



HAL
open science

Structure microscopique et dynamique des vortex dans un superfluide dense

Sophie Villerot

► **To cite this version:**

Sophie Villerot. Structure microscopique et dynamique des vortex dans un superfluide dense. Autre [cond-mat.other]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2012. Français. NNT : 2012ENSL0774 . tel-00775920

HAL Id: tel-00775920

<https://theses.hal.science/tel-00775920v1>

Submitted on 29 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

N° attribué par la bibliothèque
2012ENSL0774

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'ENS Lyon - Université Lyon I

Spécialité : **Physique**

préparée au laboratoire **Laboratoire de Physique de l'ENS Lyon**
dans le cadre de l'École Doctorale **de Physique et d'Astrophysique**

présentée et soutenue publiquement
par

Sophie Villerot

le 27 Novembre 2012

Titre:

**Structure microscopique et Dynamique des Vortex dans un
Superfluide dense**

Directeur de thèse: **Bernard CASTAING**
Co-directeur de thèse: **Laurent CHEVILLARD**

Jury

M. Peter HOLDSWORTH,	Président du Jury
Mme. Bérengère DUBRULLE,	Rapporteur
M. Marc BRACHET,	Rapporteur
M. Jacques BOSSY,	Examineur
M. Bernard CASTAING,	Directeur de thèse

Résumé

L'étude des vortex trouve sa justification dans le rôle que ces derniers jouent dans la turbulence quantique. L'équation de Gross-Pitaevskii ne peut pas nous permettre de modéliser convenablement l'Hélium superfluide, mais on peut l'utiliser pour obtenir le paramètre d'ordre d'un superfluide modèle, ayant le maximum de propriétés en commun avec l'Hélium, notamment une courbe de dispersion identique, par la modification du terme d'interaction.

En supposant que le minimum roton influence l'essentiel de la physique, on détermine la forme du paramètre d'ordre loin de la perturbation créée par le vortex rectilinéaire axisymétrique par deux approches différentes - il apparaît alors que seuls deux paramètres sont nécessaires pour caractériser entièrement le profil. Le modèle proposé par Pomeau-Rica, qui offre la possibilité d'étudier le superfluide près de la cristallisation, met en lumière l'impact de la profondeur du minimum roton sur l'amplitude des oscillations. Par comparaison avec les résultats obtenus *ab initio* par Reatto, les résultats donnés par le modèle de Berloff-Roberts exhibent un déphasage marqué, qui semble être une conséquence non-physique de la forme du spectre d'excitation. Les calculs énergétiques laissent à penser que les oscillations portent une faible fraction de l'énergie du vortex, l'énergie cinétique dominant.

Le calcul du paramètre d'ordre est effectué pour un anneau de grande taille par rapport à la distance interatomique, à vitesse nulle et à vitesse non-nulle. La détermination des énergies potentielle et cinétique permet d'accéder à la vitesse maximale atteinte par l'anneau en fonction de son rayon et de la comparer à la vitesse critique de Landau.

Mots-clés : Superfluidité, hélium 4 superfluide, tourbillons quantiques, vortex en anneau, vortex rectilinéaires, turbulence quantique, rotons

Abstract

Vortices study's justification lays in the fact that those former play an important part in quantum turbulence. The Gross-Pitaevskii equation can't be a proper model for superfluid helium, but we can still use it to determine the order parameter of a theoretical superfluid, which has then the maximum amount of properties in common with liquid helium, and in particular, the same dispersion relation, thus gained by modifying the interaction terms.

We then make the assumption that all the physical properties of the superfluid are triggered by the existence of the roton minimum, which allows us to calculate the order parameter far from the perturbation created by an axisymmetric rectilinear vortex, using two different methods. At that point, it appears that only two parameters are needed to fully characterize vortex profil. Pomeau-Rica's model offers the possibility to study the superfluid near crystallization and reveals the influence of the roton minimum's shape and depth on oscillations' amplitude. Results are subsequently compared to those given by Reatto's *ab initio* calculations. In Berloff-Roberts' model, profil displays a strong phase shift, which seems to be a non-physical consequence of the dispersion relation's shape at high frequencies. Energies reckoning leads us to think that oscillations carry a small fraction of the total vortex' energy, meaning that the kinetic energy is dominant.

The order parameter for a vortex ring, whose radius is much larger than the interatomic distance, is calculated at zero and nonzero speed. Potential and kinetic energies are estimated and help us obtain the maximal speed reached by such a ring, depending on its radius and finally discussed this speed in regard to the Landau critical speed.

Keywords : Superfluidity, superfluid helium 4, quantum vortices, vortex ring, rectilinear vortex, quantum turbulence, rotons

Remerciements

Etrangement, après une centaine de pages de calculs et de codes, je suis en train de sécher sur ces remerciements, comme si je n'arrivais pas, finalement, à croire que cette thèse est bien achevée.

Les réunions hebdomadaires du lundi vont me manquer. Je ne remercierai jamais assez mon directeur de thèse, Bernard Castaing, pour tout ce qu'il a pu m'apporter, tant sur le plan scientifique que sur le plan personnel. Si je devais faire une liste non-exhaustive, je pense que je pourrais jeter pêle-mêle sens physique, connaissances épistémologiques et expérimentales, anecdotes et citations plus ou moins approximatives mais toujours très heureuses - et plus que tout, une certaine confiance en moi qui m'a toujours fait défaut.

Je me rappellerai encore longtemps ce moment où j'ai glissé d'une remise en cause permanente de mon travail par rapport à celui des autres au constat d'un simple désaccord sur les résultats de nos calculs respectifs.



Ecole de Physique des Houches, 21 Mars 2012.

Laurent, malgré nos quelques différents, je te remercie de m'avoir donné la chance de pouvoir faire cette thèse qui restera une expérience unique et enrichissante - sans ta motivation pour que cette thèse voit le jour et trouve un financement, je n'aurais jamais eu le plaisir de passer trois ans dans le cadre plus qu'enviable que constitue le laboratoire de Physique de l'ENS Lyon.

Bérengère Dubrulle, Marc Brachet et Jacques Bossy, je vous suis extrêmement reconnaissante d'avoir bien voulu faire partie du jury de cette thèse - malgré mon angoisse croissante à l'idée de devoir répondre à vos questions durant la soutenance ! Merci à Peter Holdsworth d'avoir accepté d'être président de ce jury, et d'avoir été durant mes trois ans de doctorat un directeur du département d'enseignement de Physique hors-pair.

Un grand merci à Davide Duri, pour m'avoir fait passer d'excellents moments en me "présentant" Jon Steward et Stephen Colbert. Les longues soirées passées à contempler l'avancée (ou plutôt l'absence d'avancée) dans mon manuscrit de thèse m'auront certainement été plus supportables ainsi.

Je remercie également toute l'équipe de l'ANR Shrek, et notamment Yves Gagne, Christophe Baudet et Bernard Rousset, qui m'ont fait sortir du domaine balisé de la physique théorique pour mieux me laisser entrevoir les mystères fascinants de la physique expérimentale de l'Hélium 4.

Guilhem Bordes, cher ex-collègue de bureau, je ne saurais trop te remercier de m'avoir aidée à me dépatouiller avec Matlab, Linux et toutes les autres "geekeries" nécessaires et indispensables dans la vie d'un thésard - et de m'avoir régulièrement rappelé les deadlines qui en parsèment le chemin aussi ! Merci également à Florian Angeletti, Nicolas Tremblay et Ronan Hamon pour avoir subi sans rechigner mes questions naïves sur L^AT_EX et Beamer...

Un grand merci à Audrey Steinberger pour m'avoir poussée à m'affirmer et à m'épanouir dans mon travail - grâce à nos conversations, je me suis non seulement sentie rassurée mais également renforcée dans mes choix et dans mes convictions.

Je remercie Sébastien Paulin pour avoir placé sa confiance en moi pour les khôlles en classes passerelle. Cela n'a pas été sans quelques heurts pour se mettre d'accord sur le programme, mais pour moi cela constituera une expérience pédagogique sans précédent et ô combien instructive. Merci à Sophie Miralles pour avoir été une collègue aussi enthousiaste.

Merci à Antoine Naert pour son soutien, ses conseils et ses questions toujours très pertinentes, pour avoir partagé son amour inconditionnel de la physique et m'avoir montré avec passion l'objet de ses recherches.

Je remercie énormément Linda Hamonou et Mathias Albert pour tous leurs conseils avisés et toujours motivants, leur compassion à l'égard de mes déboires en fortran 90 (satanées entrées-sorties !) et aussi pour m'avoir prouvé par leur simple présence qu'on pouvait survivre à trois ans de thèse et en redemander derrière. Merci Mathias pour m'avoir fait sortir de mon bureau pendant tes séminaires, histoire que je fasse une pause et par là même, que ton auditoire ne soit pas trop clairsemé.

Merci Maman de m'avoir sans cesse rappelé, à l'approche de la soutenance, que je n'avais pas le droit de flancher et de tout quitter parce qu'un trou de trois ans sur mon CV allait vraiment être ridicule, merci d'avoir cru en moi et surtout, de m'avoir laissée trouver ma voie sans jamais rien m'imposer.

Enfin, merci Ju. Merci d'avoir été là dans les moments difficiles, de m'avoir soutenue contre vents et marrées, de m'avoir bercée dans tes bras lorsque le manque de confiance en moi m'assaillait aux heures tardives de la nuit - tel le monstre sous le lit de mes cauchemars enfantins. Sans toi, ton sourire et ton humour à toute épreuve, cette thèse n'aurait jamais vu le jour.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Remerciements	v
Table des matières	ix
Avant-propos	1
1 Modèles de superfluide	5
1 Le gaz de Bose superfluide : modélisation microscopique	5
1.1 Equation de Gross-Pitaevskii	5
1.2 Travail de Bogoliubov sur les excitations linéaires pour un condensat	9
2 De l'importance de la reconnexion	12
3 Le superfluide réel	14
3.1 Rotons	15
4 (Au-delà de) Gross-Pitaevskii	16
4.1 Trois exemples instructifs	17
2 Autour d'une singularité	19
1 Ce que l'on peut attendre	19
2 Théorie des excitations linéaires dans un superfluide	22
2.1 Paramètre d'ordre, modèle de Pomeau-Rica	22
2.2 Densité d'un superfluide quelconque	23
3 Sur une ligne de vortex	24
3.1 Intégration directe	24
3.2 Intégration indirecte	29
4 Aspect énergétique	32
5 Modèle de verre superfluide	34
5.1 Une vue simplifiée	34
5.2 Le modèle	35
3 Le vortex rectilinéaire	37
1 Calcul de la relation de dispersion dans le cas d'interactions non-locales	38
2 Modèle gaussien	39
2.1 Résolution de l'équation	40
3 Modèle de Pomeau-Rica	41
3.1 Résolution de l'équation	44

3.2	Comportement près du seuil de cristallisation	47
3.3	Cas à plusieurs quantas	54
4	Modèle de Berloff-Roberts	56
4.1	Forme du potentiel d'interaction	56
4.2	Equation adimensionnée	58
4.3	Relation de dispersion	58
4.4	Résolution de l'équation	59
4.5	Discussion	61
5	Comparaison avec d'autres méthodes	62
4	Le vortex en anneau	65
1	Théorie classique	65
1.1	Energie, quantité de mouvement et vitesse du vortex	65
1.2	Approximation locale, Ondes de Kelvin	67
2	Le vortex réel	68
2.1	A faible vitesse	68
2.2	Calcul pour une perturbation localisée à vitesse quelconque	70
2.3	Calcul pour un vortex en anneau à vitesse quelconque	71
3	Discussion	79
3.1	Profil	79
3.2	Energies potentielle et cinétique	83
3.3	Quantité de mouvement et vitesse	84
3.4	Discussion finale	85
5	Conclusions et Ouverture	89
A	Algorithme : Gauss-Siedel et Crank-Nicolson	93
B	Calcul de l'intégrale de Bessel	97
	Références bibliographiques	100
	Bibliographie	101

Avant-propos

A l'origine de ce sujet de thèse se trouve le problème de la compréhension de la turbulence superfluide. Toutefois, ce qui est présenté dans ce mémoire s'attache avant tout à la structure d'un superfluide près d'une singularité. Le but de cet avant-propos est de décrire le cheminement qui relie ces deux sujets.

Superfluide signifie que la viscosité du fluide mesurée dans des capillaires fins est nulle. Or dans la turbulence classique, un fluide non visqueux est décrit par le modèle d'Euler, dont le comportement d'une particule fluide de densité ρ et de vitesse \vec{v} est décrit par l'équation d'Euler :

$$\underbrace{-\vec{\nabla}p}_{\text{Terme de pression}} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1)$$

Cependant, s'il a toutes les caractéristiques d'un fluide d'Euler irrotationnel, un superfluide a une propriété supplémentaire : sa circulation \mathcal{C} sur un contour fermé Γ est quantifiée. En effet, si le contour contient un filament - un défaut de phase localisé -, la circulation vaut alors :

$$\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} = n \cdot \frac{h}{m} = n \cdot \kappa \quad (2)$$

ce qui est directement lié au fait que la fonction d'onde doit être mono-valuée, comme on le verra plus loin. Une valeur non nulle de n signifie ainsi que la courbe Γ entoure n lignes de tourbillons élémentaires, également appelés vortex, autour desquels la circulation prend la valeur d'un quantum de circulation, κ , qui vaut $9,97 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Pour un fluide turbulent classique, on définit le nombre de Reynolds afin de caractériser la turbulence : $Re = \frac{UL}{\nu}$, où L est l'échelle de longueur typique, U est l'échelle de la vitesse et ν la viscosité cinématique. Dans un superfluide turbulent, on doit définir une autre quantité sans dimension : $Rq = \frac{UL}{\kappa}$, où κ est le quantum de circulation vu précédemment. Tant que $Rq < 1$, de nouveaux tourbillons ne peuvent pas apparaître, les tourbillons éventuellement présents ne peuvent pas croître. Si $Rq \gg 1$, un lacis de tourbillons se forme.

Soit η la distance moyenne entre tourbillons et v_{η} la différence de vitesse typique sur une distance η . Par définition de cette distance, un contour de dimension η entoure typiquement un vortex et la circulation sur ce contour est environ de κ . On en déduit que v_{η} est de l'ordre de $\frac{\kappa}{\eta}$. Le temps que deux vortex mettent pour venir au contact et se reconnecter est alors de $\frac{\eta}{v_{\eta}} = \frac{\kappa^2}{\eta}$.

La reconnexion fera disparaître une longueur de vortex de l'ordre de η , ce qui libérera une énergie moyenne égale à $\rho v_\eta^2 \eta^3$. La puissance perdue par unité de masse est donc $\epsilon = \frac{v_\eta^2 \kappa}{\eta^2} = \frac{\kappa^3}{\eta^4}$.

En turbulence classique, l'énergie cascade des plus grandes échelles jusqu'à la taille des plus petites structures, η , où la viscosité ν est capable de dissiper l'énergie. Cette taille η est reliée à la puissance perdue par unité de masse ϵ par $\eta^4 = \frac{\nu^3}{\epsilon}$. La ressemblance est frappante entre les rôles de ν et κ . En turbulence superfluide, un processus dissipatif essentiel est la reconnexion de vortex.

Les choses sont encore loin d'être claires, mais on peut supposer que le phénomène se produit en deux temps. Au moment de la reconnexion, le processus est assez violent pour émettre des excitations élémentaires du superfluide, comme des phonons. Cette première phase dépend fortement de la structure microscopique du superfluide au voisinage d'un vortex. D'où une première motivation pour notre étude.

En outre, la déformation restante dans les vortex reconnectés peut ensuite se propager le long de ces vortex pour aller se dissiper ailleurs. Les ondes se propageant le long d'un vortex, dites ondes de Kelvin, dépendent elles aussi étroitement de la structure du superfluide au voisinage d'un vortex.

Tout ce qui précède concerne le superfluide à température nulle. A température finie, des excitations thermiques apparaissent. Dans le cadre d'une modélisation macroscopique, telle qu'introduite par Landau [33], il existe deux champs de vitesse ; la vitesse du superfluide, que l'on note \vec{v}_s , et \vec{v}_n , celle du référentiel en équilibre avec les excitations thermiques. Celles-ci ont une quantité de mouvement par unité de volume : $\rho_n (\vec{v}_n - \vec{v}_s)$ pour les différences de vitesse ($\vec{v}_n - \vec{v}_s$) faibles. La quantité de mouvement vaut alors :

$$\vec{J} = \rho \vec{v}_s + \rho_n (\vec{v}_n - \vec{v}_s) = \rho_s \vec{v}_s + \rho_n \vec{v}_n \quad (3)$$

où $\rho_n = \rho - \rho_s$, comme si le superfluide était constitué de deux fluides s'interpénétrant constamment, un fluide normal (ρ_n, \vec{v}_n) et un superfluide (ρ_s, \vec{v}_s).

Le fluide normal peut être assimilé à un gaz d'excitations thermiques - phonons ou rotons, selon la longueur d'onde - qui charrie l'entropie et la viscosité du système. Il est modélisé par un fluide visqueux classique, dont l'équation de Navier-Stokes rend compte du comportement.

Le superfluide, comme on l'a vu, peut être décrit par l'équation d'Euler à une échelle macroscopique. Lorsque la température varie, la seule donnée qui diffère est la proportion de fluide normal et de superfluide. A la température critique $T = T_\lambda$, tout l'hélium II est normal : $\rho_n/\rho = 1$ et $\rho_s/\rho = 0$. Au fur et à mesure que la température décroît, la fraction de fluide normal décroît et la fraction superfluide, quant à elle, augmente, jusqu'à ce qu'à $T = 0$, l'hélium soit devenu totalement superfluide, ce qui se traduit par $\rho_s/\rho = 1$ et $\rho_n/\rho = 0$.

Le modèle de Landau à deux fluides ne prend cependant pas en compte les vortex - c'est pourquoi dans ce cadre, le superfluide est homogène et il est alors possible de décrire les deux fluides de façon découplée. Cependant, les excitations élémentaires du fluide normal interagissent avec les vortex et c'est par leur intermédiaire que ce dernier "frotte" sur le superfluide.

Le modèle HVBK du nom de ses quatre créateurs, Hall, Vinen, Bekharevich et Khalatnikov, [25], [24], [3], [28], [27], se propose de tenir compte de la présence des

vortex en introduisant des coefficients de friction mutuelle entre les deux fluides et de tension de la ligne de vortex (déterminés expérimentalement en fonction de la température) dans les équations du modèle précédent pour rendre compte de cette interaction. Toutefois, cette approche reste macroscopique et les vortex sont par conséquent réduits à des lignes singulières. Il semble pourtant évident que ce frottement est également fortement lié à la structure microscopique du vortex, tout près de la singularité.

Enfin nous nous sommes aperçus au cours de l'étude que cette structure au voisinage d'une perturbation dépend considérablement d'une partie bien précise de la relation de dispersion des excitations élémentaires, au point que l'on peut réciproquement tirer de l'examen de cette structure des renseignements précis sur la relation de dispersion.

Chapitre 1

Modèles de superfluide

1 Le gaz de Bose superfluide : modélisation microscopique

L'état superfluide est un état ordonné de la matière - au même titre que l'état cristallin ou l'état ferromagnétique. Il est ainsi possible de le décrire en terme de paramètre d'ordre. Dans le cas d'un superfluide, on choisit la fonction d'onde $\Psi(\vec{r}) = \langle c_{\vec{r}} \rangle$, valeur moyenne de l'opérateur annihilation d'une particule à la position \vec{r} comme paramètre d'ordre. En effet, le caractère aléatoire de sa phase annule cette quantité dans l'état normal. Comme la densité ρ_s reste non-nulle dans la phase superfluide, avant de disparaître à la température critique, on peut être tenté de l'assimiler au carré de la fonction d'onde. En fait, cette assimilation n'est correcte que pour un gaz dilué.

La fonction d'onde du superfluide est un nombre complexe, avec un module et une phase, que l'on peut réécrire sous la forme : $\Psi(\vec{r}) = f(\vec{r}) e^{i\phi}$. La phase, notée ϕ , est reliée à la vitesse du superfluide par :

$$\vec{v}_s = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \phi. \quad (1.1)$$

1.1 Equation de Gross-Pitaevskii

Cette équation, déterminée séparément par Gross [22] et Pitaevskii [43], est la modélisation la plus communément admise pour étudier le comportement d'un superfluide à température nulle. Il s'agit dans sa forme générale d'une équation de Schrödinger non-linéaire (NLSE) pour la fonction d'onde d'un atome au sein d'un ensemble de bosons en interactions :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(\vec{r}, t) + \int \Psi^*(\vec{r}', t) V(\vec{r}' - \vec{r}) \Psi(\vec{r}', t) d^3\vec{r}' \right] \Psi(\vec{r}, t). \quad (1.2)$$

Dans le cas d'un gaz dilué, on peut montrer que les seules interactions qui contribuent de façon significative à la détermination de la fonction d'onde sont les interactions binaires et que le potentiel alors associé peut être décrit par l'intermédiaire

d'une fonction de Dirac répulsive, d'intensité V_0 , comme Cohen [12] ou Pitaevskii et Stringari [44] le synthétisent.

Dans ce modèle, les particules n'interagissent donc entre elles que lorsqu'elles "occupent" la même position \vec{r} , ce qui signifie que la portée du potentiel d'interaction est nulle. En présence d'un tel terme de potentiel, on obtient alors une équation de champ moyen typique, où le paramètre d'ordre doit être calculé de façon auto-cohérente :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(\vec{r}, t) + V_0 |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \Psi(\vec{r}, t). \quad (1.3)$$

Solution uniforme

On écrit la fonction d'onde sous la forme, où Ψ_0 est une constante réelle :

$$\Psi(\vec{r}, t) = |\Psi_0| e^{-i \frac{E_0 t}{\hbar}}. \quad (1.4)$$

La séparation des variables temporelle et spatiales suggère qu'on recherche une solution stationnaire. On réinjecte dans l'équation de Gross-Pitaevskii (1.2) et on obtient la relation suivante entre E_0 et la densité $|\Psi_0|$:

$$E_0 = \int |\Psi_0|^2 V(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 \vec{r} \quad (1.5)$$

ce qui devient dans le cas local :

$$E_0 = V_0 |\Psi_0|^2. \quad (1.6)$$

On constate clairement que l'énergie peut être déterminée à partir de la densité uniforme et inversement.

Transformation de Madelung

Dans ce formalisme, comme le rappellent Nore, Abid et Brachet [39], on écrit la fonction d'onde stationnaire comme :

$$\Psi(r) = \sqrt{\rho(r)} e^{i\phi} \quad (1.7)$$

en supposant qu'à la limite thermodynamique, la densité est assimilable à la probabilité de présence, égale au carré de la fonction d'onde.

L'équation de Gross-Pitaevskii peut alors se réécrire sous la forme de deux équations. La première, portant sur ρ , est simplement l'expression de la conservation de la masse :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}_s) = 0 \\ \frac{\hbar}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{m} \nabla \phi \right)^2 + V_0 \frac{\rho}{m} - \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\Delta \sqrt{\rho}}{\rho} = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

La seconde décrit un fluide isentropique, compressible - et irrotationnel, comme le montre l'équation (1.1) - si on néglige le dernier terme du membre de gauche,

également appelé terme de “pression quantique”, bien qu’il ait la dimension d’un potentiel chimique. Ce dernier n’a d’influence que lorsque la fonction d’onde varie fortement sur une petite échelle (que ce soit près du cœur d’un vortex ou près d’une paroi), dont l’ordre de grandeur de “l’épaisseur” est aussi appelé longueur de relaxation ; au cœur du superfluide, là où l’échelle de variation de $\sqrt{\rho}$ est large et donc loin des parois, il n’a pas d’effet - la pression est alors proportionnelle au carré de la densité ρ^2 .

Le fait que l’hélium soit un système de bosons fortement corrélés ainsi que la capacité de l’équation de Gross-Pitaevskii à modéliser un fluide d’Euler explique en grande partie le succès de cette dernière dans la description d’un superfluide.

Solution vorticitaire

L’équation de Gross-Pitaevskii a une solution vorticitaire [23]. En coordonnées cylindriques, r, θ, z , on cherche alors une solution de la forme :

$$\Psi(r, \theta, z, t, n) = f(r) e^{im\theta} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \quad \text{avec} \quad \int |f(r)|^2 2\pi r dr dz = N \quad (1.9)$$

où n est le nombre de quanta associé au tourbillon, c’est-à-dire le nombre de quanta de circulation du vortex considéré. On note qu’en identifiant $n\theta$, où θ est l’angle azimutal, à ϕ , la phase dans la convention phase-densité, l’amplitude $\sqrt{\rho(r)}$ est assimilable à la fonction radiale $f(r)$. Quant à la vitesse du superfluide, elle vaut alors :

$$v_\theta = \frac{\hbar n}{Mr} \quad (1.10)$$

Une première remarque concerne la vorticité. Par définition de la vitesse, cette dernière est nulle

$$w_z = \nabla \wedge \vec{v} = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \quad (1.11)$$

excepté en $r = 0$, où elle n’est pas définie.

En substituant Ψ par sa forme dans l’équation de Gross-Pitaevskii, on détermine une équation radiale pour $f(r)$:

$$E_n f(r) = -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} \right) f(r) + V_0 f(r) |f(r)|^2 \quad (1.12)$$

dont on peut étudier les limites à $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$.

Pour $r \rightarrow 0$, le terme centrifuge $\frac{n^2}{r^2}$ doit diverger. Or, puisqu’on s’attend à trouver une solution stationnaire, l’énergie E_n doit rester finie, ce qui implique que la fonction $f(r)$ tend vers 0 pour r petit. On peut alors en déduire que le terme $V_0 f(r) |f(r)|^2$ est négligeable devant le reste de l’équation : l’effet de la pression quantique est prédominant sur celui des interactions.

Dans cette hypothèse, on peut alors résoudre l’équation simplifiée pour caractériser le comportement de $f(r)$ près de ce qui apparaît comme le cœur du vortex :

$$f(r) \rightarrow A J_n \left[\left(\frac{2M E_n}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} r \right] \quad (1.13)$$

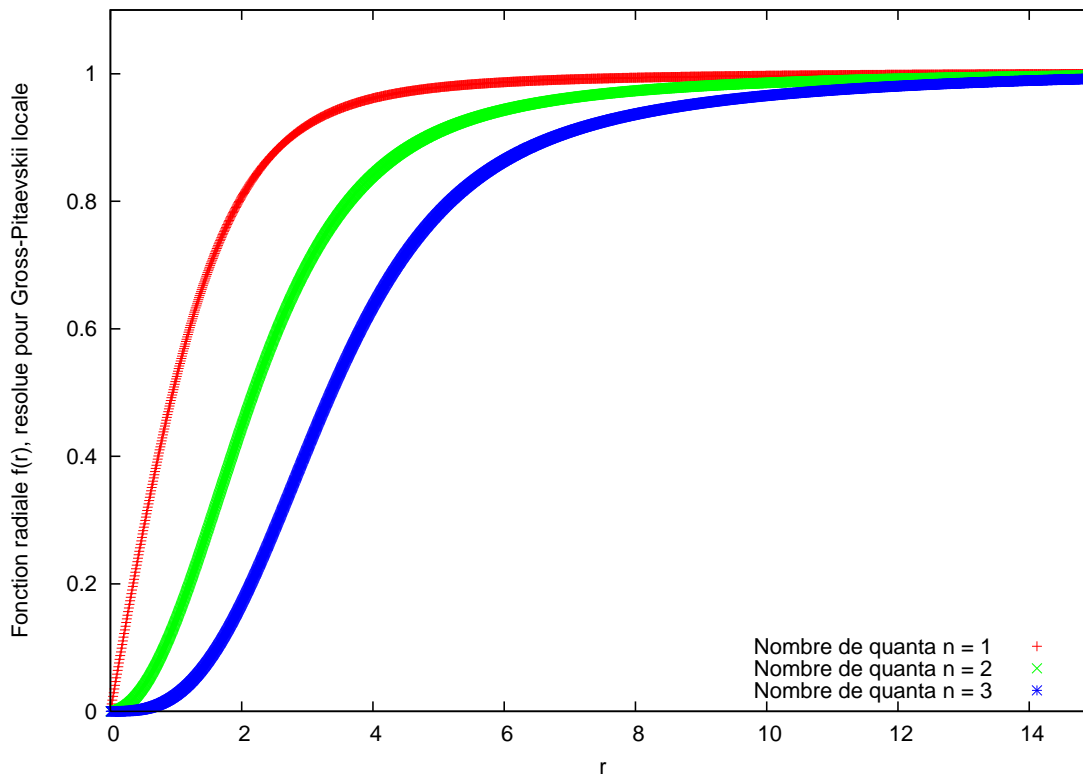


FIGURE 1.1 – *Fonction radiale de vortex dans l’hypothèse d’interactions locales à deux corps, pour un, deux ou trois quanta de circulation.*

où A est une constante non déterminée et $J_n[x]$ est la fonction de Bessel du premier genre. En effet, l’équation devenant linéaire, n’importe quelle solution multipliée par un coefficient non-nul en sera également solution. On remarque qu’il n’est donc pas possible de déterminer la pente à l’origine.

Pour $r \rightarrow \infty$, la solution vorticitaire se confond avec celle de la densité uniforme par construction. On a donc :

$$f(r) \rightarrow \rho_0 \quad (1.14)$$

Gross propose ainsi en première approximation de relier les deux limites en faisant correspondre leurs dérivées logarithmiques respectives. Le résultat fait apparaître un coeur de la taille de la longueur de relaxation ξ_0 , qui est l’échelle de longueur caractéristique sur laquelle la densité du gaz de Bose varie. Pour obtenir la forme complète du profil de la fonction d’onde près de la singularité, on résout alors numériquement l’équation de Gross-Pitaevskii, comme montré sur la figure (1.1).

Il faut cependant garder à l’esprit que l’équation de Gross-Pitaevskii ne saurait être utilisée que lorsque les phénomènes étudiés se situent sur des échelles spatiales bien plus grandes que la longueur de diffusion a .

Les vortex dont le nombre quantique n associé est supérieur à 1 sont considérés comme instables énergétiquement : l’énergie d’un vortex, que l’on peut interpréter comme équivalente à la tension le long de la ligne, croît avec le carré du quantum de

circulation. Un vortex de nombre quantique $n = 2$ aura une énergie linéique deux fois plus élevée que deux vortex de circulation $\frac{\hbar}{m}$. Dans l'hypothèse où de tels vortex apparaîtraient naturellement, il semble logique de penser qu'ils se décomposent rapidement sous la forme d'autant de tourbillons quantiques. Cependant, il est intéressant de noter qu'il est toujours possible de déterminer leur profil de densité dans l'hypothèse d'une séparation des variables temporelle et spatiales pour la fonction d'onde.

L'équation de Gross-Pitaevskii est considérée comme une équation convenable pour décrire la dynamique du mouvement d'un superfluide comme l'a rappelé Vinen [56].

En effet, les travaux de Koplik et Levine [31] ont montré qu'elle contient les mécanismes de reconnexion. De plus, le phénomène de nucléation [19], [5] de vortex ainsi que celui relevant de l'interaction entre vortex et ondes sonores [40], [34] peuvent également émerger lorsque l'on résout l'équation de Gross-Pitaevskii. On peut noter également qu'elle fait apparaître des vortex dans un superfluide lorsque la vitesse de la circulation est de l'ordre de grandeur de celle trouvée expérimentalement.

1.2 Travail de Bogoliubov sur les excitations linéaires pour un condensat

On reprend l'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps :

$$i\hbar\partial_t \Psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{ext}(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t) + V_0 |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \Psi(\vec{r}, t) \quad (1.15)$$

L'ensemble des bosons est "agité" grâce à une perturbation dynamique qui peut se superposer, par exemple, au potentiel statique V_{ext} ¹, qui s'écrit alors $V_{ext}(\vec{r}, t) = V_0(x) + \delta V(\vec{r}, t)$. Si $V_{ext}(\vec{r}, t)$ est une constante, une solution de l'équation (1.15) est de la forme :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0 e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}} \quad (1.16)$$

où Ψ_0 est la solution uniforme de l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire, vue précédemment.

Si la perturbation δV vérifie $|\delta V| \ll V_0 |\Psi_0|^2$, on peut alors supposer que la solution du problème "perturbé" s'écrit :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \tilde{\Psi}(\vec{r}, t) e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}} \quad \text{avec} \quad \tilde{\Psi}(\vec{r}, t) = \Psi_0 + \delta\Psi(\vec{r}, t) \quad (1.17)$$

1. On note qu'il est aussi possible de déterminer les excitations du condensat par une autre méthode. Partant de l'hamiltonien exact exprimé dans le formalisme de la seconde quantification, on peut développer l'opérateur champ, qui est constitué d'une partie décrivant le condensat et d'une autre décrivant le nuage thermique - c'est cette dernière fraction qui est vue comme un terme perturbatif -, pour retrouver, au deuxième ordre, les équations précédentes.

Cependant, il n'est pas trivial que le résultat produit par ces deux méthodes soit identique, car la perturbation du potentiel est une fluctuation classique du champ, tandis que la perturbation induite par le champ créé par les particules non-condensées elles-mêmes est une fluctuation quantique.

En injectant cette forme de solution dans l'équation (1.15) et en négligeant les termes perturbatifs du second ordre, proportionnels à $\delta\Psi^2$ et son conjugué $\delta\Psi^{*2}$ ou $|\delta\Psi|^2$, on obtient une équation sur $\delta\Psi$:

$$i\hbar\partial_t \delta\Psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{ext}(\vec{r}, t) \right] \delta\Psi + V_0\Psi_0^2\delta\Psi^* + 2V_0|\Psi_0|^2\delta\Psi - \mu\delta\Psi + \Psi_0\delta V \quad (1.18)$$

L'équation conjuguée nous donne une deuxième équation pour $\delta\Psi^*$, que l'on réécrit alors dans le système :

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \delta\Psi \\ \delta\Psi^* \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \delta\Psi \\ \delta\Psi^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S \\ -S^* \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

$$\text{où } \mathcal{L} = \begin{pmatrix} H - \mu & V_0\Psi_0^2 \\ -V_0\Psi_0^{*2} & -H + \mu \end{pmatrix}$$

où $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{ext}(\vec{r}) + 2V_0|\Psi_0|^2$ et $S = \delta V\Psi_0$ est le terme source de la perturbation.

Ces équations linéarisées sont dites de Bogoliubov-De Gennes. Elles nous donnent accès à la partie de la relation de dispersion de faible énergie.

Pour simplifier, on prend le cas d'un ensemble de bosons identiques en interactions dans une boîte cubique d'où $V_{ext} = 0$ et $\Psi_0 = \sqrt{\rho_0} = \sqrt{\frac{N}{L^3}}$. On néglige les termes sources S et $-S^*$. Cherchons alors les solutions $\delta\Psi$ des équations sous la forme $\delta\Psi = ue^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + ve^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$, $(u, v) \in \mathcal{R}$ et équilibrons les termes en $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ dans l'équation (1.19). Cela revient à chercher les valeurs propres en énergie de la matrice précédente, ce qui s'écrit :

$$\hbar\omega \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2}{2m}k^2 + 2gN|\Psi_0|^2 - \mu & V_0\Psi_0^2 \\ -V_0\Psi_0^{*2} & \frac{\hbar^2}{2m}k^2 - 2V_0|\Psi_0|^2 + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

Le déterminant de $|\mathcal{L} - \hbar\omega Id|$ nous donne alors la relation de dispersion :

$$\hbar\omega = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2V_0\rho_0 \right)} \quad (1.21)$$

que l'on a représentée sur la figure (1.2), en la confrontant à la relation de dispersion des phonons ainsi que celle des particules libres.

On voit alors apparaître deux régimes. Pour des longueurs d'onde inférieures à la longueur caractéristique $\xi_0 = \frac{\pi\hbar}{\sqrt{mV_0\rho_0}}$, les excitations élémentaires sont des phonons, ce qui est vérifié par l'expérience. La courbe de dispersion est linéaire à l'origine : les variations de densité se propagent à une vitesse donnée par la pente $c = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\sqrt{V_0\rho_0}$, qui correspond à la vitesse du son dans le fluide.

Cependant, pour des énergies plus hautes, caractérisées par un vecteur d'onde $k > 1/\xi_0$, la relation de dispersion s'approche de la relation de dispersion des particules libres, comme on le voit si on néglige le terme $2V_0\rho_0$ dans l'équation (1.21).

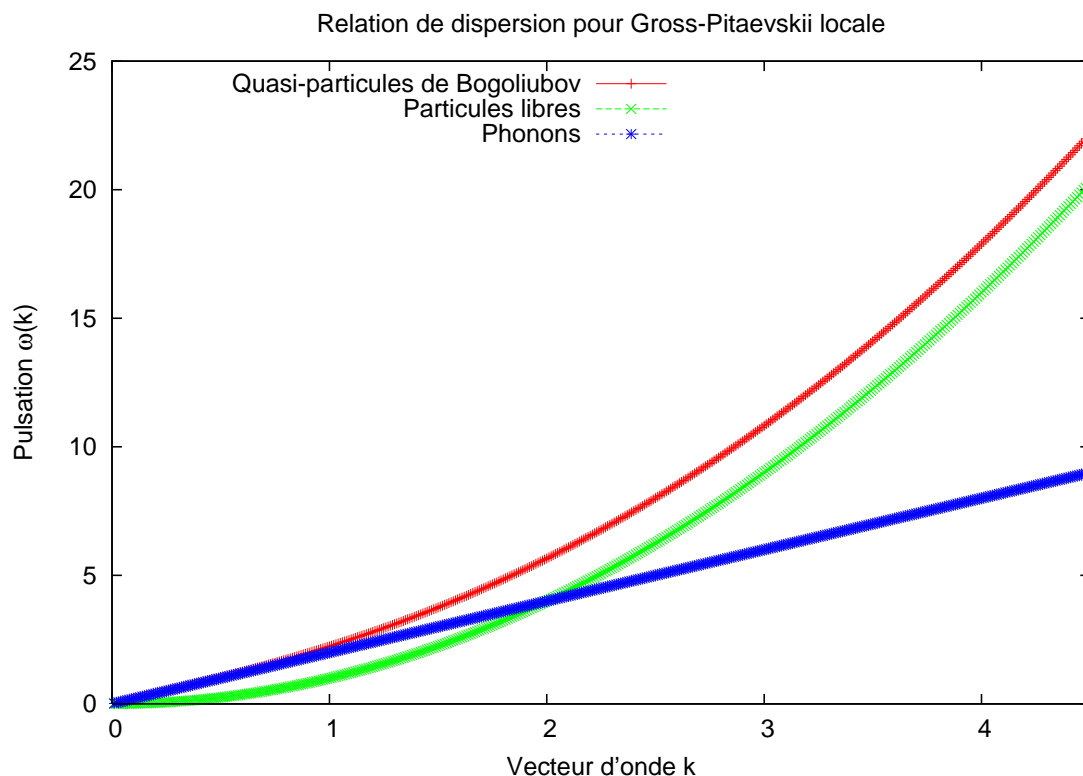


FIGURE 1.2 – La relation de dispersion adimensionnée pour l'équation de Gross-Pitaevskii locale montre clairement une branche de phonons, pour les basses fréquences spatiales et une branche asymptotique à celle d'un spectre de particules libres pour des énergies plus hautes, correspondant à des longueurs d'onde bien plus petites.

Si on note un décalage entre la courbe de bosons totalement indépendants et la relation de dispersion pour l'équation de Gross-Pitaevskii, ce dernier trouve son origine uniquement dans la présence supplémentaire des interactions, prises en compte de façon locale.

Toutefois dans le cas d'un superfluide tel que l'hélium, la relation de dispersion, sondée grâce à des bombardements de neutrons lents [26], ne présente pas exactement cette forme. S'il est naturel de retrouver la présence des phonons dans les plus basses excitations, pour des longueurs d'onde très grandes devant la taille caractéristique des phénomènes microscopiques mis en jeu, on voit justement apparaître pour des vecteurs d'onde plus élevés un phénomène totalement différent par rapport à celui prédit par l'équation de Gross-Pitaevskii.

C'est la courbe des maxons puis des rotons qui vient "remplacer" celle des particules libres. Apparaissant à une échelle proche de la distance interatomique, ces phénomènes trahissent la nature bien plus complexe des interactions entre particules mises en jeu dans le liquide. Pour un gaz dilué, l'approximation du delta de Dirac répulsif est relativement bonne, mais cette dernière se révèle bien trop simpliste pour un liquide, comme nous allons le voir dans la suite.

2 De l'importance de la reconnexion

La turbulence quantique est à la frontière entre l'hydrodynamique classique et la mécanique quantique. Le superfluide turbulent semble pourtant bien plus simple à première vue que n'importe quel fluide normal.

Dans un écoulement de Couette entre deux cylindres, ce liquide normal présentera d'abord un comportement laminaire, avec une vitesse angulaire constante, alors que la surface adoptera une forme parabolique. Pour une vitesse angulaire suffisamment grande, cette structure devient instable et laisse apparaître des structures dépendantes du temps, tels des vortex. A mesure que l'on augmente la vitesse, le caractère laminaire du fluide disparaît au profit de ces structures localisées. Le champ de vitesse est fluctuant et la turbulence ainsi développée présente des régions de forte vorticité.

Cette turbulence classique, comme on l'a déjà mentionnée, prend naissance dans la cascade d'énergie : les grands tourbillons se divisent en tourbillons de plus petites tailles, ce qui donne lieu à un transfert d'énergie des grandes échelles vers les petites. Toutefois, ce phénomène physique est limité par la dissipation moléculaire, qui empêche les variations de vitesse (et donc de transferts d'énergie cinétique) trop brusques. La dimension de Kolmogorov [29] est caractéristique de l'échelle spatiale à laquelle l'écoulement devient visqueux - elle correspond à la taille des plus petits tourbillons.

L'exacte relation entre les structures vorticitaires et la turbulence est toujours sujette à caution, mais il semble évident que l'interaction mutuelle de filaments vorticitaires isolés est un ingrédient clé pour la compréhension du phénomène de turbulence.

Dans des travaux récents, Paoletti, Fisher, Lathrop et Sreenivasan [42] ont montré expérimentalement que des différences importantes peuvent exister entre la turbulence classique et la turbulence superfluide. En effet, les statistiques de distribution de vitesse pour un superfluide, à une échelle suffisamment petite, présentent un comportement fortement non-gaussien, au contraire de la turbulence classique, homogène et isotrope, dont on sait depuis des décennies que les distributions de vitesse sont quasiment gaussiennes. Cependant, l'écoulement sur lequel ils ont obtenu ce résultat est un contre-écoulement, où l'on force une différence de vitesse entre composantes normale et superfluide, donc un écoulement qui n'a pas d'équivalent classique. Pour un co coulement, comme un écoulement de grille, Salort et al. [49] retrouvent la distribution gaussienne.

Pour reprendre l'écoulement de Couette, en d c  d'une certaine vitesse critique, aucun mouvement n'est décelable dans le flot superfluide. Lorsque la vitesse critique est dépassée, un unique filament apparaît, parallèle à l'axe de rotation ; puis lorsqu'une seconde valeur critique de la vitesse est atteinte, un deuxième filament, en plus du premier, apparaît et ainsi de suite [35]. Cet arrangement a priori ordonné est troublé par la déformation locale du champ de vitesse autour d'un vortex - cette dernière influe sur le champ de vitesse de ses proches voisins et la moindre fluctuation entraîne une modification du positionnement des vortex : on obtient au final une "pelote" de filaments enchevêtrés.

La reconnexion entre deux vortex présente une succession d'étapes :

- les filaments s'approchent très près l'un de l'autre, à quelques longueurs de cœur ;
- lorsqu'ils sont sur le point de se croiser, des points anguleux apparaissent sur les lignes, là où les vortex sont les plus proches l'un de l'autre ;
- enfin, les lignes se brisent et les vortex se séparent, de telle façon que chacun d'entre eux se reconnecte avec une partie de l'autre.

Le processus se répète encore et encore, modifiant sans cesse la topologie du fluide.

Les reconnexions multiples de cet ensemble de vortex quantifiés, à une échelle microscopique de l'ordre de grandeur du cœur d'un vortex, semblent être alors à l'origine d'une telle signature statistique, comme l'avait supposé Feynman en 1955 [16]. Pourtant, dans la turbulence quantique, il n'y a pas de viscosité : c'est donc un tout autre phénomène qui dissipe l'énergie. En effet, les reconnexions n'ont lieu qu'à cause de la tension quantique sur la ligne de vortex, à l'échelle du cœur, sans que de l'énergie soit échangée. Cependant, il est frappant de constater que dans le cas de l'image que Feynman se fait de la turbulence quantique, les vortex sont identiques les uns aux autres, ne portant qu'un quantum de circulation, contrairement aux vortex dans un fluide normal dont les tailles s'échelonnent sur une très large gamme d'ordres de grandeur.

A température non-nulle, on sait que le mouvement d'un vortex superfluide dans le fluide normal produit une force de friction, couplant les deux fluides à grande échelle et en créant des petites, propices à la dissipation visqueuse. Si le mouvement relatif des deux fluides n'est pas forcé, comme dans l'expérience de Paoletti et al., ces deux fluides couplés se comporteront comme un seul fluide visqueux. On comprend alors que dans certaines expériences, ce soit la distribution spectrale de Kolmogorov qui soit trouvée [38].

A température nulle toutefois, la dissipation d'énergie pourrait venir d'un autre phénomène, l'émission d'ondes de Kelvin, le long de la ligne de vortex [53]. Ces ondes déplacent les lignes de vortex de façon hélicoïdale par rapport à leur positionnement rectilinéaire. Lorsqu'une reconnexion a lieu, des solitons sont émis à partir du point de croisement et peuvent relaxer sous la forme d'ondes de Kelvin, lesquelles peuvent interagir entre elles ou avec d'autres solitons provenant de reconnexions voisines de façon non-linéaires [2], [9], [32], [56], [57], [55]. Ainsi, les excitations produites voient leur fréquence augmenter jusqu'à ce que des phonons puissent être émis [34] et dissiper l'énergie des reconnexions sous forme d'énergie cinétique. En ce sens, les ondes de Kelvin déplacent l'énergie des petites échelles du cœur du vortex vers les grandes.

Koplik et Levine [31] ont montré numériquement qu'utilisant l'équation de Gross-Pitaevskii locale pour étudier l'évolution temporelle de deux vortex placés à quelques distances de cœur l'un de l'autre, les hypothèses avancées par Schwarz étaient correctes : la reconnexion a lieu afin de minimiser l'énergie de tension (cf. figure (1.3)).

Cependant, de l'avis de Koplik [30], la reconnexion superfluide, dans l'hypothèse locale, ressemble très fortement à la reconnexion classique. Il serait relativement improbable que les interactions et donc la présence du minimum roton, modifient profondément le comportement des vortex à ce moment - sauf peut-être à l'échelle du

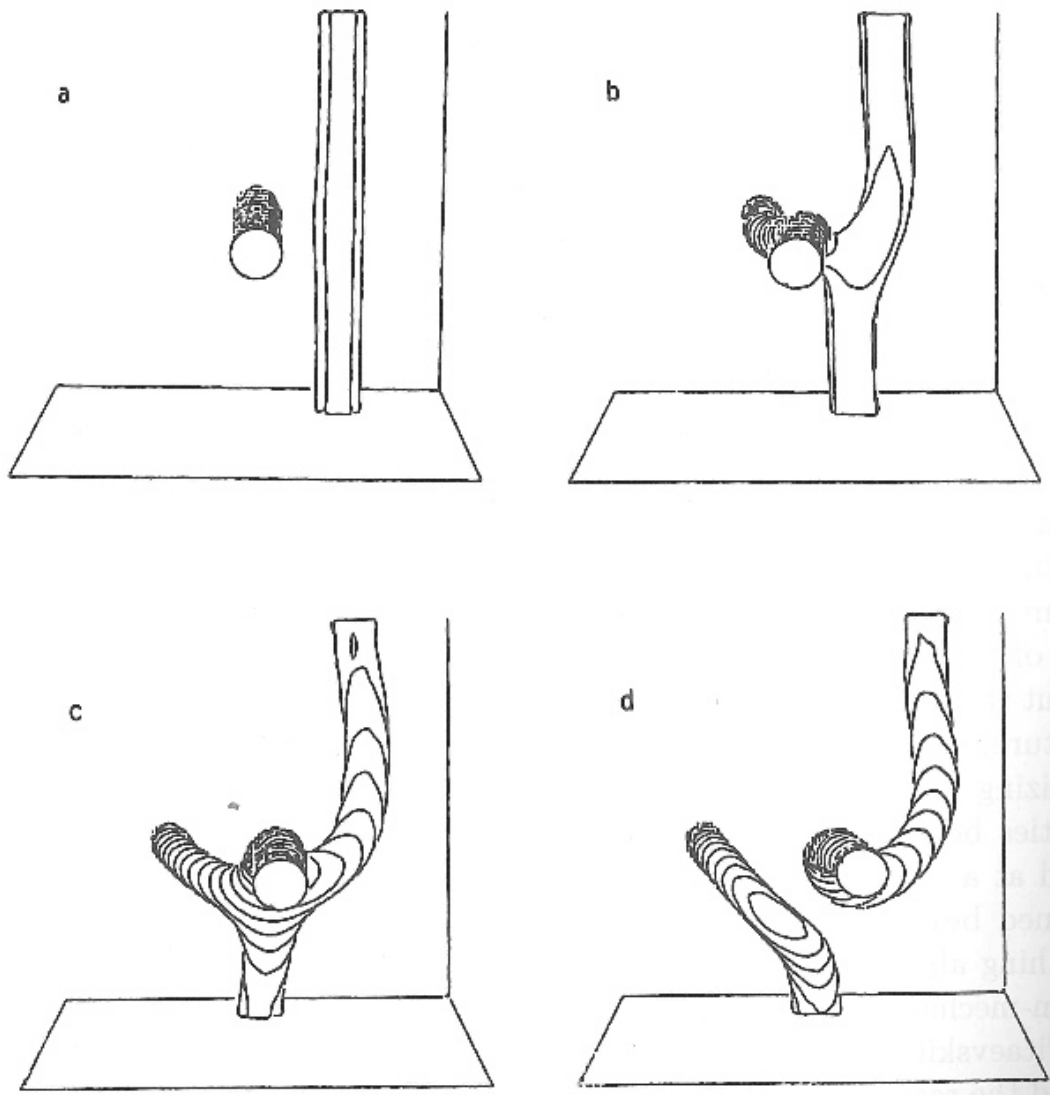


FIGURE 1.3 – Résolution numérique de l'équation de Gross-Pitaevskii locale, par Koplik et Lévine. [31]

cœur du vortex, où les oscillations de densité peuvent faire apparaître un spectre plus riche en excitations. Koplik en déduit alors que l'équation locale de Gross-Pitaevskii suffit amplement à décrire le phénomène. Cette affirmation est en effet peut-être confirmée par nos calculs énergétiques.

3 Le superfluide réel

Cependant, l'hélium superfluide ne saurait être modélisé de façon réaliste par l'équation de Gross-Pitaevskii. Un simple coup d'oeil à quelques ordres de grandeur typiques pour les densités de différentes phases fait apparaître l'incomplétude de ce modèle.

En effet, au centre d'un condensat de Bose-Einstein, la densité atomique s'élève

typiquement à 10^{13} voire 10^{15} particules par cm^3 . Dans l'air d'une pièce à température ambiante et à pression atmosphérique, cette densité moléculaire avoisine les 10^{19} particules par cm^3 . Dans un liquide ou un solide, comme ^4He à basse température, la densité d'atomes est de l'ordre de 10^{22} particules par cm^3 . La distance entre particules est alors de l'ordre de la portée du potentiel et celle-ci ne peut plus être tenue pour négligeable.

Pendant longtemps, la phase basse température de ^4He liquide a été le seul exemple concret d'un ensemble de bosons subissant une condensation de Bose. Quand on compare les propriétés de ^4He superfluide avec ce que l'on peut prédire pour le gaz presque parfait, la différence sans doute la plus frappante tient dans la relation de dispersion des excitations élémentaires. Pour ^4He , celle-ci présente un minimum très marqué pour une longueur d'onde voisine de la taille d'un atome ($3 \cdot 10^{-10}\text{m}$). Pour des raisons historiques (Landau les avait d'abord assimilés à des phonons optiques), les excitations dans le voisinage de ce minimum sont baptisées "rotons".

3.1 Rotons

En 1941, Landau propose une explication microscopique du modèle à deux fluides, introduit pour réconcilier, entre autres, les expériences de Kapitza suggérant une absence de viscosité et celle d'Andronikashvili, qui en mesurait une par l'amortissement des oscillations d'un pendule de torsion. Landau propose que la vitesse du référentiel en équilibre avec les excitations thermiques, \vec{v}_n , puisse être différente de celle du superfluide, \vec{v}_s . Dès lors, les excitations contribuent à la densité de quantité de mouvement par un terme $\rho_n(\vec{v}_n - \vec{v}_s)$.

La dépendance en température de ρ_n suggère à Landau que la relation de dispersion des excitations élémentaires a un minimum et que ce minimum est situé à un vecteur d'onde non nul, de l'ordre de $2 \cdot 10^{10}\text{m}^{-1}$ pour l'hélium 4. C'est ce minimum qui est baptisé minimum des rotons et les quanta d'excitations correspondant au voisinage de ce minimum sont baptisés les rotons (de même que l'on parle de phonons pour les vecteurs d'onde les plus faibles, où la fréquence est proportionnelle au vecteur d'onde). En 1961, des mesures expérimentales (de Henshaw et Woods) révèlent la présence effective de ce minimum roton [26], précédé par un maximum local, lié à des excitations élémentaires baptisées alors "maxons".

L'existence d'excitations bien définies de longueur d'onde atomique a défié l'imagination de nombreux auteurs. Landau avait d'abord vu dans ces excitations un souvenir de phonons optiques dans un cristal, où des atomes voisins ont des mouvements en opposition de phase, comme s'ils tournaient l'un autour de l'autre. D'où le nom de rotons. Un modèle microscopique a amené Feynman [18], [17] à proposer la relation de dispersion :

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2mS(k)} \quad (1.22)$$

où $S(k)$ est la fonction de structure, transformée de Fourier de la corrélation de paires d'atomes. Le premier maximum de $S(k)$ (qui donne un minimum roton) traduit un ordre cristallin local. C'est donc le premier lien fait entre le minimum de rotons et l'approche à la cristallisation. Cependant, c'est en suivant l'intuition d'une

analogie entre un roton et un vortex en anneau élémentaire que Feynman et Cohen parviennent à rapprocher la relation de dispersion de celle mesurée expérimentalement.

De nombreuses images physiques ont été proposées pour le “roton localisé” : atome supplémentaire, lacune, vortex de rayon atomique... Elles n’ont probablement pas une grande profondeur. N’importe quelle perturbation de taille atomique, si on la décompose en modes de Fourier, fera principalement appel à des longueurs d’onde atomiques et donc des rotons. Chacun pourra donc voir, dans la perturbation de taille atomique qu’il a choisie, l’image d’un roton “localisé”.

L’approche de la cristallisation, qui intervient pour des pressions supérieures à 25bars dans ^4He , semble par contre à l’origine profonde du minimum roton dans la courbe de dispersion. En 2004, Nozières émet même l’hypothèse que l’énergie du minimum roton contrôle la densité n_o d’atomes “condensés” dans l’état fondamental [41]. Cette énergie du minimum des rotons, le gap des rotons, diminue quand la pression augmente. Il est prédit qu’il continuerait à diminuer pour du liquide surfondu, en équilibre métastable au-dessus de la pression de solidification. Il est probable que d’autres corps denses de bosons, comme l’hydrogène moléculaire surfondu, s’ils pouvaient être amenés liquides en dessous de leur température de condensation de Bose, présenteraient le même minimum de rotons.

4 (Au-delà de) Gross-Pitaevskii

Constatant l’échec de Gross-Pitaevskii local pour décrire la dynamique d’un superfluide dense, on peut revenir aux premiers principes et chercher à déterminer par exemple la fonction d’onde globale de N atomes de ^4He dans un volume donné. C’est la démarche qu’ont adoptée certains auteurs (cf. Sadd et al. [48]) et nous nous référerons à leurs travaux pour comparer leurs résultats avec les nôtres.

Cependant même les superfluides denses ont un paramètre d’ordre, fonction complexe du point et du temps. Ce paramètre d’ordre vérifie certainement une équation d’évolution, qu’il serait intéressant de déterminer. L’idée proposée par Bogoliubov et reprise plus tard par Pomeau et Rica en premier lieu puis par Berloff et Roberts ensuite consiste à modifier le terme d’interaction (le delta de Dirac répulsif) dans l’équation de Gross-Pitaevskii afin de faire apparaître un minimum roton dans la relation de dispersion des excitations linéaires. Il est aisé de s’assurer que des propriétés comme l’invariance par transformation galiléenne ou l’écoulement non-visqueux du fluide à faible vitesse sont toujours vérifiées.

Un premier point de vue consiste alors à chercher une équation modèle pour le paramètre d’ordre d’un superfluide réel, mais dans ce cas $\rho \neq |\Psi|^2$, du fait des fortes interactions entre particules². Cependant, un tel travail demande de connaître en détails la nature des interactions de multiples particules entre elles et également de savoir résoudre l’équation ainsi obtenue.

Devant la difficulté d’une telle approche, il est possible de développer un autre

2. Dans le cas d’un gaz dilué de N atomes, on a supposé qu’il était possible d’écrire la fonction d’onde globale du système Ψ^{tot} comme le produit tensoriel de chaque fonction d’onde individuel, $\Psi_1 \otimes \dots \otimes \Psi_N$, attachée à une particule, que l’on a prise identique.

point de vue, plus raisonnable, qui, comme on va le montrer, permet néanmoins d'avoir accès à un nombre d'informations non négligeable.

Ce second point de vue consiste à chercher la dynamique du paramètre d'ordre d'un superfluide modèle, inconnu, ayant le maximum de propriétés en commun avec un superfluide réel donné - écoulement non visqueux, apparition de vortex et notamment une courbe de dispersion identique.

C'est ici ce second point de vue qui a été adopté. L'apport de cette thèse consiste à utiliser ces superfluides modèles, d'une part et la résolution *ab initio* des équations associées sur ^4He , d'autre part, pour montrer la pertinence d'une approximation se limitant aux excitations du creux de rotons pour étudier la structure fine du superfluide au voisinage d'une singularité, tel un vortex.

Cependant, on verra que la pertinence est telle que le raisonnement peut être utilisé à l'inverse : l'examen de cette structure permet une véritable "spectroscopie statique" du superfluide. Il est alors possible à partir des paramètres obtenus par une simulation sur l'Hélium superfluide de "remonter" aux paramètres de la relation de dispersion et notamment toutes les caractéristiques du minimum roton - avec en prime deux paramètres clés, l'amplitude ainsi que le déphasage des oscillations de la densité du fluide.

4.1 Trois exemples instructifs

Avec donc comme seule ambition de produire une dynamique plausible pour le paramètre d'ordre d'un superfluide dense, nous revenons à l'écriture initiale de l'équation de Gross-Pitaevskii :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \int \Psi^*(\vec{r}', t) V(\vec{r}' - \vec{r}) \Psi(\vec{r}', t) d^3\vec{r}' + W |\Psi(\vec{r}, t)|^{2(\gamma+1)} \right] \Psi(\vec{r}, t) \quad (1.23)$$

Nous y avons rajouté, pour pouvoir traiter l'un des exemples qui nous intéressent, un terme d'interaction à plusieurs corps. En effet, dans un liquide, il n'est pas évident (et faux en général) que l'énergie potentielle d'interaction entre les atomes se réduise à une somme d'interactions à deux corps. La présence d'un troisième atome au voisinage modifie la forme des cortèges électroniques de deux atomes donnés et donc leur interaction.

Nous décrirons trois exemples qui nous permettront d'approcher de mieux en mieux la relation de dispersion de ^4He pour les excitations linéaires. Ce sont :

1. Le modèle gaussien. Nous entendons par là que nous modéliserons le potentiel d'interaction à deux corps par une gaussienne :

$$V(\vec{r}' - \vec{r}) = V_o \exp(-(\vec{r}' - \vec{r})^2/2a^2).$$

Ici, W est pris nul. a est la portée du potentiel, qui introduit la longueur qui manquait dans le modèle de Gross-Pitaevskii local.

2. Le modèle de Pomeau-Rica. A nouveau, W est pris nul et le potentiel est un potentiel carré :

$$V(\vec{r}' - \vec{r}) = V_o \Theta((\vec{r}' - \vec{r})^2/a^2),$$

où $\Theta(x) = 1$ si $x < 1$ et $\Theta(x) = 0$ si $x > 1$.

3. Le modèle de Berloff-Roberts. dans ce modèle plus complexe, $W \neq 0$ et :

$$V(\vec{r}) = (\alpha + \beta A^2 r^2 + \delta A^4 r^4) \exp(-A^2 r^2) + \eta \exp(-B^2 r^2) \quad (1.24)$$

Nous poserons de plus :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_o \exp(-i\mu t/\hbar) \psi(\vec{r}, t) \quad (1.25)$$

avec $\Psi_o^2 = n$, le module au carré du paramètre d'ordre à l'équilibre, et μ l'"énergie" à l'équilibre (fondamental), de sorte que, dans l'état fondamental $\psi = 1$.

Enfin, nous utiliserons des unités commodes pour la longueur et pour le temps. Pour le modèle gaussien et le modèle de Pomeau-Rica, l'unité de longueur s'impose : c'est la longueur a , portée du potentiel. L'unité de temps sera choisie de sorte que le facteur devant le Laplacien soit égal à 1. L'équation devient :

$$i\partial_t \psi = -\Delta \psi + \Lambda \left[\int \psi^*(\vec{r}', t) V(\vec{r}' - \vec{r}) \psi(\vec{r}', t) d^3 \vec{r}' - \int V(\vec{r}) d^3 \vec{r} \right] \psi \quad (1.26)$$

avec, pour le modèle gaussien :

$$V(\vec{r}) = \exp(-\frac{r^2}{2}) \quad (1.27)$$

et pour le modèle de Pomeau-Rica :

$$V(\vec{r}) = \Theta(r^2) \quad (1.28)$$

Pour le modèle Berloff-Roberts, en revanche, aucune longueur ne s'impose naturellement dans l'expression du potentiel. On choisit alors l'unité de temps : \hbar/μ . L'unité de longueur en découle, pour que, de nouveau, le coefficient devant le laplacien soit égal à 1. L'équation devient alors :

$$i\partial_t \psi = -\Delta \psi + \left[\int \psi^*(\vec{r}', t) V(\vec{r}' - \vec{r}) \psi(\vec{r}', t) d^3 \vec{r}' + \chi |\psi|^{2(\gamma+1)} - 1 \right] \psi \quad (1.29)$$

où $V(\vec{r})$ a la même expression qu'en (1.24), compte tenu d'une division par μ et de l'utilisation des nouvelles unités. $\chi = W n^{\gamma+1}/\mu$ et, comme $\psi = 1$ est solution, une autre condition s'impose :

$$\int V(\vec{r}) d^3 \vec{r} = 1 - \chi \quad (1.30)$$

Chapitre 2

Autour d'une singularité

1 Ce que l'on peut attendre

Avant de nous lancer dans la description des conséquences des modèles choisis, montrons, à l'aide d'un modèle extrême, ce que l'on peut attendre comme structure autour d'une singularité linéaire pour un superfluide dense.

La faible énergie des rotons est indicatrice de la facilité à créer une onde de densité ayant leur longueur d'onde. De même qu'un diapason heurté oscille ensuite jusqu'à amortissement à sa fréquence de résonance, de même une perturbation localisée sera, comme nous le verrons plus loin, entourée d'oscillations de densité de la longueur d'onde des rotons. En quelque sorte, la perturbation localisée sert de germe à une cristallisation localisée du superfluide.

L'Hélium se cristallise suivant un motif hexagonal - il y a donc trois directions privilégiées, sur lesquelles les "trous" vont se répartir, lorsque l'on en prend un comme origine du référentiel, ainsi qu'on le voit sur la figure (2.1). La densité particulière peut être modélisée par :

$$\rho(\vec{r}) = 1 - \frac{1}{3} \left[\cos(kr \cos(\theta)) + \cos\left(kr \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) + \cos\left(kr \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)\right) \right] \quad (2.1)$$

Les angles :

$$\alpha = (kr \cos(\theta)) \quad ; \quad \beta = \left(kr \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \quad ; \quad \gamma = \left(kr \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)\right) \quad (2.2)$$

sont les produits scalaires de $\vec{r} : (r \cos \theta, r \sin \theta)$ avec respectivement $\vec{k}_1 = (k, 0)$, $\vec{k}_2 = \left(-\frac{k}{2}, \frac{k\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\vec{k}_3 = \left(-\frac{k}{2}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)$. Ces vecteurs appartiennent au réseau réciproque d'un réseau hexagonal plan de translations élémentaires $\vec{a} = (0, -1)$, $\vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et

$\vec{c} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. En effet, si l'on choisit $k = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned}
 \vec{k}_1 \cdot \vec{a} &= 0 & ; & & \vec{k}_1 \cdot \vec{b} &= \frac{k\sqrt{3}}{2} = 2\pi & ; & & \vec{k}_1 \cdot \vec{c} &= -\frac{k\sqrt{3}}{2} = -2\pi \\
 \vec{k}_2 \cdot \vec{a} &= -\frac{k\sqrt{3}}{2} = -2\pi & ; & & \vec{k}_2 \cdot \vec{b} &= 0 & ; & & \vec{k}_2 \cdot \vec{c} &= \frac{k\sqrt{3}}{2} = 2\pi \\
 \vec{k}_3 \cdot \vec{a} &= \frac{k\sqrt{3}}{2} = 2\pi & ; & & \vec{k}_3 \cdot \vec{b} &= -\frac{k\sqrt{3}}{2} = -2\pi & ; & & \vec{k}_3 \cdot \vec{c} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Donc, par exemple :

$$\alpha(\vec{r} + \vec{a}) = \alpha(\vec{r}), \quad \beta(\vec{r} + \vec{a}) = \beta(\vec{r}) - 2\pi \quad \text{et} \quad \gamma(\vec{r} + \vec{a}) = \gamma(\vec{r}) + 2\pi \tag{2.4}$$

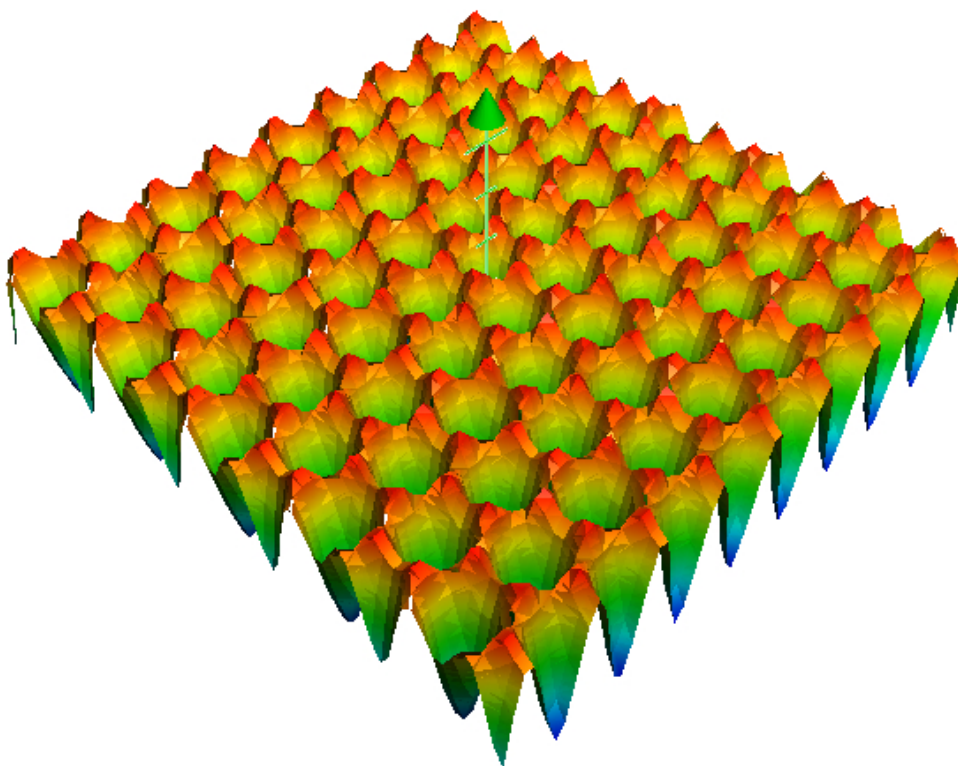


FIGURE 2.1 – La densité $\rho(r)$ lors d'une cristallisation, dans le plan perpendiculaire à l'axe (Oz). Le motif hexagonal se répète à l'infini.

Comme on le voit, les coefficients de l'équation (2.1) sont choisis de façon à ce que le minimum de densité soit zéro. C'est en cela que ce modèle est extrême. Cette relation serait valable pour un cristal parfait - mais pour un liquide, si effectivement des creux se forment dans la densité du fluide, ces derniers se répartissent dans des directions aléatoires et non suivant une direction privilégiée. C'est pourquoi nous considérons la moyenne isotrope, dans le plan perpendiculaire au vortex, de la répartition précédente. La densité, que l'on a représentée sur la figure (2.2), vaut

alors :

$$\rho(\vec{r}) = 1 - \frac{1}{2\pi} \int \cos(kr \cos(\theta)) d\theta \quad (2.5)$$

$$= 1 - J_0(kr) \quad (2.6)$$

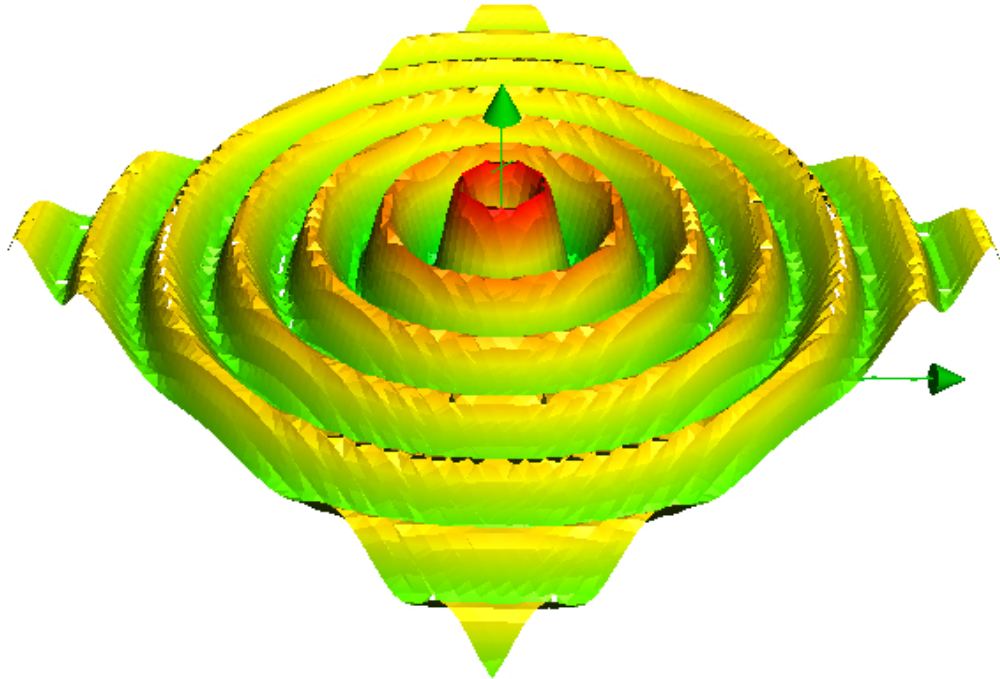


FIGURE 2.2 – La densité $\rho(r)$ d'un liquide dans le plan perpendiculaire au vortex. Les oscillations s'amortissent à mesure qu'on s'éloigne de l'origine.

Nous verrons que les profils trouvés ont une grande parenté avec ce modèle rudimentaire et extrême.

Pour le montrer, calquant notre approche sur celle de Bogoliubov, on en renverse l'objectif. Supposant la relation de dispersion donnée, on développe le paramètre d'ordre à proximité d'une perturbation, la variation engendrée étant suffisamment faible, à distance raisonnable, pour être dérivée de façon linéaire.

Reprenant l'approche de Regge [47] - qui s'est intéressé lui au comportement du fluide près d'une paroi solide ou à la surface libre de l'Hélium superfluide - nous allons montrer que dans l'espace des \vec{k} , les excitations sont essentiellement engendrées par la présence du minimum roton, là où la relation de dispersion est proche de zéro.

Il est bon de noter que la branche phonon de la relation de dispersion n'a pas véritablement de rôle physique à jouer ici. En effet, plus la norme $\|\vec{k}\|$ du vecteur d'onde est petite, plus les longueurs d'onde mises en jeu dans les excitations sont grandes.

La perturbation que l'on considère correspond au cœur d'un vortex. Il s'agit d'une ligne (transformant le superfluide en un milieu non simplement connexe) que l'on modélise par un potentiel très localisé radialement, invariant suivant la direction z .

Dans toute la suite des calculs, on va prendre le potentiel proposé par Pomeau et Rica comme base de travail, afin d'alléger les notations et les calculs.

2 Théorie des excitations linéaires dans un superfluide

2.1 Paramètre d'ordre, modèle de Pomeau-Rica

Puisqu'on suppose que le paramètre d'ordre, soumis à une perturbation faible et localisée dans l'espace, répond de manière linéaire, on l'écrit sous la forme d'une solution à l'équilibre auquel s'ajoute une fonction perturbative :

$$\psi(\vec{r}, t) = 1 + \delta\psi(\vec{r}, t) \quad (2.7)$$

La perturbation devient une simple adjonction $\delta V_{ext}(\vec{r})$ au potentiel extérieur et le paramètre d'ordre vérifie alors l'équation suivante, où l'on voit la fonction conjuguée de ψ apparaître :

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial t}(\vec{r}, t) = & -\Delta\psi(\vec{r}, t) \\ & + \Lambda\psi(\vec{r}, t) \left[\int \Theta(\vec{r} - \vec{r}') (\psi(\vec{r}', t)) (\psi^*(\vec{r}', t)) d^3\vec{r}' - \frac{4\pi}{3} \right] + \mathcal{V}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

où $\mathcal{V}(\vec{r}, t) = \delta V_{ext}(\vec{r})\psi(\vec{r}, t)$.

Afin de déterminer $\delta\psi$, il est nécessaire de considérer également la forme conjuguée de l'équation précédente, pour éliminer $\delta\psi^*$. On obtient alors un système couplé de deux équations à deux inconnues :

$$\left\{ \begin{aligned} i\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}(\vec{r}, t) &= -\Delta\delta\psi(\vec{r}, t) + \mathcal{V}(\vec{r}, t) \\ &+ \Lambda \int \Theta(\vec{r} - \vec{r}') (\delta\psi(\vec{r}', t) + \delta\psi^*(\vec{r}', t)) d^3\vec{r}' \\ -i\frac{\partial\delta\psi^*}{\partial t}(\vec{r}, t) &= -\Delta\delta\psi^*(\vec{r}, t) + \mathcal{V}(\vec{r}, t) \\ &+ \Lambda \int \Theta(\vec{r} - \vec{r}') (\delta\psi(\vec{r}', t) + \delta\psi^*(\vec{r}', t)) d^3\vec{r}' \end{aligned} \right. \quad (2.9)$$

Le terme d'interaction étant une convolution, il semble naturel de passer dans l'espace de Fourier, spatial et temporel, afin d'éliminer $\delta\psi^*$:

$$\left\{ \begin{aligned} (\omega - k^2 - \Lambda\tilde{\Theta}(\vec{k})) \delta\tilde{\psi}(\vec{k}, \omega) - \Lambda\tilde{\Theta}(\vec{k})\delta\tilde{\psi}^*(\vec{k}, \omega) &= \tilde{\mathcal{V}}(\vec{k}, \omega) \\ (\omega + k^2 + \Lambda\tilde{\Theta}(\vec{k})) \delta\tilde{\psi}^*(\vec{k}, \omega) + \Lambda\tilde{\Theta}(\vec{k})\delta\tilde{\psi}(\vec{k}, \omega) &= -\tilde{\mathcal{V}}(\vec{k}, \omega) \end{aligned} \right. \quad (2.10)$$

On élimine alors la fonction conjuguée $\delta\tilde{\psi}^*$ et on reconnaît la fonction de dispersion $\omega^2(\vec{k})$:

$$\left(\omega^2 - \underbrace{\left(k^4 + 2k^2 \Lambda \Theta(\vec{k}) \right)}_{=\omega^2(\vec{k})} \right) \delta\tilde{\psi}(\vec{k}, \omega) = (\omega + k^2) \tilde{\mathcal{V}}(\vec{k}, \omega) \quad (2.11)$$

On remarque que même en l'absence de perturbation ($\mathcal{V}(\vec{k}, \omega) = 0$), la fonction perturbative peut être non nulle, à la condition que la pulsation ω qui la caractérise corresponde à $\pm\omega(\vec{k})$. Dans ce cas, la fonction perturbative est solution des excitations collectives propres au fluide et on note au passage que l'équation ainsi obtenue ne permet pas de la déterminer.

On s'intéresse donc aux cas pour lesquels $\mathcal{V}(\vec{k})$ est différent de zéro et pour lesquels $\omega = 0$ - c'est-à-dire les cas statiques. La fonction $\delta\tilde{\psi}(\vec{k})$ est donc donnée par :

$$\delta\tilde{\psi}(\vec{k}) = -\frac{k^2 \tilde{\mathcal{V}}(\vec{k})}{\omega^2(\vec{k})} \quad (2.12)$$

2.2 Densité d'un superfluide quelconque

Intéressons nous maintenant à la déformation de la densité $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ au voisinage d'une perturbation localisée, correspondant au potentiel $\delta V_{ext}(\vec{r}, t)$. Si le superfluide considéré était un gaz dilué de bosons, l'identité du paramètre d'ordre avec la fonction d'onde commune aux bosons condensés nous permettrait d'écrire :

$$\frac{\delta\tilde{\rho}(\vec{k}, \omega)}{\rho_0} = 2\delta\tilde{\psi}(\vec{k}, \omega) \quad (2.13)$$

Cette relation n'est pas exacte dans le cas général, le paramètre d'ordre n'étant pas aussi simplement relié à la densité. Cependant, si les écarts à la densité d'équilibre sont faibles, ils doivent vérifier une équation linéaire. L'homogénéité du superfluide et l'invariance par translation dans le temps imposent que, dans le domaine de Fourier, cette équation soit locale. La réponse à une perturbation s'écrit donc :

$$F(\vec{k}, \omega) (\omega^2 - \omega(k)^2) \frac{\delta\tilde{\rho}(\vec{k}, \omega)}{\rho_0} = 2\delta\tilde{V}_{ext}(\vec{k}, \omega) \quad (2.14)$$

En écrivant l'équation sous cette forme, nous exprimons que, pour $\omega = \pm\omega(k)$, le milieu résonne dans un mode propre. Pour une perturbation localisée, $\delta\tilde{V}_{ext}(\vec{k})$ peut être considéré comme constant. $F(\vec{k})$ n'a pas de raison de varier très rapidement autour de $k = k_0$. Le facteur 2, introduit artificiellement, permet une identité formelle des équations avec le cas où l'équation (2.13) serait valable. Les résultats obtenus pour $2\delta\tilde{\psi}$ sont donc qualitativement valables pour $\frac{\delta\tilde{\rho}}{\rho_0}$. Bien sûr, $\delta\tilde{\psi}$ devient alors un intermédiaire de calcul sans signification physique.

L'équation déterminée pour la densité est alors similaire à un ansatz proposé par Regge [47].

3 Sur une ligne de vortex

3.1 Intégration directe

On obtient l'expression de $\delta\psi(\vec{r})$ à partir de sa transformée de Fourier déterminée précédemment :

$$\delta\psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int -\frac{k^2 \tilde{\mathcal{V}}(\vec{k})}{\omega(k)^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^2\vec{k} \quad (2.15)$$

La perturbation induite par la ligne de vortex est en effet modélisée par une perturbation localisée qui ne dépend que de la distance r_\perp par rapport à l'axe de symétrie Oz^1 . Le problème est donc à deux dimensions dans l'espace de Fourier.

C'est ici qu'intervient notre principale approximation. Nous supposons que cette intégrale est dominée par le voisinage du creux de rotons, où $\omega(k)^2$ a un profond minimum. Le numérateur $\tilde{v}(\vec{k}) = k^2 \tilde{\mathcal{V}}(\vec{k})$ est remplacé par un développement de Taylor et la relation de dispersion est réduite à la branche qui contribue le plus, à savoir le minimum roton. Dans le voisinage de ce dernier $\omega(k)^2$ est modélisé par un puits parabolique $\Omega^2 + c^2(k - k_0)^2$, où $\hbar\Omega$ est l'énergie du gap de roton et $m_* = \frac{\hbar\Omega}{c^2}$, correspond à ladite "masse effective" d'un roton. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \delta\psi(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint -\frac{\tilde{v}(k_0) + \tilde{v}'(k_0)(k_\perp - k_0)}{\Omega^2 + c^2(k_\perp - k_0)^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^2k_\perp \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \iint \frac{\tilde{v}(k_0) + \tilde{v}'(k_0)(k_\perp - k_0)}{\Omega^2 + c^2(k_\perp - k_0)^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} k_\perp dk_\perp d\theta \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \iint \frac{\tilde{v}(k_0) + \tilde{v}'(k_0)(k_\perp - k_0)}{\Omega^2 + c^2(k_\perp - k_0)^2} e^{ik_\perp r_\perp \cos\theta} k_\perp dk_\perp d\theta \end{aligned} \quad (2.16)$$

où θ désigne l'angle entre le vecteur d'onde \vec{k} et le vecteur position \vec{r} , comme on peut le voir sur la figure (2.3).

On commence par s'intéresser à l'intégration sur θ . Il y a deux contributions majeures à l'intégrale : pour $\theta \sim 0$ et pour $\theta \sim \pi$. Hors des voisinages de ces points, si $k_\perp r_\perp$ est suffisamment grand, la phase de l'exponentielle oscillante varie rapidement, ce qui moyenne l'intégrande à zéro (voir figure (2.4)). Pour chacun de ces voisinages, on effectue un développement de Taylor de la fonction cosinus au voisinage de ces points :

$$\cos\theta \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad \text{et} \quad \cos\theta \underset{\theta \rightarrow \pi}{\sim} -1 + \frac{(\pi - \theta)^2}{2} \quad (2.17)$$

1. Ce faisant, on néglige alors l'influence de la phase, qui pour un vortex de quantum $\frac{\hbar}{m}$, change d'une quantité 2π en tournant autour de la ligne de vortex.

2. Pour la densité, $\tilde{v}(\vec{k}) = \delta V_{ext}(\vec{k})/F(\vec{k})$

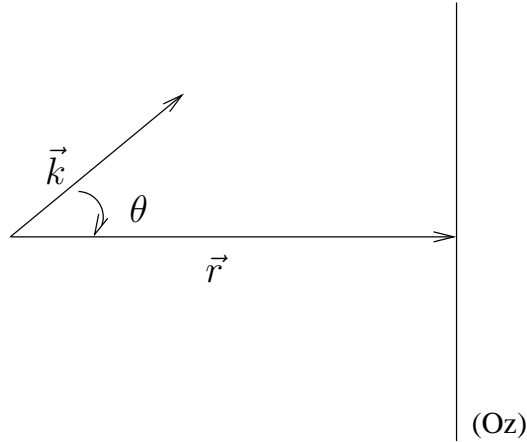


FIGURE 2.3 – Positionnement des variables de l'intégration.

ce qui mène à :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} e^{ik_{\perp}r_{\perp} \cos(\theta)} d\theta &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{ik_{\perp}r_{\perp} \cos(\theta)} d\theta \\
 &\sim \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_{\perp}r_{\perp} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)} d\theta}_{\text{contribution en } 0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_{\perp}r_{\perp} \left(-1 + \frac{(\pi-\theta)^2}{2}\right)} d\theta}_{\text{contribution en } \pi} \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

En effet, $1 - \frac{\theta^2}{2}$ n'a d'extremum que pour $\theta = 0$. On peut donc intégrer de $-\infty$ à $+\infty$ sans ajouter de contributions parasites. Si on calcule la première partie centrée autour de 0 :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_{\perp}r_{\perp} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)} d\theta &= e^{ik_{\perp}r_{\perp}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_{\perp}r_{\perp} \frac{\theta^2}{2}} d\theta \\
 &= e^{ik_{\perp}r_{\perp}} \sqrt{\pi} \cdot \left(\frac{ik_{\perp}r_{\perp}}{2}\right)^{-1/2} \\
 &= e^{ik_{\perp}r_{\perp}} \sqrt{\frac{2\pi}{k_{\perp}r_{\perp}}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

De la même façon, la contribution pour π donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_{\perp}r_{\perp} \left(-1 + \frac{(\pi-\theta)^2}{2}\right)} d\theta = e^{-ik_{\perp}r_{\perp}} \sqrt{\frac{2\pi}{k_{\perp}r_{\perp}}} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (2.20)$$

En sommant, on retrouve finalement la forme asymptotique de la fonction de Bessel :

$$\begin{aligned}
 2\pi J_0(k_{\perp}r_{\perp}) &\sim \sqrt{\frac{2\pi}{k_{\perp}r_{\perp}}} \left(e^{i(k_{\perp}r_{\perp} - \frac{\pi}{4})} + e^{-i(k_{\perp}r_{\perp} - \frac{\pi}{4})} \right) \\
 &= \sqrt{\frac{8\pi}{k_{\perp}r_{\perp}}} \cos\left(k_{\perp}r_{\perp} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

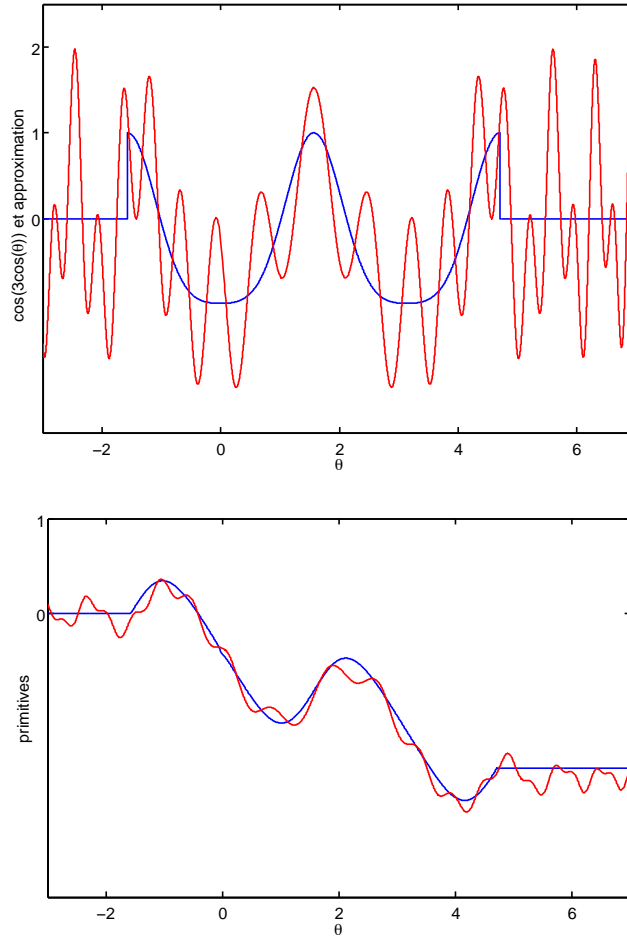


FIGURE 2.4 – Sur la figure du haut : en bleu, la fonction $\mathcal{R}(e^{3i\cos(\theta)}) = \cos 3 \cos(\theta)$ multipliée par une fonction porte qui l'annule en dehors de l'intervalle $[-\pi/2, 3\pi/2]$ et en rouge, son approximation, la fonction $\cos 3 \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + \cos 3 \left(-1 + \frac{(\pi-\theta)^2}{2}\right)$. Dans la figure du bas, leurs primitives. On voit que les valeurs finales sont proches, les oscillations de l'approximation se moyennant à zéro à l'intégration.

On réécrit donc l'intégrale dans l'approximation de la fonction de Bessel :

$$\delta\psi(\vec{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \sqrt{\frac{2\pi k_0}{r_\perp}} \frac{\tilde{v}(k_0) + \tilde{v}'(k_0)(k_\perp - k_0)}{\Omega^2 + c^2(k_\perp - k_0)^2} \times \left(e^{i(k_\perp r_\perp - \frac{\pi}{4})} + e^{-i(k_\perp r_\perp - \frac{\pi}{4})} \right) dk_\perp \quad (2.22)$$

où l'on a à nouveau usé du fait que l'intégrale est dominée par le voisinage de $k_\perp = k_0$.

On doit intégrer dans le plan complexe et il y a deux pôles au dénominateur,

$k_0 + ik_1$ et $k_0 - ik_1$, avec $k_1 = \frac{\Omega}{c}$, que l'on a représentés sur la figure (2.5) :

$$\frac{1}{\Omega^2 + c^2 (k_\perp - k_0)^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{A}{k_\perp - k_0 - ik_1} + \frac{B}{k_\perp - k_0 + ik_1} \right) \quad (2.23)$$

$$= \frac{1}{c^2} \left(\frac{k_\perp (A + B) - k_0 (A + B) + ik_1 (A - B)}{(k_\perp - k_0)^2 - (ik_1)^2} \right) \quad (2.24)$$

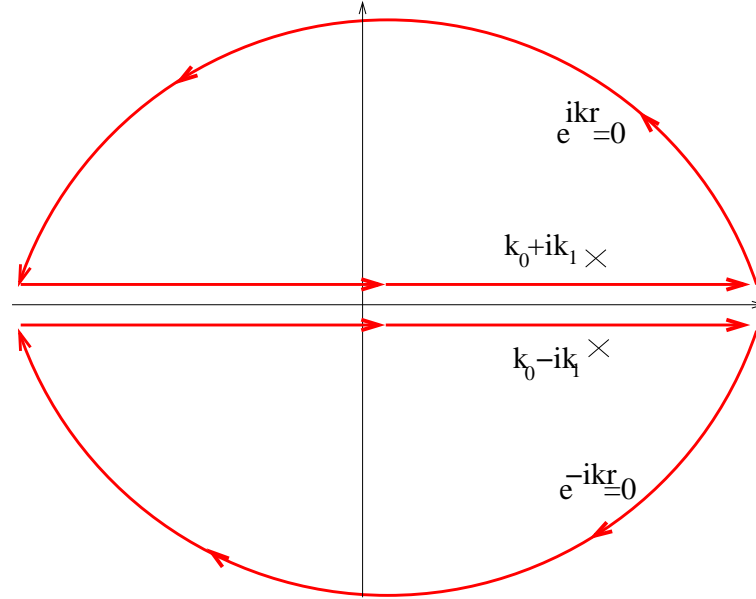


FIGURE 2.5 – Tracé de l'intégration dans le plan complexe de l'intégrande avec ses deux pôles.

Par identification, on obtient les équations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} k_\perp (A + B) = 0 \\ ik_1 (A - B) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ A = \frac{1}{2ik_1} \end{cases} \quad (2.25)$$

L'intégrande est donc :

$$\frac{i(\tilde{v}(k_0) + \tilde{v}'(k_0)(k_\perp - k_0))}{(2k_1 c^2)(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{k_0}{r_\perp}} \left(\frac{1}{k_\perp - k_0 - ik_1} - \frac{1}{k_\perp - k_0 + ik_1} \right) \times \left(e^{i(k_\perp r_\perp - \frac{\pi}{4})} + e^{-i(k_\perp r_\perp - \frac{\pi}{4})} \right) \quad (2.26)$$

La contribution à l'intégrale pour les k imaginaires négatifs en $k_0 - ik_1$ vaut :

$$\begin{aligned} & \frac{-i}{(2k_1 c^2)(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{k_0}{r_\perp}} \text{Rés} \left[\frac{(\tilde{v}(k_0) + \tilde{v}'(k_0)(k_\perp - k_0))}{k_\perp - k_0 + ik_1} e^{-i(k_\perp r_\perp - \frac{\pi}{4})} \right] \\ &= \frac{-2\pi}{(2k_1 c^2)(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{k_0}{r_\perp}} (\tilde{v}(k_0) - ik_1 \tilde{v}'(k_0)) e^{-i(k_0 r_\perp - \frac{\pi}{4})} e^{-k_1 r_\perp} \end{aligned} \quad (2.27)$$

La contribution à l'intégrale pour les k imaginaires positifs en $k_0 + ik_1$ vaut, quant à elle :

$$\begin{aligned} & \frac{i}{(2k_1c^2)(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{k_0}{r_\perp}}\text{Rés}\left[\frac{(\tilde{v}(k_0) + \tilde{v}'(k_0)(k_\perp - k_0))}{k_\perp - k_0 + ik_1}e^{i(k_\perp r_\perp - \frac{\pi}{4})}\right] \\ &= \frac{-2\pi}{(2k_1c^2)(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{k_0}{r_\perp}}(\tilde{v}(k_0) + ik_1\tilde{v}'(k_0))e^{i(k_0 r_\perp - \frac{\pi}{4})}e^{-k_1 r_\perp} \end{aligned} \quad (2.28)$$

On somme les contributions :

$$\begin{aligned} \delta\psi(\vec{r}) = & \frac{-e^{-k_1 r_\perp}}{(2k_1c^2)(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{k_0}{r_\perp}}\left[(\tilde{v}(k_0) - ik_1\tilde{v}'(k_0))e^{-i(k_0 r_\perp - \frac{\pi}{4})}\right. \\ & \left. + (\tilde{v}(k_0) + ik_1\tilde{v}'(k_0))e^{i(k_0 r_\perp - \frac{\pi}{4})}\right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

Il est alors dans notre intérêt de faire apparaître le facteur $(\tilde{v}(k_0) + ik_1\tilde{v}'(k_0))$ sous la forme $(\tilde{v}^2(k_0) + k_1^2\tilde{v}'^2(k_0))^{\frac{1}{2}}e^{i\phi_0}$, avec $(\tilde{v}^2(k_0) + k_1^2\tilde{v}'^2(k_0))^{\frac{1}{2}}$, module qui sera l'un des facteurs de l'amplitude des oscillations de $\delta\psi(\vec{r})$, alors que ϕ_0 sera un déphasage supplémentaire.

On a donc :

$$(\tilde{v}(k_0) + ik_1\tilde{v}'(k_0)) = (\tilde{v}^2(k_0) + k_1^2\tilde{v}'^2(k_0))^{\frac{1}{2}}e^{i\phi_0} \quad (2.30)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \cos\phi_0 = \frac{\tilde{v}(k_0)}{(\tilde{v}^2(k_0) + k_1^2\tilde{v}'^2(k_0))^{\frac{1}{2}}}, \\ \sin\phi_0 = \frac{k_1\tilde{v}'(k_0)}{(\tilde{v}^2(k_0) + k_1^2\tilde{v}'^2(k_0))^{\frac{1}{2}}}, \end{cases} \text{ d'où } \tan(\phi_0) = \frac{\tilde{v}'(k_0)}{\tilde{v}(k_0)}k_1 \quad (2.31)$$

Finalement, la variation du paramètre d'ordre $\delta\psi(\vec{r})$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta\psi(\vec{r}) &= \frac{-e^{-k_1 r_\perp}}{\sqrt{r_\perp}}\frac{\sqrt{k_0}(\tilde{v}^2(k_0) + k_1^2\tilde{v}'^2(k_0))^{\frac{1}{2}}}{(2k_1c^2)(2\pi)^{\frac{1}{2}}}2\mathcal{R}\left(e^{i(k_0 r_\perp - \frac{\pi}{4} + \phi_0)}\right) \\ &= \frac{-e^{-k_1 r_\perp}}{\sqrt{r_\perp}}\frac{\sqrt{k_0}(\tilde{v}^2(k_0) + k_1^2\tilde{v}'^2(k_0))^{\frac{1}{2}}}{(k_1c^2)(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\cos\left[k_0 r_\perp - \frac{\pi}{4} + \phi_0\right] \end{aligned} \quad (2.32)$$

On constate que le paramètre d'ordre et donc la densité près du vortex est une fonction oscillante, de longueur d'onde caractéristique $\frac{2\pi}{k_0}$ - mais dont les oscillations s'amortissent exponentiellement sur une distance caractéristique $\frac{1}{k_1}$. Exprimons le résultat pour la densité :

$$\frac{\delta\rho(\vec{r})}{\rho_0} = 2\delta\psi(\vec{r}) = A\frac{e^{-k_1 r_\perp}}{\sqrt{k_0 r_\perp}}\cos\left[k_0 r_\perp - \frac{\pi}{4} + \phi_0\right] \quad (2.33)$$

L'amplitude A des oscillations est liée à \tilde{v} et aux paramètres des rotons par :

$$A = -2\frac{k_0(\tilde{v}^2(k_0) + k_1^2\tilde{v}'^2(k_0))^{\frac{1}{2}}}{k_1c^2(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.34)$$

où l'on a donné à \tilde{v} la signification correspondant au problème de la densité, équation (2.14).

Compte tenu de la forme asymptotique de la fonction de Bessel :

$$J_0(x) \sim 2 \frac{\cos(x - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2\pi x}} \quad (2.35)$$

on remarque la parenté de ces oscillations avec le modèle extrême proposé au début de ce chapitre. On voit par la même occasion que $2/\sqrt{2\pi} \sim 0.8$ est une valeur de référence pour A .

Le signe et l'amplitude de la phase ϕ_0 dépendent de la forme et des variations du potentiel modélisant la perturbation $\tilde{v}(k_\perp)$, mais on voit cependant que le comportement général du paramètre d'ordre près d'une singularité reste universel et que seule la phase est réellement dépendante du modèle choisi. Regardons par exemple les deux cas suivants :

- si on considère un potentiel gaussien pour la singularité, dont l'extension spatiale caractéristique serait de l'ordre de $\frac{1}{k_0}$, qui reflète la distance interatomique, alors $\tilde{v}(k_0) \sim -k_0 \tilde{v}'(k_0)$, ce qui implique que la phase aura une petite valeur négative et un impact très limité ;
- *a contrario*, si on considère un potentiel tel que $\tilde{v}(k_\perp)$ est négligeable devant le terme $k_0 \tilde{v}'(k_0)$, alors ϕ_0 prendra une valeur significative, dont le signe sera déterminé par les variations de \tilde{v} aux abords de k_0 et sera à l'origine d'un creusement du cœur du vortex.

3.2 Intégration indirecte

Pour une perturbation localisée

On considère cette fois la perturbation localisée autour d'un point de l'espace physique. Afin d'estimer la déformation $\delta\psi(\vec{r})$ engendrée, on intègre toujours sur l'espace de Fourier entier sachant que l'invariance par translation suivant z n'est plus là³ :

$$\begin{aligned} \delta\psi_L(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint -\frac{k^2 \tilde{\mathcal{V}}(\vec{k})}{\omega(k)^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{k} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \frac{\tilde{v}(k_0) + \tilde{v}'(k_0)(k - k_0)}{\Omega^2 + c^2(k - k_0)^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} k^2 \sin\theta dk d\phi d\theta \end{aligned} \quad (2.36)$$

où $\theta \in [0, \pi]$ désigne l'angle entre \vec{k} et \vec{r} , comme on l'a montré sur la figure (2.6).

3. Si une fonction $U(\vec{r})$ a pour transformée de Fourier $\tilde{U}(\vec{k})$, sa somme suivant z : $\int_{-\infty}^{+\infty} U(\vec{r}) dz$ a pour transformée de Fourier $2\pi\delta(k_z)\tilde{U}(\vec{k})$. $\tilde{v}(\vec{k})$ ci-dessous a donc la même signification que dans le paragraphe précédent.

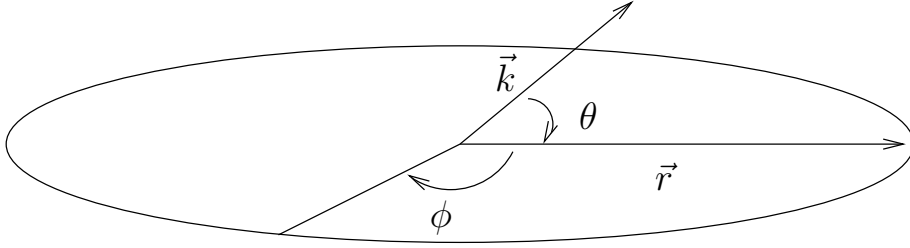


FIGURE 2.6 – Positionnement des variables de l'intégration.

On peut déjà procéder aux intégrations suivant θ et ϕ :

$$\begin{aligned}
 \delta\psi_L(\vec{r}) &= \frac{-1}{(2\pi)^3} \iiint \frac{\tilde{v}(k_0) + \tilde{v}'(k_0)(k - k_0)}{\Omega^2 + c^2(k - k_0)^2} e^{ikr \cos \theta} k^2 \sin \theta dk d\phi d\theta \\
 &= \frac{-1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{v}(k_0) + \tilde{v}'(k_0)(k - k_0)}{\Omega^2 + c^2(k - k_0)^2} \left[\int_0^\pi e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \right] k^2 dk \\
 &= \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{v}(k_0) + \tilde{v}'(k_0)(k - k_0)}{\Omega^2 + c^2(k - k_0)^2} \left[\frac{1}{ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \right] k^2 dk \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

On décompose le dénominateur en éléments simples et de la même manière que précédemment, on calcule les contributions.

La contribution à l'intégrale en $k = k_0 - ik_1$ pour les k imaginaires négatifs vaut :

$$\begin{aligned}
 &\frac{k_0}{8\pi^2 k_1 c^2 r} \text{Rés} \left[\frac{(\tilde{v}(k_0) + \tilde{v}'(k_0)(k - k_0))}{k - k_0 + ik_1} e^{-i(kr)} \right] \\
 &= \frac{-2i\pi k_0}{8\pi^2 k_1 c^2 r} (\tilde{v}(k_0) - ik_1 \tilde{v}'(k_0)) e^{-i(k_0 r)} e^{-k_1 r} \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

La contribution à l'intégrale en $k = k_0 + ik_1$ pour les k imaginaires positifs vaut :

$$\begin{aligned}
 &\frac{k_0}{8\pi^2 k_1 c^2 r} \text{Rés} \left[\frac{(\tilde{v}(k_0) + \tilde{v}'(k_0)(k - k_0))}{k - k_0 - ik_1} e^{i(kr)} \right] \\
 &= \frac{2i\pi k_0}{8\pi^2 k_1 c^2 r} (\tilde{v}(k_0) + ik_1 \tilde{v}'(k_0)) e^{i(k_0 r)} e^{-k_1 r} \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

En sommant, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \delta\tilde{\psi}_L(\vec{r}) &= 2i\pi k_0 \frac{e^{-k_1 r}}{8\pi^2 k_1 c^2 r} \left[(\tilde{v}(k_0) + ik_1 \tilde{v}'(k_0)) e^{i(k_0 r)} - (\tilde{v}(k_0) - ik_1 \tilde{v}'(k_0)) e^{-i(k_0 r)} \right] \\
 &= 2i\pi k_0 \frac{e^{-k_1 r}}{8\pi^2 k_1 c^2 r} (\tilde{v}(k_0)^2 + k_1^2 \tilde{v}'(k_0)^2)^{\frac{1}{2}} (2i \sin(k_0 r + \phi_0)) \\
 &= -k_0 \frac{e^{-k_1 r}}{2\pi k_1 c^2 r} (\tilde{v}(k_0)^2 + k_1^2 \tilde{v}'(k_0)^2)^{\frac{1}{2}} \sin(k_0 r + \phi_0) \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

avec, comme précédemment, $\tan \phi_0 = k_1 \frac{\tilde{v}'(k_0)}{\tilde{v}(k_0)}$.

Intégration de la perturbation localisée sur une ligne

Afin de retrouver le résultat pour une perturbation engendrée par une ligne de vortex, on souhaite intégrer la variation du paramètre d'ordre $\delta\psi_L(\vec{r})$ pour une perturbation localisée autour d'un point sur une ligne suivant z .

$$\begin{aligned}\delta\psi(\vec{r}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\psi_L(\vec{r}) dz \\ &= \frac{-k_0}{2\pi c^2} (\tilde{v}(k_0)^2 + k_1^2 \tilde{v}'(k_0)^2)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-k_1 r}}{k_1 r} \sin(k_0 r + \phi_0) dz\end{aligned}\quad (2.41)$$

avec $\vec{r} = r_\perp \vec{e}_\perp + z \vec{e}_z$. On remplace r par la valeur approchée $\sqrt{r_\perp^2 + z^2} \sim r_\perp + \frac{z^2}{2r_\perp}$ quand il est en facteur de k_0 , mais par r_\perp en facteur de k_1 pour rester à l'ordre zéro en k_1/k_0

On doit donc intégrer la fonction :

$$\begin{aligned}& \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-k_1 r}}{k_1 r} [e^{i(k_0 r + \phi_0)} - e^{-i(k_0 r + \phi_0)}] dz \\ & \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-k_1 r_\perp}}{k_1 r_\perp} \left[e^{i(k_0(r_\perp + \frac{z^2}{2r_\perp}) + \phi_0)} - e^{-i(k_0(r_\perp + \frac{z^2}{2r_\perp}) + \phi_0)} \right] dz\end{aligned}\quad (2.42)$$

On ne prend en compte que la première exponentielle pour faire les calculs :

$$\begin{aligned}& e^{i\phi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-k_1 r_\perp}}{k_1 r_\perp} e^{ik_0(r_\perp + \frac{z^2}{2r_\perp})} dz \\ &= \frac{e^{-k_1 r_\perp}}{k_1 r_\perp} e^{i\phi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_0 r_\perp (1 + \frac{x^2}{2})} r_\perp dx \\ &= \frac{e^{-k_1 r_\perp}}{k_1} e^{i\phi_0} e^{ik_0 r_\perp} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_0 r_\perp \frac{x^2}{2}} dx}_{\sqrt{\frac{2\pi}{k_0 r_\perp}} e^{i\frac{\pi}{4}}}\end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\delta\psi(\vec{r}) = \frac{-k_0}{4\pi c^2 k_1} \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 r_\perp}} (\tilde{v}(k_0)^2 + k_1^2 \tilde{v}'(k_0)^2)^{\frac{1}{2}} e^{-k_1 r_\perp} 2\mathcal{R}(e^{ik_0 r_\perp} e^{i\phi_0} e^{-i\frac{\pi}{4}}) \quad (2.43)$$

D'où :

$$\delta\psi(\vec{r}) = -\sqrt{\frac{k_0}{r_\perp}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} k_1 c^2} (\tilde{v}(k_0)^2 + k_1^2 \tilde{v}'(k_0)^2)^{\frac{1}{2}} e^{-k_1 r_\perp} \cos\left(k_0 r_\perp - \frac{\pi}{4} + \phi_0\right) \quad (2.44)$$

en accord avec l'intégration directe.

4 Aspect énergétique

Les oscillations contribuent-elles de façon importante à l'énergie du vortex ? Jusqu'à présent, cette énergie a toujours été attribuée intégralement à l'énergie cinétique correspondant au quantum de circulation autour du vortex. Cette contribution diverge logarithmiquement avec la taille supposée pour le cœur. Une contribution importante des oscillations signifierait que l'on sous-estime de beaucoup cette taille de cœur et que l'on se trompe sans doute sur le sens de son évolution avec la pression.

Mais ces oscillations ne se limitent pas au voisinage du vortex. Comme nous l'avons vu, elles sont induites par n'importe quelle perturbation localisée, comme une paroi par exemple. Dans un milieu poreux, les parois sont très rapprochées et ces oscillations peuvent interférer, d'autant mieux que k_1 (et donc le gap de rotons $\hbar\Omega$) est plus petit.

Dans les alliages magnétiques dilués, les interférences entre oscillations de densités électroniques (oscillations de Friedel) induites par les impuretés magnétiques conduisent à un état "verre de spins". Plusieurs expériences [10] ont suggéré l'existence d'un état "vitreux" pour ^4He dans un poreux à haute pression. Les oscillations de densité pourraient en être responsables.

Pour estimer cette énergie de déformation, on se sert de son évaluation dans un mode propre propagatif. Dans un tel mode propagatif, la moyenne de l'énergie "potentielle" de déformation est égale à celle de l'énergie cinétique. Or, l'équation de conservation de la masse relie les champs de vitesse et de densité :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \cdot \vec{v}) = 0 \\ \rho = \rho_0 + \underbrace{\delta\rho}_{\tilde{\delta}\rho e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}} \Rightarrow -\omega \frac{\tilde{\delta}\rho}{\rho_0} + k u(k) = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

La contribution $\tilde{e}(\vec{k})$ du vecteur d'onde \vec{k} à l'énergie de déformation est donc, à l'ordre le plus bas :

$$\tilde{e}(\vec{k}) = \frac{1}{2} \rho u^2(\vec{k}) \sim \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\tilde{\delta}\rho(\vec{k})}{\rho_0} \frac{\omega(k)}{k} \right)^2 \quad (2.46)$$

L'énergie totale est la somme des contributions ci-dessus. Nous allons de nouveau supposer que la contribution majeure vient des vecteurs d'ondes proches du minimum roton. On obtient l'énergie par unité de longueur du vortex en intégrant sur le plan perpendiculaire à l'axe k_z :

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{e}(k) d^3\vec{k} \\ &\sim \frac{1}{4\pi} \frac{\rho_0}{\Omega^2} \int \frac{(\tilde{v}(k_0) + \tilde{v}'(k_0)(k_\perp - k_0))^2 dk_\perp}{1 + \left(\frac{k_\perp - k_0}{k_1}\right)^2} \frac{dk_\perp}{k_0} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Comme on peut le voir si on développe le carré du numérateur, il y a trois contributions à l'énergie. Cependant, leur apport à l'énergie linéique ne revêt pas la

même importance. En effet, considérons un domaine d'intégration dans le voisinage⁴ de k_0 de la forme $[k_0 - nk_1; k_0 + nk_1]$, avec n , nombre entier tel que l'inégalité $nk_1 \ll k_0$ soit toujours vérifiée. Les deux derniers termes sont proportionnels à $(k_\perp - k_0)$ et à $(k_\perp - k_0)^2$ et chacune de leurs contributions une fois intégrées est de l'ordre de $n \left(\frac{k_1}{k_0}\right)^3$. Cependant, le rapport de la troisième à la première contribution est :

$$n \frac{k_1^2 \tilde{v}'(k_0)^2}{\tilde{v}(k_0)^2} = n \tan^2(\phi_0) \quad (2.48)$$

donc non négligeable si ϕ_0 ne l'est pas. De plus, la dépendance en n montre que notre hypothèse de départ est fautive et que les vecteurs d'onde hors du creux de rotons contribuent.

Cet échec se comprend. Comme nous le verrons plus loin, une valeur non négligeable de ϕ_0 correspond à l'ouverture d'un large creux au niveau du cœur du vortex, soit une forte contribution à l'énergie de déformation, très localisée donc contribuant sur tous les vecteurs d'onde. Mais il est clair à ce niveau qu'un traitement linéaire de la déformation n'a pas de sens. Il n'en a que loin du cœur et c'est à ce niveau que nous voulons estimer l'énergie des oscillations. Nous laisserons donc de côté les deux contributions problématiques.

La contribution restante à l'énergie linéique, qui est de l'ordre de $\frac{k_1}{k_0}$ et est indépendante de n , vaut alors :

$$e = \frac{1}{4\pi} \frac{\rho_0}{\Omega^2} \int \frac{\tilde{v}(k_0)^2}{1 + \left(\frac{k_\perp - k_0}{k_1}\right)^2} \frac{dk_\perp}{k_0} \quad (2.49)$$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$, on obtient l'énergie linéique, que l'on peut relier à l'amplitude A des oscillations relatives de densité, grâce à l'équation (2.34) :

$$e = \frac{\rho_0 k_1 \tilde{v}(k_0)^2}{4k_0 \Omega^2} = \frac{\pi \rho_0 c^2 A^2 k_1}{2k_0^3} \quad (2.50)$$

A amplitude A constante (point que nous discuterons par la suite), plus le gap devient petit - donc k_1 tend vers 0 - et plus l'énergie linéique totale des oscillations diminue : il s'agit bien du comportement attendu, puisque l'énergie nécessaire à la déformation du fluide et à l'instauration d'oscillations de densité devient faible près du point spinodal, autorisant une onde stationnaire de longueur d'onde caractéristique $2\pi/k_0$ à s'y installer.

On peut donc en déduire que les oscillations de densité autour du cœur du vortex contribuent très peu à l'énergie par unité de longueur totale de ce dernier. Examinons toutefois ce qui se passe si l'on néglige totalement cette contribution. De fait, il est possible de l'absorber dans l'énergie cinétique du fluide, au prix d'une réduction du cœur du vortex $a \rightarrow a - \delta a$:

$$e = \frac{\rho_0 \kappa^2}{4\pi a} \delta a \quad (2.51)$$

4. On se place toujours dans le cas où le minimum roton est profond, donc $k_1 = \frac{\Omega}{c} \ll k_0$.

soit :

$$\frac{\kappa^2}{4\pi a} \delta a = \frac{\pi c^2 A^2 k_1}{2k_0^3} \quad (2.52)$$

Quand la pression augmente, k_0 croît, puisque les atomes se “resserrent”, donc $\frac{1}{k_0^3}$ diminue. L'étude du modèle de Pomeau-Rica nous a permis de conclure qu'avec l'augmentation de Λ et donc de P , l'amplitude A restait à peu près constante. Ne restent alors que k_1 et c^2 . Cependant, si c augmente légèrement avec la pression, k_1 et $\frac{1}{k_0^3}$ semblent largement compenser cet accroissement, ainsi que les valeurs expérimentales nous le montrent, au point qu'on en conclut que e diminue, alors qu'à δa constant, l'augmentation de ρ_0 devrait conduire à une augmentation de e . On est donc conduit à supposer que le rayon du cœur augmente quand la pression augmente, ce qui est surprenant. Cette anomalie a été signalée pour ${}^4\text{He}$ [21], [20].

5 Modèle de verre superfluide

5.1 Une vue simplifiée

Avant de nous lancer dans le modèle que nous proposons pour un verre superfluide, montrons ce qu'aurait donné dans la discussion énergétique ci-dessus une approximation a priori raisonnable : que les oscillations autour du vortex sont si proches d'avoir le nombre d'onde k_0 qu'on pourrait les considérer comme des rotons “figés”. L'équation de conservation de la masse s'écrirait alors :

$$\Omega \frac{\delta \rho(\vec{r})}{\rho_0} - k_0 u(\vec{r}) = 0 \quad (2.53)$$

L'énergie du vortex par unité de longueur s'écrirait alors :

$$\frac{\rho_0}{2} \int 2\pi r dr \frac{\Omega^2}{k_0^2} \left(\frac{\delta \rho(r)}{\rho_0} \right)^2 \quad (2.54)$$

En utilisant la définition de l'amplitude A :

$$\frac{\delta \rho(r)}{\rho_0} = \frac{A}{\sqrt{k_0 r}} e^{-k_1 r} \cos(k_0 r - \frac{\pi}{4} - \phi_0) \quad (2.55)$$

et en remplaçant, pour $k_1 \ll k_0$, le facteur $\cos^2(k_0 r - \frac{\pi}{4} - \phi_0)$ par sa moyenne $1/2$, on obtient :

$$e = \frac{\pi}{4} A^2 \rho_0 \frac{k_1 c^2}{k_0^3} \quad (2.56)$$

soit la moitié de la quantité obtenue précédemment (équation (2.50)). Cela se comprend. L'évolution de l'amplitude, quoique lente, correspond à un flou sur les nombres d'onde de $\pm k_1$. Or la fréquence des modes croît très vite autour de k_0 . On peut même remarquer que cette augmentation est exagérée par notre approximation parabolique pour le spectre, les termes suivants du développement venant diminuer la fréquence. On peut donc penser que, si la formule ci-dessus est une sous-estimation, l'équation (2.50) est par contre une sur-estimation. Cependant, les deux estimations, bien que différant d'un facteur 2, ont la même dépendance en k_1 , et la seconde estimation est beaucoup plus facile à mettre en oeuvre.

5.2 Le modèle

Plusieurs articles récents [10] suggèrent l'existence d'une phase verre superfluide pour l'hélium 4 surfondu dans un matériau poreux. Notre analyse énergétique ci-dessus permet d'imaginer un modèle pour un tel verre.

Supposons en effet que plusieurs sites de la paroi de ce matériau poreux aient deux états au contact de l'hélium liquide, que l'on peut appeler "mouillant" et "non mouillant". Comme il s'agit d'hélium surfondu, cela peut venir de la solidification, ou non, d'une première couche d'hélium. Soit $2\Delta_i$ la différence d'énergie entre ces deux états pour le site i . Nous écrirons donc la contribution de ce site à l'énergie : $S_i\Delta_i$, $S_i = 1$ correspondant par exemple à l'état mouillant, et $S_i = -1$ à l'état non mouillant.

Chaque point de la paroi, et donc en particulier le site i , engendre des oscillations de densité dans l'hélium. Conformément à notre résultat pour une perturbation localisée, les oscillations de densité engendrées par le site i s'écrivent :

$$\frac{\delta\rho(\vec{r})}{\rho_0} = \frac{A_i}{k_0|\vec{r}-\vec{r}_i|} e^{-k_1|\vec{r}-\vec{r}_i|} \sin(k_0|\vec{r}-\vec{r}_i|) \quad (2.57)$$

Nous négligeons le déphasage puisqu'il s'avère expérimentalement petit. Nous poserons l'amplitude A_i égale à :

$$A_i = A_{0i} + S_i A_{1i} \quad (2.58)$$

puisque les deux états n'engendrent pas *a priori* la même amplitude.

La contribution des sites à l'énergie s'écrit donc :

$$\sum_i \Delta_i S_i + K \iiint d^3\vec{r} \left(\sum_i \frac{A_i}{k_0|\vec{r}-\vec{r}_i|} e^{-k_1|\vec{r}-\vec{r}_i|} \sin(k_0|\vec{r}-\vec{r}_i|) \right)^2 \quad (2.59)$$

avec :

$$K = \frac{\rho_0}{2} \frac{c^2 k_1^2}{k_0^2} \quad (2.60)$$

dans l'approximation la plus simple du paragraphe précédent.

Le terme d'interaction entre les sites i et j s'écrit donc :

$$K \iiint d^3\vec{r} \frac{A_i A_j}{k_0^2 |\vec{r}-\vec{r}_i| |\vec{r}-\vec{r}_j|} e^{-k_1(|\vec{r}-\vec{r}_i|+|\vec{r}-\vec{r}_j|)} \times [\cos(k_0(|\vec{r}-\vec{r}_i|-|\vec{r}-\vec{r}_j|)) - \cos(k_0(|\vec{r}-\vec{r}_i|+|\vec{r}-\vec{r}_j|))] \quad (2.61)$$

Pour évaluer l'intégrale, nous choisirons des coordonnées cylindriques, l'axe z étant parallèle au vecteur $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$. Nous noterons r_{ij} le module du vecteur $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$, c'est à dire la distance entre les sites i et j . Pour éviter les confusions, nous noterons η la coordonnée radiale, c'est à dire la distance du point \vec{r} à l'axe des z .

Remarquons que $k_0(|\vec{r}-\vec{r}_i|-|\vec{r}-\vec{r}_j|)$ n'a pas d'extremum. Par contre $k_0(|\vec{r}-\vec{r}_i|+|\vec{r}-\vec{r}_j|)$ est minimum, égal à $k_0 r_{ij}$, sur le segment qui joint i et j . A proximité de ce segment :

$$k_0(|\vec{r}-\vec{r}_i|+|\vec{r}-\vec{r}_j|) \sim k_0 r_{ij} + \frac{k_0 r_{ij} \eta^2}{2|\vec{r}-\vec{r}_i| |\vec{r}-\vec{r}_j|} \quad (2.62)$$

L'intégrale sur η :

$$\int e^{\frac{(-k_1 + ik_0)r_{ij}\eta^2}{2|\vec{r}-\vec{r}_i||\vec{r}-\vec{r}_j|}} 2\pi\eta d\eta \sim 2\pi e^{-i\frac{\pi}{2}} \frac{|\vec{r}-\vec{r}_i||\vec{r}-\vec{r}_j|}{k_0 r_{ij}} \quad (2.63)$$

si l'on néglige k_1 devant k_0 .

L'intégrale sur z donne simplement un facteur r_{ij} . Donc, au total, le terme d'interaction s'écrit :

$$-K A_i A_j \frac{2\pi}{k_0^3} e^{-k_1 r_{ij}} \sin(k_0 r_{ij}) \quad (2.64)$$

D'autre part :

$$A_i A_j = A_{0i} A_{0j} + A_{1i} A_{0j} S_i + A_{0i} A_{1j} S_j + A_{1i} A_{1j} S_i S_j \quad (2.65)$$

Le premier terme est une constante. Les deux suivants vont renormaliser Δ_i et Δ_j . Le dernier correspond à une interaction entre spins fictifs. A une constante près, l'énergie s'écrit :

$$\sum_i \Delta'_i S_i - \sum_{i < j} J_{ij} S_i S_j \quad (2.66)$$

avec :

$$J_{ij} = \frac{\pi \rho_0 A_{1i} A_{1j} k_1^2 c^2}{k_0^5} e^{-k_1 r_{ij}} \sin(k_0 r_{ij}) \quad (2.67)$$

C'est l'énergie d'un verre de spins sous champ aléatoire. Quand k_1 diminue, chaque J_{ij} décroît comme k_1^2 , et le nombre N de sites en interaction avec un site donné croît comme $\frac{1}{k_1^3}$ - à cause du caractère aléatoire du signe de J , la température de gel est proportionnelle à $J\sqrt{N}$, soit $\sqrt{k_1}$. Elle diminue donc quand la pression augmente. Si cependant ce modèle pouvait justifier le comportement "verre" de l'hélium dans un poreux, en introduisant par exemple les relaxations lentes caractéristiques, il faudrait s'attendre à ce que ce comportement disparaisse à plus forte pression. Bien sûr, cela concerne de toute façon la répartition de densité, mais le superfluide peut continuer de couler. C'est en cela qu'il s'agit d'un "verre superfluide".

Chapitre 3

Le vortex rectilinéaire

Ayant proposé dans le chapitre précédent une approximation pour la structure d'un vortex, nous allons dans ce chapitre essayer d'en juger la pertinence. Nous avons pour cela à notre disposition les modèles de Gross-Pitaevskii modifiés et les trois exemples déjà cités (Gaussien, Pomeau-Rica et Berloff-Roberts), ainsi que l'exemple naturel fourni par ^4He .

On sait que le modèle de superfluide donné par l'équation de Gross-Pitaevskii modifiée ne sera pas un modèle exact de l'hélium 4. Ce qui est intéressant, cependant, est de constater que ces modèles nous donnent accès au paramètre d'ordre d'un superfluide, dont la relation de dispersion est identique à celle de l'Hélium 4, si nous choisissons bien les paramètres. Nous commencerons donc par établir cette relation de dispersion, pour relier au mieux les caractéristiques du creux de rotons, qui fixent notre approximation, à celles du "potentiel d'interaction". Puis, nous résoudrons l'équation de Gross-Pitaevskii pour obtenir le profil radial du paramètre d'ordre et le comparer à notre approximation. Nous en déduirons une amplitude A et une phase ϕ_0 dont nous essayerons de comprendre les variations avec les paramètres de l'équation.

En ce qui concerne ^4He lui-même, nous n'avons pas accès au paramètre d'ordre. Toutefois, on peut dire un mot sur la densité du fluide. Exactement comme le paramètre d'ordre ψ , on s'attend à ce que cette dernière réponde de façon linéaire à une petite perturbation, ce qui nous permet de conjecturer que la densité suit certainement le même type d'équation que celle du paramètre d'ordre, à savoir une relation du type (2.14), déterminée au chapitre précédent :

$$F(\omega, k) \left(\omega^2 - \omega^2(\vec{k}) \right) \frac{\delta \tilde{\rho}}{\rho_0}(\vec{k}, \omega) = \delta \tilde{V}_{ext}(\vec{k}) \quad (3.1)$$

où F est seulement une fonction de ω et de k , dépendant du modèle d'interaction choisi, et non un opérateur différentiel sur ces variables, afin de déterminer la densité ρ pour le modèle de superfluide étudié.

Cette hypothèse forte est confortée comme on le verra dans la suite par des travaux réalisés par Vitiello et al. [58], ainsi que Sadd et al. [48], utilisant une méthode complètement différente pour déterminer cette fois directement la densité ρ autour d'un vortex dans ^4He . Leurs résultats peuvent être modélisés par le même type de relation que celle dont on dérive notre expression pour le paramètre d'ordre

ψ dans le cas de l'équation de Gross-Pitaevskii non-locale. Ce succès montre que les paramètres du creux de rotons que nous avons utilisés, qui sont les paramètres expérimentaux, correspondent bien à leur fonction d'onde modèle. En un sens, nous réalisons là une spectroscopie statique de leur hélium modèle.

1 Calcul de la relation de dispersion dans le cas d'interactions non-locales

Commençons par les modèles gaussien et de Pomeau-Rica. La méthode est la même que celle développée pour le modèle local, il faut simplement tenir compte avec soin de la présence du potentiel d'interaction non-locale.

Pour faciliter les choses, on considère l'équation de Gross-Pitaevskii modifiée et d'ores et déjà adimensionnée, c'est-à-dire que $\Psi(\vec{r}, t) = \sqrt{\rho_0} \psi(\vec{r}, t) e^{-i\mu t}$:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} &= -\Delta \psi(\vec{r}, t) + \psi(\vec{r}, t) \left[\int V(\vec{r} - \vec{r}') |\psi(\vec{r}', t)|^2 d^3 \vec{r}' - \mu \right] \\ \psi(\vec{r}, t) &= (\psi_0 + \delta\psi) \end{cases} \quad (3.2)$$

avec $\psi_0 = 1$ solution uniforme et le potentiel chimique $\mu = \int V(\vec{r}) d^3 \vec{r}$ (cf. relation (1.5)).

En négligeant les termes du second ordre en $\delta\psi^2$ et leurs complexes conjugués, on arrive aux relations suivantes pour $\delta\psi$:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \delta\psi}{\partial t} &= -\Delta \delta\psi + \int V(\vec{r} - \vec{r}') (\delta\psi + \delta\psi^*) d^3 \vec{r}' \\ i \frac{\partial \delta\psi^*}{\partial t} &= \Delta \delta\psi^* - \int V(\vec{r} - \vec{r}') (\delta\psi + \delta\psi^*) d^3 \vec{r}' \end{cases} \quad (3.3)$$

En injectant une solution du type $\delta\psi = u e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + v e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ et en calculant la transformée de Fourier des deux équations précédentes, on obtient un système en u et en v , que l'on peut résoudre si le déterminant de la matrice suivante est nul :

$$\begin{vmatrix} k^2 + \tilde{V}(\vec{k}) - \omega & \tilde{V}(\vec{k}) \\ -\tilde{V}(\vec{k}) & -\left(k^2 + \tilde{V}(\vec{k})\right) - \omega \end{vmatrix} = 0 \quad (3.4)$$

ce qui entraîne alors :

$$\omega^2 = k^4 + 2k^2 \tilde{V}(\vec{k}) \quad (3.5)$$

En déterminant la transformée de Fourier du potentiel d'interaction, on a donc accès à toute la physique de la relation de dispersion et surtout l'élément clé de cette dernière, à savoir le minimum roton. On voit d'ailleurs que pour amener $\omega(k)$ à zéro, il faut qu'il existe un intervalle où $\tilde{V}(\vec{k})$ est négatif. C'est ce qui manquera dans le premier exemple que nous traitons ci-dessous.

2 Modèle gaussien

Le modèle dit “gaussien” ici correspond simplement à un potentiel d’interaction à deux corps représenté par une gaussienne centrée en $r = 0$, dont l’extension spatiale, a , distance caractéristique interatomique, nous sert d’unité de longueur.

Malgré son absence de sens physique réel, ce potentiel répulsif nous permet d’un point de vue mathématique d’éclairer les résultats des autres modèles et notamment le rôle joué par le minimum roton dans l’apparition des oscillations. Le potentiel d’interaction s’écrit alors $V(\vec{r}) = \Lambda U(\vec{r})$ avec :

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{|\vec{r}|^2}{2}} \quad \text{d'où} \quad \tilde{U}(\vec{k}) = e^{-\frac{|\vec{k}|^2}{2}} \quad (3.6)$$

Dans l’approximation des excitations linéaires, la relation de dispersion du potentiel gaussien présente un minimum roton. Cependant, on remarque que cette relation est ici toujours asymptotique à celle d’un potentiel localisé. En effet, si on regarde l’expression de ω^2 déterminée précédemment (cf. relation (3.5)), la transformée de Fourier du potentiel d’interaction est également une gaussienne. Cette dernière tend alors très rapidement vers 0 pour les grandes valeurs de k :

$$\omega_{gauss}^2 = k^4 + 2\Lambda k^2 e^{-\frac{k^2}{2}} \quad (3.7)$$

Si la courbure du creux de rotons est bien présente, comme le montre la figure (3.1), le gap quant à lui ne diminue jamais, contrairement aux cas traités dans la suite. En effet, les extréma de la courbe de dispersion vérifient :

$$4k^3 + 2\Lambda (2k - k^3) e^{-\frac{k^2}{2}} = 0 \quad (3.8)$$

Pour Λ grand, le maximum correspond à peu près à $k^2 = 2$. Le minimum rotons vérifie approximativement :

$$2\Lambda e^{-\frac{k_0^2}{2}} = 4 \quad \text{soit} \quad k_0^2 = 2 \ln \left(\frac{\Lambda}{2} \right) \quad (3.9)$$

Le gap de rotons Ω^2 est donc égal à :

$$\Omega^2 = k_0^4 + 2\Lambda k_0^2 e^{-\frac{k_0^2}{2}} \sim 4 \ln \left(\frac{\Lambda}{2} \right) \left(\ln \left(\frac{\Lambda}{2} \right) + 2 \right) \quad (3.10)$$

Quant à la courbure, elle est donnée par :

$$2c^2 = 12k_0^2 + 2\Lambda (2 - 5k_0^2 + k_0^4) e^{-\frac{k_0^2}{2}} \sim 8 \left(1 - 2 \ln \left(\frac{\Lambda}{2} \right) + 2 \ln^2 \left(\frac{\Lambda}{2} \right) \right) \quad (3.11)$$

Nous en déduisons alors le rapport-clé $\frac{k_1^2}{k_0^2}$:

$$\frac{k_1^2}{k_0^2} \sim \frac{\ln \left(\frac{\Lambda}{2} \right) + 2}{2 \left(1 - 2 \ln \left(\frac{\Lambda}{2} \right) + 2 \ln^2 \left(\frac{\Lambda}{2} \right) \right)} \quad (3.12)$$

On constate que le maximum précédent le creux de rotons peut être aussi élevé que l’on veut - et par conséquent le minimum fortement piqué - pour de très grandes valeurs de Λ . Cependant, il n’y aura jamais cristallisation, car Ω^2 ne peut aller à zéro.

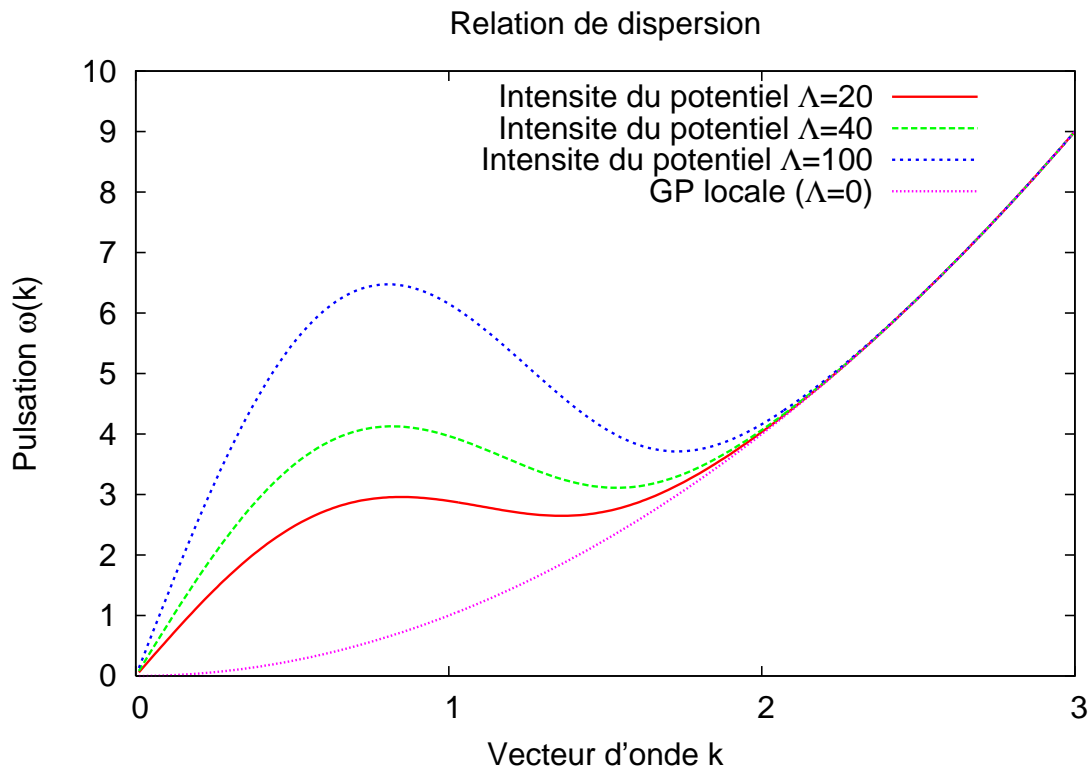


FIGURE 3.1 – On note que la relation de dispersion dans le cas d'un **potentiel gaussien** présente certes un minimum local, mais qu'elle reste asymptotique à la relation de dispersion obtenue pour le cas d'un potentiel local : le gap ne diminue jamais.

2.1 Résolution de l'équation

On cherche une solution du type, en coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\psi(r, \theta, z) = f(r)e^{in\theta} \quad (3.13)$$

pour n quanta de circulation, indépendante de z et de t . Son laplacien s'écrit alors :

$$\Delta\psi = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} \right) f(r) e^{in\theta} \quad (3.14)$$

L'équation à résoudre est donc :

$$0 = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} \right) f(r) + \Lambda f(r) \left[1 - \int_{r'=0}^{+\infty} \int_{\theta'=0}^{2\pi} \int_{z'=-\infty}^{+\infty} U(\vec{r}' - \vec{r}) r' f^2(r') dz' d\theta' dr' \right] \quad (3.15)$$

avec les conditions aux limites :

$$f(r=0) = 0 \quad \text{et} \quad f(r \rightarrow \infty) = 1 \quad (3.16)$$

On passe en coordonnées cylindriques et on intègre le potentiel suivant la coordonnée z' d'abord :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(\vec{r} - \vec{r}') dz' = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}((r \cos \theta - r' \cos \theta')^2 + (r \sin \theta - r' \sin \theta')^2)} \quad (3.17)$$

L'intégration sur θ' fait apparaître la fonction de Bessel à l'ordre 0 :

$$\int_0^{2\pi} d\theta' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' U(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2 + r'^2}{2}} \int_0^{2\pi} d\theta' e^{(rr' \cos(\theta - \theta'))} \quad (3.18)$$

La fonction $e^{rr' \cos(\theta - \theta')}$ est périodique sur $[0, 2\pi]$, donc son intégrale sur une période peut être translatée sur l'axe θ' sans changer de valeur et par conséquent ne dépend pas de θ . En prenant pour définition de la fonction de Bessel modifiée l'intégrale $I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos(\theta')} d\theta'$, on peut réécrire l'équation :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\{f\} &= 0 \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} \right) f(r) + \Lambda f(r) \left[1 - \int_0^{+\infty} dr' I_0(rr') e^{-\frac{r^2 + r'^2}{2}} f(r')^2 \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

On préfère procéder par une méthode dite de "relaxation" qui consiste à itérer numériquement l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{D}\{f\} \quad (3.20)$$

la valeur asymptotique de f vérifiant l'équation voulue.

Le calcul de la fonction de Bessel est effectué grâce aux algorithmes des *Numerical Recipes* [46], que l'on modifie afin de prendre en compte un domaine d'intégration plus conséquent - le produit rr' devenant de l'ordre de $5 \cdot 10^3$ (cf. Annexes B).

La résolution de l'équation de Gross-Pitaevskii non-locale est ainsi montrée sur la figure (3.2), pour différentes valeurs du paramètre Λ .

Les oscillations qui résultent de la présence du minimum roton sont le fruit de la non-localité du potentiel. En effet, la fréquence k_0 reliée à la distance interatomique a est naturellement fortement sollicitée - de la même façon dans un cristal, la fréquence spatiale caractéristique de positionnement des atomes devient une fréquence "molle". La particularité de ce "gap", qui, dans ce cas, reste à une valeur très importante, quelque soit l'intensité Λ du potentiel interatomique, explique pourquoi les oscillations sont extrêmement amorties. Bien que le potentiel soit non-local, il est clair que ce type de force d'interaction ne saurait être modélisé par une gaussienne : à aucun moment cette dernière ne parvient à rendre compte de l'apparition de la cristallisation.

3 Modèle de Pomeau-Rica

Dans leur article "Model of Superflows with Rotons" [45], Pomeau et Rica reprennent la démarche de Bogoliubov avec en tête l'idée de retrouver un "minimum roton", qui présente, comme pour l'hélium 4, la possibilité d'aller à zéro, provoquant

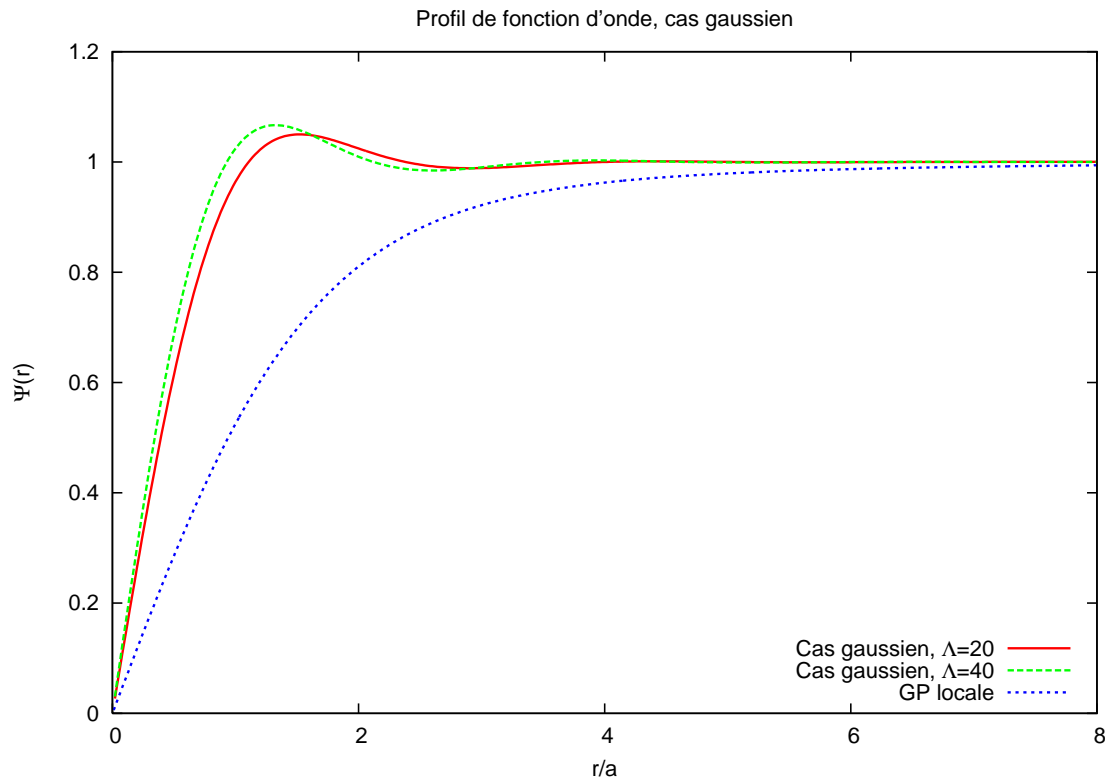


FIGURE 3.2 – *Puisque le gap ne diminue pas dans le **cas gaussien**, quelque soit l'intensité du potentiel, aucune esquisse de cristallisation n'a lieu : les oscillations restent très atténuées, jusqu'à des valeurs énormes de Λ .*

ainsi la cristallisation du fluide. Nous avons vu qu'une condition nécessaire était que la transformée de Fourier du potentiel d'interaction devienne négative sur un intervalle.

Pomeau et Rica montrent alors qu'une simple fonction constante égale à une certaine valeur - adimensionnée, on note alors cette intensité Λ - jusqu'à la distance caractéristique a avant de s'annuler suffit amplement pour redonner la bonne forme pour le spectre en énergie. Il s'agit là d'un potentiel de type champ moyen extrêmement simple, où les interactions répulsives entre les atomes sont ainsi moyennées sur l'espace et qui permet de mener les calculs analytiques assez loin. a représente alors la portée spatiale moyenne de ce potentiel et sert d'unité de longueur dans la version adimensionnée.

Ce minimum roton, que l'on peut voir sur la figure (3.3), a la particularité de diminuer lorsque l'on augmente la valeur de l'intensité jusqu'à s'annuler pour la valeur critique $\Lambda_c = 43,43$, offrant la possibilité d'étudier un modèle de superfluide

très proche de la solidification :

$$\begin{aligned}
 \omega^2(k) &= k^4 + 2k^2\Lambda\tilde{\Theta}(k) \\
 &= k^4 + 2k^2\Lambda \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \sin\theta e^{ikr \cos\theta} dr d\theta d\phi \\
 &= k^4 + 8\pi\Lambda \left[\frac{\sin k}{k} - \cos k \right]
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

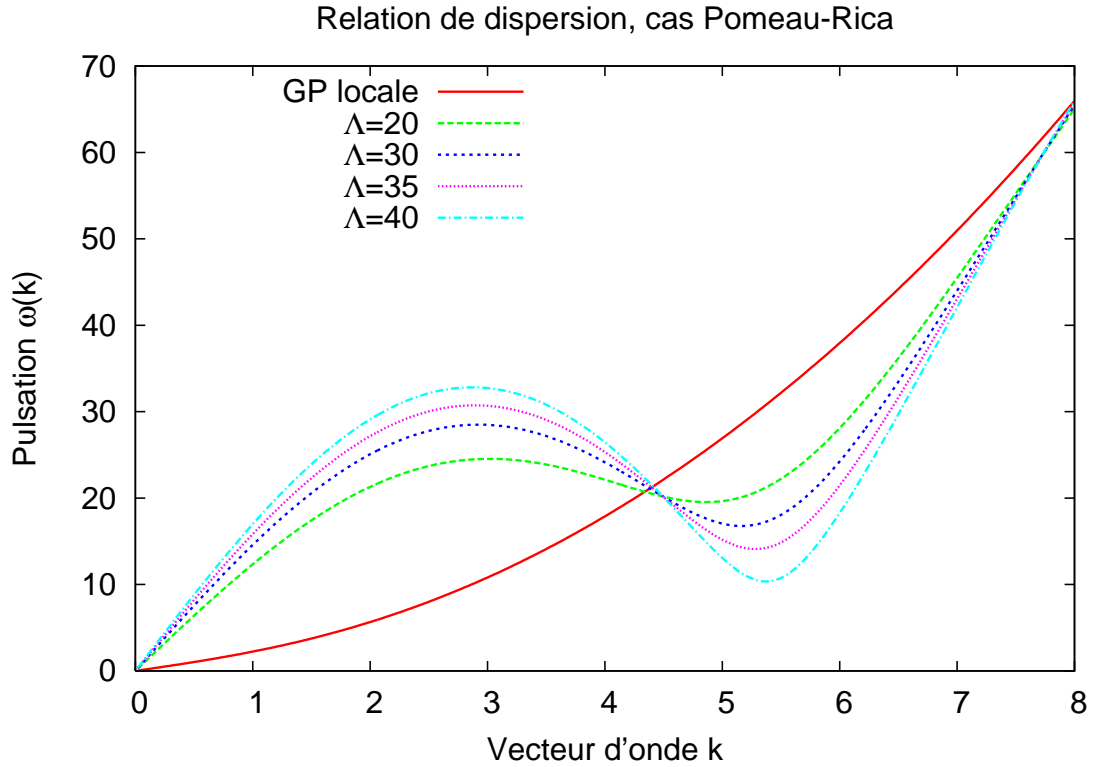


FIGURE 3.3 – Contrairement au cas gaussien, la relation de dispersion pour le **mo-**
dèle de Pomeau-Rica présente un *minimum local* qui n'est pas borné par la relation
de dispersion du cas local et le *gap* peut donc diminuer jusqu'à s'annuler complète-
ment, pour des valeurs supérieures à la valeur critique $\Lambda_c = 43,43$.

L'unique paramètre Λ permet de modifier la profondeur du minimum roton, mais sans toutefois pouvoir être relié simplement à un paramètre physique, comme la température ou la pression. On note par ailleurs que le comportement à grand k reste à peu près identique et ce, quelque soit la valeur de Λ , ce qui nous laisse à penser que l'intensité du potentiel d'interaction a peu de rôle à jouer aux très petites échelles.

Il est intéressant de discuter le comportement du minimum roton quand Λ tend vers Λ_c . Pour la valeur critique de Λ , le vecteur d'onde critique k_c annule à la fois $\omega^2(k)$ et sa dérivée :

$$\frac{d\omega^2(k)}{dk} = 4k^3 + 8\pi\Lambda \left(\frac{\cos(k)}{k} + \sin(k)\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \right) \tag{3.22}$$

On en tire les deux équations :

$$\tan(k_c) = \frac{5k_c}{5 - k_c^2} \quad \text{et} \quad 8\pi\Lambda_c \sin(k_c) = -5k_c^3 \quad (3.23)$$

dont les solutions sont $k_c \sim 5,4486$ et $\Lambda_c \sim 43,4275$.

Pour Λ voisin de Λ_c , le minimum roton k_0 reste voisin de k_c . La courbure reste voisine de :

$$c^2 = 6k_c^2 + 4\pi\Lambda_c \left(\frac{2 - k_c^2}{k_c^2} \right) \left(\frac{\sin(k_c)}{k_c} - \cos(k_c) \right) = 10k_c^2 + k_c^4 \quad (3.24)$$

Le gap est donc donné par :

$$\Omega^2 \sim k_c^4 \frac{\Lambda_c - \Lambda}{\Lambda_c} \quad (3.25)$$

et le rapport k_1/k_0 , par :

$$\frac{k_1^2}{k_0^2} \sim \left(\frac{2}{10 + k_c^2} \right) \frac{\Lambda_c - \Lambda}{\Lambda_c} \quad (3.26)$$

Il n'est a priori pas utile d'étudier la fonction d'onde pour des valeurs de Λ supérieures à Λ_c : la fonction d'onde présente alors des oscillations de densité comparables à celles d'un solide et l'accroissement de l'intensité du potentiel d'interaction à travers Λ va simplement accroître la vitesse de convergence de la méthode de relaxation utilisée pour résoudre l'équation, à mesure qu'on s'éloigne de la valeur critique pour laquelle le temps de relaxation tend vers l'infini.

3.1 Résolution de l'équation

On souhaite comparer les prédictions faites dans le chapitre précédent sur la forme de la fonction d'onde avec la résolution numérique de l'état fondamental donné par l'équation de Gross-Pitaevskii modifiée par Pomeau et Rica. Le calcul est similaire à celui développé pour le cas gaussien. En particulier, on pose $\psi = f(r)e^{in\theta}$.

Pour le vortex, on a les conditions aux limites suivantes :

$$f(r=0) = 0 \quad \text{et} \quad f(r \rightarrow \infty) = 1 \quad (3.27)$$

L'équation à une dimension de l'amplitude f pour le profil de densité d'un vortex rectilinéaire devient :

$$0 = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} \right) f(r) + \Lambda f(r) \left[\frac{4\pi}{3} - \int_{r'=0}^{+\infty} \int_{\theta'=0}^{2\pi} \int_{z'=-\infty}^{+\infty} \Theta(\vec{r}' - \vec{r}) r' f^2(r') dz' d\theta' dr' \right] \quad (3.28)$$

où la fonction Θ ne dépend en réalité que de la distance $|\vec{r}' - \vec{r}|$ qui est égale à :

$$|\vec{r}' - \vec{r}| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta') + z'^2} \quad (3.29)$$

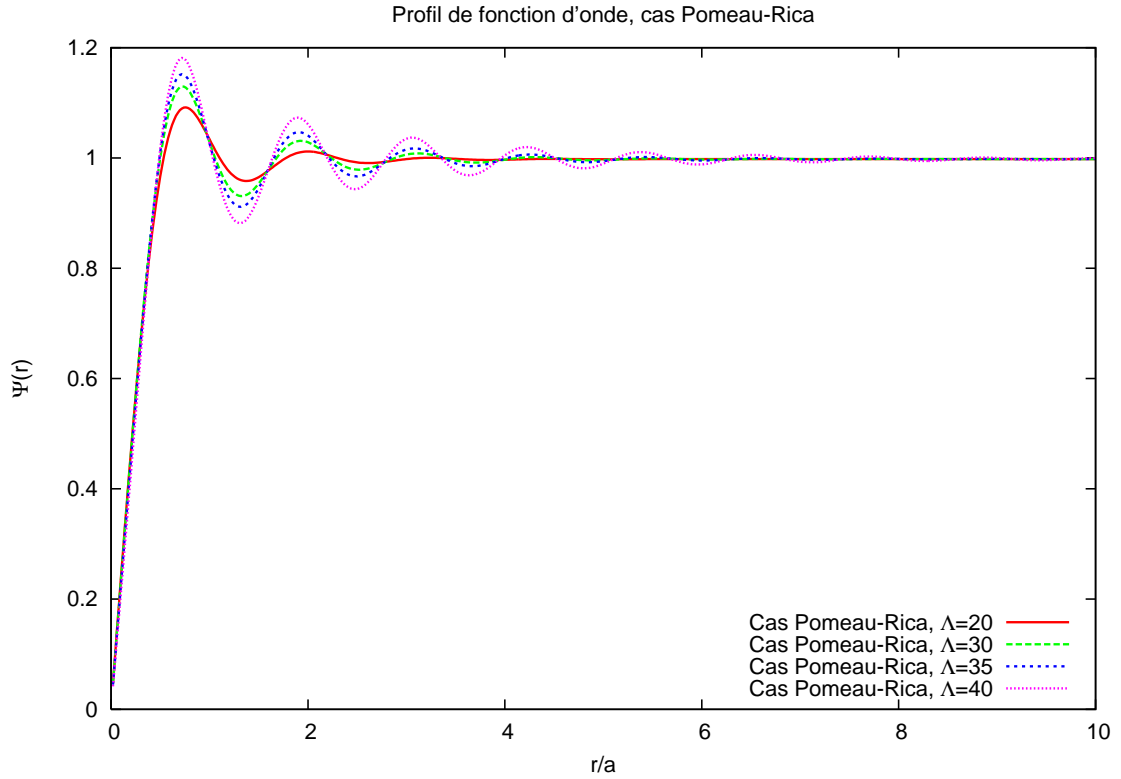


FIGURE 3.4 – Pour un quantum de circulation dans le **modèle de Pomeau-Rica** : plus l'intensité du potentiel croît, plus le gap s'amincit, donnant lieu à des oscillations de plus en plus marquées pour le paramètre d'ordre $\Psi(r)$. Comme on suppose que la densité du fluide $\rho(r)$ suit une loi similaire, on en déduit qu'on assiste bien aux prémisses de la solidification.

Cette fonction adimensionnée est bornée : elle est nulle pour toute valeur de $|\vec{r}' - \vec{r}|$ supérieure à 1. L'intégrale sur z' est la longueur de l'intervalle de z' pour lequel $r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta') + z'^2$ est positif.

Cette longueur est égale à $2\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta')}$, tant que $r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta')$ est lui-même positif, ce qui est toujours vrai si $r < 1$ et $r' < 1 - r$, pour toute valeur de θ' . Sinon, r' doit être compris entre $|1 - r|$ et $1 + r$ et θ' entre 0 et $\arccos(a)$, avec

$$a = \frac{r^2 + r'^2 - 1}{2rr'}$$

Dans l'intégrale du potentiel d'interaction sur les coordonnées z' et θ' on voit alors apparaître différentes contributions suivant les valeurs de r , que l'on détaille ci-dessous.

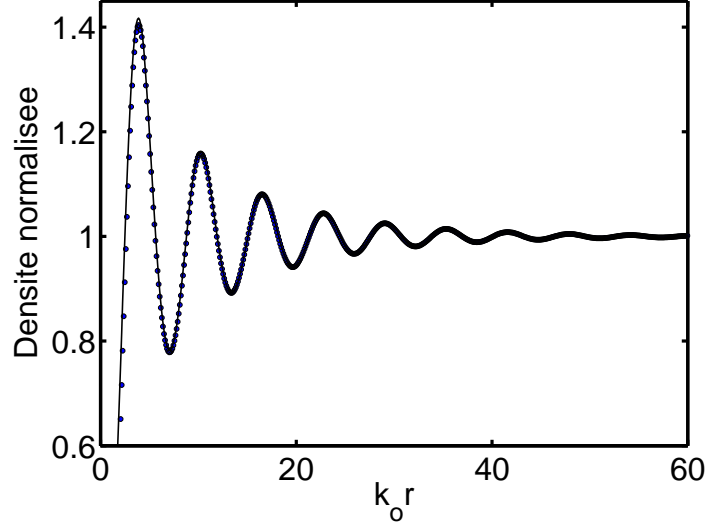


FIGURE 3.5 – Exemple pour un quantum de circulation, près de la transition de phase, avec $\Lambda = 40$: le fit du carré du paramètre d'ordre $|\psi|^2$ pour le **modèle de Pomeau-Rica** est a priori valable loin de la perturbation, pourtant on constate que même très proche du cœur du vortex, le carré de la fonction d'onde continue à suivre la loi déterminée au chapitre II, dans le cas à un seul quantum.

Pour $r \leq 1$:

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} \right) f(r) & (3.30) \\
 &+ 4\Lambda f(r) \left[\frac{\pi}{6} - \int_{r'=0}^{1-r} \int_{\theta'=0}^{\pi} \sqrt{1-r^2-r'^2+2rr'\cos(\theta')} r' f^2(r') d\theta' dr' \right] \\
 &+ 4\Lambda f(r) \left[\frac{\pi}{6} - \int_{1-r}^{1+r} \int_{\theta'=0}^{\arccos(a)} \sqrt{1-r^2-r'^2+2rr'\cos(\theta')} r' f^2(r') d\theta' dr' \right] \\
 &= \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} \right) f(r) \\
 &+ 8\Lambda f(r) \left[\frac{\pi}{12} - \int_{r'=0}^{1-r} \sqrt{1-(r-r')^2} \mathcal{E} \left(1, \sqrt{\frac{4rr'}{1-(r-r')^2}} \right) r' f^2(r') dr' \right] \\
 &+ 8\Lambda f(r) \left[\frac{\pi}{12} - \int_{1-r}^{1+r} \sqrt{rr'} 2 \mathcal{E} \left(1, \sqrt{\frac{1-a}{2}} \right) r' f^2(r') dr' \right] \\
 &- 8\Lambda f(r) \left[\int_{1-r}^{1+r} \sqrt{rr'} (1+a) \mathcal{F} \left(1, \sqrt{\frac{1-a}{2}} \right) r' f^2(r') dr' \right]
 \end{aligned}$$

où :

$$- \mathcal{F}(z, k) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \text{ est l'intégrale elliptique de Legendre du premier genre,}$$

– $\mathcal{E}(z, k) = \int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt$ est l'intégrale elliptique de Legendre du second genre.

Pour $r \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} \right) f(r) & (3.31) \\
 &+ 4\Lambda f(r) \left[\frac{\pi}{3} - \int_{r'=r-1}^{r+1} \int_{\theta'=0}^{\arccos(a)} \sqrt{1-r^2-r'^2+2rr'\cos(\theta')} r' f^2(r') d\theta' dr' \right] \\
 &= \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} \right) f(r) \\
 &+ 8\Lambda f(r) \left[\frac{\pi}{6} - \int_{1-r}^{1+r} \sqrt{rr'} 2 \mathcal{E} \left(1, \sqrt{\frac{1-a}{2}} \right) r' f^2(r') dr' \right] \\
 &- 8\Lambda f(r) \int_{1-r}^{1+r} \sqrt{rr'} \left[(1+a) \mathcal{F} \left(1, \sqrt{\frac{1-a}{2}} \right) r' f^2(r') dr' \right]
 \end{aligned}$$

Chaque partie de l'équation est résolue sur son domaine respectif. La solution de l'équation, que l'on peut voir sur la figure (3.4), est obtenue à l'aide d'une méthode de relaxation, dont le laplacien est calculé en utilisant conjointement les algorithmes de Crank-Nicolson et de Gauss-Siedel afin d'assurer la stabilité.

On compare alors le carré de la solution déterminée numériquement $f(r)$ avec la densité trouvée par approximation linéaire au chapitre précédent (par exemple près de la solidification, cf. figure (3.5)) :

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{A}{\sqrt{k_0 r}} \cos \left(k_0 r - \frac{\pi}{4} - \phi_0 \right) e^{-k_1 r} \quad (3.32)$$

où A et ϕ_0 restent les deux seuls paramètres à évaluer pour avoir la meilleure correspondance.

3.2 Comportement près du seuil de cristallisation

Loi exponentielle liée à la relaxation

La lente évolution du paramètre d'ordre ψ vers la solidification est étroitement influencée par l'intensité des interactions Λ lorsque cette dernière tend vers la valeur critique $\Lambda_c = 43,43$. On note d'ailleurs que cette transition de phase est du second ordre : en imposant une solution uniforme au loin, on permet au gap de rotons de s'annuler continûment. Près de la singularité, on s'attend donc à ce que la plupart des quantités caractéristiques, dont l'amplitude des oscillations, suivent une loi en puissance, en fonction de la quantité $\Lambda_c - \Lambda$.

Le problème est dans le ralentissement critique. Quand Λ approche Λ_c , notre méthode de relaxation demande de plus en plus d'itérations pour converger vers la solution. D'où l'intérêt de comprendre cette convergence pour extrapoler correctement vers les temps infinis.

En première approximation, on peut penser que la relaxation suit une unique loi exponentielle et qu'on peut alors écrire l'amplitude sous la forme :

$$A(t) = A_\infty + \alpha \cdot e^{-\frac{t(\Lambda_c - \Lambda)}{\tau_0}} \quad (3.33)$$

Et sa dérivée vaut ainsi en fonction de A :

$$\frac{dA(t)}{dt} = -(A - A_\infty) \left(\frac{\Lambda_c - \Lambda}{\tau_0} \right) = p_2 + p_1 \cdot A \quad (3.34)$$

Ce qui nous intéresse ici est la valeur, pour chaque Λ associé, de l'amplitude après un temps de relaxation infini, noté A_∞ . Dans une première approche, on peut considérer qu'il suffit de déterminer le rapport suivant pour la déterminer, après avoir fait un fit linéaire de l'ensemble des amplitudes, prises à des temps τ_n régulièrement espacés :

$$A_\infty = \frac{p_2}{-p_1} \quad (3.35)$$

Cependant, on constate que la loi exponentielle n'est pas vérifiée ici. Pourquoi ?

Somme de lois exponentielles

Reprenons l'équation de relaxation en temps imaginaire qui nous donne accès au paramètre d'ordre :

$$\frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \Delta \psi(\vec{r}, t) + \psi(\vec{r}, t) \left[\mu - \int V(\vec{r} - \vec{r}') |\psi(\vec{r}', t)|^2 d^3 \vec{r}' \right] \quad (3.36)$$

Pour les équations vérifiées par la variation $\delta \psi$ et sa conjuguée, exprimées toutes deux dans l'espace de Fourier, on a :

$$\begin{cases} \nu \delta \tilde{\psi} &= k^2 \delta \tilde{\psi} + \tilde{V}(k) (\delta \tilde{\psi} + \delta \tilde{\psi}^*) \\ \nu \delta \tilde{\psi}^* &= k^2 \delta \tilde{\psi}^* + \tilde{V}(k) (\delta \tilde{\psi} + \delta \tilde{\psi}^*) \end{cases} \quad (3.37)$$

Afin de résoudre ce système de deux équations à deux inconnues, on en annule le déterminant, conduisant à écrire l'équation suivante :

$$\left(\nu - k^2 - \tilde{V}(k) \right)^2 = \tilde{V}(k)^2 \quad \Rightarrow \quad (\nu - k^2) \left(\nu - k^2 - 2\tilde{V}(k) \right) = 0 \quad (3.38)$$

Or, ici, on se place près de la transition, ce qui implique que l'on va surtout regarder la valeur de ν pour une valeur de k fixée à k_0 .

Cette équation suggère alors que la dépendance temporelle de l'amplitude des oscillations, au cours de la relaxation, s'exprime comme la superposition de deux exponentielles décroissantes de temps caractéristiques :

$$\tau_+ = \frac{1}{\nu_+} = k_0^{-2} \quad \text{et} \quad \tau_- = \frac{1}{\nu_-} = \frac{1}{k^2 + 2\tilde{V}(k)} \quad (3.39)$$

dont un seul, τ_- , tend vers l'infini quand $\Lambda \rightarrow \Lambda_c$. En effet $k^2 + 2\tilde{V}(k) = k^2 + 2\Lambda\tilde{\Theta}(k)$ est le facteur qui s'annule pour $\Lambda = \Lambda_c$ et $k = k_c$ dans l'expression de $\omega^2(k)$.

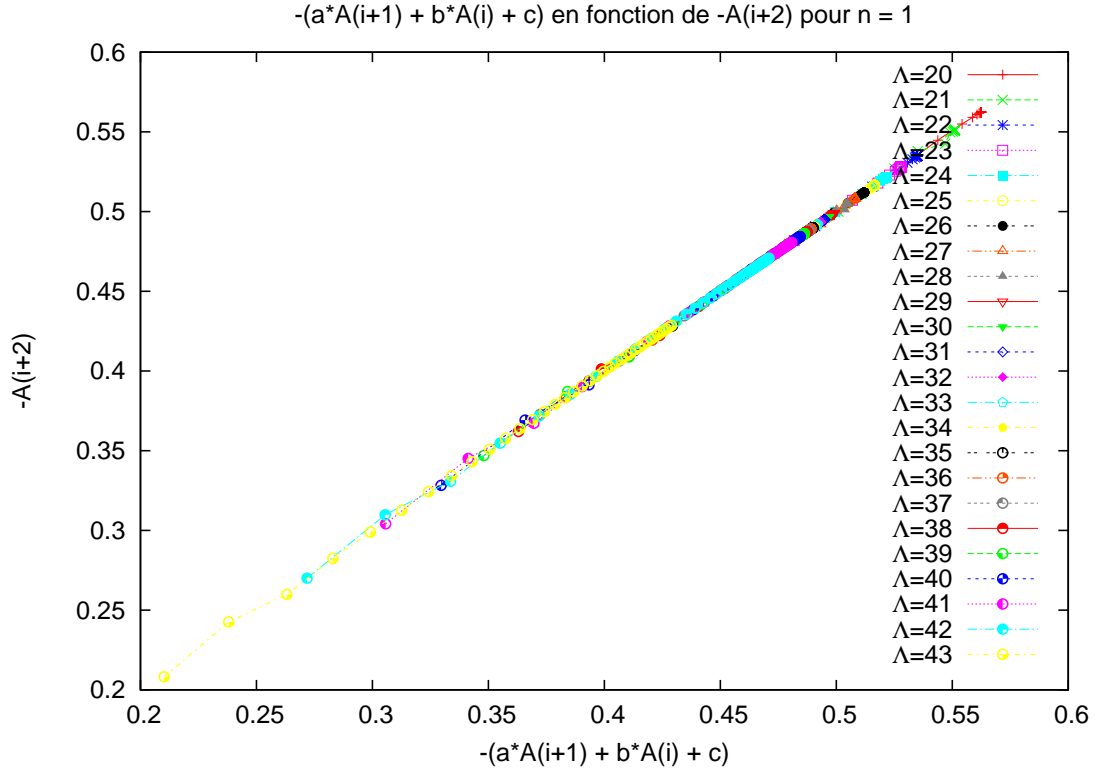


FIGURE 3.6 – Pour un quantum de circulation, avec Λ variant de 20 à 43, dans le **modèle de Pomeau-Rica** : les différentes courbes représentant $A(i+2)$ en fonction de $aA(i+1) + bA(i) + c$ selon les différentes valeurs du paramètre adimensionné de l'intensité des interactions Λ se superposent toutes et sont bien sur la diagonale $x = y$: l'hypothèse d'une somme de deux exponentielles et d'une loi unique quelque soit la valeur prise pour le paramètre Λ , semble vérifiée.

Il faut donc s'attendre à une équation différentielle du second ordre pour l'amplitude en fonction du temps. On cherche donc à déterminer cette équation qui relie l'amplitude, sa dérivée première ainsi que sa dérivée seconde entre elles :

$$\frac{d^2 A(t)}{dt^2} + \beta' \frac{dA(t)}{dt} + \gamma' (A(t) - A_\infty) = 0 \quad (3.40)$$

On utilise des données discrétisées et on a ainsi, pour un temps quelconque $t = i \cdot dt$:

$$A(i+2) + A(i) - 2A(i+1) + \frac{\beta}{2} (A(i+2) - A(i)) + \gamma (A(i+1) - A_\infty) = 0$$

avec $\beta = \beta' dt$ et $\gamma = \gamma' dt^2$, ce qui conduit, après réorganisation des termes, à l'équation suivante :

$$A(i+2) = \underbrace{\frac{2-\gamma}{\frac{\beta}{2}+1}}_{=a} A(i+1) + \underbrace{\frac{\frac{\beta}{2}-1}{\frac{\beta}{2}+1}}_{=b} A(i) + \underbrace{\frac{\gamma}{\frac{\beta}{2}+1}}_c A_\infty \quad (3.41)$$

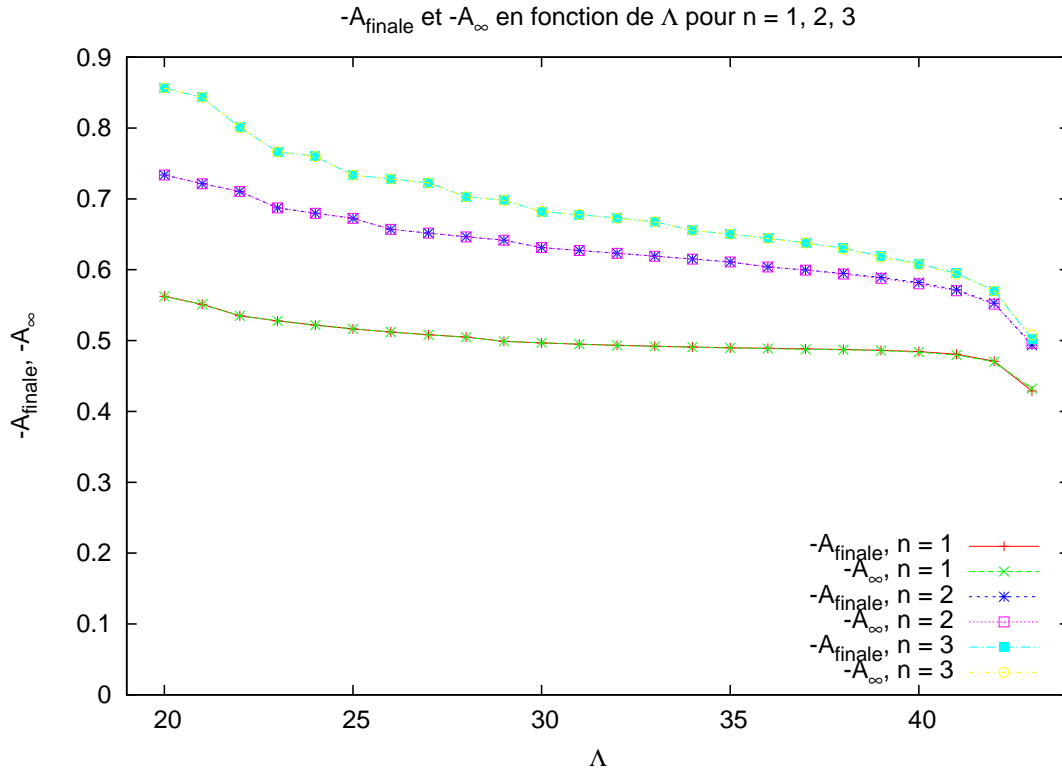


FIGURE 3.7 – Evolution de $-A_{\infty}$ en fonction du paramètre Λ variant de 20 à 43, pour un, deux ou trois quanta de circulation, dans le **modèle de Pomeau-Rica**.

Sachant qu'à la limite $t \rightarrow \infty$, on doit avoir la relation suivante :

$$A_{\infty} = (a + b) \cdot A_{\infty} + c \quad (3.42)$$

on peut donc déterminer A_{∞} :

$$A_{\infty} = \frac{c}{1 - a - b} \quad (3.43)$$

Il faut alors déterminer les valeurs des coefficients a , b et c , ce qui revient à vouloir optimiser le système :

$$\begin{cases} A(2) &= a \cdot A(0) + b \cdot A(1) + c \\ \dots &= \dots \\ A(i+2) &= a \cdot A(i+1) + b \cdot A(i) + c \\ \dots &= \dots \\ A(N) &= a \cdot A(N-1) + b \cdot A(N-2) + c \end{cases}$$

On utilise alors la méthode des moindres carrés qui va nous conduire à minimiser la quantité suivante, constituée à partir de la différence entre les valeurs des différentes A et l'équation que l'on s'est donnée :

$$S = \sum_{i=1}^{N-2} (A(i+2) - a \cdot A(i+1) - b \cdot A(i) - c)^2 \quad (3.44)$$

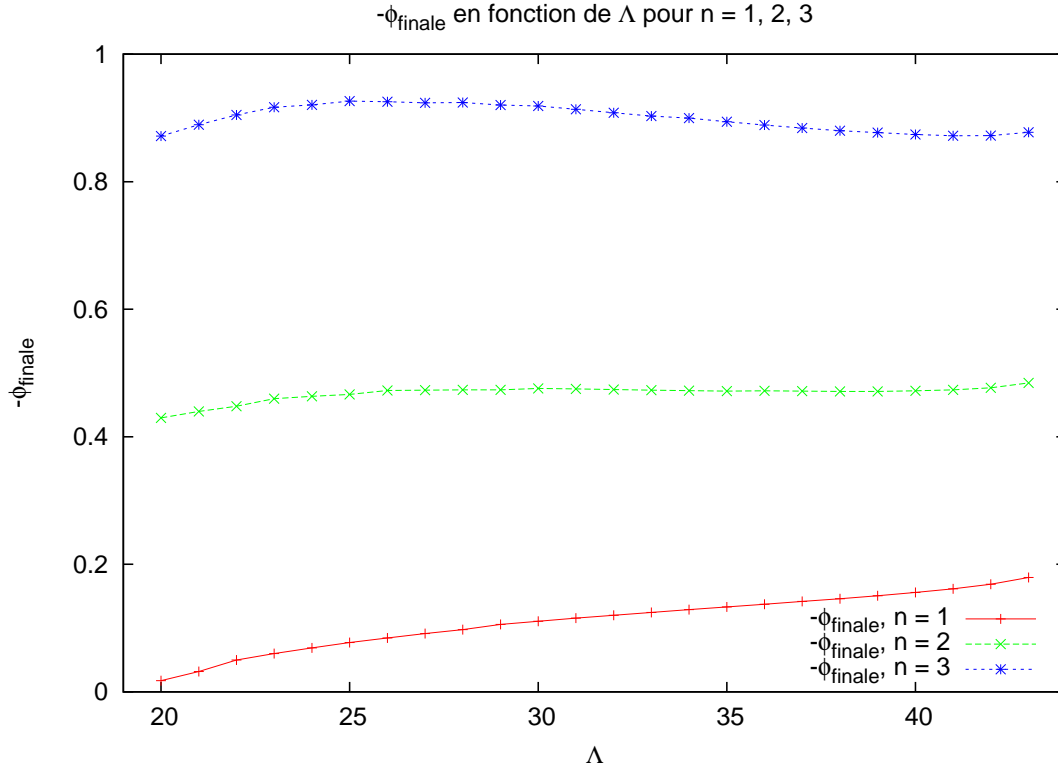


FIGURE 3.8 – Evolution de $-\phi_{\text{fin}}$ en fonction du paramètre Λ variant de 20 à 43, pour un, deux ou trois quanta de circulation, dans le **modèle de Pomeau-Rica**.

On annule alors les dérivées partielles par rapport à chaque paramètre de l'équation, soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^{N-2} A(i+1) (A(i+2) - a \cdot A(i+1) - b \cdot A(i) - c) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^{N-2} A(i) (A(i+2) - a \cdot A(i+1) - b \cdot A(i) - c) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial c} = \sum_{i=1}^{N-2} (A(i+2) - a \cdot A(i+1) - b \cdot A(i) - c) = 0 \end{cases}$$

Il reste alors à résoudre le système suivant afin de déterminer les coefficients a , b et c :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N-2} A(i+1) A(i+2) \\ \sum_{i=1}^{N-2} A(i) A(i+2) \\ \sum_{i=1}^{N-2} A(i+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

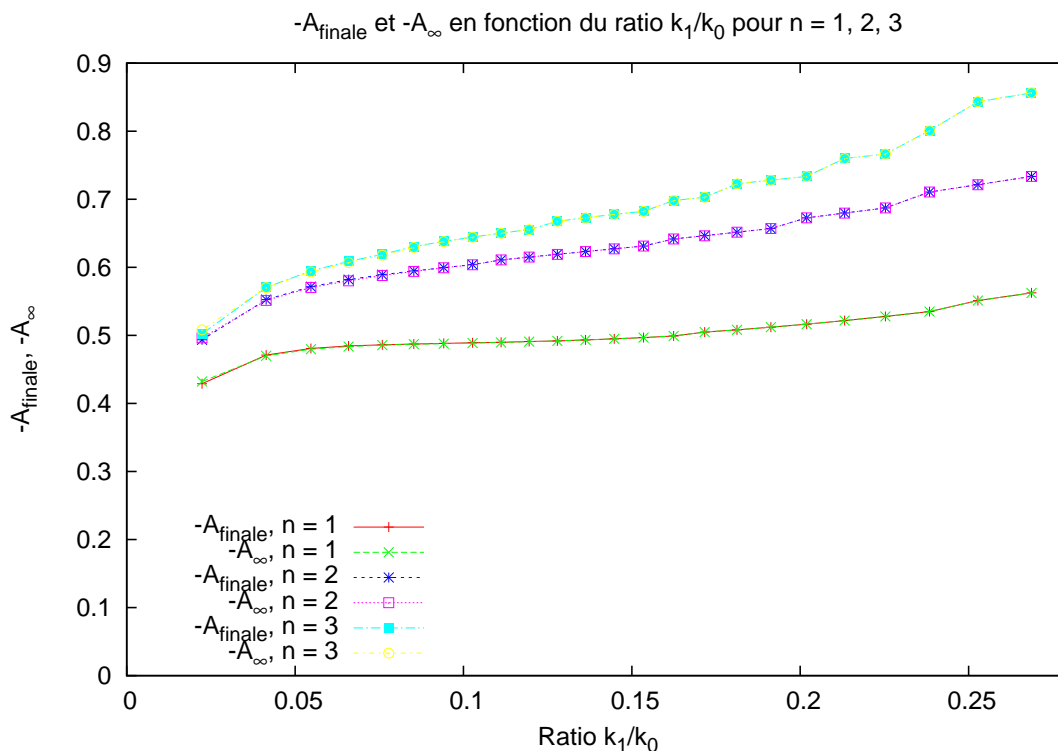


FIGURE 3.9 – Evolution de $-A_{\infty}$ en fonction du paramètre adimensionné $\frac{k_1}{k_0}$, pour un, deux ou trois quanta de circulation, avec Λ variant de 20 à 43, dans le **modèle de Pomeau-Rica** : on remarque que plus on se rapproche de la singularité, ici vers les petites valeurs de $\frac{k_1}{k_0}$, plus $-A_{\infty}$ tend vers une valeur constante, de l'ordre de 0,47 pour $n = 1$, excepté pour deux valeurs extrêmes lorsque Λ devient trop grand.

où la matrice M a pour valeur :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N-2} A(i+1)^2 & \sum_{i=1}^{N-2} A(i)A(i+1) & \sum_{i=1}^{N-2} A(i+1) \\ \sum_{i=1}^{N-2} A(i)A(i+1) & \sum_{i=1}^{N-2} A(i)^2 & \sum_{i=1}^{N-2} A(i) \\ \sum_{i=1}^{N-2} A(i+1) & \sum_{i=1}^{N-2} A(i) & (N-2) \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

En inversant le système (3.45), nous sommes donc en mesure de déterminer le meilleur jeu de paramètres (a, b, c) . Dans la figure (3.6), nous montrons $A(i+2)$ en fonction de $aA(i+1) + bA(i) + c$, avec les paramètres (a, b, c) déterminés pour chaque Λ . On voit que l'équation (3.41) est bien vérifiée, ce qui nous permet, par extrapolation de déterminer A_{∞} .

Comme nous nous y attendions, l'amplitude A_{∞} ne semble pas diverger quand le paramètre Λ se rapproche de Λ_c , ainsi que le montrent les figures (3.7) et (3.9). En effet, l'amplitude ne peut pas aller vers une valeur infinie puisqu'on atteint la

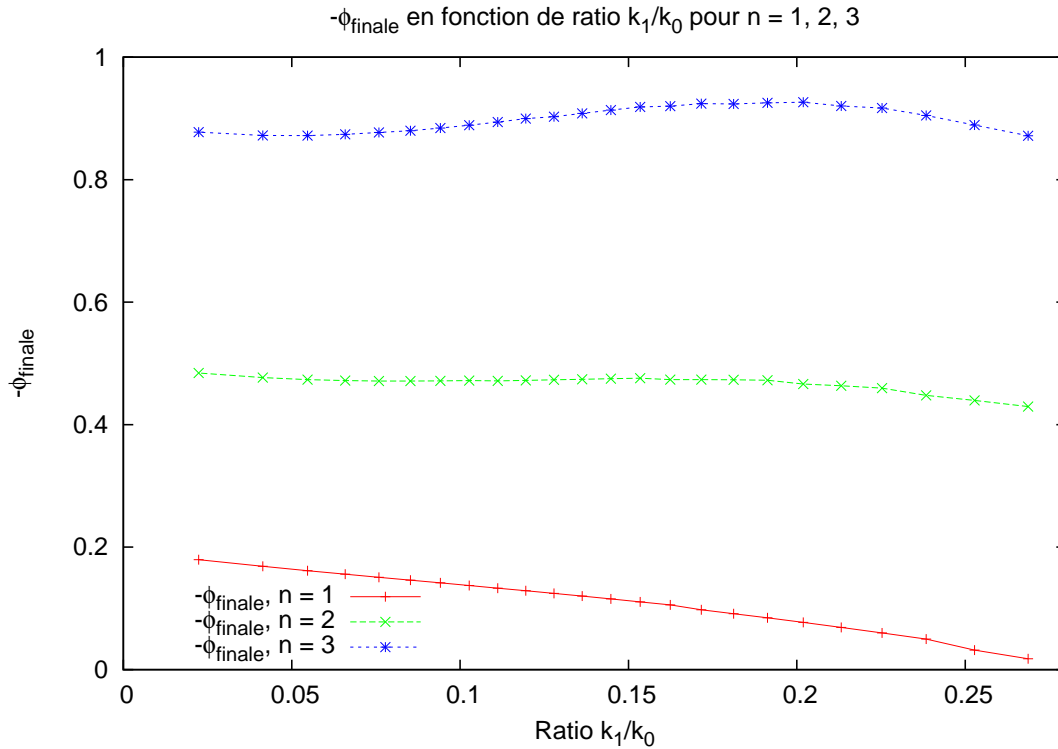


FIGURE 3.10 – Evolution de $-\phi_{fin}$ en fonction du paramètre adimensionné $\frac{k_1}{k_0}$, pour n , deux ou trois quanta de circulation, avec Λ variant de 20 à 43, dans le **modèle de Pomeau-Rica**.

crystallisation après la valeur critique, ce qui signifie que la valeur de l'intensité des oscillations du paramètre d'ordre doit être bornée par une valeur maximale, tout comme l'amplitude des oscillations de densité du fluide est bornée par l'amplitude maximale de l'onde stationnaire du cristal. Si l'on en croit nos résultats les plus proches du Λ critique, A_∞ diminuerait même en valeur absolue (pour s'annuler ?) dans cette limite.

La phase ne peut pas subir le même traitement, a priori, puisque l'on ne sait pas si son évolution temporelle vérifie une somme de lois exponentielles. On s'est donc contenté de déterminer sa dépendance en Λ (cf. figure (3.8)) et par rapport au ratio $\frac{k_1}{k_0}$ (cf. figure (3.10)).

Il faut cependant se rappeler que notre relaxation se fait sur un intervalle fini en distance au vortex. Pour Λ proche de Λ_c , les oscillations deviennent notables jusqu'à la limite de notre simulation et les conditions imposées au bord peuvent perturber notre mesure. C'est ce que semblent confirmer quelques essais avec des distances plus courtes (cf. figure (3.11)) - la phase, quant à elle, ne semble pas ou peu affectée (cf. figure (3.12)). Nous préférons donc considérer que l'amplitude A tend vers une valeur finie, de l'ordre de -0.47. On note que cette valeur reste de l'ordre de celle obtenue avec notre modèle extrême : -0.8.

Si nous nous reportons à notre discussion sur l'énergie, à la fin du Chapitre II, la

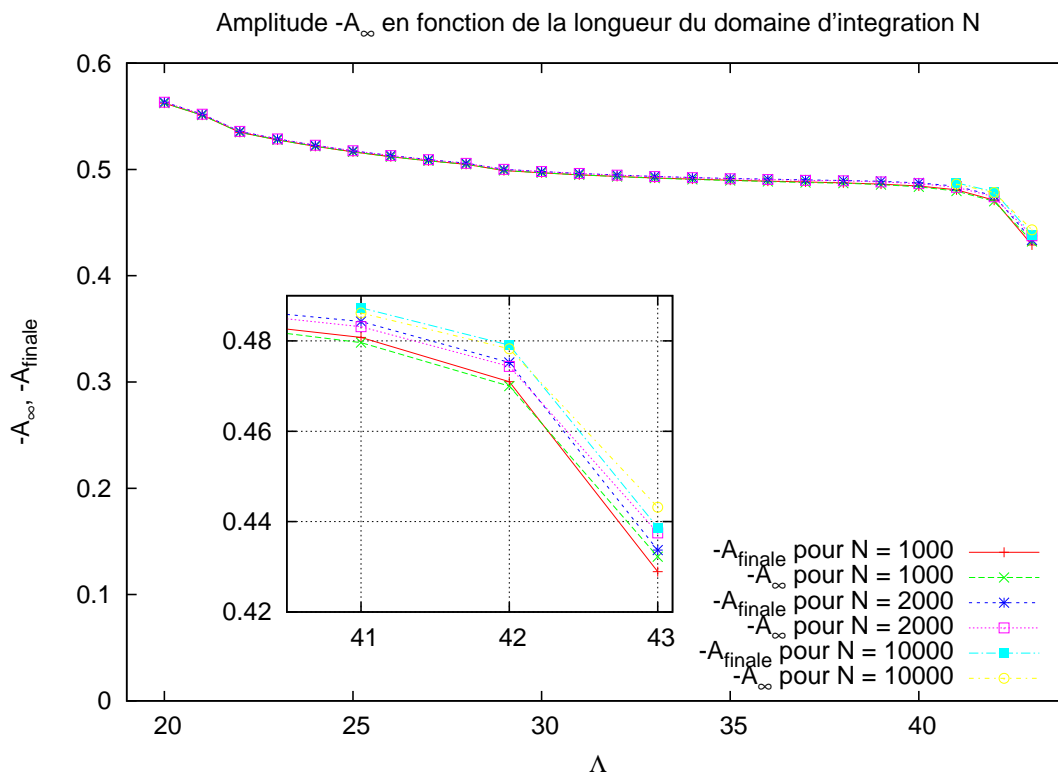


FIGURE 3.11 – Valeur de l’amplitude $-A_\infty$ en fonction de la longueur du domaine d’intégration, dans le *modèle de Pomeau-Rica*.

faible sensibilité de l’amplitude A à la variation du gap de rotons implique que les oscillations contribuent de moins en moins à l’énergie du vortex quand on se rapproche de la solidification. Au-delà du problème du vortex, cela exclut probablement que ces oscillations puissent être responsables d’une éventuelle phase “vitreuse” de ^4He surfondu dans un matériau poreux : quand le gap de rotons diminue, les oscillations créées par les parois s’étendent de plus en plus loin et peuvent interférer. Mais l’énergie correspondant à ces interférences est de plus en plus faible.

3.3 Cas à plusieurs quantas

L’excellent accord entre les oscillations de la solution “exacte” et celles de notre approximation a une contre-partie. Il signifie que seules l’amplitude A et la phase ϕ_0 contiennent une information sur le potentiel perturbateur et donc sur la physique de cette perturbation. Une théorie complète devrait donc s’attacher à déterminer cette phase et cette amplitude à partir du potentiel perturbateur, en l’occurrence ici le terme $-\frac{1}{r^2}$ de répulsion centrifuge. Nous ne sommes pas en mesure de proposer cette théorie, mais nous pouvons explorer “expérimentalement” l’influence de ce potentiel.

Mathématiquement, le nombre de quanta de circulation autour du vortex n’est pas limité à 1. Si la circulation de la vitesse autour du vortex est :

$$\int \vec{v} \cdot d\vec{r} = n\kappa \quad (3.47)$$

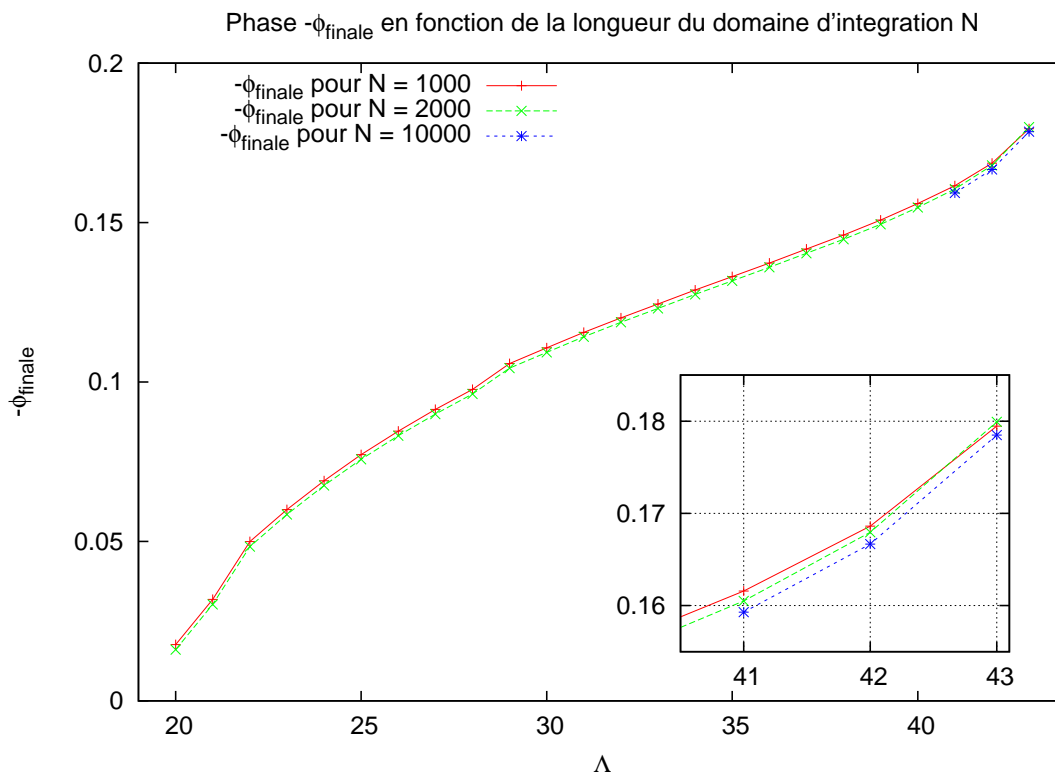


FIGURE 3.12 – Valeur de la phase $-\phi_{\text{fin}}$ en fonction de la longueur du domaine d'intégration, dans le **modèle de Pomeau-Rica**.

le terme perturbateur dans notre équation deviendra $-\frac{n^2}{r^2}$. Physiquement, de tels vortex sont réputés instables. L'énergie cinétique correspondante croît *a priori* comme n^2 , ce qui permet à un tel vortex de se décomposer spontanément en n vortex élémentaires. Mais ici, nous pouvons tout à fait imposer cette circulation.

Nous pouvons même aller plus loin. Comme nous ne nous intéressons qu'à la partie radiale du paramètre d'ordre, nous pouvons choisir n fractionnaire. Cela ne pose de problème que pour la dépendance de la phase du paramètre d'ordre avec l'angle azimutal, qui n'est plus définie.

Les figures (3.7) et (3.8) montrent les variations de l'amplitude A et de la phase ϕ_0 , pour $n = 1, 2, 3$ en fonction de Λ . Dans les figures (3.13) et (3.14), nous montrons ces variations en fonction de n , pour $\Lambda = 30, 35, 40$.

Très grossièrement, on constate que la phase augmente avec n . Cela est prévisible, puisque le comportement de ψ est en r^n au voisinage de zéro. Plus n est grand, plus la croissance de ψ vers 1 est repoussée à des r plus grands, ce qui correspond bien à une phase qui augmente en valeur absolue. Il est malheureusement difficile d'aller plus loin dans l'interprétation. Un modèle naïf consisterait à supposer que dès que ψ atteint une valeur seuil ψ_0 , ses variations reproduisent le même comportement oscillant, à l'amplitude près des oscillations. En raccordant ψ et sa dérivée à la solution pour r petit :

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n = \psi_0 \quad \text{et} \quad \frac{n}{r} \left(\frac{r}{a}\right)^n = A\psi'_0 \quad (3.48)$$

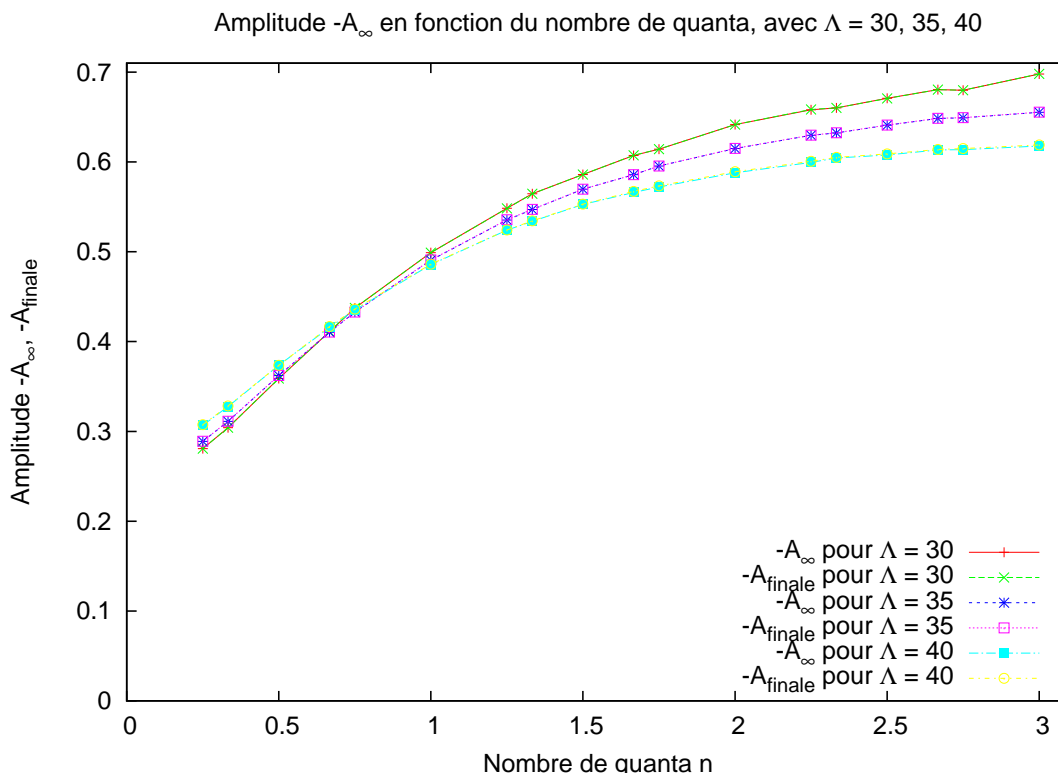


FIGURE 3.13 – Valeur de l’amplitude $-A_\infty$ en fonction du nombre de quanta n , dans le modèle de Pomeau-Rica.

Le raccordement a donc lieu pour :

$$r = \frac{\psi_0}{\psi'_0} \frac{n}{A} \propto \phi_0 \quad (3.49)$$

On en déduirait donc que $A\phi_0$ est proportionnel à n . En fait, A n’augmente que faiblement avec n , tandis que ϕ_0 semble à peu près proportionnel à n^2 .

4 Modèle de Berloff-Roberts

4.1 Forme du potentiel d’interaction

Le modèle de Pomeau-Rica permet d’ajuster le creux de rotons à ce qu’on veut, mais ne permet pas d’ajuster indépendamment le reste de la relation de dispersion, comme la vitesse du son, l’énergie du maximum, etc... Pour être plus proche de la relation de dispersion d’un superfluide donné, on se penche sur le modèle développé par Berloff et Roberts, [7], [4], [6], [8]. Il s’agit d’un potentiel d’interaction à deux corps “hautement paramétrable”, une sorte de développement de Taylor dont on fixe les coefficients pour que la relation de dispersion soit la plus fidèle possible au modèle recherché.

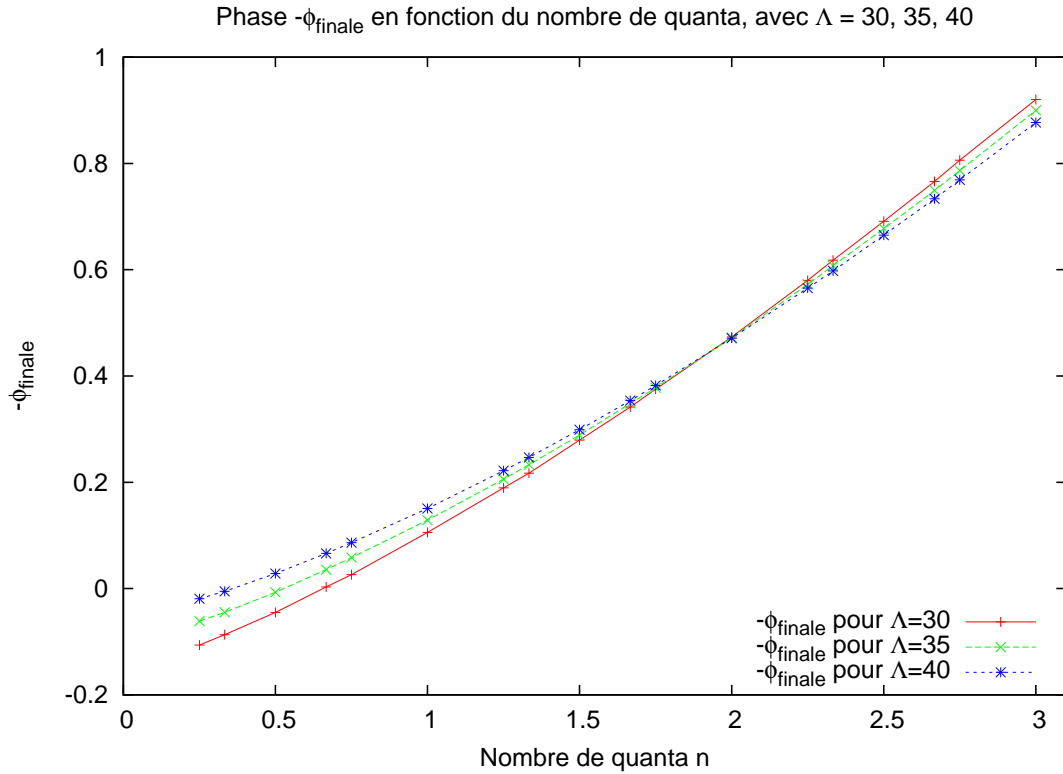


FIGURE 3.14 – Valeur de la phase $-\phi_{\text{fin}}$ en fonction du nombre de quanta n , dans le modèle de Pomeau-Rica.

Comme le précisent les auteurs, il s'agit de s'inspirer du potentiel de Skyrme :

$$W_c(\rho) = \frac{1}{M^2} \int \left[\frac{W_0}{2} \rho^2 + \frac{W_1}{2+\gamma} \rho^{2+\gamma} + W_2 (\nabla \rho)^2 \right] \quad (3.50)$$

où W_0 , W_1 , W_2 et γ sont des constantes déterminées expérimentalement. Ce potentiel, qui décrit à l'origine les interactions entre protons et neutrons dans le noyau atomique - c'est-à-dire des interactions dans un milieu dense - présente trois termes. Les deux premiers dépendent de la densité¹ du milieu localement et le dernier terme en gradient permet de prendre en compte des interactions de portée non-nulle.

Dans la suite du travail de Dupont-Roc et al. [15], ce potentiel est modifié : la non-localité est explicitement prise en compte par un potentiel à portée finie, rendant inutile le terme en gradient de densité. On ne conserve que le terme supplémentaire d'ordre supérieur décrivant des interactions locales à trois corps ($\gamma = 1$) ou plus :

$$W_c^m(\rho) = \frac{1}{M^2} \int \left[\frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) V(|\vec{x} - \vec{x}'|) \rho(\vec{x}') d^3 \vec{x}' + \frac{W_1}{2+\gamma} \rho^{2+\gamma} \right] d^3 \vec{x} \quad (3.51)$$

1. Dans leur modèle, Berloff et Roberts identifient le carré du paramètre d'ordre $|\psi|^2(\vec{r})$ à la densité du fluide $\rho(\vec{r})$, sans plus de précautions.

Bien que nous réutilisons leur proposition de modèle pour les interactions, nous continuons dans la suite à distinguer fonction d'onde et paramètre d'ordre de l'état superfluide, sans affirmer être en mesure de décrire l'Hélium superfluide.

Toutefois, Berloff et Roberts ne reprennent pas l'idée de Dalfovo et al., qui consiste à remplacer $V(|\vec{x} - \vec{x}'|)$ par le potentiel de Lennard-Jones, qui décrit de manière raisonnable l'interaction entre deux atomes d'hélium à l'état gazeux et préfèrent lui substituer un potentiel développé par Jones qui permet de retrouver correctement la courbe de dispersion :

$$V(|\vec{x} - \vec{x}'|) = (\alpha + \beta A^2 r^2 + \delta A^4 r^4) e^{-A^2 r^2} + \eta e^{-B^2 r^2} \quad (3.52)$$

où r représente la distance entre \vec{x} et \vec{x}' .

4.2 Equation adimensionnée

Nous partons directement de l'équation adimensionnée vue plus haut (1.29) :

$$i\partial_t \psi = -\Delta \psi + \left[\int \psi^*(\vec{r}', t) V(\vec{r}' - \vec{r}) \psi(\vec{r}', t) d^3 \vec{r}' + \chi |\psi|^{2(\gamma+1)} - 1 \right] \psi$$

avec :

$$V(\vec{r}) = (\alpha + \beta A^2 r^2 + \delta A^4 r^4) \exp(-A^2 r^2) + \eta \exp(-B^2 r^2) \quad (3.53)$$

et, comme $\psi = 1$ est solution, en remplaçant directement dans l'équation :

$$\int V(\vec{r}) d^3 \vec{r} = 1 - \chi = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{A^3} \left(\alpha + \frac{3}{2} \beta + \frac{15}{4} \delta \right) + \frac{\pi^{\frac{3}{2}} \eta}{B^3} \quad (3.54)$$

4.3 Relation de dispersion

Le terme d'interaction locale à trois corps modifie quelque peu le raisonnement que l'on a effectué précédemment pour déterminer la variation du paramètre d'ordre $\delta\psi$. En effet, la contribution de ce terme doit être écrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \chi |\psi_0 + \delta\psi|^{2(1+\gamma)} &= \chi (\psi_0 + \delta\psi)^{1+\gamma} (\psi_0^* + \delta\psi^*)^{1+\gamma} \\ &= \chi (\psi_0 \psi_0^*)^{1+\gamma} \left(1 + \frac{\delta\psi}{\psi_0} \right)^{1+\gamma} \left(1 + \frac{\delta\psi^*}{\psi_0^*} \right)^{1+\gamma} \\ &\sim \chi |\psi_0|^{2\gamma+1} (\psi_0 + (1+\gamma) \cdot (\delta\psi + \delta\psi^*)) \end{aligned} \quad (3.55)$$

en négligeant les termes du second ordre en $\delta\psi\delta\psi^*$.

On doit réécrire les équations maîtresses vérifiées par la variation $\delta\psi$ et sa conjuguée :

$$\begin{cases} \omega \widetilde{\delta\psi} &= k^2 \widetilde{\delta\psi} + \widetilde{V}(k) \left[\widetilde{\delta\psi} + \widetilde{\delta\psi}^* \right] + \chi (1+\gamma) \left[\widetilde{\delta\psi} + \widetilde{\delta\psi}^* \right] \\ -\omega \widetilde{\delta\psi}^* &= k^2 \widetilde{\delta\psi} + \widetilde{V}(k) \left[\widetilde{\delta\psi} + \widetilde{\delta\psi}^* \right] + \chi (1+\gamma) \left[\widetilde{\delta\psi} + \widetilde{\delta\psi}^* \right] \end{cases} \quad (3.56)$$

ce qui conduit à écrire la relation de dispersion suivante :

$$\omega^2 = k^4 + 2k^2 \widetilde{V}(k) + 2(1+\gamma) \chi k^2 \quad (3.57)$$

avec :

$$\begin{aligned} \tilde{V}(k) = & \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{A^3} e^{-\frac{k^2}{4A^2}} \left[\alpha + \frac{\beta}{2} \left(3 - \frac{k^2}{2A^2} \right) + \frac{\delta}{4} \left(15 - 10 \frac{k^2}{2A^2} + \frac{k^4}{4A^4} \right) \right] \\ & + \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{B^3} e^{-\frac{k^2}{4B^2}} \eta \end{aligned} \quad (3.58)$$

Si l'on impose à la relation de dispersion d'avoir un minimum pour une valeur donnée k_0 , avec une valeur donnée $\omega^2(k_0) = \Omega^2$, et une courbure c^2 donnée, on obtient trois relations pour les paramètres. Si l'on choisit par ailleurs A , B et χ , ces trois relations deviennent linéaires en α , β et δ . On peut donc inverser le système pour les déterminer et η s'obtient par l'équation (3.54). Il est alors aisé, par essais et erreurs principalement sur B , d'ajuster toute la courbe de dispersion à celle par exemple de l'hélium 4 près de la solidification. C'est ce que nous avons fait pour diverses valeurs de χ afin de voir quelle est l'influence de ce paramètre à courbe de dispersion donnée.

4.4 Résolution de l'équation

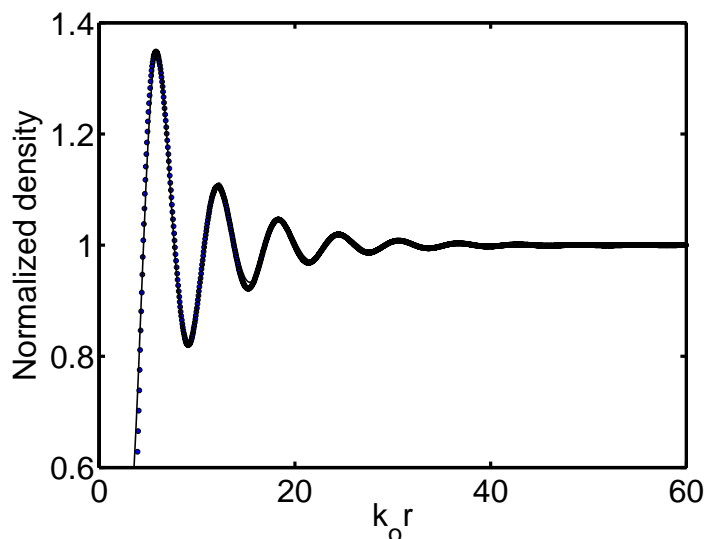


FIGURE 3.15 – Pour un spectre en énergie très semblable à celui donné par le modèle de Pomeau-Rica (avec $\Lambda = 40$), le **modèle de Berloff et Roberts** montre clairement non seulement un déphasage plus marqué, mais également des oscillations d'amplitude plus forte que dans le cas de Pomeau-Rica.

En reprenant la forme axisymétrique de la fonction d'onde $\psi = f(r) e^{i\theta}$ et en intégrant le potentiel non-local sur les coordonnées θ et z , on obtient l'équation en

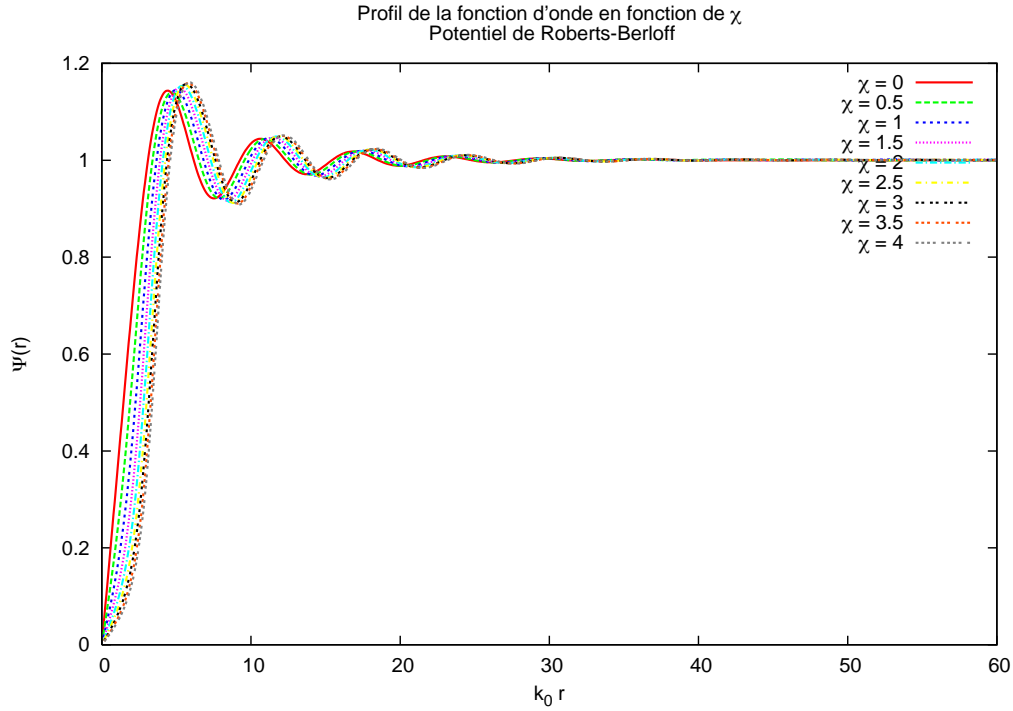


FIGURE 3.16 – *Modèle de Berloff-Roberts* : Influence du terme à trois corps local, étude en fonction de la valeur du paramètre χ pour le paramètre d'ordre.

f suivante (pour un quantum de circulation) :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} - \frac{f(r)}{r^2} + f(r) - \chi f(r)^{2(1+\gamma)+1} \\ &= \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{A} f(r) \int_0^\infty f^2(r') e^{-A^2(r^2+r'^2)} [g_0 I_0(2A^2 r r') - g_1 I_1(2A^2 r r')] r' dr' \\ & \quad + \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{B} f(r) \int_0^\infty f^2(r') e^{-B^2(r^2+r'^2)} \eta I_0(2B^2 r r') r' dr' \end{aligned} \quad (3.59)$$

où I_n est la fonction de Bessel modifiée d'ordre n et les fonctions g_0 et g_1 sont égales à :

$$g_0 = \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{3\delta}{4} + A^2(\beta + \delta)(r^2 + r'^2) + \delta A^4 \left((r^2 + r'^2)^2 + 4r^2 r'^2 \right) \quad (3.60)$$

$$g_1 = 2A^2 r r' (\beta + 2\delta) + 4\delta A^4 r r' (r^2 + r'^2) \quad (3.61)$$

Les intégrales de Bessel sont calculées en utilisant la méthode des *Numerical Recipes*, toutefois modifiée afin de faire converger les calculs quelque soit la valeur du produit des variables $2A^2 r r'$, comme détaillé dans l'Annexe B.

Les paramètres étant trop nombreux et leurs effets trop entremêlés pour que l'on puisse effectuer une étude aussi poussée que celle portant sur le modèle de Pomeau-Rica. A la place, on reprend la relation de dispersion de ce modèle justement, et on détermine les coefficients dans le modèle de Berloff-Roberts pour retrouver le même ratio $\frac{k_1}{k_0}$, ce que l'on peut voir sur la figure (3.15).

4.5 Discussion

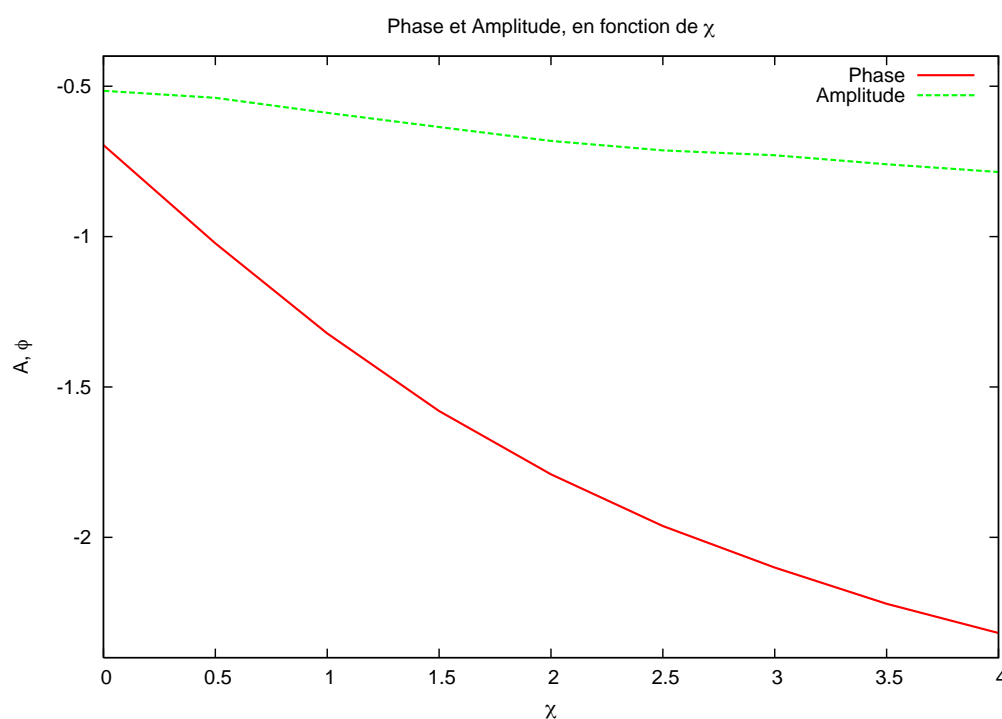


FIGURE 3.17 – *Modèle de Berloff-Roberts* : Influence du terme à trois corps local, étude en fonction de la valeur du paramètre χ sur la phase et l'amplitude après extrapolation.

Si on compare donc les oscillations de densité à celles obtenues pour la même valeur de k_1/k_0 avec le modèle de Pomeau-Rica, deux remarques s'imposent : l'amplitude des oscillations est plus grande, mais surtout la phase ϕ_0 est beaucoup plus grande, comme on le constate sur les figures (3.16) et (3.17). Cette phase diminue un peu quand on met le paramètre χ à zéro, c'est-à-dire quand on supprime le terme d'interaction locale à trois corps. Cela ne fait qu'épaissir le mystère : ce terme est proportionnel à la densité, élevée à la puissance 2 (on s'est borné ici à étudier le cas où $\gamma = 1$), contrairement au terme d'interactions à deux corps, qui est proportionnel à la densité. L'influence du terme à trois corps devrait donc être négligeable près de

la singularité, à r petit, puisque la densité y est plus proche de zéro que de un.

Mais d'une part cet argument néglige l'interdépendance de la valeur des paramètres qui sont liés entre eux par la "condition de normalisation" du potentiel :

$$\int V(|\vec{x} - \vec{x}'|) d^3\vec{x}' = 1 - \chi \quad (3.62)$$

D'autre part, le spectre d'excitations au-delà du creux de rotons donné par le modèle de Berloff et Roberts est très différent de ce que donne le modèle de Pomeau-Rica et dépend un peu de χ .

On voit sur la figure (3.18) que les énergies à fort k sont beaucoup plus grandes dans le modèle de Berloff et Roberts que dans celui de Pomeau-Rica. Fort k signifie petites distances et fortes énergies signifient difficulté à mettre en place.

A une croissance marquée de cette branche de la relation de dispersion correspondrait donc un effet aux très petites échelles (plus petites que les oscillations), qui serait plus marqué près de la singularité, là où la fonction d'onde varie rapidement.

Le creusement autour de la singularité proviendrait du fait que le fluide est littéralement "chassé" des petites échelles.

En conclusion, comme on peut le constater, les résultats fournis par la résolution de l'équation de Gross-Pitaevskii dépendent du modèle d'interaction choisi. Pour une même relation de dispersion, les modèles de Pomeau et Rica et de Berloff et Roberts donnent une amplitude dont la valeur est certes semblable, mais donnent un déphasage foncièrement différent. Or la question de l'énergie d'un vortex est intimement liée à celle de la largeur de son cœur, qui a un fort impact sur la valeur de l'énergie cinétique associée.

5 Comparaison avec d'autres méthodes

Dans tout ce qui précède, on a comparé notre approximation linéaire pour le profil de densité du vortex avec différents modèles mettant tous en jeu l'équation de Gross-Pitaevskii. Il est intéressant de comparer la structure obtenue à d'autres profils, obtenus par des méthodes différentes.

En effet, Dalfovo [13], ainsi que Sadd et al. [58], Vitiello et al. [48], ont cherché à obtenir le profil d'un vortex rectilinéaire en usant d'une approche variationnelle, utilisant des fonctions d'onde d'essai. Au premier abord, on constate que leurs travaux montrent également la présence d'oscillations amorties.

Nous nous attachons particulièrement dans la suite aux travaux de Sadd et al. qui fournissent un profil de densité autour d'un vortex près de la pression de solidification. A cette pression, $k_0 = 2.07^{-1}$. Avec cette valeur et avec $\frac{k_1}{k_0} = 0, 12$, très proche de la valeur expérimentale, il s'avère que notre formule permet de modéliser le profil obtenu dans [48], avec les valeurs $A = -0, 4643$ et $\phi_0 = 0, 0186$. A l'inverse, laissant libres les paramètres k_0 et $\frac{k_1}{k_0}$, on peut considérer que l'ajustement de notre expression au profil de densité permet de déterminer ces paramètres caractéristiques du creux de rotons dans la relation de dispersion. En un sens, nous réalisons une "spectroscopie statique", suivant le titre de notre article [54], de l'hélium modèle

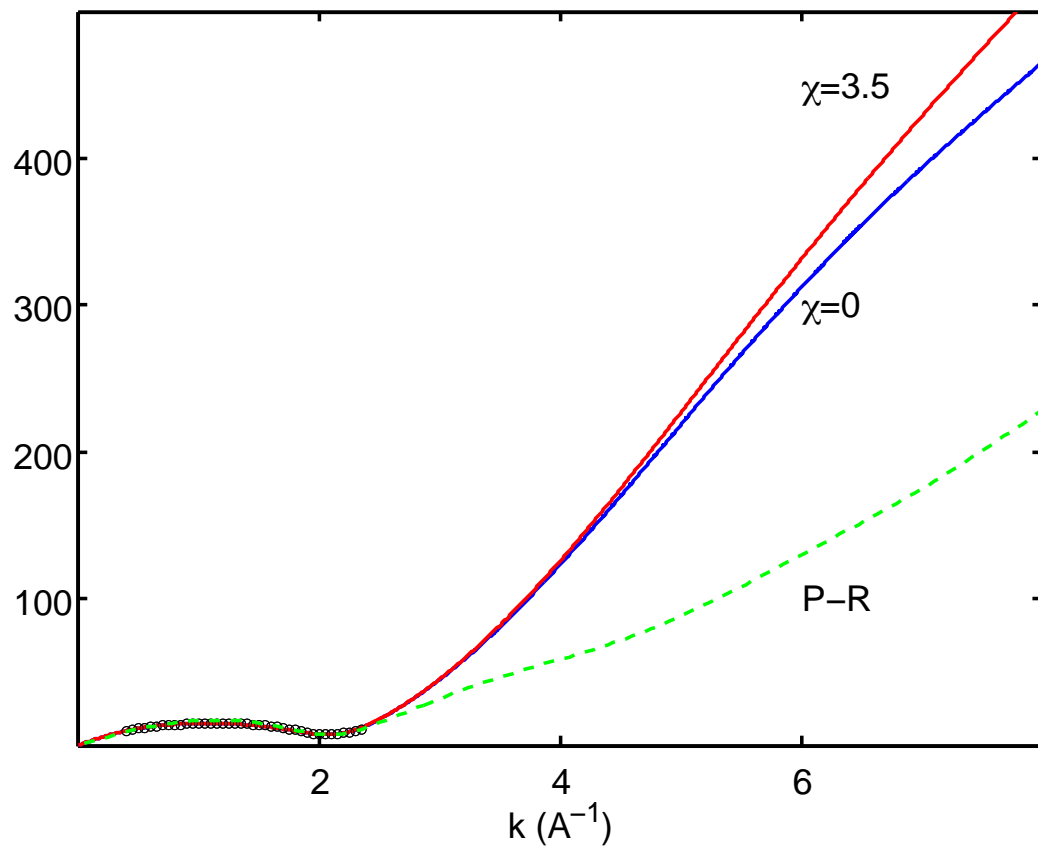


FIGURE 3.18 – Comparaison des spectres d'excitation à grande valeur de k . En bleu, Berloff-Roberts, $\chi = 3.5$. En rouge, Berloff-Roberts, $\chi = 0$. En vert, tireté, Pomeau-Rica.

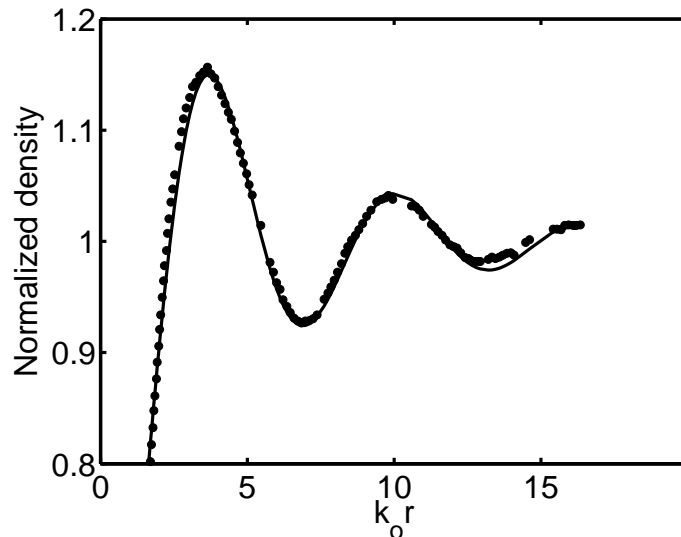


FIGURE 3.19 – *Le profil de densité obtenu par une méthode très différente de la résolution directe de l'équation de Gross-Pitaevskii montre toutefois un très bon accord avec la loi déterminée au Chapitre II.*

proposé par Sadd et al. Or, si la détermination directe de la relation de dispersion correspondant à cet hélium modèle et en particulier de son creux de rotons, est possible (voir [48]), elle est d'une complexité sans rapport avec notre approche.

On peut constater que l'amplitude et la phase obtenues sont proches de celles obtenues avec le modèle de Pomeau-Rica. En particulier, la phase reste petite, contrairement à la modélisation de Berloff-Roberts. Ceci tendrait à confirmer notre impression que le modèle proposé par Berloff crée un artefact dans la simulation numérique qui creuse le cœur du vortex sans raison physique particulière et donne une amplitude des oscillations trop importante, proche de notre modèle extrême. Comme nous l'avons analysé plus haut, cela est probablement dû à la très haute énergie des excitations au-delà des rotons dans le modèle de Berloff-Roberts, qui ne se retrouve ni dans le modèle de Pomeau-Rica, ni dans l'hélium superfluide.

Chapitre 4

Le vortex en anneau

Après avoir étudié le vortex rectilinéaire, nous abordons ici le vortex en anneau circulaire. Nous commencerons par en rappeler la théorie classique. Nous en montrerons les conséquences pour une approximation populaire de l'interaction d'un vortex sur lui-même, l'approximation locale. En particulier, les ondes de Kelvin le long d'un vortex s'obtiennent facilement dans cette approximation.

Nous calculerons ensuite les déformations de densité induites par la présence de ce vortex, grâce à notre approximation linéaire. Nous réaliserons ce calcul d'abord pour un vortex immobile (ou se déplaçant à faible vitesse), puis pour une vitesse quelconque. Nous en déduisons un modèle pour examiner la question suivante : "Un vortex en anneau peut-il atteindre la vitesse de Landau ?"

1 Théorie classique

1.1 Energie, quantité de mouvement et vitesse du vortex

Dans la théorie classique du vortex en anneau [14], on modélise celui-ci par un tore circulaire creux, dont le rayon de corde est a , et le rayon de l'âme, rayon proprement dit de l'anneau, est R . La vitesse \vec{u} est irrotationnelle dans tout le fluide autour du tore et possède un quantum $\kappa = \frac{h}{m}$ de circulation autour du tore.

Ce champ de vitesse possède une énergie \mathcal{E} et une quantité de mouvement $\vec{\mathcal{P}}$. La quantité de mouvement :

$$\vec{\mathcal{P}} = \iiint \rho \vec{u} d^3\vec{r} \quad (4.1)$$

est la plus simple à calculer. Cela vient de ce que \vec{u} dérive d'un potentiel :

$$\vec{u} = \frac{\hbar}{m} \text{grad} \phi \quad (4.2)$$

où ϕ est la phase du paramètre d'ordre. Or, l'intégrale d'un gradient sur un volume \mathcal{V} est reliée à une intégrale sur la surface \mathcal{S} qui limite ce volume :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{grad} \phi d\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{S}} \phi d\vec{S} \quad \text{et} \quad \rho \sim \text{cste} \quad (4.3)$$

Pour que la phase ϕ soit monovaluée, il faut introduire une coupure dans l'espace, par exemple dans le plan du disque de l'anneau, où ϕ rétrograde de 2π . Ce disque constitue à la fois la surface d'entrée et la surface de sortie du volume d'intégration et :

$$\vec{\mathcal{P}} = 2\pi(\pi R^2)\rho\frac{\hbar}{m}\vec{n} = \pi R^2\rho\kappa\vec{n} \quad (4.4)$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire perpendiculaire au disque.

Le calcul de l'énergie est plus compliqué et nous ne le détaillerons pas. Si le vortex était rectiligne, son énergie cinétique par unité de longueur ϵ vaut :

$$\epsilon = \int_a^L \frac{1}{2}\rho u^2(r)2\pi r dr = \frac{\kappa^2}{4\pi} \ln\left(\frac{L}{a}\right) \quad (4.5)$$

divergerait logarithmiquement avec la longueur de coupure L que nous serions obligés d'introduire. Or, il est clair que le vortex en anneau ne peut plus être considéré comme rectiligne à des distances de l'ordre de R et au-delà. Donc, pour nous, L est de l'ordre de R . Le calcul exact [1] donne :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\kappa^2 R \ln\left(\frac{L}{a}\right) \quad (4.6)$$

avec $L = 8R/e^2 \sim 1,0827R$, où e est la base du logarithme népérien.

Dès lors, la vitesse \vec{v} de l'anneau s'obtient par la relation bien connue :

$$v_i = \frac{d\mathcal{E}}{d\mathcal{P}_i} = \frac{d\mathcal{E}/dR}{d\mathcal{P}_i/dR} \quad (4.7)$$

soit :

$$\vec{v} = \frac{\kappa}{4\pi R} \left(\ln\left(\frac{8R}{ae^2}\right) + 1 \right) \vec{n} \quad (4.8)$$

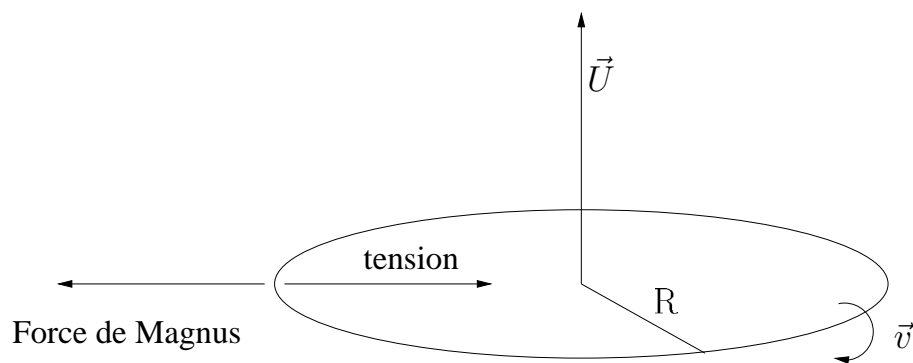


FIGURE 4.1 – “Anatomie” d’un vortex en anneau

L’origine physique de cette vitesse est claire. Par suite de la courbure, un élément de ligne subit une force vers l’intérieur, due à la tension de ligne. La force de Magnus qui résulte du déplacement du vortex équilibre cette force, comme on le voit sur la figure (4.1). D’un autre côté, dans un fluide parfait, une ligne de vortex doit être “gelée” dans le fluide et le suivre. Donc la vitesse de l’anneau est aussi la résultante en chaque point de l’influence de l’ensemble du vortex.

1.2 Approximation locale, Ondes de Kelvin

C'est en effet une particularité d'une ligne de vortex, que chaque point se meut à la vitesse résultant de l'ensemble de la ligne en ce point (Biot-Savart). Face à ce problème fortement non local, il existe cependant une approximation locale (nommée LIA pour "Locale Approximation Induction"), qui revient à supposer que chaque point subit surtout l'influence de son voisinage immédiat et donc de la courbure du vortex en ce point. Dans cette approximation, \vec{T} étant le vecteur unitaire tangent à la ligne, orienté par la règle du tire-bouchon par rapport au signe de la circulation, \vec{N} le vecteur unitaire normale principale à la ligne, R la courbure de la ligne, on a pour la vitesse locale :

$$\vec{v} = \frac{\kappa}{4\pi R} \left(\ln \left(\frac{L}{a} \right) + 1 \right) (\vec{T} \wedge \vec{N}) \quad (4.9)$$

pour être cohérent avec le cas de l'anneau. On voit que les parties lointaines du vortex s'invitent dans cette approximation à travers le choix de la longueur L , qui cependant n'intervient que dans un logarithme. L est ici la distance à laquelle l'approximation d'un vortex uniformément courbé devient fautive et elle est en général très supérieure à a , ce qui fait que le logarithme ne dépend pas beaucoup du choix fait. Nous prenons ci-dessous l'exemple des ondes de Kelvin, ondes qui se propagent le long des vortex et qui sont supposées jouer un rôle dans la dissipation de la turbulence quantique.

Considérons donc les ondes qui se propagent le long d'un vortex quasiment rectiligne le long de l'axe z , s'en écartant de $\vec{r}(z)$ perpendiculairement à cet axe, le module de cet écart, r étant faible par rapport à la longueur d'onde λ de l'onde. Si la circulation est directe autour de l'axe z , de vecteur unitaire \vec{e}_z , au premier ordre :

$$\vec{T} = \vec{e}_z + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\vec{N}}{R} = \frac{\partial \vec{T}}{\partial z} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial z^2} \quad (4.10)$$

Donc, toujours au premier ordre, on obtient :

$$\vec{T} \wedge \frac{\vec{N}}{R} = \vec{e}_z \wedge \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial z^2} \quad (4.11)$$

Il est alors commode de remplacer \vec{r} et \vec{v} par leurs affixes $\bar{r} = x + iy$ et $\bar{v} = \partial \bar{r} / \partial t$:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \iota \frac{\kappa}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{L}{a} \right) + 1 \right) \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial z^2} \quad (4.12)$$

Avec une onde harmonique $\bar{r} = \bar{r}_0 e^{\iota(kz - \omega t)}$, on peut finalement écrire :

$$\omega = \frac{\kappa}{4\pi} \ln \left(\frac{1}{ka} \right) k^2 \quad (4.13)$$

car L doit être de l'ordre de $\frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}$.

2 Le vortex réel

Dans ce qui précède, il n'est fait aucune référence à l'existence d'un creux de rotons dans le spectre d'excitations du fluide. Les chapitres précédents nous font attendre une structuration du fluide autour du coeur du vortex. De plus, une vitesse de translation U finie d'une déformation de vecteur d'onde k implique une pulsation finie $\omega = Uk$. On sort donc du cas statique. Nous aborderons ces deux problèmes successivement.

2.1 A faible vitesse

On peut alors partir de l'expression que nous avons trouvée pour une perturbation statique ponctuelle à l'équation (2.40) :

$$\delta\psi_L(\rho) = -k_0 \frac{e^{-k_1\rho}}{2\pi k_1 c^2 \rho} \tilde{v}(k_0) \sin(k_0\rho) \quad (4.14)$$

Pour simplifier, nous nous limitons au cas où $\phi_0 \sim 0$. Concrètement, la déformation que nous recherchons étant de symétrie cylindrique, nous recherchons sa valeur au point de coordonnées $(r, 0, z)$ comme la somme des contributions de chaque point de l'anneau, de coordonnées génériques $(R \cos(\chi), R \sin(\chi), 0)$. La distance de ce point générique au point d'observation est donc :

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{z^2 + R^2 + r^2 - 2rR \cos(\chi)} = \sqrt{z^2 + (R-r)^2 + 4rR \sin^2\left(\frac{\chi}{2}\right)} \\ &= \sqrt{z^2 + (R+r)^2 - 4rR \cos^2\left(\frac{\chi}{2}\right)} \end{aligned} \quad (4.15)$$

La déformation cherchée est donc :

$$\delta\psi(r, z) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \delta\psi_L(\rho(\chi)) R d\chi \quad (4.16)$$

Si $r \neq 0$ (hors de l'axe), à cause du terme oscillant $\sin(k_0\rho)$ les seules contributions notables à l'intégrale viendront des extréma de ρ , donc de $\cos(\chi)$, soit $\chi \sim 0$ ($\sin(\frac{\chi}{2}) \sim \frac{\chi}{2}$) et $\chi' = \chi - \pi \sim 0$ ($\cos(\frac{\chi}{2}) \sim -\frac{\chi'}{2}$). Détaillons le premier cas :

$$k_0\rho(\chi) \sim k_0 \sqrt{z^2 + (R-r)^2} + \frac{k_0 r R \chi^2}{2\sqrt{z^2 + (R-r)^2}} \quad (4.17)$$

Dans le second cas, on a :

$$k_0\rho(\chi) \sim k_0 \sqrt{z^2 + (R+r)^2} - \frac{k_0 r R \chi'^2}{2\sqrt{z^2 + (R+r)^2}} \quad (4.18)$$

et :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ib\frac{\chi^2}{2}} d\chi = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (4.19)$$

Comme $k_1 \ll k_0$, le facteur k_1 devant ρ dans la fonction $\frac{e^{-k_1\rho}}{k_1\rho}$ ne demande pas que l'on détaille leur dépendance en fonction de la variable χ . On y fixe alors la valeur de ρ comme étant égale aux valeurs extrémales dictées par $\cos \chi = \pm 1$.

On en déduit alors :

$$\delta\psi(r, z) = \frac{-\sqrt{k_0 R}}{k_1 c^2 \sqrt{2\pi r}} \tilde{v}(k_0) \left[\frac{e^{-k_1 \sqrt{z^2 + (R-r)^2}}}{(z^2 + (R-r)^2)^{\frac{1}{4}}} \sin \left(k_0 \sqrt{z^2 + (R-r)^2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{e^{-k_1 \sqrt{z^2 + (R+r)^2}}}{(z^2 + (R+r)^2)^{\frac{1}{4}}} \sin \left(k_0 \sqrt{z^2 + (R+r)^2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (4.20)$$

On remarque que si R et r tendent vers l'infini, avec $\frac{r}{R} \rightarrow 1$, on retrouve l'expression correspondant au vortex rectiligne, la distance au vortex étant maintenant $\sqrt{z^2 + (r-R)^2}$ ($\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \cos(\theta - \frac{\pi}{4})$).

Pour r proche de 0, cette expression se comporte comme :

$$\delta\psi(r, z) = \frac{-\sqrt{k_0 R}}{k_1 c^2 \sqrt{\pi r}} \tilde{v}(k_0) \left[\frac{e^{-k_1 \sqrt{z^2 + R^2}}}{(z^2 + R^2)^{\frac{1}{4}}} \sin \left(k_0 \sqrt{z^2 + R^2} \right) \right] \quad (4.21)$$

et donc diverge en $r = 0$, alors qu'un calcul direct donne :

$$\delta\psi(0, z) = -k_0 \frac{e^{-k_1 \sqrt{z^2 + R^2}}}{k_1 c^2 \sqrt{z^2 + R^2}} \tilde{v}(k_0) \sin \left(k_0 \sqrt{z^2 + R^2} \right) \quad (4.22)$$

Cela vient de ce que notre approximation n'est valable que si :

$$k_0 \left(\sqrt{z^2 + (R+r)^2} - \sqrt{z^2 + (R-r)^2} \right) \sim \frac{2k_0 r R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \gg 1 \quad (4.23)$$

Comparant la bonne expression près de l'axe à celle que donne notre approximation nous constatons qu'un facteur :

$$X = \sqrt{\frac{\pi k_0 r R}{\sqrt{z^2 + R^2}}} \quad (4.24)$$

est apparu.

Nous proposons donc la formule d'interpolation suivante :

$$\delta\psi(r, z) = \frac{-\sqrt{k_0 R}}{k_1 c^2 \sqrt{2\pi r}} \tilde{v}(k_0) f(X) \left[\frac{e^{-k_1 \sqrt{z^2 + (R-r)^2}}}{(z^2 + (R-r)^2)^{\frac{1}{4}}} \sin \left(k_0 \sqrt{z^2 + (R-r)^2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{e^{-k_1 \sqrt{z^2 + (R+r)^2}}}{(z^2 + (R+r)^2)^{\frac{1}{4}}} \sin \left(k_0 \sqrt{z^2 + (R+r)^2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (4.25)$$

où :

$$f(X) = \left(\frac{X^4}{1 + X^4} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.26)$$

est équivalent à X pour $X \ll 1$ et à 1 pour $X \gg 1$. Le choix de la puissance 4 peut sembler arbitraire - en effet, n'importe quel entier n aurait pu être choisi. Seulement, cette puissance, utilisée de façon conventionnelle, permet une transition moins abrupte que des puissances plus grandes mais bien non linéaire.

2.2 Calcul pour une perturbation localisée à vitesse quelconque

Il est intéressant ici de reprendre la démonstration de l'équation (2.11). Nous cherchons toujours une déformation statique, mais dans le référentiel où le fluide se déplace à la vitesse $-\vec{U}$, \vec{U} étant la vitesse de l'anneau par rapport au fluide, perpendiculairement à son plan. Dans l'état non perturbé, le paramètre d'ordre du fluide est du type :

$$\psi_0 = e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \quad (4.27)$$

Ecrivons qu'il est solution de notre équation :

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi_0}{\partial t} = 0 &= -\Delta\psi_0 + \psi_0 \left(\int V(\vec{r}-\vec{r}')|\psi_0(\vec{r}')|^2 d^3\vec{r}' - \mu \right) \\ &= \left(q^2 + \int V(\vec{r}')d^3\vec{r}' - \mu \right) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \end{aligned} \quad (4.28)$$

On en déduit donc :

$$\mu = q^2 + \int V(\vec{r}')d^3\vec{r}' \quad (4.29)$$

En posant $\psi = e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}(1 + \delta\psi)$, on obtient les équations suivantes au premier ordre dans la perturbation :

$$\begin{cases} i\frac{\partial\delta\psi}{\partial t} = -\Delta\delta\psi - 2i\vec{q}\cdot\vec{\text{grad}}\delta\psi \\ \quad + \int V(\vec{r}-\vec{r}')(\delta\psi(\vec{r}') + \delta\psi^*(\vec{r}'))d^3\vec{r}' + \delta V_{ext}(\vec{r})e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \\ -i\frac{\partial\delta\psi^*}{\partial t} = -\Delta\delta\psi^* + 2i\vec{q}\cdot\vec{\text{grad}}\delta\psi^* \\ \quad + \int V(\vec{r}-\vec{r}')(\delta\psi(\vec{r}') + \delta\psi^*(\vec{r}'))d^3\vec{r}' + \delta V_{ext}(\vec{r})e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \end{cases} \quad (4.30)$$

où $\delta V_{ext}(\vec{r})$ est un potentiel très localisé en $\vec{r} = 0$.

En transformant de Fourier, on a :

$$\begin{cases} \omega\tilde{\delta\psi} = \left(k^2 + 2\vec{q}\cdot\vec{k} + \tilde{V}(k) \right) \tilde{\delta\psi} + \tilde{V}(k)\tilde{\delta\psi}^* + \mathcal{V}(k) \\ -\omega\tilde{\delta\psi}^* = \left(k^2 - 2\vec{q}\cdot\vec{k} + \tilde{V}(k) \right) \tilde{\delta\psi}^* + \tilde{V}(k)\tilde{\delta\psi} + \mathcal{V}(k) \end{cases} \quad (4.31)$$

Comme δV_{ext} est très localisé et que q sera supposé faible devant un vecteur d'onde atomique, nous confondons $\delta V_{ext}(\vec{k} + \vec{q})$ et $\delta V_{ext}(\vec{k} - \vec{q})$ en une seule quantité $\mathcal{V}(k)$, comme à vitesse nulle. En éliminant $\tilde{\delta\psi}^*$:

$$\tilde{\delta\psi}(\vec{k}, \omega) = \frac{(\omega - 2\vec{q}\cdot\vec{k} + k^2)\mathcal{V}(k)}{(\omega - 2\vec{q}\cdot\vec{k})^2 - k^2(k^2 + 2\tilde{V}(k))} \quad (4.32)$$

On reconnaît l'équation (2.11), où ω est remplacé par $\omega - 2\vec{q}\cdot\vec{k}$. C'est l'effet Doppler, qui décale les fréquences vues par le vortex en mouvement. $-2\vec{q}$ représente

donc, dans nos unités réduites, la vitesse \vec{U} . Vue par le vortex, la fréquence d'une excitation élémentaire de vecteur d'onde \vec{k} est :

$$\sqrt{k^2 (k^2 + 2\tilde{V}(k)) - \vec{U} \cdot \vec{k}} \quad (4.33)$$

Le cas qui nous intéresse correspond à $\omega = 0$:

$$\tilde{\delta\psi}(\vec{k}) = \frac{(\vec{U} \cdot \vec{k} + k^2) \mathcal{V}(k)}{(\vec{U} \cdot \vec{k})^2 - k^2 (k^2 + 2\tilde{V}(k))} \sim \frac{-\tilde{v}(k_0)}{\Omega^2 - (\vec{U} \cdot \vec{k})^2 + c^2(k - k_0)^2} \quad (4.34)$$

La déformation est maintenant anisotrope à cause du terme $\vec{U} \cdot \vec{k}$. Il peut être négligé au numérateur, à cause de la relative petitesse de q . Nous noterons de nouveau le numérateur $\tilde{v}(k)$ et nous le considérerons constant, égal à sa valeur pour k_0 , à cause du dénominateur, qui s'approche de zéro au voisinage de ce vecteur d'onde.

Par contre, nous ne pourrions pas négliger l'anisotropie du dénominateur, qui s'annule dans la direction de l'axe du vortex quand U atteint la vitesse de Landau $U_L = \frac{\Omega}{k_0}$.

2.3 Calcul pour un vortex en anneau à vitesse quelconque

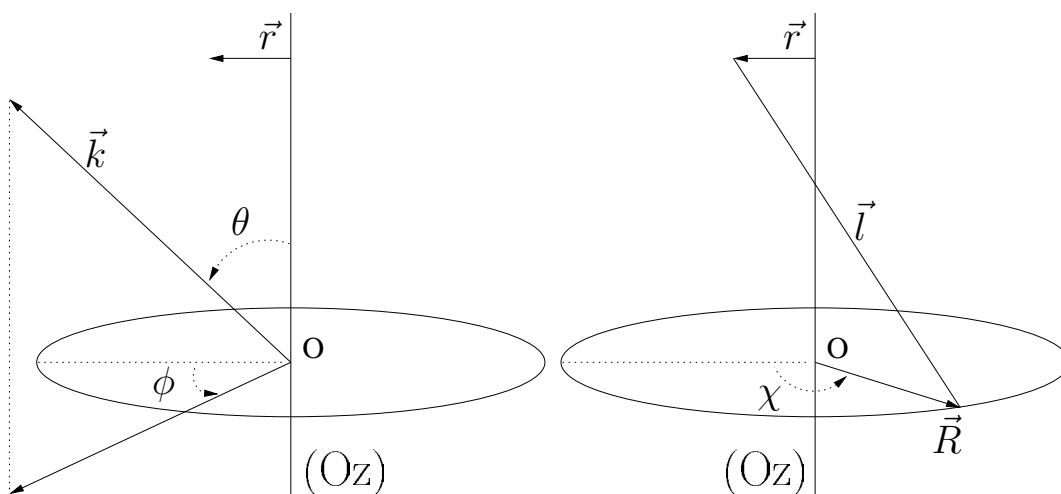


FIGURE 4.2 – Positionnement des variables de l'intégration.

La quantité $\delta\psi(\vec{r})$ à calculer vaut :

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} R d\chi \int_0^\infty k^2 dk \int_0^{2\pi} |\sin(\theta)| d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \frac{-\tilde{v}(k_0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{\rho})}}{\Omega^2 - (\vec{U} \cdot \vec{k})^2 + c^2(k - k_0)^2} \quad (4.35)$$

avec $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{R}$.

Le vecteur \vec{k} a pour composantes $(k \sin(\theta) \cos(\phi), k \sin(\theta) \sin(\phi), k \cos(\theta))$, \vec{r} a pour composantes $(r, 0, z)$ et \vec{R} a pour composantes $(R \cos(\chi), R \sin(\chi), 0)$ - leur placement respectif sur l'anneau étant montré sur la figure (4.2). Contrairement à

l'habitude, nous intégrons θ de 0 à 2π et ϕ de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, par commodité de calcul - la fonction sinus n'est donc pas toujours positive sur ce nouvel intervalle, nous contraignant alors à prendre sa valeur absolue.

Notre expérience des calculs précédents nous apprend que compteront dans l'intégrale les points où $\vec{k} \cdot \vec{\rho}$ est extrémal. Le module ρ extrémal favorise les valeurs de χ au voisinage de 0 ou π . Le cosinus de l'angle entre \vec{k} et $\vec{\rho}$ extrémal indique que les valeurs de ϕ seront au voisinage de 0. Quant aux valeurs de θ importantes, elles seront au voisinage de θ_- et de θ_+ , définis par :

$$\begin{aligned} \sin(\theta_-) &= \frac{r - R}{\sqrt{z^2 + (r - R)^2}} & ; & \quad \cos(\theta_-) = \frac{z}{\sqrt{z^2 + (r - R)^2}} \\ \sin(\theta_+) &= \frac{r + R}{\sqrt{z^2 + (r + R)^2}} & ; & \quad \cos(\theta_+) = \frac{z}{\sqrt{z^2 + (r + R)^2}} \end{aligned}$$

Le produit scalaire $\vec{k} \cdot \vec{\rho}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{\rho} &= k [\sin(\theta) \cos(\phi) (r - R \cos(\chi)) - R \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\chi) + z \cos(\theta)] \\ &= k [r \sin(\theta) \cos(\phi) - R \sin(\theta) \cos(\phi - \chi) + z \cos(\theta)] \end{aligned} \quad (4.36)$$

A) Contribution autour de $\chi \sim 0$ et $\phi \sim 0$:

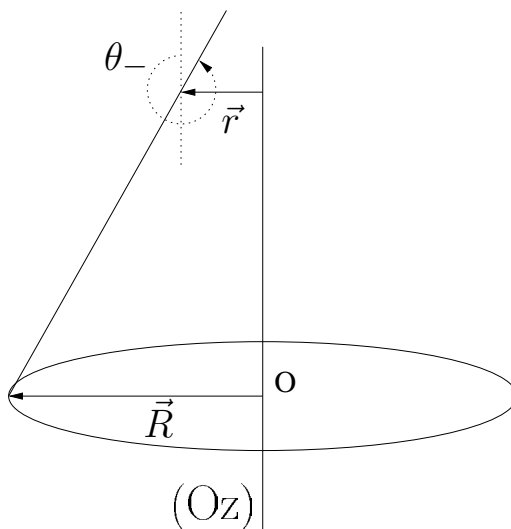


FIGURE 4.3 – Première configuration, autour de ρ à son minimum.

En développant autour de $\chi \sim 0$ et $\phi \sim 0$, configuration représentée sur la figure (4.3), on a :

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{\rho} &\sim k (\sin(\theta) (r - R) + z \cos(\theta)) + k \sin(\theta) \left(\frac{R}{2} (\phi - \chi)^2 - \frac{R}{2} \phi^2 \right) \\ &= \underbrace{k \sqrt{z^2 + (r - R)^2} \cos(\theta - \theta_-)}_{\text{terme a}} + \underbrace{k R \sin(\theta) \frac{(\phi - \chi)^2}{2}}_{\text{terme b}} - \underbrace{k r \sin(\theta) \frac{\phi^2}{2}}_{\text{terme c}} \end{aligned} \quad (4.37)$$

En effet, on a l'identité :

$$\begin{aligned} (r - R) \sin \theta + z \cos \theta &= \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + (r - R)^2}} \right)^{-1} (\sin \theta \sin \theta_- + \cos \theta \cos \theta_-) \\ &= \sqrt{z^2 + (r - R)^2} \cos(\theta - \theta_-) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Les intégrations sur ϕ et χ vont maintenant de $-\infty$ à $+\infty$ sans que le résultat final ne soit modifié. Chaque terme donne alors un facteur dans le résultat final.

Nous commençons par l'intégration sur χ (qui correspond au terme b) que l'on translate d'une valeur ϕ afin de faire disparaître cette variable de la gaussienne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikR \sin \theta \frac{(\phi - \chi)^2}{2}} d\chi = e^{is \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{kR |\sin(\theta)|}} \quad (4.39)$$

où $s = \frac{\sin(\theta)}{|\sin(\theta)|}$ est le signe de $\sin(\theta)$.

De la même façon, l'intégration sur ϕ (provenant du terme c) donne le facteur :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikr \sin \theta \frac{\phi^2}{2}} d\phi = e^{-is \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{kr |\sin(\theta)|}} \quad (4.40)$$

ce qui implique que le $|\sin(\theta)|$ du Jacobien d'intégration est compensé par ces deux facteurs.

L'intégration sur θ va se centrer autour de $\theta = \theta_-$ et $\pi + \theta_-$. En effet, la fonction $e^{ik\sqrt{z^2 + (r-R)^2} \cos(\theta - \theta_-)}$ agit à l'instar d'une fonction delta de Dirac : les oscillations de la fonction pour n'importe quel θ différent de θ_- et $\theta_- + \pi$ se compensent entre elles, annulant toute contribution éventuelle. Le reste de l'intégrande est alors pris en ces deux valeurs particulières θ_- et $\theta_- + \pi$: il ne s'agit plus que de facteurs constants que l'on sort naturellement de l'intégrale. Il subsiste toutefois une dépendance en θ dans l'intégrande, à travers le terme $(\vec{U} \cdot \vec{k})^2 = U^2 k^2 \cos^2(\theta)$ dans le dénominateur. Le poids principal de l'intégration sur k sera autour de k_0 . Nous remplacerons donc ce terme par :

$$U^2 k^2 \cos^2(\theta_-) = U^2 k^2 \cos^2(\theta_- + \pi) = \frac{U^2 k_0^2 z^2}{z^2 + (r - R)^2} \quad (4.41)$$

L'intégrale sur θ (issue du terme a) :

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{e^{ik\sqrt{z^2 + (r-R)^2} \cos(\theta - \theta_-)}}{\Omega^2 - (\vec{U} \cdot \vec{k})^2 + c^2 (k - k_0)^2} \quad (4.42)$$

devient donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega^2 - \frac{U^2 k_0^2 z^2}{z^2 + (r-R)^2} + c^2 (k - k_0)^2} &\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\sqrt{z^2 + (r-R)^2} \left(1 - \frac{(\theta - \theta_-)^2}{2}\right)} d\theta \right. \\ &\left. + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\sqrt{z^2 + (r-R)^2} \left(-1 + \frac{(-\theta + \theta_- + \pi)^2}{2}\right)} d\theta \right] \end{aligned} \quad (4.43)$$

et donne le facteur :

$$\sqrt{\frac{2\pi}{k\sqrt{z^2 + (r-R)^2}}} 2 \cos\left(k\sqrt{z^2 + (r-R)^2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.44)$$

Pour finir, il nous faut intégrer sur k :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{R}{r}} \frac{-\tilde{v}(k_0)}{(z^2 + (r-R)^2)^{\frac{1}{4}}} \int \frac{2 \cos\left(k\sqrt{z^2 + (r-R)^2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\Omega^2 - \frac{U^2 k_0^2 z^2}{z^2 + (r-R)^2} + c^2(k - k_0)^2} \sqrt{k} dk \quad (4.45)$$

On applique ici le même raisonnement que pour le vortex rectilinéaire. La fonction \sqrt{k} dans l'intégrande est prise à la valeur $\sqrt{k_0}$, la fonction cosinus est décomposée en deux exponentielles complexes, qui donnent chacune une contribution centrée autour d'un des pôles du dénominateur, obtenue par le théorème des résidus.

L'intégrande devient donc :

$$\frac{\sqrt{k_0}}{2ik_{1-}c^2} \sum_{\epsilon=\pm 1} (-\epsilon) \frac{e^{i(k\sqrt{z^2+(r-R)^2}-\frac{\pi}{4})} + e^{-i(k\sqrt{z^2+(r-R)^2}+\frac{\pi}{4})}}{k - k_0 + i\epsilon k_{1-}} \quad (4.46)$$

avec le terme :

$$k_{1-} = \sqrt{\frac{\Omega^2}{c^2} - \frac{U^2 k_0^2 z^2}{c^2(z^2 + (r-R)^2)}} \quad (4.47)$$

La contribution sur les k imaginaires négatifs autour du pôle $k_0 - ik_{1-}$ donne :

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_0 R}{2\pi r}} \frac{1}{k_{1-}c^2} \frac{-\tilde{v}(k_0)}{(z^2 + (r-R)^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-i(k_0\sqrt{z^2+(r-R)^2}-\frac{\pi}{4})} e^{-k_{1-}\sqrt{z^2+(r-R)^2}} \quad (4.48)$$

et celle sur les k imaginaires positifs en $k_0 + ik_{1-}$ vaut :

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_0 R}{2\pi r}} \frac{1}{k_{1-}c^2} \frac{-\tilde{v}(k_0)}{(z^2 + (r-R)^2)^{\frac{1}{4}}} e^{+i(k_0\sqrt{z^2+(r-R)^2}-\frac{\pi}{4})} e^{-k_{1-}\sqrt{z^2+(r-R)^2}} \quad (4.49)$$

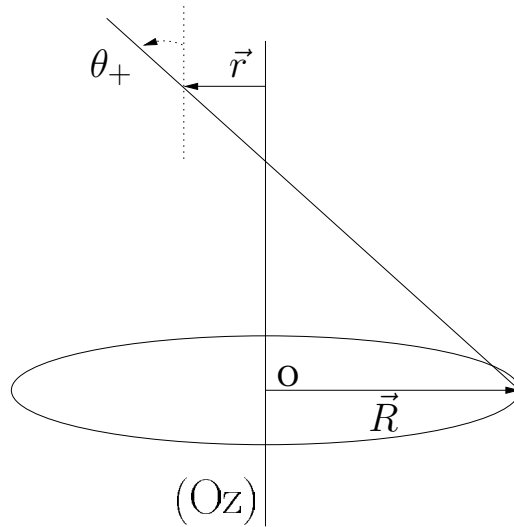
ce qui conduit au résultat final :

$$\sqrt{\frac{k_0 R}{2\pi r}} \frac{-\tilde{v}(k_0)}{k_{1-}c^2(z^2 + (r-R)^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-k_{1-}\sqrt{z^2+(r-R)^2}} \cos\left(k_0\sqrt{z^2 + (r-R)^2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.50)$$

B) Contribution autour de $\chi \sim \pi$ ($\chi' = \chi - \pi \sim 0$) et de $\phi \sim 0$:

On recalcule les coordonnées de $\vec{k} \cdot \vec{\rho}$ autour de cette nouvelle position en usant de la même astuce que précédemment pour θ_+ , avec la configuration montrée sur la figure (4.4) :

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{\rho} &\sim k (\sin(\theta) (r + R) + z \cos(\theta)) + k \sin(\theta) \left(-\frac{R}{2} (\phi - \chi')^2 - \frac{R}{2} \phi^2 \right) \\ &= \underbrace{k \sqrt{z^2 + (r + R)^2} \cos(\theta - \theta_+)}_{\text{terme a'}} \underbrace{-kR \sin(\theta) \frac{(\phi - \chi')^2}{2}}_{\text{terme b'}} \underbrace{-kr \sin(\theta) \frac{\phi^2}{2}}_{\text{terme c'}} \end{aligned} \quad (4.51)$$


 FIGURE 4.4 – *Seconde configuration, autour de ρ à son maximum.*

Les intégrations sur ϕ et χ (donc χ') vont également de $-\infty$ à $+\infty$. La translation $\chi \rightarrow \chi + \pi = \chi'$, ainsi que celle de ϕ , ne change rien au résultat et l'intégration sur χ' (provenant du terme b') donne le facteur :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikR \sin \theta \frac{(\phi - \chi')^2}{2}} d\chi' = e^{-is \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{kR |\sin(\theta)|}} \quad (4.52)$$

où $s = \frac{\sin(\theta)}{|\sin(\theta)|}$ est le signe de $\sin(\theta)$.

L'intégration sur ϕ (issue du terme c') donne ensuite le facteur :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikr \sin \theta \frac{\phi^2}{2}} d\phi = e^{-is \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{kr |\sin(\theta)|}} \quad (4.53)$$

Cependant, les exponentielles ne se compensent pas : le $|\sin(\theta)|$ du Jacobien d'intégration impose, cette fois, un facteur $e^{-is \frac{\pi}{2}}$.

A nouveau, la fonction $e^{ik\sqrt{z^2 + (r-R)^2} \cos(\theta - \theta_+)}$ se comporte comme un delta de Dirac. L'unique différence avec le calcul précédent réside dans l'ajout d'un facteur $e^{-i \frac{\pi}{2} \frac{\sin(\theta_+)}{|\sin(\theta_+)|}}$ (tout comme son pendant en $\theta_+ + \pi$) - comme θ_+ appartient à l'intervalle $[0, \pi]$, ce facteur se réduit à $-i$. Le terme $(\vec{U} \cdot \vec{k})^2 = U^2 k^2 \cos^2(\theta)$ dans le dénominateur sera remplacé par :

$$U^2 k^2 \cos^2(\theta_+) = \frac{U^2 k_0^2 z^2}{z^2 + (r + R)^2} \quad (4.54)$$

En conséquence, l'intégration sur θ (terme a') :

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{e^{ik\sqrt{z^2 + (r+R)^2} \cos(\theta - \theta_+)}}{\Omega^2 - (\vec{U} \cdot \vec{k})^2 + c^2 (k - k_0)^2} \quad (4.55)$$

devient donc :

$$\frac{1}{\Omega^2 - \frac{U^2 k_0^2 z^2}{z^2 + (r+R)^2} + c^2 (k - k_0)^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\sqrt{z^2 + (r+R)^2} \left(1 - \frac{(\theta - \theta_+)^2}{2}\right)} \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2} \frac{\sin(\theta_+)}{|\sin(\theta_+)|}}}_{-i} d\theta \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\sqrt{z^2 + (r+R)^2} \left(-1 + \frac{(-\theta + \theta_+ + \pi)^2}{2}\right)} \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2} \frac{\sin(\theta_+ + \pi)}{|\sin(\theta_+ + \pi)|}}}_i d\theta \right] \quad (4.56)$$

et donne le facteur, proportionnel au sinus, et non plus au cosinus :

$$\sqrt{\frac{2\pi}{k\sqrt{z^2 + (r+R)^2}}} 2 \sin \left(k\sqrt{z^2 + (r+R)^2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (4.57)$$

Il reste alors à intégrer sur k :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{R}{r}} \frac{-\tilde{v}(k_0)}{(z^2 + (r+R)^2)^{\frac{1}{4}}} \int \frac{2 \sin \left(k\sqrt{z^2 + (r+R)^2} - \frac{\pi}{4} \right)}{\Omega^2 - \frac{U^2 k_0^2 z^2}{z^2 + (r+R)^2} + c^2 (k - k_0)^2} \sqrt{k} dk \quad (4.58)$$

De la même façon, nous procédons à l'intégration sur le plan complexe à l'aide du théorème des résidus sur k en prenant la fonction \sqrt{k} en k_0 .

L'intégrande devient ainsi :

$$\frac{1}{i} \frac{\sqrt{k_0}}{2ik_{1+}c^2} \sum_{\epsilon=\pm 1} (-\epsilon) \frac{e^{i(k\sqrt{z^2 + (r+R)^2} - \frac{\pi}{4})} - e^{-i(k\sqrt{z^2 + (r+R)^2} + \frac{\pi}{4})}}{k - k_0 + i\epsilon k_{1+}} \quad (4.59)$$

avec :

$$k_{1+} = \sqrt{\frac{\Omega^2}{c^2} - \frac{U^2 k_0^2 z^2}{c^2 (z^2 + (r+R)^2)}} \quad (4.60)$$

La contribution autour du pôle $k_0 - ik_{1+}$ vaut :

$$-\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{k_0 R}{2\pi r}} \frac{1}{k_{1+} c^2} \frac{-\tilde{v}(k_0)}{(z^2 + (r+R)^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-i(k_0\sqrt{z^2 + (r+R)^2} - \frac{\pi}{4})} e^{-k_{1+}\sqrt{z^2 + (r+R)^2}} \quad (4.61)$$

et celle centrée en $k_0 + ik_{1+}$:

$$\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{k_0 R}{2\pi r}} \frac{1}{k_{1+} c^2} \frac{-\tilde{v}(k_0)}{(z^2 + (r+R)^2)^{\frac{1}{4}}} e^{i(k_0\sqrt{z^2 + (r+R)^2} - \frac{\pi}{4})} e^{-k_{1+}\sqrt{z^2 + (r+R)^2}} \quad (4.62)$$

ce qui donne :

$$\sqrt{\frac{k_0 R}{2\pi r}} \frac{-\tilde{v}(k_0)}{k_{1+} c^2 (z^2 + (r+R)^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-k_{1+}\sqrt{z^2 + (r+R)^2}} \sin \left(k_0\sqrt{z^2 + (r+R)^2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (4.63)$$

C) Sommation finale

Suffisamment loin de l'axe ($r \neq 0$), la perturbation du paramètre d'ordre vaut alors :

$$\begin{aligned} \delta\psi(r, z) = & \frac{-\tilde{v}(k_0)}{c^2} \sqrt{\frac{k_0 R}{2\pi r}} \left[\frac{e^{-k_{1-}\sqrt{z^2+(r-R)^2}}}{k_{1-}(z^2+(r-R)^2)^{\frac{1}{4}}} \cos\left(k_0\sqrt{z^2+(r-R)^2} - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\ & \left. + \frac{e^{-k_{1+}\sqrt{z^2+(r+R)^2}}}{k_{1+}(z^2+(r+R)^2)^{\frac{1}{4}}} \sin\left(k_0\sqrt{z^2+(r+R)^2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.64)$$

Pour $r \sim 0$, la valeur $\sqrt{z^2+(r \pm R)^2}$ est remplacée par $\sqrt{z^2+R^2}$, ce qui entraîne alors que k_{1+} est égal à k_{1-} , que l'on écrit :

$$\bar{k}_1 = \sqrt{\frac{\Omega^2}{c^2} - \frac{U^2 k_0^2 z^2}{c^2(z^2+R^2)}} \quad (4.65)$$

L'exponentielle s'avère donc factorisable. En utilisant les relations trigonométriques pour développer les fonctions sinus et cosinus, on parvient à :

$$\cos\left(k_0\sqrt{z^2+R^2} - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(k_0\sqrt{z^2+R^2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin\left(k_0\sqrt{z^2+R^2}\right) \quad (4.66)$$

On s'intéresse donc à la limite de :

$$\delta\psi(r, z) \sim \sqrt{\frac{k_0 R}{\pi r}} \frac{-\tilde{v}(k_0)}{\bar{k}_1 c^2} \left[\frac{e^{-\bar{k}_1\sqrt{z^2+R^2}}}{(z^2+R^2)^{\frac{1}{4}}} \sin\left(k_0\sqrt{z^2+R^2}\right) \right] \quad (4.67)$$

qui diverge pour $r \rightarrow 0$.

Cependant, le calcul direct est de nouveau possible sur l'axe (où l'on a déjà effectué l'intégration sur χ qui n'intervient pas cette fois dans le produit scalaire $\vec{k} \cdot \vec{\rho}$ mais qui ajoute simplement un facteur $2\pi R$) :

$$\delta\psi(0, z) = \frac{R}{(2\pi)^2} \int_0^\infty k^2 dk \int_0^{2\pi} |\sin(\theta)| d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \frac{-\tilde{v}(k_0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{\rho})}}{\Omega^2 - (\vec{U} \cdot \vec{k})^2 + c^2(k - k_0)^2} \quad (4.68)$$

avec ici :

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{\rho} &= k(-R \sin(\theta) \cos(\phi) + z \cos(\theta)) \\ &\sim k\sqrt{z^2+R^2} \cos(\theta - \theta_0) + kR \sin(\theta) \frac{\phi^2}{2} \end{aligned} \quad (4.69)$$

en développant comme précédemment la fonction $\cos \phi$ autour de 0 et :

$$\sin(\theta_0) = -\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}} \quad ; \quad \cos(\theta_0) = \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \quad (4.70)$$

L'intégration sur ϕ donne le facteur :

$$e^{is\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{kR|\sin(\theta)|}} \quad (4.71)$$

avec toujours $s = \sin(\theta)/|\sin(\theta)|$. Ici, cependant, le sinus de l'angle θ_0 est négatif par construction.

L'intégration sur θ - où l'intégrande est prise en θ_0 excepté pour l'exponentielle qui est développée autour de $\theta - \theta_0 \sim 0$ et de $\theta - \theta_0 - \pi \sim 0$ devient :

$$\frac{-\tilde{v}(k_0)\sqrt{|\sin\theta_0|}}{\Omega^2 - U^2k^2 \cos^2(\theta_0) + c^2(k - k_0)^2} \left[e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\sqrt{z^2+R^2}} \left(1 - \frac{(\theta-\theta_0)^2}{2}\right) d\theta \right. \\ \left. + e^{+i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\sqrt{z^2+R^2}} \left(-1 + \frac{(\theta-\theta_0-\pi)^2}{2}\right) d\theta \right] \quad (4.72)$$

L'intégration sur k , après application du théorème des résidus, permet d'écrire :

$$\delta\psi(0, z) = \frac{R}{(2\pi)} - \tilde{v}(k_0) \int_0^\infty \frac{k}{\sqrt{z^2 + R^2}} \frac{\left(e^{ik(\sqrt{z^2+R^2}-\frac{\pi}{2})} + e^{-ik(\sqrt{z^2+R^2}-\frac{\pi}{2})}\right)}{\Omega^2 - U^2k^2 \cos^2(\theta_0) + c^2(k - k_0)^2} dk \\ \sim -\frac{k_0 R \tilde{v}(k_0) e^{-k_1 \sqrt{z^2+R^2}}}{k_1 c^2 \sqrt{z^2 + R^2}} \sin\left(k_0 \sqrt{z^2 + R^2}\right) \quad (4.73)$$

On remarque que la seule différence avec le cas à vitesse nulle est dans l'expression de $\overline{k_1}$. Comme dans ce cas à vitesse nulle, pour les points sur l'axe, un facteur :

$$X = \sqrt{\frac{\pi k_0 r R}{\sqrt{z^2 + R^2}}} \quad (4.74)$$

corrige la formule divergente précédente.

Nous proposons donc comme formule d'interpolation :

$$\delta\psi(r, z) = \frac{-\tilde{v}(k_0)}{c^2} \sqrt{\frac{k_0 R}{2\pi r}} f(X) \left[\frac{e^{-k_{1-}\sqrt{z^2+(r-R)^2}}}{k_{1-}(z^2 + (r - R)^2)^{\frac{1}{4}}} \cos\left(k_0 \sqrt{z^2 + (r - R)^2} - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\ \left. + \frac{e^{-k_{1+}\sqrt{z^2+(r+R)^2}}}{k_{1+}(z^2 + (r + R)^2)^{\frac{1}{4}}} \sin\left(k_0 \sqrt{z^2 + (r + R)^2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (4.75)$$

avec :

$$f(X) = \left(\frac{X^4}{1 + X^4}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.76)$$

et :

$$k_{1-} = \sqrt{\frac{\Omega^2}{c^2} - \frac{U^2 k_0^2 z^2}{c^2 (z^2 + (r - R)^2)}} \quad ; \quad k_{1+} = \sqrt{\frac{\Omega^2}{c^2} - \frac{U^2 k_0^2 z^2}{c^2 (z^2 + (r + R)^2)}} \quad (4.77)$$

La relation (2.34) nous permet d'exprimer la densité en tout point en fonction de l'amplitude A obtenue pour le vortex rectilinéaire :

$$\begin{aligned} \frac{\delta\rho(r, z)}{\rho_0} = & \frac{Ak_1}{c^2} \sqrt{\frac{R}{k_0 r}} f(X) \left[\frac{e^{-k_{1-} \sqrt{z^2 + (r-R)^2}}}{k_{1-} (z^2 + (r-R)^2)^{\frac{1}{4}}} \cos \left(k_0 \sqrt{z^2 + (r-R)^2} - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ & \left. + \frac{e^{-k_{1+} \sqrt{z^2 + (r+R)^2}}}{k_{1+} (z^2 + (r+R)^2)^{\frac{1}{4}}} \sin \left(k_0 \sqrt{z^2 + (r+R)^2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.78)$$

3 Discussion

Nous aurons deux soucis dans ce paragraphe. Dans la théorie "classique" du calcul de l'énergie de l'anneau, la vitesse de Landau U_L n'apparaît à aucun endroit. Or les oscillations de densité sont la manifestation de l'apparition de rotons, certes encore localisés, mais qui pourront évidemment se libérer dans le superfluide pour $U \sim U_L$. C'est pourquoi nous étudierons, d'une part, le comportement de la déformation ci-dessus quand la vitesse U s'approche de la vitesse de Landau et d'autre part nous chercherons à en déduire l'influence que cela peut avoir sur la vitesse d'équilibre du vortex.

3.1 Profil

La vitesse de Landau est $U_L = \frac{\Omega}{k_0}$. C'est la vitesse de phase minimale des excitations élémentaires. Landau a montré qu'un processus de dissipation élémentaire, par émission d'excitations par un corps en mouvement, n'est possible que si la vitesse du corps par rapport au fluide dépasse la vitesse U_L . Pour des vitesses inférieures, il est impossible de conserver à la fois l'énergie et la quantité de mouvement dans un tel processus.

Le terme dans $\delta\psi(r, z)$ le plus sensible à une vitesse U proche de U_L est le premier terme, pour r proche de R . En effet, dans ce cas, k_{1-} peut s'écrire :

$$\begin{aligned} k_{1-} &= \frac{\Omega}{c} \sqrt{1 - \frac{U^2}{U_L^2} \left(\frac{z^2}{(z^2 + (r-R)^2)} \right)} \\ &\sim k_1 \sqrt{1 - \frac{U^2}{U_L^2} \left(1 + \frac{U^2}{U_L^2 \left(1 - \frac{U^2}{U_L^2} \right)} \frac{(r-R)^2}{2z^2} \right)} \end{aligned} \quad (4.79)$$

où, après avoir mis $\sqrt{1 - \frac{U^2}{U_L^2}}$ en facteur, on a successivement fait un développement

limité de $\frac{1}{1 + \frac{(r-R)^2}{z^2}}$ puis du facteur $\left(1 + \frac{U^2}{U_L^2 \left(1 - \frac{U^2}{U_L^2} \right)} \cdot \frac{(r-R)^2}{z^2} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Donc, quand U atteint U_L , l'amplitude de $\delta\psi(r, z)$, proportionnelle à $\frac{1}{k_{1-}}$, diverge pour $r = R$, signalant l'émission de rotons dans cette direction. Sur la figure (4.5), nous présentons le profil de densité dans une coupe (r, z) , pour une vitesse égale à

$0,9U_L$ et un rayon $R = 7/k_0$. Le rayon est celui qui donnerait la vitesse choisie suivant le calcul classique exposé plus haut, ne tenant aucun compte de la déformation.

Pour cette vitesse qui n'est pas encore extrêmement proche de U_L , on observe deux zones où les oscillations sont renforcées. En premier lieu, sur l'axe, par le mécanisme discuté au cours du calcul et pour lequel nous avons dû user d'une interpolation. Dans le calcul de l'énergie dont nous nous occuperons bientôt, cette région près de l'axe aura peu de poids, correspondant à un faible volume.

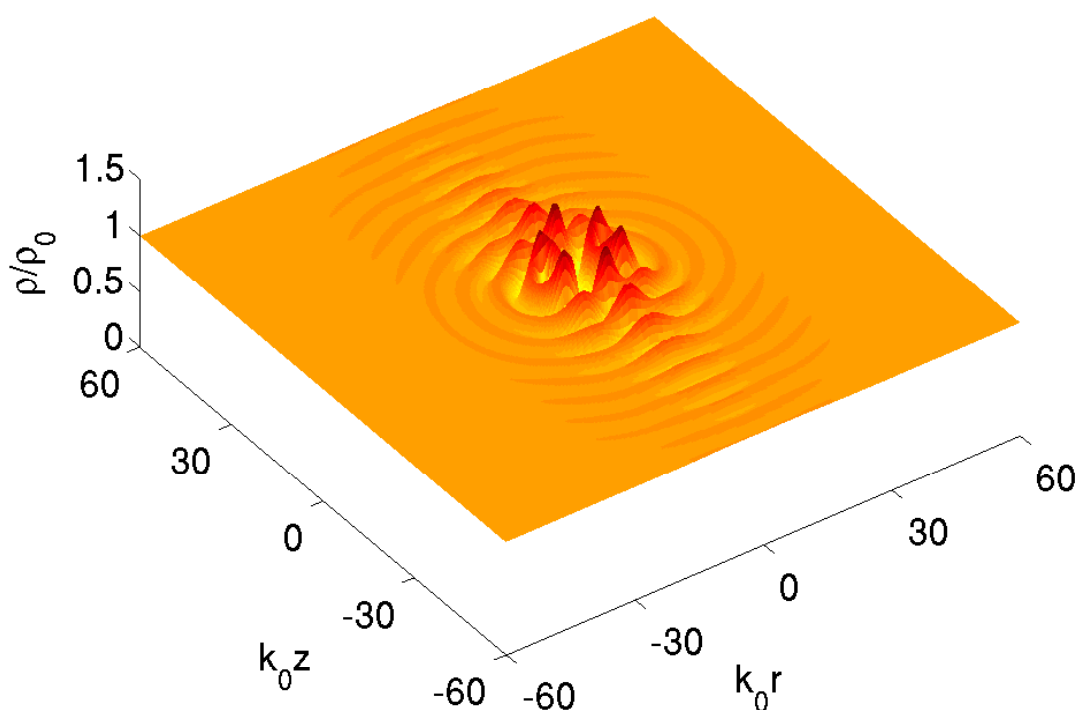


FIGURE 4.5 – *Le profil de densité obtenu pour une vitesse égale à $0,9U_L$ et un rayon $R = 7/k_0$. L'anisotropie de l'amplitude des oscillations est clairement visible.*

En second lieu, le renforcement pour r voisin de R est également visible. C'est ce renforcement qui diverge quand U se rapproche de U_L . Dans la figure (4.6), le profil de densité pour le modèle de Pomeau-Rica a été obtenu par la méthode "exacte" de relaxation, que nous avons déjà utilisée pour le vortex rectiligne. On retrouve, pour les mêmes paramètres de vitesse et de rayon, un profil similaire à celui donné par notre approximation linéaire.

Tournons nous maintenant vers l'énergie de déformation correspondant à ce profil. Nous avons vu qu'elle est proportionnelle à l'intégrale du carré de la déformation

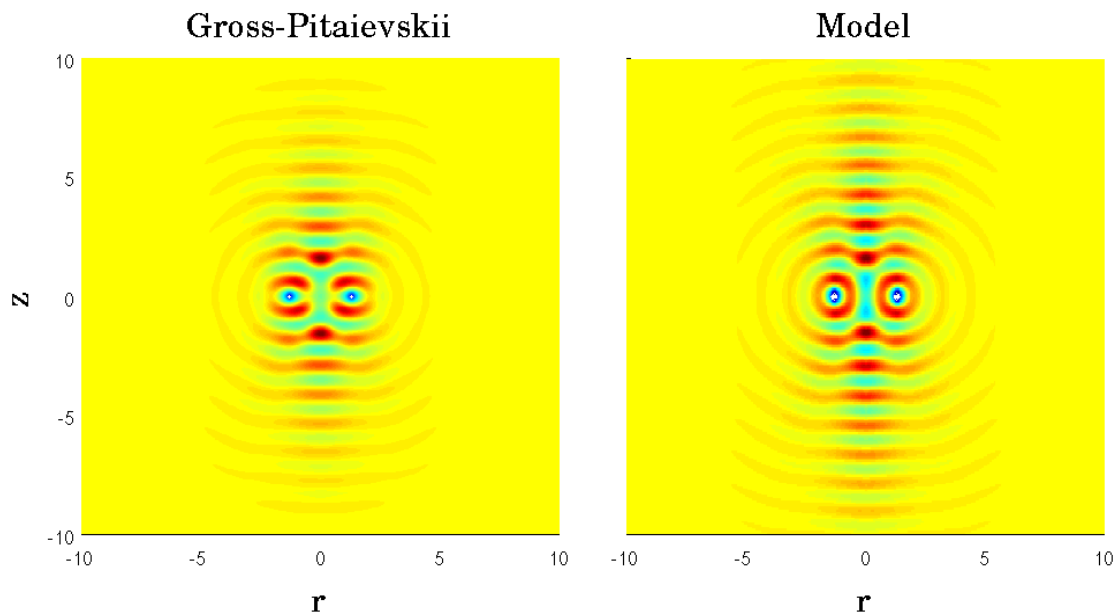


FIGURE 4.6 – Comparaison entre la simulation par relaxation de l'équation de Gross-Pitaevskii modifiée suivant Pomeau-Rica et notre approximation linéaire de la densité. Les coordonnées sont exprimées en unité de a , portée du potentiel d'interaction dans le modèle de Pomeau-Rica. La symétrie par rapport au plan de l'anneau provient de l'invariance de l'équation par renversement dans le temps, et on la retrouve bien dans le modèle analytique proposé pour $\delta\psi$.

en première approximation, dans l'équation (2.46) :

$$E_{p1} \propto \iint \delta\psi(r, z)^2 r dr dz \quad (4.80)$$

$$\sim R \int_{r=0}^{r \rightarrow +\infty} dr \int_{z \rightarrow -\infty}^{z \rightarrow +\infty} dz \frac{e^{-2k_1 \sqrt{1 - \frac{U^2}{U_L^2}} |z|} \cos^2 \left(k_0 z - \frac{\pi}{4} \right)}{k_1^2 z \left(1 - \frac{U^2}{U_L^2} \right) \left(1 + \frac{U^2}{U_L^2 \left(1 - \frac{U^2}{U_L^2} \right)} \frac{(r-R)^2}{z^2} \right)} \quad (4.81)$$

Nous n'avons retenu que les termes les plus divergents quand U tend vers U_L , qui contribuent donc le plus à l'intégrale, pour dégager le comportement asymptotique. En passant aux variables :

$$\xi = \frac{r - R}{z \sqrt{1 - \frac{U^2}{U_L^2}}} \quad \text{et} \quad \zeta = z \sqrt{1 - \frac{U^2}{U_L^2}} \quad (4.82)$$

dont la matrice jacobienne s'écrit :

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial r}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z \sqrt{1 - \frac{U^2}{U_L^2}}} & \frac{R - r}{z^2 \sqrt{1 - \frac{U^2}{U_L^2}}} \\ 0 & \sqrt{1 - \frac{U^2}{U_L^2}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |J_F| = \frac{1}{|z|} \quad (4.83)$$

l'intégrale devient :

$$E_{p1} \propto R \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2k_1 \sqrt{1 - \frac{U^2}{U_L^2}} |z|} \cos^2 \left(k_0 z - \frac{\pi}{4} \right)}{k_1^2 z \left(1 - \frac{U^2}{U_L^2} \right) \left(1 + \frac{U^2}{U_L^2 \left(1 - \frac{U^2}{U_L^2} \right)} \frac{(r-R)^2}{z^2} \right)} dr dz \quad (4.84)$$

$$= R \int_{-\frac{R}{\zeta}}^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2k_1 |\zeta|} \cos^2 \left(k_0 \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{U_L^2}}} - \frac{\pi}{4} \right)}{k_1^2 \left(1 - \frac{U^2}{U_L^2} \right) \left(1 + \frac{U^2}{U_L^2} \xi^2 \right)} d\zeta d\xi. \quad (4.85)$$

Toutefois, comme dans la section (2.5.1) du Chapitre II, le cosinus est moyenné sur l'espace et donne un facteur $\frac{1}{2}$. Au dénominateur, le rapport $\frac{U^2}{U_L^2}$ devant la variable ξ^2 est pris égal à 1 et l'intégrale sur ζ allant de moins l'infini à l'infini est prise égale au double de l'intégrale de 0 à l'infini par symétrie.

On obtient alors :

$$E_{p1} \propto \frac{1}{2} \frac{2R}{k_1^2 \left(1 - \frac{U^2}{U_L^2} \right)} \int_0^\infty d\zeta \int_{-\frac{R}{\zeta}}^\infty d\xi \frac{e^{-2k_1 \zeta}}{1 + \xi^2}. \quad (4.86)$$

Ce résultat se simplifie beaucoup si on peut considérer que $R \gg \zeta$ pour toutes les valeurs intéressantes de ζ , ce qui revient à supposer $Rk_1 \gg 1$. Dans ce cas, on peut considérer que l'intégrale sur ξ va de moins l'infini à l'infini et que :

$$E_{p1} \propto \frac{R}{\left(1 - \frac{U^2}{U_L^2} \right)}. \quad (4.87)$$

La dépendance de l'énergie en fonction de k_1 ne nous intéresse pas ici, car la profondeur du minimum roton est supposée constante, et par ricochet, k_1 est aussi constant.

Ce résultat semble bien confirmé par l'exploitation de la formule complète. Sur la figure (4.7), nous montrons le comportement de l'énergie de déformation divisée par R , en unités arbitraires, en fonction de $\left(1 - \frac{U^2}{U_L^2} \right)$.

Cependant, quand l'amplitude des oscillations diverge, il est clair que les deux approximations linéaires - à savoir le calcul perturbatif du paramètre d'ordre (4.34), et par conséquent la relation entre $\frac{\delta \rho}{\rho_0}$ et $\delta \psi$, ainsi que l'approximation linéaire de

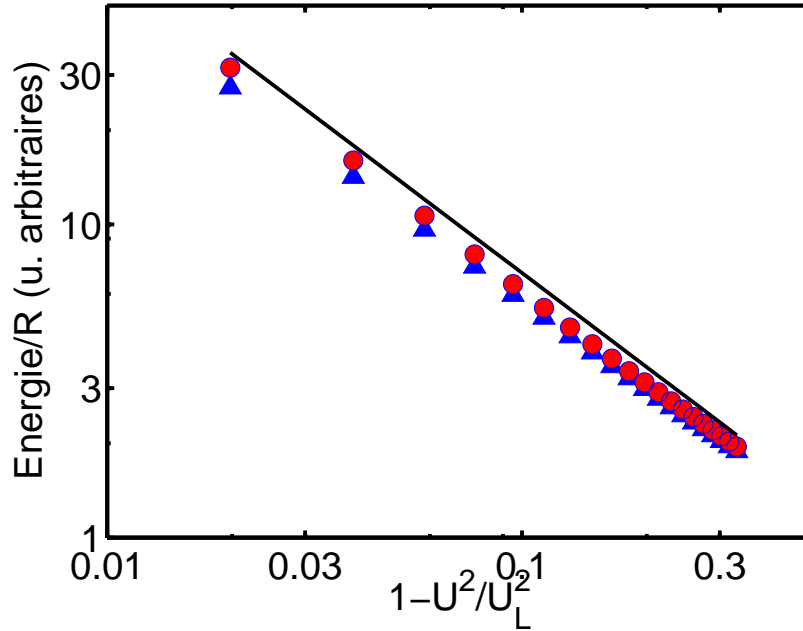


FIGURE 4.7 – Comportement de l'énergie de déformation, divisée par le rayon de l'anneau, en fonction de la vitesse. Les triangles bleus correspondent à $R = 30/k_0$, les disques rouges, à $R = 20/k_0$. La ligne continue représente le comportement en $\frac{1}{(1 - \frac{U^2}{U_L^2})}$.

l'énergie (2.46) - cessent d'être valable. Nous devons nous attendre à une saturation de cette amplitude là où elle atteint un certain niveau.

Dès lors, l'augmentation de l'énergie ne viendra plus de l'augmentation de l'amplitude, mais de l'extension du domaine des oscillations, vers des z de plus en plus grands, leur portée étant proportionnelle à l'inverse de $\sqrt{1 - \frac{U^2}{U_L^2}}$. C'est ce comportement de l'énergie de déformation :

$$E_{p1} = A \frac{2\pi R}{\sqrt{1 - U^2/U_L^2}} \quad (4.88)$$

que nous prendrons pour base pour analyser l'influence de cette déformation sur la vitesse de l'anneau, le facteur 2π ayant été conservé par commodité.

3.2 Energies potentielle et cinétique

Pour cela, il faut prendre en compte aussi l'énergie cinétique. Le déplacement de l'anneau à la vitesse U engendre en effet un déplacement du superfluide, pour assurer la conservation de la masse. En appelant \vec{v}_1 le champ de vitesse correspondant donc à ce mouvement intrinsèque de l'anneau et également, dans notre cas particulier, des oscillations de densité en plaçant dans le référentiel de l'anneau :

$$\text{div}(\rho(-\vec{U} + \vec{v}_1)) = 0 \quad (4.89)$$

Remarquons que, à déformation donnée du superfluide, l'équation (4.89) rend le champ \vec{v}_1 proportionnel à U . L'énergie cinétique correspondante est donc proportionnelle à U^2 . D'autre part, si la déformation ne dépendait que de z , d'après le principe même de notre calcul de l'énergie potentielle, cette énergie cinétique deviendrait égale à l'énergie potentielle pour $U = U_L$. Or, la déformation qui résulte de notre calcul ressemble de plus en plus à une onde plane de vecteur d'onde suivant z , quand U se rapproche de U_L . Nous prendrons donc comme approximation pour l'énergie cinétique correspondante :

$$E_{c1} = E_{p1} \frac{U^2}{U_L^2} = 2\pi A \frac{RU^2}{U_L^2 \sqrt{1 - U^2/U_L^2}} \quad (4.90)$$

Cela donne une contribution au Lagrangien :

$$\mathcal{L}_1 = E_{c1} - E_{p1} = -2\pi AR \sqrt{1 - U^2/U_L^2} \quad (4.91)$$

Le champ de vitesse \vec{v}_1 se superpose au champ \vec{v}_2 correspondant à la circulation quantifiée (quantum $\kappa = h/m$), c'est-à-dire à la rotation de la phase :

$$\vec{v}_2 = \frac{\kappa}{2\pi} \vec{\text{grad}}\phi \quad (4.92)$$

où ϕ est la phase du superfluide. Nous ferons l'hypothèse que la somme du produit scalaire $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ sur l'espace est nulle, de sorte que l'énergie cinétique totale est la somme des énergies cinétiques correspondant à chacun des deux champs. Cette hypothèse serait certainement vraie pour le déplacement d'un vortex rectiligne, car même pour un vortex en mouvement, une symétrie par rapport à n'importe quel plan contenant le vortex et la vitesse de translation changerait de signe \vec{v}_2 , suite à la rotation de la phase, et laisserait invariant \vec{v}_1 : on s'attend donc à ce que la somme des produits scalaires en chaque point se compense.

L'énergie correspondant à \vec{v}_2 peut s'écrire, comme on l'a vu avec l'équation (4.6) :

$$E_2 = \rho\kappa^2 R \left(\ln \left(\frac{R}{a} \right) \right) \quad (4.93)$$

où a est un paramètre de coupure.

3.3 Quantité de mouvement et vitesse

A chacun de ces deux champs correspond une quantité de mouvement. Pour \vec{v}_2 , il se déduit comme nous l'avons vu de ce que :

$$\int \vec{\text{grad}}\phi \, d^3\vec{r} = 2\pi \times \pi R^2 \vec{n} \quad (4.94)$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface de l'anneau, de même sens que \vec{v}_2 , situé au centre de l'anneau. Soit donc :

$$\vec{P}_2 = \rho\kappa\pi R^2 \vec{n} \quad (4.95)$$

Pour \vec{v}_1 , les coordonnées de \vec{P}_1 , moments conjugués des coordonnées de \vec{U} , se déduisent de l'expression du Lagrangien :

$$P_{1,i} = \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial U_i} = \frac{U_i}{U_L^2} \frac{2\pi AR}{\sqrt{1 - U^2/U_L^2}} \quad (4.96)$$

L'hamiltonien, qui correspond à l'énergie de la déformation liée au champ de vitesse \vec{v}_1 , est donc :

$$E_1 = P_{1,i}U_i - \mathcal{L}_1 = \frac{2\pi AR}{\sqrt{1 - U^2/U_L^2}} \quad (4.97)$$

On constate qu'elle n'est pas égale à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie "potentielle", car cette dernière dépend de la vitesse. La vitesse se déduit donc de l'équation implicite :

$$U_i = \frac{d(E_1 + E_2)}{d(P_{1,i} + P_{2,i})} = \frac{d(E_1 + E_2)/dR}{d(P_{1,i} + P_{2,i})/dR} \quad (4.98)$$

soit :

$$\underbrace{2\rho\kappa\pi RU + \frac{U^2}{U_L^2} \frac{2\pi A}{\sqrt{1 - U^2/U_L^2}}}_{\sum_i \frac{d(P_{1,i} + P_{2,i})}{dR} \cdot U_i} = \rho\kappa^2 \left(\ln\left(\frac{R}{a}\right) + 1 \right) + \frac{2\pi A}{\sqrt{1 - U^2/U_L^2}} \quad (4.99)$$

ou encore :

$$2\rho\kappa\pi RU = \rho\kappa^2 \ln\left(\frac{R}{a'}\right) + 2\pi A \sqrt{1 - U^2/U_L^2} \quad (4.100)$$

où $a' = \frac{a}{e}$, ce qui ne constitue qu'une re-définition du paramètre de coupure.

3.4 Discussion finale

Commençons par résoudre l'équation pour $A = 0$ (vortex sans structure), ce qui correspond à la courbe bleue sur le graphique (4.8). Comme la fonction $\ln x/x$ est maximale pour $x = e$ où elle vaut $1/e$, si la vitesse est supérieure à :

$$U_* = \frac{\kappa}{2\pi a'e} = \frac{\kappa}{2\pi a} \quad (4.101)$$

il n'y a pas de solution pour R . Réciproquement, si l'on cherche à imposer $R < R_* = a'e = a$, la solution est instable, donnant une vitesse qui diminue quand R continue à diminuer.

Considérons maintenant $A \neq 0$. Si $U_L > U_*$, les choses ne changent pas énormément. Traitons le cas où la différence est faible entre ces deux vitesses. Alors, la vitesse maximale est également proche de U_L :

$$U = U_L(1 - \epsilon) \text{ et } 1 - U^2/U_L^2 \sim 2\epsilon \quad (4.102)$$

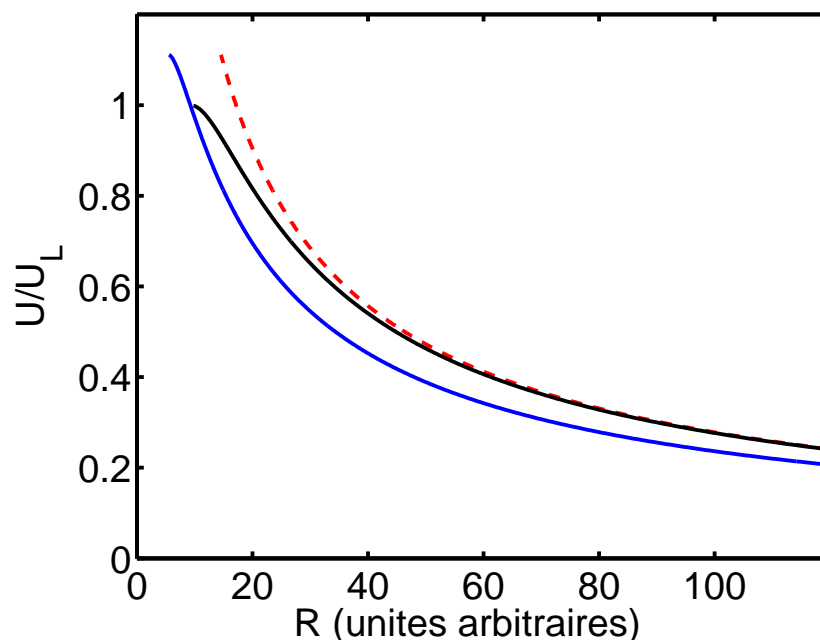


FIGURE 4.8 – On a représenté la vitesse U en fonction de son rayon R . Lorsque l'on néglige le terme correctif $2\pi A\sqrt{1 - U^2/U_L^2}$, on retrouve la courbe bleue, obtenue dans le modèle local classique. Lorsque l'on tient compte de la structure du vortex, on constate que le rayon est légèrement plus grand. La résolution de l'équation sans approximation conduit à la courbe noire, qui vient "mourir" sur la courbe bleue en une tangente horizontale. La courbe rouge est obtenue dans le cas d'une vitesse U petite, amenant à approcher le terme correctif par la valeur constante $2\pi A$ - qui ne correspond alors qu'à une renormalisation de la taille du cœur du vortex, comme on l'a vu dans le cas rectilinéaire.

Posons :

$$b = \frac{4\pi A}{\rho\kappa^2} \text{ et } a_* = a' \exp -b\sqrt{2\epsilon} \quad (4.103)$$

On a alors, en assimilant U à U_L dans le premier membre de (4.100) :

$$R = a_* e \text{ et } U_L = \frac{\kappa}{2\pi a_*} = U_* \exp b\sqrt{2\epsilon} \quad (4.104)$$

Donc :

$$R = \frac{\kappa}{2\pi U_L} \text{ et } 2\epsilon = \left(\frac{\ln(U_L/U_*)}{b} \right)^2 \quad (4.105)$$

Le rayon minimal est donc un peu plus petit que R_* et la vitesse un peu plus grande que U_* .

Par contre, quand $U_L < U_*$, l'équation (4.100) montre que le rayon minimal est le même que celui d'un vortex sans structure allant à la vitesse U_L , soit :

$$R = \frac{\kappa}{2\pi U_L} \quad (4.106)$$

Dans le cas traité par Berloff et Roberts, de l'hélium à pression de vapeur saturante, les deux vitesses U_L et U_* sont très proches et il est difficile de dire quel est le mécanisme de disparition de la singularité. Mais dès que la pression augmente, on est dans le cas $U_L < U_*$.

Chapitre 5

Conclusions et Ouverture

Au travers de cette thèse, dont nous rappelons ici le fil conducteur et les principaux résultats, nous avons tenté d’expliciter la relation entre les caractéristiques de la branche rotons du spectre et la structure microscopique. Nous nous sommes d’abord attelés à décrire un superfluide dense au voisinage d’une perturbation. Le “Modèle Linéaire”, ainsi formulé à l’aide d’une théorie perturbative au premier ordre, s’appuie donc uniquement sur les propriétés de la relation de dispersion au voisinage du creux de rotons pour décrire les oscillations de densité engendrées par cette perturbation - en court-circuitant la formulation d’une équation de Schrödinger pour le paramètre d’ordre ψ . Nous avons ensuite testé les conclusions de ce modèle sur l’exemple du vortex rectilinéaire en les comparant avec les résultats de différents modèles de superfluide, introduits par Pomeau et Rica d’une part, puis Berloff et Roberts, d’une autre, qui avaient eux à introduire des interactions “fictives”, sans lien avec le potentiel réel d’interactions dans un superfluide comme l’hélium.

Les résultats de notre “Modèle Linéaire”, malgré la restriction théorique de son domaine d’application, à savoir la région où l’amplitude des oscillations est faible, est en parfait accord avec les modèles de Gross-Pitaevskii modifiés, cités précédemment, ainsi que les résultats obtenus par les “expériences numériques” de Reatto et al. [58], Vitiello et al. [48] - et s’en trouve ainsi validé. Nous avons pu noter au passage que le modèle de Pomeau-Rica, malgré son apparente simplicité dans sa prise en compte de la localité à travers un champ moyen, s’est révélé être amplement suffisant pour s’approcher de ces résultats dérivant des premiers principes.

Par ailleurs, la comparaison met en lumière deux paramètres ajustables : l’amplitude A et la phase ϕ_0 . Une fois ces paramètres déterminés par un exemple comme le cas du vortex rectilinéaire, ils permettent d’en traiter d’autres, comme celui du vortex en anneau - qui s’écrit alors sans aucun paramètre ajustable.

De plus, notre “Modèle Linéaire” nous a permis d’aborder de façon crédible les problèmes difficiles, par exemple la dynamique du vortex en anneau. La structure de l’anneau devient instable avant même d’atteindre la vitesse de Landau, et nous avons esquissé une formulation analytique pour ce phénomène en exprimant la variation de la structure de l’anneau (à travers R) en fonction de U_L .

Une idée, qui n’a pas été exploitée durant cette thèse, mais qui a été soulevée, serait la perspective d’un nouveau type de vortex porteur d’une onde stationnaire

de fréquence spatiale k_0 (correspondant au minimum roton) sur l'axe z . On attend alors que le paramètre d'ordre selon les directions x et y soit de la forme $1 - \delta\psi$, où $\delta\psi$ est une onde évanescence. Des expériences menées en 1985 par Mathieu, Plaçais et Simon [36], [37], ont montré que, dans le cas d'une résonance second son dans une cavité carrée, la composante de friction mutuelle longitudinale (c'est-à-dire parallèle aux vortex) ne s'annule pas. On s'attend à ce que les vortex forment un ensemble de vortex parfaitement rectilignes selon la direction verticale - pourtant l'anomalie de cette composante nous montre que quelque chose n'est pas pris en compte dans cette modélisation. Des vortex porteurs d'une onde selon la direction verticale, brisant la symétrie de translation, pourraient effectivement être à l'origine de cette friction.

Par ailleurs, la disparition de l'anneau pour une vitesse proche de U_* s'apparente aux reconnections entre vortex rectilinéaires - puisque le vortex en anneau "se reconnecte avec lui-même". Nos travaux pourraient ainsi ouvrir la voie à un traitement semi-analytique de la reconnexion.

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, l'étude microscopique des vortex trouve sa justification dans l'exploration de la turbulence quantique. Si la théorie microscopique utilisant l'équation de Gross-Pitaevskii se révèle utile pour étudier les phénomènes de nucléation ou de reconnections, les simulations numériques impliquant un grand nombre de vortex, par exemple, restent trop gourmandes en ressources. De la même façon, si l'on cherche à se positionner loin d'une reconnexion vorticitaire afin de pouvoir mesurer ce qui est émis à grande distance de cette dernière, la résolution de l'équation de Gross-Pitaevskii modifiée atteint ses limites.

C'est pourquoi il est intéressant de se pencher sur le modèle mésoscopique de dynamique classique des vortex rectilinéaires, proposé par Schwarz [52], [50], [51], qui se situe à mi-chemin entre le modèle HVBK et l'approche microscopique. Ce modèle se généralise également à n'importe quelle température $T < T_c$.

La ligne de vortex est représentée par une courbe $\vec{s} = \vec{s}(\xi, t)$ où ξ est la longueur d'arc du vortex et t la variable temporelle. L'équation du mouvement pour \vec{s} est donnée par les forces de Magnus \vec{f}_M (cette dernière apparaît lorsqu'un objet animé d'une circulation de vitesse propre se meut dans un fluide en mouvement) et de la force de traînée \vec{f}_D (cette dernière provient du frottement mutuel entre les lignes de vortex superfluides et le fluide normal, à température différente de zéro). Ces forces une fois identifiées, l'équilibre du système est donné par :

$$\vec{f}_D + \vec{f}_M = \vec{0} \quad (5.1)$$

en supposant négligeable l'inertie de la ligne de vortex.

La correction linéaire sur l'énergie, équation (2.46) déterminée au Chapitre II, peut être considérée comme l'intégrale d'une force supplémentaire, qui traduirait l'interaction d'un point sur une ligne de vortex avec un autre situé sur une autre ligne. Cette interaction "point à point" serait la première composante de la force d'interactions entre tourbillons quantiques prenant en compte la structure microscopique de chaque ligne, puisque cette dernière ne peut pas être prise en compte dans la formulation de la vitesse auto-induite $\vec{v}_i(\vec{s})$, décrivant le mouvement de la ligne du vortex et donnée par la loi de Biot et Savart :

$$\vec{v}_i(\vec{s}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{(\vec{z} - \vec{s}) \times d\vec{z}}{|\vec{z} - \vec{s}|^3} \quad (5.2)$$

que l'on peut ainsi espérer améliorer indirectement à travers l'ajout de cette interaction supplémentaire.

En résumé, même si les problèmes que nous venons de soulever seraient certainement très ardues, nous avons l'impression d'avoir ouvert une voie d'attaque nouvelle, qui vaut la peine d'être explorée. Le caractère dense de l'hélium superfluide étant jusque là ignoré dans l'étude de son "hydrodynamique". Peut-être pourrions nous grâce à notre approche estimer ses effets.

Annexe A

Algorithme : Gauss-Siedel et Crank-Nicolson

Le principal problème dans la résolution de l'équation de Gross-Pitaevskii réside dans le calcul du laplacien, qui diverge très rapidement s'il n'est pas déterminé avec assez de précision. Cette divergence caractéristique d'une détermination discrétisée et directe n'est pas présente lors du calcul en transformée de Fourier, par exemple. L'équation est donc la suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{n^2}{r^2} \right) f(r, t) + |f(r, t)|^2 f(r, t) - E f(r, t)$$

On cherche la solution stationnaire de l'équation par une relaxation en temps imaginaire - c'est la raison pour laquelle on itère la résolution de l'équation à partir d'une fonction d'essai, jusqu'à ce que la dérivée temporelle soit nulle. Or, on va considérer l'inverse de l'équation, afin de faire converger la première étape.

En effet, la première étape consiste à déterminer uniquement le laplacien à un temps intermédiaire en utilisant la méthode de Crank-Nicolson [11], ce qui nous donne une nouvelle fonction f , à un temps $t + 1$. On résout simplement l'équation de la chaleur, qui ne peut converger que si $\frac{\partial f}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ ont même signe, ce qui n'est évidemment pas le cas ici. Mais comme on attend de la part de la dérivée temporelle que celle-ci tende lentement vers la valeur nulle, ce procédé n'altère pas le résultat final, à savoir l'obtention de la fonction d'onde stationnaire associée au vortex.

Après avoir discrétisé l'espace, on commence par écrire l'équation vérifiée par f dans le cadre de l'algorithme de Crank-Nicolson, où i désigne la i ème position sur la grille et t le nombre d'itération temporelle effectuée :

$$\frac{f(i, t+1) - f(i, t)}{dt} = \frac{D}{2(dr)^2} \left[\left(f(i+1, t+1) - f(i, t+1) + f(i-1, t+1) \right) + \left(f(i+1, t) - f(i, t) + f(i-1, t) \right) \right]$$

Le laplacien est donc calculé en prenant la moyenne arithmétique entre le laplacien discrétisé au temps t et celui au temps $t + 1$.

La fonction recherchée, à $t + 1$, apparaît donc dans les deux membres de l'équation. On réorganise l'équation afin de séparer les deux parties temporelles :

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} (1+2\alpha) & -\alpha & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\alpha & (1+2\alpha) & -\alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\alpha & (1+2\alpha) & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\alpha & (1+2\alpha) & -\alpha & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -\alpha & (1+2\alpha) & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & (1+2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1, t+1) \\ f(2, t+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(N, t+1) \end{pmatrix} \\
 = & \begin{pmatrix} (1-2\alpha) & \alpha & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha & (1-2\alpha) & \alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & (1-2\alpha) & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \alpha & (1-2\alpha) & \alpha & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \alpha & (1-2\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & (1-2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1, t) \\ f(2, t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(N, t) \end{pmatrix} \\
 = & \begin{pmatrix} (1-2\alpha) f(1, t) + \alpha f(2, t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \underbrace{(1-2\alpha) f(i, t) + \alpha (f(i-1, t) + f(i+1, t))}_{B(i)} \\ \vdots \\ \vdots \\ (1-2\alpha) f(N, t) + \alpha f(N-1, t) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Afin de résoudre rapidement ce système d'équations, on utilise la méthode de Gauss-Siedel. L'idée de cet algorithme consiste à remplacer une partie des termes au temps $t+1$, présent dans le second membre de l'équation, par leurs valeurs respectives à l'itération précédente notée (k) afin de déterminer les valeurs de $f(i, t+1)$ à l'itération $(k+1)$ - on arrête la boucle lorsque la somme du carré des erreurs cumulées est inférieure à une valeur fixée.

$$\begin{aligned}
 f^{(k+1)}(1, t+1) &= \frac{1}{1+2\alpha} \left[B(1) + \alpha \left(f^{(k)}(2, t+1) + \underbrace{0}_{\substack{\text{Condition au limite :} \\ \text{coeur du vortex}}} \right) \right] \\
 f^{(k+1)}(i, t+1) &= \frac{1}{1+2\alpha} [B(i) + \alpha (f^{(k+1)}(i-1, t+1) + f^{(k)}(i+1, t+1))] \\
 f^{(k+1)}(N, t+1) &= \frac{1}{1+2\alpha} \left[B(N) + \alpha \left(f^{(k+1)}(N-1, t+1) + \underbrace{1}_{\substack{\text{Condition au limite :} \\ \text{densité uniforme}}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Annexe B

Calcul de l'intégrale de Bessel

La méthode proposée par les *Numerical Recipes* n'est pas applicable : le produit des variables rr' atteint des valeurs bien trop élevées pour que l'approximation donnée soit encore valable.

On reprend l'idée de séparer l'approximation en deux parties, une pour l'argument $x < 3,75$ et une autre pour toutes valeurs supérieures et on se limite également à un développement de Taylor de l'ordre 9 en x^2 pour les petites valeurs et en $\frac{1}{x}$ pour les grandes valeurs.

Dans le cas où $x < 3,75$, on a :

$$I_i(x) = \sum_{n=1}^9 p_i^{(n)} \left(\frac{x}{3,75} \right)^{2(n-1)} \quad (\text{B.1})$$

avec :

$$p_0^{(n)} = [3,75^{2n-2}] \cdot [2^{2-2n}] \cdot \Gamma(n)^{-2} \quad (\text{B.2})$$

$$= \left(\frac{3,75^{2n-2}}{2^{2n-2} ((n-1)!)^2} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$p_1^{(n)} = [3,75^{2n-2}] \cdot [2^{1-2n}] \cdot \Gamma(n)^{-1} \cdot \Gamma(n+1)^{-1} \quad (\text{B.4})$$

$$= \left(\frac{3,75^{2n-2}}{2^{2n-1} n! (n-1)!} \right) \quad (\text{B.5})$$

Dans le cas où $x > 3,75$, on a :

$$I_i(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} \left(\sum_{n=1}^9 q_i^{(n)} \left(\frac{3,75}{x} \right)^{n-1} \right) \quad (\text{B.6})$$

avec :

$$q_0^{(n)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \cdot \left[\left(\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)} \right)^2 \frac{1}{120^{n-1}} \frac{1}{\Gamma(n)} \right] \quad (\text{B.7})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(2n-2)!^2}{15^n 2^{3n} ((n-1)!)^3} \quad (\text{B.8})$$

$$q_1^{(n)} = (2n-1) \cdot q_0^{(n)} (3-2n)^{-1} \quad (\text{B.9})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(2n-2)!^2}{15^n 2^{3n} (n!)^3} \cdot \frac{1-2n}{3-2n} \quad (\text{B.10})$$

Ces modifications assurent la convergence de l'intégrale de Bessel, une fois intégré le terme supplémentaire $e^{-A^2(r^2+r'^2)}$ dans cette dernière.

Bibliographie

- [1] D. Amit and E. P. Gross. Vortex Ring in a Bose Fluid. *Physical Review*, **145**(1) :130–136, May (1966).
- [2] A. W. Baggaley and C. F. Barenghi. Spectrum of turbulent Kelvin-waves cascade in superfluid helium. (2011).
- [3] I. L. Bekharevich and I. M. Khalatnikov. Phenomenological derivation of the equations of motion in He II. *Soviet Physics JETP-USSR*, **13** :643–646, (1961).
- [4] N. G. Berloff. Nonlocal Nonlinear Schrödinger Equations as Models of Superfluidity. *Journal of Low Temperature Physics*, **116**(5/6) :359–380, (1999).
- [5] N. G. Berloff. Roton Creation and Vortex Nucleation in Superfluids. *Physics Letters A*, **274** :69–74, September (2000).
- [6] N. G. Berloff. *Quantized Vortex Dynamics and Superfluid Turbulence*, volume **571** of *Lecture Notes in Physics*, chapter The Nonlinear Schrödinger Equation as a Model of Superfluidity. Springer, (2001).
- [7] N. G. Berloff and P. H. Roberts. Motions in a Bose-Condensate : VI Vortices in non-local model. **32** :5611–5625, (1999).
- [8] N. G. Berloff and P. H. Roberts. *Quantized Vortex Dynamics and Superfluid Turbulence*, volume **571** of *Lecture Notes in Physics*, chapter Vortices in Non-local Condensate Models of Superfluid Helium. Springer, (2001).
- [9] G. Boffetta, A. Celani, D. Dezzani, J. Laurie, and S. Nazarenko. Modeling Kelvin Waves Cascades in Superfluid Helium.
- [10] J. Bossy, J. V. Pearce, H. Schober, and H. R. Glyde. Excitations of nanoscale quantum liquids under pressure and the Bose glass phase. *Phys. Rev. B*, **78** :224507, (2008).
- [11] Laurent Chevillard. Notes - non publiées. July (2008).
- [12] C. Cohen-Tannoudji. Condensation de Bose-Einstein des gaz atomiques ultra froids : effets des interactions. Cours au Collège de France, (1998-1999).
- [13] F. Dalfovo. Structure of Vortices in Helium at zero temperature. *Physical Review B*, **46**(9) :5482–5488, September (1992).
- [14] R.J. Donnelly. *Quantized Vortices in Helium II*. Number 3 in Cambridge Studies in Low Temperature Physics. Cambridge University Press, (1991).
- [15] J. Dupont-Roc, M. Himbert, N. Pavlov, and J. Treiner. Inhomogeneous Liquid ^4He : A density Functional Approach with a Finite-Range Interaction. *Journal of Low Temperature Physics*, **81**(1/2) :31–44, (1990).

- [16] R.P. Feynman. *Progress in Low Temperature Physics*, volume **1**. North-Holland, (1955).
- [17] R.P. Feynman. Superfluidity and Superconductivity. *Reviews of Modern Physics*, **29**(2) :205–212, April (1957).
- [18] R.P. Feynman and M. Cohen. Energy Spectrum of the Excitations in Liquid Helium. *Physical Review*, **102**(5) :1189–1204, June (1956).
- [19] T. Frisch, Yves Pomeau, and Sergio Rica. Transition to Dissipation in a Model of Superflow. *Physical Review Letters*, **69**(11) :1644–1648, September (1992).
- [20] William I. Glaberson. Pressure Dependence of the Vortex-Core Parameter in He II. *Physics Letters A*, **138**(3) :183–184, (1972).
- [21] William I. Glaberson and Marvin Steingart. Temperature Dependence of the Vortex-Core Parameter in He II. *Physical Review Letters*, **26** :1423–1425, (1971).
- [22] E. P. Gross. Structure of a Quantized Vortex in Boson Systems. *Il Nuovo Cimento*, **20** :454–477, (1961).
- [23] Eugene P. Gross. Hydrodynamics of a Superfluid Condensate. *Journal of Mathematical Physics*, **4**(2) :195–270, February (1963).
- [24] H. E. Hall. The Rotation of Liquid Helium II. *Phil. Mag. Suppl.*, **9** :89–146, (1960).
- [25] H. E. Hall and W. F. Vinen. The Rotation of Liquid Helium II : II- The theory of mutual friction in uniformly rotating helium II. *Proceedings of the Royal Society London A*, **238** :215–234, (1954).
- [26] Woods ADB Henshaw DG. Modes of atomic motions in liquid helium by inelastic scattering of neutrons. *Physical Review*, **121**(5) :1266–1274, (1961).
- [27] R. N. Hills and P. H. Roberts. Superfluid mechanics for a high density of vortex lines. *Arch. Rat. Mach. Anal.*, **66** :43–71, (1977).
- [28] I. M. Khalatnikov. *An Introduction to the Theory Superfluidity*. Benjamin, (1965).
- [29] A. Kolmogorov. *Dokl. Acad. Nauk. USSR*, **30** :301, (1941).
- [30] Joel Koplik. *Quantized Vortex Dynamics and Superfluid Turbulence*, volume **571** of *Lecture Notes in Physics*, chapter Vortex Reconnection in Normal and Superfluids. Springer, (2001).
- [31] Joel Koplik and Herbert Levine. Vortex Reconnection in Superfluid Helium. *Physical Review Letters*, **71**(9) :1375–1378, August (1993).
- [32] E. Kozik and B. Svistunov. Kolmogorov and Kelvin-Waves Cascades of Superfluid Turbulence at T=0 What is Between ? (2007).
- [33] Landau. The theory of superfluidity of helium II. *J. Phys. USSR*, **5** :71, (1941).
- [34] M. Leadbeater, T. Winiecki, D. C. Samuels, C. F. Barenghi, and C. S. Adams. Sound Emission due to Superfluid Vortex Reconnections. *Physical Review Letters*, **86**(8) :1410–1413, February (2001).
- [35] A. J. Leggett. Superfluidity. *Review of Modern Physics*, **71**(2) :318–323, (1999).

- [36] P. Mathieu, B. Plaçais, and Y. Simon. Spatial distribution of vortices and anisotropy of mutual friction in rotating He II. *Physical Review B*, **29**(5) :2489–2496, February (1984).
- [37] P. Mathieu, B. Plaçais, and Y. Simon. Existe-t-il un troisième coefficient de friction mutuelle B" ? *J. Physique Lett.*, **46** :233–240, (1985).
- [38] J. Maurer and P. Tabeling. Local investigation of superfluid turbulence. *Euro-Physics Letters*, **43**(1), May (1998).
- [39] C. Nore, M. Abid, and M. E. Brachet. Decaying Kolmogorov Turbulence in a model of Superflow. *Phys. Fluids*, **9**(9) :2644–2669, September (1997).
- [40] C. Nore, M. E. Brachet, and S. Fauve. Numerical study of hydrodynamics using the nonlinear Schrödinger equation. *Physica D*, **65** :154–162, (1993).
- [41] P. Nozières. Is the Roton in Superfluid ^4He the Ghost of a Bragg Spot ? *Journal of Low Temperature Physics*, **137**(1) :45–67, (2004).
- [42] M. S. Paoletti, M. E. Fisher, K. R. Sreenivasan, and D. P. Lathrop. Velocity Statistics Distinguish Quantum Turbulence from Classical Turbulence. *Physical Review Letters*, **101**(15), September (2008).
- [43] Lev Pitaevskii. Vortex Lines In An Imperfect Bose Gas. *Soviet Physics JETP-USSR*, **13**(2), (1961).
- [44] Lev Pitaevskii and Sandro Stringari. *Bose-Einstein Condensation*. Number 116 in International Series of Monographs on Physics. Oxford Science Publications, (2003).
- [45] Yves Pomeau and Sergio Rica. Model of Superflow with Rotons. *Physical Review Letters*, **71**(2) :247–250, July (1993).
- [46] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical recipes in C*. Cambridge University Press, second edition, (1988).
- [47] J. Ruvalds and T. Regge. *Quantum Liquids*. North-Holland Publishing Company, (1978).
- [48] M. Sadd, G. V. Chester, and L. Reatto. Structure of a Vortex in Superfluid Helium ^4He . *Physical Review Letters*, **79**(13) :2490–2493, September (1997).
- [49] J. Salort, B. Chabaud, E. Leveque, and P.E. Roche. Energy cascade and the four-fifths law in superfluid turbulence. *EPL*, **97** :34006, (2012).
- [50] K. W. Schwarz. Generation of Superfluid Turbulence Deduced from Simple Dynamical Rules. *Physical Review Letters*, **49**(4) :283–285, July (1982).
- [51] K. W. Schwarz. Three-dimensional vortex dynamics in superfluid ^4He : Homogeneous superfluid turbulence. *Physical Review B*, **38**(4) :2398–2417, August (1988).
- [52] K.W. Schwarz. Three-dimensional vortex dynamics in superfluid ^4He : Line-line and line-boundary interactions. *Physical Review B*, **31**(9) :5782–5804, May (1985).
- [53] B. V. Svistunov. Superfluid turbulence in the low-temperature limit. *Physical Review B*, **52**(5) :3647–3653, August (1995).

- [54] S. Villerot, B. Castaing, and L. Chevillard. Static spectroscopy of a dense superfluid. *J. Low Temp. Phys.*, **169**(1-2) :1–14, (2012).
- [55] W. F. Vinen. How is turbulent energy dissipated in a superfluid? *Journal of Physics : Condensed Matter*, **17** :3231–3238, (2005).
- [56] W. F. Vinen. An Introduction to Quantum Turbulence. *Journal of Low Temperature Physics*, **145**(1-4) :7–24, November (2006).
- [57] W.F. Vinen, M. Tsubota, and A. Mitani. Kelvin-Wave Cascade on a Vortex in Superfluid 4He at a Very Low Temperature. *Physical Review Letters*, **91**(13), September (2003).
- [58] S. A. Vitiello, L. Reatto, G. V. Chester, and M. H. Kalos. Vortex Line in Superfluid 4He : A Variational Monte Carlo Calculation. *Physical Review B*, **54**(2) :1205–1212, July (1996).

