standard de la NAH : régularisation de Tikhonov

Dans cette section on décrit une méthode largement employée en NAH qui consiste à régulariser le problème inverse 2.9 par la méthode de Tikhonov.

2.3.1 Troncature et discrétisation du plan de mesure

Le problème à résoudre 2.9 est issu du formalisme de Fourier qui suppose un plan de mesure et un plan source infinis. En pratique le plan de mesure, c'est-à-dire l'antenne holographique, est tronqué. Cela revient à multiplier le champ de pressions harmoniques au dessus de la plaque par une fenêtre rectangulaire superposée à l'antenne. Dans le domaine spatial de Fourier, la troncature du champ de pression se traduit par une convolution du spectre de nombres d'ondes avec un sinus cardinal qui fait apparaître des composantes spectrales parasites. La rétro-propagation de ce spectre engendre des effets de bords pouvant être gênants. Afin d'éviter ces effets de bords, une solution serait d'agrandir l'antenne au dessus de la source jusqu'à atteindre des pressions négligeables ce qui donnerait l'illusion d'une antenne infinie. Cette possibilité n'est pourtant pas acceptable expérimentalement. Une autre solution simple est d'appliquer un fenêtrage moins brutal sur le champ de pression qu'avec une fenêtre rectangulaire. Une fenêtre de pondération de Tukey est couramment utilisée. Thomas et Pascal [TP05] ont proposé une méthode basée sur une décomposition du champ de pression en ondelettes afin d'identifier les artefacts

dus à la troncature du plan de mesures. Dans nos expériences, nous utilisons une fenêtre simple de Tukey.

Par ailleurs, les mesures étant discrètes, le théorème de Shannon/Nyquist impose d'échantillonner l'hologramme avec un pas $\delta \leq \pi/k_{max}$ dans les direction x et y afin de limiter les effets de repliement de spectre.

2.3.2 Régularisation de Tikhonov

L'hologramme \mathbf{p} doit être enregistré à une distance z_0 proche de la source afin de collecter les informations décisives portées par les ondes évanescentes [BDM81] dont l'amplitude est atténuée exponentiellement dans le cas de la NAH plane. Au niveau de l'hologramme, l'amplitude des ondes évanescentes est donc faible. Les mesures correspondantes peuvent être contaminées par du bruit ayant de multiples origines. Ainsi, lors de la rétro-propagation naïve (résolution de l'équation 2.9), les ondes évanescentes et le bruit situé dans la même région du plan $k_x k_y$, c'est-à-dire les nombres d'ondes élevés, sont amplifiés exponentiellement. La reconstruction du champ des vitesses de la source est alors considérablement perturbée par l'effet du bruit amplifié.

Il est de ce fait nécessaire de régulariser l'inversion du problème 2.8. La technique de régularisation la plus populaire en NAH est la régularisation de Tikhonov. Cette méthode, expliquée dans la section 1.1, force la solution $\hat{\mathbf{w}}$ à avoir un minimum d'énergie. L'effet de l'amplification du bruit s'en trouve donc atténué. D'après l'équation 1.10, la solution du problème 2.8 est :

$$\hat{\mathbf{w}} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A} + \lambda \mathbf{L}^H \mathbf{L})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{p} \quad (2.10)$$

Afin de mieux comprendre l'effet de la régularisation, on peut l'écrire sous la forme :

$$\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_\lambda \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p} \quad (2.11)$$

\mathbf{R}_λ , qui dépend du paramètre de régularisation λ , s'écrit :

$$\mathbf{R}_\lambda = (\mathbf{A}^H \mathbf{A} + \lambda \mathbf{L}^H \mathbf{L})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{A}. \quad (2.12)$$

L'expression de \mathbf{R}_λ montre que cette matrice agit comme un filtre passe-bas dans le domaine des nombres d'ondes. La pente et la fréquence de coupure de ce filtre dépendent du paramètre de régularisation et de la matrice \mathbf{L} . En effet, dans l'application basique de la régularisation de Tikhonov où \mathbf{L} est choisie comme la matrice identité, les éléments j de \mathbf{R}_λ s'écrivent :

$$r_j^\lambda = \frac{1}{1 + \lambda |a_j|^{-2}} \quad (2.13)$$

Les termes a_j sont les éléments diagonaux de $\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{F}$. Dans les basses fréquences spatiales, lorsque $k_x^2 + k_y^2 \leq k^2$, $|a_j|$ est une constante. Le filtre n'a donc aucun effet sur les ondes propagatives. En revanche, pour des nombres d'ondes élevés ($k_x^2 + k_y^2 > k^2$), $|a_j|^{-2}$ croît exponentiellement avec la fréquence spatiale. Le filtrage agit sur les composantes de bruits mais également sur les ondes évanescentes. L'objectif de la régularisation est principalement de trouver un compromis entre le filtrage du bruit et des ondes évanescentes.

2.3.3 Régularisation adaptée à la NAH

Les idées pour optimiser le filtre de régularisation ont généré une littérature abondante [Wil01, KN04, SLRN08]. Le choix de la matrice \mathbf{L} et du paramètre λ sont critiques pour la reconstruction du champ de vitesses. Williams a proposé une version améliorée du filtre de Tikhonov en choisissant comme contrainte sur \mathbf{L} l'opposé du filtre en question [Wil01] :

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} - \mathbf{R}_\lambda \quad (2.14)$$

Le choix de cette contrainte permet de repousser légèrement la fréquence de coupure du filtre et d'en raidir la pente. Par conséquent, les ondes évanescentes dont le nombre d'onde est proche de k sont préservées et la reconstruction de la source est améliorée.

Il est aussi essentiel de bien choisir le paramètre de régularisation λ . En effet, des faibles valeurs de λ impliquent un faible filtrage. La reconstruction de la source est alors perturbée par du bruit amplifié par la rétro-propagation. L'énergie de la solution $\|\hat{\mathbf{w}}\|_2^2$ est donc très grande bien que l'erreur $\|\mathbf{p} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{w}}\|_2^2$ soit faible car la solution minimise cette quantité.

D'un autre côté, si le filtrage est trop important (grandes valeurs de λ), alors les ondes évanescentes sont sévèrement filtrées et on perd l'information cruciale à la reconstruction. $\|\hat{\mathbf{w}}\|_2^2$ est faible mais l'erreur de reconstruction $\|\mathbf{p} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{w}}\|_2^2$ est élevée.

Il s'agit donc, et c'est tout l'art de la régularisation, de trouver un compromis entre régularité et fidélité de la solution aux mesures.

Afin d'estimer le paramètre optimal de régularisation plusieurs méthodes peuvent être envisagées. Les deux méthodes les plus populaires sont la courbe en L et la méthode de validation croisée généralisée (GCV) qui ne nécessitent aucun *a priori* sur le niveau de bruit des mesures.

Le principe de la courbe en L est simple : il s'agit de tracer la courbe $\log \|\hat{\mathbf{w}}_\lambda\|_2^2 = f(\log \|\mathbf{p} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{w}}_\lambda\|_2^2)$ qui typiquement a une forme de L (mieux visible lorsqu'on est pas en échelle log-log). La courbe est obtenue en faisant varier λ sur un large plage de valeurs. Le paramètre optimal de régularisation est obtenu au maximum de courbure de la courbe en L. Un exemple expérimental est illustré sur la figure 2.9 a). Il est obtenu pour une déformée opérationnelle de la plaque rectangulaire (cf. figure 2.2) à la fréquence 1483Hz.

La validation croisée généralisée (GCV) [GHW79] a été introduite par Golub et *Al* pour estimer une valeur optimale de λ . Elle s'appuie sur le principe suivant de validation croisée : on estime la source $\hat{\mathbf{w}}_\lambda^m$ en enlevant une mesure m puis on prédit la mesure manquante, par calcul du problème direct, en la comparant avec la vraie mesure p_m , pour $m = 1 \dots M$ où M indique le nombre de mesures. On ré-itére l'opération pour chaque valeur de λ . Golub a montré qu'en appliquant le principe de validation croisée à la régularisation de Tikhonov, l'estimation optimale de λ est obtenue en minimisant la fonctionnelle :

$$J(\lambda) = \frac{\|(\mathbf{I} - \mathbf{R}_\lambda)\mathbf{p}\|_2^2}{[\text{Tr}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_\lambda)]^2} \quad (2.15)$$

Un exemple expérimental de l'allure de la fonctionnelle $J(\lambda)$ est illustré sur la figure 2.9

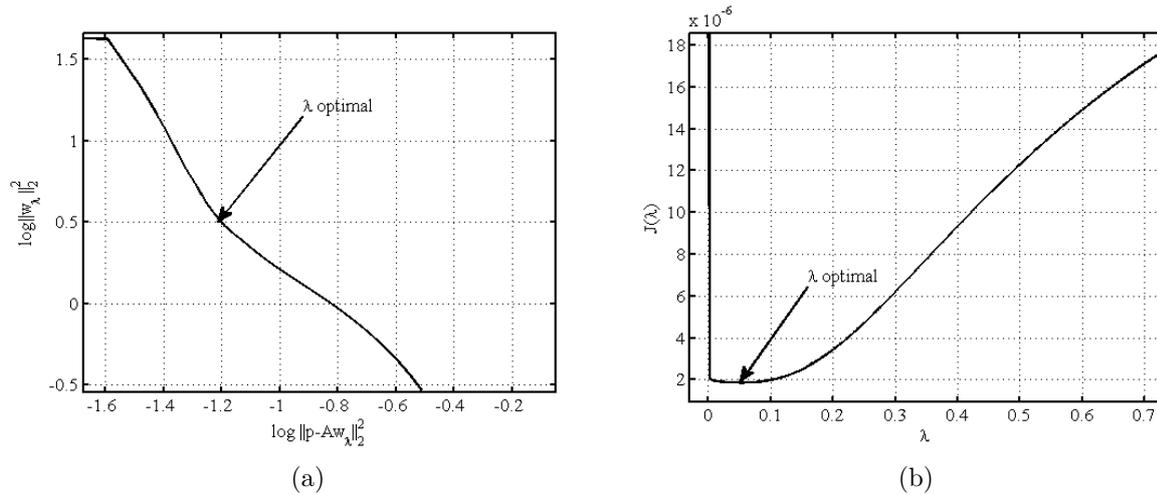


FIGURE 2.9 – Méthodes d'estimation du paramètre de régularisation λ . (a) Méthode de la courbe en L. (b) Méthode GCV.

b) pour le même mode que l'illustration de la courbe en L.

Lors d'expériences sur la plaque rectangulaire, nous avons remarqué que la méthode GCV sous-estime le paramètre de régularisation en basses fréquences par rapport la méthode de la courbe en L. Cependant, sur toute la largeur de bande qui nous intéresse dans la suite, la GCV permet globalement d'obtenir de meilleurs résultats. Ainsi, dans les résultats expérimentaux qui suivent, nous utilisons la méthode GCV pour la régularisation de Tikhonov.

Bien que de nombreuses études aient prouvé que l'implémentation standard de la NAH en utilisant la régularisation de Tikhonov fournit en général des résultats satisfaisants, la méthode souffre de certaines faiblesses. La première est que l'effet du filtrage passe-bas ne permet pas de bien reconstruire les hautes fréquences spatiales, en particulier les discontinuités qui permettent par exemple de reconstruire les bords d'un objet à bord libre. Une deuxième importante faiblesse est la nécessité d'échantillonner le plan hologramme avec un pas qui respecte le critère de Shannon/Nyquist. En hautes fréquences, le nombre de microphones (et le nombre de voies d'acquisition correspondantes) requis devient élevé.

On montrera que ces deux faiblesses peuvent être évitées en traitant le problème d'inversion par approximation parcimonieuse de la source. La section suivante décrit le problème de décomposition parcimonieuse adapté à la NAH.

2.4 Régularisation parcimonieuse

Reprenons l'équation 2.2 qui donne le champ de pression sur l'hologramme en fonction de la distribution des vitesses sur la source. Son écriture matricielle est :

$$\mathbf{p} = \mathbf{g}\dot{\mathbf{w}} \quad (2.16)$$

\mathbf{p} est le vecteur mesure de dimension M , $\dot{\mathbf{w}}$, le vecteur source de dimension N et \mathbf{G} la matrice de propagation composée des fonctions de Green du milieu de dimensions $M \times N$. On souhaite inverser le problème 2.16 en exploitant le caractère parcimonieux de la source. La distribution des vitesses normales de la structure $\dot{\mathbf{w}}$ de dimension N est complexe et ne contient que peu d'éléments nuls correspondant à des nœuds de vibration. Il est cependant possible de trouver un dictionnaire de décomposition dans lequel $\dot{\mathbf{w}}$ a une représentation approximativement parcimonieuse. Notons $\mathbf{D} = (\mathbf{d}_n)_{n=1\dots N}$, de dimensions $N \times N$, ce dictionnaire. On peut alors écrire $\dot{\mathbf{w}}$ comme une combinaison linéaire de peu d'éléments :

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{D}\mathbf{x} \quad (2.17)$$

où le vecteur \mathbf{x} ne contient que $K \ll N$ éléments non nuls. Le choix du dictionnaire \mathbf{D} dans lequel $\dot{\mathbf{w}}$ est le plus parcimonieux est une étape cruciale. En effet, plus la solution est parcimonieuse, plus facile est sa reconstruction par échantillonnage compressé avec un faible nombre de mesures.

Dans le cadre de la régularisation parcimonieuse, le problème de NAH peut être redéfini ainsi : étant donné un ensemble de mesures \mathbf{p} , on recherche le jeu de coefficients dans \mathbf{x} le plus parcimonieux tel que :

$$\mathbf{p} = \mathbf{G}\mathbf{D}\mathbf{x} \quad (2.18)$$

Notons que dans ce cas, par rapport à la régularisation de Tikhonov, on évite le calcul de la transformée de Fourier spatiale de \mathbf{p} et les effets nuisibles à la reconstruction dûs à la troncature et la discrétisation du plan de mesures. En notant $\mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{D}$, le problème à inverser $\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, où \mathbf{x} ne contient que peu de composantes non nulles, peut être résolu par les algorithmes OMP ou BPDN présentés dans la section 1.2.2.

Nous justifions dans la section suivante le choix d'un dictionnaire adapté à la NAH plane.

2.4.1 Choix du dictionnaire de décomposition

En NAH, les reconstructions intéressantes sont les modes de vibrations de la source ou bien les déformées opérationnelles qui sont une combinaison linéaire de ces modes. Le dictionnaire qui admet la représentation la plus parcimonieuse du champ des vitesses sources est donc la collection des déformées modales. Malheureusement, elles ne peuvent être connues explicitement que dans des cas rares très particuliers où les conditions aux limites sont bien maîtrisées. Pour cette raison, le dictionnaire à utiliser doit être plus générique afin d'être aussi adapté aux cas de conditions aux limites arbitraires.

Considérons une plaque \mathcal{S} fine, dans le sens où l'épaisseur est très inférieure aux longueurs d'ondes, de dimensions finies $L_x \times L_y$ et située en $z = 0$. En négligeant l'amortissement, le déplacement normal $w(x, y, \omega)$ au point $(x, y) \in \mathcal{S}$ à la fréquence ω est régi par l'équation :

$$D\Delta^2 w - \rho h \omega^2 w = 0 \quad (2.19)$$

où Δ^2 est l'opérateur bilaplacien, D la rigidité de la plaque, h son épaisseur et ρ sa masse volumique. Si $(\sigma_j)_{j>0}$ et $(e_j)_{j>0}$ sont les valeurs propres et vecteurs propres associés au

bilaplacien, on montre que les vitesses normales $\dot{w}(x, y, \omega) = \frac{\partial w(x, y, \omega)}{\partial t}$ sont la combinaison de modes propres qui s'écrivent :

$$\dot{w}(x, y, \omega) = \sum_{j>0} (x_j \delta_{\sqrt{\sigma_j}} + \bar{x}_j \delta_{-\sqrt{\sigma_j}}) e_j(x, y) \quad (2.20)$$

A chaque fréquence $\omega_j = \sqrt{\sigma_j}$ correspond un mode propre dont les coefficients x_j et les formes modales e_j dépendent des conditions aux limites et des conditions initiales.

Dans le cas particulier de la plaque rectangulaire $\mathcal{S} = [0, L_x] \times [0, L_y]$, dont les bords sont en appui simple (les conditions aux limites vérifient $w = \Delta w = 0$), les modes propres sont de la forme :

$$e_j(x, y) = \sin(k_{x_j} x) \sin(k_{y_j} y) \quad (2.21)$$

avec $k_{x_j} = \frac{\pi n_{x_j}}{L_x}$ et $k_{y_j} = \frac{\pi n_{y_j}}{L_y}$ où n_{x_j} et n_{y_j} sont des entiers positifs.

Si on choisit les éléments du dictionnaire tels que $d_n = e_j$, alors les déformées opérationnelles de la plaque rectangulaire aux bords appuyés sont très parcimonieuses dans \mathbf{D} . Pour une plaque rectangulaire avec des conditions aux limites quelconques, un premier choix de dictionnaire serait de prendre les éléments de la base de Fourier sur \mathcal{S} qui généralisent les fonctions e_j et qui s'écrivent :

$$d_n(x, y) = d_{n_x, n_y}(x, y) = e^{i(\frac{2\pi n_x x}{L_x} + \frac{2\pi n_y y}{L_y})} \quad (2.22)$$

Ce dictionnaire est cependant mauvais du point de vue de la parcimonie car il correspond à des conditions aux limites périodiques. Comme les modes vibratoires d'une plaque avec des conditions aux limites quelconques ne vérifient pas de telles conditions, leur représentation précise dans ce dictionnaire nécessite beaucoup de coefficients x_n (décroissance lente des coefficients de Fourier aux discontinuités).

Afin d'améliorer la parcimonie, il faudrait alors intégrer les conditions aux limites spécifiques au problème dans le choix du dictionnaire, mais cela semble délicat car les fonctions e_j résultantes n'ont pas nécessairement une expression analytique explicite et peuvent nécessiter un calcul numérique introduisant de nouvelles sources d'erreur. Une approche plus raisonnable consiste à se donner un domaine $\bar{\mathcal{S}} = [0, D_x] \times [0, D_y]$ plus grand que la plaque tel que $\mathcal{S} \subset \bar{\mathcal{S}}$. On choisit alors un dictionnaire de type base de Fourier sur $\bar{\mathcal{S}}$ restreint à \mathcal{S} dont l'expression des atomes est :

$$d_n(x, y) = d_{n_x, n_y}(x, y) = \chi_{\mathcal{S}}(x, y) e^{i(\frac{2\pi n_x x}{D_x} + \frac{2\pi n_y y}{D_y})} \quad (2.23)$$

où $n_x = -N_x \dots N_x$, $n_y = -N_y \dots N_y$ et $\chi_{\mathcal{S}}(x, y)$ est une fonction qui indique la restriction des atomes de Fourier au domaine \mathcal{S} de la plaque. La résolution d'un problème fini impose de ne considérer les nombres d'ondes que jusqu'à un seuil tel que $k_{x_{max}} = \frac{\pi N_x}{L_x}$ et $k_{y_{max}} = \frac{\pi N_y}{L_y}$. Notons que l'on peut choisir de remplacer les exponentielles complexes par les fonctions sinus et cosinus réels. La figure 2.10 illustre par exemple le mode (5,3) de Fourier (restreint aux fonctions sinus) sur $\bar{\mathcal{S}}$ restreint à \mathcal{S} .

Le principal degré de liberté dans le choix de ce type de dictionnaire est la taille de $\bar{\mathcal{S}}$ de dimensions $D_x \times D_y$. Remarquons que ce dictionnaire est redondant : les atomes \mathbf{d}_n

forment une famille de fonctions qui ne sont pas linéairement indépendantes. Plus D_x et D_y sont larges par rapport à L_x et L_y , plus le dictionnaire est redondant. La parcimonie du signal est alors améliorée ce qui implique une meilleure reconstruction avec un algorithme qui favorise la parcimonie de la solution. L'inconvénient est que la dimension du problème augmente ce qui entraîne des artefacts de résolution numérique. D'un autre côté, si la surface du dictionnaire est trop petite (D_x proche de L_x et/ou D_y proche de L_y) on perd la parcimonie. Il convient de trouver un compromis entre parcimonie et temps de calcul. Dans toutes nos expériences, le dictionnaire sera construit sur une surface $\bar{\mathcal{S}}$ qui vaut le double de \mathcal{S} , c'est-à-dire $\bar{\mathcal{S}} = \left[-\frac{L_x}{2}, \frac{3L_x}{2}\right] \times \left[-\frac{L_y}{2}, \frac{3L_y}{2}\right]$. On note que les déformées opérationnelles ne sont pas exactement parcimonieuses dans ce dictionnaire approximatif.

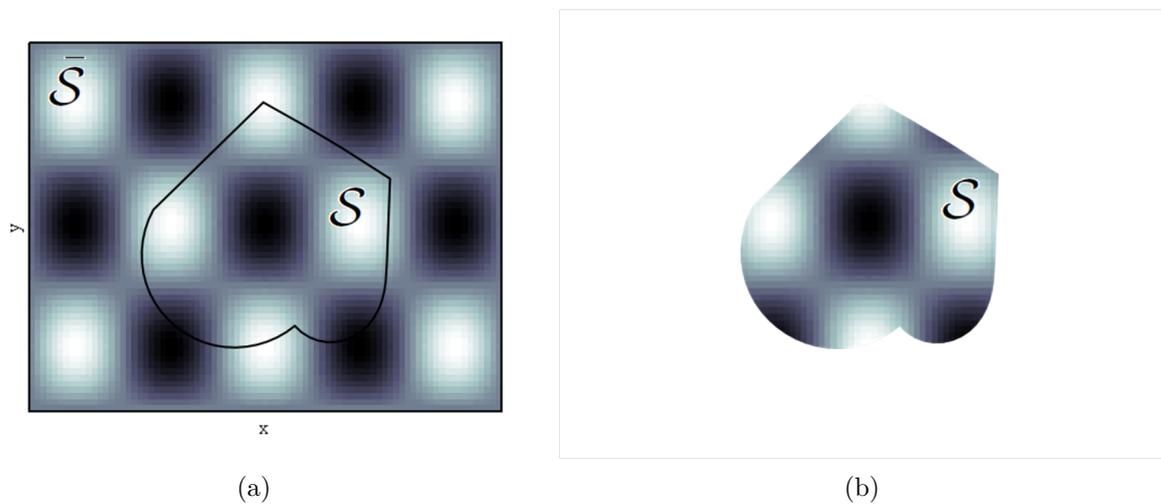


FIGURE 2.10 – Un atome du dictionnaire de décomposition parcimonieuse. a) Forme \mathcal{S} d'une plaque et domaine rectangulaire $\bar{\mathcal{S}}$ sur lequel est construit la base de Fourier. b) Atome du dictionnaire de Fourier sur $\bar{\mathcal{S}}$ restreint à \mathcal{S}

Afin de valider le modèle de décomposition parcimonieuse, c'est-à-dire le choix du dictionnaire \mathbf{D} , on montre grâce à une expérience préliminaire que les déformées opérationnelles (ODS) de la plaque rectangulaire à bords libres 2.2 sont bien approximées dans \mathbf{D} par quelques coefficients non nuls. Nous mesurons grâce au vibromètre laser la distribution des vitesses normales $\dot{\mathbf{w}}$ de la plaque rectangulaire. On ne sélectionne que 33 ODS parmi tout le spectre entre 58Hz à 3297Hz. On souhaite décomposer ces déformées dans le dictionnaire en inversant le système $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{D}\mathbf{x}$. Pour ce faire, on utilise l'algorithme OMP décrit dans la section 1.2.2.2 qui permet un contrôle de la parcimonie K de la solution. On estime alors l'approximation parcimonieuse \mathbf{x} des déformées. La qualité des approximations est évaluée grâce au coefficient de corrélation défini par l'équation (2.1). Il apparaît que toutes les ODS peuvent être décomposées avec un maximum de 8 atomes en maintenant une qualité d'approximation supérieure à 86%. La figure 2.11 montre par exemple l'approximation de deux ODS à 402Hz et 3297Hz (b) que l'on compare avec les mesures directes (a). L'ODS à 402Hz est approximée avec seulement 2 coefficients dans

x. Le coefficient de corrélation avec la mesure directe est de 95%. L'ODS à 3297Hz est approximée avec 5 coefficients non nuls. La corrélation obtenue est de 87%. Globalement, les coefficients de corrélation ont tendance à diminuer avec la fréquence mais témoignent d'une excellente qualité d'approximation. Remarquons que le nombre optimal d'atomes qui approximent une ODS ne dépend pas forcément de la fréquence temporelle, mais de la structure plus ou moins complexe de la déformée.

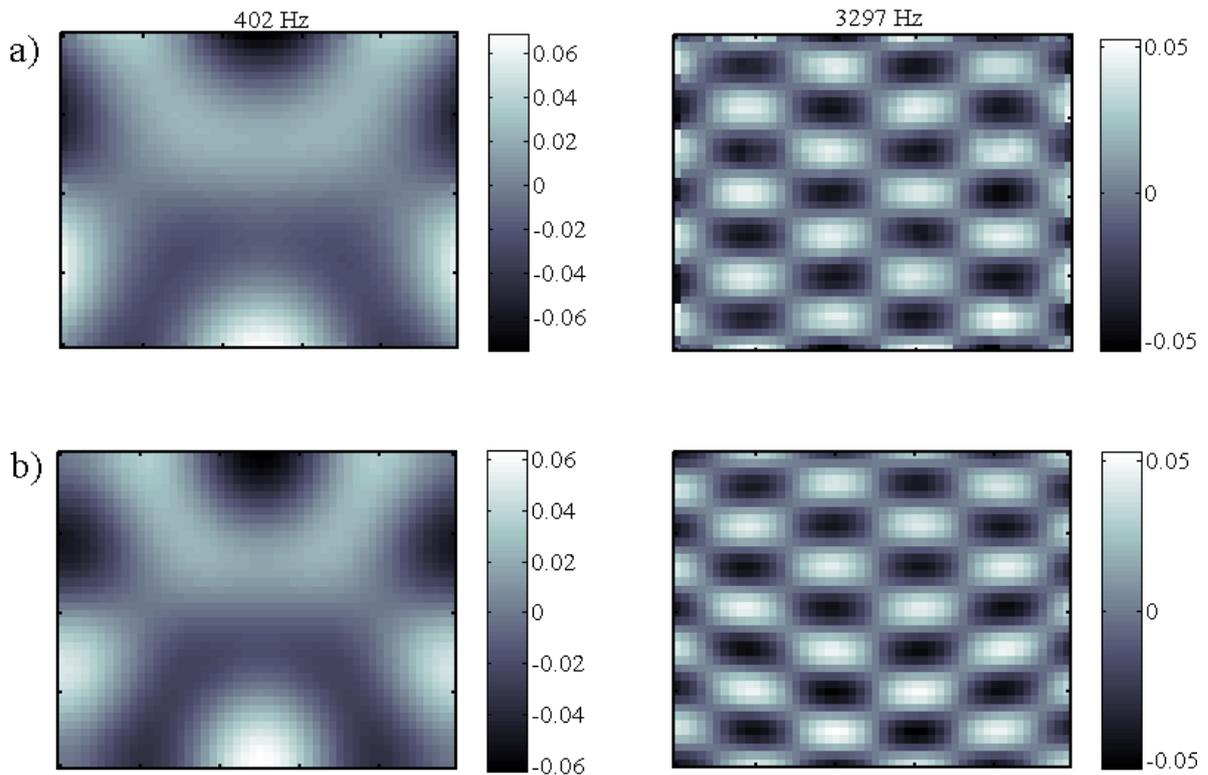


FIGURE 2.11 – Approximation de deux ODS à 402Hz et 3297Hz. a) mesures directes par vibromètre laser. b) approximations parcimonieuses

On peut conclure de cette étude, au moins dans le cas d'une plaque rectangulaire à bords libres, qu'une petite quantité d'atomes du dictionnaire \mathbf{D} suffit à bien approximer les ODS. Cela justifie l'utilisation de modèles parcimonieux pour la résolution du problème 2.18. On montrera dans la section 2.5 que ce dictionnaire peut également être utilisé sur des plaques plus complexes comme la plaque en forme de D (cf. figure 2.3).

La méthode est néanmoins limitée à des structures planes, homogènes et isotropes, ce qui inclut les plaques minces. De plus, la plaque doit être de forme étoilée. En particulier toutes les formes convexes sont étoilées. Une plaque convexe est un type de plaque sur laquelle tous segment séparant deux points est entièrement inclus dans la plaque. Dans le cas contraire, des singularités apparaissent dans les formes modales de vibrations qui ne sont pas prises en compte par les atomes de Fourier restreints à la structure.

L'avantage est qu'un tel dictionnaire est valide pour n'importe quelles conditions aux

limites qui ne sont pas connues *a priori*. Par exemple, il peut être utilisé pour étudier des éléments plans convexes d'une structure vibrante complexe sans tenir compte de la manière dont ils sont attachés à cette structure.

2.4.2 Algorithmes de reconstruction

Si la solution régularisée par la méthode de Tikhonov est fournie par une expression analytique (cf. équation 2.10), ce n'est pas le cas de la solution régularisée par approximation parcimonieuse. Mais les algorithmes OMP ou BPDN décrits dans la section 1.2.2 permettent d'estimer une solution au problème 2.18 de manière efficace. Cependant, les deux algorithmes agissent différemment selon les applications. Nous montrons que, dans le cas de la NAH, l'algorithme BPDN est plus robuste pour l'approximation des solutions.

2.4.2.1 Choix de l'algorithme de reconstruction

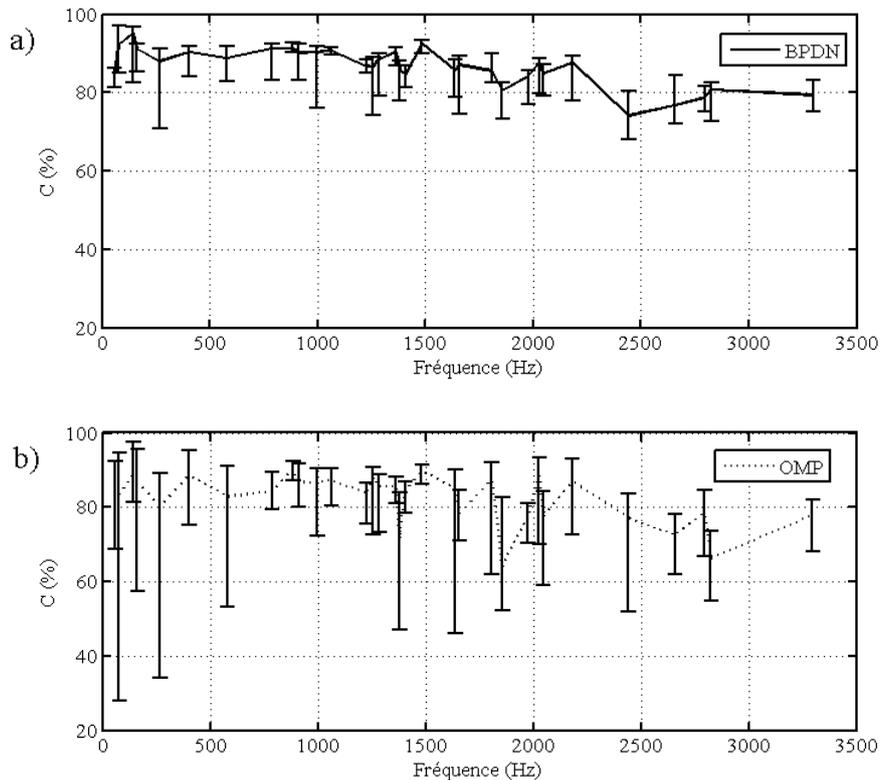


FIGURE 2.12 – Comparaison des performances de reconstruction des algorithmes BPDN (a) et OMP (b) pour différentes dimensions du dictionnaire. Les ODS sont sélectionnées sur tout le spectre.

Le dictionnaire \mathbf{D} est construit sur une surface $\bar{\mathcal{S}}$ dont la taille doit être définie. Lorsque l'on fait varier cette taille, nous avons observé que les résultats de reconstruction de sources par algorithme BPDN sont stables. En utilisant OMP avec un critère fixe de

parcimonie, les résultats varient de manière significative en fonction de la taille de $\bar{\mathcal{S}}$. Ces observations sont illustrées sur la figure 2.12 pour la plaque rectangulaire à bords libres.

Les figure (a) et (b) montrent les performances de reconstruction NAH, en fonction de la fréquence, respectivement des algorithmes BPDN et OMP. L'antenne utilisée est l'antenne aléatoire présentée sur la figure 2.17 et décrite dans la section 2.6.1. Les performances sont appréciées grâce au coefficient de corrélation avec les mesures directes obtenues au vibromètre laser. Les barres d'erreur montrent les valeurs extrêmes du coefficient de corrélation pour chaque ODS en fonction des dimensions de $\bar{\mathcal{S}}$ qui varient entre 100% et 600% de celles de la plaque \mathcal{S} .

On observe que BPDN (figure (a)) se comporte de manière stable quelle que soit la taille du dictionnaire alors que les performances d'OMP sont très sensibles à sa variation et dépendent en plus de l'ODS étudiée. Le réglage d'une taille de dictionnaire pour chaque ODS est pourtant inconcevable. Bien qu'OMP soit plus efficace en terme de temps de calcul, l'algorithme n'est pas robuste à l'approximation du dictionnaire de décomposition.

Les problèmes avec OMP apparaissent lorsque le dictionnaire ne contient pas d'éléments très proches des modes réels de vibration de la plaque. On remarque sur la figure 2.12 (b) que pour plusieurs ODS, selon la taille du dictionnaire, et donc la forme des atomes, la reconstruction peut être très précise ou bien complètement aberrante. En effet, OMP sélectionne un atome à la fois. Lorsque le dictionnaire est inapproprié, la première itération conduit à la sélection d'un atome qui n'est pas pertinent ce qui génère un effet "domino" : A chaque itération de l'algorithme, la sélection d'un atome non approprié introduit de l'erreur dans l'estimation finale de la solution.

BPDN fonctionne différemment : en utilisant une minimisation ℓ_1 de la source, l'algorithme recherche directement une combinaison de peu d'atomes qui minimise l'erreur globale. L'algorithme BPDN sera préféré pour l'application de la régularisation parcimonieuse à la NAH.

2.4.2.2 Estimation du paramètre de régularisation

Toute technique de régularisation nécessite le réglage d'un paramètre de régularisation qui est dépendant de la source étudiée et de l'algorithme utilisé pour sa reconstruction. Nous avons vu dans la section 2.3 que dans le cas de la régularisation de Tikhonov, un paramètre de filtrage optimal λ doit être défini afin de garantir une bonne estimation de la source. Dans ce cas, il existe des méthodes objectives d'estimation du paramètre λ telles que la courbe en L ou GCV. Dans le cas des algorithmes de reconstructions parcimonieuses, le problème est plus délicat.

Comme montré précédemment, l'algorithme OMP n'est pas robuste au paramétrage du dictionnaire. Nous nous focalisons sur l'algorithme de minimisation ℓ_1 BPDN qui offre de meilleures performances dans le cas de la NAH. L'algorithme cherche à résoudre le problème suivant :

$$\arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \text{ tel que } \|\mathbf{y} - \mathbf{G}\mathbf{D}\mathbf{x}\|_2^2 \leq \varepsilon \quad (2.24)$$

Ici, le paramètre de régularisation ε nécessite d'être estimé. Il est défini comme une fonc-

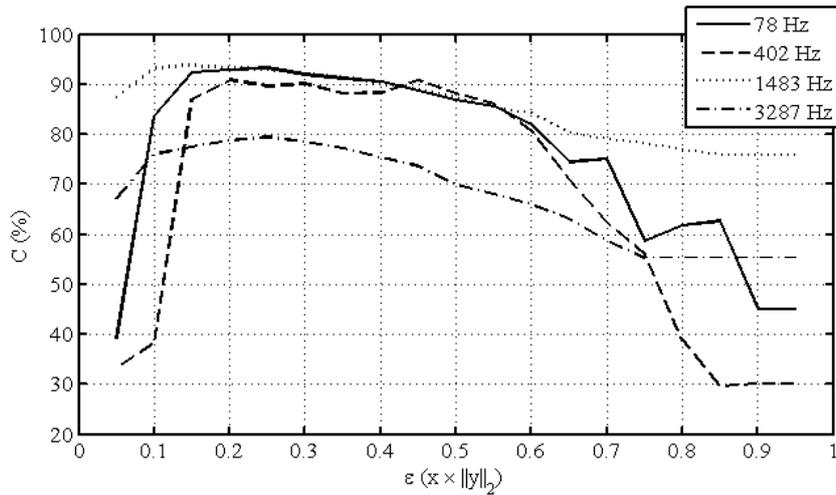


FIGURE 2.13 – Évolution du coefficient de corrélation en fonction du paramètre de régularisation $\varepsilon = \alpha \|p\|_2$

tion du bruit de mesure (bruit électronique, perturbations acoustiques), de l'erreur de position des microphones sur l'hologramme, de l'erreur sur le modèle \mathbf{G} de propagation, et de la parcimonie approximative de la solution dans le dictionnaire \mathbf{D} . Ces éléments, excepté le bruit ambiant et électronique, sont difficilement quantifiables. Aucune connaissance *a priori* ne nous permet de régler ε de manière optimale, de telle sorte que l'approximation la plus précise de la solution soit trouvée. Néanmoins, l'étude de la corrélation entre les vitesses estimées et celles directement mesurées nous montre qu'une plage assez large de valeurs possibles pour ε est acceptable. La figure 2.13 montre l'évolution de la corrélation pour quatre fréquences d'études (basses, moyennes et hautes fréquences) en fonction du taux d'erreur ε .

ε est exprimée comme une fraction de la norme du vecteur mesure : $\varepsilon = x \|p\|_2$. Il apparaît qu'un niveau de 20% à 30% de la norme du signal mesuré est acceptable pour les quatre fréquences. Cependant, il reste encore à développer une méthode objective pour l'évaluation de ε . Dans les expériences qui suivent, on choisit $\varepsilon = 0.27 \times \|p\|_2$.

2.5 Analyse et comparaison des résultats

Cette section présente les résultats expérimentaux obtenus pour deux types de plaques présentés dans la section 2.1 : une plaque rectangulaire à bords libres (cf. figure 2.2) et une plaque en forme de D avec des conditions aux limites mixtes (cf. figure 2.3).

La figure 2.14-a) montre 4 mesures de référence d'ODS pour la plaque rectangulaire à bords libres, dont les fréquences sont respectivement 78 Hz, 402 Hz, 1483 Hz, et 3297 Hz. A partir des mesures sur l'hologramme, différentes méthodes de reconstruction NAH sont appliquées :

- Figure 2.14-b : 1920 mesures de l'antenne régulière déplacée 16 fois en utilisant la régularisation de Tikhonov (cf. figure 2.2 (b)) ;

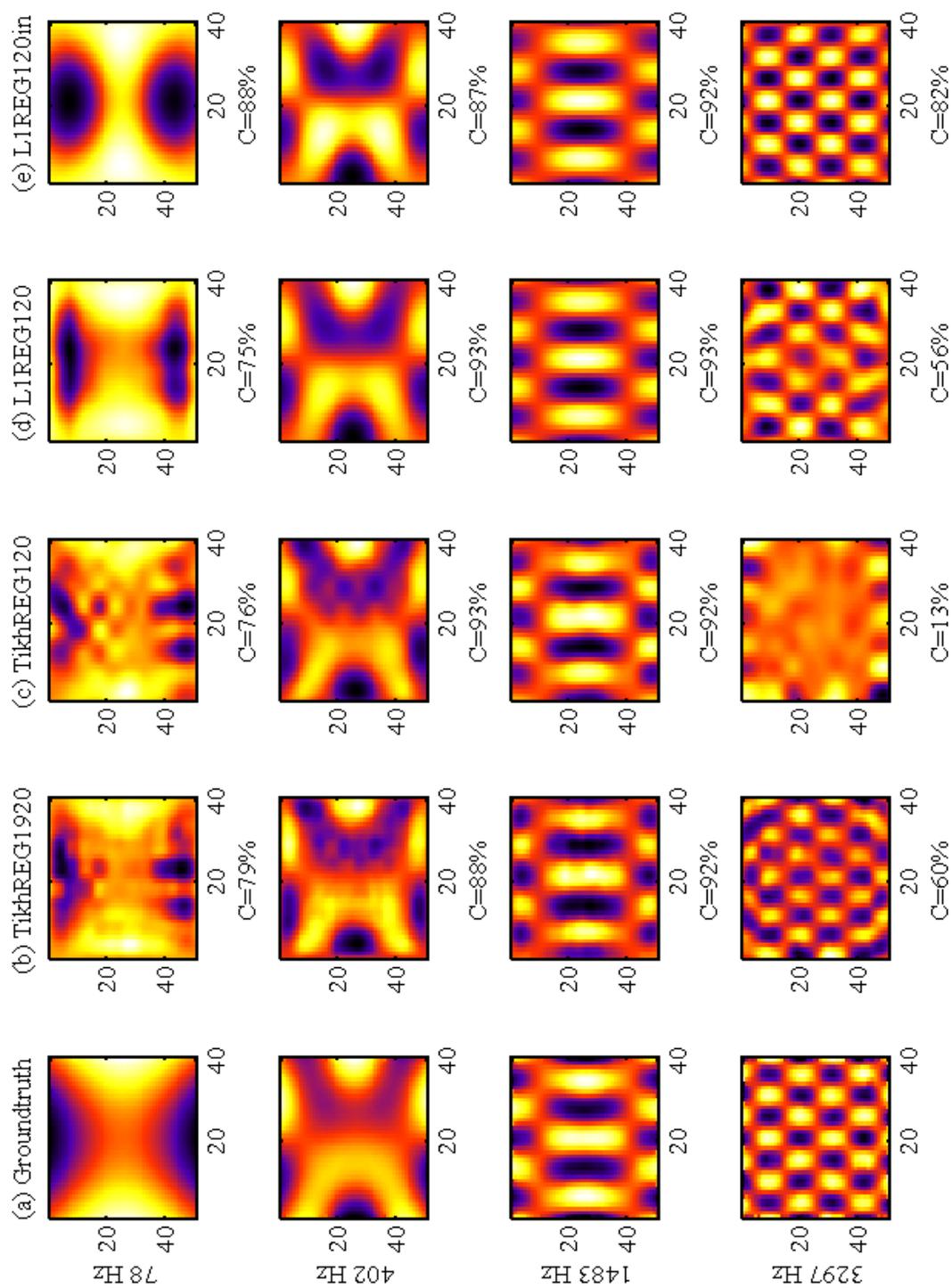


FIGURE 2.14 – Reconstructions de 4 déformées opérationnelles (78Hz, 402Hz, 1483Hz, et 3297Hz) de la plaque rectangulaire à bords libres. Les résultats obtenus par régularisation de Tikhonov (b et c) et par approximations parcimonieuses (d et e) sont comparés aux mesures directes par vibrométrie laser (a).

- Figure 2.14-c : 120 mesures de l’antenne régulière (1 position d’antenne) en utilisant la régularisation de Tikhonov (cf. figure 2.2 (a)) ;
- Figure 2.14-d : 120 mesures de l’antenne régulière en utilisant la régularisation parcimonieuse (algorithme BPDN) ;
- Figure 2.14-e : 120 mesures parmi les 1920 sur une grille régulière de manière à ce que tous les micros soient au dessus de la plaque. On utilise la régularisation parcimonieuse avec BPDN ;
- Figure 2.14-f : 120 mesures sélectionnées aléatoirement parmi les 1920 de l’antenne régulière de manière à ce que tous les micros soient au dessus de la plaque. On utilise la régularisation parcimonieuse avec BPDN.

Les améliorations des reconstructions des vitesses obtenues par régularisation parcimonieuse par rapport à la régularisation de Tikhonov sont discutées dans cette section. L’interprétation de certaines observations expérimentales est proposée.

2.5.1 Sensibilité de la méthode aux erreurs de calibrations

En basses fréquences, la reconstruction par Tikhonov avec 1920 et 120 micros fait apparaître d’importantes erreurs dans l’estimation des amplitudes (cf. figure 2.14-b/c) à 78 Hz et 402 Hz). Ce problème vient de la dépendance directe de la reconstruction des ODS avec le champ de pression mesuré qui peut être affecté par un faible rapport signal sur bruit. On attribue cela à des erreurs de calibration des microphones en basses fréquences et à de potentiels bruits de mesures. Comme le montrent les figures 2.14-

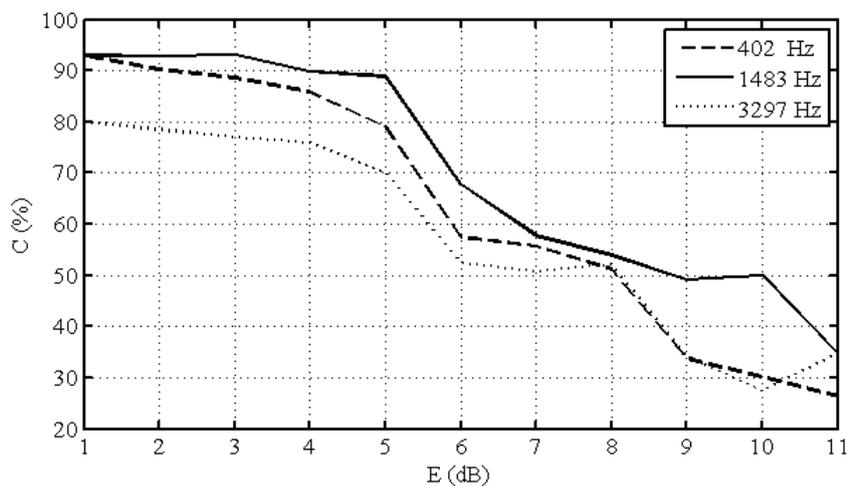


FIGURE 2.15 – Robustesse de la reconstruction parcimonieuse en fonction du taux de dé-calibration en amplitude simulé en utilisant l’algorithme BPDN

d/e/f, la reconstruction par BPDN n’est pas altérée par les erreurs. Les ODS sont en effet estimées par une combinaison linéaire d’atomes sélectionnés dans un dictionnaire déterministe qui est indépendant des mesures. Bien sûr, l’algorithme échouera dans la sélection des bons atomes si l’erreur en amplitude est trop importante. La courbe 2.15

montre la robustesse de la méthode à une dé-calibration en amplitudes des micros. Pour tracer cette courbe, on injecte artificiellement une erreur en amplitude sur chaque signal de l'hologramme. Cette erreur suit une loi normale de moyenne nulle et d'écart-type E exprimé en dB. Pour trois fréquences différentes réparties sur le spectre (402Hz, 1483Hz et 3297Hz), on remarque que la méthode est peu sensible aux erreurs d'amplitudes. En effet, 5dB d'erreur permettent encore d'estimer la source avec une précision similaire à l'estimation sans erreur de calibration.

2.5.2 Extension de l'hologramme

Les mesures de pression sont réalisées sur un hologramme de surface finie. En NAH standard, l'utilisation de la transformée de Fourier spatiale sur l'hologramme fini fait apparaître des composantes élevées de nombres d'ondes qui décrivent la discontinuité aux bords de la surface de mesure. Ces nombres d'ondes sont amplifiés exponentiellement par rétro-propagation, ce qui perturbe la reconstruction. Afin d'atténuer ces effets, le champ de pression acoustique rayonné est mesuré sur un hologramme plus large que la structure vibrante étudiée. En effet, plus on s'éloigne de la structure, plus la pression est atténuée jusqu'à atteindre des valeurs très faibles. On peut alors appliquer une fenêtre de Tukey pour atténuer plus fortement les effets de bords. Cependant, une telle extension de l'hologramme impose une augmentation du nombre de microphones ou de mesures.

Il est intéressant de remarquer que dans le cas de la régularisation parcimonieuse, il est préférable de concentrer les micros au-dessus de la plaque (figure 2.14-e) et d'éliminer les mesures qui sont à l'extérieur du domaine de la source. Une explication est que le modèle du dictionnaire suppose une plaque bafflée alors que dans nos expériences, elle ne l'est pas. La différence entre le modèle et les mesures est acceptable lorsque les micros sont au dessus de plaque. Elle est cependant beaucoup plus importante pour les micros placées en dehors de la plaque. On constate que l'élimination de ces mesures entraîne de meilleures reconstructions. On note que le fait de garder le même nombre de micros sur une surface plus petite implique l'utilisation d'une grille plus dense, ce qui permet une reconstruction encore efficace à 3297Hz (cf. figure 2.14-e).

2.5.3 Recouvrement spectral

La reconstruction par NAH standard impose un échantillonnage spatial de l'hologramme sur une grille rectangulaire uniforme. Le pas de la grille définit la limite dans l'espace des nombres d'ondes avant la manifestation du repliement spectral. Il est dicté par le critère de Shannon/Nyquist : les pas dans chaque direction δ_x et δ_y doivent respectivement être inférieurs à $\frac{\pi}{k_{xmax}}$ et $\frac{\pi}{k_{ymax}}$.

On observe que l'antenne régulière avec 120 micros combinée avec la régularisation de Tikhonov échoue à reconstruire les ODS en hautes fréquences, par exemple à 3297Hz (cf. figure 2.14-c). Dans ce cas l'échantillonnage spatial de l'hologramme ne satisfait plus le critère de Shannon. Il est cependant respecté avec l'antenne de 1920 micros (cf. figure 2.14-

b).

Les résultats obtenus avec BPDN combiné avec l'antenne régulière de 120 micros (figure 2.14-d et figure 2.14-e) reproduisent plus fidèlement les ODS même en haute fréquence où le critère de Shannon n'est plus respecté. La nature déterministe du dictionnaire s'affranchit partiellement du problème de repliement spectral. Sur la figure 2.14-e) à 3297Hz la reconstruction est plus performante car, comme mentionné précédemment, le pas de l'antenne est plus fin lorsque les micros sont situés directement au dessus de la plaque.

On verra dans la section 2.6 que l'utilisation d'une antenne aléatoire permet d'exploiter le concept de compressive sampling en sous-échantillonnant le champ acoustique de manière plus radicale par rapport au critère de Shannon.

2.5.4 Efficacité de la régularisation en hautes fréquences

Les bords de la plaque étudiée sont libres. Ils sont le lieux d'amplitudes importantes de vibrations. Cela entraîne des discontinuités du champ de vibration qui se traduisent par l'apparition de nombres d'ondes élevés dans le domaine de Fourier spatial. La régularisation de Tikhonov applique un filtre passe-bas qui coupe ces hautes fréquences spatiales ce qui a pour effet de lisser les bords reconstruits. C'est d'autant plus vrai pour les ODS en basses fréquences où les ondes évanescentes sont prépondérantes pour lesquelles la fréquence de coupure du filtre est plus basse.

La régularisation parcimonieuse est censée améliorer la reconstruction des discontinuités et des bords étant donné qu'elle n'a pas recours à un filtrage passe-bas dans le domaine des nombres d'ondes. Bien que ce soit vrai en moyennes et hautes fréquences comme le montrent les figures 2.14-e à 1483Hz et 3297Hz, ce n'est pas complètement le cas en basses fréquences pour des raisons qui ne sont pas encore parfaitement comprises.

2.5.5 Complexité des algorithmes

L'efficacité algorithmique des différentes méthodes est à prendre en compte. Pour certaines applications, par exemple l'imagerie en temps réel, l'algorithme le plus rapide sera préféré. L'approche temps réel a été étudiée dans la thèse de Paillasseur [Pai09] pour imager des sources de bruits fluctuantes lorsque le problème inverse est régularisé par une technique de type Tikhonov. Dans ce cas, la régularisation de Tikhonov offre les plus faibles temps de calcul étant donné la résolution analytique du problème. Cette conclusion n'est valide qu'en excluant la recherche exhaustive du paramètre de régularisation optimal. Cependant, une recherche similaire devrait être mise en œuvre avec la régularisation parcimonieuse. Les algorithmes de minimisation de la norme ℓ_1 de la solution sont beaucoup plus gourmands en termes de coût de calcul. Cependant, sur des ordinateurs standard, le temps de calcul reste raisonnable : dans nos expériences, les temps relevés pour la reconstruction d'une ODS sont typiquement de l'ordre de la seconde.

2.5.6 Robustesse du dictionnaire

Afin de valider la technique de reconstruction parcimonieuse dans un cas plus général que celui de la plaque rectangulaire à bords libres, on utilise le même protocole expérimental avec la plaque en forme de D présentée sur la figure 2.3. La plaque étant encadrée sur l'un de ces côtés et libre ailleurs, les conditions aux limites sont mixtes. Les résultats de reconstruction sont illustrés sur la figure 2.16. Les mêmes conclusions, au moins qualitatives, que pour la plaque rectangulaire peuvent être tirées des observations de la figure 2.14. Néanmoins, les coefficients de corrélation sont globalement plus faibles pour la plaque en D, mais ils demeurent acceptables. Les ODS sont en effet moins parcimonieuses dans le dictionnaire de Fourier restreint à ce type de plaque. Par conséquent plus de mesures sont nécessaires afin de les reconstruire précisément.

Les techniques de régularisations parcimonieuses appliquées à la NAH offrent un certain nombre d'avantages par rapport à la technique standard de régularisation. Nous montrons dans la section suivante que l'application des concepts du compressive sampling à la NAH permet en outre de réduire le nombre de microphones nécessaire à la reconstruction.

2.6 Compressive sampling appliqué à la NAH

Dans le cadre de la régularisation parcimonieuse, l'échantillonnage de l'hologramme sur une grille fine n'est pas nécessaire. La théorie du compressive sampling (CS) présenté dans la section 1.3 donne des indications théoriques sur la manière d'inclure les *a priori* de parcimonie directement à l'acquisition des mesures. Ainsi, lorsque la distribution des vitesses normales $\dot{\mathbf{w}}$ est suffisamment parcimonieuse dans le dictionnaire de décomposition \mathbf{D} , il est possible de réduire le nombre de mesures, c'est-à-dire le nombre de micros sur l'hologramme, en dessous du taux d'échantillonnage spatial de Nyquist. La théorie du CS affirme que plus l'ensemble des mesures est incohérent avec la matrice de décomposition, plus les chances de succès d'estimation des composantes parcimonieuses sont grandes. La condition d'incohérence signifie que chacune des mesures doit contenir de l'information sur tous les coefficients significatifs de la décomposition, c'est-à-dire les atomes qui composent les déformés opérationnelles.

Afin de satisfaire la condition d'incohérence, nous donnons un caractère aléatoire à la matrice de propagation \mathbf{G} en positionnant les micros aléatoirement sur la plan hologramme. Dans le cas de signaux parcimonieux dans la base de Fourier spatiale, il été montré qu'une petite quantité de points de mesures dans le domaine spatial suffisent à reconstruire exactement le signal [Rau07]. Ce résultat est vérifiable dans notre cas où le signal source est parcimonieux dans la base de Fourier spatiale restreinte au domaine de la source.

L'intérêt d'utiliser une distribution aléatoire de micros peut être compris intuitivement. La source peut en effet être recouverte sur toute sa surface en assurant des zones denses de capteurs tout en autorisant des zones vides afin d'en minimiser le nombre. Il est intéressant

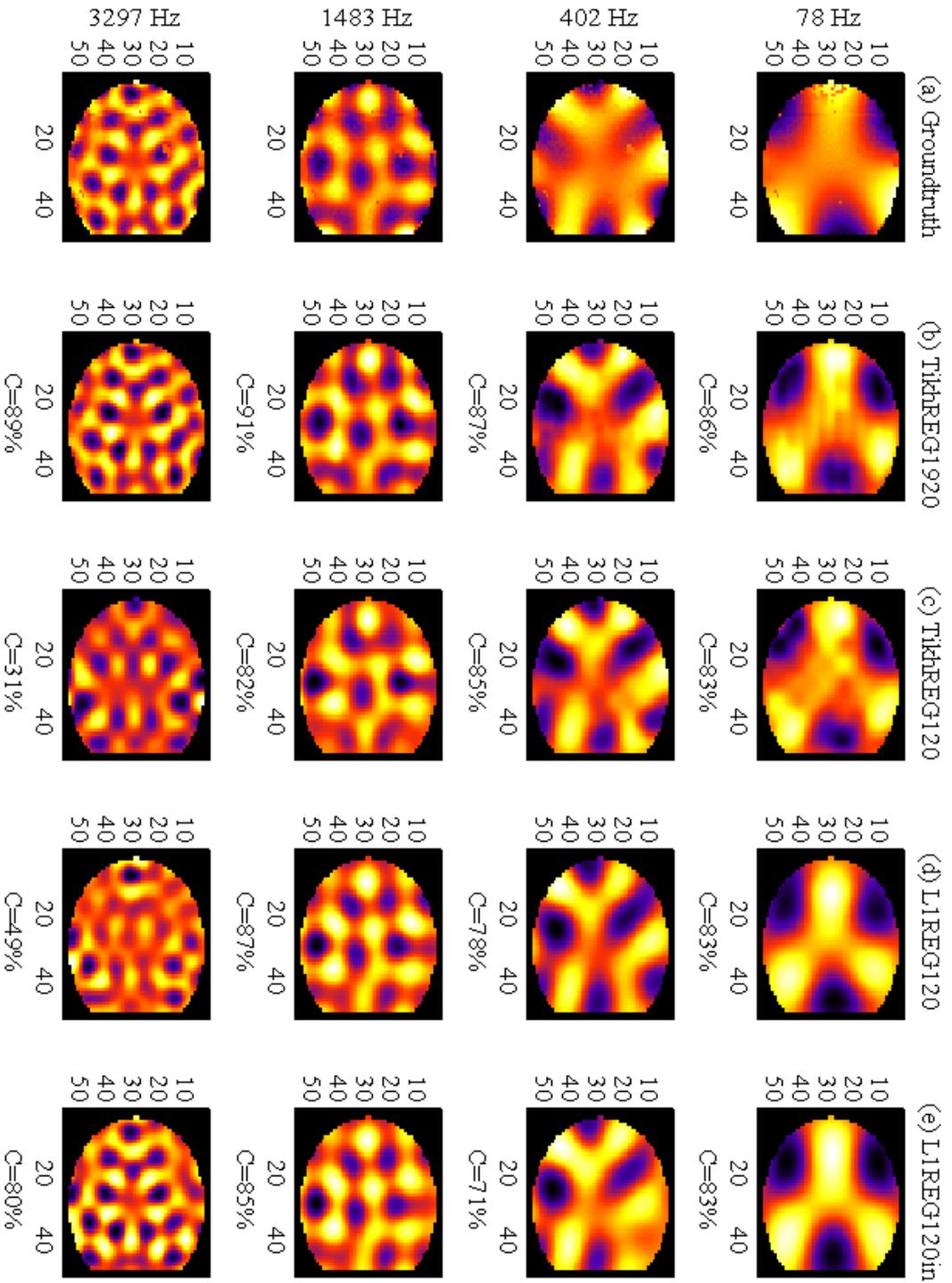


FIGURE 2.16 – Reconstructions de 4 déformées opérationnelles (155Hz, 467Hz, 1234Hz, et 2661Hz) de la plaque en forme de D avec des conditions aux limites mixtes. Les résultats obtenus par régularisation de Tikhonov (b et c) et par approximations parcimonieuses (d et e) sont comparés aux mesures directes par vibrométrie laser (a).

de remarquer que ce point de vue contredit un papier récent [BLL10] qui avance l'idée qu'un déploiement aléatoire de micros ne présente aucun bénéfice pour la NAH. Le bénéfice n'est en effet apparent qu'en employant des techniques de régularisation parcimonieuses au lieu de techniques de régularisation traditionnelles.

D'un point de vue théorique, on rappelle que la propriété d'isométrie restreinte (RIP) de la matrice $\mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{D}$ garantit que la régularisation parcimonieuse fournit une estimation précise et stable de $\hat{\mathbf{w}}$ à partir de mesures incomplètes et bruitées $\mathbf{p} \approx \mathbf{H}\hat{\mathbf{w}}$ si $\hat{\mathbf{w}}$ est suffisamment parcimonieux. La condition RIP signifie que la matrice \mathbf{A} , lorsqu'elle est restreinte à des vecteurs parcimonieux, doit approximativement préserver l'énergie de la source. Or, la matrice \mathbf{G} qui modélise l'opérateur de propagation entre la source est l'hologramme amplifie exponentiellement les composantes évanescences de la source. Il semble donc exclu que \mathbf{A} puisse vérifier la RIP. Le succès de la reconstruction $\hat{\mathbf{w}}$ par la technique d'acquisition compressée ne peut donc pas s'appuyer sur des garanties théoriques. Et cependant en pratique, les résultats de reconstructions obtenus avec un nombre réduit de micros répartis aléatoirement sur l'hologramme restent valides.

2.6.1 Construction d'une antenne aléatoire

Une antenne aléatoire a été construite afin d'éviter les problèmes de répétabilité que posent les mesures multiples (à plusieurs positions de l'antenne). La mesure unique permet de gagner en temps d'acquisition et d'éviter de devoir recalibrer en phase les différents lots de mesures.

Des études numériques menées par Gilles Chardon et illustrées dans l'article [CPO⁺12] ont permis l'étude d'un certain nombre de configurations d'antennes aléatoires. Les meilleures performances sont obtenues avec une distribution aléatoire uniforme des micros. La construction de ce genre d'antenne est néanmoins très fastidieuse. Il est montré qu'une antenne pseudo-aléatoire permet un bon compromis entre performances et facilité de construction. Cette antenne est constituée de barres obliques orientées de manières quelconques. Sur chacune des barres, la distribution des microphones suit une loi aléatoire uniforme. L'antenne construite pour la validation expérimentale est illustrée sur la figure 2.17.

Pour évaluer l'impact de l'antenne aléatoire par rapport à l'antenne régulière sur les performances de reconstructions, on compare les résultats d'ODS de la plaque rectangulaire à bords libres à plusieurs fréquences. Les reconstructions sont obtenues par l'algorithme BPDN avec seulement 42 microphones. La figure 2.18 illustre ces résultats pour quatre fréquences, 78 Hz, 402 Hz, 1483 Hz, et 3297 Hz avec les configurations suivantes :

- Figure 2.18-a : mesures directes obtenues par vibromètre laser ;
- Figure 2.18-b : antenne régulière construite avec 42 mesures parmi l'antenne de 1920 micros placées sur une grille rectangulaire au dessus de la plaque ;
- Figure 2.18-c : antenne aléatoire obtenue en ne sélectionnant que 42 mesures sélectionnées sur l'antenne oblique 2.17 au dessus de la plaque.

La régularisation parcimonieuse utilisée avec une antenne aléatoire de mesures (cf. figure 2.18-c) montre de meilleures performances qu'avec une antenne régulière (cf. fi-

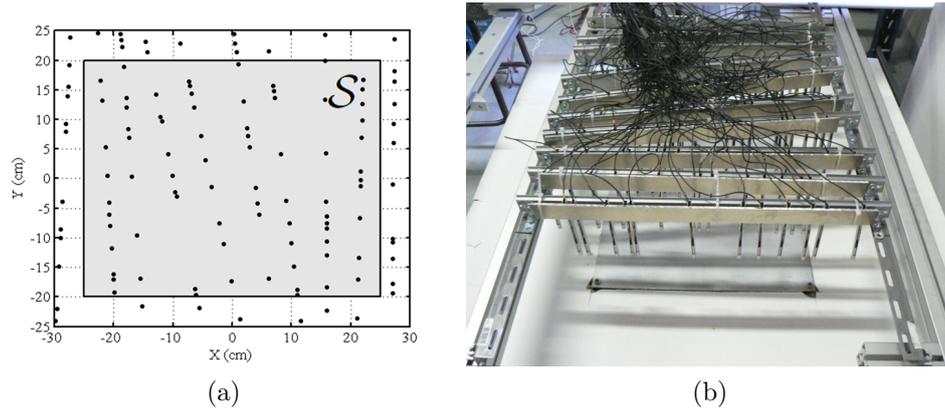


FIGURE 2.17 – Illustration de l'antenne pseudo-aléatoire utilisée expérimentalement. (a) Disposition des micros par rapport à la plaque. (b) Photo de l'antenne opérationnelle.

gure 2.18-b). En effet, avec une distribution aléatoire des micros, l'espace des mesures devient plus incohérent avec le domaine de parcimonie. Par conséquent chaque mesure contient plus d'information globale sur la source à reconstruire.

Les résultats pour la plaque en forme de D illustrés sur la figure 2.19 sont obtenus avec 120 microphones au lieu de 42. Les 120 mesures sont sélectionnées aléatoirement parmi l'antenne régulière de 1920 micros illustrée sur la figure 2.3. On obtient encore de bonnes performances avec 120 micros sur tout le spectre mais en réduisant leur nombre, la reconstruction échoue à 2661 Hz. Les ODS sont en effet moins parcimonieuses dans le dictionnaire de Fourier restreint à ce type de plaque. Par conséquent plus de mesures sont nécessaires afin de les reconstruire précisément. Des études futures devraient permettre d'optimiser le dictionnaire afin de le rendre plus générique.

2.6.2 Influence de l'échantillonnage spatial

L'avantage de l'échantillonnage aléatoire combiné avec une technique de régularisation parcimonieuse est la possibilité de sous-échantillonner significativement le champ acoustique mesuré. Dans le cadre de la NAH, on évalue les performances de reconstructions des ODS de la plaque rectangulaire en réduisant le nombre de mesures jusqu'à ce que la reconstruction échoue. La figure 2.20 montre l'évolution du coefficient de corrélation en basse, moyenne, et haute fréquences en fonction du nombre de microphones. On compare les deux méthodes de reconstructions : régularisation parcimonieuse avec l'antenne aléatoire et la régularisation de Tikhonov avec l'antenne régulière. Considérant l'antenne aléatoire (cf. figure. 2.20-b)), pour chaque nombre de microphones, les résultats de corrélation sont moyennés sur 100 tirages aléatoires parmi l'ensemble complet de l'antenne oblique. Les barres d'erreur indiquent les minimas et maximas de corrélation dépendant du tirage. On observe que les performances de reconstruction restent bonnes et constantes jusqu'à une quarantaine de microphones pour toutes les fréquences. Avec un nombre plus faible de micros, la corrélation chute plus ou moins rapidement en fonction de l'ODS étu-

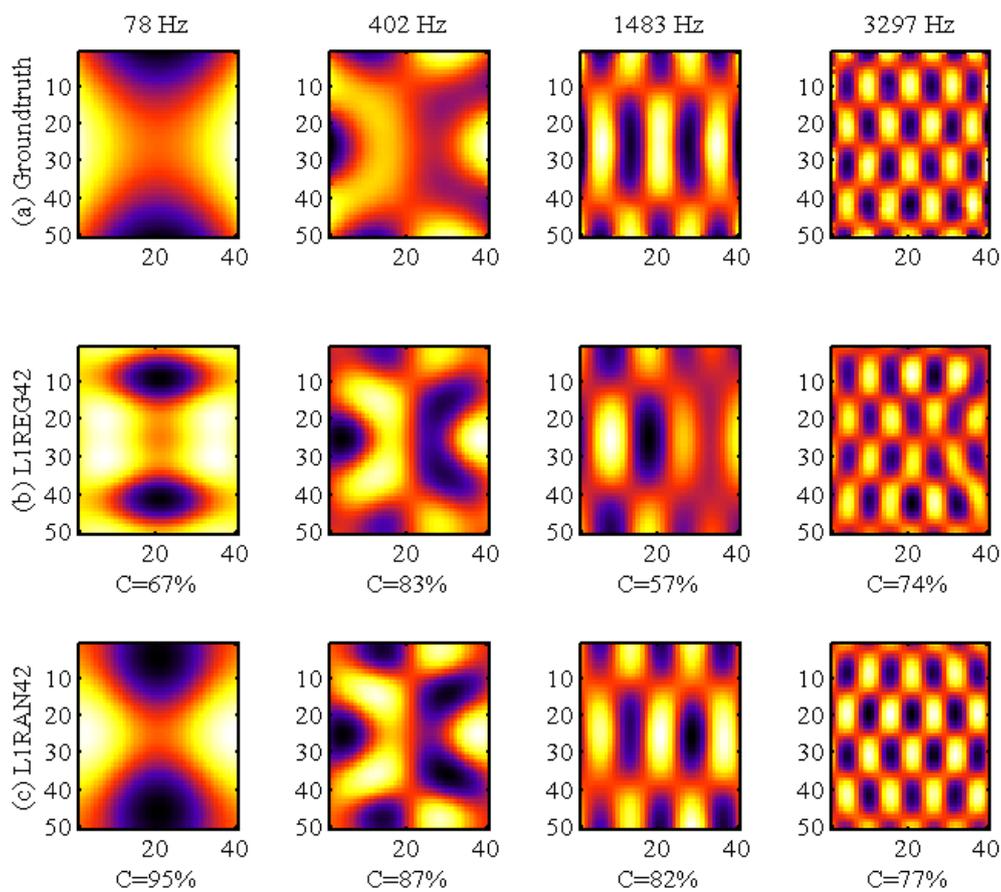


FIGURE 2.18 – Comparaison des reconstructions CS de la plaque rectangulaire par algorithme BPDN avec deux types d’antennes : (b) antenne régulière de 42 micros, (c) antenne pseudo-aléatoire oblique de 42 micros. (a) Mesures de références.

diée. On remarque que les performances sont dépendantes du tirage et que même avec un nombre très faible de micros de bonnes performances sont possibles.

Sur la figure 2.20-a), pour chaque nombre de micros utilisés une configuration régulière d’antenne est sélectionnée parmi l’ensemble complet de 1920 mesures. La régularisation de Tikhonov est soumise aux contraintes d’échantillonnage dictées par le théorème de Shannon. A 3297Hz par exemple, l’hologramme reconstruit avec 120 mesures est déjà contaminé par du repliement spatial. La limite de Shannon diminue évidemment avec la fréquence.

La figure 2.21 résume les performances des différentes méthodes de reconstructions. On utilise 42 micros pour reconstruire les ODS sur une plage allant de 50Hz à 3300Hz. Les méthodes évaluées sont :

- régularisation de Tikhonov avec une antenne régulière
- régularisation parcimonieuse avec une antenne régulière restreinte à la surface de la

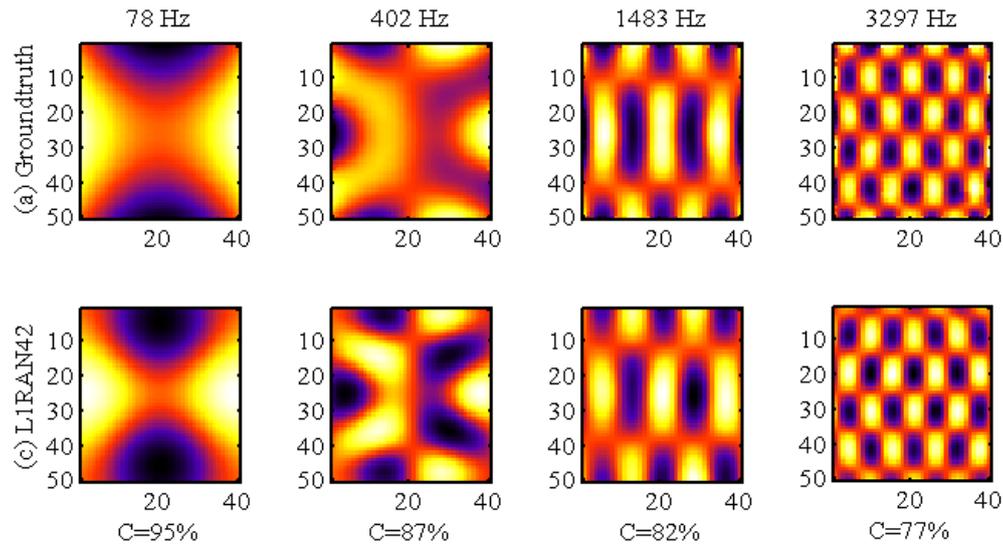


FIGURE 2.19 – Comparaison des reconstructions CS de plaque en D par algorithme BPDN avec deux types d’antennes : (b) antenne régulière de 120 micros, (c) antenne aléatoire de 120 micros sélectionnés parmi les 1920 de l’antenne régulière. (a) Mesures de références.

plaque

- régularisation parcimonieuse avec une antenne aléatoire de micros restreints à la surface de la plaque

L’antenne aléatoire est construite en sélectionnant 42 micros parmi l’antenne pseudo-aléatoire oblique 2.17 en restreignant la position de ces micros à la surface de la plaque. Les performances de la méthode de Tikhonov chutent à partir de 500Hz. La limite de Shannon est atteinte à cette fréquence avec seulement 42 microphones. Les méthodes parcimonieuses permettent un sous-échantillonnage du champ acoustique. On remarque d’importantes chutes de corrélation avec l’antenne régulière. L’échantillonnage n’est en effet pas optimal pour certains déformés modales, particulièrement en hautes fréquences. La méthode la plus robuste est indiscutablement la méthode de régularisation parcimonieuse avec une antenne aléatoire. Elle montre de très bonnes performances sur tout le spectre. On peut conclure de cette étude que, malgré l’absence de garanties théoriques sur le succès du CS appliqué à la NAH, en pratique il reste plus performant que les autres méthodes de reconstructions, du moins pour des plaques fines homogènes et isotropes.

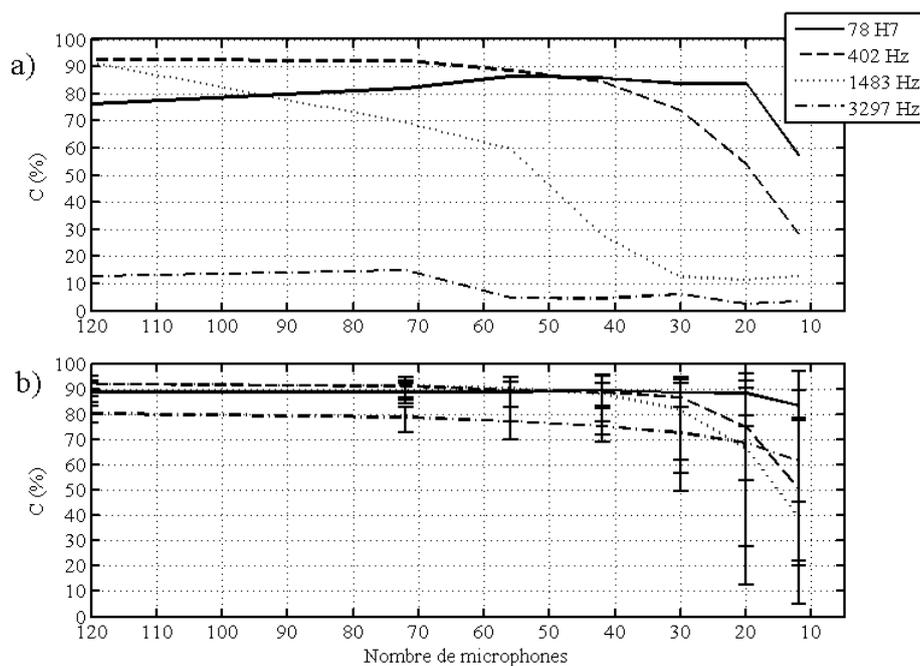


FIGURE 2.20 – Performances de reconstruction des ODS à plusieurs fréquences en fonction du nombre de microphones. (a) Antenne régulière et régularisation de Tikhonov. (b) Antenne aléatoire et régularisation parcimonieuse (compressive sampling)

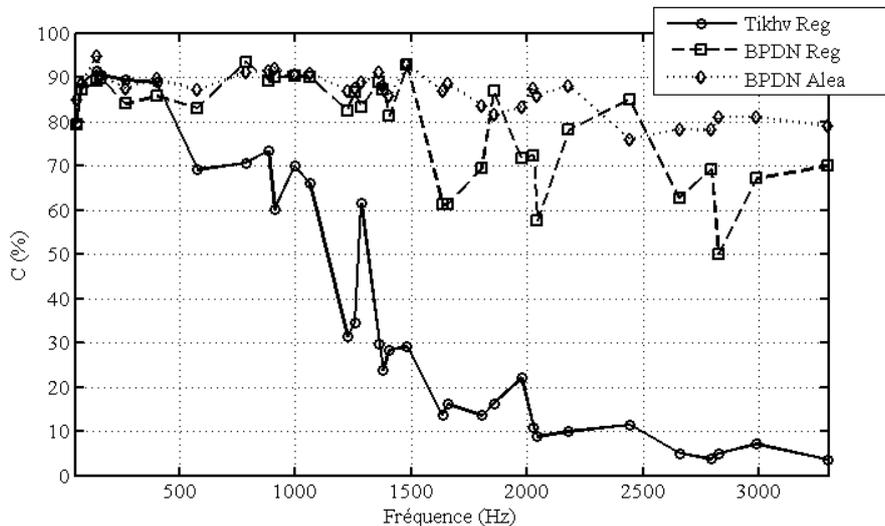


FIGURE 2.21 – Performances de reconstructions d'ODS de 58Hz à 3300Hz avec plusieurs méthodes. Utilisation de 42 micros pour chaque méthode : (Tikh Reg) régularisation de Tikhonov et antenne régulière, (BPDN Reg) régularisation parcimonieuse et antenne régulière, (BPDN Alea) régularisation parcimonieuse avec antenne aléatoire.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons décrit comment un *a priori* de parcimonie sur la source à reconstruire permet de remplacer la régularisation standard de Tikhonov pour la résolution du problème inverse en NAH. En effet, les distributions des vitesses normales de vibration d'une plaque peuvent être approchées par une représentation parcimonieuse dans un dictionnaire bien choisi de fonctions. Dans le cas des plaques fines homogènes, isotropes, et de formes convexes, ce dictionnaire est une base de Fourier spatial construite sur une surface plus grande que la source mais dont les atomes sont spatialement restreints à cette source.

Nous avons mis en évidence les faiblesses de l'algorithme OMP dans le cas de la NAH. L'algorithme n'est en effet pas robuste aux erreurs d'approximations parcimonieuses du dictionnaire. L'algorithme BPDN est quant à lui mieux adapté pour la résolution du problème NAH. La principale difficulté pratique est le réglage du paramètre de régularisation de l'algorithme. Des études focalisées sur ce point pourraient permettre de déterminer une méthode objective d'estimation du paramètre optimal, même si nos études semblent montrer qu'il n'est pas nécessaire d'effectuer un réglage très fin de ce paramètre.

Des résultats expérimentaux ont permis de valider la méthode d'approximation parcimonieuse des sources appliquée au problème de NAH. On a montré que la méthode agit comme une technique de régularisation plus performante dans notre cas que la régularisation standard de Tikhonov. Elle permet par exemple de conserver les informations en hautes fréquences qui sont habituellement filtrées avec Tikhonov. Par ailleurs, la méthode nous permet d'exploiter les concepts de l'acquisition compressée afin de réduire considérablement le nombre de microphones nécessaires à une reconstruction précise. Il suffit en pratique de sélectionner aléatoirement un petit nombre de microphones sur le plan hologramme. La sélection aléatoire peut être structurée pour rendre la construction de l'antenne moins fastidieuse. Nous avons présentés les résultats obtenus avec une antenne pseudo-aléatoire de structure oblique. Dans ce cas, le CS offre de bonnes performances avec un nombre très réduit d'échantillons par rapport au critère de Shannon/Nyquist.

Des expériences avec une plaque en forme de D ont permis de valider le modèle de décomposition. Cependant, pour ce type de plaque, les approximations sont moins parcimonieuses et donc plus de mesures sont nécessaires pour reconstruire précisément la source. Des études futures devraient permettre de rendre le dictionnaire plus générique en y intégrant par exemple des fonctions de Fourier-Bessel qui décrivent les modes d'une plaque circulaire.

Bien que la méthode ait été validée pour des plaques de formes convexes, homogènes et isotropes, elle peut être étendue à une classe plus large de structures planes. Par exemple, des plaques à géométrie très complexes peuvent être divisées en plusieurs régions convexes. Une approche similaire à celle présentée dans ce chapitre est alors envisageable en incorporant dans le problème d'inversion des contraintes de continuités entre chaque région. La validation expérimentale de ces extensions est laissée à des recherches futures.

Finalement, ce chapitre illustre bien le fait que, sous certaines hypothèses sur les objets

étudiés, les solutions de problèmes inverses peuvent dépendre de peu de degrés de liberté : dans ce cas un faible nombre de mesures devrait être suffisant pour la résolution du problème inverse, si chacune des mesures porte de l'information sur l'ensemble du système (principe d'incohérence). En particulier, dans le cas de la NAH pour des plaques homogènes et isotropes, il n'est pas nécessaire d'échantillonner finement le plan hologramme. Ce genre de principe permet d'avoir plus de liberté dans la géométrie des antennes (les micros n'ont d'ailleurs plus besoin d'être dans le même plan).

Chapitre 3

Localisation par représentation parcimonieuse de sources

Les techniques de localisation de sources sont sollicitées dans de nombreuses applications. On peut citer la prise de son directive ou l'étude des sources de bruit motivée par l'industrie automobile, aéronautique, ou encore environnementale.

Une source de son d'étendue réduite peut être considérée comme une source ponctuelle lorsqu'elle est placée suffisamment loin de l'antenne. Les techniques d'imagerie acoustique permettent alors de localiser la source et d'en estimer l'énergie de rayonnement. On distingue deux cas selon la distance source-antenne : si la distance D entre le réseau de microphones et la zone d'observation des sources vérifie la condition de Fraunhofer [Goo72] $D \gg \pi L^2/4\lambda$, où L est l'ouverture de l'antenne, les sources sont en champ lointain de l'antenne. On considère alors un modèle de propagation en ondes planes des sources. Dans le cas contraire, on dira que les sources sont en champ proche, par opposition au champ lointain, c'est-à-dire qu'elles se situent dans la zone de focalisation de l'antenne. La condition de champ proche porte sur la courbure du front d'onde qui peut être plus ou moins complexe. Dans ce chapitre nous ne traitons que le cas de sources simples qui ont un comportement omnidirectionnel, c'est-à-dire que le front d'onde rayonné est sphérique.

Une technique populaire de localisation de source utilisée dans un grand nombre d'applications industrielles est la formation de voies, ou "Beamforming" (BF) [JD93, Dou02]. Cette méthode souffre d'un faible pouvoir de résolution en basses fréquences, et est limitée par des effets de repliement spectral en hautes fréquences. Des méthodes dites haute-résolution ont vu le jour, pour s'affranchir des limitations du BF. Parmi elles, on trouve les méthodes Capon [Cap69] et MUSIC [Sch86]. Ces méthodes sont cependant limitées par le rapport signal sur bruit (RSB), et la cohérence des sources.

Très récemment, des méthodes de localisation basées sur un *a priori* de parcimonie de la distribution spatiale des sources à estimer ont émergé. Elles exploitent la minimisation de la norme ℓ_1 du signal source comme le montrent par exemple les travaux de Malioutov [McW05]. Nous proposons dans ce chapitre une alternative originale à ces méthodes basée sur l'algorithme OMP.

Nous présentons premièrement un état de l'art des méthodes de localisation de sources,

dans le cadre simple du champ lointain. Nous comparons les résultats de localisations des méthodes standard avec ceux obtenus par OMP à l'aide de simulations. Nous montrons ensuite des résultats expérimentaux où les sources à localiser sont dans le champ proche de l'antenne. Les cas du traitement harmonique et du traitement large bande des signaux sont traités.

3.1 État de l'art des techniques en champ lointain

Cette section à caractère bibliographique expose les techniques couramment utilisées de localisation de sources. Nous nous plaçons dans un cas simple où l'antenne est linéaire et les sources sont localisées en champ lointain sur une droite parallèle à l'antenne.

3.1.1 Modélisation du problème

Dans le problème de localisation de sources en champ lointain, on utilise une antenne linéaire d'ouverture L composée d'un nombre M de microphones. On note d le pas régulier du réseau. Une ou plusieurs sources s , $s = 1 \dots S$, où S dénote le nombre de sources, sont à localiser. Pour ce faire, on construit à une distance D de l'antenne une grille linéaire de positions candidates x_n , $n = 1 \dots N$ d'où les sources pourraient émettre. Dans le cas particulier du champ lointain, chaque point x_n représente une position angulaire de source potentielle. La configuration des dispositifs émetteurs et récepteurs est illustrée sur la figure 3.1 où une seule source s émet à partir du point x_{N-1} . Chaque point de la grille de reconstruction est relié à tous les microphones par un modèle de propagation. Dans cette étude on ne s'intéresse qu'au modèle harmonique des signaux. On sélectionne une fréquence particulière f sur le spectre des signaux de pressions mesurés par les microphones. En considérant M microphones, le vecteur de mesures $\mathbf{y}(f)$ de dimension M est, pour une source s vue dans une direction θ :

$$\mathbf{y}(f) = s(f)\mathbf{a}(f, \theta) \quad (3.1)$$

Le vecteur directionnel $\mathbf{a}(f, \theta)$ traduit la propagation en onde plane du champ rayonné par la source s . Il a pour expression :

$$\mathbf{a}(f, \theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ e^{-j2\pi f(m-1)\tau_\theta} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi f(M-1)\tau_\theta} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

τ_θ est la différence de temps d'arrivée entre deux microphones adjacents. Elle a pour expression $\tau_\theta = \delta/c$, où c indique la célérité des ondes acoustiques dans l'air. On prendra $c = 340m.s^{-1}$ dans toutes les simulations numériques qui suivent. δ indique la différence de marche entre deux microphones et s'écrit $\delta = d \sin \theta$.

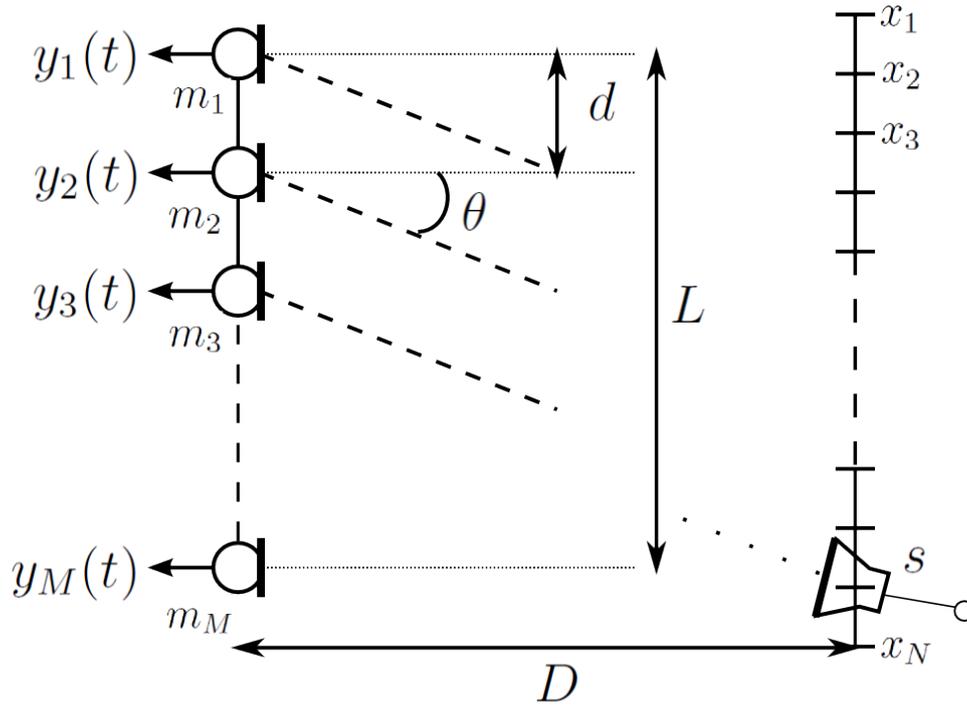


FIGURE 3.1 – Configuration d'un système de localisation de sources en champ lointain. Les x_n correspondent à des positions angulaires

On omet la dépendance en fréquence f dans la suite du chapitre pour plus de simplicité de lecture. En prenant en compte la totalité des sources potentielles sur chaque point x_n de la grille de reconstruction, le problème de localisation de sources est :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (3.3)$$

\mathbf{b} est un terme de bruit incluant une erreur sur le modèle de propagation, la possibilité de sources parasites, et le bruit de mesure. La matrice \mathbf{A} constitue le dictionnaire en ondes planes de décomposition du vecteur source \mathbf{x} . Les colonnes de \mathbf{A} sont les vecteurs directionnels $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n \dots \mathbf{a}_N]$. Le vecteur source \mathbf{x} contient toutes les positions potentielles de sources de la grille de reconstruction. Il a pour structure $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n \dots x_N]^T$.

Le problème de localisation de source revient à inverser le système d'équations 3.3 afin d'estimer le vecteur \mathbf{x} à partir des mesures contenues dans le vecteur \mathbf{y} . Le nombre de capteurs est généralement très inférieur au nombre de points de la grille contenant les sources potentielles ($\dim(\mathbf{y}) \ll \dim(\mathbf{x})$). \mathbf{A} matrice rectangulaire n'est donc pas inversible. De plus, le nombre de conditionnement $K(A)$ (cf. équation 1.7) est la plupart du temps élevé. La corruption des mesures par un bruit même faible entraîne l'instabilité de l'inversion du problème 3.3. Le modèle étant posé, des méthodes sont mises en œuvre pour approximer l'inversion de \mathbf{A} et ainsi permettre l'estimation de \mathbf{x} partant des mesures \mathbf{y} .

3.1.2 Méthode de formation de voies ou "beamforming"

L'algorithme de formations de voies, sous sa forme la plus naturelle, consiste à sommer les signaux y_m après les avoir décalés dans le temps. Sa transposition dans le domaine spectrale est le déphasage des signaux tel qu'il apparaît dans l'expression 3.2. L'estimation $\hat{\mathbf{x}}$ de \mathbf{x} est ainsi obtenue par l'opération suivante, équivalente à un filtrage spatial :

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^H \mathbf{y} \quad (3.4)$$

où H dénote le transposé conjugué de la matrice \mathbf{A} . On remarque que l'expression 3.4 est similaire à l'inverse généralisée régularisée par Tikhonov dans le cas où le paramètre de régularisation est très grand par rapport aux valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ (cf. équation 1.10). Cette méthode d'estimation est cependant sensible au rapport signal sur bruit (RSB). Une alternative plus robuste au RSB consiste à calculer la matrice de covariance $\mathbf{R} = E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^H\}$. Elle mesure la corrélation spatiale entre les capteurs. Cet ajout d'information permet de réduire les artefacts de reconstruction dus au bruit. E est l'espérance mathématique qui traduit une moyenne sur une quantité infinie d'observations. En pratique, seule une quantité finie d'observations d'un signal est disponible. On estime alors \mathbf{R} avec un nombre suffisant d'observations. Soit B , le nombre de portions du signal. A chaque portion b on applique une transformée de Fourier discrète. La méthode Welch [Hay96] permet de réaliser cette opération efficacement. L'estimation de la matrice de covariance à la fréquence f est donnée par :

$$\hat{\mathbf{R}}(f) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \mathbf{y}_b(f) \mathbf{y}_b^H(f) \quad (3.5)$$

L'estimation du vecteur source $\hat{\mathbf{x}}$ devient :

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^H \hat{\mathbf{R}} \mathbf{A} \quad (3.6)$$

$\hat{\mathbf{x}}$ donne la répartition spatiale de la puissance acoustique sur le domaine de reconstruction. Cette forme de "beamforming" (BF) est une méthode de référence employée dans les problèmes de localisation de sources. Elle est en effet robuste au faible RSB. Elle souffre cependant de deux principales limitations : pauvre résolution en basses fréquences et problèmes de recouvrement spectral en hautes fréquences. Dominer ces limitations nécessite l'utilisation d'un très grand nombre de microphones. La résolution est en effet fonction de l'ouverture de l'antenne. Plus l'ouverture de l'antenne est grande, plus la résolution, c'est-à-dire la faculté à séparer deux sources proches, est importante. Le pouvoir de résolution d'une antenne en champ lointain est donné par :

$$\theta_{\min} = 2\theta_{3dB} = \frac{\lambda}{L} \quad (3.7)$$

où θ_{\min} est l'angle minimal qui doit séparer deux sources pour qu'elles soient précisément localisées. θ_{3dB} est l'ouverture angulaire, en radians, à -3dB du maximum du diagramme de directivité de l'antenne. Si deux sources sont espacées d'une distance angulaire θ , l'algorithme BF arrive à les séparer si l'ouverture d'antenne L vérifie $L > \frac{\lambda}{\theta}$.

Les performances de l'algorithme BF sont soumises aux contraintes du théorème d'échantillonnage de Shannon qui impose que le pas d du réseau de microphones soit $d \leq \lambda/2$. Si d est supérieur à la demi longueur d'onde, des effets de recouvrement spectral viennent perturber l'estimation de la source. Ces effets font apparaître des sources fantômes qui faussent l'estimation de la cartographie de la puissance acoustique des sources réelles. Les contraintes de résolution et d'échantillonnage nécessitent le déploiement de grandes antennes composées d'un grand nombre de microphones. Un exemple permet de s'en convaincre. Considérons une antenne de pas régulier $d = \lambda/2$. A une fréquence de 1kHz, la séparation de deux sources distantes de $\theta = 4^\circ$ impose $L_{3dB} = 4.87\text{m}$. Une antenne qui permet d'avoir simultanément une bonne résolution à 1kHz et un échantillonnage suffisant du champ acoustique à 5kHz doit donc être composée d'un nombre $M = 144$ de microphones. Une quantité aussi importante de microphones impose des contraintes budgétaires et d'encombrement.

Des méthodes alternatives ont été développées afin de s'affranchir de la pauvre résolution du BF et ainsi réduire le nombre de micros nécessaires à une estimation précise de la position des sources.

3.1.3 Méthode Capon

La méthode du maximum de vraisemblance, plus connue sous le nom de méthode Capon du nom de son auteur [Cap69] est un exemple de méthode dite haute-résolution. Elle est fondée sur le calcul de la matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}$ et propose une forme de régularisation, différente de celle de Tikhonov, adaptée au problème de localisation de sources en champ lointain. L'objectif est de chercher un vecteur pondération $\hat{\mathbf{a}}$ qui garantit un gain constant dans la direction visée. $\hat{\mathbf{a}}$ est estimé en minimisant le gain en sortie du réseau de microphones tout en maintenant un gain unité dans la direction souhaitée θ_0 , soit

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{a}}} \tilde{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{a}} \quad \text{tel que} \quad \tilde{\mathbf{a}}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1 \quad (3.8)$$

La résolution donne :

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)} \quad (3.9)$$

L'estimation du vecteur source \mathbf{x} par méthode Capon est donné par :

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}^H \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{A}} \quad (3.10)$$

où la matrice $\hat{\mathbf{A}}$ est composée des vecteurs directeurs $\hat{\mathbf{a}}$. En remplaçant 3.9 dans 3.10, on obtient finalement :

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{\mathbf{A}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A}} \quad (3.11)$$

L'inversion de $\hat{\mathbf{R}}$ nécessite un bon conditionnement de la matrice de covariance. Le nombre d'observations du signal \mathbf{y} doit donc être élevé pour que $\hat{\mathbf{R}}$ soit de rang plein. La méthode est également connue pour présenter des limitations lorsque plusieurs sources corrélées sont présentes dans l'espace de reconstruction et que le RSB est faible.

3.1.4 Méthode sous-espace MUSIC (MUltiple SIgnal Classification)

MUSIC est une méthode dite sous-espace basée sur la séparation d'un espace bruit et d'un espace signal engendrés par la matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}$. Pour construire l'espace signal, plusieurs réalisations des mesures sont nécessaires. Cette méthode a été introduite par R.O. Schmidt [Sch86]. La décomposition aux valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$ donne :

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H \quad (3.12)$$

Le sous-espace signal est engendré par les vecteurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$ correspondant aux plus grandes valeurs propres. Ces vecteurs propres sont les colonnes de la matrice \mathbf{U}_s . On appelle $\mathbf{\Lambda}_s$ la matrice diagonale composée des valeurs propres correspondantes. De la même manière, on appelle respectivement \mathbf{U}_n et $\mathbf{\Lambda}_n$ les matrices des vecteurs propres et des valeurs propres correspondantes qui engendrent l'espace bruit. La matrice de covariance peut se ré-écrire :

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}_s\mathbf{\Lambda}_s\mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n\mathbf{\Lambda}_n\mathbf{U}_n^H \quad (3.13)$$

Or,

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (3.14)$$

\mathbf{S} est la matrice de covariance des signaux sources inconnus. σ^2 est la variance du bruit supposé blanc. L'idée fondatrice de MUSIC est que les vecteurs propres du sous-espace bruit, les colonnes de \mathbf{U}_n , sont orthogonaux aux vecteurs signaux, les colonnes de \mathbf{U}_s . D'après les relations 3.13 et 3.14, ils sont donc également orthogonaux aux vecteurs $\mathbf{a}(\theta)$, colonnes de \mathbf{A} . On a donc la relation :

$$\mathbf{a}(\theta)^H\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H\mathbf{a}(\theta) = 0 \quad (3.15)$$

Les solutions θ de l'équation 3.15 correspondent aux angles d'arrivée des signaux sources. L'estimation du vecteur source \mathbf{x} est :

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{A}^H\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H\mathbf{A}} \quad (3.16)$$

Les maxima de $\hat{\mathbf{x}}$ correspondent à la position des sources.

Remarquons que la dimension de $\mathbf{\Lambda}_s$, matrice diagonale, est dictée par le nombre de valeurs propres situées au dessus d'un seuil de séparation. Il correspond au nombre de sources qui peuvent être estimées par la méthode. Ce nombre est également le rang de la matrice \mathbf{S} de dimension $S \times S$ où S est le nombre de sources émettrices. Si des sources sont corrélées, alors le rang K de \mathbf{S} vaut $K < S$. Seules K sources peuvent être localisées. Si toutes les sources sont corrélées, une seule valeur propre représente le signal. Par conséquent, MUSIC ne peut estimer qu'une seule source. De plus, si le RSB est faible, certaines valeurs propres correspondant à des sources peuvent être inférieures au niveau de bruit. Les sources associées ne peuvent pas être localisées. La méthode est donc limitée dans les cas où le RSB est faible et les sources corrélées.

Dans la famille des méthodes sous-espaces on peut aussi citer la méthode ESPRIT qui présente des performances similaires à MUSIC. Elle a été introduite par R.Roy [RK89]. Cette méthode de détection des angles d'arrivée ne s'applique qu'à des réseaux de microphones qui sont invariants par translation. Ce sont essentiellement des réseaux linéaires de pas régulier. ESPRIT est cependant peu employée en acoustique.

3.1.5 Algorithme CLEAN

L'algorithme CLEAN a été introduit en astronomie par J.A. Högbom [Hög74] afin de produire une image du ciel de grande qualité en réduisant les lobes secondaires dus aux artefacts de la méthode d'imagerie BF. C'est une méthode de traitement *a posteriori*. Elle nécessite l'estimation préliminaire de la source à observer par une méthode connue d'imagerie. L'objectif est ensuite de supprimer les artefacts des lobes secondaires afin de rendre plus claire l'image de la source. La méthode a par exemple été appliquée par P. Sijtsma [Sij07] pour optimiser l'estimation par BF de la localisation de sources de bruit engendrées par le flux d'air turbulent sur les ailes d'un avion. Récemment, Fleury et Bulté [FB11] ont adapté CLEAN à la localisation de sources mobiles. CLEAN est un processus itératif qui s'articule comme suit :

1. Obtention d'une première estimation de la source $\mathbf{x}^{(0)}$ par BF(cf. équation 3.6).
2. Sélection de la source $s^{(i)}$ correspondant au maximum d'amplitude : $s = \arg \max_n x_n^{(i)}$.
3. Extraction de $\mathbf{x}^{(i)}$ du diagramme de directivité $\mathbf{D}^{(i)}$ dû à la source $s^{(i)}$: $\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{D}^{(i)}$.
4. Remplacement de ce diagramme par un diagramme "clean" $\tilde{\mathbf{D}}^{(i)}$ ne présentant aucun lobe secondaire : $\tilde{\mathbf{D}}^{(i)} = x_{s^{(i)}}^{(i)} \Phi(n - s^{(i)})$, tel que $\Phi(0) = 1$. Par exemple Φ peut être pris comme une fonction gaussienne ou simplement la fonction dirac $\delta(n - s^{(i)})$.
5. Ré-itération S fois de l'algorithme où S est le nombre de sources.

Notons que l'étape 1 de CLEAN peut être remplacée par une méthode de localisation haute résolution, Capon (cf. équation 3.11), ou MUSIC (cf. équation 3.16). Le diagramme de directivité $\mathbf{D}^{(i)}$ doit être modifié en fonction. Il est intéressant de remarquer la similitude de CLEAN avec l'algorithme MP bien que MP agisse directement sur le signal mesuré et que CLEAN agisse sur l'estimation du signal source. Dans une certaine mesure, CLEAN traite le problème de localisations de sources comme un problème parcimonieux en faisant l'hypothèse que le nombre de sources est faible par rapport à la dimension de \mathbf{x} . La soustraction itérative des diagrammes de directivité dus aux sources identifiées ré-introduit toutefois des artefacts sur les autres composantes du vecteur source. Le "nettoyage" de \mathbf{x} est ainsi perturbé.

3.1.6 Algorithmes basés sur la minimisation de la norme ℓ_1 du vecteur source

L'inversion du problème 3.3 peut être traitée en exploitant une connaissance *a priori* sur le signal source : sa parcimonie dans l'espace de reconstruction. En effet, on considère que le nombre de sources S est très inférieur au nombre de points sources potentielles de la grille de reconstruction N . Le vecteur source \mathbf{x} ne contient que peu d'éléments non nuls correspondant aux sources. L'hypothèse que la dimension de \mathbf{x} est très supérieure à la dimension de son support, c'est-à-dire le nombre réel de sources, peut être exploitée en minimisant la norme ℓ_1 de \mathbf{x} . Des méthodes de localisation basées sur la minimisation de la norme ℓ_1 de \mathbf{x} se sont développées récemment.

Les travaux précurseurs de Malioutov [McW05] ont montré que la méthode ℓ_1 -SVD permet de localiser des sources avec une résolution spatiale élevée et dépasse en termes de performances MUSIC et CAPON lorsque le RSB est faible et les sources corrélées. Le principe de ℓ_1 -SVD est de collecter T échantillons temporels de signaux mesurés. On obtient une matrice signal \mathbf{Y} de dimensions $M \times T$. Afin de réduire la dimension du problème, une SVD est appliquée sur \mathbf{Y} pour obtenir une matrice de dimension $M \times K$, où les K plus grandes valeurs singulières correspondent aux sources. Le problème à résoudre est $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}$ où \mathbf{A} est de dimensions $M \times N$ et \mathbf{X} de dimensions $N \times K$ et \mathbf{B} , la matrice de bruit. L'algorithme LASSO, présenté dans la section 1.2.2.1, est utilisé pour résoudre le problème. Dans cette étude, les éléments de la matrice \mathbf{A} ne prennent pas en compte la dépendance fréquentielle de la localisation. Ils correspondent à des ondes planes dans le cas particulier où le pas régulier de l'antenne vaut $d = \lambda/2$. Les éléments de \mathbf{A} sont dans ce cas $a_m(\theta) = e^{-j\pi(m-1)\sin\theta}$. Dans le cas où les micros de l'antenne sont répartis aléatoirement et en champ proche, l'algorithme n'est plus applicable. Cette approche permet cependant de prendre en compte toute la largeur de bande du signal dans le processus de localisation.

Les méthodes de minimisation ℓ_1 ont suscité de l'intérêt dans le domaine de la localisation de sources. De nombreux travaux récents ont tenté d'exploiter la parcimonie spatiale des sources en traitant les signaux de manière harmonique. Suzuki [Suz11] et Zavala *et Al* [ZDRJ⁺10] remplacent par exemple la régularisation de Tikhonov dans le problème appelé "Generalized inverse beamforming" [Suz08] par une régularisation parcimonieuse. La régularisation de Tikhonov, largement employée en holographie acoustique de champ proche (cf. section 2.3), tend vers la formation de voies lorsque la matrice de régularisation est l'identité et que le paramètre de régularisation est élevé. La minimisation de la norme ℓ_1 de \mathbf{x} , c'est-à-dire sa parcimonie, vient judicieusement remplacer la minimisation de sa norme ℓ_2 , c'est-à-dire son énergie, dans la résolution du problème inverse. Cependant, la technique de reconstruction n'exploite pas entièrement la norme ℓ_1 du signal. Elle utilise une approche itérative en éliminant de \mathbf{x} toutes les composantes dont l'énergie est inférieure à un seuil.

La méthode de déconvolution DAMAS proposée par Brooks et Humphreys [BH06] et largement utilisée en aéronautique a été améliorée par T. Yardibi *et Al* [YL08] pour

devenir SC-DAMAS, une méthode de déconvolution sous contrainte de parcimonie de la source à estimer. Un algorithme similaire à LASSO est utilisé pour résoudre le problème inverse. Cependant, leur manière de procéder basée sur la matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}$ à une fréquence donnée, rend l'exploitation de sources corrélées lourde numériquement.

Dans les études de localisation par minimisation ℓ_1 , la détermination du paramètre λ , qui contrôle la parcimonie de la solution dans l'algorithme LASSO, pose un problème majeur. Si λ est surévalué, la forte contrainte de parcimonie empêche l'estimation de certaines sources. Dans le cas contraire, on perd la parcimonie et on localise des sources parasites. Le problème est le même si on utilise l'algorithme BPDN à la place de LASSO. Par ailleurs, les temps d'exécutions de ces deux algorithmes sont longs. Nous proposons une alternative beaucoup plus rapide à ces méthodes en localisant les sources par algorithme OMP.

3.2 Exploitation de la parcimonie des sources par OMP

Dans cette section, on exploite le caractère parcimonieux des sources dans l'espace de reconstruction en localisant et en estimant les coefficients non nuls du vecteur source \mathbf{x} par OMP. Afin de rendre la méthode plus robuste au rapport signal sur bruit, on base notre étude sur l'utilisation de la matrice de covariance des signaux mesurés.

3.2.1 Traitement des signaux

Comme pour les algorithmes BF, Capon et MUSIC, une étape initiale consiste à calculer la matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}$, définie dans 3.5, pour rendre l'estimation des sources plus robuste au rapport signal sur bruit. On cherche à construire un vecteur signal à partir de cette matrice en éliminant les composantes associées au bruit. Pour ce faire, décomposons $\hat{\mathbf{R}}$ aux valeurs propres :

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H \quad (3.17)$$

Les vecteurs propres \mathbf{u}_s associés aux valeurs propres λ_s les plus grandes sont extraits de $\hat{\mathbf{R}}$. On travaille donc avec l'espace signal, contrairement à la méthode MUSIC qui n'utilise que le sous-espace bruit. Dans le cas où l'on a S valeurs propres significatives, on construit le vecteur de mesure \mathbf{y} dénué des effets du bruit :

$$\mathbf{y} = \sum_{s=1}^S \sqrt{\lambda_s} \mathbf{u}_s \quad (3.18)$$

Dans un cadre simulé, la figure 3.2 illustre l'erreur d'estimation ε du vecteur source en fonction du RSB dans les deux cas suivant :

- Utilisation du vecteur signal \mathbf{y} issu de la matrice de covariance calculée avec un nombre suffisant d'observations.

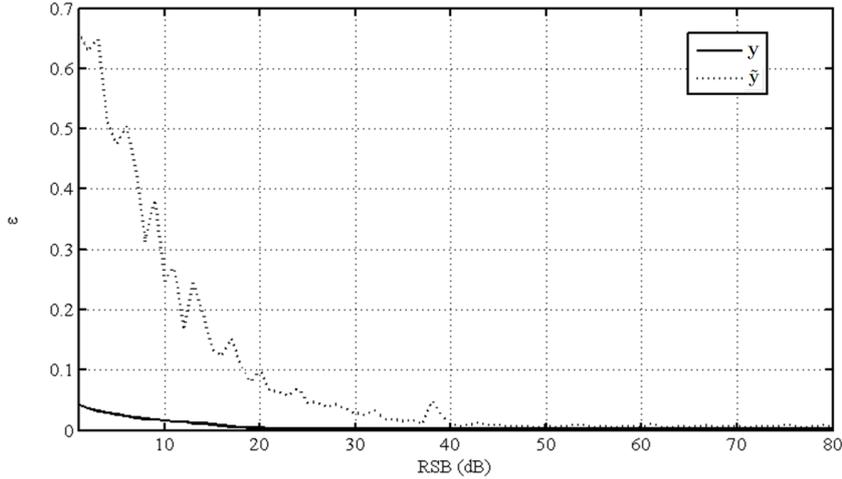


FIGURE 3.2 – Simulations de l'erreur ε de reconstruction par OMP en fonction du RSB à partir des signaux issus d'une observation $\tilde{\mathbf{y}}$ ou des signaux \mathbf{y} issus de l'espace signal de la matrice de covariance

– Utilisation du vecteur signal mesuré sur une seule observation que l'on nomme $\tilde{\mathbf{y}}$. La courbe d'erreur de reconstruction en fonction du rapport signal sur bruit est moyennée sur 50 tirages de signaux aléatoires. L'erreur ε est calculée de la manière suivante :

$$\varepsilon = \frac{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{\text{th}}\|_2}{\|\mathbf{x}_{\text{th}}\|_2} \quad (3.19)$$

$\hat{\mathbf{x}}$ et \mathbf{x}_{th} sont respectivement les vecteurs sources estimés et théoriques. L'algorithme est bien plus robuste lorsque \mathbf{y} est utilisé en présence de RSB faible. Néanmoins, en présence d'un RSB grand la méthode OMP est performante en utilisant directement le signal reçu $\tilde{\mathbf{y}}$ et non le signal issu de la matrice de covariance. Ceci constitue un avantage non négligeable dans les cas où la matrice de covariance n'est pas accessible. C'est par exemple le cas lorsque l'on cherche à localiser des sources qui émettent des signaux transitoires courts. Dans la suite, comme dans le cas réel où le RSB peut être faible, nous utiliserons les algorithmes de localisations parcimonieuses avec le vecteur signal extrait de $\hat{\mathbf{R}}$.

3.2.2 Algorithme de localisation par OMP

L'algorithme OMP présenté à la section 1.2.2.2 est directement applicable dans le cas de sources en champ lointain. Remarquons que l'étape de sélection des atomes de l'algorithme est identique à la sélection du maximum d'amplitude du diagramme de directivité obtenu par la forme la plus basique de la méthode "beamforming". En effet, elle s'écrit :

$$s = \arg \max_n \mathbf{A}^H \mathbf{r}^{(i)} \quad (3.20)$$

s correspond à la source sélectionnée et $\mathbf{r}^{(i)}$ est le résidu à la $i^{\text{ème}}$ itération. On rappelle que $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{y}$. On verra dans la section 3.3.1 que cette étape est à l'origine d'une faiblesse de résolution de la méthode.

L'algorithme implique le choix du nombre d'itération qui est dans notre cas le nombre de sources à estimer. Ce paramètre est *a priori* inconnu. Cependant, en observant la norme ℓ_2 du résidu $\|\mathbf{r}^{(i)}\|_2$ à chaque itération i on remarque que lorsque le nombre total de sources a été estimé, $\|\mathbf{r}^{(i)}\|_2$ converge vers une valeur faible. Dans l'exemple illustré sur la figure 3.3) deux sources corrélées sont actives. A chaque fois qu'une source est sélectionnée, l'énergie du résidu chute de manière significative. Lorsque le rapport signal sur bruit est suffisant, l'allure typique de la courbe de l'énergie du résidu en fonction du nombre d'itérations laisse apparaître un coude franc à l'itération correspondant au nombre de sources. La valeur de la norme du résidu atteint ensuite le RSB. L'observation du résidu pour la détermination du critère d'arrêt de OMP est cependant limitée lorsque le niveau des sources est inférieur au niveau de bruit. Cela rend la détermination du critère d'arrêt problématique bien que la source puisse être correctement localisée.

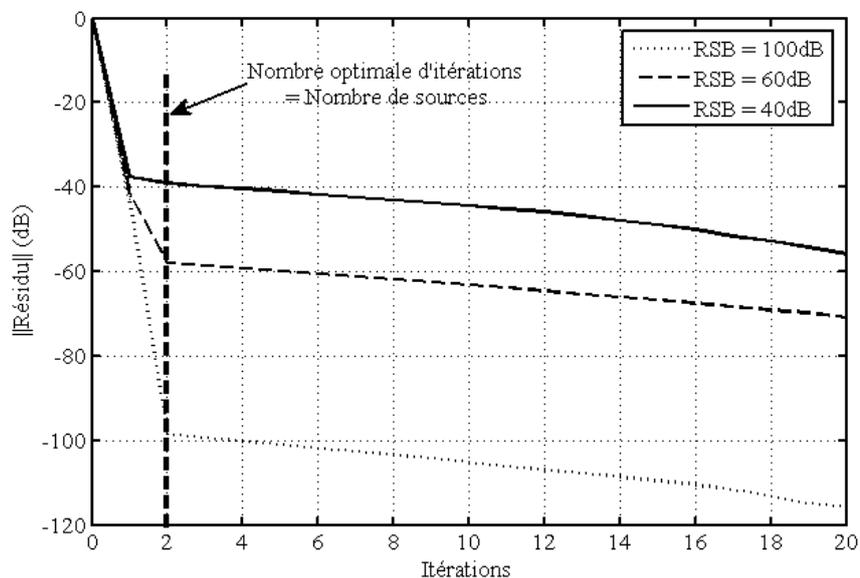


FIGURE 3.3 – Évolution de la norme du résidu en fonction du nombre d'itérations pour la localisation par OMP de 2 sources simulées. Les 2 sources de niveaux 0dB et -40dB sont corrélées. 3 RSB différents sont étudiés.

Le critère d'arrêt de l'algorithme est donc obtenu empiriquement, en observant le résidu. Le maximum de courbure peut être calculé pour sélectionner ce critère d'arrêt correspondant au nombre de sources. Une alternative serait d'appliquer la technique de validation croisée à l'algorithme de reconstruction OMP. Cette démarche a été proposée théoriquement par P. Boufounos et Al [BDB07]. Le principe consiste à diviser les mesures en deux jeux de données : celui servant à l'estimation $\hat{\mathbf{x}}$ des sources par OMP et celui permettant la validation croisée de l'estimation. On teste à chaque itération de l'algorithme si $\hat{\mathbf{x}}$ permet de prédire précisément les mesures de validation croisée. Des études sont actuellement en cours pour appliquer expérimentalement cette méthode.

3.3 Simulations en champ lointain

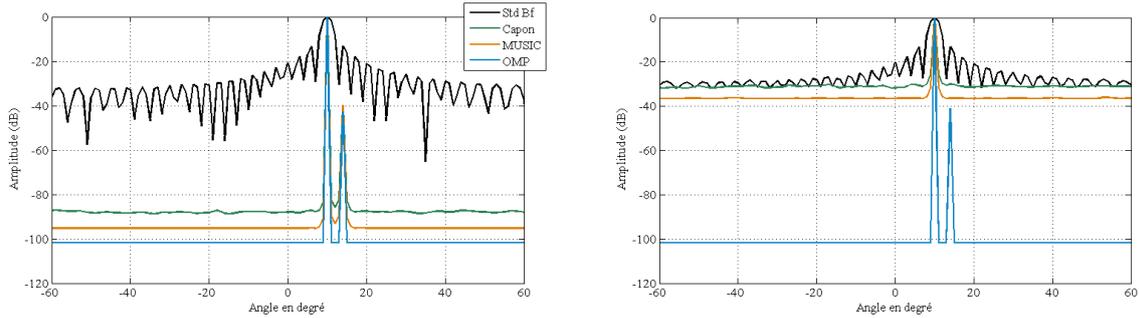
Cette section présente des simulations de localisations de sources en champ lointain avec la méthode de localisation parcimonieuse OMP. La méthode BPDN du vecteur source présente des résultats similaires à OMP lorsque le paramètre de régularisation ε est précisément estimé. Étant donné la difficulté d'estimation de ε et la relative lenteur de convergence de l'algorithme BPDN, nos expériences s'appuient sur l'utilisation de OMP. Ses performances sont analysées et comparées avec les méthodes traditionnelles présentées ci-dessus. Les différents paramètres qui affectent les performances des algorithmes sont testés. Pour cela, on génère deux sources dont les positions angulaires sont respectivement 10 et 14 degrés. Les signaux émis sont des bruits blancs gaussiens de variance unité et de longueur suffisante. Dans le cas de sources totalement corrélées, les signaux sont identiques. Dans le cas de sources non corrélées, les bruits blancs sont issus de tirages aléatoires différents. La matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}$ est estimée selon l'équation 3.5 avec 200 observations. On évalue d'abord les performances de OMP sur un réseau régulier, puis on exploite le CS avec un réseau aléatoire de micros.

3.3.1 Régularisation parcimonieuse avec un réseau régulier

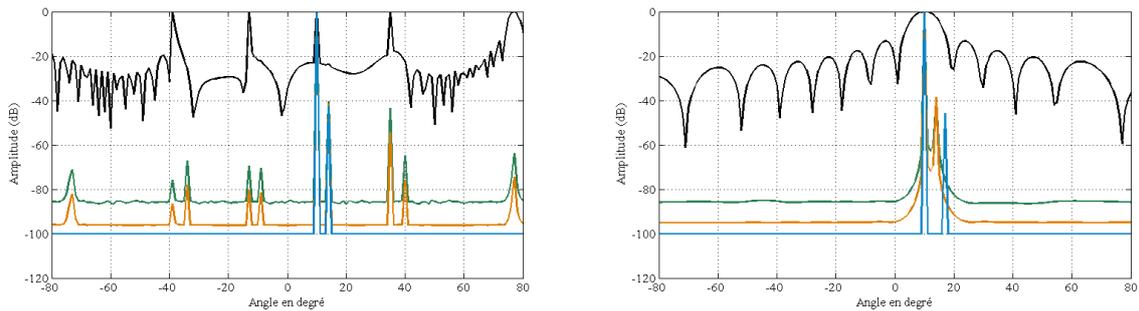
La comparaison des performances des méthodes OMP, BF, Capon et MUSIC est illustrée sur la figure 3.4. Elle synthétise la sensibilité des algorithmes aux variations des différents paramètres possibles : RSB, ouverture de l'antenne, fréquence d'échantillonnage spatial et cohérence des signaux sources. Seul le niveau relatif entre les sources est représenté : le signal source $\hat{\mathbf{x}}$ est normalisé par rapport à la source la plus puissante. La source 1 à 10° a un niveau de 0dB et la source 2 à 14° a un niveau de -40dB.

Sur la figure 3.4 (a) le pas de l'antenne est $d = \lambda/2$ et l'ouverture est suffisante pour séparer deux sources espacées de 4°. Les signaux sont non corrélés avec un SNR élevé de 80dB. Les conditions optimales pour la localisation sont réunies et seul le "beamforming" standard échoue à estimer la deuxième source. Le niveau de la deuxième source étant de -40dB, elle est recouverte par les lobes secondaires. Dans les configurations suivantes, la variation des différents paramètres permet d'évaluer les limites des méthodes MUSIC, Capon et OMP.

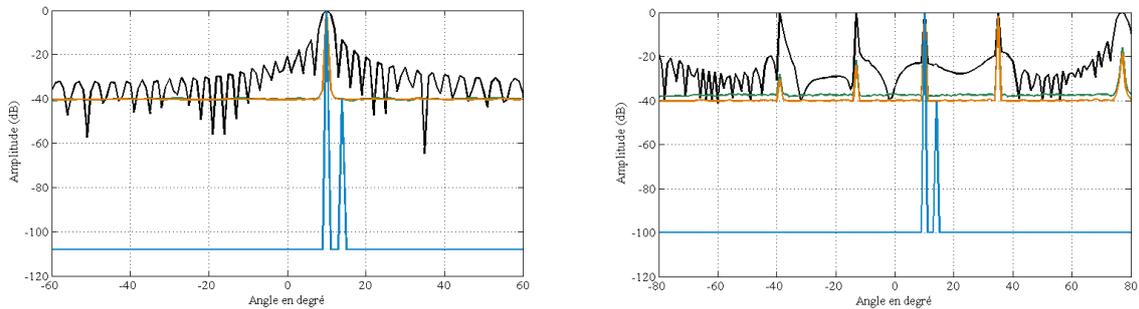
Rapport signal sur bruit : Sur la figure 3.4 (b) on impose un RSB faible de 20dB. Les méthodes Capon et MUSIC échouent à la localisation de la deuxième source qui est noyée dans le bruit. La valeur propre issue de la décomposition de $\hat{\mathbf{R}}$ et correspondant à la deuxième source semble d'ailleurs appartenir à l'espace bruit comme le montre la figure 3.5. OMP reste robuste, même avec de très faibles valeurs de RSB. Le principal challenge est de déterminer objectivement le nombre de valeurs propres à prendre en compte dans l'espace signal.



(a) Sources non corrélées. SNR = 80dB. $d = \lambda/2$. $L > \lambda/\theta$
 (b) Sources non corrélées. SNR = 20dB. $d = \lambda/2$. $L > \lambda/\theta$



(c) Sources non corrélées. SNR = 80dB. $d = 2.5\lambda$. $L > \lambda/\theta$
 (d) Sources non corrélées. SNR = 80dB. $d = \lambda/2$. $L < \lambda/\theta$



(e) Sources corrélées. SNR = 80dB. $d = \lambda/2$. $L > \lambda/\theta$
 (f) Sources corrélées. SNR = 30dB. $d = 2.5\lambda$. $L > \lambda/\theta$

FIGURE 3.4 – Comparaison de l'estimation de 2 sources à 10° et 14° ($\theta = 4^\circ$) suivant plusieurs paramètres : SNR, pas de l'antenne d , corrélation des sources, ouverture L d'antenne.

Fréquence d'échantillonnage spatial : Dans les hautes fréquences, une antenne de pas fixé d sous-échantillonne le champ acoustique lorsque $d > \lambda/2$. L'exemple de la figure 3.4 (c) montre la reconstruction du signal source avec un pas $d = 2.5\lambda$. Le champ acoustique est largement sous-échantillonné. Les artefacts des lobes de réseau font apparaître des sources fantômes pour les méthodes de BF, Capon, et MUSIC. L'estimation de \mathbf{x} par OMP reste précise. Notons que si le réseau est trop sous-échantillonné, le maximum

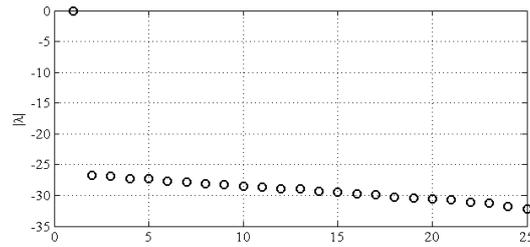


FIGURE 3.5 – Amplitude des valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$ en présence de 2 sources non corrélées. RSB=20dB

du diagramme de directivité obtenu par BF ne correspond pas à une source mais à un lobe de réseau. Dans ce cas OMP échoue car la première source sera localisée sur un lobe de réseau.

Ouverture de l'antenne : Nous avons noté que l'étape de sélection de la position d'une source dans l'algorithme OMP est identique à la sélection du maximum du diagramme de directivité obtenu par "beamforming". De la même manière que l'algorithme de "beamforming", pour une antenne régulière de pas d , 2 sources séparées d'un angle θ sont correctement localisées si l'ouverture $L \geq \lambda\theta$. Sur la figure 3.4 (d), $L = \lambda/2\theta$ et on voit apparaître un biais de 2° dans la localisation par OMP de la deuxième source (localisée à 16° au lieu de 14°). On a un RSB fort de 80dB. C'est le seul cas identifié où MUSIC et Capon surpassent OMP : ouverture d'antenne faible, signaux non corrélés et RSB élevé.

Corrélation des sources : On simule des sources totalement corrélées, autrement dit les signaux sources sont identiques. Les résultats de localisation sont illustrés sur la figure 3.4 (e). Les méthodes Capon et MUSIC ne peuvent estimer qu'une seule source. En effet, la décomposition en valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$ ne laisse apparaître qu'une seule valeur propre correspondant au signal (cf. figure 3.6). Les performances de OMP, en revanche, restent élevées pour estimer des sources corrélées.

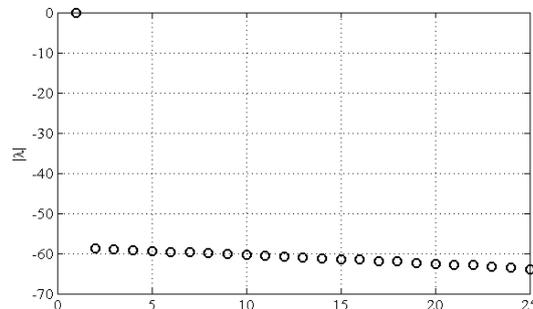


FIGURE 3.6 – Amplitude des valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$ en présence de 2 sources corrélées. RSB=50dB

Sur la figure 3.4 (f) les conditions défavorables à la précision des méthodes MUSIC et Capon sont réunies. Les sources sont corrélées, le réseau est sous-échantillonné ($d = 2.5\lambda$) et le RSB de 30dB est faible. OMP s'en tire toujours bien pour estimer précisément les deux sources.

On retiendra que pour la méthode OMP, il est nécessaire d'avoir une grande ouverture d'antenne pour être capable de séparer deux sources proches en basses fréquences. D'autre part, le sous-échantillonnage du réseau de microphones est autorisé jusqu'à un certain seuil. Si on sous-échantillonne trop, les premières composantes sélectionnées correspondent à des positions de lobes de réseau.

3.3.2 Réseau irrégulier et compressive sampling

Notre objectif est de construire une antenne qui permette à la méthode OMP d'être performante sur une large plage de fréquences avec peu de microphones. Supposons une ouverture L fixe de l'antenne qui permette une bonne résolution en basses fréquences. On peut réduire M en augmentant le pas d de l'antenne. Mais, comme expliqué précédemment, le fort niveau de lobes de réseau engendré par le sous-échantillonnage du champ fera chuter OMP. Il a été montré que les réseaux irréguliers de microphones permettent de réduire le niveau des lobes de réseau obtenu par "beamforming" en hautes fréquences [JD93]. Dans le cas de OMP, cela permet de lever l'ambiguïté sur la position des maxima, et donc la localisation des sources. On peut construire une antenne d'ouverture L grande en réduisant le nombre considérable de microphones d'une antenne régulière. Des régions de l'antenne peuvent être dénuées de microphones, mais d'autres doivent contenir une répartition plus dense de micros pour que OMP, associé à cette antenne, soit performant en hautes fréquences. Le réseau irrégulier est donc une configuration adaptée. Il est intéressant de remarquer que le formalisme de "compressive sampling" amène à la même conclusion.

Un problème classique de compressive sampling s'écrit $\mathbf{y} = \Theta\Phi\mathbf{x}$ où Φ est un dictionnaire de décomposition parcimonieuse et Θ un espace de mesure dans lequel \mathbf{x} a une représentation étalée. Si Φ et Θ sont incohérentes et \mathbf{x} suffisamment parcimonieux, la théorie du CS affirme que \mathbf{x} peut être reconstruit avec un minimum de mesures. Notre problème de localisation de sources s'écrit $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. \mathbf{x} est le vecteur source parcimonieux. Regardons de plus près le rôle de la matrice de propagation \mathbf{A} . Elle décrit le rayonnement engendré par les sources contenues dans \mathbf{x} . Chaque mesure y_m récolte de l'information provenant de toutes les sources (les coefficients de \mathbf{x}). On peut alors considérer la matrice de propagation, \mathbf{A} , comme un dictionnaire de décomposition. Dans le cas de la localisation en champ lointain, c'est un dictionnaire en ondes planes. Le produit scalaire du vecteur parcimonieux \mathbf{x} avec les vecteurs ligne de \mathbf{A} donne une représentation étalée de \mathbf{x} , c'est-à-dire le champ acoustique rayonné que l'on peut directement échantillonner. La sélection aléatoire aléatoire des lignes de \mathbf{A} joue le rôle de la matrice Φ et se traduit par l'utilisation d'un réseau irrégulier de micros. On est donc en présence d'un problème compressive sampling. On note toutefois qu'aucune considération théorique ne garantit le

succès du CS appliqué à la localisation de sources. En particulier, la contrainte d’isométrie restreinte définie à la section 1.3 n’est pas vérifiée par la matrice de transfert \mathbf{A} . Dans des travaux récents, Simard [Sim11] montre que ces conditions sont vérifiées statistiquement, sous forme d’une propriété d’isométrie restreinte statistique ce qui permet de développer un intervalle de confiance sur l’erreur de reconstruction.

La figure 3.7 illustre les résultats d’estimation de deux sources placées à 30 et 35 degrés de l’axe de l’antenne pour un réseau régulier (a), et un réseau aléatoire (b). L’antenne régulière a une ouverture $L = 4\text{m}$ et un pas $d = 5\lambda$. La fréquence d’étude est 10kHz. L’antenne régulière comprend donc $M = 25$ microphones. Le champ acoustique étant largement sous-échantillonné, OMP échoue en sélectionnant la première source sur la position d’un lobe de réseau. L’antenne aléatoire est construite à partir d’une antenne

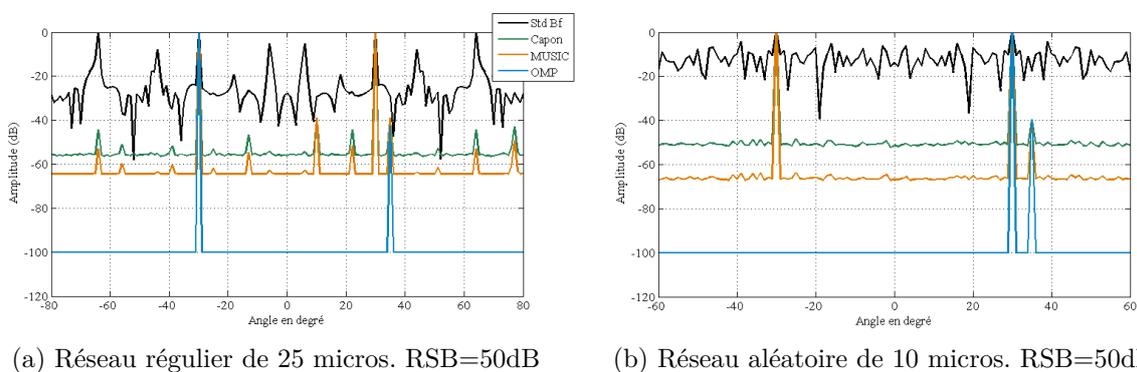


FIGURE 3.7 – Sous-échantillonnage spatial du champ acoustique et estimation des sources avec un réseau régulier ou aléatoire

régulière d’ouverture $L = 4\text{m}$ et de pas $d = \lambda$. Cela correspond à $M = 120$. On sélectionne ensuite un tirage aléatoire de 10 microphones parmi les 120. L’unique contrainte que l’on s’impose sur le tirage aléatoire est de garder les capteurs aux extrémités de l’antenne afin de maintenir l’ouverture L . L’aléatoire à l’avantage de permettre la minimisation du nombre de microphones. L’estimation des sources par OMP est précise avec un nombre aussi réduit que 10 microphones.

La section suivante aborde le problème de localisation parcimonieuse dans le cas où les sources sont dans le champ proche de l’antenne. On fait l’hypothèse que les sources rayonnent comme des monopoles. La méthode de localisation est évaluée expérimentalement.

3.4 Localisation expérimentale de sources omnidirectionnelles en champ proche

Dans la plupart des applications industrielles (automobiles, aéronautiques, ...), les sources de bruits que l’on cherche à identifier se trouvent à proximité de l’antenne. La zone où se trouvent les sources est appelée champ proche par opposition au champ lointain

de l'antenne. Elle correspond à la zone de diffraction de Fresnel [Goo72] dans laquelle l'antenne a un pouvoir de focalisation. Dans cette zone, on peut identifier non seulement les directions d'arrivée des sources, mais aussi leur distance par rapport à l'antenne. Dans le cas le plus simple, le front d'onde est sphérique. Le modèle de rayonnement est un modèle monopolaire. La prise en compte de la divergence sphérique de la source en $1/r$ vient compléter le modèle de rayonnement en ondes planes. Le vecteur directionnel présenté dans l'équation 3.2 s'écrit, dans le cas d'une source omnidirectionnelle au point n :

$$\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} \frac{e^{-jkr_{1n}}}{r_{1n}} \\ \vdots \\ \frac{e^{-jkr_{mn}}}{r_{mn}} \\ \vdots \\ \frac{e^{-jkr_{Mn}}}{r_{Mn}} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Les vecteurs \mathbf{a}_n composent le dictionnaire de monopole \mathbf{A} utilisé pour la localisation de sources omnidirectionnelles par OMP.

Cette section montre des résultats expérimentaux de localisation de sources avec un dictionnaire de monopoles. Le problème est d'abord traité harmoniquement (une seule fréquence). Il est ensuite adapté à un traitement large bande (plusieurs fréquences du spectre) des sources grâce à un modèle structuré de parcimonie.

3.4.1 Traitement harmonique des sources

3.4.1.1 Configuration

On place les sources à identifier dans le champ proche de l'antenne. Trois sources sont présentes sur un plan à 5m de l'antenne plane verticale. La configuration du dispositif expérimental est illustrée sur la figure 3.8. L'antenne utilisée dans nos expériences de localisation de sources est illustrée sur la photo 3.9 a). Elle est composée de 120 microphones répartis sur 8 anneaux concentriques. Chaque anneau comprend 15 micros. La progression radiale des anneaux suit une loi géométrique. L'ouverture longitudinale de l'antenne est de 4.16m. Son ouverture verticale est de 2.06m. Sa résolution angulaire à 3dB à 1kHz est $\theta_{3dB} = 4.6^\circ$.

Les niveaux de puissances des sources sont identiques. Les signaux sources sont totalement corrélés. Le signal utilisé est un bruit blanc d'une durée de 5 secondes. Le signal est échantillonné à 31250Hz (échantillons récoltés toutes les $32\mu s$). Le calcul de la densité interspectrale de puissance par la méthode de Welch [Hay96] sur $B = 100$ fenêtres d'échantillons temporels permet la construction de la matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}$ à la fréquence d'analyse choisie. Notons que le choix des paramètres de l'analyse spectrale influe sur la précision d'estimation de la matrice de covariance. Ici, les paramètres sont choisis empiriquement. La source centrale est un dispositif omnidirectionnel B&K type 4295 (marquée 2 sur la photo 3.9 b). Les deux sources latérales sont des haut-parleurs bafflés (marqués 1 et 3). Le baffle est un cube en bois de côté 20cm. L'ensemble du matériel est

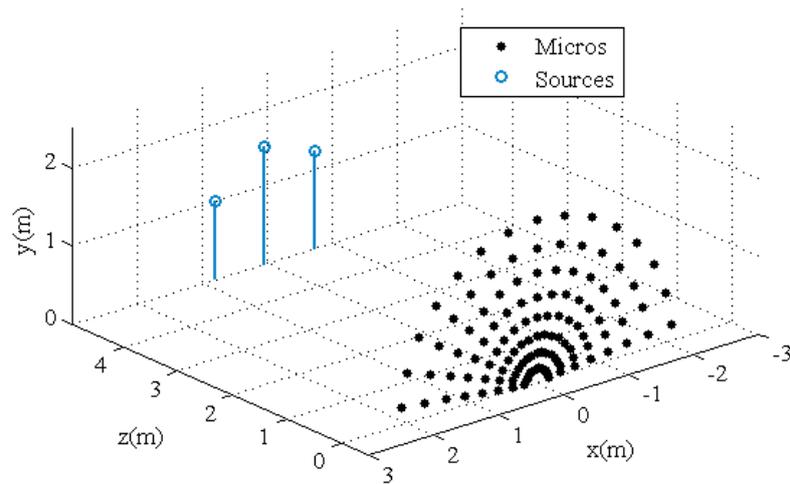
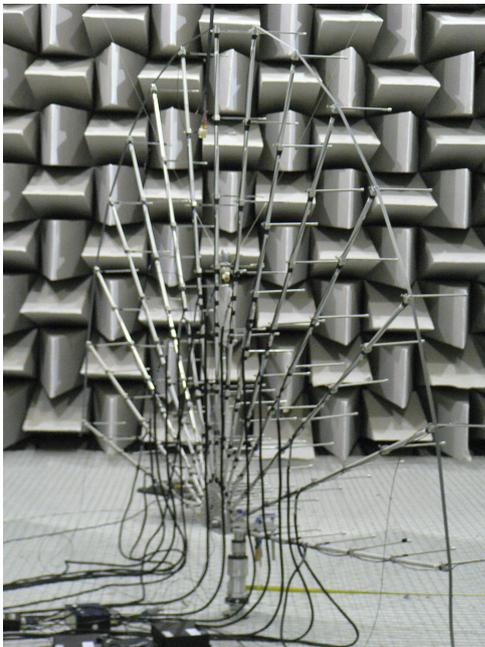


FIGURE 3.8 – Configuration du dispositif expérimental de localisation de sources



(a)



(b)

FIGURE 3.9 – Illustration de l'antenne (a) et des sources (b) en chambre anéchoïque

installé dans une chambre anéchoïque qui permet d'approximer des conditions de champ libre. Les mesures ont été réalisées au Laboratoire National d'Essais (Trappes).

3.4.1.2 Résultats expérimentaux en champ libre

Dans cette section la reconstruction de sources par algorithme OMP et BPDN est comparée pour diverses fréquences et différents degrés de sous-échantillonnage. Les résultats obtenus par la technique standard de "beamforming" sont illustrés en référence.

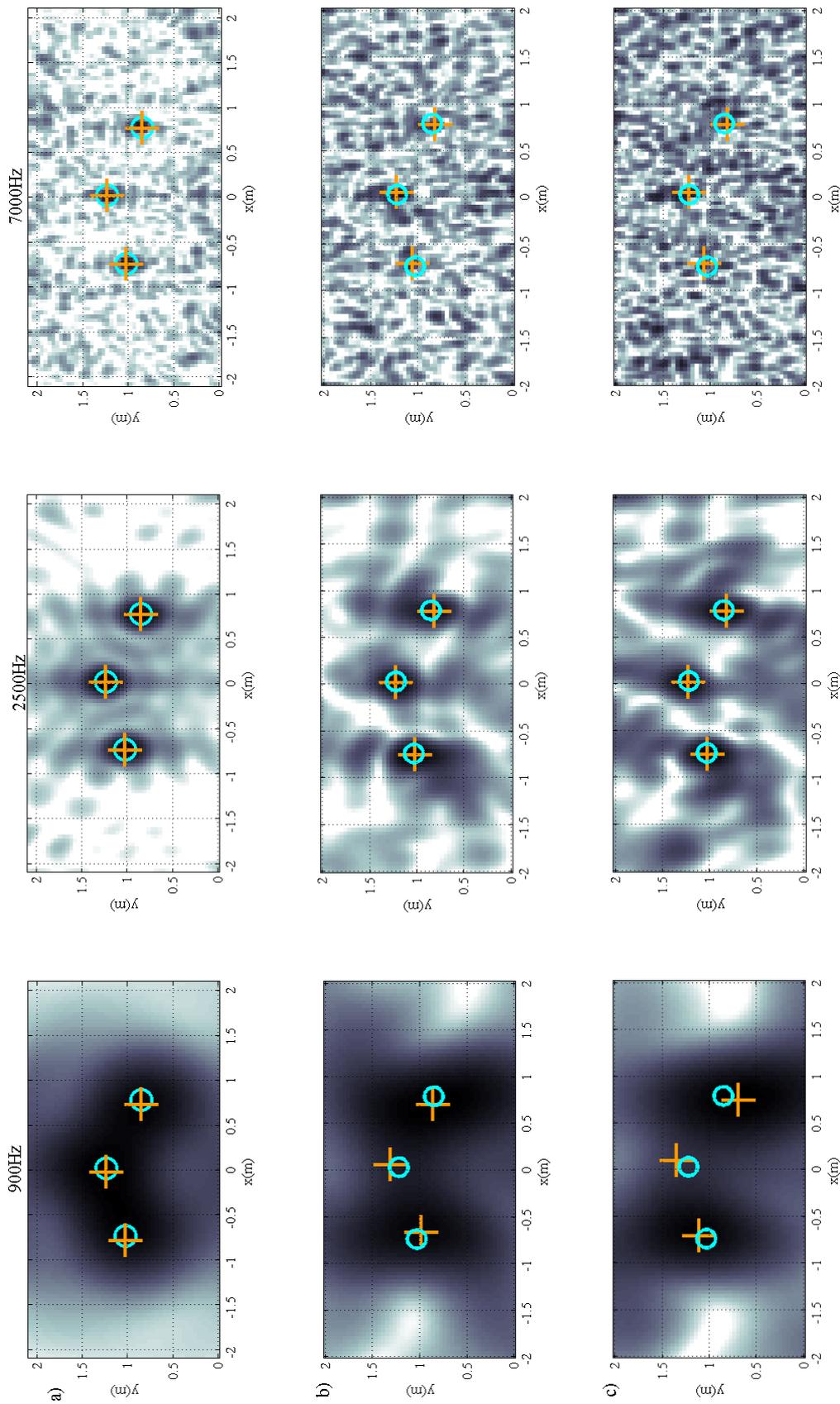


FIGURE 3.10 – Estimations OMP de 3 sources omnidirectionnelles à 900Hz, 2500Hz et 7000Hz. Estimation OMP = marqueurs en croix. Sources réelles = marqueurs en cercles. a) Simulations 120 micros. b) Expériences 120 micros. c) Expériences 64 micros. Carte "beamforming" en fond avec un niveau de couleur de 20dB de dynamique : noir = 0dB, blanc = -20dB.

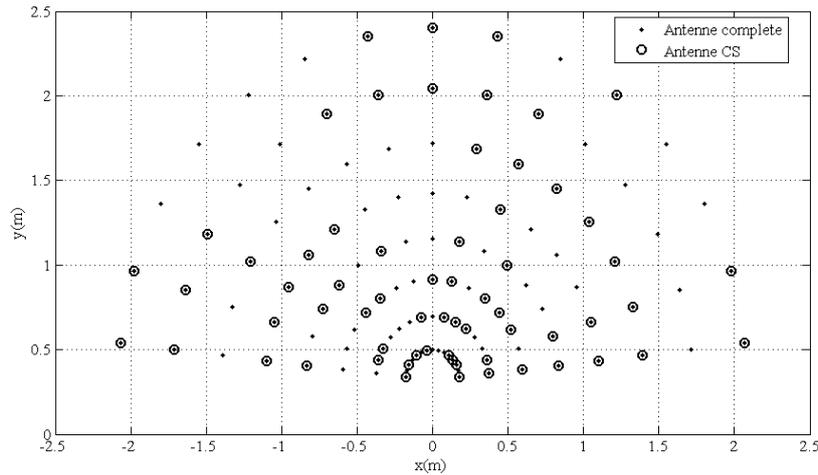


FIGURE 3.11 – Disposition des micros de l'antenne complète (120 micros) et de l'antenne CS (64 micros)

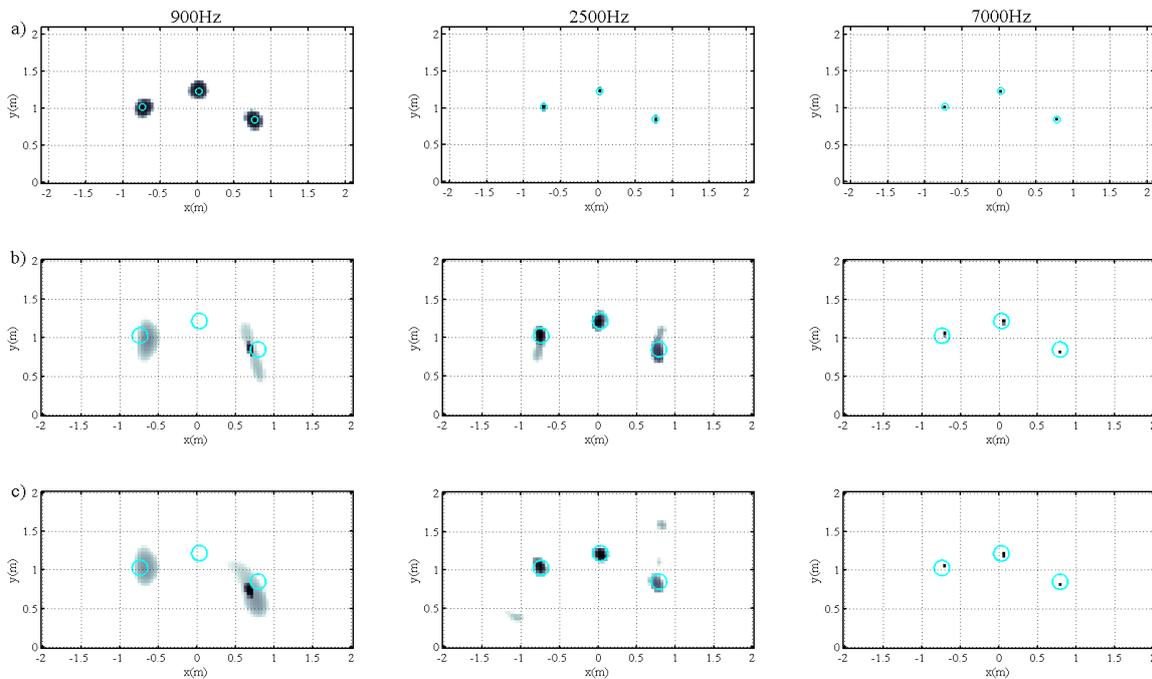


FIGURE 3.12 – Estimations BPDN de 3 sources omnidirectionnelles à 900Hz, 2500Hz et 7000Hz. Sources réelles = marqueurs en cercles. Carte BPDN avec un niveau de couleur de 20dB de dynamique : noir = 0dB, blanc = -20dB. a) Simulations 120 micros. b) Expériences 120 micros. c) Expériences 64 micros.

Sur la figure 3.10, on compare les résultats de localisation par "beamforming" avec la localisation par algorithme OMP (marqueurs en croix). La position réelle des sources est indiquée par les marqueurs en cercles. Sur les cartes de "beamforming", la couleur noire indique une amplitude de 0dB et la couleur blanche une amplitude inférieure ou égale à

-20dB. Les simulations réalisées avec l'antenne complète de 120 micros (a) permettent de valider le modèle de propagation monopolaire utilisé lors des expériences avec la même antenne (b). Les simulations ont été réalisées dans des conditions idéales. Le rapport signal sur bruit a été choisi élevé $SNR = 80dB$. Les signaux sont parfaitement parcimonieux. On observe cependant une différence au niveau des lobes secondaires naturellement plus importants lors des expériences pour plusieurs raisons. Premièrement, le niveau de bruit de mesure, bien que difficilement quantifiable, est *a fortiori* supérieur. La mesure de la position des microphones est imprécise. De plus la chambre de mesure n'est pas parfaitement anéchoïque et par voie de conséquence, les micros enregistrent un léger taux d'ondes diffus qui perturbent le signal direct, surtout en basses fréquences ($f < 1kHz$). A cela s'ajoute le fait que le signal source \mathbf{x} n'est plus que quasi-parcimonieux. En effet, un petit nombre de sources primaires sont attendues, trois dans notre cas expérimental, mais beaucoup de sources secondaires dues aux multiples réflexions sur les éléments de mesures (Antenne et sources) viennent s'ajouter. Malgré ces effets perturbants, les trois sources sont précisément estimées.

Dans l'optique de réduire le nombre de micros nécessaires à une bonne localisation, un tirage pseudo-aléatoire de 64 micros parmi les 120 composant l'antenne est sélectionné. Deux contraintes sont à imposer sur le tirage aléatoire. La première est de maintenir l'ouverture en gardant des microphones sur le dernier anneau afin de conserver le pouvoir de résolution de l'antenne. La deuxième est de conserver le plus petit écart δ entre les micros qui intervient sur le premier anneau. Garder un espacement minimum permet à la méthode de reconstruction d'être toujours efficace en hautes fréquences, dans la limite imposée par l'antenne. Une méthode simple est de sélectionner 8 micros par anneaux en gardant des micros aux pôles de l'antenne. On obtient l'antenne CS (pour "Compressive Sampling") illustrée sur la figure 3.11. Les résultats expérimentaux obtenus avec l'antenne CS (c) sont cependant similaires à ceux obtenus avec l'antenne complète. Sur les cartes de "beamforming" des lobes de réseaux plus énergétiques apparaissent. A 900Hz, les sources sont séparées d'une distance inférieure au pouvoir de résolution. Le technique de "beamforming" échoue à séparer les trois sources. OMP permet de les localiser avec toutefois un léger biais. En utilisant l'antenne CS, le biais augmente à 10cm. A 5m de distance, il équivaut à 1° ce qui reste faible. A 2500Hz, la fréquence est optimale pour avoir une bonne résolution des lobes secondaires faibles. Les deux méthodes sont efficaces même avec un nombre réduit de micros. Le pas minimum de l'antenne est de $3.7 \cdot 10^{-2}m$. A une fréquence de 7000Hz, ça équivaut à environ $75\% \lambda$. Le champ acoustique est alors sous-échantillonné et on observe d'importants lobes de réseaux en "beamforming" qui font apparaître des sources fantômes. Avec l'antenne CS, la localisation devient impossible en raison du niveau trop important de ces sources fantômes. La méthode OMP permet de localiser précisément les sources avec des performances similaires en réduisant le nombre de micros à 64. Dans ce cas, on peut parler d'échantillonnage compressé. Le champ acoustique est en effet largement sous-échantillonné dans le plan de l'antenne par rapport au critère de Shannon et la localisation reste précise avec l'algorithme OMP.

La figure 3.12 illustre les résultats de localisation par BPDN dans les mêmes configura-

tions que pour la figure 3.10 avec OMP. Il est intéressant d'observer que la localisation par BPDN fournit une image de la source de la même manière que le "beamforming" mais avec une résolution supérieure. La dynamique des niveaux de gris est de 20dB. On obtient une carte des pressions dont les maxima désignent les sources. Dans les simulations (ligne a)), la position des maxima concorde avec OMP. Dans les expériences, en hautes fréquences les performances sont identiques à OMP. Plus en monte en fréquence et plus le vecteur source devient parcimonieux. En plus basses fréquences, à 900Hz, la méthode échoue à reconstruire les trois sources. Le paramètre de régularisation ε a été choisie arbitrairement. Une sous-estimation de ce paramètre permet de visualiser la troisième source mais au prix de lobes de réseaux plus importants. A 2500Hz, la méthode fonctionne encore bien. BPDN semble être moins robuste au bruit que OMP. On préférera donc utiliser OMP pour sa rapidité d'exécution et ses bonnes performances sur une large plage de fréquences.

La localisation est validée pour une fréquence de traitement. Dans la section suivante nous utilisons un modèle structuré de parcimonie pour prendre en compte simultanément plusieurs fréquences dans un même problème d'optimisation.

3.4.2 Extension à la localisation large bande

Le spectre des signaux mesurés occupe souvent une bande large. Le problème de localisation de sources peut être traité de manière harmonique au risque de perdre l'information transmise par les autres fréquences. Nous proposons ici une méthode de localisation qui prend en compte l'information sur plusieurs composantes spectrales simultanément afin d'améliorer la résolution de la reconstruction.

3.4.2.1 Algorithme

Nous adaptons la méthode de reconstruction BPDN afin de traiter toutes les composantes spectrales dans un unique problème d'optimisation. Le vecteur signal \mathbf{y} est composé de sous vecteurs \mathbf{y}_m contenant, pour chaque micro m , les composantes fréquentielles à traiter. Il s'écrit $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_m \dots \mathbf{y}_M]^T$ de longueur $M \times K$ où K est le nombre de composantes fréquentielles. A chaque observation associée à une fréquence particulière correspond une estimation du vecteur source qui s'écrit $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \dots \mathbf{x}_N]^T$ de longueur $N \times K$. La matrice de transfert \mathbf{A} est donc une matrice de dimensions $(M \times K) \times (N \times K)$ composée de $M \times N$ sous-matrices diagonales \mathbf{A}_{mn} de dimension $K \times K$ telles que :

$$A_{mn}(k, k) = \frac{e^{-j2\pi f_k r_{mn}/c}}{r_{mn}} \quad (3.22)$$

k est l'indice de fréquence. Les différentes observations K ont en commun leurs supports parcimonieux dans le domaine spatial. Cela justifie la minimisation ℓ_1 du signal source dans ce domaine. Le contenu fréquentiel n'est quant à lui pas parcimonieux lorsque l'on traite des signaux large bande. Le domaine de parcimonie est donc structuré en blocs. Au sein de chaque bloc \mathbf{x}_n on minimise la norme ℓ_2 du signal. L'algorithme BPDN est adapté en remplaçant la minimisation de la norme ℓ_1 de \mathbf{x} par une norme mixte. L'algorithme

utilisé qui exploite la parcimonie par blocs du vecteur source est appelé Group-BPDN. Le problème de minimisation devient :

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_{1,2} \text{ tel que } \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon \quad (3.23)$$

La norme mixte $\ell_{1,2}$ est définie comme

$$\|\mathbf{x}\|_{1,2} = \sum_{n=1}^N \|\mathbf{x}_n\|_2 \quad (3.24)$$

où n est l'indice de position de la source.

L'algorithme OMP peut être également adapté à la parcimonie par bloc. Eldar et Al ont proposé un algorithme de reconstruction par bloc basée sur OMP (Block OMP) [EKB10]. Nous ne le développons pas ici et préférons illustrer les résultats obtenus par Group-BPDN qui illustrent mieux le gain en parcimonie.

3.4.2.2 Résultats expérimentaux

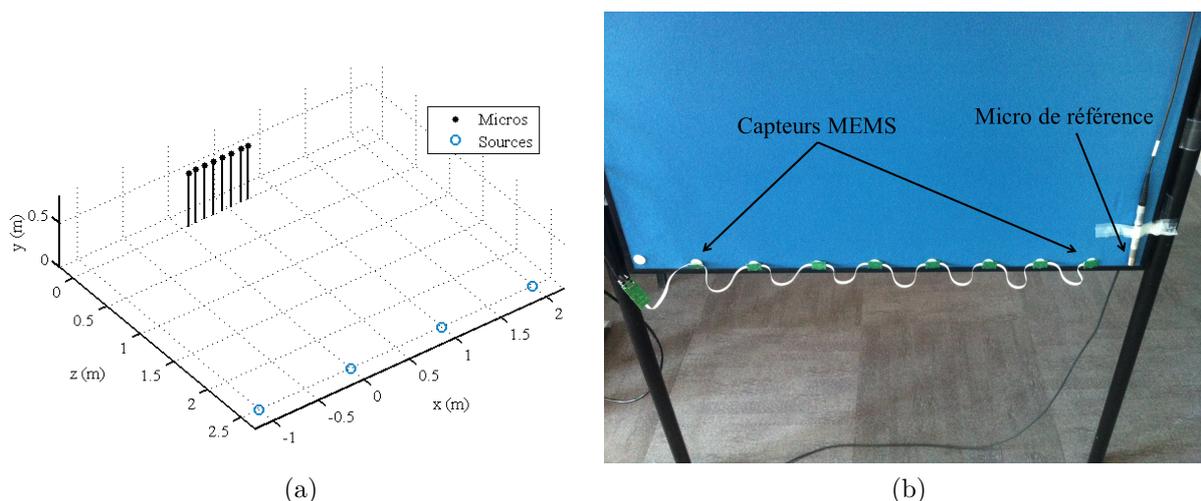


FIGURE 3.13 – Dispositif expérimental pour la localisation large bande a) - Photo de l'antenne de capteurs b)

La figure 3.13 illustre la configuration du dispositif expérimental. On utilise 8 microphones omnidirectionnels MEMS [Dev12] alignés selon l'axe x à une hauteur $z=0.6\text{m}$ du sol. Chaque micro est embarqué sur un petit circuit imprimé fixé sur une paroi verticale. A 2.5m de cette paroi, on place quatre sources à même le sol aux points de coordonnées : $x=-1\text{m}$, $x=0\text{m}$, $x=1\text{m}$ et $x=2\text{m}$. Les sources sont des enceintes basiques d'ordinateur de bureau. Elles sont toutes identiques. La fréquence d'échantillonnage des signaux est de 50kHz.

L'expérience de localisation est réalisée en environnement réverbérant. Afin de séparer le trajet direct du champ diffus, nous avons recours à la méthode de compression d'impulsion par la technique d'"inter-corrélation généralisée" (développée en annexe A). Cette

technique permet de déterminer assez précisément l'amplitude relative à l'instant d'arrivée de l'écho direct. Le signal d'émission utilisé pour la séparation du trajet direct est un chirp linéaire d'une durée de 4s dont la fréquence balaie la bande $\Delta f = [100Hz - 15kHz]$. Le signal de référence pour le calcul de la corrélation généralisée est mesuré par un microphone de référence placé dans la continuité de l'antenne de micros (cf. figure 3.13). Cette méthode permet de construire un signal large bande dont l'amplitude est la même sur toute la bande de fréquence.

Dans cette expérience, les quatre sources sont actives indépendamment mais sont localisées de manière conjointe, dans le même problème d'optimisation. On a donc autant de vecteurs mesure que de sources. On rajoute une dimension au problème d'optimisation en définissant la matrice de mesure \mathbf{Y} de dimensions $(M \times K) \times S$ et la matrice source \mathbf{X} de dimensions $(N \times K) \times S$ où S est le nombre de sources. Le problème s'écrit $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}$ et est résolu selon l'équation 3.23 en remplaçant simplement les vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} par les matrices respectives.

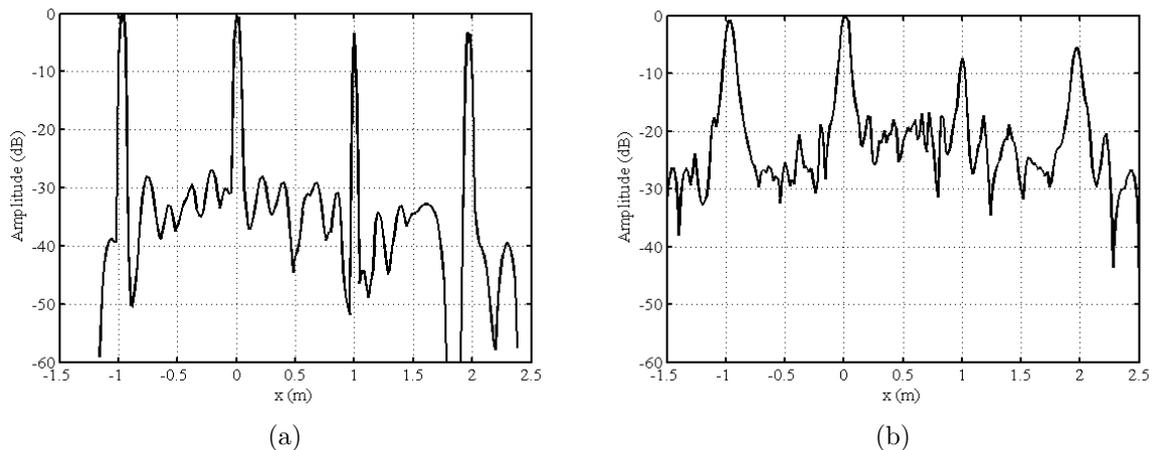


FIGURE 3.14 – Localisation large bande par parcimonie conjointe de 4 sources actives indépendamment par 2 méthodes : groupe BPDN a) et BPDN simple b)

La connaissance *a priori* de la structure de parcimonie de la source, grâce à l'algorithme adapté groupe BPDN, apporte de meilleures performances qu'en utilisant la parcimonie simple (utilisation de BPDN en ne minimisant que la norme ℓ_1 de \mathbf{x}). Sur la figure 3.14 les résultats de l'estimation de \mathbf{x} obtenus avec parcimonie structurée a) et simple b) sont illustrés. 10 fréquences réparties sur tout le spectre sont utilisées. On réduit le signal source \mathbf{x} à la dimension N de l'espace de reconstruction en calculant la norme ℓ_2 de chaque sous-vecteur \mathbf{x}_n contenant l'information spectrale. On somme finalement les contributions des 4 sources. Groupe BPDN permet d'obtenir un vecteur source plus parcimonieux et mieux résolu qu'avec BPDN. Notons que la reconstruction à une seule fréquence d'analyse, choisie arbitrairement, ne donne pas de résultats probants.

3.5 Conclusions

Des méthodes connues comme CAPON et MUSIC ont une résolution qui n'est pas limitée par la taille du réseau de capteurs, mais par le rapport signal sur bruit. Elles deviennent inutilisables lorsque les sources à estimer sont corrélées. Cependant, en présence de sources non corrélées et avec un RSB suffisant, elles permettent de localiser des sources avec une haute résolution et un nombre de micros considérablement réduit par rapport à ce qui est demandé par le "beamforming". Nous avons présenté une méthode originale permettant la localisation des sources avec des RSB faibles et en présence de sources corrélées. Elle est basée sur un *a priori* de parcimonie des sources à reconstruire. L'hypothèse de parcimonie est sur le nombre de sources réelles parmi un réseau de sources potentielles. La méthode de localisation basée sur l'algorithme OMP permet de séparer des sources corrélés avec un RSB faible en champ proche comme en champ lointain. La robustesse au RSB est permise en sélectionnant, dans une étape préliminaire, l'espace signal de la matrice de covariance grâce à une décomposition aux valeurs propres. La convergence de l'algorithme est de plus très rapide.

Les techniques classiques de localisation de sources utilisent des distributions aléatoires ou pseudo-aléatoires de microphones afin de réduire les effets des lobes de réseaux. Lorsque l'on traite la localisation comme un problème parcimonieux, la répartition aléatoire des microphones de l'antenne permet de compresser l'échantillonnage du champ acoustique en minimisant le nombre de capteurs nécessaires à une estimation précise des sources.

L'étude de la localisation par OMP fait cependant ressortir une faiblesse : la limitation du pouvoir de résolution en fonction de l'ouverture de l'antenne. Une étude ultérieure devrait permettre d'optimiser l'étape de sélection de l'atome le mieux corrélé. Une idée est d'adapter la localisation par MUSIC à l'algorithme OMP. On pourrait obtenir le résidu à partir de la matrice de covariance et modifier l'étape de sélection des atomes non pas par projection du signal sur les atomes du dictionnaire, ce que fait le beamforming, mais par algorithme MUSIC.

Nous avons montré qu'un modèle de parcimonie structurée permet la localisation large bande de source en utilisant des algorithmes de reconstruction par bloc basés sur BPDN ou OMP. Le fait de rajouter de l'information fréquentielle dans le problème d'optimisation permet d'améliorer la parcimonie du signal à reconstruire, et par conséquent la résolution.

Lorsque les sources sont dans le champ proche de l'antenne, il peut arriver qu'un modèle simple de propagation monopolaire ne suffise pas à décrire le rayonnement de certaines sources. L'enrichissement du dictionnaire avec un modèle complexe de rayonnement fait l'objet du chapitre 4.

Chapitre 4

Localisation et identification de sources complexes

Une source en champ lointain d'une antenne rayonne sur celle-ci un front d'onde plan. Lorsque l'antenne est proche de la source, dans la zone de diffraction de Fresnel, elle voit cette dernière sous un angle solide grand. Dans ce cas, pour une source de rayonnement complexe, la variation géométrique du front d'onde sur l'antenne est importante. Or, la localisation précise d'une source dépend du modèle de propagation utilisé. Ce modèle doit décrire la forme complexe du front d'onde qui atteint l'antenne. Il est donc nécessaire d'enrichir le modèle monopolaire de propagation utilisé auparavant en construisant un dictionnaire qui décrit la complexité des sources à localiser. La décomposition de la source dans ce dictionnaire devrait permettre d'identifier son rayonnement. Pour cela on utilise le formalisme classique des harmoniques sphériques que l'on décrit dans une étape préliminaire. On adapte alors les algorithmes de résolution parcimonieuse à un modèle structuré de parcimonie. On illustre les possibilités de reconstruction de la méthode dans un problème simulé de localisation dans un plan source. On applique finalement la méthode au problème d'identification de directivité de sources grâce à l'utilisation d'antennes tri-dimensionnelles.

4.1 Décomposition en harmoniques sphériques

Plutôt que la géométrie plane ou cylindrique, la géométrie sphérique fournit un développement complet des fronts d'ondes qui nous permet de mieux les décrire. Dans le système de coordonnées sphériques (O, r, Ω) , où $\Omega \equiv (\theta, \phi)$ définies figure 4.1, l'équation d'ondes de d'Alembert s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

y est la pression enregistrée au point (r, θ, ϕ) . L'équation 4.1 est, par exemple, développée par Williams dans [Wil99]. Les résultats qui en découlent sont tirés du même ouvrage. La

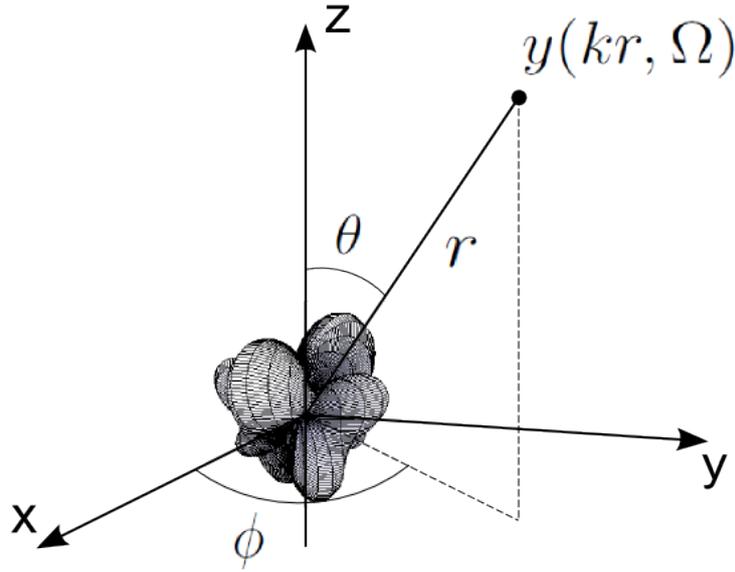


FIGURE 4.1 – Système de coordonnées pour la décomposition en harmoniques sphériques de sources complexes

solution générale est :

$$y(kr, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{q=-l}^l (A_{lq}(k)h_l^{(1)}(kr) + B_{lq}(k)h_l^{(2)}(kr))Y_l^q(\Omega) \quad (4.2)$$

où le terme de dépendance temporelle $e^{-i\omega t}$ est implicite. $Y_l^q(\cdot)$ désigne l'harmonique sphérique d'ordre l et de degré q , dont l'expression est donnée par :

$$Y_l^q(\Omega) \equiv \sqrt{\frac{(2l+1)(l-q)!}{4\pi(l+q)!}} P_l^q(\cos\theta) e^{iq\phi} \quad (4.3)$$

Les harmoniques sphériques (SH) décrivent le comportement angulaire des ondes. $P_l^q(\cdot)$ sont les polynômes orthogonaux de Legendre. $h_l^{(1)}(\cdot)$ et $h_l^{(2)}(\cdot)$ sont les fonctions sphériques de Hankel d'ordre l . Elle décrivent la propagation radiale des ondes. Dans l'équation 4.2, on voit apparaître deux termes. Le premier dépendant de

$$h_l^{(1)}(kr) \propto e^{jkr} \quad (4.4)$$

indique des ondes extérieures rétrogrades, tandis que le deuxième, dépendant de

$$h_l^{(2)}(kr) \propto e^{-jkr} \quad (4.5)$$

indique des ondes propagatives. En conditions de champ libre, la pression y au point d'échantillonnage (r, Ω) engendrée par des sources acoustiques s'écrit :

$$y(kr, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{q=-l}^l x_n^q(k)h_l(kr)^{(2)}Y_l^q(\Omega) \quad (4.6)$$

Les produits $h_l(kr)^{(2)}Y_l^q(\Omega)$, $l = 1 \dots \infty$ et $q = -l \dots l$ sont, dans la suite, identifiés comme les modes SH de l'équation des ondes. $x_l^q(k)$ sont les coefficients du développement en SH qui permet de décomposer une source complexe en fonctions élémentaires de rayonnement. Remarquons que lorsque l'on échantillonne sur la sphère unité de rayon $r = 1$ le champ rayonné par une source ponctuelle en O centre du repère, l'équation 4.6 devient :

$$y(k, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{q=-l}^l x_n^q(k) Y_l^q(\Omega) \quad (4.7)$$

Cette expression correspond à la transformée sphérique inverse de Fourier [DH94] dans le domaine discret. Les harmoniques sphériques sont des fonctions spatialement périodiques dont la somme pondérée permet de reconstruire exactement un signal. La décomposition d'une source en harmoniques sphériques est l'équivalent en 3 dimensions spatiales de la décomposition en sinusoides d'un signal temporel.

L'expression 4.6 est similaire à une décomposition de la source en multipôles. Les multipôles sont construits à partir de distributions de points sources omnidirectionnels infiniment proches de même amplitude mais de phases opposées. On peut associer les modèles multipolaires à des phénomènes physiques pour mieux les comprendre. Par exemple, un flux de masse ponctuelle est décrit par un modèle monopolaire qui correspond à l'ordre 0 de la décomposition en harmoniques sphériques. C'est le modèle employé pour la localisation de sources omnidirectionnelles. Une injection de force locale obéit à un modèle dipolaire qui correspond aux fonctions d'ordre 1 de la décomposition SH (cf. Annexe B, figure B.2).

4.2 Modélisation du problème de localisation de sources complexes par parcimonie structurée

On rappelle que l'on cherche à localiser des sources parmi N positions possibles (r_n, Ω_n) d'une grille 2D ou 3D de points prédéfinie. Le champ acoustique rayonné est échantillonné en M points (r_m, Ω_m) . La modélisation du problème de localisation de sources simples est adapté à des sources complexes en insérant le modèle de décomposition en harmoniques sphériques pour chaque point source potentiel. Pour chaque point (r_n, Ω_n) , l'équation 4.6 peut être ré-arrangée sous forme matricielle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}_n \mathbf{x}_n \quad (4.8)$$

où \mathbf{y} , le vecteur des pressions mesurées de dimensions $M \times 1$ s'écrit :

$$\mathbf{y} = [y(r_1, \Omega_1) \dots y(r_m, \Omega_m) \dots y(r_M, \Omega_M)]^T \quad (4.9)$$

On considère que la réponse des microphones est omnidirectionnelle. La dépendance en k est omise pour plus de simplicité. Pour des raisons pratiques, le modèle de l'équation 4.6

sera limité à l'ordre L . Les coefficients d'ordres supérieurs sont supposés négligeables. Les mesures de pression sont donc approximées par une somme finie :

$$y(kr, \Omega) = \sum_{l=0}^L \sum_{q=-l}^l x_n^q(k) h_l(kr)^{(2)} Y_l^q(\Omega) \quad (4.10)$$

On cherche alors à estimer le vecteur des coefficients du développement SH de dimensions $(L+1)^2 \times 1$ qui s'écrit :

$$\mathbf{x}_n = [(x_0^0)_n \ (x_1^{-1})_n \ \dots \ (x_l^q)_n \ \dots \ (x_L^L)_n]^T \quad (4.11)$$

La matrice de transfert correspondante \mathbf{A}_n de dimensions $M \times (L+1)^2$ est définie par :

$$\mathbf{A}_n = [(\mathbf{a}_0^0)_n \ \dots \ (\mathbf{a}_l^q)_n \ \dots \ (\mathbf{a}_L^L)_n]^T \quad (4.12)$$

où

$$(\mathbf{a}_l^q)_n = [h_l(r_{1n}) Y_l^q(\Omega_{1n}) \ \dots \ h_l(r_{Mn}) Y_l^q(\Omega_{Mn})]^T \quad (4.13)$$

Les vecteurs $(\mathbf{a}_l^q)_{n=1\dots N}$ correspondent aux fonctions de rayonnement élémentaires, que l'on appelle "atomes". Lorsque l'on prend en compte le jeu complet de points sources potentielles, l'équation (4.8) devient :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (4.14)$$

où la matrice \mathbf{A} de dimensions $M \times N(L+1)^2$, aussi appelée "dictionnaire", est la concaténation des sous-matrices \mathbf{A}_n , telle que :

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \ \dots \ \mathbf{A}_n \ \dots \ \mathbf{A}_N] \quad (4.15)$$

et le vecteur source de dimensions $N(L+1)^2 \times 1$ est composé des coefficients SH pour chaque point de la grille de reconstruction $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_n \ \dots \ \mathbf{x}_N]^T$.

4.3 Adaptation des algorithmes de reconstruction parcimonieuse

Le modèle de parcimonie adopté est structuré. On admet la parcimonie de \mathbf{x} en terme de nombre de sources, mais on ne fait aucune hypothèse quant à la parcimonie de chaque famille de coefficients SH \mathbf{x}_n .

4.3.1 Groupe OMP

Le vecteur \mathbf{x} , de par sa construction, est parcimonieux par blocs. Les coefficients des harmoniques sphériques sont regroupés par blocs \mathbf{x}_n pour chaque position potentielle n de source. Dans ce cas, l'*a priori* de parcimonie est sur le nombre de blocs. Dans OMP, l'étape de sélection des atomes varie. Une solution naïve est de calculer la norme des produits

scalaires du résidu avec les atomes d'un même bloc, pour chaque bloc n . Le bloc pour lequel cette norme est maximale est sélectionné. Sommer des produits scalaires sur des atomes non normés n'a pas de sens. Bien que l'on ait intérêt à normer les atomes, une simulation simple montre que ce n'est pas suffisant et qu'il est nécessaire de les orthogonaliser. Par exemple, on simule l'antenne de la figure 3.8 avec le même système de coordonnées. On fait rayonner un dipole suivant l'axe vertical, c'est à dire suivant l'axe y au point de coordonnées $(0,1,2)$. Ce dipole s'écrit comme la somme $j(Y_1^{-1} + Y_1^1)$. La figure 4.2 montre l'allure, suivant l'axe y , de la projection du vecteur mesure \mathbf{y} sur les atomes normalisés a) et sur les atomes orthogonalisés b). On restreint l'ordre du dictionnaire à l'ordre 1. Sur la figure a) on illustre également les contributions de chaque composante SH. On voit que les composantes monopolaires prédominent (\mathbf{Y}_1^0 est en effet similaire à \mathbf{Y}_0 dans le plan xy) ce qui fausse l'estimation du maximum et donc la localisation de la source. Le maximum est atteint à la bonne position dans le cas d'atomes orthogonalisés (cf. figure b). On calculera donc la norme de la projection orthogonale du résidu du signal sur l'espace

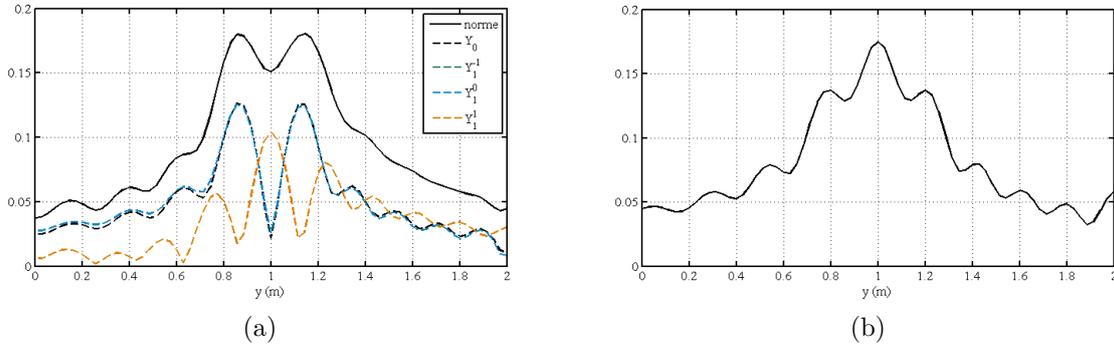


FIGURE 4.2 – Comparaison de la projection du signal \mathbf{y} sur les atomes normalisés (a) et de la norme de la projection sur les atomes orthogonalisés (b)

engendré par les atomes d'un même bloc. Pour se faire, on calcule la décomposition QR de chaque sous-matrice \mathbf{A}_n de telle sorte que $\mathbf{A}_n = \mathbf{Q}_n \mathbf{R}_n$. On modifie l'étape de sélection des atomes de l'algorithme OMP en sélectionnant le bloc le mieux corrélé au résidu $\mathbf{r}^{(i)}$ à la $i^{\text{ème}}$ itération :

$$j^{(i)} = \arg \max_n \|\mathbf{Q}_n^H \mathbf{r}^{(i)}\|_2 \quad (4.16)$$

L'algorithme ainsi obtenu est nommé groupe OMP et référencé dans la littérature sous le nom BOMP (Block OMP) [EKB10]. Les étapes suivantes de l'algorithme sont identiques à celle de OMP décrit dans la section 1.2.2.2.

4.3.2 Groupe BPDN

L'adaptation de la problématique BPDN se fait en adoptant une norme mixte sur le vecteur source \mathbf{x} . On minimise la norme ℓ_1 de \mathbf{x} dans lequel la minimisation de la norme ℓ_2 de chaque bloc \mathbf{x}_n correspondant au groupe des coefficients SH est réalisée. De la même manière que pour OMP, la famille des coefficients SH au sein de chaque bloc n

doit être orthogonalisée. En utilisant la décomposition QR, on veut résoudre le problème $\mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{x}$. On construit les matrices \mathbf{Q} et \mathbf{R} comme la concaténation respectivement des \mathbf{Q}_n et \mathbf{R}_n . En posant $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{R}\mathbf{x}$, le problème de minimisation devient :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{x}}} \sum_{n=1}^N \|\tilde{\mathbf{x}}_n\|_2 \quad \text{tel que} \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}}\|_2 \leq \varepsilon \quad (4.17)$$

On retrouve le vecteur \mathbf{x} avec les coefficients SH correctement estimés en résolvant le problème inverse

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}\tilde{\mathbf{x}} \quad (4.18)$$

\mathbf{R} étant une matrice carrée triangulaire supérieure, elle est en effet inversible.

4.3.3 Résultats expérimentaux

Afin d'apprécier l'utilité d'un dictionnaire de rayonnement complexe de source, nous procédons dans un premier temps à des simulations de sources complexes dans un plan de reconstruction. L'antenne plane utilisée est l'antenne semi-circulaire décrite figure 3.8 rapprochée à 3m de l'antenne. On simule une source dipolaire qui rayonne à 1kHz au point de coordonnées (0.5, 1)m. Ce dipole est construit comme la somme des SH d'ordre 1 $j(Y_1^{-1} + Y_1^1)$. La figure 4.3 (a) montre le résultat de l'estimation du dipole en utilisant un dictionnaire simple monopolaire. De la même manière que le "beamforming" (BF) fait apparaître deux lobes secondaires correspondant à de potentiels monopoles, OMP trouve deux sources écartées de la position d'origine. En optimisant le dictionnaire avec des fonctions de rayonnements complexes, groupe OMP identifie une source parfaitement positionnée (cf. figure (b)). La figure (c) illustre l'estimation des coefficients du sous-vecteur source \mathbf{x}_s correspondant à la localisation du dipole au point s . Les coefficients simulés et ceux estimés se superposent. Notons que la source est simulée sur un point du maillage. Dans le cas contraire, l'écart entre la source et le point du maillage localisé peut engendrer l'apparition de composantes SH "fantômes" qui viennent fortement perturber l'identification. Ce problème sera développé plus en détail dans la section suivante. Le dictionnaire est ici limité à l'ordre 2. Remarquons que dans le cas de notre simulation, en deux dimensions dans le plan xy où se trouvent les sources, et à une telle distance de l'antenne, certaines composantes SH sont colinéaires vues de l'antenne. Du point de vue du dictionnaire \mathbf{A} , cela implique une forte corrélation d'ensembles d'atomes correspondant à des ordres différents. Si on appelle $(\mathbf{a}_l^q)_n$ l'atome correspondant au mode d'ordre l et de degré q pour le point de grille n , les vecteurs $(\mathbf{a}_0)_n$, $(\mathbf{a}_1^0)_n$, et $(\mathbf{a}_2^0)_n$ sont fortement corrélés. Il en est de même pour les vecteurs $(\mathbf{a}_1^{-1})_n$ et $(\mathbf{a}_2^{-1})_n$, ainsi que pour $(\mathbf{a}_1^1)_n$ et $(\mathbf{a}_2^1)_n$. Pour s'en convaincre, l'allure explicite des harmoniques sphériques est illustré en Annexe B. L'orthogonalisation de ces composantes dans le dictionnaire pose problème pour la localisation. Il est donc important de retirer du dictionnaire les composantes $(\mathbf{a}_1^0)_n$, $(\mathbf{a}_2^0)_n$, $(\mathbf{a}_2^{-1})_n$, et $(\mathbf{a}_2^1)_n$ pour une identification optimale.

On s'inspire de l'étape de sélection des atomes par groupe OMP pour proposer une variante de beamforming avec un dictionnaire de rayonnement complexe. Par analogie

avec groupe OMP, on l'appelle "groupe BF" :

$$\hat{x}_{gBF} = \|\mathbf{Q}_n^H \mathbf{R} \mathbf{Q}_n\|_2 \quad (4.19)$$

où \mathbf{R} est la matrice de covariance mesurée. On illustre sur la figure (c) l'estimation de $\hat{\mathbf{x}}_{gBF}$. Bien que le lobe principal soit très large, le maximum est atteint à l'emplacement de la source.

	(a)	(b)	(c)
Sources	Dipole	Dipole	Dipole
Méthode	OMP+BF	Groupe OMP+BF	Estimation OMP des coeffs SH
Fréquence	1KHz	1KHz	1KHz
	(d)	(e)	(f)
Sources	Monopole+dipole	Dipole+quadripole	Dipole+quadripole
Méthode	Groupe OMP+BF	Groupe OMP+BF	Groupe OMP+BF
Fréquence	1KHz	1KHz	6KHz
	(g)	(h)	(i)
Sources	Monopole+dipole	Dipole+quadripole	Dipole+quadripole
Méthode	Groupe BPDN	Groupe BPDN	Groupe BPDN
Fréquence	1KHz	1KHz	6KHz

TABLE 4.1 – Légende de la figure 4.3

Sur les figures 4.3(d),(e), et (f) on illustre les estimations par groupe OMP et groupe BF pour plusieurs configurations de sources différentes. On simule deux sources dans des conditions idéales de champ libre, s_1 au point (-0.5, 1.5)m et s_2 au point (0.5, 1)m. La distance entre les deux sources est telle que l'on ait aucun biais dans la localisation si s_1 et s_2 sont deux monopoles. Sur la figure d, s_1 est un monopole et s_2 un dipole. Ils émettent à une fréquence de 1kHz. Sur la figure (e), s_1 est un quadripole et s_2 le même dipole que précédemment toujours à 1kHz. Enfin sur la figure (f), s_1 est un quadripole et s_2 un dipole. Ils rayonnent à 6kHz. Les configurations des figures (g), (h), et (i) sont respectivement les mêmes que (d), (e), et (f). Les sources sont cependant estimées avec groupe BPDN. Groupe BF réussit à localiser simultanément un monopole et un dipole là où échoue la simple sommation des "sous-beamformers" correspondant chacun à une composante SH et proposé par Bouchard *et Al* [BHB09]. La sommation est justifiée dans le cas où les composantes SH sont correctement estimées, ce qui n'est pas réalisable. La sommation au carré de "sous-beamformers" dont les composantes SH sont orthogonalisés 2 à 2 est beaucoup plus efficace. Cette méthode est la base de sélection de groupe OMP qui montre une localisation parfaite dans le cas de sources plus complexes (cf. figure (d)) et en hautes fréquences (cf. figure (f)). Groupe BPDN offre les même performances que groupe OMP. Les maxima des lobes visibles correspondent à la position exacte des sources. De la même manière qu'en utilisant BPDN pour la localisation de sources simples, son pouvoir de résolution augmente avec la fréquence (cf. figure (i)).

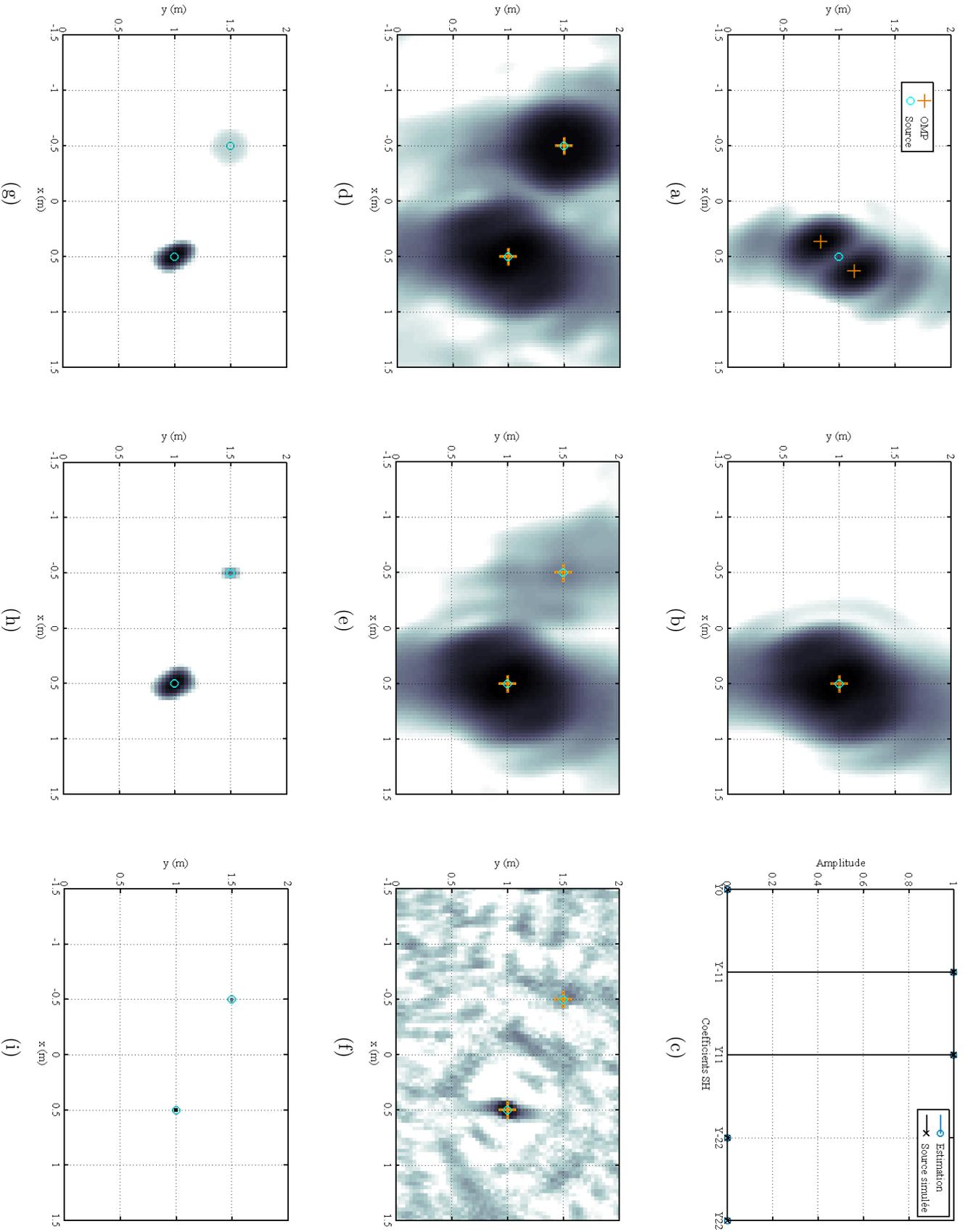


FIGURE 4.3 – Localisation de sources complexes avec plusieurs méthodes. Légende de la figure dans le tableau 4.1. Niveau de couleur de 20dB de dynamique : noir = 0dB, blanc = -20dB

La méthode de localisation de sources complexes par groupe OMP a pu être validée expérimentalement dans une configuration particulière. On dispose deux haut-parleurs non bafflés sur un plan à 5m de l’antenne plane illustré sur la figure 3.9(a). La directivité des haut-parleurs non bafflés, mesurée et illustrée sur la figure 4.15, est de type dipolaire. Les deux haut-parleurs sont orientés différemment. Ils sont indiqués par les chiffres 4 et 5 sur la figure 3.9(b). Les mesures ont été réalisées dans la salle anéchoïque du LNE (Trappes). On utilise ici les 120 micros qui composent l’antenne. La figure 4.4 illustre la comparaison de localisation avec un dictionnaire monopolaire (a) classiquement utilisé, et un dictionnaire complexe limité à l’ordre 2 (b). Les sources sont localisées à une fréquence moyenne de 1300Hz. Sur la figure (a) on montre les résultats obtenus par BF, avec 20dB de dynamique (noir = 0dB, blanc = -20dB) et OMP (croix oranges). Les positions mesurées (donc approximatives) des sources sont indiquées par les ronds bleus. On voit apparaître l’axe du dipole qui se comporte comme deux monopoles proches déphasés de π . L’algorithme OMP est stoppé après 2 itérations. Les deux premières sources sélectionnées correspondent à ces deux monopoles virtuels. Sur la figure (b), on montre les résultats obtenus par groupe OMP et groupe BF. Les sources sont mieux localisées avec un léger biais potentiellement dû aux erreurs de localisation des microphones. Les résultats de simulations sur la pertinence de l’utilisation d’un dictionnaire complexe sont ainsi confirmés par les expériences.

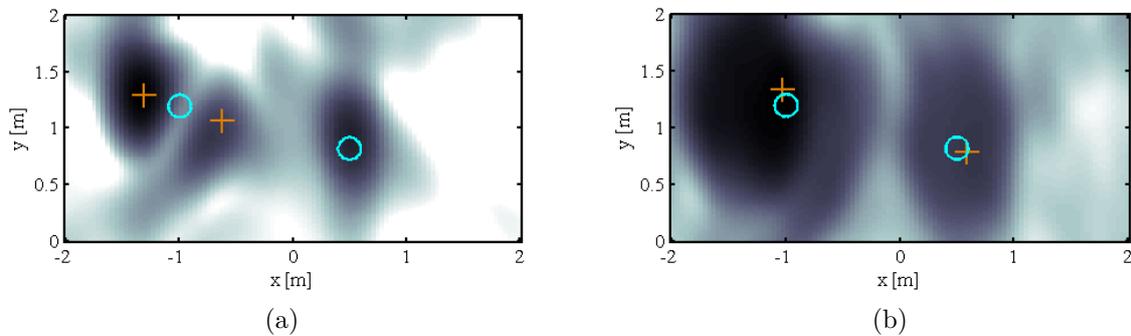


FIGURE 4.4 – Localisation expérimentale de deux sources dipolaires à 1300 Hz par BF et OMP. (a) Dictionnaire monopolaire. (b) Dictionnaire complexe limité à l’ordre 2

Les performances de reconstruction obtenues avec groupe BPDN et groupe OMP sont similaires. Groupe BPDN est cependant plus lent à converger que groupe OMP qui sera préféré dans les applications expérimentales d’identification de directivité présentées dans la section suivante.

4.4 Application à la mesure de directivité 3D par groupe OMP

4.4.1 Motivations

Le diagramme de directivité est une caractéristique importante des sources acoustiques. Par exemple, sa connaissance est essentielle pour l'auralisation [OR05] qui a pour but de reproduire une ambiance acoustique à partir d'un modèle physique de propagation. L'identification complète en 3D de la directivité d'une source nous fournit son modèle de rayonnement. A partir de cette connaissance il est possible de reproduire précisément le champ acoustique rayonné à l'aide d'une antenne de haut-parleurs. Les applications sont multiples. On peut citer l'étude du rayonnement des instruments de musiques pour la synthèse musicale [WM01], la reproduction de champ sonore par WFS (wave field synthesis) [AS12] ou encore la réduction de bruit de structures vibrantes en utilisant le contrôle actif de bruit [MR97]. La directivité du son rayonné par la structure est dans ce cas utilisée pour réduire plus efficacement l'émission de bruit.

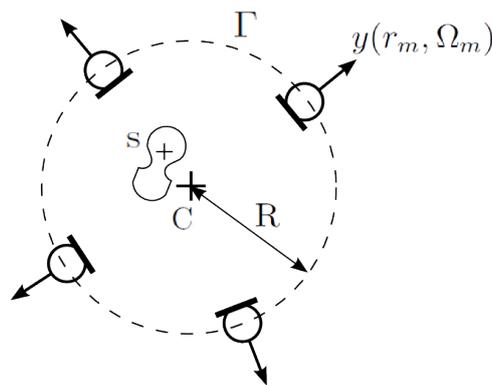


FIGURE 4.5 – Configuration d'un dispositif de mesure réparti sur la surface Γ d'une sphère de rayon R pour la mesure de directivité d'une source de centre acoustique s

Une antenne sphérique de microphones est souvent utilisée [Raf05] afin de mesurer la directivité d'une source. Il est possible soit de construire un réseau sphérique *in situ* de micros, soit d'obtenir ce réseau à partir d'un système de microphones en rotation.

Considérons une source de centre acoustique s placée à l'intérieur d'une antenne sphérique de rayon R comme illustrée sur la figure 4.5. Le concept de centre acoustique a été explicité par Jacobsen [JFR04]. Il est défini comme le point apparent à partir duquel les ondes divergent créant le rayonnement de la source. Dans le cas où s est confondu avec le centre C de la sphère, une mesure sur-échantillonnée et régulièrement distribuée sur la surface sphérique Γ permet d'obtenir directement le diagramme de directivité de la source. Lorsque s est placé arbitrairement à l'intérieur de la sphère, une analyse en harmoniques sphériques à partir des mesures de pression sur Γ permet d'extraire la directivité de la source [WA80]. Il est cependant nécessaire d'avoir une connaissance exacte de la position de s . Le problème à inverser est celui de l'équation 4.8 : $\mathbf{y} = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s$. Les coefficients SH

peuvent être estimés en résolvant l'équation au sens des moindres carrés. On obtient :

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{A}_s^\dagger \mathbf{y} \quad (4.20)$$

† indique la pseudo-inverse de Moore-Penrose. En pratique, l'estimation des coefficients SH dans \mathbf{x}_s est affectée par plusieurs types d'erreurs : troncature à l'ordre L du modèle, aliasing spatial, mauvais conditionnement de la matrice \mathbf{A}_s , bruit de mesure, et erreur de positionnement de s . Alors que certaines conditions sur le nombre de micros à utiliser et sur l'ordre L du modèle à restreindre permettent de s'affranchir des problèmes d'aliasing et de mauvais conditionnement, la mauvaise connaissance de la position de s peut avoir des effets néfastes sur l'identification des coefficients SH. Des travaux récents se sont attachés à trouver des solutions pour ré-aligner correctement le centre acoustique d'une source à l'intérieur de l'antenne. Rafaely [Raf10] a proposé des mesures de déviation de centre acoustique décrites par Deboy et Zotter [DZ10] et utilisées expérimentalement par Hagai et Al [HPVR11]. Elles évaluent l'énergie des composantes spectrales de \mathbf{x}_s estimées pour chaque position *a priori* de s . En effet, lorsque la source est décentrée, des composantes SH d'ordres élevés apparaissent. La position de s qui minimise l'énergie des coefficients d'ordres élevés correspond à sa position optimale. Toutefois, lorsqu'une source a une composante principale de rayonnement dipolaire, ou d'ordre plus élevé, ces mesures ne marchent plus car des composantes d'ordres inférieurs apparaissent, en particulier la composante monopolaire.

Une méthode alternative permettant la mesure de directivité de sources est l'holographie acoustique sphérique de champ proche [Wil99]. Pasqual et Martin [PM12] ont simulé cette méthode pour reconstruire le champ de vitesses vibratoires engendré par une source primaire sur une sphère source de rayon R centrée sur s . Le champ vibratoire est obtenu par rétro-propagation du champ de pressions enregistrés sur une antenne sphérique de microphones de rayon $r > R$, l'hologramme. Le problème est résolu par méthode des moindres carrés régularisée. Dans cette étude, la position relative de la sphère source par rapport à l'hologramme doit être précisément connue ou estimée pour obtenir des résultats satisfaisants.

Comme le montrent les études citées précédemment, l'enjeu majeur d'une estimation de directivité est la connaissance précise du centre acoustique de la source. Une idée originale est de traiter le problème d'identification de directivité de source comme un problème de localisation du centre acoustique en utilisant l'algorithme groupe OMP. Les composantes SH qui décrivent la directivité de la source localisée sont estimées simultanément. Dans cette section, les performances de cette méthode sont décrites par des simulations et des expériences en milieu réel.

4.4.2 Évaluation numérique des performances de groupe OMP pour l'identification de directivité

On simule une antenne sphérique 3D avec une distribution aléatoire de microphones sur toute la sphère (cf. figure 4.6). On évalue les performances d'identification en fonction

d'un certain nombre de paramètres. La complexité de la source est limitée à l'ordre L . On travaille avec des signaux harmoniques. Ils sont simulés selon le modèle de l'équation 4.10 en champ libre. On définit un maillage de points candidats à l'intérieur de l'antenne. On simule le centre acoustique de la source sur l'un de ces points. Un critère objectif à évaluer pour analyser la performance de la méthode est la corrélation des coefficients réels avec ceux estimés. Le coefficient de corrélation est défini par :

$$C = \frac{|\hat{\mathbf{x}}^H \mathbf{x}|}{\|\hat{\mathbf{x}}\| \|\mathbf{x}\|} \quad (4.21)$$

où \mathbf{x} et $\hat{\mathbf{x}}$ sont respectivement les vecteurs composés des coefficients SH de la source calibrée et de ceux estimés par reconstruction parcimonieuse. Il vaut 1 quand l'estimation égale la calibration. On notera ε l'erreur de localisation du centre acoustique.

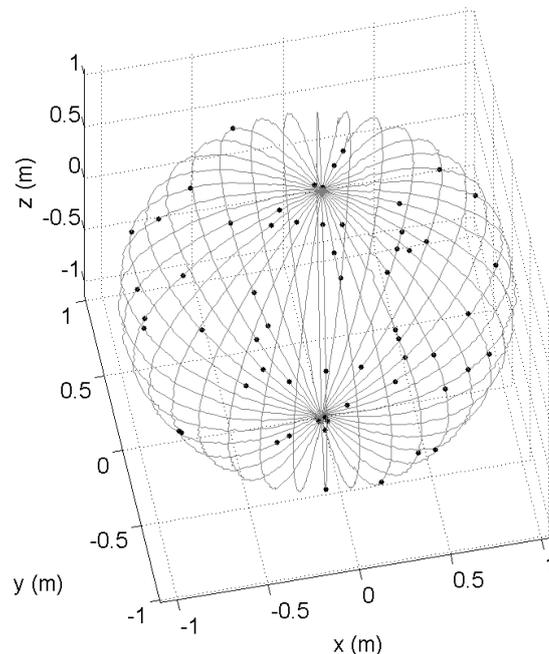


FIGURE 4.6 – Antenne sphérique aléatoire. Les points noirs correspondent aux micros

4.4.2.1 Nombre de microphones nécessaires

Bien que les harmoniques sphériques forment une famille orthogonale de fonctions (cf. Annexe B), dans notre configuration de mesure, la prise en compte des fonctions de Hankel qui décrivent le comportement radial du champ acoustique rendent la famille de vecteurs SH redondante. Afin de pouvoir les séparer, il est nécessaire de les orthogonaliser au sein d'un même bloc de vecteurs directionnels assigné à une potentielle source n . Or on ne peut pas orthogonaliser plus de vecteurs que la dimension de l'espace, c'est-à-dire le

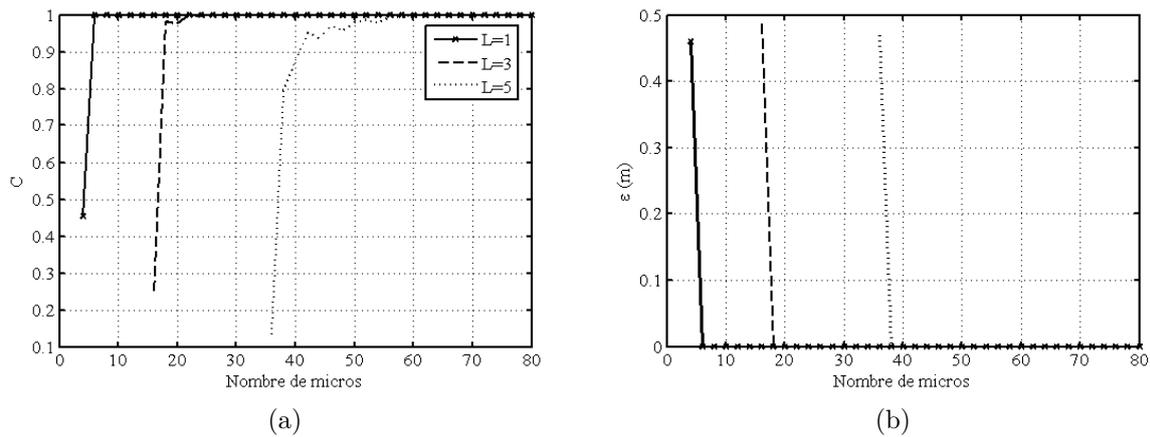


FIGURE 4.7 – Qualité de l’identification d’une source d’ordre L en fonction du nombre de microphones. Moyenne sur 25 tirages aléatoires des micros réparties sur l’antenne sphérique (a) Coefficient de corrélation (b) Erreur de localisation

nombre de microphones. Il est donc nécessaire d’utiliser au moins autant de microphones que de composantes SH. Dans le cas où le modèle de rayonnement en SH est limité à l’ordre L , le nombre de microphones à utiliser est $M \geq (L + 1)^2$. Les distributions aléatoires de micros ont montré de bonnes performances pour la localisation de sources. On teste les performances de groupe OMP avec une distribution aléatoire des micros sur une surface sphérique. Les résultats sont moyennés sur 25 tirages aléatoires. On simule un RSB raisonnable de 40dB. La figure 4.7 montre la qualité de l’identification (a) et l’erreur de localisation associée (b) en fonction du nombre de micros pour trois ordres différents. On remarque que, pour chaque ordre, la localisation, et donc l’identification, échouent uniquement lorsque le nombre de micros est égale au nombre de composantes SH. La condition sur le nombre de microphones est donc imposée par l’inégalité stricte $M > (L + 1)^2$. Cependant, lorsque l’ordre de la source est élevé, on aura intérêt à prendre un nombre plus important de micros pour garantir une bonne identification ($C > 90\%$). Dans ces conditions, on s’affranchit des problèmes de repliement spatiaux explicités par Rafaely [Raf05, RWB07]. Dans ces études il propose des stratégies d’échantillonnage qui nécessitent plus de microphones. Un échantillonnage de la sphère avec un pas régulier en azimuth et en élévation impose par exemple un nombre de micros $M > 4(L + 1)^2$. D’autres stratégies d’échantillonnage sont à étudier comme l’échantillonnage uniforme où la distance entre les micros voisins est la même. Dans les simulations suivantes, on utilise un nombre suffisant de microphones $M \gg (L + 1)^2$.

4.4.2.2 Effet du conditionnement des sous-matrice \mathbf{A}_n

Dans la résolution classique des moindres carrés, un mauvais conditionnement de la matrice \mathbf{A}_n peut survenir lorsque les mesures sont bruitées. Les oscillations importantes

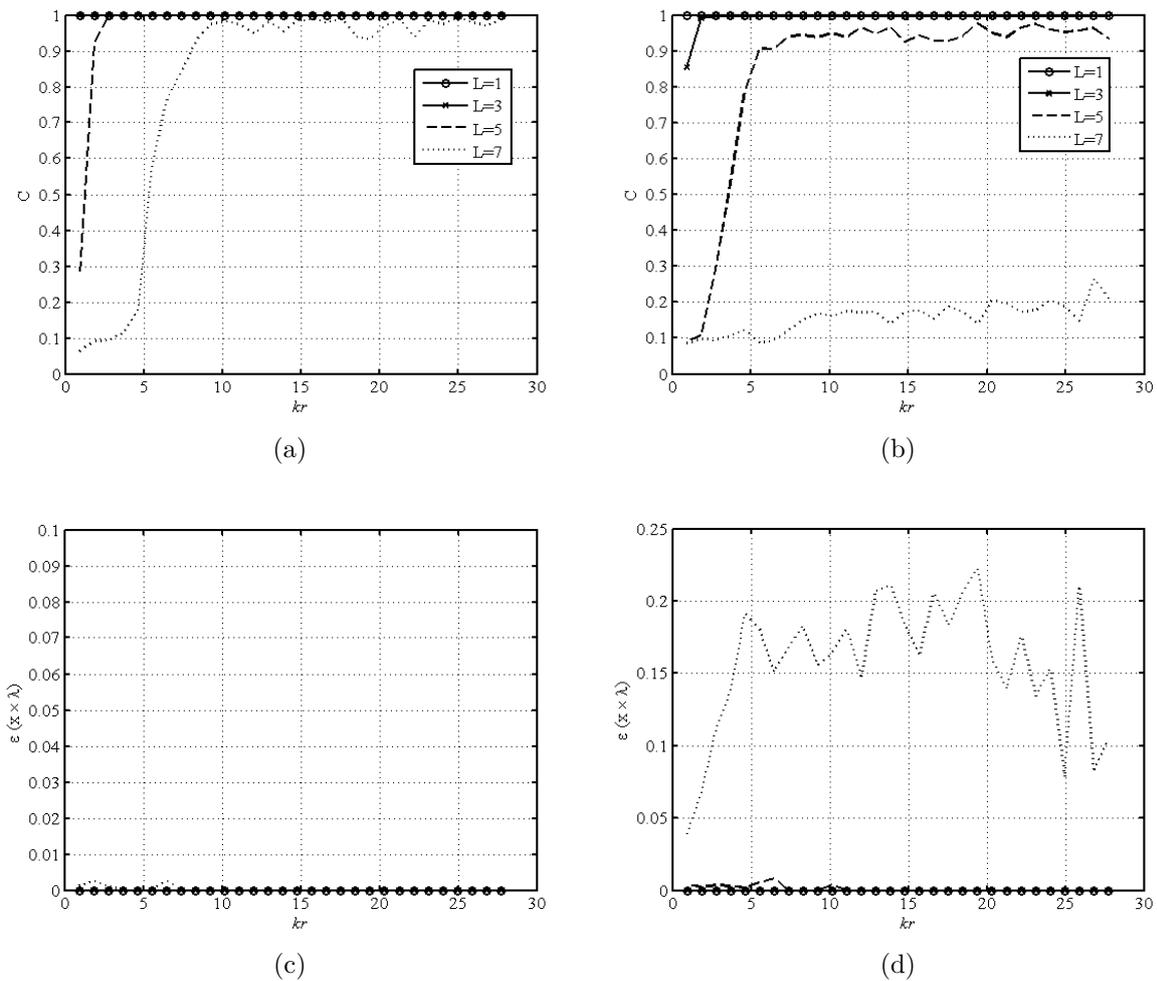


FIGURE 4.8 – Performances de groupe OMP en fonction du produit kr du SNR et de l'ordre de la source (a) Coefficient de corrélation SNR = 60dB (b) Coefficient de corrélation SNR = 20dB (c) Erreur de localisation SNR = 60dB (d) Erreur de localisation SNR = 20dB

des fonctions de Hankel d'ordres élevés en sont la cause [KSC99]. Elles engendrent des amplifications d'erreurs significatives. Cependant il a été montré que le problème peut être évité en restreignant l'ordre tel que $L \lesssim kr$ où r est le rayon de l'antenne (kr est un produit adimensionnel).

Les simulations illustrés sur la figure 4.8 permettent le même type de conclusion avec l'estimation par groupe OMP. Sur les figures (a) et (b) on montre la qualité de reconstruction, identifiée par le coefficient de corrélation C , en fonction du produit kr pour deux RSB différents, 60dB et 20dB. Les ordres $L = 1, 3, 5, 7$ sont étudiés. Les figures (c) et (d) montrent respectivement les erreurs de localisation associées ε en fonction de la longueur d'onde λ . Avec un RSB raisonnable (figures a et c), la source est toujours localisée mais on voit que l'identification échoue lorsque $L > kr$. En basse fréquence, il est donc préférable de réduire l'ordre d'identification. Les sources d'ordre élevé sont plus sensibles au SNR.

Lorsque que celui-ci est faible (figures b et d) les sources d'ordre élevé (exemple avec $L = 7$ sur la figure d) ne sont plus localisables avec groupe OMP et par conséquent non identifiables.

4.4.2.3 Robustesse aux erreurs de calibration et de localisation des micros

Un important facteur de succès d'identification de source est la précision de la localisation des microphones de mesures. Le problème se pose lorsque l'on réalise le dispositif expérimental. Il est difficile de mesurer précisément la position des microphones dans l'espace 3D. Une erreur de positionnement des micros entraîne un décalage de phase qui peut faire échouer le processus d'identification. La figure 4.9 illustre l'erreur d'identification et l'erreur de localisation associée en fonction de l'erreur de positionnement des micros. Les signaux sont simulés pour une position précise des micros. On construit ensuite la matrice de transfert \mathbf{A} avec une position décalée des micros. Les décalages assignés pour chaque micro sont issus de tirages aléatoires suivant une loi normale dont l'écart type est fonction de λ . La figure 4.9 montre une chute de corrélation pour un taux d'erreur dépendant de l'ordre de la source. Alors qu'à l'ordre 7, aucune erreur ne semble acceptable, une source complexe d'ordre 3 peut être identifiée avec 90% de corrélation jusqu'à des erreurs sur la position des micros pouvant atteindre 14% de la longueur d'onde. Cela signifie que des erreurs de 4cm à 5cm sont acceptable à 1kHz ce qui paraît raisonnable.

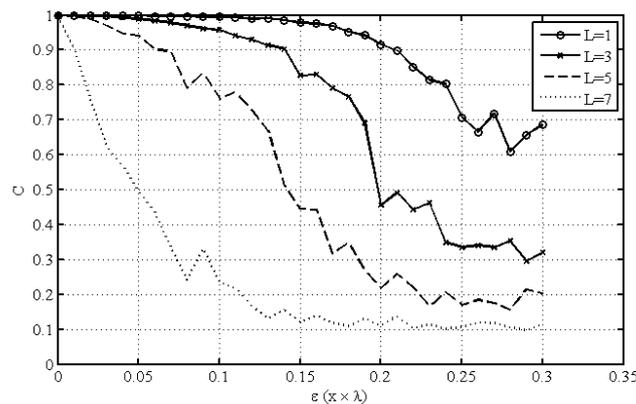


FIGURE 4.9 – Corrélations en fonction de l'écart type ε de l'erreur aléatoire dépendant de la longueur d'onde sur la position des micros. Moyenne sur 50 tirage d'erreurs

Le problème de calibration en amplitude mérite également d'être étudié. La sensibilité des micros de mesures peut ne pas être précisément connue à moins que ces derniers soient re-calibrés avant chaque mesure. Afin de simuler l'erreur sur la sensibilité des micros, on impose une erreur d'amplitude sur chaque signal qui suit une loi normale de moyenne nulle et d'écart-type E que l'on exprime en dB. Sur la figure 4.10, on montre la robustesse de la méthode à une dé-calibration en amplitude des micros. Au delà de l'ordre 5 la méthode est très sensible à la dé-calibration. Pour des sources moins complexes, la dé-calibration en amplitude n'a que peu d'effet sur l'identification. Pour une source d'ordre $L = 3$ des

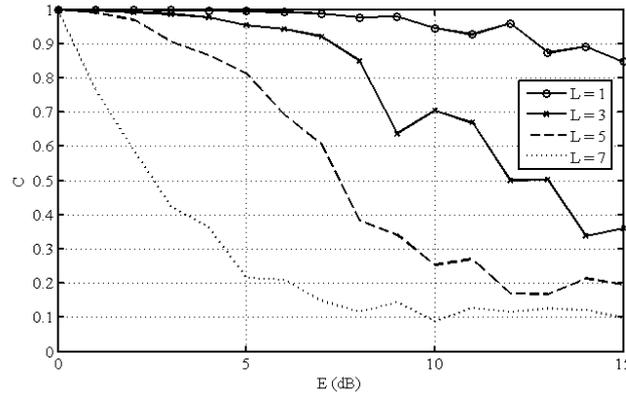


FIGURE 4.10 – Corrélations en fonction de l'écart type E de l'erreur aléatoire sur la sensibilité des micros. Moyenne sur 50 tirage d'erreurs

erreurs de sensibilité allant jusqu'à 7dB sont acceptable ($C > 90\%$). Cela correspond à des taux d'erreur de plus de 100% sur la sensibilité des micros.

4.4.2.4 Effet de l'erreur de localisation

Dans les simulations précédentes, la source à identifier était positionnée sur un point de la grille de localisation. En pratique, le centre acoustique d'une source placée arbitrairement à l'intérieur d'une antenne ne correspondra généralement pas à un point de la grille de sources candidates. La localisation de la source sera alors biaisée. Une étude du décalage de la source par rapport au point localisé permet d'évaluer la résolution de la grille de reconstruction à adopter. On se donne une grille de reconstruction de pas égal à $\lambda/2$. On simule une source dont on déplace le centre acoustique d'une distance δ d'un point de grille. δ est exprimé en fraction de longueur d'onde. La figure 4.11 montre que l'identification d'une source d'ordre élevé $L > 7$ pose problème car l'erreur maximale de localisation autorisée est de 1% de sa longueur d'onde. En revanche, il est encore possible d'identifier une source d'ordre $L = 3$ avec une bonne précision ($C > 90\%$) si la distance δ entre la source réelle et le point du maillage localisé est de l'ordre de $\delta = \lambda/10$. Dans ce cas, un maillage de pas $2 \times \delta = \lambda/5$ est adapté. Notons que pour plus de précision, le maillage peut être raffiné autour de la position localisée.

4.4.2.5 Localisation de deux centres acoustiques

On considère ici le cas d'un objet source suffisamment large pour que l'on puisse distinguer plusieurs centres acoustiques et en séparer les modèles de rayonnement. On restreint l'étude à deux centres acoustiques. Les deux sources sont limitées au même ordre. On sépare les deux sources d'une distance δ fonction de la longueur d'onde. On calcule un coefficient de corrélation pour chaque source identifiée. La figure 4.12 illustre la

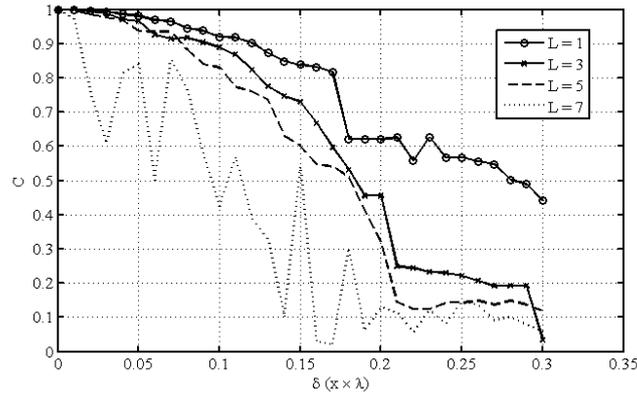


FIGURE 4.11 – Corrélations en fonction de l’erreur δ de localisation de la source. δ est dépendant de la longueur d’onde

variation de la moyenne des deux coefficients de corrélation en faisant varier δ pour deux rayons r d’antenne différents : 1m et 5m. Les faibles valeurs de corrélation correspondent à une erreur de localisation d’une ou des deux sources. Pour un rayon d’antenne donné, le pouvoir de séparation de deux sources diminue avec la complexité de la source. De la même manière que le pouvoir de résolution d’une antenne plane augmente avec son ouverture, on observe que l’utilisation d’une antenne de rayon plus grand permet d’augmenter le pouvoir de résolution. A titre d’exemple, pour une antenne de rayon de 5m, deux sources d’ordre 3 sont correctement séparées et identifiées quand la distance les séparant est de l’ordre de la longueur d’onde. Pour une antenne de rayon 1m, il faut vérifier la condition $\delta > 1.5\lambda$.

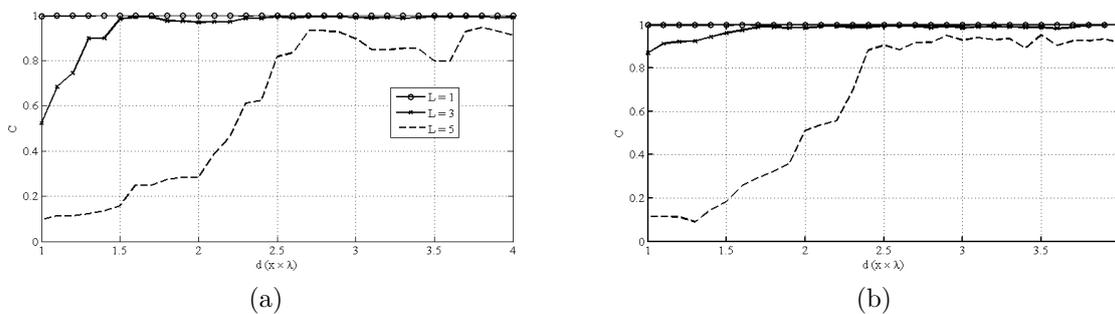


FIGURE 4.12 – Moyenne des coefficients de corrélation calculés pour deux sources séparées de $\delta = f(\lambda)$ avec deux rayons d’antenne différents (a) $r = 1m$ (b) $r = 5m$.

Ces simulations permettent d’évaluer les limites de notre méthode d’identification de directivité par groupe OMP. Il en ressort que la méthode est performante avec un nombre limité de microphones lorsque le dictionnaire SH est restreint à des ordres faibles, typiquement inférieurs à $L = 5$. La méthode est sensible aux erreurs de positionnement des microphones et de localisation des sources, et au rapport signal sur bruit. Cette sensibilité,

qui augmente avec l'ordre de la source, ne pose pas de problèmes pour des ordres faibles si les erreurs sont petites par rapport à la longueur d'onde. Dans la suite, nous évaluons expérimentalement la méthode d'identification de directivité sur deux sources d'ordres limités.

4.4.3 Procédure de calibration des sources

Afin d'évaluer expérimentalement la stratégie d'identification, nous calibrons des sources connues à l'aide d'une antenne circulaire de microphones. Le champ sphérique des pressions mesurées nous donne la vraie directivité de la source. On peut ensuite décomposer ce champ en harmoniques sphériques pour en déterminer les composantes de rayonnement élémentaire. Deux sources basées sur des haut-parleurs standards ont été choisies. La source que l'on note A est un haut-parleur bafflé par un cube en bois. Sa directivité est censée approcher celle d'un monopole. La source B est un haut-parleur nu. On attend que sa directivité approche celle d'un dipôle. Pour la mesure précise de leur directivité, on utilise une antenne de 120 micros répartis régulièrement sur un demi-cercle vertical de 1.1m de rayon. Le dispositif de mesure est présenté sur la figure 4.13. Le diagramme de directivité verticale est donc collecté avec un pas de 1.5 degrés en une seule mesure. Afin d'obtenir la directivité totale en 3D, on ré-itere la mesure sur 36 positions différentes de rotation horizontale de la source. La résolution azimutale est donc de 10 degrés. La procédure de calibration étant réalisée en environnement réverbérant, nous avons recours à la méthode de compression d'impulsion par la technique d'"inter-corrélation généralisée" (développée en annexe A). Pour le calcul de corrélation généralisée nous utilisons comme signal de référence, le signal transmis à la source via un amplificateur : un chirp linéaire d'une durée de 5s dont la fréquence balaie la bande $\Delta f = [50Hz - 10kHz]$. On recale la source de telle manière que la variation entre les temps d'arrivée τ_m sur tous les micros soit minimale. Ils sont obtenus en mesurant les écarts temporels entre le 0 et le premier pics des fonctions d'inter-corrélation généralisées. On considère alors que la source est correctement centrée. L'amplitude réelle est donnée par la valeur du maximum du premier pic. La phase vaut soit zéro soit π selon que le signe du pic soit positif ou négatif. On obtient les amplitudes complexes du champ acoustique échantillonné régulièrement sur une sphère centrée autour de la source. On note que la dépendance fréquentielle de la directivité est perdue avec la méthode de compression d'impulsion. On peut décomposer la directivité obtenue en harmoniques sphériques élémentaires par groupe OMP afin d'en extraire les composantes de rayonnement grâce au modèle de l'équation 4.10.

Les figures 4.14 et 4.15 présentent les directivités complexes mesurées des sources A et B (a) avec leur décompositions en harmoniques sphériques limitées à l'ordre 7 (b) et l'approximation de leur directivité limitée à l'ordre $L = 3$, c'est-à-dire 16 coefficients SH (c). Ces 16 coefficients sont indiqués en bleu sur les figures 4.14 et 4.15 (b). Les directivités approximées sont obtenues en propageant le champ rayonné par les coefficients sur la sphère unité. On observe que la source A a un comportement cardioïde et la source B un comportement dipolaire.

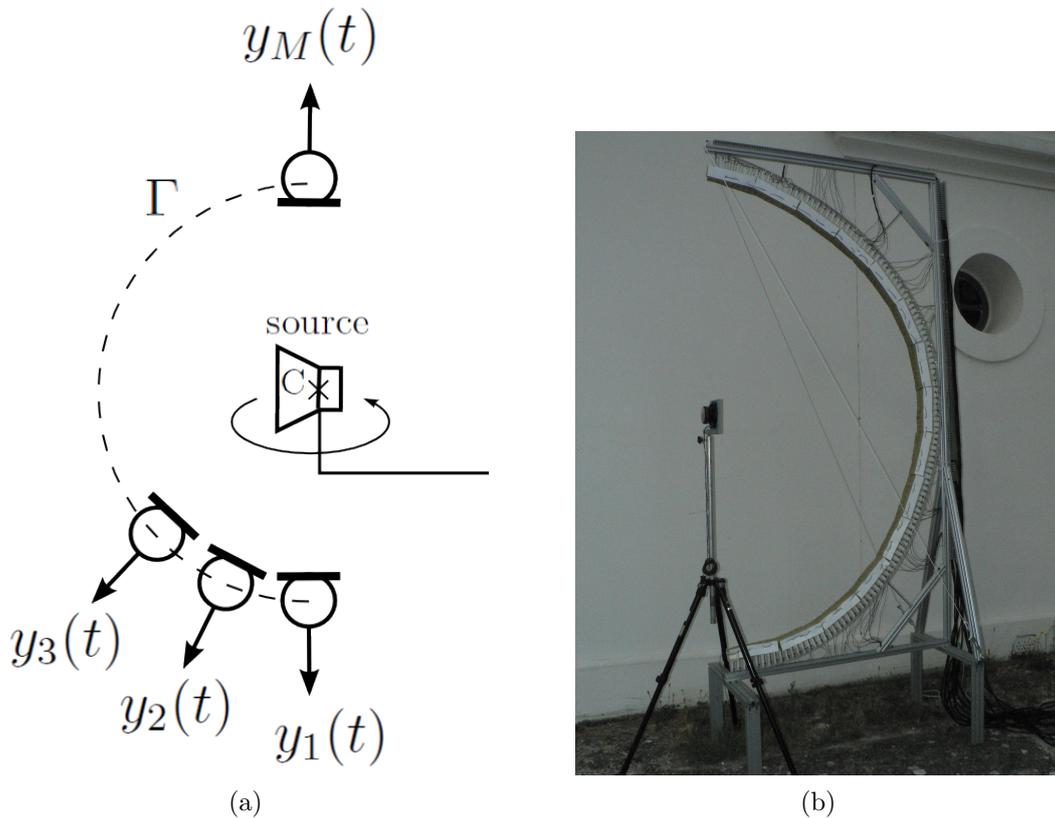


FIGURE 4.13 – a) Dispositif expérimental de mesure de directivité. Les micros sont disposés avec un pas régulier sur un demi-cercle Γ de centre C . La source à mesurer est placée au point C . b) Photo de l’antenne de mesure en environnement réverbérant.

4.4.4 Résultats expérimentaux

Cette section présente des résultats expérimentaux d’identification des sources calibrées A et B. Le dictionnaire de composantes SH est limité à l’ordre 3. Les signaux sont mesurés en environnement réverbérant. Dans la méthode de reconstruction par groupe OMP, la prise en compte de la propagation radiale des ondes avec les fonctions sphériques de Hankel et le processus d’orthogonalisation des atomes permet d’échantillonner le champ acoustique sur n’importe quelle surface. Il nous est donc possible d’utiliser une antenne de type cubique, plus pratique à construire qu’une antenne sphérique. Les résultats obtenus avec ces deux types d’antenne sont illustrés.

4.4.4.1 Antenne sphérique

On utilise les données mesurées lors de la calibration avec l’antenne circulaire. La source est placée le mieux possible au centre de l’antenne. La rotation azimutale de la source équivaut alors à la rotation de l’antenne circulaire autour de celle-ci. Tout se passe donc comme si la source était placée au centre O d’une sphère de micros. On sélectionne une quantité aléatoire des micros telle que $M > (L + 1)^2 = 16$.

Les signaux sont construits à partir des fonctions d’inter-corrélations mesurées par la

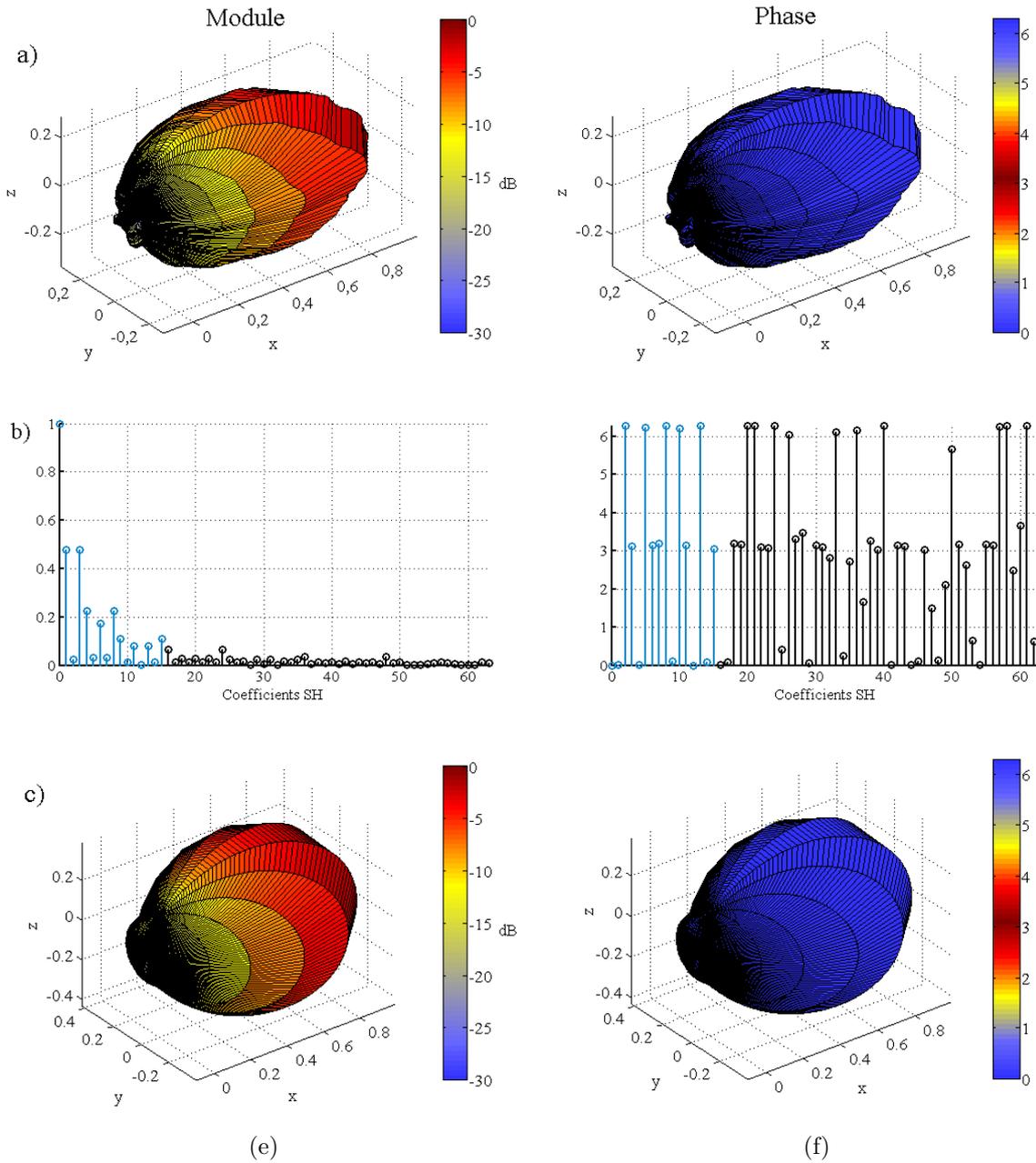


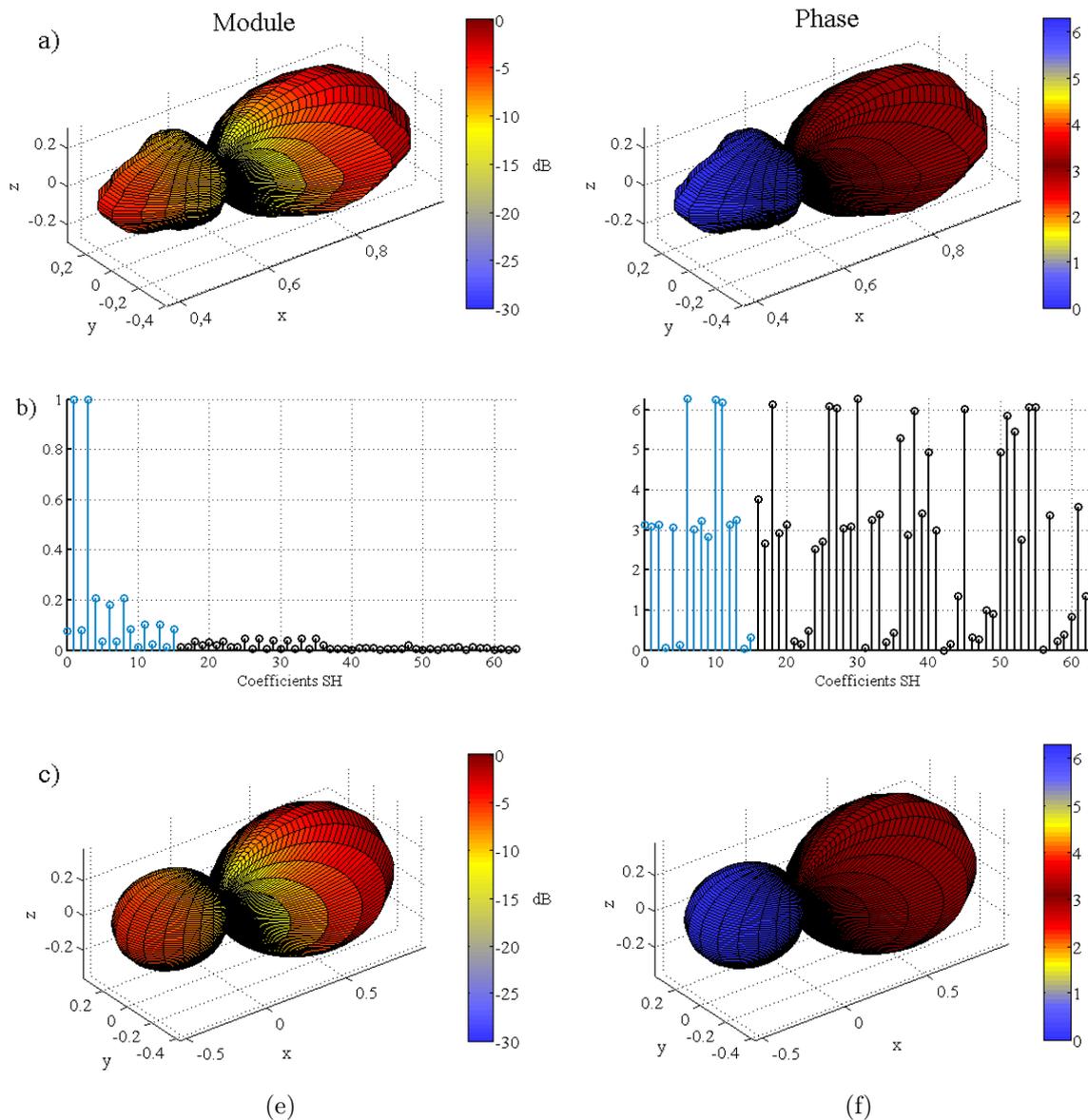
FIGURE 4.14 – Mesure de la directivité de la source A . (a) Mesure directe. (b) Décomposition SH à l'ordre 7. (c) Approximation de la directivité à l'ordre 3

méthode de corrélation généralisée. Pour chaque micro m on construit le signal :

$$y_m(\omega) = A_m e^{j\omega\tau_m} \quad (4.22)$$

Notons que ω peut être choisi arbitrairement car, sous les hypothèses de départ, l'amplitude A_m ne varie pas avec la fréquence.

Des problèmes importants de phase apparaissent lors de la reconstruction par groupe OMP ce qui fausse l'identification. Ces problèmes, bien qu'ils ne soient pas encore com-

FIGURE 4.15 – Mesure de la directivité de la source B

plètement compris, ont deux principales origines. Premièrement, le fait que la source ne soit pas exactement au centre de l'antenne circulaire de mesure implique une incertitude dans les coordonnées des microphones. Deuxièmement, la construction même des signaux est source d'erreur. En effet, il peut exister une ambiguïté sur l'estimation des τ_m dans les fonctions d'inter-corrélations généralisées dans le cas où le maximum de la fonction ne correspond pas exactement au trajet direct. Cette erreur de phase est accentuée lorsqu'une valeur élevée de ω est choisie. Or les τ_m indiquent le temps de vol entre la source et les micros. Une solution pour s'affranchir de ces problèmes est de recalculer la position des microphones sur ces temps de vol. Les coordonnées sphériques d'un microphone m sont (r_m, θ_m, ϕ_m) . On fait l'hypothèse que les coordonnées (ϕ_m, θ_m) ne varient pas de manière

significative. La source étant approximativement au centre de l'antenne, on remplace les coordonnées radiales r_m par $r'_m = \tau_m c$.

On crée une grille de points qui contient le centre O de la sphère. Les résultats d'identification des sources A et B par groupe OMP sont illustrés respectivement sur les figures 4.16 et 4.17. Ils sont obtenus avec $M = 32$ micros. Que ce soit pour la source A ou

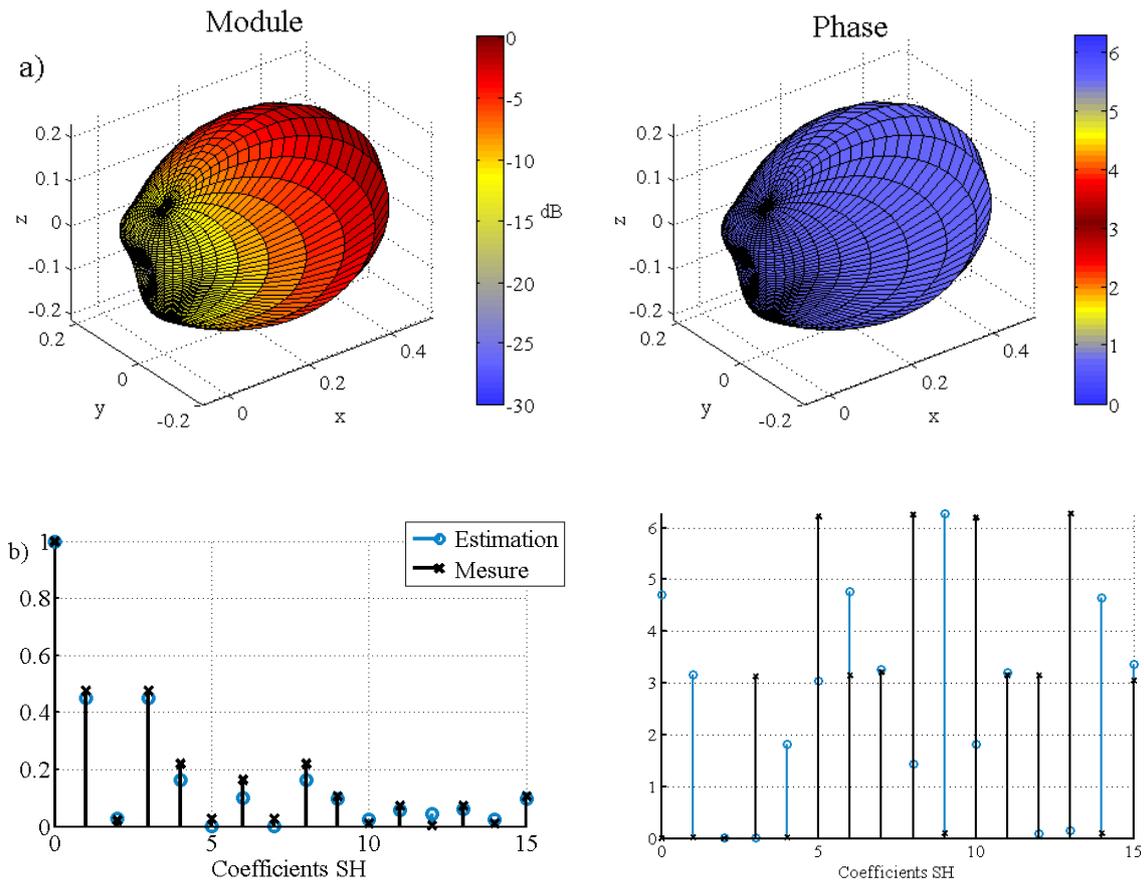


FIGURE 4.16 – Identification de la source A par groupe OMP avec 32 micros répartis aléatoirement sur une sphère. (a) directivité. (b) coefficients SH.

la source B , les coefficients SH sont clairement identifiés en termes d'amplitude. Sur le diagramme de phase, on observe que les valeurs relatives des coefficients dont l'amplitude est significatives concordent avec la calibration. La qualité de l'identification atteint $C = 64\%$ pour la source A à cause du coefficient de phase biaisé de la composante 0. Cependant ce coefficient de phase n'a pas d'influence sur la directivité totale car l'harmonique sphérique correspondante Y_0 est de phase constante. Le calcul du coefficient de corrélation sur le module des coefficients donne $C = 99\%$. Le coefficient de corrélation obtenu pour la source B est $C = 92\%$. Les allures des directivités sont bien celles attendues.

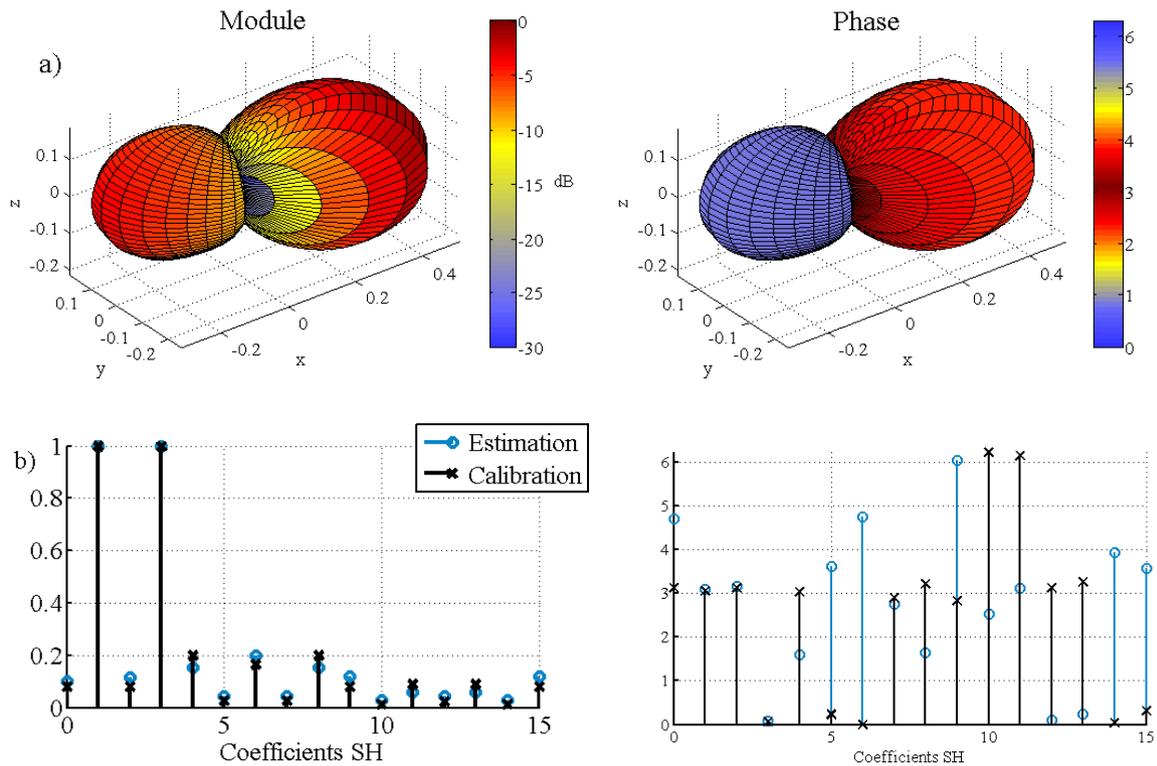


FIGURE 4.17 – Identification de la source B par groupe OMP avec 32 micros répartis aléatoirement sur une sphère. (a) directivité. (b) coefficients SH.

4.4.4.2 Antenne cubique

On considère une antenne de forme cubique illustrée sur la figure 4.20. L'antenne est composée de 96 microphones répartis aléatoirement sur les arrêtes d'une structure cubique.

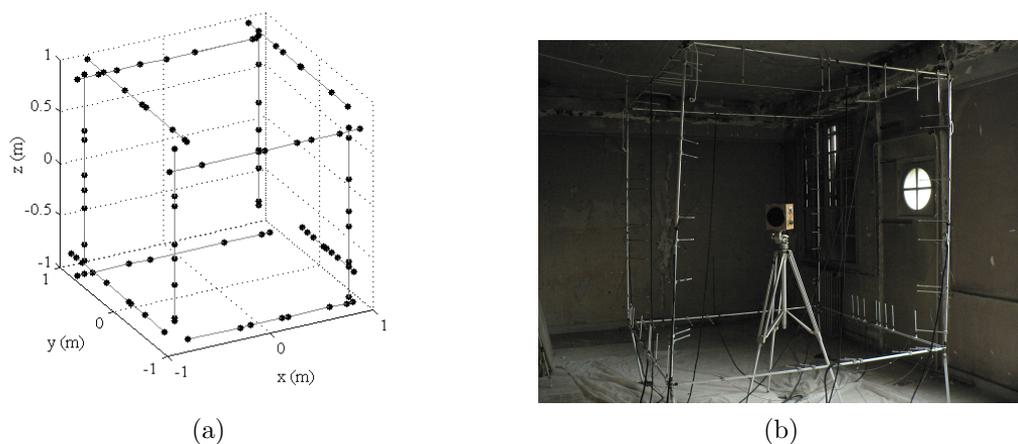


FIGURE 4.18 – a) Antenne cubique d'estimation de directivité b) Photo de l'antenne de mesure en environnement réverbérant.

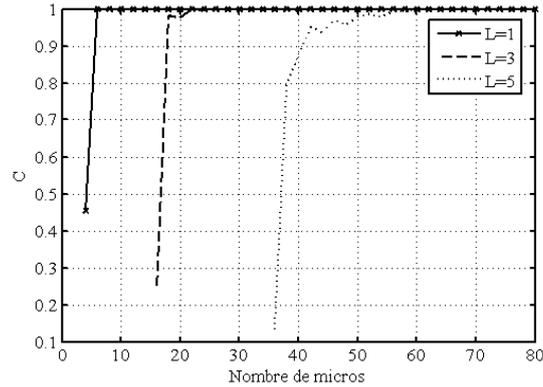


FIGURE 4.19 – Qualité de l’identification d’une source d’ordre L en fonction du nombre de microphones. Moyenne sur 25 tirages d’une distribution aléatoire de micros répartie sur l’antenne cubique 4.20

La figure 4.19 montre les performances d’identification de l’antenne cubique en fonction du nombre de micros. Ces performances sont à comparer avec celles obtenues avec une antenne sphérique (cf. 4.7). On remarque qu’elles sont similaires. Il est intéressant d’observer que des micros simplement répartis sur les arêtes d’un cube permettent d’identifier une source complexe d’ordre 5.

Des problèmes de phase similaires à ceux rencontrés avec l’antenne sphérique n’ont pas permis d’identifier une source placée à une position arbitraire à l’intérieur de l’antenne cubique. La précision actuelle des mesures en est la cause. L’algorithme de localisation des micros proposé par Ono *et al* [OKIS09] et explicité dans la section 5.2 a été utilisé lors des expériences afin de réduire les erreurs de phase, mais sans succès. Nous avons pu placer la source B quasiment au centre de l’antenne et recalculer la position des micros sur les temps de vol mesurés sur les fonctions d’inter-corrélations généralisées, de la même manière qu’avec l’antenne sphérique.

Le résultat de l’identification par groupe OMP de la source B est illustré sur la figure 4.20. La reconstruction est légèrement distordue mais néanmoins précise. Le coefficient de corrélation atteint $C = 90\%$.

Des expériences menées en chambre anéchoïque nous permettraient de mieux évaluer les performances réelles de la méthode. Les mesures en environnement réverbérant posent problème. Des techniques ont été proposées pour séparer le champ diffus, issu de la réverbération, du champ rayonné en utilisant des géométries d’antennes particulières. Un exemple, qui pourrait être adapté à l’identification de directivité de sources par groupe OMP, est la méthode de séparation du champ (Field Separation Method, FSM) [GBL⁺12]. Elle utilise une antenne sphérique de capteurs de pressions et de vitesses, ou deux antennes sphériques concentriques. Ceci permet de séparer le champ sur des fonctions de Bessel et de Hankel multipliées par des harmoniques sphériques pour la dépendance angulaire. La partie décomposée sur les fonctions de Bessel représente le champ diffus alors que les fonctions de Hankel représentent le champ rayonné.

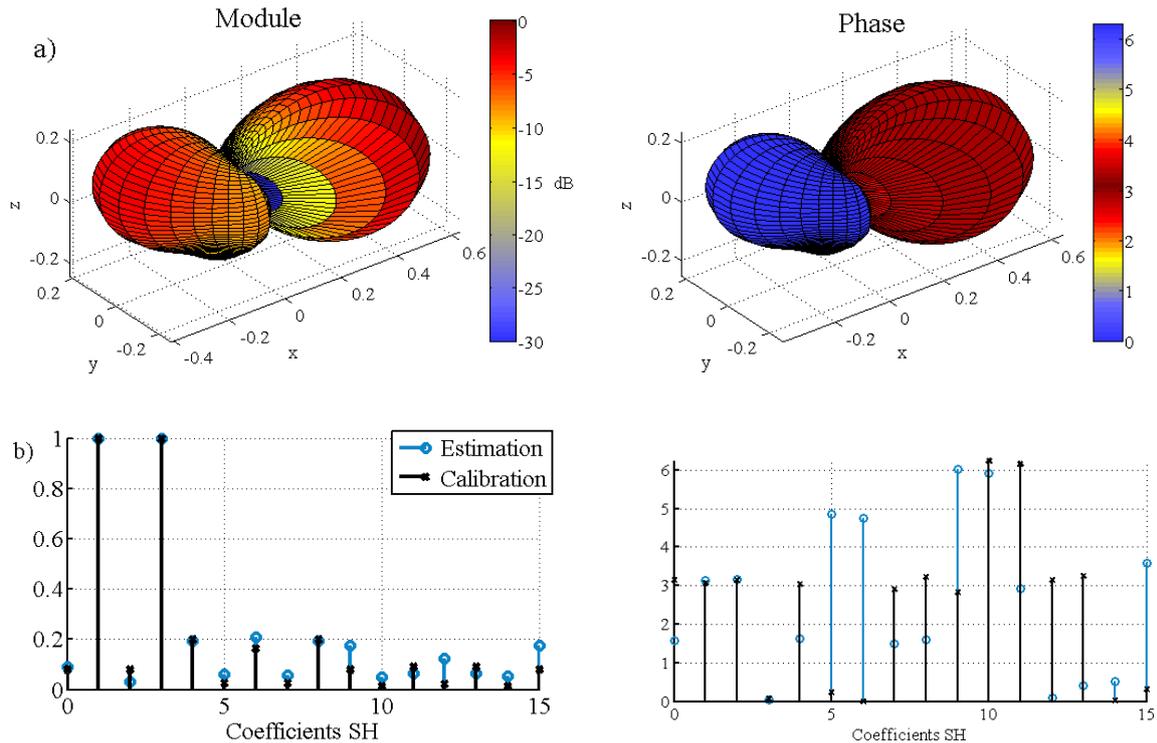


FIGURE 4.20 – Identification de la source B par groupe OMP avec 32 micros répartis aléatoirement sur l’antenne cubique 4.20. (a) directivité. (b) coefficients SH.

En restant dans le contexte d’approximation parcimonieuse de cette thèse, une autre possibilité serait d’exploiter les travaux connexes de Chardon [Cha12] qui a proposé une méthode de localisation de sources en environnement réverbérant clos. Elle s’appuie sur la décomposition des solutions de l’équation de Helmholtz d’une part en ondes planes (description du champ diffus) et d’autre part en fonctions de Bessel (description des sources). *L’a priori* de parcimonie est vérifié dans un dictionnaire de sources placées sur un maillage de points candidats, de la même manière que dans les problèmes de localisations présentés dans ce chapitre. La localisation n’est cependant possible que dans un domaine englobé par l’antenne de mesure. Elle nécessite de plus un nombre important de microsphones. Il serait intéressant d’adapter ces travaux pour l’identification de sources de rayonnements complexes.

4.4.5 Mesure de directivité et Compressive Sampling

Dans la méthode d’identification utilisée, la parcimonie est sur le nombre de sources et non sur le contenu spectral SH dont on limite l’ordre. La distribution aléatoire des micros permet d’utiliser les concepts de compressive sampling pour la localisation. Cependant, nous avons vu que le processus d’orthogonalisation des composantes SH impose l’emploi d’un nombre de micros M tel que $M \geq (L + 1)^2$. Cette condition sur le nombre de micros permet de limiter les effets d’aliasing (Cf. Rafaely [RWB07]). Le sous-échantillonnage spa-

tial du champ acoustique n'est donc pas possible. Dans le cas où on connaît la position de la source, le principe de compressive sampling peut s'appliquer sur la décomposition en harmoniques sphériques sous condition de parcimonie des coefficients. En effet, l'échantillonnage sur une sphère dont le centre est la source permet de mesurer directement les harmoniques sphériques qui forment une famille orthogonale. Sur l'exemple des deux sources calibrées (figures 4.14 (b) et 4.15 (b)) on voit qu'effectivement, en limitant la décomposition à un ordre élevé (ici 7), peu de composantes ont une amplitude significative. Pour augmenter la parcimonie on peut encore augmenter l'ordre. Lorsqu'on limite la décomposition à un ordre faible, on perd la parcimonie. Dans le cas précis où la source est parfaitement positionnée au centre d'une antenne sphérique, Masiero et Pollow [MP10] ont montré que le champ rayonné pouvait être sous-échantillonné en utilisant le compressive sampling tout en identifiant précisément la directivité. En limitant la source à un ordre suffisamment élevé, la combinaison de la parcimonie et de l'échantillonnage aléatoire permettent de réduire le nombre de microphones en dessous du seuil des $(L + 1)^2$ nécessaires.

Le positionnement précis (erreur de l'ordre de $\lambda/10$) d'une source au centre de la sphère de mesure est cependant une hypothèse trop forte pour être appliquée expérimentalement, dans une majorité de cas pratiques.

4.5 Conclusion

Cette section a présenté une nouvelle stratégie de localisation et d'identification de sources acoustiques complexes. On utilise un modèle de parcimonie structurée en enrichissant le dictionnaire avec un modèle de décomposition en harmoniques sphériques. Ce modèle permet la localisation et l'identification de sources complexes grâce à des algorithmes adaptés, par exemple "groupe OMP" ou "groupe BPDN". L'hypothèse de parcimonie est faite dans l'espace de reconstruction et non dans l'espace des harmoniques sphériques. Des simulations ont montré l'intérêt d'utiliser un dictionnaire complexe de rayonnement par rapport à un dictionnaire de monopoles, classiquement utilisé, qui échoue dans la localisation de sources complexes. Un résultat d'expérience en chambre anéchoïque a confirmé la pertinence de la méthode pour la localisation de sources de type dipolaires. Dans le cas particulier de la localisation par antenne plane, il convient de prendre des précautions dans la modélisation du rayonnement. La matrice \mathbf{A} contient des modes SH fortement corrélés qu'il est nécessaire d'enlever pour éviter toute ambiguïté de sélection des atomes. Des simulations plus poussées et d'autres expériences devraient permettre de mieux établir les limitations de la méthode.

L'application à la mesure de directivité de sources est rendu possible grâce à l'analyse en harmoniques sphériques en utilisant des antennes tri-dimensionnelles. Elle permet de mesurer des directivités de sources à des fréquences élevées avec un nombre réduit de microphones. Elle est une alternative originale aux techniques classiques restreintes aux basses fréquences qui ont recours à des techniques pas toujours efficaces pour l'alignement des sources.

La méthode d'identification de directivité par groupe OMP n'est pas robuste pour des ordres de source trop élevés qui ne tolèrent quasiment aucune erreur sur le modèle et les mesures. Des simulations ont montré qu'au delà de l'ordre 5, la marge d'erreur tolérée par la méthode est trop faible pour être applicable expérimentalement.

Des problèmes dus à des erreurs de phase rencontrés dans la mise en œuvre expérimentale ne nous ont pas permis d'identifier une source placée arbitrairement à l'intérieur d'une antenne 3D. Cependant la méthode a pu être validée en plaçant une source au centre de l'antenne et en corrigeant la position des micros. Des mesures en chambre anéchoïque nous permettraient de mieux apprécier les performances de la méthode. En environnement réverbérant, une méthode de compression d'impulsion permet de simuler le champ libre en ne conservant que le trajet direct du champ rayonné, mais en perdant l'information de dépendance fréquentielle. D'autres techniques de séparation du champ rayonné par la source et du champ diffus doivent être étudiées.

Les simulations et expériences ont montré que la méthode est sensible aux erreurs de phase. Ces erreurs de phases sont principalement dues à des erreurs de localisation des micros ou des sources. Un certain niveau d'erreur sur la position des microphones est cependant admis tout en obtenant de bonnes performances d'identification. Afin de réduire ces erreurs, des méthodes de calibration des microphones doivent être mises en œuvre, ce qui est l'objet du chapitre suivant. La localisation du centre acoustique sur un point de grille qui ne correspond pas exactement à sa position réelle entraîne également des erreurs. Une solution est le raffinement de la grille de reconstruction. Une alternative serait d'utiliser une méthode d'interpolation pour localiser des sources en dehors des points d'une grille prédéfinie. Un algorithme basé sur l'interpolation de Taylor est proposé dans la section 5.4.

Chapitre 5

Calibration et localisations conjointes des sources et des microphones

La plupart des scénarios d'imagerie acoustique nécessitent le déploiement d'un réseau composé de nombreux microphones pour la mesure des champs acoustiques. La qualité de ces mesures dépend de la calibration précise des microphones et de la mesure précise de leur position.

On a besoin en particulier de modéliser la propagation des ondes entre les points source potentiels, représentés par le vecteur \mathbf{x} de dimension N , et les points de mesure, représentés par le vecteur \mathbf{y} de dimension M . Ce modèle est représenté par la matrice \mathbf{A} . La matrice \mathbf{A} est construite en supposant, d'une part, que la réponse en amplitude et en phase des micros est identique, d'autre part que leur position est connue exactement. En pratique, ces hypothèses sont souvent fausses. C'est pourquoi des méthodes de calibration des microphones et de leur position doivent être mises en œuvre pour modéliser le plus précisément possible la matrice de propagation \mathbf{A} et permettre des performances optimales aux méthodes d'imagerie.

Les erreurs en amplitudes sont d'origines diverses : gains ajoutés par les voies d'acquisition, différences de sensibilité et de réponse en fréquence des micros (en pratique, nous utilisons des microphones peu onéreux donc non calibrés)... La correction de ces erreurs est généralement réalisée en calibrant chaque micro individuellement à l'aide d'un pistonphone. Mais cette méthode est mal adaptée à la calibration des réseaux de plusieurs dizaines de micros. Nous avons donc été amenés à développer des techniques rapides de calibration de grands réseaux. Ce chapitre rend compte de ces techniques. Dans un premier temps une méthode qui permet l'égalisation rapide des chaînes de mesure est présentée. Cette méthode a par exemple été utilisée pour calibrer l'antenne mise en œuvre pour la localisation de sources omnidirectionnelles (cf. figure 3.9 (a)).

Nous traitons ensuite du problème de positionnement des micros susceptibles de perturber la phase des signaux mesurés. Dans des expériences variées nécessitant le déploiement d'antennes complexes, les moyens de positionnement précis des micros en 3D sont

soit très fastidieux, soit trop coûteux (exemple de la caméra VICON), et éventuellement inexistants. L'importance d'avoir une connaissance précise de la position des microphones a notamment été mise en évidence dans le problème d'identification de directivité de sources par groupe OMP (cf. chapitre 4), très sensible aux erreurs de phase. Pour tenter de résoudre ce problème, nous présentons une méthode d'estimation en aveugle de la position des microphones que nous avons testée expérimentalement, et dont nous avons évalué les limites. Nous présentons ensuite une méthode originale de localisation conjointe des sources et des microphones basée sur la parcimonie spatiale des sources dans l'espace de reconstruction. Le développement de cette méthode a été motivé par le scénario d'identification de directivité de sources qui demande une connaissance précise de la position des micros.

Dans les problèmes de localisation de sources, les éléments de la matrice \mathbf{A} sont non seulement fonction de la position des micros, mais également de la position de points qui constituent la grille de reconstruction. Dans les cas réels, les sources ne sont généralement pas positionnées exactement sur des points de la grille. Ainsi, une erreur de localisation de source, fonction du pas de grille, est inévitable. Pour la mesure de directivité, cela pose un problème majeur. Un outil est finalement proposé pour s'affranchir du problème de discrétisation spatiale de l'espace des sources. Il est basé sur OMP et exploite l'interpolation au premier ordre de Taylor afin de localiser des sources en dehors des points du maillage.

5.1 Matrice de calibration diagonale

Une méthode a été proposée par Dougherty [Dou02] pour corriger les erreurs de calibration en amplitude et en phase du dispositif de mesure. L'idée est d'utiliser une source dont on connaît le rayonnement, par exemple une source omnidirectionnelle. Le modèle de propagation est alors connu. Un haut-parleur compact est utilisé comme source de calibration. Il est disposé suffisamment loin des micros pour qu'un modèle de source omnidirectionnelle puisse lui être appliqué. Des signaux large bande émis par cette source sont traités en vue de la calibration. Après calcul des spectres, on obtient à une fréquence donnée un vecteur signal \mathbf{y}_{cal} qui traduit la propagation entre la source et les M microphones. Les composantes du vecteur de propagation théorique entre une source n et un micro m est :

$$(y_{th})_m = \frac{e^{jkr_{mn}}}{r_{mn}} \quad (5.1)$$

On définit la matrice de calibration diagonale \mathbf{D}_{cal} comme le rapport entre les signaux réels enregistrés par les microphones et les éléments du vecteur de propagation théorique. Les éléments diagonaux de cette matrice s'écrivent :

$$(d_{cal})_m = \frac{(y_{cal})_m}{(y_{th})_m} \quad (5.2)$$

La matrice de calibration diagonale permet alors de corriger la matrice de transfert \mathbf{A} composé des vecteurs de pointage entre chaque source et tous les microphones. L'identi-

fication du vecteur source \mathbf{x} est alors optimisée en résolvant le système suivant :

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}_{\text{cal}}\mathbf{A}\mathbf{x} \quad (5.3)$$

De manière équivalente, il est possible de corriger les signaux enregistrés pour s'affranchir des erreurs de calibration. Le vecteur signal corrigé s'écrit $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{D}_{\text{cal}}^{-1}\mathbf{y}$. Afin d'évaluer les performances de la méthode on simule la réception de signaux par une antenne de microphones soumise à des erreurs de calibration en amplitude. On souhaite comparer les signaux théoriques \mathbf{y}_{th} avec les signaux dé-calibrés \mathbf{y} et les signaux corrigés $\tilde{\mathbf{y}}$. La configuration, illustrée sur la figure 5.1, est composée d'une antenne cubique de 96 microphones ainsi que de trois sources dont les coordonnées sont $s_1(0, 3, 0)\text{m}$, $s_2(3, 0, 0)\text{m}$, $s_3(3.5, 0, 0)\text{m}$. On ajoute un bruit d'amplitude aux signaux reçus simulés. Le rapport signal sur bruit

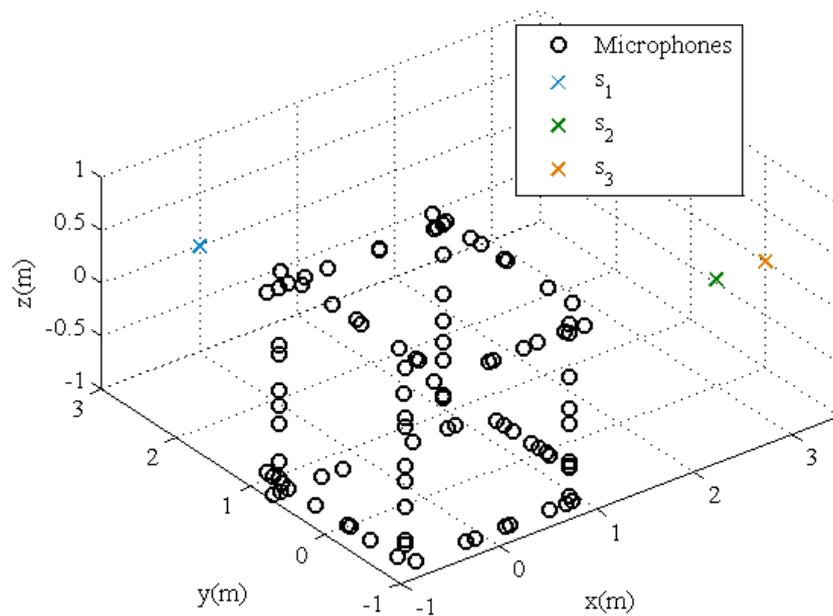


FIGURE 5.1 – Disposition des transducteurs pour l'évaluation des performances de la matrice de calibration diagonale dans un cadre simulé

(RSB) vaut 0dB. Les signaux simulés sont des signaux harmoniques de fréquence 1kHz. On impose également une erreur de phase sur les microphones. Cette erreur suit une loi uniforme $U(-jk\lambda/3, jk\lambda/3)$. La source s_2 sert à la calibration de l'antenne. Le signal émis par cette source est enregistré par l'antenne pour donner \mathbf{y}_{cal} . On construit alors la matrice de calibration \mathbf{D}_{cal} . Les deux autres sources permettent d'évaluer les qualités de la méthode de calibration. L'amplitude des signaux bruités, celle des signaux théoriques, et celle des signaux corrigés par \mathbf{D}_{cal} sont illustrées sur la figure 5.2 (a) et (c). Pour les sources s_1 et s_3 , la correction en amplitude est précise avec des erreurs de l'ordre de 0.1%. La correction en amplitude par la matrice diagonale est efficace pour beaucoup de types d'antennes pourvu que la position de la source soit connue. La correction en phase des signaux n'est cependant possible que si le signal est émis par une source se trouvant dans la même direction que la source de calibration. Dans notre cas, la phase des signaux émis

par la source s_2 sera bien corrigé, mais pas la source s_1 (cf. figure 5.2 (b) et (d)). La calibration en phase n'est pas adaptée aux antennes 3D.

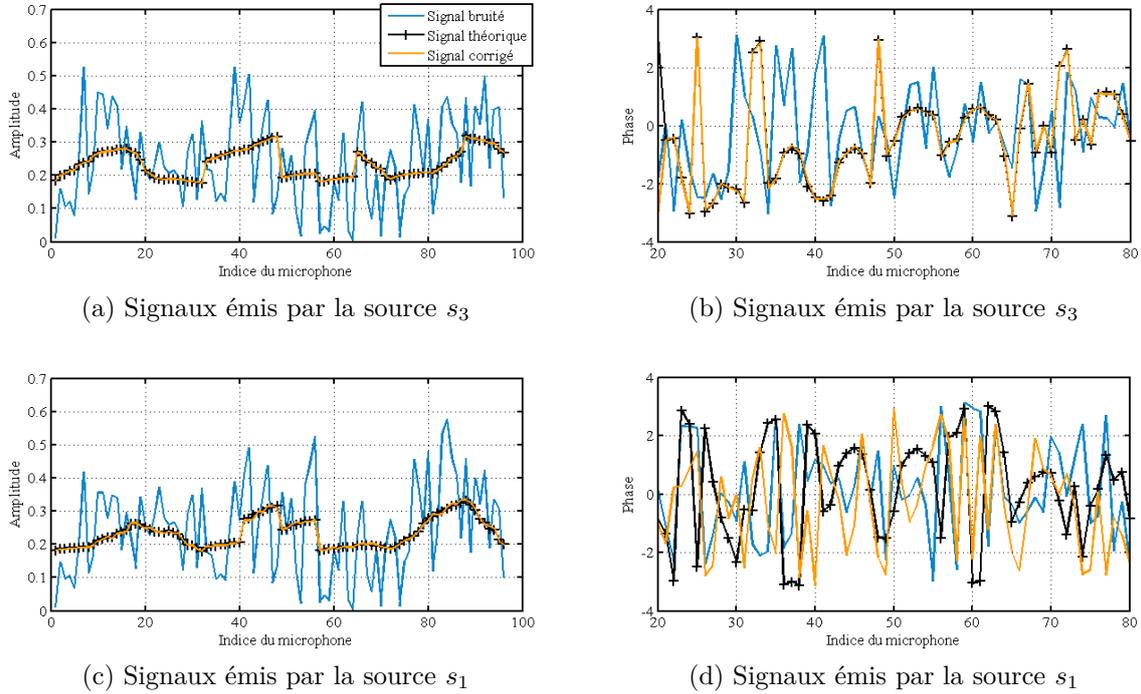


FIGURE 5.2 – Résultat de corrections de signaux en amplitudes (a) et (c), en phase (b) et (d) par la matrice de calibration diagonale.

Notons que si la source est placée dans le champ lointain de l'antenne, alors le front d'onde incident sur l'antenne est plan. Pour une antenne plane et une source placée sur l'axe perpendiculaire à l'antenne, la réponse en amplitude est identique pour tous les microphones ce qui facilite la calibration. Cette méthode de calibration par front d'onde plan est efficace pour calibrer des antennes de faible ouverture. Les antennes utilisées pour la NAH (cf. chapitre 2) ont été calibrées par cette méthode. Dans le cas d'antennes de large ouverture, comme celle utilisée pour la localisation de sources omnidirectionnelles en champ proche, la matrice de calibration diagonale est utilisée.

Cette méthode de calibration des gains des microphones s'appuie sur la connaissance de la position de la source qui n'est pas toujours accessible précisément. Dans une perspective identique de calibration en amplitude, une méthode de calibration des microphones conjointement à la localisation des sources, supposées parcimonieuses, a été proposée récemment par Gribonval et al [GCD12]. La méthode consiste à estimer le vecteur source \mathbf{x} comme solution du programme de minimisation :

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}, \Delta} \|\mathbf{x}\|_1 \text{ tel que } \Delta \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \text{Tr}(\Delta) = M \quad (5.4)$$

où Δ est la matrice diagonale de correction en amplitude. La contrainte sur la trace de Δ (somme des coefficients de calibration égale au nombre de micros) permet d'avoir

une normalisation de la solution tout en gardant un problème de minimisation convexe. Cette méthode doit faire l'objet d'une validation expérimentale pour déterminer si elle constitue une alternative plus puissante à la matrice diagonale de calibration présentée précédemment.

Les méthodes d'imagerie acoustique développées durant cette thèse n'ont cependant pas montré une grande sensibilité aux erreurs de calibration en amplitude des microphones (cf. chapitre 2 et 3). En revanche leur sensibilité aux erreurs de positions est très importante. La section suivante présente une méthode de localisation conjointe des sources et des microphones que nous avons mise en œuvre pour nos expériences d'identification de directivité de sources.

5.2 Estimation aveugle de la position des microphones

Une méthode d'estimation aveugle des positions des microphones a été proposée par Ono et Al [OKIS09]. Elle mesure des différences de temps d'arrivée (DTA) pour déterminer conjointement les positions des sources utilisés. Le principe de la méthode est de calculer l'inter-corrélation entre un signal source et les signaux enregistrés. Le premier pic d'inter-corrélation donne le temps de propagation de la source au microphone. On peut alors mesurer les DTA τ_{lms} entre le $l^{\text{ième}}$ et le $m^{\text{ième}}$ microphone pour la $s^{\text{ième}}$ source :

$$\tau_{lms} = \frac{1}{c} (\|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_l\|_2 - \|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_m\|_2) \quad (5.5)$$

où \mathbf{r}_s et \mathbf{r}_l désignent respectivement les vecteurs positions de la source s et du microphone l . Ce sont les inconnues du système que l'on cherche à estimer. Pour ce faire, on minimise une fonction de coût définie comme le carré des erreurs de différences de temps :

$$J(\Theta) = \frac{1}{c^2 S M^2} \sum_{s=1}^S \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M \epsilon_{lms}^2, \quad (5.6)$$

$$\epsilon_{lms} = \|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_l\|_2 - \|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_m\|_2 - c\tau_{lms}$$

Θ désigne le jeu de paramètres à estimer : $\Theta := \{\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_m | s = 1 \dots S, m = 1 \dots M\}$ où S et M sont respectivement le nombre de sources et de microphones. On estime donc les positions des sources et des microphones en résolvant le problème de minimisation suivant :

$$\Theta = \arg \min_{\Theta} J(\Theta) \quad (5.7)$$

Les termes croisés dus à la norme $\|\cdot\|_2$ dans la fonction de coût $J(\Theta)$ rendent le calcul analytique des paramètres Θ impossible. Le problème de minimisation est résolu par une approche originale utilisant des fonctions auxiliaires (cf. [KOS08]) grâce à un algorithme itératif simple présenté dans [OKIS09]. L'algorithme nécessite cependant les mesures grossières des positions des microphones et des sources.

On simule un réseau cubique de 96 microphones ainsi que quatre sources situées à l'extérieur du réseau. Une erreur de position initiale est imposée aux microphones (ε_m) et aux

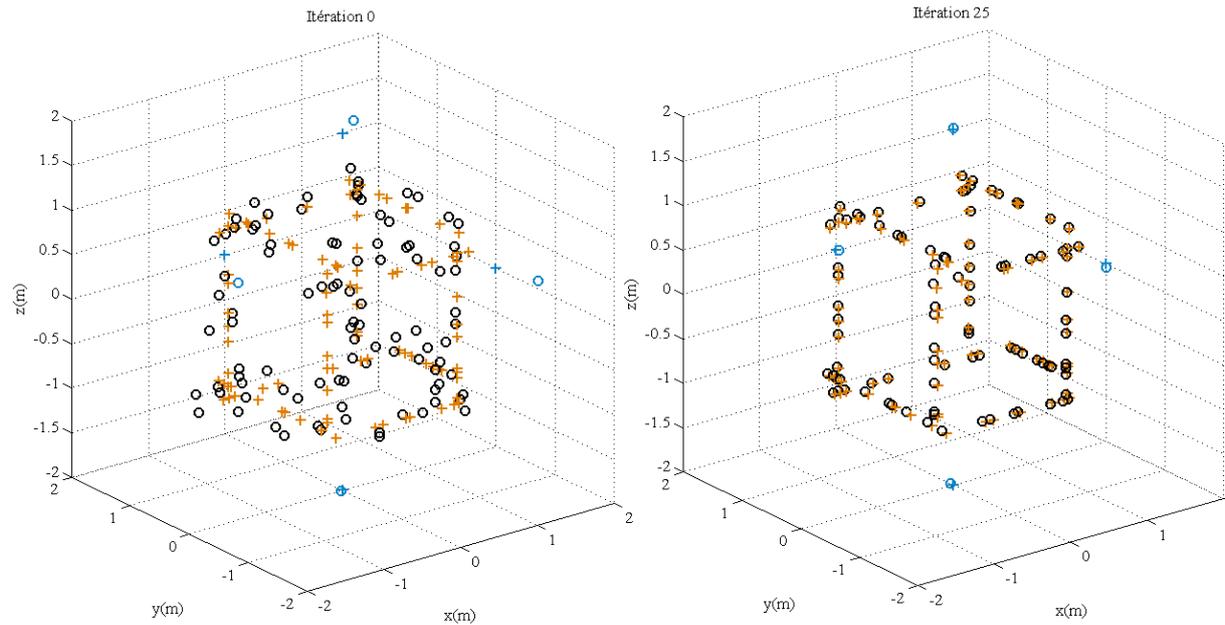


FIGURE 5.3 – Correction de la position des microphones et des quatre sources de calibration

sources (ε_s). Ces erreurs suivent une loi aléatoire uniforme telle que $\varepsilon_m \sim U(-0.22, 0.22)\text{m}$ et $\varepsilon_s \sim U(-0.44, 0.44)\text{m}$. La figure 5.3 illustre la configuration utilisée pour les simulations. Les positions réelles des microphones et des sources sont désignées respectivement par les croix rouges et les croix bleues. Les positions initiales approximatives sont indiquées par les cercles noirs et bleus. La disposition des transducteurs est illustrée à la 25^{ième} itération. Les sources et les microphones convergent vers leurs positions réelles. Sur la figure 5.4, la courbe d'évolution de l'erreur moyenne de localisation des microphones, en utilisant quatre ou vingt-deux sources, montre que leurs positions convergent en un nombre relativement faible d'itérations. La valeur de l'erreur moyenne, en utilisant les quatre sources, atteint une longueur de 4.10^{-2}m . Dans un scénario d'identification de source, une précision nécessaire de $\lambda/10$ correspond à une fréquence de 850Hz. La précision d'estimation de la position des microphones n'est donc pas suffisante pour identifier le rayonnement d'une source à une fréquence supérieure à 850Hz. Il est possible d'utiliser plus de sources pour plus de précision. Plus le nombre de sources est important, plus la valeur de convergence sera faible. Une itération est cependant d'autant plus coûteuse en temps de calcul que le nombre de sources est important. A titre d'exemple, le temps de calcul moyen pour vingt-cinq itérations et quatre sources est d'environ 100s^1 . Avec vingt-deux sources par exemple, l'erreur moyenne converge au bout de seulement trois itérations vers une longueur de $2,6.10^{-2}\text{m}$ pour un temps de calcul moyen de 120s^1 . Le temps de convergence n'est pas sensiblement différent, mais la mise en œuvre expérimentale de la calibration peut devenir très fastidieuse avec vingt-deux sources. De plus la

1. Temps délivré par une routine "tic/toc" sous matlab avec un pc de bureau standard

longueur à laquelle converge l'erreur n'est pas suffisante pour identifier le rayonnement d'une source à une fréquence supérieure à 1.3kHz. Un scénario d'identification de sources est plus exigeant sur la précision de localisation des microphones de mesure.

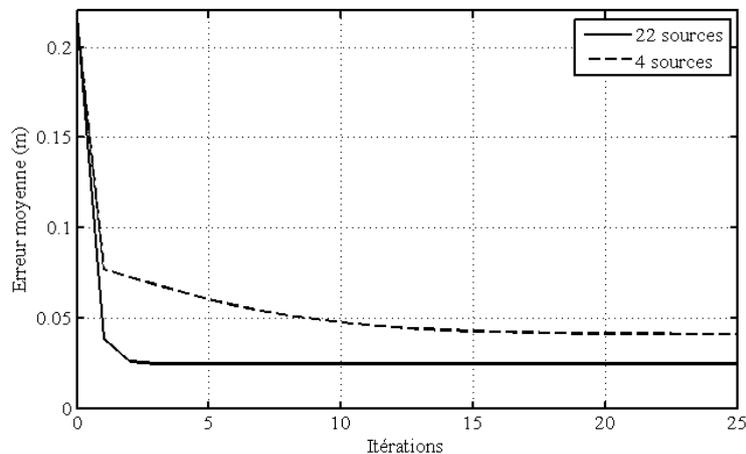


FIGURE 5.4 – Évolution de l'erreur moyenne de localisation des microphones en fonction du nombre d'itérations

Ceci motive le développement de méthodes plus précises de calibration de la position des capteurs en exploitant les techniques parcimonieuses de localisations de sources. L'objectif est de réunir les problèmes de localisation des sources et de calibration de la position des micros dans un unique problème d'optimisation.

5.3 Calibration de la position de sources par exploitation de la parcimonie spatiale des sources

La localisation parcimonieuse des sources simples par OMP, ou groupe OMP dans le cas de sources complexes, peut être adaptée pour localiser conjointement des sources et des microphones. Nous développons dans cette section la méthode proposée.

5.3.1 Algorithme de calibration

On reprend le problème de localisation de sources qui consiste à inverser le problème $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ où \mathbf{y} est le vecteur mesure de dimension M et \mathbf{x} le vecteur source de dimension N que l'on cherche à identifier. La matrice de propagation \mathbf{A} est construite en supposant que la position des micros est connue exactement. Lorsque la mesure précise des positions des micros n'est pas disponible, on définit une matrice de transfert approchée \mathbf{A}_0 construite à partir des mesures approximatives des positions des micros. Les éléments de \mathbf{A}_0 sont, pour une source supposée omnidirectionnelle au nœud n :

$$A_{0_{mn}} = \frac{e^{jkr_{mn}}}{r_{mn}} \quad (5.8)$$

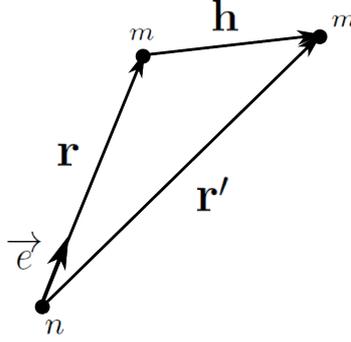


FIGURE 5.5 – Illustration du déplacement d'un microphone m

Les éléments de \mathbf{A} sont :

$$A_{mn} = \frac{e^{jkr'_{mn}}}{r'_{mn}} \quad (5.9)$$

La figure 5.5 illustre les notations adoptées. Pour plus de lisibilité, on fait abstraction des indices mn dans le raisonnement suivant et on appelle r la distance mesurée entre un microphone et la source et r' la distance réelle. On veut exprimer A_{mn} en fonction de r . Si on note \mathbf{h} , le vecteur à trois dimensions de correction de position, les éléments de la matrice \mathbf{A} s'écrivent :

$$A_{mn} = \frac{e^{jk\|\mathbf{r}+\mathbf{h}\|_2}}{\|\mathbf{r}+\mathbf{h}\|_2} \quad (5.10)$$

On fait l'hypothèse que l'erreur de position \mathbf{h} est très petite devant la distance source-microphone r' . La variation de $\mathbf{r}+\mathbf{h}$ dans l'équation (5.10), bien que suffisante pour introduire des erreurs de phase importantes, est néanmoins faible et l'on néglige l'erreur en amplitude :

$$A_{mn} = \frac{e^{jk\|\mathbf{r}+\mathbf{h}\|_2}}{r} \quad (5.11)$$

On se concentre alors sur le terme de phase dont on simplifie l'écriture :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}+\mathbf{h}\|_2 &= (r^2 + 2\langle\mathbf{r},\mathbf{h}\rangle + h^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= r \left(1 + 2\frac{\langle\mathbf{r},\mathbf{h}\rangle}{r^2} + \frac{h^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.12)$$

En ayant fait l'hypothèse que $h \ll r$, le développement limité de Taylor à l'ordre 1 donne :

$$\left(1 + 2\frac{\langle\mathbf{r},\mathbf{h}\rangle}{r^2} + \frac{h^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\langle\mathbf{r},\mathbf{h}\rangle}{r^2} + O(h^2) \quad (5.13)$$

On peut alors linéariser le terme de phase :

$$\|\mathbf{r}+\mathbf{h}\|_2 \approx r + \langle\mathbf{e},\mathbf{h}\rangle \quad (5.14)$$

où \mathbf{e} est un vecteur unitaire colinéaire à la direction entre la source et le microphone et vaut \mathbf{r}/r . Il est important de noter que dans l'équation (5.14) la projection de \mathbf{h} sur \mathbf{e} ne

La résolution de l'équation (5.20) donne une expression analytique de \mathbf{h}_0 :

$$\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{P}^H(\mathbf{P}\mathbf{P}^H)^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{A}_0\mathbf{x}_0) \quad (5.23)$$

La structure de ce vecteur de dimension $3M$ s'écrit :

$$\hat{\mathbf{h}} = [\hat{\mathbf{h}}_1 \cdots \hat{\mathbf{h}}_m \cdots \hat{\mathbf{h}}_M]^T \quad (5.24)$$

où $\hat{\mathbf{h}}_m = [\hat{h}_m^x \ \hat{h}_m^y \ \hat{h}_m^z]$.

Le calcul de $\hat{\mathbf{h}}$ dépend de l'estimation de \mathbf{x}_0 . Une première étape consiste donc à estimer \mathbf{x}_0 à partir des mesures grossières de la position des microphones. L'algorithme OMP décrit à la section 1.2.2.2 est utilisé à cette fin. On peut alors calculer le vecteur $\hat{\mathbf{h}}$ de correction de position. Afin d'estimer les trois composantes spatiales de \mathbf{h} , nous avons remarqué qu'il convenait de placer plusieurs sources dans l'espace. Ces sources seront traitées indépendamment, ce qui revient à réécrire le problème de localisation :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (5.25)$$

Les matrices \mathbf{Y} et \mathbf{X} sont respectivement de dimensions $M \times K$ et $N \times K$ où K est le nombre de sources utilisées pour la calibration. Les approximations mises en œuvre ne permettent pas d'évaluer précisément \mathbf{h} en une seule opération. Un nombre I d'itérations doit être exécuté pour atteindre la précision nécessaire. On note $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}_0$. Le processus itératif s'articule de la façon suivante :

1. Évaluation préliminaire de $\mathbf{x}^{(i)}$ en localisant une source sur le maillage par algorithme OMP.
2. Estimation de $\hat{\mathbf{h}}^{(i)}$ dans la direction de la source localisée :

$$\hat{\mathbf{h}}^{(i)} = \mathbf{P}^H(\mathbf{P}\mathbf{P}^H)^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{A}^{(i)}\mathbf{x}^{(i)}) \quad (5.26)$$

3. Mise à jour de $\mathbf{A}^{(i)}$ et des e_{mn}^d .
4. Répétition des étapes 1 à 3 pour chacune des sources traitées séparément.
5. Réitération du processus jusqu'à ce que $\|\hat{\mathbf{h}}^{(i)}\|_2$ converge vers 0.

La correction de position des micros à l'itération i est donnée par $\hat{\mathbf{h}}^{(i)}$. Bien que $\|\hat{\mathbf{h}}^{(i)}\|_2$ tende vers 0 au bout d'un certain nombre d'itérations, l'erreur de correction ε ne l'est pas systématiquement et laisse apparaître un résidu :

$$\varepsilon = \left\| \sum_i \hat{\mathbf{h}}^{(i)} - \mathbf{h} \right\|_2 \quad (5.27)$$

Dans le cas idéal, pour corriger la position des microphones selon les trois dimensions de l'espace, un minimum de trois sources, que l'on nommera s_1 , s_2 et s_3 , doit être utilisé. Pour une efficacité maximale, ces trois sources doivent être positionnées en champ lointain de l'antenne sur les axes Ox , Oy , et Oz . Dans le cas réel, pour des antennes de grandes ouvertures, le champ lointain ne sera généralement pas accessible. Les sources devront être

placées dans l'environnement proche de l'antenne. Dans cet environnement, les vecteurs \vec{s}_m ont des directions différentes pour chaque élément m de l'antenne. Il convient donc de placer plusieurs sources pour estimer correctement les $\mathbf{h}_m, \forall m$. L'exemple avec une antenne cubique, illustré dans la section suivante, montre qu'un nombre limité de sources placées à l'intérieur de l'antenne est suffisant.

5.3.2 Résultats de simulations

Pour illustrer le comportement de l'algorithme de calibration décrit précédemment on considère une antenne à structure simple : l'antenne cubique de 96 microphones présentées figure 4.20. La correction de position des microphones dépend de la précision de localisation des sources. Dans cette étude on fait l'hypothèse que les sources appartiennent à la grille de reconstruction. Notons que dans le cas contraire, une mauvaise localisation des sources entraîne la divergence de l'algorithme.

5.3.3 Sources omnidirectionnelles

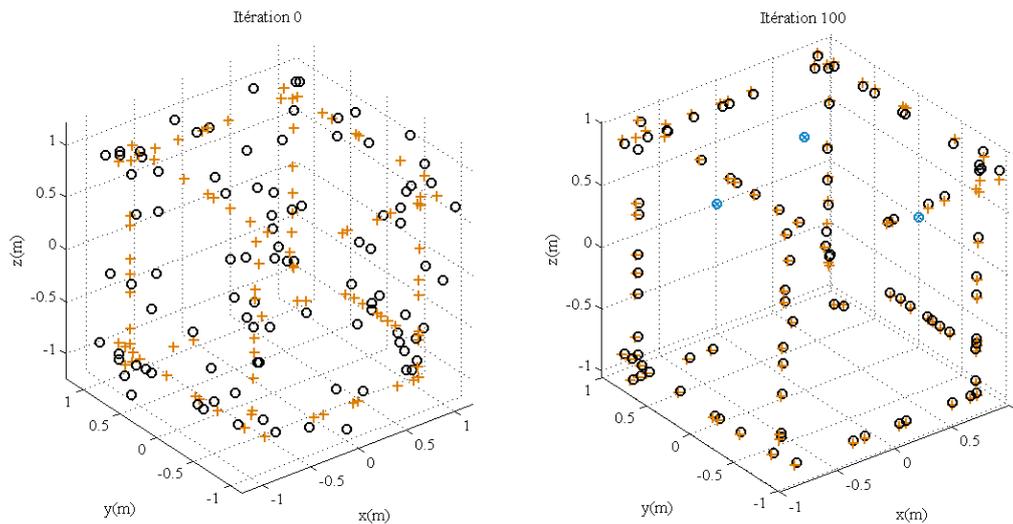


FIGURE 5.6 – Correction de la position des microphones. Fréquence=500Hz. 3 sources. $\varepsilon_0 = 0.22\text{m}$

La propagation de signaux harmoniques est simulée à partir de positions définies de sources omnidirectionnelles. Sur les figures 5.6, et 5.9 les croix oranges indiquent les vraies positions des microphones et les cercles noirs les positions estimées initialement et utilisées pour la construction de la matrice de transfert \mathbf{A}_0 composée des vecteurs de pointages. Les cercles bleus désignent les positions estimées des sources et les croix bleues les vraies

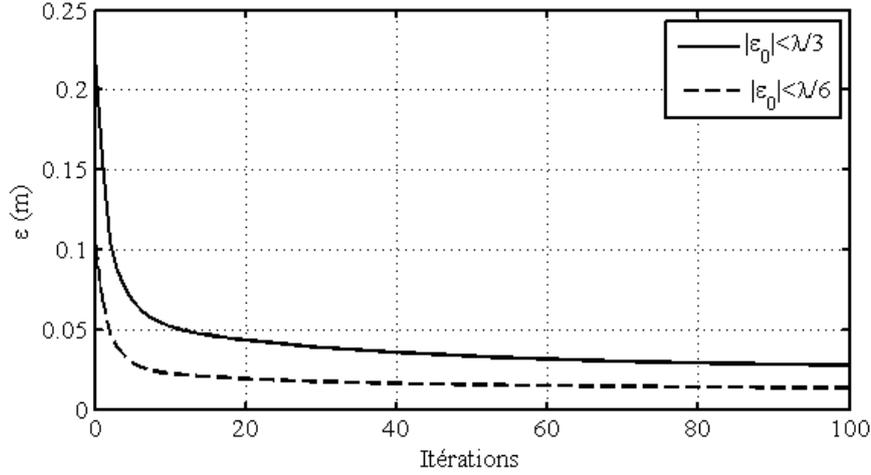


FIGURE 5.7 – Évolution de l’erreur de position ε en fonction du nombre d’itérations. Fréquence=500Hz. 3 sources.

positions à partir desquelles les signaux sont simulés. On impose une erreur sur l’emplacement des microphones en fonction de la longueur d’onde λ . Dans notre étude, on simule une erreur aléatoire $\varepsilon_0 = \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|_2$ sur chacun des microphones qui suit une loi uniforme fonction de la longueur d’onde $\varepsilon_0 \sim U(-f(\lambda), f(\lambda))$. Les résultats de simulations montrent que $\|\hat{\mathbf{h}}^{(i)}\|_2$ converge vers 0 si la borne maximale de l’erreur initiale de position des microphones est inférieure ou égale à $\lambda/3$, autrement dit, $\varepsilon_0 \sim U(-\lambda/3, \lambda/3)$. Au delà, l’algorithme diverge et amplifie l’erreur. Le processus de calibration en phase est donc efficace si l’on commence par analyser le signal en basse fréquence où les longueurs d’ondes sont grandes. Par exemple, à 500Hz, $\lambda/3 = 0.22\text{m}$. On peut alors re-localiser les microphones si l’erreur initiale de mesure de leur positions est comprise dans une sphère de rayon 0.22m. En pratique, cet ordre de grandeur de l’erreur est tout à fait réaliste. La figure 5.6 illustre la localisation conjointe des microphones et des sources à 500Hz. A la centième itération de l’algorithme de calibration, on observe la correction de positions des capteurs. Trois sources sont utilisées sur les faces du cube formé par l’antenne. Elles ont pour coordonnées $s_1(0, 0, 1)\text{m}$, $s_2(1, 0, 0)\text{m}$, et $s_3(0, 1, 0)\text{m}$. Sur la figure 5.7 on montre l’évolution de ε sur 100 itérations pour deux erreurs initiales de position des micros $\varepsilon_0 \sim U(-\lambda/3, \lambda/3)$ et $\varepsilon_0 \sim U(-\lambda/6, \lambda/6)$. Dans le premier cas ($|\varepsilon_0| < -\lambda/3$), ε converge vers une valeur relativement faible mais la position de certains micros n’est pas précisément corrigée, notamment aux sommets de l’antenne (cf. figure 5.6). Le nombre de sources est en effet trop faible pour corriger la position de tous les microphones de l’antenne selon les trois directions de l’espace. Dans le deuxième cas ($|\varepsilon_0| < -\lambda/6$), ε converge vers une valeur deux fois plus faible. L’évolution de ε est donc proportionnelle au taux d’erreur initiale.

D’autre part, plus la distance qui sépare les sources est faible, plus ε converge vers une valeur élevée. Une partie seulement des micros est correctement re-localisée. En effet, pour certains microphones m , les directions s_1m , s_2m et s_3m peuvent être colinéaires, et

la localisation du capteur n'est corrigée que selon une seule direction. L'erreur moyenne sur la position des microphones converge donc vers une valeur plus élevée. Dans notre cas précis, à 500Hz, en utilisant des sources placées en $s_1(0, 0, 0.5)\text{m}$, $s_2(0.5, 0, 0)\text{m}$, et $s_3(0, 0.5, 0)\text{m}$, l'erreur moyenne converge vers 5.10^{-2}m ce qui est relativement élevé (cf. figure 5.8). On aura donc intérêt à déployer les sources dans le plus large espace possible.

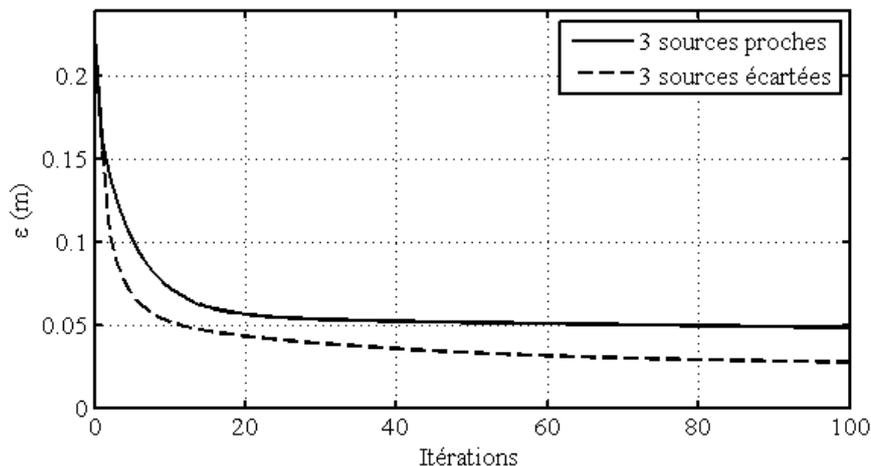


FIGURE 5.8 – Evolution de l'erreur de position en fonction du nombre d'itérations. Fréquence=500Hz. $\varepsilon_0 = 0.22\text{m}$

Dans le cas où trois sources ne sont pas suffisantes pour corriger précisément la position de tous les microphones, il convient d'augmenter leur nombre. On se place alors dans la configuration de la simulation illustré sur la figure 5.6 et on rajoute une source placée en $S_4(0, 0, -1)\text{m}$. Les résultats illustrés par les figures 5.9 et 5.10 montrent que cette configuration est optimale. L'erreur moyenne ε converge vers 0 en une vingtaine d'itérations seulement. On remarque que l'algorithme est d'autant plus rapide à converger que le nombre de sources est important. Le temps de calcul moyen pour l'exécution de vingt-cinq itérations, jusqu'à convergence, est d'environ 0.35s sur une machine standard. Le temps de convergence rapide est très avantageux. On note un rapport d'environ 300 entre le temps de convergence de cette méthode et celui de la méthode proposée par Ono et *Al* en utilisant 4 sources de calibration.

5.3.4 Sources complexes

Lorsque les sources sont placées à l'intérieure à proximité de l'antenne, la directivité du champ rayonné par la source est à prendre en compte. Lorsqu'on ne dispose pas d'une source rigoureusement omnidirectionnelle, il est possible d'enrichir la matrice de propagation \mathbf{A} avec un dictionnaire d'harmoniques sphériques (SH) jusqu'à un certain ordre L comme expliqué au chapitre 4. La matrice \mathbf{A} est la concaténation des sous-matrices \mathbf{A}_n , telle que :

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_n \dots \mathbf{A}_N] \quad (5.28)$$

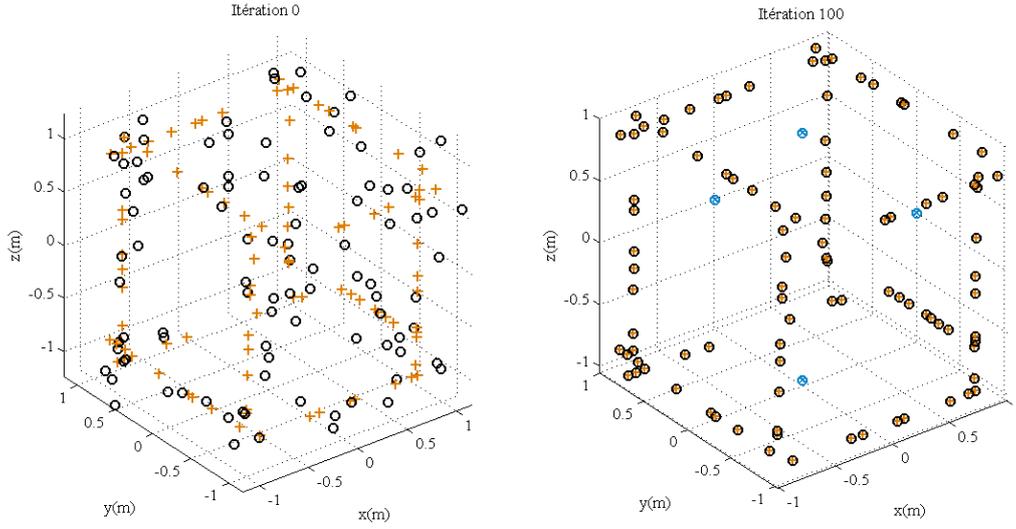


FIGURE 5.9 – Correction de la position des microphones. Fréquence=500Hz. 4 sources. $\varepsilon_0 = 0.22\text{m}$

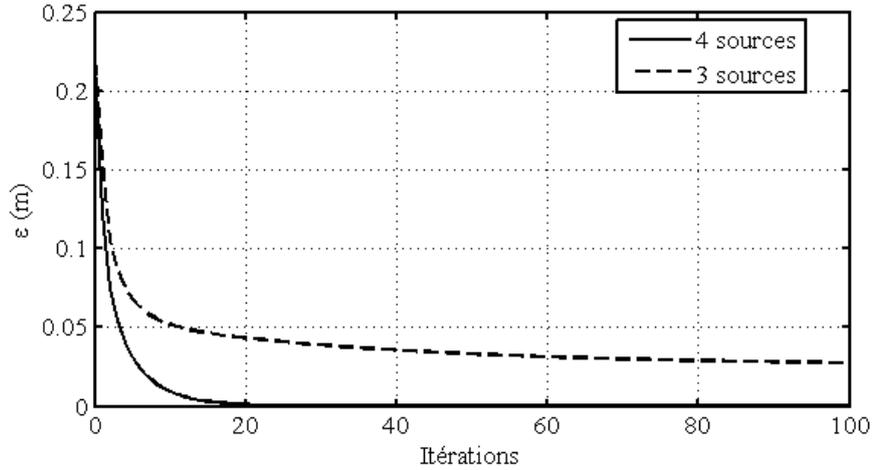


FIGURE 5.10 – Evolution de l'erreur de position en fonction du nombre d'itérations. $\varepsilon_0 = 0.22\text{m}$

Chaque sous-matrice \mathbf{A}_n contient le modèle de rayonnement SH entre un point n du maillage et tous les microphones :

$$\mathbf{A}_n = [(\mathbf{a}_0^0)_n \dots (\mathbf{a}_l^q)_n \dots (\mathbf{a}_L^L)_n] \quad (5.29)$$

avec

$$(\mathbf{a}_l^q)_n = [\dots h_l(r_{mn})Y_l^q(\Omega_{mn}) \dots]^T \quad (5.30)$$

$Y_l^q(\Omega_{mn})$ est l'harmonique sphérique d'ordre l et de degré q . $h_l(r_{mn})$ est la fonction radiale Hankel, d'ordre l associée. De la même manière, le vecteur source \mathbf{x} est la concaténation

des sous-vecteurs \mathbf{x}_n , tel que :

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \dots \mathbf{x}_N]^T \quad (5.31)$$

où chaque sous-vecteur contient les coefficients des SH :

$$\mathbf{x}_n = [(x_0^0)_n \dots (x_l^q)_n \dots (x_L^L)_n] \quad (5.32)$$

Ainsi, l'algorithme de calibration de la position des microphones est utilisable avec des sources complexes. De plus l'algorithme de localisation conjointe des microphones et des sources permet d'identifier la directivité des sources utilisées pour la calibration.

Les simulations suivantes sont effectuées en disposant quatre sources à l'intérieur de l'antenne (cf. configuration de la figure 5.9). On analyse des signaux harmoniques de fréquence égale à 900Hz. On procède à deux simulations. Dans la première, les quatre sources simulées sont des haut-parleurs bafflés dont le rayonnement est illustré sur la figure 4.14. Dans la deuxième ce sont des haut-parleurs dont la directivité est illustrée sur la figure 4.15. Les sources pointent toutes selon la même direction parallèle à l'axe Ox. L'ordre de la source est limité à $L = 3$. L'erreur aléatoire initiale imposée à la position des microphones suit une loi uniforme $\epsilon_0 \sim U(-\lambda/4, \lambda/4)$. L'algorithme est en effet moins robuste aux importantes erreurs de positions lorsque les sources sont complexes (avec des source omnidirectionnelles, une erreur de $\epsilon_0 \sim U(-\lambda/3, \lambda/3)$ est autorisée). Au delà de $\lambda/4$, l'algorithme, et donc également l'erreur moyenne ϵ , divergent. La figure 5.11 illustre

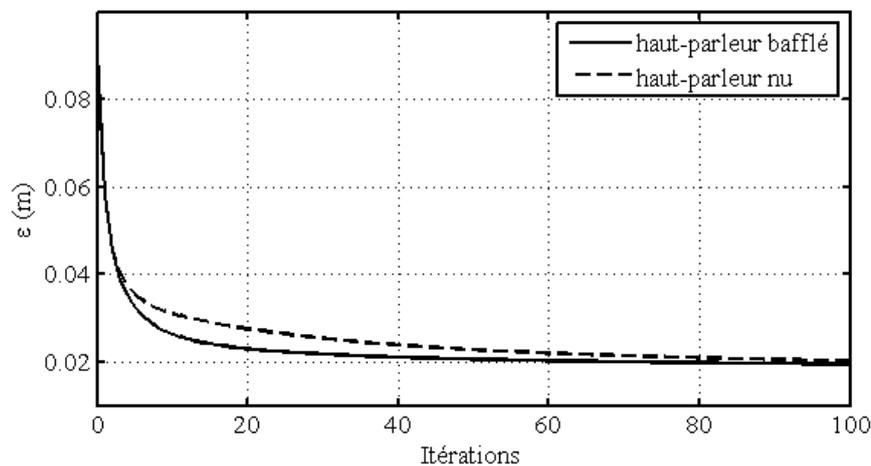


FIGURE 5.11 – Evolution de l'erreur moyenne de localisation en fonction du nombre d'itérations. 2 types de sources. Fréquence = 900Hz. $\epsilon_0 = \lambda/4$

l'évolution de l'erreur moyenne pour les deux types de sources. Notons que l'on utilise des sources qui ne sont pas trop complexes. On peut cependant remarquer que dans le cas où les sources de calibration sont plutôt dipolaires (les composantes principales des harmoniques sphériques sont d'ordre 1), la convergence est plus lente que pour les sources de type cardioïde (la composante principale est une harmonique sphérique d'ordre 0). Au

bout de 100 itérations, à 900Hz, ε atteint une valeur inférieure à $\lambda/10$, valeur de l'erreur maximale admissible sur la position des microphones pour l'identification de sources (cf. section 4.4.2.4). En calibrant l'antenne de microphones à 900Hz, la précision obtenue est suffisante pour l'identification correcte d'une source comme le montre la figure 5.12 : les coefficients de la source cardioïde sont précisément estimés. Sur la figure, les marqueurs oranges désignent les vrais coefficients, les noirs désignent leur estimation. La position des micros est calibrée à 900Hz. La précision obtenue n'est cependant pas suffisante pour identifier la source à une fréquence telle que la longueur d'onde est trop grande par rapport à l'erreur de position des micros ε . Par exemple à 3800Hz ε obtenu par calibration à 900Hz correspond à $\lambda/4$. L'identification de la source à cette fréquence est un échec (cf. figure 5.12). Il est alors possible de re-localiser les microphones avec plus de précision en

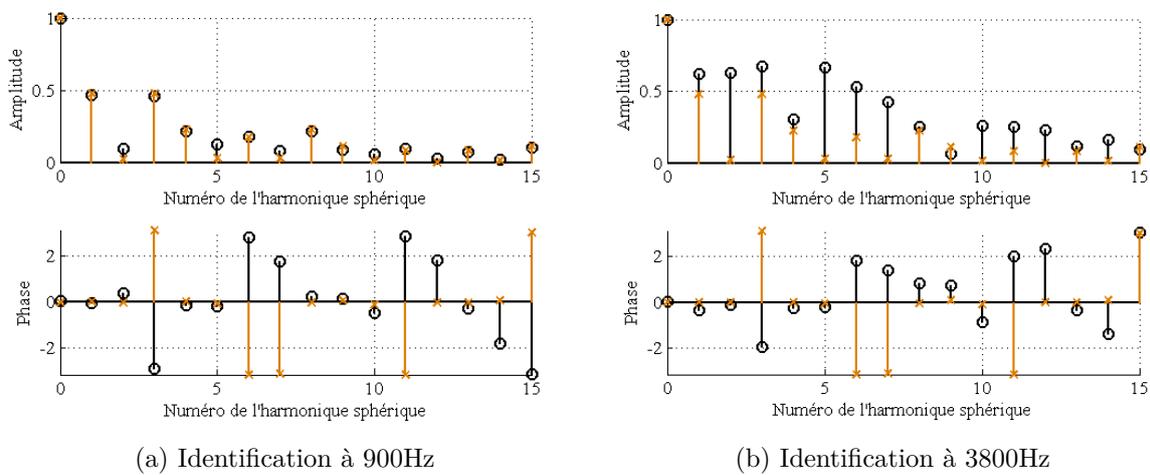


FIGURE 5.12 – Estimation des coefficients des harmoniques sphériques pour une source cardioïde. L'erreur sur la position des micros vaut $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}$.

augmentant la fréquence d'analyse à 3800Hz. La figure 5.13 illustre l'évolution de l'erreur de position des microphones aux deux fréquences et avec une erreur initiale moyenne sur la position des microphones $\varepsilon_0 = \lambda/4$. A 900Hz l'erreur converge vers une valeur qui vaut le quart de la longueur d'onde à 3800Hz. On recalibre la position des microphones à cette fréquence pour que l'erreur converge vers une valeur $\varepsilon < \lambda/10$. L'identification correcte de la source de calibration à cette fréquence est alors possible. Notons que si l'on veut plus de précision, on peut ré-itérer l'opération de calibration à une fréquence encore plus élevée.

D'une manière générale, une possibilité de calibration précise est de commencer par une localisation des sources en basses fréquences pour diminuer une erreur initiale de position sur les micros importante. Ensuite on ré-itére l'opération en augmentant la fréquence pour réduire ε .

Toutes les simulations ont été réalisées en considérant que les sources étaient sur un pas de grille. Si une source réelle est trop éloignée pas d'un de grille (l'ordre de grandeur reste

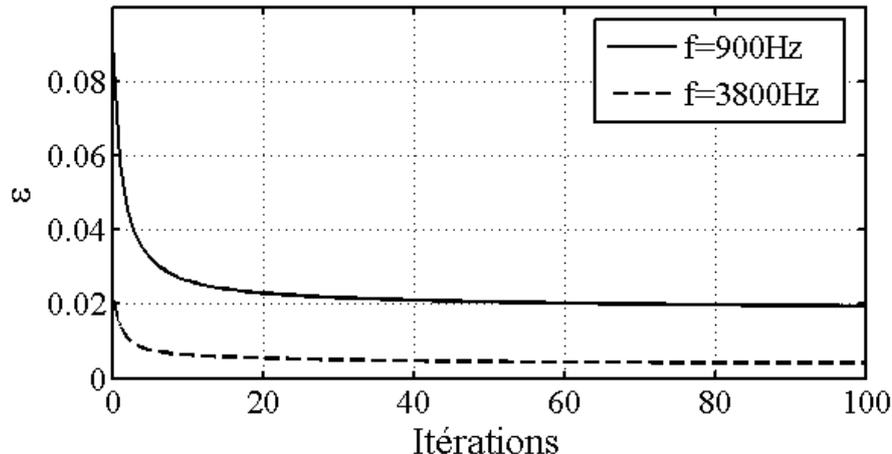


FIGURE 5.13 – Evolution de l'erreur de position en fonction du nombre d'itérations. $\varepsilon_0 = \lambda/4$

à définir), les positions des microphones divergent. Il est donc nécessaire de développer une méthode qui permette de localiser des sources en dehors des points de grille pour une application réaliste de la correction conjointe des micros et des sources. Dans la section suivante, nous proposons une méthode basée sur l'interpolation simple de Taylor.

5.4 Extension de dictionnaire par approximation de Taylor

La localisation de sources est un processus discret : on ne peut estimer une source qu'à partir de sa localisation sur un maillage prédéfini de points. Généralement, la source à identifier ne se trouvera pas sur l'un des ces points. Une solution naïve est de créer un maillage très fin tel que le pas $\Delta \ll \lambda$, ce qui pose des problèmes de temps de calculs et de place mémoire. Une solution alternative est de localiser grossièrement la source avec une grille possédant un pas Δ suffisamment large, par exemple $\Delta > \lambda/2$, puis de réitérer l'opération en construisant une grille de pas plus fin autour du point précédemment localisé jusqu'à ce que Δ soit suffisamment petit et que la précision désirée soit atteinte. On retrouve ce genre de traitement dans les travaux de Malioutov et al [McW05]. Cette technique devient fastidieuse lorsque plusieurs sources sont localisées. Nous proposons ici une méthode d'optimisation basée sur l'interpolation de Taylor des fonctions discrètes de propagations pour rendre la localisation continue dans l'espace de recherche.

Considérons une source sur un point n d'une grille et un point m de mesure. La source et la mesure sont sur le même axe x . Soit $a(x_{mn})$ le propagateur en champ libre qui associe la mesure à la source. Dans le cas où la source est omnidirectionnelle il s'écrit :

$$a(x_{mn}) = \frac{e^{-jk|x_{mn}|}}{|x_{mn}|} \quad (5.33)$$

On se place maintenant dans le cas où la position de la source n' ne correspond pas à un point de grille. On pose $\delta_x = x_{mn'} - x_{mn}$, la distance qui sépare la position réelle de la source au point de grille n le plus proche. Notons que $\delta_x \leq \Delta/2$, où Δ est le pas de grille. Une approximation du propagateur au point $x_{mn'}$ est donné par le développement de Taylor au premier ordre :

$$a(x_{mn'}) = a(x_{mn}) + \delta_x \frac{\partial a(x_{mn})}{\partial x} \quad (5.34)$$

Reprenons maintenant en 3D le formalisme de localisation de source. On cherche à résoudre le problème $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Les éléments du dictionnaire \mathbf{A} s'écrivent $A_{mn} = \frac{e^{-jkr_{mn}}}{r_{mn}}$ lorsque les sources sont sur une grille de points $n = 1 \dots N$. L'expression analytique de la dérivée par rapport à x de ces éléments est :

$$\frac{\partial A_{mn}}{\partial x} = \Lambda_{x_{mn}} = -jk \frac{x_{mn}}{r_{mn}} \frac{e^{-jkr_{mn}}}{r_{mn}} \left(\frac{j}{kr_{mn}} - 1 \right) \quad (5.35)$$

Les dérivées par rapport à y et z , respectivement $\Lambda_{y_{mn}}$ et $\Lambda_{z_{mn}}$, sont obtenues en substituant x_{mn} à y_{mn} et z_{mn} . On pose $\mathbf{\Delta}_x = \text{diag}(\boldsymbol{\delta}_x)$, où $\boldsymbol{\delta}_x$ est le vecteur contenant les décalages spatiaux pour chaque source potentielle : $\boldsymbol{\delta}_x = [\delta_{x_1} \dots \delta_{x_N}]^T$. On construit également la matrice $\mathbf{\Lambda}_x$ composée des $\Lambda_{x_{mn}}$.

En posant $\mathbf{\Lambda} = [\mathbf{\Lambda}_x \mathbf{\Lambda}_y \mathbf{\Lambda}_z]$ et en définissant la matrice $\mathbf{\Delta} = [\mathbf{\Delta}_x \mathbf{\Delta}_y \mathbf{\Delta}_z]^T$, le problème de localisation de source s'écrit, en trois dimensions :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Delta}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (5.36)$$

Une méthode a été proposée par Ekanadham et Al [ETS11] pour optimiser l'algorithme BPDN qui devient "Continuous Basis Pursuit". Le vecteur source \mathbf{x} est estimé en résolvant le problème de minimisation suivant :

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}, \mathbf{\Delta}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Delta}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \quad (5.37)$$

Ce problème de minimisation selon deux paramètres, \mathbf{x} et $\mathbf{\Delta}$, n'est cependant pas convexe si les coefficients dans \mathbf{x} sont complexes. Ekanadham et Al proposent de rendre le problème soluble en restreignant les coefficients à des réels positifs $x_n \geq 0$ pour $n = 1 \dots N$ et sous contrainte que les éléments de $\mathbf{\Delta}$ soient inférieurs à la moitié du pas de grille : $|\delta_{x_n}|, |\delta_{y_n}|, |\delta_{z_n}| \leq \Delta/2$.

Une manière de résoudre le problème 5.37 avec des coefficients complexes est de procéder à une minimisation selon un paramètre à la fois. Nous proposons un algorithme basé sur OMP qui estime successivement \mathbf{x} et $\mathbf{\Delta}$ selon un processus itératif. D'une part, on estime le vecteur source $\hat{\mathbf{x}}$ en résolvant par algorithme OMP le problème 5.36. Connaissant une approximation de $\hat{\mathbf{x}}$, on peut estimer les décalages spatiaux associés à chaque source estimée. En posant $\boldsymbol{\delta} = [\boldsymbol{\delta}_x \boldsymbol{\delta}_y \boldsymbol{\delta}_z]^T$, le vecteur de ces décalages spatiaux selon les coordonnées $x, y, et z$, le problème 5.36 peut être ré-écrit :

$$\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{\Sigma}\boldsymbol{\delta} \quad (5.38)$$

où $\Sigma = [\Lambda_x \hat{\mathbf{X}} \ \Lambda_y \hat{\mathbf{X}} \ \Lambda_z \hat{\mathbf{X}}]$ et $\hat{\mathbf{X}} = \text{diag}(\hat{\mathbf{x}})$. Le vecteur $\boldsymbol{\delta}$ peut alors être estimé par la méthode des moindres carrés. L'estimation de $\boldsymbol{\delta}$ est donnée par :

$$\boldsymbol{\delta} = \Sigma^\dagger (\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) \quad (5.39)$$

où \dagger représente la pseudo-inverse.

On résume les étapes de l'algorithme que l'on nomme OMP-T. Dans une étape préliminaire, on initialise la matrice $\Delta^{(0)} = \mathbf{0}$ et le compteur $i=0$. Ensuite, à chaque itération :

1. Estimation de $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}$ par OMP en résolvant le problème

$$\mathbf{y} = (\mathbf{A} + \Lambda \Delta^{(i)}) \mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{b} \quad (5.40)$$

2. Construction de $\Sigma^{(i)}$.
3. Estimation des distances entre sources réelles et points de grille :

$$\boldsymbol{\delta}^{(i)} = (\Sigma^{(i)})^\dagger (\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^{(i)}) \quad (5.41)$$

4. Mise à jour de $\Delta^{(i)}$ en fonction de $\boldsymbol{\delta}^{(i)} = [\boldsymbol{\delta}_x^{(i)} \ \boldsymbol{\delta}_y^{(i)} \ \boldsymbol{\delta}_z^{(i)}]^T$
5. itération $i=i+1$ jusqu'à convergence de $\|\boldsymbol{\delta}\|_2$.

La valeur finale de $\boldsymbol{\delta}$ fournit une estimation de la distance entre les sources réelles et les points de grille les plus proches.

La position des sources dans le dispositif expérimental n'étant pas connue précisément, nous illustrons donc le comportement de l'algorithme OMP-T par une simulation. Nous nous plaçons dans la configuration illustrée sur la figure 3.8 : antenne plane semi-circulaire de 120 micros et plan source à une distance de 5m de l'antenne. Deux sources S_1 et S_2 de même niveau, et de même fréquence $f=5000\text{Hz}$, sont respectivement simulées aux points de coordonnées $(-0.276, 0.092)\text{m}$ et $(0.008, 0.44)\text{m}$. Ces coordonnées correspondent à des points distants d'environ $\lambda/2$ avec le point de grille le plus proche. Ces deux positions ne correspondent pas à des points de la grille de reconstruction. Le pas de grille est de $\Delta_x = \Delta_y = \lambda$. Sur la figure 5.14 (a) on illustre la localisation après 40 itérations de l'algorithme OMP-T. La première itération localise la source sur le pas de grille le plus proche. La localisation est ensuite corrigée jusqu'à ce que $\boldsymbol{\delta}$ converge. La figure 5.14 (b) montre l'évolution de l'erreur ε de localisation en fonction du nombre d'itérations. Elle se stabilise (lorsque $\boldsymbol{\delta}$ converge) après une quinzaine d'itérations, ce qui est faible compte tenu de la rapidité d'exécution de l'algorithme. L'erreur converge, pour les deux sources, vers 5.10^{-3}m . Cela correspond à une précision de localisation d'environ 7% de la longueur d'onde alors que l'erreur de départ était d'environ 50%.

Le pas de grille Δ définit la valeur maximale des composantes de $\boldsymbol{\delta}$ qui vaut, en dimension 1, $\delta_{max} = \Delta/2$. La résolution du problème 5.36 par OMP-T autorise la construction de grilles de pas larges (de l'ordre de λ) tout en étant capable de localiser assez précisément une source distante de $\lambda/2$ par rapports au point de grille le plus proche. OMP-T permet de réduire la dimension de l'espace source et ainsi d'alléger les ressources mémoires

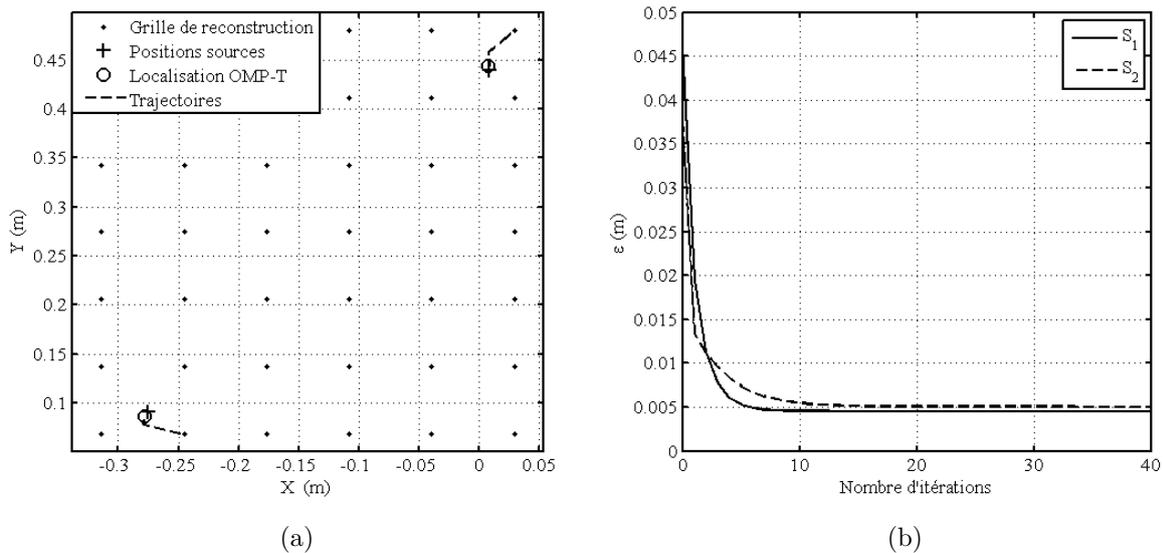


FIGURE 5.14 – Simulation de l’algorithme OMP-T pour deux sources à une distance $z=5\text{m}$ de l’antenne illustrée sur la figure 3.8. Fréquence = 5000Hz. (a) Localisation des sources en dehors de la grille de reconstruction. (b) Évolution de l’erreur de localisation en fonction du nombre d’itérations

requises. Notons que si une source est trop éloignée d’un point de grille ($\delta \gg \lambda/2$), l’oscillation des fonctions de propagations qui composent \mathbf{A} ne permet pas l’approximation d’un point intermédiaire par développement de Taylor.

Nous avons tenté d’adapter la méthode la méthode OMP-T à localisation de sources complexes en remplaçant simplement le dictionnaire monopolaire par un dictionnaire de sources complexes. Les premiers résultats n’ont pas été probants et des études supplémentaires sont à prévoir. Les oscillations importantes des atomes du dictionnaire sont une cause potentielle de l’échec de la méthode OMP-T lorsque l’ordre de restriction est supérieur à 1. Il faut donc envisager d’autres méthodes plus complexes d’interpolation.

5.5 Conclusion

Dans un cadre simulé, nous avons exploité les algorithmes de localisation parcimonieuse des sources pour proposer une méthode de localisation conjointe des micros et des sources. L’objectif est de calibrer simultanément l’antenne de micros tout en traitant un problème quelconque de localisation de sources. Les résultats montrent qu’avec des sources omnidirectionnelles, la méthode est plus précise que l’estimation aveugle développée par Ono lorsque l’erreur de position initiale est relativement faible. La méthode d’Ono pourrait être utilisée comme une base de correction de positions qui seraient affinées par la méthode proposée basée sur OMP. Un avantage de cette méthode est d’être adaptée à la localisation de sources complexes. Les résultats simulés avec une antenne

tri-dimensionnelle montrent qu'il est possible d'identifier la directivité d'une source dans un unique problème d'optimisation incluant la correction de position des micros. Nous avons cependant restreint le dictionnaire de modes complexes de rayonnement à l'ordre 1. Des études plus poussées devraient permettre d'établir précisément les limites de la méthode qui reste à valider expérimentalement.

L'auto-calibration de la position des micros est un problème majeur de l'imagerie acoustique par antennerie. Il fait l'objet d'un certain nombre de recherches. Par exemple Crocco et Al [CDBBM12] ont proposé une méthode de localisation conjointe des micros et des sources basée sur la mesure de temps de vols. Elle nécessite par contre la connaissance des instants d'émission des sources. La méthode de correction de la position de micros proposée est performante dans le cas idéal où les sources correspondent à des points de la grille de reconstruction. Dans le cas contraire, des problèmes de divergence du vecteur de correction de position \mathbf{h} apparaissent. L'outil OMP-T développé permet la localisation de sources simples en dehors des points de grille. Il est basé sur l'approximation des fonctions de propagations absentes du dictionnaire \mathbf{A} par interpolation simple de Taylor. De nouvelles études numériques et expérimentales devraient permettre de valider la méthode OMP-T et d'en préciser les limites. L'objectif à terme est d'inclure la correction de positions des micros et la localisation des sources dans un espace continu dans un unique programme d'optimisation.

Conclusion générale

Dans le cadre du projet ANR "Echange", ce travail de thèse avait pour but d'adapter les principes algorithmiques des méthodes d'approximations parcimonieuses à quelques scénarios d'analyse des champs acoustiques. Les multiples expériences menées, en simulations numériques et en mise en œuvre pratique, ont permis d'apprécier les performances de ces méthodes et d'en établir des limites.

L'holographie acoustique compressée, a constitué un bon champ d'application des principes du "compressive sampling" (CS). Ce problème nécessite l'utilisation d'un dictionnaire de décomposition parcimonieuse construit en fonction de connaissances a priori sur la source. On a utilisé un algorithme de minimisation convexe de la norme ℓ_1 de la source (BPDN), pour une reconstruction robuste aux approximations inhérentes au dictionnaire. Nous avons montré à l'aide de mesures que l'application du CS au problème inverse d'holographie plane permet non seulement de mieux régulariser le problème, notamment pour la reconstruction des hautes fréquences spatiales, mais également de diminuer fortement le nombre de microphones en sous-échantillonnant l'hologramme au-delà de la limite imposée par la théorie de Shannon. La méthode peut être adaptée à d'autres géométries en définissant des dictionnaires de décomposition parcimonieuse spécifiques du problème considéré. Des études à venir doivent considérer l'optimisation du dictionnaire en fonction de la source étudiée.

La localisation de sources peut être envisagée comme un problème parcimonieux lorsque le nombre de sources est faible relativement aux dimensions de l'espace où elles sont localisées. Des simulations ont montré que la localisation en champ lointain, au moyen de l'algorithme OMP était performante. Ce résultat vaut en particulier dans les situations où les méthodes dites « haute-résolution » échouent : faible RSB, sources corrélées... Le problème est similaire à un problème de CS et la méthode permet le sous-échantillonnage des mesures au sens de Shannon. La méthode est cependant physiquement limitée par les dimensions de l'antenne. Des études futures devraient permettre d'optimiser l'algorithme OMP pour s'affranchir de cette limitation. Des expériences menées en milieu anéchoïque et réverbérant, ont permis de valider ces performances en champ proche par traitement des composantes harmoniques et des signaux large bande, issus de sources omnidirectionnelles. Le traitement des signaux large bande a nécessité la mise en œuvre d'algorithmes plus complexes, adaptés à la parcimonie dite "structurée".

Dans une étude plus approfondie, nous avons enrichi le modèle de rayonnement des sources avec un dictionnaire de décomposition en harmoniques sphériques pour localiser et

identifier simultanément des sources complexes. Ici encore, la parcimonie est structurée car elle n'est valable que dans l'espace de reconstruction et non dans l'espace des harmoniques sphériques. L'intérêt d'utiliser un dictionnaire de rayonnement complexe a d'abord été montré par des simulations pour localiser des sources complexes situées dans un plan parallèle à un réseau plan de microphones. Dans ce cas la précision de localisation est bien supérieure à celle obtenue avec un dictionnaire classique de sources omnidirectionnelles. Les algorithmes "groupe OMP" ou "groupe BPDN" utilisés pour la localisation de sources complexes ont été appliqués pour l'estimation de leur directivité. On a constaté une forte sensibilité de la méthode aux erreurs de phase, qui s'aggrave avec la complexité (ordre) du modèle de source utilisé. Cependant, lorsque le modèle de rayonnement est limité à un ordre faible, la méthode est performante.

Pour toutes les expériences évoquées plus haut, notamment pour l'étude de la directivité de sources, nous avons été confrontés à des problèmes de calibration et de localisation des microphones. Ces problèmes ont motivé le développement d'une méthode originale de localisation conjointe des microphones et des sources de calibration. La méthode est basée sur la technique de localisation de sources par OMP. Des résultats de simulations ont montré la performance de la méthode en utilisant des sources de calibration omnidirectionnelles ou complexes (d'ordre limité). Ces principes restent à valider expérimentalement et les limites de la méthode doivent être établies précisément. Enfin, la localisation exacte des sources est limitée par le nombre nécessairement réduit des points constituant la grille de reconstruction ce qui peut impacter la qualité de l'identification des sources. C'est pourquoi nous avons proposé un outil qui permettrait la localisation en dehors d'un maillage prédéfini de points. La méthode basée sur l'algorithme OMP et appelée OMP-T donne des résultats préliminaires encourageants, elle nécessite toutefois des études complémentaires par simulations et validations expérimentales.

Les algorithmes de reconstruction parcimonieuse étudiés dans tous ces scénarios, OMP et BPDN, sont certes performants mais ils sont limités par le paramétrage d'un critère d'arrêt. Une mauvaise évaluation de ce paramètre peut engendrer des erreurs importantes dans l'estimation de la solution. Pour les problèmes exposés dans cette thèse, les paramètres de régularisation ont été choisis façon ad-hoc, la plupart du temps en connaissant le résultat de reconstruction attendu. Des études supplémentaires doivent donc être menées pour mettre au point des méthodes d'estimation objective des critères d'arrêt des algorithmes. Ainsi une étude est actuellement en cours pour appliquer la méthode de validation croisée à l'algorithme OMP.

Nous avons montré que les approximations parcimonieuses des sources permettent de résoudre avec efficacité certains problèmes d'imagerie acoustique. Elles permettent de régulariser des problèmes inverses (NAH, localisations de sources), de mesurer des champs acoustiques avec un nombre réduit de capteurs (CS), ou encore de résoudre des problèmes complexes de manière originale (mesure de directivité). De nombreuses pistes sont encore à explorer pour établir précisément les limites de ces méthodes parcimonieuses pour l'imagerie de sources. Les résultats obtenus sont cependant encourageants et ouvrent

des perspectives intéressantes pour la résolution de problèmes communs en acoustique qui touchent des domaines d'applications plus vastes que les scénarios traités ici. Des études récentes se sont attachées à résoudre certains problèmes grâce au formalisme de parcimonie et aux algorithmes adaptés de reconstruction. Lardies [LMB11] a récemment étudié les problèmes de localisation de sources en champ lointain et en champ proche (avec un modèle de propagation omnidirectionnel) inspiré des travaux de Malioutov [McW05].

Epain et Al [EJS09] ont utilisé le compressive sampling pour l'analyse et la synthèse de champs acoustiques afin d'optimiser les systèmes de spatialisation ambisonique. Le domaine de parcimonie est construit sur une base d'ondes planes. L'étude montre que le nombre de canaux à la réception (microphones) et à la reproduction (haut-parleurs) peut-être réduit tout en améliorant les performances d'analyse et de synthèse des champs. D'autres problèmes inverses en acoustique ont été traités avec la parcimonie. G. Chardon [Cha12] dans une thèse connexe a décrit un modèle de parcimonie basé sur la décomposition en ondes planes des solutions de l'équation de Helmholtz. Les résultats ont été appliqués l'holographie acoustique de champ proche et à la localisation de sources en milieu réverbérant. R. Mignot a traité le problème de l'estimation des réponses impulsionnelles de salles par échantillonnage compressé [MDO11].

La parcimonie peut également être utilisée pour la synthèse de champs acoustiques. Elle a par exemple été utilisée comme moyen de régularisation par Lilis et Al [LAG10] pour calculer les commandes d'un nombre limité de sources qui donnent naissance à un champ acoustique dans des applications de "Wave Field Synthesis".

Les techniques parcimonieuses ont émergé pour la résolution de problèmes assez éloignés de notre champ d'étude (par exemple pour les techniques d'IRM [LDSP08]). Les applications en acoustique montrent qu'elles peuvent être appliquées dans beaucoup de domaines de la physique où elles sont encore méconnues. Elles nécessitent de revoir la manière d'aborder les problèmes pour trouver des bases de parcimonie à partir de l'étude même du phénomène physique. Dans la littérature récente, de plus en plus de travaux en acoustique et dans d'autres domaines de la physique se penchent sur ces notions de parcimonie, voire de "compressive sampling". Elles offrent des nouvelles possibilités de reconstruction haute-résolution et permettent une économie certaine de ressources matérielles et même humaines, au prix de calculs parfois lourds mais qui deviennent à la portée des ordinateurs récents.

Annexe A

Détection des temps d'arrivées par inter-corrélation généralisée

Nous développons ici une méthode de compression d'impulsion pour la mesure de temps d'arrivées. Elle a été utilisée pour la séparation du trajet direct du champ diffus dans nos expériences de localisation et d'identification en environnement réverbérant. La méthode s'appuie sur le calcul de la fonction d'inter-corrélation généralisée développée dans l'article de Knapp et Carter [KC76].

Soient un signal fréquentiel $x(f)$ et un signal fréquentiel de référence $x_{ref}(f)$. Le signal de référence peut être le signal source, lorsqu'il est disponible, ou un signal enregistré par un micro de référence. On définit la densité inter-spectrale de puissance $G(f) = E[x(f)x_{ref}(f)^*]$, où $*$ indique le complexe conjugué, et E est l'espérance mathématique. $G(f)$ correspond à la transformée de Fourier de la fonction d'inter-corrélation $R(\tau)$. Sur la fonction $R(\tau)$, le temps τ associé au premier pic correspond au temps de vol entre les deux signaux.

La méthode d'inter-corrélation généralisée introduit l'application des filtres $H(f)$ et $H_{ref}(f)$ sur les spectres $x(f)$ et $x_{ref}(f)$. Ces filtres sont destinés à améliorer la résolution du premier pic. On obtient la densité inter-spectrale de puissance généralisée :

$$G_g(f) = H(f)H_{ref}(f)G(f) \quad (\text{A.1})$$

On pose $\Psi(f) = H(f)H_{ref}(f)$, la fonction de poids généralisée. Dans nos expériences, nous avons utilisé la fonction de poids dictée par la méthode PHAT (Phase Transform) :

$$\Psi(f) = \frac{1}{|G(f)|} \quad (\text{A.2})$$

Cette fonction de poids permet de diminuer la largeur du pic de corrélation de $\hat{R}(\tau)$. On obtient finalement la fonction d'inter-corrélation généralisée par transformée de Fourier inverse :

$$\hat{R}_g(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(f)G(f)e^{j2\pi f\tau} df \quad (\text{A.3})$$

L'argument τ qui maximise l'équation A.3 correspond au retard entre les deux signaux. La précision de l'estimation de τ sera d'autant plus grande que la largeur de bande du

signal est grande. En pratique, on utilise des signaux modulés linéairement en fréquence pour conserver une bonne énergie à la réception des signaux.

Un exemple de fonction d'inter-corrélation généralisée est illustré sur la figure A.1. Il a été obtenu lors de l'expérience de mesure de directivité. Le signal de référence est dans ce cas le signal envoyé à la source. On obtient une réponse impulsionnelle sur laquelle on peut identifier le premier pic correspondant au trajet direct et des pics secondaires correspondant à des réflexions. On extrait les informations associées au trajet direct, soit

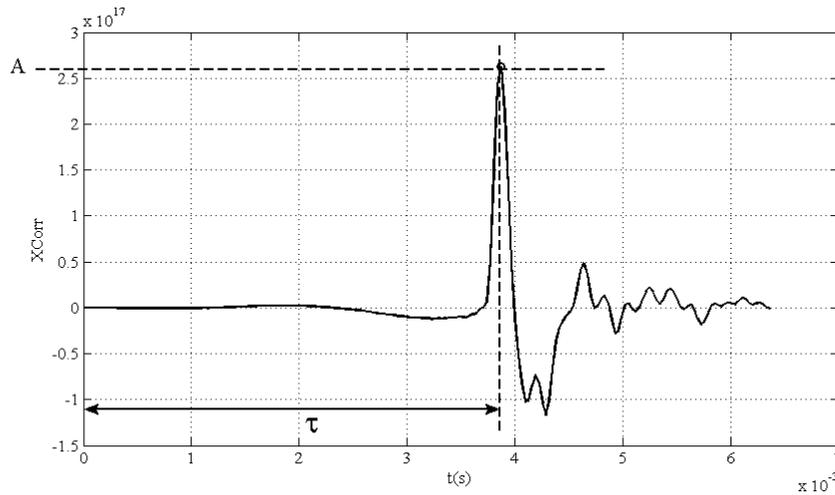


FIGURE A.1 – Exemple de réponse impulsionnelle calculée par GCC pour un microphone

l'amplitude réelle A du maximum du premier pic qui peut être positive ou négative, et son temps d'arrivée τ . On construit alors l'amplitude complexe du signal $y_m = A_m e^{j\omega\tau_m}$ pour chaque micro m . Remarquons que cette opération revient à calculer une transformée de Fourier sur un Dirac pur $A_m \delta(t - \tau_m)$.

Annexe B

Représentation de quelques harmoniques sphériques

Nous illustrons sur la figure B.2 l'allure des premières harmoniques sphériques jusqu'à l'ordre $L=2$ dans le système de coordonnées utilisé dans le chapitre 4. Ces harmoniques sphériques forment une base orthogonale de fonctions :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_l^q(\phi, \theta) Y_{l'}^{q'}(\phi, \theta)^* \sin \theta d\theta = \delta_{ll'} \delta_{qq'} \quad (\text{B.1})$$

où Y_l^q désigne l'harmonique sphérique d'ordre l et de degré q . Sur la figure B.2, la forme indique l'amplitude, et la couleur la phase. Des combinaisons d'harmoniques sphériques appartenant au même ordre permettent d'obtenir des multipôles. Par exemple, la combinaison $Y_1^{-1} - Y_1^1$ correspond à un dipôle orienté selon l'axe des x (cf. figure B.1 (a)) et la combinaison $j(Y_1^{-1} + Y_1^1)$ correspond à un dipôle orienté selon l'axe des y (cf. figure B.1 (b)). La couleur verte correspond au pôle de signe positif et la couleur bleue au pôle de signe négatif.

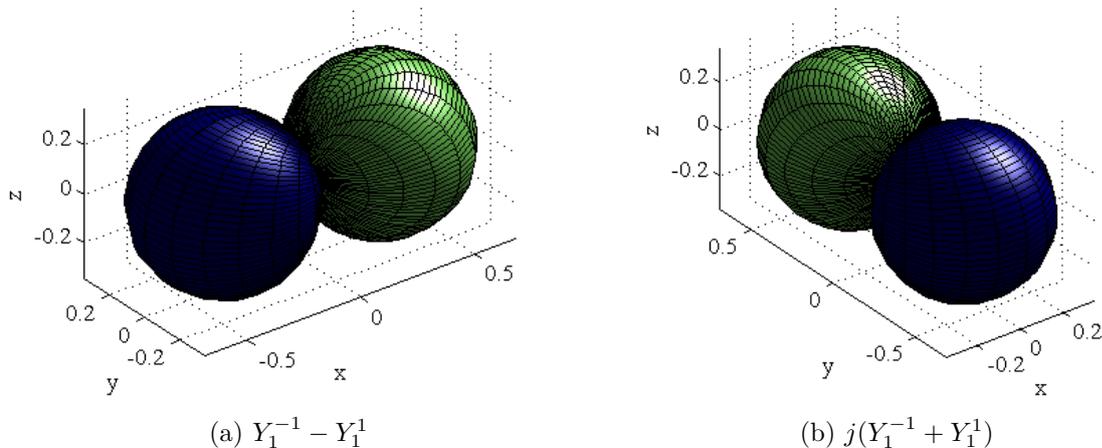


FIGURE B.1 – Allure des deux dipôles orientés selon les axes x et y

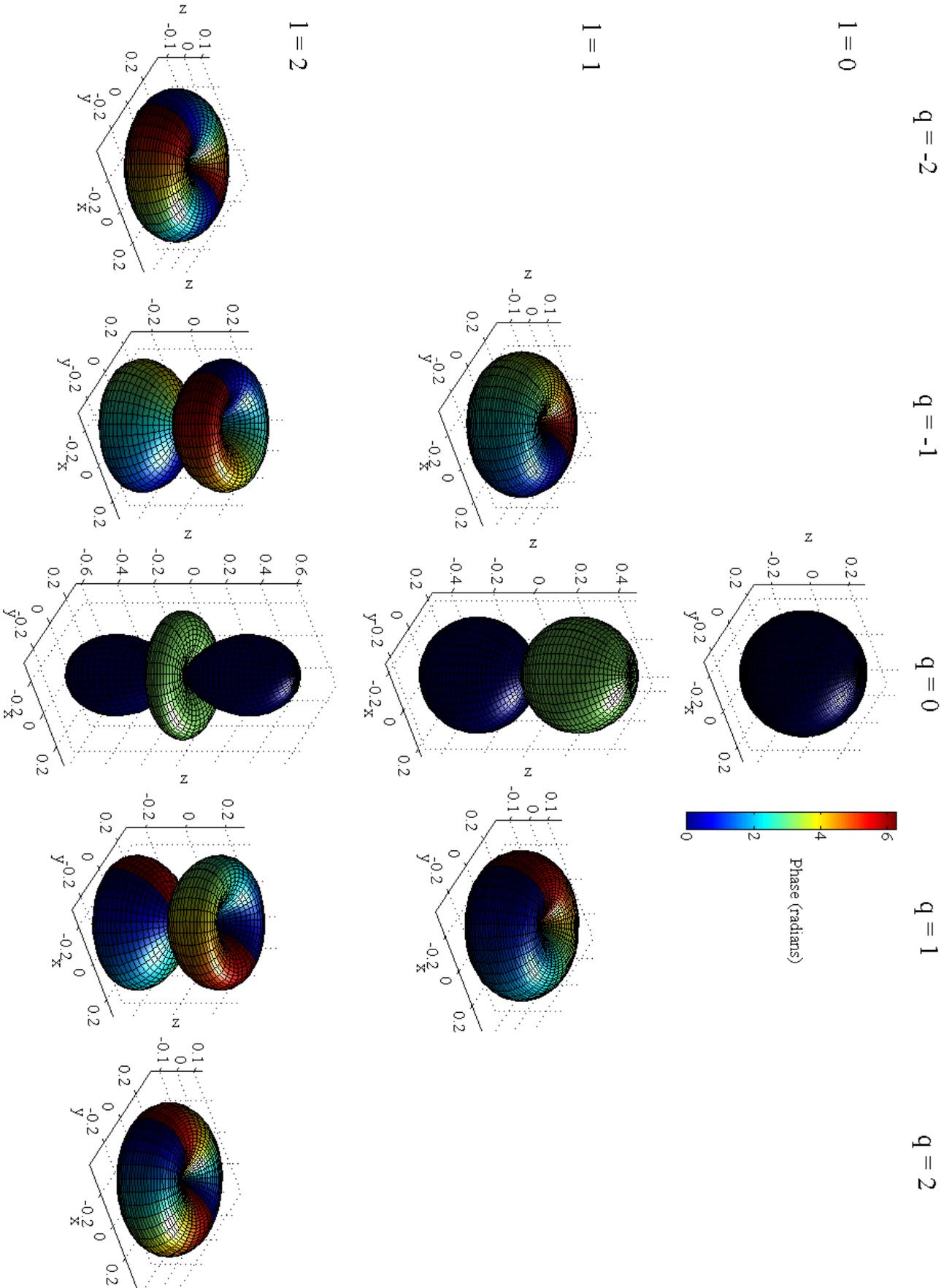
FIGURE B.2 – Illustration de la famille d'harmoniques sphériques limitée à l'ordre $L=2$

Table des figures

1.1	Modélisation d'un problème inverse : estimation de \mathbf{x} à partir de mesures bruitées \mathbf{y} et d'un opérateur linéaire \mathbf{A}	8
1.2	Exemple de signaux parcimonieux (a) dans la base de Fourier discrète et (c) dans la base de Fourier 2D. (b) et (d) sont les coefficients correspondants.	11
1.3	Comparaison de l'estimation de \mathbf{x} par minimisation ℓ_1 et ℓ_2 en dimension 2	13
1.4	(a) Signal parcimonieux dans la base canonique. (b) Vecteurs aléatoires utilisés pour la mesure du signal (a).	17
1.5	Exemple d'application du compressive sampling. (a) un signal temporel parcimonieux dans la base de Fourier. (b) les coefficients correspondants dans la base de Fourier (c) reconstruction du signal par minimisation ℓ_2 avec 20 échantillons (points orange) (d) reconstruction par minimisation ℓ_1 (BP) avec les mêmes échantillons.	18
2.1	Illustration du système d'holographie acoustique de champ proche pour la mesure de vibrations d'une table d'harmonie de piano forte. Photo prise à la Cité de la Musique de Paris	22
2.2	Positionnement de l'antenne plane de mesure par rapport à la plaque rectangulaire : (a) disposition des 120 micros de l'antenne, (b) construction d'un maillage de 1920 mesures par déplacement de l'antenne, (c) dispositif expérimental	23
2.3	Disposition des 1920 micros sur la plaque en forme de D (a). Photo de la plaque (b).	24
2.4	Exemple d'un signal temporel enregistré par un microphone	26
2.5	Exemple de spectre (a) et de spectre moyen (b) pour la plaque rectangulaire	26
2.6	Processus expérimental de l'acquisition des données (acoustiques et vibrométriques), du traitement harmonique des signaux, et de la reconstruction par NAH de la source vibrante	27
2.7	Géométrie du problème de NAH	27
2.8	Spectre de nombre d'onde de la pression mesurée à une fréquence de 1257Hz	29
2.9	Méthodes d'estimation du paramètre de régularisation λ . (a) Méthode de la courbe en L. (b) Méthode GCV.	33

2.10	Un atome du dictionnaire de décomposition parcimonieuse. a) Forme \mathcal{S} d'une plaque et domaine rectangulaire $\bar{\mathcal{S}}$ sur lequel est construit la base de Fourier. b) Atome du dictionnaire de Fourier sur $\bar{\mathcal{S}}$ restreint à \mathcal{S}	36
2.11	Approximation de deux ODS à 402Hz et 3297Hz. a) mesures directes par vibromètre laser. b) approximations parcimonieuses	37
2.12	Comparaison des performances de reconstruction des algorithmes BPDN (a) et OMP (b) pour différentes dimensions du dictionnaire. Les ODS sont sélectionnées sur tout le spectre.	38
2.13	Évolution du coefficient de corrélation en fonction du paramètre de régularisation $\varepsilon = \alpha \ p\ _2$	40
2.14	Reconstructions de 4 déformées opérationnelles (78Hz, 402Hz, 1483Hz, et 3297Hz) de la plaque rectangulaire à bords libres. Les résultats obtenus par régularisation de Tikhonov (b et c) et par approximations parcimonieuses (d et e) sont comparés aux mesures directes par vibrométrie laser (a).	41
2.15	Robustesse de la reconstruction parcimonieuse en fonction du taux de décalibration en amplitude simulé en utilisant l'algorithme BPDN	42
2.16	Reconstructions de 4 déformées opérationnelles (155Hz, 467Hz, 1234Hz, et 2661Hz) de la plaque en forme de D avec des conditions aux limites mixtes. Les résultats obtenus par régularisation de Tikhonov (b et c) et par approximations parcimonieuses (d et e) sont comparés aux mesures directes par vibrométrie laser (a).	46
2.17	Illustration de l'antenne pseudo-aléatoire utilisée expérimentalement. (a) Disposition des micros par rapport à la plaque. (b) Photo de l'antenne opérationnelle.	48
2.18	Comparaison des reconstructions CS de la plaque rectangulaire par algorithme BPDN avec deux types d'antennes : (b) antenne régulière de 42 micros, (c) antenne pseudo-aléatoire oblique de 42 micros. (a) Mesures de références.	49
2.19	Comparaison des reconstructions CS de plaque en D par algorithme BPDN avec deux types d'antennes : (b) antenne régulière de 120 micros, (c) antenne aléatoire de 120 micros sélectionnés parmi les 1920 de l'antenne régulière. (a) Mesures de références.	50
2.20	Performances de reconstruction des ODS à plusieurs fréquences en fonction du nombre de microphones. (a) Antenne régulière et régularisation de Tikhonov. (b) Antenne aléatoire et régularisation parcimonieuse (compressive sampling)	51
2.21	Performances de reconstructions d'ODS de 58Hz à 3300Hz avec plusieurs méthodes. Utilisation de 42 micros pour chaque méthode : (Tikh Reg) régularisation de Tikhonov et antenne régulière, (BPDN Reg) régularisation parcimonieuse et antenne régulière, (BPDN Alea) régularisation parcimonieuse avec antenne aléatoire.	51

3.1	Configuration d'un système de localisation de sources en champ lointain. Les x_n correspondent à des positions angulaires	57
3.2	Simulations de l'erreur ε de reconstruction par OMP en fonction du RSB à partir des signaux issus d'une observation $\tilde{\mathbf{y}}$ ou des signaux \mathbf{y} issus de l'espace signal de la matrice de covariance	64
3.3	Évolution de la norme du résidu en fonction du nombre d'itérations pour la localisation par OMP de 2 sources simulées. Les 2 sources de niveaux 0dB et -40dB sont corrélées. 3 RSB différents sont étudiés.	65
3.4	Comparaison de l'estimation de 2 sources à 10° et 14° ($\theta = 4^\circ$) suivant plusieurs paramètres : SNR, pas de l'antenne d , corrélation des sources, ouverture L d'antenne.	67
3.5	Amplitude des valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$ en présence de 2 sources non corrélées. RSB=20dB	68
3.6	Amplitude des valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$ en présence de 2 sources corrélées. RSB=50dB	68
3.7	Sous-échantillonnage spatial du champ acoustique et estimation des sources avec un réseau régulier ou aléatoire	70
3.8	Configuration du dispositif expérimental de localisation de sources	72
3.9	Illustration de l'antenne (a) et des sources (b) en chambre anéchoïque	72
3.10	Estimations OMP de 3 sources omnidirectionnelles à 900Hz, 2500Hz et 7000Hz. Estimation OMP = marqueurs en croix. Sources réelles = mar- queurs en cercles. a) Simulations 120 micros. b) Expériences 120 micros. c) Expériences 64 micros. Carte "beamforming" en fond avec un niveau de couleur de 20dB de dynamique : noir = 0dB, blanc = -20dB.	73
3.11	Disposition des micros de l'antenne complète (120 micros) et de l'antenne CS (64 micros)	74
3.12	Estimations BPDN de 3 sources omnidirectionnelles à 900Hz, 2500Hz et 7000Hz. Sources réelles = marqueurs en cercles. Carte BPDN avec un ni- veau de couleur de 20dB de dynamique : noir = 0dB, blanc = -20dB. a) Simulations 120 micros. b) Expériences 120 micros. c) Expériences 64 micros.	74
3.13	Dispositif expérimental pour la localisation large bande a) - Photo de l'an- tenne de capteurs b)	77
3.14	Localisation large bande par parcimonie conjointe de 4 sources actives in- dépendamment par 2 méthodes : groupe BPDN a) et BPDN simple b)	78
4.1	Système de coordonnées pour la décomposition en harmoniques sphériques de sources complexes	82
4.2	Comparaison de la projection du signal \mathbf{y} sur les atomes normalisés (a) et de la norme de la projection sur les atomes orthogonalisés (b)	85
4.3	Localisation de sources complexes avec plusieurs méthodes. Légende de la figure dans le tableau 4.1. Niveau de couleur de 20dB de dynamique : noir = 0dB, blanc = -20dB	88

4.4	Localisation expérimentale de deux sources dipolaires à 1300 Hz par BF et OMP. (a) Dictionnaire monopolaire. (b) Dictionnaire complexe limité à l'ordre 2	89
4.5	Configuration d'un dispositif de mesure réparti sur la surface Γ d'une sphère de rayon R pour la mesure de directivité d'une source de centre acoustique s	90
4.6	Antenne sphérique aléatoire. Les points noirs correspondent aux micros . . .	92
4.7	Qualité de l'identification d'une source d'ordre L en fonction du nombre de microphones. Moyenne sur 25 tirages aléatoires des micros réparties sur l'antenne sphérique (a) Coefficient de corrélation (b) Erreur de localisation	93
4.8	Performances de groupe OMP en fonction du produit kr du SNR et de l'ordre de la source (a) Coefficient de corrélation SNR = 60dB (b) Coefficient de corrélation SNR = 20dB (c) Erreur de localisation SNR = 60dB (d) Erreur de localisation SNR = 20dB	94
4.9	Corrélations en fonction de l'écart type ε de l'erreur aléatoire dépendant de la longueur d'onde sur la position des micros. Moyenne sur 50 tirage d'erreurs	95
4.10	Corrélations en fonction de l'écart type E de l'erreur aléatoire sur la sensibilité des micros. Moyenne sur 50 tirage d'erreurs	96
4.11	Corrélations en fonction de l'erreur δ de localisation de la source. δ est dépendant de la longueur d'onde	97
4.12	Moyenne des coefficients de corrélation calculés pour deux sources séparées de $\delta = f(\lambda)$ avec deux rayons d'antenne différents (a) $r = 1m$ (b) $r = 5m$.	97
4.13	a) Dispositif expérimental de mesure de directivité. Les micros sont disposés avec un pas régulier sur un demi-cercle Γ de centre C . La source à mesurer est placée au point C . b) Photo de l'antenne de mesure en environnement réverbérant.	99
4.14	Mesure de la directivité de la source A . (a) Mesure directe. (b) Décomposition SH à l'ordre 7. (c) Approximation de la directivité à l'ordre 3	100
4.15	Mesure de la directivité de la source B	101
4.16	Identification de la source A par groupe OMP avec 32 micros répartis aléatoirement sur une sphère. (a) directivité. (b) coefficients SH.	102
4.17	Identification de la source B par groupe OMP avec 32 micros répartis aléatoirement sur une sphère. (a) directivité. (b) coefficients SH.	103
4.18	a) Antenne cubique d'estimation de directivité b) Photo de l'antenne de mesure en environnement réverbérant.	103
4.19	Qualité de l'identification d'une source d'ordre L en fonction du nombre de microphones. Moyenne sur 25 tirages d'une distribution aléatoire de micros répartie sur l'antenne cubique 4.20	104
4.20	Identification de la source B par groupe OMP avec 32 micros répartis aléatoirement sur l'antenne cubique 4.20. (a) directivité. (b) coefficients SH.	105

5.1	Disposition des transducteurs pour l'évaluation des performances de la matrice de calibration diagonale dans un cadre simulé	111
5.2	Résultat de corrections de signaux en amplitudes (a) et (c), en phase (b) et (d) par la matrice de calibration diagonale.	112
5.3	Correction de la position des microphones et des quatre sources de calibration	114
5.4	Évolution de l'erreur moyenne de localisation des microphones en fonction du nombre d'itérations	115
5.5	Illustration du déplacement d'un microphone m	116
5.6	Correction de la position des microphones. Fréquence=500Hz. 3 sources. $\varepsilon_0 = 0.22\text{m}$	119
5.7	Évolution de l'erreur de position ε en fonction du nombre d'itérations. Fréquence=500Hz. 3 sources.	120
5.8	Evolution de l'erreur de position en fonction du nombre d'itérations. Fréquence=500Hz. $\varepsilon_0 = 0.22\text{m}$	121
5.9	Correction de la position des microphones. Fréquence=500Hz. 4 sources. $\varepsilon_0 = 0.22\text{m}$	122
5.10	Evolution de l'erreur de position en fonction du nombre d'itérations. $\varepsilon_0 = 0.22\text{m}$	122
5.11	Evolution de l'erreur moyenne de localisation en fonction du nombre d'itérations. 2 types de sources. Fréquence = 900Hz. $\varepsilon_0 = \lambda/4$	123
5.12	Estimation des coefficients des harmoniques sphériques pour une source cardioïde. L'erreur sur la position des micros vaut $\varepsilon = 2.10^{-2}$	124
5.13	Evolution de l'erreur de position en fonction du nombre d'itérations. $\varepsilon_0 = \lambda/4$	125
5.14	Simulation de l'algorithme OMP-T pour deux sources à un distance $z=5\text{m}$ de l'antenne illustrée sur la figure 3.8. Fréquence = 5000Hz. (a) Localisation des sources en dehors de la grille de reconstruction. (b) Évolution de l'erreur de localisation en fonction du nombre d'itérations	128
A.1	Exemple de réponse impulsionnelle calculée par GCC pour un microphone	136
B.1	Allure des deux dipôles orientés selon les axes x et y	137
B.2	Illustration de la famille d'harmoniques sphériques limitée à l'ordre $L=2$. .	138

Bibliographie

- [Ant12] Jérôme ANTONI : A bayesian approach to sound source reconstruction : Optimal basis, regularization, and focusing. *J. Acoust. Soc. Am.*, 131(4): 2873–2890, 2012.
- [AS12] J. AHRENS et S. SPORS : Wave field synthesis of a sound field described by spherical harmonics expansion coefficients. *J. Acoust. Soc. Am.*, 131(3): 2190–2199, 2012.
- [BD08] T. BLUMENSATH et M.E. DAVIS : In greedy pursuit of nex directions : (nearly) orthogonal matching pursuit by directional optimisation. *In EU-SIPCO'08*, Lausanne, Switzerland, August 2008.
- [BDB07] P. BOUFONOS, M. F. DUARTE et R. G. BARANIUK : Sparse signal reconstruction from noisy compressive measurements using cross validation. *IEEE 14th Workshop on Statistical Signal Processing*, 25:299–303, 2007.
- [BDM81] Mario BERTERO et Christine DE MOL : Stability problems in inverse diffraction. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 29(2):368–372, 1981.
- [BH06] T.F. BROOKS et W.M. HUMPHREYS : A deconvolution approach for the mapping of acoustic sources (damas) determined from phased microphone arrays. *J. Sound Vib.*, 294:856–879, 2006.
- [BHB09] C. BOUCHARD, D. I. HAVELOCK et M. BOUCHARD : Beamforming with microphones arrays for directional sources. *J. Acoust. Soc. Am.*, 125(4): 2098–2104, 2009.
- [BLL10] Mingsian R. BAI, Jia-Hong LIN et Kwan-Liang LIU : Optimized microphone deployment for near-field acoustic holography : To be, or not to be random, that is the question. *J. Sound Vib.*, 329(14):2809 – 2824, 2010.
- [Cap69] J. CAPON : High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. *Proceedings of the IEEE*, 25:1408–1418, 1969.
- [CD10] G. CHARDON et L. DAUDET : Optimal subsampling of multichannel damped sinusoids. *In IEEE, éditeur : Proc. of Sensor Array and Multichannel Sig. Proc. Workshop (SAM)*, Jerusalem, Israel, 2010.
- [CDBBM12] M. CROCCO, A. DEL BUE, M. BUSTRAO et V. MURINO : A closed form solution to the microphone position self-calibration problem. *In ICASSP*, pages 2597–2600, 2012.

- [CDF92] A. COHEN, I. DAUBECHIES et J.C. FEAUVEAU : Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Communication on Pure and Applied Mathematics*, 45(5):485–560, 1992.
- [CDS98] S.S. CHEN, D.L. DONOHO et M.A. SAUNDERS : Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM J. on Scientific Computing*, 20:33–61, 1998.
- [Cha12] Gilles CHARDON : *Approximations parcimonieuses et problèmes inverses en acoustique*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France, 2012.
- [CPO⁺12] G. CHARDON, A. PEILLOT, F. OLLIVIER, N. BERTIN, R. GRIBONVAL et L. DAUDET : Nearfield acoustic holography using sparse regularization and compressive sampling principles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 132(3):1521–1534, 2012.
- [CRT06] E.J. CANDÈS, J. ROMBERG et T. TAO : Robust uncertainty principles : exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 52:489–509, 2006.
- [CT05] E.J. CANDÈS et T. TAO : Decoding by linear programming. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 51:4203–4215, 2005.
- [CW08] E.J. CANDÈS et M. WAKIN : An introduction to compressive sampling. *IEEE Sig. Proc. Mag*, 25(2):21–30, March 2008.
- [DDT⁺08] M.F. DUARTE, M.A. DAVENPORT, D. TAKHAR, J.N. LASKA, Ting S., K.F. KELLY et R.G. BARANIUK : Single-pixel imaging via compressive sampling. *IEEE Sig. Proc. Mag*, 25(2):83–91, March 2008.
- [Dev12] Analog DEVICES : Omnidirectional microphone with bottom port and I^2S digital output, 2012. http://www.analog.com/static/imported-files/data_sheets/ADMP441.pdf.
- [DH94] J.R. DRICOLL et D.M. Jr. HEALY : Computing fourier transforms and convolutions on the 2-sphere. *Adv. Appl. Math.*, 15:202–250, 1994.
- [DMZ94] G.M. DAVIS, S. MALLAT et Z. ZHANG : Adaptive time-frequency decompositions. *SPIE J. Opt. Enginer.*, 33(7):2183–2191, 1994.
- [Don06] D.L. DONOHO : Compressed sensing. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 52(4):1286–1306, 2006.
- [Dou02] Robert P. DOUGHERTY : *Aeroacoustic Measurements*, chapitre Beamforming in Acoustic Testing, pages 63–97. Springer, Berlin, 2002.
- [DZ10] D. DEBOY et F. ZOTTER : Acoustic center and orientation analysis of sound-radiation recorded with a surrounding spherical microphone array. In *2nd Int. Symp. ambisonics spherical acoustics*, Paris, France, 2010.
- [EKB10] Y.C. ELДАР, P. KUPPINGER et H. BÖLCSKEI : Block-sparse signals : uncertainty relations and efficient recovery. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 58(6):3042–3054, June 2010.

- [ETS11] C. EKANADHAM, D. TRANCHINA et E.P. SIMONCELLI : Recovery of sparse translation-invariant signals with continuous basis pursuit. *IEEE Trans. On Sig. Proc.*, 59(10):4735–4744, October 2011.
- [FB11] V. FLEURY et J. BULTÉ : Extension of deconvolution algorithms for the mapping of moving acoustic sources. *J. Acoust. Soc. Am.*, 129(3):1417–1428, March 2011.
- [GBL⁺12] A. GARCIA, Y. BRAIKI, C. LANGRENNE, E. BAVU et M. MELON : Source identification in small spaces using field separation method : application to a car trunk. *In Proc. of Acoustics 2012*, Nantes, France, 2012.
- [GCD12] R. GRIBONVAL, G. CHARDON et L. DAUDET : Blind calibration for compressed sensing by convex optimization. *In IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Kyoto, Japan, 2012.
- [GHW79] G.H. GOLUB, M. HEATH et G. WAHBA : Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 21:215–223, 1979.
- [GL96] GOLUB et Van LOAN : *Matrix Computations*. Johns Hopkins university press, 3rd édition, 1996.
- [Goo72] J. W. GOODMAN : *Introduction à l'Optique de Fourier et à l'Holographie*. Masson et Cie, Paris, 1972.
- [Hal03] J. HALD : Patch nearfield acoustical holography using a new statistically optimal method. *In Proc. of Internoise*, 2003.
- [Hay96] M. H. HAYES : *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, chapitre Spectrum Estimation, pages 391–492. John Wiley and Sons, New York, 1996.
- [Hög74] J.A. HÖGBOM : Aperture synthesis with a non-regular distribution of interferometer baselines. *Astron. Astrophys. Suppl.*, 15:417–426, 1974.
- [HPVR11] I.B. HAGAI, M. POLLOW, M. VORLANDER et B. RAFAELY : Acoustic centering of sources measured by surrounding spherical arrays. *J. Acoust. Soc. Am.*, 130(4):2003–2015, 2011.
- [Idi01] Jérôme IDIER : *Approche Bayésienne Pour Les Problèmes Inverses*. Hermès / Lavoisier, 2001.
- [JD93] D.H. JOHNSON et D.E. DUDGEON : *Array Signal Processing : Concepts and Techniques*. Prentice Hall, 1993.
- [JFR04] F. JACOBSEN, S. FIGUEROA et K. RASMUSSEN : A note on the concept of acoustic center. *J. Acoust. Soc. Am.*, 115:1468–1473, 2004.
- [JJ06] F. JACOBSEN et V. JAUD : Statistically optimized near field acoustic holography using an array of pressure velocity probes. *J. Acoust. Soc. Am.*, 31(121):1550–1558, 2006.

- [JL05] F. JACOBSEN et Y. LIU : Near field acoustic holography with particle velocity transducers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 56(118):3139–3144, 2005.
- [KC76] C. KNAPP et G. CARTER : The generalized correlation for estimation of time delay. *IEEE Trans. on Acoust. Speech and Sig. Proc.*, 24(4):320–327, 1976.
- [KN04] Y. KIM et P.A. NELSON : Optimal regularization for acoustic source reconstruction by inverse methods. *J. Sound Vib.*, (275):463–487, 2004.
- [KOS08] H. KAMEOKA, N. ONO et S. SAGAYAMA : Auxiliary functional approach to parameter estimation of constrained sinusoidal model for speech separation. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages 29–32, 2008.
- [KSC99] S. KOC, J. SONG et W. CHEW : Error analysis for the numerical evaluation of the diagonal form of the scalar spherical addition theorem. *SIAM J. Numerical Analysis*, 36:906–921, 1999.
- [LDSP08] M. LUSTIG, D.L. DONOHO, J.M. SANTOS et J.M. PAULY : Compressed sensing RMI. *IEEE Sig. Proc. Mag*, 25(2):72–82, March 2008.
- [LMLCO⁺12] S. LE MOYNE, S. LE CONTE, F. OLLIVIER, J. FRELAT, J-C. BATAULT et S. VAIEDELICH : Restoration of a 17th-century harpsichord to playable condition : a numerical and experimental study. *J. Acoust. Soc. Am.*, 131(1):888–896, 2012.
- [Mal09] Stéphane MALLAT : *A Wavelet Tour of Signal Processing, the sparse way*. Academic Press, 3rd édition, 2009.
- [McW05] D. MALIOUTOV, M. ÇETIN et A. S. WILLSKY : A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(8):3010–3022, 2005.
- [MP10] B. MASIERO et M. POLLOW : A review of the compressive sampling framework in the lights of spherical harmonics : applications to distributed spherical arrays. In *2nd Int. Symp. ambisonics spherical acoustics*, Paris, France, Mai 2010.
- [MR97] T. MARTIN et A. ROURE : Optimization of an active noise control system using spherical harmonics expansion of the primary field. *J. Sound Vib.*, 201:577–593, 1997.
- [MWL85] J.D. MAYNARD, E.G. WILLIAMS et Y. LEE : Nearfield acoustic holography : I, theory of generalized holography and the development of NAH. *J. Acoust. Soc. Am.*, 78(4):1395–1413, 1985.
- [MZ93] S. MALLAT et Z. ZHANG : Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 41(12):3397–3415, 1993.
- [OKIS09] N. ONO, H. KOHNO, N. ITO et S. SAGAYAMA : Blind alignment of asynchronously recorded signals for distributed microphone array. In *IEEE*

- Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics*, pages 161–164, 2009.
- [OR05] F. OTONDO et J.H. RINDEL : A new method for the radiation representation of musical instruments in auralizations. *Acta Acustica united with Acustica*, 91(5):902–906, 2005.
- [Pai09] Sébastien PAILLASSEUR : *Développement de la technique d’holographie acoustique de champ proche temps réel pour l’analyse de sources de bruit fluctuantes*. Thèse de doctorat, Université du Maine, Le Mans, France, 2009.
- [PM12] A.M. PASQUAL et V. MARTIN : Optimal secondary source position in exterior spherical acoustical holophony. *J. Sound Vib.*, 331:785–797, 2012.
- [PRK93] Y.C. PATI, R. REZAIFA et P.S. KRISHNAPRASAD : Orthogonal matching pursuit : recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. In *27th Asilomar Conf. Sig. Syst. Comput.*, November 1993.
- [Raf05] B. RAFAELY : Analysis and design of spherical microphone arrays. *IEEE Trans. Speech Audio Proc.*, 13:135–143, 2005.
- [Raf10] B. RAFAELY : Spatial alignment of acoustic sources based on spherical harmonics radiation analysis. In *4th ISCCSP*, Limassol, Cyprus, 2010.
- [Rau07] Holger RAUHUT : Random sampling of sparse trigonometric polynomials. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 22(1):16–42, 2007.
- [RK89] R. ROY et T. KAILATH : ESPRIT - estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1989.
- [Rom08] J. ROMBERG : Imaging via compressive sampling. *IEEE Sig. Proc. Mag*, 25(2):21–30, March 2008.
- [RWB07] B. RAFAELY, B. WEISS et E. BACHMAT : Spatial aliasing in spherical microphone arrays. *IEEE Trans. Signal Proc.*, 55(3):1003–1010, 2007.
- [Sch86] R.O. SCHMIDT : Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Antenna and Propagation*, AP-34:276–280, 1986.
- [SHRH03] A. SCHUHMACHER, J. HALD, K. B. RASMUSSEN et P. C. HANSEN : Sound source reconstruction using inverse boundary element calculations. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113(1):114–127, 2003.
- [Sij07] P. SIJTSMA : Clean based on spatial source coherence. *International Journal of Aeroacoustics*, 6(4):357–374, 2007.
- [Sim11] P. SIMARD : Contrainte d’isométrie restreinte statistique et localisation de sources acoustiques. In *23^e Colloque GRETSI*, Talence, France, 2011.
- [SLRN08] Rick SCHOLTE, Ines LOPEZ, N.B. ROOZEN et Henk NIJMEIJER : Wave-number domain regularization for near-field acoustic holography by means of modified filter functions and cut-off and slope iteration. *Acta Acustica united with Acustica*, 94(3):339–348, May/June 2008.

- [Suz08] T. SUZUKI : Generalized inverse beamforming algorithm resolving coherent/incoherent, distributed and multipole sources. *In 29th AIAA Aeroacoustics Conference*, numéro 2954, Vancouver, Canada, 2008.
- [Suz11] T. SUZUKI : l_1 generalized inverse beamforming algorithm resolving coherent/incoherent, distributed and multipole sources. *Journal of Sound and Vib.*, 330:5835–5851, 2011.
- [TA77] A.N. TIKHONOV et V.Y. ARSENIN : *Solution to Ill-posed Problems*. Winston & Sons, Washington, 1977.
- [Tib94] Robert TIBSHIRANI : Regression shrinkage and selection via the LASSO. *Journal of the Royal Statistical Society*, 58:267–288, 1994.
- [TP05] Jean-Hugh THOMAS et Jean-Claude PASCAL : Wavelet preprocessing for lessening truncation effects in nearfield acoustical holography. *J. Acoust. Soc. Am.*, 118(2):851–860, 2005.
- [Tro04] J.A TROPP : Greed is good : Algorithmic results for sparse approximation. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 50:2231–2242, 2004.
- [Tro06] J.A. TROPP : Just relax : convex programming methods for identifying sparse signals in noise. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 52(3), March 2006.
- [vdBF07] E. van den BERG et M. P. FRIEDLANDER : SPGL1 : A solver for large-scale sparse reconstruction, June 2007. <http://www.cs.ubc.ca/labs/scl/spgl1>.
- [VE06] N.P. VALDIVIA et E.G.WILLIAMS : Study of the comparison of the methods of equivalent sources and boundary element methods for near-field acoustic holography. *J. Acoust. Soc. Am.*, 6(120):3694–3705, 2006.
- [WA80] G. WEINREICH et E.B. ARNOLD : Method for measuring acoustic radiation fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 68(2):404–411, 1980.
- [Wil99] E. G. WILLIAMS : *Fourier Acoustics : Sound Radiation and Near Field Acoustical Holography*. Academic press, London, 1999.
- [Wil01] Earl G. WILLIAMS : Regularization methods for near-field acoustical holography. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110(4):1976–1988, 2001.
- [WM01] O. WARUSFEL et N. MISDARIIS : Directivity synthesis with a 3d array of loudspeakers : application for stage performance. *In Proc. of the COST G-6 Conf. on Digital Audio Effects (DAFX-01)*, Limerick, Ireland, December 2001.
- [YL08] T. YARDIBI et J. LI : Sparsity constrained deconvolution approaches for racoustic source mapping. *J. Acoust. Soc. Am.*, 123(5):2631–2642, 2008.
- [ZDRJ+10] P.A.G ZAVALA, W. DE ROECK, K. JANSSENS, J.R.F ARRUDA, P. SAS et W. DESMET : Generalized inverse beamforming with optimized regularization strategy. *Mechanical Systems and Sig. Proc.*, 25:928–939, 2010.
- [ZJBC09] Yong-Bin ZHANG, Finn JACOBSEN, Chuan-Xing BI et Xin-Zhao CHEN : Patch near field acoustic holography based on particle velocity measurements. *J. Acoust. Soc. Am.*, 126(2):721–727, 2009.

- [ZW05] X. ZHAO et S. F. WU : Reconstruction of vibro-acoustic fields using hybrid nearfield acoustic holography. *J. Sound Vib.*, (282):1183–1199, 2005.

