



HAL
open science

Problèmes industriels de grande dimension en mécanique numérique du contact : performance, fiabilité et robustesse

Ayaovi Dzifa Kudawoo

► **To cite this version:**

Ayaovi Dzifa Kudawoo. Problèmes industriels de grande dimension en mécanique numérique du contact : performance, fiabilité et robustesse. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2012. Français. NNT: . tel-00773642

HAL Id: tel-00773642

<https://theses.hal.science/tel-00773642>

Submitted on 14 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ D'AIX MARSEILLE

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Mémoire

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'Université d'Aix Marseille

Spécialité : **Mécanique des Solides**

préparée au **Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique - CNRS UPR 7051**

dans le cadre de l'École Doctorale **353 "Sciences pour l'ingénieur : Mécanique, Physique, Micro et Nanoélectronique"**

présentée et soutenue publiquement

par

Ayaovi Dzifa KUDAWOO

le 22 novembre 2012

Problèmes industriels de grande dimension en mécanique numérique du contact : performance, fiabilité et robustesse

Jury

Rapporteurs

Pr. Lionel Fourment,
Pr. Jérôme Fortin,

École des Mines de Paris-CEMEF
Université de Picardie

Examineurs

Pr. Laurent Champaney,
HDR. Serge Dumont,
Pr. Patrick Hild,

École Normale Supérieure-Cachan
Université de Picardie
Université de Toulouse

Encadrement de thèse

Pr. Frédéric Lebon,
Dr. Mickael Abbas,
Dr. Iulian Rosu,

Université d'Aix-Marseille, Directeur de Thèse
Ingénieur de recherche EDF R&D AMA
Ingénieur de recherche LMA-CNRS

Remerciements

Ce travail a été le fruit de trois ans de collaboration et d'apprentissage dans le milieu de la recherche et de l'industrie. Je voudrais donc témoigner de ma gratitude envers mes encadrants (Frédéric Lebon, Mickael Abbas, Thomas De-Soza, Iulian Rosu) ainsi que les entités qui m'ont accueilli (EDF R&D AMA-LMA CNRS-LAMSID).

Je profite aussi de cette occasion, pour témoigner des bons moments que j'ai passés avec Alex Nieto-Ferro, Dina Al-Khrass, Christelle Combescure, El-Hadji Moussi, Alexandre Charles, Elia Picault, Ange Kongo Kondé, Giampiero Pampolini, Jérôme Beaurain, Annie Fornacciari qui ont été au début des collègues puis des rencontres qui tirent vers le haut. Je n'oublie pas tous ceux que je n'ai pas cités au LMA et à EDF mais qui sûrement se reconnaîtront au travers de ces quelques mots.

J'ai tissé des relations fortes avec la communauté chrétienne de Metz, de Marseille et de Paris. Et c'est l'occasion de remercier Perside (indéniablement un rayon de soleil dans ma vie), Akoua (une fille atypique), Nafissa (une solide alliée dans les moments difficiles), Pauline, Laurent, Esther, Melvina, Christophe, Jean-Claude et bien évidemment tous ceux qui n'apparaissent pas mais qui ont sûrement compté pour moi au cours de ces dernières années.

L'aide et le soutien de ma famille (Maman, Papa et tous mes frères : David, Moïse, olivier, soeurs : Fafavi, Déla, Estelle, Sonia et fieuls) restent incontestables. Je dédicace donc ce document à tous ceux que j'aime et qui remplissent ma vie au quotidien et plus particulièrement à mes fieuls Uriel et Priscilla.

Je termine sur une touche personnelle (que certains diront philosophique) : ce n'est pas tant la position sociale qui importe mais c'est plutôt ce à quoi on est utile et les moyens qu'on se donne pour parvenir à nos objectifs. Cette réflexion s'inspire de Abe Gubegna :

« Every day in Africa a gazelle wakes up. It knows it must run faster than the fastest lion or it will be killed. Every morning a lion wakes up. It knows that it must outrun the slowest gazelle or it will starve to death. It doesn't matter whether you are a lion or a gazelle. When the sun comes up, you better be running. »

Résumé

Ce travail de thèse concerne la mécanique numérique du contact entre solides déformables. Il s'agit de contribuer à l'amélioration de la performance, de la fiabilité et de la robustesse des algorithmes et des modèles numériques utilisés dans les codes éléments finis en particulier *Code_Aster* qui est un code libre développé par Électricité De France (EDF) pour ses besoins en ingénierie. L'objectif final est de traiter les problèmes industriels de grande dimension avec un temps de calcul optimisé. Pour parvenir à ces objectifs, les algorithmes et formulations doivent prendre en compte les difficultés liées à la mécanique non régulière à cause des lois de Signorini-Coulomb ainsi que la gestion des non linéarités dues aux grandes déformations et aux comportements des matériaux étudiés.

Le premier axe de ce travail est dédié à une meilleure compréhension de la formulation dite de « Lagrangien stabilisé » initialement implémentée dans le code. Il a été démontré l'équivalence entre cette formulation et la formulation bien connue de « Lagrangien augmenté ». Les caractéristiques mathématiques liées aux opérateurs discrets ont été précisées et une écriture énergétique globale a été trouvée.

Une réflexion a été mise en oeuvre en vue de renforcer de manière faible la condition cinématique sur la normale dans la zone de contact via les techniques d'optimisation sans contraintes. La nouvelle formulation est dite de « Lagrangien augmenté non standard ».

Trois nouvelles stratégies basées sur le Lagrangien augmenté ont été implémentées. Il s'agit de la méthode de Newton généralisée : c'est une méthode d'optimisation qui permet de résoudre toutes les non linéarités du problème en une seule boucle d'itérations. La méthode de Newton partielle est une méthode hybride entre la méthode historique du code appelée méthode de point fixe et la méthode de Newton généralisée. Enfin, on a mis en place une façon originale de traiter le cyclage : ce phénomène apparaît souvent au cours de la résolution du problème et il entraîne la perte de convergence des algorithmes. La stratégie nouvelle permet d'améliorer la robustesse des algorithmes.

Mots Clefs : Éléments finis, contact-frottement, Lagrangien augmenté, Newton généralisé, cyclage, problèmes industriels, quasi-statique, régularisation dynamique

Abstract

This work deals with computational contact mechanics between deformable solids. The aim of this work is to improve the performance, the reliability and the robustness of the algorithms and numerical models set in *Code_Aster* which is finite element code developed by Électricité De France (EDF) for its engineering needs. The proposed algorithms are used to solve high dimensional industrial problems in order to optimize the computational running times. Several solutions techniques are available in the field of computational contact mechanics but they must take into account the difficulties coming from non-smooth aspects due to Signorini-Coulomb laws coupled to large deformations of bodies and material non linearities.

Firstly the augmented Lagrangian formulation called « stabilized Lagrangian » is introduced. Successively, the mathematical properties of the discrete operators are highlighted and furthermore a novel energetic function is presented.

Secondly the kinematical condition with regard to the normal unknowns are reinforced through unconstrained optimization techniques which result to a novel formulation which is so-called « non standard augmented Lagrangian formulation ».

Three types of strategies are implemented in the code. The generalized Newton method is developed : it is a method in which all the non linearities are solved in one loop of iterations. The partial Newton method is an hybrid technique between the generalized Newton one and a fixed point method. Finally, a treatment of cycling effects is implemented : some oscillations on contact point status can lead to non convergent algorithms, hence in this work a control strategy is proposed in order to improve the robustness of solutions techniques.

Keywords : Finite element, frictional-contact, augmented Lagrangian, Generalized, cyclage, industrial problems, quasi-static, dynamic regularisation

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	v
Abstract	vi
Table des matières	vii
Table des figures	ix
Introduction au contexte industriel et état de l'art	1
1 Description générale du problème de contact frottement	15
1 Rappel du cadre général de la mécanique non linéaire	16
1.1 Cinématique des surfaces de contact	16
1.2 Lois de contact et de frottement	20
1.3 Ré-écriture sous forme de projection des lois de contact	23
1.4 Prise en compte des non linéarités de grandes déformations et de comportement	28
1.5 Formulation forte du problème	33
2 Conclusion du chapitre	34
2 Formulations variationnelles du problème quasi-statique	35
1 Généralités	36
1.1 Évolutions Quasi-statiques	36
1.2 Évolutions Dynamiques	36
1.3 Vue globale sur les formulations variationnelles	36
1.4 Vue globale sur les espaces usuels	37
2 Recherche de solutions sous contraintes	38
2.1 Inégalités variationnelles primales	39
2.2 Inégalités variationnelles mixtes	40
2.3 Inégalités variationnelles duales	41
3 Recherche de solutions sans contraintes	42
3.1 Formulation de primale exacte	42
3.2 Formulation de pénalisation et de lagrangien perturbé	44
3.3 Formulation mixte de Lagrangien augmenté	45
4 Non linéarités de comportement et de grandes déformations	48
5 Formulation du Lagrangien augmenté non standard	51
6 Conclusion du chapitre	54
3 Méthodes de résolution	55
1 Éléments mixtes de contact de type noeud/segment	56
1.1 Approximations des inconnues	56

1.2	Appariement noeud/segment et intégration numérique	59
1.3	Gestion des incompatibilités : géométrique, intégration numérique, statuts	64
1.4	Matrices élémentaires de contact	66
2	Algorithmes de résolution basés sur le Lagrangien augmenté	67
2.1	Méthode de point fixe	68
2.2	Méthode de Newton Généralisée	73
2.3	<i>Méthode de Newton partielle</i>	78
3	Algorithmes de résolution basés sur les inégalités variationnelles	78
4	Exemples numériques en élasticité et petites déformations	81
5	Conclusion du chapitre	86
4	Études de la robustesse des méthodes basées sur le Lagrangien augmenté	87
1	Quelques propriétés mathématiques des opérateurs du Lagrangien augmenté	88
1.1	Equivalence des formalismes de Lagrangien augmenté	88
1.2	Classe d'opérateurs lipschitziens	93
1.3	Application au Lagrangien stabilisé	96
1.4	Convergence de la méthode de Newton généralisée	100
2	Heuristique sur les phénomènes de cyclage : <i>méthode adaptative robuste</i>	101
2.1	Définition du cyclage : contact, adhérent, glissant	101
2.2	Exemples introductifs	107
2.3	Approche heuristique	111
3	Conclusion du chapitre	117
5	Robustesse-fiabilité-performance des algorithmes et applications industrielles	121
1	Comparaison des méthodes et des formulations	122
2	Application de la méthode adaptative pour le cyclage	139
3	Problèmes industriels	149
4	Conclusion du chapitre	163
	Conclusions & Perspectives	165
	Annexe : Expressions des matrices élémentaires de contact-frottement	169
	Bibliographie	177

Table des figures

1	Vue globale sur les phénomènes tribologiques	1
2	Vue d'ensemble d'une centrale de type Réacteur à Eau Pressurisée	2
3	Études sur turbines BP (source EDF R&D)	3
4	en haut et à gauche : vue en coupe 3D d'un générateur de vapeur (source ASN et EDF R&D), en haut et à droite : procédé du dudgeonnage, en bas : simulation numérique	4
5	Simulation de l'emboutissage (source <i>Code_Aster</i>)	5
6	Quelques études complexes : à gauche, poinçon sur plan courbe ; à droite, calcul d'auto-contact en grandes transformations (source <i>Code_Aster</i>)	6
1.1	Surfaces de contact et paramétrisation	17
1.2	Calcul de la normale courante	17
1.3	Projection orthogonale et distance	19
1.4	Loi de Signorini : $\lambda_n(d_n)$	21
1.5	Loi de Coulomb et loi de Tresca	22
1.6	Lagrangien stabilisé : $\lambda_n(d_n)$	25
1.7	Projection du lagrangien augmenté sur le cône de Coulomb	25
1.8	Disque de Coulomb (en bleu), disque réduit de Coulomb (en rouge)	27
1.9	Cinématique en grandes déformations de type Simo-Miehe	30
1.10	Équilibre du système	33
2.1	Représentations de W^{cont} (en haut), et $\lambda_n \in \partial_u W^{cont}$ (en bas)	43
2.2	Méthodes de pénalisation	45
2.3	Configurations géométriques intermédiaires	49
2.4	Normales sortantes en un point sur la zone de contact	51
3.1	Approximation des champs de signe de contact	59
3.2	À gauche : formulations classiques, à droite : nouvelle formulation	60
3.3	À gauche situation d'interpénétration, à droite : pas d'interpénétration	62
3.4	Situation de non unicité de la projection	62
3.5	Situation de projection hors mailles	62
3.6	Sauts de normales et choix d'une normale lissée	63
3.7	Incompatibilités : (a) : géométrique (b) : statuts (c) : un exemple de distribution non uniforme des forces de contact	65
3.8	Évolution des paramètres géométriques dans la phase de Newton : à gauche point fixe sur la géométrie, à droite Newton généralisé sur la géométrie	69

3.9	Évolution des paramètres seuil de frottement pendant la phase Newton : à gauche point fixe, à droite Newton généralisé, au milieu seuil de frottement inconnu en un point	69
3.10	Évolution des paramètres statuts de contact pendant la phase de Newton : à gauche point fixe, à droite Newton généralisé	70
3.11	Influence de la méthode d'intégration numérique	81
3.12	contact entre deux corps élastiques	82
3.13	contact entre deux corps élastiques	83
3.14	Statistiques sur les temps de calcul : influence du frottement	83
3.15	compression d'un corps en polyuréthane	84
3.16	Écrasement d'un anneau en polyuréthane	85
3.17	Comparaison des formulations	85
4.1	Exemple élémentaire contact-frottement : partitionnement de R^n	98
4.2	Différents types de cyclages	102
4.3	Décomposition en zones de la loi de contact unilatéral	103
4.4	Décomposition en zones de la loi de frottement : adhérence/glisement	104
4.5	Décomposition en zones de la loi de frottement : glissement avant/glisement arrière	105
4.6	Étude de l'emboutissage	107
4.7	Rouleau sur ruban hyper-élastique	108
4.8	Illustration du problème de cyclage adhérent/glissant	109
4.9	Illustration du problème de cyclage glissement avant/arrière	110
4.10	Cas-test élémentaire de patin frottant	112
4.11	Influence des paramètres r_n et r_t sur le nombre total d'itérations	113
4.12	Évolutions des bornes maximales et minimales de r_n en fonction du module d'Young	115
4.13	Évolutions des bornes maximales et minimales de r_t en fonction du module d'Young	115
5.1	Repassage 3D d'un bloc mou	122
5.2	Déformée : (a) Élastique, (b) Élasto-plastique + Déformations de Simo-Miehe, (c) Hyper-élastique + déformations de Green-Lagrange (en cm)	125
5.3	Répartition des contraintes de Von Mises : (a) Élastique, (b) Élasto-plastique + Déformations de Simo-Miehe, (c) Hyper-élastique + déformations de Green-Lagrange	126
5.4	Comparaison des méthodes pour l'élasticité linéaire	127
5.5	Comparaison des méthodes pour l'élasto-plasticité	128
5.6	Statistiques de performances pour $r_n = r_t = 100$	130
5.7	Caractéristiques géométriques (source <i>Code_Aster</i> et thèse de Yastrebov [114])	133
5.8	Grands glissements d'un poinçon déformable sur un plan mou (tracé avec une échelle limitée)	134
5.9	Dynamique lente, quasi-statique : sensibilité par rapport à la masse virtuelle introduite	135
5.10	Contact entre une bague élastique « composite » et un plan mou	136
5.11	Déformée : à gauche contact sans frottement et à droite contact avec un coefficient de frottement de 0.3	137
5.12	Tracé de la force nodale suivant y (en N) en fonction du déplacement vertical du point O	138

5.13 Bloc déformable soumis à des sollicitations sévères	140
5.14 Comparaison des multiplicateurs de Lagrange de contact sous diverses sollicitations	142
5.15 Comparaison des multiplicateurs de Lagrange sous diverses sollicitations : coefficient de frottement = 0.3	143
5.16 Comparaison des multiplicateurs de Lagrange sous diverses sollicitations : coefficient de frottement = 0.7	144
5.17 Comparaison des multiplicateurs de Lagrange sous diverses sollicitations : coefficient de frottement = 0.85	145
5.18 Comparaison des multiplicateurs de Lagrange sous diverses sollicitations : coefficient de frottement = 1.0	146
5.19 Problème d'emboutissage : géométrie	150
5.20 Problème d'emboutissage : maillage	151
5.21 Problème d'emboutissage : courbe contraintes-déformations en traction	151
5.22 À gauche : phase de mise en forme, à droite : retour élastique	152
5.23 Problème d'emboutissage : comparaison solution avec ou sans traitement du cyclage	153
5.24 Problème de dudgeonnage : géométrie	155
5.25 Problème de dudgeonnage : courbe de traction de la plaque	157
5.26 Problème de dudgeonnage : à gauche, déformée du tube amplifiée $\times 12$, à droite : Contraintes équivalentes de Von Misès	158
5.27 Problème de dudgeonnage : Réaction de contact à 360s : comparaison avec et sans frottement	158
5.28 Problème de contact-frottement sur les pieds d'ailettes : géométrie	161
5.29 Problème de contact-frottement sur les pieds d'ailettes : contraintes de Von Misès	162

Introduction au contexte industriel et état de l'art

Ce travail s'est inscrit dans le cadre d'une thèse CIFRE au département d'Analyses Mécaniques et Acoustiques de la division R&D de EDF (Clamart) et au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique du Centre National de Recherche Scientifique de Marseille (Université d'Aix Marseille).

On présente dans cette introduction, le contexte industriel, l'état de l'art, les enjeux du travail, et enfin le plan du présent manuscrit de thèse.

A- Problèmes industriels de grande dimension en mécanique

A-1 Généralités

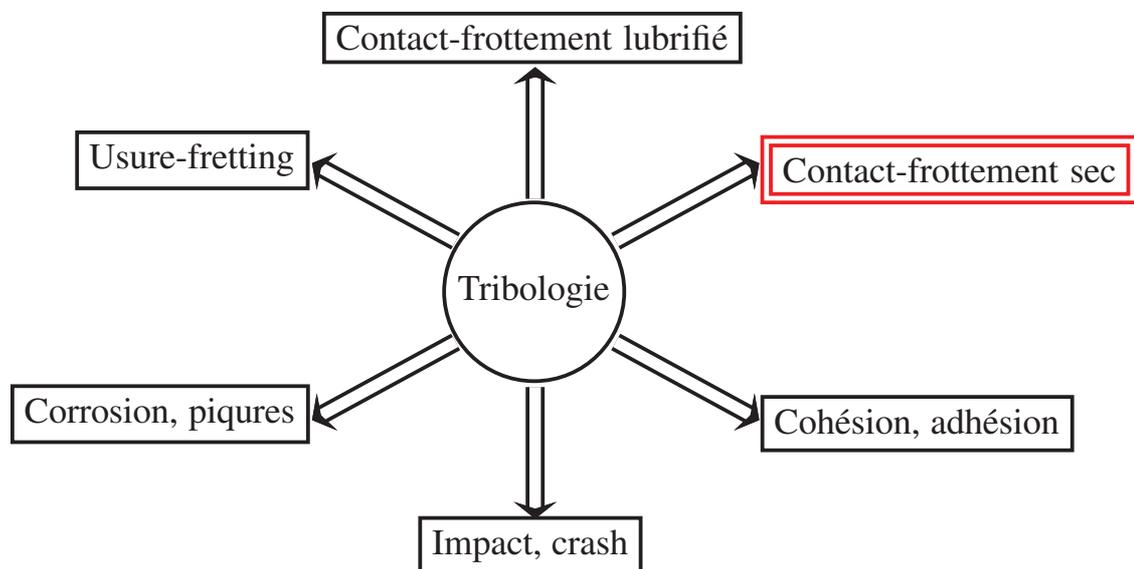


FIGURE 1 – Vue globale sur les phénomènes tribologiques

La tribologie est la science qui s'occupe des interactions mécaniques entre deux ou plusieurs corps solides d'un système donné. Sous ce vocable on rassemble un vaste champ de recherche en mécanique (voir figure 1). Beaucoup de ces phénomènes tribologiques complexes demandent d'abord de résoudre le problème de base de

contact-frottement sec. La tribologie numérique a pour objectif de reproduire et de prédire les interactions entre les corps en vue d'estimer les grandeurs physiques (glissement relatif, contraintes d'interface) mises en jeu. La finalité est d'établir un comportement à long terme du système industriel étudié. Plus précisément, l'enjeu industriel pour EDF, est de maîtriser les phénomènes tribologiques induits dans les systèmes mécaniques des centrales de production d'énergie, grâce aux outils de la simulation numérique.

EDF est l'exploitant du parc nucléaire français. Ce parc se compose essentiellement des centrales nucléaires de type Réacteurs à Eau Pressurisée (REP). Il s'agit d'un ensemble d'unités de production d'énergie électrique qui utilisent la chaleur dégagée par la fission de l'atome dans un réacteur. Son principe de fonctionnement est identique à celui des centrales thermiques classiques (voir figure 2). L'énergie thermique venant de la réaction neutronique est transformée en énergie électrique grâce à la chaîne de production : circuit primaire → circuit secondaire → circuit de refroidissement. Divers phénomènes liés au contact-frottement sont importants à connaître en vue d'assurer la continuité d'exploitation des structures. On donne quelques exemples.

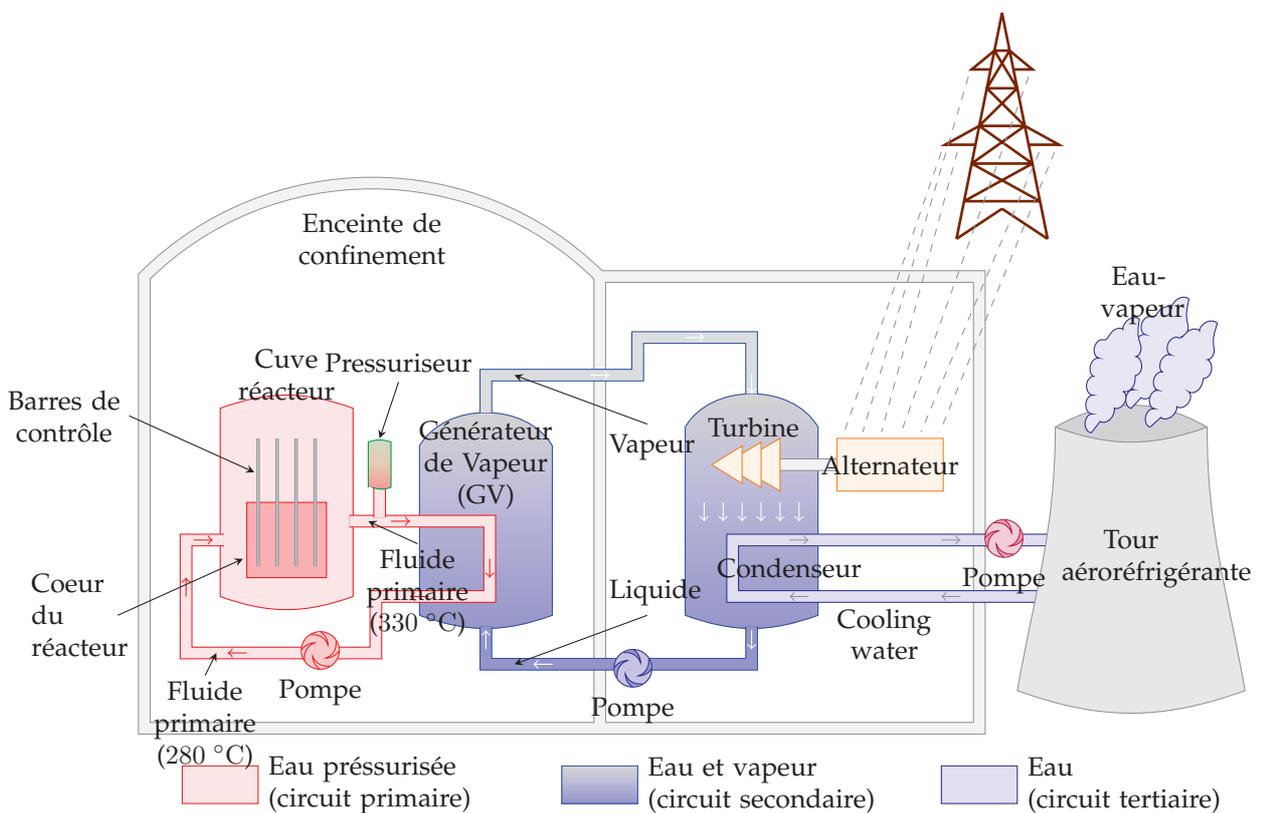


FIGURE 2 – Vue d'ensemble d'une centrale de type Réacteur à Eau Pressurisée

A-2 Exemples industriels

Exemple industriel 1 : Frottement sur les pieds d'aube de turbines

Les turbines à vapeur (Voir figure 3), que l'on retrouve sur le circuit secondaire dans les centrales nucléaires, servent à transformer l'énergie thermique en énergie mécanique en utilisant la détente de la vapeur d'eau dans des roues aubagées.

Certaines centrales nucléaires équipées de turbines 1300MW peuvent présenter des défauts sur les aubes mobiles du dernier étage Basse Pression. Dans cette étude, on cherche à caractériser les valeurs des contraintes induites sur les racines des ailettes soumis à des chargements cycliques de force centrifuge et des conditions aux limites de contact-frottement.

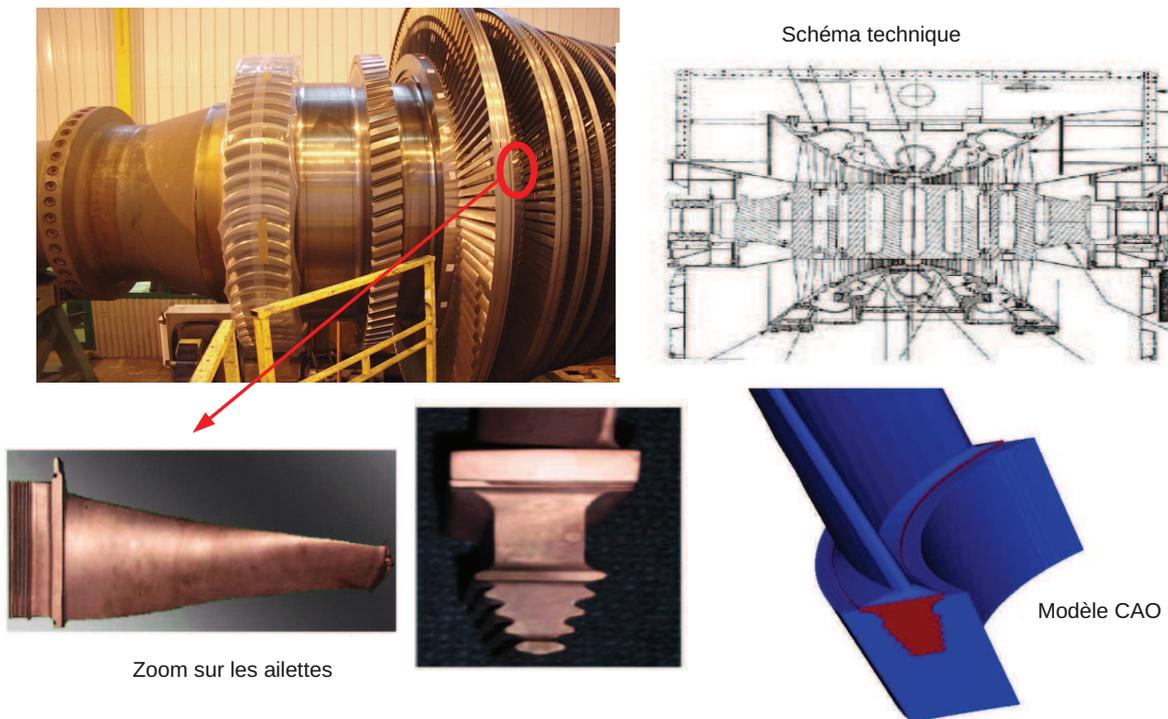


FIGURE 3 – Études sur turbines BP (source EDF R&D)

Exemple industriel 2 : Dudgeonnage des tubes de Générateurs de Vapeur

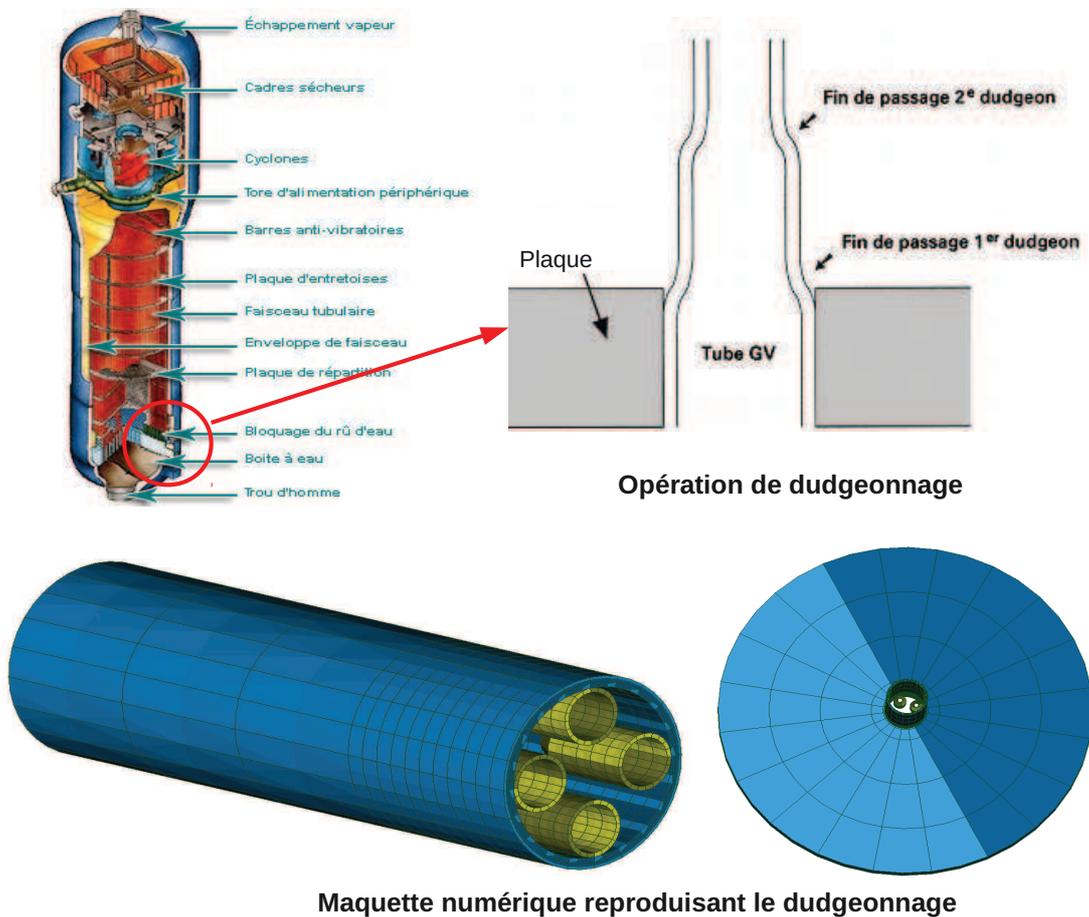


FIGURE 4 – en haut et à gauche : vue en coupe 3D d'un générateur de vapeur (source ASN et EDF R&D), en haut et à droite : procédé du dudgeonnage, en bas : simulation numérique

Un générateur de vapeur (figure 4) est un échangeur thermique entre l'eau du circuit primaire (portée à 320°C et à 155 bars dans le cœur du réacteur) et l'eau du circuit secondaire qui se transforme en vapeur. L'eau du secondaire alimente la turbine. Chaque générateur de vapeur contient plusieurs milliers de tubes soutenues par une plaque. Ces tubes sont généralement le siège des variations de température et de pression importantes pouvant entraîner l'apparition de défauts au pied des générateurs de vapeur. Les premières études ont montré qu'il est important de maîtriser les contraintes résiduelles venant de la mise en forme de ces tubes.

Une étape de la mise en forme est appelée *dudgeonnage* : il s'agit d'une opération qui consiste à augmenter progressivement le diamètre des tubes afin de les mettre en

contact avec la plaque à tubes. Ce procédé se déroule en deux phases. La première phase est dite de *dudgeonnage intégral* où l'on augmente intégralement le diamètre du tube sur une longueur correspondant à l'épaisseur de la plaque support, tandis que la deuxième phase dite de *dudgeonnage amélioré mécaniquement* consiste à relaxer les contraintes résiduelles en augmentant légèrement le diamètre des tubes sur une partie supérieure de la plaque support (voir figure 4).

Le but du calcul est de modéliser en trois dimensions ces deux passes de dudgeonnage. Cette étude de dimension industrielle fait intervenir du contact multi-corps, de grands déplacements et un comportement non linéaire des tubes.

Exemple industriel 3 : Simulation de l'emboutissage

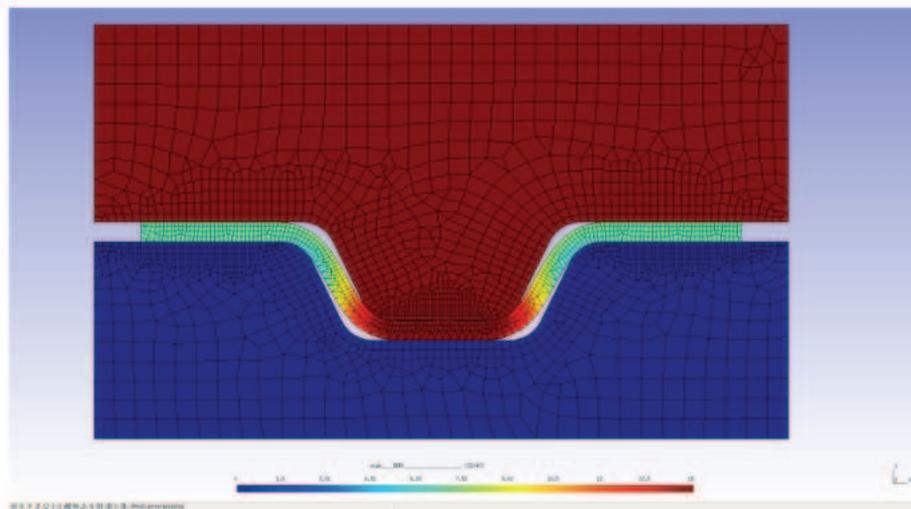


FIGURE 5 – Simulation de l'emboutissage (source *Code_Aster*)

L'emboutissage (voir figure 5) est un procédé très largement utilisé dans les industries automobiles, de forgeage, électro-ménager, etc. Il s'agit de modifier une pièce brute en se servant d'une matrice qui va donner la forme voulue. La pièce brute se déforme plastiquement par application d'un poinçon. Certains procédés d'emboutissage sont tels que la pièce est maintenue au cours de la déformation par des serre-flans. L'emboutissage peut faire l'objet d'un sujet de recherche dédié. En effet, plusieurs thématiques industrielles peuvent être mises en avant en vue d'optimiser les pièces fabriquées. D'abord, on peut chercher à optimiser les caractéristiques géométriques ou matériaux de la pièce brute. Ensuite on peut aussi chercher à mieux cerner les phénomènes de retour élastique qui nuisent à la qualité des pièces finies. Enfin l'étude des contraintes résiduelles est une étape nécessaire pour prédire la durée de vie des

pièces obtenues.

Dans le cadre de ce travail, des problèmes numériques liés au glissement à faibles pressions de contact (contact rasant) ont été détectés et traités.

Exemple industriel 4 : Benchmarks « difficiles »

La politique de recherche du département Analyses Mécaniques et Acoustiques de EDF R&D depuis plusieurs années est d'évaluer les performances du code *Code_Aster* en traitant des cas-tests académiques réputés difficiles. Actuellement, la base de validation du code comprend plus d'une centaine de cas-tests liés au contact-frottement.

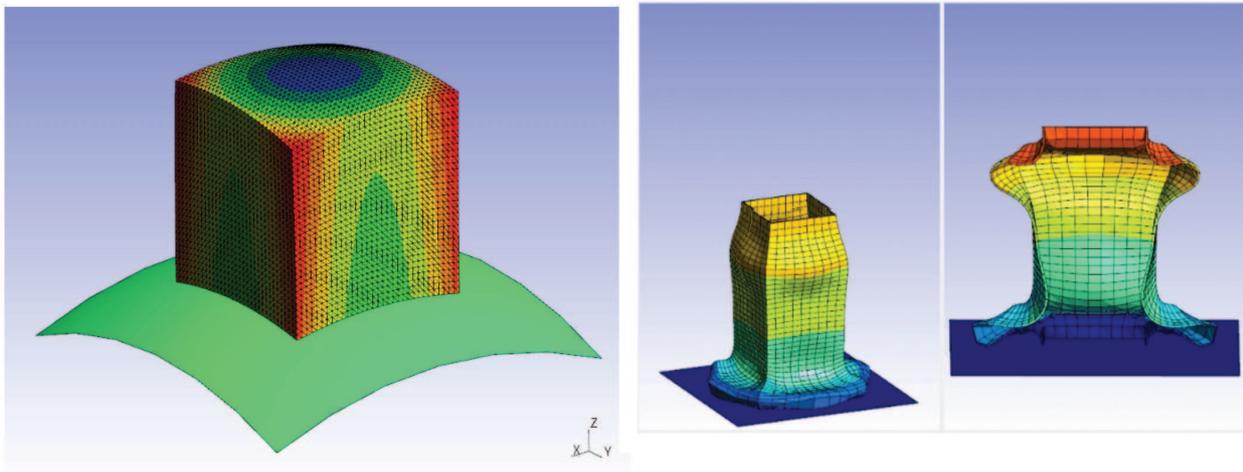


FIGURE 6 – Quelques études complexes : à gauche, poinçon sur plan courbe ; à droite, calcul d'auto-contact en grandes transformations (source *Code_Aster*)

D'autres études industrielles essentiellement orientées vers l'ingénierie du nucléaire existent : étude de la tenue mécanique des milliers de vis des internes de cuve nucléaire soumis à l'irradiation, étude de la chute des grappes de commandes dans le coeur du réacteur, etc. Ces études, outre le cadre de la tribologie, font intervenir des physiques plus complexes comme la neutronique, la thermique et la mécanique des fluides. Même si elles n'ont pas été abordées, les modèles numériques réalisés pour ces types d'études utilisent les méthodes récemment développées pour le contact-frottement sec.

En résumé par *problèmes industriels de grande dimension en mécanique numérique du contact*, on désigne des problèmes présentant des difficultés de convergence d'algorithmes dans un contexte propre à l'ingénierie du nucléaire. Il s'agit :

1. des problèmes avec un maillage de plus de 100000 noeuds dont plus de 5000

noeuds sont en contact-frottement. Le comportement est souvent élastique en petites/grandes déformations. Ces types de problèmes rencontrent des difficultés liées au temps de calcul.

2. des problèmes de faible taille, mais couplant les non linéarités (grandes déformations, grands glissements, coefficient de frottement élevé). Ces types de problèmes posent des difficultés en termes de robustesse (les algorithmes échouent très souvent).
3. des problèmes de grande taille avec un comportement non linéaire des solides. Ce sont les cas les plus difficiles à traiter à cause du temps de calcul et des difficultés de robustesse des algorithmes.

B- État de l'art sur la mécanique du contact dans le cadre des éléments finis

On se place dans un contexte de mécanique non linéaire en quasi-statique et on néglige la rugosité des surfaces en contact. On cherche à prédire un système avec :

- des comportements non linéaires des solides
- des corps subissant de grandes transformations
- la présence du contact-frottement et de grands glissements à l'interface des corps

B-1 Formulations variationnelles :

Le choix d'une formulation est un sujet ancien, vaste et complexe.

Il existe des formulations dites d'*inégalités variationnelles* ou *formulations sous contraintes*. Elles peuvent être primales (Raous-Cocu-Pratt, Haslinger [20, 21, 49, 93]), mixtes (Haslinger-Hlvacek, Belgacem-Renard-Slimane, Papadopoulos [10, 47–49, 86]) ou duales (Haslinger, Téliéga, Lebon-Kuss [49, 71–73, 107]). Celles-ci conduisent à des méthodes numériques de type *Gradient Conjugué et Projeté* étudiées par Renouf-Alart, Dilintas et al [37, 95] ou à des méthodes de *relaxations successives avec projection* (voir Chabrand-Dubois-Raous, Bisegna-Lebon-Maceri, Lebon-Raous [13, 18, 93]) ou encore à la méthode des *contraintes actives* (Hueber-Wolmuth, Dumont [40, 58]).

Il est possible d'employer des formulations dites de *complémentarité* : *linear complementarity problems*, *non Linear Complementarity problems* (voir Klarbring-Bjorkman [66, 67]). Celles-ci conduisent à des méthodes de type *Lemke* (Klarbring-Bjorkman, Chabrand-Dubois-Raous [18, 66, 67]). Malgré leurs bonnes performances en temps de calcul, ces méthodes sont difficiles à adapter à une large classe de problèmes dont le frottement et/ou les grandes déformations. De plus, elles conduisent à une modification des architectures générales des codes éléments finis.

On peut aussi employer des *formulations sans contraintes*. Il existe des formulations de type *Bipotential* introduites et développées par De-Saxcé-Fortin, De-Saxcé-Feng ou Khénous-Pommier-Renard [38, 41, 64]. La formulation retenue au cours de ce travail est la formulation de *Lagrangien Augmenté* (Alart-Curnier, Ben-Dhia, Wriggers, Laursen,

Van-Nguyen [2, 12, 74, 110–112]). Le premier attrait de cette formulation est qu'elle intègre facilement les autres non linéarités via une écriture « globale » de l'énergie du système. Un deuxième avantage est qu'on peut développer des méthodes d'optimisation sans contraintes, par exemple la méthode de Newton généralisée qui est la méthode de prédilection de l'ingénieur. Elle permet la prise en compte des grands glissements et du caractère non régulier du contact dans l'écriture des énergies associées au contact-frottement. La formulation de Lagrangien augmenté demande de construire des éléments « virtuels » de contact.

B-2 Éléments de contact :

Il existe 3 grandes familles d'éléments de contact : noeud/noeud, noeud/segment, segment/segment. Les éléments noeud/noeud sont difficilement exploitables sur des maillages incompatibles. L'élément segment/segment [74, 91] est un concept encore relativement nouveau et peut faire l'objet d'un sujet de recherche à lui seul. Les éléments noeud/segment sont les plus utilisés dans la littérature et c'est l'élément que l'on retient dans ce travail.

Ils prennent en compte le caractère *couplé* du problème de contact-frottement : le seuil de frottement dépend de la pression de contact (loi de Coulomb non associée), le jeu dépend de la configuration géométrique discrète et de la situation effective de contact, les paramètres géométriques comme la normale et la tangente en un point dépendent du saut de déplacement lui même inconnu. De plus lorsqu'on y adjoint des grands glissements, il y a nécessité d'introduire des notions spécifiques de *convection de termes* [74, 75] : la variation d'un point qui glisse sur plusieurs mailles de contact est la somme de sa variation par rapport au temps et de sa variation par rapport aux coordonnées paramétriques.

Pour toutes ces raisons, le problème de contact-frottement n'est pas un problème d'optimisation classique en mécanique.

B-3 Résultats d'analyse numérique :

Les résultats classiques comme le théorème de Lax-Milgram sont inexploitablement dans un problème de contact-frottement sec. L'analyse numérique demande de préciser trois points importants : la stabilité-qualité de la solution convergée, l'existence et l'unicité éventuelle de solutions et enfin la convergence des algorithmes.

Le premier point est lié au respect de certaines conditions mathématiques : *ellipticité* et condition *inf-sup*. La qualité ainsi que la stabilité de la solution convergée dépendent de la discrétisation spatiale et de la méthode d'intégration numérique [1, 74, 111]. En l'occurrence, pour la stabilité, il faut démontrer l'existence d'une constante telle que la condition *inf-sup* (voir Abbasi, Brezzi-Fortin [1, 15]) soit vraie. Pour la qualité de la solution, il faut démontrer que sur un patch-test de Taylor [105, 106], on obtient bien une répartition régulière des pressions dans la zone de contact. Les éléments qui posent le plus souvent des difficultés sont les éléments quadratiques. Ils nécessitent soit un traitement spécifique de la discrétisation spatiale en décrivant la surface de contact par des courbes de Bezier ou des Nurbs [88, 89]. Une autre solution consiste à utiliser des

éléments mortar (segment/segment) [74,91,111]. Une dernière solution consiste à utiliser des schémas d'intégration numérique par sous découpage d'éléments [116] (Simpson, Newton-Cotes) d'ordre élevé.

Le deuxième point concernant l'existence et l'unicité de solutions est un problème encore ouvert à ce jour. Des exemples de multiplicités de solutions ont été exhibés par Hild, Ballard et Klarbring [9, 55–57]. Il existe des résultats d'existence et d'unicité pour le problème de Signorini en statique [19]. Pour le frottement, l'unicité de solution dépend du coefficient de frottement. La détermination d'un coefficient critique en dessous duquel l'unicité est assurée dépend du fait que le problème soit continu ou discret, statique ou quasi-statique ou dynamique, de la loi de frottement régularisée ou non régularisée. Alart [3] a démontré que les opérateurs discrets issus du Lagrangien augmenté appartiennent à des classes d'opérateurs de Lipschitz et que sous certaines conditions, ceux-ci sont des homéomorphismes (application bijective et continue) d'où des résultats d'unicité.

Les opérateurs de Lagrangien augmenté sont non réguliers. Lorsqu'on utilise des algorithmes itératifs basés sur la linéarisation du problème non régulier, il est nécessaire de définir *le jacobien généralisé* et *les conditions de convergence*. Pour les méthodes de points fixe, on recherche des propriétés de contraction du système lipschitzien [64]. Le travail de référence pour la méthode de Newton généralisée est celui de Alart [3,4]. Les résultats théoriques de convergence sont difficilement applicables sur des cas industriels. Dans ce cas, seules des heuristiques permettent d'améliorer la convergence des algorithmes (voir Bussetta et al, Alart [4,16]).

B-4 Méthodologies de résolution du contact-frottement dans *Code_Aster* :

Cette thèse est axée sur l'implémentation de méthodes numériques dans un code à la fois industriel et recherche nommé *Code_Aster* (code libre développé sous licence GPL par EDF R&D). Avant de rentrer dans le vif du sujet, on rappelle l'état des travaux sur le contact-frottement au début du travail dans *Code_Aster*.

Les méthodes historiques de résolution du contact dans le code sont appelées des *méthodes discrètes*, qu'on peut encore appeler *méthode découplée* [26]. On les appelle ainsi parce qu'on cherche dans un premier temps à résoudre le problème d'équilibre sans prise en compte de la loi du contact. Puis on corrige les efforts de contact pour faire respecter la loi de contact-frottement de Signorini-Coulomb. Quelques exemples d'algorithmes sont la méthode du Gradient Conjugué Projeté, la méthode des contraintes actives, la méthode du Lagrangien.

Au cours de la dernière décennie, une approche dite de *méthode continue* a été privilégiée. Dans cette méthode on résout le problème d'équilibre en même temps que la prise en compte des lois de contact. Le premier travail a été la thèse de Zarroug (2002) qui a implémenté une formulation équivalente de Lagrangien augmenté [12, 116]. Dans son travail de thèse, on retrouve des éléments de contact particuliers : méthode d'intégration numérique par sous découpage de l'élément et la méthode de type Arlequin. Dans la continuité, on note les travaux de thèse de Zammali (2005) ; son travail étend en particulier la méthode Arlequin à des problèmes multi-échelle pour le contact (superposition d'un modèle de Signorini à un modèle de compliance) [115]. La thèse de Torkhani (2008) s'est intéressée à des problèmes de tribologie complexes : usure, refermeture des fissures, contact entre poutres [108]. Dans un cadre plus étendu que la méthode des éléments finis, Siavelis a développé dans sa thèse des méthodes pour prendre en compte l'intersection de plusieurs fissures avec la méthode X-FEM [103]. De plus, depuis plusieurs années, l'équipe de développement de *Code_Aster* est intéressée par de nouvelles approches qui améliorent la capacité du code sur des problèmes de grande taille.

Le but du présent travail est d'apporter des améliorations en termes de performance, fiabilité et robustesse sur la méthode continue basée sur les éléments noeud/segment. Le critère le plus important pour les ingénieurs utilisant le code est la fiabilité : il faut assurer la convergence de l'algorithme vers une solution juste avant de se préoccuper de sa performance.

C- Plan du manuscrit de thèse

- Au chapitre 1, le sujet est placé dans son contexte scientifique. On rappelle les lois de comportement et les formulations de grandes transformations dans le cadre de la mécanique non linéaire. On insiste aussi sur une ré-écriture sous forme d'équations de projection des lois de Signorini-Coulomb.
- Au chapitre 2, on rappelle les formulations variationnelles qui permettent d'appliquer le cadre des éléments finis. *On propose une formulation mixte originale qui a pour particularité de traiter les inconnues de normales dans les zones de contact comme des inconnues globales.*
- Le chapitre 3 est consacré à la méthodologie générale de résolution du problème. On présente d'abord la construction d'un élément de contact de type noeud/segment. Ensuite, on rappelle le choix des espaces d'approximation et des méthodes d'intégration numérique pour les termes liés au contact-frottement. *L'extension à la nouvelle formulation est aussi exhibée.* La suite du chapitre est consacrée au rappel des algorithmes classiques de *point fixe* et de *Newton généralisé* qui permettent de résoudre numériquement le problème non linéaire discrétisé. Des algorithmes dérivés permettent de coupler les avantages des deux algorithmes précédents : en l'occurrence on présente sur une méthode dite de *Newton partielle*. Ce chapitre se termine par quelques exemples numériques.
- Le chapitre 4 est consacré aux résultats théoriques et heuristiques. On cherche tout d'abord à *caractériser rigoureusement les opérateurs de contact-frottement issus de l'écriture équivalente de Lagrangien augmenté.* Puis on met l'accent sur une méthode permettant de traiter de manière fine le caractère non régulier des lois contact-frottement et le phénomène de cyclage.
- Le chapitre 5 est un chapitre applicatif. On considère des études industrielles et des études complexes. Les études considérées montrent la pertinence des algorithmes développés.

Études théoriques :

**Du système continu au système
discret**

Chapitre 1

Description générale du problème de contact frottement

On présente le problème de mécanique du contact en se plaçant dans le cadre des milieux continus conformément aux travaux de la littérature [5, 23, 32–34, 53, 74, 88, 89, 111].

Le premier point concerne l'étude géométrique et cinématique des surfaces de contact. Plus précisément, on s'intéresse au calcul du repère local courant (vecteur normal, vecteur tangent en un point de contact) en se basant sur les relations de surfaces paramétrées. On suppose donc que le bord de contact peut être décrit par une fonction paramétrée suffisamment régulière. Le choix des variables cinématiques est aussi un point crucial. Il s'agit de décrire le saut de déplacement courant à l'interface des corps déformables.

On modélise le contact-frottement sec par la loi de Signorini-Coulomb. Bien que facile à appréhender, cette loi présente plusieurs difficultés qui ne rendent pas simple la résolution numérique. Une première difficulté est que la condition de Signorini-Coulomb ne peut pas s'interpréter comme une condition aux limites dont le déplacement et l'effort sont connus. De plus, cette loi est représentée par des fonctions non-régulières et que la loi de Coulomb est une loi non associée. Au cours de la résolution numérique, les zones effectives de contact-frottement ainsi que le repère local courant ne sont pas connus a priori (ils dépendent des inconnues). Il est nécessaire de faire des traitements adaptés.

Enfin, on termine ce chapitre en rappelant brièvement les autres types de non linéarités qui complexifient le calcul et conduisent souvent celui-ci à l'échec : élasto-plasticité, hyperélasticité, grandes transformations.

1 Rappel du cadre général de la mécanique non linéaire

1.1 Cinématique des surfaces de contact

Paramétrisation des surfaces de contact et calcul de la base locale

On considère deux corps déformables occupant à l'instant initial les domaines $\Omega^i \subset R^3$, $i = 1, 2$ et à l'instant courant les domaines $\Omega_t^i \subset R^3$, $i = 1, 2$. Les positions de la particule à l'instant courant sont identifiées via leurs positions de référence et la transformation associée au milieu continu. En effet pour un point $x^i \in \Omega^i$ à l'instant initial, on associe un point y^i à l'instant courant :

$$y^i = y^i(x^i, t) \text{ avec } y^i : \Omega^i \times [O, T] \longrightarrow R^3 \quad (1.1)$$

La configuration déformée de Ω^i est $\Omega_t^i = y^i(\Omega^i, t)$. On note F le gradient de la transformation, J son jacobien et F^* le cotenseur de F tels que :

$$F = \nabla_x y(x, t), \quad J = \det F(x, t), \quad F^* = J F^{-T} \quad (1.2)$$

Les règles classiques de transport de la mécanique des milieux continus s'appliquent de manière à toujours se ramener dans la configuration de référence.

On partitionne la frontière des corps en trois parties disjointes :

- Γ_u est le bord sur lequel le déplacement est imposé ;
- Γ_g est le bord sur lequel les efforts sont imposés ;
- Γ_c correspond au bord « potentiel » de contact.

Un point de la surface de contact est *paramétré* par deux réels en 3D (un réel en 2D) :

$$x \in \Gamma_c, \quad x = \psi_0(\zeta_1, \zeta_2), \quad \psi_0 : A \subset R^2 \longrightarrow U \subset R^3 \quad (1.3)$$

Avec $\psi_0(\Gamma_c)$ caractérisant l'équation paramétrique de la surface de contact dans la configuration de référence. L'espace tangent de référence est l'ensemble formé par tous les vecteurs tangents notés $t_0(x)$ en un point x de la surface de contact de référence. Cet espace est généré par une base $(t_0^1(x), t_0^2(x))$. On calcule la base de l'espace tangent de la manière suivante :

$$t_0^\alpha(x) = \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta_\alpha} \text{ avec } \alpha = 1, 2 \quad (1.4)$$

On en déduit le vecteur normal $m(x)$ dans la configuration de référence :

$$m(x) = \frac{t_0^1 \wedge t_0^2}{\|t_0^1 \wedge t_0^2\|} \quad (1.5)$$

La figure 1.1 illustre la transformation du milieu ainsi que la paramétrisation.

Les paramètres géométriques sont difficiles à maîtriser dans un calcul de contact-frottement. Plus précisément, il n'est pas simple de calculer la normale courante en un point de contact ainsi que ses variations dans le temps et dans l'espace. En se

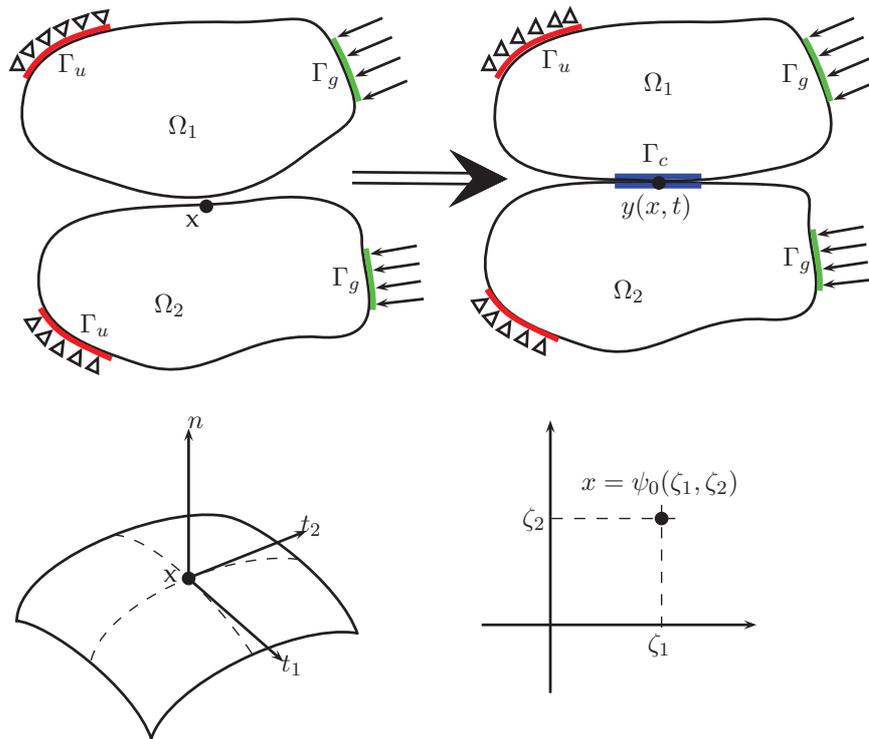


FIGURE 1.1 – Surfaces de contact et paramétrisation

basant sur les développements de Curnier-He-Klarbring, Pietrzak-Curnier, Heegaard-Curnier [34, 53, 88, 89], on déduit les résultats suivants, applicables dans un cadre de la mécanique du milieu continu.

Soit T_x l'espace tangent en un point dans la configuration de référence et T_y l'espace tangent dans la configuration courante. Soit une surface élémentaire ds générée par deux vecteurs $dx, dx' \in T_x$ et orientée par $m(x)$. Cette surface est transportée dans la configuration courante en une surface élémentaire ds_t générée par $dy, dy' \in T_y$ et orientée par la normale courante $n(y)$ (Voir figure 1.2). Suivant les règles de transport on a :

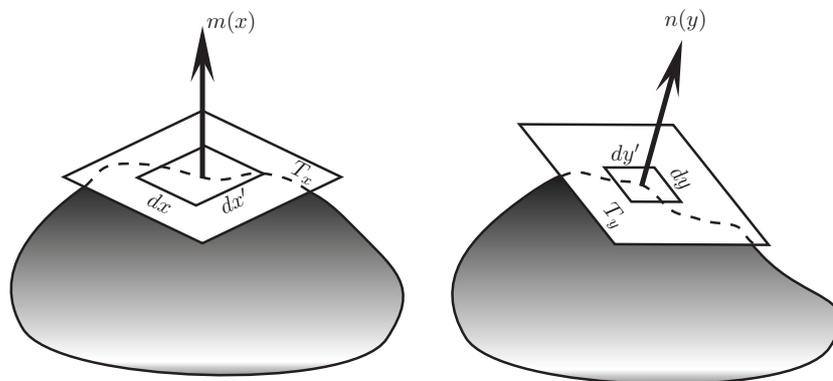


FIGURE 1.2 – Calcul de la normale courante

$$ds = m \|ds\|$$

$$ds_t = n \|ds_t\|$$

$ds_t = F^* ds$ (transport de la surface élémentaire de référence)

$$n(y) = \frac{F^*.m(x)}{\|F^*.m(x)\|} \quad (1.6)$$

Et les vecteurs tangents $t(y)$ dans la configuration déformée sont donnés par :

$$t_\alpha(y) = F.s_\alpha(x) \quad (1.7)$$

Calcul des quantités cinématiques : jeu normal et incrément du jeu tangentiel

On appelle un des corps « maître » et l'autre « esclave ». La détermination des variables cinématiques de contact passe d'abord par la résolution du problème d'*appariement* entre les corps : il s'agit d'établir une relation entre la surface de contact maître et la surface de contact esclave, telle qu'en tout point de la surface de contact esclave, on associe un point de la surface de contact maître par recherche du point le plus proche.

$$\bar{x} = \underset{\bar{x} \in \Gamma^j}{\operatorname{argmin}} \left(\frac{1}{2} \|y(x, t) - \bar{y}(\bar{x}, t)\|^2 \right), \quad \forall x \in \Gamma_c^i, \quad i \neq j \quad (1.8)$$

Le vecteur distance ou saut de déplacement s'écrit alors comme suit :

$$d = y(x, t) - \bar{y}(\bar{x}, t) = d_n \cdot n(\bar{y}) \quad (1.9)$$

Le signe du champ scalaire d_n ou encore *jeu normal* traduit l'état ou le statut de contact d'un point. On choisit d'utiliser la normale entrante à la surface maître (soit la normale sortante de la surface esclave) comme normale de référence. Avec cette définition,

- Si $d_n < 0$, alors il y a un jeu, c'est-à-dire séparation entre les corps ;
- Si $d_n = 0$, alors il y a contact ;
- Si $d_n > 0$, alors il y a pénétration (interdit dans le cas du contact unilatéral).

Les surfaces de contact des corps sont décrites par le jeu de paramètres $(\zeta_1^{escl, mait}, \zeta_2^{escl, mait})$. Pour une description complète des quantités cinématiques, il faut donc 4 paramètres. On fait le choix de réduire ce nombre de paramètres nécessaires, en décrivant les variables cinématiques de contact par rapport à un corps pris comme référence (maître par exemple). Ce choix conduit à ne retenir que deux paramètres du corps maître dans un cas de contact-frottement en 3D. Choisir un corps maître n'est pas simple. Il existe plusieurs règles empiriques : le corps maître est le corps le plus rigide ou encore le corps maître se déplace peu. Mais dans les cas où le déplacement relatif entre les corps est important (comme dans les cas de grandes transformations entre corps déformables), le choix du corps de référence n'est plus aisé.

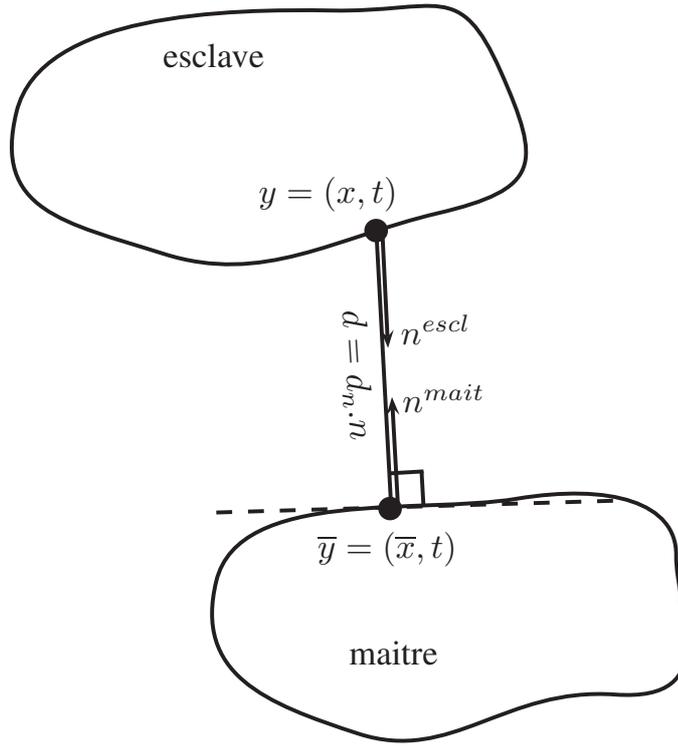


FIGURE 1.3 – Projection orthogonale et distance

La conséquence du choix de description est telle que si l'on considère \bar{g} comme une grandeur associée au corps de référence maître (dont les paramètres varient suivant la position du point qui lui est apparié) alors l'application de la variation totale de cette grandeur se fait de la manière suivante :

$$\tilde{\delta}\bar{g} = \frac{\partial\bar{g}}{\partial T} \cdot \delta T + \frac{\partial\bar{g}}{\partial\zeta} \cdot \delta\zeta \quad (1.10)$$

Pour une grandeur g associée au corps esclave, la variation totale vaut :

$$\tilde{\delta}g = \frac{\partial g}{\partial T} \cdot \delta T = \delta g \quad (1.11)$$

Ici T représente la variable temps, $\tilde{\delta}$ est la variation totale tandis que δ est la variation temporelle.

Tout se passe comme si on adoptait une cinématique lagrangienne pour le corps esclave et une cinématique eulérienne pour le corps maître dans la zone de contact. Dans le chapitre 3, on montre que grâce à une méthode de point fixe sur la géométrie, on peut se ramener en une cinématique totalement lagrangienne.

Avec ce formalisme, on déduit les variables cinématiques intéressantes pour notre problème.

On calcule le vecteur « vitesse relative de contact » qui n'est autre que la dérivée

totale du saut de déplacement $d = d_n n$ (voir figure 1.3) :

$$\frac{d(d)}{dt} = \frac{d(d_n)}{dt}n + d_n \frac{d(n)}{dt} \quad (1.12)$$

On préfère dans un cadre quasi-statique, calculer l'incrément de saut de déplacement d'un couple de points appariés. Cela se traduit par :

$$\tilde{\delta}d = \tilde{\delta}(d_n) n + d_n \tilde{\delta}n \quad (1.13)$$

$$\frac{1}{2}\tilde{\delta}(n.n) = n\tilde{\delta}n = 0 = \alpha n.t, \quad \forall \alpha \in R \text{ d'où } \tilde{\delta}n = \alpha t$$

d'où on en déduit que $\tilde{\delta}n$ est un vecteur tangent.

Donc $d_n \tilde{\delta}n$ que nous notons d_t est un incrément du saut de déplacement dans la direction tangente. C'est cette inconnue qui intervient dans les calculs du frottement (une fois que le contact est établi).

On ré-écrit donc les relations précédentes sous la forme :

$$\tilde{\delta}d = \tilde{\delta}d_n.n + d_t \quad (1.14)$$

Et on a aussi :

$$\tilde{\delta}d = \tilde{\delta}(y - \bar{y}) = (\delta y - \delta \bar{y}) - \frac{\partial \bar{y}}{\partial \zeta_\alpha} \delta \zeta_\alpha \quad (1.15)$$

D'où

$$\tilde{\delta}d_n = \tilde{\delta}(d.n) = (\delta y - \delta \bar{y}).n, \quad \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \zeta_\alpha} = t_\alpha, \quad n.\tilde{\delta}n = 0 \right) \quad (1.16)$$

$$\tilde{\delta}d = n\tilde{\delta}d_n + d_t$$

$$\tilde{\delta}d_n = n^T.\tilde{\delta}d$$

$$\tilde{\delta}d = n n^T \tilde{\delta}d + d_t$$

d'où

$$d_t = (1 - n n^T)\tilde{\delta}d \quad (1.17)$$

1.2 Lois de contact et de frottement

Loi de Signorini

Soit d_n la distance séparant les deux corps étudiés et λ_n la pression de contact unilatéral entre ces corps. La relation bien connue de Signorini permet :

- d'interdire les pénétrations entre les corps ;
- d'interdire la traction entre les corps (adhésion exclue) ;
- de dire que les situations de contact et de décollement sont exclusives : il y a soit du contact soit du décollement

$$\begin{cases} d_n \leq 0 \\ \lambda_n \leq 0 \\ d_n \cdot \lambda_n = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

(voir figure 1.4)

Dans le cas du contact : $d_n = 0$ et $\lambda_n \leq 0$

Dans le cas d'un décollement : $d_n < 0$ et $\lambda_n = 0$.

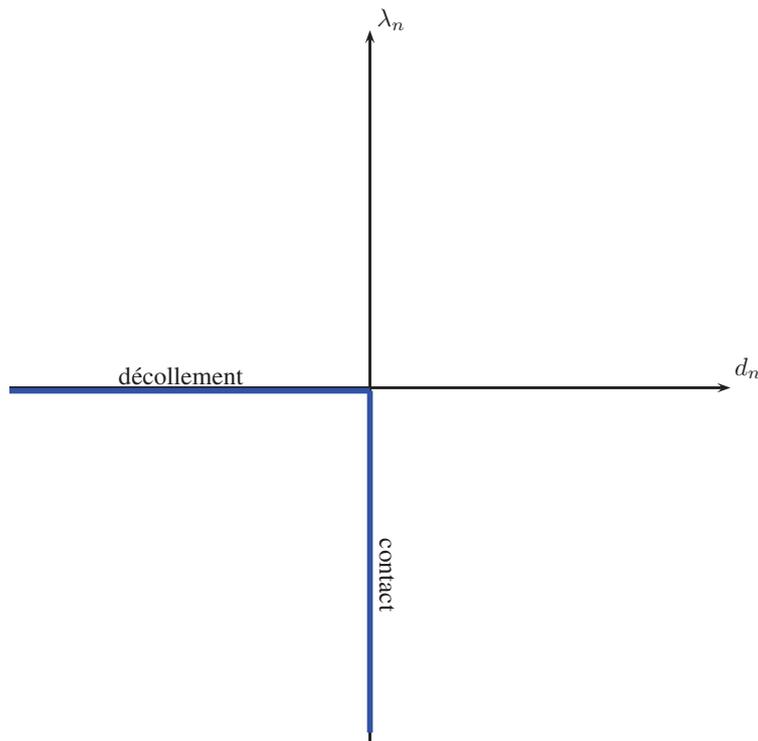


FIGURE 1.4 – Loi de Signorini : $\lambda_n(d_n)$

La relation de Signorini est une loi non univoque et elle peut s'exprimer au moyen de l'analyse convexe par :

$$\text{Signorini} : \begin{cases} \lambda_n \in \partial I_{R^+}(-d_n) \\ -d_n \in \partial I_{R^-}(\lambda_n) \end{cases} \quad (1.19)$$

Avec I_K la fonction indicatrice du convexe K :

$$I_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ \infty & \text{si } x \notin K \end{cases} \quad (1.20)$$

$\lambda_n(d_n)$ ou $d_n(\lambda_n)$ dérivent de deux potentiels non différentiables et conjugués appelés fonction indicatrice. ∂ désigne le sous-différentiel d'une fonction. C'est une notion issue de l'analyse convexe et introduite en mécanique du contact par Moreau [81–83].

Loi de Coulomb et loi de Tresca

Nous nous intéressons maintenant au frottement. On distingue le frottement « *pur* » : le déplacement tangentiel se fait à pression de contact constante (modèle de *Tresca*) et le frottement « *réel* » : le déplacement tangentiel se fait à pression de contact inconnue (modèle de *Coulomb*). Dans le cas du frottement pur, le seuil de frottement noté $\mu\lambda_n^0$ est considéré comme étant fixe et la représentation de la surface de seuil de frottement est un cylindre de rayon égal à $\mu\lambda_n^0$ dans l'espace des chargements de contact $(\lambda_{t1}, \lambda_{t2}, \lambda_n)$. Dans le cas du frottement réel, le seuil de frottement noté $\mu\lambda_n$ est considéré comme étant variable en fonction de la pression de contact. La représentation de la surface de seuil de frottement est un cône de sommet le chargement nul dans l'espace des chargements de contact. On appelle *seuil de frottement*, une valeur qui limite l'intensité des efforts tangentiels de sorte qu'en deçà de cette valeur aucun déplacement tangentiel n'est autorisé. En pratique, une méthode du point fixe permet de combiner ces deux lois : on approche la loi de Coulomb par une succession de points fixes sur le seuil de frottement de type Tresca. Dans ces deux lois, la vitesse tangentielle reste colinéaire à l'effort tangent. On rappelle aussi que la loi de Tresca est une loi associée car la vitesse tangente est orthogonale à la surface seuil tandis que la loi de Coulomb est une loi non associée. Précisons aussi que l'on peut rencontrer des frottements anisotropes que nous n'avons pas considéré ce cas dans cette étude.

On illustre les lois de Coulomb et de Tresca par la figure ci-dessous 1.5 :

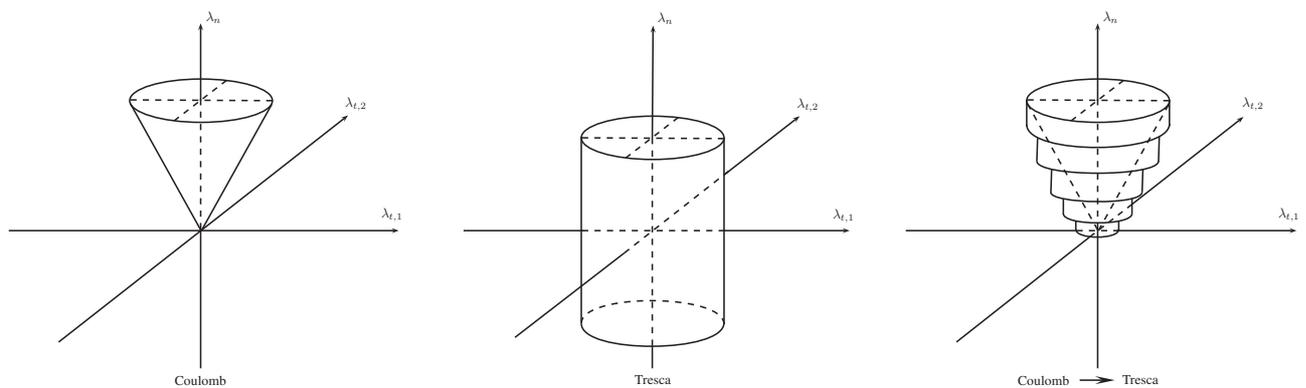


FIGURE 1.5 – Loi de Coulomb et loi de Tresca

Soit μ le coefficient de frottement (supposé constant) entre les corps solides. Soit v_t ou \dot{d}_t la vitesse relative tangentielle entre les deux corps étudiés et λ_t la force de frottement.

La loi de frottement de Tresca s'exprime comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\dot{d}_t}{\|\dot{d}_t\|} = \frac{\lambda_t}{\|\lambda_t\|} \text{ si } \|\lambda_t\| = \mu|\lambda_n^0| \\ \dot{d}_t = 0 \text{ si } \|\lambda_t\| \leq \mu|\lambda_n^0| \\ \dot{d}_t(\|\lambda_t\| - \mu|\lambda_n^0|) = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

$C(\lambda_n^0) = \{\forall \lambda_t, \|\lambda_t\| \leq \mu|\lambda_n^0|\}$ représente le cylindre de Tresca.

La loi de frottement de Signorini-Coulomb s'exprime comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } d_n = 0, \lambda_n < 0, \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{d}_t}{\|\dot{d}_t\|} = \frac{\lambda_t}{\|\lambda_t\|} \text{ si } \|\lambda_t\| = \mu|\lambda_n| \\ \dot{d}_t = 0 \text{ si } \|\lambda_t\| \leq \mu|\lambda_n| \\ \dot{d}_t(\|\lambda_t\| - \mu|\lambda_n|) = 0 \end{array} \right. \\ \text{si } d_n < 0, \lambda_n = 0 \text{ alors } \|\lambda_t\| = 0, \forall \|\dot{d}_t\| \end{array} \right. \quad (1.22)$$

$C(\lambda_n) = \{\forall \lambda_t, \|\lambda_t\| \leq \mu|\lambda_n|\}$ représente le cône de Coulomb.

Comme pour le contact unilatéral, on peut exprimer les lois de Tresca et de Coulomb au moyen de l'analyse convexe de Moreau [81,82].

$$Tresca : \left\{ \begin{array}{l} \lambda_t \in \mu \lambda_n^0 \partial \|\dot{d}_t\| \\ \dot{d}_t \in \partial I_{C(\lambda_n^0)}(\lambda_t) \end{array} \right. \quad (1.23)$$

Ici on utilise la fonction indicatrice $I_{C(\lambda_n^0)}(\lambda_t)$ d'un convexe borné de frontière fixe pour exprimer la loi $\dot{d}_t(\lambda_t)$.

$$Signorini - Coulomb : \left\{ \begin{array}{l} \lambda_n \in \partial I_{R^+}(-d_n) \\ \lambda_t \in \partial I_{C(\lambda_n)}(\dot{d}_t) \\ \dot{d}_t \in \partial I_{C^*(\lambda_n)}^*(\lambda_t) \end{array} \right. \quad (1.24)$$

$I_{C(\lambda_n)}, I_{C(\lambda_n)}^*$ représentent des fonctions indicatrices du disque convexe $C(\lambda_n)$.

1.3 Ré-écriture sous forme de projection des lois de contact

Contact unilatéral

L'introduction d'une écriture lagrangienne augmentée fait partie des méthodes de régularisation du contact qui seront explicitées dans le chapitre suivant. On se contente dans cette sous-section d'introduire une forme équivalente des lois de contact grâce à un opérateur de projection ou de champ de signe :

$$Signorini : \left\{ \begin{array}{l} \lambda_n = Proj_{R^-}(\widehat{\lambda}_n) \\ \widehat{\lambda}_n = \lambda_n - r_n d_n \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Remarque :

L'opération de projection se définit comme suit :

$$Proj_{R^-}(\hat{x}) = \begin{cases} \hat{x} & \text{si } \hat{x} < 0 \\ 0 & \text{si } \hat{x} > 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

$\widehat{\lambda}_n$ est appelé multiplicateur augmenté de contact et dépend *linéairement* de d_n et de λ_n . Le coefficient r_n joue le rôle de paramètre de régularisation.

En utilisant la projection on n'arrive pas à dissocier le *statut d'un point de contact* et la valeur numérique du *multiplicateur augmenté*. Le lagrangien « stabilisé » est la formulation proposée par Ben-Dhia (voir [23]). On retrouve une écriture similaire dans Van-Nguyen [110]. Elles découlent du Lagrangien augmenté. On introduit un *champ de signe* ou *Level-Set*. Le *Level-Set* permet de découpler la non linéarité de contact en deux parties : les statuts de contact d'une part et la pression de contact augmentée de l'autre . On a :

$$Signorini : \begin{cases} \lambda_n = S_u(\lambda_n - r_n d_n) \cdot (\lambda_n - r_n d_n) \\ S_u(\widehat{\lambda}_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \widehat{\lambda}_n \leq 0 \\ 0 & \text{si } \widehat{\lambda}_n > 0 \end{cases} \\ \widehat{\lambda}_n = \lambda_n - r_n d_n \end{cases} \quad (1.27)$$

S_u est la fonction caractéristique du cône R^- et de variable $\widehat{\lambda}_n$. Dans le cas contactant, on a $S_u(\widehat{\lambda}_n) = 1$ et dans le cas non contactant on a $S_u(\widehat{\lambda}_n) = 0$.

Remarque : $Proj_{R^-}(x)$ est continue sur R^- tandis que $S_u(x)$ est presque partout continue (elle n'est pas continue en 0). $Proj_{R^-}(x)$ et $S_u(x)$ sont presque partout différentiable. Néanmoins les formulations (1.25) et (1.27) sont équivalentes car on a

$$S_u(x) x = Proj_{R^-}(x)$$

Frottement de Coulomb

Le formalisme employé pour le contact est toujours le même excepté le convexe sur lequel on projette qui prend une autre forme. On a :

$$Coulomb : \begin{cases} \lambda_t = Proj_{C(\widehat{\lambda}_n)}(\widehat{\lambda}_t) \\ Avec \widehat{\lambda}_t = \lambda_t + r_t v_t \end{cases} \quad (1.28)$$

$$Proj_{C(\widehat{\lambda}_n)}(\widehat{\lambda}_t) = \begin{cases} \widehat{\lambda}_t & \text{si } \widehat{\lambda}_t \in C(\widehat{\lambda}_n) \\ \frac{\mu|\lambda_n - r_n d_n| \widehat{\lambda}_t}{\|\widehat{\lambda}_t\|} & \text{si } \widehat{\lambda}_t \notin C(\widehat{\lambda}_n) \end{cases} \quad (1.29)$$

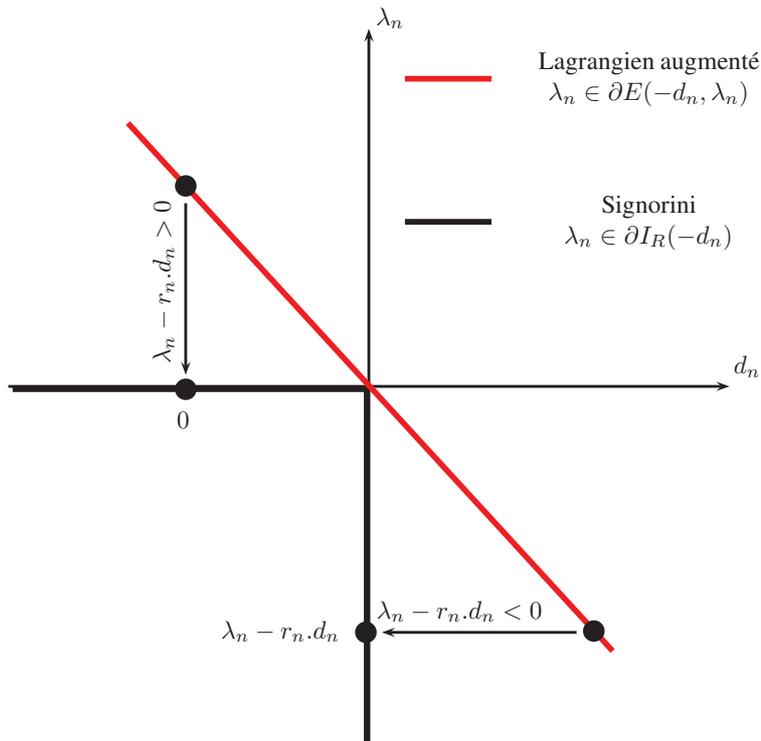


FIGURE 1.6 – Lagrangien stabilisé : $\lambda_n(d_n)$

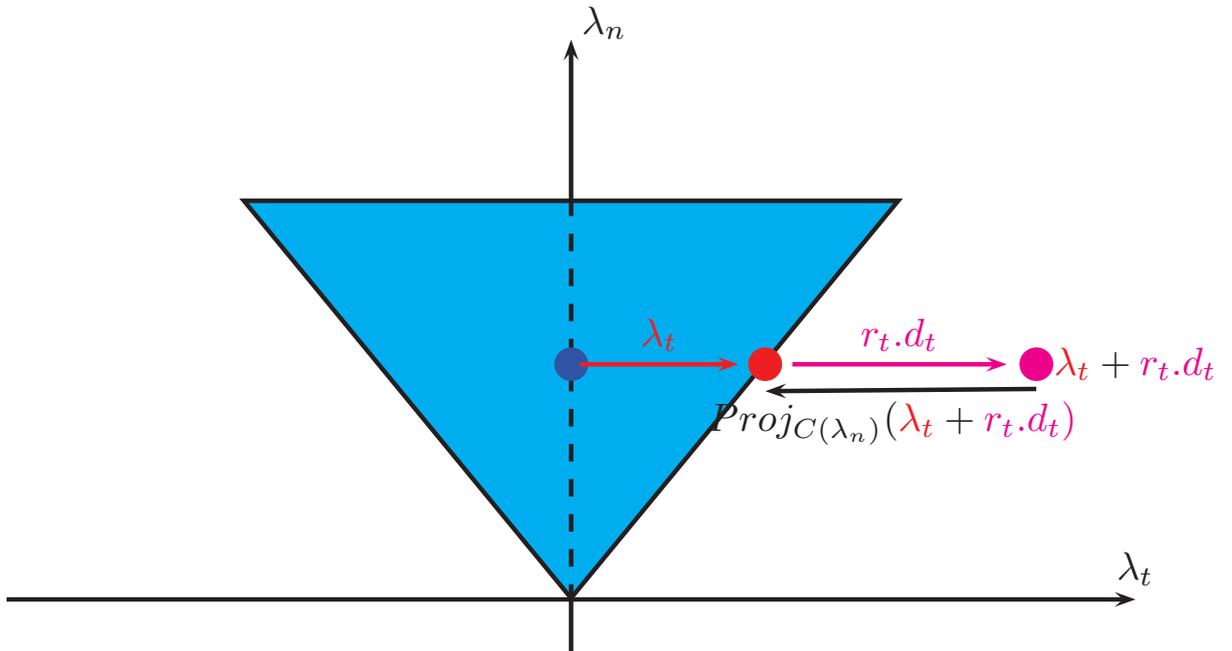


FIGURE 1.7 – Projection du lagrangien augmenté sur le cône de Coulomb

On rappelle que la stratégie de la formulation du Lagrangien stabilisé de Ben-Dhia [23] est

de découpler les non linéarités de contact. Pour le cas du frottement, on introduit un opérateur non régulier de champ de signe S_f qui permet de dire si un point est adhérent ou glissant et une inconnue liée à la direction de l'effort tangentiel Λ . On a une écriture similaire dans Van-Nguyen [110].

Il est proposé pour le lagrangien stabilisé, trois formes équivalentes pour la loi de frottement de Coulomb.

La première écriture proposée n'est autre qu'un changement de variables pour passer de l'inconnue d'effort tangent à l'inconnue de direction de cet effort.

$$\lambda_t = \mu|\lambda_n|\Lambda \quad , \quad \Lambda \in B(0, 1) \quad , \quad \Lambda \cdot v_t = \|v_t\| \quad (1.30)$$

Λ est appelé semi-multiplicateur de Lagrange appartenant à la boule fermée unité de R^2 notée $B(0, 1)$.

Il est appelé ainsi car :

- Dans le cas adhérent ($0 \leq \|\Lambda\| \leq 1$), Λ représente la densité d'efforts d'adhérence. Λ joue le rôle de vrai multiplicateur qui impose une vitesse tangente nulle.
- Dans le cas glissant, Λ est de norme unité et impose une intensité de la pression tangentielle est égale au seuil de frottement.

$$\Lambda = \frac{\lambda_t}{\|\lambda_t\|} = \frac{v_t}{\|v_t\|}$$

Dans tous les cas, Λ indique la direction de l'effort tangent.

Ce modèle permet aussi de réduire le disque de Coulomb. En effet, dans l'espace des chargements tangentiels, le disque de Coulomb a un rayon qui dépend de la pression de contact inconnue. En introduisant le semi-multiplicateur de frottement, ce disque aura désormais un rayon constant égal à l'unité.

En partant de la définition initiale de Λ , on définit le *semi-multiplicateur augmenté de frottement* g_t tel que : $g_t = \Lambda + r_t v_t$. Alors la loi de Coulomb sous forme lagrangienne augmentée devient :

$$\text{Coulomb} : \begin{cases} \Lambda = \text{Proj}_{B(0,1)}(g_t) = \begin{cases} g_t & \text{si } g_t \in B(0, 1) \\ \frac{g_t}{\|g_t\|} & \text{sinon} \end{cases} \\ g_t = \Lambda + r_t v_t \end{cases} \quad (1.31)$$

Désormais on introduit une fonction caractéristique $S_f(\Lambda_t + r_t v_t)$ dite de *champ de signe* ou *Level-set* de frottement. Lorsqu'il y a adhérence $S_f = 1$ et $v_t = 0$, dans le cas contraire $S_f = 0$ et $\|v_t\| \neq 0$.

$$S_f(g_t) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_t \in B(0, 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.32)$$

On peut donc ré-écrire une formulation lagrangienne stabilisée de la loi de Signorini-Coulomb :

$$\mu|\lambda_n| \left[(1 - S_u) \Lambda \right] + \mu|\lambda_n| S_u \left[\Lambda - S_f [\Lambda + r_t v_t] - (1 - S_f) \frac{\Lambda + r_t v_t}{\|\Lambda + r_t v_t\|} \right] = 0 \quad (1.33)$$

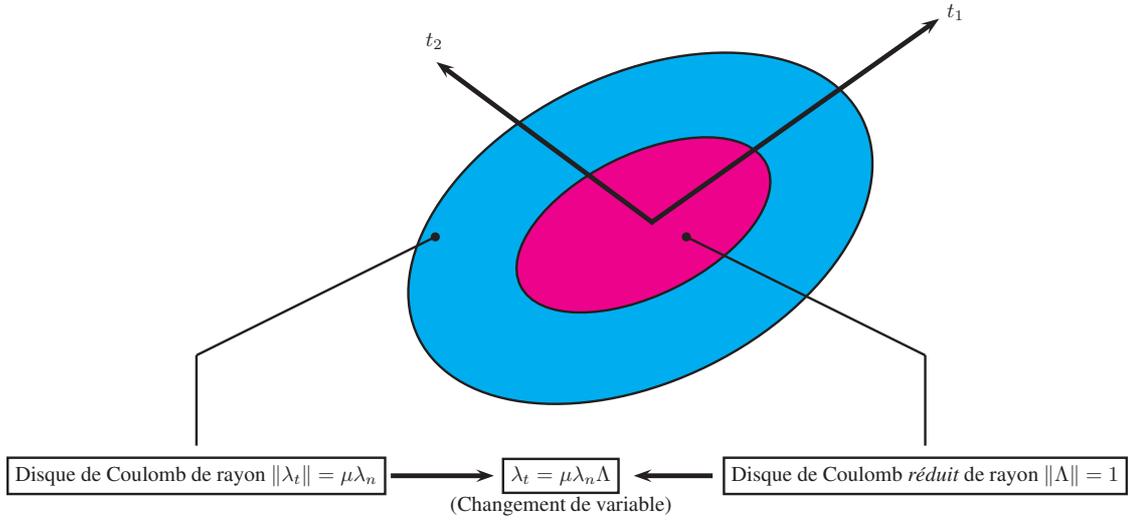


FIGURE 1.8 – Disque de Coulomb (en bleu), disque réduit de Coulomb (en rouge)

Le premier terme traduit le cas sans frottement : $S_u = 0$ d'où $\Lambda = 0$. Le deuxième terme est lié à un cas de contact. S'il y a adhérence, $S_u = 1$ et $S_f = 1$ d'où $v_t = 0$. S'il y a glissement, $S_u = 1$ et $S_f = 0$ alors on a $\Lambda = \frac{\Lambda + r_t v_t}{\|\Lambda + r_t v_t\|}$. Dans le cas de glissement, Λ est colinéaire à v_t et de plus $\|\Lambda\| = 1$ d'où $\|\lambda_t\| = \mu|\lambda_n|$.

On a une écriture générale de la loi de contact-frottement sous sa forme lagrangienne augmentée en utilisant des champs de signe ou « level-sets ».

$$\{P^{LS,Cf}\} = \left\{ \begin{array}{l} \widehat{\lambda}_n = \lambda_n - r_n \cdot d_n \\ g_t = \Lambda + r_t \cdot v_t \\ \Lambda = \frac{\lambda_t}{-\mu \cdot \lambda_n} \\ S_u(\widehat{\lambda}_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \widehat{\lambda}_n \leq 0 \\ 0 & \text{si } \widehat{\lambda}_n > 0 \end{cases} \\ S_f = I_{B(0,1)}(g_t) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_t \in B(0,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \left[(1 - S_u)\Lambda \right] + S_u \left[\Lambda - S_f[\Lambda + r_t v_t] - (1 - S_f) \frac{\Lambda + r_t v_t}{\|\Lambda + r_t v_t\|} \right] = 0 \\ \lambda_n - S_u(\lambda_n - r_n d_n)(\lambda_n - r_n d_n) = 0 \end{array} \right. \quad (1.34)$$

Remarque : différence entre Lagrangien augmenté et Lagrangien stabilisé.

Les deux écritures s'inscrivent dans un contexte d'optimisation sans contraintes.

Toutefois on peut relever quelques nuances :

- *Il apparaît que dans l'écriture lagrangienne stabilisée, on fait intervenir des quantités de « Level-set ». Elles permettent l'introduction explicite des inconnues de statuts contact-frottant d'un point ainsi que les inconnues de pression/jeu liées à ce même point. De plus pour le frottement, la nouvelle écriture utilise une inconnue de direction tangentielle au lieu d'une inconnue de pression tangentielle. Ce qui a le mérite de réduire le disque de Coulomb de rayon dépendant de la pression de contact à un disque de rayon indépendant de celle-ci.*
- *Dans le Lagrangien augmenté on parle de pression tangentielle augmentée pour le frottement tandis que dans le Lagrangien stabilisé on parlera de direction tangente augmentée pour le frottement. La conséquence est que l'unité des paramètres purement numériques liés aux formulations ne sont pas les mêmes. Dans le cas Lagrangien augmenté, le paramètre a pour unité $\frac{[Pression]}{[Distance]}$ tandis que dans le cas Lagrangien stabilisé, les paramètres ont pour unité $\frac{[Pression]}{[Distance]}$ pour la partie contact et $\frac{1}{[Vitesse]}$ ou $\frac{1}{[Distance]}$ pour la partie tangente (suivant que la formulation soit en vitesse ou en incrément de déplacement).*

Dans la suite de ce document on emploiera par souci de simplicité le terme de Lagrangien augmenté pour désigner la formulation de Lagrangien stabilisé.

1.4 Prise en compte des non linéarités de grandes déformations et de comportement

En plus de résoudre le problème d'interface, il faut considérer les autres non-linéarités présentes dans les structures et qui participent à l'équilibre du système.

Une première non linéarité vient des grandes transformations. Cela nécessite d'écrire des tenseurs de déformations appropriés. Ensuite, on considère les comportements non linéaires élasto-plastique et hyper-élastique. Il faut établir la relation liant le tenseur des contraintes au tenseur des déformations.

Tenseurs des déformations

- *Tenseur des petites déformations* : c'est le tenseur le plus fréquemment rencontré dans les études industrielles. Il dépend linéairement du gradient de déplacement :

$$\epsilon(u) = \frac{\nabla_x(u) + \nabla_x(u)^T}{2} \quad (1.35)$$

c'est un tenseur adapté aux petites transformations. Il est calculé conformément à une cinématique lagrangienne. Dans une simulation numérique en quasi-statique ou en dynamique, on fixe les configurations géométriques au cours des itérations sur l'équilibre.

Une pratique courante dans les études est que l'on applique le tenseur des petites déformations tant que le carré du module de la déformation reste inférieur à la précision des calculs envisagés et que le produit entre le carré de l'angle de

rotation et le module de la déformation reste inférieur à la précision des calculs envisagés.

- *Tenseur des déformations actualisées* : si les grandes rotations sont négligées, on peut continuer à utiliser le tenseur précédent à condition de réactualiser les configurations géométriques à chaque itération sur l'équilibre. On peut donc traiter une loi de comportement quelconque en grandes déformations. L'inconvénient est qu'on perd l'objectivité du tenseur de déformation (invariance par changement de repère). De plus, dans la matrice tangente, il n'y a pas de contribution géométrique, ce qui peut parfois rendre la convergence difficile.

La pratique industrielle de ce tenseur est la suivante : le comportement est isotrope, les déformations élastiques sont faibles devant les déformations plastiques, les rotations restent faibles (inférieures à 1) et enfin on adopte une discrétisation en temps suffisamment fine.

- *Tenseur des déformations de Green-Lagrange* : si un corps a un comportement hyperélastique ou plus généralement lorsqu'un corps a un module élastique faible, ce corps a tendance à subir des grandes déformations (variations de longueur et d'angle) sous l'action d'une force faible. Dans ce cas on utilise le tenseur de Green-Lagrange $E(u)$ déduit à partir du tenseur de Cauchy-Green droit $C(u)$

$$E(u) = \frac{C(u) - I}{2}, \text{ avec } C(u) = \nabla_x(u)^T \nabla_x(u) \quad (1.36)$$

Ce tenseur mesure de manière objective les déformations (voir [22]).

- *Tenseur des déformations de Simo-Miehe* : dans le cas des déformations élasto-plastiques et comportement isotrope, on emploie des tenseurs de déformation dits de Simo-Miehe (voir [22, 98, 99, 101, 102]). Ce tenseur suppose l'existence d'une configuration intermédiaire dite relâchée uniquement liée aux déformations plastiques. On décompose le tenseur gradient de la transformation de façon multiplicative entre le tenseur de déformations plastiques et le tenseur de déformations élastiques. On décrit les déformations plastiques par une cinématique lagrangienne (tenseurs de Cauchy-Green droit C^p) et les déformations élastiques par une cinématique eulérienne (tenseurs de Cauchy-Green gauche B^e). La déformation élasto-plastique se fait à volume constant.

$$C^p = F^{pT} F^p, B^e = F^e F^{eT} \quad (1.37)$$

- *Prise en compte des mouvements rigidifiants* : pour certains problèmes industriels, il intervient des mouvements rigides (par exemple le déplacement d'un outil rigide dans un procédé de mise en forme). Dans ce cas, il faut mettre en oeuvre une cinématique de grands déplacements. Les tenseurs de Green-Lagrange et de Simo-Miehe permettent de traiter ce type de problèmes. Mais il reste à éliminer du système les mouvements de corps rigides.

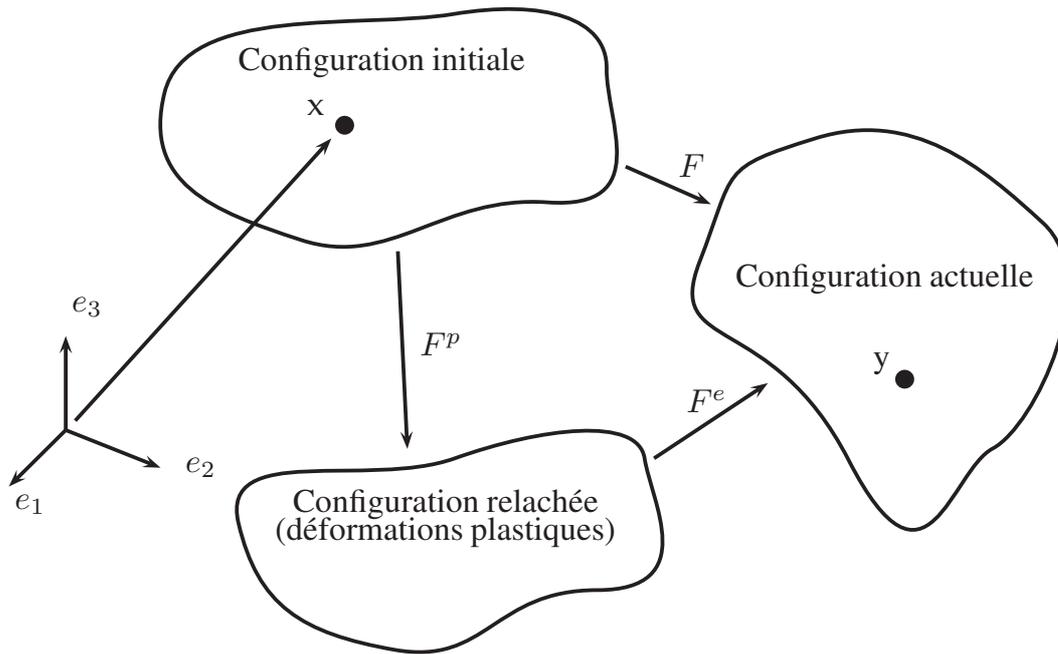


FIGURE 1.9 – Cinématique en grandes déformations de type Simo-Miehe

Dans la pratique industrielle, on met en avant deux solutions. La première solution vise à faire un calcul en quasi-statique, en utilisant les ressorts de faible raideur ou bien en prenant en compte un contact initial. Une autre solution consiste à faire un calcul dynamique où les effets d'inertie sont faibles devant les autres forces en présence. Cette stratégie a été adoptée dans la thèse de F. Jourdan [60] et on y montre que la dynamique a des propriétés régularisantes.

Comportements non linéaires

On ramène généralement les vecteurs contraintes dans la configuration de référence afin de mieux traiter les problèmes liés aux grandes déformations. Les tenseurs de contraintes utilisés sont les tenseurs de contraintes de Piola-Kirchoff symétriques et non symétriques. Ils sont notés par :

$$S = F^{-1}\Pi, \Pi = J\sigma F^{-T} \quad (1.38)$$

$$S = JF^{-1}\sigma F^{-T} \quad (1.39)$$

Avec σ représentant le tenseur de contraintes de Cauchy.

A- Comportement élasto-plastique à écrouissage isotrope non linéaire :

On suppose que le comportement élasto-plastique suit un critère de Von-Misès avec un écrouissage isotrope. Pour aller plus loin, on rappelle quelques principes de bases d'un comportement élasto-plastique :

- La déformation totale est découpée en une partie déformation élastique et déformation plastique :
 $F = F^e + F^p$ pour les tenseurs de petites transformations.
 $F = F^e F^p$ pour les tenseurs de type Simo-Miehe
- La relation entre le tenseur de contraintes et la déformation élastique est linéaire dans le cas isotrope : $S = \lambda \text{tr}(E^e)I + 2\mu E^e$, où λ et μ sont les constantes de Lamé et I est le tenseur unité.

- Le critère de Von-Misès : $Y(S) = \|S'\| - \kappa \leq 0$ définit la surface limite de transition d'une déformation élastique ($Y < 0$) à une déformation plastique ($Y = 0$).

$$S' = \sqrt{\frac{3}{2} s \otimes s}$$

s est la partie déviatorique du tenseur de contraintes. κ est la limite élastique du matériau.

- l'écoulement plastique est gouverné par une loi associée telle que :
 $dE^p = \alpha \frac{dY}{dS}$ où $\alpha > 0$, $Y \leq 0$, $\alpha Y = 0$, avec dE^p le taux de déformation plastique
- La déformation plastique se fait à volume constant (incompressibilité plastique) :
 $\text{tr}(E^p) = 0$

B- Comportement Hyperélastique

Les matériaux hyperélastiques tels que les élastomères se rencontrent sur plusieurs équipements mécaniques tels que les joints d'étanchéité de pompe en centrale. On les classe en deux catégories suivant qu'ils sont compressibles ou incompressibles.

Avant de rentrer dans les détails, on suppose généralement que le tenseur de contraintes de Piola-Kirchoff découle d'un potentiel d'énergie de déformation :

$$S = \frac{\partial \Psi}{\partial E} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial C}$$

où $E = \frac{1}{2}(C - I)$ est le tenseur de déformations de Green-Lagrange et C le tenseur de déformations de Cauchy droit. Le potentiel Ψ s'exprime généralement en fonction des invariants de C . Les trois invariants sont :

$$I_1 = \text{Tr}(C)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - C : C)$$

$$I_3 = \det(C) = J^2$$

$$\Psi(C) = \Psi(I_1, I_2, I_3)$$

D'où l'on déduit la loi de comportement :

$$S = \frac{\partial \Psi}{\partial E} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial C} = 2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial C} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial C} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial C} \right) \quad (1.40)$$

Il est nécessaire dans un processus de linéarisation du problème de calculer le tenseur de rigidité K^T (équation ci-dessous).

$$K^T = \frac{\partial S}{\partial E} \quad (1.41)$$

On expose quelques matériaux compressibles : élastiques en grandes déformations et néo-hookéen.

- Matériau élastique en grandes déformations : c'est une généralisation de la loi élastique en petites déformations.

$$\Psi(E) = \alpha \text{Tr}(E) + 2 \beta E \quad (1.42)$$

où α et β sont les modules élastiques.

- Matériau néo-hookéen compressible

$$\Psi = \frac{\beta}{2}(I_1 - 3) + \alpha(\text{Log}(J))^2 - \beta \text{Log}(J) \quad (1.43)$$

1.5 Formulation forte du problème

On peut maintenant poser le problème d'équilibre du système avec évolutions quasi-statiques ou dynamiques « lentes » des structures.

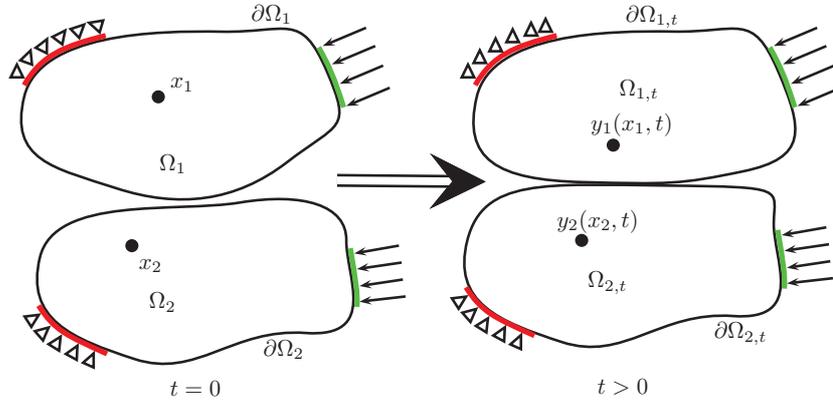


FIGURE 1.10 – Équilibre du système

- Équations d'équilibre à un instant donné :

Soit à trouver pour $i = 1, 2$, les inconnues de déplacements U^i tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \text{div} \mathbf{P}^i(\mathbf{U}(\mathbf{t})) + \mathbf{f}^i(\mathbf{t}) = \rho_i \ddot{U}(\mathbf{t}) \in \Omega^{i,t} \quad (\rho_i \approx 0) \\ \mathbf{P}^i(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{N}^i(\mathbf{t}) = \mathbf{F}_0^i(\mathbf{t}) \quad \text{sur } \Gamma_f^{i,t} \\ \mathbf{u}^i(\mathbf{t}) = \mathbf{u}^{0,i}(\mathbf{t}) \quad \text{sur } \Gamma_u^{i,t} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Sur } \Gamma_{c,t} \\ \mathbf{d}(\mathbf{t}) = d_n(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{t}) + \mathbf{d}_t(\mathbf{t}) = \mathbf{x}(\tilde{\mathbf{t}})^2 - \mathbf{x}^1(\mathbf{t}) \\ \lambda(\mathbf{t}) = \lambda_n(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{n} + \lambda_t(\mathbf{t}) \\ \int_{\gamma \subset \Gamma_{c,t}} (\lambda^1(\mathbf{t}) + \lambda^2(\mathbf{t})) d\gamma = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.44)$$

+ Lois de comportement et grandes déformations
+ Loi de Signorini-Coulomb

- Conditions initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} U(0) = U^\Omega(0)_0 \text{ sur } \Omega(0) \\ f(0) = f_0 \text{ sur } \Omega(0) \\ P(0) = P_0 \text{ sur } \Gamma_f(0) \\ U(0) = U_u^\Gamma(0)_0 \text{ sur } \Gamma_u(0) \\ d_n(0) = d_{n,0}, \lambda_n(0) = \lambda_0 \text{ sur } \Gamma_c(0) \\ d_t(0) = d_{t,0}, \lambda_t(0) = \lambda_{t,0} \text{ sur } \Gamma_c(0) \end{array} \right. \quad (1.45)$$

2 Conclusion du chapitre

Le souci du chapitre a été de poser le problème étudié. En l'occurrence, on introduit une écriture sous forme de projection des lois de Signorini-Coulomb. Le cadre cinématique est aussi précisé. Enfin on considère quelques tenseurs de déformations ainsi que les lois de comportements élastoplastiques et hyper-élastiques.

Dans nos travaux, on considère aussi le cas de la « dynamique lente » (ou encore « régularisation dynamique » ou encore « dynamique en temps long »), ce qui veut dire que les contributions dûes aux forces d'inerties sont très faibles devant les forces en présence mais non nulles. On travaille donc dans un cadre plus élargi que le cadre classique quasi-statique.

La suite du document porte sur le cadre variationnel.

Chapitre 2

Formulations variationnelles du problème quasi-statique

Le cadre variationnel est important à préciser dans le but d'appliquer la méthode des éléments finis. Les formulations variationnelles introduites dans ce chapitre prennent en compte les aspects liés à l'évolution temporelle ainsi que les non linéarités des systèmes étudiés. On rencontre plusieurs familles de formulations.

Suivant l'inconnue principale du système, on peut formuler le problème sous formes primales (déplacements), duales (contraintes) ou mixtes (déplacements-contraintes). Si la formulation variationnelle contient une inégalité on parle alors d'inégalités variationnelles. Si la solution est contrainte à rester dans un ensemble plus petit que l'ensemble solution de départ on parle alors de formulation variationnelle sous contraintes. Enfin, il faut noter que dans le cas du frottement de Coulomb, l'ensemble solution pour les inconnues tangentielles dépend de la pression de contact (loi non associée de Coulomb). Dans ce cas, on perd le cadre classique des méthodes d'optimisation d'où les termes de quasi-optimisation en mécanique du contact.

*Dans un premier temps, on expose les inégalités variationnelles primales [20, 21, 49, 93], duales [10, 47–49, 86], mixtes [49, 71–73, 107]. On décide de travailler avec les formulations sans contraintes : la formulation du Lagrangien augmenté de type Alart-Curnier [2] ou son équivalent dû à Van-Nguyen [23, 110]. On utilise une formulation lagrangienne augmentée dans laquelle les inconnues sont les champs de déplacements, de multiplicateurs de Lagrange de contact comparables à des pressions de contact et de multiplicateurs de Lagrange de frottement comparables à une **direction tangente**.*

On introduit aussi une nouvelle formulation dite de Lagrangien augmenté non standard ou étendu. En effet, dans la plupart des formulations classiques, la normale en un point est traitée comme un paramètre du problème. Avec la nouvelle formulation proposée, cette inconnue est traitée comme une inconnue globale du système. La nouvelle écriture variationnelle renforce de façon faible la condition cinématique sur la normale.

1 Généralités

1.1 Évolutions Quasi-statiques

Soit $0 < T_1 < \dots < T_n = T$ une discrétisation temporelle. Pour la vitesse, on écrit le schéma implicite suivant :

$$\dot{u}^{k+1} = \frac{u^{k+1} - u^k}{T^{k+1} - T^k} \quad (2.1)$$

Dès lors, on ramène la loi de Coulomb sous une forme incrémentale :

$$\dot{d}_t \in \partial I_{C(p_n)}(\lambda_t) \rightarrow \Delta d_t = \dot{d}_t \Delta T^k \in \partial I_{C(p_n)}(\lambda_t) \quad (2.2)$$

$$\Delta T^k = T^{k+1} - T^k$$

1.2 Évolutions Dynamiques

Pour élargir le travail à un cas de dynamique à faibles efforts d'inertie, il faut ré-écrire la loi de Signorini en vitesse normale de contact de type Signorini-Moreau [23, 81, 82].

$$\begin{cases} \lambda_n = 0 & \text{si } d_n > 0 \\ \dot{u}_n \leq 0, \lambda_n \leq 0, \lambda_n \dot{u}_n = 0 & \text{si } d_n \leq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

On choisit ensuite un schéma d'intégration en temps : par exemple les schémas de Newmark, Hilber-Hugues-Taylor, Krenk, ou la Theta-méthode [24, 59, 70, 84]. Pour une Theta-méthode, on a :

$$u^{k+1} = u^k + \Delta T^k \{(1 - \theta)\dot{u}^k + \theta\dot{u}^{k+1}\} \quad (2.4)$$

avec θ un réel compris entre 0 et 1.

1.3 Vue globale sur les formulations variationnelles

On aborde d'abord les formulations sous contraintes :

$$u = \underset{v \in K \subset V}{\operatorname{argmin}} \left[W(v, p(v)) \right] \quad (2.5)$$

où u, v représentent les inconnues du système, $K \subset V$ est l'ensemble des solutions contraint de respecter les conditions de contact-frottement et $p(v)$ représente un paramètre qui peut être le seuil de frottement, le statut de contact ou même la normale en un point.

On expose ensuite les formulations sans contraintes :

$$u = \underset{v \in V}{\operatorname{argmin}} \left[W(v, p(v)) + I_{K(u)}(v) \right] \quad (2.6)$$

Dans ces types de formulations, on renforce l'inégalité variationnelle de départ par une écriture faible exacte/régularisée des énergies de contact. Ce qui a pour conséquence de relâcher la contrainte sur l'espace solution.

Enfin on rappelle une extension faite sur les formulations sans contraintes :

$$(u, p) = \underset{v \in V}{\operatorname{argmin}} \underset{p \in P}{\operatorname{argmin}} \left[W(v, p) + I_{K(u)}(v) + \int_{\Gamma} (p - p(v)) d\gamma \right] \quad (2.7)$$

Par la suite, on omettra volontairement de préciser la variable d'intégration.

1.4 Vue globale sur les espaces usuels

Soient les espaces fonctionnels usuels suivants :

- $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$: espace des fonctions de p-ième puissance mesurables (mesures de Lebesgue) muni de la norme définie par le produit scalaire naturel.

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v|^p \right)^{1/p}$$

- $H^1(\Omega)$: espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ et dont la dérivée au sens faible appartient à $L^2(\Omega)$. Cet espace est muni de la norme définie par le produit scalaire naturel.

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v|^2 + |\partial v|^2 \right)^{1/2}$$

- $H_0^1(\Omega)$: espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur le bord de déplacement imposé Γ_u

- $K = \{u \in (H_0^1(\Omega))^l, l = 2, 3, u_{|\Gamma_c} \cdot n \leq 0\}$: ensemble restreint ou contraint dans $(H_0^1(\Omega))^l$, $l = 2, 3$ tel que la relation de Signorini soit vérifiée.

- $H^{-1}(\Omega)$: espace dual de $H_0^1(\Omega)$
- $(H^{1/2}(\Gamma_c))^l$: espace des traces de fonctions $u \in (H_0^1(\Omega))^l$ sur Γ_c
- $(H^{-1/2}(\Gamma_c))^l$: espace des pressions de contact
- $M_{\lambda_n} = \{\lambda_n \in H^{-1/2}(\Gamma_c) \text{ tel que } \forall v \in K, \langle \lambda_n, v_n \rangle \geq 0 \text{ sur } \Gamma_c\}$: ensemble *restreint* ou *contraint* dans $H^{-1/2}(\Gamma_c)$ tel que la relation de Signorini soit vérifiée par dualité.
- $M_{\lambda_t} = \{\lambda_t \in H^{-1/2}(\Gamma_c)^l \text{ tel que } \forall v \in K, \langle \lambda_t, v_t \rangle + \langle -\mu\lambda_n, \|v_t\| \rangle \geq 0 \text{ sur } \Gamma_c\}$ ensemble *restreint* ou *contraint* dans $L^\infty(\Gamma_c) \subset L^2(\Gamma_c)$ tel que la loi de Coulomb soit vérifiée par dualité (écriture équivalente de Moreau).
- $H(\text{div}, \Omega) = \{\sigma \in L^2(\Omega), \text{div}\sigma \in L^2(\Omega)\}$ espace des contraintes
- $H_0(\text{div}, \Omega) = \{\sigma \in H(\text{div}, \Omega), \sigma \cdot n|_{\Gamma_f} = F_0\}$ sous-espace de $H(\text{div}, \Omega)$ qui respecte la condition aux limites de Neumann.
- $\Sigma = \{\sigma \in H_0(\text{div}, \Omega), \sigma \cdot n|_{\Gamma_c} \leq 0, \|\sigma_t\|_{\Gamma_c} \leq -\mu\lambda_n\}$ ensemble des fonctions duales *restreint* ou *contraint* de $H_0(\text{div}, \Omega)$ telles que la relation de Signorini-Coulomb soit vérifiée.

Les propriétés comme le coefficient de frottement, la masse volumique ou encore le module d'Young seront considérées comme des fonctions constantes (à moins d'une indication contraire).

On rappelle enfin que le problème à résoudre est donné par les équations (1.44),(1.45) du chapitre 1.

2 Recherche de solutions sous contraintes

Par souci de simplicité de présentation, on considère que les corps ont un comportement élastique linéaire. De plus on suppose un contact entre un corps déformable et un obstacle rigide. L'extension aux comportements complexes et grandes déformations est exposée en fin de chapitre.

2.1 Inégalités variationnelles primales

On déduit ces formulations de la littérature [19–21, 49, 93].

Contact sans frottement en statique :

Dans les équations d'équilibre, on annule les effets d'inertie. On suppose les forces externes $f \in (L^2(\Omega))^l$ (chargements volumiques) et $F_0 \in (L^2(\Omega))^l$ (chargements surfaciques) et $\rho, \mu \in C_c^\infty$

Soit à trouver $u \in K$ tel que $a(u, v - u) - L(v - u) \geq 0, \forall v \in K$

avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \epsilon(v)^T K \epsilon(u)$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_f} F_0 v$$

La solution de ce problème est unique [19, 93].

Prise en compte du frottement de Coulomb statique

On ré-écrit la loi de Coulomb en statique :

$$\begin{cases} \|\lambda_t\| \leq -\mu \lambda_n \\ \text{Si } \|\lambda_t\| < -\mu \lambda_n \text{ alors } u_t = 0 \\ \text{Si } \|\lambda_t\| = -\mu \lambda_n \text{ alors } \exists \alpha > 0, \text{ tel que } u_t = \alpha \lambda_t \end{cases} \quad (2.8)$$

Cette loi n'est pas réaliste car le frottement est dépendant de l'histoire du chargement (problème en vitesse). Cependant on l'accepte provisoirement car elle est valide pour un chargement monotone et elle servira d'analogie avec la formulation en quasi-statique incrémentale.

Soit à trouver $u \in K$ tel que $a(u, v - u) - L(v - u) + j_{\lambda_n}(u, v) - j_{\lambda_n}(u, u) \geq 0, \forall v \in K$

avec

$$j_{\lambda_n}(u, v) = \int_{\Gamma_c} -\mu \lambda_n(u) \|v\|$$

On montre qu'on peut résoudre le problème par une suite de problèmes de Tresca approximant le problème de Coulomb (on remplace $-\mu \lambda_n(u)$ par un seuil connu g jusqu'à ce que le seuil soit obtenu) [93].

Formulation en quasi-statique :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u, v - u) - L(v - u) + \int_{\Gamma_c} \lambda_n v_n + \int_{\Gamma_c} \lambda_t v_t = 0, \\ \int_{\Gamma_c} (\lambda_n - \lambda_n^*) u_n + \int_{\Gamma_c} (\lambda_t - \lambda_t^*) u_t \geq 0, \\ \forall (v, \lambda_n^*, \lambda_t^*) \in (H_0^1(\Omega))^l \times M_{\lambda_n} \times M_{\lambda_t} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

La première équation traduit l'équilibre faible de la structure en statique. Cette équation est dite mixte car on retrouve comme inconnues des variables primales (déplacements u) et duales (pressions de contact-frottement λ_n, λ_t). L'inégalité vient de la deuxième ligne qui est une forme de la loi de contact-frottement. Cette formulation ne présente pas de non-différentiabilité, elle est donc intéressante pour les méthodes numériques mais la difficulté est bien de construire les espaces $M_{\lambda_n}, M_{\lambda_t}$ à chaque instant et pour chaque itération.

2.3 Inégalités variationnelles duales

Les inégalités variationnelles duales ont été introduites par Telega et Haslinger [49, 107] dans leurs travaux sous un aspect théorique. Plus récemment, cette formulation a été mise en oeuvre et testée sur des exemples réels de problèmes d'élasticité linéaire par Kuss et Lebon [71–73]. Une application directe a été le développement des estimateurs d'erreurs duales pour les petites déformations. On rappelle cette formulation.

La formulation s'obtient en intégrant l'équation de compatibilité.

$$\int_{\Omega} \epsilon(\tau - \sigma) = \int_{\Omega} \nabla_s u(\tau - \sigma)$$

$$\text{avec } \nabla_s u = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$$

Par la suite, on introduit le tenseur de souplesse élastique S , on applique la formule de Green et on considère les inéquations équivalentes de Signorini-Coulomb-Moreau.

Soit à trouver $\sigma \in \Sigma$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} b(\sigma, \tau - \sigma) \geq l(\tau - \sigma) \\ \forall \tau \in \Sigma \end{array} \right. \quad (2.13)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} b(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} S \sigma \tau \\ l(\tau) = \int_{\Gamma_u} u_0 \tau \cdot n \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Cette formulation est très intéressante car elle ne comporte pas de termes de non différentiabilité. La vraie difficulté consiste à construire l'espace des contraintes. En dimension 2, cette difficulté est levée en utilisant des fonctions d'Airy.

Après avoir exposé les formulations sous contraintes on s'intéresse à une autre famille de formulations.

3 Recherche de solutions sans contraintes

Ces formulations se basent sur le fait que l'on est capable d'écrire l'énergie totale du système sous forme primale, duale ou mixte. Puis on applique les équations faibles de la dynamique des solides conditions nécessaires d'optimalité ou de quasi-optimalité pour déduire le système non linéaire à résoudre.

Plus précisément, l'énergie du système s'écrit :

$$W(x) = W^{int}(x) - W^{ext}(x) + W^{cont}(x) + W^{frot}(x)$$

Puis

$$\partial_x W(x) = 0$$

Dans cette écriture :

W^{int} est l'énergie interne liée à la déformation du milieu.

W^{ext} est l'énergie externe liée aux conditions de chargement du milieu

W^{cont} est l'énergie exacte ou régularisée de la force de contact

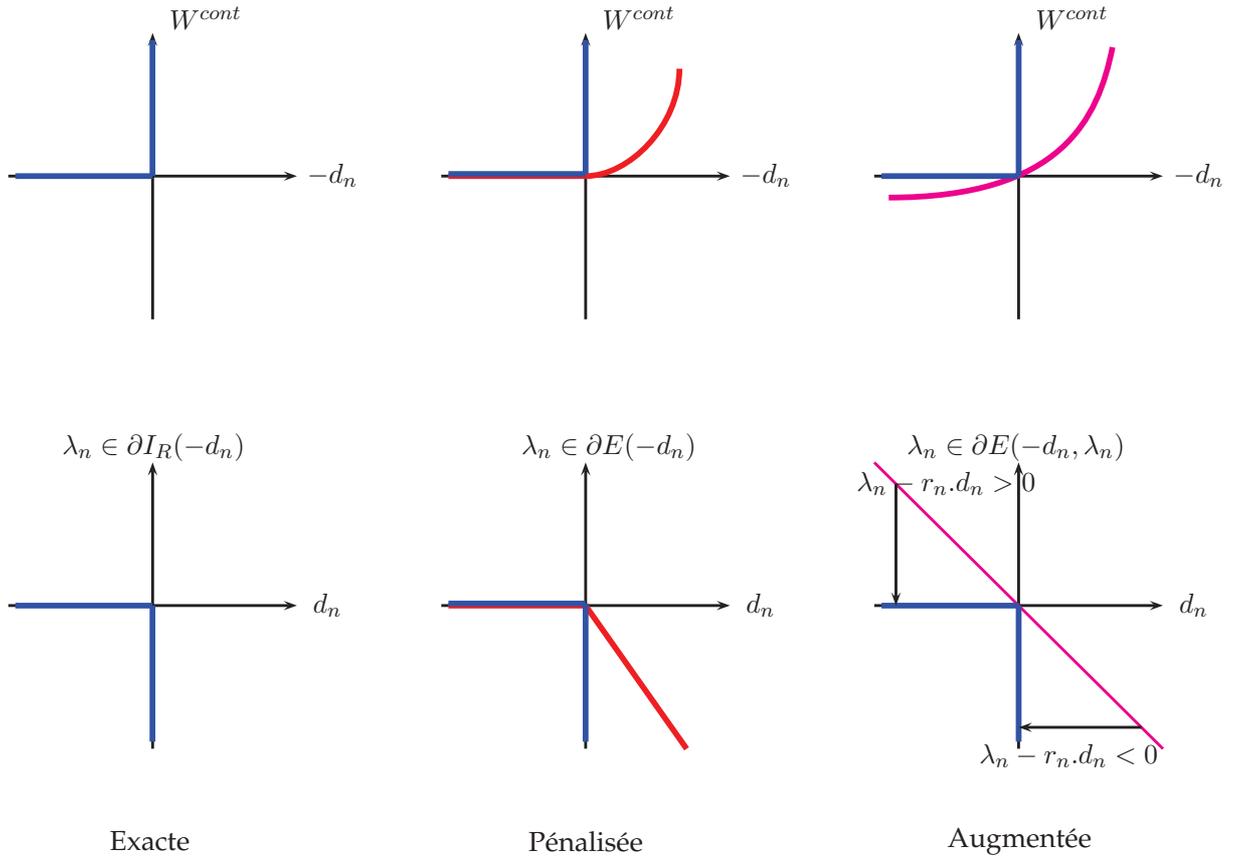
W^{frot} est l'énergie exacte ou régularisée de la force de frottement

On se place dans un cadre d'évolution quasi-statique incrémentale. Dans les écritures variationnelles précédentes, le respect de la condition de Signorini-Coulomb était assuré par le choix de l'espace *contraint* dans lequel on cherche la solution. Pour éviter de *contraindre* l'espace solution, il suffit que l'écriture des énergies de contact prennent en compte les conditions de Signorini-Coulomb : d'où l'appellation de *formulation sans contraintes*. Ces formulations font apparaître des *énergies non régulières ou semi-régulières* si la loi de contact est prise en compte de manière exacte : c'est le cas du Lagrangien augmenté. Sinon, on a des écritures régulières : c'est le cas de la méthode pénalisée. Les notions de *sous-différentiabilité* ou de *jacobien généralisé* (voir Alart-Curnier [3–5]) sont donc importantes pour faire converger les méthodes numériques basées sur elles.

3.1 Formulation de primale exacte

$$W^{cont}(d_n) = \int_{\Gamma_c} I_{R^+}(-dn) \quad (2.15)$$

$$W_{\lambda_n}^{frot}(\Delta d_t) = \int_{\Gamma_c} I_{C(\lambda_n)}(\Delta d_t) \quad (2.16)$$


 FIGURE 2.1 – Représentations de W^{cont} (en haut), et $\lambda_n \in \partial_u W^{cont}$ (en bas)

$I_{R^+}(-dn)$, $I_{C(\lambda_n)}(\Delta d_t)$ représentent respectivement les densités d'énergie exactes (fonctions indicatrices) de contact et de frottement.

Par application de la condition nécessaire de quasi-optimalité on a :

$$\partial_u (W^{int} - W^{ext} + W^{cont} + W^{frot}) = 0 \quad (2.17)$$

Soit à trouver $u(t^k) \in H^1$

$$F^{int} - F^{ext} + \int_{\Gamma_c} \lambda_n(d_n) \delta d_n + \int_{\Gamma_c} \lambda_t(d_t) \delta d_t = 0 \quad (2.18)$$

avec

$$\lambda_n(d_n) = \partial_u I_{R^+}(-d_n) \quad (2.19)$$

$$\lambda_t(d_t) = \partial_u I_{C(\lambda_n)}(d_t) \quad (2.20)$$

On a bien une formulation exacte, primale et sans contrainte ($u \in H^1$ et non $u \in K$). Cette écriture n'est pas aisée en pratique à cause de la fonction indicatrice. C'est pour cela qu'on les approche souvent par des méthodes de pénalisation approchées.

3.2 Formulation de pénalisation et de lagrangien perturbé

Dans ces formulations, on régularise complètement l'énergie de contact-frottement. La procédure de régularisation est telle que l'on autorise une pénétration pour le contact et un micro-glissement autour d'un état adhérent pour le frottement. Cette formulation a été utilisée par Curnier-Alart, Oden-Martins [4,85] et adoptée par de nombreux d'auteurs.

L'idée est de remplacer les lois de contact-frottement (2.19) et (2.20) par des lois régulières (voir figure 2.2).

méthode de pénalisation de type adhérence

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda_n^{pena}(d_n)n(u) + \lambda_t^{pena}(d_t) = 0, \text{ si } d_n < 0 & \text{séparation} \\ \lambda_n^{pena}(d_n)n(u) + \lambda_t^{pena}(d_t) = -r_n d_n n(u) + r_t d_t^a \text{ si } d_n > 0 & \text{pénétration} \\ d_t^s = \alpha \frac{\lambda_t^{pena}}{\|\lambda_t^{pena}\|}, \alpha > 0 \text{ si } Y = \|\lambda_t^{pena}\| + \mu \lambda_n^{pena} = 0 & \text{glissement irréversible} \\ d_t = d_t^a + d_t^s & \text{glissement total} \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Dans cette formulation on décompose le glissement total, en une partie réversible et une partie irréversible. Le glissement réversible d_t^a s'interprète comme un micro-glissement des aspérités autour d'un point adhérent (frottement non-local). Le glissement irréversible d_t^s est vu comme un glissement macroscopique lié à la loi de Coulomb modifiée.

Méthode de pénalisation du frottement par prédiction-correction

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Phase de prédiction :} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_n^{pena,0}(d_n)n(u) + \lambda_t^{pena,0}(d_t) = 0, \text{ si } d_n^0 < 0 & \text{séparation} \\ \lambda_n^{pena,0}(d_n)n(u) + \lambda_t^{pena,0}(d_t) = -r_n d_n^0 + r_t(d^0 - d_t^0) \text{ si } d_n^0 > 0 & \text{pénétration} \end{array} \right. \\ \text{Phase de correction} \\ \left\{ \begin{array}{ll} d = d_n n + d_t^s = u.n & \text{correction du jeu} \\ d_t^s = d_t^0 + (\|d - d_t^0\| + \mu d_n) \frac{d - d_t^0}{\|d - d_t^0\|} & \text{correction du glissement} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \text{si } d_n > 0 \text{ alors } \lambda_n^{pena} = -r_n d_n & \text{correction de la pression de contact} \\ \text{si } d_n < 0 \text{ alors } \lambda_n^{pena} = 0 & \end{array} \right. \\ \lambda_t^{pena} = -\mu r_n d_n \frac{\lambda_t^{pena,0}}{\|\lambda_t^{pena,0}\|} \text{ si } \|\lambda_t^{pena,0}\| + \mu r_n d_n \geq 0 & \text{correction de la pression tangentielle} \\ \lambda_t^{pena} = \lambda_t^{pena,0} \text{ si } \|\lambda_t^{pena,0}\| + \mu r_n d_n < 0 & \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Cette formulation est une méthode de prédiction-correction. On calcule les contraintes tangentielles et normales prédictives $\lambda_t^{pena,0}$ par pénalisation. On corrige ensuite la valeur de la contrainte calculée par projection de $\lambda_t^{pena,0}$ sur le disque de Coulomb. On corrige aussi les valeurs du jeu.

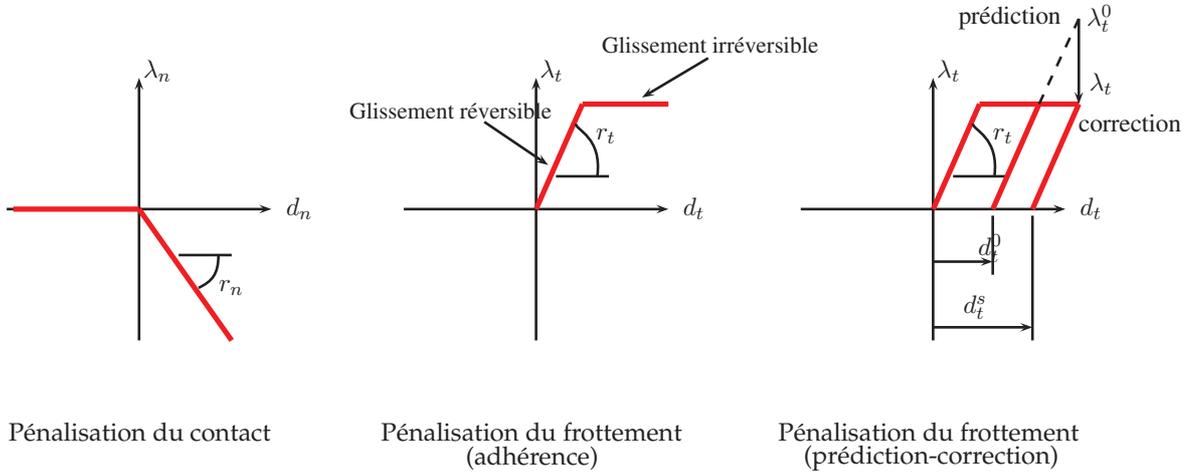


FIGURE 2.2 – Méthodes de pénalisation

Méthode de lagrangien perturbé

C'est une méthode de régularisation mixte utilisant les mêmes principes que la méthode de pénalisation en y rajoutant des inconnues de multiplicateurs de Lagrange. On a :

$$\begin{cases} \partial_u W \equiv F^{int} - F^{ext} + \int_{\Gamma_c} \lambda_n \delta d_n + \int_{\Gamma_c} \lambda_t \delta d_t = 0 \\ \partial_{\lambda_n} W \equiv \int_{\Gamma_c} (\lambda_n - \lambda_n^{pena}(d_n)) \lambda_n^* = 0 \\ \partial_{\lambda_t} W \equiv \int_{\Gamma_c} (\lambda_t - \lambda_t^{pena}(d_t)) \lambda_t^* = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Les pressions de contact sont remplacées par des multiplicateurs de Lagrange. On vérifie les conditions de Signorini-Coulomb pénalisées par les deux dernières lignes du système. $\lambda_n^{pena}(d_n)$ et $\lambda_t^{pena}(d_t)$ sont des lois de pénalisation qu'on a introduites en (2.21) ou (2.22).

3.3 Formulation mixte de Lagrangien augmenté

Dans cette formulation, les inconnues sont les déplacements, les pressions de contact ou multiplicateurs de Lagrange de contact et la *direction de l'effort tangent ou multiplicateur Lagrange de frottement*. Le formalisme du Lagrangien augmenté retenu dans ce travail est

équivalent à celui qu'on rencontre souvent dans la littérature (Alart-Curnier-Pietrzak [4, 88,89]). Il découle de la formulation classique en introduisant un changement de variable :

$$\lambda_t = -\mu\lambda_n\Lambda$$

La méthode du Lagrangien augmenté est une méthode de semi-régularisation mixte (pénalité-Lagrange) : elle est de classe-1 différentiable d'où la régularité et elle fait intervenir des fonctions de projection (presque partout différentiables) d'où le terme semi-régularisation. De plus, par application des conditions d'optimalité, on montre que les lois de Signorini-Coulomb sont vérifiées exactement dans un cadre continu. On pose le problème. Trouver

$$(u^1, u^2, \lambda_n, \Lambda)^T \in (H_0^1(\Omega))^l \times (H_0^1(\Omega))^l \times H^{-1/2}(\Gamma_c) \times (H^{-1/2}(\Gamma_c))^k, \quad k = 1, 2, \quad l = 2, 3$$

tel que :

$$(u^1, u^2, \lambda_n, \Lambda) = \arg \min_{(v^1, v^2)} \arg \max_{(\lambda_n, \Lambda)} \left((W^{int} - W^{ext}) + W^{cont}(v, \lambda_n) + W^{frot}(v, \lambda_n, \Lambda) \right) \quad (2.24)$$

Avec

$$W^{cont} + W^{frot} = \int_{\Gamma_c} l_n^s(v^i(x^i, t), \lambda_n) + \int_{\Gamma_c} -\mu\lambda_n l_t^s(v^i(x^i, t), \Lambda) \quad (2.25)$$

Avec :

$$l_n^s(v^i(x^i, t), \lambda_n) = \frac{1}{2r_n} \{S_u(\lambda_n - r_n v_n) \{ \lambda_n - r_n v_n \}^2 - \lambda_n^2\} \quad (2.26)$$

Et

$$l_t^s(v^i(x^i, t), \Lambda) = \frac{1}{2r_t} \{ (1 - S_u)\Lambda.\Lambda + S_u \{ S_f \{ [\Lambda + r_t v_t dt][\Lambda + r_t v_t dt] - \Lambda.\Lambda \} + (1 - S_f) \{ [\frac{\Lambda + r_t v_t dt}{\|\Lambda + r_t v_t dt\|}] [\frac{\Lambda + r_t v_t dt}{\|\Lambda + r_t v_t dt\|}] - 2\|\Lambda + r_t v_t dt\| + \Lambda.\Lambda \} \} \} \quad (2.27)$$

l_n et l_t représentent les densités continues et différentiables de l'énergie de contact. Dans (2.25-2.27), on définit :

1. $v_n = [y^1 - \bar{y}].n(\bar{u})$ la composante normale du saut de déplacement virtuel
2. $v_t dt$ la composante tangentielle du saut de déplacement virtuel
3. $v_t dt = (I - n(\bar{u}).n(\bar{u})^t)\delta u$

4. λ_n l'inconnue de multiplicateur de Lagrange associé à la condition de Signorini.

5.

$$S_u(\lambda_n - r_n v_n) = \begin{cases} \text{"Level set de contact" ou "champ de signe de contact"} = S_u \\ S_u(\lambda_n - r_n v_n) = 1 \text{ si contact } (\lambda_n - r_n v_n \leq 0) \\ S_u(\lambda_n - r_n v_n) = 0 \text{ si pas contact } (\lambda_n - r_n v_n > 0) \end{cases} \quad (2.28)$$

Ce champ de signe permet d'affecter à tout point de la zone de contact une valeur suivant son statut.

6.

$$S_f(\Lambda + r_t v_t) = \begin{cases} \text{"Level set de frottement" ou "champ de signe de frottement"} = S_f \\ S_f(\Lambda + r_t v_t) = 1 \text{ si adhérence } (\|\Lambda + r_t v_t\| \leq 1) \\ S_f(\Lambda + r_t v_t) = 0 \text{ si glissement } (\|\Lambda + r_t v_t\| > 1) \end{cases} \quad (2.29)$$

On écrit le principe des travaux virtuels en appliquant la condition nécessaire d'optimalité :

<p>Trouver $(u^1, u^2, \lambda_n, \Lambda)^T \in (H_0^1(\Omega_1))^l \times (H_0^1(\Omega_2))^l \times H^{-1/2}(\Gamma_c) \times (H^{-1/2}(\Gamma_c))^k, k = 1, 2, l = 2, 3$</p> $\{F\}(u, \lambda_n, \Lambda) = \begin{cases} \{F^{int} - F^{ext}\} + F^{cont} + F^{frott} = 0 & \text{(Équilibre faible)} \\ \tilde{F}^{cont} = 0 & \text{(Signorini faible)} \\ \tilde{F}^{frott} = 0 & \text{(Coulomb faible)} \end{cases} \quad (2.30)$
--

La première ligne de l'équation (2.30) découle de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \implies \text{Équilibre faible} \\ \partial_u (W^{int} - W^{ext} + W^{cont} + W^{frott}) = 0 \\ \{F^{int} - F^{ext}\} + \{F^{cont} + F^{frott}\} = 0 \\ \text{avec} \\ \left\{ \begin{array}{l} F^{cont} = \int_{\Gamma_c} S_u \{ \{ \lambda_n - r_n d_n \} n \} \delta d_n \\ F^{frott} = \int_{\Gamma_c} S_u \left\{ -\mu \lambda_n \{ S_f \{ \Lambda + r_t d_t \} + (1 - S_f) \frac{\Lambda + r_t d_t}{\|\Lambda + r_t d_t\|} \} \right\} \delta d_t \\ v_n \equiv \delta d_n, \quad v_t \equiv \delta d_t \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.31)$$

La deuxième ligne de l'équation (2.30) découle de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \implies \text{Signorini faible} \\ \partial_{\lambda_n} (W^{int} - W^{ext} + W^{cont} + W^{frott}) = 0 \\ -\frac{1}{r_n} \int_{\Gamma_c} \{ \lambda_n - S_u [\lambda_n - r_n d_n] \} \delta \lambda_n = 0 \end{array} \right. \quad (2.32)$$

La troisième ligne de l'équation (2.30) découle de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \text{Coulomb faible} \\ \partial_{\Lambda}(W^{int} - W^{ext} + W^{cont} + W^{frot}) = 0 \\ \tilde{F}^{frott} = \frac{1}{r_t} \int_{\Gamma_c} \mu \lambda_n S_u \Lambda \delta\Lambda - \frac{1}{r_t} \int_{\Gamma_c} \mu \lambda_n S_u S_f (\Lambda + r_t d_t) \delta\Lambda \\ \quad - \frac{1}{r_t} \int_{\Gamma_c} \mu \lambda_n S_u (1 - S_f) \frac{\Lambda + r_t d_t}{\|\Lambda + r_t d_t\|} \delta\Lambda + \int_{\Gamma_c} (1 - S_u) \Lambda \delta\Lambda \end{array} \right. \quad (2.33)$$

On généralise dans la prochaine section, les formulations précédentes aux cas des autres non linéarités.

- matériaux élasto-plastiques à écrouissage isotrope linéaire ou non linéaire
- matériaux hyper-élastiques de type Néo-hookéen compressible

4 Non linéarités de comportement et de grandes déformations

Deux cinématiques sont possibles : cinématique eulérienne ou cinématique lagrangienne. Sur la configuration déformée courante (cinématique eulérienne) :

$$F^{int} - F^{ext} = \int_{\Omega(t)} \sigma(u) : \nabla v - \int_{\Omega(t)} f(t) \cdot v - \int_{\Gamma_f(t)} F_0(t) \cdot v \quad (2.34)$$

Une difficulté est qu'on ne connaît pas la configuration actuelle. En élasticité linéaire et en petits déplacements, on peut supposer que la configuration déformée est confondue avec la configuration initiale. Dans le cas des grands déplacements, on ramène la formulation sur une configuration initiale grâce aux tenseurs de contraintes de Kirchhoff et au jacobien de la transformation :

$$F^{int} - F^{ext} = \int_{\Omega(0)} S(u) : \nabla_X v - \int_{\Omega(0)} f(0) \cdot v - \int_{\Gamma_f(0)} F_0(0) \cdot v \quad (2.35)$$

Il ne reste plus qu'à préciser le calcul des forces de contact-frottement en cas de grandes transformations. La difficulté est qu'on ne connaît pas a priori les zones effectives contactantes $\Gamma_c(t) = \Gamma_{c1}(t) \cap \Gamma_{c2}(t)$. La configuration de contact est intrinsèquement liée au déplacement lui-même inconnu. Pour cette raison, on utilise une stratégie de prédiction-correction sur les configurations géométriques. La démarche est la suivante :

- 1- Prédiction de la configuration géométrique : on remplace la configuration initiale $(\Omega_0, \Gamma_{f0}, \Gamma_{c0}, \Gamma_{u0})$ par une configuration intermédiaire connue $(\Omega^p, \Gamma_f^p, \Gamma_c^p, \Gamma_u^p)$.

- 2- On calcule l'équilibre de la structure à partir de la configuration intermédiaire $(\Omega^p, \Gamma_f^p, \Gamma_c^p, \Gamma_u^p)$ par une méthode classique prédiction d'Euler-correction de Newton. On obtient la configuration d'équilibre $(\Omega, \Gamma_f, \Gamma_c, \Gamma_u)_{equilibre}$
- 3- On vérifie si la configuration d'équilibre et la configuration intermédiaire sont confondues. Sinon on recommence le processus géométrique en prenant : $(\Omega^p, \Gamma_f^p, \Gamma_c^p, \Gamma_u^p) \equiv (\Omega, \Gamma_f, \Gamma_c, \Gamma_u)_{equilibre}$

La configuration intermédiaire joue un rôle important dans le processus d'*appariement* (qu'on explicitera dans le chapitre suivant) : elle permet de fixer à l'avance les couples de points potentiellement en contact. Cette configuration intermédiaire peut être calculée de deux façons : par une méthode de point fixe sur la géométrie (similaire à une méthode de point fixe sur les seuils de frottement) ou par une méthode de Newton généralisée. On détaillera la(les) méthode(s) géométrique(s) au chapitre suivant.

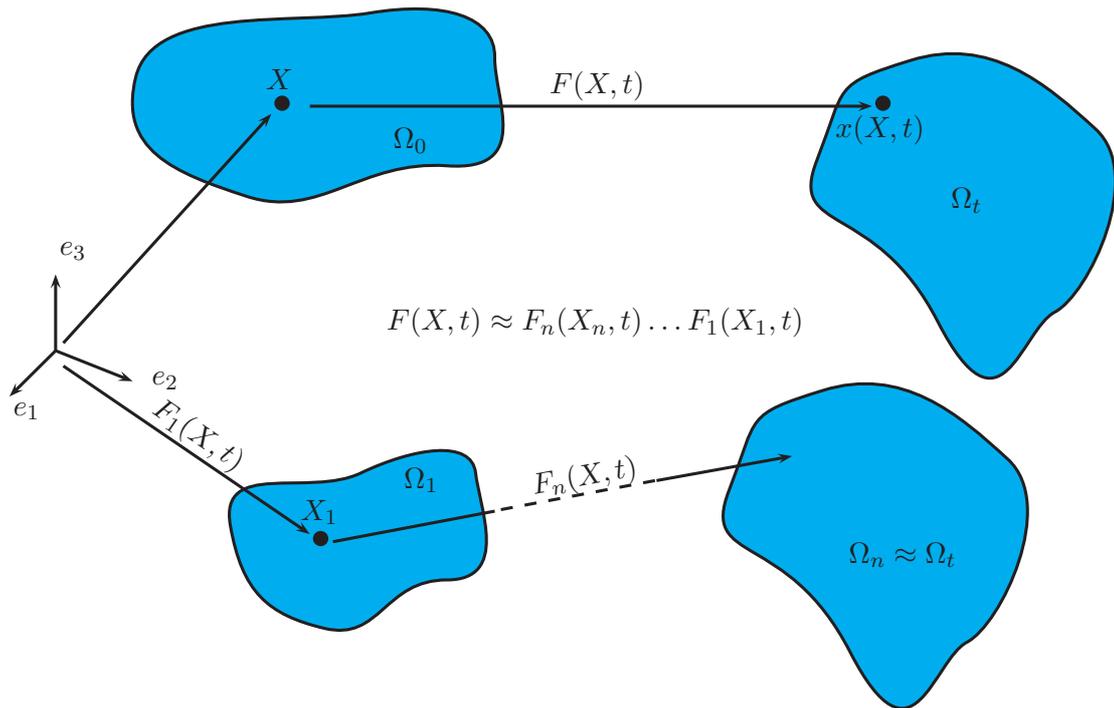


FIGURE 2.3 – Configurations géométriques intermédiaires

Pour le contact par exemple on a :

$$F^{cont} = \int_{\Gamma_{c,p}} S_u \left\{ \{ \lambda_n - r_n \cdot d_n \} \right\} \delta d_n \quad (2.36)$$

Les efforts internes et externes sont aussi ré-écrits sur la configuration intermédiaire :

$$F^{int} - F^{ext} = \int_{\Omega_p} \Pi(u) : \nabla_X v - \int_{\Omega_p} f(0) \cdot v - \int_{\Gamma_{f,p}} F_0(0) \cdot v \quad (2.37)$$

Contact multi-corps :

Lorsqu'il y a plusieurs corps mis en jeu, la formulation ne change pas fondamentalement :

Exemple :

$$F^{int} - F^{ext} = \sum_{i=1,m} \left(\int_{\Omega_p^i} S^i(u^i) : \nabla_X^i v^i - \int_{\Omega_p^i} f^i(0) \cdot v^i - \int_{\Gamma_{f,p}^i} P_0^i(0) \cdot v^i \right) \quad (2.38)$$

$$F^{cont} + F^{frot} = \sum_{i=1,m} \int_{\Gamma_{c,p}^i} S_u^i \left\{ \{ \lambda_n^i - r_n \cdot d_n^i \} \delta d_n^i \right\} \quad (2.39)$$

i étant mis pour l'indice du corps.

Extension à la dynamique de la formulation du Lagrangien augmenté [23, 80, 108]

En dynamique, on ré-écrit le problème en vitesse et on choisit un schéma de différences finies en temps approprié. On suppose le cas des grandes déformations. Pour simplifier l'écriture, on considère le cas d'un contact rigide-déformable.

- Forces d'inertie :

$$F^{inertie} = \int_{\Omega_p} \rho \ddot{u} \cdot \dot{v} \quad (2.40)$$

- Forces internes et externes :

$$F^{int} - F^{ext} = \int_{\Omega_p} S(u) : \nabla_X \dot{v} - \int_{\Omega_p} f(0) \cdot \dot{v} - \int_{\Gamma_{f,p}} F_0(0) \cdot \dot{v} \quad (2.41)$$

- Forces de contact-frottement :

$$F^{cont} = \int_{\Gamma_c} S_u \left\{ \{ \lambda_n - r_n \cdot \dot{d}_n \} \right\} \delta \dot{d}_n \quad (2.42)$$

$$F^{frott} = \int_{\Gamma_c} S_u \left\{ -\mu \lambda_n \{ S_f \cdot \{ \Lambda + r_t \cdot \dot{d}_t \} + (1 - S_f) \frac{\Lambda + r_t \cdot \dot{d}_t}{\| \Lambda + r_t \cdot \dot{d}_t \|} \} \right\} \delta \dot{d}_t \quad (2.43)$$

- Loi faible de contact

$$-\frac{1}{r_n} \int_{\Gamma_c} \{\lambda_n - S_u [\lambda_n - r_n \dot{d}_n]\} \delta \lambda_n = 0 \quad (2.44)$$

- Loi faible de frottement

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_t} \int_{\Gamma_c} \mu \lambda_n S_u \Lambda \delta \Lambda - \frac{1}{r_t} \int_{\Gamma_c} \mu \lambda_n S_u S_f (\Lambda + r_t \dot{d}_t) \delta \Lambda \\ & - \frac{1}{r_t} \int_{\Gamma_c} \mu \lambda_n S_u (1 - S_f) \frac{\Lambda + r_t \dot{d}_t}{\|\Lambda + r_t \dot{d}_t\|} \delta \Lambda + \int_{\Gamma_c} (1 - S_u) \Lambda \delta \Lambda \end{aligned} \quad (2.45)$$

5 Formulation du Lagrangien augmenté non standard

Dans ce paragraphe, on présente une nouvelle formulation pour laquelle la normale est vue comme une contrainte géométrique supplémentaire. Cette formulation sera mise en oeuvre et testée dans les chapitres suivants.

Lorsque deux corps sont mis en contact (sans frottement), les efforts d'interaction en un point sont colinéaires et opposés (principe de l'action-réaction). Une condition géométrique pour vérifier ce principe est qu'il faut que *les normales sortantes en ce point soient colinéaires* voir figure 2.4.

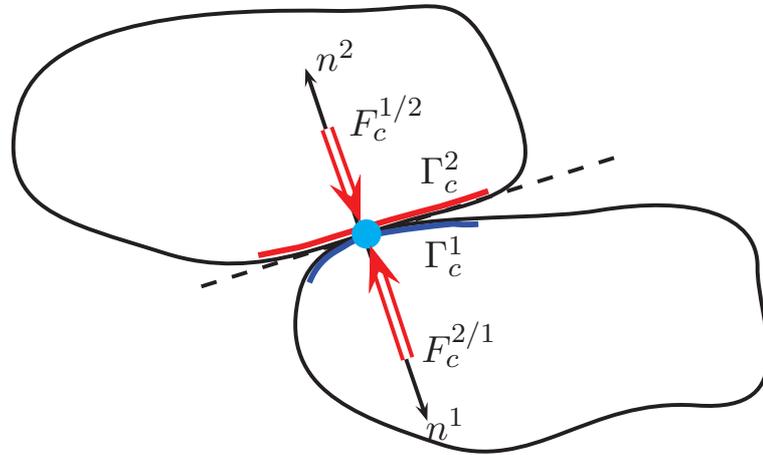


FIGURE 2.4 – Normales sortantes en un point sur la zone de contact

Dans les formulations qui ont été présentées jusqu'à maintenant, les inconnues de normales sont traitées comme des paramètres dépendant des inconnues de déplacement. La normale de référence est liée au corps maître.

$$-n^{mait}(u) = \frac{t_1(u) \wedge t_2(u)}{\|t_1(u) \wedge t_2(u)\|} = \eta(u) \quad (2.46)$$

Le signe (–) vient du fait qu'on a choisi les normales entrantes *maître*. La condition de colinéarité est telle que :

$$n^{esclave}(u) = \eta(u) \quad (2.47)$$

Écriture faible renforcée

On reprend le système du lagrangien augmenté en contact sans frottement :

$$\text{Trouver } (u^1, u^2, \lambda_n)^T \in (H_0^1(\Omega_1))^l \times (H_0^1(\Omega_2))^l \times H^{-1/2}(\Gamma_c)$$

$$\{F\}(u, \lambda_n, \Lambda) = \begin{cases} \{F^{int} - F^{ext}\} + F^{cont} = 0 & \text{(Équilibre faible)} \\ \tilde{F}^{cont} = 0 & \text{(Signorini faible)} \\ \text{avec} \\ \mathbf{n}^{\text{esclave}}(\mathbf{u}) = \eta(\mathbf{u}) & \text{(Colinéarité des normales)} \end{cases} \quad (2.48)$$

Dans cette formulation, $\eta(u)$ est la normale unitaire utilisée pour calculer les pressions de contact et les jeux normaux.

On introduit une nouvelle formulation valable pour les cas de contact sans frottement :

L'idée de cette nouvelle formulation est de renforcer de manière faible la condition géométrique sur la normale grâce à la technique des multiplicateurs de Lagrange. On introduit deux inconnues supplémentaires à la formulation initiale : une normale associée au corps esclave et un multiplicateur de Lagrange. La normale esclave est désormais une inconnue globale du système tandis que la normale maître est vu comme une fonction paramétrée par l'inconnue de déplacement. L'interprétation des inconnues introduites sera donnée plus loin. Elle se formule comme suit :

$$\text{Trouver } (u, \lambda_n, \mathbf{n}^{\text{esclave}}, \beta_n)^T \in (H_0^1(\Omega_1))^l \times (H_0^1(\Omega_2))^l \times H^{-1/2}(\Gamma_c) \times N(\Gamma_c) \times N'(\Gamma_c)$$

$$\{F\}(u^1, u^2, \lambda_n, \mathbf{n}^{\text{esclave}}, \beta_n) = \begin{cases} \{F^{int} - F^{ext}\} + F^{cont} + \int_{\Gamma_c} \mathbf{S}_u \beta_n \delta(\mathbf{n}^{\text{escl}} - \eta(\mathbf{u})) = 0 \\ \tilde{F}^{cont} = 0 \\ \int_{\Gamma_c} \mathbf{S}_u \delta\beta_n (\mathbf{n}^{\text{escl}} - \eta(\mathbf{u})) = 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

$N(\Gamma_c)$ désigne l'espace fonctionnel pour la normale inconnue. Dans ce document, on le considère égal à l'espace des traces de déplacements sur Γ_c .

$N'(\Gamma_c)$ désigne l'espace fonctionnel pour le multiplicateur de Lagrange associé à l'inconnue de normale. Dans ce document, on le considère égal à l'espace des multiplicateurs de Lagrange de contact-frottement.

Interprétations

- *Equivalence avec la formulation classique*

Le nouveau terme ajouté ne s'applique qu'aux points effectivement en contact

par le biais du champ de signe S_u . La dernière équation du système 2.49 est la vérification faible de la condition de colinéarité sur les normales. On peut faire des analogies entre $(\Lambda \iff n^{esclave})$ et $(d_t(u) \iff \eta(u))$. En effet, Λ et $n^{esclave}$ s'interprètent comme des directions respectivement tangente et normale de la pression de contact tandis que $\eta(u)$ tout comme $d_t(u)$ sont directement liés à la cinématique du corps. En pratique, on utilise $\eta(u)$ non unitaire dans le nouveau terme rajouté.

$$\eta(u) = t_1 \wedge t_2$$

Le terme ajouté sur la première ligne s'interprète comme suit.

- *Chargement fictif suiveur*

On notera la forte ressemblance entre le nouveau terme introduit et les écritures avec pression suiveuse [27]. En effet, les pressions suiveuses sont des conditions aux limites (ni Neumann, ni Dirichlet) telles que la valeur de la pression dépende de la configuration géométrique. On interprétera donc β_n comme un chargement suiveur fictif permettant de suivre l'évolution du chargement de contact en fonction des variations géométriques.

- *Écritures équivalentes*

Un inconvénient de la nouvelle formulation est que le nombre d'inconnues augmente (la matrice globale issue de la discrétisation est augmentée). On peut pénaliser le multiplicateur de Lagrange. Il suffit de remplacer dans les équations précédentes

$$\beta_n \implies \kappa_n (n^{esclave} - \eta(u)), \kappa_n \in R^+$$

Soit la formulation suivante que l'on retient aussi pour la mise en oeuvre numérique :

<p>Trouver $(u, \lambda_n, \mathbf{n}^{esclave})^T \in (H_0^1(\Omega_1))^l \times (H_0^1(\Omega_2))^l \times H^{-1/2}(\Gamma_c) \times N(\Gamma_c)$</p> $\{F\}(u^1, u^2, \lambda_n, \mathbf{n}^{esclave}) = \begin{cases} \{F^{int} - F^{ext}\} + F^{cont} + \\ \int_{\Gamma_c} \mathbf{S}_u \kappa_n (\mathbf{n}^{escl} - \eta(\mathbf{u})) \quad \delta(\mathbf{n}^{escl} - \eta(\mathbf{u})) = 0 \\ \tilde{F}^{cont} = 0 \\ \int_{\Gamma_c} \mathbf{S}_u \kappa_n \delta(\mathbf{n}^{escl} - \eta(\mathbf{u})) \quad (\mathbf{n}^{escl} - \eta(\mathbf{u})) = 0 \end{cases} \quad (2.50)$

Pour aller plus loin on peut aussi introduire une écriture lagrangienne augmentée :

$$\hat{\beta}_n \implies \kappa_n (n^{esclave} - \eta(u)) + \beta_n$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Trouver } (u, \lambda_n, \mathbf{n}^{\text{esclave}}, \beta_{\mathbf{n}})^T \in (H_0^1(\Omega_1))^l \times (H_0^1(\Omega_2))^l \times H^{-1/2}(\Gamma_c) \times N(\Gamma_c) \times N'(\Gamma_c) \\
 \\
 \{F\}(u^1, u^2, \lambda_n, \mathbf{n}^{\text{esclave}}, \beta_{\mathbf{n}}) = \begin{cases} \{F^{\text{int}} - F^{\text{ext}}\} + F^{\text{cont}} + \\ \int_{\Gamma_c} \mathbf{S}_{\mathbf{u}} \hat{\beta}_{\mathbf{n}} \delta(\mathbf{n}^{\text{escl}} - \eta(\mathbf{u})) = 0 \\ \tilde{F}^{\text{cont}} = 0 \\ \int_{\Gamma_c} \mathbf{S}_{\mathbf{u}} \delta\beta_{\mathbf{n}} (\beta_{\mathbf{n}} - \hat{\beta}_{\mathbf{n}}) = 0 \end{cases}
 \end{array} \tag{2.51}$$

6 Conclusion du chapitre

Les formulations variationnelles sont désormais posées. Elles s'appliquent à un cadre de non-linéarités matérielles, contact-frottement, grandes transformations et évolutions quasi-statiques ou dynamiques lentes. Diverses écritures ont été exhibées, en l'occurrence *une formulation de Lagrangien augmenté non standard* a été énoncée. Elle permet de renforcer la condition géométrique de colinéarité sur les normales en un point de contact.

Dans un contexte éléments finis, on a recours à des techniques de discrétisation spécifiques pour résoudre le problème. C'est l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 3

Méthodes de résolution

Dans ce chapitre, on présente la théorie et la construction des éléments finis puis la stratégie globale de résolution.

En plus de construire des éléments finis classiques dans chaque domaine du système, il faut construire des éléments « intelligents » dans la zone de contact. Les éléments les plus utilisés sont les éléments mixtes de type noeud/segment. La construction de ce type d'élément doit respecter une condition mathématique de stabilité appelée condition « inf-sup ». On rappelle les diverses étapes d'approximations qui permettent le passage du système continu au système discret. La discrétisation de la nouvelle formulation.

La méthode historique de résolution dans Code_Aster du système algébrique est une imbrication entre les boucles de points fixes et les boucles de Newton. Dans le cadre de ce travail de thèse, on a implémenté la méthode classique de « Newton généralisée » ainsi qu'une nouvelle méthode dite de « Newton partielle ».

Dans le but de pouvoir comparer la performance, la robustesse et la fiabilité des algorithmes, on utilise aussi des algorithmes basés sur des inégalités variationnelles tels que : Gradient Conjugué Projeté, Contraintes Actives.

1 Éléments mixtes de contact de type noeud/segment

1.1 Approximations des inconnues

Les champs inconnus discrets à connaître sont :

- les repères locaux : $(t_1(u^{maitre}), t_2(u^{maitre}), n(u^{maitre}))$
- les sauts de déplacement $d = u^{esclave} - \bar{u}^{maitre}$
- valeurs des multiplicateurs de Lagrange : $\lambda_n, \Lambda_1, \Lambda_2$
- les Levels-set de contact-frottement : S_u, S_f
- pour la nouvelle formulation proposée dans le chapitre précédent : la normale $n^{esclave}$ jouant le rôle de la direction normale du chargement

Les champs primaux, mixtes et les repères locaux sont interpolés par des fonctions de forme de type Lagrange. Les Levels-set sont des champs très irréguliers et ne peuvent être approximés par les fonctions de formes classiques. On utilise donc une méthode de collocation qui sera détaillée plus loin.

Maillage

Soient Ω_1^h, Ω_2^h des triangulations respectives de Ω_1, Ω_2 . Ces triangulations sont des éléments polygonaux en 2D (quadrangles par exemple) ou polyhédriques en 3D (Hexaèdres par exemple).

$$\Omega_i^h = \bigcup_{e=1, N_i^e} \Omega_i^{h,e} \quad (3.1)$$

La trace de Ω_i^h sur le bord de contact est $\Gamma_{c,i}^h$ qui est constitué de segments en 2D et de polygones en 3D.

$$\Gamma_{c,i}^h = \bigcup_{c=1, N_i^c} \Gamma_{c,i}^{h,c} \quad (3.2)$$

Il arrive très souvent que les maillages ne soient pas coïncidents dans la zone de contact : on parle de maillages incompatibles. Ces maillages peuvent dégrader la qualité des résultats. C'est d'ailleurs pour cela que certains codes ont recours à des méthodes de construction de type segment/segment. Dans ce document, on utilise deux leviers pour améliorer nos résultats : les espaces d'approximations et les méthodes d'intégration numérique .

Approximation des champs de déplacement

Soit $V_h(\Omega_i)$ le sous-espace de $V(\Omega_i)$ (espace des déplacements admissibles) défini de façon suivante :

$$V_h(\Omega_i) = \{u_h^i \in (C^0(\bar{\Omega}_i^h))^l, l = 2, 3, u_h^i|_{\Omega_i^{h,e}} \in (P_q(\Omega_i^{h,e}))^l, 1 \leq e \leq N_i^e, u_h^i|_{\Gamma_i^{h,e}} = 0\} \quad (3.3)$$

$C^0(\bar{\Omega}_i)$ est l'espace des fonctions continues sur l'adhérence de Ω_i . $P_q(\Omega_i^{h,e})$ représente l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à q sur $\Omega_i^{h,e}$. On note $C^h(\Gamma_{c,i}^h)$ l'espace des traces de fonctions de $V_h(\Omega_i)$ sur $\Gamma_{c,i}^h$.

Approximation des champs de multiplicateurs de Lagrange

Le problème s'écrit de manière générique sous la forme suivante :

$$\begin{cases} F^{int}(u, v) + F^{cont-frott}(v, \lambda) - F^{ext} = 0, \quad \forall v \\ F^{cont-frott}(u, \lambda^*) = 0, \quad \forall \lambda^* \end{cases} \quad (3.4)$$

Le choix de l'espace d'approximation des multiplicateurs est soumis à la satisfaction des conditions d'ellipticité mais aussi à la condition dite *inf-sup* [1, 15, 105].

$$\begin{cases} \exists \alpha > 0, \text{ tel que } F^{int}(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H_1^0}, \quad \forall v, \\ \exists \beta > 0, \quad \inf_{\lambda^*} \sup_v \frac{F^{cont-frott}(v, \lambda^*)}{\|\lambda^*\|_{-1/2, \Gamma_c} \|v\|_1} = \beta, \end{cases} \quad (3.5)$$

Ces conditions assurent la stabilité des solutions obtenues. Des choix historiques ont été faits dans les travaux de thèse précédents (voir thèses de Zarroug, Zammali, Torkhani [108, 115, 116] et la documentation de *Code_Aster* [23]). *Ce choix est tel que l'on prend l'espace des multiplicateurs égal à l'espace des traces des déplacements $C^h(\Gamma_{c,i}^h)$.*

Soit en 2D : $(\lambda_n^h, \Lambda_1) \in (C_i^h(\Gamma_{c,i}^h))^2$

Ou en 3D : $(\lambda_n^h, \Lambda_1, \Lambda_2) \in (C_i^h(\Gamma_{c,i}^h))^3$

Ces choix de discrétisation seront discutés par la suite.

Avec ces différentes approximations sur les espaces et en utilisant des éléments finis isoparamétriques, on a :

$$\begin{cases} X^{i,h} = [N^i]\{\chi^i\} \\ Y^{i,h} = [N^i]\{\Upsilon^i\} \\ u^{i,h} = [N^i]\{Q^i\} \\ \lambda_n^h = [\Phi]\{L_\lambda\} \\ [\Lambda^{1,h} \quad \Lambda^{2,h}] = [\Phi \quad \Phi]\{L_\Lambda^1 \quad L_\Lambda^2\}^T \end{cases} \quad (3.6)$$

χ^i, Υ^i représentent respectivement les coordonnées initiales et courantes aux noeuds de la géométrie discrète.

$Q^i, L_\lambda, L_\Lambda$ représentent respectivement les inconnues nodales des champs approchés de déplacement, de multiplicateurs de Lagrange de contact et de multiplicateurs de Lagrange de frottement.

$[N^i], [\Phi]$ sont respectivement les fonctions de formes dans le domaine et sur le bord de contact des champs inconnus.

Les champs de multiplicateurs de Lagrange de contact sont portés par les surfaces esclaves.

Approximation du repère local de contact

Le repère local de contact peut être calculé à partir de la cinématique du problème. On a les tangentes en un point définies par :

$$t^l(y(\zeta_1, \zeta_2)) = \frac{\partial y}{\partial \zeta_l}, \quad l = 1, 2$$

et la normale unitaire est :

$$n(y) = \frac{t^1(y) \wedge t^2(y)}{\|t^1(y) \wedge t^2(y)\|}$$

On a :

$$\begin{cases} t^{i,h} = [\partial N^i]\{\Upsilon^i\} \\ n^{i,h} = \frac{t^{1,h} \wedge t^{2,h}}{\|t^{1,h} \wedge t^{2,h}\|} \end{cases} \quad (3.7)$$

Approximation du champ de signe

À cause de son caractère irrégulier, on utilise des fonctions de formes particulières (de type Dirac) pour approximer les champs de signe ou Levels-set S_u, S_f . D'où l'appellation méthode de collocation.

Sur la figure ci-dessous, la surface élémentaire $P2$, définie aux extrémités par les noeuds (1)–(2), porte une collection de points (a) et (b). Ces points seront assimilés à des points d'intégration numérique. *Chaque point de contact génère un et un seul élément de contact. Le champ de signe en tout point de l'élément généré est donné par l'évaluation de ce dernier au point de contact qui le caractérise :*

Soit :

$$S_u(x)|_{\Gamma_c^e(x^i)} = \delta(x - x^i) S_u(x^i) \quad (3.8)$$

Avec :

$$\delta(x - x^i) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Gamma_c(x^i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.9)$$

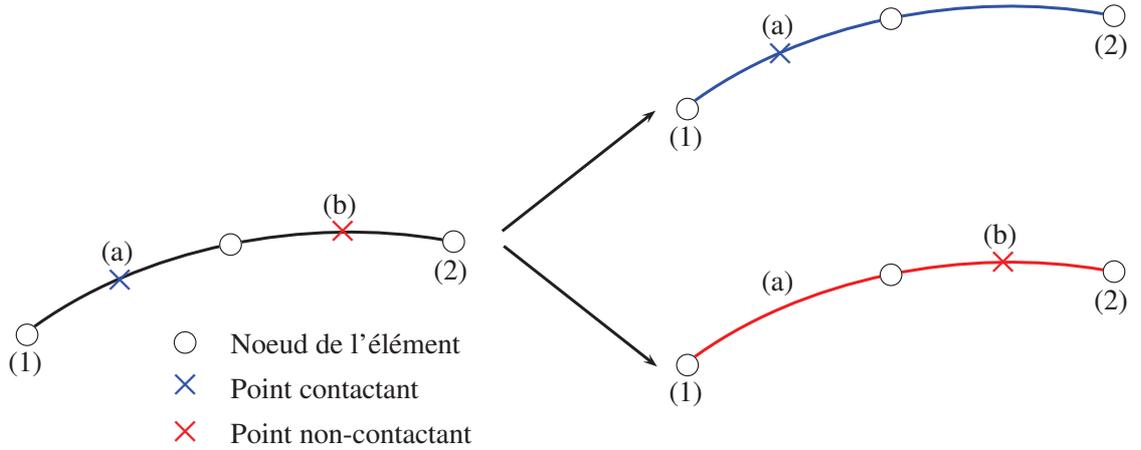


FIGURE 3.1 – Approximation des champs de signe de contact

$$S_u(x^i) = S_u(\lambda_n^h(x^i) - r_n d_n^h(x^i)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_n^h(x^i) - r_n d_n^h(x^i) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.10)$$

$\Gamma_c^e(x^i)$ est la surface de contact élémentaire créée « tardivement » au cours du processus de résolution et qui contient le point de contact x^i .

En d'autres termes, on utilise une collection de points qui dictent l'isovaleur du statut de contact-frottement d'un élément : d'où l'appellation « Levels-set ». L'algorithme n'est pas optimal, car on génère autant d'éléments de contact que de points. Cependant, pour les problèmes traités dans ce travail, le nombre de points de contact est relativement faible par rapport à la taille totale du système.

On peut mettre plusieurs points de contact sur un même élément « physique ». On capte ainsi plusieurs physiques qui s'y déroulent. Néanmoins, le choix des points de contact est intrinsèquement lié au choix de l'ordre de la méthode d'intégration numérique.

Approximation de la nouvelle formulation

On utilise le même concept de discrétisation que pour les multiplicateurs de Lagrange. L'espace discret des normales $N^h(\Gamma_c^h)$ est pris dans le même espace que la trace des fonctions de déplacement sur le bord de contact.

$$[n^{x,h,esc} \ n^{y,h,esc} \ n^{z,h,esc}] = [\Phi \ \Phi \ \Phi] \{n^{i,esc} \ n^{i,esc} \ n^{i,esc}\}^T \quad (3.11)$$

$\{n^{i,esc} \ n^{i,esc} \ n^{i,esc}\}$ sont les inconnues nodales de normales portées par le corps esclave.

1.2 Appariement noeud/segment et intégration numérique

Appariement noeud/segment

Le premier problème à régler au cours de la mise en oeuvre numérique est la gestion des configurations géométriques. Le calcul s'effectue en deux phases :

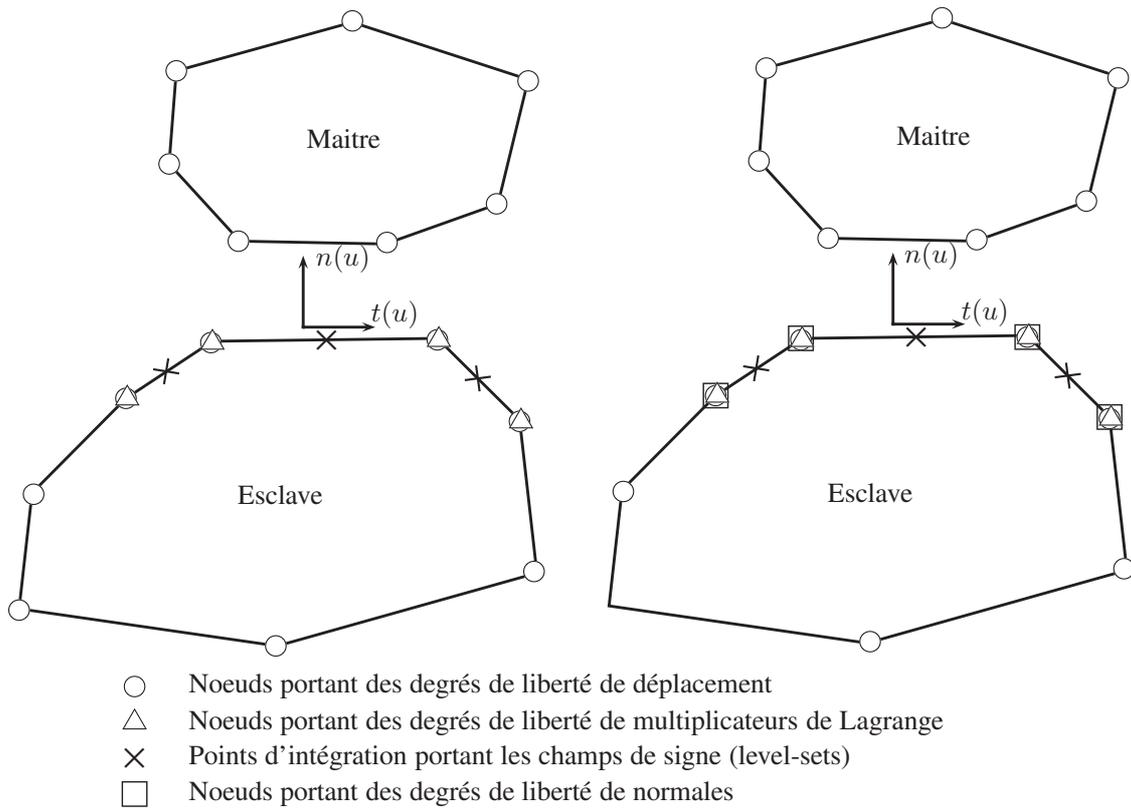


FIGURE 3.2 – À gauche : formulations classiques, à droite : nouvelle formulation

- Phase globale de déclaration des surfaces potentielles de contact. Cette étape est faite dans la phase de discrétisation géométrique.
- Phase locale d'appariement : couplage géométrique des surfaces de contact. On effectue un appariement noeud/segment : *il faut associer à un point de contact de la surface esclave un élément maître.*

On utilise une recherche locale des couples géométriques via un algorithme classique qu'on retrouve dans Benson-Hallquist [11]. L'algorithme se déroule en trois étapes :

- 1 : Boucle sur les points esclaves : pour chaque point esclave e_i , on recherche un noeud maître m_i le plus proche.
- 2 : Boucle sur les éléments maîtres : pour chaque maille maître contenant le noeud m_i on cherche par projection, la maille maître M_i la plus proche du point esclave.
- 3 : Calcul du point projeté : on calcule les coordonnées paramétriques $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ du point projeté de e_i sur M_i .

Quelques situations problématiques peuvent apparaître au cours de la détection du

contact.

- Interpénétrations : on interdit aux points esclaves de pénétrer dans les mailles maîtres. Mais l'inverse n'est pas vrai (voir figure 3.3). Pour régler ce problème, on peut raffiner le maillage ou utiliser des éléments d'ordre plus élevé (quadratique).
- Non unicité de projection (figure 3.4) : on peut traiter cette situation par une méthode de prédiction-correction. S'il y a existence de deux mailles contenant le noeud maître le plus proche, alors on choisit *arbitrairement* la première maille.
- Il peut arriver que la maille M_i (contenant le noeud maître m_i le plus proche de e_i) ne contienne pas le point projeté de e_i . Dans ce cas, on effectue un prolongement virtuel de la maille de contact avec un rapport κ donné par l'utilisateur. Ce rapport précise que si le point projeté ζ appartient à $(1 + \kappa) \times$ la longueur de l'élément alors on garde le couple géométrique. Sinon on le désactive automatiquement.
- Il arrive très fréquemment que les sauts de normales à l'interface de contact provoquent des difficultés de convergence (voir figure 3.6). Pour cela, on utilise des techniques de lissage de normales. Il existe plusieurs techniques [89,90,92,114]. Une technique fréquemment rencontrée consiste à approximer les surfaces de contact par des courbes pseudo-analytiques ou des courbes de Bezier ou encore des fonctions Nurbs [89,92]. Ces méthodes ont l'avantage de décrire très précisément la surface contact et donc de favoriser de très grandes déformations. Mais elles sont souvent onéreuses en termes d'implémentation et de mise en oeuvre. Dans nos travaux, on utilise une deuxième technique développée dans la thèse de Zarroug et largement utilisée dans la littérature [90,116].

L'algorithme de régularisation de la base locale de contact est le suivant :

- 1 : Calcul de la normale lissée aux noeuds : pour un noeud maître m_i , on identifie toutes les mailles M_i , $i = 1, M$ qui lui sont liées. On calcule pour chaque maille adjacente M_i , la normale de manière classique. Puis on calcule, par moyennation, la normale lissée en ce noeud :

$$n^{liss}(m_i) = \frac{\sum_{M_i=1,M} \int_{M_i} n(x) dx}{\left\| \sum_{M_i=1,M} \int_{M_i} n(x) dx \right\|} \quad (3.12)$$

On recalcule les tangentes $t_1^{liss}(m_i), t_2^{liss}(m_i)$ à partir de la normale lissée.

- 2 : On calcule la normale en tout point de la surface maître en utilisant les fonctions d'interpolation de Lagrange classique.

$$[n^{liss}(x) \ t_1^{liss}(x) \ t_2^{liss}(x)] = [\Phi(x) \ \Phi(x) \ \Phi(x)] \ {n^{liss}(m_i) \ t_1^{liss}(m_i) \ t_2^{liss}(m_i)}^T \quad (3.13)$$

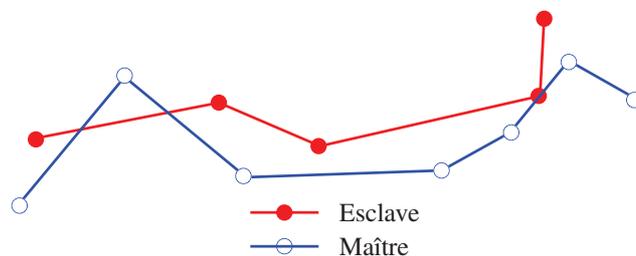


FIGURE 3.3 – À gauche situation d’interpénétration, à droite : pas d’interpénétration

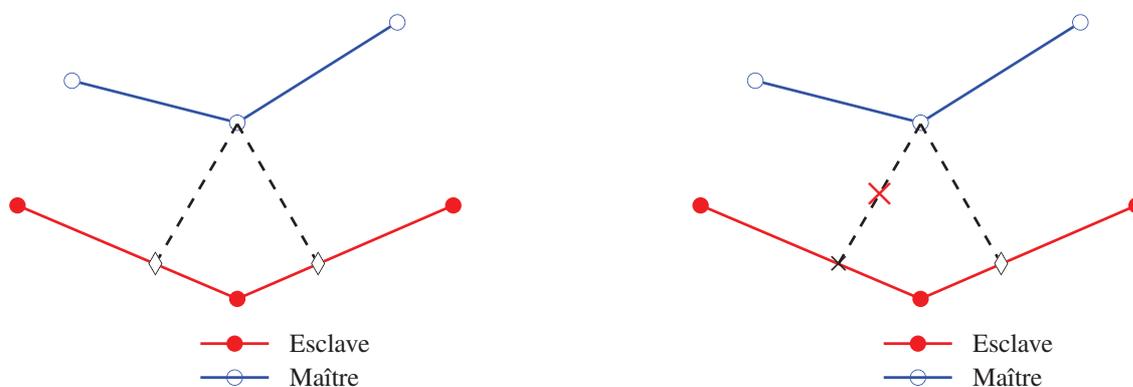


FIGURE 3.4 – Situation de non unicité de la projection

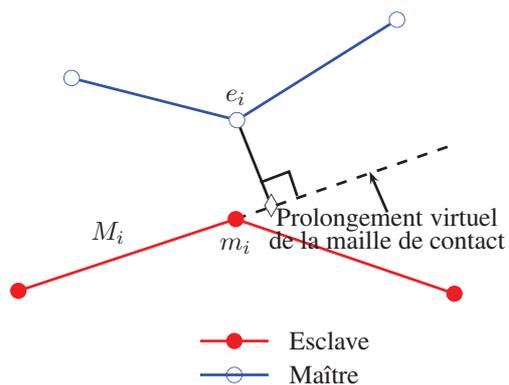


FIGURE 3.5 – Situation de projection hors mailles

Intégration numérique

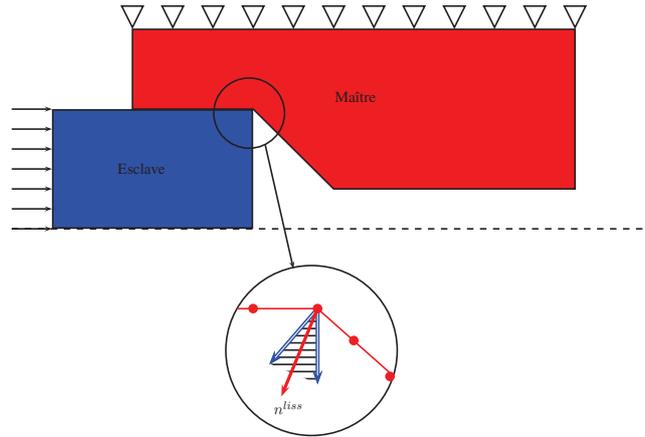


FIGURE 3.6 – Sauts de normales et choix d'une normale lissée

Il ne reste plus qu'à évaluer numériquement les intégrales de contact via les formules de quadratures. On rappelle ces intégrales :

- Force de contact

$$F^{cont,h} = \sum_{e=1, N_c} \int_{\Gamma_{c,e}^h} S_u^h \left\{ \{ \lambda_n^h - r_n d_n^h \} n^h \right\} \delta d_n^h \quad (3.14)$$

- Force de frottement

$$F^{frott,h} = \sum_{e=1, N_c} \int_{\Gamma_{c,e}^h} S_u^h \left\{ -\mu \lambda_n^h \{ S_f^h \{ \Lambda^h + r_t d_t^h \} + (1 - S_f^h) \frac{\Lambda^h + r_t d_t^h}{\| \Lambda^h + r_t d_t^h \|} \} \right\} \delta d_t^h \quad (3.15)$$

- Loi faible mixte de Signorini

$$-\frac{1}{r_n} \sum_{e=1, N_c} \int_{\Gamma_{c,e}^h} \{ \lambda_n^h - S_u^h [\lambda_n^h - r_n d_n^h] \} \delta \lambda_n^h \quad (3.16)$$

- Loi faible mixte de Coulomb

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{frott,h} = & \frac{1}{r_t} \sum_{e=1, N_c} \left\{ \int_{\Gamma_{c,e}^h} \mu \lambda_n^h S_u^h \Lambda^h \delta \Lambda^h - \frac{1}{r_t} \int_{\Gamma_{c,e}^h} \mu \lambda_n^h S_u^h S_f^h (\Lambda^h + r_t d_t^h) \delta \Lambda^h \right. \\ & \left. - \frac{1}{r_t} \int_{\Gamma_{c,e}^h} \mu \lambda_n^h S_u^h (1 - S_f^h) \frac{\Lambda^h + r_t d_t^h}{\| \Lambda^h + r_t d_t^h \|} \delta \Lambda^h + \int_{\Gamma_{c,e}^h} (1 - S_u^h) \Lambda^h \delta \Lambda^h \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

- Contribution due à la nouvelle formulation

$$\int_{\Gamma_c^h} S_u^h \kappa_n (n^{escl,h} - \eta^h(u^h)) \delta (n^h - \eta^h(u^h)) \quad (3.18)$$

La procédure d'intégration numérique est la même pour chacun de ces termes. Soit par exemple la force de contact :

$$F^{cont,h} = \sum_{e=1, N_c} \sum_{k=1, N_{int}} w^k J \left[S_u^k \left\{ \{ \lambda_n^k - r_n d_n^k \} n^k \right\} \delta d_n^k \right] \quad (3.19)$$

w^k est appelé le poids de l'intégration et J s'appelle jacobien de la transformation de l'espace parent vers l'espace de référence. L'indice k indique que les champs inconnus sont évalués aux points d'intégration. Dans un élément, on a au total N_{int} points d'intégration. Ces points définissent les points de contact.

1.3 Gestion des incompatibilités : géométrie, intégration numérique, statuts

Un inconvénient des éléments noeud/segment est que l'intégration se fait sur une surface élémentaire : esclave par exemple. Il peut arriver donc que les transferts des efforts de contact sur la surface maître ne se fassent pas correctement, pénalisant ainsi la condition inf-sup [1]. C'est pour corriger ce fait, que plusieurs auteurs emploient les éléments segment/segment [74, 91, 92, 111]. Dans cette sous-section, on relève d'abord les incompatibilités liées aux éléments noeud/segment voir figure (3.7) . Puis, on détaille quelques pistes utilisées dans le code pour améliorer la robustesse des éléments noeud/segment [23, 116].

- Incompatibilité géométrique : l'élément fini esclave sur lequel on réalise l'intégration recouvre plusieurs éléments maîtres. En conséquence, *les champs fonctionnels maîtres seront intégrés sur une surface qui est plus large que leur support initial*
- Incompatibilité de statuts : sur un élément esclave, on peut avoir plusieurs statuts de contact. Donc, *il y a risque que les forces ne soient pas homogènes sur un même élément entraînant des effets d'oscillation. Cette situation est analogue aux effets numériques de blocage pour les matériaux incompressibles.*
- Incompatibilité d'intégration : habituellement, on utilise un schéma d'intégration aux « noeuds du maillage » ou un schéma de « Gauss ». En fonction de l'espace d'approximation des inconnues (linéaire, quadratique), on peut avoir *le risque d'un schéma d'intégration « trop pauvre » pour capter les informations véhiculées par l'élément esclave.*

La solution retenue consiste à *faire tendre le maillage incompatible vers un maillage compatible grâce à un morcellement uniforme de l'élément esclave $\Gamma_{c^{escl,e}}$ en sous-éléments de contact $\Gamma_{c^{selt,e}}$. Ce faisant, l'intégration numérique devient :*

$$\int_{\Gamma_{c^{escl,e}}} (\dots) = \sum_{i=1, N_{elt}} \int_{\Gamma_{c^{selt,e}}} (\dots) \quad (3.20)$$

Sur chaque sous-élément on adopte une intégration numérique de type Simpson ou Newton-Cotes d'ordre élevé ou non. Les sous-éléments générés ne participent qu'à l'intégration numérique et n'engendrent pas des noeuds « physiques » supplémentaires. Cette méthode mise en place dans Code_Aster par Zarroug et Ben Dhia [23, 116], a déjà fait ses preuves sur plusieurs études.

Malgré son aspect simple d'implémentation, cette méthode est encore moins optimale que la méthode classique d'intégration. En effet, on génère plus de points de contact, qui à leur tour

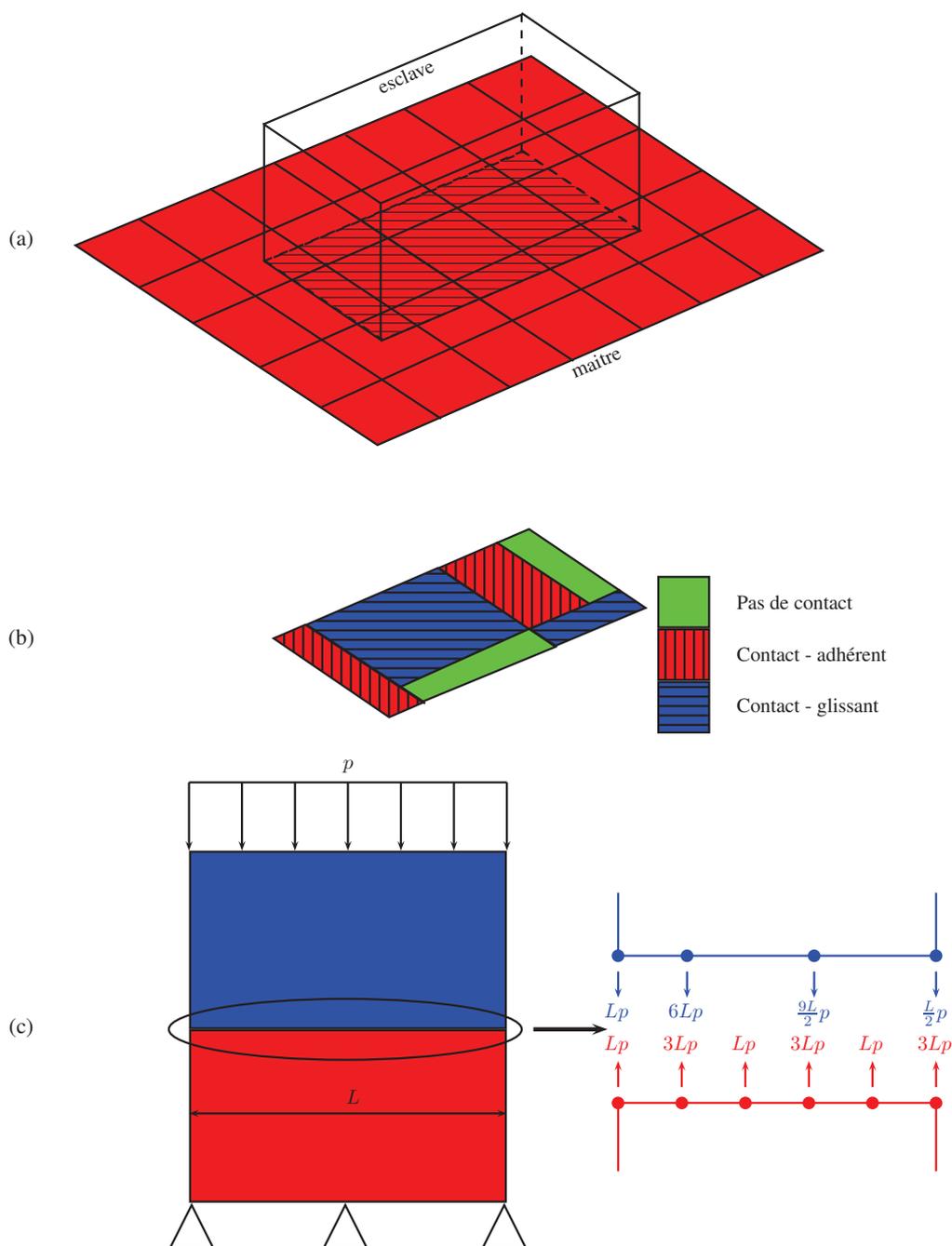


FIGURE 3.7 – Incompatibilités : (a) : géométrique (b) : statuts (c) : un exemple de distribution non uniforme des forces de contact

gèneront plus d'éléments de contact. Néanmoins, c'est une méthode qui améliore une grande classe de problèmes liés à la condition « inf-sup ». Quelques règles de pratiques industrielles, qui ne seront pas énoncées (voir [23]), permettent aux utilisateurs de trouver un bon compromis entre la qualité et la performance des calculs réalisés.

Tous les ingrédients sont désormais réunis pour passer du système continu au système discret.

1.4 Matrices élémentaires de contact

Problème discret : formulation classique

Trouver $(u^{1,h}, u^{2,h}, \lambda_n^h, \Lambda^h)^T$ tel que :

$$\{F\}^h(u, \lambda_n, \Lambda)^h = \begin{cases} \{F^{int} - F^{ext}\}^h + F^{cont,h} + F^{frott,h} = 0 & \text{(Équilibre faible discrétisé)} \\ \tilde{F}^{cont,h} = 0 & \text{(Signorini faible discrétisé)} \\ \tilde{F}^{frott,h} = 0 & \text{(Coulomb faible discrétisé)} \end{cases} \quad (3.21)$$

Problème discret : formulation de Lagrangien augmenté non standard

Trouver $(u^{1,h}, u^{2,h}, \lambda_n^h, \mathbf{n}^{\text{esclave},h})^T$ tel que :

$$\{F\}^h(u, \lambda_n, \mathbf{n}^{\text{esclave}})^h = \begin{cases} \{F^{int} - F^{ext}\}^h + F^{cont,h} + \int_{\Gamma_c^h} \mathbf{S}_u^h \kappa_n^h (\mathbf{n}^{\text{escl},h} - \eta^h(\mathbf{u})) \delta(\mathbf{n}^h - \eta^h(\mathbf{u})) = 0 \\ \tilde{F}^{cont,h} = 0 \\ \int_{\Gamma_c^h} \mathbf{S}_u^h \kappa_n^h (\mathbf{n}^{\text{escl},h} - \eta^h(\mathbf{u})) \delta(\mathbf{n}^h - \eta^h(\mathbf{u})) = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Structure générale des matrices et vecteurs élémentaires

Les algorithmes qui vont être développés sont basés sur les techniques de linéarisation. En omettant les paramètres du calcul, la forme générale de la linéarisation est :

$$F^h(X^h + \Delta X^h) \approx F^h(X^h) + K^h(X^h) \Delta X^h + R^h(X^h) = 0 \quad (3.23)$$

K^h est la matrice de rigidité globale du système. Elle se décompose comme suit :

R^h est le reste de Taylor après un développement limité d'ordre 1

$$\begin{aligned}
 K^h(X^h)\Delta X^h &= \{v_h^1\}^T \left\{ \bigcup_{e=1, N_{e1}} \int_{\Omega_{1e}} [K_{int}^1]_e d\Omega_{1e} \right\} \{\Delta u_h^1\} \\
 &+ \{v_h^2\}^T \left\{ \bigcup_{e=1, N_{e2}} \int_{\Omega_{2e}} [K_{int}^2]_e d\Omega_{2e} \right\} \{\Delta u_h^2\} \\
 &+ \begin{pmatrix} v_h^1 \\ v_h^2 \\ \lambda_n^* \\ \Lambda^* \end{pmatrix}^T \left\{ \bigcup_{c=1, N_c} \int_{\Gamma_{ce}} \begin{bmatrix} K_{cf}^{11} & K_{cf}^{12} & K_{cf}^{13} & K_{cf}^{14} \\ K_{cf}^{21} & K_{cf}^{22} & K_{cf}^{23} & K_{cf}^{24} \\ K_{cf}^{31} & K_{cf}^{32} & K_{cf}^{33} & K_{cf}^{34} \\ K_{cf}^{41} & K_{cf}^{42} & K_{cf}^{43} & K_{cf}^{44} \end{bmatrix}_{cf} \cdot d\Gamma_{ce} \right\} \begin{pmatrix} \Delta u_h^1 \\ \Delta u_h^2 \\ \Delta \lambda_n \\ \Delta \Lambda_h \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

$[K_{int}^i]_e$ représente la contribution en matrices élémentaires des non linéarités de comportement ainsi que les grandes déformations

$[K]_{cf}$ est la contribution des matrices de contact.

2 Algorithmes de résolution basés sur le Lagrangien augmenté

Après discrétisation du problème, il faut résoudre un système algébrique non-linéaire et dépendant des paramètres :

$$F(X, p(X)) = 0 \tag{3.25}$$

$X = (u, \lambda_n, \Lambda)$ ou $X = (u, \lambda_n, \Lambda, n)$ représentent les inconnues aux noeuds du système. $p(X)$ représente les paramètres du problème dépendant des inconnues.

La méthodologie générale de résolution dans *Code_Aster* est telle que l'on passe par des boucles de point fixe sur certains paramètres de contact puis on trouve l'équilibre du « système paramétré » grâce à la méthode de Newton.

Méthodologie générale de résolution

1. Étant donné les paramètres de contact $p_0 = p(X_0)$
2. On calcule l'équilibre par la méthode de Newton $F^{p_0}(X) = 0$
3. On vérifie que les paramètres sont bien fixés $p(X) = p_0$

En fonction des paramètres qui seront fixés au cours du calcul, la méthode de résolution se déclinera en plusieurs variantes : la méthode de point fixe (seule déclinaison existante dans le code jusqu'alors), la méthode de Newton partielle, la méthode de Newton généralisée.

Le tableau ci-dessous illustre ces différentes variantes :

	Appariement	Seuils de frottement	Statuts de contact
Newton généralisé	Non fixé	Non fixé	Non fixé
Point fixe-Newton	<i>fixé</i>	<i>fixé</i>	<i>fixé</i>
Newton partiel	<i>fixé</i>	Non fixé	Non fixé

2.1 Méthode de point fixe

Dans cette méthode, presque toutes les non linéarités de contact sont simplifiées par des boucles de points fixes. La première boucle est celle de géométrie.

Boucle géométrique

Les éléments de contact sont créés grâce à l'identification de couples points esclaves-maîtres. La boucle géométrique consiste à dire qu'*au cours de la recherche de l'équilibre un noeud esclave reste toujours apparié ou couplé à la même maille maître et que son point de projection reste fixe*. Une fois l'équilibre déterminé on vérifie si avec la nouvelle configuration d'équilibre on a toujours les mêmes couples de contact. Le critère de convergence géométrique est évalué grâce aux déplacements. En effet, on suppose qu'à partir d'un déplacement initialement connu u^0 , on peut déterminer les couples géométriques fixes. L'équilibre fournit un nouveau champ de déplacement u . Le critère d'arrêt sur la boucle de point fixe est le suivant :

$$\sup_{\Gamma_c} \frac{\|u^0 - u\|}{\|u^0\|} \leq \text{Tolérance géométrique} \quad (3.26)$$

Dans Code_Aster, le critère s'applique sur l'ensemble des domaines étudiés, c'est un critère plus sévère :

$$\sup_{\cup \Omega_i} \frac{\|u^0 - u\|}{\|u^0\|} \leq \text{Tolérance géométrique} \quad (3.27)$$

La deuxième boucle de point fixe concerne le seuil de frottement.

Boucle sur les seuils de frottement

Le seuil de frottement est dépendant de la pression de contact qui lui même est une inconnue du problème. On utilise une suite de problèmes de Tresca pour résoudre le problème de Coulomb. En effet, en partant de valeurs initiales pour les seuils de frottement λ_n^0 , on calcule l'équilibre du système avec un seuil de frottement invariant. La vérification du critère d'arrêt sur les seuils de frottement se fait sur les pressions de contact.

$$\sup_{\Gamma_c} \frac{|\lambda_n^0 - \lambda_n|}{|\lambda_n^0|} \leq \text{Tolérance seuils de frottement} \quad (3.28)$$

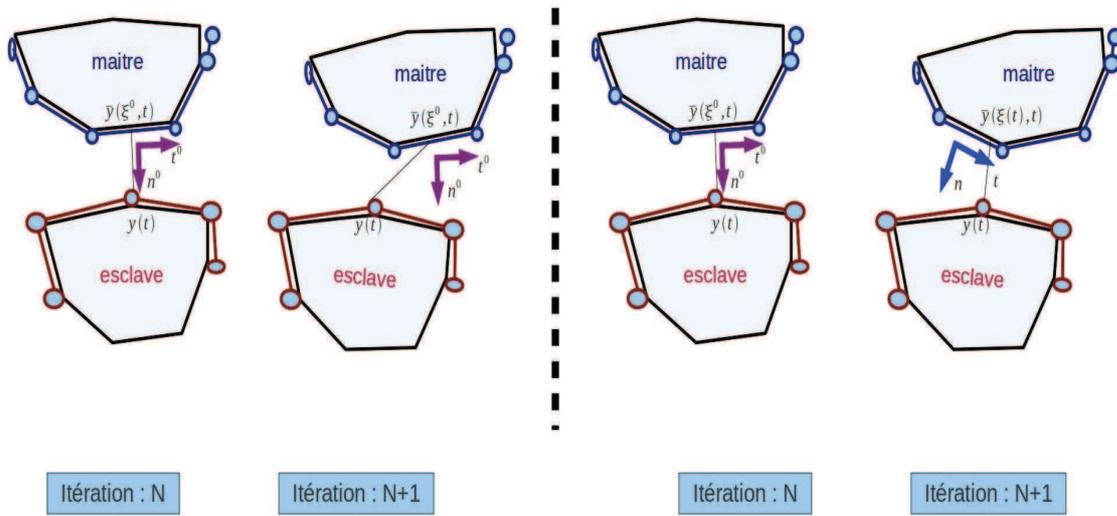


FIGURE 3.8 – Évolution des paramètres géométriques dans la phase de Newton : à gauche point fixe sur la géométrie, à droite Newton généralisé sur la géométrie

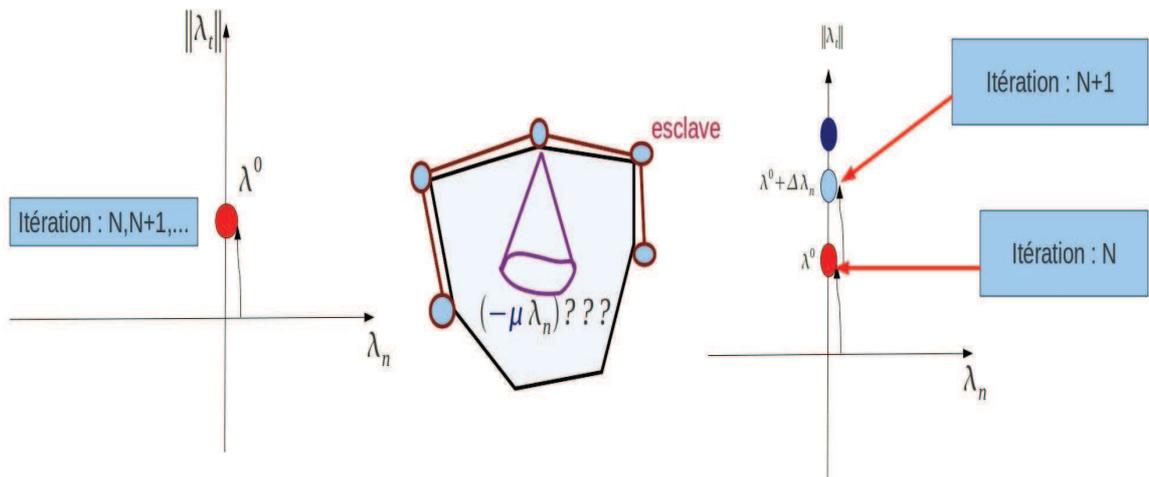


FIGURE 3.9 – Évolution des paramètres seuil de frottement pendant la phase Newton : à gauche point fixe, à droite Newton généralisé, au milieu seuil de frottement inconnu en un point

Enfin la troisième boucle concerne les statuts de contact.

Boucle sur les statuts de contact

Les champs de signe contact-frottement caractérisent la non régularité du système. Pour rendre le système plus régulier, on décide de fixer uniquement les statuts de contact de chaque noeud esclave pendant la phase de Newton. Puis de vérifier que ces statuts n'ont pas bougé avec la nouvelle configuration.

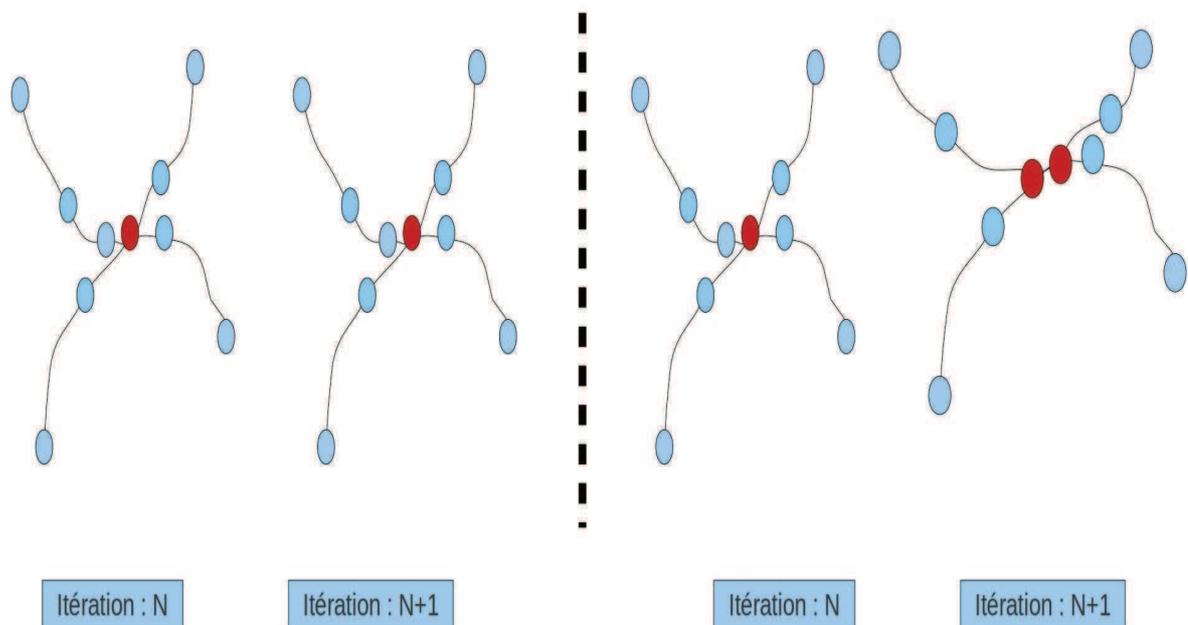
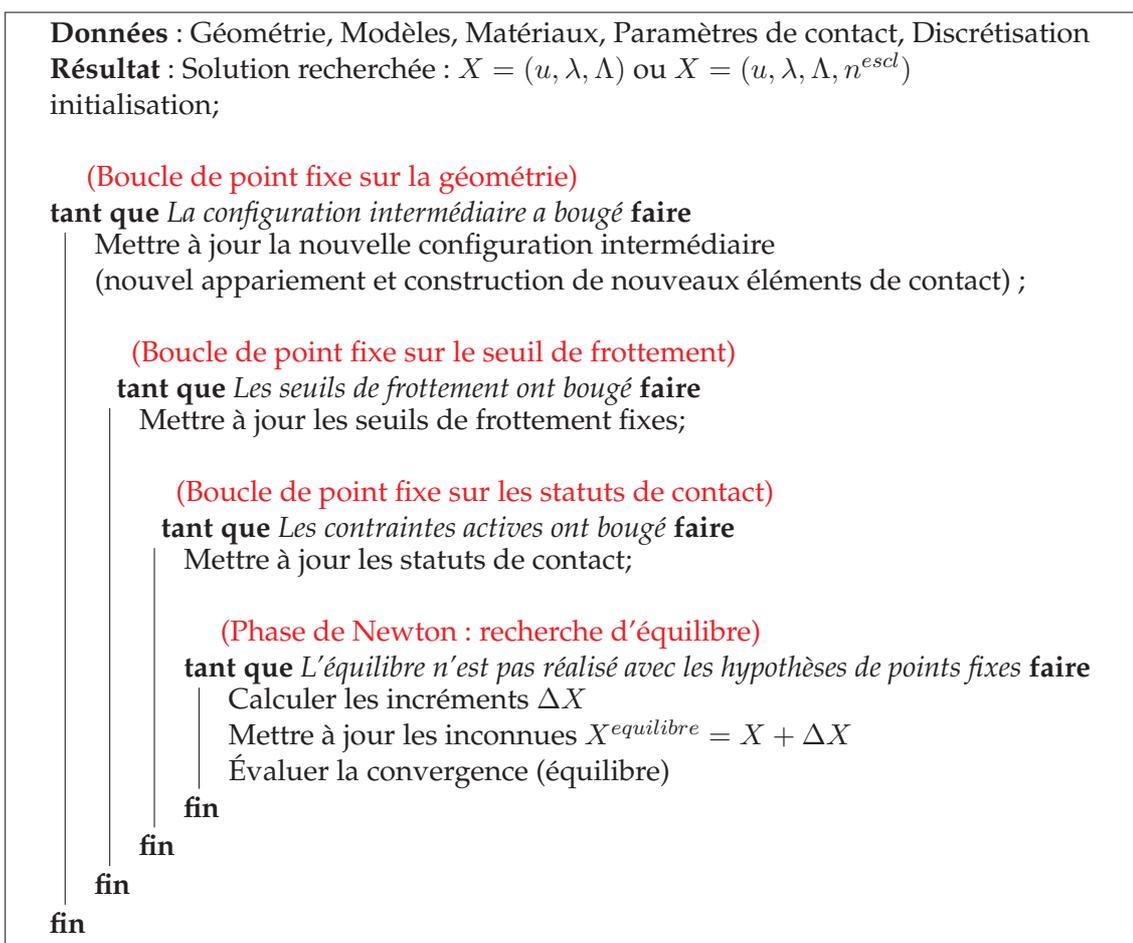


FIGURE 3.10 – Évolution des paramètres statuts de contact pendant la phase de Newton : à gauche point fixe, à droite Newton généralisé



Algorithme 1 : Algorithme de point fixe : gestion séquentielle des paramètres de contact

Ces hypothèses impactent la linéarisation du problème.

Conséquences sur la linéarisation du problème

La phase de Newton consiste à résoudre le problème non linéaire à paramètres fixés :

$$F^{p_0}(X) = 0$$

par des itérations successives basées sur la recherche du *Jacobien généralisé* du système. Soit à trouver ΔX , pour X connu tel que \hat{X} soit la solution du système suivant :

$$F^{p_0}(\hat{X}) = 0 \approx F^{p_0}(X) + J^{p_0}(X)\Delta X = 0$$

$$\hat{X} = X + \Delta X$$

La difficulté se trouve dans le calcul du jacobien généralisé. Dans le cas des non linéarités rencontrées ici, ce jacobien se scinde en trois parties : comportement, grandes déformations et contact-frottement.

$$J^{p_0}(X) = J^{compor}(U) + J^{gdef}(U) + J^{cont-frott,p_0}(X) = 0 \quad (3.29)$$

On se concentre uniquement sur le calcul de la partie contact-frottement. Nous allons détailler les calculs liés à la méthode de Newton-Point fixe.

Dans le cas contact :

$$J^{cont} = \Delta \left(\int_{\Gamma_c} S_u (\lambda_n - r_n d_n) \delta d_n \right) + \Delta \left(\int_{\Gamma_c} \lambda_n - S_u (\lambda_n - r_n d_n) \delta \lambda_n \right) \quad (3.30)$$

Le premier terme est la variation des forces de contact tandis que le deuxième terme est la variation de la loi équivalente de Signorini ré-écrite sous forme faible d'équation de projection. Le calcul qu'il est important de préciser pour obtenir la matrice jacobienne de contact concerne la deuxième variation du jeu normal. On a :

$$d = (y^1 - \bar{y}) = d_n n + d_t, \quad d_n = (y^1 - \bar{y})n \quad (3.31)$$

$$\delta d_n = \delta(u^1 - \bar{u}) n + (u^1 - \bar{u}) \delta n$$

$$\Delta d_n = \Delta(u^1 - \bar{u}) n + (u^1 - \bar{u}) \Delta n$$

On a :

$$\delta n = -(\delta t_\alpha \cdot n) t_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

$$t_\alpha = \frac{\partial \bar{y}}{\partial \zeta}$$

$$\delta t_\alpha = \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \zeta^2} \delta \zeta$$

Du fait qu'on fixe le point projeté du point esclave au cours des itérations de Newton (boucle de point fixe sur la géométrie), la variation $\delta \zeta = 0$. De plus on néglige les effets d'inertie. On a :

$$\delta d_n = (\delta u^1 - \delta \bar{u}) n, \quad \Delta d_n = (\Delta u^1 - \Delta \bar{u}) n, \quad \Delta \delta d_n = 0 \quad (3.32)$$

Dans le cas du frottement :

$$J^{frott} = \Delta \left(\int_{\Gamma_c} \mu \lambda_n^0 S_u S_f (\Lambda + r_t d_t) \delta d_t \right) + \Delta \left(\int_{\Gamma_c} \mu \lambda_n^0 S_u (1 - S_f) \frac{\Lambda + r_t d_t}{\|\Lambda + r_t d_t\|} \delta d_t \right) + \tilde{J}^{frott} \quad (3.33)$$

Avec

$$\tilde{J}^{frott} = \Delta \left(\int_{\Gamma_c} \mu \lambda_n^0 \left((1 - S_u) (\Lambda \delta \Lambda) + S_u \{ \Lambda - S_f (\Lambda + r_t d_t) \} + S_u \left\{ \Lambda - (1 - S_f) \frac{\Lambda + r_t d_t}{\|\Lambda + r_t d_t\|} \right\} \right) \right) \quad (3.34)$$

Le premier terme de J^{frott} est la variation de la force tangentielle en cas d'adhérence. Le deuxième terme est la variation de cette même force en cas de glissement. \tilde{J}^{frott} représente la loi faible de Coulomb ré-écrite sous forme d'équations de projection. Avant de préciser la linéarisation, on rappelle que :

- Lorsqu'il n'y a pas de contact : $S_u = 0, \forall S_f$, dans ce cas les forces tangentielles s'annulent automatiquement dans les expressions ci-dessus.
- Lorsqu'il y a adhérence : $S_u = 1, S_f = 1$, dans ce cas la contribution des forces de glissement s'annule automatiquement et via la loi faible de frottement on a $d_t = 0$ à convergence.
- Lorsqu'il y a glissement : $S_u = 1, S_f = 0$, dans ce cas la contribution de la partie adhérente est nulle.

Pour obtenir la matrice tangente, il faut calculer la deuxième variation du jeu tangent ainsi que la variation du seuil de frottement au cours des itérations de Newton. Du fait des boucles de points fixes sur les seuils de frottement et sur la géométrie, on a :

$$d_t = (I - n \otimes n)(u^1 - \bar{u}) \quad (3.35)$$

$$\delta d_t = (I - n \otimes n)(\delta u^1 - \delta \bar{u}), \quad \Delta d_t = (I - n \otimes n)(\Delta u^1 - \Delta \bar{u}), \quad \Delta \delta d_t = 0, \quad \Delta(\mu \lambda_n^0) = 0 \quad (3.36)$$

Remarque :

La matrice jacobienne de contact-frottement obtenue est symétrique. Ce qui est un avantage en termes de stockage de données et de performances pour les solveurs linéaires.

Un second avantage de cette méthode est que dans la phase de Newton on résout un système quasiment régulier. Mais ce gain en régularité est pénalisé sur certains problèmes par une difficulté de convergence des boucles de point fixe.

D'un point de vue cinématique, on dira que la méthode de point fixe permet de décrire le point maître et le noeud esclave par une cinématique Lagrangienne : les termes de convection $\frac{\partial y}{\partial \zeta} \delta \zeta$ liés aux variations des vecteurs position des points sont nuls.

2.2 Méthode de Newton Généralisée

Suppression de la boucle de point fixe sur la géométrie :

À chaque itération de Newton, on détermine de nouveaux couples de points esclaves-maîtres sur une configuration intermédiaire donnée par l'itération précédente. On continue les itérations de Newton jusqu'à ce que les couples géométriques soient stabilisés. Donc on renforce la convergence de l'équilibre par un critère supplémentaire en géométrie. En d'autres termes, la réalisation de l'équilibre des forces ne suffit pas à faire converger l'algorithme. Il faut impérativement corriger la configuration prédictive sur laquelle les couples de contact ont été construits.

Suppression de la boucle de point fixe sur les seuils de frottement :

À chaque itération de Newton, on veut que les seuils de frottement soient réactualisés.

Pour un noeud esclave donné, la valeur de pression de contact est une inconnue du problème. Donc pour l'itération courante de Newton, la valeur du seuil de frottement est la valeur de l'itération précédente. On continue les itérations de Newton jusqu'à ce que les seuils de frottement soient stabilisés pour tous les noeuds esclaves.

Suppression de la boucle de point fixe sur les statuts de contact :

De la même façon, à chaque itération de Newton, on actualise les statuts de contact. On continue les itérations de Newton jusqu'à ce que les statuts de contact soient stabilisés sur tous les noeuds esclaves.

Conséquences sur la linéarisation du problème :

La linéarisation complète des termes de contact est nettement moins évidente dans le cas de Newton généralisé.

Pour le contact, on a besoin de calculer les variations du jeu normal :

$$\begin{aligned} d &= (y^1 - \bar{y}) = d_n n, \quad d_n = (y^1 - \bar{y}).n & (3.37) \\ \tilde{d}d_n &= (\delta y^1 - \delta \bar{y} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial \zeta^\alpha} \delta \zeta^\alpha).n + (y^1 - \bar{y}).\tilde{\delta}n \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}x &= \delta x + \frac{\partial x}{\partial \zeta^\alpha} \delta \zeta^\alpha \\ \tilde{\Delta}x &= \Delta x + \frac{\partial x}{\partial \zeta^\alpha} \Delta \zeta^\alpha \\ \tilde{\delta}d_n &= (\delta y^1 - \delta \bar{y} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial \zeta^\alpha} \delta \zeta^\alpha).n + d_n n.\tilde{\delta}n \end{aligned}$$

Du fait que la normale soit unitaire on a :

$$n.n = 1, \quad \tilde{\delta}(n.n) = 0 \implies n.\tilde{\delta}n = 0$$

De plus,

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \zeta^\alpha}.n = t_\alpha.n = 0$$

D'où

$$\tilde{\delta}d_n = (\delta y^1 - \delta \bar{y}).n, \quad \tilde{\Delta}d_n = (\Delta y^1 - \Delta \bar{y}).n \quad (3.38)$$

Pour calculer la deuxième variation du jeu normal on part de l'équation :

$$\begin{aligned} (y^1 - \bar{y}) &= d_n n \\ (\delta y^1 - \delta \bar{y} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial \zeta^\alpha} \delta \zeta^\alpha) &= \delta d_n n + d_n \tilde{\delta}n \\ (\Delta \delta y^1 - \Delta \delta \bar{y} - \frac{\partial \delta \bar{y}}{\partial \zeta} \Delta \zeta - \frac{\partial \Delta \bar{y}}{\partial \zeta} \delta \zeta - \frac{\partial \bar{y}}{\partial \zeta} \Delta \delta \zeta) &= \Delta \delta d_n n + \delta d_n \tilde{\Delta}n + \Delta d_n \tilde{\delta}n + d_n \tilde{\Delta} \tilde{\delta}n \end{aligned}$$

En supposant que les termes d'inertie sont négligeables, on a :

$$\Delta \delta d_n = (-\frac{\partial \delta \bar{y}}{\partial \zeta} \Delta \zeta - \frac{\partial \Delta \bar{y}}{\partial \zeta} \delta \zeta).n - d_n \tilde{\Delta} \tilde{\delta}n.n \quad (3.39)$$

On a :

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}n &= -(\tilde{\delta}t_\alpha \cdot n) \cdot t_\alpha \\ \tilde{\Delta}\tilde{\delta}n &= -(\tilde{\Delta}\tilde{\delta}t_\alpha \cdot n) \cdot t_\alpha - (\tilde{\delta}t_\alpha \cdot \tilde{\Delta}n) \cdot t_\alpha - (\tilde{\delta}t_\alpha \cdot n) \cdot \tilde{\Delta}t_\alpha \\ \tilde{\Delta}\tilde{\delta}n &= -(\tilde{\Delta}\tilde{\delta}t_\alpha \cdot n) \cdot t_\alpha + (\tilde{\delta}t_\alpha \cdot (\tilde{\Delta}t_\beta \cdot n)t_\beta) \cdot t_\alpha - (\tilde{\delta}t_\alpha \cdot n) \cdot \tilde{\Delta}t_\alpha\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à préciser le calcul de $\delta\zeta$:

$$\begin{aligned}\delta y^1 - \delta\bar{y} - \frac{\partial y}{\partial \zeta^\alpha} \delta\zeta^\alpha &= \delta d_n n + d_n \tilde{\delta}n \\ \delta y^1 - \delta\bar{y} - \frac{\partial y}{\partial \zeta^\alpha} \delta\zeta^\alpha &= \delta d_n n - d_n (\tilde{\delta}t_\beta \cdot n) \cdot t_\beta \\ \delta y^1 - \delta\bar{y} - t_\alpha \delta\zeta^\alpha &= \delta d_n n - d_n \left(\frac{\partial \delta\bar{y}}{\partial \zeta^\beta} \cdot n \right) \cdot t_\beta - d_n \left(\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \zeta^\alpha \partial \zeta^\beta} \cdot n \right) \cdot t_\beta \delta\zeta^\alpha \\ (t_\alpha t_\beta - d_n \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \zeta^\alpha \partial \zeta^\beta} \cdot n) \delta\zeta^\alpha &= (\delta y^1 - \delta\bar{y}) t_\beta - d_n \left(\frac{\partial \delta\bar{y}}{\partial \zeta^\beta} \cdot n \right)\end{aligned}$$

On pose

$$A_{\alpha,\beta} = (t_\alpha t_\beta - d_n \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \zeta^\alpha \partial \zeta^\beta} \cdot n)$$

Et

$$B_\beta = (\delta y^1 - \delta\bar{y}) t_\beta - d_n \left(\frac{\partial \delta\bar{y}}{\partial \zeta^\beta} \cdot n \right)$$

On a :

$$A_{\alpha,\beta} \delta\zeta^\alpha = B_\beta \quad (3.40)$$

$$\delta\zeta^\alpha = A'_{\alpha,\beta} B_\beta \quad (3.41)$$

On montre que l'inverse de $A_{\alpha,\beta}$ s'écrit de la façon suivante :

$$A'_{\alpha,\beta} = \frac{t_\alpha \cdot t_\beta}{1 - d_n^2} + d_n \frac{\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \zeta^\alpha \partial \zeta^\beta}}{1 - d_n^2} \quad (3.42)$$

On précise aussi les calculs des variations du jeu tangentiel :

$$\delta d_t = (I - n n^T)(\delta y - \tilde{\delta}\bar{y}), \quad \Delta d_t = (I - n n^T)(\Delta y - \tilde{\Delta}\bar{y}) \quad (3.43)$$

$$\Delta \delta d_t = -2\tilde{\Delta}n n(\delta y - \tilde{\delta}\bar{y}) - (I - n n^T)(\tilde{\Delta}\tilde{\delta}\bar{y}) \quad (3.44)$$

Avec

$$\tilde{\Delta}\tilde{\delta}\bar{y} = \frac{\partial \delta\bar{y}}{\partial \zeta^\alpha} \Delta\zeta^\alpha + \frac{\partial \Delta\bar{y}}{\partial \zeta^\alpha} \delta\zeta^\alpha + \delta\zeta^\beta \frac{\partial \delta\bar{y}}{\partial \zeta^\alpha \partial \zeta^\beta} \Delta\zeta^\alpha$$

Il reste à préciser la linéarisation des intégrales liées aux termes de frottement. Il suffit de remplacer le seuil fixe $\mu\lambda_n^0$ par $\mu\lambda_n$. La conséquence est que les termes de frottement contribuent aux matrices de contact mais l'inverse n'est pas vrai.

Remarque

La matrice de contact-frottement relative à la méthode de Newton généralisée est non symétrique en présence du frottement.

De plus le système à résoudre est fortement non régulier. Le vrai avantage de cette méthode est qu'une seule boucle est nécessaire pour résoudre toutes les non linéarités.

Pour simplifier le calcul de la matrice tangente, le choix qui a été fait est une méthode de *quasi*-Newton généralisée : on considère uniquement dans les équations les termes de première et deuxième variation de jeu normal. Par contre on néglige les contributions venant de la deuxième variation du jeu tangentiel. Les expressions des matrices et vecteurs élémentaires sont données en annexe de ce document.

Données : Géométrie, Modèles, Matériaux, Paramètres de contact, Discrétisation

Résultat : Solution du problème : $X = (u, \lambda, \Lambda)$ ou $X = (u, \lambda, \Lambda, n^{escl})$
initialisation;

(Boucle de Newton généralisé : équilibre + statuts contact + seuil de frottement + géométrie non fixée)

tant que L'équilibre n'est pas réalisé sur la configuration intermédiaire **faire**

Calcul des incréments ΔX par une **linéarisation complète**

Mettre à jour les inconnues $X^{equilibre} = X + \Delta X$

Mettre à jour les statuts de contact

Mettre à jour les seuils de frottement

Mettre à jour les couples géométriques de contact

Évaluer la convergence (géométrie+équilibre+seuils de frottement)

fin

Algorithme 2 : Algorithme de Newton généralisé : gestion simultanée des paramètres de contact

Prise en compte la nouvelle formulation pour le contact sans frottement

Nous avons introduit une nouvelle formulation interprétée comme une forme faible renforçant la condition cinématique sur les normales. Les inconnues de normales sont désormais portées par des noeuds esclaves. On linéarise cette nouvelle formulation.

$$n + \Delta n \mapsto \Delta \left(\int_{\Gamma_c} S_u \kappa_n (n^{escl} - \eta(u)) \delta(n - \eta(u)) \right) + \int_{\Gamma_c} S_u \kappa_n (n^{escl} - \eta(u)) \delta(n - \eta(u)) \quad (3.45)$$

$\int_{\Gamma_c} S_u \kappa_n (n^{escl} - \eta(u)) \delta(n - \eta(u))$ participe au second membre.

$$\Delta \left(\int_{\Gamma_c} S_u \kappa_n (n^{escl} - \eta(u)) \delta(n - \eta(u)) \right) = \underbrace{\int_{\Gamma_c} S_u \kappa_n (\Delta n^{escl} - \Delta \eta(u)) \delta(n - \eta(u))}_{I_1} + \underbrace{\int_{\Gamma_c} S_u \kappa_n (n^{escl} - \eta(u)) \Delta \delta(n - \eta(u))}_{I_2} \quad (3.46)$$

Pour calculer I_1 il faut connaître les expressions :

$$\eta(u) = t_1 \wedge t_2 \rightarrow \Delta \eta(u) = \Delta t_1 \wedge t_2 + t_1 \wedge \Delta t_2$$

$$\Delta \eta(u) = \frac{\partial \Delta y}{\partial \zeta_1} \wedge t_2 + t_1 \wedge \frac{\partial \Delta y}{\partial \zeta_1 2} \quad (3.47)$$

$$\delta \eta(u) = \frac{\partial \delta y}{\partial \zeta_1} \wedge t_2 + t_1 \wedge \frac{\partial \delta y}{\partial \zeta_1 2} \quad (3.48)$$

Pour calculer I_2 il faut connaître l'expression de $\Delta \delta n$. Pour ce faire, on utilise la relation suivante :

$$\delta n = -(n \cdot \delta t^\alpha) t^\alpha \rightarrow$$

$$\Delta \delta n = -(\Delta n \cdot \delta t^\alpha) t^\alpha - (n \cdot \Delta \delta t^\alpha) t^\alpha - (n \cdot \delta t^\alpha) \Delta t^\alpha$$

$$\Delta \delta t^\alpha = \frac{\partial \Delta \delta y}{\partial \zeta_\alpha}$$

Le cadre quasi-statique nous permet de négliger $\Delta \delta y$. D'où

$$\Delta \delta n = -(\Delta n \cdot \delta t^\alpha) t^\alpha - (n \cdot \delta t^\alpha) \Delta t^\alpha \quad (3.49)$$

$$\Delta \delta \eta(u) = -(\Delta \eta(u) \cdot \delta t^\alpha) t^\alpha - (\eta(u) \cdot \delta t^\alpha) \Delta t^\alpha$$

2.3 Méthode de Newton partielle

Données : Géométrie, Modèles, Matériaux, Paramètres de contact, Discrétisation

Résultat : Solution du problème : $X = (u, \lambda, \Lambda)$ ou $X = (u, \lambda, \Lambda, n^{escl})$

initialisation;

(Boucle de point fixe sur la géométrie)

tant que Les couples géométriques de contact ont bougé **faire**

Mettre à jour les couples géométriques de contact

(mise à jour nouvel appariement et nouvelle configuration géométrique de contact) ;

(Phase de Newton : équilibre + statuts contact + seuil de frottement)

tant que L'équilibre n'est pas réalisé avec les hypothèses de points fixes **faire**

Calcul des incréments ΔX

Mettre à jour les inconnues $X^{equilibre} = X + \Delta X$

Mettre à jour les seuils de frottement

Mettre à jour les statuts de contact

Évaluer la convergence sur l'équilibre

fin

fin

Algorithme 3 : Algorithme de Newton partiel : point fixe uniquement sur la géométrie

Ce nouvel algorithme combine les boucles de point fixe sur la géométrie et de Newton généralisé sur les statuts de contact et sur les seuils de frottement.

La matrice de contact-frottement est non-symétrique. L'avantage est qu'on peut conserver une cinématique lagrangienne totale sur la zone de contact.

Les algorithmes que nous avons exposés jusqu'alors calculent simultanément les déplacements et les multiplicateurs de Lagrange de contact dans la phase de Newton. La boucle de point fixe n'intervient que sur les paramètres de contact (seuil de frottement, couples géométriques, statuts de contact). Dans *Code_Aster*, cette technique s'appelle « formulation continue ». Il est aussi possible d'utiliser d'autres approches numériques basées sur les inégalités variationnelles. C'est l'objet de la prochaine section.

3 Algorithmes de résolution basés sur les inégalités variationnelles

Ces algorithmes privilégient une *approche découplée ou séquentielle*. Dans la phase de Newton, on calcule d'abord le déplacement qui permet de réaliser l'équilibre. Puis on vérifie la loi de Signorini-Coulomb grâce à des sous-itérations. L'équivalent de ces algorithmes pour le Lagrangien augmenté est la méthode d'Uzawa qui n'a pas été développée dans le cadre de cette thèse (voir Laursen, Glowinski [45,74]).

Ce qui coûte cher dans un calcul, au delà du nombre de degrés de libertés, ce sont

les non linéarités (élastoplasticité, grandes déformations, contact-frottement). L'avantage de l'approche découplée est son côté modulaire (le solveur de contact s'appuie sur la solution du problème sans contact).

On décrit le principe de résolution de la *méthode des contraintes actives*. Rappelons l'inégalité variationnelle mixte discrète pour un problème de contact sans frottement d'un corps déformable élastique avec un corps rigide en statique.

Soit à trouver $(u^h, \lambda_n^h) \in (H_0^{1,h}(\Omega^h))^l \times M_{\lambda_n^h}^h, l = 2, 3$ tel que

$$\begin{cases} a(u^h, v^h - u^h) - L(v^h - u^h) + \int_{\Gamma_c^h} \lambda_n^h v_n^h = 0, \\ \int_{\Gamma_c^h} (\lambda_n^h - \lambda_n^{*,h}) u_n^h \geq 0, \\ \forall (v^h, \lambda_n^{*,h}) \in (H_0^{1,h}(\Omega^h))^{2,3} \times M_{\lambda_n^h}^h \end{cases} \quad (3.50)$$

A l'intérieur d'une itération de Newton, on a les étapes de résolution suivantes :

Étape 1 Prédiction : on cherche la solution $u^h \in (H_0^{1,h}(\Omega^h))^l$ sans contact tel que :

$$a(u^h, v^h - u^h) = L(v^h - u^h) \quad (3.51)$$

Étape 2 Correction de la loi de contact :

Soit à trouver $(u_n^{corr,h}, \lambda_n^{corr,h}) \in (H_0^{1,h}(\Omega^h))^l \times M_{\lambda_n^h}^h$ tel que :

$$\int_{\Gamma_c^{corr,h}} (\lambda_n^{corr,h} - \lambda_n^{*,h}) u_n^{corr,h} \geq 0 \quad (3.52)$$

Cette étape se déroule en plusieurs étapes et elle consiste à construire un espace solution $(H_0^{1,h}(\Omega^h))^l \times M_{\lambda_n^h}^h$ acceptable pour la condition de Signorini.

Étape 2.1 Correction du jeu normal : parmi tous les noeuds de la zone de contact on cherche ceux qui n'ont pas respecté les conditions de signe sur le jeu :

$$\begin{aligned} (E_{ok}) : u_{ni=1, N_c}^i &< d_0 && \text{ensemble des noeuds ayant respecté Signorini} \\ (E_{non ok}) : u_{ni=1, N_c}^i &\geq d_0 && \text{ensemble des noeuds n'ayant pas respecté Signorini} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Étape 2.2 Calcul des forces nodales : on condense les équations du système (3.50) uniquement sur les noeuds de l'ensemble $(E_{non\ ok})$ afin de déterminer les forces nodales. Soit S_c l'opérateur qui réalise la condensation, on a :

$$[S_c]\{\lambda_n^i\}_{(i \in (E_{non\ ok}))} = \{d_0\} \quad (3.54)$$

Pour cette résolution, on s'appuie sur le solveur sans contact.

Étape 2.3 Correction des forces nodales : on vérifie pour chaque noeud de l'ensemble $(E_{non\ ok})$, si les forces nodales calculées respectent la condition de signe sur la force et de complémentarité. Si c'est le cas alors on passe à l'itération de Newton suivante dans le cas contraire, on retourne à l'étape 2.1 en désactivant la liaison active.

Il existe d'autres types d'algorithmes utilisés dans Code_Aster :

- Méthode du Gradient Conjugué et Projeté pour le contact sans frottement (voir [26,95,104]).
- Méthode du Lagrangien pour le contact sans/avec frottement : c'est une variante de la méthode des contraintes actives (voir [26,58]).

Il existe aussi d'autres méthodes dans la littérature telles que :

- Méthode de relaxations successives avec projection (voir [13,77,93])
- Méthode de Gauss Seidel (voir [61])
- Méthode de gradient conjugué pour le contact avec frottement (voir Renouf-Alart [95])

Remarque : les sous-étapes (2.1-2.3) démontrent la difficulté de ce type d'algorithmes. En effet, dans le cas de fortes non linéarités (grandes transformations, élasto-plasticité ou grandes déformations) et du frottement, on aura du mal à stabiliser les forces de contact. On aura donc des difficultés de convergence des algorithmes. Néanmoins, dans les cas simples on dispose de quelques résultats de convergence (voir Raous [93]).

4 Exemples numériques en élasticité et petites déformations

Exemple n^01 : influence de la méthode d'intégration numérique

On considère un cas-test qui met en avant la méthode d'intégration numérique. En effet, on a exposé dans la section 1, le choix stratégique qui a été fait pour l'approximation des multiplicateurs de Lagrange ainsi qu'une méthode générale de traitement des incompatibilités de maillages.

Il s'agit d'un bloc élastique carré de côté 40 mm et de module d'Young de 10^{11} Pa soumis à une pression latérale de $15 \cdot 10^7\text{ Pa}$ et une pression normale de $5 \cdot 10^7\text{ Pa}$. On utilise un maillage quadratique avec une taille de maille d'environ $h = 1.25\text{ mm}$ pour le corps esclave. Le corps maître, supposé rigide, est modélisé par une ligne. Le coefficient de frottement est de 1. Enfin le coefficient de Poisson est de 0.3. On utilise la méthode de Newton généralisée pour résoudre ce problème.

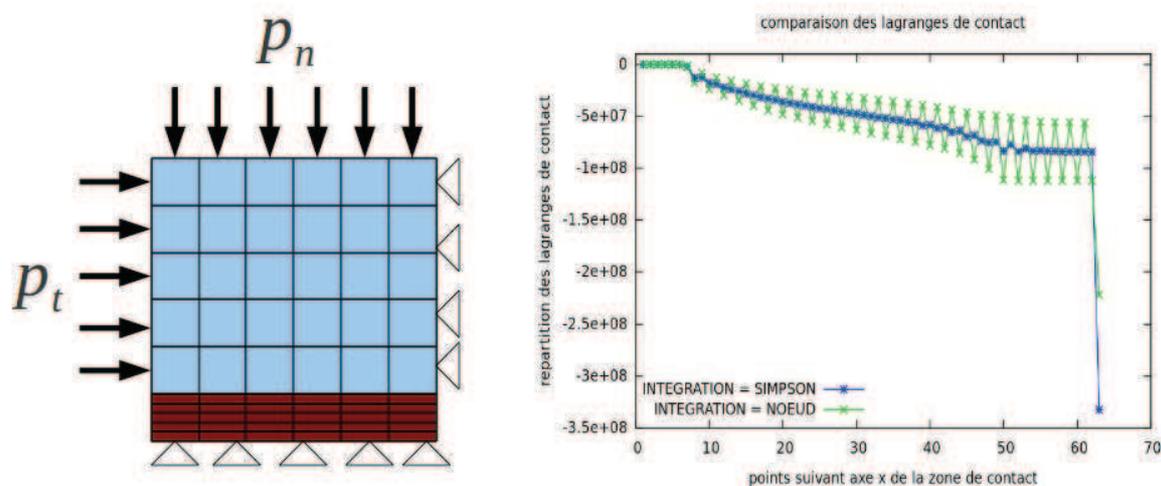


FIGURE 3.11 – Influence de la méthode d'intégration numérique

Le relevé des pressions de contact montre qu'en utilisant une intégration par sous-découpage d'éléments et une quadrature de Simpson sur chaque sous-élément, on a moins d'oscillations.

Toutefois il est à noter que sur certains cas la méthode d'intégration par sous découpage d'éléments ne résout pas les oscillations numériques. Il faut donc employer d'autres méthodes comme la méthode mortar (voir [91]) qui n'est pas encore implémentée dans Code_Aster .

Exemple n^02 : Tests de performances

Ce test (voir figure 3.12) modélise un contact avec frottement entre une goupille et un alésage maillés de manière compatible. La structure est modélisée en déformations planes. Seule une moitié est maillée pour raison de symétrie.

Les propriétés du matériau de la goupille sont telles que : $E = 2.1 \cdot 10^5 Pa, \nu = 0.3$.

Les propriétés du matériau de l'alésage sont telles que : $E = 7 \cdot 10^4 Pa, \nu = 0.3$.

Le coefficient de frottement varie de 0 à 4.5.

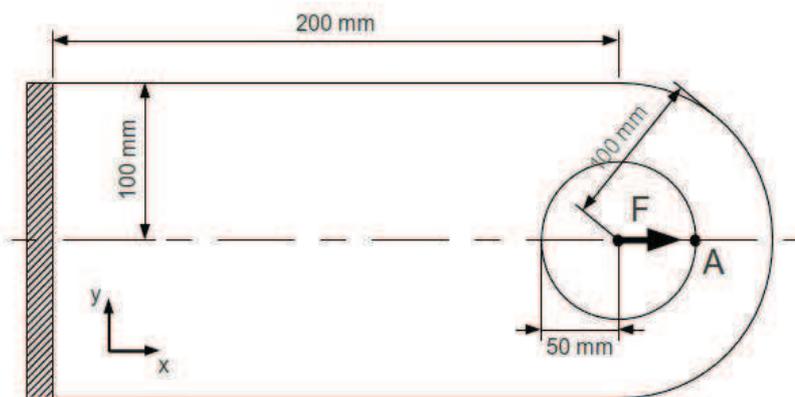


FIGURE 3.12 – contact entre deux corps élastiques

Ce test comporte 820 quadrangles (QUAD4) soit 2642 noeuds et 41 noeuds esclaves. On utilise les algorithmes suivants :

- Méthode des contraintes actives ou méthode de Lagrangien en frottement.
- Lagrangien augmenté avec la méthode du Point fixe
- Lagrangien augmenté avec la méthode de Newton Partielle
- Lagrangien augmenté avec la méthode de Newton Généralisée

On s'intéresse aux questions de performances des algorithmes. Les algorithmes fournissent les résultats identiques en termes de déplacement et en pression.

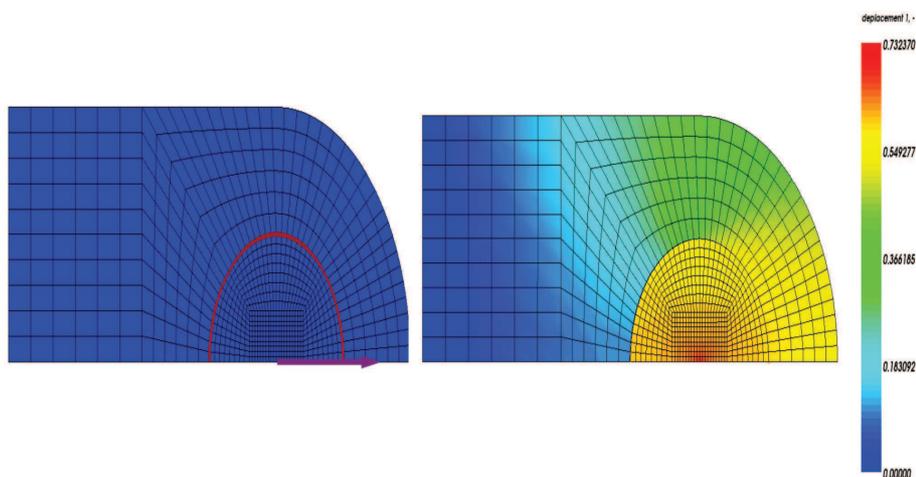


FIGURE 3.13 – contact entre deux corps élastiques

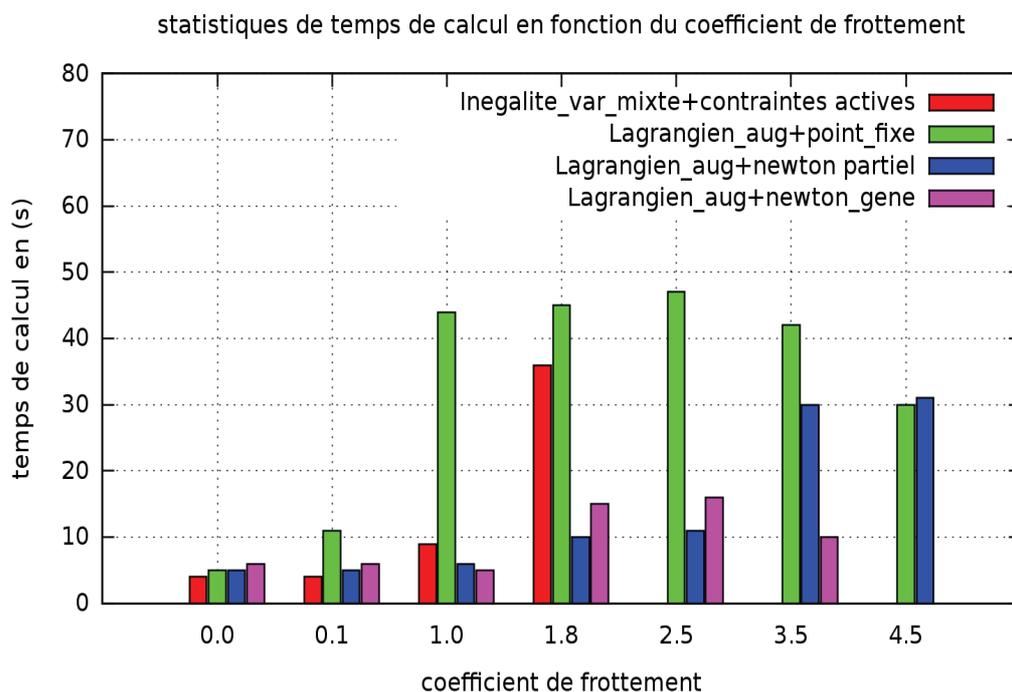


FIGURE 3.14 – Statistiques sur les temps de calcul : influence du frottement

Ce test simple en élasticité linéaire montre déjà les avantages et les inconvénients de chacune des méthodes. Dans le cas sans frottement, c'est la méthode des contraintes actives qui est la plus rapide. Lorsqu'on fait intervenir du frottement, cette dernière

méthode est moins robuste au fur et à mesure que le coefficient de frottement augmente : il y a perte de convergence à partir de 1.8. Dans les cas d'un coefficient de frottement élevé, ce sont les méthodes de point fixe et de Newton partiel qui sont les plus robustes. De plus, la méthode de Newton partielle combine les avantages de la méthode de Newton généralisée en terme de rapidité et de la méthode de point fixe en termes de robustesse. La méthode de Newton généralisée ne converge pas pour un coefficient de frottement supérieure à 3.5 : c'est une méthode qui gère toutes les non-linéarités en une seule boucle d'itérations de Newton d'où son manque de robustesse dans ce cas.

Exemple n^03 : Mise en oeuvre de la nouvelle formulation en normales

On considère un dernier cas-test pour tester la nouvelle formulation (voir figure 3.15).

Un déplacement imposé symétrique est appliqué sur les deux plaques. Le rayon

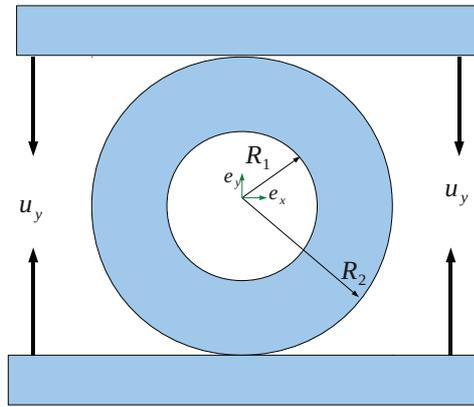


FIGURE 3.15 – compression d'un corps en polyuréthane

extérieur de l'anneau est de $R_2 = 6.35\text{cm}$ et son rayon intérieur est $R_1 = 4.15\text{cm}$. On impose un déplacement $u_y = 4.45\text{cm}$. Le calcul est réalisé sans frottement. On utilise un maillage avec 241 quadrangles (QUAD4), 291 noeuds dont 41 noeuds esclaves.

L'objectif de ce travail est la mise en oeuvre de la formulation en normales et sa comparaison avec la méthode classique de Lagrangien augmenté.

On rappelle qu'on rajoute un terme supplémentaire dans la formulation classique de sorte à traiter les normales esclaves comme des inconnues globales. On utilise une technique de pénalisation sur la condition cinématique de la normale.

$$\int_{\Gamma_c^h} S_u^h \kappa_n (n^{escl,h} - \eta^h(u^h)) \delta(n^{escl,h} - \eta^h(u^h)) \quad (3.55)$$

Le choix de κ_n n'est pas simple : si on le prend trop grand, non seulement le risque d'un conditionnement mauvais de la matrice on a aussi le fait que les pressions fictives introduites deviennent trop importantes empêchant la convergence. Si on le prend trop petit la nouvelle formulation devient une formulation classique.

On utilise un algorithme de Newton généralisé pour les deux formulations. Pour $\kappa_n = 100$, on constate que les résultats fournis par la nouvelle formulation donne des résultats proches de la formulation classique.

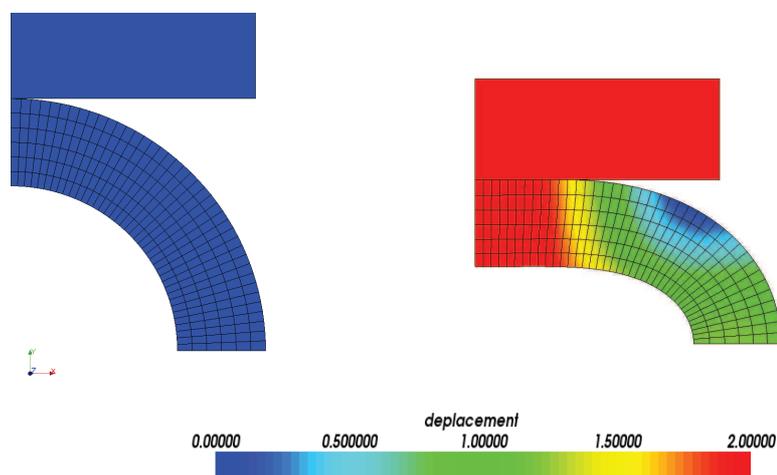


FIGURE 3.16 – Écrasement d'un anneau en polyuréthane

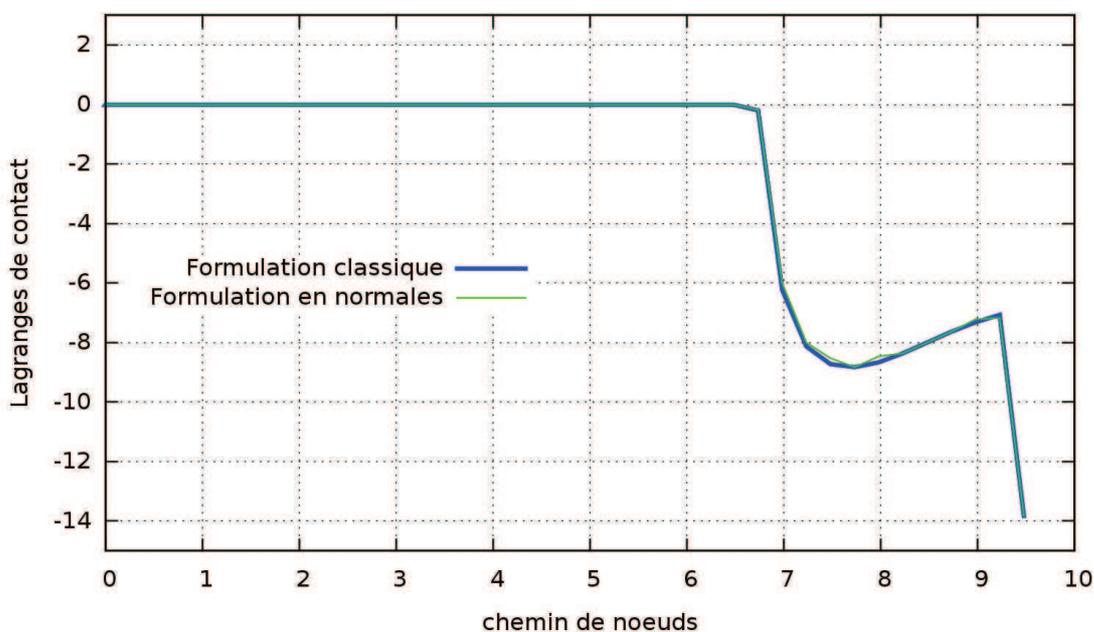


FIGURE 3.17 – Comparaison des formulations

5 Conclusion du chapitre

Dans ce travail, on s'est intéressé aux méthodes basées sur les formulations sans contraintes pour les raisons suivantes :

- En termes de performances, on a observé que les méthodes basées sur les formulations sous contraintes (Gradient Conjugué Projeté, relaxation avec projection, contraintes actives, Lagrangien) sont souvent plus rapides que celles basées sur les formulations sans contraintes, mais sur plusieurs études faisant intervenir le frottement, ces méthodes semblent être moins robustes. Par exemple, il est difficile de stabiliser l'ensemble solution admissible $K(u, \lambda)$ des déplacements et des multiplicateurs de Lagrange en présence du frottement, des grandes déformations et de l'élasto-plasticité. L'étude dite de « 3D-ironning test » qui sera exposée au chapitre 5 confirmera ces propos.
- D'un point de vue robustesse, les formulations sans contraintes s'adaptent très facilement aux non linéarités du système mais elles ont un temps de calcul élevé. *C'est dans cette optique de réduction du temps de calcul qu'ont été développées dans le cadre de la thèse deux nouvelles méthodes dans Code_Aster : la méthode de Newton généralisée et la méthode de Newton partielle.* Toutefois, on remarque encore que dans certains cas des instabilités numériques conduisent à la perte de convergence des algorithmes. Ce sera l'objet du prochain chapitre.
- Enfin pour clore ce chapitre, une première piste de recherche sur la mise en oeuvre d'une formulation de Lagrangien augmenté non standard a été menée. Les résultats obtenus sont encourageants : on observe des résultats identiques entre la formulation classique et la nouvelle formulation. Toutefois l'exploitation sur des études industrielles n'a pas été conduite à son terme car d'une part, il y a sans doute des améliorations à apporter et que d'autre part on cherche à ne pas mélanger les difficultés venant de cette formulation avec les difficultés algorithmiques actuelles. C'est pourquoi, la suite de ce document est uniquement consacrée aux algorithmes basés sur le Lagrangien augmenté classique.

Chapitre 4

Études de la robustesse des méthodes basées sur le Lagrangien augmenté

Dans ce chapitre, on aborde les questions suivantes :

- *Comment se positionne les opérateurs de contact-frottement introduits par rapport au formalisme de Lagrangien augmenté de la littérature ?*
- *Les reformulations des lois de contact sont-elles équivalentes à la formulation initiale de Signorini-Coulomb ?*
- *Quelles sont les propriétés mathématiques intéressantes des opérateurs ?*
- *Dans quelles conditions peut-on établir la convergence de la méthode de Newton généralisée ?*

Ce chapitre est une tentative pour apporter quelques éléments de réponse. On présente d'abord les résultats théoriques applicables aux opérateurs de contact introduits dans Code_Aster : on démontre un cadre d'équivalence entre divers formalismes de Lagrangien augmenté puis on montre que les opérateurs appartiennent à des classes d'opérateurs de Lipschitz. Une condition de la convergence de la méthode de Newton généralisée est aussi énoncée. On se base en partie sur les travaux théoriques de Alart [3,4].

Très souvent l'application des résultats théoriques est limitée à des cas très simples. Pour contrôler la robustesse des algorithmes, on introduit une méthode originale pour contrôler les parasites numériques de « cyclage » des statuts de contact-frottement d'un point. C'est l'objet de la deuxième section. Des exemples numériques appuient la pertinence de cette nouvelle méthode.

1 Quelques propriétés mathématiques des opérateurs du Lagrangien augmenté

1.1 Equivalence des formalismes de Lagrangien augmenté

Le Lagrangien augmenté renforce les lois de Signorini-Coulomb via l'écriture des énergies de contact-frottement :

$$W^{cont} + W^{frot} = \int_{\Gamma_c} l_n(v^i(x^i, t), \lambda_n) + \int_{\Gamma_c} l_t(v^i(x^i, t), \Lambda) \quad (4.1)$$

Avec l_n et l_t les densités continues des énergies de contact.

Aux chapitres 1 & 2, nous avons affirmé que le Lagrangien stabilisé et le Lagrangien augmenté étaient équivalents. C'est ce que nous allons démontrer dans la suite de ce chapitre.

Lagrangien stabilisé vs. Lagrangien augmenté

Propriété 1 :

Le Lagrangien stabilisé est défini par :

$$l_n^s(v^i(x^i, t), \lambda_n) = \frac{1}{2r_n} \{S_u(\lambda_n - r_n \cdot v_n) \{ \lambda_n - r_n \cdot v_n \}^2 - \lambda_n^2\} \quad (4.2)$$

Et

$$l_t \equiv -\mu \lambda_n l_t^s$$

$$l_t^s(v^i(x^i, t), \Lambda) = \frac{1}{2r_t} \{ (1 - S_u) \Lambda \cdot \Lambda + S_u \{ S_f \{ [\Lambda + r_t \Delta v_t] [\Lambda + r_t \Delta v_t] - \Lambda \cdot \Lambda \} + (1 - S_f) \{ \left[\frac{\Lambda + r_t \Delta v_t}{\|\Lambda + r_t \Delta v_t\|} \right] \left[\frac{\Lambda + r_t \Delta v_t}{\|\Lambda + r_t \Delta v_t\|} \right] - 2 \|\Lambda + r_t \Delta v_t\| + \Lambda \cdot \Lambda \} \} \} \quad (4.3)$$

Le Lagrangien augmenté de Alart-Curnier-Pietrzak est défini par [2, 88, 89] :

$$l_n^{acp} = \frac{1}{2r_n} \{ Proj_{R^-}(\lambda_n - r_n \cdot v_n)^2 - \lambda_n^2 \} \quad (4.4)$$

Et

$$l_t^{acp} = \begin{cases} \lambda_t \Delta v_t + \frac{r_t}{2} \Delta v_t^2, & \text{Si } \|\lambda_t + r_t \Delta v_t\| \leq -\mu(\lambda_n - r_n v_n), \lambda_n - r_n v_n \leq 0 \\ \frac{1}{2r_t} \left[\|\lambda_t\|^2 - 2(\mu(\lambda_n - r_n v_n))^2 \|\lambda_t + r_t \Delta v_t\| + (\mu(\lambda_n - r_n v_n))^2 \right], & \text{Si } \|\lambda_t + r_t \Delta v_t\| > -\mu(\lambda_n - r_n v_n), \lambda_n - r_n v_n \leq 0 \\ \frac{1}{2r_t} \|\lambda_t\|^2, & \text{Si } \lambda_n - r_n v_n > 0, \forall \lambda_t + r_t \Delta v_t \end{cases} \quad (4.5)$$

Ces deux formalismes sont équivalents

Preuve :
Cas du contact

La démonstration est triviale pour le contact en remarquant que :

$$Proj_{R^-}(x) = S_u(x) x$$

Et

$$[Proj_{R^-}(x)]^2 = S_u(x) x^2$$

Cas adhérent

Il faut et il suffit de montrer que $l_t^{acp} = -\mu\lambda_n l_t^s$

On a $S_u = 1, S_f = 1 \implies l_t^s = \Lambda \Delta v_t + \frac{r_t}{2} \Delta v_t^2$

Soit en remarquant que : $-\mu\lambda_n \Lambda = \lambda_t$,

Et que : $r_t^{acp} = -\mu\lambda_n r_t^s$, on a :

$$-\mu\lambda_n l_t^s = \lambda_t \Delta v_t + \frac{r_t^{acp}}{2} \Delta v_t^2 = l_t^{acp}$$

Cas glissant

Il faut et il suffit de démontrer que $l_t^{acp} \equiv -\mu\lambda_n l_t^s \equiv -\mu(\lambda_n - r_n v_n) l_t^s$

On a :

$$l_t^{acp} = -\frac{1}{2r_t} \left[\|\lambda_t\|^2 - 2(\mu(\lambda_n - r_n v_n))^2 \|\lambda_t + r_t \Delta v_t\| + (\mu(\lambda_n - r_n v_n))^2 \right]$$

Par changement de variables, on pose

$$\lambda_t = -\mu\lambda_n, \quad \lambda_t + r_t \Delta v_t = -\mu(\lambda_n - r_n v_n)(\Lambda + r_t \Delta v_t)$$

On pose que : $r_t^{acp} = -\mu\lambda_n r_t^s$

De plus, dans le cas du glissement on fait l'hypothèse que $v_n = 0$. D'où

$$l_t^{acp} = -\frac{1}{2r_t} (\mu\lambda_n) \left[\Lambda \cdot \Lambda - 2\|\Lambda + r_t \Delta v_t\| + 1 \right]$$

$$\implies l_t^{acp} = -\mu\lambda_n l_t^s \equiv -\mu(\lambda_n - r_n v_n) l_t^s$$

Cas non contact

La démonstration est triviale en remarquant que $S_u = 0, S_f = 0$

Lagrangien stabilisé vs Signorini-Coulomb

Les ré-écritures sous forme de projection des lois de Signorini-Coulomb dérivent de la fonctionnelle de Lagrangien stabilisé.

$$\{P^s\} = \begin{cases} \partial_{\lambda_n} l_n^s \longleftrightarrow \mathbf{Signorini} \\ \partial_{\Lambda} l_t^s \longleftrightarrow \mathbf{Coulomb} \end{cases} \quad (4.6)$$

Propriété 2 : Le Lagrangien stabilisé respecte exactement la condition de Signorini-Coulomb dans un cadre continu

Preuve :

On procède par implication inverse : on montre que la loi de Signorini-Coulomb implique celle de l'écriture en projection du Lagrangien stabilisé et inversement.

Pour le contact

On rappelle la formulation lagrangienne stabilisée :

$$\{P^{s,c}\} = \begin{cases} \lambda_n = S_u(\lambda_n - r_n d_n) (\lambda_n - r_n d_n) \\ S_u(\lambda_n - r_n d_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_n - r_n d_n \leq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda_n - r_n d_n > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (4.7)$$

Et la loi de Signorini

$$\begin{cases} d_n \leq 0 \\ \lambda_n \leq 0 \\ d_n \cdot \lambda_n = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Supposons que Signorini soit vraie.

$$d_n = 0, \lambda_n \leq 0 \Rightarrow \widehat{\lambda}_n = \lambda_n - r_n d_n \leq 0 \Rightarrow S_u(\widehat{\lambda}_n) = 1 \\ \Rightarrow S_u(\lambda_n - r_n d_n) (\lambda_n - r_n d_n) = \lambda_n \Rightarrow \text{Lagrangien stabilisé est vrai}$$

$$d_n < 0, \lambda_n = 0 \Rightarrow \widehat{\lambda}_n = \lambda_n - r_n d_n > 0 \Rightarrow S_u(\widehat{\lambda}_n) = 0 \Rightarrow S_u(\lambda_n - r_n d_n) (\lambda_n - r_n d_n) = 0 = \lambda_n \Rightarrow \text{Lagrangien stabilisé est vrai}$$

On vient de montrer que si la loi de Signorini est vraie alors la ré-écriture sous forme de Lagrangien stabilisé pour le contact est vraie.

Supposons que la ré-écriture sous forme de Lagrangien stabilisé pour le contact soit vraie.

$$\lambda_n = S_u(\lambda_n - r_n d_n) (\lambda_n - r_n d_n), \text{ si } \lambda_n - r_n d_n \leq 0 \Rightarrow \lambda_n = \lambda_n - h_n \cdot d_n \Rightarrow d_n = 0 \Rightarrow \lambda_n \leq 0 \\ \text{donc Signorini est vrai.}$$

$$\lambda_n = S_u(\lambda_n - r_n d_n) (\lambda_n - r_n d_n), \text{ si } \widehat{\lambda}_n > 0 \Rightarrow \lambda_n = 0 \Rightarrow d_n < 0 \text{ donc Signorini est vrai.}$$

On note en conclusion que la loi de Signorini est équivalente à la loi de Lagrangien

stabilisé pour le contact.

Pour le frottement réel

On rappelle la formulation lagrangienne stabilisée

$$\{P^{s,f}\} = \begin{cases} \hat{\lambda}_n = \lambda_n - r_n \cdot d_n \\ g_t = \Lambda + r_t d_t \\ \Lambda = \frac{\lambda_t}{-\mu \cdot \lambda_n} \\ S_u(\hat{\lambda}_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\lambda}_n \leq 0 \\ 0 & \text{si } \hat{\lambda}_n > 0 \end{cases} \\ S_f = I_{B(0,1)}(g_t) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_t \in B(0,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \left[(1 - S_u)\Lambda \right] + S_u \left[\Lambda - S_f[\Lambda + r_t d_t] - (1 - S_f) \frac{\Lambda + r_t d_t}{\|\Lambda + r_t d_t\|} \right] = 0 \\ \lambda_n - S_u(\lambda_n - r_n d_n)(\lambda_n - r_n d_n) = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

On rappelle la loi de Coulomb « réelle » :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } d_n = 0, \lambda_n < 0, \text{ alors } \begin{cases} \frac{\dot{d}_t}{\|\dot{d}_t\|} = \frac{\lambda_t}{\|\lambda_t\|} & \text{si } \|\lambda_t\| = \mu|\lambda_n| \\ \dot{d}_t = 0 & \text{si } \|\lambda_t\| \leq \mu|\lambda_n| \\ \dot{d}_t(\|\lambda_t\| - \mu|\lambda_n|) = 0 \end{cases} \\ \text{si } d_n < 0, \lambda_n = 0 \text{ alors } \|\lambda_t\| = 0, \forall \|\dot{d}_t\| \end{array} \right. \quad (4.10)$$

1. Cas adhérent

On suppose que la loi de Coulomb est vraie :

$$(d_n = 0, \lambda_n \leq 0); (\|\lambda_t\| \leq -\mu\lambda_n, d_t = 0) \Rightarrow$$

$$\|\Lambda\| = \frac{\|\lambda_t\|}{-\mu\lambda_n} \leq 1, \Lambda + r_t d_t \in B(0,1)$$

$$\text{Par définition } S_u = 1, S_f = 1, \text{ d'où } (1 - S_u)\Lambda = 0, (1 - S_f) \frac{\Lambda + r_t d_t}{\|\Lambda + r_t d_t\|} = 0$$

$$\text{De plus, } v_t = 0 \Rightarrow r_t d_t + \Lambda = \Lambda \Rightarrow \Lambda - S_f[\Lambda + r_t d_t] = 0$$

Finalement on a :

$$\left[(1 - S_u)\Lambda \right] + S_u \left[\Lambda - S_f[\Lambda + r_t d_t] - (1 - S_f) \frac{\Lambda + r_t d_t}{\|\Lambda + r_t d_t\|} \right] = 0$$

On montre maintenant l'inverse.

Supposons que le Lagrangien stabilisé soit vraie. Le cas adhérent implique que $S_u = 1, S_f = 0$

$$\left[(1 - S_u)\Lambda \right] + S_u \left[\Lambda - S_f[\Lambda + r_t d_t] - (1 - S_f) \frac{\Lambda + r_t d_t}{\|\Lambda + r_t d_t\|} \right] \rightarrow d_t = 0$$

2. Cas glissant

On suppose que la loi de Coulomb est vraie :

$$(d_n = 0, \lambda_n \leq 0); (\|\lambda_t\| = -\mu\lambda_n, \|d_t\| \neq 0, \frac{v_t}{\|d_t\|} = \frac{\lambda_t}{\|\lambda_t\|}) \Rightarrow$$

$$\|\Lambda\| = 1, \text{ de plus } \frac{d_t}{\|d_t\|} = \frac{\lambda_t}{\|\lambda_t\|} = \Lambda$$

On a :

$$\begin{aligned} \Lambda + r_t d_t &= \Lambda + r_t \Lambda \|d_t\| = \Lambda(1 + r_t \|d_t\|) = \Lambda(\|\Lambda + r_t d_t\|) \\ &\Rightarrow \frac{\Lambda + r_t d_t}{\|\Lambda + r_t d_t\|} - \Lambda = 0 \end{aligned}$$

De plus , on a $\Lambda + r_t d_t \geq 1 \Rightarrow S_u = 1, S_f = 0$. D'où

$$\left[(1 - S_u)\Lambda \right] + S_u \left[\Lambda - S_f[\Lambda + r_t d_t] - (1 - S_f) \frac{\Lambda + r_t d_t}{\|\Lambda + r_t d_t\|} \right] = 0$$

A l'inverse, supposons que le Lagrangien stabilisé est vraie : $S_u = 1, S_f = 0 \Rightarrow \Lambda = \frac{\Lambda + r_t d_t}{\|\Lambda + r_t d_t\|} \Rightarrow \|\Lambda\| = 1 \Rightarrow \|\lambda_t\| = -\mu\lambda_n$ et λ_t colinéaire à d_t .

3. Cas de non contact : trivial

1.2 Classe d'opérateurs lipschitziens

Le but de cette section est d'appliquer les résultats théoriques de la littérature au Lagrangien stabilisé standard. C'est une étape cruciale pour garantir une meilleure compréhension des algorithmes utilisés. On s'intéresse aux points importants :

- Caractérisation des opérateurs de Lagrangien stabilisé
- Les conditions d'existence et d'unicité de solutions
- Les conditions de stabilité-convergence des algorithmes

Définitions

On rappelle quelques définitions utiles par la suite [3].

R^n désigne l'espace des inconnues nodales. On peut le partitionner en Z_i régions non vides suivant les statuts de contact des points.

Définition 1 : Opérateurs Lipschitzien

Un opérateur F de R^n dans R^n est dit Lipschitzien de rapport k si pour tout couple $(x, y) \in R^n \times R^n$

$$\|F(x) - F(y)\| \leq k\|x - y\|$$

On remarque que les opérateurs Lipschitzien sont continus. Si $k \leq 1$ alors on dit que F est une contraction.

Soit Ω_F l'ensemble des points où F n'est pas différentiable. En mécanique numérique du contact, Ω_F dépend des opérateurs mathématiques employés (Lagrangien exact ou augmenté ou encore pénalisé). En particulier, tous les points de contact caractérisés par $(u, \lambda_n, \Lambda) = (0, 0, 0)$ sont des points de non différentiabilité pour le Lagrangien augmenté. D'un point de vue pratique, on a peu de chances d'obtenir ces points mais il arrive souvent des oscillations numériques dits de « cyclage » autour de la zone de non différentiabilité (ce point sera traité dans la section 2). Si x n'appartient pas à Ω_F alors $J(x) = \nabla F(x)$ est une matrice jacobienne classique. Dans le cas contraire on introduit la notion de jacobien généralisé.

Définition 2 : Base du Jacobien généralisé

On appelle base du jacobien généralisé l'ensemble des matrices obtenues comme limites d'une suite de matrices $\nabla F(x^i)$ en x^i , x^i n'appartient pas à Ω_F

$$\delta F(x) = \{\nabla F(x) = \lim_{x^i \rightarrow x} \nabla F(x^i), x^i \text{ n'appartient pas à } \Omega_F\}$$

Pour l'opérateur de contact-frottement en 2D, on écrit (voir [3,4]) :

$$\delta F(0) = K + \begin{cases} \prod_i [0] & \text{pour l'ensemble des points non contactants} \\ \prod_i [N \ N^T + T \ T^T] & \text{pour l'ensemble des points en contact-adhérent} \\ \prod_i [(N - \mu T) \ N^T] & \text{pour l'ensemble des points glissant vers l'arrière} \\ \prod_i [(N + \mu T) \ N^T] & \text{pour l'ensemble des points glissant vers l'avant} \end{cases} \quad (4.11)$$

Définition 3 : Jacobien généralisé $\partial F(x)$

Le jacobien généralisé est l'enveloppe convexe de sa base. En d'autres termes tout élément obtenu par combinaisons convexes (barycentres) de deux éléments de la base du jacobien généralisé est un élément du jacobien généralisé. C'est un ensemble compact (fermé et borné) non vide. On note :

$$\partial F(x) = \text{co}\{\delta F(x)\} \quad (4.12)$$

Définition 4 : Homéomorphisme global

Un homéomorphisme global est une application bijective et continue sur son support. On démontre que si F satisfait :

$$(1) : \forall x \in R^n, \forall M \in \partial F(x), \det M \neq 0$$

$$(2) : \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|F(x)\| = \infty$$

alors F est un homéomorphisme global.

La propriété d'homéomorphisme est intéressante parce qu'elle démontre l'existence de la solution $F(x) = 0$ via la surjectivité et l'unicité de cette solution via l'injectivité.

Il est difficile de démontrer directement la propriété d'homéomorphisme d'une application de type Lagrangien stabilisé. Donc on introduit des concepts de classe d'opérateurs Lipschitziens.

Définition : Classe d'opérateurs lipschitziens

Sous sa forme différentielle exacte, les lois de contact-frottement sont décrites par des fonctions indicatrices I_K qui sont fortement non régulières.

$$I_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.13)$$

En effet, l'ensemble des points de non différentiabilité de I_K , $\Omega_F = R^n \setminus \{K\}$ n'est pas réduit à un singleton.

Grâce au Lagrangien augmenté, on *diminue la non régularité tout en conservant le caractère exact des lois de contact-frottement*. En effet, on introduit des fonctions caractéristiques *Level-set de statuts ou champs de signe* S_K qui ont une meilleure régularité que les fonctions indicatrices. En d'autres termes, si on partitionne R^n en régions Z_i polyhédriques, on remarque que les opérateurs Level-Sets du Lagrangien augmenté ont des propriétés de *différentiabilité sur chaque morceaux de R^n* . De plus, $\Omega_F = \{(0, 0, 0)\}$ et on peut associer un jacobien généralisé compact non vide en ce point.

Dans un langage plus mécanicien, on peut voir un système complexe de mécanique de contact comme un système qui se décompose en sous-problèmes élémentaires facilement solubles : sans contact, contact adhérent, contact glissant, d'où l'idée d'utiliser un partitionnement de R^n .

On introduit quelques définitions liées aux fonctions différentiables par morceaux.

Définition 5 : Opérateurs de Classe C^1 par morceaux

Si F est de classe C^1 par morceaux sur l'intérieur des Z_i partitionnements de R^n alors on dit que F est un opérateur Lipschitzien intérieurement C^1 par morceaux $F \in PC_{int}^1$.

Si de plus les régions Z_i sont polyhédriques convexes et que F est de classe C^1 sur l'adhérence de Z_i alors on dit que F est un opérateur Lipschitzien de Classe C^1 par morceaux. $F \in PC_{int}^1 \subset PC^1$

Remarque : L'intérieur d'un domaine est ce domaine privé de sa frontière tandis que son adhérence est le domaine avec sa frontière.

Définition 6 : Opérateurs linéaires par rayons

Un opérateur est linéaire par rayons ($F \in RL$) s'il est intérieurement C^1 par morceaux et si :

$$\forall x \text{ n'appartenant pas à } \Omega_F, \forall \lambda > 0, \lambda x \text{ n'appartient pas à } \Omega_F, \nabla F(\lambda x) = \nabla F(x)$$

Définition 7 : Opérateurs linéaires par morceaux

Un opérateur est dit linéaire (ou affine) par morceaux $F \in PL$ s'il est linéaire sur chacune des régions Z_i partitionnant R^n

Définition 8 : Opérateurs linéaire par cônes

Un opérateur est dit linéaire (ou affine) par cônes $F \in CL$ s'il est à la fois linéaire par morceaux et par rayons. $F \subset PL$ et $F \subset RL$

La classification des opérateurs Lipschitzien est la suivante :

$$F \in CL \begin{cases} \subset PL \subset PC^1 \subset PC_{int}^1 \\ \subset RL \subset PC_{int}^1 \end{cases} \subset Lipstchiziens \quad (4.14)$$

1.3 Application au Lagrangien stabilisé

On considère un oscillateur élémentaire masse-ressort en contact-frottement (voir figure 4.1) qui représente un partitionnement de R^n . On va adapter les résultats de Alart [3] au Lagrangien stabilisé de Code_Aster.

Dans le cas du contact les inconnues sont : $(d_n, \lambda_n) \in R^2$

Dans le cas du contact-frottement les inconnues sont : $(d_n, \lambda_n, \Lambda) \in R^3$

Pour caractériser le statut du point on a introduit les champs de signe de contact ou de frottement. On rappelle que :

$$S_u(\lambda_n - r_n d_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_n - r_n d_n > 0 \\ 1 & \text{si } \lambda_n - r_n d_n \leq 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

$$S_f(\Lambda + r_t d_t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_n - r_n d_n \leq 0 \text{ et si } \|\Lambda + r_t d_t\| \geq 1 \\ 1 & \text{si } \lambda_n - r_n d_n \leq 0 \text{ et si } \|\Lambda + r_t d_t\| < 1 \end{cases} \quad (4.16)$$

Propriété 1 :

L'opérateur champs de signe ou Level-set de contact S_u est un opérateur linéaire par rayons.

Preuve :

On considère un partitionnement de R^2 en deux régions : $R^2 = Z_1 \cup Z_2$.

$$Z_1 = \{(d_n, \lambda_n) \in R^2, \lambda_n - r_n d_n \leq 0\}$$

$$Z_2 = \{(d_n, \lambda_n) \in R^2, \lambda_n - r_n d_n > 0\}$$

La démonstration se fait en 3 étapes :

- 1 On montre que S_u est un opérateur Lipschitzien dont l'ensemble de non différentiabilité est $\Omega_F = \{0\}$.

On pose $x = \lambda_{n,1} - r_n d_{n,1}$, $y = \lambda_{n,1} - r_n d_{n,1}$, $x \neq y$

$$|S_u(x) - S_u(y)| = \begin{cases} 1 & \left\{ \begin{array}{l} \text{si } x \in Z_1 \text{ et } y \in Z_2 \\ \text{si } x \in Z_2 \text{ et } y \in Z_1 \end{array} \right. \\ 0 & \left\{ \begin{array}{l} \text{si } x \in Z_1 \text{ et } y \in Z_1 \\ \text{si } x \in Z_2 \text{ et } y \in Z_2 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\exists k > 0, \forall x, y, x \neq y, |S_u(x) - S_u(y)| \leq k|x - y|$$

- 2 S_u est PC_{int}^1 sur Z_1 et Z_2 : triviale

- 3 $\forall (d_n, \lambda_n) \in R^2 \setminus (0, 0), \forall \alpha > 0, (\alpha d_n, \alpha \lambda_n) \in R^2 \setminus (0, 0)$ et $\partial S_u(\alpha(\lambda_n - r_n d_n)) = \partial S_u(\lambda_n - r_n d_n)$

Propriété 2 :

L'opérateur qui a tout couple $(d_n, \lambda_n) \mapsto F_c = S_u(\lambda_n - r_n d_n)[\lambda_n - r_n d_n]$ la force augmentée de contact est un opérateur Lipschitzien contractant.

Preuve

$$|S_u(x) - S_u(y)| = \begin{cases} |x - y| & \text{si } x \in Z_2 \text{ et } y \in Z_2 \\ 0 & \text{si } x \in Z_1 \text{ et } y \in Z_1 \\ |x| & \text{si } x \in Z_2 \text{ et } y \in Z_1 \\ |y| & \text{si } x \in Z_1 \text{ et } y \in Z_2 \end{cases}$$

$$\exists k > 0, \forall x, y, x \neq y, |S_u(x) - S_u(y)| \leq k|x - y|$$

Propriété 3 :

L'opérateur champs de signe ou Level-set de frottement S_f est un opérateur linéaire par rayons.

Propriété 4 :

L'opérateur qui à tout triplet

$$(d_n, \lambda_n, \Lambda) \mapsto$$

$$F_f = S_u(\lambda_n - r_n d_n) \left[\mu[\lambda_n - r_n d_n] \right] \left[S_f(\Lambda + r_t d_t) [\Lambda + r_t d_t] + [1 - S_f(\Lambda + r_t d_t)] \left[\frac{\Lambda + r_t d_t}{\|\Lambda + r_t d_t\|} \right] \right]$$

est un opérateur Lipschitzien. La propriété de contraction n'est garantie que sous des hypothèses sur le coefficient de frottement et en supposant que l'on peut fixer de façon itérative la valeur de la pression λ_n .

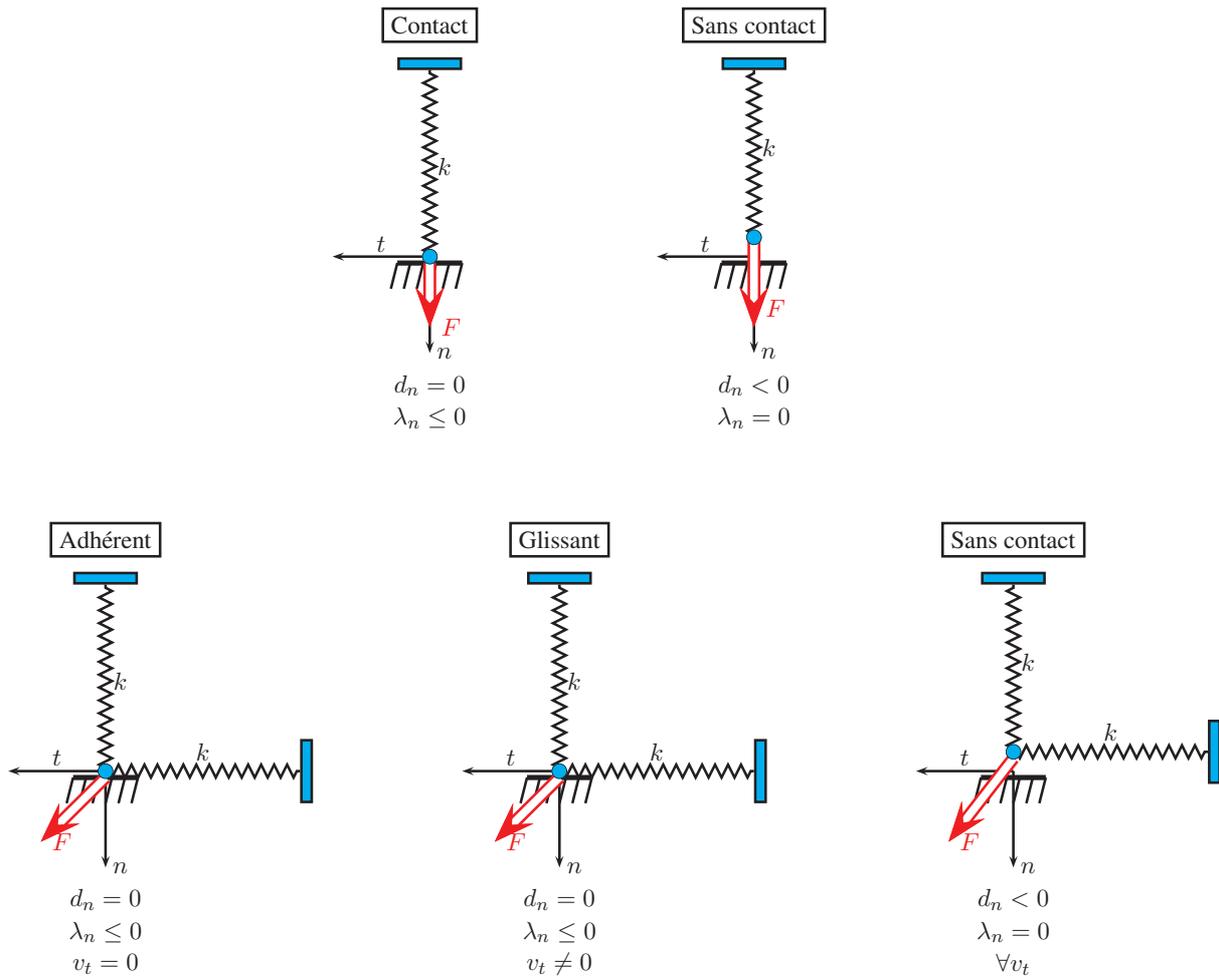


FIGURE 4.1 – Exemple élémentaire contact-frottement : partitionnement de R^n

Existence et unicité pour les opérateurs de Lagrangien augmenté.

Les différentes propriétés rappelées et démontrées dans la section précédente permettent d'obtenir des propriétés d'homéomorphisme intéressantes. Le théorème le plus important à retenir pour le Lagrangien augmenté est le suivant.

Propriétés d'homéomorphisme des opérateurs de contact-frottement [3] :

Les opérateurs de contact-frottement 2D et 3D sont des homéomorphismes dès que le déterminant des matrices de la base du jacobien généralisé $\delta F(0)$ reste positif.

Pour la preuve, voir théorème 10 de Alart sur les critères d’injectivité et de surjectivité des applications de R^n dans lui même. [3]

Les questions d’existence et d’unicité de solutions sont encore des problèmes ouverts à ce jour. La réponse à apporter dépend de plusieurs aspects : on traite un problème de contact avec ou sans frottement, le problème est continu ou discrétisé par éléments finis, les lois de contact-frottement sont régularisées ou non, et enfin on emploie une méthode de point fixe ou une méthode de Newton généralisée. Hild-Bostan [14, 55, 56], Ballard [9] et bien d’autres encore démontrent dans leurs travaux des exemples de multiplicité de solutions. Une estimation fine des conditions d’unicité de solutions n’est pas aisée.

Cependant, on peut retenir que le problème continu de Signorini admet une solution unique en statique [19, 93]. Le problème continu de Tresca admet aussi une unique solution en statique. Pour le problème de Signorini avec frottement de Coulomb en statique, on ne peut pas associer un potentiel convexe à cause de la dépendance vis-à-vis de la pression inconnue de contact. Donc l’établissement de l’unicité n’est plus évidente. En introduisant des opérateurs de point fixe permettant d’approcher le problème de Coulomb par une succession de problèmes de Tresca, on démontre que pour des petites valeurs de coefficients de frottement, il y a unicité de solution [93]. La détermination de la valeur critique de coefficient de frottement est aussi chose difficile. Par exemple Bostan-Hild [14] démontrent que lorsqu’on fait tendre le problème discrétisé vers le problème continu toutes les valeurs de coefficient de frottement aussi petites soient elles provoquent la perte de la contraction du système. Les techniques de régularisations sur les opérateurs de frottement permettent de donner des conclusions supplémentaires. Une borne pour le coefficient de frottement proposée par Janovsky [3] est :

$$\mu < \left(\frac{\lambda_{\min}(Z)}{\lambda_{\max}(Z)} \right)^{1/2} \quad (4.17)$$

où $\lambda_{\min}(Z)$ et $\lambda_{\max}(Z)$ sont respectivement les plus petites et les plus grandes valeurs propres de la matrice Z :

$$Z = \begin{pmatrix} N & K^{-1} & N^T & N & K^{-1} & T^T \\ T & K^{-1} & N^T & T & K^{-1} & T^T \end{pmatrix}$$

N et T sont les opérateurs ou vecteurs donnant respectivement les composantes normales et tangentielles du déplacement.

On particularise maintenant les résultats aux opérateurs de contact-frottement issus du Lagrangien augmenté. Khénous [64] démontre que le choix d’un coefficient d’augmentation ou de semi-régularisation (r_n, r_t) en deça d’une valeur critique garantit les propriétés de contraction. La généralisation de la condition d’existence et d’unicité

est le précédent théorème qui a été énoncé.

L'emploi de ce théorème permet de relâcher la valeur critique du coefficient de frottement sur un problème de Tresca. En l'occurrence sur l'exemple 2D de Klarbring, Alart démontre l'existence et l'unicité pour :

$$\mu < \frac{n^T K^{-1} n}{|n^T K^{-1} t|}$$

Sur le problème de Tresca $|n^T K^{-1} t| = 0$ ce qui prouve l'unicité quelque soit la valeur de μ .

Malgré sa généralité une critique que l'on peut faire au théorème précédent est qu'il nécessite, à chaque itération de Newton, le calcul du déterminant de toutes les matrices de la base du jacobien généralisé au point de non différentiabilité $(u, \lambda_n, \Lambda) = (0, 0, 0)$.

1.4 Convergence de la méthode de Newton généralisée

La caractéristique principale du système algébrique est qu'il est continu, différentiable par morceaux et lipschitzien. Pour les méthodes de point fixe, la détermination de la constante de Lipschitz est un des critères de convergence. La méthode de Newton généralisée est convergente sous des hypothèses de convexité, différentiabilité, monotonie.

Théorème : Convergence de la méthode de Newton généralisée

Si $F(x)$ est une application lipschitzienne de R^n vers R^n , convexe telle que :

- (1) l'équation $F(s) = 0$ admette une unique solution,
- (2) $\forall x \in R^n, \forall J \in \partial F(x), J^{-1}$ existe et $J^{-1} \geq 0$

alors la suite engendrée par la méthode de Newton généralisée est convergente pour toute valeur initiale et la convergence est monotone.

Preuve : Voir Alart 1997, page 88 [4]

Il apparaît sur plusieurs études industrielles que les travaux théoriques sont d'un usage limité. Par exemple, l'application de la condition (2) du théorème précédent n'est vraie que dans des cas particuliers. Un des objectifs de ce travail est l'amélioration de la convergence et des performances des algorithmes utilisés. Une des premières pistes a été l'emploi des méthodes de recherche linéaires (Pang-Christensen et Khénous [30, 64, 68]). Ces méthodes sont basées sur une modification de la direction de descente des incréments calculés par une méthode de gradient classique : la direction de descente est modifiée de façon à faire décroître *obligatoirement* le résidu. Ces méthodes, malgré leur robustesse demandent un surcoût d'itérations de Newton prohibitif sur certains cas. Donc il va falloir analyser plus finement les pertes de convergence des méthodes utilisées. L'objectif est de proposer une méthode de traitement à la fois robuste et performante.

Une alternative consiste à employer des techniques dites *heuristiques*. Par études *heuristiques* on entend un certain nombre de résultats basés sur l'expérimentation numérique et qui sont généralisables à des exemples plus complexes. Cette approche, à défaut de théorèmes *généraux*, nous permet de comprendre les divers comportements algorithmiques et de mettre en oeuvre des traitements au *cas par cas*.

Il est constaté que l'une des causes de perte de convergence sont les instabilités numériques de cyclage de statuts de contact. La prochaine section est consacrée à l'explication de ce phénomène parasite ainsi qu'à une méthode heuristique pour améliorer la robustesse-performance des algorithmes.

2 Heuristique sur les phénomènes de cyclage : *méthode adaptative robuste*

2.1 Définition du cyclage : contact, adhérent, glissant

On définit le cyclage comme étant un phénomène d'oscillation numérique sur les statuts de contact-frottement de un ou plusieurs points. C'est un phénomène naturellement lié au caractère irrégulier du système traité. On choisit de classer les phénomènes de cyclage en trois catégories :

- Cyclage de contact/décollement
- Cyclage adhérent/glissement
- Cyclage glissement avant/glissement arrière

On introduit la notion d'ordre ou de périodicité des phénomènes de cyclage. On dira qu'un cyclage est d'ordre k si un point retrouve un même statut après k itérations. Dans ce document on ne traite que certains phénomènes de cyclage d'ordre 2.

Le cyclage de type glissement avant/glissement arrière a été identifié par Alart-Curnier en 1988 [32]. Un premier pas vers le traitement heuristique de ce type de problèmes a été proposé dans ce même article. *Si un point présente une pathologie de petits glissements avant/petits glissements arrière alors on lui fournit un statut adhérent pour la prochaine itération de Newton.* Sur la base de cette première piste de réflexion, on propose une approche plus détaillée pour traiter les trois types de cyclage définis plus haut.

On introduit enfin la notion de « sous-cyclage » basée sur un concept de décomposition en zones de la loi de contact-frottement augmentée.

Décomposition en zones de la loi de contact unilatéral

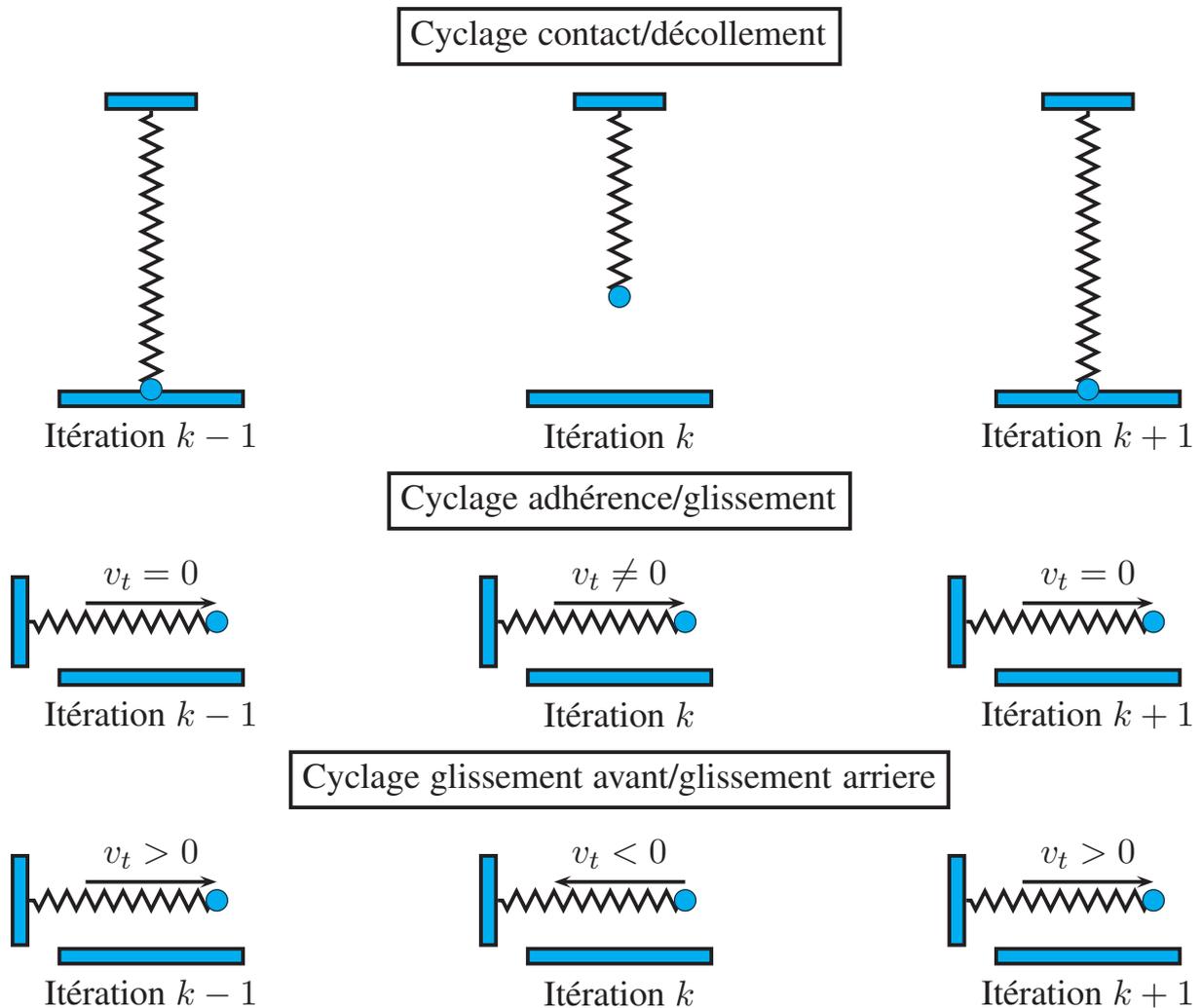


FIGURE 4.2 – Différents types de cyclages

zone 1 : C'est la zone où le contact est établi de manière *franche*. Au cours des itérations de Newton, les pressions de contact sont élevées en compression et le jeu est quasiment nul.

zone 2 : C'est la zone où le contact est établi de manière *lâche*. Au cours des itérations de Newton, les pressions de contact sont faibles en compression et le jeu est nul mais le point tend à se décoller.

zone 3 : C'est la zone où le décolllement est établi de manière *lâche*. Au cours des itérations de Newton, les pressions de contact sont faibles voire nulles et le jeu est positif mais le point tend à revenir à un état de contact.

zone 4 : C'est la zone où le décolllement est établi de manière *franche*. Au cours des itérations de Newton, les pressions de contact sont nulles voire positives et le jeu est négatif.

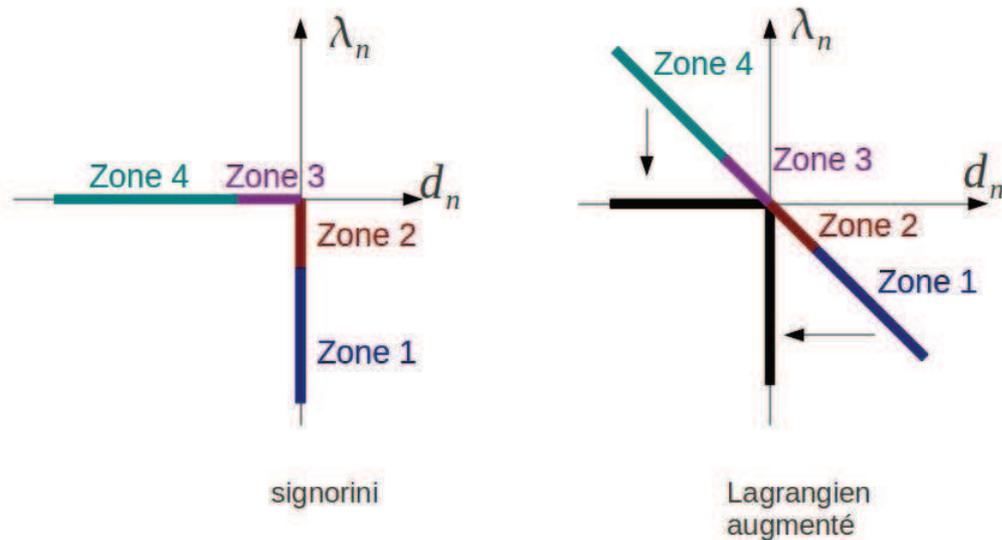


FIGURE 4.3 – Décomposition en zones de la loi de contact unilatéral

On rappelle que le graphe du Lagrangien augmenté traduit le fait qu'au cours des itérations de Newton l'espace solution n'est pas contraint de respecter les conditions d'unilatéralité. C'est seulement à convergence sur l'équilibre qu'on respecte l'équation de Signorini. En effet $F(X)$ convergé contient les équations de la forme :

$$\lambda_n - Proj_{R^-} (\lambda_n - r_n d_n) = 0$$

Identification des sous-cycles de contact/décollement

Pour détecter un cycle de contact d'ordre 2 il faut au moins 3 itérations de Newton. On va identifier les sous-cyclages en fonction du chemin suivi par les valeurs de pressions et jeux calculés au cours des itérations de Newton.

- **Sous cyclage de type 1** : c'est un phénomène de contact rasant. Le Lagrangien augmenté de contact oscille constamment entre la zone 2 et la zone 3.
- **Sous cyclage de type 2** : Le Lagrangien augmenté de contact oscille constamment entre la zone 2 et la zone 4.
- **Sous cyclage de type 3** : Le Lagrangien augmenté de contact oscille constamment entre la zone 1 et la zone 3.
- **Autres sous cycles** : c'est toutes les autres combinaisons possibles entre les zones qu'on peut avoir. Suivant notre décomposition en zones de la loi de contact il ne peut avoir que 16 sous-cycles de contact d'ordre 2. Par exemple on peut avoir zone

1-zone 4-zone 2

Décomposition en zones de la loi de frottement

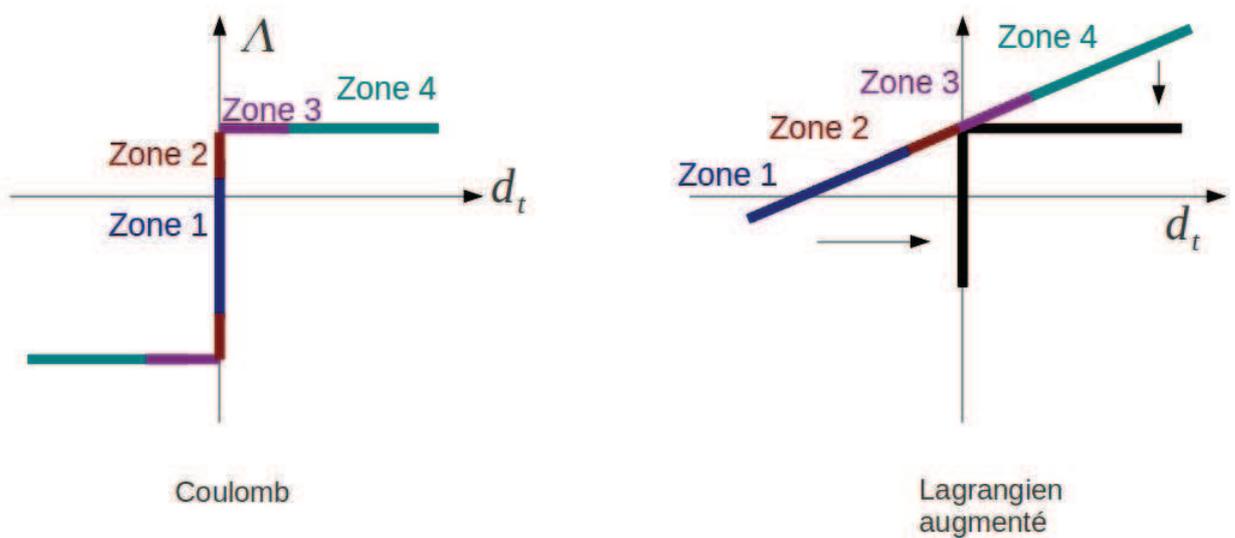


FIGURE 4.4 – Décomposition en zones de la loi de frottement : adhérence/glisement

La décomposition en zones pour le frottement dépend du fait qu'on veut détecter un cyclage adhérent/glisement ou glissement avant/arrière. La détection du cyclage adhérence/glisement est facile. En effet il suffit d'évaluer la norme du Lagrangien augmenté de frottement ($\Lambda + r_t d_t$) et le comparer à 1. On rappelle que

$$\lambda_t = \mu \lambda_n \Lambda$$

La détection du glissement avant/arrière est facile en 2D. Il suffit de vérifier que la norme du Lagrangien augmenté de frottement est bien supérieure à 1 et que celui-ci est de signe positif ou négatif. En 3D, il suffit de vérifier que la norme du Lagrangien augmenté est supérieure à 1. On vérifie ensuite par produit scalaire que l'angle entre le Lagrangien augmenté de l'itération précédente et l'itération courante est bien égale à 180^0 (glissement arrière) ou 0^0 (glissement avant).

Pour le cyclage adhérent/glisement, on a :

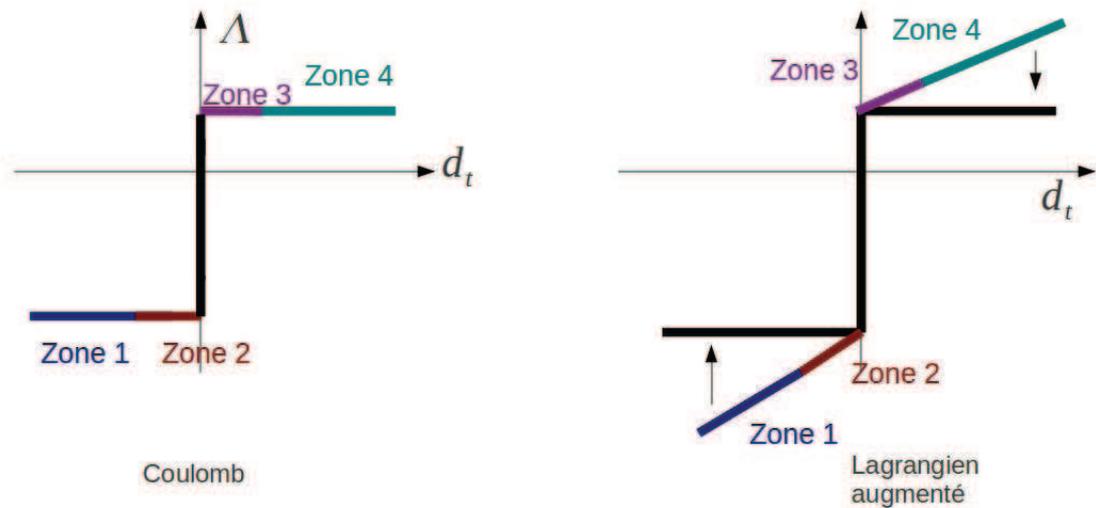


FIGURE 4.5 – Décomposition en zones de la loi de frottement : glissement avant/ glissement arrière

zone 1 : C'est la zone où l'adhérence est franche. Les valeurs du Lagrangien augmenté de frottement sont très inférieures à 1.

zone 2 : C'est la zone qui caractérise la transition de l'adhérence vers le glissement. Les valeurs du Lagrangien augmenté de frottement sont très proches de 1 par valeurs inférieures.

zone 3 : C'est la zone qui caractérise la transition de glissement vers l'adhérence. Les valeurs du Lagrangien augmenté de frottement sont très proches de 1 par valeurs supérieures.

zone 4 : C'est la zone où le glissement est franc. Les valeurs du Lagrangien augmenté de frottement sont très supérieures à 1.

Identification des sous-cycles de adhérence/glissement

- *Sous cyclage de type 1* : c'est un phénomène de passage adhérence-glissement instable (comparable au contact rasant). Le lagrangien augmenté de contact oscille constamment entre la zone 2 et la zone 3.
- *Sous cyclage de type 2* : Le Lagrangien augmenté de contact oscille constamment entre la zone 2 et la zone 4.
- *Sous cyclage de type 3* : Le Lagrangien augmenté de contact oscille constamment entre la zone 1 et la zone 3.
- *Autres sous cycles* : c'est toutes les autres combinaisons possibles entre les zones qu'on peut avoir. Suivant notre décomposition en zones de la loi de frottement et

en prenant en compte le signe du Lagrangien augmenté il ne peut avoir que 32 sous-cycles de contact d'ordre 2.

Pour le cyclage glissement avant/arrière, on a :

zone 1 : c'est la zone de glissement arrière franche. Les valeurs du Lagrangien augmenté de frottement sont très supérieures à 1 et leurs signes sont négatifs.

zone 2 : c'est la zone de glissement arrière lâche (tendant à l'adhérence). Les valeurs du Lagrangien augmenté de frottement sont très proches de 1 et leurs signes sont négatifs.

zone 3 : c'est la zone de glissement avant lâche (tendant à l'adhérence). Les valeurs du Lagrangien augmenté de frottement sont très proches de 1 et leurs signes sont positifs.

zone 4 : c'est la zone de glissement avant franche. Les valeurs du Lagrangien augmenté de frottement sont très supérieures à 1 et leurs signes sont positifs.

Identification des sous-cycles de glissement avant/glissement arrière

- *Sous cyclage de type 1* : c'est un phénomène de passage glissement avant-glissement arrière instable (comparable au contact rasant). Le Lagrangien augmenté de contact oscille constamment entre la zone 2 et la zone 3. On a remarqué ce phénomène surtout sur les maillages quadratiques où le noeud milieu est « *tirillé par des noeuds extrêmes en glissement antagonistes* ».
- *Sous cyclage de type 2* : Le Lagrangien augmenté de contact oscille constamment entre la zone 2 et la zone 4.
- *Sous cyclage de type 3* : Le Lagrangien augmenté de contact oscille constamment entre la zone 1 et la zone 3.
- *Autres sous cycles* : c'est toutes les autres combinaisons possibles entre les zones qu'on peut avoir. Suivant notre décomposition en zones de la loi de frottement et en prenant en compte le signe du Lagrangien augmenté il ne peut avoir que 32 sous-cycles de contact d'ordre 2.

L'ensemble de ces phénomènes de cyclage est illustré à travers les exemples suivants.

2.2 Exemples introductifs

Exemple introductif 1 : Emboutissage

On considère le problème de l'emboutissage d'une tôle par un poinçon dans une matrice (voir figure 4.6). Le problème est triplement non-linéaire : écrouissage isotrope non-linéaire, grands déplacements et contact-frottement. La structure est modélisée en déformations planes. On tient compte de la symétrie pour ne représenter qu'une moitié. La matrice est encastree tandis que le poinçon effectue un mouvement vertical dirigé vers le bas.

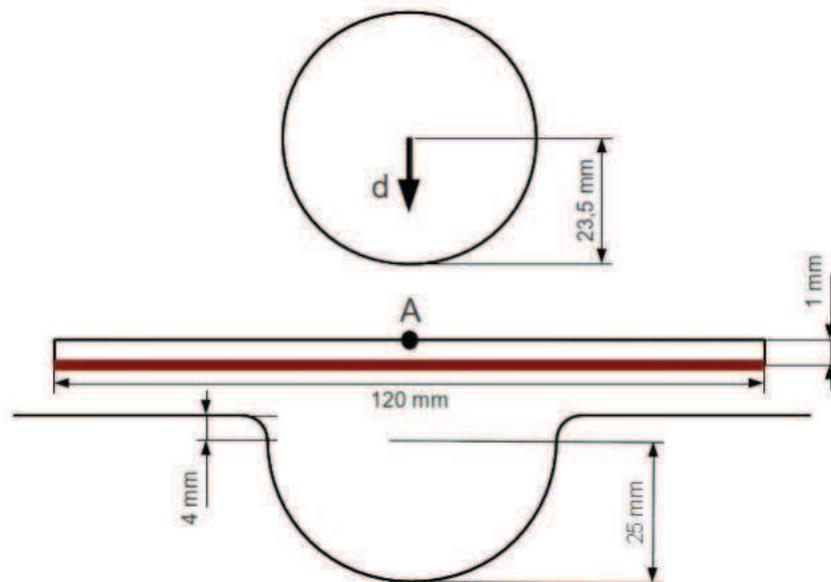


FIGURE 4.6 – Étude de l'emboutissage

Au début du calcul, certains points qui sont en contact avec la matrice s'activent en cyclage de contact/décollement : les points situés dans la zone rouge sont soumis à de faibles pressions de contact. Pour mieux détailler cet exemple, on représente les valeurs de multiplicateur de Lagrange de contact, du jeu et du multiplicateur de Lagrange augmenté de contact au cours des itérations de Newton. On rappelle qu'on est dans un cadre de quasi-optimisation sans contraintes (espace solution non contraint). Donc les valeurs des multiplicateurs de Lagrange peuvent être positives au cours des itérations de Newton. Mais à convergence, ces valeurs sont négatives.

	λ_n	d_n	$\lambda_n - r_n d_n$	Statuts
Itération 1	3.994E-5	-2.9893E-25	3.994E-5	Pas contact
Itération 2	0.0	1.9734E-8	-1.97E-6	Contact
Itération 3	7.0501E-3	-1.0729E-24	7.0501E-3	Pas contact
Itération 4	0.00	4.1584E-7	-4.1584E-5	Contact
...
Itération n	-2.0236	-2.9512E-25	-2.0236	Contact

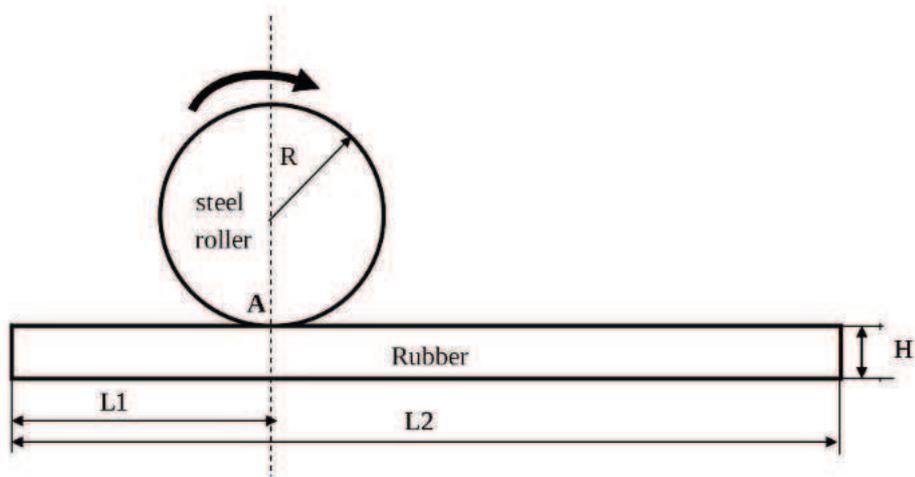


FIGURE 4.7 – Rouleau sur ruban hyper-élastique

Exemple introductif 2 : Rouleau sur ruban hyper-élastique

Ce test modélise l'entraînement d'un ruban de caoutchouc par un rouleau en acier. Le problème est triplement non-linéaire : matériau néo-Hookéen, grands déplacements et contact-frottement. Le centre du rouleau est fixe. Le chargement est appliqué en deux étapes :

- Le rouleau est fixe et un déplacement vertical est imposé au ruban de sorte à le mettre en compression au contact du ruban.
- Le rouleau est mis en rotation et entraîne le ruban dans un mouvement de translation.

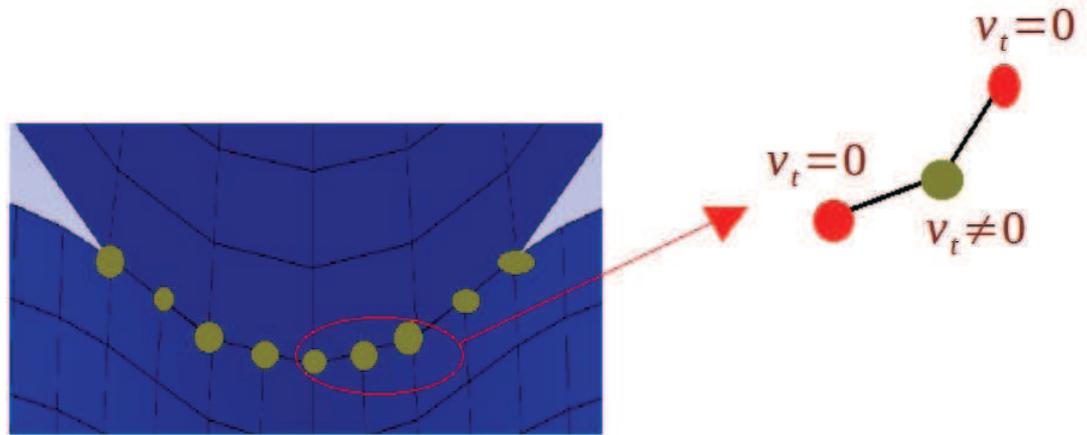


FIGURE 4.8 – Illustration du problème de cyclage adhérent/glissant

Plusieurs cas pathologiques ont été détectés sur cet exemple numérique.

- Certains nœuds présentant la pathologie de cyclage adhérent/glissant sont en fait des nœuds glissants qui sont bloqués par des nœuds voisins adhérents. Pour réduire cette pathologie, on peut jouer sur la valeur du coefficient d'augmentation r_t de sorte à limiter l'apparition de ces glissements (voir figure 4.8).
- Certains nœuds présentant la pathologie de glissement avant/glissement arrière sont en fait des nœuds dont les voisins sont glissants faiblement mais en opposition de direction. Le nœud central devrait être adhérent (voir figure 4.9).

Exemple introductif 3 : Influence des paramètres d'augmentation r_n, r_t

Ici on prend quelques exemples numériques pour démontrer l'influence des paramètres sur l'apparition des phénomènes de cyclage. Prenons par exemple un sous-cyclage de contact de type 2. Dans le premier cas on maintient le coefficient r_n fixe et on constate qu'il apparaît les phénomènes de cyclage.

1^{er} cas : r_n est fixe au cours des itérations de Newton

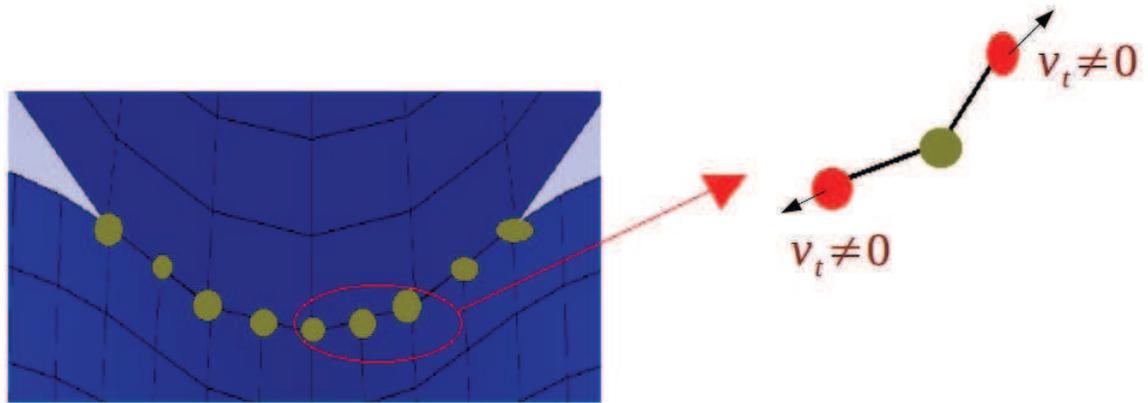


FIGURE 4.9 – Illustration du problème de cyclage glissement avant/arrière

	λ_n	r_n	d_n	$\lambda_n - r_n d_n$	Statuts	Cyclage
Itération $k - 1$	-1.00E+08	1.00E+06	2.80E-08	-1.00E+08	Contact	
Itération k	1.00E-04	1.00E+06	-2.00E-22	1.00E-04	Pas contact	
Itération $k + 1$	-5.00E+12	1.00E+06	2.80E-15	-5.00E+12	Contact	oui
Itération $k + 2$	1.00E-03	1.00E+06	-2.00E-10	1.00E-03	Pas contact	oui
Itération $k + 3$	-3.00E+09	1.00E+06	4.00E-10	-3.00E+09	Contact	oui
Itération	oui
Itération k_{max}	1.00E-2	1.00E+06	8.00E-19	1.00E+2	Pas Contact	oui
						divergence

2^{me} cas : r_n est variable au cours des itérations de Newton

Par définition le Lagrangien augmenté est une méthode de résolution exacte. Donc pour n'importe quelles valeurs de r_n , on doit obtenir le même résultat à condition que l'équilibre soit atteint et que les paramètres physiques de contact soient stabilisés. Cette idée va nous pousser à adapter le coefficient r_n dès la détection du cyclage de contact.

	λ_n	r_n	d_n	$\lambda_n - r_n d_n$	Statuts	Cyclage
Itération $k - 1$	-1.00E+08	1.00E+06	2.80E-08	-1.00E+08	Contact	
Itération k	1.00E-04	1.00E+06	-2.00E-22	1.00E-04	Pas contact	
Itération $k + 1$	-5.00E+12	1.00E+06	2.80E-15	-5.00E+12	Contact	oui
Itération $k + 2$	1.00E-03	1.00E+29	-2.00E-10	-1.00E19	contact	non
Itération $k + 3$	-3.00E+09	1.00E+29	4.00E-10	-3.00E+09	Contact	non
Itération
Itération n	-7.00E+8	1.00E+29	8.00E-19	1.00E+2	Pas Contact	non
						convergence

On remarque pour cet exemple que cette action a pour effet d'obtenir la convergence de l'algorithme.

2.3 Approche heuristique

Calage des valeurs maximales et minimales des paramètres du Lagrangien augmenté

Les paramètres r_n et r_t influencent l'algorithme à deux niveaux :

- le conditionnement de la matrice
- le phénomène de cyclage que nous cherchons à maîtriser.

Le critère qui paraît naturel pour mesurer l'influence de ces paramètres est *le nombre d'itérations total de Newton*.

On considère un test élémentaire d'un bloc carré déformable sur un bloc rigide avec plusieurs types de physiques :

- le bloc déformable peut être élastique, élasto-plastique, hyper-élastique
- le bloc déformable est comprimé par deux pressions réglables sur ses faces latérale et supérieure.
- on fait varier r_n et r_t puis on trace pour différents algorithmes (point fixe, Newton généralisé, Newton partiel) l'allure générale du nombre d'itérations de Newton en fonction du jeu de paramètres.

On précise les valeurs nominales de géométrie, chargement et de comportement :

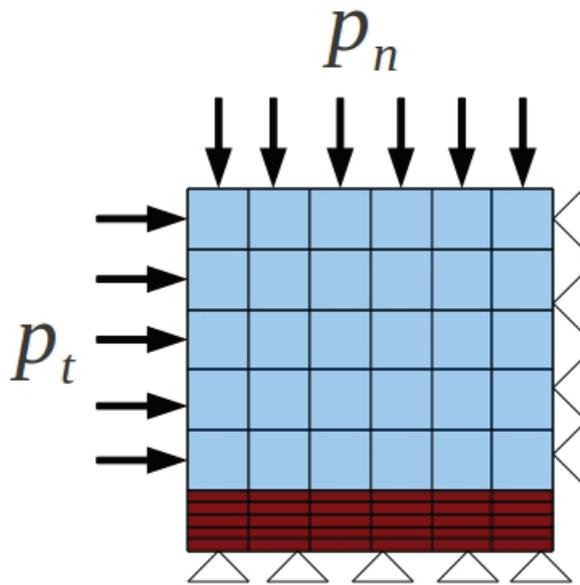


FIGURE 4.10 – Cas-test élémentaire de patin frottant

- le bloc déformable est un carré de coté 40 mm . Il est maillé avec des éléments QUAD9 en 2D. Le bloc rigide est modélisé par un rectangle de cotés $40\text{ mm} \times 1\text{ mm}$ avec un module d'Young infini.
- pour le comportement élastique on prend $E = 1.10^{11}Pa$ et $\nu = 0.3$, pour un comportement élastoplastique avec écrouissage isotrope linéaire on a $\sigma_Y = 2.10^8 Pa$, $E^p = 1.010^5$
- $p_n = 1.510^8 Pa$, $p_t = 1.010^7 Pa$
- coefficient de frottement = 1

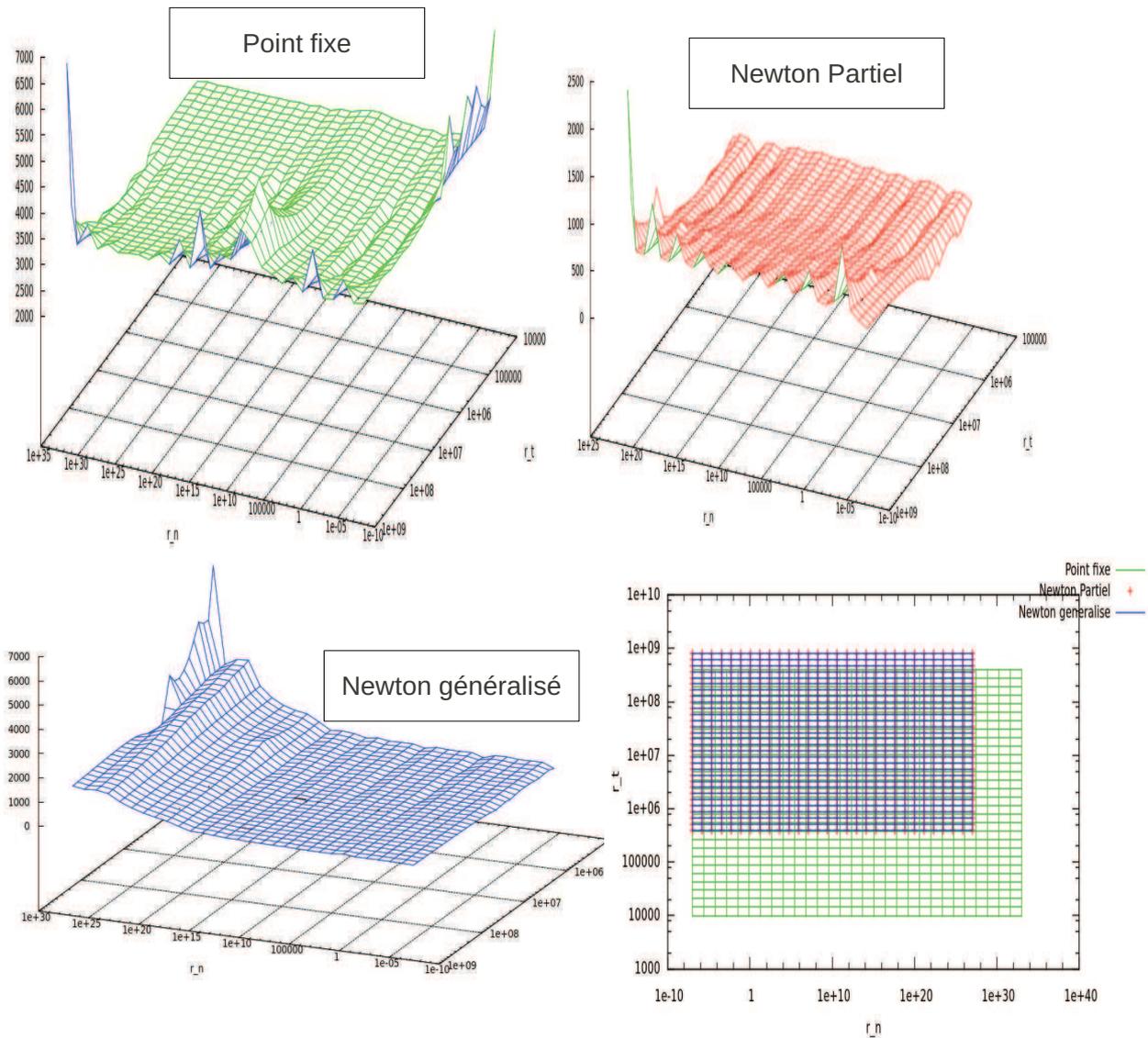


FIGURE 4.11 – Influence des paramètres r_n et r_t sur le nombre total d'itérations

Les conclusions qui ressortent de cette étude sont :

- *Quelque soit le comportement des matériaux, si*

$$r = (r_n, r_t) \in [r_{n,min}, r_{n,max}] \times [r_{t,min}, r_{t,max}]$$

alors la divergence des méthodes basées sur le Lagrangien augmenté ne peut pas provenir du choix des paramètres (r_n, r_t) .

- *On propose une loi empirique pour caler les bornes minimales et maximales*

On cherche à établir une loi empirique de la forme :

$$r = f(E, h, \mu, \nu)$$

La plupart des tests révèlent que ce sont les propriétés élastiques qui impactent le plus sur ces bornes. De plus on constate une linéarité entre ces bornes et les propriétés élastiques comme le montre les figures (4.12,4.13). D'où l'on déduit une loi empirique de la forme :

$$\begin{aligned} r_{.,max} &= A_{max} E^* \\ r_{.,min} &= A_{min} E^* \end{aligned} \quad (4.18)$$

Les coefficients $A_{n,max}, A_{n,min}$ ont une dimension de $\frac{[1]}{[distance]}$ car r_n est homogène à $\frac{[Pression]}{[distance]}$ ($\lambda_n = \lambda_n - r_n d_n$).

Les coefficients $A_{t,max}, A_{t,min}$ ont une dimension de $\frac{[1]}{[distance][Pression]}$ car r_t est homogène à $\frac{[1]}{[distance]}$ ($\Lambda = \Lambda + r_t d_t$).

Ce sont des valeurs qui sont fixées empiriquement. Ces coefficients sont choisis de telle façon qu'elles soient proches des valeurs propres maximales et minimales de la matrice de comportement. Les bornes du paramètre tangentiel r_t sont plus rapprochés que les bornes du paramètre unilatéral r_n . En pratique le choix retenu est :

$$\begin{aligned} A_{n,max} &= 100, & A_{n,min} &= 1E - 15 \\ A_{t,max} &= 1, & A_{t,min} &= 1E - 10 \end{aligned}$$

E^* est la propriété élastique caractérisant le milieu. Par exemple pour un corps élasto-plastique la propriété est assimilée à la valeur du module d'Young.

$$E^* = E$$

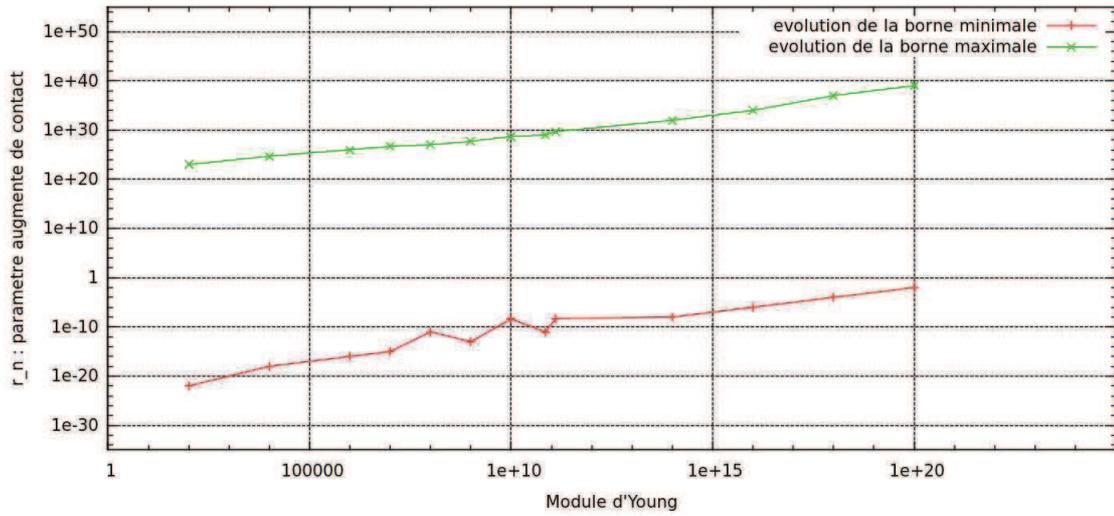


FIGURE 4.12 – Évolutions des bornes maximales et minimales de r_n en fonction du module d'Young

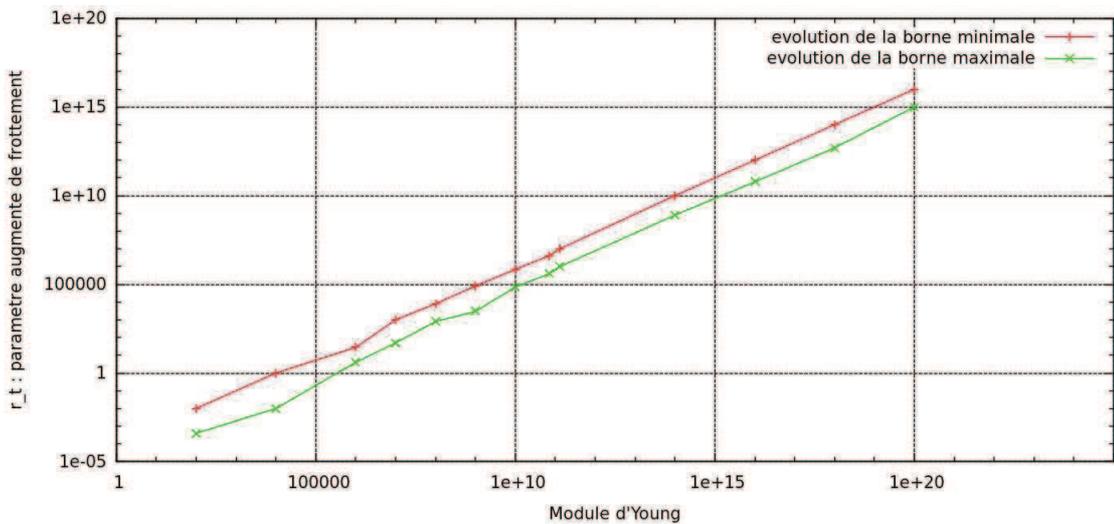


FIGURE 4.13 – Évolutions des bornes maximales et minimales de r_t en fonction du module d'Young

- L'objectif final de cette étude empirique est de pouvoir adapter automatiquement les paramètres r_n et r_t lorsqu'on détecte du cyclage. On peut introduire deux schémas de réactualisation .

$$r_{n, k_0} = r_{n, max}$$

$$r_{n, k_0+k} = \frac{r_{n, k_0+k-1}}{A} \quad (4.19)$$

$$A \geq 1$$

$$\begin{aligned}
 r_{t, k_0} &= r_{t, max} \\
 r_{t, k_0+k} &= \frac{r_{t, k_0+k-1}}{B} \\
 B &\geq 1
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

k_0 étant l'itération de détection du phénomène de cyclage. Et $k_0 + k$ l'itération courante de Newton.

Modification de l'algorithme

Données : Géométrie, Modèles, Matériaux, Paramètres de contact, Discrétisation
Résultat : Solution du problème : $X = (u, \lambda, \Lambda)$ ou $X = (u, \lambda, \Lambda, n^{escl})$
 initialisation;
tant que L'équilibre n'est pas réalisé sur la configuration intermédiaire **faire**
 Calcul des incréments ΔX par une **linéarisation consistante**
 Mettre à jour les inconnus $X^{equilibre} = X + \Delta X$
 Mettre à jour les statuts de contact
 Mettre à jour les seuils de frottement
 Mettre à jour les couples géométriques de contact
 Evaluer la convergence Géométrie+Equilibre+Seuils de frottement+géométrie
 Traitement de points cyclant : changement des statuts pour l'itération suivante
fin

Algorithme 4 : Algorithme de Newton généralisé adapté

Les règles de changement de statut sont les suivantes :

- Si on a un sous-cyclage contact/décollement de type 2 ou 3 ou un sous-cyclage adhérence/glissement de type 2 ou 3 alors une réactualisation des paramètres r_n et r_t permet de résoudre le problème. La réactualisation est faite suivant l'équation (4.19,4.20) en prenant $A, B = 1$.
- Si on a un sous-cyclage contact/décollement de type 1 (contact rasant) alors une réactualisation automatique des paramètres ne permet pas de résoudre le problème. Dans ce cas, pour l'itération suivante de Newton, le point cyclant a un statut de contact si sur deux itérations successives la distance qui sépare les corps est négligeable (ex : $|d_n^{k_0+k}| + |d_n^{k_0+k-1}| \leq 10^{-12}$). Sinon le point a un statut de non contact
- Si on a un cyclage adhérence/glissement de type 1 ou si on a un cyclage glissement avant/glissement arrière de type 1 (glissement non franc) alors on adopte une

technique similaire au point précédent. Si sur deux itérations successives, le glissement cumulé est *négligeable* (ex : $\|d_t^{k_0+k}\| + \|d_t^{k_0+k-1}\| \leq 10^{-12}$) alors le point a un statut adhérent. Sinon on lui fournit un statut glissant.

- Pour aller plus loin dans le traitement, on peut chercher à « contrôler » les statuts des points contactants pendant le processus de résolution. C'est une hypothèse forte qui introduit un modèle de traitement de contact différent du contact unilatéral. Il est plus riche que le modèle de contact bilatéral, car les statuts optimaux des points de contact sont fixés uniquement pour les points qui sont « pathologiques ». Un point qui est pathologique peut être un point en contact rasant par exemple. Des tests numériques sont présentés sur des études complexes dans le chapitre 5.

3 Conclusion du chapitre

D'un point de vue implémentation des méthodes, les formulations sans contraintes offrent la possibilité d'utiliser des algorithmes de Newton et point fixe. La méthode de Newton est une technique de résolution simultanée de toutes les non linéarités mécaniques en une seule boucle d'itérations. Elle repose sur une linéarisation complète du problème discrétisé. L'emploi d'une telle méthode requiert des notions d'analyse numérique et convexe telle que la convexité, la monotonie, la différentiabilité. Ce chapitre a permis de replacer les opérateurs discrets utilisés dans un contexte rigoureux.

A défaut de théorèmes de convergence sur les méthodes de Newton généralisée et point fixe, une nouvelle méthode de traitement a été élaborée et mise en oeuvre. Sur plusieurs études, le nouveau algorithme améliore la robustesse-performance.

Après avoir exposé les différents développements théoriques et numériques, on expose dans la suite du document diverses études numériques complexes.

Applications numériques :

**Comportements non linéaires,
grandes déformations, frottement &
grande taille de systèmes**

Chapitre 5

Robustesse-fiabilité-performance des algorithmes et applications industrielles

La première section de ce chapitre s'intéresse à des exemples numériques « académiques ». Les cas-tests englobent les situations sans/avec frottement. On utilise les tenseurs de déformations ainsi que les comportements non linéaires introduits au chapitre 1.

Les calculs effectués permettent de :

- *Valider et mieux comprendre les algorithmes développés : Newton généralisé et Newton partiel (avec une boucle de point fixe sur la géométrie) . Une comparaison est effectuée avec d'autres méthodes numériques présentes dans Code_Aster*
- *Valider le cadre de la dynamique « lente » compatible avec les hypothèses quasi-statiques*

Dans la deuxième section, on s'intéresse à la méthode adaptative pour traiter les « cyclages des statuts de contact ».

Enfin dans la dernière section, on considère quelques études industrielles :

- *Calcul d'emboutissage*
- *Dudgeonnage de tubes de générateurs de vapeur*
- *Calcul sur les pieds des aubes de turbines Basse Pression*

1 Comparaison des méthodes et des formulations

Exemple n^01 : influence des non linéarités de comportement et de grandes déformations

Géométrie et Maillage

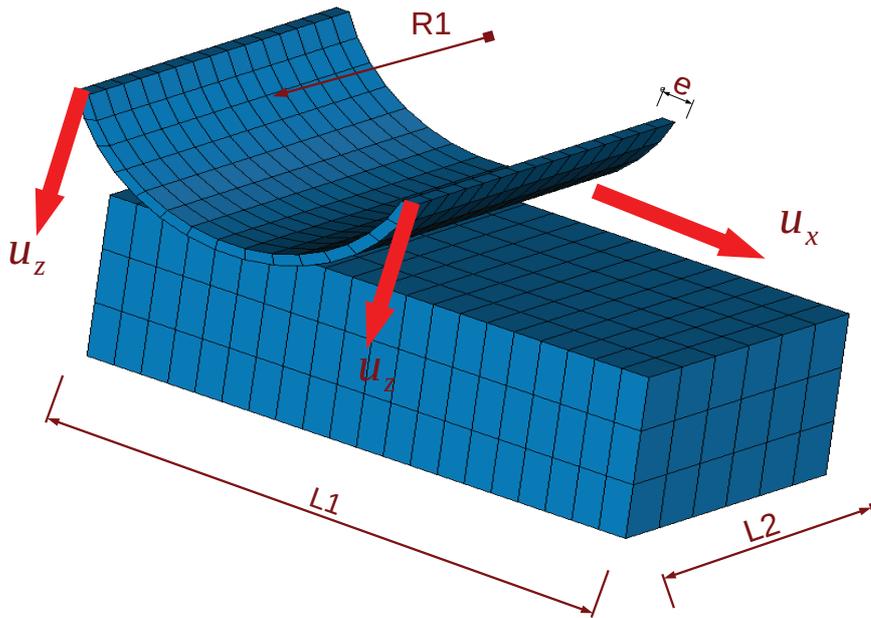


FIGURE 5.1 – Repassage 3D d'un bloc mou

Dans ce premier exemple, on considère l'indentation suivie d'un glissement d'un outil cylindrique creux sur un bloc élastique très mou. Ce test est appelé « ironing test » ou « test de repassage ». Les caractéristiques géométriques de la simulation sont (voir figure 5.1) :

- $R_1 = 26.7 \text{ mm}$, $e = 2.1 \text{ mm}$
- $L_1 = 90 \text{ mm}$, $L_2 = 40 \text{ mm}$, $l = 30 \text{ mm}$

Le maillage est linéaire : on utilise des éléments finis isoparamétriques avec des polynômes d'interpolation de Lagrange du premier degré. Le bloc élastique est pris comme corps esclave et il comporte 360 éléments hexaèdres à 8 noeuds (*HEXA 8*) dont 147 noeuds potentiellement contactants. L'outil pseudo-rigide est maillé par 220 éléments hexaèdres à 8 noeuds (*HEXA 8*). Il y a 1100 noeuds dans le maillage. Les conditions de simulation sont précisées plus loin.

Propriétés matériau

Pour le bloc cylindrique on utilise un matériau élastique dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$E = 1000MPa, \nu = 0.3$$

On utilise trois types de matériaux pour le bloc élastique mou.

- Matériau élastique en petites déformations :

$$E = 1MPa, \nu = 0.3$$

- Matériau élasto-plastique et déformations de type Simo-Miehe :
Partie élastique

$$E = 1MPa, \nu = 0.3$$

Partie plastique (écrouissage isotrope linéaire avec une limite élastique σ_Y et une pente plastique E_p)

$$\sigma_Y = 0.3MPa, E_p = 0.6MPa$$

- Matériau hyperélastique de type Néo-Hookéen et déformations de type Green-Lagrange

$$C_{10} = 1MPa, C_{01} = 0.0, C_{20} = 0.0MPa, \nu = 0.3$$

Modélisations du contact

On considère plusieurs types d'algorithmes pour le contact unilatéral avec/sans frottement.

- Algorithme 1 : algorithme de Lagrangien augmenté et méthode de Newton généralisé (LA_NG)
- Algorithme 2 : algorithme de Lagrangien augmenté et méthode de Newton partiel (LA_NP)
- Algorithme 3 : algorithme de Lagrangien augmenté et méthode de point fixe (LA_PF)
- Algorithme 4 : algorithme du Gradient Conjugué Projeté (Inegalite_GCP). Dans le cas du frottement, on utilise un algorithme étendu de la méthode des contraintes actives appelé méthode du « Lagrangien » [25,40].

Conditions de simulation : discrétisation en temps

- Phase d'indentation

On réalise l'indentation du bloc par le poinçon 14 mm jusqu'à 1 s. Cette phase est réalisée en 10 pas de temps.

$$u_z(0s) = 0, u_z(1s) = -14 \text{ mm}$$

- Phase de glissement

On réalise le glissement du poinçon sur le bloc 90 mm jusqu'à 2 s. Cette phase est réalisée en 10 pas de temps.

$$u_x(0s) = 0, u_x(1s) = 0, u_x(2s) = 90 \text{ mm}$$

- On précise qu'on utilise un algorithme de redécoupage automatique du pas de temps lorsque les algorithmes ont du mal à converger ou si le choix de la discrétisation temporelle n'est pas optimale.

Résultats et interprétations

On réalise d'abord un premier calcul sans frottement. Les visualisations sont proposées sur les figures (5.2,5.3).

- La non linéarité plastique se traduit par une déformation permanente à la fin du processus (voir figure 5.2). Le calcul indique un état résiduel quasi-nul (voir figure 5.3) à cause du caractère mou du bloc.
- La non linéarité hyper-élastique se constate via la répartition des contraintes qui n'est plus la même (voir figure 5.3).

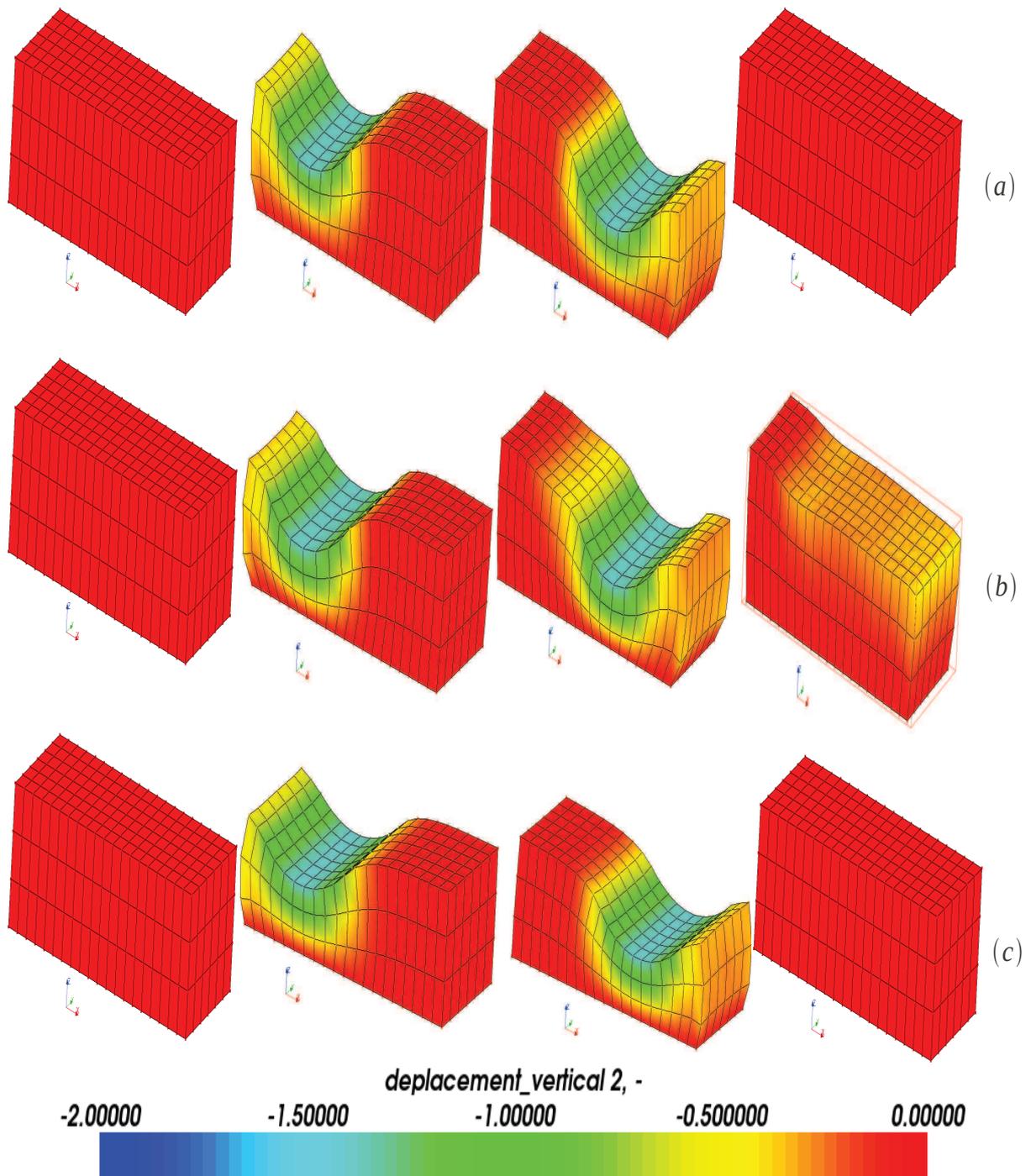


FIGURE 5.2 – Déformée : (a) Élastique, (b) Élasto-plastique + Déformations de Simo-Miehe, (c) Hyper-élastique + déformations de Green-Lagrange (en cm)

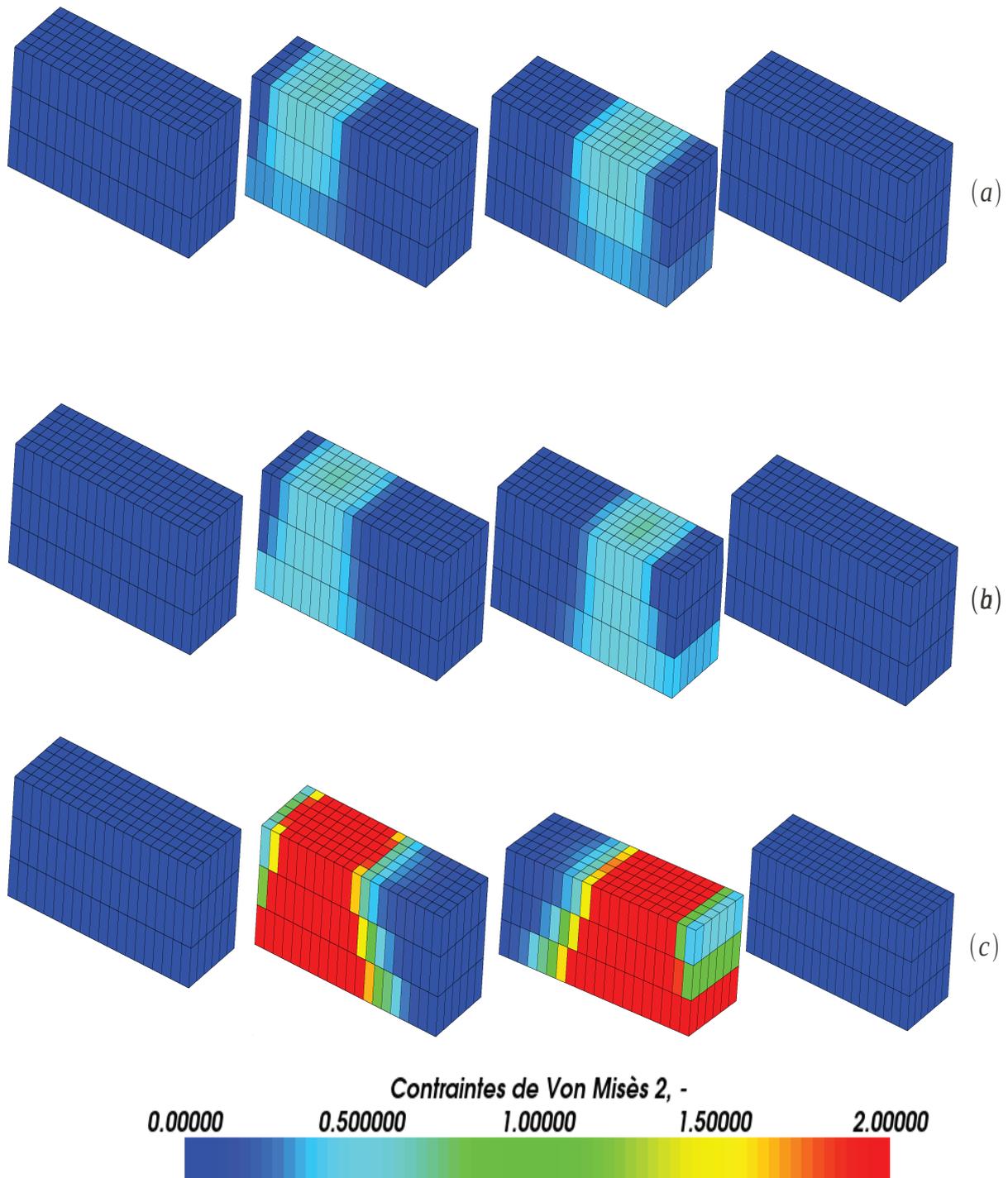


FIGURE 5.3 – Répartition des contraintes de Von Misès : (a) Élastique, (b) Élasto-plastique + Déformations de Simo-Miehe, (c) Hyper-élastique + déformations de Green-Lagrange

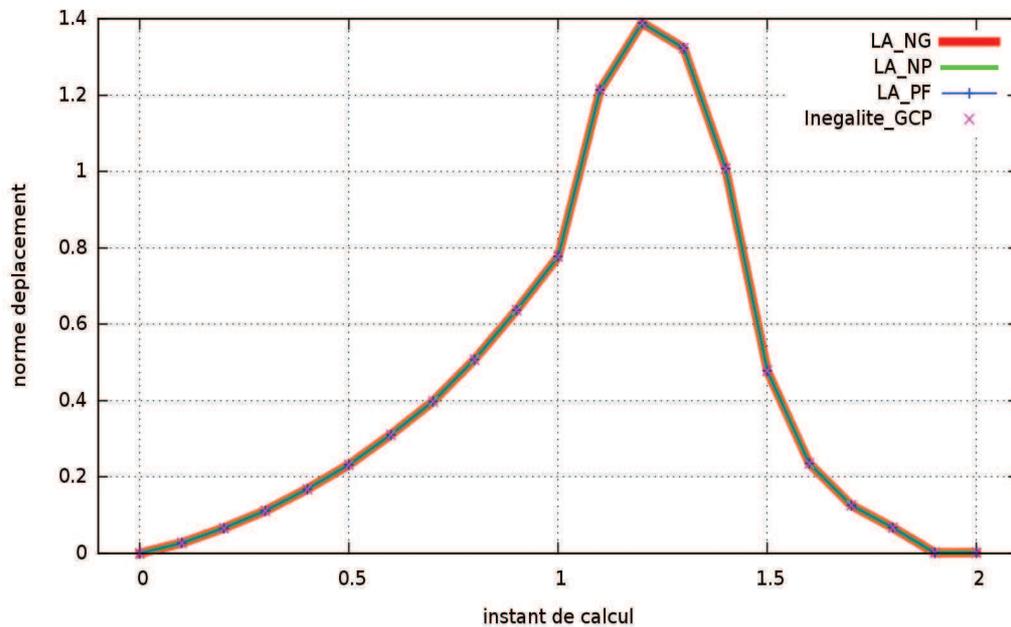


FIGURE 5.4 – Comparaison des méthodes pour l'élasticité linéaire

On trace le déplacement vertical d'un point pris au milieu de la surface esclave situé en $x = 45mm$, $y = 20mm$, $z = 30mm$ au début de la simulation.

On constate que tous les algorithmes de contact utilisés donnent le même résultat.

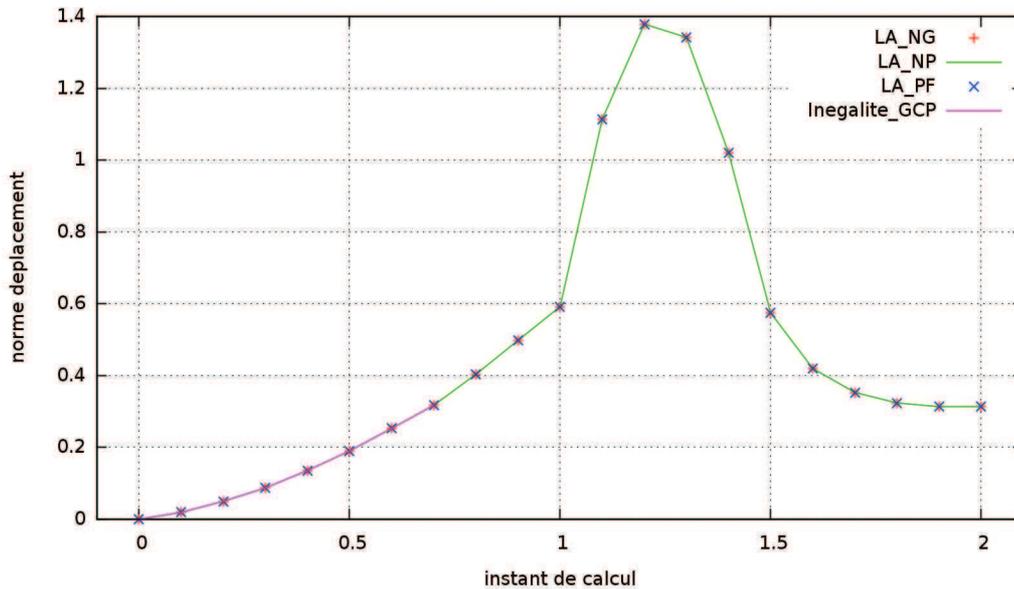
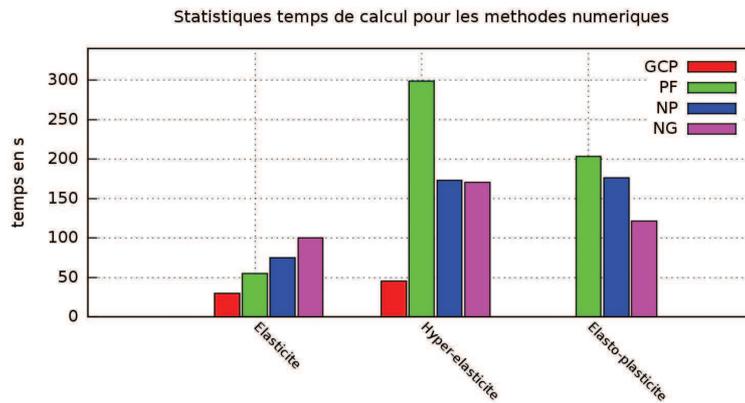


FIGURE 5.5 – Comparaison des méthodes pour l'élasto-plasticité

Lorsqu'on ajoute les grandes déformations de type Simo-Miehe et l'élasto-plasticité, seules les méthodes basées sur le Lagrangien augmenté dans *Code_Aster* fournissent un résultat sans erreur de convergence. Cela confirme le point que nous avons soulevé dans la dernière partie du chapitre 3 sur les méthodes basées sur les inégalités variationnelles et la résolution découplée. On constate que les résultats sont les mêmes pour tous les algorithmes utilisés.

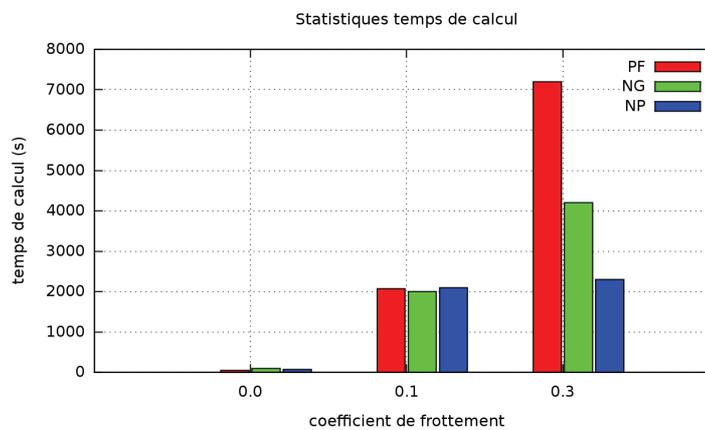
On s'intéresse maintenant aux questions de performances des algorithmes (voir figure 5.6).

- Dans les cas élastiques et hyper-élastiques, on constate que c'est l'algorithme du Gradient Conjugué Projeté qui est le plus rapide. D'où son intérêt dans le code. Dans le cas élasto-plastique, aucune méthode basée sur les inégalités variationnelles ne converge.
- En élasticité, la méthode de Newton généralisée est relativement lente par rapport aux autres méthodes basées sur le Lagrangien augmenté. Dans le cas hyper-élastique ou élasto-plastique, elle est la plus rapide. Cela s'explique par le fait que la méthode de Newton généralisée demande de refaire un appariement et de construire un nouvel élément de contact à chaque itération de Newton. Alors que dans la méthode de point fixe ou de Newton partielle la phase d'appariement est réalisée au début de la boucle de point fixe sur la géométrie et cet appariement ne change plus au cours des itérations de Newton. Si le nombre de boucles de point fixe n'est pas important et s'il y a de faibles non linéarités dans le système alors ce sont les méthodes de point fixe ou de Newton partielle qui sont les plus rapides.
- Dans le cas où l'on ajoute du frottement, tous les algorithmes demandent un temps relativement élevé. On constate cependant que les méthodes de Newton généralisée et Newton partielle fournissent un temps de calcul deux fois inférieur à la méthode de point fixe. Enfin, plus le coefficient de frottement augmente, plus l'algorithme de point fixe augmente en temps de calcul à cause des boucles sur le seuil de frottement tandis que les méthodes de Newton généralisée ou partielle restent stables en nombre total d'itérations. Ce constat est d'un intérêt industriel. En effet, les problèmes industriels sont en général de grande taille, nécessitant beaucoup de temps pour une itération de Newton. Il est donc intéressant de faire le moins d'itérations de Newton possible.
- La méthode historique dans le code est la méthode de point fixe. Les algorithmes implémentés au cours de la thèse sont la méthode de Newton généralisée et la méthode de Newton partielle. On rappelle que la méthode de Newton généralisée résout toutes les non linéarités en une seule boucle d'itérations. La matrice tangente est bien plus coûteuse à calculer et même non symétrique en cas de frottement. De plus pour la méthode de Newton généralisée, à chaque itération, c'est un nouveau problème que l'on doit résoudre. Cela explique qu'elle soit lente dans certains cas. La méthode de Newton partielle essaie de tirer parti des avantages de la méthode de point fixe et la méthode de Newton généralisée.



Relevé du nombre total d'itérations de Newton (sans frottement)

	Gradient Conj. Proj.	Point fixe	Newton partiel	Newton géné.
Élasticité	117	168	285	317
Élasto-plasticité	Non convergence	651	581	301
Hyper-élastique	216	1386	726	849



Relevé du nombre total d'itérations de Newton (élasto-plasticité avec frottement)

Coef. de frottement	GCP ou Lagrangien	Point fixe	Newton partiel	Newton géné.
0.0	Non convergence	651	581	301
0.1	Non convergence	3745	3721	3759
0.3	Non convergence	8755	3940	4200

FIGURE 5.6 – Statistiques de performances pour $r_n = r_t = 100$

Dans le tableau : en rouge = pas bon , en turquoise = bon

Exemple n^02 : validation du cadre de la dynamique lente

A- Processus quasi-statique :

Les problèmes auxquels on s'intéresse sont tels que l'on cherche une succession d'états d'équilibre sans avoir à faire intervenir les forces d'inertie : c'est l'hypothèse quasi-statique. On rappelle qu'il faut trouver, à l'instant courant discrétisé t_{k+1} les déplacements et les pressions (u, λ_n, Λ) tels que :

$$F^{int}(u^{k+1}) + F^{cont-frott}(u^{k+1}, \lambda_n^{k+1}, \Lambda^{k+1}) - F^{k+1} = 0 \quad (5.1)$$

L'indice k représente le pas de temps. On résout ce problème par une méthode de Newton généralisée implicite.

$$\begin{cases} X_P^{k+1} = (u_P^{k+1}, \lambda_{n,P}^{k+1}, \Lambda_P^{k+1}) \\ (K_P^T, \Delta X_{P+1}^{k+1}) = F^{int}(u_P^{k+1}) + F^{cont-frott}(u_P^{k+1}, \lambda_{n,P}^{k+1}, \Lambda_P^{k+1}) - F_P^{k+1} \end{cases} \quad (5.2)$$

l'indice P représente l'itération courante de Newton sur le pas de temps donné et K^T est la matrice tangente après linéarisation du problème. Pour la méthode implicite, on utilise les schémas de prédiction-correction fréquemment utilisés dans les codes éléments finis [24].

B- Processus de régularisation dynamique lente

Dans certains processus de déformations il apparaît :

- Des zones fortement plastifiées
- Des zones soumises à de fortes variations géométriques
- Des zones soumises à de fortes variations de seuil de frottement
- Des zones qui effectuent des mouvements de corps pseudo-rigides

Une des conséquences des mouvements des corps pseudo-rigides est la singularité de la matrice. D'une façon générale, on remarque que le conditionnement de la matrice K^T est élevé et cela conduit à des problèmes de convergence. Pour diminuer ces effets, on peut introduire une régularisation dynamique que nous appelons « le cadre de la dynamique lente ». On le nomme ainsi pour rappeler le fait que l'on veut rester dans un cadre quasi-statique.

Le problème que l'on cherche à résoudre n'est pas un réel problème de dynamique. Il faut trouver, à l'instant courant discrétisé t_{k+1} les déplacements et les pressions (u, λ_n, Λ) tels que :

$$\begin{cases} F^{int}(u^{k+1}) + F^{cont-frott}(u^{k+1}, \lambda_n^{k+1}, \Lambda^{k+1}) - F^{k+1} - F(\ddot{u}^{k+1}) = 0 \\ F(\ddot{u}^{k+1}) \approx 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Pour la discrétisation temporelle, un schéma numérique est utilisé (Newmark, HHT, Théta-méthode, Krenk [24,59,70,84]).

On peut écrire par exemple le problème sous la forme générale suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_P^{k+1} = (u_P^{k+1}, \lambda_{n,P}^{k+1}, \Lambda_P^{k+1}) \\ (\alpha \frac{M}{[\Delta T^{k+1}]^2} + \beta K_P^T, \Delta X_{P+1}^{k+1}) = F^{int}(u_P^{k+1}) + F^{cont-frott}(u_P^{k+1}, \lambda_{n,P}^{k+1}, \Lambda_P^{k+1}) - F_P^{k+1} \\ \frac{M}{[\Delta T^{k+1}]^2} \approx 0 \\ \alpha, \beta \in R^+ \end{array} \right. \quad (5.4)$$

On constate que la matrice de masse se rajoute à la matrice tangente de départ et cela entraîne souvent un effet bénéfique. α, β sont des réels positifs liés au schéma utilisé.

On se rend compte que la difficulté est de choisir les paramètres numériques. Pour les besoins industriels, il y a plusieurs façons de procéder comme souligné dans les travaux de thèse de Jourdan [60]. Ceux utilisés dans notre travail sont :

- Cas réel : On introduit la masse réelle de chaque corps dans le calcul et on prend des pas de temps petits. Il s'agit d'un vrai problème de dynamique et il n'est pas question dans ce cas d'obtenir les mêmes résultats qu'un calcul quasi-statique.
- Cas de dynamique lente 1 : On maintient la masse spécifique de chaque corps dans le système mais on prend des pas de temps très grand.
- Cas de dynamique lente 2 : On introduit une masse faible dans le système et on utilise des pas de temps petits.

C- Application numérique

On considère un cas-test issu de *Code_Aster*. Il s'agit d'un test de repassage en 2D. Les 2 corps sont élastiques, déformables et obéissent à une cinématique de grandes déformations. Ce test prend en compte le frottement μ est fixé à une valeur de 0.3.

Les caractéristiques géométriques sont :

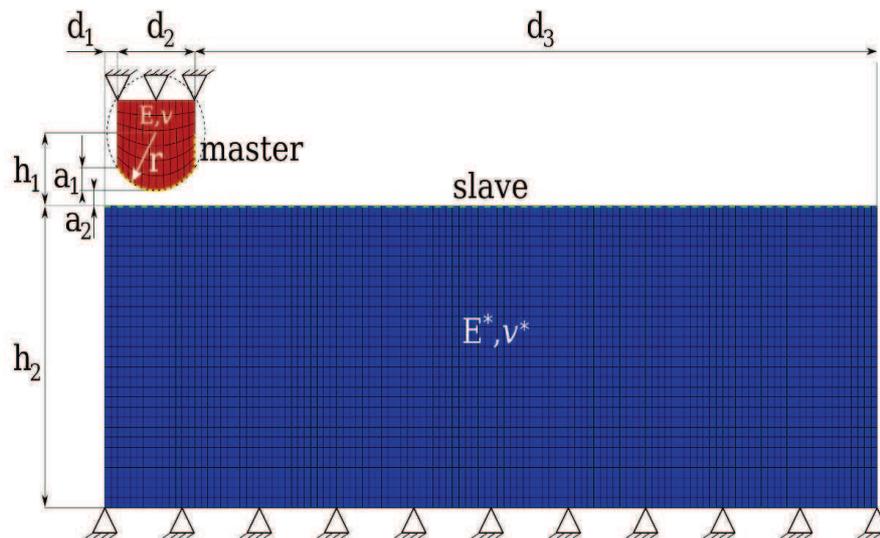


FIGURE 5.7 – Caractéristiques géométriques (source *Code_Aster* et thèse de Yastrebov [114])

$$d_1 = 0.2 \text{ mm}, d_2 = 1.2 \text{ mm}, d_3 = 10.6 \text{ mm}, h_1 = 0.95 \text{ mm}, h_2 = 4 \text{ mm}, a_1 = 0.3, a_2 = 0.2$$

Le maillage comporte 3842 éléments QUAD4, dont 121 noeuds esclaves. On trace l'évolution au cours du temps de la réaction de contact en bas du poinçon.

Les propriétés matériaux sont :

Pour le corps maître : $E = 68.96 \cdot 10^8 \text{ MPa}$, $\nu = 0.32$

Pour le corps esclave : $E = 6.896 \cdot 10^8 \text{ MPa}$, $\nu = 0.32$

On réalise d'abord l'indentation du poinçon grâce à un déplacement vertical imposé de 1 mm. On réalise ensuite un glissement dans la direction horizontale sur 10mm.

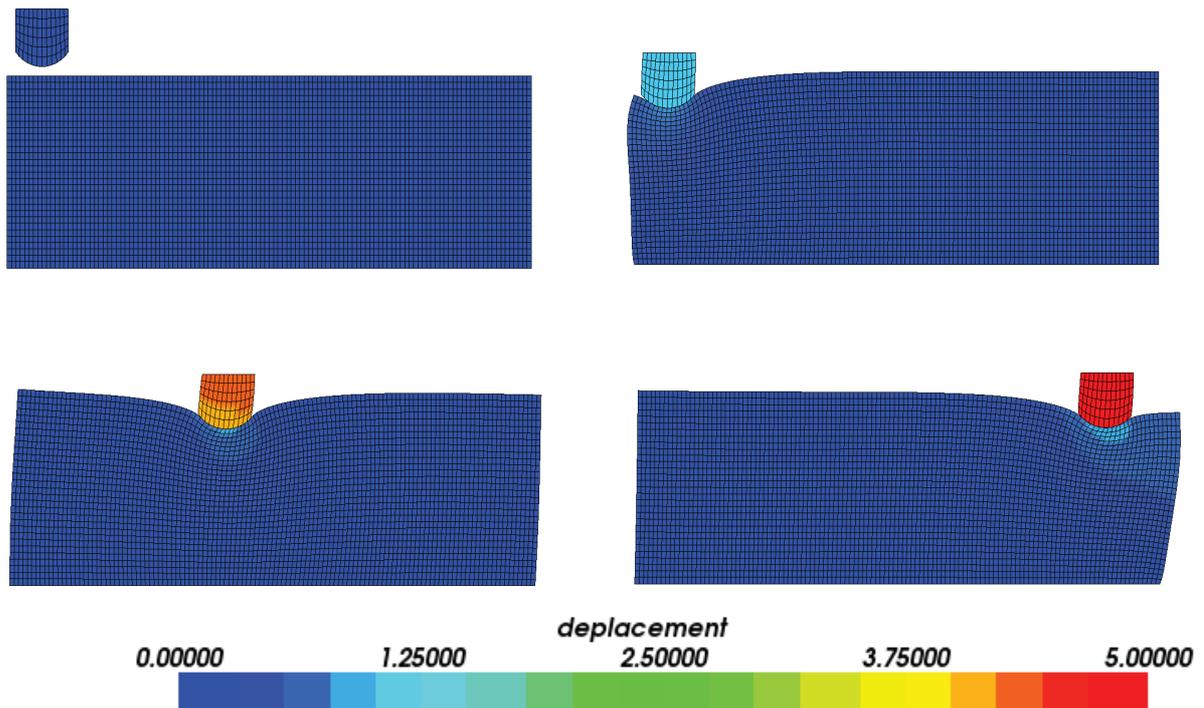


FIGURE 5.8 – Grands glissements d'un poinçon déformable sur un plan mou (tracé avec une échelle limitée)

L'influence d'une masse qui respecte les hypothèses de l'étude est tracé sur la figure 5.9. En prenant une masse plus faible que la masse réelle du corps on arrive à retrouver exactement les mêmes solutions recherchées en quasi-statique. En pratique la détermination de cette masse n'est pas évidente, donc on adoptera sur certains calculs (comme l'emboutissage) d'autres stratégies.

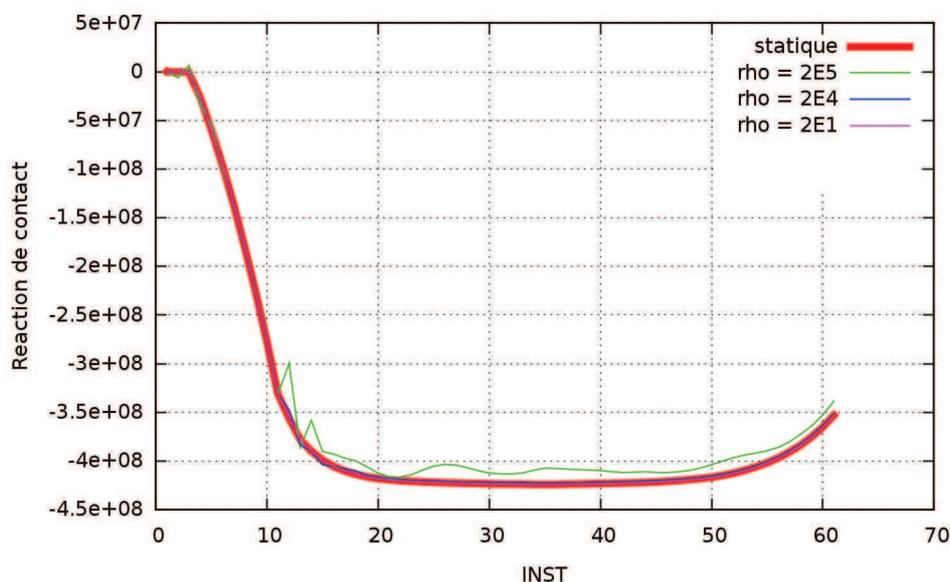


FIGURE 5.9 – Dynamique lente, quasi-statique : sensibilité par rapport à la masse virtuelle introduite

Exemple n^03 : grandes déformations d'une bague élastique sur un plan mou

On considère le contact entre une bague élastique « composite » dont les caractéristiques géométriques sont (voir figure 5.10) :

$$R_1 = 90 \text{ mm}, R_2 = 95 \text{ mm}, R_3 = 100 \text{ mm}$$

Le bloc élastique est un carré de dimensions :

$$L_1 = 250 \text{ mm}, L_2 = 50 \text{ mm}$$

Les deux corps sont initialement séparés d'une distance de $c = 20 \text{ mm}$.

La bague circulaire est composée de deux matériaux :

Pour le matériau supérieur :

$$E_{sup} = 10^5 \text{ MPa}, \nu = 0.3$$

Pour le matériau inférieur :

$$E_{inf} = 10^3 \text{ MPa}, \nu = 0.3$$

Pour le bloc élastique :

$$E_{bloc} = 300 \text{ MPa}, \nu = 0.3$$

On impose un déplacement de $u_y = 90 \text{ mm}$ sur la face supérieure de la bague et le bas du bloc est encastré.

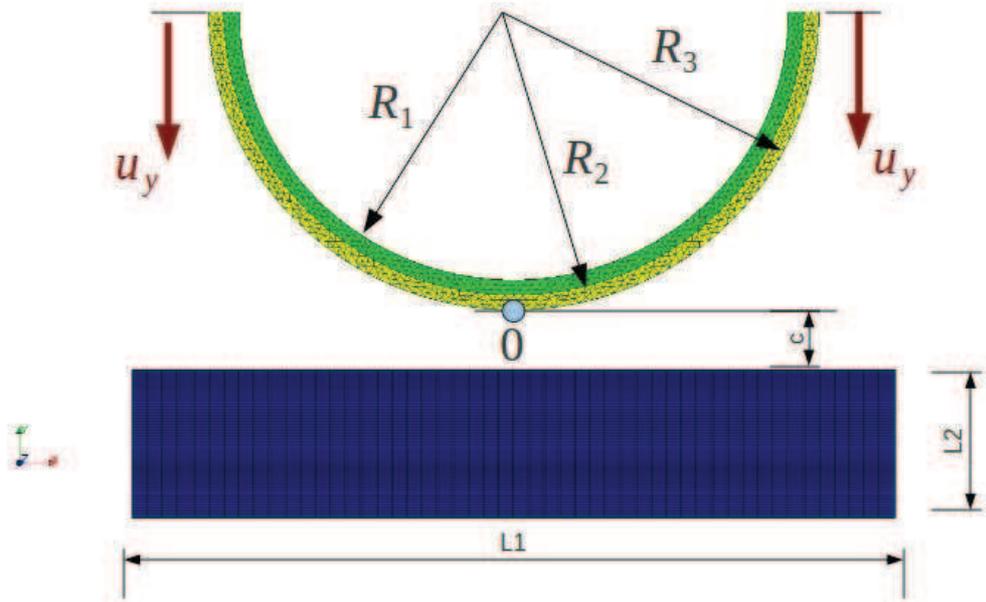


FIGURE 5.10 – Contact entre une bague élastique « composite » et un plan mou

On cherche à comparer les performances des algorithmes. Les modèles de contact utilisés sont :

- Newton généralisé
- Newton partiel
- Point fixe

Le calcul a été fait dans un contexte de dynamique lente en prenant :

$$\rho_{sup} = \rho_{inf} = \rho_{bloc} = 2 \cdot 10^{-5}$$

avec un pas de temps petit de l'ordre de 10^{-3} s.

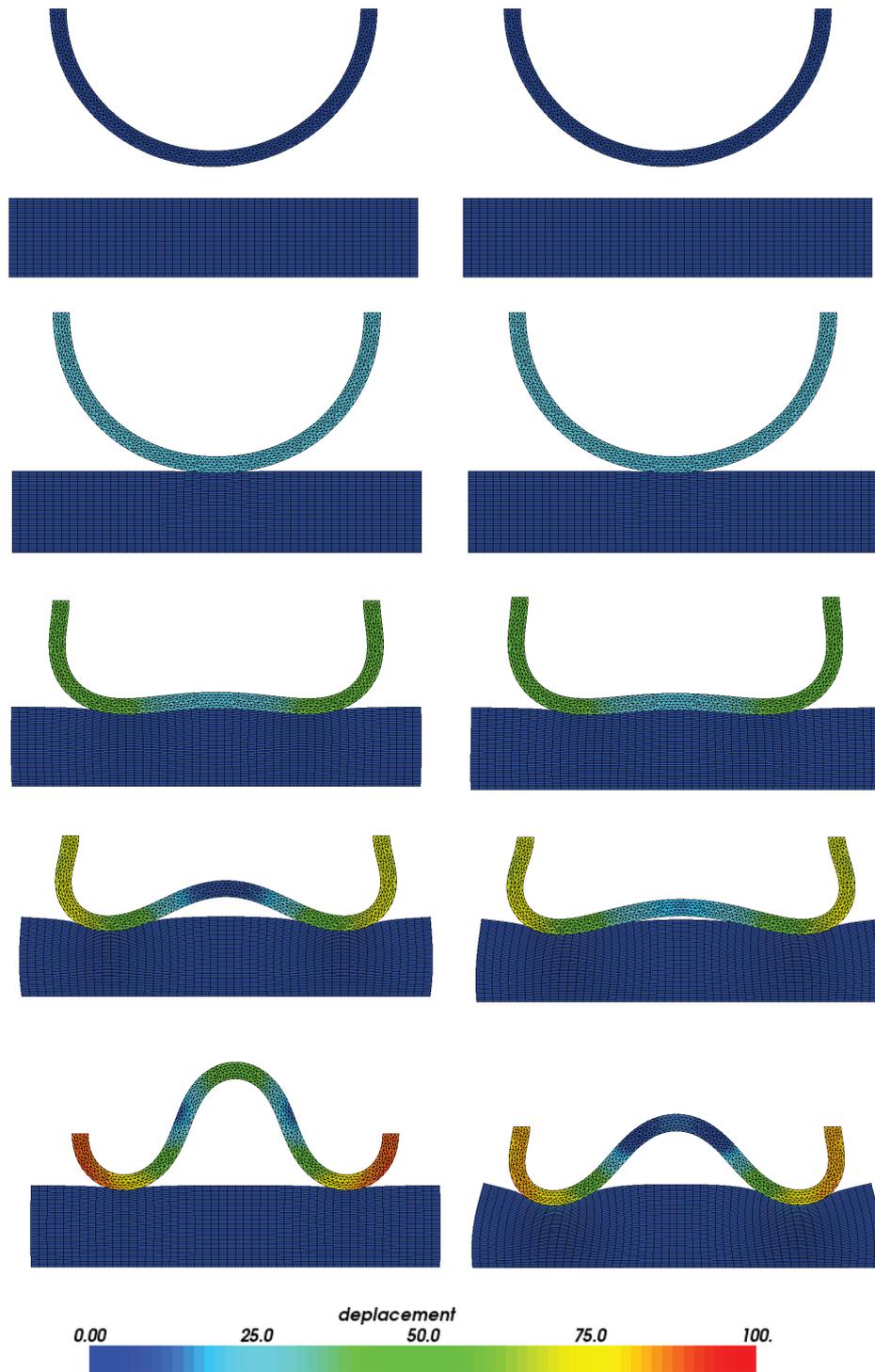


FIGURE 5.11 – Déformée : à gauche contact sans frottement et à droite contact avec un coefficient de frottement de 0.3

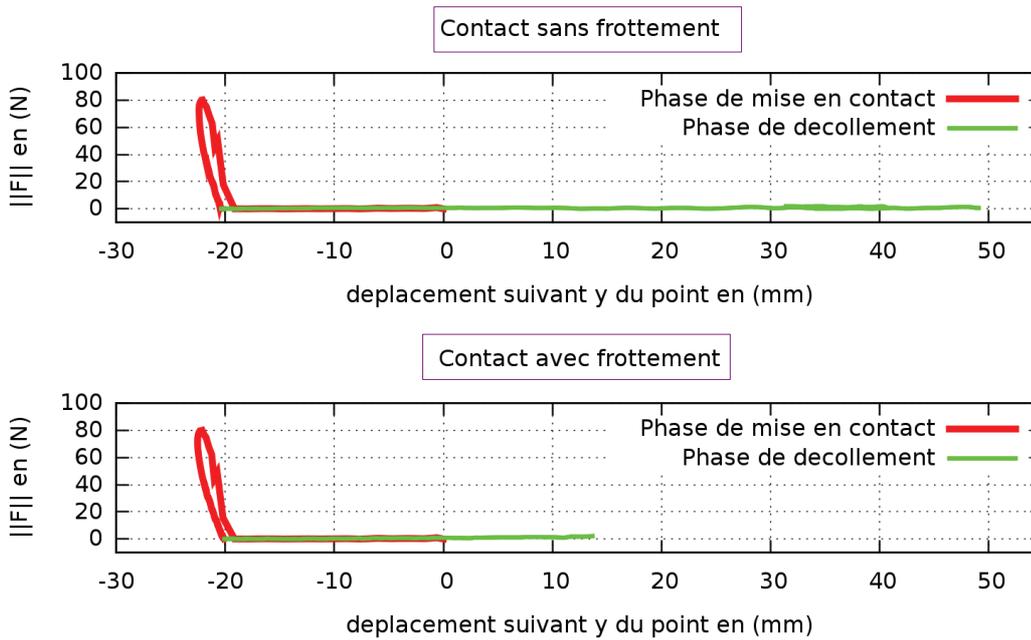


FIGURE 5.12 – Tracé de la force nodale suivant y (en N) en fonction du déplacement vertical du point O

En terme de performances, on a le résultat suivant en nombre total d'itérations de Newton :

Point fixe	Tps calcul	Nombre total itérations	Nombre total appariements
coef. frott = 0.0	35 m 29 s	2603	1932
coef. frott = 0.3	44 m 54 s	3811	1700
Newton partiel	Tps calcul	Nombre total itérations	Nombre total appariements
coef. frott = 0.0	37 m 40 s	3503	1757
coef. frott = 0.3	47 m 26 s	4160	1954
Newton géné	Tps calcul	Nombre total itérations	Nombre total appariements
coef. frott = 0.0	22 m 22 s	2216	2216
coef. frott = 0.3	45 m 49 s	4054	4054

Sur ce problème, la méthode de Newton généralisée est la plus rapide dans le cas sans frottement. Dans le cas avec frottement, toutes les méthodes fournissent un temps de calcul similaire.

À travers les exemples qui ont été exhibés jusqu'alors, on montre l'intérêt de chaque

algorithme en terme de performances et fiabilité. Leur robustesse (comme cela a été montré dans le chapitre 4) peut être améliorée.

2 Application de la méthode adaptative pour le cyclage

Exemple n^01 : Bloc déformable soumis à des sollicitations sévères

On reprend l'exemple académique de référence dans nos études (voir figure 3.11 section 4). On cherche à préciser les caractères de robustesse-fiabilité de la méthode adaptative de cyclage de contact. Dans un but pédagogique, on traite uniquement les oscillations de statuts de contact.

On impose trois types de sollicitations variables dans le temps :

- *Sollicitation A : chargement - déchargement réguliers*

On impose à la structure une sollicitation monotone croissante (linéaire) jusqu'à 1s suivie d'un déchargement monotone décroissant (linéaire) jusqu'à 2s. Soit P_n la pression normale imposée sur la face supérieure du bloc et P_t la pression tangentielle imposée sur latérale.

$$P_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ 5 \cdot 10^7 & \text{si } t = 1 \\ 5 \cdot 10^1 & \text{si } t = 2 \end{cases} ; P_t(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ 15 \cdot 10^7 & \text{si } t = 1 \\ 15 \cdot 10^1 & \text{si } t = 2 \end{cases} \quad (5.5)$$

- *Sollicitation B : chargements réguliers - déchargements non réguliers*

On impose à la structure une sollicitation sévère. On charge de manière monotone et croissante (linéaire) jusqu'à 1s, puis on effectue un déchargement régulier de manière linéaire jusqu'à 1.5s. Enfin, on maintient la structure à une chargement constant très faible jusqu'à 2s.

$$P_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ 5 \cdot 10^7 & \text{si } t = 1 \\ 5 \cdot 10^1 & \text{si } t = 1.5 \\ 5 \cdot 10^1 & \text{si } t = 2 \end{cases} ; P_t(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ 15 \cdot 10^7 & \text{si } t = 1 \\ 15 \cdot 10^1 & \text{si } t = 1.5 \\ 15 \cdot 10^1 & \text{si } t = 2 \end{cases} \quad (5.6)$$

- *Sollicitation C : Chargement régulier - déchargement sévère*

On impose à la structure une sollicitation sévère. On charge de manière monotone et croissante (linéaire) jusqu'à 1s, puis on effectue un déchargement brutal de manière linéaire jusqu'à 1.05s. Enfin, on maintient la structure à une chargement

constant très faible jusqu'à 2s.

$$P_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ 5 \cdot 10^7 & \text{si } t = 1 \\ 5 \cdot 10^1 & \text{si } t = 1.05 \\ 5 \cdot 10^1 & \text{si } t = 2 \end{cases} ; P_t(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ 15 \cdot 10^7 & \text{si } t = 1 \\ 15 \cdot 10^1 & \text{si } t = 1.05 \\ 15 \cdot 10^1 & \text{si } t = 2 \end{cases} \quad (5.7)$$

- $P_n(t), P_t(t)$ sont en MPa.

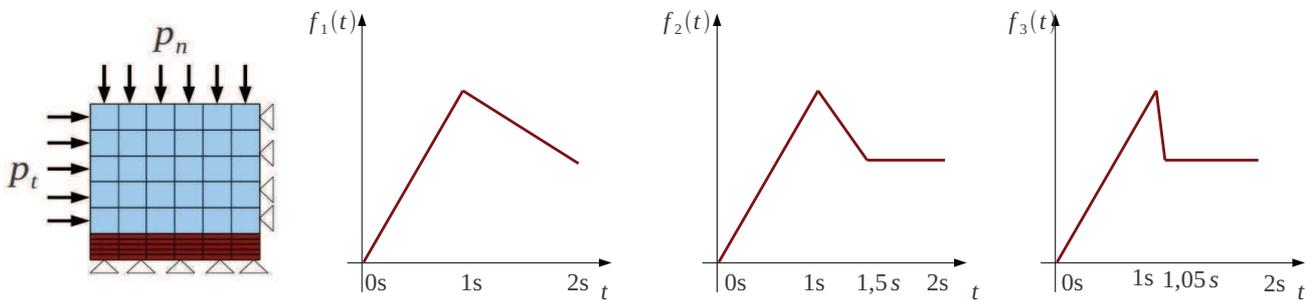


FIGURE 5.13 – Bloc déformable soumis à des sollicitations sévères

On propose trois modèles de contact-frottement pour cette étude :

- *Modèle A : contact bilatéral et frottement de Coulomb*

Il s'agit d'un modèle de contact unilatéral « dégradé » (contact collé) : les corps ne peuvent pas s'interpénétrer et le contact, une fois établi dans une zone, ne peut se décoller. Les équations de Signorini deviennent :

$$d_n \leq 0, d_n \lambda_n = 0$$

Cette loi autorise des pressions positives qui s'opposent au décollement d'un point en contact. Elle est compatible avec la loi de Coulomb, car le jeu est connu pour les points qui sont en contact mais la pression reste une inconnue du problème donc le seuil de frottement est lui aussi inconnu.

- *Modèle B : contact unilatéral avec frottement de Coulomb*
- *Modèle C : contact unilatéral avec frottement de Coulomb et méthode adaptative de cyclage*

L'algorithme activé est un algorithme de Newton généralisé.

On mène deux types d'étude : contact sans frottement et contact avec frottement. Le corps est supposé élastique avec un module d'Young de $1 \cdot 10^{11}$ et un coefficient de Poisson de 0.3.

Etude 1 : contact sans frottement

On constate que toutes les modélisations du contact fournissent le même résultat (voir figure 5.14). Le déchargement dans la zone de contact se produit simultanément avec le déchargement imposé. Cela s'explique par le fait que le glissement est parfait (aucune force ne s'oppose au déplacement tangent) et que tous les points de l'interface sont en contact ($d_n = 0$). Le tracé est fait pour un point situé dans la zone de contact $x = 10mm$. La prochaine étape est de considérer le frottement.

Etude 2 : contact avec frottement ; recherche de solutions multiples

On introduit un coefficient de frottement μ à l'interface.

La première précaution à prendre en terme de fiabilité des résultats est de savoir si la solution est unique.

Pour répondre à cette question, les résultats théoriques exposés au chapitre 4, demandent de montrer que les opérateurs discrets sont des homéomorphismes et que le déterminant de la matrice globale soit positif (ce déterminant dépend des paramètres de coefficient de frottement, maillage, paramètres élastiques, etc voir [6]). Malgré le caractère exact de ce critère, sa mise en application paraît coûteuse. C'est pour cela qu'on utilise un critère approximatif pour le cas étudié.

Si les statuts de contact restent stables (tous les points de l'interface sont inconditionnellement en contact) alors les modélisations de contact A et B doivent fournir le même résultat. Il existe un coefficient de frottement critique à partir duquel la perte de stabilité des statuts de contact-frottement est constatée. En d'autres termes, on cherche le coefficient de frottement critique à partir duquel le trajet des pressions et des jeux de contact sont perturbés de sorte que plusieurs solutions soient envisageables. On l'appellera « coefficient de frottement critique approximatif ».

Pour vérifier cette hypothèse, on trace les multiplicateurs de Lagrange de contact-frottement λ_n, Λ en fonction de l'instant de calcul pour les trois types de sollicitations et en fonction du coefficient de frottement. Le tracé est réalisé pour un point situé dans la zone de contact $x = 10mm$.

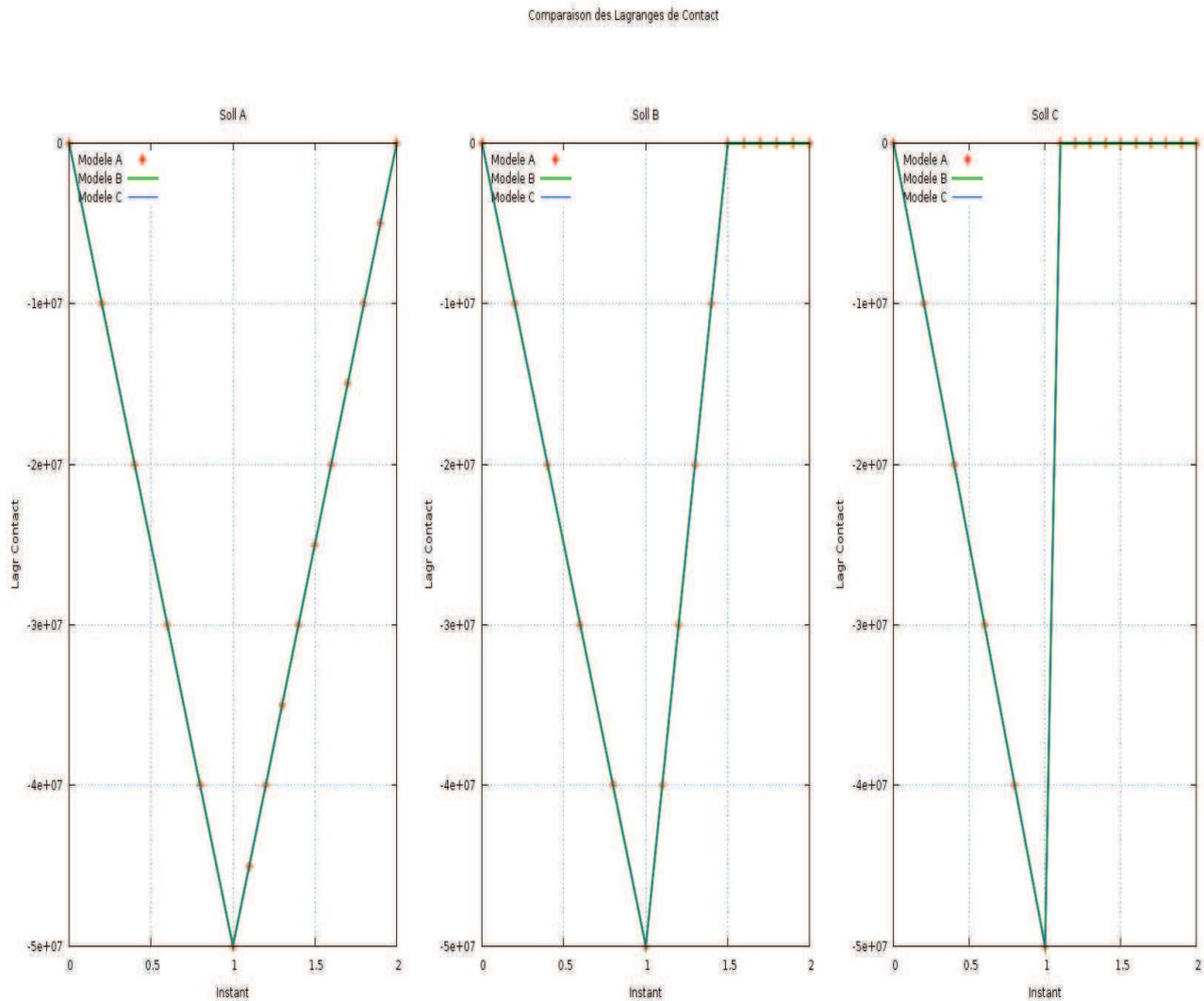


FIGURE 5.14 – Comparaison des multiplicateurs de Lagrange de contact sous diverses sollicitations

On rappelle que si $\lambda_n < 0$:

- si $\|\Lambda\| < 1$ alors il y a contact-adhérent
- si $\|\Lambda\| \approx 1, \Lambda \cdot e_x < 0$ alors il y a contact-glisement arrière
- si $\|\Lambda\| \approx 1, \Lambda \cdot e_x > 0$ alors il y a contact-glisement avant

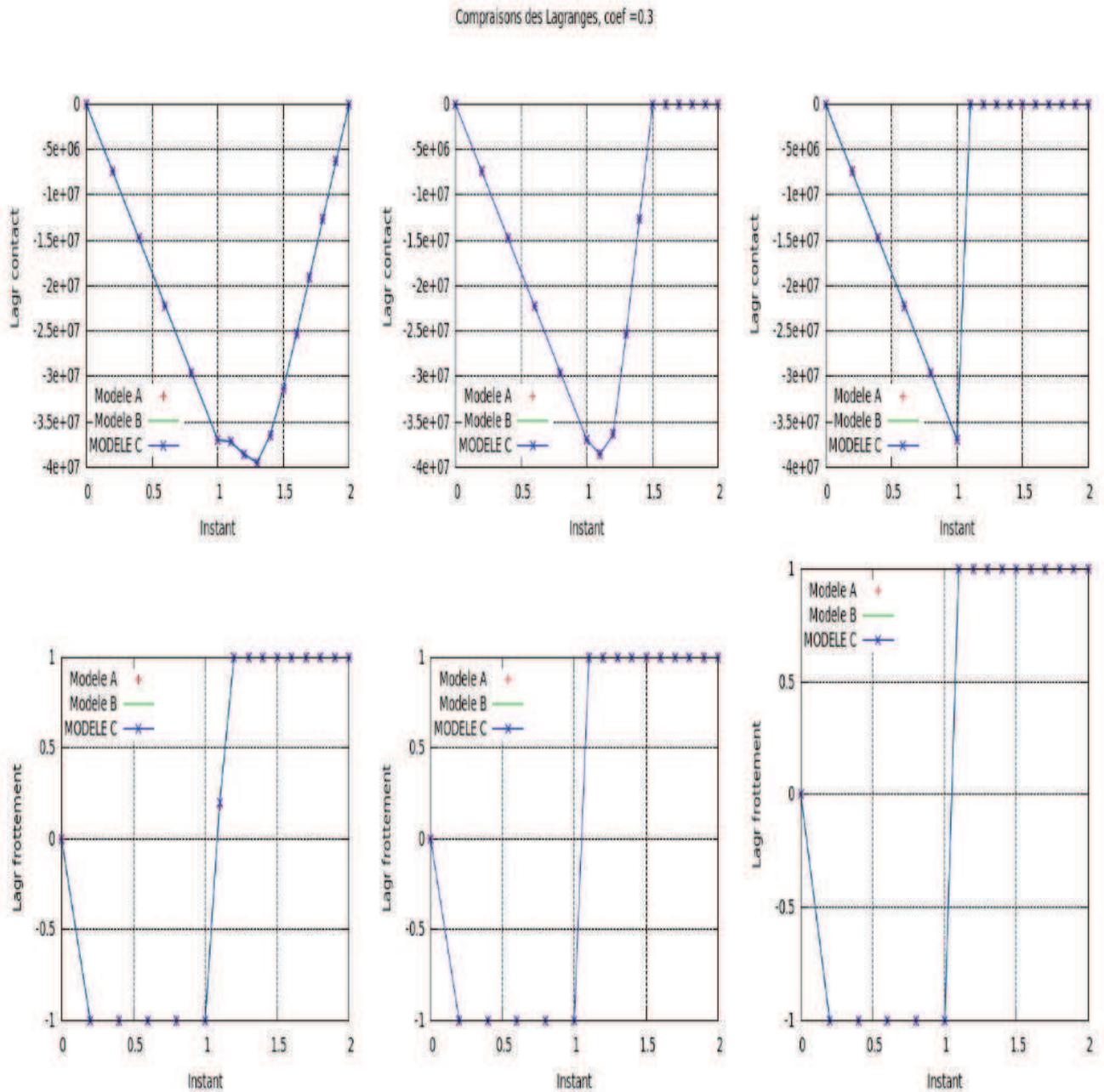


FIGURE 5.15 – Comparaison des multiplicateurs de Lagrange sous diverses sollicitations : coefficient de frottement = 0.3

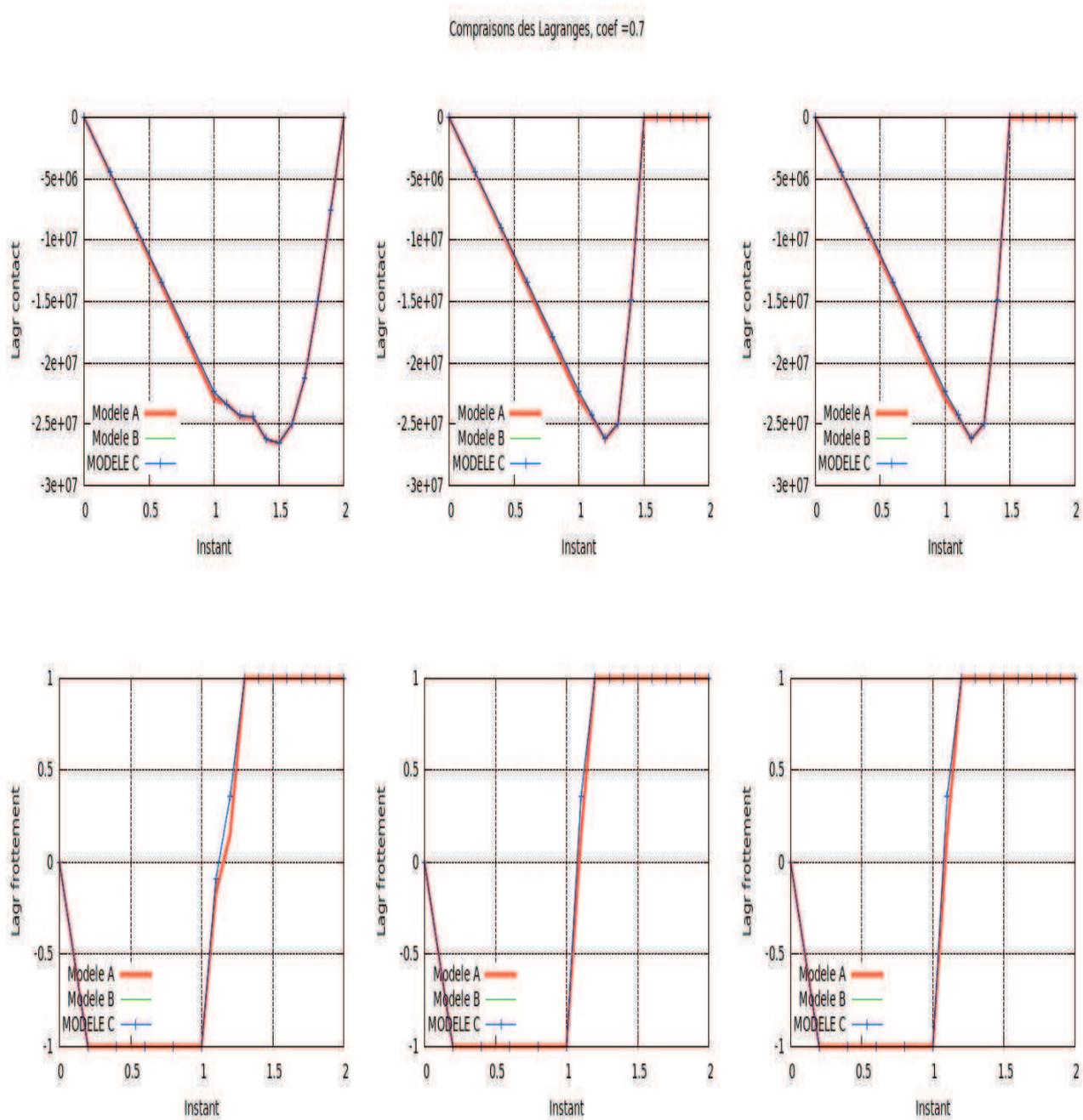


FIGURE 5.16 – Comparaison des multiplicateurs de Lagrange sous diverses sollicitations : coefficient de frottement = 0.7

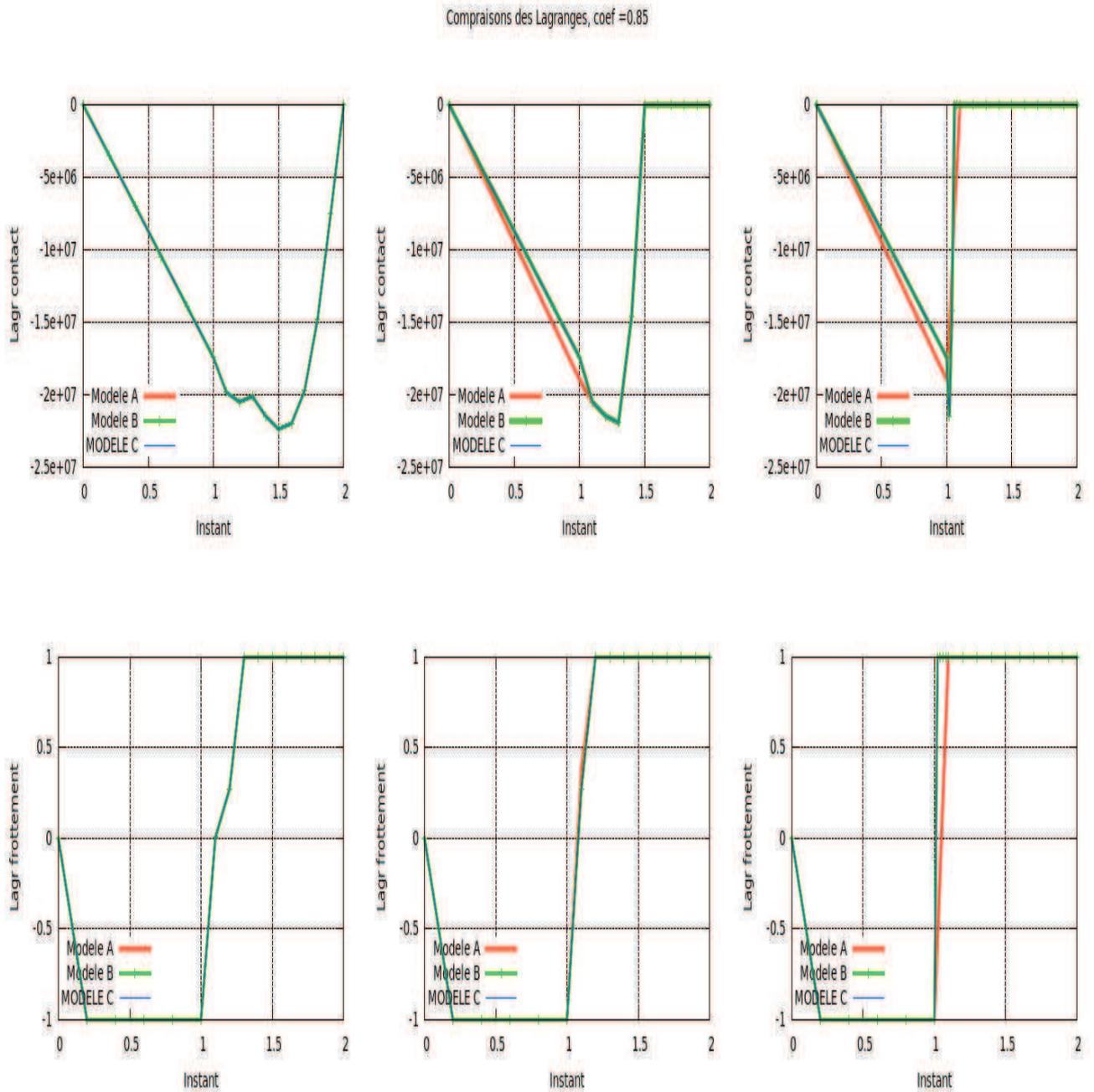


FIGURE 5.17 – Comparaison des multiplicateurs de Lagrange sous diverses sollicitations : coefficient de frottement = 0.85

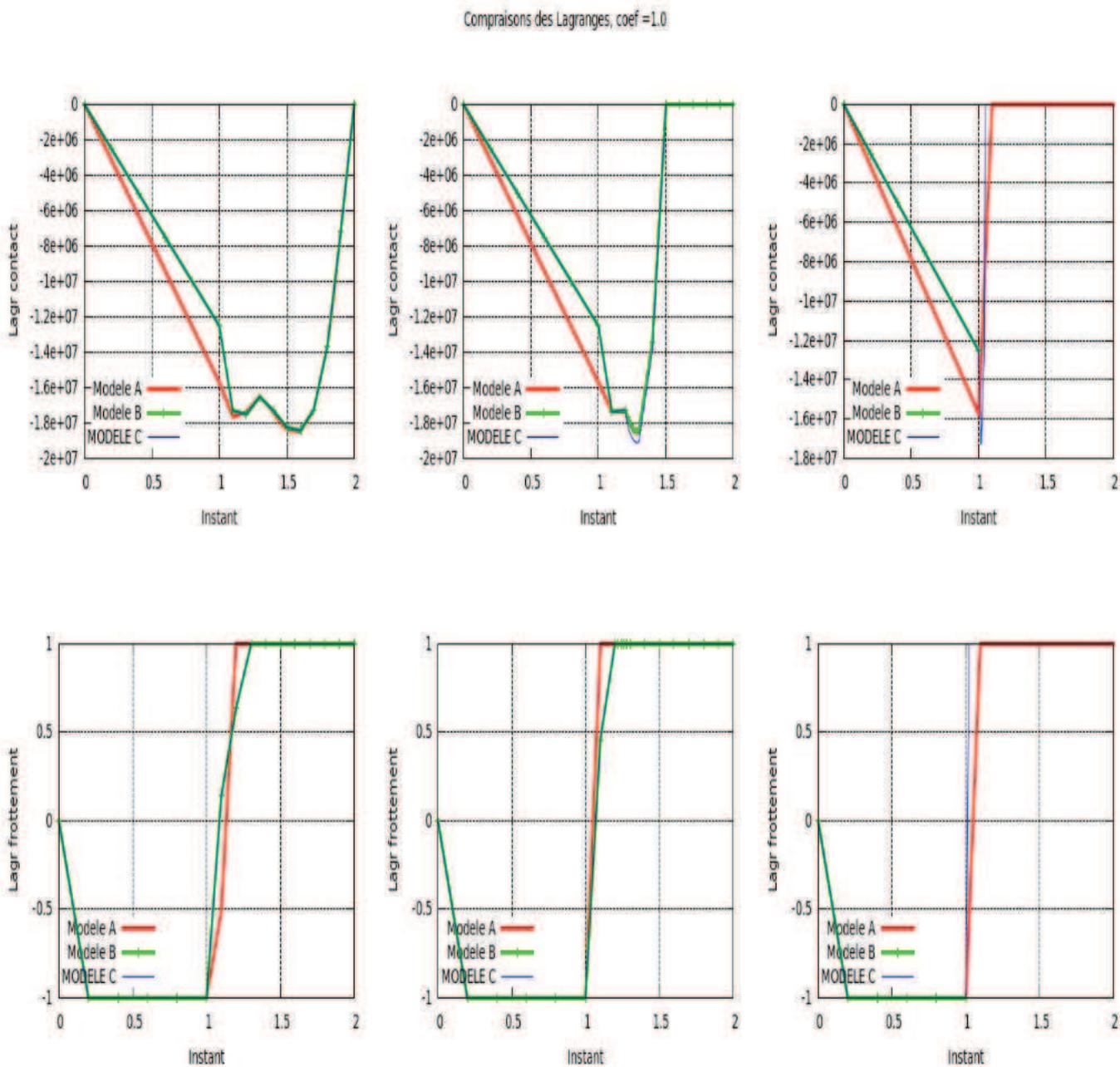


FIGURE 5.18 – Comparaison des multiplicateurs de Lagrange sous diverses sollicitations : coefficient de frottement = 1.0

Résultats et Interprétations

- Pour le cas d'un coefficient de frottement $\mu = 0.3$, on constate que les modèles A,B et C donnent exactement le même résultat que ce soit en multiplicateurs de Lagrange de contact ou en multiplicateurs de Lagrange de frottement. De plus pour les cas des sollicitations A et B, on constate que le déchargement n'intervient pas tout de suite après l'instant 1s. Ce qui n'était pas le cas en contact sans frottement. Donc cet effet de « retard au déchargement » est lié au frottement. On suppose que le coefficient de frottement testé est en dessous du « coefficient de frottement critique approximatif ».
- Pour le cas du coefficient de frottement $\mu = 0.7$, il apparaît des écarts de trajets de pressions pour les trois modélisations de contact. L'écart est accentué dans le cas d'un coefficient de frottement de 0.85. Les modélisations B et C (contact unilatéral avec frottement sans/avec adaptation des statuts) donnent exactement les mêmes résultats. Tandis que le modèle A (contact bilatéral avec frottement) donne un résultat différent avec près de 15% d'écart. Pendant la phase de chargement, tous les points sont contactants donc le modèle de contact bilatéral peut être une solution envisageable.
- Pour le coefficient de frottement $\mu = 1$, on fait plusieurs constats. Tout d'abord, on remarque un écart de 3% entre les modèles B et C dans le cas de sollicitation B. Dans le cas de la sollicitation C, seuls les modèles de contact A et C fournissent une solution jusqu'à la fin du calcul. Cela démontre la robustesse de ces deux modèles. Les modélisations B et C fournissent le même résultat pendant la phase de chargement.

Avantages et inconvénients de la méthode de traitement de cyclage

En cherchant à contrôler de manière fine les statuts de contact des points pathologiques, on a introduit un nouveau modèle de contact unilatéral avec traitement adaptatif des statuts. Il n'est donc pas question de chercher à retrouver les mêmes résultats que le modèle de base qui est le contact unilatéral sans aucun traitement. Cependant sur un certain nombre de tests, on a constaté que le modèle introduit fourni des résultats très proches de la solution du modèle de contact unilatéral.

- Avantages

Ce modèle combine le modèle de contact bilatéral et le contact unilatéral. On a les avantages en robustesse de la méthode de contact bilatéral avec les avantages en fiabilité de la méthode de contact unilatéral. C'est un modèle plus riche que le modèle de contact bilatéral car seuls quelques points de contact pathologiques (en cyclage sur leurs statuts de contact) sont traités pendant tout le processus de résolution. Tandis que la modélisation de contact bilatéral fixe tous les points en contact pendant tout le processus de résolution.

- Inconvénients

Le modèle proposé a aussi les inconvénients liés au contact bilatéral. Dans certains cas, le problème de cyclage n'intervient pas à chaque pas de temps. Or en cherchant à contrôler les statuts, un point qui était en contact et qui devrait se détacher restera bloqué. La conséquence est que des multiplicateurs de Lagrange de contact peuvent rester positifs. Donc le modèle proposé nécessite encore des améliorations. D'un point de vue pratique, un indicateur de solutions industriellement exploitables est la « non observation des valeurs positives de multiplicateurs de Lagrange de contact ». Toutefois les écarts générés par ce modèle sont moindres que le modèle de contact bilatéral actuellement présent dans le code.

3 Problèmes industriels

On présente dans cette section quelques études industrielles qui ont été menées au cours de la thèse.

Pour diverses raisons, nous ne présenterons pas en détail les résultats physiques issus de la simulation. Outre leurs caractères complexes, ces études peuvent présenter un temps de calcul relativement long (plusieurs jours de calcul). C'est ce qui va particulièrement nous intéresser.

Exemple n^01 : problème d'emboutissage

Ce test est l'une des applications industrielles de la méthode adaptative des statuts de contact. Il s'agit du problème d'emboutissage sur lequel on constate que plusieurs points glissent avec de faibles pressions de contact entre la matrice et la tôle. Le problème est triplement non-linéaire : écouissage isotrope non-linéaire, grandes transformations et contact sans frottement.

Caractéristiques géométriques et maillage

La structure est modélisée en déformations planes. La géométrie est décrite par la figure ci-dessous (voir figure 5.19).

Le maillage comporte 3436 noeuds. On utilise des 820 éléments quadratiques pour la tôle et 520 éléments segments pour le poinçon et la matrice (voir figure 5.20).

Propriétés matériaux

Le poinçon et la matrice sont supposés rigides.

La tôle est un matériau élasto-plastique à écouissage isotrope non linéaire de type Hollomon.

Propriétés élastiques :

$$E = 70500MPa, \nu = 0.342$$

Limite élastique :

$$\sigma_0 = 194MPa$$

Écouissage isotrope non linéaire (voir figure 5.21) :

$$\sigma = K \epsilon^n$$

On utilise le tenseur de déformations de Simo-Miehe.

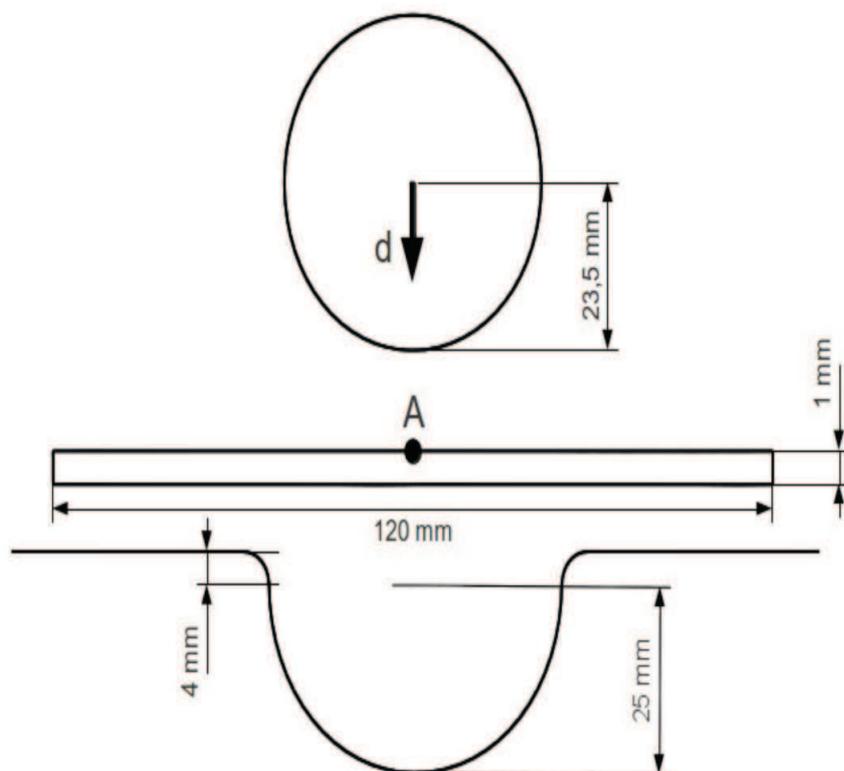


FIGURE 5.19 – Problème d’emboutissage : géométrie

Conditions de simulation

Le calcul se déroule en deux phases. On impose au poinçon un déplacement vertical de 29.5mm vers le bas. Cette étape se fait sur 900s en utilisant un pas de temps de 3s . Ensuite on décharge, en retirant le poinçon suivant un déplacement vertical dirigé vers le haut jusqu’à 1000s . La matrice est encastrée. Le serre-flan est modélisé par une condition aux limites en déplacement sur le haut de la tôle (voir figure 5.22). Le calcul a été fait dans un cadre de dynamique lente en prenant une masse faible de la tôle $\rho = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

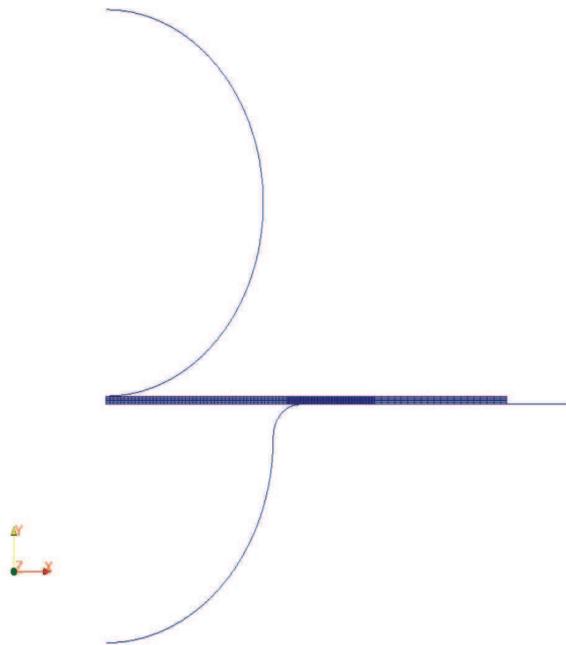


FIGURE 5.20 – Problème d’emboutissage : maillage

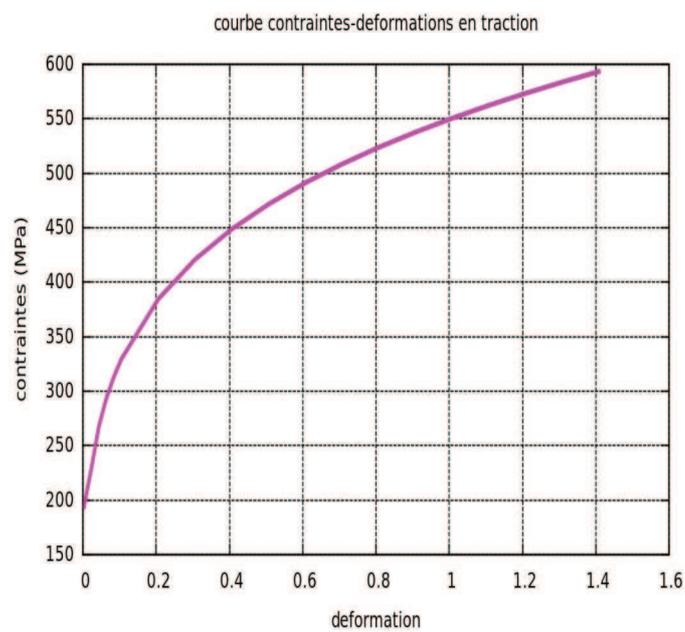


FIGURE 5.21 – Problème d’emboutissage : courbe contraintes-déformations en traction

Résultats de la déformée

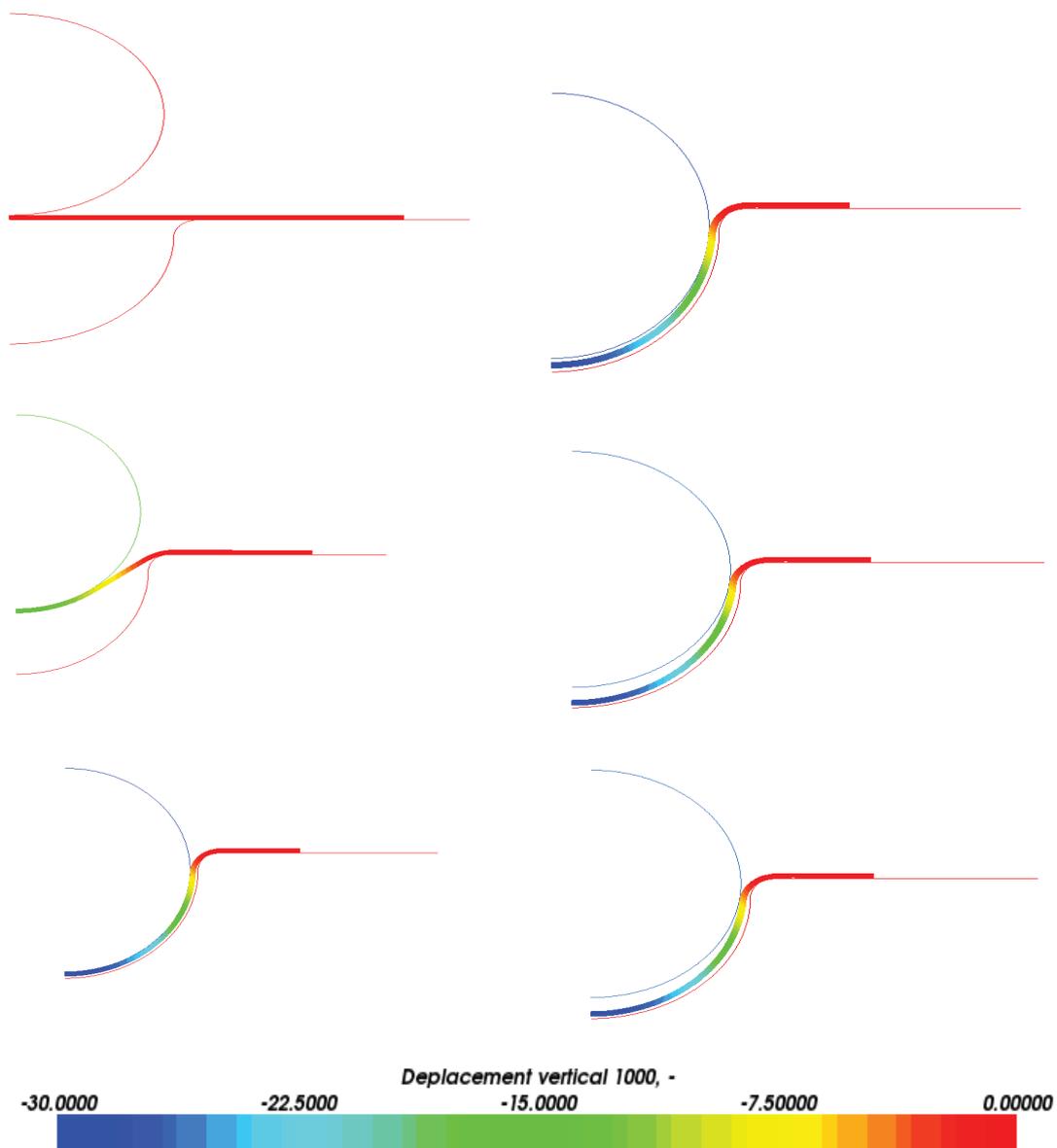


FIGURE 5.22 – À gauche : phase de mise en forme, à droite : retour élastique

Comparaison des solutions

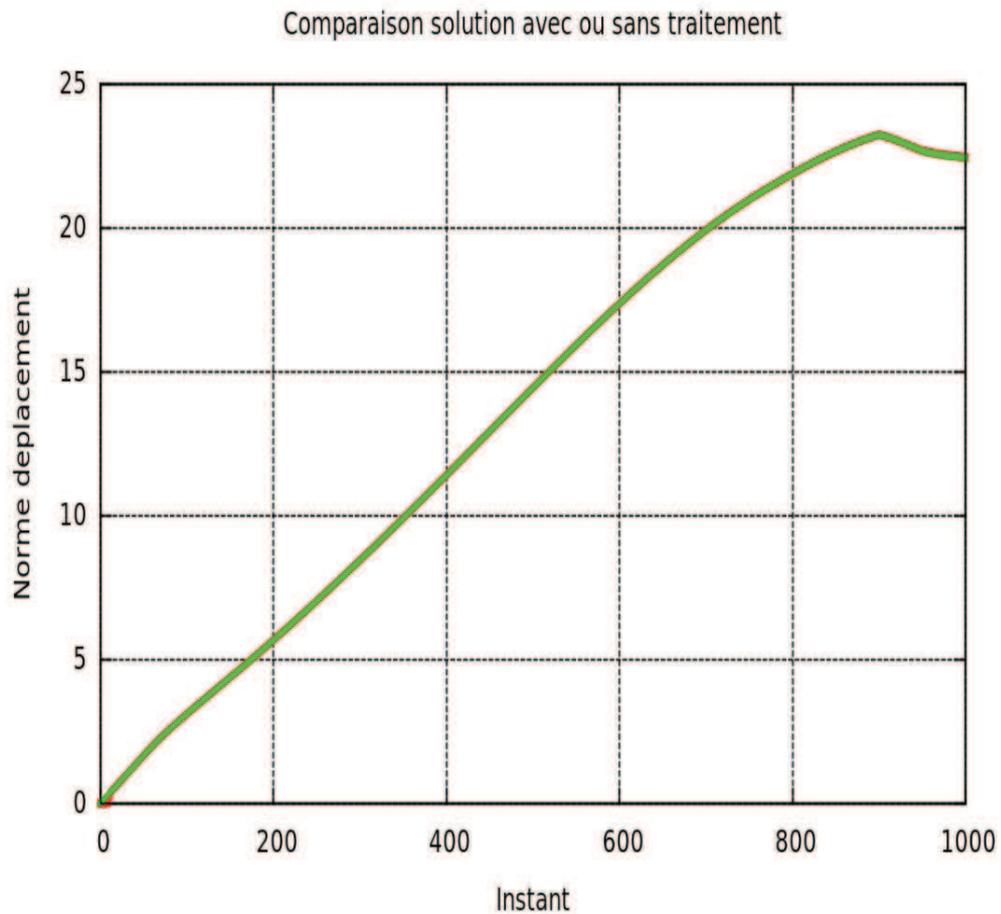


FIGURE 5.23 – Problème d’emboutissage : comparaison solution avec ou sans traitement du cyclage

Le tracé a été réalisé en un point de la zone de contact matrice-tôle où on observe des phénomènes de contact rasant. On constate que les résultats sont identiques avec et sans traitement.

Résumé des temps de calcul :

Point Fixe	Tps Calcul en (h)	Nombre total iterations	Nombre total appariements
sans traitement	47 min	17900	1386
avec traitement	20 min	7050	858

Newton partiel	Tps Calcul en (h)	Nombre total iterations	Nombre total appariements
sans traitement	55 min	10400	1900
avec traitement	57 min	11000	2000

Newton géné	Tps Calcul en (h)	Nombre total iterations	Nombre total appariements
sans traitement	33 min	5948	5948
avec traitement	27 min	3052	3052

Les interprétations qui vont suivre concernent les problèmes de faible taille.

- En termes de performances, les facteurs pénalisants pour les méthodes sont : le temps de construction des éléments de contact (appariement) et le temps de résolution du système linéarisé (solveurs).
- La méthode de point fixe sans traitement adaptatif sur le cyclage de contact fait intervenir un nombre élevé d'itérations total de Newton à cause du nombre élevé des boucles de point fixe (appariement géométrique, seuil de frottement, statuts de contact). Pour les méthodes de Newton partielle et Newton généralisée, une itération de Newton est plus coûteuse à cause de la « complexité » de la matrice. En particulier pour le cas d'emboutissage, la méthode de Newton partielle permet un gain en itérations total de Newton (par rapport à la méthode de point fixe) mais cela n'est pas suffisant pour constater le gain en temps de calcul. La méthode de Newton généralisée fournit un nombre total d'itérations de Newton faible, de sorte qu'on observe un gain en temps de calcul. L'inconvénient de cette dernière réside dans le fait qu'à chaque itération de Newton, il faut construire un nouvel élément de contact. En particulier pour l'emboutissage, on passe un temps non négligeable dans la phase d'appariement pour la méthode de Newton généralisée.
- Le but de la méthode de traitement du cyclage des statuts de contact est de stabiliser les points pathologiques. La conséquence est qu'on diminue aussi les boucles de points fixe sur le contact. C'est ce qu'on observe sur la méthode de point fixe. Elle redevient plus performante que la méthode de Newton généralisée. On constate le même effet bénéfique sur la méthode de Newton généralisée. Par contre la méthode a une influence négative sur la méthode de newton partielle.

Les deux derniers exemples de ce document traitent les problèmes industriels de grande dimension en mécanique numérique.

Exemple n^02 : dudgeonnage des tubes de Générateurs de Vapeur

On reprend le problème de mise en forme appelé *dudgeonnage* : il s'agit d'une opération qui consiste à augmenter progressivement le diamètre des tubes afin de les mettre en contact avec la plaque à tubes. Ce procédé se déroule en deux phases. La première phase est dite de *dudgeonnage intégral* où l'on augmente intégralement le diamètre du tube sur une longueur correspondant à l'épaisseur de la plaque support, tandis que la deuxième phase dite de *dudgeonnage amélioré mécaniquement* consiste à relaxer les contraintes résiduelles en augmentant légèrement le diamètre des tubes sur une partie supérieure de la plaque support.

La thématique industrielle est de modéliser en 3D ces deux passes de dudgeonnage. Dans le cadre de nos études de performances on s'est limité à la première passe de dudgeonnage.

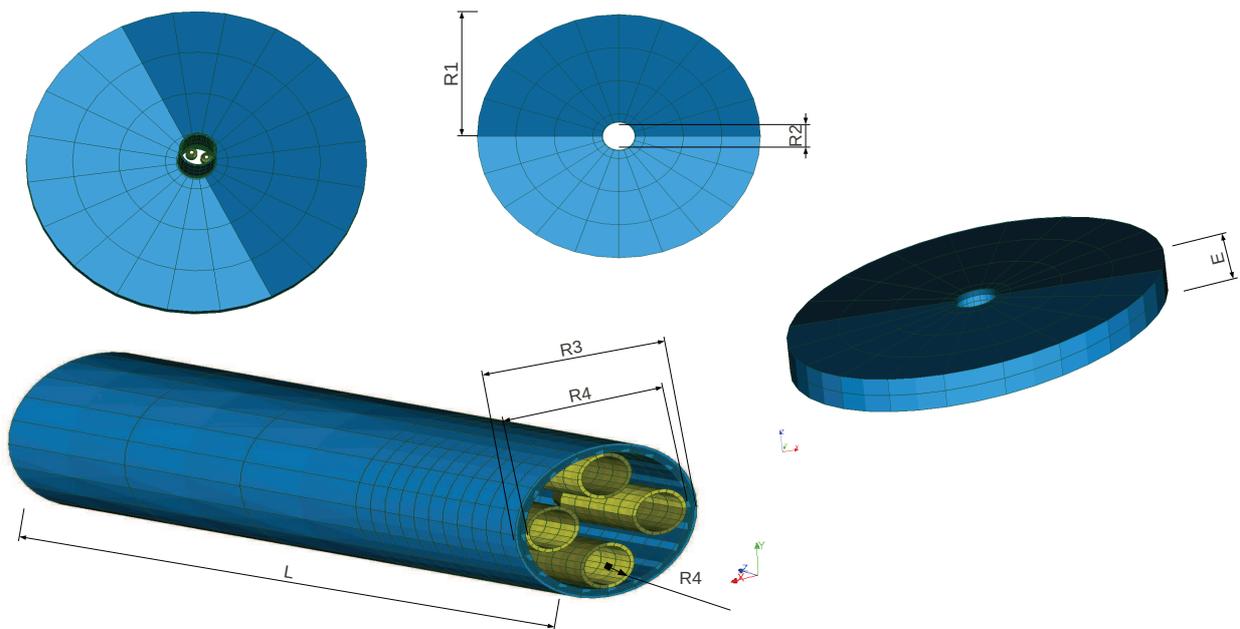


FIGURE 5.24 – Problème de dudgeonnage : géométrie

Caractéristiques géométriques et maillage (voir figure 5.24)

La plaque est modélisée par un disque troué :

$$R_1 = 100mm, R_2 = 11.6mm, E = 12mm$$

Le tube est modélisé par un cylindre long :

$$R_3 = 11.27mm, R_4 = 10mm, L = 70mm$$

L'ensemble des 4 galets sont modélisés par 4 cylindres creux d'épaisseur 0.5mm :

$$R_5 = 2.8mm$$

Le maillage, représenté sur la figure 5.24, est quadratique et constitué de 39612 noeuds et 3580 éléments hexaédriques à 27 noeuds (HEXA27). On a deux surfaces esclaves : la surface interne du tube comportant 660 éléments quadrangles à 9 noeuds soit 1618 noeuds et la surface interne de la plaque comportant 120 éléments quadrangles à 9 noeuds soit 376 noeuds.

Propriétés matériaux

La plaque est en acier « 16MND5 » (appellation conventionnelle). On suppose qu'elle est constituée de deux matériaux.

- Dans une zone proche du tube, elle est modélisée par un comportement elastoplastique à écrouissage isotrope non linéaire (voir figure 5.25).

$$\sigma_Y = 450MPa, E = 204000$$

- Dans une zone loin du tube, on considère un comportement élastique.

Le tube est en « Inconel 600 » et obéit à une loi de comportement de type Von Mises à écrouissage mixte linéaire.

$$E = 179000MPa, \sigma_Y = 335MPa, E_t = 2726MPa, E_c = 1500MPa$$

E_t représente la pente d'écrouissage isotrope tandis que E_c est propre à l'écrouissage cinématique (constante de Prager).

Les galets sont considérés infiniment rigides.

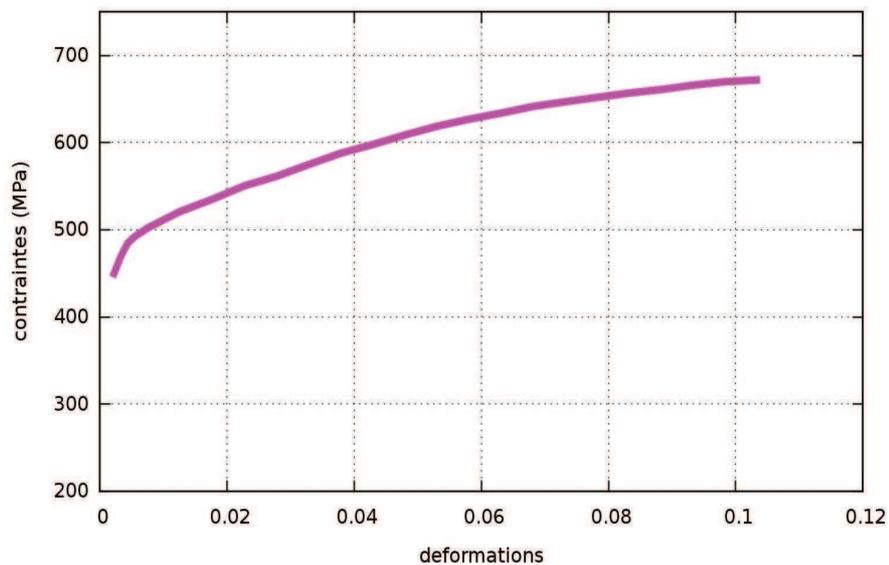


FIGURE 5.25 – Problème de dudgeonnage : courbe de traction de la plaque

Conditions de simulation

À l'état initial, il existe un jeu entre les galets et le tube, et entre le tube et la plaque. Dans la première phase de dudgeonnage, les galets sont animés d'un mouvement d'ouverture en spirale, entrent en contact avec le tube et progressivement le tube se met en contact avec la plaque. Le procédé dure 360s avec un pas de temps de 1s qu'on redécoupe automatiquement pendant le calcul.

Modèles de contact

On utilise un modèle de contact unilatéral sans et avec frottement ($\mu = 0.3$). On utilise trois types d'algorithmes : Newton généralisé, Newton partiel et point fixe. Le traitement du cyclage n'est pas adapté à ce type de problème.

On représente les résultats en contraintes et déformée sur la figure 5.26. La comparaison de la solution avec ou sans frottement est la figure 5.27

Résultats de la déformée

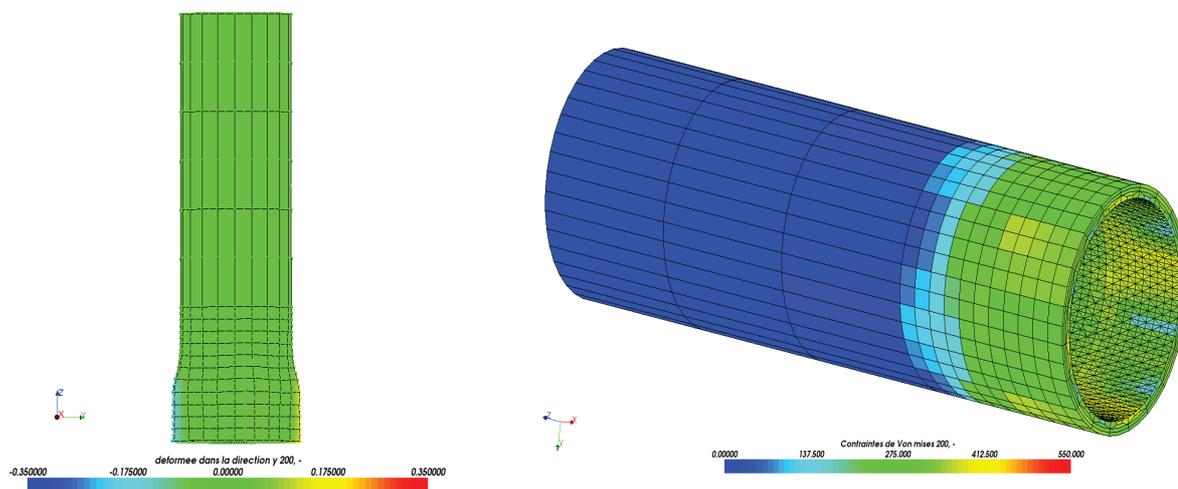


FIGURE 5.26 – Problème de dudgeonnage : à gauche, déformée du tube amplifiée $\times 12$, à droite : Contraintes équivalentes de Von Misès

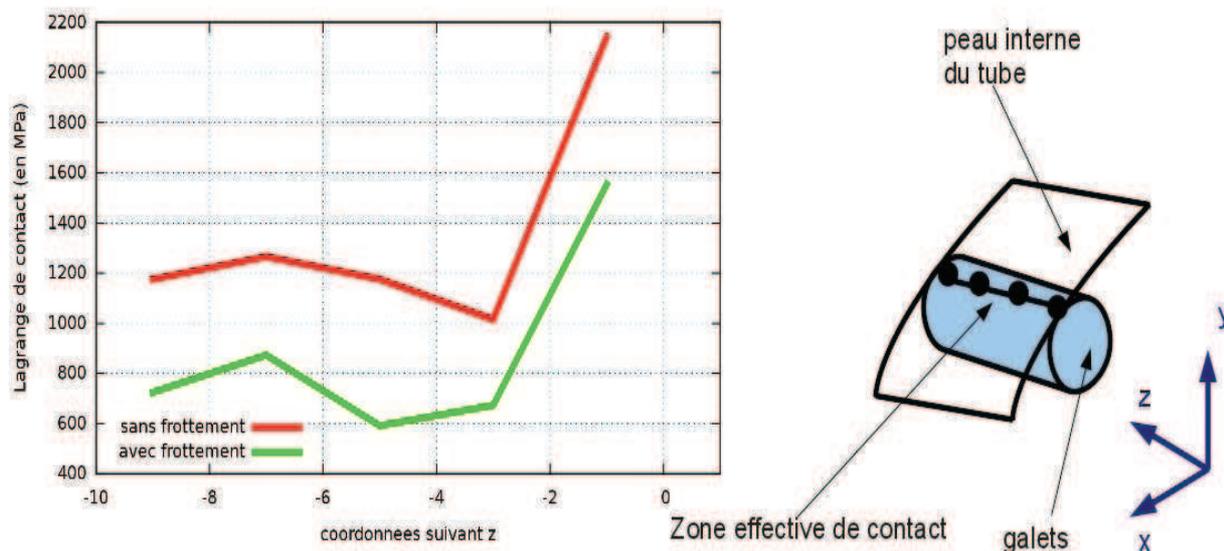


FIGURE 5.27 – Problème de dudgeonnage : Réaction de contact à 360s : comparaison avec et sans frottement

Résumé des temps de calcul

Point Fixe	Tps Calcul en (h)	Nombre total iterations	Nombre total appariements
coef. frottement = 0.0	34h 43 m	10837	891
coef. frottement = 0.3	77 h 43 m	24837	960

Newton partiel	Tps Calcul en (h)	Nombre total iterations	Nombre total appariements
coef. frottement = 0.0	42h43 m	14231	891
coef. frottement = 0.3	45h16	17938	960

Newton généré	Tps Calcul en (h)	Nombre total iterations	Nombre total appariements
coef. frottement = 0.0	8 h 34 min	3154	3154
coef. frottement = 0.3	×	×	×

Ce problème est considéré de grande taille (près de 125000 inconnues).

- En termes de performances, le facteur pénalisant est le nombre total d'itérations de Newton car une itération de Newton est coûteuse pour le solveur utilisé, quelque soit les algorithmes employés.
- Dans le cas sans frottement, la méthode de Newton généralisée est la plus rapide parce qu'elle fait intervenir moins d'itérations de Newton malgré le nombre élevé de constructions de nouveaux éléments de contact.
- Dans le cas du frottement, la méthode de Newton généralisée est non convergente. La méthode de point fixe est coûteuse à cause des boucles de point fixe sur le seuil de frottement. Ce cas démontre le gain aussi bien en robustesse et en performance de la méthode de Newton partielle : c'est une méthode qui combine les avantages de la méthode de Newton généralisée en termes de rapidité et de la méthode de point fixe en termes de robustesse. En particulier sur ce cas-test, la méthode de Newton partielle offre un gain de 47 % par rapport à la méthode de point fixe.
- La méthode de traitement du cyclage n'est pas adaptée sur ce problème où les galets roulent sur la surface interne du tube. Les points qui présentent un cyclage de contact ne sont pas des points pathologiques traités (contact rasant par exemple).

Exemple n^03 : calcul statique sur les aubes mobiles de turbines

Certaines centrales nucléaires équipées de turbines 1300MW peuvent présenter des défauts sur les aubes mobiles du dernier étage Basse Pression. Ces défauts peuvent s'initier au niveau des crans du pied d'ailette (racine). Dans cette étude on cherche à caractériser les valeurs de contraintes induites sur les racines des ailettes soumis à des chargements de force centrifuge et des conditions aux limites de contact. On précise quelques caractéristiques de l'étude.

Caractéristiques géométriques et maillage

L'ailette de la turbine (voir figure 5.28) est composée d'une pôle de longueur 1400mm et d'une racine dentée (dotée de 5 crans) insérée dans une rainure dentée du disque :

$$L_2 = 30mm, L_3 \approx 2 R_1 = 10mm, L_4 = 10mm, L_5 = 100mm, R_2 = 11mm$$

La racine de l'ailette est en contact avec la rainure $L_6 = 129mm$.

Le maillage est linéaire pour la racine, l'ailette et il est quadratique pour la pôle (voir figure 5.28). La rainure est composée de 378719 éléments tétraèdres à 4 noeuds soit 78059 noeuds. La racine de l'ailette est composée de 534958 éléments tétraèdres à 4 noeuds soit 100204 noeuds. La voile est maillée grossièrement, composée de 648 éléments hexaèdres soit 3817 noeuds. Le maillage complet contient 181322 noeuds dont près de 6000 noeuds esclaves. Le corps esclave est la racine.

Propriétés matériaux

L'ensemble voile-racine-rainure est considéré élastique avec :

$$E = 209000MPa, \nu = 0.3, \rho = 7800 \frac{kg}{m^3}$$

Conditions de simulation

On suppose que l'ensemble voile-racine-rainure effectue un mouvement rotatif stationnaire de 1500tours/min par rapport à l'axe du rotor de la turbine. La voile est soumise à de grands déplacements et grandes rotations (on utilise un tenseur de déformations de Green-Lagrange). La base de la rainure est bloquée en déplacement mais on autorise de la rotation.

Modèles de contact

Le calcul est fait en contact unilatéral sans frottement. On utilise les algorithmes de Newton généralisé, Newton partiel et point fixe.

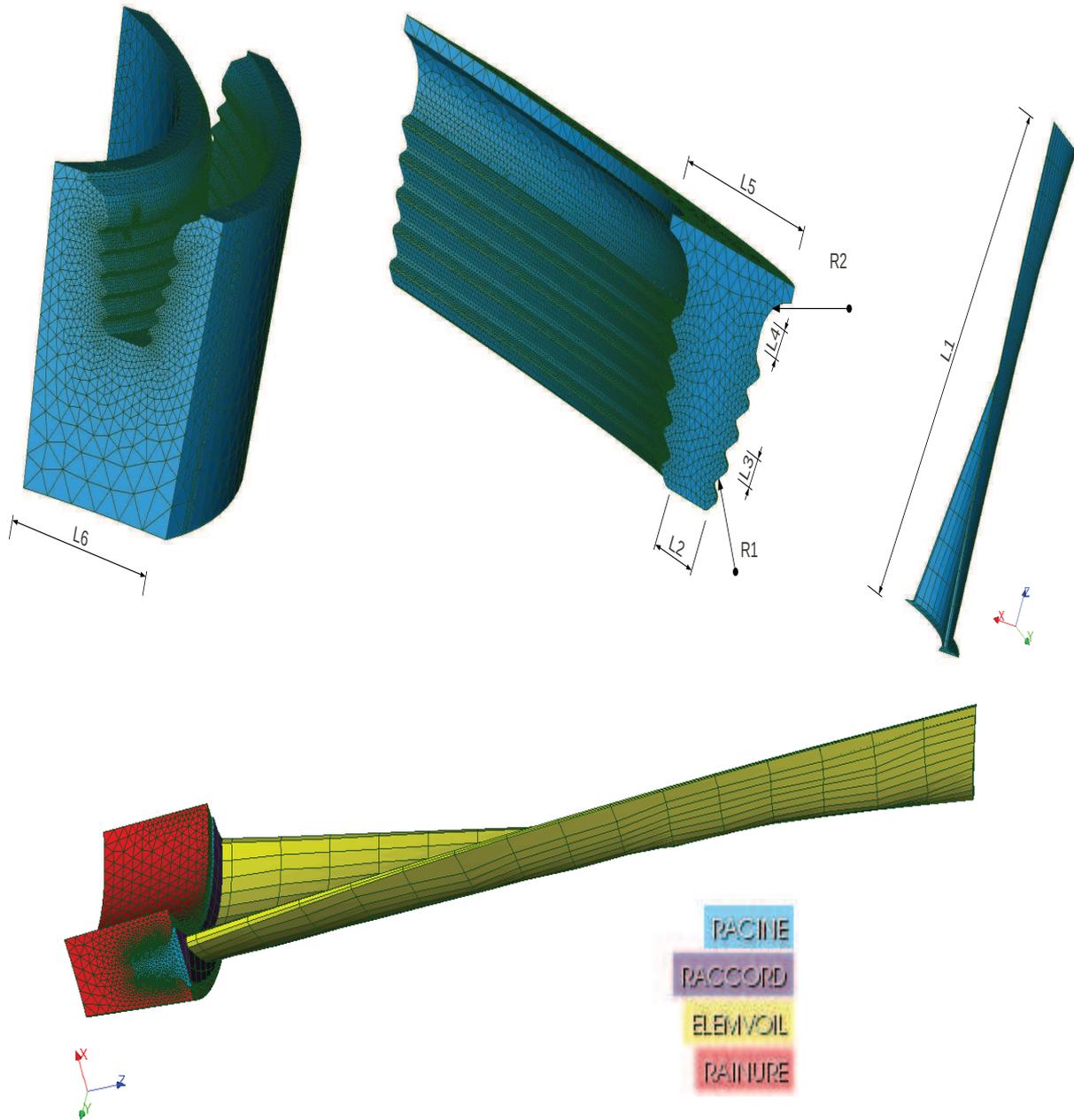


FIGURE 5.28 – Problème de contact-frottement sur les pieds d'ailettes : géométrie

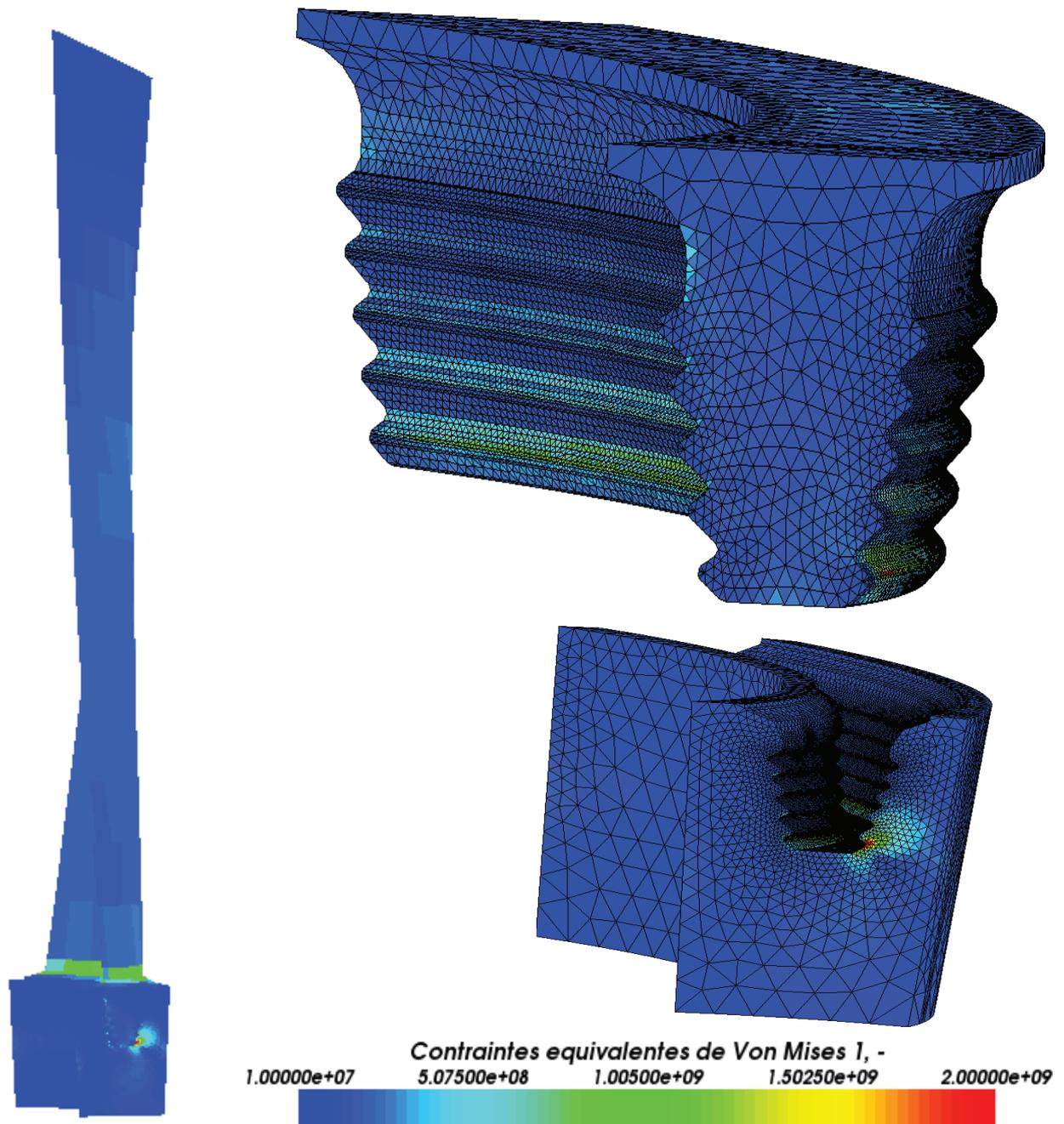


FIGURE 5.29 – Problème de contact-frottement sur les pieds d’ailettes : contraintes de Von Misès

Résumé des temps de calcul

Point Fixe	Tps Calcul en (h)	Nbre total iterations	Nbre total appariements
coef. frott = 0.0	40 h 11 min	494	19
Newton partiel	Tps Calcul en (h)	Nbre total iterations	Nbre total appariements
coef. frott = 0.0	34h 00min	390	18
Newton géné	Tps Calcul en (h)	Nbre total iterations	Nbre total appariements
coef. frott = 0.0	5 h 30 min	64	64

Ce problème est considéré de grande taille (près de 600000 inconnues). Les conclusions en termes de performances sont similaires à celles énoncées pour le dudgeonnage du tube de générateur de vapeur. La méthode la plus efficace est la méthode de Newton généralisée avec un gain de près de 87 %.

4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, on a réalisé divers tests numériques afin de valider les méthodes numériques développées ou utilisées. La première partie de ce chapitre est consacrée aux problèmes de faible taille mais instructifs sur le comportement des algorithmes. La deuxième partie est consacrée aux études à caractère industriel.

On s'est intéressé aux aspects liés à la robustesse, à la performance et à la fiabilité des méthodes. On note que chaque algorithme a ses avantages et ses inconvénients. De façon approximative, on peut les résumer dans le tableau suivant :

Méthodes	Fiabilité	Robustesse	Performance
Inégalités mixtes+GCP,...	Très bon	Moyen	Très bon
Lagr aug + Point fixe	Très bon	Très bon	Moyen
Lagr aug + Newton géné.	Très bon	Moyen	Très bon
Lagr aug + Newton part.	Très bon	Bon	Bon
Lagr aug + Adaptation statuts	Bon	Très bon	Bon

On nuance les conclusions de ce tableau avec deux aspects :

- Les performances et robustesses de chaque algorithme dépendent aussi de la nature du problème traité : grandes déformations, grands glissements, frottement, comportement non linéaires et même thermiques.
- Le choix du solveur (direct, itératif, parallèle) influence le temps de calcul. Dans notre cas, on s'est limité aux solveurs directs (package MUMPS implémenté dans *Code_Aster*). Les efforts se sont concentrés sur l'optimisation de l'algorithme global de résolution du système non linéaire.

Conclusions & Perspectives

Conclusions

Cette thèse intitulée « *Problèmes industriels de grande dimension en mécanique numérique du contact : performance, fiabilité et robustesse* » a été motivée par plusieurs points :

- Dans le domaine de la production d'énergie nucléaire, EDF fait face aujourd'hui à de nouveaux enjeux dans sa démarche d'assurance de la sécurité des installations à des coûts maîtrisés.

La modélisation numérique est l'un des outils (voire parfois le seul) utilisés pour faire face à des problématiques propres au parc nucléaire, hydraulique, éolien, etc. Pour répondre aux besoins des chercheurs et ingénieurs, EDF développe au sein du département R&D d'« Analyses Mécaniques et Acoustiques » un code éléments finis appelé *Code_Aster*. Ce dernier est un code à la fois industriel et recherche orienté vers les études thermo-mécaniques.

Dans beaucoup de cas, les modèles nécessitent une prise en compte fine des conditions de contact-frottement sec. La difficulté vient du fait que d'une part les modèles sont de grande taille nécessitant d'importantes ressources informatiques et d'autre part que les études couplent en général des non linéarités liées à la structure. Cette difficulté se double du fait qu'on cherche à obtenir des résultats à la fois précis et en un temps d'étude raisonnable. Il y a donc un besoin de recherche orienté vers la maîtrise des systèmes non linéaires faisant intervenir le contact-frottement, les grandes transformations, les comportements non linéaires et les évolutions quasi-statiques ou dynamiques lentes.

- Depuis plusieurs années, dans *Code_Aster*, les méthodes dites *continues* sont privilégiées. Ce sont des méthodes qui sont basées sur les formulations mixtes lagrangiennes semi-régularisées C^1 différentiable. Cette thèse a permis de préciser le cadre à la fois théorique et numérique des opérateurs discrets dits de « Lagrangien stabilisé ». D'un point de vue global, les formulations issues des méthodes d'optimisation sans contraintes permettent d'une part de créer des éléments de contact avancés et de l'autre de travailler dans un cadre naturel de la mécanique non linéaire.
- Une piste vers une nouvelle formulation dite de *Lagrangien augmenté non standard*

a été explorée. Cette formulation permet de traiter la normale à l'interface de contact comme une inconnue globale du système via un renforcement faible de la condition cinématique sur la normale lorsque se produit le contact. Au cours de la thèse, l'objectif a été de tester la faisabilité de cette nouvelle formulation.

- On a *implémenté et testé* des méthodes numériques *connues et/ou nouvelles* en vue d'une exploitation industrielle. Celles-ci ont montré un gain significatif en termes de *performance, robustesse et surtout fiabilité*. Par études de robustesse, on entend la gestion des paramètres numériques et physiques qui jouent sur la convergence des méthodes. Les études de performances tendent à minimiser le temps de calcul passé dans les boucles de résolution. Le critère de fiabilité consiste à trouver une solution précise (sous réserve d'unicité de solutions) quelque soit l'algorithme employé.

Plus précisément, cette partie du travail s'est basée sur la *linéarisation complète* des termes de contact-frottement suivant une méthode de Newton généralisée. La linéarisation peut être simplifiée par une approche couplant point-fixe sur les paramètres de contact et méthode de Newton pour le comportement. On déduit de ces deux techniques une méthode hybride dite de *Newton partielle*. Les nouvelles méthodes implémentées tendent à minimiser le temps passé dans les boucles de résolution donc un gain en performance.

Une autre particularité de ce travail est *l'amélioration de la robustesse* des méthodes sus-citées grâce à une méthode adaptative permettant de diminuer les oscillations numériques de *cyclage de contact*. C'est une méthode qui donne des résultats performants et fiables tout en assurant la convergence des méthodes continues sur certains problèmes.

- Dans un contexte industriel propre à l'ingénierie du nucléaire, on a étudié quelques problèmes de contact-frottement sec avec prise en compte des phénomènes de grandes déformations et de comportements non linéaires. Les quelques exemples sont une simulation du procédé de mise en forme des tubes de générateurs de vapeur et une étude de contact sur les aubes mobiles de turbines Basse Pression. Toutes ces études ont montré la pertinence des méthodes implémentées au cours de cette thèse.

Perspectives

Quelques points nécessiteraient encore des développements.

- Formulation du Lagrangien augmenté non standard : elle prend en compte un nouveau terme variationnel qui s'interprète comme « *un chargement fictif suiveur* » sur la surface de contact. Sur un exemple exhibé au chapitre 3, on a montré qu'elle fournit les mêmes solutions que la formulation classique.

Dans cette formulation, la normale est désormais vue comme une inconnue globale, et ce constat offre plusieurs possibilités algorithmiques et numériques. Par exemple, une source d'instabilité numérique est la variation brusque des normales à l'interface des corps. Dans certaines études, les sauts de normales entre deux mailles adjacentes sont traités par des méthodes de lissage de normale, mais il n'existe pas de méthode dans le code pour « contrôler » les variations de normales lissées (ou non lissées). Le calcul de cette variation de normale n'est pas chose simple (et cela est plus complexe dans le cas des normales lissées voir Popp [90]). La nouvelle formulation offre la possibilité de *piloter le chargement fictif suiveur par la variation de la normale sur des problèmes à fortes non linéarités géométriques*.

Une autre étude qui serait envisageable concerne l'influence des nouveaux paramètres introduits ($\kappa_n \in R^+$) sur le comportement des algorithmes et une éventuelle adaptation de ce coefficient pour maîtriser les « cyclage de normales ».

- Sur les applications numériques, seuls quelques points de contact présentant une pathologie de cyclage de contact ont été testés. Pour aller plus loin on peut essayer de contrôler le plus de points pathologiques possibles. De plus, pour le cyclage adhérence/glissement ou le cyclage glissement avant/glissement arrière, on a utilisé une technique consistant à changer manuellement les paramètres du Lagrangien augmenté. L'implémentation d'une méthode automatique serait aussi nécessaire.
- Les éléments de contact utilisés au cours de ce travail sont les éléments noeud/segment. Ces éléments ont leurs limites pour des maillages incompatibles (surtout lorsqu'il s'agit des éléments quadratiques). Pour contourner le problème il est possible d'employer des méthodes d'intégration fines. Mais celles-ci ne suffisent pas toujours à enlever les oscillations sur certains problèmes. D'où une perspective de travail, qui serait l'implémentation des éléments de type Segment/Segment avancés dans le code. C'est un travail qui combiné avec les méthodes numériques existantes permettra de proposer aux utilisateurs des solutions à la pointe des travaux issus de la littérature.
- Pour aller plus loin sur les questions de performance, il faut travailler sur les solveurs dédiés à la résolution du problème linéarisé au cours d'une itération de Newton. Il existe plusieurs types de solveurs : solveurs directs, itératifs avec préconditionnement, parallèles par décomposition de domaines ou FETI. La

logique suivie au cours de la thèse est de chercher à optimiser l'algorithme global de résolution.

Annexe : Expressions des matrices élémentaires de contact-frottement

Calcul des termes élémentaires dans la phase de Newton

Pour passer du continu au discret, on adopte une discrétisation en temps et une discrétisation éléments finis mixtes en espace. Les phases de discrétisation et d'appariement ont été détaillées dans le chapitre 3.

Soit à Trouver à l'instant t^i ($t^0 < t^1 < \dots < t^{final}$), les inconnus $(u_h^1, u_h^2, \lambda_{n,h}, \Lambda_h)$ tel que :

$$\{G\} = \begin{cases} \{F^{int,1} - F^{ext,1}\}(u_h^1, v_h^1) + F^{cont,1}(u_h^1, u_h^2, \lambda_{n,h}, n(u_h), v_h^1) + \\ F^{frott,1}(u_h^1, u_h^2, \lambda_{n,h}, \Lambda_h, n(u_h), v_h^1) \\ \\ \{F^{int,2} - F^{ext,2}\}(u_h^2, v_h^2) + F^{cont,2}(u_h^1, u_h^2, \lambda_{n,h}, n(u_h), v_h^2) + \\ F^{frott,2}(u_h^1, u_h^2, \lambda_{n,h}, \Lambda_h, n(u_h), v_h^2) \\ \\ \tilde{F}_h^{cont}(u_h^1, u_h^2, \lambda_{n,h}, \lambda_{n,h}^*) \\ \\ \tilde{F}_h^{frott}(u_h^1, u_h^2, \lambda_{n,h}, \Lambda_h, n(u_h), \Lambda_h^*) \end{cases} = 0 \quad (5.8)$$

$$\forall (v_h^1, v_h^2, \lambda_{n,h}^*, \Lambda_h^*)$$

Ce système discret est fortement non linéaire à cause du matériau, de la déformation et du contact-frottement. Pour le linéariser on adopte une écriture incrémentale des inconnues :

$$u = u^{(i-1)} + \Delta u^{(n-1)} + \delta u^{(n)}, \quad \lambda = \lambda^{(i-1)} + \Delta \lambda^{(n-1)} + \delta \lambda^{(n)}, \quad \Lambda = \Lambda^{(i-1)} + \Delta \Lambda^{(n-1)} + \delta \Lambda^{(n)} \quad (5.9)$$

$u^{(i-1)}$, $\lambda^{(i-1)}$, $\Lambda^{(i-1)}$ représentent les valeurs initiales pour le calcul à l'itération courante de Newton. Ils sont fournis par le calcul du pas de temps précédent. **Dans Code_Aster on fait le choix d'initialiser à chaque fois les multiplicateurs de Lagranges de contact-frottement à zéro.**

$\Delta u^{(n-1)}$, $\Delta \lambda^{(n-1)}$, $\Delta \Lambda^{(n-1)}$ sont les valeurs cumulées de toutes les itérations de

Newton jusqu'à l'itération de Newton précédent.

$\delta u^{(n)}$, $\delta \lambda^{(n)}$, $\delta \Lambda^{(n)}$ sont les valeurs recherchées à l'itération courante de Newton.

En injectant l'écriture incrémentale (5.9) dans le système à résoudre (5.8) on obtient le système matriciel à résoudre :

$$\begin{aligned} & (\partial_{u_1} F, \delta u_1^{(n)}) + (\partial_{u_2} F, \delta u_2^{(n)}) + (\partial_\lambda F, \delta \lambda^{(n)}) + (\partial_\Lambda F, \delta \Lambda^{(n)}) = \\ & -F(u_1^{(i-1)} + \Delta u_1^{(n-1)}, u_2^{(i-1)} + \Delta u_2^{(n-1)}, \Delta \lambda^{(n-1)}, \Delta \Lambda^{(n-1)}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Les termes du second et premier membre sont explicitées dans les deux sous-section ci-dessous.

Calcul des matrices élémentaires pour la méthode de Newton partielle

On a :

$$\begin{aligned} (\partial F, \delta x) &= \int_{\Omega_{1h}} \{\nabla v_h^1\}^T [K^1] \{\nabla \delta u_h^1\} + \int_{\Omega_{2h}} \{\nabla v_h^2\}^T [K^2] \{\nabla \delta u_h^2\} + \\ & \int_{\Gamma_{ch}} \begin{pmatrix} v_h^1 \\ v_h^2 \\ \lambda_h^* \\ \Lambda_h^* \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{cf}^{11} & K_{cf}^{12} & K_{cf}^{13} & K_{cf}^{14} \\ K_{cf}^{21} & K_{cf}^{22} & K_{cf}^{23} & K_{cf}^{24} \\ K_{cf}^{31} & K_{cf}^{32} & K_{cf}^{33} & K_{cf}^{34} \\ K_{cf}^{41} & K_{cf}^{42} & K_{cf}^{43} & K_{cf}^{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_h^1 \\ \delta u_h^2 \\ \delta \lambda_h \\ \delta \Lambda_h \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.11)$$

On a :

$$\Omega_{1h} = \bigcup_{e=1, e=N_{e1}} \Omega_{1e}, \quad \Omega_{2h} = \bigcup_{e=1, e=N_{e2}} \Omega_{2e}, \quad \Gamma_{ch} = \bigcup_{e=1, e=m} \Gamma_{ce}$$

Sur chaque élément on écrit :

$$\begin{cases} v_h^e = [N^e] \{q_e^*\} \\ u_h^e = [N^e] \{q_e\} \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\begin{cases} \lambda_h^{e,*} = [\Phi^e] \{L_\lambda^*\} \\ \lambda_h^e = [\Phi^e] \{L_\lambda\} \end{cases} \quad (5.13)$$

$$\begin{cases} \Lambda_h^{e,*} = [\Phi^e][T] \{L_\Lambda^*\} \\ \Lambda_h^e = [\Phi^e][T] \{L_\Lambda\} \end{cases} \quad (5.14)$$

D'où :

$$\begin{aligned} (\partial G, \delta x) &= \bigcup \int_{\Omega_{1e}} \{q_{e,1}^*\}^T [\nabla N^{e,1}]^T [K_e^1] [\nabla N^{e,1}] \{\delta q_{e,1}\} d\Omega \\ &+ \bigcup \int_{\Omega_{2e}} \{q_{e,2}^*\}^T [\nabla N^{e,2}]^T [K_e^2] [\nabla N^{e,2}] \{\delta q_{e,2}\} d\Omega \\ &+ \bigcup \int_{\Gamma_{ce}} \begin{pmatrix} q_{e,1}^* \\ q_{e,2}^* \\ l_e^* \\ L_e^* \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{cf}^{11} & K_{cf}^{12} & K_{cf}^{13} & K_{cf}^{14} \\ K_{cf}^{21} & K_{cf}^{22} & K_{cf}^{23} & K_{cf}^{24} \\ K_{cf}^{31} & K_{cf}^{32} & K_{cf}^{33} & K_{cf}^{34} \\ K_{cf}^{41} & K_{cf}^{42} & K_{cf}^{43} & K_{cf}^{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta q_{e,1} \\ \delta q_{e,2} \\ \delta l_e \\ \delta L_e \end{pmatrix} . d\Gamma_c \end{aligned} \quad (5.15)$$

Calcul des termes élémentaires dus aux comportements des structures :

$$\int_{\Omega_{1e}} \{q_{e,i}^*\}^T [\nabla N^{e,i}]^T [K_e^i] [\nabla N^{e,i}] \{\delta q_{e,i}\} d\Omega =$$

$$\int_{\Omega_{e,ref}^i} \{q_{e,i}^*\}^T [\nabla N_e^i]^T \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \nabla u \partial \nabla (\Delta u)} \cdot [\nabla N_e^i] \{\delta q_{e,i}\} J d\Omega_{ie,ref} \quad (5.16)$$

calcul des termes élémentaires de contact :

$$\int_{\Gamma_{ce}} \begin{pmatrix} q_{e,1}^* \\ q_{e,2}^* \\ l_e^* \\ L_e^* \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{cf}^{11} & K_{cf}^{12} & K_{cf}^{13} & K_{cf}^{14} \\ K_{cf}^{21} & K_{cf}^{22} & K_{cf}^{23} & K_{cf}^{24} \\ K_{cf}^{31} & K_{cf}^{32} & K_{cf}^{33} & K_{cf}^{34} \\ K_{cf}^{41} & K_{cf}^{42} & K_{cf}^{43} & K_{cf}^{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta q_{e,1} \\ \delta q_{e,2} \\ \delta l_e \\ \delta L_e \end{pmatrix} \cdot d\Gamma_c \quad (5.17)$$

- Cas du contact sans frottement

Si un point est non contactant alors $S_u = 0$

Si un point est contactant alors $S_u = 1$

- Cas du contact avec frottement

Si un point est non contactant alors $S_u = 0$

Si un point est contactant-adhérent alors $S_u = 1, S_f = 1$

Si un point est contactant-glissant alors $S_u = 1, S_f = 0$

$$K_{cf}^{11} = -[N_e^1]^T \cdot \partial_{u^1} S_u \left\{ \{\lambda_n - \kappa_n \cdot d_n\} \cdot n + \mu \lambda_n \{S_f \cdot \{\Lambda + \kappa_t \cdot d_t\} + (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_t * d_t}{\|\Lambda + h_t * d_t\|}\} (I - nn^T) \right\} \cdot [N_e^1]$$

$$K_{cf}^{12} = -[N_e^1]^T \cdot \partial_{u^2} S_u \left\{ \{\lambda_n - \kappa_n \cdot d_n\} \cdot n + \mu \lambda_n \{S_f \cdot \{\Lambda + \kappa_t \cdot d_t\} + (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_t * d_t}{\|\Lambda + h_t * d_t\|}\} (I - nn^T) \right\} \cdot [N_e^2]$$

$$K_{cf}^{21} = [N_e^2]^T \cdot \partial_{u^1} S_u \left\{ \{\lambda_n - \kappa_n \cdot d_n\} \cdot n + \mu \lambda_n \{S_f \cdot \{\Lambda + \kappa_t \cdot d_t\} + (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_t * d_t}{\|\Lambda + h_t * d_t\|}\} (I - nn^T) \right\} \cdot [N_e^1]$$

$$K_{cf}^{22} = [N_e^2]^T \cdot \partial_{u^2} S_u \left\{ \{\lambda_n - \kappa_n \cdot d_n\} \cdot n + \mu \lambda_n \{S_f \cdot \{\Lambda + \kappa_t \cdot d_t\} + (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_t * d_t}{\|\Lambda + h_t * d_t\|}\} (I - nn^T) \right\} \cdot [N_e^2]$$

On a :

$$d_n = n^T \cdot (u^1 - u^2), \quad v_t \delta t = d_t = (u^1 - u^2)(I - nn^T),$$

On pose :

$$\begin{aligned} g_h &= \Lambda + h_t * d_t \\ \partial_{u^1} \frac{g_h}{\|g_h\|} &= \partial_{g_h} \frac{g_h}{\|g_h\|} \cdot \partial_{u^1} g_h \\ \partial_{u^1} \frac{g_h}{\|g_h\|} &= \frac{h}{\|g_h\|} (I - nn^T) \left(I - \frac{1}{\|g_h\|^2} \cdot gg^T \right) \end{aligned}$$

$$K_{cf}^{11} = -[N_e^1]^T \cdot S_u \left\{ \left\{ \{\kappa_n \cdot nn^T\} + \mu \lambda_n (I - nn^T) \{S_f \cdot \kappa_t \cdot I + (1 - S_f) \frac{h}{\|g_h\|} \left(I - \frac{1}{\|g_h\|^2} \cdot gg^T \right) \} (I - nn^T) \right\} \right\} \cdot [N_e^1] \quad (5.18)$$

$$K_{cf}^{12} = -[N_e^1]^T \cdot S_u \left\{ \left\{ \{\kappa_n \cdot nn^T\} + \mu \lambda_n (I - nn^T) \{S_f \cdot \kappa_t \cdot I + (1 - S_f) \frac{h}{\|g_h\|} \left(I - \frac{1}{\|g_h\|^2} \cdot gg^T \right) \} (I - nn^T) \right\} \right\} \cdot [N_e^2] \quad (5.19)$$

$$K_{cf}^{21} = [N_e^2]^T \cdot S_u \left\{ \left\{ \{\kappa_n \cdot nn^T\} + \mu \lambda_n (I - nn^T) \{S_f \cdot \kappa_t \cdot I + (1 - S_f) \frac{h}{\|g_h\|} \left(I - \frac{1}{\|g_h\|^2} \cdot gg^T \right) \} (I - nn^T) \right\} \right\} \cdot [N_e^1] \quad (5.20)$$

$$K_{cf}^{22} = [N_e^2]^T \cdot S_u \left\{ \left\{ \{\kappa_n \cdot nn^T\} + \mu \lambda_n (I - nn^T) \{S_f \cdot \kappa_t \cdot I + (1 - S_f) \frac{h}{\|g_h\|} \left(I - \frac{1}{\|g_h\|^2} \cdot gg^T \right) \} (I - nn^T) \right\} \right\} \cdot [N_e^2] \quad (5.21)$$

$$K_{cf}^{13} = -[N_e^1]^T \cdot \partial_{\lambda_n} S_u \left\{ \left\{ \{\lambda_n - \kappa_n \cdot d_n\} \cdot n + \mu \lambda_n \left\{ S_f \cdot \left\{ \Lambda + \kappa_t \cdot d_t \right\} + (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_t * d_t}{\|\Lambda + h_t * d_t\|} \right\} (I - nn^T) \right\} \right\} \cdot [\Phi_e]$$

$$K_{cf}^{23} = [N_e^2]^T \cdot \partial_{\lambda_n} S_u \left\{ \left\{ \{\lambda_n - \kappa_n \cdot d_n\} \cdot n + \mu \lambda_n \left\{ S_f \cdot \left\{ \Lambda + \kappa_t \cdot d_t \right\} + (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_t * d_t}{\|\Lambda + h_t * d_t\|} \right\} (I - nn^T) \right\} \right\} \cdot [\Phi_e]$$

$$K_{cf}^{14} = -[N_e^1]^T \cdot \partial_{\Lambda} S_u \left\{ \left\{ \{\lambda_n - \kappa_n \cdot d_n\} \cdot n + \mu \lambda_n \left\{ S_f \cdot \left\{ \Lambda + \kappa_t \cdot d_t \right\} + (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_t * d_t}{\|\Lambda + h_t * d_t\|} \right\} (I - nn^T) \right\} \right\} \cdot [\Psi_e]$$

$$K_{cf}^{24} = [N_e^2]^T \cdot \partial_{\Lambda} S_u \left\{ \left\{ \{\lambda_n - \kappa_n \cdot d_n\} \cdot n + \mu \lambda_n \left\{ S_f \cdot \left\{ \Lambda + \kappa_t \cdot d_t \right\} + (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_t * d_t}{\|\Lambda + h_t * d_t\|} \right\} (I - nn^T) \right\} \right\} \cdot [\Psi_e]$$

$[\Psi_e] = [\Phi_e \quad \Phi_e]$ la base des multiplicateurs de contact sert également à l'écriture des semi-multiplicateurs

$$\frac{\Lambda + h_t * d_t}{\|\Lambda + h_t * d_t\|} = t \text{ dans le cas du glissement 3D.}$$

$$\implies \frac{\partial \frac{g_h}{\|g_h\|}}{\partial \lambda_n} = \frac{-1}{\lambda_n} t = \frac{\partial t}{\partial \lambda_n}$$

$$K_{cf}^{13} = -[N_e^1]^T S_u \left\{ n + \mu \left\{ \mathbf{S}_f \cdot \{\boldsymbol{\Lambda} + \kappa_t \cdot \mathbf{d}_t\} + (\mathbf{1} - \mathbf{S}_f) \frac{\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{h}_t * \mathbf{d}_t}{\|\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{h}_t * \mathbf{d}_t\|} \right\} (\mathbf{I} - \mathbf{nn}^T) - \mu (\mathbf{1} - \mathbf{S}_f) \frac{\mathbf{g}_h}{\|\mathbf{g}_h\|} (\mathbf{I} - \mathbf{nn}^T) \right\} \cdot [\Phi_e] \quad (5.22)$$

$$K_{cf}^{23} = [N_e^2]^T S_u \left\{ n + \mu \left\{ \mathbf{S}_f \cdot \{\boldsymbol{\Lambda} + \kappa_t \cdot \mathbf{d}_t\} + (\mathbf{1} - \mathbf{S}_f) \frac{\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{h}_t * \mathbf{d}_t}{\|\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{h}_t * \mathbf{d}_t\|} \right\} (\mathbf{I} - \mathbf{nn}^T) - \mu (\mathbf{1} - \mathbf{S}_f) \frac{\mathbf{g}_h}{\|\mathbf{g}_h\|} (\mathbf{I} - \mathbf{nn}^T) \right\} \cdot [\Phi_e] \quad (5.23)$$

Cas 2D

$$K_{cf}^{13} = -[N_e^1]^T \cdot S_u \left\{ n + \mu \left\{ \mathbf{S}_f \cdot \{\boldsymbol{\Lambda} + \kappa_t \cdot \mathbf{d}_t\} + (\mathbf{1} - \mathbf{S}_f) \frac{\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{h}_t * \mathbf{d}_t}{\|\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{h}_t * \mathbf{d}_t\|} \right\} (\mathbf{I} - \mathbf{nn}^T) \right\} \cdot [\Phi_e] \quad (5.24)$$

$$K_{cf}^{23} = [N_e^2]^T \cdot S_u \left\{ n + \mu \left\{ \mathbf{S}_f \cdot \{\boldsymbol{\Lambda} + \kappa_t \cdot \mathbf{d}_t\} + (\mathbf{1} - \mathbf{S}_f) \frac{\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{h}_t * \mathbf{d}_t}{\|\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{h}_t * \mathbf{d}_t\|} \right\} (\mathbf{I} - \mathbf{nn}^T) \right\} \cdot [\Phi_e] \quad (5.25)$$

Cas 3D

$$K_{cf}^{13} = -[N_e^1]^T \cdot S_u \left\{ n + \mu \left\{ \mathbf{S}_f \cdot \{\boldsymbol{\Lambda} + \kappa_t \cdot \mathbf{d}_t\} \right\} \right\} \cdot [\Phi_e] \quad (5.26)$$

$$K_{cf}^{23} = [N_e^2]^T \cdot S_u \left\{ n + \mu \left\{ \mathbf{S}_f \cdot \{\boldsymbol{\Lambda} + \kappa_t \cdot \mathbf{d}_t\} \right\} \right\} \cdot [\Phi_e] \quad (5.27)$$

$$K_{cf}^{14} = -[N_e^1]^T \cdot \left\{ S_u \mu \lambda_n \left\{ S_f \cdot I + (1 - S_f) \frac{1}{\|g_h\|} \left(I - \frac{1}{\|g_h\|^2} g g^T \right) (I - n n^T) \right\} \right\} \cdot [\Psi_e] \quad (5.28)$$

$$K_{cf}^{24} = -[N_e^2]^T \cdot \left\{ S_u \mu \lambda_n \left\{ S_f \cdot I + (1 - S_f) \frac{1}{\|g_h\|} \left(I - \frac{1}{\|g_h\|^2} g g^T \right) (I - n n^T) \right\} \right\} \cdot [\Psi_e] \quad (5.29)$$

$$K_{cf}^{31} = [\Phi_e]^T \cdot \partial_{u^1} \left\{ -\frac{1}{h_n} \left\{ \lambda_n - S_u * [\lambda_n - h_n * d_n] \right\} \right\} \cdot [N_e^1]$$

$$K_{cf}^{32} = [\Phi_e]^T \cdot \partial_{u^2} \left\{ -\frac{1}{h_n} \left\{ \lambda_n - S_u * [\lambda_n - h_n * d_n] \right\} \right\} \cdot [N_e^2]$$

$$K_{cf}^{33} = [\Phi_e]^T \cdot \partial_{\lambda_n} \left\{ -\frac{1}{h_n} \left\{ \lambda_n - S_u * [\lambda_n - h_n * d_n] \right\} \right\} \cdot [\Phi_e]$$

$$K_{cf}^{34} = [\Phi_e]^T \cdot \partial_{\Lambda} \left\{ -\frac{1}{h_n} \left\{ \lambda_n - S_u * [\lambda_n - h_n * d_n] \right\} \right\} \cdot [\Psi_e] = 0$$

$$K_{cf}^{31} = [\Phi_e]^T \cdot S_u \cdot n^T \cdot [N_e^1] \quad (5.30)$$

$$K_{cf}^{32} = -[\Phi_e]^T \cdot S_u \cdot n^T \cdot [N_e^2] \quad (5.31)$$

$$K_{cf}^{33} = -\frac{1}{h_n} [\Phi_e]^T \cdot I (1 - S_u) \cdot [\Phi_e] \quad (5.32)$$

$$K_{cf}^{34} = 0 \quad (5.33)$$

L'un des inconvénients de cet algorithme est la perte de symétrie du système :
 $K_{cf}^{31} \neq K_{cf}^{13}$, $K_{cf}^{32} \neq K_{cf}^{23}$ et plus loins $K_{cf}^{34} = 0 \neq K_{cf}^{43}$.

$$K_{cf}^{41} = \frac{1}{h_t} \cdot [\Psi_e]^T \cdot \partial_{u^1} \left\{ \mu \lambda_n S_u \left\{ \Lambda - S_f(\Lambda + h_t * d_t) - (1 - S_f) \frac{gh}{\|gh\|} \right\} + (1 - S_u)\Lambda \right\} \cdot [N_e^1]$$

$$K_{cf}^{42} = \frac{1}{h_t} \cdot [\Psi_e]^T \cdot \partial_{u^2} \left\{ \mu \lambda_n S_u \left\{ \Lambda - S_f(\Lambda + h_t * d_t) - (1 - S_f) \frac{gh}{\|gh\|} \right\} + (1 - S_u)\Lambda \right\} \cdot [N_e^2]$$

$$K_{cf}^{43} = \frac{1}{h_t} \cdot [\Psi_e]^T \cdot \partial_{\lambda_n} \left\{ \mu \lambda_n S_u \left\{ \Lambda - S_f(\Lambda + h_t * d_t) - (1 - S_f) \frac{gh}{\|gh\|} \right\} + (1 - S_u)\Lambda \right\} \cdot [\Phi_e]$$

$$K_{cf}^{44} = \frac{1}{h_t} \cdot [\Psi_e]^T \cdot \partial_{\Lambda} \left\{ \mu \lambda_n S_u \left\{ \Lambda - S_f(\Lambda + h_t * d_t) - (1 - S_f) \frac{gh}{\|gh\|} \right\} + (1 - S_u)\Lambda \right\} \cdot [\Psi_e]$$

$$K_{cf}^{41} = [\Psi_e]^T \cdot \left\{ \mu \lambda_n S_u \left\{ -S_f \cdot (I - nn^T) - (1 - S_f) \frac{1}{\|gh\|} (I - nn^T) \left(I - \frac{1}{\|gh\|^2} \cdot gg^T \right) \right\} \right\} \cdot [N_e^1] \quad (5.34)$$

$$K_{cf}^{42} = -[\Psi_e]^T \cdot \left\{ \mu \lambda_n S_u \left\{ -S_f \cdot (I - nn^T) - (1 - S_f) \frac{1}{\|gh\|} (I - nn^T) \left(I - \frac{1}{\|gh\|^2} \cdot gg^T \right) \right\} \right\} \cdot [N_e^2] \quad (5.35)$$

$$K_{cf}^{43} = \frac{1}{h_t} \cdot [\Psi_e]^T \cdot \left\{ \mu S_u \left\{ \Lambda - S_f(\Lambda + h_t * d_t) - (1 - S_f) \frac{gh}{\|gh\|} \right\} + \mu \lambda_n \mathbf{S}_u \left\{ (1 - \mathbf{S}_f) \frac{\mathbf{1}}{\lambda_n} \frac{\mathbf{g}_h}{\|\mathbf{g}_h\|} \right\} \right\} \cdot [\Phi_e]$$

Cas 2D

$$K_{cf}^{43} = \frac{1}{h_t} \cdot [\Psi_e]^T \cdot \left\{ \mu S_u \left\{ \Lambda - S_f(\Lambda + h_t * d_t) - (1 - S_f) \frac{gh}{\|gh\|} \right\} \right\} \cdot [\Phi_e] \quad (5.36)$$

Cas 3D

$$K_{cf}^{43} = \frac{1}{h_t} \cdot [\Psi_e]^T \cdot \left\{ \mu S_u \left\{ \Lambda - S_f(\Lambda + h_t * d_t) \right\} \right\} \cdot [\Phi_e] \quad (5.37)$$

$$K_{cf}^{44} = \frac{1}{h_t} \cdot [\Psi_e]^T \cdot \left\{ \mu \lambda_n S_u \left\{ (1 - S_f) \frac{1}{\|gh\|} \left(I - \frac{1}{\|gh\|^2} gg^T \right) \right\} + (1 - S_u)I \right\} \cdot [\Psi_e] \quad (5.38)$$

Calcul des vecteurs élémentaires

Le vecteur second membre est calculé connaissant : $u = u^{(i-1)} + \Delta u^{(n-1)}$, $\lambda = \Delta \lambda^{(n-1)}$, $\Lambda = \Delta \Lambda^{(n-1)}$:

$$\begin{aligned}
 F(x) = & \bigcup \int_{\Omega_{i,e}} \{q_{e,i}^*\}^T L^{int,i} d\Omega + \bigcup \int_{\Gamma_{i,e}^f} \{q_{e,i}^*\}^T L^{ext,i} d\Gamma + \bigcup \int_{\Gamma_{i,e}^u} \{q_{e,i}^*\}^T L^{u,i} d\Gamma \\
 & + \bigcup \int_{\Gamma_{ce}} \begin{pmatrix} q_{e,1}^* \\ q_{e,2}^* \\ l_e^* \\ L_e^* \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} F^{cont,e,1} + F^{frott,e,1} \\ F^{cont,e,2} + F^{frott,e,2} \\ \tilde{F}^{cont,e} \\ \tilde{F}^{frott,e} \end{bmatrix} . d\Gamma_c \quad (5.39)
 \end{aligned}$$

- Contribution faible des efforts de contact :
 $S_u = 1$, (contact) ou $S_u = 0$ (sans contact)
 $S_f = 1, S_u = 1$ (contact adhérent) ou $S_f = 0, S_u = 1$ (contact glissant)

$$F^{cont,e,1} = -S_u n^T [N_1^e]^T \{ \lambda - \kappa_n n^T . u_1 \} \quad (5.40)$$

$$F^{cont,e,2} = S_u n^T [N_2^e]^T \{ \lambda - \kappa_n n^T . u_2 \} \quad (5.41)$$

$$F^{frott,e,1} = -\mu \lambda_n (I - nn^T) [N_1^e]^T S_u \left\{ S_f \{ \Lambda + \kappa_t . (I - nn^T) u_1 \} + (1 - S_f) \frac{\Lambda + \kappa_t . (I - nn^T) u_1}{\| \Lambda + \kappa_t . (I - nn^T) u_1 \|} \right\} \quad (5.42)$$

$$F^{frott,e,2} = \mu \lambda_n (I - nn^T) [N_2^e]^T S_u \left\{ S_f \{ \Lambda + \kappa_t . (I - nn^T) u_2 \} + (1 - S_f) \frac{\Lambda + \kappa_t . (I - nn^T) u_2}{\| \Lambda + \kappa_t . (I - nn^T) u_2 \|} \right\} \quad (5.43)$$

- Evaluation de la loi de contact faible : $S_u = 1$, ou $S_u = 0$

$$\tilde{G}^{cont,e} = [\Phi_e]^T \left\{ -\frac{1}{h_n} \{ \lambda - S_u * [\lambda - h_n n^T . (u_1 - u_2)] \} \right\} \quad (5.44)$$

- Evaluation de la loi faible de frottement : $S_f = 1$, ou $S_f = 0$

$$\tilde{G}^{frott,e} = \frac{1}{h_t} . [\Psi_e]^T \left\{ \mu \lambda_n S_u \{ \Lambda - S_f (\Lambda + h_t * d_t) - (1 - S_f) \frac{g_h}{\|g_h\|} \} + (1 - S_u) \Lambda \right\} \quad (5.45)$$

Remarque : La valeur prise par λ_n dans les expressions des termes élémentaires de frottement dépend de la stratégie de calcul adoptée. Dans une technique de point fixe sur le seuil le seuil de frottement, on suppose que cette valeur est constante et indépendante de la boucle de Newton. Tandis que dans une technique de Newton, pour l'itération courante, on prend la valeur cumulée des itérations de Newton de l'itération précédente. Soit :

$$\lambda_n = \Delta \lambda^{(n-1)} \text{ Newton}$$

$$\lambda_n = \lambda^0 \text{ Points fixes}$$

Calcul des matrices et vecteurs élémentaires pour la méthode de Newton généralisée

Par rapport à la méthode de Newton partielle, les matrices qui sont modifiées sont :

$$K_{cf}^{12} = K_{cf}^{12, \text{Newton partiel}} - [N_e^1]^T \left([\partial_{\zeta^\alpha} N^m]^T q_{e,2} n \right) [\partial_{\zeta^\alpha} N_e^2] \quad (5.46)$$

$$K_{cf}^{21} = K_{cf}^{21, \text{Newton partiel}} - [\partial_{\zeta^\alpha} N_e^2]^T \left(n q_{e,2} [\partial_{\zeta^\alpha} N^m] \right) [N_e^1] \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} K_{cf}^{22} = K_{cf}^{22, \text{Newton partiel}} &+ [N_e^2]^T \left(n q_{e,2} [\partial_{\zeta^\alpha} N^m] \right) [N_e^2] \\ &+ [\partial_{\zeta^\alpha} N_e^2]^T \left(n q_{e,2} [\partial_{\zeta^\alpha} N^m] \right) [N_e^2] \\ &+ [\partial_{\zeta^\alpha} N_e^2]^T \left(n q_{e,2} [\partial_{\zeta^\beta} N^m] \right) [\partial_{\zeta^\alpha} N_e^2] \\ &+ [\partial_{\zeta^\alpha} N_e^2]^T \left(n (y^1 - \bar{y}) N^m \right) [\partial_{\zeta^\alpha} N_e^2] \end{aligned} \quad (5.48)$$

Calcul des matrices et vecteurs élémentaires pour la méthode de Point fixe-Newton

voir la documentation historique de *Code_Aster* [25]

Calcul des matrices et vecteurs élémentaires pour le Lagrangien augmenté non standard

On rajoute des termes aux matrices de la méthode de Newton généralisée.

$$\int_{\Gamma_{ce}} \begin{pmatrix} q_{e,1}^* \\ q_{e,2}^* \\ l_e^* \\ L_e^* \\ \eta^* \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{cf}^{11} & K_{cf}^{12} & K_{cf}^{13} & K_{cf}^{14} & K_{cf}^{15} \\ K_{cf}^{21} & K_{cf}^{22} & K_{cf}^{23} & K_{cf}^{24} & K_{cf}^{25} \\ K_{cf}^{31} & K_{cf}^{32} & K_{cf}^{33} & K_{cf}^{34} & K_{cf}^{35} \\ K_{cf}^{41} & K_{cf}^{42} & K_{cf}^{43} & K_{cf}^{44} & K_{cf}^{45} \\ K_{cf}^{51} & K_{cf}^{52} & K_{cf}^{53} & K_{cf}^{54} & K_{cf}^{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta q_{e,1} \\ \delta q_{e,2} \\ \delta l_e \\ \delta L_e \\ \eta \end{pmatrix} . d\Gamma_c \quad (5.49)$$

Le calcul a été fait dans un cas sans frottement. On a :

$$K_{cf}^{25} = K_{cf}^{25, \text{classique}} + \kappa_n (n - f(u)) . t \frac{\partial N^2(\xi)}{\partial \xi} \quad (5.50)$$

$$K_{cf}^{52} = K_{cf}^{52, \text{classique}} + \kappa_n (n - f(u)) . t \frac{\partial N^2(\xi)}{\partial \xi} + \kappa_n n . t f(u) \frac{\partial N^2(\xi)}{\partial \xi} \quad (5.51)$$

$$K_{cf}^{55} = K_{cf}^{55, \text{classique}} + \kappa_n I \quad (5.52)$$

Bibliographie

- [1] Abbasi N., Bathe K.-J., *Stability and patch test performance of contact discretizations and a new solution algorithm*, Computers and Structures, vol. 79, 2001, 1473-1486.
- [2] Alart P., Curnier A., *A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 92, 1991, 353-375.
- [3] Alart P., *Critères d'injectivité et de surjectivité pour certaines applications de R^n dans lui même ; application à la mécanique de contact*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, vol. 27, 1993, 203-222.
- [4] Alart P., *Méthode de Newton Généralisée en mécanique du contact*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, vol. 76, 1997, 83-108.
- [5] Alart P., *A simple contact algorithm applied to large sliding and anisotropic friction*, Proceedings Contact Mechanics International Symposium, édité par Curnier A., Lausanne, Switzerland, 1992, 321-336.
- [6] Alart P., Lebon F., Quittau F. , Rey K., *Frictional contact problem in elastostatics : revisiting the uniqueness condition*, Proceedings of 2nd contact mechanics international symposium édité par Raous M., Jean M., Moreau J. J., 1995, 63-70.
- [7] Alart P., Lebon F., *Solution of contact and friction problems using ILU and Coarse-Fine preconditioners*, Computational Mechanics, vol. 16, 1995, 98-105.
- [8] Allaire G., *Analyse numérique et optimisation*, édité par "Les éditions de l'école polytechnique", 2008, 65-350.
- [9] Ballard P., *A counter-example to uniqueness in quasi-static elastic contact problems with small friction*, International Journal of Engineering Science, vol. 37, 1999, 163-178.
- [10] Belgacem B. F., Renard Y., Slimane L., *A mixed formulation for the Signorini problem in nearly incompressible elasticity*, Applied Numerical Mathematics, vol. 54, 2005, 1-22.
- [11] Benson D. J. , Hallquist J. O., *A Single surface contact algorithm for the post-buckling analysis of shell structures*, Computer Methods in Applied Mechanics and

- Engineering, vol. 78, 1990, 141-163.
- [12] Ben-Dhia H., Zarroug M., *Hybrid frictional contact particles-in elements*, European Journal of Computational Mechanics, vol. 11, 2002, 417-430.
- [13] Bisegna P., Lebon F., Maceri F., *Relaxation procedures for Solving Signorini-Coulomb contact problems*, Advances in Engineering, vol. 35, 2004, 595-600.
- [14] Bostan M., Hild P., *Weak formulations and solution multiplicity of equilibrium configurations with Coulomb friction*, Mathematical Modelling of Natural Phenomenon, vol. 4, 2009, 147-162.
- [15] Brezzi F., Fortin M., *Mixed and Hybrid Finite Element Method*, Springer Series Computational Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991, 1-198.
- [16] Bussetta P., Marceau D., Ponthot J.-P. *The adapted augmented Lagrangian method : a new method for the resolution of the mechanical frictional contact problem*, Computational Mechanics, vol. 49, 2012, 259-275.
- [17] Buliga M., De-Saxcé G., Vallée C., *Existence and construction of bipotentials for graphs of multivalued laws*, Journal of Convex Analysis, vol. 15, 2008, 87-104.
- [18] Chabrand P., Dubois F., Raous M., *Various numerical Methods for solving unilateral contact problems with friction*, Nonlinear Analysis, vol. 42, 1998, 961-976.
- [19] Cocu M., *Existence solutions of Signorini Problems with friction*, International Journal in Engineering science, vol. 22, 1984, 567-575.
- [20] Cocu M., Pratt E., Raous M., *Formulation and Approximation of Quasistatic frictional contact*, International Journal in Engineering science, vol. 34, 1996, 783-798.
- [21] Cocu M., Ricaud J. M., *Analysis of a class of implicit evolution inequalities associated to viscoelastic dynamic contact problems with friction*, International Journal of Engineering Science, vol. 38, 2000, 1535-1552.
- [22] *Code_Aster, Modèle de Rousselier en grandes déformations*, Documentation de référence Code_Aster, R5.03.06, 2011, disponible sur www.code-aster.org.
- [23] *Code_Aster, Éléments de contact dérivés d'une formulation hybride continue*, Documentation de référence R5.03.52, 2012, disponible sur www.code-aster.org.
- [24] *Code_Aster, Algorithme non linéaire dynamique*, Documentation de référence R5.05.05, 2011, disponible sur www.code-aster.org.

- [25] Code_Aster, *Loi de comportement hyper-élastique. Matériau presque incompressible*, Documentation de référence - R5.03.19, 2010, disponible sur www.code-aster.org
- [26] Code_Aster, *Formulation discrète du contact-frottement*, Documentation de référence - R5.03.50, 2010, disponible sur www.code-aster.org
- [27] Code_Aster, *Efforts extérieurs de pression en grands déplacements*, Documentation de référence - R3.03.04, 2012, disponible sur www.code-aster.org
- [28] Champaney L., Cognard J.Y., Dureisseix D., Ladeveze P., *Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method*, Computational Mechanics, vol 19, 1997, 253-263.
- [29] Chamberland E., *Projet : Linéarisation de la normale*, Communication privée avec GIREF, Université Laval Pavillon Vachon, Canada, 2011.
- [30] Christensen P. W., *A semi-smooth newton method for elasto-plastic contact problems*, International Journal of Solid Structures, vol. 39, 2002, 2323-2341.
- [31] Christensen P. W., Klarbring A., Pang J. S., Strömberg N., *Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 42, 1998.
- [32] Curnier A., Alart P., *A generalized Newton method for friction contact problems with friction*, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, revue spéciale "Numerical Methods in Mechanics of Contact involving Friction", 1988, 67-82.
- [33] Curnier A., « *Unilateral Contact : Mechanical modelling* », New developpments in contact mechanics, édité par Wriggers P. and Panagiotopoulos P., CISM courses, vol. 384, 1999.
- [34] Curnier A., He Q., Klarbring A., *Continuum mechanics modelling of large deformation contact with friction*, Contact, frottement, adhésion : bases et avancées récentes en modélisation et simulation numérique , édité par Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur , 2004.
- [35] Curnier A., *A theory of friction* , International Journal of Solids and Structures, vol. 20, 1984, 637-647.
- [36] Czekanski A., Meguid S. A., *Analysis of dynamic frictional contact problems using variational inequalities*, Finite Elements in Analysis and Design, vol. 37, 2001, 861-879.
- [37] Dilintas G., Laurent-Gengoux P., Trystram D., *A Conjugate projected gradient method with preconditioning for unilateral contact problems*, Computers and Structures, vol. 29, 1988, 675-680.

- [38] De-Saxcé G., Feng Z.-Q., *The bipotential method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithm*, International Journal of Mathematical and Computer Modelling, vol. 28, 1998, 225-245.
- [39] Dorfmann A., Ogden R. W., *A pseudo-elastic model for loading, partial unloading and reloading of particle-reinforced rubber*, International Journal of solid and Structure, vol. 40, 2003, 2699–2714.
- [40] Dumont G., *Algorithme de contraintes actives et contact unilatéral sans frottement*, Revue européenne des éléments finis, vol. 4, 1995, 55-73.
- [41] Fortin J., De-Saxcé G., *Modélisation des milieux granulaires par l'approche bipotentiel*, Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris, vol. 327, 1999, 721-724.
- [42] Fortin J., Hjjaj M., De-Saxcé G., *An improved discrete element method based on a variational formulation of the frictional contact law*, Computers and Geotechnics, vol 29, 2002, 609–640.
- [43] Fourment L., Chenot J. L., Mocellin K., *Numerical Formulations and algorithms for solving contact problems in metal forming simulations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 9, 1999, 1435-1462.
- [44] Frémond M., *Unilateral Contact. Contact with adhesion*, Non-smooth Thermomechanics, Springer Verlag, 2001, 401-454.
- [45] Glowinski R., Le-Tallec P., *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods*, Nonlinear Mechanics, SIAM, 1989.
- [46] Haslinger J., Janovsky V., Ligursky T. *Qualitative analysis of solutions to discrete static contact problems with Coulomb friction*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 205-208, 2012, 149–161.
- [47] Haslinger J., Hlavacek I., *Approximation of the Signorini problem with friction by a mixed finite element method*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 86, 1982, 99-122.
- [48] Haslinger J., *Approximation of the Signorini problem with friction, Obeying the Coulomb Law*, Mathematical Method in Applied Science, vol. 5, 1983, 442-447.
- [49] Haslinger J., *Approximation of contact problems. Shape optimization in contact problems*, Non-Smooth mechanics and applications, J. J. Moreau, P. Panagiotopoulos, CISM courses, vol. 302, 1988.
- [50] Heege A., Alart P., *A frictional contact element for strongly curved contact problems*, International Journal for numerical Methods in Engineering, vol. 39, 1996, 165–184.

- [51] Hongwu Z., Wanxie Z., Yuanxian G., *A combined parametric quadratic programming and iteration method for 3D elastic-plastic frictional contact problem analysis*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 155, 1998, 307-324.
- [52] He Q.-C., Curnier A. *Anisotropic dry friction between two orthotropic surfaces undergoing large displacements*, European Journal of Mechanics, vol. 12, 1993, 631-666.
- [53] Heegaard J.H., *Large slip contact in Biomechanics : kinematics and stress analysis of the patello-femoral joint*, Thèse EPFL, 1993.
- [54] Heegaard J.H., Curnier A. *Geometric properties of 2D and 3D unilateral large slip contact operators*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 131, 1995, 263-286.
- [55] Hild P., *An example of nonuniqueness for the continuous static unilateral contact model with Coulomb friction*, Comptes Rendus des Académies de Sciences Paris Sr. I Math., vol. 337, 2003, 685-688.
- [56] Hild P., *Non-unique slipping in the Coulomb friction model in two-dimensional linear elasticity*, Comptes Rendus des Académies de Sciences Paris, vol. 57(2004), 225-235.
- [57] Hild P., *Solution multiplicity and stick configurations in continuous and finite element friction problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196, 2006, 57-65.
- [58] Hüeber S., Wohlmuth B. I., *A primal-dual active set strategy for nonlinear multibody contact problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 194, 2005, 27-29.
- [59] Hilber H.M., Hughes T.J.R., Taylor R.L., *Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 5, 1977, 282-292.
- [60] Jourdan F., « *Simulation numérique de l'emboutissage : contact et frottement en régularisation dynamique* », Thèse Université de Montpellier Sciences et Techniques du Languedoc, 1995.
- [61] Jourdan F., Alart P., Jean M., *A Gauss-Seidel like algorithm to solve frictional contact problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 155, 2000, 31-47.
- [62] Kudawoo A. D., Lebon F., Abbas M., De-Soza T., Rosu I., *Etude de la robustesse d'un algorithme basé sur le lagrangien stabilisé pour la résolution des problèmes de contact et de frottement*, 10eme Colloque national de calcul des structures, 2011, hal-00592780.

- [63] Kudawoo A. D. , Lebon F., Abbas M., De-Soza T., Rosu I., *Two algorithms based on Stabilized Lagrangian formulation to solve frictional contact problems*, International Conference on Computational Contact Mechanics, Hannover (Allemagne), 2011.
- [64] Khenous H. B., Pommier J., Renard Y., *Hybrid discretization of the Signorini problem with Coulomb friction. Theoretical aspects and comparison of some numerical solvers*, Applied Numerical Mathematics, 2006, 163-192.
- [65] Kikuchi N., *A smoothing technique for reduced integration penalty method in contact problems* , International Journal for Numerical methods and Engineering, vol. 18, 1982, 343-350.
- [66] Klarbring A., *A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 58, 1986, 175–200.
- [67] Klarbring A., Bjorkman, *Solution of large displacement contact problems with friction using Newton's method for generalized equations*, International Journal for Numerical Methods and Engineering, vol. 34, 1992, 249-269.
- [68] Koziara T., Bicanic N., *Semismooth Newton method for frictional contact between pseudo-rigid bodies*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 197, 2008, 2763-2777.
- [69] Krause R., Mohr C. *Level-set based multi-scale methods for large deformation contact problems*, Applied Numerical Mathematics, vol. 61, 2011.
- [70] Krenk S., *Energy conservation in Newmark based time integration algorithms*, Computer Methods Applied Mechanics Engineering, vol. 195, 2006, 6110–6124.
- [71] Kuss F., Lebon F., *Stress based finite element methods for solving contact problems : Comparisons between various solution methods*, Advances in Engineering Software, vol. 40, 2009, 697–706.
- [72] Kuss F., Lebon F., *Error estimation and mesh adaptation for Signorini–Coulomb problems using E-FEM*, Computers and Structures, vol. 89, 2011, 1148–1154.
- [73] Kuss F., *Méthodes duales pour les problèmes de contact avec frottement* , Thèse, Université de Provence, 2008.
- [74] Laursen T. A., *Computational Contact and Impact mechanics*, Springer-Verlag, 2002.
- [75] Laursen T. A., *The convected description in large deformation frictional contact problems*, International Journal of Solids and Structures, vol. 31, 1994, 669–681.

- [76] Laursen T. A. , Simo J. C., *A continuum-based finite element formulation for the implicit solution multi-body, large deformation frictional contact problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 36, 1993.
- [77] Lebon F., *Contact problems with friction : models and simulations*, Simulation Practice and Theory, vol. 11, 2003, 449-463.
- [78] Lebon F., Raous M., *Multibody contact problem including friction in structure assembly*, Computers and Structures, vol 43, 1992.
- [79] Liu W.N., Meschke G., Mang H. A., *Algorithmic stabilization of FE analyses of 2D frictional contact problems with large slip*, Computer Methods Applied Mechanics and Engineering, vol. 192, 2003, 2099–2124.
- [80] Magnain B., « *Développement d'algorithmes et d'un code de calcul pour l'étude des problèmes de l'impact et du choc* », Université d'Evry-Val d'Essone, 2006.
- [81] Moreau J. J., *Numerical aspects of the sweeping process*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 177, 1999, 329-349.
- [82] Moreau J. J., *Unilateral Contact and dry friction in finite freedom dynamics*, Nonsmooth mechanics and applications, Springer-Verlag, vol. 302, 1988.
- [83] Moreau J. J., *Qu'est ce que la mécanique non régulière*, Communication au 17eme Congrès Français de Mécanique, 2005
- [84] Newmark N. M., *A method of computation for structural dynamics*, Journal of the Engineering Mechanics Division, vol. 85, 1959.
- [85] Oden J. T., Martins J. A. C., *Models and computational methods for dynamic friction phenomena*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 52, 1985, 527–634.
- [86] Papadopoulos P., Taylor R. L. *A mixed formulation for the finite element solution of contact problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol .94, 1992, 373-389.
- [87] Parish H., *A consistent tangent matrix for three-dimensional non-linear contact analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 28, 1989, 1803-1812.
- [88] Pietrzak G., Curnier A., *Large deformation frictional contact mechanics : continuum formulation and augmented Lagrangian treatment*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 177, 1999, 351-381.

- [89] Pietrzak G., *Continuum mechanics modelling and augmented Lagrangian formulation of large deformation frictional contact problems.*, Thèse EPFL, 1997.
- [90] Popp A., Gütterle M., Gee W., Wall A. W., *A dual mortar approach for 3D finite element deformation contact with consistent linearization*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 83, 2010, 1428-1465.
- [91] Puso A. M., Laursen T. A., Solberg J., *A segment-to-segment mortar contact method for quadratic elements and large deformation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 197, 2008, 555-566.
- [92] Puso A. M., Laursen T. A., Solberg J., *A 3D contact smoothing method using Gregory patches*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002.
- [93] Raous M., *Quasistatic Signorini Problem with Coulomb Friction*, New developments in contact mechanics, Springer-Verlag, CISM courses édité par Wriggers P, Panagiotopoulos P., vol. 384, 1999.
- [94] Raous M., Chabrand P., Lebon F., *Numerical methods for frictional contact problems and applications*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, vol 7, 1988.
- [95] Renouf M., Alart P., *Conjugate gradient type algorithms for frictional multi-contact problems : applications to granular materials*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 194, 2005, 18–20 .
- [96] Rocca R., Cocu M., *Existence and approximation of an solution to quasistatic Signorini problem with local friction* , International Journal in Engineering science, vol. 39, 2001, 1233-1255.
- [97] Rocca R., Cocu M., *Numerical Analysis of Quasi-Static Unilateral Contact Problems With Local Friction*, Journal on Numerical Analysis, Vol. 39, 2002, 1324-1342.
- [98] Simo J.C., Miehe C., *Associative coupled thermoplasticity at finite strains : Formulation, numerical analysis and implementation* , Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 98, 1992, 41-104.
- [99] Simo J.C., Hughes T. J. R., *Elastoplasticity and Viscoplasticity : Computational aspects* , Springer-Verlag, vol 66, 1988.
- [100] Simo J.C., *A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. Part I : Continuum formulation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 66, 1988.
- [101] Simo J.C., *A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. Part I : Computational aspects*, Computer

- Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 68, 1988.
- [102] Simo J.C., Laursen T. A., *An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction*, Computer and Structures, vol 42, 1992, 97-116.
- [103] Siavelis M., *Thèse de doctorat : Modélisation numérique X-FEM de grands glissements avec frottement le long d'un réseau de discontinuités*, École Centrale de Nantes, 2011.
- [104] Tardieu N., Youbissi F., Chamberland E., *Un algorithme de Gradient Conjugué Projeté préconditionné pour la résolution de problèmes unilatéraux*, Comptes rendus Mécanique, vol. 336, 2008.
- [105] Taylor R. L. , Simo J. C., Zienkiewicz O. C., Chan A. C. H., *The patch test—a condition for assessing FEM convergence* , International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 22, 1986.
- [106] Taylor R. L. , Panagiotopoulos P., *On a patch-test for Contact Problems in two Dimensions* , Non linear Computational Mechanics, Springer-Verlag, 1991.
- [107] Telega J. J., *Quasi-static Signorini's contact problem with friction and duality* , International Series on Numerical Mathematics, vol. 101, 1991, 199–214.
- [108] Torkhani M., *Contribution au développement numérique d'éléments de contact et modélisation de l'usure des structures minces*, Thèse École centrale de Paris, 2009.
- [109] Tur M., Fuenmayor F. J., Wriggers P. *A mortar-based frictional contact formulation for large deformations using Lagrange multipliers*, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, vol 198, 2009, 2860-2873.
- [110] Van A. L., Nguyen T. T. H., *A weighted residual relationship for the contact problem with Coulomb friction*, Computers and Structures, vol. 87, 2009.
- [111] Wriggers P., Vu Van T., Stein E., *finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction*, Computers and Structures, vol. 37, 1990, 319–331.
- [112] Wriggers P., *Computational Contact Mechanics*, Springer-Verlag, 2nd edition, 2006.
- [113] Wriggers P., Panagiotopoulos, *New Development in Contact Problems*, Springer-Verlag, Vienna and New York, 1999.
- [114] Yastrebov V, *Computational contact mechanics : geometry, detection and numerical techniques*, 2011, École des Mines de Paris
- [115] Zammali C., *Contribution à la modélisation mécanique et numérique des problèmes de contact-impact* , Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris, 2005.

- [116] Zarroug M., *Eléments mixtes de contact frottant en grandes transformations et applications.*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris, 2002.