Nombres de Betti d'idéaux binomiaux

Hernan de Alba Casillas de Alba Casillas

▶ **To cite this version:**

Hernan de Alba Casillas de Alba Casillas. Nombres de Betti d'idéaux binomiaux. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Grenoble, 2012. Français. NNT : 2012GRENM043 . tel-00772901

HAL Id: tel-00772901
https://theses.hal.science/tel-00772901

Submitted on 11 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 7 Août 2006

Présentée par

Hernan DE ALBA CASILLAS

Thèse dirigée par **Marcel MORALES**

préparée au sein **de l'Institut Fourier, Laboratoire des Mathématiques** et de **l'École Doctorale Mathématiques,Sciences et Technologies de l'Information, Informatique**

Nombres de Betti d'idéaux binomiaux

Thèse soutenue publiquement le **10 Octobre 2012**,
devant le jury composé de :

M. Marcel MORALES
Professeur à l'IUFM de Lyon et rattaché pour la recherche à l'Université de Grenoble I, Directeur de thèse

M. Hoa LE TUAN
Professeur, à l'Institut d'Études Avancées en Mathématiques du Vietnam, Rapporteur

M. Santiago ZARZUELA
Professeur à l'Université de Barcelone (Espagne), Rapporteur

M. Laurent MANIVEL
Directeur de recherches au CNRS, Examinateur

M. Mikhail ZAIDENBERG
Professeur à l'Université de Grenoble I, Examinateur

M. Aron SIMIS
Professeur à l'Université de Pernamburco (Bresil), Examinateur

Remerciements

Grenoble vaut bien une thèse.
Emprunt de Henri IV.

Dans une bourgade du Mexique, dont je ne veux me rappeller le nom, il y a six ans, je me trouvais devant cinq personnes qui me disaient : ≪trouve un autre endroit pour faire ton doctorat, ne t'inquiète pas pour les lettres de recommendations, on te les donnera, mais surtout pars de là≫. Six ans plus tard je me trouve devant mon ordinateur au bureau 305 de l'Institut Fourier, mon bureau, en train d'écrire les remerciements de ma thèse.

Mes premiers remerciements sont pour le Conseil National de Science et Technologie des États Unis Mexicains (CONACyT par ses sigles en espagnol) et son département de bourse qui ont financé mon séjour en France pour réaliser mes études, de même que tout le peuple travailleur mexicain qui paient leurs impots pour rendre cela possible. Merci aussi au gouvernement français pour avoir payé les frais d'inscription du Master2R et des deux premières années de la thèse. Par ailleurs, je tiens à dire aussi un grand merci à ma famille, en particulier à ma cousine Gisela et son mari José, mon oncle Mario et son épouse Ileana, mes parrains Memo et Paty, mes quasi-parrains Martha et Braulio, de même que mes amis au Mexique et des amis de ma famille qui m'ont aidé en obtenant de l'argent pour acheter le billet d'avion pour venir en France et financer le premier mois en France qui n'étaient pas inclus dans la bourse.

Je suis également très reconnaissant envers mon directeur de thèse Marcel Morales qui a toujours montré son intêret pour mon travail, m'a donné ses conseils scientifiques, a écouté toutes mes fausses conjectures et a corrigé mon français aussi bien à l'écrit qu'à l'oral. De plus que serait mon séjour en France sans les cerises et fruits rouges de son jardin ? Mes remerciements vont aussi à mes professeurs de français et ceux de toute ma vie académique pour avoir partagé leur connaissance avec moi. Je veux remercier mon directeur de mémoire du master à Mexico, José Martínez Bernal, qui m'a introduit dans l'algèbre commutative et m'a apporté aussi son aide au niveau personnel, surtout quand j'avais mal au genou. Je suis aussi redevable à Hoa Le Tuan qui m'a donné ses conseils académiques pour résoudre des problèmes de la thèse.

Je remercie vivement Hoa Le Tuan et Santiago Zarzuela pour avoir accepté d'être rapporteurs de mon travail et surtout pour leur commentaires qui ont servi à l'amélioration de mon manuscrit. De même, j'exprime ma gratitude aux autres membres du jury de thèse pour avoir accepté cette

responsabilité : Laurent Manivel, Mikhail Zaidenberg et Aron Simis.

Quant à l'environnement du travail, je remercie tous les collègues et professeurs de l'institut Fourier pour leur accueil et leur aide pertinente ; de même que les doctorants et anciens thésards particulièrement Hiba, Ximena, Alvaro, Nicolas, Helena, mes voisins du 302 : Ali, Jorge, Izabela, Delphine et Airelle, qui m'ont acueilli tout le temps dans leur bureau pour interrompre leur travail lorsque j'allais aux toilettes ; avec lesquels on a partagé de nombreux moments ensemble hors de l'institut et qui m'ont aidé sans hésitation lorsque j'en avais besoin. Je remercie tous mes ≪cobureaux ≫ : Eleonora, Eric, Sasha et Jérémy, qui n'ont pas été beaucoup dans le bureau, mais qui n'ont jamais eu de problèmes avec le fait que je monopolise le tableau et l'ordinateur. Je tiens à remercier Ali pour les discussions qui m'ont permis d'améliorer mon travail. Je ne vais jamais oublier la gentillesse des membres de l'administration : Robert, Françoise, Simone, Gaby et son sourire, Hervé et ≪no conozco≫, Géraldine et son cachet, de même que Marie-Hélène et son ≪chiquillo≫. Merci aux personnels de la bibliothèque qui m'ont fourni tout ce dont j'avais besoin : Francesca, Marie-Nöelle, Boucif et Ariane. J'exprime aussi toute ma gratitude aux femmes de ménage qui ramassaient chaque semaine toutes les feuilles que je jetais.

Que ferais-je sans tous les amis et copains que j'ai rencontré dans le coin ? Ceux avec qui je me détendais après les heures passées devant mon ordinateur et avec lesquels j'ai partagé pleins de moments inoubliables : Bélinda, Paco, Lizeth, Michelle, Arnaud, Arturo, Mailys, Nina, Yvan, Mayra, Bruno, Yeshica, Johannes, Gonzalo, Marlène et intérim-Marlène. De même que ceux qui de loin ils se sont fait présents grâce à la technologie et m'ont montré leur soutien omniprésent : Amanda, Carlos, Silvia, Solracs, Adriana, César, Rita. Montse qui m'a aidé à trouver un logement dès que je suis arrivé là et les bons moments qu'on a partagé cette année. Jael pour répondre mes mails à tous les moments et s'intéresser toujours à mes nouvelles. Christelle pour nos discussions bilangues et ethnocentriques de même que les bons repas qu'on a mangés ensemble surtout la tarte aux tomates : ≪ay sí, ay sí≫. Nicolas Pierre Armand qui a corrigé entièrement l'ortographe de ce manuscrit et pour m'avoir appris à ne jamais mentir et à me sentir ici comme chez moi ; le 5 mai est déjà resté au XIX-ème siècle.

Je voudrais bien adresser ces dernières lignes à mes familles. D'abord à tous ceux qui sont devenus une partie de ma famille pour être comme moi des apatrides, c'est à dire ma famille du Village Olympique : mes hermanastros, mon ex-MA, et mes helmanos : Sergio et José qui même à distance m'ont donné leur soutien pour finir la thèse, ≪qué fuerte≫. Ma famille de Toluca qui m'a donné son soutien. Ma famille et mère putative qui par téléphone étaient avec moi. La famille de Alba et la famille Casillas pour tout leur soutien pendant toute ma vie. Ma cousine Daniela Casillas qui m'appellait au moins tous les mois pendant la dernière année pour écouter mes nouvelles et discuter de notre expérience française.

Mon frère Diego, ma soeur Alejandra, mon père Gustavo et ma mère Carmen Luz, qui me donnent leur soutien, même s'ils ne comprennent pas du tout mon métier. Mais surtout merci pour être ma ≪cenyeliztli≫. C'est pour cela que je vous dédie cette thèse.

Introduction

Décrire les propriétés de la résolution libre minimale de l'idéal qui définit une variété projective est un probléme classique en geométrie algébrique et en algèbre commutative, posé au début des annés 60. Les principales lignes de recherche ont été :

- Construire la résolution libre minimale d'idéaux monomiaux spéciaux et plus généralement de modules gradués sur l'anneau des polynômes $\mathbb{k}[\mathbf{x}]$ à n variables avec la graduation $\mathbb{N}$-standard (voir [10])
- Construire des résolutions libres non minimales, par exemple : résolution de Taylor (voir [8], pp. 439) et résolution cellulaire (voir [30], pp. 61-80).
- Calculer les nombres de Betti d'un idéal binomial I de $\mathbb{k}[\mathbf{x}]$ par complexes simpliciaux ; cette branche a une longue tradition et a donné des résultats en combinatoire et algébre commutative. Dans cette direction nous devons mettre en avant la formule de Hochster dans [26], qui détermine les nombres de Betti d'un idéal monomial libre de carrés en fonction de l'homologie des sous-complexes du complexe simplicial Δ associé à I par la théorie de Stanley-Reisner [37], et ses extensions trouvées dans [38], [2] et [7].

Green et Lazaferld dans [17] et [18] ont introduit la propriété $\mathbf{N}_p$ pour un anneau $\mathbb{N}$-gradué standard comme indication de la présence de syzygies simples. En effet, étant donné un idéal I homogène de l'anneau de polynômes $\mathbb{k}[\mathbf{x}]$ à n variables $\mathbb{N}$-standard gradué, on dit que $R := \mathbb{k}[\mathbf{x}]/I$ satisfait la propriété $\mathbf{N}_p$ avec $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$, si $\beta_{i,j}(R) = 0$ pour tous $j > i+1$ et $1 \leq i \leq p$, où $\beta_{i,j}(R)$ désigne le nombre de Betti $\mathbb{N}$-gradué de R sur S. Cette propriété nous indique que l'idéal I est engendré par des quadriques et que les premiers $p-1$ syzygies de I sont linéaires. Dans [11] Eisenbud et al. introduisent la notation $\mathbf{N}_{2,p}$ pour noter la propriété $\mathbf{N}_p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $p \neq 0$. Ils généralisent le théorème de Fröberg [15] qui caractérise de manière combinatoire tous les idéaux monomiaux quadratiques libres de carrés qui sont 2-réguliers (voir corollaire 2.2.14), c.a.d. les idéaux qui satisfont la propriété $\mathbf{N}_{2,p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, si I est un idéal monomial quadratique libre de carrés, ils ont caractérisé de manière combinatoire l'entier p maximal pour lequel l'algèbre R satisfait la propriété $\mathbf{N}_{2,p}$ (voir théroème 2.2.13).

Tandis que la propriété $\mathbf{N}_{2,p}$ a été étudié par Fröberg dans [15] et par Eisenbud et als. dans [11] pour les idéaux monomiaux ; M. Morales, dans [31], étudie la classe d'idéaux formées par les intersections finies des idéaux premiers engendrés par des formes linéaires et démontre que

les idéaux 2-réguliers de cette classe sont tous ceux qui, sous un possible réarrangement de leurs composantes premières, forment une suite linéairement jointe (voir proposition 2.3.4). Les idéaux monomiaux libres de carrés sont des intersections finies d'idéaux premiers engendrés par des variables (voir proposition 1.8.3). De plus, M. Morales caractérise en termes combinatoires le fait qu'une suite d'idéaux premiers soit une suite linéairement jointe. De même, il donne une formule en termes combinatoires pour calculer les nombres de Betti des idéaux formé par les intersections d'une suite linéairement jointe d'idéaux premiers.

À partir des idéaux de scroll Ha Minh Lam et M. Morales ont introduit dans [20] une classe d'idéaux binomiaux qui est une extension binomiale d'idéaux monomiaux libres de carrés, appelée extensions binomiales simpliciales ou simplement extensions binomiales. En effet, étant donné $I \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ un idéal monomial libre de carrés et $J \subset \Bbbk[\mathbf{z}]$ une somme d'idéaux de scroll qui satisfont certaines conditions, nous définissons l'extension binomiale simpliciale de I comme $\mathcal{B} = I + J \subset \Bbbk[\mathbf{z}]$. Dans [19] Ha Minh Lam et M. Morales obtiennent la décomposition primaire de ces extensions binomiales de même qu'ils trouvent le nombre de réduction de $\Bbbk[\mathbf{z}]/\mathcal{B}$ et il reste à trouver l'entier p maximal pour lequel l'algébre $\Bbbk[\mathbf{z}]/\mathcal{B}$ satisfait la propriété $\mathbf{N}_{2,p}$. C'est ce problème qui est le sujet de cette thèse.

En vue de trouver l'entier p maximal pour lequel l'algébre $\Bbbk[\mathbf{z}]/\mathcal{B}$ satisfait la propriété $\mathbf{N}_{2,p}$, nous considérerons un idéal monomial quadratique libre de carrés $I \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ et son extension binomiale simpliciale $\mathcal{B} = I + J \subset \Bbbk[\mathbf{z}]$. Sous certaines conditions d'ordre imposées sur les facettes du complexe de Stanley-Reisner de I nous obtiendrons un ordre $>$ pour les variables de l'anneau de polynômes $\Bbbk[\mathbf{z}]$. Ensuite nous prouvons par un calcul de bases de Gröbner que l'idéal initial $\mathrm{in}(\mathcal{B})$, sous l'ordre lexicographique induit par l'ordre de variables $>$, est quadratique libre de carrés. Nous montrerons que $\mathrm{in}(\mathcal{B})$ est 2-régulier si et seulement si I est 2-régulier en utilisant la caracterisation de M. Morales dans [31] en termes de suites linéairement jointes. Cela nous permettra de montrer à partir de la semicontinuité de nombres de Betti (voir 3.2.6) que $\mathcal{B}$ est 2-régulier si et seulement si I est 2-régulier. Dans le cas général lorsque I n'est pas 2-régulier, en utilisant le théorème 2.2.13 on trouvera une borne inférieure pour l'entier q maximal pour lequel $\Bbbk[\mathbf{z}]/\mathrm{in}(\mathcal{B})$ satisfait la propriété $N_{2,q}$. Grâce à la semicontinuité des nombres de Betti, ce nombre q calculé en fonction de I nous donnera une borne inférieure de l'entier p maximal pour lequel $\mathcal{B}$ satisfait la propriété $N_{2,p}$. En outre, en supposant que J est un idéal torique et en imposant certaines conditions, nous trouverons une borne supérieure pour p. En imposant des conditions supplémentaires, nous prouverons que les deux bornes trouvées coïncident et nous aurons trouvé la valeur de p en fonction de I.

La thèse est organisée en quatre chapitres que l'on explique brièvement dans ce qui suit :

Dans le premier chapitre nous rappellerons la définition d'un anneau multigradué par un semi-groupe et nous verrons le résultat de Eisenbud et Sturmfels [12] qui permet d'associer à un idéal binomial B un monoïde commutatif (semi-groupe avec élément neutre) $\Sigma(B)$ avec lequel nous obtenons une $\Sigma(B)$-multigraduation de $\Bbbk[\mathbf{x}]/B$. Nous verrons que $\Sigma(B)$ est un monoïde

simplifiable, à savoir que :

$$\forall a, b, c \in \Sigma(B),\ a + c = b + c \Rightarrow a = b$$

si et seulement si B est un idéal de réseau. Ensuite, en supposant que M est un module multigradué positif par un monoïde Σ nous définissons les nombres de Betti multigradués $\beta_{i,a}$ et nous montrons que :

Théorème 1.7.6. Soient B un idéal de réseau de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ quasi homogène ; I un idéal monomial libre de carrés de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ tel que, s'il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{x}^\alpha \in I$ et s'il existe $\gamma \in \Bbbk$ et $\gamma \in \mathbb{N}$, tels que $\mathbf{x}^\alpha - c\mathbf{x}^\gamma \in B$, alors $x^\gamma \in I$; $J = B + I$; $R = \Bbbk[\mathbf{x}]/J$ et $\mathcal{K}$ le complexe de Koszul de la suite $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Considérons les complexes simpliciaux :

$$\Omega_b = \{F \subset \{1, \ldots, n\} : \exists \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n,\ \exists a \in \Bbbk,\ \deg_{\Sigma(B)}(\beta) = b,\ \mathbf{x}^\beta - a\mathbf{x}^\gamma x^{\mathrm{supp}F} \in B\} \text{ et}$$
$$\Psi_b = \{F \in \Omega_b : \exists \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n,\ \exists a \in \Bbbk,\ \deg_{\Sigma(B)}(\beta) = b,\ \mathbf{x}^\beta - a\mathbf{x}^\gamma x^{\mathrm{supp}(F)} \in B,\ \mathbf{x}^\gamma \in I\}.$$

alors :

1. $(\mathcal{K} \otimes R)_b \cong (\mathcal{C}(\Omega_b; \Bbbk)/\mathcal{C}(\Psi_b; \Bbbk))(-1)$;
2. $\beta_{i,b}(R) = \dim_\Bbbk \widetilde{\mathrm{H}}_{i-1}(\Omega_b, \Psi_b(B); \Bbbk)$. En particulier $\beta_{i,b}(\Bbbk[\mathbf{x}]/B) = \dim_\Bbbk \widetilde{\mathrm{H}}_i(\Omega_b; k)$.

Il est à souligner que si B est un idéal de réseau, alors $\Sigma(B)$ est simplifiable et nous verrons que cette caracteristique de $\Sigma(B)$ nous permet de voir le complexe de Koszul comme un complexe de chaînes associé à un complexe simplicial. Par ailleurs, nous verrons dans ce même chapitre que, dans le cas où $B = 0$, J est un idéal monomial libre de carré et la formule pour calculer le nombre de Betti de J du théorème 1.7.6 devient la formule de Hochster (théorème 5.2, [26]). En effet le théorème 1.7.6 est une généralisation d'autres résultats pour calculer les nombres de Betti. Parmi ces résultats nous avons ceux de Herzog et Aramova dans [2] (lemme 4.1) et Sturmfels dans [38] (théorème 12.12), pour le cas où $J = B$, avec B un idéal torique. Finalement Bruns et Herzog dans [7] (proposition 1.1), ont montré un résultat qui généralise la formule de Hochster et le résultat de Herzog, Aramova et Sturmfels, qui correspond à notre théorème 1.7.6 dans le cas où B est un idéal torique.

À la fin du chapitre 1 nous étudierons les nombres de Betti $\mathbb{Z}$-multigradués, car la propriété $N_{2,p}$ est une propriété des nombres de Betti $\mathbb{Z}$-multigradués. Nous donnerons une généralisation des équations de Herzog-Kuhl dans ([23]) (corollaire 1.9.6). Nous disons qu'un $\Bbbk[\mathbf{x}]$-module M $\mathbb{Z}$-gradué de dimension projective ρ est pur si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, \rho\}$, il existe un unique $d_i \in \mathbb{Z}$ tel que $d_i > d_{i-1}$ et $\beta_{i,d_i} \neq 0$. Quand nous voulons mettre en relief le vecteur $d = (d_0, d_1, \ldots, d_\rho)$, nous disons que M est un $\Bbbk[\mathbf{x}]$-module $\mathbb{Z}$-gradué d-pur. Dans le cas où $d_i = d_{i-1} + 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, \rho\}$, nous disons que M est d_0-linéaire. On remarque que le cas 2-linéaire correspond au cas où le module M est 2-régulier.

Proposition 1.9.5. Soient M un $\Bbbk[\mathbf{x}]$-module $\mathbb{Z}$-gradué, ρ sa dimension projective et $d = (d_0 < d_1 < \cdots < d_\rho < d_{\rho+1}) \in \mathbb{N}^{\rho+2}$ tel que M a une résolution libre minimale de la forme :

$$0 \to S(-d_{\rho+1})^{\beta_{\rho,d_{\rho+1}}} \oplus S(-d_\rho)^{\beta_{\rho,d_\rho}} \to S(-d_\rho)^{\beta_{\rho-1,d_\rho}} \oplus S(-d_{\rho-1})^{\beta_{\rho-1,d_{\rho-1}}} \to \dots$$
$$\to S(-d_2)^{\beta_{1,d_2}} \oplus S(-d_1)^{\beta_{1,d_1}} \to S^{\beta_{0,0}} \to M \to 0,$$

avec $S = \Bbbk[\mathbf{x}]$. Soient $\beta'_i = \beta_{i,d_i} - \beta_{i-1,d_i}$ avec $1 \leq i \leq \rho$ et c la codimension de M. Alors si nous connaissons la multiplicité de M et $(\rho + 1 - c)$ parmi les β'_i, nous pouvons détérminer les autres β'_i. En particulier,

$$\beta'_i = \begin{cases} (-1)^{i+1}\beta_0 \prod_{k\neq i, k\neq 0} \frac{d_k - d_0}{d_k - d_i} & \text{si depth}(M) = \dim\ M \text{ et } \beta_{\rho,d_{\rho+1}} = 0; \\ (-1)^{i-1} \frac{\beta_0(\prod_{k=1,k\neq i}^{\rho+1} d_k) - (\rho)!e(M)}{\prod_{k=1,k\neq i}^{\rho+1}(d_k - d_i)} & \text{si depth}(M) = \dim\ M\ \beta_{\rho,d_{\rho+1}} \neq 0, \text{ et } d_0 = 0; \\ (-1)^{i-1} \frac{\beta_0(\prod_{k=1,k\neq i}^{\rho} d_k) - (\rho-1)!e(M)}{\prod_{k=1,k\neq i}^{\rho}(d_k - d_i)} & \text{si depth}(M) = \dim\ M - 1\ \beta_{\rho,d_{\rho+1}} = 0, \text{ et } d_0 = 0. \end{cases}$$

Pour l'existence des résolutions d-pures nous suggérons la lecture de [10].

Dans le chapitre 2 nous étudierons la propriété $\mathbf{N}_{2,p}$ pour les idéaux monomiaux quadratiques libre de carrés. D'abord, nous définirons pour tout idéal $I \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ le nombre $p_2(I)$ comme l'entier maximal pour lequel l'algèbre $\Bbbk[\mathbf{x}]/I$ satisfait la propriété $N_{2,p}$. Ensuite, nous verrons qu'étant donné un idéal monomial quadratique I nous pouvons lui associer un graphe G de sorte que les cliques de G sont les facettes du complexe de Stanley-Reisner associé à I, et réciproquement. Les complexes simpliciaux dont les facettes sont les cliques d'un graphe G sont appelés complexes de cliques. Nous étudierons en détail le résultat de Eisenbud et als. dans [11] qui nous sera très utile dans le chapitre 3, et que nous rappelons ici :

Théorème 2.2.13. ([11, Théorème 2.1]) Soient $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques d'un graphe G et $I = I_\Gamma$ l'idéal de non-faces de Γ engendré par des monômes quadratiques libres de carrés. L'algèbre $R := \Bbbk[\mathbf{x}]/I$ satisfait la condition $\mathbf{N}_{2,p}$, $p \geq 1$, si et seulement si tous les cycles minimaux de G sont de longueur strictement plus grande que $p + 2$.

Nous obtenons comme corollaire de 2.2.13 une autre démonstration du théorème suivant :

Théorème. ([14, Théorème 4.6]) Soient $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques d'un graphe G, $I = I_\Gamma$ et $p \geq 1$ entier naturel. Si $p_2(I) < \infty$, alors $\beta_{p_2(I),p_2(I)+3}(I)$ est égal au nombre de cycles minimaux de longueur $p_2(I) + 3$ de $\mathcal{G}$, de même $\beta_{p_2(I),p_2(I)+i}(I) = 0$ pour tout $i \geq 4$.

Il faut remarquer que la preuve développée dans [14] est indépendante du théorème 2.2.13. Finalement nous introduisons le concept de suite linéairement jointe d'idéaux étudié dans [31] et nous dirons qu'une suite de facettes $F_1, \dots, F_l$ d'un complexe simplicial Γ sont une suite linéairement jointe si les idéaux $Q_i = (x \in \Gamma : x \notin F_i)$ sont une suite linéairemente jointe. Ce concept nous servira dans le chapitre 3 et 4.

Nous commencerons le chapitre 3 par un rappel sur les bases de Gröbner d'un idéal I, qui sont utilisées pour calculer l'idéal initial de I noté $\text{in}(I)$. Nous verrons que nous pouvons comparer les nombres de Betti multigradués de l'idéal I avec les nombres de Betti multigradués de $\text{in}(I)$ grâce au théorème de semicontinuité des nombres de Betti que nous enonçons maintenant :

Théorème 3.2.6. ([30, Théorème 8.29]) Soit $I \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ un idéal A-gradué positif. Alors l'inégalité suivante est satisfaite pour tout ordre monomial $\succ$ sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$: $\beta_{i,a}(I) \leq \beta_{i,a}(\text{in}_{\succ}(I))$, pour tous $i \in \mathbb{N}$ et $a \in A$.

Ensuite, nous définissons les extensions binomiales, qui apparaissent dans [20], avec lesquelles nous travaillerons dans le reste de la thèse, et que nous expliquons brièvement ici. Soient Γ un complexe de cliques, $F \subset \Gamma$ une facette de Γ telle que $\{x_{i_0}^{(F)}, x_{i_1}^{(F)}\}, \{x_0^{(F)}, x_{i_2}^{(F)}\}, \ldots, \{x_0^{(F)}, x_{i_{m_F}}^{(F)}\}$ sont des arêtes contenues dans F qui sont contenues seulement dans F. À chacune de ces arêtes, par exemple $\{x_0^{(F)}, x_{i_j}^{(F)}\}$, nous associons un ensemble $Y_j^{(F)}$, qui peut être $\emptyset$. Nous définissons $Y^{(F)} = \cup_{j=1}^{m_F} Y_j^{(F)}$ et $\overline{\Gamma}$ l'extension de Γ en ajoutant les nouvelles facettes $F \cup Y^{(F)}$ qu'on notera $\overline{F}$. Si $Y^{(F)}$ est non vide avec $Y_j^F = \{y_{i_j 1}, \ldots, y_{i_j, n_{i_j}}\}$, nous définissons $\mathcal{I}_F$ comme l'ideal de mineurs 2×2 de la matrice :

$$M_F = \left(\begin{array}{cccc|ccc|c|ccc} x_{i_0}^{(F)} & y_{i_1 1}^{(F)} & \cdots & y_{i_1 n_{i_1}}^{(F)} & y_{i_2 1}^{(F)} & \cdots & y_{i_2 n_{i_2}}^{(F)} & \cdots & y_{i_{m_F} 1}^{(F)} & \cdots & y_{i_{m_F} n_{i_{m_F}}}^{(F)} \\ y_{i_1 1}^{(F)} & y_{i_1 2}^{(F)} & \cdots & x_{i_1}^{(F)} & y_{i_2 2}^{(F)} & \cdots & x_{i_2}^{(F)} & \cdots & y_{i_{k_F} 2}^{(F)} & \cdots & x_{i_{k_F}}^{(F)} \end{array} \right).$$

Dans le cas contraire $\mathcal{I}_F = 0$. À partir de là, nous définissons l'extension binomiale $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}} \subset \Bbbk[V(\overline{\Gamma})]$ du complexe simplicial Γ :

$$\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}} = I_{\overline{\Gamma}} + J_{\overline{\Gamma}}, \text{ avec } J_{\overline{\Gamma}} = \textstyle\sum_{F_l} \mathcal{I}_{F_l},$$

où $I_{\overline{\Gamma}}$ est le complexe de Stanley-Reisner associé à $\overline{\Gamma}$.

En permutant les colonnes de chaque matrice M_F d'une certaine façon Π, nous obtiendrons la matrice $\Pi(M_F)$ et nous construirons le complexe $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$ en enlevant toutes les arêtes de $\overline{\Gamma}$ correspondant aux diagonales de $\Pi(M_F)$ allant de haut en bas et de gauche à droite, pour tout facette F de Γ. Nous verrons qu'en ordennant les facettes de Γ selon un ordre spécial que nous appellerons ordre admissible de facettes, nous pourrons définir un ordre pour les sommets de Γ, qui dépend de Π et de l'ordre admissible de facettes de Γ, tel que le complexe simplicial associé a l'idéal initial par rapport à l'ordre lexicographique induit par cet ordre de sommets est le complexe $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$. Par la semicontinuité des nombres de Betti nous obtiendrons le résultat suivant :

Proposition 3.6.1. Soient Γ un complexe de cliques et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ. Alors

$$\max_{\Pi \in \mathcal{P}_{\overline{\Gamma}}} \left(p_2(I(\overline{\Gamma}^{(\Pi)})) \right) \leq p_2(B_{\overline{\Gamma}}). \tag{1}$$

Par le résultat d'Eisenbud et als. [11] (2.2.13) $p_2(I_{\overline{\Gamma}^{(\Pi)}}$ est calculable si nous pouvons calculer la longueur d'un cycle minimal de $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$. En effet, nous trouverons une manière d'associer à un cycle minimal de $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$ un cycle de Γ, que nous appellerons cycle minimal virtuel, et réciproquement.

Comme prémiere application de ce résultat et en utilisant le fait que tout idéal formé par les intersections des idéaux premiers est 2-linéaire si et seulement si ses composantes premières peuvent être ordonnées de telle sorte qu'elles forment une suite linéairement jointe (que nous aurons étudiée dans le chapitre 2), nous obtiendrons :

Théorème 3.6.9. Soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ. Alors G est un graphe de cordes si et seulement si $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ est 2-linéaire.

De plus, la relation entre cycles minimaux de $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$ et cycles minimaux Π-virtuels nous permettra de calculer une borne pour la longueur minimale d'un cycle minimal de $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$ à partir de Γ. D'abord, pour apprendre à calculer cette borne, nous étudierons le cas où Π est la permutation identité. Puis nous trouverons une permutation Π^* qui nous donnera une meilleure borne. De cette façon nous obtiendrons le résultat suivant :

Théorème 3.7.18. Soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ telle qu'il existe un ordre admissible pour les facettes de Γ, à savoir, $F_1, \ldots, F_l$.

1. $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) \geq \min_{C^{(\Pi^*)} \in \mathcal{C}_{\Pi^*}}(|C^{(\Pi)}|) - 3$.
2. Le nombre $\min_{C^{(\Pi^*)} \in \mathcal{C}_{\Pi^*}}(|C^{(\Pi)}|) - 3$ est calculé en fonction des données de Γ.

Dans le chapitre 4 nous étudierons deux cas de l'extension binomiale $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}} = I_{\overline{\Gamma}} + J_{\overline{\Gamma}}$. D'abord le cas où $J_{\overline{\Gamma}}$ est un idéal torique, et nous verrons dans l'appendice de ces chapitre certaines conditions nécéssaires pour affirmer que $J_{\overline{\Gamma}}$ est torique. Ainsi, en utilisant le théorème 1.7.6 nous calculerons certains nombre de Betti $\Sigma(J_{\overline{\Gamma}})$-gradués. En effet, pour certains cycles minimaux de $\overline{\Gamma}^{(\Pi^*)}$ que nous noterons $\widetilde{C}$, en définissant $a = \deg_{\Sigma(J_{\overline{\Gamma}})}(\prod_{z \in V(\widetilde{C})} z)$, nous verrons dans le lemme 4.1.6 que $\beta_{|V(\widetilde{C})|-3,a}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = 1$. Cela nous donnera une borne supérieure pour $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$ quand $J_{\overline{\Gamma}}$ est torique et dans certains cas elle nous donnera la valeur de $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$:

Théorème 4.1.9. Soient G un graphe qui n'est pas un graphe de cordes, $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendrés par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ telle que les facettes de Γ admettent un ordre admissible et que $J_{\overline{\Gamma}}$ soit torique. Supposons que pour tout cycle minimal virtuel C de G et toute arête e virtuelle de C dans $\overline{\Gamma}^{(\Pi^*)}$, les sommets de e sont dans le premier bloc de M_{F_e}, où F_e est l'unique facette qui contient e, et que e satisfait une des propriétés suivantes :

1. soit $|Y_1^{(F_e)}| = \min_{1 \leq j \leq m_{F_e}}(Y_i^{(F_e)}) \geq 2$ et $V_\Gamma(M_{F_e}) = F_e$;
2. soit $|Y_1^{(F_e)}| = 1$.

Alors, $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = p_2(I_{\overline{\Gamma}^{\Pi^*}})$.

Finalement, nous considérerons aussi les extensions binomiales $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ de Γ, quand le graphe G qui engendre Γ, est un graphe de cordes et nous calculerons tous les nombres de Betti de $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$, à partir des nombres de Betti de I_Γ et en utilisant le théorème 12 de [31] :

Théorème 4.2.7. Soient G un graphe de cordes, $\Gamma = \Gamma(G)$ son complexe de cliques, $\overline{\Gamma}$ une extension binomial de Γ, M le tableau associé aux facettes $F_1, \ldots, F_l$ de Γ qui sont une suite linéairement jointe de facettes et $\widetilde{n} = |V(\overline{\Gamma}) \setminus V(\Gamma)|$. Alors :

1. Soient $c = \text{ht } (I_{\Gamma(G)})$ et $\rho = \text{dimproj } (I_\Gamma)$, alors $\text{ht } (\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}'}) = c + n$, $\text{dimproj } (\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}'}) = \rho + n$.
2. Soient L_i la i-ème ligne de M, $d = \dim\, (\Bbbk[\mathbf{x}]/I_\Gamma)$ et $s_{d-i} = |L_{c+i}|$. Alors

$$\beta_j(\Bbbk[V]/\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}'}) = j \begin{pmatrix} c+\widetilde{n}+1 \\ j+1 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{d-1} \left(s_i + \sum_{j=1}^{l} \delta(j, s_i)|Y_j| \right) \begin{pmatrix} |V(\overline{\Gamma})| - i - 1 \\ j-1 \end{pmatrix},$$

où $\delta(j,i) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\mathcal{D}_j| + |P_j| \geq |V(\Gamma)| - i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Table des matières

Introduction iii

1 Anneaux et modules gradués par semi-groupes **1**
1.1 Semi-groupes 1
1.2 Idéaux binomiaux et multigraduations 5
1.3 Idéaux de réseau et idéaux toriques 10
1.4 Multigraduation positive 15
1.5 Nombres de Betti multigradués 19
1.6 Homologie simpliciale 20
1.7 Nombres de Betti d'idéaux binomiaux 23
1.8 Idéaux de Stanley-Reisner et Formule de Hochster 26
1.9 Nombres de Betti $\mathbb{Z}$-gradués 27

2 Propriété $\mathbf{N}_{2,p}$ des idéaux monomiaux quadratiques libres de carrés **35**
2.1 Propriété $\mathbf{N}_{d,p}$ 35
2.2 Complexes de cliques 37
2.3 Nombres de Betti de l'idéal du complexe de cliques d'un graphe de cordes 45

3 Extensions binomiales des idéaux monomiaux quadratiques libres de carrés **53**
3.1 Bases de Gröbner 53
3.2 Semicontinuité des nombres de Betti 57
3.3 Extensions binomiales des idéaux simpliciaux 62
3.4 Bases de Gröbner d'une extension binomiale 64
3.5 Ordres admissibles 74
3.6 Relation entre les cycles de $(\Gamma)_1$ et les cycles minimaux du graphe $(\overline{\Gamma}^{(\Pi)})_1$ 77
3.7 Bornes inférieures de $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$ 83

4 Propriété $N_{2,p}$ pour certaines extensions binomiales **97**
4.1 Extension binomiale torique d'un graphe 97
4.2 Nombres de Betti d'une extension binomiale d'un graphe de cordes 109
4.3 Appendice : Sommes d'idéaux toriques 117

Bibliographie **129**

Chapitre 1

Anneaux et modules gradués par semi-groupes

Dans ce travail $\Bbbk$ *désigne un corps et* $\Bbbk[\mathbf{x}] = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ *l'anneau des polynômes à* n *variables sur* $\Bbbk$. *Soit* $\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers naturels et* $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. *Nous écrirons* $\mathbf{x}^\alpha$ *pour noter le monôme* $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$. *Soit* Q *un sous-ensemble de* $\Bbbk[\mathbf{x}]$, *nous noterons* $(Q) \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ *l'idéal engendré par* Q.

Dans ce chapitre on rappellera la définition d'un anneau gradué par un semi-groupe et on verra qu'on peut construire une graduation par un semi-groupe à partir d'un idéal binomial. Ensuite on définira les nombres de Betti-multigradué et on généralisera la formule de Bruns-Herzog dans [6] pour calculer nombres de Betti d'idéaux binomiaux de la forme $J = B + I$ *où* B *est un idéal de réseau et* I *un idéal monomial libre de carrés qui satisfait certains propriétés par rapport à* B. *Puis on obtiendra la formule de Hochster pour calculer les nombres de Betti des idéaux monomiaux libres de carrés à partir de la formule précédente. Finalement, on généralisera la formule de Herzog-Kuhl dans [23] pour calculer les nombres de Betti* $\mathbb{Z}$*-gradué de certains modules sur* $\Bbbk[\mathbf{x}]$.

1.1 Semi-groupes

Un **semi-groupe** $(\Sigma, \intercal)$ est une structure algébrique consistant en un ensemble Σ muni d'une loi de composition interne associative $\intercal$. On note la loi de composition soit par $+$ (loi de composition additive) soit par $\cdot$ (loi de composition multiplicative). La loi de composition sera multiplicative sauf dans certaines situations. Par abus on notera Σ le semi-groupe $(\Sigma, \cdot)$.

Un semi-groupe Σ est dit commutatif ou abélien si la loi de composition est commutative et dans ce cas la loi sera l'addition. Un semi-groupe qui posséde un élément neutre est dit **monoïde**.

1.1.1 Exemple. Soit $T = \{\mathbf{x}^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ l'ensemble de tous les monômes de $\Bbbk[\mathbf{x}]$. Donc T est un monoïde sous la multiplication de monômes. En effet $T \cong \mathbb{N}^n$, $\mathbb{N}^n$ étant semi-groupe sous

l'addition.

Un élément $\mathbf{z}$ dans un semi-groupe Σ est le **zéro de** Σ si pour tout $x \in \Sigma$, $\mathbf{z} \cdot x = \mathbf{z} \cdot x = \mathbf{z}$. Si Σ n'a pas de zéro on peut ajouter un élément $\mathbf{z}$ tel que pour tout $x \in \Sigma$, $\mathbf{z} \cdot x = \mathbf{z} \cdot x = \mathbf{z}$; de cette façon $\Sigma^{\mathbf{z}} = \Sigma \cup \{\mathbf{z}\}$ et un semi-groupe avec zéro. Si la loi de composition du semi-groupe est additive on notera ∞ le zéro de Σ

Un élément $s \in \Sigma$ est dit **simplifiable à droite** si :

$$\forall x, y \in \Sigma : s \cdot x = s \cdot y \Rightarrow x = y.$$

On dit que s est **simplifiable à gauche** si

$$\forall x, y \in \Sigma : x \cdot s = y \cdot s \Rightarrow x = y.$$

Finalement, on dit que s est **simplifiable** si s est simplifiable à droite et à gauche.

Nous dirons qu'un semi-groupe (monoïde) Σ est un **semi-groupe simplifiable** (**monoïde simplifiable**), si tout élément $s \in \Sigma$ est simplifiable. Si un semi-groupe Σ a un zéro noté z et que le cardinal de Σ est > 1, alors z n'est pas simplifiable et par conséquence Σ n'est pas simplifiable.

Soit Σ un semi-groupe abélien. Un groupe H avec un morphisme de semi-groupes $h : \Sigma \to H$ est dit un **groupe de fractions** de Σ, si pour tout groupe G et tout morphisme de semi-groupes $f : \Sigma \to G$ il y a un unique morphisme de groupes $g : H \to G$ tel que $f = g \circ h$.

1.1.2 Définition. Soit Σ un monoïde abélien. On notera $G(\Sigma)$ le groupe abélien $(\Sigma \times \Sigma)/R$, où R est la relation d'équivalence sur le semi-groupe $\Sigma \times \Sigma$, donnée par $(s_1, s_2)R(s_1' s_2')$ si et seulement s'il y a un $s \in \Sigma$ tel que $s + s_1 + s_2' = s + s_2 + s_1'$. $G(\Sigma)$ est appelé le groupe de fractions standard de Σ.

1.1.3 Théorème. ([3, Théorème 8.2]) *Soit Σ un monoïde abélien. Alors :*

1. *$G(\Sigma)$ avec le morphisme de monoïdes $h : \Sigma \to G(\Sigma)$ donné par $h(s) = [(s, \mathbf{0})]_R$ est un groupe de fractions de Σ.*
2. *Le groupe de fractions de Σ est unique à isomorphisme près.*

1.1.4 Proposition. *Soit Σ un monoïde abélien et $h : \Sigma \to G(\Sigma)$ le groupe de fractions de Σ. Le morphisme h est un morphisme injectif si et seulement si tout élément $s \in \Sigma$ est simplifiable.*

Preuve.
$\Rightarrow$) Par l'absurde. Nous supposons qu'il existe $s \in \Sigma$ non simplifiable, alors il existe $x, y \in \Sigma$ tel que $s + x = s + y$ et $x \neq y$, donc $(x, \mathbf{0}) = h(x) \neq h(y) = (y, \mathbf{0})$, ainsi $s + x + \mathbf{0} \neq s + y + \mathbf{0}$, ce qui est absurde, car $s + x = s + y$. En conséquence tout $s \in \Sigma$ est simplifiable.

$\Leftarrow$) Soient $x, y \in \Sigma$ tel que $h(x) = h(y)$, donc $(x, \mathbf{0})R(y, \mathbf{0})$, d'où il existe $s \in \Sigma$ tel que

$$s + x = s + x + \mathbf{0} = s + y + \mathbf{0} = s + y,$$

et comme Σ est simplifiable on a : $x = y$.

■

1.1.5 Remarque. On déduit de la proposition 1.1.4 qu'on ne peut pas toujours plonger un semi-groupe dans un groupe, sauf si Σ est un semi-groupe simplifiable.

1.1.6 Proposition. *Soit Σ un monoïde abélien simplifiable. Le groupe de fractions $G(\Sigma)$ de Σ est le groupe le plus petit dans lequel on peut plonger Σ.*

Preuve. Soient G un groupe quelconque contenant Σ et $i : \Sigma \hookrightarrow G$ le morphisme inclusion. D'après le théorème 1.1.3, $G(\Sigma)$ est le groupe de fractions de Σ avec $h : \Sigma \to \mathcal{G}(\Sigma)$ où $h(a) = (a, 0)$, et, d'après la proposition 1.1.4, h est injectif. De plus, $G(\Sigma)$ étant le groupe de fractions de Σ, il existe par définition un morphisme $\varphi : G(\Sigma) \to G$ unique tel que $i = \varphi \circ h$. Montrons que φ est injective. Soient $[(a_1, b_1)], [(a_2, b_2)] \in G(\Sigma)$ tel que $\varphi([(a_1, b_1)]) = \varphi([(a_2, b_2)])$. Étant donné $[(a, b)] \in G(\Sigma)$, on a :

$$[(a, b)] = [(a, 0)] + [(0, b)] = [(a, 0)] + (-[(b, 0)]) = h(a) - h(b);$$

ainsi $\varphi(h(a_1) - h(b_1)) = \varphi(h(a_2) - h(b_2))$, donc

$$\varphi(h(a_1)) - \varphi(h(b_1)) = \varphi(h(a_2)) - \varphi(h(b_2));$$

$$\varphi(h(a_1)) + \varphi(h(b_2)) = \varphi(h(a_2)) + \varphi(h(b_1));$$

$$\varphi(h(a_1 + b_2)) = \varphi(h(a_2 + b_1));$$

$$i(a_1 + b_2) = i(a_2 + b_1);$$

et comme i est injectif, $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$, d'où $h(a_1 + b_2) = h(a_2 + b_1)$. Par conséquence

$$h(a_1) + h(b_2) = h(a_2) + h(b_1);$$

et finalement nous avons $h(a_1) - h(b_1) = h(a_2) - h(b_2)$. De cette façon, $[(a_1, b_1)] = [(a_2, b_2)]$, et ainsi, φ est injectif. Alors, $G(\Sigma)$ est le groupe le plus petit dans lequel on peut plonger Σ. ■

1.1.7 Définition. Soit $\varphi : \Sigma \to \Upsilon$ un morphisme entre semi-groupes. La congruence noyau de φ, noté $\mathcal{R}_{\mathrm{Ker}(\varphi)}$ est celle définie par :

$$\forall \sigma, \sigma' \in \Sigma,\ \sigma \mathcal{R}_{\mathrm{Ker}(\varphi)} \sigma' \Longleftrightarrow \varphi(\sigma) = \varphi(\sigma').$$

Alors, la classe d'équivalence $\sigma \in \Sigma$ sur $\mathcal{R}_{\mathrm{Ker}(\varphi)}$ est $[\sigma]_{\mathcal{R}_{\mathrm{Ker}(\varphi)}} = \{\sigma' \in \Sigma : \sigma \mathcal{R}_{\mathrm{Ker}(\varphi)} \sigma'\}$ et on défini $\Sigma/\mathcal{R}_{\mathrm{Ker}(\varphi)} = \{[\sigma]_{\mathcal{R}_{\mathrm{Ker}(\varphi)}} : \sigma \in \Sigma\}$ avec l'operation $\cdot$ définie par :

$$\forall \sigma, \sigma' \in \Sigma,\ [\sigma]_{\mathcal{R}_{\mathrm{Ker}(\varphi)}} \cdot [\sigma']_{\mathcal{R}_{\mathrm{Ker}(\varphi)}} = [\sigma \cdot \sigma']_{\mathcal{R}_{\mathrm{Ker}(\varphi)}}.$$

1.1.8 Proposition. (Théorème 5.3 [27]) *Soit $\varphi : \Sigma \to \Upsilon$ un morphisme entre semi-groupes. Alors $\Sigma/\mathcal{R}_{\mathrm{Ker}(\varphi)}$ avec l'opération $\cdot$ est un semi-groupe ; et la fonction $\varphi^* : \Sigma \to \Sigma/\mathcal{R}_{\mathrm{Ker}(\varphi)}$ posée par $\varphi^*(\sigma) = [\sigma]_{\mathcal{R}_{\mathrm{Ker}(\varphi)}}$ est un morphisme. De plus, il existe un monomorphisme $\alpha : \Sigma/\mathcal{R}_{\mathrm{Ker}(\varphi)} \to \Upsilon$ tel que $\varphi = \alpha \circ \varphi^*$.*

Soit $\varphi : N^n \to \Sigma$ un morphisme entre semi-groupes, où Σ est un semi-groupe simplifiable. Par la proposition 1.1.4, il existe un monomorphisme $h : \Sigma \to G(\Sigma)$. Alors $\overline{\varphi} : \mathbb{Z}^n \to G(\Sigma)$, posé par $\bar{\varphi}(e_i) = \varphi(e_i)$, est un morphisme de groupes. Ainsi :

$$\begin{aligned}\forall \sigma, \sigma' \in \mathbb{N}^n,\ \sigma \mathcal{R}_{\mathrm{Ker}(\varphi)} \sigma' &\iff \varphi(\sigma) = \varphi(\sigma') \iff \bar{\varphi}(\sigma) = \bar{\varphi}(\sigma') \iff \bar{\varphi}(\sigma) - \bar{\varphi}(\sigma') = 0 \\ &\iff \bar{\varphi}(\sigma - \sigma') = 0 \iff (\sigma - \sigma') \in \mathrm{Ker}(\bar{\varphi}).\end{aligned}$$

De cette façon, en utilisant la proposition 1.1.8 nous avons la proposition suivante :

1.1.9 Proposition. *Soit $\varphi : N^n \to \Sigma$ un morphisme surjectif entre semi-groupes, où Σ est un semi-groupe simplifiable. Donc $\mathbb{N}^n/\mathcal{R}_{\mathrm{Ker}}(\varphi) \cong \Sigma$; et $\sigma \mathcal{R}_{\mathrm{Ker}}(\varphi) \sigma'$ si et seulement si $(\sigma - \sigma') \in \mathrm{Ker}(\bar{\varphi})$.* ∎

1.1.10 Exemples.

1. Soit $i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^n$ le morphisme identité, donc $\bar{i} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ est l'identité. Notons $\sim_i$ la congruence noyau de i, alors d'après la proposition 1.1.9 on a $\alpha \sim_i \beta$ si et seulement si $\alpha = \beta$. Ainsi
$$N^n \cong \mathbb{N}^n / \sim_i$$
2. Soit $\mathrm{abs} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ le morphisme définit par $\mathrm{abs}(e_i) = 1$. Notons $\sim_{\mathrm{abs}}$ la congruence noyau de abs. En posant $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$, on a
$$\alpha \sim_{\mathrm{abs}} \beta \iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i.$$
On peut voir que cette dernière affirmation est équivalente à
$$\alpha - \beta \in < e_i - e_j : i \neq j \text{ et } i, j \in \{1, \ldots, n\} > .$$
Donc $\mathbb{N} \cong \mathbb{N}^n / \sim_{\mathrm{abs}}$.
3. Soit $\mathbf{0} : \mathbb{N}^n \to \{0\}$ le morphisme constant 0. Notons $\sim$ la congruence noyau de $\mathbf{0}$. On a que $\sim$ est la congruence triviale, c'est à dire que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $\alpha \sim \beta$. Alors
$$\{0\} \cong \mathbb{N}^n / \sim .$$

Soit Σ un monoïde abélien simplifiable. On dit que Σ est un **semi-groupe pointé** si l'unique élément inversible de Σ est le $\mathbf{0}$; et Σ est un **semi-groupe affine** s'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que Σ est isomorphe à un sous-semi-groupe de $\mathbb{Z}^d$. Si de plus l'unique élément inversible de Σ est le $\mathbf{0}$ on dira que Σ est un **semi-groupe affine positif**. Le résultat suivant est bien connu.

1.1.11 Proposition. *Pour tout semi-groupe affine positif d-dimensionel Σ, il existe un plongement vers $\mathbb{N}^d$.*

1.2 Idéaux binomiaux et multigraduations

1.2.1 Définition. Soit Σ un monoïde abélien (additif) quelconque. On dit que $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est Σ-gradué, s'il existe une famille de sous-groupes additifs de $\Bbbk[\mathbf{x}]$, $\{S_a\}_{a\in\Sigma}$, tel que $\Bbbk[\mathbf{x}] = \oplus_{\sigma\in\Sigma} S_\sigma$ et pour tout $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, $S_\sigma \cdot S_{\sigma'} \subset S_{\sigma+\sigma'}$.

1.2.2 Exemple. $\Bbbk[\mathbf{x}] = \oplus_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\{c\mathbf{x}^\alpha : c \in \Bbbk\}$ est une $\mathbb{N}^n$-graduation de $\Bbbk[\mathbf{x}]$. Dans ce cas on dit que $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est $\mathbb{N}^n$ gradué.

Soient Σ un monoïde abélien et $\Bbbk[\mathbf{x}]$ un anneau Σ-gradué. On dit que $r \in \Bbbk[\mathbf{x}]$ est homogène s'il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que $r \in S_\sigma$. Dans ce cas on dira que σ est le degré de r et on le notera par $\deg_\Sigma(r) = \sigma$. Un $\Bbbk[\mathbf{x}]$-module gradué par Σ (Σ-gradué) est un $\Bbbk[\mathbf{x}]$-module avec une décomposition en somme directe $M = \sum_{\sigma\in\Sigma} M_\sigma$ satisfaisant $S_\sigma M_\tau \subset M_{\sigma+\tau}$ pour tout $\sigma, \tau \in \Sigma$. Ainsi, les sous-modules Σ-gradués de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ sont appelés idéaux gradués de $\Bbbk[\mathbf{x}]$.

1.2.3 Proposition. *Soient Σ, Σ' semi-groupes, tel que $\Bbbk[\mathbf{x}]$ Σ-gradué; et $\varphi : \Sigma \to \Sigma'$ un morphisme entre semi-groupes surjectif. Alors la Σ-graduation de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ induit une Σ'-graduation de $\Bbbk[\mathbf{x}]$.*

Preuve. Comme $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est Σ-gradué, il existe une famille $\{S_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ de sous-groupes additifs de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ tel que $\Bbbk[\mathbf{x}] = \oplus_{\sigma\in\Sigma} S_\sigma$ et pour tout $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, $S_\sigma \cdot S_{\sigma'} \subset S_{\sigma+\sigma'}$. Pour chaque $\tau \in \Sigma'$, on pose $S_\tau = \oplus_{\sigma\in\varphi^{-1}(\tau)} S_\sigma$. Donc $\oplus_{\tau\in\Sigma'} S_\tau$ est une Σ'-graduation de $\Bbbk[\mathbf{x}]$. ∎

1.2.4 Définition. Soit Σ un monoïde abélien de type fini, engendré par $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \subset \Sigma$. Un morphisme entre monoïdes $\deg_\Sigma : \mathbb{N}^n \to \Sigma$ (tel que $\deg_\Sigma(\mathbf{e}_i) = \sigma_i$) est appelé Σ **multi-degré**. Dans ce cas $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est $\mathbb{N}^n$-gradué ; en posant $S_\sigma = \{a\mathbf{x}^\alpha | a \in \Bbbk\ \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ et } \deg_\Sigma(\alpha) = \sigma\}$, pour tout $\sigma \in \Sigma$, on a par la proposition 1.2.3 : $\Bbbk[\mathbf{x}] = \oplus_{\sigma\in\Sigma} S_\sigma$ et on dira que $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est Σ-**multigradué**. Par ailleurs on définit $\deg_\Sigma(\mathbf{x}^\alpha) = \deg_\Sigma(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\sigma_i := \deg_\Sigma(x_i)$, où $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1.2.5 Exemple. $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est un module $\mathbb{N}$-gradué standard ou simplement $\mathbb{N}$-gradué, si $\deg_\mathbb{N} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ est le morphisme de semi-groupes défini par $\deg_\mathbb{N}(\mathbf{e}_i) = 1$. Donc,

$$\text{si } \alpha := (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}) \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| := \deg_\mathbb{N}(\alpha) = \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha^{(i)}, \text{ d'ici } \deg_\mathbb{N}(\mathbf{x}^\alpha) = |\alpha|.$$

1.2.6 Remarque. Soit Σ un monoïde abélien simplifiable, donc $\Sigma \subset G(\Sigma)$. Par ailleurs, on peut étendre le Σ-multi-degré à un morphisme $\deg_{G(\Sigma)} : \mathbb{Z}^n \to G(\Sigma)$. Cependant dans le cas général, cela n'est pas possible, car Σ ne peut pas toujours être plongé dans $G(\Sigma)$ d'aprés la proposition 1.1.4.

Maintenant on va voir comment obtenir un monoïde abélien Σ à partir d'un idéal binomial de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ pour faire une Σ-multigraduation de $\Bbbk[\mathbf{x}]$.

1.2.7 Définition. Un idéal B de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est un **idéal binomial** s'il est engendré par binômes (et monômes), c.a.d, B est engendré par une famille finie de binômes $\{\mathbf{x}^\alpha - a\mathbf{x}^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, a \in \Bbbk\}$. On dira que B est un **idéal binomial pur** s'il n'y a pas de monômes dans B.

1.2.8 Lemme. *Soient $\succ$ un ordre monomial sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$ et $I \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ un idéal binomial. Donc*

1. *La base de Gröbner réduite G de I par rapport à $\succ$ est un ensemble de binômes.*
2. *La forme normale par rapport à $\succ$ de tout terme modulo G est aussi un terme.*

Preuve. On fera la preuve de ce lemme au chapitre 3 quand on étudiera les bases de Gröbner. ∎

1.2.9 Théorème. (Proposition 1.11 [12]) *Un $\Bbbk$-algèbre de type fini R admet une présentation de la forme $R = \Bbbk[\mathbf{x}]/B$, où B est un idéal binomial, si et seulement si R peut-être gradué par un monoïde abélien commutatif engendré par n-éléments de Σ de tel façon que chaque composant homogène de R soit dimension ≤ 1.*

Preuve.
$\Rightarrow$) Nous posons la relation $\mathcal{R}$ en $T = \{\mathbf{x}^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n\} \cup \{\mathbf{0} \in \Bbbk[\mathbf{x}]\}$ de la façon suivante : soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ $\mathbf{x}^\alpha \sim_{\mathcal{R}} \mathbf{x}^\beta$ s'il existe $c \in \Bbbk$ tel que $\mathbf{x}^\alpha - c\mathbf{x}^\beta \in B$. Ainsi $\Sigma = T/\mathcal{R}$ est un monoïde abélien commutatif où l'unité est $[1]_{\mathcal{R}}$ et un zéro $[0]_{\mathcal{R}} = \infty$. On peut remarquer que s'il existe $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $\mathbf{x}^\alpha \in B$, $\mathbf{x}^\alpha \in [0]_{\mathcal{R}}$ et reciproquement. Pour chaque $\sigma \in \Sigma$, on pose V_σ l'espace vectoriel engendré par tous les monômes de σ dans R. En effet V_σ ne depend pas du representant $\mathbf{x}^\alpha$ de la classe σ et de plus :

$$V_\sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma = [0]_{\mathcal{R}} := \infty, \\ \Bbbk & \text{si } \sigma \neq [0]_{\mathcal{R}} := \infty. \end{cases}$$

Soit

$$V_\Sigma = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma \text{ et } \sigma \neq \infty} V_\sigma.$$

Soient $\sigma \in \Sigma \setminus \{\infty\}$, e_σ le générateur de V_σ et $\alpha_\sigma \in \mathbb{N}^n$ fix tel que $\mathbf{x}^{\alpha_\sigma} \in \sigma$. Nous posons le morphisme d'espaces vectoriels $\varphi : V_\Sigma \to R$ défini par $\varphi(e_\sigma) = x^{\alpha_\sigma} + B$. De cette façon φ est surjectif. On montrera que φ est aussi injectif. Soit Σ' un sous-ensemble fini de $\Sigma \setminus \{[0]_{\mathcal{R}}\}$, il existe $a_\sigma \in \Bbbk$ pas tous nuls

$$\varphi(\textstyle\bigoplus_{\sigma \in \Sigma'} a_\sigma e_\sigma) = 0.$$

Donc pour chaque $\sigma \in \Sigma'$ il existe $\alpha_\sigma \in \sigma$ tel que $\varphi(e_\sigma) = \mathbf{x}^{\alpha_\sigma} + B \neq \mathbf{0} + B$. Alors

$$\sum_{\sigma \in \Sigma'} a_\sigma \mathbf{x}^{\alpha_\sigma} + B = \mathbf{0} + B.$$

En outre, en choisissant un ordre monomial quelconque sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$ et en prennant une base de Gröbner $\mathcal{G}$ par rapport à cette ordre, on réduit $a_\sigma \mathbf{x}^{\alpha_\sigma}$ à sa forme normale avec G pour chaque $\sigma \in \Sigma'$. On sait du lemme 1.2.8 que pour tout $\sigma \in \Sigma'$, la forme normale de $a_\sigma \mathbf{x}^{\alpha_\sigma}$ est un terme, c.a.d., il existe $b_\sigma \in \Bbbk$ et $\beta_\sigma \in \mathbb{N}^n$ tel que $b_\sigma \mathbf{x}^{\beta_\sigma} + B = \mathbf{x}^{\alpha_\sigma} + B$ et $\sum_{\sigma \in \Sigma'} b_\sigma \mathbf{x}^{\beta_\sigma} + B = \mathbf{0} + B$, et par conséquent $\sum_{\sigma \in \Sigma'} a_\sigma \mathbf{x}^{\alpha_\sigma} \in B$. Par ailleurs, comme $b_\sigma \mathbf{x}^{\beta_\sigma}$ est la forme normale de $a_\sigma \mathbf{x}^{\alpha_\sigma}$ par rapport à $\mathcal{G}$, on a : aucun terme initial de chaque polynôme de $\mathcal{G}$ ne divise in$(\sum_{\sigma \in \Sigma'} b_\sigma \mathbf{x}^{\beta_\sigma})$, cela est absurde, puisque $\sum_{\sigma \in \Sigma'} b_\sigma \mathbf{x}^{\beta_\sigma} \in B$. Par conséquent $a_\sigma = 0$ pour tout $\sigma \in \Sigma'$. D'où φ est injective, donc φ est un isomorphisme et $R = \oplus_{\sigma \in (\Sigma \setminus [0]_{\mathcal{R}})} R_\sigma$ avec $R_\sigma = \{c\mathbf{x}^\alpha + B : \mathbf{x}^\alpha \in \sigma,\ c \in \Bbbk\}$ est une Σ-graduation de R.

$\Leftarrow$) On suppose que Σ est engendré par $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$ comme monoïde, et on pose le morphisme $\varphi : \Bbbk[\mathbf{x}] \to R$ qui envoie chaque variable x_i vers un élément non nul de la composante homogène de degré a_i de R. Ce morphisme φ est surjectif par définition. Par ailleurs, les relations de ces générateurs sont engendrées par des relations homogènes, i.e. par des relations qui sont sommes de monômes de même degré dans Σ. Mais pour tous monômes $m, m' \in \Bbbk[\mathbf{x}]$ avec $\deg_\Sigma(m) = \deg_\Sigma(m')$, il existe $c_1, c_2 \in \Bbbk$ pas tous les deux nuls tels que $\varphi(c_1 m - c_2 m') = 0 \in R$. On peut supposer que $c_1 \neq 0$, donc $\varphi(m - cm') = 0 \in R$, où $c = \frac{c_2}{c_1}$. Donc, l'idéal B engendré par ces binômes est le noyau du $\varphi : \Bbbk[\mathbf{x}] \to R$, par conséquent $R = \Bbbk[x]/B$.

■

De la preuve de ce théorème on pose la définition suivante :

1.2.10 Définition. Soit $B \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ un idéal binomial pur de $\Bbbk[\mathbf{x}]$, on pose la relation d'équivalence $\mathcal{R}_B$ sur $T = \{\mathbf{x}^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n\} \cong N^n$ (avec N^n semi-groupe sous l'addition) :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,\ \alpha \mathcal{R}_B \beta, \text{ s'il existe un binôme } \mathbf{x}^\alpha - a\mathbf{x}^\beta \in B \text{ avec } a \in \Bbbk.$$

Le monoïde $\Sigma(B)$ associé à B est l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathbb{N}^n$ données par $\mathcal{R}_B$, c.a.d $\Sigma(B) = \mathbb{N}^n/\mathcal{R}_B$. Pour simplifier la notation au lieu d'écrire $[\alpha]_{\mathcal{R}_B}$ on notera simplement $[\alpha]_B$. Par ailleurs,

$$\deg_{\Sigma(B)} : \mathbb{N}^n \to \Sigma(B), \text{ où } \deg_{\Sigma(B)}(\alpha) := [\alpha]_B,$$

est une multi-graduation de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ et B est un idéal $\Sigma(B)$-gradué. De plus par la définition 1.2.4

$$\deg_{\Sigma(B)}(\mathbf{x}^\alpha) = \deg_{\Sigma(B)}(\alpha) = [\alpha]_B.$$

1.2.11 Remarque.

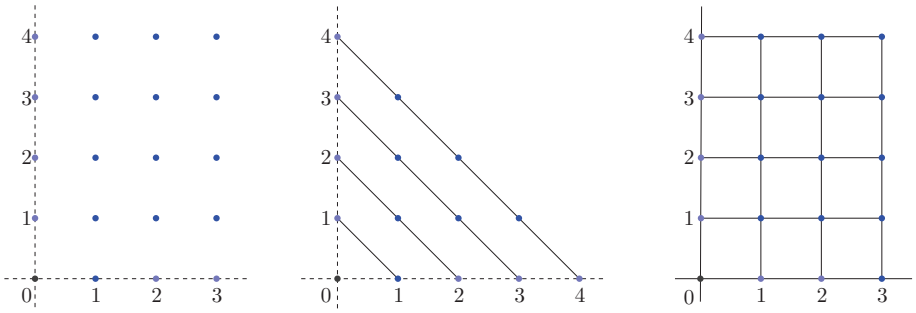
1. Dans la définition 1.2.10 l'hypothèse que B n'a pas de monômes est esentielle pour définir une bonne graduation sur l'anneau de polynômes (voir 1.4.5). En effet si $\mathbf{x}^\alpha \in B$, alors pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, $\mathbf{x}^\beta \mathbf{x}^\alpha \in [\mathbf{x}^\alpha]_B = \infty \in \Sigma(B)$, c.a.d. $\deg_{\Sigma(B)}(\mathbf{x}^\beta \mathbf{x}^\alpha) = \infty$.
2. De la définition 1.1.7 $\mathcal{R}_{Ker(\deg_{\Sigma(B)})} = \mathcal{R}_B$.

1.2.12 Exemples.

1. Soit $B = 0$. Donc $\alpha \mathcal{R}_B \beta$ si et seulement si $\alpha = \beta$. Ainsi par l'exemple 1.1.10(1), $\Sigma(B) \cong N^n$ et effectivement $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est gradué par N^n.
2. Soit $B = (x_i - x_j : i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j)$, donc

$$\alpha \mathcal{R}_B \beta \iff \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i,$$

   d'où par l'exemple 1.1.10(2), $\Sigma(B) \cong \mathbb{N}$ et effectivement $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est $\mathbb{N}$-gradué et $\Bbbk[\mathbf{x}]/B$ est un $\Bbbk[\mathbf{x}]$ module $\mathbb{N}$-gradué.
3. Soit $B = (x_i - 1 : i \in \{1, \ldots, n\})$, donc $\mathcal{R}_B = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n\}$, ainsi d'après l'exemple 1.1.10(3), $\Sigma(B) \cong \{0\}$, ce qui donne la graduation triviale de $\Bbbk[\mathbf{x}]$.



□

Soit Σ un monoïde abélien. L'**algèbre de semi-groupe** $\Bbbk[\Sigma]$ du monoïde abélien Σ est la $\Bbbk$-algèbre avec la $\Bbbk$-base $\{t^\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ et la multiplication définie par $t^\sigma \cdot t^\tau = t^{\sigma+\tau}$. L'algèbre de semi-groupe $\Bbbk[\Sigma]$ peut aussi être noté par $\Bbbk[t^\sigma : \sigma \in \Sigma]$. De la preuve du théorème 1.2.9 on a le corollaire suivant :

1.2.13 Corollaire. *Soit B un idéal binomial pur de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ tel que chaque binôme de B est de la forme $\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}^\beta$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Alors $\Bbbk[\mathbf{x}]/B \cong \Bbbk[\Sigma(B)]$.*

Preuve. Notons $\Sigma = \Sigma(B)$. D'aprés la preuve du théorème 1.2.9, $V_\Sigma = \bigoplus_{\sigma\in\Sigma} V_\sigma$ est un espace vectoriel sur $V_0 = \Bbbk$, où pour tout $\sigma \in \Sigma$, $\dim_\Bbbk V_\sigma = 1$ de la preuve du théorème 1.2.9. De plus, soit $\sigma \in \Sigma$ et e_σ le générateur de V_σ, donc V_Σ est un $\Bbbk$-algébre avec le produit définit par

$$\sum_{\sigma\in\Sigma} k_\sigma e_\sigma \cdot \sum_{\sigma'\in\Sigma} k_{\sigma'} e_{\sigma'} = \sum_{\tau=\sigma+\sigma'} k_\sigma k_{\sigma'} e_\tau,$$

avec $k_\sigma, k_{\sigma'} \in \Bbbk$ et seulement un nombre fini de k_σ's et $k_{\sigma'}$'s ne sont pas nuls. D'où $V_\sigma = \Bbbk[\Sigma]$ avec $t^\sigma = e_\sigma$. Par ailleurs le morphisme entre $\Bbbk$-espaces vectoriels $\varphi : \Bbbk[\Sigma] \to \Bbbk[\mathbf{x}]/B$ que l'on a définit dans la preuve du théorème 1.2.9, ne depend pas du représentant de la classe $\sigma \in \Sigma$; car si $\alpha, \beta \in \Sigma$, alors $x^\alpha - x^\beta \in B$ et $x^\alpha + B = x^\beta + B$ et par conséquent φ est un morphisme entre $\Bbbk$-algèbres. De plus, de la preuve du théorème 1.2.9, φ est un morphisme bijectif. En conséquence $\Bbbk[\mathbf{x}]/B \cong \Bbbk[\Sigma(B)]$.

■

En effet, le morphisme $\varphi : \Bbbk[\Sigma(B)] \to \Bbbk[\mathbf{x}]/B$ entre éspaces vectoriels n'est pas toujours nécessairement un morphisme de $\Bbbk$-algèbres, s'il y a des binômes de la forme $x^\alpha - cx^\beta \in B$ avec $c \in \Bbbk^*$, $c \neq 1$. Comme on voit dans l'exemple suivant :

1.2.14 Exemple. Soit $S = \Bbbk[x, y]$ et $C = (x^2 - 2xy)$. Donc $\Sigma(C) \cong N^2/\sim_C$, comme on peut voir dans la figure 1.1, où $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{N}^2$, $a \sim_C b$ si $x^{a_1}y^{a_2} - x^{b_1}y^{b_2} \in C$.

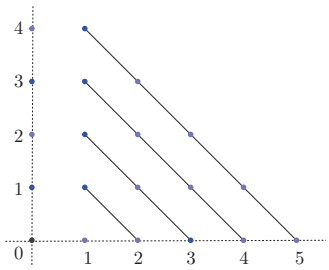


FIGURE 1.1 –

Pour chaque $\sigma \in \Sigma(C)$ on prend $\alpha \in \sigma$ fix et on définit le morphisme entre espaces vectoriels

$$\varphi : \Bbbk[\Sigma] \to \Bbbk[\mathbf{x}]/C \text{ par } \varphi(t^{\sigma}) = x^{\alpha} + C.$$

Ce morphisme φ n'est pas un morphisme entre algèbres. Sinon supposons que φ est un morphisme entre $\Bbbk$-algèbres. Comme $[(1,0)]_C = \{(1,0)\}$ et $[(0,1)]_C = \{(0,1)\}$, on a : $\varphi(t^{[(1,0)]C}) = x + C$ et $\varphi(t^{[(0,1)]_C}) = y + C$ et

$$\{(2,0),(1,1)\} = [(2,0)]_C = [(1,0)]_C + [(0,1)]_C = [(1,0)]_C + [(1,0)]_C,$$

donc

$$\varphi(t^{[(2,0)]_C}) = \varphi(t^{[(1,0)]_C} \cdot t^{[(0,1)]_C}) = \varphi(t^{[(1,0)]_C}) \cdot \varphi(t^{[(0,1)]_C}) = (x+C)(y+C) = xy + C \text{ et}$$

$$\varphi(t^{[(2,0)]_C}) = \varphi(t^{[(1,0)]_C} \cdot t^{[(1,0)]_C}) = \varphi(t^{[(1,0)]_C}) \cdot \varphi(t^{[(1,0)]_C}) = (x+C)(x+C) = x^2 + C$$

Mais $x^2 + C \neq xy + C$. Donc φ n'est pas un morphisme d'algèbres.

□

1.2.15 Définition. *Soient Σ un monoïde abélien de type fini et M un $\Bbbk[\mathbf{x}]$-module Σ-gradué. Pour tout $\sigma \in \Sigma$, le σ-ème décalage de M, noté par $M[-\sigma]$, est le $\Bbbk[\mathbf{x}]$-module gradué défini par*

$$M[-\sigma]_a = \begin{cases} 0 & \text{si } a \notin \sigma + \Sigma, \\ \oplus_{b \in \Sigma |\ a = \sigma + b} M_b & \text{si } a \in \sigma + \Sigma. \end{cases}$$

Il faut remarquer que $M[\sigma]$ n'est pas toujours défini.

1.2.16 Exemple. Soit $S = \Bbbk[x,y]$ et $B = (x^2 - xy)$. En plus $\Sigma(B) \cong \Sigma(C)$, où C est l'idéal binomial de l'exemple 1.2.14 et la figure1.1 est une réprésentation graphique de $\Sigma(B)$. De cette façon, en posant $\sigma = \deg_{\Sigma(B)}(x)$ et $\sigma' = \deg_{\Sigma(B)}(y)$

$$R = S/B = R_{\mathbf{0}} \oplus (\bigoplus_{i=1}^{\infty} (R_{i\sigma} \oplus R_{(i\sigma')})),$$

où $R_a \cong \Bbbk$ avec $a \in \Sigma$. Par ailleurs,

$$R[-\sigma]_a = \begin{cases} R_\sigma & \text{si } a = \sigma, \\ R_{i\sigma} \oplus R_{(i-1)\sigma'} & \text{si } a = i\sigma,\ i \geq 2, \\ 0 & \text{si } \sigma = i,\ i \geq 1,\ a = 0. \end{cases}$$

□

De l'exemple précédent on peut remarquer que si B est un idéal binomial, $R = \Bbbk[\mathbf{x}]/B$ et $\sigma \in \Sigma(B)$, on n'a pas nécessairement : $R[-\sigma] \cong R$, en tant que module $\Sigma(B)$-gradué, comme c'est le cas quand $B = 0$ où $R = \Bbbk[\mathbf{x}]$ est $\mathbb{N}^n$-gradué standard. Par ailleurs, dans le cas où $B = 0$ on a, pour tout $a, b \in \mathbb{N}^n$, $\dim_\Bbbk R_a \leq 1$ et $\dim_\Bbbk R[-b]_a \leq 1$, mais pour tout idéal binomial B et pour tout $a \in \Sigma(B)$ on a : $\dim_\Bbbk R_a \leq 1$ par le théorème 1.2.9. Cependant, par l'exemple 1.2.16, il n'est pas toujours vrai que pour tout $a, b \in \mathbb{N}^n$ $\dim_\Bbbk R[-b]_a \leq 1$. Dans le théorème suivant, on va voir dans quel cas nous aurons cette propriété :

1.2.17 Théorème. *Soit B un idéal binomial pur de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ et $R = \Bbbk[\mathbf{x}]/B$. Donc si $\sigma \in \Sigma(B)$, σ est simplifiable si et seulement si pour tout $a \in \Sigma(B)$, $\dim_\Bbbk R[-\sigma]_a \leq 1$.*

Preuve.
⇒) Par définition

$$R[-\sigma]_a = \begin{cases} 0 & \text{si } a \notin \sigma + \Sigma, \\ \oplus_{b \in \Sigma |\ a = \sigma + b} R_b & \text{si } a \in \sigma + \Sigma. \end{cases}$$

- Si $a \notin \sigma + \Sigma(B)$, $\dim_\Bbbk R[-\sigma]_a = 0$.
- Si $a \in \sigma + \Sigma(B)$. Comme $\dim_\Bbbk R_a = 1$ pour tout $a \in \Sigma$ d'aprés la démonstration du théoréme 1.2.9, alors $\dim_\Bbbk R[-\sigma]_a \geq 1$. Par ailleurs s'il existe $b, b' \in \Sigma$ tel que $a = \sigma + b = \sigma + b'$, comme σ est simplifiable, nous concluons que $b = b'$, et par conséquent $\dim_\Bbbk R[-\sigma]_a = 1$.

⇐) Soient $b, b' \in \Sigma(B)$ tel que $\sigma + b = \sigma + b'$. On pose $a = \sigma + b$. Si $b \neq b'$, alors

$$\dim_\Bbbk R[-\sigma]_a \geq \dim_\Bbbk R_b + \dim_\Bbbk R_{b'} = 2,$$

mais $\dim_\Bbbk R[-\sigma]_a = 1$, donc $b = b'$ et σ est simplifiable.

■

1.3 Idéaux de réseau et idéaux toriques

1.3.1 Définition. Soit I un idéal de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ on note par $(I : (x_1 \cdots x_n)^\infty)$ l'ensemble de tous les polynômes $p \in \Bbbk[\mathbf{x}]$ tel qu'il existe un $\alpha \in \mathbb{N}^n$, pour lequel $\mathbf{x}^\alpha p \in I$.

1.3.2 Proposition. *Soit I un idéal de $\Bbbk[\mathbf{x}]$.*

1. *$(I : (x_1 \cdots x_n)^\infty)$ est un idéal de $\Bbbk[\mathbf{x}]$.*
2. *$(I : (x_1 \cdots x_n)^\infty) = \Bbbk[\mathbf{x}]$ si et seulement si I a des monômes.*

Preuve.

1. Si $p(\mathbf{x}) \in (I : (x_1 \cdots x_n)^\infty)$ il existe $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $p(\mathbf{x})\mathbf{x}^\alpha \in I$. De cette façon, soit $q(\mathbf{x}) \in \Bbbk[\mathbf{x}]$ quelconque $q(\mathbf{x})(p(\mathbf{x})\mathbf{x}^\alpha) \in I$, alors $q(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) \in (I : (x_1 \cdots x_n)^\infty)$. Ainsi, $(I : (x_1 \cdots x_n)^\infty)$ est un idéal de $\Bbbk[\mathbf{x}]$.
2. $\Rightarrow$) Comme $1 \in (I : (x_1 \cdots x_n)^\infty) = \Bbbk[\mathbf{x}]$, il existe $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $\mathbf{x}^\alpha \cdot 1 \in I$, alors $\mathbf{x}^\alpha \in I$.
   $\Leftarrow$) Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $\mathbf{x}^\alpha \in I$, alors $\mathbf{x}^\alpha \cdot 1 \in I$, en conséquence $1 \in (I : (x_1 \cdots x_n)^\infty)$, et comme $(I : (x_1 \cdots x_n)^\infty)$ est un idéal, $(I : (x_1 \cdots x_n)^\infty) = \Bbbk[\mathbf{x}]$.

■

1.3.3 Remarque. *Par la proposition 1.3.2, si $B = (B : (x_1 \cdots x_n)^\infty)$, alors B n'a pas de monômes, puisque $B \neq \Bbbk[\mathbf{x}]$.*

1.3.4 Définition. Un caractère partiel sur $\mathbb{Z}^n$ est un morphisme ρ d'un réseau L_ρ(sous-groupe) de $\mathbb{Z}^n$ vers le groupe multiplicatif $\Bbbk^*$. On appellera l'idéal $I_{L_\rho} = (\mathbf{x}^\alpha - \rho(\alpha - \beta)\mathbf{x}^\beta : \alpha - \beta \in L_\rho)$, l'idéal de réseau du caractére ρ.

1.3.5 Lemme. ([12, Corollaire 2.5]) *Soit B un idéal binomial pur dans $\Bbbk[\mathbf{x}]$. Alors, il existe un unique caractère partiel ρ sur $\mathbb{Z}^n$ tel que $(B : (x_1 \cdots x_n)^\infty) = I_{L_\rho}$.*

1.3.6 Proposition. *Soient B un idéal binomial pur de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ et $\Sigma(B)$ le monoïde de la définiton 1.2.10. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *$\Sigma(B)$ est simplifiable.*
2. *Il y a un sous-goupe L de $\mathbb{Z}^n$ tel que $\Sigma(B) = \mathbb{N}^n/\sim_L$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ $\alpha \sim_L \beta$ si $\alpha - \beta \in L$.*
3. *Il y a un caractère partiel unique ρ sur $\mathbb{Z}^n$ tel que $B = I_{L_\rho}$.*
4. *$B = (B : (x_1 \cdots x_n)^\infty)$.*
5. *L'image d'aucune variable x_i sur $\Bbbk[\mathbf{x}]/B$ n'est pas un diviseur de zéro dans $\Bbbk[\mathbf{x}]/B$.*

Preuve.

1. $\Rightarrow$ 2. Comme $\Sigma(B)$ est un monoïde simplifiable, $\Sigma(B) \subset G(\Sigma(B))$, où $G(\Sigma(B))$ est son groupe de fractions. Par ailleurs, de la proposition 1.1.9 on a : $\Sigma(B) = \mathbb{N}^n/R_{\mathrm{Ker}(\deg_{\Sigma(B)})}$, où

$$R_{\mathrm{Ker}(\deg_{\sigma(B)})} = \{(\sigma, \sigma') \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n : \sigma - \sigma' \in \mathrm{Ker}(\overline{\deg}_{\Sigma(B)}),$$

   où $\overline{\deg}_{\Sigma(B)} : \mathbb{Z}^n \to G(\Sigma(B))$ est le morphisme défini par $\overline{\deg}_{\Sigma(B)}(e_i) = \deg_{\Sigma(B)}(e_i)$. En posant $L = \mathrm{Ker}(\overline{\deg}_{\Sigma(B)})$ et $\sim_L = R_{\mathrm{Ker}(\deg_{\sigma(B)})}$ nous avons l'affirmation 2.
2. $\Rightarrow$ 3. Il faut remarquer que s'il existe $\alpha, \alpha' \in \mathbb{N}^n$ tels qu'il existe $a \in \Bbbk^*$ pour lequel $\mathbf{x}^\alpha - a\mathbf{x}^{\alpha'} \in B$, alors il n'y a pas d' autre $a' \in \Bbbk$ tel que $\mathbf{x}^\alpha - a'\mathbf{x}^{\alpha'} \in B$. Supposons le contraire, s'il existe $a' \in \Bbbk$, $a' \neq a$ tel que $\mathbf{x}^\alpha - a'\mathbf{x}^{\alpha'} \in B$, alors $\mathbf{x}^\alpha - a\mathbf{x}^{\alpha'} - (\mathbf{x}^\alpha - a'\mathbf{x}^{\alpha'}) = (a' - a)\mathbf{x}^{\alpha'} \in B$. Il s'agit d'une contradiction, puisque B ne contient pas de monômes. Donc $a \in \Bbbk^*$ est unique pour $\mathbf{x}^\alpha - a\mathbf{x}^{\alpha'} \in B$ et nous notons $a := a_{\alpha,\alpha'}$.
   Par ailleurs, si $\alpha \in L$, alors il existe $\alpha_+ = (\alpha_+^{(1)}, \ldots, \alpha_+^{(n)}), \alpha_- = (\alpha_-^{(1)}, \ldots, \alpha_-^{(n)}) \in \mathbb{N}^n$ uniques

satisfasant la propriété : $\alpha = \alpha_+ - \alpha_-$, et de plus si $\alpha_+^i > 0$ alors $\alpha_-^i = 0$ et reciproquement. Par ailleurs, comme $\Sigma(B) = \mathbb{N}^n/\sim_L$, on a : $\mathbf{x}^{\alpha_+} - a_{\alpha_+-\alpha_-}\mathbf{x}^{\alpha_-} \in B$. Ainsi, on définit la fonction $\rho : L \to \Bbbk^*$ par $\rho(a) = a_{\alpha_+,\alpha_-}$. Il est clair que ρ est un morphisme de groupes ; par conséquent ρ est un caractère partiel de L et de cette façon $B = I_\rho$.

3. $\Rightarrow$ 4. Cette implication vient du lemme 1.3.5.
4. $\Rightarrow$ 5. Soient x_i une variable de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ et $p(x) \in \Bbbk[x]$ tel que $p(x) \notin B$, alors $p(x)x_i \notin B$. Sinon $p(x) \in (B : (x_1 \cdots x_n)^\infty) = B$.
5. $\Rightarrow$ 1. Soient $\sigma, \rho, \omega \in \Sigma(B)$ tels que $\sigma + \rho = \sigma + \omega$, alors il existe $\alpha \in \sigma$, $\beta \in \rho$ et $\gamma \in \omega$ tels que $\mathbf{x}^\alpha\mathbf{x}^\beta - k\mathbf{x}^\alpha\mathbf{x}^\gamma \in B$, donc $\mathbf{x}^\alpha(\mathbf{x}^\beta - k\mathbf{x}^\gamma) = \mathbf{x}^\alpha\mathbf{x}^\beta - k\mathbf{x}^\alpha\mathbf{x}^\gamma \in B$. On prend une variable x_i telle que $x_i|\mathbf{x}^\alpha$, ainsi $x_i(\frac{\mathbf{x}^\alpha}{x_i}(\mathbf{x}^\beta - k\mathbf{x}^\gamma))$. Comme x_i n'est pas un diviseur de zéro sur $\Bbbk[\mathbf{x}]/B$, nous avons que $\frac{\mathbf{x}^\alpha}{x_i}(\mathbf{x}^\beta - k\mathbf{x}^\gamma) \in B$. Par ailleurs, si $\frac{\mathbf{x}^\alpha}{x_i} \neq 1$, nous prenons une variable x_j telle que $x_j|\frac{\mathbf{x}^\alpha}{x_i}$ et, de même que précédemment on a : $\frac{\mathbf{x}^\alpha}{x_ix_j}(\mathbf{x}^\beta - k\mathbf{x}^\gamma) \in B$. Ainsi, par récurrence on arrive à $(\mathbf{x}^\alpha - k\mathbf{x}^\gamma) \in B$ et par conséquent $\rho = \omega$. On conclut que $\Sigma(B)$ est simplifiable.

■

1.3.7 Définition. *Soit $B \neq \Bbbk[\mathbf{x}]$ un idéal binomial pur qui vérifie une des propriétés de la proposition 1.3.6, alors B est appelé* **idéal de réseau**.

1.3.8 Exemples.

1. Soit $S = \Bbbk[x, y, z]$ et $I = (y^2z^4 - 1)$. $L = \{(0, 2i, 4i) : i \in \mathbb{N}\}$ est un réseau de $\mathbb{Z}^3$ et le morphisme $\rho : L \to \Bbbk^*$ défini par $\rho((0, 2, 4)) = 1$ est un caractére sur $\mathbb{Z}^3$, donc $I = I_L$. Ainsi par la proposition 1.3.6, I est un idéal de réseau. Par ailleurs, on peut remarquer que :
   - $[\mathbf{0}]_{\mathcal{R}_I} = \{(0, 2i, 4i) : i \in \mathbb{N}\}$. Cela découle de l'argument suivant : Il est claire que $\{(0, 2i, 4i) : i \in \mathbb{N}\} \subset [\mathbf{0}]_{\mathcal{R}_I}$. Il nous reste à prouver que $[\mathbf{0}]_{\mathcal{R}_I} \subset \{(0, 2i, 4i) : i \in \mathbb{N}\}$. Montrons cette dernière inclusion par l'absurde. Soit $\alpha \in [\mathbf{0}]_{\mathcal{R}_I}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^3 \setminus \{(0, 2i, 4i) : i \in \mathbb{N}\}$. On peut alors écrire $\alpha = \alpha_1 + i(0, 2, 4)$ avec $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}) \in \mathbb{N}^3$, et $i \in \mathbb{N}$ l'entier plus grand tel que $\alpha_{12} < 2$ et $\alpha_{13} < 4$. Comme $\alpha \in [\mathbf{0}]_{\mathcal{R}_I}$, on a

     $$\mathbf{x}^{\alpha_1}(y^2z^4)^i - 1 = x^\alpha - 1 \in I. \tag{1.1}$$

     Considérons deux cas :
     - Soit $i = 0$. Alors $\mathbf{x}^{\alpha_1}(y^2z^4)^0 - 1 = \mathbf{x}^{\alpha_1} - 1 \in I$.
     - Soit $i > 1$. Alors
       $$\mathbf{x}^{\alpha_1}(y^2z^4)^i - \mathbf{x}^{\alpha_1} = \mathbf{x}^{\alpha_1}((y^2z^4)^i - 1) \in I.$$
       D'après l'équation 1.1 on a $x^{\alpha_1} - 1 \in I$.

     Donc, des deux cas précédents on a $\mathbf{x}^{\alpha_1} - 1 \in I$, donc $\alpha_{12} \geq 2$ ou $\alpha_{13} \geq 4$, mais cela est une contradiction avec le fait que $\alpha_{12} < 2$ et $\alpha_{13} < 4$. Alors $[\mathbf{0}]_{\mathcal{R}_I} \subset \{(0, 2i, 4i) : i \in \mathbb{N}\}$ et de là on a prouve que $[\mathbf{0}]_{\mathcal{R}_I} = \{(0, 2i, 4i) : i \in \mathbb{N}\}$.

   En outre, plusieurs éléments de $\Sigma(I)$ ont leur inverse dans $\Sigma(I)$, par exemple : $[(0, 1, 3)]_{\mathcal{R}_I}^{-1} = [(0, 1, 1)]_{\mathcal{R}_I}$; mais tous les éléments n'ont pas d'inverse, par exemple : $\deg(x)_\Sigma(I)(x) = [(1, 0, 0)]_{\mathcal{R}_I}$ n'est pas inversible dans $\Sigma(I)$.

2. Soit $S = \Bbbk[x, y]$, $I = (x^2 - xy)$, dans ce cas le monoïde abélien n'est pas simplifiable, car

$$\deg_\Sigma(x) + \deg_\Sigma(x) = \deg_\Sigma(x) + \deg_\Sigma(y),$$

mais $\deg_\Sigma(x) \neq \deg_\Sigma(y)$, puisque $x - y \notin I$. Par conséquent I n'est pas un idéal de réseau.

□

1.3.9 Proposition. *Soit B un idéal binomial pur dans $\Bbbk[\mathbf{x}]$. Si B est un idéal premier de $\Bbbk[\mathbf{x}]$, alors B est un idéal de réseau.*

Preuve. Comme B est un ideal binomial pur on a pour tout $i = 1, \ldots, n$, $x_i + B \neq \mathbf{0} + B$. Par ailleurs, du fait que B est un idéal premier on a $\Bbbk[\mathbf{x}]/B$ est un domaine entier et par conséquent pour tout $i = 1, \ldots, n$, $x_i + B$ n'est pas un diviseur de zéro ; ainsi, d'après le point 5 de la proposition 1.3.6, B est un idéal de réseau. ∎

1.3.10 Définition. Soit L un réseau de $\mathbb{Z}^n$, c'est à dire que L est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$. On dit que L est un **réseau saturé** si pour tout $v \in \mathbb{Z}^n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $kv \in L$ implique que $v \in L$.

1.3.11 Théorème. *Soit B un idéal binomial pur dans $\Bbbk[\mathbf{x}]$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *$\Sigma(B)$ est simplifiable et son groupe de fractions $G(\Sigma(B))$ est un groupe abélien libre de torsion.*
2. *Le monoïde $\Sigma(B)$ est un semi-groupe affine.*
3. *Il existe un réseau saturé L_B tel que $\Sigma(B) \cong \mathbb{N}^n/\sim L_B$.*

Preuve.

1. $\Rightarrow$ 3. Comme $\Sigma(B)$ est simplifiable par la proposition 1.3.7, il existe un sous-goupe L_B de $\mathbb{Z}^n$ tel que $\Sigma(B) = \mathbb{N}^n/\sim_{L_B}$. Il nous reste à montrer que L_B est un réseau saturé. Pour ça, prenons $v \in \mathbb{Z}^n$ tel qu'il existe $\Bbbk \in \mathbb{N}^*$, $kv \in L_B$. Comme $v \in \mathbb{Z}^n$ on peut le décomposer de la façon suivante $v = v_+ - v_-$, où $v_+, v_- \in \mathbb{N}^n$. Ainsi $kv = kv_+ - kv_- \in L$, par conséquent il existe $a \in \Bbbk$ tel que $x^{kv_+} - ax^{kv_-} \in B$, donc $\deg_{\Sigma(B)}(x^{kv_+}) = \deg_{\Sigma(B)}(x^{kv_-})$, d'où $k\deg_{\Sigma(B)}(x^{v_+}) - k\deg_{\Sigma(B)}(x^{v_+}) = \mathbf{0}$ et $k(\deg_{\Sigma(B)}(x^{v_+}) - \deg_{\Sigma(B)}(x^{v_-})) = \mathbf{0}$, par contre $G(\Sigma(B))$ est libre de torsion, donc $[x^{v_+}]_B - [x^{v_+}]_B = \mathbf{0}$ et par conséquent $v = v_+ - v_- \in L_B$.
3. $\Rightarrow$ 1. Comme il existe un réseau L_B tel que $\Sigma(B) \cong \mathbb{N}^n/L_B$, $\Sigma(B)$ est simplifiable d'après le point 2. de la proposition 1.3.6. Il reste à montrer que $G(\Sigma(B))$ est un groupe abélien libre de torsion.
   On sait que $\Sigma(B)$ est de type fini, engendré par $\{\sigma_i := \deg_{\Sigma(B)} x_i\}_{i=1}^n$. Donc si $\sigma \in G(\Sigma(B))$ par la proposition 1.1.6 on a que

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} n_i\sigma_i = \sum_{n_i \geq 0} n_i\sigma_i - \sum_{n_i < 0} (-n_i)\sigma_i = \sigma_+ - \sigma_-,$$

où $\sigma_+ = \sum_{n_i \geq 0} n_i \sigma_i \in \Sigma(B)$ et $\sigma_- = \sum_{n_i < 0} (-n_i)\sigma_i \in \Sigma(B)$. Soit $\sigma \in \Sigma$, $k\sigma = \mathbf{0} \in \Sigma$, donc $k\sigma_+ - k\sigma_- = \mathbf{0}$, ainsi $k\sigma_+ = k\sigma_-$. D'où il existe $\alpha \in \sigma_+$, $\beta \in \sigma_-$ et $a \in \Bbbk$ tel que $x^{k\alpha} - ax^{k\beta} \in B$, ainsi $k\alpha - k\beta \in L_B$, par contre $k\alpha - k\beta = \Bbbk(\alpha - \beta) \in L_B$, de cette façon $\alpha - \beta \in L_B$ et en conséquence il existe $b \in \Bbbk$ tel que $\mathbf{x}^\alpha - b\mathbf{x}^\beta \in B$, alors $\sigma_+ = \sigma_-$ et $\sigma = \sigma_+ - \sigma_- = \mathbf{0} \in G(\Sigma(B))$.

1. $\Leftrightarrow$ 2. Les affirmations 1) et 2) sont équivalentes puisque tout groupe abélien libre de torsion de type fini est isomorphe à Z^d par le théorème de structure de groupes abéliens.

■

1.3.12 Théorème. *Soit B un idéal binomial pur dans $\Bbbk[\mathbf{x}]$. Si $\Bbbk$ est algébriquement clos, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *B est un idéal premier.*
2. *L'anneau $R = \Bbbk[\mathbf{x}]/B$ est un domaine entier.*
3. *$\Sigma(B)$ est simplifiable et son groupe de fractions $G(\Sigma(B))$ est un groupe abélien libre de torsion.*
4. *Le monoïde $\Sigma(B)$ est un semi-groupe affine.*
5. *Il existe un réseau saturé L_B tel que $\Sigma(B) \cong \mathbb{N}^n / \sim L_B$.*

Or tout binôme de B est de la forme $x^\alpha - x^\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ et $\Bbbk$ n'est pas nécessairement clos. Les affirmations 1 à la 5 sont équivalentes et elles sont aussi équivalentes à l'affirmation suivante :

6. *Il existe un sous-semi-groupe Σ de $\mathbb{Z}^d$ tel que $\Bbbk[\mathbf{x}]/B \cong \Bbbk[t^\alpha : \alpha \in \Sigma \subset \mathbb{Z}^d]$.*

Preuve.

3. $\Leftrightarrow$ 4. $\Leftrightarrow$ 5. C'est le théorème 1.3.11.

1. $\Leftrightarrow$ 2. On sait qu'en général $B \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ est un idéal premier si et seulement si $R = \Bbbk[\mathbf{x}]/B$ est un domaine entier.

1. $\Rightarrow$ 3. Nous montrerons la contraposée. Nous avons deux cas :

   a. Soit $\Sigma(B)$ non simplifiable, donc B n'est pas un idéal de réseau grâce a la proposition 1.3.6. Finalement, de la proposition 1.3.9 on déduit que B n'est pas premier.

   b. Soit $\Sigma(B)$ simplifiable et $G(\Sigma(B))$ un groupe abélien qui n'est pas libre de torsion. Ainsi, il existe $\sigma \in G(\Sigma(B))$, $\sigma \neq \mathbf{0}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ minimal tels que $k\sigma = \mathbf{0}$. On sait que nous pouvons décomposer σ de la façon suivante : $\sigma = \sigma_+ - \sigma_-$, où $\sigma_+, \sigma_- \in \Sigma(B)$, donc $k\sigma_+ = k\sigma_-$, par conséquent il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ et $a \in \Bbbk$ tel que $\deg(x^\alpha) = \sigma_+$ et $\deg(x^\beta) = \sigma_-$ de même que $x^{k\alpha} - ax^{k\beta} \in B$.
   Par ailleurs, si tout binôme de B est de la forme $x^\alpha - x^\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $a = 1$. De cette façon soit $b \in \Bbbk$ tel que

      i. si tout binôme de B est de la forme $x^\gamma - x^\delta$ avec $\gamma, \delta \in \mathbb{N}^n$, alors $b = 1$;

      ii. si $\Bbbk$ algebriquement clos, alors $b^k = a$.

Ainsi

$$x^{k\alpha} - ax^{k\beta} = x^{k\alpha} - b^k x^{k\beta} = (\mathbf{x}^\alpha - b\mathbf{x}^\beta)(\sum_{i=0}^{k-1} b^i x^{(k-1-i)\alpha} x^{i\beta}).$$

Comme $\sigma \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x}^\alpha - b\mathbf{x}^\beta \notin B$, de plus, chaque monôme du polynôme

$$q(x) := \sum_{i=0}^{k-1} b^i x^{(k-1-i)\alpha} x^{i\beta}$$

n'est pas de même degré sur $\Sigma(B)$ et comme B est $\Sigma(B)$-gradué, $q(x) \notin B$, en conséquence de quoi B n'est pas un idéal premier.

4. $\Rightarrow$ 6. En supposant que tout binôme de B est de la forme $x^\alpha - x^\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, du corollaire 1.2.13 on a : $\Bbbk[\mathbf{x}]/B \cong \Bbbk[\Sigma(B)] = \Bbbk[t^\alpha : \alpha \in \Sigma(B)]$. De plus, de l'hypothèse que $\Sigma(B)$ est un semi-groupe affine, il existe $d \in \mathbb{N}$ et un sous-semi-groupe Σ de $\mathbb{Z}^d$ tel que $\Sigma(B) \cong \Sigma$. Alors

$$\Bbbk[\mathbf{x}]/B \cong \Bbbk[\Sigma] = \Bbbk[t^\alpha : \alpha \in \Sigma \subset \mathbb{Z}^d].$$

6. $\Rightarrow$ 2. $\Bbbk[G(\Sigma(B))]$ est un anneau polynomial de Laurent, donc il est un domaine entier et

$$R = \Bbbk[\mathbf{x}]/B \cong \Bbbk[t^\alpha : \alpha \in \Sigma(B) \subset \mathbb{Z}^d]$$

est un sous-algèbre de $\Bbbk[G(\Sigma(B))]$, par conséquent R est un domaine entier.

■

1.3.13 Définition. Soit B un idéal binomial pur dans $\Bbbk[\mathbf{x}]$. B est dit torique s'il satisfait une des propriétés du théorème 1.3.12.

1.3.14 Exemple. Soit $B = (x^2 - y^2) \subset \Bbbk[x, y]$. En posant $L = \{2(a, -a) \in \mathbb{Z}^2\}$ et en définissant le caractère $\rho : L \to \Bbbk^*$ par $\rho(2(a, -a)) = 1$, on a que $B = I_\rho$. Par conséquent B est un idéal de réseau, mais il n'est pas premier. Par ailleurs $0 \neq \deg_{\Sigma(B)}(x) - \deg_{\Sigma(B)}(y) \in G(\Sigma(B))$, et comme

$$2(\deg_{\Sigma(B)}(x)) = \deg_{\Sigma(B)}(x^2) = \deg_{\Sigma(B)}(y^2) = 2\deg_{\Sigma(B)}(y),$$

$0 = 2(\deg_{\Sigma(B)}(x) - \deg_{\Sigma(B)}(y)) \in G(\Sigma(B))$, alors $G(\Sigma(B))$ n'est pas libre de torsion comme nous l'avions souhaité à partir du théorème 1.3.12.

□

1.4 Multigraduation positive

On suppose $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est Σ-multigradué (voir définition 1.2.4).

1.4.1 Proposition. *Si les uniques polynômes de Σ-degré $\mathbf{0}$ sont les constantes, alors l'idéal $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ est l'unique idéal maximal Σ-gradué de $\Bbbk[\mathbf{x}]$.*

Preuve. Comme $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est Σ-gradué, on peut écrire $\Bbbk[\mathbf{x}] = \oplus_{a\in\Sigma} S_a$, où $S_a = \{a\mathbf{x}^\alpha : a \in \Bbbk,\ a \in \mathbb{N} \text{ et } \deg_\Sigma(a) = \alpha\}$. Par ailleurs, soit I un idéal Σ-gradué de $\Bbbk[\mathbf{x}]$, alors il existe $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{I}$ tel que $I = (f_1, \ldots, f_m)$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, il existe $a_i \in \Sigma$, $a_i \neq \mathbf{0}$ tels que $f_i \in S_{a_i}$, donc $f_i = \sum_{j=1}^{m_i} c_j x^{\alpha_j}$, où $c_j \in \Bbbk$ et $x^{\alpha_j} \in S_{a_i}$, pour tout $j \in \{1, \ldots, m_i\}$. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i \in (x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{m}$. Par conséquent $I \subset \mathfrak{m}$ et de cette façon, $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ est l'unique idéal maximal Σ-gradué de $\Bbbk[\mathbf{x}]$. ∎

1.4.2 Proposition. *Soit Σ un monoïde abélien engendré par $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$, tel que $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est Σ-gradué, avec $\deg_\Sigma(x_i) = a_i$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe $a \in \Sigma$ tel que l'espace vectoriel S_a soit de dimension finie.*
2. *Les uniques polynômes de Σ-degré $\mathbf{0}$ sont les constantes, c.a.d., $S_{\mathbf{0}} = \Bbbk$.*
3. *Le monoïde abélien Σ a une unique élément inversible, le $\mathbf{0}$, et $\deg_\Sigma(x_i) = a_i \neq \mathbf{0}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Preuve.

1) $\Rightarrow$ 2) Soit $a \in \Sigma$ tel que l'espace vectoriel S_a soit de dimension finie. Comme Σ est engendré par $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$, il existe $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $a = u_1a_1 + \cdots + u_na_n$, donc $\deg_\Sigma(x^u) = a$. Par ailleurs, on peut définir un morphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels $\varphi_u : S_{\mathbf{0}} \to S_a$ qui est la multiplication par x^u, donc φ est injective et par conséquence $\dim_\Bbbk S_{\mathbf{0}} < \infty$. De plus $\Bbbk \subset S_{\mathbf{0}}$. Il reste à montrer que $S_{\mathbf{0}} \subset \Bbbk$, pour ça on suppose qu'il existe $u' \in \mathbb{N}^n$, $u' \neq \mathbf{0}$ tel que $\deg_\Sigma(x^{u'}) = 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\deg_\Sigma(x^{n\cdot u'}) = 0$, mais cela est en contradiction par rapport à $\dim_\Bbbk S_{\mathbf{0}} < \infty$, donc $S_{\mathbf{0}} = \Bbbk$.

2) $\Rightarrow$ 1) Comme $S_{\mathbf{0}} = k$, $\dim_\Bbbk S_0 = 1 < \infty$.

2) $\Rightarrow$ 3) Comme $S_{\mathbf{0}} = \Bbbk$, on a $\deg_\Sigma(x_i) = a_i \neq \mathbf{0}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Il nous reste à démontrer que si $\sigma \in \Sigma$, $\sigma \neq \mathbf{0}$, alors σ n'est pas inversible dans Σ. On montrera cela par l'absurde. On supposera qu'il existe $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, $\sigma \neq \mathbf{0}$ et $\sigma' \neq \mathbf{0}$ tels que $\sigma + \sigma' = \mathbf{0}$ donc il existe $u, v \in \mathbb{N}^n$ $u \neq 0$, $v \neq 0$ tels que $\deg_\Sigma(x^u) = \sigma$, $\deg_\Sigma(x^v) = \sigma'$ et $x^{u+v} = x^u x^v \in S_0$, mais x^{u+v} n'es pas constante ; cela contredit le fait que $S_{\mathbf{0}} = \Bbbk$. Donc $\mathbf{0}$ est l'unique élément inversible de Σ.

3) $\Rightarrow$ 2) On demontrera la contraposée. On supposera qu'il existe $u \in \mathbb{N}^n$ tel que $\deg_\Sigma(x^u) = 0$. Soit $i \in \mathbb{N}$ $x_i | x^u$. Alors il existe $v \in \mathbb{N}^n$ tel que $x^u = x_i x^v$ et $0 = \deg_\Sigma(x^u) = \deg_\Sigma(x^i) + \deg_\Sigma(x^v)$, d'où $\deg_\Sigma(x^i) = 0$ ou $\deg_\Sigma(x^i)$ est un élément inversible de Σ. ∎

On a aussi le résultat suivant si Σ est simplifiable :

1.4.3 Proposition. Soient Σ un monoïde abélien engendré par $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$, tel que Σ est simplifiable et $\Bbbk[\mathbf{x}] = \oplus_{a\in\Sigma} S_a$ est Σ-gradué. Alors, $S_{\mathbf{0}} = \Bbbk$ si et seulement si pour tout $a \in \Sigma$, S_a est un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension finie.

Preuve. Le résultat est obtenu par le théorème 8.6 de [30]. ∎

Mais si $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est gradué par un semi-groupe Σ engendré par $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$ et que Σ n'est pas simplifiable, alors la condition $S_{\mathbf{0}} = \Bbbk$ n'implique pas que pour tout $a \in \Sigma$, S_a est un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension finie. Par exemple :

1.4.4 Exemple. Soit $I = (y - y^2) \subset \Bbbk[x, y]$. Alors $\Bbbk[x, y]$ et $\Bbbk[x, y]/I$ sont $\Sigma(I)$-gradués et $[1]_{\mathcal{R}_I} = \{1\}$, donc $S_{\mathbf{0}} = \{cm : m \in [1]_{\mathcal{R}_I} \text{ et } c \in \Bbbk\} = \Bbbk$; mais $[y]_{\mathcal{R}_I} = \{y^i : i \in \mathbb{Z}^{>0}\}$, ainsi $S_{[y]_{\mathcal{R}_I}} = \{cy^i : i \in \mathbb{Z}^{>0} \text{ et } c \in \Bbbk\}$, qui est un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension infinie.

□

1.4.5 Définition. Soit Σ un monoïde abélien engendré par $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$, tel que $\Bbbk[\mathbf{x}] = \oplus_{a\in\Sigma} S_a$ est Σ-gradué. On dira qu'un module $M = \oplus_{a\in\Sigma} M_a$ Σ-gradué de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est Σ-**positivement gradué** si pour tout $a \in \Sigma$, M_a est un $\Bbbk$-espace vectoriel fini.

□

1.4.6 Corollaire. *Soit $\Bbbk[\mathbf{x}]$ Σ-positivement gradué, l'idéal $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ est l'unique idéal maximal Σ-gradué de $\Bbbk[\mathbf{x}]$.*

Preuve. Le résultat est immédiat à partir des propositions 1.4.2 et 1.4.1. ∎

1.4.7 Proposition. *Soient Σ un monoïde abélien et $\Bbbk[x] = \oplus_{a\in\Sigma} S_a$ l'anneau de polynômes de n-variables sur $\Bbbk$ Σ-gradué. Alors, $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est Σ-gradué positif si et seulement si pour tout $\Bbbk[\mathbf{x}]$-module M de type fine Σ-gradué, M est Σ-gradué positif.*

Preuve.
⇐) En effet $\Bbbk[x]$ est un $\Bbbk[x]$-module Σ-gradué, donc pour tout $a \in \Sigma$, le $\Bbbk$-espace vectoriel S_a est de dimension finie.
⇒) Soit M un $\Bbbk[\mathbf{x}]$ module Σ-multigradué de type fini engendré par $\{f_1, \ldots, f_m\}$En effet, considérons $a_i = \deg_\Sigma(e_i)$ avec $i \in \{1, \ldots, m\}$, on pose $F = \oplus_{i=1}^s S[-a_i]$ le module libre engendré par $\{e_1, \ldots, e_m\}$ donc le morphisme $\varphi : F \to M$ défini par $\varphi(e_i) = f_i$, où $i \in \{1, \ldots, m\}$, est un morphisme surjectif. Ainsi, pour tout $\sigma \in \Sigma$, $\varphi_\sigma : F_\sigma \to M_\sigma$ est surjectif. On conclut que pour tout $\sigma \in \Sigma$, M_σ est un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension finie. ∎

1.4.8 Définition. *On dit qu'un idéal I de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est un* **idéal quasi-homogène** *s'il existe un sous-semi-groupe Σ de $\mathbb{N}$ tel que I est Σ-multigradué positif. Au cas où $\Sigma = \mathbb{N}$ et $\deg_N(x_i) = 1$ on dira que I est un* **idéal homogène** *de $\Bbbk[\mathbf{x}]$.*

On dit qu'un idéal I de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est un idéal quasi-homogène s'il existe un sous-semi-groupe Σ de $\mathbb{N}$ tel que I est Σ-multigradué positif. Au cas où $\Sigma = \mathbb{N}$ et $\deg_N(x_i) = 1$ on dira que I est un idéal homogène de $\Bbbk[\mathbf{x}]$.

1.4.9 Proposition. *Soit B un idéal binomial. Alors :*

1. *Si B est quasi-homogène, alors il existe un morphisme $\varphi : \Sigma(B) \to \mathbb{N}$ et $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est $\Sigma(B)$-multigradué positif.*
2. *Soit B un idéal de réseau. Si $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est $\Sigma(B)$-multigradué positif, alors B est quasi-homogène.*

Preuve.

1. Comme B est quasi-homogène, il existe $\text{abs} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, tel que $\text{abs}(\alpha) \neq \mathbf{0}$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$, d'aprés les propositions 1.4.3 et 1.4.2. Par ailleurs, $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est $\Sigma(B)$-multigradué, donc il y a un morphisme surjectif $\deg_{\Sigma(B)} : N^n \to \Sigma(B)$. En outre, si $\mathbf{x}^\alpha - a\mathbf{x}^\beta \in B$, pour certain $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ et $a \in \Bbbk$, comme B est quasi-homogène, $\text{abs}(\alpha) = \text{abs}(\beta)$. Donc la fonction
$$\varphi : \Sigma(B) \to \mathbb{N} \text{ posé par } \varphi(\sigma) = \text{abs}(\alpha) \text{ où } \alpha \in \deg^{-1}_{\Sigma(B)}(\sigma),$$
est un morphisme de monoïdes abéliens bien défini et $\text{abs} = \varphi \circ \deg_{\Sigma(B)}$. De plus φ est surjectif, puisque abs est surjective. Donc d'après la proposition 1.2.3, la $\Sigma(B)$-graduation de $\Bbbk[\mathbf{x}] = \oplus_{\sigma\in\Sigma(I)} S_\sigma$ induit la $\mathbb{N}$-multigraduation de $\Bbbk[\mathbf{x}] = \oplus_{a\in\mathbb{N}} S_a$ obtenue par abs, c.a.d. $S_a = \oplus_{\sigma,\ \varphi(\sigma)=a} S_\sigma$. Comme $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est $\mathbb{N}$-gradué positive, pour tout $a \in \mathbb{N}$, S_a est un $\Bbbk$-espace vectoriel fini, de plus pour tout $a \in \mathbb{N}$, $|\varphi^{-1}(a)| < \infty$. Ainsi pour tout $\sigma \in \Sigma(B)$, S_σ est un $\Bbbk$-espace vectoriel fini. De cette façon $\Sigma(B)$-multigradué positif.
2. Comme B est un idéal de réseau, on a $\Sigma(B)$ est un semi-groupe simplifiable abélien de type fini, d'où son groupe de fractions $G(\Sigma(B))$ est un groue abelien de type fini. Par le théorème de classification de groupes abeliens il existe $d \in \mathbb{N}$ tel qu'il y a un isomorphisme $\varphi : G(\Sigma) \to Z^d \oplus T$ où T est un groupe de torsion.
   (a) Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $\varphi(\deg_{\Sigma(B)}(x_i)) = (u_i, t_i)$. On affirme $u_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On va le prouver par absurde. Supposons qu'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $u_i = 0$. Comme il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \cdot t_i = 0$, on a
   $$\varphi(\deg_{\Sigma(B)}(x_i^m)) = m \cdot \varphi(\deg_{\Sigma(B)}(x_i)) = m \cdot (0, t_i) = (0, m \cdot t_i) = (0, 0).$$
   Comme φ est un isomorphisme entre semi-groupes $\deg_{\Sigma(B)}(x_i^m) = 0$ et $\deg_{\Sigma(B)}(x_i)$ est inversible, ce qui est contraire à la proposition 1.4.2. Par conséquent $u_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

   Soient $\Sigma' = \varphi(\Sigma)$ et $\text{pr}(\Sigma')$ la projection de Σ' sur $\mathbb{Z}^d$. De (a) on déduit que $\text{pr}(\Sigma')$ est un semi-groupe affine pointé d-dimensionel ; d'après la proposition 1.1.11 il existe un plongement de $\text{pr}(\Sigma')$ vers N^d ce qui enduit un plongement $i_2 : \text{pr}(\Sigma') \oplus T \hookrightarrow \mathbb{N}^d \oplus T$ De cette façon on obtient le diagramme suivant :
   $$\Sigma(B) \xrightarrow{\varphi} \Sigma' \xrightarrow{i_1} \text{pr}(\Sigma') \oplus T \xrightarrow{i_2} N^d \oplus T \xrightarrow{\omega} \mathbb{N},$$
   où i_i est l'inclusion de Σ' dans $\text{pr}(\Sigma') \oplus T$ et $\omega : \mathbb{N}^d \oplus T \to \mathbb{N}$ est le morphisme entre semi-groupe définit par $\omega(v, t) = v \cdot (e_1 + \cdots + e_d)$. Ce qui induit le morphisme $\omega' : \Sigma(B) \to S$, oú $\omega' = \varphi \circ i_i\varphi i_2\varphi i_3\varphi \circ \omega$ et $S = \omega'(\Sigma(B)) \subset N$. De là en utilisant la proposition 1.2.3 on déduit que la $\Sigma(B)$-multigraduation de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ induit une S-multigraduation de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ avec S un semi-groupe de N et la S-multigraduation est positive, puisque pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\omega(\deg_\Sigma(x_i)) \neq 0$ par (a) et la construction de ω. ∎

1.4.10 Exemple. L'idéal $B = (x^2 - y^2) \subset \Bbbk[x, y]$ est un idéal de réseau par l'exemple 1.3.14, donc par la proposition 1.3.6 $\Sigma(B)$ est simplifiable. De plus, il est clairement homogène. Par ailleurs, $\deg_\Sigma(m) \neq \mathbf{0}$ avec m un monôme de $\Bbbk[x, y]$ et de la proposition 1.4.3 $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est $\Sigma(B)$-gradué positif. □

1.4.11 Proposition. (Lemme de Nakayama) *Soient B un idéal binomial quasi-homogène de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ sans monômes, M un $\Bbbk[\mathbf{x}]$-module $\Sigma(B)$-gradué de type fini et I un idéal de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ $\Sigma(B)$-gradué tel que $IM = M$. Alors $M = 0$.*

Preuve. On montre la contraposée de ce qu'on veut montrer, c'est à dire si $M \neq 0$, alors $IM \neq M$. De la preuve de la proposition 1.4.9(1) on déduit que $\Bbbk[\mathbf{x}] = \oplus_{\sigma\in\Sigma(I)} S_\sigma = \oplus_{a\in\mathbb{N}} S_a$ et $S_a = \oplus_{\sigma,\ \mathrm{abs}(\sigma)=a} S_\sigma$ de même que $S_{\mathbf{0}} = \Bbbk$. Donc comme I est $\Sigma(B)$-gradué, I est aussi $\mathbb{N}$-gradué. Donc pour montrer ce qu'on veut on va utiliser la $\mathbb{N}$-graduation positive de $\Bbbk[\mathbf{x}]$. Soit $N_1 = \min_{n\in\mathbb{N}}\{I_i \neq 0\} > 0$ et $N_2 = \min_{n\in\mathbb{N}}\{M_n \neq 0\} \geq 0$. Donc tout élément homogène de IM est de degré plus grand ou égal à $N_1 + N_2 > N_2$. Donc $M \neq IM$. Ainsi, si $IM = M$, alors $M = 0$. ∎

1.5 Nombres de Betti multigradués

Dans cette section on considérera B un idéal binomial pur quasi-homogène de $\Bbbk[\mathbf{x}]$, $\Bbbk[\mathbf{x}]$ Σ-multigradué positif et $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ l'unique idéal maximal Σ-gradué de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ par le corollaire 1.4.6.

1.5.1 Définition. Une résolution libre d'un $\Bbbk[\mathbf{x}]$-module M Σ-gradué,

$$\mathcal{F}_\cdot : \cdots \to F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \to \cdots \to F_0$$

est minimale si les morphismes dans le complexe $\mathcal{F} \otimes \Bbbk[\mathbf{x}]/\mathfrak{m}$ sont zéro ; c'est à dire l'image de $\varphi_i : F_i \to F_{i-1}$ est contenue dans $\mathfrak{m}F_{i-1}$. Si $\mathcal{F}$ est une résolution libre, la minimalité demande que les matrices qui représentent chaque φ_i aient tous leurs coefficients dans $\mathfrak{m}$.

Si M est un $\Bbbk[\mathbf{x}]$-module de type fini. M a une résolution libre minimale de la forme :

$$0 \to \bigoplus_{\substack{j=1\\ a_{j,\rho}\in\Sigma}}^{n_\rho} \Bbbk[\mathbf{x}](-a_{j,\rho})^{\beta_{\rho,a_{j,\rho}}} \to \cdots \to \bigoplus_{\substack{j=1\\ a_{j,0}\in\Sigma}}^{n_0} \Bbbk[\mathbf{x}](-a_{j,0})^{\beta_{0,a_{j,0}}} \to M \to 0,$$

où $\beta_{i,a_j} \in \mathbb{N}^*$. Cette résolution est unique à isomorphisme près grâce au lemme de Nakayama (voir proposition 1.4.11). Les rangs $\beta_{i,a}(M) = \beta_{i,a}$ sont appelés les nombres de Betti Σ-multigradués ou simplement Σ-gradués de M et la matrice $\mathcal{M}_{i,a} = \beta_{i,a}(M)$ est connue comme le diagramme de Betti Σ-gradué pour M. Le nombre ρ est appelé la dimension projective de M.

1.5.2 Remarque. Soient $I \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ un idéal Σ-gradué de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ et

$$\mathcal{F}_\cdot : 0 \to \bigoplus_{\sigma\in\Sigma} \Bbbk[\mathbf{x}](-\sigma)^{\beta_{\rho,\sigma}} \to \cdots \to \bigoplus_{\sigma\in\Sigma} \Bbbk[\mathbf{x}](-\sigma)^{\beta_{0,\sigma}} \to S/I \to 0,$$

une résolution libre minimale pour S/I, où $\beta_{i,\alpha} = \beta_{i,\alpha}(S/I)$. Comme $\mathrm{syz}_1(S/I) = I$, on a que :

$$\mathcal{F}'_\cdot : 0 \to \bigoplus_{\sigma\in\Sigma} \Bbbk[\mathbf{x}](-\sigma)^{\beta_{\rho,\sigma}} \to \cdots \to \bigoplus_{\sigma\in\Sigma} \Bbbk[\mathbf{x}](-\sigma)^{\beta_{1,\sigma}} \to I \to 0,$$

est une résolution libre minimale de I, donc $\beta_{i,\sigma}(I) = \beta_{i+1,\sigma}(S/I)$.

1.5.3 Remarque. On a que le foncteur $\mathbf{Tor}(M,N)$ est Σ-gradué pour tous M, N modules sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$. De plus, $\beta_{i,a} = \dim_{\Bbbk}(\mathbf{Tor}_i^{\Bbbk[\mathbf{x}]}(M,\Bbbk))_a$, puisque si $\mathcal{F}$ est une résolution libre minimale pour M, toutes les applications pour $\mathcal{F}\otimes\Bbbk$ sont nulles, donc

$$\mathbf{Tor}_i^{\Bbbk[\mathbf{x}]}(M,\Bbbk) = H_i(\mathcal{F}\otimes\Bbbk) \cong F_i\otimes\Bbbk$$

et $\beta_{i,a} = \dim_{\Bbbk}(\mathrm{Tor}_i^{\Bbbk[\mathbf{x}]}(M,\Bbbk))_a$.

Rappelons le complexe de Koszul $\mathcal{K}$ de la suite $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)$:

$$\mathcal{K} := 0 \to \bigwedge^n \Bbbk[\mathbf{x}]^n \xrightarrow{\partial_n} \bigwedge^{n-1} \Bbbk[\mathbf{x}]^n \to \cdots \to \bigwedge^1 \Bbbk[\mathbf{x}]^n \xrightarrow{\partial_1} \Bbbk[\mathbf{x}] \to 0,$$

avec $\partial_j(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_j}) = \sum_{s=1}^{j}(-1)^{j+1}x_{is}e_{i_0}\wedge\cdots\wedge e_{i_{s-1}}\wedge e_{i_{s+1}}\wedge\dots e_{i_j}$. On sait que $\mathcal{K}$ est une résolution libre minimale Σ-graduée du module $\Bbbk[\mathbf{x}]/\mathfrak{m}\cong\Bbbk$ sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$ Σ-gradué. Maintenant nous considérerons un module M de type fini quelconque sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$ $\Sigma(B)$-gradué. Le complexe $\mathcal{K}\otimes M$ est Σ-gradué et

$$\mathbf{Tor}_i^{\Bbbk[\mathbf{x}]}(M,\Bbbk) \cong \mathbf{Tor}_i^{\Bbbk[\mathbf{x}]}(\Bbbk,M) := H_i(\mathcal{K}\otimes M),$$

par la remarque 1.5.3 nous avons que

$$\beta_{i,a} = \dim H_i(\mathcal{K}\otimes M)_a. \tag{1.2}$$

Ainsi le problème de calculer les nombres de Betti d'un module M sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$ Σ-gradué est résolu en calculant l'homologie de $\mathcal{K}\otimes M$.

1.5.4 Exemple. En considérant le module $\Bbbk[\mathbf{x}]/B$ sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$ (qui par le théorème 1.2.9 et la définition 1.2.10 est $\Sigma(B)$-gradué) on a :

$$\mathcal{K}\otimes\Bbbk[\mathbf{x}]/B := 0 \to \bigwedge^n (\Bbbk[\mathbf{x}]/B)^n \xrightarrow{\partial_n} \bigwedge^{n-1} (\Bbbk[\mathbf{x}]/B)^n \to \cdots \to \bigwedge^1 (\Bbbk[\mathbf{x}]/B)^n \xrightarrow{\partial_1} \Bbbk[\mathbf{x}]/B \to 0,$$

avec $\partial_j(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_j}) = \sum_{s=1}^{j}(-1)^{j+1}x_{i_s}e_{i_0}\wedge\cdots\wedge e_{i_{s-1}}\wedge e_{i_{s+1}}\wedge\dots e_{i_j}$, puisque

$$(\textstyle\bigwedge^i \Bbbk[\mathbf{x}])\otimes\Bbbk[\mathbf{x}]/B \cong \bigwedge^i(\Bbbk[\mathbf{x}]\otimes\Bbbk[\mathbf{x}]/B) \cong \bigwedge^i \Bbbk[\mathbf{x}]/B, \text{ pour } i\in\{1,\dots,n\}.$$

alors $\beta_{i,a} = \dim H_i(\mathcal{K}\otimes\Bbbk[\mathbf{x}]/B)_a$. Nous verrons dans la section 1.7 que dans certains cas nous pourrons calculer cette homologie en termes d'homologie simpliciale. C'est pour cela que dans la section suivante on rappellera les concepts de complexes simpliciaux et d'homologie simpliciale.

1.6 Homologie simpliciale

Complexe simpliciaux

1.6.1 Définition de base. Soit $m\in\mathbb{N}$ un entier positif. Une famille de sous-ensembles Γ de l'ensemble de sommets $\{1,\dots,m\}$ est un **complexe simplicial** si pour tout $F\in\Gamma$ appelé **face**

ou **simplexe** et tout $H \subset F$, alors $H \in \Gamma$, c'est à dire si Γ est une famille fermée pour l'inclusion. Nous disons qu'un simplexe $F \in \Gamma$ de cardinalité $|F| = i+1$ a **dimension** i. La **dimension** de Γ, $\dim \Gamma$ est le maximum des dimensions de ses faces, ou bien elle est $-\infty$ si $\Gamma = \emptyset$ est le complexe vide. Une face $F \in \Gamma$ est appelé **facette** si F est maximale dans Γ, c'est à dire s'il n'y a pas de $G \in \Gamma$ tel que $F \subsetneq G$. Un sommet de Γ est une face de Γ de dimension 0, ainsi on pose $V(\Gamma) = \{x \in \{1,\dots,m\} | \{x\} \in \Gamma\}$. Une arête de Γ est une face de Γ de dimension 1. Un sous-complexe Λ de Γ est une sous-famille de Γ qui est un complexe. Pour $0 \leq k \leq \dim \Gamma$ le **k-squelette** de Γ est le sous-complexe Γ_k formé de toutes les faces de Γ de dimensions $\leq k$. Soit $W \subset V(\Gamma)$, la **restriction** de Γ à W est le complexe simplicial Γ_W formé de toutes les faces de Γ qui sont contenues dans W.

1.6.2 Définition. Si $\sigma \subset \{1,\dots,m\}$ la famille de tous les sous-ensembles de σ est un complexe simplicial noté $<\sigma>$. On dira que $<\sigma>$ est le complexe simplicial engendré par σ. Si $\sigma_1,\dots,\sigma_l$ sont des sous-ensembles de $\{1,\dots,m\}$, alors le complexe simplicial engendré par $\sigma_1,\dots,\sigma_l$ est

$$<\sigma_1,\dots,\sigma_l> = <\sigma_1> \cup \cdots \cup <\sigma_l> .$$

Ainsi, si Γ est un complexe et $\sigma_1,\dots,\sigma_l$ ses facettes, alors $\Gamma = <\sigma_1,\dots,\sigma_l>$.

Homologie simpliciale

Soit Γ un complexe simplicial de dimension finie d à n sommets. On peut supposser $V(\Gamma) = \{1,2,\dots,n\}$. Soit $F_k(\Gamma)$ l'ensemble de toutes les faces de dimension k de Γ et $\Bbbk^{F_i(\Gamma)}$ l'espace vectoriel sur $\Bbbk$ ayant pour base l'ensemble $\{e_\sigma | \sigma = \{i_1 < i_2, \cdots < i_k\} \in F_k(\Gamma)\}$.

On définit le **complexe de chaine** (**réduit**) de Γ sur $\Bbbk$ comme :

$$\widetilde{\mathcal{C}}.(\Gamma;\Bbbk) : 0 \to \Bbbk^{F_d(\Gamma)} \xrightarrow{\partial_d} \cdots \to \Bbbk^{F_i(\Gamma)} \xrightarrow{\partial_i} \Bbbk^{F_{i-1}(\Gamma)} \to \cdots \xrightarrow{\partial_0} \Bbbk^{F_{-1}(\Gamma)} \to 0.$$

Les applications bords pour $k \in \{0,1,\dots,n\}$ sont définies de la façon suivante :

$$\partial_k(e_\sigma) = \sum_{i \in \sigma} \operatorname{sign}(i,\sigma) e_{\sigma \setminus \{i\}},$$

où $\operatorname{sign}(i,\sigma) = (-1)^{r-1}$, si i est le r-ième élément de l'ensemble $\sigma \subset \{1,\dots,n\}$, écrit par ordre croissant. Si $k < -1$ ou $k > d$, alors $\Bbbk^{F_k(\Gamma)} = 0$ et $\partial_k = 0$.

1.6.3 Proposition. *Soient Γ un complexe simplicial et $\widetilde{\mathcal{C}}.(\Gamma;\Bbbk)$ son complexe de chaine. Alors $\partial_i \circ \partial_{i-1} = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.*

Preuve. Soit $\sigma \in F_k(\Gamma)$,

$$\begin{aligned}
\partial_{k-1}(\partial_k(e_\sigma)) &= \partial_{k-1}(\textstyle\sum_{i\in\sigma} \operatorname{sign}(i,\sigma) e_{\sigma\setminus\{i\}}) \\
&= \textstyle\sum_{i\in\sigma} \operatorname{sign}(i,\sigma) \partial_{k-1}((e_{\sigma\setminus\{i\}}) \\
&= \textstyle\sum_{i\in\sigma} \operatorname{sign}(i,\sigma) \sum_{j\in\sigma\setminus\{i\}} \operatorname{sign}(j,\sigma\setminus\{i\})((e_{\sigma\setminus\{i,j\}}) \\
&= \textstyle\sum_{\{i,j\}\subset\sigma} \left(\operatorname{sign}(i,\sigma)\operatorname{sign}(j,\sigma\setminus\{i\}) + \operatorname{sign}(j,\sigma)\operatorname{sign}(i,\sigma\setminus\{j\})\right) e_{\sigma\setminus\{i,j\}} \\
&= \textstyle\sum_{\{i,j\}\subset\sigma} \left(\operatorname{sign}(i,\sigma)\operatorname{sign}(j,\sigma\setminus\{i\}) - \operatorname{sign}(i,\sigma)\operatorname{sign}(j,\sigma\setminus\{i\})\right) e_{\sigma\setminus\{i,j\}} = 0.
\end{aligned}$$

Il nous reste à démontrer que $\text{sign}(j,\sigma)\text{sign}(i,\sigma\setminus\{j\}) = -\text{sign}(i,\sigma)\text{sign}(j,\sigma\setminus\{i\})$. Pour cela, nous pouvons supposer $i<j$, alors $\text{sign}(i,\sigma)=\text{sign}(i,\sigma\setminus\{j\})$ et $\text{sign}(j,\sigma)=-\text{sign}(j,\sigma\setminus\{i\})$, de cette façon on a ce qu'on voulait montrer. ∎

On peut alors définir pour chaque entier $i\in\mathbb{Z}$ l'i-ème module d'homologie réduite de Γ sur $\Bbbk$ comme :

$$\widetilde{H}_i(\Gamma;\Bbbk) = \ker(\partial_i)/\text{im}(\partial_{i+1}).$$

Le lemme suivant est un résultat connu de l'homologie simpliciale :

1.6.4 Lemme. *Soit Γ un complexe simplicial. La dimension de son groupe d'homologie $\widetilde{H}_0(\Gamma;\Bbbk)$ est égal au nombre de composantes connexes de Γ moins 1.*

1.6.5 Théorème. (Suite de Mayer-Vietoris) *Soient Γ un complexe simplicial, Γ_0 et Γ_1 des sous-complexes de Γ tels que $\Gamma=\Gamma_0\cup\Gamma_1$ et $\Psi=\Gamma_0\cap\Gamma_1\neq\{\emptyset\}$. Alors, il existe une suite exacte :*

$$\cdots\to\widetilde{H}_{i-1}(\Psi;\Bbbk)\to\widetilde{H}_i(\Gamma_0;\Bbbk)\oplus\widetilde{H}_i(\Gamma_1;\Bbbk)\to\widetilde{H}_i(\Gamma;\Bbbk)\to\widetilde{H}_i(\Psi;\Bbbk)\to\cdots$$

appelée la suite de Mayer-Vietoris de (Γ_0,Γ_1).

1.6.6 Définition. Soient Γ un complexe simplicial et $\sigma\in\Gamma$. Le link de σ en Γ est le complexe simplicial

$$\text{link}_\Gamma(\sigma) = \{\tau\in\Gamma | \tau\cup\sigma\in\Gamma \text{ et } \tau\cap\sigma=\emptyset\}.$$

Nous pouvons remarquer que si $x\in V(\Gamma)=V$, alors $\text{link}_\Gamma(\{x\})\subset\Gamma_{V\setminus\{x\}}$ (voir définition 1.6.1).

1.6.7 Lemme. [24, Lemme 2.1] *Soit Γ un complexe simplicial sur l'ensemble de sommets V. Fixons $x\in V$ et soit $\Gamma'=\text{link}_\Gamma(\{x\})$. Alors on a la suite exacte longue suivante d'espaces vectoriels sur $\Bbbk$:*

$$\begin{aligned}0 \quad &\to\widetilde{H}_{-2}(\Gamma';\Bbbk)\to\widetilde{H}_{-1}(\Gamma;\Bbbk)\to\widetilde{H}_{-1}(\Gamma_{V\setminus\{x\}};\Bbbk)\\ &\to\widetilde{H}_{-1}(\Gamma';\Bbbk)\to\widetilde{H}_0(\Gamma;\Bbbk)\to\widetilde{H}_0(\Gamma_{V\setminus\{x\}};\Bbbk)\\ &\to\dots\\ &\to\widetilde{H}_{i-1}(\Gamma';\Bbbk)\to\widetilde{H}_i(\Gamma;\Bbbk)\to\widetilde{H}_i(\Gamma_{V\setminus\{x\}};\Bbbk)\\ &\to\dots\end{aligned}$$

1.6.8 Définition. Soit Γ un complexe simplicial. Nous disons que Γ est un cône avec sommet distingué x si pour toute facette F de Γ, $x\in F$. Ainsi le cône de Γ en $x\in\{1,\dots,m\}\setminus V(\Gamma)$ est le complexe

$$\Gamma * x = \Gamma\cup\{F\cup\{x\} | F\in\Gamma\}.$$

1.6.9 Proposition. *Soient Γ un complexe simplicial et $x\in\{1,\dots,m\}$, $x\notin V(\Gamma)$. Alors $\widetilde{H}_i(\Gamma * x)=0$ pour tout $i\in\mathbb{N}$.*

1.6.10 Corollaire. *Soient $n\in\mathbb{N}$ et $\Gamma =<\{1,\dots,n\}>$. Alors $\widetilde{H}_i(\Gamma;\Bbbk)=0$ pour tout $i\in\mathbb{N}$.*

Homologie relative

Soit Λ un sous-complexe du complexe simplicial Γ. On pose $\widetilde{\mathcal{C}}.(\Gamma,\Lambda;\Bbbk) = \widetilde{\mathcal{C}}.(\Gamma;\Bbbk)/\widetilde{\mathcal{C}}.(\Lambda;\Bbbk)$. Alors l'i-ème groupe d'homologie relative à la paire (Γ,Λ) est le i-ème module d'homologie de la chaine $\widetilde{\mathcal{C}}.(\Gamma,\Lambda;\Bbbk)$, noté $\widetilde{H}_i(\Gamma,\Lambda;\Bbbk)$. On a alors pour tout $i\in\mathbb{N}$ la suite exacte suivante :

$$\widetilde{\mathcal{C}}_i(\Lambda;k)\to\widetilde{\mathcal{C}}_i(\Gamma;\Bbbk)\to\widetilde{\mathcal{C}}_i(\Gamma,\Lambda;\Bbbk)\to 0,$$

qui induit la suite exacte longue d'homologie suivante :

$$\cdots\to\widetilde{H}_i(\Gamma;k)\to\widetilde{H}_i(\Gamma,\Lambda;\Bbbk)\to\widetilde{H}_{i-1}(\Lambda;\Bbbk)\to\widetilde{H}_{i-1}(\Gamma;\Bbbk)\to\cdots\to\widetilde{H}_0(\Lambda;\Bbbk)\to\widetilde{H}_0(\Gamma;\Bbbk).$$

Cette suite exacte longue d'homologie implique la proposition suivante :

1.6.11 Proposition. *Soient Γ un complexe simplicial et Λ un sous-complexe du complexe simplicial. Si $\widetilde{H}_i(\Gamma;k)=0$ pour tout $i\in\mathbb{N}$ alors $\widetilde{H}_i(\Gamma,\Lambda;\Bbbk)=H_{i-1}(\Lambda;\Bbbk)$ pour tout $i\in\mathbb{N}$.*

Soit Γ un complexe simplicial avec ensemble de sommets. Étant donné $F\subset V(\Gamma)$, on pose $F^C = V(\Gamma)\setminus F$. Le dual d'Alexander de Γ est la famille de sous-ensembles de $V(\Gamma)$ définie par :

$$(\Gamma)^A := \{F^C | F\notin\Gamma\}.$$

Il est clair que $(\Gamma)^A$ est un complexe simplicial.

1.6.12 Proposition. (Dualité d'Alexander,Lemme 1.2[7]) *Soient Ψ,Ω, $\Psi\subset\Omega$, des complexes simpliciaux où Ω à n sommets. Alors $\widetilde{H}_i(\Omega,\Psi;\Bbbk)\cong\widetilde{H}_{n-2-i}(\Psi^A,\Omega^A;\Bbbk)$.*

1.7 Nombres de Betti d'idéaux binomiaux

Dans cette section nous donnerons une formule pour calculer les nombres de Betti d'un idéal J qui peut-être décomposé comme la somme d'un idéal de réseau et d'un ideal monomial. Comme nous verron en la section 1.8 cette formule généralise la formule de Hochster, puisque cette dernière s'obtient quand l'idéal binomial est l'idéal (0) et que l'idéal monomial est libre de carrés.

1.7.1 Notation. *Soit $F\subset\{1,\dots,n\}$, on pose* $\operatorname{supp}(F)=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{N}$, *où $a_i=1$ si $i\in F$ et $a_i=0$ si $i\notin F$.*

1.7.2 Définition. Soit B un idéal de réseau de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ quasi homogène et $\Sigma(B)$ le monoïde abélien défini dans 1.2.10, $\Bbbk[\mathbf{x}]$ et $R=\Bbbk[\mathbf{x}]/B$ sont $\Sigma(B)$-multigradués positifs et chaque composante homogène de R est un espace vectoriel de dimension 1 (voir la définition 1.2.10 et théorème 1.2.9). Comme $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est $\Sigma(B)$-multigradué, par qui en termes d'idéaux se traduit par :

$$\Omega_b=\{F\subset\{1,\dots,n\} : \exists\beta,\gamma\in\mathbb{N}^n,\ \exists a\in\Bbbk,\ \deg_{\Sigma(B)}(\beta)=b,\ \mathbf{x}^\beta - a\mathbf{x}^\gamma x^{\operatorname{supp}F}\in B\}.$$

1.7.3 Lemme. *Soient $\mathcal{K}$ le complexe de Koszul de la suite $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $B \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ un idéal de réseau quasi-homogène. Donc $(\mathcal{K} \otimes \Bbbk[\mathbf{x}]/B)_b$ est le complexe de chaine $\mathcal{C}(\Omega_b; \Bbbk)(-1)$, pour chaque $b \in \Sigma(B)$.*

Preuve. Par l'exemple 1.5.4 on a que $\mathcal{K} \otimes B$ est le complexe :

$$\mathcal{K} \otimes \Bbbk[\mathbf{x}]/B := 0 \to \bigwedge^n (\Bbbk[\mathbf{x}]/B)^n \xrightarrow{\partial_n} \bigwedge^{n-1} (\Bbbk[\mathbf{x}]/B)^n \to \cdots \to \bigwedge^1 (\Bbbk[\mathbf{x}]/B)^n \xrightarrow{\partial_1} \Bbbk[\mathbf{x}]/B \to 0,$$

avec $\partial_j(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_j}) = \sum_{s=1}^{j} (-1)^{j+1} x_{i_s} e_{i_0} \wedge \cdots \wedge e_{i_{s-1}} \wedge e_{i_{s+1}} \wedge \ldots e_{i_j}$. On pose $R = \Bbbk[\mathbf{x}]/B$. Comme R et $\Sigma(B)$-gradué, pour tout $b \in \Sigma(B)$, le complexe $(\mathcal{K} \otimes \Bbbk[\mathbf{x}]/B)_b$ $\Sigma(B)$-gradué est :

$$0 \to R[-a_1 - \cdots - a_n]_b \to \oplus_{i_1 < \cdots < i_{n-1}} R[-a_{i_1} - \cdots - a_{i_{n-1}}]_b \to \cdots \to \oplus_{i=1}^{n} R[-a_i]_b \to R \to 0,$$

où $a_i = \deg(x_i)$. Comme B est un idéal de réseau par la proposition 1.3.7, on obtient que $\Sigma(B)$ est simplifiable, de cette façon par le théorème 1.2.17 on a que pour tout $\sigma \in \Sigma(B)$ $\dim(\Bbbk[\mathbf{x}]/B[-\sigma]_b) \leq 1$. De plus, si $F \subset \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} R[-\textstyle\sum_{i\in F} a_i]_b &= \begin{cases} 0 & \text{si } b \notin (\sum_{i\in F} a_i) + \Sigma(B), \\ R_{b-\sum_{i\in F} a_i} & \text{si } b \in (\sum_{i\in F} a_i) + \Sigma(B) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \nexists c \in \Sigma(B), c + \sum_{i\in F} a_i = b, \\ R_c & \text{si } \exists c \in \Sigma(B), c + \sum_{i\in F} a_i = b \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } F \notin \Omega_b, \\ \Bbbk & \text{si } F \in \Omega_b. \end{cases} \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est due à la définition de Ω_b. Donc $(\mathcal{K} \otimes \Bbbk[\mathbf{x}]/B)_b$ est le complexe de chaine $\mathcal{C}(\Omega_b; \Bbbk)(-1)$ (voir la section 1.6). ∎

1.7.4 Remarque. Si B est un idéal binomial de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ et B n'est pas un idéal de réseau, alors $\Sigma(B)$ n'est pas simplifiable par la proposition 1.3.6, donc il existe une variable x_i tel que $\deg_{\Sigma(B)}(x_i)$ n'est pas simplifiable dans $\Sigma(B)$ et par le théorème 1.2.17 il existe une composante homogène de $\Bbbk[\mathbf{x}][-\deg_{\Sigma(B)}(x_i)]$ qui est un espace vectoriel de dimension ≥ 2. Ce qui nous empêche d'associer à $(\mathbb{K} \otimes \Bbbk[\mathbf{x}]/B)_b$ un complexe de chaine d'un complexe simplicial. De cette façon l'hypothèse que B est un idéal de réseau est essentielle pour que $(\mathbb{K} \otimes \Bbbk[\mathbf{x}]/B)_b$ soit un complexe de chaine d'un complexe simplicial.

Avant de donner le théoréme principal de cette section il nous reste à introduire un autre complexe simplicial.

1.7.5 Définition. Soit I un idéal monomial libre de carrés de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ tel que s'il existe $\alpha \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}^\alpha \in I$ de sorte qu'il existe $c \in \Bbbk$ et $\gamma \in \mathbb{N}$ tels que $\mathbf{x}^\alpha - c\mathbf{x}^\gamma \in B$, alors $\mathbf{x}^\gamma \in I$. Nous posons $J = B + I$ et pour chaque $b \in \Sigma(B)$,

$$\begin{aligned} \Psi_b &= \{F \in \{1, \ldots, n\} : \exists c \in \sigma(B), \exists \gamma \in \mathbb{N}^n \ b = c + \Sigma_{i\in F} a_i, \ \deg_{\Sigma(B)}(\gamma) = c \text{ et } \mathbf{x}^\gamma \in I\} \\ &= \{F \in \Omega_b : \exists \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n, \ \exists a \in \Bbbk, \ \deg_{\Sigma(B)}(\beta) = b, \ \mathbf{x}^\beta - a\mathbf{x}^\gamma x^{\mathrm{supp}(F)} \in B, \ \mathbf{x}^\gamma \in I\}. \end{aligned}$$

1.7.6 Théorème. *Soient B un idéal de réseau de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ quasi homogène ; I un idéal monomial libre de carrés de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ tel que s'il existe $\alpha \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}^\alpha \in I$ de sorte qu'il existe $\gamma \in \Bbbk$ et $\gamma \in \mathbb{N}$, tels que $\mathbf{x}^\alpha - c\mathbf{x}^\gamma \in B$, alors $x^\gamma \in I$; $J = B + I$; $R = \Bbbk[\mathbf{x}]/J$ et $\mathcal{K}$ le complexe de Koszul de la suite $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Alors pour tout $b \in \Sigma(B)$*

1. $(\mathcal{K} \otimes R)_b \cong (\mathcal{C}(\Omega_b; \Bbbk)/\mathcal{C}(\Psi_b; \Bbbk))(-1)$;
2. $\beta_{i,b}(R) = \dim_\Bbbk \widetilde{\mathrm{H}}_{i-1}(\Omega_b, \Psi_b(B); \Bbbk)$. *En particulier* $\beta_{i,b}(\Bbbk[\mathbf{x}]/B) = \dim_\Bbbk \widetilde{\mathrm{H}}_i(\Omega_b; k)$.

Preuve.

1. Comme $\mathrm{Ker}(\Bbbk[\mathbf{x}]/B \to R) = (\mathbf{x}^\alpha + B : \mathbf{x}^\alpha \in I) := I'$, on a la suite exacte suivante :

$$0 \to I' \to \Bbbk[\mathbf{x}]/B \to R \to 0,$$

qui d'après la proposition 1.6.11 du [6] induit la suite exacte suivante :

$$0 \to \mathcal{K} \otimes I' \to \mathcal{K} \otimes \Bbbk[\mathbf{x}]/B \to \mathcal{K} \otimes R \to 0,$$

donc $\mathcal{K} \otimes R \cong \frac{\mathcal{K} \otimes \Bbbk[\mathbf{x}]/B}{\mathcal{K} \otimes I'}$. De la même façon que dans la preuve du lemme 1.7.3 nous pouvons démontrer que $(\mathcal{K} \otimes I')_b = \mathcal{C}(\Psi_b; \Bbbk)(-1)$; en outre, du même lemme 1.7.3 on sait que

$$(\mathcal{K} \otimes B)_b = \mathcal{C}(\Omega_b; \Bbbk)(-1).$$

Par conséquent $\mathcal{K} \otimes R \cong (\mathcal{C}(\Omega_b; \Bbbk)/\mathcal{C}(\Psi_b; \Bbbk))(-1)$.

2. On sait que le complexe de Koszul $\mathcal{K}$ est une résolution libre minimale de $\Bbbk[\mathbf{x}]/\mathfrak{m}$ et par la remarque 1.5.3 on a que :

$$\begin{array}{lll} \beta_{i,b}(R) & = \dim_\Bbbk(\mathbf{Tor}_i^{\Bbbk[\mathbf{x}]}(R, \Bbbk))_b & \\ & = \dim_\Bbbk(\mathbf{Tor}_i^{\Bbbk[\mathbf{x}]}(\Bbbk, R))_b & \text{(par commutativité du foncteur } \mathbf{Tor}) \\ & = \dim_\Bbbk H_i((\mathcal{K} \otimes R)_b) & \text{(par définition du foncteur } \mathbf{Tor}) \\ & = \dim_\Bbbk \widetilde{H}_{i-1}(\Omega_b, \Psi_b : k) & \text{(par 1).} \end{array}$$

■

1.7.7 Remarque. Le cas où $B = 0$ et I est un idéal monomial libre de carré c'est la formule de Hochster (théorème 5.2, [26]) comme on le montrera dans la proposition 1.8.5. Plus tard Herzog et Aramova dans [2] (lemme 4.1) et Sturmfels dans [38] (théorème 12.12), ont montré le cas où $J = B$, avec B un idéal torique. Finalement Bruns et Herzog dans un article a posteriori [7] (proposition 1.1), ont montré un résultat qui généralise les deux résultats précédents et qui correspond à notre théorème 1.7.6 dans le cas où B est un idéal torique.

1.8 Idéaux de Stanley-Reisner et Formule de Hochster

1.8.1 Définition. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$. Le support de a noté par $\text{supp}(a)$, est le vecteur dans $\mathbb{N}^n$ tel que l'entrée i-éme est 1 si $a_i \neq 0$ et 0 si $a_i = 0$. De cette façon $\text{supp}(x^a) := \text{supp}(a)$.

Si $\sigma \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ nous pouvons lui associer un mônome $x^\sigma \in \Bbbk[\mathbf{x}]$, où $x^\sigma = \prod_{i \in \sigma} x_i$, de cette façon nous posons $\text{supp}(\sigma) := \text{supp}(x^\sigma)$. À l'inverse, à tout vecteur $\alpha \in \{0,1\}^n$ (vecteur libre de carrés) nous pouvons associer un ensemble $\sigma_\alpha \subset \{1, \ldots, n\}$ tel que $i \in \{1, \ldots, n\}$ est dans σ_α si et seulement si l'entrée i-ème est 1.

1.8.2 Définition. *Soit Γ un complexe simplicial de n sommets, $I_\Gamma = \{x^\sigma : \sigma \in \{1, \ldots, n\}, \sigma \notin \Gamma\}$ est l'idéal de non-faces de Γ ou* **idéal de Stanley-Reisner**.

Donc, par la définition 1.8 nous associons un idéal à tout complexe simplicial Γ. D'ailleurs, à tout idéal monomial $I \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ libre de carrés nous pouvons associer un complexe simplicial $\Gamma(I)$, de la façon suivante : soit $I = (\mathbf{x}^\alpha : \alpha \in \{0,1\}^n)$, alors $\Gamma = \{\sigma : x^\sigma \notin I\}$. Nous posons $\mathfrak{m}^\sigma = (x_i | i \in \sigma)$ et $\sigma^C = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \sigma$.

1.8.3 Proposition. *Soit Γ un complexe simplicial de n-sommets, alors la décomposition primaire de son idéal de Stanley-Reisner est :*

$$I_\Gamma = \bigcap_{F \text{ facette de } \Gamma} \mathfrak{m}^{F^C}.$$

d'où on peut calculer la hauteur d'un idéal monomial libre de carrés.

1.8.4 Proposition. *Soit Γ un complexe simplicial de n-sommets, alors* $\text{ht}(I_\Gamma) = n - (\dim\Gamma + 1)$ *et par conséquence* $\dim(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_\Gamma) = \dim\Gamma + 1$.

Preuve. Comme $I_\Gamma = \bigcap_{F \text{ facette de } \Gamma} \mathfrak{m}^{F^C}$, $\text{ht}(I) = \min_{\sigma \text{ facette de } \Gamma}(ht(\mathfrak{m}^{F^C}))$. Mais $\mathfrak{m}^{F^C}$ est un idéal premier de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ et $ht(\mathfrak{m}^{F^C}) = |F^C| = n - |F|$, pour toute facette de Γ. Donc $\text{ht}(I) = n - (\dim\Gamma + 1)$, de telle sorte que $\dim(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_\Gamma) = \dim\Gamma + 1$. ∎

1.8.5 Proposition. ([7] **Formule de Hochster**) *Soient $I \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ un idéal monomial libre de carrés et $\Bbbk[\mathbf{x}]/I$ non-nul. Pour $a \in \mathbb{N}^n$, le nombre de Betti $\mathbb{N}^n$-multigradué standard $\beta_{i,a}(\Bbbk[\mathbf{x}]/I)$ est non nul si et seulement si a est libre de carrés et dans ce cas nous avons :*

$$\beta_{i,a}(\Bbbk[\mathbf{x}]/I) = \dim_\Bbbk \widetilde{H}_{|\sigma_a|-1-i}((\Gamma(I))_{\sigma_a}, \Bbbk)$$

où $\sigma_a \in \{1, \ldots, n\}$, $\text{supp}(\sigma_a) = a$.

Preuve. Pour tout $b \in \mathbb{N}^n$, nous noterons par σ_b le sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$ tel que $\text{supp}(\sigma_b) = \text{supp}(b)$, de même que $\Gamma = \Gamma(I)$.

Par ailleurs $(0) \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ est un idéal de réseau et $\Sigma(0) = \mathbb{N}^n$ avec $\deg_{\mathbb{N}^n}(\mathbf{x}^\alpha) = \alpha$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. En faisant $J = I + (0)$ par le théorème 1.7.6 nous avons que

$$\beta_{i,b}(\mathbb{k}[\mathbf{x}]/I) = \beta_{i,b}(\mathbb{k}[\mathbf{x}]/J) = \dim_{\mathbb{k}} \widetilde{H}_{i-1}(\Omega_b, \Psi_b; \mathbb{k}) \text{ pour tout } i \in \mathbb{N} \text{ et tout } b \in \mathbb{N}^n$$

Mais pour tout $b \in \mathbb{N}^n$,

$$\begin{aligned}\Omega_b &= \{F \in \{1,\dots,n\} : \exists \gamma \in \mathbb{N}^n,\ x^b - \mathbf{x}^\gamma x^{\mathrm{supp}(F)} \in (0)\}\\ &= \{F \in \{1,\dots,n\} : \exists \gamma \in \mathbb{N}^n,\ x^b = \mathbf{x}^\gamma x^{\mathrm{supp}(F)}\}\\ &= \{F \subset \sigma_b\}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Psi_b &= \{F \in \Omega_b : \exists \gamma \in \mathbb{N}^n,\ x^b - \mathbf{x}^\gamma x^{\mathrm{supp}(F)} = 0,\ \mathbf{x}^\gamma \in I\}\\ &= \{F \subset \sigma_b : \exists \gamma \in \mathbb{N}^n,\ x^b = \mathbf{x}^\gamma x^{\mathrm{supp}(F)},\ \mathbf{x}^\gamma \in I\}\\ &= \{\sigma \subset \sigma_b : x^{\mathrm{supp}(\sigma_b \setminus F)} \in I\}\\ &= \{\sigma \subset \sigma_b : \sigma_b \setminus \sigma \notin \Gamma\}.\end{aligned}$$

On considérera deux cas :

– $a = (a_1, \dots, a_n) \in N^n$ n'est pas libre de carrés.
Donc il existe $j \in \{1,\dots,n\}$ tel que $a_j \geq 2$. Soit $a' \in \mathbb{N}^n$ tel que pour tout $i \neq j$, $a'_i = a_i$ et $a'_j \geq a_j$. Donc $\mathrm{supp}(a) = \mathrm{supp}(a')$. Ainsi $\Omega_a = \Omega_{a'}$ et $\Psi_a = \Psi_{a'}$. De cette façon $\beta_{i,a}(\mathbb{k}[\mathbf{x}]/I) = \beta_{i,a'}(\mathbb{k}[\mathbf{x}]/I)$. Mais il n'y a qu'un nombre fini de nombres de Betti non nuls, donc $\beta_{i,a}(\mathbb{k}[\mathbf{x}]/I) = 0$.

– $a \in N^n$ est libre de carrés. Nous pouvons remarquer que $\Psi_a = \{\sigma \subset \sigma_a : \sigma_a \setminus \sigma \notin \Gamma\} = (\Gamma_{\sigma_a})^A$, donc par dualité d'Alexander (voir proposition 1.6.12)

$$\begin{aligned}\beta_{i,a}(\mathbb{k}[\mathbf{x}]/I) &= \dim_{\mathbb{k}} \widetilde{H}_{i-1}(\Omega_a, \Psi_a; \mathbb{k})\\ &= \dim_{\mathbb{k}} \widetilde{H}_{i-1}(< \sigma_a >, (\Gamma_{\sigma_a})^A; \mathbb{k})\\ &= \dim_{\mathbb{k}} \widetilde{H}_{|\sigma_a|-(i-1)-2}((\Gamma_{\sigma_a}), \{\}; \mathbb{k})\\ &= \dim_{\mathbb{k}} \widetilde{H}_{|\sigma_a|-i-1}((\Gamma_{\sigma_a}); \mathbb{k}).\end{aligned}$$

Il nous reste à démontrer $\widetilde{H}_i.(\Gamma_{\sigma_a}, \{\}; \mathbb{k}) = \widetilde{H}_i(\Gamma_{\sigma_a}; k)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. En utilisant la chaine exacte longue de l'homologie relative, nous avons que :

$$\widetilde{H}_i(\{\}; k) \to \widetilde{H}_i(\Gamma_{\sigma_a}; k) \to \widetilde{H}_i.(\Gamma_{\sigma_a}, \{\}; \mathbb{k}) \to \widetilde{H}_{i-1}(\{\}; k),$$

mais $\widetilde{H}_i(\{\}; k) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, donc $\widetilde{H}_i.(\Gamma_{\sigma_a}, \{\}; \mathbb{k}) = \widetilde{H}_i(\Gamma_{\sigma_a}; k)$. ∎

1.9 Nombres de Betti $\mathbb{Z}$-gradués

Un idéal monomial I dans $\mathbb{k}[\mathbf{x}]$ est un idéal homogène, c'est à dire I est $\mathbb{Z}$ gradué standard et ses nombres de Betti peut-être obtenue de la formule de Hochster 1.8.5, comme on verra dans la proposition suivante :

1.9.1 Proposition. *Soit $I \subset \mathbb{k}[\mathbf{x}]$ un idéal monomial libre de carrés dans $\mathbb{k}[\mathbf{x}]$. Donc*

$$\beta_{i,j}(I) = \sum_{\sigma \in \{1,\dots,n\},\ |\sigma|=j} \beta_{i,\mathrm{supp}(\sigma)}(I) = \sum_{\sigma \in \{1,\dots,n\},\ |\sigma|=j} \dim_{\mathbb{k}} \widetilde{H}_{j-2-i}((\Gamma(I))_\sigma, \mathbb{k}). \tag{1.3}$$

Preuve. Comme I est un idéal monomial, il est $\mathbb{N}^n$-gradué, donc $\mathbb{Z}^n$-gradué, ainsi par la formule de Hochster 1.8.5

$$\beta_{i,h}(I) = \beta_{i+1,h}(S/I) = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_{|\sigma|-2-i}(\Gamma(I)_\sigma, \Bbbk). \tag{1.4}$$

Par ailleurs I est $\mathbb{N}$-multigradué ($\mathbb{Z}$-multigradué) avec abs : $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{N}$, donc

$$\beta_{i,j}(I) = \sum_{\sigma\in\{1,\dots,n\},\ |\sigma|=j} \beta_{i,\mathrm{supp}(\sigma)}(I) = \sum_{\sigma\in\{1,\dots,n\},\ |\sigma|=j} \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_{j-2-i}((\Gamma(I))_\sigma, \Bbbk). \tag{1.5}$$

■

1.9.2 Proposition. *Soit I un idéal monomial libre de carrés, alors* $\mathrm{reg}(I) \leq \dim(\Bbbk[\mathbf{x}]/I) + 1$.

Preuve. Comme I est un idéal monomial libre de carrés on peut lui associer un complexe simplicial $\Gamma = \Gamma(I)$ de dimension d, tel que $I = I_\Gamma$, par la formule de Hochster 1.5.2 :

$$\beta_{i,i+j}(I) = \sum_{\sigma\in\{1,\dots,n\},\ |\sigma|=i+j} \beta_{i,\mathrm{supp}(\sigma)}(I) = \sum_{\sigma\in\{1,\dots,n\},\ |\sigma|=i+j} \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_{j-2}(\Gamma_\sigma, \Bbbk).$$

Mais $\widetilde{H}_k(\Gamma_\sigma, \Bbbk) = 0$ pour tout $k > d$, puisque $\dim\Gamma_\sigma \leq \dim\Gamma$. Donc $\beta_{i,i+j} = 0$ pour $j > d+2$. Par conséquent $\mathrm{reg}(I) \leq \dim\Gamma + 2 = \dim(\Bbbk[\mathbf{x}]/I) - 1 + 2 = \dim(\Bbbk[\mathbf{x}]/I) + 1$. ■

Soit M un module positivement $\mathbb{Z}$-gradué standard de type fini sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$. La série d'Hilbert pour M est la serie de Poincaré :

$$H(M;t) := \sum_{i=0}^{\infty} \dim_{\Bbbk}(M_i) t^i.$$

Un résultat connu est :

1.9.3 Proposition. *Si M est un module de type fini sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$ $\mathbb{Z}$-gradué standard, alors il existe un unique $h_M(t) \in \mathbb{Z}[t]$ tel que*

$$H(M;t) = \frac{h_M(t)}{(1-t)^d} = \frac{\mathcal{K}(M;t)}{(1-t)^n},$$

où $\mathcal{K}(M;t) = \sum_{i\geq 0,\ j\geq 0} (-1)^i \beta_{i,j}(M) t^j \in \Bbbk[\mathbf{x}]$.

Le polynôme $h_M(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ de la proposition1.9.3 est connu comme le h polynôme de M et le polynôme $\mathcal{K}(M;t)$ de la proposition antérieure est appelé le **K-polynôme** de M. On définit $e(M)$la multiplicité de M comme $e(M) = h_M(1)$.

1.9.4 Proposition. *Soit M un $\Bbbk[\mathbf{x}]$-module $\mathbb{Z}$-gradué standard et $\{\beta_{i,j}\}$ ses nombres de Betti $\mathbb{Z}$-gradué. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ fixe, s'il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que $\beta_{i,j} = 0$ pour tout $j < J$, alors $\beta_{i+1,j+1} = 0$, pour tout $j < J$.*

Preuve. Soient $\mathcal{F}_\cdot : \cdots \to F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \to \dots F_0$ la résolution libre minimal de M et i un index fixe. Comme $\mathcal{F}$ est minimal, les images des générateurs de F_{i+1} sont dans $\mathfrak{m}F_i$. Si pour un certain $J \in \mathbb{N}$, $\beta_{i,j} = 0$ pour tout $j < J$, alors tous les générateurs non-nuls de F_i sont de degré $\geq J$. Alors tous les éléments de $\mathfrak{m}F_i$ sont de degré $\geq J+1$, puisque ϕ_{i+1} est un morphisme gradué de degré 0. Ainsi $\beta_{i+1,j+1} = 0$, pour tout $j < J$. ∎

Soient M un $\Bbbk[\mathbf{x}]$-module $\mathbb{Z}$ gradué, ρ sa dimension projective, $\beta_{i,j}$ ses nombres de Betti pour cette graduation et $j_{\min}^{(i)} = \min\{j : \beta_{i,j} \neq 0\}$ et $j_{\max} = \max\{j : \exists i \in \mathbb{N},\ \beta_{i,j} \neq 0\}$. Par la proposition 1.9.4 $\beta_{r,j} = 0$ pour tout $r > i$ et $j \leq j_{\min}^{(i)}$, ainsi $j_{\min}^{(i)} \leq j_{\min}^{(i+1)}$ pour tout $0 \leq i < \rho$. Par conséquent nous pouvons écrire la matrice $\beta(M)_{i,j}$ de la façon suivante :

degré	β_0	$\dots$	β_i	$\dots$	β_ρ
$j_{\min}^{(0)}$	$\beta_{0,j_{\min}^{(0)}}$	$\dots$	0	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$				
j	$\beta_{0,j}$	$\dots$	$\beta_{i,j}$	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$				
$j_{\max}$	$\beta_{0,j_{\max}}$	$\dots$	$\beta_{1,j_{\max}}$	$\dots$	$\beta_{\rho,j_{\max}}$

TABLE 1.1 – Diagramme de Betti $\beta_{i,j}$.

Cela nous suggère de faire un réarrangement des nombres de Betti tels que les nombres de Betti d'une même ligne soient en correspondance avec le degré $j+i$ pour chaque colonne i. De plus, il est convenable de définir la **régularité de Castelnuovo-Mumford** $\operatorname{reg}(M) = \max\{j : \exists i \in \mathbb{N},\ \beta_{i,i+j} \neq 0\}$. De cette façon le nombre de Betti $\beta_{i,i+j}$ sera mis dans la colonne i et la ligne j, comme dans la table 1.2.

degré	β_0	$\dots$	β_i	$\dots$	β_ρ
$j_{\min}^{(0)}$	$\beta_{0,j_{\min}^{(0)}}$	$\dots$	$\beta_{i,j_{\min}^{(0)}+i}$	$\dots$	$\beta_{\rho,j_{\min}^{(0)}+\rho}$
$\vdots$	$\vdots$				
j	$\beta_{0,j}$	$\dots$	$\beta_{i,j+i}$	$\dots$	$\beta_{\rho,j+\rho}$
$\vdots$	$\vdots$				
$\operatorname{reg}(I)$	$\beta_{0,j_{\operatorname{reg}}(I)}$	$\dots$	$\beta_{i,j_{\operatorname{reg}}(I)+i}$	$\dots$	$\beta_{\rho,j_{\operatorname{reg}}(I)+\rho}$

TABLE 1.2 – Diagramme de Betti $\beta_{i,i+j}$.

Il y a deux cas particuliers pour la table 1.2, à savoir :

1. Il y a une seule ligne non nulle. Soient $t \in \mathbb{N}$ et M un $\mathbb{Z}$-module sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$, M a une **t-résolution linéaire** si pour tout $i \in \mathbb{N}$ $\beta_{i,i+j} = 0$ pour tout $j \neq t$. Nous disons que M a une résolution linéaire s'il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que M a une t-résolution linéaire.

2. Il n'existe qu'un élément non-nul dans chaque colonne de la table 1.2. Soient M un $\mathbb{Z}$-module sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$, ρ sa dimension projective et $d = (d_0, d_1 \ldots, d_\rho) \in \mathbb{N}^{\rho+1}$, M a une résolution pure de type d si pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $j \neq d_i$, $\beta_{i,j} = 0$. Donc, nous disons que M est **pur** ou d-pur s'il existe $d \in \mathbb{N}^{\rho+1}$ tel que M a une résolution pure de type d. Nous pouvons remarquer que si M est d-pur, $d_0 < d_1 < \cdots < d_\rho$, de plus tout $\mathbb{Z}$-module M sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$ qui a une résolution t-linéaire est d-pur avec $d = (t, t+1, \ldots, t+\rho)$.

1.9.5 Proposition. *Soient M un $\Bbbk[\mathbf{x}]$-module $\mathbb{Z}$-gradué, ρ sa dimension projective et $d = (d_0 < d_1 < \cdots < d_\rho < d_{\rho+1}) \in \mathbb{N}^{\rho+2}$ tel que M a une résolution libre minimale de la forme :*

$$0 \to S(-d_{\rho+1})^{\beta_{\rho,d_{\rho+1}}} \oplus S(-d_\rho)^{\beta_{\rho,d_\rho}} \to S(-d_\rho)^{\beta_{\rho-1,d_\rho}} \oplus S(-d_{\rho-1})^{\beta_{\rho-1,d_{\rho-1}}} \to \ldots$$
$$\to S(-d_2)^{\beta_{1,d_2}} \oplus S(-d_1)^{\beta_{1,d_1}} \to S^{\beta_{0,0}} \to M \to 0,$$

avec $S = \Bbbk[\mathbf{x}]$. Soient $\beta'_i = \beta_{i,d_i} - \beta_{i-1,d_i}$ avec $1 \leq i \leq \rho$ et c la codimension de M. Alors si nous connaissons la multiplicité de M et $(\rho + 1 - c)$ parmi les β'_i, nous pouvons détérminer les autres β'_i. En particulier,

$$\beta'_i = \begin{cases} (-1)^{i+1}\beta_0 \prod_{k\neq i, k\neq 0} \frac{d_k - d_0}{d_k - d_i} & \text{si } \operatorname{depth}(M) = \dim\ M \text{ et } \beta_{\rho,d_{\rho+1}} = 0, \\ (-1)^{i-1} \frac{\beta_0(\prod_{k=1,k\neq i}^{\rho+1} d_k) - (\rho)!e(M)}{\prod_{k=1,k\neq i}^{\rho+1}(d_k - d_i)} & \text{si } \operatorname{depth}(M) = \dim\ M\ \beta_{\rho,d_{\rho+1}} \neq 0, \text{ et } d_0 = 0, \\ (-1)^{i-1} \frac{\beta_0(\prod_{k=1,k\neq i}^{\rho} d_k) - (\rho-1)!e(M)}{\prod_{k=1,k\neq i}^{\rho}(d_k - d_i)} & \text{si } \operatorname{depth}(M) = \dim\ M - 1\ \beta_{\rho,d_{\rho+1}} = 0, \text{ et } d_0 = 0. \end{cases}$$

Preuve. Nous posons $r = \rho - c$ et $\beta_0 := \beta_{0,0} = \beta'_0$. D'aprés la proposition 1.9.3, le polynôme de Laurent $h_M(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ est le polynôme donné par $\frac{h_M(t)}{(1-t)^{\dim\ M}} = \frac{\mathcal{K}_M(t)}{(1-t)^n}$, où

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(M;t) &= \textstyle\sum_{i>0,j>0}(-1)^i\beta_{i,j}t^j \\ &= (-1)^0\beta_{0,0} + \textstyle\sum_{i=1}^{\rho+1}((-1)^{i-1}\beta_{i-1,d_i} + (-1)^i\beta_{i,d_i})t^{d_i} \\ &= (-1)^0\beta_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{c+r+1}(-1)^i(\beta_{i,d_i} - \beta_{i-1,d_i})t^{d_i} \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{c+r+1}(-1)^i\beta'_i t^{d_i}. \end{aligned}$$

Donc, $(1-t)^{n-\dim\ M} = (1-t)^c$ divise le polynôme $\mathcal{K}_M(t)$. Ainsi

$$\frac{d^k}{dt^k}\mathcal{K}_M(1) = \sum_{i=0}^{c+r+1}(-1)^i\frac{d_i!}{(d_i-k)!}\beta'_i = 0, \tag{1.6}$$

pour tout $k = 0, 1, \ldots, c-1$. Par ailleurs, on a

$$\frac{d^c}{dt^c}\mathcal{K}_M(t) = \frac{d^c}{dt^c}h_M(t)(1-t)^c = (1-t)^c\frac{d^c}{dt^c}h_M(t) + \sum_{i=1}^{c-1}(-1)^i\rho\frac{c!(1-t)^{c-i}}{(c-i)!}\frac{d^{c-i}}{dt^{c-i}}h_M(t) + (-1)^c c! h_M(t),$$

de cette façon pour $t = 1$ on a

$$\frac{d^c}{dt^c}\mathcal{K}_M(1) = (-1)^c c! h_M(1) = (-1)^c c! e(M). \tag{1.7}$$

En outre

$$\frac{d^c}{dt^c}\mathcal{K}_M(1) = \frac{d^c}{dt^c}\sum_{i=0}^{c+r+1}(-1)^i\beta_i'(M)t^{d_i} = \sum_{i=0}^{c+r+1}(-1)^i\frac{d_i!}{(d_i-c)!}\beta_i', \tag{1.8}$$

Ainsi, en utilisant 1.7 et 1.8, on a :

$$\sum_{i=0}^{c+r+1}(-1)^i\frac{d_i!}{(d_i-c)!}\beta_i' = (-1)^c c! e(M).$$

Finalement nous obtenons le système d'équations suivant

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{c+r+1}(-1)^i\beta_i' &= 0;\\
\sum_{i=0}^{c+r+1}\frac{d_i!}{(d_i-1)!}((-1)^i\beta_i') &= 0;\\
&\vdots\\
\sum_{i=0}^{c+r+1}\frac{d_i!}{(d_i-(c-1))!}((-1)^i\beta_i') &= 0;\\
\sum_{i=0}^{c+r+1}\frac{d_i!}{(d_i-c)!}((-1)^i\beta_i') &= (-1)^c c! e(M).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

et en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes, nous arrivons au système de $c+1$ équations et $c+r+2$-inconnues :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ d_0 & d_1 & \dots & d_{c+r+1} \\ \vdots & & & \\ d_0^{c-1} & d_1^{c-1} & \dots & d_{c+r+1}^{c-1} \\ d_0^c & d_1^c & \dots & d_{c+r+1}^c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^0\beta_0' \\ (-1)^1\beta_1' \\ \vdots \\ (-1)^{c+r}\beta_{c+r,}' \\ (-1)^{c+r}\beta_{c+r+1,}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (-1)^c c! e(M) \end{pmatrix}$$

Comme tous les mineurs M de $(c+1)\times(c+1)$ de la matrice, qui definit le système d'équations ci-dessus, sont le déterminant d'une matrice de Vandermonde et $d = (d_0 < d_1 < \cdots < d_{\rho+1})$, nous avons que $M \neq 0$. De cette façon nous pouvons conclure que si nous conaissons la multiplicité de M et $\rho + 1 - c$ β_i''s, nous pouvons détérminé les autres β_i''s.
Maintenant nous considérerons les cas suivants :

1. dim $M = \text{depth}(M)$ et $\beta_{\rho,d_{\rho+1}} = 0$. Donc $\beta_{\rho+1} = \beta_{\rho+1,d_{\rho+1}} - \beta_{\rho,d_{\rho+1}} = 0$ et d'aprés la formule de Auslander-Buchsbaum

$$\rho = n - \text{depth}(M) = n - \dim\, M = c,$$

ainsi nous avons le systéme d'équations :

$$V(d_0,\ldots,d_{\rho-1},d_\rho)((-1)^0\beta'_0,\ldots,(-1)^{\rho-1}\beta'_{\rho-1},\ldots,(-1)^\rho\beta'_\rho)^T = (0,\ldots,0,(-1)^\rho(\rho)!e(M)),$$

avec $V(d_0,\ldots,d_{\rho-1},d_\rho)$ la matrice de Vandermonde de $d_0,\ldots,d_{\rho-1},d_\rho$. Grâce à la règle de Cramer, on a que, pour tout $i \geq 0$:

$$(-1)^i\beta'_i = \frac{(-1)^{i+1+\rho+1}(-1)^\rho\rho!e(M)|V(d_0,\ldots,d_{i-1},d_{i+1},\ldots,d_\rho)|}{|V(d_0,d_1,\ldots,d_\rho)|}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\beta'_i &= \tfrac{\rho!e(M)|V(d_0,\ldots,d_{i-1},d_{i+1},\ldots,d_\rho)|}{|V(d_0,d_1,\ldots,d_\rho)|} \\
&= \rho!e(M)\tfrac{\prod_{0\leq k<j\leq\rho,\ k\neq i\ \ j\neq i}(d_j-d_k)}{\prod_{0\leq k<j\leq\rho}(d_j-d_k)} \\
&= \rho!e(M)\tfrac{1}{(\prod_{k=0}^{i-1}d_i-d_k)(\prod_{k=i+1}^{\rho}d_k-d_i)} \\
&= (-1)^i\rho!e(M)\textstyle\prod_{k\neq i}\frac{1}{d_k-d_i}.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\beta_0 = \beta'_0 = \rho!e(M)\prod_{k=1}^{\rho}\frac{1}{d_k-d_0}$ et de cette façon nous obtenons :

$$e(M) = \frac{\beta_0}{\rho!}\prod_{k=1}^{\rho}(d_k - d_0),$$

et pour $1 \leq i \leq \rho$

$$\begin{aligned}
\beta'_i &= (-1)^i\rho(\tfrac{\beta_0}{\rho!}\textstyle\prod_{k=1}^{\rho}(d_k-d_0))\prod_{k\neq i}\frac{1}{d_k-d_i} \\
&= \beta_0(-1)^i\tfrac{d_i-d_0}{d_0-d_i}\textstyle\prod_{k\neq i,k\neq 0}\frac{d_k-d_0}{d_k-d_i} \\
&= (-1)^{i+1}\beta_0\textstyle\prod_{k\neq i,k\neq 0}\frac{d_k-d_0}{d_k-d_i}.
\end{aligned}$$

2. dim $M = \text{depth}(M)$, $d_0 = 0$ et $\beta_{\rho,d_{\rho+1}} \neq 0$. On a, comme dans le cas antérieur, $\rho = c$ et le système d'équations suivant :

$$V(d_1,\ldots,d_\rho,d_{\rho+1})((-1)^1\beta'_1,\ldots,(-1)^\rho\beta'_\rho,\ldots,(-1)^{\rho+1}\beta'_{\rho+1})^T = (-\beta_0,0,\ldots,0,(-1)^\rho(\rho)!e(M)),$$

avec $V(d_1,\dots,d_\rho,d_{\rho+1})$ la matrice de Vandermonde de $d_1,\dots,d_\rho,d_{\rho+1}$. Grâce à la règle de Cramer, nous avons que pour tout $1\leq i\leq \rho+1$:

$$\begin{aligned}(-1)^i\beta'_i &= \frac{(-1)^{1+i}(-\beta_0)(\prod_{k\neq i}^{\rho} d_k)|V(d_1,\dots,d_{i-1},d_{i+1},\dots,d_{\rho+1})|+(-1)^{\rho+1+i}(-1)^{\rho}(\rho)!e(M)|V(d_1,\dots,d_{i-1},d_{i+1},\dots,d_{\rho+1})|}{|V(d_1,d_2,\dots,d_{\rho+1})|}\\ &= ((-1)^i\beta_0(\textstyle\prod_{k\neq i} d_k)+(-1)^{i+1}\rho!e(M))\frac{|V(d_1,\dots,d_{i-1},d_{i+1},\dots,d_{\rho+1})|}{|V(d_1,d_2,\dots,d_{\rho+1})|}\\ &= (-1)^i\frac{\beta_0(\prod_{k\neq i} d_k)-(\rho)!e(M)}{\prod_{k=1}^{i-1}(d_i-d_k)\prod_{k=i+1}^{\rho}(d_k-d_i)}\\ &= (-1)^i(-1)^{i-1}\frac{\beta_0(\prod_{k\neq i} d_k)-(\rho)!e(M)}{\prod_{k\neq i}^{\rho+1}(d_k-d_i)}\end{aligned}$$

D'où

$$\beta'_i=(-1)^{i-1}\frac{\beta_0(\prod_{k=1,\ k\neq i} d_k)-(\rho)!e(M)}{\prod_{k=1,\ k\neq i}^{\rho+1}(d_k-d_i)}.$$

3. dim $M=\operatorname{depth}(M)-1$, $d_0=0$ et $\beta_{\rho,d_{\rho+1}}=0$. D'aprés la formule d'Auslander-Buchsbaum

$$\rho=n-\operatorname{depth}(M)=n-(\dim\ M-1)=c+1$$

et ainsi nous avons le système d'équations suivant :

$$V(d_1,\dots,d_{\rho-1},d_\rho)((-1)^1\beta'_1,\dots,(-1)^{\rho-1}\beta'_{\rho-1},\dots,(-1)^{\rho}\beta'_\rho)^T=(-\beta_0,0,\dots,0,(-1)^{\rho-1}(\rho-1)!e(M)).$$

Grâce à la règle de Cramer, nous avons que pour tout $1\leq i\leq \rho$:

$$\begin{aligned}(-1)^i\beta'_i &= \frac{(-1)^{1+i}(-\beta_0)(\prod_{k\neq i}^{\rho} d_k)|V(d_1,\dots,d_{i-1},d_{i+1},\dots,d_{\rho})|+(-1)^{\rho+i}(-1)^{\rho-1}(\rho-1)!e(M)|V(d_1,\dots,d_{i-1},d_{i+1},\dots,d_{\rho})|}{|V(d_1,d_2,\dots,d_{\rho})|}\\ &= ((-1)^i\beta_0(\textstyle\prod_{k\neq i} d_k)+(-1)^{i-1}(\rho-1)!e(M))\frac{|V(d_1,\dots,d_{i-1},d_{i+1},\dots,d_{\rho})|}{|V(d_1,d_2,\dots,d_{\rho})|}\\ &= (-1)^i\frac{\beta_0(\prod_{k\neq i} d_k)-(\rho-1)!e(M)}{\prod_{k=1}^{i-1}(d_i-d_k)\prod_{k=i+1}^{\rho}(d_k-d_i)}\\ &= (-1)^i(-1)^{i-1}\frac{\beta_0(\prod_{k\neq i} d_k)-(\rho-1)!e(M)}{\prod_{k\neq i}^{\rho}(d_k-d_i)}\end{aligned}$$

D'où

$$\beta'_i=(-1)^{i-1}\frac{\beta_0(\prod_{k=1,\ k\neq i}^{\rho} d_k)-(\rho-1)!e(M)}{\prod_{k=1,\ k\neq i}^{\rho}(d_k-d_i)}.$$

■

1.9.6 Corollaire. (Équations de Herzog-Kühl) *Soient M un $\Bbbk[\mathbf{x}]$-module $\mathbb{Z}$-gradué Cohen-Macaulay, ρ sa dimension projective et $d=(d_0<d_1<\cdots<d_\rho)\in\mathbb{N}^{\rho+1}$, tels que M est d-pur. Alors pour $1\leq i\leq\rho$,*

$$\beta_i=\beta_0(-1)^{i+1}\prod_{k\neq i,k\neq 0}\frac{d_k-d_0}{d_k-d_i}.$$

Preuve. Ce cas-là est le même que celui de la proposition 1.9.5 avec $\beta'_i = \beta_{i,d_i} := \beta_i$ et $\mathrm{depth}(M) = \dim M$, car M est un $\mathbb{k}[\mathbf{x}]$-module Cohen-Macaulay. Ainsi on obtient, pour tout $1 \leq i \leq \rho$,

$$\beta_i = \beta_0(-1)^{i+1} \prod_{k \neq i, k \neq 0} \frac{d_k - d_0}{d_k - d_i}.$$

■

1.9.7 Corollaire. *Soient M un $\mathbb{k}[\mathbf{x}]$-module gradué avec $\mathrm{depth}(M) = \dim M - 1$ et ρ sa dimension projective. De plus il existe $d = (0 < d_1 < \cdots < d_\rho) \in \mathbb{N}^{\rho+1}$, tel que M est d-pur. Donc pour tout $1 \leq i \leq \rho$,*

$$\beta_i = (-1)^{i-1} \frac{\beta_0(\prod_{k \neq i} d_k) - (\rho - 1)! e(M)}{\prod_{k \neq i}^{\rho} (d_k - d_i)}.$$

Preuve. Ce cas-là est le même que celui de la proposition 1.9.5 avec $\beta'_i = \beta_{i,d_i} := \beta_i$, $d_0 = 0$ et $\mathrm{depth}(M) = \dim M - 1$. Ainsi on obtient, pour tout $1 \leq i \leq \rho$,

$$\beta_i = (-1)^{i-1} \frac{\beta_0(\prod_{k \neq i} d_k) - (\rho - 1)! e(M)}{\prod_{k \neq i}^{\rho} (d_k - d_i)}.$$

■

Chapitre 2

Propriété $\mathbf{N}_{2,p}$ des idéaux monomiaux quadratiques libres de carrés

Dans ce chapitre on donnera une autre prouve du théorème d'Eisenbud et als. dans [11] qui établit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un idéal monomial quadratique libre de carrés satisfasse la propriété $N_{2,p}$. Pour cela on definira le nombre maximal $p_2(I)$ tel que I satisfasse la propriété $\mathbf{N}_{2,p_2(I)}$. Ce résultat nous sera très utile dans le chapitre 3. Ensuite, on calculera le nombre de Betti $\beta_{p_2(I),p_2(I)+3}(I)$, qui représente la première sizygie de I engendrée par des éléments non linéaires, en fait engendrée par des éléments quadratiques ; ce qui donne une preuve alternative au résultat (Théorème 4.6) de O. Fernández-Ramos et P. Gimenez dans [14]. Finalement on explique comment calculer les nombres de Betti d'un idéal monomial quadratique I libre de carrés ayant une résolution 2-linéaire (I satisfait la propriété $\mathbf{N}_{2,p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$) en utilisant la formule obtenue par M. Morales dans le théorème 12 de [31].

2.1 Propriété $\mathbf{N}_{d,p}$

Soit M un $\Bbbk[\mathbf{x}]$-module de type fini. La régularité de Castelnuovo-Mumford de M est définie par :

$$\operatorname{reg}(M) = \max\{j - i | \beta_{i,j} \neq 0\}.$$

Clairement $\operatorname{reg}(M) < \infty$, puisque M est un $\Bbbk[\mathbf{x}]$ module de type fini. On dit que M est n-régulier si $\operatorname{reg}(M) \leq n$, où $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, si I est un idéal de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ et $d \in \mathbb{N}$ tel que I a une résolution d-linéaire, alors $\operatorname{reg}(I) = d$ et I est d-régulier.

2.1.1 Définition. Soit I un idéal de $\Bbbk[\mathbf{x}]$, on dira qu'il a la propriété $\mathbf{N}_{d,p}$ pour certains $d, p \in \mathbb{Z}^{>0}$ et $d \geq 2$, si $\operatorname{Tor}_t^{\Bbbk[\mathbf{x}]}(I, \Bbbk)$ est concentré en degrés $\leq d + t$ pour tout $t \leq p - 1$.

Par la remarque 1.5.3 le i-ème nombre de Betti de degré j est $\beta_{i,j}(I) = \dim_{\Bbbk}(\mathrm{Tor}_i^{\Bbbk[\mathbf{x}]}(I,\Bbbk))_j$. Donc I a la propriété $N_{d,p}$ si et seulement si le degré des générateurs des i-syzygies est $\leq d+i$, pour tout $i \leq p-1$. Ainsi on peut faire la remarque suivante :

2.1.2 Remarque.

1. Si I a la propriété $\mathbf{N}_{d,p}$, alors I a la propriété $\mathbf{N}_{d+1,p}$ pour tout $d, p \in \mathbb{Z}^{>0}$ et $p \geq 2$.
2. Soit I un idéal de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ avec tous ses générateurs de degré d. Les affirmations suivantes sont équivalentes :
   – I a la propriété $\mathbf{N}_{d,p}$;
   – pour tout $i \leq p-1$ et $j > d+i$, $\beta_{i,j}(I) = 0$;
   – pour tout $i \leq p-1$ $\beta_i = \sum_{j=0}^{i+d} \beta_{i,j} = \beta_{i,i+d}$.
   Ce qui est schematisé par le tableau 2.1

degré	β_0	$\ldots$	β_{p-1}	β_p	$\ldots$	β_ρ
d	$\beta_{0,d}$	$\ldots$	$\beta_{p-1,p-1+d}$	$\beta_{d,p+d}$	$\ldots$	$\beta_{d,\rho+d}$
$d+1$	0	$\ldots$	0	$\beta_{p,p+d+1}$	$\ldots$	$\beta_{\rho,\rho+d+1}$
$\vdots$	$\vdots$					
$\mathrm{reg}(I)$	0	$\ldots$	0	$\beta_{p,p+\mathrm{reg}(I)}$	$\ldots$	$\beta_{\rho,\rho+\mathrm{reg}(I)}$

TABLE 2.1 – Matrice de nombres de Betti d'un idéal monomial I libre de carrés vérifiant $N_{d,p}$.

3. Si I est un idéal dans $\Bbbk[\mathbf{x}]$ et I a la propriété $\mathbf{N}_{d,p}$, alors I a évidemment la propriété $\mathbf{N}_{d,p'}$ pour $p' < p$.
4. Si I est un idéal de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ engendré par des éléments de degré d et le nombre minimal de générateurs est m, alors $\beta_{0,d} = m$ et $\beta_{0,i} = 0$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $i \neq d$. Donc I a la propriété $\mathbf{N}_{d,1}$.

Soit $p(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i t^i \in \Bbbk[t]$ un polynôme de la variable t sur $\Bbbk$. La **troncature** de $p(t)$ de degré d est définie par $[p(t)]_d = \sum_{i=1}^{d} a_i t^i$.

2.1.3 Proposition. *Soient I un idéal de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ engendré par des éléments de degré d et $p \in \mathbb{N}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes.*

1. *I a la propriété $\mathbf{N}_{d,p}$.*
2. *La résolution libre minimale de I est d-linéaire au moins jusqu'au pas $p-1$.*
3. *$[\mathcal{K}(I;t)]_{p+d} = \beta_0(I)t^d + \cdots + (-1)^p \beta_{p-1}(I)t^{d+p-1} + (-1)^p \beta_{p,d+p}(I)t^{d+p}$.*

Preuve. Les implications 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) suivent facilement du tableau 2.1 et de la remarque 2.1.2. Seul 3) $\Rightarrow$ 1) est non trivial ; cette implication est obtenue à partir de l'argument suivant :

Comme I est un idéal de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ engendré par des éléments de degré d, $\beta_0 = \beta_{0,d}$ et par la proposition 1.9.4, on a :

$$\begin{aligned}[\mathcal{K}(I;t)]_{p+d} = \beta_{0,d}t^d \\ -\beta_{1,d+1}(I)t^{d+1} \quad -\beta_{1,d+2}(I)t^{d+2} - \quad \dots \quad -\beta_{1,p+d}(I)t^{p+d} \\ +\beta_{2,d+2}(I)t^{d+2} + \quad \dots \quad +\beta_{2,p+d}(I)t^{p+d} + \\ \vdots \\ +(-1)^p\beta_{p,d+p}(I)t^{d+p}\end{aligned}$$

Par hypothèse

$$[\mathcal{K}(I;t)]_{p+d} = \beta_0(I)t^d + (-1)\beta_1(I)t^{d+1} \cdots + (-1)^p\beta_{p-1}(I)t^{d+p-1} + (-1)^p\beta_{p,d+p}(I)t^{d+p}.$$

Alors par définition de l'égalité de polynômes : $\beta_1(I) = \beta_{1,d+1}(I)$; mais $\beta_1(I) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_{1,j}$, donc $\beta_{1,j} = 0$ pour $j \neq d+1$. Ainsi par récurrence sur $i \leq p-1$ on démontre que $\beta_i = \beta_{i,i+d}$, et de la proposition 2.1.2 on affirme que I satisfait la propriété $\mathbf{N}_{d,p}$. ∎

2.2 Complexes de cliques

Notre intention dans cette section est d'étudier la propriété $\mathbf{N}_{2,p}$ d'un idéal quadratique monomial I quelconque, c'est à dire que tous les génerateurs de I sont des monômes de degré 2.

2.2.1 Définition. Un complexe simplicial G de dimension 1 est appelé graphe. L'ensemble des sommets de G est noté $V(G)$ et l'ensemble de ses arêtes (ses faces de dimension 1) est noté $E(G)$.

2.2.2 Définition. Soit G un graphe. Une **clique** de G est un sous-ensemble T de sommets de G tel que pour tous $v, w \in T$ $\{v, w\} \in E(G)$. Le **complexe de cliques** pour G est le complexe simplicial $\Gamma(G)$ dont les faces de $\Gamma(G)$ sont les cliques de G.

On remarque que le 1-squelette de $\Gamma(G)$ (toutes les faces de dimension ≤ 1 de Γ) est G. De cette façon, si Γ est un complexe simplicial, alors Γ est un complexe de cliques si $\Gamma = \Gamma(\Gamma_1)$, où Γ_1 est le 1-squelette de Γ.

2.2.3 Définition. Un cycle C d'un graphe G est un sous-graphe de G de sommets $V(C) = \{v_1, \dots, v_q\}$ et d'arêtes $E(C) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{q-1}, v_q\}, \{v_q, v_1\}\}$. Nous appelons longueur de C le cardinal de $E(C)$ et nous le notons $|C|$.

On dit que le cycle C de longueur > 3 de G a une **corde** s'il existe une arête $\{v_i, v_j\}$, pour certains $i, j \in \{1, \dots, q\}$ et $j \neq i+1$, qui appartient à G. On dit que le cycle C est minimal si $|C| > 3$ et s'il n'a pas de cordes. Le graphe G est appelé **graphe de cordes** si tout cycle de longueur > 3 a une corde.

2.2.4 Proposition. *Les affirmations suivantes sont équivalentes pour un complexe simplicial* Γ *:*

1. Γ *est un complexe de cliques.*
2. *Toute non-face minimale de* Γ *a exactement deux sommets.*
3. I_Γ *est engendré par des monômes quadratiques.*

Preuve.
$2 \Leftrightarrow 3)$ Clairement les affirmation (2) et (3) sont équivalentes.
$1 \Rightarrow 2)$ On supposera que $\{1, \ldots, n\}$ est l'ensemble des sommets de Γ. On pose $G = \Gamma_1$ et $\Gamma = \Gamma(G)$. Soit $F \subset \{1, \ldots, n\}$, $F \notin \Gamma$ quelconque. Alors le graphe complet de sommets sur F n'est pas un sous-graphe de G, donc il y a deux éléments $x \neq y \in F$ tel que $\{x, y\} \notin \Gamma$. Ainsi toute non-face minimale à Γ a deux sommets.
$1 \Leftarrow 2)$ S'il y avait une clique C de $G = \Gamma_1$ de taille strictement plus grande que 2 et si $C \notin \Gamma$, on pourrait prendre une clique $C^{'} \in \Gamma$ avec $|C'| \geq 3$, telle que soit minimale avec la propriété de ne pas être dans Γ, donc $C^{'}$ est une non-face minimale de Γ et son cardinal est plus grand ou égal à 3.

■

2.2.5 Lemme. *Soient* Γ *un complexe de cliques et* $G = \Gamma_1$. *Si* $H_1(\Gamma) \neq 0$, *alors le groupe d'homologie de* $\widetilde{H}_1(\Gamma)$ *est engendré par certains cycles minimaux de* G.

Preuve. Soit C un cycle de G et $V(C) = \{v_1, \ldots, v_q\}$ de G avec $q = 3$ ou bien C soit minimal. On peut supposer que $\sigma_1 = \{v_1, v_2\}, \sigma_2 = \{v_2, v_3\}, \ldots \sigma_q = \{v_q, v_1\}$ sont toutes les arêtes de de C. On définit

$$\operatorname{sign}(\sigma_i) := \begin{cases} 1 & \text{si } v_i < v_{i+1}, \\ -1 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

On pose $e_C = \sum_{i=1}^{q} \operatorname{sign}(\sigma_i) e_{\sigma_i}$. On pose $L = (e_C | C$ est un cycle de G $|C| = 3$ ou C est minimal). On affirme que $L = \operatorname{Ker}(\partial_1)$. Puisque :
– $L \subset \operatorname{Ker}(\partial_1)$, puisque soit C un cycle de G

$$\begin{aligned} \partial_1(e_C) &= \textstyle\sum_{i=1}^{q-1}(\operatorname{sign}(\sigma_i)(\operatorname{sign}(v_i, \sigma_i)e_{v_i} + \operatorname{sign}(v_i, \sigma_i)e_{v_{i+1}}) \\ &\quad + \operatorname{sign}(\sigma_q)(\operatorname{sign}(v_q, \sigma_q)e_{v_q} + \operatorname{sign}(v_q, \sigma_i)e_{v_1})) \qquad (2.1) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{q} e_{v_i} - e_{v_i} = 0. \qquad (2.2) \end{aligned}$$

– $L \supset \operatorname{Ker}(\partial_1)$. Soit $b = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma e_\sigma \in \operatorname{Ker}(\partial_1)$ et soit G' le sous-graphe de G formé par toutes les arêtes $\sigma \in E(G)$ tel que $a_\sigma \neq 0$. Alors $b = \sum_{\sigma \in G'} a_\sigma e_\sigma \in \operatorname{Ker}(\partial_1)$. On demontrera que $b \in L$ par recurrence sur $n = |E(G')|$.

1. Si $n \leq 2$ $a_\sigma = 0$ pour tout $\sigma \in G'$ et $b = 0$.
2. Soit $n \geq 3$ et on supposse que pour $k \leq n$, $b \in L$. Alors, il existe $T \subset G$ maximal et $G' \setminus T \neq \emptyset$, si non tout $a_\sigma = 0$ pour $a_\sigma \in G'$. D'après le corollaire 5. de la section 7 du chapitre 3 de [36] il existe un cycle $C \subset G'$ de taille 3 ou minimal tel que pour tout arête σ de C, $a_\sigma \neq 0$. Soit $e_{\sigma_C} \in E(C)$ fixe. Alors

$$0 = \partial_1(b) = \partial_1(b - a_{\sigma_C} e_C + a_{\sigma_C} e_C) = \partial_1(b - a_{\sigma_C} e_C) + \partial_1(a_{\sigma_C} e_C) = \partial_1(b - a_{\sigma_C} e_C),$$

car $\partial_1(a_{\sigma_C} e_C) = a_{\sigma_C}\partial_1(e_C) = 0$, par l'equation 2.1. Donc

$$0 = \partial_1(b - a_{\sigma_C} e_C) = \partial_1(\sum_{\sigma \in G'} a'_\sigma e_\sigma).$$

Soit G'' le graphe avec ensemble d'arêtes $E(G'') = \{\sigma \in G : a'_\sigma \neq 0\}$. Comme $a'_{\sigma_C} = 0$, on a que $|E(G'')| \leq n$ et par hypothèse de récurrence $\sum_{\sigma \in G'} a'_\sigma e_\sigma \in L$. Par conséquence $b \in L$.

De cette façon, on a prouvé que $L = \mathrm{Ker}(\partial_1)$. Par ailleurs, soit C un cycle de taille 3 de G, alors c'est un bord. En effet si $V(C) = \{x_1 < x_2 < x_3\}$ est l'ensemble des sommets de C, donc $\sigma = V(C)$ est une face de Γ, puisque Γ est un complexe de cliques. Par ailleurs, $\partial_2(e_\sigma) = e_{x_2x_3} - e_{x_1x_3} + e_{x_1x_2} = e_{x_2x_3} + e_{x_3x_1} + e_{x_1x_2} = e_C \in \mathrm{Ker}(\partial_1)$. Il en résulte que C n'est pas un générateur de $\widetilde{H}_1(\Gamma) = \mathrm{Ker}(\partial_1)/\mathrm{Im}(\partial_2)$. De cette façon, si $\widetilde{H}_1(\Gamma) \neq 0$, $\widetilde{H}_1(\Gamma)$ est engendré par des cycles de longueur ≥ 4. Ainsi, on peut affirmer que $\widetilde{H}_1(\Gamma)$ est engendré par certains cycles minimaux de G si $H_1(\Gamma) \neq 0$. ∎

2.2.6 Définition. Soient I un idéal dans $\Bbbk[\mathbf{x}]$ et $1 \leq d < \mathrm{reg}(I)$, on pose $p_d(I)$ l'entier maximal pour lequel I a la propriété $\mathbf{N}_{d,p_d(I)}$. Si $d \geq \mathrm{reg}(I)$, on pose $p_d(I) = \infty$. S'il n'y a pas de confusion, on notera par $p(I)$ à la place de $p_2(I)$.

2.2.7 Remarque. Étant donné un idéal I de $\Bbbk[\mathbf{x}]$, on a $p_{\mathrm{reg}(I)} = \infty$, et pour tout $d \in \mathbb{N}$, $d \geq \mathrm{reg}(I)$, $p_d(I) \geq p_{d-1}(I)$ par la remarque 2.1.2(1).

2.2.8 Lemme. *Soient Γ un complexe de cliques et $W \subset V(\Gamma)$. Étant donné $x \in V(\Gamma)$, on a*

$$\mathrm{link}_{\Gamma_W}(\{x\}) = \Gamma_{W_x}, \text{ où } W_x := V(\mathrm{link}_{\Gamma_W}(\{x\})).$$

Preuve. Si $F \in \mathrm{link}_{\Gamma_W}(\{x\})$, clairement $F \in \Gamma_{W_x}$, donc $\mathrm{link}_{\Gamma_W}(\{x\}) \subset \Gamma_{W_x}$. Il nous reste à montrer la contention inverse ($\Gamma_{W_x} \subset \mathrm{link}_{\Gamma_W}(\{x\})$). En effet, soit $F \in \Gamma_{W_x}$, alors $F \in \Gamma$ et $F \subset W_x$. De cette façon si $y \in F$, alors $y \in W_x = V(\mathrm{link}_{\Gamma_W}(\{x\}))$ et $\{x, y\} \in \Gamma$, donc $\{x, y\} \in \Gamma_1 = G$. Comme $\Gamma = \Gamma(G)$, on a que $F \cup \{x\}$ est une clique de G, par conséquent $F \cup \{x\} \in \Gamma$ et $F \in \mathrm{link}_{\Gamma_W}(\{x\})$. De cette façon on obtient $\Gamma_{W_x} \subset \mathrm{link}_{\Gamma_W}(\{x\})$ et $\mathrm{link}_{\Gamma_W}(\{x\}) = \Gamma_{W_x}$. ∎

2.2.9 Proposition. *Soient $\Gamma = \Gamma(G)$ un complexe de cliques tel que $I := I_\Gamma$ n'a pas une résolution linéaire et $3 \leq d \leq \mathrm{reg}(I)$. Alors, $p_d(I) > p_{d-1}(I)$.*

Preuve. On notera $p_d = p_d(I)$. On a que $\beta_{p_d,p_d+d+j}(I) > 0$ pour certain $j \geq 1$ et $\beta_{i,i+d+j'}(I) = 0$ pour tout $i < p_d$ et $j' \geq 1$. Soit $V = V(G)$, par la formule de Hochster 1.8.5 on déduit qu'il existe $\sigma \subset V$ avec $|W| = p_d + d + j$ tel que $\widetilde{H}_{d+j-2}(\Gamma_\sigma; \Bbbk) \neq 0$ et $\widetilde{H}_{d+j-2}(\Gamma_{\sigma'}; \Bbbk) = 0$, pour tout $W' \subset V$ avec $|W'| < |W|$.

Soit $x \in W$ fixe. Posons $W_x := V(\mathrm{link}_{\Gamma_W}(\{x\}))$ et d'après le lemme 2.2.8 $\mathrm{link}_{\Gamma_W}(\{x\}) = \Gamma_{W_x}$.

- $W_x \neq W\setminus\{x\}$. On le demontrera par l'absurde : supposons que $W_x = W\setminus\{x\}$. Soit $F \in \Gamma_W$. Si $x \in F$, alors $F \in \mathrm{link}_{\Gamma_W}(\{x\}) * x$. Si $x \notin F$, donc $F \subset \Gamma_{W\setminus\{x\}} = \mathrm{link}_{\Gamma_W}(\{x\})$, par conséquent $F \cup \{x\} \in \mathrm{link}_{\Gamma_W}(\{x\}) * x$ et on conclut que $\Gamma_W \subset \mathrm{link}_{\Gamma_W}(\{x\}) * x$. Comme on a toujours que $\Gamma_W = \mathrm{link}_{\Gamma_W}(\{x\}) * x \subset \Gamma_W$, on a : $\Gamma_W = \mathrm{link}_{\Gamma_W}(\{x\}) * x$. Par la proposition 1.6.9 il resulte que $\widetilde{H}_j(\Gamma_W;\Bbbk) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, or $\widetilde{H}_{d+j-2}(\Gamma_W;\Bbbk) \neq 0$. Donc, $W_x \subsetneq W \setminus \{x\}$.

- Comme $W_x \subsetneq W \setminus \{x\}$, on a $|W_x| < |W \setminus \{x\}| = p_d + d + j - 1$. Ensuite, nous considérons la suite exacte longue du lemme 1.6.7 :

$$\cdots \to \widetilde{H}_{d+j-3}(\mathrm{link}_{\Gamma_W}(\{x\});\Bbbk) \to \widetilde{H}_{d+j-2}(\Gamma_W;\Bbbk) \to \widetilde{H}_{d+j-2}((\Gamma_W)_{W\setminus\{x\}};\Bbbk) \to \dots$$

  Mais $(\Gamma_W)_{W\setminus\{x\}} = \Gamma_{W\setminus\{x\}}$ et par hypothèse

$$\widetilde{H}_{d+j-2}((\Gamma_W)_{W\setminus\{x\}};\Bbbk) = \widetilde{H}_{d+j-2}(\Gamma_{W\setminus\{x\}},\Bbbk) = 0$$

  et $\widetilde{H}_{d+j-2}(\Gamma_W;\Bbbk) \neq 0$. Donc, d'après l'exactitude de la suite longue précédente

$$\widetilde{H}_{d+j-3}(\Gamma_{W_x};\Bbbk) = \widetilde{H}_{d+j-3}(\mathrm{link}_{\Gamma_W}(\{x\});\Bbbk) \neq 0.$$

  On pose $k := |W_x| < |W \setminus \{x\}| = p_d + d + j - 1$ et par la formule de Hochster 1.5.2 $\beta_{k-d-j+1,k}(I) > 0$. En posant $i = k - d - j + 1 < (p_d + d + j - 1) - d - j + 1 = p_d$, on a $\beta_{i,i+d+j-1}(I) > 0$. Comme $j > 0$, on a : $p_{d-1} < i < p_d$.

■

2.2.10 Corollaire. *Soient I un idéal monomial quadratique libre de carrés, $m > 2$ sa régularité de Castelnuovo-Mumford et ρ sa dimension projective. Pour tout $2 \leq d \leq m-1$, $\beta_{p_d(I),p_d(I)+d+1}(I) \neq 0$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $j > 1$ $\beta_{p_d(I),p_d(I)+d+j}(I) = 0$.*

Preuve. On notera $p_d = p_d(I)$. Donc, il existe $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$ tel que $\beta_{p_d,p_d+d+j}(I) \neq 0$ et $\beta_{i,i+d+k}(I) = 0$, pour tous $i < p_d$ et $k \geq 1$. Si $j > 1$ $p_d = p_{d+j-1}$, mais par la proposition 2.2.9, $p_d < p_{d+j-1}$. ■

2.2.11 Remarque.

1. De cette proposition la matrice $\beta(I)_{i,j}$ d'un idéal monomial quadratique (table 2.1) peut être réécrite de la façon suivante (où $\beta_{i_j,i_j+j} \neq 0$ avec $3 \leq j \leq m$) :

	0	1	…	p_2-1	p_2	…	p_3-1	p_3	…	p_{m-1}	…	ρ
2	$\beta_{0,2}$	$\beta_{1,3}$	…	β_{p_2-1,p_2+1}	β_{p_2,p_2+2}	…	β_{p_3-1,p_3+1}	β_{p_3,p_3+2}	…	$\beta_{p_{m-1},p_{m-1}+2}$	…	$\beta_{\rho,\rho+2}$
3	0	0	…	0	β_{p_2,p_2+3}	…	β_{p_3-1,p_3+2}	β_{p_3,p_3+3}	…	$\beta_{p_{m-1},p_{m-1}+3}$	…	$\beta_{\rho,\rho+3}$
4	0	0	…	0	0	…	0	β_{p_3,p_3+4}	…	$\beta_{p_{m-1},p_{m-1}+3}$	…	$\beta_{\rho,\rho+3}$
⋮												
m	0	0	…	0	0	…	0	0	…	$\beta_{p_{m-1},p_{m-1}+m}$	…	$\beta_{\rho,\rho+m}$

2. D'où, pour un idéal I monomial quadratique on obtient que :

$$m = \mathrm{reg}(I_\Gamma) \leq \rho - (p_2 - 1) + 2 = \rho - p_2 + 3. \tag{2.3}$$

2.2.12 Exemples.

1. Soient $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ deux ensembles de variables disjointes. On pose

$$I = (x_i y_i | i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i \in \mathbf{x} \text{ et } y_i \in \mathbf{y}) \text{ (voir la figure 2.1)}$$

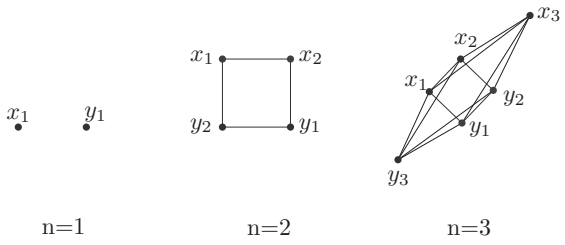


FIGURE 2.1 – Le 1-squelette de $I(\Gamma)$.

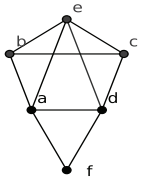
Clairement $\{x_i y_i\}_{i=1}^n$ est une suite régulière dans $S := \Bbbk[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, donc la résolution de Koszul de S/I est la résolution libre minimale de S/I, c'est à dire :

$$0 \to S(-2n)^{\binom{n}{n}} \to S(-2(n-1))^{\binom{n}{n-1}} \to \cdots \to S(-2)^{\binom{n}{1}} \to S \to S/I.$$

Donc $\rho = \text{projdim}(I) = n-1$ et $p_2 = 1$, de même $\text{reg}(I) = 2n-(n-1) = n+1 = \rho - p_2 + 3$ et le diagramme de Betti pour I est (où l'élément de la colonne i, ligne j est le nombre de Betti $\beta_{i,j+i}(I)$) :

	0	1	...	$n-1$
2	$\binom{n}{1}$	0	...	0
3	0	$\binom{n}{2}$	...	0
$\vdots$				
n	0	0	...	1

2. Soit $I = (ac, bd, bf, cf, ef) \rhd \Bbbk[a, b, c, d, e, f] =: S$, donc $\Gamma(I)$ est un complexe de clique et son 1-squelette est schématisé sur la figure suivante :



Donc $\dim(\Gamma(I)) = 2$, alors $\dim(S/I) = \dim(\Gamma(I)) + 1 = 3$. En utilisant Macaulay2 on obtient le diagramme de Betti de I :

	0	1	2
2	5	5	1
3	0	1	1

On remarque que $\text{projdim}(S/I) = \rho + 1 = 3$ et par la formule de Auslander et Buchsbaum [29, Théorème 19.1] ($\text{projdim}(S/I) + \text{depth}(S/I) = 6$) $\text{projdim}(S/I) = \text{depth}S/I = 3$, d'où S/I est un S-module Cohen-Macaulay.

2.2.13 Théorème. ([11, Théorème 2.1]) *Soient $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques d'un graphe G et $I = I_\Gamma$ l'idéal de non-faces de Γ engendré par des monômes quadratiques libres de carrés. L'idéal I satisfait la condition $\mathbf{N}_{2,p}$, $p \geq 1$, si et seulement si tous les cycles minimaux de G sont de longueur strictement plus grande que $p + 2$.*

Nous donnons une autre preuve de ce résultat avec nos notations.

Preuve. On suppose que $|V(G)| = n$.

$\Rightarrow$) On démontrera la contraposée.On supposera alors que G a un cycle minimal C tel que sa longueur $3 \leq |C| \leq p+2$. Soit $W := V(C)$ les sommets de C. On pose $r = |W|$; par la formule de Hochster 1.8.5 on a que :

$$\beta_{r-3,r}(I) \geq \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_1(\Gamma_W, \Bbbk) = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_1(C, \Bbbk) = 1.$$

Donc I n'a pas la propriété $\mathbf{N}_{2,r-3}$ et comme $r - 3 \leq p - 1 < p$, d'après la remarque 2.1.2(1) I n'a pas la propriété $\mathbf{N}_{2,p}$

$\Leftarrow$) On démontrera la contraposée. Donc, on supposera que I ne satisfait pas la propriété $\mathbf{N}_{2,p}$ et que p est minimal par rapport à cette propriété, c'est à dire que $p - 1 = p_2(I)$. D'après le corollaire 2.2.10 $\beta_{p-1,p+2}(I) \neq 0$. Donc par la formule de Hochster 1.8.5 il existe $h \in \mathbb{N}^n$, libre de carrés et $|h| = p + 2$ tel que

$$\beta_{p-1,h}(I) = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_1(\Gamma_W, \Bbbk) \neq 0,$$

où $W \subset V(G)$ avec $\text{supp}(W) = h$. On va montrer que Γ_W est un cycle minimal de G de longueur $p + 2$.

- Clairement par minimalité de p, $V(\Gamma_W) = W$.
- Γ_W est connexe. Au cas où Γ_W ne serait pas connexe, il y aurait $W' \subsetneq W$, tel que $\widetilde{H}_1(\Gamma_W, \Bbbk) \neq 0$ et p ne serait pas l'entier minimal satisfaisant que I n'ait pas la prorpiété $\mathbf{N}_{2,p}$.
- Par le lemme 2.2.5 $H_1(\Gamma_W, \Bbbk)$ est engendré par de cycles minimaux de G et par minimalité de p il y a qu'un seul cycle minimal C de G qui engendre le groupe $H_1(\Gamma_W, \Bbbk)$ et $W = V(C)$, donc $(\Gamma_W)_1 = C$, d'où $\Gamma_W = C$. De cette façon on a prouvé qu'il existe un cycle minimal C de longueur $p + 2$ dans G.

■

Du théorème antérieur, le célèbre théorème de Fröberg devient immédiat :

2.2.14 Corollaire. (**Théorème de Fröberg**) *Soient $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques d'un graphe G et $I = I_\Gamma$ l'idéal de non-faces de Γ engendré par des monômes quadratiques libres de carrés. L'idéal I est 2-linéaire si et seulement si tous les cycles de longueur > 3 de G ont une corde.*

2.2.15 Corollaire. *Soient $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques d'un graphe G, $I = I_\Gamma$ et $p \geq 1$ entier naturel. Alors :*

1. *$p_2(I) + 3$ est la longueur minimale d'un cycle minimal si $p_2(I) < \infty$.*
2. *De plus, si $p_2(I) < \infty$, alors $\beta_{p_2(I),p_2(I)+3}(I)$ est égal au nombre de cycles minimaux de longueur $p_2(I) + 3$ de G, de même $\beta_{p_2(I),p_2(I)+i}(I) = 0$ pour tout $i \geq 4$.*

Preuve.

1. La première affirmation est la traduction en notre notation du théorème 2.2.13.
2. La deuxième affirmation est due à O. Fernández-Ramos et P. Gimenez dans [14]. Ci-dessous on donne une autre demonstration.

   On pose $p = p_2(I)$. On définit

   $$\mathcal{C} = \{C \subset E(\Gamma_1) : C \text{ est un cycle minimal de longueur } p + 3\}.$$

   D'après (1) $\mathcal{C}$ n'est pas vide et il existe $C \in \mathcal{C}$, $|C| = p + 3$, car $p = p_2(I)$. Soit $C \in \mathcal{C}$ et $V(C)$ ses sommets, par la formule d'Hochster (voir 1.4) :

   $$\beta_{i,\mathrm{supp}(V(C))}(I) = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_{|C|-i-2}(\Gamma_{V(C)}, \Bbbk) = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_{p+3-i-2}(C, \Bbbk) = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_{p-i}(C, \Bbbk).$$

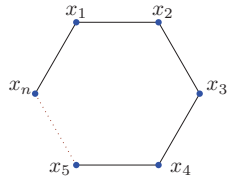
   Si $i \neq p$, $\beta_{i,\mathrm{supp}(V(C))}(I) = 0$, et si $i = p$, $\beta_{p,\mathrm{supp}(V(C))}(I) = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_1(C, \Bbbk) = 1$. Donc

   $$\beta_{p,p+3}(I) = \sum_{\substack{m \in \{0,1\}^n \\ |m| = p+3}} \beta_{p,m} \geq \sum_{C \in \mathcal{C}} \beta_{p,\mathrm{supp}(V(C))} = |\mathcal{C}|.$$

   Il reste à voir que $\beta_{p,p+3}(I) = |\mathcal{C}|$. Soit $W \subset \{1, \ldots, n\}$, $|W| = p + 3$. Par la formule d'Hochster (1.4) $\beta_{p,\mathrm{supp}(W)}(I) = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_1(\Gamma_W, \Bbbk)$. On va supposer que $\widetilde{H}_1(\Gamma_W, \Bbbk) \neq 0$, on montrera que Γ_W est un cycle minimal.
   – Γ_W est un complexe de cliques, car c'est un sous-complexe de Γ.
   – Γ_W n'a pas de cycles minimaux de longueur $\leq p + 2$. Car sinon, si C était un cycle minimal de longueur $\leq p + 2$ de Γ_W, C serait un cycle minimal de G et par le théorème 2.2.13 Γ n'aurait pas la propriété $\mathbf{N}_{2,p}$. Mais comme $\widetilde{H}_1(\Gamma_W, \Bbbk) \neq 0$ et $\widetilde{H}_1(\Gamma_W, \Bbbk)$ est engendré par des cycles minimaux, il faut que Γ_W soit un cycle minimal.

D'où, $\beta_{p,p+3}(I) \leq |\mathcal{C}|$, mais on a déjà vu que $\beta_{p,p+3}(I) \geq |\mathcal{C}|$, donc $\beta_{p,p+3}(I) = |\mathcal{C}|$. Par ailleurs du corollaire 2.2.10 $\beta_{p,p+i}(I) = 0$ pour tout $i \geq 4$. ∎

2.2.16 Exemple. Soit G le cycle (polygone) de n sommets.



G

FIGURE 2.2 – Le cycle

Comme il y a un unique cycle minimal et il est de longueur n, d'aprés le corollaire 2.2.15 $p_2(I_{\Gamma(G)}) = n - 4$. Par ailleurs, pour tout idéal I de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ on a $\beta_{i-1}(I) = \beta_i(\Bbbk[\mathbf{x}]/I)$. Ainsi $p_2(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}) = n - 3$ et par la formule de Hochster

$$\beta_{n-2,n-1}(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}) = \sum_{W\subset G,\ |W|=n-1} \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_0(\Gamma(G)_W;\Bbbk) = \sum_{W\subset G,\ |W|=n-1} 0 = 0.$$

Alors la résolution libre minimale de $\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}$ a la forme suivante :

$$0 \to \Bbbk[\mathbf{x}](-n)^{\beta_{n-2}} \to \Bbbk[\mathbf{x}](-n+2)^{\beta_{n-3}} \to \ldots \Bbbk[\mathbf{x}](-3)^{\beta_2} \to \Bbbk[\mathbf{x}](-2)^{\beta_1} \to \Bbbk[\mathbf{x}]^{\beta_0} \to \Bbbk[x]/I_{\Gamma(G)},$$

où $\beta_0 = 1$ et $\beta_{n-2} = \beta_{n-2,n-1}(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}) + \beta_{n-2,n}(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}) = 0 + 1 = 1$ et $\beta_{i-1}(I) = \beta_i = n\frac{i}{n-i-1}\binom{n-2}{i+1}$, pour $i = 1, \ldots, n-2$, puisque :
De la resolution de $\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}$ on a que la dimension projective ρ de $\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}$ est $\rho = n + 2 = n - (\dim\Gamma(G) + 1) = \mathrm{ht}(I_{\Gamma(G)})$, alors $\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}$ est Cohen-Macaulay. Par ailleurs la résolution libre minimale de $\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}$ est d-pure avec $d = (0, 2, 3, \ldots, n-2, n)$, ainsi par les équations de Herzog-Kühl (proposition 1.9.6) ses nombres de Betti sont :

$$\beta_i = \beta_0(-1)^{i+1} \prod_{k\neq i, k\neq 0} \frac{d_k - d_0}{d_k - d_i},$$

pour $1 \leq i \leq n-2$. De cette façon :

$$\begin{aligned}
\beta_{i-1}(I) &= \beta_i = (-1)^{i+1}(\prod_{k=1}^{i-1}\tfrac{k+1}{k+1-(i+1)})(\prod_{k=i+1}^{n-3}\tfrac{k+1}{k+1-(i+1)})(\tfrac{n}{n-(i+1)}) \\
&= (-1)^{i+1}(-1)^{i-1}(\prod_{k=1}^{i-1}\tfrac{k+1}{i-k})(\prod_{k=i+1}^{n-3}\tfrac{k+1}{k-i})(\tfrac{n}{n-(i+1)}) \\
&= \tfrac{(n-2)!/i+1}{(i-1)!(n-3-i)!}\tfrac{n}{n-(i+1)} \\
&= n\tfrac{i}{n-i-1}\tfrac{(n-2)!}{\frac{(i+1)!}{i}(n-2-(i+1))!} \\
&= n\tfrac{i}{n-i-1}\tfrac{(n-2)!}{(i+1)!(n-2-(i+1))!} \\
&= n\tfrac{i}{n-i-1}\tbinom{n-2}{i+1}.
\end{aligned}$$

2.3 Nombres de Betti de l'idéal du complexe de cliques d'un graphe de cordes

Dans cette section on va reproduire le calcul de nombres de Betti effectué dans le théorème 12. de [31]. Les résultats de cette section nous seront utiles plus tard dans 4.2.

2.3.1 Notation. Soit $V =< x_1, \ldots, x_n >$ l'espace vectoriel sur $\Bbbk$ engendré par toutes les variables de $\Bbbk[\mathbf{x}]$. Pour tout $Q \subset V$, on notera $< Q >\subset V$ le $\Bbbk$-espace vectoriel engendré par Q, et $(Q) \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ l'idéal engendré par Q.

Soit $l \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_l$ une suite ordonnée des idéaux dans $\Bbbk[\mathbf{x}]$, tels que $\mathcal{J}_i = (\mathcal{M}_i, (\mathcal{Q}_i))$, pour tout $1 \leq i \leq l$, où $\mathcal{Q} \subset V$ est un $\Bbbk$-sous-espace vectoriel ; et $\mathcal{M}_i$ un idéal qui ne contient pas de formes linéaires. On suppose que l'intersection $\mathcal{J}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{J}_l$ n'est pas **redondante**. La suite des idéaux $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_l$ est une suite linéairement jointe si pour tout $k = 2, \ldots, l$:

$$\mathcal{J}_k + \bigcap_{i=1}^{k-1} \mathcal{J}_l = (\mathcal{Q}_k) + \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \mathcal{Q}_i\right). \tag{2.4}$$

2.3.2 Remarque. Soit $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_l$ une suite linéairement jointe des idéaux dans $\Bbbk[\mathbf{x}]$, alors :

1. La suite $(\mathcal{Q}_1), \ldots, (\mathcal{Q}_l)$ est aussi linéairement jointe, puisque :
$$(\mathcal{Q}_k) + \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \mathcal{Q}_i\right) \subset (\mathcal{Q}_k) + \bigcap_{i=1}^{k-1} (\mathcal{Q}_i) \subset \mathcal{J}_k + \bigcap_{i=1}^{k-1} \mathcal{J}_l = (\mathcal{Q}_k) + \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \mathcal{Q}_i\right).$$
2. Soient $\mathcal{D}_1 = \mathcal{Q}_1$ et, pour $i \in \{2, \ldots, l\}$, $\mathcal{D}_i = \cap_{j=1}^{i} \mathcal{Q}_j$. S'il existait $k \in \{2, \ldots, l\}$ tel que $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{k-1}$, alors par 2.4 nous aurions $(\mathcal{Q}_k) = \mathcal{J}_k \supset \cap_{i=1}^{k-1} \mathcal{J}_i$ et l'intersection $\mathcal{J}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{J}_l$ serait redondante. D'où $\mathcal{D}_1 \supset \mathcal{D}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{D}_l$, où la contention est stricte.
3. Pour tout $i \in \{2, \ldots, l\}$, soient $< \Delta_i >$ l'espace linéaire tel que $\mathcal{D}_{i-1} = \mathcal{D}_i \oplus < \Delta_i >$ et $\mathcal{P}_i$ l'éspace linéaire tel que $\mathcal{Q}_i = \mathcal{P}_i \oplus \mathcal{D}_i$. À partir de là on a clairement $\mathcal{P}_1 = 0$, $\mathcal{D}_l = 0$ et $D_i = \oplus_{j=i+1}^{l} < \Delta_j >$.

2.3.3 Théorème. (Théorème 3 [31]) *Soit $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_l$ une suite d'idéaux premiers homogènes. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *L'idéal $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{J}_l$ est 2-régulier*
2. *Pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$, $\mathrm{reg}(\mathcal{J}_i) \leq 2$ et il existe un réarrangement de la suite $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_l$, tel qu'elle est linéairement jointe.*

La proposition suivante découle immédiatement du corollaire 3 et de la proposition 1 de [31].

2.3.4 Proposition. *Soit $(\mathcal{Q}_1), \ldots (\mathcal{Q}_l)$ une suite d'idéaux linéaires, telle que $\mathcal{Q} := (\mathcal{Q}_1) \cap \cdots \cap (\mathcal{Q}_l)$ est non-redondant. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *L'idéal $\mathcal{Q}$ est un idéal 2-linéaire.*
2. *Il existe un réarrangement des composantes primaires de $\mathcal{Q}$, à savoir, $(\mathcal{Q}_1), \ldots, (\mathcal{Q}_l)$, tel que la suite est linéairement jointe.*
3. *Il existe un réarrangement des composantes primaires de $\mathcal{Q}$, à savoir, $(\mathcal{Q}_1), \ldots, (\mathcal{Q}_l)$, où pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$, il existe des sous-espaces linéaire $< \Delta_i >, \mathcal{P}_i$, avec $< \Delta_1 >= 0$, $\mathcal{P}_1 = 0$, tel que :*
   (a) *$\mathcal{D}_i := \oplus_{j=i+1}^{l} < \Delta_j >$;*
   (b) *$\mathcal{Q}_i = \mathcal{D}_i + \mathcal{P}_i$;*
   (c) *Pour tout $k \in \{2, \ldots, l\}$, et $j < k$, $< \Delta_j > \times \mathcal{P}_j \subset (\mathcal{P}_k)$.*

Maintenant, on considérera G un graphe de cordes et $F_1, \ldots, F_l$ toutes ses cliques maximales, c.a.d. les facettes de $\Gamma = \Gamma(G)$. D'après la proposition 1.8.3

$$I_\Gamma = \bigcap_{j=1}^{l} Q_j, \text{ où } Q_j = (x : x \in V(G) \setminus F_j) \text{ pour } j \in \{1, \ldots, l\}.$$

Comme G est un graphe de cordes, d'après le théorème de Fröberg 2.2.14 on a que I_Γ, l'idéal de Stanley-Reisner de Γ, est 2-linéaire et d'après la proposition 2.3.4 il existe un réanrragement de $\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_l$ tel que ce réarrangement est une suite linéairement jointe. De la on pose la définition suivante :

2.3.5 Définition. *Soit G est un graphe de cordes et $F_1, \ldots, F_l$ toutes ses cliques maximales. On dira que $F_1, \ldots, F_l$ est une suite linéairement jointe si et seulement si la suite $\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_l$ est une suite linéairement jointe, où $\mathcal{Q}_j = (x_i : x_i \in V(G) \setminus F_j)$ pour $j \in \{1, \ldots, l\}$.*

Dans le point 2. de la remarque 2.3.2 on avait défini les ensembles : $\mathcal{D}_i$ pour $i \in \{1, \ldots, l\}$ de même que $\mathcal{P}_i$ et Δ_i pour $i \in \{2, \ldots, l\}$, qui avaient été définis à partir de $Q_1, \ldots, Q_l$. Mais comme $Q_1, \ldots, Q_l$ ont été obtenus à partir des facettes $F_1, \ldots, F_l$, les ensembles antérieurs peuvent être définis de la façon suivante :

$$\mathcal{D}_i = \cap_{j=1}^{i} < x : x \in V(G) \setminus F_j >=< x : x \in V(G) \setminus F_i \text{ et } x \in \mathcal{D}_{i-1} >, \text{ pour } i \in \{1, \ldots, l\}.$$

Comme $\mathcal{P}_i$ est le complément direct de $\mathcal{D}_i$, c.a.d., $\mathcal{P}_i \oplus \mathcal{D}_i = Q_i$, nous avons que pour tout $i \in \{2, \ldots, l\} : \mathcal{P}_i =< P_i >$

$$P_i = \{x : x \in V(G) \setminus F_i \text{ et } x \notin \mathcal{D}_i\}. \tag{2.5}$$

Par ailleurs Δ_i sont les générateurs de l'espace linéaire qui satisfait $\mathcal{D}_{i-1} = \mathcal{D}_i \oplus < \Delta_i >$; ainsi pour tout $i \in \{2, \ldots, l\}$:

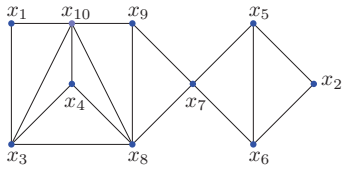
$$\begin{aligned}
\Delta_i &= \{x \in D_{i-1} : x \notin D_i\} \\
&= \{x \in V(G) \setminus F_{i-1} : x \in D_{i-2} \text{ et } x \notin D_i\} \\
&= \{x \in V(G) \setminus F_{i-1} : x \in \cap_{j=1}^{i-2}(V(G) \setminus F_j) \text{ et } x \notin \cap_{j=1}^{i}(V(G) \setminus F_j)\} \\
&= \{x \in V(G) : x \in \cap_{j=1}^{i-1}(V(G) \setminus F_j) \text{ et } x \notin (V(G) \setminus F_i)\} \\
&= \{x \in F_i : x \in \cap_{j=1}^{i-1}(V(G) \setminus F_j)\} \\
&= F_i \setminus (\cup_{j=1}^{i-1} F_j).
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $i \in \{2, \ldots, l\}$:

$$\Delta_i = \{x \in F_i : \forall j \in \{1, \ldots i-1\},\ x \notin F_j).\} \tag{2.6}$$

On avait vu dans le point 3. de la remarque 2.3.2 que $\mathcal{D}_l = 0$ et pour tout $1 \leq i < l$ $\mathcal{D}_i = \oplus_{j=i+1}^{l} < \Delta_j >$. De cette façon il suffit de calculer Δ_i où $i \in \{2, \ldots, l\}$ pour connaître $\mathcal{D}_i$ et $\mathcal{P}_i$ où $i \in \{1, \ldots, l\}$ en sachant que $\mathcal{P}_1 = 0$.

2.3.6 Exemple. On considérera le graphe G de la figure 2.3 dont les cliques maximaux sont : $F_1 = \{x_8, x_9, x_{10}\}, F_2 = \{x_7, x_8, x_9\}, F_3 = \{x_5, x_6, x_7\}, F_4 = \{x_3, x_4, x_8, x_{10}\}, F_5 = \{x_2, x_5, x_6\}$, $F_6 = \{x_1, x_3, x_{10}\}$. Donc $ht\ I_{\Gamma(G)} = 6$, ainsi $\dim(\Bbbk[V(G)]/I_{\Gamma(G)}) = 4$.



G

FIGURE 2.3 –

i	$\mathcal{D}_i$	P_i	Δ_i
6	0	$\{x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$	$\{x_1\}$
5	$< x_1 >$	$\{x_3, x_4, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$	$\{x_2\}$
4	$< x_1, x_2 >$	$\{x_5, x_6, x_7, x_9\}$	$\{x_3, x_4\}$
3	$< x_1, x_2, x_3, x_4 >$	$\{x_8, x_9, x_{10}\}$	$\{x_5, x_6\}$
2	$< x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 >$	$\{x_{10}\}$	$\{x_7\}$
1	$< x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 >$	0	

Par ailleurs, nous pouvons voir que les propriétés du point 3. de la proposition 2.3.4 sont satisfaites, ainsi d'aprés cette même proposition on a que $F_1, F_2, \ldots, F_6$ est une suite linéairement jointe.

2.3.7 Définition. Étant données $F_1, \ldots, F_l$ toutes les cliques maximales d'un graphe de cordes G telles qu'avec cette ordre elles forment une suite linéairement jointe. Nous arrangeons les éléments de $\cup_{i=2}^{l} P_i \times \Delta_i$ dans un tableau M que nous allons construire de manière inductive. Nous commençons par construire un tableau M_2 en arrangeant les éléments de $P_2 = \{x_1, \ldots, x_{r-1}\}$ et $\Delta_2 = \{y_1 = x_r, y_2, \ldots, y_s\}$ de la façon suivante :

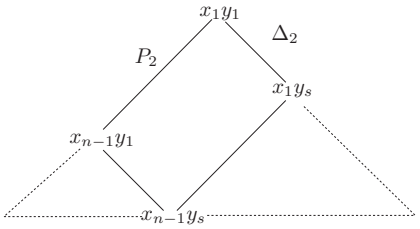


FIGURE 2.4 – M_2

Pour $3 \leq k \leq l$ nous construisons le tableau M_k à partir du tableau M_{k-1} en ajoutant le parallèlogramme $\Delta_k \times P_k$ de deux façon possibles :

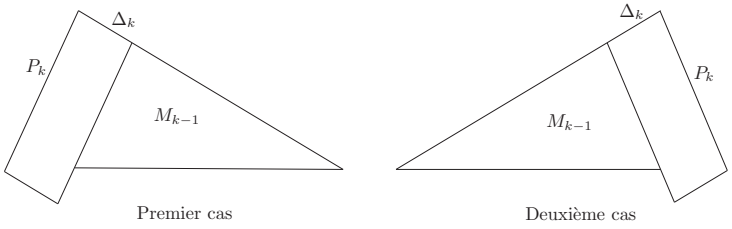


FIGURE 2.5 –

Pour construire M_k nous supposerons que M_{k-1} a j diagonales droites et est de la forme suivante :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & x_1x_{1,0} & & & & & (1)\\
 & & x_2x_{2,0} & & x_1, x_{1,1} & & & & (2)\\
 & x_3x_{3,0} & & x_2x_{2,1} & & x_1x_{1,2} & & & (3)\\
 & & & \cdots & & & & & \\
x_jx_{j,0} & x_{j-1}x_{j-1,1} & & & \cdots & & x_1x_{1,j-1} & & (j)\\
 & & & \cdots & & & & &
\end{array}
$$

Nous écrirons $x_{j,0} = x_r$ et nous considérerons deux cas :

1. Si $x_r \notin P_k$. En posant $\Delta_k = \{x_{r+1}, \ldots, x_{r+t}\}$, M_k est obtenu à partir de M_{k-1} en ajoutant

$\Delta_k \times P_k$ à gauche de M_{k-1} de la façon suivante :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & x_1x_{r+t} & & & & & & & \\
 & & & x_2x_{r+t} & \cdots & & & & & & & \\
 & & x_3x_{r+t} & \cdots & & & & x_1x_{r+1} & & & & \\
 & & & & & & x_2x_{r+1} & & & x_1, x_{1,0} & & \\
 & & & & x_3x_{r+1} & & & x_2x_{2,0} & & & x_1x_{1,1} & \\
x_jx_{r+t} & \cdots & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & \cdots & & & & & \\
 & & x_jx_{r+1} & & x_{j-1}x_{j-1,0} & & & x_{j-2}x_{j-2,1} & \cdots & & & x_1x_{1,j-2} \\
 & & & & & & & \cdots & & & &
\end{array}$$

2. Si $x_r \in P_k$. M_k est obtenu à partir de M_{k-1} en ajoutant $\Delta_k \times P_k$ à droite de M_{k-1} (deuxième cas de la fig. 2.5) où $\Delta_k \times P_k$ est construit comme M_2sauf que x_r apparait dans la diagonale la plus à gauche de $\Delta_k \times P_k$.

On pose Mcomme le tableau M_l.

Grâce à la preuve du théorème 9. et au théorème 12. dans [31] nous avons le théorème suivant :

2.3.8 Théorème. *Soient G un graphe de cordes avec $F_1, \ldots, F_l$ toutes ses cliques maximales, tel qu'elles forment une suite linéairement jointe et $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cilque engendré par G. Alors le tableau M par rapport à la suite linéairement jointe $F_1, \ldots, F_l$ est bien défini, et les éléments du tableau M engendrent $I_{\Gamma(G)}$. De plus,*

1. *En énumérant les lignes du tableau M de haut en bas et en posant L_i les éléments de la ligne i, les premières c lignes, où $c = \text{ht } I_{\Gamma(G)}$, sont les uniques lignes qui satisfont $\#L_i = i$.*
2. *En posant $d := \dim \Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}$ et $s_{d-i}(\Gamma) = \#L_{c+i}$ pour $i \in \{1, \ldots, d\}$, on a, pour $j > 0$:*

$$\beta_j(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}) = j \begin{pmatrix} c+1 \\ j+1 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{d-1} s_i \begin{pmatrix} V(G)-i-1 \\ j-1 \end{pmatrix}.$$

   avec $\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} = 0$ *si* $k > m$ *ou* $k < 0$.

3. *La dimension projective de $\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}$ est le nombre de lignes de M. Cela implique que la dimension projective de $I_{G(\Gamma)}$ est le nombre de lignes de M moins* 1.

2.3.9 Remarque. Si dans le théorème précédent on suppose que $\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}$ est Cohen-Macaulay, c'est à dire que dimproj $\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)} = c$, alors, en posant $d = (0, 2, \ldots, c+1)$, $\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}$ est d-pur

et par les équations de Herzog-Kühl (voir corollaire 1.9.6) on a pour $1 \leq j \leq c$:

$$\begin{aligned}
\beta_j(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}) &= \beta_0(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)})(-1)^{j+1}\textstyle\prod_{k\neq j,k\neq j}^{c}\frac{d_k-d_0}{d_k-d_j}\\
&= (-1)^{j+1}\textstyle\prod_{k\neq j,k\neq j}^{c}\frac{(k+1)-0}{(k+1)-(j+1)}\\
&= \frac{(-1)^{j+1}}{j+1}\frac{(k+1)!}{(-1)^{j-1}(j-1)!(c-j)!}\\
&= j\frac{(k+1)!}{(j+1)!(c+1-(j+1))!}\\
&= j\begin{pmatrix} c+1 \\ \\ j+1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ce qui est est la valeur qu'on obtient pour β_j en utilisant le résultat 2. du théorème précédent.

2.3.10 Exemple. Nous considérerons le graphe G de l'exemple 2.3.6, ainsi le tableau M pour $I_{\Gamma(G)}$ est

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & & x_1x_2 & & & & & & & & & (1)\\
 & & & & & x_4x_2 & & x_1x_6 & & & & & & & & (2)\\
 & & & & x_3x_2 & & x_4x_6 & & x_1x_5 & & & & & & & (3)\\
 & & & x_{10}x_2 & & x_3x_6 & & x_4x_5 & & x_1x_6 & & & & & & (4)\\
 & & x_9x_2 & & x_{10}x_6 & & x_3x_5 & & x_9x_7 & & x_1x_7 & & & & & (5)\\
 & x_8x_2 & & x_9x_6 & & x_{10}x_5 & & x_3x_7 & & x_4x_9 & & x_1x_8 & & & & (6)\\
x_7x_2 & & x_8x_6 & & x_9x_5 & & x_{10}x_7 & & x_3x_9 & & & & & x_1x_9 & & (7)\\
 & & & x_8x_5 & & & & & & & & & & & & (8)
\end{array}$$

donc $c = \text{ht } I = 6$, $d = \text{codim } I_{\Gamma(G)} = 4$, $\rho = \text{dimproj}(I_{\Gamma(G)}) = 7$, $s_3 = 6$, $s_2 = 1$, $s_1 = 0$ et $s_0 = 0$. D'après le théorème 2.3.8 les nombres de Betti de $I_{\Gamma(G)}$ sont :

$$\begin{aligned}
&\beta_0(I_{\Gamma(G)}) = \beta_1(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}) = 1\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 28;\\
&\beta_1(I_{\Gamma(G)}) = \beta_2(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}) = 2\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 113;\\
&\beta_2(I_{\Gamma(G)}) = \beta_3(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}) = 3\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 216;\\
&\beta_3(I_{\Gamma(G)}) = \beta_4(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}) = 4\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 239;\\
&\beta_4(I_{\Gamma(G)}) = \beta_5(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}) = 5\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 160;\\
&\beta_5(I_{\Gamma(G)}) = \beta_6(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}) = 1\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = 63;
\end{aligned}$$

$$\beta_6(I_{\Gamma(G)}) = \beta_7(\mathbb{k}[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}) = 7\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 13;$$
$$\beta_7(I_{\Gamma(G)}) = \beta_8(\mathbb{k}[\mathbf{x}]/I_{\Gamma(G)}) = 8\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 1.$$

2.3.11 Remarque. On remarque de la construction du tableau M pour un graphe G avec cliques maximales $F_1, \ldots, F_l$ linéairement jointes, que si on a le tableau M_{k-1}, pour construire le tableau M_k la quantité d'éléments dans les lignes L_r du tableau ne change pas si on cole le rectangle $\Delta_k \times P_k$ à gauche ou à droite, car cette opération est symétrique comme on le voit dans la figure 2.6.

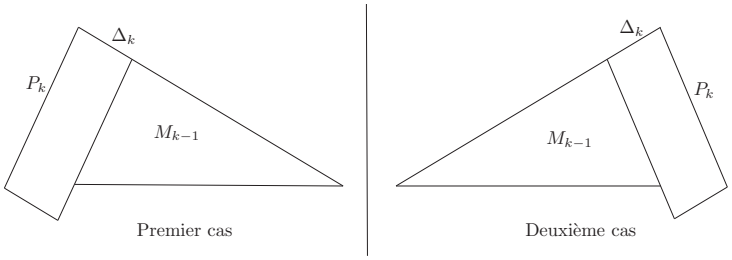


FIGURE 2.6 –

Ainsi, si $\Gamma := \Gamma(G)$ est le complexe de cliques engendré par G, le tableau M_Γ construit en superposant chaque rectangle $\Delta_k \times P_k$ nous donne la même information numérique que M (voir figure 2.7).

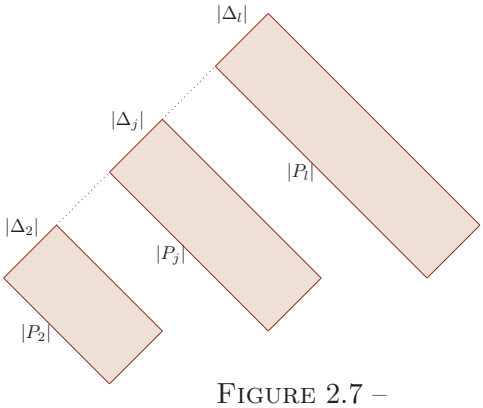


FIGURE 2.7 –

Chapitre 3

Extensions binomiales des idéaux monomiaux quadratiques libres de carrés

Soit Γ un complexe de cliques dont l'ensemble des sommets est $V(\Gamma)$. Nous travaillerons dans l'anneau $\Bbbk[V(\Gamma)]$ en identifiant les sommets de Γ et les variables de $\Bbbk[V(\Gamma)]$. Par ailleurs, nous considérerons l'extension binomiale $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ introduite par M.Morales et M.L. Ha dans [20], avec Γ un complexe de cliques. Notre objectif est d'obtenir une borne inférieure de $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$. Pour cela on associera à $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ un idéal initial $\mathrm{in}(B_{\overline{\Gamma}})$ et on verra qu'en utilisant un ordre convenable, $\mathrm{in}(B_{\overline{\Gamma}})$ est construit à partir de I_Γ et est un idéal monomial libre de carrés. Cela nous permettra d'obtenir la borne inférieure de $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$ à partir de $p_2(I_\Gamma)$ et le théorème 2.2.13.

3.1 Bases de Gröbner

F désignera un module libre de type fini de rang m sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$ avec la base $\{e_i : i = 1, \ldots, m\}$. Un **monôme** dans F est un élément $m = \mathbf{x}^\alpha e_i$ pour un certain i. Un **terme** est un monôme m multiplié par une constante. Un terme $m_1 = cx^\alpha e_i$ avec $c \neq 0$ divise un terme $m_2 = dx^\beta e_j$ si et seulement si $i = j$ et x^α divise x^β, dans ce cas on pose $\frac{m_2}{m_1} = \frac{d}{c}x^{\beta-\alpha} \in \Bbbk[\mathbf{x}]$.

3.1.1 Définition. *Un* **ordre monomial** *sur F est un ordre total $\succ$ sur les monômes de F, tel que si m_1, m_2 sont des monômes dans F et $m \neq 1$ est un monôme dans $\Bbbk[\mathbf{x}]$, alors*

$$m_1 \succ m_2 \text{ implique } mm_1 \succ mm_2 \succ m_2.$$

3.1.2 Exemple. *Nous considérerons $F = \Bbbk[\mathbf{x}]$ muni d'un ordre pour les variables, disons $x_1 > x_2 \cdots > x_n$. Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ nous posons $m = \mathbf{x}^\alpha$ et $n = \mathbf{x}^\beta$.*

1. **Ordre lexicographique.** *$m \succ_{\mathrm{lex}} n$ si et seulement s'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$, tel que $\alpha_i > \beta_i$ et $\alpha_j = \beta_j$ pour tout $j < i$.*

2. **Ordre lexicographique homogène.** $m \succ_{\text{deglex}} n$ *si et seulement si soit* $\deg m > \deg n$ *soit* $\deg m = \deg n$ *et* $m \succ_{\text{lex}} n$.
3. **Ordre lexicographique inverse.** $m \succ_{\text{rlex}} n$ *si et seulement si soit* $\deg m > \deg n$ *soit* $\deg m = \deg n$ *et il existe* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *tel que* $\alpha_i < \beta_i$ *et* $\alpha_j = \beta_j$ *pour tout* $j > i$.

Un ordre $\succ$ pour un ensemble X est appelé **Artinian**, si tout X' sous-ensemble de X a un élement minimal par rapport à $\succ$.

3.1.3 Lemme. ([8, Lemme 15.2]) *Soit F un module libre sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$. Tout ordre monomial sur F est Artinian.*

3.1.4 Définition. Soit $\succ$ un ordre monomial sur F. Pour chaque $f \in F$ on définit le **terme initial** de f comme le terme de f le plus grand par rapport à l'ordre $\succ$ et nous le notons $\text{in}_\succ(f)$. De plus si M est un sous-module de F on définit son module initial $\text{in}_\succ(M)$ comme le sous-module monomial engendré par les éléments $\text{in}(f)$ pour tout $f \in M$. S'il n'y a pas de confusion on écrira in au lieu de $\text{in}_\succ$.

3.1.5 Théorème. (Macaulay[8, Théorème 15.3]) *Soient F un $\Bbbk[\mathbf{x}]$-module libre et M un sous-module de F quelconque. Pour tout ordre monomial $\succ$ sur F, l'ensemble B de tous les monômes qui ne sont pas dans* $\text{in}_\succ(M)$ *forment une base du $\Bbbk$-espace vectoriel F/M.*

3.1.6 Définition. Soient F un module libre sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$, M un sous-module de F. Étant donné un ordre monomial $\succ$, $\text{BG} = \{g_1, \ldots, g_m\}$ est une **base de Gröbner** de M si BG engendre M et $\text{in}(\text{BG}) := \{\text{in}(g_1), \ldots, \text{in}(g_m)\}$ engendre $\text{in}(M)$.

On dira qu'une base de Gröbner BG de M est minimale si pour tous $g_i, g_j \in \text{BG}$ avec $i \neq j$, $\text{in}(g_i)$ ne divise pas $\text{in}(g_j)$, c'est à dire qu'aucun $\text{in}(g_i)$ n'est redondant dans $\text{in}(BG)$. La base de Gröbner BG est appelée réduite, si pour tous $g_i, g_j \in \text{BG}$ avec $i \neq j$, $\text{in}(g_i)$ ne divise aucun terme de g_j. Une base de Gröbner réduite est unique par rapport à l'ordre monomial $\succ$. L'existence d'une base de Gröbner est assurée par **l'algorithme de Buchberger**.

3.1.7 Définition. Soit $f \in F$, $f \neq 0$. Nous pouvons écrire $\text{in}(f)$ comme $cx^\alpha e_i$ pour certains $c \in \Bbbk$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et e_i un élément de la base canonique de F. Si $f, g, h \in F$ et $g \neq 0$ nous disons que f se réduit à h modulo g en un pas, noté par $f \xrightarrow{g} h$, si et seulement si $\text{in}(g)$ divise un terme X qui apparait dans f et $h = f - \frac{X}{\text{in}(g)} g$. Si $G = \{g_1, \ldots, g_m\} \subset F$, f se réduit à h modulo G ($f \xrightarrow{G} h$), si et seulement s'il existe une suite d'indices $i_1, \ldots, i_t \in \{1, \ldots, m\}$ et des vecteurs $h_1, \ldots, h_{t-1} \in F$ tel que :

$$f \xrightarrow{g_{i_1}} h_1 \xrightarrow{g_{i_2}} h_2 \xrightarrow{g_{i_3}} \ldots \xrightarrow{g_{i_{t-1}}} h_{t-1} \xrightarrow{g_{i_t}} h.$$

Soient $f, g \in F$ et $\text{in}(f) = cx^\alpha e_i$ de même que $\text{in}(g) = dx^\beta e_j$. On définit le S-polynôme de f et g comme :

1. Si $i \neq j$, $S(f,g) = 0$.
2. Si $i = j$, $S(f,g) = d\frac{\text{ppcm}(x^\alpha, x^\beta)}{x^\alpha} f - c\frac{x^\alpha, x^\beta)}{x^\beta} g$, où $\text{ppcm}(m_1, m_2)$ note le plus petit commun multiple de m_1 et m_2.

3.1.8 Théorème. (Buchberger [1, Théorème 3.5.19]) *Soient F un module libre sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$ et $G = \{g_1, \ldots, g_m\}$ un ensemble d'éléments non nuls dans F. G est une base de Gröbner pour le sous-module M engendré par G si et seulement si pour tous $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$, $S(g_i, g_j) \xrightarrow{G} 0$.*

Si $m_1, m_2 \in \Bbbk[\mathbf{x}]$ sont deux monômes, on notera par (m_1, m_2) le plus grand commun diviseur de m_1 et m_2.

3.1.9 Proposition. ([1, Lemme 3.3.1]) *Soient $f, g \in \Bbbk[\mathbf{x}]$, si $(\text{lm}(f), \text{lm}(g)) = 1$, alors $S(f,g) \xrightarrow{f,g} 0$.*

3.1.10 Définition. Soient F un module libre sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$, $\succ$ un ordre monomial, $f \in F$ et $G = \{g_1, \ldots, g_n\} \subset F$. On dit que h est un reste de la division de f par G si et seulement si $f \xrightarrow{G} h$ et aucun $\text{lm}(g_i)$ ne divise aucun terme de h. En général le reste de la division de f par G n'est pas unique, mais si G est une base de Gröbner, il est connu que le reste est unique et qu'il est appelé **forme normale** de f.

La proposition suivante sera très utile dans les sections à venir :

3.1.11 Proposition. *Soient $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ deux familles de variables qui ne sont pas nécessairement différentes. On suppose que $\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$ admet un ordre qui satisfait $x_i > x_j$ pour $1 \leq i < j \leq n$ et $x_i > y_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Soient $\Bbbk[\mathbf{x} \cup \mathbf{y}]$ l'anneau de polynômes sur $\Bbbk$ avec $\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$ comme variables, ordonné par l'ordre lexicographique, et M la matrice suivante sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$:*

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix}.$$

Soit $J := I_2(M)$ l'idéal engendré par tous les mineurs 2×2 sur M. Alors

$$B = \{x_i y_j - x_j y_i : 1 \leq i < j \leq n\}$$

est une base de Gröbner[1] réduite de J pour l'ordre lexicographique et B est aussi un système minimal de générateurs de J.

Preuve. Soient $f, g \in B$, $f \neq g$. On peut les écrire de la manière suivante : $f = x_i y_j - x_j y_i$ et $g = x_k y_l - x_l y_k$, où $i < j$ et $k < l$. De cette façon $\text{in}(f) = x_i y_j$ et $\text{in}(g) = x_k y_l$. Par le théorème 3.1.8 il suffit de prouver que $S(f,g) \xrightarrow{B}_+ 0$. Par la proposition 3.1.9 si $(\text{in}(f), \text{in}(g)) = 1$, $S(f,g) \xrightarrow{\{f,g\}}_+ 0$. Supposons que $(\text{in}(f), \text{in}(g)) \neq 1$. On a alors quatre cas :

1. En fait, B est une base de Gröbner universelle si $\mathbf{x} \cap \mathbf{y} = \emptyset$, comme on peut voir dans l'exemple 1.4 ([38])

1. $x_i = x_k$;
2. $x_i = y_l$;

2'. $y_j = x_k$;

3. $y_j = y_l$.

1. Comme $x_i = x_k$, nous avons que $y_i = y_k$ et

$$S(f,g) = -y_l x_j y_i + y_j x_l y_i.$$

Nous pouvons supposer $l < j$, alors $h = x_l y_j - x_j y_l \in B$, où $\text{in}(h) = x_l y_j$, et $S(f,g) = y_i h \in B$.

2. Les cas (2) et (2') sont similaires, donc nous allons montrer seulement le cas(2). Ainsi, $x_i = y_l$,

$$S(f,g) = -x_k x_j y_i + y_j x_l y_k,$$

et $x_k > x_l > y_l = x_i > x_j$, ainsi $h_1 = x_l y_j - x_j y_l \in B$, où $\text{in}(h_1) = x_l y_j$, et

$$S(f,g) - y_k h_1 = y_k x_j y_l - x_k x_j y_i = y_k x_j x_i - x_k x_j y_i.$$

Par ailleurs, $h_2 = x_k y_i - x_i y_k \in B$ où $\text{in}(h_2) = x_k y_i$, ainsi $S(f,g) - y_k h_1 = x_j h_2$, donc

$$S(f,g) = y_k h_1 + x_j h_2 \in B.$$

3. Comme $y_j = y_l$, on a que $x_j = x_l$ et

$$S(f,g) = -x_k x_j y_i + x_i x_j y_k.$$

On peut supposer $i < k$, donc $h = x_i y_k - x_k y_i \in B$, où $\text{in}(h) = x_i y_k$, et $S(f,g) = x_j h \in B$.

Après avoir étudié tous les cas on a que $S(f,g) \xrightarrow{B}_+ 0$, pour $f, g \in B$. Par le théorème 3.1.8 on conclut que B est une base de Gröbner de J. Comme tous les éléments de B sont des binômes quadratiques homogènes, on a : si un terme initial X divise un terme Y d'un binôme de B, alors $X = Y$. Or aucun terme initial $x_i y_j$ $(1 \leq i < j \leq n)$ d'un binôme de B apparait dans un autre binôme de B grâce à la définition de M. Ainsi, B est une base de Gröbner réduite de J, cela implique que B est un système minimal de générateurs de J. ∎

La condition $x_i > y_i$ pour tout $i = 1 \ldots, n$ dans la proposition précédente est importante. Sans cette condition nous pourrions obtenir que les mineurs de M ne soient pas une base de Gröbner, comme on peut voir dans l'exemple suivant :

3.1.12 Exemple. Soit

$$M = \begin{pmatrix} z & y & x & a \\ b & z & y & x \end{pmatrix}$$

une matrice et B l'idéal engendré par les mineurs 2×2 de M. En considérant l'ordre lexicographique pour les monômes de $\Bbbk[z, y, x, a, b]$ avec $z > y > x > a > b$ et en notant

$$L = \{z^2 - yb, zy - xb, zx - ab, zx - y^2, za - yx, ya - x^2\}$$

l'ensemble de mineurs de M ; nous avons que les mineurs de M ne sont pas une base de Gröbner de B, puisque $S(zy - xb, za - yx) = y^2x - xab$ ne peut pas être réduit avec L.

Ensuite on fait la démonstration du lemme 1.2.8.

3.1.13 Proposition. (Lemme 1.2.8) *Soient $\succ$ un ordre monomial sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$ et $I \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ un idéal binomial. Donc*

1. *La base de Gröbner réduite G de I par rapport à $\succ$ est un ensemble des binômes.*
2. *La forme normale par rapport à $\succ$ de tout terme modulo G est aussi un terme.*

Preuve.

1. Soit M un ensemble de générateurs de I formé de binômes. Par l'algorithme de Buchberger on a que pour tout $f, g \in M$, $S(f, g)$ est un binôme. De cette façon on obtient une base de Gröbner qui est composée uniquement de binômes.
2. Soit $a\mathbf{x}^\alpha$ un terme de $\Bbbk[\mathbf{x}]$. Alors à chaque pas de l'algorithme de la division on obtient un terme quand on divise par un ensemble de binômes.

■

3.2 Semicontinuité des nombres de Betti

Une forme linéaire $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sera appelée fonction de poids pour $\Bbbk[\mathbf{x}]$; λ sera dite entière si elle provient d'une aplication linéaire $\mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}$. Comme λ est linéaire, il y a un vecteur $\omega \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $v \in R^n$ $\lambda(v) = \omega \cdot v$, où $\cdot$ est le produit scalaire dans R^n. Alors, on peut identifier λ à ω. De cette façon chaque $\omega \in \mathbb{R}^n$ nous permet définir un ordre partial pour les monômes dans $\Bbbk[\mathbf{x}]$ de la manière suivante : $\mathbf{x}^\alpha = m >_\omega n = \mathbf{x}^\beta$ si et seulement si $w \cdot \alpha > w \cdot \beta$, qu'on appellera **ordre de poids** pour les monômes de $\Bbbk[\mathbf{x}]$. On dira que ω est compatible avec un ordre monomial donné $\succ$ sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$ si $m >_\omega n$ implique $m \succ n$. Pour tout polynôme $f = \sum c_i x^{\alpha_i}$ on définit sa forme initiale sous ω $\mathrm{in}_\omega(f)$ comme la somme de tous les termes $c_i \cdot x^{\alpha_i}$ tel que x^{α_i} est maximal pour l'ordre $>_\omega$. Maintenant, si $I \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ est un idéal, on notera $\mathrm{in}_\omega(I)$ l'idéal engendré par toutes ses formes initiales sur ω, c.a.d :

$$\mathrm{in}_\omega(I) = \{in_\omega(f) : f \in I\}.$$

On remarque que $\mathrm{in}_\omega(I)$ n'est pas nécessairement un idéal monomial. Puisque si on considère

$$f(x, y) = x^3y^2 + xy + xy^3 \in \Bbbk[x, y]$$

et $\omega = (1, 2)$, clairement $in_\omega(f) = x^3y^2 + xy^3$.

Un ordre de poids pour un module libre F sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$ de dimension r est donné par un ordre de poids $\omega \in \mathbb{R}^n_{\leq 0}$ sur les monômes de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ et un vecteur de poids $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r)$ pour la base canonique de F $e_1, \ldots, e_r$. Ainsi pour obtenir un ordre de poids sur F on définit le poids d'un monôme $m := u_{\alpha,j}\mathbf{x}^\alpha e_j \in M$ par $\deg_{\omega,\epsilon}(m) = \omega \cdot \alpha + \epsilon_j$ et pour deux monômes $m_1, m_2 \in F$, $m_1 >_{\omega,\epsilon} m_2$ si est seulement si $\deg_{\omega,\epsilon}(m_1) > \deg_{\omega,\epsilon}(m_2)$. On définit $\mathrm{in}_{\omega,\epsilon}(M)$ de façon similaire, où M est un sous-module pour F.

3.2.1 Proposition. ([38, Proposition 1.11]) *Pour tout ordre monomial $\succ$ et tout sous-module $K \subset F$, il existe un vecteur entier non négatif $\omega \in \mathbb{N}^n$ et un vecteur de poids ϵ pour la base de F, tels que* $\mathrm{in}_{\omega,\epsilon}(K) = \mathrm{in}_\succ(K)$.

On va considérer que $\Bbbk[\mathbf{x}]$ est un anneau A-gradué positif, avec A un groupe abélien et $\omega \in \mathbb{N}^n$ un ordre de poids pour les monômes de $\Bbbk[\mathbf{x}]$. On fixe un module libre F A-gradué sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$ de dimension r et un ordre de poids (ω, ϵ) sur F. Soit $\Bbbk[\mathbf{x}][t]$ multigradué par $A \times \mathbb{Z}$, avec $\deg(x_i) = (a_i, \omega_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $\deg(t) = (0, 1)$. L'**homogénéisation** de F est

$$F[t] = \bigoplus_{j=1}^r \Bbbk[t] \cdot e_j, \text{ avec } \deg(e_j) = (b_j, \epsilon_j).$$

Soit $g = \sum u_{\alpha,j}\mathbf{x}^\alpha e_j \in F$, où $0 \neq u_\alpha \in \Bbbk$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $j \in \{1, \ldots, r\}$. On définit l'**homogénéisation** de g qu'on écrira $g(\omega, \epsilon)$ de la façon suivante :

$$g^{(\omega,\epsilon)} = t^b \sum u_{\alpha,j}(t^{\omega\cdot\alpha}x^\alpha t^{\epsilon_j} e_j),$$

$b = \max\{\omega \cdot \alpha + \epsilon_j : u_{\alpha,j} \neq 0\}$. De cette façon si K est un sous-module de F on définit son homogénéisation $K^{(\omega,\epsilon)} \subset F[t]$ comme $K^{(\omega,\epsilon)} :=< g^{(\omega,\epsilon)} : g \in K >$.

3.2.2 Remarque. *$F[t]$ a une autre graduation outre la graduation par $A \times \mathbb{Z}$, à savoir celle donée par A lorsque on oublie la coordonée $\mathbb{Z}$ dans $A \times \mathbb{Z}$. Dans cette graduation* $\deg_{\mathrm{A}}(t) = 0$ *et* $\deg_{\mathrm{A}}(t-1) = 0$.

3.2.3 Proposition. ([30, Proposition 8.26]) *Soient $K \subset F$ un sous-module, $\succ$ un ordre monomial dans F et (ω, ϵ) l'ordre de poids tel que* $\mathrm{in}_{\omega,\epsilon}(K) = \mathrm{in}_\succ(K)$. *Soit $K^{(\omega,\epsilon)}$ l'homogénéisation de K par rapport à l'ordre de poids (ω, ϵ) dans $\Bbbk[\mathbf{x}]$. Alors $K^{(\omega,\epsilon)}/tK^{(\omega,\epsilon)} \cong \mathrm{in}_{\omega,\epsilon}(I)$ et $K^{(\omega,\epsilon)}/(t-1)K^{(\omega,\epsilon)} \cong K$. Par ailleurs, $F[t]/K^{(\omega,\epsilon)}$ est un module libre sur $\Bbbk[t]$.*

Preuve. Si $g(\mathbf{x}) \in K$, on peut l'écrire comme $\mathrm{in}_{(\omega,\epsilon)}g + g_1$ pour certain $g_1 \in F$, donc

$$g^{(\omega,\epsilon)}(\mathbf{x}, t) = \mathrm{in}_{(\omega,\epsilon)}g + g_1^{(\omega,\epsilon)}, \tag{3.1}$$

où t divise chaque terme de $g_1^{(\omega,\epsilon)}$. De cette façon le morphisme $\varphi : K^{(\omega,\epsilon)} \to K$ tel que pour chaque $f(\mathbf{x}, t) \in K^{(\omega,\epsilon)}$, $\varphi(f(\mathbf{x}, t)) = f(\mathbf{x}, 0)$, est un épimorphisme et son noyau est $tK^{(\omega,\epsilon)}$. Par le premier théorème d'isomorphisme on a $K^{(\omega,\epsilon)}/tK^{(\omega,\epsilon)} \cong \mathrm{in}_{\omega,\epsilon}(K)$.

Maintenant si $\varphi : K^{(\omega,\epsilon)} \to K$ est le morphisme défini par $\varphi(f(\mathbf{x}, t)) = f(\mathbf{x}, 1)$ pour tout $f(\mathbf{x}, t) \in: K^{(\omega,\epsilon)}$, alors φ est un épimorphisme et son noyau est $(t-1)K^{(\omega,\epsilon)}$. Donc $K^{(\omega,\epsilon)}/(t-$

1)$K^{(\omega,\epsilon)} \cong K$.

Il reste voir que $F[t]/K^{(\omega,\epsilon)}$ est un module libre sur $\Bbbk[t]$. Soit B l'ensemble des polynômes qui ne sont pas dans $\mathrm{in}_\succ(K)$. B est une base pour $\Bbbk[\mathbf{x}]/I$, et d'après le théorème 3.1.5 on affirme que B est aussi une $\Bbbk[\mathbf{x}]$-base pour $\Bbbk[\mathbf{x}][t]/K^{(\omega,\epsilon)}$.

– B est linéairement indépendant sur $\Bbbk[t]$.
  Soit φ l'automorphisme pour $F \otimes_{\Bbbk[t]} \Bbbk[t,t^{-1}] = F[t,t^{-1}]$ défini par $\varphi(x_i e_j) = t^{-\omega_i a_i} x_i t^{-\epsilon_j}$. On remarque que cet automorphisme prend le module $K^{(\omega,\epsilon)}F[t,t^{-1}]$ vers le module $KF[t,t^{-1}]$. Donc cet automorphisme induit un isomorphime dans $F[t]/K^{(\omega,\epsilon)} \otimes_{\Bbbk[t]} \Bbbk[t,t^{-1}] \cong F/KF[t,t^{-1}]$. Par ailleurs du théorème 3.1.5 on déduit que B est une $\Bbbk[t,t^{-1}]$ base pour $F[t,t^{-1}]/KF[t,t^{-1}]$ donc $\varphi^{-1}(B)$ est une $\Bbbk[t,t^{-1}]$ base pour $F[t]/K^{(\omega,\epsilon)}F[t,t^{-1}] \cong F[t]/K^{(\omega,\epsilon)} \otimes_{\Bbbk[t]} \Bbbk[t,t^{-1}]$. Or l'automorphisme φ^{-1} envoie chaque monôme me_j vers $t^{-\omega\cdot a-\epsilon_j} me_j$ (où a est le degré de m),c'est à dire que me_j est envoyé vers une unité dans $F[t,t^{-1}]$ multipliée par m. Donc B est une $\Bbbk[t,t^{-1}]$ base pour $F[t,t^{-1}]/K^{\omega,\epsilon}F[t,t^{-1}]$. En particulier B est $\Bbbk[t]$-linéairement indépendante en $F[t]/K^{(\omega,\epsilon)}$.
– B engendre $F[t]/K^{(\omega,\epsilon)}$ comme $\Bbbk[t]$-module.
  Il suffit de montrer que tout monôme dans $\Bbbk[\mathbf{x}][t]$ modulo $K^{(\omega,\epsilon)}$ est engendré par B. Par la proposition 3.1.3 on sait que $\succ$ est un ordre Artinian, donc on peut le faire par récurrence : on supposera qu'on l'a verifié pour tout mônome $n \prec m$, il faut le montrer pour m. Alors, le monôme m est dans B où $m = in_\succ(g)$ pour certain $g \in K$. Dans le cas où $m = in_\succ(g)$, $m - g^{(\omega,\epsilon)}$ est une $\Bbbk[\mathbf{x}][t]$-combination linéaire de monômes qui sont plus petits que m d'après 3.1 et en utilisant l'induction on conclut que $m + K^{(\omega,\epsilon)}$ est une combination linéaire de monômes dans B.

■

3.2.4 Lemme. ([30, Lemme 8.27]) *Soit $\tilde{\mathcal{F}}_\cdot$ une résolution libre pour un $\Bbbk[\mathbf{x}][t]$-module M. Si t est un non diviseur de zéro sur M, alors $\tilde{\mathcal{F}}_\cdot/t\tilde{\mathcal{F}}_\cdot$ est une résolution libre pour M/tM sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$. Par ailleurs, si $t-1$ est un non diviseur de zéro sur M, alors $\tilde{\mathcal{F}}_\cdot/(t-1)\tilde{\mathcal{F}}_\cdot$ est une résolution libre pour $M/(t-1)M$ sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$.*

Preuve. Comme $\tilde{\mathcal{F}}_\cdot/t\tilde{\mathcal{F}}_\cdot \cong \tilde{\mathcal{F}}_\cdot \otimes \Bbbk[\mathbf{x}][y]/(t) \cong \tilde{\mathcal{F}}_\cdot \otimes \Bbbk[\mathbf{x}]$. Donc

$$\mathrm{H}_i(\tilde{\mathcal{F}}_\cdot \otimes \Bbbk[\mathbf{x}]) := \mathrm{Tor}(M,R) \cong \mathrm{Tor}_i(\Bbbk[\mathbf{x}], M).$$

Et on peut calculer $\mathrm{Tor}(\Bbbk[\mathbf{x}], M)$ en tensorisant par M la $\Bbbk[\mathbf{x}][t]$-résolution libre suivante : $0 \to \Bbbk[\mathbf{x}][t] \xrightarrow{\cdot t} \Bbbk[\mathbf{x}][t] \to 0$ et en prenant son homologie. Le complexe résultant de la tensorisation est $0 \to M \xrightarrow{\cdot t} M \to 0$, dont homologie est zéro sauf en degré 0, puisque t n'est pas un diviseur de zéro. Alors $\tilde{\mathcal{F}}_\cdot/t\tilde{\mathcal{F}}_\cdot$ est une résolution libre pour M/tM sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$. La preuve est la même en remplaçant t par $t-1$.

■

3.2.5 Proposition. *Soient F un module libre $A \times \mathbb{Z}$ gradué sur $\Bbbk[\mathbf{x}][t]$, $K \subset F$ un sous-module pour F et $\tilde{\mathcal{F}}_\cdot$ une résolution libre pour $F[t]/K^{(\omega,\epsilon)}$. Alors*

1. *$\tilde{\mathcal{F}}_\cdot/(t-1)\tilde{\mathcal{F}}_\cdot$ est une $\Bbbk[\mathbf{x}]$-résolution libre pour F/K qui est multigradué par A ;*

2. *$\tilde{\mathcal{F}}_\cdot/t\tilde{\mathcal{F}}_\cdot$ est une $\Bbbk[\mathbf{x}]$-résolution libre pour $F/\mathrm{in}_{(\omega,\epsilon)}K$ qui est multigradué par A ; et*
3. *Le nombre de générateurs de degré a quelconque des résolutions précédentes ($\tilde{\mathcal{F}}_\cdot, \tilde{\mathcal{F}}_\cdot/(t-1)\tilde{\mathcal{F}}_\cdot$ et $\tilde{\mathcal{F}}_\cdot/t\tilde{\mathcal{F}}_\cdot$) est le même pour chaque degré homologique sont les mêmes.*

Preuve. D'après la proposition 3.2.3 $F[t]/K$ est un module libre sur $\Bbbk[t]$. Donc, $t-\lambda$ pour $\lambda = 0$ ou 1, est un non-diviseur de zéro. Par le lemme antérieur et proposition 3.2.3 $\tilde{\mathcal{F}}_\cdot/(t-1)\tilde{\mathcal{F}}_\cdot$ et $\tilde{\mathcal{F}}_\cdot/t\tilde{\mathcal{F}}_\cdot$ sont des résolutions libres pour F/K et $F/\mathrm{in}(K)$; et par la remarque 3.2.2, les differentiels pour $\tilde{\mathcal{F}}_\cdot/(t-1)\tilde{\mathcal{F}}_\cdot$ et $\tilde{\mathcal{F}}_\cdot/t\tilde{\mathcal{F}}_\cdot$ sont multigradué par A, puisque t et $t-1$ sont homogènes sur la graduation donnée par A.

Il nous reste à prouver l'affirmation 3. On considère pour chaque degré homologique i et degré a dans A la somme directe $\tilde{\mathcal{F}}_{i,a}$ de tous les sommants de $\tilde{\mathcal{F}}_i$ qui sont engendrés de degré $(a,k) \in A \times \mathbb{Z}$. Pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$, la spécialisation $\tilde{\mathcal{F}}_{i,a}/(y-\lambda)\tilde{\mathcal{F}}_{i,a}$ est un $\Bbbk[\mathbf{x}]$-module gradué libre de degré $a \in A$ et son rang est le même que le rang de $\tilde{\mathcal{F}}_{i,a}$. ∎

3.2.6 Théorème. *Soit $I \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ un idéal A-gradué positif. Alors l'inégalité suivante est satisfaite pour tout ordre monomial $\succ$ sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$:*

$$\beta_{i,a}(I) \leq \beta_{i,a}(\mathrm{in}_\succ(I)), \text{ pour tous } i \in \mathbb{N} \text{ et } a \in A.$$

Preuve. D'après la proposition 3.2.1 il existe $\omega \in \mathbb{N}^n$ tel que $\mathrm{in}_\omega(I) = \mathrm{in}_\succ(I)$. Par ailleurs on considère $\tilde{\mathcal{F}}_\cdot$ une résolution libre minimale pour $\Bbbk[\mathbf{x}][t]/I^{(\omega,\epsilon)}$. D'après la proposition précédente $\tilde{\mathcal{F}}_\cdot/t\tilde{\mathcal{F}}_\cdot$ est une $\Bbbk[\mathbf{x}]$-résolution libre pour $\Bbbk[\mathbf{x}]/\mathrm{in}_\succ I$ et par ailleurs elle est minimale . Alors, d'après la partie 3 de la proposition 3.2.5 on a $\beta_{i,a}(\Bbbk[\mathbf{x}][t]/I^{(\omega,\epsilon)}) = \beta_{i,a}(S/\mathrm{in}_\succ(I))$. Maintenant, d'après la partie 1 de la proposition 3.2.5 $\tilde{\mathcal{F}}_\cdot/(t-1)\tilde{\mathcal{F}}_\cdot$ est une résolution libre mais elle n'est pas nécessairement minimale pour $\Bbbk[\mathbf{x}]/I$. En utilisant la partie 3 de la proposition 3.2.5,

$$\beta_{i,a}(S/I) \leq \beta_{i,a}(\Bbbk[\mathbf{x}][t]/I^{(\omega,\epsilon)}) = \beta_{i,a}(S/\mathrm{in}_\succ(I)).$$

∎

3.2.7 Corollaire. *Soient $I \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ un idéal $\mathbb{Z}$- gradué standard, et $\succ$ un ordre monomial sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$ tel que $\mathrm{in}(I)$ est libre de carrés :*

$$\beta_{i,j}(I) \leq \sum_{|\alpha|=j,\ \alpha\in\{0,1\}^n} \beta_{i,\alpha}(\mathrm{in}_\succ(I)) = \beta_{i,j}(\mathrm{in}I),$$

pour tous $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$.

Preuve. Comme $\mathrm{in}(I)$ est libre de carrés, d'après la proposition 1.8.5

$$\beta_{i,j}(\mathrm{in}_\succ(I)) = \sum_{|\alpha|=j,\ \alpha\in\{0,1\}^n} \beta_{i,\alpha}(\mathrm{in}_\succ(I)),$$

pour tous $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$. Donc, en utilisant le théorème 3.2.6 on a

$$\beta_{i,j}(I) \leq \sum_{|\alpha|=j,\ \alpha\in\{0,1\}^n} \beta_{i,\alpha}(\mathrm{in}_\succ(I)) = \beta_{i,j}(\mathrm{in}_\succ I),$$

pour tous $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$ ∎

3.2.8 Proposition. *Soit I un idéal homogène de $\mathbb{k}[\mathbf{x}]$ avec la graduation standard sur $\mathbb{Z}$ et $\succ$ un ordre multiplicatif quelconque sur le monômes de $\mathbb{k}[\mathbf{x}]$. Alors*

1. *$\mathbb{k}[\mathbf{x}]/I$ et $\mathbb{k}[\mathbf{x}]/\mathrm{in}_\succ(I)$ ont la même function d'Hilbert ;*
2. *$\dim\ \mathbb{k}[\mathbf{x}]/I = \dim\ \mathbb{k}[\mathbf{x}]/\mathrm{in}_\succ(I)$;*
3. *$\mathrm{projdim}\ S/I \leq \mathrm{projdim}\ \mathbb{k}[\mathbf{x}]/\mathrm{in}_\succ(I)$;*
4. *$\mathrm{reg}\ \mathbb{k}[\mathbf{x}]/I \leq \mathrm{reg}\ \mathbb{k}[\mathbf{x}]/\mathrm{in}_\succ(I)$ et si $\mathrm{in}_\succ(I)$ est un idéal monomial libre de carrés $\mathbb{k}[\mathbf{x}]/\mathrm{in}_\succ(I) \leq \dim \mathbb{k}[\mathbf{x}]/I + 1$;*
5. *$\mathrm{depth}\ \mathbb{k}[\mathbf{x}]/I \geq \mathrm{depth}\ \mathbb{k}[\mathbf{x}]/\mathrm{in}_\succ(I)$;*
6. *si $\mathrm{in}(I)$ est Cohen-Macaulay, alors I est Cohen-Macaulay ;*
7. *si $\mathrm{in}(I)$ est Gorenstein, alors I est Gorenstein ;*
8. *Pour tout $d \in \mathbb{N}$, $p_d(I) \geq p_d(\mathrm{in}_\succ I)$.*

Preuve. Les points 1 jusqu'au 7 sont bien connus. On démontrera le 8.

D'après le corollaire 3.2.7 pour tous $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$, $\beta_{i,j}(I) \leq \beta_{i,j}(\mathrm{in}_\succ(I))$. De cette façon,

$$\text{si } \beta_{i,j}(\mathrm{in}_\succ(I)) = 0, \text{ alors } \beta_{i,j}(I) = 0.$$

Donc, pour tout $d \in \mathbb{N}$, $p_d(I) \geq p_d(\mathrm{in}_\succ I)$. ∎

3.2.9 Proposition. *Soient $I \subset \mathbb{k}[\mathbf{x}]$ un idéal engendré par des éléments homogènes de degré d, $\succ$ un ordre monomial sur $\mathbb{k}[\mathbf{x}]$, alors*

$$\beta_{i,d}(I) = \beta_{i,d}(\mathrm{in}(I)) \text{ pour tous } i \leq p_d(\mathrm{in}(I)) + 1 \text{ et } j \in \mathbb{N}, \text{ et}$$
$$\beta_{p_d(\mathrm{in}(I)),p_d(\mathrm{in}(I))+d}(I) = \beta_{p_d(\mathrm{in}(I)),p_d(\mathrm{in}(I))+d}(\mathrm{in}(I)).$$

Preuve. Posons $p = p_d(\mathrm{in}(I))$. Comme $\mathrm{in}(I)$ a la propriété $\mathbf{N}_{d,p}$, pour $i < p$, $\beta_{i,j}(\mathrm{in}(I)) = 0$ pour tout $j \neq i + d$ et la table de nombres de Betti de $\mathrm{in}(I)$ a la forme suivante avec $m := \mathrm{reg}(\mathrm{in}I)$:

	0	1	...	$p-1$	p	...	ρ
d	$\beta_{0,d}$	$\beta_{1,d+1}(\mathrm{in}(I))$	...	$\beta_{p-1,p_d+d-1}(\mathrm{in}(I))$	$\beta_{p,p+d}(\mathrm{in}(I))$	...	$\beta_{\rho,\rho+d}(\mathrm{in}(I))$
$d+1$	0	0	...	0	$\beta_{p,p+d+1}(\mathrm{in}(I))$	...	$\beta_{\rho,\rho+d+1}(\mathrm{in}(I))$
$\vdots$							
m	0	0	...	0	$\beta_{p,p+m}(\mathrm{in}(I))$	...	$\beta_{\rho,\rho+m}(\mathrm{in}(I))$

Par le théorème 3.2.6 nous avons (en prenant $A = \mathbb{Z}$) que $\beta_{i,j}(I) \leq \beta_{i,j}(\mathrm{in}(I))$. alors $\beta_{i,j}(I) = 0$ pour tout $i < p$ et pour tout $j \neq i + d$. D'autre part, d'après le théorème 3.2.8 et la proposition 1.9.3

$$\frac{\mathcal{K}(I;t)}{(1-t)^n} = H(\mathbb{k}[\mathbf{x}]/I;t) = H(\mathbb{k}[\mathbf{x}]/\mathrm{in}(I);t) = \frac{\mathcal{K}(\mathrm{in}(I);t)}{(1-t)^n},$$

où $\mathcal{K}(M;t) = \sum_{i\geq 1,\ j\geq 0}(-1)^i\beta_{i-1,j}(M)t^j$, et soit $M = I$, soit $M = \text{in}(I)$. Donc $\mathcal{K}(I;t) = \mathcal{K}(\text{in}(I);t)$ et par conséquent $[\mathcal{K}(I;t)]_{p+d} = [\mathcal{K}(\text{in}(I);t)]_{p+d}$. Ainsi

$$\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\beta_{i,i+d}(I)t^{i+d} + \beta_{p,d+p}(I)t^{d+p} = \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\beta_{i,i+d}(\text{in}(I))t^{i+d} + \beta_{p,d+p}(\text{in}(I))t^{d+p}.$$

Donc, pour $0 \leq i \leq p$, $\beta_{i+d}(I) = \beta_{i+d}(\text{in}(I))$. De cette façon on peut conclure :

$$\beta_{i,j}(I) = \beta_{i,j}(\text{in}(I)) \text{ pour tous } i < p \text{ et } j \in \mathbb{N}, \text{ et}$$
$$\beta_{p,p+d}(I) = \beta_{p,p+d}(\text{in}(I)).$$

■

3.2.10 Corollaire. *Soit I un idéal de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ engendré par des éléments homogènes de degré d et $\succ$ un ordre monomial sur $\Bbbk[\mathbf{x}]$. Si $\text{in}(I)$ est d-linéaire, alors I est d-linéaire aussi et $\beta_{i,j}(I) = \beta_{i,j}(\text{in}(I))$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Le résultat provient du fait que $p_d(\text{in}(I)) = \infty$ et des propositions 3.2.9 et 3.2.8. Il peut aussi être déduit du point 4 de la proposition 3.2.8. ■

3.3 Extensions binomiales des idéaux simpliciaux

Soient Γ un complexe de cliques avec l'ensemble de sommets $V(\Gamma) = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Rappellons la construction due à M. Morales et M.L. Ha qui apparait dans [20] : soit $F \subset \Gamma$ une facette de Γ telle que $\{x_{i_0}^{(F)}, x_{i_1}^{(F)}\}, \{x_{i_0}^{(F)}, x_{i_2}^{(F)}\}, \ldots, \{x_{i_0}^{(F)}, x_{i_{m_F}}^{(F)}\}$ sont des **arêtes propres** de F, c'est à dire que chaque arête est contenue seulement dans une unique facette de Γ qui est F. À chacune de ces arêtes, par exemple $\{x_{i_0}^{(F)}, x_{i_j}^{(F)}\}$, on associe un ensemble $Y_j^{(F)}$, qui peut être $\emptyset$. On définit $Y^{(F)} = \cup_{i=1}^{m_F} Y_j^{(F)}$ en supposant que $Y_j^{(F)} \cap Y_{j'}^{(F)} = \emptyset$ pour tous $j, j' \in \{1, \ldots, m_F\}$, $j \neq j'$; et $\overline{\Gamma}$ l'extension de Γ en ajoutant les nouvelles facettes $F \cup Y^{(F)}$ qu'on notera $\overline{F}$ avec $Y^{(F)} \cap Y^{(F')} = \emptyset$ où F et F' sont des facettes distinctes de Γ. Si $Y^{(F)}$ est non vide avec $Y_j^{(F)} = \{y_{i_j 1}, \ldots, y_{i_j n_{i_j}}\}$, nous définissons $\mathcal{I}_F$ comme l'ideal de mineurs 2×2 de la matrice :

$$M_F = \left(\begin{array}{cccc|c|c|c|ccc} x_{i_0}^{(F)} & y_{i_1 1}^{(F)} & \cdots & y_{i_1 n_{i_1}}^{(F)} & y_{i_2 1}^{(F)} & \cdots & y_{i_2 n_{i_2}}^{(F)} & \cdots & y_{i_{m_F} 1}^{(F)} & \cdots & y_{i_{m_F} n_{i_{m_F}}}^{(F)} \\ y_{i_1 1}^{(F)} & y_{i_1 2}^{(F)} & \cdots & x_{i_1}^{(F)} & y_{i_2 2}^{(F)} & \cdots & x_{i_2}^{(F)} & \cdots & y_{i_{k_F} 2}^{(F)} & \cdots & x_{i_{k_F}}^{(F)} \end{array}\right).$$

Dans le cas contraire $\mathcal{I}_F = 0$. À partir de là, nous définissons l'extension binomiale $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}} \subset \Bbbk[V(\overline{\Gamma})]$ du complexe simplicial Γ :

$$\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}} = I_{\overline{\Gamma}} + J_{\overline{\Gamma}}, \text{ avec } J_{\overline{\Gamma}} = \sum_{F \text{ facette de } \Gamma} \mathcal{I}_F.$$

3.3.1 Remarque. *Pour une facette F de Γ avec des arêtes propres $\{x_{i_0}^{(F)}, x_{i_1}^{(F)}\}, \{x_0^{(F)}, x_{i_2}^{(F)}\}, \ldots, \{x_0^{(F)}, x_{i_{m_F}}^{(F)}\}$ on peut associer $Y_1^{(F)} = \emptyset$ à $\{x_{i_0}^{(F)}, x_{i_1}^{(F)}\}$, mais $Y^{(F)} \neq \emptyset$, donc $\mathcal{I}_F$ est l'ideal de mineurs 2×2 de la matrice :*

$$M_F = \left(\begin{array}{c|ccc|c|ccc} x_{i_0}^{(F)} & y_{i_2 1}^{(F)} & \ldots & y_{i_2 n_{i_2}}^{(F)} & \ldots & y_{i_{m_F} 1}^{(F)} & \ldots & y_{i_{m_F} n_{i_{m_F}}}^{(F)} \\ x_{i_1}^{(F)} & y_{i_2 2}^{(F)} & \ldots & x_{i_2}^{(F)} & \ldots & y_{i_{k_F} 2}^{(F)} & \ldots & x_{i_{k_F}}^{(F)} \end{array} \right).$$

Les idéaux I_F sont des idéaux de scroll et il est bien connu que les idéaux de scroll sont des ideaux toriques (voir proposition 4.3.8). Or la somme d'idéaux de scroll n'est pas toujours torique. En fait, dans la proposition suivante on voit que dans certain cas $J_{\overline{\Gamma}}$ n'est pas torique. Pour cela, il faudra avant introduire un sous-ensemble de sommets de Γ.

3.3.2 Définition. *Pour chaque facette F du complexe de cliques Γ tel que $\overline{F} \neq F$, on notera $V_\Gamma(M_F)$ l'ensemble de sommets de Γ qu'apparaissent dans M_F , sinon $V_\Gamma(M_F) = \emptyset$.*

3.3.3 Proposition. *Soit Γ un complexe de cliques et $B_{\overline{\Gamma}}$ une extension binomiale du complexe simplicial. S'il existe deux facettes F, F' de Γ differentes tel que $|V_\Gamma(M_F) \cap V_\Gamma(M_{F'})| \geq 2$, alors $J_{\overline{\Gamma}}$ n'est pas un idéal de réseau.*

Preuve. Comme $|V_\Gamma(M_F) \cap V_\Gamma(M_{F'})| \geq 2$ il y a deux colonnes de M_F et $M_{F'}$ tel que les entrées de la deuxième ligne coïncide, c'est à dire,

$$\left(\begin{array}{c} v \\ x \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} w \\ x' \end{array} \right) \in \mathrm{col}(M_F) \text{ et } \left(\begin{array}{c} y \\ x \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} z \\ x' \end{array} \right) \in \mathrm{col}(M_{F'}).$$

Donc $f = vx' - wx, g = yx - zx' \in J_{\overline{\Gamma}}$. Ainsi

$$zf + vg = z(vx' - wx) + v(yx - zx') = vyx - wzx = x(vy - wz) \in J_{\overline{\Gamma}}.$$

De cette façon $vy - wz \in (J_{\overline{\Gamma}}, (x_1 \cdots x_n)^\infty)$. Mais $vy - wz$ est un binome homogène de degré 2, aussi comme tous les mineurs des matrices M_F pour $F \neq \overline{F}$ facette de Γ. Alors si $vy - wz$ était dans $J_{\overline{\Gamma}}$, il existirait $a_1, \ldots, a_s \in \Bbbk$ tel que $vy - wz = \sum_{i=1}^s a_i p_i$ pour certains mineurs p_i des matrices M_F. Or aucun terme des mineurs de tous les matrices M_F divisent pas vy ni wz, donc il n'existet pas $a_1, \ldots, a_s \in \Bbbk$ tel que $vy - wz = \sum_{i=1}^s a_i p_i$, par conséquent $vy - wz \notin J_{\overline{\Gamma}}$. Ainsi $J_{\overline{\Gamma}} \neq (J_{\overline{\Gamma}}, (x_1 \cdots x_n)^\infty)$. De cette façon on conclut que $J_{\overline{\Gamma}}$ n'est pas un idéal de réseau. ∎

Il nous reste à définir d'autres idéaux pour chaque facette F, qui on permettra de faire la décomposition première de $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$. Ils sont les suivants : $\mathcal{J}_F = (\mathcal{I}_F, (V(\overline{\Gamma}) \setminus \overline{F})) \subset \Bbbk[V(\overline{\Gamma})]$, pour chaque facette F de Γ. De là on peut énoncer la proposition suivante :

3.3.4 Proposition. ([19, Proposition 1.4]) *La décomposition primaire de $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ sur $\Bbbk[V(\overline{\Gamma})]$ est :*

$$\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}} = \bigcap_{F \text{ facette de } \overline{\Gamma}} \mathcal{J}_F.$$

3.4 Bases de Gröbner d'une extension binomiale

3.4.1 Notation. Soit M une matrice, on notera $[M]_{i,j}$ l'élément de M qui est dans la ligne i et colonne j.

3.4.2 Proposition. *Soient* $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *et* $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ *deux familles des variables qui ne sont pas nécessairement différentes, mais on peut ordonner* $\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$ *de telle façon que* $x_i > x_j$ *avec* $1 \leq i < j \leq n$ *et* $x_i > y_i$ *avec* $1 \leq i \leq n$. *Soient* $\Bbbk[\mathbf{x} \cup \mathbf{y}]$ *l'anneau de polynômes sur* $\Bbbk$ *avec* $\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$ *comme variables, dont les monômes sont ordonnés par l'ordre lexicograpique, et* M *la matrice suivante sur* $\Bbbk[\mathbf{x} \cup \mathbf{y}]$

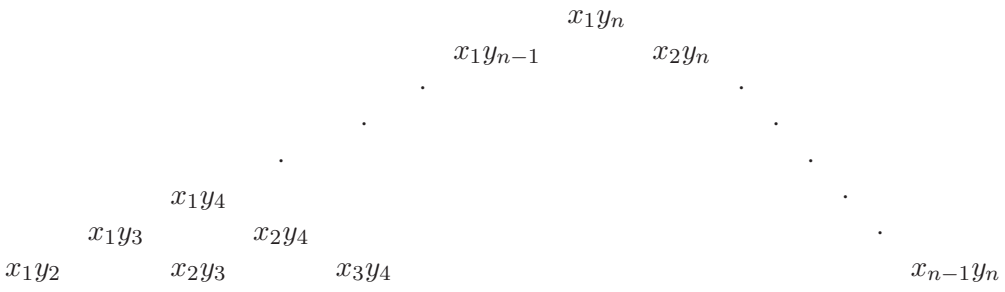
$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix}.$$

Soit $B := I_2(M)$ *l'idéal engendré pour tous les mineurs* 2×2 *sur* M. *Alors,*

1. $\mathrm{in}_{>\mathrm{lex}}(B)$ *est un idéal monomial quadratique libre de carrés et* 2*-linéaire, et de même* $\mathrm{in}(B)$ *est engendré par les diagonales allant de haut en bas et de gauche à droite, c'est à dire que* $\mathrm{in}_{>\mathrm{lex}}(B) = (x_i y_j : 1 \leq i < j \leq n)$.
2. $\Gamma(\mathrm{in}_{>\mathrm{lex}}(B))$ *est un complexe de cliques et en appelant* $\mathcal{K}_{\mathbf{x}\cup\mathbf{y}}$ *le graphe complet sur les sommets* $\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$, *nous avons que* $\Gamma(\mathrm{in}_{>\mathrm{lex}}(\mathcal{I})))_1$ *est obtenu à partir de* $\mathcal{K}_{\mathbf{x}\cup\mathbf{y}}$ *en enlevant les arêtes correspondantes aux diagonales allant de haut en bas et de gauche à droite.*
3. *Les facettes de* $\Gamma(\mathrm{in}_{>\mathrm{lex}}(B))$ *sont* $F_i = (\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) \setminus \{x_1, \ldots, x_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n\}$, *pour* $i \in \{1, \ldots, n\}$.
4. B *est* 2*-linéaire, de même* $\beta_{i,j}(B) = \beta_{i,j}(\mathrm{in}(B))$ *pour tous* $i, j \in \mathbb{N}$.

Preuve.

1. D'après la proposition 3.1.11 $\mathrm{in}_{>\mathrm{lex}}(B) = (x_i y_j : 1 \leq i < j \leq n)$ est un idéal monomial quadratique et $\mathrm{in}_{>\mathrm{lex}}(B)$ est libre de carrés lorsque les variables $\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$ sont ordonnées comme dans l'énoncé de la proposition. D'ailleurs, nous pouvons ordonner les générateurs de $\mathrm{in}(B)$ de la façon suivante :



Donc, on définit $\Delta_i := \{y_i\}$ et $\mathcal{P}_i :=< x_1, \ldots, x_{i-1} >$, pour $i = 2, \ldots, n$; $P_1 = \emptyset$;

$$\mathcal{D}_i := \oplus_{j=i+1}^{n} < \Delta_j > =< y_{i+1}, \ldots, y_n > \text{ pour } i = 1, \ldots, n \text{ et}$$
$$\mathcal{Q}_i := \mathcal{D}_i \oplus \mathcal{P}_i = \{x_1, \ldots, x_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n\}, \text{ pour } i = 1, \ldots, n.$$

On peut voir que pour tous $k \in \{2, \ldots, l\}$, et $j < k$, $< \Delta_j > \times \mathcal{P}_j \subset (\mathcal{P}_k)$, ainsi par le théorème 2.3.4 $\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_n$ et une suite linéairement jointe et $(\mathcal{Q}) = \cap_{i=1}^{n}(\mathcal{Q}_i)$ est 2-linéaire. En effet, d'après le théorème 2.3.8 les générateurs de $(\mathcal{Q})$ sont les éléments du triangle ci-dessus, donc $\text{in}_{>\text{lex}}(B) = (\mathcal{Q})$ et $\text{in}_{>\text{lex}}(B)$ est 2-linéaire.

2. D'après 1. $\text{in}_{>\text{lex}}(B)$ est libre de carrés. Donc, selon la proposition 2.2.4 $\Gamma(\text{in}_{>\text{lex}}(B))$ est un complexe de cliques. De plus, d'après 1) $\text{in}_{>\text{lex}}(B)$ est engendré par les diagonales allant de haut en bas et de gauche à droite. Ainsi $\Gamma(\text{in}_{>\text{lex}}(B))$ est obtenu à partir de $\mathcal{K}_{\mathbf{x}\cup\mathbf{y}}$ en enlevant les arrêts correspondant aux diagonales en haute à gauche et en bas à droite.
3. Comme $\mathcal{Q}_i = \{x_j : j \notin F_i\}$, d'après la proposition 1.8.3, nous avons que les facettes de $\Gamma(\text{in}_{>\text{lex}}(B))$ sont F_i, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.
4. Comme $\text{in}_{>\text{lex}}(B)$ est 2-linéaire d'après 1., en utilisant le corollaire 3.2.10 on a que B est 2-linéaire et $\beta_{i,j}(B) = \beta_{i,j}\text{in}(B)$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}$.

■

Soient Γ un complexe de cliques et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ. Nous posons : $\text{NF}_{\overline{\Gamma}}$ l'ensemble de générateurs de $I_{\overline{\Gamma}}$, c.a.d.

$$\text{NF}_{\overline{\Gamma}} = \{\mathbf{x}^{\text{supp}(\sigma)} | \sigma \notin \overline{\Gamma} \text{ et } |\sigma| = 2\}$$

et J_{F_k} l'ensemble des mineurs 2×2 de la matrice M_F. De cette façon $B_{\overline{\Gamma}} = \text{NF}_{\overline{\Gamma}} \bigcup (\cup_{k=1}^{l} \text{J}_{F_k})$ est un système de générateurs pour $B_{\overline{\Gamma}}$. En outre :

3.4.3 Théorème. *Soient Γ un complexe de cliques, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ et $\succ$ un ordre de sommets de $V(\overline{\Gamma})$ tel que pour chaque facette F de Γ avec $F \neq \overline{F}$, nous ayons $[M_F]_{1,i} \succ [M_F]_{1,j}$ pour $1 \leq i < j \leq |Y^{(F)}| + 1$ et $[M_F]_{1,i} \succ [M_F]_{2,i}$ avec $i \in \{1, \ldots, |Y^{(F)}| + 1\}$. Alors, $B_{\overline{\Gamma}}$ est une base de Gröbner de $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ pour l'ordre lexicographique induit par $\succ$ sur les monômes de $\Bbbk[V(\overline{\Gamma})]$.*

Preuve. Remarquons que si, pour une facette F de Γ, $\mathcal{I}_F$ n'est pas trivial, alors $\mathcal{I}_F$ est engendré par les mineurs de M_F qui s'écrivent $[M_F]_{1,i}[M_F]_{2,k} - [M_F]_{1,k}[M_F]_{2,i}$ avec $i < k$, où $[M_F]_{1,i}[M_F]_{2,k}$ est le terme dominant pour l'ordre $\succ$. Par ailleurs, grâce au théorème 3.1.8 et la proposition 3.1.9 il faut montrer que $S(f, g) \xrightarrow{B_{\overline{\Gamma}}} 0$ pour tout $f, g \in B_{\overline{\Gamma}}$ lorsque $(\text{lm}(f), \text{lm}(g)) \neq 1$. On a quatre cas :

1. $f, g \in \text{NF}_{\overline{\Gamma}}$, donc ils sont des monômes et clairement $S(f, g) = 0$.
2. $f, g \in \text{J}_F$ pour certaine facette F de Γ. Comme f, g sont des mineurs de la matrice M_F et que par hypothèse, on a $[M_F]_{1,i} \succ [M_F]_{1,j}$, où $1 \leq i < j \leq |Y^{(F)}|+1$ et $[M]_{1,i} \succ [M]_{2,i}$ avec $i \in \{1, \ldots, |Y^{(F)}| + 1\}$; alors, d'après la proposition 3.1.11, J_F est une base de Gröbner pour $\mathcal{I}_F$, et par conséquent $S(f, g) \xrightarrow{J_F} 0$.

3. $f \in \mathrm{NF}_{\bar{\Gamma}}$ et $g \in \mathrm{J}_F$ pour certaine facette F de Γ. Donc $g = [M_F]_{1,i}[M_F]_{2,k} - [M_F]_{1,k}[M_F]_{2,i}$ et $f = ab$, oú l'on peut supposer $a = [M_F]_{1,i}$ ou $a = [M_F]_{2,k}$. Ainsi, $S(f,g) = b[M_F]_{1,k}[M_F]_{2,i}$. Par ailleurs $b \notin \overline{F}$ et soit $[M_F]_{1,k} \in Y^{(F)} \subset \overline{F}$, soit $[M_F]_{2,i} \in Y^{(F)} \subset \overline{F}$. Par conséquent, soit $b[M_F]_{1,k} \in \mathrm{NF}_{\overline{\Gamma}}$, soit $b[M_F]_{1,k} \in \mathrm{NF}_{\overline{\Gamma}}$; et dans les deux cas nous avons $S(f,g) \to 0$.

4. $f \in \mathrm{J}_F$ et $g \in \mathrm{J}_{F'}$ pour deux facettes différentes F et F' de Γ. Comme $(\mathrm{in}(f), \mathrm{in}(g)) \neq 1$, les matrices M_F et $M_{F'}$ doivent avoir un sommet x en commun avec $x \in F \cap F'$ tel que $x|\mathrm{in}(f)$ et $x|\mathrm{in}(g)$. Pour ce sommet on a quatre possibilités :

   (a) Soit $x = x_{i_0}^{(F)} = x_{i_0}^{(F')}$.
   De cette façon $f = x[M_F]_{2,k} - [M_F]_{1,k}[M_F]_{2,1}$ pour un certain $k \in \{2, \ldots, |Y^{(F)}| + 1\}$ et $g = x[M_{F'}]_{2,r} - [M_{F'}]_{1,r}[M_{F'}]_{2,1}$ pour un certain $r \in \{2, \ldots, |Y^{(F')}| + 1\}$. Ainsi, on a
   $$S(f,g) = -[M_{F'}]_{2,r}[M_F]_{1,k}[M_F]_{2,1} + [M_F]_{2,k}[M_{F'}]_{1,r}[M_{F'}]_{2,1}.$$
   Maintenant, pour $[M_F]_{2,k}$ on considère deux cas :

      i. Soit $[M_F]_{2,k} \in V(\Gamma)$. Alors $[M_F]_{2,k} \notin \overline{F'}$. Car sinon, $\{x, [M_F]_{2,k}\} \in \overline{F'}$ et $\{x, [M_F]_{2,k}\}$ ne serait pas une arête propre de F, comme la définition de $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ le demande.

      ii. Soit $[M_F]_{2,k} \notin V(\Gamma)$. Alors, par définition de $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$, $[M_F]_{2,k} \notin \overline{F'}$.

   Dans le deux cas $[M_F]_{2,k} \notin \overline{F'}$ et de la même façon on obtient que $[M_{F'}]_{2,r} \notin \overline{F}$.
   De plus, comme $k, r \geq 2$ on a que $[M_F]_{1,k}, [M_{F'}]_{1,r} \notin V(\Gamma)$. Par conséquent
   $$[M_{F'}]_{2,r}[M_F]_{1,k}, [M_F]_{2,k}[M_{F'}]_{1,r} \in \mathrm{NF}_{\bar{\Delta}},$$
   de cette façon :
   $$S(f,g) \xrightarrow{[M_{F'}]_{2,r}[M_F]_{1,k}, [M_F]_{2,k}[M_{F'}]_{1,r}} 0.$$

   (b) Soit $x = x_{i_0}^{(F)} = x_{i_s}^{(F')}$, où $s \in \{1, \ldots, m_{F'}\}$. Alors il existe $t \in \{1, \ldots, |Y^{(F')}| + 1\}$ tel que $x_{i_s}^{(F')} = [M_{F'}]_{2,t}$.
   De plus $f = x[M_F]_{2,k} - [M_F]_{1,k}[M_F]_{2,1}$ pour un certain $k \in \{2, \ldots, |Y^{(F)}| + 1\}$ et
   $$g = [M_{F'}]_{1,r}x - [M_{F'}]_{1,t}[M_{F'}]_{2,r} \text{ pour un certain } r \in \{1, \ldots, |Y^{(F')}| + 1\}.$$
   Comme $\mathrm{in}(g) = [M_{F'}]_{1,r}x$, alors $t \geq 2$. Par ailleurs, on a
   $$S(f,g) = -[M_{F'}]_{1,r}[M_F]_{1,k}[M_F]_{2,1}^{(F)} + [M_F]_{2,k}[M_{F'}]_{1,t}[M_{F'}]_{2,r}.$$
   Maintenant, pour $[M_F]_{2,k}$ on considère deux cas :

      i. Soit $[M_F]_{2,k} \in V(\Gamma)$. Alors $[M_F]_{2,k} \notin \overline{F'}$. Car sinon, $\{x, [M_F]_{2,k}\} \in \overline{F'}$ et $\{x, [M_F]_{2,k}\}$ ne serait pas une arête propre de F, comme la définition de $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ le demande.

      ii. Soit $[M_F]_{2,k} \notin V(\Gamma)$. Alors, par définition de $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$, $[M_F]_{2,k} \notin \overline{F'}$.

Dans le deux cas $[M_F]_{2,k} \notin \overline{F'}$ et de la même façon on obtient que $[M_{F'}]_{1,r} \notin \overline{F}$. De plus, comme $k, t \geq 2$ on a que $[M_F]_{1,k}, [M_{F'}]_{1,t} \notin V(\Gamma)$. Par conséquent

$$[M_{F'}]_{1,r}[M_F]_{1,k}, [M_F]_{2,k}[M_{F'}]_{1,t} \in \mathrm{NF}_{\bar{\Delta}},$$

de cette façon :

$$S(f,g) \xrightarrow{[M_{F'}]_{1,r}[M_F]_{1,k}, [M_F]_{2,k} y_{r,n_r}^{(F')}} 0.$$

(c) $x = x_{i_p}^{(F)} = x_{i_s}^{(F')}$, où $p \in \{1, \ldots, m_F\}$ et $s \in \{j_1, \ldots, m_{F'}\}$. Alors il existe $t \in \{1, \ldots, |Y^{(F)}|+1\}$ et $t' \in \{1, \ldots, |Y^{(F')}|+1\}$ tels que $x_{i_p}^{(F')} = [M_F]_{2,t}$ $x_{i_s}^{(F')} = [M_{F'}]_{2,t'}$. Alors $f = [M_F]_{1,k}x - [M_F]_{1,t}[M_F]_{2,k}$ pour un certain $k \in \{1, \ldots, |Y^{(F)}| + 1\}$ et

$$g = [M_{F'}]_{1,r}x - [M_{F'}]_{1,t'}[M_{F'}]_{2,r} \text{ pour un certain } r \in \{1, \ldots, |Y^{(F')}| + 1\}.$$

Ainsi, comme dans le cas précédent on peut prouver que $t \geq 2$ et $t' \geq 2$. Par conséquent

$$S(f,g) = -[M_{F'}]_{1,r}[M_F]_{1,t}[M_F]_{2,k} + [M_F]_{1,k}[M_{F'}]_{1,t'}[M_{F'}]_{2,r}.$$

De même façon que dans le cas précédent on peut prouver que $[M_F]_{1,k} \notin \overline{F'}$ et $[M_{F'}]_{1,r} \notin \overline{F}$.
De plus, comme $t, t' \geq 2$ on a que $[M_F]_{1,t}, [M_{F'}]_{1,t'} \notin V(\Gamma)$. Donc

$$[M_{F'}]_{1,r}[M_F]_{1,t}, [M_F]_{1,k}x[M_{F'}]_{1,t'} \in \mathrm{NF}_{\bar{\Delta}},$$

de cette façon :

$$S(f,g) \xrightarrow{[M_{F'}]_{1,r}[M_F]_{1,t}, [M_F]_{1,k}x[M_{F'}]_{1,t'}} 0.$$

Donc, pour tous $f, g \in \mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$, $S(f,g) \xrightarrow{\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}} 0$, ainsi on conclut que $B_{\overline{\Gamma}}^{(\Pi)}$ est une base de Gröbner pour $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$. ∎

3.4.4 Définition. Soient M une matrice de scroll, notée

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix}.$$

Soit $\Pi \in S_n$, on pose

$$\Pi(M) = \begin{pmatrix} x_{\Pi(1)} & x_{\Pi(2)} & \ldots & x_{\Pi(n)} \\ y_{\Pi(1)} & y_{\Pi(2)} & \ldots & y_{\Pi(n)} \end{pmatrix}.$$

On dit que la permutation $\Pi \in S_n$ est une **permutation admissible** de la matrice de scroll M si $\Pi(1) = 1$ et pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$ et $j \leq i$, $y_{\Pi(i)} \neq x_{\Pi(j)}$. Cela signifie en particulier que l'ordre dans le bloc est respecté par Π.

3.4.5 Definition. Soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ son complexe de cliques, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ où $F_1, \ldots, F_k$ sont toutes les facettes de Γ tels que $F_h \neq \overline{F}_h$, pour $h \in \{1, \ldots, k\}$. On notera par $\mathcal{P}_{\overline{\Gamma}}$ l'ensemble :

$$\{(\Pi_1, \ldots, \Pi_k) \in S_{|Y_{F_1}|+1} \oplus \cdots \oplus S_{|Y_{F_k}|+1} : \forall h \in \{1, \ldots, k\}\ \Pi_h \in S_{|Y_{F_h}|+1} \text{ permutation admissible pour } M_{F_h}\}.$$

3.4.6 Définition. Soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ son complexe de cliques, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ où $F_1, \ldots, F_k$ sont toutes les facettes de Γ tels que $F_h \neq \overline{F}_h$, pour $h \in \{1, \ldots, k\}$. Soit $\Pi \in \mathcal{P}_{\overline{\Gamma}}$. On définit le complexe simplicial $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$ comme le complexe de cliques engendré par le graphe $(\overline{\Gamma}^{(\Pi)})_1$ obtenu de $(\overline{\Gamma})_1$ en enlevant toutes les arêtes correspondant aux diagonales allant de haut en bas et de gauche à droite de $\Pi(M_{F_j})$, où $j \in \{1, \ldots, k\}$. Si Π est l'identité, on écrira $\overline{\Gamma}'$ au lieu de $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$.

3.4.7 Exemple. Soit Γ le complexe engendré par G de la figure 3.1. À la facette $F = \{a, b, c\}$ on associe la matrice suivante :

$$M = \left(\begin{array}{ccc|cc} a & w & x & y & z \\ w & x & b & z & c \end{array}\right).$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\overline{\Gamma}} = \quad & (ad, ce, be, bd, xd, xe, yd, ye, zd, ze, ax - w^2, ab - wx, az - wy, ac - wz, wb - x^2, \\ & wz - yx, wc - xz, xz - by, xx - bz, yc - z^2). \end{aligned}$$

On permute les colonnes de la façon suivante :

$$\Pi(M) = \left(\begin{array}{ccccc} a & w & y & x & z \\ w & x & z & b & c \end{array}\right).$$

Nous pouvons voir que la permutation Π est une permutation admissible pour M, donc $\overline{G} := \overline{\Gamma}_1$ et $\overline{G}' := \overline{\Gamma}'_1$, $\overline{G}^{(\Pi)} = \overline{\Gamma}_1^{(\Pi)}$ sont décrits sur la figure 3.1.

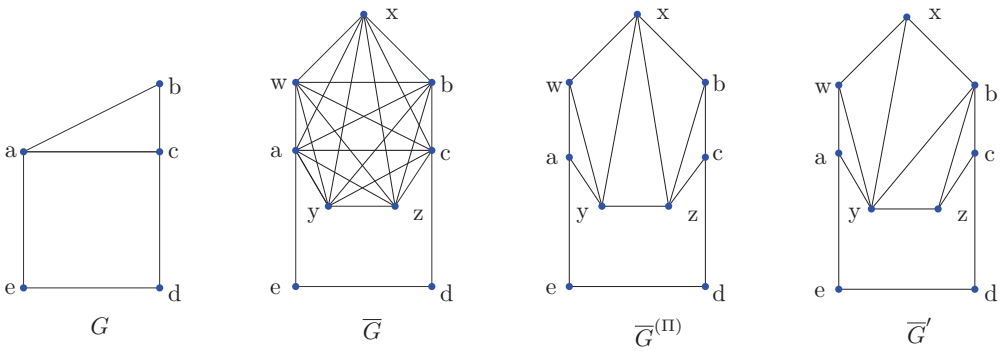


FIGURE 3.1 –

□

Dans 3.4.8 et 3.4.13 on définira sous certaines conditions un ordre sur le sommets de $\overline{\Gamma}$ de sorte qu'il satisfaira les conditions du théorème 3.4.3 ce qui impliquera que $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$ sera le complexe simplicial associé à l'idéal initial de $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ par rapport à l'ordre léxicographique relatif a cet ordre de sommets (voir théorème 3.4.13).

3.4.8 Définition. Soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ son complexe de cliques, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ et λ un ordre pour les facettes de Γ, disons $\lambda = F_1, \ldots, F_l$, de sorte qu'il existe $k \leq l$ tel que pour $1 \leq h \leq k$, $F_h \neq \overline{F}_h$ et pour $k < h \leq l$, $F_h = \overline{F}_h$. Étant donné $\Pi \in \mathcal{P}_{\overline{\Gamma}}$, soit $L'_1(\Pi_h(M_{F_h}))$ l'ensemble de tous les sommets qui apparaisent dans la première ligne de la matrice de M_{F_h} et n'apparaissent pas dans le premiére ligne d'une matrice d'une facette précedente. $L'_1(\Pi_h(M_{F_h}))$ est ordonné par l'ordre décroissant des colonnes et si $z \in L'_1(\Pi_h(M_{F_h}))$ et $z' \in L'_1(\Pi_h(M_{F_{h'}}))$ alors $z > z'$ si et seulement si $h < h'$. Les sommets restants, nous les ordonnons après les autres avec un ordre quelconque. Nous notons cet ordre des sommets $>_{\lambda_\Pi}$. Dans le cas où Π_k est l'identité dans $S_{|Y_{F_h}|+1}$ pour chaque $h \in \{1, \ldots, k\}$, on notera $>_{\lambda_\Pi}$ par $>_\lambda$. S'il n'y a pas de confusion par rapport à l'ordre λ nous écrirons $>_\Pi$ et $>$ en lieu de $>_{\lambda_\Pi}$ et $>_\lambda$.

3.4.9 Exemple. Soit Γ le complexe engendré par $F_1 = \{a, b, c\}$, $F_2 = \{b, c, d\}$ et $F_3 = \{a, e, f\}$ qui est clairement un complexe de cliques avec graphe générateur G comme dans la figure 3.2.

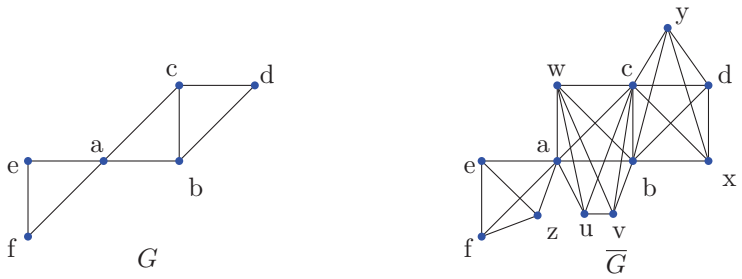


FIGURE 3.2 –

De la même figure nous pouvons voir que ses arêtes propes sont : $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, e\}$, $\{a, f\}$, $\{e, f\}$. Soient M_{F_1}, M_{F_2} et M_{F_3} les matrices suivantes :

$$M_{F_1} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & u & v & w \\ u & v & b & c \end{array}\right), M_{F_2} = \left(\begin{array}{cc|c} d & x & y \\ x & b & c \end{array}\right) \text{ et } M_{F_3} = \begin{pmatrix} a & z \\ z & f \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\overline{\Gamma}} = \; & (ad, be, b, f, ce, cf, de, df, zc, zb, zd, zw, zu, zv, zx, zy, we, wf, wd, wx, wy, ue, uf, ud, uy, ux, \\ & ve, vf, vd, vx, vy, ya, ye, yf, xa, xe, xf, av - uz, ab - uv, ac - uw, ub - v^2, uc - wv, vc - bw, \\ & db - x^2, dc - xy, xc - by, af - z^2). \end{aligned}$$

En outre, $\overline{\Gamma}$ est engendré par le facettes $\overline{F}_1 = \{a, b, c, w, x, y\}$, $\overline{F}_2 = \{b, c, d, z, y\}$ et $\overline{F}_3 = \{a, e, f, z\}$ où le graphe générateur est $\overline{G}$, comme on peut voir dans la figure 3.2. Ainsi un ordre $>$ pour le sommets de $\overline{\Gamma}$ est : $a > u > v > w > d > x > y > z > b > c > f > e$. Par ailleurs, si on fait les permutations de colonnes $\Pi = \{\Pi_1, \Pi_2, i\}$ suivantes pour M_{F_1}, M_{F_2}, M_{F_3} :

$$\Pi_1(M_{F_1}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & w & u & v \\ u & c & v & b \end{array}\right), \Pi_2(M_{F_2}) = \left(\begin{array}{cc|c} d & y & x \\ x & c & b \end{array}\right) \text{ et } i(M_{F_3}) = \left(\begin{array}{cc} a & z \\ z & f \end{array}\right);$$

un ordre $>_\Pi$ pour le sommets de $\overline{\Gamma}$ est : $a > w > u > v > d > y > x > z > b > c > f > e$.

□

3.4.10 Proposition. *Soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ son complexe de cliques, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ et λ un ordre pour les facettes de Γ, disons $\lambda := F_1, \ldots, F_l$, de sorte qu'il existe $k \leq l$ tel que pour $1 \leq i \leq k$, $F_i \neq \overline{F}_i$ et pour $k < i \leq l$, $F_i = \overline{F}_i$ (voir définition 3.4.8). Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout $\Pi \in \mathcal{P}$ l'ordre "$>_{\lambda_\Pi}$" de sommets de $\overline{\Gamma}$ satisfait la propriété que pour chaque $1 \leq j \leq k$, $[\Pi_j(M_{F_j})]_{1,s'} >_{\lambda_\Pi} [\Pi_j(M_{F_j})]_{1,s}$ pour $1 \leq s' < s \leq |Y^{(F_j)}|+1$ et $[\Pi_i(M_{F_j})]_{1,s} >_{\lambda_\Pi} [\Pi_j(M_{F_j})]_{2,s}$ pour $1 \leq s \leq |Y^{(F_j)}| + 1$.*
2. *L'ordre $>_\lambda$ de sommets de $\overline{\Gamma}$ satisfait que pour tous $1 \leq j \leq k$ et $1 \leq s' < s \leq |Y^{(F_j)}| + 1$, $[M_{F_j}]_{1,s'} >_\lambda [M_{F_j}]_{1,s}$; et pour tout $1 \leq j \leq |Y^{(F_i)}| + 1$ $[M_{F_j}]_{1,s} >_\lambda [(M_{F_j})]_{2,s}$.*
3. *pour tout $1 \leq i \leq k$ et pour tout $j > i$ fixe on a deux cas*
   (a) *Si $[M_{F_i}]_{1,1} = [M_{F_j}]_{2,1}$, alors il existe $i' < i$ tel que $[M_{F_{i'}}]_{1,1} = [M_{F_j}]_{1,1}$ et pour tout $j' < i'$, $[M_{F_i}]_{1,1} \neq [M_{F_{j'}}]_{1,1}$.*
   (b) *Si $[M_{F_i}]_{1,1} \neq [M_{F_j}]_{2,1}$, alors $[M_{F_i}]_{1,1}$ n'apparait pas dans la deuxiéme ligne de M_{F_j}.*

Preuve.
$1 \Rightarrow 2)$ En prenant Π comme la permutation identité l'affirmation 1 devient l'affirmation 2.
$2 \Rightarrow 3)$ Soit $1 \leq i \leq k$ et $j > i$. On a deux cas :
(a) Soit $[M_{F_i}]_{1,1} = [M_{F_j}]_{2,1}$. Par le point 2, $[M_{F_j}]_{1,1} > [M_{F_j}]_{2,1} = [M_{F_i}]_{1,1}$, alors par définition de $>_\lambda$ il existe $i' < i$ tel que $[M_{F_{i'}}]_{1,1} = [M_{F_j}]_{1,1}$ et pour tout $j' < i'$, $[M_{F_{j'}}]_{1,1} \neq [M_{F_i}]_{1,1}$.
(b) Soit $[M_{F_i}]_{1,1} \neq [M_{F_j}]_{2,1}$. On prouvera par l'absurde que $[M_{F_i}]_{1,1}$ n'apparait pas dans la deuxiéme ligne de M_{F_j}. On suppose alors qu'il existe $1 < s \leq |Y^{(F_j)}| + 1$ tel que $[M_{F_i}]_{1,1} = [M_{F_j}]_{2,s}$ et par définition de "$>_\lambda$"

$$[M_{F_j}]_{2,s} = [M_{F_h}]_{1,1} >_\lambda [M_{F_j}]_{1,s'},$$

pour tout $1 < s' \leq |Y^{(F_j)}| + 1$. En particulier $[M_{F_j}]_{2,s} >_\lambda [M_{F_j}]_{1,s}$ qui est une contradiction par rapport à $[M_{F_j}]_{1,s} >_\lambda [M_{F_j}]_{2,s}$. Alors $[M_{F_i}]_{1,1}$ n'apparait pas dans la deuxiéme ligne de M_{F_j}.
$3 \Rightarrow 1)$ Par définition de "$>_{\lambda_\Pi}$" nous avons que pour chaque $1 \leq h \leq k$, $[\Pi_h(M_{F_h})]_{1,j} >_{\lambda_\Pi} [\Pi_h(M_{F_h})]_{1,s}$ pour $1 \leq j < s \leq |Y^{(F_h)}| + 1$. Il nous reste prouver que $[\Pi_h(M_{F_h})]_{1,j} >_{\lambda_\Pi} [\Pi_h(M_{F_h})]_{2,j}$ pour $1 \leq j \leq |Y^{(F_h)}| + 1$. On a les trois cas suivants :

1. $j = 1$ donc $[\Pi_h(M_{F_h})]_{1,1} = x_{i_0}^{(F_h)}$. On a deux cas :
   - Le premier bloc de la matrice M_{F_h} a plus d'une colonne. Alors $[\Pi_h(M_{F_h})]_{2,1} = y_{i_1 1}^{(F)}$, par conséquent il existe $1 < j \leq |Y^{(F_h)}|+1$ tel que $[\Pi_h(M_{F_h})]_{1,j} = y_{i_1 1}^{(F)}$ et par définition de "$>_{\lambda_\Pi}$" nous avons que
   $$x_{i_0}^{(F_h)} = [\Pi_h(M_{F_h})]_{1,1} >_{\lambda_\Pi} [\Pi_h(M_{F_h})]_{1,j} = y_{i_1 1}^{(F)} = [\Pi_h(M_{F_h})]_{2,1}.$$
   - Le premier bloc de la matrice M_{F_h} a une colonne. Alors $[\Pi_h(M_{F_h})]_{2,1} = x_{i_1}^{(F)}$ et on a deux cas :
     – Pour tout $1 \leq j < h$, $x_{i_1}^{(F_h)}$ n'apparait pas dans la premiére ligne de toute matrice M_j, donc de la définition de λ_Π
     $$x_{i_0}^{(F_h)} = [\Pi_h(M_{F_h})]_{1,1} >_{\lambda_\Pi} [\Pi_h(M_{F_h})]_{1,j} = x_{i_1}^{(F_h)} = [\Pi_h(M_{F_h})]_{2,1}.$$
     – Il existe $1 \leq j < h$, $x_{i_1}^{(F_h)} = \Pi([M_{F_j}])_{1,1} = [M_{F_j}]_{1,1}$. Alors, par le cas (a) du point 3, il existe $i' < i$ tel que $[M_{F_{i'}}]_{1,1} = [M_{F_j}]_{1,1}$ et pour tout $j' < i'$, $[M_{F_{i'}}]_{1,1} \neq [M_{F_j}]_{2,1}$. D'après la définition de λ_Π,
     $$x_{i_0}^{(F_h)} = [\Pi_h(M_{F_h})]_{1,1} >_{\lambda_\Pi} [\Pi_h(M_{F_h})]_{1,j} = x_{i_1}^{(F_h)} = [\Pi_h(M_{F_h})]_{2,1}.$$
2. $j \neq 1$ et $[\Pi_h(M_{F_h})]_{1,j} \neq y_{i_r n_r}^{(M)}$ pour tout $1 \leq r \leq m_{F_h}$. Par conséquent il existe $1 \leq r \leq m_{F_h}$ et $1 \leq s < n_r$ de sorte que $[\Pi_h(M_{F_h})]_{1,j} = y_{i_r s}^{(M)}$ et de cette façon $[\Pi_h(M_{F_h})]_{2,j} = y_{i_r s+1}^{(M)}$ et comme $\Pi \in \mathcal{P}$, Π_h est une permutation de premier ordre et on a qu' il doit exister $j' > j$ tel que $[\Pi_h(M_{F_h})]_{1,j'} = y_{i_r s+1}^{(M)}$ et alors par définition de "$>_{\lambda_\Pi}$"
   $$[\Pi_h(M_{F_h})]_{1,j} >_{\lambda_\Pi} [\Pi_h(M_{F_h})]_{1,j'} = [\Pi_h(M_{F_h})]_{2,j}.$$
3. $j \neq 1$ et $[\Pi_i(M_{F_i})]_{1,j} = y_{i_r n_r}^{(F_i)}$ pour certain $1 \leq r \leq m_{F_h}$. Alors $[\Pi_h(M_{F_h})]_{2,j} = x_{i_r}^{(F_h)}$. Ainsi on a deux cas
   - Pour tout $1 \leq j < h$, $x_{i_r}^{(F_h)}$ n'apparait pas dans la premiére ligne de toute matrice M_j, donc de la définition de λ_Π, $[\Pi_i(M_{F_i})]_{1,j} >_{\lambda_\Pi} = x_{i_r}^{(F_h}[\Pi_h(M_{F_h})]_{2,j}$.
   - Il existe $1 \leq j < h$ tel que $[\Pi_h(M_{F_h})]_{2,j} = x_{i_r}^{(F_h)} = \Pi([M_{F_j}])_{1,1} = [M_{F_j}]_{1,1}$. Comme $j > 1$, il existe $s \in \{2, \ldots, |Y^{(F_h)}|+1|\}$ tel que $[\Pi_h(M_{F_h})]_{2,j} = [M_{F_h}]_{2,s}$, ce qui contredit le cas (b) du point 3. Donc ce cas est impossible.

■

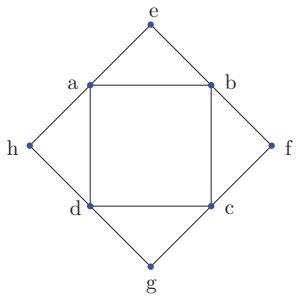
3.4.11 Définition. Soient Γ un complexe de cliques, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ, un ordre λ des facettes $\lambda := F_1, \ldots, F_l$ de Γ de sorte qu'il existe $k \leq l$ tel que pour $1 \leq i \leq k$, $F_i \neq \overline{F}_i$ et pour $k < i \leq l$, $F_i = \overline{F}_i$. Nous disons que λ est un ordre admissible si nous avons que la propriété 3) de la proposition 3.4.10 est satisfaite pour l'ordre λ.

En général, pour tout complexe de cliques Γ et une extension binomiale $\overline{\Gamma}$ de Γ, il n'est pas toujours possible trouver un ordre pour les facettes F de Γ tel qu'il soit admissible, comme nous le verrons dans l'exemple suivant :

3.4.12 Exemple. Soit Γ le complexe de cliques engendré par le graphe G de la figure 3.3. Ainsi, $F_1 = \{a, e, b\}$, $F_2 = \{b, f, c\}$, $F_3 = \{c, g, d\}$, $F_4 = \{d, h, a\}$ sont les facettes de Γ. Nous associons a chaque facette les matrices suivantes :

$$M_{F_1} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & x & y & z \\ x & y & b & e \end{array}\right), M_{F_2} = \left(\begin{array}{cc|c} b & w & v \\ w & c & f \end{array}\right) M_{F_3} = \left(\begin{array}{cc|c} c & u & t \\ u & g & d \end{array}\right) \text{ et}$$
$$M_{F_4} = \left(\begin{array}{ccc|c} d & r & s & q \\ r & s & a & h \end{array}\right).$$

En regardant tous les ordres possibles pour les facettes de Γ nous pouvons voir que si G_1, G_2, G_3, G_4 est un ordre pour les facettes de Γ, alors il existe $i \in \{2, 3, 4\}$ tel que $[M(G_1)]_{1,1}$ apparaît dans la deuxième ligne de $M(G_i)$.



G

FIGURE 3.3 –

□

Or de la proposition 3.4.10 et le théorème 3.4.3 on déduit le théorème suivant :

3.4.13 Théorème. *Soient Γ un complexe de cliques, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ et λ un ordre admissible pour les facettes de Γ. Soit $\Pi \in \mathcal{P}$. En ordonnant les sommets de $\overline{\Gamma}$ par $>_{\lambda_\Pi}$ (voir définition 3.4.8), on a :*

- *$B_{\overline{\Gamma}}$ est une base de Gröbner pour $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ avec l'ordre lexicographique sur les monômes de $\Bbbk[V]$.*
- *L'idéal $\mathrm{in}_{>_{\Pi\mathrm{lex}}}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$ est un idéal monomial quadratique libre de carrés. En fait les générateurs de $\mathrm{in}_{>_{\Pi\mathrm{lex}}}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$ sont les non-arêtes de $\overline{G}$ et les diagonales allant de haut en bas et de gauche à droite de $\Pi(M_{F_k})$, où $k \in \{1, \ldots, l\}$.*

■

3.4.14 Remarque. Soient Γ un complexe de cliques, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ et λ un ordre admissible pour les facettes de Γ et $\Pi \in \mathcal{P}_{\overline{\Gamma}}$. On peut remarquer que $\mathrm{in}_{\succ_{\mathrm{lex}}}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$ est un ideal monomial libre de carrés d'après le théorème 3.4.13 et le complexe associé à $\mathrm{in}_{\succ_{\mathrm{lex}}}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$ est le complexe de cliques $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$ définit dans 3.4.6. Rappelons que $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$ est le complexe de cliques obtenu à partir de $(\overline{\Gamma})_1$ en enlevant toutes les arêtes correspondant aux diagonales allant de haut en bas et de gauche à droite de $\Pi(M_{F_k})$, où $k \in \{1, \ldots, l\}$. En particulier pour toute facette F de Γ, la restiction de $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$ à F coïncide avec $< F >$ si $F = \overline{F}$ et coïncide avec $\Gamma(\mathrm{in}_{\Pi}(\mathcal{I}_F))$ si $F \neq \overline{F}$.

3.4.15 Proposition. *Soient Γ un complexe de cliques, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ et $\Pi \in \mathcal{P}$. Alors :*

1. *les facettes de $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$ sont*

   $$\overline{F}_{h_j} = \overline{F}_h \setminus \{[\Pi_h(M_{F_h})]_{1,1}, \ldots, [\Pi_h(M_{F_h})]_{1,j-1}, [\Pi_h(M_{F_h})]_{2,j+1}, \ldots, [\Pi_h(M_{F_h})]_{2,|Y^{(F_h)}|+1}\},$$

   pour $1 \leq h \leq k$ et $1 \leq j \leq |Y^{(F_h)}| + 1$, et

   $$\overline{F}_h = F_h,$$

   pour $k < h \leq l$.

2. *Soit $F_1, \ldots, F_l$ un ordre admissible pour les facettes de Γ. Si $\mathrm{in}_{\succ_{\Pi\mathrm{lex}}}\mathcal{I}_{F_j} = \cap_i^{|Y^{(F)}+1|}(Q_i^{(F_j)})$ est la décomposition primaire de $\mathrm{in}_{\succ_{\Pi\mathrm{lex}}}\mathcal{I}_{F_j}$, alors*

   $$\mathrm{in}_{>_{\Pi\mathrm{lex}}}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = \bigcap_{j=1}^{k}(\cap_{i=1}^{|Y^{(F_j)}|}(Q_i^{(F_j)}, V(\overline{\Gamma}) \setminus \overline{F}_j)))\bigcap(\cap_{j=k+1}^{l}(V(\overline{\Gamma}) \setminus F_j))$$

   est la décomposition primaire de $\mathrm{in}_{>_{\Pi\mathrm{lex}}}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$.

Preuve.

1. Par la définition de $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$ (voir 3.4.6), $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$ est un complexe de cliques. Donc, les facettes de $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$ sont les cliques maximales de $\overline{\Gamma}_1^{(\Pi)}$. En posant $\mathcal{K}_{F_j}$ le graphe complet sur les sommets de F_j, on a par définition de $\overline{\Gamma}$ que $\overline{\Gamma}_1 = \cup_{h=1}^{l}\mathcal{K}_{F_h}$. Par contre, en partant de la remarque 3.4.14 $\overline{\Gamma}_1^{(\Pi)}$ est obtenu à partir de $\overline{\Gamma}_1$ en effaçant tous les arêtes correspondant aux diagonales allant de haut en bas et de gauche à droite de chaque matrice $\Pi(M_{F_h})$ pour $h \in \{1, \ldots, k\}$. Comme cette opération affecte des arêtes propres de $\overline{\Gamma}_1$, on a :

   $$\overline{\Gamma}^{(\Pi)} = (\cup_{j=1}^{k}\mathcal{K}'_{\overline{F}_j})\bigcup(\cup_{j=k+1}^{l}\mathcal{K}_{\overline{F}_j}),$$

   où $\mathcal{K}'_{\overline{F}_j}$ est le sous-graphe de $\mathcal{K}_{\overline{F}_j}$ obtenu en effaçant tous les arêtes correspondant aux diagonales allant de haut en bas et de gauche à droite de $\Pi(M_{F_j})$ pour chaque $j \in \{1, \ldots, k\}$. Comme les sommets $V_\Gamma(M_{F_h})$ n'apparaissent pas dans M_{F_h}, nous avons que

$\mathcal{K}'_{\overline{F}_h} = \mathcal{K}'_{\overline{F}_h \setminus (F_h \setminus V_\Gamma(M_{F_h}))} \cup \mathcal{K}_{F_h \setminus V_\Gamma(M_{F_h})}$, où l'union est disjointe et $\mathcal{K}'_{\overline{F}_j \setminus V_\Gamma(M_{F_j})}$ est le sous-graphe de $\mathcal{K}_{\overline{F}_h \setminus (F_h \setminus V_\Gamma(M_{F_h}))}$ obtenu en effaçant toutes les arêtes correspondant aux diagonales en haut à gauche et en bas à droite. Mais la proposition 3.4.2 nous dit que $\mathcal{K}'_{\overline{F}_h \setminus (F_h \setminus V_\Gamma(M_{F_h}))} = (\Gamma(\mathrm{in}_{>_{\Pi\mathrm{lex}}}(\mathcal{I}_{M_{F_h}})))_1$ et que ses cliques maximales sont

$$\overline{F}_{h_j} = \overline{F}_h \setminus \{[\Pi_h(M_{F_h})]_{1,1}, \ldots, [\Pi_h(M_{F_h})]_{1,j-1}, [\Pi_h(M_{F_h})]_{2,j+1}, \ldots, [\Pi_h(M_{F_h})]_{2,|Y^{(F_h)}|+1}\}.$$

Alors, on peut concluire que les facettes de $\Gamma^{(\Pi)}$ sont

$$\overline{F}_{h_j} = \overline{F}_h \setminus \{[\Pi_h(M_{F_h})]_{1,1}, \ldots, [\Pi_h(M_{F_h})]_{1,j-1}, [\Pi_h(M_{F_h})]_{2,j+1}, \ldots, [\Pi_h(M_{F_h})]_{2,|Y^{(F_h)}|+1}\},$$

pour $1 \leq h \leq k$ et $1 \leq j \leq |Y^{(F_h)}| + 1$ et $\overline{F}_h = F_h$.

2. Celle-là suit de la proposition 1.8.3 et 1. ∎

3.5 Ordres admissibles

Dans cette section nous essaierons de voir les conditions nécéssaires pour avoir un ordre admissible sur les facettes d'un complexe de cliques Γ d'une extension binomiale $\overline{\Gamma}$.

Soient G un graphe, $\Gamma := \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ. Soient $F_1, \ldots, F_k, F_{k+1}, \ldots, F_l$ les facettes de Γ telles que pour tout $1 \leq i \leq k$ $F_i \neq \overline{F}_i$ et pour tout $i \geq k$, $F_i = \overline{F}_i$. Par définition de l'ordre admissible (voir définition 3.4.11) nous remarquons qu'il suffit d'ordonner les premières k-facettes de Γ par un ordre admissible pour obtenir un ordre admissible sur l'ensemble de facettes de Γ. Ainsi, dans toute cette section on ne fera attention qu'à la famille $\mathcal{F} := \{F \text{ facette de } \Gamma : F \neq \overline{F}\}$. Clairement, si $|\mathcal{F}| = 1$ les facettes de Γ sont ordonnées avec un ordre admissible.

3.5.1 Remarque. Si $\mathcal{F}$ a un ordre admissible, alors toute sous-famille $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ admet un ordre admissible, car l'ordre admissible de $\mathcal{F}$ restreint sur la sous-famille $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ est un ordre admissible de $\mathcal{F}'$.

Soit $F \in \mathcal{F}$, alors la matrice $M_F \neq 0$ et pour toute cette section on notera $x_0^i = [M_{F_i}]_{1,1}$ et nous posons $L_2(M_{F_i})$ l'ensemble de tous les éléments de la deuxième ligne de M_{F_i}.

3.5.2 Lemme. *Soient G un graphe de cordes, $\Gamma := \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ. Soit une sous-famille $\mathcal{F}'$ ordonnée, à savoir $\mathcal{F}' = \{F_1, \ldots, F_s\} \subset F$ où $s > 1$, telle que $x_0^i \in L_2(M_{F_{i+1}})$ pour tout $i \in \{1, \ldots, s-1\}$ et $x_0^s \in L_2(M_{F_1})$, alors $\mathcal{F}'$ n'admets pas d'ordre admissible.*

Preuve. Soit $\Pi \in S_s$ une permutation quelconque de $\{1, \ldots, s\}$, donc $F_{\Pi(1)}, \ldots, F_{\Pi(s)}$ n'est pas un ordre admissible pour les facettes de $\mathcal{F}'$, puisque :

– Si $\Pi(1) \neq s$, alors $x_0^{(\Pi(1))} \in L_2(M_{F_{\Pi(1)+1}})$, donc il existe $1 < j \leq s$ tel que $\Pi(j) = \Pi(1) + 1$; et par définition de l'ordre admissible $F_{\Pi(1)}, \ldots, F_{\Pi(s)}$ n'est pas un ordre admissible.

– Si $\Pi(1) = s$, alors il existe $1 < j \leq s$ tel que $\Pi(j) = 1$ et $x_0^{(\Pi(1))} \in L_2(M_{F_1}) = L_2(M_{F_{\Pi(j)}})$; et par définition de l'ordre admissible $F_{\Pi(1)}, \ldots, F_{\Pi(s)}$ n'est pas un ordre admissible.

De là on conclut que $\mathcal{F}'$ n'admet pas d'ordre admissible. ∎

3.5.3 Soit $\mathcal{F}'$ une sous famille de $\mathcal{F}$ de cardinal s. On dit que $\mathcal{F}'$ satisfait la propriété 3.5.3 si et seulement s'il existe un ordre pour les facettes de $\mathcal{F}'$, à savoir, $\{F_1, \ldots, F_s\}$ tel que $x_0^i \in L_2(M_{F_{i+1}})$ où $i \in \{1, \ldots, s-1\}$ et $x_0^s \in L_2(M_{F_1})$.

3.5.4 Proposition. *Soient G un graphe, $\Gamma := \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ. $\mathcal{F}$ n'admet pas d'ordre admissible si et seulement s'il existe une sous-famille $\mathcal{F}'$ satisfaisant la propriété 3.5.3.*

Preuve.

⇒) Soit $1 \leq s \leq k$ l'entier qui satisfait que pour toute sous-famille $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$ avec $|\mathcal{F}^*| < s$, $\mathcal{F}^*$ admets un ordre admissible et tel qu'il existe une sous-famille $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ avec $|\mathcal{F}'| = s$ qui n'admet pas d'ordre admissible. Clairement $s > 1$, puisque pour toute sous-famille $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$ tel que $|\mathcal{F}^*| = 1$, on a que $\mathcal{F}^*$ admets un ordre admissible. Nous montrerons que pour la famille $\mathcal{F}'$ existe un ordre, à savoir $\mathcal{F}' = \{F_1, \ldots, F_s\}$, tel que $x_0^i \in L_2(M_{F_{i+1}})$ où $i \in \{1, \ldots, s-1\}$ et $x_0^s \in L_2(M_{F_1})$.

1. Montrons d'abord par l'absurde que :

$$\forall F \in \mathcal{F}' \text{ il existe } F' \in \mathcal{F}' \text{ tel que } [M_F]_{1,1} \in L_2(M_{F'}).$$

Supposons donc qu'il existe une facette $F \in \mathcal{F}'$ telle que pour toute $F' \in \mathcal{F}'$,

$$[M_F]_{1,1} \notin L_2(M_{F'}).$$

Par hypothèse, $\mathcal{F}' \setminus \{F\}$ admet un ordre admissible,à savoir, $\mathcal{F}' \setminus \{F\} = \{F_1, \ldots, F_{s-1}\}$. Alors $[M_F]_{1,1} \notin L_2(M_{F_i})$ pour toute $i = 1 \ldots, s-1$, et de cette façon $F, F_{i_1}, \ldots, \ldots, F_{i_{s-1}}$ est un ordre admissible sur $\mathcal{F}'$, mais on avait supposé que $\mathcal{F}'$ n'admetait pas un ordre admissible. Par conséquent : $\forall F \in \mathcal{F}'$ il existe $F' \in \mathcal{F}'$ tel que $[M_F]_{1,1} \in L_2(M_{F'})$.

2. Soit $F_1 \in \mathcal{F}'$ quelconque, par le point 1, il existe F_2 tel que $[M_{F_1}]_{1,1} \in L_2(M_{F_2})$. Par le point 1, il existe $F \in \mathcal{F}'$ tel que $[M_{F_2}]_{1,1} \in L_2(M_F)$.
   - Si $F = F_1$, donc la famille de facettes $\{F_1, F_2\}$ n'admet pas un ordre admissible, d'après le lemme 3.5.2 et par maximalité de s, $s = 2$ et $\mathcal{F}' = \{F_1, F_2\}$ satisfait la propriété 3.5.3.
   - Si $F \neq F_1$, $s > 2$, on appelle $F_3 := F$. D'après le point 1. il existe $F \in \mathcal{F}' \setminus F_3$ tel que $[M_{F_2}]_{1,1} \in L_2(M_{F_3})$.
     – Si $F = F_1$, alors la famille de facettes $\{F_1, F_2, F_3\}$ n'admet pas un ordre admissible, d'après le lemme 3.5.4 et par maximalité de s, $s = 3$ et la famille $\mathcal{F}' = \{F_1, F_2, F_3\}$ satisfait la propriété 3.5.3.
     – Si $F = F_2$, la sous-famille de facettes $\{F_2, F_3\}$ n'admet pas un ordre admissible qui n'est pas possible, d'après la maximalité de s.

– Donc si $F \neq F_1$ alors $F \neq F_2$ et $s > 3$. On pose $F_4 = F$ et par la suite on peut supposer qu'on a trouvé une suite de facettes de $\mathcal{F}'$ distinctes $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_s$ tel que $[M_{F_i}]_{1,1} \in L_2(M_{F_{i+1}})$ pour $i = 1, \ldots, s-1$. D'après le point 1. il existe $F \in \mathcal{F}' \setminus F_{s-1}$ tel que $[M_{F_1}]_{1,1} \in L_2(M_F)$. Si $F \neq F_1$, à savoir F_j pour $j > 2$, donc $F_j, F_{j+1}, \ldots, F_s$ satisfait la propriété 3.5.3, ce qui contredit la maximalité de s. Alors $F = F_1$ et $\mathcal{F}' = \{F_1, F_2, \ldots, F_s\}$ satisfait la propriété 3.5.3.

$\Leftarrow$) Par le lemme 3.5.2 $\mathcal{F}'$ n'admet pas d'ordre admissible. Ainsi, par la remarque 3.5.1 $\mathcal{F}$ n'admets pas d'ordre admissible.

■

3.5.5 Lemme. *Soient G un graphe, $\Gamma := \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ. Si $|\mathcal{F}| \leq 3$, alors $\mathcal{F}$ admet un ordre admissible.*

Preuve.
(**Cas k = 2**) S'il n'y a pas d'ordre admissible pour F_1, F_2, par la proposition 3.5.4, nous avons que $x_0^1 \in L_2(M_{F_1})$ et $x_0^2 \in L_2(M_{F_2})$. Ainsi $\{x_0^1, x_0^2\} \in F_1$ et $\{x_0^2, x_0^1\} \in F_2$, donc $\{x_0^1, x_0^2\}$ n'est pas une arête propre de G, mais ce n'est pas possible car $\overline{\Gamma}$ est une extension binomiale de Γ. Par conséquent il y a un ordre admissible pour F_1, F_2.
(**Cas k = 3**) S'il n'y a pas un ordre admissible pour F_1, F_2, F_3, par la proposition 3.5.4 et le cas antérieur, on a : $x_0^1 \in L_2(M_{F_2})$, $x_0^2 \in L_2(M_{F_3})$ et $x_0^3 \in L_2(M_{F_1})$. De là on conclut que $e_1 = \{x_0^2, x_0^1\} \in F_2$, $e_2 = \{x_0^3, x_0^2\} \in F_3$, $e_3 = \{x_0^1, x_0^3\} \in F_1$ et $L = \{x_0^1, x_0^2, x_0^3\}$ est une clique de G, donc $L \subset F_i$ pour certain $i \in \{1, 2, 3\}$ et de cette façon e_1, e_2 ou e_3 n'est pas une arête propre, cela contredit que $\overline{\Gamma}$ est une extension binomiale de Γ. Par conséquent il y a un ordre admissible pour F_1, F_2, F_3.

■

3.5.6 Proposition. *Soient G un graphe, $\Gamma := \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ. En supposant que le graphe G restreint sur la famille $\mathcal{F}$ est un graphe de cordes, alors il existe un ordre admissible λ pour les facettes de Γ.*

Preuve. Si $|\mathcal{F}| = 1, 2$ ou 3 par le lemme 3.5.5 on a qu'il existe un ordre admissible λ pour la famille $\mathcal{F}$ et par conséquent pour toutes les facettes de Γ.

Supposons $|\mathcal{F}| \geq 4$, nous ferons la démonstration par l'absurde. Nous supposerons que la famille $\mathcal{F}$ n'admet pas d'ordre admissible. Donc, par la proposition 3.5.4 il existe une sous-famille $\mathcal{F}' = \{F_1, \ldots, F_s\} \subset \mathcal{F}$ où $s > 1$, telle que $x_0^i \in L_2(M_{F_{i+1}})$ où $i \in \{1, \ldots, s-1\}$ et $x_0^s \in L_2(M_{F_1})$. Ainsi $\{x_0^{i+1}, x_0^i\}$ est une arête prope de F_{i+1} pour $i \in \{1, \ldots, s-1\}$ et $\{x_0^s, x_0^1\}$ est une arête propre de F_1. D'ici, $\{\{x_0^1, x_0^2\}, \ldots, \{x_0^s, x_0^1\}\}$ sont les arêtes d'un cycle C de G, mais comme G restreint sur la famille $\mathcal{F}$ est un graphe de cordes, C n'est pas minimal et il doit y avoir une clique $V \subset V(C)$ de taille 3 avec deux arêtes e, e' de C. De cette façon, nous avons que $V \subset F_i$ avec $i \in \{1, \ldots, k\}$ et qu'au moins une des arêtes e, e' est dans deux facettes de Γ, mais cela contredit le fait que e, e' sont des arêtes propres de Γ. Par conséquent, $F_1, \ldots, F_k$ ont un ordre admissible. ■

3.6 Relation entre les cycles de $(\Gamma)_1$ et les cycles minimaux du graphe $(\overline{\Gamma}^{(\Pi)})_1$

Soient $F_1, \ldots, F_l$ un ordre admissible sur les facettes de Γ, et $\Pi \in \mathcal{P}_{\overline{\Gamma}}$ (voir définition 3.4.5). Alors d'après la définition 3.4.8 on a un ordre sur les sommets de Γ pour lequel $\mathrm{in}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$ est libre de carrés grâce au thórème 3.4.13. Dans ce cas on a vu dans la remarque 3.4.14 que le complexe simplicial $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$ défini dans 3.4.6 est le complexe simplicial associé à l'idéal monomial $\mathrm{in}(B_{\overline{\Gamma}})$, alors $\mathrm{in}(B_{\overline{\Gamma}}) = I_{\overline{\Gamma}^{(\Pi)}}$. D'après le théorème 3.2.6 on a l'inégalité $\beta_{i,j}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) \leq \beta_{i,j}(\mathrm{in}(B_{\overline{\Gamma}})) = \beta_{i,j}(I_{\overline{\Gamma}^{(\Pi)}})$ et on écrira :

$$\beta_{i,j}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) \leq \beta_{i,j}(I_{\overline{\Gamma}^{(\Pi)}}). \tag{3.2}$$

De plus, en utilisant cette inégalité on obtient immédiatement la proposition suivante :

3.6.1 Proposition. *Soient Γ un complexe de cliques et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ. Alors, pour tout $\Pi \in \mathcal{P}_{\overline{\Gamma}}$*

$$p_2(I_{\overline{\Gamma}^{(\Pi)}}) \leq p_2(B_{\overline{\Gamma}}). \tag{3.3}$$

Donc, si on connait $\max_{\Pi \in \mathcal{P}_{\overline{\Gamma}}} \left(p_2(I_{\overline{\Gamma}^{(\Pi)}})\right)$, on a une borne inférieure de $p_2(B_{\overline{\Gamma}})$. Comme $I_{\overline{\Gamma}^{(\Pi)}}$ est un idéal monomial quadratique libre de carrés, par le théorème 3.4.13 et la proposition 2.2.13 on déduit que $p_2(I_{\overline{\Gamma}^{(\Pi)}}) + 3$ est la plus petite taille d'un cycle minimal de $\overline{G}^{(\Pi)} := (\overline{\Gamma}^{(\Pi)})_1$. C'est pourquoi dans cette section on étudiera les cycles de $\overline{G}^{(\Pi)}$. D'abord on montrera, dans la proposition suivante, que la borne inférieure de $p_2(B_{\overline{\Gamma}})$ qu'on a donnée dans la proposition 3.6.1 est effectivement la valeur de $p_2(B_{\overline{\Gamma}})$ dans un cas particulier :

3.6.2 Proposition. *Soit Γ un polygone de n-sommets $x_1, \ldots, x_n$. Pour chaque arête $\{x_k, x_{k+1}\}$ où $k = 1, \ldots, n$ ($x_{n+1} = x_1$) on associe un ensemble Y_k de cardinalité $s_i \in \mathbb{N}$ et on pose $s = \sum_{j=1}^{m} s_i$. Alors $\beta_{i,j}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = \beta_{i,j}(I_{\overline{\Gamma}'})$ et $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = p_2(I_{\overline{\Gamma}'}) = d + s - 3$. En particulier $\Bbbk[\mathbf{x}]/\mathcal{B}_\Gamma$ est Gorenstein.*

Preuve. Soient $e_1 = \{x_1, x_2\}, \ldots, e_n = \{x_n, x_1\}$ toutes les arêtes de Γ, alors les facettes de Γ sont les e_i avec $i = 1, \ldots, n$. On peut supposer que, pour $i = 1, \ldots, n-1$: soit $M_{e_i} = 0$ si $s_i = 0$; soit

$$M_{e_i} = \begin{pmatrix} x_i & y_1^{(i)} & \ldots & y_{s_i}^{(i)} \\ y_1^{(i)} & y_2^{(i)} & \ldots & x_{i+1} \end{pmatrix},$$

si $s_i \neq 0$. Si $s_n = 0$ alors $M_{e_n} = 0$; dans le cas $s_n \neq 0$, alors

$$M_{e_n} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1^{(n)} & \ldots & y_{s_n}^{(n)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & x_n \end{pmatrix}.$$

Soit $r \leq n$ tel que $\{i_1 < \cdots < i_r\} \subset V(\Gamma)$ et $s_{i_j} \neq 0$ de même si $i' \in (V(\Gamma)) \setminus \{i_1 < \cdots < i_r\}$, alors $s_{i'} \neq 0$. Ainsi, $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}$ sont ordonnées selon un ordre admissible. En ajoutant les autres arêtes de Γ après la suite précédente $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}$ avec un ordre quelconque, on obtient un ordre

admissible pour les facettes de Γ. De cette façon, on peut définir $\overline{\Gamma}'$ et d'après la remarque 3.4.14, on voit que $\overline{\Gamma}'$ est un polygone de $n+s$ sommets. On sait de l'exemple 2.2.16 que la résolution libre minimale de $\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\overline{\Gamma}'}$ est de la forme suivante :

$$0 \to \Bbbk[\mathbf{x}](-n-s) \to \Bbbk[\mathbf{x}]^{\beta_{n+s-3}}(-n-s+2) \to \cdots \to \Bbbk[\mathbf{x}]^{\beta_1}(-2) \to \Bbbk[\mathbf{x}] \to \Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\overline{\Gamma}'} \to 0,$$

où pour $i = 1, \ldots, n+s-3$,

$$\beta_i = \beta_{i,i+1}(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\overline{\Gamma}'}) = \beta_{i-1,i+1}(I_{\overline{\Gamma}'}) \text{ et } 1 = \beta_{n+s-2,n+s}(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\overline{\Gamma}'}) = \beta_{n+s-3,n+s}(I_{\overline{\Gamma}'}).$$

Donc $p = p_2(I_{\overline{\Gamma}'}) = n+s-3$. D'après la proposition 3.2.9 et l'inégalité 3.2

$$\beta_{i,j}(S/\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i+1 \text{ et } i \neq n+s-2, \\ 0 & \text{si } i = n+s-2 \text{ et} j \neq n+s, \\ \beta_{i,j}(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\overline{\Gamma}'}) & \text{si } j = i+1. \end{cases}$$

Ainsi projdim $\Bbbk[\mathbf{x}]/\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}} \leq n+s-2$. De plus, on a $\mathcal{K}(\Bbbk[\mathbf{x}]/\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}; t) = \mathcal{K}(si/I_{\overline{\Gamma}'}; t)$. D'où, en égalisant les termes dominants nous avons :

$$1 = \beta_{n+s-2,n+s}(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_{\overline{\Gamma}'}) = \sum_{j=0}^{n+s-2} (-1)^{n+s-2-j}\beta_{j,n+s} = \beta_{n+s-2,n+s}.$$

Il suit que la résolution libre minimale de $\Bbbk[\mathbf{x}]/\mathcal{B}_{\Gamma}$ est :

$$0 \to \Bbbk[\mathbf{x}](-n-s) \to \Bbbk[\mathbf{x}]^{\beta_{n+s-3}}(-n-s+2) \ldots \Bbbk[\mathbf{x}]^{\beta_1}(-2) \to \Bbbk[\mathbf{x}] \to \Bbbk[\mathbf{x}]/B_{\overline{\Gamma}} \to 0.$$

En particulier, on déduit que $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = n+s-3 = p_2(I_{\overline{\Gamma}'})$ et $\Bbbk[\mathbf{x}]/B_{\overline{\Gamma}}$ est Gorenstein. ∎

3.6.3 Lemme. *Soient G un graphe, $\Gamma := \Gamma(G)$ son complexe de cliques, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ, $F_1, \ldots, F_l$ toutes les facettes de Γ ordonnées avec un ordre admissible et $\Pi \in \mathcal{P}_{\overline{\Gamma}}$. Alors tout cycle de $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$ de longueur ≥ 4 contenu dans une facette de $\overline{\Gamma}$ a une corde dans $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$.*

Preuve. Soient F une facette de Γ et C un cycle de longueur ≥ 4 contenu dans $\overline{F}$ de $\overline{\Gamma}$.

– Si $F = \overline{F}$, d'après la proposition 3.4.15, F est aussi une facette de $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$. Donc C n'est pas minimal.
– Si $F \neq \overline{F}$. D'après la remarque 3.4.14, la restriction de $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$ à $\overline{F}$ est $(\Gamma(in(I_F)))$. Alors C est aussi un cycle minimal du graphe $(\Gamma(\text{in}(I_F)))_1$. Mais d'après la proposition 3.4.2 $\text{in}(I_F)$ est 2-linéaire et libre de carrés, donc par le théoréme de Froberg (corollaire 2.2.14), $(\Gamma(\text{in}(I_F)))_1$ n'a pas de cycles minimaux. Par conséquent, C a une corde dans $(\Gamma(\text{in}(I_F)))_1$ et de cette façon C a une corde dans $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$.

∎

3.6.4 Définition. Soit G un graphe, $\Gamma := \Gamma(G)$ son complexe de cliques, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ, $F_1, \ldots, F_l$ toutes les facettes de Γ ordonnées avec un ordre admissible et $\Pi \in \mathcal{P}_{\overline{\Gamma}}$. On dit qu'un cycle C de G est un **cycle minimal Π-virtuel** si et seulement si soit C est un cycle minimal dans G, soit C n'est pas un cycle minimal dans G, mais C vérifie les propriétés suivantes :

1. Toute corde de C n'est pas une arête de $(\overline{\Gamma}^{(\Pi)})_1$.
2. Si $e, e' \in E(C)$ sont distincts, alors e, e' ne sont pas dans une même facette de Γ.
3. Il existe $V \subset V(C)$ tel que G_V est un cycle minimal de longueur ≥ 4.

3.6.5 Remark. Soit G un graphe, $\Gamma := \Gamma(G)$ son complexe de cliques, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ et $\Pi, \Pi' \in \mathcal{P}_{\overline{\Gamma}}$. Si $e \in E(G) \setminus E(\overline{G}^{(\Pi)})$, alors $e \in E(G) \setminus E(\overline{G}^{(\Pi')})$. De cette façon la définition de cycle minimal virtuel de G ne depend pas de Π, donc un cycle minimal virtuel sera appelé simplement **cycle minimal virtuel**.

3.6.6 Théorème. *Soient G un graphe, $\Gamma := \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ, $F_1, \ldots, F_l$ toutes les facettes de Γ ordonnées avec un ordre admissible et $\Pi \in \mathcal{P}_{\overline{\Gamma}}$. Alors, tout cycle minimal de longueur ≥ 4 de $(\overline{\Gamma}^{(\Pi)})_1$ provient d'un cycle minimal virtuel.*

Preuve. Soit C' un cycle minimal de longueur ≥ 4 de $(\overline{\Gamma}^{(\Pi)})_1$. Notons $q := |C'|$,

$$E(C') = \{\{z_1, z_2\}, \{z_2, z_3\}, \ldots, \{z_q, z_1\}\},$$

et pour chaque $i = 1, \ldots, q-1$, $e_i = \{z_i, z_{i+1}\}$ et $e_q = \{z_q, z_1\}$. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, q\}$, il existe une facette F de Γ telle que $e_i \subset \overline{F}$. Par le lemme 3.6.3 il existe au moins deux facettes $F \neq F'$ de Γ et deux arêtes $e_i \neq e_j \in E(C')$ telles que $e_i \subset \overline{F}$ et $e_j \subset \overline{F'}$.

Ainsi, on peut construire une suite de facettes $F_{i_1}, \ldots, F_{i_q}$ dans Γ telle que $e_j \subset \overline{F}_{i_j}$. Dans la cas où $e_{j+1} \subset \overline{F}_{i_j}$, alors $F_{i_{j+1}} = F_{i_j}$. Par conséquent on peut réécrire la chaine précédente comme $F_{i_1}, \ldots, F_{i_{s'}}$, où $q \geq s' \geq 2$ avec $F_{i_j} \neq F_{i_{j+1}}$, telle que C' est divisé en chemins consécutifs $C_j \subset \overline{F}_{i_j}$ de z_{i_j} à $z_{i_{j+1}}$, où $z_1 = z_{i_1} = z_{i_{s'+1}}$. De plus, on peut supposer que $F_{i_1} \neq F_{i_{s'}}$; car si $F_{i_1} = F_{i_{s'}}$ on peut choisir comme point initial de C' le point $z_{i_{s'}}$.

– Comme, pour tout $j \in \{2, \ldots, s'+1\}$ $z_{i_j} \in \overline{F}_{j-1} \cap \overline{F}_j$, d'après la définition de $\overline{\Gamma}$, nous avons que, pour tout $j \in \{1, \ldots, s\}$, $z_{i_j} \in \Gamma$.
– Il n'existe pas de sous-chaine $F_{i_j}, F_{i_{j+1}}, \ldots, F_{i_r}$ de $F_{i_1}, \ldots, F_{i_s}$ avec $r \geq j+2$, telle que $F_{i_j} = F_{i_r}$. Dans le cas contraire, supposons qu'il existe une sous-chaine $F_{i_j}, F_{i_{j+1}}, \ldots, F_{i_r}$ de $F_{i_1}, \ldots, F_{i'_s}$ avec $r \geq j+2$, telle que $F_{i_j} = F_{i_r}$. Comme C' est un cycle minimal

  $$\{z_{i_j}, z_{i_r}\}, \{z_{i_j}, z_{i_{r+1}}\}, \{z_{i_{j+1}}, z_{i_r}\}, \{z_{i_{j+1}}, z_{i_{r+1}}\} \notin E(\overline{\Gamma}^{(\Pi)})_1 \text{ (voir figure 3.4)},$$

  mais ces arêtes sont contenues dans F_{i_j} .

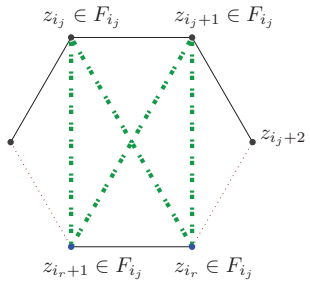


FIGURE 3.4 –

D'après la remarque 3.4.14, si $e \in (E(\Gamma) \setminus E(\overline{\Gamma}^{(\Pi)})$ alors un des sommets de e est dans la première ligne d'une matrice M_F, ce qui implique qu'il existe deux éléments de $\{z_{i_j}, z_{i_j+1}, z_{i_r}, z_{i_r+1}\} \subset V(\Gamma)$ qui apparaissent dans la première ligne de $M_{F_{i_j}}$. Cela contredit la définition de $M_{F_{i_j}}$.

Alors, on a vu qu'il existe $s' \geq 2$ et une chaine $F_{i_1}, \ldots, F_{i_{s'}}$ tels que pour tout $j \neq j' \in \{1, \ldots, s\}$, $F_{i_j} \neq F_{i_{j'}}$ et tels que C' est divisé en chemins consécutifs $C_j \subset \overline{F}_{i_j}$ de z_{i_j} à z_{i_j+1}, où $z_1 = z_{i_1} = z_{i_{s'}+1}$. Appelons s le plus petit entier vérifiant cela.
Soit C le cycle avec

$$V(C) = \{z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_s}\} \text{ et } E(C) = \{\{z_{i_1}, z_{i_2}\}, \ldots, \{z_{i_{s-1}}, z_{i_s}\}, \{z_{i_s}, z_1\}\}.$$

Soit C est minimal et donc C' provient de C qui est un cycle minimal virtuel par définition 3.6.4. Soit C n'est pas minimal, mais nous allons montrer que C est un cycle virtuel minimal, ce qui est la conséquence des trois point suivants :

1. Toute corde de C n'est pas une arête de $(\overline{\Gamma}^{(\Pi)})_1$, puisque C' est un cycle minimal de $(\overline{\Gamma}^{(\Pi)})_1$.
2. Par construction de C et d'après la minimalité de s, pour toute paire $e, e' \in E(C)$, ni e, ni e' n'appartiennent à une même clique de G.
3. Il existe $V \subset V(C)$ tel que G_V est un cycle minimal de G. Si ce n'est pas le cas, il existe $i_j \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $\{z_{i_j}, z_{i_j+2}\}$ est une corde de C. Alors, $D = \{z_{i_j}, z_{i_j+1}, z_{i_j+2}\}$ est une clique de G, donc il existe une facette F dans Γ qui contient D.
   - Si $\{z_{i_j}, z_{i_j+1}\}, \{, z_{i_j+1}, z_{i_j+2}\} \in E((\overline{\Gamma}^{(\Pi)})_1)$, alors $F_{i_1}, \ldots, F_{i_{j-1}}, F, F_{i_{j+2}}, \ldots, F_{i_s}$ est une chaine de facettes de Γ avec le même caractéristiques que $F_{i_1}, \ldots, F_{i_s}$; ce qui contredit la minimalité de s.
   - Si $\{z_{i_j}, z_{i_j+1}\} \in E((\overline{\Gamma}^{(\Pi)})_1)$ ou $\{z_{i_j+1}, z_{i_j+2}\} \in E((\overline{\Gamma}^{(\Pi)})_1)$, mais pas simultanément les deux. On peut supposer que $\{z_{i_j}, z_{i_j+1}\} \in E((\overline{\Gamma}^{(\Pi)})_1)$ et $\{z_{i_j+1}, z_{i_j+2}\} \notin E((\overline{\Gamma}^{(\Pi)})_1)$. Alors $\{z_{i_j+1}, z_{i_j+2}\}$ est une arête propre de Γ, donc $F_{i_j+1} = F$. Par conséquent $F_{i_1}, \ldots, F_{i_j-1}, F$, $F_{i_j+2}, \ldots, F_{i_s}$ est une chaine de facettes de Γ avec les mêmes caractéristiques que $F_{i_1}, \ldots$, F_{i_s} ; cela contredit la minimalité de s.

– $\{z_{i_j}, z_{i_{j+1}}\}, \{, z_{i_{j+1}}, z_{i_{j+2}}\} \notin E((\overline{\Gamma}^{(\Pi)})_1)$. Alors $\{z_{i_j}, z_{i_{j+1}}\}, \{z_{i_{j+1}}, z_{i_{j+2}}\}$ sont des arêtes propres de Γ. Par conséquent $F_{i_j} = F = F_{i_{j+1}}$, ce qui n'est pas possible puisque $F_{i_j} \neq F_{i_{j+1}}$.

Donc, il existe $V \subset V(C)$ tel que G_V est un cycle minimal de G.

Finalement, d'après les trois points précédents C est un cycle minimal virtuel. ∎

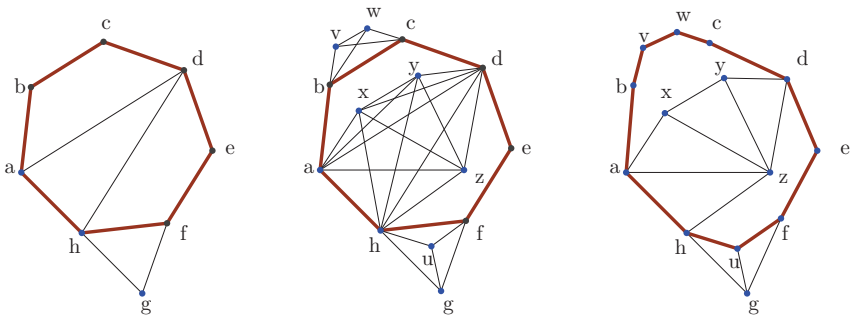
3.6.7 Exemple. Soit G le graphe de la figure 3.5 et $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G. Aux facettes $F_1 = \{d, a, h\}$, $F_2 = \{b, c\}$, $F_3 = \{f, h, g\}$ on associe les matrices :

$$M_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} d & y & x & z \\ y & x & a & h \end{array}\right), M_2 = \begin{pmatrix} b & v & w \\ v & w & c \end{pmatrix}, M_3 = \left(\begin{array}{c|c} h & u \\ g & f \end{array}\right),$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\overline{\Gamma}} = \; & (ac, ae, af, ag, bd, bf, bh, bg, ce, cf, ch, cg, df, dg, eh, eg, va, vd, vx, vy, vh, vz, ve, vf, vu, vg, \\ & wa, wd, wx, wy, wh, wz, we, wf, wu, wg, xe, xf, xu, xy, ye, yf, yu, yg, ze, zf, zu, zg, dx - y^2, \\ & da - yx, dh - yz, ya - x^2, yh - xz, xh - az, bw - v^2, bc - wv, vc - w^2, hf - ug). \end{aligned}$$

Dans la figure 3.5 $\overline{G} = (\overline{\Gamma})_1$ et $G' = (\overline{\Gamma}')_1$. On remarque que F_1, F_2, F_3 sont ordonnées selon un ordre admissible, ce qui induit un ordre admissible pour toutes les facettes de Γ. Cela nous permet de définir $\overline{\Gamma}'$.



G $\overline{G}$ $\overline{G}'$

FIGURE 3.5 –

En outre, on peut voir sur la figure 3.5 que le cycle C' avec comme ensemble des arêtes

$$E(C') = \{\{a, b\}, \{b, v\}, \{v, w\}, \{w, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, u\}, \{u, h\}, \{h, a\}\}$$

est un cycle minimal de G', et il provient d'un cycle minimal virtuel de G, à savoir C avec comme ensemble d'arêtes :

$$E(C) = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, h\}, \{h, a\}\},$$

C n'est pas un cycle minimal. Par ailleurs le cycle D' ayant comme ensemble des arêtes

$$E(D') = \{\{a,b\},\{b,v\},\{v,w\},\{w,c\},\{c,d\},\{d,y\},\{y,x\},\{y,a\}\},$$

est un cycle minimal de G' qui provient du cycle minimal D de G avec comme ensemble d'arêtes :

$$E(C) = \{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,a\}\}.$$

En particulier d'après 3.6.1 $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) \geq 6 - 3 = 3$, car le cycle D_1 avec ensemble des arêtes

$$E(D_1) = \{\{h,z\},\{z,d\},\{d,e\},\{e,f\},\{f,u\},\{u,h\}\}$$

est un cycle minimal dans $\overline{G}'$ de longueur minimal égale à 6.

□

3.6.8 Remarque.

1. D'après le théorème 3.6.6 les cycles minimaux de $(\overline{\Gamma(G)}^{(\Pi)})_1$ sont des extensions de cycles virtuels minimaux de G. Par définition de cycles virtuels minimaux, si un graphe G a un cycle virtuel, il existe un cycle minimal dans G. Donc s'il existe un cycle minimal dans $(\overline{\Gamma(G)}^{(\Pi)})_1$, alors il existe un cycle minimal dans G.
2. Les cycles minimaux de $\overline{G}'$ sont des extensions de cycles virtuels minimaux de G, mais ce n'est pas le cas pour les cycles minimaux de $(\overline{\Gamma(G)})_1 = \overline{G}$, puisque par définition de $\overline{\Gamma(G)}$ les cycles de G et de $\overline{G}$ sont les mêmes.

Maintenant nous sommes près d'un premier résultat important (théorème 3.6.9). Pour cela, rappellons qu'au chapitre 2 on a défini qu'un idéal I est 2-régulier (équivalent à I est 2-linéaire) si $\mathrm{reg}(I) \leq 2$. Cette propriété équivaut à dire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, I a la propriété $N_{2,p}$. Par le théorème 2.2.13 on peut conclure que si Γ est un complexe de cliques et $G = (\Gamma)_1$, alors I_Γ est 2-régulier si et seulement si G est un graphe de cordes.

3.6.9 Théorème. *Soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ. Alors G est un graphe de cordes si et seulement si $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ est 2-linéaire.*

Preuve.
⇒) Comme G est un graphe de cordes et d'après la remarque 3.6.8, $\overline{G}'$ est aussi un graphe de cordes. Alors, par le corollaire 2.2.14, $I_{\overline{\Gamma}'}$ est 2-linéaire et $p_2(I_{\overline{\Gamma}'}) = \infty$. D'après la proposition 3.5.6 il existe un ordre λ pour les facettes de Γ qui est un ordre admissible et en utilisant la proposition 3.6.1, on conclut $\infty = p_2(I_{\overline{\Gamma}'}) \leq p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$ et $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ est 2-linéaire.
⇐) On suppose que G n'est pas un graphe de cordes. Alors, par la proposition 2.2.15, $p_2(I_\Gamma) < \infty$ et il existe un cycle C minimal de G de longueur $p_2(I_\Gamma) + 3$. Du point 2 de la remarque 3.6.8,

tout cycle minimal de G est un cycle minimal de $(\overline{\Gamma})_1 = \overline{G}$, donc $I_{\overline{\Gamma}}$ n'a pas la propriété $N_{2,p_2(I_\Gamma)+1}$, ainsi $I_{\overline{\Gamma}}$ n'est pas 2-linéaire. Par ailleurs

$$\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}} = \bigcap_{F \text{ facette de } \overline{\Gamma}} \mathcal{J}_F,$$

où $\mathcal{J}_F = (\mathcal{I}_F, (V(\overline{\Gamma}) \setminus \overline{F}))$, d'après la proposition 3.3.4. Mais la décomposition primaire de $I_{\overline{\Gamma}}$ est :

$$I_{\overline{\Gamma}} = \bigcap_{\overline{F} \text{ facette de } \overline{\Gamma}} (V(\overline{\Gamma}) \setminus \overline{F}),$$

donc il n'existe pas de réarrangement linéairement joint de la suite des idéaux $(V(\overline{\Gamma}) \setminus \overline{F})$ grâce à la proposition 2.3.4 et la remarque 2.3.2. Par conséquent tout arrangement de la suite

$$\{(\mathcal{I}_F, (V(\overline{\Gamma}) \setminus \overline{F}))\}_{\overline{F} \text{ facette de } \overline{\Gamma}}$$

n'est pas linéairement joint et ainsi $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ n'est pas 2-linéaire d'après la proposition 2.3.3. ∎

3.7 Bornes inférieures de $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$

Le but de cette section est de décrire un cycle minimal C' de $\overline{\Gamma}_1^{(\Pi)}$ en partant d'un cycle minimal C de Γ_1 pour trouver une borne inférieure de $p_2(B_{\overline{\Gamma}^{(\Pi)}})$ grâce à l'équation 3.2.

3.7.1 Remarque. Pour toute cette section si Γ est un complexe de cliques et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ, nous supposerons qu'il existe un ordre admissible des facettes du complexe Γ pour l'extension $\overline{\Gamma}$,à savoir, $F_1, \ldots, F_l$.

Du théorème 3.6.6 on sait que tout cycle de $\overline{G}^{(\Pi)} := (\overline{\Gamma}^{(\Pi)})_1$ provient d'un cycle minimal virtuel de $G := (\Gamma)_1$. Si C est un cycle-virtuel de G on souhaite construire tous les cycles minimaux de $\overline{G}^{(\Pi)}$. On va commencer par étudier le cas où $\Pi = (\Pi_1, \ldots, \Pi_k)$ avec Π_i la permutation identité, pour $i \in \{1, \ldots, k\}$. Dans ce cas on posera $\overline{G}' := (\overline{\Gamma}')_1$. Rappelons la définition d'extension binomiale : si pour une facette F de Γ il existe $Y^{(F)} \neq \emptyset$, alors on a une matrice

$$M_F = \left(\begin{array}{cccc|ccc|c|ccc} x_0^{(F)} & y_{11}^F & \cdots & y_{1n_1}^F & y_{21}^F & \cdots & y_{2n_2}^F & \cdots & y_{m_F1}^F & \cdots & y_{m_Fn_{m_F}}^F \\ y_{11}^F & y_{12}^F & \cdots & x_1^F & y_{22}^F & \cdots & x_2^F & \cdots & y_{m_F2}^F & \cdots & x_{m_F}^F \end{array} \right);$$

ou bien, si $Y_1^{(F)} = \emptyset$, la forme de M_F est

$$M_F = \left(\begin{array}{c|ccc|c|ccc} x_0^{(F)} & y_{21}^F & \cdots & y_{2n_2}^F & \cdots & y_{m_F1}^F & \cdots & y_{m_Fn_{m_F}}^F \\ x_1^F & y_{22}^F & \cdots & x_2^F & \cdots & y_{m_F2}^F & \cdots & x_{m_F}^F \end{array} \right);$$

Nous posons :

$\mathrm{B}_j(M_F) = \{$tous les sommets de $\overline{\Gamma}$ du bloc j de $M_F\}$ pour $1 \leq j \leq m_F$;
$\mathrm{L}_j(M_F) = \{$tous les sommets de $\overline{\Gamma}$ de la ligne j de $M_F\}$ pour $j = 1, 2$.

De la définition d'extension binomiale et de la section 3.6 on peut affirmer que $e = \{x_e, x'_e\}$ est une arête de C tel que $e \notin E(\overline{G}')$ si et seulement s'il existe une facette F de Γ unique telle que $x_0^{(F)} \in e$ et $e \setminus \{x_0^{(F)}\} \subset \mathrm{L}_2(M_F)$, sauf si $e \setminus \{x_0^{(F)}\} \subset B_1(M_F)$ et $Y_1^{(F)} = \emptyset$. Ainsi, soient $e = \{x_e, x'_e\}$ une arête de C telle que $e \notin E(\overline{G}')$ et F la facette unique contenant e, on peut supposer $e = \{x_0^{(F)}, x_k^{(F)}\}$ pour un certain $i \in \{1, \ldots, m_F\}$.

3.7.2 Théorème. *Soient G un graphe et $\Gamma := \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ telle qu'il existe un ordre admissible pour les facettes de Γ, à savoir, $F_1, \ldots, F_l$. Alors tout cycle minimal de $\overline{G}'$ peut être obtenu à partir d'un cycle virtuel minimal de G en remplaçant chaque arête e de C qui n'est plus une arête par un des chemins suivants dans la facette $\overline{F}$, où F est l'unique facette qui contient e :*

1. $\{\{x_0^{(F)}, x\}, \{x, x_k^{(F)}\}\}$, *pour $x \in F \setminus V_\Gamma(M_F) \neq \emptyset$ ou pour $x \in B_1(M_F)$ avec $Y_1^{(F)} = \emptyset$ et $k \neq 1$;*
2. $\{\{x_0^{(F)}, y_{k'1}\}\{y_{k'1}, x_k^{(F)}\}\}$, *si $k < m_F$ et $k' > k$;*
3. $\{\{x_0^{(F)}, y_{k'1}\}, \{y_{k'1}, x_{k''}\}, \{x_{k''}, x_k^{(F)}\}\}$, *si $k = m_F$ et $|B_{m_F}(M_F)| > 2$, où $1 \leq k'' < k' \leq m_F$;*
4. $\{\{x_0^{(F)}, y_{k'1}^{(F)}\}, \{y_{k'1}^{(F)}, y_{k'2}^{(F)}\}, \cdots, \{y_{k'n_{k'}}^{(F)}, x_{k'}^{(F)}\}, \{x_{k'}^{(F)}, x_k^{(F)}\}\}$, *où $1 \leq k \leq m_F$ et $k' < k$;*
5. $\{\{x_0^{(F)}, y_{k1}^{(F)}\}, \{y_{k1}^{(F)}, y_{k2}^{(F)}\}, \cdots, \{y_{kn_k}^{(F)}, x_k^{(F)}\}\}$, *où $1 \leq k \leq m_F$.*

De plus tout cycle minimal de G' est obtenu de cette façon.

Preuve.

(A) D'abord, en testant laborieusement tous les cas et en utilisant la remarque 3.4.14, on déduit que tous les chemins sans cordes inclus dans une facette F tel que $M_F \neq 0$ avec points extremes $x_0^{(F)}$ et $x_k^{(F)}$ pour $1 \leq k \leq m_F$, ont pour ensemble d'arêtes un des ensembles du 1 au 5 de l'énoncé du théorème.

(B) Il reste à prouver que si C' est un cycle minimal de $\overline{G}'$, alors il existe un cycle minimal virtuel C de G où on remplace toutes les arêtes e de C qui ne sont plus une arête de $\overline{G}'$ par un des chemins ci-dessus.

De la preuve du théorème 3.6.6 on peut écrire C' comme $C' = \bigcup_{j=1}^{s+1} C_j$, réunion de chemins consecutifs. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, s+1\}$, C_j est un chemin inclus dans une facette $\overline{F}_j$ de $\overline{G} := \overline{\Gamma}_1$ avec $F_j \neq F_{j'}$ si $j \neq j'$, ayant pour extremités $\{z_j, z_{j+1}\}$, où $z_{s+2} = z_1$.

$$z_{j,1} = z_{j-1,n_{j-1}} \in V(G) \text{ pour } j = 2, \ldots, s+1 \text{ et } z_{1,1} = z_{s+1,n_{s+1}} \in V(G). \tag{3.4}$$

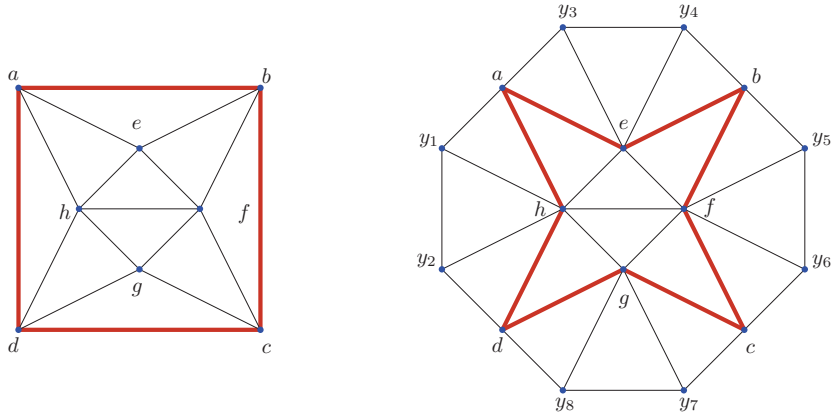
De même le cycle C avec $E(C) = \{\{z_1, z_2\}, \{z_2, z_3\}, \ldots, \{z_{s+1}, z_1\}\}$ est un cycle minimal virtuel de G. En outre, pour chaque chemin C_j avec $j = 1, \ldots, s+1$, on a les cas suivants :

– $|C_j| = 1$, ainsi par (3.4) $E(C_j) := \{z_{j,1}, z_{j,2}\} \subset E(G)$, c'està dire que cet arête n'est pas virtuelle dans $\overline{G}'$.
– $|C_j| \geq 2$. Alors $M_{F_j} \neq 0$ et $\{z_{j,1}, z_{j,n_j}\} = \{x_0^{(F_j)}, x_k^{(F_j)}\}$ pour certain $k \in \{1, \ldots, m_{F_j}\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer $z_j = x_0^{(F_j)}$ et $z_{j+1} = x_k^{(F_j)}$ et dans le point **(A)** on a prouvé lesquels étaient les chemins sans cordes contenus dans une facette F avec $M_F \neq 0$. Donc C_j doit être un des cinq chemins de l'énoncé de la proposition, sauf ceux du type 1, 3 ou 4, quand il y a une corde avec les autres arêtes de C. De cette façon on conclut la preuve.

■

3.7.3 Remarque. Soit $\mathcal{C}'$ est la famille de tous les cycles obtenus par des cycles minimaux virtuels de G en remplaçant chaque arête de C que n'est plus une arête de $\overline{G}'$ par un des chemins du théorème 3.7.2. Le théorème 3.7.2 nous montre que $\mathcal{C}'$ contient tous les cycles minimaux de $\overline{G}'$, mais en général c'est une famille strictement plus grande, comme le montre l'exemple suivant :

3.7.4 Example. Soit G le graphe de la figure 3.6 et $\Gamma := \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G.



G $\quad\quad$ $\overline{G}'$

FIGURE 3.6 –

Pour les facettes $F_1 = \{a, d, h\}$, $F_2 = \{a, b, e\}$, $F_3 = \{b, c, f\}$, $F_4 = \{c, d, g\}$ on associe les matrices :

$$M_{F_1} = \begin{pmatrix} a & y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 & d \end{pmatrix}, M_{F_2} = \begin{pmatrix} a & y_3 & y_4 \\ y_3 & y_4 & b \end{pmatrix},$$

$$M_{F_3} = \begin{pmatrix} b & y_5 & y_6 \\ y_5 & y_6 & c \end{pmatrix} \text{ et } M_{F_4} = \begin{pmatrix} c & y_7 & y_8 \\ y_7 & y_8 & d \end{pmatrix},$$

respectivement.

Par définition de $\overline{\Gamma}$ on peut voir que $\overline{G}' = (\overline{\Gamma})_1$ comme dans la figure 3.6. On a que le cycle C défini par $E(C) = \{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,a\}\}$ est un cycle minimal de G, alors C est un cycle virtuel de G. Les chemins : P_1, P_2, P_3, P_4 définis par : $E(P_1) = \{\{a,e\},\{e,b\}\}$, $E(P_2) = \{\{b,f\},\{f,c\}\}$, $E(P_3) = \{\{c,g\},\{g,d\}\}$, $E(P_4) = \{\{d,h\},\{h,a\}\}$ sont des substitutions locales de $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{c,d\}$, $\{d,a\}$, respectivement, dans $\overline{G}'$. On a que C' posé par l'union de ces chemins est un cycle de $\overline{G}'$ mais C n'est pas un cycle minimal de $\overline{G}'$.

□

Maintenant on souhaite trouver la longueur minimale r d'un cycle $C' \in \mathcal{C}'$ et de là, ce qui nous montrera que la longuer minimale d'un cycle minimal de $\overline{G}'$ est $\geq r$.

Soient C un cycle minimal virtuel de G de longueur $|C|$, $e = \{x_e, x'_e\}$ une arête de C. Si e n'est plus une arête de $\overline{G}'$, pour obtenir un cycle dans $\mathcal{C}'$, e est remplacé par un chemin de x_e à x'_e de $\overline{G}'$ dans l'unique facette $\overline{F}_e$ de $\overline{\Gamma}$ qui contient e. On appellera $R(C)$ l'ensemble des arêtes de C qui ne sont plus des arêtes dans $\overline{G}'$, c.a.d.,

$$R(C) = \{e \in E(C) | e \notin E(\overline{G}')\}.$$

Donc pour tout $e \in R(C)$ il existe toujours au moins un chemin de x_e à x'_e. Soit F_e l'unique facette contenant e, on remarque que $M_{F_e} \neq 0$. On dira que ce chemin est un **remplacement minimal** de e dans $\overline{G}'$ s'il est de longueur minimale. Soient C_e un remplacement minimal de e et

$$t(e) = |E(C_e)|,$$

où $t(e)$ est la taille de tout remplacement minimal de e. On pose les sous-ensembles de $R(C)$ suivants :

$$R_1(C) = \{e \in R(C) : |F_e| = 2\} \text{ et}$$

$$R_2(C) = \{e \in R(C) : |F_e| \geq 3,\ F_e \setminus V_\Gamma(M_{F_e}) = \emptyset,\ , Y_1^{(F_e)} \neq \emptyset,\ x'_e = x_{m_F}^{(F)} \text{ et } |B_{m_{F_e}}(M_{F_e})| > 2\}.$$

3.7.5 Proposition. *Soient G un graphe qui n'est pas un graphe de cordes, $\Gamma := \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G, $\overline{\Gamma}'$ le complexe initial de son extension $\overline{\Gamma}$ tel qu'il existe un ordre admissible pour les facettes de Γ,à savoir, $F_1, \ldots, F_l$, et $\mathcal{C}$ l'ensemble des cycles minimaux virtuels de G. Alors pour chaque cycle minimal virtuel C de G, la longueur minimale d'un cycle de G' provenant de C dans $\mathcal{C}'$ est*

$$r(C) := |C| + |R(C)| + |R_2(C)| - |R_1(C)| + \sum_{e \in R_1(C)} |Y_e|.$$

En particulier $p_2(I_{\overline{\Gamma}'}) + 3 \leq \min_{C \in \mathcal{C}}(r(C))$.

Preuve. Comme la longueur minimale d'un cycle minimal de $\mathcal{C}'$ provenant de C est

$$r(C) = |C| + \sum_{e \in R(C)} (t(e) - 1),$$

il faut calculer $t(e)$ pour $e \in R(C)$ en utilisant le théorème 3.7.2. Comme $e \in R(C)$, on a qu'il existe une facette F_e de Γ tel que $M_{F_e} \neq 0$, disons :

$$M_{F_e} = \left(\begin{array}{cccc|ccc|c|ccc} x_e & y_{11}^{(F_e)} & \dots & y_{1n_1}^{(F_e)} & y_{21}^{(F_e)} & \dots & y_{2n_2}^{(F_e)} & \dots & y_{m_{F_e}1}^{(F_e)} & \dots & y_{m_{F_e}n_{m_{F_e}}}^{(F_e)} \\ y_{11}^{(F_e)} & y_{12}^{(F_e)} & \dots & x_1^{(F_e)} & y_{22}^{(F_e)} & \dots & x_2^{(F_e)} & \dots & y_{m_F 2}^{(F_e)} & \dots & x_{m_{F_e}}^{(F_e)} \end{array} \right)$$

et $e = \{x_0^{F_e}, x_k^{(F_e)}\}$ pour certain $k \in \{1, \dots, m_{F_e}\}$. De cette façon on a les cas suivants :

1. Soit $|F_e| = 2$, donc on peut supposer que M_{F_e} a la forme suivante :

$$M_{F_e} = \left(\begin{array}{cccc} x_0^{F_e} & y_1^{(F_e)} & \dots & y_{n_{F_e}}^{(F_e)} \\ y_1^{(F_e)} & y_2^{(F_e)} & \dots & x_1^{(F_e)} \end{array} \right)$$

   et $e = \{x_0^{(F_e)}, x_1^{(F_e)}\}$, alors e est toujours remplacé par le chemin qui a l'ensemble suivant d'arêtes : $\{\{x_0^{(F_e)}, y_{11}^{(F_e)}\}, \{y_{11}^{(F_e)}, y_{12}^{(F_e)}\}, \dots, \{y_{1n_1}^{(F_e)}, x_1^{(F_e)}\}\}$. Par conséquent ce chemin est un remplacement dans le cas $|F_e| = 2$.

2. Soit $|F_e| \geq 3$. On remarque trois cas :
   (a) Soit il n'existe pas $x \in F_e \setminus V_\Gamma(M_{F_e})$ tel que pour tout arête $f \in E(C)$, il existe une arête de x vers un extrem de f dans G et $Y_1^{(F_e)} \neq \emptyset$. Il faut remarquer les cas suivants :
      i. Soit $k = m_{F_e}$ et $|B_{m_{F_e}}(M_{F_e})| = 2$, alors le chemin avec l'ensemble des arêtes

$$\{\{x_0^{(F_e)}, y_{m_{F_e}1}^{(F_e)}\}, \{y_{m_{F_e}1}^{(F_e)}, x_{m_{F_e}}^{(F_e)}\}\},$$

      il existe toujours et c'est un remplacement de e.
      ii. Soit $k = {m_{F_e}}^{(F_e)}$ et $|B_{m_{F_e}}(M_{F_e})| > 2$, alors le chemin avec l'ensemble des arêtes

$$\{\{x_0^{(F_e)}, y_{j_{k'}1}^{(F_e)}\}, \{y_{j_{k'}1}^{(F_e)}, x_{k''}\}, \{x_{k''}, x_{m_{F_e}}^{(F_e)}\}\}, \text{ oú } 1 \leq k'' < k' \leq m_{F_e},$$

      existe toujours et il est un remplacement de e.
      iii. Soit $k < m_{F_e}$, alors le chemin avec l'ensemble des arêtes $\{\{x_0^{(F_e)}, y_{k'1}^{(F_e)}\}, \{y_{k'1}^{(F_e)}, x_k^{(F_e)}\}\}$, où $k' > k$, existe toujours et il est un remplacement de e.
   (b) Soit il n'existe pas $x \in F_e \setminus V_\Gamma(M_{F_e})$ tel que pour tout arête $f \in E(C)$, il existe une arête de x vers un extrem de f dans G et $Y_1^{(F_e)} = \emptyset$. Donc $k \neq 1$ et le chemin avec l'ensemble des arêtes $\{\{x_0^{(F_e)}, x_1^{(F_e)}\}, \{x_1^{(F_e)}, x_k^{(F_e)}\}\}$ existe toujours et il est un remplacement de e.

(c) Soit il existe $x \in F_e \setminus V_\Gamma(M_{F_e})$ tel que pour tout arête $f \in E(C)$, il n'existe pas une arête de x vers un extrem de f dans G. Donc le chemin avec l'ensemble des arêtes $\{\{x_0^{(F_e)}, x\}, \{x, x_k^{(F_e)}\}\}$, où $x \in F_e \setminus V_\Gamma(M_{F_e})$, existe toujours et il est un remplacement de e.

Donc si $e \in R(C)$

$$t(e) - 1 = \begin{cases} |Y_{F_e}| & \text{si } e \in R_1(C) \quad \text{(cas 1)}, \\ 2 & \text{si } e \in R_2(C) \quad \text{(cas 2.}a\text{.i)}, \\ 1 & \text{si } e \in R(C) \setminus (R_1(C) \cup R_2(C)) \quad \text{(les autres cas)}. \end{cases}$$

Ainsi pour chaque cycle minimal C de G, la longueur minimale d'un cycle de $\mathcal{C}'$ provenant de C est donné par le nombre

$$\begin{aligned} r(C) &= |C| + \textstyle\sum_{e \in R(C)} (t(e) - 1) \\ &= |C| + ((\textstyle\sum_{e \in R_1(C)} |Y_e|) + 2|R_2(C)| + (|R(C)| - |R_1(C)| - |R_2(C)|)) \\ &= |C| + |R(C)| + |R_2(C)| - |R_1(C)| + \textstyle\sum_{e \in R_1(C)} |Y_e|. \end{aligned}$$

Si D est un cycle minimal de $\overline{G}'$, par la remarque 3.7.3, $D \in \mathcal{C}'$ et par conséquent la longueur minimale d'un cycle minimal de $\overline{G}'$ est $\geq = \min_{C \in \mathcal{C}}(r(C))$ et du théorème 2.2.13 on peut conclure que :

$$p_2(I_{\overline{\Gamma}'}) + 3 \geq \min_{C \in \mathcal{C}}(r(C)).$$

■

3.7.6 Remarque. Soient G un graphe qui n'est pas un graphe de cordes, $\Gamma := \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ telle qu'il existe un ordre admissible pour les facettes de Γ, à savoir, $F_1, \ldots, F_l$. Comme $r(C) \geq |C|$, nous avons que $p_2(I_{\overline{\Gamma}'}) \geq p_2(I_\Gamma)$. De la définition 2.2.6, l'enoncé de la proposition 3.6.9 peut-être réécrit de la façon suivante : $p_2(I_\Gamma) < \infty$ si et seulement si $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) < \infty$.

Finalement, en utilisant la proposition 3.7.5 et la remarque 3.6.8 on a une borne inférieure pour $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$.

3.7.7 Proposition. *Soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendrés par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ telle qu'il existe un ordre admissible pour les facettes de Γ. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des cycles virtuels minimaux de G. Si G n'est pas un graphe de cordes, alors* $\min_{C \in \mathcal{C}}(r(C)) - 3 \leq p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) < \infty$.

■

Cette borne qu'on a trouvée est loin de la valeur de $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$ comme on peut le voir dans l'exemple suivant :

3.7.8 Exemple. Soit Γ le complexe de cliques engendré par le graphe G de la figure 3.7. Pour les facettes $\{a, b, c\}$ et $\{e, d\}$ nous associons respectivement les matrices suivantes :

$$M_1 = \left(\begin{array}{cccc|cc} a & x & y & z & v & w \\ x & y & z & c & w & b \end{array}\right), \; M_2 = \begin{pmatrix} d & u & s \\ u & s & e \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\overline{\Gamma}} = \; & (ad, ce, be, bd, xd, xe, xs, xu, yd, ye, ys, yu, zd, ze, zs, zu, vd, ve, vs, vu, wd, we, ws, wu, ua, \\ & ub, uc, sa, sb, sc, ay - x^2, az - xy, ac - xz, aw - xv, ab - xw, xz - y^2, zc - yz, xw - yv, \\ & xb - yw, yc - z^2, yw - zv, yb - cw, zw - cv, zb - cw, vb - w^2, ds - u^2, de - us, ue - s^2). \end{aligned}$$

De plus le complexe $\overline{\Gamma}$ est le complexe de cliques engendré par le graphe $\overline{G}$ de la figure 3.7. Nous ordonnons les facettes de Γ de la façon suivante : $F_1 = \{a, b, c\}$,$F_2 = \{d, e\}$, $F_3 = \{c, d\}$, $F_4 = \{a, e\}$, et nous voyons que cet ordre est un ordre admissible. Ainsi le complexe $\overline{\Gamma}'$ existe et c'est le complexe de clique engendré par le graphe $\overline{G}'$ dans la figure 3.7.

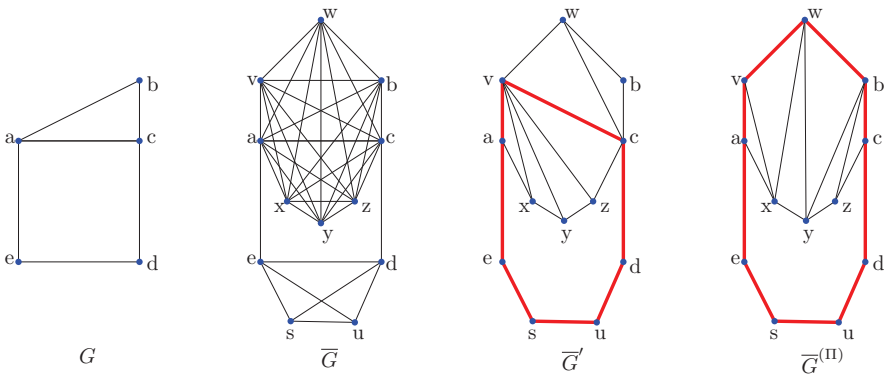


FIGURE 3.7 –

L'unique cycle minimal virtuel C (il est aussi un cycle minimal) de G est celui qui a comme ensemble des arêtes $E(C) = \{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, a\}\}$ et on a que l'ensemble des arêtes de C que ne sont plus des arêtes de $\overline{G}'$ est $R(C) = \{\{a, c\}, \{d, e\}\}$. Par ailleurs :

$$R_1(C) = \{e \in R(C) : |F_e| = 2, \; M_{F_e} \neq 0\} = \{d, e\} \text{ et}$$

$$R_2(C) = \{e \in R(C) : |F_e| \geq 3, \; x'_e = x^{(F)}_{m_F} \text{ et } |B_{m_{F_e}}(M_{F_e})| > 2\} = \emptyset.$$

Donc la longueur minimale d'un cycle de longueur ≥ 4 de $\overline{G}'$ est

$$r(C) \geq |C| + \sum_{e \in R_1(C)} |Y_e| + |R(C)| + |R_2(C)| - |R_1(C)| = 4 + 2 + 2 + 0 - 1 = 7.$$

Sur la figure 3.7 on voit que $\overline{G}'$ a effectivement un unique cycle minimal C' de longueur 7 avec comme ensemble des arêtes $E(C') = \{\{a, v\}, \{v, c\}, \{c, d\}, \{d, u\}, \{u, s\}, \{s, e\}, \{e, a\}\}$. Si

un autre cycle est de longueur ≥ 4, alors il a une longueur > 7. De cette façon on obtient que $4 = 7 - 3 \leq p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$. Or en utilisant Macaulay2 on obtient la table des nombres de Betti de $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$, qu'on écrit ci-dessus :

$\beta_{j,j+i}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	48	266	729	1224	1344	972	441	108	10	0
3	0	0	0	0	0	0	4	10	6	1

TABLE 3.1 – Betti-table de $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$.

Par ailleurs, en permutant les colonnes de la matrice M_1 par la permutation Π_1, on obtient :

$$\Pi_1(M_1) = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c} a & v & x & w & y & z \\ x & w & y & b & z & c \end{array}\right).$$

on voit que $\Gamma^{(\Pi_1)}$ est le complexe engendré par $G^{(\Pi_1)}$ de la figure 3.7 et les cycles minimaux de longueur minimale de $G^{(\Pi)}$ sont les cycles dont ensembles d' arêtes sont :

1. $\{\{a,v\},\{v,w\},\{w,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,u\},\{u,s\},\{s,e\},\{e,a\}\}$;
2. $\{\{a,x\},\{x,y\},\{y,z\},\{z,c\},\{c,d\},\{d,u\},\{u,s\},\{s,e\},\{e,a\}\}$;
3. $\{\{a,x\},\{x,y\},\{y,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,u\},\{u,s\},\{s,e\},\{e,a\}\}$;
4. $\{\{a,x\},\{x,w\},\{w,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,u\},\{u,s\},\{s,e\},\{e,a\}\}$.

Les longueurs de ces cycles est 9, donc $p_2(I_{\overline{\Gamma}^{(\Pi_1)}}) = 9 - 3 = 6$ et $\beta_{6,9}(I_{\overline{\Gamma}^{(\Pi_1)}}) = 4$ par le corollaire 2.2.15. Par la proposition 3.6.1 $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) =\geq 6 = p_2(I_{\overline{\Gamma}^{(\Pi_1)}})$. Or, d'aprés la table des nombres de Betti de $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ ci-dessus, nous voyons que $\beta_{6,9}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = 4$ et $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = 6 = p_2(I_{\overline{\Gamma}^{(\Pi_1)}})$.

□

Maintenant, on va améliorer la borne inférieure de $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$ dans le cas où G n'est pas un graphe de cordes, car dans ce cas $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = \infty$. Pour reussir, on va définir le concept de sustitution locale pour toute permutation de $\mathcal{P}_\Gamma$ qu'on a déjà étudié pour la permutation identité.

3.7.9 Définition. Soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ. Soient $\Pi \in \mathcal{P}_{\overline{\Gamma}}$ et $e = \{x_e, x'_e\}$ une arête de G. On dit que e est un arête vrituelle si $e \notin \overline{G}^{(\Pi)} := (\overline{\Gamma}^{(\Pi)})_1$. Soit F_e l'unique facette de Γ contenant e. Un **substitution Π-locale** de e dans $\overline{G}^{(\Pi)}$ est un chemin P_e de x_e vers x'_e dans $\overline{F}_e$ qui n'est pas de cordes et pour tout $x \in (V(C) \setminus e)$ il n'existe pas une arête dans $E(\overline{G}^{(\Pi)})$ de x à un sommet dans $V(P_e) \setminus e$.

3.7.10 Remarque. Du théorème 3.6.6 on peut conclure que pour toute permutation $\Pi \in \mathcal{P}_{\overline{\Gamma}}$ tout cycle minimal de $\overline{G}^{(\Pi)}$ est obtenu à partir d'un cycle Π-minimal virtuel C de G en changeant toute arête virtuelle e de C par une substitution Π-local de e dans $\overline{G}^{(\Pi)}$. Par ailleurs, si C est

un cycle minimal virtuel quand on change les arêtes virtuelles e de C par des substitutions Π-locales, on obtient un cycle de $\overline{G}^{\Pi}$ mais il n'est pas nécessairement un cycle minimal de $\overline{G}^{(\Pi)}$ comme on a déja vu au cas où Π est la permutation identité (voir example 3.7.4).

3.7.11 Définition. *Soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ et $\Pi \in \mathcal{P}_{\overline{\Gamma}}$. Soit C un cycle minimal virtuel de G. On pose par $\mathcal{C}^{\mathrm{sl}}_{\Pi}(C)$ tous les cycles de $\overline{G}^{(\Pi)}$ obtenus à partir de C en remplaçant chaque arête virtuelle de C par des substitutions Π-locales. On pose aussi $\mathcal{C}_{\Pi} = \cup_{C\in\mathcal{C}}\mathcal{C}^{\mathrm{sl}}(C)$.*

En posant $\mathcal{D}_{\Pi}$ la famille de tous les cycles minimaux de $\overline{G}^{\Pi}$, par la remarque 3.7.10 on a que $\mathcal{D}_{\Pi} \subset \mathcal{C}_{\Pi}$ et par consequent en utilisant le corollaire 2.2.15 on a :

$$p_2(I_{\overline{\Gamma}^{(\Pi)}}) + 3 \geq \min_{D\in\mathcal{D}_{\Pi}}|D| \geq \min_{C^{(\Pi)}\in\mathcal{C}_{\Pi}}|C^{(\Pi)}| \tag{3.5}$$

3.7.12 Définition. *Soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ et $\Pi \in \mathcal{P}_{\overline{\Gamma}}$. Soit C un cycle minimal virtuel de G et P_e une substitution locale dans $\overline{G}^{(\Pi)}$ de longueur minimale et on notera cette longueur par par $t_{\Pi}(e)$. Si e n'est pas une arête virtuel de G, on pose $t_{\Pi}(e) := 1$.*

De cette définition et de l'équation 3.5 on a :

$$p_2(I_{\overline{\Gamma}^{(\Pi)}}) + 3 \geq \min_{C^{(\Pi)}\in\mathcal{C}_{\Pi}}|C^{(\Pi)}| = \min_{C\in\mathcal{C}}(\sum_{e\in E(C)} t_{\Pi}(e)) \tag{3.6}$$

où $\mathcal{C}$ sont tous les cycles virtuels minimaux de G. Ainsi, on essaiera de calculer $t_{\Pi}(e)$ pour tout arête virtuel d'un cycle minimal virtuel de G.

3.7.13 Proposition. *Soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ. Soit $\Pi \in \mathcal{P}_{\Gamma}$. Pour toute arête virtuelle e de G il existe une facette unique F contenant à e telle que $e = \{x_0^{(F)}, x_k^{(F)}\}$ et $Y_k^{(F)} \neq \emptyset$. Nous avons :*

1. *S'il existe $x \in F_e \setminus V_{\Gamma}(M_{F_e})$ tel que pour tout sommet $x' \in V(C)$, $\{x, x'\} \notin E(\Gamma)$, alors $t_{\Pi}(e) = 2$.*
2. *Au contraire, on pose $J^{\mathrm{ls}}_F = \{j \in \{1,\ldots,m_F\} : \forall x' \in (V(C)\setminus e),\ \{x_j^{(F)}, x'\} \notin E(\Gamma)\} \cup \{k\}$*
   (a) *Si $\min_{j\in J^{\mathrm{ls}}_{F_e}}(|Y_j^{(F)}|) < |Y_k^{(F)}|$, alors $t_{\Pi}(e) \leq \min_{1\leq j\leq m_F}(|Y_j^{(F)}|) + 2$.*
   (b) *Si $\min_{j\in J^{\mathrm{ls}}_{F_e}}(|Y_j^{(F)}|) = |Y_k^{(F)}|$, alors $t_{\Pi}(e) \leq \min_{1\leq j\leq m_F}(|Y_j^{(F)}|) + 1$.*

Preuve. Soit $\Pi \in \mathcal{P}_{\Gamma}$

1. S'il existe $x \in F_e \setminus V_{\Gamma}(M_{F_e})$ tel que pour tout sommet $x' \in V(C)$, $\{x, x'\} \notin E(\Gamma)$, alors $\{x_0^{(F)}, x\}, \{x, x_k^{(F)}\} \in E(\overline{G}^{(\Pi)})$ et $\{x_0^{(F)}, x\}, \{x, x_k^{(F)}\}$ est un remplacement de e dans $\overline{G}^{(\Pi)}$ et $t_{\Pi}(e) = 2$.

2. On peut supposer que M_F a une des formes suivantes : Soit

$$M_{F_e} = \left(\begin{array}{cccc|ccc|c|ccc} x_0^{(F)} & y_{11}^{(F)} & \dots & y_{1n_1}^{(F)} & y_{21}^{(F)} & \dots & y_{2n_2}^{(F)} & \dots & y_{m_F1}^{(F)} & \dots & y_{m_{F_e}n_{m_F}}^{(F_e)} \\ y_{11}^{(F)} & y_{12}^{(F)} & \dots & x_1^{(F)} & y_{22}^{(F)} & \dots & x_2^{(F)} & \dots & y_{m_F2}^{(F)} & \dots & x_{m_F}^{(F)} \end{array} \right), \text{ soit}$$

$$M_F = \left(\begin{array}{c|ccc|c|ccc} x_0^{(F)} & y_{21}^{(F)} & \dots & y_{2n_2}^{(F)} & \dots & y_{m_F1}^{(F)} & \dots & y_{m_Fn_{m_F}}^{(F)} \\ x_1^{(F)} & y_{22}^{(F)} & \dots & x_2^{(F)} & \dots & y_{m_F2}^{(F)} & \dots & x_{m_F}^{(F)} \end{array} \right).$$

L'analyse suivant est valable pour quoi qu'il soit la matrice M_{F_e}. À partir d'ici jusqu'à la fin de la preuve on écrira z à la place de $z^{(F)}$.

Comme x_0, y_{j1}, avec $j \in \{2, \dots, m_F\}$ sont uniquement dans la première ligne de M_F et que $y_{1,1}$ apparait uniquement dans la même ligne et la même colonne que x_0 dans M_F, nous avons que pour tout $j \in \{1, \dots, m_F\}$, $x_0 y_{j1}$ n'est jamais un terme initial d'un mineur 2×2 de M_F avec l'ordre $>_\Pi$, ainsi, grâce à la remarque 3.4.14, $\{x_0, y_{j1}\}$ est toujours une arête de $\overline{G}^{(\Pi)}$. Comme Π est une permutation admissible (voir définition 3.4.4) pour tous $j \in \{1, \dots, m_F\}$ et $i \in \{1, \dots, n_i\}$, ni $y_{ji}y_{ji+1}$ ni $y_{jn_j}x_j$ ne sont pas des termes initiaux des mineurs 2×2 de M_F avec l'ordre $>_\Pi$, ainsi, par la remarque 3.4.14, $\{y_{ji}, y_{ji+1}\}, \{y_{jn_j}, x_j\} \in E(\overline{G}^{(\Pi)})$. Finalement, comme x_j avec $j \in J_{F_e}^{\text{ls}}$ est uniquement à la deuxième ligne de M_F, nous avons que pour tout $j \in J_{F_e}^{\text{ls}}$, $x_k x_j$ n'est jamais un terme initial des mineurs 2×2 de M_F avec l'ordre $>_\Pi$, ainsi, par la remarque 3.4.14, $\{x_k, x_j\} \in \overline{G}^{(\Pi)}$. Nous pouvons donc construire pour tout $j \in J_{F_e}^{\text{ls}}$ un chemin P_j de x_0 vers x_k où il n'y a pas de cordes, avec pour ensemble d'arêtes :
– $E(P_j) = \{\{x_0, y_{i1}\}, \{y_{i1}, y_{i2}\}, \dots, \{y_{in_i}, x_i\}, \{x_i, x_k\}\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, m_F\}$, et
– $E(P_k) = \{\{x_0, y_{k1}\}, \{y_{k1}, y_{k2}\}, \dots, \{y_{kn_k}, x_k\}\}$.
De cette façon :

(a) Si $\min_{j \in J_{F_e}^{\text{ls}}}(|Y_j^{(F)}|) < |Y_k^{(F)}|$, alors il existe $j \in J_{F_e}^{\text{ls}}$, tel que P_j est un chemin de x_0 vers x_k de longueur $|P_j| \leq |P_{j'}|$ pour tout $j' \in J_{F_e}^{\text{ls}}$ et ainsi $t_\Pi(e) \leq |P_j| = \min_{j \in J_{F_e}^{\text{ls}}}(|Y_j^{(F)}|) + 2$.

(b) Si $\min_{j \in J_{F_e}^{\text{ls}}}(|Y_j^{(F)}|) = |Y_k^{(F)}|$, alors $|P_k| \leq |P_j|$ avec $j \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, m_F\}$, et ainsi $t_\Pi(e) \leq |Y_k^{(F)}| + 1 = \min_{j \in J_{F_e}^{\text{ls}}}(|Y_j^{(F)}|) + 1$.

■

Maintenant, on va chercher une permutation Π' pour laquelle les inégalités au sens large de la proposition 3.7.13 sont des égalités. De cette façon, en posant $\mathcal{C} = \{C \text{ cycles minimal } \Pi - \text{virtuel de } G\}$, on aura que pour toute permutation $\Pi \in \mathcal{P}_{\overline{\Gamma}}$:

$$p_2(I_{\overline{\Gamma}^{(\Pi)}}) \leq \max_{\Pi \in \mathcal{P}_{\overline{\Gamma}}} \left(p_2(I(\overline{\Gamma}^{(\Pi)})) \right) = p_2(I_{\overline{\Gamma}^{(\Pi')}}).$$

Comme précédemment, soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ tel qu'il existe un ordre admissible pour les facettes de Γ. À chaque facette F de Γ telle que $F \neq \overline{F}$, on a associé à F une matrice

$$M_F = \left(\begin{array}{cccc|ccc|c|ccc} x_0^{(F)} & y_{i_1 1}^{(F)} & \cdots & y_{1 n_1}^{(F)} & y_{i_2 1}^{(F)} & \cdots & y_{2 n_2}^{(F)} & \cdots & y_{m_F 1}^{(F)} & \cdots & y_{m_F n_{m_F}}^{(F)} \\ y_{11}^{(F)} & y_{12}^{(F)} & \cdots & x_1^{(F)} & y_{22}^{(F)} & \cdots & x_2^{(F)} & \cdots & y_{m_F 2}^{(F)} & \cdots & x_{m_F}^{(F)} \end{array} \right).$$

La matrice M_F peut être representée de la façon suivante :

$$M_F = (B_0^{(F)m} | B_1^{(F)} | \cdots | B_{m_F}^{(F)}),$$

où

$$B_0^{(F)} = \left(\begin{array}{c} x_{i_0}^{(F)} \\ y_{i_1 1}^{(F)} \end{array} \right) \text{ et } B_j^{(F)} = \left(\begin{array}{ccc} y_{i_j 1}^{(F)} & \cdots & y_{i_j n_{j_1}}^{(F)} \\ y_{i_j 2}^{(F)} & \cdots & x_{i_j}^{(F)} \end{array} \right),$$

pour $j = 1, \ldots, m_F$

3.7.14 Définition. Soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ et F une facette de Γ pour laquelle on associe une matrice M_F. On note $\Pi_F^*(M_F)$ la permutation de colonnes de la matrice M_F avec laquelle on obtient :

$$\Pi_F^*(M_F) = (B_0^F | B_1^{\prime(F)} | \cdots | B_s^{\prime(F)}),$$

où $s = \max\{n_1, \ldots, n_{m_F}\}$ et où, pour $j \in \{1, \ldots, m_F\}$, $B_j^{\prime(F)}$ est la matrice formée par toutes les j-ièmes colonnes des blocs $B_1^{(F)}, \cdots, B_{m_F}^{(F)}$ ordonnées dans l'ordre standard. Soient $F_1, \ldots, F_k, F_{k+1}, \ldots, F_l$ les facettes de Γ telles que pour $i = 1, \ldots, k$, $F_i \neq \overline{F}_i$ et pour $i = k+1, \ldots, l$ $F_i = \overline{F}_i$. On pose $\Pi^* = (\Pi_{F_1}^*, \ldots, \Pi_{F_k}^*)$.

La proposition suivante découle immédiatement de la définition 3.7.14

3.7.15 Proposition. *Soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ et F une facette de Γ telle que $F \neq \overline{F}$. Alors Π_F^* est une permutation admissible (voir définition 3.4.4) et par conséquent $\Pi^* \in \mathcal{P}_{\overline{\Gamma}}$.* ∎

3.7.16 Proposition. *Soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ telle qu'il existe un ordre admissible pour les facettes de Γ, à savoir, $F_1, \ldots, F_l$. Pour toute arête e virtuelle de G nous avons que $e = \{x_0^F, x_k^F\}$ pour une certaine facette de F et $Y_k^F \neq \emptyset$. Alors :*

1. *S'il existe $x \in F_e \setminus V_\Gamma(M_{F_e})$ tel que pour tout sommet $x' \in V(C)$, $\{x, x'\} \notin E(\Gamma)$, alors $t_\Pi(e) = 2$.*
2. *Au contraire, on pose $J_F^{\text{ls}} = \{j \in \{1, \ldots, m_F\} : \forall x' \in (V(C) \setminus e),\ \{x_j^{(F)}, x'\} \notin E(\Gamma)\} \cup \{k\}$*
   (a) Si $\min_{j \in J_{F_e}^{\text{ls}}}(|Y_j^{(F)}|) < |Y_k^{(F)}|$, alors $t_{\Pi^*}(e) = \min_{j \in J_{F_e}^{\text{ls}}}(|Y_j^{(F)}|) + 2$.

(b) Si $\min_{j\in J^{\text{ls}}_{F_e}}(|Y_j^{(F)}|) = |Y_k^{(F)}|$, *alors* $t_{\Pi^*}(e) = \min_{j\in J^{\text{ls}}_{F_e}}(|Y_j^{(F)}|) + 1$.

Preuve. De la proposition 3.7.13 nous avons que les énoncés (1) est vrais. Il ne nous reste qu'à démontrer l'énoncé (2)

2. Comme e est une arête virtuelle de G il y a une matrice $M_F \neq 0$ qu'on peut supposer de la forme suivante :

$$M_F = \left(\begin{array}{cccc|ccc|c|ccc} x_0^{(F)} & y_{11} & \dots & y_{1n_1} & y_{21} & \dots & y_{2n_2} & \dots & y_{m_F1} & \dots & y_{m_Fn_{m_F}} \\ y_{11} & y_{12} & \dots & x_1 & y_{22} & \dots & x_2 & \dots & y_{m_F2} & \dots & x_{m_F} \end{array}\right).$$

À partir d'ici jusqu'à la fin de la preuve on écrira z à la place de $z^{(F)}$. On pose $\eta_e = \min_{1\leq j\leq m_F}(|Y_j^{(F)}|)$. D'après la remarque 3.4.14 et la définition de $\Pi_F^*(M_F)$, on note que $\{x_0, y_{j1}\}$ avec $j \in \{1,\dots,m_F\}$ sont toutes les arêtes de $\overline{G}^{(\Pi^*)}$ avec x_0 comme sommet ; de plus, si $\{y_{ji}, z\}$ est une arête de $\overline{G}^{(\Pi^*)}$, alors $z \neq y_{ji}$. Soit z est un élément qui apparait dans la deuxième ligne de $\Pi_F^*(M_F)$ de la colonne où apparait y_{ji} dans la première ligne, soit il est un élément de la deuxième ligne de $\Pi_F^*(M_F)$ dans une colonne antérieure à la colonne où apparait y_{ji} dans la première ligne. En outre, $\{x_j, x_{j'}\} \in E(\overline{G}^{(\Pi*)})$ pour tout $j \in J^{\text{ls}}_{F_e}$ et pour $j = 1,\dots,s = \max\{n_1,\dots,n_{m_F}\}$, tout élément z de la deuxième ligne du bloc $B_j'^{(F)}$ different de x_j, with $j \in \{1,\dots,m_F\}$, apparait dans la première ligne du bloc $B_{j+1}'^{(F)}$ de $\Pi_F^*(M_F)$ (voir définition 3.7.14). Ainsi, un chemin de x_0 vers x_k dans $\overline{G}^{(\Pi)}$ doit passer par au moins un élément de la première ligne du bloc B_1', jusqu'au B_{η_e}', donc toute chemin P de longueur minimale de x_0 vers x_k doit contenir dans son ensemble de sommets $V(P)$ un ensemble $V' = \{z_1,\dots,z_{\eta_e}\}$ tel que $z_i \in L_1(B_j')^{(F)}$. Par ailleurs, on remarque qu'on a les deux cas suivants :

   (a) si $\eta_e := \min_{j\in J^{\text{ls}}_{F_e}}(|Y_j^{(F)}|) < |Y_k^{(F)}|$, alors $x_e \in B_i'$ avec $n_e < i < s$; de plus, on remarque que pour tout élément $z \in L_1(B_{\eta_e}')^{(F)}$ tel qu'il y a un chemin de z vers x_0, le chemin est de longueur ≥ 2. Dans le cas contraire, comme $z \in L_1(B_{\eta_e}')^{(F)}$, z sérait relié uniquement à des éléments qui sont dans la deuxième ligne de $\Pi_F^*(M_F)$ mais qui sont dans une colonne à gauche de la colonne où z apparait, ou bien dans la même colonne que z ; par conséquent x_k serait dans B_j' avec $1 \leq j \leq \eta_e$, mais $x_k \in B'j$ avec $\eta_e < j < s$, donc s'il y a un chemin de z vers x_0, ce chemin est de longueur ≥ 2. Par contre, soit $x_k \in B_j'$ avec $\eta_e < j < s$, le chemin $R \subset \overline{G}^{(\Pi)}$ avec comme ensemble des arêtes

$$E(R) = \{\{x_0, y_{j'1}\}, \{y_{j'1}, y_{j'2}\}, \dots, \{y_{j'\eta e}, x_{j'}\}, \{x_{j'}, x_e'\}\}$$

   est un chemin de x_0 vers x_k et, de notre raisonnement précédent, on déduit que R est un remplacement de e dans $\overline{G}^{(\Pi)}$ et de cette façon nous concluons que $t_{\Pi^*}(e) = \eta_e + 2$.

   (b) si $\eta_e := \min_{j\in J^{\text{ls}}_{F_e}}(|Y_j^{(F)}|) = |Y_k^{(F)}|$, alors, pour $1 \leq j' \leq, m_F$ avec $n_{j'} = |Y_{j'}^{(F)}| = \eta_e$, le chemin $R' \subset \overline{G}^{(\Pi^*)}$ avec l'ensemble des arêtes

$$E(R') = \{\{x_0, y_{k1}\}, \{y_{k1}, y_{k2}\}, \dots, \{y_{k\eta_e}, y_{k\eta_e+1}\}, \{y_{kn_e+1}, x_k\}\}$$

est un remplacement de e dans $\overline{G}^{(\Pi)}$. Ainsi $t_{\Pi^*}(e) = \eta_e + 1$. ∎

3.7.17 Remarque. *Soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ telle qu'il existe un ordre admissible pour les facettes de Γ, à savoir, $F_1, \ldots, F_l$. Alors pour toute $\Pi \in \mathcal{P}_\Gamma$*

$$\min_{C\in\mathcal{C}}(\sum_{e\in E(C)} t_\Pi(e)) \leq \min_{C\in\mathcal{C}}(\sum_{e\in E(C)} t_{\Pi^*}(e)).$$

Maintenant on est prêt à donner une meilleure borne inférieure de $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$ que celle obtenue dans la proposition 3.7.7. Mais avant, pour chaque cycle Π-minimal virtuel C de G, on pose :

$$R^{(\Pi^*)}(C) = \{e \in E(C) | e \notin E(\overline{G}^{(\Pi^*)})\}.$$

Donc, pour chaque $e \in R^{(\Pi^*)}(C)$ il existe une facette F_e unique de Γ telle que $F_e \neq \overline{F}_e = F_e \cup Y^{(F_e)}$, où $Y^{(F_e)} = \bigcup_{i=1}^{m_{F_e}} Y_i^{(F_e)}$ et $e = \{x_0^{(F_e)}, x_k^{(F_e)}\}$, par définition d'extension binomial. Pour chaque $e \in R^{(\Pi^*)}(C)$, soient $J_{F_e}^{\text{ls}} = \{j \in \{1, \ldots, m_F\} : \forall x' \in (V(C)\setminus e),\ \{x_j^{(F)}, x'\} \notin E(\Gamma)\} \cup \{k\}$, $\eta_e := \min_{j\in J_{F_e}^{\text{ls}}}(|Y_j^{(F_e)}|)$ et nous posons les sous-ensembles de $R^{\Pi}(C)$ suivants :
$R_1^{(\Pi^*)}(C) = \{e \in R^{(\Pi^*)}(C) | \exists x \in F_e \setminus V_\Gamma(M_{F_e}),\ \forall x' \in V(C),\ \{x, x'\} \notin E(\overline{\Gamma})\}$;
$R_2^{(\Pi^*)}(C) = \{e \in R^{\Pi^*}(C) \setminus R_1^{(\Pi^*)}(C) | F_e \setminus V_\Gamma(M_{F_e}) = \emptyset,\ \text{et } |Y_k^{(F_e)}| > \eta_e\}$;
$R_3^{(\Pi^*)}(C) = \{e \in R^{\Pi^*}(C) \setminus R_1^{(\Pi^*)}(C) | F_e \setminus V_\Gamma(M_{F_e}) = \emptyset,\ \text{et } |Y_k^{(F_e)}| = \eta_e\}$.

3.7.18 Théorème. *Soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ telle qu'il existe un ordre admissible pour les facettes de Γ, à savoir, $F_1, \ldots, F_l$. Alors*

1. $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) \geq \min_{C^{(\Pi^*)}\in\mathcal{C}_{\Pi^*}}(|C^{(\Pi)}|) - 3$.
2. $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) \geq= \min_{C\in\mathcal{C}}\left(|C| + |R_1^{(\Pi^*)}(C)| + |R_2^{(\Pi^*)}(C)| + \sum_{e\in R_2^{(\Pi^*)}(C)\cup R_3^{(\Pi^*)}(C)} \eta_e\right) - 3$.

Preuve.

1. De la proposition 3.7.16 on a que pour tout $\Pi \in \mathcal{P}$ et tout cycle minimal virtuel C de G :

$$\sum_{e\in E(C)} t_\Pi(e) \leq \sum_{e\in E(C)} t_{\Pi^*}(e).$$

   De plus, par la proposition 3.6.1 et l'équation 3.6 on a :

$$p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) \geq p_2(I_{\overline{\Gamma}^{(\Pi^*)}}) \geq \min_{C^{(\Pi^*)}\in\mathcal{C}_{\Pi^*}}(|C^{(\Pi)}|) - 3.$$

2. De l'équation 3.6

$$\min_{C^{(\Pi^*)}\in\mathcal{C}_{\Pi^*}}|C^{(\Pi)}| = \min_{C\in\mathcal{C}}(\sum_{e\in E(C)} t_{\Pi^*}(e)) \geq \min_{C\in\mathcal{C}}(\sum_{e\in E(C)} t_\Pi(e)).$$

En plus de la proposition 3.7.16, on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{e\in C} t_{(\Pi^*)}(e) &= \sum_{e\in E(C)-R^{(\Pi^*)}(C)} t_{\Pi^*}(e) + \sum_{e\in R_1^{(\Pi^*)}(C)} t(e) + \sum_{e\in R_2^{(\Pi*)}(C)} t_{\Pi^*}(e) + \sum_{e\in R_3^{(\Pi^*)}(C)} t_{\Pi^*}(e)\\ &= \sum_{e\in E(C)-R^{(\Pi^*)}(C)} 1 + \sum_{e\in R_1^{(\Pi^*)}(C)} 2 + \sum_{e\in R_2^{(\Pi^*)}(C)} (\eta_e+2) + \sum_{e\in R_3^{(\Pi^*)}(C)} (\eta_e+1)\\ &= \sum_{e\in E(C)} 1 + \sum_{e\in R_1^{(\Pi^*)}(C)} 1 + \sum_{e\in R_2^{(\Pi^*)}(C)} 1 + \sum_{e\in R_2^{(\Pi^*)}(C)\cup R_3^{(\Pi^*)}(C)} (\eta_e)\\ &= |C| + |R_1(C)| + |R_2(C)| + \sum_{e\in R_2^{(\Pi^*)}(C)\cup R_3^{(\Pi^*)}(C)} (\eta_e).\end{aligned}$$

Alors, du point 1. on a :

$$p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) \geq \min_{C\in\mathcal{C}}(|C| + |R_1^{(\Pi^*)}(C)| + |R_2^{(\Pi^*)}(C)| + \sum_{e\in R_2^{(\Pi^*)}(C)\cup R_3^{(\Pi^*)}(C)} \eta_e) - 3.$$

■

3.7.19 Exemple. Nous considérerons le complexe de cliques $\Gamma = \Gamma(G)$ et l'extension $\overline{\Gamma}$ de l'exemple 3.7.8. Donc :

$$\Pi^*(M_1) = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c} a & x & v & y & w & z \\ x & y & w & z & b & c \end{array}\right) \text{ et } \Pi^*(M_2) = M_2 = \begin{pmatrix} d & u & s \\ u & s & e \end{pmatrix},$$

L'unique cycle minimal C de G est celui qui a comme ensemble des arêtes $E(C) = \{\{a,c\},\{c,d\},\{d,e\},\{e,a\}\}$ et nous avons que l'ensemble des arêtes de C qui ne sont plus des arêtes de $\overline{\Gamma}^{(\Pi^*)}$ est $R^{(\Pi^*)}(C) = \{\{a,c\},\{d,e\}\}$. Ainsi $\eta_{\{a,c\}} = 2$, $\eta_{\{d,e\}} = 2$ et
$R_1^{(\Pi^*)}(C) = \{e \in R^{(\Pi^*)}(C) | \exists x \in F_e \setminus V_\Gamma(M_{F_e}),\ \forall x' \in V(C),\ \{x,x'\} \notin E(\overline{\Gamma})\} = \emptyset$;
$R_2^{(\Pi^*)}(C) = \{e \in R^{\Pi^*}(C) \setminus R_1^{(\Pi^*)}(C) | F_e \setminus V_\Gamma(M_{F_e}) = \emptyset,\ \text{et } |Y_k^{(F_e)}| > \eta_e\} = \{\{d,e\}\}$; et
$R_3^{(\Pi^*)}(C) = \{e \in R^{\Pi^*}(C) \setminus R_1^{(\Pi^*)}(C) | F_e \setminus V_\Gamma(M_{F_e}) = \emptyset,\ \text{et } |Y_k^{(F_e)}| = \eta_e\} = \{\{a,d\}\}$.
Alors, grâce au théorème 3.7.18

$$\begin{aligned}p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) &\geq \min_{C\in\mathcal{C}}(|C| + |R_1^{(\Pi^*)}(C)| + |R_2^{(\Pi^*)}(C)| + \sum_{e\in R_{2,3}^{(\Pi^*)}(C)} \eta_e) - 3\\ &= (4+0+1+(2+2)) - 3\\ &= 6.\end{aligned}$$

□

Chapitre 4

Propriété $N_{2,p}$ pour certaines extensions binomiales

Soient G un graphe à n sommets, Γ le complexe de cliques engendré par G, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ. Dans ce chapitre on étudiera deux cas de l'extension binomiale $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}} = I_{\overline{\Gamma}} + J_{\overline{\Gamma}}$. D'abord le cas où $J_{\overline{\Gamma}}$ est un idéal torique ; on trouvera pour certains cas une borne supérieure de $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$. De plus on verra qu'avec d'autres restrictions la borne supérieure coïncide avec la borne inférieure qu'on a trouvé dans le théorème 3.7.18. De cette façon, dans certains cas, on calculera la valeur exacte de $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$. Dans le deuxième cas, nous considérerons le cas où G est un graphe de cordes et nous calculerons tous les nombres de Betti de $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ en utilisant le théorème 2.3.8.

4.1 Extension binomiale torique d'un graphe

4.1.1 Notation. Soient G un graphe à n sommets, Γ est le complexe de cliques engendré par G, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ, $m = |V(\overline{\Gamma})|$ et $F_1, \ldots, F_k, F_{k+1}, \ldots, F_l$ un ordre admissible sur les facettes de Γ, où $F_i \neq \overline{F}_i$ avec $i \in \{1, \ldots, k\}$ et $F_i = \overline{F}_i$ avec $i \in \{k+1, \ldots, l\}$. De plus, on notera $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ l'ensemble de variables qu'on identifie avec les sommets de Γ, $\mathbf{y}$ l'ensemble de variables qu'on identifie avec les sommets de $\overline{\Gamma}$ qui ne sont pas sommets de $\overline{\Gamma}$ et $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Ainsi I_Γ est un idéal de $\mathbb{k}[\mathbf{x}]$, et $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ est un idéal de $\mathbb{k}[\mathbf{z}]$. Étant donnée F une facette de Γ on nomme $V_\Gamma(M_F)$ l'ensemble des sommets de Γ qui apparaissent en M_F, si M_F est défini ; sinon $V_\Gamma(M_F) = \emptyset$. En plus $V_{\overline{\Gamma}}(M_F)$ sont tous les éléments de $\overline{F}$ qui apparaissent dans M_F.

L'objectif de cette section est de trouver $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$ dans le cas où $J_{\overline{\Gamma}}$ est un idéal torique. Dans cette perspective, on utilisera la formule de Bruns-Herzog (voir 1.7.6). Pour pouvoir appliquer cette formule on a besoin de prouver que $I_{\overline{\Gamma}}$ satisfait l'hypothèse suivante : si $z^\alpha - z^\beta \in J_{\overline{\Gamma}}$ tel que $z^\alpha \in I_{\overline{\Gamma}}$, donc $z^\beta \in I_{\overline{\Gamma}}$. Pour montrer que cette hypothèse est satisfaite, on utilisera le lemme suivant :

4.1.2 Lemme. *Soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ son complexe de cliques, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ telle que $J_{\overline{\Gamma}}$ est un idéal torique. Soit F une facette de Γ telle que $F \neq \overline{F}$. Pour*

tout mineur 2×2 *de la matrice* M_F, $\mathbf{z}^\alpha - \mathbf{z}^\beta$, *et tout* $\gamma \in \mathbb{N}^m$ *nous avons que* $\mathbf{z}^{\gamma+\alpha} \in I_{\overline{\Gamma}}$ *si et seulement si* $\mathbf{z}^{\gamma+\beta} \in I_{\overline{\Gamma}}$. *En particulier si* $\mathbf{z}^{\gamma+\alpha} \in I_{\overline{\Gamma}}$, *alors* $\mathbf{z}^\gamma(\mathbf{z}^\alpha - \mathbf{z}^\beta) \in I_{\overline{\Gamma}}$.

Preuve. Pour montrer que $\mathbf{z}^{\gamma+\alpha} \in I_{\overline{\Gamma}}$ si et seulement si $\mathbf{z}^{\gamma+\beta} \in I_{\overline{\Gamma}}$, il suffit de montrer que si $\mathbf{z}^{\gamma+\alpha} \in I_{\overline{\Gamma}}$ alors $\mathbf{z}^{\gamma+\beta} \in I_{\overline{\Gamma}}$, car $\mathbf{z}^\beta - \mathbf{z}^\alpha = -(\mathbf{z}^\alpha - \mathbf{z}^\beta)$ est un mineur de M_F.

Comme $\mathbf{z}^\alpha - \mathbf{z}^\beta$ est un mineur 2×2 de la matrice M_F, nous devons avoir $\gamma \neq 0$, car sinon $\mathbf{z}^\alpha \in I_\Gamma$, ce qui par définition de M_F, n'est pas possible. Par ailleurs, comme $\mathbf{z}^{\gamma+\alpha} \in I_{\overline{\Gamma}}$, il existe $z_1, z_2 \in V(\overline{\Gamma})$ tels que $z_1 z_2 \in I_{\overline{\Gamma}}$ et $z_1 z_2 | z^{\gamma+\alpha}$. Nous avons trois cas :

1. Soit $z_1 | \mathbf{z}^\alpha$ et $z_2 | \mathbf{z}^\alpha$. Donc $z^\alpha \in I_\Gamma$, mais nous avons déjà dit que par définition de M_F, cela n'est pas possible.

2. Soit $z_1 | \mathbf{z}^\alpha$ ou $z_2 | \mathbf{z}^\alpha$ mais pas tous les deux à la fois. Alors, nous pouvons supposer $z_1 | \mathbf{z}^\alpha$ et $z_2 \nmid \mathbf{z}^\alpha$; donc $z_2 | \mathbf{z}^\gamma$. Comme $z_1 | \mathbf{z}^\alpha$, nous avons que $z_1 \in \overline{F}$. En outre, $z_1 z_2 \in I_{\overline{\Gamma}}$, donc $z_2 \notin \overline{F}$ et il existe F' facette de Γ telle que $z_2 \in \overline{F'}$. Comme $\mathbf{z}^\alpha - \mathbf{z}^\beta$ est un mineur 2×2 de M_F, il existe $z_1', z_2' \in V_{\overline{\Gamma}}(M_F) \subset \overline{F}$ tels que $\mathbf{z}^\beta = z_1' z_2'$ et nous avons deux cas :
   (a) $z_1' = z_2'$. Alors $z_1' \in Y^{(F)}$, d'où $z_1' \notin \overline{F'}$.

   (b) $z_1' \neq z_2'$. Alors $z_1' \notin \overline{F}'$ ou $z_2' \notin \overline{F}'$ pour tout F' facette de Γ telle que $z_2 \in \overline{F}$. Dans le cas contraire, c'est à dire s'il exise F' facette de Γ telle que $z_2 \in \overline{F}$ et $z_1', z_2' \in \overline{F}'$, alors $\{z_1', z_2'\} \in \overline{F} \cap \overline{F'}$, donc $\{z_1', z_2'\} \in F \cap F'$ et $\{z_1', z_2'\}$ n'est pas une arête propre de Γ. Comme $\mathbf{z}^\alpha - z_1' z_2'$ est un mineur de M_F, on a que $x_0^F \in \{z_1', z_2'\}$, donc par définition de $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$, $\{z_1', z_2'\}$ est une arête propre de Γ. Par conséquent $z_1' \notin \overline{F'}$ ou $z_2' \notin \overline{F'}$ pour tout F' facette de Γ telle que $z_2 \in \overline{F}$.

   Ainsi, dans le deux cas il existe $z' \in \overline{F}$ tel que $z' | \mathbf{z}^\beta$ et $z' \notin \overline{F'}$ pour tout F' facette de Γ telle que $z_2 \in \overline{F}$. En conséquence $z' z_2 \in I_\Gamma$. De plus $z' z_2 | \mathbf{z}^{\gamma+\beta}$, donc $\mathbf{z}^{\gamma+\beta} \in I_{\overline{\Gamma}}$.

3. Soit $z_1 \nmid \mathbf{z}^\alpha$ et $z_2 \nmid \mathbf{z}^\alpha$. Alors $z_1 z_2 | \mathbf{z}^\gamma$. Donc $z_1 z_2 | \mathbf{z}^{\gamma+\beta}$ et de cette façon $\mathbf{z}^{\gamma+\beta} \in I_{\overline{\Gamma}}$.

■

4.1.3 Proposition. *Soient* G *un graphe,* $\Gamma = \Gamma(G)$ *son complexe de cliques,* $\overline{\Gamma}$ *une extension binomiale de* Γ *où* $J_{\overline{\Gamma}}$ *est torique. Si* $\mathbf{z}^\alpha - \mathbf{z}^\beta \in J_{\overline{\Gamma}}$ *tel que* $\mathbf{z}^\alpha \in I_{\overline{\Gamma}}$, *alors* $\mathbf{z}^\beta \in I_{\overline{\Gamma}}$.

Preuve. Comme $\mathbf{z}^\alpha - \mathbf{z}^\beta \in J_{\overline{\Gamma}}$, il existe $a_1, \ldots, a_n \in \Bbbk$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{N}^m$, $F_1, \ldots, F_n$ facettes de Γ et $b_1, \ldots, b_n$ mineurs des matrices $M_{F_1}, \ldots, M_{F_n}$ respectivement, tels que $\mathbf{z}^\alpha - \mathbf{z}^\beta = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{z}^{\gamma_i} b_i$. Soit

$$\mathcal{K} := \{i \in \{1, \ldots, n : \text{ un des monômes de } z^{\gamma_i} b_i \in I_{\overline{\Gamma}}\}.$$

$\mathcal{K} \neq \emptyset$, puisque il doit exister $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que z^α est un monôme de $\mathbf{z}^{\gamma_i} b_i$. Par le lemme 4.1.2, si un des monômes de $\mathbf{z}^{\gamma_i} b_i \in I_{\overline{\Gamma}}$, les deux monômes de $z^{\gamma_i} b_i$ appartient à $I_{\overline{\Gamma}}$. Donc

$$z^\alpha - z^\beta = \sum_{i \in \mathcal{K}} a_i \mathbf{z}^{\gamma_i} b_i + \sum_{i \notin \text{calK}} a_i \mathbf{z}^{\gamma_i} b_i.$$

- Si z^β apparait dans un terme de $\sum_{i \in \mathcal{K}} a_i \mathbf{z}^{\gamma_i} b_i$, alors $z^\beta \in I_\Gamma$.

- Si z^β n'apparait pas dans un terme de $\sum_{i \in \mathcal{K}} a_i \mathbf{z}^{\gamma_i} b_i$, alors z^β apparait dans $\sum_{i \notin \mathcal{K}} a_i \mathbf{z}^{\gamma_i} b_i$. Comme aucun monôme de la première somme n'apparait pas dans la deuxième somme, on a :

$$z^\alpha - \sum_{i \in \mathcal{K}} a_i \mathbf{z}^{\gamma_i} b_i = z^\beta - \sum_{i \notin \mathcal{K}} a_i \mathbf{z}^{\gamma_i} b_i = 0.$$

  Donc $z^\alpha \in J_{\overline{\Gamma}}$, mais ce qui contredit le fait que $J_{\overline{\Gamma}}$ soit torique. Par consequent ce cas ne pas possible.

■

Étant donné $h \in \Sigma_{J_{\overline{\Gamma}}}$ le nombre de Betti $\beta_{i,h}(B_{\overline{\Gamma}})$ peut être calculé par la formule de Bruns-Herzog (voir 1.7.6) en utilisant la proposition 4.1.3. on donnera un exemple où $J_{\overline{\Gamma}}$ est torique, pour illustrer l'utilisation de cette formule.

4.1.4 Exemple. Soit Γ le complexe de cliques engendré par le graphe G de la figure 4.1. De la figure 4.1, $p_2(I_\Gamma) = 1$, puisque l'unique cycle minimal de G est C avec comme ensemble d'arêtes $E(C) = \{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, a\}\}$.

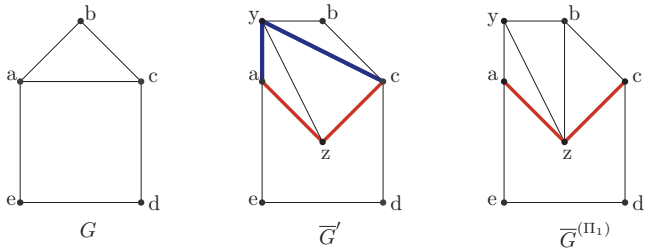


FIGURE 4.1 –

Soient $\overline{\Gamma}$ l'extension binomial de Γ et $\overline{G}$ le 1-squelette de l'extension binomiale $\overline{\Gamma}$ dont matrice pour la facette $\{a, b, c\}$ est :

$$M_{F_1} = \left(\begin{array}{cc|c} a & z & y \\ z & c & b \end{array} \right).$$

Donc, $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}} = I_{\overline{\Gamma}} + \mathcal{J}_{\overline{\Gamma}} \subset \Bbbk[\mathbf{z}]$; où $I_{\overline{\Gamma}} = (ad, ce, bd, be, yd, ye, ze, zd\}$, $\mathcal{J}_{\overline{\Gamma}} = (ac - z^2, ab - zy, zb - cy)$ et les cycles minimaux de $\overline{\Gamma}'_1 = \overline{G'}$ proviennent de C et ils sont : C'_1 et C'_2, dont les ensembles d'arêtes sont $E(C'_1) = \{\{a, z\}, \{z, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, a\}\}$ et $E(C'_2) = \{\{a, y\}, \{y, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, a\}\}$, respectivement. On pose $a_1 = \deg(azcde)$ et $a_2 = \deg(aycde)$. Nous allons calculer les nombres de Betti de $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ pour ces deux degrés.

1. **Pour $\mathbf{a_1}$**. Nous avons que $a_1 = \{azcde, z^3de\}$, puisque $azcde - z^3de$ est l'unique binôme de $J_{\overline{\Gamma}}$ de degré sur $\Sigma_{J_{\overline{\Gamma}}}$ égal à a_1, donc

$$\begin{aligned}\Omega_{a_1} &= \{F \subset V(\overline{\Gamma}) : \exists \beta, \gamma \in \mathbb{N}^7,\ \deg_{\Sigma(J_{\overline{\Gamma}})}(\beta) = a_1,\ \mathbf{z}^\beta - \mathbf{z}^\gamma \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} \in J_{\overline{\Gamma}}\} \\ &= \{F \subset V(\overline{\Gamma}) : \exists \gamma \in \mathbb{N}^7,\ azcde - \mathbf{z}^\gamma \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} \in J_{\overline{\Gamma}} \text{ ou } z^3de - \mathbf{z}^\gamma \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} \in J_{\overline{\Gamma}}\} \\ &= < \{a, z, c, d, e\} >\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Psi_{a_1} &= \{F \in \Omega_{a_1} : \exists \beta, \gamma \in \mathbb{N}^m,\ \deg_{\Sigma(J_{\overline{\Gamma}})}(\beta) = b,\ \mathbf{z}^\beta - \mathbf{z}^\gamma \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} \in J_{\overline{\Gamma}},\ \mathbf{z}^\gamma \in I_{\overline{\Gamma}}\} \\ &= \{F \subset \{a, z, c, d, e\} : \exists \gamma \in \mathbb{N}^7,\ azcde - \mathbf{z}^\gamma \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} \in J_{\overline{\Gamma}} \text{ ou } z^3de - \mathbf{z}^\gamma \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} \in J_{\overline{\Gamma}} \\ &\quad \text{et } \mathbf{z}^\gamma \in I_{\overline{\Gamma}}\}.\end{aligned}$$

Mais, si $F \subset \{a, z, c, d, e\}$ tel que $z^3de/\mathbf{z}^{\mathrm{supp}F} \in I_{\overline{\Gamma}}$, alors soit $F = \{z, d\}$, soit $F = \{z, e\}$ et il s'en suit que $azcde/\mathbf{z}^{\mathrm{supp}F} \in I_{\overline{\Gamma}}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\Psi_{a_1} &= \{F \subset \{a, z, c, d, e\} : \exists \gamma \in \mathbb{N}^7,\ z^3de - \mathbf{z}^\gamma \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} \in J_{\overline{\Gamma}} \text{ et } \mathbf{z}^\gamma \in I_{\overline{\Gamma}}\} \\ &= \{F \subset \{a, z, c, d, e\} : \exists \gamma \in \mathbb{N}^7, \mathbf{z}^\gamma \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} = azcde \text{ et } \mathbf{z}^\gamma \in I_{\overline{\Gamma}}\} \\ &= \{F \subset \{a, z, c, d, e\} : azcde/\mathbf{z}^{\mathrm{supp}F} \in I_{\overline{\Gamma}}\} \\ &= \{F \subset C_1' : F^C \notin \overline{\Gamma}\} \\ &= (\overline{\Gamma}_{C_1'})^A\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Bruns-Herzog 1.7.6 et la dualité d'Alexander 1.6.12 nous avons que :

$$\begin{aligned}\beta_{i,a_1}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) &= \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_i(\Omega_{a_1}, \Psi_{a_1}, \Bbbk) \\ &= \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_i(C, (\overline{\Gamma}_{C_1'})^A, \Bbbk) \\ &= \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_{5-2-i}(\overline{\Gamma}_{C_1'}, \Bbbk) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } 3 - i = 1, \\ 0 & \text{si } 3 - i \neq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

De là, il vient : $\beta_{2,a_1}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = 1$ et $\beta_{i,a_1}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = 0$, pour $i \neq 2$

2. **Pour $\mathbf{a_2}$**. Ce deuxième cas découle de l'argument suivant :

La permutation

$$\Pi_1(M_{F_1}) = \left(\begin{array}{cc|c} a & y & z \\ z & b & c \end{array}\right)$$

est une permutation permissible pour M_{F_1} et $\Gamma_1^{(\Pi_1)}$ est le graphe $G^{(\Pi_1)}$ de la figure 4.1 qu'on a obtenu en utilisant la proposition 3.4.15. En étudiant le graphe $G^{(\Pi_1)}$ de la figure 4.1 on remarque que l'unique cycle minimal de taille 5 de $G^{(\Pi_1)}$ est C_1', donc $\beta_{2,5}(I_{\Gamma^{\Pi_1}}) = 1$. En outre, du corollaire 2.2.15 et du théorème 3.2.6 on déduit que

$$1 = \beta_{2,5}(I_{\Gamma^{(\Pi_1)}}) \geq \beta_{2,5}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = \sum_{a \in \Sigma(J_{\overline{\Gamma}}), |a|=5} \beta_{2,a}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) \geq \beta_{2,a_1}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = 1,$$

et comme $a_2 \neq a_1$, nous avons que $\beta_{2,a_2}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = 0$.

À des fins pédagogiques nous allons maintenant recalculer $\beta_{2,a_2}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$ en utilisant la formule de Bruns-Herzog. Nous avons que $a_2 = \{aycde, z^2yde, abzde\}$, donc :

$$\Omega_{a_2} =< \{a,y,c,d,e\}, \{a,b,z,d,e\}, \{y,z,d,e\} >,$$

et

$$\begin{aligned}\Psi_{a_2} &= \{F \subset \Omega_{a_2} : \exists \beta, \gamma \in \mathbb{N}^7, \deg_{\Sigma_{J_{\overline{\Gamma}}}}(\beta) = a_2\ \mathbf{z}^\beta - \mathbf{z}^\gamma \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} \in J_{\overline{\Gamma}} \text{ et } \mathbf{z}^\gamma \in I_{\overline{\Gamma}}\} \\ &= \{F \subset V(\overline{\Gamma}) : \text{soit } aycde/\mathbf{z}^{\mathrm{supp}F} \in I_{\overline{\Gamma}},\ \text{soit } y^2cde/\mathbf{z}^{\mathrm{supp}F} \in I_{\overline{\Gamma}},\ \text{soit } abzde/\mathbf{z}^{\mathrm{supp}F} \in I_{\overline{\Gamma}}\} \\ &=< \{a,y,d\}, \{a,c,d\}, \{a,c,e\}, \{y,c,e\}, \{a,z,d\}, \{a,z,e\}, \{a,b,d\}, \{a,b,e\}, \{z,b,e\}, \{y,z,d\}, \\ &\{z,y,e\} > .\end{aligned}$$

Nous savons par la formule de Herzog-Bruns 1.7.6 que $\beta_{i,a_2} = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_i(\Omega_{a_2}, \Psi_{a_2}, \Bbbk)$. Comme Ω_{a_2} est un cône de sommet distingué e, on a que $\widetilde{H}_i(\Omega_{a_2}, \Bbbk) = 0$ pour tout $i \geq 0$, d'apr'es la proposition 1.6.9. De la proposition 1.6.11, on conclut que

$$\beta_{i,a_2} = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_i(\Omega_{a_2}, \Psi_{a_2}, \Bbbk) = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_{i-1}(\Psi_{a_2}, \Bbbk).$$

Maintenant, par la formule de Hochster 1.7.6 appliquée à l'ideal monomial $I_{\Psi_{a_2}}$ associé au complexe simplicial Ψ_{a_2}, on a $\beta_{2,a_2}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_1(\Psi_{a_2}, \Bbbk) = \beta_{4,7}(I_{\Psi_{a_2}})$. En utilisant Macaulay2 on a que $\mathrm{dimproj}(I_{\Psi_{a_2}}) = 3$, ce qui implique que $\beta_{2,a_2}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = \beta_{4,7}(I_{\Psi_{a_2}}) = 0$.

□

De l'exemple 4.1.4 on peut remarquer que le calcul du nombre $\beta_{i,h}(B_{\overline{\Gamma}})$ est complexe, puisque il revient à calculer une homologie relative ; de plus calculer Ω_h et Ψ_h n'est pas chose aisée, même si dans l'exemple 4.1.4 le calcul de Ω_h était facilité par le fait que les mineurs de M_{F_1} étaient une base de Gröbner de $J_{\overline{\Gamma}}$. En général, les mineurs des matrices $M_{F_1}, \ldots, M_{F_k}$ ne forment pas une base de Gröbner de $J_{\overline{\Gamma}}$ et cela empêche de connaitre les binômes de $J_{\overline{\Gamma}}$ qui décrivent Ω_h.

4.1.5 Exemple. Soient G le graphe de l'exemple 4.1.4 et Γ le complexe de cliques associé à G. On associe aux facettes $F_1 = \{a,b,c\}$, $F_2 = \{c,w\}$ et $F_3 = \{a,e\}$ les matrices :

$$M_{F_1} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & x & y & z \\ x & y & c & b \end{array}\right),\ M_{F_2} = \begin{pmatrix} c & w \\ w & d \end{pmatrix},\ M_{F_3} = \begin{pmatrix} a & u & v \\ u & v & e \end{pmatrix}.$$

$\overline{\Gamma}$ est l'extension de Γ par rapport à ces matrices. Nous pouvons voir que F_1, F_2, F_3 sont ordonnées avec un ordre admissible. On utilise cela pour ordonner les sommets de $\overline{\Gamma}$ de la façon suivante : $a > x > y > z > c > w > a > u > v > d > e$. Par définition de $J_{\overline{\Gamma}}$, $J_{\overline{\Gamma}}$ est l'idéal engendré par les mineurs 2×2 des matrices $M_{F_1}, M_{F_2}, M_{F_3}$. En utilisant Macaulay2 on obtient que la base de Gröbner réduite de $J_{\overline{\Gamma}}$ par rapport à l'ordre léxicographique est :

$$\begin{aligned}GB(J_{\overline{\Gamma}}) = \ & \{ay - x^2, ac - xy, ab - xz, xc - y^2, xb - yz, yb - cz, cd - w^2, ac - uv, av - u^2, \\ & ue - v^2, z^3w^2e - uvb^3, z^3w^2v - u^2b^3d, z^3ce - uvb^3, z^3cv - u^2b^3, yz^2e - uvb^2, \\ & yz^2v - u^2b^2, y^2ze - cuvb, y^2zv - cu^2b, y^3e - c^2uv, y^3v - c^2u^2, xw^2 - y^2d, xze - uvb, \\ & xzv - u^2b, xye - cuv, xyv - cu^2, x^2e - yuv, x^2v - yu^2\}.\end{aligned}$$

On peut remarquer que les mineurs de 2×2 des matrices $M_{F_1}, M_{F_2}, M_{F_3}$ ne sont pas une base de Gröbner de $J_{\overline{\Gamma}}$, même s'ils sont inclus dans $GB(J_{\overline{\Gamma}})$.

□

Maintenant, nous allons voir que pour certaines extensions binomiales de complexes de cliques Γ, nous pouvons calculer certains nombres de Betti assez aisément. Ainsi, soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ son complexe de cliques, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ telle qu'il existe un ordre admissible pour les facettes de Γ, disons $F_1, \ldots, F_k, F_{k+1}, \ldots, F_l$ où $F_i \neq \overline{F}_i$ avec $i \in \{1, \ldots, k\}$ et $F_i = \overline{F}_i$ avec $i \in \{k+1, \ldots, l\}$. Supposons de plus que $J_{\overline{\Gamma}}$ est un idéal torique. Grâce à la proposition 3.3.3 pour tous $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ distincts, $|V_\Gamma(M_{F_i}) \cap V_\Gamma(M_{F_j})| \leq 1$. Rappelons que pour chaque $i = 1, \ldots, k$, M_{F_i} peut-être écrit de la façon suivante :

$$M_F = (B_1^{(F)} | \cdots | B_{m_F}^{(F)}),$$

où

$$B_1^{(F)} = \begin{pmatrix} x_0^{(F)} & y_{11}^{(F)} & \cdots & y_{1n_1}^{(F)} \\ y_{11}^{(F)} & y_{j2}^{(F)} & \cdots & x_1^{(F)} \end{pmatrix} \text{ et } B_j^{(F)} = \begin{pmatrix} y_{j1}^{(F)} & \cdots & y_{jn_j}^{(F)} \\ y_{j2}^{(F)} & \cdots & x_j^{(F)} \end{pmatrix}.$$

4.1.6 Lemme. *Soient G un graphe, $\Gamma = \Gamma(G)$ son complexe de cliques, $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ avec $m = |V(\overline{\Gamma})|$, telle qu'il existe un ordre admissible pour les facettes de Γ, à savoir $F_1, \ldots, F_l$, et $J_{\overline{\Gamma}}$ soit un idéal torique. Soit C un cycle minimal de G vérifiant la propriété que pour toute arête e virtuelle on a $e = \{x_0^{(F_e)}, x_1^{(F_e)}\}$, où F_e est l'unique facette de Γ contenant e. Soit $\widetilde{C}$ le cycle obtenu à partir de C en remplaçant chaque arête virtuelle e par les arêtes $\{x_0^{(F_e)}, y_{11}^{(F_e)}\}, \{y_{11}^{(F_e)}, y_{12}^{(F_e)}\}, \ldots, \{y_{1n_1}^{(F_e)}, x_1^{(F_e)}\}$. Alors :*

$$\beta_{|\widetilde{C}|-3, \deg_{\Sigma_{J_{\overline{\Gamma}}}}(z^{\mathrm{supp}(V(\widetilde{C}))})}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = 1.$$

Preuve.
On pose $\alpha = \mathrm{supp}(\widetilde{C})$ et $b = \deg_{\mathcal{J}_{\overline{\Gamma}}} \mathbf{z}^\alpha$. Par la proposition 4.1.3, nous avons que si $\mathbf{z}^\gamma - \mathbf{z}^\beta \in J_{\overline{\Gamma}}$ et $\mathbf{z}^\gamma \in I_{\overline{\Gamma}}$, alors $\mathbf{z}^\beta \in I_{\overline{\Gamma}}$. Par conséquent, nous pouvons utiliser la formule de Bruns-Herzog (voir théorème 1.7.6) pour calculer $\beta_{|V(\widetilde{C})|-3,b}$:

$$\beta_{|\widetilde{C}|-3,b}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = \beta_{|\widetilde{C}|-2,b}(\mathbb{k}[\mathbf{z}]/\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = \dim_{\mathbb{k}} \widetilde{\mathrm{H}}_{|V(\widetilde{C})|-3}(\Omega_b, \Psi_b; \mathbb{k}),$$

avec

$$\Omega_b = \{F \subset V(\overline{\Gamma}) : \exists \beta, \gamma \in \mathbb{N}^m,\ \deg_{\Sigma(J_{\overline{\Gamma}})}(\beta) = b,\ \mathbf{z}^\beta - \mathbf{z}^\gamma \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} \in J_{\overline{\Gamma}}\} \text{ et}$$

$$\Psi_b = \{F \in \Omega_b : \exists \beta, \gamma \in \mathbb{N}^m,\ \deg_{\Sigma(J_{\overline{\Gamma}})}(\beta) = b,\ \mathbf{z}^\beta - \mathbf{z}^\gamma \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} \in J_{\overline{\Gamma}},\ \mathbf{z}^\gamma \in I_{\overline{\Gamma}}\},$$

où $m = |V(\overline{\Gamma})|$.

- Montrons dans en premier temps : $\Omega_b = \{F \subset V(\overline{\Gamma}) : \exists \gamma \in \mathbb{N}^m,\ \mathbf{z}^\alpha - \mathbf{z}^\gamma \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} \in J_{\overline{\Gamma}}\}$.

  $\deg_{\Sigma(J_{\overline{\Gamma}})}(\beta) = b$ si et seulement si $\mathbf{z}^\alpha - \mathbf{z}^\beta \in J_{\overline{\Gamma}}$. Donc $\mathbf{z}^\beta - \mathbf{z}^\gamma \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} \in J_{\overline{\Gamma}}$ si et seulement si $\mathbf{z}^\alpha - \mathbf{z}^\gamma \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} \in J_{\overline{\Gamma}}$. En conséquence $\Omega_b = \{F \subset V(\overline{\Gamma}) : \exists \gamma \in \mathbb{N}^m,\ \mathbf{z}^\alpha - \mathbf{z}^\gamma \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} \in J_{\overline{\Gamma}}\}$.

- Montrons que pour toute facette F de Γ avec $M_F \neq 0$ on a que tout mineur 2×2 de M_F

$$b(\mathbf{z}) = z_{i,1} z_{i,2} - z_{i,3} z_{i,4}$$

  satisfait la propriété : $z_{i,1}, z_{i,2} \in V(\widetilde{C})$ si et seulement si $z_{i,3}, z_{i,4} \in V(\widetilde{C})$.
  En rappelant la définition de M_F, nous avons que :

$$M_F = \left(\begin{array}{cccc|ccc|c|ccc} x_0^{(F)} & y_{11}^F & \dots & y_{1n_1}^F & y_{21}^F & \dots & y_{2n_2}^F & \dots & y_{m_F 1}^F & \dots & y_{m_F n_{m_F}}^F \\ y_{11}^F & y_{12}^F & \dots & x_1^F & y_{22}^F & \dots & x_2^F & \dots & y_{m_F 2}^F & \dots & x_{m_F}^F \end{array} \right);$$

  et

$$\mathcal{I}_F = \{[M_F]_{1,u}[M_F]_{2,v} - [M_F]_{1,v}[M_F]_{2,u} : 1 \leq u < v \leq (\sum_{j=1}^{m_F} n_j) + 1\}.$$

  Comme la restriction de $\widetilde{C}$ à F est $\{x_0^{(F)}, y_{11}^{(F)}\}, \{y_{11}^{(F)}, y_{12}^{(F)}\}, \dots, \{y_{1n_1}^{(F)}, x_1^{(F)}\}$, un mineur $b(z)$ de M_F a tous ses variables dans $V(\widetilde{C})$ si et seulement si $b(z)$ est un mineur du premier bloc de M_F. De cette façon on obtient l'affirmation ci-dessus.

- Montrons que $\Omega_b =< V(\widetilde{C}) >$ (le simplexe de support $V(\widetilde{C})$).

  Soit $\mathbf{z}^\alpha - \mathbf{z}^\beta \in J_{\overline{\Gamma}}$. Supposons qu'une variable de $\mathbf{z}^\beta$ n'est pas dans $V(\widetilde{(C)})$. Comme $\mathbf{z}^\alpha - \mathbf{z}^\beta \in J_{\overline{\Gamma}}$, il existe $a_1, \dots, a_n \in \Bbbk$, $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{N}^m$, $F_{s_1}, \dots, F_{s_n}$ facettes de Γ et $b_1 = \mathbf{z}^{\alpha_1} - \mathbf{z}^{\beta_1}, \dots, b_n = \mathbf{z}^{\alpha_n} - \mathbf{z}^{\beta_n}$ mineurs des matrices $M_{F_{s_1}}, \dots, M_{F_{s_n}}$ respectivement, tels que $\mathbf{z}^\alpha - \mathbf{z}^\beta = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{z}^{\gamma_i} b_i$. Soit

$$\mathcal{K} := \{i \in \{1, \dots, n\} :\ \text{un des monômes de } \mathbf{z}^{\gamma_i} b_i \text{ a toutes ses variables dans } V(\widetilde{C})\}.$$

  $\mathcal{K} \neq \emptyset$, car il doit exister $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\mathbf{z}^\alpha$ doit être un terme de $\mathbf{z}^{\gamma_i} b_i$. De plus, on remarque que si un des monômes de $\mathbf{z}^{\gamma_i} b_i$ a toutes ses variables dans $V(\widetilde{C})$, alors en particulier toutes les variables de $\mathbf{z}^{\gamma_i}$ sont dans $V(\widetilde{C})$ et d'après le point précédent toutes les variables des deux monômes de b_i sont dans $V(\widetilde{C})$. Ainsi, on peut èrire $z^\alpha - z^\beta = \sum_{i \in K} a_i \mathbf{z}^{\gamma_i} b_i + \sum_{i \notin K} a_i \mathbf{z}^{\gamma_i} b_i$. Et par la remarque ci-dessus, si $i \notin K$, aucun monôme de $\mathbf{z}^{\gamma_i} b_i$ n'a pas toutes ses variables dans $V(\widetilde{C})$, de cette façon :

$$z^\alpha + \sum_{i \in K} a_i \mathbf{z}^{\gamma_i} b_i = z^\beta + \sum_{i \notin K} a_i \mathbf{z}^{\gamma_i} b_i = 0.$$

Donc $z^\alpha \in J_{\overline{\Gamma}}$, ce qui contredit que $J_{\overline{\Gamma}}$ est torique. Alors, toutes les variables de $\mathbf{z}^\beta$ sont dans $V(\widetilde{(C)})$. Ce qui nous permet conclure que

$$\begin{aligned}\Omega_b &= \{F \subset V(\overline{\Gamma}) : \exists \gamma \in \mathbb{N}^m,\ \mathbf{z}^\alpha - \mathbf{z}^\gamma \mathbf{z}^F \in J_{\overline{\Gamma}}\} \\ &= \{F \subset V(\widetilde{C}) : \exists \gamma \in \mathbb{N}^m,\ \mathbf{z}^\alpha - \mathbf{z}^{\gamma+\mathrm{supp}(F)} \in J_{\overline{\Gamma}}\} \\ &=< V(\widetilde{C}) > .\end{aligned}$$

- Montrons que $\Psi_b = (\overline{\Gamma}_{V(\widetilde{C})})^A$.
  De la même façon qu'on a montré que $\Omega_b = \{F \subset V(\overline{\Gamma}) : \exists \gamma \in \mathbb{N}^s,\ \mathbf{z}^\alpha - \mathbf{z}^\gamma \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} \in J_{\overline{\Gamma}}\}$, on peut montrer que

  $$\Psi_b = \{F \in \Omega_b : \exists \gamma \in \mathbb{N}^m,\ \mathbf{z}^\alpha - \mathbf{z}^\gamma \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} \in J_{\overline{\Gamma}} \text{ et } \mathbf{z}^\gamma \in I_{\overline{\Gamma}}\}.$$

  Comme $\Omega_b =< V(\widetilde{C}) >$, on a que

  $$\begin{aligned}\Psi_b &= \{F \in V(\widetilde{C}) : \exists \gamma \in \mathbb{N}^m,\ \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)+\mathrm{supp}(V(\widetilde{C})\setminus F)} - \mathbf{z}^\gamma \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} \in J_{\overline{\Gamma}} \text{ et } \mathbf{z}^\gamma \in I_{\overline{\Gamma}}\} \\ &= \{F \in V(\widetilde{C}) : \exists \gamma \in \mathbb{N}^m,\ \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)}(\mathbf{z}^{\mathrm{supp}(V(\widetilde{C})\setminus F)} - \mathbf{z}^\gamma) \in J_{\overline{\Gamma}} \text{ et } \mathbf{z}^\gamma \in I_{\overline{\Gamma}}\}.\end{aligned}$$

  Mais $J_{\overline{\Gamma}}$ est un idéal torique, donc c'est un idéal de réseau et par définition $J_{\overline{\Gamma}} = (J_{\overline{\Gamma}} : (z_1 \cdots z_m)^\infty)$, alors

  $$\Psi_b = \{F \in V(\widetilde{C}) : \exists \gamma \in \mathbb{N}^m,\ (\mathbf{z}^{\mathrm{supp}(V(\widetilde{C})\setminus F)} - \mathbf{z}^\gamma) \in J_{\overline{\Gamma}} \text{ et } \mathbf{z}^\gamma \in I_{\overline{\Gamma}}\}.$$

  Par ailleurs, de la proposition 4.1.3 on déduit :

  $$\begin{aligned}\Psi_b &= \{F \in V(\widetilde{C}) : \exists \gamma \in \mathbb{N}^m,\ (\mathbf{z}^{\mathrm{supp}(V(\widetilde{C})\setminus F)} - \mathbf{z}^\gamma) \in J_{\overline{\Gamma}} \text{ et } \mathbf{z}^\gamma, \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(V(\widetilde{C})\setminus F)} \in I_{\overline{\Gamma}}\} \\ &= \{F \in V(\widetilde{C}) : \mathbf{z}^{\mathrm{supp}(V(\widetilde{C})\setminus F)} \in I_{\overline{\Gamma}}\} \\ &= \{F \in V(\widetilde{C}) : (V(\widetilde{C}) \setminus F) \notin \overline{\Gamma}\} \\ &= \{F \in V(\widetilde{C}) : (V(\widetilde{C}) \setminus F) \notin \overline{\Gamma}_{V(\widetilde{C})}\} \\ &= (\overline{\Gamma}_{V(\widetilde{C})})^A.\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la dualité d'Alexander (proposition 1.6.12) et le lemme 1.6.7

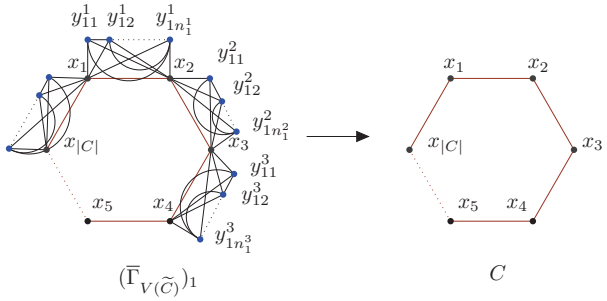
$$\begin{aligned}\beta_{|\widetilde{C}|-3,b}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) &= \dim_{\Bbbk} \widetilde{\mathrm{H}}_{|\widetilde{C}|-3}(\Omega_b, \Psi_b; \Bbbk) \\ &= \dim_{\Bbbk} \widetilde{\mathrm{H}}_{|\widetilde{C}|-(|\widetilde{C}|-3)-2}((\Psi_b)^A, (\Omega_b)^A; \Bbbk) \\ &= \dim_{\Bbbk} \widetilde{\mathrm{H}}_1((\Psi_b)^A; \Bbbk) \\ &= \dim_{\Bbbk} \widetilde{\mathrm{H}}_1(\overline{\Gamma}_{V(\widetilde{C})}; \Bbbk).\end{aligned}$$

- On va prouver que $\dim_{\Bbbk} \widetilde{\mathrm{H}}_1(\overline{\Gamma}_{V(\widetilde{C})}; \Bbbk) = 1$.
  On peut remarquer que les facettes de $\overline{\Gamma}_{V(\widetilde{C})}$ sont les ensembles $\widetilde{F}_e$ pour chaque $e \in E(C)$ donnés par

  $$\widetilde{F}_e = \begin{cases} e & \text{si } e \in E(\widetilde{C}), \\ e \cup Y_1^{(F_e)} & \text{si } e \notin E(\widetilde{C}). \end{cases}$$

Donc $\overline{\Gamma}_{V(\widetilde{C})} =< \widetilde{F}_e : e \in C >$ et il est homotope à C, comme cela est illustré sur la figure 4.2, où on a posé $E(C) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \ldots, \{x_n, x_1\}\}$ et

si $\{x_i, x_{i+1}\} \in E(C)$, $\widetilde{F}_{x_i,x_{i+1}} = \{x_i, x_{i+1}, y^i_{11}, \ldots, y^i_{1n_1}\}$, où $x_{n+1} = x_1$.



$(\overline{\Gamma}_{V(\widetilde{C})})_1$ $\qquad$ C

FIGURE 4.2 –

Par conséquent $\widetilde{\mathrm{H}}_1(\overline{\Gamma}_{V(\widetilde{C})}) = \Bbbk$.

Ainsi $\beta_{|V(\widetilde{C})|-3,b}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = \dim_{\Bbbk} \widetilde{\mathrm{H}}_{|V(\widetilde{C})|-3}(\Omega_b, \Psi_b; \Bbbk) = \dim_{\Bbbk} \widetilde{\mathrm{H}}_1(\overline{\Gamma}_{V(\widetilde{C})}; \Bbbk) = 1$.

■

4.1.7 Théorème. *Soient G un graphe qui n'est pas un graphe de cordes, $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ telle que les facettes de Γ admettent un ordre admissible et $J_{\overline{\Gamma}}$ soit torique. Soit $\widetilde{\mathfrak{C}}$ la famille de tous les cycles minimaux C tels que pour toute arête e virtuelle de C, les sommets de e sont dans le premier bloc de M_{F_e}, où F_e est l'unique facette qui contient e. Alors*

1. *Si $\widetilde{\mathfrak{C}} \neq \emptyset$,*

$$p_2(\mathcal{B}_{\overline{G}}) + 3 \leq \min_{C \in \widetilde{\mathfrak{C}}}(|C| + \sum_{e \text{ virtuelle}} |Y^1_{F_e}|).$$

$p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) \leq |\widetilde{C}| - 3$.

Preuve. Soient $C \in \widetilde{\mathfrak{C}}$ et $\widetilde{C}$ le cycle obtenu de C en remplaçant chaque arête virtuelle e par les arêtes $\{x_0^{(F_e)}, y_{11}^{(F_e)}\}, \{y_{11}^{(F_e)}, y_{12}^{(F_e)}\}, \ldots, \{y_{1n_1}^{(F_e)}, x_1^{(F_e)}\}$. Du lemme 4.1.6 nous avons que

$$\begin{aligned} \beta_{|\widetilde{C}|-3,|\widetilde{C}|}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) &= \textstyle\sum_{h \in \Sigma(J_{\overline{\Gamma}}), |h| = |\widetilde{C}|} \beta_{|\widetilde{C}|-3,h}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) \\ &\geq \beta_{|\widetilde{C}|-3,\deg_{\Sigma} J_{\overline{\Gamma}}(z^{\mathrm{supp}(V(\widetilde{C}))})}(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = 1, \end{aligned}$$

donc $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) \leq \min_{C \in \widetilde{\mathfrak{C}}}(|\widetilde{C}| - 3) = \min_{C \in \widetilde{\mathfrak{C}}}(|C| + \sum_{e \text{ virtuelle}} |Y^1_{F_e}|)$. ■

4.1.8 Exemple. Nous reprenons les exemples 3.7.8 et 3.7.19. L'unique cycle minimal C de G a comme ensemble des arêtes $E(C) = \{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, a\}\}$ et il satisfait les conditions demandées pour le cycle C du lemme 4.1.6. De plus, grâce à la proposition 4.3.16 $J_{\overline{\Gamma}}$ est un idéal torique. En outre, $\widetilde{C}$ avec

$$E(\widetilde{C}) = \{\{a, x\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{z, c\}, \{c, d\}, \{d, u\}, \{u, s\}, \{s, e\}, \{e, a\}\}$$

est un cycle minimal de $\Gamma^{(\Pi^*)}$. Par ailleurs, grâce à l'exemple 3.7.19

$$|\widetilde{C}| = 9 = \min_{C\in\mathcal{C}} \left(|C| + |R_1^{(\Pi^*)}(C)| + |R_2^{(\Pi^*)}(C)| + \sum_{e\in R^{(\Pi^*)}(C)} \eta_e \right) = p_2(I_{\overline{\Gamma}^{(\Pi^*)}}) + 3.$$

De là nous voyons que $\widetilde{C}$ est un cycle minimal de $\Gamma^{(\Pi^*)}$ de longueur minimal. Ainsi d'après le lemme 4.1.6, $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = 9 - 3 = 6$. On retrouve donc le résultat de l'exemple 3.7.7, où on avait calculé $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$ à partir de la table des nombres de Betti de $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ et en utilisant Macaulay2.

4.1.9 Théorème. *Soient G un graphe qui n'est pas un graphe de cordes, $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ telle que les facettes de Γ admettent un ordre admissible et $J_{\overline{\Gamma}}$ soit torique. Supposons que tout cycle minimal virtuel est un cycle minimal et pour tout cycle minimal C de G et toute arête e virtuelle de C dans $\overline{\Gamma}^{(\Pi^*)}$, les sommets de e sont dans le premier bloc de M_{F_e}, où F_e est l'unique facette qui contient e et e satisfait une des propriétés suivantes :*

1. *soit $|Y_1^{(F_e)}| = \min_{1\le j\le m_{F_e}}(Y_i^{(F_e)}) \ge 2$ et $V_\Gamma(M_{F_e}) = F_e$;*
2. *soit $|Y_1^{(F_e)}| = 1$.*

Alors, $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = p_2(I_{\overline{\Gamma}^{\Pi^*}}) = \min_{C\in\widetilde{\mathfrak{C}}}(|C| + \sum_{e \text{ virtuelle}} |Y_{F_e}^1|)$.

Preuve. Par hypothèse tout cycle minimal virtuel C de G satisfait les conditions du lemme 4.1.6. En outre $\widetilde{C}$ défini comme dans le lemme 4.1.6 est un cycle minimal de $(\overline{\Gamma}^{(\Pi^*)})_1$.

- Nous allons montrer que $\widetilde{C}$ est de longueur minimale parmi tous les cycles minimaux de $(\overline{\Gamma}^{(\Pi^*)})_1$ obtenus à partir de C.

  D'après la preuve du corollaire 3.7.18, la longueur minimale d'un cycle minimal de $(\overline{\Gamma}^{(\Pi^*)})_1$ obtenu à partir de C est donnée par :
  $t_{\overline{\Pi}^*}(C) = |C| + |R_1^{(\Pi^*)}(C)| + |R_2^{(\Pi^*)}(C)| + \sum_{e\in R_2^{(\Pi^*)}(C)} \eta_e + \sum_{e\in R_3^{(\Pi^*)}(C)} \eta_e$ (voir section 3.7) ,
  où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des cycles de G. Mais on remarque que pour toute arête e virtuelle de C

$$M_{F_e} = \left(\begin{array}{cccc|c|ccc} x_0^{(F_e)} & y_{11}^{F_e} & \dots & y_{1n_1(e)}^{F_e} & \dots & y_{m_{F_e}1}^{F_e} & \dots & y_{m_{F_e}n_{m_{F_e}}(e)}^{F_e} \\ y_{11}^{F} & y_{12}^{F} & \dots & x_1^{F_e} & \dots & y_{m_{F_e}2}^{F_e} & \dots & x_{m_{F_e}}^{F_e} \end{array} \right);$$

  où $n_1 = 1$ si $F_e \neq e$ et $e = \{x_0^{(F_e)}, x_1^{(F_e)}\}$. Par hypothèse $|Y_1^{(F_e)}| = n_1(e) = \eta_e$, donc

$$\begin{aligned} R_2^{(\Pi^*)}(C) &= \{e \in R^{\Pi^*}(C) | F_e \setminus V_\Gamma(M_{F_e}) = \emptyset,\ \exists k \in \{1,\dots,m_{F_e}\},\ e \cap B_k^{(F_e)} \neq \emptyset,\ \text{et } |Y_k^{(F_e)}| > \eta_e\} \\ &= \{e \in R^{\Pi^*}(C) | F_e \setminus V_\Gamma(M_{F_e}) = \emptyset,\ \exists k \in \{1,\dots,m_{F_e}\},\ e \cap B_k^{(F_e)} \neq \emptyset,\ \text{et } |Y_k^{(F_e)}| > \eta_e\} \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

  et

$$R_{2,3}^{(\Pi^*)}(C) = R_2^{(\Pi^*)}(C) \cup R_3^{(\Pi^*)}(C) = R_3^{(\Pi^*)}(C).$$

  De cette façon $t_{\overline{\Pi^*}}(C) = |C| + |R_1^{(\Pi^*)}(C)| + \sum_{e\in R_3^{(\Pi^*)}(C)} \eta_e$.

Par ailleurs, $|\widetilde{C}| = |C| + |S_1| + \sum_{e\in S_2} n_1(e)$, où

$$S_1 = \{e \in R^{(\Pi^*)} : F_e \setminus V_\Gamma(M_{F_e}) \neq \emptyset \text{ et } |Y_1^{(F_e)}| = 1\} \text{ et}$$
$$S_2 = \{e \in R^{(\Pi^*)} : F_e \setminus V_\Gamma(M_{F_e}) = \emptyset, \text{ et } |Y_1^{(F_e)}| \geq 1\}.$$

Donc

$$S_1 = \{e \in R^{(\Pi^*)} : F_e \setminus V_\Gamma(M_{F_e}) \neq \emptyset\} = R_1^{(\Pi^*)}(C), \text{ et}$$

$$S_2 = \{e \in R^{(\Pi^*)} : F_e \setminus V_\Gamma(M_{F_e}) = \emptyset, \ e \cap B_1(M_{F_e}) = e \text{ et } n_1(e) = |Y_1^{(F_e)}| = \eta_e\} = R_3^{(\Pi^*)}(C),$$

Donc $t_{\overline{\Pi}^*}(C) = |\widetilde{C}|$. Du théorème 3.7.18 on déduit que

$$p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) \geq p_2(I_{\Gamma_1^{(\Pi^*)}})+3 \geq \min_{C\in\mathcal{C}}(t_{\Pi^*}(C)) = \min_{C\in\mathcal{C}}|\widetilde{C}| = \min_{C\in\widetilde{\mathfrak{C}}}(|C|+ \sum_{e \text{ virtuelle}} |Y_{F_e}^1|) \geq p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}),$$

où la dernière égalité est grâce au théorème 4.1.7. De cette façon nous concluons que :

$$p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = p_2(I_{\overline{\Gamma}^{\Pi^*}}) = \min_{C\in\widetilde{\mathfrak{C}}}(|C| + \sum_{e \text{ virtuelle}} |Y_{F_e}^1|).$$

■

Le résultat suivant est un cas particulier du théorème 4.1.9.

4.1.10 Corollaire. *Soient G un graphe qui n'est pas de cordes, $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendrés par G, $\overline{\Gamma}$ une extension binomial de Γ telle que les facettes de Γ admettent un ordre admissible et $J_{\overline{\Gamma}}$ soit torique. Si pour tout cycle minimal virtuel C de G est un cycle minimal et toute arête virtuelle e de C dans $\overline{\Gamma}^{(\Pi^*)}$, on a une des propriétés suivantes :*

1. *soit $F_e = e$;*
2. *soit $\#\mathrm{col}(M_{F_e}) = 2$,*

où F_e est l'unique facette qui contient e, alors il existe un cycle virtuel minimal C_1 de G tel que

$$p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = p_2(I_{\overline{\Gamma}^{\Pi^*}}) = |\widetilde{C_1}|.$$

■

4.1.11 Exemple. Soient G le graphe de la figure 4.3 et $\Gamma = \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G. Le sous-graphe C de G avec ensemble des arêtes $E(C) = \{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, a\}\}$ est l'unique cycle minimal de G. On associe aux facettes $F_1 = \{a, b, c\}$ et $F_2 = \{c, d\}$ les matrices suivantes :

$$M_{F_1} = \begin{pmatrix} a & z \\ z & c \end{pmatrix} \text{ et } M_{F_2} = \begin{pmatrix} e & w & x \\ w & x & d \end{pmatrix}.$$

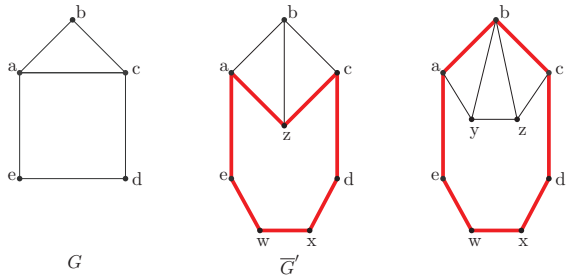


FIGURE 4.3 –

Ainsi le graphe $\overline{G}'$ de la figure 4.3 est le 1-squelette de $\overline{\Gamma}^{\Pi^*} = \overline{\Gamma}'$.

Par ailleurs, grâce à la proposition 4.3.16 nous avons que $J_{\overline{\Gamma}}$ est un idéal torique. De plus, nous pouvons remarquer que les conditions du corollaire 4.1.10 demandées à Γ et à son extension $\overline{\Gamma}$ sont satisfaites, donc :

$$\begin{aligned} p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) &= p_2(I_{\overline{\Gamma}^{\Pi^*}}) \\ &= (|C| + |R_1^{(\Pi^*)}(C)| + \textstyle\sum_{e \in R_3^{(\Pi^*)}(C)} \eta_e) - 3 \\ &= (4 + 1 + 2) - 3 = 4. \end{aligned}$$

4.1.12 Exemple. Soit Γ le complexe de cliques de l'exemple 4.1.11. Nous allons produire une extension binomiales $\widetilde{\Gamma}$ de Γ et un cycle C' de $(\widetilde{\Gamma})_1$ construit de manière differente que le cycle $\widetilde{C}$ du lemme 4.1.6. Nous aurosn que $|\widetilde{C}| - 3 < |C'| - 3 = p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$. De plus, le calcule de l'homologie relative pour calculer le nombre de Betti correspondant à C' aboutit à une homologie $\widetilde{H}_3(\Psi_h; k)$ que nous ne savons pas calculer sans aide de logiciel.

Considérons les matrices

$$M'_{F_1} = \begin{pmatrix} a & y & z \\ y & z & c \end{pmatrix} \text{ et } M_{F_2} = \begin{pmatrix} e & w & x \\ w & x & d \end{pmatrix}.$$

Soit $\widetilde{\Gamma}$ l'extension de Γ associée aux matrices ci-dessus. Possons $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$. Nous voyons que le graphe $\widetilde{G}'$ est le 1-squelette de $\widetilde{\Gamma}^{(\Pi^*)} = \widetilde{\Gamma}'$ et $|\widetilde{C}| = 8$. Par ailleurs, grâce au corollaire 3.7.18 et au point 2 du théoréme 4.1.6

$$|\widetilde{C}| - 3 = 5 \geq p_2(\mathcal{B}_{\widetilde{\Gamma}}) \geq p_2(I_{\widetilde{\Gamma}^{\Pi^*}}) = (|C| + |R_1^{(\Pi^*)}(C)| + |R_2^{(\Pi^*)}(C)| + \sum_{e \in R_{2,3}^{(\Pi^*)}(C)} \eta_e) - 3 = 4.$$

Par la proposition 4.3.16 nous avons que $J_{\widetilde{\Gamma}}$ est un idéal torique. D'autre part, soient C' le cycle obtenu à partir de C avec comme ensemble des arêtes

$$E(C') = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, x\}, \{x, w\}, \{w, e\}, \{e, a\}\}$$

et $h = \deg_{\Sigma_{J_{\widetilde{\Gamma}}}}(abcdxwe)$. On a, d'après la formule de Bruns-Herzog 1.7.6 :

$$\begin{aligned}\beta_{4,h}(\mathcal{B}_{\widetilde{\Gamma}}) &= \beta_{|V(C')|-3,h}(\mathcal{B}_{\widetilde{\Gamma}}) \\ &= \beta_{|V(C')|-2,h}(\Bbbk[\mathbf{z}]/\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) \\ &= \dim_{\Bbbk} \widetilde{\mathrm{H}}_{|V(\widetilde{C})|-3}(\Omega_h, \Psi_b; \Bbbk) \\ &= \dim_{\Bbbk} \widetilde{\mathrm{H}}_4(\Omega_h, \Psi_h; \Bbbk)\end{aligned}$$

avec

$$\Omega_h = \{F \subset V(\overline{\Gamma}) : \exists \beta, \gamma \in \mathbb{N}^9,\ \deg_{\Sigma(J_{\overline{\Gamma}})}(\beta) = h,\ \mathbf{z}^{\beta} - \mathbf{z}^{\gamma}\mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} \in J_{\widetilde{\Gamma}}\} \text{ et}$$

$$\Psi_h = \{F \in \Omega_h : \exists \beta, \gamma \in \mathbb{N}^9,\ \deg_{\Sigma(J_{\overline{\Gamma}})}(\beta) = h,\ \mathbf{z}^{\beta} - \mathbf{z}^{\gamma}\mathbf{z}^{\mathrm{supp}(F)} \in J_{\widetilde{\Gamma}},\ \mathbf{z}^{\gamma} \in I_{\widetilde{\Gamma}}\}.$$

Comme

$$\begin{aligned}[abcdxwe]_{\Sigma_{J_{\widetilde{\Gamma}}}} = \ & \{abcdxwe, yzbdxwe, yzbe^2d^2, yzbx^2w^2, yzbx^3, e, yzbw^3d, abcx^2w^2, \\ & abcx^3e, abcw^3d, acbd^2e^2\},\end{aligned}$$

on a que

$$\Omega_h =< \{a,b,c,d,w,x,e\}, \{y,z,b,d,w,x,e\} >=< \{a,c,d,w,x,e\}, \{y,z,d,w,x,e\} > *\{b\} \text{ et}$$

$$\begin{aligned}\Psi_h =< \ & \{b,c,w,x,e\}, \{b,c,d,x,e\}, \{b,c,d,w,e\}, \{a,c,w,x,e\}, \{a,c,d,x,e\}, \{a,c,d,w,e\}, \\ & \{a,c,d,w,x\}, \{a,b,d,x,e\}, \{a,b,d,w,e\}, \{a,b,d,w,x\}, \{z,b,w,x,e\}, \{z,b,d,x,e\}, \\ & \{z,b,d,w,e\}, \{z,b,d,x,w\}, \{y,b,w,x,e\}, \{y,b,d,x,e\}, \{y,b,d,w,e\}, \{y,b,d,x,w\}, \\ & \{y,z,w,x,e\}, \{y,z,d,x,e\}, \{y,z,d,w,e\}, \{y,z,d,x,w\} > .\end{aligned}$$

Ainsi, par la proposition 1.6.8, $\widetilde{H}_i(\Omega_h, \Bbbk) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. De la proposition 1.6.11 nous concluons $\widetilde{H}_i(\Omega_h, \Psi_h; \Bbbk) \cong \widetilde{H}_{i-1}(\Psi_h; k)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, en particulier,

$$\widetilde{H}_4(\Omega_h, \Psi_h; \Bbbk) \cong \widetilde{H}_3(\Psi_h; k).$$

Donc : $\beta_{4,h}(\mathcal{B}_{\widetilde{\Gamma}}) = \dim_{\Bbbk} \widetilde{\mathrm{H}}_4(\Omega_h, \Psi_h; \Bbbk) = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_3(\Psi_h; k) = \beta_{4,9}(I_{\Psi_h})$. Cette dernière égalité vient de la formule de Hochster (voir 1.4). En utilisant Macaulay2, nous obtenons $\beta_{4,9}(I_{\Psi_h}) = 1$ et de cette façon on a $\beta_{4,h}(\mathcal{B}_{\widetilde{\Gamma}}) = 1$. Du corollaire 2.2.15 et du théorème 3.2.6 on déduit : $1 = \beta_{4,7}(I_{\widetilde{\Gamma}'}) \geq \beta_{4,7}(\mathcal{B}_{\widetilde{\Gamma}}) = \sum_{h' \in \Sigma(J_{\overline{\Gamma}}), |h'|=7} \beta_{4,h'} \geq \beta_{4,h}(\mathcal{B}_{\widetilde{\Gamma}}) = 1$ par conséquent $\beta_{4,7}(\mathcal{B}_{\widetilde{\Gamma}}) = 1$ et $p_2(\mathcal{B}_{\widetilde{\Gamma}}) = 4 = p_2(I_{\widetilde{\Gamma}(\Pi^*)})$.

□

4.2 Nombres de Betti d'une extension binomiale d'un graphe de cordes

Dans cette section on cherche à calculer les nombres de Betti de l'extension binomiale de l'idéal de Stanley-Reisner d'un complexe de cliques engendré par un graphe de cordes. Pour cela on fait réference au chapitre 2, section 2.3.

4.2.1 Notation. Soit $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des variables de $\Bbbk[\mathbf{x}]$. Pour tout $Q \subset V$, on notera Q et $(Q) \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ l'idéal engendré par Q.

Soient G un graphe de cordes, $\Gamma := \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G avec $F_1, \ldots, F_l$ ses facettes et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale. Par le théorème 3.6.9 $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ est 2-linéaire et en outre par le corollaire 3.2.10 et la remarque 3.4.14, pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$\beta_j(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}) = \beta_j(I_{\overline{\Gamma}'}). \tag{4.1}$$

Grâce au théorème 3.6.6 $\overline{G}' := (\overline{\Gamma}')_1$ est un graphe de cordes, et d'après le théorème 2.3.8 on a une formule pour calculer les nombres de Betti de $I_{\overline{\Gamma}'}$; pour cela on a besoin d'ordonner les facettes de $\overline{\Gamma}'$ de telle façon qu'elles forment une suite linéairement jointe. D'après la proposition 3.4.15 les facettes de $\overline{\Gamma}'$ peuvent être obtenues à partir des facettes de Γ. On verra alors comme obtenir une suite linéairement jointe des facettes de $\overline{\Gamma}'$ en donnant un ordre sur les facettes de Γ de telle sorte qu'elles forment une suite linéairement jointe.

4.2.2 Remarque. Soient G un graphe de cordes, $\Gamma := \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale de Γ. Dans la proposition 3.4.15 on a donné une description des facettes de $\overline{\Gamma}^{(\Pi)}$ pour toute permutation de Pp ; si nous prenos Π comme l'identité, alors $\overline{\Gamma}^{(\Pi)} = \overline{\Gamma}'$. Plus précisement toute facette de $\overline{\Gamma}'$ provient d'une facette de Γ et en fait à chaque facette de Γ est associé un ensemble de facettes de $\overline{\Gamma}'$, de la façon suivante :

1. Si $\overline{F} = F$, alors F est aussi une facette de Γ', on la notera $H_{F,1}$.
2. Si $F \neq \overline{F}$,

$$H_{F,j} = \overline{F} \setminus \{[M_F]_{1,1}, \ldots, [M_F]_{1,j-1}, [M_F]_{2,j+1}, \ldots, [M_F]_{2,|Y^{(F)}|+1}\}.$$

De plus si M_F est de la forme :

$$M_F = \left(\begin{array}{cccc|ccc|c|ccc} x_0^{(F)} & y_{1,1}^{(F)} & \ldots & y_{1n_1}^{(F_i)} & y_{2,1}^{(F_i)} & \ldots & y_{2,n_2}^{(F)} & \ldots & y_{m_F,1}^{(F)} & \ldots & y_{m_{Fn}m_F}^{(F)} \\ y_{1,1}^{(F)} & y_{1,2}^{(F)} & \ldots & x_1^{(F)} & y_{2,2}^{(F)} & \ldots & x_2^{(F)} & \ldots & y_{m_F,2}^{(F)} & \ldots & x_{m_F}^{(F)} \end{array}\right).$$

Alors, pour tout $1 \leq j \leq |Y^{(F)}| + 1$ et k_j l'entier plus grand tel que $j \geq \sum_{r=1}^{k} |Y_r^{(F)}| + 1$,

$$H_{F,j} = \{x_1^{(F)}, \ldots, x_k^{(F)}, [M_F]_{1,j}, [M_F]_{1,j+1}, y_{k+2,1}^{(F)}, \ldots, y_{m_F,1}^{(F)}\} \cup (F \setminus V_\Gamma(M_F)).$$

On peut remarquer que pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$, $|H_{F,j}| = |F|$. De cette façon Γ et $\overline{\Gamma}'$ ont la même dimension qu'on note $d-1$ et par la proposition 1.8.4

$$d = \dim\, (\Bbbk[\mathbf{x}]/I_\Gamma) = \dim\, (\Bbbk[\mathbf{z}]/I_{\overline{\Gamma}}).$$

4.2.3 Définition. *Soit $F_1, \ldots, F_l$ les facettes de Γ telles qu'elles forment une suite linéairement jointe.*

1. *S'il existe un certain $k < i$ tel que $x_0^{(i)} \in F_i$, alors on pose $H_{i,j} := H_{F_i,j}$.*

2. Dans le cas contraire, on pose $H_{i,j} := H_{F_i,|Y^{(F_i)}|+2-j}$.

Nous ordonnons l'ensemble de facettes $H_{i,j}$ *de* $\overline{\Gamma}'$ *par l'ordre lexicographique sur les indices* i, j.

Soit $F_1, \ldots, F_k$ une suite de facettes. Posons (voir section 2.3) $\Delta_j = F_j \backslash \cup_{j'=1}^{j-1} F_{j'}$, $D_j = \cup_{j=j+1}^{l} \Delta_{j'}$ et $P_j = V(G) \setminus (F_j \cup D_j)$. Rappelons que les idéaux $Q_i = (D_i, P_i)$ forment une suite linéairement jointe des idéaux si et seulement si $F_1, \ldots, F_k$ est une suite linéairement jointe de facettes.

4.2.4 Exemple. Soit G le graphe de l'exemple 2.3.6 de la figure 2.3 dont les cliques maximaux sont :
$F_1 = \{x_8, x_9, x_{10}\}, F_2 = \{x_7, x_8, x_9\}, F_3 = \{x_5, x_6, x_7\}, F_4 = \{x_3, x_4, x_8, x_{10}\}, F_5 = \{x_2, x_5, x_6\}$, $F_6 = \{x_1, x_3, x_{10}\}$. D'après l'éxemple 2.3.6, elles sont une suite de linéairement jointe de facettes de $\Gamma := \Gamma(G)$. Aux facettes F_4 et F_5 on associe les matrices suivantes :

$$M_{F_3} = \left(\begin{array}{c|c} x_7 & v \\ x_6 & x_5 \end{array}\right),\ M_{F_4} = \left(\begin{array}{cc|c|c} x_4 & w & y & z \\ w & x_8 & x_3 & x_{10} \end{array}\right).$$

Ainsi on considère $\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}}$ l'extension binomiale de Γ relative aux matrices M_{F_3} et M_{F_4}. D'après la remarque 4.2.2, les facettes de $\overline{\Gamma}'$ sont :

$$H_{1,1} = \{x_8, x_9, x_{10}\}, H_{2,1} = \{x_7, x_8, x_9\}, H_{3,1} = \{x_6, x_7, w\}, H_{3,2} = \{x_6, w, x_5\},$$
$$H_{4,1} = \{x_8, x_3, z, x_{10}\}, H_{4,2} = \{x_8, x_3, y, z\}, H_{4,3} = \{x_8, w, y, z\}, H_{4,4} = \{x_4, w, y, z\},$$
$$H_{5,1} = \{x_2, x_5, x_6\}, H_{6,1} = \{x_1, x_3, x_{10}\}.$$

En appliquant la proposition 2.3.4 nous avons que la suite des facettes précédentes est une suite linéairement jointe. En effet on peut calculer les ensembles $\mathcal{D}_{i,j}$, $P_{i,j}$ et $\Delta_{i,j}$ et vérifier la propriété 3 de 2.3.4 comme on voit ci-dessous :

(i,j)	$\mathcal{D}_{i,j}$	$P_{i,j}$	$\Delta_{i,j}$
$(1,1)$	$\{x_1, x_2, x_4, w, y, z, x_3, x_5, x_6, v, x_7\}$	0	
$(2,1)$	$\{x_1, x_2, x_4, w, y, z, x_3, x_5, x_6, v\}$	$\{x_{10}\}$	$\{x_7\}$
$(3,1)$	$\{x_1, x_2, x_4, w, y, z, x_3, x_5\}$	$\{x_8, x_9, x_{10}\}$	$\{x_6, v\}$
$(3,2)$	$\{x_1, x_2, x_4, w, y, z, x_3\}$	$\{x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$	$\{x_5\}$
$(4,1)$	$\{x_1, x_2, x_4, w, y\}$	$\{x_5, x_6, x_7, x_9, v\}$	$\{z, x_3\}$
$(4,2)$	$\{x_1, x_2, x_4, w\}$	$\{x_5, x_6, x_7, x_9, x_{10}, v\}$	$\{y\}$
$(4,3)$	$\{x_1, x_2, x_4\}$	$\{x_3, x_5, x_6, x_7, x_9, x_{10}, v\}$	$\{w\}$
$(4,4)$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_3, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, v\}$	$\{x_4\}$
$(5,1)$	$\{x_1\}$	$\{x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9, x_{10}, w, y, z\}$	$\{x_2\}$
$(6,1)$	0	$\{x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, w, y, z, v\}$	$\{x_1\}$.

□

4.2.5 Lemme. *Soient* $F_1, \ldots, F_l$ *les facettes d'un complexe simplicial* Γ *ordonnées de sorte qu'elles forment une suite linéairement jointe, et* $\{a, b\}$ *une arête propre d'une facette* F_i. *Si* $a \in F_j$ *pour* $j < i$. *Alors pour tout* $s < i$ $b \notin F_s$. *Par conséquent* $b \in \Delta_i$.

Preuve. Par l'absurde. Supposons qu'il existe $s < i$ tel que $b \in F_s$. En outre, on peut supposer que j et s sont minimaux avec la propriété que $a \in F_j$ et $b \in F_s$. De plus, sans perte de généralité on peut assumer que $j < s$. Comme s est minimal on a : $b \in F_s \setminus \cup_{i'=1}^{s-1} F_{i'} = \Delta_s$. Par ailleurs $a \notin F_s$, puisque $\{a, b\}$ est une arête propre de F_i, de plus pour $i' \geq 1$, $a \in F_j \subset \cup_{j'<s+i'} F_{j'}$, donc $a \notin F_{s-i'} \setminus \cup_{j'<s+i'} F_{j'} = \Delta_{s+i}$ et par conséquent $a \notin \cup_{i' \geq 1} \Delta_{s+i'} = \mathcal{D}_i$; de cette façon $a \in V(\Gamma) \setminus (F_s \cup D_s) = P_s$. D'où $ab \in P_s \times \Delta_s$ et comme $F_1, \ldots, F_l$ est une suite linéairement jointe par le point 3 de la proposition 2.3.4 $ab \in P_s \times \Delta_s \subset (P_i)$. Comme (P_i) est un idéal premier, a ou b appartient à P_i, mais $\{a, b\} \in F_i$ donc $a \notin P_i$ et $b \notin P_i$ ce qui est absurde. Par conséquent, comme $\Delta_i = F_i \setminus \cup_{s=1}^{i-1} F_{j'}$ on obtient que $b \in \Delta_i$. ∎

4.2.6 Proposition. *Soient G un graphe de cordes, $\Gamma := \Gamma(G)$ le complexe de cliques engendré par G de dimension $d-1$ et $\overline{\Gamma}$ une extension binomiale. Posons $\overline{\Gamma}^{(i)}$ le complexe simplicial avec facettes : $F_1, \ldots, F_{i-1}, H_{i,1}, H_{i,2}, \ldots, H_{i,|Y^{(F_i)}+1|}, F_{i+1}, \ldots, F_l$. Si les facettes de $F_1, \ldots, F_l$ de Γ forment une suite linéairement jointe, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$:*

1. *$F_1, \ldots, F_{i-1}, H_{i,1}, H_{i,2}, \ldots, H_{i,|Y^{(F_i)}+1|}, F_{i+1}, \ldots, F_l$ sont une suite linéairement jointe des facettes.*
2. *Soient $\widetilde{n} = |Y^{(F_j)}|$, $c = \text{ht}\,(I_\Gamma)$ et $\rho = \text{dimproj}\,(I_\Gamma)$, alors $\text{ht}\,(I_{\overline{\Gamma}^{(i)}}) = c + \widetilde{n}$ et $\text{dimproj}\,(I_{\overline{\Gamma}^{(i)}}) = \rho + \widetilde{n}$. De plus, en posant*

$$\delta(k,i) := \begin{cases} 1 & \text{si } |\mathcal{D}_i| + |P_i| \geq |V(\Gamma)| - i, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $k = 1, \ldots, d-1$ on a que : $s_k(\Gamma^{(i)}) = s_k(\Gamma) + \delta(k,i) \cdot |Y^{(F_i)}|$ (voir théorème 2.3.8 pour la definition de $s_k(\Gamma)$).

Preuve.

1. Soit M_{F_i} la matrice associé à la facette F_i de la forme :

$$M_{F_i} = \left(\begin{array}{cccc|ccc|c|ccc} x_0 & y_{1,1} & \cdots & y_{1n_1} & y_{2,1} & \cdots & y_{2,n_2} & \cdots & y_{m_F,1} & \cdots & y_{m_F,n_{m_F}} \\ y_{1,1} & y_{1,2} & \cdots & x_1 & y_{2,2} & \cdots & x_2 & \cdots & y_{m_F,2} & \cdots & x_{m_F} \end{array} \right).$$

   Par la remarque 4.2.2, les facettes de $\overline{\Gamma}$ sont :

$$
\begin{aligned}
H_{F_1,1} &:= F_1,\\
&\vdots\\
H_{F_{i-1},1} &:= F_{i-1},\\
H_{F_i,1} &:= \{x_0, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{m_F 1}\} \cup (F_i \setminus V_\Gamma(M_{F_i})),\\
H_{F_i,2} &:= \{y_{11}, y_{12}, y_{21}, \ldots, y_{m_F 1}\} \cup (F_i \setminus V_\Gamma(M_{F_i})),\\
&\vdots\\
H_{F_i,n_1+1} &:= \{x_1, y_{1n_1}, y_{12}, y_{31}, \ldots, y_{m_F 1}\} \cup (F_i \setminus V_\Gamma(M_{F_i})),\\
H_{F_i,n_1+2} &= \{x_1, y_{21}, y_{22}, y_{31}, \ldots, y_{m_F 1}\} \cup (F_i \setminus V_\Gamma(M_{F_i})),\\
&\vdots\\
H_{F_i,1+\sum_{j=1}^{m_F-1} n_j} &:= \{x_1, \ldots, x_{m_F-1}, y_{m_F-1 n_{m_F-1}}, y_{m_F 1}\} \cup (F_i \setminus V_\Gamma(M_{F_i})),\\
H_{F_i,2+\sum_{j=1}^{m_F-1} n_j} &:= \{x_1, \ldots, x_{m_F-1}, y_{m_F 1}, y_{m_F 2}\} \cup (F_i \setminus V_\Gamma(M_{F_i})),\\
&\vdots\\
H_{F_i,\sum_{j=1}^{m_F} n_j} &:= \{x_1, \ldots, x_{m_F-1}, y_{m_F n_{m_F}-1} y_{m_F n_{m_F}}\},\\
H_{F_i,1+\sum_{j=1}^{m_F} n_j} &:= \{x_1, \ldots, x_{m_F}, y_{m_F n_{m_F}}\},\\
H_{F_{i+1},1} &:= F_{i+1},\\
&\vdots\\
H_{F_l,1} &:= F_l.
\end{aligned}
$$

Pour $1 \leq k \leq l$, on pose $n(k) = 1$ si $k \neq i$ et $n(i) = 1 + \sum_{j=1}^{m_F} n_j$. On a deux cas

(a) Soit il existe $i' < i$ tel que $x_0 \in F_{i'}$. Il faut prouver que

$H_{1,1} = H_{F_1,1}, \ldots, H_{i-1,1} = H_{F_{i-1},1}, H_{i_1} = H_{F_1,1}, \ldots, H_{i,n(i)} := H_{F_i,n(i)}$, $H_{i+1,1} = H_{F_{i+1},1}, \ldots, H_{l,1} = H_{F_l,1}$ est une suite linéairement jointe.

Par le point 3 de la proposition 2.3.3 il suffit de montrer que $< \Delta_{j,j'} > \times \mathcal{P}_{k,k'} \subset (\mathcal{P}_{k,k'})$ pour tous $j, j' \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq j < j \leq l$ et $1 \leq j' < k' \leq n(k')$, où les ensembles $\Delta_{k,r}$ et $\mathcal{P}_{k,r} =< P_j >$ ont été définis dans la section 2.3 (voir les équations 2.5 et 2.6 en faisant attention à notre notation introduite dans cette section). Ainsi, $\Delta_j = F_j \setminus \cup_{j'=1}^{j-1} F_{j'}$, $D_j = \cup_{j=j+1}^{l} \Delta_{j'}$ et $P_j = V(G) \setminus (F_j \cup D_j)$,

$$
\begin{gathered}
\Delta_{k,k'} = H_{k,k'} \setminus (\cup_{(j,j')<_{\text{lex}}(k,k')} H_{j,j'}) \text{ pour } (k,k') \neq (1,1)\,;\\
\mathcal{D}_{k,k} = \cup_{(j,j')>_{\text{lex}}(k,k')} \Delta_{j,j'} \text{ pour } (k,k') \neq (l, n(l)) \text{ et } \mathcal{D}_{l,n(l)} = \emptyset\,;\\
\text{et } P_{k,k'} = V(\Gamma^{(i)} \setminus (H_{k,k'} \cup \mathcal{D}_{k,k}\} \text{ pour } (k,k') \neq (1,1).
\end{gathered}
$$

Avant de calculer les ensembles précédent explicitement on remarque que comme pour tout $j \in \{1, \ldots, m_F\}$, $\{x_0, x_j\}$ est une arête propre de Γ par définition de $\overline{\Gamma}$ on a que $\{x_1, \ldots, x_{m_F}\} \subset D_i$, grâce au lemme 4.2.5. On pose

$$\{y_{j,k}\}_{j=a}^{b}|_{k=c}^{d} := \{y_{j,k} : a \leq j \leq b \text{ et} c \leq k \leq d\}.$$

Maintenant on calcule les ensembles précédents :

(k,k')	$\mathcal{D}_{k,k'}$	$P_{k,k'}$	$\Delta_{k,k'}$
$(1,1)$	$\mathcal{D}_1 \cup Y^{(F_i)}$	0	
$(1,2)$	$\mathcal{D}_1 \cup Y^{(F_i)}$	P_2	Δ_2
$\vdots$			
$(i-1,1)$	$\mathcal{D}_{i-1} \cup Y^{(F_i)}$	P_{i-1}	Δ_{i-1}
$(i,1)$	$\mathcal{D}_i \cup (Y^{(F_i)} \setminus \{y_{1,j}\}_{j=1}^{m_F}) \cup \{x_j\}_{j=1}^{m_F}$	P_i	$\Delta_i \setminus \{x_i\}_{j=1}^{m_F} \cup \{y_{1,j}\}_{j=1}^{m_F}$
$(i,2)$	$\mathcal{D}_i \cup (\{y_{j,k}\}_{j=1}^{m_{F_i}}\|_{k=2}^{n_j} \setminus \{y_{1,2}\}) \cup \{x_j\}_{j=1}^{m_F}$	$P_i \cup \{x_0\}$	$\{y_{1,2}\}$
$(i,3)$	$\mathcal{D}_i \cup (\{y_{j,k}\}_{j=1}^{m_{F_i}}\|_{k=2}^{n_j} \setminus \{y_{1,2}, y_{1,3}\}) \cup \{x_j\}_{j=1}^{m_F}$	$P_i \cup \{x_0, y_{1,1}\}$	$\{y_{1,3}\}$
$\vdots$			
(i,n_1)	$\mathcal{D}_i \cup (\{y_{j,k}\}_{j=2}^{m_{F_i}}\|_{k=2}^{n_j} \setminus \{y_{1,n_1}\}) \cup \{x_j\}_{j=2}^{m_F}$	$P_i \cup \{x_0\} \cup \{y_{1j}\}_{j=1}^{n_1-2}$	$\{y_{1,n_1}\}$
(i,n_1+1)	$\mathcal{D}_i \cup \{y_{j,k}\}_{j=2}^{m_{F_i}}\|_{k=2}^{n_j} \cup \{x_j\}_{j=2}^{m_F}$	$P_i \cup \{x_0\} \cup \{y_{1j}\}_{j=1}^{n_1-1}$	$\{x_1\}$
(i,n_1+2)	$\mathcal{D}_i \cup (\{y_{j,k}\}_{j=2}^{m_{F_i}}\|_{k=2}^{n_j} \setminus \{y_{22}\}) \cup \{x_j\}_{j=2}^{m_F}$	$P_i \cup \{x_0\} \cup \{y_{1j}\}_{j=1}^{n_1}$	$\{y_{2,2}\}$
$\vdots$			
$(i,1+n(i))$	$\mathcal{D}_i$	$P_i \cup \{x_0\} \cup (Y^{(F_i)} \setminus \{y_{m_F,n_{m_F}}\})$	$\{x_{m_F}\}$
$(i+1,1)$	$\mathcal{D}_{i+1}$	$P_{i+1} \cup Y^{(F_i)}$	Δ_{i+1}
$\vdots$			
$(l,1)$	0	$P_l \cup Y^{(F_i)}$	Δ_l

Avant de prouver que $\Delta_{j,j'} \times \mathcal{P}_{j,j'} \subset (\mathcal{P}_{k,k'})$ pour tous $1 \leq j < j \leq l$ et $1 \leq j' < k' \leq n(k')$ on remarque que : $F_1, \ldots, F_l$ est une suite linéairement jointe, d'après la proposition 2.3.3 pour tout $j \in \{2, \ldots, l\}$ et pour tout $k > j$ on a $\Delta_j \times P_j \subset \mathcal{P}_k$. Maintenant

- Si $j < i$. D'après la table ci-dessus, pour tout $k > j$ $\Delta_{j,1} \times P_{j,1} = \Delta_j \times P_j \subset \mathcal{P}_k$ et par conséquent si $k \neq i$, $\Delta_{j,1} \times P_{j,1} \subset \mathcal{P}_{k,1}$ et si $k = i$, $\Delta_{j,1} \times P_{j,1} \subset \mathcal{P}_{i,k'}$ avec $k' \in \{1, \ldots, n(i)\}$.
- Si $j = i$. Par la table ci-dessus, $P_{i,k'} \subset P_{i,k'+1}$ pour tout $k' \in \{1, \ldots, n(i)-1\}$. Donc, pour tout $k', k'' \in \{1, \ldots, n(i)\}$, $k'' > k'$, $\Delta_{i,k'} \times P_{i,k'} \subset \mathcal{P}_{i,k''}$. Maintenant pour $k > i$ et $k' \in \{1, \ldots, n(i)\}$, on a que $\Delta_{i,k'} \times P_{i,k'} \subset \mathcal{P}_{k,1}$; car $Y^{(F_i)} \subset \mathcal{P}_{k,1}$ et d'autre $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset \Delta_i$ et $\Delta_i \times P_i \subset \mathcal{P}_k$.
- Si $j > i$ pour $k > i$ $\Delta_{j,1} \times P_{j,1} \subset \mathcal{P}_{k,1}$, car $\Delta_{j,1} = \Delta_j$, $\Delta_j \times P_j \subset \mathcal{P}_k$ et $Y^{(F_i)} \subset P_{j,1}, P_{k,1}$.

De cette façon on a prouvé que que $\Delta_{j,j'} \times \mathcal{P}_{k,k'} \subset (\mathcal{P}_{k,k'})$ pour tous $1 \leq j < j \leq l$ et $1 \leq j' < k' \leq n(k')$. D'après la proposition 2.3.3

$$\overline{F}_{1,1}, \ldots, \overline{F}_{i-1,1}, \overline{F}_{i_1}, \ldots, \overline{F}_{i,n(i)}, \overline{F}_{i+1,1}, \ldots, \overline{F}_{l,1}$$

est une suite linéairement jointe.

(b) Soit $x_0 \notin F_{i'}$ pour tout $i' < i$. Il faut prouver que

$$H_{1,1}, \ldots, H_{i-1,1}, H_{i,1} = H_{F_i,n(i)}, \ldots, H_{i,n(i)} = H_{F_i,1}, H_{i+1,1}, \ldots, H_{l,1}$$

est une suite linéairement jointe. Donc comme dans le point 1 on obtient la table suivante, en tenant en compte que Comme $x_0 \notin F_k$ pour tout $k < i$, on déduit de la définition de Δ_i que $x_0 \in \Delta_i$:

(k,k')	$\mathcal{D}_{k,k'}$	$P_{k,k'}$	$\Delta_{k,k'}$
$(1,1)$	$\mathcal{D}_1 \cup Y^{(F_i)}$	0	
$(1,2)$	$\mathcal{D}_1 \cup Y^{(F_i)}$	P_2	Δ_2
$\vdots$			
$(i-1,1)$	$\mathcal{D}_{i-1} \cup Y^{(F_i)}$	P_{i-1}	Δ_{i-1}
$(i,1)$	$\mathcal{D}_i \cup (Y^{(F_i)} \setminus \{y_{m_F,n_{m_F}}\}) \cup \{x_0\}$	P_i	$\Delta_i \setminus \{x_0\} \cup \{y_{m_F,n_{m_F}}\}$
$(i,2)$	$\mathcal{D}_i \cup (Y^{(F_i)} \setminus \{y_{n_{m_F},j}\}_{j=n_{m_F}-1}^{n_{m_F}}) \cup \{x_0\}$	$P_i \cup \{x_{m_F}\}$	$\{y_{m_F,n_{m_F}-1}\}$
$(i,3)$	$\mathcal{D}_i \cup (Y^{(F_i)} \setminus \{y_{n_{m_F},j}\}_{j=n_{m_F}-2}^{n_{m_F}}) \cup \{x_0\}$	$P_i \cup \{x_{m_F}, y_{m_F,n_{m_F}}\}$	$\{y_{m_F,n_{m_F}-2}\}$
$\vdots$			
(i,n_{m_F})	$\mathcal{D}_i \cup \{y_{1,1}\ldots,y_{m_F-1,n_{m_F-1}-1}\} \cup \{x_0\}$	$P_i \cup \{y_{m_F,j}\}_{j=3}^{n_{m_F}} \cup \{x_{m_F}\}$	$\{y_{m_F,1}\}$
$(i,n_{m_F}+1)$	$\mathcal{D}_i \cup \{y_{1,1}\ldots,y_{m_F-1,n_{m_F-1}-2}\} \cup \{x_0\}$	$P_i \cup \{y_{m_F,j}\}_{j=2}^{n_{m_F}} \cup \{x_{m_F}\}$	$\{y_{m_F-1,n_{m_F-1}}\}$
$\vdots$			
$(i,n(i))$	$\mathcal{D}_i$	$P_i \cup \{y_{j,k}\}_{j=1}^{m_F}{}_{|k=2}^{n_i} \cup \{x_j\}_{j=1}^{m_F}$	$\{x_0\}$
$(i+1,1)$	$\mathcal{D}_{i+1}$	$P_{i+1} \cup Y^{(F_i)}$	Δ_{i+1}
$\vdots$			
$(l,1)$	0	$P_l \cup Y^{(F_i)}$	Δ_l

Maintenant on va prouver que $\Delta_{j,j'} \times \mathcal{P}_{j,j'} \subset (\mathcal{P}_{k,k'})$ pour tous $1 \leq j < j \leq l$ et $1 \leq j' < k' \leq n(k')$

– Si $j < i$. D'après la table ci-dessus, pour tout $k > j$ $\Delta_{j,1} \times P_{j,1} = \Delta_j \times P_j \subset \mathcal{P}_k$ et par conséquent si $k \neq i$, $\Delta_{j,1} \times P_{j,1} \subset \mathcal{P}_{k,1}$ et si $k = i$, $\Delta_{j,1} \times P_{j,1} \subset \mathcal{P}_{i,k'}$ avec $k' \in \{1,\ldots,n(i)\}$.

– Si $j = i$. Par la table ci-dessus, $P_{i,k'} \subset P_{i,k'+1}$ pour tout $k' \in \{1,\ldots,n(i)-1\}$. Donc, pour tout $k', k'' \in \{1,\ldots,n(i)\}$, $k'' > k'$, $\Delta_{i,k'} \times P_{i,k'} \subset \mathcal{P}_{i,k''}$. Maintenant pour $k > i$ et $k' \in \{1,\ldots,n(i)\}$, on a que $\Delta_{i,k'} \times P_{i,k'} \subset \mathcal{P}_{k,1}$; car $Y^{(F_i)} \subset \mathcal{P}_{k,1}$ et d'autre $x_0 \in \Delta_i \times P_i \subset \mathcal{P}_k$.

– Si $j > i$ pour $k > i$ $\Delta_{j,1} \times P_{j,1} \subset \mathcal{P}_{k,1}$, car $\Delta_{j,1} = \Delta_j$, $\Delta_j \times P_j \subset \mathcal{P}_k$ et $Y^{(F_i)} \subset P_{j,1}, P_{k,1}$.

De cette façon on conclut que $\Delta_{j,j'} \times \mathcal{P}_{k,k'} \subset (\mathcal{P}_{k,k'})$ pour tout $1 \leq j < j \leq l$ et $1 \leq j' < k' \leq n(k')$. D'après le point 3 de la proposition 2.3.3 on obtient que

$$F_{1,1},\ldots,F_{i-1,1},F_{i,n(i)},\ldots,F_{i_1},F_{i+1,1},\ldots,F_{l,1}$$

est une suite linéairement jointe.

2. De la remarque 4.2.2 $d = \dim(\mathbb{k}[\mathbf{x}]/I_\Gamma) = \dim(\mathbb{k}[\mathbf{z}]/I_{\overline{\Gamma}^{(i)}})$ et comme $c = \text{ht}\ (I_\Gamma) = |V(\Gamma)| - d$ on a

$$\text{ht}\ (I_{\overline{\Gamma}^{(i)}}) = |V(\overline{\Gamma}^{(i)}| - d = (\widetilde{n} + |V(\Gamma)|) - d =, \widetilde{n} + (|V(\Gamma)| - d) = \widetilde{n} + c.$$

Par ailleurs, de la remarque 2.3.11 le tableau M_Γ et $M_{\overline{\Gamma}^{(i)}}$ s'obtient en supperposant les rectangles $\Delta_k \times P_k$ et $\Delta_{k,k'} \times P_{k,k'}$. Du point antérieur on peut voir que dans les deux cas qu'on a considéré $|\Delta_{k,1}| = |\Delta_k|$ et $|P_{k,1}| = |P_k|$ pour $k = 2,\ldots,l$; de même que $|\Delta_{i,k'}| = 1$ et $|P_{i,k'}| = |P_{i,k'}| + k' - 1$ pour $k' = 2,\ldots,n(i)$; . Ainsi, les tableau M_Γ et M_Γ ont la forme qu'on détaille dans la figure 4.4 :

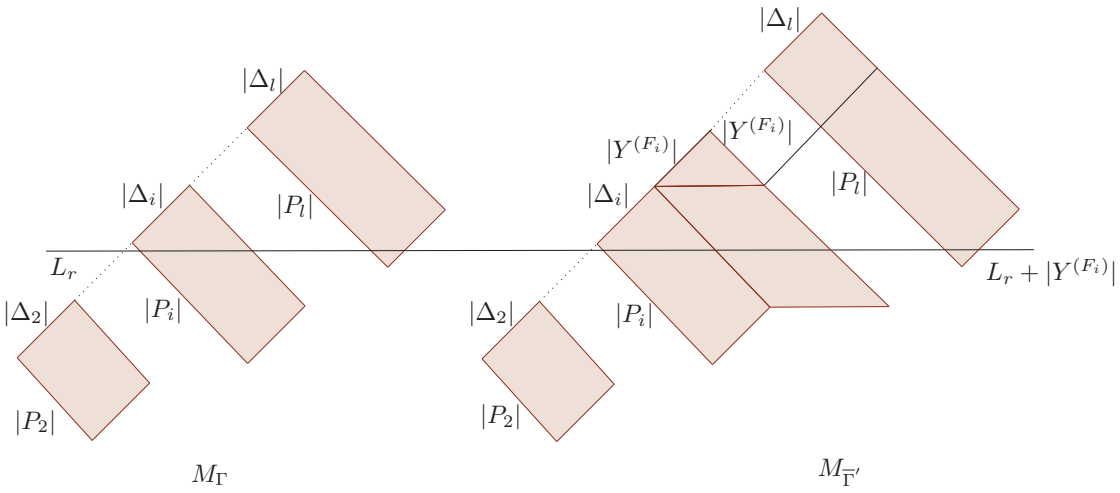


FIGURE 4.4 –

Par le théorème 2.3.8 la dimension projective de $I_{\overline{\Gamma}^{(i)}}$ est les nombre de lignes de $M_{\overline{\Gamma}^{(i)}}$ moins 1. On peut remarquer de la 4.4 que les nombre de lignes de $M_{\overline{\Gamma}^{(i)}}$ est le même nombre de lignes de M_Γ plus $\widetilde{n}$, par conséquent du théorème 2.3.8 dimproj $(\mathcal{I}_{\overline{\Gamma}^{(i)}}) = \rho + \widetilde{n}$. En plus de la même figure 4.4 on peut remarquer que pour $r = c, \ldots, \rho$, le cardinal de la ligne $L_{r+\widetilde{n}}(M_{\overline{\Gamma}^{(i)}})$ de $M_{\overline{\Gamma}^{(i)}}$ est le cardinal de la ligne $L_r(M_\Gamma)$ de M_Γ en ajoutant le nombre $\widetilde{n} \cdot \delta(r+n, j)|Y^{(F_j)}|$ où

$$\begin{aligned}\delta(r+n,j) : \quad &= \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{k'=i+1}^{l} |\Delta_{k'}| + |P_i| + n \geq r+n, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } |\mathcal{D}_i| + |P_i| \geq r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

Remarquons que $I_\Gamma = \cup_{i=1}^{l}(x \in V(G) \notin F_i)$ par la proposition et de la section 2.3 $(D_i, P_i) = (x \in V(G) \notin F_i)$, ainsi $|D_i| + |P_i| = |Q_i| =\geq \text{ht } (I) = c$.
Rapellons que du théorème 2.3.8 pour $i = 1, \ldots, d-1$, $s_{d-i}(\Gamma)$ et $s_{d-i}(\overline{\Gamma}^{(i)})$ sont le nombre d'éléments de la ligne L_{c+i} du tableau M_Γ et L_{c+n+i}. Par conséquent, pour $i = 1, \ldots, d-1$, $s_i(\overline{\Gamma}^{(i)}) = |L_{c+n+(d-i)}(M_{\overline{\Gamma}^{(i)}})| = |L_{c+d-i}(M_\Gamma)| + \delta(i,j)|Y^{(F_j)}|$ où

$$\begin{aligned}\delta(i,j) := \delta(c+n+(d-i),j)|Y^{(F_j)} \quad &= \begin{cases} 1 & \text{si } |\mathcal{D}_i| + |P_i| \geq c+d-i, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } |\mathcal{D}_i| + |P_i| \geq (|V(\Gamma)| - d) + d - i, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } |\mathcal{D}_i| + |P_i| \geq |V(\Gamma)| - i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

■

4.2.7 Théorème. *Soient G un graphe de cordes, $\Gamma = \Gamma(G)$ son complexe de cliques, $\overline{\Gamma}$ une extension binomial de Γ, M le tableau associé aux facettes $F_1, \ldots, F_l$ de Γ qui sont une suite linéairement jointe et $\widetilde{n} = |V(\overline{\Gamma}) \setminus V(\Gamma)|$. Alors :*

1. *Soit* $c = \text{ht } (I_{\Gamma(G)})$ *et* $\rho = \text{dimproj } (I_\Gamma)$, *alors* $\text{ht } (\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}'}) = c + \widetilde{n}$, $\text{dimproj } (\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}'}) = \rho + \widetilde{n}$.
2. *Soient* L_i *la* i*-ème ligne de* M, $d = \dim\,(\Bbbk[\mathbf{x}]/I_\Gamma)$ *et* $s_{d-i} = |L_{c+i}|$. *Alors*

$$\beta_j(\Bbbk[V]/\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}'}) = j \begin{pmatrix} c+n+1 \\ j+1 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{d-1} \left(s_i + \sum_{j=1}^{l} \delta(j, s_i)|Y_j| \right) \begin{pmatrix} |V(\overline{\Gamma})| - i - 1 \\ j-1 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \delta(j,i) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\mathcal{D}_j| + |P_j| \geq |V(\Gamma)| - i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. En appliquant le théorème 2.3.8 recursivement l fois on obtient que

$$s_i(\overline{\Gamma}') = s_i + \sum_{j=1}^{l} \delta(j, s_i)|Y_j|;$$

et en utilisant la proposition 4.2.6 on conclut le théorème.

■

4.3 Appendice : Sommes d'idéaux toriques

Dans la section 4.1 nous avons trouvé une borne supérieure de $p_2(\mathcal{B}_{\overline{\Gamma}})$ dans le cas où $J_{\overline{\Gamma}}$ est un idéal torique. Dans cette section nous essaierons de trouver des familles d'extensions pour lesquelles $J_{\overline{\Gamma}}$ est un idéal torique.

Idéaux toriques et paramétrisation

Du théroème 1.3.12, il découle immédiatement la proposition suivante :

4.3.1 Proposition. *Soit* $I \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ *un idéal.* I *est un idéal torique de caractère* 1 *si et seulement si* $I = \text{Ker } \varphi$, *où* $\varphi : \Bbbk[\mathbf{x}] \to \Bbbk[\mathbf{t}^{\pm 1}]$ *est le morphisme défini par* $\varphi(x_i) = t^{\alpha_i}$ *et* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}^m$ ■

4.3.2 Définition. Le morphisme $\varphi : \Bbbk[\mathbf{x}] \to \Bbbk[\mathbf{t}^{\pm 1}]$ défini par la proposition 4.3.1 est appelé **paramétrisation** de l'idéal Ker φ.

4.3.3 Remarque. Soit $\varphi : \Bbbk[\mathbf{x}] \to \Bbbk[\mathbf{t}^{\pm 1}]$ une paramétrisation de $I := \text{Ker } \varphi$ telle que $\varphi(x_i) = t^{\alpha_i}$ où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}^m$. Alors I est un idéal premier, puisque $\Bbbk[\mathbf{x}]/I \cong \varphi(\Bbbk[\mathbf{x}]) \subset \Bbbk[\mathbf{t}^{\pm 1}]$ est un anneau intègre. En outre, on pose $A = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ et $\pi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Z}^m$ le morphisme de semi-groupes défini par $\pi(\mathbf{e}_i) = \alpha_i$. Alors, par le théorème 1.3.12 et la définition 1.2.10, on a que :

$$I = I_A := (\mathbf{x}^{u_+} - \mathbf{x}^{u_-} : \pi(u_+) = \pi(u_-)).$$

De plus, si $u \in \mathbb{N}^n$, alors $\varphi z^u = t^{A \cdot u}$.

4.3.4 Proposition. *Soient* $\varphi : \Bbbk[\mathbf{x}] \to \Bbbk[\mathbf{t}^{\pm 1}]$ *une paramétrisation de* $I := \operatorname{Ker} \varphi$ *telle que* $\varphi(x_i) = t^{\alpha_i}$. *Étant donné la matrice* $A = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$, *on a que* $\operatorname{rang}(A) = \dim(\Bbbk[\mathbf{x}]/I)$.

Preuve. D'après le point 6 de la proposition 1.3.12 $\Bbbk[\mathbf{x}]/I \cong \Bbbk[\mathbf{x}][\mathbf{t}^{\alpha_1}, \ldots, \mathbf{t}^{\alpha_n}]$. La dimension de Krull du domaine entier $\Bbbk[\mathbf{t}^{\alpha_1}, \ldots, \mathbf{t}^{\alpha_n}]$ est le plus grand nombre de monômes $\mathbf{t}_i^{\alpha}$ algébriquement indépendants. Or, un ensemble de monômes est algébriquement indépendant si et seulement si ses vecteurs exposants sont linéairement indépendants. Ainsi $\operatorname{rang}(A) = \dim(\Bbbk[\mathbf{x}]/I)$. ∎

4.3.5 Définition. Soient $\varphi : \Bbbk[\mathbf{x}] \to \Bbbk[\mathbf{t}^{\pm 1}]$ une paramétrisation de $I := \operatorname{Ker} \varphi$. On dit que φ est de rang maximal si $\dim(\Bbbk[\mathbf{x}]/I)$ est égale au cardinal de $\mathbf{t}$.

On dit que $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{N}^n$ et $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{N}^n$ sont de supports disjoints si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $u_i \neq 0$ alors $v_i = 0$ et réciproquement. En outre, pour tout $u \in \mathbb{Z}^n$ il existe deux vecteurs uniques $u_+, u_- \in \mathbb{N}^n$ de supports disjoints tel que $u = u_+ - u_-$. Ainsi, de la remarque 4.3.3 on a la proposition suivante

4.3.6 Proposition. *Soit* $\varphi : \Bbbk[\mathbf{x}] \to \Bbbk[\mathbf{t}^{\pm 1}]$ *une paramétrisation de* $\operatorname{Ker} \varphi$. *Alors, en posant*

$$\operatorname{Ker}_{\mathbb{Z}} A := \{u \in \mathbb{Z}^m : Au = 0\},$$

$\operatorname{Ker} \varphi = (\mathbf{x}^{u_+} - \mathbf{x}^{u_-} : u_+, u_- \in \mathbb{N}^n$ de supports disjoints et $(u_+ - u_-) \in \operatorname{Ker}_{\mathbb{Z}} A)$. ∎

D'après la proposition 4.3.6, pour trouver les générateurs d'un idéal torique I, il suffit de résoudre le système d'équations linéaires homogène sur $\mathbb{Z}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = 0,$$

où A est une matrice associée à la paramétrisation φ de I. Nous savons par l'algèbre linéaire que pour tout $Q \in M_{m,m}(\mathbb{Q})$ inversible, $\operatorname{Ker}_{\mathbb{Z}} A = \operatorname{Ker}_{\mathbb{Z}} QA$, donc la proposition suivante est immédiate.

4.3.7 Proposition. *Soit* A *une matrice associée a une paramétrisation* $\varphi : \Bbbk[\mathbf{x}] \to \Bbbk[\mathbf{t}^{\pm 1}]$. *Si* $B \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ *est une matrice obtenue à partir de* A *en la multipliant à gauche par une matrice inversible* $Q \in M_{m,m}(\mathbb{Q})$, *alors* $I_B = \operatorname{Ker} \varphi$ *et la matrice* B *définit une nouvelle paramétrisation de* $\operatorname{Ker} \varphi$ *par* $\widetilde{\varphi}(x^u) = \mathbf{t}^{[B]\cdot u}$. *En particulier, si* $B \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ *est obtenue en appliquant une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes de* A, *alors* $I_B = \operatorname{Ker} \varphi$ *et la matrice* B *définit une nouvelle paramétrisation de* $\operatorname{Ker} \varphi$. *De plus si* φ *est de rang maximal il en est de même pour* $\widetilde{\varphi}$.

Preuve. En effet d'après 4.3.6 $\operatorname{Ker}_{\mathbb{Z}} A = \operatorname{Ker}_{\mathbb{Z}} B$. Donc $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}$. ∎

Idéaux de scroll

Soient $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ et pour chaque $j \in \{1, \ldots, m\}$ $\mathbf{x}_j = (x_{i_1}, \cdots, x_{i_{n_i}})$ une famille de variables, où toutes les familles de variables $\mathbf{x}_j$ sont disjointes. On rapelle que la **matrice de scroll** $M(\mathbf{x}_{n_1}, \ldots, \mathbf{x}_{n_m})$ (notée $M(n_1, \ldots, n_m)$ au cas où il n'y a pas de confusion sur les variables) est une matrice 1-générique (voir page 64 de [9]) de la forme $M(n_1, \ldots, n_m) = [M_{n_1} | \cdots | M_{n_m}]$ avec

$$M_{n_i} = \begin{bmatrix} x_{i_1} & x_{i_2} & \ldots & x_{i_{n_i-1}} \\ x_{i_2} & x_{i_3} & \ldots & x_{i_{n_i}} \end{bmatrix},$$

et l'**idéal de scroll** $\mathcal{I}(\mathbf{x}_{n_1}, \ldots, \mathbf{x}_{n_m})$ (noté $\mathcal{I}(n_1, \ldots, n_m)$ au cas où il n'y a pas de confusion sur les variables) est l'idéal engendré pour tous les mineurs 2×2 de $M(n_1, \ldots, n_m)$. Il est bien connu que l'idéal de scroll $\mathcal{I}(n_1, \ldots, n_m)$ est torique et qu'une paramétrisation de $\mathcal{I}(n_1, \ldots, n_m)$ est donnée par la proposition suivante :

4.3.8 Proposition. *[35, Lemme 2.1] Soient $\mathcal{I}(n_1, \ldots, n_m)$ un idéal de scroll sur $\mathbb{k}[\mathbf{x}_{n_1}, \ldots, \mathbf{x}_{n_m}]$, $\varphi : \mathbb{k}[\mathbf{x}_{n_1}, \ldots, \mathbf{x}_{n_m}] \to [s_1^{\pm 1}, \ldots, s_m^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ le morphisme defini par $\varphi(x_{i_j}) = s_1 \cdots s_i t^j$. Alors que $\mathcal{I}(n_1, \ldots, n_m) = I_{\mathcal{A}}$ où*

$$\mathcal{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \ldots & n_1 & 1 & \ldots & n_2 & \ldots & 1 & \ldots & n_m \end{array}\right].$$

■

Une autre manière de paramétriser l'idéal de scroll $\mathcal{I}(n_1, \ldots, n_m)$ est celle de l'exercise $A.2.19$ de [8] (page 612) qui est l'objet de la proposition suivante :

4.3.9 Proposition. *Soit $\mathcal{I}(n_1, \ldots, n_m)$ un idéal de scroll sur $\mathbb{k}[\mathbf{x}_{n_1}, \ldots, \mathbf{x}_{n_m}]$. Alors*

$$\mathcal{I}(n_1, \ldots, n_m) = I_{\mathcal{B}}, \text{ avec}$$

$$\mathcal{B} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc} n_1-1 & n_1-2 & \ldots & 0 & n_2-1 & n_2-2 & \ldots & 0 & \ldots & n_m-1 & n_m-2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n_1-1 & 0 & 1 & \ldots & n_2-1 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & n_m-1 \end{array}\right].$$

De plus, en notant $[\mathcal{B}]_i$ la i-ième colonne de $\mathcal{B}_i$ et $n = \sum_{i=1}^m n_i$, on a que la matrice

$$M = [[\mathcal{B}]_1, [\mathcal{B}]_{n_1}, [\mathcal{B}]_{n_1+n_2} \ldots, [\mathcal{B}]_{n_1+\cdots+n_m}]$$

est inversible, donc $\dim\left(\mathbb{k}[\mathbf{x}]/\mathcal{I}(n_1, \ldots, n_m)\right) = m + 1$.

Preuve. D'après la proposition 4.3.8, $\mathcal{I}(n_1,\dots,n_m) = I_{\mathcal{A}}$ où

$$\mathcal{A} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n_1 & 1 & 2 & \dots & n_2 & \dots & 1 & 2 & \dots & n_m \end{array}\right].$$

Grâce à la proposition 4.3.7 il suffit de voir que l'on peut obtenir $\mathcal{B}$ à partir de $\mathcal{A}$ en appliquant à $\mathcal{A}$ des opérations élémentaires sur les lignes. Notons L_i la ligne d'une matrice $X \in M_{m+1,\sum_{i=1}^m n_i}$. En faisant l'opération $L_{m+1} - L_1 \longrightarrow L_{m+1}$ sur $\mathcal{A}$ on obtient

$$\mathcal{A}' = \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & n_1-1 & 0 & 1 & \dots & n_1-1 & \dots & 0 & 1 & \dots & n_m-1 \end{array}\right].$$

Après la suite des opérations $L_i - L_{i+1} \longrightarrow L_i$ pour $1 \leq i \leq m-1$, on obtient :

$$\mathcal{A}'' = \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & n_1-1 & 0 & 1 & \dots & n_1-1 & \dots & 0 & 1 & \dots & n_m-1 \end{array}\right].$$

Maintenant, en faisant $(\sum_{i=1}^{m-1}(n_i-1)\cdot L_i) - L_{m+1} \longrightarrow L_1$ sur $\mathcal{A}''$, on obtient $\mathcal{B}$.
De plus

$$M = [[\mathcal{B}]_1, [\mathcal{B}]_{n_1}, [\mathcal{B}]_{n_1+n_2} \dots, [\mathcal{B}]_{n_1+\dots+n_m}] = \left[\begin{array}{ccccc} n_1-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & n_1-1 & n_2-1 & \dots & n_m-1 \end{array}\right]$$

et les colonnes de M sont clairement linéairement indépendantes, par conséquent M est inversible et

$$m+1 = \text{rang } (M) = \text{rang } (\mathcal{B}) = \dim \mathbb{k}[\mathbf{x}]/(\mathcal{I}(n_1,\dots,n_m)).$$

La dernière égalité suit de la proposition 4.3.4. Ainsi

$$\dim (\mathbb{k}[\mathbf{x}]/\mathcal{I}(n_1,\dots,n_m)) = \text{rang } (M) = \text{rang } (B) = m+1.$$

■

Somme d'idéaux toriques

4.3.10 Lemme. [38, Lemme 4.14] *Soit $A = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$. L'idéal I_A est homogène si et seulement s'il existe un vecteur $\omega \in \mathbb{Q}^m$ tel que $\alpha_i \cdot \omega = 1$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $\alpha_i \neq 0$.*

4.3.11 Définition. Soit $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ une suite de variables et x une variable qui n'appartient pas à $\mathbf{z}$. Soient $f := f(z_1, \ldots, z_n)$ un polynôme de $\Bbbk[\mathbf{z}]$ et $g := g(z_1, \ldots z_n, x)$ un polynôme homogène de $\Bbbk[\mathbf{x}][\mathbf{z}, x]$. En écrivant $f = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{z}_i^{\alpha}$ pour certains $a_i \in \Bbbk$ et $\alpha_i \in \mathbb{N}^n$, on définit le degré de f comme $\deg_{\mathbb{N}}(f) = \max_{i=1}^{n}(|\alpha_i|)$. L'**homogénéisation** de f par rapport à x est le polynôme $f^{\hom_x} = x^{\deg_{\mathbb{N}}(f)} f(\frac{z_1}{x}, \ldots, \frac{z_n}{x})$. La **deshomogénéisation** de g par rapport à x est le polynôme $g^{\mathrm{deh}_x} = g(z_1, \ldots z_n, 1) \in \Bbbk[\mathbf{z}]$. Dans le cas où il n'y a pas de confusion sur la variable x, on peut écrire seulement $f^{\hom}$ et g^{deh}. Par ailleurs, soient I un idéal de $\Bbbk[\mathbf{z}]$ et J un idéal de $\Bbbk[\mathbf{z}, x]$. L'homogénéisation de I par rapport à x est l'idéal $I^{\hom} = (f^{\hom} : f \in I)$ et la deshomogénéisation de J par rapport à x est l'idéal $J^{\mathrm{deh}} = (g^{\mathrm{deh}} : g \in J)$.

4.3.12 Lemme. *Soient $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ une suite de variables, x une variable qui n'appartient à $\mathbf{z}$ et $I \subset \Bbbk[\mathbf{z}, x]$ un idéal torique homogène tel qu'il existe une paramétrisation*

$$\varphi : \Bbbk[\mathbf{z}, x] \to \Bbbk[\mathbf{t}^{\pm 1}, s] \text{ avec } \varphi(z_i) = \mathbf{t}^{\alpha_i} s^{\gamma_i} \text{ où } \alpha_i \in \mathbb{Z}^m,\ \gamma_i \in \mathbb{Z}, \text{ et } \varphi(x) = s^{\gamma_{n+1}} \text{ où } \gamma_{n+1} \in \mathbb{Z}^*.$$

Si $\widetilde{\varphi} : \Bbbk[\mathbf{z}] \to \Bbbk[\mathbf{t}^{\pm 1}]$ est le morphisme défini par $\widetilde{\varphi}(z_i) = (\varphi(z_i))^{\mathrm{deh}_s}$, alors $(\mathrm{Ker}\ \widetilde{\varphi})^{\hom} = I$.

Preuve. On pose $\widetilde{A} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ et

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{A} & \mathbf{0} \\ \hline \gamma & \gamma_{n+1} \end{array}\right) \in M_{m,n}(\mathbb{Z}) \text{ et } I := \mathrm{Ker}\ \varphi = I_A.$$

Maintenant, on va démontrer que $(\mathrm{Ker}\ \widetilde{\varphi})^{\hom} = I$. Clairement $I \subset (\mathrm{Ker}\ \widetilde{\varphi})^{\hom}$; il reste alors à montrer que $(\mathrm{Ker}\ \widetilde{\varphi})^{\hom} \subset I$.

Soit $\mathbf{z}^{u_+} - \mathbf{z}^{u_-} \in \mathrm{Ker}\ \widetilde{\varphi}$, où $u_+ = (u_+^{(1)}, \ldots, u_+^{(n)})$ et $u_- = (u_-^{(1)}, \ldots, u_-^{(n)}) \in \mathbb{N}^n$ sont de supports disjoints. Il faut démontrer que $(\mathbf{z}^{u_+} - \mathbf{z}^{u_-})^{\hom} \in I$. On rappelle que si $u = (u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}) \in \mathbb{Z}^n$, $|u| = \sum_{i=1}^{n} u^{(i)}$. Sans perte de généralité on peut supposer $|u_+| \leq |u_-|$. En posant $u_+^{(n+1)} \in \mathbb{N}$ tel que $|u_+| + u_+^{(n+1)} = |u_-|$, on a que

$$(\mathbf{z}^{u_+} - \mathbf{z}^{u_-})^{\hom} = \mathbf{z}^{u_+} x^{u_+^{(n+1)}} - \mathbf{z}^{u_-}.$$

Posons $\widetilde{u}_+ = (u_+, u_+^{(n+1)}) \in \mathbb{N}^{n+1}$, et $\widetilde{u}_- = (u_-, 0) \in \mathbb{N}^{n+1}$. Comme I est homogène, d'après le lemme 4.3.10 il existe $\omega \in \mathbb{Q}^m$ et $\omega_{m+1} \in \mathbb{Q}$ tel que $(\omega, \omega_{m+1}) \cdot \alpha_i' = 1$ pour $i = 1, \ldots, n+1$, ce qui équivaut à

$$(\omega, \omega_{m+1}) \cdot A = (1, \ldots, 1).$$

Donc,

$$\begin{aligned} |u_+| + u_+^{(n+1)} &= (1, \cdots 1) \cdot \widetilde{u}_+ \\ &= ((\omega, \omega_{m+1}) \cdot A) \cdot (u_+, u_+^{(n+1)}) \\ &= \omega \cdot (\widetilde{A} \cdot u_+) + \omega_{m+1}((\gamma, \gamma_{n+1}) \cdot \omega u_+) \\ &= \omega \cdot (\widetilde{A} \cdot u_+) + \omega_{m+1} \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i u_+^{(i)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|u_-| &= (1,\cdots 1)\cdot \widetilde{u}_- \\ &= ((\omega,\omega_{m+1})\cdot A)\cdot(u_-,0) \\ &= \omega\cdot(\widetilde{A}\cdot u_-) + \omega_{m+1}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\gamma_i u_-^{(i)}.\end{aligned}$$

D'autre part $0 = \widetilde{\varphi}(\mathbf{z}^{\mathbf{u}_+} - \mathbf{z}^{\mathbf{u}_-}) = \mathbf{t}^{\widetilde{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{u}_+} - \mathbf{t}^{\widetilde{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{u}_-}$, donc $\widetilde{A}\cdot u_+ = \widetilde{A}\cdot u_-$. En outre, $|u_+| + u_{n+1} = |u_-|$, d'où $\omega_{m+1}\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i u_+^{(i)} = \omega_{m+1}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i u_-^{(i)}$. De plus, $\omega_{m+1}\neq 0$, car

$$1 = (\omega,\omega_{m+1})\cdot\alpha'_{m+1} = \omega_{m+1}\gamma_{m+1}.$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i u_+^{(i)} = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i u_-^{(i)}. \tag{4.2}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{z}^{\mathbf{u}_+}\mathbf{x}^{\mathbf{u}_+^{(\mathbf{n+1})}} - \mathbf{z}^{\mathbf{u}_-}) &= \varphi(z^{u_+}x^{u_+^{(n+1)}}) + \varphi(\mathbf{z}^{u_-}) \\ &= (\mathbf{t},s)^{A\cdot u'_+} - (\mathbf{t},s)^{A\cdot u'_-} \\ &= \mathbf{t}^{\widetilde{A}\cdot u_+}s^{\gamma\cdot u_+}s^{\gamma_{n+1}u_+^{(n+1)}} - \mathbf{t}^{\widetilde{A}\cdot u_-}s^{\gamma\cdot u_-} \\ &= \mathbf{t}^{\widetilde{A}\cdot u_+}s^{\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i u_+^{(i)}} - \mathbf{t}^{\widetilde{A}\cdot u_-}s^{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i u_-^{(i)}} \\ &= \mathbf{t}^{\widetilde{A}\cdot u_+}s^{\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i u_+^{(i)}} - \mathbf{t}^{\widetilde{A}\cdot u_+}s^{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i u_-^{(i)}} \\ &= \mathbf{t}^{\widetilde{A}\cdot u_+}(s^{\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i u_+^{(i)}} - s^{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i u_-^{(i)}}) = 0.\end{aligned}$$

La dernière égalité provient de l'équation 4.2. Par conséquent

$$(\mathbf{z}^{u_+} - \mathbf{z}^{u_-})^{\hom} = \mathbf{z}^{u_+}x^{u_+^{(n+1)}} - \mathbf{z}^{u_-} \in I$$

et $(\operatorname{Ker}\widetilde{\varphi})^{\hom}\subset I$. De plus comme on avait déjà $I\subset(\operatorname{Ker}\widetilde{\varphi})^{\hom}$ on conclut que $(\operatorname{Ker}\widetilde{\varphi})^{\hom} = I$.

■

4.3.13 Lemme. *Soit $A\in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ avec $m\leq n$ et* rang $(A) = m$. *Alors, pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$ tel que la i-ème colonne de A n'est pas nulle, il existe toujours une sous-matrice A' de m colonnes de A où la i-ème colonne de A est une colonne de A' et A' est inversible sur $\mathbb{Q}$.*

Preuve. Comme rang $(A) = m$, il existe une matrice $A_1\in M_{m,m}(\mathbb{Z})$ de m colonnes de A telle que A_1 est inversible. Soit a_i la i-ème colonne de A avec $a_i\neq 0$ et $\alpha'_1,\ldots,\alpha'_m\in\mathbb{Z}^m$ les m-colonnes de A_1. Alors $\{\alpha'_1,\ldots,\alpha'_m\}$ est une base de $\mathbb{Q}^m$. Par conséquent, il existe $a_1,\ldots,a_m\in\mathbb{Q}$ non tous nuls tels que $\alpha_i = \sum_{j=1}^{m}a_j\alpha'_j$. On peut supposer $a_1\neq 0$, alors $\alpha'_1 = \sum_{j=2}^{m}\frac{a_j}{a_1}\alpha'_j - \frac{1}{a_1}\alpha_i$. Par conséquent $\{\alpha_i,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_m\}$ est une base de $\mathbb{Q}^m$ et la matrice $A' = [\alpha_i,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_m]$ est inversible sur $\mathbb{Q}$.

■

4.3.14 Lemme. *Soient $\varphi : \Bbbk[\mathbf{x}]\to\Bbbk[t_1,\ldots,t_{m'},t_1^{-1},\ldots,t_{m'}^{-1}]$ une paramétrisation de l'idéal $I := \operatorname{Ker}\varphi$ et $A^*\in M_{m',n}(\mathbb{Z})$ la matrice relative a cette paramétrisation telle que*

$$\text{rang }(A^*) = m\leq m'.$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\varphi(x_i) \neq 1$, il existe une paramétrisation de I

$$\widetilde{\varphi} : \Bbbk[\mathbf{x}] \to \Bbbk[t_1, \ldots, t_{m'}, t_1^{-1}, \ldots, t_{m'}^{-1}]$$

de rang maximal telle que $\widetilde{\varphi}(x_i) = t_j^q$, avec $q \in \mathbb{N}$ et $j \in \{1, \ldots m\}$.

Preuve. Comme $\varphi(x_i) \neq 1$, il existe $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,m'}) \in \mathbb{Z}^n$, $\alpha_i \neq \mathbf{0}$ tel que

$$\varphi(x_i) = t_1^{\alpha_{i,1}} \cdots t_{m'}^{\alpha_{m'}}.$$

Soit $j' \in \{1, \ldots, m'\}$ l'entier plus petit tel que $\alpha_{i,j'} \neq 0$. Notons β_r le r-ième vecteur ligne de la matrice A^*. Comme $\operatorname{rang}(A^*) = m$, il existe $\beta'_1, \ldots, \beta'_m \in \{\beta_1, \ldots, \beta_{m'}\}$ tels que

$$\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(\beta'_1, \ldots, \beta'_m) = \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(\beta_1, \ldots, \beta_{m'}) \cong \mathbb{Q}^m.$$

Donc il existe $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{Q}$ non tous nuls tels que $\beta_{j'} = \sum_{k=1}^m b_k \beta'_k$. On peut supposer $b_1 \neq 0$, alors

$$\beta'_1 = \sum_{k=2}^{m} \frac{b_k}{b_1} \beta'_k - \frac{1}{b_1} \beta_{j'}.$$

Par conséquent $\beta_{j'}, \beta'_2, \ldots, \beta'_m$ est une base de $\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(\beta'_1, \ldots, \beta'_m) = \mathbb{Q}^m$ et il existe une matrice $B \in M_{m',m'}(Q)$ inversible telle que

$$B \cdot A^* = \begin{pmatrix} A \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in M_{m',n}(\mathbb{Q}), \text{ avec } A = (\beta_{j'}, \beta_{k_2}, \ldots, \beta_{k_m})^T \text{ et } \mathbf{0} \in M_{m'-m,n}(\mathbb{Q}).$$

D'après le lemme 4.3.13 il existe une matrice inversible $A' \in M_{m,m}(\mathbb{Z})$ de m colonnes de A contenant la i-ème colonne de A. Maintenant on peut supposer que $A = [A'|A'']$ avec $A'' \in M_{m,n-m}$. Comme A' est inversible, il existe $B \in M_{m,m}(\mathbb{Q})$ tel que $BA' = I$. De cette façon $BA = [BA'|BA''] = [I|BA'']$. Soit q le plus petit entier naturel tel que

$$q(BA) = (qB)A = [qI|q(BA'')] \in M_{m,n}(\mathbb{Z}).$$

D'après la proposition 4.3.7, $(qB)A$ définit une paramétrisation de I, $\widetilde{\varphi} : \Bbbk[\mathbf{x}] \to \Bbbk[\mathbf{t}^{\pm 1}]$ de rang maximal (rang $(A') = m$) telle qu'il existe $j \in \{1, \ldots m\}$, et $\widetilde{\varphi}(x_i) = t_j^q$. ∎

4.3.15 Théorème. *Soient $\mathbf{z_1} = \{z_{1,1}, \ldots, z_{1,n_1}\}$ et $\mathbf{z_2} = \{z_{2,1}, \ldots, z_{2,n_2}\}$ deux ensembles des variables disjoints, x une nouvelle variable et $I_1 \subset \Bbbk[\mathbf{z_1}, x]$, $I_2 \subset \Bbbk[\mathbf{z_2}, x]$ deux idéaux toriques homogènes tels que x apparait dans un système minimal de genérateurs de I_1 et I_2. Alors :*

1. *$I_1 + I_2$ est un idéal torique homogène de $\Bbbk[\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2}, x]$.*
2. $\dim\left(\Bbbk[\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2}, x]/(I_1 + I_2)\right) = \dim\left(\Bbbk[\mathbf{z_1}, x]/I_1\right) + \dim\left(\Bbbk[\mathbf{z_2}, x]/I_2\right) - 1.$

Preuve. Sans perte de généralité on peut supposer que I_1 et I_2 sont non dégénérés, autrement dit pour $i = 1, 2$, toute variable de $\mathbf{z_i} \cup \{x\}$ apparatit dans un système minimal de générateurs de I_i.

Avant de démontrer le théorème, il convient de noter les considérations suivantes :
On pose $\mathbf{z} = \mathbf{z_1} \cup \mathbf{z_2}$. D'après le lemme 4.3.14 il existe

$$\overline{\varphi}_1 : \Bbbk[\mathbf{z_1}, x] \to \Bbbk[\mathbf{t}^{\pm 1}, s^{\pm 1}] \text{ et } \overline{\varphi_2} : \Bbbk[\mathbf{z_1}, x] \to \Bbbk[\mathbf{w}^{\pm 1}, s^{\pm 1}]$$

des paramétrisations de rang maximal de I_1 et I_2 respectivement, avec $\overline{\varphi}_i(x) = s^{\gamma_{i,n_i+1}}$ et $\gamma_{i,n_i+1} \in \mathbb{Z}^*$ pour $i = 1, 2$; on note m_1, m_2 les cardinaux de $\mathbf{t}$ et $\mathbf{u}$ respectivement. Posons $\gamma = \text{ppcm}(\gamma_{1,n_1+1}, \gamma_{2,n_2+1})$. On appelle $\overline{A}_1 \in M_{m_1+1,n_1+1}(\mathbb{Z})$ et $\overline{A}_2 \in M_{m_2+1,n_2+1}(\mathbb{Z})$ les matrices qui représentent les paramétrisations $\overline{\varphi_1}$ et $\overline{\varphi_2}$, respectivement. Ces deux matrices peuvent être écrites comme ci-dessous :

$$\overline{A}_1 = \left(\begin{array}{c|c} \overline{A}_1' & \mathbf{0} \\ \hline \alpha_1' & \gamma_{1,n_1+1} \end{array}\right) \text{ et} \overline{A}_2 = \left(\begin{array}{c|c} \overline{A}_2' & \mathbf{0} \\ \hline \alpha_2' & \gamma_{2,n_2+1} \end{array}\right),$$

où $\overline{A}_1' \in M_{m_1,n_1}(\mathbb{Z})$, $\overline{A}_2 \in M_{m_2,n_2}(\mathbb{Z})$, $\alpha_1 = (\gamma_{1,1}, \ldots, \gamma_{1,\underline{n_1}}) \in \mathbb{Z}^{n_1}$ et $\alpha_2 = (\gamma_{2,1}, \ldots, \gamma_{2,n_2}) \in \mathbb{Z}^{n_2}$. En multipliant la dernière ligne de chaque matrice $\overline{A}_1$ et $\overline{A}_2$ respectivement, par $\frac{\gamma}{\gamma_{1,n_1+1}}$ et $\frac{\gamma}{\gamma_{2,n_2+1}}$, où $\gamma = ppcm(\gamma_{1,n_1+1}, \gamma_{2,n_2+1})$, on obtient d'après la proposition 4.3.7 d'autres paramétrisations φ_1 et φ_2 pour I_1 et I_2 respectivement, à savoir les paramétrisations relatives aux matrices :

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|c} A_1' & \mathbf{0} \\ \hline \alpha_1 & \gamma \end{array}\right) \text{ et} A_2 = \left(\begin{array}{c|c} A_2' & \mathbf{0} \\ \hline \alpha_2 & \gamma \end{array}\right),$$

où $\alpha_1 = \frac{\gamma}{\gamma_{1,n_1+1}} \cdot \alpha_1' \in \mathbb{Z}^{n_1}$ et $\alpha_1 = \frac{\gamma}{\gamma_{1,n_2+1}} \cdot \alpha_2' \in \mathbb{Z}^{n_2}$. Soit $\overline{\varphi} : \Bbbk[\mathbf{z}, x] \to \Bbbk[\mathbf{t}^{\pm 1}, \mathbf{u}^{\pm 1}, s^{\pm 1}]$ le morphisme défini par $\overline{\varphi}(x) = s^{\gamma}$ et $\overline{\varphi}(z_{j,i}) = \varphi_i(z_{j,i})$ où $i = 1, 2$.

Maintenant nous sommes en mesure de prouver le théorème :

1. On pose $J := \text{Ker } \overline{\varphi}$, donc J est un idéal torique et nous avons que :
   - J est homogène. Cela suit de l'argument suivant :
     Comme I_1 et I_2 sont des idéaux homogènes, d'après le lemme 4.3.10, il existe $\omega_1 \in \mathbb{Q}^{m_1}$, $\omega_2 \in \mathbb{Q}^{m_2}$, $\omega' \in \mathbb{Q}$ et $\omega' \in \mathbb{Q}$ tels que

     $$(1, \ldots, 1) = (\omega_1, \omega') \cdot A_1 = (\omega_1 \cdot A_1' + \omega' \cdot \alpha_1, \omega' \cdot \gamma) \text{ et}$$
     $$(1, \ldots, 1) = (\omega_2, \omega'') \cdot A_2 = (\omega_2 \cdot A_2' + \omega'' \cdot \alpha_2, \omega'' \cdot \gamma).$$

     Donc $\omega' \cdot \gamma = \omega'' \cdot \gamma$ et par conséquent $\omega' = \omega''$ Par ailleurs, la matrice qui représente le morphisme $\overline{\varphi}$ est

     $$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_1' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & A_2' & \mathbf{0} \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \gamma \end{array}\right)$$

et

$$\begin{aligned}(\omega_1,\omega_2,\omega')\cdot A &= (\omega_1\cdot A_1+\omega'\cdot\alpha_1,\omega_2\cdot A_2+\omega'\cdot\alpha_2,\omega'\gamma)\\ &= (\omega_1\cdot A_1+\omega'\cdot\alpha_1,\omega_2\cdot A_2+\omega'\cdot\alpha_2,\omega'\gamma)\\ &= (1,\dots,1,1,\dots,1,1).\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.3.10 on a que $J=\text{Ker }\overline{\varphi}=I_A$ est homogène.

- Montrons que $J=I_1+I_2$. Il est clair que $I_1+I_2\subset J$. Il reste à démontrer que $J\subset I_1+I_2$: Soit $B:=\mathbf{z_1}^{u_1}\mathbf{z_2}^{u_2}x^{\delta}-\mathbf{z_1}^{v_1}\mathbf{z_2}^{v_2}\in J$ homogène, où $\delta\in\mathbb{N}$ et $u_i,v_i\in\mathbb{N}^{n_i}$ pour $i=1,2$ avec la propriété que si $(u_i)_j\neq 0$, alors $(v_i)_j=0$ et réciproquement. Donc

$$|u_1|+|u_2|+\delta=\deg_{\mathbb{N}}(\mathbf{z_1}^{u_1}\mathbf{z_2}^{u_2}x^{\delta})=\deg_{\mathbb{N}}(\mathbf{z_1}^{v_1}\mathbf{z_2}^{v_2})=|v_1|+|v_2|. \tag{4.3}$$

Par ailleurs, comme

$$0=\overline{\varphi}(B)\widetilde{\varphi_1}(\mathbf{z_1}^{u_1})\widetilde{\varphi_2}(\mathbf{z_2}^{u_2})s^{\lambda_1}-\widetilde{\varphi_1}(\mathbf{z_1}^{v_1})\widetilde{\varphi_2}(\mathbf{z_2}^{v_2})s^{\lambda_2}$$

et les ensembles des variables $\mathbf{t}$, $\mathbf{w}$ et s sont disjoints, on a que

$$\widetilde{\varphi_1}(\mathbf{z_1}^{u_1})=\widetilde{\varphi_1}(\mathbf{z_1}^{v_1})\text{ et }\widetilde{\varphi_2}(\mathbf{z_2}^{u_2})=\widetilde{\varphi_2}(\mathbf{z_2}^{v_2})\text{ et }\lambda_1=\lambda_2.$$

Par conséquent $\mathbf{z_1}^{u_1}-\mathbf{z_1}^{v_1}\in(\text{Ker }\widetilde{\varphi_1})$ et $\mathbf{z_2}^{u_2}-\mathbf{z_2}^{v_2}\in(\text{Ker }\widetilde{\varphi_2})$. D'après le lemme 4.3.12 :

$$(\mathbf{z_1}^{u_1}-\mathbf{z_1}^{v_1})^{\text{hom}}\in(\text{Ker }\widetilde{\varphi_1})^{\text{hom}}=I_1\text{ et }(\mathbf{z_2}^{u_2}-\mathbf{z_2}^{v_2})^{\text{hom}}\in(\text{Ker }\widetilde{\varphi_2})^{\text{hom}}=I_2.$$

- On va prouver que B est une combinaison algébrique de $(\mathbf{z_1}^{u_1}-\mathbf{z_1}^{v_1})^{\text{hom}}$ et $(\mathbf{z_2}^{u_2}-\mathbf{z_2}^{v_2})^{\text{hom}}$. Pour cela on considère trois cas :

  (a) Soit $|u_1|<|v_1|$. Alors, il existe $\alpha\in\mathbb{N}$, $\alpha>0$, tel que

$$(\mathbf{z_1}^{u_1}-\mathbf{z_1}^{v_1})^{\text{hom}}=\mathbf{z_1}^{u_1}x^{\alpha}-\mathbf{z_1}^{v_1}.$$

  Donc,

$$|u_1|+\alpha=|v_1|. \tag{4.4}$$

  Maintenant, on considère deux sous-cas :

  i. Soit $|u_2|\leq|v_2|$. Alors, il existe $\beta\in\mathbb{N}$, tel que $(\mathbf{z_2}^{u_2}-\mathbf{z_2}^{v_2})^{\text{hom}}=\mathbf{z_2}^{u_2}x^{\beta}-\mathbf{z_2}^{v_2}$. Donc $|u_2|+\beta=|v_2|$. De plus, des équations 4.4 et 4.3, on déduit que

$$(|u_1|+\alpha)+(|u_2|+\beta)=|v_1|+|v_2|=|u_1|+|u_2|+\delta.$$

  Par conséquent $\alpha+\beta=\delta$ et

$$\begin{aligned}B &= \mathbf{z_1}^{u_1}\mathbf{z_2}^{u_2}x^{\delta}-\mathbf{z_1}^{v_1}\mathbf{z_2}^{v_2}\\ &= \mathbf{z_1}^{u_1}x^{\alpha}(\mathbf{z_2}^{u_2}x^{\beta}-\mathbf{z_2}^{v_2})+\mathbf{z_2}^{v_2}(\mathbf{z_1}^{u_1}x^{\alpha}-\mathbf{z_1}^{v_1})\\ &= \mathbf{z_1}^{u_1}x^{\alpha}(\mathbf{z_2}^{u_2}-\mathbf{z_2}^{v_2})^{\text{hom}}+\mathbf{z_2}^{v_2}(\mathbf{z_1}^{u_1}-\mathbf{z_1}^{v_1})^{\text{hom}}\in I_2+I_1.\end{aligned}$$

  ii. Soit $|u_2|>|v_2|$. Alors, il existe $\beta\in\mathbb{N}$, tel que $(\mathbf{z_2}^{u_2}-\mathbf{z_2}^{v_2})^{\text{hom}}=\mathbf{z_2}^{u_2}-\mathbf{z_2}^{v_2}x^{\beta}$. Donc $|u_2|=|v_2|+\beta$. De plus, des équations 4.4 et 4.3, on déduit que

$$(|u_1|+\alpha)+|u_2|=|v_1|+(|v_2|+\beta)=(|v_1|+|v_2|)+\beta=(|u_1|+|u_2|+\delta)+\beta$$

Ainsi $\alpha = \delta + \beta$ et

$$\begin{aligned} B &= \mathbf{z_1}^{u_1}\mathbf{z_2}^{u_2}x^{\delta} - \mathbf{z_1}^{v_1}\mathbf{z_2}^{v_2} \\ &= \mathbf{z_1}^{u_1}x^{\delta}(\mathbf{z_2}^{u_2} - \mathbf{z_2}^{v_2}x^{\beta}) + \mathbf{z_2}^{v_2}(\mathbf{z_1}^{u_1}x^{\alpha} - \mathbf{z_1}^{v_1}) \\ &= \mathbf{z_1}^{u_1}x^{\delta}(\mathbf{z_2}^{u_2} - \mathbf{z_2}^{v_2})^{\hom} + \mathbf{z_2}^{v_2}(\mathbf{z_1}^{u_1} - \mathbf{z_1}^{v_1})^{\hom} \in I_2 + I_1. \end{aligned}$$

(b) Soit $|u_1| > |v_1|$. Alors, d'après l'équation 4.3 $|v_2| > |u_2|$. De cette façon, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$(\mathbf{z_1}^{u_1} - \mathbf{z_1}^{v_1})^{\hom} = \mathbf{z_1}^{u_1} - \mathbf{z_1}^{v_1}x^{\alpha} \text{ et } (\mathbf{z_2}^{u_2} - \mathbf{z_2}^{v_2})^{\hom} = \mathbf{z_2}^{u_2}x^{\beta} - \mathbf{z_2}^{v_2}.$$

Ainsi $|u_1| + (|u_2| + \beta) = (|v_1| + \alpha) + |v_2| = (|v_1| + |v_2|) + \alpha = (|u_1| + |u_2| + \delta) + \alpha$, cette dernière égalité vient de l'équation 4.3. En conséquence $\beta = \delta + \alpha$ et de cette façon on a que :

$$\begin{aligned} B &= \mathbf{z_1}^{u_1}\mathbf{z_2}^{u_2}x^{\delta} - \mathbf{z_1}^{v_1}\mathbf{z_2}^{v_2} \\ &= \mathbf{z_2}^{u_2}x^{\delta}(\mathbf{z_1}^{u_1} - \mathbf{z_1}^{v_1}x^{\alpha}) + \mathbf{z_2}^{v_1}(\mathbf{z_2}^{u_2}x^{\beta} - \mathbf{z_2}^{v_2}) \\ &= \mathbf{z_2}^{u_2}x^{\delta}(\mathbf{z_1}^{u_1} - \mathbf{z_1}^{v_1})^{\hom} + \mathbf{z_2}^{v_1}(\mathbf{z_2}^{u_2}x^{\beta} - \mathbf{z_2}^{v_2})^{\hom} \in I_1 + I_2. \end{aligned}$$

(c) Soit $|u_1| = |v_1|$. Alors, d'après l'équation 4.3 $|v_2| \geq |u_2|$. De cette façon, il existe $\beta \in \mathbb{N}$, tel que

$$(\mathbf{z_1}^{u_1} - \mathbf{z_1}^{v_1})^{\hom} = \mathbf{z_1}^{u_1} - \mathbf{z_1}^{v_1} \text{ et } (\mathbf{z_2}^{u_2} - \mathbf{z_2}^{v_2})^{\hom} = \mathbf{z_2}^{u_2}x^{\beta} - \mathbf{z_2}^{v_2}.$$

Donc $|u_1| + (|u_2| + \beta) = |v_1| + |v_2| = |v_1| + |v_2| = |u_1| + |u_2| + \delta$, cette dernière égalité suit de l'équation 4.3. En conséquence $\beta = \delta$ et de cette façon on a que :

$$\begin{aligned} B &= \mathbf{z_1}^{u_1}\mathbf{z_2}^{u_2}x^{\delta} - \mathbf{z_1}^{v_1}\mathbf{z_2}^{v_2} \\ &= \mathbf{z_2}^{u_2}x^{\delta}(\mathbf{z_1}^{u_1} - \mathbf{z_1}^{v_1}) + \mathbf{z_2}^{v_1}(\mathbf{z_2}^{u_2}x^{\beta} - \mathbf{z_2}^{v_2}) \\ &= \mathbf{z_2}^{u_2}x^{\delta}(\mathbf{z_1}^{u_1} - \mathbf{z_1}^{v_1})^{\hom} + \mathbf{z_2}^{v_1}(\mathbf{z_2}^{u_2}x^{\beta} - \mathbf{z_2}^{v_2})^{\hom} \in I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $J \subset I_1 + I_2$ et termine la preuve que $I_1 + I_2 = J := \operatorname{Ker} \overline{\varphi}$.
Finalement, par la remarque 4.3.3 on conclut que $I_1 + I_2$ est un idéal torique homogène.

2. On a montré que la matrice $A \in M_{m_1+m_2+1,n_1+n_2+1}(\mathbb{Z})$ qui représent la paramétrisation $\overline{\varphi}$ de $I_1 + I_2$ est donnée par :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_1' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & A_2' & \mathbf{0} \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \gamma \end{array}\right).$$

Par conséquent : $\dim\,(\Bbbk[\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2}, x]/(I_1 + I_2)) = \dim\,(\Bbbk[\mathbf{z_1}, x]/I_1) + \dim\,(\Bbbk[\mathbf{z_2}, x]/I_2) - 1$.

■

4.3.16 Proposition. *Soient $\mathbf{z_1}, \ldots, \mathbf{z_k}$ k ensembles de variables disjoints et pour tout $i = 1, \ldots, k$, I_i un idéal torique homogènes avec comme paramétrisation de rang maximal $\varphi_i : \Bbbk[\mathbf{z_i}] \to \Bbbk[\mathbf{t_i}^{\pm 1}]$. Alors $\sum_{i=1}^{k} I_i$ est un idéal homogène torique avec comme paramétrisation de rang maximal*

$\varphi : \Bbbk[\mathbf{z_1}, \ldots, \mathbf{z_k}] \to \Bbbk[\mathbf{t_1}^{\pm 1}, \ldots, \mathbf{t_k}^{\pm 1}]$ *le morphisme défini par* $\varphi(z_{i,j}) = \varphi_i(z_{i,j})$.

De plus

$$\dim\ (k[\mathbf{z_1}, \ldots, \mathbf{z_k}]/(\sum_{i=1}^{k} I_i)) = \sum_{i=1}^{k} \dim\ (\Bbbk[\mathbf{z_i}]/I_i).$$

Preuve. Nous posons $J := \sum_{i=1}^{k} I_i$. Il est clair que $J \subset \text{Ker } \varphi$. Nous allons prouver que Ker $\varphi \subset J$:
Soient m_1, m_2 des monômes de $\Bbbk[\mathbf{z_1}, \ldots, \mathbf{z_k}]$ tels que $b = m_1 - m_2$ est un générateur de Ker φ. En outre, nous pouvons écrire $m_1 = m_1^{(1)} m_1^{(2)} \cdots m_1^{(k)}$ et $m_2 = m_2^{(1)} m_2^{(2)} \cdots m_2^{(k)}$, où pour tout $1 \leq i \leq k$ $m_1^{(i)}$ et $m_2^{(i)}$ sont des monômes dans $\Bbbk[\mathbf{z_i}]$. Comme $\varphi(m_1) = \varphi(m_2)$ et $\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_k}$ sont des ensembles de variables disjoints on a $\varphi(m_1^{(i)}) = \varphi(m_2^{(i)})$. De là, pour tous $1 \leq i < j \leq k$:

$$\varphi_i(m_1^{(i)}) = \varphi(m_1^{(i)}) = \varphi(m_2^{(i)}) = \varphi_i(m_2^{(i)}),$$

donc $m_1^{(i)} - m_2^{(i)} \in \text{Ker } \varphi_i = \mathcal{I}_i$ et

$$m_1 - m_2 = m_1^{(2)} \cdots m_1^{(k)}(m_1^{(1)} - m_2^{(1)}) + m_2^{(1)} m_1^{(3)} \cdots m_1^{(k)}(m_1^{(2)} - m_2^{(2)}) + \cdots + m_2^{(1)} \cdots m_2^{(k-1)}(m_1^{(k)} - m_2^{(k)}) \in J.$$

D'où Ker $\varphi \subset J$ et nous concluons que $J = \text{Ker } \varphi$. Ainsi J est un idéal torique. Il est clair que la paramétrisation φ de J est une paramétrisation de rang maximal, par conséquent

$$\dim\ (k[\mathbf{z_1}, \ldots, \mathbf{z_k}]/(\sum_{i=1}^{k} I_i)) = \sum_{i=1}^{k} \dim\ (\Bbbk[\mathbf{z_i}]/I_i).$$

■

4.3.17 Définition. Soient $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_k}$ des ensembles de variables et $I_1 \subset \Bbbk[\mathbf{x_1}], \ldots, I_k \subset \Bbbk[\mathbf{x_k}]$ des idéaux toriques tel que pour toute paire $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$, $|\mathbf{x_i} \cap \mathbf{x_j}| \leq 1$. On définit le **graphe de la suite des idéaux toriques** $I_1, \ldots, I_k$, noté $G(I_1, \ldots, I_k)$, comme le graphe dont l'ensemble des sommets est $V(M_1, \ldots, M_k)$ et dont $\{I_i, I_j\}$ est une arête si I_i et I_j ont une variable en commun.

4.3.18 Théorème. *Soient* $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_k}$ *des ensembles de variables et* $I_1 \subset \Bbbk[\mathbf{x_1}], \ldots, I_k \subset \Bbbk[\mathbf{x_k}]$ *des idéaux toriques tel que pour toute paire* $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$, $|\mathbf{x_i} \cap \mathbf{x_j}| \leq 1$. *Si chaque composante connexe du graphe* $G(I_1, \ldots, I_k)$ *est un arbre, alors* $J := \sum_{i=1}^{k} I_i$ *est un idéal homogène torique et en posant* r *le nombre de composantes connexes de* $G(I_1, \ldots, I_k)$ *on a que :*

$$\dim\ (\Bbbk[\mathbf{x}]/J) = \sum_{i=1}^{k} \dim\ (\Bbbk[\mathbf{x_i}]/I_i) + r - k + 1,$$

où $\mathbf{x} = \cup_{i=1}^{k} \mathbf{x_i}$

Preuve. Soit G_j une composante connexe de $G := G(I_1, \ldots, I_k)$ et $V(G_j) = \{I_{j_1}, \ldots, I_{j_{s_j}}\}$ l'ensemble de sommets de G_j. Remarquons que $J := \sum_{i=1}^{k} I_i = \sum_{j=1}^{r}(\sum_{i=1}^{s_j} I_{j_i})$. De cette façon si on preuve que chaque $j \in \{1, \ldots, r\}$ que $(\sum_{i=1}^{s_j} I_{j_i})$ est un idéal homogène torique et

$$\dim\,(\Bbbk[\mathbf{x}]/\sum_{i=1}^{s_j} I_{j_i}) = \sum_{i=1}^{s_j} \dim\,(\Bbbk[\mathbf{x_{j_i}}]/I_i) - s_j,$$

alors J est un idéal homogène torique grâce à la proposition 4.3.16 et

$$\dim\,(\Bbbk[\mathbf{x}]/J) = \sum_{i=1}^{k} \dim\,(\Bbbk[\mathbf{x_i}]/I_i) + r - k + 1.$$

Donc, on peut considérer que G est un arbre connexe et on va prouver par récurrence sur k que J est un idéal homogène torique.

1. Si $k = 2$, c'est le théorème 4.3.15
2. On suppose que si G est un arbre connexe avec $k-1$-sommets, alors $\sum_{i=1}^{k-1} I_i$ est un idéal homogène torique et

$$\dim\,(\Bbbk[\mathbf{x}]/\sum_{i=1}^{k-1} I_i) = \sum_{i=1}^{k-1} \dim\,(\Bbbk[\mathbf{x_i}]/I_i) - (k-1).$$

   Il faut démontrer que si G est un arbre connexe avec k-sommets, alors $J := \sum_{i=1}^{k} I_i$ est torique et

$$\dim\,(\Bbbk[\mathbf{x}]/J) = \sum_{i=1}^{k} \dim\,(\Bbbk[\mathbf{x_i}]/I_i) - k.$$

   Cela suit de l'argument suivant : comme G est un arbre connexe il existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel qu'il existe un unique $j \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $\{I_i, I_j\} \in E(G)$. On peut supposer que $i = k$, donc $|\mathbf{x_i} \cap \mathbf{x_k}| = 1$ et pour tout $j \in (\{1, \ldots, k-1\} \setminus \{i\})$, $|\mathbf{x_j} \cap \mathbf{x_k}| = 0$. Donc $|(\cup_{i=1}^{k-1} \mathbf{x_i}) \cap \mathbf{x_k}| = 1$ et $G \setminus \{I_k\}$ est un arbre connexe. Par hypothèse de récurrence $\sum_{i=1}^{k-1} I_i$ est un idéal homogène torique et

$$\dim\,(\Bbbk[\mathbf{x}]/\sum_{i=1}^{k-1} I_i) = \sum_{i=1}^{k-1} \dim\,(\Bbbk[\mathbf{x_i}]/I_i) - (k-1).$$

   De plus, I_k est un idéal homogène torique, donc par le théorème 4.3.15 $J = \sum_{i=1}^{k-1} I_i + I_k$ est un idéal homogène torique et

$$\begin{aligned} \dim\,(\Bbbk[\mathbf{x}]/J) &= \dim\,(\Bbbk[\mathbf{x}]/\textstyle\sum_{i=1}^{k-1} I_i) + \dim\,(\Bbbk[\mathbf{x_k}]/I_k) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{k-1} \dim\,(\Bbbk[\mathbf{x_i}]/I_i) - (k-1) + \dim\,(\Bbbk[\mathbf{x_k}]/I_k) - 1 \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{k} \dim\,(\Bbbk[\mathbf{x_i}]/I_i) - k. \end{aligned}$$

■

Bibliographie

[1] W. Adams, P. Loustaunau, *An introduction to Gröbner Bases*, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society.

[2] A. Aramova, J. Herzog, *Koszul cycles and Eliahou-Kervaire type resolutions*, J. Algebra **181** (2000), 347-369.

[3] M. Auslander, D. Buchsbaum, *Groups, rings, modules*, Harper and Row, 1974.

[4] L. Bădescu, G. Valla, *Grothendieck-Lefschetz theory, set-theoretic complete intersections and rational normal scrolls*, J. Algebra **324** (2010),1636-1655.

[5] M. Boij, J. Södeberg, *Graded Betti numbers of Cohen-Macaulay modules and the multiplicity conjecture*, J. London Math.Soc. (2) **78** (2008), 85-106.

[6] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[7] W. Bruns, J. Herzog, *Semigroup rings and simplicial complexes*, J. of Pure and App. Math, **122** (1997), 185-208.

[8] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Text in Mathematics, Springer, 1995.

[9] D. Eisenbud, *The geometry of syzygies*, Graduate Text in Mathematics, Springer, 2000.

[10] D.Eisenbud, G. Fløoystad, J. Weyman, *The existence of pure free resolutions*, Annales de l'Institut Fourier, **61** (2011), no. 3, p. 905-926.

[11] D. Eisenbud, M. Green, K. Hulek, S. Popescu, *Restricting linear syzygies algebra and geometry*, Composition Math. **141** (2005), 1460-1478.

[12] D. Eisenbud, B. Sturmfels, *Binomial Ideals*, Duke Math. J., **84** (1996), 1-45.

[13] K. Eto, *Binomial arithmetical rank of lattice ideals*, manuscripta math. **109** (2002), 455-463.

[14] O. Fernández-Ramos, P. Gimenez, *First nonlinear syzygies of ideals associated to graphs*, Comm Algebra **37** (2009), no. 6, 1921-1933.

[15] R. Fröberg, *On Stanley-Reisner rings*, Topics in Algebra, Banach Center Publications, vol.26, part 2 (1990), 57-70.

[16] R. Gilmer, *Commutative semigroup rings*, The University of Chicago Press, 1984.

[17] M. Green, R. Lazarsfeld, *On the projective normality of complete linear series on an algebraic curve*, Invent. Math. **83** (1986), 73-90.

[18] M. Green, R. Lazarsfeld, *Some results on the syzygies of finite sets and algebraic curves*, Compos. Math. **67** (1988), 301-314.

[19] Ha Minh Lam, M. Morales, *Binomial extension of simplicial ideals*, http ://arxiv.org/abs/0911.5423.

[20] Ha Minh Lam, M. Morales, *Fiber cones of codimension 2 lattice ideals*, Com. Alg., **37** (2009), 1-31.

[21] J. Harris, *Algebraic geometry a first course*, Springer, 1992.

[22] J. Herzog, T. Hibi, *Monomial ideals*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2011.

[23] J. Herzog, M. Kühl, *On the Betti numbers of finite pure linear resolutions*, Comm. algebra **12** (1984), no. 13-14,1627-1646.

[24] T. Hibi, *Buchsbaum complexes with linear resolutions*, J. Algebra **179** (1996), 127-136

[25] L.T. Hoa, *On minimal free resolutions of projective varieties of degree=codimension+2*, J. Pure Appl. Algebra **87** (1993), no. 3, 241-250.

[26] M., Hochster, *Cohen-Macaulay rings, combinatorics and simplicial complexes*, in "Ring Theory II", pp. 171-223, Dekker, New York, 1977

[27] J. Howie, *Fundamentals of semigroup theory*, Clarendon Press, 1955.

[28] M. Kreuzer, L. Robbiano,*Computational Commutative Algera 2*, Springer, 2005.

[29] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[30] E. Miller, B. Sturmfels, *Combinatorial commutative algebra*, Springer, 2005.

[31] M. Morales, *Simplicial ideals, 2-linear ideals and arithmetical rank*, J. Algebra **324** (2010), no. 12, 3431-3456.

[32] J. Munkres, *Elements of algebraic Topoloy*, Addison-Wesley, 1984.

[33] D. G.Northcott, *Finite free resolutions*, Cambridge University Press, 1976.

[34] I. Peeva, Graded syzygies, Springer, 2010.

[35] S. Petrović, On the Universal Gröbner bases of varieties of minimal degree, Math. Res. Lett. **15** (2008), no. 6, 1211-1221.

[36] E. Spanier, Algebraic Topology, McGrawHill, Inc., 1966.

[37] R. Stanley, Combinatorics and commutative algebra, 2^{nd} edition, Progress in Mathematics, vol. 41 (Birkhäuser, Bassel, 1996).

[38] B. Sturmfels, *Gröbner bases and convex polytopes*, America Mathematical Society, 1996.

[39] V.W. Vasconcelos, *Introducción a la teoría de sicigias*, Instituto Politécnico Nacional, México, 1982.

Index

arête, 21, 37
    propre, 62

base de Gröbner, 54
Burchberger
    algorithme de, 54

clique, 37
    complexe de, 37
complexe
    de chaine, 21
    simplicial, 20
        dimension, 21
        restriction, 21
congruence noyau, 3
corde, 37
cycle
    longueur de, 37
    minimal, 37
    minimal virtuel, 79

degré
    polynôme, 121
déhomogénéisation, 121
diagramme de Betti, 19
d-régularite, 35

facette, 21

gradué
    module, 5
graduation
    positive, 17
graphe
    de cordes, 37
    de la suite des idéaux toriques, 127

groupe
    de fractions, 2

Hilbert
    serie de, 28
homogénéisation, 121

idéal
    binomial, 5
        pur, 5
    de réseau, 12
    de Stanley-Reisner, 26
    homogène, 17
    quasi-homogène, 17
initial
    terme, 54

K-polynôme, 28

module
    initial, 54
    pur, 30
monôme, 53
monoïde, 1
multidegré, 5
multigradué
    anneau, 5

$N_{d,p}$-propriété, 35
nombres de Betti
    gradué, 19
normale
    forme, 55

ordre
    admissible, 71, 76

Artinian, 54, 59
de poids, 57, 58
lexicographique, 53
lexicographique homogène, 54
lexicographique inverse, 54
monomial, 53, 54

paramétrisation, 117
permutation admissible, 67

regularité, 29
remplacement
minimal, 86
réseau, 11, 13
saturé, 13
résolution
libre minimal, 19
linéaire, 29
pure, 30

scroll
idéal de, 119
matrice de, 119
semi-groupe, 1
affine, 4
algèbre de, 8
pointé, 4
positif, 4
simplifiable, 2, 3
simplexe, 20
dimension, 21
simplifiable, 2
sommet, 21
squelette, 21
substitution, 90

terme, 53
troncature, 36

zéro
d'un semi-groupe, 2

Résumé :

Ha Minh Lam et M. Morales ont introduit une classe d'idéaux binomiaux qui est une extension binomiale d'idéaux monomiaux libres de carrés. Étant donné $I \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ un idéal monomial quadratique libre de carrés et $J \subset \Bbbk[\mathbf{z}]$ une somme d'idéaux de scroll qui satisfont certaines conditions, nous définissons l'extension binomiale simpliciale de I comme $\mathcal{B} = I + J \subset \Bbbk[\mathbf{z}]$. Le sujet de cette thèse est d'étudier le nombre p plus grand tel que les sizygies de B sont linéaires jusqu'au pas $p-1$, dans ce cas on dit que I satisfait la propriété $\mathbf{N}_{2,p}$. Sous certaines conditions d'ordre imposées sur les facettes du complexe de Stanley-Reisner de I nous obtiendrons un ordre $>$ pour les variables de l'anneau de polynômes $\Bbbk[\mathbf{z}]$. Ensuite nous prouvons par un calcul de bases de Gröbner que l'idéal initial $\mathrm{in}(\mathcal{B})$, sous l'ordre lexicographique induit par l'ordre de variables $>$, est quadratique libre de carrés. Nous montrerons que $\mathrm{in}(\mathcal{B})$ est 2-régulier si et seulement si I est 2-régulier. Cela nous permettra de montrer à partir de la semicontinuité de nombres de Betti que $\mathcal{B}$ est 2-régulier si et seulement si I est 2-régulier. Dans le cas général lorsque I n'est pas 2-régulier nous trouverons une borne inférieur pour l'entier q maximal pour lequel $\Bbbk[\mathbf{z}]/\mathrm{in}(\mathcal{B})$ satisfait la propriété $N_{2,q}$. Grâce à la semicontinuité des nombres de Betti, ce nombre q calculé en fonction de I nous donnera une borne inférieure de l'entier p maximal pour lequel $\mathcal{B}$ satisfait la propriété $N_{2,p}$. En outre, en supposant que J est un idéal torique et en imposant certaines conditions, nous trouverons une borne supérieure pour p. En imposant des conditions supplémentaires, nous prouverons que les deux bornes trouvées coïncident et nous aurons trouvé la valeur de p en fonction de I.

Mots clés :

Nombres de Betti, propriété $\mathbf{N}_{d,p}$, complexe de cliques, idéal monomial, idéal torique, Bases de Gröbner.