

THÈSE

présentée à

**LISA-ISTIA, ÉCOLE D'INGÉNIEUR DE L'UNIVERSITÉ
D'ANGERS**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'Université d'Angers

par

Oumar GAYE

Spécialités : SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

École doctorale : STIM (Sciences et Technologies de l'Information et Mathématiques)

CONTRÔLE DU PROFIL DE FACTEUR DE SECURITE DANS LES PLASMAS DE TOKAMAK EN DIMENSION INFINIE

Soutenue le 4 décembre 2012 devant le jury suivant :

Rapporteurs :	Jacques Blum	Professeur à l'Université de Nice Sophia-Antipolis
	Christophe Prieur	Directeur de recherche CNRS à Gipsa-lab, Grenoble
Examineurs :	Vilmos Komornik	Professeur à l'Université de de Strasbourg
	Rémy Nouailletas	Docteur CEA- Cadarache
	Emmanuel Trélat	Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie
Co-encadrants :	Emmanuel Moulay	Chargé de Recherche CNRS à Xlim, Poitiers
	Sylvain Brémond	Docteur-Ingénieur CEA- Cadarache
Directeur de thèse :	Laurent Autrique	Professeur à l'Université d'Angers

Thèse préparée au LISA (Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés)
EA4094 - Université d'Angers
62, avenue Notre Dame du Lac - 49000 ANGERS

**“La meilleure façon de ne pas avancer est de suivre
une idée fixe.”**

Jacques PRÉVERT

*Je dédie cette thèse à mes chers parents, à toute ma famille, à toutes et à tous mes
ami(e)s.*

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé entre le *Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA)* de l'École d'Ingénieur ISTIA, à l'Université d'Angers et l'Institut de Recherche sur la Fusion Magnétique (IRFM) du CEA de Cadarache. Il a été effectué sous la direction de Laurent Autrique, Professeur à l'Université d'Angers, Emmanuel Moulay, Chargé de Recherche CNRS au laboratoire XLIM-SIC de l'Université de Poitiers et Sylvain Brémond, chef du Groupe Pilotage Asservissement et Scénarios (GPAS) de l'IRFM.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma plus profonde gratitude à Laurent Autrique sans qui cette thèse n'aurait pas vu le jour. Ce fut un grand honneur et un immense plaisir de pouvoir accomplir ce travail sous sa direction. J'ai pu bénéficier de ses précieux conseils, de sa disponibilité, de sa gentillesse et de son soutien sans faille qu'il m'a accordés tout au long de ce travail. J'ai beaucoup appris à son contact sur la façon de mener un travail de recherche.

Je veux aussi exprimer toute ma reconnaissance à mes deux co-encadrants Sylvain Brémond et Emmanuel Moulay pour avoir été toujours disponibles pour répondre à mes questions. Je les remercie pour leurs contributions déterminantes (propositions, conseils, critiques...), leur dynamisme et leur enthousiasme.

Qu'il me soit ensuite permis de remercier très vivement Jacques Blum et Christophe Prieur qui ont consenti à être les rapporteurs de cette thèse et Rémy Nouailletas, Emmanuel Trélat et Vilmos Komornik qui ont fait partie de mon jury.

De nombreuses discussions scientifiques ont permis de fructueux échanges. Je remercie vivement à ce sujet Yury Orlov, Laurent Lefèvre, Emmanuel Witrant ainsi que Vilmos Komornik, Rémy Nouailletas et Christophe Prieur.

Je tiens particulièrement à remercier tous les membres de l'IRFM et tous les doctorants pour leur sympathie et l'ambiance chaleureuse qu'ils ont su entretenir tout au long de mon séjour parmi eux.

Je remercie tout le personnel technique et administratif du LISA : Marie-Françoise Gerard, Simone Rees, Kristell Tanqueray,

Je n'oublie pas mes collègues et amis de bureau : Sara, les deux Julien, Abdelhak, Jean-Luc, Rabah, Rémy, Euriell, Agnès et Yann.

Enfin, mes remerciements vont à tous ceux qui m'ont soutenu ou qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à l'élaboration de ce travail.

Résumé

Titre : CONTRÔLE DU PROFIL DE FACTEUR DE SECURITE DANS LES PLASMAS DE TOKAMAK EN DIMENSION INFINIE

Les besoins énergétiques croissants de la population mondiale requièrent le développement, la maîtrise et la fourniture de nouvelles formes d'énergie. Dans ce contexte, la fusion nucléaire est une piste de recherche extrêmement prometteuse. Le projet mondial ITER est destiné à démontrer la faisabilité scientifique et technique de la fusion nucléaire comme nouvelle source d'énergie. Un des nombreux verrous tient à la maîtrise de la distribution spatiale du profil de courant dans les plasmas de tokamak, paramètre clé pour la stabilité et la performance des expériences. L'évolution spatiotemporelle de ce courant est décrite par un ensemble d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

Ce document traite de la stabilisation par un contrôle robuste de la distribution spatiale du profil de courant en dimension infinie. Deux approches sont proposées : la première s'inspire d'une approche de type mode glissant et la seconde (de type proportionnelle et proportionnelle intégrale) est basée sur les fonctions de Lyapunov en dimension infinie. La conception des lois de contrôle est basée sur l'équation $1D$ de la diffusion résistive du flux magnétique. Les lois de contrôle sont calculées en dimension infinie sans discrétisation spatiale préalable.

Mots clés : Contrôle des plasmas de tokamak, équation aux dérivées partielles, fonctions de Lyapunov, commande par mode glissant, commande $\mathcal{H}_\infty$, stabilisation asymptotique, LMI (linear matrix inequality), fonctions de Lyapunov contrôlées.

Abstract

Titre : CONTROL OF SAFETY FACTOR PROFILE IN PLASMAS OF TOKAMAK IN INFINITE DIMENSION

The increasing energy needs of the world population require the development, the control and the supply of new forms of energy. In this context, nuclear fusion is a track of extremely promising research. World project ITER is intended to prove the scientific and technical feasibility of nuclear fusion. One of the many key-goal is the control of the current profile spatial distribution in plasmas of tokamak, which is one of the main parameter for the stability and the performance of the experiments. The spatiotemporal evolution of this current is described by a set of nonlinear partial differential equations.

In this document stabilization is proposed considering robust control of current profile spatial distribution in infinite dimension. Two approaches are proposed : the first one is based on sliding mode approach and the second one (of type proportional and proportional integral) is based on the Lyapunov functions in infinite dimension. The design of the control law is based on the $1D$ equation resistive diffusion of the magnetic flux. The control laws are calculated in infinite dimension without space discretization.

Keywords : Tokamak plasmas control, partial differential equations, Lyapunov functions, sliding mode control, $\mathcal{H}_\infty$ control, asymptotic stabilization, LMI (linear matrix inequality), control Lyapunov function.

Table des matières

1	Problématique de contrôle du profil de courant plasma	25
1.1	La fusion thermonucléaire contrôlée	26
1.1.1	La fusion comme processus exo-énergétique	27
1.1.2	La nécessité de confiner un plasma chaud	27
1.1.3	Rendement énergétique : le critère de Lawson	28
1.1.4	État des lieux de la voie confinement magnétique	30
1.1.5	Schéma de principe d'un réacteur de fusion par confinement magnétique	31
1.2	La configuration tokamak et la description du plasma comme fluide conducteur	32
1.2.1	Principe de la configuration tokamak	32
1.2.2	Description magnéto-hydro-dynamique (MHD) et définition des profils 1D des grandeurs plasmas	35
1.3	La problématique du contrôle du profil de facteur de sécurité/courant dans le plasma	38
1.3.1	Motivations	38
1.3.2	Les différents moyens d'actions	39
1.3.3	Différentes approches étudiées - état de l'art	40
1.3.4	Approche de contrôle distribué et application au tokamak TORE SUPRA	42
1.4	Bilan du chapitre	46
2	Mise en équations et caractérisation du système étudié	47
2.1	Modélisation du système physique	47
2.1.1	Équation de diffusion résistive du flux magnétique	48
2.1.2	Termes sources et coefficients de l'équation, relation aux actionneurs pour la commande	52
2.1.3	Équation de transport de la chaleur	54
2.1.4	Tableaux récapitulatifs	56
2.1.5	Simulateurs physiques utilisés	57
2.2	Problématique et modèle mathématique étudié	58
2.2.1	Formulation du modèle de commande	58
2.3	Analyse mathématique de l'équation de diffusion résistive	59
2.3.1	Caractérisation	59
2.3.2	Existence et unicité de la solution	60
2.3.3	Définition et existence de la solution asypmtotique	61
2.3.4	Solutions analytiques dans quelques cas de référence	64
2.4	Bilan du chapitre	78

3	Contrôlabilité et stabilité des systèmes régis par des EDPs	79
3.1	Notions générales	79
3.2	Contrôlabilité	83
3.2.1	Contrôlabilité en dimension finie	83
3.2.2	Contrôlabilité des systèmes linéaires en dimension infinie	84
3.3	Stabilisation	88
3.3.1	Stabilité en dimension finie	88
3.3.2	Stabilité en dimension infinie	92
3.4	Quelques méthodes de stabilisation des systèmes décrits par des EDPs	95
3.4.1	Panorama des méthodes	95
3.4.2	Grammien de contrôlabilité et stabilisation exponentielle rapide	96
3.4.3	Commande par mode glissant	99
3.5	Application à la stabilisation de quelques systèmes physiques	101
3.5.1	Étude complète d'une situation linéaire	101
3.5.2	Étude complète d'un exemple non linéaire	102
3.6	Bilan du chapitre	104
4	Commande par mode glissant en dimension infinie	105
4.1	Mise sous forme canonique de l'EDP	105
4.2	Établissement de la loi de commande en dimension infinie et réglage des paramètres	111
4.3	Qualification par simulation numérique de cas test en vue d'expérimentation sur la machine Tore Supra	114
4.3.1	Simulations en dimension infinie	114
4.3.2	Simulations avec METIS	116
4.4	Bilan du chapitre	119
5	Commande PI distribuée à l'aide de fonction de Lyapunov en dimension infinie	121
5.1	Commande proportionnelle	121
5.1.1	Stabilisation exponentielle	123
5.1.2	Atténuation des perturbations	125
5.2	Commande PI	127
5.2.1	Stabilisation asymptotique et rejet de perturbation	127
5.2.2	Contrôleur $\mathcal{H}_\infty$	129
5.3	Qualification par simulation numérique de cas tests en vue d'expérimentation sur la machine Tore Supra	131
5.3.1	Simulations en dimension infinie	131
5.3.2	Simulations avec METIS	134
5.4	Bilan du chapitre	137
6	Conclusion et perspectives	139
6.1	Conclusion	139
6.2	Perspectives	140
A	Équation de Grad-Schluter-Shafranov	141

B	Moyennage sur les surfaces magnétiques	145
B.1	Notion de moyenne sur les surfaces magnétiques	145
B.2	Calcul de champ toroïdal ϕ , du facteur de sécurité q et du courant total dans le plasma I_p	147
C	Construction de la loi de commande à partir des paramètres d'ingénierie réels	149
D	Condition de Kalman	151
E	Stabilisation des équations différentielles ordinaires (EDOs)	153
E.1	Commande par mode glissant	153
E.2	Invariance de LaSalle	156
	Bibliographie	166

Notations et abréviations

Notations

Symbole	Description	Unité
B :	Champ magnétique toroïdal	T
R :	Grand rayon du tore	m
μ_0 :	Perméabilité du vide, $4\pi \times 10^{-7}$	Hm^{-1}
I :	Courant dans la bobine de champ toroïdal	A
ψ :	Flux magnétique poloidal	$Wb \text{ radian}^{-1}$
ϕ :	Flux magnétique toroïdal	Tm^2
f :	Fonction diamagnétique	Tm
$\langle A \rangle$:	Moyenne scalaire d'une quantité A sur une surface magnétique	
q :	Facteur de sécurité	
B_0 :	Champ toroïdal au centre de la chambre à vide du tokamak	T
I_p :	Courant total circulant dans le plasma	A
R_0 :	Grand rayon du plasma	m
ϵ :	Rapport d'aspect ($\frac{a}{R_0}$)	
j_{ni} :	Densité de courant non-inductive	Am^{-2}
$\eta_{ }(\eta_1 \leq \eta_{ } \leq \eta_2)$:	Composante parallèle de la résistivité du plasma	Ωm
a :	Petit rayon du plasma	m
x :	Variable d'espace normalisée	
V_0 :	Tension par tour	V
j_{bs} :	Courant plasma auto-généré (dit courant <i>bootstrap</i>)	Am^{-2}
Z_{eff} :	Charge effective des ions du plasma	C
m_e :	Masse de l'électron, 9.1096×10^{-31}	Kg
e :	Charge de l'électron, 1.6022×10^{-19}	C
c :	Vitesse de la lumière dans le vide, 3×10^8	ms^{-1}
ϵ_0 :	Permittivité de l'espace libre, 8.854×10^{-12}	Fm^{-1}
t_e :	Temps caractéristique de collision électron-électron	s
f_t :	Fraction d'électrons piégés	
ν_{*e} :	Paramètre de collisionnalité électronique	
C :	Facteur de réduction de conductivité due à des collisions électron-électron	
T_e :	Température électronique dans le plasma	eV
T_i :	Température ionique dans le plasma	eV
n_e :	Densité électronique	m^{-3}
$\bar{n}_e$:	Moyenne linéique de la densité électronique	m^{-2}
j_{LH} :	Densité de courant hybride	Am^{-2}

$\tau_E :$	Temps de confinement	s
$N_{lh} :$	Indice de réfraction	
$P_{lh} :$	Puissance Hybride	W
χ_e	Coefficient de diffusion	$m^2 s^{-1}$
$\mathbb{R} :$	Corps des réels	
$\mathbb{C} :$	Corps des complexes	
$\mathbb{R}^N :$	$\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension N	
$\Gamma = \partial\Omega :$	Bord de l'ensemble Ω	
$L^p(\Omega) =$	$\{f : \Omega \longrightarrow K : f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} f ^p < +\infty\}$	
$\ f\ _{L^p}$	Norme sur $L^p(\Omega)$ donnée par $\ f\ _{L^p} = [\int_{\Omega} f(\xi) ^p d\xi]^{\frac{1}{p}}$	
$L^\infty(\Omega) =$	$\{f : \Omega \longrightarrow K : f \text{ mesurable et } \exists C > 0 \text{ telle que } f(\xi) \leq C \text{ sur } \Omega\}$	
$\ f\ _{L^\infty}$	Norme sur $L^\infty(\Omega)$ donnée par $\ f\ _{L^\infty} = \inf \{C : f(\xi) \leq C \text{ sur } \Omega\}$	
$\mathbf{H}^m(\Omega) =$	$\{f \in L^2(\Omega) : \mathbf{D}^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{R}^N, \alpha \leq m\}$	
$\mathbf{H}_0^1(\Omega) :$	Ensemble des fonctions de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ qui sont nulles au bord Γ	
$\mathbf{H}^{-1}(\Omega) :$	Dual de l'espace $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$	
$B^* :$	Adjoint de l'opérateur borné B	
$\mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{U}) :$	Ensemble des applications linéaires de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{U}$	
$(S(t))_{t \geq 0} :$	Semi-groupe	
$\mathbf{H} :$	Espace de Hilbert	
$D(A) :$	Domaine de définition de l'opérateur A	
$\rho(A) :$	Ensemble résolvant de A	
$\sigma(A) :$	Spectre de A	
$t :$	Variable temporelle	
$ \cdot =$	Valeur absolue	
$e^A =$	$\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$	
$\sum_{A,B} :$	$\dot{z} = Az + Bu$	
$z_t \text{ et } z_x :$	Dérivée temporelle et spatiale de z respectivement	
$i :$	Unité imaginaire, $i^2 = -1$	
$\mathcal{C}([0, T]; D(A)) :$	Ensemble des fonctions continues de $[0, T]$ dans $D(A)$	
$\mathcal{C}^1([0, T]; \mathbf{H}) :$	Ensemble des fonctions de classe 1 de $[0, T]$ dans $\mathbf{H}$	
$W^{m,p}(\Omega) =$	$\{f \in L^p(\Omega) : \mathbf{D}^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{R}^N, \alpha \leq m\}$	

Abréviations

EDO :	Equation Différentielle Ordinaire
EDP :	Equations aux Dérivées Partielles
INED :	Institut National Etudes Démographiques
MHD :	Magnéto-Hydro-Dynamique
ITER :	International Thermonuclear Experimental Reactor
CEA :	Commissariat à l'Energie Atomique
JET :	Join European Torus
LH :	Lower Hybride

Table des figures

1.1	Consommation d'énergie et évolution de la population : Source CEA IRFM . . .	26
1.2	Prévision des quantités d'énergie : Source CEA IRFM	26
1.3	Énergie de liaison par nucléon des noyaux en fonction du nombre de nucléons : Source CEA IRFM	27
1.4	Section efficace (m^2) : Source CEA IRFM	28
1.5	Réaction de fusion : Source CEA IRFM	28
1.6	Physique de la matière : Source CEA IRFM	29
1.7	Les trois approches de confinement existantes : Source CEA IRFM	30
1.8	Diagramme de performances des dispositifs vis-à-vis du critère de Lawson : Source www.nuclear-info.com	31
1.9	Schéma d'un réacteur de fusion par confinement magnétique : Source [10] . . .	32
1.10	Influence des lignes de champ sur les particules : Source [10]	32
1.11	Boîte magnétique torique : Source CEA IRFM	33
1.12	Dérives des particules : Source CEA IRFM	33
1.13	Lignes de champ : Source CEA IRFM	34
1.14	Différents types de machines : Source WWW.newsidenergy.fr et www.ipp.mpg.de	34
1.15	Présentation de la géométrie du tokamak : Source CEA IRFM	35
1.16	Repère d'espace : Source [18]	36
1.17	Transformation d'une géométrie 3D en 1D : Source CEA IRFM	37
1.18	Configuration du confinement magnétique dans le plasma de tokamak : Source CEA IRFM	38
1.19	Formes de profils typiques de facteur de sécurité pour les trois scénarios réfé- rence d'ITER	39
1.20	Différents moyens d'action	39
1.21	Chauffage additionnel	40
1.22	Source de chauffage	41
1.23	Schéma de contrôle entrée finie - sortie infinie	42
1.24	Schéma de contrôle entrée finie - sortie finie	43
1.25	Schéma de contrôle entrée infinie - sortie infinie	43
1.26	Tore Supra	45
2.1	Définition du flux toroïdal	48
2.2	Repère de plasma	51
2.3	Schéma de principe METIS	58
2.4	Formulation du problème en dimension infinie	59
2.5	Changement de coordonnées	61

2.6	Distribution spatiale de $\psi_1(t, \cdot) - \psi_1(t, 1)$, q avec $V_0 = 0.1V$ et $\eta_0 = 10^{-7}\Omega \cdot m$	66
2.7	Distribution spatiale de $\psi_1(t, \cdot) - \psi_1(t, 1)$, q avec $V_0 = 0.1V$, $a_1 = 10^6 - 10^7(\Omega \cdot m)^{-1}$ et $b = 10^7(\Omega \cdot m)^{-1}$	67
2.8	La courbe de courant total j_T avec $V_0 = 0.1V$, $a_1 = 10^6 - 10^7(\Omega \cdot m)^{-1}$ et $b = 10^7(\Omega \cdot m)^{-1}$	68
2.9	Distribution spatiale de $\psi_1(t, \cdot) - \psi_1(t, 1)$, q avec $V_0 = 0V$ et $j_0 = 10^6 A \cdot m^{-2}$	70
2.10	Distribution spatiale de $\psi_1(t, \cdot) - \psi_1(t, 1)$, q avec $V_0 = 0.1V$, $\eta_0 = 10^{-7}\Omega \cdot m$ et $j_0 = 10^6 A \cdot m^{-2}$	72
2.11	La courbe de courant total j_T avec $V_0 = 0.1V$, $\eta_0 = 10^{-7}\Omega \cdot m$ et $j_0 = 10^6 A \cdot m^{-2}$	72
2.12	Distribution spatiale de $\psi_1(t, \cdot) - \psi_1(t, 1)$, q avec $V_0 = 0V$ et $j_0 = 10^6 A \cdot m^{-2}$	74
2.13	La courbe de courant total j_T avec $V_0 = 0V$ et $j_0 = 10^6 A \cdot m^{-2}$	74
2.14	Distribution spatiale de $\psi_1(t, \cdot) - \psi_1(t, 1)$, q avec $a_1 = 10^5 - 10^6(\Omega \cdot m)^{-1}$, $b = 10^6(\Omega \cdot m)^{-1}$ et $j_0 = 10^6 A \cdot m^{-2}$	76
2.15	La courbe de courant total j_T avec $a_1 = 10^5 - 10^6(\Omega \cdot m)^{-1}$, $b = 10^6(\Omega \cdot m)^{-1}$ et $j_0 = 10^6 A \cdot m^{-2}$	76
3.1	Système linéaire	83
3.2	Amplitude de l'onde	86
3.3	Poutre en flexion	87
3.4	Équation de la chaleur pour une barre homogène	87
3.5	Illustration de la définition intuitive de la stabilité	89
3.6	Pendule simple	89
3.7	Pour mieux comprendre la stabilité	90
3.8	Courbe de la fonction $X(t) = x_0 e^{-at}$	91
3.9	Un réservoir de longueur L contenant un fluide	103
4.1	Profil initial et cible, et evolution en temps de ψ_r	114
4.2	Évolution en temps de ψ_r : $L = 10^3$ et $L = 10^5$ en fixant $\mathcal{N} = 10$ et $N_d = 10$	114
4.3	Évolution en temps de ψ_r : $\mathcal{N} = 10$, $L = 5 \cdot 10^5$, $N_d = 10$ et $\mathcal{N} = 2.5 \cdot 10^5$, $L = 10$, $N_d = 10$	115
4.4	Influence du paramètre N_d	115
4.5	Évolution en temps des paramètres ingénieries et de ψ_r : $\mathcal{N} = 3 \cdot 10^5$, $L = 10^5$ et $N_d = 10$	116
4.6	Évolution de profil de courant, $j_{engineering}$ et j_{target} : $\mathcal{N} = 3 \cdot 10^5$, $L = 10^5$ et $N_d = 10$	117
4.7	Densité de courant LH et ohmique : $\mathcal{N} = 3 \cdot 10^5$, $L = 10^5$ et $N_d = 10$	117
4.8	Évolution en temps des paramètres ingénierie et de ψ_r : $\mathcal{N} = 3 \cdot 10^5$, $L = 8 \cdot 10^5$ et $N_d = 10$	118
4.9	Évolution de profil de courant, $j_{engineering}$ et j_{target} : $\mathcal{N} = 3 \cdot 10^5$, $L = 8 \cdot 10^5$ et $N_d = 10$	118
5.1	Profil initial et cible, et évolution en temps de ψ_r	131
5.2	Évolution en temps de ψ_r : $k = 10$ et $k = 30$ en fixant $k_1 = 0$	132
5.3	Évolution en temps de ψ_r : $k = 60$ et $k = 80$ en fixant $k_1 = 0$	132
5.4	Évolution en temps de ψ_r : $k_1 = 1$ et $k_1 = 5$ en fixant $k = 1$	132
5.5	Évolution en temps de ψ_r : $k_1 = 10$ et $k_1 = 20$ en fixant $k = 1$	133
5.6	Évolution en temps des paramètres ingénieries et de ψ_r : $k = 1$ et $k_1 = 0.8$	134

5.7	Évolution de profil de courant, $j_{engineering}$ et j_{target} : $k = 1$ et $k_1 = 0.8$	135
5.8	Densité de courant LH et ohmique : $k = 1$ et $k_1 = 0.8$	135
5.9	Évolution en temps des paramètres ingénieries et de ψ_r : $k = 1$ et $k_1 = 1.5$. . .	136
5.10	Évolution de profil de courant, $j_{engineering}$ et j_{target} : $k = 1$ et $k_1 = 1.5$	136
C.1	Schéma de contrôle	149
E.1	Comportement en dehors de la surface (S^+ si $S > 0$ et S^- si $S < 0$)	154
E.2	Schéma de principe d'un système bouclé	154
E.3	Domaine de glissement	156
E.4	Ensemble invariant $\mathcal{M}$	157
E.5	Le ressort	158
E.6	Illustration de la commande	159

Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques principales de Tore Supra	44
1.2	Composantes de Tore Supra visibles sur la figure 1.26	44
2.1	Tableaux récapitulatifs (flux magnétique)	56
2.2	Tableaux récapitulatifs (transport de la chaleur)	57
2.3	Tableaux récapitulatifs (solutions asymptotiques)	77
2.4	Tableaux récapitulatifs (facteurs de sécurité)	77
3.1	Résultats de contrôlabilité pour des EDPs linéaires	86

Avant-propos

Ce mémoire présente les travaux que j'ai effectués pendant trois ans au sein du LISA (Angers) et de l'IRFM (CEA-Cadarache). Le travail présenté est organisé de la manière suivante :

Dans le chapitre 1, après avoir introduit le contexte physique de ce travail, nous présentons les équations de la magnétohydrodynamique et l'équilibre à symétrie de révolution. Nous nous intéressons ensuite aux notions de surfaces magnétiques et à la moyenne sur les surfaces magnétiques. Nous terminerons ce chapitre par la motivation du problème de contrôle du profil de courant, l'état de l'art et l'approche de contrôle distribué pour le dispositif expérimental utilisé.

Dans le chapitre 2, nous proposons les équations de la diffusion résistive du flux magnétique et du transport de la chaleur. Nous nous intéressons ensuite plus en détails à l'équation de la diffusion résistive du flux magnétique dont nous détaillons quelques propriétés (existence et unicité de la solution, existence des solutions asymptotiques, ...).

Le chapitre 3 est divisé en deux parties. Dans la première partie qui est largement inspirée de [76], on va s'intéresser à la construction de contrôles pour stabiliser des EDPs linéaires en dimension infinie. La deuxième partie, qui est inspirée de [65], est dédiée à la stabilisation des systèmes non linéaires en dimension infinie.

Enfin, dans les chapitres 4 et 5, nous nous intéressons à la construction des lois de commande pour contrôler le profil de courant en dimension infinie. Dans le chapitre 4, c'est la méthode par mode glissant qui sera utilisée pour construire le contrôle et dans le chapitre 5, le contrôle est construit à l'aide d'une fonction de Lyapunov.

Les conclusions relatives à l'ensemble de ce travail sont proposées à la fin du manuscrit. Quelques perspectives sont alors dressées afin d'envisager des études ultérieures.

Chapitre 1

Problématique de contrôle du profil de courant plasma

Sommaire

1.1	La fusion thermonucléaire contrôlée	26
1.1.1	La fusion comme processus exo-énergétique	27
1.1.2	La nécessité de confiner un plasma chaud	27
1.1.3	Rendement énergétique : le critère de Lawson	28
1.1.4	État des lieux de la voie confinement magnétique	30
1.1.5	Schéma de principe d'un réacteur de fusion par confinement magnétique	31
1.2	La configuration tokamak et la description du plasma comme fluide conducteur	32
1.2.1	Principe de la configuration tokamak	32
1.2.2	Description magnéto-hydro-dynamique (MHD) et définition des profils 1D des grandeurs plasmas	35
1.3	La problématique du contrôle du profil de facteur de sécurité/courant dans le plasma	38
1.3.1	Motivations	38
1.3.2	Les différents moyens d'actions	39
1.3.3	Différentes approches étudiées - état de l'art	40
1.3.4	Approche de contrôle distribué et application au tokamak TORE SUPRA	42
1.4	Bilan du chapitre	46

Dans ce chapitre, le contexte général des activités de recherche dans lequel se situe la thèse est exposé. Il s'agit de :

- présenter brièvement les réactions de fusion thermonucléaire en tant que potentielle nouvelle source énergétique pour l'humanité,
- de décrire le principe des installations expérimentales dédiées à cette recherche,
- discuter la problématique du profil du courant plasma en situant l'approche traitée dans cette thèse dans l'état de l'art pré-existant.

1.1 La fusion thermonucléaire contrôlée

Selon l'INED (Institut National Etudes Démographiques), la population mondiale est de 6,7 milliards d'individus aujourd'hui. Ce chiffre devrait augmenter pour atteindre 9,2 milliards d'individus en 2050 et entraîner une augmentation des besoins énergétiques pour des pays en voie de développement. En 2050, la consommation d'énergie pourrait atteindre deux à trois fois la consommation actuelle (voir Fig. 1.1), on voit sur la figure le scénario haut et le scénario moyen.

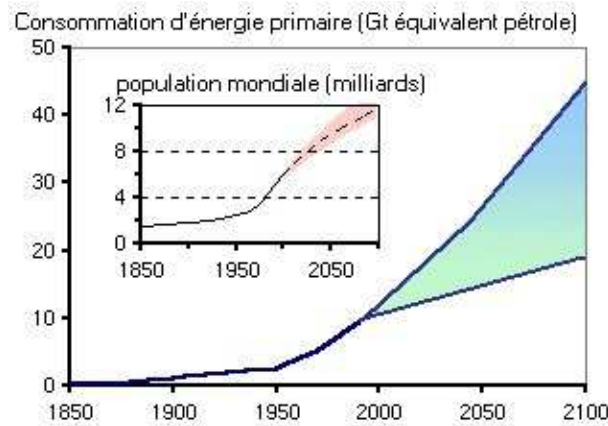


FIGURE 1.1 – Consommation d'énergie et évolution de la population : Source CEA IRFM

Les énergies fossiles sont très utilisées aujourd'hui dans le monde : près de 88% de l'énergie primaire consommée provient de carburants fossiles (voir Fig. 1.2).

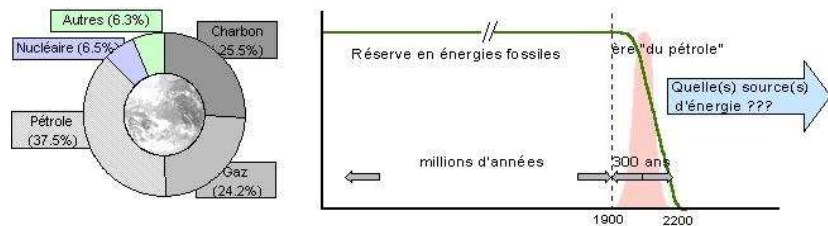


FIGURE 1.2 – Prévision des quantités d'énergie : Source CEA IRFM

Les ressources énergétiques fossiles sont limitées et ne pourront répondre aux besoins croissants de la population mondiale. Sans parler du problème de changement climatique global du à l'effet de serre exacerbé par l'utilisation de ces combustibles. D'où la nécessité de développer de nouvelles formes de production d'énergie. Celle-ci devront bien évidemment satisfaire des critères économiques, mais aussi prendre en compte des exigences en terme d'environnement, de sûreté de fonctionnement et de disponibilité des ressources. L'énergie de fusion représente une option attractive pour répondre à l'ensemble de ces exigences.

1.1.1 La fusion comme processus exo-énergétique

Les réactions mises en jeu pour les sources d'énergie fossiles sont des réactions chimiques. Les énergies obtenues à partir de ces réactions chimiques sont beaucoup plus faibles que celles obtenues par les réactions nucléaires (typiquement 1 million de fois plus faibles). La possibilité de réaliser des réactions nucléaires exo-énergétiques tient à ce que l'énergie de liaison d'un noyau par nucléons varie suivant les éléments (voir Fig. 1.3). En conséquence, la fusion de noyaux légers comme la fission de noyaux lourds sont des réactions exo-énergétiques, l'énergie produit étant reliée au défaut de masse entre produits et réactifs par la fameuse formule d'Einstein $E = mc^2$ où E est l'énergie produite, m la masse disparue et c vitesse de la lumière.

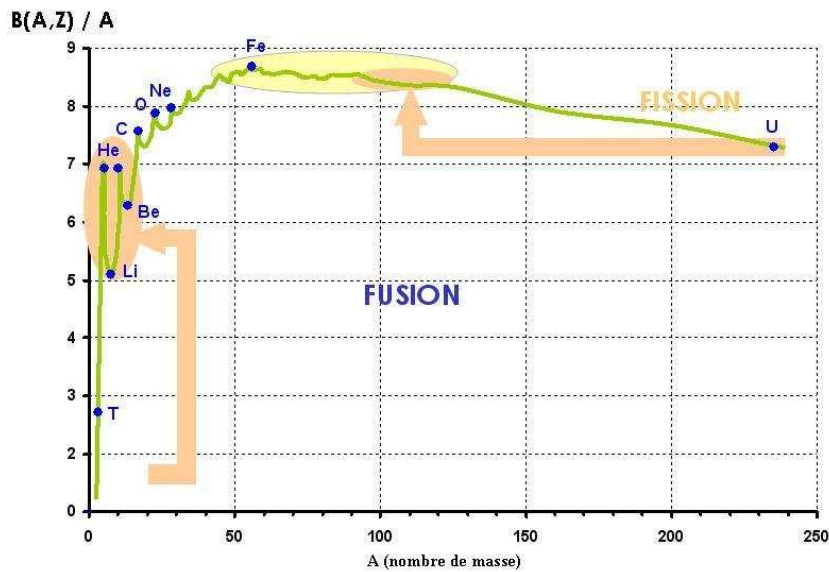


FIGURE 1.3 – Énergie de liaison par nucléon des noyaux en fonction du nombre de nucléons : Source CEA IRFM

$B(A, Z)$ est l'énergie de liaison, A le nombre de nucléon ou nombre de masse et Z est le numéro atomique.

Les réactions de fusion (de l'hydrogène) sont la source principale d'énergie du Soleil et des autres étoiles.

1.1.2 La nécessité de confiner un plasma chaud

Pour obtenir une réaction de fusion, il faut rapprocher suffisamment deux noyaux qui, puisqu'ils sont tous deux chargés positivement, se repoussent. Une certaine énergie est donc indispensable pour franchir cette barrière et arriver dans la zone, très proche du noyau, où se manifestent les forces nucléaires capables de l'emporter sur la répulsion électrostatique. La probabilité de passage de cette barrière peut être quantifiée par la "section efficace". La section efficace est une grandeur physique correspondant à la probabilité d'interaction entre particules pour une réaction donnée. La variation en fonction de l'énergie d'interaction, exprimée en keV ($1\text{eV} = 1.610^{-19}\text{J}$), des sections efficaces de plusieurs réactions de fusion est indiquée sur la

courbe ci-après (voir Fig. 1.4).

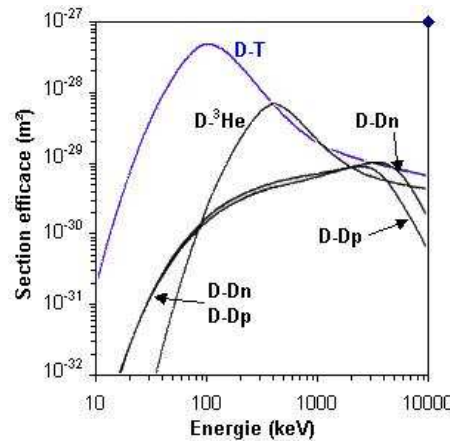
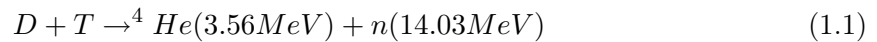


FIGURE 1.4 – Section efficace (m^2) : Source CEA IRFM

On note que la réaction qui a la plus grande section efficace, et donc la plus "facile" à faire est la réaction impliquant le deutérium et le tritium [6, 91] ((1.1) et Fig. 1.5)



C'est sur cette réaction que se concentrent les recherches sur la fusion contrôlée.

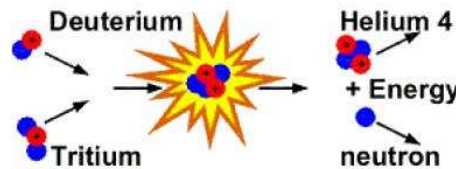


FIGURE 1.5 – Réaction de fusion : Source CEA IRFM

Les températures (qui mesurent l'énergie d'interaction) requises pour la fusion thermonucléaire dépassent la centaine de millions de Kelvins. À de telles températures, les électrons se sont détachés complètement du noyau ; on dit que l'atome s'ionise et l'on entre alors dans le quatrième état de la matière, l'état de plasma (voir Fig. 1.6).

Pour atteindre ces températures, il faut autant que possible isoler la matière de l'environnement extérieur et des parois matérielles, autrement dit confiner la matière.

Dans une étoile, la fusion se met en oeuvre quand la matière en son coeur atteint, sous l'effet des forces gravitationnelles, des densités et des températures suffisantes pour déclencher des réactions thermonucléaires libérant de l'énergie. Ce mode de confinement est impossible à réaliser sur Terre. D'autres voies vont donc être explorées.

1.1.3 Rendement énergétique : le critère de Lawson

Le critère de Lawson [18, 27, 83] donne des conditions sur les paramètres du plasma pour produire de l'énergie à partir de la fusion thermonucléaire.

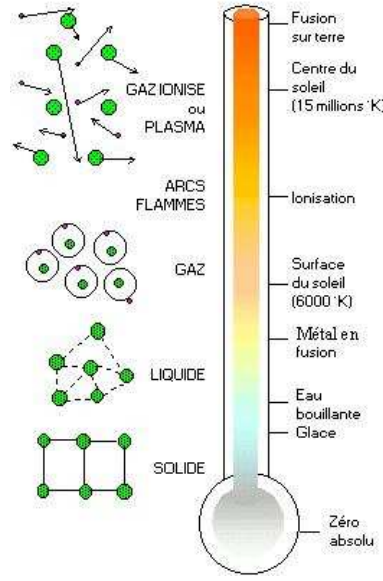


FIGURE 1.6 – Physique de la matière : Source CEA IRFM

Le bilan total de puissance dans le milieu s'écrit

$$\frac{dW}{dt} = P_{\alpha} + P_{\text{extérieure}} - P_{\text{pertes}}, \quad (1.2)$$

où, P_{α} représente l'énergie que cèdent les particules alpha au plasma par collision, $P_{\text{extérieure}}$ est la puissance provenant des systèmes de chauffage extérieurs et P_{pertes} correspond à la puissance perdue par conduction, convection et rayonnement. Le temps de confinement est le temps caractéristique que met le plasma à se vider de son contenu énergétique si on coupe brutalement les sources qui l'alimentent.

$$\tau_E = \frac{W}{P_{\text{pertes}}}. \quad (1.3)$$

En pratique, pour des conditions intéressantes pour un réacteur, on obtient [62]

$$n \cdot T \cdot \tau_E > 10^{21} m^{-3} \cdot keV \cdot s \text{ avec } T \sim 10 KeV \quad (1.4)$$

avec n la densité de plasma et T la température moyenne plasma.

Autrement dit, pour déclencher suffisamment de réactions de fusion, il est indispensable de confiner avec un temps caractéristique suffisant τ_E le plasma suffisamment chaud (température T) et suffisamment dense (densité n).

Pour établir les conditions de la relation (1.4), il y a en pratique deux voies :

- confiner sur un temps caractéristique τ_E de l'ordre de la seconde un plasma de densité n faible, de l'ordre de 10^{-5} fois celle de l'air qu'on appelle le confinement magnétique,
- confiner sur un temps caractéristique τ_E très court de l'ordre de la nanoseconde un plasma de forte densité n , c'est le confinement inertiel.

Sur la Terre, deux voies sont étudiées pour reproduire ces réactions (voir la figure 1.7). Ces deux voies de confinement correspondent à deux manières différentes de satisfaire le critère de

Lawson, c'est-à-dire la relation (1.4) (qui donne une condition sur le produit $n \cdot T \cdot \tau_e$). Les deux voies étudiées sont les suivantes :

La voie inertielle est une méthode utilisée pour porter un petit volume de matière à une très haute pression et très haute température. Le volume est comprimé en utilisant des lasers, qui vont produire un plasma très dense mais de très courte durée. Cette voie est principalement utilisée à des fins militaires pour produire, par exemple, la bombe H [64] .

La voie magnétique, dans le cadre de laquelle nous nous placerons dorénavant, est une méthode utilisée pour confiner le plasma dans une enveloppe de forme torique créée par des champs magnétiques. Cette méthode est la plus avancée car elle permet de produire un plasma de faible densité durant un temps assez long [1].

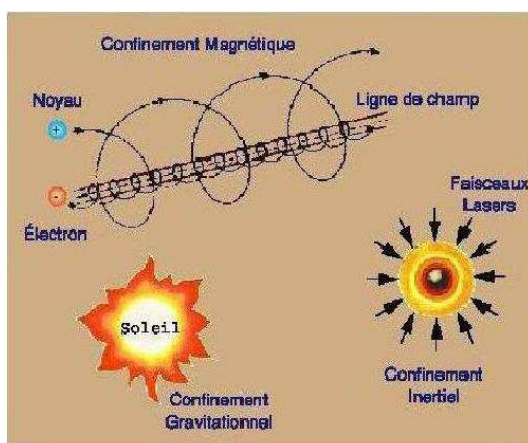


FIGURE 1.7 – Les trois approches de confinement existantes : Source CEA IRFM

Ce sont les deux voies qui sont à l'étude dans la communauté internationale. On distingue plus précisément des conditions pour :

- le "break-even" qui correspond à l'égalité entre la puissance provenant des sources extérieures et la puissance totale produite par les réactions de fusion,
- l'"ignition" qui correspond au cas où la puissance de fusion suffit à elle seule à compenser la puissance perdue : on dit que le plasma s'auto-entretient.

Comme indiqué à la figure 1.8.

Si on introduit le facteur Q qui est le rapport entre la puissance totale produite par les réactions de fusion et la puissance provenant des sources extérieures, alors deux valeurs de Q sont caractéristiques : $Q = 1$ correspond à "break-even" et $Q = \infty$ à "ignition". Le facteur Q est souvent appelé facteur d'amplification de l'énergie.

Les chercheurs du JET (Join European Torus) ont obtenu un facteur d'amplification $Q = 1$ pour un plasma D-T (du Deutérium et du Tritium) [6, 46].

1.1.4 État des lieux de la voie confinement magnétique

Sur la figure 1.8, on peut voir l'évolution des performances atteintes par rapport au critère de Lawson, depuis les premières machines russes jusqu'au projet ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor). ITER a été mis en place dans l'objectif de démontrer la faisabilité "scientifique" de la fusion thermonucléaire. Les partenaires de ce projet sont l'Union

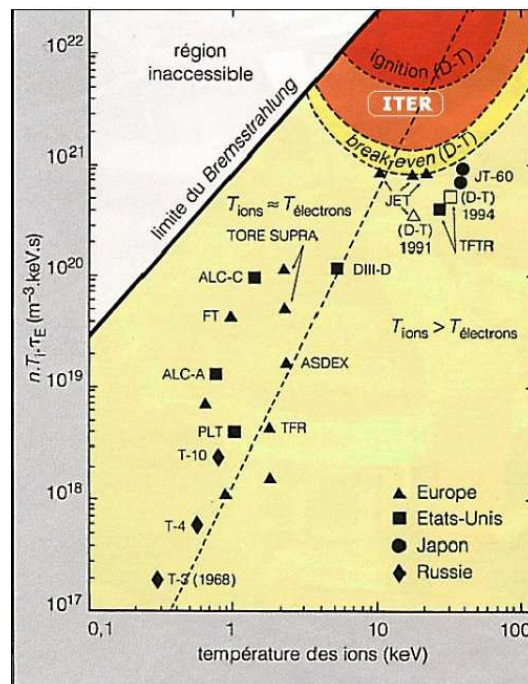


FIGURE 1.8 – Diagramme de performances des dispositifs vis-à-vis du critère de Lawson :
Source www.nuclear-info.com

Européenne, le Japon, la République de Chine ainsi que la Corée du Sud, l'Inde, la Russie et les États-Unis. Le réacteur sera mis en place sur le site français de Cadarache avec un démarrage prévu en 2019.

1.1.5 Schéma de principe d'un réacteur de fusion par confinement magnétique

Depuis longtemps, les physiciens spécialistes des plasmas de fusion ont cherché à définir ce que pourrait être le futur réacteur. Le réacteur de fusion qui sera utilisé pour le confinement magnétique va être composé : d'une enceinte pour la production des réactions nucléaires de fusion et de bobines, afin de limiter la consommation d'énergie. Le schéma de principe du réacteur est indiqué ci-dessous (voir figure 1.9). En 1, on injecte du Deutérium et du Tritium au cœur du réacteur où le mélange est chauffé et amené à l'état de plasma dans la chambre à vide 2. Les particules chargées cèdent leur énergie à la première paroi suite à des collisions en 3. Après récupération de l'énergie des neutrons sous forme thermique en 4, il est transformé en électricité suivant le processus classique échangeur à vapeur - turbine - générateur en 5.

La réalisation de décharges longues, dans des scénarios spécifiques, demande une bonne conduite des paramètres du plasma afin d'en assurer le contrôle.

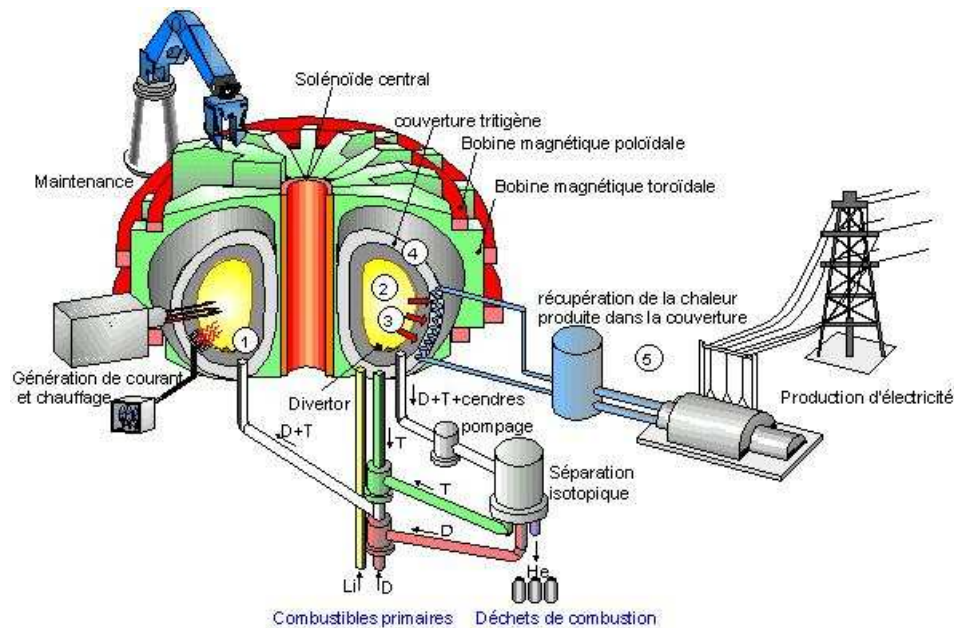


FIGURE 1.9 – Schéma d'un réacteur de fusion par confinement magnétique : Source [10]

1.2 La configuration tokamak et la description du plasma comme fluide conducteur

1.2.1 Principe de la configuration tokamak

Le principe du confinement magnétique repose sur le fait que l'on peut agir sur les trajectoires des particules chargées du plasma (formé par chauffage du milieu initialement sous forme gazeuse) au moyen de champ magnétique par l'intermédiaire de la force de Laplace.

Si on considère pour commencer une région de champ approximativement rectiligne et uniforme, on sait que les particules chargées du plasma vont décrire une trajectoire hélicoïdale autour des lignes de champ (voir figure 1.10).

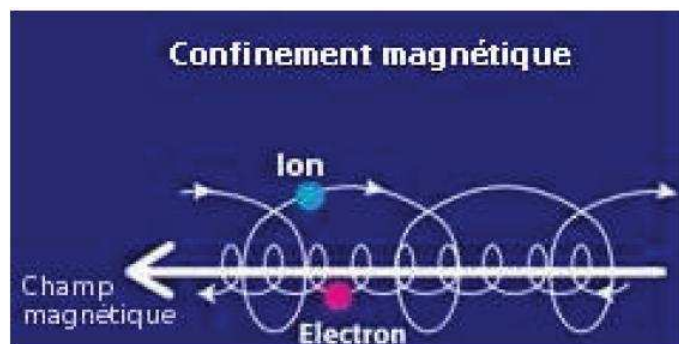


FIGURE 1.10 – Influence des lignes de champ sur les particules : Source [10]

Pour supprimer les pertes trop importantes de particules aux extrémités qui étaient observées dans les machines dites droites, l'idée a été d'évoluer vers des machines de forme torique en refermant les lignes de champ magnétique sur elles-mêmes en forme de ligne circulaires (voir figure 1.11). Le champ magnétique est dit toroïdal et les bobines générant ce champ sont appelées les bobines de champ toroïdal.

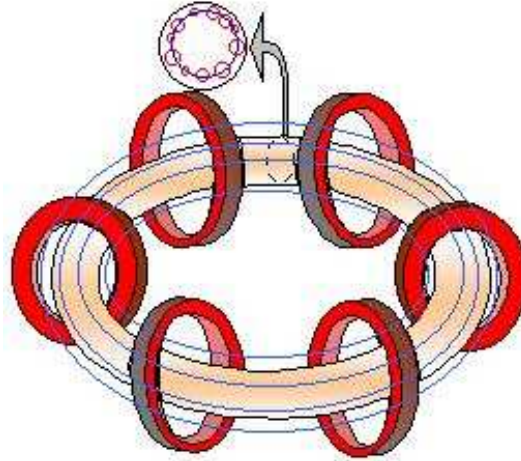


FIGURE 1.11 – Boîte magnétique torique : Source CEA IRFM

Mais si on suppose uniquement un champ magnétique circulaire, les particules subissent une dérive verticale. En effet, le champ magnétique toroïdal est donné par le théorème d'Ampère comme suit

$$B_T = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (1.5)$$

avec R le grand rayon de la ligne de champ circulaire, μ_0 la perméabilité du vide, et I le courant dans la bobine de champ toroïdal. Le module du champ magnétique B_T est inversement proportionnel au rayon R . Son rayon de courbure dépend de l'intensité du champ magnétique. Plus le champ magnétique est puissant, plus le rayon de courbure est faible, la particule restant au voisinage de la ligne de champ. Son rayon de courbure qui est plus élevé sur l'intérieur du tore que sur l'extérieur engendre une légère dérive verticale des particules dont la direction dépend du signe de sa charge (voir figure 1.12).

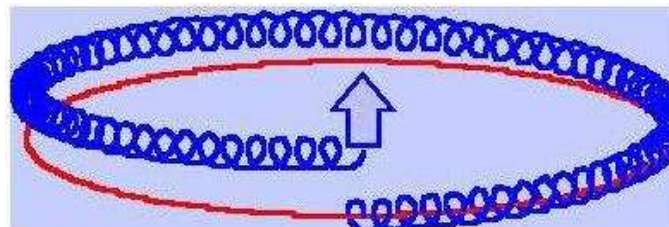


FIGURE 1.12 – Dérives des particules : Source CEA IRFM

C'est pour compenser cet effet qu'on applique une composante de champ magnétique poloïdal pour annuler en moyenne la dérive verticale. Les lignes de champs ont alors des formes hélicoïdales qui tournent autour de la surface du tore (voir figure 1.13).

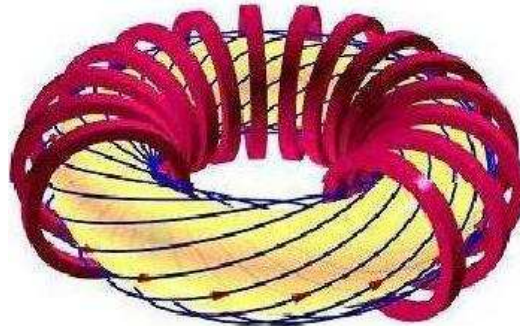
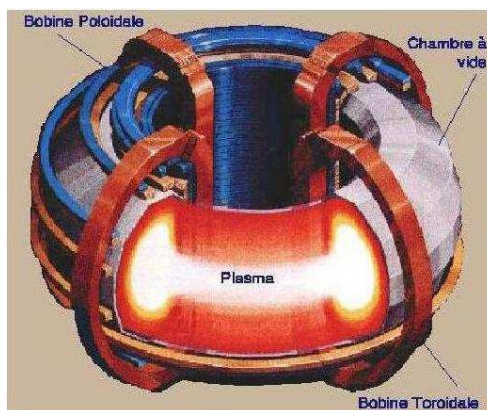


FIGURE 1.13 – Lignes de champ : Source CEA IRFM

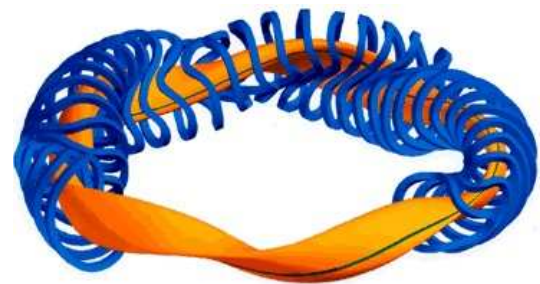
Ainsi, les particules dérivent alternativement vers l'intérieur et l'extérieur suivant que la ligne de champ autour de laquelle elles tournent se situe au dessous ou au dessus d'un plan équatorial, ce qui permet de résoudre le problème global de dérive.

Le moyen utilisé pour produire des lignes de champ hélicoïdales a donné naissance à deux machines :

- le tokamak [91] dans le quel le champ magnétique de confinement est produit par des bobines toroïdales autour de l'axe du plasma et par le courant qui circule dans le plasma lui même qui génère le champ magnétique poloïdal. La somme de ces deux champs est le champ de confinement du plasma (voir figure 1.14a).
- le stellarator [89] dans lequel le champ magnétique de confinement est entièrement réalisé par des bobines complexes autour du tore (voir figure 1.14b).



(a) Tokamak



(b) Stellarator

FIGURE 1.14 – Différents types de machines : Source WWW.newsidenergy.fr et www.ipp.mpg.de

On utilise de préférence aujourd'hui le tokamak au lieu du stellarator. En effet, à l'heure actuelle, le tokamak a l'avantage au niveau de performance par rapport au stellarator.

Les tokamaks sont la configuration de confinement magnétique la plus répandue dans le monde de la fusion thermonucléaire. Le nom dérive de la fusion des mots russes Toroidalnaya (toroïdal), Kamera (chambre), et Magnitnaya (magnétique). Développé dans les années 50, le principe a été rapidement adopté par la communauté scientifique mondiale.

Si l'on considère non plus une particule isolée, mais un ensemble de particules qui constituent le plasma, il va exister des phénomènes qui influent sur le confinement du plasma dans la direction radiale :

- la répulsion électrodynamique, qui a tendance à accroître l'inductance de l'anneau, donc son grand rayon,
- la pression cinétique, qui fait éclater le plasma (comme une chambre à air) dû à sa résultante radiale.

C'est pour compenser cet effet qu'il est nécessaire d'appliquer en réalité un champ vertical créé par des bobines de champ poloïdal externes pour assurer l'équilibre du plasma (voir figure 1.15). Le plasma est ainsi confiné par des champs extérieurs (champs toroïdal et vertical), mais aussi par son propre champ, créé par le courant qui y circule. Ce courant est généré par induction comme dans un simple transformateur dont le circuit primaire est l'ensemble des bobines ohmiques et le secondaire, le plasma lui même et par des moyens non inductifs à l'aide d'ondes électromagnétiques.

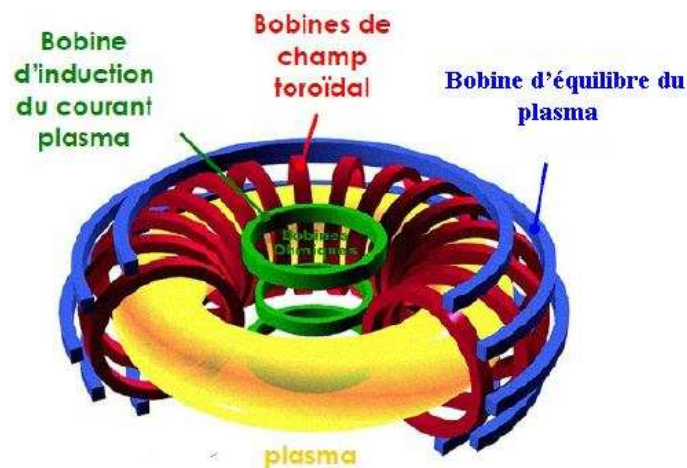


FIGURE 1.15 – Présentation de la géométrie du tokamak : Source CEA IRFM

1.2.2 Description magnéto-hydro-dynamique (MHD) et définition des profils 1D des grandeurs plasmas

Sur des échelles de temps et d'espace importantes (fréquence inférieure à la fréquence de giration des ions, longueur supérieure au rayon de Larmor des ions, collisions non négligeable voir [5], [31] et [58]), le plasma peut être caractérisé localement par un ensemble de grandeurs macroscopiques : densité n , densité de masse ρ , pression p , température T , vitesse d'un élément fluide $\vec{v}$. Il a une densité de courant électrique $\vec{j}$ et baigne dans un champ électromagnétique décrit par le champ électrique $\vec{E}$ et l'induction magnétique $\vec{B}$.

Hypothèse d'équilibre

Sur les échelles de temps que l'on va étudier, on peut considérer que le plasma passe par une suite d'état où l'équilibre des forces est satisfait, soit dans le cadre de la description MHD :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B},$$

L'étude de l'équilibre de plasma en géométrie axisymétrique date du début des années 60 [79].

Hypothèse de système de révolution

De plus, compte tenu de la forme torique de la configuration de tokamak, on fait classiquement une hypothèse d'invariance des grandeurs ψ autour de l'axe principal (hypothèse de symétrie de révolution).

Plaçons nous dans un système de coordonnées cylindriques (r, φ, Z) . Soient les fonctions ψ et f définies par :

$$\psi(r, Z) = \frac{1}{2\pi} \int_{D(r,Z)} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{s} \quad \text{et} \quad f(r, Z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{D(r,Z)} \overrightarrow{j} \cdot d\overrightarrow{s}$$

où $D(r, Z)$ est le disque ayant pour circonférence le cercle centré sur l'axe du tokamak, de rayon r , et d'altitude z (voir figure 1.16), ψ est le flux poloïdal et f la fonction diamagnétique.

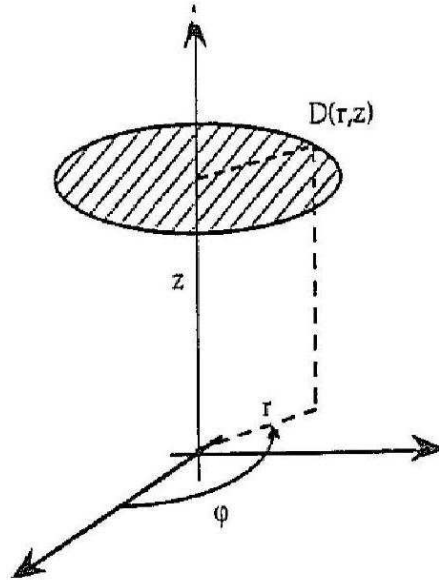


FIGURE 1.16 – Repère d'espace : Source [18]

Le champ magnétique est donné par (nous ne donnerons pas ici les preuves, pour plus de détails voir l'annexe A)

$$\overrightarrow{B} = \frac{1}{r} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \psi \wedge \overrightarrow{e_T} \right) + \frac{f(r, Z)}{r} \overrightarrow{e_T}. \quad (1.6)$$

La densité de courant est obtenue en utilisant l'équation d'Ampère :

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0 r} \overrightarrow{\text{grad}} f(r, Z) \wedge \vec{e}_T + \mathcal{L}\psi \vec{e}_T$$

avec

$$\mathcal{L}\psi = -\frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r})}{\partial r} + \frac{\partial(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial Z})}{\partial Z} \right].$$

On note

$$j_T = \mathcal{L}\psi.$$

Surface magnétique et profil 1D des grandeurs plasma

Notion de surfaces magnétiques

La notion de surface magnétique permet de passer d'une géométrie 2D en 1D (voir figure 1.17 pour la transformation de 3D en 1D).

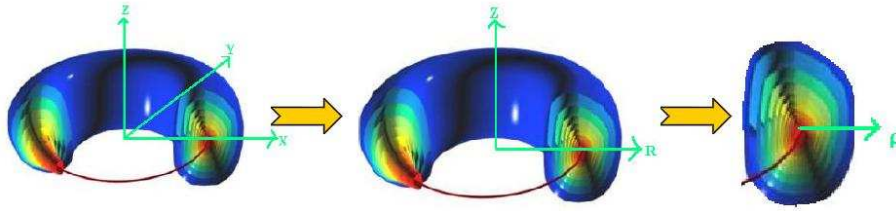


FIGURE 1.17 – Transformation d'une géométrie 3D en 1D : Source CEA IRFM

La conservation de l'induction magnétique oblige une ligne de champ magnétique, définie comme tangente en chaque point à $\vec{B}$, à rester dans un volume fini et fermée, contenue dans une surface.

La relation d'équilibre $\overrightarrow{\text{grad}} p = \vec{j} \wedge \vec{B}$ entraîne d'autre part :

$$\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p = 0 \quad \text{et} \quad \vec{j} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p = 0.$$

On peut alors définir une suite infinie de surfaces isopression $p = \text{cste}$ (iso- p), où les lignes de champ magnétique et de courant résident (voir figure 1.18).

En effet, en chaque point de cette surface, l'induction magnétique et la densité de courant sont toutes les deux orthogonales au vecteur normal $\overrightarrow{\text{grad}} p$. Elles sont dans le plan tangent à la surface en ce point. Ces surfaces sont appelées surfaces magnétiques.

$\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p = 0$ implique que les vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}} p$ et $\overrightarrow{\text{grad}} \psi$ sont colinéaires. Les surfaces isopression qui sont par définition les surfaces magnétiques sont aussi des surfaces iso- ψ . En conséquence il existe une relation du type $p = p(\psi)$.

$\vec{j} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p = 0$ implique de même que $\overrightarrow{\text{grad}} p$ et $\overrightarrow{\text{grad}} f$ sont colinéaires. Les surfaces isopression qui sont par définition les surfaces magnétiques sont aussi des surfaces iso- f . En conséquence il existe une relation du type $f = f(p) = f(\psi)$.

Les équations d'équilibre du plasma permettent en particulier d'obtenir l'équation de Grad-Schluter-Shafranov [79] (voir l'annexe A) :

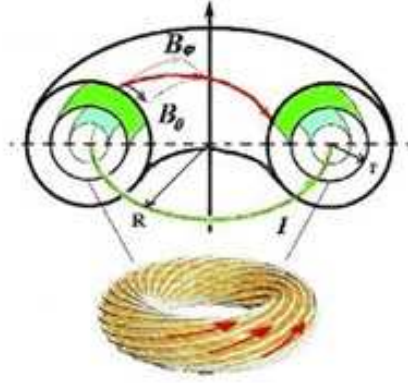


FIGURE 1.18 – Configuration du confinement magnétique dans le plasma de tokamak : Source CEA IRFM

$$\mathcal{L}\psi = r \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{1}{2\mu_0 r} \frac{\partial f^2}{\partial \psi}. \quad (1.7)$$

Il s'agit d'une EDP de type elliptique pour une pression p et la fonction f fonction de ψ supposées connues.

Profil de facteur de sécurité

Certaines grandeurs caractéristiques plasma sont uniformes sur les surfaces magnétiques et peuvent donc être décrites par un profil 1D.

Une grandeur importante est notamment le facteur de sécurité q , définie comme le rapport entre le nombre de tours effectués par ligne de champ dans les directions toroïdales et poloïdales.

$$q = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{R} \frac{B_T}{B_p} ds. \quad (1.8)$$

Compte tenu de l'hypothèse de symétrie de révolution, q est uniforme sur une surface magnétique.

Le facteur de sécurité est lié physiquement au profil de densité de courant plasma j , via la dérivée spatiale du flux magnétique poloïdal, dont la dynamique est régie par la diffusion résistive du flux magnétique poloïdal.

1.3 La problématique du contrôle du profil de facteur de sécurité/courant dans le plasma

1.3.1 Motivations

Le facteur de sécurité est un paramètre clé qui joue un rôle principal en déterminant la stabilité MHD de la décharge de plasma (c'est la raison de l'expression "facteur de sécurité"). Il apparaît aussi comme un facteur important dans la théorie du transport de la chaleur, en particulier pour basculer vers les scénarios avancés de tokamak avec amélioration de l'énergie de confinement à cause des barrières internes de transport (voir [85] par exemple). Les trois

scénarios prévus pour ITER peuvent être schématiquement distingués par différentes formes de profil de courant q (voir Fig. 1.19).

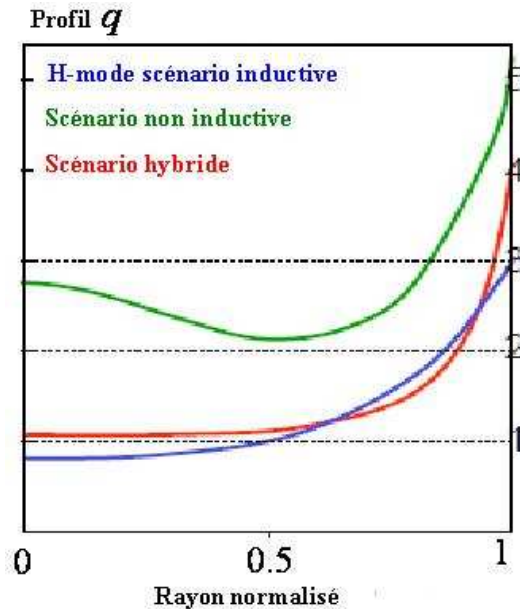


FIGURE 1.19 – Formes de profils typiques de facteur de sécurité pour les trois scénarios référence d'ITER

C'est pour toutes ces raisons que l'on va s'intéresser au contrôle de profil de q .

1.3.2 Les différents moyens d'actions

Nous allons décrire les différents moyens d'actions utilisés pour agir sur le profil de facteur de sécurité. Les deux principaux actionneurs sont le système de champ poloïdal, et les systèmes de chauffage / génération de courant (voir figure 1.20 et 1.21).

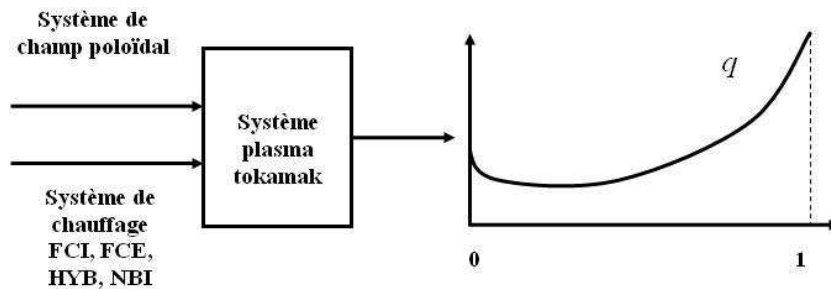


FIGURE 1.20 – Différents moyens d'action

- Le système de champ poloïdal remplit en réalité deux fonctions. Le premier ensemble de bobines dites de chauffage ohmique est susceptible d'induire du courant dans l'anneau de plasma. Le deuxième ensemble de bobines dites de champ d'équilibre permet

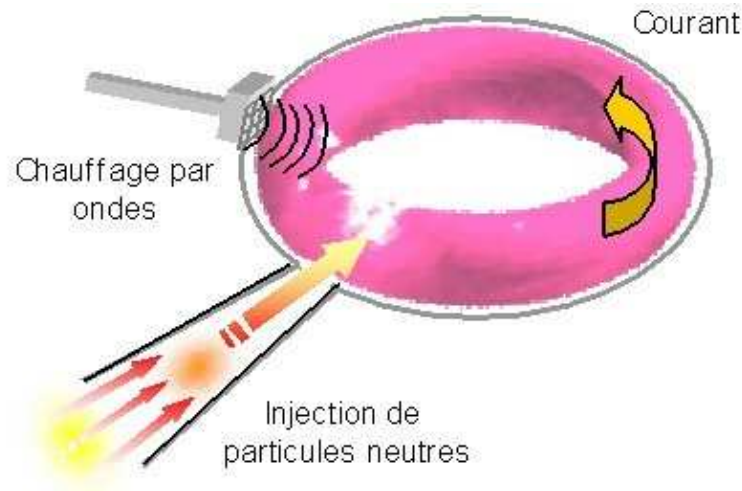


FIGURE 1.21 – Chauffage additionnel

de maintenir le tore de plasma dans la position souhaitée, voire de donner une forme particulière à sa section méridienne.

- Le système de chauffage / génération de courant est susceptible de générer du courant non inductif et de chauffer le plasma (effet sur la diffusion résistive du flux). Le plasma peut absorber l'énergie d'ondes électromagnétiques aux fréquences caractéristiques du milieu. Ce chauffage par ondes électromagnétiques est transmis au plasma par des antennes qui tapissent une partie de l'enceinte de confinement. Le choix de la fréquence permet de définir l'espèce de particule (ions ou électrons) qui sera chauffée et la région où se fera l'absorption de l'onde et donc le chauffage. On a trois antennes d'émission d'ondes : Fréquence Cyclotroniques Ioniques (FCI), Fréquences Cyclotroniques Electriques (FCE) et Fréquences dites Hybrides (HYB) (voir les Fig. 1.22a, 1.22b et 1.22c). Un autre moyen de chauffer le plasma est d'injecter des neutres rapides.

1.3.3 Différentes approches étudiées - état de l'art

La question du contrôle du facteur de sécurité / profil de courant dans les plasmas de tokamak est très difficile, en particulier en raison des couplages non linéaires entre la densité de courant et les profils de pression. Plusieurs approches ont été développées au fil des années et des résultats préliminaires ont été obtenus sur les différentes installations de tokamak dans le monde entier (JET, JT-60U, DIII-D, Tore Supra, ...) mais ce problème n'est pas résolu jusqu'à l'heure actuelle. Le contrôle en boucle fermée d'un paramètre de forme de ce profil basé sur un modèle semi-empirique de type Single Input - Single Output (SISO) a été expérimentalement réalisé sur Tore Supra (par exemple dans [92] pour le contrôle de l'inductance interne de plasma l_i ou dans [4] pour le contrôle de largeur du profil de dépôt LH). Plus récemment, des états stationnaires du profil de facteur de sécurité, définis par leurs activités MHD, ont été contrôlés sur Tore Supra pendant la phase principale de chauffage d'une décharge de plasma, comme présenté dans [44]. Mais ce n'est manifestement pas suffisant pour répondre à l'exigence principale qui est la stabilité MHD et / ou l'établissement et le maintien de barrières internes de transport. Le contrôle du profil de facteur de sécurité sur un nombre fini

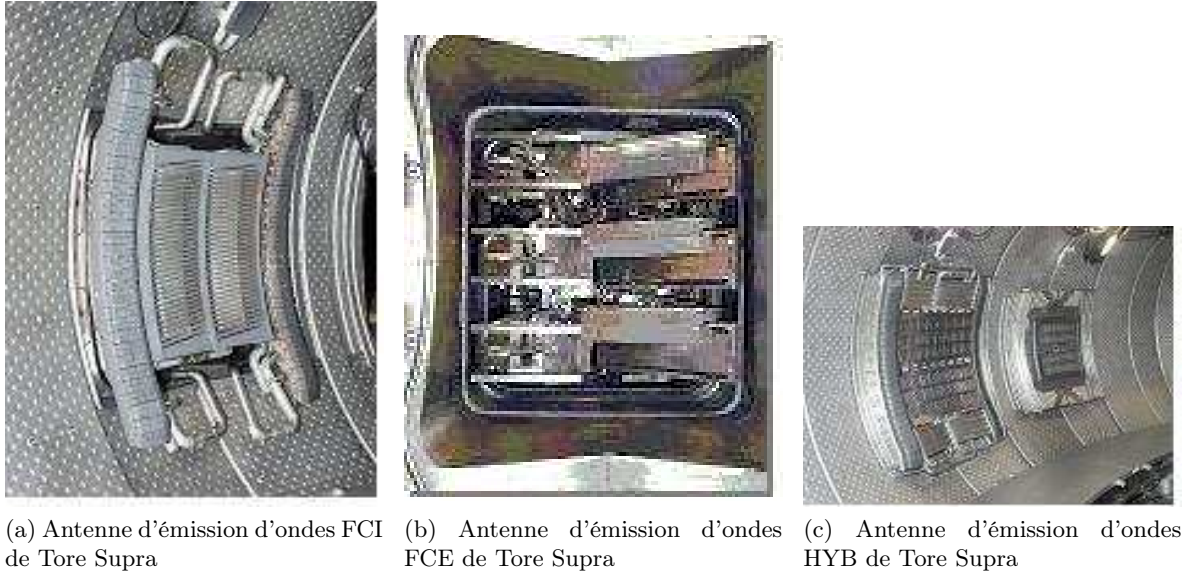


FIGURE 1.22 – Source de chauffage

de points, basé sur une approche Multi entrées - Multi sorties (MIMO) en dimension finie à été développé en utilisant l'identification de modèles linéaires à partir de données expérimentales [61]. Le contrôle des profils magnétiques (facteur de sécurité) couplés avec la pression cinétique a été expérimentalement implémenté, en particulier sur le tokamak JET (Joint European Torus) [60]. Cette approche a montré des limitations en termes notamment de sensibilité aux conditions de fonctionnement. D'autres approches récentes ont été développées en simulations [97], [66], [67], [94], [95], [96], [68], [16], [17], [70] et [93].

Dans [97], la méthode de la réduction de dynamique par Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD) est proposée. Avec ce modèle réduit, un contrôle optimal est déterminé en utilisant une stratégie en temps fini pour des systèmes de dimension finie, le contrôle est calculé en utilisant l'hamiltonien. Dans [66], une étude sur la contrôlabilité du profil de courant dans les plasmas de tokamak est proposée et la preuve que le profil de courant n'est pas complètement contrôlable est faite. Dans [67] l'approche contrôle optimal à horizon glissant basée sur une technique dite de "recherche des extremums" pour obtenir le profil désiré est proposée. Dans [94], le problème de l'optimisation a été formulé pour obtenir un problème de programmation quadratique (QP) en dimension finie avec contrainte. Dans [95], la méthode POD est utilisée pour réduire la dynamique du modèle et réécrire le problème comme un problème de contrôle optimal pour utiliser l'algorithme de programmation quadratique séquentielle (SQP) afin de déterminer le minimum local. Dans [96], le contrôle optimal en boucle ouverte en temps fini et en dimension finie est proposé en utilisant la théorie des surfaces minimales et la méthode des moindres carrés. La théorie des surfaces minimales est utilisée pour générer la dynamique transitoire voulue, puis un problème de suivi de trajectoire est formulé pour le contrôle du profil de courant. Dans [68], l'approche proposée est basée sur la réduction de dynamique par POD. Le problème de contrôle optimal en dimension finie avec suivi de trajectoire est formulé, et l'hamiltonien est utilisé pour déterminer la loi de contrôle. Dans [16], c'est l'approche contrôle optimal en dimension finie qui est utilisée, et l'équation de Riccati est résolue pour obtenir le contrôle. Dans [17], l'approche polytopique Linéaires

à Paramètres Variants (LPV) en dimension finie est utilisée pour la conception du contrôle. Dans [70], l'approche commande prédictive basée sur un modèle $1D$ est utilisée. Pour trouver les actionneurs, une fonction quadratique est minimisée sous contrainte et dans [93], c'est une première approche basée sur un modèle distribué qui a été développée spécifiquement pour la synthèse de lois de contrôle. Mais afin de faire un pas en avant vers l'application sur les grands domaines opérationnels et de s'attaquer aux problèmes de robustesse, des approches en dimension infinies ont été initiées. Des premiers résultats ont été obtenus en utilisant un contrôle par mode glissant [35] ou encore un contrôle basé sur les fonctions de Lyapunov dans [15].

1.3.4 Approche de contrôle distribué et application au tokamak TORE SUPRA

En réalité le problème de contrôle du profil de courant dans les plasmas de tokamak peut être analysé globalement de la façon suivante :

La grandeur que nous cherchons à contrôler est le facteur de sécurité q , qui est de dimension infinie. Pour faire cela, nous disposons d'un nombre fini de variables de commande (voir figure 1.23).

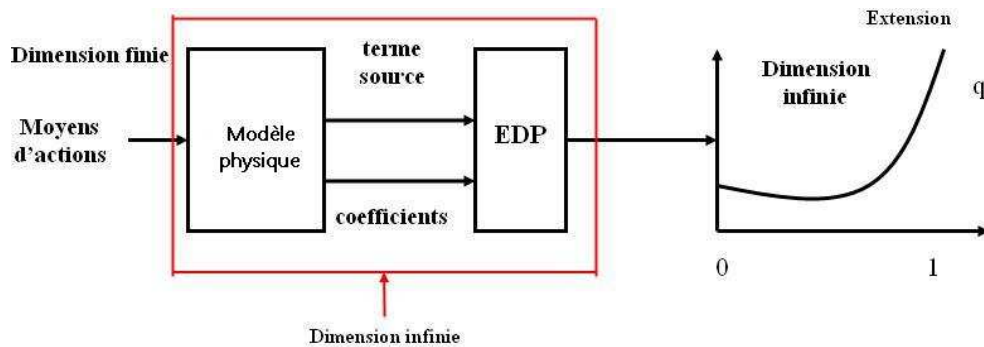


FIGURE 1.23 – Schéma de contrôle entré finie - sortie infinie

Jusqu'à maintenant, toutes les approches utilisées sont à base de réduction de modèle, pour trouver un modèle en dimension finie, en faisant des discrétisations spatiales, ou des développements en séries de Fourier. Ce qui permet d'appliquer les méthodes classiques d'automatique entrée finie - sortie finie (voir figure 1.24) ou procéder à l'identification d'un modèle de ce type. L'inconvénient de ces approches est la perte du sens physique des paramètres dans le processus de réduction ainsi que des problèmes de robustesse.

L'objectif principal de ce mémoire est de développer des lois de contrôles en dimension infinie, c'est-à-dire entrée infinie - sortie infinie (voir figure 1.25). Parmi les avantages d'une approche en dimension infinie, on peut citer :

- éviter la perte d'information comme dans le processus de réduction en dimension finie
- garder le plus loin possible les sens physique des paramètres manipulées et donc de mieux pouvoir traiter les incertitudes de modèle pour essayer de résoudre les problèmes de robustesse rencontrés par les méthodes en dimension finie
- potentiellement, une meilleure prise en compte des couplages non-linéaires

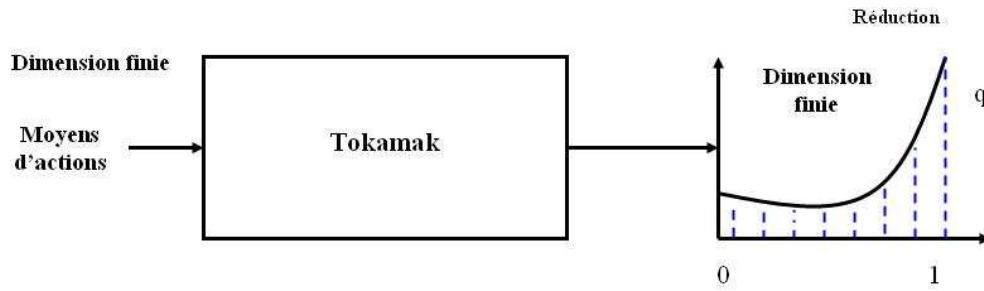


FIGURE 1.24 – Schéma de contrôle entré finie - sortie finie

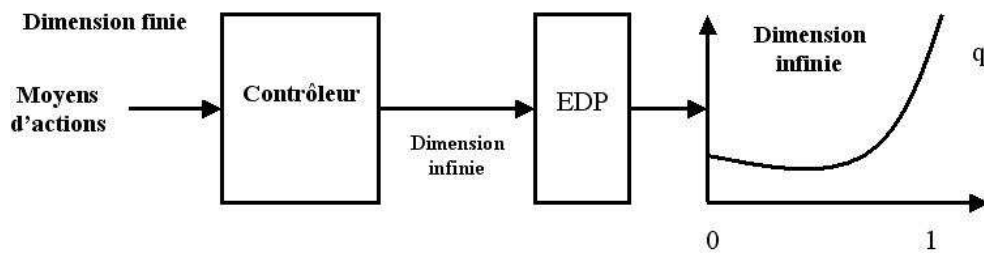


FIGURE 1.25 – Schéma de contrôle entrée infinie - sortie infinie

Les cas d'application numérique et de simulation de ce travail sont basés sur les paramètres de la machine Tore Supra.

Tore Supra est un tokamak français et il fait partie de l'un des cinq grands tokamaks dans le monde dont le champ toroïdal est créé par des bobines supraconductrices. Il est utilisé pour sa capacité à exécuter de longues décharges de plasma.

Tore Supra permet d'explorer des décharges longues de plusieurs minutes (6mn) et l'échelle de temps de la dynamique d'évolution du courant est de quelques secondes. Les autres machines ont une durée de décharge plus courte (de l'ordre de quelques dizaines de secondes (20s) et ont des difficultés à atteindre le régime permanent.

Le réacteur Tore Supra offre une occasion unique pour le développement et l'implémentation de lois de contrôle pour le profil de courant dans le plasma sur les échelles de temps pertinentes (voir Fig. 1.26 et les tableaux 1.1 et 1.2 pour une description technique de Tore Supra).

Grand rayon du plasma	$2.4\ m$
Petit rayon du plasma	$0.72\ m$
Volume du plasma	$25\ m^3$
Champ magnétique toroïdal au centre du plasma	$4.2T$
Courant de plasma	$1.5\ MA$
Durée potentielle de la décharge	$1000\ s$
Chauffage additionnel (par ondes HF)	$20\ MW$

TABLE 1.1 – Caractéristiques principales de Tore Supra

1 Structure mécanique à $4\ K$ des bobines	8 Limiteur pompé toroïdal
2 Bobinage superconducteur $1.8\ K$	9 et 10 Alimentation cryogénique, $1.8\ K$, $4\ K$ et $80\ K$
3 Écran thermique $80\ K$	11 Vers échangeur, eau pressurisée à $220\ C$, $40\ bars$
4 Cryostat, enceinte interne $220\ C$	12 Bobines du champ poloïdal
5 Cryostat, enceinte externe $20\ C$	13 Circuit magnétique
6 Pied support : du cryostat, des écrans	14 Antenne de chauffage à la fréquence cyclotronique ionique
7 Première paroi activement refroidie à $220\ C$	15 Antenne de chauffage à la fréquence hybride

TABLE 1.2 – Composantes de Tore Supra visibles sur la figure 1.26

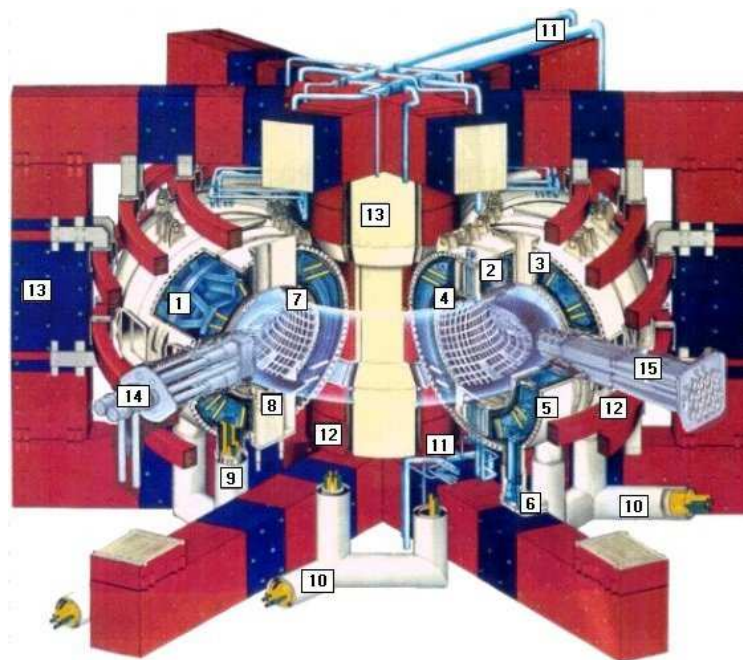


FIGURE 1.26 – Tore Supra

1.4 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, une introduction sur la fusion thermonucléaire est proposée, et l'intérêt d'utiliser la fusion par confinement magnétique comme nouvelle source d'énergie est discuté. Après avoir introduit la description macroscopique du plasma comme un fluide conducteur sur laquelle est basé le modèle physique qui sera utilisé dans ce travail, nous avons montré comment on peut définir la notion de profil $1D$ radial d'un certain nombre de grandeurs physiques. Ceci a permis d'introduire le sujet de cette thèse, à savoir le contrôle du profil de facteur de sécurité de plasma.

La problématique du contrôle de profil de courant est ensuite exposée. L'état de l'art récent sur le contrôle du profil de courant dans le plasma des réactions de fusion par confinement magnétique est exposé et l'approche aujourd'hui développée dans ce travail est introduite.

Chapitre 2

Mise en équations et caractérisation du système étudié

Sommaire

2.1	Modélisation du système physique	47
2.1.1	Équation de diffusion résistive du flux magnétique	48
2.1.2	Termes sources et coefficients de l'équation, relation aux actionneurs pour la commande	52
2.1.3	Équation de transport de la chaleur	54
2.1.4	Tableaux récapitulatifs	56
2.1.5	Simulateurs physiques utilisés	57
2.2	Problématique et modèle mathématique étudié	58
2.2.1	Formulation du modèle de commande	58
2.3	Analyse mathématique de l'équation de diffusion résistive	59
2.3.1	Caractérisation	59
2.3.2	Existence et unicité de la solution	60
2.3.3	Définition et existence de la solution asypmtotique	61
2.3.4	Solutions analytiques dans quelques cas de référence	64
2.4	Bilan du chapitre	78

Dans le chapitre précédent, il a été précisé que l'évolution spatio-temporelle du facteur de sécurité

$$q = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{R} \frac{B_T}{B_p} ds$$

était un paramètre clé pour la performance de la décharge du plasma. l'équation aux dérivées partielles décrivant l'évolution de cette grandeur est détaillée dans ce deuxième chapitre. L'existence et l'unicité d'une solution sont établies. Quelques solutions analytiques dans des cas simplifiés sont discutées. Par ailleurs les codes de simulation physiques développés par le CEA sur lesquels seront effectués les tests des lois de commande sont présentés.

2.1 Modélisation du système physique

Nous allons présenter le modèle physique, basé sur une description du plasma comme fluide conducteur, qui gouverne l'évolution dynamique du profil de facteur de sécurité étudié. Il s'agit

d'un modèle à base d'équations aux dérivées partielles, donc un modèle en dimension infinie (les entrées et les sorties dépendant de l'espace et du temps sont en dimension infinie).

2.1.1 Équation de diffusion résistive du flux magnétique

Évolution du flux magnétique et conditions aux bords

On a vu dans le chapitre précédent la définition du flux poloidal ψ . Dans ce qui suit, le flux toroïdal ϕ est défini par

$$\phi = \int_{D'} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.1)$$

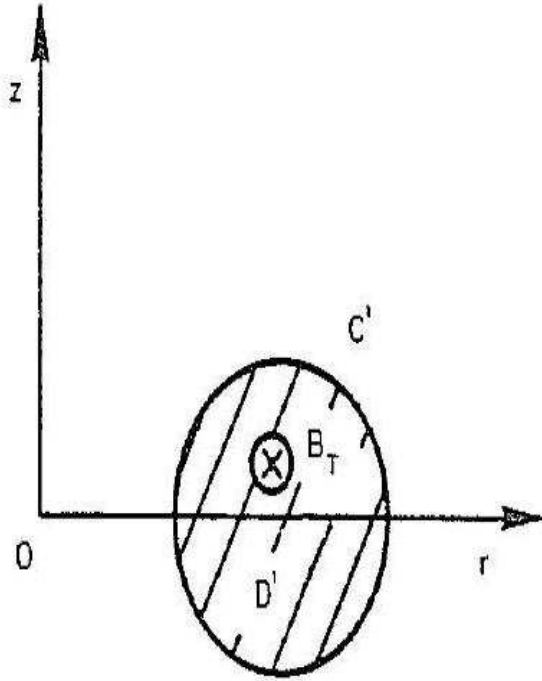


FIGURE 2.1 – Définition du flux toroïdal

où D' est un domaine borné par C' qui est l'intersection entre la section méridienne du tore et la surface magnétique S (voir Fig. 2.1) .

On va maintenant calculer les expressions de ϕ et le facteur de sécurité q . Les calculs ne sont pas détaillés (voir l'annexe B pour plus de détails).

$$\phi = \int_{D'} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2\pi} \int_V \frac{f}{r^2} dV.$$

En utilisant la définition du facteur de sécurité (1.8), on peut montrer que nous pouvons l'écrire sous la forme suivante (voir [91] pour plus de détails)

$$q = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial \psi}.$$

En utilisant cette dernière expression de q et l'expression de ϕ , on a

$$q = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_V \frac{f}{r^2} dV \right) = -\frac{V'}{4\pi^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho}} f < \frac{1}{r^2} >.$$

$< \frac{1}{r^2} >$ est la moyenne de $\frac{1}{r^2}$ sur la surface magnétique S , V le volume à l'intérieur de la surface magnétique, $V' = \frac{\partial V}{\partial \rho}$ et ρ un index quelconque de surface magnétique (pour plus de détails voir l'annexe B).

Considérant que le facteur de sécurité est fonction de ψ , l'équation d'évolution de ψ est proposée. On a la proposition suivante (pour la preuve des propositions voir [7]).

Proposition 1 *Les équations d'évolution de ψ et ϕ sont*

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (\vec{u}_\rho - \vec{u}_\psi) \cdot \vec{\nabla} \psi \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial V}{\partial \psi} < \vec{E} \cdot \vec{B} > - 2\pi q (\vec{u}_\rho - \vec{u}_\psi) \cdot \vec{\nabla} \psi \quad (2.3)$$

où $\vec{u}_\psi$ est la vitesse des surfaces à ψ constant définie par

$$\dot{\psi} + \vec{u}_\psi \cdot \vec{\nabla} \psi = 0.$$

En moyennant l'équation de Grad-Schluter-Shafranov, on obtient la proposition suivante (voir [7] pour plus de détails).

Proposition 2

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(C_2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) = \mu_0 V' \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{C_3}{2} \frac{\partial f^2}{\partial \rho} \quad (2.4)$$

avec

$$C_2 = V' < \frac{|\vec{\nabla} \rho|^2}{r^2} >, \quad C_3 = V' < \frac{1}{r^2} >.$$

Choix de la variable ρ

Un index particulier de surface magnétique est utilisé dans la suite. Il est défini par

$$\rho = \sqrt{\frac{\phi}{\pi B_0}}, \quad (2.5)$$

où B_0 est le champ toroïdal au centre de la chambre vide du tokamak supposé indépendant du temps. Ce choix est justifié dans [8], [40] et [57]. On va maintenant réécrire l'équation d'évolution du flux poloïdal avec ρ défini par (2.5). Voici une proposition qui se trouve dans [7].

Proposition 3 *En utilisant la définition de ρ de (2.5), on obtient*

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\eta_{||} \rho}{\mu_0 C_3^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{C_2 C_3}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) = \frac{\eta_{||} V'}{4\pi^2 \rho} < \frac{\vec{j}_{ni} \cdot \vec{B}}{B_0} > \quad (2.6)$$

où $\eta_{||}$ est la composante parallèle (parallèle au champ magnétique) de la résistivité et $\vec{j}_{ni}$ la densité du courant non-inductive.

Avec

$$f = \frac{4\pi^2 \rho B_0}{C_3},$$

le facteur de sécurité devient

$$q = -\frac{\rho B_0}{\frac{\partial \psi}{\partial \rho}}. \quad (2.7)$$

Conditions aux bords

Au centre, pour des raisons de symétrie

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 0$$

Pour l'autre extrémité $\rho = \rho_{max}$, on a (voir l'annexe B pour plus de détails sur les calculs)

$$\begin{aligned} I_p &= \int_{\Omega_p} j_T dS \\ &= -\frac{1}{2\pi\mu_0} C_2(\rho_{max}) \left. \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right|_{\rho_{max}} \end{aligned}$$

où I_p est le courant plasma total. Donc

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right|_{\rho_{max}} = -\frac{2\pi\mu_0 I_p}{C_2(\rho_{max})}.$$

On peut aussi choisir une condition au bord de type Dirichlet $\psi(t, \rho_{max})$.

Cette dernière condition aux limites est celle qui permet d'introduire l'une des variables de contrôle de l'évolution dynamique du flux magnétique et du facteur de sécurité, à savoir la variation temporelle de flux magnétique au bord de plasma, encore appelée communément tension par tour, alors que la condition aux limites de type Neumann utilise le courant plasma total qui n'est pas directement en pratique une variable de contrôle.

Hypothèse cylindrique

L'approximation cylindrique consiste à ne garder que l'ordre 0 dans un développement des équations en fonction du rapport d'aspect

$$\epsilon = \frac{a}{R_0},$$

où R_0 est le grand rayon du plasma. C'est une autre manière de dire que

$$\rho \ll R_0.$$

On a alors :

$$V(\rho) = 2\pi^2 \rho^2 R_0, \quad V'(\rho) = 4\pi^2 R_0 \rho$$

Ainsi, on a

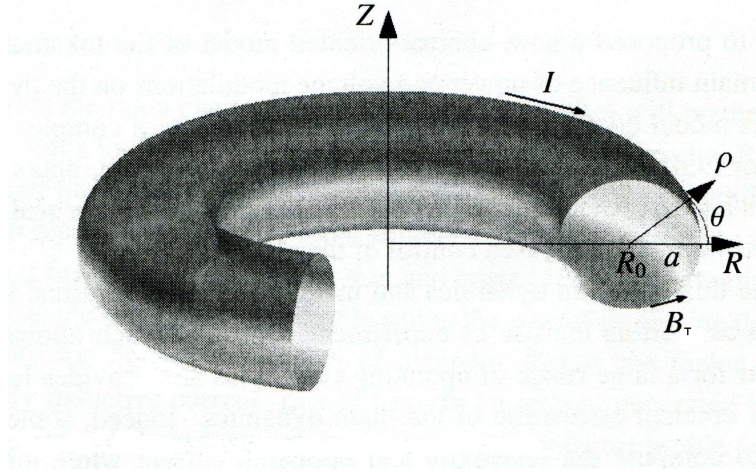


FIGURE 2.2 – Repère de plasma

$$C_2 = C_3 = \frac{4\pi^2 \rho}{R_0}.$$

L'équation d'évolution (2.6) devient

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\eta_{||}}{\mu_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) = \eta_{||} R_0 j_{ni}, \quad \text{avec} \quad j_{ni} = \frac{\langle \vec{j}_{ni} \cdot \vec{B} \rangle}{B_0} \quad (2.8)$$

et les conditions aux bords

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} = 0; \\ \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \Big|_{\rho_{max}} = -\frac{\mu_0 R_0 I_p}{2\pi \rho_{max}} \quad \text{ou} \quad \psi(t, \rho_{max}). \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Hypothèse petit rayon moyen constant

Cette hypothèse correspond à une situation où la frontière plasma est supposée fixe ou régulé par ailleurs (on néglige alors les petites variations éventuelles de frontière plasma dans la mesure où l'échelle de temps de contrôle de la forme de plasma est plus courte que l'échelle de temps du contrôle du profil de facteur de sécurité).

Une version simplifiée du système à commander (2.8) est proposée en posant

$$\rho = xa, \quad \text{avec} \quad x \in [0, 1].$$

Alors le système (2.8) devient

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \eta_{||} R_0 j_{ni} \quad (2.10)$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=1} = -\frac{\mu_0 R_0 I_p}{2\pi} \quad \text{ou} \quad \psi(t, 1). \end{cases} \quad (2.11)$$

D'où l'écriture suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \eta_{||} R_0 j_{ni}; \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, 1) = -V_0 \quad \text{où } V_0 \text{ est la tension par tour.} \end{cases} \quad (2.12)$$

2.1.2 Termes sources et coefficients de l'équation, relation aux actionneurs pour la commande

Nous allons décrire ici les termes sources et coefficients de l'équation du modèle de commande utilisé, et leur relation aux actionneurs réels (voir [93] pour plus de détails).

La résistivité du modèle

Le coefficient de diffusion dans le système (2.12) est proportionnel à la résistivité électrique du plasma $\eta_{||}(t, x)$.

La résistivité peut s'exprimer dans le cadre de la théorie dite néoclassique [42] par la formule approchée

$$\eta_{||}(t, x) = \eta_s Z_{eff} \frac{0.73 + 0.27 Z_{eff}}{0.53 + 0.47 Z_{eff}} \frac{1}{(1 - W)(1 - CW)}, \quad (2.13)$$

avec

$$\eta_s = \frac{m_e}{n_e e^2 t_e}. \quad (2.14)$$

η_s est la résistivité dite de Spitzer, où $m_e = 9.1096 \times 10^{-31} \text{ Kg}$ est la masse de l'électron, $e = 1.6022 \times 10^{-19} \text{ C}$ est la charge de l'électron, $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ est la permittivité de l'espace libre, T_e température électronique et t_e le temps caractéristique de collision électron-électron

$$t_e(t, x) = \frac{12\pi^{\frac{3}{2}} m_e^{\frac{1}{2}} \epsilon_0^2}{e^{\frac{5}{2}} \sqrt{2}} \frac{T_e^{\frac{3}{2}}}{n_e \ln \Lambda} \quad (2.15)$$

où $\ln \Lambda(t, x)$ est le logarithme du Coulombien des collisions électrons-ions

$$\ln \Lambda(t, x) = 31.318 + \ln \left(\frac{T_e}{\sqrt{n_e}} \right) \quad (2.16)$$

avec

– Z_{eff} la charge effective des ions du plasma

– $W = \frac{f_t}{1 + (0.58 + 0.20 Z_{eff}) \nu_{*e}}$

où f_t désigne la fraction d'électrons piégés

$$f_t = 1 - (1 - x\epsilon)^2 (1 - (x\epsilon)^2)^{-\frac{1}{2}} (1 + 1.46\sqrt{x\epsilon})^{-1}, \quad \epsilon = \frac{a}{R_0} \quad (2.17)$$

et ν_{*e} désigne le paramètre de collisionnalité électronique

$$\nu_{*e}(t, x) = \frac{R_0 q}{(x\epsilon)^{\frac{3}{2}} \alpha_e t_e} \quad (2.18)$$

$$\alpha_e(t, x) = \sqrt{\frac{eT_e}{m_e}} \quad (2.19)$$

et C est la réduction de conductivité due à des collisions électron-électron

$$C = \frac{0.56}{Z_{eff}} \left(\frac{3.0 - Z_{eff}}{3.0 + Z_{eff}} \right). \quad (2.20)$$

Dans le système (2.12), la densité de courant non-inductive $j_{ni} = j_{LH} + j_{EC} + j_{IC} + j_{bs}$ avec j_{LH} courant généré par l'onde hybride basse, j_{EC} courant généré par l'onde cyclotronique électrique et j_{IC} courant généré par l'onde cyclotronique ionique est une source externe alors que j_{bs} le courant de *bootstrap* une source interne qu'on va intégrer dans le simulateur. Dans le travail de cette thèse, on n'utilisera que les sources j_{bs} et j_{LH} . D'où la définition des courants j_{LH} et j_{bs} .

Sur Tore Supra, la génération de courant non inductive est faite essentiellement par l'onde hybride j_{LH} (Lower Hybride en anglais car il s'agit de l'onde hybride basse).

Courant généré par l'onde hybride basse

Le modèle le plus simple utilisé pour décrire la source de courant non-inductive généré par l'onde hybride basse est basé sur une expression sous forme de gaussienne tronquée.

$$j_{lh}(t, x) = v_{lh} e^{-\frac{(\mu_{hxr} - x)^2}{2\sigma_{lh}^2}} \quad (2.21)$$

avec

$$\sigma_{lh}(t) = \frac{(\mu_{hxr} - w_{hxr})^2}{2 \ln 2} \quad \text{et} \quad v_{lh}(t) = I_{lh} \left[2\pi a^2 \int_0^1 x e^{-\frac{(\mu_{hxr} - x)^2}{2\sigma_{lh}^2}} dx \right]^{-1}$$

où μ_{hxr} est le maximum du dépôt, w_{hxr} la largeur du dépôt à mi-hauteur et $I_{lh}(t) = \frac{\eta_{lh} P_{lh}}{n_e R_0}$ avec

$$\eta_{lh}(t) = 3.39 D_n^{0.26} \tau_E^{0.46} Z_{eff}^{-0.13} \quad \text{ou} \quad \eta_{lh}(t) = 1.18 D_n^{0.55} I_p^{0.43} Z_{eff}^{-0.24}, \quad (2.22)$$

où $D_n(t) \approx 2.03 - 0.63 N_{lh}$, τ_E temps de confinement et N_{lh} l'indice de réfraction. Les paramètres μ_{hxr} et w_{hxr} peuvent être obtenus à partir de lois d'échelle [93].

Le courant de bootstrap

$j_{bs}(t, x)$ le courant *bootstrap* qui est un courant auto-généré, introduit la non-linéarité dans l'équation de diffusion. Ce courant est généré par des particules piégées et peut être la source principale de courant non inductif dans certains scénarios spécifiques. Le modèle utilisé se trouve dans [41] et on peut l'écrire sous la forme

$$\frac{\langle j.B \rangle}{\langle B.\nabla\phi \rangle} = \frac{p_e}{\langle \frac{1}{R^2} \rangle} \left\{ A_1 \left[\frac{1}{p_e} \frac{dp_e}{d\psi} + \frac{p_i}{p_e} \left(\frac{1}{p_i} \frac{dp_i}{d\psi} - \alpha_i \frac{1}{T_i} \frac{dT_i}{d\psi} \right) \right] - A_2 \frac{1}{T_2} \frac{dT_2}{d\psi} \right\}, \quad (2.23)$$

où $p_i(t, x)$ est la pression des ions

$$A_1(t, x) = \frac{x_t \left[0.754 + 2.21Z_{eff} + Z_{eff}^2 + x_t \left(0.348 + 1.243Z_{eff} + Z_{eff}^2 \right) \right]}{D_e}, \quad (2.24)$$

$$A_2(t, x) = \frac{x_t (0.884 + 2.074Z_{eff})}{D_e}, \quad \alpha_i(t, x) = \frac{1.172}{1.0 + 0.462x_t}, \quad (2.25)$$

$$D_e(t, x) = 1.414Z_{eff} + Z_{eff}^2 + x_t (0.754 + 2.657Z_{eff} + 2Z_{eff}^2) + x_t^2 (0.348 + 1.243Z_{eff} + Z_{eff}^2), \quad (2.26)$$

où x_t est le ratio de particules piégées. Considérant l'approximation cylindrique et en définissant le courant de *bootstrap* comme

$$j_{bs} \doteq \frac{\langle j \cdot B \rangle}{B_0} = \frac{1}{R_0} \frac{\langle j \cdot B \rangle}{\langle B \cdot \nabla \phi \rangle}, \quad (2.27)$$

on a

$$j_{bs}(t, x) = \frac{p_e R_0}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} \left\{ A_1 \left[\frac{1}{p_e} \frac{\partial p_e}{\partial x} + \frac{p_i}{p_e} \left(\frac{1}{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x} - \alpha_i \frac{1}{T_i} \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) \right] - A_2 \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial x} \right\}. \quad (2.28)$$

Les relations $p_e = k_b n_e T_e$ et $p_i = k_b n_i T_i$ sont utilisées pour exprimer le courant de *bootstrap* en fonction de la température

$$j_{bs}(t, x) = \frac{e R_0}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} \left\{ (A_1 - A_2) n_e \frac{\partial T_e}{\partial x} + A_1 T_e \frac{\partial n_e}{\partial x} + A_1 (1 - \alpha_i) n_i \frac{\partial T_i}{\partial x} + A_1 T_i \frac{\partial n_i}{\partial x} \right\}. \quad (2.29)$$

La résistivité parallèle du plasma $\eta_{\parallel}$ et la densité de courant non inductive j_{ni} dépendent de certains paramètres et en particulier de la température T_e . Il est donc nécessaire pour les simulations de modéliser le transport de la chaleur.

2.1.3 Équation de transport de la chaleur

Bilan d'énergie local

La conservation de l'énergie des électrons peut être écrite localement par (voir [40])

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p_e}{\partial t} + \nabla \cdot \left(Q_e + \frac{5}{2} p_e u_e \right) = j \cdot E - Q_{\Delta} - u_i \nabla p_i + s_2 \quad (2.30)$$

où p_e est la pression électronique, Q_e le flux de la chaleur électronique, $j \cdot E$ la chaleur due à l'effet joule, Q_{Δ} la perte d'énergie par collision avec des ions, u_i la vitesse des ions et s_2 un terme source externe (source de chauffage *IC*, *LH*, *EC*) avec

$$\begin{cases} p_e = n_e k_b T_e \\ p_i = n_i k_b T_i \\ p = p_e + p_i \\ n_e = Z n_i \\ Q_{\Delta} = \frac{3m_e}{m_i} \frac{n_e}{t_e} (T_e - T_i) \end{cases} \quad (2.31)$$

où T_e et T_i sont respectivement les températures des électrons et des ions, k_b la constante de Boltzmann, Z le numéro de charge, m_e et m_i les masses des électrons et des ions respectivement, et t_e le temps de la collision pour les électrons (voir [13]). On pose de plus

$$Q_e = -n_e \chi_e \nabla T_e. \quad (2.32)$$

On va utiliser la moyenne sur les surfaces magnétiques, en faisant de plus les hypothèses suivantes :

- le terme convectif de transport de la chaleur est négligeable devant le terme diffusif considéré,
- les sources et puits internes autres que l'effet joule et le terme d'équipartition électrons-ions sont négligeables.

Dérivation de l'équation générale

Si on moyenne sur les surfaces magnétiques, le bilan d'énergie (2.30) se traduit par (pour plus de détails voir [7])

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{1}{V'^{\frac{2}{3}}} \frac{\partial}{\partial t} \left(n_e T_e V'^{\frac{5}{3}} \right) &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(n_e \chi_e \frac{\partial T_e}{\partial \rho} V' < |\nabla \rho|^2 > \right) \\ &\quad - Q_{\Delta} V' + < s_2 > V' \\ &\quad + \eta_{||} \left[\frac{\rho}{\mu_0^2 C_3^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(C_2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{C_2 C_3}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{V'}{4\pi^2 \mu_0 \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(C_2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \frac{< j_{ni} \cdot B >}{B_0} \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

Hypothèse cylindrique

Dans le cadre de l'hypothèse cylindrique, on a

$$\begin{cases} V = 2\pi^2 \rho^2 R_0 \\ |\nabla \rho|^2 = 1 \\ C_2 = C_3 = \frac{4\pi^2 \rho}{R_0} \end{cases} \quad (2.34)$$

L'équation du bilan d'énergie se transforme alors en

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (n_e T_e) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho n_e \chi_e \frac{\partial T_e}{\partial \rho} \right) &= \frac{\eta_{||}}{\mu_0^2 R_0^2 \rho^2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \right]^2 + \frac{\eta_{||}}{\mu_0 R_0 \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) j_{ni} \\ &\quad - Q_{\Delta} + < s_2 > \end{aligned} \quad (2.35)$$

et comme conditions aux limites : pour des raisons de symétrie, au centre du plasma ($\rho = 0$), une condition de Neumann homogène est considérée. Au bord du plasma ($\rho = 1$), on suppose que la température peut être observée. Ainsi une condition de Dirichlet est prise en compte (la température $T_e(t, 1)$ étant alors une donnée du problème) :

$$\left. \frac{\partial T_e}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 0 \quad \text{et} \quad T_e(t, 1).$$

Hypothèse petit rayon moyen constant

Pour simplifier l'écriture du bilan d'énergie, on considère l'hypothèse suivante

$$\rho = xa, \quad \text{avec } x \in [0, 1],$$

ce qui donne une nouvelle écriture du bilan d'énergie

$$\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (n_e T_e) - \frac{1}{a^2 x} \frac{\partial}{\partial x} (x n_e \chi_e \frac{\partial T_e}{\partial x}) = \frac{\eta_{||}}{\mu_0^2 R_0^2 a^3 x^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right]^2 + \frac{\eta_{||}}{\mu_0 R_0 a^2 x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) j_{ni} - Q_{\Delta} + < s_2 > . \quad (2.36)$$

Les conditions aux bords se traduisent en

$$\left. \frac{\partial T_e}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad T_e(t, 1).$$

2.1.4 Tableaux récapitulatifs

Dans les tableaux 2.1 et 2.2, le résumé des équations du flux magnétique poloidal et du transport de la chaleur est proposé.

	Hypothèse $\rho = \sqrt{\frac{\phi}{\pi B_0}}$	Hypothèse cylindrique	Hypothèse petit rayon constant
Equation diffusion résistive	$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\eta_{ } \rho}{\mu_0 C_3^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{C_2 C_3}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{\eta_{ } V'}{4\pi^2 \rho} < \frac{j_{ni} \cdot \vec{B}}{B_0} >$	$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\eta_{ }}{\mu_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \eta_{ } R_0 j_{ni}$	$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\eta_{ }}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \eta_{ } R_0 j_{ni}$
Conditions aux limites	$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right _0 = 0$ $\left. \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right _{\rho_{max}} = -\frac{2\pi \mu_0 I_p}{C_2(\rho_{max})}$	$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right _0 = 0$ $\left. \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right _{\rho_{max}} = -\frac{\mu_0 R_0 I_p}{2\pi \rho_{max}}$	$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right _0 = 0$ $\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right _1 = -\frac{\mu_0 R_0 I_p}{2\pi}$
Expression du facteur de sécurité	$q = -\frac{V'}{4\pi^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho}} f < \frac{1}{r^2} >$	$q = -\frac{\rho B_0}{\frac{\partial \psi}{\partial \rho}}$	$q = -\frac{a^2 x B_0}{\frac{\partial \psi}{\partial x}}$
Expression de la densité de courant	$< \frac{j_T}{R} > = -\frac{1}{\mu_0 V'} \times \frac{\partial}{\partial \rho} \left(C_2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)$	$j_T = -\frac{1}{\mu_0 R_0 \rho} \times \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)$	$j_T = -\frac{1}{\mu_0 R_0 a^2 x} \times \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$

TABLE 2.1 – Tableaux récapitulatifs (flux magnétique)

	Équation de transport de la chaleur	Conditions aux limites
Hypothèse $\rho = \sqrt{\frac{\phi}{\pi B_0}}$	$\frac{3}{2} \frac{1}{V'^{\frac{2}{3}}} \frac{\partial}{\partial t} \left(n_e T_e V'^{\frac{5}{3}} \right) = -Q_{\Delta} V'$ $+ \langle s_2 \rangle V'$ $+ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(n_e \chi_e \frac{\partial T_e}{\partial \rho} V' < \nabla \rho ^2 > \right)$ $+ \eta_{ } \left[\frac{\rho}{\mu_0^2 C_3^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(C_2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{C_2 C_3}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \right]$ $+ \frac{V'}{4\pi^2 \mu_0 \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(C_2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \frac{\langle j_{ni} \cdot B \rangle}{B_0}$	$\frac{\partial T_e}{\partial \rho} \Big _0 = 0$ $T_e(t, \rho_{max})$
Hypothèse cylindrique	$\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (n_e T_e) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho n_e \chi_e \frac{\partial T_e}{\partial \rho} \right)$ $+ \frac{\eta_{ }}{\mu_0^2 R_0^2 \rho^2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \right]^2$ $+ \frac{\eta_{ }}{\mu_0 R_0 \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) j_{ni}$ $- Q_{\Delta} + \langle s_2 \rangle$	$\frac{\partial T_e}{\partial \rho} \Big _0 = 0$ $T_e(t, \rho_{max})$
Hypothèse petit rayon constant	$\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (n_e T_e) = \frac{1}{a^2 x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x n_e \chi_e \frac{\partial T_e}{\partial x} \right)$ $+ \frac{\eta_{ }}{\mu_0^2 R_0^2 a^3 x^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right]^2$ $+ \frac{\eta_{ }}{\mu_0 R_0 a^2 x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) j_{ni}$ $- Q_{\Delta} + \langle s_2 \rangle$	$\frac{\partial T_e}{\partial x} \Big _0 = 0$ $T_e(t, 1)$

TABLE 2.2 – Tableaux récapitulatifs (transport de la chaleur)

2.1.5 Simulateurs physiques utilisés

Nous allons décrire le code de simulation METIS (Minute Embedded Tokamak Integrated Simulator) développé précédemment au CEA, à l'aide duquel ont été testées les lois de commande conçues pendant ce travail.

METIS est un outil de simulation de tokamak intégré faisant partie de la suite CRONOS (voir [3]). Le code METIS a été développé pour simuler l'évolution du plasma à l'aide d'informations venant de lois d'échelles couplées à des modèles simplifiés 0D ou 1D, d'où le terme de simulateur "intégré". Il utilise un schéma numérique de convergence rapide qui permet de simuler une décharge complète de plasma dans un temps raisonnable (de l'ordre de la minute). Il décrit n'importe quel scénario en fonction du temps, y compris diverses sources de courant et de chaleur. METIS est conçu pour : la préparation et l'analyse rapide de décharge, la conception de scénarios, la préparation de simulations CRONOS, la vérification de simulations CRONOS et la conception des futurs tokamaks (ITER). Dans notre cas, METIS sera utilisé pour valider nos lois de commande grâce à une interface avec *Matlab/Simulink*TM.

Sur la figure 2.3, on montre le schéma principe du simulateur METIS.

Le simulateur METIS contient un solveur pour la diffusion complète du courant. La densité de courant de *bootstrap* et la résistivité sont calculées en utilisant la formulation de Sauter (voir [78] pour plus de détails). Les formes des sources de courant hybride sont basées sur des formulations analytiques simplifiées considérant des lois d'échelle empiriques. Le profil de densité est décrit au moyen d'un facteur de piquage prescrit ou donné par une loi d'échelle. La densité linéique moyenne est prescrite. L'énergie contenue dans le plasma est donnée par une loi d'échelle qui dépend du scénario.

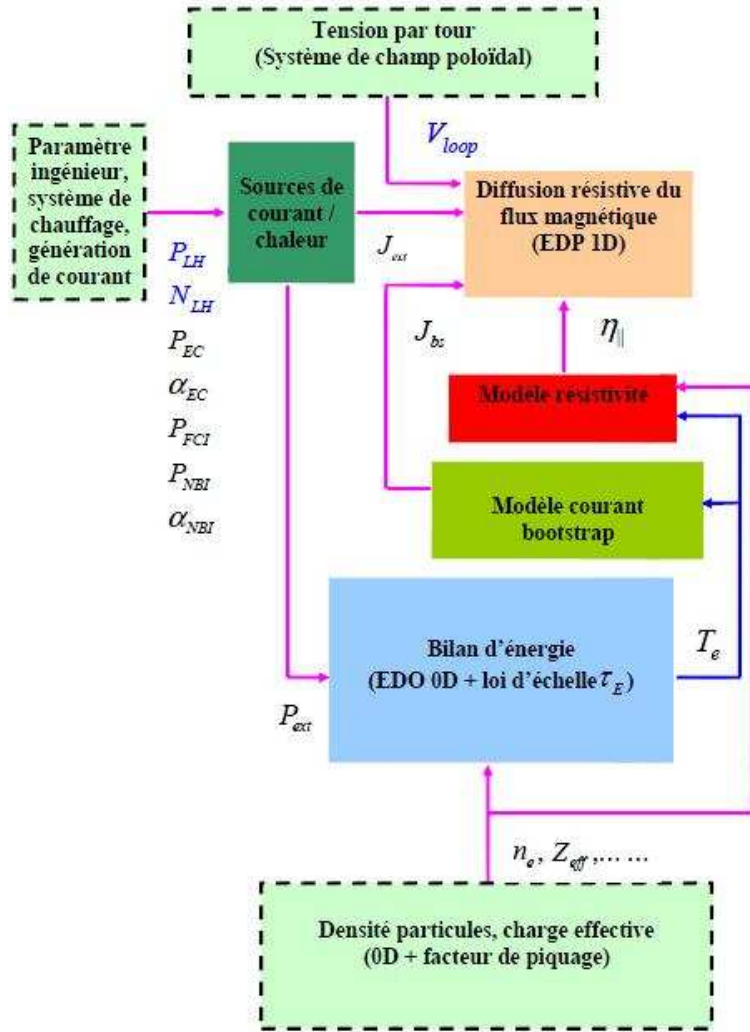


FIGURE 2.3 – Schéma de principe METIS

2.2 Problématique et modèle mathématique étudié

2.2.1 Formulation du modèle de commande

La résistivité $\eta_{||}$ et la densité de courant j_{ni} sont fonction de la température T_e , d'où la nécessité à terme de considérer les deux équations d'évolutions couplées.

Néanmoins, dans le cadre du travail qui sera présenté ici, qui représente l'une des premières tentatives de traitement en dimension infinie de la problématique de contrôle du facteur de sécurité, nous ne considérons pour commencer qu'une seule EDP, c'est-à-dire que dans notre modèle de commande, on ne considéra pas le système (2.36) qui gouverne l'équation de transport de la chaleur néanmoins celui-ci sera pris en compte en simulation.

Nous allons présenter la formulation du modèle de commande utilisé et les différents types de contrôles étudiés. Voici le modèle utilisé

Contrôle de diffusivité

↓

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \eta_{||} R_0 j_{ni} \leftarrow \text{Contrôle distribué} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, 1) = -V_0 \leftarrow \text{Contrôle frontière} \end{array} \right.$$

FIGURE 2.4 – Formulation du problème en dimension infinie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \eta_{||} R_0 j_{ni}; \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, 1) = -V_0 \end{array} \right. \quad (2.37)$$

avec le facteur de sécurité

$$q = -\frac{a^2 x B_0}{\frac{\partial \psi}{\partial x}}. \quad (2.38)$$

En examinant l'équation (2.37) on peut distinguer trois moyens de contrôle :

1. générer du courant de l'extérieur par des moyens inductifs en utilisant le système de champ poloïdal (tension par tour à la frontière du plasma) "effet transformateur" → **contrôle frontière**
2. générer du courant par des moyens non inductifs → **contrôle distribué** par :
 - injection de particules neutres rapides,
 - injections d'ondes à des fréquences bien déterminées HYB, FCE, FCI,
 - ou le courant auto généré (*bootstrap*).
3. chauffage de plasma (effet sur la résistivité) → **contrôle de diffusivité**

Sur la figure 2.4, on donne la formulation du problème en dimension infinie avec les différents types de contrôle.

Dans le cadre de ce travail, nous n'allons utiliser que le contrôle frontière et le contrôle distribué (on n'utilisera pas le contrôle de diffusivité dans un premier temps).

2.3 Analyse mathématique de l'équation de diffusion résistive

2.3.1 Caractérisation

On va donner ici la caractérisation du système à commander, c'est-à-dire le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \eta_{||} R_0 j_{ni}; \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, 1) = -V_0. \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Le système (2.39) qui représente l'évolution du flux magnétique poloïdal dans les plasmas de tokamak est un problème d'évolution d'équation aux dérivées partielles (EDPs) linéaires de type parabolique.

Il est intéressant de remarquer que tout en étant de type parabolique, l'EDP (2.39) cependant n'est pas triviale dans le contrôle des systèmes à paramètres distribués, car l'opérateur différentiel $\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right)$, contient une singularité en $x = 0$.

Le contrôle d'un tel type d'EDP n'a pas été développé jusqu'à maintenant. L'objectif dans ce mémoire est de présenter des stratégies de contrôle pour des systèmes à paramètres distribués s'écrivant sous la forme (2.39).

2.3.2 Existence et unicité de la solution

L'existence et l'unicité de la solution de l'EDP (2.39) sont établies dans cette section.

Proposition 4 *L'équation de la diffusion résistive du flux magnétique (2.39) admet une unique solution.*

Preuve. Pour cela, une nouvelle variable $\psi_r(t, x)$ est définie comme suit :

$$\psi_r(t, x) = \psi(t, x) - \psi(t, 1).$$

La variable ψ_r vérifie le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_r}{\partial t} - \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right) = \eta_{||} R_0 j_{ni} + V_0; \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial t}(t, 1) = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Si on pose

$$\mathcal{F} = \eta_{||} R_0 j_{ni} + V_0,$$

on a

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_r}{\partial t} - \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right) = \mathcal{F}; \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial t}(t, 1) = 0. \end{cases} \quad (2.41)$$

Maintenant on va faire un changement de coordonnées (voir Fig. 2.5) pour écrire le système (2.41) dans une nouvelle base et ceci pour enlever la singularité dans l'opérateur $\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right)$. Soit

$$\begin{cases} x^* = x \cos \theta; \\ y^* = x \sin \theta. \end{cases}$$

Par définition de ψ_r , on a $\frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} = 0$. On a le résultat suivant qui donne la relation de l'opérateur Laplacien en coordonnées cylindriques et cartésiennes (voir [24, 52] pour plus de détails) :

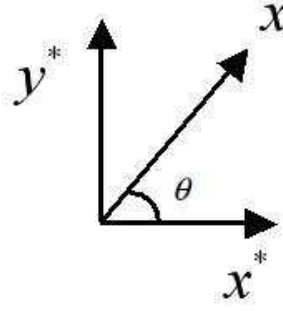


FIGURE 2.5 – Changement de coordonnées

$$\Delta\psi_r = \frac{\partial^2\psi_r}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2\psi_r}{\partial y^{*2}} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial\psi_r}{\partial x} \right) + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta^2}. \quad (2.42)$$

Avec ces nouvelles coordonnées, le système (2.41) devient

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi_r}{\partial t} - \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \Delta\psi_r = \mathcal{F}; \\ \frac{\partial\psi_r}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \\ \frac{\partial\psi_r}{\partial t}(t, 1) = 0. \end{cases} \quad (2.43)$$

L'existence et l'unicité de la solution de (2.43) sont données dans [15] et [29].

■

2.3.3 Définition et existence de la solution asymptotique

Une fois acquises l'existence et l'unicité de la solution de (2.39), on peut s'intéresser à son comportement asymptotique lorsque le temps tend vers l'infini. D'où la proposition suivante

Proposition 5 *Le système (2.39) admet une solution satisfaisant à la relation*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\psi(t, \cdot) - \psi_1(t, \cdot)\| = 0, \quad (2.44)$$

ψ_1 étant la solution de (2.39) avec

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t}(t, x) = -V_0$$

et ceci dans le cas où $V_0(t) = \text{cste}$, $j_{ni} = j_{ni}(x)$ et $\eta_{||} = \eta_{||}(x) > 0$ sont indépendants du temps t .

Preuve.

Soit ψ_1 la solution de (2.39) avec $\frac{\partial\psi_1}{\partial t}(t, x) = -V_0$. Cela donne

$$s \frac{\partial\psi_1}{\partial s} = \mu_0 a^2 \int_0^s \left(\frac{-V_0}{\eta_{||}} - R_0 j_{ni}(\xi) \right) \xi d\xi, \quad (2.45)$$

donc

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial s} = \frac{\mu_0 a^2}{s} \int_0^s \left(\frac{-V_0}{\eta_{||}} - R_0 j_{ni}(\xi) \right) \xi d\xi, \quad (2.46)$$

ce qui implique que

$$\psi_1(t, x) = \int_1^x \frac{\mu_0 a^2}{s} \int_0^s \left(\frac{-V_0}{\eta_{||}} - R_0 j_{ni}(\xi) \right) \xi d\xi ds + \psi_1(t, 1), \quad (2.47)$$

avec

$$\psi_1(t, 1) = \int_0^t -V_0(\tau) d\tau + \psi_1(t = 0, 1) = -V_0 t + \psi_1(t = 0, 1). \quad (2.48)$$

On pose maintenant

$$f = \psi - \psi_1 \quad (2.49)$$

et on veut montrer que $f \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. On a les deux systèmes suivants

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \eta_{||} R_0 j_{ni}; \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, 1) = -V_0, \end{cases} \quad (2.50)$$

et

$$\begin{cases} -V_0 - \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) = \eta_{||} R_0 j_{ni}; \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial t}(t, 1) = -V_0. \end{cases} \quad (2.51)$$

On prend la différence des deux systèmes et on trouve que la fonction f vérifie le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial t}(t, 1) = 0. \end{cases} \quad (2.52)$$

On suppose que $\eta_{||} = \eta_{||}(x)$ ne dépend pas du temps. On a

$$x \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\eta_{||}(x)}{\mu_0 a^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} \right) f \quad (2.53)$$

ce qui donne

$$\frac{x}{\eta_{||}(x)} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 a^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} \right) f. \quad (2.54)$$

On intègre

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} f \frac{x}{\eta_{||}(x)} dx = \frac{1}{\mu_0 a^2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} \right) f dx, \quad (2.55)$$

ainsi

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \mathfrak{f}^2 \frac{x}{\eta_{||}(x)} dx = -\frac{2}{\mu_0 a^2} \int_0^1 \left| \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x} \right|^2 x dx + \frac{2}{\mu_0 a^2} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x} \Big|_{x=1} \mathfrak{f}(t, 1). \quad (2.56)$$

Comme $\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t}(t, 1) = 0$ implique que

$$\mathfrak{f}(t, 1) = \mathfrak{f}(t = 0, 1) = \psi_0(1) - \psi_1(t = 0, 1),$$

et si $\psi_0(1) = \psi_1(t = 0, 1)$, on trouve

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \mathfrak{f}^2 \frac{x}{\eta_{||}(x)} dx = -\frac{2}{\mu_0 a^2} \int_0^1 \eta_{||}(x) \left| \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x} \right|^2 \frac{x}{\eta_{||}(x)} dx. \quad (2.57)$$

Donc, il vient

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \mathfrak{f}^2 \frac{x}{\eta_{||}(x)} dx \leq -\frac{2\eta_1}{\mu_0 a^2} \int_0^1 \left| \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x} \right|^2 \frac{x}{\eta_{||}(x)} dx \quad (2.58)$$

avec

$$0 < \eta_1 \leq \eta_{||}(x) \leq \eta_2.$$

Maintenant, on a

$$\mathfrak{f}(1) - \mathfrak{f}(x) = \int_x^1 \frac{\partial \mathfrak{f}(s)}{\partial x} ds \quad (2.59)$$

et $\mathfrak{f}(1) = 0$ implique que

$$-\mathfrak{f}(x) = \int_x^1 \frac{\partial \mathfrak{f}(s)}{\partial x} ds. \quad (2.60)$$

On a

$$\begin{aligned} |\mathfrak{f}(x)|^2 &= \left| \int_x^1 \sqrt{\frac{s}{\eta_{||}(s)}} \frac{\partial \mathfrak{f}(s)}{\partial x} \frac{\sqrt{\eta_{||}(s)}}{\sqrt{s}} ds \right|^2 \\ &\leq \left(\int_x^1 \left| \frac{\partial \mathfrak{f}(s)}{\partial x} \right|^2 \frac{s}{\eta_{||}(s)} ds \right) \int_x^1 \frac{\eta_{||}(s) ds}{s} \\ &\leq \left(\int_x^1 \left| \frac{\partial \mathfrak{f}(s)}{\partial x} \right|^2 \frac{s}{\eta_{||}(s)} ds \right) \eta_2 (\ln(1) - \ln x) \\ &\leq \left(\int_x^1 \left| \frac{\partial \mathfrak{f}(s)}{\partial x} \right|^2 \frac{s}{\eta_{||}(s)} ds \right) \eta_2 (-\ln x) \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\eta_{||}(x)} |\mathfrak{f}(x)|^2 &\leq \left(\int_x^1 \left| \frac{\partial \mathfrak{f}(s)}{\partial x} \right|^2 \frac{s}{\eta_{||}(s)} ds \right) \frac{\eta_2}{\eta_{||}(x)} (-x \ln x) \\
&\leq \left(\int_x^1 \left| \frac{\partial \mathfrak{f}(s)}{\partial x} \right|^2 \frac{s}{\eta_{||}(s)} ds \right) \frac{\eta_2}{\eta_1} (-x \ln x) \\
&\leq K \int_x^1 \left| \frac{\partial \mathfrak{f}(s)}{\partial x} \right|^2 \frac{s}{\eta_{||}(s)} ds, \quad \text{avec } K = \frac{\eta_2}{\eta_1} \sup_{x \in (0,1)} \{-x \ln x\}
\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^1 |\mathfrak{f}(x)|^2 \frac{x}{\eta_{||}(x)} dx \leq K \int_0^1 \left| \frac{\partial \mathfrak{f}(x)}{\partial x} \right|^2 \frac{x}{\eta_{||}(x)} dx. \quad (2.61)$$

D'après (2.57), on a

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \mathfrak{f}^2 \frac{x}{\eta_{||}(x)} dx \leq -\frac{2\eta_1}{\mu_0 a^2 K} \int_0^1 \mathfrak{f}^2 \frac{x}{\eta_{||}(x)} dx \quad (2.62)$$

par conséquent (voir par exemple le lemme de Gronwall qui se trouve dans [36])

$$\int_0^1 \mathfrak{f}^2 \frac{x}{\eta_{||}(x)} dx \leq e^{-\frac{2\eta_1}{\mu_0 a^2 K} t} \left(\int_0^1 \mathfrak{f}_0^2 \frac{x}{\eta_{||}(x)} dx \right). \quad (2.63)$$

Il est clair que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 \mathfrak{f}^2 \frac{x}{\eta_{||}(x)} dx = 0 \quad (2.64)$$

ce qui donne

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathfrak{f}(t, x) = 0. \quad (2.65)$$

■

2.3.4 Solutions analytiques dans quelques cas de référence

Maintenant, on va déterminer analytiquement les solutions asymptotique ψ_1 de (2.39) et ceci en faisant varier les termes, $\eta_{||}$, V_0 et j_{ni} . On a toujours la relation suivante

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t}(t, x) = -V_0. \quad (2.66)$$

On va maintenant injecter (2.66) dans (2.39)

$$-V_0 - \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) = \eta_{||} R_0 j_{ni}(x).$$

En intégrant par parties, on trouve

$$s \frac{\partial \psi_1}{\partial s} = \mu_0 a^2 \int_0^s \left(\frac{-V_0}{\eta_{||}} - R_0 j_{ni}(x) \right) x dx. \quad (2.67)$$

Plusieurs cas ont été traités sous forme de propositions.

Proposition 6 *Si on suppose que*

$$V_0 = j_{ni}(x) = 0$$

alors, la solution asymptotique (2.39) est donnée par

$$\psi_1(t, x) = \text{cste.}$$

Preuve. Si

$$V_0 = j_{ni}(x) = 0$$

on a

$$s \frac{\partial \psi_1}{\partial s} = 0$$

ce qui implique que

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial s} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = V_0 = 0$$

et donc

$$\psi_1(t, x) = \text{cste.}$$

■

Le courant total j_T est donné par la relation suivante

$$j_T = -\frac{1}{\mu_0 a^2 R_0} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) = 0$$

et q le facteur de sécurité par

$$q = -\frac{a^2 x B_0}{\frac{\partial \psi_1}{\partial x}} = \infty. \quad (2.68)$$

Proposition 7 *Si on suppose que*

$$V_0 = \text{cste} \neq 0, \quad j_{ni} = 0 \quad \text{et} \quad \eta_{||} = \eta_0 = \text{cste},$$

alors, la solution asymptotique de (2.39) est donnée par

$$\psi_1(t, x) = -\frac{\mu_0 a^2 V_0}{\eta_0} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} \right) - V_0 t + \psi_1(t=0, 1).$$

Preuve.

Si

$$V_0 = \text{cste} \neq 0, \quad j_{ni} = 0 \quad \text{et} \quad \eta_{||} = \eta_0 = \text{cste}$$

alors on a

$$s \frac{\partial \psi_1}{\partial s} = -\frac{\mu_0 a^2 V_0}{\eta_0} \int_0^s x dx = -\frac{\mu_0 a^2 V_0}{\eta_0} \frac{s^2}{2} \quad (2.69)$$

et

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial s} = -\frac{\mu_0 a^2 V_0}{\eta_0} \frac{s}{2}$$

ce qui donne

$$\psi_1(t, x) - \psi_1(t, 1) = -\frac{\mu_0 a^2 V_0}{\eta_0} \left[\frac{s^2}{4} \right]_1^x.$$

Par conséquent, il vient

$$\psi_1(t, x) = -\frac{\mu_0 a^2 V_0}{\eta_0} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} \right) + \psi_1(t, 1), \quad \text{avec} \quad \psi_1(t, 1) = -V_0 t + \psi_1(t = 0, 1).$$

■

Le facteur de sécurité est alors donnée par

$$q = \frac{a^2 B_0}{\frac{\mu_0 a^2 V_0}{2\eta_0}} = \frac{2\eta_0 B_0}{\mu_0 V_0} \quad (2.70)$$

et le courant total

$$j_T = \frac{V_0}{\eta_0 R_0}.$$

Les résultats sont donnés dans la figure 2.6.

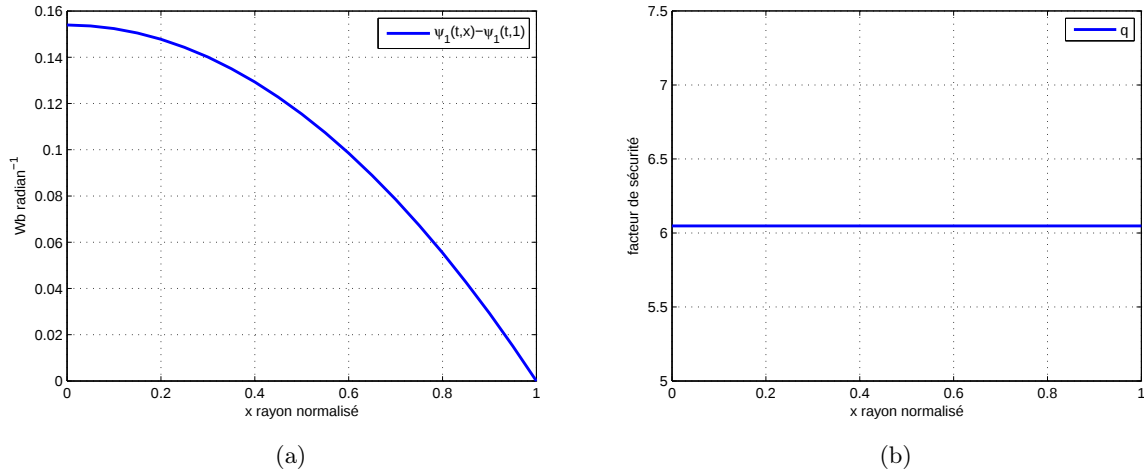


FIGURE 2.6 – Distribution spatiale de $\psi_1(t, \cdot) - \psi_1(t, 1)$, q avec $V_0 = 0.1V$ et $\eta_0 = 10^{-7} \Omega \cdot m$

Proposition 8 *Si on suppose que*

$$V_0 = cste \neq 0, \quad j_{ni} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\eta_{||}} = a_1 x + b,$$

la solution asymptotique de (2.39) est donnée par

$$\psi_1(t, x) = -V_0 \mu_0 a^2 \left(a_1 \frac{x^3}{9} + b \frac{x^2}{4} - \left(\frac{a_1}{9} + \frac{b}{4} \right) \right) - V_0 t + \psi_1(t = 0, 1).$$

Preuve.

On a

$$s \frac{\partial \psi_1}{\partial s} = -\mu_0 a^2 \int_0^s \frac{V_0}{\eta_{||}} x dx = -\mu_0 a^2 V_0 \left(a_1 \frac{s^3}{3} + b \frac{s^2}{2} \right)$$

ce qui implique

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial s} = -V_0 \mu_0 a^2 \left(a_1 \frac{s^2}{3} + b \frac{s}{2} \right).$$

Donc pour le flux magnétique, on a

$$\begin{aligned} \psi_1(t, x) &= -V_0 \mu_0 a^2 \left[a_1 \frac{s^3}{9} + b \frac{s^2}{4} \right]_1^x + \psi_1(t, 1) \\ &= -V_0 \mu_0 a^2 \left(a_1 \frac{x^3}{9} + b \frac{x^2}{4} - \left(\frac{a_1}{9} + \frac{b}{4} \right) \right) + \psi_1(t, 1). \end{aligned}$$

■

Le facteur de sécurité est

$$q = \frac{B_0}{\mu_0 V_0 \left(\frac{a_1}{3} x + \frac{b}{2} \right)}$$

et le courant total

$$j_T = \frac{V_0}{R_0} (a_1 x + b).$$

On peut voir les courbes de ces grandeurs dans les figures 2.7 et 2.8.

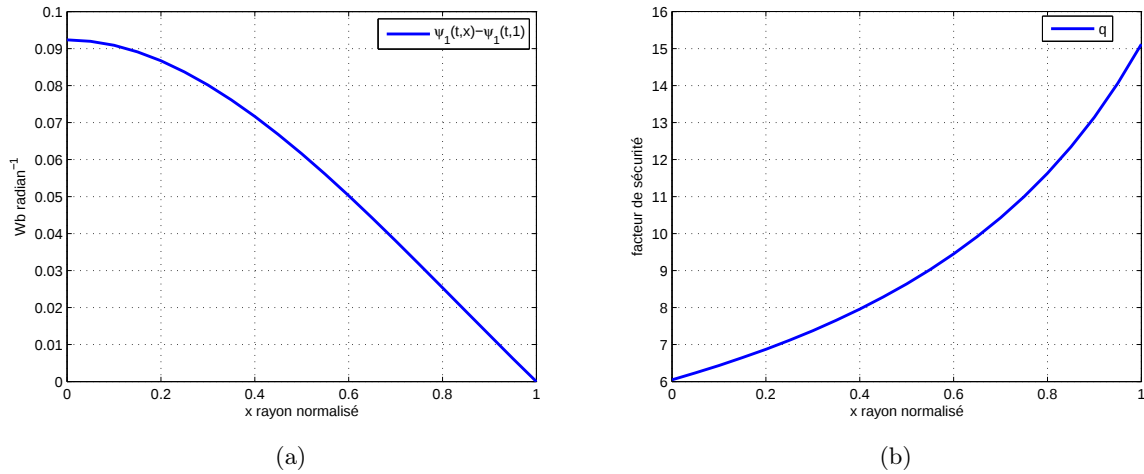


FIGURE 2.7 – Distribution spatiale de $\psi_1(t, \cdot) - \psi_1(t, 1)$, q avec $V_0 = 0.1V$, $a_1 = 10^6 - 10^7 (\Omega \cdot m)^{-1}$ et $b = 10^7 (\Omega \cdot m)^{-1}$

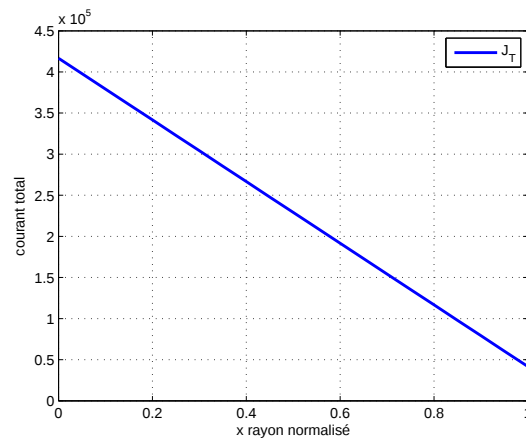


FIGURE 2.8 – La courbe de courant total j_T avec $V_0 = 0.1V$, $a_1 = 10^6 - 10^7(\Omega \cdot m)^{-1}$ et $b = 10^7(\Omega \cdot m)^{-1}$

Proposition 9 *En supposant*

$$V_0 = 0 \quad \text{et} \quad j_{ni} = j_0 \neq 0,$$

la solution asymptotique de (2.39) est donnée par

$$\psi_1(t, x) = -\mu_0 a^2 R_0 j_0 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} \right) + \psi_1(t = 0, 1).$$

Preuve.

Avec ces hypothèses, on a

$$s \frac{\partial \psi_1}{\partial s} = \mu_0 a^2 \int_0^s -R_0 j_0 x dx = -\mu_0 a^2 R_0 j_0 \frac{s^2}{2}$$

ce qui implique

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial s} = -\mu_0 a^2 R_0 j_0 \frac{s}{2}$$

donc

$$\psi_1(t, x) = -\mu_0 a^2 R_0 j_0 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} \right) + \psi_1(t, 1).$$

■

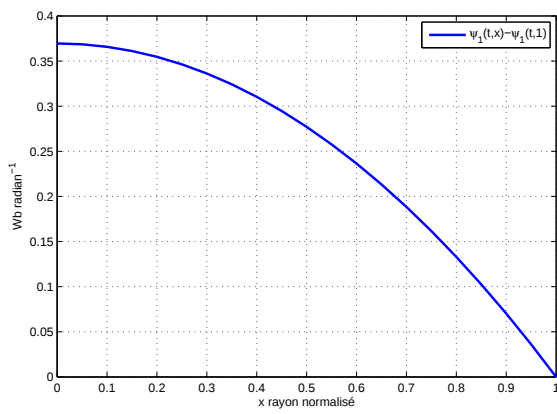
Le facteur de sécurité est

$$q = \frac{2B_0}{\mu_0 R_0 j_0}$$

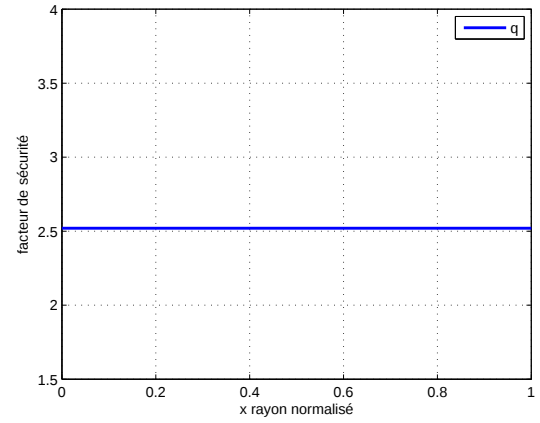
et le courant total

$$j_T = \frac{\eta_{||} R_0 j_0}{\eta_{||} R_0} = j_0. \quad (2.71)$$

Les courbes sont données dans la figure 2.9.



(a)



(b)

FIGURE 2.9 – Distribution spatiale de $\psi_1(t, \cdot) - \psi_1(t, 1)$, q avec $V_0 = 0V$ et $j_0 = 10^6 A \cdot m^{-2}$

Proposition 10 *Si maintenant on suppose*

$$V_0 \neq 0, j_{ni}(x) = j_0 = \text{cste} \quad \text{et} \quad \eta_{||} = \eta_0,$$

la solution asymptotique de (2.39) est donnée par

$$\psi_1(t, x) = \frac{\mu_0 a^2}{4} \left(\frac{-V_0}{\eta_0} - R_0 j_0 \right) (x^2 - 1) - V_0 t + \psi_1(t = 0, 1).$$

Preuve.

Sous ces hypothèses, on a

$$s \frac{\partial \psi_1}{\partial s} = \mu_0 a^2 \left(\frac{-V_0}{\eta_0} - R_0 j_0 \right) \frac{s^2}{2}$$

ce qui implique

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial s} = \mu_0 a^2 \left(\frac{-V_0}{\eta_0} - R_0 j_0 \right) \frac{s}{2}$$

alors la solution devient

$$\psi_1(t, x) = \frac{\mu_0 a^2}{4} \left(\frac{-V_0}{\eta_0} - R_0 j_0 \right) (x^2 - 1) + \psi_1(t, 1).$$

■

Le facteur de sécurité est

$$q = - \frac{a^2 x B_0}{\mu_0 a^2 \left(\frac{-V_0}{\eta_0} - R_0 j_0 \right) \frac{x}{2}} = - \frac{2 B_0}{\mu_0 \left(\frac{-V_0}{\eta_0} - R_0 j_0 \right)}$$

et le courant total

$$j_T = \frac{1}{\eta_0 R_0} (\eta_0 R_0 j_0 + V_0) = j_0 + \frac{V_0}{\eta_0 R_0}. \quad (2.72)$$

Les résultats se trouvent dans les figures 2.10 et 2.11.

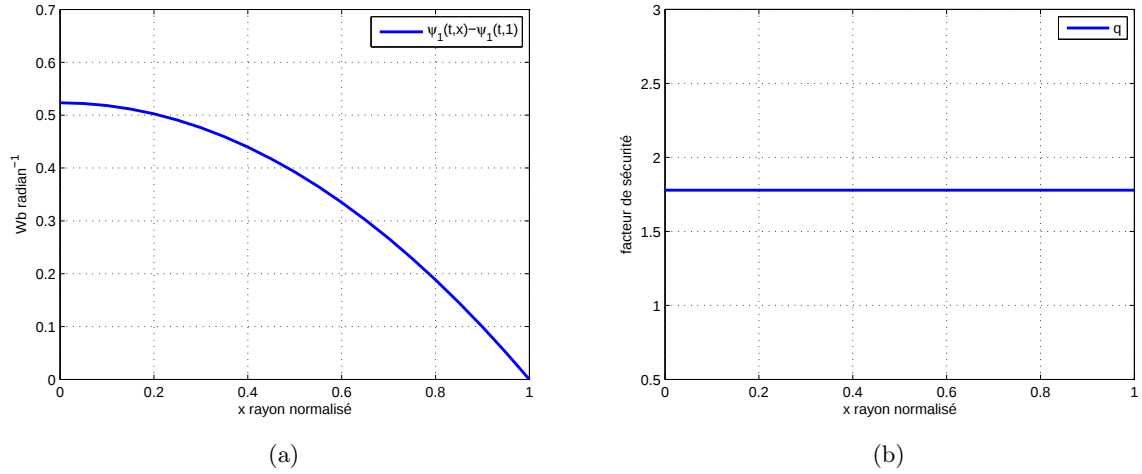


FIGURE 2.10 – Distribution spatiale de $\psi_1(t,.) - \psi_1(t,1)$, q avec $V_0 = 0.1V$, $\eta_0 = 10^{-7}\Omega \cdot m$ et $j_0 = 10^6 A \cdot m^{-2}$

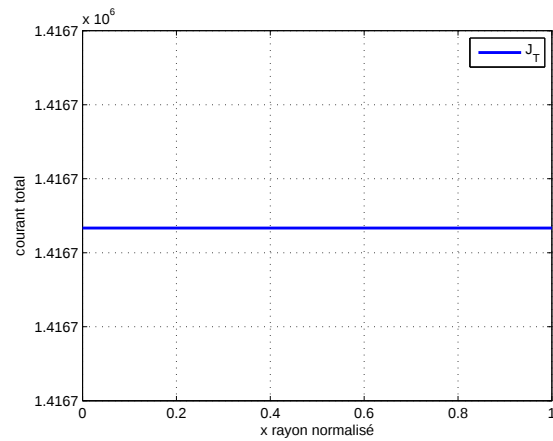


FIGURE 2.11 – La courbe de courant total j_T avec $V_0 = 0.1V$, $\eta_0 = 10^{-7}\Omega \cdot m$ et $j_0 = 10^6 A \cdot m^{-2}$

Proposition 11 *Si on suppose*

$$V_0 = 0 \quad \text{et} \quad j_{ni}(x) = j_0(-x + 1)$$

alors

$$\psi_1(t, x) = \mu_0 a^2 R_0 j_0 \left(\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + \frac{5}{36} \right) + \psi_1(t, 1)$$

Preuve.

Sous ces hypothèses, on a

$$\begin{aligned} s \frac{\partial \psi_1}{\partial s} &= \mu_0 a^2 \int_0^s \left(\frac{-V_0}{\eta_{||}} - R_0 j_{ni} \right) x dx \\ &= \mu_0 a^2 \int_0^s (R_0 j_0 (x - 1)) x dx \\ &= \mu_0 a^2 R_0 j_0 \left(\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} \right) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\psi_1(t, x) = \mu_0 a^2 R_0 j_0 \left(\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + \frac{5}{36} \right) + \psi_1(t, 1).$$

■

Le facteur de sécurité est

$$q = - \frac{B_0}{\mu_0 R_0 j_0 \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2} \right)}$$

et le courant total

$$j_T = j_{ni} = j_0(-x + 1).$$

Les résultats se trouvent dans les figures 2.12 et 2.13.

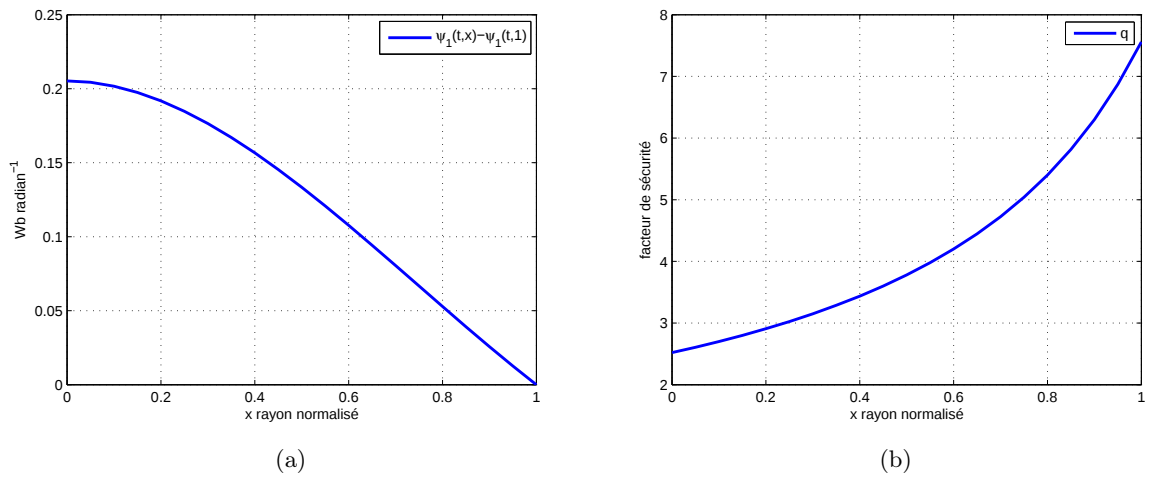


FIGURE 2.12 – Distribution spatiale de $\psi_1(t,.) - \psi_1(t,1)$, q avec $V_0 = 0V$ et $j_0 = 10^6 A \cdot m^{-2}$

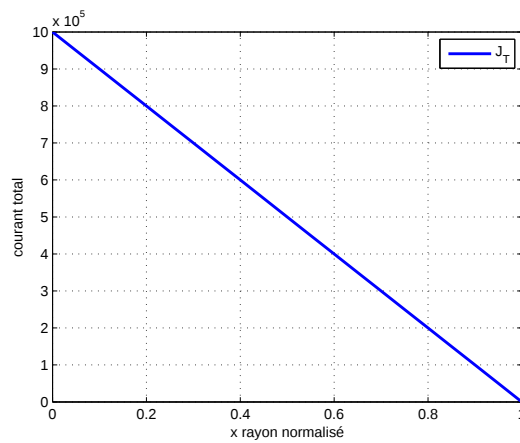


FIGURE 2.13 – La courbe de courant total j_T avec $V_0 = 0V$ et $j_0 = 10^6 A \cdot m^{-2}$

Proposition 12 *Et finalement si on suppose que*

$$V_0 \neq 0, \quad j_{ni}(x) = -j_0 x^2 + j_0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\eta_{||}} = \frac{1}{V_0}(a_1 x + b)$$

alors, la solution asymptotique de (2.39) est donnée par

$$\psi_1(t, x) = \mu_0 a^2 \left(R_0 j_0 \frac{x^4}{16} - \frac{a_1}{9} x^3 - \frac{b + R_0 j_0}{4} x^2 - \frac{R_0 j_0}{16} + \frac{a_1}{9} + \frac{b + R_0 j_0}{4} \right) + \psi_1(t, 1).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} s \frac{\partial \psi_1}{\partial s} &= \mu_0 a^2 \int_0^s \left(\frac{-V_0}{\eta_{||}} - R_0 j_{ni} \right) x dx \\ &= \mu_0 a^2 \int_0^s (-a_1 x - b + R_0 j_0 x^2 - R_0 j_0) x dx \\ &= \mu_0 a^2 \left(\frac{R_0 j_0}{4} s^4 - \frac{a_1}{3} s^3 - \frac{b + R_0 j_0}{2} s^2 \right) \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial s} = \mu_0 a^2 \left(\frac{R_0 j_0}{4} s^3 - \frac{a_1}{3} s^2 - \frac{b + R_0 j_0}{2} s \right)$$

d'où

$$\psi_1(t, x) = \mu_0 a^2 \left(R_0 j_0 \frac{x^4}{16} - \frac{a_1}{9} x^3 - \frac{b + R_0 j_0}{4} x^2 - \frac{R_0 j_0}{16} + \frac{a_1}{9} + \frac{b + R_0 j_0}{4} \right) + \psi_1(t, 1).$$

■

Le facteur de sécurité est

$$q = - \frac{B_0}{\mu_0 \left(\frac{R_0 j_0}{4} x^2 - \frac{a_1}{3} x - \frac{b + R_0 j_0}{2} \right)}$$

et le courant total

$$j_T = \frac{1}{R_0} (-a_1 x - b + R_0 j_0 x^2 - R_0 j_0).$$

Les résultats se trouvent dans les figures 2.14 et 2.15.

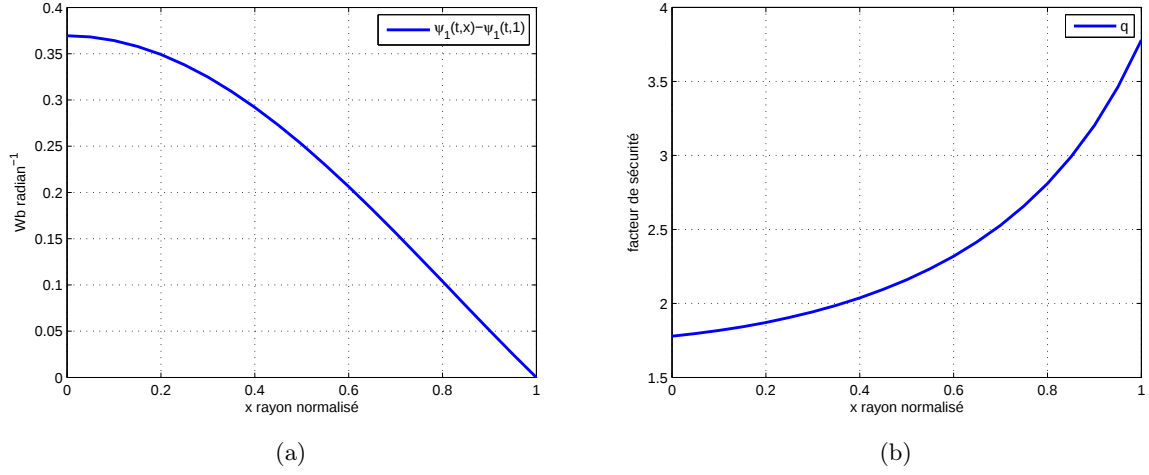


FIGURE 2.14 – Distribution spatiale de $\psi_1(t, \cdot) - \psi_1(t, 1)$, q avec $a_1 = 10^5 - 10^6 (\Omega \cdot m)^{-1}$, $b = 10^6 (\Omega \cdot m)^{-1}$ et $j_0 = 10^6 A \cdot m^{-2}$

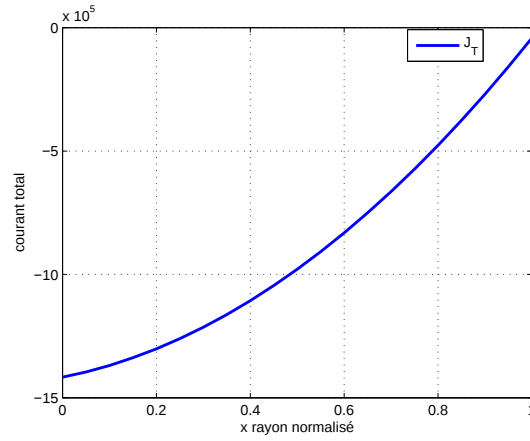


FIGURE 2.15 – La courbe de courant total j_T avec $a_1 = 10^5 - 10^6 (\Omega \cdot m)^{-1}$, $b = 10^6 (\Omega \cdot m)^{-1}$ et $j_0 = 10^6 A \cdot m^{-2}$

Dans les tableaux 2.3 et 2.4, on donne un résumé des solutions asymptotiques de l'équation de diffusion résistive du flux magnétique avec le facteur de sécurité. Les expressions analytiques de la solution asymptotique ψ_1 et le facteur de sécurité q ont été calculées en faisant varier les paramètres V_0 , j_{ni} et $\eta_{||}$.

Dans le tableau 2.4, on observe la dépendance (inverse) entre le facteur de sécurité et le profil de courant plasma.

On observe bien aussi que le facteur de sécurité q est d'autant plus grand que la dérivée spatiale de ψ_1 est petite (et réciproquement).

$V_0 = j_{ni}(x) = 0$	$\psi_1(t, x) = cste$
$V_0 = cste \neq 0,$ $j_{ni} = 0 \quad et \quad \eta_{ } = \eta_0 = cste$	$\psi_1(t, x) = -\frac{\mu_0 a^2 V_0}{\eta_0} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} \right) + \psi_1(t, 1)$
$V_0 = cste \neq 0,$ $j_{ni} = 0 \quad et \quad \frac{1}{\eta_{ }} = a_1 x + b$	$\psi_1(t, x) = -V_0 \mu_0 a^2 \left(a_1 \frac{x^3}{9} + b \frac{x^2}{4} - \left(\frac{a_1}{9} + \frac{b}{4} \right) \right) + \psi_1(t, 1)$
$V_0 = 0 \quad et \quad j_{ni} = j_0 \neq 0$	$\psi_1(t, x) = -\mu_0 a^2 R_0 j_0 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} \right) + \psi_1(t, 1)$
$V_0 \neq 0,$ $j_{ni}(x) = j_0 = cste \quad et \quad \eta_{ } = \eta_0$	$\psi_1(t, x) = \frac{\mu_0 a^2}{4} \left(\frac{-V_0}{\eta_0} - R_0 j_0 \right) \times (x^2 - 1) + \psi_1(t, 1)$
$V_0 \neq 0,$ $j_{ni}(x) = -j_0 x^2 + j_0 \quad et \quad \frac{1}{\eta_{ }} = \frac{1}{V_0} (a_1 x + b)$	$\psi_1(t, x) = \mu_0 a^2 \left(R_0 j_0 \frac{x^4}{16} - \frac{a_1}{9} x^3 - \frac{b+R_0 j_0}{4} x^2 - \frac{R_0 j_0}{16} + \frac{a_1}{9} + \frac{b+R_0 j_0}{4} \right) + \psi_1(t, 1)$
$V_0 = 0 \quad et \quad j_{ni}(x) = j_0(-x + 1)$	$\psi_1(t, x) = \mu_0 a^2 R_0 j_0 \left(\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + \frac{5}{36} \right) + \psi_1(t, 1)$

TABLE 2.3 – Tableaux récapitulatifs (solutions asymptotiques)

$V_0 = j_{ni}(x) = 0$	$q = \infty$
$V_0 = cste \neq 0, j_{ni} = 0 \quad et \quad \eta_{ } = \eta_0 = cste$	$q = \frac{2\eta_0 B_0}{\mu_0 V_0}$
$V_0 = cste \neq 0, j_{ni} = 0 \quad et \quad \frac{1}{\eta_{ }} = a_1 x + b$	$q = \frac{B_0}{\mu_0 V_0 \left(\frac{a_1}{3} x + \frac{b}{2} \right)}$
$V_0 = 0 \quad et \quad j_{ni} = j_0 \neq 0$	$q = \frac{2B_0}{\mu_0 R_0 j_0}$
$V_0 \neq 0, j_{ni}(x) = j_0 = cste \quad et \quad \eta_{ } = \eta_0$	$q = -\frac{2B_0}{\mu_0 \left(\frac{-V_0}{\eta_0} - R_0 j_0 \right)}$
$V_0 \neq 0, j_{ni}(x) = -j_0 x^2 + j_0 \quad et \quad \frac{1}{\eta_{ }} = \frac{1}{V_0} (a_1 x + b)$	$q = -\frac{B_0}{\mu_0 \left(\frac{R_0 j_0}{4} x^2 - \frac{a_1}{3} x - \frac{b+R_0 j_0}{2} \right)}$
$V_0 = 0 \quad et \quad j_{ni}(x) = j_0(-x + 1)$	$q = -\frac{B_0}{\mu_0 R_0 j_0 \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2} \right)}$

TABLE 2.4 – Tableaux récapitulatifs (facteurs de sécurité)

2.4 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, on a explicité la modélisation de l'équation de diffusion résistive du flux magnétique dans les plasmas de tokamak et de l'équation de transport de la chaleur. Diverses hypothèses réalistes ont été rappelées afin de simplifier le système étudié puis le simulateur physique utilisé (METIS), développé par le CEA, a été brièvement présenté.

Pour la partie mathématique, après avoir donné la caractérisation de l'EDP qui gouverne l'évolution du flux magnétique et montré l'existence et l'unicité de la solution de cette EDP, l'existence des solutions asymptotiques a été établie. Enfin, pour divers cas de référence, des solutions analytiques ont été déterminées.

Chapitre 3

Contrôlabilité et stabilité des systèmes régis par des EDPs

Sommaire

3.1	Notions générales	79
3.2	Contrôlabilité	83
3.2.1	Contrôlabilité en dimension finie	83
3.2.2	Contrôlabilité des systèmes linéaires en dimension infinie	84
3.3	Stabilisation	88
3.3.1	Stabilité en dimension finie	88
3.3.2	Stabilité en dimension infinie	92
3.4	Quelques méthodes de stabilisation des systèmes décrits par des EDPs	95
3.4.1	Panorama des méthodes	95
3.4.2	Grammien de contrôlabilité et stabilisation exponentielle rapide	96
3.4.3	Commande par mode glissant	99
3.5	Application à la stabilisation de quelques systèmes physiques	101
3.5.1	Étude complète d'une situation linéaire	101
3.5.2	Étude complète d'un exemple non linéaire	102
3.6	Bilan du chapitre	104

Le système d'équations aux dérivées partielles décrivant l'état qu'il est nécessaire de contrôler a été exposé dans le chapitre précédent. L'existence et l'unicité d'une solution ont été établies. Il s'agit dans ce troisième chapitre d'exposer les définitions mathématiques liées à la théorie du contrôle (automatique) des systèmes régis par des EDPs. On peut se référer à l'ouvrage de référence de J. L. Lions [53]. Pour ce faire, les notions de contrôlabilité et de stabilité sont rappelées en dimension finie et en dimension infinie. Quelques méthodes de stabilisations en dimension infinie sont proposées. Enfin quelques exemples illustratifs sont discutés.

3.1 Notions générales

Dans cette section, on va rappeler quelques notions sur les espaces L^p , la théorie des semi-groupes et la contrôlabilité des systèmes linéaires.

On rappelle quelques définitions qui se trouvent dans [14]. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de bord $\partial\Omega$ qu'on va noter Γ , et $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note pour tout $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow K : f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f|^p < +\infty \right\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(\xi)|^p d\xi \right]^{\frac{1}{p}}.$$

$\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$. Si $p = \infty$, on pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow K : f \text{ mesurable et } \exists C > 0 \text{ telle que } |f(\xi)| \leq C \text{ sur } \Omega\}.$$

On pose

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C : |f(\xi)| \leq C \text{ sur } \Omega\}$$

$\|\cdot\|_{L^\infty}$ est une norme sur $L^\infty(\Omega)$. On définit

$$\mathbf{H}^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \mathbf{D}^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$$

l'espace de Sobolev de dimension m et $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ qui sont nulles au bord Γ et $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ le dual de l'espace $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. On appelle fonction caractéristique d'un ensemble E la fonction χ_E définie par

$$\chi_E(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \in E \\ 0 & \text{si } \xi \notin E \end{cases}$$

L'adjoint d'un opérateur borné $B \in \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{H})$ est l'opérateur $B^* \in \mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{U})$ défini pour tout $(z, u) \in \mathbf{H} \times \mathbf{U}$ par

$$(B^*z, u)_{\mathbf{U}} = (z, Bu)_{\mathbf{H}}$$

où $(\cdot, \cdot)_U$ désigne le produit scalaire dans l'espace U et

$$\mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{U}) = \{\text{l'ensemble des applications linéaires de } \mathbf{H} \text{ dans } \mathbf{U}\}.$$

Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ deux ensembles quelconques et f une application de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{F}$. Soit $\mathbf{E}'$ une partie de $\mathbf{E}$. Nous appelons la restriction de f à $\mathbf{E}'$, l'application g de $\mathbf{E}'$ dans $\mathbf{F}$ qui à tout ξ de $\mathbf{E}'$ associe $f(\xi)$, c'est-à-dire telle que

$$\forall \xi \in \mathbf{E}', \quad g(\xi) = f(\xi).$$

Cette application g est habituellement notée $f|_{\mathbf{E}'}$.

Exemple 13 1) Si $Bu = \chi_\omega u$ avec $\omega \subset \Omega$, $\mathbf{U} = L^2(\omega)$ et $\mathbf{H} = L^2(\Omega)$ alors $B^*z = z|_\omega$.
2) Si $Bu = a_0 u$ avec $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $\mathbf{H} = \mathbf{U} = L^2(\Omega)$ alors $B^* = B$.

Définition 14 Un semi-groupe sur un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ est une famille $(S(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathbf{H}$ vérifiant

1. $S(0) = I$;
2. pour tout $t \geq 0, s \geq 0, S(t+s) = S(t)S(s)$.

Définition 15 Le semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ est fortement continu si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t) \varphi = \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}.$$

Dans la suite, nous les appellerons plus simplement C_0 semi-groupe.

Définition 16 Le générateur infinitésimal du semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ est l'opérateur linéaire

$$A : D(A) \subset \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H},$$

où

$$D(A) = \left\{ \varphi \in \mathbf{H} : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) \varphi - \varphi}{t} \text{ existe dans } \mathbf{H} \right\}$$

défini par

$$\forall \varphi \in D(A), \quad A\varphi = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) \varphi - \varphi}{t}.$$

En particulier, si $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(e^{tA})_{t \geq 0}$.

On va donner une proposition dont la preuve se trouve dans [71, Théorème 2.2].

Proposition 17 Si $(S(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu, alors il existe $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ tels que

$$\forall t \geq 0, \quad \|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} \leq M e^{\omega t}. \quad (3.1)$$

On dit que $(S(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 semi-groupe de contraction si on a (3.1) avec $M = 1$ et $\omega = 0$.

Soit

$$A : D(A) \subset \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}.$$

L'adjoint d'un opérateur non borné A est un opérateur non borné A^* avec comme domaine de définition

$$D(A^*) = \{z \in \mathbf{H} : \exists c \in \mathbb{R}^+, \|(Ay, z)\|_{\mathbf{H}} \leq c \|y\|_{\mathbf{H}}\}$$

et défini pour $y \in D(A)$ et $z \in D(A^*)$ par

$$(Ay, z)_{\mathbf{H}} = (y, A^*z)_{\mathbf{H}}.$$

A^* est aussi un générateur d'un semi-groupe continu $(e^{tA^*})_{t \geq 0}$ qui vérifie pour tout $t \geq 0$

$$e^{tA^*} = S^*(t).$$

Si $A = A^*$ (resp $A = -A^*$), on dit que A est *auto-adjoint* (resp. *anti-adjoint*).

Définition 18 On dit que l'opérateur A est fermé si son graphe est fermé ; i.e. $\{(x, Ax) : x \in \mathbf{H}\}$ est un sous-ensemble fermé dans $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$.

Le théorème suivant se trouve dans [21].

Théorème 19 On suppose que le domaine de définition de A est dense et $A^* = -A$. Alors A est générateur d'un groupe fortement continu.

Définition 20 Si $z = z_1 + iz_2$; $\operatorname{Re}(z) = z_1$ est la partie réelle de z et $\operatorname{Im}(z) = z_2$ sa partie imaginaire.

Définition 21 L'opérateur A est dissipatif si

$$\operatorname{Re}(A\varphi, \varphi)_{\mathbf{H}} \leq 0, \quad \forall \varphi \in D(A).$$

On appelle ensemble résolvant de A l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(\mathbf{H})\}$$

et

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

le spectre de l'opérateur A .

Théorème 22 Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe sur $\mathbf{H}$ tel qu'il existe $M \geq 1$, et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \geq 0$

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} \leq Me^{\omega t}$$

alors A , générateur infinitésimal de $(S(t))_{t \geq 0}$, vérifie

1. $\rho(A) \supset P_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \omega\}$ et pour tout $\lambda \in P_\omega$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$\|(A - \lambda I)^{-n}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n};$$

2. la résolvante de A est donnée, pour tout $\lambda \in P_\omega$ et $\varphi \in \mathbf{H}$, par la transformation de Laplace

$$(\lambda I - A)^{-1} \varphi = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) \varphi dt;$$

3. on peut retrouver le semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ à partir de son générateur A par la formule

$$S(t) \varphi = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda} \varphi, \quad t \geq 0, \varphi \in \mathbf{H},$$

où $A_\lambda \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ est l'approximation de Yosida définie pour tout $\lambda > \omega$ par

$$A_\lambda = -\lambda A (A - \lambda I)^{-1}.$$

Pour la preuve, voir [71].

Nous allons maintenant donner la notion de contrôlabilité des systèmes dynamiques.

3.2 Contrôlabilité

3.2.1 Contrôlabilité en dimension finie

Système contrôlé

Un système contrôlé est un système différentiel de la forme

$$\dot{X} = f(X, u), \quad X(t) \in \mathbf{M}, \quad u(\cdot) \in \mathbf{U}. \quad (3.2)$$

En général, le vecteur des états $X(t)$ appartient à une variété différentielle $\mathbf{M}$ de dimension n (on supposera ici que $\mathbf{M}$ est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$) et les contrôles $u(\cdot)$ appartiennent à un ensemble admissible $\mathbf{U}$, qui est un ensemble de fonctions localement intégrables définies sur $[0, +\infty)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. On suppose le champ de vecteurs f suffisamment régulier, de sorte que pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbf{M}$ et tout contrôle admissible $u(\cdot) \in \mathbf{U}$, le système (3.2) admette une unique solution $X(t)$ telle que $X(0) = x_0$ et que cette solution soit définie sur $[0, +\infty)$. Le système (3.2) est dit en boucle ouverte.

Définition 23 *Le système contrôlé (3.2) est dit contrôlable en temps T si pour tout x_0 et x_1 dans $\mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $u(t)$ ($t \in [0, T]$) qui permette depuis l'état initial $x(0) = x_0$ d'atteindre l'état $x(T) = x_1$.*

Parmi les objectifs principaux de la théorie du contrôle qui seront abordés dans ce mémoire, il y a les notions de contrôlabilité et de stabilisation. On se propose de définir ces notions et de rappeler les principaux résultats de contrôlabilité et de stabilisation des systèmes linéaires (voir Fig. 3.1) de la forme

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \quad (3.3)$$

où A est une matrice $n \times n$ appelée matrice d'état et B une matrice $n \times m$ appelée matrice de commande.

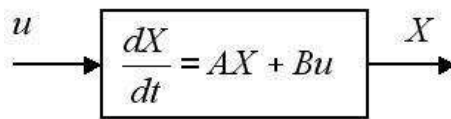


FIGURE 3.1 – Système linéaire

Les solutions de (3.3) sont données par

$$X(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds. \quad (3.4)$$

Il faut noter que de nombreux problèmes physiques sont mieux modélisés par des équations aux dérivées partielles.

Approximation linéaire d'un système contrôlé

Le système linéaire (3.3) s'obtient généralement par linéarisation du système non linéaire (3.2) autour d'un point d'équilibre (X_e, u_e) . En effet, si on pose :

$$\tilde{X} = X - X_e, \quad U = u - u_e, \quad A = \frac{\partial f}{\partial X}(X_e, u_e), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(X_e, u_e) \quad (3.5)$$

on obtient l'équation :

$$\dot{\tilde{X}} = A\tilde{X} + BU + o(\tilde{X}, U) \quad (3.6)$$

Le système linéaire commandé $\dot{\tilde{X}} = A\tilde{X} + BU$ s'appelle alors l'approximation linéaire ou le linéarisé du système non linéaire (3.2).

Condition de Kalman

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité du système autonome (3.3) (le système est autonome si les matrices A et B ne dépendent pas du temps t). Pour la preuve du théorème, voir l'annexe D.

Théorème 24 *Le système (3.3) est contrôlable en temps T (quelconque) si et seulement si la matrice*

$$\mathcal{C} = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) \quad (3.7)$$

est de rang n .

La matrice $\mathcal{C}$ est appelée la matrice de *Kalman*, et la condition $\text{rang}(\mathcal{C}) = n$ est appelée *condition de Kalman*.

Remarque 25 *La condition de Kalman ne dépend ni du temps T ni de l'état x_0 . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T depuis l'état x_0 , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.*

3.2.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires en dimension infinie

Nous rappellerons la théorie générale de contrôlabilité pour des systèmes contrôlés sous la forme canonique

$$\sum_{A,B} : \dot{z} = Az + Bu \quad (3.8)$$

où $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$, $A : D(A) \subset \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ est un opérateur non borné, $B : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{H}$ un opérateur borné, u le contrôle, $\mathbf{H}$ et $\mathbf{U}$ sont des espaces de Hilbert réels ou complexes (espaces de fonctions). On suppose que A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu sur $\mathbf{H}$ et on note ce semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ ou $(e^t A)_{t \geq 0}$.

Concept de contrôlabilité

Pour $z_0 \in \mathbf{H}$, $u \in L^2((0, T), \mathbf{U})$, on considère $z : [0, T] \rightarrow \mathbf{H}$ la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu, \\ z(0) = z_0. \end{cases} \quad (3.9)$$

On rappelle (voir [14] pour plus de détails) que pour tout $z_0 \in D(A)$ et pour tout $u \in W^{1,1}((0, T); \mathbf{U})$, le problème de Cauchy a une unique solution $z \in \mathcal{C}([0, T]; D(A)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbf{H})$ donnée par la formule suivante

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

- Définition 26**
1. $\sum_{A,B}$ est exactement contrôlable au temps T si pour tout $z_0, z_T \in \mathbf{H}$, il existe $u \in L^2((0, T); \mathbf{U})$ tel que la solution z du problème de Cauchy vérifie $z(T) = z_T$.
 2. $\sum_{A,B}$ est zéro contrôlable au temps T si pour tout $z_0 \in \mathbf{H}$, il existe $u \in L^2((0, T); \mathbf{U})$ tel que la solution z du problème de Cauchy vérifie $z(T) = 0$.
 3. $\sum_{A,B}$ est approximativement contrôlable au temps T si pour tout $z_0, z_T \in \mathbf{H}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $u \in L^2((0, T); \mathbf{U})$ tel que la solution z du problème de Cauchy vérifie $\|z(T) - z_T\|_{\mathbf{H}} \leq \varepsilon$.

Si on introduit l'opérateur L_T défini par :

$$L_T : L^2((0, T), \mathbf{U}) \mapsto \mathbf{H}$$

$$u \mapsto \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds$$

alors [76]

1. être exactement contrôlable au temps T est équivalent à $\text{Im} L_T = \mathbf{H}$
2. être zéro contrôlable au temps T est équivalent à $S(T)\mathbf{H} \subset \text{Im} L_T$
3. être approximativement contrôlable au temps T est équivalent à $\overline{\text{Im} L_T} = \mathbf{H}$

En dimension finie (i.e. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$), ces trois concepts sont équivalents, et équivalents à une condition algébrique, la fameuse condition de *Kalman* (théorème 24).

Test de contrôlabilité

On va donner ici des conditions nécessaires et suffisantes pour que le système (3.8) soit exactement contrôlable, zéro contrôlable ou approximativement contrôlable. Les preuves se trouvent dans [76].

Théorème 27 *Le système $\sum_{A,B}$ est exactement contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que*

$$\int_0^T \|B^* S^*(t)y_0\|_{\mathbf{U}}^2 dt \geq c \|y_0\|_{\mathbf{H}}^2$$

pour tout $y_0 \in \mathbf{H}$.

Théorème 28 $\sum_{A,B}$ est zéro contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement s'il existe $c > 0$ telle que :

$$\int_0^T \|B^* S^*(t) y_0\|_{\mathbf{U}}^2 dt \geq c \|S^*(T) y_0\|_{\mathbf{H}}^2$$

pour tout $y_0 \in \mathbf{H}$.

Théorème 29 Le système $\sum_{A,B}$ est approximativement contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement s'il existe pour tout $y_0 \in \mathbf{H}$,

$$(B^* S^*(t) y_0 = 0 \quad \forall t \in [0, T]) \Rightarrow (y_0 = 0). \quad (3.10)$$

La propriété (3.10) s'appelle la *Propriété de Continuation Unique* (PCU) qui est dans [76].

Contrôlabilité de certaines EDPs

Nous rapportons dans le tableau suivant les principales caractéristiques des résultats de contrôlabilité pour des systèmes hyperboliques, dispersifs ou paraboliques avec le contrôle interne (voir table 3.1).

Type d'EDP	Contrôlabilité	Domaine de contrôle	Temps de contrôle
Hyperbolique (ex : équation des ondes)	Exacte	Dépend de Ω	$T \geq T_0$
Dispersive (ex : équation Schrödinger)	Exacte	Dépend de Ω	Pour tout $T > 0$
Parabolique (ex : équation de la chaleur)	Nulle	Pour tout $\omega \subset \Omega$	Pour tout $T > 0$

TABLE 3.1 – Résultats de contrôlabilité pour des EDPs linéaires

Dans ce qui suit on note $z_t = \frac{dz}{dt}$, $z_{tt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$, $z_{xx} = \frac{d^2 z}{dx^2}$ et $z_{xxxx} = \frac{d^4 z}{dx^4}$.

Exemple 30 On va étudier la contrôlabilité au bord de l'équation des ondes, qui modélise la propagation d'une onde d'amplitude z (voir figure 3.2) fixée du côté $x = 0$, à savoir

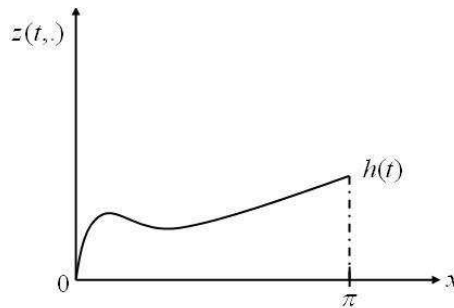


FIGURE 3.2 – Amplitude de l'onde

$$\begin{cases} z_{tt} - z_{xx} = 0, & 0 < t < T, 0 < x < \pi \\ z(t, 0) = 0, & 0 < t < T, \\ z(t, \pi) = h(t), & 0 < t < T, \\ (z(0, \cdot), z_t(0, \cdot)) = (z_0, \dot{z}_0) \end{cases} \quad (3.11)$$

où $h \in L^2(0, T)$ est le contrôle et $(z_0, \dot{z}_0)$ représentent les données initiales. La preuve du résultat suivant pour la contrôlabilité du système (3.11) se trouve dans [76].

Le système (3.11) est exactement contrôlable dans $L^2(0, \pi) \times H^{-1}(0, \pi)$ au temps T si et seulement si $T \geq 2\pi$.

Exemple 31 On va étudier la contrôlabilité de l'équation de poutre, qui modélise la vibration d'une poutre, l'extrémité $x = 0$ est simplement supporté (voir figure 3.3)

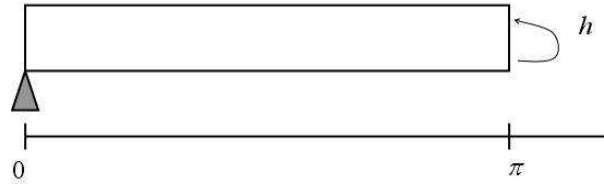


FIGURE 3.3 – Poutre en flexion

$$\begin{cases} z_{tt} + z_{xxxx} = 0, & 0 < t < T, 0 < x < \pi \\ z(t, 0) = z(t, \pi) = z_{xx}(t, 0) = 0, & 0 < t < T, \\ z_{xx}(t, \pi) = h(t), & 0 < t < T, \\ (z(0, \cdot), z_t(0, \cdot)) = (z_0, \dot{z}_0). \end{cases} \quad (3.12)$$

où $z(t, x)$ est de déplacement du flexion, $h \in L^2(0, T)$ le moment de flexion en $x = \pi$ est le contrôle. On va donner un résultat sur la contrôlabilité du système (3.12) dont la preuve se trouve dans [76].

Le système (3.12) est exactement contrôlable dans $\mathbf{H}_0^1(0, \pi) \times \mathbf{H}^{-1}(0, \pi)$ pour tout $T > 0$.

Exemple 32 Nous allons étudier ici des propriétés de contrôlabilité de l'équation de la chaleur, qui modélise l'évolution du profil de température dans une barre homogène. Toutes les températures aux bords ($x = 0$ et $x = L$) sont fixées (voir figure 3.4). Nous considérons le problème de contrôle interne suivant :

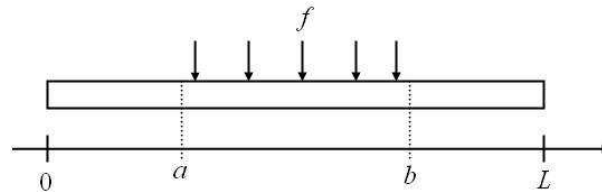


FIGURE 3.4 – Équation de la chaleur pour une barre homogène

$$\begin{cases} z_t - z_{xx} + d(x)z = \chi(a, b)f, \\ z(t, 0) = z(t, L) = 0, \\ z(0, x) = z_0, \end{cases} \quad (3.13)$$

dans lequel la température $z = z(t, x)$ est l'état du système, le terme de source chauffant $f = f(t, x)$ est le contrôle et $d(x)$ le terme de puits. On suppose que $d \in L^\infty(0, L)$, que $f \in L^2((0, T); L^2(a, b))$, et que $z_0 \in L^2(0, L)$. Ici a et b sont deux nombres donnés avec $0 \leq a < b \leq L$.

On va donner un résultat sur la contrôlabilité du système (3.13) dont la preuve se trouve aussi dans [76].

Le système (3.13) est zéro contrôlable dans $L^2(a, b)$ pour tout $T > 0$.

3.3 Stabilisation

Un contrôle en boucle ouverte est une application $t \mapsto u(t)$ d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles. Un contrôle en boucle fermée, appelé aussi une rétroaction ou un bouclage, ou encore un *feedback*, est une application $X \mapsto u(X)$ définie sur les variables d'état du système. Un des objectifs de la théorie du contrôle (voir par exemple [86]) est de déterminer des *feedbacks* qui stabilisent le système autour d'un état d'équilibre.

3.3.1 Stabilité en dimension finie

Considérons le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX, \\ X(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.14)$$

avec A une matrice de taille n . Si $X(0) = 0$, alors quel que soit $t > 0$, on a $X(t) = 0$. Voyons maintenant ce qu'il se passe si

$$X(0) = x_0 \neq 0.$$

Nous allons d'abord donner la définition d'un point d'équilibre.

Définition 33 On suppose que notre système s'écrit sous la forme

$$\dot{X} = f(X), \quad X \in \mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n, \quad (3.15)$$

où $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Le point d'équilibre $\bar{X} \in \mathbf{D}$ est dit point d'équilibre de (3.15) si $f(\bar{X}) = 0$.

Remarque 34 1. Nous nous limiterons à l'étude de systèmes pour des points d'équilibre qui, après un évident changement de coordonnées, peuvent se ramener à l'origine.

2. "Système stable" signifie "Origine du système stable".

Une définition intuitive de la stabilité peut être donnée comme suit. Si le système est initialement "légèrement" perturbé de son point d'équilibre, le système reste "proche" de ce point (voir Fig. 3.5).

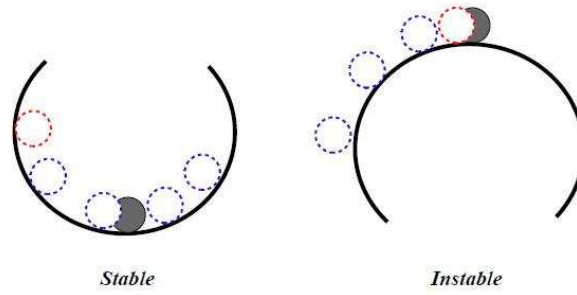


FIGURE 3.5 – Illustration de la définition intuitive de la stabilité

Exemple 35 L'équation différentielle du mouvement du pendule de la figure 3.6 est donnée par :

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - kl\dot{\theta}. \quad (3.16)$$

En posant $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$, on obtient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2. \end{cases} \quad (3.17)$$

Pour trouver les points d'équilibre du système, il suffit de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 0 = x_2, \\ 0 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2. \end{cases} \quad (3.18)$$

Les points d'équilibres sont donnés par $(n\pi, 0)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Physiquement, cela correspond à l'existence de 2 points d'équilibre $(0, 0)$ et $(\pi, 0)$.

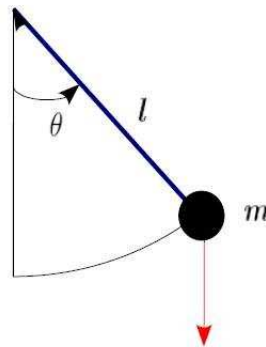


FIGURE 3.6 – Pendule simple

Nous avons la définition suivante

Définition 36 On dit que l'état d'équilibre $\bar{X} = 0$ est stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|X(0)\| < \delta$ implique que pour tout $t > 0$, $\|X(t)\| < \varepsilon$. Si de plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$,

l'état d'équilibre $\bar{X} = 0$ est asymptotiquement stable. Et si pour tout $X(0)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$ alors l'état d'équilibre $\bar{X} = 0$ est dit globalement asymptotiquement stable. Et s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tel que $\|X(t)\| < \alpha \|X(0)\| e^{-\beta t}$ pour tout $t > 0$, alors l'état d'équilibre $\bar{X} = 0$ est dit exponentiellement stable.

La stabilité signifie que, à chaque déviation ε de la solution $X(t)$, correspond une perturbation maximale δ de la condition initiale x_0 . Si le système est asymptotiquement stable, il converge vers son état d'équilibre.

Définition 37 Le point d'équilibre $\bar{X} = 0$ est dit instable s'il n'est pas stable.

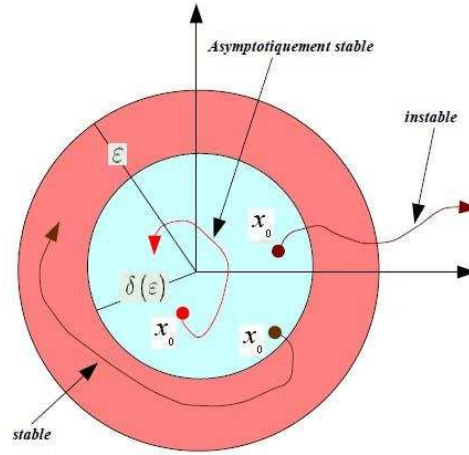


FIGURE 3.7 – Pour mieux comprendre la stabilité

Dans l'exemple 35, le point d'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable. Pour démontrer la stabilité de l'équilibre $(0, 0)$, prenons comme fonction de Lyapunov (pour plus de détails sur les fonctions de Lyapunov voir définition 69 qui se trouve dans l'annexe E)

$$V(x_1, x_2) = \frac{g}{l} (1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2.$$

On a clairement, $V(0) = 0$ et que V est définie positive sur un domaine $-2\pi < x_1 < 2\pi$. De plus la dérivée de V pour le système vaut

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{g}{l} x_2 \sin x_1 - \frac{g}{l} x_2 \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2^2 \leq 0.$$

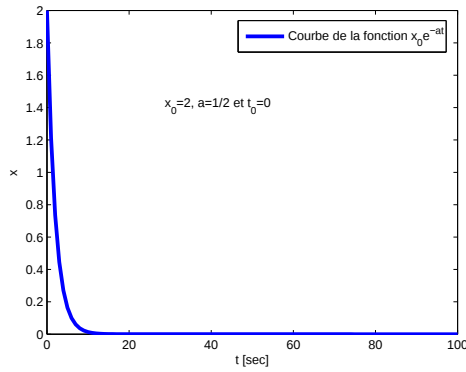
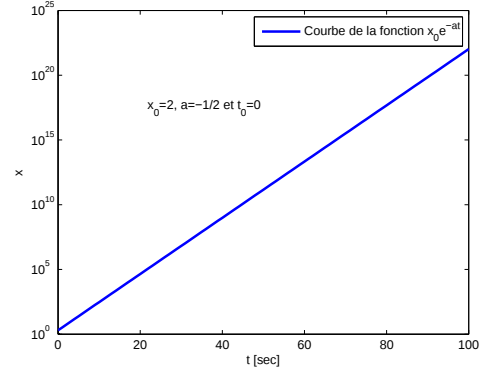
Exemple 38 On considère le système :

$$\dot{X} = -aX, \quad t \geq 0 \text{ et } a > 0.$$

Ce système admet comme solution :

$$X(t) = x_0 e^{-at}, \quad \forall t \geq 0.$$

On a $X(0) = x_0$. On voit aussi que le point d'équilibre $\bar{X} = 0$ est exponentiellement stable (voir Fig. 3.8a). Si le paramètre $a = 0$ le système est stable mais pas asymptotiquement stable. Et dans le cas où le paramètre $a < 0$, il est clair que le système est instable (voir Fig. 3.8b).

(a) La fonction $X(t) = x_0 e^{-at}$ avec $a > 0$ (b) La fonction $X(t) = x_0 e^{-at}$ avec $a < 0$ FIGURE 3.8 – Courbe de la fonction $X(t) = x_0 e^{-at}$

Maintenant, le système en dimension finie (3.14) est considéré avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. On a les deux théorèmes suivants qui se trouvent dans [76].

Théorème 39 *Le point d'origine est asymptotiquement stable ($\Leftrightarrow$ exponentiellement stable) pour le système (3.14) si et seulement si*

$$\sigma(A) \subset \mathbb{C}_- = \{z : \operatorname{Re}(z) < 0\}.$$

De plus on a

$$\sup\{\operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} = \inf\{\mu \in \mathbb{R} : \exists C > 0, \|e^{tA}\| \leq C e^{\mu t} \quad \forall t \geq 0\}.$$

Exemple 40 *On considère le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2. \end{cases} \quad (3.19)$$

On peut aussi écrire ce système sous la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\sigma(A) = \left\{ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\},$$

ce qui implique que le système est asymptotiquement stable ou exponentiellement stable.

Le théorème suivant est connu sous le nom de *théorème de Wonham* en dimension finie [76].

Théorème 41 *Le système (3.3) est contrôlable si et seulement s'il est exponentiellement stabilisable, i.e.*

$$\forall \mu \in (-\infty, 0), \quad \exists K \in \mathbb{C}^{M \times N}, \quad C_k > 0 \quad \left\| e^{t(A+BK)} \right\| \leq C_k e^{\mu t} \quad t \geq 0. \quad (3.21)$$

3.3.2 Stabilité en dimension infinie

Propriétés de stabilité pour des systèmes en dimension infinie

On va supposer ici que A est un générateur d'un semi-groupe continu $(S(t))_{t \geq 0}$ sur $\mathbf{H}$ et considérer les propriétés suivantes :

P1. pour certaines constantes $C > 0$, $\mu > 0$, et pour tout $t \geq 0$, $\|S(t)\| \leq C e^{-\mu t}$;

P2. pour tout $z_0 \in \mathbf{H}$, $S(t)z_0 \rightarrow 0$ exponentiellement quand $t \rightarrow +\infty$;

P3. pour tout $z_0 \in \mathbf{H}$, $\int_0^{+\infty} \|S(t)z_0\|_{\mathbf{H}}^2 dt < +\infty$;

P4. pour tout $z_0 \in \mathbf{H}$, $S(t)z_0 \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$;

P5. $\sup \{ \operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A) \} < 0$.

En dimension finie, ces propriétés sont équivalentes. En dimension infinie, la situation est plus délicate. Le résultat suivant montre les relations entre ces propriétés (Voir [98] pour la preuve).

Théorème 42 *On a les relations suivantes :*

1. $(P1) \iff (P2) \iff (P3)$.
2. *mais on a seulement* $(P1) \implies (P4)$ et $(P1) \implies (P5)$.

Définition 43 *Si (P1), (P2) ou (P3) est vérifiée, alors on dit que le semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable. Quand (P4) est vérifiée, on dit que le semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ est fortement stable.*

Nous passons maintenant à un résultat pour la stabilité forte donné dans [2]

Théorème 44 *(Arendt-Batty) Si $(S(t))_{t \geq 0}$ est borné et $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$, alors $(S(t))_{t \geq 0}$ est fortement stable.*

La condition $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ n'est pas nécessaire pour que le semi-groupe soit fortement stable. Voici un exemple :

Exemple 45 *Soit $Au = \frac{du}{dt}$ avec comme domaine $D(A) = \mathbf{H}^1(0, +\infty)$ et $\mathbf{H} = L^2(0, +\infty)$. Alors A est le générateur d'un semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ défini par $S(t)u(\xi) = u(\xi + t)$. $(S(t))_{t \geq 0}$ est fortement stable car :*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} |S(t)u(\xi)|^2 dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} |u(\xi + t)|^2 d\xi, \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{+\infty} |u(s)|^2 ds = 0, \end{aligned}$$

car $u \in L^2(0, +\infty)$. On a aussi $i\mathbb{R} \subset \sigma(A)$, car pour tout $\lambda \in \rho(A)$ et pour tout $f \in \mathbf{H}$, il existe un unique $u \in D(A)$ tel que $(A - \lambda I)^{-1}f = u$. Ainsi $(A - \lambda I)u = f$ implique que $Au - \lambda u = f$ donc $\dot{u} - \lambda u = f$. La solution de cette équation différentielle est :

$$u(\xi) = \left(\int_0^\xi e^{-\lambda t} f(t) dt \right) e^{\lambda \xi}.$$

Donc si on prend $f = e^{-t+iat}$ et $\lambda = ia$, on a

$$u(\xi) = \left(\int_0^\xi e^{-t} dt \right) e^{ia\xi}.$$

Il vient $|u(\xi)| = 1 - e^{-\xi}$ et $|u(\xi)|^2 = 1 - 2e^{-\xi} + e^{-2\xi} \notin L^1(0, +\infty)$. Donc $\lambda \notin \rho(A)$.

Nous allons maintenant donner le théorème de Huang-Pruss qui se trouve dans [43] et [75].

Théorème 46 (Huang-Pruss) *On suppose que $(S(t))_{t \geq 0}$ est borné. Alors $(S(t))_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ et $\sup_{\beta \in \mathbb{R}} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < +\infty$.*

En conclusion, on rappelle le théorème de Liu-Rao donné dans [55].

Théorème 47 (Liu-Rao) *On suppose que $(S(t))_{t \geq 0}$ est borné, $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$, et que pour un certain nombre $s > 0$,*

$$\sup_{|\beta| \geq 1} \frac{1}{|\beta|^s} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < +\infty.$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^$, il existe une constante $C_k > 0$ telle que*

$$\|S(t)z\|_H \leq C_k \left(\frac{\ln t}{t} \right)^{\frac{k}{s}} (\ln t) \|z\|_{D(A^k)}, \quad \forall z \in D(A^k)$$

où $A^k = \underbrace{A \circ A \circ \dots \circ A}_{k \text{ fois}}$.

Stabilisation des systèmes linéaires en dimension infinie

Pour tout opérateur borné $K \in \mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{U})$, on définit l'opérateur $A_K z = Az + BKz$ avec le domaine $D(A_K) = D(A)$, et $(S_K(t))_{t \geq 0}$ le semi-groupe généré par A_K , i.e. $S_K(t) = e^{t(A+BK)}$.

Définition 48 *On dit que le système de commande (3.8) est*

1. *exponentiellement stabilisable s'il existe $K \in \mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{U})$ tel que l'opérateur A_K est exponentiellement stable; i.e. il existe $C_k > 0$, $\mu > 0$, tels que*

$$\|S_K(t)\| \leq C_k e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

2. *complètement stabilisable si pour $\mu \in \mathbb{R}$ arbitraire, il existe $K \in \mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{U})$ et une constante $C_k > 0$ tels que*

$$\|S_K(t)\| \leq C_k e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Le résultat suivant est donné dans [22] (voir aussi [98, Théorème 3.3]) et relie la contrôlabilité et la stabilisation.

Théorème 49 *Si le système (3.8) est zéro contrôlable, alors il est exponentiellement stabilisable.*

Le théorème suivant donne une version en dimension infinie du théorème de Wonham (Voir [76] pour plus de détails).

Théorème 50 *On suppose que A est générateur d'un groupe $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\sum_{A,B}$ est exactement contrôlable au temps $T > 0$;
2. $\sum_{A,B}$ est zéro contrôlable au temps $T > 0$;
3. $\sum_{A,B}$ est complètement stabilisable.

Pour les opérateurs anti-adjoints, nous avons le résultat suivant.

Corollaire 51 ([54, Théorème 2.3]) *On va supposer que A est un opérateur anti-adjoint. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\sum_{A,B}$ est exactement contrôlable au temps $T > 0$;
2. $\sum_{A,B}$ est zéro contrôlable au temps $T > 0$;
3. $\sum_{A,B}$ est complètement stabilisable ;
4. $\sum_{A,B}$ est exponentiellement stabilisable ;
5. Pour chaque opérateur auto-adjoint défini positif $S \in \mathcal{L}(\mathbf{U})$, l'opérateur $A - BSB^*$ est un générateur d'un semi-groupe exponentiellement stable dans $\mathbf{H}$.

Exemple 52 *On considère l'équation des poutres suivante [76]*

$$\begin{cases} w'' + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \tilde{a}(x)u, & 0 < t < T, 0 < x < 1 \\ w(t, 0) = w(t, 1) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, 0) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, 1) = 0, & 0 < t < T \\ (w(0, \cdot), w_t(0, \cdot)) = (w_0, w_1). \end{cases} \quad (3.22)$$

On suppose que $\mathbf{H} = \mathbf{U} = L^2(0, 1)$, $u \in \mathbf{U}$, $L = \frac{\partial^4}{\partial x^4}$ de domaine de définition

$$D(L) = \left\{ z \in H^4(0, 1) : z, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \in H_0^1(0, 1) \right\}$$

et $\tilde{a} \in L^\infty(0, 1)$ tel que $\tilde{a}\mathbf{H} \subset \mathbf{H}$. L'opérateur L est défini positif et auto-adjoint, donc il admet une racine carrée. En effet $\forall v \in \mathbf{H}$:

$$(Lv, v)_{\mathbf{H}} = \int_0^1 Lv v dx = \int_0^1 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} v dx = - \int_0^1 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|^2 dx \geq 0$$

Comme

$$\begin{aligned} (Lv_1, v_2) &= \int_0^1 \frac{\partial^4 v_1}{\partial x^4} v_2 dx = - \int_0^1 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} \frac{\partial v_2}{\partial x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} dx = - \int_0^1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3} dx = \int_0^1 v_1 \frac{\partial^4 v_2}{\partial x^4} dx = (v_1, Lv_2) \end{aligned}$$

il vient $L^* = L$. On a $D\left(L^{\frac{1}{2}}\right) = H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$. On introduit l'espace $\widehat{\mathbf{H}} = D\left(L^{\frac{1}{2}}\right) \times \mathbf{H}$ muni d'un produit scalaire

$$((f_1, g_1), (f_2, g_2))_{\widehat{\mathbf{H}}} = \left(L^{\frac{1}{2}}f_1, L^{\frac{1}{2}}f_2\right)_{\mathbf{H}} + (g_1, g_2)_{\mathbf{H}}.$$

Le système (3.22) peut s'écrire sous la forme canonique (3.8), avec $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -L & 0 \end{bmatrix}$ de domaine de définition $D(A) = D(L) \times D\left(L^{\frac{1}{2}}\right)$ et $B \in \mathcal{L}(\mathbf{U}, \widehat{\mathbf{H}})$ défini par $Bu = (0, \tilde{a}u)$. L'opérateur A est anti-adjoint. En effet, pour tout $v = (v_1, v_2)$ et $w = (w_1, w_2)$ dans $\widehat{\mathbf{H}}$ on a

$$\begin{aligned} (v, Aw)_{\widehat{\mathbf{H}}} &= ((v_1, v_2), (w_2, -Lw_1))_{\widehat{\mathbf{H}}} = \left(L^{\frac{1}{2}}v_1, L^{\frac{1}{2}}w_2\right)_{\mathbf{H}} + (v_2, -Lw_1)_{\mathbf{H}} \\ &= \int_0^1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} dx - \int_0^1 v_2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} dx \\ &= \int_0^1 \frac{\partial^4 v_1}{\partial x^4} w_2 dx - \int_0^1 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} dx = - \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} dx - \int_0^1 \frac{\partial^4 v_1}{\partial x^4} w_2 dx \right) \\ &= -(Av, w)_{\widehat{\mathbf{H}}} \end{aligned}$$

ce qui implique que $A^* = -A$. On a aussi

$$(Bv, w)_{\widehat{\mathbf{H}}} = ((0, \tilde{a}v), (w_1, w_2))_{\widehat{\mathbf{H}}} = \left(L^{\frac{1}{2}}0, L^{\frac{1}{2}}w_1\right)_{\mathbf{H}} + (\tilde{a}v, w_2)_{\mathbf{H}} = (v, \tilde{a}w_2)_{\mathbf{H}} = (v, B^*w)_{\mathbf{H}}$$

donc $B^*w = \tilde{a}w_2$, pour tout $w = (w_1, w_2) \in \widehat{\mathbf{H}}$. Comme le système (3.22) est exactement contrôlable et d'après la propriété 5 du Corollaire 51, si on prend $S = I \in \mathcal{L}(\mathbf{U})$ qui est un opérateur auto-adjoint défini positif, alors l'opérateur $A - BSB^* = A - BB^*$ est un générateur d'un semi-groupe exponentiellement stable et

$$BB^*w = BB^*(w_1, w_2) = B\tilde{a}w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{a}^2w_2 \end{pmatrix}$$

donc $BB^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}^2 \end{bmatrix}$ et

$$A - BB^* = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -L & -\tilde{a}(x)^2 \end{bmatrix}.$$

Ceci implique que le système

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -L & -\tilde{a}(x)^2 \end{bmatrix} v$$

est exponentiellement stable pour tout $v \in \widehat{\mathbf{H}}$.

Donc on a pu construire un contrôle $u = -B^*v \in \mathbf{U}$, pour tout $v \in \widehat{\mathbf{H}}$ tel que le système (3.22) soit exponentiellement stable.

3.4 Quelques méthodes de stabilisation des systèmes décrits par des EDPs

3.4.1 Panorama des méthodes

Dans cette sous-section, deux méthodes de stabilisation pour des systèmes dynamiques décrits par des EDPs en dimension infinie sont données. Dans un premier temps, un contrôleur

de type proportionnel qui est une généralisation de l'action proportionnelle en dimension finie (voir [21] pour plus de détails) est présenté. L'inconvénient de ce contrôleur est qu'il n'est pas applicable sur tous les systèmes dynamiques. On ne peut l'appliquer que sur des systèmes dynamiques de dimension infinie qui sont exactement contrôlables (voir la Définition 26).

Dans un deuxième temps, c'est le contrôleur par mode glissant appliqué aux EDPs en dimension infinie qui est présenté. Ce type de contrôle ne s'applique que pour des systèmes d'EDPs exponentiellement stabilisables. De plus, le contrôle par mode glissant se caractérise par des propriétés de robustesse, en particulier vis-à-vis des variations des paramètres du système et des incertitudes sur le modèle. De plus amples détails sur les modes glissants peuvent être trouvés dans [28], [72] et [87].

Il existe aussi d'autres approches en dimension infinie pour des EDPs, notamment une approche qui ne s'applique que pour des systèmes de type Pritchard-Salamon (voir [37] et [45] pour plus de détails). Dans [47] et [48], c'est l'approche $\mathcal{H}_\infty$ qui a été appliquée sur les systèmes Pritchard-Salamon, où la loi de contrôle est déterminée par une résolution d'une équation algébrique dite équation de Riccati en dimension infinie.

Pour l'approche $\mathcal{H}_\infty$ on peut parcourir les ouvrages suivants [25], [26] et [30]. Dans [32], c'est l'approche $\mathcal{H}_\infty$ qui a été utilisée pour le contrôle des systèmes semi-linéaires en dimension infinie de type parabolique et hyperbolique et dans [11], c'est la commande proportionnelle et proportionnelle intégrale qui a été mise en oeuvre pour des systèmes linéaires de type Salamon-Weiss en dimension infinie. Pour plus de détails sur les systèmes de type Salamon-Weiss, on peut consulter les ouvrages [77], [84] et [90].

3.4.2 Grammien de contrôlabilité et stabilisation exponentielle rapide

Nous expliquons ici comment utiliser l'approche du grammien de contrôlabilité pour la stabilisation des systèmes de contrôle linéaires en dimension infinie. L'approche du grammien de contrôlabilité pour des systèmes de contrôle linéaires en dimension infinie est due à

1. Marshall Slemrod [80], dans le cas où l'opérateur de contrôle B est borné (i.e. l'opérateur B est continu de $\mathbf{U}$ dans $\mathbf{H} \subset D(A^*)'$),
2. Vilmos Komornik [51], dans le cas où l'opérateur de contrôle B est non borné.

Le résultat suivant se trouve dans [21].

Soit $B \in \mathcal{L}(\mathbf{U}, D(A^*)')$. On va supposer la propriété de régularité suivante (voir [21, Chapitre 2, p.52]) :

$$\forall \tau > 0, \exists C_\tau > 0 : \int_0^\tau \|B^* S^*(t) z\|_{\mathbf{U}}^2 dt \leq C_\tau \|z\|_{\mathbf{H}}^2, \quad \forall z \in D(A^*). \quad (3.23)$$

Le système de commande qu'on va considérer ici est

$$\dot{y} = Ay + Bu, \quad t \in [0, T] \quad (3.24)$$

où t est le temps, $u(t) \in \mathbf{U}$ le contrôle et $y(t) \in \mathbf{H}$ l'état. La définition de la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + Bu; \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

avec $y_0 \in \mathbf{H}$ et $u \in L^2(0, T)$, est dans [21, définition 2.36, page 53]. Soit $T > 0$. On rappelle que (voir Théorème 27) ce système linéaire est exactement contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que

$$\int_0^T \|B^* S^*(t) z\|_{\mathbf{U}}^2 dt \geq c \|z\|_{\mathbf{H}}^2, \quad \forall z \in D(A^*). \quad (3.25)$$

Dans cette section, nous supposons que le système contrôlé linéaire $\dot{y} = Ay + Bu$ est exactement contrôlable au temps T . D'après ce qui précède, (3.25) est vérifiée pour tout $c > 0$. Soit $\lambda > 0$. Notre but est de construire une loi de contrôle $u = Ky$, avec $K : y \mapsto Ky$ pour que le système $\dot{y} = (A + BK)y$ soit exponentiellement stable, c'est-à-dire l'existence d'un certain $M > 0$, tel que toute solution de $\dot{y} = (A + BK)y$ satisfait

$$\|y(t)\|_{\mathbf{H}} \leq M e^{-\lambda t} \|y(0)\|_{\mathbf{H}}, \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (3.26)$$

Soit

$$T_\lambda = T + \frac{1}{2\lambda} \quad (3.27)$$

et $f_\lambda : [0, T_\lambda] \rightarrow [0, +\infty)$ définie comme suit

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} e^{-2\lambda t} & \text{si } 0 \leq t \leq T, \\ 2\lambda e^{2\lambda T} (T_\lambda - t) & \text{si } T \leq t \leq T_\lambda. \end{cases} \quad (3.28)$$

Soit Q_λ une forme bilinéaire, symétrique, continue sur $D(A^*)$ définie comme suit

$$Q_\lambda(y, z) = \int_0^{T_\lambda} f_\lambda(t) (B^* S(-t)^* y, B^* S(-t)^* z) dt, \quad \forall (y, z) \in D(A^*)^2. \quad (3.29)$$

En utilisant (3.23) et

$$S(-t)^* = S(T_\lambda - t)^* S(-T_\lambda)^*, \quad \forall t \in [0, T_\lambda],$$

on a

$$\begin{aligned} Q_\lambda(y, z) &= \int_0^{T_\lambda} f_\lambda(t) (B^* S^*(-t) y, B^* S^*(-t) z) dt; \\ &\leq \int_0^{T_\lambda} f_\lambda(t) \|B^* S^*(-t) y\| \|B^* S^*(-t) z\| dt; \\ &\leq \sup_{[0, T_\lambda]} f_\lambda(t) \int_0^{T_\lambda} \|B^* S(T_\lambda - t)^* S(-T_\lambda)^* y\|_{\mathbf{U}} \|B^* S(T_\lambda - t)^* S(-T_\lambda)^* z\|_{\mathbf{U}} dt; \\ &= \sup_{[0, T_\lambda]} f_\lambda(t) \int_0^{T_\lambda} \|B^* S(s)^* S(-T_\lambda)^* y\|_{\mathbf{U}} \|B^* S(s)^* S(-T_\lambda)^* z\|_{\mathbf{U}} ds, \quad s = T_\lambda - t; \\ &\leq \sup_{[0, T_\lambda]} f_\lambda(t) \left(\int_0^{T_\lambda} \|B^* S(s)^* S(-T_\lambda)^* y\|_{\mathbf{U}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{T_\lambda} \|B^* S(s)^* S(-T_\lambda)^* z\|_{\mathbf{U}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}; \\ &\leq \sup_{[0, T_\lambda]} f_\lambda(t) C_\lambda \|S(-T_\lambda)^* y\|_{\mathbf{H}} \|S(-T_\lambda)^* z\|_{\mathbf{H}}; \\ &\leq \sup_{[0, T_\lambda]} f_\lambda(t) C_\lambda \|S(-T_\lambda)^*\|^2 \|y\|_{\mathbf{H}} \|z\|_{\mathbf{H}}. \end{aligned}$$

Donc si on pose

$$M_\lambda = \sup_{[0, T_\lambda]} f_\lambda(t) C_\lambda \|S(-T_\lambda)^*\|^2 > 0,$$

il vient

$$|Q_\lambda(y, z)| \leq M_\lambda \|y\|_H \|z\|_H, \quad \forall (y, z) \in D(A^*)^2. \quad (3.30)$$

Par le théorème de représentation de Riesz, il existe $C_\lambda \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$Q_\lambda(y, z) = (y, C_\lambda z), \quad \forall (y, z) \in H^2. \quad (3.31)$$

On note que

$$S(-t)^* = S(T-t)^* S(-T)^*, \quad \forall t \in [0, T_\lambda], \quad (3.32)$$

$$S(-T)^* S(T)^* y = y, \quad \forall y \in H. \quad (3.33)$$

En utilisant (3.25), (3.28), (3.29), (3.32) et (3.33), on a

$$\begin{aligned} Q_\lambda(y, y) &= \int_0^{T_\lambda} f_\lambda(t) (B^* S(-t)^* y, B^* S(-t)^* y) dt; \\ &= \int_0^{T_\lambda} f_\lambda(t) (B^* S(-t)^* S(-T)^* S(T)^* y, B^* S(-t)^* S(-T)^* S(T)^* y) dt; \\ &= \int_0^{T_\lambda} f_\lambda(t) (B^* S(T-t)^* S(-T)^* y, B^* S(T-t)^* S(-T)^* y) dt; \\ &= \int_{-\frac{1}{2\lambda}}^{T_\lambda} f_\lambda(T-s) (B^* S(s)^* S(-T)^* y, B^* S(s)^* S(-T)^* y) ds; \quad s = T-t \\ &= \int_{-\frac{1}{2\lambda}}^{T_\lambda} f_\lambda(T-s) \|B^* S(s)^* S(-T)^* y\|_{\mathbf{U}}^2 ds; \\ &\geq \int_0^T f_\lambda(T-s) \|B^* S(s)^* S(-T)^* y\|_{\mathbf{U}}^2 ds, \quad \text{puisque } \left[-\frac{1}{2\lambda}, T_\lambda\right] \supset [0, T]; \\ &\geq e^{-2\lambda T} \int_0^T \|B^* S(s)^* S(-T)^* y\|_{\mathbf{U}}^2 ds; \\ &\geq e^{-2\lambda T} c \|S(-T)^* y\|_{\mathbf{H}}^2; \\ &\geq e^{-2\lambda T} c \|S(T)^*\|^{-2} \|y\|_{\mathbf{H}}^2. \end{aligned}$$

Donc

$$Q_\lambda(y, y) \geq e^{-2\lambda T} c \|S(T)^*\|^{-2} \|y\|_{\mathbf{H}}^2, \quad \forall y \in \mathbf{H}. \quad (3.34)$$

D'après le théorème de Lax Milgram, (3.31) et (3.34), $C_\lambda \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathbf{H})$.

On va maintenant définir l'opérateur K pour qu'on puisse construire le contrôle. Soit

$$K_\lambda : C_\lambda(D(A^*)) \rightarrow \mathbf{U}$$

défini comme suit :

$$K_\lambda y = -B^* C_\lambda^{-1} y, \quad \forall y \in C_\lambda(D(A^*)). \quad (3.35)$$

On a alors le théorème suivant, donné dans [51].

Théorème 53 *L'opérateur $A + BK_\lambda$ est un générateur d'un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$. De plus il existe $M > 0$ tel que*

$$\|S(t)y_0\|_H \leq Me^{-\lambda t} \|y_0\|_H, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall y_0 \in \mathbf{H}.$$

Ce théorème montre que le système (3.24) est exponentiellement stable.

3.4.3 Commande par mode glissant

Nous donnons une méthode pour construire une loi de contrôle par mode glissant pour une classe de systèmes dynamiques en dimension infinie [65]. Ces systèmes s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A\xi + f(t, \xi) + b u(t, \xi) \\ \xi(0) = \xi_0 \in D(A), \end{cases} \quad (3.36)$$

où A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $T_A(t)$ sur $\mathbf{H}$, exponentiellement stable, et $b \in \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{H})$. La fonction $f(t, \xi)$ à valeurs dans $\mathbf{H}$ représente la perturbation du système, cette fonction est supposée différentiable et vérifie la condition suivante:

$$f(t, \xi) = b h(t, \xi) \quad (3.37)$$

où la fonction $h(t, \xi)$, a priori connue, est majorée par une fonction scalaire $N(\xi) \in C^1$, i.e.

$$\|h(t, \xi)\|_{\mathbf{U}} < N(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbf{H}, \quad t > 0. \quad (3.38)$$

Tout au long de ce paragraphe, nous supposons que le couple $\{A, b\}$ est exponentiellement stabilisable et le spectre $\sigma(A) = \sigma_1(A) \cup \sigma_2(A)$ de l'opérateur A est divisé en deux parties : la première

$$\sigma_1(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\},$$

est de dimension finie, et l'autre partie

$$\sigma_2(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda < 0\},$$

est un ouvert. Rappelons que le couple $\{A, B\}$ du système (3.8) est exponentiellement stabilisable s'il existe $D \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ tel que l'opérateur $A + BD$ soit générateur infinitésimal d'un semi-groupe exponentiellement stable.

Soient P_1 et P_2 les projections sur les ensembles $\sigma_1(A)$, $\sigma_2(A)$ respectivement, et $\mathbf{H}_j = P_j \mathbf{H}$, $j = 1, 2$. Alors (voir [38, Sec. 1.5])

1. $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2$, et $A\mathbf{H}_j \subset \mathbf{H}_j$, $j = 1, 2$;
2. l'opérateur $A_1 = A|_{\mathbf{H}_1}$ est de dimension finie, i.e. $\mathbf{H}_1 = \mathbb{R}^n$;
3. l'opérateur $A_2 = A|_{\mathbf{H}_2}$ est générateur d'un semi-groupe exponentiellement stable $T_{A_2}(t)$ qui vérifie

$$\|T_{A_2}(t)\| \leq \omega e^{-\beta t}, \quad \omega > 0. \quad (3.39)$$

Si l'ensemble résolvant de l'opérateur A est compact, alors le spectre de A est discret, i.e. $\sigma(A) = \{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$, et pour tout $\beta > 0$ il existe un nombre entier naturel l tel que $\sigma_2(A) =$

$\{\lambda_i\}_{i=l}^\infty < -\beta$. Pour décrire le contrôle en dimension infinie, on va écrire (3.36) avec des variables $\xi_1 \in \mathbf{H}_1$ et $\xi_2 \in \mathbf{H}_2$,

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + P_1 f(t, \xi_1, \xi_2) + P_1 b u(t, \xi_1, \xi_2), & t \geq 0, & \xi_1(0) = \xi_1^0; \\ \dot{\xi}_2 = A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + P_2 f(t, \xi_1, \xi_2) + P_2 b u(t, \xi_1, \xi_2), & t \geq 0, & \xi_2(0) = \xi_2^0. \end{cases} \quad (3.40)$$

Ici $\xi_1 + \xi_2 = \xi$, $\xi_1^0 + \xi_2^0 = \xi^0$, P_i est la projection sur le sous espace $\mathbf{H}_i$, $A_{ij} = P_i A_j$ est un opérateur de $\mathbf{H}_j$ dans $\mathbf{H}_i$, $A_j = A|_{\mathbf{H}_j}$ est la restriction de A sur $\mathbf{H}_j$, $i, j = 1, 2$. Les propriétés de l'opérateur A permettent de réécrire le système (3.40) de la manière suivante

$$\dot{\xi}_1 = A_1 \xi_1 + P_1 f(t, \xi_1, \xi_2) + P_1 b u(t, \xi_1, \xi_2), \quad t > 0, \quad \xi_1(0) = \xi_1^0 \quad (3.41)$$

$$\dot{\xi}_2 = A_2 \xi_2 + P_2 f(t, \xi_1, \xi_2) + P_2 b u(t, \xi_1, \xi_2), \quad t > 0, \quad \xi_2(0) = \xi_2^0. \quad (3.42)$$

On rappelle que dans le système (3.40), $A_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, $i, j = 1, 2$ car $A\mathbf{H}_j \subset \mathbf{H}_j$. On signale que $P_1 b \in \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{R}^n)$, et la codimension du sous-espace

$$\mathbf{U}_2 = \ker P_1 b = \{u \in \mathbf{U} : P_1 b u = 0\}$$

est égale à l (voir [50]). On rappelle que la codimension d'un sous-espace vectoriel est la dimension d'un de ses sous-espaces supplémentaires. Donc il existe un sous-espace de dimension finie $\mathbf{U}_1 = \mathbf{R}^m$ tel que $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \oplus \ker P_1 b$, et d'après (3.37), l'équation en dimension finie (3.41) donne

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= A_1 \xi_1 + P_1 b h(t, \xi) + P_1 b u(t, \xi) \\ &= A_1 \xi_1 + P_1 b (h_1(t, \xi) + h_2(t, \xi)) + P_1 b (u_1(t, \xi) + u_2(t, \xi)) \\ &= A_1 \xi_1 + P_1 b h_1(t, \xi) + P_1 b u_1(t, \xi) \\ &= A_1 \xi_1 + P_1 b [h_1(t, \xi) + u_1(t, \xi)] \end{aligned}$$

donc

$$\dot{\xi}_1 = A_1 \xi_1 + B_1 [h_1(t, \xi) + u_1(t, \xi)] \quad (3.43)$$

avec $h(t, \xi, t) = h_1(t, \xi) + h_2(t, \xi)$, et

$$u(t, \xi) = u_1(t, \xi) + u_2(t, \xi) \quad (3.44)$$

avec $h_1(t, \xi) \in \mathbf{U}_1$, $h_2(t, \xi) \in \mathbf{U}_2$, $u_1(t, \xi) \in \mathbf{U}_1$, $u_2(t, \xi) \in \mathbf{U}_2$ et $B_1 = P_1 b|_{\mathbf{U}_1}$. Le couple $\{A_1, B_1\}$ est contrôlable, car $\{A, b\}$ est contrôlable. Par contre, il n'est pas exponentiellement stabilisable. La solution du problème de rejet de perturbation avec le contrôle est basée sur les modes glissants. La procédure de conception pour des systèmes de contrôle en dimension finie proposée dans [88, Chap. 10] nous permet de choisir la variété $C\xi_1 = 0$, $C \in \mathbf{R}^{m \times l}$, $\det CB_1 \neq 0$ qui assure la stabilité exponentielle

$$\|\xi_1(t)\| \leq \omega \|\xi_1(T)\| e^{-\alpha t}, \quad t \geq T \quad (3.45)$$

du système en dimension finie (3.43) à partir d'un certain temps $T > 0$, avec le contrôle

$$u_1(t, \xi) = -[N(\xi) + L\|\xi_1\|] \frac{C\xi_1}{\|C\xi_1\|} \quad (3.46)$$

où α , ω , L sont des constantes positives avec α aussi grand qu'on veut, et la matrice C est constante (voir l'annexe E.1). Le contrôle discontinu $u_1(t, \xi)$ est défini pour assurer la

convergence vers la surface $C\xi_1 = 0$. Cette commande permet aussi de rejeter les perturbations $h_1(t, \xi)$. Sur la variété $C\xi_1 = 0$, on a d'après (3.43)

$$C\dot{\xi}_1 = CA_1\xi_1 + CB_1[h_1(t, \xi) + u_1(t, \xi)]$$

puisque $C\dot{\xi}_1 = 0$. On peut donc déduire la valeur de u dans cette équation

$$\begin{aligned} CA_1\xi_1 + CB_1[h_1(t, \xi) + u_1(t, \xi)] &= 0 \\ h_1(t, \xi) + u_1(t, \xi) &= -(CB_1)^{-1}CA_1\xi_1 \end{aligned}$$

ainsi

$$u_{1eq} = -(CB_1)^{-1}CA_1\xi_1 - h_1(t, \xi). \quad (3.47)$$

Avec ce nouveau contrôle, l'équation (3.43) devient

$$\dot{\xi}_1 = [A_1 - B_1(CB_1)^{-1}CA_1]\xi_1. \quad (3.48)$$

La commande u_{1eq} est la commande équivalente de u_1 , elle caractérise la dynamique du système en mode glissant. Pour l'équation (3.42), on a

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= A_2\xi_2 + P_2b[h(t, \xi) + u(t, \xi)] \\ &= A_2\xi_2 + P_2b[h_1(t, \xi) + u_1(t, \xi)] + P_2b[h_2(t, \xi) + u_2(t, \xi)]. \end{aligned}$$

Finalement, (3.42) devient

$$\dot{\xi}_2 = A_2\xi_2 - B_{21}(CB_1)^{-1}CA_1\xi_1 + B_2[h_2(t, \xi) + u_2(t, \xi)], \quad t \geq T \quad (3.49)$$

où $B_{21} = P_2b|_{\mathbf{U}_1}$, $B_2 = P_2b|_{\mathbf{U}_2}$. D'après (3.39) et (3.45), les systèmes (3.48) et (3.49) sous les conditions $u = f = 0$ sont exponentiellement stables. Il reste à utiliser les résultats qui se trouvent dans [65, Section II] pour rejeter la perturbation $h_2(t, \xi)$. Soit $W_{A_2} = \int_0^{+\infty} T_{A_2}^*(t)T_{A_2}(t)dt$. Nous définissons la deuxième composante de $u(t, \xi)$ par

$$u_2(t, \xi) = -N(\xi) \frac{B_2^*W_{A_2}\xi_2}{\|B_2^*W_{A_2}\xi_2\|}. \quad (3.50)$$

Donc on a prouvé le théorème suivant.

Théorème 54 *On suppose que le couple $\{A, B\}$ est exponentiellement stabilisable. Alors le système (3.36) est exponentiellement stabilisable par les contrôles (3.44), (3.46), et (3.50) avec les perturbations (3.37) et (3.38).*

Cette méthode sera utilisée pour le système de contrôle du profil de courant dans le chapitre 4.

3.5 Application à la stabilisation de quelques systèmes physiques

3.5.1 Étude complète d'une situation linéaire

Pour cet exemple qui se trouve dans [20], nous allons nous intéresser au contrôle frontière de l'équation de Korteweg-De Vries (KdV). Plus précisément, un contrôle de type proportionnel est utilisé comme dans la sous-section 3.4.2. Nous étudions le système suivant

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = 0, \\ y(t, 0) = y(t, L) = 0, \\ y_x(t, L) - y_x(t, 0) = v(t). \end{cases} \quad (3.51)$$

où $y(t, \cdot) : [0, L] \mapsto \mathbb{R}$ est l'état est du système et $v(t) \in \mathbb{R}$ est le contrôle avec $L > 0$ fixé. Ces équations modélisent la formation d'ondes solitaires dans le contexte d'eaux peu profondes dans un canal.

En introduisant une nouvelle variable de contrôle u définie par

$$u(t) = y_x(t, 0) + v(t),$$

nous pouvons réécrire le système (3.51) sous la forme canonique (3.8) en définissant les opérateurs A et B comme suit :

$$D(A) := \{w \in \mathbf{H}^3(0, L) : w(0) = w(L) = 0, w_x(0) = w_x(L)\} \subset L^2(0, L),$$

$$Aw := -w_x - w_{xxx},$$

$$B : s \in \mathbb{R} \mapsto L_s \in (D(A^*))',$$

$$L_s : z \in D(A^*) \mapsto sz_x(L) \in \mathbb{R}.$$

Il n'est pas difficile de voir que $A^* = -A$ et que

$$(Aw, w)_{L^2(0, L)} = 0, \quad \forall w \in D(A).$$

Par conséquent, l'opérateur A est générateur infinitésimal fortement continu d'un semi-groupe. Nous voyons également que l'opérateur B est linéaire continu. Les relations (3.23) et (3.25) pour le système (3.51) sont montrées dans [20]. La contrôlabilité exacte de (3.51) est également prouvée. Alors, d'après les résultats développés dans la sous-section 3.4.2, l'opérateur Λ_ω défini par

$$(\Lambda_\omega z_1, z_2)_{L^2(0, L)} = \int_0^\infty \left(B^* e^{-\tau(A+\omega I)^*} z_1, B^* e^{-\tau(A+\omega I)^*} z_2 \right)_{\mathbb{R}} d\tau, \quad \forall z_1, z_2 \in L^2(0, L),$$

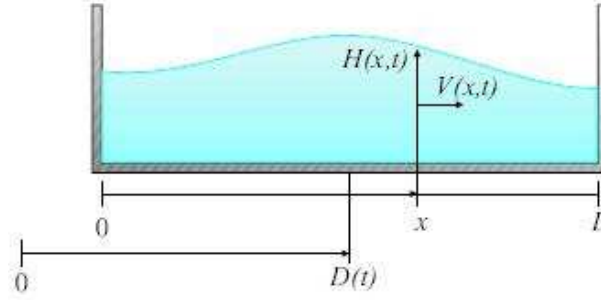
permet de définir le contrôle qui stabilise exponentiellement le système (3.51). La loi de contrôle est donnée par $u = F_\omega y$ avec

$$F_\omega := -B^* \Lambda_\omega^{-1}.$$

3.5.2 Étude complète d'un exemple non linéaire

Nous étudions maintenant la stabilisabilité d'un système qui se trouve dans [73]. Il s'agit d'un bac de fluide soumis à un déplacement longitudinal. Le mouvement du fluide est modélisé par les équations de Saint-Venant (voir par exemple [82, P. 26] et [69]). Une fonction de Lyapunov est utilisée pour construire les lois de contrôle qui stabilisent l'état du fluide dans le bac.

Les équations d'eau peu profonde décrivent le mouvement d'un fluide parfait sous la gravité g avec une frontière libre :

FIGURE 3.9 – Un réservoir de longueur L contenant un fluide

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}(HV)(t, x) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}\left(gH + \frac{V^2}{2}\right)(t, x) = -\ddot{D}(t), \end{cases} \quad (3.52)$$

où $x \in [0, L]$ est la variable spatiale attachée au réservoir, $t \in [0, T]$ est la variable de temps, $T > 0$, $H(t, x)$ désigne la hauteur du liquide, $V(t, x)$ désigne la vitesse horizontale du fluide dans un référentiel attaché au réservoir, D est la position du réservoir dans les coordonnées universelles, $\dot{D}$ et $\ddot{D}$ sont respectivement la dérivée première et seconde de D par rapport au temps (voir Fig. 3.9).

Les conditions aux bords sont données par, pour tout t dans $[0, T]$,

$$V(t, 0) = 0, \quad V(t, L) = 0. \quad (3.53)$$

Notons $\bar{H}(x)$ et $\bar{V}(x)$ les états d'équilibres de (H, V) , i.e.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{H}\bar{V}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(g\bar{H} + \frac{\bar{V}^2}{2}\right) = -\bar{A},$$

où $\bar{A}$ est un nombre constant définissant l'accélération constante du réservoir. Nous définissons la variable de contrôle u par

$$u = \ddot{D} - \bar{A}.$$

Pour la stabilisation de l'état du fluide (H, V) , le contrôleur suivant est utilisé

$$u = \alpha \int_0^L (HV)(t, x) dx. \quad (3.54)$$

où $\alpha > 0$. En introduisant les deux fonctions suivantes : l'entropie $E(H, V)$ et l'entropique $F(H, V)$

$$E(H, V) = \frac{V^2}{2} + g \frac{(H - \bar{H})^2}{2}, \quad (3.55)$$

$$F(H, V) = H \frac{V^3}{2} + gVH(H - \bar{H}). \quad (3.56)$$

On a le théorème suivant, qui se trouve dans [73, 74].

Théorème 55 *Pour tout α positif la fonction*

$$R = \alpha \int_0^L E(H(t, x), V(t, x)) dx$$

est une fonction de Lyapunov pour le système (3.52). De plus $\dot{R} = 0$ si $(H, V) = (\bar{H}, \bar{V})$. Ainsi le contrôle (3.54) stabilise le système (3.52)-(3.53)

3.6 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons effectué une courte présentation des principaux résultats sur la contrôlabilité et la stabilisation des systèmes dynamiques en dimension finie et infinie. On a aussi présenté deux méthodes de stabilisation en dimension infinie pour des systèmes décrits par des EDPs.

L'intérêt majeur de ces approches se situe dans la simplicité de la mise en oeuvre de la loi de commande. La première méthode, i.e. l'action proportionnelle, permet de stabiliser rapidement le système de manière exponentielle. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle n'est applicable que pour des systèmes exactement contrôlables et qu'elle n'est pas robuste vis-à-vis des perturbations extérieures.

La commande par mode glissant permet de stabiliser le système et de rejeter aussi les perturbations par rapport aux incertitudes du modèle.

On a aussi donné deux applications à la stabilisation des systèmes physiques en traitant deux cas linéaires et non linéaires, en utilisant deux stratégies de contrôle des EDPs. Dans le cas linéaire, on a utilisé la méthode du grammien de contrôlabilité qui délivre une commande proportionnelle pour stabiliser le système de manière exponentielle. Et dans le cas non linéaire, le contrôle est obtenu à l'aide d'une fonction de Lyapunov.

Dans ce qui suit, différentes commandes visant à contrôler le profil de courant dans les plasmas de tokamak seront proposées afin d'assurer robustesse et performance.

Chapitre 4

Commande par mode glissant en dimension infinie

Sommaire

4.1	Mise sous forme canonique de l'EDP	105
4.2	Établissement de la loi de commande en dimension infinie et réglage des paramètres	111
4.3	Qualification par simulation numérique de cas test en vue d'expérimentation sur la machine Tore Supra	114
4.3.1	Simulations en dimension infinie	114
4.3.2	Simulations avec METIS	116
4.4	Bilan du chapitre	119

Dans ce chapitre, nous allons étudier la stabilité de l'équation d'évolution du flux magnétique et construire une loi de contrôle robuste en dimension infinie en appliquant une stratégie de contrôle développée par Yury Orlov dans [65] pour les systèmes régis par des EDPs. L'ensemble des résultats présenté dans ce chapitre fait l'objet de la référence [34], actuellement en relecture.

4.1 Mise sous forme canonique de l'EDP

Nous rappelons l'équation du flux magnétique introduit au chapitre 2 par (2.37)

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \eta_{||} R_0 j_{ni}; \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, 1) = -V_0(t). \end{cases} \quad (4.1)$$

La condition au bord

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, 1) = -V_0(t) \quad (4.2)$$

implique que

$$\psi(t, 1) = - \int_0^t V_0(\tau) d\tau + \psi(t=0, 1). \quad (4.3)$$

On va définir maintenant une nouvelle variable $\psi_r(t, x)$ qui est l'écart entre le profil du flux magnétique et la valeur du flux au bord (au point $x = 1$)

$$\psi_r(t, x) = \psi(t, x) - \psi(t, 1). \quad (4.4)$$

Le système (4.1) peut être écrit en la variable ψ_r sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_r}{\partial t}(t, x) = \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi_r}{\partial x}(t, x) \right) + \eta_{||} R_0 j_{ni} + V_0(t), \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial x}(t, x) \Big|_{x=0} = 0, \quad \psi_r(t, 1) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Cette formulation permet d'homogénéiser les conditions aux bords et de transformer le contrôle frontière en un contrôle distribué .

Nous cherchons à atteindre une cible $\psi_r^{target}(x)$. Pour cela, on va introduire la variable d'erreur qui est l'écart entre ψ_r et ψ_r^{target}

$$\varepsilon(t, x) = \psi_r(t, x) - \psi_r^{target}(x) \quad (4.6)$$

avec la cible ψ_r^{target} dans l'espace de Sobolev $\mathbf{H}^2(0, 1)$ (voir [14]) qui se note aussi :

$$W^{2,2}(0, 1) = \left\{ \psi \in L^2(0, 1) : \frac{\partial \psi}{\partial x} \in L^2(0, 1) \text{ et } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \in L^2(0, 1) \right\} \quad (4.7)$$

des fonctions dérivables, dont les dérivées spatiales premières et secondes sont de carré intégrable sur l'intervalle $(0, 1)$. La variable d'erreur ε est alors gouvernée par le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi_r^{target}}{\partial x} \right) + \eta_{||} R_0 j_{ni} + V_0; \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Big|_{x=0} = - \frac{\partial \psi_r^{target}}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad \varepsilon(t, 1) = -\psi_r^{target}(1). \end{cases} \quad (4.8)$$

Pour régulariser le terme $\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi_r^{target}}{\partial x} \right)$ dans (4.8) et homogénéiser les conditions aux bords, on suppose que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} \frac{\partial \psi_r^{target}}{\partial x} \right| < +\infty; \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \psi_r^{target}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad \psi_r^{target}(1) = 0. \quad (4.10)$$

Ces hypothèses réalistes conduisent à un système avec des conditions aux bords homogènes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi_r^{target}}{\partial x} \right) + \eta_{||} R_0 j_{ni} + V_0; \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon(t, 1) = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

On va utiliser la théorie des opérateurs sur le système précédent (4.11) pour construire une loi de contrôle de type mode glissant. Considérons :

$$\frac{\eta_{||}}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_{||} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \left(\frac{\eta_{||}}{x} - \frac{\partial \eta_{||}}{\partial x} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}. \quad (4.12)$$

Le système (4.11) peut être reformulé en appliquant la transformation suivante

$$\eta_{||} R_0 j_{target} = \eta_{||} R_0 j_{ni} + V_0 = \eta_{||} u + v \quad (4.13)$$

avec u comme contrôle intermédiaire et v vérifiant la relation suivante

$$v = -\frac{1}{\mu_0 a^2} \left(\frac{\eta_{||}}{x} - \frac{\partial \eta_{||}}{\partial x} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi_r^{target}}{\partial x} \right). \quad (4.14)$$

En injectant (4.13) et (4.14) dans (4.11), on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \eta_{||} u; \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Big|_{x=0} = \varepsilon(t, 1) = 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Il s'agit d'une EDP de type parabolique dans l'espace

$$H = \left\{ \varepsilon \in \mathbf{H}^2(0, 1) : \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Big|_{x=0} = \varepsilon|_{x=1} = 0 \right\} \quad (4.16)$$

des fonctions qui vérifient les conditions aux bords du problème (4.15) (voir [14] pour plus d'informations sur les espaces de Sobolev $\mathbf{H}^2(0, 1)$). On équipe cet espace d'une norme

$$\|\varepsilon\|_H = \sqrt{\int_0^1 \varepsilon^2 dx} + \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 dx} + \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \right)^2 dx}. \quad (4.17)$$

L'opérateur A défini par

$$A\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right), \quad (4.18)$$

qui apparaît dans le système (4.15) est défini dans le domaine

$$D(A) = H \subset L^2(0, 1) \quad (4.19)$$

et on pose

$$Bu = \eta_{||} u. \quad (4.20)$$

Maintenant, on va ajouter une perturbation au système (4.15) de la forme $\eta_{||} h$ et on aboutit à l'équation suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \eta_{||} (u + h); \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Big|_{x=0} = \varepsilon(t, 1) = 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Le système s'écrit alors sous forme canonique

$$\dot{z} = Az + B(u + h). \quad (4.22)$$

Ce type de systèmes a déjà été étudié par Yury Orlov dans [65] sous la condition que le système sans la perturbation $\dot{z} = Az + Bu$, c'est-à-dire tel que $h \equiv 0$, soit exponentiellement stabilisable. Pour qu'on puisse appliquer les résultats qui se trouvent dans [65] au système (4.21), on va vérifier que notre système satisfait la condition précédente.

Le système (4.21) dans le cas nominal, c'est-à-dire $h \equiv 0$, est décrit par (4.15). Commençons par donner un résultat sur la contrôlabilité du système (4.15). Dans [19], les auteurs ont étudié une certaine classe de systèmes dont fait partie le système (4.15). Ils ont montré que cette classe de systèmes est zéro contrôlable et que l'opérateur A est un générateur d'un semi-groupe fortement continu. D'après le Théorème 49, le système (4.15) est exponentiellement stabilisable. Ceci implique qu'on peut appliquer les résultats qui se trouvent dans [65].

Nous allons même pouvoir montrer que le semi-groupe généré par l'opérateur A est exponentiellement stable, ce qui est plus fort que la condition requise d'être un générateur d'un semi-groupe fortement continu.

Proposition 56 *L'opérateur A est un générateur infinitésimal d'un semi groupe exponentiellement stable.*

Preuve.

Soit

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) \\ \varepsilon(t=0, x) = \varepsilon_0 \end{cases} \quad (4.23)$$

et $\varepsilon \in D(A)$ avec $D(A)$ défini dans (4.19) (la solution ε vérifie $\varepsilon(t, \cdot) = S(t)\varepsilon_0$). On a

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \varepsilon = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) \varepsilon \quad (4.24)$$

qu'on intègre

$$\int_0^1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \varepsilon dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) \varepsilon dx. \quad (4.25)$$

En utilisant l'intégration par parties, il vient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^1 \varepsilon^2 dx \right) = - \int_0^1 \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.26)$$

avec

$$0 < \frac{\eta_1}{\mu_0 a^2} \leq \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \leq \frac{\eta_2}{\mu_0 a^2} \quad (4.27)$$

D'où

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^1 \varepsilon^2 dx \right) \leq - \frac{\eta_1}{\mu_0 a^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (4.28)$$

D'autre part, on a

$$\varepsilon(t, x) = \varepsilon(t, x) - \varepsilon(t, 1) = - \int_x^1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx \quad (4.29)$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve

$$\varepsilon^2 \leq \int_0^1 \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right|^2 dx. \quad (4.30)$$

Ceci implique que

$$\int_0^1 \varepsilon^2 dx \leq \int_0^1 \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right|^2 dx \quad (4.31)$$

ce qui donne en utilisant la relation (4.28) que

$$\frac{d}{dt} \|\varepsilon\|_{L^2(0,1)}^2 \leq -2 \frac{\eta_1}{\mu_0 a^2} \|\varepsilon\|_{L^2(0,1)}^2 \quad (4.32)$$

avec

$$\|\varepsilon\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 \varepsilon^2 dx. \quad (4.33)$$

Finalement, on trouve que

$$\|\varepsilon\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \|\varepsilon_0\|_{L^2(0,1)}^2 e^{-2 \frac{\eta_1}{\mu_0 a^2} t}, \quad t \geq 0, \quad (4.34)$$

ou encore

$$\|\varepsilon\|_{L^2(0,1)} \leq \|\varepsilon_0\|_{L^2(0,1)} \varepsilon^{-\frac{\eta_1}{\mu_0 a^2} t}, \quad t \geq 0. \quad (4.35)$$

Ceci termine la preuve. ■

Le résultat suivant se trouve dans [76].

Théorème 57 Soit $z_0 \in \mathbf{H}$, $u \in L^2(0, T; U)$, on considère $z : [0, T] \rightarrow \mathbf{H}$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu; \\ z(0) = z_0. \end{cases} \quad (4.36)$$

Pour tout $z_0 \in D(A)$ et pour tout $u \in W^{1,1}(0, T; U)$, le problème de Cauchy (4.36) a une unique solution $z \in C([0, T]; D(A)) \cap C^1([0, T]; \mathbf{H})$ donnée par la formule de Duhamel

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.37)$$

Ainsi, d'après le Théorème 57, le système (4.15) admet une unique solution.

Maintenant, nous allons étudier les propriétés spectrales de l'opérateur A . On va commencer par rappeler la définition d'un opérateur de Sturm-Liouville donnée dans [63].

Définition 58 Soit l'opérateur Λ défini sur son domaine :

$$D(\Lambda) = \left\{ h \in L^2(0, 1) : h, \frac{dh}{dx} \text{ absolument continues, } \frac{d^2h}{dx^2} \in L^2(0, 1) \text{ et } \alpha'_0 h_x(0) - \alpha_0 h(0) = \alpha'_1 h_x(1) - \alpha_1 h(1) = 0 \right\}, \quad (4.38)$$

où $\alpha'_0, \alpha_0, \alpha'_1$, et α_1 sont des réels tels que $(\alpha'_0, \alpha_0) \neq (0, 0)$ et $(\alpha'_1, \alpha_1) \neq (0, 0)$. On dit que Λ est un opérateur de Sturm-Liouville si pour tout $h \in D(\Lambda)$

$$\Lambda h = \frac{1}{\rho(x)} \left(\frac{d}{dx} \left(-p(x) \frac{dh}{dx}(x) \right) + q(x)h(x) \right), \quad (4.39)$$

où $p(\cdot), \frac{dp}{dx}(\cdot), q(\cdot)$, et $\rho(\cdot)$ sont des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles telles que $\rho(\cdot) > 0$ et $p(\cdot) > 0$.

Voici un résultat utile sur les opérateurs de Sturm-Liouville qui se trouve dans [39] et [63].

Théorème 59 Soit Λ un opérateur de Sturm-Liouville défini par (4.39) sur son domaine de définition. Alors Λ vérifie les propriétés suivantes :

1. Le spectre de Λ est constitué uniquement de valeurs propres dénombrables $(\lambda_i)_{i \geq 1}$ réelles et simples, c'est-à-dire de multiplicité 1.
2. $\{\lambda_i, i \geq 1\}$ est minoré et non majoré. On peut donc supposer sans perte de généralités qu'on a :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_i < \dots \quad (4.40)$$

3. Λ est un opérateur auto-adjoint dans l'espace de Hilbert $L^2(0, 1)$ muni du produit scalaire

$$\langle g, h \rangle_\rho = \int_0^1 \rho(x)g(x)h(x)dx. \quad (4.41)$$

4. Si on note $e_i(x)$ la fonction propre normalisée ($\|e_i\|_\rho = 1$) correspondant à λ_i , alors $(e_i(x))_{i \geq 1}$ forme une base de $L^2(0, 1)$ orthonormée relativement au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$, i.e. :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \quad \langle e_i, e_j \rangle_\rho = \delta_{ij}. \quad (4.42)$$

Pour notre opérateur A défini par (4.18), on a

$$A\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) \Leftrightarrow -A\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right). \quad (4.43)$$

On voit que l'opérateur $-A$ est un opérateur de Sturm-Liouville [23, P. 126]. D'après le Théorème 59 le spectre de l'opérateur A est un ensemble discret $\sigma(A) = \{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ et les vecteurs propres normalisés de A , c'est-à-dire les $(e_i)_{i \geq 1}$, forment une base orthonormée de $L^2(0, 1)$.

On peut donc décomposer l'espace de Hilbert $H = L^2(0, 1)$ en somme directe de deux espaces H_1 et H_2

$$H = H_1 \oplus H_2 \quad (4.44)$$

définis par

$$H_1 = \text{span}\{e_i\}_{i=0}^{N_d}, \quad H_2 = \text{span}\{e_i\}_{i=N_d+1}^\infty. \quad (4.45)$$

On va maintenant calculer explicitement les valeurs propres de l'opérateur A . On pose

$$e_i(x) = \cos \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) \pi \frac{\int_0^x \frac{ds}{\eta_{||}(s)}}{\int_0^1 \frac{ds}{\eta_{||}(s)}} \right), \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.46)$$

Il est clair que

$$\begin{cases} e_i(1) = 0; \\ \left. \frac{\partial e_i}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \end{cases} \quad (4.47)$$

De plus, on a

$$\frac{\partial e_i}{\partial x} = -\frac{1}{\eta_{||}} \frac{(i - \frac{1}{2})\pi}{\int_0^1 \frac{ds}{\eta_{||}(s)}} \sin \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) \pi \frac{\int_0^x \frac{ds}{\eta_{||}(s)}}{\int_0^1 \frac{ds}{\eta_{||}(s)}} \right) \quad (4.48)$$

ce qui donne

$$\frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{\partial e_i}{\partial x} = -\frac{1}{\mu_0 a^2} \frac{(i - \frac{1}{2})\pi}{\int_0^1 \frac{ds}{\eta_{||}(s)}} \sin \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) \pi \frac{\int_0^x \frac{ds}{\eta_{||}(s)}}{\int_0^1 \frac{ds}{\eta_{||}(s)}} \right). \quad (4.49)$$

Donc, il vient

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{\partial e_i}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\mu_0 a^2} \left(\frac{(i - \frac{1}{2})\pi}{\int_0^1 \frac{ds}{\eta_{||}(s)}} \right)^2 \frac{1}{\eta_{||}} \cos \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) \pi \frac{\int_0^x \frac{ds}{\eta_{||}(s)}}{\int_0^1 \frac{ds}{\eta_{||}(s)}} \right). \quad (4.50)$$

D'après (4.18) et (4.46), on obtient

$$Ae_i = -\frac{1}{\mu_0 a^2} \left(\frac{(i - \frac{1}{2})\pi}{\int_0^1 \frac{ds}{\eta_{||}(s)}} \right)^2 \frac{1}{\eta_{||}} e_i \quad (4.51)$$

et e_i est bien un vecteur propre de l'opérateur A associé à la valeur propre $\lambda_i = -\frac{1}{\mu_0 a^2} \left(\frac{(i - \frac{1}{2})\pi}{\int_0^1 \frac{ds}{\eta_{||}(s)}} \right)^2$.

4.2 Établissement de la loi de commande en dimension infinie et réglage des paramètres

Pour la robustesse de notre système, l'approche de commande par mode glissant développée dans [65] pour des systèmes en dimension infinie est adaptée à notre système. Le contrôle intermédiaire u est construit comme suit

$$u(\varepsilon) = - \left(\mathcal{N} + L \sqrt{\sum_{i=0}^{N_d} (P^i(\varepsilon))^2} \right) \text{sign} \left(\sum_{i=0}^{N_d} c_i P^i(\varepsilon) \right) \quad (4.52)$$

où $C = (c_i)_{i=0}^{N_d}$ est un vecteur qui va nous servir à définir la surface de glissement, $\mathcal{N}$ est déterminé pour rejeter les perturbations, L doit assurer la stabilité de Lyapunov et N_d est le nombre des projections P^i de l'erreur ε sur les vecteurs propres de l'opérateur A définies par

$$P^i(\varepsilon) = \frac{1}{I_1(i)^2} \int_0^1 \varepsilon e_i \frac{dx}{\eta_{||}}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (4.53)$$

avec $I_1(i)$ la norme du vecteur propre e_i définie comme suit

$$I_1(i) = \|e_i\| = \sqrt{\int_0^1 e_i^2 \frac{dx}{\eta_{||}}}. \quad (4.54)$$

Nous allons décrire le mouvement de glissement pour des systèmes qui s'écrivent sous la forme (4.22) le long de la surface de glissement donnée par (3.48) (voir [65] pour de plus amples détails)

$$\dot{x}_1 = [A_1 - B_1 (CB_1)^{-1} CA_1] x_1 \quad (4.55)$$

où

$$x_1 = (P^0(\varepsilon(t, .)), \dots, P^{N_d}(\varepsilon(t, .)))^T \quad (4.56)$$

est la projection de l'erreur ε sur les $N_d + 1$ vecteurs propres de l'opérateur où

$$A_1 = \text{diag} \{ \lambda_i \}_{i=0}^{N_d} \in \mathbb{R}^{N_d+1 \times N_d+1} \quad (4.57)$$

et B_1 les projections de $\eta_{||}$ sur les $N_d + 1$ vecteurs propres de l'opérateur A définies comme suit

$$B_1 = (P^0(\eta_{||}), P^1(\eta_{||}), \dots, P^{N_d}(\eta_{||}))^T. \quad (4.58)$$

On pose

$$A_c = A_1 - B_1 (CB_1)^{-1} CA_1 \quad (4.59)$$

et on a

$$CA_c = CA_1 - CB_1 (CB_1)^{-1} CA_1 = 0 \Leftrightarrow A_c^T C^T = 0. \quad (4.60)$$

Par conséquent, C^T est un vecteur propre de la matrice A_c^T associé à la valeur propre $\lambda = 0$. Posons maintenant $K = (CB_1)^{-1} CA_1$. D'après (4.55), on obtient

$$\dot{x}_1 = [A_1 - B_1 K] x_1. \quad (4.61)$$

K est choisie, de telle sorte que la matrice A_c^T a une valeur propre égale à zéro et les autres valeurs propres strictement négatives. Puisque $S = Cx_1 = 0$ est un hyperplan de dimension N_d , on peut exprimer l'état associé à la valeur propre nulle en fonction des autres états qui convergent vers zéro et donc toutes les composantes $N_d + 1$ de x_1 vont tendre vers zéro.

Montrons que la surface $S = 0$ est attractive, ce qui permettra de déterminer L . Nous considérons le système sans perturbations ($\mathcal{N} = 0$)

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \quad (4.62)$$

et la fonction de Lyapunov V définie comme suit

$$V(S) = \frac{1}{2} S^2 > 0, \quad \text{avec } S = Cx_1. \quad (4.63)$$

On dérive la fonction V par rapport au système (4.62), en prenant la loi de commande u donnée dans (4.52) et on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= S\dot{S} = Cx_1 C (A_1 x_1 + B_1 u) \\ &= Cx_1 C A_1 x_1 - Cx_1 C B_1 L \|x_1\| \text{sign}(S). \end{aligned} \quad (4.64)$$

On a $\dot{V} < 0$ si et seulement si

$$Cx_1 C A_1 x_1 < C B_1 L \|x_1\| |Cx_1|. \quad (4.65)$$

On sait que

$$Cx_1 C A_1 x_1 \leq |Cx_1| \|CA_1\| \|x_1\| \quad (4.66)$$

et que

$$C B_1 L \|x_1\| |Cx_1| \leq |Cx_1| \|CB_1\| L \|x_1\|. \quad (4.67)$$

Pour avoir $\dot{V} < 0$ il suffit d'avoir

$$|Cx_1| \|CA_1\| \|x_1\| < C B_1 L \|x_1\| |Cx_1|.$$

D'après les relations (4.66) et (4.67), on obtient

$$L > \frac{\|CA_1\|}{\|CB_1\|}. \quad (4.68)$$

On voit que le paramètre L est minoré. De plus la loi de contrôle proposée dans (4.52) pour le système

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \eta_{||} u + \alpha(t, x); \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Big|_{x=0} = \varepsilon(t, 1) = 0. \end{cases} \quad (4.69)$$

rejette les perturbations qui vérifient la *matching condition*

$$\alpha(t, x) = \eta_{||} h(t, x) \quad (4.70)$$

et qui sont bornées

$$\|h\| \leq \mathcal{N}. \quad (4.71)$$

En conclusion, on a obtenu le résultat suivant.

Théorème 60 *Considérons le système d'erreur (4.15) et le contrôle par mode glissant (4.52) tel que (4.68). Le système en boucle fermée (4.15) et (4.52) est globalement exponentiellement stable dans l'espace d'état $L^2(0, 1)$. La stabilité est encore vérifiée pour le système perturbé (4.69) affecté par une perturbation externe (4.70) satisfaisant (4.71).*

Le système (4.15) est approché par un système en dimension finie (4.62) qui est exponentiellement stabilisé par le contrôle par mode glissant (4.52). Le reste du système associé à la variable d'état $x_2 \in H_2$, qui est la projection de ε sur H_2 en dimension infinie, possède un spectre à partie réelle négative de sorte qu'il est globalement exponentiellement stable en boucle ouverte et ne pose pas de problème pour la stabilisation du système (4.15). En effet, cela est dû au fait que le système d'erreur est naturellement asymptotiquement stable, c'est-à-dire pour $u \equiv 0$.

4.3 Qualification par simulation numérique de cas test en vue d'expérimentation sur la machine Tore Supra

4.3.1 Simulations en dimension infinie

On considère le cas test suivant, où on veut contrôler l'évolution du flux magnétique ψ_r d'un état initial jusqu'à l'état final $\psi_r^{target}(x)$ (voir Fig. 4.1a). Pour commencer, nous avons effectué une série de simulations de réponses indicielles en dimension infinie (sans le bloc de recherche des paramètres d'ingénierie, voir l'annexe C) en réglant le paramètre L (voir Fig. 4.1b, 4.2a, 4.2b et 4.3a) (dans la figure 4.4, on remarque que le paramètre N_d ne semble pas avoir d'influence significative sur le système).

Nous avons également vérifié l'effet d'incertitudes du modèle en ajoutant à $t = 10s$ sur le courant non inductif 5% du profil cible de courant.

Le comportement du système en boucle fermée est illustré par l'évolution en temps du flux magnétique ψ_r au point $x = 0.4$ (le comportement est similaire aux autres points).

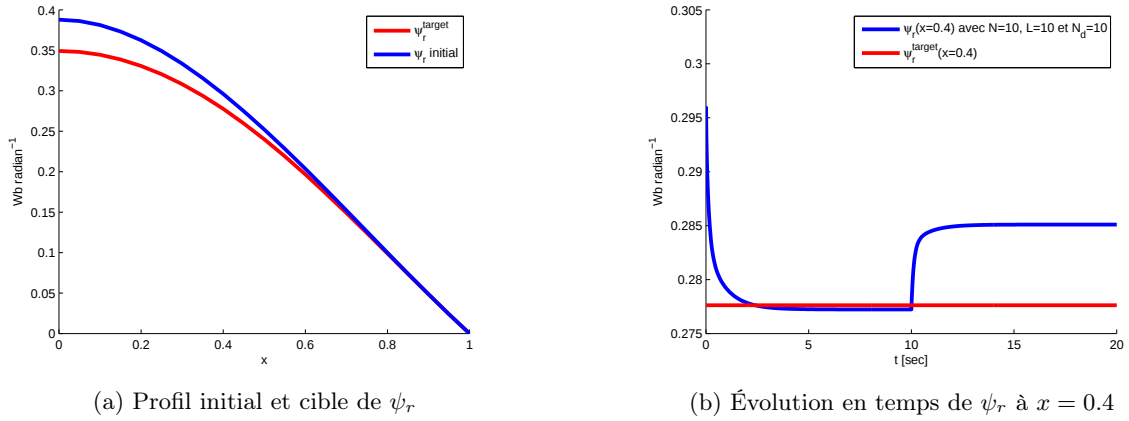


FIGURE 4.1 – Profil initial et cible, et evolution en temps de ψ_r

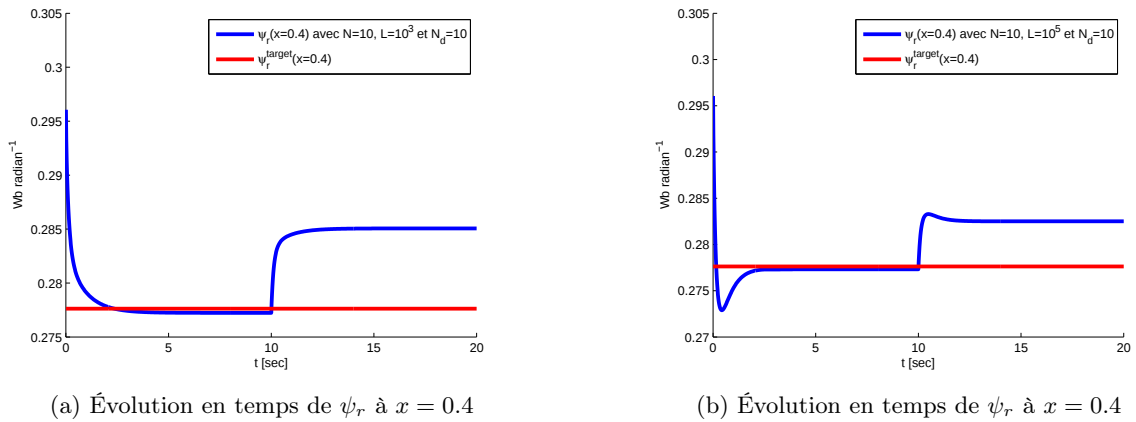


FIGURE 4.2 – Évolution en temps de ψ_r : $L = 10^3$ et $L = 10^5$ en fixant $\mathcal{N} = 10$ et $N_d = 10$

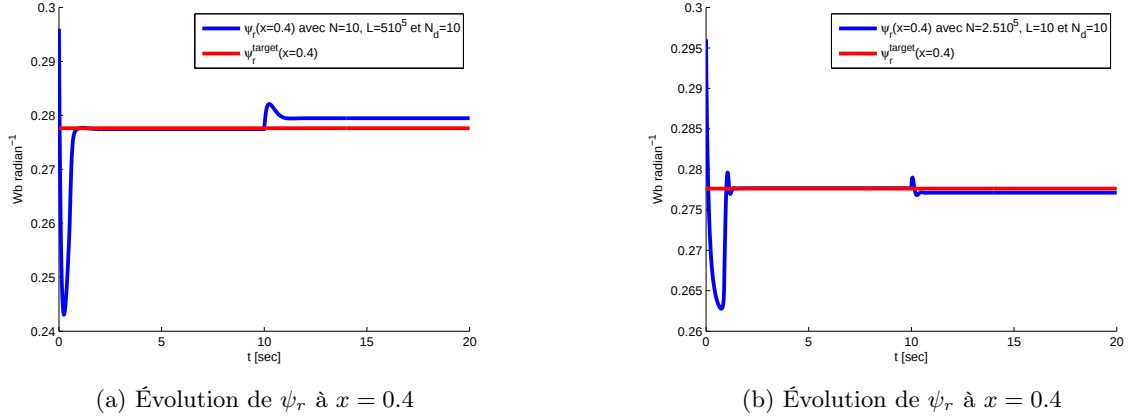


FIGURE 4.3 – Évolution en temps de ψ_r : $\mathcal{N} = 10$, $L = 510^5$, $N_d = 10$ et $\mathcal{N} = 2.510^5$, $L = 10$, $N_d = 10$

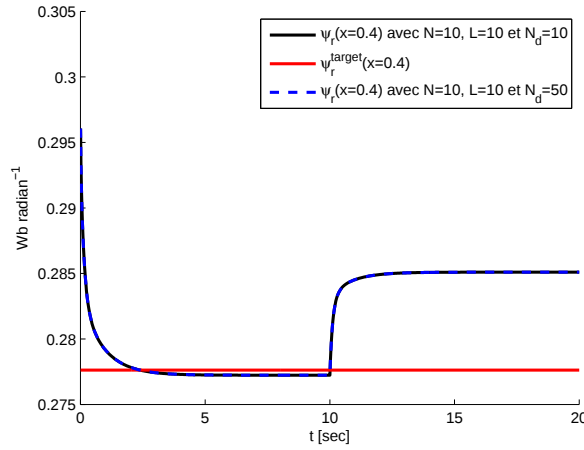


FIGURE 4.4 – Influence du paramètre N_d

Comme prévu à partir des résultats théoriques,

1. le système en boucle fermée est asymptotiquement stable,
2. pour le paramètre L , l'erreur en régime permanent résultant d'une perturbation est autant plus petite que le paramètre L est plus grand,
3. le temps de réponse du système peut être réduit en utilisant un paramètre L grand, mais en provoquant d'éventuels grands dépassements,
4. le paramètre $\mathcal{N}$ permet de rejeter les perturbations h ($\mathcal{N}$ qui est dans la section 4.2 permet de rejeter des perturbations h si $\mathcal{N} > \|h\|$). De grandes valeurs du paramètre $\mathcal{N}$ peuvent accélérer le rejet de perturbation au détriment des éventuels grands dépassements.

4.3.2 Simulations avec METIS

Dans ce qui suit, le simulateur METIS est utilisé conjointement avec le *Matlab/SimulinkTM* pour simuler les décharges de plasma dans Tore Supra.

Premièrement, une simulation METIS en boucle ouverte basée sur des variables d'entrée d'ingénierie (V_0 , P_{lh} et N_{lh}) a été effectuée afin de trouver un profil cible atteignable.

Le contrôleur par mode glissant a ensuite été mis en oeuvre en utilisant les valeurs $\mathcal{N} = 3.10^5$, $L = 10^5$ et $N_d = 10$.

Dans les simulations suivantes, nous considérons le schéma de contrôle global en utilisant le modèle physique décrit dans [93]. Pour la robustesse du contrôleur, nous avons ajouté à $t = 19s$ sur le courant non inductif 5% du profil cible de courant.

A $t = 11s$ le contrôleur est activé afin de forcer le profil du flux magnétique ψ_r à atteindre son profil cible. Les évolutions du flux magnétique aux points $x = 0.2$, $x = 0.6$ et $x = 0.8$ sont données dans la figure 4.5b. L'évolution en temps des paramètres d'ingénierie (réalisant le contrôle) est donnée dans la figure 4.5a. L'évolution du profil de courant (facteur de sécurité q) est donnée par la figure 4.6a. Les évolutions de $j_{engineering}$ et j_{target} sont données dans la figure 4.6b, la densité de courant LH dans la figure 4.7a et la densité de courant ohmique dans la figure 4.7b.

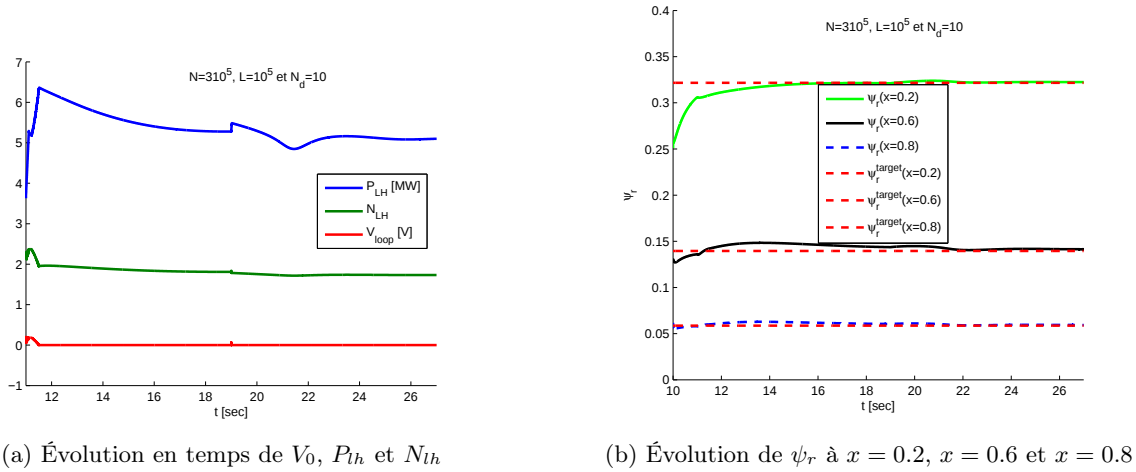
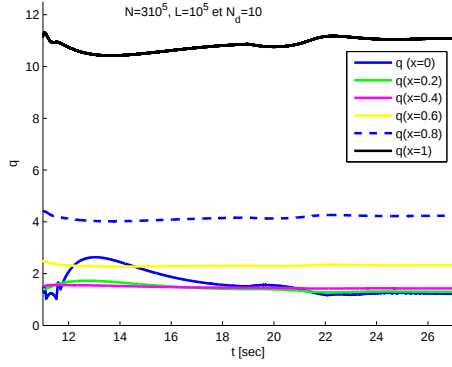
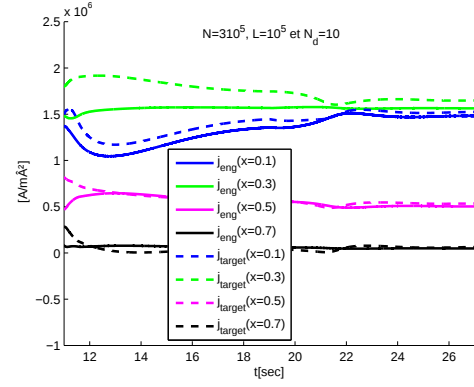


FIGURE 4.5 – Évolution en temps des paramètres ingénieries et de ψ_r : $\mathcal{N} = 3.10^5$, $L = 10^5$ et $N_d = 10$

Dans la figure 4.5a, V_0 , P_{lh} et N_{lh} se comportent comme prévu. Juste après l'activation de la commande, la puissance hybride P_{lh} va croître dans un premier temps avant de décroître et de se stabiliser, pour décroître une nouvelle fois à cause de la perturbation ajoutée à $t = 19s$ et d'augmenter après pour se stabiliser. Dans la figure 4.5a, on observe que le profil cible du flux magnétique ψ_r est atteint. Dans la figure 4.6b, on voit que le bloc de recherche des paramètres d'ingénierie arrive à minimiser l'écart entre j_{target} qui est donné par le contrôleur et $j_{engineering} = j_{\Omega} + j_{lh} + j_{bs}$.

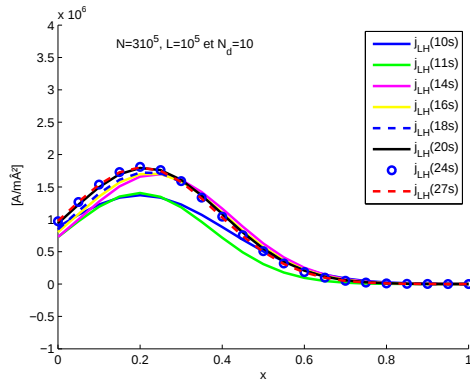


(a) Évolution du profil de courant q

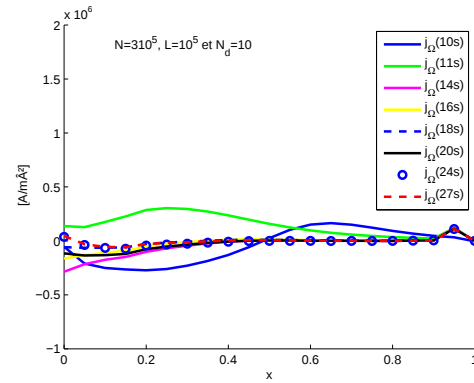


(b) Évolution de $j_{engineering}$ et j_{target} à $x = 0.1$, $x = 0.3$, $x = 0.5$ et $x = 0.7$

FIGURE 4.6 – Évolution de profil de courant, $j_{engineering}$ et j_{target} : $\mathcal{N} = 3.10^5$, $L = 10^5$ et $N_d = 10$



(a) Densité de courant LH



(b) Densité de courant ohmique

FIGURE 4.7 – Densité de courant LH et ohmique : $\mathcal{N} = 3.10^5$, $L = 10^5$ et $N_d = 10$

Pour analyser l'influence de paramètre L sur le système, on va augmenter la valeur de L par rapport à la simulation précédente, la simulation a été faite avec $L = 8.10^5$ au lieu de $L = 5.10^5$ en fixant $\mathcal{N} = 3.10^5$ et $N_d = 10$. Les résultats de simulation se trouvent dans les figures 4.8a, 4.8b, 4.9a et 4.9b. On observe sur la figure 4.8b que plus le paramètre L est grand, plus la vitesse de convergence augmente. L'évolution du profil de courant est donnée dans la figure 4.9a et dans figure 4.9b on montre le j_{target} donné par le contrôleur et $j_{engineering}$ donné par METIS.

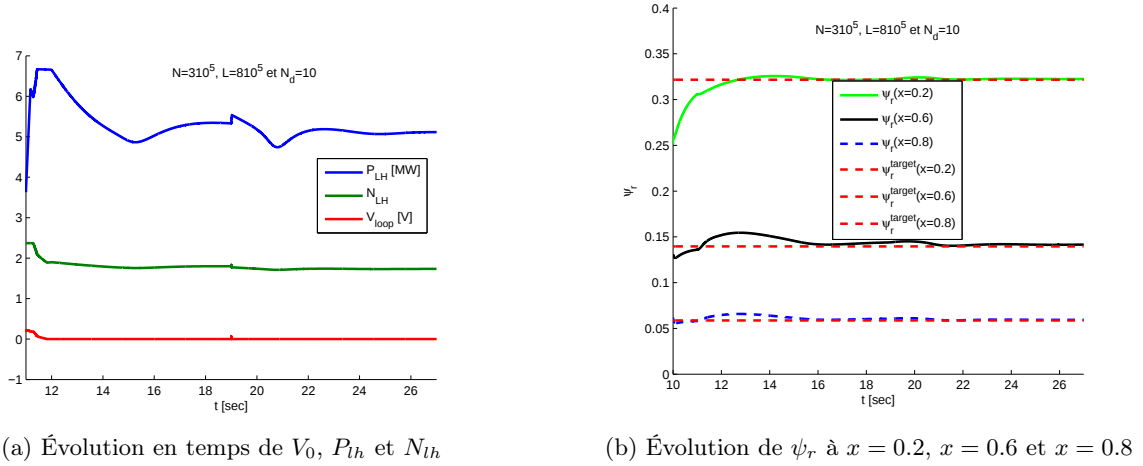


FIGURE 4.8 – Évolution en temps des paramètres ingénierie et de ψ_r : $\mathcal{N} = 3.10^5$, $L = 810^5$ et $N_d = 10$

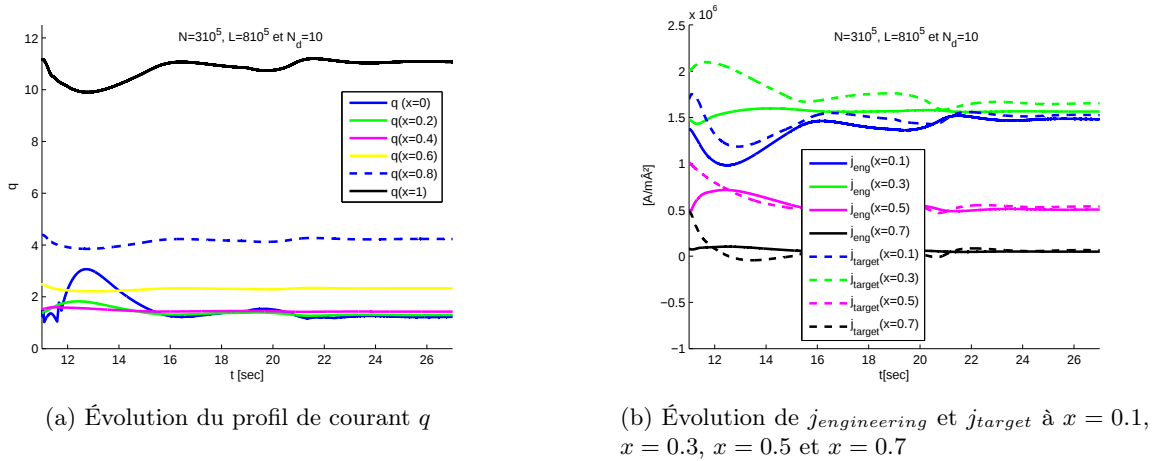


FIGURE 4.9 – Évolution de profil de courant, $j_{engineering}$ et j_{target} : $\mathcal{N} = 3.10^5$, $L = 810^5$ et $N_d = 10$

4.4 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons étudié la stabilité de l'équation du flux magnétique en construisant une loi de commande en dimension infinie.

On a d'abord régularisé l'opérateur qui apparaît dans l'EDP pour enlever le terme de singularité et définir un opérateur de Type Sturm-Liouville pour mettre le système sous forme canonique afin de prouver les conditions nécessaires pour appliquer la stratégie de contrôle de type mode glissant.

Pour la partie simulation, on a effectué plusieurs cas tests en dimension infinie (sans le bloc de recherche des paramètres d'ingénierie) en faisant varier les paramètres qui sont dans la loi de contrôle pour étudier leurs influences sur le système et la robustesse vis-à-vis des perturbations extérieures et des incertitudes du modèle.

A partir des simulations en dimension infinie, on a choisi les valeurs des paramètres qui apparaissent dans la loi de contrôle, afin d'implémenter le contrôleur dans le code METIS qui est un code physique dédié à l'étude des scénarios de plasma et d'étudier l'influence des paramètres.

Chapitre 5

Commande PI distribuée à l'aide de fonction de Lyapunov en dimension infinie

Sommaire

5.1	Commande proportionnelle	121
5.1.1	Stabilisation exponentielle	123
5.1.2	Atténuation des perturbations	125
5.2	Commande PI	127
5.2.1	Stabilisation asymptotique et rejet de perturbation	127
5.2.2	Contrôleur $\mathcal{H}_\infty$	129
5.3	Qualification par simulation numérique de cas tests en vue d'expérimentation sur la machine Tore Supra	131
5.3.1	Simulations en dimension infinie	131
5.3.2	Simulations avec METIS	134
5.4	Bilan du chapitre	137

Dans le chapitre 4, le contrôle généré par mode glissant est discontinu (à cause de la fonction signe), il y a donc un risque d'apparition d'oscillations. Dans ce chapitre, la stabilisation de l'équation d'évolution du flux magnétique (2.37) introduite dans le chapitre 2 est obtenue à l'aide d'une loi de contrôle distribué et robuste (en dimension infinie) basée sur une fonction de Lyapunov. L'approche LMI (Linear Matrix Inequality) est mise en oeuvre pour s'assurer des propriétés $\mathcal{H}_\infty$ d'un tel contrôleur. L'ensemble des résultats présenté dans ce chapitre fait l'objet de la référence [33], actuellement en relecture.

5.1 Commande proportionnelle

Voici le rappel de l'équation du flux magnétique, déjà donnée par (2.37)

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \eta_{||} R_0 j_{ni}; \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, 1) = -V_0(t). \end{cases} \quad (5.1)$$

La fonction $\psi_r(t, x)$ représente l'écart entre le profil du flux magnétique et la valeur du flux au bord ($x = 1$) comme dans le chapitre 4 (relation (4.4))

$$\psi_r(t, x) = \psi(t, x) - \psi(t, 1). \quad (5.2)$$

Alors la variable ψ_r est gouvernée par le système ci-dessous (voir (4.5))

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_r}{\partial t}(t, x) = \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi_r}{\partial x}(t, x) \right) + \eta_{||} R_0 j_{ni} + V_0(t), \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial x}(t, x) \Big|_{x=0} = 0, \quad \psi_r(t, 1) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Cette formulation permet d'exprimer le contrôle $V_0(t)$, non plus comme un contrôle frontière mais directement dans l'équation d'évolution.

Soit ψ_r^{target} l'état désiré dans l'espace $\mathbf{W}$ défini ci après. La variable d'erreur $e(t, x)$ représente l'écart entre ψ_r et ψ_r^{target}

$$\varepsilon(t, x) = \psi_r(t, x) - \psi_r^{target}(x) \quad (5.4)$$

$$\mathbf{W} = \left\{ \Psi \in \mathbf{H}^2(0, 1) : \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \Psi(1) = 0 \right\} \subset L^2(0, 1). \quad (5.5)$$

Cet espace $\mathbf{W}$ est muni du produit scalaire de l'espace $L^2(0, 1)$ avec le poids x :

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 \Psi_1(x) \Psi_2(x) x dx \quad (5.6)$$

avec la norme

$$\|\Psi\|_{L^2(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 |\Psi(x)|^2 x dx}. \quad (5.7)$$

La fonction d'erreur ε est gouvernée comme dans (4.8) par le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi_r^{target}}{\partial x} \right) + \eta_{||} R_0 j_{ni} + V_0; \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon(t, 1) = 0, \end{cases} \quad (5.8)$$

sous les hypothèses réalistes (4.9) et (4.10) du chapitre 4.

En introduisant comme dans (4.13) la relation

$$j_{target} = j_{ni} + \frac{V_0}{\eta_{||} R_0}, \quad (5.9)$$

le système (5.8) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi_r^{target}}{\partial x} \right) + \eta_{||} R_0 j_{target}; \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon(t, 1) = 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

Supposons de manière réaliste que la résistivité du plasma $\eta_{||}(t, x)$ est bornée par η_1 et η_2 :

$$0 < \eta_1 \leq \eta_{||}(t, x) \leq \eta_2 \quad (5.11)$$

On suppose de plus que la dérivée temporelle de $\eta_{||}(t, x)$ est bornée

$$\left| \frac{\partial \eta_{||}}{\partial t} \right| < \Delta. \quad (5.12)$$

L'objectif est de construire un contrôle j_{target} pour que le système d'équations aux dérivées partielles décrivant l'évolution $\varepsilon(t, x)$ l'erreur du système soit exponentiellement stable.

5.1.1 Stabilisation exponentielle

Afin d'assurer la stabilité exponentielle du système (5.10), on considère la loi de contrôle suivante

$$j_{target} = -\frac{k}{\eta_{||} R_0} \varepsilon - \frac{1}{R_0 \mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi_r^{target}}{\partial x} \right). \quad (5.13)$$

Alors le système en boucle fermée (5.10), piloté par le contrôleur (5.13), se transforme en le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) - k \varepsilon; \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon(t, 1) = 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

Dans la suite, le contrôleur proposé (5.13) est étudié pour prouver la stabilité exponentielle du système (5.14). Pour ce faire, le lemme suivant est nécessaire (inégalité de type Poincaré).

Lemme 61 Soit $L \in \mathbf{W}$ et $w(\cdot)$ une fonction bornée

$$0 < w_1 \leq w(x) \leq w_2. \quad (5.15)$$

Alors il existe une constante $K = \frac{w_2}{w_1 \exp(1)} > 0$ telle que

$$\int_0^1 |L(x)|^2 \frac{x}{w(x)} dx \leq K \int_0^1 \left| \frac{\partial L(x)}{\partial x} \right|^2 \frac{x}{w(x)} dx. \quad (5.16)$$

Preuve.

Il est clair que

$$L(1) - L(x) = \int_x^1 \frac{\partial L(s)}{\partial s} ds. \quad (5.17)$$

Comme $L \in \mathbf{W}$, il suit d'après (5.5) que $L(1) = 0$, ce qui implique que

$$-L(x) = \int_x^1 \frac{\partial L(s)}{\partial s} ds. \quad (5.18)$$

Donc

$$\begin{aligned} |L(x)|^2 &= \left| \int_x^1 \sqrt{\frac{s}{w(s)}} \frac{\partial L(s)}{\partial s} \frac{\sqrt{w(s)}}{\sqrt{s}} ds \right|^2 \\ &\leq \left(\int_x^1 \left| \frac{\partial L(s)}{\partial s} \right|^2 \frac{s}{w(s)} ds \right) \int_x^1 \frac{w(s)}{s} ds \\ &\leq \left(\int_x^1 \left| \frac{\partial L(s)}{\partial s} \right|^2 \frac{s}{w(s)} ds \right) w_2 (\ln(1) - \ln x) \\ &\leq \left(\int_x^1 \left| \frac{\partial L(s)}{\partial s} \right|^2 \frac{s}{w(s)} ds \right) w_2 (-\ln x). \end{aligned} \quad (5.19)$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \frac{x}{w(x)} |L(x)|^2 &\leq \left(\int_x^1 \left| \frac{\partial L(s)}{\partial s} \right|^2 \frac{s}{w(s)} ds \right) \frac{w_2}{w(x)} (-x \ln x) \\ &\leq \left(\int_x^1 \left| \frac{\partial L(s)}{\partial s} \right|^2 \frac{s}{w(s)} ds \right) \frac{w_2}{w_1} (-x \ln x) \\ &\leq K \int_x^1 \left| \frac{\partial L(s)}{\partial x} \right|^2 \frac{s}{w(s)} ds \end{aligned} \quad (5.20)$$

avec

$$K = \frac{w_2}{w_1} \sup_{x \in (0,1)} \{-x \ln x\} = \frac{w_2}{w_1 \exp(1)}. \quad (5.21)$$

Par conséquent l'inégalité (5.16) est établie. ■

À partir du Lemme 61, le théorème suivant peut être considéré

Théorème 62 *Considérons le système d'erreur (5.10) piloté par le contrôleur (5.13) sous les hypothèses (5.11) et (5.12). Alors le système en boucle fermée (5.14) est globalement exponentiellement stable pour la norme $\|\cdot\|_{L^2(0,1)}$, sous contrainte que le gain k du contrôleur vérifie*

$$k > -\frac{\eta_1^2 \exp(1)}{\mu_0 a^2 \eta_2} + \frac{\Delta}{2\eta_1}. \quad (5.22)$$

Preuve.

Considérons la fonctionnelle suivante

$$V(\varepsilon(t, \cdot)) = \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{\eta_{||}} dx \quad (5.23)$$

qui est définie positive et vérifie

$$\eta_2^{-1} \|\varepsilon\|_{L^2(0,1)}^2 \leq V(\varepsilon(t, \cdot)) \leq \eta_1^{-1} \|\varepsilon\|_{L^2(0,1)}^2 \quad (5.24)$$

où η_1 et η_2 sont les bornes inférieure et supérieure définies dans (5.11). La dérivée temporelle de (5.23) est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{dV(\varepsilon(t, \cdot))}{dt} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon^2 \frac{x}{\eta_{||}} \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \varepsilon \frac{x}{\eta_{||}} dx - \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{\eta_{||}} \frac{\partial \eta_{||}}{\partial t} \frac{dx}{\eta_{||}}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

En utilisant le système (5.14) et l'intégration par parties, la dérivée temporelle de (5.25) donne

$$\begin{aligned} \frac{dV(\varepsilon(t, \cdot))}{dt} &= 2 \int_0^1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \varepsilon \frac{x}{\eta_{||}} dx - \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{\eta_{||}} \frac{\partial \eta_{||}}{\partial t} \frac{dx}{\eta_{||}} \\ &= -2k \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{\eta_{||}} dx + \frac{2}{\mu_0 a^2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) \varepsilon dx - \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{\eta_{||}} \frac{\partial \eta_{||}}{\partial t} \frac{dx}{\eta_{||}} \\ &= -2k \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{\eta_{||}} dx - \frac{2}{\mu_0 a^2} \int_0^1 \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right|^2 x dx - \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{\eta_{||}} \frac{\partial \eta_{||}}{\partial t} \frac{dx}{\eta_{||}}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{dV(\varepsilon(t, \cdot))}{dt} &= -2k \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{\eta_{||}} dx - \frac{2}{\mu_0 a^2} \int_0^1 \eta_{||} \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right|^2 \frac{x}{\eta_{||}} dx - \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{\eta_{||}} \frac{\partial \eta_{||}}{\partial t} \frac{dx}{\eta_{||}} \\ &\leq -2k \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{\eta_{||}} dx - \frac{2\eta_1}{\mu_0 a^2} \int_0^1 \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right|^2 \frac{x}{\eta_{||}} dx - \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{\eta_{||}} \frac{\partial \eta_{||}}{\partial t} \frac{dx}{\eta_{||}}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

En appliquant l'inégalité (5.16) avec $w(\cdot) = \eta_{||}$ et $L(\cdot) = \varepsilon$, on obtient l'inégalité suivante

$$\int_0^1 |\varepsilon|^2 \frac{x}{\eta_{||}} dx \leq \frac{\eta_2}{\eta_1 \exp(1)} \int_0^1 \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right|^2 \frac{x}{\eta_{||}} dx \quad (5.28)$$

ce qui permet de réécrire la relation (5.27) sous la forme

$$\frac{1}{2} \frac{dV(\varepsilon(t, \cdot))}{dt} \leq - \left(\frac{\eta_1^2 \exp(1)}{\mu_0 a^2 \eta_2} + k \right) \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{\eta_{||}} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{\eta_{||}} \left| \frac{\partial \eta_{||}}{\partial t} \right| \frac{1}{\eta_{||}} dx. \quad (5.29)$$

Sous l'hypothèse (5.12), (5.29) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dV(\varepsilon(t, \cdot))}{dt} &\leq - \left(\frac{\eta_1^2 \exp(1)}{\mu_0 a^2 \eta_2} + k - \frac{\Delta}{2\eta_1} \right) \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{\eta_{||}} dx \\ &= - \left(\frac{\eta_1^2 \exp(1)}{\mu_0 a^2 \eta_2} + k - \frac{\Delta}{2\eta_1} \right) V(\varepsilon(t, \cdot)). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Alors

$$V(\varepsilon(t, \cdot)) \leq V(\varepsilon(0, \cdot)) e^{-2ct} \quad (5.31)$$

avec

$$c = \left(\frac{\eta_1^2 \exp(1)}{\mu_0 a^2 \eta_2} + k - \frac{\Delta}{2\eta_1} \right) > 0. \quad (5.32)$$

La positivité de c est due à la relation (5.22). D'après la relation (5.24), le système en boucle fermée (5.14) est globalement exponentiellement stable dans l'espace d'état $\mathbf{W}$. ■

5.1.2 Atténuation des perturbations

L'objectif est de montrer que le contrôleur défini par la relation (5.13) résout le problème de contrôle $\mathcal{H}_\infty$ avec l'atténuation des perturbations γ (voir [25] pour plus de détails). Considérons une perturbation sur le système (5.14)

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) - k\varepsilon + h(t, x) \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon(t, 1) = 0 \end{cases} \quad (5.33)$$

où $h \in L^2(0, \infty; \mathbf{W})$ est une perturbation. Dans ce cas, on a $h(\cdot, x) \in L^2(0, \infty)$ et $h(t, \cdot) \in \mathbf{W}$ pour tout $t \in [0, \infty)$.

On cherche une condition sur le gain k , du contrôleur (5.13) qui assurerait la stabilité asymptotique du système (5.14), afin d'avoir un indice de performance négatif (voir [25] pour plus de détails)

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty [\|\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 - \gamma^2 \|h(t, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2] dt - \gamma^2 \|\varepsilon(0, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 < 0 \quad (5.34)$$

sur la solution du système perturbé (5.33) pour tout $h \in L^2(0, \infty; \mathbf{W})$ avec γ une constante positive. Pour résoudre ce problème, nous allons suivre une idée proposée dans [32], et trouver une condition qui garantisse la négativité de la fonctionnelle $\mathcal{W}$ définie comme suit

$$\mathcal{W}(\varepsilon(t, \cdot), h(t, \cdot)) = \eta_1 \gamma^2 \frac{dV(\varepsilon(t, \cdot))}{dt} + \|\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 - \gamma^2 \|h(t, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 < 0 \quad (5.35)$$

calculée sur la solution du système perturbé (5.33) avec $V(\varepsilon(t, \cdot))$ donné par (5.23). Une fois l'inégalité (5.35) garantie, en intégrant $\mathcal{W}(\varepsilon(t, \cdot), h(t, \cdot))$ en t de 0 à ∞ et en prenant en compte que $\limsup_{t \rightarrow \infty} V(\varepsilon(t, \cdot)) \geq 0$, on obtiendra l'inégalité (5.34). En effet, (5.35) assure que

$$-\eta_1 \gamma^2 \int_0^1 \varepsilon(0, x)^2 \frac{x}{\eta_1(0, x)} dx + \int_0^\infty [\|\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 - \gamma^2 \|h(t, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2] dt < 0 \quad (5.36)$$

en utilisant (5.11), d'où l'inégalité (5.34).

Pour assurer l'inégalité (5.35), nous allons poser

$$\zeta(t, x) = (|\varepsilon|, |h|)^T \quad (5.37)$$

et on calcule la dérivé de (5.23) par rapport au système perturbé (5.33). De même que dans (5.29), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &\leq \left[1 - 2 \frac{\eta_1}{\eta_2} \gamma^2 \left(\frac{\eta_1^2 \exp(1)}{\mu_0 a^2 \eta_2} + k - \frac{\Delta}{2\eta_1} \right) \right] \int_0^1 \varepsilon^2 x dx + 2\gamma^2 \int_0^1 |h| |\varepsilon| x dx - \gamma^2 \int_0^1 h^2 x dx \\ &\leq \int_0^1 \zeta^T \Phi_\gamma \zeta x dx \end{aligned} \quad (5.38)$$

où

$$\Phi_\gamma := \begin{pmatrix} 1 - 2 \frac{\eta_1}{\eta_2} \gamma^2 \left(\frac{\eta_1^2 \exp(1)}{\mu_0 a^2 \eta_2} + k - \frac{\Delta}{2\eta_1} \right) & \gamma^2 \\ \gamma^2 & -\gamma^2 \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

Si $\Phi_\gamma < 0$ alors $\mathcal{W} < 0$. La LMI $\zeta^T \Phi_\gamma \zeta < 0$ est satisfaite (voir [12, P. 7-8] pour plus de détails sur les LMIs) si

$$1 - \frac{2\eta_1 \gamma^2}{\eta_2} \left(\frac{\eta_1^2 e}{\mu_0 a^2 \eta_2} + k - \frac{\Delta}{2\eta_1} \right) + \gamma^2 < 0,$$

c'est-à-dire

$$k > \frac{(1 + \gamma^2)\eta_2}{2\gamma^2\eta_1} - \frac{\exp(1)\eta_1^2}{\mu_0 a^2 \eta_2} + \frac{\Delta}{2\eta_1}. \quad (5.40)$$

En conclusion le résultat suivant est obtenu.

Théorème 63 *Soit la condition du Théorème 62 satisfaite et soit la condition (5.40) imposée sur le gain k du contrôleur. Alors le système perturbé (5.33) est (sous condition $h \equiv 0$) globalement exponentiellement stable. De plus, les perturbations $h \in L_2(0, \infty; \mathbf{W})$ sont atténuées au sens de (5.34).*

Preuve. La stabilité exponentielle (sous condition $h \equiv 0$) est déjà établie dans le Théorème 62. La condition (5.40) implique que (5.39) est défini négatif, par conséquent (5.38) implique (5.35). Alors en intégrant (5.35) t de zéro à ∞ et en utilisant que V est défini positif, on obtient (5.36) ce qui implique directement (5.34). Ceci termine la démonstration du Théorème 63. ■

5.2 Commande PI

L'objectif est de construire une loi de contrôle pour qu'on puisse complètement rejeter les perturbations qui sont invariantes par rapport au temps, en utilisant une loi de contrôle de type proportionnelle intégrale (PI). Pour cela, on rajoute une hypothèse supplémentaire, sur la résistivité du plasma

$$\eta_{||}(t, x) = f(t)g(x) \quad (5.41)$$

avec les contraintes

$$0 < f_1 \leq f(t) \leq f_2, \quad 0 < g_1 \leq g(x) \leq g_2 \quad (5.42)$$

f_1 , f_2 , g_1 et g_2 étant des constantes. L'hypothèse (5.41) est justifiée dans [68], [67] et [97]. L'espace $\mathbf{W}_g$ est défini par

$$\mathbf{W}_g = \left\{ \Psi \in \mathbf{H}^2(0, 1) : \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \Psi(1) = 0 \right\} \subset L^2(0, 1) \quad (5.43)$$

Cet espace est muni d'un produit scalaire de l'espace $L^2(0, 1)$ avec le poids $\frac{x}{g(x)}$:

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 \Psi_1(x) \Psi_2(x) \frac{x}{g(x)} dx \quad (5.44)$$

et de la norme

$$\|\Psi\|_{L^2(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 |\Psi(x)|^2 \frac{x}{g(x)} dx}. \quad (5.45)$$

Il est clair que l'espace $\mathbf{W}_g$ n'est rien d'autre que l'espace $\mathbf{W}$ équipé d'un produit scalaire équivalent.

5.2.1 Stabilisation asymptotique et rejet de perturbation

On va considérer la loi de contrôle suivante (proportionnelle intégrale)

$$j_{target} = -\frac{1}{\eta_{||} R_0} k \varepsilon - \frac{1}{\eta_{||} R_0} k_1 \int_0^t \varepsilon(s, x) ds - \frac{1}{R_0 \mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi_r^{target}}{\partial x} \right) \quad (5.46)$$

où k et k_1 sont des paramètres de poids à définir et j_{target} est donnée par (5.9). Alors, l'équation de l'erreur (5.10), pilotée par le contrôleur (5.46), avec une perturbation constante par rapport au temps $h(x) \in \mathbf{W}_g$, est gouvernée par

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\eta_{||}}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) - k \varepsilon - k_1 \int_0^t \varepsilon(s, x) ds + h(x) \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon(t, 1) = 0. \end{cases} \quad (5.47)$$

Dans la suite de l'analyse, on donne les conditions sur les gains proportionnel et integral (k et k_1) afin que le système en boucle fermée (5.47) soit asymptotiquement stable sous la condition $h(x) \in \mathbf{W}_g$.

Théorème 64 *On suppose que les gains k et k_1 du contrôleur vérifient*

$$k > -\frac{f_1 g_1^2 \exp(1)}{\mu_0 a^2 g_2}, \quad k_1 > 0. \quad (5.48)$$

Alors le système en boucle fermé (5.47) est globalement asymptotiquement stable dans l'espace d'état $\mathbf{W}_g$ indépendamment de la perturbation externe $h(x) \in \mathbf{W}_g$ qui affecte le système et par conséquent $\varepsilon_{steady\ state} = 0$.

Preuve. Pour une utilisation ultérieure, nous allons introduire une variable auxiliaire $I(t, x)$ gouvernée par

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \varepsilon, \quad I(t = 0, x) = 0. \quad (5.49)$$

Tout en étant couplé à (5.49), le système (5.47) sous l'hypothèse (5.41) est augmenté par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{f(t)g(x)}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) - k\varepsilon - k_1 I + h(x) \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \varepsilon \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon(t, 1) = 0. \end{cases} \quad (5.50)$$

L'état stationnaire $(\varepsilon_{ss}, I_{ss})$ du système (5.50) est clairement défini par

$$\frac{\partial \varepsilon_{ss}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial I_{ss}}{\partial t} = 0 \quad (5.51)$$

ce qui entraîne

$$\varepsilon_{ss}(x) = 0, \quad I_{ss}(x) = \frac{h(x)}{k_1}. \quad (5.52)$$

Pour le système (5.50), on considère la fonctionnelle

$$\begin{aligned} V(\varepsilon(t, \cdot), I(t, \cdot)) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{g(x)} dx + \frac{k_1}{2} \int_0^1 \left(I - \frac{h}{k_1} \right)^2 \frac{x}{g(x)} dx \\ &= V_1(t) + V_2(t) \end{aligned} \quad (5.53)$$

qui s'avère être définie positive et radialement non bornée. En effet,

$$V(\varepsilon_{ss}, I_{ss}) = 0, \quad V(\varepsilon, I) > 0 \quad \forall (\varepsilon, I) \neq (\varepsilon_{ss}, I_{ss}) \quad (5.54)$$

et

$$V(\varepsilon, I) \rightarrow \infty \text{ quand } \|\varepsilon\|_{L^2(0,1)} + \|I\|_{L^2(0,1)} \rightarrow \infty. \quad (5.55)$$

On calcule la dérivée temporelle

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon^2 \frac{x}{g(x)} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \varepsilon \frac{x}{g(x)} dx \end{aligned} \quad (5.56)$$

de (5.53) par rapport au système (5.50) et en utilisant l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= \frac{f(t)}{\mu_0 a^2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) \varepsilon dx - k \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{g(x)} dx - k_1 \int_0^1 I(t, x) \varepsilon \frac{x}{g(x)} dx + \int_0^1 h(x) \varepsilon \frac{x}{g(x)} dx; \\ &= -\frac{f(t)}{\mu_0 a^2} \int_0^1 \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right|^2 x dx - k \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{g(x)} dx - \frac{dV_2(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= -\frac{f(t)}{\mu_0 a^2} \int_0^1 g(x) \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right|^2 \frac{x}{g(x)} dx - k \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{g(x)} dx - \frac{dV_2(t)}{dt} \\ &< -\frac{f_1 g_1}{\mu_0 a^2} \int_0^1 \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right|^2 \frac{x}{g(x)} dx - k \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{g(x)} dx - \frac{dV_2(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

En tenant compte du Lemme 61, appliqué avec $w(\cdot) = g(x)$ et $L(\cdot) = \varepsilon(t, x)$, cela entraîne que

$$\int_0^1 \left| \varepsilon(t, x) \right|^2 \frac{x}{g(x)} dx \leq \frac{g_2}{g_1 \exp(1)} \int_0^1 \left| \frac{\partial \varepsilon(t, x)}{\partial x} \right|^2 \frac{x}{g(x)} dx. \quad (5.59)$$

On arrive alors à

$$\begin{aligned} \frac{dV(\varepsilon(t, \cdot))}{dt} &= \frac{dV_1(t)}{dt} + \frac{dV_2(t)}{dt} \\ &< -\left(\frac{f_1 g_1^2 \exp(1)}{\mu_0 a^2 g_2} + k \right) \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{g(x)} dx. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Grâce à (5.48), on en conclut que

$$\frac{dV(\varepsilon(t, \cdot))}{dt} \leq 0. \quad (5.61)$$

Or, on a

$$\frac{dV(\varepsilon(t, \cdot))}{dt} = 0 \Rightarrow \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{x}{g(x)} dx = 0 \quad (5.62)$$

i.e., $\varepsilon(t, x) = 0 = \varepsilon_{ss}$ quand $\frac{dV(\varepsilon(t, \cdot))}{dt} = 0$. En outre, la relation $\varepsilon(t, x) = 0 = \varepsilon_{ss}$, couplé avec (5.49), assure que $I(t, x) = \frac{h(x)}{k_1} = I_{ss}$, concluant ainsi que l'invariant maximal de $\frac{dV(\varepsilon(t, \cdot))}{dt} = 0$ coïncide avec $(\varepsilon, I) = (\varepsilon_{ss}, I_{ss})$. Ainsi, en appliquant le principe d'invariance de LaSalle pour le système parabolique (5.50) (voir [38] pour le principe d'invariance de LaSalle pour les systèmes paraboliques), la stabilité asymptotique est établie. D'où, le système (5.47) est globalement asymptotiquement stable dans $\mathbf{W}$ sous la condition $h(x) \in \mathbf{W}_g$. ■

5.2.2 Contrôleur $\mathcal{H}_\infty$

L'objectif est de montrer qu'en plus de rejeter des perturbations qui ne dépendent pas du temps, le contrôleur proposé (5.46) atténue les perturbations qui dépendent du temps avec un certain paramètre d'atténuation $\gamma > 0$. Supposons que la perturbation h affectant le système (5.47) varie avec le temps, entraînant ainsi l'équation d'état

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{f(t)g(x)}{\mu_0 a^2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) - k\varepsilon - k_1 \int_0^t \varepsilon(s, x) ds + h(t, x) \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon(t, 1) = 0 \end{cases} \quad (5.63)$$

où $h \in L^2(0, \infty; \mathbf{W}_g)$ est une perturbation externe. Une condition supplémentaire sur le gain k dans le contrôleur proportionnel intégral est proposée, qui fait en sorte que l'indice de performance soit négatif

$$\mathcal{J}_g = \int_0^\infty [\|\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 - \gamma^2 \|h(t, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2] dt - \gamma^2 \|\varepsilon(0, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 < 0 \quad (5.64)$$

pour les solutions de (5.63) et les perturbations variant en temps $h \in L^2(0, \infty; \mathbf{W}_g)$ avec un paramètre d'atténuation $\gamma > 0$. Comme précédemment la fonction $h(\cdot, x) \in L^2(0, \infty)$ avec des valeurs $h(t, \cdot) \in \mathbf{W}_g$ pour tout $t \in [0, \infty)$.

Pour établir (5.64), il suffit de démontrer que

$$\mathcal{W}_g(\varepsilon(t, \cdot)) := 2\gamma^2 \frac{d}{dt} V_g(\varepsilon(t, \cdot)) + \int_0^1 (\varepsilon(t, x)^2 - \gamma^2 h(t, x)^2) \frac{x}{g(x)} dx < 0 \quad (5.65)$$

où

$$V_g(\varepsilon(t, \cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^1 \varepsilon(t, x)^2 \frac{x}{g(x)} dx + \frac{k_1}{2} \int_0^1 I(t, x)^2 \frac{x}{g(x)} dx. \quad (5.66)$$

En effet, l'intégration de $\mathcal{W}_g(\varepsilon(t, \cdot))$ en t de 0 jusqu'à ∞ et en tenant compte du fait que $\limsup_{t \rightarrow \infty} V_g(\varepsilon(t, \cdot)) \geq 0$ entraîne (5.64).

On va maintenant exprimer la dérivée temporelle de la fonctionnelle (5.66) pour les solutions de (5.63) :

$$\frac{dV_g(\varepsilon(t, \cdot))}{dt} \leq - \left(\frac{f_1 g_1^2 \exp(1)}{\mu_0 a^2 g_2} + k \right) \int_0^1 \varepsilon(t, x)^2 \frac{x}{g(x)} dx + \int_0^1 h(t, x) \varepsilon(t, x) \frac{x}{g(x)} dx. \quad (5.67)$$

On pose

$$\zeta = (|\varepsilon| \quad |h|)^T, \quad (5.68)$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_g &\leq \left(1 - 2\gamma^2 \left(\frac{f_1 g_1^2 \exp(1)}{\mu_0 a^2 g_2} + k \right) \right) \int_0^1 \varepsilon(t, x)^2 \frac{x}{g(x)} dx + 2\gamma^2 \int_0^1 |h(t, x)| |\varepsilon(t, x)| \frac{x}{g(x)} dx \\ &\quad - \gamma^2 \int_0^1 |h(t, x)|^2 \frac{x}{g(x)} dx \\ &\leq \int_0^1 \zeta^T \Psi_\gamma \zeta \frac{x}{g(x)} dx \end{aligned} \quad (5.69)$$

avec

$$\Psi_\gamma := \begin{pmatrix} 1 - 2\gamma^2 \left(\frac{f_1 g_1^2 \exp(1)}{\mu_0 a^2 g_2} + k \right) & \gamma^2 \\ \gamma^2 & -\gamma^2 \end{pmatrix}. \quad (5.70)$$

Si $\Psi_\gamma < 0$ alors $\mathcal{W}_g < 0$. En utilisant le lemme de Schur [12], la condition de LMI $\zeta^T \Psi_\gamma \zeta < 0$ est satisfaite si

$$k > - \frac{f_1 g_1^2 \exp(1)}{\mu_0 a^2 g_2} + \frac{1}{2\gamma^2} + \gamma^2. \quad (5.71)$$

D'où, $\mathcal{W}_g < 0$ à condition que k soit choisi selon la relation (5.71) et dans ce cas l'inégalité (5.64) est garantie.

Ainsi, le résultat suivant est établi :

Théorème 65 *On suppose que les conditions du Théorème 64 sont satisfaites et on impose que le gain proportionnel k du contrôleur (5.46) vérifie la relation (5.71). Alors en affectant le système par une perturbation externe $h(x) \in \mathbf{W}_g$, le système en boucle fermée (5.63) est globalement asymptotiquement stable dans l'espace d'état $\mathbf{W}_g$. De plus, toute perturbation externe dépendant du temps $h \in L^2(0, \infty; \mathbf{W}_g)$ est atténuée au sens de (5.64).*

Preuve. La première assertion est établie par le Théorème 64. En utilisant la relation (5.71), la matrice (5.70) est définie négative. Couplée à (5.69), il en résulte (5.65). Pour justifier (5.64), il suffit alors d'intégrer (5.65) de t allant de zéro jusqu'à l'infini et il en résulte l'inégalité

$$\int_0^\infty [\|\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 - \gamma^2 \|h(t, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2] dt + 2\gamma^2 V_g(\varepsilon(\infty)) - 2\gamma^2 V_g(\varepsilon(0)) < 0. \quad (5.72)$$

On enlève le terme positif $2\gamma^2 V_g(\varepsilon(\infty, \cdot))$ et on note que $2\gamma^2 V_g(\varepsilon(0, \cdot)) = \gamma^2 \|\varepsilon(0, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2$ est dû à (5.66). Le Théorème 65 est alors établi. ■

5.3 Qualification par simulation numérique de cas tests en vue d'expérimentation sur la machine Tore Supra

5.3.1 Simulations en dimension infinie

Nous considérons le cas test pertinent où nous voulons contrôler l'évolution du flux magnétique ψ_r d'un état initial jusqu'à l'état final (voir Fig. 5.1a). Pour commencer, nous avons effectué une série de simulations de réponses indicielles en dimension infinie (sans le bloc de recherche des paramètres d'ingénierie) en réglant le gain proportionnel k et le gain intégral k_1 (voir Fig. 5.1b, 5.2, 5.3, 5.4 et 5.5).

Nous avons également vérifié l'effet d'incertitude du modèle par rapport à des perturbations h en ajoutant à $t = 10s$ sur le courant non inductif 20% du profil cible de courant.

Le comportement du système en boucle fermée est illustré par l'évolution en temps du flux magnétique ψ_r au point $x = 0.4$ (le comportement est similaire aux autres points).

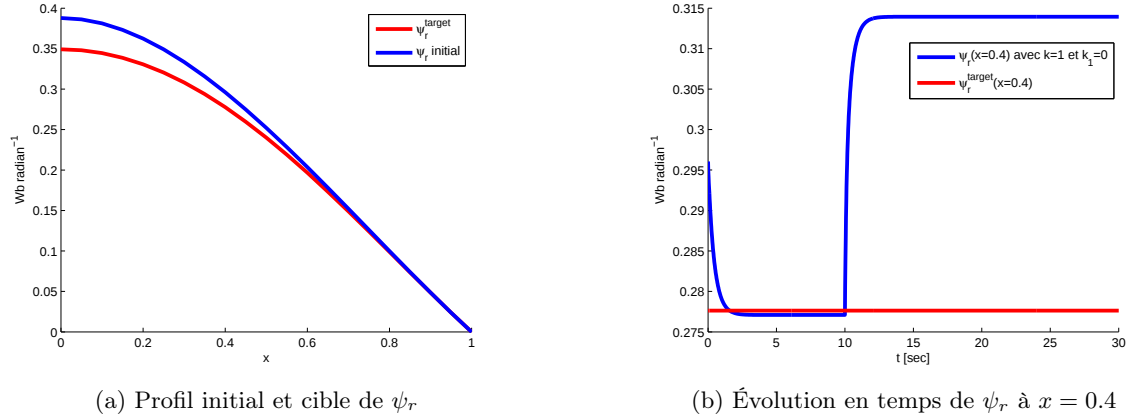
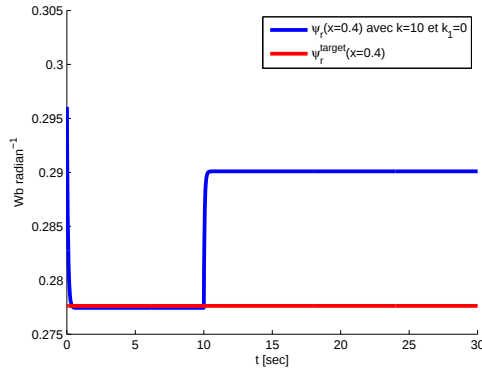


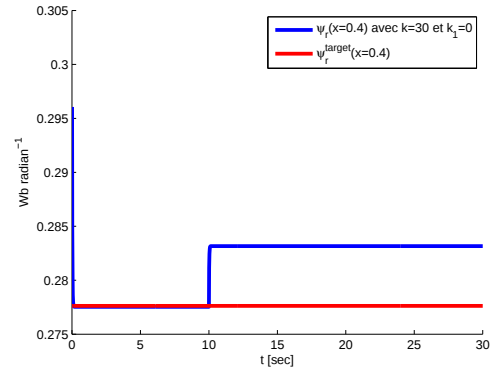
FIGURE 5.1 – Profil initial et cible, et évolution en temps de ψ_r

Comme prévu à partir des résultats théoriques qui se trouvent dans les sections 5.1 et 5.2,

1. le système en boucle fermée est stable à condition que les relations du Théorème 64 et Théorème 65 soient satisfaites,
2. dans le cas d'une action proportionnelle, l'erreur en régime permanent résultant d'une perturbation est d'autant plus petite que le gain proportionnel est grand,

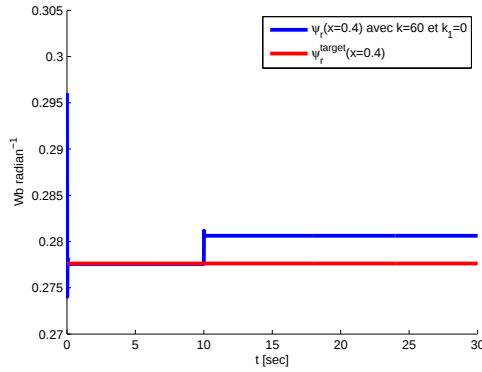


(a) Évolution en temps de ψ_r à $x = 0.4$

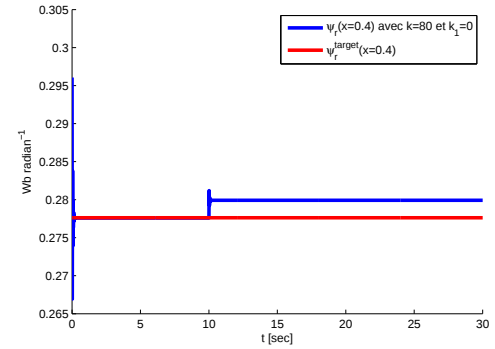


(b) Évolution en temps de ψ_r à $x = 0.4$

FIGURE 5.2 – Évolution en temps de ψ_r : $k = 10$ et $k = 30$ en fixant $k_1 = 0$

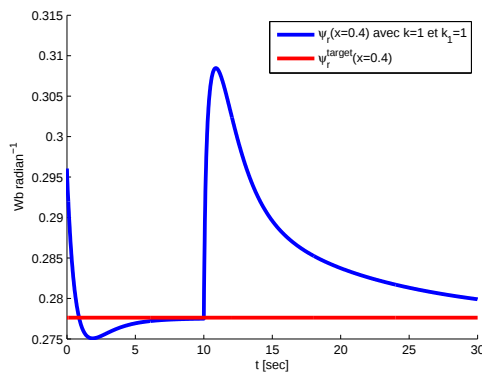


(a) Évolution en temps de ψ_r à $x = 0.4$

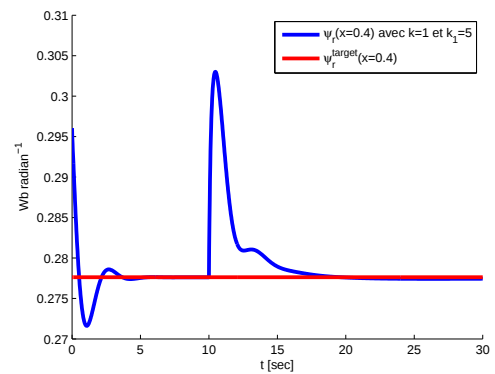


(b) Évolution en temps de ψ_r à $x = 0.4$

FIGURE 5.3 – Évolution en temps de ψ_r : $k = 60$ et $k = 80$ en fixant $k_1 = 0$

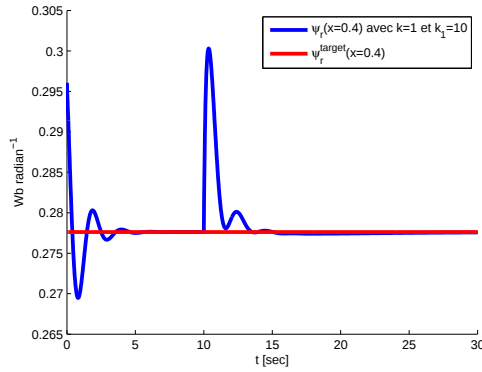


(a) Évolution en temps de ψ_r à $x = 0.4$

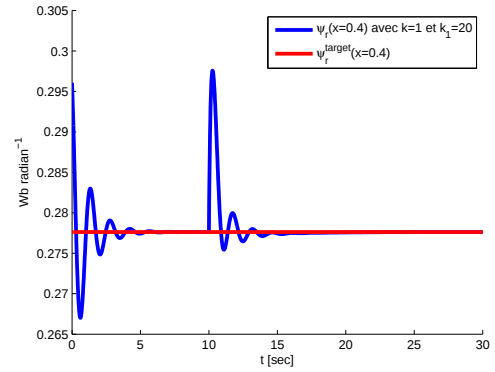


(b) Évolution en temps de ψ_r à $x = 0.4$

FIGURE 5.4 – Évolution en temps de ψ_r : $k_1 = 1$ et $k_1 = 5$ en fixant $k = 1$



(a) Évolution en temps de ψ_r à $x = 0.4$



(b) Évolution en temps de ψ_r à $x = 0.4$

FIGURE 5.5 – Évolution en temps de ψ_r : $k_1 = 10$ et $k_1 = 20$ en fixant $k = 1$

3. le temps de réponse peut être réduit en utilisant un gain proportionnel grand, mais risque de provoquer d'éventuels grands dépassements,
4. le gain intégral permet d'annuler l'erreur en régime permanent résultant d'une perturbation de l'état d'équilibre, de grandes valeurs du gain intégral peuvent accélérer le rejet de perturbation de l'état d'équilibre mais risque de provoquer d'éventuels grands dépassements

5.3.2 Simulations avec METIS

Dans ce qui suit, le simulateur METIS est utilisé conjointement avec le *Matlab/SimulinkTM* pour simuler les décharges plasma dans Tore Supra.

Premièrement, des simulations METIS en boucle ouverte basées sur des variables d'entrée d'ingénierie (V_0 , P_{lh} et N_{lh}) ont été effectuées afin de trouver un profil cible atteignable.

L'action proportionnelle et intégrale a ensuite été mise en oeuvre en utilisant les gains suivants $k = 1s^{-1}$ et $k_1 = 0.8s^{-2}$.

Dans les simulations suivantes, nous considérons le schéma de contrôle global en utilisant le modèle physique décrit dans [93]. Pour la robustesse du contrôleur, nous avons ajouté à $t = 16s$ sur le courant non inductif 20% du profil cible de courant.

A $t = 10.1s$, le contrôleur est activé afin de forcer le profil du flux magnétique ψ_r à atteindre son profil cible. L'évolution du flux magnétique aux points $x = 0.2$, $x = 0.6$ et $x = 0.8$ est donnée par la figure 5.6b. L'évolution en temps des paramètres d'ingénierie est donnée par la figure 5.6a. L'évolution du profil de courant est donnée par la figure 5.7a. L'évolution de $j_{engineering}$ et j_{target} est donnée par la figure 5.7b, la densité de courant LH et ohmique est donnée par la figure 5.8a et 5.8b.

Dans la figure 5.6a, V_0 , P_{lh} et N_{lh} se comportent comme prévu, dans la figure 5.6b, on observe que le profil cible du flux magnétique ψ_r est atteint et dans la figure 5.7b, on voit que le bloc de recherche des paramètres d'ingénierie arrive bien à minimiser l'écart entre $j_{engineering}$ et j_{target} .

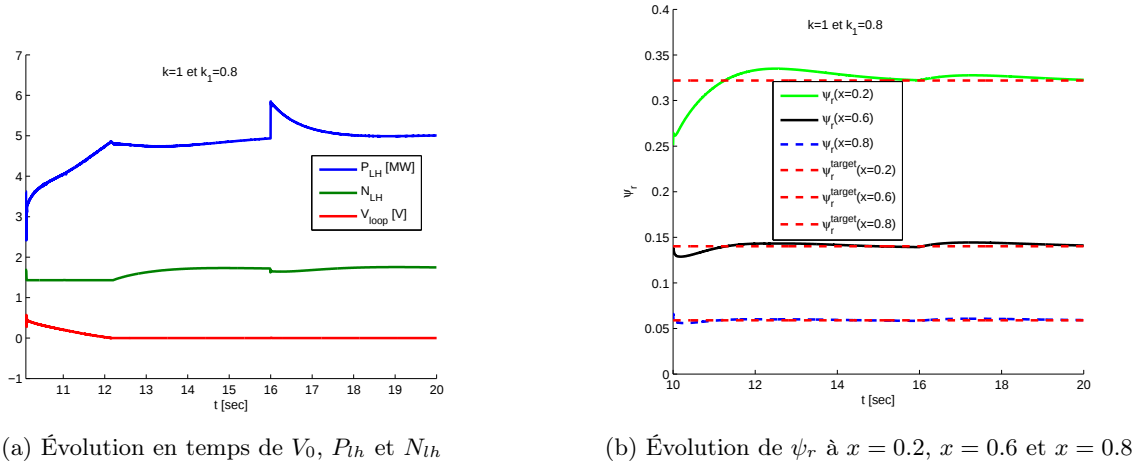
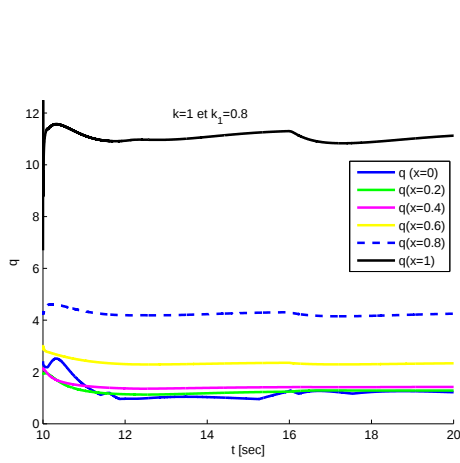
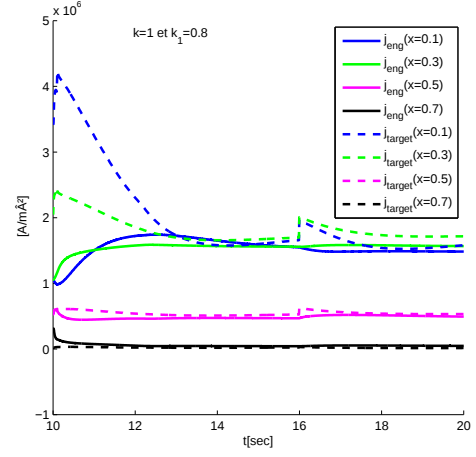


FIGURE 5.6 – Évolution en temps des paramètres ingénieries et de ψ_r : $k = 1$ et $k_1 = 0.8$

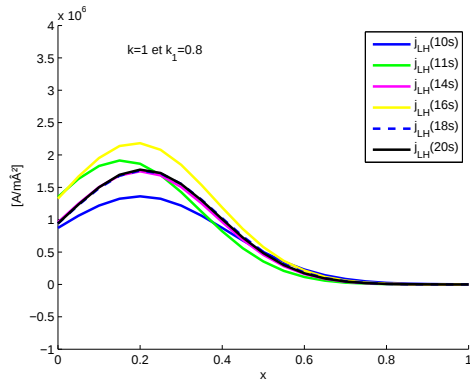


(a) Évolution du profil de courant q

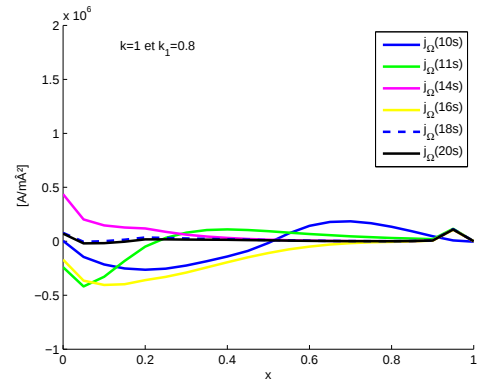


(b) Évolution de $j_{engineering}$ et j_{target} à $x = 0.1$, $x = 0.3$, $x = 0.5$ et $x = 0.7$

FIGURE 5.7 – Évolution de profil de courant, $j_{engineering}$ et j_{target} : $k = 1$ et $k_1 = 0.8$



(a) Densité de courant LH



(b) Densité de courant ohmique

FIGURE 5.8 – Densité de courant LH et ohmique : $k = 1$ et $k_1 = 0.8$

Pour analyser l'influence du paramètre k_1 sur le système, nous allons augmenter la valeur de k_1 par rapport à la simulation précédente, la simulation a été faite avec un gain integral $k_1 = 1.5$ au lieu de $k_1 = 0.8$ en fixant le gain proportionnel $k = 1$. Les résultats de simulation se trouvent dans les figures 5.9a, 5.9b, 5.10a et 5.10b. Il est observé sur la figure 5.9b qu'un gain integral grand fait apparaître un dépassement. L'évolution du profil de courant est donnée dans la figure 5.10a et dans figure 5.10b on montre le j_{target} donné par le contrôleur et $j_{engineering}$ donné par METIS.

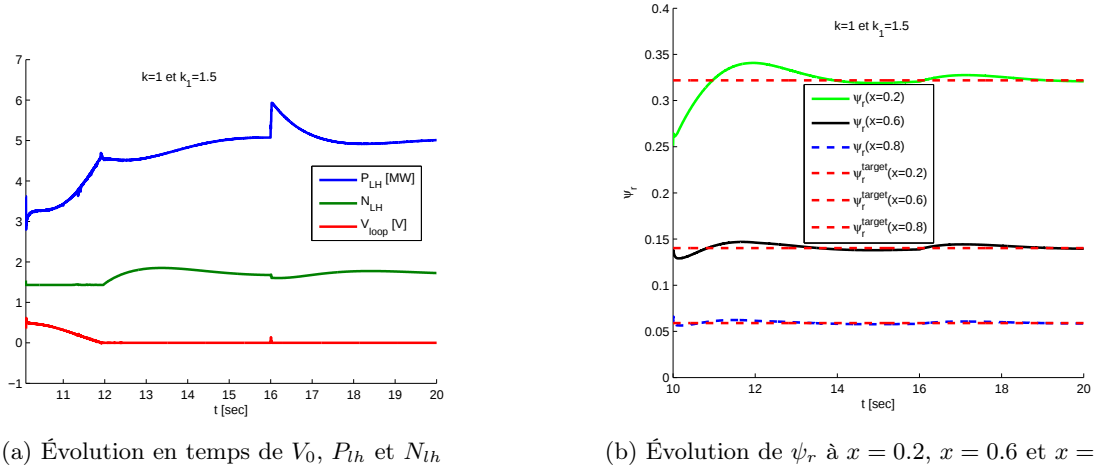


FIGURE 5.9 – Évolution en temps des paramètres ingénieries et de ψ_r : $k = 1$ et $k_1 = 1.5$

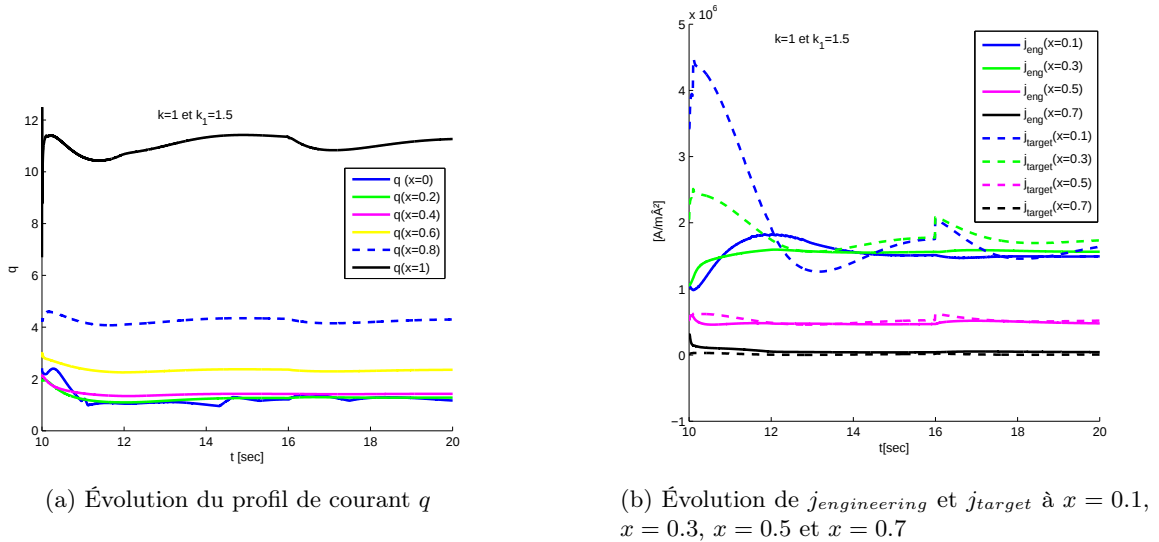


FIGURE 5.10 – Évolution de profil de courant, $j_{engineering}$ et j_{target} : $k = 1$ et $k_1 = 1.5$

5.4 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons étudié la stabilité de l'équation du flux magnétique en construisant une loi de commande en dimension infinie en utilisant les fonctions de Lyapunov.

On a commencé par montrer qu'avec l'action proportionnelle, le système devient exponentiellement stable et on a démontré en utilisant les fonctions de Lyapunov et les inégalités LMIs qu'avec cette loi de commande on a l'atténuation des perturbations (qui ne sont pas complètement rejetées).

Pour rejeter les perturbations, on a utilisé à la fois l'action proportionnelle et intégrale, qui permet d'annuler l'erreur statique en présence des perturbations constantes par rapport au temps.

Pour la partie simulation, on a effectué plusieurs cas test en dimension infinie (sans le bloc de recherche des paramètres d'ingénierie) en faisant varier le gain proportionnel et intégral pour étudier leurs influences sur le système et la robustesse vis-à-vis des perturbations extérieures et les incertitudes du modèle.

A partir des simulations en dimension infinie, on a choisi les valeurs de gain proportionnel et intégral, afin d'implémenter le contrôleur dans le code METIS.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

Sommaire

6.1 Conclusion	139
6.2 Perspectives	140

Nous présentons dans ce chapitre un résumé des principaux résultats exposés dans ce mémoire. Nous développons ensuite quelques perspectives de ce travail.

6.1 Conclusion

Les travaux présentés dans ce mémoire ont pour sujet principal le contrôle du profil de facteur de sécurité dans les plasmas de tokamak en dimension infinie.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté une introduction générale sur la fusion, plus précisément sur la fusion par confinement magnétique et la problématique de contrôle du profil de facteur de sécurité / courant.

Dans le second chapitre, le modèle physique à commander, modélisé par une EDP parabolique, est présenté. Nous avons procédé à la caractérisation mathématique du système et démontré l'existence et l'unicité de la solution et l'existence de solutions asymptotiques.

Dans le troisième chapitre, nous avons traité la contrôlabilité et la stabilisation des systèmes dynamiques, notamment la stabilisation des EDPs. Nous avons ensuite donné deux exemples physiques modélisés par des EDPs. Le premier exemple linéaire, qui est modélisé par les équations de Korteweg-De Vries, est stabilisé en utilisant un contrôle proportionnel. Le deuxième exemple est non linéaire, modélisé par les équations de Saint-Venant, et stabilisé en utilisant une fonction de Lyapunov.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de la stabilisation du profil de courant dans les plasmas de tokamak en dimension infinie. Nous avons construit un contrôle de type mode glissant, qui s'appuie essentiellement sur les travaux de Yury Orlov dans [65]. Cette méthode est l'une des rares méthodes existant en dimension infinie qui présente des propriétés de robustesse.

Le cinquième chapitre traite de l'étude de la stabilisation du profil de courant en dimension infinie en utilisant une loi de contrôle robuste qui rejette complètement les perturbations invariantes par rapport au temps et atténue les perturbations qui dépendent du temps. Cette loi de commande est déterminée en utilisant une fonction de Lyapunov. En effet, ces dernières

restent encore aujourd'hui l'un des outils les plus puissants pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques en dimension infinie.

Ces deux lois de commande ont été testées numériquement, les résultats obtenus sont satisfaisants et démontrent l'attractivité des approches proposées. Un intérêt particulier a été porté sur le faisabilité et la mise en place de telles lois de commande sur le réacteur Tore Supra.

6.2 Perspectives

L'ensemble du travail accompli sur le contrôle du profil de courant en dimension infinie doit se poursuivre en collaboration avec l'équipe de Sylvain Brémond du CEA de Cadarache pour la mise en oeuvre expérimentale des lois de commande construit dans cette thèse.

Au delà de cette étape, il pourra être intéressant à l'avenir, d'aborder le problématique de contrôle à la fois de l'équation de la diffusion résistive du flux magnétique et du transport de la chaleur (voir chapitre 2) en dimension infinie en utilisant par exemple la méthode à base de fonction de Lyapunov mise en oeuvre dans le chapitre 5 de cette thèse.

En effet, le couplage des équations de diffusion résistive du flux magnétique et de transport de la chaleur doit notamment permettre d'utiliser la résistivité parallèle du plasma $\eta_{||}$ ($\eta_{||} \propto T_e$) non pas comme une entrée du système, mais comme un contrôle (voir discussion du chapitre 2).

Si les paramètres de l'équation de diffusion résistive du flux magnétique sont bien connus, ceux de l'équation de transport de la chaleur sont plus incertains quant à leur modélisation physique. En effet, la physique liée à ce domaine reste encore mal connue. Dans une optique de contrôle, il sera essentiel de mettre en oeuvre une estimation en temps réel du coefficient de diffusion χ_e .

Annexe A

Équation de Grad-Schluter-Shafranov

L'équation de Grad-Schluter-Shafranov est formulée en utilisant l'expression de l'induction magnétique $\vec{B}$ et la densité de courant électrique $\vec{j}$.

D'après la définition du flux poloïdal ψ , dans le chapitre 1, on a

$$\psi(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{D(r,z)} r' B_z dr' d\theta dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^r B_z r' dr' \int_0^{2\pi} d\theta = \int_0^r B_z r' dr'$$

En utilisant $\text{div} \vec{B} = 0$ en coordonnées cylindriques, on trouve :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

et d'après l'expression de ψ on a

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \int_0^r r' \frac{\partial B_z}{\partial z} dr' = - \int_0^r \frac{\partial(r' B_r)}{\partial r'} dr' = -r B_r$$

ce qui implique que

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

et

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = r B_z \Rightarrow B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

pour déterminer la composante B_T (composante sur le vecteur $\vec{e}_T$) du champ magnétique, on a :

$$f(r, z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{D(r,z)} \vec{J} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{2\pi} \int_{D(r,z)} r \vec{\theta} \cdot \vec{B} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{1}{r'} \frac{\partial(r' B_T)}{\partial r'} r' dr' d\theta = r B_T$$

donc

$$B_T = \frac{f(r, z)}{r}.$$

Dans les coordonnées cylindriques ($\vec{e}_r$ est vecteur radial et $\vec{e}_T$ vecteur orthoradial)

$$\vec{\text{grad}}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_T + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{e}_z$$

ainsi

$$\overrightarrow{\text{grad}}\psi \wedge \overrightarrow{e_T} = -\frac{\partial\psi}{\partial z}\overrightarrow{e_r} + \frac{\partial\psi}{\partial r}\overrightarrow{e_z} = r(B_r\overrightarrow{e_r} + B_z\overrightarrow{e_z})$$

d'où

$$\overrightarrow{B} = \frac{1}{r} \left(\overrightarrow{\text{grad}}\psi \wedge \overrightarrow{e_T} \right) + \frac{f(r, z)}{r} \overrightarrow{e_T}. \quad (\text{A.1})$$

On pose

$$\overrightarrow{B_p} = \frac{1}{r} \left(\overrightarrow{\text{grad}}\psi \wedge \overrightarrow{e_T} \right)$$

et

$$\overrightarrow{B_T} = \frac{f(r, z)}{r} \overrightarrow{e_T}.$$

Pour la densité de courant, l'équation d'Ampère est considérée :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B_T} = \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{f(r, z)}{r} \overrightarrow{e_T} \right) = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}f \wedge \overrightarrow{e_T}}{r}$$

et

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\overrightarrow{\text{grad}}f \wedge \overrightarrow{e_T}}{r} \right) = - \left[\frac{\partial(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r})}{\partial r} + \frac{\partial(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial z})}{\partial z} \right] \overrightarrow{e_T}$$

donc

$$\overrightarrow{j} = \frac{1}{\mu_0 r} \overrightarrow{\text{grad}}f(r, z) \wedge \overrightarrow{e_T} + \mathcal{L}\psi \overrightarrow{e_T}$$

avec

$$\mathcal{L}\psi = -\frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r})}{\partial r} + \frac{\partial(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial z})}{\partial z} \right]$$

on note

$$j_T = \mathcal{L}\psi$$

$$\overrightarrow{j_p} = \frac{1}{\mu_0 r} \overrightarrow{\text{grad}}f(r, z) \wedge \overrightarrow{e_T}$$

on peut encore écrire

$$\frac{j_T}{r} = -\text{div} \left(\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\psi}{\mu_0 r^2} \right).$$

En effet

$$\text{div} \left(\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\psi}{r^2} \right) = \text{div} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial r} \overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial z} \overrightarrow{e_z} \right) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r})}{\partial r} + \frac{\partial(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial z})}{\partial z} \right] = -\mu_0 \frac{\mathcal{L}\psi}{r}.$$

On va donner ici l'équation d'équilibre de Plasma :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}.$$

En utilisant les expressions de $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{B}$ en fonction de ψ et f , il vient

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = -\frac{1}{r} \left(\overrightarrow{\text{grad}}\psi \wedge \overrightarrow{e_T} + f \overrightarrow{e_T} \right) \wedge \left(\frac{1}{\mu_0 r} (\overrightarrow{\text{grad}}f \wedge \overrightarrow{e_T}) + \mathcal{L}\psi \overrightarrow{e_T} \right). \quad (\text{A.2})$$

On a $\vec{B} \cdot \vec{\text{grad}} p = 0$ et d'après (A.1) on a $\vec{B} \cdot \vec{\text{grad}} \psi = 0$. Ceci implique que $\vec{\text{grad}} p$ et $\vec{\text{grad}} \psi$ sont colinéaires. Les surfaces magnétiques sont aussi des surfaces iso- ψ . En conséquence, il existe une relation $p = p(\psi)$. De la même manière on trouve que $\vec{\text{grad}} p$ et $\vec{\text{grad}} f$ sont colinéaires. Les surfaces magnétiques sont aussi iso- f . En conséquence il existe une relation $f = f(\psi)$ et on a forcément la colinéarité entre $\vec{\text{grad}} \psi$ et $\vec{\text{grad}} f$. Ceci implique que

$$\left(\vec{\text{grad}} \psi \wedge \vec{e}_T \right) \wedge \left(\vec{\text{grad}} f \wedge \vec{e}_T \right) = 0$$

et par simple calcul on a

$$\left(\frac{1}{r} \vec{\text{grad}} \psi \wedge \vec{e}_T \right) \wedge \mathcal{L}\psi \vec{e}_T = \frac{\mathcal{L}\psi}{r} \vec{\text{grad}} \psi$$

et

$$\frac{f}{r} \vec{e}_T \wedge \left(\frac{1}{\mu_0 r} \left(\vec{\text{grad}} f \wedge \vec{e}_T \right) \right) = \frac{f}{\mu_0 r^2} \vec{\text{grad}} f.$$

Alors (A.2) devient

$$\vec{\text{grad}} p = -\frac{f}{\mu_0 r^2} \vec{\text{grad}} f + \frac{\mathcal{L}\psi}{r} \vec{\text{grad}} \psi.$$

On a

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial \psi} \vec{\text{grad}} \psi$$

et

$$\vec{\text{grad}} p = \frac{\partial p}{\partial \psi} \vec{\text{grad}} \psi.$$

(A.2) devient alors

$$\frac{\partial p}{\partial \psi} \vec{\text{grad}} \psi = -\frac{f}{\mu_0 r^2} \frac{\partial f}{\partial \psi} \vec{\text{grad}} \psi + \frac{\mathcal{L}\psi}{r} \vec{\text{grad}} \psi.$$

On obtient

$$\frac{\partial p}{\partial \psi} = -\frac{f}{\mu_0 r^2} \frac{\partial f}{\partial \psi} + \frac{\mathcal{L}\psi}{r}$$

d'où

$$\mathcal{L}\psi = r \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{1}{2\mu_0 r} \frac{\partial f^2}{\partial \psi}. \quad (\text{A.3})$$

Cette équation est appelée équation d'équilibre de Grad-Schluter-Shafranov.

Annexe B

Moyennage sur les surfaces magnétiques

Sommaire

B.1	Notion de moyenne sur les surfaces magnétiques	145
B.2	Calcul de champ toroïdal ϕ , du facteur de sécurité q et du courant total dans le plasma I_p	147

B.1 Notion de moyenne sur les surfaces magnétiques

Définition 66 La moyenne scalaire $\langle A \rangle$ d'une quantité A sur une surface magnétique S est définie par

$$\langle A \rangle = \frac{\partial}{\partial V} \int_V A dV$$

où V est le volume à l'intérieur de la surface magnétique S .

Soit ρ un index quelconque de surface magnétique et $dV = \frac{dS d\rho}{|\overrightarrow{\text{grad}} \rho|}$. Pour simplifier, on va noter

$$\overrightarrow{\text{grad}} \rho = \overrightarrow{\nabla} \rho$$

alors on a

$$\langle A \rangle = \frac{\partial}{\partial V} \int_V A dV = \frac{\partial}{\partial V} \int_V \frac{A dS d\rho}{|\overrightarrow{\nabla} \rho|}.$$

On a aussi

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial \rho} = V' \frac{\partial}{\partial V} \quad V' = \frac{\partial V}{\partial \rho}$$

donc

$$\langle A \rangle = \frac{1}{V'} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_V \frac{A dS d\rho}{|\overrightarrow{\nabla} \rho|} = \frac{1}{V'} \int_S \frac{A dS}{|\overrightarrow{\nabla} \rho|}. \quad (\text{B.1})$$

On a aussi une relation qui nous donne la moyenne de la divergence d'un vecteur :

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \rangle &= \frac{\partial}{\partial V} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\
 &= \frac{\partial}{\partial V} \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \\
 &= \frac{\partial}{\partial V} \int_S \frac{\vec{F} \cdot \vec{\nabla} \rho}{|\vec{\nabla} \rho|} dS, \quad \text{avec } d\vec{S} = \frac{\vec{\nabla} \rho}{|\vec{\nabla} \rho|} dS \\
 &= \frac{\partial}{\partial V} \left[V' \langle \vec{F} \cdot \vec{\nabla} \rho \rangle \right] \\
 &= \frac{1}{V'} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[V' \langle \vec{F} \cdot \vec{\nabla} \rho \rangle \right].
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

Ainsi, il vient

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \rangle = \frac{1}{V'} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[V' \langle \vec{F} \cdot \vec{\nabla} \rho \rangle \right]. \tag{B.3}$$

Soit $\frac{\partial}{\partial t}$ la dérivée partielle d'une quantité par rapport au temps, $\dot{A}$ la dérivée totale de A par rapport au temps et $\vec{u}_\rho$ la vitesse des surfaces à ρ constant définie par

$$\dot{\rho} + \vec{u}_\rho \cdot \vec{\nabla} \rho = 0. \tag{B.4}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \dot{A} &= \frac{dA}{dt} \\
 &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \rho} \dot{\rho} \\
 &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \rho} (-\vec{u}_\rho \cdot \vec{\nabla} \rho) \\
 &= \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial \rho} \vec{u}_\rho \cdot \vec{\nabla} \rho
 \end{aligned}$$

ainsi

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \dot{A} + \frac{\partial A}{\partial \rho} \vec{u}_\rho \cdot \vec{\nabla} \rho. \tag{B.5}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV &= \int_V \dot{A} dV + \int_V \frac{\partial A}{\partial \rho} \vec{u}_\rho \cdot \vec{\nabla} \rho dV \\
 &= \int_V \dot{A} dV + \int_V \frac{\partial A}{\partial \rho} \vec{u}_\rho \cdot \vec{\nabla} \rho \frac{dS d\rho}{|\vec{\nabla} \rho|} \\
 &= \int_V \dot{A} dV + \int_V \frac{\partial A}{\partial \rho} \vec{u}_\rho \cdot d\vec{S} d\rho \\
 &= \int_V \dot{A} dV + \int_S A \vec{u}_\rho \cdot d\vec{S}
 \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V A dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV = \int_V \dot{A} dV + \int_S A \vec{u}_\rho \cdot d\vec{S}. \tag{B.6}$$

Les relations (B.1) et (B.6) donnent

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial t} \int_V A dV = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_V A dV = \frac{\partial}{\partial \rho} \int_V \dot{A} dV + \frac{\partial}{\partial \rho} \int_S A \vec{u}_\rho \cdot \vec{dS}$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial \rho} = V' \frac{\partial}{\partial V}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(V' \frac{\partial}{\partial V} \int_V A dV \right) = V' \frac{\partial}{\partial V} \int_V \dot{A} dV + \frac{\partial}{\partial \rho} \int_S A \vec{u}_\rho \cdot \frac{\vec{\nabla} \rho}{\left| \vec{\nabla} \rho \right|} dS$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (V' < A >) = V' < \dot{A} > + \frac{\partial}{\partial \rho} (V' < A \vec{u}_\rho \cdot \vec{\nabla} \rho >).$$

En prenant $A = 1$ ($< 1 > = 1$), il vient

$$\frac{\partial V'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \rho} (V' < \vec{u}_\rho \cdot \vec{\nabla} \rho >).$$

B.2 Calcul de champ toroïdal ϕ , du facteur de sécurité q et du courant total dans le plasma I_p

On a

$$\begin{aligned} \phi &= \int_{D'} \vec{B} \cdot \vec{dS} = \int_{D'} \vec{B} \cdot dS \vec{e}_T \quad \text{car } \vec{dS} = dS \cdot \vec{e}_T \\ &= \int_{D'} B_T dS = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{D'} B_T d\theta dS \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{D'} \frac{B_T}{r} r d\theta dS = \frac{1}{2\pi} \int_V \frac{B_T}{r} dV \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_V \frac{f}{r^2} dV. \end{aligned}$$

En utilisant la définition du facteur de sécurité (1.8), il vient

$$\begin{aligned} q &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_V \frac{f}{r^2} dV \right) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\int_V \frac{f}{r^2} dV \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial V}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial V} \left(\int_V \frac{f}{r^2} dV \right) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial V}{\partial \psi} < \frac{f}{r^2} > \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial V}{\partial \psi} f < \frac{1}{r^2} > = -\frac{V'}{4\pi^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho}} f < \frac{1}{r^2} >. \end{aligned}$$

Et pour le courant total, on a

$$\begin{aligned}
I_p &= \int_{\Omega_p} j_T dS = \int_{\Omega_p} \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} j_T r d\theta dS = \int_{\Omega_p} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi r} j_T r d\theta dS \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{V_p} \frac{j_T}{r} dV = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\rho_{max}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\int_{V_p} \frac{j_T}{r} dV \right) d\rho \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\rho_{max}} V' \frac{\partial}{\partial V} \left(\int_{V_p} \frac{j_T}{r} dV \right) d\rho, \quad \frac{\partial}{\partial \rho} = V' \frac{\partial}{\partial V} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\rho_{max}} \left\langle \frac{j_T}{r} \right\rangle V' d\rho \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\rho_{max}} -\frac{1}{\mu_0 V'} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(C_2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) V' d\rho, \quad \left\langle \frac{j_T}{r} \right\rangle = -\frac{1}{\mu_0 V'} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(C_2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\rho_{max}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(C_2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) d\rho = -\frac{1}{2\pi \mu_0} C_2(\rho_{max}) \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \Big|_{\rho_{max}}.
\end{aligned}$$

Les moyennages sur les surfaces magnétiques permettent de passer d'une géométrie $2D$ à une géométrie $1D$ et de calculer l'équation d'évolution du flux magnétique poloïdal.

Annexe C

Construction de la loi de commande à partir des paramètres d'ingénierie réels

Nous allons montrer, dans cette annexe, la construction des lois de commande réelles, à partir d'une loi de commande en dimension infinie. La construction des lois de commande se fait en deux temps (voir Fig. C.1). Dans en premier temps, une loi de contrôle en dimension infinie (j_{target}) est proposée. En suite pour le passage aux leviers de commande réels, un critère est minimisé sous contrainte comme suit :

$$\Psi(P_{lh}, N_{lh}, V_0) = \int_0^1 (j_{target} - (j_{\Omega} + j_{lh} + j_{bs}))^2 dx \quad (C.1)$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} V_{\min} < V_0 < V_{\max}; \\ P_{\min} < P_{lh} < P_{\max}; \\ N_{\min} < N_{lh} < N_{\max}; \end{cases} \quad (C.2)$$

où $j_{\Omega} = \frac{-V_0}{\eta_{||} R_0}$, j_{lh} est la densité de courant LHCD et j_{bs} la densité de courant bootstrap (voir [70] pour plus d'informations).

Dans les simulations, les valeurs minimales / maximales des lois réelles seront prises à partir des contraintes sur le tokamak Tore Supra, i.e.

$$-5V < V_0 < 5V, 0MW < P_{lh} < 7MW, 1.43 < N_{lh} < 2.37. \quad (C.3)$$

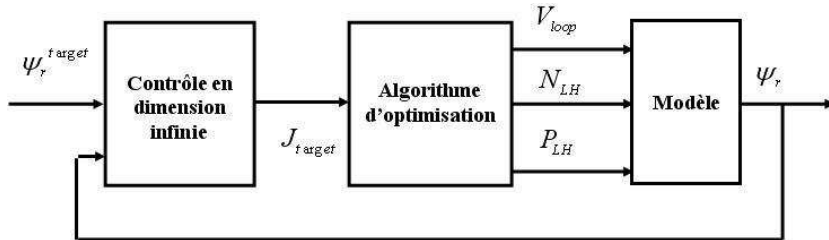


FIGURE C.1 – Schéma de contrôle

Annexe D

Condition de Kalman

Voici un rappel de théorème de *Kalman* (voir Théorème 24 dans le chapitre 3).

Théorème 67 (Théorème de Kalman) *Le système $\dot{X} = AX + BU$ est contrôlable en temps T (quelconque) si et seulement si la matrice*

$$\mathcal{C} = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)$$

est de rang n .

L'essentiel de la preuve est contenue dans le lemme suivant (voir [86] pour la preuve).

Lemme 68 *La matrice $\mathcal{C} = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)$ est de rang n si et seulement si l'application linéaire*

$$\begin{aligned} \Phi : L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt \end{aligned}$$

est surjective.

Preuve. Supposons tout d'abord que $\text{rang}(\mathcal{C}) < n$, et montrons qu'alors Φ n'est pas surjective. L'application $\mathcal{C}$ étant non surjective, il existe un vecteur $\Psi \in \mathbb{R}^{n,*} = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, que l'on supposera être un vecteur ligne, tel que $\Psi \mathcal{C} = 0$. Par conséquent,

$$\Psi B = \Psi AB = \Psi A^2B = \dots = \Psi A^{n-1}B = 0.$$

Or d'après le théorème de Cayley-Hamilton, il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tels que

$$A^n = a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1}.$$

On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout entier k ,

$$\Psi A^k B = 0,$$

et donc, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\Psi e^{tA} B = 0.$$

Par conséquent, pour tout contrôle u , on a

$$\Psi \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt = 0,$$

i.e. $\Psi \Phi(u) = 0$, ce qui montre que Φ n'est pas surjective.

Réciproquement, si Φ n'est pas surjective, alors il existe un vecteur ligne $\Psi \in \mathbb{R}^{n,*}$ tel que pour tout contrôle u , on ait

$$\Psi \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt = 0.$$

Ceci implique que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\Psi e^{(T-t)A} B = 0.$$

En $t = T$ on obtient $\Psi B = 0$. En suite, en dérivant par rapport à t , puis en prenant $t = T$, on obtient $\Psi AB = 0$. Ainsi, par dérivations successives, on obtient finalement

$$\Psi B = \Psi AB = \dots = \Psi A^{n-1} B = 0,$$

donc $\Psi \mathcal{C} = 0$, et donc $\text{rang}(\mathcal{C}) < n$. Ce qui termine la preuve du Lemme. ■

Ce lemme permet maintenant de montrer facilement le théorème. Si la matrice $\mathcal{C}$ est de rang n , alors d'après le Lemme 68 l'application Φ est surjective, i.e. $\Phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n$. Or, pour tout contrôle u , l'extrémité au temps T de la trajectoire associée à u est donnée par

$$X(T) = e^{TA} x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt,$$

de sorte que l'ensemble accessible en temps T depuis un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est

$$\text{Acc}(T, x_0) = e^{TA} x_0 + \Phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n,$$

ce qui montre que le système est contrôlable.

Réciproquement si le système est contrôlable, alors il est en particulier contrôlable depuis x_0 défini par $x_0 = 0$. Or, en ce point l'ensemble accessible en temps T s'écrit

$$\text{Acc}(T, x_0) = \Phi(L^\infty),$$

et le système étant contrôlable, cet ensemble est égal à $\mathbb{R}^n$. Cela prouve que Φ est surjective et donc, d'après le Lemme 68, on obtient que la matrice $\mathcal{C}$ est de rang n . Ce qui termine la preuve du théorème.

Annexe E

Stabilisation des équations différentielles ordinaires (EDO)

Sommaire

E.1	Commande par mode glissant	153
E.2	Invariance de LaSalle	156

E.1 Commande par mode glissant

Nous allons présenter brièvement les modes glissants en dimension finie [56]. Supposons que le système non linéaire à contrôler s'écrive sous la forme

$$\dot{\xi} = f(\xi) + g(\xi)u$$

avec $\xi \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$. La commande $u(t)$ est déterminée en utilisant une fonction S souvent linéaire. Cette fonction est appelée surface car ses zéros appartiennent à la surface dite de glissement (une surface sur laquelle on va contraindre l'état du système à glisser) d'équation $S = 0$ construite dans l'espace d'état. La surface $S = 0$ peut être une droite ou un hyperplan selon l'ordre du système à contrôler.

Le contrôle nécessaire $u(t)$ dépend du signe de la fonction de la surface S . Sous la discontinuité de $u(t)$, le comportement dynamique du système bouclé devient celui du système défini par $S = 0$. Il y a ainsi une "structure variable" puisque la dynamique du système à contrôler est maintenant définie par $S = 0$ au lieu d'être définie par la transmittance entre la sortie et l'entrée $u(t)$.

Le contrôle comprend en général deux termes

$$u = u_{eq} + \Delta u$$

un terme continu appelé commande équivalente $u_{eq}(t)$ correspondant au régime glissant idéal pour lequel non seulement le système reste sur la surface, mais aussi pour lequel la dérivée de la fonction de surface reste nulle et un terme de commande discontinue $\Delta u(t) = -k \text{sign}(S)$ qui impose au point de fonctionnement de rester au voisinage de la surface. Le contrôle peut aussi s'écrire sous la forme d'un terme d'amplitude constante et proportionnel au signe de la fonction de surface de la forme $u(t) = -K \text{sign}(S)$.

Cette fonction sera déterminée à partir d'une surface S car c'est sur la surface d'équation $S = 0$ que l'on va forcer le système à glisser. Prenons la fonction de Lyapunov

$$V(S) = \frac{1}{2}S^2,$$

alors $\dot{V} = S\dot{S}$. Nous calculons alors

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \xi} [f(\xi) + g(\xi)u] \\ &= S_1(t, \xi) + S_2(t, \xi)u.\end{aligned}$$

En prenant

$$u = u_{eq} + v_n$$

avec u_{eq} la commande équivalente $u_{eq} = -\frac{S_1(t, \xi)}{S_2(t, \xi)}$ et $v_n = \frac{u_n}{S_2(t, \xi)}$, nous obtenons donc

$$\dot{V} = Su_n.$$

Afin de rendre $\dot{V} < 0$ pour $S \neq 0$, il nous suffit de prendre

$$u_n = -K \text{sign}(S), \quad K > 0.$$

On va donner un exemple illustratif qui se trouve dans [81].

Exemple 71 Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k \text{sign}(S) \end{cases}$$

avec l'équation décrivant la surface de glissement choisie comme étant

$$S(x_1, x_2) = cx_1 + x_2$$

où c est une constante positive. Nous choisissons la fonction de Lyapunov :

$$V = \frac{1}{2}S^2.$$

Alors pour que la surface $S = 0$ soit attractive, il suffit que :

$$S\dot{S} < 0. \tag{E.1}$$

La condition d'attractivité (E.1) donne lieu au développement suivant :

$$\dot{S} = cx_2 - k \text{sign}(S).$$

On a

$$S > 0 \text{ et } \dot{S} < 0 \Rightarrow x_2 < \frac{k}{c};$$

$$S < 0 \text{ et } \dot{S} > 0 \Rightarrow x_2 > -\frac{k}{c}.$$

En notant respectivement D_a^+ et D_a^- les domaines d'attractivité pour $S > 0$ et $S < 0$, on a

$$D_a^+ = \left\{ (x_1, x_2) : S > 0 \text{ et } x_2 < \frac{k}{c} \right\}$$

et

$$D_a^- = \left\{ (x_1, x_2) : S < 0 \text{ et } x_2 > -\frac{k}{c} \right\}.$$

Alors le domaine de glissement est donné par :

$$D_g = \left\{ (x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in \overline{D_a^+} \cap \overline{D_a^-} \right\}$$

où $\overline{D_a^+}$ et $\overline{D_a^-}$ sont les plus petits fermés respectivement de D_a^+ et D_a^- (voir Fig. E.3).

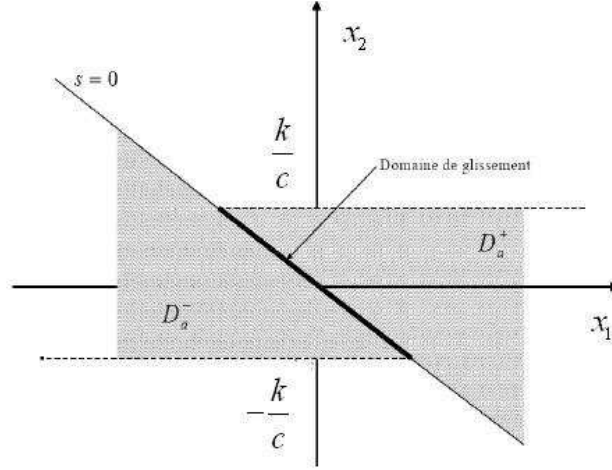


FIGURE E.3 – Domaine de glissement

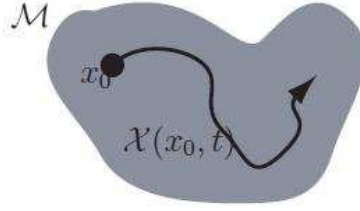
E.2 Invariance de LaSalle

L'objectif est de présenter les conditions supplémentaires à une fonction Lyapunov définie par la Définition 69 pour garantir la stabilité asymptotique (voir [59, 9] pour plus d'informations).

La solution du système $\dot{\xi} = f(\xi)$ ayant comme condition initiale $\xi(0) = x_0$ sera notée $\chi(x_0, t)$.

Définition 72 (ensemble invariant) *Un ensemble invariant $\mathcal{M}$, pour un système dynamique $\dot{\xi} = f(\xi)$, est défini comme un ensemble de conditions initiales telles que la solution $\chi(x_0, t)$ reste dans l'ensemble $\mathcal{M}$ pour tous les temps, c'est-à-dire*

$$\mathcal{M} = \{ \xi : x_0 \in \mathcal{M} \Rightarrow \chi(x_0, t) \in \mathcal{M} \quad \forall t > 0 \} \quad (\text{E.2})$$

FIGURE E.4 – Ensemble invariant $\mathcal{M}$

Parallèlement à la notion d'ensemble invariant, celui des points pour lesquels $\dot{V}$ s'annule est de première importance (V étant la fonction de Lyapunov). Ceci n'a rien de surprenant, car un des objets de cette analyse est d'étendre la conclusion de la stabilité asymptotique au cas où $\dot{V} \leq 0$ au lieu de $\dot{V} < 0$; la différence entre les deux cas se situe dans la possibilité que $\dot{V} = 0$.

L'ensemble en question sera noté $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \left\{ \xi : \dot{V}(\xi) = 0 \right\} \quad (\text{E.3})$$

Le théorème de Lasalle (qui se trouve dans [59]) peut maintenant être énoncé.

Théorème 73 (*Théorème d'invariance de LaSalle*) Soit $l > 0$, et $\Omega_l = \{\xi : V(\xi) \leq l\}$. Si

1. Ω_l fermé et borné,
2. $\forall \xi \in \Omega_l$ on a $\dot{V} \leq 0$,
3. $\mathcal{E} \subset \Omega_l$,
4. $\mathcal{M}$ le plus grand ensemble invariant contenu dans $\mathcal{E}$,

alors

$$\forall x_0 \in \Omega_l, \chi(x_0, t) \rightarrow \mathcal{M} \text{ lorsque } t \rightarrow \infty.$$

Le corollaire suivant est dans [49, P. 129].

Corollaire 74 Soit $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue différentiable, radialement non bornée, définie positive telle que $\dot{V} \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On suppose qu'aucune solution de $\dot{\xi} = f(\xi)$ ne peut rester identiquement dans l'ensemble $\mathcal{E}$, autre que la solution triviale $\xi(t) \equiv 0$. Alors, le point d'équilibre $\bar{\xi} = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

Nous donnons un exemple d'étude d'un système dynamique qui se trouve dans [21].

Exemple 75 On considère le système à ressort classique. Le système de contrôle est défini par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 + \frac{u}{m}, \end{cases}$$

où m est la masse du point attaché au ressort, x_1 le déplacement de la masse sur l'axe (Ox) , x_2 la vitesse de la masse, k la constante de ressort et $u \vec{i}$ la force horizontale appliquée à la masse (voir Fig. E.5). L'état du système est $(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ et le contrôle $u \in \mathbb{R}$.

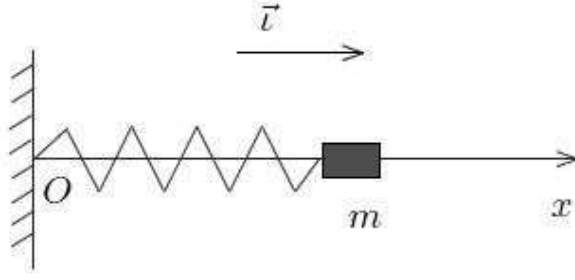


FIGURE E.5 – Le ressort

L'énergie totale E du système est donnée par

$$E = \frac{1}{2} (kx_1^2 + mx_2^2).$$

Le système de contrôle peut être écrit sous la forme

$$\dot{\xi} = f_0(\xi) + uf_1(\xi), \quad \xi = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (\text{E.4})$$

avec

$$f_0(\xi) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 \end{pmatrix}, \quad f_1(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}, \quad \forall \xi = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2.$$

On a

$$f_0(\xi) \cdot \nabla E(\xi) = 0, \quad \forall \xi = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2,$$

$$f_1(\xi) \cdot \nabla E(\xi) = x_2, \quad \forall \xi = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2.$$

D'où, si $x_2 = 0$, il n'existe pas de u tel que

$$(f_0(\xi) + uf_1(\xi)) \cdot \nabla E(\xi) < 0.$$

Par conséquent, l'énergie totale n'est pas une fonction de Lyapunov stricte. Mais on a

$$(f_0(\xi) + uf_1(\xi)) \cdot \nabla E(\xi) = uf_1(\xi) \cdot \nabla E(\xi) = ux_2.$$

D'où, il est normal de considérer la loi de feedback

$$u(\xi) = -\nu \nabla E(\xi) \cdot f_1(\xi) = -\nu x_2,$$

où $\nu > 0$ est fixé. Avec cette loi de contrôle, le système en boucle fermé est

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\nu}{m}x_2, \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

qui est la dynamique du système masse-ressort-amortisseur. En d'autres termes, la loi de contrôle ajoute un certain amortissement sur le système ressort-masse. Avec cette loi de contrôle,

$$\nabla E(\xi) \cdot (f_0(\xi) + u(\xi)f_1(\xi)) \leq 0,$$

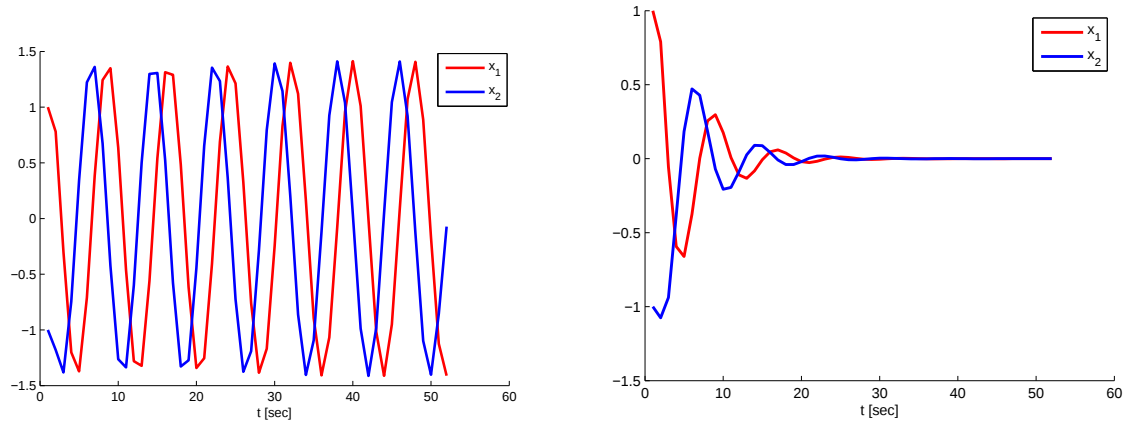
de sorte que $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ est stable pour le système en boucle fermée d'après le Théorème 70. En fait, le point $(0,0)$ est globalement asymptotiquement stable pour ce système. En effet, si la trajectoire $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, du système en boucle fermée est de telle sorte que l'énergie totale $E(\xi(t))$ ne dépende pas du temps t (i.e. $\frac{dE}{dt} = 0$), alors

$$x_2(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (\text{E.6})$$

En dérivant (E.6) par rapport au système (E.5), on obtient

$$x_1(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

qui, conjointement avec (E.6) et le principe d'invariance de LaSalle (voir [38] par exemple), prouve que $(0,0)$ est globalement asymptotiquement stable pour le système en boucle fermée. Dans les figures E.6a et E.6b, on montre les simulations avec $m = 1 \text{ Kg}$ et $k = 1 \text{ Nm}^{-1}$.



(a) Implémentation de la commande avec $\nu = 0$

(b) Implémentation de la commande avec $\nu = -\frac{1}{2}$

FIGURE E.6 – Illustration de la commande

Bibliographie

- [1] J. Adam. *La fusion nucléaire*. Editions Pour la Science, Paris, 1993.
- [2] W. Arendt and C. J. K. Batty. Tauberian theorems and stability of one-parameter semi-groups. 306(2) :837–852, 1988.
- [3] J. F. Artaud, V. Basiuk, F. Imbeaux, M. Schneider, J. Garcia, G. Giruzzi, et al. The cronos suite of codes for integrated tokamak modeling. *Nuclear Fusion*, 50(4) :1–25, 2010.
- [4] O. Barana, D. Mazon, L. Laborde, and F. Turco. Feedback control of the lower hybrid power deposition profile on Tore Supra. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 49(7) :947–967, 2007.
- [5] G. Bateman. *MHD Instabilities*. MIT Press, Cambridge, Massachussets, 1978.
- [6] B. S. Belgherras. *Modélisation du Confinement Magnétique d’un Plasma dans un Tokamak*. PhD thesis, Université Abou-Bakar Belkaid-Tlemcen, 2010.
- [7] J. Blum. *Numerical Simulation and Optimal Control in Plasma Physics With Application to Tokamaks*. Wiley/ Gauthier-Villars Series in Modern Applied Mathematics, 1989.
- [8] J. Blum, J. LE FOOL, and B. Thooris. The self-consistent equilibrium and diffusion code SCED. *Computer Physics Communications*, 24 :235–254, 1981.
- [9] P. Borne. *Analyse et régulation des processus industriels, tome 2 : Régulation numérique*. Edition Technip, 1993.
- [10] C. Boulbe. *Contribution à la résolution des équations de la magnétohydrodynamique et de la magnétostatique*. PhD thesis, Université de Pau et des Pays de l’Adour, 2007.
- [11] S. Boulite, S. Hadd, H. Nounou, and M. Nounou. The PI-controller for infinite dimensional linear systems in Banach state spaces. In *American Control Conference*, pages 3095–3100, Hyatt Regency Riverfront, St. Louis, MO, USA, 2009.
- [12] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial & Applied Mathematics, U.S., 1987.
- [13] S. I. Braginskii. In review of plasma physics. Technical report, Consultants Bureau, New York, 1995.
- [14] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. Sciences sup, Dunod, 2005.
- [15] F. Bribiesca-Argomedo, C. Prieur, E. Witrant, and S. Brémond. A strict control lyapunov function for diffusion equation with time-varying distributed coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, à paraître.
- [16] F. Bribiesca-Argomedo, C. Prieur, E. Witrant, and S. Brémond. Model-based Control of the Magnetic Flux Profile in a Tokamak Plasma. In *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6926–6931, Atlanta, GA, USA, 2010.

- [17] F. Bribiesca-Argomedo, C. Prieur, E. Witrant, and S. Brémond. Polytopic Control of the Magnetic Flux Profile in a Tokamak Plasma. In *Preprints of the 18th IFAC World Congress*, pages 6686–6691, Milano (Italy), 2011.
- [18] S. Brémond. *Modélisation et commande d'un plasma de tokamak*. PhD thesis, Université de Paris-Sud, 1995.
- [19] P. Cannarsa, G. Fragnelli, and J. Vancostenoble. Persistent regional controllability for a class of degenerate parabolic equations. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 3(4) :607–635, 2004.
- [20] E. Cerpa and E. Crépeau. Rapid Exponential Stabilization For a Linear Korteweg-De Varies Equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Serie B*, 11(3) :655–668, 2009.
- [21] J. M. Coron. *Control and Nonlinearity*. American Mathematical Society, 2007.
- [22] R. Datko. Uniform asymptotic stability of evolutionary processes in a banach space. *J. Math. Anal.*, 3 :428–445, 1972.
- [23] C. David and P. Gosselet. *Equations aux dérivées partielles - Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2012.
- [24] J. Douchet and B. Zwahlen. *Calcul différentiel et intégral : Fonction réelles d'une ou de plusieurs variables réelles*. PPUR, 2007.
- [25] C. Du and L. Xie. *H_∞ Control and Filtering of Two-dimensional Systems*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K, 2002.
- [26] G. Duc and S. Font. *Commande H_∞ et μ analyse*. Hermes Sciences Publication, 2000.
- [27] R. Dumont. *Contrôle du profil de courant par ondes cyclotroniques électroniques dans les tokamaks*. PhD thesis, Université Henri Poincaré, Nancy I, 2001.
- [28] C. Edwards and S. K. Spurgeon. *Sliding mode control - Theory and application*. Taylor and Francis, 1998.
- [29] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19. New York : American Mathematical Society, 1998.
- [30] S. Font. *Méthodologie pour prendre en compte la robustesse des systèmes asservis : optimisation $\mathcal{H}_\infty$ et approche symbolique de la forme standard*. PhD thesis, Université Paris XI Orsay, France, 1995.
- [31] J. P. Freidberg. *Ideal Magnetohydrodynamics*. Pleunum Press, New York, 1987.
- [32] E. Fridman and Y. Orlov. An LMI approach to H_∞ boundary control of semilinear parabolic and hyperbolic systems. *Automatica*, 45(9) :2060–2066, 2009.
- [33] O. Gaye, L. Autrique, Y. Orlov, E. Moulay, S. Brémond, and R. Nouailletas. Stabilization of the Current Profile in Tokamak Plasmas via LMI Approach. *soumis à Automatica (en relecture)*, 2012.
- [34] O. Gaye, E. Moulay, S. Brémond, L. Autrique, R. Nouailletas, J.F. Artaud, and Y. Orlov. Robust stabilization of the current profile in Tokamak plasmas using sliding mode approach in infinite dimension. *soumis à Control Engineering Practice (en relecture)*, 2012.
- [35] O. Gaye, E. Moulay, S. Brémond, L. Autrique, R. Nouailletas, and Y. Orlov. Sliding mode stabilization of the current profile in tokamak plasmas. In *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2638–2643, Orlando, Florida, USA, 2011.

- [36] D. Guinin. *Mathématiques Exercices PC*. Bréal, 2005.
- [37] F. Guo, Q. Zhang, and F. Huang. Well-Posedness and Admissible Stabilizability for Pritchard-Salamon systems. *Applied Mathematics Letters*, 16 :65–70, 2003.
- [38] D. Henry. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [39] E. Hille. *Lectures on Ordinary Differential Equations, chapter 8 : Sturm-Liouville Theory*. Addison-Wesley, Londres, 1969.
- [40] F. L. Hinton and R. D. Hazeltine. Theory of plasma transport in toroidal confinement systems. *Reviews of Modern Physics*, 48(2) :239–308, 1976.
- [41] S. P. Hirshman. Finite-aspect-ratio effects on the bootstrap current in tokamaks. *Phys. Fluids*, 10(31) :3150–3152, 1998.
- [42] S. P. Hirshman, R. J. Hawryluk, and B. Birge. Neoclassical conductivity of a tokamak plasma. *Nucl. Fusion*, 17(3) :611–614, 1977.
- [43] F. L. Huang. Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces. *Ann Differential Equations*, 1(1) :43–56, 1985.
- [44] F. Imbeaux, M. Lennholm, A. Ekedahl, P. Pastor, T. Aniel, S. Brémond, et al. Real-time control of the safety factor profile diagnosed by magneto-hydrodynamic activity on the Tore Supra tokamak. *Nucl. Fusion*, 51(7) :1–12, 2011.
- [45] W. Jiang, F. Huang, and T. Zhu. Stability radius of non-smooth Pritchard-Salamon systems and the algebraic Riccati equation. *Journal of Systems Science and Complexity*, 22 :220–227, 2009.
- [46] M. Keilhacker, A. Gibson, C. Gormezano, P.J. Lomas, P.R. Thomas, M.L. Watkins, P. Andrew, et al. High Fusion Performance From Deuterium-Tritium Plasma in JET. *Nuclear Fusion*, 39(2) :209–234, 1999.
- [47] B. V. Keulen. $\mathcal{H}_\infty$ control with Measurement-Feedback for Linear Infinite-Dimensional System. *Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control*, 3(4) :373–411, 1993.
- [48] B. V. Keulen, Mathematics Institute, P. O. Box 800, and 9700 AV Groningen The Netherlands. The $\mathcal{H}_\infty$ control problem for Pritchard-Salamon system. In *Proceedings of the 31th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 217–218, Tucson, Arizona, 1992.
- [49] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall ; Édition, 2001.
- [50] A. A. Kirillov and A. D. Gvishiani. *Theorems and Problems in Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [51] V. Komornik. Rapid boundary stabilization of linear distributed systems. *SIAM J. Control Optim*, 35(5) :1591–1613, 1997.
- [52] M. Krasnov, A. Kissélev, G. Chikine, and E. Makarenko. *Mathématiques supérieures, volume 2. Pour ingénieurs et polytechniciens*. De Boeck - Wesmael, 1993.
- [53] J. L. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, 1968.
- [54] K. Liu. Locally distributed control and damping for the conservative system. *SIAM J. Control Optim*, 35(5) :1574–1590, 1997.
- [55] Z. Liu and B. Rao. Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation. *Z. Angew. Math. Phys*, 56(4) :630–644, 2005.

- [56] P. Lopez and A. S. Nouri. *Theorie Elementaire Et Pratique De La Commande Par Les Regimes Glissants*. Springer, 2006.
- [57] R. L. Miller. Shape control of doublets. *Nucl. Fusion*, 20(2) :133–147, 1980.
- [58] K. Miyamoto. *Plasma Physics for Nuclear Fusion*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1976.
- [59] P. Müllhaupt. *Introduction à l'analyse et à la commande des systèmes non linéaires*. PPUR, 2009.
- [60] D. Moreau, D. Mazon, M. Ariola, G. De Tommasi, L. Laborde, F. Piccolo, et al. A two-scale dynamic model approach for magnetic and kinetic profile control in advanced tokamak scenarios on JET. *Nuclear Fusion*, 48(10) :1–38, 2008.
- [61] D. Moreau, D. Mazon, M.L. Walker, J.R. Ferron, K.H. Burrell, S.M. Flanagan, et al. Plasma models for real-time control of advanced tokamak scenarios. *Nuclear Fusion*, 51(6) :1–14, 2011.
- [62] G. Naudet and P. Reuss. *Energie, électricité et nucléaire*. EDP SCIENCES, 2008.
- [63] A. W. Naylor and G. R. Sell. *Linear Operator Theory in Engineering and Science*. Springer, New York, 1982.
- [64] C. Ngaô. *L'énergie : Ressources, technologies et environnement*. Dunod, 2008.
- [65] Y. Orlov. Discontinuous Unit Feedback Control of Uncertain Infinite-Dimensional Systems. *IEEE transactions on automatic control*, 45(2) :834–843, 2000.
- [66] Y. Ou and E. Schuster. Controllability analysis for current profile control in tokamaks. In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 315–320, Shanghai, China, 2009.
- [67] Y. Ou, C. Xu, E. Schuster, J. R. Ferron, T. C. Luce, M. L. Walker, and D. A. Humphreys. Receding-horizon optimal control of the current profile evolution during the ramp-up phase of a tokamak discharge. *Control Engineering Practice*, 19(1) :22–31, 2011.
- [68] Y. Ou, C. Xu, E. Schuster, T. C. Luce, J. R. Ferron, M. L. Walker, and D. A. Humphreys. Optimal tracking control of current profile in tokamaks. *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, 19(2) :432–441, 2011.
- [69] H. Ouarit. *Réduction des systèmes à paramètres distribués. Application à la commande optimale robuste des canaux d'irrigation*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2004.
- [70] H. Ouarit, S. Brémond, R. Nouailletas, E. Witrant, and L. Autrique. Validation of plasma current profile model predictive control in tokamaks via simulations. *Fusion Engineering and Design*, 86(6-8) :1018–1021, 2011.
- [71] A. Pazy. *Semigroupes of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [72] W. Perruquetti and J. P. Barbot. *Sliding mode control in engineering*. Control Engineering Series, Marcel Dekker Inc, 2002.
- [73] C. Prieur and J. de Halleux. Stabilization of a 1 – D tank modeled by the shallow water equations. In *Journées Équations aux dérivées partielles*, pages 1–13, Forges-les-Eaux, 3-7 juin, 2002.
- [74] C. Prieur and J. de Halleux. Stabilization of a 1 – D tank containing a fluid modeled by the shallow water equations. *Systems & Control Letters*, 52(3-4) :167–178, 2004.

- [75] J. Prüss. On the spectrum of c_0 -semi-groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 248(2) :847–857, 1984.
- [76] L. Rosier. A survey of controllability and stabilization results for partial differential equations. *Journal Européen des Systèmes automatisés (JESA)*, 41(3-4) :365–411, 2007.
- [77] D. Salamon. Infinite-dimensional linear system with unbounded control and observation : a functional analytic approach. *Transaction American Mathematical Society*, 300(2) :383–431, 1987.
- [78] O. Sauter, C. Angioni, and Y. R. Lin-Liu. Neoclassical conductivity and bootstrap current formulas for general axisymmetric equilibria and arbitrary collisionality regime. *Physics of Plasmas*, 9(12) :5140, 2002.
- [79] V. D. Shafranov. On magnetohydrodynamical equilibrium configurations. *Soviet Physics JETP*, 6(3) :1013, 1958.
- [80] M. Slemrod. A note on complete controllability and stabilizability for linear control systems in hilbert space. *SIAM J. Control*, 12 :500–508, 1974.
- [81] M. C. SOSSE-ALAOUI. *Commande et Observateur par Modes glissants d'un système de pompage et d'un bras manipulateur*. PhD thesis, Université Sidi Mohammed Ben Abdellah, 2009.
- [82] M. Soutter, A. Mermoud, and A. Musy. *Ingénierie des eaux et du sol : Processus et aménagements*. PPUR, 2007.
- [83] B. Spiro. *Énergie nucléaire*. Ecole Polytechnique Eds, 2004.
- [84] O. J. Staffans. *Well-Posed Linear Systems*. Cambridge Univ. Press, 2005.
- [85] T. S. Taylor. Physics of advanced tokamaks. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 39 :47–73, 1997.
- [86] E. Trélat. *Contrôle optimal : Théorie et applications*. Vuibert, 2008.
- [87] V. I. Utkin. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22 :212–222, 1977.
- [88] V. I. Utkin. *Sliding Mode in Control Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [89] M. Wakatani. *Stellarator and Heliotron Devices*. OUP USA, 1998.
- [90] G. Weiss. Transfer functions of regular linear systems. Part I : Characterization of regularity. *Transaction American Mathematical Society*, 342(2) :827–854, 1994.
- [91] J. Wesson. *Tokamaks 3rd Edition by John Wesson*. Oxford University Press, 2004.
- [92] T. Wijnands et al. Feedback control of the current profile on Tore Supra. *Nucl. Fusion*, 37(6) :777–791, 1997.
- [93] E. Witrant, E. Jofrian, S. Brémond, G. Giruzzi, D. Mazon, O. Brana, and P. Moreau. A control-oriented model of the current profile in tokamak plasma. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 49(7) :1075–1105, 2007.
- [94] C. Xu, N. Joseph Dalessio, and E. Schuster. Optimal Control of a Parabolic PDE System Arising in Plasma Transport via Diffusivity Interior Boundary Actuation. In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2099–2104, Cancun, Mexico, 2008.
- [95] C. Xu, Y. Ou, J. Dalessio, E. Schuster, T. C. Luce, J. R. Ferron, M. L. Walker, and D. A. Humphreys. Ramp-up phase current profile control of tokamak plasmas via nonlinear programming. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 38(2) :163–173, 2010.

- [96] C. Xu and E. Schuster. Control of ramp-up current profile dynamics in tokamak plasmas via the minimal-surface theory. In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1367–1372, Shanghai, China, 2009.
- [97] C. Xu, O. Yongsheng, and E. Shuster. Sequential linear quadratic control of bilinear parabolic PDEs based on POD model reduction. *Automatica*, 47(2) :418–426, 2011.
- [98] J. Zabczyk. *Mathematical control theory : an introduction, Systems & Control : Foundations & Applications*. Birkhäuser, 1992.

Titre : CONTRÔLE DU PROFIL DE FACTEUR DE SECURITE DANS LES PLASMAS DE TOKAMAK EN DIMENSION INFINIE

Les besoins énergétiques croissants de la population mondiale requièrent le développement, la maîtrise et la fourniture de nouvelles formes d'énergie. Dans ce contexte, la fusion nucléaire est une piste de recherche extrêmement prometteuse. Le projet mondial ITER est destiné à démontrer la faisabilité scientifique et technique de la fusion nucléaire comme nouvelle source d'énergie. Un des nombreux verrous tient à la maîtrise de la distribution spatiale du profil de courant dans les plasmas de tokamak, paramètre clé pour la stabilité et la performance des expériences. L'évolution spatiotemporelle de ce courant est décrite par un ensemble d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

Ce document traite de la stabilisation par un contrôle robuste de la distribution spatiale du profil de courant en dimension infinie. Deux approches sont proposées : la première s'inspire d'une approche de type mode glissant et la seconde (de type proportionnelle et proportionnelle intégrale) est basée sur les fonctions de Lyapunov en dimension infinie. La conception des lois de contrôle est basée sur l'équation $1D$ de la diffusion résistive du flux magnétique. Les lois de contrôle sont calculées en dimension infinie sans discrétisation spatiale préalables.

Mots clés : Contrôle des plasmas de tokamak, équation aux dérivées partielles, fonctions de Lyapunov, commande par mode glissant, commande $\mathcal{H}_\infty$, stabilisation asymptotique, LMI (linear matrix inequality), fonctions de Lyapunov contrôlées.

Titre : CONTROL OF SAFETY FACTOR PROFILE IN PLASMAS OF TOKAMAK IN INFINITE DIMENSION

The increasing energy needs of the world population require the development, the control and the supply of new forms of energy. In this context, nuclear fusion is a track of extremely promising research. World project ITER is intended to prove the scientific and technical feasibility of nuclear fusion. One of the many key-goal is the control of the current profile spatial distribution in plasmas of tokamak, which is one of the main parameter for the stability and the performance of the experiments. The spatiotemporal evolution of this current is described by a set of nonlinear partial differential equations.

In this document stabilization is proposed considering robust control of current profile spatial distribution in infinite dimension. Two approaches are proposed : the first one is based on sliding mode approach and the second one (of type proportional and proportional integral) is based on the Lyapunov functions in infinite dimension. The design of the control law is based on the $1D$ equation resistive diffusion of the magnetic flux. The control laws are calculated in infinite dimension without space discretization.

Keywords : Tokamak plasmas control, partial differential equations, Lyapunov functions, sliding mode control, $\mathcal{H}_\infty$ control, asymptotic stabilization, LMI (linear matrix inequality), control Lyapunov function.