



HAL
open science

**LA DECOMPOSITION PROPRE GENERALISEE
POUR LA RESOLUTION DE PROBLEMES
MULTIPHYSIQUES TRANSITOIRES COUPLES
DEDIES A LA MECANIQUE DES MATERIAUX -
MAILLAGE ADAPTATIF ET COUPLAGE AVEC LA
MAN**

Tuan Linh Nguyen

► **To cite this version:**

Tuan Linh Nguyen. LA DECOMPOSITION PROPRE GENERALISEE POUR LA RESOLUTION DE PROBLEMES MULTIPHYSIQUES TRANSITOIRES COUPLES DEDIES A LA MECANIQUE DES MATERIAUX - MAILLAGE ADAPTATIF ET COUPLAGE AVEC LA MAN. Matériaux. ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique - Poitiers, 2012. Français. NNT : 2012ESMA0018 . tel-00772803v1

HAL Id: tel-00772803

<https://theses.hal.science/tel-00772803v1>

Submitted on 11 Jan 2013 (v1), last revised 7 Feb 2013 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE ET D'AEROTECHNIQUE

(Diplôme National - Arrêté du 7 Août 2006)

Ecole Doctorale : Sciences et Ingénierie en Matériaux, Mécanique, Energétique
et Aéronautique

Secteur de Recherche : Mécanique des Solides, des Matériaux, des Structures et des Surfaces

Présentée par :

NGUYEN Tuan Linh

La Décomposition Propre Généralisée pour la résolution de problèmes multiphysiques transitoires couplés dédiés à la mécanique des matériaux - Maillage adaptatif et couplage avec la MAN

Directeur de Thèse : **Jean-Claude GRANDIDIER**
Co-Encadrant : **Marianne BERINGHIER**

Soutenue le 20 Novembre 2012

- JURY -

J. BREARD	Professeur, Université du Havre, Le Havre	Examineur
F. CHINESTA	Professeur, Ecole Centrale de Nantes, Nantes	Examineur
E. CUETO	Professeur, Université de Saragosse, Espagne	Rapporteur
M. POTIER-FERRY	Professeur, Université Paul Verlaine, Metz	Président
P. VILLON	Professeur, UTC, Compiègne	Rapporteur
M. BERINGHIER	Maître de Conférence, ENSMA, Chasseneuil	Examineur
J. C. GRANDIDIER	Professeur, ENSMA, Chasseneuil	Examineur

Remerciements

“ Une journée de marche, un panier de sagesse ” – après 3 ans en France, la thèse est maintenant rédigée et soutenue mais elle m’a apporté des “ paniers de sagesse ” qui resteront présents tout au long de ma vie.

C’est pourquoi je tiens tout d’abord à remercier mes encadrants Marianne Béringhier et Jean-Claude Grandidier qui ont rempli mes “ paniers ” par leurs conseils, leurs corrections, leur savoir-vivre. C’est surtout et avant tout grâce à Marianne, encadrante de tous les instants (jour et nuit...), qui a sacrifié des heures incalculables, qui a été toujours à côté de moi, qui a toujours fait de son mieux pour moi et m’a aidé sur toutes les choses, bref, qui s’est investie entièrement pour que je puisse devenir un docteur. Marianne, je te remercie infiniment pour ta gentillesse, tu m’as offert un nombre incalculable de “ paniers ”. Je tiens à remercier également Jean-Claude pour ses conseils précieux, ses qualités scientifiques et pédagogiques qui ont été toujours une source de motivation pour moi.

Je tiens à remercier Michel Potier-Ferry de m’avoir fait l’honneur de présider mon jury de thèse. Je souhaite remercier très chaleureusement Elias Cueto et Pierre Villon pour avoir accepté la lourde charge de rapporteur. Un grand merci à Paco Chinesta et Adrien Leygue pour leurs échanges scientifiques lors de la soutenance et également lors des réunions PGD à l’ECN et à l’ENSMA. Je remercie également Joël Bréard pour avoir accepté d’être membre du jury et pour ses questions intéressantes.

Je tiens à remercier également tous les membres du DPMM (ex. LMPM) qui ont contribué au bon déroulement de ce travail et qui m’ont réservé un accueil chaleureux. Plus particulièrement Denys Gamby, Marie-Christine Lafarie et Lionel Buthaud qui m’ont donné l’opportunité d’effectuer ce travail de thèse au LMPM. Je ne peux malheureusement citer tout le monde, mais je remercie tout le personnel du LMPM : des permanents qui m’ont encouragé aux personnels administratifs qui m’ont aidé dans toutes les situations.

Un grand merci aussi aux copains du LMPM : Clara, Fanny, Davi, Gaëlle, Romain, Nam, Huy, Quy, Tung, Thao, Hung, Truong, . . . et tous les autres que je n’ai pas la place de citer... Je n’oublierai jamais Florian et son sourire. Je souhaite remercier ma “ famille vietnamienne ” : ceux qui restent là-bas Thuan (mon coloc pendant 3 ans), Quan, Quang, Tinh, Khang, Tien, Khanh, Tuan, Truc, Thuc, Manh, Phu... et aussi ceux qui sont déjà partis faire face aux nouvelles épreuves.

Enfin, je souhaite remercier ma famille pour leur soutien permanent, notamment lors des périodes difficiles. Pour terminer, un très grand merci à ma future épouse, Hoa, qui m’a suivi tout au long de cette aventure, m’a poussé en dehors de mes limites, m’a toujours soutenu et est une source d’énergie permanente, sans limite. C’est grâce à toi qu’on est arrivé ici et on va continuer notre longue aventure ensemble.

Merci à tous ! Vous savez bien que vous resterez toujours dans mon cœur.

L’espoir nous guide !

Table des matières

Introduction	1
A. Introduction et discussion sur les méthodes numériques pour les problèmes couplés multiphysiques multitemps.....	5
A.I Problèmes transitoires	6
A.I.1 Méthodes incrémentales	7
A.I.2 Méthodes non incrémentales	8
A.I.2.1 Méthodes éléments finis espace-temps.....	8
A.I.2.2 Méthode LATIN	8
A.I.2.3 Méthode PGD	9
A.I.3 Méthodes de réduction de modèle	9
A.I.3.1 Méthodes de réduction de modèle a posteriori	9
A.I.3.2 Méthodes de réduction de modèle a priori.....	14
A.I.4 Discussion.....	23
A.II Problèmes multiphysiques multitemps	24
A.II.1 Méthodes incrémentales.....	24
A.II.1.1 Méthode des Eléments Finis classique	24
A.II.1.2 Méthode des Eléments Finis multigrille.....	26
A.II.2 Méthodes non incrémentales.....	28
A.II.2.1 Méthode LATIN multiphysique	28
A.II.2.2 Méthode PGD multiphysique	30
A.II.3 Discussion	32
A.III Méthodes de maillage adaptatif	34
A.III.1 Méthodes d'estimation d'erreur	34
A.III.1.1 Estimateurs en résidu d'équilibre.....	35
A.III.1.2 Estimateurs d'erreur en contrainte	35
A.III.1.3 Estimateurs d'erreur en loi de comportement	35
A.III.2 L'adaptation de maillage.....	36
A.IV Stratégie adoptée dans le cadre de cette thèse	40
A.IV.1 Domaines d'application de la PGD	40
A.IV.2 Stratégie de cette thèse.....	42

B. Résolution d'un problème transitoire linéaire avec la PGD	45
B.I La PGD dans le cas du problème de la chaleur transitoire 2D	46
B.I.1 Formulation du problème.....	46
B.I.1.1 Formulation de la PGD progressive pondérée	46
B.I.1.2 Formulation tensorielle	52
B.I.1.3 Minimisation du résidu	58
B.I.1.4 Schéma temporel consistant.....	58
B.I.2 Résultats.....	60
B.I.2.1 Simulation avec une source de chaleur bimodale	60
B.I.2.2 Simulation avec une source de chaleur de type échelon	62
B.I.2.3 Simulation avec une source de chaleur de type impulsionnelle.....	66
B.I.2.4 Simulation avec la minimisation du résidu	69
B.II Maillage adaptatif pour la résolution d'un problème transitoire avec la PGD	72
B.II.1 Présentation de la technique de maillage adaptatif.....	72
B.II.2 Stratégies de couplage PGD / technique de maillage adaptatif	73
B.II.2.1 RPGD_S1 (tous les modes sont recalculés).....	73
B.II.2.2 RPGD_S2 (certains modes sont conservés)	74
B.II.2.3 Discussion.....	75
B.II.3 Résultats	76
B.II.3.1 Source bimodale	76
B.II.3.2 Source de type échelon	82
B.II.3.3 Source de type impulsionnelle.....	85
B.II.4 Discussion	87
B.II.4.1 Comparaison des deux stratégies en terme d'évolution du maillage.	88
B.II.4.2 Influence du maillage initial	91
B.II.4.3 Influence du choix de l'interpolation dans le cas RPGD_S2.....	94
B.II.4.4 Influence des temps caractéristiques	96
Conclusion du chapitre	98
C. Couplage MAN – PGD pour la résolution d'un problème transitoire non linéaire	99
C.I Résolution de l'équation de la chaleur transitoire 1D non linéaire	100
C.I.1 La PGD pour les problèmes transitoires non linéaires.....	101
C.I.2 La MAN pour les problèmes transitoires non linéaires	103
C.I.2.1 Technique de perturbation	104
C.I.2.2 Technique de résolution couplée MAN-PGD	107
C.I.2.3 Technique de continuation.....	112
C.II Résultats	117

C.II.1	Résolution d'un problème transitoire non linéaire par la MAN-PGD.....	117
C.II.1.1	Solution convergée de référence par la méthode des différences finies	117
C.II.1.2	Résultats par la résolution MAN-PGD	119
C.II.1.3	Stratégie MAN-PGD modifiée	125
C.II.2	Domaine de validité.....	127
C.II.2.1	Domaine de validité.....	127
C.II.2.2	Influence de la non linéarité sur le domaine de validité	132
C.II.2.3	Influence du domaine temporel sur le domaine de validité	133
	Conclusion du chapitre	135
D.	Résolution de problèmes multiphysiques transitoires couplés avec la PGD	137
D.I	La PGD dans le cas de problèmes multiphysiques transitoires couplés.....	138
D.I.1	Formulation des problèmes multiphysiques	138
D.I.1.1	Problème partiellement couplé diffusothermique.....	139
D.I.1.2	Problème fortement couplé thermoviscoélastique	147
D.I.2	Résultats	159
D.I.2.1	Résultats du problème partiellement couplé diffusothermique	159
D.I.2.2	Résultats du problème fortement couplé thermoviscoélastique.....	169
D.II	Stratégies de couplage PGD-technique de maillage adaptatif pour des problèmes multiphysiques multitemps.....	181
D.II.1	Présentation de la technique de maillage adaptatif	181
D.II.1.1	Construction de maillage.....	181
D.II.1.2	Stratégies de couplage PGD - technique de maillage adaptatif (RPGD)	182
D.II.2	Résultats	185
D.II.2.1	Résultats du problème partiellement couplé diffusothermique	185
D.II.2.2	Résultats du problème fortement couplé thermoviscoélastique	194
	Conclusion du chapitre	203
	Conclusion et perspectives	205
	Bibliographie.....	209

Introduction générale

Cette thèse s'inscrit dans le contexte de la mécanique des matériaux. Dans ce domaine d'activité industriel, la prédiction de l'endommagement et de la durabilité des matériaux est au cœur des problématiques. Les ingénieurs doivent évaluer les capacités de la matière à supporter des chargements mécaniques mais aussi thermiques. Dans des situations plus extrêmes, l'environnement joue un rôle très important. On peut citer les polymères sous de très fortes pressions de gaz ou de liquides, mais aussi les composites hautes performances sollicités mécaniquement sous hautes températures. Dans ces deux exemples particuliers, le comportement mécanique est affecté par les gaz qui diffusent dans la matière. Le matériau est assujéti à des gradients de concentration et donc de propriétés. Prédire sa tenue dans de telles situations nécessite une connaissance des phénomènes physiques, une identification des lois de comportement couplées et une description des phénomènes qui génèrent la ruine. Cette connaissance matériau n'est pas suffisante, il est essentiel pour l'ingénieur d'avoir des outils de prédiction des gradients thermiques, de concentration chimiques qui sont capables de rendre compte des conditions de service. Les outils numériques pour réaliser cette tâche existent mais dans certains cas la résolution des problèmes couplés multiphysiques demande des temps de calcul prohibitifs, et dans d'autres cas les algorithmes classiques dédiés à l'ingénieur ne fournissent pas de solution. Les verrous à lever sont de natures différentes :

Plusieurs physiques à résoudre avec :

- une augmentation de la taille des systèmes à résoudre
- des temps caractéristiques distincts (diffusion thermique et diffusion de gaz)

Physiques de natures différentes couplées (diffusion, thermique, mécanique, ...)

- équations de natures différentes
- équations plus ou moins couplées
- natures de couplages distincts (couplage d'état : dilatation thermique ou couplage matériau $E = f(T) \dots$)
- équations plus ou moins non linéaires de natures différentes
- les non linéarités peuvent être liées aux termes de couplages et ou aux paramètres matériaux

Par exemple avec un logiciel par éléments finis comme AbaqusTM et en utilisant le sous programme UEL, il est possible de résoudre de manière couplée les équations de la mécanique, de la thermique, de la diffusion et même de la chimie. Les temps de calculs sont inhérents à son solveur de résolution de problème linéaire et à son schéma incrémental temporel. Dans l'axe Endommagement et Durabilité du département Physique et Mécanique des Matériaux de l'Institut PPRIME à l'ENSMA à Poitiers, les développements les plus avancés ont démontré la capacité de ce code à résoudre certains problèmes multiphysiques de mécanique des matériaux, on peut citer :

- Rambert et al. [Rambert 2002, 2005, 2006]: mécanique thermique diffusion fortement couplé
- Baudet et al. [Baudet 2006, 2009, 2011]: mécanique endommagement diffusion fortement couplé
- Olivier et al. [Olivier 2008, 2009]: mécanique diffusion chimie fortement couplé
- Rabearison et al. [Rabearison 2009]: mécanique thermique chimie fortement couplé

Les deux premières recherches concernent le secteur pétrolier où des matériaux polymères sont utilisés comme gaine ou joint d'étanchéité dans le système de transport des hydrocarbures. Ils sont alors soumis à des conditions sévères qui sont de hautes températures entre 80 et 150°C et des fluctuations de la pression du gaz dont les chutes sont connues sous le nom de décompression « explosive ». Cela mène généralement à un endommagement irréversible du matériau dû à un très fort couplage entre les phénomènes thermiques, mécaniques et diffusifs. Une modélisation thermo-diffuso-mécanique a été mise en place dans ces thèses et implantée dans le code de calcul AbaqusTM pour prédire la tenue en service de ce type de structure. Dans ces recherches, les limitations numériques ont été le temps de calcul et des situations où le couplage n'a pas permis d'obtenir les réponses transitoires en température et en diffusion de gaz (stabilité du schéma temporel).

La troisième problématique concerne le secteur aéronautique et plus particulièrement la prédiction des conditions d'amorçage de l'endommagement dans les matériaux composites C/Epoxy soumis à un environnement thermo-oxydant. Un modèle multiphysique couplant la mécanique et le procédé chimique de diffuso-thermo-oxydation a été proposé afin de quantifier les champs de contraintes locaux et les éléments d'oxydation pour prédire l'évolution du composite pendant un cycle de thermo-oxydation. Il a été lui aussi implémenté dans le code de calcul AbaqusTM en utilisant une technique multigrille temporelle. L'extension de ce modèle à la prédiction de durée de vie de pièces composites nécessite des temps de calcul prohibitifs et la stabilité du schéma temporel a été très difficile à maîtriser dans ce cas particulier où le schéma mécanistique était constitué de six équations de cinétique chimique à résoudre en chaque point de Gauss.

La quatrième recherche concerne la prédiction des contraintes internes générées par la cuisson. Ce modèle combine la chimie (une équation), la thermique et la mécanique où toutes les équations sont fortement couplées et où tous les paramètres évoluent de façon non linéaire en fonction du degré d'avancement de la réaction de cuisson et de la température. Pour cette situation, le frein à la simulation numérique avec AbaqusTM a été le temps de calcul de ces trois physiques.

Pour les problèmes rencontrés notamment lors de ces thèses, les limites de la méthode des Eléments Finis à travers le code de calcul industriel AbaqusTM ont été montrées (non convergence, temps de calculs prohibitifs, problème de mémoire) et sont principalement liées aux différentes échelles de temps mises en jeu dans ces phénomènes physiques et notamment aux différentes échelles spatiales comme dans le cas de Olivier [Olivier 2008]. C'est dans ce contexte que se situe cette thèse.

L'objectif de cette thèse est donc le développement d'un outil numérique pour les problèmes multiphysiques couplés à différents temps caractéristiques. Pour répondre à cette problématique, nous avons donc choisi de tester une méthode numérique émergente - la méthode de Décomposition Propre Généralisée (PGD) [Ammar 2006], qui comme nous le justifierons dans le 1^{er} chapitre nous est apparu comme un bon candidat. On en trouve les premiers éléments dans [Ladeveze 1999a] sous le terme d'approximation radiale. La PGD formalisée par Chinesta dans le cas multidimensionnel, consiste à rechercher la solution comme une somme de produits de fonctions de chaque variable. Contrairement à la Décomposition Orthogonale Propre (POD) [Chatterjee 2000], les fonctions de base ne sont pas connues *a priori* mais calculées à l'aide d'une procédure itérative.

Même si dans le cadre de cette thèse, nous n'avons pas appliqué la méthode de Décomposition Propre Généralisée à la résolution de problématiques industrielles, les problèmes modèles traités sont représentatifs de difficultés numériques rencontrées dans les thèses citées précédemment. De plus, dans cette thèse, nous n'aborderons pas les problématiques liées aux différentes échelles spatiales et nous avons choisi de nous concentrer sur celles liées aux différentes échelles temporelles des problèmes multiphysiques rencontrés en mécanique des matériaux.

Le but précis de cette thèse est donc de prouver que la méthode de Décomposition Propre Généralisée est capable de résoudre les problèmes multiphysiques couplés en mécanique des matériaux.

Ce mémoire sera organisé de la manière suivante :

- Dans le **chapitre A**, nous présenterons de manière non exhaustive un état de l'art sur les méthodes numériques pour la prédiction des problèmes multiphysiques couplés. Ces problèmes font apparaître différentes questions pour lesquelles nous rappellerons les différentes approches utilisées dans la littérature sans forcément les détailler. Les différentes questions sont : comment traiter la variable temporelle (approche incrémentale ou non) ? le couplage et par suite les différentes échelles de temps (multigrilles, sous incrémentation, approche non incrémentale) ? ou encore la grande dimension des problèmes (méthodes de réduction de modèle) ? Ensuite, comme les termes de couplage peuvent induire de nouvelles zones transitoires dans la réponse du problème, nous évoquerons les techniques de maillage adaptatif. Enfin, nous présenterons la stratégie adoptée lors de cette thèse.
- Dans le **chapitre B**, la méthode PGD est détaillée pour l'équation de la chaleur transitoire 2D. Une technique de maillage adaptatif simple est utilisée afin d'adapter la discrétisation aux différentes zones transitoires de la solution. Deux méthodes couplant la PGD et la technique de maillage adaptatif sont ensuite discutées sur ce même exemple. La première consiste à recalculer la solution PGD sur chaque nouveau maillage à partir de la solution nulle. La deuxième consiste à calculer la solution sur chaque nouveau maillage en conservant les fonctions de base de la solution sur le maillage précédent. La deuxième méthode permet de diminuer le temps de calcul de la solution sur le maillage final dit « optimisé » principalement dans le cas où le nombre de fonctions de base pour chaque maillage est important. La mise en place de cette technique nous permet de capter de manière automatique les zones transitoires des équations étudiées sans les connaître *a priori*. Ceci est particulièrement intéressant pour les problèmes couplés dans la mesure où les zones transitoires ne sont pas connues *a priori* car liées en partie aux termes de couplage.
- Dans le **chapitre C**, le couplage entre la méthode PGD et la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) [Cochelin 2007] est mis en place pour la résolution de l'équation de la chaleur 1D transitoire avec une non linéarité dans le terme source. Ce travail a été mené en collaboration avec Francisco Chinesta et Adrien Leygue de l'Ecole Centrale de Nantes. La MAN permet de transformer l'équation non linéaire en une série d'équations linéaires. Généralement, ces équations sont résolues par la MEF. Dans le cas qui nous occupe, les équations linéaires sont transitoires et résolues avec la PGD.
- Dans le **chapitre D**, la formulation de la méthode PGD est étendue à la résolution de deux problèmes particuliers couplés qui font apparaître deux temps caractéristiques. Ces deux problèmes diffèrent de par les termes de couplage mais aussi la nature des équations mises en jeu. Cela nous permet de tester la PGD dans différentes situations couplées. Enfin, le couplage avec la technique de maillage adaptatif présentée précédemment est appliqué à ces problèmes. La construction du maillage des différentes physiques après chaque étape d'adaptation de maillage est notamment discutée.

Enfin, le dernier chapitre fera office de résumé de ce travail suivi des conclusions et des perspectives de recherches envisageables.

Chapitre A

Introduction et discussion sur les méthodes numériques pour les problèmes couplés multiphysiques multitemps

Sommaire

A.I Problèmes transitoires	6
A.I.1 Méthodes incrémentales	7
A.I.2 Méthodes non incrémentales	8
<i>A.I.2.1 Méthodes éléments finis espace-temps.....</i>	<i>8</i>
<i>A.I.2.2 Méthode LATIN.....</i>	<i>8</i>
<i>A.I.2.3 Méthode PGD</i>	<i>9</i>
A.I.3 Méthodes de réduction de modèle	9
<i>A.I.3.1 Méthodes de réduction de modèle a posteriori</i>	<i>9</i>
<i>A.I.3.2 Méthodes de réduction de modèle a priori</i>	<i>14</i>
A.I.4 Discussion.....	23
A.II Problèmes multiphysiques multitemps.....	24
A.II.1 Méthodes incrémentales	24
<i>A.II.1.1 Méthode des Eléments Finis classique</i>	<i>24</i>
<i>A.II.1.2 Méthode des Eléments Finis multigrille</i>	<i>26</i>
A.II.2 Méthodes non incrémentales	28
<i>A.II.2.1 Méthode LATIN multiphysique.....</i>	<i>28</i>
<i>A.II.2.2 Méthode PGD multiphysique.....</i>	<i>30</i>
A.II.3 Discussion.....	32
A.III Méthodes de maillage adaptatif.....	34
A.III.1 Méthodes d'estimation d'erreur	34
<i>A.III.1.1 Estimateurs en résidu d'équilibre</i>	<i>35</i>
<i>A.III.1.2 Estimateurs d'erreur en contrainte</i>	<i>35</i>
<i>A.III.1.3 Estimateurs d'erreur en loi de comportement.....</i>	<i>35</i>
A.III.2 L'adaptation de maillage.....	36
A.IV Stratégie adoptée dans le cadre de cette thèse	40
A.IV.1 Domaines d'application de la PGD.....	40
A.IV.2 Stratégie de cette thèse.....	42

Dans ce chapitre, un état de l'art non exhaustif sur les méthodes numériques pour la résolution des problèmes couplés multiphysiques multitemps est présenté. Le traitement numérique de ces problèmes nécessite des méthodes capables de répondre à différents points. Tout d'abord, les problèmes multiphysiques mènent à la résolution d'un grand nombre d'équations couplées et de natures différentes. La résolution de ces problèmes par la Méthode classique des Eléments Finis (MEF), même maillage pour chaque physique, mène donc à la résolution de systèmes numériques de grande taille, en lien avec le nombre de phénomènes physiques considéré. De plus, dans le cas de la mécanique des matériaux, à chaque phénomène physique est associé un temps caractéristique spécifique qui pilote la réponse transitoire du système. Si les temps relatifs à chaque physique sont très différents ou si les phénomènes sont fortement couplés, l'utilisation de pas de temps très petits est nécessaire afin d'assurer la stabilité du schéma d'intégration temporel mais aussi de prédire précisément les différents gradients des réponses du système. Cela se traduit dans certaines simulations par des problèmes de non convergence du calcul, de mémoire insuffisante ou encore de temps de calcul très important.

Pour pallier ces difficultés, des méthodes numériques spécifiques ont été développées. Dans le contexte des problèmes transitoires, des méthodes non incrémentales ont été proposées. Certaines d'entre elles peuvent notamment être considérées comme des méthodes de réduction de modèle. On s'intéressera tout particulièrement à une de ces méthodes la méthode de Décomposition Propre Généralisée que nous noterons PGD (Proper Generalized Decomposition).

Dans le contexte des problèmes multiphysiques, les méthodes multigrilles s'ajoutent aux méthodes précédentes. Nous verrons que la PGD est là encore particulièrement adaptée dans la mesure où l'utilisation de grilles temporelles différentes pour chaque physique est facilement implantable.

La précision de la solution numérique est liée aux discrétisations choisies. Des méthodes de maillage adaptatif ont été développées afin que le maillage permette d'obtenir une certaine précision sur la solution. Ces méthodes présentent un autre intérêt qui est de capter de manière automatique les phénomènes transitoires, en faisant évoluer de manière automatique les différentes grilles.

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord présenter les méthodes numériques pour la résolution de problèmes transitoires et notamment l'approche couplée méthode non incrémentale - réduction de modèles. L'extension de ces méthodes aux problèmes multiphysiques est ensuite présentée dans la deuxième partie. Dans la troisième partie, nous évoquerons les techniques de maillage adaptatif classiquement utilisées qui sont nécessaires pour capter de manière automatique les réponses transitoires des phénomènes couplés. Enfin, nous présenterons la stratégie adoptée dans cette thèse.

A.I Problèmes transitoires

Les problèmes multiphysiques couplés mènent généralement à la résolution de problèmes transitoires et par suite la résolution d'Equations aux Dérivées Partielles (EDP) dépendant non seulement de l'espace mais aussi du temps.

Le problème transitoire à résoudre peut donc s'écrire sous la forme générique simplifiée suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A(u) = f \quad (\text{A.I-1})$$

où $A(u)$ est un opérateur spatial linéaire. Ce problème est défini sur le domaine $\Omega = \Omega_x \times \Omega_t = \Omega_x \times [0; T]$ où l'espace est noté x et le temps t , avec des conditions aux bords et initiale notées $u(x \in \partial\Omega_x, t) = u^b$, $u(x, t = 0) = u^0$.

Pour résoudre cette équation, des méthodes numériques consistent à discrétiser le problème et à calculer les valeurs de l'inconnue u en chaque point de discrétisation en espace et en temps. Le choix de la méthode de résolution influence fortement la taille du problème à résoudre, particulièrement lorsque les discrétisations sont fines. Nous allons tout d'abord présenter des méthodes qui se différencient par le schéma temporel utilisé pour la résolution. Il s'agit des méthodes incrémentales et non incrémentales. Ensuite, des méthodes de réduction de modèle seront présentées. Ces dernières ont pour but de réduire la taille de l'espace où la solution est recherchée.

A.I.1 Méthodes incrémentales

Lorsqu'on résout les problèmes transitoires avec les méthodes classiques telles que la méthode des Eléments Finis (MEF) [Zienkiewicz 2005], la méthode des Volumes Finies (MVF) [Leveque 2002] ou la méthode des Différences Finies (MDF) [Allaire 2005], un schéma temporel incrémental est généralement utilisé.

Dans ce cas, au lieu de résoudre des EDPs, des Equations Différentielles Ordinaires (EDO) spatiales sont résolues à chaque instant t et un schéma d'intégration temporelle numérique est utilisé.

Précisons la démarche avec par exemple l'équation (A.I-1) où $A(u)$ représente l'opérateur $D \frac{\partial u^2}{\partial x^2}$. Cela mène à la résolution du problème parabolique dépendant du temps :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial u^2}{\partial x^2} = f \tag{A.I-2}$$

Supposons un maillage régulier en espace $(x_1, x_2, \dots, x_{n_x})$ ayant un pas δ_x et un maillage régulier en temps $(t_1, t_2, \dots, t_{n_t})$ ayant un pas δ_t . Notons la solution, au point (x_i, t_j) , u_i^j ($1 \leq i \leq n_x$; $1 \leq j \leq n_t$). Une fois la solution au temps t_j calculée pour tous les points en espace (avec dans cet exemple la méthode des différences finies), la solution au temps t_{j+1} est calculée à l'aide d'un schéma incrémental. Plusieurs schémas existent dans la littérature. Le schéma explicite centré et le schéma implicite centré sont présentés ici couplés à une approche différences finies :

- Le schéma explicite centré :

L'équation (A.I-2) s'écrit donc sous la forme :

$$\frac{u_j^{i+1} - u_j^i}{\delta t} - D \frac{u_{j-1}^i - 2u_j^i + u_{j+1}^i}{\delta x^2} = f^i \quad (1 \leq i+1 \leq n_x; 1 \leq j+1 \leq n_t) \tag{A.I-3}$$

- Le schéma implicite centré :

L'équation (A.I-2) s'écrit donc sous la forme :

$$\frac{u_j^{i+1} - u_j^i}{\delta t} - D \frac{u_{j-1}^{i+1} - 2u_j^{i+1} + u_{j+1}^{i+1}}{\delta x^2} = f^{i+1} \quad (1 \leq i+1 \leq n_x; 1 \leq j+1 \leq n_t) \quad (\text{A.I-4})$$

Avec ces schémas, il faut résoudre successivement le problème à chaque instant t . Dans le cas du schéma explicite, la solution est déterminée directement par l'équation (A.I-3) alors que dans l'autre cas, un système linéaire doit être résolu. Le schéma explicite semble donc plus simple. Néanmoins, il est conditionnellement stable, c'est-à-dire, la solution peut présenter des fluctuations selon le pas de temps choisi. Pour que le schéma soit stable, la condition de stabilité suivante (condition CFL) doit être satisfaite :

$$2D\delta t \leq (\delta x)^2 \quad (\text{A.I-5})$$

Le schéma implicite, est lui, inconditionnellement stable. Pourtant, la résolution du système linéaire à chaque pas de temps, peut être très coûteuse notamment si le nombre de pas de temps est important.

A.I.2 Méthodes non incrémentales

Afin de pallier les difficultés numériques liées à l'utilisation d'un schéma incrémental, des méthodes non incrémentales ont été développées. L'idée principale est de résoudre le problème sur l'ensemble du domaine temporel. On présente ici la Méthode des Eléments Finis espace-temps, la méthode LATIN (LArge Time INcrement) et la méthode PGD (Proper Generalized Decomposition).

A.I.2.1 Méthodes éléments finis espace-temps

La Méthode des Eléments Finis espace-temps parallèle [Buch 1999, Idesman 2000] a été proposée pour pallier le problème lié au calcul séquentiel en temps dans la méthode de discrétisation classique. En effet, le temps est considéré dans ce cas comme une dimension supplémentaire et est donc traité comme l'espace. On parle alors d'éléments finis espace-temps. Par exemple, pour un problème 2D espace-temps, des éléments finis 3D sont utilisés où le temps remplace la troisième dimension. Cette méthode mène à un système global d'équations en espace et en temps. A chaque étape de résolution, la solution est donc déterminée pour le domaine temporel entier.

L'utilisation de la méthode EF espace-temps parallèle est plus efficace que celle des méthodes EF classiques (*i.e.* avec un schéma incrémental en temps). Néanmoins, la taille du système algébrique à résoudre peut devenir très importante et mener à un temps de calcul prohibitif et des problèmes de stockage de données.

La méthode a donc été légèrement modifiée. Elle consiste à diviser le domaine temporel en intervalles de temps grossiers. Le problème est ensuite résolu en utilisant les méthodes de Galerkin discontinu et continu en temps. A l'aide de la méthode de Galerkin discontinu, l'ensemble du domaine temporel $\Omega_t = [0; T]$ est, par exemple [Idesman 2000], divisé en deux blocs $\Omega_t = [0; T/2]$ et $\Omega_t = [T/2; T]$. Ainsi, au lieu de résoudre le problème sur l'intervalle de temps complet, il est résolu successivement sur chacun des blocs temporels avec la méthode de Galerkin continu.

Subdiviser le temps en intervalle grossier permet de réduire le nombre de degrés de liberté à traiter tout en gardant les avantages du "non incrémental".

A.I.2.2 Méthode LATIN

La méthode LATIN (LArge Time INcrement) ou méthode à grand incrément de temps [Ladeveze 1999a] est un solveur itératif initialement dédié aux problèmes non linéaires d'évolution et

qui a pour originalité d'être non incrémental. A chaque itération, deux problèmes sont successivement résolus : un problème non linéaire local suivi d'un problème linéaire global. La méthode LATIN sépare donc les difficultés en séparant la résolution des problèmes. A chaque itération, une approximation de la solution sur l'intervalle de temps entier est calculée, ce qui en fait une méthode non incrémentale. Le caractère non incrémental de la LATIN se trouve au niveau de l'approximation radiale lors de la résolution du problème global (principe P3 de cette méthode). Elle consiste à rechercher la solution sous la forme séparée espace-temps. La méthode LATIN peut donc être vue comme une méthode de réduction de modèle *a priori*, elle sera présentée en détail dans la partie dédiée à ce sujet (A.I.3.2).

A.I.2.3 Méthode PGD

En s'appuyant sur l'idée de l'approximation radiale de la LATIN, la méthode PGD a été développée [Ammar 2006, 2007, Ladeveze 2010]. Cette méthode consiste à rechercher la solution d'une EDP sous la forme de somme de produits de fonctions à variables séparées. La PGD, faisant elle aussi partie des méthodes de réduction de modèle *a priori*. Elle sera détaillée dans la partie suivante (A.I.3.2).

Remarque. D'autres méthodes non incrémentales existent. On peut citer par exemple les méthodes espace-temps basées sur les ondelettes [Alam 2006]. Elles consistent à transformer les EDPs en un seul problème algébrique sur l'ensemble du domaine temporel. Cohen [Cohen 2002] souligne que l'utilisation d'une telle méthode présente néanmoins des inconvénients tels que la géométrie et la structure de données [Cohen 2002], la construction de bases d'ondelettes étant facile uniquement dans le cas d'un domaine rectangulaire. Avec une géométrie complexe, la construction de la base peut vite devenir compliquée.

A.I.3 Méthodes de réduction de modèle

Afin de pallier les limitations en terme de taille du problème à résoudre (grand nombre de d.d.l), des méthodes de réduction de modèle basées sur la séparation des variables ont été développées. L'objectif de ces méthodes est de chercher une base réduite pour décrire la solution. Ces méthodes de réduction de modèle peuvent être classées en deux catégories : les méthodes de réduction *a posteriori* où une connaissance préalable sur la solution du problème est nécessaire et les méthodes de réduction *a priori* qui nécessite aucune connaissance sur la solution.

A.I.3.1 Méthodes de réduction de modèle a posteriori

Les méthodes de réduction de modèle *a posteriori* nécessitent une connaissance préalable sur la solution pour construire la base réduite. Les plus classiquement utilisées sont la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD - Proper Orthogonal Decomposition) et la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD - Singular Value Decomposition). La POD [Chattejee 2000, Cordier 2006], initialement développée pour l'analyse de données ou le traitement des images, consiste à compacter les données [Chattejee 2000]. La POD est aussi utilisée dans un grand nombre de domaines et en particulier la mécanique des fluides [Allery 2005]. Cette méthode peut être assimilée à la décomposition de Karhunen-Loeve [Karhunen 1946, Loeve 1963] dans le cas d'espaces de dimensions infinies ou encore à l'Analyse en Composantes Principales (PCA – Principal Component Analysis) liée à la SVD dans le cas où la dimension est finie.

Supposons que la solution $u(x, t)$ d'une EDP peut se mettre sous la forme d'une somme de fonctions à variables séparées espace-temps, elle s'écrit :

$$u(x, t) \approx \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i(x) \quad (\text{A.I-6})$$

Cette approximation devient exacte lorsque le nombre de termes N tend vers l'infini.

Notons que cette représentation n'est pas unique. Pour une valeur de N donnée, la POD consiste à construire la meilleure approximation possible avec une base spatiale orthonormée, ce qui revient à écrire :

$$\int_{\Omega_x} \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx = \delta_i^j \quad (1 \leq i, j \leq N) \quad (\text{A.I-7})$$

où δ_i^j est le symbole de Kronecker.

Une fois la base spatiale déterminée, la base temporelle est choisie telle que :

$$a_k(t) = \int_{\Omega_x} u(x, t) \Phi_k(x) dx \quad (1 \leq k \leq N) \quad (\text{A.I-8})$$

où les fonctions $a_k(t)$ ne dépendent que de $\Phi_k(x)$.

Nous allons maintenant présenter la méthode SVD ainsi que deux méthodes POD (la méthode dite classique et la méthode dite des 'snapshots').

a) Méthode SVD

La méthode SVD (Décomposition aux Valeurs Singulières) est initialement une méthode de factorisation de matrices [Golub 1990] mais elle est également utilisée pour approcher la solution par une base réduite. Elle fait donc partie, dans ce contexte, des méthodes de réduction *a posteriori*.

En tant que méthode *a posteriori*, elle nécessite donc des connaissances préalables de la solution. Ces informations sont en général issues des observations, appelées des 'snapshots' qui sont des clichés de la solution à différents instants.

Supposons n_t 'snapshots' du champ u connues et notés $u_i^j = u(x_i, t_j)$ ($1 \leq i \leq n_x; 1 \leq j \leq n_t$). L'ensemble de ces 'snapshots' peut être rangé dans une matrice, appelée matrice des snapshots :

$$Q = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \dots & u_1^{n_t} \\ u_2^1 & u_2^2 & \dots & u_2^{n_t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n_x}^1 & u_{n_x}^2 & \dots & u_{n_x}^{n_t} \end{pmatrix} \quad (\text{A.I-9})$$

La SVD est ensuite appliquée sur la matrice Q . Elle consiste à factoriser cette matrice sous la forme :

$$A = U \Sigma V^T \quad (\text{A.I-10})$$

où Σ est une matrice diagonale de taille $n_x \times n_t$ contenant $\min(n_x, n_t)$ valeurs singulières σ_i qui sont rangées dans un ordre décroissant, U est une matrice de taille $n_x \times n_x$ dont les colonnes constituent une base orthonormée de l'espace x (i.e $UU^T = I_{n_x}$) et V est une matrice de taille $n_t \times n_t$ dont les colonnes constituent une base orthonormée du temps t (i.e $VV^T = I_{n_t}$).

Chaque colonne de U est donc homogène à un mode spatial Φ_i ($1 \leq i \leq n_x$) et chaque colonne de V est homogène à un mode temporel a_i ($1 \leq i \leq n_t$). Chaque valeur singulière σ_i correspond à un coefficient α_i ($1 \leq i \leq \min(n_x, n_t)$). Comme la valeur de ces coefficients décroît très vite, on conserve en général uniquement les N premières valeurs singulières, la solution s'écrit donc:

$$u(x, t) \approx \sum_{i=1}^N \alpha_i \Phi_i(x) a_i(t) \quad (\text{A.I-11})$$

La SVD permet ainsi d'obtenir une décomposition spatio-temporelle de la solution. Notons que cette décomposition est optimale au sens énergétique.

La SVD est présentée ici dans le cas d'une matrice en dimensions 2 espace-temps (x, t) . Gonzalez et al. [Gonzalez 2010] l'ont étendu au cas de problèmes multidimensionnels en combinant la technique proposée par Kolda et al. [Kolda 2007] à l'outil "Matlab tensor toolbox" [Bader 2007]. Lathauwer et al. [Lathauwer 2000] proposent également une extension de la SVD pour des tenseurs d'ordre élevé.

Remarque. En multipliant les deux membres de l'équation (A.I-10) par Q^T à gauche, on définit une matrice de dimension $n_t \times n_t$:

$$Q^T Q = V \Sigma U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^2 V^T \quad (\text{A.I-12})$$

En posant $\Lambda = \Sigma^2$, il vient : $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$. L'équation (A.I-12) est donc équivalente à un problème aux valeurs propres où V sont les vecteurs propres et Λ sont les valeurs propres.

De la même manière, en multipliant par Q^T à droite, on définit une matrice de dimension $n_x \times n_x$:

$$Q Q^T = U \Sigma V^T V \Sigma U^T = U \Sigma^2 U^T \quad (\text{A.I-13})$$

où (U, Λ) représente la décomposition aux valeurs propres de cette matrice.

Selon la relation d'ordre entre n_t et n_x , on préférera l'une ou l'autre des décompositions. Lorsque $n_t \gg n_x$, la décomposition de $Q Q^T$ est faite à l'aide de la POD classique alors que dans l'autre cas, le POD des 'snapshots' sera utilisée.

b) Méthode POD

La POD (ou décomposition de Karhunen-Loeve) est une extension de la SVD aux espaces de dimension infinie (comme par exemple, l'espace des fonctions continues en temps). Dans les méthodes POD, afin de chercher la base réduite, les fonctions de base sont obtenues en résolvant le problème aux valeurs propres défini à partir des matrices de corrélation, qui sont les matrices construites à partir des 'snapshots' de la solution. Les méthodes POD sont présentées ici en suivant le point de vue de Cordier et al. [Cordier 2006]. Pour plus de détails à ce sujet, le lecteur pourra se référer à cet article.

Considérons l'équation (A.I-1) et $X = (x, t)$ une variable spatio-temporelle. Supposons que $u(x, t) = u(X)$ est un ensemble de 'snapshots', obtenu en n_t instants différents t pour tout le domaine spatial Ω_x . Ces observations peuvent être soit des données expérimentales soit des données numériques (obtenues par exemple sur un pas de temps avec la méthode des éléments finis).

Le problème consiste donc à extraire des champs $u(x, t)$ considérés comme aléatoires, un mode dominant $\Phi(x)$ appelé structure cohérente. Cela revient donc à chercher une fonction Φ déterministe qui possède, au sens des moindres carrés, la plus grande projection sur les ‘snapshots’ supposés aléatoires $u(x, t_i)$ ($1 \leq i \leq n_t$), c’est-à-dire qui maximise la quantité $(u, \psi)^2$ où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire canonique sur un espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable H . D’un point de vue mathématique, cette fonction est solution du problème d’optimisation suivant avec la contrainte $(\Phi, \Phi) = 1$:

$$\frac{\langle (u, \Phi)^2 \rangle}{(\Phi, \Phi)} = \max_{\psi \in H} \frac{\langle (u, \psi)^2 \rangle}{(\psi, \psi)} \quad (\text{A.I-14})$$

où $\langle \cdot \rangle$ est un opérateur de moyenne.

Le choix de cet opérateur de moyenne $\langle \cdot \rangle$ permet de différencier la méthode POD classique de la méthode POD des ‘snapshots’.

Le problème de maximisation (Eq. (A.I-14)) se réécrit sous la forme d’un problème aux valeurs propres :

$$\langle (u, \Phi)u \rangle = \lambda \Phi \quad (\text{A.I-15})$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange introduit lors du calcul.

En introduisant l’opérateur \mathfrak{R} défini par :

$$\mathfrak{R}\Phi(X) = \int_{\Omega} R(X, X') \Phi(X') dX' \quad (\text{A.I-16})$$

où

$$R(X, X') = \langle u(X) \otimes u(X') \rangle \quad (\text{A.I-17})$$

est le tenseur des corrélations spatio-temporelles entre deux points X et X' , le problème aux valeurs propres (Eq. (A.I-15)) se ramène à l’équation intégrale de Fredholm :

$$\mathfrak{R}\Phi(X) = \int_{\Omega} R(X, X') \Phi(X') dX' = \lambda \Phi(X) \quad (\text{A.I-18})$$

La résolution de ce problème permet d’obtenir les fonctions propres $\Phi(X)$. Cette base POD est optimale au sens énergétique. Un faible nombre de fonctions (encore appelées modes) est en général nécessaire pour capturer la quasi-totalité de l’énergie.

Nous allons maintenant présenter les deux méthodes POD appelés « méthode POD classique » et « méthode POD des ‘snapshots’ » différenciables par la définition de l’opération de moyenne $\langle \cdot \rangle$.

- Méthode POD classique

Dans l’approche POD classique [Lumley 1967], la moyenne $\langle \cdot \rangle$ est temporelle :

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{T} \int_{\Omega_t} \cdot dt \quad (\text{A.I-19})$$

La variable X est ici assimilée à la variable spatiale x . Le problème aux valeurs propres se déduit de (Eq.(A.I-16)) en remplaçant le domaine Ω par le domaine spatial Ω_x . Ainsi :

$$\int_{\Omega_x} R(x, x') \Phi(x') dx' = \lambda \Phi(x) \quad (\text{A.I-20})$$

avec

$$R(x, x') = \frac{1}{T} \int_{\Omega_t} u(x, t) \otimes u(x', t) \cdot dt \quad (\text{A.I-21})$$

Les vecteurs propres $\Phi(x)$ ne dépendent donc que de l'espace.

En supposant que le champ aléatoire considéré $u(x, t)$ s'écrit sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) \Phi_i(x) \quad (\text{A.I-22})$$

où les coefficients temporels sont déterminés en projetant le champ $u(x, t)$ sur les fonctions propres spatiales:

$$a_n(t) = (u(x, t), \Phi_n(x)) \quad (\text{A.I-23})$$

Remarque. Dans ce cas, pour déterminer les fonctions propres, il faut résoudre l'équation intégrale de Fredholm (A.I-20), avec une intégration sur le domaine spatial. Si la taille n_x est importante (ce qui peut être le cas principalement dans les cas 2D ou encore 3D), la taille de $R(x, x')$ devient importante, d'autant plus qu'elle correspond à une matrice pleine. La résolution de (Eq. (A.I-20)) peut donc s'avérer très coûteuse (cf. décomposition aux valeurs propres de la matrice QQ^T).

- Méthode POD des 'snapshots'

La méthode POD des 'snapshots' [Sirovich 1987] consiste à traiter des clichés temporels ('snapshots'). Si l'on considère que le nombre de réalisations temporelles nécessaire pour décrire de manière précise le champ considéré est égale à n_t , le problème à résoudre par la méthode des 'snapshots' est de taille n_t .

L'opérateur de moyenne correspond, dans ce cas, à une moyenne spatiale évaluée sur tout le domaine Ω_x :

$$\langle \cdot \rangle = \int_{\Omega_x} \cdot dx \quad (\text{A.I-24})$$

La variable X est donc assimilée à la variable temporelle t . Les fonctions propres spatiales $\Phi(x)$ sont supposées être des combinaisons linéaires des réalisations $u(x, t_k)$ contenues dans la base de données (base de 'snapshots'), soit :

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n_t} a(t_k) u(x, t_k) \quad (\text{A.I-25})$$

Les 'snapshots' $u(x, t_k)$ sont supposés linéairement indépendants.

Les coefficients $a(t_k)$ $1 \leq k \leq n_t$ sont cherchés tels que les fonctions propres $\Phi(x)$ soient solution de l'équation (A.I-18). On obtient donc:

$$\frac{1}{T} \int_{\Omega_t} R(t, t') a(t') dt' = \lambda a(t) \quad (\text{A.I-26})$$

où le tenseur des corrélations temporelles $R(t, t')$ entre deux points t et t' est défini comme suit:

$$R(t, t') = \int_{\Omega_x} u(x, t) \otimes u(x, t') \cdot dx \quad (\text{A.I-27})$$

Cela permet de déterminer les coefficients $a(t_k)$ ($1 \leq k \leq n_t$). Les modes POD sont ensuite construits à l'aide de l'équation (A.I-25).

Cette approche correspond à la décomposition aux valeurs propres de la matrice $Q^T Q$.

Remarques.

- On voit que la taille du problème aux valeurs propres est égale à n_t . Cette méthode des 'snapshots' permet donc de réduire considérablement le temps de calcul lorsque le nombre de clichés temporels n_t est plus petit en comparaison du nombre de points en espace n_x .
- Si le temps caractéristique du problème étudié est plus petit que l'écart entre les 'snapshots' alors cette méthode ne peut pas décrire la solution de ces problèmes.

Dans [Cordier 2006], il est mentionné qu'en général, les données issues d'approches expérimentales sont traitées par la méthode classique et les données provenant d'approches numériques sont traitées par celle des 'snapshots'. Les auteurs l'expliquent en invoquant le fait qu'avec l'approche expérimentale, la description temporelle est bien résolue alors que la description spatiale est souvent très limitée.

A.I.3.2 Méthodes de réduction de modèle a priori

Pour les méthodes de réduction de modèle *a posteriori*, des informations initiales sur la solution recherchée doivent être connues. De plus, elles influencent fortement les résultats et peuvent mener lorsqu'elles ne sont pas optimales à une inefficacité de la POD pour prédire la solution. Pour pallier ce principal défaut, un certain nombre de méthodes de réduction de modèle *a priori*, c'est-à-dire aucune information initiale n'est nécessaire, ont vu le jour. Nous allons maintenant présenter trois de ces méthodes. Il s'agit de la méthode APR (A Priori Reduction), la méthode LATIN et la méthode PGD. La première se différencie plus particulièrement des deux autres car elle est incrémentale alors que, comme nous l'avons déjà mentionné, les deux dernières sont non incrémentales.

a) Méthode APR

La méthode APR (A Priori Reduction), initiée par Ryckelynck [Ryckelynck 2002, 2005, 2006] est une méthode de réduction de modèle incrémentale. La base est en effet enrichie à l'aide des sous-espaces de Krylov sur un intervalle de temps donné. Partant du constat qu'une base POD n'est pas capable de représenter une information qui n'est pas contenue initialement dans la base de données utilisée pour la déterminer, la méthode APR permet de construire la base de manière adaptative au cours de la simulation. Elle peut donc être vue comme une extension incrémentale et adaptative de la POD.

L'APR est une méthode itérative dans le sens où la base des fonctions Φ est corrigée de manière itérative jusqu'à en obtenir une qui décrit avec une certaine précision la solution $u(x, t)$ sur tout l'intervalle de temps considéré.

Les étapes de l'APR sont maintenant détaillées [Allery 2011, Dumon 2011b]. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à ces documents ainsi qu'aux articles de Ryckelynck cités auparavant.

La solution du problème est recherchée sous la forme de décomposition de fonctions spatiales et temporelles (des modes) :

$$u(x, t) \approx \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i(x) \quad (\text{A.I-28})$$

où le nombre de modes N n'est pas prédéfini.

Afin de construire la base, la méthode APR est constituée de trois étapes différentes. Une fois la base spatiale initialisée, deux étapes de résolution du système réduit et d'enrichissement avec orthogonalisation de la base sont répétées jusqu'à convergence. Détaillons ces différentes étapes :

- Etape 1. Initialisation de la base spatiale:

La base spatiale est, en général, initialisée de manière à satisfaire les conditions initiales du problème. L'initialisation peut par exemple se faire par un premier calcul Eléments Finis sur le premier incrément de temps sur toute la structure.

- Etape 2. Construction et résolution du système réduit :

Dans cette étape, le problème discrétisé complet est projeté sur la base APR. Plaçons nous à la $k^{\text{ième}}$ itération, ce qui signifie que la base réduite APR contient N_k fonctions $\Phi_i(x)$ ($1 \leq i \leq N_k$).

Les coefficients $a_i(t)$ ($1 \leq i \leq N_k$) sont déterminés en supposant la solution sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{N_k} a_i(t) \Phi_i(x) \quad (\text{A.I-29})$$

En imposant la condition que le résidu du problème **(A.I-1)** soit orthogonal à chacun des vecteurs $\Phi_j(x)$ ($1 \leq j \leq N_k$), cela revient à résoudre :

$$\sum_{i=1}^{N_k} (\Phi_i(x), \Phi_j(x)) \frac{da_i(t)}{dt} + \left(\mathbf{A} \left[\sum_{i=1}^{N_k} a_i(t) \Phi_i(x) \right], \Phi_j(x) \right) = (f, \Phi_j(x)) \quad (\text{A.I-30})$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire.

Ce problème est un problème réduit (dimensions réduites) mais résolu à chaque intervalle de temps (méthode incrémentale). Une fois les problèmes résolus, les coefficients $a_i(t)$ sont déterminés pour chaque intervalle de temps. La solution $u(x, t_j)$ à chaque intervalle de temps est déduite de l'équation **(A.I-29)**.

- Etape 3. Vérification de la validité de la base et enrichissement :

La convergence de la méthode APR est déterminée en calculant le résidu :

$$Res(t_j) = \left\| \sum_{i=1}^{N_k} \Phi_i(x) \frac{da_i(t_j)}{dt} + \sum_{i=1}^{N_k} a_i(t_j) A(\Phi_i(x)) - f \right\|_2 \quad (\text{A.I-31})$$

pour chaque pas de temps t_j ($1 \leq j \leq n_t$).

La solution converge lorsque la valeur du résidu est inférieure à un seuil ε_{CV} (choisi par l'utilisateur) pour tous les intervalles de temps. Si ce seuil n'est pas atteint pour tous les pas de temps, la base à l'itération k est considérée comme mauvaise et est donc mise à jour de manière adaptative. Cette étape est une étape très importante de la méthode qui consiste en deux sous étapes (orthogonalisation et enrichissement) que nous précisons maintenant.

- Orthogonalisation de la base ou phase d'amélioration

L'objectif de cette phase d'amélioration est de prendre en compte l'information de la dernière itération APR. Pour cela, la méthode POD est appliquée aux coefficients temporels $a_i(t_j)$ ($1 \leq i \leq N_k$, $1 \leq j \leq n_t$) de la base réduite afin de sélectionner les fonctions de forme correspondantes aux événements principaux de cette base réduite. Cela mène donc à la résolution du problème aux valeurs propres :

$$K\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V} \quad (\text{A.I-32})$$

où la matrice K est la matrice de corrélation temporelle de taille $N_k \times N_k$ qui est définie par :

$$K_{mn} = \frac{1}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} a_m(t_j) a_n(t_j) \quad (\text{A.I-33})$$

La résolution de ce problème aux valeurs propres (Eq. (A.I-32)) permet de déterminer N_k valeurs propres $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{N_k}$ et N_k vecteurs propres $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_{N_k}$. Les q valeurs propres vérifiant le critère :

$$\frac{\lambda_l}{\lambda_1} > \mu_{sel} \quad (1 \leq l \leq q) \quad (\text{A.I-34})$$

sont conservées où μ_{sel} , fixé par l'utilisateur, permet de sélectionner les modes propres.

La nouvelle base orthogonale $\tilde{\Phi}_l(x)$ ($1 \leq l \leq q$) contenant q vecteurs définis par :

$$\tilde{\Phi}_l(x) = \sum_{i=1}^{N_k} \Phi_i \mathbf{V}_i^l \quad (\text{A.I-35})$$

où le vecteur \mathbf{V}^l est le vecteur propre associé à la valeur propre λ_l est créée. Cette nouvelle base $\tilde{\Phi}_l(x)$ ($1 \leq l \leq q$) ne prend en compte que les événements importants de l'ancienne base $\Phi_i(x)$ ($1 \leq i \leq N_k$).

- Enrichissement de la base ou phase d'expansion

Dans cette étape, la base est enrichie pour prendre en compte le fait, qu'à partir d'un certain temps, le résidu (Eq. (A.I-31)) n'est pas suffisamment petit (critère de convergence non vérifié).

Supposons que ce soit pour le temps t noté t_{CV}^+ . On a donc la relation :

$$\forall t_j < t_{CV}^+ \quad Res(t_j) < \varepsilon_{CV} \quad \text{et} \quad \forall t_j \geq t_{CV}^+ \quad Res(t_j) > \varepsilon_{CV} \quad (\text{A.I-36})$$

Cela signifie que la base est efficace seulement jusqu'au temps t_{CV}^+ . Une fois ce temps dépassé, la base ne permet pas de fournir de bons résultats.

Notons R^+ le vecteur résidu à l'instant t_{CV}^+ , instant où le critère de convergence n'est pas vérifié. [Ryckelynck 2005] propose une technique d'enrichissement basée sur l'utilisation des sous-espaces de Krylov générés par le résidu du problème.

L'espace de Krylov d'ordre m , K^m , est construit de la manière suivante :

$$K^m = \{R^+, JR^+, J^2R^+, \dots, J^{m-1}R^+\} \quad (\text{A.I-37})$$

où J est la jacobienne du problème (A.I-1). En pratique, le sous-espace de Krylov est d'ordre $m = 1$ ou $m = 2$.

La nouvelle base à l'étape $k + 1$ sera donc :

$$\{\tilde{\Phi}_1, \dots, \tilde{\Phi}_q, K^m\} \quad (\text{A.I-38})$$

Les deux dernières étapes sont répétées jusqu'à ce que le critère de convergence défini par l'équation (A.I-31) soit vérifié.

Cette méthode a été améliorée par Ryckelynck [Ryckelynck 2005] en y ajoutant l'aspect d'Hyper Réduction, qui consiste à ne sélectionner qu'une partie des points d'intégration du modèle Eléments Finis pour prévoir l'état de la base réduite. Elle porte donc dans ce cas le nom de APHR pour A Priori Hyper Reduction.

La méthode APR (ou encore l'APHR) permet de réduire le temps de calcul des simulations. Dans [Neron 2010], il est noté que, pour certaines équations comme l'équation des ondes, la base réduite obtenue n'est pas optimale. Le caractère non incrémental de cette méthode peut présenter les défauts cités précédemment (cf. A.I.I.).

Il existe d'autres méthodes de réduction de modèle dans la littérature. On pourra citer ici la méthode de Base Réduite (RB-Reduced Basis) [Machiels 2000]. Dans cette méthode, la base est aussi construite de manière adaptative. Une erreur est définie et permet d'enrichir la base là où l'erreur est grande. La définition de l'erreur proposée dans cette méthode permet de garantir la qualité de la solution du modèle réduit. Cette méthode est notamment appliquée dans les simulations en temps réel [Prud'homme 2002].

b) Méthode LATIN

La méthode LATIN (LArge Time INcrement method) ou méthode à grand incrément de temps [Ladevèze 1999a] qui est une méthode non incrémentale peut être vue comme une méthode de réduction de modèle *a priori*. Une présentation classique de la méthode est donnée ici et plus particulièrement l'aspect réduction de modèle. Son extension pour la résolution des problèmes multiphysiques multiéchelles multitemps [Neron 2004, 2008a, 2008b, Passieux 2008] sera présentée dans la partie **A.II.2.1**.

La méthode LATIN est basée sur les trois principes suivants :

- Principe P1: Séparation des difficultés

L'objectif du principe **P1** est de séparer les équations en deux groupes :

- le premier groupe \mathbf{A}_d est l'ensemble des solutions des équations linéaires qui sont éventuellement globales:

$$\mathbf{A}_d = \{ \mathbf{s} \mid \mathbf{s} \text{ vérifie les conditions d'admissibilité} \} \quad (\text{A.I-39})$$

- le deuxième groupe Γ est l'ensemble des solutions des équations locales qui sont éventuellement non linéaires :

$$\Gamma = \{ \hat{\mathbf{s}} \mid \hat{\mathbf{s}} \text{ vérifie les relations de comportement et les conditions initiales} \} \quad (\text{A.I-40})$$

La solution \mathbf{s}_{ex} du problème cherchée est donc :

$$\mathbf{s}_{\text{ex}} = \mathbf{A}_d \cap \Gamma \quad (\text{A.I-41})$$

- Principe P2 : Résolution itérative en deux étapes

Le principe **P2** consiste à construire la solution \mathbf{s}_{ex} à l'aide d'un schéma itératif composé de deux étapes. Supposons connue la solution \mathbf{s}_n de \mathbf{A}_d (obtenue à l'itération n) et plaçons nous à l'itération $n+1$ du schéma itératif, illustrée **FIG. A.I-1**. La première étape, appelée étape locale, consiste à chercher la solution $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ de Γ en utilisant une première direction de recherche E^+ . A partir de cette solution, la seconde étape, appelée étape linéaire, consiste à chercher la solution \mathbf{s}_{n+1} de \mathbf{A}_d à l'aide d'une seconde direction de recherche E^- , conjuguée de la précédente.

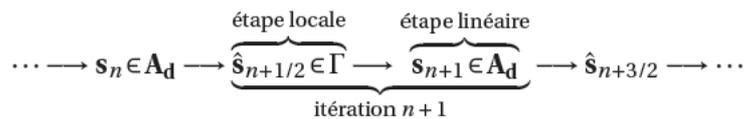


FIG. A.I-1 Une itération de la méthode LATIN [Neron 2004]

La **FIG. A.I-2** montre une représentation de principe de la LATIN où sont schématisées les directions de recherche. Notons que dans la méthode LATIN, ces directions de recherche constituent des paramètres de la méthode. Le choix de ces paramètres influence notablement la convergence de l'algorithme.

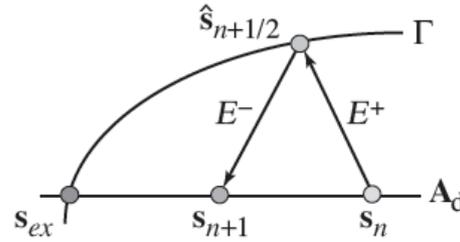


FIG. A.I-2 Représentation de principe de la méthode LATIN [Neron 2004]

Détaillons maintenant la nature des systèmes à résoudre lors de ces deux étapes.

- L'étape locale à l'itération $n + 1$

Les équations sont non linéaires mais locales. Cette étape mène donc à la résolution d'un petit système d'équations différentielles ordinaires non linéaires locales sur les points d'intégration des éléments finis.

- L'étape linéaire à l'itération $n + 1$

Les équations sont linéaires et globales. Pour limiter le coût de résolution dans cette étape le principe P3 est utilisé.

- Principe P3 : Représentation des inconnues

Le principe **P3** de la méthode LATIN est proposé pour résoudre l'étape linéaire (les équations globales) de manière non incrémentale. Il s'appuie sur l'approximation radiale [Ladeveze 1999a] qui a pour but de traiter l'ensemble du domaine temporel pour réduire le temps de calcul. C'est donc à travers ce principe que la méthode LATIN peut être vue comme une méthode de réduction de modèle.

L'approximation radiale consiste à résoudre les équations globales linéaires sous la forme séparée, c'est-à-dire à rechercher la solution $s(x, t)$ sous la forme d'une somme de fonctions radiales en rajoutant au fur et à mesure des couples espace-temps $(\Phi_i(x), a_i(t))$. La solution s'écrit donc :

$$s(x, t) = u(x, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i(x) \quad (\text{A.I-42})$$

où N est le nombre de couples temps-espace.

Avec une telle écriture de la solution, la résolution du problème global linéaire nécessite pour déterminer les fonctions d'espace, la résolution d'un système d'Equations aux Dérivées Partielles spatiales et indépendantes du temps et, pour déterminer les fonctions du temps, la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires en temps. Ces deux systèmes sont résolus de façon découplée. Notons que les fonctions du temps sont intégrées sur l'ensemble du domaine, ce qui constitue le caractère non incrémental de la méthode LATIN.

L'approximation radiale présente des similitudes avec la méthode POD. Néanmoins, au contraire de cette dernière, c'est une méthode *a priori*. Aucune solution n'est nécessaire pour commencer la construction de la base.

Grâce à l'approximation radiale, la méthode LATIN est très efficace pour la résolution des problèmes transitoires. Différentes améliorations sur ces méthodes sont proposées par l'équipe de Ladevèze, permettant notamment de limiter le nombre de fonctions temporelles pour une précision de la solution donnée [Ladeveze 2010]. S'appuyant sur l'approximation radiale de la LATIN, la méthode

PGD (Proper Generalized Decomposition) se différencie de celle-ci dans la mesure où, dans le cas de la PGD, il n'est pas nécessaire de séparer les équations comme dans la LATIN.

c) Méthode PGD

La PGD consiste à rechercher la solution u sous la forme séparée suivante :

$$u(x_1, x_2, \dots, x_M) = \sum_{i=1}^N F_1^i(x_1) F_2^i(x_2) \dots F_M^i(x_M) \quad (\text{A.I-43})$$

où N est le nombre de fonctions à variables séparées et M le nombre de variables. Les variables x_1, \dots, x_M peuvent représenter des variables spatiales, temporelles ou des variables paramétriques (comme par exemple la conductivité thermique dans l'équation de la chaleur) du problème à résoudre.

La grande performance de la PGD est qu'elle permet de réduire fortement la taille des problèmes. Considérons un problème avec $D = 80$ dimensions et 10 points de discrétisation sur chaque dimension. Ainsi, avec l'approche classique (MEF), le nombre de nœuds du maillage (nombre d'inconnues du problème) atteint la valeur de 10^{80} . Avec la méthode PGD, ce nombre est seulement de $10 \cdot 80 = 800$ points. Plus concrètement, la PGD a été appliquée, dans le cadre de la théorie cinétique linéaire, à la résolution de l'équation de Fokker-Planck multidimensionnelle avec une description des fluides à l'échelle microscopique [Ammar 2006]. Dans cet exemple, Ammar montre que le nombre d'inconnues est de 10^5 au lieu de 10^{40} avec la MEF classique.

La résolution d'un problème transitoire a été présentée dans [Ammar 2007]. Dans ce cas, le temps est considéré comme une variable supplémentaire, ce qui fait de la PGD une méthode non incrémentale. Dans [Ammar 2010a], la PGD non incrémentale est comparée avec la méthode des éléments finis classique en terme d'erreur et de temps CPU, mettant en avant la réduction du temps de calcul avec la PGD. Notons que, dans cet article, la PGD est aussi étendue à la résolution de problèmes transitoires non linéaires. Nous le détaillerons donc au **chapitre C** de la thèse.

Remarque. La PGD incrémentale est utilisée dans d'autres travaux notamment [Dumon 2011a, 2011b]. Elle consiste à séparer l'espace et le temps. Néanmoins, un schéma incrémental est utilisé et la méthode PGD est utilisée uniquement pour générer les modes spatiaux.

Dans le cadre de cette thèse, la PGD est considérée sous sa forme non incrémentale.

Nous allons maintenant présenter les variantes de la PGD pour la résolution de problèmes transitoires [Ladeveze 2011, Nouy 2010a].

Considérons le problème transitoire (Eq. (A.I-1)). Plaçons nous à l'itération k . La solution PGD est cherchée sous la forme :

$$u_k(x, t) = u_{k-1}(x, t) + a_k(t) \Phi_k(x) = \sum_{i=1}^{k-1} a_i(t) \Phi_i(x) + a_k(t) \Phi_k(x) \quad (\text{A.I-44})$$

et consiste à déterminer le nouveau couple (Φ_k, a_k) . L'étape de recherche de ce couple est appelée étape d'enrichissement.

▪ **Méthode PGD progressive**

Le nouveau couple (Φ_k, a_k) doit satisfaire le double critère de l'orthogonalité de Galerkin suivant :

$$\int_{\Omega} u^* \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} u^* A(u) d\Omega = \int_{\Omega} u^* f d\Omega \quad \forall u^* \quad (\text{A.I-45})$$

où le champ virtuel u^* s'écrit sous la forme séparée

$$u^* = \Phi_k^* a_k + a_k^* \Phi_k \quad (\text{A.I-46})$$

Ces conditions sont équivalentes à imposer que le résidu soit orthogonal aux inconnues Φ_k et a_k . Elles peuvent donc s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi_k^* a_k \frac{\partial a_k}{\partial t} \Phi_k d\Omega + \int_{\Omega} \Phi_k^* a_k A(a_k \Phi_k) d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \Phi_k^* a_k f d\Omega - \left(\int_{\Omega} \Phi_k^* a_k \frac{\partial u_{k-1}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \Phi_k^* a_k A(u_{k-1}) d\Omega \right) \quad \forall \Phi_k^* \end{aligned} \quad (\text{A.I-47})$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a_k^* \Phi_k \frac{\partial a_k}{\partial t} \Phi_k d\Omega + \int_{\Omega} a_k^* \Phi_k A(a_k \Phi_k) d\Omega \\ & = \int_{\Omega} a_k^* \Phi_k f d\Omega - \left(\int_{\Omega} a_k^* \Phi_k \frac{\partial u_{k-1}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} a_k^* \Phi_k A(u_{k-1}) d\Omega \right) \quad \forall a_k^* \end{aligned} \quad (\text{A.I-48})$$

Cette méthode mène à la résolution de deux systèmes non linéaires : $\Phi_k = S_k(a_k)$ et $a_k = T_k(\Phi_k)$, qui sont généralement résolus par la méthode de point fixe à directions alternées (encore appelée méthode de la puissance itérée) [Ammar 2007]. Le **TAB. A.I-1** présente l'algorithme de la méthode PGD progressive.

- | | |
|------|---|
| 1 : | <i>tant que</i> ($k \leq k_{max}$) <i>faire</i> |
| 2 : | Initialisation de $a^{(0)}$ |
| 3 : | <i>tant que</i> ($l \leq l_{max}$) <i>faire</i> |
| 4 : | Calcul de $\Phi^{(l)} = S_k(a^{(l-1)})$ |
| 5 : | Normalisation de $\Phi^{(l)}$ (étape optionnelle) |
| 6 : | Calcul de $a^{(l)} = T_k(\Phi^{(l)})$ |
| 7 : | Vérification de la convergence de $\Phi^{(l)} a^{(l)}$ |
| 8 : | <i>fin tant que</i> |
| 9 : | On pose : $\Phi_k = \Phi^{(l)}$ et $a_k = a^{(l)}$ |
| 10 : | Vérification de la convergence de $u_k = u_{k-1} + a_k \Phi_k$ |
| 11 : | <i>fin tant que</i> |

TAB. A.I-1 Algorithme la méthode PGD progressive

La méthode PGD est une méthode *a priori* dans la mesure où la base est initialisée aléatoirement et enrichie au fur et à mesure.

Remarque. Même si l'étape de normalisation est optionnelle, elle est généralement utilisée.

▪ **Méthode PGD Galerkin**

La méthode PGD progressive n'est pas optimale au sens de la projection de Galerkin. Afin d'obtenir la décomposition PGD optimale, le résidu de la décomposition doit être simultanément orthogonal à l'ensemble des fonctions spatiales $\Phi_k = \{\Phi_1, \dots, \Phi_k\}$ et temporelles $\mathbf{A}_k = \{a_1, \dots, a_k\}$, c'est-à-dire vérifier le critère d'orthogonalité (Eq. (A.I-47) et Eq.(A.I-48)). C'est ce qui fait lors des étapes 4 et 5 de l'algorithme de la méthode PGD Galerkin (cf . TAB. A.I-2).

- | |
|---|
| 1 : <i>tant que</i> ($k \leq k_{max}$) <i>faire</i> |
| 2 : Initialisation de $\mathbf{A}_k^{(0)}$ |
| 3 : <i>tant que</i> ($l \leq l_{max}$) <i>faire</i> |
| 4 : Calcul de $\Phi_k^{(l)} = S_k(\mathbf{A}_k^{(l-1)})$ |
| 5 : Calcul de $\mathbf{A}_k^{(l)} = T_k(\Phi_k^{(l)})$ |
| 6 : Vérification de la convergence de $\Phi_k^{(l)} \mathbf{A}_k^{(l)}$ |
| 7 : <i>fin tant que</i> |
| 8 : On pose : $u_k = \Phi_k^{(l)} \mathbf{A}_k^{(l)}$ |
| 9 : Vérification de la convergence de u_k |
| 10: <i>fin tant que</i> |

TAB. A.I-2 Algorithme la méthode PGD Galerkin

• **Méthode PGD Galerkin avec la mise à jour**

La méthode PGD Galerkin mène à la décomposition optimale au sens de la projection de Galerkin. Cette décomposition est néanmoins très coûteuse. L'application $S_k(\mathbf{A}_k)$ consiste en effet en la résolution d'un système d'EDPs couplées, numériquement lourd à résoudre. Une autre PGD, la méthode PGD Galerkin avec la mise à jour, est donc proposée. Le TAB. A.I-3 présente l'algorithme de cette méthode [Nouy 2010a, Ladeveze 2010] qui a pour but d'éviter l'application $S_k(\mathbf{A}_k)$. Seule la base temporelle est entièrement mise à jour à chaque étape d'enrichissement (cf. étape 10 de l'algorithme).

1 : <i>tant que</i> ($k \leq k_{max}$) <i>faire</i>
2 : Initialisation de $a^{(0)}$
3 : <i>tant que</i> ($l \leq l_{max}$) <i>faire</i>
4 : Calcul de $\Phi^{(l)} = S_k(a^{(l-1)})$
5 : Normalisation de $\Phi^{(l)}$ (étape optionnelle)
6 : Calcul de $a^{(l)} = T_k(\Phi^{(l)})$
7 : Vérification de la convergence de $\Phi^{(l)} a^{(l)}$
8 : <i>fin tant que</i>
9 : On pose : $\Phi_k = \{\Phi_{k-1}, \Phi^{(l)}\}$
10: Calcul de $\mathbf{A}_k = T_k(\Phi_k)$
11: On pose : $u_k = \Phi_k \mathbf{A}_k$
12: Vérification de la convergence de u_k
13: <i>fin tant que</i>

TAB. A.I-3 Algorithme la méthode PGD Galerkin avec la mise à jour

- **Méthode PGD progressive pondérée**

Une autre méthode, la méthode PGD progressive pondérée, a été proposée. C'est en fait une extension de la méthode PGD progressive. Les fonctions de base spatiales et temporelles sont normalisées et les coefficients α_k relatifs à chaque couple (Φ_k, a_k) sont entièrement recalculés à chaque enrichissement. La solution est donc recherchée sous la forme :

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \Phi_k(x) a_k(t) \tag{A.I-49}$$

où on voit apparaître contrairement aux autres méthodes PGD les coefficients α_k .

Cette méthode est celle qui sera utilisée dans la thèse et sera donc détaillée au **chapitre B**.

A.I.4 Discussion

Dans cette partie, des méthodes numériques pour la résolution des problèmes transitoires ont été présentées. Les principaux défauts des méthodes classiques (MEF, MDF,...) sont liées à l'utilisation d'un schéma incrémental qui, pour des raisons de stabilité, nécessite la résolution de problème de grande taille ou la résolution d'un grand nombre de problèmes. Des méthodes non incrémentales ont été développés pour pallier ce défaut. Néanmoins, comme nous l'avons vu, le temps de calcul peut rester encore trop élevé. C'est pour cette raison que des méthodes de réduction de modèle ont vu le jour. Elles se différencient par la connaissance préalable de la solution. Des informations sur la solution n'étant pas toujours accessibles, dans une situation de prédiction par exemple, nous retiendrons comme méthodes pertinentes les méthodes de réduction *a priori* non incrémentales soit la méthode PGD et la méthode LATIN.

A.II Problèmes multiphysiques multitemps

Cette partie est consacrée aux méthodes de résolution de problèmes multiphysiques multitemps, c'est-à-dire pour lesquels les phénomènes physiques agissent à différentes échelles temporelles. Les méthodes de résolution classiques utilisent une grille temporelle unique. Dans ce cas, la taille de la grille est donc fixée par le phénomène physique ayant la plus petite échelle temporelle. L'utilisation d'une même grille mène donc, dans les cas où les échelles sont très différentes, soit à des problèmes de maîtrise du temps de calcul ou encore dans certains cas à la divergence du schéma d'intégration. Des méthodes multitemps ont donc été développées pour répondre à ces problématiques. Certaines sont incrémentales et d'autres non incrémentales. La méthode des éléments finis classique (incrémentale, grille unique) est tout d'abord présentée puis son extension multigrille. La méthode LATIN et la méthode PGD sont ensuite explicitées dans le contexte multiphysique.

A.II.1 Méthodes incrémentales

Parmi les méthodes multiphysiques non incrémentales, seule la méthode des éléments finis est présentée ici sous deux versions : "monogrille" et ensuite multigrille. Les avantages et inconvénients sont discutés ici.

A.II.1.1 Méthode des Eléments Finis classique

La méthode des éléments finis classique (version "monogrille") est largement utilisée pour la résolution des problèmes multiphysiques. Afin de la présenter dans le cadre multiphysique, nous choisissons l'exemple traité dans la thèse de Rambert [Rambert 2002, 2005, 2006] pour laquelle un modèle thermo-diffuso-mécanique complètement couplé a été étudié en vue de décrire le comportement d'un matériau sujet à des sollicitations mécaniques, absorbant un gaz et pouvant être le siège de gradients thermiques.

Le premier et second principe associés à l'équation d'équilibre et à la conservation de masse permettent de formuler des modèles multiphysiques couplés et font apparaître des termes de couplage que l'on peut classer en deux catégories :

- les couplages dits directs dans le sens où ils apparaissent naturellement lors de l'écriture thermodynamique du problème, et plus précisément sont l'expression des termes produits dans les potentiels ;
- les couplages dits indirects par opposition aux précédents. Ce sont les couplages qui traduisent les dépendances entre les caractéristiques du matériau et les phénomènes physiques considérés. L'exemple classique est par exemple la dépendance du module d'Young à la température. Ces derniers sont parfois utilisés dans la construction des lois de comportement en s'affranchissant de la thermodynamique.

Dans la thèse de Rambert, tous les couplages directs ont été envisagés en supposant les paramètres constants et en se plaçant en petite perturbation (linéarité).

Ce modèle, implanté dans le logiciel Eléments Finis AbaqusTM, permet de simuler la décompression explosive dans les matériaux polymères. Plus précisément, le modèle multiphysique est composé de trois équations de conservation : mécanique, thermique et diffusion. Une fois la formulation faible de ce modèle discrétisé, cela mène à considérer les trois résidus élémentaires (au niveau de chaque élément fini) suivants:

$$\{F^m\}(\{q_n(t)\}) = \{0\} \quad , \quad \{F^T\}(\{q_n(t)\}, \{\dot{q}_n(t)\}) = \{0\} \quad , \quad \{F^s\}(\{q_n(t)\}, \{\dot{q}_n(t)\}) = \{0\} \quad (\text{A.II-1})$$

où la notation $^{(m)}$ (respectivement $^{(T)}$, $^{(g)}$) fait référence aux grandeurs liées à la mécanique (respectivement la thermique, la diffusion de gaz).

Le vecteur $\{q_n\}$ représente le vecteur des inconnues nodales, exprimé dans le cas d'un élément à n nœuds et 5 d.d.l. (les déplacements u, v, w pour la mécanique ; la température T pour la thermique et la concentration de gaz c pour la diffusion) sous la forme :

$$\{q_n\} = \{u_1, v_1, w_1, \dots, u_n, v_n, w_n, T_1, \dots, T_n, c_1, \dots, c_n\} \quad (\text{A.II-2})$$

Le résidu élémentaire du problème global est formulé ainsi:

$$\{F\}(\{q_n(t), \dot{q}_n(t)\}) = \begin{Bmatrix} \{F^m\}(\{q_n(t)\}) \\ \{F^T\}(\{q_n(t), \dot{q}_n(t)\}) \\ \{F^g\}(\{q_n(t), \dot{q}_n(t)\}) \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (\text{A.II-3})$$

En utilisant les mêmes notations, la matrice tangente du problème global s'écrit :

$$[K_e] = - \left(\frac{\partial \{F\}}{\partial \{q_n\}} \right) - \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial \{F\}}{\partial \{\dot{q}_n\}} \right) = \begin{bmatrix} [K_e^{mm}] & [K_e^{mT}] & [K_e^{mg}] \\ [K_e^{Tm}] & [K_e^{TT}] & [K_e^{Tg}] \\ [K_e^{gm}] & [K_e^{gT}] & [K_e^{gg}] \end{bmatrix} \quad (\text{A.II-4})$$

Elle est construite dans le cadre du schéma d'intégration temporelle d'AbaqusTM.

Les effets des couplages directs sont représentés par les sous matrices en dehors de la diagonale. La sous-matrice $[K_e^{mT}]$, par exemple, représente l'effet du couplage direct entre la mécanique et la thermique.

L'implémentation de ce modèle dans le code de calcul AbaqusTM a nécessité la construction d'un nouvel élément que l'on pourra appeler couplé pour lesquels les degrés de liberté sont le déplacement, la température et la concentration, en entrant dans la subroutine UEL d'AbaqusTM le calcul du vecteur du résidu et de la matrice tangente en fonction de l'élément et de l'incrément temporel.

Ce problème multiphysique couplé a donc été résolu avec un schéma incrémental en temps et un même maillage temporel et spatial pour chaque physique. Le schéma d'intégration à pas fixe et celui à pas adaptatif, intégrés dans AbaqusTM ont été utilisés.

Remarque. Plusieurs travaux utilisent les subroutines UEL pour créer des éléments spécifiques afin de simuler les problèmes multiphysiques. On pourra citer notamment les travaux de [Elhadrouz 2006, Zouari 2011] concernant les problèmes thermomécaniques.

La résolution classique implique donc que les différents phénomènes physiques ont la même échelle spatiale et temporelle, ce qui n'est pas nécessairement le cas. Dans ce cas, deux méthodes sont utilisées. La première consiste à prendre le pas de temps le plus petit (idem en espace le maillage le plus dense) afin que les différents phénomènes physiques soient correctement prédits. La seconde consiste à insérer des boucles temporelles dans le schéma temporel existant, pour des incréments particuliers éventuellement (voir détail **A.II.1.2**). Néanmoins cela nécessite une certaine périodicité entre les différentes échelles temporelles des physiques.

Une autre contrainte est liée au fait que le pas de temps choisi doit, pour des raisons de stabilité, satisfaire certaines conditions. Par exemple, dans le logiciel AbaqusTM, il est noté que le pas de temps au cours de la simulation doit être supérieur à une valeur seuil, qui dépend elle de la longueur

caractéristique des éléments du maillage. Pour un incrément inférieur à ce seuil, des oscillations liées aux erreurs numériques apparaissent. Ceci est lié au fait que le phénomène de transport (diffusion de la chaleur ou de la matière) n'a pas eu le temps de "s'installer spatialement". L'écart de température ou de concentration entre nœuds d'un même élément sont donc proches du zéro numérique. La valeur de la solution (température ou concentration) est donc successivement positive et négative pour un pas de temps très petit. Pour résoudre un problème couplé, cela nécessite d'optimiser la taille des éléments et les pas de temps.

Les pas de temps et d'espace étant fortement liés, l'utilisation d'une même grille a donc pour effet de créer des problèmes de grande taille, d'autant plus que le nombre de physiques considéré est grand et que les gradients entre les différentes physiques sont importants. La taille de ces problèmes ne permet pas toujours leur résolution avec cette méthode classique menant soit directement à des problèmes de divergence, soit à des problèmes de mémoire soit encore des temps de calcul prohibitifs. Des méthodes plus robustes pour traiter ce type de problème sont proposées dans la littérature, la présentation qui suit n'en est pas exhaustive.

A.II.1.2 Méthode des Eléments Finis multigrille

D'autres méthodes ont été développées pour pallier les déficits de la méthode classique. Ils permettent des maillages spatiaux et temporels différents sur un même domaine.

Commençons par les maillages spatiaux. Avec l'approche multigrille, un maillage spécifique à chaque physique peut être considéré. Le problème multiphysique est ainsi considéré comme un problème multiéchelle. Cela mène à différentes situations dans la mesure où les maillages peuvent être non compatibles. La **FIG. A.II-1**, issue de [Dureisseix 2006], montre les différentes situations à envisager dans le cas 2D, ce qui montre d'un certain point de vue, la complexité de ce type d'approche multigrille.

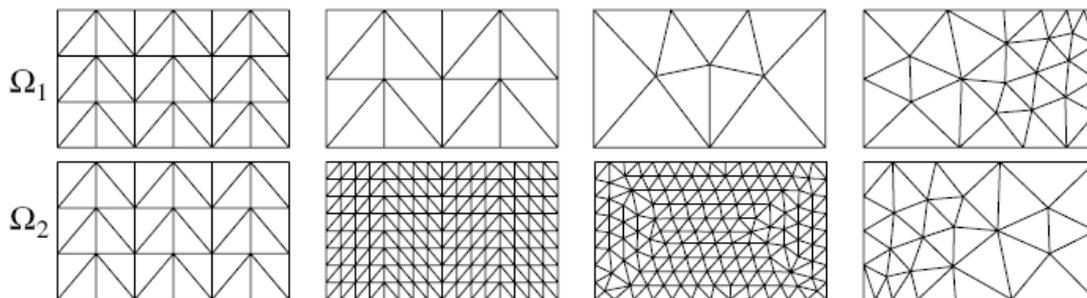


FIG. A.II-1 Différentes situations de deux maillages dans le cas 2D. De gauche à droite : identiques, emboîtés, non emboîtés, différents [Dureisseix 2006]

Des discrétisations temporelles différentes peuvent être également utilisées pour chaque physique. Le problème multiphysique est ainsi considéré comme un problème multitemps.

Considérer des maillages différents nécessite de transférer des données entre les différents maillages, notamment pour prendre en compte les effets de couplage entre les différentes physiques. Durreisseix et al. [Dureisseix 2006] proposent différentes techniques pour transférer des informations entre des maillages différents lors de la résolution d'un problème multiphysique thermoviscoélastique. Deux de ces opérateurs, l'opérateur de colocation et l'opérateur de "mortar" sont présentés ici:

- L'opérateur de collocation est l'opérateur de transfert le plus simple. Il consiste à interpoler le champ connu sur un maillage pour calculer la valeur aux nœuds du champ sur l'autre maillage. La FIG. A.II-2 montre un exemple de transfert de données de deux champs e_1 , e_2 entre des maillages en utilisant des opérateurs de collocation. Le principal inconvénient de la collocation est la perte d'information lorsque le transfert a lieu d'un maillage fin à un maillage grossier (FIG. A.II-2 à droite). Dans ce cas, l'utilisation d'une procédure de moyenne est plus adaptée, comme celle utilisée par l'opérateur « mortier ».

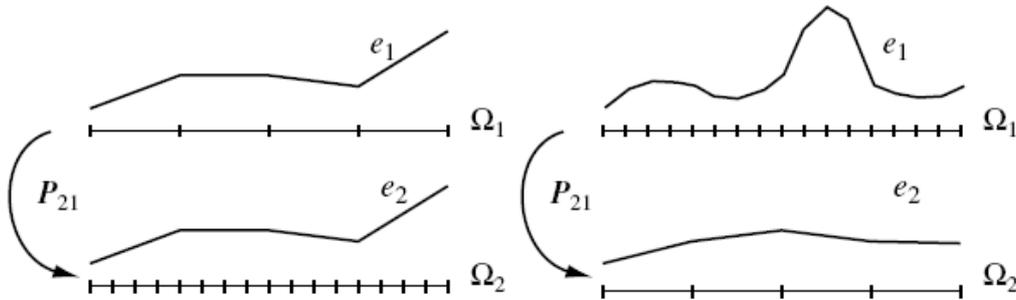


FIG. A.II-2 Exemple de transfert des données entre maillages utilisant des opérateurs de collocation [Dureisseix 2006]

- L'opérateur « mortier » consiste à exprimer l'équivalence des moyennes généralisées des deux champs par rapport aux fonctions de poids N_2 :

$$\int_{\Omega_2} N_2^T e_2 d\Omega_2 = \int_{\Omega_1} N_2^T e_1 d\Omega_1 \quad (\text{A.II-5})$$

où N_2 sont les fonctions de forme éléments finis en lien avec le maillage sur lequel le champ est transféré.

Il est noté dans [Dureisseix 2006], que ces mêmes opérateurs peuvent être utilisés pour les problèmes multitemps.

Remarque. Pour la simulation de l'impact en dynamique transitoire, des schémas multitemps ont été développés [Combesure 2002, Combesure 2003] et combinés à des méthodes de décomposition de domaines. Cette technique est particulièrement adaptée dans le cas où la solution évolue fortement pour certaines zones de l'espace.

Dans le cadre du logiciel AbaqusTM, des problèmes complètement couplés (couplages directs et indirects) ont été résolus en utilisant la technique multigrille. On peut citer les travaux de Rabearison et al. [Rabearison 2009] et Olivier et al. [Olivier 2008, 2009]. Dans les deux cas, les équations de la chimie, de la mécanique et une équation de transport (chaleur dans les travaux de Rabearison et diffusion d'O₂ dans ceux d'Olivier) ont été implantés dans le solveur AbaqusTM. A chaque pas de temps de l'algorithme général des sous incréments de temps sont utilisés pour décrire l'évolution de la chimie (une équation du degré d'avancement dans Rabearison et al. et un schéma mécanistique de 6 équations dans le cas des travaux d'Olivier et al.). La maîtrise des deux pas de temps a fait l'objet de nombreux tests pour obtenir des solutions robustes avec à la clef des temps de calcul très longs. Dans Rabearison et al., il est à souligner que les équations de la thermique, de la mécanique et de la chimie sont complètement couplées avec tous les paramètres matériau dépendant de la température et de la chimie. AbaqusTM associé à une technique multigrille, mais dans ce cas les temps de calcul sont rédhibitoires.

Le transfert des données d'une grille à l'autre peut mener selon l'opérateur utilisé à des pertes d'information ou encore des temps de calcul encore très élevés. Dans la suite, des méthodes multiphysiques non incrémentales sont présentées.

A.II.2 Méthodes non incrémentales

Les méthodes non incrémentales, LATIN et PGD, sont maintenant présentées en tant que méthodes de résolution de problèmes multiphysiques.

A.II.2.1 Méthode LATIN multiphysique

La méthode LATIN est largement utilisée pour la résolution des problèmes multiphysiques. On peut par exemple citer à ce sujet les travaux pionniers de Dureisseix [Dureisseix 2003] et ensuite ceux de Néron [Neron 2004, 2008a, 2008b]. Néron introduit la notion d'interface entre les physiques afin d'introduire un domaine particulier sur lequel les équations de couplage sont considérées. Classiquement, l'interface est définie comme l'interface matérielle entre les sous-structures [Passieux 2008]. Dans le cas des problèmes multiphysiques, l'interface est l'interface entre chaque physique et est donc définie en tout point du domaine.

La **FIG. A.II-3** résume la stratégie de la méthode LATIN dans le cas d'un problème fluide-solide [Neron 2004]. On retrouve là encore les 2 étapes de la LATIN. Lors de l'étape de résolution des équations linéaires et globales, chacune des physiques est résolue séparément en utilisant l'approximation radiale. A l'étape locale, les couplages sont traités uniquement au niveau de l'interface entre les physiques. La stratégie consiste donc à vérifier alternativement (à l'étape globale) des propriétés de chaque physique définie sur son propre maillage, supposées indépendantes, et (à l'étape locale) des propriétés d'interfaces, qui permettent de transmettre les couplages fluide-solide.

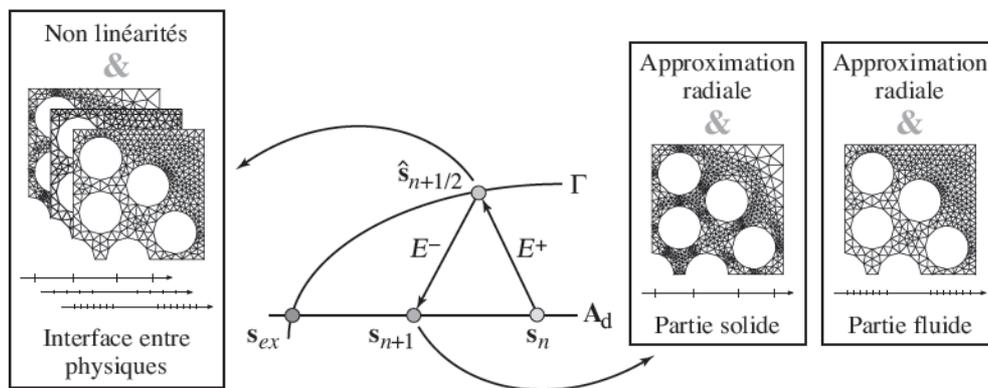


FIG. A.II-3 Résumé de la stratégie LATIN pour le problème multiphysique fluide-solide [Neron 2004]

Lors de la résolution des problèmes multiphysiques couplés, l'utilisation des discrétisations temporelles différentes est intéressante. Un schéma multiéchelle en temps a été implémenté dans la LATIN [Dureisseix 2003, Neron 2004, 2008a, 2008b] et consiste en une modification uniquement dans l'étape locale où les couplages sont traités. Dans cette étape, la difficulté vient du transfert des données (données transférées soit directement entre les physiques [Dureisseix 2003] soit entre l'interface et les physiques [Neron 2004, 2008a, 2008b] dans le cas de la formulation LATIN avec interface).

La performance de la LATIN pour la résolution de problèmes multiphysiques est notamment liée à l'utilisation d'interface. Des codes de calcul et des solveurs spécifiques à chaque physique peuvent ainsi être utilisés.

Détaillons maintenant la méthode multiéchelle en temps présentée dans [Durreisseix 2003]. Dans ce cas, les données sont transférées directement entre les physiques, la notion d'interface ayant été considérée qu'à partir des travaux de Néron [Néron 2004].

L'idée de la méthode est de diviser l'inconnu en deux quantités : $s = s^M + s^m$ où les exposants M et m désignent respectivement l'échelle micro et macro du temps. Un projecteur π est introduit afin d'extraire la partie macro d'une fonction temporelle f : $f^M = \pi f$. La partie micro s'obtient par la relation : $f^m = f - f^M$. La FIG. A.II-4 illustre la fonction f et sa partie macro f^M . Notons que f^M est continue.

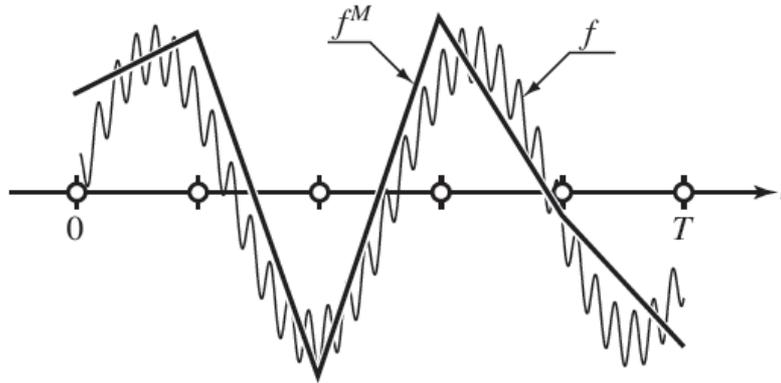


FIG. A.II-4 Le champ macro continu en temps de la fonction f [Neron 2004]

Comme nous l'avons déjà précisé, le couplage influence uniquement l'étape locale de la méthode LATIN que nous allons détailler.

Considérons, par exemple, les variables $(\hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}, A_n)$ pour la partie solide. Elles sont décrites uniquement sur le maillage grossier (qui correspond à l'échelle macro). Les variables $(\hat{p}, \hat{p}, \alpha_n)$ pour la partie fluide varient plus rapidement et sont donc définies sur un maillage plus fin. Grâce au projecteur π (et l'opérateur linéaire \mathbf{P}), les variables de la partie fluide (solide) sont représentées sur le maillage grossier (fin).

L'étape locale de la méthode LATIN consiste en la résolution des équations couplées solide-fluide :

$$g_s(\hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}, A_n) = h_s(\pi \hat{p}) \quad (\text{A.II-6})$$

$$g_f(\hat{p}, \hat{p}, \alpha_n) = h_f(\mathbf{P} \hat{\varepsilon}) \quad (\text{A.II-7})$$

où l'indice s représente le solide et l'indice f le fluide.

La méthode de point fixe permet de résoudre ces équations alternativement. Notons que pour calculer les variables relatives à la partie solide, les variables relatives à la partie fluide sont transférées à l'aide du projecteur.

Une autre manière de définir la partie macro en temps a été proposé par Néron [Neron 2004] et consiste à utiliser la formulation Galerkin discontinue en temps. La FIG. A.II-5 illustre la fonction f et sa partie macro f^M obtenue avec ce type de formulation.

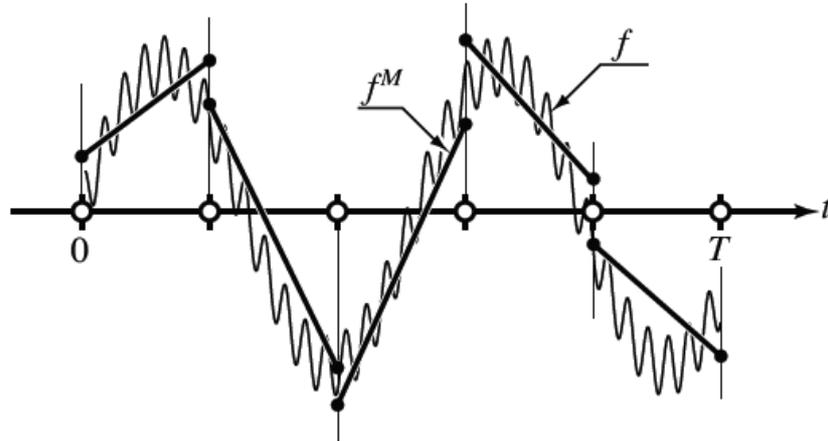


FIG. A.II-5 Le champ macro discontinu en temps de la fonction f obtenu par la formulation Galerkin discontinue en temps [Neron 2004]

Remarque. Le schéma multiéchelle en temps a été également utilisé pour la résolution d'autres problèmes dans le contexte de la LATIN comme par exemple lors de la résolution de problèmes avec des chargements cycliques où plusieurs échelles temporelles peuvent être utilisées pour des domaines spatiaux différents [Passieux 2008].

La méthode LATIN a été aussi étendue pour la résolution de problèmes multiphysiques multiéchelles [Neron 2010, Ladeveze 2010].

La méthode LATIN est donc une méthode très efficace pour la résolution de problèmes multiphysiques multiéchelles multitemps. Notons que la performance de cette méthode est notamment liée à l'utilisation de l'approximation radiale pour la résolution de l'étape globale. Toutefois, l'utilisation de cette méthode présente certains inconvénients. Le premier est lié au choix de la direction de recherche (E^+ et E^-) qui nécessite une expertise particulière et est nécessaire pour obtenir une convergence en très peu d'itérations et par suite des temps de calcul concurrentiels. De plus, il est indispensable pour la mise en place de cette méthode de séparer les équations globales des équations locales.

A.II.2.2 Méthode PGD multiphysique

La méthode PGD a été également utilisée pour la résolution de problèmes multiphysiques couplés. Différents types de couplage et d'équations ont été traités. Nous allons maintenant les présenter.

Dans [Pruliere 2010b], des problèmes multiphysiques couplés dans le contexte des procédés de fabrication des matériaux composites ont été résolus avec la PGD. Les problèmes multiphysiques considérés présentent uniquement des couplages d'une physique sur une autre. Cela correspond donc finalement à la résolution d'un problème découplé. La solution de chacun des problèmes est donc calculée l'une après l'autre. Nous appellerons par la suite ce type de problème un problème partiellement couplé dans le sens où une seule physique influence l'autre.

Dans [Chinesta 2010b], la résolution de modèles couplés avec la PGD est également étudiée. Elle concerne le couplage entre un modèle global et des modèles locaux qui correspondent à des modèles de cinétique d'un grand nombre d'espèces. Les auteurs proposent, pour résoudre ce problème,

une globalisation des modèles locaux. La solution est recherchée pour tous les problèmes locaux en considérant une variable décrivant l'espèce en extra coordonnée. Une fois cette solution obtenue, la solution du modèle global est recherchée elle aussi sous la forme de somme de fonctions à variables séparées. Le problème est aussi partiellement couplé. Grâce à la globalisation des modèles locaux, cette méthode permet de limiter fortement le nombre d'équations à résoudre. Néanmoins, elle ne peut pas être appliquée dans toute les situations, notamment celles qui nous intéressent et pour lesquels un couplage total existe entre toutes les équations. Dans le cas étudié, seul le modèle global dépend de la solution des modèles locaux et en contre partie la solution du modèle global n'influence pas celle des problèmes locaux. C'est pour cette raison que ce type de séparation peut être utilisée aisément.

Dans [Beringhier 2010], la résolution d'un problème thermoviscoélastique fortement couplé, dans la mesure où les deux physiques interagissent l'une sur l'autre, est présentée. La méthode PGD progressive pondérée (cf. **A.I.3.2c**) est appliquée à la résolution d'un problème multiphysique 1D transitoire. La solution constituée du couple déplacement $u(x, t)$ - température $T(x, t)$ est recherchée sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i(x) B_i(t) \quad (\text{A.II-8})$$

$$T(x, t) = \sum_{i=1}^n \beta_i D_i(x) E_i(t) \quad (\text{A.II-9})$$

où α , β sont des coefficients, A , B les fonctions de base spatiales et temporelles pour u et C , D les fonctions de base spatiales et temporelles pour T .

Lors de l'étape d'enrichissement, un nouveau couple $R(x)P(t)$ pour u et $V(x)W(t)$ pour T est recherché sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i(x) B_i(t) + R(x)P(t) \quad (\text{A.II-10})$$

$$T(x, t) = \sum_{i=1}^n \beta_i D_i(x) E_i(t) + V(x)W(t) \quad (\text{A.II-11})$$

Le problème étant fortement couplé, la solution de u dépend du couple inconnu $V(x)W(t)$ de T et vice versa. Une méthode de résolution "couplage total" (les deux physiques sont résolues simultanément) a été proposée dans cet article.

Revenons maintenant sur l'aspect multitemps dans le contexte de la PGD. Comme la PGD permet de réduire considérablement le temps de calcul lorsqu'un grand nombre de degrés de liberté est utilisé, une première méthode largement répandue consiste à prendre la même discrétisation temporelle pour chaque physique. Néanmoins, dans certains cas, cela peut mener à des temps de calcul élevés, des schémas multitemps sont donc utilisés, ce qui nécessite alors un transfert de données entre les maillages des différentes physiques.

Pour prendre en compte des pas de temps différents, une technique est proposée dans [Chinesta 2010b]. L'intégration temporelle est menée à l'aide d'un schéma Galerkin discontinu au premier ordre afin de conserver l'intégrale. Supposons que le pas de temps de u est δ_u et celui de T δ_T . Sur le maillage de u , T est prise égale à \tilde{T} définie comme suit:

$$\tilde{T}(x, t = n\delta_u) = \frac{1}{\delta_u} \int_{(n-1)\delta_u}^{n\delta_u} T(x, t) dt \quad (\text{A.II-12})$$

Dans [Beringhier 2010], lorsque les discrétisations temporelles de u et T sont différentes, le transfert des données se fait directement à travers le calcul des matrices couplées temporelles :

$$\int_{\Omega_t} L_u^T L_p dt \quad (\text{A.II-13})$$

où L_u et L_p sont les vecteurs contenant les fonctions de forme temporelles pour u et T .

Récemment, dans [Ammar 2012], une nouvelle approche a été proposée dans le cas de problèmes avec un pas de temps très petit. Au lieu de considérer classiquement le temps comme une variable unidimensionnelle, le temps est transformé en un domaine 2D. Cela permet de prendre en compte deux échelles temporelles différentes. Cette stratégie est particulièrement adaptée aux phénomènes cycliques puisque le temps est mis sous la forme d'un produit de deux variables.

A.II.3 Discussion

La méthode des éléments finis est classiquement utilisée pour résoudre des problèmes multiphysiques. Sa formulation de base mène à la résolution de problèmes de grande taille liée à l'utilisation d'un schéma incrémental et une même grille spatiale et temporelle pour toutes les physiques. Pour limiter la taille de ces problèmes et le nombre d'itérations, des méthodes éléments finis multigrilles ont été développées. Dans ce cas, des grilles spécifiques aux différentes physiques sont utilisées, ce qui permet de réduire le nombre d'opérations. Néanmoins, l'utilisation de grilles différentes nécessite le transfert des champs d'un maillage sur l'autre pour traiter notamment les termes de couplage. Dans certains cas, cela se traduit par une perte d'information ou encore des temps de calcul encore élevés liés aux transferts de données.

Des méthodes non incrémentales ont donc vu le jour. Nous nous sommes particulièrement intéressés ici à la méthode LATIN et la méthode PGD. La méthode LATIN, initialement mise en place pour la résolution d'équations non linéaires, a été étendue à la résolution de problèmes multiphysiques multiéchelles multitemps. Elle est très performante pour prédire ce type de problème. Cette performance est due à différents aspects de la méthode. Le premier est le concept d'interface qui permet d'utiliser des solveurs spécifiques à chaque physique. Le second est le 3^{ème} principe de la LATIN qui consiste à rechercher la solution des équations globales sous la forme d'approximation radiale. Basée sur le 3^{ème} principe de la LATIN, la méthode PGD semble être elle aussi bien appropriée à la résolution de problèmes multiphysiques dans la mesure où elle permet de résoudre des problèmes de grande taille avec des temps de calcul redoutables en comparaison de ceux obtenus avec la méthode des éléments finis. Déjà appliquée dans certains problèmes multiphysiques, ces résultats sont encourageants.

Par rapport aux problèmes multiphysiques fortement couplés que nous souhaitons étudier dans cette thèse, la méthode LATIN présente deux inconvénients qui sont le traitement particulier des équations (séparation) et le fait que les directions de recherche sont des paramètres de la méthode. Il faut donc les maîtriser et il n'existe pas de protocole clairement défini pour les choisir et les construire sauf dans quelques cas particuliers.

En comparaison de la méthode LATIN, la méthode PGD semble plus simple à mettre en œuvre mais n'a pas encore été utilisée dans un grand nombre de problèmes multiphysiques. Nous avons choisi dans cette thèse cette méthode afin de la tester, l'étendre à d'autres problèmes multiphysiques et évaluer ses capacités.

Afin de prédire précisément la solution numérique de ces problèmes multiphysiques dédiés à la mécanique des matériaux, il est nécessaire de maîtriser notamment l'erreur liée à la discrétisation et donc fixée par la base de discrétisation choisie qu'elle soit spatiale ou encore temporelle. De plus, lors de l'étude des phénomènes transitoires couplés, il est parfois difficile de prédire les différentes zones transitoires générées par les termes de couplage. Nous avons besoin de mettre en place une technique de maillage adaptatif automatique pour construire le maillage suffisant à la prédiction de ces zones transitoires. Nous allons donc dans la partie suivante présenter une bibliographie sur ces techniques de maillage adaptatif pour tirer profit de ces travaux dans les développements à mener dans cette recherche. Nous parlerons uniquement des méthodes classiquement utilisées et notamment dans le contexte de la méthode des éléments finis.

A.III Méthodes de maillage adaptatif

Lors de la simulation numérique d'un problème physique, les principales sources d'erreur sont liées à la modélisation mathématique du problème physique (choix de la loi de comportement, des paramètres matériaux), la discrétisation spatiale du problème (taille des éléments qui constituent le maillage), la discrétisation fonctionnelle (choix des fonctions de base) mais aussi la résolution numérique (erreurs d'intégration numérique liées au schéma d'intégration, erreurs d'arrondi...).

Pour pallier les erreurs liées à la discrétisation spatiale du problème, les méthodes de maillage adaptatif sont largement utilisées dans le cadre de la Méthode des Eléments Finis notamment lorsque la solution contient des singularités, des chocs ou des discontinuités. Des maillages fins sont alors introduits là où les solutions présentent des forts gradients. Une précision donnée est recherchée avec un nombre minimal de points ou éléments.

Ces méthodes sont basées sur une estimation d'erreur qui permet d'identifier l'endroit où le maillage doit être adapté et raffiné. Une fois le nouveau maillage déterminé, deux choix sont possibles : soit on refait le calcul dans sa globalité soit les variables d'état sont transportées de l'ancien maillage vers le nouveau maillage pour continuer le calcul.

Nous allons maintenant présenter brièvement les 3 étapes qui permettent de mettre en place ces méthodes soit l'estimation d'erreur, l'adaptation et le raffinement de maillage, et le transport des variables.

A.III.1 Méthodes d'estimation d'erreur

L'erreur de discrétisation peut naturellement être définie comme étant l'erreur entre la solution exacte du problème et la solution numérique associée. Cependant, la solution exacte n'est pas connue dans la majeure partie des problèmes traités. C'est pour cette raison que deux grandes méthodes d'estimations d'erreur ont vu le jour dans la littérature : l'estimation d'erreur *a priori* et l'estimation d'erreur *a posteriori*. Nous présenterons ici uniquement les estimateurs d'erreur globaux classiquement utilisés.

La première méthode, l'estimation d'erreur *a priori*, consiste à estimer l'approximation que l'on va faire. Avant de lancer le calcul, les informations connues sont les degrés des fonctions d'interpolation, la taille des éléments et les éventuelles singularités. A partir de ces informations, l'estimateur d'erreur est construit et permet de prédire le taux de convergence asymptotique de l'erreur éléments finis. Sur ce sujet, on peut citer notamment les travaux de Ciarlet [Ciarlet 1991], Babuska [Babuska 1982] et Zienkiewicz [Zienkiewicz 1987]. La limite de cette estimation d'erreur est liée au fait qu'elle fait intervenir la solution exacte qui n'est généralement pas connue.

La deuxième méthode, l'estimation *a posteriori*, consiste elle à utiliser la solution approchée que l'on vient de calculer pour estimer l'erreur de discrétisation. De nombreux estimateurs d'erreur existent et peuvent être classés en trois catégories :

- ceux basés sur les défauts d'équilibre issus des travaux de Babuska et Rheinboldt [Babuska 1978],
- ceux construits à partir des contraintes lissées issus des travaux de Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz 1987],
- ceux fondés sur le concept d'erreur en relation de comportement issu des travaux de Ladevèze [Ladeveze 1975].

Pour une revue détaillée de ces estimateurs, le lecteur pourra se référer à [Verfurth 1999].

Ces différents estimateurs sont présentés ici dans le cas linéaire $a(u, v) = L(v)$ afin de présenter l'idée générale de construction.

A.III.1.1 Estimateurs en résidu d'équilibre

Ces estimateurs sont basés sur le constat que le champ des contraintes éléments finis ne vérifie pas les équations d'équilibre. Cela permet de construire des résidus d'équilibre : $R_h^u(v) = L(v) - a(u_h, v)$. A partir du calcul des résidus élémentaires des équations d'équilibre et du saut des contraintes aux interfaces des éléments, une estimation de l'erreur est calculée et associée à chaque élément du maillage. La non vérification des équations d'équilibre intérieure et la non vérification des conditions d'équilibre sur le bord ainsi que la discontinuité au travers de l'interface sont ainsi évaluées. Lorsque l'interpolation linéaire est utilisée, le terme décrivant le saut des contraintes est prépondérant par rapport au terme du résidu d'équilibre [Cartensen 1999].

A.III.1.2 Estimateurs d'erreur en contrainte

C'est le constat précédent qui a conduit Zienkiewicz et Zhu à construire une solution d'ordre supérieure à celle de la solution éléments finis, espérant ainsi une meilleure approximation de la solution exacte du problème. A partir de la solution éléments finis, un champ de contraintes $\tilde{\sigma}_h$ lissé, vérifiant la continuité aux interfaces entre les éléments est construit. Pour construire ce champ de contraintes continu, il faut connaître la valeur des contraintes aux nœuds. Dans [Zienkiewicz 1987], cette dernière est obtenue par une minimisation au sens des moindres carrés de la distance entre le champ continu $\tilde{\sigma}_h$ et le champ éléments finis σ_h . L'estimateur global est défini par

$$\tilde{\eta} = \left(\int_{\Omega} \text{tr} \left((\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)' K^{-1} (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h) \right) \right)^{1/2} \quad (\text{A.III-1})$$

qui correspond à une norme en énergie de l'erreur où l'approximation éléments finis du champ de contraintes a été remplacée par le champ lissé.

La difficulté de cette technique est de construire le champ de contraintes lissé. La pertinence de cet estimateur repose donc sur la méthode de lissage utilisée.

Plus récemment, les auteurs [Zienkiewicz 1992, 1995, 1999] ont proposé une méthode de recouvrement SPR (Superconvergent Patch Recovery). Elle se base sur la propriété de superconvergence de la contrainte aux points de Gauss. Cette méthode est plus précise et moins coûteuse. Une expansion polynomiale des composantes du tenseur des contraintes éléments finis est calculée sur des patches topologiques qui sont des sous domaines du maillage centrés sur un nœud et contenant un ensemble de points d'intégration.

A.III.1.3 Estimateurs d'erreur en loi de comportement

Un couple admissible déplacement-contrainte $(\tilde{u}, \tilde{\sigma})$ vérifiant les équations d'équilibre et les équations de liaison (conditions de Neumann et Dirichlet) est construit [Ladeveze 1999b]. Seule la relation de comportement n'est pas vérifiée. La non vérification de cette dernière permet d'évaluer la qualité de la solution. L'erreur en relation de comportement est définie par : $\eta_{RC} = \tilde{\sigma} - A\mathcal{E}(\tilde{u})$. Comme le déplacement éléments finis est admissible, on prend $\tilde{u} = u_h$. Par contre la contrainte ne l'est pas. Un champ de contraintes vérifiant les équations d'équilibre est donc recherché comme un prolongement de la solution éléments finis. En théorie, cet estimateur d'erreur donne donc une surestimation de l'erreur exacte du problème, notamment en élasticité. Le plus grand défaut de cet

estimateur est qu'il nécessite un effort en développement important pour être implémenté dans les codes éléments finis. Il est particulièrement adapté à la méthode LATIN, initiée elle aussi par Pierre Ladevèze, suivant la même philosophie.

De nombreux auteurs ont donné des estimations pour d'autres méthodes telles que les différences finies, les volumes finis, On pourra notamment citer les travaux de Jasak dans le cadre de la méthode des volumes finis [Jasak 2000a, 2000b].

Des travaux récents de Ammar [Ammar 2010c] et Ladevèze [Ladeveze 2011] concernent des méthodes d'estimations d'erreurs pour la PGD.

Dans les travaux de Ammar al. [Ammar 2010c], un estimateur d'erreur local dit en quantité d'intérêt est proposé. Cette erreur en quantité d'intérêt est basée sur l'existence d'une fonction du problème dual, dite fonction d'influence, représentant, d'un point de vue mécanique, l'influence des efforts du problème de référence sur l'énergie totale. Dans ce papier, Ammar applique ce type d'estimateur à la résolution de l'équation de Laplace 2D-3D et de l'équation de Poisson 2D donc uniquement dans le cas de problèmes stationnaires. Néanmoins, compte tenu des propriétés de la PGD, l'extension de cette méthode à la variable temporelle semble être possible.

Dans [Ladeveze 2011], un estimateur d'erreur basée sur l'erreur en relation de comportement est proposée dans le cadre de la résolution PGD. Il permet de séparer l'erreur en relation de comportement liée à la discrétisation de celle liée à la PGD (nombre de modes PGD pour représenter la solution).

Pour plus de détails sur les estimateurs d'erreur locaux (les précédents étaient globaux), le lecteur pourra se référer par exemple aux thèses de [Chamoin 2007] et [Delmas 2008] où une bibliographie détaillée est donnée avec notamment les estimations d'erreurs en quantité d'intérêt.

A.III.2 L'adaptation de maillage

Les estimateurs d'erreur a posteriori sont souvent couplés à une procédure d'adaptation de maillage, qui consiste à modifier le maillage afin que la solution éléments finis soit plus précise pour un moindre coût de calcul. Les techniques d'adaptation de maillage reposent sur trois méthodes principales : la h-adaptation, la r-adaptation et la p-adaptation.

Remarque. Notons que ces méthodes permettent d'adapter les approximations en espace. Ces méthodes peuvent aussi être utilisées pour adapter les approximations en temps, ces dernières pouvant être assimilées à des approximations en espace pour un milieu unidimensionnel. Nous ne présenterons pas ici les schémas à pas de temps adaptatif car, dans le cadre de cette thèse, la formulation PGD séparation espace-temps sera utilisée et de ce fait le temps sera vu comme une variable d'espace unidimensionnelle.

- Dans la h-adaptation, seule la taille des éléments est modifiée, le degré d'interpolation des éléments est conservé mais la topologie du maillage (position, nombre de nœuds, connectivité) ne l'est pas. Cette méthode peut être mise en œuvre de deux façons différentes :
 - le maillage initial est découpé. Cette méthode est connue sous le nom de méthode locale de h-raffinement/déraffinement [Babuska 1982] Le nouveau maillage est construit en subdivisant (par exemple au milieu) les éléments pour lesquels la valeur locale de l'erreur est importante. Les maillages obtenus sont quasi-uniformes. Cette méthode est bien adaptée pour capter les singularités.
 - le maillage est complètement régénéré. Cette méthode est aussi connue sous le nom de méthode globale de h-remailage [Ladeveze 1983]. Dans ce cas, on crée un nouveau

maillage sans lien avec le précédent. Un raffinement est utilisé dans les zones où l'erreur est importante et un dé raffinement dans le cas contraire. Cela mène à une distribution de l'erreur plus uniforme.

Un exemple de maillage obtenu avec la h-adaptation est donné **FIG. A.III-1** ci-dessous.

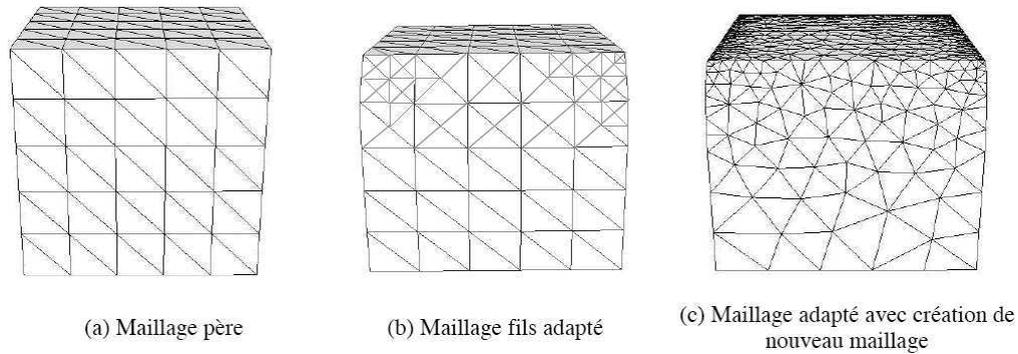


FIG. A.III-1 Illustration de la h-adaptation avec raffinement non uniforme lors d'un problème d'écrasement d'un cube [Boussetta 2005]

- La méthode de r-adaptation [Carroll 1973] consiste à repositionner les nœuds du maillage sans en ajouter de nouveau et sans en modifier les connectivités. Le degré des fonctions d'interpolation est là encore conservé. La précision de la solution numérique est, dans ce cas, obligatoirement limitée au nombre de degré de libertés disponibles. La **FIG. A.III-2** illustre un maillage uniforme et un maillage adaptatif obtenu par la r-adaptation pour le problème sur le contact de Hertz [Beal 2002].

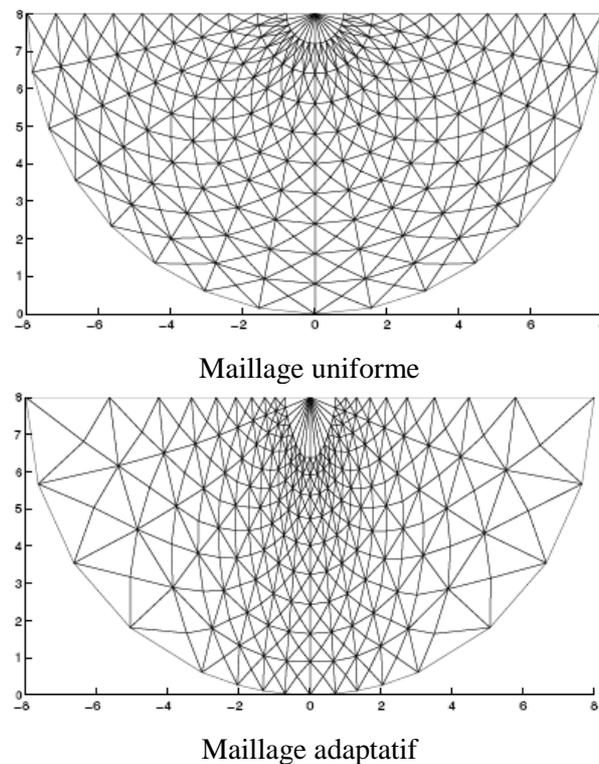
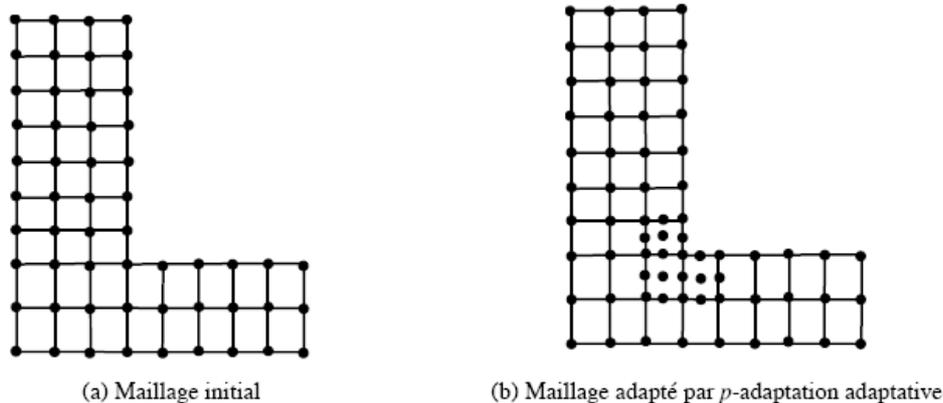


FIG. A.III-2 Maillage uniforme et maillage adaptatif obtenu par la r-adaptation [Beal 2002]

- La méthode de p -adaptation ([Babuska 1981,1990] et [Szabo 1986, 1990]) consiste quant à elle à augmenter le degré des fonctions d'interpolation dans certaines zones en conservant le maillage initial, cela mène donc à plus de degrés de liberté avec toujours le même nombre d'éléments. Un avantage est que le maillage utilisé comporte peu d'éléments. Par contre, il est difficile de prévoir le degré d'interpolation à choisir pour respecter une précision donnée tout en minimisant le temps de calcul. L'inconvénient majeur est qu'il est difficile d'introduire ces méthodes dans des codes de calcul industriels, ces derniers possédant rarement des éléments de degré supérieur à 2. Un exemple de maillage obtenu par p -adaptation est donné sur la **FIG. A.III-3** ci-après.

FIG. A.III-3 p -adaptation [Boussetta 2005]

Les méthodes h et p peuvent être combinées dans l'adaptation de maillage et sont connues sous le nom de hp adaptation [Oden 1989].

Le critère d'adaptation le plus simple consiste à raffiner le maillage uniformément. Tous les éléments du maillage sont donc traités de la même manière. Cela mène à un nombre de degré de liberté très important. Les autres critères de raffinement sont les suivants :

- une valeur seuil absolue : Tous les éléments dont l'erreur est supérieure à cette valeur sont raffinés.
- une valeur seuil relative : Tous les éléments dont l'erreur est supérieure à un pourcentage de la valeur maximale sont raffinés.
- une fraction d'éléments : Un certain pourcentage d'éléments pour lesquels l'erreur est la plus importante sont raffinés.

D'autres méthodes d'adaptation de maillage, que nous ne présenterons pas ici s'appuient sur des techniques multigrille ou multirésolution. Des maillages avec plusieurs niveaux de densité croissante sont considérés. On peut citer la méthode AMR (Adaptive Mesh Refinement) [Berger 1984, 1989, Brown 2005] ou la méthode MLAT (Multi-Level Adaptive Method) [Brandt 1977] ou encore la méthode basée sur les ondelettes AWCM [Alam 2006, Vasilyev 1996, Vasilyev 2005]. Le lecteur trouvera dans [Cohen 2002] une comparaison entre les méthodes de maillage adaptatif éléments finis et les méthodes basées sur les ondelettes.

Rappelons que, dans cette thèse, nous n'étudierons pas différentes méthodes de maillage adaptatif mais nous discuterons les différentes façons de coupler la méthode PGD avec une méthode de maillage adaptatif. En effet, comme dans le cadre de la méthode des éléments finis, il existe deux façons de coupler une méthode de maillage adaptatif : la première consiste à recalculer entièrement la solution et la deuxième consiste à continuer le calcul à partir de l'incrément où le maillage adaptatif a été nécessaire. L'efficacité de ces deux approches dépendant de la dépendance à l'histoire des problèmes étudiés [Ryckelynck 1998]. Dans le premier cas, le principal défaut est que le calcul doit être entièrement relancé. Dans le deuxième cas, la reprise du calcul nécessite le transport des variables d'état de l'ancien sur le nouveau maillage. Différents types de transport peuvent être utilisés [Boussetta 2005].

Dans le contexte de la PGD, la deuxième méthode consiste à conserver les modes obtenus pour continuer à rechercher les autres modes. Là aussi une interpolation des modes de l'ancien vers le nouveau maillage est nécessaire. Nous étudierons donc ces deux stratégies dans cette thèse.

A.IV Stratégie adoptée dans le cadre de cette thèse

Après avoir passé en revue quelques méthodes numériques pour la résolution des problèmes multiphysiques multitemps transitoires, notre choix s'est porté sur la méthode PGD. Cette méthode présente en effet un grand nombre d'avantages :

- C'est une méthode non incrémentale. Le temps est considéré comme une variable supplémentaire de l'espace. La solution est donc recherchée à chaque étape sur l'ensemble du domaine temporel.
- C'est une méthode de réduction de modèle *a priori*. Par sa représentation en variables séparées, la performance de cette méthode pour traiter des problèmes multidimensionnels est incontestable. Or, la résolution des problèmes multiphysiques fait apparaître un grand nombre d'inconnues.
- C'est une méthode qui permet d'implémenter facilement l'aspect multiéchelle, en considérant des discrétisations différentes en temps et en espace.

Néanmoins, certaines questions restent posées comme nous allons le voir après un aperçu des autres domaines d'application de la PGD.

A.IV.1 Domaines d'application de la PGD

La PGD est actuellement utilisée dans un grand nombre de domaines et beaucoup de travaux de recherche. Nous allons présenter ici une liste non exhaustive des différentes applications de la PGD afin de mieux cerner les points positifs et les limites de la méthode. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à la revue concernant la PGD faite par Chinesta et al. en 2011 [Chinesta 2011a]. Concernant les applications récentes et les différents challenges, le lecteur pourra compléter avec les articles suivants [Chinesta 2010a, Chinesta 2011b].

Nous ne reviendrons pas ici sur les applications concernant le transitoire et le multiphysique présentées auparavant (cf. **A.I.3.2c**) et **A.II.2.2**).

Il est important de noter que la méthode PGD est une méthode qui n'a pas encore été implantée dans des codes industriels et pour laquelle un grand nombre de questions restent encore en suspens même si comme nous le verrons de nombreux travaux ont été publiés sur cette dernière.

- PGD pour séparer l'espace physique

Les problèmes définis dans l'espace multidimensionnel peuvent être séparés de différentes manières. Considérons par exemple l'espace 3D. On peut par exemple le considérer comme trois espaces unidimensionnels, décomposition très efficace dans le cas du domaine cubique. On peut citer ici les travaux de Dumon [Dumon 2011a] concernant la résolution des équations de Navier-Stokes. Cette séparation de variables a été étendue à des domaines autres que rectangulaires ou cubiques par Gonzalez [Gonzalez 2010]. Néanmoins, la séparabilité de l'espace n'est pas toujours possible.

Des décompositions incomplètes sont donc parfois utilisées. On pourra citer notamment les travaux de Bognet et al. [Bognet 2012] dans le cas de géométries complexes néanmoins extrudées selon l'épaisseur pour laquelle la décomposition est $(x, y) \times z$. Ce type de décomposition partielle permet de résoudre des problèmes 3D avec une complexité seulement 2D, ce qui ne remet pas en cause le gain en terme de temps de calcul.

- PGD pour les problèmes paramétriques

La méthode PGD semble être particulièrement intéressante pour la résolution de problèmes paramétriques. En effet, les paramètres (comme par exemple la conductivité thermique, les conditions aux bords,...) peuvent être considérés comme des variables supplémentaires.

Considérons par exemple l'équation de la chaleur et considérons la conductivité thermique comme une inconnue. La PGD permet de calculer la solution générale pour une large gamme de valeurs de la conductivité thermique [Pruliere 2010a]. La résolution d'un problème avec une certaine valeur de conductivité thermique consiste donc en un post-traitement et se fait donc *offline*.

Ce type de problème paramétrique a été également présenté dans [Bognet 2012, Ammar 2010d] où les paramètres des matériaux sont considérés comme coordonnée supplémentaire. Dans [Bognet 2012], la direction anisotrope des couches d'un matériau composite laminé est considérée comme une variable, cela permet aux auteurs d'évaluer l'influence de l'orientation de chaque couche sur les structures déformées par couplage thermomécanique. Dans [Lamari 2009, Lamari 2010] la conductivité thermique, la température macroscopique et son évolution temporelle sont considérées comme les variables supplémentaires dans des calculs d'homogénéisation linéaire et non linéaire.

- PGD pour la simulation en temps réel

Lorsque les paramètres sont considérés comme des nouvelles variables lors de la recherche de la solution avec la PGD, cela permet de traiter facilement des problèmes d'identification inverse ou d'optimisation *a posteriori*.

Comme la solution PGD est une fonction de ces paramètres, les problèmes sont résolus par post-traitement de la solution. Un grand nombre d'applications a déjà été traitée. On peut citer le problème d'optimisation du procédé [Ghnatios 2011] ou encore le problème d'optimisation de forme [Leygue 2010].

Dans le contexte de la simulation en temps réel, le problème d'identification inverse a été présenté dans [Gonzalez 2012]. Il a été couplé avec des stratégies de contrôle dans [Ghnatios 2012] dans le contexte de la DDDAS (Dynamic-Data Driven Application System).

Comme la solution paramétrique est calculée une fois avec la PGD (calcul *offline*), la solution pour une certaine valeur de paramètres est déduite par post-traitement (calcul *online*), le temps de calcul est donc instantané. Cette étape a notamment été faite sur les téléphones portables [Bognet 2012, Ghnatios 2012]. La PGD est appelée de ce fait iPGD.

Dans le contexte de la simulation chirurgicale, les simulateurs doivent fonctionner sous haute fréquence, ce qui nécessite un temps de calcul instantané. Niroomandi et al. [Niroomandi 2008, Niroomandi 2010] ont proposé d'utiliser la méthode de réduction de modèle POD couplée avec la Méthode Asymptotique Numérique. Cette approche ne donne pas des résultats corrects lors de la simulation des tissus mous biologiques complexes. La PGD est actuellement testée dans ce type de situation et les résultats présentés lors de conférences semblent encourageants.

- PGD pour les problèmes stochastiques

La PGD a été largement développée dans le contexte des équations aux dérivées partielles stochastiques [Nouy 2007]. Dans ce cas, la PGD est appelée Generalized Spectral Decomposition (GSD). Nouy [Nouy 2008] a développé des algorithmes de résolution en se basant sur la résolution des problèmes aux valeurs propres classiques. Cette PGD est ensuite étendue aux problèmes stochastiques non linéaires avec deux stratégies alternatives : la première consiste à utiliser la PGD comme un solveur pour les problèmes stochastiques linéarisés [Nouy 2008] alors que la deuxième consiste à construire la décomposition de la solution directement à partir du problème non linéaire initial [Nouy 2009]. Dans [Nouy 2010b], la PGD est appliquée pour la résolution de problèmes stochastiques multidimensionnels avec des représentation tensorielles.

La PGD en tant que méthode de réduction de modèle a été couplée à la méthode des éléments finis dans [Ammar 2011, 2009] et également à la méthode des éléments frontières dans [Bonithon 2011].

Un certain nombre d'autres travaux portent sur une meilleure compréhension de la méthode d'un point de vue de l'analyse numérique (convergence, bases optimales, validité de la méthode vis-à-vis des opérateurs différentiels traités, ...). Concernant des estimateurs d'erreur, on peut citer les travaux de [Ammar 2010c, Ladeveze 2011], qui ont été présentés dans la partie « méthodes de maillage adaptatif » de ce chapitre bibliographique. D'autres travaux concernent le traitement des opérateurs non symétriques avec la méthode PGD. En effet, comme nous le verrons dans cette thèse, dans le cas d'opérateurs où la non symétrie est prépondérante, l'algorithme classique ne fonctionne pas. Une méthode de minimisation du résidu a été proposée pour traiter ces problèmes, notamment dans les travaux de [Ladeveze 2011, Pruliere 2010a, Ammar 2010b] ou dans [Nouy 2010a] sous le nom de Minimax PGD.

Rappelons enfin que la méthode PGD est proche d'une partie de la LATIN. Les travaux concernant cette méthode doivent donc être cités et en particulier ceux de [Neron 2004, Passieux 2008, Ladeveze 2010] où la partie PGD de la méthode est largement discutée.

A.IV.2 Stratégie de cette thèse

La PGD est une méthode émergente qui a été utilisée dans plusieurs domaines et semble être très prometteuse. L'objectif de cette thèse est d'évaluer la capacité de la PGD pour résoudre des problèmes multiphysiques couplés transitoires en mécanique des matériaux.

Plusieurs questions se sont donc posées au début de la thèse et auxquelles nous tenterons de répondre.

- La PGD est-elle un bon choix pour la résolution de problèmes multiphysiques ? La recherche de la solution sous la forme représentation séparée limite t elle les problèmes qui peuvent être traités avec cette méthode ?
- Quel maillage temporel choisir selon le temps caractéristique de chaque physique ? Comment la PGD se comporte t elle pour des maillages temporels différents ? Dans des cas fortement couplés ? Est elle capable de prédire tous transitoires ? Comment peut on la coupler avec une méthode de maillage adaptatif ? Est-il intéressant de conserver les bases déjà calculées ?
- Dans le cas des problèmes multiphysiques multitemps, est ce intéressant d'utiliser plusieurs bases temporelles ?
- Quel est le type de couplage que l'on peut résoudre avec la PGD en mécanique des matériaux ? Jusqu'à quelle complexité peut on utiliser la PGD ?
- Comment prendre en compte des non linéarités ?

Dans cette thèse, un certain nombre d'exemples sont donc traités afin d'évaluer la capacité de la PGD. Au fur et à mesure des chapitres, les exemples sont considérés avec une complexité croissante : problèmes transitoires découplés, problèmes transitoires découplés non linéaires, problèmes couplés et transitoires.

Dans un premier temps (**chapitre B**), la résolution d'une équation de la chaleur 2D est présentée et les tests réalisés avec des sources de chaleur différentes permettent de tester la méthode pour la prédiction de transitoires très différents. La nécessité d'associer la méthode PGD à une méthode de maillage adaptatif est clairement mise en évidence. Ce couplage est donc étudié dans ces cas relativement simples dans la mesure où une seule physique est considérée. Cela permet d'envisager de conserver ou non les modes PGD pour la suite du calcul.

Dans un second temps (**chapitre C**), la résolution d'un transitoire avec une source de la chaleur non linéaire est envisagée. Une approche couplant la PGD à la Méthode Asymptotique Numérique est alors proposée. La technique de continuation est mise en œuvre pour construire la branche non linéaire.

Deux problèmes couplés présentant des couplages et des équations de natures différentes sont ensuite étudiés : un problème diffusothermique partiellement couplé et un problème thermoviscoélastique fortement couplé (**chapitre D**). Dans ce cas, pour prédire correctement les transitoires, le couplage de la PGD avec une méthode de maillage adaptatif est présenté et discuté. Les questions liées aux bases temporelles seront discutées ainsi que la prise en compte de différents types de couplage en lien avec la nature des problèmes étudiés.

Une conclusion rassemblant les principaux résultats marquants obtenus dans ce travail est ensuite proposée.

Chapitre B

Résolution d'un problème transitoire linéaire avec la PGD

Sommaire

B.I La PGD dans le cas du problème de la chaleur transitoire 2D	46
B.I.1 Formulation du problème	46
<i>B.I.1.1 Formulation de la PGD progressive pondérée.....</i>	<i>46</i>
<i>B.I.1.2 Formulation tensorielle</i>	<i>52</i>
<i>B.I.1.3 Minimisation du résidu</i>	<i>58</i>
<i>B.I.1.4 Schéma temporel consistant.....</i>	<i>58</i>
B.I.2 Résultats.....	60
<i>B.I.2.1 Simulation avec une source de chaleur bimodale.....</i>	<i>60</i>
<i>B.I.2.2 Simulation avec une source de chaleur de type échelon.....</i>	<i>62</i>
<i>B.I.2.3 Simulation avec une source de chaleur de type impulsionnelle.....</i>	<i>66</i>
<i>B.I.2.4 Simulation avec la minimisation du résidu.....</i>	<i>69</i>
B.II Maillage adaptatif pour la résolution d'un problème transitoire avec la PGD	72
B.II.1 Présentation de la technique de maillage adaptatif	72
B.II.2 Stratégies de couplage PGD / technique de maillage adaptatif	73
<i>B.II.2.1 RPGD_S1 (tous les modes sont recalculés).....</i>	<i>73</i>
<i>B.II.2.2 RPGD_S2 (certains modes sont conservés)</i>	<i>74</i>
<i>B.II.2.3 Discussion.....</i>	<i>75</i>
B.II.3 Résultats.....	76
<i>B.II.3.1 Source bimodale</i>	<i>76</i>
<i>B.II.3.2 Source de type échelon</i>	<i>82</i>
<i>B.II.3.3 Source de type impulsionnelle</i>	<i>85</i>
B.II.4 Discussion.....	87
<i>B.II.4.1 Comparaison des deux stratégies en terme d'évolution du maillage</i>	<i>88</i>
<i>B.II.4.2 Influence du maillage initial.....</i>	<i>91</i>
<i>B.II.4.3 Influence du choix de l'interpolation dans le cas RPGD_S2</i>	<i>94</i>
<i>B.II.4.4 Influence des temps caractéristiques.....</i>	<i>96</i>
Conclusion du chapitre	98

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la capacité de la méthode PGD à la résolution d'un problème transitoire linéaire en deux dimensions. Nous allons tout d'abord présenter la formulation du problème avec la PGD progressive pondérée. Plusieurs paramètres de la PGD seront étudiés : l'influence du maillage considéré, l'influence de la source, la convergence, la méthode de résolution afin de tester le comportement général de cette méthode. Trois sources de chaleur seront testées qui donnent des réponses transitoires très différentes afin de s'assurer d'une certaine généralité des développements. L'étude de l'influence des paramètres sur les zones transitoires permettra de mettre en évidence l'intérêt d'une technique de maillage adaptatif afin de capturer de manière automatique les zones de fortes variations de la solution.

Dans la deuxième partie, une technique de maillage adaptatif sera donc proposée. Différentes stratégies de couplage technique de maillage adaptatif/PGD seront présentées. Les résultats obtenus pour chaque source de la chaleur ainsi que l'influence de paramètres de maillage adaptatif seront discutés.

B.I La PGD dans le cas du problème de la chaleur transitoire 2D

Dans cette partie, la résolution de l'équation de la chaleur avec la PGD sera tout d'abord présentée sous la forme discrète classique [Ammar 2007] et puis sous la forme tensorielle [Chinesta 2010a, Prulière 2010a]. Quelques remarques concernant l'utilisation de la minimisation du résidu et d'un schéma temporel consistant seront apportées. Les résultats seront discutés pour trois sources de chaleur différentes.

B.I.1 Formulation du problème

B.I.1.1 Formulation de la PGD progressive pondérée

L'équation de la chaleur 2D étudiée s'écrit sous la forme suivante:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_T \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} T) = f \quad (\text{B.I-1})$$

où la température T est une fonction scalaire dépendant de l'espace et du temps, i.e. $T = T(x, y, t)$. ρ représente la densité, C la chaleur spécifique, λ_T la conductivité thermique et f la source de chaleur.

Le problème est défini sur un domaine $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_t$ qui correspond respectivement à l'espace x , l'espace y et le temps t .

Pour simplifier l'écriture, on considère des conditions aux bords et initiales nulles ainsi que des paramètres matériau constants (ρ , C et λ_T constants).

Le problème (B.I-1) présente un temps caractéristique lié au rapport $\rho C / \lambda_T$ lorsque le domaine spatial est fixé. Ce rapport ainsi que la source de chaleur influencent les parties transitoires de la solution.

L'idée principale de la PGD est d'exprimer la solution comme une combinaison linéaire de fonctions à variables séparées. Comme nous l'avons précisé dans le chapitre précédent, pour la résolution de problèmes transitoires, la PGD peut être appliquée de deux façons :

- Schéma de décomposition partielle. Dans ce cas, la décomposition PGD est appliquée sur les variables spatiales uniquement (x et y) et un schéma incrémental en temps classique est conservé (par exemple un schéma explicite, implicite ou encore de Crank-Nicholson) [Dumon 2011a, 2011b]. La PGD est donc incrémentale.

- Schéma de décomposition complète. Dans ce cas, le temps est traité de la même façon que les variables d'espace. Nous avons donc une décomposition selon les variables x, y et t . La PGD est considérée comme une méthode non incrémentale.

Rappelons que d'autres variantes de la méthode consistent à ne pas décomposer de manière complète les variables spatiales. On pourra citer notamment les travaux de Bognet et al. [Bognet 2012] dans le cas de géométries complexes mais extrudées selon l'épaisseur pour laquelle nous avons une décomposition $(x, y) \times z$. Cela permet de décrire des géométries complexes. Notons que pour appliquer la PGD, il faut avoir une géométrie séparable. Des travaux sont aussi menés pour appliquer la PGD à des domaines autres que rectangulaires ou cubiques [Gonzalez 2010].

Dans le cadre de cette thèse, nous supposons que le domaine est rectangulaire et nous choisissons une décomposition complète des variables $x \times y \times t$. En effet, les applications visées à long terme nécessitant de prendre en compte des temps caractéristiques fortement différents, c'est l'aspect non incrémental en temps qui nous intéresse.

La solution T est donc recherchée sous la forme :

$$T(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \alpha^i F^i(x) G^i(y) H^i(t) \quad (\text{B.I-2})$$

où n est le nombre final de triplets de fonctions requis pour décrire T avec une précision donnée, α^i l'amplitude et $F^i(x), G^i(y), H^i(t)$ les fonctions à variables séparées (qu'on appellera modes) en espace x, y et en temps t .

La PGD est considérée comme une méthode de réduction de modèle *a priori* car les fonctions $F^i(x), G^i(y), H^i(t)$ sont supposées inconnues au début et déterminées au fur et à mesure du calcul. Elles sont définies sous forme discrète en lien avec un maillage spécifique en x, y et t . Notons N (respectivement M) un vecteur contenant les valeurs des fonctions de forme de l'espace direction x (respectivement y) et L un vecteur contenant les valeurs des fonctions de forme du temps. Ces fonctions sont choisies linéaires pour l'espace ainsi que pour le temps. F^i, G^i et H^i sont les valeurs nodales des fonctions séparées associées aux fonctions de forme.

L'expression de T (Eq. (B.I-2)) à l'itération n s'écrit sous la forme discrétisée suivante :

$$T(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \alpha^i (N^T F^i) (M^T G^i) (L^T H^i) \quad (\text{B.I-3})$$

Pour appliquer la PGD, nous supposons que la source de chaleur s'écrit aussi sous la forme d'une fonction à variables séparées:

$$f(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n_f} \beta^i f_x^i(x) f_y^i(y) f_t^i(t) \quad (\text{B.I-4})$$

Elle s'écrit donc sous la forme discrétisée :

$$f(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n_f} \beta^i (N_f^T f_x^i) (M_f^T f_y^i) (L_f^T f_t^i) \quad (\text{B.I-5})$$

où N_f ; M_f et L_f sont les vecteurs qui contiennent les fonctions de forme pour la source et f_x^i, f_y^i, f_t^i les valeurs nodales associées. Les fonctions de forme de la source sont différentes de celles de la température T . Dans la suite de la thèse, ces fonctions sont définies sur le même maillage que celui de T mais contrairement aux fonctions de forme de T , elles présentent des composants aux bords en espace et à l'instant initial. Cela permet de décrire une source non nulle aux bords et non nulle à l'instant initial.

La construction de la solution T avec la PGD consiste en une procédure itérative composée à chaque itération par trois étapes : l'enrichissement de la base, le calcul des coefficients et le calcul du résidu.

Considérons l'itération k . Tout d'abord, l'enrichissement de base nous donne les fonctions à variables séparées suivantes $F^{k+1}(x); G^{k+1}(y); H^{k+1}(t)$, ensuite les coefficients α^i sont calculés pour toutes les fonctions à variables séparées obtenues (pour $i = 1, \dots, (k + 1)$). Et enfin, le résidu est calculé.

La procédure itérative est répétée jusqu'à convergence. La convergence est atteinte pour une valeur suffisamment petite du résidu.

Détaillons maintenant les trois étapes pour une itération.

a) Etape d'enrichissement de la base

A partir des k fonctions à variables séparées et leurs coefficients associés, les fonctions à variables séparées $R(x)S(y)P(t)$ sont calculées. Elles sont solution de la formulation variationnelle de Galerkin liée à Eq. (B.I-1) :

$$\rho C \int_{\Omega} T^* \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega - \lambda_T \int_{\Omega} T^* \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad} T}) d\Omega = \int_{\Omega} T^* f d\Omega \quad (\text{B.I-6})$$

avec un champ réel T et un champ virtuel T^* . Après intégration par parties et prise en compte des conditions aux limites, cette équation s'écrit :

$$\rho C \int_{\Omega} T^* \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \lambda_T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial T^*}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T^*}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} T^* f d\Omega \quad (\text{B.I-7})$$

Nous considérons les champs réels et virtuels suivants :

$$T(x, y, t) = \sum_{i=1}^k \alpha^i F^i(x) G^i(y) H^i(t) + R(x) S(y) P(t) \quad (\text{B.I-8})$$

$$T^*(x, y, t) = R^*(x) S(y) P(t) + R(x) S^*(y) P(t) + R(x) S(y) P^*(t) \quad (\text{B.I-9})$$

Cela mène à la résolution d'un système non linéaire en $R(x)$, $S(y)$ et $P(t)$. Comme proposé par [Ammar 2007], ce système est résolu par la méthode de point fixe à directions alternées. Cette méthode consiste en une procédure itérative où la solution d'une variable est recherchée en imposant la valeur des autres :

- Trouver $R(x)$

Supposons connu $S(y)$ et $P(t)$, ce qui implique un champ virtuel $T^*(x, y, t) = R^*(x) S(y) P(t)$ puisque $S^*(y)$ et $P^*(t)$ s'annulent. L'équation (B.I-7) s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 & \rho C \int_{\Omega} \left(R^*(x) S(y) P(t) \right) \cdot \left(R(x) S(y) \frac{\partial P(t)}{\partial t} \right) d\Omega \\
 & + \lambda_T \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial R^*(x)}{\partial x} S(y) P(t) \right) \cdot \left(\frac{\partial R(x)}{\partial x} S(y) P(t) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left(R^*(x) \frac{\partial S(y)}{\partial y} P(t) \right) \cdot \left(R(x) \frac{\partial S(y)}{\partial y} P(t) \right) \right) d\Omega \\
 & = \int_{\Omega} \left(R^*(x) S(y) P(t) \right) \cdot f(x, y, t) d\Omega
 \end{aligned} \tag{B.I-10}$$

$$\begin{aligned}
 & - \rho C \int_{\Omega} \left(R^*(x) S(y) P(t) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^k \alpha^i F^i(x) G^i(y) \frac{\partial H^i(t)}{\partial t} \right) d\Omega \\
 & - \lambda_T \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial R^*(x)}{\partial x} S(y) P(t) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^k \alpha^i \frac{\partial F^i(x)}{\partial x} G^i(y) H^i(t) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left(R^*(x) \frac{\partial S(y)}{\partial y} P(t) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^k \alpha^i F^i(x) \frac{\partial G^i(y)}{\partial y} H^i(t) \right) \right) d\Omega
 \end{aligned}$$

$\forall R^*$

On obtient ainsi un système linéaire à résoudre pour déterminer $R(t)$ qui s'écrit sous la forme discrétisée:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned}
 & \lambda_T \cdot S^T \left(\int_{\Omega_y} MM^T dy \right) S \cdot P^T \left(\int_{\Omega_t} LL^T dt \right) P \cdot \left(\int_{\Omega_x} dNdN^T dx \right) \\
 & + \lambda_T \cdot S^T \left(\int_{\Omega_y} dMdM^T dy \right) S \cdot P^T \left(\int_{\Omega_t} LL^T dt \right) P \cdot \left(\int_{\Omega_x} NN^T dx \right) \\
 & + \rho C \cdot S^T \left(\int_{\Omega_y} MM^T dy \right) S \cdot P^T \left(\int_{\Omega_t} LdL^T dt \right) P \cdot \left(\int_{\Omega_x} NN^T dx \right)
 \end{aligned} \right] R \\
 & = \\
 & \sum_{i=1}^{n_f} \beta^i \cdot S^T \left(\int_{\Omega_y} MM_f^T dy \right) f_y^i \cdot P^T \left(\int_{\Omega_t} LL_f^T dt \right) f_t^i \cdot \left(\int_{\Omega_x} NN_f^T dx \right) f_x^i
 \end{aligned} \tag{B.I-11}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned}
 & \lambda_T \cdot S^T \left(\int_{\Omega_y} MM^T dy \right) G^i \cdot P^T \left(\int_{\Omega_t} LL^T dt \right) H^i \cdot \left(\int_{\Omega_x} dNdN^T dx \right) F^i \\
 & - \sum_{i=1}^k \alpha^i + \lambda_T \cdot S^T \left(\int_{\Omega_y} dMdM^T dy \right) G^i \cdot P^T \left(\int_{\Omega_t} LL^T dt \right) H^i \cdot \left(\int_{\Omega_x} NN^T dx \right) F^i \\
 & + \rho C \cdot S^T \left(\int_{\Omega_y} MM^T dy \right) G^i \cdot P^T \left(\int_{\Omega_t} LdL^T dt \right) H^i \cdot \left(\int_{\Omega_x} NN^T dx \right) F^i
 \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

L'équation (B.I-11) peut être exprimée sous la forme :

$$R \cdot U_{11}(S, P) = U_{12}(S, P) - U_{13}(F^i, G^i, H^i, S, P) \tag{B.I-12}$$

D'où :

$$R = U_1(S, P) \quad (\text{B.I-13})$$

- **Trouver** $S(y)$

Supposons connu $R(x)$ et $P(t)$, ce qui implique un champ virtuel $T^*(x, y, t) = R(x)S^*(y)P(t)$. De la même manière que précédemment, nous obtenons un système linéaire à résoudre pour déterminer $S(t)$:

$$S = U_2(R, P) \quad (\text{B.I-14})$$

- **Trouver** $P(t)$

Supposons connu $R(x)$ et $S(y)$, ce qui implique un champ virtuel $T^*(x, y, t) = R(x)S(y)P^*(t)$. Nous obtenons là encore un système linéaire à résoudre pour déterminer $P(t)$:

$$P = U_3(R, S) \quad (\text{B.I-15})$$

A la $l^{\text{ème}}$ sous itération, le résidu ci-après est calculé. La procédure de point fixe s'arrête lorsque ce résidu est suffisamment petit ou lorsque le nombre maximal de sous itération l_{\max} est atteint.

$$\|N_{\text{fixe}}^l\|_2 = \|R^{(l)}S^{(l)}P^{(l)} - R^{(l-1)}S^{(l-1)}P^{(l-1)}\|_2 \leq \varepsilon_{\text{fixe}} \quad (\text{B.I-16})$$

$\varepsilon_{\text{fixe}}$ est un paramètre fixé par l'utilisateur ainsi que le nombre maximal de sous itérations.

Après convergence, les nouveaux modes $F^{k+1}(x)$, $G^{k+1}(y)$, $H^{k+1}(t)$ sont obtenus en normalisant les fonctions $R(x)$, $S(y)$ et $P(t)$ avec la norme L^2 .

Le **TAB. B.I-1** montre l'algorithme de l'étape d'enrichissement de la résolution PGD.

1 : **tant que** ($l \leq l_{\max}$ et $\|N_{\text{fixe}}^l\|_2 > \varepsilon_{\text{fixe}}$) **faire**

2 : Calcul de $R^{(l)} = U_1(S^{(l-1)}, P^{(l-1)})$

3 : Calcul de $S^{(l)} = U_2(R^{(l)}, P^{(l-1)})$

4 : Calcul de $P^{(l)} = U_3(R^{(l)}, S^{(l)})$

5 : Calcul de $\|N_{\text{fixe}}^l\|_2$

6 : **fin tant que**

7 : Normalisation $F^{k+1} = \frac{R}{\|R\|_2}$; $G^{k+1} = \frac{S}{\|S\|_2}$; $H^{k+1} = \frac{P}{\|P\|_2}$

TAB. B.I-1 Algorithme de l'étape d'enrichissement

Remarque. Il est possible de chercher plusieurs triplets de fonctions simultanément. La taille du système non linéaire à résoudre va augmenter dans ce cas, proportionnellement au nombre de triplets. La résolution de ce système peut être coûteuse et la convergence de la méthode de point fixe peut s'avérer beaucoup plus lente.

Dans le cadre de cette thèse, nous cherchons un seul triplet de fonction à chaque étape d'enrichissement.

b) Etape de projection (calcul des coefficients)

Etant donné que les fonctions $F^i(x); G^i(y); H^i(t)$ pour $i=1, \dots, k+1$ sont maintenant connues, les coefficients α^i sont solution de la formulation variationnelle de Galerkin **(B.I-7)** avec les champs réels et virtuels suivants :

$$T(x, y, t) = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha^i F^i(x) G^i(y) H^i(t) \tag{B.I-17}$$

$$T^*(x, y, t) = \sum_{i=1}^{k+1} (\alpha^i)^* F^i(x) G^i(y) H^i(t) \tag{B.I-18}$$

L'équation **(B.I-7)** s'écrit donc :

$$\begin{aligned} & \rho C \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{k+1} (\alpha^i)^* F^i(x) G^i(y) H^i(t) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{k+1} \alpha^j F^j(x) G^j(y) \frac{\partial H^j(t)}{\partial t} \right) d\Omega \\ & + \lambda_T \int_{\Omega} \left(\left(\sum_{i=1}^{k+1} (\alpha^i)^* \frac{\partial F^i(x)}{\partial x} G^i(y) H^i(t) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{k+1} \alpha^j \frac{\partial F^j(x)}{\partial x} G^j(y) H^j(t) \right) \right. \\ & \left. + \left(\sum_{i=1}^{k+1} (\alpha^i)^* F^i(x) \frac{\partial G^i(y)}{\partial y} H^i(t) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{k+1} \alpha^j F^j(x) \frac{\partial G^j(y)}{\partial y} H^j(t) \right) \right) d\Omega \tag{B.I-19} \\ & = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{k+1} (\alpha^i)^* F^i(x) G^i(y) H^i(y) \right) \cdot f d\Omega \\ & \forall (\alpha^i)^* \end{aligned}$$

Dans le cadre de l'équation de la chaleur, cela revient à la résolution d'un système linéaire pour déterminer les α^i :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1 \times (k+1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{(k+1) \times 1} & \dots & K_{(k+1) \times (k+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \dots \\ \alpha^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_{k+1} \end{bmatrix} \tag{B.I-20}$$

où les composants de la matrice K et du vecteur V sont définis par :

$$K_{ij} = \left(\begin{array}{l} \lambda_T \left(\int_{\Omega_x} \frac{\partial F^i(x)}{\partial x} \frac{\partial F^j(x)}{\partial x} dx \right) \cdot \left(\int_{\Omega_y} G^i(y) G^j(y) dy \right) \cdot \left(\int_{\Omega_t} H^i(t) H^j(t) dt \right) \\ + \lambda_T \left(\int_{\Omega_x} F^i(x) F^j(x) dx \right) \cdot \left(\int_{\Omega_y} \frac{\partial G^i(y)}{\partial y} \frac{\partial G^j(y)}{\partial y} dy \right) \cdot \left(\int_{\Omega_t} H^i(t) H^j(t) dt \right) \\ + \rho C \left(\int_{\Omega_x} F^i(x) F^j(x) dx \right) \cdot \left(\int_{\Omega_y} G^i(y) G^j(y) dy \right) \cdot \left(\int_{\Omega_t} H^i(t) \frac{\partial H^j(t)}{\partial t} dt \right) \end{array} \right) \quad (\text{B.I-21})$$

$1 \leq i, j \leq k+1$

$$V_i = \sum_{p=1}^{n_f} \beta^p \cdot (F^i(x) f_x^p(x)) \cdot (G^i(y) f_y^p(y)) \cdot (H^i(t) f_t^p(t)) \quad 1 \leq i \leq k+1$$

Notons que tous les coefficients sont recalculés à chaque étape de projection et non pas seulement le dernier coefficient. Cela permet d'obtenir des coefficients qu'on pourrait dire "optimaux" pour les modes obtenus.

c) Etape de calcul du résidu

La solution est maintenant obtenue sous la forme Eq. (B.I-2) avec $k+1$ modes. Le résidu relatif (noté **RRe**) lié à (Eq. (B.I-1)) est défini par :

$$\mathbf{RRe} = \frac{\left\| \rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_T \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad} T}) - f \right\|_2}{\|f\|_2} \quad (\text{B.I-22})$$

où $\| \cdot \|_2$ signifie la norme L^2 . Ce résidu est calculé à chaque itération. La procédure itérative est stoppée lorsque **RRe** est suffisamment petit.

Dans ce qui suit, nous allons présenter la formulation tensorielle de la PGD pour le problème de la chaleur transitoire 2D. Cette écriture facilite l'implémentation de la méthode. Elle a été présentée dans [Chinesta 2010a, Prulière 2010a].

B.I.1.2 Formulation tensorielle

La température T est recherchée comme une somme de n produits tensoriels entre les vecteurs \mathbf{F}^i , \mathbf{G}^i et \mathbf{H}^i et pondérée par des coefficients notés α^i . Elle s'écrit :

$$T = \sum_i^n \alpha^i \mathbf{F}^i \otimes \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{H}^i \quad (\text{B.I-23})$$

La formulation variationnelle du problème (B.I-7) peut être écrite sous la forme discrétisée suivante :

$$T^{*T} A T = T^{*T} B \quad (\text{B.I-24})$$

avec T et T^{*T} les champs réel et virtuel.

\mathbf{A} et \mathbf{B} sont obtenus à partir des représentations discrètes des opérateurs différentiels et de la source dans la formulation variationnelle (Eq. (B.I-7)). On peut les représenter sous la forme séparée :

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n_A} a^i \mathbf{A}_x^i \otimes \mathbf{A}_y^i \otimes \mathbf{A}_t^i \quad (\text{B.I-25})$$

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n_B} b^i \mathbf{B}_x^i \otimes \mathbf{B}_y^i \otimes \mathbf{B}_t^i$$

où les composants de \mathbf{A} s'écrivent ($n_A = 3$ correspond aux 3 opérateurs apparaissant dans la formulation variationnelle) :

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
A_x^i	$\int_{\Omega_x} dN dN^T dx$	$\int_{\Omega_x} NN^T dx$	$\int_{\Omega_x} NN^T dx$
A_y^i	$\int_{\Omega_y} MM^T dy$	$\int_{\Omega_y} dM dM^T dy$	$\int_{\Omega_y} MM^T dy$
A_t^i	$\int_{\Omega_t} LL^T dt$	$\int_{\Omega_t} LL^T dt$	$\int_{\Omega_t} L dL^T dt$
a^i	λ_T	λ_T	ρC

TAB. B.I-2 Composants de \mathbf{A}

et les composants de \mathbf{B} s'écrivent ($n_B = n_f$ correspond au nombre de termes séparés nécessaires pour décrire correctement la source de chaleur) :

	$1 \leq i \leq n_f$
\mathbf{B}_x^i	$\left(\int_{\Omega_x} NN_f^T dx \right) \mathbf{f}_x^i$
\mathbf{B}_y^i	$\left(\int_{\Omega_y} MM_f^T dy \right) \mathbf{f}_y^i$
\mathbf{B}_t^i	$\left(\int_{\Omega_t} LL_f^T dt \right) \mathbf{f}_t^i$
b^i	β^i

TAB. B.I-3 Composants de \mathbf{B}

Nous présentons l'écriture tensorielle des trois étapes a), b) et c) pour la construction de \mathbf{T} . Supposons que nous sommes à l'itération $k+1$ c'est-à-dire les k fonctions à variables séparées et leurs coefficients associés sont connus.

a) Etape d'enrichissement de la base

Dans cette étape, les fonctions à variables séparées $k+1$ ($\mathbf{R} \otimes \mathbf{S} \otimes \mathbf{P}$) sont calculées. Elles sont solution de la formulation variationnelle de Galerkin liée à (B.I-1) avec les champs réels et virtuels suivants :

$$\mathbf{T} = \sum_i^k \alpha^i \mathbf{F}^i \otimes \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{H}^i + \mathbf{R} \otimes \mathbf{S} \otimes \mathbf{P} \quad (\text{B.I-26})$$

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{R}^* \otimes \mathbf{S} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{R} \otimes \mathbf{S}^* \otimes \mathbf{P} + \mathbf{R} \otimes \mathbf{S} \otimes \mathbf{P}^* \quad (\text{B.I-27})$$

Cela mène à la résolution d'un système non linéaire en \mathbf{R} , \mathbf{S} , \mathbf{P} qui est résolu à l'aide de la méthode de point fixe à directions alternées. Rappelons qu'elle consiste en une procédure itérative dont les différentes étapes s'écrivent sous forme tensorielle comme suit :

- **Trouver \mathbf{R}**

Supposons connu \mathbf{S} et \mathbf{P} , ce qui implique un champ virtuel $\mathbf{T}^* = \mathbf{R}^* \otimes \mathbf{S} \otimes \mathbf{P}$. L'équation (B.I-24) s'écrit donc:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^3 a^i \left((\mathbf{R}^*)^T A_x^i \mathbf{R} \right) \otimes \left((\mathbf{S})^T A_y^i \mathbf{S} \right) \otimes \left((\mathbf{P})^T A_t^i \mathbf{P} \right) \right) + \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^k a^i \alpha^j \left((\mathbf{R}^*)^T A_x^i \mathbf{F}^j \right) \otimes \left((\mathbf{S})^T A_y^i \mathbf{G}^j \right) \otimes \left((\mathbf{P})^T A_t^i \mathbf{H}^j \right) \right) \\ & = \sum_{i=1}^{n_f} b^i \left((\mathbf{R}^*)^T \mathbf{B}_x^i \right) \otimes \left((\mathbf{S})^T \mathbf{B}_y^i \right) \otimes \left((\mathbf{P})^T \mathbf{B}_t^i \right) \end{aligned} \quad (\text{B.I-28})$$

$\forall \mathbf{R}^*$

On obtient ainsi le système linéaire en \mathbf{R} suivant:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^3 a^i \left(A_x^i \right) \otimes \left((\mathbf{S})^T A_y^i \mathbf{S} \right) \otimes \left((\mathbf{P})^T A_t^i \mathbf{P} \right) \right) \mathbf{R} \\ & = \sum_{i=1}^{n_f} b^i \left(\mathbf{B}_x^i \right) \otimes \left((\mathbf{S})^T \mathbf{B}_y^i \right) \otimes \left((\mathbf{P})^T \mathbf{B}_t^i \right) - \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^k a^i \left(A_x^i \mathbf{F}^j \right) \otimes \left((\mathbf{S})^T A_y^i \mathbf{G}^j \right) \otimes \left((\mathbf{P})^T A_t^i \mathbf{H}^j \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.I-29})$$

D'où:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}_1(\mathbf{S}, \mathbf{P}) \quad (\text{B.I-30})$$

- **Trouver \mathbf{S}**

Supposons connu \mathbf{R} , \mathbf{P} , ce qui implique un champ virtuel $\mathbf{T}^* = \mathbf{R} \otimes \mathbf{S}^* \otimes \mathbf{P}$. L'équation (B.I-24) s'écrit donc:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^3 a^i \left((\mathbf{R})^T A_x^i \mathbf{R} \right) \otimes \left((\mathbf{S}^*)^T A_y^i \mathbf{S} \right) \otimes \left((\mathbf{P})^T A_t^i \mathbf{P} \right) \right) + \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^k a^i \alpha^j \left((\mathbf{R})^T A_x^i \mathbf{F}^j \right) \otimes \left((\mathbf{S}^*)^T A_y^i \mathbf{G}^j \right) \otimes \left((\mathbf{P})^T A_t^i \mathbf{H}^j \right) \right) \\ & = \sum_{i=1}^{n_f} b^i \left((\mathbf{R})^T \mathbf{B}_x^i \right) \otimes \left((\mathbf{S}^*)^T \mathbf{B}_y^i \right) \otimes \left((\mathbf{P})^T \mathbf{B}_t^i \right) \end{aligned} \quad (\text{B.I-31})$$

$\forall \mathbf{S}^*$

Ainsi, on obtient le système linéaire en \mathbf{S} suivant:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^3 a^i \left((\mathbf{R})^T A_x^i \mathbf{R} \right) \otimes \left(A_y^i \right) \otimes \left((\mathbf{P})^T A_t^i \mathbf{P} \right) \right) \mathbf{S} \\ & = \sum_{i=1}^{n_f} b^i \left((\mathbf{R})^T \mathbf{B}_x^i \right) \otimes \left(\mathbf{B}_y^i \right) \otimes \left((\mathbf{P})^T \mathbf{B}_t^i \right) - \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^k a^i \left((\mathbf{R})^T A_x^i \mathbf{F}^j \right) \otimes \left(A_y^i \mathbf{G}^j \right) \otimes \left((\mathbf{P})^T A_t^i \mathbf{H}^j \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.I-32})$$

D'où:

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}_2(\mathbf{R}, \mathbf{P}) \quad (\text{B.I-33})$$

- **Trouver P**

Supposons connu \mathbf{R} , \mathbf{S} , ce qui implique un champ virtuel $\mathbf{T}^* = \mathbf{R} \otimes \mathbf{S} \otimes \mathbf{P}^*$. L'équation (B.I-24) s'écrit donc:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^3 a^i \left((\mathbf{R})^T A_x^i \mathbf{R} \right) \otimes \left((\mathbf{S})^T A_y^i \mathbf{S} \right) \otimes \left((\mathbf{P}^*)^T A_t^i \mathbf{P} \right) \right) + \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^k a^i \alpha^j \left((\mathbf{R})^T A_x^i \mathbf{F}^j \right) \otimes \left((\mathbf{S})^T A_y^i \mathbf{G}^j \right) \otimes \left((\mathbf{P}^*)^T A_t^i \mathbf{H}^j \right) \right) \\ & = \sum_{i=1}^{n_f} b^i \left((\mathbf{R})^T \mathbf{B}_x^i \right) \otimes \left((\mathbf{S})^T \mathbf{B}_y^i \right) \otimes \left((\mathbf{P}^*)^T \mathbf{B}_t^i \right) \\ & \forall \mathbf{P}^* \end{aligned} \quad (\text{B.I-34})$$

Ainsi, on obtient le système linéaire en \mathbf{P} suivant:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^3 a^i \left((\mathbf{R})^T A_x^i \mathbf{R} \right) \otimes \left((\mathbf{S})^T A_y^i \mathbf{S} \right) \otimes \left(A_t^i \right) \right) \mathbf{P} \\ & = \sum_{i=1}^{n_f} b^i \left((\mathbf{R})^T \mathbf{B}_x^i \right) \otimes \left((\mathbf{S})^T \mathbf{B}_y^i \right) \otimes \left(\mathbf{B}_t^i \right) - \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^k a^i \left((\mathbf{R})^T A_x^i \mathbf{F}^j \right) \otimes \left((\mathbf{S})^T A_y^i \mathbf{G}^j \right) \otimes \left(A_t^i \mathbf{H}^j \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.I-35})$$

D'où:

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}_3(\mathbf{R}, \mathbf{S}) \quad (\text{B.I-36})$$

A la $l^{\text{ème}}$ sous itération, le résidu ci-après est calculé. La procédure du point fixe s'arrête lorsque ce résidu est suffisamment petit ou lorsque le nombre maximal de sous itération l_{\max} est atteint.

$$\left\| \mathcal{N}_{\text{fixe}}^l \right\|_2 = \left\| \mathbf{R}^{(l)} \mathbf{S}^{(l)} \mathbf{P}^{(l)} - \mathbf{R}^{(l-1)} \mathbf{S}^{(l-1)} \mathbf{P}^{(l-1)} \right\|_2 \leq \varepsilon_{\text{fixe}} \quad (\text{B.I-37})$$

où $\varepsilon_{\text{fixe}}$ est un paramètre fixé par l'utilisateur.

Les nouvelles fonctions de base sont définies après normalisation des vecteurs \mathbf{R} , \mathbf{S} et \mathbf{P} par :

$$\mathbf{F}^{k+1} = \frac{\mathbf{R}}{\|\mathbf{R}\|_2} ; \mathbf{G}^{k+1} = \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|_2} ; \mathbf{H}^{k+1} = \frac{\mathbf{P}}{\|\mathbf{P}\|_2} \quad (\text{B.I-38})$$

b) Etape de projection (calcul des coefficients)

Etant donné que $k+1$ vecteurs \mathbf{F}^i , \mathbf{G}^i , \mathbf{H}^i pour $i=1, \dots, k+1$ sont maintenant connus, les coefficients α^i sont solution de la formulation variationnelle de Galerkin associée à (Eq. (B.I-24)) avec les champs réels et virtuels suivants :

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha^i \mathbf{F}^i \otimes \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{H}^i \quad (\text{B.I-39})$$

$$\mathbf{T}^* = \sum_{i=1}^{k+1} (\alpha^i)^* \mathbf{F}^i \otimes \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{H}^i \quad (\text{B.I-40})$$

Dans le cadre de l'équation de la chaleur, cela revient à la résolution du système linéaire suivant :

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{V} \quad \text{avec} \quad \mathbf{a}^T = \{\alpha^1, \dots, \alpha^{k+1}\} \quad (\text{B.I-41})$$

où les composants de la matrice \mathbf{K} (dont la taille est $(k+1) \times (k+1)$) et ceux de \mathbf{V} (dont la taille est $(k+1) \times 1$) s'écrivent:

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \sum_{p=1}^3 a^p \cdot \left((\mathbf{F}^i)^T \mathbf{A}_x^p \mathbf{F}^j \right) \cdot \left((\mathbf{G}^i)^T \mathbf{A}_y^p \mathbf{G}^j \right) \cdot \left((\mathbf{H}^i)^T \mathbf{A}_t^p \mathbf{H}^j \right) \quad (1 \leq i, j \leq k+1) \\ \mathbf{V}_i &= \sum_{p=1}^{n_f} b^p \cdot \left((\mathbf{F}^i)^T \mathbf{B}_x^p \right) \cdot \left((\mathbf{G}^i)^T \mathbf{B}_y^p \right) \cdot \left((\mathbf{H}^i)^T \mathbf{B}_t^p \right) \quad (1 \leq i \leq k+1) \end{aligned} \quad (\text{B.I-42})$$

c) Etape de calcul du résidu

Le résidu lié à (Eq. (B.I-24)) est défini à partir de :

$$\mathbf{Res}^{k+1} = \mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{T} = \sum_{i=1}^{n_f} b^i \mathbf{B}_x^i \otimes \mathbf{B}_y^i \otimes \mathbf{B}_t^i - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{k+1} a^i \alpha^j \left(\mathbf{A}_x^i \mathbf{F}^j \otimes \mathbf{A}_y^i \mathbf{G}^j \otimes \mathbf{A}_t^i \mathbf{H}^j \right) \quad (\text{B.I-43})$$

Ce résidu peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{Res}^{k+1} = \sum_{i=1}^{n_c} c^i \mathbf{C}_x^i \otimes \mathbf{C}_y^i \otimes \mathbf{C}_t^i \quad (\text{B.I-44})$$

avec $n_c = n_f + 3(k+1)$ où $k+1$ est le nombre de modes obtenus et c^i sont les coefficients correspondants.

La norme euclidienne de ce résidu (noté RV) est calculée à chaque itération:

$$RV^{k+1} = \left\| \sum_{i=1}^{n_c} c^i \mathbf{C}_x^i \otimes \mathbf{C}_y^i \otimes \mathbf{C}_t^i \right\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_c} \sum_{j=1}^{n_c} c^i c^j \cdot \langle \mathbf{C}_x^i, \mathbf{C}_x^j \rangle \cdot \langle \mathbf{C}_y^i, \mathbf{C}_y^j \rangle \cdot \langle \mathbf{C}_t^i, \mathbf{C}_t^j \rangle} \quad (\text{B.I-45})$$

Remarque. Ce résidu est relatif à l'équation variationnelle de Galerkin, c'est donc un résidu au sens faible alors que le résidu présenté sous forme discrète était celui lié au problème continu fort. Le calcul de ce résidu RV est plus facile à implémenter et moins coûteux que le résidu du problème fort (Eq. (B.I-22)). De plus, il peut être étendu facilement au problème couplé que l'on va considérer.

Dans la suite de la thèse, le résidu RV est donc utilisé pour vérifier la convergence.

La procédure itérative est stoppée lorsque le taux de réduction du résidu RV devient supérieur à un seuil ε_{RV} fixé par l'utilisateur soit encore le rapport entre deux résidus consécutifs est supérieur à ε_{RV} :

$$\tau_{RV}^{k+1} = \frac{RV^{k+1}}{RV^k} > \varepsilon_{RV} \quad (\text{B.I-46})$$

Pour un maillage donné, on notera RV^0 le résidu initial c'est-à-dire celui obtenu avec 0 mode pour lequel seule la source est prise en compte. Il correspond donc au calcul de :

$$RV^0 = \|\mathbf{B}\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^{n_f} b^i \mathbf{B}_x^i \otimes \mathbf{B}_y^i \otimes \mathbf{B}_t^i \right\|_2 \quad (\text{B.I-47})$$

L'algorithme (TAB. B.I-4) résume les différentes étapes de la résolution PGD d'une équation aux dérivées partielles pour laquelle l'inconnue notée T est décomposée selon 3 variables.

1 :	<i>tant que</i> ($k \leq k_{max}$ et $\frac{RV^k}{RV^{k-1}} \leq \varepsilon_{RV}$) <i>faire</i>
2 :	On pose $T = \sum_i^k \alpha^i \mathbf{F}^i \otimes \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{H}^i$
	a) Etape d'enrichissement de la base
3 :	<i>tant que</i> ($l \leq l_{max}$ et $\ N_{fixe}^l\ _2 > \varepsilon_{fixe}$) <i>faire</i>
4 :	Calcul de $\mathbf{R}^{(l)} = U_1(\mathbf{S}^{(l-1)}, \mathbf{P}^{(l-1)})$
5 :	Calcul de $\mathbf{S}^{(l)} = U_2(\mathbf{R}^{(l)}, \mathbf{P}^{(l-1)})$
6 :	Calcul de $\mathbf{P}^{(l)} = U_3(\mathbf{R}^{(l)}, \mathbf{S}^{(l)})$
7 :	Calcul de $\ N_{fixe}^l\ _2$
8 :	<i>fin tant que</i>
9 :	Normalisation $\mathbf{F}^{k+1} = \frac{\mathbf{R}}{\ \mathbf{R}\ _2}$; $\mathbf{G}^{k+1} = \frac{\mathbf{S}}{\ \mathbf{S}\ _2}$; $\mathbf{H}^{k+1} = \frac{\mathbf{P}}{\ \mathbf{P}\ _2}$
	b) Etape de projection
10 :	Calcul des coefficients $\{\alpha^1, \dots, \alpha^{k+1}\}$
	c) Etape de calcul du résidu
11 :	Calcul du résidu : RV^{k+1}
12 :	$k = k + 1$
13 :	<i>fin tant que</i>

TAB. B.I-4 Algorithme de la résolution par la PGD

Dans la suite de la thèse, le nombre de sous itérations maximal l_{max} est choisi égal à 100 et ε_{fixe} est pris égal à 10^{-4} sauf mention contraire.

En général, pour les problèmes traités, la PGD converge rapidement après quelques itérations. On choisit donc comme nombre maximal de modes 200 ($k_{max} = 200$).

B.I.1.3 Minimisation du résidu

Notons que l'opérateur relatif à l'équation (B.I-1) est non symétrique, Pour certaines valeurs des paramètres matériaux, la formulation présentée ci-dessus ne converge pas. Il est donc nécessaire d'appliquer une technique appelée minimisation du résidu [Ammar 2010b, Nouy 2010a, Ladeveze 2011]. Elle consiste à symétriser les opérateurs.

Dans le cadre de l'équation de la chaleur, lorsque le coefficient de la dérivée temporelle λ_T devient prépondérant par rapport à celui de la dérivée spatiale ρC , la méthode de point fixe à directions alternées peut mener à des cas de non convergence ou de convergence très lente pour une précision demandée. Prulière [Pruliere 2010a] constate qu'avec la minimisation du résidu, la convergence est améliorée pour un opérateur non symétrique.

L'idée de cette méthode est de minimiser le résidu du problème pré conditionné suivant (écrit sous forme tensorielle):

$$A^T A T = A^T B \quad (\text{B.I-48})$$

La formulation variationnelle du problème s'écrit :

$$T^{*T} A^T A T = T^{*T} A^T B \quad (\text{B.I-49})$$

où les composants d'opérateur sont maintenant $A^T A$ et $A^T B$. Ils s'écrivent sous la forme séparée suivante:

$$\begin{aligned} A^T A &= \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{j=1}^{n_A} a^i a^j (A_x^i)^T A_x^j \otimes (A_y^i)^T A_y^j \otimes (A_t^i)^T A_t^j \\ A^T B &= \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{j=1}^{n_B} a^i b^j (A_x^i)^T B_x^j \otimes (A_y^i)^T B_y^j \otimes (A_t^i)^T B_t^j \end{aligned} \quad (\text{B.I-50})$$

La solution T est ensuite construite à l'aide de la procédure itérative composée à chaque itération par les trois étapes : l'enrichissement de la base, le calcul des coefficients et le calcul du résidu comme présentée dans B.I.1.2.

Notons que dans ce cas le résidu est calculé en s'appuyant sur le problème d'origine (Eq. (B.I-24)) et non le problème symétrisé.

Nouy [Nouy 2010a] démontre qu'il y a une décroissance monotone du résidu lorsqu'on enrichit la solution.

B.I.1.4 Schéma temporel consistant

L'utilisation de la technique de maillage adaptatif présentée par la suite nécessite l'utilisation de discrétisations irrégulières.

Pour des raisons de consistance du schéma temporel, Ammar et al. [Ammar 2007] ont proposé d'utiliser la formulation Petrov-Galerkin "upwind". Cette formulation a été mise en place dans le cas d'une discrétisation régulière et est étendue ici dans le cas d'une discrétisation irrégulière. En utilisant

une fonction d'interpolation de temps modifiée $\tilde{L} = L + h dL$, à la ligne i de la matrice d'intégration $\int \tilde{L}_i dL dt$ correspondent trois termes non nuls :

$$\int \tilde{L}_i dL_i dt = h \left\{ \frac{1}{t_i - t_{i-1}} + \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \right\}; \int \tilde{L}_i dL_{i+1} dt = \frac{1}{2} - h \frac{1}{(t_{i+1} - t_i)}; \quad (\text{B.I-51})$$

$$\int \tilde{L}_i dL_{i-1} dt = -\frac{1}{2} + h \frac{1}{(t_{i-1} - t_i)}$$

En utilisant le fait que le terme $\int \tilde{L}_i dL_{i+1} dt$ doit être nul, on en déduit la valeur de h en fonction de l'intervalle de temps considéré, ainsi $h = \frac{t_{i+1} - t_i}{2}$.

B.I.2 Résultats

Dans cette section, les résultats obtenus pour trois sources de chaleur sont discutés. Pour tous les cas de simulation, le domaine spatial considéré est : $\Omega_x \times \Omega_y = [-\pi; +\pi]^2$. Les paramètres ρ , C et λ_T sont supposés constants et égaux à 1.

B.I.2.1 Simulation avec une source de chaleur bimodale

La source de chaleur bimodale est une fonction continue qui a pour expression :

$$f(x, y, t) = 20[\sin(x)\sin(y)\cos(t)e^{-2t} + (\sin(2x)\sin(2y)\cos(t)e^{-8t})] \quad (\text{B.I-52})$$

Cette source est composée de deux termes, $f_1 = \sin(x)\sin(y)\cos(t)e^{-2t}$ et $f_2 = \sin(2x)\sin(2y)\cos(t)e^{-8t}$. Elle génère une réponse avec plusieurs transitoires selon les points de l'espace considérés et nécessite donc l'utilisation de maillages de densités différentes (maillages irréguliers).

La solution analytique exacte a pour expression :

$$T_{ex} = 20[\sin(x)\sin(y)\sin(t)e^{-2t} + (\sin(2x)\sin(2y)\sin(t)e^{-8t})] \quad (\text{B.I-53})$$

Notons que la solution analytique est une fonction à variables séparées qui comporte deux modes. La PGD devrait donc permettre de capter cette solution en deux modes.

Afin de valider les développements numériques, l'erreur entre la solution numérique et la solution exacte notée NRE est calculée comme suit :

$$NRE = \frac{\|T - T_{ex}\|_2}{\|T_{ex}\|_2} \quad (\text{B.I-54})$$

Pour cette source, le domaine temporel choisi est $\Omega_t = [0; 10]$ (s). Remarquons que la représentation de cette source de chaleur bimodale nécessite un maillage suffisamment dense.

Une première simulation est menée avec des discrétisations régulières en espace et en temps de $101 \times 101 \times 201$ points pour x , y et t respectivement.

Le critère d'arrêt de la PGD s'appuie sur un taux de réduction du résidu $\varepsilon_{RV} = 95\%$ (Eq. (B.I-46)).

La solution numérique est obtenue avec deux modes. Les coefficients sont tels que $\alpha = [9.25, 1.11]$ et le résidu final est de 0.047. La **FIG. B.I-1** montre que les deux modes pour l'espace (\mathbf{F}^1 , \mathbf{F}^2 pour x et \mathbf{G}^1 , \mathbf{G}^2 pour y) ont la forme des fonctions sinus comme attendu (cf. la solution exacte Eq. (B.I-53)). Les fonctions du temps \mathbf{H}^1 , \mathbf{H}^2 présentent des parties transitoires très localisées (**FIG. B.I-1(c)**). Elles ne pourront donc être captées que si la discrétisation utilisée est suffisamment fine ce qui est le cas pour cette simulation (pas de temps de 0.05s pour des zones transitoires étendues sur environ 3s). Sur la **FIG. B.I-1** (a) et (b), nous voyons que les modes spatiaux sont également localisés. Le champ de température à t égal 0.5 (s) est représenté **FIG. B.I-1** (d) et met en évidence les symétries de la solution.

Pour ce cas de test, l'erreur par rapport à la solution exacte (NRE) est de 0.083. Cet écart est assez faible et permet de valider l'implémentation de la PGD.

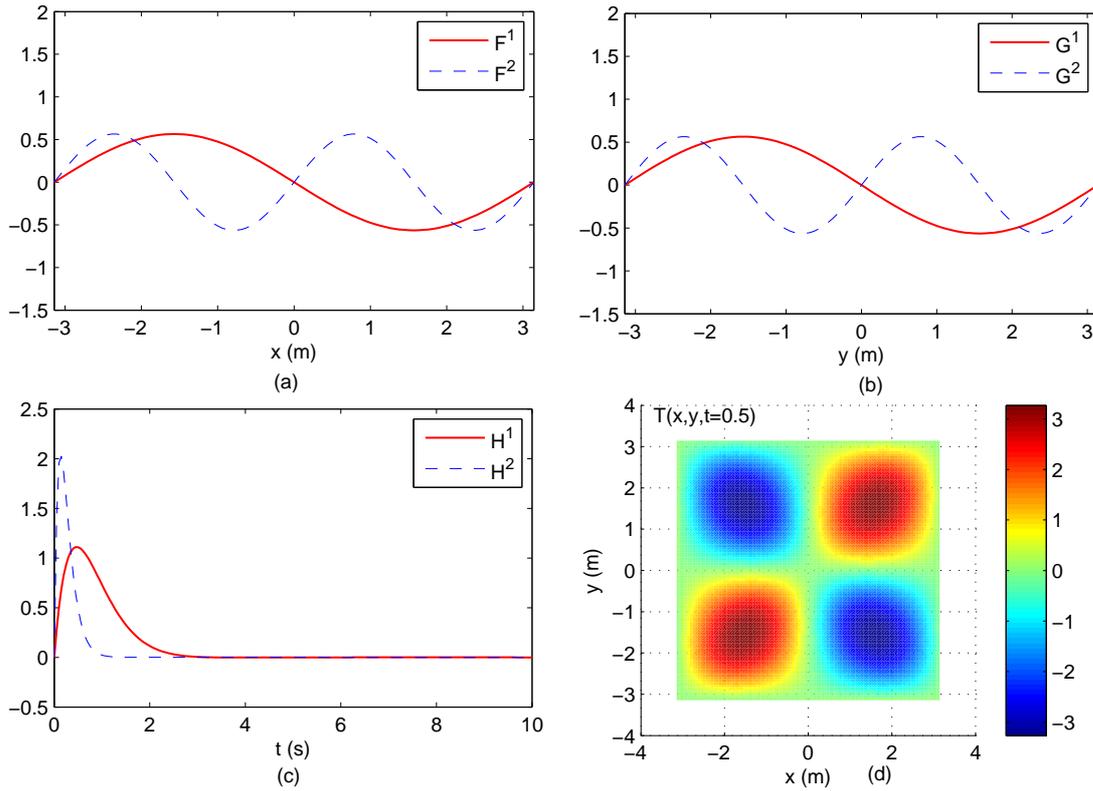


FIG. B.I-1 Fonctions de bases pour les variables x (a), y (b) et t (c).
(d) Distribution de la température en espace au temps $t = 0.5$

La FIG. B.I-2 (à gauche) montre l'évolution de la température en fonction du temps au point $(x, y) = (-2.51, 0.62)$ pour la solution numérique et la solution exacte. On remarque que la solution présente une partie transitoire pour $t = [0; 3]$ et une partie stationnaire pour $t = [3; 10]$. Dans la partie stationnaire, les deux solutions coïncident. Néanmoins, des écarts existent dans la partie transitoire d'où la valeur non nulle du résidu NRE . Cet écart est sûrement lié au maillage utilisé.

Le pas de discrétisation temporelle de 0.05 semble ici insuffisant pour décrire précisément le régime transitoire. Ainsi, comme montre la FIG. B.I-2 (à droite), l'écart en espace est assez important à l'instant $t=0.5$.

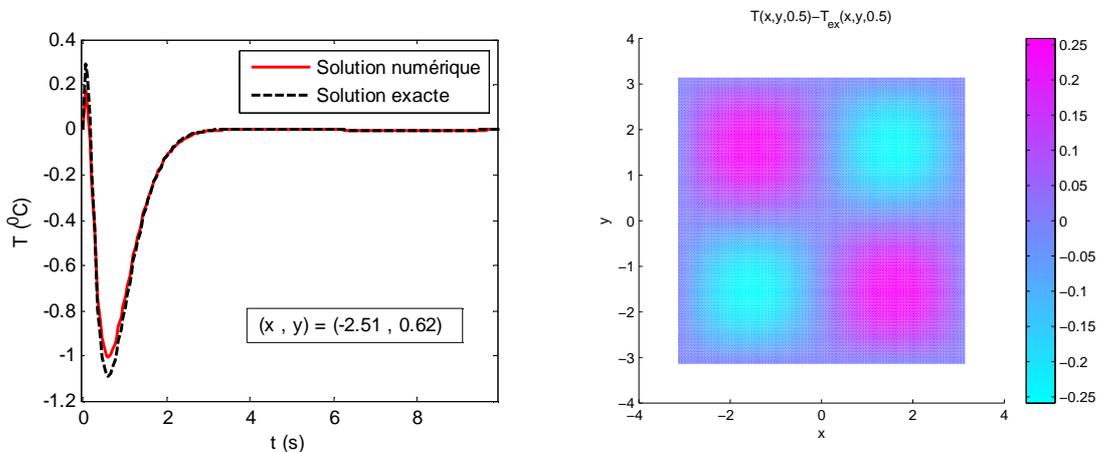


FIG. B.I-2 Evolution de la température en fonction du temps au point $(x,y)=(-2.51, 0.62)$ pour la solution numérique et la solution exacte (gauche), et carte d'écart en espace au point $t = 0.5$ (droite)

Remarques concernant le maillage temporel.

Analysons maintenant l'influence du pas de discrétisation temporel sur la prédiction de la solution. La **FIG. B.I-3** représente l'évolution de l'erreur relative *NRE* en fonction du nombre de points en temps pour trois maillages temporels différents mais contenant le même nombre de points.

La différence entre ces maillages est la position des points. La discrétisation irrégulière 1 contient les 9/10 de ces points dans la zone transitoire de la solution (entre 0 et 3 secondes), la discrétisation irrégulière 2 contient uniquement 5 points dans la zone transitoire et tous les autres points dans la zone stationnaire. Même si on augmente le nombre de points, le résidu *NRE* ne diminue pas dans le cas de la discrétisation irrégulière 2 puisque les points sont ajoutés dans la zone stationnaire. En revanche, la discrétisation irrégulière 1 contient plus de points dans la zone transitoire au fur et à mesure que le maillage est densifié, c'est pour cette raison que le résidu diminue lorsque le nombre de points augmente. Le résidu diminue plus vite que lorsque le maillage est régulier.

Notons que pour tous ces cas de simulation, la solution PGD est obtenue avec 2 modes.

Cela met en évidence le lien entre le gradient (dans la partie transitoire) et le choix du maillage : il est nécessaire d'avoir plus de points dans les zones transitoires afin d'obtenir une solution plus précise pour un nombre de point fixé et par suite un temps de calcul raisonnable. Néanmoins, il faut connaître les zones transitoires *a priori* ce qui est rarement le cas. Il sera donc intéressant de coupler la méthode PGD avec une technique de maillage adaptatif pour capter automatiquement les zones transitoires. C'est ce que nous détaillerons dans la section suivante.

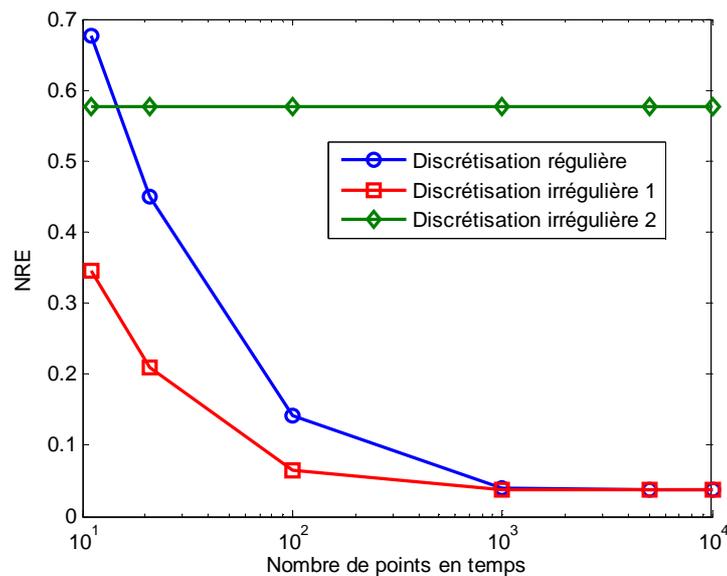


FIG. B.I-3 Evolution de *NRE* en fonction du nombre de points en temps pour différentes distributions de points

B.I.2.2 Simulation avec une source de chaleur de type échelon

La Source 2 est une source de chaleur qui ne dépend que du temps. Elle consiste en une montée de *t* égal 0 à 2 (s) puis un palier jusqu'à 100 (s) (**FIG. B.I-4**).

Pour cette source, le domaine temporel choisi est $\Omega_t = [0; 100]$ (s).

Pour décrire précisément la source, un maillage temporel minimum irrégulier de trois points est nécessaire (un point à *t*=0, *t*=2 et *t*=100). Nous l'appellerons maillage de la source.

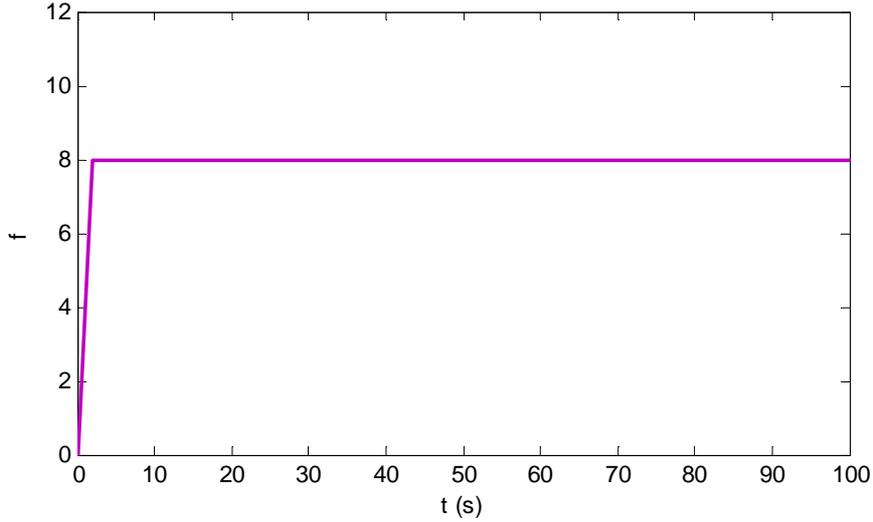


FIG. B.I-4 Source de type échelon

Pour cette source, la solution numérique obtenue par une simulation utilisant le code Elément Finis Abaqus™ Standard que l'on notera T^{MEF} est utilisée pour évaluer la solution numérique obtenue avec la PGD. L'écart entre les deux solutions numériques est calculé comme suit :

$$E_{MEF} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{nA_x} \sum_{j=1}^{nA_y} \sum_{k=1}^{nA_t} \left(T^{PGD^{(ip)}}(i, j, k) - T^{MEF}(i, j, k) \right)^2}{\sum_{i=1}^{nA_x} \sum_{j=1}^{nA_y} \sum_{k=1}^{nA_t} \left(T^{MEF}(i, j, k) \right)^2}} \quad (\text{B.I-55})$$

où nA_x , nA_y , nA_t sont les nombres de nœuds correspondants en espace x , y et en temps t qui sont utilisés pour la simulation avec la MEF.

$T^{PGD^{(ip)}}$ est l'interpolation linéaire de la solution PGD connue sur le maillage PGD sur le maillage Eléments Finis Abaqus™.

La solution de référence T^{MEF} est la solution "convergée" Abaqus™ qui a été obtenue sur un maillage régulier $101 \times 101 \times 1001$ (x , y et t).

Comme pour la source précédente, nous allons tout d'abord regarder la solution obtenue avec un maillage régulier en temps et en espace de $101 \times 101 \times 201$ points pour x , y et t respectivement. Le critère d'arrêt de la PGD s'appuie sur un taux de réduction du résidu $\varepsilon_{RV} = 95\%$.

La solution PGD est obtenue avec 5 modes et des coefficients $\alpha = [801.23, 7.40, 0.42, 3.34, 5.66]$. Les modes \mathbf{F}^i , \mathbf{G}^i et \mathbf{H}^i sont représentés FIG. B.I-5. On voit que la valeur du coefficient du premier mode est prépondérante. Même si les coefficients ne font pas que décroître, le résidu décroît selon le nombre de modes de la façon suivante $RV = [21.94, 3.20, 1.24, 0.93, 0.62, 0.41]$. La chute du résidu est beaucoup plus marquée avec l'ajout du premier mode par rapport à l'ajout des suivants.

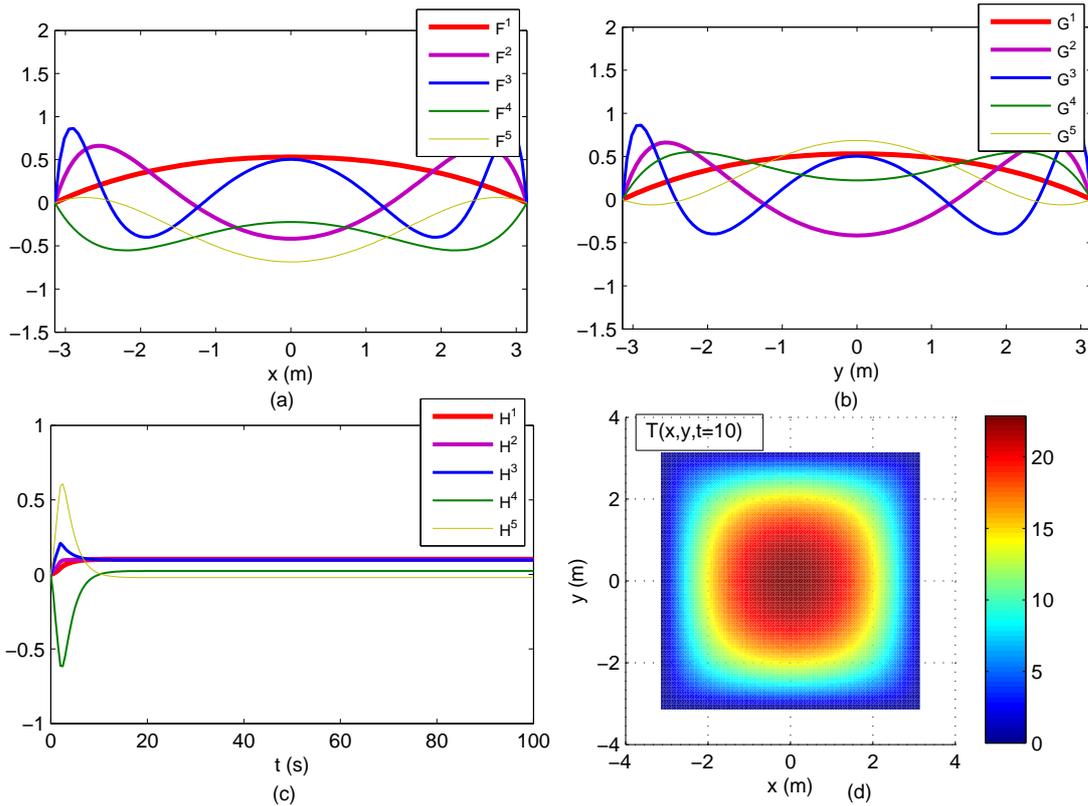


FIG. B.I-5 Modes spatiaux (selon x, y) et temporels (selon t). Distribution spatiale de la température au temps $t = 10$

L'écart entre la solution PGD avec 5 modes et la solution AbaqusTM (E_{MEF}) est de 0.0036.

Sur la FIG. B.I-6 (à gauche) sont représentées les solutions obtenues avec la PGD et la MEF en fonction du temps pour un point de l'espace $(x,y)=(0,0)$. Les deux courbes se superposent et la solution présente un régime permanent pour t supérieur à 20s. La FIG. B.I-6 (à droite) montre l'écart de deux solutions à l'instant $t=10$ s en fonction de l'espace. L'écart est très faible et atteint son maximum au centre où la température est plus élevée.

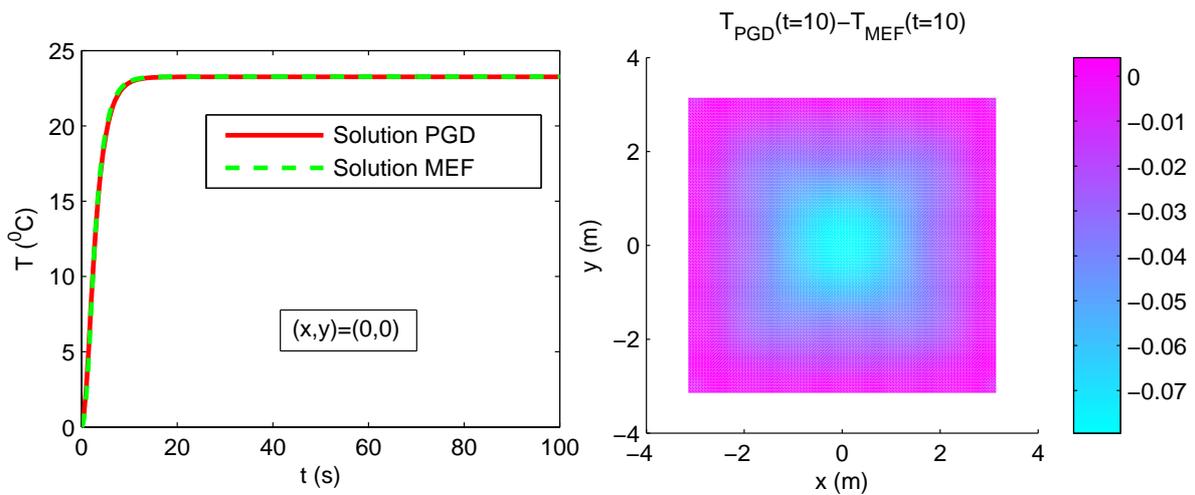


FIG. B.I-6 Evolution de la température en fonction du temps au point $(x,y)=(0,0)$ pour la solution PGD et pour la solution MEF (gauche) et écart entre deux solutions à $t=10$ (droite)

Remarques concernant le temps caractéristique.

L'équation de la chaleur fait apparaître un temps caractéristique lié au rapport $\rho C / \lambda_T$ que nous noterons par abus de notation τ . Nous allons étudier l'influence du temps caractéristique sur la solution en comparant l'évolution de la température en fonction du temps au point $(x,y)=(0,0)$ pour différentes valeurs de τ . Pour modifier ce temps caractéristique, nous allons faire varier ρC en fixant λ_T à 1 ou encore faire varier λ_T en fixant ρC à 1. Les résultats obtenus sont donnés **FIG. B.I-7** et **FIG. B.I-8** respectivement.

Sur la figure **FIG. B.I-7**, on voit qu'avec un temps caractéristique très petit, l'évolution de la température est quasi-identique à celle de la source. En effet, cela revient à considérer que la diffusion de la chaleur est quasi-instantanée. En revanche, plus le temps caractéristique augmente, plus la température évolue lentement. Dans ce cas, son régime transitoire augmente.

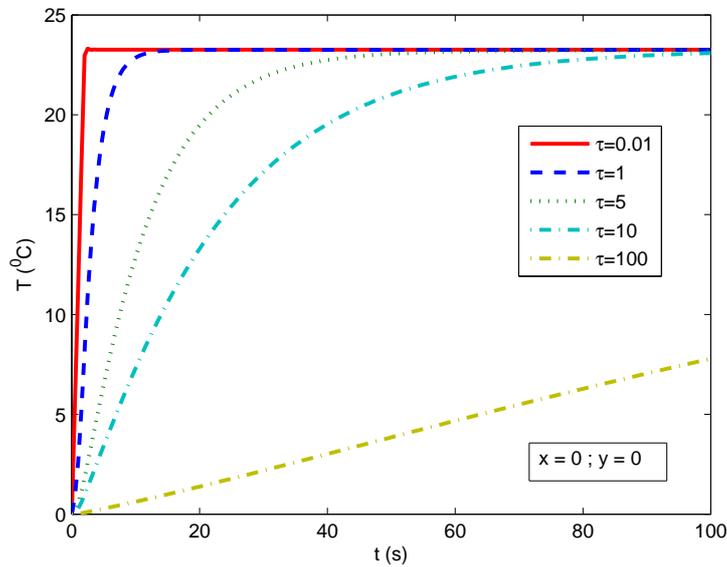


FIG. B.I-7 Evolution de la température en fonction du temps au point $(x,y)=(0,0)$ pour différentes valeurs de τ ($\lambda_T = 1$ fixé)

Si maintenant, on fixe la valeur de ρC et on modifie la valeur de λ , l'amplitude de la source change elle aussi. Dans ce cas, on voit **FIG. B.I-8** que pour une valeur de τ fixé, seule l'amplitude de la zone transitoire est modifiée. Ainsi, le nombre de modes pour décrire la solution est le même que dans le cas où λ_T est fixé. Néanmoins, les coefficients des modes sont modifiés.

Dans la suite de cette thèse, pour étudier l'influence du temps caractéristique, on se placera toujours à λ fixé et égal à 1.

En résumé, la PGD est robuste pour prendre en compte la réponse transitoire pour 4 décades de temps (de τ égal 0.01 à τ égal 100).

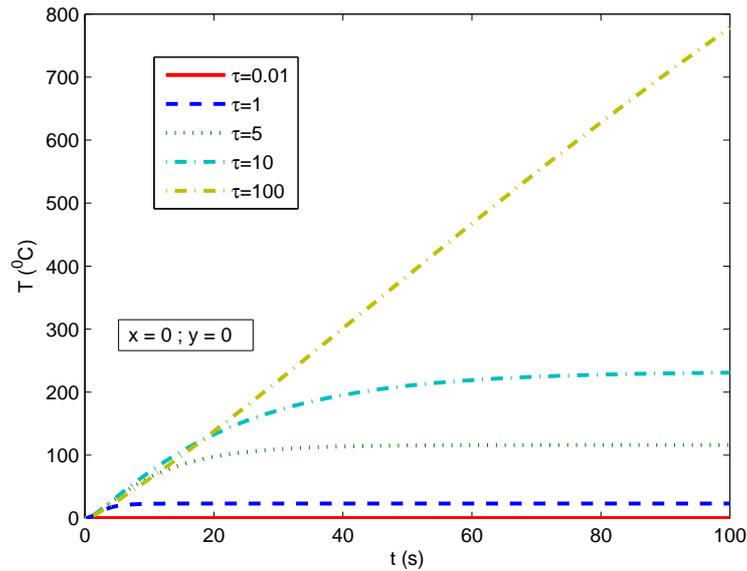


FIG. B.I-8 Evolution de la température au point $(x,y)=(0,0)$ en fonction du temps pour différentes valeurs de τ ($\rho C = 1$ fixé)

B.I.2.3 Simulation avec une source de chaleur de type impulsionnelle

Une source de chaleur de type impulsionnelle est choisie. Elle est composée de deux cycles (un cycle = montée-palier-descente) comme le montre la figure ci-après.

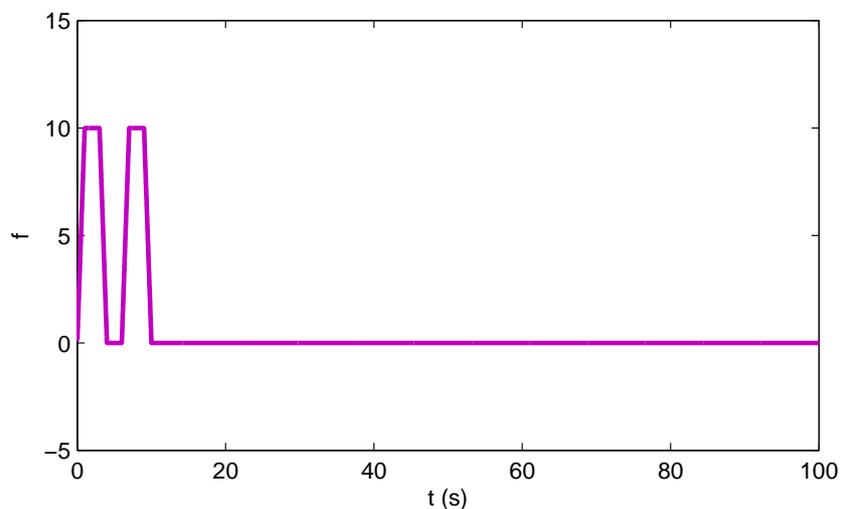


FIG. B.I-9 Source de type impulsionnelle

Pour cette source, le domaine temporel choisi est $\Omega_t = [0; 100]$ (s) comme celui de la source de type échelon.

Cette situation est utilisée dans le but d'obtenir une solution avec plusieurs zones transitoires. Pour décrire correctement cette source, un maillage irrégulier de 9 points est nécessaire. La qualité de la solution est quantifiée avec l'écart par rapport à une solution "convergée" AbaqusTM (Eq. (B.I-55)). Pour cette source, la solution "convergée" AbaqusTM notée T^{MEF} est obtenue sur un maillage régulier $101 \times 101 \times 1001$ points (en x , y et t).

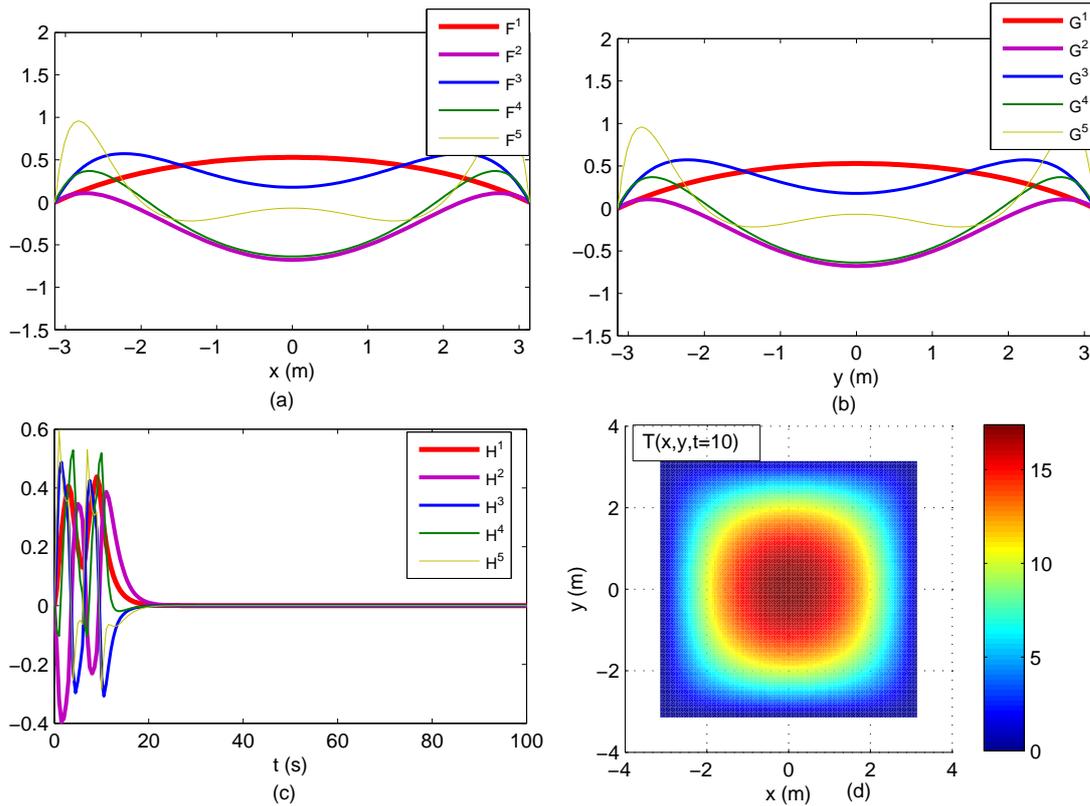


FIG. B.I-10 Modes spatiaux et temporels et distribution spatiale de la température au temps t égal à 10

La FIG. B.I-10 montre la solution PGD obtenue avec un maillage régulier en espace et en temps de $101 \times 101 \times 201$ points. Le critère d'arrêt de la PGD s'appuie sur un taux de réduction du résidu $\varepsilon_{RV} = 95\%$. La solution PGD est obtenue avec 5 modes et des coefficients $\alpha = [173.4875, 7.9641, 7.7346, 1.7604, 0.2583]$. L'évolution du résidu selon le nombre de modes est : $RV = [6.29, 2.14, 1.76, 1.08, 0.92, 0.85]$.

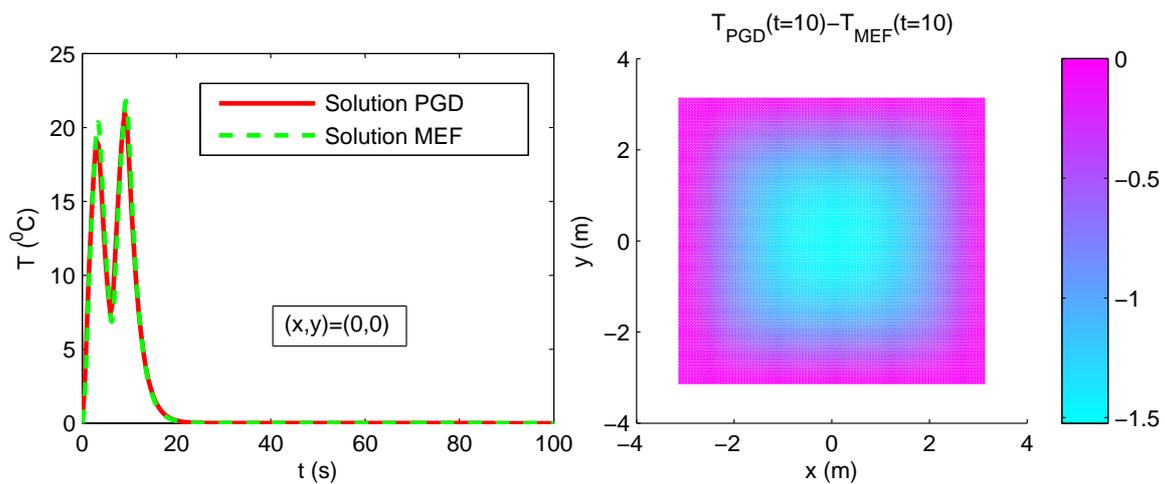


FIG. B.I-11 Evolution de la température en fonction du temps au point $(x,y)=(0,0)$ pour la solution PGD et la solution MEF (gauche) et écart entre deux solutions à $t=10$ en fonction de l'espace (droite)

Sur la **FIG. B.I-11** (à gauche) sont représentées les solutions obtenues avec la PGD et avec Abaqus™ en fonction du temps pour un point de l'espace. Les courbes se superposent parfaitement dans la zone stationnaire ($t = [20 ; 100]$). Par contre, il y a un écart dans la zone transitoire. L'écart PGD-MEF noté E_{MEF} est de 0.0643. La **FIG. B.I-11** (à droite) montre l'écart entre deux solutions à l'instant t égal 10. On voit que la valeur de l'écart est assez importante. Un maillage temporel régulier de 201 points ne suffit donc pas pour décrire précisément la solution, alors que, précédemment avec la source de type échelon, ce nombre de points suffisait. Cela est lié au fait que la solution présente de plus fortes variations.

Notons que la solution présente deux zones transitoires comme la source mais sa zone transitoire est plus étendue (environ 20 (s)) que celle de la source (10 (s)).

Remarques concernant la convergence de la méthode.

Nous allons discuter maintenant la convergence de la méthode PGD en fonction du maillage initial et du seuil pour le critère d'arrêt.

Sur la **FIG. B.I-12** est représentée l'évolution du résidu RV pour différents maillages temporels en fonction du nombre de modes PGD. Les maillages temporels choisis sont réguliers et permettent tous de décrire correctement la source. On conserve le même maillage spatial que précédemment 101x101 points

Notons que la valeur du résidu RV dépend à la fois du maillage considéré mais aussi du nombre de modes.

Selon la valeur du seuil ϵ_{RV} (Eq. (B.I-46)) souhaitée, le nombre de modes varie en fonction des maillages temporels. On voit que la convergence est différente sur chaque maillage. Le point de départ de chaque courbe correspondant au résidu avec 0 mode (RV^0). Remarquons que cette valeur varie selon le maillage considéré. Comme la source est bien décrite avec ces trois maillages, RV^0 diminue lorsque le maillage se densifie.

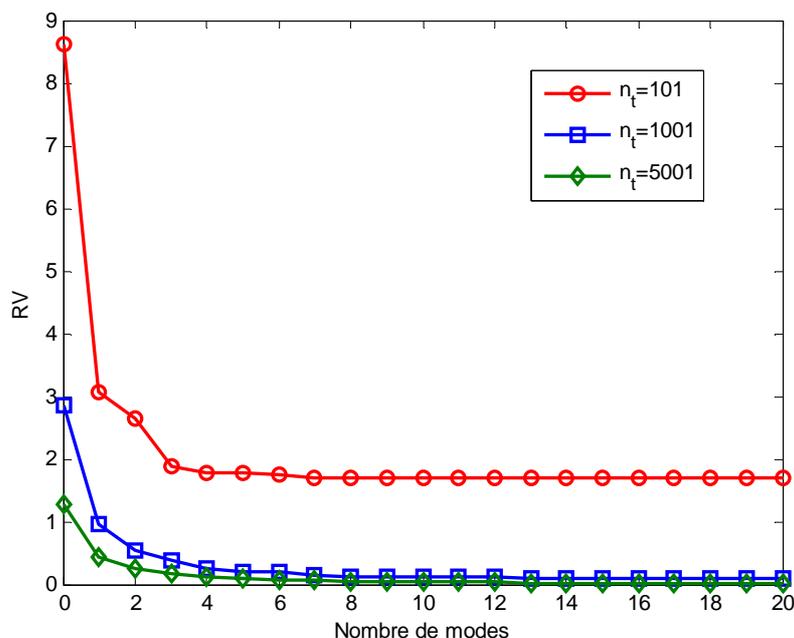


FIG. B.I-12 Evolution du résidu RV sur différents maillages temporels

De plus, on voit que le gradient des courbes est différent, par exemple au passage de 2 modes à 3 modes. Ainsi, avec une même valeur du seuil de réduction du résidu ε_{RV} (Eq. **(B.I-46)**), la solution PGD peut être obtenue avec différents nombres de modes sur différents maillages.

Dans le tableau **TAB. B.I-5**, est présenté le nombre de modes en fonction du nombre de points du maillage temporel et de la valeur du taux de réduction du résidu ε_{RV} choisi. On voit que sur un maillage plus fin, le nombre de modes peut être plus faible pour atteindre un même seuil. Par exemple avec ε_{RV} égale à 95%, on obtient 5 modes avec le maillage de 5001 points au lieu 8 modes avec le maillage de 1001 points.

Même sur un maillage plus fin, il est envisageable qu'une solution contenant moins de modes soit beaucoup moins précise. Ce point sera discuté dans la partie suivante lors d'un procédé de maillage adaptatif.

ε_{RV}	$n_t=101$	$n_t=1001$	$n_t=5001$	$n_t=10001$	$n_t=50001$
95%	4	8	5	5	5
97%	4	8	8	5	5
99%	4	8	8	8	11
100%	4	8	8	28	11

TAB. B.I-5 Nombre de modes obtenu pour différents maillages en fonction des valeurs de ε_{RV}

Nous retiendrons que pour atteindre un certain niveau de précision sur la solution, on peut soit densifier le maillage soit ajouter des modes.

B.I.2.4 Simulation avec la minimisation du résidu

Avant de conclure cette section, nous allons présenter un cas de simulation pour lequel la minimisation du résidu doit être appliquée.

Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho C = 1000$, $\lambda_T = 1$ et la source de type échelon. Le maillage utilisé est de $1001 \times 1001 \times 10001$ pour x , y et t . Le taux de réduction ε_{RV} est de 100% pour le cas sans minimisation du résidu. La solution est obtenue avec 15 modes.

Dans le tableau ci-après sont reportés, pour ces 15 modes, les résultats obtenus dans le cas sans minimisation du résidu et le cas avec minimisation du résidu. Pour ces 15 enrichissements, le nombre de sous itérations de la méthode de point fixe à directions alternées et la valeur du résidu sont donnés.

On voit que dans le cas sans minimisation du résidu, le nombre de sous itérations maximal (rappelons l_{\max} égal 100) est atteint pour plusieurs étapes d'enrichissements. C'est ce que nous avons appelé non convergence. Ce sont les cas où 100 sous itérations ne suffisent pas pour atteindre la précision $\varepsilon_{\text{fixe}}$ de 10^{-4} (**(B.I-37)**). En effet, pour ces modes, seule une précision de 10^{-3} est atteinte.

Par contre, dans le cas avec la minimisation du résidu, chaque mode est obtenu avec la précision souhaitée. Notons qu'à partir de l'enrichissement 6, le nombre de sous itérations est très petit.

La valeur du résidu diminue plus rapidement lorsque la minimisation du résidu est utilisée. Pour 15 modes, la minimisation du résidu permet d'obtenir une valeur de résidu plus faible (1,4 fois) alors que pour 4 modes, elle est à peine plus faible (0.4 fois).

Étape d'enrichissement	Sans minimisation du résidu		Avec minimisation du résidu	
	Nombre de sous-itérations	Résidu	Nombre de sous-itérations	Résidu
0		0.3134		0.3134
1	4	0.0430	8	0.0419
2	6	0.0350	10	0.0291
3	5	0.0322	9	0.0164
4	7	0.0310	5	0.0133
5	100	0.0307	2	0.0125
6	100	0.0278	11	0.0098
7	100	0.0262	2	0.0096
8	100	0.0240	2	0.0093
9	100	0.0198	2	0.0091
10	8	0.0194	2	0.0089
11	100	0.0189	2	0.0088
12	100	0.0185	2	0.0087
13	5	0.0136	2	0.0086
14	100	0.0126	2	0.0085
15	100	0.0125	2	0.0085

TAB. B.I-6 Comparaison des résultats obtenus sans et avec minimisation du résidu

Nous noterons néanmoins que le résidu diminue même dans les cas de non convergence. Néanmoins, le nombre de modes pour atteindre une certaine valeur du résidu sera plus élevé. On parle ainsi de convergence lente. Dans ce cas, la minimisation du résidu semble être une solution efficace.

Toutefois, la formulation avec la minimisation du résidu nécessite un coût de calcul plus important [Ladeveze 2011, Nouy 2010a]. En effet, le calcul des composants de $A^T A$ et $A^T B$ (**B.I-54**) peut être très coûteux lorsque le nombre d'opérateurs augmente. De plus, Chinesta [Chinesta 2010a] remarque que, dans certains cas, la minimisation du résidu peut générer beaucoup plus de fonctions de base que la solution exacte.

Dans le cadre de cette thèse, compte tenu des valeurs des paramètres matériaux utilisés, nous utiliserons la méthode sans minimisation du résidu.

Conclusion de la section

Dans cette section, la résolution de l'équation de la chaleur transitoire 2D a été présentée. Cette résolution est issue des travaux de [Ammar 2007] pour lesquels la PGD était appliquée uniquement à des discrétisations régulières en temps.

Nous avons étendu ici l'application de la PGD à des discrétisations irrégulières en modifiant la matrice temporelle pour conserver la consistance du schéma d'intégration temporel.

Nous avons mis en évidence l'intérêt d'utiliser la minimisation du résidu pour certaines valeurs des paramètres matériaux. Néanmoins, dans la suite de la thèse, nous utiliserons la formulation sans minimisation du résidu.

L'implémentation numérique a été validée pour trois sources différentes par comparaison avec soit une solution analytique soit une solution EF AbaqusTM "convergée". De plus, en étudiant ces sources pour lesquelles les réponses transitoires étaient différentes, nous avons vu que la PGD permettait de capter précisément la solution en fonction du maillage considéré et du nombre de modes. Pour améliorer la solution, il est donc possible de jouer sur les deux paramètres : densifier le maillage et augmenter le nombre de modes (ce qui revient à diminuer le résidu du critère d'arrêt PGD). Néanmoins ces deux paramètres sont liés.

De plus, nous avons vu qu'il n'était pas suffisant de densifier le maillage. Les points doivent être positionnés dans les zones de forts gradients sinon cela ne permet pas d'améliorer la solution.

De plus, selon le temps caractéristique considéré (lié au rapport $\rho C / \lambda_T$) et la source choisie, les zones transitoires peuvent évoluer fortement et nous ne pouvons pas les connaître *a priori*. Il n'est donc pas possible de choisir un maillage adapté de manière *a priori*.

Cela met en évidence la nécessité de coupler une technique de maillage adaptatif à la PGD. L'objectif d'une telle technique serait de déterminer automatiquement les zones transitoires et minimiser le nombre de points dans le maillage pour une précision donnée de la solution. Grâce à la séparation de variables liée à la PGD, nous pouvons considérer seulement des maillages unidimensionnels ce qui facilite le procédé de maillage adaptatif et rend cette idée viable. Dans cette thèse, la technique de maillage adaptatif sera développée et appliquée à la variable temporelle t . Nous présentons dans la section qui suit comment coupler une technique de maillage adaptatif à la PGD.

B.II Maillage adaptatif pour la résolution d'un problème transitoire avec la PGD

Dans cette section, une méthode de maillage adaptatif permettant de capturer de manière automatique les transitoires de la solution lorsque celle-ci est recherchée avec la PGD est introduite. Nous regroupons ici sous le terme de technique de maillage adaptatif l'estimateur d'erreur *a posteriori* et la procédure d'adaptation du maillage. Nous allons tout d'abord présenter la technique de maillage adaptatif puis nous proposerons différentes stratégies de couplage PGD/technique de maillage adaptatif. Les résultats obtenus pour les 3 sources de chaleur présentées précédemment seront discutés en fonction des stratégies de couplage considérées.

B.II.1 Présentation de la technique de maillage adaptatif

L'estimateur d'erreur *a posteriori*

L'estimateur d'erreur est un outil intéressant pour identifier dans quelles zones il est nécessaire de raffiner le maillage. Rappelons que la solution du problème est recherchée avec la PGD, cela nous permet donc de considérer un estimateur d'erreur unidimensionnel. Nous proposons ici un estimateur local simple, relatif au résidu au sens faible. L'estimateur est présenté ici pour la variable temporelle t . Ce même estimateur pourrait être utilisé pour la variable x ou encore la variable y .

Il paraît important de rappeler que notre objectif premier est de capter "automatiquement" les réponses transitoires du problème et d'évaluer ce couplage entre la PGD et la méthode de maillage adaptatif. L'objectif n'est pas ici de discuter du choix de l'estimateur. D'autres estimateurs auraient pu être utilisés [Ladeveze 2011, Ammar 2010c], mais nous avons choisi une position plus pragmatique dans le contexte général de ce travail.

L'estimateur utilisé dans cette thèse est lié au résidu RV (Eq. (B.I-45)). Néanmoins, au lieu d'être global (c'est-à-dire calculé sur tout le domaine), il est local puisqu'il est calculé pour chaque élément temporel.

Lorsque la solution PGD est décrite avec $k + 1$ modes, le résidu local relatif à l'élément temporel m ($\delta_m = [t_m ; t_{m+1}]$) s'écrit :

$$\begin{aligned} Res_m^{k+1} &= \mathbf{B}_m - \mathbf{A}_m \mathbf{T}_m \\ &= \sum_{i=1}^{n_f} b^i \mathbf{B}_x^i \otimes \mathbf{B}_y^i \otimes (\mathbf{B}_t^i)_m - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{k+1} a^i \alpha^j (A_x^i \mathbf{F}^j \otimes A_y^i \mathbf{G}^j \otimes (A_t^i)_m (\mathbf{H}^j)_m) \end{aligned} \quad (\text{B.II-1})$$

où les composants temporels locaux de \mathbf{A}_m et \mathbf{B}_m s'écrivent:

$$\left\{ \begin{aligned} (A_t^1)_m &= \int_{\delta_m} LL^T dt ; (A_t^2)_m = \int_{\delta_m} LL^T dt ; (A_t^3)_m = \int_{\delta_m} LdL^T dt \\ (\mathbf{B}_t^i)_m &= \left(\int_{\delta_m} LL_f^T dt \right) (\mathbf{f}_t^i)_m \quad (1 \leq i \leq n_f) \end{aligned} \right. \quad (\text{B.II-2})$$

avec $(\mathbf{H}^j)_m$ ($1 \leq j \leq k + 1$) et $(\mathbf{f}_t^i)_m$ ($1 \leq i \leq n_f$) les valeurs nodales des modes temporels et des composants temporels de la source dans l'élément m .

L'estimateur résidu local qui sera noté par la suite RL_m^{k+1} est déterminé pour chaque élément temporel m en calculant la norme euclidienne de Res_m^{k+1} .

Notons que, pour chaque élément temporel, cet estimateur prend en compte les erreurs spatiales de manière globale (et non locale comme pour le temps) puisque l'on intègre sur l'ensemble du domaine spatial (x et y).

Notations utilisées dans la suite de la thèse :

Par la suite, pour alléger les notations, nous noterons ce résidu RL_m mais nous garderons en mémoire qu'il diffère selon le nombre de modes PGD. Le résidu local RL regroupe l'ensemble de tous les résidus locaux temporels RL_m .

La procédure d'adaptation du maillage

A partir de la distribution du résidu local RL en fonction du temps, le maillage temporel est raffiné. Dans le cadre de cette thèse, on utilise la h-adaptation, qui consiste à raffiner le maillage en ajoutant des points.

Pour un maillage fixé, des points sont ajoutés dans l'élément m si le critère suivant est vérifié :

$$RL_m \geq \varepsilon_{RL} \times RL_{max} \quad (\text{B.II-3})$$

où RL_{max} est la valeur maximale du résidu local RL sur ce maillage et ε_{RL} est un taux fixé par l'utilisateur.

Tous les éléments sont passés en revue à chaque procédure d'adaptation de maillage.

Par souci de simplicité, dans la suite, un seul point est ajouté au centre de l'élément satisfaisant le critère **(B.II-3)**. Il pourrait être intéressant de discuter le nombre et le lieu des points mais ce n'est l'objet de cette thèse comme nous l'avons déjà précisé.

B.II.2 Stratégies de couplage PGD / technique de maillage adaptatif

Dans cette partie, deux stratégies distinctes de couplage entre la PGD et la technique de maillage adaptatif (notée RPGD) sont présentées. La première stratégie consiste à séparer ces deux méthodes alors que la deuxième stratégie consiste à inclure la technique de maillage adaptatif à l'intérieur des itérations PGD.

B.II.2.1 RPGD_S1 (tous les modes sont recalculés)

La première stratégie notée RPGD_S1 consiste à recalculer entièrement la solution à partir de la solution nulle sur chaque nouveau maillage. Précisons ce que cela signifie.

Tout d'abord, la solution PGD est calculée sur le maillage initial pour un taux de réduction ε_{RV} (Eq. **(B.I-46)**) fixé par l'utilisateur. Supposons que la solution est obtenue avec n^0 fonctions de base (et les coefficients associés). Le résidu est ensuite calculé. Rappelons qu'il est lié au maillage et au nombre de modes.

Si le seuil souhaité n'est pas atteint par le résidu, un nouveau maillage est créé à l'aide de la technique de maillage adaptatif. Sur ce nouveau maillage M_i , la solution PGD est calculée à partir de la solution nulle c'est-à-dire les fonctions de base sont enrichies à partir de la solution nulle. Supposons que celle-ci est obtenue avec n^i modes, le processus de maillage adaptatif est répété jusqu'au moment où le résidu est suffisamment petit.

Nous noterons le nombre total de modes (qui est le nombre total de modes cumulé et est distinct du nombre de modes sur un maillage donné) :

$$n^{RPGD_S1} = \sum_{i=0}^k n^i \quad (\text{B.II-4})$$

où k est le nombre de raffinement de maillage.

Le nombre d'étapes de maillage adaptatif est donc égal à $k + 1$.

L'algorithme de cette stratégie est décrit ci-dessous :

1 :	$i = 0$
2 :	Maillage initial M_0 :
3 :	Calcul de la solution PGD de (n^0 modes)
4 :	<i>tant que (Critère d'arrêt n'est pas satisfait)</i>
5 :	Calcul de la distribution de l'estimateur RL
6 :	Ajout des points
7 :	$i = i + 1$
8 :	Maillage M_i :
9 :	Calcul de la solution PGD à partir de la solution nulle (n^i modes)
10 :	<i>fin tant que</i>

TAB. B.II-1 Algorithme de la stratégie RPGD_S1

Remarque. La méthode PGD regroupe les étapes 3 et 9 (cf. **TAB. B.I-4**) et la technique de maillage adaptatif regroupe les étapes 5 à 8, avec étape 5, le calcul de l'estimateur d'erreur et, étape 6 à 8, la procédure d'adaptation de maillage.

B.II.2.2 RPGD_S2 (certains modes sont conservés)

La deuxième stratégie consiste à enrichir la solution PGD pour chaque nouveau maillage à partir des modes obtenus sur le précédent maillage. Pour chaque nouveau maillage, les modes précédents sont réutilisés pour déterminer les nouveaux modes. Il est donc nécessaire de les projeter sur le nouveau maillage, les normaliser et recalculer les coefficients α . De nouveaux modes sont ensuite calculés.

L'algorithme de cette stratégie est décrit ci-dessous:

1 :	$i = 0$
2 :	Maillage initial M_0 :
3 :	Calcul de la solution PGD (n^0 modes)
4 :	<i>tant que (Critère d'arrêt n'est pas satisfait)</i>
5 :	Calcul de la distribution de l'estimateur RL
6 :	Ajout des points
7 :	$i = i + 1$
8 :	Maillage M_i :
9 :	Interpolation des modes obtenus
10 :	Normalisation des modes interpolés
11 :	Calcul à nouveau des coefficients α
12 :	Calcul de la solution PGD à partir des modes obtenus (n^i modes ajoutés)
13 :	<i>fin tant que</i>

TAB. B.II-2 Algorithme de la stratégie 2

Remarque. La principale différence avec la stratégie RPGD_S1 est dans les étapes 9 à 11. A l'étape 9, l'interpolation utilisée pour projeter les anciens modes vers le nouveau maillage est l'interpolation linéaire.

A l'étape 12, deux variantes sont étudiées :

- variante 1 notée "RPGD_S21" où $n^i = 1$ c'est-à-dire 1 seul mode est calculé sur chaque maillage,
- variante 2 notée "RPGD_S22" où n^i est fixé par le taux de réduction ε_{RV} . Dans ce cas, plusieurs modes peuvent être enrichis sur chaque nouveau maillage.

B.II.2.3 Discussion

Pour atteindre une certaine précision de la solution, nous avons vu qu'il était possible soit de densifier le maillage soit d'augmenter le nombre de modes. Selon les stratégies de couplage considérées, l'une ou l'autre de ces façons est privilégiée.

Avec la stratégie 1, on choisit de densifier le maillage, et de recalculer tous les modes à chaque étape de maillage adaptatif. Cela permet donc d'avoir un nombre de modes "optimal".

Dans le cas de la stratégie 2, on choisit d'augmenter le nombre de modes en conservant les modes calculés précédemment. La variante 2 où plusieurs modes sont ajoutés à chaque étape permet d'améliorer la solution en privilégiant l'ajout des modes. La variante 1 a pour but d'améliorer la solution en combinant les deux stratégies : le maillage est densifié et un mode est ajouté sur chaque maillage.

Dans la suite, une évaluation de ces différentes stratégies est présentée.

B.II.3 Résultats

La technique de maillage adaptatif est appliquée ici aux trois sources de chaleur présentées à la section précédente B.I.1 afin de tester la technique pour différentes réponses transitoires.

Rappelons avant de présenter les résultats, les différents paramètres à renseigner pour les simulations.

Comme dans la section précédente, les paramètres de simulation ρ , C et λ_T sont pris égaux à 1 (cf. Eq. (B.I-1)) et la discrétisation spatiale est fixée à 101x101 points.

Le paramètre relatif à la résolution PGD sur chaque maillage est le taux de réduction ε_{RV} (Eq.(B.I-46)) qui est pris égal à 95%.

Les paramètres relatifs à la technique de maillage adaptatif sont :

- le maillage initial,
- la valeur du seuil d'ajout de points, ε_{RL} (Eq. (B.II-3)), est choisie égale à 75%.

Les paramètres relatifs à la stratégie de couplage sont :

- la stratégie 1 ou 2,
- le critère d'arrêt s'appuie sur une valeur fixée du résidu RV .

Pour chaque source de chaleur, les résultats sont discutés en fonction de la stratégie de couplage PGD / technique maillage adaptatif utilisée.

B.II.3.1 Source bimodale

Les simulations avec la source de chaleur bimodale sont effectuées avec un maillage initial temporel régulier constitué de 11 points (soit un intervalle de temps de 1 (s)). La valeur du seuil de résidu RV pour l'arrêt de la procédure est choisie égale à 10^{-3} .

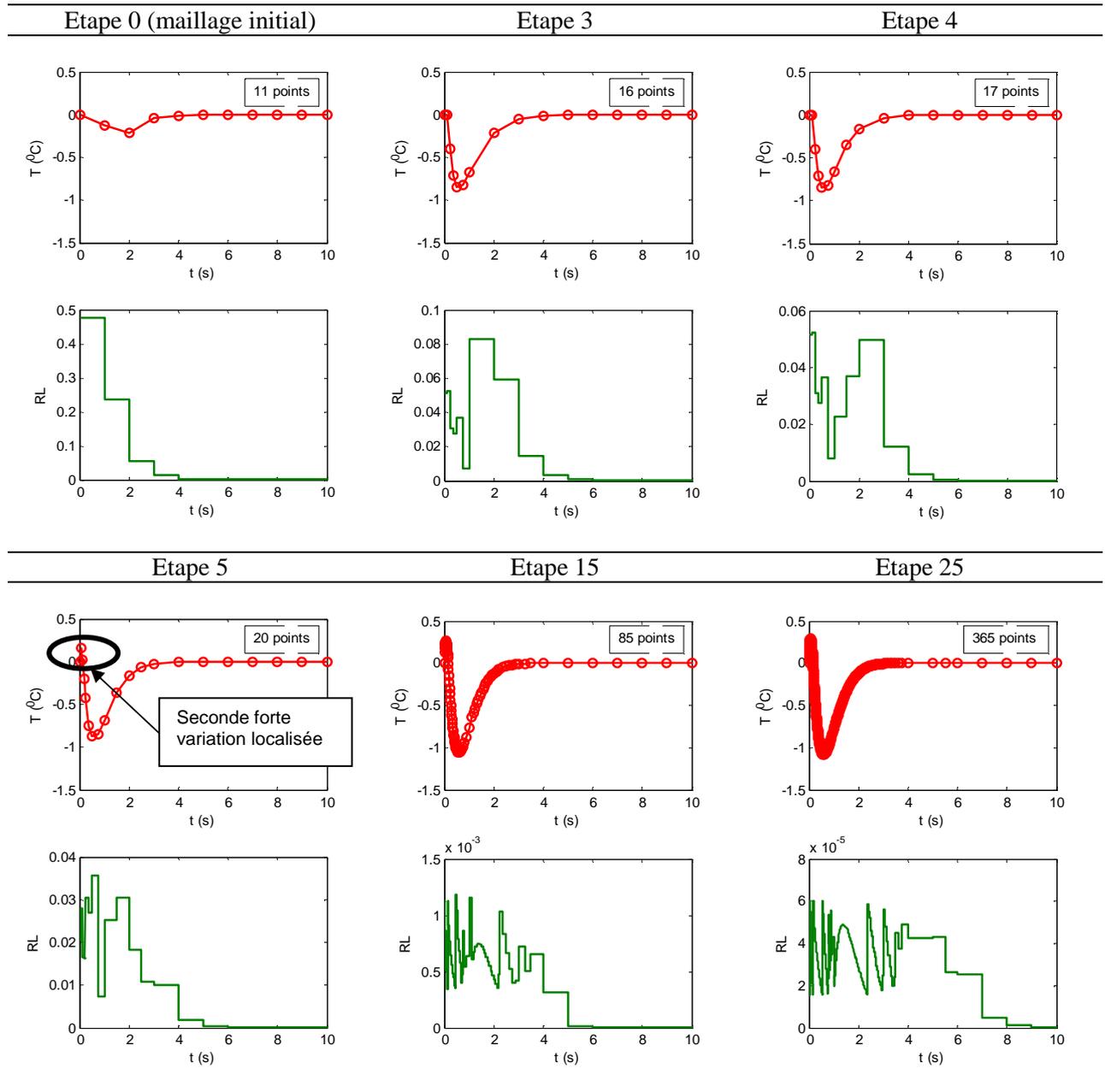
a) Résultats dans le cas RPGD_S1

Pour cette simulation, le seuil du résidu est atteint après 26 étapes de maillage adaptatif. Chaque étape nécessite au maximum deux modes (Eq. (B.I-2) avec $n = 2$) pour décrire la solution PGD.

L'évolution de la température et celle de l'estimateur RL en fonction du temps sont représentées TAB. B.II-3. La température a été représentée au point $(-2.51, 0.62)$ de l'espace car ce point permet d'obtenir une illustration représentative des capacités de l'algorithme. En effet, en ce point, la température présente deux zones transitoires rapprochées (cf. FIG. B.I-2). Par souci de clarté, seulement les étapes de maillage adaptatif numéro 0 ; 3 ; 4 ; 5 ; 15 ; 25 sont représentées.

De l'étape 0 à l'étape 4, la position du premier transitoire est captée de plus en plus précisément. A l'étape 5, une seconde forte variation localisée est détectée automatiquement (au point t égal à 0.06 (s)). Ensuite, la description de ces deux zones est précisée au cours des étapes de maillage. Rappelons que la solution analytique exacte (Eq. (B.I-53)) possède deux zones transitoires qui ont bien été captées par cet estimateur alors qu'avec le maillage initial (contenant seulement 11 points) seule une zone avait été repérée (Etape 0 - TAB. B.II-3). Ce résultat montre la capacité du procédé à capter de manière automatique les parties transitoires.

Notons aussi que la valeur des résidus locaux diminue au cours du procédé de maillage adaptatif. Pour capter la seconde variation (étape 5), on voit que le résidu à l'étape 4 présente un pic pour des valeurs très proches de 0 mais l'intensité de ce pic reste inférieure à celle des pics de l'étape précédente.



TAB. B.II-3 Etape du procédé de maillage adaptatif i ($i = 0, 3, 4, 5, 15, 25$)

La FIG. B.II-1 illustre la convergence globale de la solution au cours des étapes de maillage adaptatif en regard des deux résidus suivants : l'écart par rapport à la solution exacte NRE (Eq. (B.I-54)) (à gauche) et le résidu RV (Eq. (B.I-45)) (à droite). On voit que ces résidus diminuent après chaque étape de la même manière. La prédiction de la solution est donc bien améliorée lorsque le maillage est raffiné. Entre l'étape 0 et 6, les deux zones transitoires ont été captées, cela se traduit par une forte diminution de NRE et RV . Ensuite ces deux résidus diminuent beaucoup plus lentement.

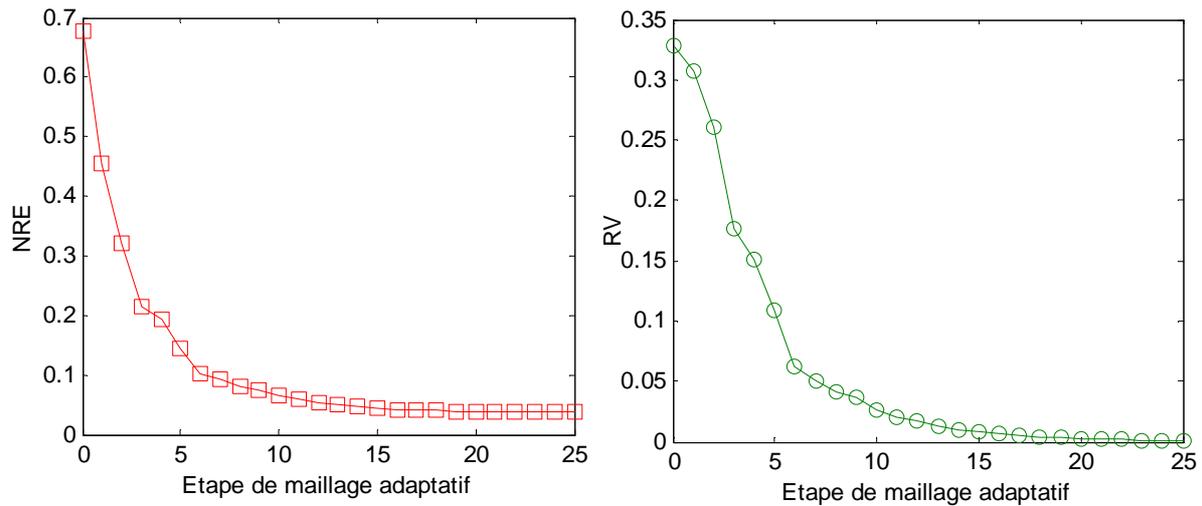


FIG. B.II-1 Evolution de l'erreur NRE (gauche) et du résidu RV (droite) en fonction de l'étape de maillage adaptatif pour la stratégie $RPGD_S1$

Comparons les résultats obtenus avec un maillage issu de la technique de maillage adaptatif que nous appellerons maillage raffiné et avec deux maillages réguliers. Les résultats sont reportés **TAB. B.II-4**. Le premier maillage régulier est le maillage noté 1 qui contient le même nombre de points que le maillage raffiné soit 365 points. Le second maillage noté 2 contient 10241 points. Son pas de temps correspond au pas minimum du maillage raffiné. L'erreur NRE est la même pour le maillage raffiné et le maillage 2 alors que le nombre de points est 28 fois moins important pour le maillage raffiné. Le maillage régulier 1 mène à une erreur 1.5 fois plus importante. Rappelons que le critère d'arrêt de la PGD est $\varepsilon_{RV} = 95\%$, ce qui mène à une solution avec deux modes. Même si on augmentait cette valeur seuil, le nombre de modes augmenterait mais l'erreur ne serait pas diminuée.

Le raffinement de maillage permet bien d'avoir un maillage optimum vis-à-vis du nombre de points pour une précision donnée sur la solution.

	Maillage raffiné	Maillage régulier 1	Maillage régulier 2
Nombre final de points pour le temps	365	365	10241
L'intervalle la plus faible	$9.76 \cdot 10^{-4}$	$2.75 \cdot 10^{-2}$	$9.76 \cdot 10^{-4}$
NRE	0.037	0.056	0.037

TAB. B.II-4 Comparaison entre les résultats obtenus pour le maillage raffiné et des maillages réguliers

Les résultats obtenus avec la technique de maillage adaptatif ont été présentés pour un point particulier de l'espace $(x, y) = (-2.51, 0.62)$ présentant deux zones transitoires pour lesquelles une telle densité de maillage était nécessaire. Sur la figure **FIG. B.II-2**, la solution obtenue avec ce maillage pour deux points particuliers de l'espace (le point $(x,y)=(-2.51,-2.51)$ (à gauche) et le point $(x,y)=(-1.57,-1.57)$ (à droite)) est présentée. On peut remarquer la présence d'une seule zone transitoire, qui est bien représentée avec ce maillage même si celui-ci semble trop dense. Ceci est dû au fait que la PGD consiste à rechercher la solution comme somme de produits de fonctions de chaque variable.

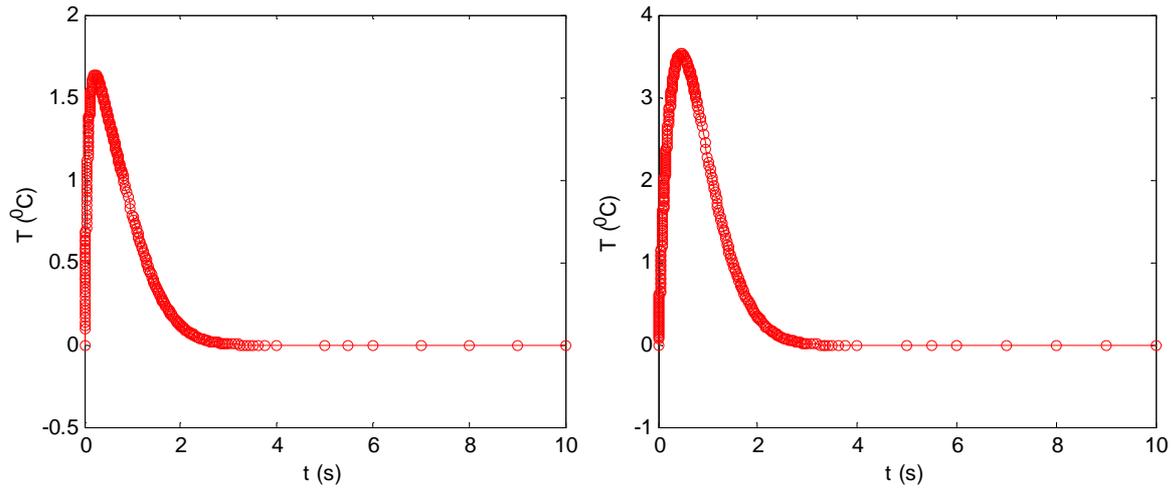


FIG. B.II-2 Evolution de la température au point $(x,y)=(-2.51,-2.51)$ (gauche) et $(x,y)=(-1.57,-1.57)$ (droite) en fonction du temps dans le cas RPGD_S1

Remarque. Un paramètre important de la technique de maillage adaptatif est la valeur du seuil ϵ_{RL} (Eq. (B.II-3)) qui donne l’endroit où les points sont ajoutés.

Etudions maintenant l’influence de ce paramètre par rapport à la solution et à la technique de maillage adaptatif. Le TAB. B.II-5 récapitule les résultats obtenus pour quatre valeurs différentes de ϵ_{RL} .

	Nombre d’étapes	Nombre de points du maillage final	Nombre total d’enrichissements
$\epsilon_{RL}=0.90$	53	334	106
$\epsilon_{RL}=0.75$	26	365	52
$\epsilon_{RL}=0.50$	14	382	28
$\epsilon_{RL}=0.25$	11	635	22

TAB. B.II-5 Influence de ϵ_{RL}

Ce résultat illustre bien la balance entre densifier le maillage / augmenter le nombre de modes pour améliorer la solution. Lorsque la valeur du seuil ϵ_{RL} est plus faible, le nombre d’étapes de maillage adaptatif est plus petit. Cela est dû au fait qu’à chaque étape, un plus grand nombre de points est ajouté. Nous voyons que lorsque ϵ_{RL} est plus faible, le nombre de points du maillage final est plus important. Comme nous l’avions déjà mentionné, cela se traduit par un nombre total de modes moins élevé. Pour ϵ_{RL} égal à 0.25, le nombre de points du maillage est doublé par rapport au cas 0.90 mais le nombre total de modes est diminué d’un facteur 5 comme le nombre d’étapes de maillage adaptatif.

Il faut donc trouver un compromis entre le nombre de modes, le nombre d’étapes de maillage adaptatif et le nombre de points. C’est la raison pour laquelle, dans la suite de cette thèse, nous prendrons ϵ_{RL} égale à 0.75.

b) Résultats dans le cas RPGD_S2

Nous présentons maintenant les résultats obtenus avec la deuxième stratégie de couplage PGD/ technique de maillage adaptatif (RPGD_S2). Dans cette stratégie, après chaque étape de maillage, la PGD est calculée à partir des anciens modes.

La **FIG. B.II-3** montre l'évolution de l'erreur NRE (à gauche) et du résidu RV (à droite) dans le cas de RPGD_S21 (1 seul mode à chaque étape de maillage adaptatif). Un résidu RV de 0.001 est obtenu au bout de 33 étapes de maillage adaptatif. L'écart et le résidu diminuent au cours des étapes de maillage adaptatif.

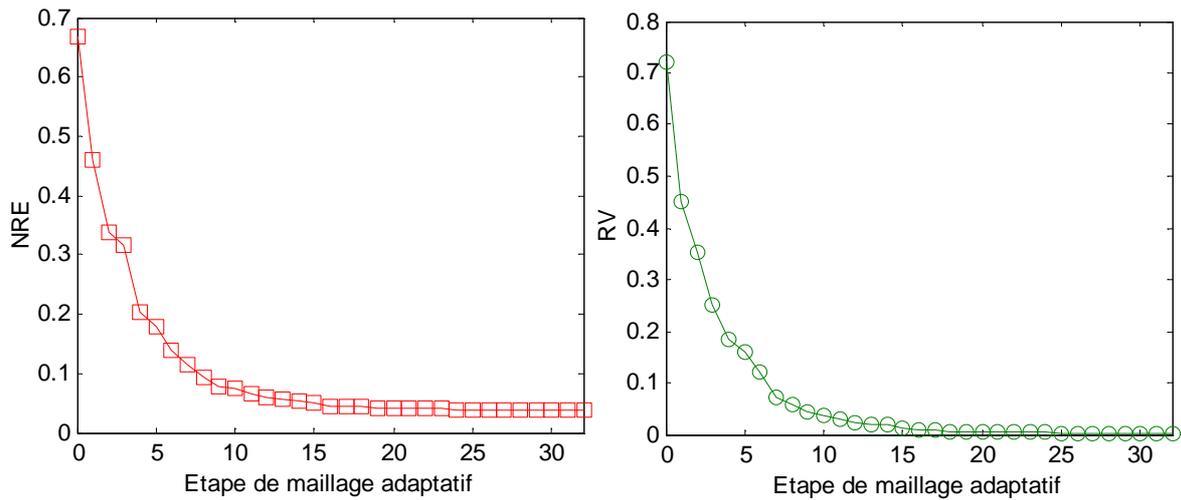


FIG. B.II-3 Evolution de NRE (gauche) et RV (droite) en fonction des étapes de maillage adaptatif dans le cas RPGD_S21

La **FIG. B.II-4** montre l'évolution de l'erreur NRE (à gauche) et du résidu RV (à droite) dans le cas de RPGD_S22 (plusieurs modes à chaque étape). Dans ce cas, le seuil du résidu RV est atteint après 31 étapes de maillage adaptatif.

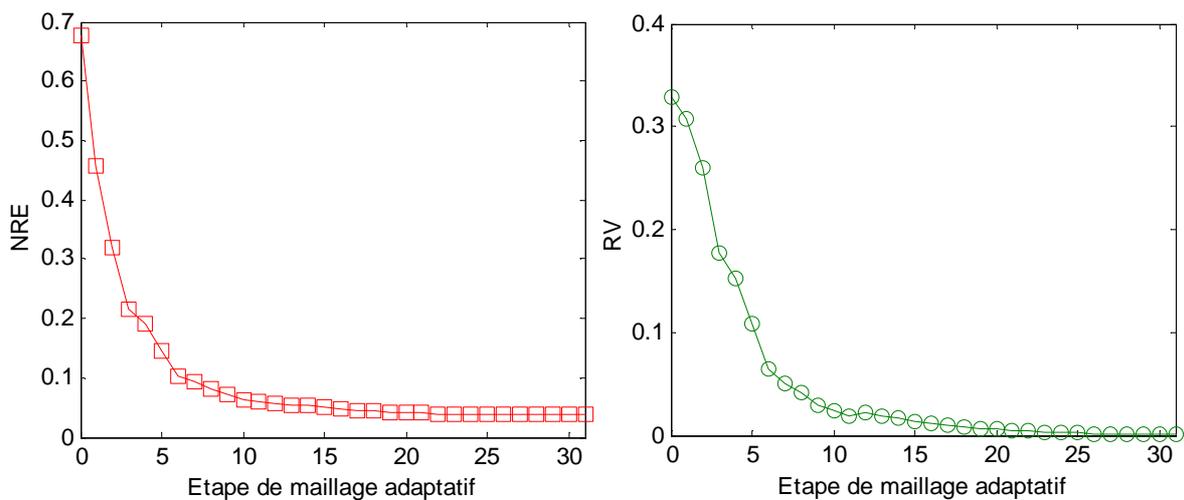


FIG. B.II-4 Evolution de NRE (gauche) et RV (droite) en fonction des étapes de maillage adaptatif dans le cas RPGD_S22

La **FIG. B.II-5** montre la solution obtenue sur le maillage final et sur le maillage initial dans le cas RPGD_S21 (à gauche) et RPGD_S22 (à droite).

Comme dans le cas RPGD_S1, les zones transitoires sont bien captées et les régimes permanents présentent peu de points.

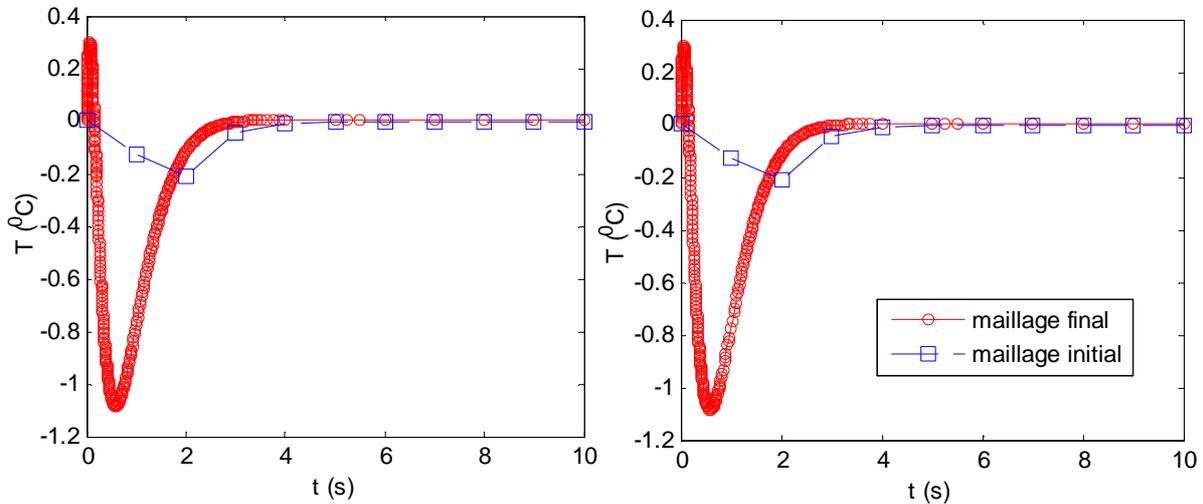


FIG. B.II-5 Evolution de la température au point $(x,y)=(-2.51,1.62)$ en fonction du temps dans le cas RPGD_S21 (gauche) et RPGD_S22 (droite) sur le maillage final

A titre de comparaison, les résultats obtenus avec les deux stratégies en terme de nombre d’enrichissements, nombre de points, nombre d’étapes sont répertoriés **TAB. B.II-6**. Dans le cas de la stratégie RPGD_S1, il est noté le nombre d’enrichissements final, c’est-à-dire pour la dernière étape de maillage adaptatif et le nombre d’enrichissements cumulé c’est-à-dire la somme des enrichissements à chaque étape de maillage adaptatif pour les comparer à ceux obtenus avec la stratégie RPGD_S2.

	Nombre d’enrichissements	Nombre de points du maillage final	Nombre d’étapes
RPGD_S1	52 (cumulé) – 2 (final)	365	26
RPGD_S21	33	429	33
RPGD_S22	39	354	32

TAB. B.II-6 Comparaison des résultats des deux stratégies de maillage adaptatif

Pour ces stratégies de couplage, le nombre de points du maillage final est assez semblable. On constate que la stratégie RPGD_S2 est plus efficace en terme de nombre total d’enrichissements. Elle est donc *a priori* moins coûteuse en temps de calcul. Néanmoins, le gain n’est pas remarquable pour cette source de chaleur en comparaison des autres sources comme nous le verrons. Ceci est lié au fait que la solution est obtenue avec deux modes à chaque étape de maillage adaptatif pour la stratégie RPGD_S1.

De ce fait, le nombre de modes sur le maillage final est beaucoup moins élevé dans le cas de la stratégie 1 que la stratégie 2 (16 à 19 fois moins).

Les résultats pour cette source de chaleur mènent à penser que la stratégie RPGD_S1 est plus performante d’autant plus que peu de modes sont nécessaires pour capter précisément la solution. La variante 1 mode de la stratégie RPGD_S2 nécessite moins de modes que la variante 2 mais le nombre de points et le nombre d’étapes de maillage adaptatif sont augmentés.

B.II.3.2 Source de type échelon

Les simulations avec la deuxième source de chaleur sont effectuées avec le maillage temporel initial de la source (maillage irrégulier comprenant 3 points [0, 2, 100]). La valeur du seuil de résidu RV est choisie égale à 0.1.

a) Résultats dans le cas RPGD_S1

Pour cette source, les résultats obtenus avec la méthode RPGD_S1 sont discutés en fonction du taux de réduction ε_{RV} (Eq. (B.I-46)). Rappelons que ce taux de réduction fixe le nombre de modes PGD à chaque étape de maillage adaptatif.

Revenons tout d’abord à la remarque que nous avons abordé dans la partie B.I.2.3 concernant l’influence du taux de réduction sur le nombre de modes obtenus à chaque maillage dans la stratégie 1.

Lors d’un procédé de maillage adaptatif, le résidu RV est supposé décroître. Pourtant, nous avons constaté que cela n’est pas toujours vrai. Ceci est lié au fait que moins de modes peuvent être obtenus notamment lorsque le maillage est plus fin, ceci entraînant, dans certains cas, une augmentation du résidu RV .

Afin d’analyser ce phénomène, le **TAB. B.II-7** montre l’évolution du résidu RV et du taux de réduction du résidu correspondant τ_{RV}^i (cf. (B.I-46)) en fonction du nombre de modes obtenus pour les deux maillages consécutifs $n_t = 7$ et $n_t = 8$ dans le cas RPGD_S1. On voit qu’avec un seuil $\varepsilon_{RV} = 95\%$, 6 modes sont obtenus sur le maillage $n_t = 7$. La valeur du résidu final est $RV = 2.7824$. Toutefois, avec ce critère d’arrêt ($\varepsilon_{RV} = 95\%$), seuls 2 modes sont nécessaires pour le maillage $n_t = 8$ menant à un résidu $RV = 6.6289$, plus important par rapport à celui obtenu sur le maillage plus grossier $n_t = 7$.

Modes i	$n_t = 7$		$n_t = 8$	
	RV	τ_{RV}^i (%)	RV	τ_{RV}^i (%)
0	153.9490		153.4366	
1	21.8904	14.22	21.6312	14.10
2	7.3089	33.39	6.6289	30.65
3	6.7250	92.01	6.2977	95.01
4	3.7077	55.13		
5	3.2675	88.13		
6	2.7824	85.15		
7	2.7668	99.44		

TAB. B.II-7 Evolution du RV et τ_{RV}^i en fonction du nombre de modes obtenus avec les deux maillages consécutifs $n_t = 7$ et $n_t = 8$ dans le cas RPGD_S1

Le critère d’arrêt PGD lié au taux de réduction $\varepsilon_{RV} = 95\%$ ne garantit donc pas la décroissance du résidu RV , qui lui signifie l’amélioration de la solution au cours du procédé de maillage adaptatif.

Nous proposons donc d’imposer un critère de décroissance de RV pour le procédé de maillage adaptatif avec la RPGD_S1, c’est-à-dire le RV obtenu sur le nouveau maillage doit être inférieur à celui obtenu sur le maillage précédent.

En imposant cette condition, on obtient bien une décroissance de RV à chaque étape du procédé de maillage adaptatif comme illustré **FIG. B.II-6** à gauche. Le seuil RV pour l’arrêt du

procédé de maillage adaptatif est obtenu après 20 étapes d'adaptation. Le maillage final contient au total 170 points. Sur ce maillage, la température est décrite avec 13 modes. Son amplitude est maximale au point $(x,y) = (0,0)$ pour lequel l'évolution de la température en fonction du temps est représentée **FIG. B.II-6** (à droite).

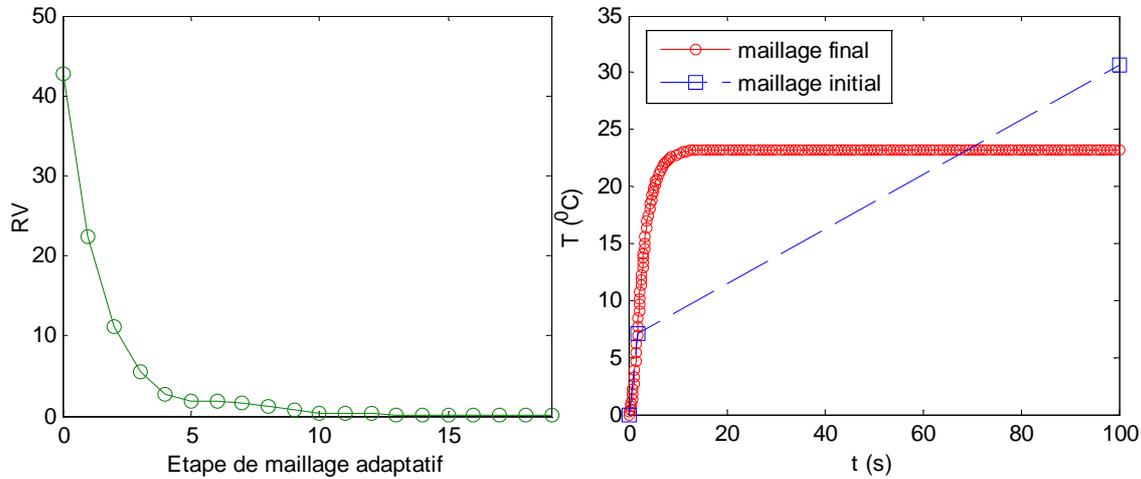


FIG. B.II-6 Evolution du résidu RV en fonction des étapes de maillage adaptatif (gauche) et évolution de la température au point $(x,y)=(0,0)$ en fonction du temps (droite) dans le cas RPGD_S1

On voit que le maillage final présente beaucoup de points dans la zone stationnaire ($t \in [20;100]$). Or ce n'est pas l'objectif de la technique de maillage adaptatif. Ceci s'explique par le fait que, sur un maillage fixé, suivant la qualité de la solution PGD requise (valeur du seuil PGD ϵ_{RV}), la valeur de l'estimateur RL dans la zone stationnaire peut être importante. Ainsi, lors du procédé de maillage adaptatif, les points sont ajoutés dans cette zone afin de rectifier l'erreur de la solution PGD (liée au faible nombre de modes choisi).

Pour illustrer ce point, la distribution de l'estimateur RL obtenue respectivement avec 2 modes, 6 modes, 20 modes, 40 modes et 60 modes sur un même maillage de 10 points (maillage obtenu à l'étape numéro 6 de maillage adaptatif) est reportée **FIG. B.II-7**.

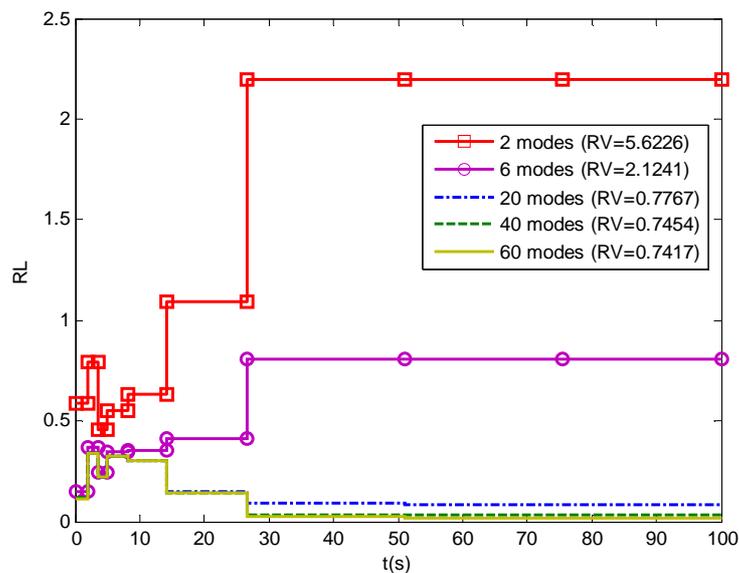


FIG. B.II-7 Distribution de l'estimateur RL en fonction du nombre de modes sur un maillage fixé

La distribution du résidu local dépend du nombre de modes, notamment dans le régime stationnaire ($t > 20$ s). Si l'on s'arrête avec 2 modes ou 6 modes, la valeur du RL dans la zone stationnaire est très élevée par rapport au cas avec plus de modes. Le maillage est donc raffiné dans cette zone et cela se traduit par un maillage final très dense dans la zone stationnaire comme c'est le cas **FIG. B.II-6** (à droite).

Cela met en évidence le fait que le procédé de maillage permet non seulement de raffiner le maillage pour appréhender la zone transitoire mais aussi pour rectifier l'erreur liée au faible nombre de modes de la solution PGD.

b) Résultats dans le cas RPGD_S2

La **FIG. B.II-8** (respectivement **FIG. B.II-9**) montre l'évolution du résidu RV en fonction des étapes de maillage adaptatif (à gauche) et l'évolution de la température au point $(x,y)=(0,0)$ en fonction du temps (à droite) dans le cas RPGD_S21 (respectivement RPGD_S22).

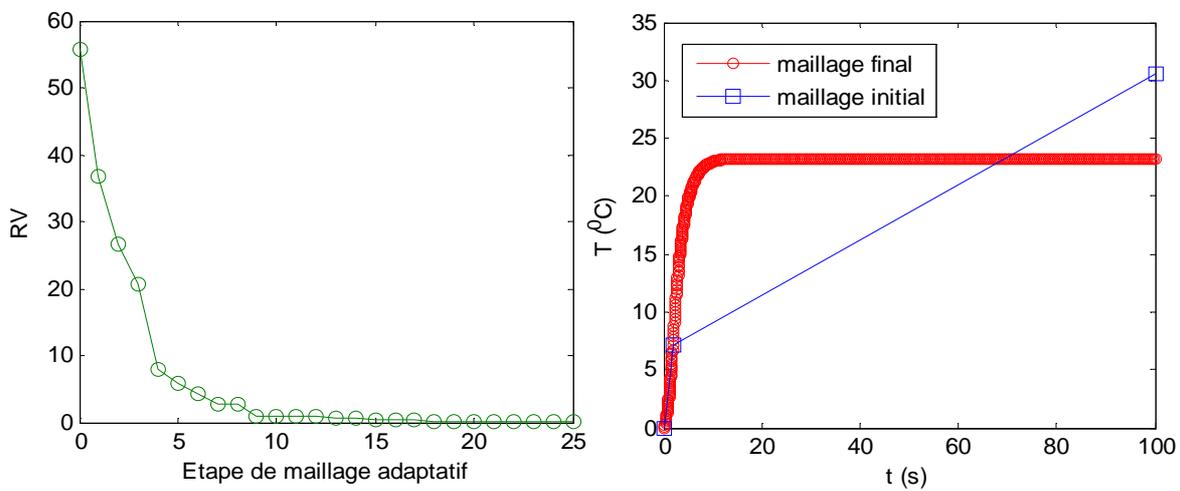


FIG. B.II-8 Evolution du résidu RV en fonction des étapes de maillage adaptatif (gauche) et évolution de la température au point $(x,y)=(0,0)$ en fonction du temps (droite) dans le cas RPGD_S21

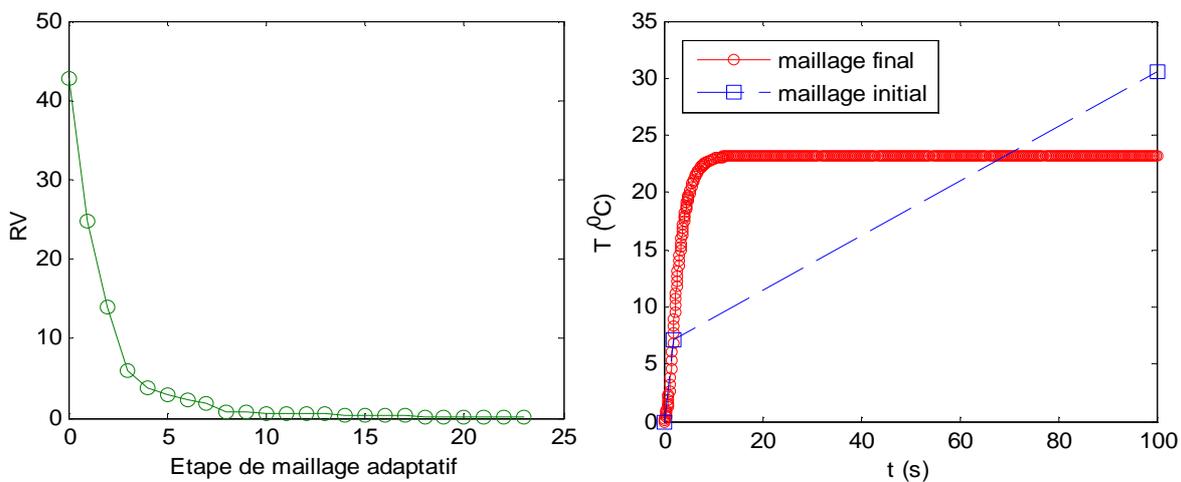


FIG. B.II-9 Evolution du résidu RV en fonction des étapes de maillage adaptatif (gauche) et évolution de la température au point $(x,y)=(0,0)$ en fonction du temps (droite) dans le cas RPGD_S22

On constate que le résidu RV diminue avec les étapes de maillage adaptatif. Moins d'étapes de maillage adaptatif sont nécessaires avec cette stratégie en comparaison de la première stratégie et moins d'étapes pour la variante plusieurs modes en comparaison de 1 mode comme récapitulé **TAB. B.II-8**. Comme dans le cas **RPGD_S1**, beaucoup de points subsistent dans la zone stationnaire.

Pour cette source de chaleur (en comparaison de la précédente **TAB. B.II-6**), le nombre d'enrichissements est beaucoup plus faible avec la stratégie 2 par rapport à la stratégie 1 (5 fois à 6.5 fois moins). Ceci est dû au fait qu'avec cette source, plusieurs modes sont nécessaires pour capter la solution sur chaque maillage avec la stratégie 1. La deuxième stratégie semble donc être plus avantageuse dans le sens où elle limite le nombre total d'enrichissements.

	Nombre d'enrichissements	Nombre de points du maillage final	Nombre d'étapes
RPGD_S1	174 (cumulé) – 13 (final)	170	20
RPGD_S21	26	768	26
RPGD_S22	33	403	24

TAB. B.II-8 Comparaison des résultats pour les deux stratégies de maillage adaptatif

Néanmoins, la deuxième stratégie nécessite un maillage beaucoup plus dense par rapport à la stratégie **RPGD_S1**, et d'autant plus avec la variante 1 (4.5 fois plus). Ceci est lié au fait que lorsque la stratégie **RPGD_S2** est utilisée, la technique de maillage adaptatif raffine le maillage aussi pour corriger l'erreur liée aux modes interpolés (Étape 9 - **TAB. B.II-2**), d'autant plus lorsque la solution est cherchée avec un seul mode et si le maillage initial donne une solution beaucoup trop éloignée de la solution recherchée. Dans ce cas, il n'est donc pas avantageux de garder les modes. Nous discuterons ce point dans la partie suivante de discussion (**B.II.4.2**).

B.II.3.3 Source de type *impulsionnelle*

Pour cette troisième source de chaleur, le maillage temporel initial est celui de la source (maillage irrégulier de 9 points). La valeur seuil du résidu RV est choisie égale à 0.1.

a) Résultats dans le cas **RPGD_S1**

Comme pour la source de chaleur de type échelon, une contrainte de décroissance du résidu RV est appliquée. La solution est obtenue après 20 étapes de maillage adaptatif et le maillage final présente 166 points. La **FIG. B.II-10** (à gauche) illustre la convergence du procédé.

La **FIG. B.II-10** (à droite) montre l'évolution de la température au point $(x,y)=(0,0)$ en espace en fonction du temps. La solution est obtenue sur le maillage final avec 8 modes. On voit que les points sont ajoutés principalement dans les zones transitoires pour capter les fortes variations localisées. La zone stationnaire présente cette fois-ci que très peu de points (6 points).

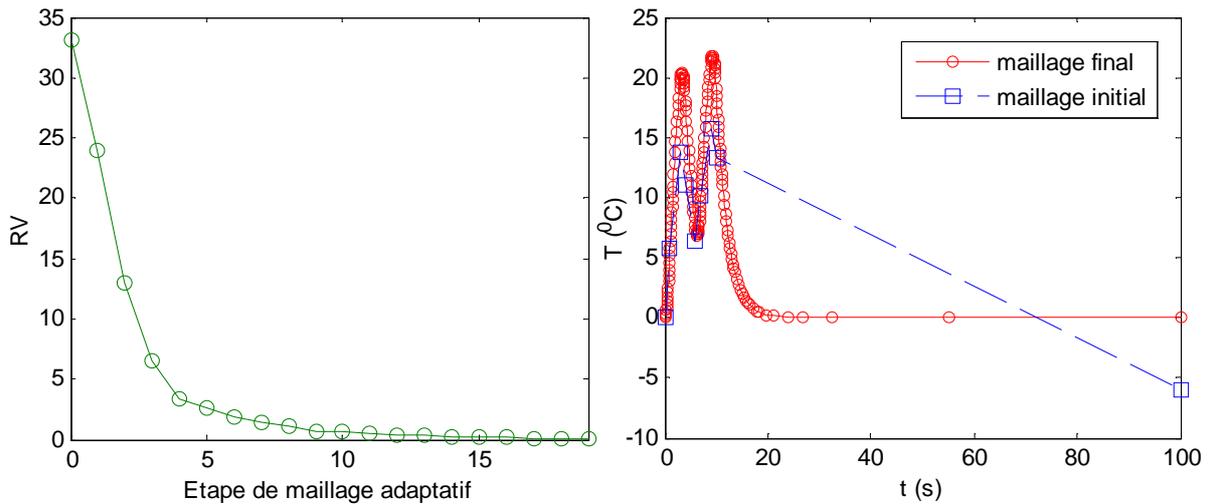


FIG. B.II-10 Evolution du résidu RV en fonction des étapes de maillage adaptatif (gauche) et évolution de la température au point $(x,y)=(0,0)$ en fonction du temps (droite) dans le cas RPGD_S1

b) Résultats dans le cas RPGD_S2

Regardons maintenant les résultats obtenus pour la deuxième stratégie RPGD_S2. **FIG. B.II-11** et **FIG. B.II-12** sont reportés les résultats obtenus avec la stratégie RPGD_S21 et la stratégie RPGD_S22 respectivement. Le nombre d'étapes de maillage adaptatif est de 23 pour la RPGD_S21 et 25 pour la RPGD_S22. Notons que dans tous les cas, les zones transitoires sont bien captées.

Un grand nombre de points dans la zone stationnaire ($t > 20s$) est obtenue principalement dans le cas RPGD_S22. Ceci est lié au fait que le maillage initial contient seulement 9 points et que la solution obtenue sur ce maillage est beaucoup trop éloignée de la solution recherchée et donc il n'est pas intéressant de conserver les modes comme nous le verrons après. Notons que le nombre de points dans la zone stationnaire est plus important dans le cas où plusieurs modes sont conservés au lieu d'un seul à chaque étape de maillage adaptatif.

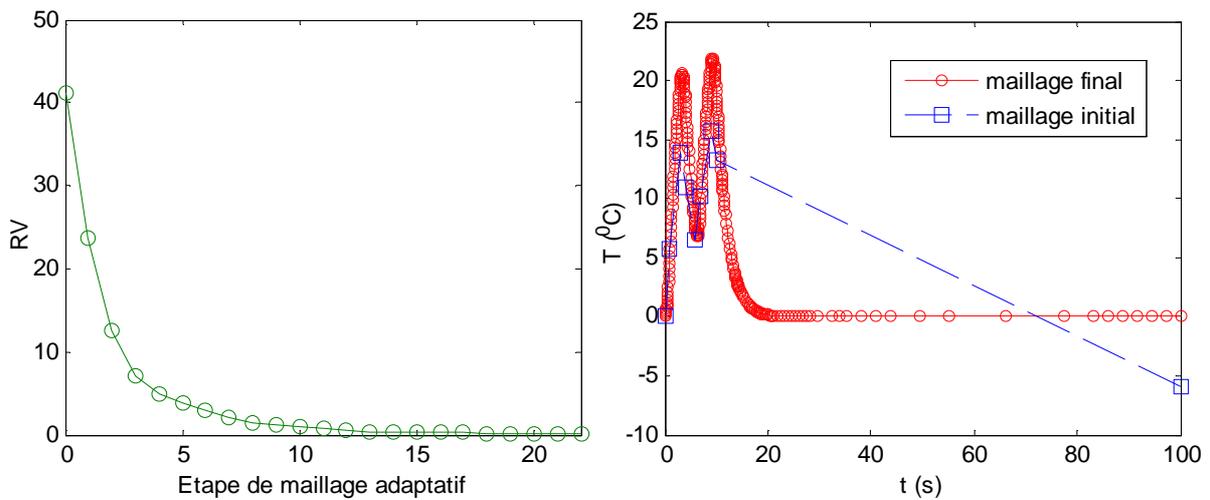


FIG. B.II-11 Evolution du résidu RV en fonction des étapes de maillage adaptatif (gauche) et évolution de la température au point $(x,y)=(0,0)$ en fonction du temps (droite) dans le cas RPGD_S21

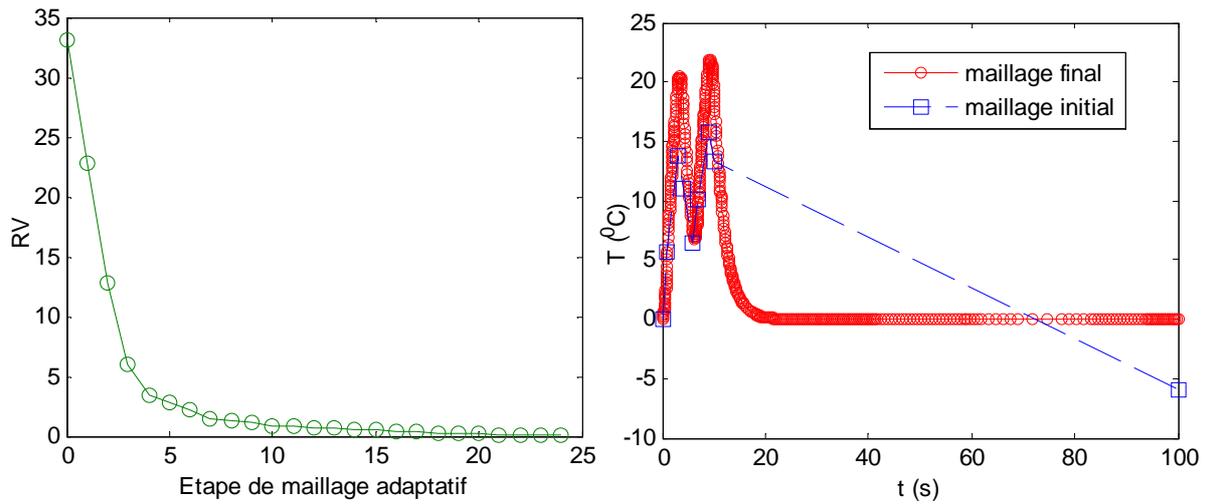


FIG. B.II-12 Evolution du résidu RV en fonction des étapes de maillage adaptatif (gauche) et évolution de la température au point $(x,y)=(0,0)$ en fonction du temps (droite) dans le cas $RPGD_S22$

Les résultats obtenus pour les différentes stratégies sont répertoriés tableau **TAB. B.II-9**. Comme dans le cas de la source 2, la résolution PGD sur chaque maillage avec la $RPGD_S1$ nécessite plusieurs modes. Ainsi, le nombre total d’enrichissements obtenu avec la $RPGD_S2$ est beaucoup plus faible par rapport à la première stratégie.

Néanmoins, le nombre d’enrichissements sur le maillage final dans le cas $RPGD_S1$ est seulement de 8 au lieu de 23 et 42 dans le cas $RPGD_S2$. Le nombre de points du maillage final dans le cas $RPGD_S2$ est plus important vis-à-vis à la $RPGD_S1$. Afin de mieux comprendre pourquoi le résultat obtenu par la $RPGD_S22$ est aussi éloigné de celui de $RPGD_S1$, nous allons regarder en détail les étapes du procédé de maillage adaptatif pour ces deux stratégies dans la partie qui suit.

	Nombre d’enrichissements	Nombre de points du maillage final	Nombre d’étapes
$RPGD_S1$	103 (cumulé) – 8 (final)	166	20
$RPGD_S21$	23	285	23
$RPGD_S22$	42	494	25

TAB. B.II-9 Comparaison des résultats de deux stratégies de maillage adaptatif

B.II.4 Discussion

Dans cette partie, nous regardons plus en détail les paramètres influençant le résultat du procédé de maillage adaptatif, qui semblent avoir une influence suite à l’analyse des résultats sur les différentes sources.

Tout d’abord, les résultats obtenus lors des étapes de maillage adaptatif entre $RPGD_S1$ et $RPGD_S22$ sont détaillés. Ensuite, l’influence du maillage initial est étudiée. Enfin, l’influence de l’interpolation des anciens modes dans le cas $RPGD_S2$ et celle du temps caractéristique dans le cas $RPGD_S1$ sont discutées. La source de type impulsionnelle est utilisée pour illustrer cette partie de discussion.

B.II.4.1 Comparaison des deux stratégies en terme d'évolution du maillage

Revenons au cas test présenté précédemment B.II.3.3. Afin d'expliquer les différences obtenues entre les deux stratégies RPGD_S1 et la stratégie RPGD_S2 en terme de maillage et de nombre de modes, l'évolution de la température au point $(x=0; y=0)$ et du résidu local RL en fonction du temps lors des étapes de maillage adaptatif sont données **TAB. B.II-10** (à gauche pour RPGD_S1 et à droite pour RPGD_S22). Par souci de clarté, seulement les étapes numéro 0 ; 1 ; 6 ; 8 ; 9 et l'étape finale sont représentées.

A l'étape 0, la valeur du résidu local RL est très élevée pour $t > 10$ s même si la solution finale présente une zone stationnaire pour $t > 20$ s (cf. la solution finale **FIG. B.II-10** – à droite). Ceci est lié au fait que le maillage initial très grossier dans cette zone ne permet pas de décrire correctement la solution.

De l'étape 1 à l'étape 6, le procédé de maillage adaptatif ajoute donc des points dans cette zone. Plus précisément, à l'étape 1, un point est ajouté à $t = 55$ qui permet de réduire fortement le résidu dans la zone $t \in [55; 100]$.

A l'étape 6, pour les deux stratégies, le régime stationnaire $t \in [20; 100]$ est mieux capté et la valeur du résidu est maintenant plus élevée dans la zone transitoire comparée à celle dans la zone stationnaire. Notons néanmoins qu'à cette étape, la valeur des résidus locaux dans la zone stationnaire est beaucoup plus importante dans le cas RPGD_S22. Ceci est lié au fait que, dans le cas de la stratégie RPGD_S22, on garde les modes obtenus à chaque étape de maillage adaptatif. Comme les modes obtenus sur le maillage initial ne permettent pas de bien prédire la solution (cf. représentation de la solution à l'étape 0), l'erreur générée par ces modes est donc toujours présente et le procédé de maillage adaptatif doit la corriger. En ce qui concerne la RPGD_S1, les modes sont mis à jour sur les nouveaux maillages, ce qui permet d'éviter l'erreur persistante due au maillage initial. Dans le cas de la RPGD_S1, à partir de cette étape, on constate que les valeurs importantes du résidu local correspondent aux zones de fortes variations localisées et donc des points sont ajoutés sur cette zone.

Dans le cas de la méthode RPGD_S1, dans les étapes suivantes (à partir de l'étape 8), des points sont ajoutés uniquement dans les zones transitoires ($t < 20$) puisque les résidus s'annulent dans la zone stationnaire. En revanche, dans le cas RPGD_S22, les points sont ajoutés à la fois dans les zones transitoires et les zones stationnaires. Par exemple, à l'étape 8 on voit que la valeur du résidu est plus élevée dans la zone stationnaire. Ainsi, à l'étape 9, un point est ajouté à $t = 77.5$ s, point qui est bien situé dans cette zone.

Cela se traduit, à l'étape finale, par un maillage final beaucoup plus dense dans la zone stationnaire. Cela explique donc le nombre de points beaucoup plus élevé dans le cas RPGD_S22 par rapport au cas RPGD_S1 qui avait été souligné.

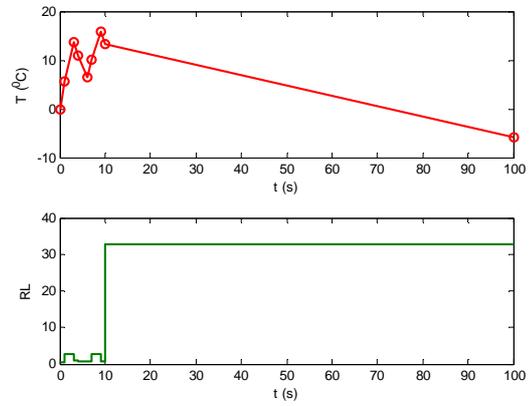
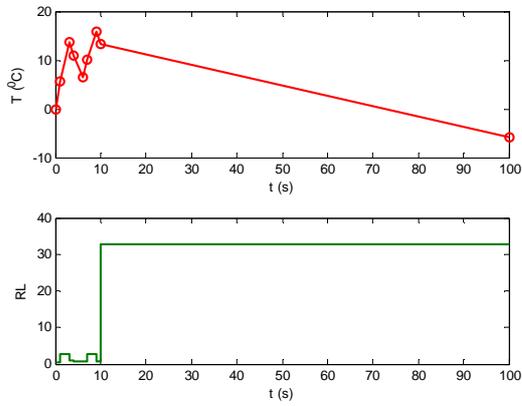
L'analyse de ces résultats met en évidence l'importance des premiers modes et par suite du maillage initial pour la deuxième stratégie où les modes sont conservés au cours des étapes de maillage adaptatif. Nous allons donc maintenant discuter l'influence du maillage initial.

RPGD_S1

RPGD_S22

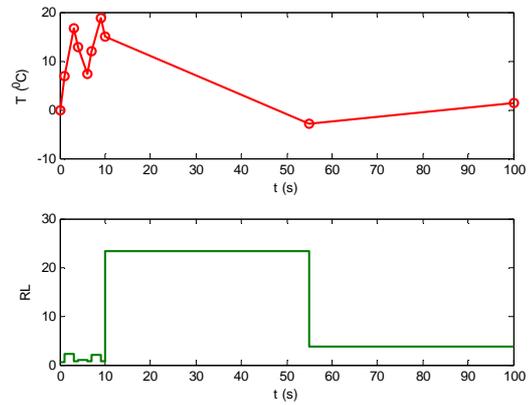
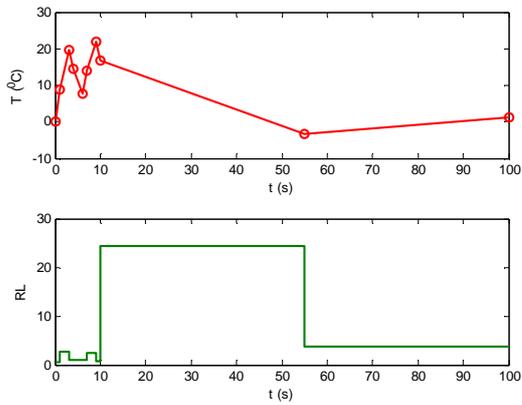
Etape 0 (maillage initial) – $n_t = 9$ points

Etape 0 (maillage initial) – $n_t = 9$ points



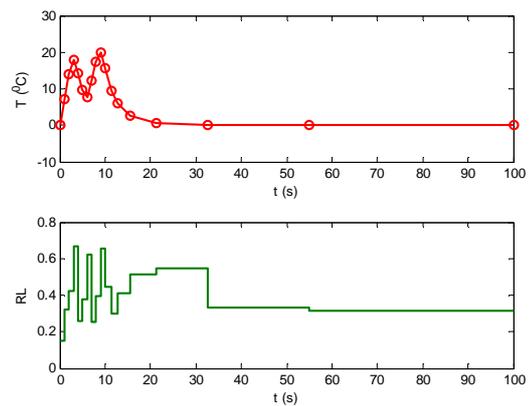
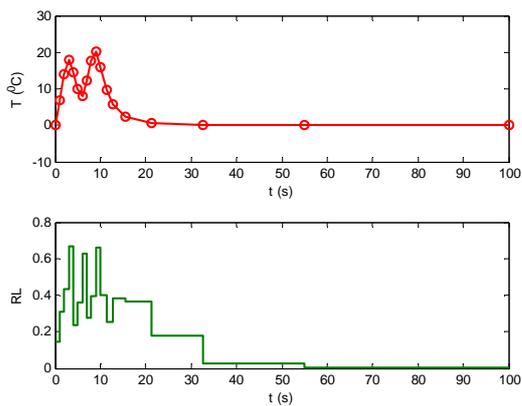
Etape 1 – $n_t = 10$ points

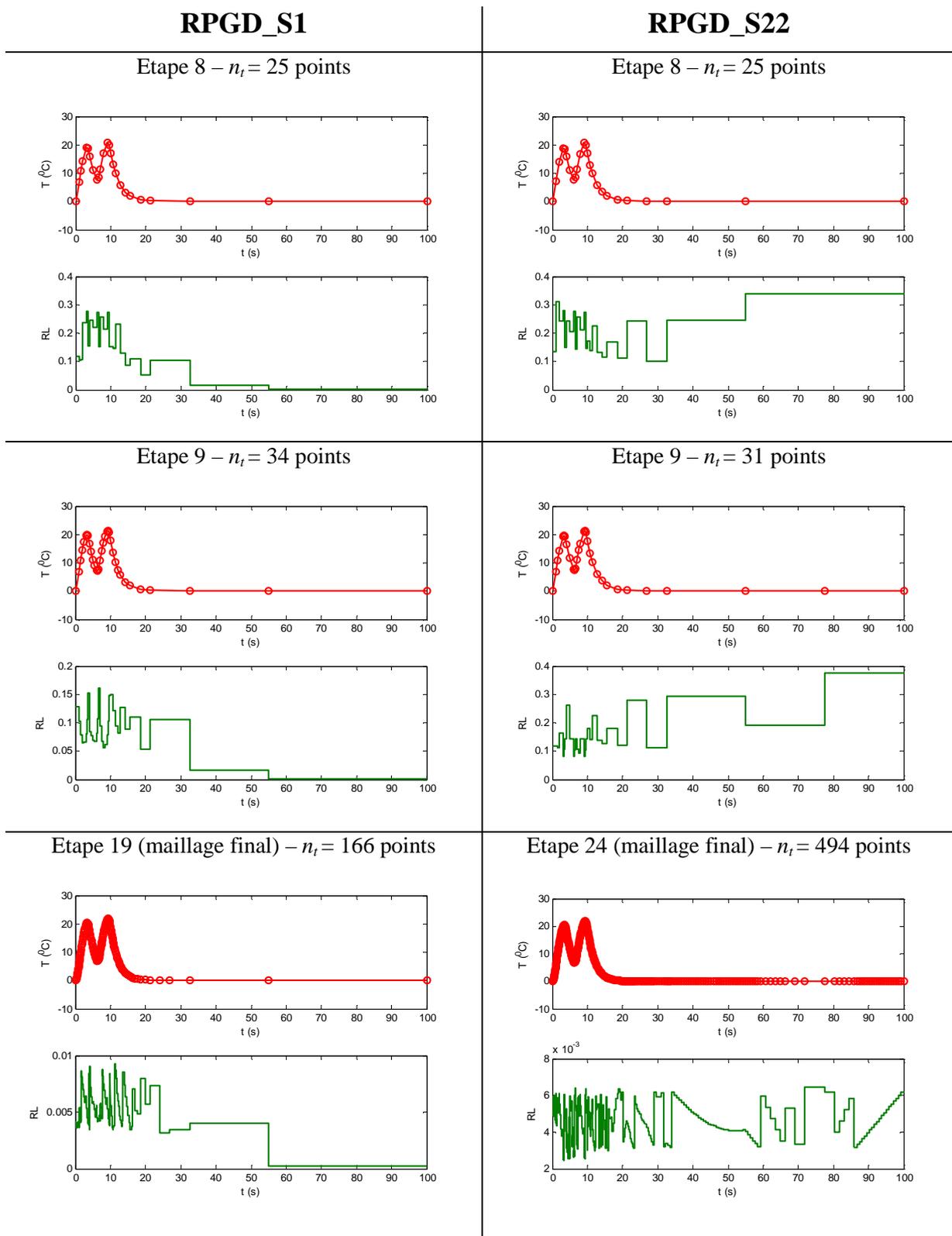
Etape 1 – $n_t = 10$ points



Etape 6 – $n_t = 18$ points

Etape 6 – $n_t = 18$ points





TAB. B.II-10 Etapes du procédé de maillage adaptatif dans le cas RPGD_S1 (gauche) et RPGD_S22 (droite)

B.II.4.2 Influence du maillage initial

Afin d'étudier l'influence du maillage initial sur la stratégie de couplage, nous considérons trois maillages temporels différents : un maillage irrégulier de la source $n_t = 9$ et deux maillages réguliers $n_t = 101$ et $n_t = 10001$ points.

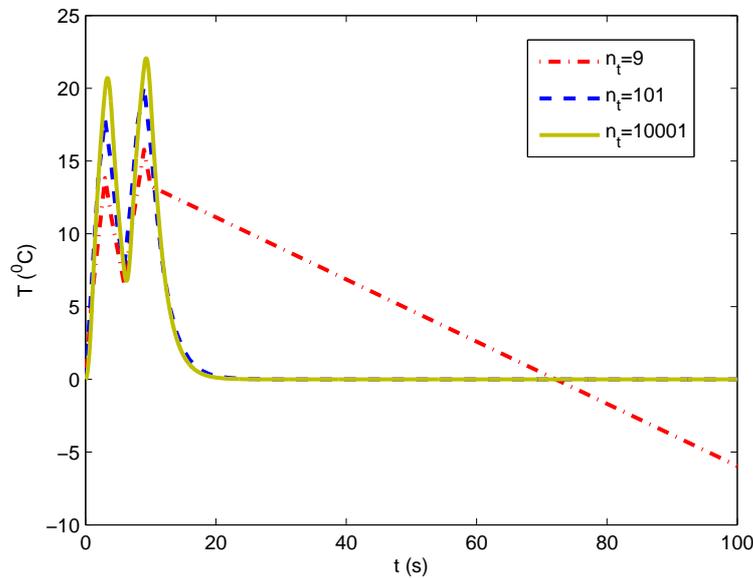


FIG. B.II-13 Evolution de la température au point $(x,y)=(0,0)$ en fonction du temps pour trois maillages temporels différents

La **FIG. B.II-13** montre l'évolution de la température en un point de l'espace en fonction du temps pour ces 3 maillages (aucune technique de maillage adaptatif n'est utilisée). La solution avec le maillage $n_t = 10001$ est considérée comme étant la solution de référence. La solution obtenue avec $n_t = 101$ est beaucoup plus précise que celle pour $n_t = 9$, principalement dans la zone stationnaire. On peut donc penser que si on démarre la RPGD_S2 avec un maillage initial de 9 points, l'erreur commise par la projection des anciens modes peut être prépondérante par rapport à celle liée à la mauvaise description des zones transitoires. Et par suite, les résultats obtenus avec la RPGD_S2 sont donc moins avantageux que ceux avec la RPGD_S1.

Afin de conforter cette idée, la technique de maillage adaptatif est testée pour des maillages initiaux beaucoup plus denses (101 et 201 points). Les autres paramètres des simulations sont les mêmes que précédemment.

Le **TAB. B.II-11** montre les résultats obtenus avec un maillage initial régulier de 101 points. Ils sont comparés à ceux obtenus le **TAB. B.II-9** qui correspond au maillage initial grossier de 9 points. Pour les trois stratégies, le nombre d'étapes de maillage adaptatif est réduit et par suite le nombre d'enrichissement est plus faible. Comme attendu, le nombre total d'enrichissements de la RPGD_S2 est beaucoup plus faible que celui de la RPGD_S1. Notons que le nombre de points du maillage final est plus proche dans ce cas pour les deux stratégies. Le maillage final dans le cas RPGD_S22 présente moins de points par rapport au cas RPGD_S1 et moins d'étapes de maillage adaptatif. La stratégie RPGD_S22 est nettement avantageuse dans le cas où le maillage initial est suffisamment fin.

Pour ce maillage de 101 points, le maillage initial contient des points dans la zone stationnaire (80 points pour $t > 20$). Sur le maillage final, le nombre de points est donc plus élevé pour la stratégie

RPGD_S1 malgré une baisse du nombre d'étapes de maillage adaptatif en comparaison au cas avec un maillage initial de 9 points (la différence étant d'ailleurs de l'ordre de 80 points).

	Nombre d'enrichissements	Nombre de points du maillage final	Nombre d'étapes
RPGD_S1	95 (cumulé) - 8 (final)	239	15
RPGD_S21	17	299	17
RPGD_S22	23	235	13

TAB. B.II-11 Comparaison des résultats pour les deux stratégies – maillage initial régulier de 101 points

Les résultats obtenus avec un maillage initial encore plus fin (201 points) sont reportés **TAB. B.II-12**. Les résultats de la RPGD_S2 sont encore plus avantageux. Le nombre de modes sur le maillage final s'approche de celui de la RPGD_S1 (8 modes).

Pour les deux stratégies, comme nous l'avons précisé, le nombre de points final est plus élevé à cause du maillage initial qui présente des points dans la zone stationnaire.

	Nombre d'enrichissements	Nombre de points du maillage final	Nombre d'étapes
RPGD_S1	75 (cumulé) – 8 (final)	322	11
RPGD_S21	13	370	13
RPGD_S22	19	330	11

TAB. B.II-12 Comparaison des résultats pour les deux stratégies – maillage initial régulier de 201 points

En conclusion, le choix de la stratégie de couplage PGD/technique de maillage adaptatif dépend du maillage initial :

- Si la solution sur le maillage initial est proche de la solution finale, il est intéressant de conserver les modes PGD à chaque étape de maillage adaptatif car cela permet de réduire le nombre total d'enrichissements et par suite le temps de calcul.
- Si le maillage initial est grossier, conserver les modes PGD obtenus pénalise le calcul puisque des points sont ajoutés pour pallier la mauvaise prédiction de la solution. Dans ce cas la stratégie RPGD_S1 est donc plus intéressante même si elle consiste à recalculer la solution PGD entièrement à chaque étape de maillage adaptatif.

Cependant, il n'est pas toujours évident (notamment comme nous le verrons dans les cas couplés) de choisir un maillage initial qui donne une solution suffisamment précise. De plus, commencer par un maillage initial dense peut mener à un maillage trop fin dans la zone transitoire ce qui n'est pas optimal en terme de stockage de données. Il nous paraît donc assez naturel de débiter avec un maillage initial qui permette de prédire correctement la source.

Une stratégie "optimale" consisterait en un mélange des stratégies 1 et 2 et serait :

- débiter avec un maillage initial de la source,
- démarrer avec la première stratégie RPGD_S1 et,
- à partir d'une certaine valeur du résidu, continuer avec la deuxième stratégie.

Les résultats obtenus avec cette stratégie sont présentés ci-après **TAB. B.II-13**. Considérons le maillage initial de 9 points de la source. La simulation démarre avec la stratégie RPGD_S1 jusqu'à l'étape 6 de maillage adaptatif. A cette étape, le maillage obtenu est de 18 points (**FIG. B.II-14**). Ensuite, la stratégie RPGD_S22 est utilisée jusqu'à atteindre un résidu RV inférieur à 0.1. Cette nouvelle stratégie est notée RPGD_S3.

Etape de maillage adaptatif	Nombre de points temporels	Nombre de modes	Résidu à la fin de chaque étape de maillage
0	9	3	33.1621
1	10	1	23.9242
2	11	1	12.9717
3	12	2	6.5195
4	13	3	3.4482
5	14	3	2.6286
6	18	4	1.9374
<hr/>			
7	21	1	1.5040
8	24	2	1.1446
9	31	2	0.8001
10	34	1	0.7040
11	39	1	0.6477
12	48	1	0.5322
13	63	1	0.4016
14	76	1	0.3203
15	101	2	0.2319
16	108	2	0.1909
17	128	1	0.1547
18	148	2	0.1136
19	166	2	0.0957

TAB. B.II-13 Résultats avec la RPGD_S3 (RPGD_S1+RPGD_S22) pour un maillage initial grossier de 9 points

La solution est obtenue avec 23 modes au bout de 20 étapes de maillage adaptatif et un maillage de 166 points. Par rapport à la stratégie RPGD_S1, le nombre total d'enrichissements est fortement réduit (33 au lieu de 103) pour un même nombre de points pour maillage final. Par rapport à la stratégie RPGD_S2, le maillage final présente beaucoup moins de points pour une même précision sur la solution.

La **FIG. B.II-14** montre la solution obtenue à l'étape 6 sur le maillage de 18 points avant de changer de stratégie de couplage. Cette solution est relativement proche de la solution finale. C'est la raison pour laquelle le passage à la stratégie RPGD_S2 s'est avéré bénéfique. Néanmoins, une étude plus poussée devra être menée afin de déterminer le critère optimal pour déterminer l'étape où l'on peut changer de stratégie. Cette stratégie n'est plus évoquée dans la suite de la thèse mais elle constitue une piste pour optimiser ce couplage.

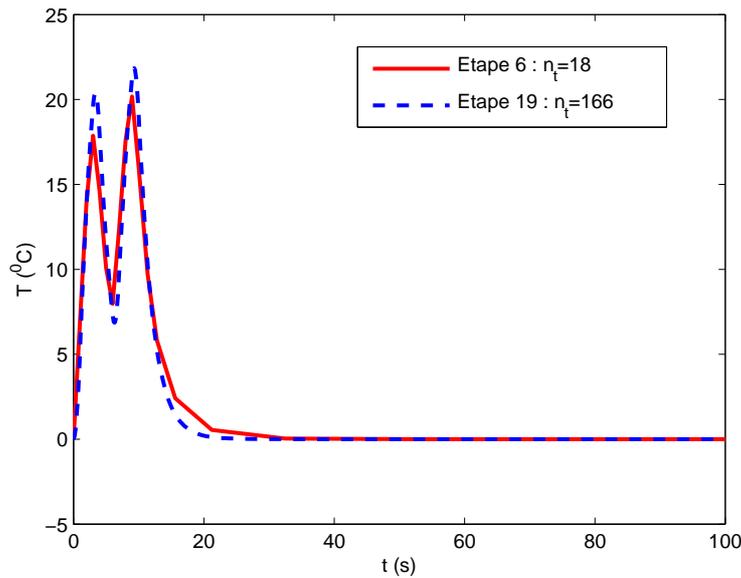


FIG. B.II-14 Evolution de la température au point $(x,y)=(0,0)$ en fonction du temps à l'étape 6 et à l'étape finale de maillage adaptatif

B.II.4.3 Influence du choix de l'interpolation dans le cas RPGD_S2

Rappelons que pour la stratégie RPGD_S2, afin de continuer le calcul sur une nouvelle étape de maillage adaptatif, les anciens modes sont projetés sur le nouveau maillage à l'aide d'une interpolation linéaire (cf. Etape 9 algorithme de résolution **TAB. B.II-2**).

Lors de cette étape, les nouveaux modes construits à partir des modes interpolés peuvent présenter des fluctuations. La **FIG. B.II-15** montre les quatre premiers modes temporels obtenus sur le maillage final dans le cas de test précédent avec la stratégie RPGD_S21 (cf. partie **B.II.3.3b**).

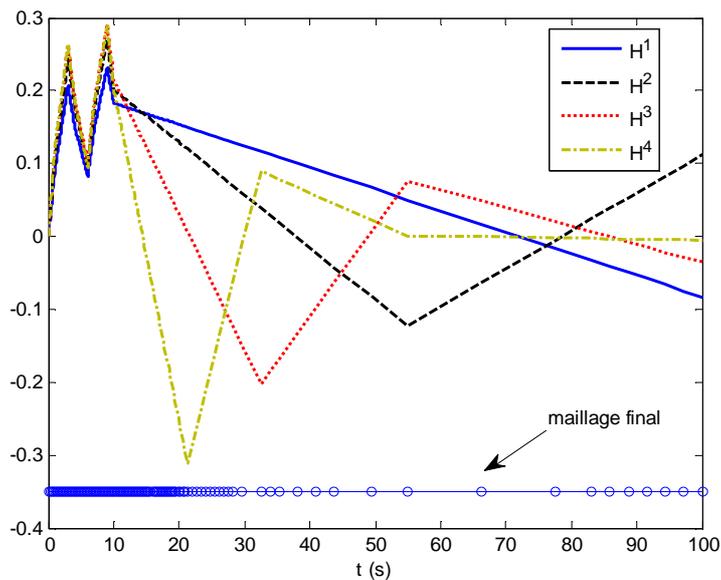


FIG. B.II-15 Quatre premiers modes temporels obtenus dans le cas RPGD_S21 avec interpolation linéaire

Notons que tous les modes présentent des discontinuités car ils sont interpolés linéairement. Ainsi, la forme du mode \mathbf{H}^1 sur le maillage final est la même que celle sur le maillage initial de 11 points. Pour les autres modes \mathbf{H}^i ($2 \leq i \leq 4$) leur forme est celle sur le maillage où ils ont été générés.

Les coefficients de ces 4 premiers modes sont, sur le maillage final, $\alpha = [42.89, 60.78, 67.55, 56.82]$. Contrairement au cas sans maillage ou au cas RPGD_S1, le premier mode n'est pas prépondérant (cf. partie **B.I.2.3**). Cela montre que les coefficients sont recherchés de manière à mieux représenter la solution finale avec les fonctions de base obtenues grâce à la mise à jour des coefficients pour tous les modes (cf. Etape 10 et l'étape de projection dans l'étape 12 - algorithme de résolution **TAB. B.II-2**).

Regardons maintenant comment ces fluctuations sur les modes influencent la solution PGD finale (23 modes). La **FIG. B.II-16** montre la solution finale obtenue avec les deux stratégies RPGD_S21 et RPGD_S1 en fonction du temps pour un point particulier en espace. Pour ce point, on voit que la solution obtenue avec la RPGD_S21 est un peu bruitée dans certaines zones temporelles.

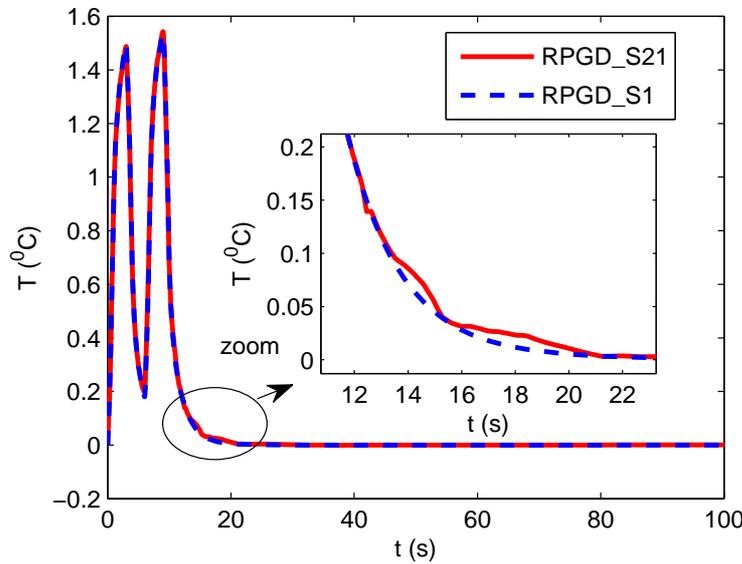


FIG. B.II-16 Evolution de la température au point $(x,y)=(-2.82,-2.82)$ en fonction du temps obtenue par la RPGD_S21 et RPGD_S1

Les fluctuations sont dues au fait qu'à chaque ajout d'un nouveau mode et à chaque nouveau maillage, une partie du second terme est interpolée à partir d'un maillage plus grossier. Par exemple, plaçons nous à l'itération $k+1$. Afin de chercher le nouveau mode temporel \mathbf{P} , on est amené à résoudre l'équation linéaire suivante (Eq. **(B.I-35)**) :

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^3 a^i \left((\mathbf{R})^T A_x^i \mathbf{R} \right) \otimes \left((\mathbf{S})^T A_y^i \mathbf{S} \right) \otimes \left(A_t^i \right) \right) \mathbf{P} \\ & = \sum_{i=1}^{n_f} b^i \left((\mathbf{R})^T \mathbf{B}_x^i \right) \otimes \left((\mathbf{S})^T \mathbf{B}_y^i \right) \otimes \left(\mathbf{B}_t^i \right) - \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^k a^i \left((\mathbf{R})^T A_x^i \mathbf{F}^j \right) \otimes \left((\mathbf{S})^T A_y^i \mathbf{G}^j \right) \otimes \left(A_t^i \mathbf{H}^j \right) \right) \end{aligned}$$

Le terme $\left(A_t^3 \mathbf{H}^j \right)$, au second membre, est lié à la dérivée temporelle des modes obtenus précédemment $\frac{\partial H_j}{\partial t}$ ($1 \leq j \leq k$). Comme ces modes H_j sont interpolés linéairement à partir des

maillages plus grossiers que celui considéré à cette nouvelle itération, la valeur des dérivées $\frac{\partial H_j}{\partial t}$ ($1 \leq j \leq k$) peut présenter des sauts importants.

Nous reviendrons plus en détail sur ces fluctuations dans le **chapitre D** qui concerne la résolution PGD des problèmes multiphysiques. Dans ce cas, nous verrons que les couplages nécessitent un transfert de données d'un maillage sur un autre lorsque les physiques sont définies sur des maillages qui leur sont propres. Une méthode pour lisser la solution en utilisant l'interpolation cubique Spline [Knott 2000] est proposée. La **FIG. B.II-17** montre les 4 premiers modes (à gauche) et la solution en un point de l'espace (à droite) lorsque l'interpolation cubique Spline est utilisée pour l'exemple cité précédemment. Contrairement au cas avec l'interpolation linéaire les modes sont plus réguliers et la solution plus lisse.

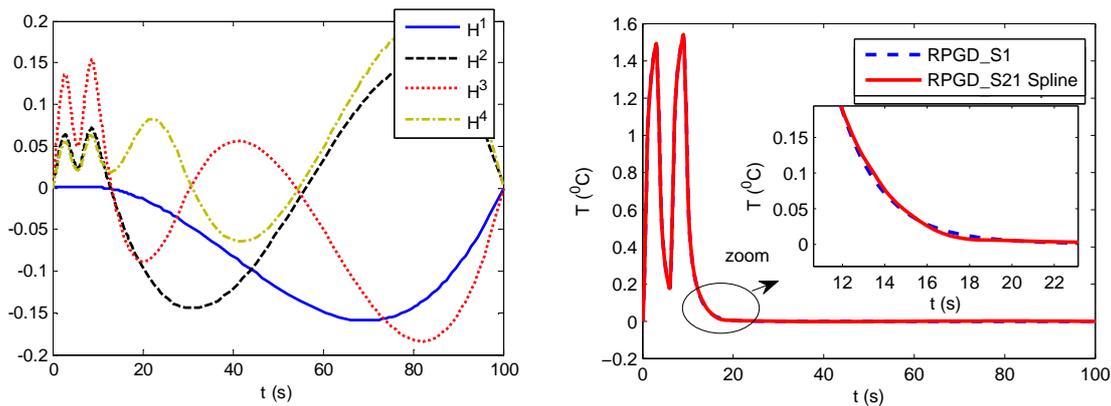


FIG. B.II-17 Quatre premiers modes temporels obtenus dans le cas RPGD_S21 (gauche). Evolution de la température au point $(x,y)=(-2.82,-2.82)$ en fonction du temps obtenue par la RPGD_S21 et RPGD_S1 (droite) avec une interpolation cubique Spline

B.II.4.4 Influence des temps caractéristiques

Nous allons maintenant évaluer l'influence des temps caractéristiques sur la technique de maillage adaptatif en se limite à l'étude de la stratégie **RPGD_S1** pour les deux jeux de paramètres suivants : (a) $\rho C = 5$; $\lambda_T = 1$ et (b) $\rho C = 0.2$; $\lambda_T = 1$. Le seuil du critère d'arrêt RV est fixé à 0.1. Le maillage initial est celui de la source.

Pour le cas (a), 28 étapes de maillage adaptatif sont nécessaires pour obtenir la solution. Cela mène au calcul de 204 enrichissements au total. Le maillage final contient 428 points. Pour le cas (b), seulement 18 étapes de maillage adaptatif sont nécessaires menant à un total de 72 enrichissements. Le maillage final contient uniquement 98 points.

La **FIG. B.II-18** montre l'évolution de la température au point $(x,y)=(0,0)$ en fonction du temps sur le maillage final dans ces deux cas. Modifier le temps caractéristique modifie les zones transitoires.

Comme nous l'avons déjà souligné, avec une valeur de $\rho C / \lambda_T$ plus importante (à gauche), c'est cette valeur qui gouverne la réponse transitoire du système. Dans ce cas, la température évolue donc plus lentement et la zone transitoire est plus large. Au contraire, avec une valeur de $\rho C / \lambda_T$ plus faible, c'est la source de chaleur qui gouverne la réponse transitoire du système. L'évolution de la température tend donc vers la forme de la source. La zone transitoire est donc très proche de la zone transitoire de la source ($t \in [0 ; 10]$).

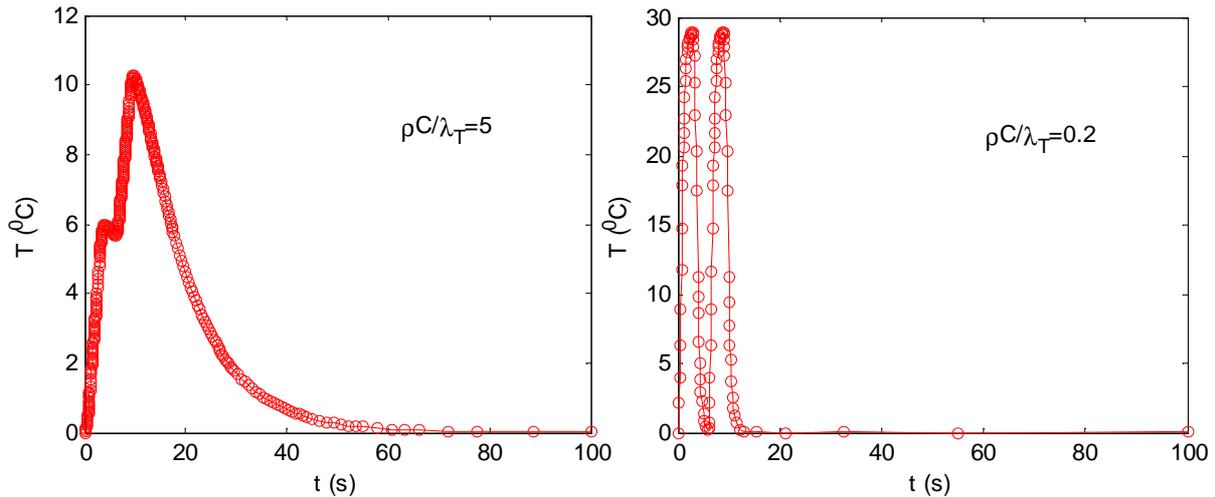


FIG. B.II-18 Evolution de la température au point $(x,y)=(0, 0)$ en fonction du temps. Cas (a) $\rho C = 5$; $\lambda_T = 1$ (gauche) et cas (b) $\rho C = 0,2$; $\lambda_T = 1$ (droite)

Grâce à la technique de maillage adaptatif, on constate que les zones transitoires sont bien captées quel que soit leur forme.

Cette technique est donc bien adaptée pour la prédiction de notre problème.

Conclusion de la section

Dans cette section, une technique de maillage adaptatif a, tout d'abord, été mise en place pour résoudre des équations de la chaleur 2D. Elle s'appuie sur les fondements de la PGD, c'est-à-dire la décomposition de la solution en produits de fonctions à variables séparées et par suite une discrétisation propre à chaque variable. Un estimateur unidimensionnel simple basé sur l'estimation du résidu local est testé. Des points de discrétisation sont ajoutés aux endroits où les résidus locaux sont suffisamment élevés. Deux stratégies de couplage entre la PGD et la technique de maillage adaptatif sont testées. Elles se différencient par leur intrusion dans l'algorithme PGD. La première stratégie (notée RPGD_S1) consiste à recalculer entièrement la solution PGD après chaque étape de maillage adaptatif. Pour la deuxième (notée RPGD_S2), les modes obtenus sur les anciens maillages sont conservés et sont réutilisés pour enrichir les nouveaux modes sur chaque nouveau maillage. Ces deux stratégies ont été testées uniquement pour la variable temporelle et pour les trois sources considérées précédemment. Quelle que soit la stratégie utilisée, cette technique de maillage adaptatif permet de capter de manière automatique les zones transitoires. Elle est également capable de rectifier l'erreur due à la mauvaise solution PGD obtenue dans l'étape d'enrichissement. La deuxième stratégie RPGD_S2 où l'on enrichit à la fois le maillage et les fonctions de bases est particulièrement adaptée lorsque la résolution sur chaque maillage nécessite un grand nombre de modes. Dans ce cas, le nombre total d'enrichissements a fortement diminué.

Ensuite, nous avons vu que le choix du maillage initial influence fortement les résultats. Si la solution sur le maillage initial est proche de la solution finale, les modes PGD obtenus peuvent être conservés et réutilisés pour enrichir les nouveaux modes. Dans ce cas, l'utilisation de la deuxième stratégie permet de réduire le nombre total d'enrichissements tout en générant un maillage avec un même nombre de points. Si le maillage initial est grossier, les modes PGD obtenus sur ce maillage sont trop éloignés de la solution recherchés et donc la stratégie RPGD_S1 s'avère plus avantageuse. Une stratégie couplant RPGD_S1 et RPGD_S2 a été testée et semble être intéressante car elle permet de réduire le nombre d'étapes de maillage adaptatif ainsi que le nombre de points du maillage final.

Cette technique de maillage adaptatif nous a également permis de capter les réponses transitoires du problème lorsque le temps caractéristique est modifié.

Conclusion du chapitre

Dans la première partie de ce chapitre, la PGD a été utilisée pour la résolution de l'équation de la chaleur 2D. La résolution PGD de l'équation de la chaleur a été détaillée et un schéma consistant pour des discrétisations irrégulières a été proposé. Afin d'analyser le comportement de cette méthode, des simulations pour trois sources de chaleur différentes et des temps caractéristiques différents ont été menées. L'implémentation numérique a été validée par comparaison à une solution analytique pour la source bimodale et des solutions Eléments Finis AbaqusTM pour les sources de type échelon et de type impulsionnelle. La solution PGD a permis de prédire la solution pour ces différents paramètres et donc des transitoires fortement différents. Néanmoins, l'utilisation dans cette première partie d'un maillage régulier nécessite de considérer un nombre important de points pour atteindre une certaine précision sur la solution.

Dans la deuxième partie, il nous est donc apparu comme nécessaire de coupler à la PGD une technique de maillage adaptatif, afin d'atteindre une certaine précision sur la prédiction de la solution avec un nombre limité de points. L'objectif principal est ici de capter automatiquement, en partant d'un maillage grossier, les zones transitoires de la solution, ces dernières pouvant être gouvernées par le temps caractéristique ou encore les transitoires liés à la source.

La technique de maillage adaptatif s'appuie sur un estimateur unidimensionnel simple qui est basé sur le résidu local. Rappelons que, dans cette thèse, ce n'est pas la technique de maillage adaptatif qui est discutée mais la stratégie de couplage technique de maillage adaptatif / méthode PGD.

Deux stratégies de couplage entre la PGD et la technique de maillage adaptatif sont testées. La première stratégie (notée RPGD_S1) consiste à recalculer entièrement la solution PGD à partir de la solution nulle à chaque maillage alors que la deuxième (notée RPGD_S2) consiste à réutiliser les anciens modes PGD. Appliquées aux trois sources de chaleur présentées dans la première partie, nous avons constaté qu'avec la technique de maillage adaptatif les réponses transitoires du problème sont bien captées. La technique de maillage adaptatif permet aussi de rectifier une partie de l'erreur due à la solution PGD obtenue dans l'étape d'enrichissement.

La première stratégie RPGD_S1 est plus performante dans la mesure où peu de modes sont nécessaires sur le maillage final pour décrire précisément la solution. De plus, il n'y a pas d'interpolation des anciens modes et donc pas de fluctuations sur les modes. Cependant, la stratégie RPGD_S2, pour laquelle un nombre plus important de modes est nécessaire pour décrire la solution finale, permet de réduire fortement le nombre d'enrichissements cumulé au cours de l'ensemble du procédé de maillage adaptatif.

Comme nous l'avons signalé, dans le cas de l'équation de la chaleur 2D, la réponse transitoire est gouvernée soit par le temps caractéristique soit par la source. Il peut donc paraître aisée de choisir le maillage approprié comme nous l'avons précisé. Néanmoins, l'objectif principal de cette thèse est de quantifier l'apport de la méthode PGD dans le cas de problèmes multiphysiques couplés. Dans ce cas, la technique de maillage adaptatif prend tout son sens puisque les zones transitoires, pouvant être liées aux termes de couplage, ne sont pas connus *a priori* et une technique de maillage adaptatif couplée à la PGD peut s'avérer nécessaire. De plus, certains termes de couplage peuvent faire apparaître des non linéarités qui doivent être résolues avec la PGD. Nous allons commencer par aborder ce point dans le prochain chapitre en testant le couplage entre la MAN et la PGD pour une non linéarité dans le terme source de chaleur. L'application de la technique de maillage adaptatif sera ensuite abordée dans le **chapitre D**.

Chapitre C

Couplage MAN – PGD pour la résolution d’un problème transitoire non linéaire

Sommaire

C.I Résolution de l’équation de la chaleur transitoire 1D non linéaire	100
C.I.1 La PGD pour les problèmes transitoires non linéaires.....	101
C.I.2 La MAN pour les problèmes transitoires non linéaires.....	103
<i>C.I.2.1 Technique de perturbation.....</i>	<i>104</i>
<i>C.I.2.2 Technique de résolution couplée MAN-PGD</i>	<i>107</i>
<i>C.I.2.3 Technique de continuation.....</i>	<i>112</i>
C.II Résultats	117
C.II.1 Résolution d’un problème transitoire non linéaire par la MAN-PGD.....	117
<i>C.II.1.1 Solution convergée de référence par la méthode des différences finies.....</i>	<i>117</i>
<i>C.II.1.2 Résultats par la résolution MAN-PGD.....</i>	<i>119</i>
<i>C.II.1.3 Stratégie MAN-PGD modifiée.....</i>	<i>125</i>
C.II.2 Domaine de validité.....	127
<i>C.II.2.1 Domaine de validité.....</i>	<i>127</i>
<i>C.II.2.2 Influence de la non linéarité sur le domaine de validité</i>	<i>132</i>
<i>C.II.2.3 Influence du domaine temporel sur le domaine de validité.....</i>	<i>133</i>
Conclusion du chapitre	135

L'objectif de ce chapitre est de compléter les développements précédents en se donnant la possibilité de résoudre des problèmes non linéaires transitoires. L'idée est de coupler la PGD et la Méthode Asymptotique Numérique (MAN). Dans le contexte de la PGD, la résolution de problèmes non linéaires transitoires a été étudiée en utilisant des stratégies de linéarisation [Ammar 2010a, Pruliere 2010a]. Toutefois, comme nous allons le montrer dans la suite, cette approche présente certains inconvénients. Nous proposons donc une approche alternative basée sur la MAN.

La MAN [Cochelin 2007] est largement utilisée pour résoudre un grand nombre de problèmes non linéaires et en particulier dans le cadre de la mécanique des structures des problèmes d'instabilité comme notamment le flambage [Azrar 1993, Cochelin 1994, 2007]. Dans le contexte des méthodes de réduction de modèle, on peut citer des travaux couplant la MAN et la POD pour la résolution de problèmes non linéaires [Yvonnet 2007, Niroomandi 2010].

L'idée de la MAN est de chercher la solution sous la forme d'une série entière de manière récurrente. L'introduction du développement en série entière mène à la résolution d'un grand nombre de problèmes linéaires. Le couplage entre la MAN et la PGD consiste à utiliser la PGD pour résoudre ces problèmes linéaires. La récurrence est liée au fait que la résolution de la MAN pour un ordre donné fait intervenir les solutions aux ordres précédents.

L'objet de ce travail est de montrer que le couplage MAN-PGD est possible pour une certaine famille de problèmes non linéaires. Ce chapitre n'a pas la vocation d'être d'une portée générale mais d'évaluer si la MAN est capable de résoudre des non linéarités temporelles. La MAN est appliquée ici à l'équation de la chaleur transitoire 1D où la non linéarité intervient dans le terme source. Dans un premier temps, la mise en place de la méthode est détaillée puis le domaine de validité de la méthode est discuté.

C.I Résolution de l'équation de la chaleur transitoire 1D non linéaire

On cherche à déterminer la fonction $T(x, t)$ définie sur le domaine (l'espace 1D x et le temps t) $\Omega = \Omega_x \times \Omega_t = [0; L_x] \times [0; L_t]$ telle que :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f + g(T) \quad (\text{C.I-1})$$

où ρ est la masse volumique, C la chaleur spécifique, λ_T la conductivité thermique, f la source de la chaleur et $g(T)$ est une fonction non linéaire qui dépend de la température. La non linéarité du problème est liée au terme $g(T)$ et la somme $f + g(T)$ peut être considérée comme une source de la chaleur non linéaire.

Pour simplifier l'écriture, on considère des conditions aux bords et initiales nulles ainsi que des paramètres matériau constants (ρ , C et λ_T constants).

De plus, par souci de simplicité, nous allons considérer le cas particulier de la non linéarité $g(T) = -T^2$. L'équation (C.I-1) s'écrit donc :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f + (-T^2) \quad (\text{C.I-2})$$

Dans ce qui suit, nous allons tout d'abord présenter la résolution par la PGD de ce problème non linéaire afin de mettre en évidence les inconvénients de ce type d'approche. Ensuite, une méthode de couplage MAN-PGD est proposée.

C.I.1 La PGD pour les problèmes transitoires non linéaires

La PGD (présentée dans le **chapitre B**) est ici appliquée pour la résolution de l'équation **(C.I-2)**. Rappelons que cette méthode consiste en une procédure itérative composée à chaque itération par trois étapes : l'enrichissement de la base, le calcul des coefficients et le calcul du résidu.

A l'itération $k+1$, l'étape d'enrichissement consiste à rechercher la solution $T(x, t)$ sous la forme séparée suivante :

$$T(x, t) = \sum_{i=1}^k \alpha^i F^i(x) H^i(t) + R(x) P(t) \quad (\text{C.I-3})$$

où $R(x)$ et $P(t)$ sont les nouvelles fonctions de base à déterminer.

Avec un champ virtuel :

$$T^*(x, t) = R^*(x) P(t) + R(x) P^*(t) \quad (\text{C.I-4})$$

et après la prise en compte des conditions aux bords, la formulation variationnelle de Galerkin liée l'équation **(C.I-2)** s'écrit :

$$\rho C \int_{\Omega} T^* \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \lambda_T \int_{\Omega} \frac{\partial T^*}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega} T^* f d\Omega + \int_{\Omega} T^* (-T^2) d\Omega \quad (\text{C.I-5})$$

Cela mène à la résolution d'un système non linéaire en $R(x)$, $P(t)$. Comme nous l'avons précisé dans le **chapitre B**, afin de déterminer $R(x)$ et $P(t)$ la méthode de point fixe à directions alternées est utilisée pour déterminer $R(x)$ et $P(t)$ [Ammar 2007].

Remarque. La méthode de point fixe mène à la résolution d'équations linéaires lorsque le problème est linéaire (cf. **B.I.1**). Cette procédure de point fixe est détaillée ici pour le problème non linéaire considéré :

- Trouver $R(x)$:

Supposons connu $P(t)$, ce qui implique un champ virtuel de la forme $T^*(x, t) = R^*(x) P(t)$ puisque $P^*(t)$ s'annule. Comme l'équation **(C.I-5)** doit être satisfaite quel que soit $R^*(x)$, on obtient un système non linéaire à résoudre pour déterminer $R(x)$:

$$R \cdot U_{11}(P) = U_{12}(P) - U_{13}(F^i, H^i, P) + U_{14}(F^i, H^i, R, P) \quad (\text{C.I-6})$$

où le terme $U_{14}(F^i, H^i, R, P)$ lié à la non linéarité $-T^2$ est non linéaire en R .

- Trouver $P(t)$

Supposons connu $R(x)$, ce qui implique un champ virtuel de la forme $T^*(x, t) = R(x) P^*(t)$ puisque $R^*(x)$ s'annule. On obtient donc un système non linéaire à résoudre pour déterminer $P(t)$:

$$P \cdot U_{21}(R) = U_{22}(R) - U_{23}(F^i, H^i, R) + U_{24}(F^i, H^i, R, P) \quad (\text{C.I-7})$$

où le terme $U_{24}(F^i, H^i, R, P)$ lié à la non linéarité $-T^2$ est non linéaire en P .

Comme on pouvait s'y attendre, dans le cas d'un problème non linéaire, la méthode de point fixe mène à la résolution d'équations non linéaires. Pour les résoudre, deux stratégies de linéarisation ont été proposées par Prulière [Pruliere 2010a] et Ammar [Ammar 2010a]. Il s'agit de la stratégie de linéarisation incrémentale et de la stratégie de linéarisation de Newton. Elles consistent, toutes les deux, en une linéarisation du terme non linéaire T^2 à l'enrichissement considéré $k+1$ (terme que l'on notera $(T^{(k+1)})^2$) :

- Pour la stratégie de linéarisation incrémentale, le terme $(T^{(k+1)})^2$ est évalué à partir de la solution à l'enrichissement précédent k :

$$(T^{(k+1)})^2 \approx (T^{(k)})^2 = \left(\sum_{i=1}^k \alpha^i F^i(x) H^i(t) \right)^2 \quad (\text{C.I-8})$$

- Pour la stratégie de linéarisation de Newton, le terme $(T^{(k+1)})^2$ est évalué en utilisant partiellement la solution à l'enrichissement précédent k :

$$(T^{(k+1)})^2 = (T^{(k)} + R(x)P(t))^2 \approx (T^{(k)})^2 + 2T^{(k)} R(x)P(t) \quad (\text{C.I-9})$$

Ainsi, avec ces deux stratégies, le système à résoudre par la méthode de point fixe (Eq. (C.I-6)) et (Eq. (C.I-7)) devient linéaire. Dans [Pruliere 2010a], une autre variante est proposée et consiste à écrire ce terme sous la forme : $(T^{(k+1)})^2 \approx (T^{(k)}) \cdot (T^{(k+1)})$.

Les auteurs montrent que les stratégies ci-dessus convergent et qu'il n'y a pas de différence importante en terme de nombre de modes et temps de calcul, même si la non linéarité est mieux prise en compte par la deuxième stratégie.

Toutefois, par comparaison à une solution analytique, ces deux stratégies nécessitent un nombre de modes beaucoup plus important. Ceci s'explique par le fait que le nombre de modes est lié à la convergence du solveur non linéaire qui est utilisé dans l'étape de l'enrichissement. Plus le solveur converge lentement, plus le nombre d'étapes d'enrichissements est élevé et par suite le nombre de modes.

Une stratégie dite optimale a été envisagée et consiste à rechercher les nouvelles bases $R(x)$ et $P(t)$ à la sous itération m (notées $R^{(m)}(x)$ et $P^{(m)}(t)$) en utilisant partiellement les fonctions obtenues à la sous itération précédente $(m-1)$:

$$(T^{(k+1)})^2 \approx \left(\sum_{i=1}^k \alpha^i F^i(x) H^i(t) + R^{(m-1)}(x) P^{(m-1)}(t) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^k \alpha^i F^i(x) H^i(t) + R^{(m)}(x) P^{(m)}(t) \right) \quad (\text{C.I-10})$$

Cette stratégie semble être plus avantageuse car elle permet d'atteindre la précision demandée avec le même nombre de modes que la solution exacte. Toutefois, le coût de calcul est semblable par rapport aux deux premières stratégies.

De plus, avec cette approche, les opérateurs différentiels liés aux inconnues $R^{(m)}(x)$ et $P^{(m)}(t)$ doivent être mis à jour à chaque itération. Autrement dit, on doit actualiser les composants de \mathcal{A} (cf. B.I.1.2) à chaque itération. Ceci devient coûteux si la taille du problème est importante (par exemple lorsque la non linéarité est plus complexe).

Il semble donc intéressant d'avoir un nombre constant d'opérateur différentiel. C'est l'avantage de la Méthode Asymptotique Numérique que nous allons présenter dans la partie suivante.

C.I.2 La MAN pour les problèmes transitoires non linéaires

Afin de résoudre le problème (Eq. (C.I-2)) avec la MAN, un paramètre réel ϕ est introduit. Nous considérons donc un système non linéaire composé de l'inconnue T et du paramètre ϕ . Trois systèmes qui se différencient par l'introduction du paramètre ϕ peuvent être envisagés:

- Soit ϕ est placé devant la source de la chaleur f :

L'équation à résoudre devient donc:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \phi \cdot f + g(T) \quad (\text{C.I-11})$$

Cette approche a pour but d'évaluer l'influence du chargement (ici la source) f sur la réponse du système. Avec cette approche, nous pouvons obtenir la solution pour différentes valeurs du chargement. Dans la plupart des cas, c'est cette approche qui est utilisée, notamment dans le cadre de la mécanique des structures lors de la résolution de problèmes d'instabilité [Cochelin 2007].

- Soit ϕ est placé devant la non linéarité $g(T)$:

L'équation à résoudre devient donc:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f + \phi \cdot g(T) \quad (\text{C.I-12})$$

Avec cette approche, on analyse l'influence de la non linéarité sur la réponse du système.

- Soit ϕ est placé devant la source 'totale' $f + g(T)$:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \phi \cdot (f + g(T)) \quad (\text{C.I-13})$$

Avec cette approche, on analyse l'influence de f et $g(T)$ simultanément.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons à l'influence de la non linéarité sur la réponse du système. Nous allons donc considérer le système (Eq. (C.I-12)).

L'équation à résoudre devient donc :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f + \phi \cdot (-T^2) \quad (\text{C.I-14})$$

où les inconnues sont la température T et le paramètre ϕ .

Le principe de la MAN est de chercher les solutions T et ϕ sous la forme de séries entières tronquées à un certain ordre. La MAN permet de transformer le système non linéaire en un certain nombre de problèmes linéaires qui disposent des mêmes opérateurs différentiels. Comme nous allons voir dans la suite, ils se différencient uniquement par le second terme.

Pour déterminer la branche complète de solution (T, ϕ) , la MAN consiste en trois techniques de base qui sont la perturbation, la discrétisation et la continuation.

La technique de perturbation est utilisée pour transformer le problème non linéaire à résoudre en une suite de problèmes linéaires. Le couplage MAN-PGD consiste à résoudre ces problèmes linéaires par

la PGD. La technique de continuation permet de déterminer un nouveau morceau de la solution. Dans ce qui suit, nous allons détailler chacune de ces techniques.

C.I.2.1 Technique de perturbation

La technique de perturbation consiste à chercher la solution de l'équation (C.I-14) sous la forme de séries entières tronquées en fonction d'un paramètre de chemin a :

$$\phi = \phi_0 + a\phi_1 + a^2\phi_2 + \dots + a^p\phi_p = \sum_{i=0}^p a^i\phi_i \quad (\text{C.I-15})$$

$$T = T_0 + aT_1 + a^2T_2 + \dots + a^pT_p = \sum_{i=0}^p a^iT_i \quad (\text{C.I-16})$$

où l'ordre p est choisi par l'utilisateur.

A partir d'une analyse *a posteriori* qui sera présentée dans la section suivante, il est constaté que le couple de solution (ϕ, T) écrit sous la forme de séries entières est valable uniquement dans un domaine de validité de a ($a \in [0; a_{\max}]$). La solution correspondant $(\phi(a), T(a))$ est dite morceau de la branche de solution (cf. la FIG. C.I-1). Notons que le couple $(\phi(a=0), T(a=0)) = (\phi_0, T_0)$ est le point de départ de ce morceau.

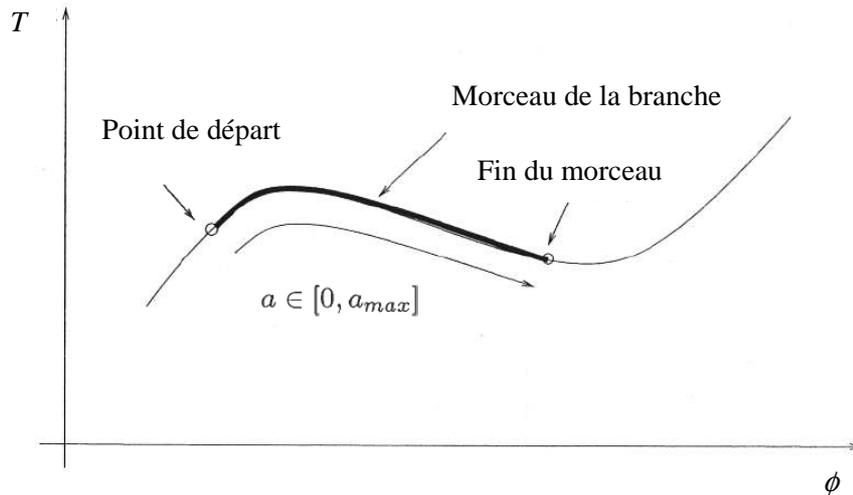


FIG. C.I-1 Un morceau de la branche de solution [Cochelin 2007]

Remarque. Les conditions aux bords et initiales ont été choisies nulles pour T . Ces mêmes conditions aux bords et initiales sont également appliquées aux équations à chaque ordre de la MAN T_i ($0 \leq i \leq p$).

Pour résoudre un problème avec d'autres conditions aux limites, nous nous ramènerons, par changement de variables, à un problème avec des conditions aux bords et initiales nulles. Considérons, par exemple, un problème dont les conditions aux bords sont non nulles :

$$T(x \in \partial\Omega_x, t) = T^b(x, t) \quad (\text{C.I-17})$$

où la fonction $T^b(x, t)$ est connue. En posant le changement de variables suivant :

$$T(x, t) = T^0(x, t) + T^b(x, t) \quad (\text{C.I-18})$$

où $T^0(x, t)$ est nulle aux bords et à l'instant initial, le problème considéré s'écrit donc :

$$\rho C \frac{\partial T^0}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T^0}{\partial x^2} = f + \phi \cdot g(T^0 + T^b) - \rho C \frac{\partial T^b}{\partial t} + \lambda_T \frac{\partial^2 T^b}{\partial x^2} \quad (\text{C.I-19})$$

Comme la fonction T^b est connue, ce système peut s'écrire sous la forme

$$\rho C \frac{\partial T^0}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T^0}{\partial x^2} = f^b + \phi \cdot g(T^0 + T^b) \quad (\text{C.I-20})$$

Ainsi, la même structure de développement peut être mise en place.

Avec la représentation **(C.I-16)**, la non linéarité $g(T)$ peut également s'écrire sous la forme d'une série entière tronquée à l'ordre p :

$$g(T) = -T^2 = \sum_{i=0}^p a^i g_i(T) \quad (\text{C.I-21})$$

où :

$$g_i(T) = -\sum_{l=0}^i T_l T_{i-l} \quad (\text{C.I-22})$$

Remarque. Cette représentation devient compliquée si $g(T)$ est une fonction puissance d'ordre élevé $g(T) = T^n$ avec n grand. Dans ce cas, de nouvelles variables $v^{(j)}$ telles que $v^{(n)} = T^n = T \cdot v^{(n-1)}$, ..., $v^{(2)} = T^2 = T \cdot T$ sont classiquement introduites. Cela mène aux nouvelles équations :

$$\begin{aligned} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= f + \phi \cdot (-T \cdot v^{(n-1)}) \\ v^{(n-1)} - T \cdot v^{(n-2)} &= 0 \\ &\dots \\ v^{(2)} - T^2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.I-23})$$

En appliquant le technique de développement à l'ensemble des variables $v^{(j)}$ ($2 \leq j \leq n-1$) et T , on constate qu'un seul produit de deux séries entières tronquées est nécessaire. Néanmoins, un ordre élevé peut faire exploser le nombre de termes et d'opérations [Cochelin 2007].

A partir des représentations **(C.I-15)**, **(C.I-16)**, **(C.I-21)**, l'équation **(C.I-14)** peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\rho C \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=0}^p a^i T_i \right) - \lambda_T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{i=0}^p a^i T_i \right) = f + \left(\sum_{i=0}^p a^i \phi_i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^p a^i g_i(T) \right) \quad (\text{C.I-24})$$

soit :

$$\rho C \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=0}^p a^i T_i \right) - \lambda_T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{i=0}^p a^i T_i \right) = a^0 f + \sum_{i=0}^p a^i \sum_{j=0}^i \phi_j g_{i-j}(T) \quad (\text{C.I-25})$$

Pour que l'équation **(C.I-25)** soit satisfaite quelle que soit la valeur de a , $p+1$ problèmes linéaires pour chaque ordre de a doivent être résolus.

- **L'ordre 0**

Le problème à l'ordre 0 s'écrit :

$$\rho C \frac{\partial T_0}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} = f + \phi_0 g_0(T) = f + \phi_0 (-T_0^2) \quad (\text{C.I-26})$$

où les deux inconnues sont T_0 et ϕ_0 . Supposons $\phi_0 = 0$, T_0 est donc la solution de l'équation linéaire suivante :

$$\rho C \frac{\partial T_0}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} = f \quad (\text{C.I-27})$$

Rappelons que le couple (ϕ_0, T_0) est le point de départ du morceau de la branche de solution et (ϕ_0, T_0) est bien la solution de l'équation non linéaire (C.I-14).

- **L'ordre i ($1 \leq i \leq p$)**

Le problème à l'ordre i ($1 \leq i \leq p$) s'écrit :

$$\rho C \frac{\partial T_i}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^i \phi_j g_{i-j}(T) \quad (\text{C.I-28})$$

où les deux inconnues sont T_i et ϕ_i . On voit que les termes $g_{i-j}(T)$ ($1 \leq j \leq i$) ne dépendent que des solutions aux ordres précédents (cf. Eq. (C.I-22)). L'équation (C.I-28) correspond donc à l'équation d'un problème linéaire transitoire.

Paramètre de chemin a

Remarquons qu'avec p ordres de la MAN, on a $2p$ inconnues qui sont (T_1, T_2, \dots, T_p) et $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$. Pourtant, il n'y a que p équations. Il faut donc ajouter une condition supplémentaire à chaque ordre. Comme précisé dans [Cochelin 2007], cette condition s'appuie sur la définition du paramètre de chemin a qui peut être calculé de la façon suivante :

$$\langle T - T_0, T_1 \rangle + \langle \phi - \phi_0, \phi_1 \rangle = a \quad (\text{C.I-29})$$

Il s'agit, dans ce cas, d'une pseudo longueur d'arc. Elle correspond à la projection de la solution sur la direction tangente (T_1, ϕ_1) . D'autres choix sont possibles et sont présentés dans [Cochelin 2007] mais ils n'ont pas été étudiés dans le cadre de ce travail.

Avec cette définition du paramètre de chemin, nous obtenons p conditions supplémentaires qui s'écrivent:

$$\begin{cases} \langle T_1, T_1 \rangle + \langle \phi_1, \phi_1 \rangle = 1 \\ \langle T_2, T_1 \rangle + \langle \phi_2, \phi_1 \rangle = 0 \\ \dots \\ \langle T_p, T_1 \rangle + \langle \phi_p, \phi_1 \rangle = 0 \end{cases} \quad (\text{C.I-30})$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire.

Le problème est maintenant bien posé et nous pouvons donc résoudre les équations linéaires à chaque ordre de la MAN. C'est l'objet de l'étape de résolution.

C.I.2.2 Technique de résolution couplée MAN-PGD

Dans le cadre de la mécanique des structures, la MAN est classiquement couplée avec la méthode des éléments finis (MEF). Cela revient à utiliser la MEF pour résoudre les équations linéaires générées par la technique de perturbation. Nous proposons ici d'utiliser la PGD.

L'intérêt de l'approche MAN-PGD par rapport à l'approche MAN-MEF est lié au fait que les équations transitoires peuvent être résolues directement. Dans l'approche MAN classique, un schéma temporel incrémental doit être utilisé [Cochelin 2000]. La PGD étant une méthode non incrémentale, la résolution des problèmes transitoires linéaires ne pose aucune difficulté et est très rapide.

Dans ce qui suit, nous allons détailler la résolution couplée MAN-PGD à chaque ordre de la MAN. La résolution d'un problème transitoire linéaire par la PGD a été présentée au **chapitre B**, elle ne sera pas détaillée ici.

- **L'ordre 0**

Rappelons que le problème à résoudre à l'ordre 0 s'écrit :

$$\rho C \frac{\partial T_0}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} = f$$

La solution par la PGD de cette équation s'écrit sous la forme :

$$T_0 = T_0^{(PGD)} = \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_0^k F_0^k(x) H_0^k(t) \quad (C.I-31)$$

où $F_0^k(x)$ sont les modes spatiaux, $H_0^k(t)$ les modes temporels, α_0^k les coefficients et n_0 est le nombre de modes à l'ordre 0.

- **L'ordre 1**

A l'ordre 1, on cherche à résoudre l'équation suivante :

$$\rho C \frac{\partial T_1}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \phi_1 g_0(T) \quad (C.I-32)$$

La solution de cette équation peut être s'écrire sous la forme :

$$T_1 = \phi_1 T_1^{(PGD)} \quad (C.I-33)$$

où $T_1^{(PGD)}$ est la solution par la PGD de l'équation suivante:

$$\rho C \frac{\partial T_1^{(PGD)}}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_1^{(PGD)}}{\partial x^2} = g_0(T) = -T_0^2 \quad (C.I-34)$$

A l'aide de la condition :

$$\langle T_1, T_1 \rangle + \langle \phi_1, \phi_1 \rangle = 1 \quad (C.I-35)$$

On obtient la valeur de ϕ_1 comme suit :

$$\phi_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{\langle T_1^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle + 1}} \quad (C.I-36)$$

Le signe \pm de ϕ_1 indique le signe du vecteur tangent au point de départ (ϕ_0, T_0) du morceau de la branche de solution. Il sert à suivre une branche de solution dans le même sens, sans retour en arrière. Dans ce qui suit, nous choisissons toujours une valeur positive de ϕ_1 car notre but est de déterminer la solution à $\phi=1$ avec pour point de départ $\phi=0$.

La solution à l'ordre 1 peut donc s'écrire sous la forme :

$$T_1 = \phi_1 T_1^{(PGD)} = \phi_1 \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_1^k F_1^k(x) H_1^k(t) \quad (\text{C.I-37})$$

- **L'ordre 2**

A l'ordre 2, on cherche à résoudre l'équation suivante :

$$\rho C \frac{\partial T_2}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \phi_1 g_1(T) + \phi_2 g_0(T) \quad (\text{C.I-38})$$

La solution de cette équation peut être écrite sous la forme :

$$T_2 = \phi_1 T_2^{(PGD)} + \phi_2 T_1^{(PGD)} \quad (\text{C.I-39})$$

où $T_2^{(PGD)}$ est la solution PGD de l'équation suivante:

$$\rho C \frac{\partial T_2^{(PGD)}}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_2^{(PGD)}}{\partial x^2} = g_1(T) = -2T_0 T_1 \quad (\text{C.I-40})$$

et $T_1^{(PGD)}$ est la solution de l'équation (C.I-34) qui a déjà été trouvée lors de la résolution à l'ordre précédent. La source $g_1(T)$ étant composée uniquement de la solution aux ordres précédents, un seul problème linéaire doit être résolu à cet ordre.

A partir de la condition :

$$\langle T_2, T_1 \rangle + \langle \phi_2, \phi_1 \rangle = 0 \quad (\text{C.I-41})$$

la valeur ϕ_2 est déterminée comme suit :

$$\phi_2 = - \frac{\phi_1 \langle T_2^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle}{1 + \langle T_1^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle} \quad (\text{C.I-42})$$

Ensuite, la solution MAN à l'ordre 1 est calculée à l'aide de (Eq. (C.I-39)).

- **L'ordre i ($1 \leq i \leq p$)**

De la même manière, la solution du problème linéaire à l'ordre i :

$$\rho C \frac{\partial T_i}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^i \phi_j g_{i-j}(T) \quad (\text{C.I-43})$$

est recherchée sous la forme :

$$T_i = \phi_1 T_i^{(PGD)} + \phi_2 T_{i-1}^{(PGD)} + \dots + \phi_i T_1^{(PGD)} = \sum_{j=1}^i \phi_j T_{i+1-j}^{(PGD)} \quad (\text{C.I-44})$$

Elle mène à la résolution de i problèmes linéaires parmi lesquels $i - 1$ problèmes ont déjà été résolus aux ordres précédents. Il reste seulement à résoudre uniquement l'équation suivante par la PGD:

$$\rho C \frac{\partial T_i^{(PGD)}}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_i^{(PGD)}}{\partial x^2} = g_{i-1}(T) \quad (\text{C.I-45})$$

dont la source $g_{i-1}(T) = -\sum_{l=0}^{i-1} T_l T_{(i-1)-l}$ ne dépend que des solutions aux ordres précédents.

A partir de la condition :

$$\langle T_i, T_1 \rangle + \langle \phi_i, \phi_1 \rangle = 0 \quad (\text{C.I-46})$$

la valeur ϕ_i est déterminée comme suit :

$$\phi_i = -\frac{\phi_{i-1} \langle T_2^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle + \dots + \phi_1 \langle T_i^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle}{1 + \langle T_1^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle} \quad (\text{C.I-47})$$

Pour conclure, on voit que tous les problèmes sont résolus de manière récurrente, la résolution de la MAN à un ordre donné faisant intervenir les solutions aux ordres précédents.

Notons que le nombre total d'enrichissements pour décrire la solution à l'ordre p est égale à la somme des enrichissements PGD effectués à chaque ordre :

$$n_{total} = \sum_{i=1}^p n_i \quad (\text{C.I-48})$$

Décomposition de la source

Pour la résolution de chacune des équations ci-dessus avec la PGD, il est nécessaire de considérer une représentation séparée de la source. A l'ordre i , la source de l'équation PGD à résoudre s'écrit $g_{i-1}(T) = -\sum_{l=0}^{i-1} T_l T_{(i-1)-l}$. Elle dépend des solutions aux ordres précédents

$T_l = \sum_{j=1}^l \phi_j T_{l+1-j}^{(PGD)}$ ($0 \leq l \leq i-1$). Rappelons que chaque solution PGD, $T_m^{(PGD)}$ ($0 \leq m \leq l-1$), est

une somme de produits de modes spatiaux et temporels qui s'écrit $T_m^{(PGD)} = \sum_{k=1}^{n_m} \alpha_m^k F_m^k(x) H_m^k(t)$.

Trois méthodes peuvent être envisagées pour représenter la source sous la forme séparée :

- *Explicitement :*

Dans ce cas, la représentation séparée de chaque solution $T_m^{(PGD)}$ est conservée et la source à l'ordre i de la MAN est composée des produits de toutes ces solutions. Avec cette méthode, la source est décrite complètement à chaque ordre de la MAN. Par contre, le nombre de termes séparés pour sa représentation peut s'avérer très élevé pour un ordre élevé de la MAN.

- *SVD* :

Dans ce cas, il s'agit d'utiliser la SVD (cf. **Chapitre A** – partie **A.I.3.1a**) pour décomposer la source à chaque ordre i de la MAN. Tout d'abord, la source $g_{i-1}(T)$ est calculée à chaque point de discrétisation (x, t) et est représentée par une matrice pleine $g_{i-1}(x, t)$ de taille $(n_x \times n_t)$. Cette matrice est ensuite décomposée par la SVD :

$$g_{i-1}(x, t) = U \Sigma V^T \quad (\text{C.I-49})$$

où Σ est une matrice diagonale de taille $n_x \times n_t$ contenant $\min(n_x, n_t)$ valeurs singulières qui sont rangées dans un ordre décroissant, U est une matrice de taille $n_x \times n_x$ dont les colonnes constituent une base orthonormale de l'espace x et V est une matrice de taille $n_t \times n_t$ dont les colonnes constituent une base orthonormale du temps t . Ainsi, chaque colonne de U et V correspond respectivement à un 'mode' spatial $F^{k(SVD)}(x)$ et un 'mode' temporel $H^{k(SVD)}(t)$. Chaque valeur singulière correspond à un coefficient $\alpha^{k(SVD)}$.

Nous conservons ensuite un certain nombre m de modes pour lesquels le coefficient est suffisamment élevé. La source à l'ordre i s'écrit donc sous la forme séparée suivante:

$$g_{i-1}(x, t) = \sum_{k=1}^m \alpha^{k(SVD)} F^{k(SVD)}(x) H^{k(SVD)}(t) \quad (\text{C.I-50})$$

Avec cette méthode, le nombre de termes pour décrire la source à chaque ordre de la MAN est faible. Dans le contexte d'un problème à 2 variables (x, t) , qui est le cas étudié ici, l'utilisation de la SVD ne présente pas de difficulté particulière pour le maillage considéré. Dans la suite, nous choisissons donc cette méthode pour la décomposition de la source. Pour un maillage plus fin, l'utilisation de la SVD peut être coûteuse. De plus, comme nous l'avons précisé dans le **chapitre A**, pour des problèmes avec plusieurs variables, l'utilisation de la SVD multidimensionnelle peut s'avérer compliquée [Gonzalez 2010, Kolda 2007, Lathauwer 2000]. Dans ce cas, la méthode PGD, présentée ci-après, peut être utilisée.

- *PGD* :

Une autre méthode consiste à utiliser la PGD pour compacter la source (réduire le nombre de termes dans la source). Etant donné que la source s'écrit sous la forme séparée de m termes

$g_{i-1}(x, t) = \sum_{k=1}^m \alpha^k F^k(x) H^k(t)$, le problème suivant est résolu par la PGD :

$$\mathbf{I}(g^{PGD}(x, y)) = \sum_{k=1}^m \alpha_k F_k(x) H_k(t) \quad (\text{C.I-51})$$

où \mathbf{I} est l'opérateur d'identité. La solution, obtenue avec un certain résidu, s'écrit sous la forme :

$$g^{PGD}(x, y) = \sum_{k=1}^{m^{PGD}} \alpha^k F^{k^{PGD}}(x) H^{k^{PGD}}(t) \quad (\text{C.I-52})$$

où le nombre de modes m^{PGD} est inférieur à m . Avec cette méthode, la source à chaque ordre de la MAN est obtenue sous la forme séparée avec un faible nombre de termes.

Le **TAB. C.I-1** est un tableau synoptique récapitulatif de l'algorithme de la résolution MAN-PGD couplée:

<p>Ordre 0</p> <p>Résoudre $\rho C \frac{\partial T_0^{(PGD)}}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_0^{(PGD)}}{\partial x^2} = f$ par la PGD</p> <p>Calculer la solution MAN à cet ordre $T_0 = T_0^{(PGD)}$</p> <p>Préparer la source pour l'ordre 1 : Décomposer $g_0(T) = -T_0^2$</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/>
<p>Ordre 1</p> <p>Résoudre $\rho C \frac{\partial T_1^{(PGD)}}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_1^{(PGD)}}{\partial x^2} = g_0(T) = -T_0^2$ par la PGD</p> <p>Calculer $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle T_1^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle + 1}}$</p> <p>Calculer la solution MAN à cet ordre $T_1 = \phi_1 T_1^{(PGD)}$</p> <p>Préparer la source pour l'ordre 2 : Décomposer $g_1(T) = -(T_0 T_1 + T_1 T_0)$</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/>
<p>Ordre i ($1 \leq i \leq p$)</p> <p>Résoudre $\rho C \frac{\partial T_i^{(PGD)}}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_i^{(PGD)}}{\partial x^2} = g_{i-1}(T)$ par la PGD</p> <p>Calculer $\phi_i = -\frac{\phi_{i-1} \langle T_2^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle + \dots + \phi_1 \langle T_i^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle}{1 + \langle T_1^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle}$</p> <p>Calculer la solution MAN à cet ordre $T_i = \sum_{j=1}^i \phi_j T_{i+1-j}^{(PGD)}$</p> <p>Préparer la source pour l'ordre suivant : Décomposer $g_i(T) = -\sum_{l=0}^i T_l T_{i-l}$</p>

TAB. C.I-1 Tableau récapitulatif de l'étape de résolution MAN-PGD couplée

Grâce à la technique de perturbation et à la résolution MAN-PGD couplée, nous pouvons trouver le couple (T_i, ϕ_i) pour chaque l'ordre i de la MAN.

Remarque. Il est constaté dans [Cochelin 2007] que, pour certains problèmes dont la discrétisation est indépendante des paramètres de chemin a et ϕ , les étapes de perturbation et résolution commutent. Pour ces problèmes, discrétiser le problème avant de le perturber mène à la résolution des mêmes équations.

Une autre approche couplant la MAN et la PGD semble intéressante. Elle consiste à tout d'abord appliquer la PGD pour séparer le problème en espace et en temps. Ensuite, la MAN classique est utilisée pour résoudre des problèmes stationnaires en espace. Cette approche n'est pas étudiée dans le cadre de cette thèse.

A partir des couples (ϕ_i, T_i) obtenus, nous pouvons ensuite déterminer la solution de l'équation (C.I-14), pour une valeur du paramètre ϕ souhaité, en résolvant l'équation (C.I-15) pour trouver a :

$$\phi_0 + a\phi_1 + a^2\phi_2 + \dots + a^p\phi_p = \phi$$

Par exemple, pour l'équation (C.I-2), on cherche à obtenir la valeur de a pour $\phi=1$. A partir de la valeur de a , la solution MAN finale avec p ordres est calculée à l'aide de l'équation (C.I-16) :

$$T = T_0 + aT_1 + a^2T_2 + \dots + a^pT_p = \sum_{i=0}^p a^i T_i$$

Remarque. Cela montre une propriété très intéressante de la MAN. Avec tous les couples (T_i, ϕ_i) obtenus, nous pouvons résoudre **a posteriori un nombre infini d'équations** spatio-temporelles du type (C.I-14). Pour chaque valeur de ϕ , il suffit de résoudre une équation polynomiale pour avoir la solution correspondante (ce point sera détaillé dans la suite).

C.I.2.3 Technique de continuation

Dans la partie précédente, nous avons présenté la résolution d'un problème thermique transitoire non linéaire pour une valeur souhaitée de ϕ grâce aux développements asymptotiques. Néanmoins, ces développements sont valables uniquement dans un certain voisinage du point de départ (ϕ_0, T_0) , c'est-à-dire les valeurs de ϕ doivent être à l'intérieur du morceau de la branche de solution $[\phi(0), \phi(a_{max})]$. L'intervalle $[0; a_{max}]$ (appelé le domaine de validité [Cochelin 2007]) est la limite du paramètre de chemin a pour lequel la solution obtenue par la série (Eq. (C.I-16)) satisfait une précision demandée.

Afin d'avoir la solution pour une valeur de ϕ à l'extérieur de $[\phi(0), \phi(a_{max})]$, d'autres morceaux de la branche de solution doivent être recherchés, ce qui est l'objectif de la technique de continuation.

Dans cette partie, une méthode pour déterminer le domaine de validité est tout d'abord présentée. La résolution couplée MAN-PGD pour la technique de continuation est ensuite détaillée.

Calcul du domaine de validité

Dans le cadre de cette thèse, nous allons utiliser la méthode proposée dans [Cochelin 2007] pour calculer la valeur de a_{max} . Elle s'appuie sur la différence de la solution aux ordres consécutifs de la MAN. L'idée est de déterminer a_{max} en exigeant que l'écart entre deux ordres consécutifs soit suffisamment petit :

$$\frac{\|T_p^{(MAN)} - T_{p-1}^{(MAN)}\|}{\|T_p^{(MAN)} - T_0^{(MAN)}\|} \leq \delta \quad (\text{C.I-53})$$

où $T_{p-1}^{(MAN)}$ et $T_p^{(MAN)}$ sont les solutions MAN finales à deux ordres consécutifs. $\| \cdot \|$ est la norme du vecteur considéré et δ est un paramètre choisi par l'utilisateur.

On a donc $\frac{\|a^p T_p\|}{\|aT_1 + a^2T_2 + \dots + a^p T_p\|} \leq \delta$. En approchant $\|aT_1 + a^2T_2 + \dots + a^p T_p\|$ par $\|aT_1\|$, on peut déterminer la valeur de a_{max} par la formule suivante :

$$a_{max} = \left(\delta \frac{\|T_1\|}{\|T_p\|} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (C.I-54)$$

La valeur de ϕ_{max} est ensuite calculée par (Eq. (C.I-15)) et mène à $\phi_{max} = \sum_{i=0}^p (a_{max})^i \phi_i$.

L'étape de continuation

En appliquant la technique de perturbation et la technique de résolution, on obtient le premier morceau de la branche de solution avec un domaine de validité $[0; a_{max}]$ correspondant. Pour déterminer le morceau suivant de la branche de solution (deuxième pas de continuation), il suffit d'appliquer à nouveau ces deux techniques à partir du nouveau point de départ défini comme suit :

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \phi(a_{max}) = \phi_{max} \\ T_0 &= T(a_{max}) \end{aligned} \quad (C.I-55)$$

Ecrivons maintenant les équations à résoudre à chaque ordre de la MAN avec ce nouveau point de départ.

- **L'ordre 0**

Le problème à l'ordre 0 s'écrit :

$$\rho C \frac{\partial T_0}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} = f + \phi_0 g_0(T) = f + \phi_0 (-T_0^2) \quad (C.I-56)$$

On constate que, comme le nouveau point de départ (ϕ_0, T_0) est solution du problème non linéaire (Eq. (C.I-14)), il est aussi solution du problème à l'ordre 0 défini ci-dessus.

- **L'ordre 1**

Le problème à l'ordre 1 s'écrit :

$$\rho C \frac{\partial T_1}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \phi_0 g_1(T) + \phi_1 g_0(T) = \phi_0 (-2T_0 T_1) + \phi_1 g_0(T) \quad (C.I-57)$$

soit

$$\rho C \frac{\partial T_1}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \phi_0 2T_0 T_1 = \phi_1 g_0(T) \quad (C.I-58)$$

On remarque, comme dans le cas précédent, que le système à résoudre est linéaire. Pourtant, l'opérateur différentiel du problème est différent de celui à l'ordre 1 du premier morceau de la branche de solution (Eq. (C.I-32)), lié au terme $\phi_0 2T_0 T_1$.

La technique de résolution couplée MAN-PGD présentée précédemment est réutilisée pour cette équation.

On résout tout d'abord l'équation suivante avec la PGD :

$$\rho C \frac{\partial T_1^{(PGD)}}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_1^{(PGD)}}{\partial x^2} + \phi_0 2T_0 T_1^{(PGD)} = g_0(T) = -T_0^2 \quad (\text{C.I-59})$$

On obtient ainsi $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle T_1^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle + 1}}$ et on calcule $T_1 = \phi_1 T_1^{(PGD)}$.

• L'ordre 2

Le problème à l'ordre 2 s'écrit :

$$\rho C \frac{\partial T_2}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \phi_0 g_2(T) + \phi_1 g_1(T) + \phi_2 g_0(T) = \phi_0 (-2T_0 T_2 - (T_1)^2) + \phi_1 g_1(T) + \phi_2 g_0(T) \quad (\text{C.I-60})$$

soit

$$\rho C \frac{\partial T_2}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \phi_0 2T_0 T_2 = \phi_0 (-(T_1)^2) + \phi_1 g_1(T) + \phi_2 g_0(T) \quad (\text{C.I-61})$$

Notons que l'opérateur différentiel est cette fois-ci le même que celui du problème à l'ordre 1.

La solution de cette équation est recherchée sous la forme :

$$T_2 = \phi_0 T_{[2]}^{(PGD)} + \phi_1 T_2^{(PGD)} + \phi_2 T_1^{(PGD)} \quad (\text{C.I-62})$$

où $T_{[2]}^{(PGD)}$ est la solution PGD de l'équation suivante:

$$\rho C \frac{\partial T_{[2]}^{(PGD)}}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_{[2]}^{(PGD)}}{\partial x^2} + \phi_0 2T_0 T_{[2]}^{(PGD)} = -(T_1)^2 \quad (\text{C.I-63})$$

et $T_2^{(PGD)}$ est la solution PGD de l'équation suivante:

$$\rho C \frac{\partial T_2^{(PGD)}}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_2^{(PGD)}}{\partial x^2} + \phi_0 2T_0 T_2^{(PGD)} = g_1(T) = (-2T_0 T_1) \quad (\text{C.I-64})$$

Notons que $T_1^{(PGD)}$ est la solution de l'équation (C.I-59) qui a déjà été résolue. Il reste donc deux problèmes linéaires à résoudre par la PGD (Eq. (C.I-63) et Eq. (C.I-64)). En comparaison avec la résolution du premier morceau de solution à l'ordre 2, on constate que cette étape nécessite la résolution de deux problèmes au lieu d'un seul.

Notons aussi que les sources $-(T_1)^2$ et $g_1(T)$ sont composées uniquement de la solution aux ordres précédents.

En rajoutant la condition $\langle T_2, T_1 \rangle + \langle \phi_i, \phi_1 \rangle = 0$, on obtient :

$$\phi_2 = -\frac{\phi_0 \langle T_{[2]}^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle}{1 + \langle T_1^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle} - \frac{\phi_1 \langle T_2^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle}{1 + \langle T_1^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle} \quad (\text{C.I-65})$$

La solution MAN à cet ordre est ensuite calculée d'après (Eq. (C.I-62)).

• **L'ordre i ($1 \leq i \leq p$)**

Le problème à l'ordre i s'écrit :

$$\rho C \frac{\partial T_i}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} = \phi_0 g_i(T) + \sum_{j=1}^i \phi_j g_{i-j}(T) = \phi_0 (-2T_0 T_i) + \phi_0 \left(-\sum_{l=1}^{i-1} T_l T_{i-l}\right) + \sum_{j=1}^i \phi_j g_{i-j}(T) \quad (\text{C.I-66})$$

soit

$$\rho C \frac{\partial T_i}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \phi_0 2T_0 T_i = \phi_0 \left(-\sum_{l=1}^{i-1} T_l T_{i-l}\right) + \sum_{j=1}^i \phi_j g_{i-j}(T) \quad (\text{C.I-67})$$

De la même manière que précédemment, la solution MAN à l'ordre i est recherchée sous la forme :

$$T_i = \phi_0 T_{[i]}^{(PGD)} + \phi_1 T_i^{(PGD)} + \phi_2 T_{i-1}^{(PGD)} + \dots + \phi_i T_1^{(PGD)} \quad (\text{C.I-68})$$

On est amené à résoudre $i+1$ problèmes linéaires parmi lesquels $i-1$ problèmes sont déjà résolus aux ordres précédents. Les 2 nouvelles équations décrites ci-après sont résolues avec la PGD:

$$\rho C \frac{\partial T_{[i]}^{(PGD)}}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_{[i]}^{(PGD)}}{\partial x^2} + \phi_0 2T_0 T_{[i]}^{(PGD)} = -\sum_{l=1}^{i-1} T_l T_{i-l} \quad (\text{C.I-69})$$

$$\rho C \frac{\partial T_i^{(PGD)}}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T_i^{(PGD)}}{\partial x^2} + \phi_0 2T_0 T_i^{(PGD)} = g_{i-1}(T) \quad (\text{C.I-70})$$

où la source $g_{i-1}(T) = -\sum_{l=0}^{i-1} T_l T_{(i-1)-l}$ ne dépend que des solutions aux ordres précédents.

Avec la condition $\langle T_i, T_1 \rangle + \langle \phi_i, \phi_1 \rangle = 0$, on obtient :

$$\phi_i = -\frac{\phi_0 \langle T_{[i]}^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle}{1 + \langle T_1^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle} - \frac{\phi_{i-1} \langle T_2^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle + \dots + \phi_1 \langle T_i^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle}{1 + \langle T_1^{(PGD)}, T_1^{(PGD)} \rangle} \quad (\text{C.I-71})$$

La solution MAN à cet ordre i est ensuite calculée d'après (Eq.(C.I-68)).

Remarque. Notons que toutes les équations résolues avec la PGD disposent du même opérateur :

$$\rho C \frac{\partial}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \phi_0 2T_0 \mathbf{I} \quad (\text{C.I-72})$$

De plus, avant d'appliquer la PGD, une nouvelle représentation séparée de la solution T_0 est déterminée à l'aide de la SVD. Cela permet de limiter le nombre de modes pour représenter T_0 .

Supposons que T_0 s'exprime sous la forme tensorielle suivante:

$$T_0 = \sum_i^{n_0} \alpha_0^i \mathbf{F}_0^i \otimes \mathbf{H}_0^i \quad (\text{C.I-73})$$

les composants de A (cf. **B.I.1.2**) s'écrivent ainsi:

	$i = 1$	$i = 2$	$i = (2 + j)$ $1 \leq j \leq n_0$
A_x^i	$\int_{\Omega_x} dN dN^T dx$	$\int_{\Omega_x} NN^T dx$	$\int_{\Omega_x} N(\mathbf{F}_0^j)^T NN^T dx$
A_t^i	$\int_{\Omega_t} LL^T dt$	$\int_{\Omega_t} LdL^T dt$	$\int_{\Omega_t} L(\mathbf{H}_0^j)^T LL^T dt$
a^i	λ_T	ρC	$2\phi_0 \alpha_0^j$

Une fois tous les couples (ϕ_i, T_i) obtenus, le domaine de validité est à nouveau déterminé à l'aide de (Eq. (C.I-54)). Le deuxième morceau de la branche de solution ainsi que son domaine de validité sont obtenus. Si la solution ainsi générée n'est pas suffisante, cette étape est à répétée à partir d'un nouveau point de départ (fin du morceau précédent).

La branche complète de la solution est ainsi construite en appliquant à chaque morceau les trois techniques qui sont la perturbation, la résolution et la continuation. A chaque étape de continuation, un nouvel opérateur différentiel doit être généré.

C.II Résultats

Dans cette section, nous présentons tout d'abord les résultats obtenus avec la MAN-PGD pour la résolution d'un problème non linéaire transitoire. Ensuite, une étude sur le domaine de validité est présentée.

C.II.1 Résolution d'un problème transitoire non linéaire par la MAN-PGD

On cherche à résoudre l'équation (C.I-2) avec les paramètres $\rho=1$; $C=1$; $\lambda_T=1$ et une source constante positive $f=2$. Rappelons que la non linéarité considérée est $-T^2$.

L'équation (C.I-2) s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2 + (-T^2) \quad (\text{C.II-1})$$

Le domaine étudié est $\Omega = \Omega_x \times \Omega_t = [0; 10] \times [0; 2]$. Les conditions aux bords et initiales sont choisies nulles.

La solution numérique obtenue avec la MAN-PGD est comparée à une solution numérique obtenue par une simulation utilisant la méthode des différences finies que l'on notera $T^{(DF)}$. Nous commençons par présenter cette solution.

C.II.1.1 Solution convergée de référence par la méthode des différences finies

La méthode des différences finies (MDF) [Allaire 2005] est utilisée pour résoudre l'équation (C.II-1). Un maillage régulier en espace (x_1, x_2, \dots, x_n) ayant un pas δ_x et un maillage régulier en temps (t_1, t_2, \dots, t_m) ayant un pas δ_t sont considérés. La solution au point (x_i, t_j) est notée T_i^j ($1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m$). Une fois la solution au temps t_j calculé, le schéma temporel de Newton implicite est choisi pour trouver la solution au temps t_{j+1} . Pour déterminer la dérivée seconde en espace, le schéma centré à l'ordre 2 est utilisé. Le terme non-linéaire $-T^2$ est évalué à l'incrément temporel t_j .

L'équation du problème est de la forme :

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\delta_t} - \frac{T_{i-1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i+1}^{j+1}}{\delta_x^2} = 2 + (-T_i^j)^2 \quad (\text{C.II-2})$$

$(1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m)$

La solution à l'instant t_{j+1} est obtenue en résolvant le système linéaire suivant :

$$(I - K) \begin{pmatrix} T_1^{j+1} \\ \dots \\ T_n^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^j \\ \dots \\ T_n^j \end{pmatrix} + \delta_t 2 - \delta_t \begin{pmatrix} (T_1^j)^2 \\ \dots \\ (T_n^j)^2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.II-3})$$

où I est une matrice d'identité et K est une matrice tri bande telle que:

$$K = \frac{\delta_t}{\delta_x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ & & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.II-4})$$

Une fois les conditions aux bords et initiales appliquées, la solution pour chaque point T_i^j ($1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m$) est obtenue.

Pour déterminer le maillage à utiliser avec les DF, l'influence du maillage sur la solution DF est étudiée en calculant la norme suivante sur chaque maillage:

$$n_{DF} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (T_i^j)^2}{nm}} \quad (\text{C.II-5})$$

ainsi que l'écart entre la solution obtenue sur le maillage M_l et celle obtenue sur le maillage M_k :

$$e_l^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |T_i^{j(M_l)} - T_i^{j(M_k)}|}{nm} \quad (\text{C.II-6})$$

où $n \times m$ est le maillage commun de M_l et M_k .

Le **TAB. C.II-1** récapitule les valeurs des normes et écarts obtenus sur différents maillages spatiaux pour un maillage temporel fixé à 1001 points. On voit que pour un maillage contenant plus de 1001 points en espace, la norme n_{DF} varie très peu. De plus, l'écart $e_l^{(k)}$ est lui aussi très faible (de l'ordre de 10^{-4}).

Maillage i ($n \times m$)	Norme n_{DF}	Ecart $e_i^{(1)}$	Ecart $e_i^{(2)}$	Ecart $e_i^{(3)}$	Ecart $e_i^{(4)}$
M_1 : 101×1001	1.0259	0			
M_2 : 501×1001	1.0301	0.0008	0		
M_3 : 1001×1001	1.0306	0.0096	0.0011	0	
M_4 : 5001×1001	1.0310	0.0104	0.0019	0.0008	0
M_5 : 10001×1001	1.0311	0.0103	0.0020	0.0009	0.0001

TAB. C.II-1 Valeur de la norme n_{DF} et de l'écart $e_l^{(k)}$ pour différents maillages spatiaux et un maillage temporel fixé

Le **TAB. C.II-2** montre les valeurs des normes et écarts obtenus sur différents maillages temporels pour un maillage spatial de 1001 points. On voit qu'à partir du maillage de 1001 points en temps, la norme n_{DF} ne varie pas beaucoup et l'écart est très faible (de l'ordre de 10^{-4}).

Maillage i ($n \times m$)	Norme n_{DF}	Ecart $e_i^{(1)}$	Ecart $e_i^{(2)}$	Ecart $e_i^{(3)}$	Ecart $e_i^{(4)}$
$M_1 : 1001 \times 101$	1.0321	0			
$M_2 : 1001 \times 501$	1.0308	0.0044	0		
$M_3 : 1001 \times 1001$	1.0306	0.0049	0.0005	0	
$M_4 : 1001 \times 5001$	1.0305	0.0054	0.0009	0.0004	0
$M_5 : 1001 \times 10001$	1.0304	0.0054	0.0011	0.0004	0.00005

TAB. C.II-2 Valeur de la norme n_{DF} et de l'écart $e_i^{(k)}$ pour différents maillages temporels et un maillage spatial fixé

Cette étude nous permet de choisir comme maillage 1001×1001 afin d'obtenir la solution convergée qui sera notée $T^{(DF)}$ dans la suite. Elle est représentée sur la **FIG. C.II-1**.

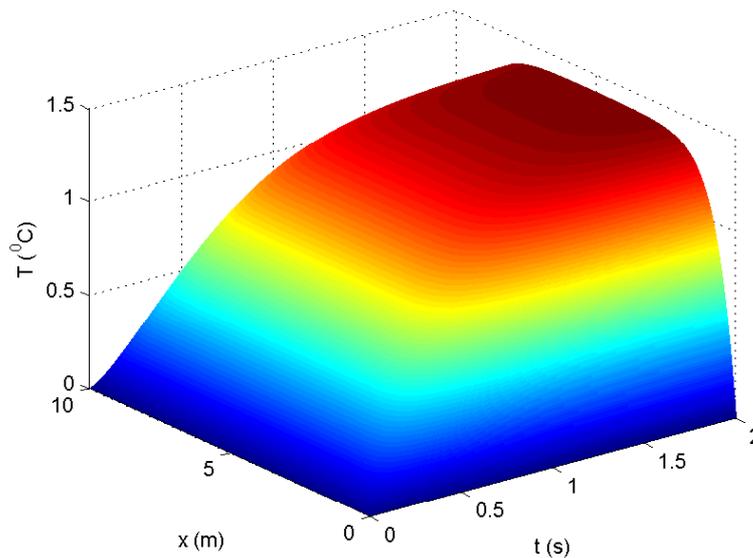


FIG. C.II-1 Solution DF $T^{(DF)}$ sur le maillage de 1001×1001

C.II.1.2 Résultats par la résolution MAN-PGD

Dans cette partie, nous allons détailler les résultats obtenus avec la technique de résolution MAN-PGD présentée précédemment pour la résolution de l'équation (C.II-1).

Paramètres pour la résolution PGD

Rappelons qu'à chaque ordre de la MAN, la PGD est utilisée pour résoudre les problèmes linéaires transitoires. La simulation PGD est effectuée sur le même maillage que celui utilisé dans la DF : $n_x = 1001$ pour l'espace x et $n_t = 1001$ points pour le temps. Rappelons que l'algorithme de résolution PGD se trouve **chapitre B (TAB B.I-2)**. Les paramètres de la résolution PGD utilisés ici sont les suivants :

- le critère d'arrêt pour la méthode de point fixe est $\varepsilon_{fixe} = 10^{-4}$ ou 100 itérations pour le critère d'arrêt pour l'étape d'enrichissement,
- $\varepsilon_{RV} = 95\%$ pour le critère d'arrêt concernant le nombre de modes.

L'écart entre les deux solutions numériques MAN-PGD (T) et DF ($T^{(DF)}$) est calculé comme suit :

$$E_{DF} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_t} (T(x_i, t_j) - T^{(DF)}(x_i, t_j))^2}{\sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_t} (T^{(DF)}(x_i, t_j))^2}} \quad (\text{C.II-7})$$

La procédure de résolution MAN-PGD présentée précédemment est appliquée à l'équation (C.II-1) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2 + \phi \cdot (-T^2) \quad (\text{C.II-8})$$

avec les conditions aux bords et initiale nulles.

A chaque ordre de la MAN, après avoir obtenu toutes les solutions MAN, la solution de l'équation (C.II-1) est obtenue *a posteriori* en imposant $\phi = 1$.

Dans ce qui suit, nous allons présenter en détail les résultats obtenus pour déterminer la première branche de solution.

• **L'ordre 0**

L'équation à résoudre avec la PGD s'écrit:

$$\frac{\partial T_0^{(PGD)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_0^{(PGD)}}{\partial x^2} = 2 \quad (\text{C.II-9})$$

où les conditions aux bords et initiales sont nulles.

La solution PGD est obtenue avec 7 modes et les coefficients suivants :

$$\alpha = [8.6731, 0.3991, 0.3809, 0.1711, 0.0668, 0.0563, 0.0642]$$

Remarquons que le premier mode est prépondérant.

Les modes spatiaux et les modes temporels sont représentés **FIG. C.II-2**. Notons que les modes spatiaux sont symétriques. L'évolution du résidu selon le nombre de modes est :

$$RV = [0.0400, 0.0060, 0.0050, 0.0047, 0.0030, 0.0024, 0.0017, 0.0015].$$

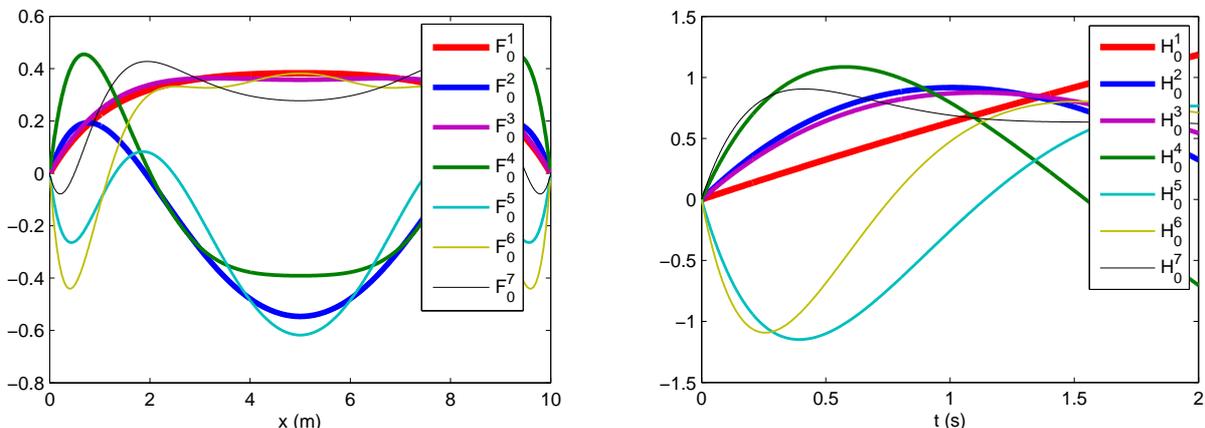


FIG. C.II-2 Les modes spatiaux (gauche) et temporels (droite) à l'ordre 0

La **FIG. C.II-3** (à gauche) illustre la solution PGD à l'ordre 0. La solution MAN à l'ordre 0 (T_0) et la solution MAN finale (T) sont ensuite calculées. Pour cette ordre de la MAN, elles sont identiques à la solution PGD ($T = T_0 = T_0^{(PGD)}$). L'erreur obtenue par rapport à la solution de référence DF est de 0.9775 (Eq. (C.II-7)).

La **FIG. C.II-3** (à droite) illustre la carte d'écart entre la solution MAN finale T et la solution $T^{(DF)}$. La solution à l'ordre 0 est fortement différente de celle obtenue avec la solution de référence différences finies $T^{(DF)}$. Cet écart est plus important dans la zone proche de 2 (s). En effet, le régime permanent n'est pas encore atteint à l'instant $t=2$.

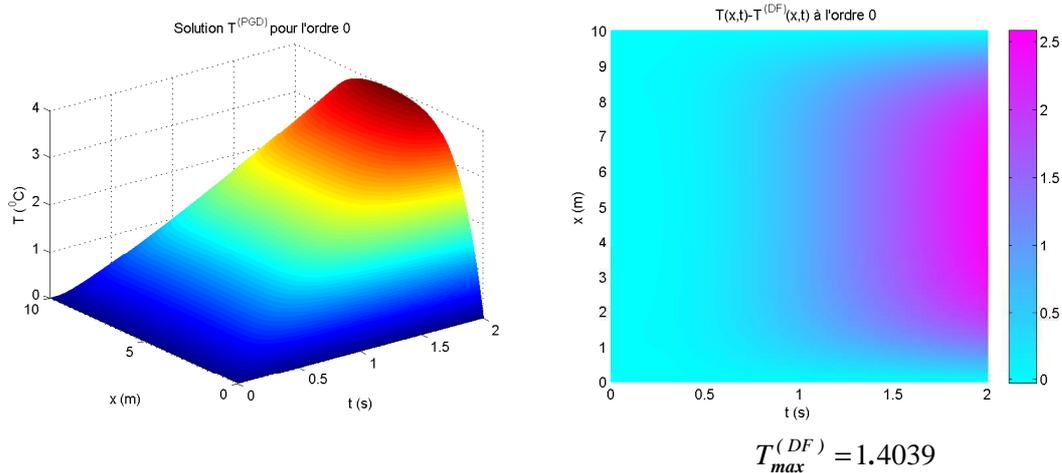


FIG. C.II-3 Solution PGD à l'ordre 0 (gauche) et carte d'écart entre la solution MAN finale à l'ordre 0 et la solution DF (droite)

Une fois la solution à l'ordre 0 calculée, la représentation séparée du terme source pour l'ordre 1, $g_0(T) = -T_0^2$, est calculée avec la SVD sur $g_0(T) = -T_0^2$ (cf. **TAB. C.I-1**) et s'écrit sous la forme (Eq. (C.I-50)) : $g_0 = \sum_{k=1}^m \alpha^{k(SVD)} F^{k(SVD)}(x) H^{k(SVD)}(t)$.

Rappelons que nous avons choisi d'utiliser cette étape pour limiter le nombre de termes pour représenter la source. La **FIG. C.II-4** montre la décroissance des 15 premières valeurs singulières $\alpha^{k(SVD)}$ obtenues.

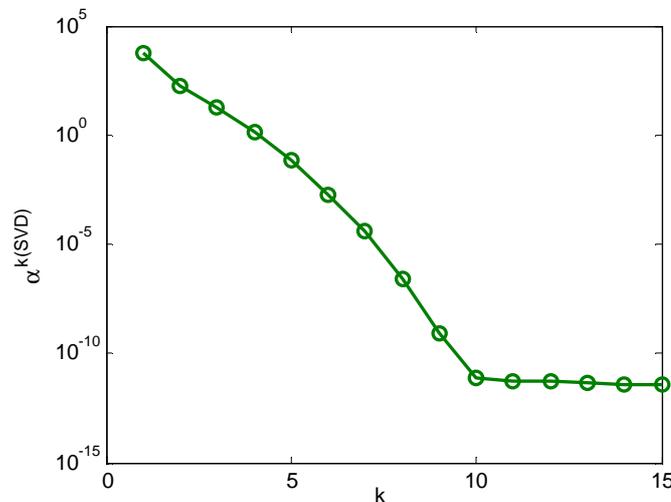


FIG. C.II-4 Evolution des valeurs singulières lors d'un calcul SVD de la source

Les valeurs singulières décroissent très vite. Nous choisissons de garder uniquement les ‘modes’ SVD k dont la valeur singulière satisfait le critère suivant:

$$\frac{\alpha^{k(SVD)}}{\alpha^{1(SVD)}} > 10^{-6} \quad (\text{C.II-10})$$

Cela nous donne $m = 5$ ‘modes’ SVD dans ce cas (**FIG. C.II-5**):

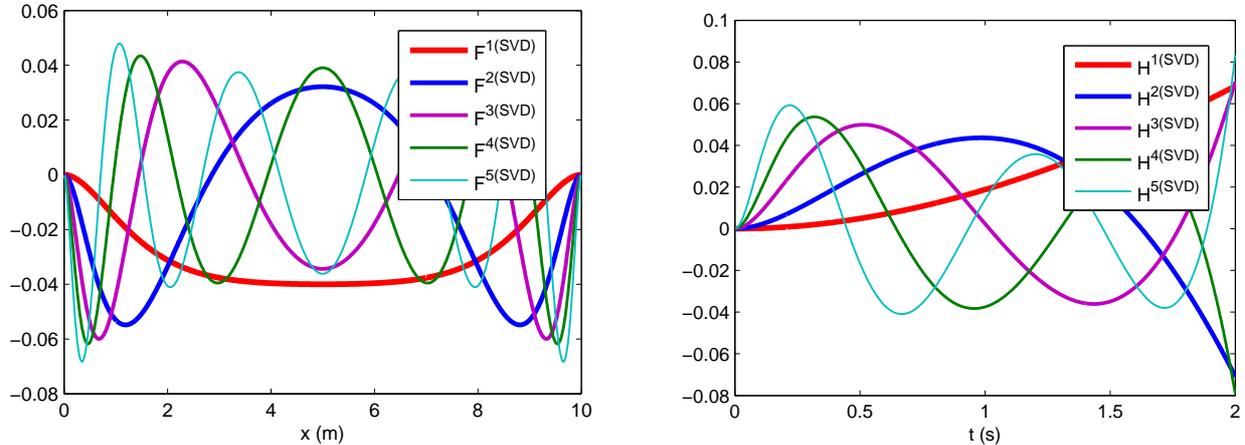


FIG. C.II-5 ‘Modes’ SVD spatiaux (gauche) et temporels (droite) pour la source du problème à l’ordre 1

Notons que si nous n’avions pas utilisé la SVD, nous aurions dû considérer 7^2 modes.

• L’ordre 1

L’équation à résoudre avec la PGD s’écrit:

$$\frac{\partial T_1^{(PGD)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_1^{(PGD)}}{\partial x^2} = -T_0^2 = \sum_{k=1}^5 \alpha^{k(SVD)} F^{k(SVD)}(x) H^{k(SVD)}(t) \quad (\text{C.II-11})$$

où les conditions aux bords et initiales sont nulles.

A cet ordre, la solution PGD est obtenue avec 7 modes et des coefficients $\alpha = [13.9188, 0.4937, 0.1303, 0.0459, 0.0159, 0.0072, 0.0037]$. Le premier mode est là encore prépondérant.

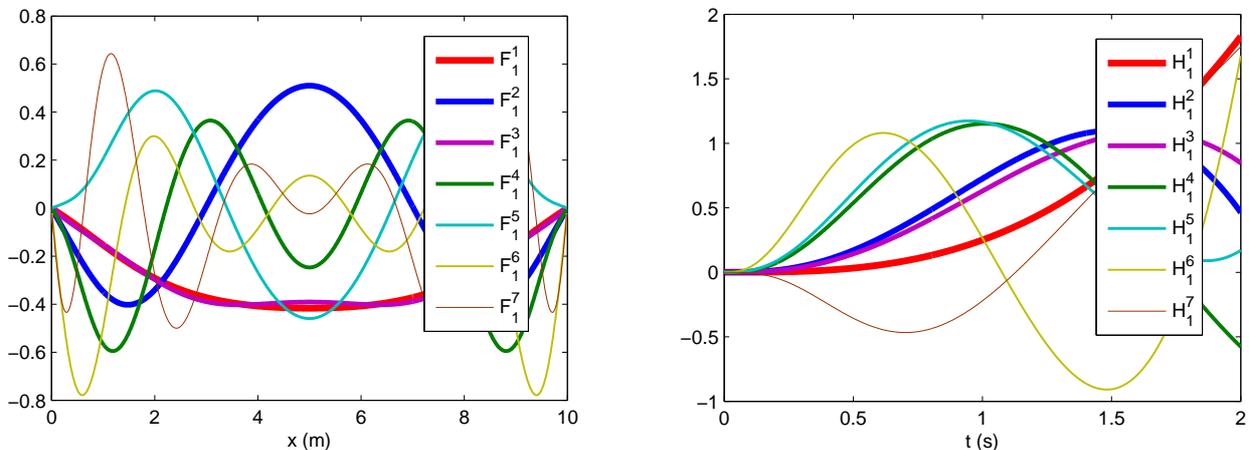


FIG. C.II-6 Les modes spatiaux (gauche) et temporels (droite) à l’ordre 1

Les modes spatiaux et temporels obtenus sont représentés **FIG. C.II-6**. L'évolution du résidu selon le nombre de modes est $RV = [0.1123, 0.0041, 0.0010, 0.0009, 0.0004, 0.0004, 0.0002, 0.0001]$.

Après avoir obtenu la solution PGD à l'ordre 1, la valeur de ϕ_1 est déterminée à l'aide de (Eq. **(C.I-36)**) : $\phi_1 = 0.0003$. La solution MAN à l'ordre 1 est ensuite calculée $T_1 = \phi_1 T_1^{(PGD)}$ et est utilisée pour préparer la source de l'équation à l'ordre 2 et ainsi de suite.

La **FIG. C.II-7** illustre la solution PGD $T_1^{(PGD)}$ (à gauche) ainsi que la solution MAN T_1 (à droite) à l'ordre 1.

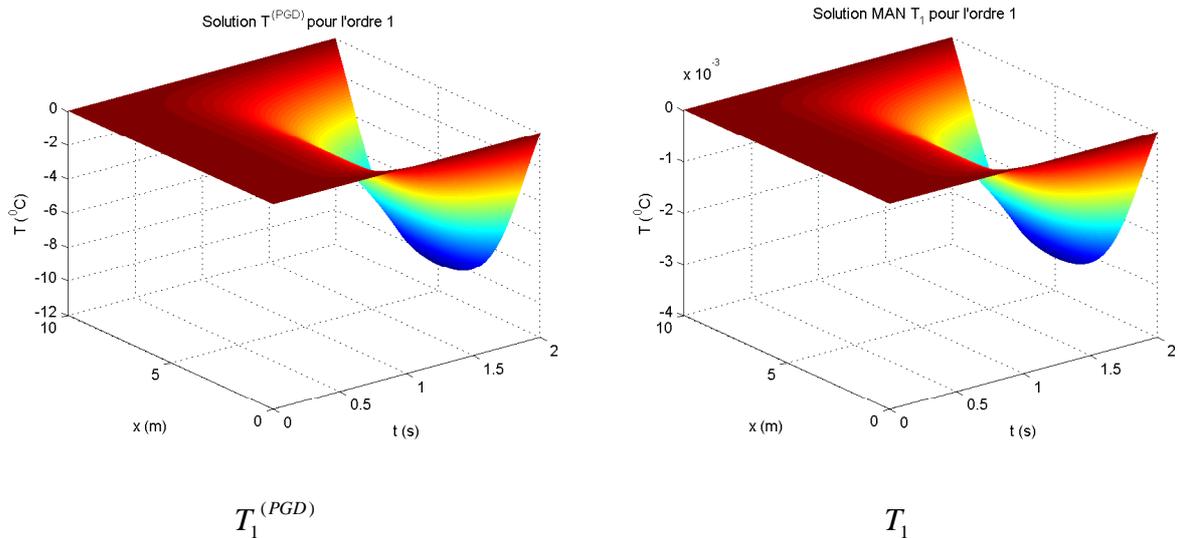


FIG. C.II-7 Solution PGD (à gauche) et solution MAN (à droite) à l'ordre 1

Afin de calculer la solution MAN finale T à l'ordre 1 : $T(a) = T_0 + aT_1$, la valeur du paramètre de chemin a doit être déterminée. Comme nous l'avons précisé, la valeur de a est calculée en imposant $\phi = 1$ dans l'équation **(C.I-15)**. Pour cela, nous résolvons l'équation $\phi_0 + a\phi_1 = \phi = 1$, ce qui donne $a = 3126$. La **FIG. C.II-8** illustre la solution MAN finale T obtenue à l'ordre 1 (à gauche) ainsi que la carte d'écart par rapport à la solution DF $T^{(DF)}$ (à droite).

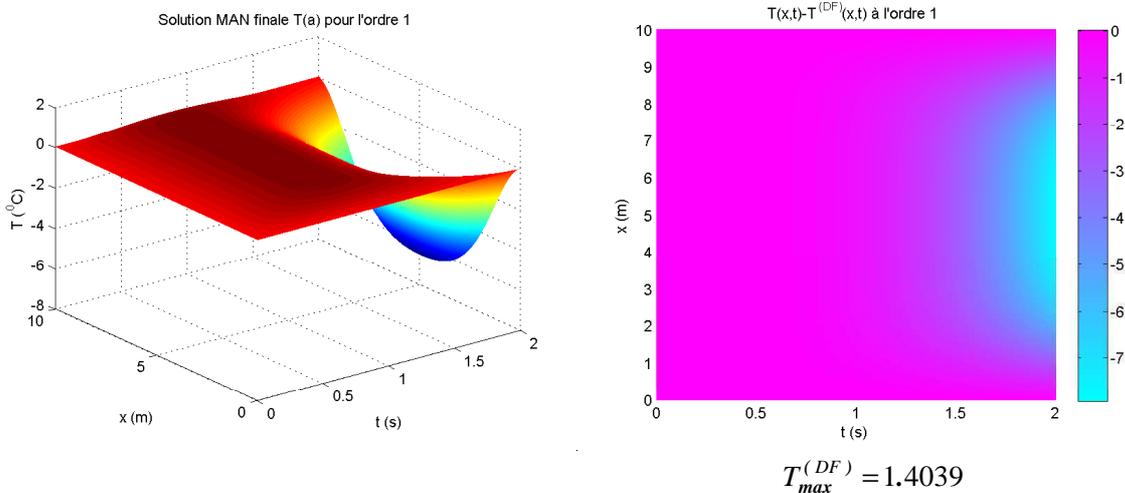


FIG. C.II-8 Solution MAN finale (gauche) et carte d'écart entre la solution MAN finale et la solution DF (droite) à l'ordre 1

L'erreur par rapport à la solution de référence DF (Eq. (C.II-7)) est $E_{DF} = 2.0833$. On voit que la valeur de l'erreur augmente ce qui signifie que la solution MAN finale à cet ordre s'écarte de la solution DF. L'amplitude de l'écart est plus importante par rapport à celle à l'ordre 1 (cf. FIG. C.II-3 (à droite)).

Cet écart est lié à la prise en compte du terme non linéaire. Nous allons voir dans la suite que lorsque l'ordre de la MAN augmente, la solution tend vers la solution de référence. La FIG. C.II-9 illustre l'évolution de la solution MAN finale $T(a)$ pour les 6 premiers ordres ($p=0$ jusqu'à $p=5$).

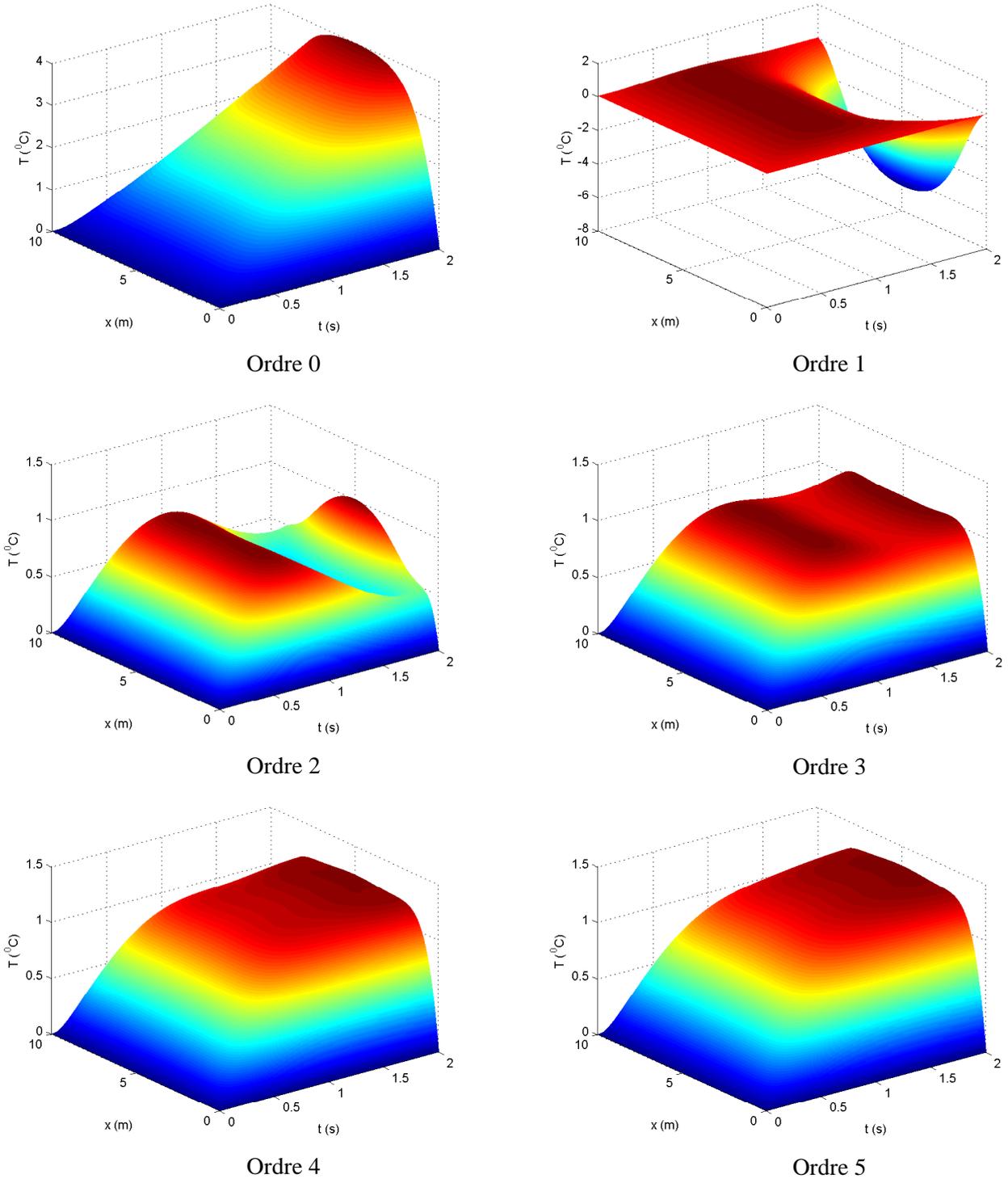


FIG. C.II-9 Evolution de la solution MAN finale

Il est important de remarquer qu'aux premiers ordres de la MAN, la forme de la solution est très différente par rapport à la solution de référence. Toutefois, la méthode réussit à corriger la solution au fur et à mesure après chaque ordre de la MAN. Cela montre la convergence de cette méthode.

En pratique, la MAN est développée jusqu'à l'ordre 15 ou 20 [Cochelin 2007]. Dans le cadre de cette thèse, nous allons développer la MAN jusqu'à l'ordre 15.

La FIG. C.II-10 montre l'évolution de E_{DF} (Eq. (C.II-7)) pour les 15 premiers ordres de la MAN (à gauche) ainsi que la carte d'écart entre la solution MAN finale à l'ordre 15 et la solution DF (à droite).

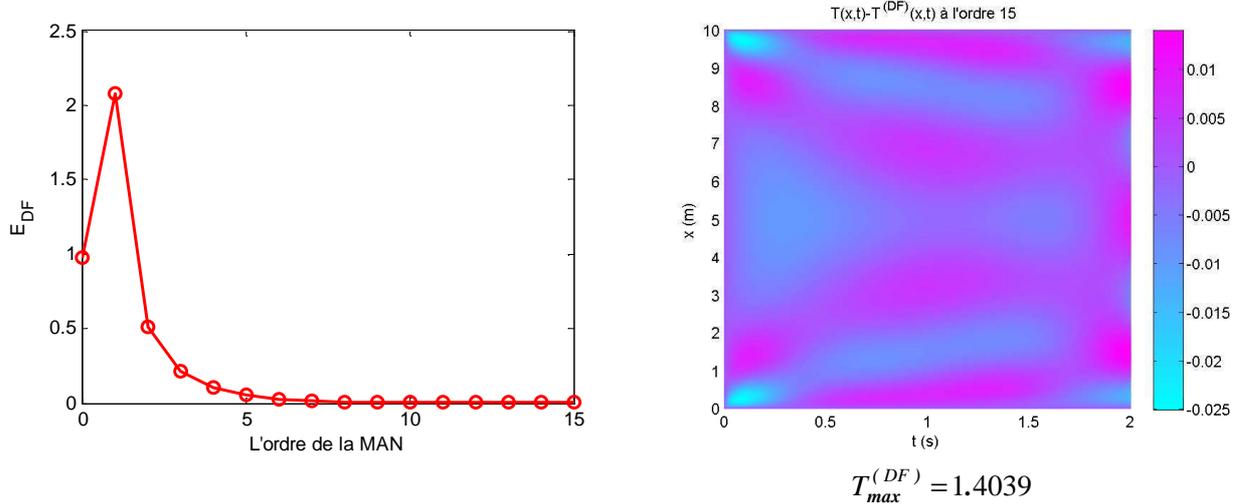


FIG. C.II-10 Evolution de l'erreur E_{DF} en fonction de l'ordre de la MAN (gauche) et carte d'écart pour la solution obtenue à l'ordre 15 (droite)

Cette figure montre la convergence de la simulation. A l'ordre 15, $E_{DF} = 0.0048$ et l'écart maximal entre les deux solutions est seulement ~ 0.025 .

Remarque. A l'ordre i , afin d'obtenir la valeur du paramètre de chemin a , il nous faut résoudre le polynôme en a suivant:

$$\phi_0 + a\phi_1 + \dots + a^i\phi_i = 1 \quad (\text{C.II-12})$$

Nous obtenons i valeurs de a . Par exemple, à l'ordre 3, les 3 valeurs de a solutions sont : $[-1314 + 1822i ; -1.314 - 1.822i ; 1189]$. Comme la solution MAN finale est une combinaison linéaire de la solution à chaque ordre de la MAN et de a (Eq. (C.I-16)), la valeur de a doit être réelle. Nous prenons donc la valeur 1189.

Lorsque plusieurs valeurs réelles de a sont obtenues, nous choisissons la plus petite valeur positive. Cela assure que la valeur de a se trouve dans le domaine de validité.

C.II.1.3 Stratégie MAN-PGD modifiée

Nous avons vu qu'à chaque ordre de la MAN, tous les problèmes linéaires à résoudre avec la PGD disposent d'un même opérateur différentiel. Ces problèmes se différencient uniquement par le terme source.

Lors de la résolution par la méthode des éléments finis dans l'approche classique de la MAN, cela mène à l'inversion d'une seule matrice qui est réutilisée pour tous les ordres de la MAN. Dans le contexte de la PGD, nous pouvons également réutiliser toutes les matrices d'intégration calculées, autrement dit les composants de A sont calculées une seule fois pour tous les ordres de la MAN. La principale différence entre ces deux méthodes est d'une part que la PGD est une méthode non incrémentale et qu'en plus le calcul est plus rapide, d'autant que le nombre de dimensions considéré est élevé.

Notons cependant que le nombre total d'enrichissements PGD peut devenir important si la résolution à chaque ordre de la MAN nécessite plusieurs modes. Une autre stratégie est proposée ici pour pallier ce défaut. Elle est appelée MAN-PGD modifiée.

Cette stratégie consiste à réutiliser les modes PGD obtenus aux ordres de la MAN précédents pour calculer la solution PGD au nouvel ordre. L'algorithme de cette stratégie est décrit dans le **TAB. C.II-3**:

1 :	$i = 0$
2 :	L'ordre 0 de la MAN
3 :	Calcul de la solution PGD (n_0 modes)
4 :	<i>tant que</i> $i < i_{max}$
5 :	$i = i + 1$
6 :	L'ordre i de la MAN
7 :	Les modes obtenus précédemment sont réutilisés
8 :	Calcul des nouveaux coefficients α
9 :	Calcul de la solution PGD à partir des modes obtenus (n_i modes ajoutés)
10 :	<i>fin tant que</i>

TAB. C.II-3 Algorithme de la stratégie PGD-MAN modifiée

A l'étape 3 et à l'étape 9, la solution PGD à chaque ordre de la MAN est obtenue pour un taux de réduction du résidu ε_{RV} de 95%.

A l'étape 7, les modes PGD obtenus aux anciens ordres sont réutilisés pour le nouvel ordre de la MAN. Leurs coefficients sont donc recalculés à l'étape 8.

Appliquons cette stratégie au problème précédent (**C.II-1**) et comparons les résultats obtenus avec la stratégie MAN-PGD 'normale' (présentée dans **C.II.1.2**) et avec la stratégie MAN-PGD 'modifiée'. La **FIG. C.II-11** (à gauche) montre l'évolution du nombre total d'enrichissements (Eq. (**C.I-48**)) ainsi que l'écart avec la solution DF en fonction de l'ordre de la MAN et de la stratégie utilisée. L'utilisation de la stratégie MAN-PGD modifiée permet fortement de diminuer le nombre d'enrichissements par rapport à la stratégie normale. Cependant, l'écart obtenu avec la solution DF est plus élevé pour un même ordre la MAN. Les deux courbes d'erreur MAN-PGD "normale" et MAN-PGD "modifiée" s'écartent au fur et à mesure lorsque l'ordre de la MAN augmente.

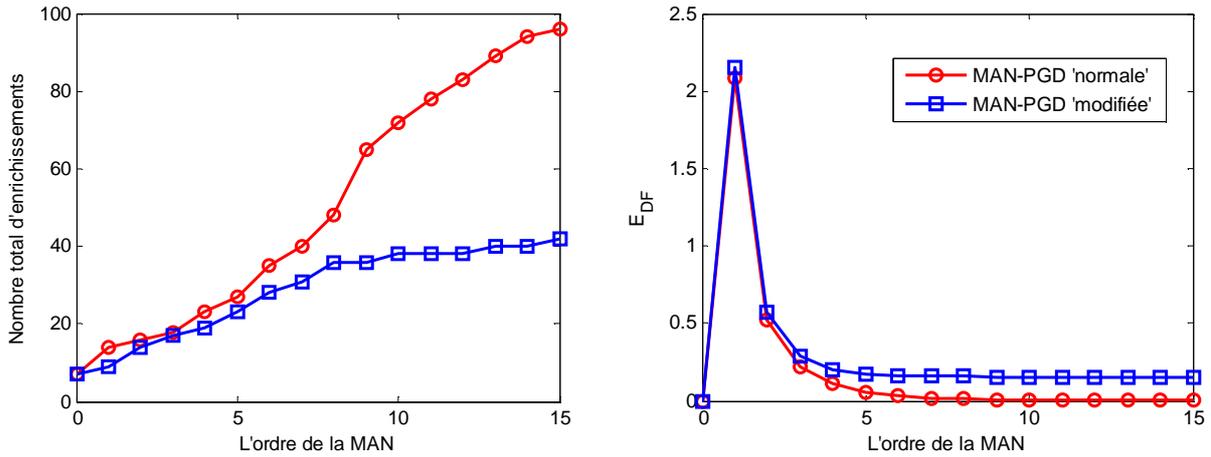


FIG. C.II-11 Evolution du nombre total d'enrichissements (gauche) et de l'erreur E_{DF} (droite) en fonction de l'ordre de la MAN pour les deux stratégies MAN-PGD

Ce problème s'explique par le fait que même si les opérateurs de chaque problème linéaire sont les mêmes, la source peut être fortement différente. Ainsi, la solution de chaque résolution par la PGD est très différente entre les différents ordres de la MAN. On voit par exemple, que la solution PGD à l'ordre 0 $T_0^{(PGD)}$ (la FIG. C.II-3) et la solution PGD à l'ordre 1 $T_1^{(PGD)}$ (la FIG. C.II-7) sont très différentes. Cela mène donc à des modes (spatiaux et temporels) différents entre chaque ordre de la MAN (cf. FIG. C.II-2 et FIG. C.II-6). Ainsi, l'utilisation des modes PGD des ordres précédents de la MAN pour enrichir la solution au nouvel ordre peut mener à une mauvaise solution.

De plus, comme la résolution à un ordre de la MAN fait intervenir la solution des ordres précédents, l'erreur se cumule. C'est la raison pour laquelle la solution MAN-PGD "modifiée" se dégrade de plus en plus que l'ordre de la MAN est élevé par rapport à la solution MAN-PGD "normale".

Cette méthode n'est pas donc recommandée dans ce cas. Dans la suite de ce chapitre, nous utilisons la méthode PGD "normale".

C.II.2 Domaine de validité

Dans cette partie, une étude sur le domaine de validité et sur la technique de continuation est présentée. Ensuite, nous allons regarder l'influence de la non linéarité sur le domaine de validité ainsi que celle du domaine temporel.

C.II.2.1 Domaine de validité

Commençons par évaluer le domaine de validité a_{max} du premier morceau de la branche de solution du problème (C.II-8). Il est calculé à l'aide de l'équation (C.I-54). La valeur de ϕ_{max} est ensuite calculée par (Eq. (C.I-15)). Cette dernière dépend de la valeur de précision choisie δ . La FIG. C.II-12 montre l'évolution de a_{max} (à gauche) et ϕ_{max} (à droite) pour différentes valeurs de δ en fonction de l'ordre de la MAN. Lorsque la valeur de δ diminue, les valeurs de a_{max} et ϕ_{max} sont plus faibles pour un ordre fixé de la MAN. Pour une valeur donnée de δ , les valeurs de a_{max} et ϕ_{max} sont de plus en plus importantes en fonction de l'ordre de la MAN. Cela traduit le fait que la qualité de la solution est améliorée en enrichissant la série entière.

Pour ce premier morceau de la branche de solution et 15 ordres de la MAN, la valeur de ϕ_{max} est 1.92 pour $\delta=10^{-4}$. On peut donc obtenir la solution recherchée à $\phi=1$ avec une précision $\delta=10^{-4}$. Si l'on choisit une valeur plus faible $\delta=10^{-6}$, la valeur de ϕ_{max} est seulement de 0.69. Pour obtenir la solution à $\phi=1$, il nous faut soit augmenter l'ordre maximal de la MAN soit faire l'étape de continuation. C'est ce que nous présenterons dans la partie suivante.

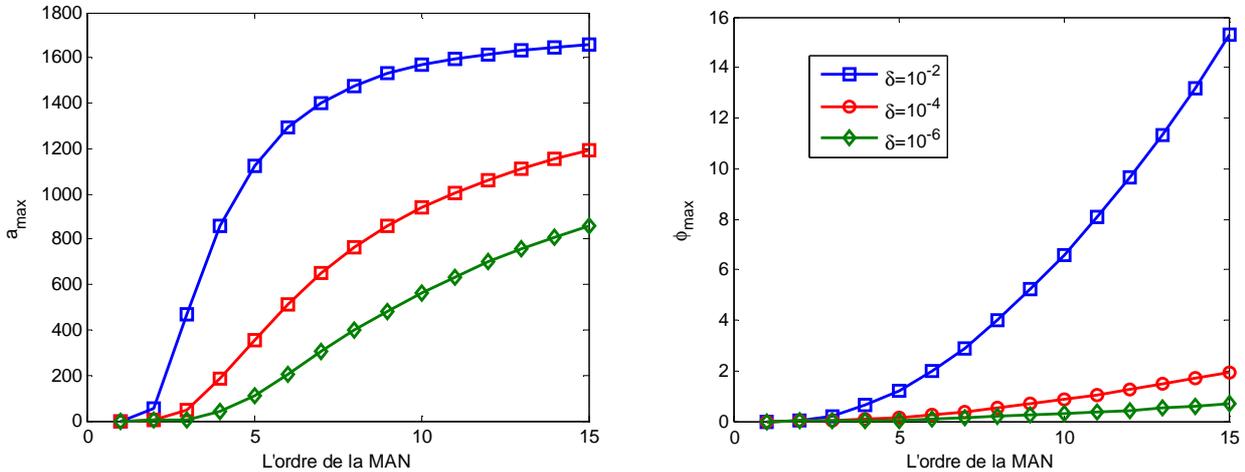


FIG. C.II-12 Evolution de a_{max} (gauche) et ϕ_{max} (droite) en fonction de l'ordre de la MAN pour différentes valeurs de δ

Afin de mieux comprendre ce que signifie le domaine de validité, regardons maintenant la température maximale $T_{max} \equiv T(x=5, t=2)$ en fonction de la valeur de ϕ pour 5 ordres consécutifs de la MAN p ($11 \leq p \leq 15$) (FIG. C.II-13). On voit que les courbes se superposent lorsque la valeur de ϕ est faible. Les courbes s'écartent de plus en plus pour une valeur de ϕ plus élevée. Cela signifie bien la non convergence de la solution.

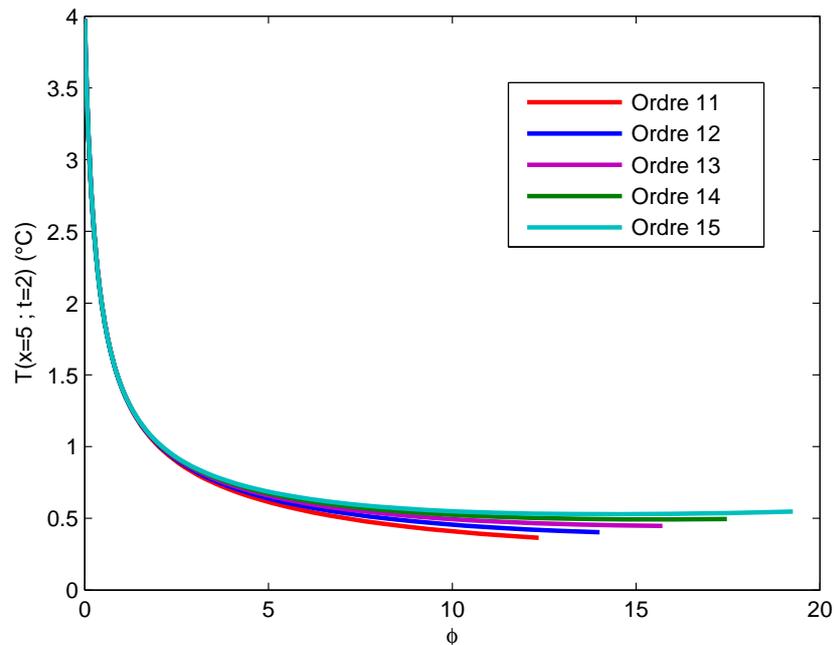


FIG. C.II-13 Valeur de la température au point $(x=5; t=2)$ en fonction de ϕ pour le premier pas de continuation aux ordres p ($11 \leq p \leq 15$)

Technique de continuation

Considérons une précision $\delta = 10^{-4}$. Nous venons de voir que le premier morceau de la branche de solution correspond à une valeur de $\phi_{max} = 1.92$. Au delà de ce domaine, la solution obtenue par les séries entières trouvées dans (C.II.1.2) n'est plus valable.

Afin de continuer à suivre la branche de solution, nous appliquons maintenant la technique de continuation présentée précédemment (C.I.2.3). Le point de départ du deuxième morceau de la branche de solution (deuxième pas de continuation) est donc : $\phi_0 = 1.92$ et T_0 est la solution MAN finale à $a_{max} = 1192$.

A l'aide de la procédure présentée dans (C.I.2.3), une nouvelle base de solution MAN à chaque ordre est obtenue et notée T_i ($1 \leq i \leq 15$). Cela nous permet de construire à nouveau la solution MAN finale sous la forme d'une série entière tronquée (Eq. (C.I-16)).

Cette nouvelle série entière présente également un domaine de validité qui est calculé à l'aide de l'équation (C.I-54). Il est $\phi_{max} = 12.98$ avec $\delta = 10^{-4}$ (cf. la FIG. C.II-14).

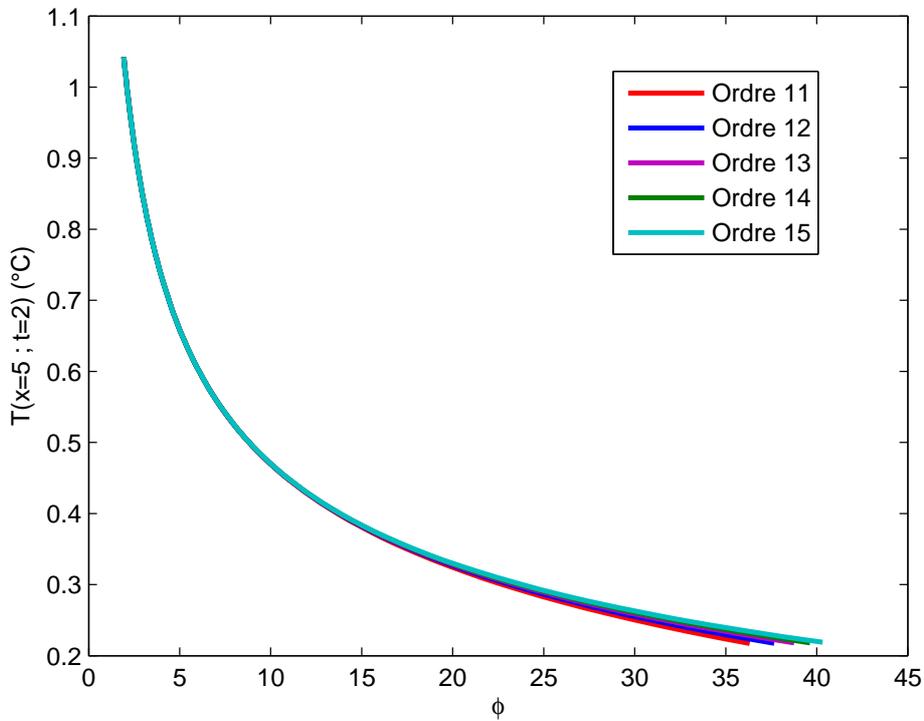


FIG. C.II-14 Valeur de la température au point $(x = 5 ; t = 2)$ en fonction de ϕ pour le deuxième pas de continuation aux ordres p ($11 \leq p \leq 15$)

Nous obtenons donc un deuxième pas de continuation. Le point de la fin de ce pas est ensuite utilisé comme le point de départ pour déterminer le pas de continuation suivant.

En faisant successivement cette procédure, la branche complète de la solution peut être obtenue.

La FIG. C.II-15 montre l'évolution de la température au point $(x = 5, t = 2)$ en fonction de ϕ obtenue avec 15 ordres de la MAN. On voit qu'avec 3 pas de continuation, on peut obtenir la solution jusqu'au $\phi = 85.01$. Remarquons que cela signifie qu'on peut obtenir un nombre infini de solutions, de $\phi = 0$ à $\phi = 85.01$, pour le problème non linéaire considéré (Eq. (C.II-8)).

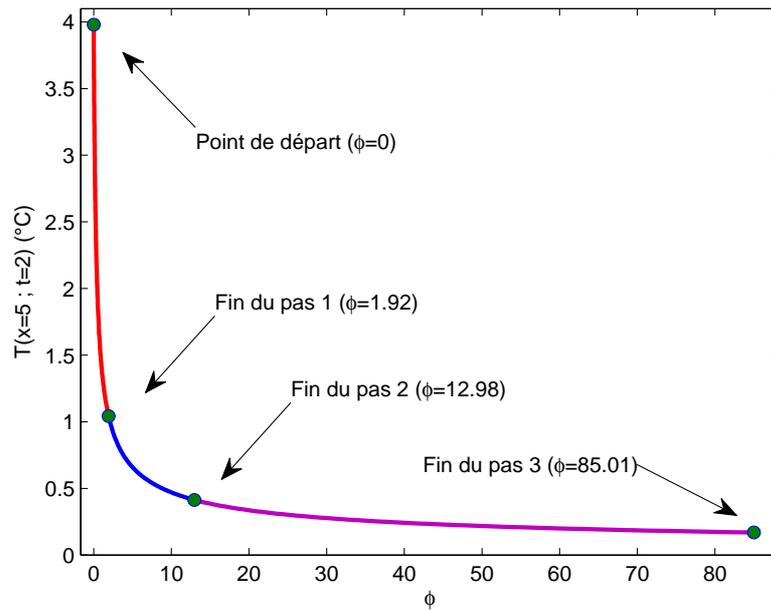


FIG. C.II-15 Evolution de la température au point $(x = 5, t = 2)$ en fonction de ϕ à l'ordre 15 de la MAN pour 3 pas de continuation déterminés par $\delta = 10^{-4}$

Le **TAB. C.II-4** montre l'erreur E_{DF} obtenue à la fin de chaque pas de continuation. Les erreurs sont assez faibles ce qui montre la convergence de la solution. On voit que l'erreur est plus importante pour un pas de continuation plus élevé. Ceci s'explique par le fait que l'erreur est cumulée car la solution à la fin d'un pas de continuation est utilisée comme le point de départ pour le pas suivant.

$\delta = 10^{-4}$	pas 1	pas 2	pas 3
E_{DF}	0.0105	0.0487	0.0980

TAB. C.II-4 Erreur E_{DF} à la fin des pas de continuation pour $\delta = 10^{-4}$

La **FIG. C.II-6** montre le nombre total d'enrichissements PGD (Eq. (C.I-48)) pour le deuxième (gauche) et troisième (droite) pas de continuation en fonction de l'ordre de la MAN.

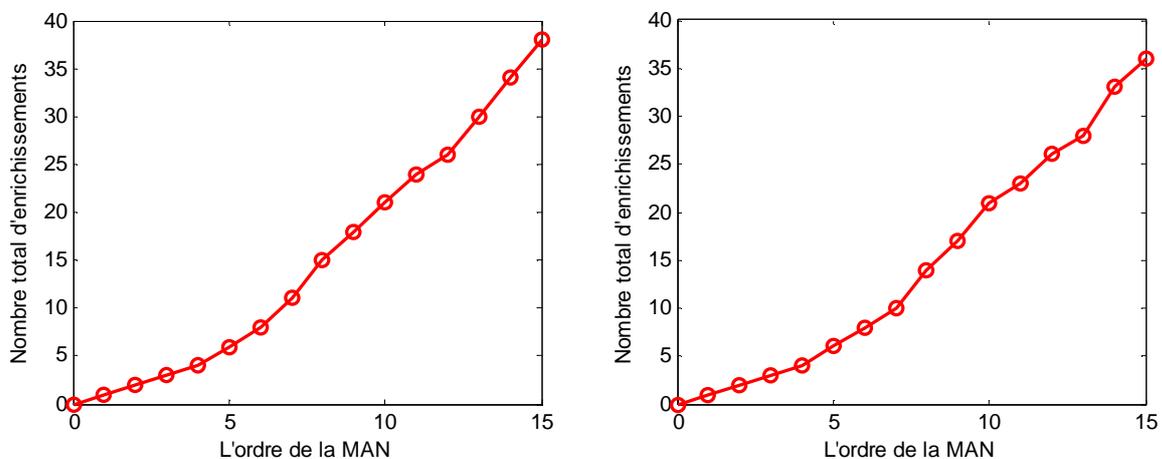


FIG. C.II-16 Nombre total d'enrichissements PGD pour le deuxième (gauche) et troisième (droite) pas de continuation en fonction de l'ordre de la MAN

Le calcul du deuxième pas nécessite 38 enrichissements et celui du troisième pas nécessite 36 enrichissements. On voit qu'à chaque ordre de la MAN, le nombre d'enrichissements varie de 1 à 5 modes.

Remarque. Considérons une valeur de δ plus petite $\delta = 10^{-6}$. La **FIG. C.II-17** montre les résultats obtenus avec 3 pas de continuations dans ce cas. On constate que les pas de continuations sont plus courts par rapport au cas précédent $\delta = 10^{-4}$. Avec 3 pas de continuation, la valeur maximale de ϕ est seulement de 9.18, valeur inférieure à celle obtenue avec 2 pas de continuations dans le cas $\delta = 10^{-4}$.

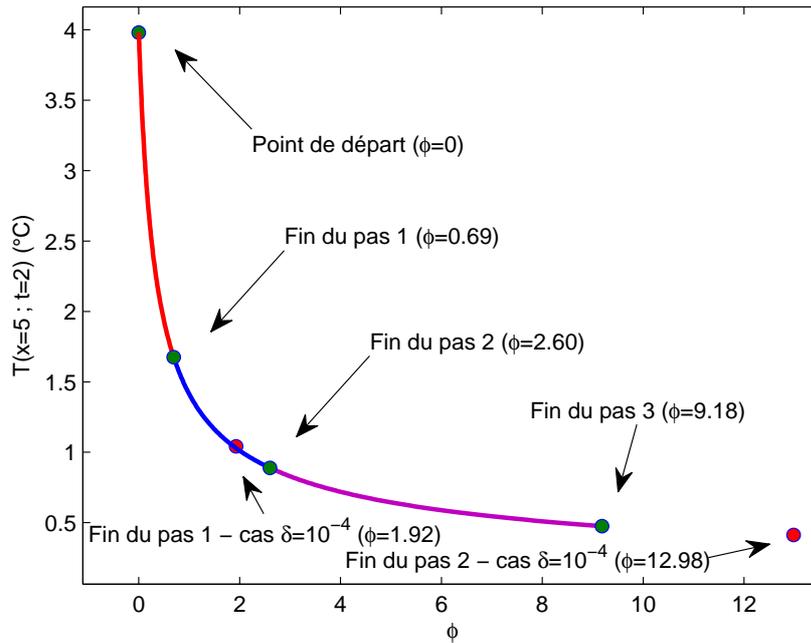


FIG. C.II-17 Evolution de la température au point $(x = 5, t = 2)$ en fonction de ϕ à l'ordre 15 de la MAN pour 3 pas de continuation déterminés par $\delta = 10^{-6}$

Toutefois la solution est améliorée. Le **TAB. C.II-5** montre l'erreur E_{DF} correspondante obtenue à la fin de chaque pas de continuation dans ce cas. On voit que l'erreur E_{DF} a été diminuée d'un facteur de 5.2 à la fin du 3^{ème} pas de continuation.

$\delta = 10^{-6}$	pas 1	pas 2	pas 3
E_{DF}	0.0037	0.0133	0.0187

TAB. C.II-5 L'erreur E_{DF} à la fin des pas de continuation pour $\delta = 10^{-6}$

Remarque. Comme nous l'avons précisé, le domaine de validité (ou la longueur du morceau de la branche de solution) augmente avec l'ordre maximal de la MAN. Par exemple, avec 30 ordres de la MAN, la valeur est $\phi_{max} = 6.86$ avec $\delta = 10^{-4}$ pour le premier pas de continuation par rapport à $\phi_{max} = 1.92$ avec 15 ordres de la MAN. Ainsi, le nombre de pas de continuation est plus faible pour atteindre une même valeur de ϕ . Néanmoins, le nombre total d'enrichissements augmente

$n_{total} = 151$, ce qui mène à un temps de calcul plus important. On voit qu'il y a un enjeu entre l'ordre de la MAN et le nombre de pas de continuation. Ainsi, Il est intéressant d'optimiser la valeur du nombre d'ordre de la MAN lorsque le système est gros [Potier-Ferry 2004].

Remarque. Une amélioration consiste à utiliser les approximants de Padé [Cochelin 2007]. Dans ce cas, la longueur des pas de continuation est augmentée avec une meilleur représentation de la solution par séries entières. Cela pourrait être envisagée dans la suite.

C.II.2.2 Influence de la non linéarité sur le domaine de validité

Dans cette partie, afin d'étudier l'influence de la non linéarité sur le domaine de validité, le résultat obtenu dans la partie précédente pour le problème (C.II-1) est comparé à celui du problème suivant:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \phi \cdot (+T^2) + 2 \tag{C.II-13}$$

où la non linéarité est $+T^2$. Le choix de ce terme source a pour but de traiter un problème non borné. En effet, la température tend vers l'infini lorsque la source tend vers l'infini. Tous les autres paramètres sont identiques.

Nous allons appliquer la résolution MAN-PGD à ce nouveau problème. Regardons tout d'abord les résultats obtenus pour le premier morceau de la branche de solution. La longueur du premier pas de solution est calculée à l'aide de l'équation (C.I-54). Pour ce problème, il est très petit et vaut $\phi_{max} = 0.22$ pour une précision $\delta = 10^{-4}$. Pour des ordres de la MAN élevés, les courbes s'écartent fortement au-delà de $\phi = 0.22$ (FIG. C.II-18). La solution pour $\phi = 1$ ne peut donc pas être obtenue avec un seul pas de continuation.

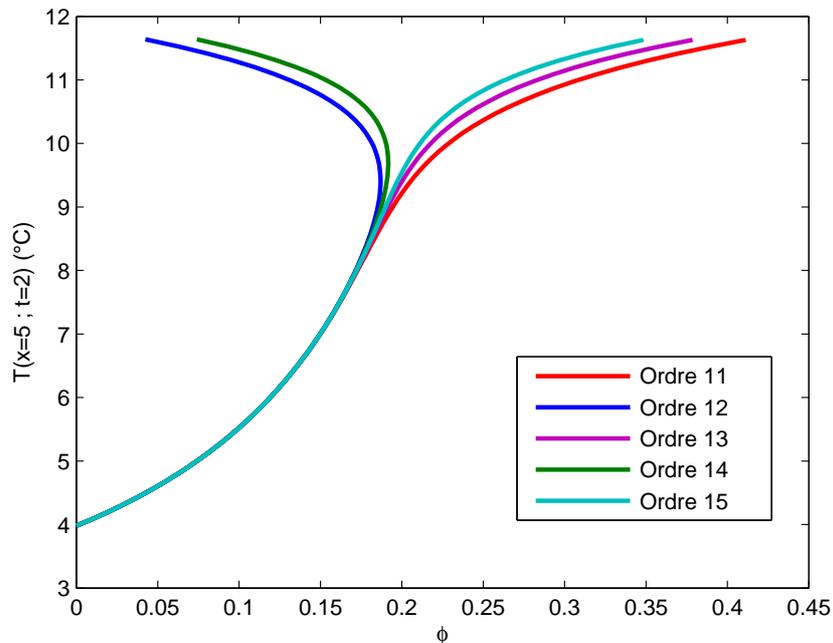


FIG. C.II-18 Valeur de la température au point $(x = 5 ; t = 2)$ en fonction de ϕ pour le premier pas de continuation aux ordres p ($11 \leq p \leq 15$)

Nous allons effectuer 3 pas de continuation. La **FIG. C.II-19** montre l'évolution de la température au point $(x=5, t=2)$ en fonction de ϕ obtenue avec 15 ordres de la MAN. La valeur de $\phi=1$ n'est pas atteinte avec 3 pas de continuation. De plus, la solution de la température tend vers l'infini et la longueur du pas de continuation augmente très peu.

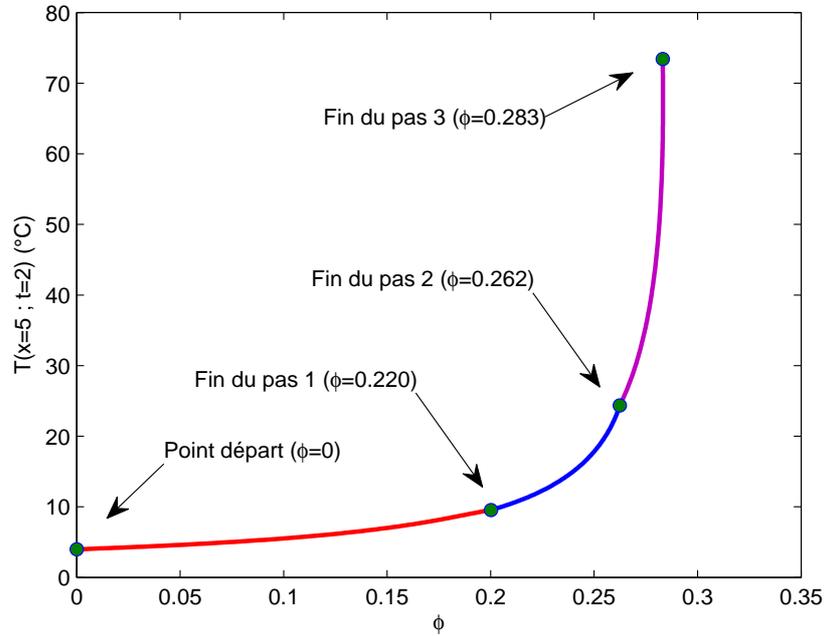


FIG. C.II-19 Evolution de la température au point $(x=5, t=2)$ en fonction de ϕ à l'ordre 15 de la MAN pour 3 pas de continuation déterminés par $\delta = 10^{-4}$

La valeur $\phi=1$ ne peut donc pas être atteinte. Lorsqu'on lance la simulation avec la méthode des différences finies, la solution ne converge pas non plus. Ceci s'explique par le fait qu'avec la non linéarité $+T^2$, le système devient un système qui s'autoalimente dans le sens où lorsque la source augmente, la température augmente ce qui fait augmenter ensuite la source et ainsi de suite. La température tend rapidement vers l'infini. On peut donc obtenir la solution du système Eq. (C.II-13) pour des faibles valeurs de ϕ uniquement.

La MAN nous permet donc de déterminer les valeurs de ϕ admissibles. Nous utiliserons cette possibilité de la MAN au chapitre suivant.

C.II.2.3 Influence du domaine temporel sur le domaine de validité

Dans cette partie, nous allons étudier l'influence du domaine temporel sur le domaine de validité. Considérons maintenant le problème (C.II-8) sur un domaine temporel plus large $\Omega_t = [0; 4]$. Le domaine spatial est le même $\Omega_x = [0; 10]$. Déterminons la solution pour $\phi=1$.

La solution obtenue par la méthode des différences finies est représentée **FIG. C.II-20**. Le régime permanent est obtenu après $t = 2$ s.

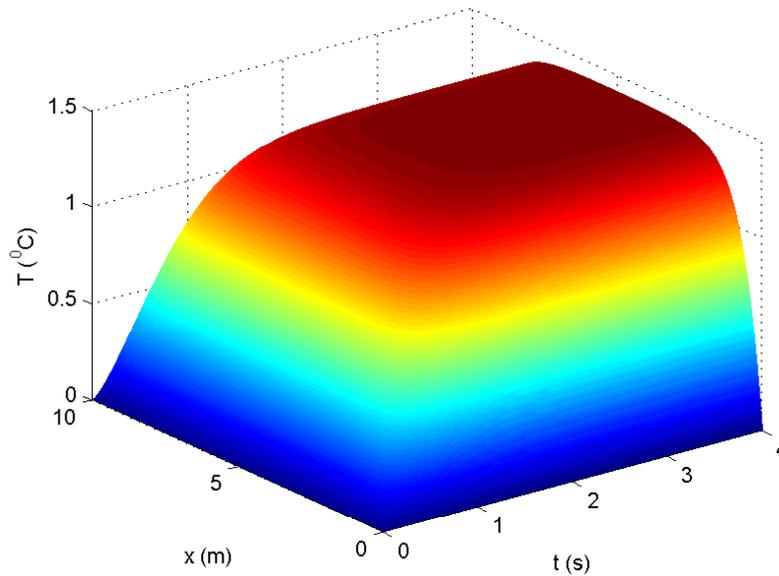


FIG. C.II-20 Solution $T^{(DF)}$ pour $\phi=1$ sur $\Omega_x \times \Omega_t = [0;10] \times [0;4]$

Il est donc envisageable qu’avec la MAN, le domaine de validité (et la longueur du pas de continuation) soit le même par rapport au cas précédent où le domaine temporel était de $\Omega_t = [0; 2]$.

Ce n’est pourtant pas le cas comme nous allons le voir.

Considérons le résultat obtenu après le premier pas de continuation. La valeur de ϕ_{max} est seulement $\phi_{max} = 0.53$ pour $\delta = 10^{-4}$ ($\phi_{max} = 1.92$ dans le cas précédent). La FIG. C.II-21 montre que les courbes s’écartent au-delà de cette valeur de ϕ lorsque l’ordre de la MAN augmente.

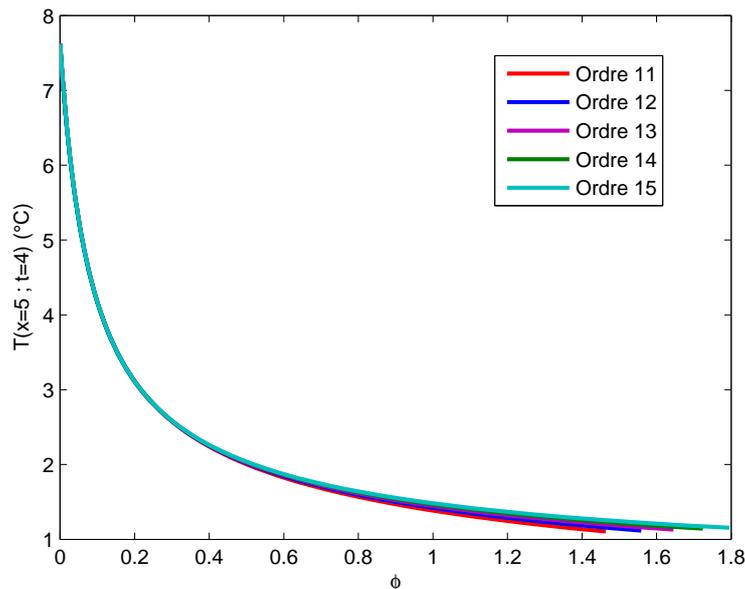


FIG. C.II-21 Température au point $(x=5; t=4)$ en fonction de ϕ pour le premier pas de continuation aux ordres p ($11 \leq p \leq 15$)

La solution pour $\phi=1$ ne peut donc pas être atteinte avec une précision $\delta=10^{-4}$. Si l'on utilise les séries entières du premier pas de continuation pour calculer la solution à $\phi=1$, l'erreur E_{DF} est de 0.0318.

Pour obtenir une meilleure solution à $\phi=1$, un deuxième pas de continuation est calculé. La longueur du deuxième pas de continuation est $\phi_{max} = 3.94$. L'erreur E_{DF} pour $\phi=1$ est de $E_{DF} = 0.0186$, qui est plus faible.

Dans cet exemple, le domaine de validité est plus petit car on démarre avec un point de départ (ϕ_0, T_0) beaucoup plus loin de la solution. La FIG. C.II-22 montre la solution de départ T_0 (solution de l'équation (C.II-9)) et sa carte d'écart par rapport à la solution $T^{(DF)}$.

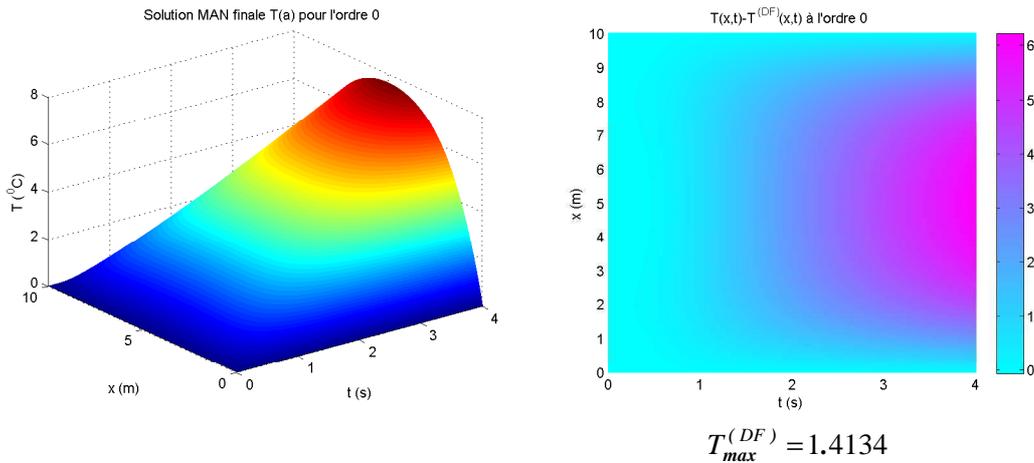


FIG. C.II-22 Solution MAN finale à l'ordre 0 (gauche) et carte d'écart entre la solution MAN finale et la solution DF à l'ordre 0 (droite)

Par rapport au cas précédent (cf. la FIG. C.II-3), l'écart est plus important (écart maximale de 6.20 au lieu de 2.57). Ceci est lié au fait que la solution de l'équation linéaire T_0 n'est pas encore en régime permanent sur $t = [2;4]$.

Comme le point de départ est plus "loin" et que les séries entières ne sont valables que dans un certain voisinage de ce point de départ, plus de pas de continuation sont alors nécessaires pour atteindre une même valeur de ϕ .

Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, une technique couplant la MAN et la PGD a été proposée pour la résolution d'un problème non linéaire où la non linéarité est de type $-T^2$. Le problème étudié est le problème thermique transitoire unidimensionnel.

Dans la première partie, trois techniques de base: technique de perturbation, technique de résolution MAN-PGD couplée et technique de continuation ont été détaillées. A l'aide de la technique

de perturbation, la MAN mène à la résolution d'un grand nombre d'équations linéaires, la solution étant cherchée sous la forme d'une série entière tronquée. Ces équations linéaires transitoires sont ensuite résolues par la PGD à l'aide de la technique de résolution MAN-PGD couplée. L'avantage de cette approche est lié au fait que la PGD est une méthode non incrémentale par rapport à la MEF classique. Ainsi, la résolution de problèmes linéaires transitoires est très rapide. Enfin, la technique de continuation a été présentée et permet de trouver plusieurs morceaux de la branche de solution, chaque morceau étant valable dans son domaine de validité.

Dans la deuxième partie, les résultats numériques ont été présentés. Après avoir obtenu toutes les solutions à chaque ordre de la MAN, nous pouvons *a posteriori* déterminer la solution pour un nombre infini de problèmes. On retrouve les capacités de la MAN mais ici pour un problème transitoire. La solution MAN-PGD a été comparée à celle obtenue par la méthode des différences finies pour un cas de test ce qui a permis de valider la technique de couplage. Une méthode PGD-MAN 'modifiée', consistant à réutiliser les modes obtenus aux ordres précédents de la MAN, a été proposée. Toutefois, elle n'est pas recommandée dans ce cas car elle mène à des solutions moins précises.

Une étude sur le domaine de validité a été présentée. Cela permet de déterminer la longueur maximale du paramètre de non linéarité ϕ pour laquelle la solution est obtenue avec une précision donnée δ . Afin de déterminer la branche complète de solution, plusieurs pas de continuation doivent être effectués.

L'étude sur une non linéarité $+T^2$ nous a permis d'évaluer la limite de la valeur de ϕ pour un système non borné. Enfin, nous avons montré qu'en augmentant le domaine temporel, le domaine de validité est diminué. Cela est lié au fait que le point de départ des séries entières est plus loin de la solution. Il nécessite donc plus de pas de continuation dans ce cas.

Dans ces développements, une forme particulière de non linéarité a été ciblée. L'extension de la méthode à d'autres formes de non linéarité va nécessiter un travail spécifique pour techniquement évaluer la portée de cette association MAN-PGD. Dans [Cochelin 2007], des techniques pour prendre en compte d'autres familles de non linéarité, comme par exemple le cas de l'exponentielle $g(T) = e^T$ ou le cas des fonctions non régulières $g(T) = |T|$ ou $g(T) = T^\alpha$ ($\alpha \in R$), ont été présentées. L'application de ces techniques est envisageable dans le contexte MAN-PGD. Un domaine d'application évident serait l'identification de paramètres matériau ou de sources. Dans le cas présenté ici, la MAN permet de générer des collections de solution (pour différentes valeurs du paramètre de non linéarité ϕ) et la recherche d'une solution proche de mesures expérimentales sur échantillon est alors immédiate. Le contrôle est aussi un domaine qui peut tirer profit de cette technique.

Pour améliorer la capacité du couplage MAN-PGD, certains points techniques pourront être testés, notamment différents choix du paramètre de contrôle a mais aussi les approximants de Padé. Ensuite la MAN-PGD pourra être étendue aux problèmes multiphysiques. Ces problèmes mettent en avant différentes spécificités : ils présentent un grand nombre de variables et par suite de dimensions, ensuite les termes de couplages considérés peuvent induire des non linéarités d'ordre plus ou moins élevé. L'utilisation de la PGD couplée à la MAN semble être une bonne solution pour les problèmes multidimensionnels, compte tenu de la capacité de la PGD. Les non linéarités présentes dans les problèmes couplés sont de différentes natures soient thermodynamiques soient liées aux paramètres matériau. Ces dernières ne seront pas traitées dans cette thèse mais une approche MAN-PGD semble être appropriée.

Au terme de ce chapitre, il est clair que l'association Maillage adaptatif-PGD ou MAN-PGD sont des solutions pour résoudre efficacement des situations transitoires. Nous allons maintenant aborder, dans le chapitre qui suit, la résolution des problèmes couplés avec la PGD en profitant des résultats établis dans ce chapitre.

Chapitre D

Résolution de problèmes multiphysiques transitoires couplés avec la PGD

Sommaire

D.I La PGD dans le cas de problèmes multiphysiques transitoires couplés	138
D.I.1 Formulation des problèmes multiphysiques	138
<i>D.I.1.1 Problème partiellement couplé diffusothermique.....</i>	<i>139</i>
<i>D.I.1.2 Problème fortement couplé thermoviscoélastique.....</i>	<i>147</i>
D.I.2 Résultats.....	159
<i>D.I.2.1 Résultats du problème partiellement couplé diffusothermique</i>	<i>159</i>
<i>D.I.2.2 Résultats du problème fortement couplé thermoviscoélastique.....</i>	<i>169</i>
D.II Stratégies de couplage PGD-technique de maillage adaptatif pour des problèmes multiphysiques multitemps.....	181
D.II.1 Présentation de la technique de maillage adaptatif.....	181
<i>D.II.1.1 Construction de maillage</i>	<i>181</i>
<i>D.II.1.2 Stratégies de couplage PGD - technique de maillage adaptatif (RPGD).....</i>	<i>182</i>
D.II.2 Résultats	185
<i>D.II.2.1 Résultats du problème partiellement couplé diffusothermique</i>	<i>185</i>
<i>D.II.2.2 Résultats du problème fortement couplé thermoviscoélastique</i>	<i>194</i>
Conclusion du chapitre	203

L'objectif de ce chapitre est la mise en place de la méthode PGD pour la résolution de problèmes multiphysiques couplés. Dans les parties précédentes, la PGD a été appliquée à l'équation de la chaleur. Nous avons montré que la qualité de la solution en température dépendait du maillage de cette physique. Dans le cas des problèmes multiphysiques couplés, la qualité de la solution dépend non seulement du maillage de la physique considérée mais aussi du maillage des physiques avec qui elle interagit.

Nous allons tout d'abord présenter la formulation de deux problèmes couplés ainsi que leur résolution avec la PGD. Le premier est un problème diffusothermique partiellement couplé et le second est un problème thermoviscoélastique fortement couplé. Les résultats des simulations PGD sont discutés en fonction de l'influence du terme de couplage, des temps caractéristiques ainsi que des maillages spécifiques à chaque physique. Ils mettent en évidence la forte interaction entre les physiques et l'influence du maillage lorsque les réponses transitoires sont différentes. Il est donc intéressant d'avoir un maillage adapté à chaque zone transitoire de chaque physique. Néanmoins, lorsque les problèmes couplés, il n'est pas évident de connaître *a priori* les zones transitoires des différentes physiques.

C'est la raison pour laquelle, dans la deuxième partie, la technique de maillage adaptatif présentée précédemment (**section B.II**) est étendue aux problèmes couplés afin de prédire précisément la réponse transitoire du problème couplé en utilisant des discrétisations adaptées à chaque phénomène. Deux méthodes de construction de maillage et différentes stratégies de couplage technique de maillage adaptatif / PGD sont présentées. Les résultats pour les deux problèmes couplés sont présentés et la faisabilité des différentes méthodes est discutée.

D.I La PGD dans le cas de problèmes multiphysiques transitoires couplés

Dans le cadre de cette thèse, par souci de simplicité, des problèmes couplés mettant en jeu uniquement deux physiques sont considérés. Néanmoins, ces problèmes présentent deux temps caractéristiques différents. Le premier cas est un problème couplé entre la thermique et la concentration de gaz et le second cas envisagé est un problème couplé entre la thermique et le déplacement. L'extension de la PGD à un problème ayant plus de physiques ne pose pas d'autres difficultés compte tenu des stratégies de résolution retenues. Les équations de ces problèmes sont déduites à partir de celles des équations du modèle thermo-diffuso-mécanique complètement couplé de Rambert et al. [Rambert 2002]. Comme nous l'avons précisé, dans cette thèse, seules les termes de couplage directs sont considérés.

Plus précisément, nous allons résoudre deux problèmes transitoires multiphysiques avec la PGD : un problème diffusothermique et un problème thermoviscoélastique. Cela nous permet de discuter la mise en place de la PGD pour des problèmes couplés où les équations mais aussi les termes de couplage sont de natures différentes. Les couplages sont de complexité croissante : résolution du problème découplé (chaque physique est indépendante et résolue séparément), partiellement couplé (seulement une des physiques influence l'autre) et complètement couplé (les deux physiques s'influencent l'une et l'autre).

D.I.1 Formulation des problèmes multiphysiques

Dans cette partie, nous allons présenter la formulation de la PGD pour deux problèmes couplés: le problème diffusothermique où le couplage partiel est considéré et le thermoviscoélastique où le couplage total est considéré.

La PGD est mise en place dans le cas où chaque physique est définie avec ses propres fonctions de forme. Avec cette approche, des maillages spécifiques peuvent être utilisés pour chaque physique. La mise en équation des problèmes couplés n'est pas détaillée ici. Pour plus de détails à ce sujet, le lecteur peut se référer à [Rambert 2002].

D.I.1.1 Problème partiellement couplé diffusothermique

Les équations de thermodiffusion

La PGD est appliquée ici à un problème couplé transitoire diffusothermique à deux dimensions. Il est composé d'un problème de diffusion et d'un problème thermique qui s'écrivent de la manière suivante:

Problème **de diffusion** :

$$\frac{\partial c}{\partial t} - D \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} c) = A_{cT} \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} T) \quad (\text{D.I-1})$$

Problème **thermique**:

$$\begin{aligned} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_T \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} T) &= f_T + B_{Tc} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} c)^2 \\ + \frac{A_{cT} B_{Tc}}{D} T \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} c) &+ 2 \frac{A_{cT} B_{Tc}}{D} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} c)(\overrightarrow{\operatorname{grad}} T) \end{aligned} \quad (\text{D.I-2})$$

Dans l'équation **(D.I-1)** du problème de diffusion, c représente la concentration de gaz et D est la diffusivité.

Dans l'équation **(D.I-2)** de la chaleur, T représente la température, ρ la masse volumique, C la chaleur spécifique, λ_T la conductivité thermique et f_T la source de la chaleur. A_{cT} et B_{Tc} sont des coefficients liés aux termes de couplage.

Le problème est défini sur un domaine : $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_t$, qui correspond respectivement à l'espace x , l'espace y et le temps t .

Pour simplifier l'écriture de la PGD, les conditions initiales en concentration c et en température T sont supposées nulles.

En ce qui concerne les conditions aux bords, la température est imposée nulle aux bords. La concentration est choisie non nulle afin de décrire au mieux un milieu non réactif. Elle s'écrit : $c(x \in \Omega_x, y, t) = c(x, y \in \Omega_y, t) = g(x, y, t)$. La fonction $g(x, y, t)$ est choisie comme dépendant uniquement du temps $g(x, y, t) = g(t)$ afin que la prise en compte de cette condition dans **(D.I-4)** ne modifie pas la nature de l'équation.

En posant le changement de variables suivant :

$$c(x, y, t) = c^0(x, y, t) + g(t) \quad (\text{D.I-3})$$

où $c^0(x, y, t)$ est nulle aux bords et à l'instant initial.

L'équation de diffusion s'écrit:

$$\frac{\partial c^0}{\partial t} - D \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} c^0) = -\frac{dg(t)}{dt} + A_{cT} \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} T) \quad (\text{D.I-4})$$

où la nouvelle inconnue du problème c^0 vérifie des conditions aux bords nulles.

Par rapport à l'équation de départ **(D.I-1)**, il apparaît un terme de plus dans le membre de droite $-dg(t)/dt$ qui a un rôle de source.

Pour l'équation de la chaleur, le terme $(\overrightarrow{\operatorname{grad}} c)$ devient $(\overrightarrow{\operatorname{grad}} c^0)$.

Pour ne pas alourdir les notations, on notera dans la suite c à la place de c^0 et $c^t = c^0(x, y, t) + g(t)$ la concentration totale.

Remarque. La PGD a déjà été testée pour des conditions aux bords et initiales non homogènes dans [Gonzalez 2010, Bonithon 2011].

Ce système d'équations présente deux temps caractéristiques : le rapport adimensionné par une épaisseur unité $\frac{\rho C}{\lambda_T}$ pour la thermique et le rapport $\frac{1}{D}$ pour la diffusion. La complexité et la nature du problème dépendent des valeurs des coefficients A_{cT} et B_{Tc} qui sont positifs. Si l'un de ces deux coefficient s'annule, on obtient des problèmes partiellement couplés dans le sens où seule une physique influence l'autre. Si ces deux coefficients sont non nuls, le problème est fortement couplé.

Dans ce qui suit, nous allons étudier uniquement le cas des problèmes diffusothermique partiellement couplés. Le cas complètement couplé n'a pas été traité dans ce travail, mais ce manque ne nuira pas à la discussion. En revanche, pour étudier une situation fortement couplée, nous allons considérer le cas d'un problème thermoviscoélastique où les termes couplés génèrent des réponses intéressantes comme nous le verrons après.

Dans cette thèse, nous étudions les deux problèmes partiellement couplés suivants.

- a. Le problème diffusothermique avec $A_{cT} \neq 0 ; B_{Tc} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} - D \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} c) &= -\frac{dg(t)}{dt} + A_{cT} \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} T) \\ \rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_T \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} T) &= f_T \end{aligned} \quad (\text{D.I-5})$$

où seule la concentration dépend de la température. Ce problème est noté **Problème partiellement couplé 1** (T - $c(T)$).

- b. Le problème diffusothermique avec $A_{cT} = 0 ; B_{Tc} \neq 0$

$$\begin{aligned} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_T \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} T) &= f_T + B_{Tc} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} c)^2 \\ \frac{\partial c}{\partial t} - D \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} c) &= -\frac{dg(t)}{dt} \end{aligned} \quad (\text{D.I-6})$$

où seule la température dépend de la concentration. Ce problème est noté **Problème partiellement couplé 2** (c - $T(c)$).

Ces deux problèmes se différencient par la nature du terme de couplage: $A_{cT} \overrightarrow{\text{grad}T}$ pour le premier et $B_{Tc} (\overrightarrow{\text{grad}c})^2$ pour le second.

Formulation PGD des deux problèmes diffusothermique partiellement couplés:

Les solutions sont recherchées sous la forme :

$$T(x, y, t) = \sum_i^{n_T} \alpha_T^i F_T^i(x) G_T^i(y) H_T^i(t) \tag{D.I-7}$$

$$c(x, y, t) = \sum_i^{n_c} \alpha_c^i F_c^i(x) G_c^i(y) H_c^i(t) \tag{D.I-8}$$

où n_T et n_c sont les nombres finaux de triplets de fonctions requis pour décrire T et c avec une précision donnée.

Suivant le temps caractéristique des phénomènes étudiés, les discrétisations peuvent être différentes pour la température et la concentration, en espace et en temps. Ces discrétisations sont choisies irrégulières.

On utilise donc des fonctions d'interpolation différentes pour chaque physique. N_T , M_T (respectivement N_c , M_c) sont les vecteurs qui contiennent la valeur des fonctions de forme en espace (respectivement x et y) pour la température (respectivement la concentration). L_T (respectivement L_c) sont les vecteurs qui contiennent la valeur des fonctions de forme en temps pour la température (respectivement la concentration). Ces fonctions d'interpolation sont choisies linéaires par morceaux pour l'espace ainsi que pour le temps. F_T^i , G_T^i , H_T^i (respectivement F_c^i , G_c^i , H_c^i) sont les valeurs nodales des fonctions séparées associées aux fonctions de forme pour la température (respectivement la concentration).

Nous allons maintenant présenter successivement la formulation PGD de chacun de ces problèmes. Comme ces problèmes sont partiellement couplés, les équations sont résolues l'une après l'autre avec la PGD en commençant par l'équation découplée. La résolution de la PGD pour chacune de ces équations est donc menée de la même manière que dans le cas de l'équation de la chaleur au **chapitre B**. Les étapes "enrichissement-projection-résidu" sont répétées de manière itérative jusqu'à obtention d'une certaine précision sur la solution. Pour chacune des équations de diffusothermique, nous détaillons uniquement l'écriture des opérateurs A et B (cf. **TAB. B.I-2** et **TAB. B.I-3**).

a) **Problème partiellement couplé 1** (ou T - $c(T)$)

Dans ce problème, l'équation de la chaleur est découplée et l'équation de diffusion dépend de la température. Dans un premier temps, l'équation de la chaleur est résolue avec la PGD comme dans le **chapitre B**. La température s'écrit donc sous la forme **(D.I-7)** avec n_T fonctions de base.

Considérons maintenant l'équation de diffusion couplée. Pour pouvoir appliquer la PGD, nous supposons que le terme source de cette équation noté $f_c(t) = -\frac{dg(t)}{dt}$ peut se mettre sous la forme d'une fonction à variables séparées :

$$f_c(t) = \sum_{i=1}^{n_{fc}} \beta_c^i f_{cx}^i(x) f_{cy}^i(y) f_{ct}^i(t) \tag{D.I-9}$$

et s'écrit sous la forme discrète:

$$f_c(t) = \sum_{i=1}^{n_{fc}} \beta_c^i \left(N_{cf}^T f_{cx}^i \right) \left(M_{cf}^T f_{cy}^i \right) \left(L_{cf}^T f_{ct}^i \right) \quad (\text{D.I-10})$$

où N_{cf} , M_{cf} et L_{cf} sont les vecteurs qui contiennent les fonctions de forme pour la source et $f_{cx}^i, f_{cy}^i, f_{ct}^i$ les valeurs nodales associées. Comme dans le cas de la source de la chaleur présentée dans le **chapitre B**, ces fonctions sont définies sur le même maillage que celui de c , mais elles peuvent être non nulles aux bords et à l'instant initial.

Comme la température est connue, le terme couplé $A_{cT} \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}T})$ joue le même rôle que la source.

Remarque. Avec les fonctions de forme linéaires en espace qui ont été choisies, on ne peut pas représenter ce terme dont la forme discrète s'écrit:

$$\begin{aligned} A_{cT} \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}T}) &= A_{cT} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\ &= \sum_1^{n_T} A_{cT} \alpha_T^i \left[\left(d^2 N_T^T F_T^i \right) \cdot \left(M_T^T G_T^i \right) \cdot \left(L_T^T H_T^i \right) + \left(N_T^T F_T^i \right) \cdot \left(d^2 M_T^T G_T^i \right) \cdot \left(L_T^T H_T^i \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.I-11})$$

En effet, avec ce degré de fonction d'interpolation, les dérivées secondes sont nulles et par suite le terme vaut 0. Pour pallier ce problème, on choisit d'intégrer par parties ce terme afin de diminuer l'ordre des dérivées qui intervient dans sa description.

La formulation variationnelle de Galerkin liée à l'équation de concentration s'écrit :

$$\int_{\Omega} c^* \left(\frac{\partial c}{\partial t} - D \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}c}) \right) d\Omega = \int_{\Omega} c^* \left(-\frac{dg(t)}{dt} + A_{cT} \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}T}) \right) d\Omega \quad (\text{D.I-12})$$

avec un champ réel c et un champ virtuel c^* et le terme de couplage s'écrit après intégration par parties et prise en compte des conditions aux limites:

$$\int_{\Omega} D \left(\frac{\partial c^*}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c^*}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} c^* \frac{\partial c}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} c^* \left(-\frac{dg(t)}{dt} \right) d\Omega + \int_{\Omega} A_{cT} \left(\frac{\partial c^*}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial c^*}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega \quad (\text{D.I-13})$$

Le terme couplé ne nécessite plus que des dérivées du premier ordre pour l'espace. Les fonctions de forme linéaires peuvent donc être utilisées.

Remarquons que le nombre total de modes pour décrire le terme source est : $n_{fc} + 2n_T$ si la température est décrite avec n_T fonctions de bases.

La résolution PGD de ce problème partiellement couplé 1 est ici résumée à l'aide de la formulation tensorielle.

La concentration c (la température T) est recherchée comme une somme de produits tensoriels de vecteurs \mathbf{F}_c^i (\mathbf{F}_T^i), \mathbf{G}_c^i (\mathbf{G}_T^i) et \mathbf{H}_c^i (\mathbf{H}_T^i) pondérés par des coefficients notés α_c^i (α_T^i) qui s'écrit comme suit:

$$c = \sum_i^{n_c} \alpha_c^i \mathbf{F}_c^i \otimes \mathbf{G}_c^i \otimes \mathbf{H}_c^i, \quad T = \sum_i^{n_T} \alpha_T^i \mathbf{F}_T^i \otimes \mathbf{G}_T^i \otimes \mathbf{H}_T^i \quad (\text{D.I-14})$$

La formulation variationnelle **(D.I-13)** liée à l'équation de diffusion peut être écrite sous la forme discrète suivante :

$$\mathbf{c}^{*T} \mathbf{A}_c \mathbf{c} = \mathbf{c}^{*T} \mathbf{B}_c \quad (\text{D.I-15})$$

avec \mathbf{c} et \mathbf{c}^{*T} les champs réel et virtuel. \mathbf{A}_c et \mathbf{B}_c sont obtenus à partir des représentations discrètes de l'opérateur (3 opérateurs) et de la source ($n_{Bc} = n_{fc} + 2n_T$ termes) du problème en formulation variationnelle **(D.I-13)**.

On peut les représenter sous la forme séparée :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= \sum_{i=1}^3 a_c^i \mathbf{A}_{cx}^i \otimes \mathbf{A}_{cy}^i \otimes \mathbf{A}_{ct}^i \\ \mathbf{B}_c &= \sum_{i=1}^{n_{Bc}} b_c^i \mathbf{B}_{cx}^i \otimes \mathbf{B}_{cy}^i \otimes \mathbf{B}_{ct}^i \\ \mathbf{c} &= \sum_i^{n_c} \alpha_c^i \mathbf{F}_c^i \otimes \mathbf{G}_c^i \otimes \mathbf{H}_c^i \end{aligned} \quad (\text{D.I-16})$$

où les composants de \mathbf{A}_c s'écrivent :

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
A_{cx}^i	$\int_{\Omega_x} dN_c dN_c^T dx$	$\int_{\Omega_x} N_c N_c^T dx$	$\int_{\Omega_x} N_c N_c^T dx$
A_{cy}^i	$\int_{\Omega_y} M_c M_c^T dy$	$\int_{\Omega_y} dM_c dM_c^T dy$	$\int_{\Omega_y} M_c M_c^T dy$
A_{ct}^i	$\int_{\Omega_t} L_c L_c^T dt$	$\int_{\Omega_t} L_c L_c^T dt$	$\int_{\Omega_t} L_c dL_c^T dt$
a_c^i	D	D	1

TAB. D.I-1 Composants de \mathbf{A}_c

et les composants de \mathbf{B}_c s'écrivent :

	$1 \leq i \leq n_{fc}$	$i = (n_{fc} + j)$ $1 \leq j \leq n_T$	$i = (n_{fc} + n_T + j)$ $1 \leq j \leq n_T$
\mathbf{B}_{cx}^i	$\left(\int_{\Omega_x} N_c N_{cf}^T dx \right) \mathbf{f}_{cx}^i$	$\left(\int_{\Omega_x} dN_c dN_T^T dx \right) \mathbf{F}_T^j$	$\left(\int_{\Omega_x} N_c N_T^T dx \right) \mathbf{F}_T^j$
\mathbf{B}_{cy}^i	$\left(\int_{\Omega_y} M_c M_{cf}^T dy \right) \mathbf{f}_{cy}^i$	$\left(\int_{\Omega_y} M_c M_T^T dy \right) \mathbf{G}_T^j$	$\left(\int_{\Omega_y} dM_c dM_T^T dy \right) \mathbf{G}_T^j$
\mathbf{B}_{ct}^i	$\left(\int_{\Omega_t} L_c L_{cf}^T dt \right) \mathbf{f}_{ct}^i$	$\left(\int_{\Omega_t} L_c L_T^T dt \right) \mathbf{H}_T^j$	$\left(\int_{\Omega_t} L_c L_T^T dt \right) \mathbf{H}_T^j$
b_c^i	β_c^i	$A_{cT} \alpha_T^j$	$A_{cT} \alpha_T^j$

TAB. D.I-2 Composants de \mathbf{B}_c

Remarque. On voit que dans l'évaluation des termes couplés, on est amené à calculer des matrices couplées composées des fonctions de forme de la concentration et de la température. Par exemple,

pour le temps t , on a une matrice couplée à calculer : $\left(\int_{\Omega_t} L_c L_T^T dt \right)$.

Si les maillages de c et T sont identiques, les matrices couplées deviennent des matrices carrées qui sont les mêmes que celles calculées dans le cas découplé. Lorsque c et T ont chacune leur propre maillage, le calcul de matrices couplées nécessite un transfert des données entre les deux maillages.

Dans le cadre de ce travail, toutes les variables sont séparées. Le transfert des données est donc effectué uniquement à travers des maillages unidimensionnels à l'aide des matrices couplées. Pour le remplissage des matrices couplées, l'intégration numérique de Gauss est utilisée. Prenons l'exemple

de la matrice temporelle couplée $\left(\int_{\Omega_t} L_c L_T^T dt \right)$. Elle est calculée comme suit :

$$\left(\int_{\Omega_t} L_c L_T^T dt \right) = \sum_{\delta_{t_{cT}}} \int_{\delta_{t_{cT}}} L_c L_T^T dt \quad (\text{D.I-17})$$

où $\delta_{t_{cT}}$ est un élément du maillage commun des 2 physiques (appelé maillage de stockage et noté t_{cT}) qui est créé par concaténation des maillages de chaque physique. Le terme $\int_{\delta_{t_{cT}}} L_c L_T^T dt$ est non nul

uniquement pour les fonctions L_c^i et L_T^j non nulles sur $\delta_{t_{cT}}$. Il est donc calculé de la manière suivante :

- Tout d'abord, on cherche les fonctions d'interpolation non nulles sur $\delta_{t_{cT}}$ (par exemple L_c^i et L_T^j).

- Ainsi, dans la matrice $\int_{\delta_{t_{cT}}} L_c L_T^T dt$, seuls les composants $\left(\int_{\delta_{t_{cT}}} L_c L_T^T dt \right)_{ij} = \int_{\delta_{t_{cT}}} L_c^i(t) L_T^j(t) dt$ sont

non nuls. Cette intégrale est calculée à l'aide de l'intégration numérique comme étant égale à la somme du produit $L_c^i(t) L_T^j(t)$ à chaque point de Gauss sur $\delta_{t_{cT}}$. Le nombre de points de Gauss est déterminé selon le degré du polynôme produit $L_c^i(t) L_T^j(t)$ qui, dans notre cas, est de degré 2. Rappelons qu'avec n points de Gauss, on peut avoir une intégration numérique exacte pour des polynômes d'ordre inférieur ou égal à $2n - 1$. Deux points de Gauss sont donc utilisés ici afin d'avoir une intégration numérique exacte.

Remarques.

- Cette procédure a été utilisée afin de définir les matrices couplées comme des matrices creuses dans le but d'optimiser la place mémoire.
- La principale différence avec le cas découplé est l'ajout des termes de couplage dans le second membre \mathbf{B} . Pour déterminer la solution c , la résolution est faite de la même manière que dans le chapitre \mathbf{B} .
- Comme les deux équations découplées sont de même nature, le choix d'utiliser des maillages différents pour chaque physique augmente le nombre d'opérateurs à stocker. Si les maillages sont identiques, les composants de A_c sont les mêmes que ceux de A_T .

b) **Problème partiellement couplé 2** ($c - T(c)$)

De la même façon, nous pouvons écrire la résolution PGD du deuxième problème partiellement couplé où le problème thermique est couplé et celui de diffusion est découplé.

Supposons que la source de la chaleur s'écrit aussi sous la forme d'une fonction à variables séparées:

$f_T(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n_T} \beta_T^i f_{Tx}^i(x) f_{Ty}^i(y) f_{Tt}^i(t)$. Elle est représentée sous une forme discrète :

$$f_T(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n_T} \beta_T^i \cdot (N_{Tf}^T f_{Tx}^i) \cdot (M_{Tf}^T f_{Ty}^i) \cdot (L_{Tf}^T f_{Tt}^i) \quad (\text{D.I-18})$$

où N_{Tf} ; M_{Tf} et L_{Tf} sont les fonctions de forme pour la source. Comme pour le cas de la concentration, ces fonctions sont définies, dans la suite, sur le même maillage que celui de T mais elles peuvent être non nulles aux bords et à l'instant initial.

Le terme couplé $B_{Tc}(\overrightarrow{\text{grad}c})^2$ peut être considéré comme une partie de la source, il s'écrit:

$$\begin{aligned} B_{Tc}(\overrightarrow{\text{grad}c})^2 &= B_{Tc} \left(\left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n_c} B_{Tc} \left(\left[\alpha_c^i \cdot (dN_c^T F_c^i) \cdot (M_c^T G_c^i) \cdot (L_c^T H_c^i) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\alpha_c^i \cdot (N_c^T F_c^i) \cdot (dM_c^T G_c^i) \cdot (L_c^T H_c^i) \right]^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n_c} \sum_{j=1}^{n_c} B_{Tc} \left(\alpha_c^i \alpha_c^j \left[(dN_c^T F_c^i dN_c^T F_c^j) \cdot (M_c^T G_c^i M_c^T G_c^j) \cdot (L_c^T H_c^i L_c^T H_c^j) \right] \right. \\ &\quad \left. + \alpha_c^i \alpha_c^j \left[(N_c^T F_c^i N_c^T F_c^j) \cdot (dM_c^T G_c^i dM_c^T G_c^j) \cdot (L_c^T H_c^i L_c^T H_c^j) \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{D.I-19})$$

Le nombre total des termes de la source est : $n_T + 2n_c^2$ qui peut être très élevé si le nombre de modes n_c est important. Une solution peut être de faire une SVD multidimensionnelle ou une PGD si le nombre de termes s'avérait beaucoup trop important ce qui a été montré au **chapitre C**.

La formulation tensorielle de l'équation de thermique couplée s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{*T} \mathbf{A}_T \mathbf{T} &= \mathbf{T}^{*T} \mathbf{B}_T \\ \mathbf{A}_T &= \sum_{i=1}^3 a_T^i A_{Tx}^i \otimes A_{Ty}^i \otimes A_{Tt}^i \\ \mathbf{B}_T &= \sum_{i=1}^{n_{BT}} b_T^i \mathbf{B}_{Tx}^i \otimes \mathbf{B}_{Ty}^i \otimes \mathbf{B}_{Tt}^i \\ \mathbf{T} &= \sum_i^{n_T} \alpha_T^i \mathbf{F}_T^i \otimes \mathbf{G}_T^i \otimes \mathbf{H}_T^i \end{aligned} \quad (\text{D.I-20})$$

où les composants de \mathbf{A}_T s'écrivent:

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
A_{Tx}^i	$\int_{\Omega_x} dN_T dN_T^T dx$	$\int_{\Omega_x} N_T N_T^T dx$	$\int_{\Omega_x} N_T N_T^T dx$
A_{Ty}^i	$\int_{\Omega_y} M_T M_T^T dy$	$\int_{\Omega_y} dM_T dM_T^T dy$	$\int_{\Omega_y} M_T M_T^T dy$
A_{Tt}^i	$\int_{\Omega_t} L_T L_T^T dt$	$\int_{\Omega_t} L_T L_T^T dt$	$\int_{\Omega_t} L_T dL_T^T dt$
a_T^i	λ_T	λ_T	ρC

 TAB. D.I-3 Composants de A_T

et les composants de B_T s'écrivent:

	$1 \leq i \leq n_{JT}$	$i = (n_{JT} + (j-1)n_c + k)$ $1 \leq j, k \leq n_c$	$i = (n_{JT} + n_c^2 + (j-1)n_c + k)$ $1 \leq j, k \leq n_c$
B_{Tx}^i	$\left(\int_{\Omega_x} N_T N_{Tj}^T dx \right) \mathbf{f}_{Tx}^i$	$\left(\int_{\Omega_x} N_T dN_c^T \mathbf{F}_c^j dN_c^T dx \right) \mathbf{F}_c^k$	$\left(\int_{\Omega_x} N_T N_c^T \mathbf{F}_c^j N_c^T dx \right) \mathbf{F}_c^k$
B_{Ty}^i	$\left(\int_{\Omega_y} M_T M_{Tj}^T dy \right) \mathbf{f}_{Ty}^i$	$\left(\int_{\Omega_y} M_T M_c^T \mathbf{G}_c^j M_c^T dy \right) \mathbf{G}_c^k$	$\left(\int_{\Omega_y} M_T dM_c^T \mathbf{G}_c^j dM_c^T dy \right) \mathbf{G}_c^k$
B_{Tt}^i	$\left(\int_{\Omega_t} L_T L_{Tj}^T dt \right) \mathbf{f}_{Tt}^i$	$\left(\int_{\Omega_t} L_T L_c^T \mathbf{H}_c^j L_c^T dt \right) \mathbf{H}_c^k$	$\left(\int_{\Omega_t} L_T L_c^T \mathbf{H}_c^j L_c^T dt \right) \mathbf{H}_c^k$
b_T^i	β_T^i	$B_{Tc} \alpha_T^j \alpha_T^k$	$B_{Tc} \alpha_T^j \alpha_T^k$

 TAB. D.I-4 Composants de B_T

Comme dans le cas précédent, des matrices couplées composées des fonctions de forme de la concentration et de la température doivent être calculées. Par exemple, pour le temps t , on a une

matrice couplée à calculer : $\left(\int_{\Omega_t} L_T L_c^T \mathbf{H}_c^j L_c^T dt \right)$.

On voit que cette intégrale contient 4 entrées au lieu de 2 pour l'équation de la diffusion. Ceci est lié à la nature du terme de couplage. Avec l'intégration de Gauss, le calcul de cette intégrale ne pose pas de difficulté particulière (somme du produit de 4 fonctions sur les éléments). Le polynôme produit étant de degré 3, deux points de Gauss sont utilisés là encore pour obtenir une intégration numérique exacte.

Pour le cas des équations de thermodiffusion, nous avons exposé l'écriture de la PGD dans des cas partiellement couplés, c'est-à-dire dans les cas où les physiques pouvaient être calculées l'une après l'autre avec la PGD. De par leur nature, les termes de couplages ont pu être pris en compte comme une source c'est-à-dire dans le terme de droite B . Lorsque le problème est "fortement couplé" c'est-à-dire les deux coefficients A_{cT} et B_{Tc} sont non nulles, d'autres termes de couplage doivent être pris en compte ((D.I-1) & (D.I-2)). Ces termes ne font apparaître que des gradients en espace. L'objectif de notre travail étant de se concentrer sur les performances de la PGD vis-à-vis des variables temporelles, nous avons choisi d'étudier un autre type de problème pour le cas fortement couplé qui est un problème thermoviscoélastique. Nous allons voir que ce problème fait apparaître des dérivées temporelles dans les termes de couplage. De plus, cela nous permet de tester la capacité de la PGD à capter la solution d'un problème couplé avec des équations de natures différentes.

D.I.1.2 Problème fortement couplé thermoviscoélastique

Les équations de thermoviscoélasticité

La PGD est appliquée ici à un problème transitoire thermoviscoélastique fortement couplé. Par souci de clarté, nous nous limitons ici à l'étude d'un cas unidimensionnel en espace avec uniquement un couplage de type thermodynamique (prise en compte de la dilatation thermique sur la mécanique et la thermique). La forme générique du problème couplé est la suivante :

Problème mécanique **viscoélastique** :

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda_v + 2\mu_v) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = -\rho f_u + (3\lambda + 2\mu) \alpha_{TT} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{D.I-21})$$

Problème **thermique** :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (3\lambda + 2\mu) \alpha_{TT} T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = f_T \quad (\text{D.I-22})$$

λ , μ , λ_v , μ_v sont les coefficients de Lamé correspondant à l'élasticité et à la viscoélasticité. ρ représente la masse volumique, C la chaleur spécifique, λ_T la conductivité thermique, f_T la source de la chaleur et f_u le chargement.

α_{TT} est le coefficient de dilatation thermique qui permet de prendre en compte les couplages entre les deux physiques qui sont le déplacement u et la température T .

Lorsque la température change, elle modifie le déplacement à travers le terme $(3\lambda + 2\mu) \alpha_{TT} \frac{\partial T}{\partial x}$. Ce déplacement influence la température via le terme $(3\lambda + 2\mu) \alpha_{TT} T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$. Les deux physiques s'influencent donc l'une l'autre. Il est donc bien question d'équations fortement couplées.

Notons que le terme de couplage dans l'équation de la thermique présente une dérivée spatiale et temporelle par rapport à la variable u .

Le problème unidimensionnel transitoire thermoviscoélastique est défini sur le domaine $\Omega = \Omega_x \times \Omega_t = [0, L_x] \times [0, L_t]$ et on considère des conditions aux bords et initiales nulles pour le déplacement u et la température T . Ce système présente deux temps caractéristiques : le rapport adimensionné pour une épaisseur unité pour la thermique $\frac{\rho C}{\lambda_T}$ et le rapport $\frac{\lambda_v + 2\mu_v}{\lambda + 2\mu}$ pour la mécanique.

Afin d'écrire la formulation PGD du problème couplé $\{(\text{D.I-21}), (\text{D.I-22})\}$, précisons tout d'abord la formulation variationnelle de Galerkin du problème couplé. Elle s'écrit:

$$\int_{\Omega} u^* \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda_v + 2\mu_v) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right) d\Omega = \int_{\Omega} u^* \left(-\rho f_u + (3\lambda + 2\mu) \alpha_{TT} \frac{\partial T}{\partial x} \right) d\Omega \quad (\text{D.I-23})$$

$$\int_{\Omega} T^* \left(\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (3\lambda + 2\mu) \alpha_{TT} T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right) d\Omega = \int_{\Omega} T^* f_T d\Omega \quad (\text{D.I-24})$$

avec les champs réels u, T et les champs virtuels u^*, T^* . Après intégration par parties et prise en compte des conditions aux limites, on obtient la formulation suivante:

$$\int_{\Omega} \left(-(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - (\lambda_v + 2\mu_v) \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right) d\Omega = \int_{\Omega} u^* \left(-\rho f_u + (3\lambda + 2\mu) \alpha_{TT} \frac{\partial T}{\partial x} \right) d\Omega \quad (\text{D.I-25})$$

$$\int_{\Omega} \left(\rho C T^* \frac{\partial T}{\partial t} + \lambda_T \frac{\partial T^*}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + (3\lambda + 2\mu) \alpha_{TT} T^* T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right) d\Omega = \int_{\Omega} T^* f_T d\Omega \quad (\text{D.I-26})$$

Formulation PGD du problème thermoviscoélastique fortement couplé

Les solutions sont recherchées sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{n_u} \alpha_u^i F_u^i(x) H_u^i(t) \quad (\text{D.I-27})$$

$$T(x, t) = \sum_{i=1}^{n_T} \alpha_T^i F_T^i(x) H_T^i(t)$$

où n_u et n_T sont les nombres finaux de couples de fonctions requis pour décrire u et T avec une précision donnée.

Dans la suite, nous allons présenter une résolution complètement couplée du problème avec la PGD. Ainsi le nombre de modes pour décrire u et le même que celui pour T .

Remarque. Dans le cas précédent partiellement couplé, comme chacune des physiques était résolue séparément, le nombre de modes pour les deux physiques était différent.

On notera donc dans la suite $n_u = n_T = n$.

Comme dans le cas du problème diffusothermique, des fonctions d'interpolations propres à chaque physique et des discrétisations irrégulières sont utilisées. N_u (N_T) sont les vecteurs qui contiennent la valeur des fonctions de forme en espace et L_u (L_T) celles en temps pour le déplacement (respectivement la température). Elles sont également choisies linéaires par morceaux pour l'espace ainsi que pour le temps.

Nous supposons que le chargement et la source de la chaleur peuvent se mettre sous la forme d'une fonction à variables séparées et s'écrivent sous la forme discrète:

$$f_u(x, t) = \sum_{i=1}^{n_{fu}} \beta_u^i \cdot \left(N_{uf}^T f_{ux}^i \right) \cdot \left(L_{uf}^T f_{ut}^i \right) \quad (\text{D.I-28})$$

$$f_T(x, t) = \sum_{i=1}^{n_{Tf}} \beta_T^i \cdot \left(N_{Tf}^T f_{Tx}^i \right) \cdot \left(L_{Tf}^T f_{Tt}^i \right)$$

où N_{uf} (N_{Tf}) et L_{uf} (L_{Tf}) sont les fonctions de forme en espace et en temps pour le chargement (et la source de la chaleur). Ces fonctions sont définies sur le même maillage que celui de u (respectivement T) mais sont non nulles aux bords et à l'instant initial.

La résolution PGD de ce problème est présentée en formulation tensorielle. La formulation variationnelle (D.I-25) peut être écrite sous la forme discrète suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{A}_u \mathbf{u} &= \mathbf{u}^{*T} \mathbf{B}_u \\ \mathbf{T}^{*T} \mathbf{A}_T \mathbf{T} &= \mathbf{T}^{*T} \mathbf{B}_T \end{aligned} \quad (\text{D.I-29})$$

Pour le problème mécanique viscoélastique, on obtient:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_u &= \sum_{i=1}^{n_{Au}} a_u^i \mathbf{A}_{ux}^i \otimes \mathbf{A}_{ut}^i \\ \mathbf{B}_u &= \sum_{i=1}^{n_{Bu}} b_u^i \mathbf{B}_{ux}^i \otimes \mathbf{B}_{ut}^i \\ \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^n \alpha_u^i \mathbf{F}_u^i \otimes \mathbf{H}_u^i \end{aligned} \quad (\text{D.I-30})$$

où les composants de \mathbf{A}_u s'écrivent :

	$i = 1$	$i = 2$
A_{ux}^i	$\int_{\Omega_x} dN_u dN_u^T dx$	$\int_{\Omega_x} dN_u dN_u^T dx$
A_{ut}^i	$\int_{\Omega_t} L_u L_u^T dt$	$\int_{\Omega_t} L_u dL_u^T dt$
a_u^i	$-(\lambda + 2\mu)$	$-(\lambda_v + 2\mu_v)$

TAB. D.I-5 Composants de \mathbf{A}_u

et les composants de \mathbf{B}_u s'écrivent :

	$1 \leq i \leq n_{fu}$	$i = n_{fu} + j$ $1 \leq j \leq n$
\mathbf{B}_{ux}^i	$\left(\int_{\Omega_x} N_u N_{uf}^T dx \right) \mathbf{f}_{ux}^i$	$\left(\int_{\Omega_x} N_u dN_T^T dx \right) \mathbf{F}_T^j$
\mathbf{B}_{ut}^i	$\left(\int_{\Omega_t} L_u L_{uf}^T dt \right) \mathbf{f}_{ut}^i$	$\left(\int_{\Omega_t} L_u L_T^T dt \right) \mathbf{H}_T^j$
b_u^i	$-\rho \beta_u^i$	$(3\lambda + 2\mu) \alpha_{TT} \alpha_T^j$

TAB. D.I-6 Composants de \mathbf{B}_u

Pour le problème thermique, on obtient:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_T &= \sum_{i=1}^{n_{AT}} a_T^i \mathbf{A}_{Tx}^i \otimes \mathbf{A}_{Tt}^i \\ \mathbf{B}_T &= \sum_{i=1}^{n_{BT}} b_T^i \mathbf{B}_{Tx}^i \otimes \mathbf{B}_{Tt}^i \\ \mathbf{T} &= \sum_{i=1}^n \alpha_T^i \mathbf{F}_T^i \otimes \mathbf{H}_T^i \end{aligned} \quad (\text{D.I-31})$$

où les composants de A_T s'écrivent :

	$i = 1$	$i = 2$	$i = (2 + j)$ $1 \leq j \leq n$
A_{Tx}^i	$\int_{\Omega_x} dN_T dN_T^T dx$	$\int_{\Omega_x} N_T N_T^T dx$	$\int_{\Omega_x} N_T (\mathbf{F}_u^j)^T dN_u N_T^T dx$
A_{Tt}^i	$\int_{\Omega_t} L_T L_T^T dt$	$\int_{\Omega_t} L_T dL_T^T dt$	$\int_{\Omega_t} L_T (\mathbf{H}_u^j)^T dL_u L_T^T dt$
a_T^i	λ_T	ρC	$(3\lambda + 2\mu)\alpha_{TT} \alpha_u^j$

TAB. D.I-7 Composants de A_T

et les composants de B_T s'écrivent :

	$1 \leq i \leq n_{IT}$
B_{Tx}^i	$\left(\int_{\Omega_x} N_T N_{Tf}^T dx \right) \mathbf{f}_{Tx}^i$
B_{Tt}^i	$\left(\int_{\Omega_t} L_T L_{Tf}^T dt \right) \mathbf{f}_{Tt}^i$
b_T^i	β_T^i

TAB. D.I-8 Composants de B_T

Remarque. Le terme couplé dans l'équation de la mécanique est traité de la même manière que dans le cas du problème de thermodiffusion puisqu'il est pris en compte dans le second membre B . Par contre, la nature du terme couplé dans l'équation de la thermique (comme celui-ci dépend aussi de la température) nécessite de l'écrire dans l'opérateur A . Nous aurions pu choisir d'écrire ce terme dans le second membre B . Dans ce cas, il aurait fallu évaluer la température comme étant celle de l'itération précédente comme dans la méthode de linéarisation incrémentale (cf. **section C.I.1**).

Les différentes étapes de la PGD dans le cas fortement couplé

Comme nous l'avons précisé, nous avons choisi de résoudre ce problème fortement couplé en résolvant en même temps les deux physiques u et T . Dans Béringhier et al. [Beringhier 2010], ce même problème thermoviscoélastique a déjà été résolu avec la PGD. Contrairement au cas où une seule physique est considérée ou au cas partiellement couplé thermodiffusion, il mène à la résolution d'un système non linéaire lors de l'étape de projection et l'étape d'enrichissement de la PGD.

Dans ce papier, la résolution des systèmes non linéaires a été menée à l'aide d'un algorithme de type Newton. Deux types de résolution du système ont été traités :

- une résolution "faible" qui consiste à résoudre indépendamment chacune des physiques,
- une résolution "forte" qui consiste à résoudre simultanément les deux physiques.

Il a été montré que la résolution "faible" mène à un plus grand nombre de modes pour décrire la solution finale. Néanmoins, comparé à une résolution complètement couplée du système, cela permet de diminuer la taille des systèmes à résoudre puisqu'une seule physique est considérée à la fois.

Dans ce qui suit, nous utilisons donc la résolution "forte" du système. Pour pallier le défaut de la taille des systèmes, la méthode de point fixe à directions alternées est utilisée à l'étape d'enrichissement ainsi qu'à l'étape de projection. Les différentes étapes de la PGD sont détaillées ci-après.

a) Etape d'enrichissement de la base

A partir des k fonctions à variables séparées et leurs coefficients associés, les fonctions à variables séparées $k+1$ ($\mathbf{R}_u \otimes \mathbf{P}_u$ et $\mathbf{R}_T \otimes \mathbf{P}_T$) sont calculées. Elles sont solution de la formulation variationnelle de Galerkin liée à ((D.I-21), (D.I-22)) avec les champs réels et virtuels suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^k \alpha_u^i \mathbf{F}_u^i \otimes \mathbf{H}_u^i + \mathbf{R}_u \otimes \mathbf{P}_u \\ \mathbf{T} &= \sum_{i=1}^k \alpha_T^i \mathbf{F}_T^i \otimes \mathbf{H}_T^i + \mathbf{R}_T \otimes \mathbf{P}_T \end{aligned} \tag{D.I-32}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^* &= \mathbf{R}_T^* \otimes \mathbf{P}_T + \mathbf{R}_T \otimes \mathbf{P}_T^* \\ \mathbf{u}^* &= \mathbf{R}_u^* \otimes \mathbf{P}_u + \mathbf{R}_u \otimes \mathbf{P}_u^* \end{aligned} \tag{D.I-33}$$

Cela mène à la résolution d'un système non linéaire en \mathbf{R}_u , \mathbf{P}_u , \mathbf{R}_T , \mathbf{P}_T . Ce système est résolu par la méthode de point fixe à directions alternées.

- Pour le problème mécanique viscoélastique

○ **Trouver \mathbf{R}_u**

Supposons connu \mathbf{P}_u , ce qui implique un champ virtuel $\mathbf{u}^* = \mathbf{R}_u^* \otimes \mathbf{P}_u$. On obtient le système en \mathbf{R}_u suivant:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^2 a_u^i (A_{ux}^i) \otimes ((\mathbf{P}_u)^T A_{ut}^i \mathbf{P}_u) \right) \mathbf{R}_u &= \sum_{i=1}^{n_{fu}+k} b_u^i (\mathbf{B}_{ux}^i) \otimes ((\mathbf{P}_u)^T \mathbf{B}_{ut}^i) - \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^k a_u^i \alpha_u^j (A_{ux}^i \mathbf{F}_u^j) \otimes ((\mathbf{P}_u)^T A_{ut}^i \mathbf{H}_u^j) \right) \\ &+ (3\lambda + 2\mu) \alpha_{TT} \left(\left(\int_{\Omega_x} N_u dN_T^T dx \right) \mathbf{R}_T \right) \otimes \left((\mathbf{P}_u)^T \left(\int_{\Omega_t} L_u L_T^T dt \right) \mathbf{P}_T \right) \end{aligned} \tag{D.I-34}$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{U}_1(\mathbf{P}_u, \mathbf{R}_T, \mathbf{P}_T) \tag{D.I-35}$$

○ **Trouver \mathbf{P}_u**

Supposons connu \mathbf{R}_u , ce qui implique un champ virtuel $\mathbf{u}^* = \mathbf{R}_u \otimes \mathbf{P}_u^*$. On obtient le système en \mathbf{P}_u suivant:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^2 a_u^i ((\mathbf{R}_u)^T A_{ux}^i \mathbf{R}_u) \otimes (A_{ut}^i) \right) \mathbf{P}_u &= \sum_{i=1}^{n_{fu}+k} b_u^i ((\mathbf{R}_u)^T \mathbf{B}_{ux}^i) \otimes (\mathbf{B}_{ut}^i) - \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^k a_u^i \alpha_u^j ((\mathbf{R}_u)^T A_{ux}^i \mathbf{F}_u^j) \otimes (A_{ut}^i \mathbf{H}_u^j) \right) \\ &+ (3\lambda + 2\mu) \alpha_{TT} \left((\mathbf{R}_u)^T \left(\int_{\Omega_x} N_u dN_T^T dx \right) \mathbf{R}_T \right) \otimes \left(\left(\int_{\Omega_t} L_u L_T^T dt \right) \mathbf{P}_T \right) \end{aligned} \tag{D.I-36}$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{P}_u = U_2(\mathbf{R}_u, \mathbf{R}_T, \mathbf{P}_T) \quad (\text{D.I-37})$$

Notons que ces systèmes dépendent des inconnues liées à la température $(\mathbf{R}_T, \mathbf{P}_T)$.

- **Pour le problème thermique**

o **Trouver \mathbf{R}_T**

Supposons connu \mathbf{P}_T , ce qui implique un champ virtuel $\mathbf{T}^* = \mathbf{R}_T^* \otimes \mathbf{P}_T$. On obtient le système en \mathbf{R}_T suivant:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{2+k} a_T^i (A_{Tx}^i)^T \otimes (\mathbf{P}_T)^T A_{Tt}^i \mathbf{P}_T \right) \mathbf{R}_T = \sum_{i=1}^{n_{JT}} b_T^i (\mathbf{B}_{Tx}^i)^T \otimes (\mathbf{P}_T)^T \mathbf{B}_{Tt}^i - \left(\sum_{i=1}^{2+k} \sum_{j=1}^k a_T^i \alpha_T^j (A_{Tx}^i \mathbf{F}_T^j)^T \otimes (\mathbf{P}_T)^T A_{Tt}^i \mathbf{H}_T^j \right) \\ & - \left((3\lambda + 2\mu) \alpha_{TT} \left(\int_{\Omega_x} N_T (\mathbf{R}_u)^T dN_u N_T^T dx \right) \mathbf{R}_T \right) \otimes \left((\mathbf{P}_T)^T \left(\int_{\Omega_t} L_T (\mathbf{P}_u)^T dL_u L_T^T dt \right) \mathbf{P}_T \right) \\ & - \sum_{j=1}^k (3\lambda + 2\mu) \alpha_{TT} \alpha_T^j \left(\int_{\Omega_x} N_T (\mathbf{R}_u)^T dN_u N_T^T dx \right) \mathbf{F}_T^j \otimes \left((\mathbf{P}_T)^T \left(\int_{\Omega_t} L_T (\mathbf{P}_u)^T dL_u L_T^T dt \right) \mathbf{H}_T^j \right) \end{aligned} \quad (\text{D.I-38})$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{R}_T = U_3(\mathbf{P}_T, \mathbf{R}_u, \mathbf{P}_u) \quad (\text{D.I-39})$$

o **Trouver \mathbf{P}_T**

Supposons connu \mathbf{R}_T , ce qui implique un champ virtuel $\mathbf{T}^* = \mathbf{R}_T \otimes \mathbf{P}_T^*$. On obtient le système en \mathbf{P}_T suivant:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{2+k} a_T^i ((\mathbf{R}_T)^T A_{Tx}^i \mathbf{R}_T) \otimes (A_{Tt}^i \mathbf{P}_T) \right) \mathbf{P}_T = \sum_{i=1}^{n_{JT}} b_T^i ((\mathbf{R}_T)^T \mathbf{B}_{Tx}^i) \otimes (\mathbf{B}_{Tt}^i) - \left(\sum_{i=1}^{2+k} \sum_{j=1}^k a_T^i \alpha_T^j ((\mathbf{R}_T)^T A_{Tx}^i \mathbf{F}_T^j) \otimes (A_{Tt}^i \mathbf{H}_T^j) \right) \\ & - \left((3\lambda + 2\mu) \alpha_{TT} \left((\mathbf{R}_T)^T \left(\int_{\Omega_x} N_T (\mathbf{R}_u)^T dN_u N_T^T dx \right) \mathbf{R}_T \right) \otimes \left(\left(\int_{\Omega_t} L_T (\mathbf{P}_u)^T dL_u L_T^T dt \right) \mathbf{P}_T \right) \right) \\ & - \sum_{j=1}^k (3\lambda + 2\mu) \alpha_{TT} \alpha_T^j \left((\mathbf{R}_T)^T \left(\int_{\Omega_x} N_T (\mathbf{R}_u)^T dN_u N_T^T dx \right) \mathbf{F}_T^j \right) \otimes \left(\left(\int_{\Omega_t} L_T (\mathbf{P}_u)^T dL_u L_T^T dt \right) \mathbf{H}_T^j \right) \end{aligned} \quad (\text{D.I-40})$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{P}_T = U_4(\mathbf{R}_T, \mathbf{R}_u, \mathbf{P}_u) \quad (\text{D.I-41})$$

Notons que ces systèmes dépendent aussi des inconnues en déplacement $(\mathbf{R}_u, \mathbf{P}_u)$.

Pour prendre en compte la dépendance de ces systèmes aux inconnues liées à l'autre physique (température pour le problème mécanique et déplacement pour le problème de thermique), deux types de résolution peuvent être envisagées que nous noterons méthode "découplée" et méthode "couplage total".

i. Méthode "découplée" :

Le système non linéaire est découpé en deux systèmes non linéaires : un système non linéaire par rapport à $(\mathbf{R}_u, \mathbf{P}_u)$ et un système non linéaire par rapport à $(\mathbf{R}_T, \mathbf{P}_T)$. Ces deux systèmes sont résolus à l'aide de la méthode de point fixe à directions alternées. A l'itération p , on doit résoudre séquentiellement les deux systèmes non linéaires suivants :

+ Un système non linéaire par rapport à $(\mathbf{R}_u, \mathbf{P}_u)$ (Eq. (D.I-35) et (D.I-37)) puisque $(\mathbf{R}_T, \mathbf{P}_T)$ sont supposés connus. Ce système est résolu à l'aide de la méthode de point fixe à directions alternées. A $l^{\text{ème}}$ sous itération, la procédure du point fixe est stoppée lorsque le nombre maximal de sous itération l_{\max} est atteint ou le critère suivant est satisfait :

$$\left\| N_{\text{fixe}}^u \right\|_2 = \left\| \mathbf{R}_u^{(l)} \mathbf{P}_u^{(l)} - \mathbf{R}_u^{(l-1)} \mathbf{P}_u^{(l-1)} \right\|_2 \leq \mathcal{E}_{\text{fixe}}^u \quad (\text{D.I-42})$$

où $\mathcal{E}_{\text{fixe}}^u$ est un paramètre fixé par l'utilisateur. Les solutions convergées (noté $\mathbf{R}_{u(p)}, \mathbf{P}_{u(p)}$) sont ensuite utilisées pour calculer les nouveaux modes T .

+ Un système non linéaire par rapport à $(\mathbf{R}_T, \mathbf{P}_T)$ (Eq. (D.I-39) et (D.I-41)) puisque $(\mathbf{R}_u, \mathbf{P}_u)$ sont supposés connus. Ce système est résolu à l'aide de la méthode de point fixe à directions alternées. A $l^{\text{ème}}$ sous itération, la procédure du point fixe est stoppée lorsque le nombre maximal de sous itération l_{\max} est atteint ou le critère suivant est satisfait :

$$\left\| N_{\text{fixe}}^T \right\|_2 = \left\| \mathbf{R}_T^{(l)} \mathbf{P}_T^{(l)} - \mathbf{R}_T^{(l-1)} \mathbf{P}_T^{(l-1)} \right\|_2 \leq \mathcal{E}_{\text{fixe}}^T \quad (\text{D.I-43})$$

où $\mathcal{E}_{\text{fixe}}^T$ est un paramètre fixé par l'utilisateur. Les solutions convergées sont (noté $\mathbf{R}_{T(p)}, \mathbf{P}_{T(p)}$).

Ces deux étapes sont répétées jusqu'à la convergence. La procédure est stoppée lorsque le nombre maximal de sous itérations p_{\max} est atteint ou le critère suivant est satisfait :

$$\left\| N_{\text{fixe}}^{uT} \right\|_2 = \max \left(\left\| \mathbf{R}_{u(p)} \mathbf{P}_{u(p)} - \mathbf{R}_{u(p-1)} \mathbf{P}_{u(p-1)} \right\|_2, \left\| \mathbf{R}_{T(p)} \mathbf{P}_{T(p)} - \mathbf{R}_{T(p-1)} \mathbf{P}_{T(p-1)} \right\|_2 \right) \leq \mathcal{E}_{\text{fixe}}^{uT} \quad (\text{D.I-44})$$

où $\mathcal{E}_{\text{fixe}}^{uT}$ est un paramètre fixé par l'utilisateur.

Le **TAB. D.I-9** résume l'algorithme de cette méthode.

1 :	<i>tant que</i> ($p \leq p_{max}$ et $\ N_{fixe}^{uT\ l}\ _2 > \varepsilon_{fixe}^{uT}$) <i>faire</i>
2 :	<i>tant que</i> ($l \leq l_{max}$ et $\ N_{fixe}^u\ _2 > \varepsilon_{fixe}^u$) <i>faire</i>
3 :	Calcul de $\mathbf{R}_u^{(l)} = U_1(\mathbf{P}_u^{(l-1)}, \mathbf{R}_{T(p-1)}, \mathbf{P}_{T(p-1)})$
4 :	Calcul de $\mathbf{P}_u^{(l)} = U_2(\mathbf{R}_u^{(l)}, \mathbf{R}_{T(p-1)}, \mathbf{P}_{T(p-1)})$
5 :	Calcul de $\ N_{fixe}^u\ _2$
6 :	<i>fin tant que</i>
7 :	$\mathbf{R}_{u(p)} = \mathbf{R}_u^{(l)} ; \mathbf{P}_{u(p)} = \mathbf{P}_u^{(l)}$
8 :	<i>tant que</i> ($l \leq l_{max}$ et $\ N_{fixe}^T\ _2 > \varepsilon_{fixe}^T$) <i>faire</i>
9 :	Calcul de $\mathbf{R}_T^{(l)} = U_3(\mathbf{P}_T^{(l-1)}, \mathbf{R}_{u(p)}, \mathbf{P}_{u(p)})$
10 :	Calcul de $\mathbf{P}_T^{(l)} = U_4(\mathbf{R}_T^{(l)}, \mathbf{R}_{u(p)}, \mathbf{P}_{u(p)})$
11 :	Calcul de $\ N_{fixe}^T\ _2$
12 :	<i>fin tant que</i>
13 :	$\mathbf{R}_{T(p)} = \mathbf{R}_T^{(l)} ; \mathbf{P}_{T(p)} = \mathbf{P}_T^{(l)}$
14 :	Calcul de $\ N_{fixe}^{uT\ l}\ _2$
15 :	<i>fin tant que</i>

TAB. D.I-9 Algorithme de la méthode "découplée"

ii. Méthode de "couplage total" :

Le système est résolu simultanément par rapport aux quatre inconnues $\mathbf{R}_u, \mathbf{P}_u, \mathbf{R}_T, \mathbf{P}_T$ par la méthode de point fixe à directions alternées. Cela mène à la résolution de 4 systèmes linéaires (Eq. (D.I-35), (D.I-37), (D.I-39) et (D.I-41)).

A $l^{\text{ème}}$ sous-itération, la procédure du point fixe est stoppée lorsque le nombre maximal de sous itérations l_{max} est atteint ou le critère suivant est satisfait :

$$\|N_{fixe}^{uT\ l}\|_2 = \max\left(\|\mathbf{R}_u^{(l)}\mathbf{P}_u^{(l)} - \mathbf{R}_u^{(l-1)}\mathbf{P}_u^{(l-1)}\|_2, \|\mathbf{R}_T^{(l)}\mathbf{P}_T^{(l)} - \mathbf{R}_T^{(l-1)}\mathbf{P}_T^{(l-1)}\|_2\right) \leq \varepsilon_{fixe}^{uT} \quad (\text{D.I-45})$$

où ε_{fixe}^{uT} est un paramètre fixé par l'utilisateur.

Le **TAB. D.I-10** résume l'algorithme de cette méthode.

- 1 : ***tant que*** ($l \leq l_{max}$ et $\|N_{fixe}^{uT l}\|_2 > \varepsilon_{fixe}^{uT}$) ***faire***
- 2 : Calcul de $\mathbf{R}_u^{(l)} = U_1(\mathbf{P}_u^{(l-1)}, \mathbf{R}_T^{(l-1)}, \mathbf{P}_T^{(l-1)})$
- 3 : Calcul de $\mathbf{P}_u^{(l)} = U_2(\mathbf{R}_u^{(l)}, \mathbf{R}_T^{(l-1)}, \mathbf{P}_T^{(l-1)})$
- 4 : Calcul de $\mathbf{R}_T^{(l)} = U_3(\mathbf{R}_u^{(l)}, \mathbf{P}_u^{(l)}, \mathbf{P}_T^{(l-1)})$
- 5 : Calcul de $\mathbf{P}_T^{(l)} = U_4(\mathbf{R}_u^{(l)}, \mathbf{P}_u^{(l)}, \mathbf{R}_T^{(l)})$
- 6 : Calcul de $\|N_{fixe}^{uT l}\|_2$
- 7 : ***fin tant que***

TAB. D.I-10 Algorithme de la méthode "couplage total"

Les nouvelles fonctions de base \mathbf{F}_u^{k+1} , \mathbf{H}_u^{k+1} et \mathbf{F}_T^{k+1} , \mathbf{H}_T^{k+1} sont ensuite obtenues en normalisant les vecteurs \mathbf{R}_u , \mathbf{P}_u , \mathbf{R}_T , \mathbf{P}_T par la norme L^2 .

Dans le cadre de cette thèse, c'est la méthode de "couplage total" qui est utilisée.

b) Etape de projection (calcul de coefficients)

Les $k+1$ vecteurs $(\mathbf{F}_u^i ; \mathbf{H}_u^i)$, $(\mathbf{F}_T^i ; \mathbf{H}_T^i)$ pour $i=1, \dots, k+1$ sont maintenant connues, les coefficients α_u^i et α_T^i sont solution de la formulation variationnelle de Galerkin associée à ((**D.I-21**), (**D.I-22**)) avec les champs réels et virtuels suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_i^{k+1} \alpha_u^i \mathbf{F}_u^i \otimes \mathbf{H}_u^i \\ \mathbf{T} &= \sum_i^{k+1} \alpha_T^i \mathbf{F}_T^i \otimes \mathbf{H}_T^i \end{aligned} \tag{D.I-46}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \sum_i^{k+1} (\alpha_u^i)^* \mathbf{F}_u^i \otimes \mathbf{H}_u^i \\ \mathbf{T}^* &= \sum_i^{k+1} (\alpha_T^i)^* \mathbf{F}_T^i \otimes \mathbf{H}_T^i \end{aligned} \tag{D.I-47}$$

Rappelons que, contrairement aux cas des problèmes découplés ou partiellement couplés que l'on a étudiés, le système à résoudre est ici non linéaire.

+ Pour le calcul des coefficients α_u

Le système à résoudre s'écrit :

$$K_u \mathbf{a}_u = \mathbf{V}_u \text{ avec } \mathbf{a}_u^T = \{\alpha_u^1, \dots, \alpha_u^{k+1}\} \quad (\text{D.I-48})$$

où les composants de la matrice K_u et ceux de \mathbf{V}_u s'écrivent:

$$\begin{aligned} \bullet \quad (K_u)_{ij} &= \sum_{p=1}^2 a_u^p \cdot (\mathbf{F}_u^i)^T A_{ux}^p \mathbf{F}_u^j \cdot (\mathbf{H}_u^i)^T A_{ut}^p \mathbf{H}_u^j \quad (1 \leq i, j \leq k+1) \\ \bullet \quad (\mathbf{V}_u)_i &= \sum_{p=1}^{n_{fu}} b_u^p \cdot (\mathbf{F}_u^i)^T \mathbf{B}_{ux}^p \cdot (\mathbf{H}_u^i)^T \mathbf{B}_{ut}^p \\ &+ \sum_{j=1}^{k+1} (3\lambda + 2\mu) \alpha_{TT} \alpha_T^j \cdot \left((\mathbf{F}_u^i)^T \left(\int_{\Omega_x} N_u dN_T^T dx \right) \mathbf{F}_T^j \right) \cdot \left((\mathbf{H}_u^i)^T \left(\int_{\Omega_t} L_u L_T^T dt \right) \mathbf{H}_T^j \right) \\ &(1 \leq i \leq k+1) \end{aligned} \quad (\text{D.I-49})$$

Ce système est non linéaire car $(\mathbf{V}_u)_i$ dépend de $\mathbf{a}_T = \{\alpha_T^1, \dots, \alpha_T^{k+1}\}^T$.

+ Pour le calcul des coefficients \mathbf{a}_T

Le système à résoudre s'écrit :

$$K_T \mathbf{a}_T = \mathbf{V}_T \text{ avec } \mathbf{a}_T^T = \{\alpha_T^1, \dots, \alpha_T^{k+1}\} \quad (\text{D.I-50})$$

où les composants de la matrice K_T et ceux de \mathbf{V}_T s'écrivent:

$$\begin{aligned} \bullet \quad (K_T)_{ij} &= \sum_{p=1}^2 a_T^p \cdot (\mathbf{F}_T^i)^T A_{Tx}^p \mathbf{F}_T^j \cdot (\mathbf{H}_T^i)^T A_{Tt}^p \mathbf{H}_T^j \\ &+ \sum_{q=1}^k (3\lambda + 2\mu) \alpha_{TT} \alpha_u^q \cdot \left((\mathbf{F}_T^i)^T \left(\int_{\Omega_x} N_T (\mathbf{F}_u^q)^T dN_u N_T^T dx \right) \mathbf{F}_T^j \right) \cdot \left((\mathbf{H}_T^i)^T \left(\int_{\Omega_t} L_T (\mathbf{H}_u^q)^T dL_u L_T^T dt \right) \mathbf{H}_T^j \right) \\ &(1 \leq i, j \leq k+1) \\ \bullet \quad (\mathbf{V}_T)_i &= \sum_{p=1}^{n_{Tt}} b_T^p \cdot (\mathbf{F}_T^i)^T \mathbf{B}_{Tx}^p \cdot (\mathbf{H}_T^i)^T \mathbf{B}_{Tt}^p \quad (1 \leq i \leq k+1) \end{aligned} \quad (\text{D.I-51})$$

Ce système est lui aussi non linéaire car $(K_T)_{ij}$ dépend de $\mathbf{a}_u = \{\alpha_u^1, \dots, \alpha_u^{k+1}\}^T$.

La méthode de point fixe à directions alternées est utilisée pour calculer les coefficients α_u^i et α_T^i pour $i = 1, \dots, k+1$:

+ Supposons connu α_T^i , les valeurs de α_u^i est solution de l'équation linéaire (Eq. **(D.I-48)**).

+ Supposons connu α_u^i , les valeurs de α_T^i est solution de l'équation linéaire (Eq. **(D.I-50)**).

Cette procédure est répétée jusqu'à convergence. Considérons la $l^{\text{ème}}$ sous itération, la procédure du point fixe est stoppée lorsque le critère suivant est satisfait :

$$\left\| N_{pro}^{uT l} \right\|_2 = \max \left(\left\| \alpha_u^{(l)} - \alpha_u^{(l-1)} \right\|_2, \left\| \alpha_T^{(l)} - \alpha_T^{(l-1)} \right\|_2 \right) < \varepsilon_{pro}^{uT} \quad (\text{D.I-52})$$

où ε_{pro}^{uT} est un paramètre fixé par l'utilisateur.

c) Etape de calcul du résidu

Le résidu lié à (D.I-29) est défini à partir de :

$$\begin{aligned} \mathbf{Res}_u^{k+1} &= \mathbf{B}_u - \mathbf{A}_u \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n_{Cu}} c_u^i \mathbf{C}_{ux}^i \otimes \mathbf{C}_{ut}^i \\ \mathbf{Res}_T^{k+1} &= \mathbf{B}_T - \mathbf{A}_T \mathbf{T} = \sum_{i=1}^{n_{CT}} c_T^i \mathbf{C}_{Tx}^i \otimes \mathbf{C}_{Tt}^i \end{aligned} \quad (\text{D.I-53})$$

La convergence est déterminée en calculant la norme euclidienne de ces résidus à chaque itération:

$$\begin{aligned} RV_u^{k+1} &= \|\mathbf{Res}_u^{k+1}\|_2 \\ RV_T^{k+1} &= \|\mathbf{Res}_T^{k+1}\|_2 \end{aligned} \quad (\text{D.I-54})$$

La procédure itérative (composée des étapes d'enrichissement et de projection) est stoppée lorsque le taux de réduction de ces deux résidus devient supérieur à un seuil ε_{RV}^{uT} fixé par l'utilisateur, soit le rapport entre deux RV consécutifs de u et T est supérieur à ε_{RV}^{uT} , ce qui s'écrit :

$$\min\left(\frac{RV_u^{k+1}}{RV_u^k}, \frac{RV_T^{k+1}}{RV_T^k}\right) > \varepsilon_{RV}^{uT} \quad (\text{D.I-55})$$

L'algorithme (TAB. D.I-11) résume les différentes étapes de la résolution PGD des équations du problème de thermoviscoélasticité couplé pour lesquelles les inconnues notées \mathbf{u} et \mathbf{T} sont décomposées selon les variables x et t .

1 : $k = 0$

2 : *tant que* ($k \leq k_{max}$ et $\min(\frac{RV_u^{k+1}}{RV_u^k}, \frac{RV_T^{k+1}}{RV_T^k}) \leq \varepsilon_{RV}^{uT}$) *faire*

3 : On pose $\mathbf{u} = \sum_i^k \alpha_u^i \mathbf{F}_u^i \otimes \mathbf{H}_u^i$ et $\mathbf{T} = \sum_i^k \alpha_T^i \mathbf{F}_T^i \otimes \mathbf{H}_T^i$

a) Etape d'enrichissement de la base

4 : *tant que* ($l \leq l_{max}$ et $\|N_{fixe}^{uT l}\|_2 > \varepsilon_{fixe}^{uT}$) *faire*

5 : Calcul de $\mathbf{R}_u^{(l)} = U_1(\mathbf{P}_u^{(l-1)}, \mathbf{R}_T^{(l-1)}, \mathbf{P}_T^{(l-1)})$

6 : Calcul de $\mathbf{P}_u^{(l)} = U_2(\mathbf{R}_u^{(l)}, \mathbf{R}_T^{(l-1)}, \mathbf{P}_T^{(l-1)})$

7 : Calcul de $\mathbf{R}_T^{(l)} = U_3(\mathbf{R}_u^{(l)}, \mathbf{P}_u^{(l)}, \mathbf{P}_T^{(l-1)})$

8 : Calcul de $\mathbf{P}_T^{(l)} = U_4(\mathbf{R}_u^{(l)}, \mathbf{P}_u^{(l)}, \mathbf{R}_T^{(l)})$

9 : Calcul de $\|N_{fixe}^{uT l}\|_2$

10 : *fin tant que*

11 : Normalisation $\mathbf{F}_u^{k+1} = \frac{\mathbf{R}_u}{\|\mathbf{R}_u\|_2}$; $\mathbf{H}_u^{k+1} = \frac{\mathbf{P}_u}{\|\mathbf{P}_u\|_2}$ et $\mathbf{F}_T^{k+1} = \frac{\mathbf{R}_T}{\|\mathbf{R}_T\|_2}$; $\mathbf{H}_T^{k+1} = \frac{\mathbf{P}_T}{\|\mathbf{P}_T\|_2}$

b) Etape de projection

12 : *tant que* ($l \leq l_{max}$ et $\|N_{pro}^{uT l}\|_2 > \varepsilon_{pro}^{uT}$) *faire*

13 : Calcul des coefficients $\{\alpha_u^1, \dots, \alpha_u^{k+1}\}$

14 : Calcul des coefficients $\{\alpha_T^1, \dots, \alpha_T^{k+1}\}$

15 : Calcul de $\|N_{pro}^{uT l}\|_2$

16 : *fin tant que*

c) Etape de calcul du résidu

17 : Calcul des résidus : RV_u^{k+1} et RV_T^{k+1}

18 : $k = k + 1$

19 : *fin tant que*

TAB. D.I-11 Algorithme de la résolution par la PGD pour le problème thermoviscoélastique couplé

D.I.2 Résultats

La PGD est maintenant utilisée pour résoudre ces problèmes multiphysiques. L'influence de la valeur des paramètres de couplage ainsi que celle des temps caractéristiques est discutée par comparaison aux résultats obtenus dans le cas où chacune des physiques est découplée. Le but étant de voir comment la PGD génère des solutions dans ces différents cas de simulation qui, pour certains d'entre eux, n'ont pu être résolus par la méthode des Eléments Finis. Ensuite, la PGD sera évaluée dans le cas où des maillages spécifiques à chaque physique seront considérés.

D.I.2.1 Résultats du problème partiellement couplé diffusothermique

Nous allons présenter dans cette partie les résultats obtenus avec la PGD pour les deux problèmes partiellement couplés suivants :

Problème partiellement couplé 1.

Trouver $c(x, y, t)$ et $T(x, y, t)$ tels que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} - D \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}c}) &= -\frac{dg(t)}{dt} + A_{cT} \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}T}) \\ \rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_T \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}T}) &= f_T \end{aligned} \quad \text{cf. (Eq. (D.I-5))}$$

Problème partiellement couplé 2.

Trouver $c(x, y, t)$ et $T(x, y, t)$ tels que :

$$\begin{aligned} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_T \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}T}) &= f_T + B_{Tc}(\overrightarrow{\operatorname{grad}c})^2 \\ \frac{\partial c}{\partial t} - D \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}c}) &= -\frac{dg(t)}{dt} \end{aligned} \quad \text{cf. (Eq. (D.I-6))}$$

Les deux problèmes sont définis sur le même domaine $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_t = [-\pi; +\pi]^2 \times [0; 10]$. Les conditions initiales et aux bords pour c et T sont nulles.

Rappelons que le problème à résoudre est tel que la concentration est non nulle aux bords et que nous l'avons modifiée pour le résoudre avec la PGD présentée dans le chapitre **B**. La concentration recherchée est la concentration totale notée c^t égale à $c^t(x, y, t) = c(x, y, t) + g(t)$.

Pour les simulations, les paramètres ρ , C , λ_T , D sont pris égaux à 1.

La source de la chaleur est :

$$\begin{cases} f_T(x, y, t) = 8t & t \in [0; 1] \\ f_T(x, y, t) = 8 & t \in [1; 10] \end{cases} \quad \text{(D.I-56)}$$

La condition aux bords de la concentration est :

$$\begin{cases} g(t) = 3t & t \in [0; 6] \\ g(t) = 18 & t \in [6; 10] \end{cases} \quad \text{(D.I-57)}$$

Cela se traduit dans l'équation de diffusion par l'ajout du terme dit "source de concentration":

$$\begin{cases} -\frac{dg(t)}{dt} = -3 & t \in [0; 6] \\ -\frac{dg(t)}{dt} = 0 & t \in [6; 10] \end{cases} \quad (\text{D.I-58})$$

Les discrétisations sont choisies régulières en espace et en temps : 101 points pour x , 101 points pour y et 10 001 points pour t .

Les paramètres de la résolution PGD sont les suivants (**TAB. B.I-4**):

- le critère d'arrêt pour la méthode de point fixe est $\varepsilon_{\text{fixe}} = 10^{-4}$ ou 100 itérations pour le critère d'arrêt pour l'étape d'enrichissement,
- $\varepsilon_{RV} = 95\%$ pour le critère d'arrêt concernant le nombre de modes.

Ces mêmes paramètres sont utilisés pour les deux physiques.

Résultats du problème partiellement couplé 1 ($T - c(T)$)

Pour ce problème, la température est résolue en premier puis sa solution est prise en compte pour la résolution du problème de diffusion.

Présentons d'abord la solution obtenue dans le cas où les deux physiques sont complètement découplés ($A_{cT} = 0$).

La solution découplée en température obtenue avec la PGD contient 5 modes. La **FIG. D.I-1** montre la solution en espace à l'instant final $t=10$ (à gauche) et celle en temps pour le point $(0,0)$ en espace (à droite). En espace, la température maximale est obtenue au centre en $(0,0)$ et diminue au fur et à mesure pour s'annuler aux bords. En temps, la température augmente tout au long de la simulation. Le régime permanent n'est pas atteint au bout de 10 (s). La solution en température est donc transitoire sur l'ensemble du domaine considéré.

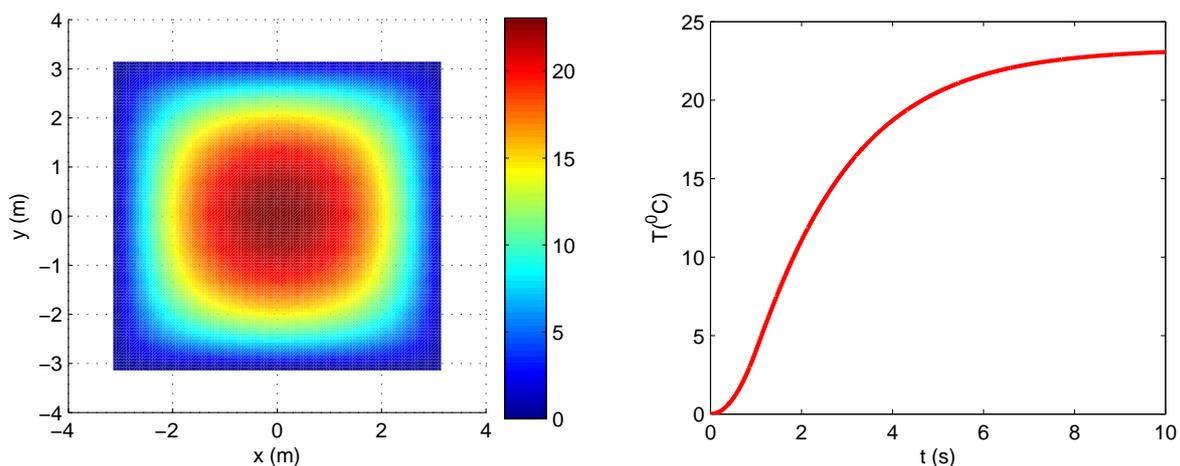


FIG. D.I-1 Cas découplé - Evolution de la température en espace à $t = 10$ (gauche) et en temps au point $(x,y)=(0,0)$ (droite)

La solution découplée en concentration contient elle aussi 5 modes. La **FIG. D.I-2** montre la solution de la concentration totale en espace à l'instant final $t=10$ (s) (à gauche) et celle en temps pour le point $(0,0)$ en espace (à droite). La fonction c^t est non nulle aux bords et est égale à la valeur de la fonction $g(t)$ qui vaut 18 au temps final. Ensuite, elle diminue et atteint sa valeur minimale au centre.

En temps, c^t augmente tout au long de la simulation. La solution en concentration est donc transitoire sur l'ensemble du domaine considéré.

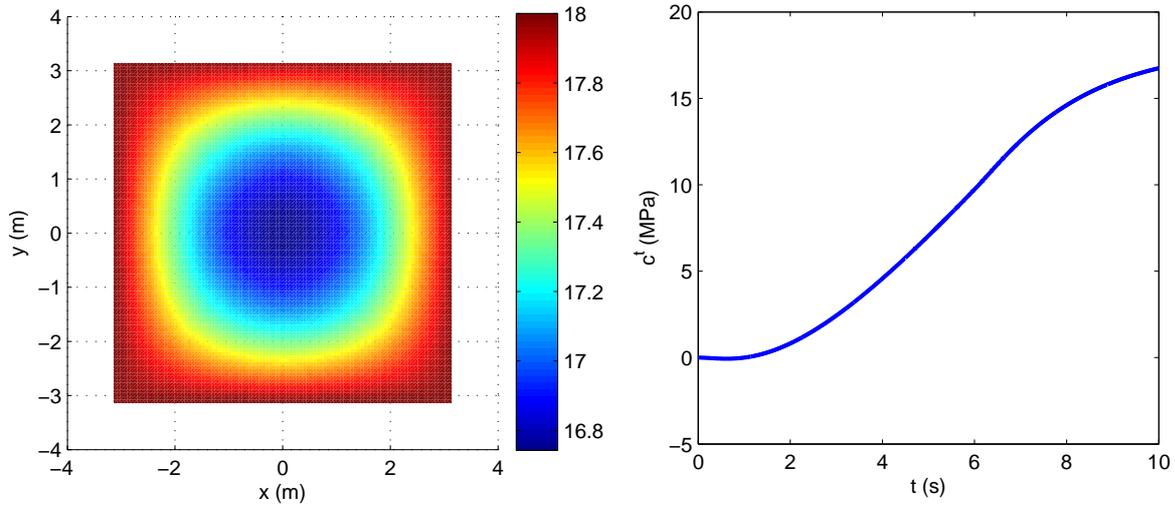


FIG. D.I-2 Cas découplé - Evolution de la concentration totale en espace à $t=10$ (gauche) et en temps au point $(x,y)=(0,0)$ (droite)

Avec ce choix de paramètres, les deux physiques sont en régime transitoire dans le domaine considéré et présente un seul transitoire.

Passons maintenant au cas couplé. Dans ce cas, la solution de la température en découplé est utilisée dans l'équation de diffusion. Nous montrons donc ici les résultats obtenus pour la concentration.

• **Influence du terme de couplage**

Pour étudier l'influence du terme de couplage sur la solution, nous considérons différentes valeurs de A_{cT} . Comme la solution est symétrique en espace, l'évolution de la concentration est représentée uniquement selon une direction. La FIG. D.I-3 montre l'évolution de c^t suivant la direction x (à gauche) et suivant le temps (à droite) selon les valeurs du coefficient A_{cT} .

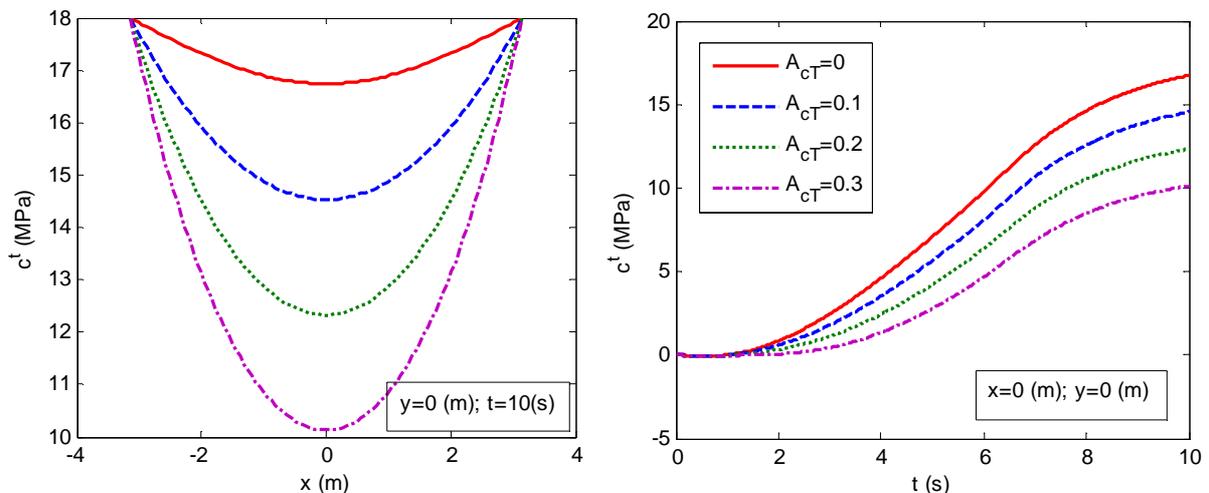


FIG. D.I-3 Evolution de la concentration totale suivant la direction x ($y=0$, $t=10$) (gauche) et suivant le temps ($x=0$, $y=0$) (droite) pour différentes valeurs du coefficient A_{cT}

On constate que lorsque A_{cT} augmente, l'amplitude de concentration diminue. Ceci est lié au fait que le terme de couplage $A_{cT} \overrightarrow{\text{div}}(\text{grad}T)$ est toujours négatif, compte tenu de l'évolution spatiale de la température. D'un point de vue physique, lorsque le flux de chaleur augmente, les molécules se déplacent plus rapidement et par suite la concentration diminue. La forme de la solution n'étant pas fortement modifiée, la solution contient 5 modes pour l'ensemble des valeurs de A_{cT} testées.

Pour la suite des simulations, A_{cT} est fixé à 0.2 afin que la variation d'amplitude lié au couplage n'excède pas 25%. On définit le taux du changement de couplage :

$$\gamma_c = \frac{|c_{\max}^{\text{couplé}} - c_{\max}^{\text{découplé}}|}{|c_{\max}^{\text{découplé}}|} < 25\% \quad (\text{D.I-59})$$

où $c_{\max}^{\text{découplé}}$ et $c_{\max}^{\text{couplé}}$ sont la valeur maximale de c^t dans le cas découplé et couplé. Le choix de la valeur de 25% est un choix arbitraire pour que le terme couplé ne devienne pas prépondérant, ce qui ne serait plus physique.

- **Influence du temps caractéristique**

L'équation de diffusion fait apparaître un temps caractéristique lié au rapport $\frac{1}{D}$. Compte tenu que le domaine est fixé, nous nous permettons de noter ce rapport τ_c . La FIG. D.I-4 représente les résultats de l'évolution de c^t pour un point en espace pour différentes valeurs de τ_c . Les solutions obtenues dans le cas découplé sont aussi notées.

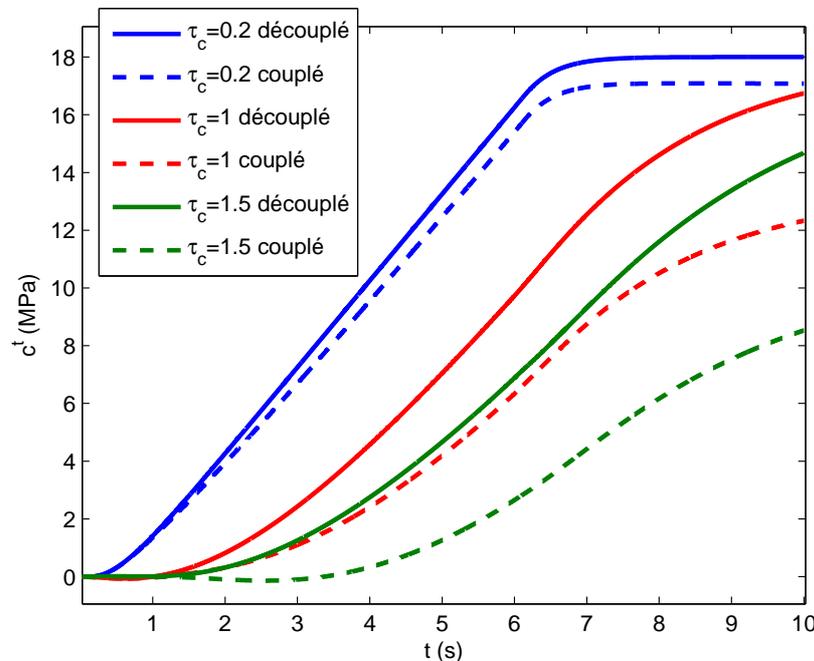


FIG. D.I-4 Cas découplé et couplé ($A_{cT} = 0.2$) - Evolution de la concentration totale au point $(x,y)=(0,0)$ en fonction du temps pour différentes valeurs de τ_c

Lorsque le temps caractéristique est très petit, la solution en concentration est quasi-identique à la condition imposée aux bords, cela revient à considérer que la diffusion est quasi-instantanée. La réponse transitoire de la concentration est donc la même que celle de la condition aux bords. Par contre, lorsque le temps caractéristique augmente, la diffusion est défavorable. Ainsi la concentration évolue plus lentement et donc son transitoire augmente. Notons que la PGD permet de prédire l'ensemble de ces solutions avec un nombre de modes variant de 6 à 9.

• **Influence des maillages spécifiques à chaque physique**

Nous allons maintenant étudier l'impact du maillage de T sur la solution c en considérant un maillage très fin (10 001 points en temps) pour c . La FIG. D.I-5 (à gauche) montre la solution T obtenue pour trois maillages temporels différents (un maillage irrégulier de 3 points qui permet de décrire correctement la source de la chaleur) et deux maillages réguliers ayant 11 et 10001 points. La solution c^t correspondante est illustrée FIG. D.I-5 (à droite). La solution en concentration est impactée par les maillages de T . L'erreur pour les différents maillages est moins importante pour la concentration que pour la température, car l'impact de la température sur la concentration est uniquement dû au terme de couplage. Néanmoins, on voit la trace de l'erreur de précision de la température sur la solution de concentration. Cette remarque est similaire à celle dans le cas où on considèrerait une seule physique et que la source était mal prédite à cause du maillage "pauvre" considéré.

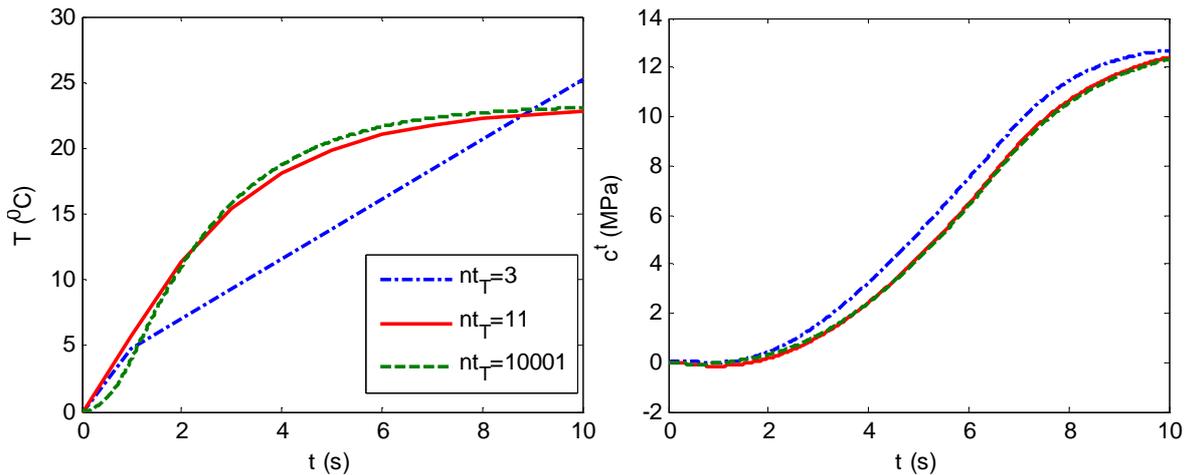


FIG. D.I-5 Evolution de la température (gauche) et de la concentration totale (droite) pour le point $(x,y)=(0,0)$ pour différents maillages temporels pour la température.

Dans le cas des problèmes couplés, il est nécessaire que les deux physiques soient correctement prédites et donc qu'un maillage adapté soit utilisé.

Résultats du problème partiellement couplé 2 ($c - T(c)$)

Nous allons mener ici la même étude que précédemment. Pour ce problème, la concentration est résolue en premier et sa solution est prise en compte pour la résolution de la température. Notons que l'équation de diffusion et de thermique sont de même nature. Néanmoins, le terme de couplage est différent entre les deux problèmes et c'est son impact que nous allons étudier.

• Influence du terme de couplage

Pour étudier l'influence du terme de couplage, nous avons choisi de considérer différentes valeurs pour le coefficient B_{Tc} . La **FIG. D.I-6** montre l'évolution de la température suivant la direction x (à gauche) et suivant le temps (à droite) pour ces différentes valeurs.

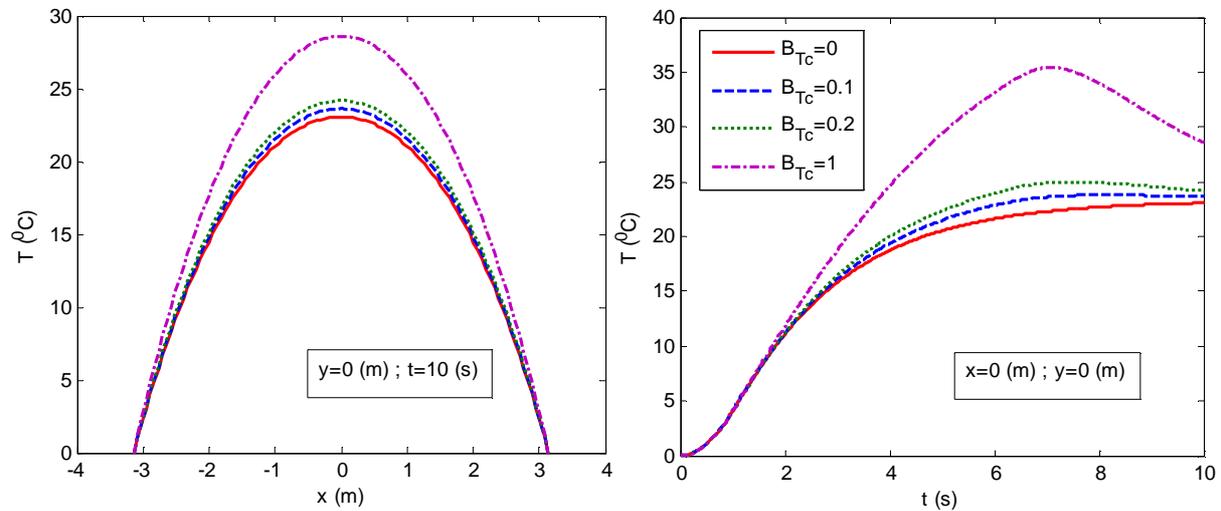


FIG. D.I-6 Evolution de la température suivant la direction x ($y=0$, $t=10$) et suivant le temps ($x=0$, $y=0$) pour différentes valeurs du coefficient B_{Tc}

Lorsque B_{Tc} augmente, le terme de $B_{Tc}(\overrightarrow{grad}c)^2$ augmente et ainsi la température augmente. D'un point de vue physique, le flux de matière induit un déplacement des molécules. Il y a donc une dissipation thermique qui se produit quelque soit le sens du flux (dans ce cas, le flux de matière se dirige vers le centre en espace), cela entraîne un échauffement du matériau par dissipation et par suite une élévation de température. Lorsque le coefficient est très élevé ($B_{Tc}=1$), on voit nettement apparaître un transitoire à $t=6$ (s) qui est la trace de celui de la concentration.

Lorsque B_{Tc} augmente, la forme de la solution temporelle étant modifiée, la solution PGD de la température est obtenue avec 5 modes, 9 modes et 14 modes pour B_{Tc} égal respectivement à 0.1, 0.2 et 1.

Pour la suite des simulations, le coefficient B_{Tc} est fixé à 0.2 pour avoir un taux du changement de couplage γ_T (cf. **(D.I-59)**) inférieur à 25%.

• Influence du temps caractéristique

L'équation de thermique fait apparaître un temps caractéristique lié au rapport $\frac{\rho C}{\lambda_T}$. Compte

tenu que le domaine est fixé, nous noterons ce rapport τ_T . La **FIG. D.I-7** représente les résultats de l'évolution de la température pour un point en espace pour différentes valeurs de τ_T . Elles sont comparées aux solutions obtenues dans le cas sans couplage. Comme nous avons précisé dans le **chapitre B**, afin de faire varier ce rapport sans modifier pour autant l'amplitude de la source, nous avons choisi de modifier uniquement la valeur de ρC . La valeur de λ_T reste égale à 1.

Lorsque τ_T augmente, la température évolue plus lentement. Sa zone transitoire augmente. Les différences entre les solutions couplées et découplées sont beaucoup plus marquées lorsque τ_T diminue. Pour τ_T égal à 0.2, on voit apparaître le transitoire de c (changement à $t=6$ (s)) lié à sa

source. La PGD permet de prédire l'ensemble de ces solutions avec un nombre de modes variant de 5 à 9 modes.

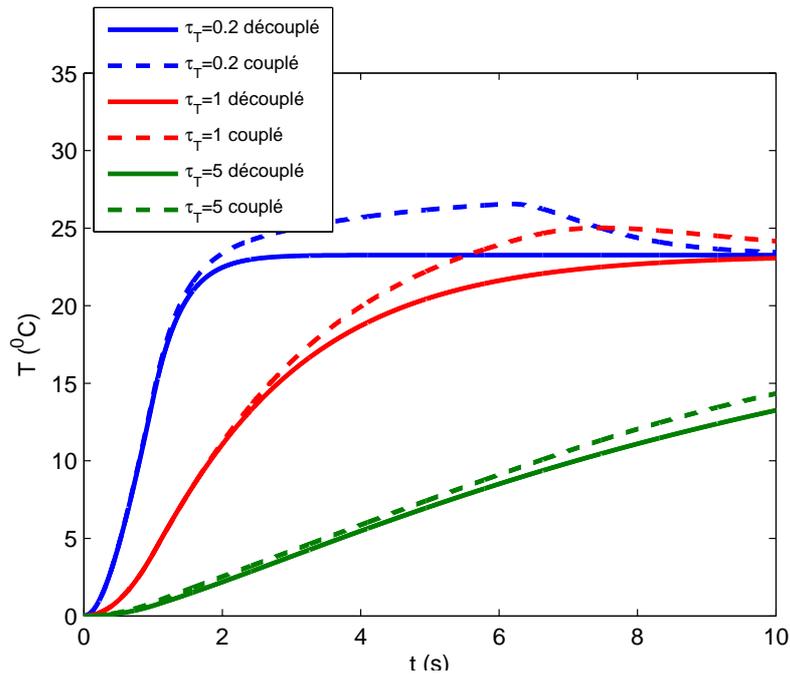


FIG. D.I-7 Cas couplé et cas découplé ($B_{T_c} = 0.2$)- Evolution de la température au point $(x,y)=(0,0)$ pour différentes valeurs de τ_T

• Influence des maillages spécifiques à chaque physique

Nous allons maintenant étudier l'impact du maillage temporel de c sur la solution T considérant un maillage très fin (10 001 points en temps) pour T . La FIG. D.I-8 (à gauche) montre la solution de la concentration obtenue avec trois maillages temporels différents (un maillage irrégulier de 3 points qui permet de décrire correctement la source de la concentration et deux maillages réguliers ayant 11 et 10001 points). La FIG. D.I-8 (à droite) montre la solution de T correspondante. La solution en concentration est impactée dans une moindre mesure par les erreurs sur la solution de T . Cet impact étant d'autant plus marqué que les effets du couplage le sont aussi.

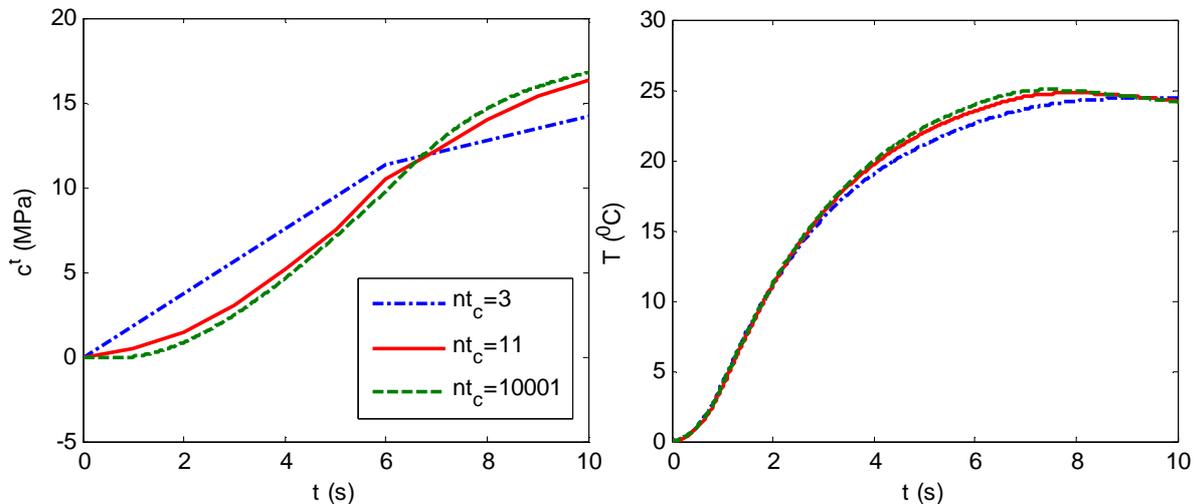


FIG. D.I-8 Evolution de la concentration totale (gauche) et de la température (droite) au point $(x,y)=(0,0)$ pour différents maillages temporels pour la concentration

Nous venons de voir que la PGD permet de résoudre des problèmes multiphysiques partiellement couplés pour différentes valeurs des coefficients de couplage et différents temps caractéristiques. Nous avons vu aussi que les erreurs liées au maillage peuvent se répercuter à travers le terme de couplage. Le maillage des deux physiques doit être adapté. Néanmoins, dans les cas exposés ci-dessus, l'influence du terme couplé n'était pas très marquée dans la mesure où les deux solutions étaient relativement semblables.

Autre cas test / problème partiellement couplé 1 ($T - c(T)$)

Revenons sur le problème partiellement couplé 1 ($T - c(T)$). Considérons pour l'équation de la thermique la source bimodale étudiée dans le **chapitre B (B.I.2.1)**. Rappelons que dans ce cas, la température, qui est obtenue avec deux modes, présente deux zones transitoires qui ne sont pas visibles sur un maillage grossier comme on le voit sur la figure de gauche ci-après.

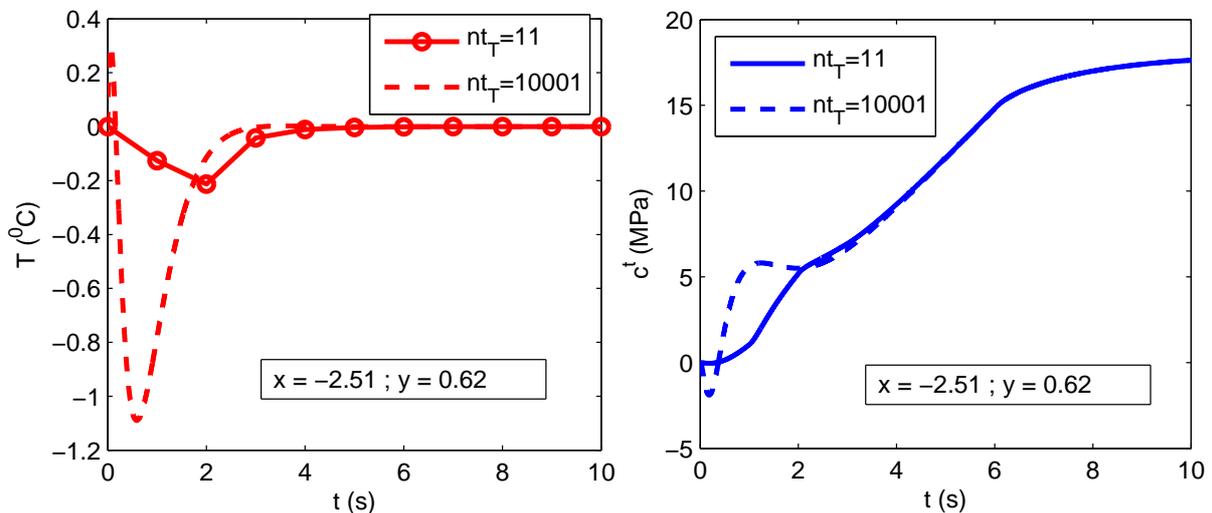


FIG. D.I-9 Evolution de la température (à gauche) et de la concentration (à droite) en fonction du temps pour le point $(x,y)=(-2.51,0.62)$

La **FIG. D.I-9** (à droite) montre la solution de la concentration totale correspondante.

L'apparition des zones transitoires sur T impacte de façon importante la solution de la concentration puisque de nouvelles zones transitoires apparaissent. Comparé au cas précédent (**FIG. D.I-5**), les erreurs sur la température ont cette fois-ci un effet notable sur la solution en concentration.

Analysons en détail le cas où la concentration est correctement prédite ($nt_c = nt_T = 10001$). La **FIG. D.I-10** (à gauche) montre l'évolution du résidu variationnel en fonction du nombre de modes. Des chutes brutales de ce résidu sont observées pour 3 et 6 modes. Après 6 modes, le résidu n'évolue plus beaucoup. Pour comprendre cette chute, la solution de la concentration reconstruite pour 1, 3 et 6 modes est représentée **FIG. D.I-10** (à droite) ainsi que la solution découplée. Avec 1 mode, la solution est proche de celle obtenue dans le cas découplé. Avec 3 modes, une première zone transitoire due au couplage est captée. Ensuite, il faudra 6 modes pour que la deuxième zone soit captée.

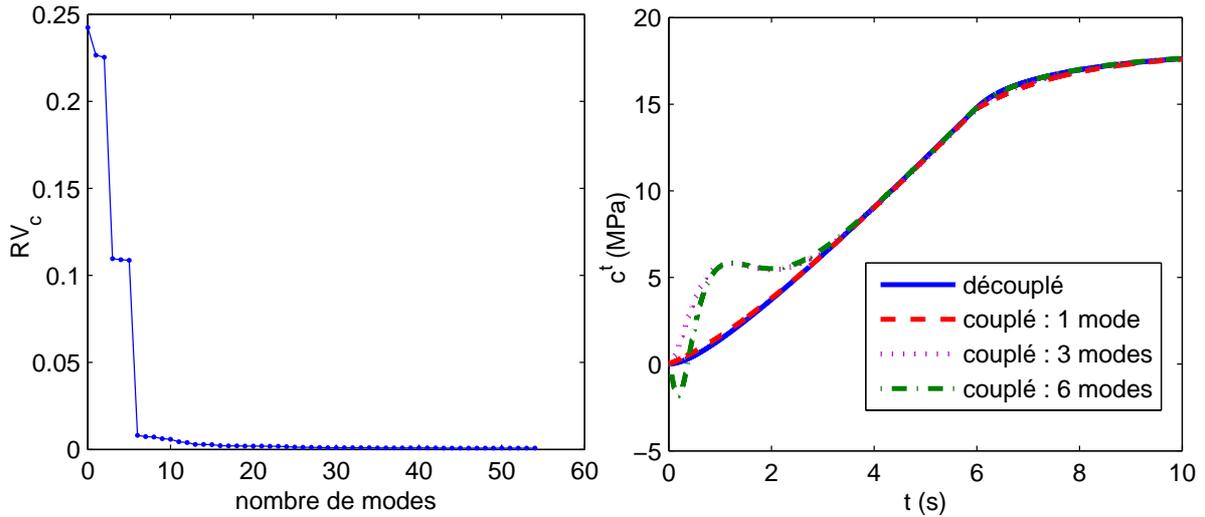


FIG. D.I-10 Cas couplé. Evolution en fonction du nombre de modes du résidu (gauche) et de la concentration totale en fonction du temps au point $(x,y)=(-2.51,0.68)$ (droite). Comparaison avec le cas découplé

Les 7 premiers modes temporels obtenus pour la concentration sont représentés **FIG. D.I-11** et les coefficients associés α_c sont donnés **TAB. D.I-12**. Comme on pouvait s'y attendre, le 3^{ème} et 6^{ème} présente des pics au niveau des transitoires. Les chutes dans la forme des modes obtenus à $t = 6$ (s) transcrivent l'effet de la concentration imposée aux bords. Au niveau des coefficients α_c , cela se traduit par une valeur non négligeable lorsque les transitoires sont captés.

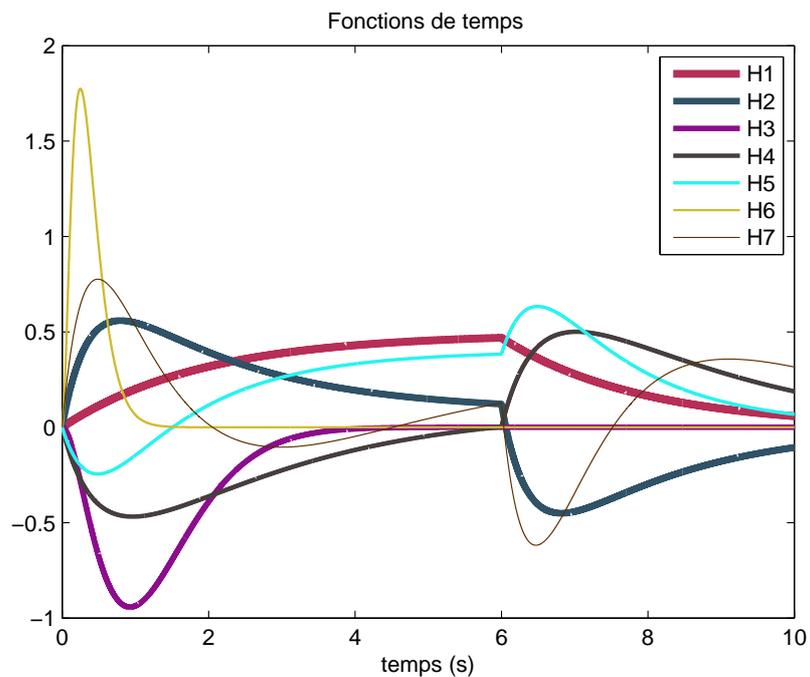


FIG. D.I-11 7 premiers modes temporels pour la concentration

Nombre de modes PGD	1	2	3	4	5	6	7
Vecteur de coefficients α_c	62.5624	62.8377 2.5541	62.8377 2.5541 41.6315	61.5220 2.4063 41.6315 2.7826	61.6205 2.4484 41.6315 2.6034 0.5582	61.6205 2.4484 41.6315 2.6034 0.5582 5.9012	61.7824 2.3950 41.6315 2.5087 0.5609 5.9012 0.3770

 TAB. D.I-12 Valeurs des coefficients α_c en fonction du nombre de modes PGD

Bilan PGD / équations de thermodiffusion partiellement couplées

Dans cette partie, nous avons montré que la PGD permet de prédire la réponse d'un problème partiellement couplé. La méthode est validée dans différentes situations où le couplage ne présente pas les mêmes effets sur la solution cherchée. Des termes couplés de deux natures différentes ont été envisagés même si leur prise en compte dans la PGD était identique (à travers le second membre \mathbf{B}). Notons que dans le cas où le terme couplé est au carré, le nombre de termes séparés dans la source est beaucoup plus élevé. Néanmoins, comme ce nombre de terme pour décrire la température était limité (9 au maximum), cela n'a pas fait exploser le temps de calcul des simulations.

Il paraît important de rappeler ici que notre objectif premier n'est pas d'optimiser le temps de calcul des simulations mais plutôt de prédire des solutions de problèmes multiphysiques couplés pour lesquelles la méthode des éléments finis pourraient s'avérer en difficulté et c'est d'ailleurs un de ces exemples que nous allons traiter dans le cas du problème fortement couplé thermoviscoélastique.

De plus, nous avons vu que le terme de couplage a une influence sur la zone transitoire de la physique couplée et que la PGD permet dans le cas où les maillages sont adaptées de capter au fur et à mesure les transitoires en enrichissant les fonctions de base.

D.I.2.2 Résultats du problème fortement couplé thermoviscoélastique

Nous allons présenter dans cette partie les résultats obtenus avec la PGD pour le problème unidimensionnel fortement couplé suivant :

Problème fortement couplé.

Trouver $u(x, t)$ et $T(x, t)$ tels que :

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda_v + 2\mu_v) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = -\rho f_u + (3\lambda + 2\mu) \alpha_{TT} \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{cf. (Eq. (D.I-21))}$$

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (3\lambda + 2\mu) \alpha_{TT} T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = f_T \quad \text{cf. (Eq. (D.I-22))}$$

Le problème est défini sur le domaine $\Omega = \Omega_x \times \Omega_t = [0; 10] \times [0; 10]$. Les conditions initiales et aux bords pour u et T sont nulles.

Pour les simulations, les valeurs des paramètres sont reportées **TAB. D.I-13**.

λ	μ	λ_v	μ_v	C	λ_T	ρ	f_u	f_T
1	1	5	5	0.05	1	1	0.7	0.07

TAB. D.I-13 Paramètres de simulation

Pour simplifier, le chargement mécanique est supposé réparti uniformément et la source de chaleur est homogène.

Rappelons que ces équations font apparaître deux temps caractéristiques, l'un lié au rapport $\frac{(\lambda_v + 2\mu_v)}{(\lambda + 2\mu)}$ (noté τ_u) et un lié au rapport $\frac{\rho C}{\lambda_T}$ (noté τ_T). Pour ces valeurs de paramètres, on a τ_u égal à 5 et τ_T égal à 0.05.

Les discrétisations sont choisies régulières en espace et en temps : 11 points en espace et 10 001 points en temps.

Les paramètres de la résolution PGD sont les suivants (cf. **TAB. D.I-11**):

- le critère d'arrêt pour la méthode de point fixe dans l'étape d'enrichissement est $\varepsilon_{fixe}^{uT} = 10^{-4}$ ou 100 itérations,
- le critère d'arrêt pour concernant le nombre de modes est $\varepsilon_{RV}^{uT} = 95\%$ (Eq. **(D.I-55)**),
- le critère d'arrêt pour la méthode de point fixe dans l'étape de projection est $\varepsilon_{pro}^{uT} = 10^{-3}$ (Eq. **(D.I-52)**).

Comparaison de la solution PGD à la solution Eléments Finis AbaqusTM

Pour valider l'implémentation d'un cas fortement couplé, la solution PGD est comparée à la solution obtenue avec la méthode des Eléments Finis, réalisée à l'aide du code de calcul AbaqusTM Standard. Les couplages ainsi que la loi de comportement viscoélastique ont été implémentés en imbriquant un sous programme utilisateur HETVAL avec le sous programme UMAT. Ce

développement s’est avéré nécessaire car AbaqusTM n’utilise pas tout à fait la même loi viscoélastique et ne prend pas en compte tous les couplages du problème ((D.I-21) - (D.I-22)). Pour que les résultats soient comparables, les conditions aux limites ont été choisies pour avoir uniquement une déformation longitudinale dans la barre et l’élément fini couplé thermique-déplacement C3D8T (linéaire en u et T) est utilisé. Le maillage pour la résolution Eléments Finis est le même que celui utilisé pour la résolution PGD.

Présentons tout d’abord la solution du problème découplé ($\alpha_{TT} = 0$). La solution PGD est obtenue avec 1 mode pour u et 10 modes pour T . La FIG. D.I-12 montre la solution du déplacement (à gauche) et la carte d’écart entre les solutions PGD et MEF (à droite) en fonction de l’espace et du temps. L’écart est très petit ce qui signifie que les solutions obtenues avec la PGD et la MEF se superposent. La FIG. D.I-13 montre la solution de la température (à gauche) et la carte d’écart entre les solutions PGD et MEF (à droite) en fonction de l’espace et du temps. L’ordre de grandeur de l’écart est suffisamment petit (10^{-3}). Les valeurs les plus élevées sont obtenues dans la zone $t=[0 ; 3]$.

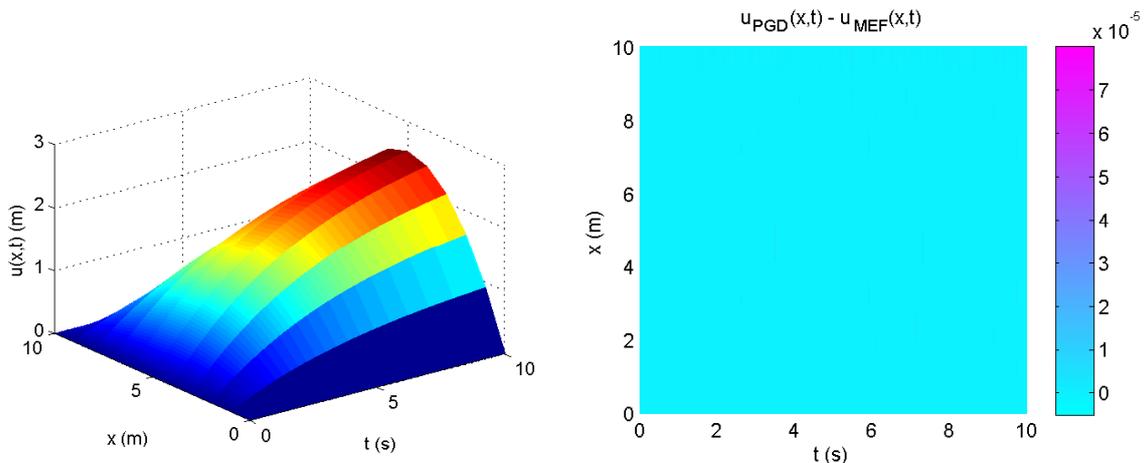


FIG. D.I-12 Solution PGD du déplacement (gauche) et carte d’écart entre la solution PGD et la solution MEF (droite) en espace et en temps

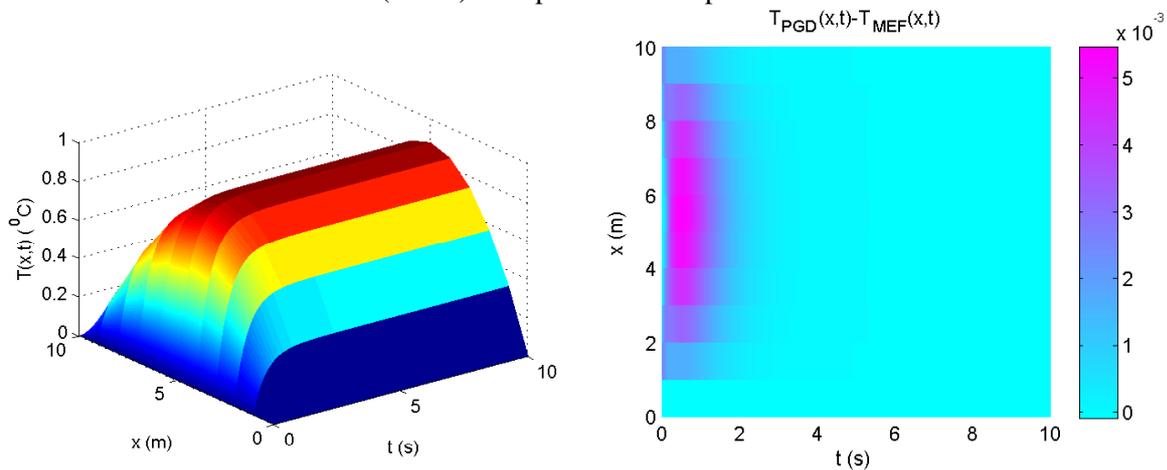


FIG. D.I-13 Solution PGD de la température (gauche) et carte d’écart entre la solution PGD et MEF (droite) en espace et en temps

Notons qu’avec ce jeu de paramètres, le transitoire de T est différent de celui de u puisque T atteint son régime permanent après 3 secondes alors que u est encore dans le régime transitoire au bout de 10s.

Comparons maintenant les résultats obtenus dans le cas couplé où le coefficient de couplage α_{TT} est pris égal à 0.1. La solution PGD est obtenue avec 8 modes (même nombre de modes pour u

et T car résolution totalement couplée). La FIG. D.I-14 représente la carte d'écart en espace et en temps entre les solutions PGD et MEF du déplacement (à gauche) et de la température (à droite). Les résultats obtenus par la MEF et la PGD sont comparables car l'écart est au plus de $5 \cdot 10^{-2}$. Pour u , l'écart est très petit à l'instant final $t=10$ et est le plus élevé dans la zone $t=[0 ; 4]$. Pour T , l'écart est localisé dans la zone transitoire $t=[0 ; 3]$.

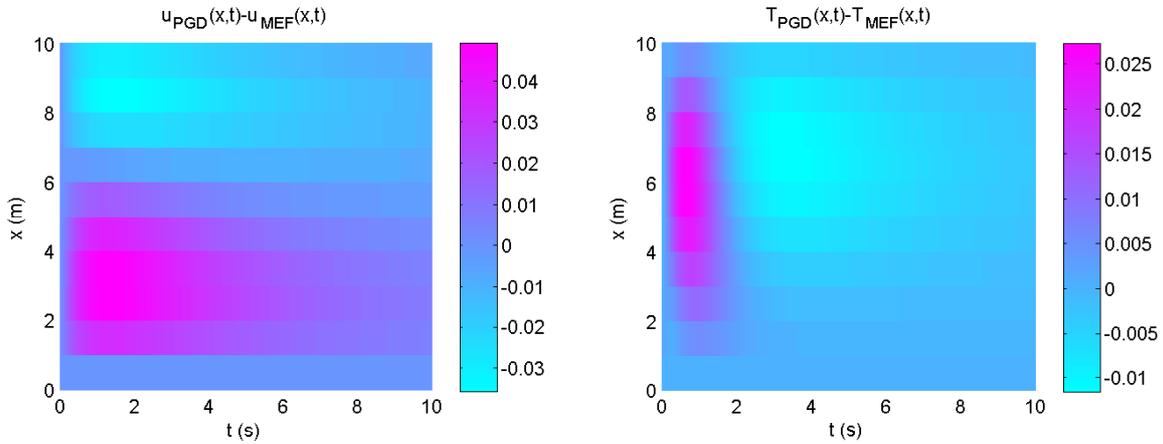


FIG. D.I-14 Carte d'écart en espace et en temps entre les solutions PGD et MEF du déplacement (à gauche) et de la température (à droite)

L'écart entre les solutions PGD et MEF est sûrement lié au schéma d'intégration temporelle utilisé qui n'est pas le même ou encore au critère d'arrêt de la méthode.

Maintenant que la solution PGD est validée par comparaison à la solution Eléments Finis, étudions l'influence des paramètres suivants sur la solution PGD : le coefficient du terme couplé, le temps caractéristique et des maillages spécifiques de chaque physique.

- **Influence du terme de couplage**

Pour étudier l'influence du terme de couplage sur la solution, nous considérons différentes valeurs du coefficient α_{TT} . La FIG. D.I-15 et la FIG. D.I-16 montre l'évolution du déplacement et de la température en fonction de l'espace pour le temps final (à gauche) et du temps pour un point en espace (à droite) pour trois valeurs différentes de α_{TT} .

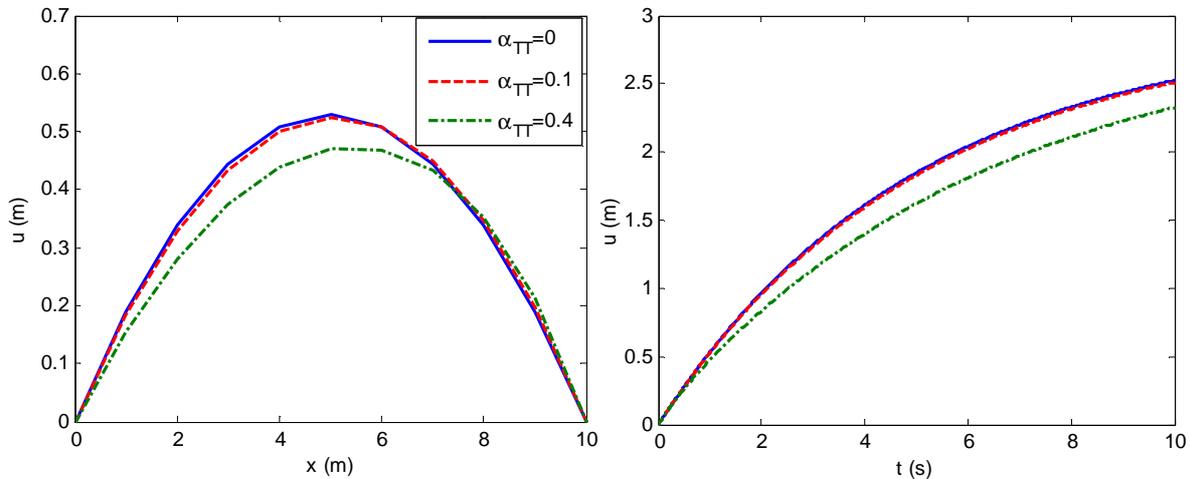


FIG. D.I-15 Evolution du déplacement en fonction de l'espace (à gauche) à $t=10$ et en fonction du temps (à droite) à $x=5$ pour différentes valeurs de α_{TT}

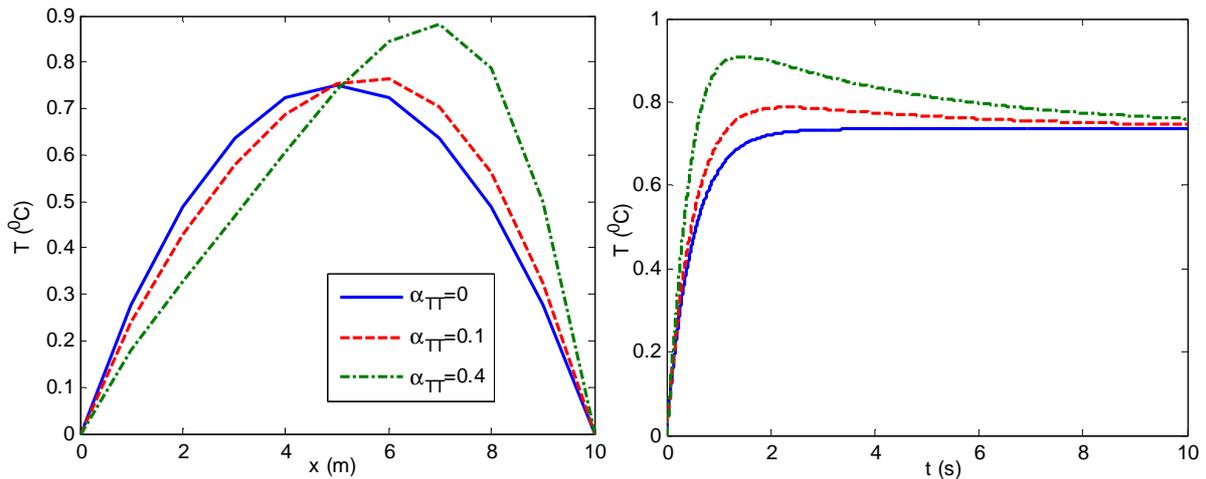


FIG. D.I-16 Evolution de la température en fonction de l’espace (à gauche) à $t=10$ et en fonction du temps (à droite) à $x=7$ pour différentes valeurs de α_{TT}

L’effet du couplage est plus notable lorsque α_{TT} augmente. Pour l’espace, cet effet est moins visible sur la solution en déplacement par rapport à celle de la température. Le terme de couplage tend à rendre la solution dissymétrique. En temps, l’influence du couplage est beaucoup plus marquée sur T . Quand α_{TT} augmente, la zone transitoire de T augmente. La solution PGD est obtenue avec plus de modes lorsque le coefficient α_{TT} augmente (8 modes pour 0.1 et 13 modes pour 0.4).

Par la suite des simulations, α_{TT} est fixé à 0.4 afin de limiter l’impact du couplage sur les solutions. La FIG. D.I-17 montre la solution en déplacement (à gauche) et en température (à droite) pour cette valeur du coefficient de couplage.

D’un point de vue physique, le chargement uniformément réparti imposé à la barre mène à un état de traction pour x dans l’intervalle $[0 ; 5]$ et un état de compression pour x dans l’intervalle $[5 ; 10]$. Ainsi dans l’intervalle $[0 ; 5]$, le matériau se refroidit ce qui correspond à une baisse de la température et s’échauffe sur x dans $[5 ; 10]$ ce qui correspond à une hausse de la température.

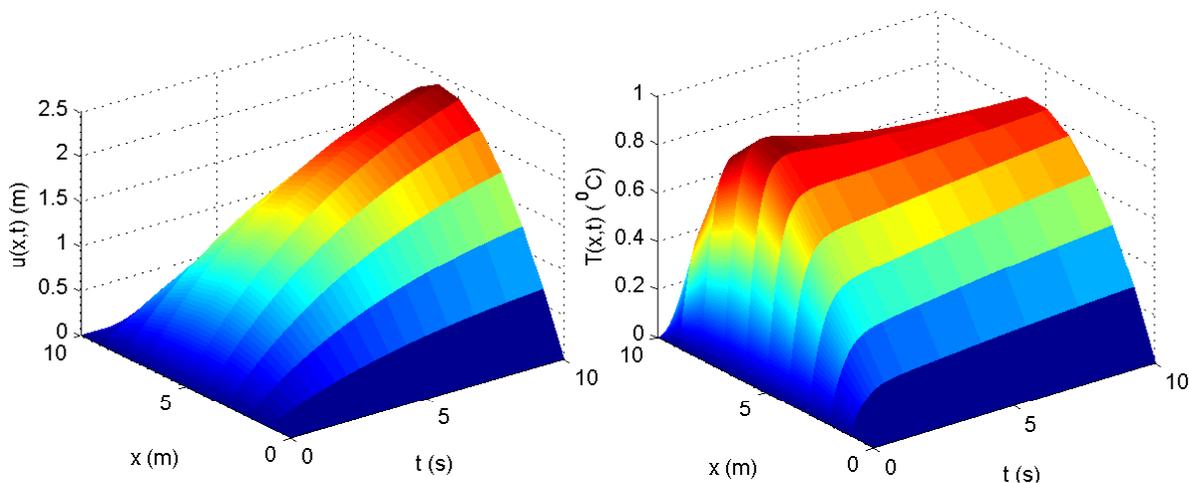


FIG. D.I-17 Solution PGD couplée. Déplacement (à gauche) et température (à droite) en fonction du temps et de l’espace pour $\alpha_{TT} = 0.4$

La **FIG. D.I-18** illustre l'évolution du résidu RV en fonction du nombre de modes pour le déplacement (à gauche) et la température (à droite). Les résidus diminuent au cours des enrichissements. Le résidu du déplacement décroît de manière plus rapide que celui de la température. Ceci s'explique par le fait que l'effet du couplage est plus important sur T que sur u .

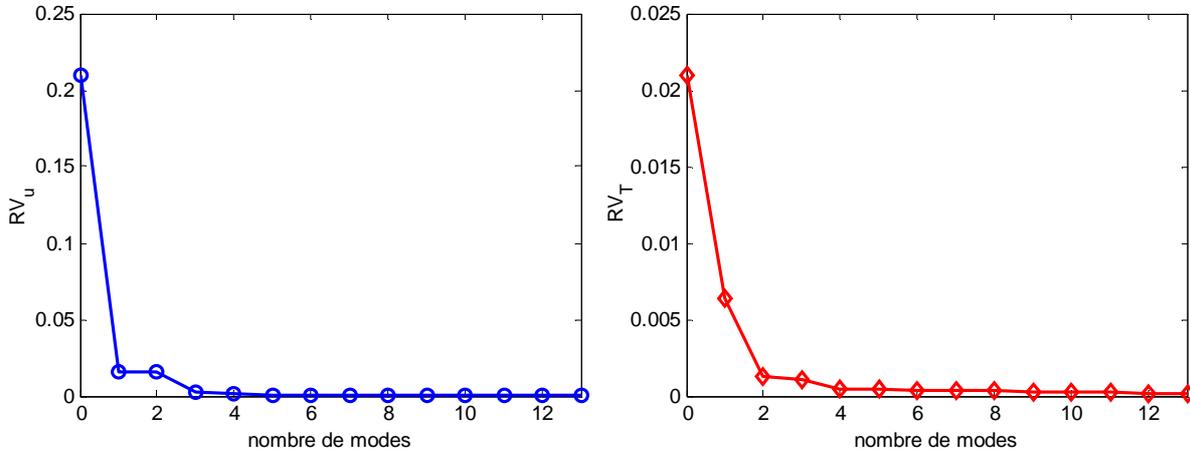


FIG. D.I-18 Evolution du résidu pour le déplacement (à gauche) et la température (à droite) en fonction du nombre de modes pour $\alpha_{TT} = 0.4$

Remarque. Pour une valeur de α_{TT} supérieure à 0.4, la simulation PGD ne converge pas. La non convergence est liée au terme $T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$ dans l'équation de la thermique ((D.I-22)). Si on envisage ce terme comme un terme source, on obtient le même effet que celui de la source en $+T^2$ dans l'équation de la thermique (cf. C.II.2.2). En effet, ce terme crée un système qui s'autoalimente et fait exploser la valeur du terme source. Il est donc envisageable que la solution d'un telle système ne puisse être obtenue que pour certains valeurs du paramètre α_{TT} . C'est ce que nous allons maintenant illustrer à l'aide d'un exemple particulier en utilisant l'approche couplée MAN-PGD (Chapitre C) pour déterminer le domaine de validité de α_{TT} .

Couplage MAN-PGD pour déterminer la valeur de α_{TT} limite

Pour simplifier, considérons le problème de la chaleur (Eq. (D.I-22)) en supposant le terme couplé $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$ constant et égale à -0.2. En considérant les paramètres donnés TAB. D.I-13, l'équation de la chaleur à résoudre s'écrit de la manière simplifiée suivante:

$$0.05 \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \alpha_{TT} T + 0.07 \quad (\text{D.I-60})$$

Pour déterminer la limite de α_{TT} , on pose $\phi = \alpha_{TT}$. Le système s'écrit donc :

$$0.05 \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \phi T + 0.07 \quad (\text{D.I-61})$$

Ce système est ensuite résolu par le couplage MAN-PGD présenté chapitre C. Notons qu'au contraire du cas avec T^2 , ce système est linéaire. Rappelons que notre but ici est de déterminer la limite de ϕ (ou α_{TT}) et non de résoudre un problème non linéaire.

Le problème est défini sur le domaine $\Omega = \Omega_x \times \Omega_t = [0;10] \times [0;10]$ avec un maillage de 101 points en espace et 1001 point en temps.

Appliquons successivement la technique de continuation (cf. **C.I.2.3**) pour déterminer la branche complète de la solution (T, ϕ) .

La **FIG. D.I-9** montre l'évolution de la température au point $(x=5, t=10)$ en fonction de ϕ obtenue avec 15 ordres de la MAN et 8 pas de continuation pour une précision δ de 10^{-6} .

L'erreur à la fin du 8^{ème} pas de continuation par rapport à la solution DF est de 0.0018. Cette valeur qui est faible permet de valider la solution obtenue.

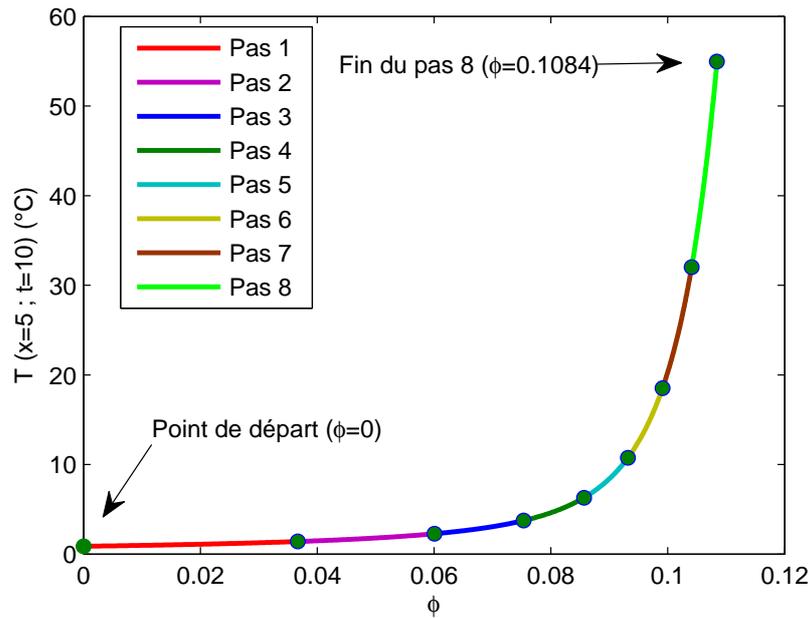


FIG. D.I-19 L'évolution de la température au point $(x=5, t=10)$ en fonction de ϕ à l'ordre 15 de la MAN et 8 pas de continuation pour une précision $\delta = 10^{-6}$

Lorsque l'on se rapproche de la valeur $\phi \approx 0.11$, la température tend vers l'infini. Le système peut donc être résolu uniquement pour des valeurs de $\alpha_{TT} < 0.11$.

Dans la suite, il sera donc intéressant d'appliquer l'approche MAN-PGD à la résolution de problèmes thermoviscoélastiques fortement couplés (**Eq. (D.I-21)**) et (**Eq. (D.I-22)**). A partir de cette approche, nous pourrions déterminer la limite du coefficient α_{TT} .

Pour tester la performance de la PGD, nous avons lancé différentes simulations pour différentes valeurs du coefficient de couplage avec la MEF. Cette méthode a mené à des non convergences pour les valeurs du coefficient de couplage égales à 0.2 et 0.4. Dans le cas de la MEF, différents paramètres du solveur (type d'élément, valeurs du résidu, pas de temps adaptatif, maillage plus fin en espace) ont été modifiées mais la non convergence persiste.

Notons donc que la méthode PGD permet d'obtenir des solutions à certains problèmes thermoviscoélastiques fortement couplés (certaines valeurs de paramètres) alors que la MEF classique ne le permet pas.

• Influence du temps caractéristique

Comme le problème est fortement couplé, nous allons étudier l'influence du temps caractéristique lié au déplacement τ_u puis celui lié à la température τ_T . Pour ces simulations, le maillage en temps est modifié et pris égal à 10001 points.

La FIG. D.I-20 montre les résultats obtenus (en déplacement et en température) dans le cas découplé et le cas couplé pour deux valeurs différentes de τ_u (5 et 10) alors que la valeur de τ_T reste fixée à 0.05. La zone transitoire de u est plus large lorsque τ_u augmente. L'effet du couplage est beaucoup plus marqué sur T lorsque τ_u augmente et la zone transitoire de T augmente même si elle reste encore inférieure à celle de u .

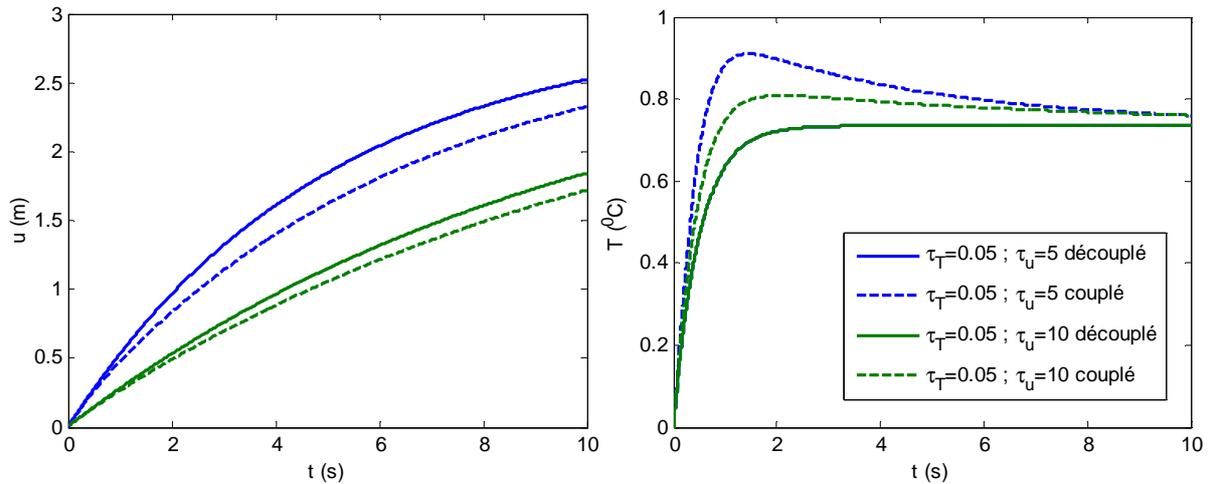


FIG. D.I-20 Cas couplé et découplé. Evolution du déplacement à $x=5$ (à gauche) et de la température à $x=7$ (à droite) découplé pour différentes valeurs de τ_u à τ_T fixée

La FIG. D.I-21 montre les résultats obtenus pour deux valeurs différentes de τ_T (0.05 et 0.2) alors que la valeur de τ_u reste fixée à 5. La zone transitoire de T est plus large si la valeur de τ_T augmente. Pour u et T , l'effet du couplage est plus marqué lorsque τ_T est plus petit.

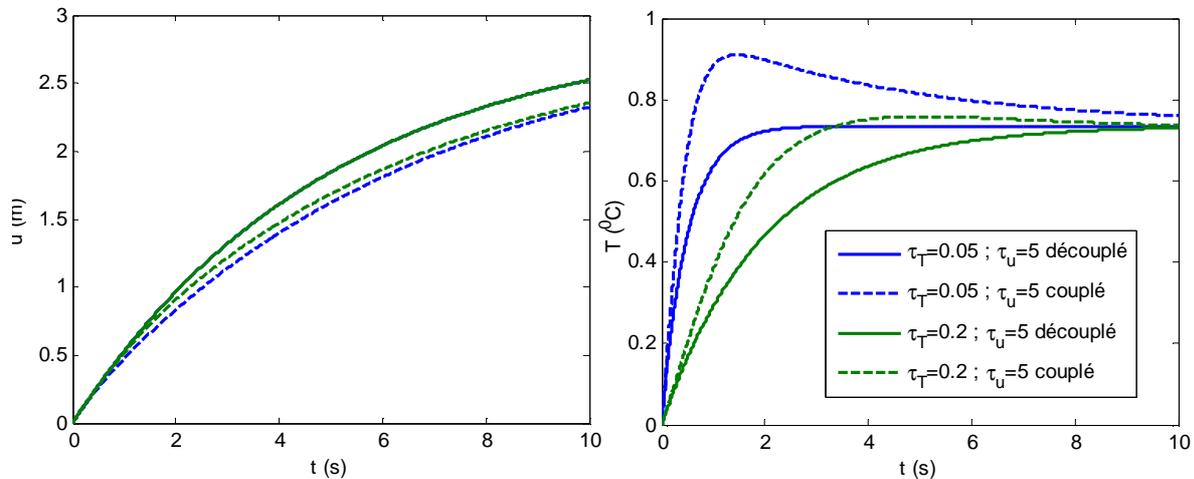


FIG. D.I-21 Cas couplé et découplé. Evolution du déplacement à $x=5$ (à gauche) et de la température à $x=7$ (à droite) pour différentes valeurs de τ_T à τ_u fixée

Dans les cas découplés, la solution en déplacement est toujours obtenue avec 1 seul mode et celle de la température nécessite entre 8 et 10 modes. Pour les cas couplés, le nombre de modes est plus élevé et varie entre 13 et 21 modes.

- **Influence des maillages spécifiques à chaque physique**

Nous allons maintenant étudier l'impact des maillages sur la solution. Reprenons la simulation test où le maillage spatial est de 11 points et regardons la solution obtenue pour différents maillages temporels. La **FIG. D.I-22** montre les modes spatiaux et les modes temporels de u et T pour trois cas différents : (a) le maillage temporel de u est plus grossier que celui de T ($nt_u = 11 ; nt_T = 101$) ; (b) le maillage temporel de T est plus grossier que celui de u ($nt_u = 101 ; nt_T = 11$) ; (c) les deux physiques ont le même maillage temporel composé de 101 points ($nt_u = 101 ; nt_T = 101$).

On remarque que dans le cas où le maillage de u est plus grossier que celui de T (cas a), il existe des fluctuations dans les modes temporels de T .

Notons que ces fluctuations ont lieu aux temps qui correspondent au maillage temporel de u (à chaque seconde avec $nt_u = 11$). Ces fluctuations sont liées au terme de couplage dans l'équation de thermique

(D.I-22). Ce terme est $T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$, il contient donc une dérivée spatiale et une dérivée temporelle du champ u . Or les fonctions de forme linéaire par morceaux sont utilisées pour le temps, la dérivée temporelle $\partial u / \partial t$ est donc constante sur chaque élément temporel et n'est pas continue au passage d'un élément. A chaque point du maillage temporel de u , il y a donc un saut. Si l'on analyse ce terme comme un terme source de la chaleur, nous avons une source discontinue au niveau des éléments de u .

Rappelons que, comme pour la méthode des éléments finis, la solution de u et T est obtenue aux nœuds. A l'intérieur de chaque élément, elle est interpolée à l'aide des fonctions de forme de l'élément.

Pour les maillages cas (b) et le cas (c), le maillage de T est emboîté dans celui de u . C'est pour cette raison que les fluctuations ne sont pas visibles.

Pour le maillage cas (a), chaque dix éléments de T correspond un élément de u . Ainsi, lorsqu'on effectue le calcul sur le maillage de T , la valeur de $\partial u / \partial t$ est la même sur 10 éléments. Et ensuite, au passage tous les dix éléments, la valeur de $\partial u / \partial t$ change. C'est ce changement brutal qui induit des fluctuations dans les modes temporels de T .

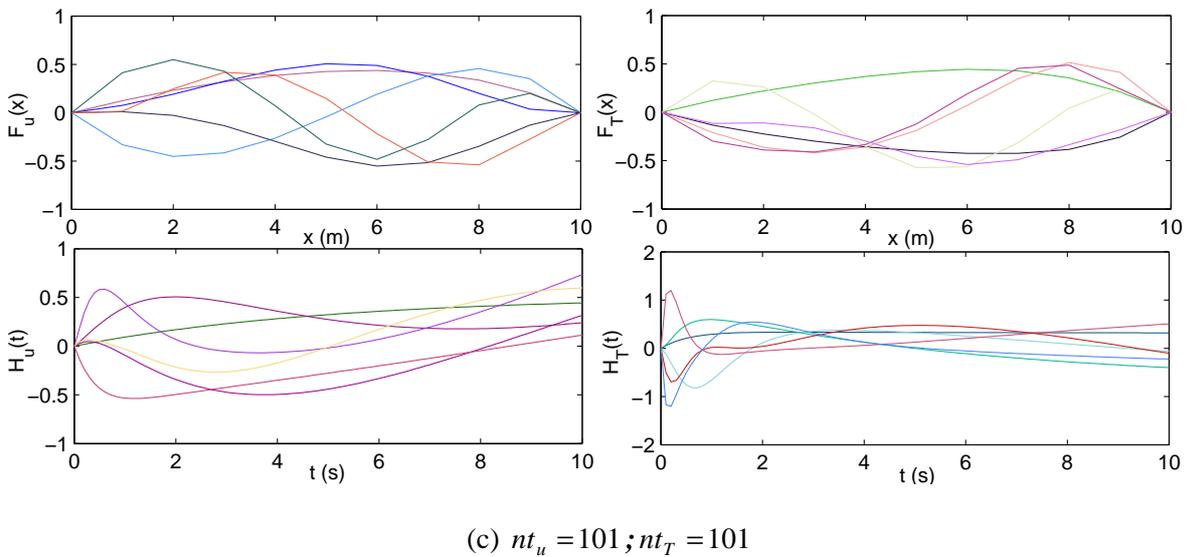
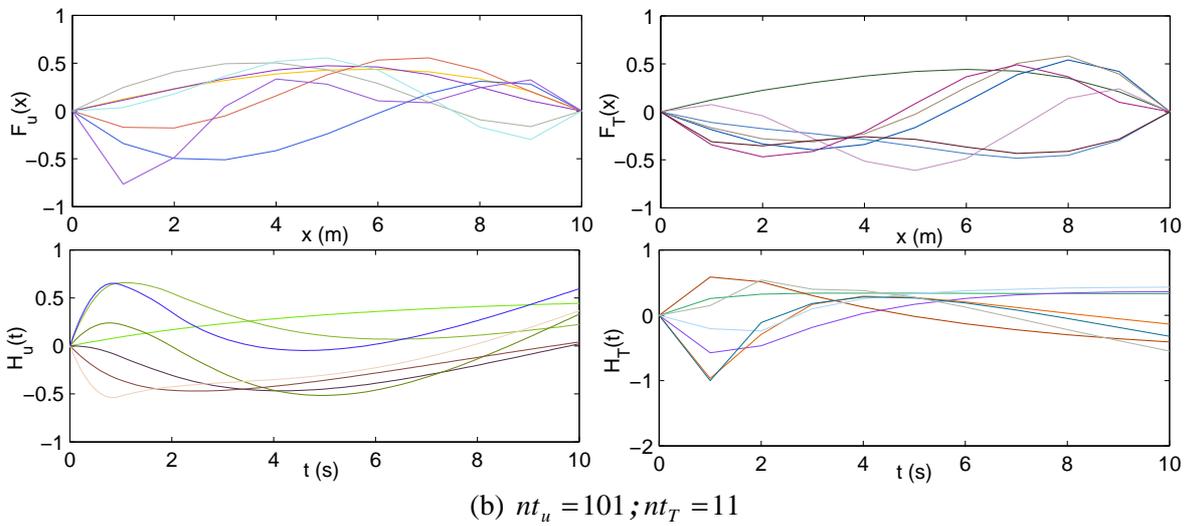
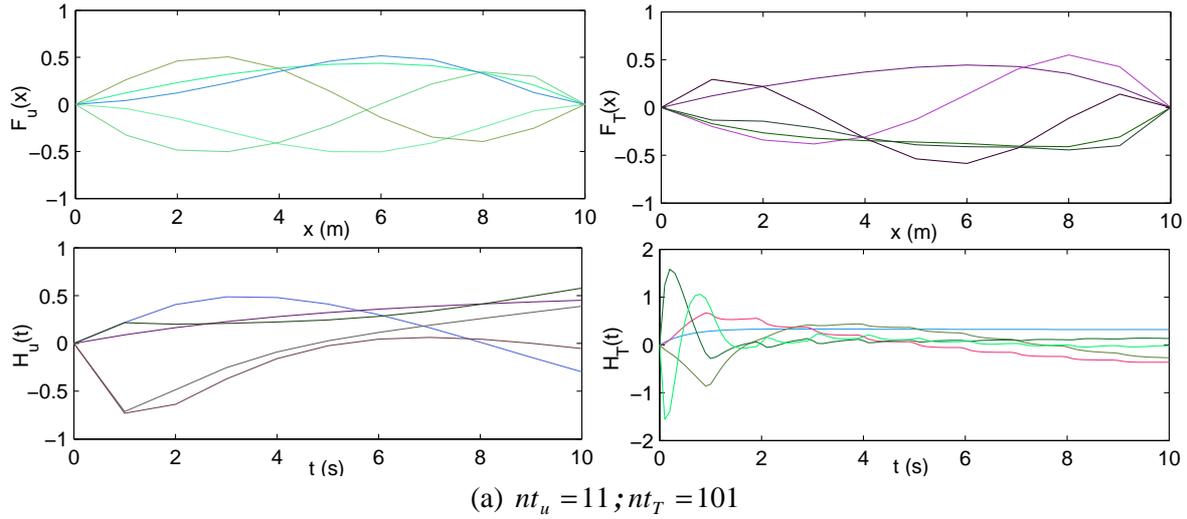


FIG. D.I-22 Modes spatiaux et temporels pour le déplacement (gauche) et la température (droite) pour trois couples de maillages différents

La **FIG. D.I-23** schématise le saut de la dérivée de $\partial u / \partial t$ calculée sur le maillage de T dans le cas (a).

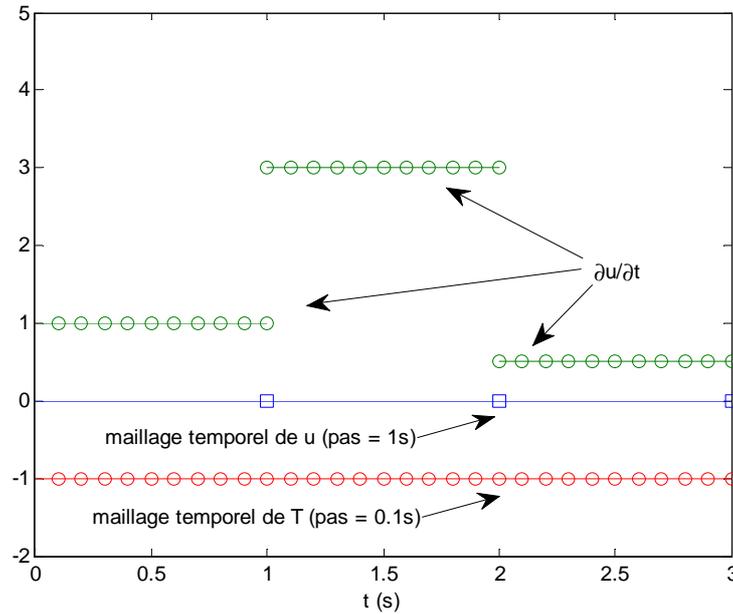


FIG. D.I-23 Saut de la dérivée $\partial u / \partial t$ dans le cas où le maillage de u est plus grossier que celui de T

Pour le déplacement, il n’y a pas de fluctuations car le terme de couplage est lié au terme $\frac{\partial T}{\partial x}$ et en x les maillages sont identiques. Quel que soit le maillage utilisé en temps, il n’y aura pas de fluctuations sur les modes temporels du déplacement.

Par contre, ces mêmes fluctuations peuvent apparaître sur les modes spatiaux de T dans le cas où le maillage de u est plus grossier.

La solution en température obtenue dans le cas du maillage a) ($nt_u = 11, nt_T = 101$) est donnée **FIG. D.I-24**. Nous voyons que les fluctuations visibles sur les modes s’expriment aussi sur la solution finale.

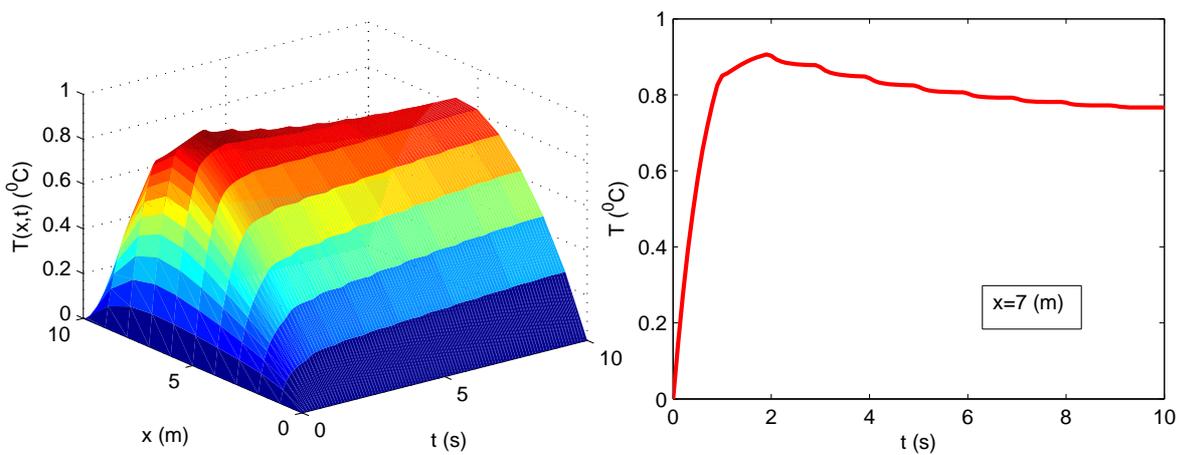


FIG. D.I-24 Maillage $nt_u = 11, nt_T = 101$. Solution de la température en fonction de l’espace et du temps (gauche). Evolution de la température pour un point $x=7$ en fonction du temps (droite)

Remarques.

- Ce problème est le même que celui nous avons présenté dans le **chapitre B (B.II.4.3)**.
- Pour pallier le problème des fluctuations temporelles, une première solution consiste à utiliser des fonctions de forme quadratique de type Hermite pour le temps. Avec ces fonctions, la dérivée $\partial u / \partial t$ est continue au passage d'un élément. Il n'y a pas plus de saut dans la représentation des valeurs des termes couplés. Néanmoins, l'utilisation des fonctions de forme de type Hermite peut être coûteuse, en particulier lors de l'étape de remplissage des matrices.

Nous proposons ici une méthode pour éviter les fluctuations dans les modes temporels tout en utilisant les fonctions de forme linéaire par morceaux en temps pour u et T .

L'extrapolation de données

Les fluctuations sont liées au calcul du terme couplé où apparaît la dérivée temporelle de u . Prenons par exemple le remplissage de la matrice couplée

$$\int_{\Omega_i} L_T (\mathbf{H}_u^j)^T dL_u L_T^T dt \tag{D.I-62}$$

avec la fonction de forme linéaire, celle-ci est équivalente à la matrice

$$\int_{\Omega_i} L_T (\mathbf{H}_{uT}^j)^T dL_{uT} L_T^T dt \tag{D.I-63}$$

où (\mathbf{H}_{uT}^j) est le vecteur contenant les valeurs aux nœuds du mode temporel j interpolés sur le maillage de stockage t_{uT} et L_{uT} est le vecteur contenant des fonctions de forme linéaires définies sur le maillage de stockage. Rappelons que le maillage de stockage est le maillage qui contient la concaténation de celui de u et de celui de T et qui est utilisé pour le remplissage des matrices intégrales.

Pour pallier le problème de la discontinuité de la dérivée temporelle en gardant des fonctions de forme linéaires, nous proposons d'interpoler les valeurs aux nœuds des modes temporels (\mathbf{H}_u^j) du maillage de u vers le maillage de stockage à l'aide de l'interpolation cubique spline. Nous utilisons cette interpolation car elle permet d'obtenir une courbe interpolée régulière en imposant la continuité de la dérivée première et seconde [Knott 2000]. Notons que le coût de calcul de cette interpolation cubique spline est très faible. De plus, cela permettrait de palier le problème des fluctuations sans pour autant implémenter de nouvelles fonctions de forme.

En notant $(\mathbf{H}_{uT}^{j(s)})$ le vecteur contenant les valeurs aux nœuds interpolées par la cubique spline sur t_{uT} , la matrice couplée s'écrit :

$$\int_{\Omega_i} L_T (\mathbf{H}_{uT}^{j(s)})^T dL_{uT} L_T^T dt \tag{D.I-64}$$

Reprenons le cas $nt_u = 11 ; nt_T = 101$ qui présentait les fluctuations. La **FIG. D.I-25** montre les modes spatiaux et temporels de la température (à gauche) ainsi que l'évolution de la température pour un point en espace (à droite) lorsque l'interpolation cubique spline est utilisée. On voit que les fluctuations n'existent plus sur la solution et sur les modes. Cela a permis en quelque sorte de lisser la solution.

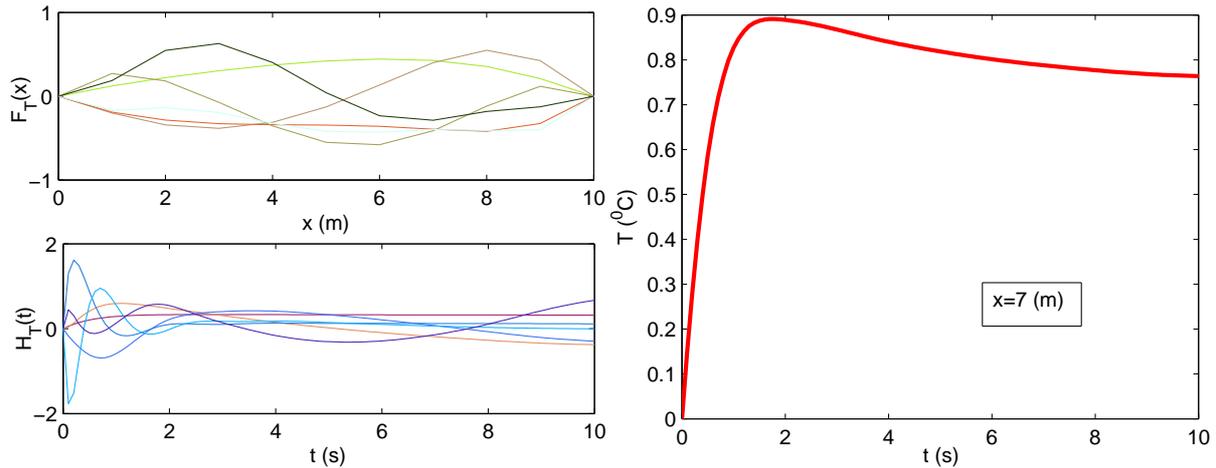


FIG. D.I-25 Maillage $nt_u = 11, nt_T = 101$ - Interpolation cubique spline. Modes spatiaux et temporels pour la température (gauche). Evolution de la température en fonction du temps au point $x=7$ (droite)

Conclusion de la section

Dans cette section, la formulation PGD pour deux types de problèmes couplés (un problème de diffusiothermique partiellement couplé et un problème thermoviscoélastique fortement couplé) a été exposée. Ces deux problèmes se différencient par la nature des équations et la nature des couplages.

Dans le cas du problème partiellement couplé, même si le couplage a été étudié pour deux termes de nature différentes, tous deux peuvent être vus comme faisant partie de la source. Ainsi, ils apparaissent uniquement dans le second membre et la résolution est identique à celle d'une résolution PGD pour un problème transitoire.

En revanche, dans le cas du problème fortement couplé, la résolution PGD est différente d'autant plus qu'elle mène à un système non linéaire pour l'étape de projection. De plus, les termes de couplage sont de natures très différentes, ce qui est une situation sévère d'un point de vue numérique. Dans l'équation viscoélastique, cela revient comme précédemment à un terme source qui est donc pris en compte dans le second membre \mathbf{B} alors que dans l'équation de la thermique, il est non linéaire (même s'il reste linéaire par rapport à la variable T) et est donc pris en compte dans \mathbf{A} .

Dans la deuxième partie de cette section, les résultats numériques ont été présentés et l'influence du temps caractéristique et du terme de couplage ont été discutés. Nous avons vu que quelque soit les valeurs de ces paramètres, la PGD permet de capter la solution que ce soit dans le cas partiellement couplé ou fortement couplé. Néanmoins, dans le cas thermoviscoélastique, les limites de la méthode vis-à-vis de la valeur du coefficient de couplage ont été mises en avant. Ces limites ne présentent pas pour nous un défaut de la PGD dans le sens où la MEF ne permet pas non plus de capter cette solution. A l'aide d'un exemple simplifié, nous avons montré que la valeur limite de ce paramètre pouvait être déterminée, d'un certain point de vue, par l'approche MAN-PGD. Ceci constitue une perspective pour la suite de la thèse. Nous retiendrons que la méthode PGD est plus performante que la MEF dans la mesure où les valeurs de ce paramètre de couplage sont plus limitées avec la MEF qu'avec la PGD.

Les termes de couplage influencent fortement les transitoires présents dans la solution. Pour bien les capter, il est nécessaire notamment dans le cas partiellement couplé que les solutions des différentes physiques ne soient pas trop mal prédites.

Il apparaît donc nécessaire et judicieux de mettre en place une méthode de maillage adaptatif dans le cas de la résolution de problèmes multiphysiques couplés.

D.II Stratégies de couplage PGD-technique de maillage adaptatif pour des problèmes multiphysiques multitemps

Dans cette section, la technique de maillage adaptatif présentée dans le (**Chapitre B – section B.II**) est étendue aux problèmes couplés afin de prédire les réponses transitoires avec des discrétisations temporelles adaptées à chaque phénomène physique.

D.II.1 Présentation de la technique de maillage adaptatif

Etudions les deux problèmes couplés que nous avons choisi de traiter dans cette thèse pour mettre en avant les différentes stratégies possibles pour appliquer la technique de maillage adaptatif.

Prenons tout d'abord un problème partiellement couplé. Dans ce cas, la 1^{ère} physique est calculée et ensuite la deuxième. A la vue de l'influence du maillage spécifique à chaque physique, nous allons dans ce cas appliquer la technique de maillage adaptatif à la 1^{ère} physique et ensuite à la 2^{ème}. Nous dirons dans ce cas que la technique de maillage adaptatif est appliquée de manière séquentielle.

Dans le cas de problème fortement couplé, nous avons choisi dans cette thèse de résoudre les deux physiques en parallèle. La stratégie de maillage adaptatif peut donc être résolue sur chacune des physiques en même temps. Nous dirons dans ce cas que la méthode de maillage adaptatif est appliquée de manière parallèle. Une autre méthode pourrait consister à appliquer uniquement la technique de maillage adaptatif à la physique sur laquelle le résidu est plus élevé ce qui reviendrait à une méthode séquentielle.

Dans la suite de cette thèse, nous avons choisi d'appliquer une stratégie séquentielle lorsque le problème est partiellement couplé et une stratégie parallèle lorsque le problème est fortement couplé.

Le même estimateur d'erreur que dans le cas avec une seule physique est utilisé. Néanmoins, cet estimateur du résidu local est calculé pour chacune des physiques en s'appuyant sur l'équation concernée. Pour un élément m d'une physique donnée, un point est ajouté au centre si le critère suivant est vérifié :

$$RL_m \geq \varepsilon_{RL} \times RL_{max} \quad (D.II-1)$$

où RL_{max} est la valeur maximale de RL sur le maillage considéré pour une physique considérée et ε_{RL} est un taux fixé par l'utilisateur. Comme nous l'avons précisé dans le **chapitre B**, la valeur de ε_{RL} est choisie étant égale à 75% pour les deux physiques considérées. Un nouveau maillage propre à chaque physique est donc construit.

Nous pouvons alors nous poser la question de la construction du maillage pour continuer le calcul. Deux stratégies sont envisageables : concaténer le maillage des deux physiques ou adapter indépendamment le maillage de chaque physique. C'est ce que nous allons présenter dans la suite.

D.II.1.1 Construction de maillage

Au cours de la technique de maillage adaptatif, deux stratégies de construction de maillage peuvent être envisagées: l'utilisation du même maillage pour toutes les physiques notée M_S1 ou conserver le maillage spécifique à chaque physique notée M_S2.

a) M_S1 (même maillage pour toutes les physiques)

Cette première stratégie consiste à concaténer les deux maillages après chaque étape de maillage adaptatif. Les deux physiques disposent donc toujours du même maillage.

L'avantage de cette approche est triple. Le nombre de matrices à stocker peut s'avérer beaucoup moins important d'autant plus si les deux physiques sont décrites par des équations de même nature. Le deuxième est qu'il n'est pas nécessaire de calculer des matrices couplées en construisant la matrice de stockage. Troisièmement, les fluctuations dans les modes ne peuvent pas apparaître.

Néanmoins, le maillage utilisé pour chaque physique peut s'avérer extrêmement dense notamment lorsque les transitoires des deux physiques sont fortement différents. Cela peut donc mener à des matrices de taille extrêmement grande sans que cela soit nécessaire pour avoir une bonne prédiction de la solution.

b) M_S2 (maillage spécifique pour chaque physique)

Cette deuxième stratégie consiste à garder pour chaque physique le maillage obtenue après l'étape de maillage adaptatif. Chaque physique a donc son propre maillage.

Le principal avantage de cette stratégie est que les matrices ont la taille minimale et donc le stockage est optimisé.

Néanmoins, comme nous l'avons déjà signalé, cela peut poser d'autres difficultés comme par exemple l'apparition de fluctuations.

Cette approche semble donc à privilégier lorsque les équations des physiques mises en jeu sont de natures différentes.

D.II.1.2 Stratégies de couplage PGD - technique de maillage adaptatif (RPGD)

Comme pour le cas où la technique de maillage adaptatif était appliquée à une seule physique (**Chapitre B – section B.II.2**), deux stratégies de couplage PGD-technique de maillage adaptatif peuvent être envisagées. Rappelons que la première notée RPGD_S1 consiste à recalculer la solution PGD à partir de la solution nulle sur chaque nouveau maillage. La deuxième notée RPGD_S2 consiste à enrichir la solution sur le nouveau maillage à partir de celle sur l'ancien maillage. Dans ce cas, le nombre de modes sur chaque maillage peut être soit fixé *a priori* soit déterminée à l'aide d'un taux de réduction du résidu.

Pour le cas partiellement couplé, comme nous avons choisi la résolution séquentielle et l'utilisation d'un maillage spécifique à chaque physique (M_S1), l'algorithme est le même que celui pour une physique seule (**TAB. B.II-1** et **TAB. B.II-2**). Nous ne le représenterons pas ici. Dans ce qui suit, nous allons présenter uniquement l'algorithme de ces deux stratégies de couplage "maillage adaptatif – PGD" (notées RPGD) dans le cas fortement couplé thermoviscoélastique.

Rappelons que la notation $(^u)$ (respectivement $(^T)$) faire référence à des grandeurs liées au déplacement u (respectivement la température T).

a) RPGD_S1 - problème thermoviscoélastique fortement couplé

Cette stratégie consiste à recalculer entièrement la solution PGD à partir de la solution nulle sur chaque nouveau maillage.

L'algorithme de cette stratégie est décrit ci-dessous:

- 1 : $i = 0$
- 2 : Maillage initial $M_0^{(u)}$ et $M_0^{(T)}$
- 3 : Calcul de la solution PGD ($n^{0(u)} = n^{0(T)} = n^0$ modes)
- 4 : ***tant que (Critère d'arrêt n'est pas satisfait)***
- 5 : Calcul de la distribution de l'estimateur $RL^{(u)}$ et $RL^{(T)}$
- 6 : Ajout des points
- 7 : $i = i + 1$
- 8 : Maillage $M_i^{(u)}$ et $M_i^{(T)}$
- 9 : **Calcul de la solution PGD à partir de la solution nulle ($n^{i(u)} = n^{i(T)} = n^i$ modes)**
- 10 : ***fin tant que***

TAB. D.II-1 Algorithme de la stratégie RPGD_S1 – problème thermoviscoélastique couplé

A l'étape 3 et/ou 9, la solution u et T est résolue par l'algorithme présenté **TAB. D.I-11**.

L'étape 5 traduit le fait que les résidus locaux sont calculés parallèlement sur chacune des physiques.

A l'étape 8, nous ne précisons pas comment est construit le maillage. On pourra choisir soit la stratégie M_S1 ou M_S2.

Comme nous l'avons précisé, le critère d'arrêt mentionné étape 4 s'appuie sur un seuil du résidu RV .

Remarque. Lorsque la stratégie de maillage adaptatif était appliquée à une seule physique, nous avons mentionné l'ajout d'une contrainte de décroissance de résidu. Dans le cas d'un problème fortement couplé cette contrainte n'est plus valable dans la mesure où le terme de couplage est pris en compte au fur et à mesure.

b) **RPGD_S2 - problème thermoviscoélastique fortement couplé**

La deuxième stratégie consiste à enrichir la solution PGD pour chaque nouveau maillage à partir d'un certain nombre de modes obtenus sur le maillage précédent.

L'algorithme de cette stratégie est répertorié dans le **TAB. D.II-2**.

La principale différence avec la stratégie précédente est comme nous l'avons déjà noté dans le cas découplé les étapes 9-10-11. De plus, rappelons que, contrairement au cas découplé, lors de l'étape 11 où les coefficients doivent être recalculées, le système à résoudre est non linéaire.

Comme le cas d'une seule physique, à l'étape 12, deux variantes sont étudiées :

- variante 1 notée RPGD_S21 où $n^{i(u)} = n^{i(T)} = n^i = 1$

- variante 2 notée RPGD_S22 où $n^{i(u)} = n^{i(T)} = n^i$ et est fixé par le taux de réduction choisi pour chaque maillage.

1 :	$i = 0$
2 :	Maillage initial $M_0^{(u)}$ et $M_0^{(T)}$
3 :	Calcul de la solution PGD de u et T ($n^{0(u)} = n^{0(T)} = n^0$ modes)
4 :	<i>tant que (Critère d'arrêt n'est pas satisfait)</i>
5 :	Calcul de la distribution de l'estimateur $RL^{(u)}$ et $RL^{(T)}$
6 :	Ajout des points
7 :	$i = i + 1$
8 :	Maillage $M_i^{(u)}$ et $M_i^{(T)}$
9 :	Interpolation des modes obtenus
10 :	Normalisation des modes interpolés
11 :	Calcul à nouveau des coefficients alpha $\alpha^{(u)}$ et $\alpha^{(T)}$ (par la méthode de point fixe)
12 :	Calcul de la solution PGD à partir des modes obtenus ($n^{i(u)} = n^{i(T)} = n^i$ modes ajoutés)
13 :	<i>fin tant que</i>

TAB. D.II-2 Algorithme de la stratégie RPGD_S2 – problème thermoviscoélastique couplé

Dans la suite, la stratégie de maillage adaptatif séquentielle est appliquée au problème partiellement couplé et la stratégie de maillage adaptatif parallèle est appliquée au problème fortement couplé.

Dans le cas du problème partiellement couplé, un maillage spécifique à chaque physique est utilisé même si on est dans le cas où les équations sont de même nature ce qui ne présente pas un grand intérêt au niveau du gain de stockage. Nous étudions dans ce cas les stratégies RPGD_S1 et RPGD_S2.

Dans le cas du problème fortement couplé, les résultats seront discutés en fonction du choix de la méthode de construction de maillage (M_S1 et M_S2) et du type de couplage PGD-maillage adaptatif (RPGD_S1 et RPGD_S2).

D.II.2 Résultats

Dans cette partie, nous allons présenter et discuter les résultats de problèmes multiphysiques couplés obtenus avec la technique de maillage adaptatif en fonction de la stratégie de couplage technique de maillage adaptatif-PGD et de la stratégie de construction de maillage.

D.II.2.1 Résultats du problème partiellement couplé diffusothermique

Les paramètres de simulation sont ceux utilisés dans le cas test de référence présentés paragraphe (D.I.2.1). Le problème de diffusothermique est défini sur le domaine $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_t = [-\pi; +\pi]^2 \times [0; 10]$.

Les discrétisations en espace sont les mêmes pour la concentration et la température et sont choisies régulières (101 points pour x et 101 points pour y). La technique de maillage adaptatif est appliquée uniquement pour la variable temporelle t .

a) Résultats du problème partiellement couplé 1 ($T - c(T)$)

Pour ce problème partiellement couplé, la valeur du coefficient du terme couplé est A_{cT} est égale à 0.2. Le critère d'arrêt de la méthode de maillage adaptatif est RV égale à 0.05.

Tout d'abord, la technique de maillage adaptatif est appliquée pour déterminer la solution en température (cf. **Chapitre B**) avec un maillage initial de la source (maillage irrégulier de 3 points). Nous choisissons d'utiliser la stratégie RPGD_S1. La solution est obtenue après 18 étapes de maillage adaptatif et le maillage final présente 89 points. Sur le maillage final, la solution est obtenue avec 13 modes.

Ensuite, en utilisant cette solution de la température découplée, la technique de maillage adaptatif est appliquée pour déterminer la solution de la concentration couplée. Les simulations pour le problème de diffusion couplé sont effectuées avec un maillage initial de la source constitué de 3 points ($t=[0, 6, 10]$). Dans ce qui suit, les résultats obtenus avec deux stratégies de couplage "technique de maillage adaptatif - PGD" seront présentés.

- Résultats dans le cas RPGD_S1

Tout d'abord, nous allons présenter les résultats obtenus avec la stratégie 1 où la solution est recalculée à partir de la solution nulle pour chaque nouveau maillage.

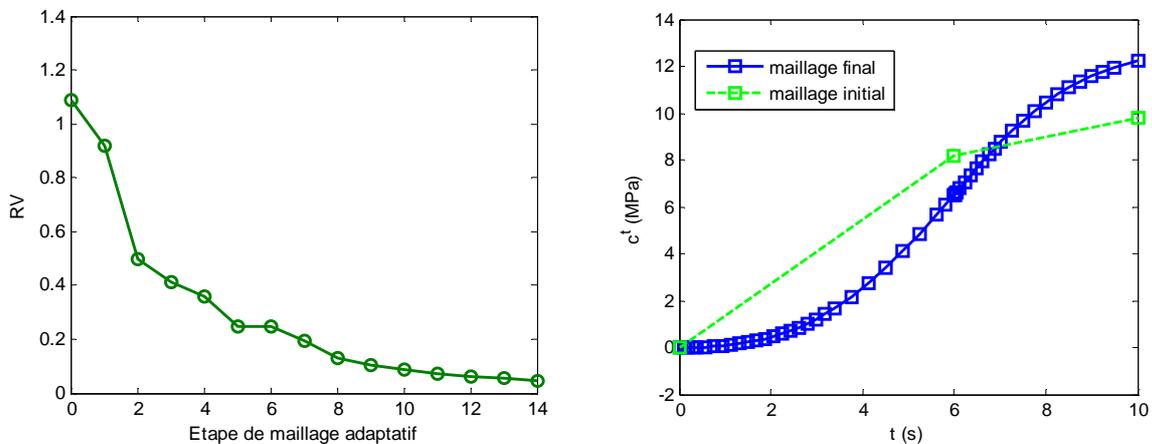


FIG. D.II-1 Evolution du résidu RV en fonction des étapes de maillages adaptatif (gauche) et évolution de la concentration totale au point $(x,y)=(0,0)$ en fonction du temps (droite) dans le cas RPGD_S1

Le seuil du résidu est atteint après 15 étapes d’adaptation et le maillage final présente 51 points. La **FIG. D.II-1** (à gauche) illustre la convergence du procédé. La **FIG. D.II-1** (à droite) représente l’évolution en fonction du temps de la solution sur le maillage final obtenu à la fin du procédé de maillage adaptatif ainsi que la solution sur le maillage initial au point $(x,y)=(0,0)$. On voit que les points sont ajoutés principalement dans les zones transitoires, notamment à $t=6$ (s) qui correspond à un changement dans les conditions aux bords.

- Résultats dans le cas RPGD_S2

Regardons maintenant les résultats obtenus de la deuxième stratégie RPGD_S2 où les modes obtenus sont conservés et utilisés pour l’enrichissement des nouveaux modes. La **FIG. D.II-2** et la **FIG. D.II-3** montrent les résultats obtenus par la stratégie RPGD_S21 et la stratégie RPGD_S22 respectivement. Notons que dans tous les cas, les zones transitoires sont bien captées.

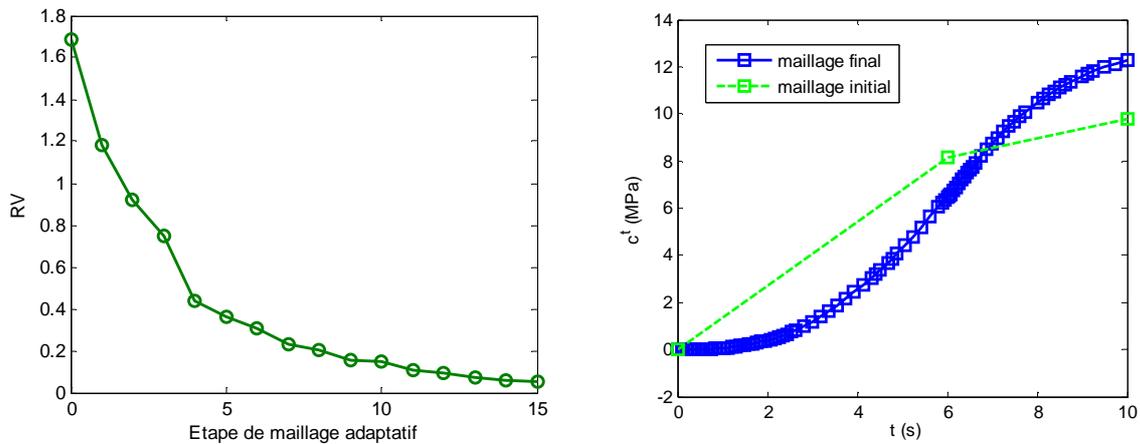


FIG. D.II-2 Evolution du résidu RV en fonction des étapes de maillage adaptatif (gauche) et évolution de la concentration totale au point $(x,y)=(0,0)$ en fonction du temps (droite) dans le cas RPGD_S21

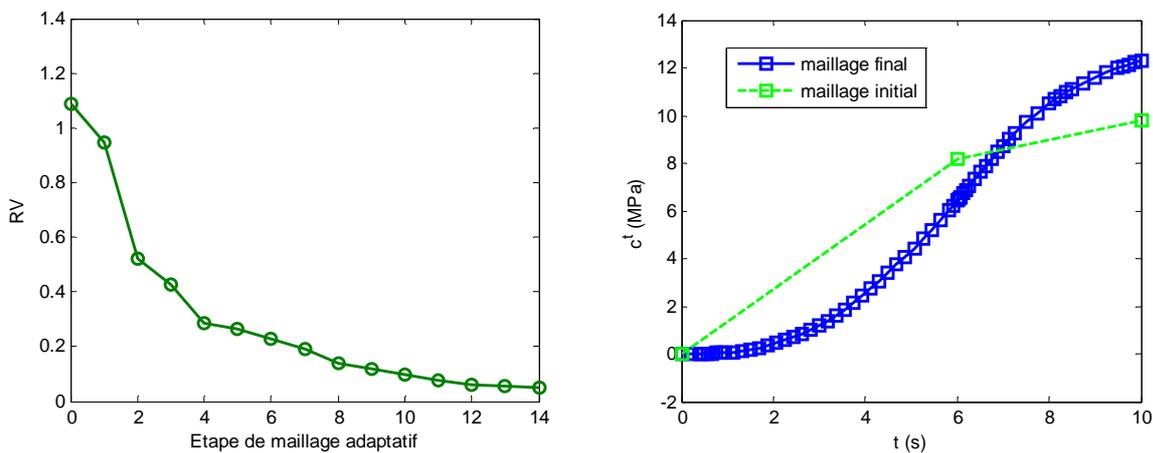


FIG. D.II-3 Evolution du résidu RV en fonction des étapes de maillage adaptatif (gauche) et évolution de la concentration totale au point $(x,y)=(0,0)$ en fonction du temps (droite) dans le cas RPGD_S22

Le **TAB. D.II-3** montre une comparaison des résultats obtenus par les deux stratégies. La diminution du nombre d’enrichissements avec la stratégie 2 est notable. Par contre, le nombre de points du maillage final est un peu plus élevé avec cette stratégie. Nous avons déjà fait ce constat au

chapitre B. Ceci est lié au fait que la solution sur le maillage initial est assez éloignée de la solution finale et l'erreur commise par la projection des anciens modes peut être prépondérante par rapport à celle liée à la mauvaise description des zones transitoires.

Si l'on enrichit un seul mode à chaque étape (RPGD_S21), le nombre d'étapes de maillage adaptatif est plus élevé par rapport au cas plusieurs modes (RPGD_S22).

	Nombre d'enrichissements	Nombre de points du maillage final	Nombre d'étapes de maillage adaptatif
RPGD_S1	97 (cumulé) – 9 (final)	51	15
RPGD_S21	16	88	16
RPGD_S22	30	67	15

TAB. D.II-3 Comparaison des résultats pour les deux stratégies de maillage adaptatif

Pour un problème partiellement couplé, comme la technique de maillage adaptatif est appliquée de manière séquentielle, on peut démarrer les simulations pour la physique couplée (c dans cet exemple) à partir du maillage adaptatif de la physique découplée (89 points pour T dans cet exemple). Notons que nous ajoutons un point à $t=6$ (s) à ce maillage initial pour bien décrire la "source" de la concentration ce qui mène à un maillage initial de 90 points. Les résultats obtenus pour les deux stratégies sont répertoriés **TAB. D.II-4**. Pour la RPGD_S1 et la RPGD_S22, aucune étape de maillage adaptatif est nécessaire (le maillage initial de T étant suffisant pour décrire c) alors que pour la RPGD_S21, 8 étapes de maillage adaptatif sont nécessaires et mènent à un maillage de 162 points. Ceci s'explique par le fait que, dans ce cas, un seul mode est enrichi sur chaque maillage alors que la solution finale nécessite plusieurs modes (par exemple 9 modes comme dans le cas RPGD_S1).

	Nombre d'enrichissements	Nombre de points du maillage final	Nombre d'étapes de maillage adaptatif
RPGD_S1	9 (cumulé) – 9 (final)	90	1
RPGD_S21	8	162	8
RPGD_S22	9	90	1

TAB. D.II-4 Comparaison des résultats entre les deux stratégies de maillage adaptatif (maillage initial = maillage de T découplée)

Cette façon de construire le maillage est particulièrement adaptée lorsque le maillage adaptatif de T et de c est semblable. Lorsque le maillage de T est beaucoup plus fin que celui de c , cette technique peut mener à un maillage trop dense pour c .

b) Résultats du problème partiellement couplé 2 ($c - T(c)$)

Pour ce problème couplé, la solution du problème de diffusion découplé est tout d'abord recherchée avec la stratégie RPGD_S1. 12 étapes de maillage adaptatif sont nécessaires et le maillage final contient 45 points. Sur ce maillage final, la solution est décrite avec 9 modes.

Les simulations pour le problème de la chaleur couplé sont tout d'abord réalisées avec un maillage initial de la source constitué de 3 points ($t=[0, 1, 10]$). La valeur du coefficient du terme de couplage B_{Tc} est choisie égale à 0.2. Le critère d'arrêt de la méthode de maillage adaptatif est RV égal à 0.05 et celui de la PGD est ε_{RV} égal à 99%.

- Résultats dans le cas RPGD_S1 :

Tout d’abord, nous allons présenter le résultat obtenu avec la stratégie 1. Le seuil du résidu est atteint après 15 étapes d’adaptation et le maillage final présente 78 points. La **FIG. D.II-4** (à gauche) illustre la convergence du procédé. La **FIG. D.II-4** (à droite) représente la solution sur le maillage final obtenu à la fin du procédé de maillage adaptatif ainsi que la solution obtenue sur le maillage initial au point $(x,y)=(0,0)$. Notons que la zone transitoire à $t=6$ (s), due à la concentration et transmise à la température à travers le couplage, est bien captée alors que le maillage initial pour cette physique ne présente pas de point à $t=6$. Cela illustre la capacité de la technique de maillage adaptatif. Comme nous l’avons signalé, le résidu ne décroît pas régulièrement.

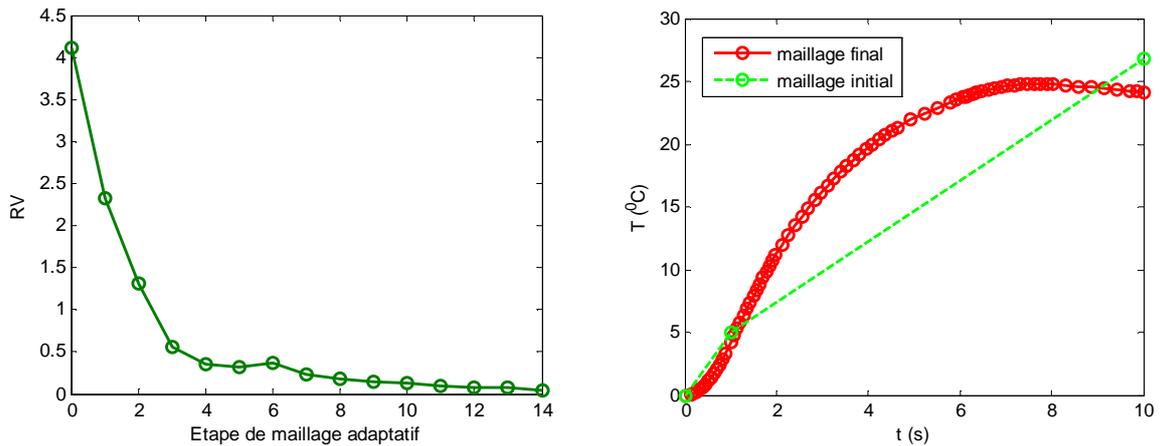


FIG. D.II-4 Evolution du résidu RV en fonction des étapes de maillage adaptatif (gauche) et évolution de la température au point $(x,y)=(0,0)$ en fonction du temps (droite) dans le cas RPGD_S1

- Résultats dans le cas RPGD_S2 :

Regardons maintenant les résultats obtenus avec la deuxième stratégie RPGD_S2. La **FIG. D.II-5** et la **FIG. D.II-6** montrent les résultats obtenus par la stratégie RPGD_S21 et la stratégie RPGD_S22 respectivement en un point de l’espace et en fonction du temps. Notons que dans tous les cas, les zones transitoires sont bien captées. Avec la stratégie RPGD_S21, on voit que le maillage final est beaucoup plus dense et le nombre total d’étapes de maillage adaptatif est plus élevé.

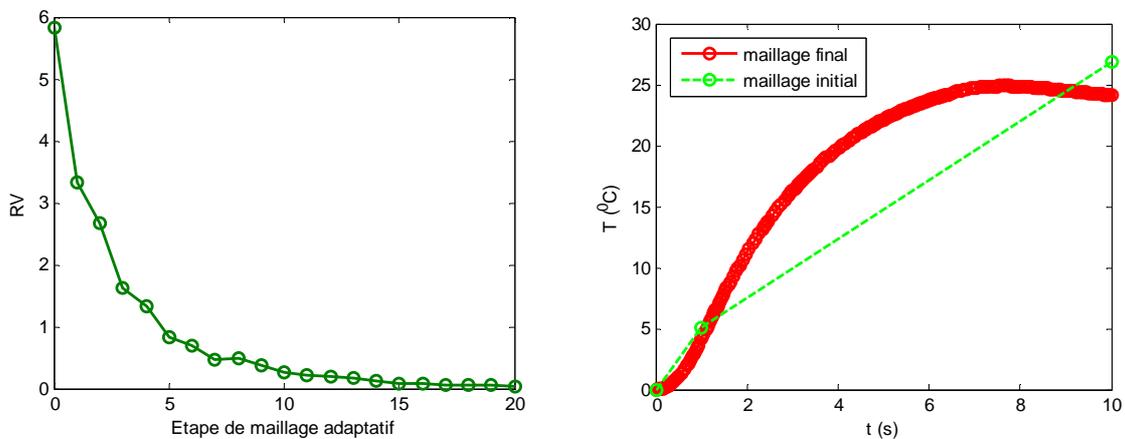


FIG. D.II-5 Evolution du résidu RV en fonction des étapes de maillage adaptatif (gauche) et évolution de la température au point $(x,y)=(0,0)$ en fonction du temps (droite) dans le cas RPGD_S21

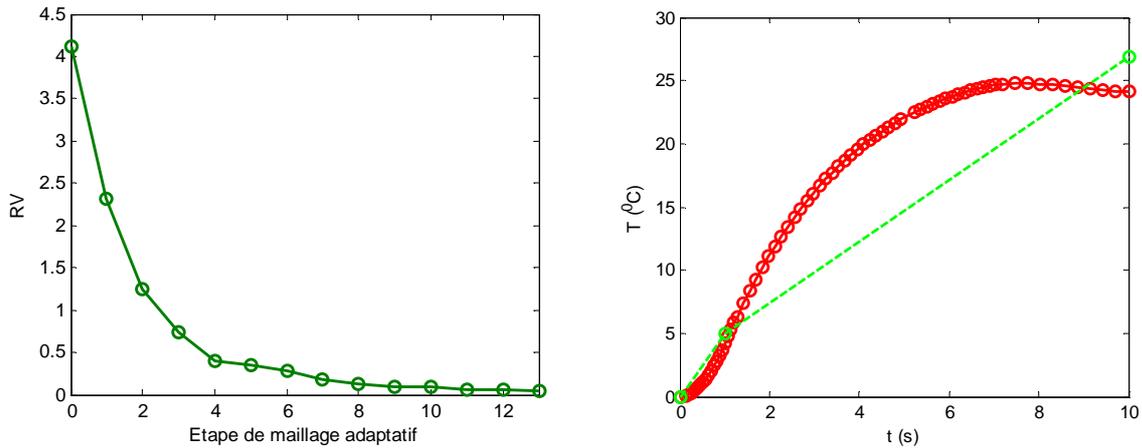


FIG. D.II-6 Evolution du résidu RV en fonction des étapes de maillage adaptatif (gauche) et évolution de la température au point $(x,y)=(0,0)$ en fonction du temps (droite) dans le cas $RPGD_S22$

Afin de comparer ces différentes stratégies, les résultats obtenus en terme de nombre d’enrichissements, nombre de points du maillage final et nombre d’étapes de maillage adaptatif sont répertoriés **TAB. D.II-5**. Le nombre d’enrichissements est fortement réduit avec la stratégie 2. Le nombre d’étapes et le nombre de points sont plus élevés dans le cas $RPGD_S21$. Ceci est du au fait que la solution nécessite beaucoup de modes pour être précisément décrite (18 modes avec la $RPGD_S1$). Comme un seul mode est enrichi à chaque maillage, plusieurs étapes sont donc nécessaires et par suite, plus de points sont obtenus.

	Nombre d’enrichissements	Nombre de points du maillage final	Nombre d’étapes de maillage adaptatif
$RPGD_S1$	127 (cumulé) – 18 (final)	78	15
$RPGD_S21$	21	239	21
$RPGD_S22$	49	71	14

TAB. D.II-5 Comparaison des résultats entre les deux stratégies de maillage adaptatif

Comme dans la partie précédente, nous démarrons maintenant la procédure de maillage adaptatif à partir du maillage adaptatif de c découplée. Nous y ajoutons un point à $t=1$ (s) pour bien décrire la source de la chaleur (maillage initial de 46 points). Les résultats obtenus avec les deux stratégies sont donnés **TAB. D.II-6**. Si l’on compare avec les résultats obtenus **TAB. D.II-5** (maillage initial de la source), on voit que le nombre d’étapes de maillage adaptatif ainsi que le nombre d’enrichissements est largement réduit. Le maillage final n’est pas nécessairement réduit. Par contre, le maillage final dans le cas $RPGD_S2$ présente là encore moins de points par rapport au cas $RPGD_S1$.

Contrairement au cas du maillage initial de la source, la solution sur le maillage initial est cette fois proche de la solution finale, les résultats obtenus avec la $RPGD_S2$ sont donc encore plus avantageux. Le nombre de modes obtenus sur le maillage final est quasiment le même que celui de la $RPGD_S1$ (16 modes).

	Nombre d'enrichissements	Nombre de points du maillage final	Nombre d'étapes de maillage adaptatif
RPGD_S1	69 (cumulé) – 16 (final)	102	6
RPGD_S21	10	174	10
RPGD_S22	23	64	4

TAB. D.II-6 Comparaison des résultats entre les deux stratégies de maillage adaptatif (maillage initial = maillage de c découplée)

Ainsi, quel que soit le problème partiellement couplé traité et la stratégie de maillage adaptatif utilisée, la solution obtenue à la fin du procédé de maillage adaptatif permet de décrire précisément les zones transitoires de la source.

Dans les exemples présentés ci-dessus, les réponses transitoires de la physique couplée et découplée sont assez proches, c'est la raison pour laquelle il est intéressant de choisir pour prédire la physique couplée le maillage obtenu avec le procédé de maillage adaptatif pour la physique découplée.

Nous allons maintenant présenter un cas où la réponse transitoire de chaque physique est très différente pour mieux discuter l'influence du couplage.

c) Source de la chaleur différente pour le problème 1 ($T - c(T)$)

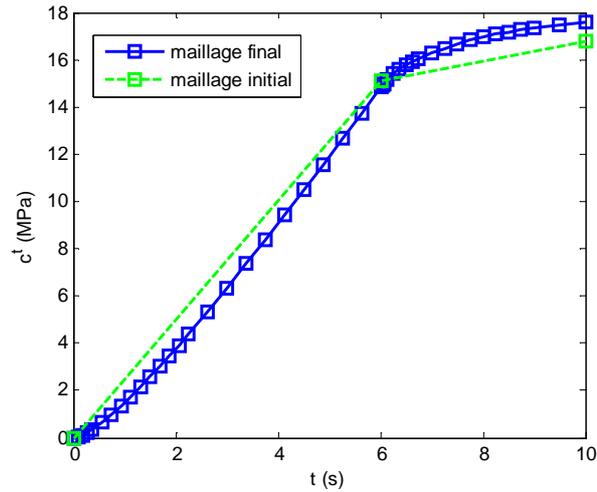
Reprenons le problème partiellement couplé 1 ($T - c(T)$) avec une autre source de la chaleur qui est la source bimodale étudiée dans le **chapitre B (B.I.3.1)**. Démarrons la simulation pour calculer la concentration, en utilisant le maillage de 365 points de la température, obtenu à la fin du procédé de maillage adaptatif avec la RPGD_S1 (cf. **B.I.3.1a**). Rappelons que dans ce cas, la température, qui est obtenue avec deux modes, présente deux zones de fortes variations localisées (cf. **TAB. B.II-3**).

Afin de discuter les résultats, nous allons d'abord présenter la solution de la concentration obtenue avec un maillage initial de la source.

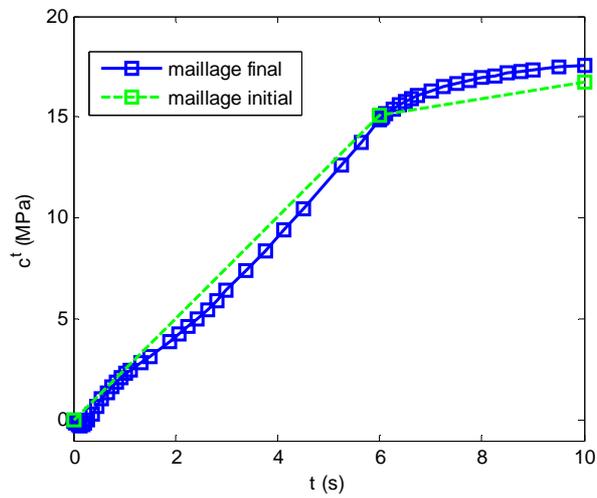
Le critère d'arrêt pour le procédé de maillage adaptatif est RV égale à 0.05 et celui de la PGD est ε_{RV} égale à 99% afin d'avoir une solution PGD suffisamment précise sur chaque maillage. Tous les autres paramètres sont identiques à ceux des simulations précédentes.

La **FIG. D.II-7** montre le maillage adaptatif de c' obtenu pour différentes valeurs de A_{cT} et la stratégie RPGD_S1. Plus la valeur de A_{cT} est élevée, plus le maillage adaptatif final présente de points (Cas découplé - $A_{cT} = 0$ et 45 points, cas couplés - $A_{cT} = 1$ et 52 points et $A_{cT} = 5$ et 116 points) puisque les points sont ajoutés afin de capter les nouvelles zones de fortes variations localisées liées au couplage.

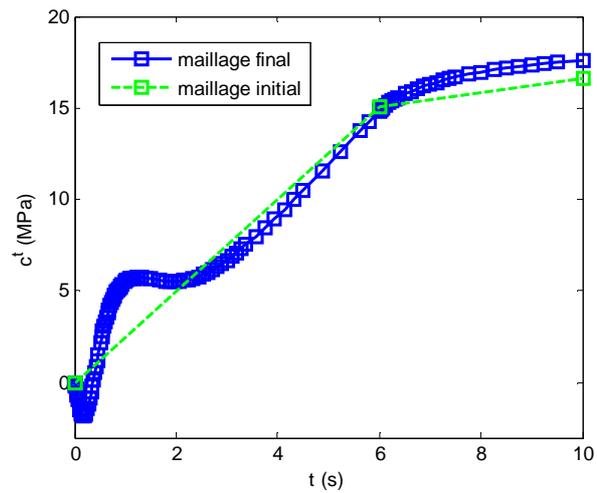
Dans le cas découplé, il n'y a pas de nouvelle zone transitoire liée au couplage alors que pour les cas couplés, des nouvelles zones transitoires apparaissent. Plus le terme de couplage influence la solution, plus le nombre de points est élevé ainsi que le nombre d'étapes de maillage adaptatif. Partant d'un même maillage initial, le procédé de maillage adaptatif s'adapte pour décrire correctement les zones transitoires.



(a) $A_{cT} = 0$ - $nt_c = 45$ - 13 étapes



(b) $A_{cT} = 1$ - $nt_c = 52$ - 16 étapes



(c) $A_{cT} = 5$ - $nt_c = 116$ - 21 étapes

FIG. D.II-7 Evolution de la concentration au point $(x,y)=(-2.51,0.62)$ en fonction du temps dans le cas RPGD_S1 pour différentes valeurs de A_{cT}

Les résultats des différentes stratégies de couplage PGD - technique de maillage adaptatif sont présentés **TAB. D.II-7** pour le cas $A_{cT} = 0$, **TAB. D.II-8** pour le cas $A_{cT} = 1$ et **TAB. D.II-9** pour le cas $A_{cT} = 5$.

	Nombre d'enrichissements	Nombre de points du maillage final	Nombre d'étapes de maillage adaptatif
RPGD_S1	91 (cumulé) – 10 (final)	45	13
RPGD_S21	16	66	16
RPGD_S22	44	39	11

TAB. D.II-7 Comparaison des résultats entre les deux stratégies de maillage adaptatif $A_{cT} = 0$

	Nombre d'enrichissements	Nombre de points du maillage final	Nombre d'étapes de maillage adaptatif
RPGD_S1	139 (cumulé) – 14 (final)	52	16
RPGD_S21	22	130	22
RPGD_S22	53	54	15

TAB. D.II-8 Comparaison des résultats entre les deux stratégies de maillage adaptatif $A_{cT} = 1$

	Nombre d'enrichissements	Nombre de points du maillage final	Nombre d'étapes de maillage adaptatif
RPGD_S1	171 (cumulé) – 12 (final)	116	21
RPGD_S21	26	222	26
RPGD_S22	55	125	25

TAB. D.II-9 Comparaison des résultats entre les deux stratégies de maillage adaptatif $A_{cT} = 5$

Quelle que soit la stratégie utilisée, plus la valeur de A_{cT} est élevée, plus le nombre de points, le nombre total d'enrichissements et le nombre d'étapes de maillage adaptatif est important.

Comme nous l'avons déjà constaté, le nombre total d'enrichissements est réduit avec la stratégie 2 alors que le nombre de modes sur le maillage final est plus élevé.

Quelle que soit la valeur de A_{cT} , la stratégie RPGD_S21 nécessite plus de points. Plus la valeur de A_{cT} est élevée, plus la solution sur le maillage initial est éloignée de celle sur le maillage final, ce qui explique pourquoi la solution RPGD_S22 est de plus en plus mauvaise par rapport à la RPGD_S1 (plus de points, plus d'étapes).

Pour déterminer la solution de concentration couplée, nous allons maintenant utiliser comme maillage initial celui du maillage adaptatif final de 365 points de la température pour une valeur du coefficient de couplage $A_{cT} = 5$. Le **TAB. D.II-10** répertorie les résultats obtenus.

Contrairement au cas précédent **a**), même si le maillage initial (qui est celui de T) est suffisamment dense pour décrire les deux zones de fortes variations localisées liées au couplage, des étapes de maillage adaptatifs sont nécessaires pour décrire correctement la zone transitoire à $t=6$ (s) liée elle aux conditions aux bords du problème de concentration.

Le procédé de maillage adaptatif converge plus rapidement par rapport au cas du maillage initial de 3 points (au moins 2 fois plus rapidement), comme on pouvait s'y attendre. Néanmoins, le nombre de points est plus important (au moins 2 fois plus), le maillage initial étant inutilement trop dense.

	Nombre d'enrichissements	Nombre de points du maillage final	Nombre d'étapes de maillage adaptatif
RPGD_S1	64 (cumulé) – 14 (final)	378	7
RPGD_S21	10	421	10
RPGD_S22	22	382	7

TAB. D.II-10 Comparaison des résultats entre deux stratégies de maillage adaptatif ($A_{cT} = 5$ - maillage initial = maillage de T découplée)

Cet exemple permet d'illustrer l'intérêt de conserver un maillage spécifique à chaque physique pour limiter la densité du maillage même si le maillage initial ne doit pas être trop éloigné pour ne pas trop nécessiter d'étapes de maillage adaptatif. Ces résultats vont être ensuite discutés dans le cas du problème fortement couplé de thermoviscoélasticité.

D.II.2.2 Résultats du problème fortement couplé thermoviscoélastique

Le problème thermoviscoélastique est défini sur le domaine $\Omega = \Omega_x \times \Omega_t = [0;10] \times [0;10]$ où l'on considère là encore des conditions initiales et aux bords pour u et T nulles. La valeur de α_{TT} est fixée à 0.4. Les autres paramètres de simulation sont les mêmes que dans le cas sans maillage adaptatif (cf. **TAB. D.I-13**). Pour ces simulations, les maillages spatiaux sont les mêmes et réguliers pour u et T (11 points).

Comme dans le cas du problème diffusothermique, la technique de maillage adaptatif est appliquée uniquement pour le temps à travers la variable t . Rappelons que cette même technique peut être appliquée à l'espace unidimensionnel x .

Les maillages temporels initiaux sont eux aussi réguliers et identiques pour les deux physiques (maillage initial temporel : 11 points) et mène à un pas de temps de 1 (s).

Les paramètres relatifs à la technique de maillage adaptatif choisis pour les simulations sont (cf. **TAB. D.I-11**) :

- même maillage temporel initial pour les deux physiques. Un maillage régulier de 11 points menant à un pas de temps de 1 (s) est considéré. Cette discrétisation permet de s'affranchir des problèmes liés à une mauvaise prise en compte de chacun des termes sources du problème découplé (α_{TT} égal à 0) puisque dans ce cas, la source est bien décrite.

- ε_{RV}^{uT} égal à 95% (cela fixe le nombre de modes calculé sur chaque maillage)

- le critère d'arrêt du procédé de maillage adaptatif : RV égal à 0.02 pour u et RV égal à 0.002 pour T . Ce rapport étant représentatif de la différence d'amplitude de la source de u et celle de T dans le cas découplé.

Résultats dans le cas RPGD_S1

Nous allons présenter les résultats obtenus avec la stratégie RPGD_S1. Ils seront discutés en fonction de la stratégie de construction de maillage utilisée.

- Construction de maillage M_S1 (concaténation des maillages)

La solution finale est obtenue après 6 étapes de maillage adaptatif. Le nombre de points pour le maillage temporel est passé de 11 à 159 afin d'avoir une certaine précision sur la solution. Le nombre de modes PGD pour décrire la solution sur ce maillage est 10. Comme on a choisi ici de concaténer les maillages, on a le même maillage temporel pour u et T comme on peut le voir la **FIG. D.II-8**. L'évolution du nombre de points du maillage commun et du résidu est donnée pour chaque étape de maillage adaptatif le **TAB. D.II-11**. On peut remarquer que le résidu décroît avec les étapes de maillage adaptatif pour les deux physiques simultanément.

Le **TAB. D.II-11** montre également le nombre de points ajoutés à chaque étape de maillage adaptatif, c'est-à-dire le nombre de points ajoutés par le procédé de maillage adaptatif pour chaque physique avant concaténation des deux maillages. On voit qu'à chaque étape, le nombre de points ajoutés pour u est beaucoup plus important que celui pour T . Sur le maillage commun, la plupart de points viennent du maillage de u .

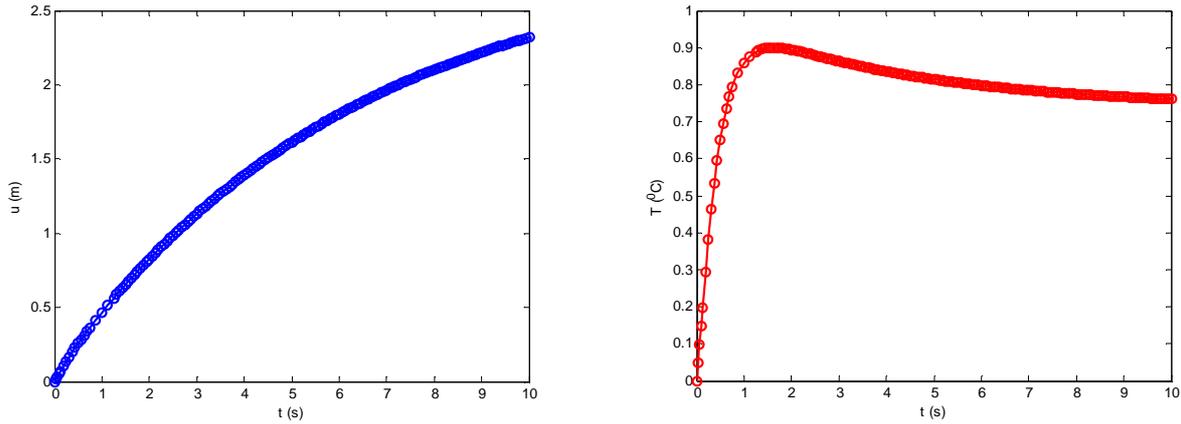


FIG. D.II-8 Evolution du déplacement au point $x=5$ (gauche) et de la température au point $x=7$ (droite) en fonction du temps pour l'étape de maillage adaptatif finale

Etape de maillage adaptatif	Nombre de modes	Nombre de points pour le temps (maillage commun)	Déplacement u		Température T	
			Nombre de points ajoutés par le maillage adaptatif	Résidu final	Nombre de points ajoutés par le maillage adaptatif	Résidu final
0	4	11	9	0.2841	1	0.0311
1	4	21	18	0.1265	2	0.0183
2	4	41	36	0.0568	3	0.0093
3	6	79	2	0.0300	1	0.0047
4	6	81	72	0.0262	4	0.0042
5	7	155	0	0.0117	4	0.0030
6	10	159		0.0103		0.0017

TAB. D.II-11 Evolution du nombre de points en temps et du résidu pour u et T en fonction des étapes de maillage adaptatif

Notons que dans ce cas (M_S1), le nombre de points pour le temps de chaque physique est toujours le même.

- Construction de maillage M_S2 (maillage spécifique à chaque physique)

Dans le cas de la stratégie M_S2, chaque physique a son propre maillage comme on peut le voir sur les solutions de u et T (la FIG. D.II-9). L'évolution du nombre de points et du résidu est donnée pour chaque étape de maillage adaptatif TAB. D.II-12. On voit que pour la précision demandée sur u et T , 11 étapes de maillage adaptatif sont nécessaires. La solution finale est décrite avec 10 modes. Le maillage temporel final de u présente 4 fois plus de points que celui de T . Le maillage de u présente le même nombre de points que dans le cas de la concaténation des deux maillages.

Le nombre d'étapes de maillage adaptatif est beaucoup plus élevé dans ce cas. Notons qu'à partir de l'étape 8, comme le seuil du résidu $RV^{(u)}$ est atteint, le maillage de u n'est plus raffiné. A chaque étape de maillage adaptatif, le résidu ne décroît pas obligatoirement. Ceci est lié au couplage entre les deux physiques qui évolue au cours du procédé de maillage adaptatif.

Dans ce cas, on voit que le résidu de T évolue plus fortement que celui de u en raffinant le maillage, ce qui mène à un nombre de points plus élevé sur u puisque l'on a choisi d'arrêter le maillage pour un résidu de même poids.

Si maintenant, on compare les maillages obtenus avec les méthodes M_S1 et M_S2 (FIG. D.II-8 et FIG. D.II-9), on voit que le maillage de T a quasi la même densité de point pour t inférieure à 2s et après il est moins dense avec la stratégie M_S2 par rapport à M_S1. Comme nous l'avons déjà précisé, le nombre de points ajoutés par les étapes de maillage adaptatif pour u est beaucoup plus important que celui pour T . Ainsi, lorsque l'on concatène les deux maillages des points sont ajoutés pour T pour t supérieur à 2 (s) mais ils sont liés à l'évolution de u dans cette zone et non à celle de T .

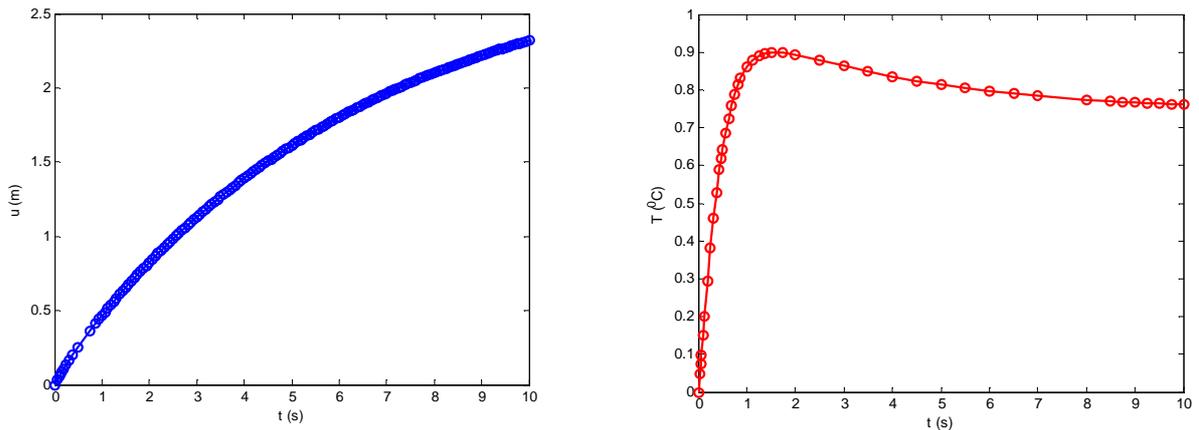


FIG. D.II-9 Evolution du déplacement au point $x=5$ (gauche) et de la température au point $x=7$ (droite) en fonction du temps pour l'étape de maillage adaptatif finale

Etape de maillage adaptatif	Nombre de modes	Déplacement u		Température T	
		Nombre de points pour le temps	Résidu final	Nombre de points pour le temps	Résidu final
0	4	11	0.2841	11	0.0311
1	4	20	0.1108	12	0.0256
2	4	38	0.0452	14	0.0114
3	4	39	0.0789	16	0.0103
4	6	43	0.0737	18	0.0054
5	6	77	0.0624	21	0.0044
6	6	78	0.0428	24	0.0046
7	7	153	0.0251	28	0.0033
8	7	158	0.0196	31	0.0036
9	7	158	0.0196	33	0.0034
10	8	158	0.0197	38	0.0030
11	10	158	0.0194	44	0.0017

TAB. D.II-12 Evolution du nombre de points en temps et du résidu pour u et T en fonction des étapes de maillage adaptatif

Pour mieux analyser l'effet de couplage, le résultat obtenu dans le cas découplé et la méthode de construction de maillage M_S2 est présenté maintenant. Comme le problème est découplé, le nombre d'étapes de maillage adaptatif pour chacune des physiques peut être différent. La solution finale obtenue après 11 étapes de maillage adaptatif pour u et 8 étapes de maillage adaptatif pour T

est présentée **FIG. D.II-10**. La solution finale est obtenue avec 1 mode PGD et 60 points pour le temps pour le déplacement et 2 modes PGD et 32 points pour le temps pour la température. L'évolution du nombre de points et du résidu est donnée pour chaque étape de maillage adaptatif **TAB. D.II-13**. Notons que par rapport au cas couplé, le nombre de points est moindre lié aux zones transitoires moins larges.

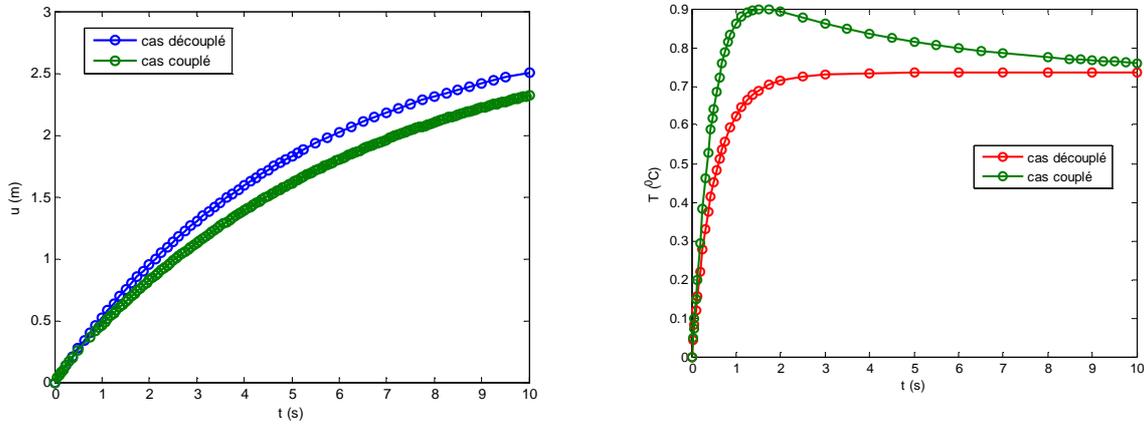


FIG. D.II-10 Cas couplé et découplé. Evolution du déplacement au point $x=5$ (gauche) et de la température au point $x=7$ (droite) en fonction du temps pour l'étape de maillage adaptatif finale

Etape de maillage adaptatif	Déplacement u			Température T		
	Nombre de points pour le temps	Nombre de modes	Résidu final	Nombre de points pour le temps	Nombre de modes	Résidu final
0	11	1	0.2598	11	2	0.0270
1	13	1	0.1817	12	2	0.0212
2	15	1	0.1394	14	2	0.0090
3	17	1	0.1147	15	2	0.0094
4	22	1	0.0869	18	2	0.0060
5	27	1	0.0608	20	2	0.0047
6	31	1	0.0496	24	2	0.0033
7	37	1	0.0379	27	2	0.0025
8	45	1	0.0285	32	2	0.0019
9	52	1	0.0225			
10	59	1	0.0210			
11	60	1	0.0189			

TAB. D.II-13 Evolution du nombre de points en temps et du résidu pour u et T en fonction des étapes de maillage adaptatif

La concaténation des maillages (M_S1) pour les différents phénomènes physiques mène dans le cas de la stratégie RPGD_S1 à un nombre d'étapes de maillage adaptatif moins élevé. Néanmoins, une des deux physiques contient beaucoup trop de points (comme par exemple 159 au lieu de 44). La différence dépend des temps caractéristiques des phénomènes mis en jeu mais aussi des valeurs des termes de couplage. Pour minimiser le stockage des données, on préférera la stratégie M_S2 alors que pour diminuer le temps de calcul, on aura tendance à préférer la stratégie M_S1.

Résultats dans le cas RPGD_S2

Nous allons maintenant étudier l’impact de la construction des maillages dans le cas où la stratégie de maillage adaptatif est la stratégie RPGD_S2. Rappelons que dans ce cas, soit 1 mode (RPGD_S21) soit plusieurs modes (RPGD_S22) sont ajoutés lors de la résolution PGD.

Construction de maillage M_S1 (concaténation des deux maillages)

Regardons tout d’abord les résultats obtenus avec la méthode 1 c’est-à-dire la concaténation des maillages. Les résultats obtenus avec RPGD_S21 sont reportés **FIG. D.II-11** et le **TAB. D.II-14** et ceux avec RPGD_S22 la **FIG. D.II-12** et le **TAB. D.II-15**. La solution à l’étape finale de maillage adaptatif est obtenue avec 10 modes dans le cas RPGD_S21 et 23 modes dans le cas RPGD_S22.

Comme dans le cas RPGD_S1, le nombre de points ajoutés par le maillage adaptatif de T est beaucoup plus faible que celui de u . C’est la raison pour laquelle, le maillage de T présente beaucoup de points pour t supérieur à 2 (s).

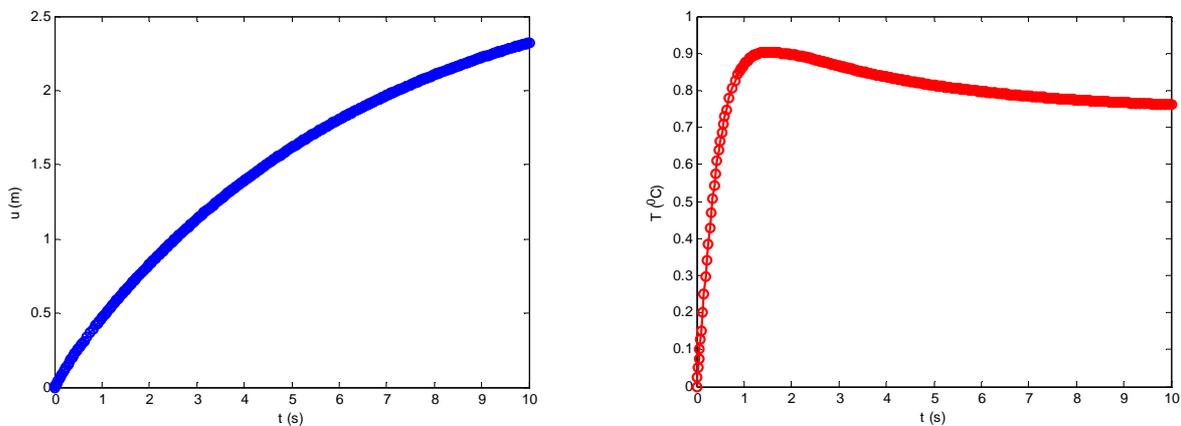


FIG. D.II-11 RPGD_S21 - Evolution du déplacement au point $x=5$ (gauche) et de la température au point $x=7$ (droite) en fonction du temps pour l’étape de maillage adaptatif finale

Etape de maillage adaptatif	Nombre de modes	Nombre de points pour le temps (maillage commun)	Déplacement u		Température T	
			Nombre de points ajoutés par le maillage adaptatif	Résidu final	Nombre de points ajoutés par le maillage adaptatif	Résidu final
0	1	11	9	0.3905	1	0.1539
1	1	20	17	0.3027	1	0.0318
2	1	38	3	0.1434	1	0.0227
3	1	42	33	0.1215	1	0.0135
4	1	75	3	0.0749	2	0.0117
5	1	79	74	0.0625	1	0.0088
6	1	154	4	0.0308	4	0.0054
7	1	161	11	0.0242	6	0.0042
8	1	176	138	0.0212	1	0.0028
9	1	315	0	0.0177	5	0.0024
10	1	320		0.0167		0.0019

TAB. D.II-14 RPGD_S21 - Evolution du nombre de points en temps et du résidu pour u et T en fonction des étapes de maillage adaptatif

Dans le cas où "un mode" est enrichi à chaque étape de maillage adaptatif (RPGD_S21), le nombre d'étapes de maillage adaptatif est plus important que pour le cas "plusieurs modes" (10 au lieu de 6). De plus, le nombre de points en temps est lui aussi plus élevé (320 au lieu de 162).

Il est donc préférable d'utiliser la stratégie RPGD_S22 au lieu de RPGD_21. Nous avons fait la même analyse dans le cas découplé (**chapitre B**).

Si l'on compare ces résultats à ceux obtenus avec la méthode RPGD_S1, on aboutit aux mêmes conclusions que dans le cas découplé. Lorsque l'on commence avec un maillage grossier, il est préférable d'utiliser la stratégie RPGD_S1 qui mène à moins de points et moins de modes pour décrire la solution avec une précision donnée tout en ayant quasiment le même nombre d'étapes de maillage adaptatif.

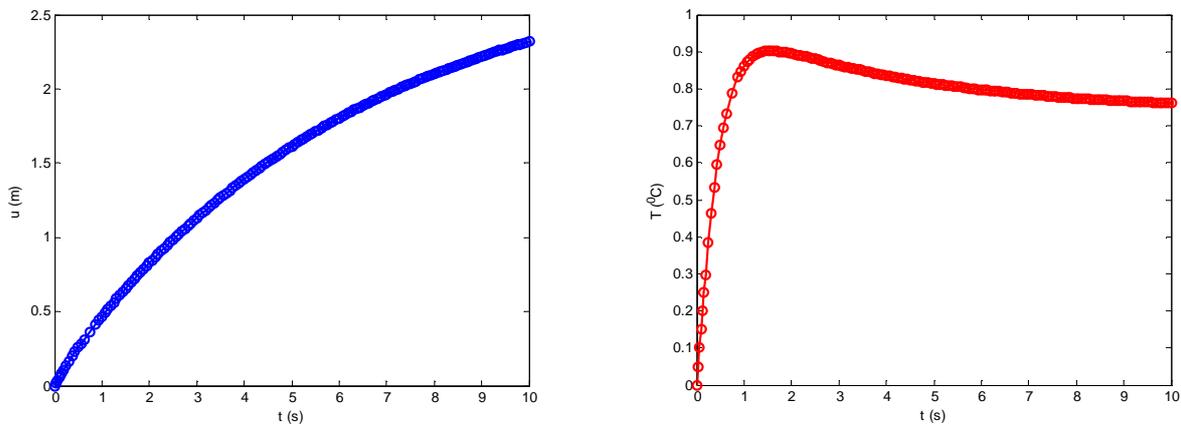


FIG. D.II-12 RPGD_S22 - Evolution du déplacement au point $x=5$ (gauche) et de la température au point $x=7$ (droite) en fonction du temps pour l'étape de maillage adaptatif finale

Etape de maillage adaptatif	Nombre de modes	Nombre de points pour le temps (maillage commun)	Déplacement u		Température T	
			Nombre de points ajoutés par le maillage adaptatif	Résidu final	Nombre de points ajoutés par le maillage adaptatif	Résidu final
0	4	11	9	0.2841	1	0.0311
1	3	21	18	0.1299	2	0.0191
2	3	40	36	0.0624	1	0.0090
3	1	76	2	0.0534	1	0.0093
4	5	79	73	0.0341	1	0.0059
5	1	153	6	0.0214	4	0.0038
6	6	162		0.0118		0.0020

TAB. D.II-15 RPGD_S22 - Evolution du nombre de points en temps et du résidu pour u et T en fonction des étapes de maillage adaptatif

- Construction de maillage M_{S2} (maillage spécifique à chaque physique)

Regardons maintenant les résultats obtenus avec la méthode 2 (M_{S2}) c'est-à-dire chaque physique a son propre maillage. Les résultats obtenus avec RPGD_S21 sont reportés la **FIG. D.II-13** et le **TAB. D.II-16** et ceux avec RPGD_S22 la **FIG. D.II-14** et le **TAB. D.II-17**. La solution à l'étape finale de maillage adaptatif est obtenue avec 16 modes dans le cas RPGD_S21 et 25 modes dans le cas RPGD_S22. Dans le cas où "un mode" est enrichi à chaque étape de maillage adaptatif, le nombre d'étapes de maillage adaptatif est plus important que pour le cas "plusieurs modes" (16 au lieu de 12). De plus, le nombre de points en temps est lui aussi plus élevé (326 au lieu de 162 pour u et 66 au lieu de 38 pour T).

Notons que dans ces cas, les résidus peuvent légèrement augmenter.

Comme dans le cas concaténation des maillages, il est préférable d'utiliser la stratégie "plusieurs modes".

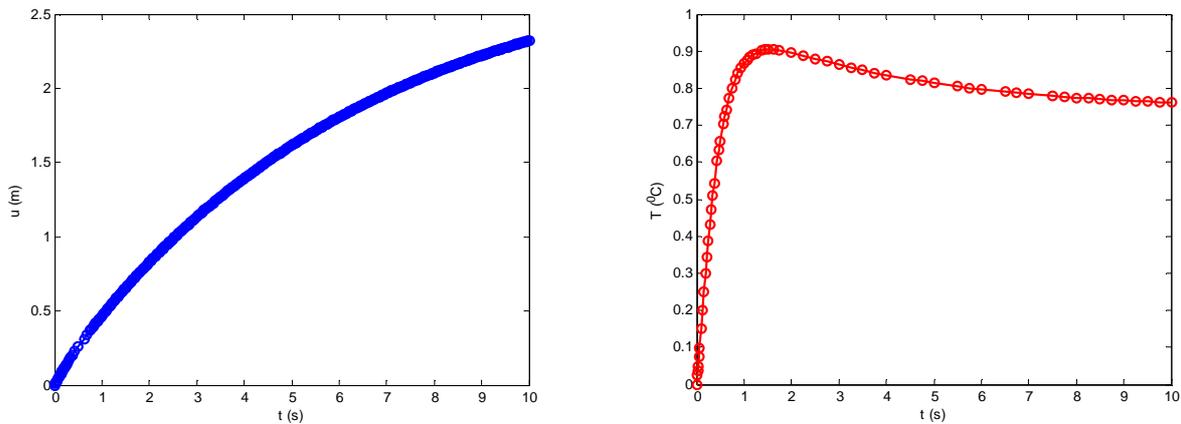


FIG. D.II-13 RPGD_S21 - Evolution du déplacement au point $x=5$ (gauche) et de la température au point $x=7$ (droite) en fonction du temps pour l'étape de maillage adaptatif finale

Etape de maillage adaptatif	Nombre de modes	Déplacement u		Température T	
		Nombre de points pour le temps	Résidu final	Nombre de points pour le temps	Résidu final
0	1	11	0.3905	11	0.1539
1	1	20	0.2905	12	0.0344
2	1	37	0.1027	13	0.0243
3	1	40	0.1392	14	0.0194
4	1	74	0.1485	15	0.0127
5	1	78	0.1189	16	0.0151
6	1	80	0.0808	18	0.0126
7	1	152	0.0494	22	0.0080
8	1	158	0.0434	27	0.0068
9	1	304	0.0371	28	0.0067
10	1	316	0.0198	31	0.0057
11	1	316	0.0212	33	0.0052
12	1	326	0.0155	40	0.0046
13	1	326	0.0127	46	0.0038
14	1	326	0.0153	54	0.0032
15	1	326	0.0117	58	0.0024
16	1	326	0.0127	66	0.0019

TAB. D.II-16 RPGD_S21 - Evolution du nombre de points en temps et du résidu pour u et T en fonction des étapes de maillage adaptatif

Comparons maintenant les résultats obtenus avec la stratégie RPGD_S22 selon la construction de maillage utilisée. Lorsque l'on utilise un maillage spécifique à chaque physique, le nombre de points en temps est largement réduit pour une des physiques (38 au lieu de 162 points en temps pour T) alors que le nombre d'étapes de maillage adaptatif est plus élevé (12 au lieu de 6). Le nombre de modes est légèrement plus élevé (25 au lieu de 23). Le choix d'une stratégie de construction se discutera donc en terme de stockage des données et de temps de calcul.

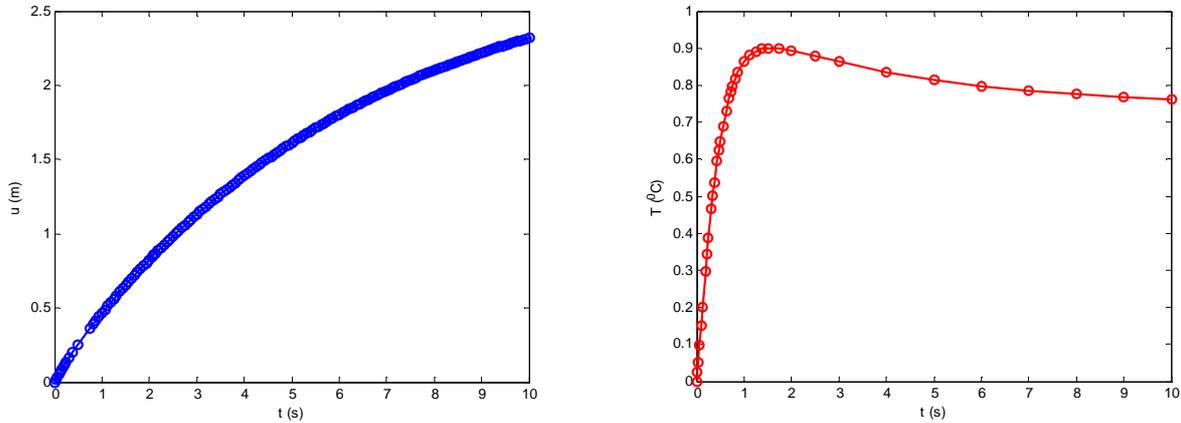


FIG. D.II-14 RPGD_S22 - Evolution du déplacement au point $x=5$ (gauche) et de la température au point $x=7$ (droite) en fonction du temps pour l'étape de maillage adaptatif finale

Etape de maillage adaptatif	Nombre de modes	Déplacement u		Température T	
		Nombre de points pour le temps	Résidu final	Nombre de points pour le temps	Résidu final
0	4	11	0.2841	11	0.0311
1	1	20	0.1139	12	0.0270
2	3	39	0.0840	13	0.0164
3	2	76	0.0725	14	0.0115
4	3	84	0.0357	15	0.0110
5	3	150	0.0252	17	0.0067
6	1	155	0.0229	18	0.0055
7	2	162	0.0194	20	0.0048
8	1	162	0.0191	25	0.0030
9	1	162	0.0190	26	0.0027
10	1	162	0.0194	32	0.0025
11	1	162	0.0190	33	0.0024
12	2	162	0.0183	38	0.0019

TAB. D.II-17 RPGD_S22 - Evolution du nombre de points en temps et du résidu pour u et T en fonction des étapes de maillage adaptatif

Bilan maillage adaptatif / problème thermoviscoélastique fortement couplé

Les deux stratégies de maillage adaptatif ont été mises en place dans le cas d'équations de thermoviscoélasticité fortement couplées. Comme les deux phénomènes physiques s'influencent l'un l'autre, nous avons pu étudier deux types de construction de maillage à chaque étape de maillage adaptatif : la concaténation des maillages et l'utilisation d'un maillage spécifique à chaque physique.

Rappelons que dans le cas de ce problème couplé, les équations sont de nature différentes et donc certaines matrices intégrales n'interviennent que pour un des problèmes et il est donc intéressant d'étudier ces deux méthodes de construction pour les deux stratégies de maillage adaptatif.

L'ensemble des résultats obtenus pour le problème thermoviscoélastique en terme nombre de points, nombre d'enrichissements et nombre d'étapes de maillage adaptatif sont reportés **TAB. D.II-18** en fonction de la stratégie de maillage adaptatif utilisée et de la stratégie de construction de maillage.

	Nombre de points pour u	Nombre de points pour T	Nombre d'enrichissements	Nombre d'étapes
RPGD_S1 et M_S1	159	159	41	7
RPGD_S1 et M_S2	158	44	73	12
RPGD_S21 "un mode" et M_S1	320	320	11	11
RPGD_S22 "plusieurs modes" et M_S1	162	162	23	7
RPGD_S21 "un mode" et M_S2	326	66	17	17
RPGD_S22 "plusieurs modes" et M_S2	162	38	25	13

TAB. D.II-18 Résultats du problème thermoviscoélastique en fonction de la stratégie de construction de maillage et de la stratégie de maillage adaptatif utilisée

En conclusion, pour la stratégie RPGD_S1, la concaténation des deux maillages augmente le nombre de points pour seulement une des physiques. En effet, les paramètres de simulation utilisés mènent à des physiques où les transitoires sont inclus les uns dans les autres. Ce cas pourrait être beaucoup plus discriminant si les transitoires des différentes physiques étaient disjoints.

Néanmoins, concaténer les deux maillages réduit le nombre d'étapes de maillage adaptatif mais aussi le nombre total d'enrichissements. Rappelons qu'en général c'est l'étape d'enrichissement qui est la plus coûteuse en terme de temps de calcul. Dans le cas de simulations où l'idée est d'optimiser le stockage des données et non le temps de calcul, il vaut mieux que chaque physique ait son propre maillage. Si le but est d'optimiser le temps de calcul, cela va dépendre de la différence entre les deux maillages. De façon générale, prendre le même maillage pour les deux physiques est plus avantageux en temps de calcul.

Utiliser la stratégie RPGD_S1 ou RPGD_S2 mène aux mêmes conclusions en ce qui concerne la stratégie de construction de maillage. De même, garder 1 mode par rapport à plusieurs modes mène aux mêmes conclusions que dans le cas avec une seule physique.

Garder plusieurs modes réduit le nombre de points de maillage et le nombre d'étapes de maillage adaptatif mais en contre partie le nombre de modes pour décrire la solution est plus grand. Ce choix ne sera donc pas judicieux si on veut utiliser cette solution comme source d'un nouveau problème où que les termes apparaissant dans les équations sont fortement non linéaires.

Dans le cas où on choisit de concaténer les deux maillages (M_S1) la stratégie RPGD_S22 est à privilégier. En revanche dans le cas où chaque physique a son propre maillage (M_S2), la stratégie où tout est recalculé (RPGD_S1) semble à privilégier.

Notons que l'on observe ce type de tendance car les solutions recherchées sont particulières. Rappelons qu'en effet, le transitoire d'une des deux physiques est inclus dans l'autre. Garder le maillage propre à chaque physique devrait être plus avantageux dans le cas où les transitoires sont non entièrement inclus l'un dans l'autre. Cette situation pourrait avoir lieu pour des sources différentes.

Conclusion du chapitre

L'objectif de ce chapitre est la mise en place de la PGD et la technique de maillage adaptatif pour deux problèmes multiphysiques couplés : un problème partiellement couplé diffusothermique et un problème fortement couplé thermoviscoélastique.

Dans la première partie, nous avons présenté la formulation du problème pour deux types de couplage et les résultats obtenus sur des maillages fixés. Les deux problèmes couplés se différencient dans la nature du couplage qui nécessite des différentes résolutions. Pour le problème partiellement couplé, la résolution est la même par rapport au cas découplé. Pour le problème fortement couplé, une résolution "couplage total" est nécessaire. Les résultats obtenus sur des maillages fixés sont présentés. Ils consistent en une étude sur l'influence des paramètres de couplage : le coefficient du terme couplé, le temps caractéristique, le maillage temporel.

La première conclusion est que la PGD permet de prédire la réponse de problèmes multiphysiques partiellement couplés et fortement couplés. Dans le cas fortement couplé, les exemples traités nous ont permis de mettre en avant des cas pour lesquels la méthode PGD ne convergait. Pour ces mêmes cas, la méthode des éléments finis a elle aussi été mise à défaut pour des valeurs de paramètres plus restreintes. Ce cas ne nous permet donc pas de mettre à défaut l'utilisation de la PGD dans ce type de problème car la non convergence est liée à une valeur limite du coefficient de couplage. Une approche MAN-PGD pour le problème fortement couplé peut être envisagée pour déterminer cette limite.

De plus, les termes de couplage font apparaître de nouveaux transitoires qui n'étaient pas visibles sur le problème découplé. Si le maillage est suffisant, la PGD permet de prédire ces transitoires. On voit que cela nécessite plus de modes que dans le cas des simulations découplés auxquelles elles se rapportent. Au fur et à mesure des enrichissements, le résidu diminue jusqu'à atteindre un certain seuil, seuil lié au maillage utilisé pour décrire la solution.

De plus, nous ne connaissons pas *a priori* le maillage nécessaire pour obtenir une certaine précision sur la solution, nous avons donc testé la méthode de maillage adaptatif présentée dans le **chapitre B**.

Dans la deuxième partie, la technique de maillage adaptatif a été adaptée aux problèmes multiphysiques couplés. Nous avons choisi la méthode la plus simple qui consiste à appliquer la méthode mise en place au **chapitre B** à chacune des physiques. La discussion a été faite sur la construction du maillage. Deux choix étaient possibles : concaténer les deux maillages ou continuer le calcul avec le maillage propre à chaque physique. Avec la première solution, les matrices couplées sont définies sur un même maillage alors que dans la deuxième solution un maillage spécifique est utilisé.

La méthode couplant la technique de maillage adaptatif et la PGD a été aussi étudiée pour ces cas couplés. Le couplage de cette méthode avec la PGD mène aux mêmes conclusions que dans le cas avec une seule physique (**chapitre B**). En ce qui concerne la méthode de construction de maillage, concaténer les deux maillages permet de converger avec moins d'étapes de maillage adaptatif mais avec des densités de maillage beaucoup plus importantes.

Nous retiendrons que la méthode PGD permet de décrire la réponse transitoire des problèmes multiphysiques couplés. La résolution fortement couplée de ces problèmes est complexe dans la mesure où selon la nature des couplages, le système à résoudre peut devenir fortement non linéaire. Dans les exemples traités ici, le système restait linéaire par rapport à chacune des physiques et la méthode de point fixe à directions alternées menait à la résolution de systèmes linéaires de taille raisonnable. Considérer des problèmes couplés où les paramètres de couplage dépendent eux aussi des

physiques peut mener à des non linéarités persistantes pour lesquels il serait *a priori* intéressant de coupler la méthode PGD à la MAN, ce qui a été illustrée ici uniquement dans le cas d'une non linéarité dans le terme source au **chapitre C**. Lors de l'étape de calcul des coefficients, le problème couplé nécessite la résolution d'un système non linéaire qui a été résolu là encore avec une méthode de point fixe à directions alternées.

La méthode PGD peut donc être appliquée pour l'étude de problèmes multiphysiques couplés.

Conclusion

L'objet de ce travail s'inscrit dans la problématique de la résolution des problèmes couplés multiphysiques. Dans cette thèse, le développement d'un outil numérique pour résoudre ces problèmes transitoires à différents temps caractéristiques rencontrés en mécanique des matériaux a été réalisé.

Une étude bibliographique a recensé les méthodes classiquement mises en œuvre pour résoudre les problèmes multiphysiques et multitemps. Beaucoup de possibilités existent, mais nous sommes plus spécifiquement intéressés à la méthode de Décomposition Propre Généralisée (PGD) qui est une méthode de réduction de modèles non incrémentale basée sur la représentation à variables séparées. Au début de ce travail, nous nous posons la question de l'opportunité d'utiliser cette méthode, si dans le principe aucun obstacle ne pouvait être imaginé encore fallait-il démontrer sa faisabilité.

Dans ce travail, la méthode PGD a été tout d'abord détaillée et utilisée pour résoudre l'équation de la chaleur transitoire 2D. Afin d'analyser le comportement de cette technique numérique, des simulations pour trois sources de la chaleur différentes et des temps caractéristiques physiques distincts ont été menées. La PGD a permis de prédire pour différents paramètres la solution qui présente des transitoires fortement différents. Une technique de maillage adaptatif simple a été proposée et mise en place afin d'affiner la discrétisation aux différentes zones transitoires de la solution. Elle a permis de capter automatiquement, en partant d'un maillage grossier, les zones à fortes variations localisées, ces dernières pouvant être gouvernées par le temps caractéristique physique ou par la variation de la source. Cette phase d'adaptation de maillage permet de rectifier en partie l'erreur de la solution PGD lorsque le nombre de mode est restreint. Deux méthodes couplant la PGD et la technique de maillage adaptatif ont été proposées et discutées. La première consiste à recalculer la solution PGD sur chaque nouveau maillage à partir de la solution nulle. La seconde consiste à calculer la solution sur chaque nouveau maillage en conservant les fonctions de base de la solution générées sur le maillage précédent. La première stratégie (notée RPGD_S1) a été plus performante dans la mesure où peu de modes sont nécessaires sur le maillage final pour décrire précisément la solution. Cependant, la seconde stratégie (notée RPGD_S2), pour laquelle un nombre plus important de modes a été nécessaire pour décrire la solution finale, a permis de réduire fortement le nombre d'enrichissements cumulé au cours de l'ensemble du procédé de maillage adaptatif. ***Le résultat marquant tient dans la capacité de la technique de maillage adaptatif à décrire automatiquement des transitoires localisés.***

La PGD a été ensuite étendue à la résolution d'une famille de problèmes transitoires non linéaires. L'idée a été de coupler la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) avec la PGD pour résoudre l'équation de la chaleur 1D transitoire avec une non linéarité polynomiale dans le terme source. La MAN permet de transformer l'équation non linéaire en une série d'équations linéaires transitoires qui sont ensuite résolues avec la PGD d'une manière très efficace. Après avoir générées toutes les solutions à chaque ordre de la MAN, nous pouvons *a posteriori* obtenir la solution générale pour un nombre infini de problèmes (chacun d'entre eux correspond à une valeur du coefficient multiplicateur de source ϕ). Une étude sur le domaine de validité de la solution MAN a été présentée. Il a permis de déterminer la longueur de chaque morceau de branche de solution ϕ_{max} avec une précision donnée. Afin de construire la branche complète de solution, plusieurs pas de continuation ont été effectués. L'étude sur la non linéarité "déstabilisante" $+T^2$ a illustré que la MAN est capable d'identifier la limite de la valeur du coefficient ϕ pour un système non borné (branche à l'infini). ***Il est à souligner dans cette partie que des familles de problèmes transitoires temporelles non linéaires peuvent être résolus efficacement en couplant la MAN avec la PGD ce qui est à notre connaissance un résultat nouveau.***

Le dernier volet porte sur la résolution de problèmes multiphysiques multitemps. La mise en place de la PGD pour deux problèmes : un partiellement couplé diffusothermique et un fortement couplé thermoviscoélastique a été réalisée. Une première conclusion est qu'il est possible d'utiliser la PGD pour résoudre une grande famille de problèmes couplés.

Dans un premier temps, la formulation du problème pour deux types de couplage et les résultats obtenus ont été présentés dans le cas de maillages fixes. Les deux problèmes se différencient dans la complexité du couplage qui nécessite des stratégies de résolutions spécifiques qui ont été explicitées dans ce travail. Pour le problème partiellement couplé, la résolution est similaire au cas complètement découplé en utilisant une technique séquentielle. Pour le problème fortement couplé, une résolution de type "couplage total" est nécessaire. Lors de l'étape de calcul des coefficients, ce problème fortement couplé nécessite en plus la résolution d'un système non linéaire qui a été réalisée avec une méthode de point fixe à directions alternées. Dans ces deux cas, la PGD a permis de prédire la réponse de problèmes multiphysiques. De plus, les termes de couplage font apparaître de nouveaux transitoires qui n'étaient pas visibles sur le problème découplé. Néanmoins si le maillage est suffisant, la PGD permet de prédire ces transitoires avec un nombre de modes plus élevé que dans le cas découplé.

Dans un second temps, la méthode de maillage adaptatif présentée précédemment a été appliquée aux problèmes multiphysiques. Le couplage de la technique de maillage adaptatif avec la PGD mène aux mêmes conclusions que dans le cas avec une seule physique. La discussion a porté sur la stratégie de construction des maillages. Deux choix étaient possibles : concaténer les deux maillages temporels de chaque physique ou adapter indépendamment chacun de ces maillages. Avec la première stratégie, les matrices couplées sont définies sur un même maillage, alors que dans la seconde, comme un maillage spécifique est utilisé pour chaque physique, les termes de couplages nécessitent une opération de projection supplémentaire. La concaténation de deux maillages permet de converger avec moins d'étapes de maillage adaptatif mais avec des densités de maillage beaucoup plus importantes.

Dans le cas fortement couplé, les exemples traités nous ont permis de mettre en avant des cas pour lesquels la méthode PGD ne convergeait pas. Pour ces mêmes situations, la méthode des éléments finis a elle aussi été mise à défaut mais son domaine de convergence est bien plus faible que la PGD.

Cette partie a permis de compléter la famille de problèmes couplés que l'on peut résoudre avec la PGD. La stratégie de maillage adaptatif associée à la PGD trouve tout son sens dans des situations multitemps fortement couplées.

En résumé, dans ce travail, nous avons montré que la PGD peut être utilisée pour la résolution de problèmes multiphysiques transitoires quelle que soit la nature du couplage (découplé, partiellement couplé ou fortement couplé). Couplée à la MAN, elle est aussi une méthode très efficace pour résoudre certaines familles de problèmes non linéaires transitoires (où la non linéarité se trouve dans la source). Les zones transitoires du problème peuvent être captées de manière automatique grâce à une technique de maillage adaptatif simple pour le temps. Deux stratégies de couplage de cette technique avec la PGD ont été étudiées pour mettre en évidence tout l'intérêt de chaque stratégie selon le problème étudié.

Perspectives

Pour les problèmes où la solution présente des fortes variations localisées ou des singularités en espace, la technique de maillage adaptatif en espace doit être validée, des développements en interne qui ne sont pas présentés ici semblent donner satisfaction. Du fait de la séparation des variables de la PGD et de la technique de maillage adaptatif utilisant un indicateur unidimensionnel, l'extension de la technique ne pose pas de difficultés. Une étude sur l'influence des paramètres de la technique de maillage adaptatif tels que l'estimateur d'erreur, le déraffinement, la technique d'adaptation pourrait être menée afin d'optimiser la procédure de maillage adaptatif.

Le couplage MAN-PGD a été appliqué ici seulement pour les problèmes où la non linéarité se trouve dans la source et possède une forme particulière. Une première perspective consiste à étendre la portée d'application de cette association MAN-PGD. Une seconde consiste à utiliser la MAN-PGD pour les problèmes paramétriques, ce travail a déjà débuté et fait l'objet d'un article sous presse [Leygue 2012].

Il est aussi envisageable d'utiliser, cette technique pour les problèmes multiphysiques où les termes de couplages peuvent induire des non linéarités d'ordre plus ou moins élevé. Comme les non linéarités généralement présentes dans les problèmes couplés sont de différentes natures, soit thermodynamiques comme nous avons traités dans cette thèse soit liés aux paramètres matériaux, la généralisation de la méthode semble intéressante et demandera un travail de recherche en tant que tel.

Il apparaît nécessaire d'aller comprendre les situations de non convergence de la PGD pour certains des paramètres de couplage. La non convergence semble liée à des valeurs limites des coefficients de couplage et une approche MAN-PGD pourrait être envisagée pour étudier les branches de réponses et détecter des instabilités comme cela a été initié dans la partie **D.I.2.2**.

L'extension de la PGD à des problèmes plus conséquents peut être maintenant abordée avec des questionnements techniques qui apparaîtront sur la taille des matrices, les quantités à stocker. Un travail d'algorithmie sera nécessaire.

Bibliographie

- [Alam 2006] J.M. Alam, N.K.R. Kevlahan, O.V. Vasilyev, Simultaneous space–time adaptive wavelet solution of nonlinear parabolic differential equations, *Journal of Computational Physics* 214 (2006) 829-857.
- [Allaire 2005] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation: une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*, École polytechnique, 2005.
- [Allery 2005] C. Allery, C. Béghein, A. Hamdouni, Applying proper orthogonal decomposition to the computation of particle dispersion in a two-dimensional ventilated cavity, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 10 (2005) 907-920.
- [Allery 2011] C. Allery, A. Hamdouni, D. Ryckelynck, N. Verdon, A priori reduction method for solving the two-dimensional Burgers' equations, *Applied Mathematics and Computation* 217 (2011) 6671-6679.
- [Ammar 2006] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, R. Keunings, A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 139 (2006) 153-176.
- [Ammar 2007] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, R. Keunings, A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids - Part II: Transient simulation using space-time separated representations, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 144 (2007) 98-121.
- [Ammar 2009] A. Ammar, E. Pruliere, J. Ferec, F. Chinesta, E. Cueto, Coupling finite elements and reduced approximation bases, *European Journal of Computational Mechanics* 18 (2009) 445-463.
- [Ammar 2010a] A. Ammar, M. Normandin, F. Daim, D. Gonzalez, E. Cueto, F. Chinesta, Non-incremental strategies based on separated representations: applications in computational rheology, *Communications in Mathematical Sciences* 8 (2010) 671-695.
- [Ammar 2010b] A. Ammar, F. Chinesta, A. Falcó, On the Convergence of a Greedy Rank-One Update Algorithm for a Class of Linear Systems, *Archives of Computational Methods in Engineering* 17 (2010) 473-486.
- [Ammar 2010c] A. Ammar, F. Chinesta, P. Diez, A. Huerta, An error estimator for separated representations of highly multidimensional models, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199 (2010) 1872-1880.
- [Ammar 2010d] A. Ammar, M. Normandin, F. Chinesta, Solving parametric complex fluids models in rheometric flows, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 165 (2010) 1588-1601.
- [Ammar 2011] A. Ammar, F. Chinesta, E. Cueto, Coupling finite elements and proper generalized decompositions, *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 9 (2011) 17-33.
- [Ammar 2012] A. Ammar, F. Chinesta, E. Cueto, M. Doblare, Proper generalized decomposition of time-multiscale models, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 90 (2012) 569-596.
- [Azrar 1993] L. Azrar, B. Cochelin, N. Damil and M. Potier-Ferry, An asymptotic-numerical method to compute the postbuckling behaviour of elastic plates and shells, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (1993) 1251-1277.
- [Babuska 1978] I. Babuska, W.C. Rheinboldt, A posteriori error estimates for the finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 12 (1978) 1597-1615.
- [Babuska 1981] I. Babuska, B. Szabo, I. Katz, The p-version of the finite element method, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 18 (1981) 515-545.
- [Babuska 1982] I. Babuska, B.A. Szabo, On the rates of convergence of the finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 18 (1982) 323-341.
- [Babuska 1990] I. Babuska et M. Suri, The p- and h-p versions of the finite element method, an overview, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 80 (1990) 5-26.

- [Bader 2007] B. W. Bader, T. G. Kolda, Efficient MATLAB computations with sparse and factored tensors, *SIAM Journal on Scientific Computing* 30 (2007) 205-231.
- [Baudet 2006] C. Baudet, La décompression explosive du PVDF en présence de CO₂ - Modélisation des couplages et de l'initiation de l'endommagement, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2006.
- [Baudet 2009] C. Baudet, J.C. Grandidier, L. Cangémi, A two-phase model for the diffuso-mechanical behaviour of semicrystalline polymers in gaseous environment, *International Journal of Solids and Structures* 46 (2009) 1389-1401.
- [Baudet 2011] C. Baudet, J.C. Grandidier, L. Cangémi, A damage model for the blistering of polyvinylidene fluoride subjected to carbon dioxide decompression, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 59 (2011) 1909-1926.
- [Beal 2002] P.Béal, J.Koko, R.Touzani, Mesh r-adaptation for unilateral contact problems, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 12 (2002) 9-16.
- [Berger 1984] M.J. Berger, J. Olinger, Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations, *Journal of Computational Physics* 53 (1984) 484-512.
- [Berger 1989] M.J. Berger, P. Colella, Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics, *Journal of Computational Physics* 82 (1989) 64-84.
- [Beringhier 2010] M. Beringhier, M. Gueguen, J.C. Grandidier, Solution of strongly coupled multiphysics problems using space-time separated representations – Application to thermoviscoelasticity, *Archives of Computational Methods in Engineering* 17 (2010) 393-401.
- [Bognet 2012] B. Bognet, F. Bordeu, F. Chinesta, A. Leygue, A. Poitou, Advanced simulation of models defined in plate geometries: 3D solutions with 2D computational complexity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 201–204 (2012) 1-12.
- [Bonithon 2011] G. Bonithon, P. Joyot, F. Chinesta, P. Villon, Non-incremental boundary element discretization of parabolic models based on the use of the proper generalized decompositions, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 35 (2011) 2-7.
- [Bousetta 2005] R. Bousetta, Estimateurs d'erreur et remaillage adaptatif : application à la simulation 3D des procédés de mise en forme des matériaux, Thèse de Doctorat, Ecole de Mines de Paris, 2005.
- [Brandt 1977] A. Brandt, Multi-level adaptive solutions to boundary value problems, *Mathematics of Computation* 31 (1977) 333-390.
- [Brown 2005] J.D. Brown, L.L. Lowe, Multigrid elliptic equation solver with adaptive mesh refinement, *Journal of Computational Physics* 209 (2005) 582-598.
- [Buch 1999] M. Buch, A. Idesman, R. Niekamp, E. Stein, Finite elements in space and time for parallel computing of viscoelastic deformation, *Computational Mechanics* 24 (1999) 386-395.
- [Carroll 1973] W.E. Carroll, R.M. Barker, A theorem for optimum finite-element idealizations, *International Journal of Solids and Structures* 9 (1973) 883-895.
- [Cartensen 1999] C. Cartensen, R. Verfürth, Edge residuals dominate a posteriori error estimates for low order finite element methods, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 36 (1999) 1571-1587.
- [Chamoin 2007] L. Chamoin, Encadrement a posteriori de quantités locales dans les problèmes de viscoélasticité linéaire résolus par la Méthode des Eléments Finis, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Cachan, 2007.
- [Chatterjee 2000] A. Chatterjee, An introduction to the proper orthogonal decomposition, *Current Science* 78 (2000) 808–817.
- [Chinesta 2010a] F. Chinesta, A. Ammar, E. Cueto, Recent Advances and New Challenges in the Use of the Proper Generalized Decomposition for Solving Multidimensional Models, *Archives of Computational Methods in Engineering* 17 (2010) 327-350.
- [Chinesta 2010b] F. Chinesta, A. Ammar, E. Cueto, Proper generalized decomposition of multiscale models, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 83 (2010) 1114-1132.
- [Chinesta 2011a] F. Chinesta, P. Ladevèze, E. Cueto, A Short Review on Model Order Reduction Based on Proper Generalized Decomposition, *Archives of Computational Methods in Engineering* 18 (2011) 395-404.

- [Chinesta 2011b] F. Chinesta, A. Ammar, A. Leygue, R. Keunings, An overview of the proper generalized decomposition with applications in computational rheology, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 166 (2011) 578-592.
- [Ciarlet 1991] P. G. Ciarlet, The finite element method for elliptic problems, in *Handbook of Numerical Analysis*, eds. P. G. Ciarlet and J. L. Lions, North Holland 2 (1991) 17-352.
- [Cochelin 1994] B. Cochelin, N. Damil and M. Potier-Ferry, Asymptotic–numerical methods and Pade approximants for non-linear elastic structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37 (1994) 1187-1213.
- [Cochelin 2000] B. Cochelin, N. Compain, Asymptotic numerical methods for non-linear transient dynamics, *Revue Européenne des Eléments Finis* 9 (2000) 113-128.
- [Cochelin 2007] B. Cochelin, N. Damil and M. Potier-Ferry, *Méthode Asymptotique Numérique*, Hermes Sciences, Lavoisier, 2007.
- [Cohen 2002] A. Cohen, Adaptive methods for PDEs – Wavelets or mesh refinement?, *International Conference of Mathematics*, Higher Education Press, Beijing, 1 (2002) 607-620.
- [Combesure 2002] A. Combesure, A. Gravouil, A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191 (2002) 1129-1157.
- [Combesure 2003] A. Combesure, A. Gravouil, B. Herry, An algorithm to solve transient structural non-linear problems for non-matching time-space domains, *Computers and Structures* 81 (2003) 1211-1222.
- [Cordier 2006] L. Cordier, M. Bergmann, Réduction de dynamique par Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres (POD), *Optimisation et Contrôle des Ecoulements et des Transferts*, Ecole de printemps OCET, 2006.
- [Delmas 2008] J. Delmas, Stratégie de contrôle d’erreur en calcul de structures industrielles. Mise en œuvre d’erreur en quantité d’intérêt et d’adaptation de maillage, Thèse de doctorat, Université de Picardie Jules Verne, 2008.
- [Dureisseix 2003] D. Dureisseix, P. Ladevèze, D. Néron, B. A. Schrefler, A Multi-Time-Scale Strategy for Multiphysics Problems: Application to Poroelasticity, *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 1 (2003) 387-400.
- [Dureisseix 2006] D. Dureisseix, H. Henri Bavestrello, Information transfer between incompatible finite element meshes: Application to coupled thermo-viscoelasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006) 6523-6541.
- [Dumon 2011a] A. Dumon, C. Allery, A. Ammar, Proper general decomposition (PGD) for the resolution of Navier–Stokes equations, *Journal of Computational Physics* 230 (2011) 1387-1407.
- [Dumon 2011b] A. Dumon, Réduction dimensionnelle de type PGD pour la résolution des écoulements incompressibles, Thèse de doctorat, Université de la Rochelle, 2011.
- [Elhadrouz 2006] M. Elhadrouz, T. Ben Zineb, E. Patoor, Finite element analysis of a multilayer piezoelectric actuator taking into account the ferroelectric and ferroelastic behaviours 44 (2006) 996-1006.
- [Ghnatios 2011] C. Ghnatios, F. Chinesta, E. Cueto, A. Leygue, P. Breitkopf, P. Villon, Methodological approach to efficient modeling and optimization of thermal processes taking place in a die: application to pultrusion, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 42 (2011) 1169-1178.
- [Ghnatios 2012] C. Ghnatios, F. Masson, A. Huerta, E. Cueto, A. Leygue, F. Chinesta, Proper generalized decomposition based dynamic data driven control of thermal processes, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 213-216 (2012) 29-41.
- [Golub 1990] G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1990.
- [Gonzalez 2010] D. Gonzalez, A. Ammar, F. Chinesta, E. Cueto, Recent advances on the use of separated representations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 81 (2010) 637-659.
- [Gonzalez 2012] D. Gonzalez, F. Masson, F. Poulhaon, A. Leygue, E. Cueto, F. Chinesta, Proper generalized decomposition based dynamic data driven inverse identification, *Mathematics and Computers in Simulation*, 82 (2012) 1677-1695.

- [Idesman 2000] A. Idesman, R. Niekamp, E. Stein, Continuous and discontinuous Galerkin methods with finite elements in space and time for parallel computing of viscoelastic deformation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2000) 1049-1063.
- [Jasak 2000a] H. Jasak, A. D. Gosman, Automatic Resolution Control for the Finite-Volume Method, Part 1: A-Posteriori Error Estimates, *Numerical Heat Transfer Heat Transfer B* 38 (2000) 237-256.
- [Jasak 2000b] H. Jasak, A. D. Gosman, Automatic Resolution Control for the Finite-Volume Method, Part 2: Adaptive Mesh Refinement, *Numerical Heat Transfer Heat Transfer B* (2000) 257-272.
- [Karhunen 1946] K. Karhunen, Uber lineare methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae* 37 (1946) 3-79.
- [Knott 2000] G.D Knott, *Interpolating Cubic Splines*, Springer, 2000.
- [Kolda 2007] T. G. Kolda, B. W. Bader, Tensor decompositions and applications, Technical Report SAND2007-6702, 2007.
- [Ladeveze 1975] P. Ladevèze, Comparaison de modèles de milieux continus, Thèse d'état, Université de Pierre et Marie Curie, 1975.
- [Ladeveze 1983] P. Ladevèze, D. Leguillon, Error estimate procedure in finite element method and applications, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 20 (1983) 485-509.
- [Ladeveze 1999a] P. Ladevèze, Nonlinear computational structural mechanics - New approaches and non-incremental methods of calculation, Springer Verlag, 1999.
- [Ladeveze 1999b] P. Ladevèze, P. Rougeota, P. Blanchardb, J.P. Moreaub, Local error estimators for finite element linear analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 176 (1999) 231-246.
- [Ladeveze 2010] P. Ladevèze, J.C. Passieux, D. Néron, The LATIN multiscale computational method and the Proper Generalized Decomposition, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199 (2010) 1287-1296.
- [Ladeveze 2011] P. Ladevèze, L. Chamoin, On the verification of model reduction methods based on the proper generalized decomposition, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (2011) 2032-2047.
- [Lamari 2009] H. Lamari, F. Chinesta, A. Ammar, E. Cueto, Non-Conventional Numerical Strategies in the Advanced Simulation of Materials and Processes, *International Journal of Modern Manufacturing Technologies* 1 (2009) 49-56.
- [Lamari 2010] H. Lamari, A. Ammar, P. Cartraud, G. Legrain, F. Jacquemin, F. Chinesta, Routes for efficient computational homogenization of non-linear materials using the proper generalized decomposition, *Archives of Computational Methods in Engineering* 17 (2010) 373-391.
- [Lathauwer 2000] L. D. Lathauwer, B. A. Moor, J. Vandewalle, A Multilinear Singular Value Decomposition, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 21 (2000) 1253-1278.
- [Leveque 2002] R. J. Leveque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2002.
- [Leygue 2010] A. Leygue, E. Verron, A first step towards the use of proper general decomposition method for structural optimization, *Archives of Computational Methods in Engineering* 17 (2010) 465-472.
- [Leygue 2012] A. Leygue, F. Chinesta, M. Béringhier, T.L. Nguyen, J.C. Grandidier, F. Pesavento, B. Schrefler, Towards a framework for non-linear thermal models in shell domains, *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, In Press, Accepted Manuscript.
- [Loeve, 1963] M. Loeve, *Probability theory*, The University Series in Higher Mathematics. Van nostrand : Princeton, 1963.
- [Lumley 1967] J.L. Lumley, Atmospheric Turbulence and Wave Propagation. The structure of inhomogeneous turbulence, A.M. Yaglom & V.I. Tatarski (1967) 166-178.
- [Machiels 2000] L. Machiels, Y. Maday, I. Oliveira, A. Patera, D. Rovas, Output bounds for reduced-basis approximations of symmetric positive definite eigenvalue problems, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I Mathematics* 331 (2000) 53-158.
- [Neron 2004] D. Néron, Sur une stratégie de calcul pour les problèmes multiphysiques, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Cachan, 2004.

- [Neron 2008a] D. Néron, D. Dureisseix, A computational strategy for thermo poroelastic structures with a time-space interface coupling, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 75 (2008) 1053-1084.
- [Neron 2008b] D. Néron, D. Dureisseix, A computational strategy for poroelastic problems with a time interface between coupled physics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 73 (2008) 783-804.
- [Neron 2010] D. Néron, P. Ladevèze, Proper Generalized Decomposition for Multiscale and Multiphysics Problems, *Archives of Computational Methods in Engineering* 17 (2010) 351-372.
- [Niroomandi 2008] S. Niroomandi, I. Alfaro, E. Cueto, F. Chinesta, Real-time deformable models of non-linear tissues by model reduction techniques, *Computer Methods and Programs in Biomedicine* 91 (2008) 223-231.
- [Niroomandi 2010] S. Niroomandi, I. Alfaro, E. Cueto, F. Chinesta, Model order reduction for hyperelastic materials, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 81 (2010) 1180-1206.
- [Nouy 2007] A. Nouy, A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196 (2007) 4521-4537.
- [Nouy 2008] A. Nouy, Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations: invariant subspace problem and dedicated algorithms, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2008) 4718-4736.
- [Nouy 2009] A. Nouy, O. Le Maître, Generalized spectral decomposition method for stochastic non linear problems, *Journal of Computational Physics*, 228 (2009) 202-235.
- [Nouy 2010a] A. Nouy, A priori model reduction through Proper Generalized Decomposition for solving time-dependent partial differential equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199 (2010) 1603-1626.
- [Nouy 2010b] A. Nouy, Proper generalized decompositions and separated representations for the numerical solution of high dimensional stochastic problems, *Archives of Computational Methods in Engineering* 17 (2010) 403-434.
- [Oden 1989] J. T. Oden, L. Demkowicz, W. Rachowicz, T. A. Westermann, Toward a universal h-p adaptive finite element strategy, part 2. A posteriori error estimation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 77 (1989) 113-180.
- [Olivier 2008] L. Olivier, Prédiction du vieillissement thermo-oxydant de composites à matrice organique dédiés à l'aéronautique : prise en compte des couplages multiphysiques, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique - Université de Poitiers, 2008.
- [Olivier 2009] L. Olivier, C. Baudet, D. Bertheau, J.C. Grandidier, M.C. Lafarie-Frenot, Development of experimental, theoretical and numerical tools for studying thermo-oxidation of CFRP composites, *Composites: Part A* 40 (2009) 1008-1016.
- [Passieux 2008] J.C. Passieux, Approximation radiale et méthode LATIN multiéchelle en temps et espace, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Cachan, 2008.
- [Potier-Ferry 2004] M. Potier-Ferry, J. Cadou, Basic ANM Algorithms for path following problems, *Revue européenne des éléments finis, Méthodes asymptotiques numériques* 13 (2004) 9-32.
- [Prud'homme 2002] C. Prud'homme, D. Rovas, K. Veroy, L. Machiels, Y. Madaï, A. Patera, G. Turnici, Reliable real-time solution of parametrized partial differential equations : Reduced-basis output bound methods, *Journal of Fluids Engineering* 172 (2002) 70-80.
- [Pruliere 2010a] E. Pruliere, F. Chinesta, A. Ammar, On the deterministic solution of multidimensional parametric models using the Proper Generalized Decomposition, *Mathematics and Computers in Simulation* 81 (2010) 791-810.
- [Pruliere 2010b] E. Pruliere, J. Ferec, F. Chinesta, A. Ammar, An efficient reduced simulation of residual stresses in composites forming processes, *International Journal of Material Forming* 3 (2010) 1339-1350.
- [Rabearison 2009] N. Rabearison, C. Jochum, J.C. Grandidier, A FEM coupling model for properties prediction during the curing of an epoxy matrix, *Computational Materials Science* 45 (2009) 715-724.
- [Rambert 2002] G. Rambert, Modélisation des couplages thermo-diffuso-mécaniques dans les matériaux polymères. Application numérique à la décompression explosive, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique - Université de Poitiers, 2002.

- [Rambert 2005] G. Rambert, J.C. Grandidier, An approach to the coupled behaviour of polymers subjected to a thermo-mechanical loading in a gaseous environment, *European Journal of Mechanics A/Solids* 24 (2005) 151-168.
- [Rambert 2006] G. Rambert, G. Jugla, J.C. Grandidier, L. Cangemi, A modelling of the direct couplings between heat transfer, mass transport, chemical reactions and mechanical behaviour. Numerical implementation to explosive decompression *Composites: Part A* 37 (2006) 571–584.
- [Ryckelynck 1998] D. Ryckelynck, Sur l'analyse des structures viscoplastiques : stratégie adaptative et contrôle de qualité, Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Cachan, 1998.
- [Ryckelynck 2002] D. Ryckelynck Reduction a priori de modèles thermomécaniques, *Comptes Rendus Mécanique* 330 (2002) 499-505.
- [Ryckelynck 2005] D. Ryckelynck, A priori hyperreduction method: an adaptative approach, *Journal of Computational Physics* 202 (2005) 346-366.
- [Ryckelynck 2006] D. Ryckelynck, F. Chinesta, E. Cueto, A. Ammar, On the a priori Model Reduction: Overview and Recent Developments, *Archives of Computational Methods in Engineering* 13 (2006) 91-128.
- [Sirovich 1987] L. Sirovich, Turbulence and the dynamics of coherent structures, part 1: Coherent structures, part 2: Symmetries and transformations, part 3: Dynamics and scaling, *Quarterly of Applied Mathematics* 45 (1987) 561-590.
- [Szabo 1986] B. Szabo, Estimation and control of error based on p convergence, In *Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations*, Babuska Gago Oliveira Zienkiewicz (eds.), Wiley, (1986) 67-78.
- [Szabo 1990] B. Szabo, The p- and h-p versions of the finite element methods in solid mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 80 (1990) 185-195.
- [Vasilyev 1996] O.V. Vasilyev, S. Paolucci, Dynamically Adaptive Multilevel Wavelet Collocation Method for Solving Partial Differential Equations in a Finite Domain, *Journal of Computational Physics* 125 (1996) 498-512.
- [Vasilyev 2005] O.V. Vasilyev, N.K.R. Kevlahan, An adaptive multilevel wavelet collocation method for elliptic problems, *Journal of Computational Physics* 206 (2005) 412-431.
- [Verfurth 1999] R. Verfürth, A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 176 (1999) 419-440.
- [Yvonnet 2007] J. Yvonnet, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, A model reduction method for the post-buckling analysis of cellular microstructures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2007) 265-280.
- [Zienkiewicz 1987] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu, A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24 (1987) 337-357.
- [Zienkiewicz 1992] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu, The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 101 (1992) 207-224.
- [Zienkiewicz 1995] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu, Superconvergence and the superconvergent patch recovery, *Finite Elements in Analysis and Design* 19 (1995) 11-23.
- [Zienkiewicz 1999] O.C. Zienkiewicz, B. Boroomand and J.Z. Zhu, Recovery procedures in error estimation and adaptivity, part1. Adaptivity in linear problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 176 (1999) 111-125.
- [Zienkiewicz 2005] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu, *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, Butterworth-Heinemann, 2005.
- [Zouari 2011] W. Zouari, T. Ben Zineb, A. Benjeddou, A ferroelectric and ferroelastic 3D hexahedral curvilinear finite element, *International Journal of Solids and Structures* 48 (2011) 87–109.