



HAL
open science

Vers une stratégie robuste et efficace pour le contrôle des calculs par éléments finis en ingénierie mécanique

Florent Pled

► **To cite this version:**

Florent Pled. Vers une stratégie robuste et efficace pour le contrôle des calculs par éléments finis en ingénierie mécanique. Autre. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2012. Français. NNT : 2012DENS0083 . tel-00776633

HAL Id: tel-00776633

<https://theses.hal.science/tel-00776633>

Submitted on 20 Mar 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

présentée par

Florent PLED

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse

**Vers une stratégie robuste et efficace pour le
contrôle des calculs par éléments finis en ingénierie
mécanique**

Soutenue à Cachan le 13 décembre 2012 devant le jury composé de :

Nicolas Moës	Professeur, École Centrale de Nantes	Président
Pedro Díez	Professeur, Universitat Politècnica de Catalunya	Rapporteur
Martin Vohralík	Directeur de recherche, INRIA Paris-Rocquencourt	Rapporteur
Albert Alarcón	Ingénieur de recherche, LaMSID (EDF R&D)	Examineur
Erwin Stein	Professeur, Leibniz Universität Hannover	Examineur
Ludovic Chamoin	Maître de conférence, ENS de Cachan	Examineur
Pierre Ladevèze	Professeur, ENS de Cachan	Directeur de thèse

Ces quatre années de formation à l'ENS Cachan et ces trois années de thèse au LMT représentent une formidable aventure humaine, riche en événements et pleine de rencontres enrichissantes sur le plan scientifique.

Je tiens tout d'abord à remercier l'ensemble des membres de mon jury pour avoir eu la gentillesse de m'accorder un peu de leur temps, si précieux à l'approche des fêtes de fin d'année : Nicolas Moës, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury ; Pedro Díez et Martin Vohralík, pour leur relecture attentive et minutieuse, leur regard critique et leurs commentaires constructifs ; Erwin Stein, dont les questions parfois perfides, mais non moins pertinentes, ont égayé ma curiosité et ma soif de découverte ; enfin, Albert Alarcón, pour avoir apporté la dimension industrielle et la vision pratique lors ma soutenance.

J'adresse de sincères remerciements à mon directeur de thèse, Pierre Ladevèze, non seulement pour m'avoir accordé sa confiance sur un sujet aussi passionnant et m'avoir guidé sur cette route semée d'embûches, mais aussi pour m'avoir transmis son amour de la recherche. Je tiens également à témoigner toute ma reconnaissance et mon amitié à Ludovic, une rencontre inestimable à mes yeux. Au-delà de l'encadrant exceptionnel, j'ai découvert un véritable ami aux qualités humaines et morales remarquables.

Une pensée toute particulière aux piliers de « l'Équipe Erreur » : Éric et Ludo, pour leur joie de vivre débordante et leur grand cœur ; Valentine et Pierrounet, pour leur admirable gentillesse et toutes ces parties endiablées de « Patran Sliding Contest » ; Bibou, Christian, Gus, Julien (Long shoes) et Sylvain (La graine), pour tous ces moments inoubliables passés à vos côtés ; enfin, Frisou, pour ses soudaines attentions sous la barre des 45° !

Un gros pincement au cœur pour Manouchka, Karin, Camillou, Max, Nico, Pierrounet et PAB, qui ont partagé mes longues journées au Centre de Calcul (CdC), sans oublier Mr Zèbre et Mr Snake !

Un grand merci à toute l'équipe du CdC : Frisou, Arnaud (et son cluster), Pierre et Philippe, dont la disponibilité et la gentillesse font du CdC un lieu unique d'échanges et de convivialité ; Felipe, Hugal et Raphaël, pour leur aide indispensable et le temps consacré à répondre à toutes mes questions d'ordre numérique !

Un petit clin d'oeil à tous les collègues et amis : Announette, Anita, Anne-Charlotte, Adrien, Alex, Amine, Andréa, Bastoune, Benito, Boubou, Chris, Dri, Floflo, Geoffrey, Guillaume (4G), Jean-Luc, Jérémy, Jorge, Kassio, Loulou, Manu, Omar, PAG, Panpan, PE, Peewee, Raül, Renaud, Rouchy, Xavier, Stall, Zacouille, ... avec une mention spéciale à Federica, Éric, François, Luc et Pierrounet pour leurs conseils avisés lors de la préparation de ma soutenance, et une délicate attention à Danielle et aux deux Christine pour leur gentillesse et leur incroyable dévouement.

Enfin, je tiens à remercier chaleureusement ma famille : Mam et Papou pour leur présence touchante le jour de ma soutenance et leur soutien inconditionnel durant toutes ces années ; Vigou, Aurel, Aurore, Michou, Michel, Mamie Ray et Mamixie pour leurs nombreux messages d'encouragement. Je ne saurais finir sans une douce pensée à ma Tounette chérie, petite crevette pleine de tendresse et d'amour à l'égard de son homard !

Résumé

Ce travail de recherche vise à contribuer au développement de nouveaux outils d'estimation d'erreur globale et locale en ingénierie mécanique. Les estimateurs d'erreur globale étudiés reposent sur le concept d'erreur en relation de comportement à travers des techniques spécifiques de construction de champs admissibles, assurant l'aspect conservatif ou garanti de l'estimation. Une nouvelle méthode de construction de champs admissibles est mise en place et comparée à deux autres méthodes concurrentes, en matière de précision, coût de calcul et facilité d'implémentation dans les codes éléments finis. Une amélioration de cette nouvelle méthode hybride fondée sur une minimisation locale de l'énergie complémentaire est également proposée. Celle-ci conduit à l'introduction et à l'élaboration de critères géométriques et énergétiques judicieux, permettant un choix approprié des régions à sélectionner pour améliorer localement la qualité des champs admissibles. Dans le cadre des estimateurs d'erreur locale basés sur l'utilisation conjointe des outils d'extraction et des estimateurs d'erreur globale, deux nouvelles techniques d'encadrement de l'erreur en quantité d'intérêt sont proposées. Celles-ci sont basées sur le principe de Saint-Venant à travers l'emploi de propriétés spécifiques d'homothétie, afin d'améliorer la précision des bornes d'erreur locale obtenues à partir de la technique d'encadrement classique fondée sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Les diverses études comparatives sont menées dans le cadre des problèmes d'élasticité linéaire en quasi-statique. Le comportement des différents estimateurs d'erreur est illustré et discuté sur des exemples numériques tirés d'applications industrielles. Les travaux réalisés constituent des éléments de réponse à la problématique de la vérification dans un contexte industriel.

Mots clés : Vérification, Estimation d'erreur a posteriori, Méthode des éléments finis, Erreur en relation de comportement, Champs admissibles, Estimation d'erreur en quantité d'intérêt, Bornes d'erreur garanties, Techniques non-intrusives, Principe de Saint-Venant

Abstract

This research work aims at contributing to the development of innovative global and goal-oriented error estimation tools applied to Computational Mechanics. The global error estimators considered rely on the concept of constitutive relation error through specific techniques for constructing admissible fields ensuring the recovery of strict and high-quality error estimates. A new hybrid method for constructing admissible stress fields is set up and compared to two other techniques with respect to three different criteria, namely the quality of associated error estimators, the computational cost and the simplicity of practical implementation into finite element codes. An enhanced version of this new technique based on local minimization of the complementary energy is also proposed. Judicious geometric and energetic criteria are introduced to select the relevant zones for optimizing the quality of the admissible fields locally. In the context of goal-oriented error estimation based on the use of both extraction techniques and global error estimators, two new improved bounding techniques are proposed. They lean on Saint-Venant's principle through specific homotheticity properties in order to obtain guaranteed and relevant bounds of better quality than with the classical bounding technique based on the Cauchy-Schwarz inequality. The various comparative studies are conducted on linear elasticity problems under quasi-static loading conditions. The behaviour of the different error estimators is illustrated and discussed through several numerical experiments carried out on industrial cases. The associated results may open up opportunities and help broaden the field of model verification for both academic research and industrial applications.

Keywords : Verification, A posteriori error estimation, Finite element method, Constitutive relation error, Admissible fields, Goal-oriented error estimation, Guaranteed error bounds, Non-intrusive techniques, Saint-Venant's principle

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	xiii
Introduction	1
1 État de l'art sur l'estimation de la qualité d'un calcul par éléments finis	7
1 Problème de référence, résolution éléments finis et erreur de discrétisation	9
1.1 Problème continu de référence	9
1.2 Problème discrétisé approché et résolution éléments finis	12
1.3 Propriétés de la solution éléments finis	13
1.4 Définition et estimation de l'erreur de discrétisation	14
2 Estimation de l'erreur globale	19
2.1 Estimateurs basés sur le lissage des contraintes	20
2.2 Estimateurs basés sur les résidus d'équilibre	27
2.3 Estimateurs basés sur la non-vérification de la relation de comportement	39
3 Estimation de l'erreur locale	44
3.1 Estimateurs d'erreur en pollution	44
3.2 Encadrement heuristique direct de l'erreur locale	47
3.3 Estimateurs utilisant les techniques d'extraction	48
4 Bilan	64
2 Méthodes de construction de champs admissibles	67
1 Technique EET d'équilibrage par élément - méthode standard	70
1.1 Principe	70
1.2 Construction des densités d'effort équilibrées	71
1.3 Construction d'un champ de contrainte admissible à l'échelle de l'élément	74
1.4 Implémentation numérique	78

2	Technique SPET d'équilibrage par patch d'éléments - méthode « flux-free »	80
2.1	Définition des problèmes locaux auto-équilibrés par patch d'éléments	80
2.2	Construction d'un champ de contrainte admissible et d'un estimateur associé	83
2.3	Variantes	84
2.4	Implémentation numérique	86
3	Technique EESPT d'équilibrage par élément et patch d'éléments - méthode hybride	87
3.1	Principe	87
3.2	Définition des problèmes locaux par patch d'éléments	88
3.3	Existence et unicité des solutions associées aux problèmes locaux	90
3.4	Implémentation numérique	93
4	Illustrations numériques sur des exemples industriels	96
4.1	Capteur d'effort 2D	98
4.2	Structure fissurée 2D	103
4.3	Plaque trouée 3D	109
4.4	Tête de réacteur nucléaire 3D	113
4.5	Manchon d'hélicoptère 3D	119
5	Bilan	123
3	Amélioration dans la construction de champs admissibles avec minimisation locale de l'énergie complémentaire	125
1	Amélioration de la construction des densités d'effort équilibrées	128
1.1	Principe	128
1.2	Détermination des densités d'effort optimisées	129
2	Critères de sélection employés dans la procédure d'optimisation	132
2.1	Critères géométriques	133
2.2	Critère énergétique	134
3	Implémentation numérique	134
3.1	Discrétisation des densités d'effort	134
3.2	Résolution numérique	135
4	Illustrations numériques sur des exemples industriels	136
4.1	Capteur d'effort 2D	137
4.2	Structure fissurée 2D	141
4.3	Plaque trouée 3D	144
5	Bilan	151
4	Nouvelles techniques d'encadrement pour l'estimation d'erreur locale	153
1	Technique d'encadrement classique	157
1.1	Résultat fondamental	157

1.2	Bornes d'erreur locale	157
2	Première amélioration de la technique d'encadrement	158
2.1	Définitions et préliminaires	158
2.2	Principe général	162
2.3	Inégalité fondamentale	164
2.4	Obtention des nouvelles bornes d'erreur locale	165
3	Seconde amélioration de la technique d'encadrement	168
3.1	Principe général	168
3.2	Inégalité fondamentale	171
3.3	Obtention des nouvelles bornes d'erreur locale	172
4	Illustrations numériques	177
4.1	Présentation de la structure fissurée 2D et des quantités d'intérêt étudiées	178
4.2	Quantité d'intérêt I_1 : valeur moyenne d'un champ défini sur une zone locale	184
4.3	Quantité d'intérêt I_2 : valeur ponctuelle d'un champ	188
4.4	Quantité d'intérêt I_3 : valeur extraite d'un champ	192
5	Bilan	196
Conclusion		197
A Écriture du problème adjoint associé à un problème d'élasticité linéaire		201
B Démonstration des inégalités fondamentales		203
1	Première inégalité fondamentale	203
2	Seconde inégalité fondamentale	207
C Expression de la constante de Steklov h pour différents domaines de forme géométrique simple		209
D Détermination analytique de la constante k pour des domaines de formes circulaire et sphérique		211
E Détermination des fonctions de Green et illustration dans le cadre de l'élasticité linéaire en 2D et 3D		215
1	Détermination des fonctions de Green	215
2	Expression de quelques fonctions de Green dans le cadre des problèmes d'élasticité linéaire en 2D et 3D	218
2.1	Élasticité linéaire en 2D	218
2.2	Élasticité linéaire en 3D	222

F	Détermination des facteurs d'intensité de contraintes	227
1	Notion de facteur d'intensité de contraintes	227
2	Détermination des facteurs d'intensité de contraintes	228
2.1	Méthodes locales	229
2.2	Méthodes globales	230
G	Validation numérique de la technique d'extraction des facteurs d'intensité de contraintes	235
1	Modèle 2D de plaque fissurée	235
2	Influence de la discrétisation éléments finis, de la taille et de la position du domaine d'extraction	239
2.1	Facteur d'intensité de contraintes K_I pour le problème en mode I pur	239
2.2	Facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} pour le problème en mode mixte I et II	241
H	Paramètres de discrétisation éléments finis utilisés dans les exemples numériques	245
	Bibliographie	247

Table des figures

1.1	Représentation de la structure et de son environnement.	9
1.2	Représentation du patch Ω_i associé au nœud sommet i	31
1.3	Représentation des éléments $E \in \mathcal{E}_i^{\mathcal{I}}$ et des bords $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}$ connectés au nœud sommet $i \in \mathcal{I}$	32
1.4	Interprétation géométrique des propriétés liées à l'erreur en relation de comportement.	42
2.1	Représentation des degrés de liberté libres et bloqués sur le patch Ω_i pour un nœud sommet intérieur $i \in \Omega$ (a) et un nœud sommet de frontière $i \in \partial\Omega$ (b).	95
2.2	Modèle 2D de capteur d'effort : géométrie et conditions aux li- mites (a), et maillage éléments finis (b).	98
2.3	Cartes du champ de déplacement éléments finis \underline{u}_h (a) et du champ de contrainte éléments finis σ_h (b).	99
2.4	Cartes des champs de contrainte admissibles $\hat{\sigma}_h$ obtenus à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c), avec zoom sur la région la plus sollicitée.	99
2.5	Cartes des contributions élémentaires (au carré) à l'erreur vraie e avec zoom sur la région la plus sollicitée.	101
2.6	Cartes des contributions élémentaires (au carré) à l'erreur estimée θ obtenues à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c), avec zoom sur la région la plus sollicitée.	101
2.7	Carte des indices d'efficacité locaux η_E calculés à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c).	102
2.8	Modèle 2D de structure fissurée : géométrie et conditions aux li- mites (a), et maillage éléments finis (b).	104
2.9	Cartes du champ de déplacement éléments finis \underline{u}_h (a) et (c), et du champ de contrainte éléments finis σ_h (b) et (d), pour $p = 1$ et $p = 2$, respectivement.	104
2.10	Cartes des champs de contrainte admissibles $\hat{\sigma}_h$ obtenus pour $p = 1$ à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c), et pour $p = 2$ à partir des méthodes EET (d), SPET (e) et EESPT (f), avec zoom sur la pointe de fissure.	105

2.11	Cartes des contributions élémentaires (au carré) à la densité d'erreur vraie e (a) et (b) pour $p = 1$ et $p = 2$, respectivement, avec zoom sur la pointe de fissure.	107
2.12	Cartes des contributions élémentaires (au carré) à la densité d'erreur estimée θ obtenues pour $p = 1$ à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c) et pour $p = 2$ à partir des méthodes EET (d), SPET (e) et EESPT (f), avec zoom sur la pointe de fissure.	107
2.13	Carte des indices d'efficacité locaux η_E calculés à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c) dans le cas $p = 1$	108
2.14	Modèle 3D de plaque trouée : géométrie et conditions aux limites (a), et maillage éléments finis (b). Les plans orthogonaux bleus ciel représentent des conditions de symétrie.	110
2.15	Cartes du champ de déplacement éléments finis \underline{u}_h (a), et du champ de contrainte éléments finis σ_h (b).	110
2.16	Cartes des champs de contrainte admissibles $\hat{\sigma}_h$ obtenus à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c).	111
2.17	Cartes des contributions élémentaires pertinentes (au carré) à la densité d'erreur vraie e	112
2.18	Cartes des contributions élémentaires pertinentes (au carré) à la densité d'erreur estimée θ obtenues à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c).	112
2.19	Modèle 3D de tête de réacteur nucléaire : géométrie et conditions aux limites (a), et maillage éléments finis (b). Les plans orthogonaux bleus ciel représentent des conditions de symétrie.	114
2.20	Cartes du champ de déplacement éléments finis \underline{u}_h (a) et du champ de contrainte éléments finis σ_h (b) sous différentes vues.	115
2.21	Cartes des champs de contrainte admissibles $\hat{\sigma}_h$ obtenus à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c) sous différentes vues.	116
2.22	Cartes des contributions élémentaires pertinentes (au carré) à la densité d'erreur vraie e sous différentes vues.	117
2.23	Cartes des contributions élémentaires pertinentes (au carré) à la densité d'erreur estimée θ obtenues à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c) sous différentes vues.	118
2.24	Modèle 3D de manchon d'hélicoptère : géométrie et conditions aux limites (a), et maillage éléments finis (b). Les surfaces oranges représentent des conditions en déplacement homogènes (encastrement).	119
2.25	Cartes du champ de déplacement éléments finis \underline{u}_h (a) et du champ de contrainte éléments finis σ_h (b).	120
2.26	Cartes des champs de contrainte admissibles $\hat{\sigma}_h$ obtenus à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c).	120
2.27	Cartes des contributions élémentaires pertinentes (au carré) à la densité d'erreur vraie e	121

2.28	Cartes des contributions élémentaires pertinentes (au carré) à la densité d'erreur estimée θ obtenues à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c).	122
3.1	Représentation des critères géométriques intervenant dans la procédure d'optimisation : (a) rapport entre les rayons des cercles inscrit $r_E^{C_i}$ et circonscrit $r_E^{C_c}$ associés à l'élément E et (b) rapport entre les longueurs minimale h_Γ^{\min} et maximale h_Γ^{\max} des bords Γ associées à l'élément E	133
3.2	Cartes du champ de contrainte éléments finis σ_h (a) et des champs de contrainte admissibles $\hat{\sigma}_h$ obtenus à partir des procédures de construction classiques associées aux méthodes EET (b) et EESPT (c), et de la procédure de construction améliorée avec $\Omega_o = \Omega$ (d).	137
3.3	Cartes des contributions élémentaires (au carré) à l'erreur vraie e (a) et à l'erreur estimée θ obtenues à partir des procédures de construction classiques associées aux méthodes EET (b) et EESPT (c), et de la procédure de construction améliorée avec $\Omega_o = \Omega$ (d).	138
3.4	Évolution de l'indice d'efficacité η et du temps CPU normalisé t obtenus à partir des méthodes EET et EESPT en fonction des critères géométriques ε_d^r (a), ε_d^h (c) et du critère énergétique ε_d^θ (e), et en fonction du nombre d'éléments N_e^{opt} correspondant (b), (d) et (f) intervenant dans la procédure d'optimisation.	139
3.5	Évolution du rapport entre le gain en indice d'efficacité g_η et la perte en temps CPU normalisé p_t pour les méthodes EET et EESPT en fonction des critères géométriques ε_d^r (a), ε_d^h (c) et du critère énergétique ε_d^θ (e), et en fonction du nombre d'éléments N_e^{opt} correspondant (b), (d) et (f) intervenant dans la procédure d'optimisation.	142
3.6	Cartes du champ de contrainte éléments finis σ_h (a) et des champs de contrainte admissibles $\hat{\sigma}_h$ obtenus à partir des procédures de construction classiques associées aux méthodes EET (b) et EESPT (c), et de la procédure de construction améliorée avec $\Omega_o = \Omega$ (d).	143
3.7	Cartes des contributions élémentaires (au carré) à la densité d'erreur vraie e (a) et à celle d'erreur estimée θ obtenues à partir des procédures de construction classiques associées aux méthodes EET (b) et EESPT (c), et de la procédure de construction améliorée avec $\Omega_o = \Omega$ (d).	144
3.8	Évolution de l'indice d'efficacité η et du temps CPU normalisé t obtenus à partir des méthodes EET et EESPT en fonction des critères géométriques ε_d^r (a), ε_d^h (c) et du critère énergétique ε_d^θ (e), et en fonction du nombre d'éléments N_e^{opt} correspondant (b), (d) et (f) intervenant dans la procédure d'optimisation.	145

3.9	Évolution du rapport entre le gain en indice d'efficacité g_η et la perte en temps CPU normalisé p_t pour les méthodes EET et EESPT en fonction des critères géométriques ε_d^r (a), ε_d^h (c) et du critère énergétique ε_d^θ (e), et en fonction du nombre d'éléments N_e^{opt} correspondant (b), (d) et (f) intervenant dans la procédure d'optimisation.	146
3.10	Modèle 3D de plaque trouée : géométrie et conditions aux limites (a), et maillage éléments finis (b). Les plans orthogonaux bleus ciel représentent des conditions de symétrie.	147
3.11	Cartes du champ de contrainte éléments finis σ_h (a) et des champs de contrainte admissibles $\hat{\sigma}_h$ obtenus à partir des procédures de construction classiques associées aux méthodes EET (b) et EESPT (c), et de la procédure de construction améliorée avec $\Omega_o = \Omega$ (d).	147
3.12	Cartes des contributions élémentaires (au carré) à la densité d'erreur vraie e (a) et à celle d'erreur estimée θ obtenues à partir des procédures de construction classiques associées aux méthodes EET (b) et EESPT (c), et de la procédure de construction améliorée avec $\Omega_o = \Omega$ (d).	148
3.13	Évolution de l'indice d'efficacité η et du temps CPU normalisé t obtenus à partir des méthodes EET et EESPT en fonction des critères géométriques ε_d^r (a), ε_d^h (c) et du critère énergétique ε_d^θ (e), et en fonction du nombre d'éléments N_e^{opt} correspondant (b), (d) et (f) intervenant dans la procédure d'optimisation.	149
3.14	Évolution du rapport entre le gain en indice d'efficacité g_η et la perte en temps CPU normalisé p_t pour les méthodes EET et EESPT en fonction des critères géométriques ε_d^r (a), ε_d^h (c) et du critère énergétique ε_d^θ (e), et en fonction du nombre d'éléments N_e^{opt} correspondant (b), (d) et (f) intervenant dans la procédure d'optimisation.	150
4.1	Représentation schématique des configurations où la technique d'encadrement classique fournit des bornes grossières (a) et pertinentes (b).	159
4.2	Exemples de domaines homothétiques rectangulaires (a) et circulaires (b) en dimension 2.	160
4.3	Position de l'élément E (a) et du point \underline{P} (b) dans le maillage élément finis Ω_h définissant les zones d'intérêt des quantités locales I_1 et I_2 , respectivement.	179
4.4	Définition de la zone d'intérêt ponctuelle ω , des sous-régions Ω_1^{PUM} et Ω_2^{PUM} dans la région enrichie Ω^{PUM} pour la quantité d'intérêt I_2 , avec une rangée (a) ou deux rangées (b) de nœuds enrichis autour du point d'intérêt \underline{P}	182
4.5	Définition de la couronne d'extraction Ω_c pour la quantité d'intérêt I_3	184
4.6	Cartes du champ de déplacement éléments finis \tilde{u}_h (a), du champ de contrainte éléments finis $\tilde{\sigma}_h$ (b) et du champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ (c) associés au problème adjoint pour la quantité d'intérêt I_1	185

4.7	Cartes des contributions élémentaires (au carré) à l'erreur estimée $\theta = e_{\text{rdc},\Omega}$ associée au problème de référence (a) et à celle $\tilde{\theta} = \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega}$ associée au problème adjoint (b) pour la quantité d'intérêt I_1 , avec zooms sur la pointe de fissure pour le problème de référence (a) et sur la zone d'intérêt pour le problème adjoint (b).	186
4.8	Définition des sous-domaines ω_λ et $\omega_{\bar{\lambda}}$ intervenant dans la première amélioration (a) et du sous-domaine $\omega_{\bar{\lambda}_{\text{opt}}}$ intervenant dans la seconde amélioration (b) pour la quantité d'intérêt I_1	187
4.9	Évolution des bornes inférieure et supérieure normalisées de I_{ex} pour la quantité locale I_1 , obtenues à partir des techniques d'encadrement classique et améliorées, en fonction du nombre d'éléments \tilde{N}_e associé à la discrétisation du problème adjoint.	187
4.10	Évolution des nouvelles valeurs approchées normalisées $(I_h + I_{hh})/I_{ex}$ et $(I_h + I_{hh} + I_{hhh,\lambda})/I_{ex}$ de la quantité locale I_1 en fonction du nombre d'éléments \tilde{N}_e associé à la discrétisation du problème adjoint, et comparaison à ses valeurs normalisées exacte 1 et approchée I_h/I_{ex}	188
4.11	Évolution des bornes inférieure et supérieure normalisées $(\tilde{\xi}_{\text{inf}}, \tilde{\xi}_{\text{sup}})$ de I_{ex} pour la quantité locale I_2 , obtenues à partir de la technique d'encadrement classique couplée aux techniques « handbook », en fonction du nombre de nœuds enrichis.	189
4.12	Cartes du champ de déplacement éléments finis résiduel \tilde{u}_h^{res} (a) et (d), du champ de contrainte éléments finis résiduel $\tilde{\sigma}_h^{\text{res}}$ (b) et (e), et du champ de contrainte admissible résiduel $\hat{\tilde{\sigma}}_h^{\text{res}}$ (c) et (f) associés au problème adjoint résiduel pour la quantité d'intérêt I_2 , avec une rangée et deux rangées de nœuds enrichis, respectivement.	190
4.13	Cartes des contributions élémentaires (au carré) à l'erreur estimée $\tilde{\theta} = \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega}$ associée au problème adjoint (résiduel) pour la quantité d'intérêt I_2 , avec une rangée (a) et deux rangées (b) de nœuds enrichis, avec zoom sur la région enrichie Ω^{PUM}	190
4.14	Définition des sous-domaines ω_λ et $\omega_{\bar{\lambda}}$ intervenant dans la première amélioration (a) et du sous-domaine $\omega_{\bar{\lambda}_{\text{opt}}}$ intervenant dans la seconde amélioration (b) pour la quantité d'intérêt I_2 , avec une seule rangée de nœuds enrichis.	191
4.15	Définition des sous-domaines ω_λ et $\omega_{\bar{\lambda}}$ intervenant dans la première amélioration (a) et du sous-domaine $\omega_{\bar{\lambda}_{\text{opt}}}$ intervenant dans la seconde amélioration (b) pour la quantité d'intérêt I_2 , avec deux rangées de nœuds enrichis.	191
4.16	Cartes du champ de déplacement éléments finis \tilde{u}_h (a), du champ de contrainte éléments finis $\tilde{\sigma}_h$ (b) et du champ de contrainte admissible $\hat{\tilde{\sigma}}_h$ (c) associés au problème adjoint pour la quantité d'intérêt I_3	193
4.17	Cartes des contributions élémentaires (au carré) à l'erreur estimée $\tilde{\theta} = \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega}$ associée au problème adjoint pour la quantité d'intérêt I_3 , avec zoom sur la couronne d'extraction Ω_c	193

4.18	Définition des sous-domaines ω_λ et $\omega_{\tilde{\lambda}}$ intervenant dans le première amélioration (a) et du sous-domaine $\omega_{\tilde{\lambda}_{\text{opt}}}$ intervenant dans la seconde amélioration (b) pour la quantité d'intérêt I_3	194
4.19	Évolution des bornes inférieure et supérieure normalisées de I_{ex} pour la quantité locale I_3 , obtenues à partir des techniques d'encadrement classique et améliorées, en fonction du nombre d'éléments \tilde{N}_e associé à la discrétisation du problème adjoint.	195
4.20	Évolution des nouvelles valeurs approchées normalisées $(I_h + I_{hh})/I_{ex}$ et $(I_h + I_{hh} + I_{hhh,\lambda})/I_{ex}$ de la quantité locale I_3 en fonction du nombre d'éléments \tilde{N}_e associé à la discrétisation du problème adjoint, et comparaison à ses valeurs normalisées exacte 1 et approchée I_h/I_{ex}	195
E.1	Répartition spatiale des composantes de la fonction de Green correspondant à la solution handbook $(\tilde{u}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}^{\text{hand}})$ associée à un effort ponctuel $\tilde{f}_\Sigma = \delta(\underline{Q})\underline{x}$ appliqué au point \underline{Q} dans un milieu infini en dimension 2, sous l'hypothèse des contraintes planes.	220
E.2	Répartition spatiale des composantes de la fonction de Green correspondant à la solution handbook $(\tilde{u}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}^{\text{hand}})$ associée à une précontrainte ponctuelle $\tilde{\sigma}_\Sigma = \delta(\underline{Q})\underline{x} \otimes \underline{x}$ appliquée au point \underline{Q} dans un milieu infini en dimension 2, sous l'hypothèse des contraintes planes.	222
E.3	Répartition spatiale des composantes de la fonction de Green correspondant à la solution handbook $(\tilde{u}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}^{\text{hand}})$ associée à un effort ponctuel $\tilde{f}_\Sigma = \delta(\underline{Q})\underline{z}$ appliqué au point \underline{Q} dans un milieu infini en dimension 3.	224
E.4	Répartition spatiale des composantes de la fonction de Green correspondant à la solution handbook $(\tilde{u}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}^{\text{hand}})$ associée à une précontrainte ponctuelle $\tilde{\sigma}_\Sigma = \delta(\underline{Q})\underline{z} \otimes \underline{z}$ appliquée au point \underline{Q} dans un milieu infini en dimension 3.	226
F.1	Représentation des modes d'ouverture I (a), II (b) et III (c) [Bonnet et Frangi (2006)], et définition du repère local associé à la pointe de fissure (d).	228
F.2	Représentation d'un contour fermé $\Gamma_\rho \cup \Gamma \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ au voisinage de la pointe de fissure.	231
F.3	Représentation d'une couronne d'extraction Ω_c centrée autour de la pointe de fissure et délimitée par les contours circulaires intérieur Γ_i et extérieur Γ_e	233
G.1	Modèle 2D de plaque fissurée : géométrie et conditions aux limites associées à un mode de sollicitation I pur (a) et à un mode de sollicitation mixte I et II (b).	236
G.2	Modèle 2D de plaque fissurée : maillages éléments finis grossier (a), fin (b) et très fin (c).	238

G.3	Évolution du facteur d'intensité de contraintes K_I en fonction de la taille normalisée $\Delta R/a$ (a) et de la position normalisée R_{moy}/a (b) de la couronne d'extraction Ω_c pour le problème en mode I pur.	240
G.4	Évolution du facteur d'intensité de contraintes K_I en fonction de la taille normalisée $\Delta R/a$ (a) et de la position normalisée R_{moy}/a (b) de la couronne d'extraction Ω_c pour le problème en mode mixte I et II. .	242
G.5	Évolution du facteur d'intensité de contraintes K_{II} en fonction de la taille normalisée $\Delta R/a$ (a) et de la position normalisée R_{moy}/a (b) de la couronne d'extraction Ω_c pour le problème en mode mixte I et II. .	243

Liste des tableaux

2.1	Comparaison des performances des estimateurs d'erreur globale obtenus à partir des méthodes EET, SPET et EESPT.	100
2.2	Influence du choix de la fonction-coût intervenant dans les méthodes EET et EESPT sur la qualité des estimateurs d'erreur globale.	103
2.3	Influence du choix de la fonction-coût intervenant dans les méthodes EET et EESPT sur les bornes des indices d'efficacité locaux.	103
2.4	Comparaison des performances des estimateurs d'erreur globale obtenus à partir des méthodes EET, SPET et EESPT pour un degré d'interpolation $p = 1$ et $p = 2$	106
2.5	Influence du choix de la fonction-coût intervenant dans les méthodes EET et EESPT sur la qualité des estimateurs d'erreur globale pour les degrés d'interpolation $p = 1$ et $p = 2$	109
2.6	Influence du choix de la fonction-coût intervenant dans les méthodes EET et EESPT sur les bornes des indices d'efficacité locaux pour les degrés d'interpolation $p = 1$ et $p = 2$	109
2.7	Comparaison des performances des estimateurs d'erreur globale obtenus à partir des méthodes EET, SPET et EESPT.	111
2.8	Influence du choix de la fonction-coût intervenant dans les méthodes EET et EESPT sur la qualité des estimateurs d'erreur globale.	113
2.9	Influence du choix de la fonction-coût intervenant dans les méthodes EET et EESPT sur les bornes des indices d'efficacité locaux.	113
2.10	Comparaison des performances des estimateurs d'erreur globale obtenus à partir des méthodes EET, SPET et EESPT.	117
2.11	Influence du choix de la fonction-coût intervenant dans les méthodes EET et EESPT sur la qualité des estimateurs d'erreur globale.	118
2.12	Influence du choix de la fonction-coût intervenant dans les méthodes EET et EESPT sur les bornes des indices d'efficacité locaux.	119
2.13	Comparaison des performances des estimateurs d'erreur globale obtenus à partir des méthodes EET, SPET et EESPT.	121
2.14	Influence du choix de la fonction-coût intervenant dans les méthodes EET et EESPT sur la qualité des estimateurs d'erreur globale.	122

4.1	Valeurs quasi-exacte I_{ex} et approchée I_h calculées pour chacune des quantités d'intérêt I_1 , I_2 et I_3	179
4.2	Valeurs des constantes h et k intervenant dans les deux améliorations pour différentes formes géométriques	185
4.3	Bornes normalisées obtenues à partir des techniques d'encadrement classique et améliorées pour la quantité d'intérêt I_2	192
C.1	Expressions analytiques de la constante h pour différentes formes géométriques	210
G.1	Valeurs de référence K_{Iref} du facteur d'intensité de contraintes K_I associé au problème en mode I pur.	237
G.2	Valeurs de référence K_{Iref} et K_{IIref} des facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} associés au problème en mode mixte I et II.	237
G.3	Caractéristiques associées aux maillages grossier, fin et très fin.	238
G.4	Valeur approchée moyenne $\langle K_{Ih} \rangle$ associée au mode I et erreur relative ε_I par rapport à la valeur théorique $K_{Ith} = 9.3834$ pour les maillages grossier, fin et très fin.	241
G.5	Valeurs approchées moyennes $\langle K_{Ih} \rangle$ et $\langle K_{IIh} \rangle$ associées aux modes I et II et erreurs relatives correspondantes ε_I et ε_{II} par rapport aux valeurs de référence $K_{Iref} = 34.0$ et $K_{IIref} = 4.55$, respectivement, pour les maillages grossier, fin et très fin.	242
H.1	Caractéristiques associées aux maillages éléments finis Ω_h et de référence $\Omega_{\bar{h}}$ pour les différents exemples numériques.	246

Introduction

L'essor des ressources informatiques et les progrès technologiques accomplis en matière de capacités de calcul ont véritablement révolutionné les outils de modélisation et de simulation numérique qui occupent désormais une place prépondérante dans les bureaux d'étude et les centres de recherche. Ces outils sont au centre des activités du chercheur et de l'ingénieur ; ils les assistent au quotidien non seulement au cours des étapes de conception, mais aussi durant les phases de dimensionnement, d'optimisation, de fabrication ou de certification. L'émergence du *Virtual Testing*, démarche qui consiste à remplacer une partie des essais réels par des simulations numériques, constitue un véritable défi et un des enjeux majeurs du monde industriel. La politique actuelle vise donc à diminuer considérablement le nombre d'essais réels au profit des simulations numériques afin de s'affranchir des contraintes sévères, telles que les coûts et les temps de conception parfois prohibitifs, engendrées par de lourdes campagnes d'essais expérimentaux.

Dans le domaine du calcul de structures en mécanique, la modélisation de problèmes physiques complexes s'appuie sur l'utilisation de modèles mathématiques élaborés, dits conceptuels, relevant de la mécanique des milieux continus. Ces modèles continus sont pris comme référence pour construire un modèle discrétisé dont la résolution se fait par des méthodes adaptées aux outils informatiques actuels. Une des méthodes de discrétisation les plus répandues est la méthode des éléments finis ; celle-ci permet le calcul de solutions approchées pour une large gamme de modèles de référence dont la solution exacte est inaccessible. Elle met en jeu des paramètres de discrétisation influant sur la qualité de l'approximation obtenue, tels que la taille de maille ou le degré d'interpolation associé au type d'éléments choisi (discrétisation spatiale), la durée des pas de temps et le schéma temporel utilisé (discrétisation temporelle pour les problèmes d'évolution), la valeur des critères d'arrêt ou le nombre d'itérations fixé (algorithmes et solveurs itératifs dédiés aux problèmes non-linéaires), etc.

Dans une démarche de conception robuste, estimer voire contrôler la qualité des modèles numériques utilisés constitue un enjeu primordial pour que les outils de simulation puissent être pleinement employés. Cette maîtrise des calculs numériques, désormais connue sous le nom de *vérification*, représente une préoccupation permanente tant au niveau de l'industrie qu'au niveau de la recherche. La vérification

regroupe l'ensemble des activités visant à certifier la fiabilité du calcul numérique ; elle vise à quantifier l'écart, appelé *erreur de discrétisation*, entre la solution approchée du problème discrétisé et la solution exacte du problème continu, fournissant alors une information capitale sur la qualité d'un calcul numérique.

Depuis le milieu des années 1970, et majoritairement dans le cadre de la vérification des modèles éléments finis, des outils véritablement quantitatifs ont vu le jour ; le lecteur intéressé pourra notamment se référer aux ouvrages de référence [Ainsworth et Oden (1997), Ladevèze et Oden (1998), Ainsworth et Oden (2000), Babuška et Strouboulis (2001), Stein et al. (2003), Ladevèze et Pelle (2004), Wiberg et Díez (2006)] pour une description détaillée des principaux outils développés. Les premiers outils ont porté sur l'évaluation de l'erreur de discrétisation globale (à l'échelle de la structure entière) inhérente à la résolution numérique du problème de référence, permettant de quantifier la qualité globale d'un calcul. Initialement dédiés aux problèmes de thermique stationnaire et d'élasticité linéaire, les premiers outils dits *a priori* ont permis d'évaluer les propriétés de convergence de la méthode des éléments finis, sans toutefois estimer avec précision l'erreur de discrétisation globale. De nouveaux outils dits *a posteriori* sont apparus et ont exploité les défauts de la solution approchée afin de quantifier de manière fiable l'erreur de discrétisation globale. On distingue généralement trois grandes familles d'*estimateurs d'erreur globale a posteriori*. La première, introduite dans [Zienkiewicz et Zhu (1987)] et fondée sur le *lissage des contraintes*, s'appuie sur les défauts de régularité de la solution approchée ; la seconde, initiée dans [Babuška et Rheinboldt (1978b)] et fondée sur les *résidus d'équilibre*, repose sur les défauts d'équilibre de la solution approchée ; enfin, la troisième famille, introduite dans [Ladevèze (1975), Ladevèze et Leguillon (1983)] et fondée sur la *non-vérification de la relation de comportement*, exploite le concept d'*erreur en relation de comportement* associé à des techniques adaptées de construction de *champs admissibles*. D'une part, les méthodes de lissage des contraintes, dont le faible coût et la facilité d'implémentation au sein de codes éléments finis commerciaux sont les principaux atouts, constituent à ce jour les outils les plus répandus et employés dans le milieu de l'ingénierie, bien qu'ils fournissent des estimations qui s'avèrent parfois de mauvaise qualité et non garanties. D'autre part, la robustesse et l'aspect garanti offerts par les estimateurs basés sur la non-vérification de la relation de comportement ainsi que certains de ceux basés sur les résidus d'équilibre sont désormais devenus des atouts indéniables.

Néanmoins, malgré les performances affichées par les estimateurs d'erreur globale, ces derniers ne fournissent qu'une information limitée, et souvent insuffisante, au regard des critères de dimensionnement d'une structure industrielle qui portent sur des quantités locales.

Depuis le milieu des années 1990, des outils d'estimation de l'erreur locale ont vu le jour afin de contrôler la qualité de *quantités d'intérêt* servant directement au dimensionnement de structures. S'adressant initialement aux problèmes linéaires, les premiers outils offrant une estimation de l'erreur commise sur des quantités locales

ont reposé sur le concept de *pollution* [Babuška et al. (1994a)]. Par la suite, la mise en place des *outils d'extraction* au sein de la problématique d'estimation d'erreur locale [Becker et Rannacher (1996)] a offert un cadre adapté au traitement de quantités d'intérêt. Ces techniques d'extraction permettent d'exprimer une quantité d'intérêt locale sous forme globale et font appel à la résolution d'un problème auxiliaire, dit *adjoint*, dont le chargement dépend de la quantité d'intérêt étudiée. Une résolution précise de ce problème adjoint conduit à l'obtention de bornes pertinentes sur des quantités d'intérêt.

Différentes approches de résolution fine du problème adjoint ont été proposées suivant leur caractère *intrusif* (resp. *non-intrusif*), i.e. selon que l'approche suivie s'appuie sur un maillage différent de (resp. identique à) celui utilisé pour la résolution approchée du problème de référence, rendant impossible (resp. possible) le réemploi des opérateurs intervenant dans la résolution de ce dernier. La première approche, intrusive, repose sur un raffinement local du maillage associé à la discrétisation du problème adjoint. La seconde approche, non-intrusive, s'appuie sur des techniques « *handbook* » qui consistent à introduire un enrichissement local à l'aide d'une méthode de partition de l'unité [Strouboulis et al. (2000a)]; les fonctions d'enrichissement correspondent alors à des solutions locales (quasi-)exactes du problème adjoint obtenues dans des milieux (semi-)infinis. Cette approche alternative permet de s'affranchir des procédures de raffinement local du maillage et conduit à une résolution très précise du problème adjoint. En outre, l'intérêt majeur des techniques d'extraction réside dans le réemploi des outils initialement destinés à l'estimation d'erreur globale. Les estimateurs d'erreur locale construits à partir des outils d'extraction peuvent alors hériter des propriétés des estimateurs d'erreur globale, notamment de leur aspect garanti, de leur pertinence ou de leur simplicité de mise en œuvre. La majorité des estimateurs d'erreur locale reposent désormais sur ces outils d'extraction qui sont devenus très populaires [Paraschivoiu et al. (1997), Rannacher et Suttmeier (1997), Cirak et Ramm (1998), Peraire et Patera (1998), Ladevèze et al. (1999b), Prudhomme et Oden (1999), Strouboulis et al. (2000b), Becker et Rannacher (2001), Ladevèze (2008)].

Actuellement, l'essentiel des travaux de recherche sur la vérification porte sur le développement de procédures d'estimation d'erreur locale pour une large gamme de problèmes de mécanique. Cependant, parmi l'ensemble des estimateurs mis en place, seule une faible partie fournit véritablement des bornes d'erreur garanties et pertinentes, ce qui est un inconvénient sérieux dans une démarche de conception performante. Le développement de procédures robustes d'estimation d'erreur conduisant à une majoration garantie et pertinente de l'erreur sous forme globale et locale, tout en restant facilement implémentable dans les codes éléments finis, constitue un véritable enjeu du monde industriel.

À ce jour, les seuls outils offrant des bornes d'erreur globale et locale garanties et de qualité pour une large gamme de problèmes (linéaires ou non linéaires, statiques ou d'évolution) sont basés sur l'utilisation conjointe des estimateurs fondés sur la

construction de champs équilibrés et des outils d'extraction ; ces estimateurs peuvent être réécrits à travers le concept d'erreur en relation de comportement. L'implémentation de ces outils d'estimation d'erreur dans les codes de calcul éléments finis industriels reste cependant ardue, ce qui constitue un obstacle à leur diffusion dans le milieu de l'ingénierie.

L'objectif de cette thèse est de contribuer au développement de nouveaux outils d'estimation d'erreur en ingénierie mécanique. Ce travail se place dans le cadre des problèmes d'élasticité linéaire en statique en s'appuyant sur l'association des outils d'extraction et des estimateurs d'erreur globale basés sur le concept d'erreur en relation de comportement.

Les contributions originales apportées par ce travail de thèse et développées dans ce document portent sur la mise en place de méthodes d'estimation d'erreur globale et locale **garanties, pertinentes et simples à mettre en œuvre, à destination du monde industriel**. Ces contributions peuvent être recensées autour de trois points majeurs :

- le premier point concerne la mise en place d'une nouvelle méthode de construction de champs admissibles dans le cadre des estimateurs basés sur le concept d'erreur en relation de comportement [Pled et al. (2011c)]. Cette méthode est hybride dans le sens où elle tire partie des ingrédients des méthodes existantes. La comparaison des différentes techniques de construction de champs admissibles a permis d'évaluer les performances des estimateurs associés (en terme de qualité attendue, coût de calcul engendré et facilité d'implémentation) sur des structures industrielles complexes. La nouvelle méthode hybride semble être un bon compromis entre ces différents critères ;
- le second point s'intéresse à l'amélioration et l'optimisation de la nouvelle méthode de construction de champs admissibles, en s'appuyant sur une minimisation locale à travers l'introduction de critères géométriques et énergétiques. Cette démarche permet d'améliorer la qualité des champs admissibles reconstruits dans certaines zones locales de structures industrielles aux géométries et aux chargements complexes [Pled et al. (2012a)]. Différentes études menées sur des exemples numériques variés illustrent la robustesse et la pertinence de cette méthode de construction de champs admissibles améliorée ;
- le troisième et dernier point est consacré au développement de nouvelles procédures d'encadrement et d'estimation d'erreur sur des quantités d'intérêt locales basées sur le principe de Saint-Venant [Ladevèze et al. (2012b)]. Ces procédures visent à pallier le manque de pertinence de la technique de majoration classique basée sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet, cette dernière peut conduire à des bornes imprécises sur-estimant largement l'erreur sur la quantité d'intérêt considérée dans certaines situations, notamment lorsque les contributions principales à l'erreur de discrétisation globale des problèmes de

référence et adjoint sont localisées dans des régions disjointes. Les nouvelles procédures de majoration reposent sur des outils originaux et inédits, tels que l'utilisation des propriétés de domaines homothétiques, afin de traiter séparément la *zone d'intérêt*, i.e. le support local de la quantité d'intérêt étudiée, du reste du domaine d'étude. Les performances de ces nouvelles techniques d'encadrement sont comparées à celles de la technique classique sur des quantités d'intérêt variées (contraintes locales, déplacements ponctuels, facteurs d'intensité de contraintes en pointe de fissure, etc.). Les différentes techniques d'encadrement sont couplées aux techniques « handbook » particulièrement bien adaptées au traitement de quantités d'intérêt ponctuelles, mais aussi à une technique spécifique d'extraction permettant le traitement des facteurs d'intensité de contraintes.

Les différents points abordés dans ce travail de recherche constituent donc des éléments de réponse à la problématique du monde industriel. L'ensemble des développements numériques a été réalisé au sein d'un code éléments finis orienté objet développé en C++ sur la plateforme LMT++ du LMT-Cachan afin d'assurer une implémentation pérenne et une utilisation automatique des outils mis en place.

Le document est divisé en quatre chapitres, organisés de la manière suivante :

- le *premier chapitre* dresse un état de l'art des méthodes d'estimation d'erreur de discrétisation globale et locale dans le cadre des problèmes d'élasticité linéaire. Après avoir introduit le problème de référence et la méthode de résolution employée, les principaux estimateurs associés à l'erreur globale ainsi qu'à l'erreur sur des quantités d'intérêt locales sont présentés.
- le *deuxième chapitre* s'attache à revisiter les différentes méthodes de construction de champs admissibles et à proposer une nouvelle méthode hybride. Une étude comparative des performances des estimateurs d'erreur globale obtenus à partir des principales méthodes de construction de champs admissibles est menée et illustrée à partir d'exemples numériques variés en 2D et 3D.
- le *troisième chapitre* présente une version optimisée pour la construction de champs admissibles. La pertinence et la fiabilité des estimateurs associés est illustrée sur des applications numériques en 2D et 3D.
- enfin, le *quatrième et dernier chapitre* est consacré à la mise en place de nouvelles techniques d'encadrement garanti de l'erreur sur une quantité d'intérêt locale fondées sur le principe de Saint-Venant. Après un rappel succinct de la technique d'encadrement classique, deux nouvelles techniques d'encadrement sont détaillées. La mise en œuvre de ces techniques est réalisée sur un exemple numérique en 2D avec différentes quantités d'intérêt.

Chapitre 1

État de l'art sur l'estimation de la qualité d'un calcul par éléments finis

Ce premier chapitre brosse un état de l'art relatif à l'estimation de l'erreur de discrétisation, sous une forme globale et locale, dans le cadre de la méthode des éléments finis. Après avoir défini le problème de référence et la méthode de résolution par éléments finis, la notion d'erreur de discrétisation est introduite. Les principales classes de méthodes d'estimation d'erreur globale et locale sont ensuite présentées dans le cadre exclusif des problèmes linéaires de statique en mettant l'accent sur le caractère garanti de l'estimation.

Sommaire

1	Problème de référence, résolution éléments finis et erreur de discrétisation	9
1.1	Problème continu de référence	9
1.2	Problème discrétisé approché et résolution éléments finis	12
1.3	Propriétés de la solution éléments finis	13
1.4	Définition et estimation de l'erreur de discrétisation	14
2	Estimation de l'erreur globale	19
2.1	Estimateurs basés sur le lissage des contraintes	20
2.2	Estimateurs basés sur les résidus d'équilibre	27
2.3	Estimateurs basés sur la non-vérification de la relation de comportement	39
3	Estimation de l'erreur locale	44
3.1	Estimateurs d'erreur en pollution	44
3.2	Encadrement heuristique direct de l'erreur locale	47
3.3	Estimateurs utilisant les techniques d'extraction	48
4	Bilan	64

1 Problème de référence, résolution éléments finis et erreur de discrétisation

Étant donné la richesse des travaux de recherche réalisés dans le cadre de la vérification depuis maintenant près d'un demi-siècle, la littérature relative à l'estimation de la qualité d'un calcul par éléments finis est vaste. Par conséquent, les différentes méthodes d'estimation d'erreur présentées dans la suite de ce chapitre sont illustrées, dans le cadre de la mécanique des milieux continus, sur un problème classique d'élasticité linéaire en statique qui constitue notre problème de référence.

1.1 Problème continu de référence

Considérons une structure qui occupe un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (où d est la dimension de l'espace), supposé borné et régulier, de frontière $\partial\Omega$ (cf. figure 1.1), et évoluant sous l'hypothèse d'un régime isotherme et des petites perturbations. Les différentes configurations occupées par la structure seront donc confondues avec la configuration initiale Ω . Cette structure est soumise à un chargement quasi-statique schématisé par :

- une densité volumique d'effort \underline{f}_d donnée dans Ω ;
- un champ de déplacement \underline{U}_d imposé (condition limite de type Dirichlet) sur une partie $\partial_u\Omega \neq \emptyset$ de la frontière $\partial\Omega$;
- une densité surfacique d'effort \underline{F}_d imposée (condition limite de type Neumann) sur la partie $\partial_f\Omega$ complémentaire de $\partial_u\Omega$ ($\partial_u\Omega \cup \partial_f\Omega = \partial\Omega$, $\partial_u\Omega \cap \partial_f\Omega = \emptyset$).

La figure 1.1 illustre ce solide modélisé par le domaine Ω dans son environnement.

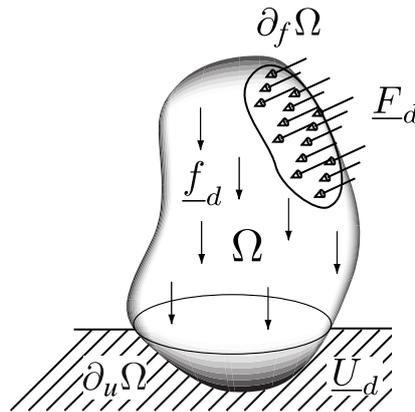


FIGURE 1.1: Représentation de la structure et de son environnement.

Dans la suite, $\mathcal{L}^2(\Omega)$ représente l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur Ω , tandis que $\mathcal{H}^1(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev des fonctions et de ses dérivées premières de carré intégrable sur Ω [Adams (1975)] :

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}^2(\Omega) \text{ tel que } \underline{\nabla}u \in [\mathcal{L}^2(\Omega)]^d\} \quad (1.1)$$

Le problème de référence défini sur Ω consiste alors à rechercher un champ de déplacement $\underline{u}(\underline{M})$ et un champ de contrainte $\sigma(\underline{M})$, en tout point $\underline{M} \in \Omega$, vérifiant :

- les équations de liaison (ou de compatibilité) :

$$\underline{u} \in \mathbf{U} ; \quad \underline{u} = \underline{U}_d \quad \text{sur } \partial_u \Omega ; \quad \varepsilon(\underline{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u}) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.2a)$$

- les équations d'équilibre :

$$\sigma \in \mathbf{S} ; \quad \text{div}(\sigma) + \underline{f}_d = \underline{0} \quad \text{dans } \Omega ; \quad \sigma \underline{n} = \underline{F}_d \quad \text{sur } \partial_f \Omega \quad (1.2b)$$

- la relation de comportement :

$$\sigma = \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.2c)$$

\mathbf{U} désigne l'espace des distributions de déplacement à énergie finie défini sur Ω :

$$\mathbf{U} = \{ \underline{u} \in [\mathcal{H}^1(\Omega)]^d \}$$

et \mathbf{S} l'espace des distributions de tenseur symétrique à énergie finie défini sur Ω :

$$\mathbf{S} = \left\{ \sigma \in [\mathcal{L}^2(\Omega)]^{d^2} \text{ tel que } \sigma = \sigma^T \right\}$$

\mathbf{K} représente l'opérateur de Hooke du matériau considéré et $\varepsilon(\underline{u})$ le tenseur des déformations linéarisé associé au champ de déplacement \underline{u} , i.e. la partie symétrique du gradient du tenseur des déformations. Le tenseur de Hooke \mathbf{K} est un opérateur linéaire, symétrique et défini positif. Il permet d'introduire les produits scalaires $\langle \bullet, \circ \rangle_{u,\Omega}$ et $\langle \bullet, \circ \rangle_{\sigma,\Omega}$ définis sur \mathbf{U} et \mathbf{S} , respectivement, ainsi que leurs normes énergétiques associées en déplacement $\|\bullet\|_{u,\Omega}$ et en contrainte $\|\bullet\|_{\sigma,\Omega}$:

$$\langle \bullet, \circ \rangle_{u,\Omega} = \int_{\Omega} \text{Tr} [\varepsilon(\bullet) \mathbf{K} \varepsilon(\circ)] \, d\Omega \quad \text{et} \quad \|\bullet\|_{u,\Omega} = \left[\langle \bullet, \bullet \rangle_{u,\Omega} \right]^{1/2} \quad (1.3a)$$

$$\langle \bullet, \circ \rangle_{\sigma,\Omega} = \int_{\Omega} \text{Tr} [\bullet \mathbf{K}^{-1} \circ] \, d\Omega \quad \text{et} \quad \|\bullet\|_{\sigma,\Omega} = \left[\langle \bullet, \bullet \rangle_{\sigma,\Omega} \right]^{1/2} \quad (1.3b)$$

Remarque 1.1 :

L'existence et l'unicité d'une solution associée à ce type de problème est garantie à condition que $\partial_u \Omega \neq \emptyset$, soit $\text{mes}(\partial_u \Omega) > 0$. Si $\text{mes}(\partial_u \Omega) = 0$, l'existence d'une solution à un mouvement de solide rigide près n'est assurée que si les efforts imposés sont équilibrés sur la structure Ω [Brenner et Scott (2008)].

Pour plus de clarté, introduisons à présent :

- l'espace \mathbf{U}^{ad} des champs de déplacement cinématiquement admissibles :

$$\mathbf{U}^{ad} = \{ \underline{u} \in \mathbf{U} \text{ tel que } \underline{u} = \underline{U}_d \text{ sur } \partial_u \Omega \} \quad (1.4)$$

- l'espace vectoriel associé \mathbf{U}_0^{ad} des champs de déplacement cinématiquement admissibles à 0 :

$$\mathbf{U}_0^{ad} = \{ \underline{u} \in \mathbf{U} \text{ tel que } \underline{u} = \underline{0} \text{ sur } \partial_u \Omega \} \quad (1.5)$$

- l'espace \mathbf{S}^{ad} des champs de contrainte statiquement admissibles :

$$\mathbf{S}^{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma \in \mathbf{S} \text{ tel que } \underline{\text{div}}(\sigma) + \underline{f}_d = \underline{0} \text{ dans } \Omega \\ \text{et } \sigma \underline{n} = \underline{F}_d \text{ sur } \partial_f \Omega \end{array} \right\} \quad (1.6)$$

- l'espace vectoriel associé \mathbf{S}_0^{ad} des champs de contrainte statiquement admissibles à 0 :

$$\mathbf{S}_0^{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma \in \mathbf{S} \text{ tel que } \underline{\text{div}}(\sigma) = \underline{0} \text{ dans } \Omega \\ \text{et } \sigma \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \partial_f \Omega \end{array} \right\} \quad (1.7)$$

La plupart des méthodes de résolution du problème de référence (1.2) s'appuie sur une formulation faible des équations d'équilibre (1.2b). Les espaces fonctionnels \mathbf{S}^{ad} et \mathbf{S}_0^{ad} considérés par la suite s'écrivent alors de manière classique sous la forme :

$$\mathbf{S}^{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma \in \mathbf{S} \text{ tel que} \\ \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \int_{\Omega} \text{Tr} [\sigma \varepsilon(\underline{u}^*)] \, d\Omega = l(\underline{u}^*) \\ \text{avec } l(\underline{u}^*) = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* \, d\Omega + \int_{\partial_f \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* \, dS \end{array} \right\} \quad (1.8)$$

et

$$\mathbf{S}_0^{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma \in \mathbf{S} \text{ tel que} \\ \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \int_{\Omega} \text{Tr} [\sigma \varepsilon(\underline{u}^*)] \, d\Omega = 0 \end{array} \right\} \quad (1.9)$$

Le problème de référence peut être reformulé comme :

$$\text{Trouver } (\underline{u}, \sigma) \in \mathbf{U}^{ad} \times \mathbf{S}^{ad} \text{ vérifiant } \sigma = \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}) \text{ dans } \Omega \quad (1.10)$$

On note $(\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex})$ la solution exacte du problème de référence (1.10). Malheureusement, cette dernière ne peut être obtenue explicitement sous forme analytique que dans de rares cas d'école et reste hors de portée pour la grande majorité des applications. En pratique, nous avons alors recours à des méthodes d'approximation permettant d'obtenir une solution numérique approchée. Actuellement, la méthode la plus utilisée est la méthode des éléments finis (« *Finite Element Method* » ou *FEM*) en déplacement [Ciarlet (1978), Hughes (1987), Zienkiewicz et Taylor (1988), Bathe (1996)]. La suite de ce travail porte sur l'erreur de discrétisation inhérente à cette méthode d'approximation numérique.

1.2 Problème discrétisé approché et résolution éléments finis

La méthode des éléments finis en déplacement repose sur une formulation faible en déplacement du problème de référence et permet de se ramener à un problème de dimension finie, dont la seule inconnue est le champ de déplacement, le champ de contrainte étant son image par la relation de comportement du matériau. Le domaine continu Ω est discrétisé en un ensemble d'éléments formant un maillage Ω_h , où h désigne la taille caractéristique associée à cette discrétisation spatiale. L'espace d'approximation associé au champ de déplacement, noté \mathbf{U}_h , est un sous-espace de \mathbf{U} de dimension finie constitué des fonctions continues et polynomiales de degré p sur chaque élément du maillage Ω_h . Dans la suite de ce travail, nous supposons que le maillage Ω_h coïncide avec le domaine d'étude Ω et que l'espace d'approximation éléments finis est suffisamment riche pour décrire et représenter les conditions aux limites en déplacement et en effort. On définit alors l'espace \mathbf{U}_h^{ad} des champs de déplacement cinématiquement admissibles au sens des éléments finis :

$$\mathbf{U}_h^{ad} = \{\underline{u} \in \mathbf{U}_h \text{ tel que } \underline{u} = \underline{U}_d \text{ sur } \partial_u \Omega\} \quad (1.11)$$

et l'espace vectoriel associé $\mathbf{U}_{0,h}^{ad}$ des champs de déplacement cinématiquement admissibles à 0 au sens des éléments finis :

$$\mathbf{U}_{0,h}^{ad} = \mathbf{U}_0^{ad} \cap \mathbf{U}_h = \{\underline{u} \in \mathbf{U}_h \text{ tel que } \underline{u} = \underline{0} \text{ sur } \partial_u \Omega\} \quad (1.12)$$

Le champ de déplacement approché est recherché dans le sous-espace \mathbf{U}_h^{ad} de \mathbf{U}^{ad} . Le champ de contrainte approché est ensuite déterminé par application de la relation de comportement (1.2c) sur Ω . Enfin, on définit l'espace \mathbf{S}_h^{ad} des champs de contrainte statiquement admissibles au sens des éléments finis :

$$\mathbf{S}_h^{ad} = \left\{ \sigma \in \mathbf{S} \text{ tel que } \int_{\Omega} \text{Tr} [\sigma \varepsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = l(\underline{u}^*) \right\} \quad (1.13)$$

et l'espace vectoriel associé $\mathbf{S}_{0,h}^{ad}$ des champs de contrainte statiquement admissibles à 0 au sens des éléments finis :

$$\mathbf{S}_{0,h}^{ad} = \left\{ \sigma \in \mathbf{S} \text{ tel que } \int_{\Omega} \text{Tr} [\sigma \varepsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = 0 \right\} \quad (1.14)$$

Finalement, la méthode des éléments finis fournit une solution approchée $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ obtenue de manière numérique et contenue dans un espace d'approximation de dimension finie $\mathbf{U}_h^{ad} \times \mathbf{S}_h^{ad} \subset \mathbf{U}^{ad} \times \mathbf{S}^{ad}$, à partir d'une discrétisation spatiale (maillage Ω_h) du problème de référence. Le problème discrétisé approché peut alors se mettre sous la forme :

$$\text{Trouver } (\underline{u}, \sigma) \in \mathbf{U}_h^{ad} \times \mathbf{S}_h^{ad} \text{ vérifiant } \sigma = \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}) \text{ dans } \Omega_h \quad (1.15)$$

On note $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ la solution du problème discrétisé (1.15) obtenue par la méthode des éléments finis.

1.3 Propriétés de la solution éléments finis

Sous l'hypothèse d'un maillage Ω_h coïncidant parfaitement avec le domaine Ω ($\text{supp}(\Omega_h) = \text{supp}(\Omega)$), la solution exacte $(\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex})$ et la solution approchée $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ ont même support.

Compte tenu du choix de l'espace d'approximation \mathcal{U}_h associé à \underline{u}_h (espace des fonctions continues, polynomiales par morceaux de degré maximal p), on a $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$. Par ailleurs, lorsque les conditions aux limites en déplacement sont imposées par élimination, également appelée substitution, ou par l'introduction de multiplicateurs de Lagrange, la solution approchée en déplacement \underline{u}_h satisfait exactement les conditions aux limites en déplacement du problème approché, ainsi $\underline{u}_h = \underline{U}_d$ sur $\partial_u \Omega$. Par conséquent, en supposant que l'espace d'approximation éléments finis est suffisamment riche pour représenter correctement ces conditions, la solution approchée en déplacement \underline{u}_h issue d'une méthode éléments finis vérifie exactement les conditions d'admissibilité cinématique du problème de référence :

$$\underline{u}_h \in \mathcal{U}_h^{ad} \subset \mathcal{U}^{ad} \quad (1.16)$$

Remarque 1.2 :

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, la solution éléments finis en déplacement \underline{u}_h correspond à la meilleure approximation de la solution exacte en déplacement \underline{u}_{ex} dans l'espace \mathcal{U}_h^{ad} au sens du produit scalaire $\langle \bullet, \circ \rangle_{u, \Omega}$ défini par (1.3a).

En revanche, même si l'espace d'approximation éléments finis est suffisamment riche pour décrire les conditions aux limites en effort, l'utilisation d'une méthode éléments finis en déplacement conduit généralement à une solution approchée en contrainte σ_h présentant plusieurs défauts, notamment :

- le non-respect des conditions aux limites en effort :

$$\sigma_h \underline{n} \neq \underline{F}_d \quad \text{sur } \partial_f \Omega \quad (1.17)$$

- le non-respect de l'équilibre intérieur :

$$\text{div}(\sigma_h) + \underline{f}_d \neq \underline{0} \quad \text{dans } \Omega \quad (1.18)$$

- la non-vérification de l'équilibre interne entre les éléments du maillage (discontinuité du vecteur contrainte à l'interface entre deux éléments) :

$$[[\sigma_h \underline{n}]] = \sigma_{h|E} \underline{n}_E + \sigma_{h|E'} \underline{n}_{E'} \neq \underline{0} \quad \text{sur } \partial E \cap \partial E' \quad (1.19)$$

où E et E' désignent deux éléments adjacents du maillage Ω_h , \underline{n}_E et $\underline{n}_{E'}$ étant leurs normales unitaires sortantes respectives.

En conséquence, la solution approchée en contrainte σ_h ne vérifie pas les conditions d'admissibilité statique du problème de référence :

$$\sigma_h \in \mathcal{S}_h^{ad} \not\subset \mathcal{S}^{ad} \quad (1.20)$$

D'un point de vue mathématique, \mathcal{S}_h^{ad} étant un espace plus riche que \mathcal{S}^{ad} , on a $\mathcal{S}_h^{ad} \supset \mathcal{S}^{ad}$ et le champ de contrainte approché σ_h est recherché dans l'intersection de \mathcal{S}_h^{ad} et de l'espace image de \mathcal{U}_h^{ad} par la relation de comportement.

D'autres sources d'approximation inhérentes à la méthode des éléments finis peuvent être relevées, notamment :

- le non-respect de la géométrie initiale par la discrétisation éléments finis, si la complexité du domaine ne permet pas d'assurer un recouvrement exact du domaine continu Ω par le maillage Ω_h ;
- la représentation approximative des conditions aux limites imposées en déplacement et en effort, si la base d'interpolation éléments finis choisie est trop pauvre ;
- le traitement numérique du problème discrétisé (approximations liées aux méthodes d'intégration numérique, erreurs algébriques associées à la non-convergence des solveurs itératifs, erreurs de troncature ou d'arrondi dues à la précision machine, etc.)

Ces sources d'erreurs supplémentaires peuvent, dans la plupart des cas, être considérées comme négligeables par rapport aux erreurs de discrétisation sous réserve d'un choix judicieux des paramètres de discrétisation, de la base d'approximation éléments finis et des solveurs numériques utilisés. La suite de ce travail porte exclusivement sur l'estimation des erreurs de discrétisation afin d'évaluer la qualité d'un calcul éléments finis.

1.4 Définition et estimation de l'erreur de discrétisation

La solution discrétisée $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ obtenue par la méthode des éléments finis en déplacement est donc une solution approchée, dont on cherche à évaluer la qualité en tant qu'approximation de la solution exacte $(\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex})$ du problème de référence. L'erreur de discrétisation associée au champ de déplacement correspond à l'écart séparant \underline{u}_h de \underline{u}_{ex} et s'écrit :

$$\underline{e}_h(\underline{u}) = \underline{u}_{ex} - \underline{u}_h \quad (1.21)$$

Remarque 1.3 :

On peut également définir, de manière similaire, une erreur associée au champ de contrainte, correspondant à l'écart entre les champs de contrainte approché σ_h et exacte σ_{ex} :

$$\mathfrak{e}_h(\sigma) = \sigma_{ex} - \sigma_h$$

\underline{e}_h et \mathfrak{e}_h sont des éléments de \mathbf{U}_0^{ad} et $\mathcal{S}_{0,h}^{ad}$, respectivement. En injectant l'expression (1.21) de \underline{e}_h dans la formulation faible des équations d'équilibre (1.8) du problème de référence, on peut construire un problème défini sur Ω par :

Trouver $\underline{e}_h \in \mathbf{U}_0^{ad}$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \int_{\Omega} \text{Tr} [\varepsilon(\underline{e}_h) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}^*)] d\Omega &= l(\underline{u}^*) - \int_{\Omega} \text{Tr} [\varepsilon(\underline{u}_h) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}^*)] d\Omega \\ &= \mathcal{R}_h(\underline{u}^*) \end{aligned} \quad (1.22)$$

où \mathcal{R}_h représente la fonctionnelle des résidus, également appelée opérateur des résidus, associée à la solution approchée $(\underline{u}_h, \sigma_h)$. \underline{e}_h est solution de cette équation, appelée *équation des résidus*, qui traduit le non-respect des équations d'équilibre (1.8) par la solution approchée ($\sigma_h \notin \mathcal{S}^{ad}$) et se met sous la forme :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \langle \underline{e}_h, \underline{u}^* \rangle_{u,\Omega} = \mathcal{R}_h(\underline{u}^*) \quad (1.23)$$

En vertu de la remarque 1.2, en prenant en particulier $\underline{u}^* \in \mathbf{U}_{0,h}^{ad}$ dans l'équation des résidus (1.23), on obtient une propriété remarquable, appelée *propriété d'orthogonalité de Galerkin* :

$$\forall \underline{u}_h^* \in \mathbf{U}_{0,h}^{ad}, \quad \langle \underline{e}_h, \underline{u}_h^* \rangle_{u,\Omega} = \mathcal{R}_h(\underline{u}_h^*) = 0 \quad (1.24)$$

qui est employée dans la plupart des méthodes d'estimation d'erreur présentées par la suite. Cette relation traduit, d'un point de vue mathématique, l'orthogonalité de \underline{e}_h dans $\mathbf{U}_{0,h}^{ad}$ au sens du produit scalaire $\langle \bullet, \circ \rangle_{u,\Omega}$ défini par (1.3a) et, d'un point de vue mécanique, le respect des équations d'équilibre au sens des éléments finis (1.13) par la solution approchée ($\sigma_h \in \mathcal{S}_h^{ad}$). Il en découle qu'une solution \underline{e}_h de (1.22), même approchée, ne peut être recherchée que dans un espace plus riche que l'espace d'interpolation éléments finis \mathbf{U}_h utilisé pour la résolution approchée du problème de référence.

1.4.1 Mesures de l'erreur de discrétisation

Une résolution exacte du problème global (1.22) conduirait à un calcul explicite de l'erreur de discrétisation \underline{e}_h en tout point du domaine Ω . Néanmoins, au même titre que le problème de référence, la solution exacte d'un problème aussi complexe et coûteux est généralement inaccessible. Ainsi, les méthodes d'estimation d'erreur ne s'attachent pas à déterminer une valeur de l'erreur de discrétisation en tout point du domaine Ω , mais plutôt à évaluer une mesure pertinente e , appelée *erreur vraie*, de \underline{e}_h . Cette mesure peut être évaluée de manière globale ou locale.

Mesure globale

En premier lieu, une mesure *globale* $e_{\Omega}(\underline{u})$ sur l'ensemble du domaine Ω peut être définie à l'aide de la norme énergétique (1.3a) de \underline{e}_h :

$$e_{\Omega}(\underline{u}) = \|\underline{e}_h\|_{u,\Omega} = \|\underline{u}_{ex} - \underline{u}_h\|_{u,\Omega} \quad (1.25)$$

Sa dépendance à l'opérateur définissant le comportement du matériau confère à cette norme un contenu physique fort. En outre, elle est équivalente aux normes de Sobolev usuelles et offre la possibilité de définir pour chaque élément E du maillage Ω_h une contribution élémentaire e_E à l'erreur de discrétisation globale e_Ω :

$$e_E = \|\underline{e}_h\|_{u,E} \quad (1.26)$$

vérifiant

$$\sum_{E \in \Omega_h} e_E^2 = \|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}^2 = e_\Omega^2$$

où

$$\|\bullet\|_{u,E} = \left[\int_E \text{Tr} [\varepsilon(\bullet) \mathbf{K} \varepsilon(\bullet)] \, d\Omega \right]^{1/2} \quad (1.27)$$

Remarque 1.4 :

On peut également définir, de manière analogue, une mesure globale $e_\Omega(\sigma)$ à partir de la norme énergétique (1.3b) de \mathfrak{e}_h :

$$e_\Omega(\sigma) = \|\mathfrak{e}_h\|_{\sigma,\Omega} = \|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\sigma,\Omega} \quad (1.28)$$

Dans le cas d'un comportement linéaire, on peut noter l'égalité de ces deux mesures : $e_\Omega(\underline{u}) = e_\Omega(\sigma)$.

La mesure e_Ω offre une évaluation globale de l'erreur de discrétisation à l'échelle de la structure entière ainsi que ses contributions élémentaires e_E .

Mesure locale sur des quantités d'intérêt

Une mesure locale $e_I(\underline{u})$ de l'erreur sur une quantité d'intérêt $I(\underline{u})$ à support local (déplacement en un point donné de la structure, moyenne de la contrainte sur une partie de la structure, etc.) peut également être définie :

$$e_I(\underline{u}) = I(\underline{u}_{ex}) - I(\underline{u}_h) = I_{ex} - I_h \quad (1.29)$$

Cette mesure, souvent qualifiée d'erreur en quantité d'intérêt, correspond à l'écart entre les valeurs exacte I_{ex} et approchée I_h prises par la quantité d'intérêt sur les solutions exacte \underline{u}_{ex} et approchée \underline{u}_h , respectivement. Elle offre une évaluation locale de l'erreur à travers la définition d'une quantité d'intérêt mettant en jeu un ou plusieurs champs issus du problème de référence. Cette dernière peut être :

- une grandeur linéaire comme la moyenne (sur une zone prédéfinie $\omega \subset \Omega$) ou la valeur ponctuelle (en un point $\underline{M} \in \Omega$) du champ de déplacement dans une direction donnée, d'une composante du tenseur des contraintes ou des déformations ;
- une grandeur non-linéaire comme la contrainte équivalente de Von Mises ou l'énergie de déformation dans une zone locale.

1.4.2 Notion d'estimateur d'erreur

Les méthodes d'estimation d'erreur fournissent des outils, appelés *estimateurs d'erreur*, permettant d'évaluer une mesure approchée θ de l'erreur globale e_Ω ou locale e_I , de manière qualitative ou quantitative. Cette mesure approchée θ est qualifiée d'*erreur estimée*. On distingue deux types d'estimateurs suivant leur caractère *a priori* ou *a posteriori*.

Les estimateurs dits *a priori* n'utilisent que les données d'entrée du problème discrétisé (géométrie, conditions aux limites, paramètres de discrétisation, base d'approximation éléments finis, etc.) et les propriétés de la solution exacte $(\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex})$, mais ne requièrent aucune connaissance sur la solution approchée $(\underline{u}_h, \sigma_h)$. Introduits au début des années 1970 [Aziz et Babuška (1972), Ciarlet (1978)], ils permirent les premières estimations de l'erreur de discrétisation globale dans le cadre des problèmes linéaires de statique. Dans ce cadre, un premier résultat offrant une majoration de l'erreur de discrétisation globale postule l'existence d'une constante C telle qu'asymptotiquement, on ait [Hughes (1987)] :

$$\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega} \leq Ch^q \tag{1.30}$$

où l'exposant q désigne :

- pour une solution régulière, le degré maximal d'interpolation p de la base d'approximation éléments finis ;
- pour une solution présentant des singularités géométriques, le minimum entre p et l'ordre de la singularité α (dans le cas d'une fissure, $\alpha = \frac{1}{2}$).

Les estimateurs *a priori* fournissent des renseignements utiles sur le taux de convergence de la méthode d'approximation numérique, mais ne permettent pas d'aboutir à une estimation précise de l'erreur. En effet, les résultats de majoration du type (1.30) mettent en jeu des paramètres (représentés par la constante C) qui dépendent du maillage et des données du problème de référence et dont l'évaluation peut s'avérer délicate. Les estimations obtenues, bien souvent pessimistes, ne sont pas suffisamment fiables pour être utilisées dans les critères de dimensionnement. Par ailleurs, ces méthodes d'estimation d'erreur *a priori* ne fournissent pas d'information sur la répartition locale de l'erreur.

Les estimateurs dits *a posteriori*, apparus à la fin des années 1970, exploitent quant à eux les défauts de la solution approchée $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ et les quantifient afin d'estimer avec précision l'erreur réellement commise. Ces méthodes d'estimation sont donc menées en post-traitement de la résolution éléments finis et tirent profit des propriétés de la solution approchée. La problématique de l'estimation d'erreur *a posteriori* fut l'objet de nombreux ouvrages de référence, notamment [Ainsworth et Oden (2000), Babuška et Strouboulis (2001), Stein et al. (2003), Ladevèze et Pelle (2004), Oden et al. (2005)]. Les principales méthodes existantes relatives à l'estimation d'erreur *a posteriori* sont présentées dans la suite de ce chapitre.

1.4.3 Qualité et performances d'un estimateur d'erreur

Un estimateur d'erreur offre donc une mesure approchée θ de l'erreur vraie e , qu'elle soit globale ou locale. Afin de quantifier la qualité d'un estimateur d'erreur globale, une grandeur couramment introduite est l'*indice d'efficacité* η défini par :

$$\eta = \frac{\theta}{e_{\Omega}} \quad (1.31)$$

Remarque 1.5 :

On peut également définir, de manière analogue, un indice d'efficacité par élément ou ensemble d'éléments, si l'erreur globale estimée θ peut être décomposée en une somme de contributions locales.

Les principaux critères permettant d'évaluer la qualité et les performances d'un estimateur d'erreur globale sont :

- la *pertinence* ou la *précision* :
Un estimateur d'erreur est d'autant plus *pertinent* ou *précis* que la valeur de η est proche de 1 ;
- l'aspect *conservatif* ou *garanti* :
Un estimateur est dit *conservatif* ou *garanti* lorsque la valeur de η reste supérieure à 1 :

$$\eta \geq 1 \quad (1.32)$$

La mesure estimée θ de l'erreur est alors une borne *stricte* de l'erreur vraie e ;

- la *consistance* ou la *convergence asymptotique* :
Un estimateur est dit *asymptotiquement exact* ou *consistant* lorsque la valeur de η tend vers 1 lorsque h tend 0, i.e. lorsque l'on raffine fortement le maillage :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \eta = 1 \quad (1.33)$$

- l'*équivalence* avec l'erreur vraie :
Un estimateur fournit une mesure approchée ou estimée *équivalente* à l'erreur vraie s'il existe un couple de constantes (C_1, C_2) indépendant de la solution exacte du problème de référence tel que :

$$C_1 \leq \eta \leq C_2 \quad (1.34)$$

- la *stabilité*, i.e. la *sensibilité* aux paramètres tels que le maillage ou le type de problème considéré ;
- le *coût de calcul* ;
- la *facilité d'implémentation* ou la *simplicité de mise en œuvre* ;
- l'*étendue du domaine d'application*.

Ces différents critères peuvent être étendus au cadre de l'estimation d'erreur locale, excepté la notion d'équivalence avec l'erreur vraie qui rejoint alors l'aspect conservatif ou garanti des bornes d'erreur locale. La notion de pertinence caractérise la précision de l'encadrement vis-à-vis de l'erreur réellement commise sur la quantité locale considérée. Un critère supplémentaire relatif à l'estimation d'erreur locale est le caractère intrusif de l'estimateur. Celui-ci est dit *intrusif* (resp. *non-intrusif*) lorsqu'il n'autorise pas (resp. autorise) le réemploi des outils d'estimation d'erreur globale. Ce critère particulier permet aux estimateurs d'erreur locale d'hériter de la maîtrise et des caractéristiques des estimateurs d'erreur globale.

Les estimateurs conduisant à des encadrements garantis et pertinents de l'erreur vraie, tant au niveau global que local, pour une large gamme de problèmes s'inscrivent dans la politique actuelle des bureaux d'étude qui s'oriente vers une démarche de conception robuste et efficace. Le caractère garanti d'un estimateur est un atout indéniable en vue d'assurer une pleine maîtrise du calcul éléments finis.

Les travaux portant sur l'évaluation et la comparaison de la qualité des estimateurs d'erreur sont nombreux dans la littérature. Citons, parmi les plus complets, [Babuška et al. (1994b), Babuška et al. (1994c), Babuška et al. (1997b)].

Remarque 1.6 :

Les estimateurs dont la construction repose uniquement sur des considérations heuristiques, i.e. sans fondement théorique, sont généralement qualifiés d'indicateurs d'erreur.

Remarque 1.7 :

Tributaire de l'erreur vraie e , l'indice d'efficacité associé η est généralement hors de portée. En pratique, la solution exacte \underline{u}_{ex} du problème de référence est approximée par une solution quasi-exacte $\underline{u}_{\bar{h}}$, dite de référence, calculée à partir d'un maillage $\Omega_{\bar{h}}$ très fin obtenu par h -raffinement (diminution de la taille caractéristique h des éléments) ou p -raffinement (augmentation du degré d'interpolation p des éléments) de Ω_h . L'erreur vraie e , i.e. la mesure de \underline{e}_h , est alors remplacée par une erreur de référence \bar{e} , i.e. la mesure de $\underline{u}_{\bar{h}} - \underline{u}_h$, dans l'expression (1.31) définissant l'indice d'efficacité η .

2 Estimation de l'erreur globale

Les principaux estimateurs d'erreur globale *a posteriori* peuvent être classés en trois grandes familles fondées respectivement sur :

- le *lissage des contraintes*, en exploitant les *défauts de régularité* de la solution approchée ;
- les *résidus d'équilibre*, en exploitant les *défauts d'équilibre* de la solution approchée ;

Stratégie robuste et efficace pour le contrôle des calculs éléments finis en ingénierie

- la *non-vérification de la relation de comportement*, en exploitant le concept d'*erreur en relation de comportement* ainsi que des techniques adaptées de construction de champs équilibrés.

2.1 Estimateurs basés sur le lissage des contraintes

Cette famille d'estimateurs, initiée par les travaux de Zienkiewicz & Zhu [Zienkiewicz et Zhu (1987), Zienkiewicz et Zhu (1992a), Zienkiewicz et Zhu (1992b)] et communément appelée « *Recovery-Based Error Estimator* » ou encore « *Gradient-Smoothing Type Error Estimator* », s'appuie sur le manque de régularité de la solution approchée $(\underline{u}_h, \sigma_h)$. Le principe général de l'approche par lissage consiste à construire, à partir du champ de contrainte approché σ_h , une approximation continue σ_h^{opt} du champ de contrainte exact σ_{ex} sensée être plus régulière que σ_h , i.e. une meilleure approximation de σ_{ex} que σ_h . En substituant cette nouvelle solution en contrainte σ_h^{opt} , dite optimisée ou lissée, à σ_{ex} dans (1.28), on définit une mesure approchée de l'erreur :

$$\theta = \|\sigma_h^{\text{opt}} - \sigma_h\|_{\sigma, \Omega} \simeq e_{\Omega}(\sigma) = \|\mathfrak{e}_h\|_{\sigma, \Omega} = \|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\sigma, \Omega} \quad (1.35)$$

Remarque 1.8 :

On peut également appliquer cette approche par lissage au champ de déplacement conduisant au résultat suivant :

$$\theta = \|\underline{u}_h^{\text{opt}} - \underline{u}_h\|_{u, \Omega} \simeq e_{\Omega}(\underline{u}) = \|\underline{e}_h\|_{u, \Omega} = \|\underline{u}_{ex} - \underline{u}_h\|_{u, \Omega}$$

où $\underline{u}_h^{\text{opt}}$ désigne la solution lissée en déplacement déterminée à partir de \underline{u}_h .

La précision et les performances de cette famille d'estimateurs dépendent intrinsèquement de la procédure de lissage employée pour construire la solution optimisée σ_h^{opt} . On distingue deux générations de procédure de lissage, appelées méthodes ZZ1 et ZZ2.

Méthode ZZ1

Introduite dans [Zienkiewicz et Zhu (1987)], elle constitue la première méthode utilisant l'approche par lissage. Le champ de contrainte optimisé σ_h^{opt} y est construit sur la base des fonctions de forme éléments finis $\varphi_i \in \mathcal{U}_h$, où \mathcal{U}_h correspond à l'espace unidimensionnel associé à \mathcal{U}_h , en introduisant une famille de tenseurs symétriques constants $\bar{\sigma}_{h,i}^{\text{opt}}$:

$$\sigma_h^{\text{opt}} = \sum_{i \in \mathcal{N}} \bar{\sigma}_{h,i}^{\text{opt}} \varphi_i \quad (1.36)$$

où \mathcal{N} désigne l'ensemble des nœuds du maillage Ω_h .

La détermination des valeurs tensorielles nodales $\bar{\sigma}_{h,i}^{\text{opt}}$ s'effectue de manière globale ou locale :

- la première approche consiste à réaliser une projection globale en minimisant l'écart aux moindres carrés entre les champs de contrainte lissé σ_h^{opt} et éléments finis σ_h :

$$\bar{\sigma}_{h,i}^{\text{opt}} = \arg \min_{\bar{\alpha}_{h,i}^{\text{opt}}} \left\{ \left\| \alpha_h^{\text{opt}} - \sigma_h \right\|_{\sigma, \Omega}^2 \right\} \quad (1.37)$$

où

$$\alpha_h^{\text{opt}} = \sum_{i \in \mathcal{N}} \bar{\alpha}_{h,i}^{\text{opt}} \varphi_i$$

conduisant à la résolution d'un système linéaire global qui peut s'avérer coûteuse et nécessiter l'emploi d'une technique itérative ;

- la seconde approche, moins coûteuse, consiste à faire une moyenne locale pondérée des valeurs de σ_h prises aux points de Gauss avoisinant le nœud i .

Ces méthodes, dont le principe et la mise en œuvre sont très simples, sont actuellement très répandues et populaires dans le milieu de l'ingénierie en raison de leur implémentation aisée dans les codes de calcul éléments finis industriels et de leur application à tout type de problème (linéaire ou non-linéaire, statique ou d'évolution). Cependant, elles peuvent conduire à des estimations de mauvaise qualité dans certains cas (maillage grossier, degré d'interpolation élevé) et ne sont pas conservatives (l'estimation obtenue n'est pas garantie). Dans le cadre de l'élasticité linéaire, des arguments mathématiques permettent d'établir une propriété de convergence asymptotique exacte du type (1.33) ainsi que des bornes inférieure et supérieure de l'erreur vraie qui dépendent de paramètres a priori inconnus [Carstensen et Funken (2001)]. Néanmoins, la pertinence de l'application de ces méthodes au cadre non-linéaire n'est pas prouvée.

Méthode ZZ2

Introduite sous le nom de « *Superconvergent Patch Recovery* » ou *SPR* [Zienkiewicz et Zhu (1992a), Zienkiewicz et Zhu (1992b), Zienkiewicz et Zhu (1992c)], cette méthode vise à pallier les principaux inconvénients de la technique précédente. Tout en conservant le choix de la base d'approximation de σ_h^{opt} (1.36), elle consiste en une amélioration de la procédure de calcul des valeurs nodales $\bar{\sigma}_{h,i}^{\text{opt}}$. Cette dernière devient certes plus coûteuse, mais elle conduit à une estimation de meilleure qualité. La démarche de calcul des coefficients $\bar{\sigma}_{h,i}^{\text{opt}}$ se scinde en deux étapes :

1. un champ de contrainte intermédiaire $\sigma_{h,j}^{\text{opt}}$ est tout d'abord construit sur chaque patch d'éléments Ω_j (correspondant au support de la fonction de forme éléments finis φ_j associée au nœud j) sous la forme polynomiale suivante :

$$\sigma_{h,j}^{\text{opt}} = \sum_{k \in \mathcal{N}_{\Omega_j}} \bar{\sigma}_{h,j,k}^{\text{opt}} \varphi_k \quad (1.38)$$

où \mathcal{N}_{Ω_j} désigne l'ensemble des nœuds du patch Ω_j et $\bar{\sigma}_{h,j,k}^{\text{opt}}$ un tenseur constant du même type que $\bar{\sigma}_{h,i}^{\text{opt}}$; la détermination des valeurs tensorielles nodales $\bar{\sigma}_{h,j,k}^{\text{opt}}$

est réalisée en minimisant l'écart aux moindres carrés entre $\sigma_{h,j}^{\text{opt}}$ et σ_h sur un ensemble \mathcal{M}_j de *points d'échantillonnage* du patch Ω_j :

$$\bar{\sigma}_{h,j,k}^{\text{opt}} = \arg \min_{\bar{\alpha}_{h,j,k}^{\text{opt}}} \left\{ \sum_{\underline{M} \in \mathcal{M}_j} \text{Tr} [(\alpha_{h,j}^{\text{opt}}(\underline{M}) - \sigma_h(\underline{M}))^2] \right\} \quad (1.39)$$

où

$$\alpha_{h,j}^{\text{opt}} = \sum_{k \in \mathcal{N}_{\Omega_j}} \bar{\alpha}_{h,j,k}^{\text{opt}} \varphi_k \quad (1.40)$$

2. le calcul des coefficients $\bar{\sigma}_{h,i}^{\text{opt}}$ se déduit des champs de contrainte intermédiaires $\sigma_{h,j}^{\text{opt}}$ préalablement déterminés sur chaque patch $\Omega_j \in \mathcal{L}_i$, où \mathcal{L}_i désigne la liste des patches contenant le nœud i comme nœud intérieur ; chaque coefficient $\bar{\sigma}_{h,i}^{\text{opt}}$ est alors construit en réalisant une moyenne sur l'ensemble des patches $\Omega_j \in \mathcal{L}_i$ des valeurs de $\sigma_{h,j}^{\text{opt}}$ prises au nœud i :

$$\bar{\sigma}_{h,i}^{\text{opt}} = \frac{1}{\text{card}(\mathcal{L}_i)} \sum_{j, \Omega_j \in \mathcal{L}_i} \sigma_{h,j}^{\text{opt}}(\underline{M}_i) \quad (1.41)$$

où \underline{M}_i correspond à la position du nœud i considéré.

Le choix des ensembles \mathcal{M}_j de points d'échantillonnage a une forte influence sur la qualité de l'estimation fournie par la méthode SPR. Dans le cadre des problèmes linéaires, l'utilisation des points de *superconvergence* de grandeurs dérivées du déplacement (de type contrainte) comme points d'échantillonnage conduit à une mesure d'erreur optimale dans la mesure où les propriétés de superconvergence confèrent à la méthode SPR une plus grande précision et un ordre de convergence plus élevé [Barlow (1976), Zlámal (1978), Mackinnon et Carey (1989), Prathap (1996), Rajendran et Liew (2003)]. Ces points de superconvergence, également appelés points de Barlow [Barlow (1976)], satisfont notamment la condition de consistance (« *consistency condition* ») donnée dans [Ainsworth et Craig (1991)] ; ils coïncident avec les points d'intégration de Gauss en 1D, tandis que leur existence en 2D et 3D n'est établie que pour certains types d'éléments et certaines configurations de maillages [Wheeler et Whiteman (1987)]. Le lecteur curieux d'approfondir le sujet pourra consulter une étude menée sur les propriétés de superconvergence dans [Krzizek et Neitaanmaki (1987)].

Remarque 1.9 :

Il est possible d'établir un encadrement de l'indice d'efficacité η de la forme [Zienkiewicz et Zhu (1992b)] :

$$1 - \frac{\|\mathbf{e}_h^{\text{opt}}\|_{\sigma, \Omega}}{\|\mathbf{e}_h\|_{\sigma, \Omega}} \leq \eta = \frac{\theta}{\|\mathbf{e}_h\|_{\sigma, \Omega}} \leq 1 + \frac{\|\mathbf{e}_h^{\text{opt}}\|_{\sigma, \Omega}}{\|\mathbf{e}_h\|_{\sigma, \Omega}} \quad (1.42)$$

où $\mathfrak{e}_h = \sigma_{ex} - \sigma_h$ (resp. $\mathfrak{e}_h^{opt} = \sigma_{ex} - \sigma_h^{opt}$) désigne l'erreur sur le champ de contrainte éléments finis σ_h (resp. sur le champ de contrainte lissé σ_h^{opt}). La précision des estimateurs basés sur le lissage des contraintes dépend donc directement du rapport entre la mesure globale de \mathfrak{e}_h^{opt} et celle de \mathfrak{e}_h .

En outre, sous réserve de l'existence de propriétés de superconvergence et en supposant qu'il existe des constantes $C > 0$ et $C^{opt} > 0$ telles que :

$$\|\mathfrak{e}_h\|_{\sigma,\Omega} \leq Ch^p \quad \text{et} \quad \|\mathfrak{e}_h^{opt}\|_{\sigma,\Omega} \leq C^{opt}h^{p+\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

l'encadrement (1.42) peut se mettre sous la forme [Zienkiewicz et Zhu (1992c)] :

$$1 - \frac{C^{opt}}{C}h^\alpha \leq \eta \leq 1 + \frac{C^{opt}}{C}h^\alpha \quad (1.43)$$

Cet encadrement conduit à une propriété de convergence du type (1.33), traduisant le caractère consistant ou asymptotiquement exact de l'estimateur ZZ2 sous les hypothèses mentionnées précédemment [Ainsworth et Oden (1997)].

Variantes

Plusieurs variantes relatives à la méthode ZZ2 ont été proposées par la suite afin d'améliorer la qualité de l'estimation. Celles-ci portent essentiellement sur la démarche de calcul des champs de contrainte intermédiaires $\sigma_{h,j}^{opt}$ définis sur chaque patch Ω_j . Nous présentons ici les aspects fondamentaux des principales variantes.

Dans [Wiberg et Abdulwahab (1993)], une méthode nommée « *SPR with interior equilibrium enhancement* » ou *SPR-E* tient compte du résidu des équations d'équilibre intérieur sous forme faible à travers l'introduction d'un terme de pénalisation dans la minimisation de la fonctionnelle (1.39) afin de satisfaire de manière approchée les équations d'équilibre local au sein de chaque patch. Une variante appelée « *SPR with boundary enhancement* » ou *SPR-B* consiste à incorporer dans la minimisation de la fonctionnelle (1.39) non pas le résidu intérieur (associé aux équations d'équilibre), mais celui de frontière (associé aux conditions aux limites de Neumann définies par (1.6)). Dans [Wiberg et al. (1994)], une extension des techniques SPR-E et SPR-B connue sous le nom de « *SPR with interior equilibrium and boundary enhancement* » ou *SPR-EB* consiste à introduire plusieurs termes de pénalisation dans la minimisation de la fonctionnelle (1.39) afin de prendre en compte de manière approchée les équations d'équilibre intérieur et les conditions aux limites de Neumann sur chacun des patches. La nouvelle fonctionnelle à minimiser se met sous la forme :

$$\bar{\sigma}_{h,j,k}^{opt} = \arg \min_{\bar{\alpha}_{h,j,k}^{opt}} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\underline{M} \in \mathcal{M}_j} \text{Tr} [(\alpha_{h,j}^{opt}(\underline{M}) - \sigma_h(\underline{M}))^2] \\ + w_{eq} \int_{\Omega_j} \left(\text{div}(\alpha_{h,j}^{opt}) + \underline{f}_d \right)^2 d\Omega + w_f \int_{\partial\Omega_j \cap \partial_f \Omega} (\alpha_{h,j}^{opt} \underline{n} - \underline{F}_d)^2 dS \end{array} \right\} \quad (1.44)$$

où $\alpha_{h,j}^{\text{opt}}$ est défini par (1.40) ; w_{eq} et w_f sont des coefficients de pondération positifs permettant d'affecter un poids plus ou moins important aux résidus correspondants. Cette approche par minimisation sous conditions d'équilibre confère à la méthode un caractère mécanique et permet notamment d'améliorer la précision sur les zones frontalières du domaine. Une démarche similaire fut proposée indépendamment dans [Blacker et Belytschko (1994)]. Celle dernière introduit néanmoins une amélioration supplémentaire, connue sous le nom de « *conjoint polynomial enhancement* », dans laquelle le tenseur $\bar{\sigma}_{h,i}^{\text{opt}}$ est reconstruit sous forme polynomiale directement à partir de l'expression (1.38) des champs de contrainte intermédiaires $\sigma_{h,j}^{\text{opt}}$ calculés sur les différents patches $\Omega_j \in \mathcal{L}_i$ (i.e. connectés au nœud i considéré), contrairement à la technique SPR classique qui s'appuie uniquement sur les valeurs nodales $\sigma_{h,j}^{\text{opt}}(\underline{M}_i)$ des champs $\sigma_{h,j}^{\text{opt}}$ prises au nœud i à travers la relation (1.41).

Dans [Kvamsdal et Okstad (1998)], une méthode qualifiée de « *SPR with statically admissible polynomials* » ou *SPR-S* assure la vérification a priori (de manière exacte) des équations d'équilibre local sur chaque patch, afin d'améliorer la robustesse des techniques SPR classique et SPR-E. Les champs de contrainte intermédiaires $\sigma_{h,j}^{\text{opt}}$ sont alors recherchés sur chacun des patches dans une base polynomiale préalablement construite assurant la prise en compte des conditions d'équilibre. Une variante dénommée « *SPR with statically admissible polynomials and boundary enhancement* » ou *SPR-SB* s'appuie sur la technique SPR-B afin d'imposer de manière approchée la vérification des conditions aux limites de Neumann aux frontières de chaque patch. Une étude comparative des performances affichées par les techniques SPR classique, SPR-E, SPR-B, SPR-EB, SPR-S et SPR-SB est menée sur divers exemples numériques en dimension 2. Dans le cas de problèmes réguliers, la technique SPR-SB conduit à une amélioration de la robustesse et de la précision en comparaison avec les autres variantes. Dans le cas de problèmes présentant des singularités géométriques, celle-ci fournit des résultats comparables aux techniques SPR-B et SPR-EB. Par ailleurs, signalons que les techniques SPR-S et SPR-SB utilisent la technique dite « *conjoint polynomial enhancement* », développée dans [Blacker et Belytschko (1994)], afin d'améliorer la qualité du champ de contrainte lissé σ_h^{opt} reconstruit sur l'ensemble du domaine.

Dans [Boroomand et Zienkiewicz (1997b), Boroomand et Zienkiewicz (1997a)], une méthode appelée « *Recovery by Equilibrium in Patches* » ou *REP* consiste à remplacer la fonctionnelle (1.39) par une condition de prolongement définie sur chaque patch Ω_j conduisant à la minimisation suivante :

$$\bar{\sigma}_{h,j,k}^{\text{opt}} = \arg \min_{\bar{\alpha}_{h,j,k}^{\text{opt}}} \left\{ \left[\int_{\Omega_j} (\alpha_{h,j}^{\text{opt}} - \sigma_h) \underline{\nabla} \varphi_k \, d\Omega \right]^2 \right\} \quad (1.45)$$

où $\alpha_{h,j}^{\text{opt}}$ est défini par (1.40). Cette méthode permet notamment de s'affranchir de l'utilisation des points de superconvergence et semble afficher des performances similaires, voire légèrement supérieures, à la méthode SPR. Notons que les équations

d'équilibre intérieur et les conditions aux limites de Neumann sont toujours vérifiées de manière approchée sur chaque patch à travers cette nouvelle fonctionnelle de minimisation.

Dans [Zhang et Naga (2005)], l'approche par lissage est appliquée au champ de déplacement, le champ de déplacement intermédiaire $\underline{u}_{h,j}^{\text{opt}}$ défini sur chaque patch Ω_j étant recherché sous une forme polynomiale de degré supérieur au degré d'interpolation p (utilisé dans la méthode SPR classique) de la base d'approximation éléments finis \mathcal{U}_h associée au champ de déplacement approché \underline{u}_h . Le champ de contrainte est ensuite déterminé a posteriori via la relation de comportement. Cette variante conduit à une amélioration des propriétés de superconvergence de la méthode SPR, assurant ainsi une plus grande robustesse à la méthode ZZ2.

Dans [Ródenas et al. (2003)], une méthode qualifiée de *SPR-R* consiste à vérifier de manière exacte les conditions aux limites de Neumann sur les bords de chaque patch en introduisant un repère local associé à chacun des patches. Dans [Ródenas et al. (2007)], une extension de la technique SPR-R connue sous le nom de « *Constrained-SPR* » ou *SPR-C* consiste à satisfaire exactement non seulement les conditions aux limites en effort sur la frontière de chaque patch, mais aussi les équations d'équilibre intérieur et les conditions de compatibilité sur chacun des patches, toutes ces contraintes étant traitées numériquement à l'aide de multiplicateurs de Lagrange. Les conditions d'équilibre et les conditions aux limites de Neumann sont donc vérifiées de manière exacte sur chaque patch, contrairement aux méthodes SPR-EB et REP qui reposent uniquement sur une minimisation locale, à l'échelle d'un patch, des résidus associés à ces conditions. Néanmoins, le champ de contrainte lissé σ_h^{opt} reconstruit en utilisant (1.36) ne vérifie pas l'équilibre global sur l'ensemble du domaine et l'estimation obtenue n'est pas théoriquement garantie. Par ailleurs, cette variante semble afficher des performances comparables, voire légèrement supérieures, à la méthode SPR-EB.

Dans [Díez et al. (2007)], une nouvelle méthode est introduite afin de remédier au principal défaut des approches par lissage, à savoir leur aspect heuristique. Cette méthode repose sur la construction d'un champ de contrainte lissé continu $\sigma_{h,j}^{\text{opt}}$ de la forme (1.38), où $\bar{\sigma}_{h,j,k}^{\text{opt}}$ désigne un tenseur symétrique continu défini sur le patch Ω_j , et la prise en compte des défauts d'équilibre associés au champ de contrainte lissé afin d'obtenir une estimation théoriquement garantie de l'erreur vraie. Elle s'appuie en particulier sur la technique SPR-C afin de satisfaire exactement les équations d'équilibre intérieur et les conditions aux limites en effort sur chaque patch. Afin d'améliorer la qualité du champ de contrainte lissé, les conditions de compatibilité sont imposées lors de la minimisation de la fonctionnelle (1.39) à travers l'introduction d'un terme additionnel. Deux stratégies sont alors envisagées pour estimer les défauts d'équilibre. L'une, reposant sur la résolution d'un problème aux valeurs propres, conduit à une majoration, certes garantie, mais sur-estimant considérablement l'erreur vraie, tandis que la seconde, s'appuyant sur une procédure d'adap-

tivité, i.e. une séquence de calculs obtenus par raffinements successifs, fournit une estimation précise de l'erreur, mais qui n'est pas théoriquement garantie. Notons cependant que l'erreur estimée θ obtenue par cette dernière stratégie est une borne supérieure de l'erreur vraie e dans la grande majorité des applications numériques considérées dans [Díez et al. (2007)].

Enfin, dans [Fierro et Veese (2006)], des conditions locales de consistance et de stabilité relatives à la procédure de lissage ZZ1 sont exposées et conduisent à des propriétés de superconvergence sous certaines hypothèses. Des termes additionnels sont introduits dans la mesure approchée de l'erreur (1.35) obtenue à partir de la méthode ZZ1. La méthode proposée assure la prise en compte non seulement de la mesure (1.35) de l'erreur commise entre les champs de contrainte approché σ_h et lissé σ_h^{opt} , mais aussi celle de l'erreur commise entre les champs de contrainte lissé σ_h^{opt} et exact σ_{ex} . Un majorant de cette dernière peut être obtenu à l'aide d'estimateurs explicites faisant intervenir les résidus intérieurs et de frontières associés à la solution lissée reconstruite, les valeurs propres du tenseur de Hooke \mathbf{K} ainsi qu'une constante multiplicative C qui dépend de la taille caractéristique et de la forme des éléments du maillage. En outre, dès lors que la procédure de lissage vérifie des propriétés de superconvergence, l'estimateur obtenu satisfait une propriété de convergence asymptotique exacte.

Commentaires

Cette famille d'estimateurs a connu un succès considérable dans le monde industriel, grâce notamment à sa facilité d'implémentation dans les codes commerciaux éléments finis et à son faible coût de calcul, qui sont ses atouts majeurs. Elle a été sujette à de nombreux développements, mais son aspect heuristique reste son principal inconvénient. En effet, l'approche par lissage repose simplement sur l'établissement d'un champ de contrainte (resp. déplacement) lissé σ_h^{opt} (resp. $\underline{u}_h^{\text{opt}}$) représentant une meilleure approximation de σ_{ex} (resp. \underline{u}_{ex}) que σ_h (resp. \underline{u}_h) au sens de la norme énergétique (1.3a) (resp. (1.3b)) et sur une évaluation de la mesure de l'erreur entre σ_h^{opt} (resp. $\underline{u}_h^{\text{opt}}$) et σ_h (resp. \underline{u}_h). Bien que le choix de la procédure de lissage confère une certaine flexibilité (ou souplesse) à ces estimateurs, ces derniers ne constituent que des indicateurs d'erreur dépourvus de propriété de majoration stricte de l'erreur vraie, malgré une première tentative proposée dans [Díez et al. (2007)]. De tels indicateurs fournissent toutefois des informations utiles pouvant être utilisées à moindre coût au sein de procédures d'optimisation de maillage en vue d'offrir un outil de contrôle adaptatif. Une revue des principales améliorations apportées aux procédures de lissage des contraintes peut être trouvée dans [Xiao et Karihaloo (2004)].

2.2 Estimateurs basés sur les résidus d'équilibre

Cette famille d'estimateurs, introduite par Babuška & Rheinboldt [Babuška et Rheinboldt (1978b), Babuška et Rheinboldt (1978a)] et connue sous le nom de « *Residual-Type Error Estimator* », s'appuie sur les défauts d'équilibre de la solution approchée $(\underline{u}_h, \sigma_h)$. Le point de départ du développement de ces estimateurs est l'équation des résidus (1.22) qui traduit le non-respect de l'équilibre sur le domaine Ω et constitue un nouveau problème dont la solution, a priori inconnue, est l'erreur de discrétisation \underline{e}_h . Rappelons que cette équation met en jeu les conditions aux limites en effort \underline{f}_d et \underline{F}_d (données du problème de référence) ainsi que la solution approchée en déplacement \underline{u}_h à travers la fonctionnelle des résidus \mathcal{R}_h , et s'écrit :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \langle \underline{e}_h, \underline{u}^* \rangle_{u,\Omega} = \mathcal{R}_h(\underline{u}^*) \quad (1.46)$$

où

$$\mathcal{R}_h(\underline{u}^*) = l(\underline{u}^*) - \langle \underline{u}_h, \underline{u}^* \rangle_{u,\Omega} \quad (1.47)$$

et

$$l(\underline{u}^*) = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* \, d\Omega + \int_{\partial_f \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* \, dS \quad (1.48)$$

En particulier, en prenant $\underline{u}^* = \underline{e}_h \in \mathbf{U}_0^{ad}$ dans (1.46), on obtient la relation suivante :

$$\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}^2 = \mathcal{R}_h(\underline{e}_h) \quad (1.49)$$

qui établit un lien direct entre l'erreur vraie $\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}$ et l'opérateur des résidus \mathcal{R}_h . Cette mesure globale de l'erreur de discrétisation étant hors de portée, les méthodes d'estimation en résidus d'équilibre s'attachent à évaluer une mesure approchée θ de l'erreur vraie en s'appuyant sur l'équation des résidus (1.46) et la propriété d'orthogonalité de Galerkin (1.24) qui en découle.

On distingue deux sous-familles d'estimateurs suivant leur nature *explicite* ou *implicite*. Les estimateurs qualifiés d'*explicites* exploitent directement l'équation des résidus (1.46), notamment la solution approchée $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ et les données du problème de référence, ainsi que des caractéristiques du maillage Ω_h afin d'établir une majoration directe de l'erreur vraie, tandis que les estimateurs dits *implicites* s'appuient quant à eux sur la résolution d'un ensemble de problèmes locaux définis sur chaque élément ou patch d'éléments.

2.2.1 Estimateurs explicites

Cette sous-famille d'estimateurs fut introduite dans [Babuška et Rheinboldt (1978b)] sous le nom de « *Global Explicit Residual Based Error Estimator* ». Initialement développée en dimension 1 [Babuška et Rheinboldt (1979)], elle fut par la suite étendue en dimension 2 [Babuška et Miller (1987)]. Elle repose sur l'équation des résidus (1.46), où l'opérateur des résidus \mathcal{R}_h (1.47) est exprimé sous la

forme d'une somme de contributions élémentaires. En effectuant une intégration par parties, \mathcal{R}_h peut se mettre sous la forme :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \mathcal{R}_h(\underline{u}^*) = \sum_{E \in \mathcal{E}} \int_E \underline{r}_E \cdot \underline{u}^* \, d\Omega - \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}} \int_{\Gamma} \underline{r}_{\Gamma} \cdot \underline{u}^* \, dS \quad (1.50)$$

où \underline{r}_E désigne le *résidu intérieur* défini sur E par :

$$\underline{r}_E = \underline{\text{div}}(\sigma_h) + \underline{f}_d \quad (1.51)$$

et \underline{r}_{Γ} le *résidu de frontière* défini sur Γ par :

$$\underline{r}_{\Gamma} = \begin{cases} \sigma_{h|E} \underline{n}_E + \sigma_{h|E'} \underline{n}_{E'} = (\sigma_{h|E} - \sigma_{h|E'}) \underline{n}_E = \llbracket \sigma_h \underline{n} \rrbracket & \text{sur } \Gamma \in \partial E \cap \partial E' \\ \sigma_{h|E} \underline{n}_E - \underline{F}_d & \text{sur } \Gamma \in \partial E \cap \partial_f \Omega \\ \underline{0} & \text{sur } \Gamma \in \partial E \cap \partial_u \Omega \end{cases} \quad (1.52)$$

\mathcal{E} et \mathcal{J} étant respectivement l'ensemble des éléments et des faces (resp. des bords) en dimension 3 (resp. dimension 2) associés au maillage Ω_h .

Le résidu intérieur \underline{r}_E traduit le non-respect des équations d'équilibre intérieur (1.18) sur chaque élément E , tandis que le résidu de frontière \underline{r}_{Γ} traduit d'une part la non-vérification des conditions aux limites en effort (1.17) sur un bord $\Gamma \in \partial E \cap \partial_f \Omega$, et d'autre part la discontinuité (ou le saut) du vecteur contrainte (1.19) sur un bord intérieur $\Gamma \in \partial E \cap \partial E'$.

En introduisant à présent un opérateur de projection $\Pi_h: \mathbf{U}_0^{ad} \rightarrow \mathbf{U}_{0,h}^{ad}$, appelé *opérateur d'interpolation*, et en utilisant la propriété d'orthogonalité de Galerkin (1.24), on obtient :

$$\begin{aligned} \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \langle \underline{e}_h, \underline{u}^* \rangle_{u,\Omega} &= \mathcal{R}_h(\underline{u}^* - \Pi_h \underline{u}^*) \\ &= \sum_{E \in \mathcal{E}} \int_E \underline{r}_E \cdot (\underline{u}^* - \Pi_h \underline{u}^*) \, d\Omega - \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}} \int_{\Gamma} \underline{r}_{\Gamma} \cdot (\underline{u}^* - \Pi_h \underline{u}^*) \, dS \end{aligned} \quad (1.53)$$

Puis, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux produits scalaires $\langle \bullet, \circ \rangle_{[\mathcal{L}^2(E)]^d}$ et $\langle \bullet, \circ \rangle_{[\mathcal{L}^2(\Gamma)]^d}$ définis sur \mathbf{U} par :

$$\langle \bullet, \circ \rangle_{[\mathcal{L}^2(E)]^d} = \int_E \bullet \cdot \circ \, d\Omega \quad \text{et} \quad \langle \bullet, \circ \rangle_{[\mathcal{L}^2(\Gamma)]^d} = \int_{\Gamma} \bullet \cdot \circ \, dS$$

on aboutit à l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad & \quad \quad \quad (1.54) \\ \left| \langle \underline{e}_h, \underline{u}^* \rangle_{u,\Omega} \right| &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}} \|\underline{r}_E\|_{[\mathcal{L}^2(E)]^d} \|\underline{u}^* - \Pi_h \underline{u}^*\|_{[\mathcal{L}^2(E)]^d} + \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}} \|\underline{r}_{\Gamma}\|_{[\mathcal{L}^2(\Gamma)]^d} \|\underline{u}^* - \Pi_h \underline{u}^*\|_{[\mathcal{L}^2(\Gamma)]^d} \end{aligned}$$

où $\|\bullet\|_{[\mathcal{L}^2(E)]^d}$ et $\|\bullet\|_{[\mathcal{L}^2(\Gamma)]^d}$ désignent respectivement les normes associées aux produits scalaires $\langle \bullet, \circ \rangle_{[\mathcal{L}^2(E)]^d}$ et $\langle \bullet, \circ \rangle_{[\mathcal{L}^2(\Gamma)]^d}$.

Par la suite, considérons les inégalités de Poincaré qui postulent l'existence de constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que [Clément (1975), Gerasimov et al. (2012)] :

$$\begin{aligned} \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad & \|\underline{u}^* - \Pi_h \underline{u}^*\|_{[\mathcal{L}^2(E)]^d} \leq C_1 h_E \|\underline{u}^*\|_{[\mathcal{H}^1(\tilde{\mathcal{E}}_E^{\mathcal{E}})]^d} \\ & \|\underline{u}^* - \Pi_h \underline{u}^*\|_{[\mathcal{L}^2(\Gamma)]^d} \leq C_2 h_\Gamma^{1/2} \|\underline{u}^*\|_{[\mathcal{H}^1(\tilde{\mathcal{E}}_\Gamma^{\mathcal{J}})]^d} \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathcal{E}}_E^{\mathcal{E}}$ et $\tilde{\mathcal{E}}_\Gamma^{\mathcal{J}}$ désignent l'ensemble des éléments avoisinant l'élément $E \in \mathcal{E}$ et la face $\Gamma \in \mathcal{J}$, respectivement, h_E et h_Γ étant les tailles caractéristiques respectives de E et Γ . En injectant ces inégalités dans (1.54), puis en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^2 , on montre l'existence d'une constante $C_3 > 0$, indépendante de \underline{u}^* , h_E et h_Γ , telle que :

$$\begin{aligned} \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad & \tag{1.55} \\ \left| \langle \underline{e}_h, \underline{u}^* \rangle_{u,\Omega} \right| & \leq C_3 \|\underline{u}^*\|_{[\mathcal{H}^1(\Omega)]^d} \left[\sum_{E \in \mathcal{E}} h_E^2 \|\underline{r}_E\|_{[\mathcal{L}^2(E)]^d}^2 + \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}} h_\Gamma \|\underline{r}_\Gamma\|_{[\mathcal{L}^2(\Gamma)]^d}^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Considérons à présent la version suivante de l'inégalité de Korn qui postule l'existence d'une constante $C_4 > 0$ dépendant uniquement du domaine Ω telle que [Duvaut et Lions (1972 - 1976)] :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \|\underline{u}^*\|_{[\mathcal{H}^1(\Omega)]^d} \leq C_4 \|\mathcal{E}(\underline{u}^*)\|_{[\mathcal{L}^2(\Omega)]^{d^2}}$$

où $\|\bullet\|_{[\mathcal{L}^2(\Omega)]^{d^2}}$ et $\|\bullet\|_{[\mathcal{H}^1(\Omega)]^d}$ désignent les normes associées aux produits scalaires $\langle \bullet, \circ \rangle_{[\mathcal{L}^2(\Omega)]^{d^2}}$ et $\langle \bullet, \circ \rangle_{[\mathcal{H}^1(\Omega)]^d}$ définis respectivement sur \mathbf{S} et \mathbf{U} par :

$$\langle \bullet, \circ \rangle_{[\mathcal{L}^2(\Omega)]^{d^2}} = \int_{\Omega} \text{Tr} [\bullet \circ] \, d\Omega \quad \text{et} \quad \langle \bullet, \circ \rangle_{[\mathcal{H}^1(\Omega)]^d} = \langle \bullet, \circ \rangle_{[\mathcal{L}^2(\Omega)]^d} + \langle \nabla \bullet, \nabla \circ \rangle_{[\mathcal{L}^2(\Omega)]^{d^2}}$$

Finalement, en injectant cette inégalité dans (1.55), puis en exploitant le résultat :

$$\begin{aligned} \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \|\underline{u}^*\|_{u,\Omega} & = \left[2\mu \|\mathcal{E}(\underline{u}^*)\|_{[\mathcal{L}^2(\Omega)]^{d^2}}^2 + \lambda \|\text{Tr} [\mathcal{E}(\underline{u}^*)]\|_{[\mathcal{L}^2(\Omega)]}^2 \right]^{1/2} \\ & \geq \sqrt{2\mu} \|\mathcal{E}(\underline{u}^*)\|_{[\mathcal{L}^2(\Omega)]^{d^2}} \end{aligned}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé positifs définissant l'opérateur de Hooke \mathbf{K} , on montre l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad & \\ \left| \langle \underline{e}_h, \underline{u}^* \rangle_{u,\Omega} \right| & \leq C \|\underline{u}^*\|_{u,\Omega} \left[\sum_{E \in \mathcal{E}} h_E^2 \|\underline{r}_E\|_{[\mathcal{L}^2(E)]^d}^2 + \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}} h_\Gamma \|\underline{r}_\Gamma\|_{[\mathcal{L}^2(\Gamma)]^d}^2 \right]^{1/2} \quad \tag{1.56} \end{aligned}$$

En particulier, en prenant $\underline{u}^* = \underline{e}_h \in \mathcal{U}_0^{ad}$ dans (1.56), on obtient une majoration de l'erreur vraie sous la forme [Babuška et Rheinboldt (1979)] :

$$\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega} \leq \theta = C \left[\sum_{E \in \mathcal{E}} h_E^2 \|\underline{r}_E\|_{[\mathcal{L}^2(E)]^d}^2 + \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}} h_\Gamma \|\underline{r}_\Gamma\|_{[\mathcal{L}^2(\Gamma)]^d}^2 \right]^{1/2} \quad (1.57)$$

Remarque 1.10 :

L'erreur estimée θ (ôtée de la constante C) obtenue en (1.57) peut se décomposer en une somme de contributions élémentaires θ_E :

$$\theta_E = \left[h_E^2 \|\underline{r}_E\|_{[\mathcal{L}^2(E)]^d}^2 + h_\Gamma \|\underline{r}_\Gamma\|_{[\mathcal{L}^2(\partial E \cap \partial\Omega)]^d}^2 + \frac{1}{2} h_\Gamma \|\underline{r}_\Gamma\|_{[\mathcal{L}^2(\partial E \setminus \partial\Omega)]^d}^2 \right]^{1/2}$$

vérifiant

$$\sum_{E \in \mathcal{E}} \theta_E^2 = \theta^2$$

En supposant que chaque contribution θ_E représente une mesure approchée de la contribution $\|\underline{e}_h\|_{u,E}$ à l'erreur vraie $\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}$, il est alors possible de définir un indicateur d'efficacité local $\eta_E = \frac{\theta_E}{\|\underline{e}_h\|_{u,E}}$ et d'utiliser cet estimateur au sein de procédures d'adaptivité.

Remarque 1.11 :

Sous certaines conditions de régularité des données du problème de référence, il est également possible d'obtenir une borne inférieure de l'erreur vraie [Verfürth (1994), Verfürth (1996)], mettant en jeu une constante dépendante des caractéristiques du maillage. Ce type d'estimateurs vérifie donc une propriété d'équivalence du type (1.34) entre l'erreur estimée θ et l'erreur vraie $\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}$.

Les estimateurs explicites conduisent à une majoration directe de l'erreur vraie qui fait intervenir d'une part la norme des résidus intérieurs et de frontières connus, et d'autre part une constante non explicite C dont la valeur dépend des paramètres de discrétisation, de la base d'approximation éléments finis, et peut s'avérer difficile à évaluer de manière précise. Cette constante C est généralement choisie égale 1 [Gerasimov et al. (2012)], bien que celle-ci puisse être déterminée de manière explicite à partir de la connaissance des constantes intervenant dans les inégalités de Poincaré et de Friedrichs [Carstensen et Funken (2000a), Vohralík (2005), Cheddadi et al. (2008)]. Néanmoins, une évaluation simple de la constante C ou l'élaboration de bornes inférieure et supérieure facilement calculables pour C demeure à l'heure actuelle une question ouverte. En dépit de leur simplicité de mise en œuvre, le manque de pertinence et de robustesse de ces estimateurs ne pousse pas à leur utilisation. De plus amples précisions sur les estimateurs en résidus explicites sont disponibles dans [Babuška et Rheinboldt (1979), Babuška et Miller (1987), Kelly et al. (1983), Verfürth (1996), Ainsworth et Oden (1997)].

2.2.2 Estimateurs implicites

Le principe général de cette sous-famille d'estimateurs consiste à rechercher une estimation de l'erreur vraie $\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}$ à travers la résolution de petits problèmes locaux à l'échelle d'un élément ou d'un patch d'éléments en adoptant une approche locale de l'équation des résidus (1.46). Les estimateurs implicites sont plus coûteux que leurs homologues explicites, mais offrent en contrepartie une évaluation plus précise de l'erreur vraie.

Estimateurs par patch d'éléments

Ce type d'estimateurs a vu le jour dans [Babuška et Rheinboldt (1978a)] sous le nom de « *Subdomain Residual Method* » ou *SRM*. La construction repose sur un partitionnement du domaine Ω en un ensemble de patches d'éléments Ω_i se recouvrant partiellement. Le patch Ω_i associé au nœud sommet $i \in \mathcal{I}$, où \mathcal{I} désigne l'ensemble des nœuds sommets du maillage Ω_h , correspond au support de la fonction de forme éléments finis linéaire λ_i au nœud sommet i . Ω_i désigne donc le support de l'ensemble des éléments connectés au nœud sommet $i \in \mathcal{I}$ (cf. figure 1.2).

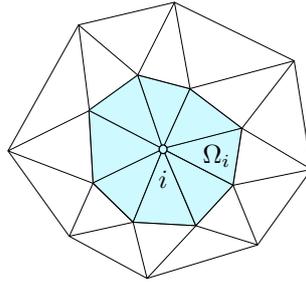


FIGURE 1.2: Représentation du patch Ω_i associé au nœud sommet i .

La première technique employée dans [Babuška et Rheinboldt (1978a)] consiste à rechercher une solution approchée de (1.22) en remplaçant le problème global par un ensemble de problèmes locaux indépendants posés sur chacun des patches Ω_i . Chacun des problèmes locaux défini sur un patch Ω_i s'écrit :

Trouver $\underline{e}_i \in \mathbf{U}_{0|\Omega_i}^{ad}$ vérifiant :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_{0|\Omega_i}^{ad}, \quad \int_{\Omega_i} \text{Tr} [\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{e}_i) \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*)] d\Omega = \mathcal{R}_{h|\Omega_i}(\underline{u}^*) \quad (1.58)$$

avec $\mathcal{R}_{h|\Omega_i}$ la restriction de l'opérateur des résidus au patch Ω_i :

$$\mathcal{R}_{h|\Omega_i}(\underline{u}^*) = \sum_{E \in \mathcal{E}_i^{\mathcal{I}}} \int_E \underline{r}_E \cdot \underline{u}^* d\Omega - \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}} \int_{\Gamma} \underline{r}_{\Gamma} \cdot \underline{u}^* dS \quad (1.59)$$

$\mathcal{E}_i^{\mathcal{I}}$ et $\mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}$ désignent respectivement l'ensemble des éléments et des faces (ou bords) connectés au nœud sommet $i \in \mathcal{I}$ (cf. figure 1.3). $\mathbf{U}_{0|\Omega_i}^{ad}$ est la restriction de \mathbf{U}_0^{ad} au

patch Ω_i :

$$\mathcal{U}_{0|\Omega_i}^{ad} = \{ \underline{u} \in \mathcal{U}_{|\Omega_i} \text{ tel que } \underline{u} = \underline{0} \text{ sur } \partial_u \Omega \cap \partial \Omega_i \} \quad (1.60)$$

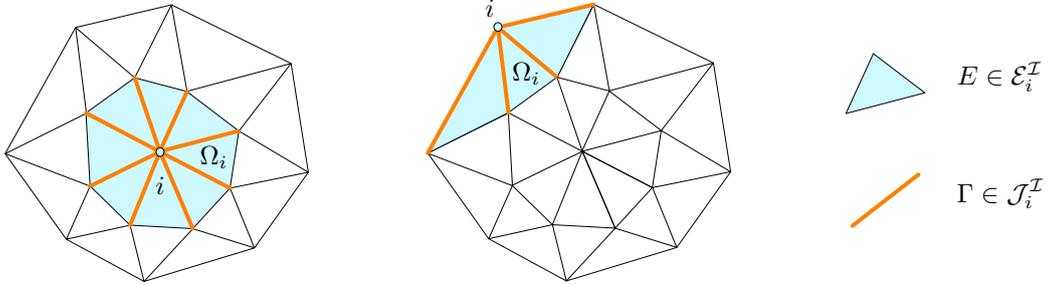


FIGURE 1.3: Représentation des éléments $E \in \mathcal{E}_i^I$ et des bords $\Gamma \in \mathcal{J}_i^I$ connectés au nœud sommet $i \in \mathcal{I}$.

L'erreur globale estimée θ est ensuite obtenue en sommant les mesures θ_i des contributions \underline{e}_i sur chaque patch :

$$\theta = \left[\sum_{i \in \mathcal{I}} \theta_i^2 \right]^{1/2} \quad \text{avec} \quad \theta_i = \|\underline{e}_i\|_{u, \Omega_i} \quad (1.61)$$

Remarque 1.12 :

Comme dans le cas des estimateurs explicites présentés en section 2.2.1, l'erreur estimée θ obtenue en (1.61) peut se décomposer en une somme de contributions élémentaires θ_E :

$$\theta_E = \left[\sum_{i \in \mathcal{I}_E^E} \|\underline{e}_{i|E}\|_{u, E}^2 \right]^{1/2}$$

vérifiant

$$\sum_{E \in \mathcal{E}} \theta_E^2 = \theta^2$$

où \mathcal{I}_E^E désigne l'ensemble des nœuds sommets de l'élément E .

Notons que les problèmes locaux (1.58) définis sur chaque patch sont mal posés : d'une part les patches dont la frontière n'appartient pas à $\partial_u \Omega$ nécessitent un blocage des mouvements de solides rigides, et d'autre part les patches ne sont a priori pas équilibrés, car les résidus intérieurs et de frontières ne respectent a priori pas l'équilibre de chaque patch. Afin d'y remédier, différentes techniques ont été proposées visant à assurer l'existence et l'unicité d'une solution aux problèmes locaux par patch (1.58).

Dans [Babuška et Rheinboldt (1978a)], une première technique consiste à imposer des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur une partie $\partial_u \Omega_i \neq \emptyset$ de la frontière $\partial \Omega_i$, telle que $\partial_u \Omega_i \cap \partial_f \Omega = \emptyset$, afin d'exclure les mouvements de corps rigides sur chaque patch. Il est alors possible d'établir [Ainsworth et Oden (1997)] une propriété d'équivalence entre l'erreur estimée obtenue en (1.61) et l'erreur vraie qui fait intervenir des constantes souvent inconnues et difficiles à déterminer, à l'instar des estimateurs explicites. L'estimation obtenue n'est pas une borne supérieure garantie de l'erreur vraie et sous-estime souvent cette dernière.

Dans [Carstensen et Funken (2000b), Machiels et al. (2000), Morin et al. (2003), Prudhomme et al. (2004)], la méthode de partition de l'unité (« *Partition of Unity Method* » ou *PUM*), formalisée dans le cadre des éléments finis dans [Melenk et Babuška (1996), Babuška et Melenk (1997)], est employée pour s'affranchir du calcul des densités ou flux d'effort à imposer sur la frontière des patches et se ramener ainsi à la résolution de problèmes locaux auto-équilibrés sur chaque patch. Cette technique, qualifiée de « *flux-free* », fut initialement développée dans cadre des problèmes scalaires de thermique en dimension 1 et 2, et par la suite revisitée et adaptée au cadre des problèmes d'élasticité linéaire en dimensions 2 et 3 [Parés et al. (2006b), Parés et al. (2009a)]. Nous reviendrons plus en détail sur ce type d'estimateurs dans la section 2 du chapitre 2, car ils fournissent des estimations garanties et pertinentes de l'erreur vraie.

Dans [Parés et al. (2009a), Cottureau et al. (2009)], une approche duale [de Veubeke (1965)] est employée afin de résoudre les problèmes locaux par patch. La solution en contrainte est recherchée sous forme polynomiale sur chacun des éléments du patch et présente donc des discontinuités inter-éléments. Les équations d'équilibre intérieur, les conditions de continuité du vecteur contrainte sur les bords intérieurs de chaque patch ainsi que les conditions aux limites de Neumann sont imposées sous forme forte sur chacun des patches (en introduisant des multiplicateurs de Lagrange). L'unicité de la solution en contrainte des problèmes locaux est assurée par minimisation locale de l'énergie complémentaire sur chaque patch. Cette méthode conduit à une majoration garantie de l'erreur vraie dès lors que les conditions de chargement $(\underline{F}_d, \underline{f}_d)$ sont des fonctions polynomiales de degré compatible avec celui de la solution en contrainte sur chaque élément du patch. Signalons par ailleurs que cette approche basée sur une formulation duale a également été appliquée au cadre des estimateurs implicites par élément (présentés au paragraphe suivant) dans [Sauer-Budge et al. (2004), Parés et al. (2006a)].

Remarque 1.13 :

Dans le cas d'un chargement imposé $(\underline{F}_d, \underline{f}_d)$ non-polynomial, il est néanmoins possible de construire un champ de contrainte rigoureusement admissible en utilisant la stratégie développée dans [Vejchodský (2006), Křížek (1983)]. Cette dernière combine la méthode des résidus équilibrés EqRM [Ladevèze et Leguillon (1983), Kelly (1984), Bank et Weiser (1985)] avec la méthode de l'hypercercle basée sur le théorème de Prager-Synge [Prager et Synge (1947)] afin d'établir des

bornes strictes à travers la résolution de problèmes locaux définis à l'échelle d'un élément.

Estimateurs par élément

Ce type d'estimateurs a vu le jour dans [Demkowicz et al. (1984), Demkowicz et al. (1985)] sous le nom d'« *Element Residual Method* » ou *ERM*. Il consiste à rechercher une solution approchée de (1.22) en remplaçant le problème global par un ensemble de problèmes locaux indépendants posés sur chacun des éléments E du maillage Ω_h soumis à des conditions aux limites de Neumann. Chacun des problèmes locaux défini sur un élément E s'écrit :

Trouver $\underline{e}_E \in \mathbf{U}_{0|E}^{ad}$ vérifiant :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_{0|E}^{ad}, \quad \int_E \text{Tr} [\varepsilon(\underline{e}_E) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}^*)] \, d\Omega = \mathcal{R}_{h|E}(\underline{u}^*) - \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}_E^\varepsilon} \int_\Gamma \underline{F}_E|_\Gamma \cdot \underline{u}^* \, dS \quad (1.62)$$

où $\mathcal{J}_E^\varepsilon$ désigne l'ensemble des faces (ou bords) de l'élément E et $\mathbf{U}_{0|E}^{ad}$ la restriction de \mathbf{U}_0^{ad} à l'élément E :

$$\mathbf{U}_{0|E}^{ad} = \{ \underline{u} \in \mathbf{U}|_E \text{ tel que } \underline{u} = \underline{0} \text{ sur } \partial_u \Omega \cap \partial E \} \quad (1.63)$$

$\mathcal{R}_{h|E}$ est la restriction de l'opérateur des résidus à l'élément E :

$$\mathcal{R}_{h|E}(\underline{u}^*) = \int_E \underline{r}_E \cdot \underline{u}^* \, d\Omega \quad (1.64)$$

tandis que \underline{F}_E désigne les conditions aux limites de Neumann données sur le bord ∂E de l'élément E .

L'erreur globale estimée θ est ensuite obtenue en sommant les mesures θ_E des contributions \underline{e}_E sur chaque élément :

$$\theta = \left[\sum_{E \in \mathcal{E}} \theta_E^2 \right]^{1/2} \quad \text{avec} \quad \theta_E = \|\underline{e}_E\|_{u,E} \quad (1.65)$$

Au même titre que les approches par patch d'éléments, la solvabilité des problèmes locaux (1.62) définis sur chaque élément n'est pas assurée tant que les mouvements de corps rigides ne sont pas bloqués et que les densités d'effort \underline{F}_E imposées ne respectent pas l'équilibre de chaque élément. Deux approches ont alors été introduites afin d'assurer l'existence de solutions aux problèmes locaux (1.62). La première repose sur un choix approprié de l'espace de définition de \underline{e}_E , tandis que la seconde joue sur la donnée des conditions aux limites de Neumann \underline{F}_E afin de respecter l'équilibre des problèmes locaux. Différentes méthodes reposant sur ces approches ont alors émergés visant à assurer l'existence et l'unicité d'une solution aux problèmes locaux par élément (1.62).

Dans [Demkowicz et al. (1984)], une première méthode consiste à rechercher des solutions \underline{e}_E dans un sous-espace régularisant de $\mathcal{U}_{0|E}^{ad}$, i.e. un espace d'approximation ne contenant pas l'ensemble $\mathcal{U}_{S,0|E}^{ad}$ des mouvements de solides rigides définis sur E et s'annulant sur $\partial_u \Omega \cap \partial E$:

$$\mathcal{U}_{S,0|E}^{ad} = \{ \underline{u} \in \mathcal{U}_{0|E}^{ad} \text{ tel que } \varepsilon(\underline{u}) = \mathbb{0} \text{ dans } E \} \quad (1.66)$$

Dans le cas d'un degré d'interpolation $p = 1$ de la base d'approximation éléments finis, on peut utiliser l'espace des *fonctions bulles* (« *bubble functions* »), i.e. des fonctions de forme de degré supérieur à 1 (au moins quadratiques) s'annulant sur le bord des éléments [Bank et Weiser (1985), Verfürth (1989)]. Une représentation des fonctions bulles peut être trouvée dans [Prudhomme et al. (2003)]. En revanche, dans le cas d'une degré d'interpolation $p > 1$, le choix du sous-espace régularisant nécessite un soin particulier. Une étude de l'influence du choix du sous-espace de régularisation sur la consistance (ou convergence asymptotique exacte) de l'estimateur a été menée dans [Ainsworth (1996)]. Les densités d'effort \underline{F}_E peuvent alors être choisies de manière arbitraire. Un premier choix simple consiste à imposer sur la frontière ∂E de l'élément E :

$$\underline{F}_{E|\Gamma} = \begin{cases} \frac{1}{2} \underline{r}_\Gamma = \frac{1}{2} \llbracket \sigma_h \underline{n} \rrbracket & \text{sur } \Gamma \in \partial E \cap \partial E' \\ \underline{r}_\Gamma = \sigma_{h|E} \underline{n}_E - \underline{F}_d & \text{sur } \Gamma \in \partial E \cap \partial_f \Omega \end{cases}$$

où \underline{r}_Γ est défini par (1.52). En réalisant une intégration par parties (théorème de Green) de (1.62), il vient :

$$\begin{aligned} \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{0|E}^{ad}, \quad \int_E \text{Tr} [\varepsilon(\underline{e}_E) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}^*)] \, d\Omega &= \int_E \left(\underline{f}_d \cdot \underline{u}^* - \text{Tr} [\sigma_h \varepsilon(\underline{u}^*)] \right) \, d\Omega \\ &+ \int_{\partial E \cap \partial_f \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* \, dS + \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}_E^\varepsilon} \int_\Gamma \underline{G}_{E|\Gamma} \cdot \underline{u}^* \, dS \end{aligned}$$

où les densités d'effort \underline{G}_E sont définies par :

$$\underline{G}_{E|\Gamma} = \begin{cases} \frac{1}{2} (\sigma_{h|E} \underline{n}_E - \sigma_{h|E'} \underline{n}_{E'}) = \frac{1}{2} (\sigma_{h|E} + \sigma_{h|E'}) \underline{n}_E = \langle \sigma_h \underline{n} \rangle & \text{sur } \Gamma \in \partial E \cap \partial E' \\ \underline{0} & \text{sur } \Gamma \in \partial E \cap \partial_f \Omega \end{cases}$$

Ce choix revient donc à assurer la vérification des conditions de continuité inter-éléments $\underline{G}_{E|\Gamma} + \underline{G}_{E'|\Gamma} = \underline{0}$ sur $\Gamma \in \partial E \cap \partial E'$ [Oden et al. (1989), Prudhomme et al. (2003)]. Cette méthode est simple à mettre en œuvre et semble fournir des estimations pertinentes de l'erreur [Ainsworth (1994)]. Notons cependant que les estimations obtenues dépendent du sous-espace de régularisation choisi [Ainsworth (1996), Ainsworth et Oden (1997)] et restent non garanties. Sous certaines hypothèses restrictives (choix judicieux du sous-espace régularisant, régularité de la solution exacte, configurations particulières de maillages, choix du type d'éléments et du

degré d'interpolation), ce type d'estimateurs est susceptible de vérifier une propriété de convergence asymptotique du type (1.33). Le lecteur intéressé pourra notamment consulter [Ainsworth (1996), Ainsworth et Oden (1997)] pour plus de détails.

Dans [Bank et Weiser (1985)], une seconde méthode a été introduite sous le nom d'« *Equilibrated Residual Method* » ou *EqRM* puis revisitée et étudiée dans [Ainsworth et Oden (1993a), Ainsworth et Oden (1993b), Babuška et al. (1994c)]. Celle-ci consiste à choisir judicieusement les densités d'effort \underline{F}_E afin d'assurer la solvabilité des problèmes locaux par élément (1.62) en conservant l'espace de définition $\mathbf{u}_{0|E}^{ad}$ des solutions locales \underline{e}_E . Elle fournit des estimations plus précises que la méthode précédente, au prix d'une implémentation souvent lourde et fastidieuse. Il existe différentes *procédures d'équilibrage* visant à construire des densités d'effort *équilibrées*, notées $\hat{\underline{F}}_E$. La première fut introduite dans [Ladevèze (1975), Ladevèze et Leguillon (1983)]. Différentes variantes ont par la suite été proposées [Stein et Ahmad (1977), Kelly (1984), Ainsworth et Oden (1993a), Ainsworth et Oden (1993b)]. À titre d'exemple, dans [Ainsworth et Oden (1993a), Ainsworth et Oden (1993b)], une méthode, qualifiée de « *flux-splitting* », consiste à rechercher des densités d'effort $\hat{\underline{F}}_E$ sous forme affine qui respectent les conditions d'équilibre sur chaque élément E et les conditions de continuité inter-éléments $\hat{\underline{F}}_{E|\Gamma} + \hat{\underline{F}}_{E'|\Gamma} = \underline{0}$ sur $\Gamma \in \partial E \cap \partial E'$. Dans [Paraschivoiu et al. (1997), Paraschivoiu et Patera (1998)], une méthode similaire, qualifiée d'« *hybrid-flux* », est développée en vue de construire des densités d'effort équilibrées. Nous présenterons en détail les différentes procédures d'équilibrage dans le chapitre 2. Les estimations obtenues à partir d'une procédure d'équilibrage des densités d'effort sont garanties.

Enfin, dans [Díez et al. (1998)], une troisième méthode consiste à résoudre les problèmes locaux par élément (1.62) en appliquant des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur l'ensemble de la frontière ∂E . Le chargement des problèmes locaux (1.62) fait donc intervenir uniquement le résidu intérieur \underline{r}_E sur chaque élément E . Cette technique permet notamment de s'affranchir du calcul des densités d'effort à imposer au bord des éléments, mais conduit à une sous-estimation de l'erreur vraie. Dans [Huerta et Díez (2000)], des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sont imposées uniquement sur la partie de ∂E non incluse dans $\partial_f \Omega$ et un terme correctif prenant en compte les sauts de contrainte au passage entre deux éléments et les effets de pollution est introduit afin d'assurer une majoration garantie de l'erreur vraie.

Commentaires

La sous-famille des estimateurs implicites peut conduire à des majorations théoriquement garanties de l'erreur vraie à condition que la résolution des problèmes locaux équilibrés par patch d'éléments (1.58) ou par élément (1.62) soit exacte. Cependant, en pratique, seule une résolution approchée de ces problèmes locaux est envisageable. Une solution approchée $\underline{e}_{i,\bar{h}}$ (resp. $\underline{e}_{E,\bar{h}}$) du problème (1.58) (resp.

(1.62)) est recherchée dans un espace d'approximation $\mathbf{U}_{0,\bar{h}|\Omega_i}^{ad}$ (resp. $\mathbf{U}_{0,\bar{h}|E}^{ad}$) plus riche que l'espace d'approximation éléments finis $\mathbf{U}_{0,h|\Omega_i}^{ad}$ (resp. $\mathbf{U}_{0,h|E}^{ad}$). En conséquence, les propriétés de majoration ne sont qu'asymptotiquement exactes et les estimations obtenues constituent des bornes supérieures strictes d'une erreur de référence \bar{e} correspondant à la mesure de $\underline{u}_{\bar{h}} - \underline{u}_h$ (la solution $\underline{u}_{\bar{h}}$ étant obtenue sur le maillage raffiné $\Omega_{\bar{h}}$ associé à l'espace $\mathbf{U}_{0,\bar{h}}^{ad}$). Différentes méthodes furent proposées pour pallier ce problème.

Dans [Huerta et Díez (2000)], une première méthode s'appuie sur le résultat de majoration (1.30), issu d'une analyse d'erreur a priori, appliqué à $\underline{e}_h = \underline{u}_h - \underline{u}_{ex}$ et $\underline{e}_{\bar{h}} = \underline{u}_{\bar{h}} - \underline{u}_{ex}$, ainsi que sur la propriété d'orthogonalité de Galerkin (1.24) entre $\underline{u}_{\bar{h}} - \underline{u}_h$ et $\underline{e}_{\bar{h}}$ afin d'évaluer l'écart entre les mesures exacte $\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}$ et approchée $\|\underline{u}_{\bar{h}} - \underline{u}_h\|_{u,\Omega}$ de l'erreur :

$$\|\underline{u}_{\bar{h}} - \underline{u}_h\|_{u,\Omega} \simeq \left[1 - \left(\frac{\bar{h}}{h} \right)^{2p} \right]^{1/2} \|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}$$

p désignant le degré d'interpolation associé aux maillages Ω_h et $\Omega_{\bar{h}}$.

Dans [Babuška et al. (1999), Strouboulis et al. (2000c)], une seconde méthode reposant sur une procédure itérative est employée afin d'estimer les erreurs commises lors de la résolution des problèmes locaux par élément (1.62). Celle-ci exploite la matrice de rigidité globale factorisée issue de la résolution éléments finis initiale du problème de référence ainsi que les solutions locales approchées des problèmes (1.62). L'estimation obtenue est alors une borne garantie de l'erreur vraie.

Enfin, une troisième méthode s'appuie sur une approche duale en contrainte [de Veubeke (1965)] pour la résolution des problèmes locaux par élément (1.62) ou par patch d'éléments (1.58), afin de conserver les propriétés de bornes supérieures garanties de l'erreur vraie. Cette méthode a été mise en place dans le cadre des estimateurs implicites par élément [Sauer-Budge et al. (2004), Parés et al. (2006a)] avant d'être étendue et adaptée au cadre des estimateurs implicites par patch d'éléments [Parés et al. (2009a), Cottreau et al. (2009), Moitinho de Almeida et Maunder (2009)].

L'obtention d'une borne inférieure pertinente de l'erreur vraie est également possible à partir de la propriété suivante [Prudhomme et Oden (1999)] :

$$\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega} = \sup_{v \in \mathbf{U}_0^{ad} \setminus \{0\}} \left\{ \frac{|\mathcal{R}_h(v)|}{\|v\|_{u,\Omega}} \right\}$$

Ainsi, toute fonction $\check{e} \in \mathbf{U}_0^{ad} \setminus \{0\}$ peut a priori être utilisée pour établir une propriété de borne inférieure :

$$\frac{|\mathcal{R}_h(\check{e})|}{\|\check{e}\|_{u,\Omega}} \leq \|\underline{e}_h\|_{u,\Omega} \quad (1.67)$$

Un telle fonction continue \check{e} est généralement construite à partir de la connaissance des solutions e_i (resp. e_E) associées aux problèmes locaux par patch (1.58) (resp. par élément (1.62)). Ces dernières étant calculées de manière indépendante, la solution globale $e = \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i$ (resp. $e = \sum_{E \in \mathcal{E}} e_E$) présente généralement des discontinuités inter-éléments. Il est cependant possible de construire un représentant continu \check{e} de e .

Dans le cas des estimateurs implicites par patch d'éléments, une stratégie de pondération des solutions locales e_i s'appuyant sur la partition de l'unité formée par les fonctions de forme éléments finis linéaires λ_i a été proposée afin de construire une fonction continue \check{e} sous la forme [Prudhomme et al. (2004)] :

$$\check{e} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i e_i \quad (1.68)$$

Dans le cas des estimateurs implicites par élément, une stratégie plus générale reposant sur une procédure de lissage des discontinuités inter-éléments présentées par la solution globale $e = \sum_{E \in \mathcal{E}} e_E$ a été mise en place afin de construire une fonction continue \check{e} à partir des solutions locales e_E [Díez et al. (2003)]. Cette technique, simple et peu coûteuse, peut être appliquée aux estimateurs implicites par patch d'éléments [Parés et al. (2006b)].

Enfin, une stratégie, introduite dans [Huerta et Díez (2000)], a permis d'améliorer la précision de la borne inférieure obtenue en (1.67) à travers la résolution approchée d'un problème global défini sur Ω , dont le chargement met en jeu la fonction continue \check{e} reconstruite, et qui s'écrit :

Trouver $e_{G,h} \in \mathbf{u}_{0,h}^{ad}$ vérifiant :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{u}_{0,h}^{ad}, \quad \int_{\Omega} \text{Tr} [\varepsilon(e_{G,h}) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = - \int_{\Omega} \text{Tr} [\varepsilon(\check{e}) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}^*)] d\Omega$$

On en déduit une borne inférieure plus précise que celle obtenue en (1.67) :

$$\frac{|\mathcal{R}_h(\check{e})|}{\left[\|\check{e}\|_{u,\Omega}^2 - \|e_{G,h}\|_{u,\Omega}^2 \right]^{1/2}} \leq \|e_h\|_{u,\Omega} \quad (1.69)$$

Cette amélioration apportée à la propriété de borne inférieure a notamment été mise en œuvre dans la cadre des estimateurs implicites par patch d'éléments de type « flux-free » [Parés et al. (2006b)] ; celle-ci semble offrir un gain notable en matière de précision sans pour autant affecter de manière significative le coût de calcul.

Une étude des performances des estimateurs implicites de type « hybrid-flux » (approche par élément avec procédure d'équilibrage des densités d'effort proposée dans [Paraschivoiu et al. (1997)]) et « flux-free » (approche par patch auto-équilibré via la méthode de partition de l'unité proposée dans [Machiels et al. (2000)]) a été menée sur des problèmes scalaires de thermique en dimension 3 résolus à l'aide

d'éléments finis linéaires et quadratiques [Choi et Paraschivoiu (2004)]. Dans le cas d'un degré d'interpolation linéaire ($p = 1$), l'approche « hybrid-flux » apporte la meilleure précision, tandis que le coût de calcul de l'approche « flux-free » est globalement moindre. Plus précisément, lorsque le nombre d'éléments est relativement faible ($N_e < 5000$), la technique « hybrid-flux » est légèrement moins coûteuse en temps de calcul que la technique « flux-free » ; en revanche, lorsque le nombre d'éléments devient plus élevé, l'approche « hybrid-flux » devient plus coûteuse en raison du temps de calcul requis par la procédure d'équilibrage spécifique employée. À l'inverse, dans le cas d'un degré d'interpolation quadratique ($p = 2$), l'approche de type « flux-free » fournit la meilleure précision au prix d'un coût de calcul plus élevé. La technique « hybrid-flux » offre donc un coût de calcul avantageux, mais s'avère moins précise que son homologue « flux-free ». Finalement, l'approche de type « flux-free » conduit au meilleur compromis entre précision attendue et coût de calcul engendré.

Une étude analogue et complémentaire menée dans [Parés et al. (2009a)] a présenté une nouvelle comparaison de la pertinence et de l'efficacité des estimateurs implicites de type « hybrid-flux » (approches par élément avec procédure d'équilibrage des densités d'effort et méthode de résolution fine en déplacement [Paraschivoiu et al. (1997)], et avec méthode de résolution en contrainte [Sauer-Budge et al. (2004)]) et « flux-free » (approches par patch auto-équilibré via la partition de l'unité avec méthode de résolution fine en déplacement [Parés et al. (2006b)] , et avec méthode de résolution exacte en contrainte [Parés et al. (2009a)]) sur problèmes scalaires en dimension 2. résolus à l'aide d'éléments linéaires ($p = 1$). Les techniques « flux-free » fournissent des bornes supérieures plus précises que leurs homologues « hybrid-flux ». Par ailleurs, les approches basées sur une résolution fine en déplacement conduisent à des bornes supérieures strictes au sens d'une erreur de référence et sont donc plus précises que les approches basées sur une approche en contrainte qui offrent des bornes garanties au sens de l'erreur vraie.

2.3 Estimateurs basés sur la non-vérification de la relation de comportement

Cette famille d'estimateurs, introduite par Ladevèze [Ladevèze (1975)] et communément appelée « *Constitutive Relation Error Estimator* », repose sur le concept d'erreur en relation de comportement à travers la construction d'une solution approchée admissible et la mesure énergétique du résidu de comportement. Ce type d'estimateurs fut initialement proposé pour des problèmes de thermique stationnaire [Ladevèze et Leguillon (1983)], puis progressivement étendu aux problèmes d'élasticité linéaire en dimension 2 [Ladevèze et al. (1991)] et dimension 3 [Coorevits et al. (1998)].

2.3.1 Principe

Le principe de base de cette famille d'estimateurs repose sur un partitionnement du problème de référence en deux groupes d'équations :

- les équation *fiabiles* : les conditions d'admissibilité cinématique (1.2a) et statique (1.2b) ;
- les équation *non-fiabiles* : la relation de comportement (1.2c).

Un tel découpage consiste à faire porter le doute sur la relation de comportement qui constitue l'équation la moins fiable du problème de référence, car celle-ci est généralement établie à partir de données expérimentales souvent incertaines et parfois mal maîtrisées. La mise en défaut de la relation de comportement confère donc à cette famille d'estimateurs un fort caractère mécanique.

Le fondement des estimateurs basés sur la non-vérification de la relation de comportement réside dans la construction d'une *solution admissible*, notée $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$, appartenant aux espaces d'admissibilité cinématique \mathcal{U}^{ad} et statique \mathcal{S}^{ad} , à partir des données et de la solution éléments finis $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ calculée. Par la suite, une mesure de la non-vérification de la relation de comportement par cette solution admissible permet de définir un estimateur d'erreur globale.

2.3.2 Construction d'une solution admissible

La construction d'une solution admissible est le point technique et délicat de ces estimateurs et la qualité de cette nouvelle solution approchée influe directement sur les performances de l'estimation. La démarche consiste à effectuer un post-traitement de la solution éléments finis $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ et des données du problème de référence afin de construire une solution admissible $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ vérifiant les conditions d'admissibilité cinématique et statique du problème de référence :

$$(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) \in \mathcal{U}^{ad} \times \mathcal{S}^{ad} \quad (1.70)$$

Dans le cadre de la méthode des éléments finis en déplacement, comme mentionné précédemment en section 1.3, le champ de déplacement éléments finis \underline{u}_h satisfait généralement les conditions d'admissibilité cinématique (1.16) du problème de référence, sauf dans de rares cas tels qu'en présence d'un matériau incompressible ou quasi-incompressible (cf. remarque 1.14). La détermination d'un champ de déplacement $\hat{\underline{u}}_h$ cinématiquement admissible est alors immédiate ; on choisit simplement :

$$\hat{\underline{u}}_h = \underline{u}_h$$

Remarque 1.14 :

Dans le cas des problèmes d'élasticité (quasi-)incompressible, une méthode dédiée à la construction d'un champ de déplacement cinématiquement admissible $\hat{\underline{u}}_h$

vérifiant $\operatorname{div}(\hat{\underline{u}}_h) = 0$ a été proposée et mise en œuvre en dimension 2 dans [Ladevèze et al. (1992)].

En revanche, le champ de contrainte éléments finis σ_h ne vérifiant pas les équations d'équilibre (1.20), la détermination d'un champ de contrainte $\hat{\sigma}_h$ statiquement admissible est plus technique et ardue. Les différentes méthodes dédiées à la construction de champs statiquement admissibles reposent sur des techniques d'équilibrage par élément ou patch d'éléments à l'instar des estimateurs implicites basés sur les résidus d'équilibre. Ces techniques seront abordées en détail au chapitre 2. En outre, une étude des performances des différentes méthodes de construction de champs admissibles sera menée sur des exemples industriels en dimensions 2 et 3.

2.3.3 Définition et propriétés de l'erreur en relation de comportement

La mesure de l'erreur en relation de comportement pour un couple $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ est définie par :

$$e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) = \|\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)\|_{\sigma,\Omega} \quad (1.71)$$

Celle-ci fournit une mesure globale du résidu sur la relation de comportement entre le champ de déplacement admissible $\hat{\underline{u}}_h$ et le champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ sur le domaine Ω .

Une première propriété immédiate découle de la définition (1.71) de $e_{\text{rdc},\Omega}$ et s'écrit :

$$e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) = 0 \iff (\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) = (\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex}) \quad (1.72)$$

Cette relation traduit le caractère approché du couple $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ à travers la non-vérification de la relation de comportement.

Une seconde relation, connue sous le nom de théorème de l'hypercerce ou de Prager-Synge [Prager et Synge (1947)], établit un lien entre l'erreur vraie $\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}$ et la mesure $e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ de l'erreur en relation de comportement. Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} e_{\text{rdc},\Omega}^2(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) &= \|\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h\|_{u,\Omega}^2 + \|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma,\Omega}^2 \\ &= \|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}^2 + \|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma,\Omega}^2 \quad (\text{en choisissant } \hat{\underline{u}}_h = \underline{u}_h) \end{aligned} \quad (1.73)$$

traduisant l'orthogonalité des espaces \mathbf{U}_0^{ad} et \mathbf{S}_0^{ad} au sens du produit scalaire $\langle \bullet, \circ \rangle_{\sigma,u,\Omega} = \int_{\Omega} \operatorname{Tr} [\bullet \varepsilon(\circ)] \, d\Omega$ défini sur $\mathbf{S} \times \mathbf{U}$ (cf. remarque 1.16) et conduisant à une majoration directe et garantie de l'erreur vraie :

$$\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega} \leq \theta = e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) \quad (1.74)$$

Enfin, en introduisant le champ de contrainte $\hat{\sigma}_h^m$ défini comme la moyenne des champs $\hat{\sigma}_h$ et $\mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)$:

$$\hat{\sigma}_h^m = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_h + \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)) \quad (1.75)$$

on en déduit directement une troisième relation fondamentale, connue sous le nom d'égalité de Prager-Synge, qui s'écrit :

$$\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m\|_{\sigma, \Omega} = \frac{1}{2} e_{\text{rdc}, \Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) \quad (1.76)$$

La figure 1.4 donne une interprétation géométrique des propriétés (1.72), (1.73) et (1.76) dans le cadre de l'élasticité linéaire.

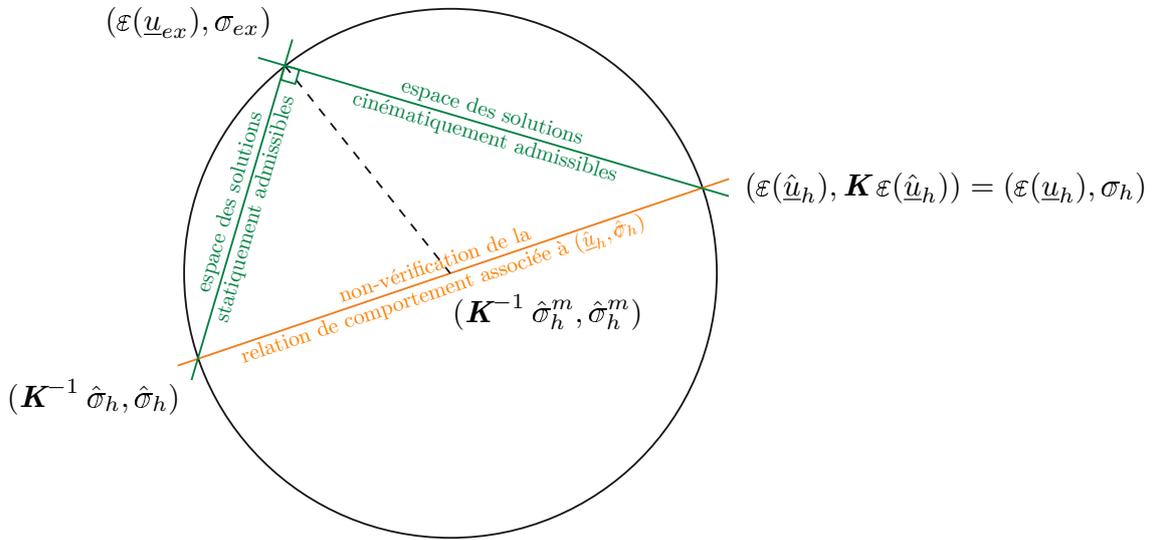


FIGURE 1.4: Interprétation géométrique des propriétés liées à l'erreur en relation de comportement.

Remarque 1.15 :

Comme dans le cas des estimateurs basés sur les résidus d'équilibre présentés en section 2.2, l'erreur estimée θ obtenue en (1.74) peut se décomposer en une somme de contributions élémentaires θ_E :

$$\theta_E = e_{\text{rdc}, E}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) = \|\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)\|_{\sigma, E}$$

vérifiant

$$\sum_{E \in \mathcal{E}} \theta_E^2 = \theta^2$$

Remarque 1.16 :

La propriété remarquable satisfaite par toute solution admissible à 0 $(\hat{\underline{u}}_0, \hat{\sigma}_0)$ s'écrit :

$$\forall (\hat{\underline{u}}_0, \hat{\sigma}_0) \in \mathbf{U}_0^{\text{ad}} \times \mathbf{S}_0^{\text{ad}}, \quad \langle \hat{\sigma}_0, \hat{\underline{u}}_0 \rangle_{\sigma, u, \Omega} = \int_{\Omega} \text{Tr} [\hat{\sigma}_0 \varepsilon(\hat{\underline{u}}_0)] \, d\Omega = 0 \quad (1.77)$$

Ainsi, en choisissant $\hat{\underline{u}}_0 = \underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h \in \mathcal{U}_0^{ad}$ et $\hat{\sigma}_0 = \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h \in \mathcal{S}_0^{ad}$, on démontre aisément le théorème de l'hypercercle (1.73).

Remarque 1.17 :

On peut montrer l'existence d'une constante C indépendante du maillage telle que [Ladevèze et Pelle (2004)] :

$$e_{rdc,\Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) \leq C \|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}$$

permettant d'obtenir une borne inférieure de l'erreur vraie. Ce type d'estimateurs vérifie donc une propriété d'équivalence du type (1.34) entre l'erreur estimée $\theta = e_{rdc,\Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ et l'erreur vraie $e = \|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}$. Ainsi, la mesure de l'erreur en relation de comportement $e_{rdc,\Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ a théoriquement le même taux de convergence que l'erreur vraie $\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}$.

Remarque 1.18 :

Il est également possible de déterminer une borne inférieure de l'erreur vraie $\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}$ directement à partir d'une solution admissible $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ telle que $\hat{\underline{u}}_h \neq \underline{u}_h$. En effet, par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz au sens du produit scalaire $\langle \bullet, \circ \rangle_{\sigma,u,\Omega}$, il vient :

$$\left| \langle \sigma_{ex} - \sigma_h, \hat{\underline{u}}_h - \underline{u}_h \rangle_{\sigma,u,\Omega} \right| = \left| \langle \underline{u}_{ex} - \underline{u}_h, \hat{\underline{u}}_h - \underline{u}_h \rangle_{u,\Omega} \right| \leq \|\underline{u}_{ex} - \underline{u}_h\|_{u,\Omega} \|\hat{\underline{u}}_h - \underline{u}_h\|_{u,\Omega}$$

Par la suite, en utilisant la propriété remarquable (1.77) appliquée à $\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h \in \mathcal{S}_0^{ad}$ et $\hat{\underline{u}}_h - \underline{u}_h \in \mathcal{U}_0^{ad}$, on obtient alors le résultat suivant :

$$\left| \langle \hat{\sigma}_h - \sigma_h, \hat{\underline{u}}_h - \underline{u}_h \rangle_{\sigma,u,\Omega} \right| \leq \|\underline{e}_h\|_{u,\Omega} \|\hat{\underline{u}}_h - \underline{u}_h\|_{u,\Omega}$$

Ainsi, à partir de tout champ de déplacement $\hat{\underline{u}}_h$ différent du champ de déplacement éléments finis \underline{u}_h , i.e. vérifiant $\hat{\underline{u}}_h \neq \underline{u}_h$, on peut établir une propriété de borne inférieure :

$$\frac{\left| \langle \hat{\sigma}_h - \sigma_h, \hat{\underline{u}}_h - \underline{u}_h \rangle_{\sigma,u,\Omega} \right|}{\|\hat{\underline{u}}_h - \underline{u}_h\|_{u,\Omega}} \leq \|\underline{e}_h\|_{u,\Omega} \quad (1.78)$$

Cette propriété de borne inférieure a notamment été mise en œuvre sur des problèmes d'élasticité linéaire en dimension 2 résolus à l'aide d'éléments finis quadratiques dans [Gallimard (2009)]. La borne inférieure (1.78) de l'erreur vraie $\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}$ n'est pas aussi précise que la borne supérieure (1.74) définie par la mesure $e_{rdc,\Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ de l'erreur en relation de comportement.

Commentaires

Un des principaux avantages des estimateurs basés sur la non-vérification de la relation de comportement réside dans l'obtention de bornes supérieures garanties de l'erreur vraie, à travers l'emploi de techniques adaptées de construction de

champs admissibles. Le découpage du problème en équations fiables et non-fiables peut être étendu à une large gamme de problèmes (non-linéaires ou d'évolution) tout en conservant le caractère garanti de ces estimateurs et en assurant la prise en compte des diverses sources d'erreur inhérentes à la méthode de résolution (discrétisations spatiale et temporelle, non-convergence des algorithmes et solveurs itératifs). En dépit de leur aspect conservatif, ces estimateurs présentent néanmoins certains inconvénients, notamment une implémentation réputée difficile ainsi qu'un surcoût de calcul non négligeable, constituant actuellement un frein à leur diffusion dans les codes de calcul industriels.

3 Estimation de l'erreur locale

Les méthodes d'estimation d'erreur globale fournissent une information utile sur la qualité globale d'un calcul éléments finis, mais celle-ci s'avère limitée, voire insuffisante, au regard des critères locaux de dimensionnement utilisés par les ingénieurs-concepteurs en bureau d'étude. En effet, ces critères mettent en jeu des grandeurs critiques à caractère local, appelées *quantités d'intérêt*. Le support local d'une quantité d'intérêt est appelé par la suite *zone d'intérêt*. Il apparaît alors judicieux et nécessaire de mettre en place des outils permettant d'évaluer l'erreur sur une quantité d'intérêt locale. Les premiers outils d'estimation d'erreur locale proposés se sont appuyés sur le concept de *pollution* qui traduit l'influence de la discrétisation globale sur l'erreur locale. Par la suite, la mise en place des *outils d'extraction* couplés aux méthodes d'estimation d'erreur globale a offert un cadre particulièrement adapté à l'estimation d'erreur sur une quantité d'intérêt.

3.1 Estimateurs d'erreur en pollution

Introduit dans [Babuška et al. (1994a), Babuška et al. (1995), Babuška et al. (1997a)], le concept de *pollution* souligne le caractère non localisé d'une erreur de discrétisation pourtant définie sur une zone locale ω donnée de la structure Ω . La qualité locale d'une solution sur une zone $\omega \subset \Omega$ dépend non seulement de la qualité de sa discrétisation sur la zone ω elle-même, mais aussi de celle hors de cette zone.

3.1.1 Notion de pollution

Le concept de pollution stipule que l'erreur définie sur une zone locale ω donnée de Ω provient de deux contributions distinctes :

- une contribution interne à ω , appelée *erreur locale de troncature* sur ω , correspondant à l'erreur due à la discrétisation de ω ;
- une contribution externe à ω , appelée *erreur de pollution* dans ω , correspondant à l'erreur due à la discrétisation de la partie complémentaire $\Omega \setminus \omega$ de ω et représentant les effets sur ω de l'erreur occasionnée par le reste du domaine $\Omega \setminus \omega$.

La somme de ces contributions définit l'erreur de discrétisation locale $\underline{e}_h|_\omega$ correspondant à la restriction de l'erreur de discrétisation globale \underline{e}_h à ω . Afin de définir de manière théorique l'erreur locale de troncature et l'erreur de pollution, repartons de l'équation des résidus (1.22) satisfaite par \underline{e}_h en introduisant un découpage élémentaire de l'opérateur des résidus :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \int_{\Omega} \text{Tr} [\varepsilon(\underline{e}_h) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}^*)] \, d\Omega = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mathcal{R}_{h,E}^{eq}(\underline{u}^*) \quad (1.79)$$

où $\mathcal{R}_{h,E}^{eq}$ correspond à l'opérateur des résidus équilibrés défini sur l'élément E par :

$$\mathcal{R}_{h,E}^{eq}(\underline{u}^*) = \mathcal{R}_{h|E}(\underline{u}^*) - \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}_E^{\mathcal{E}}} \int_{\Gamma} \hat{\underline{F}}_{E|\Gamma} \cdot \underline{u}^* \, dS$$

où $\mathcal{R}_{h|E}$ est défini par (1.64) et $\hat{\underline{F}}_E$ désigne un ensemble de densités d'effort équilibrées sur chaque élément E .

En introduisant un domaine $\tilde{\omega}$ incluant la zone d'intérêt ω et quelques rangées d'éléments autour de ω (en pratique, seules deux rangées suffisent), l'équation des résidus (1.79) peut être réécrite sous la forme :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \int_{\Omega} \text{Tr} [\varepsilon(\underline{e}_h) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}^*)] \, d\Omega = \sum_{E \in \mathcal{E}_{\tilde{\omega}}} \mathcal{R}_{h,E}^{eq}(\underline{u}^*) + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega \setminus \tilde{\omega}}} \mathcal{R}_{h,E}^{eq}(\underline{u}^*)$$

où $\mathcal{E}_{\tilde{\omega}}$ (resp. $\mathcal{E}_{\Omega \setminus \tilde{\omega}}$) désigne l'ensemble des éléments inclus dans $\tilde{\omega}$ (resp. $\Omega \setminus \tilde{\omega}$).

On introduit alors deux problèmes globaux distincts :

- un problème traduisant l'erreur locale de troncature sur ω , dont le chargement met en jeu les résidus élémentaires sur $\tilde{\omega}$:

Trouver $\underline{e}_l \in \mathbf{U}_0^{ad}$ vérifiant :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \int_{\Omega} \text{Tr} [\varepsilon(\underline{e}_l) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}^*)] \, d\Omega = \sum_{E \in \mathcal{E}_{\tilde{\omega}}} \mathcal{R}_{h,E}^{eq}(\underline{u}^*) \quad (1.80)$$

- un problème traduisant l'erreur de pollution, dont le chargement met en jeu les résidus élémentaires sur $\Omega \setminus \tilde{\omega}$:

Trouver $\underline{e}_p \in \mathbf{U}_0^{ad}$ vérifiant :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \int_{\Omega} \text{Tr} [\varepsilon(\underline{e}_p) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}^*)] \, d\Omega = \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega \setminus \tilde{\omega}}} \mathcal{R}_{h,E}^{eq}(\underline{u}^*) \quad (1.81)$$

L'erreur de discrétisation \underline{e}_h définie sur Ω est donc égale à la somme des solutions \underline{e}_l et \underline{e}_p associées respectivement aux problèmes globaux (1.80) et (1.81) :

$$\underline{e}_h = \underline{e}_l + \underline{e}_p$$

L'erreur de discrétisation locale $e_{h|\omega}$ définie sur ω peut alors s'écrire comme la somme de deux contributions :

$$e_{h|\omega} = e_{l|\omega} + e_{p|\omega}$$

La contribution $e_{l|\omega}$ représente l'erreur locale de troncature sur ω , tandis que la contribution $e_{p|\omega}$ représente l'erreur de pollution dans ω .

Remarque 1.19 :

$e_{l|\omega}$ correspond à l'erreur de discrétisation associée à un problème défini sur $\tilde{\omega}$ soumis à des conditions aux limites de Dirichlet sur sa frontière $\partial\tilde{\omega}$ égales aux valeurs prises par la solution exacte \underline{u}_{ex} du problème de référence.

Remarque 1.20 :

$e_{p|\omega}$ correspond à la solution exacte d'un problème défini sur $\tilde{\omega}$ soumis à des conditions aux limites de Dirichlet sur sa frontière $\partial\tilde{\omega}$ égales aux valeurs prises par l'erreur de discrétisation e_h associée au problème de référence.

3.1.2 Estimation de l'erreur locale de troncature et de l'erreur de pollution

La détermination des deux contributions à l'erreur de discrétisation locale requiert une résolution exacte des problèmes globaux (1.80) et (1.81). Ceci n'étant pas réalisable en pratique, différentes techniques ont été proposées afin d'obtenir des solutions approchées de ces problèmes.

Dans [Babuška et al. (1995), Strouboulis et al. (2000b)], une estimation de la partie locale de troncature e_l est obtenue en adoptant une approche élémentaire similaire à la méthode des résidus implicites par élément introduite en section 2.2.2. De nouveaux problèmes locaux analogues à (1.62) sont définis sur chacun des éléments inclus dans ω . Les solutions locales associées à ces problèmes élémentaires sont recherchées dans un espace d'approximation plus riche que l'espace d'approximation éléments finis, obtenu par p -raffinement (augmentation du degré d'interpolation p de chaque élément).

L'évaluation de la partie pollution e_p peut être menée de différentes manières. Dans [Babuška et al. (1994a), Babuška et al. (1997a), Strouboulis et al. (2000b)], une estimation de la partie pollution e_p est obtenue à travers l'utilisation des fonctions de Green. Ces dernières correspondent aux solutions d'un problème soumis à un chargement ponctuel de type Dirac et décrivent l'interaction entre les différents points du domaine Ω . L'erreur de pollution e_p affectant une zone ω peut être évaluée en certains points de ω à partir d'une estimation de l'erreur d'approximation des fonctions de Green associées. Dans [Huerta et Díez (2000)], le problème global (1.81) définissant e_p est résolu de manière approchée. La solution e_p est recherchée dans l'espace d'approximation éléments finis $\mathcal{U}_{0,h}^{ad}$ utilisé pour la résolution approchée du problème de référence.

Remarque 1.21 :

Notons que la détermination des contributions e_l et e_p dépend de la procédure d'équilibrage employée pour construire l'opérateur des résidus élémentaires $\mathcal{R}_{h,E}^{eq}$, à l'instar des estimateurs implicites par élément présentés en section 2.2.2.

L'erreur de pollution peut être considérée comme négligeable devant l'erreur locale de troncature dans la majorité des applications [Huerta et Díez (2000)], excepté dans le cas où le maillage n'est pas uniforme ou lorsque la solution n'est pas régulière (présence de singularités locales). Une étude de l'influence de l'erreur de pollution sur la qualité locale d'un calcul éléments finis pour différentes configurations de maillages et types de solutions a été menée dans [Babuška et al. (1994a)]. Bien que l'évaluation de l'erreur de discrétisation locale ne soit pas garantie, la prise en compte de l'erreur de pollution est toutefois utile dans les procédures de remaillage adaptatif. Finalement, retenons que la notion de pollution met en exergue l'influence de la discrétisation globale sur la qualité locale d'une solution approchée.

3.2 Encadrement heuristique direct de l'erreur locale

Introduite dans [Ladevèze et al. (1999b), Florentin et al. (2002)], cette approche heuristique permet d'évaluer directement et à moindre coût une mesure locale de l'erreur sur le champ de contrainte au niveau élémentaire. La méthode, développée dans le cadre des estimateurs basés sur la non-vérification de la relation de comportement, s'appuie sur une construction améliorée du champ de contrainte statiquement admissible (présentée au chapitre 3). Cette dernière fournit un champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ de meilleure qualité que le champ de contrainte éléments finis σ_h localement, vérifiant la propriété heuristique suivante sur chaque élément E du maillage Ω_h :

$$\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma,E} \leq \|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\sigma,E} = \|\mathfrak{e}_h\|_{\sigma,E}$$

conduisant, après quelques manipulations supplémentaires, à une majoration heuristique de l'erreur vraie au niveau élémentaire de la forme :

$$\|\mathfrak{e}_h\|_{\sigma,E} = \|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\sigma,E} \leq C \|\hat{\sigma}_h - \sigma_h\|_{\sigma,E} = C e_{\text{rdc},E}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) \quad (1.82)$$

où C est une constante supérieure à 1. Celle-ci est d'autant plus proche de 1 que la qualité du champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ reconstruit est bonne.

Cette technique spécifique à l'estimation de l'erreur locale sur des quantités d'intérêt liées au champ de contrainte a été appliquée dans [Florentin et al. (2002)] pour évaluer l'erreur sur la contrainte de Von Mises dans une zone locale ω du domaine Ω dans le cadre des problèmes d'élasticité linéaire en statique en dimension 3.

Remarque 1.22 :

Notons que la propriété de majoration heuristique (1.82) n'est pas vérifiée pour tout type d'estimateur. À titre d'exemple, dans le cadre des estimateurs basés

sur le lissage des contraintes présentés en section 2.1, la méthode ZZ2 fournit un champ de contrainte σ_h^{opt} de piètre qualité au niveau local qui ne vérifie pas la propriété de majoration (1.82) sur chacun des éléments du maillage [Ladevèze et Rougeot (1997)].

3.3 Estimateurs utilisant les techniques d'extraction

Cette famille d'estimateurs s'appuie sur des techniques d'extraction qui permettent d'exprimer une quantité d'intérêt locale sous forme globale à travers l'introduction d'opérateurs d'extraction, appelés *extracteurs*. Introduits il y a maintenant plus d'un demi-siècle [Greenberg (1948), Washizu (1953)], les outils d'extraction ont été adaptés au cadre de la méthode des éléments finis pour la détermination des facteurs d'intensité de contrainte [Babuška et Miller (1984)]. Par la suite, les techniques d'extraction ont été couplées à l'estimation d'erreur locale [Becker et Rannacher (1996)] et constituent aujourd'hui l'essentiel des approches relatives à l'estimation d'erreur locale sur des quantités d'intérêt dimensionnantes. Ces approches par extracteurs offrent des bornes garanties de l'erreur locale en tirant partie des estimateurs d'erreur globale à caractère conservatif présentés en section 2. Le principe général des estimateurs d'erreur locale exploitant les outils d'extraction est exposé ici sur un problème d'élasticité linéaire en statique. Les outils d'extraction seront mis en œuvre pour différentes quantités d'intérêt au chapitre 4.

3.3.1 Quantité d'intérêt et extracteur associé

Le principe de base des outils d'extraction consiste à exprimer la quantité d'intérêt locale I considérée sous forme globale sur le domaine Ω [Paraschivoiu et al. (1997), Strouboulis et al. (2000b), Ohnimus et al. (2001)]. Considérons une quantité d'intérêt I représentée par une fonctionnelle \mathcal{L} du champ de déplacement \underline{u} , définie sur \mathcal{U} , sous la forme globale suivante :

$$I = \mathcal{L}(\underline{u}) = \int_{\Omega} \left(\text{Tr} [\tilde{\sigma}_{\Sigma} \varepsilon(\underline{u})] + \tilde{\underline{f}}_{\Sigma} \cdot \underline{u} \right) d\Omega \quad (1.83)$$

où $\tilde{\sigma}_{\Sigma}$ et $\tilde{\underline{f}}_{\Sigma}$ sont des opérateurs d'extraction ou extracteurs qui peuvent s'interpréter d'un point de vue mécanique comme une précontrainte et une force volumique donnée, respectivement. Ces extracteurs peuvent être définis de manière explicite ou implicite selon la quantité d'intérêt I choisie.

Notons que les outils d'extraction offrent un cadre naturel pour traiter une large variété de quantités d'intérêt issues du problème de référence. À titre d'exemple, citons quelques opérateurs d'extraction simples définis de manière explicite :

- si on s'intéresse à la moyenne sur une zone locale $\omega \subset \Omega$ d'une composante σ_{ij} du champ de contrainte, la quantité d'intérêt est définie par :

$$\begin{aligned} I &= \langle \sigma_{ij} \rangle_\omega = \frac{1}{|\omega|} \int_\omega \sigma_{ij} \, d\Omega \\ &= \int_\Omega \text{Tr} [\sigma \tilde{\varepsilon}_\Sigma] \, d\Omega \end{aligned} \quad (1.84)$$

où $|\omega|$ désigne la mesure de la zone d'intérêt ω et

$$\tilde{\varepsilon}_\Sigma = \begin{cases} \frac{1}{|\omega|} e_i \otimes e_j & \text{dans } \omega \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus \omega \end{cases} \quad (1.85)$$

L'extracteur $\tilde{\varepsilon}_\Sigma$ peut être assimilé à un champ de déformation.

Remarque 1.23 :

La quantité d'intérêt définie par (1.84) peut aussi être représentée par une fonctionnelle linéaire $\mathcal{L}(\underline{u})$ de la forme :

$$I = \mathcal{L}(\underline{u}) = \int_\Omega \text{Tr} [\tilde{\sigma}_\Sigma \varepsilon(\underline{u})] \, d\Omega$$

où $\tilde{\sigma}_\Sigma = \mathbf{K} \tilde{\varepsilon}_\Sigma$ est un extracteur pouvant être assimilé à un champ de contrainte.

- si on s'intéresse à la valeur ponctuelle en un point $\underline{M} \in \Omega$ du champ de déplacement dans une direction donnée u_i , la quantité d'intérêt peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} I &= u_i(\underline{M}) \\ &= \int_\Omega \tilde{f}_\Sigma \cdot \underline{u} \, d\Omega \end{aligned} \quad (1.86)$$

où

$$\tilde{f}_\Sigma = \delta(\underline{M}) e_i = \begin{cases} e_i & \text{au point } \underline{M} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.87)$$

L'extracteur \tilde{f}_Σ peut être assimilé à une force volumique.

Remarque 1.24 :

Les quantités d'intérêt présentées ici constituent des exemples où la fonctionnelle \mathcal{L} est linéaire en fonction du champ de déplacement \underline{u} et l'extracteur est défini de manière explicite. Il est également possible de considérer des grandeurs non-linéaires, telle que la contrainte équivalente de Von Mises σ_{eq} , où l'extracteur est généralement défini de manière implicite et requiert une construction particulière faisant souvent appel à des extracteurs intermédiaires [Johnson et Hansbo (1992), Maday et al. (1999), Ladevèze et Chamoin (2010)].

Remarque 1.25 :

L'extracteur associé à une quantité d'intérêt donnée n'est pas unique. En outre, lorsqu'une quantité d'intérêt I s'exprime comme une combinaison linéaire de plusieurs contributions locales, il est judicieux de considérer l'extracteur associé à cette combinaison linéaire et d'évaluer directement l'erreur locale sur la quantité d'intérêt I plutôt que d'introduire les extracteurs associés à chaque contribution locale et d'estimer séparément l'erreur locale sur chacune d'entre elles, afin de ne pas cumuler les sources d'erreur et de garder un coût de calcul raisonnable.

Dans la suite, on note $I_{ex} = \mathcal{L}(\underline{u}_{ex})$ (resp. $I_h = \mathcal{L}(\underline{u}_h)$) la valeur exacte a priori inconnue (resp. la valeur approchée obtenue par la méthode des éléments finis) prise par la quantité d'intérêt I considérée.

3.3.2 Erreur locale associée

L'erreur locale sur une quantité d'intérêt I est définie par :

$$e_I(\underline{u}) = I_{ex} - I_h = \mathcal{L}(\underline{u}_{ex}) - \mathcal{L}(\underline{u}_h) \quad (1.88)$$

Dans le cas où la fonctionnelle \mathcal{L} dépend linéairement du champ de déplacement \underline{u} , l'extracteur associé est de nature explicite et ne dépend pas de la solution du problème de référence, on a alors :

$$\mathcal{L}(\underline{u}_{ex}) - \mathcal{L}(\underline{u}_h) = \mathcal{L}(\underline{e}_h)$$

Dans le cas où la fonctionnelle \mathcal{L} ne dépend pas linéairement du champ de déplacement \underline{u} , l'extracteur associé est de nature implicite et dépend de la solution du problème de référence, on a alors :

$$\mathcal{L}(\underline{u}_{ex}) - \mathcal{L}(\underline{u}_h) \neq \mathcal{L}(\underline{e}_h)$$

Une possibilité consiste à introduire un opérateur tangent \mathcal{L}_T obtenu par linéarisation au premier ordre de l'opérateur \mathcal{L} autour du champ de déplacement approché \underline{u}_h de telle sorte qu'on ait :

$$\mathcal{L}(\underline{u}_{ex}) - \mathcal{L}(\underline{u}_h) \simeq \mathcal{L}_T(\underline{e}_h)$$

Cette approximation conduit cependant à une perte du caractère garanti de l'estimateur d'erreur. Une telle procédure de linéarisation a notamment été mise en œuvre dans [Johnson et Hansbo (1992), Maday et al. (1999), Larsson et al. (2002), Heintz et Samuelsson (2004), Stein et al. (2004), Rüter et Stein (2006)].

3.3.3 Problème adjoint

Après avoir défini la quantité d'intérêt considérée sous forme globale, l'approche classique d'estimation d'erreur locale basée sur les outils d'extraction consiste à

introduire un *problème dual* ou *auxiliaire*, dénommé aussi *problème adjoint* [Becker et Rannacher (1996), Rannacher et Suttmeier (1997), Cirak et Ramm (1998)]; ce dernier peut être astucieusement remplacé par un problème analogue, dit *problème miroir*, dans le cas non-linéaire [Ladevèze (2006), Ladevèze (2008)] afin d'obtenir des bornes garanties. Ce nouveau problème auxiliaire est entièrement défini par la nature du problème de référence et l'opérateur d'extraction à travers la fonctionnelle \mathcal{L} définissant la quantité d'intérêt I . Dans le cadre des problèmes d'élasticité linéaire, le problème adjoint défini sur Ω consiste à rechercher un champ de déplacement $\tilde{\underline{u}}(\underline{M})$ et un champ de contrainte $\tilde{\sigma}(\underline{M})$, en tout point $\underline{M} \in \Omega$, vérifiant :

- les équations de liaison (ou de compatibilité) :

$$\tilde{\underline{u}} \in \mathbf{U}_0^{ad} \quad (1.89a)$$

- les équations d'équilibre écrites sous forme faible :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} \in \mathcal{S} ; \quad \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \int_{\Omega} \text{Tr} [\tilde{\sigma} \varepsilon(\underline{u}^*)] \, d\Omega &= \mathcal{L}(\underline{u}^*) \\ &= \int_{\Omega} \left(\text{Tr} [\tilde{\sigma}_{\Sigma} \varepsilon(\underline{u}^*)] + \tilde{\underline{f}}_{\Sigma} \cdot \underline{u}^* \right) \, d\Omega \end{aligned} \quad (1.89b)$$

- la relation de comportement :

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{K} \varepsilon(\tilde{\underline{u}}) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.89c)$$

On définit l'espace $\tilde{\mathcal{S}}^{ad}$ des champs de contrainte statiquement admissibles associés aux conditions de chargement définies par la fonctionnelle \mathcal{L} :

$$\tilde{\mathcal{S}}^{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma} \in \mathcal{S} \text{ tel que} \\ \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \int_{\Omega} \text{Tr} [\tilde{\sigma} \varepsilon(\underline{u}^*)] \, d\Omega = \mathcal{L}(\underline{u}^*) \\ \text{avec } \mathcal{L}(\underline{u}^*) = \int_{\Omega} \left(\text{Tr} [\tilde{\sigma}_{\Sigma} \varepsilon(\underline{u}^*)] + \tilde{\underline{f}}_{\Sigma} \cdot \underline{u}^* \right) \, d\Omega \end{array} \right\} \quad (1.90)$$

Le problème adjoint peut alors être reformulé comme :

$$\text{Trouver } (\tilde{\underline{u}}, \tilde{\sigma}) \in \mathbf{U}_0^{ad} \times \tilde{\mathcal{S}}^{ad} \text{ vérifiant } \tilde{\sigma} = \mathbf{K} \varepsilon(\tilde{\underline{u}}) \text{ dans } \Omega \quad (1.91)$$

Le problème adjoint (1.91) est analogue au problème de référence (1.10), mais diffère de celui-ci au travers de son chargement (les sollicitations mécaniques extérieures $(\underline{F}_d, \underline{f}_d)$ sont remplacées par les opérateurs d'extraction $(\tilde{\sigma}_{\Sigma}, \tilde{\underline{f}}_{\Sigma})$ définissant la quantité d'intérêt) et des conditions aux limites de Dirichlet (la solution $\tilde{\underline{u}}$ du problème adjoint est recherchée dans l'espace vectoriel \mathbf{U}_0^{ad} en lieu et place de l'espace \mathbf{U}^{ad}).

Une méthode générique proposée dans [Becker et Rannacher (2001)] et qualifiée d'« *Optimal Control* » permet l'obtention du problème adjoint à partir des définitions de la quantité d'intérêt et du problème de référence. Celle-ci s'appuie sur la minimisation de la fonctionnelle \mathcal{L} sous la contrainte définie par la formulation faible du problème de référence (1.8), en exploitant les propriétés de dualité des opérateurs associés à cette dernière. Elle est reproduite en annexe A dans le cadre des problèmes d'élasticité linéaire en statique, mais peut être étendue à tout type de problème (linéaire ou non-linéaire, statique ou d'évolution). Des détails complémentaires peuvent être trouvés dans [Giles et Süli (2002)].

Remarque 1.26 :

Dans certains cas particuliers, le problème adjoint peut s'avérer mal posé. À titre d'exemple, si on s'intéresse à une composante du champ de déplacement contenant des mouvements de solides rigides, i.e. un cas de non-unicité de la solution du problème de référence, le problème adjoint ne vérifie a priori pas l'équilibre global défini par l'espace $\tilde{\mathcal{S}}^{ad}$ en (1.90). L'existence et l'unicité d'une solution au problème adjoint ne sont donc pas assurées (cf. remarque 1.1). Notons que les valeurs exacte I_{ex} et approchée I_h prises par cette quantité d'intérêt ne sont pas uniques dans ce cas.

Dans la suite, $(\tilde{\underline{u}}_{ex}, \tilde{\sigma}_{ex})$ désigne la solution exacte du problème adjoint (1.91).

3.3.4 Représentation de l'erreur locale sur une quantité d'intérêt

Sous l'hypothèse d'une fonctionnelle linéaire \mathcal{L} , en prenant en particulier $\underline{u}^* = \underline{e}_h \in \mathcal{U}_0^{ad}$ dans la formulation faible des équations d'équilibre (1.90) du problème adjoint, l'erreur locale sur la quantité d'intérêt peut être reliée à l'opérateur des résidus \mathcal{R}_h :

$$I_{ex} - I_h = \mathcal{L}(\underline{e}_h) = \int_{\Omega} \text{Tr} [\varepsilon(\tilde{\underline{u}}_{ex}) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{e}_h)] \, d\Omega = \langle \tilde{\underline{u}}_{ex}, \underline{e}_h \rangle_{u,\Omega} = \mathcal{R}_h(\tilde{\underline{u}}_{ex}) \quad (1.92)$$

La solution exacte du problème adjoint peut alors s'interpréter comme une *fonction d'influence* ou *fonction de sensibilité* [Prudhomme et Oden (1999)] représentant les effets de l'opérateur des résidus \mathcal{R}_h (associé à l'erreur de discrétisation \underline{e}_h du problème de référence) sur l'erreur locale $\mathcal{L}(\underline{e}_h)$. L'erreur locale correspond, de manière équivalente, au travail développé par l'opérateur \mathcal{R}_h avec la solution exacte en déplacement $\tilde{\underline{u}}_{ex}$ du problème adjoint et à celui développé par l'opérateur \mathcal{L} avec l'erreur de discrétisation \underline{e}_h du problème de référence. Dans le cas linéaire, les solutions $(\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex})$ et $(\tilde{\underline{u}}_{ex}, \tilde{\sigma}_{ex})$ associées au problème de référence et au problème adjoint, respectivement, sont dites *mutuellement adjointes* l'une de l'autre [Becker et Rannacher (2001)], dans la mesure où :

$$\mathcal{L}(\underline{u}_{ex}) = \int_{\Omega} \text{Tr} [\varepsilon(\underline{u}_{ex}) \mathbf{K} \varepsilon(\tilde{\underline{u}}_{ex})] \, d\Omega = \langle \underline{u}_{ex}, \tilde{\underline{u}}_{ex} \rangle_{u,\Omega} = l(\tilde{\underline{u}}_{ex})$$

avec les opérateurs l et \mathcal{L} définissant le chargement du problème de référence :

$$l(\bullet) = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \bullet \, d\Omega + \int_{\partial_f \Omega} \underline{F}_d \cdot \bullet \, dS$$

et celui du problème adjoint :

$$\mathcal{L}(\bullet) = \int_{\Omega} \left(\text{Tr} [\tilde{\sigma}_{\Sigma} \varepsilon(\bullet)] + \tilde{f}_{\Sigma} \cdot \bullet \right) d\Omega$$

respectivement.

À l'instar du problème de référence, la solution exacte $(\tilde{u}_{ex}, \tilde{\sigma}_{ex})$ du problème adjoint reste hors d'atteinte en pratique, et seule une résolution approchée numérique (généralement traitée à l'aide de la méthode des éléments finis) conduit à l'obtention d'une solution approchée $(\tilde{u}_h, \tilde{\sigma}_h)$, contenue dans un espace d'approximation de dimension finie $\mathbf{U}_{0,h}^{ad} \times \tilde{\mathbf{S}}_h^{ad} \subset \mathbf{U}_0^{ad} \times \tilde{\mathbf{S}}^{ad}$, à partir d'une discrétisation spatiale (maillage $\tilde{\Omega}_h$) du problème adjoint.

Remarque 1.27 :

Si on s'intéresse à une composante du champ de déplacement sur une partie de $\partial_u \Omega$, le problème adjoint est uniquement soumis à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur $\partial_u \Omega$. La solution exacte du problème adjoint est entièrement connue et correspond à la fonction nulle. En utilisant (1.92), on retrouve que l'erreur locale $I_{ex} - I_h$ associée à cette quantité d'intérêt est nulle, i.e. le champ de déplacement approché \underline{u}_h du problème de référence vérifie exactement les conditions aux limites en déplacement (cf. propriété (1.16) satisfaite par la solution approchée obtenue par la méthode des éléments fins en déplacement).

3.3.5 Estimation de l'erreur locale sur une quantité d'intérêt

Sous l'hypothèse d'un maillage $\tilde{\Omega}_h$ (associé au problème adjoint) identique au maillage Ω_h (associé au problème de référence), la solution approchée en déplacement \tilde{u}_h du problème adjoint est recherchée dans l'espace vectoriel $\mathbf{U}_{0,h}^{ad}$ associé à l'espace \mathbf{U}_h^{ad} . À partir d'une solution approchée $(\tilde{u}_h, \tilde{\sigma}_h)$ du problème adjoint et de la propriété d'orthogonalité de Galerkin (1.24) appliquée à $\tilde{u}_h \in \mathbf{U}_{0,h}^{ad}$, l'erreur sur la quantité d'intérêt s'écrit :

$$I_{ex} - I_h = \mathcal{L}(\underline{e}_h) = \mathcal{R}_h(\tilde{u}_{ex}) - \mathcal{R}_h(\tilde{u}_h) = \mathcal{R}_h(\tilde{e}_h) = \langle \underline{e}_h, \tilde{e}_h \rangle_{u,\Omega} \quad (1.93)$$

où $\tilde{e}_h = \tilde{u}_{ex} - \tilde{u}_h$ désigne l'erreur de discrétisation associée au problème adjoint.

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\langle \bullet, \circ \rangle_{u,\Omega}$ dans (1.93), on en déduit la majoration suivante :

$$|I_{ex} - I_h| \leq \| \underline{e}_h \|_{u,\Omega} \| \tilde{e}_h \|_{u,\Omega} = e_{\Omega} \tilde{e}_{\Omega} \quad (1.94)$$

où e_Ω (resp. \tilde{e}_Ω) est la mesure globale de l'erreur de discrétisation \underline{e}_h associée au problème de référence (resp. $\tilde{\underline{e}}_h$ associée au problème adjoint).

La propriété de majoration de l'erreur locale (1.94) met en jeu le produit des erreurs vraies globales e_Ω et \tilde{e}_Ω associées aux problèmes de référence et adjoint, respectivement. L'erreur locale présente donc un taux de convergence deux fois plus élevé que celui associé à l'erreur globale. Par conséquent, des bornes inférieure et supérieure de l'erreur locale peuvent être obtenues en utilisant les outils d'estimation d'erreur globale présentés en section 2, dont la connaissance et la maîtrise constituent un atout notoire assurant une implémentation aisée d'un estimateur d'erreur locale au sein d'un code éléments finis disposant déjà d'un estimateur d'erreur globale. L'estimateur d'erreur locale obtenu hérite ainsi des propriétés de l'estimateur d'erreur globale utilisé, notamment de son caractère garanti, de sa pertinence et de sa facilité de mise en œuvre.

Les estimateurs robustes fournissant des bornes garanties de l'erreur globale conduisent à une majoration garantie de l'erreur locale :

$$|I_{ex} - I_h| \leq \theta \tilde{\theta} \quad (1.95)$$

où θ (resp. $\tilde{\theta}$) désigne la mesure globale estimée de l'erreur e_Ω du problème de référence (resp. de l'erreur \tilde{e}_Ω du problème adjoint).

Remarque 1.28 :

En introduisant un découpage élémentaire du produit scalaire $\langle \bullet, \circ \rangle_{u,\Omega}$, la relation (1.93) peut être réécrite sous la forme :

$$I_{ex} - I_h = \sum_{E \in \mathcal{E}} \langle \underline{e}_h, \tilde{\underline{e}}_h \rangle_{u,E} \quad (1.96)$$

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\langle \bullet, \circ \rangle_{u,E}$ dans (1.96), on en déduit la majoration suivante :

$$|I_{ex} - I_h| \leq \sum_{E \in \mathcal{E}} \|\underline{e}_h\|_{u,E} \|\tilde{\underline{e}}_h\|_{u,E} = \sum_{E \in \mathcal{E}} e_E \tilde{e}_E \quad (1.97)$$

où e_E (resp. \tilde{e}_E) est la contribution élémentaire à l'erreur de discrétisation globale e_Ω associée au problème de référence (resp. \tilde{e}_Ω associée au problème adjoint) définie en (1.26). Les bornes d'erreur locale obtenues en (1.97) sont plus précises que celles issues de (1.94), mais nécessitent d'avoir des majorations garanties θ_E et $\tilde{\theta}_E$ des contributions élémentaires e_E et \tilde{e}_E , respectivement, sur chaque élément $E \in \mathcal{E}$ afin de conserver le caractère garanti de l'estimateur d'erreur locale :

$$|I_{ex} - I_h| \leq \sum_{E \in \mathcal{E}} \theta_E \tilde{\theta}_E \quad (1.98)$$

Notons que cette dernière propriété n'est pas théoriquement vérifiée par les estimateurs d'erreur globale existants.

Une variante de l'inégalité de Cauchy-Schwarz consiste à utiliser l'identité du parallélogramme (ou plus précisément l'identité de polarisation) associée à la norme $\|\bullet\|_{u,\Omega}$ découlant du produit scalaire $\langle \bullet, \circ \rangle_{u,\Omega}$ [Prudhomme et Oden (1999), Oden et Prudhomme (2001)] :

$$\begin{aligned} I_{ex} - I_h &= \mathcal{L}(e_h) = \langle e_h, \tilde{e}_h \rangle_{u,\Omega} = \left\langle s e_h, \frac{1}{s} \tilde{e}_h \right\rangle_{u,\Omega} \\ &= \frac{1}{4} \left[\left\| s e_h + \frac{1}{s} \tilde{e}_h \right\|_{u,\Omega}^2 - \left\| s e_h - \frac{1}{s} \tilde{e}_h \right\|_{u,\Omega}^2 \right] \end{aligned} \quad (1.99)$$

Le facteur d'échelle s est une constante strictement positive arbitraire qui peut être choisie judicieusement de manière à minimiser l'écart entre les fonctionnelles \mathcal{S}^+ et \mathcal{S}^- définies sur \mathbb{R}^{+*} par :

$$\mathcal{S}^+(s) = \left\| s e_h + \frac{1}{s} \tilde{e}_h \right\|_{u,\Omega}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{S}^-(s) = \left\| s e_h - \frac{1}{s} \tilde{e}_h \right\|_{u,\Omega}^2$$

Ce choix adapté revient à égaliser les quantités $\|s e_h\|_{u,\Omega}$ et $\left\| \frac{1}{s} \tilde{e}_h \right\|_{u,\Omega}$ conduisant à une valeur optimale du paramètre s définie par [Prudhomme et Oden (1999)] :

$$s = \left[\frac{\|\tilde{e}_h\|_{u,\Omega}}{\|e_h\|_{u,\Omega}} \right]^{1/2}$$

À partir d'un encadrement des quantités $\left\| s e_h + \frac{1}{s} \tilde{e}_h \right\|_{u,\Omega}^2$ et $\left\| s e_h - \frac{1}{s} \tilde{e}_h \right\|_{u,\Omega}^2$ intervenant dans (1.99), il est alors possible d'obtenir des bornes inférieure et supérieure de l'erreur locale $I_{ex} - I_h$. Une description détaillée de cette variante peut être trouvée dans [Ohnibus et al. (2001)]. Celle-ci a entre autres été mise en œuvre dans [Prudhomme et al. (2003), Parés et al. (2006b), Gallimard (2009)] et apporte un gain substantiel en terme de précision.

3.3.6 Techniques d'extraction couplées aux estimateurs d'erreur basés sur les résidus d'équilibre

Introduites dans [Becker et Rannacher (1996)] sous le nom de « *Dual-Weighted Residual* » ou *DWR*, ces techniques constituent les premiers outils d'estimation d'erreur locale et résultent du couplage entre les techniques d'extraction, permettant d'exprimer la quantité d'intérêt considérée sous une forme globale du type (1.83), et les estimateurs globaux basés sur la méthode des résidus implicites par élément présentés en section 2.2.2. En réutilisant les notations introduites dans cette dernière

section, la relation (1.93) peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} I_{ex} - I_h &= \mathcal{R}_h(\tilde{\underline{e}}_h) = \sum_{E \in \mathcal{E}} \left\{ \int_E \underline{r}_E \cdot \tilde{\underline{e}}_h \, d\Omega + \int_{\partial E} \hat{\underline{F}}_E \cdot \tilde{\underline{e}}_h \, dS \right\} \\ &= \sum_{E \in \mathcal{E}} \left\{ \langle \underline{r}_E, \tilde{\underline{e}}_h \rangle_{[\mathcal{L}^2(E)]^d} + \langle \hat{\underline{F}}_E, \tilde{\underline{e}}_h \rangle_{[\mathcal{L}^2(\partial E)]^d} \right\} \end{aligned}$$

où \underline{r}_E est défini par (1.51), et $\hat{\underline{F}}_E$ correspond à un ensemble de densités d'effort d'équilibrées sur chaque élément E .

On aboutit alors à une majoration de l'erreur locale de la forme :

$$|I_{ex} - I_h| \leq \sum_{E \in \mathcal{E}} \rho_E \omega_E$$

où ρ_E et ω_E sont définis par :

$$\begin{aligned} \rho_E &= \|\underline{r}_E\|_{[\mathcal{L}^2(E)]^d} + h_E^{-1/2} \|\underline{F}_E\|_{[\mathcal{L}^2(\partial E)]^d} \\ \omega_E &= \|\tilde{\underline{e}}_h\|_{[\mathcal{L}^2(E)]^d} + h_E^{1/2} \|\tilde{\underline{e}}_h\|_{[\mathcal{L}^2(\partial E)]^d} \end{aligned}$$

Le terme ρ_E fait intervenir les résidus intérieurs et de frontières connus, tandis que le terme de pondération ω_E met en jeu l'erreur de discrétisation $\tilde{\underline{e}}_h$ associée au problème adjoint qui n'est pas connue de manière explicite. Différentes techniques ont été proposées afin d'évaluer numériquement le terme ω_E [Becker et Rannacher (1996), Rannacher et Suttmeier (1997), Becker et Rannacher (2001)]. Une première méthode repose sur l'utilisation d'estimateurs explicites afin de déterminer un majorant d'une mesure de $\tilde{\underline{e}}_h$ au niveau élémentaire. Une seconde méthode consiste à approximer la solution exacte $\tilde{\underline{u}}_{ex}$ du problème adjoint par une solution très fine $\tilde{\underline{u}}_{\tilde{h}}$. Cette solution quasi-exacte du problème adjoint est ensuite directement utilisée dans le calcul de ω_E . La résolution des problèmes locaux par élément est menée en utilisant un maillage bien plus fin que le maillage éléments finis associé au problème de référence, conduisant à un encadrement de la valeur quasi-exacte prise par la quantité d'intérêt sur ce maillage très fin. Ces deux méthodes ne permettant pas d'obtenir des bornes garanties de l'erreur en quantité d'intérêt, plusieurs démarches ont par la suite été proposées afin d'assurer un encadrement garanti de l'erreur locale [de Almeida et Pereira (2006), Parés et al. (2008a), Parés et al. (2008b), Parés et al. (2009b), Almeida et Oden (2010)].

3.3.7 Techniques d'extraction couplées aux estimateurs d'erreur basés sur la non-vérification de la relation de comportement

Introduites dans [Ladevèze (2006)], ces techniques représentent actuellement les seuls outils conduisant à l'obtention d'un encadrement garanti de l'erreur locale pour une large gamme de problèmes, tels que ceux de viscoélasticité linéaire [Chamoin et Ladevèze (2007), Chamoin et Ladevèze (2008)], (visco)dynamique transitoire linéaire

[Ladevèze et Waeytens (2009), Waeytens et al. (2012)], (visco)élastoplasticité [Ladevèze et al. (2012a)], etc.. L'utilisation des techniques de construction de champs admissibles ainsi que le concept d'erreur en relation de comportement sont ici étendus et appliqués au problème adjoint. On note $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\underline{\sigma}}_h)$ et $(\hat{\tilde{\underline{u}}}_h, \hat{\tilde{\underline{\sigma}}}_h)$ les solutions admissibles reconstruites à partir des solutions éléments finis $(\underline{u}_h, \underline{\sigma}_h)$ et $(\tilde{\underline{u}}_h, \tilde{\underline{\sigma}}_h)$ associées aux problèmes de référence et adjoint, respectivement. À partir de ces solutions et en prenant $\underline{u}^* = \underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h \in \mathbf{U}_0^{ad}$ dans la formulation faible des équations d'équilibre (1.90) du problème adjoint satisfaites par $\hat{\tilde{\underline{\sigma}}}_h \in \tilde{\mathbf{S}}^{ad}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_{ex} - I_h &= \mathcal{L}(\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h) + \mathcal{L}(\hat{\underline{u}}_h - \underline{u}_h) \\
&= \int_{\Omega} \text{Tr} [\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h) \hat{\tilde{\underline{\sigma}}}_h] \, d\Omega + \mathcal{L}(\hat{\underline{u}}_h - \underline{u}_h) \\
&= \int_{\Omega} \text{Tr} [\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h) (\hat{\tilde{\underline{\sigma}}}_h - \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\underline{u}}_h))] \, d\Omega + \int_{\Omega} \text{Tr} [\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h) \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\underline{u}}_h)] \, d\Omega \\
&\quad + \mathcal{L}(\hat{\underline{u}}_h - \underline{u}_h) \\
&= \int_{\Omega} \text{Tr} [\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h) (\hat{\tilde{\underline{\sigma}}}_h - \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\underline{u}}_h))] \, d\Omega + \int_{\Omega} \text{Tr} [(\underline{\sigma}_{ex} - \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\underline{u}}_h)) \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\underline{u}}_h)] \, d\Omega \\
&\quad + \mathcal{L}(\hat{\underline{u}}_h - \underline{u}_h)
\end{aligned}$$

Par la suite, en utilisant la propriété remarquable (1.77) appliquée à $\underline{\sigma}_{ex} - \hat{\tilde{\underline{\sigma}}}_h \in \mathbf{S}_0^{ad}$ et $\hat{\tilde{\underline{u}}}_h \in \mathbf{U}_0^{ad}$, on a alors le résultat fondamental suivant :

$$I_{ex} - I_h - I_{hh} = \int_{\Omega} \text{Tr} [\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h) (\hat{\tilde{\underline{\sigma}}}_h - \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\underline{u}}_h))] \, d\Omega \quad (1.100)$$

avec

$$I_{hh} = \int_{\Omega} \text{Tr} [(\hat{\tilde{\underline{\sigma}}}_h - \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\underline{u}}_h)) \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\tilde{\underline{u}}}_h)] \, d\Omega + \mathcal{L}(\hat{\underline{u}}_h - \underline{u}_h) \quad (1.101)$$

En choisissant simplement $\hat{\underline{u}}_h = \underline{u}_h$ et $\hat{\tilde{\underline{u}}}_h = \tilde{\underline{u}}_h$, on a directement $\mathcal{L}(\hat{\underline{u}}_h - \underline{u}_h) = 0$ et $I_{hh} = \int_{\Omega} \text{Tr} [(\hat{\tilde{\underline{\sigma}}}_h - \underline{\sigma}_h) \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\underline{u}}_h)] \, d\Omega$. Puis, en réutilisant la propriété remarquable (1.77) appliquée à $\tilde{\underline{\sigma}}_{ex} - \hat{\tilde{\underline{\sigma}}}_h \in \mathbf{S}_0^{ad}$ et $\underline{u}_{ex} - \underline{u}_h \in \mathbf{U}_0^{ad}$, le résultat fondamental (1.100) se met alors sous la forme :

$$\begin{aligned}
I_{ex} - I_h - I_{hh} &= \int_{\Omega} \text{Tr} [\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_{ex} - \underline{u}_h) (\tilde{\underline{\sigma}}_{ex} - \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\underline{u}}_h))] \, d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \text{Tr} [\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{e}_h) \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\underline{e}}_h)] \, d\Omega \\
&= \langle \underline{e}_h, \tilde{\underline{e}}_h \rangle_{u, \Omega}
\end{aligned} \quad (1.102)$$

Remarque 1.29 :

Contrairement à la relation (1.93), le résultat fondamental (1.102) ne s'appuie pas sur la propriété d'orthogonalité de Galerkin (1.24) et fait intervenir un terme

correctif I_{hh} entièrement calculable dont l'expression met en jeu des quantités connues du problème de référence et du problème adjoint. Lorsque le maillage $\tilde{\Omega}_h$ support de la résolution du problème adjoint est identique à celui Ω_h utilisé pour la résolution du problème de référence, on a $I_{hh} = 0$ et on retrouve le résultat classique (1.93). Le résultat fondamental (1.102) peut donc être interprété comme une généralisation du résultat (1.93) ne nécessitant pas l'utilisation de la propriété d'orthogonalité de Galerkin (1.24), ou encore comme une extension au cas d'un maillage $\tilde{\Omega}_h$ du problème adjoint différent de celui Ω_h du problème de référence. L'indépendance des espaces de définition du problème de référence et du problème adjoint offre alors une plus grande liberté dans la résolution du problème adjoint.

Remarque 1.30 :

D'une part, lorsque la solution approchée $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ du problème référence correspond à la solution exacte $(\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex})$, le terme correctif I_{hh} est nul et on retrouve $I_{ex} = I_h$. D'autre part, lorsque la solution approchée $(\tilde{\underline{u}}_h, \tilde{\sigma}_h)$ du problème adjoint correspond à la solution exacte $(\tilde{\underline{u}}_{ex}, \tilde{\sigma}_{ex})$, le terme correctif I_{hh} est non nul et on a $I_{ex} = I_h + I_{hh}$. I_{hh} correspond donc à un terme de correction et la quantité $I_h + I_{hh}$ peut être vue comme une nouvelle approximation de I_{ex} .

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\langle \bullet, \circ \rangle_{u,\Omega}$ dans (1.102), on en déduit une majoration analogue à (1.94) :

$$|I_{ex} - I_h - I_{hh}| \leq \|e_h\|_{u,\Omega} \|\tilde{e}_h\|_{u,\Omega} = e_\Omega \tilde{e}_\Omega \quad (1.103)$$

Puis, en utilisant la propriété de borne supérieure garantie (1.74) satisfaite par la mesure de l'erreur en relation de comportement, on obtient une première majoration garantie de l'erreur locale :

$$|I_{ex} - I_h - I_{hh}| \leq e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{\tilde{\underline{u}}}_h, \hat{\tilde{\sigma}}_h) \quad (1.104)$$

Une amélioration de cet encadrement peut être obtenue en introduisant le champ de contrainte $\hat{\sigma}_h^m$, défini par (1.75), dans le résultat fondamental (1.100) :

$$\begin{aligned} I_{ex} - I_h - I_{hh} &= \int_{\Omega} \text{Tr} [(\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m) \mathbf{K}^{-1} (\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h))] \, d\Omega \\ &= \left\langle \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m, \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right\rangle_{\sigma,\Omega} \end{aligned} \quad (1.105)$$

avec

$$\begin{aligned} I_{hh} &= \int_{\Omega} \text{Tr} [\hat{\sigma}_h^m \mathbf{K}^{-1} (\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h))] \, d\Omega + \mathcal{L}(\hat{\underline{u}}_h - \underline{u}_h) \\ &= \left\langle \hat{\sigma}_h^m, \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right\rangle_{\sigma,\Omega} + \mathcal{L}(\hat{\underline{u}}_h - \underline{u}_h) \end{aligned} \quad (1.106)$$

où

$$\hat{\sigma}_h^m = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_h + \mathbf{K}_\varepsilon(\hat{\underline{u}}_h))$$

En appliquant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\langle \bullet, \circ \rangle_{\sigma, \Omega}$ dans (1.105), puis, en exploitant l'égalité de Prager-Synge (1.76), on obtient une nouvelle majoration garantie de l'erreur locale [Ladevèze (2006), Ladevèze et Chamoin (2010)] :

$$|I_{ex} - I_h - I_{hh}| \leq \frac{1}{2} e_{\text{rdc}, \Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) e_{\text{rdc}, \Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) \quad (1.107)$$

L'encadrement (1.107) est deux fois plus précis que l'encadrement précédent (1.104). À partir de la majoration (1.107), on peut définir des bornes inférieure et supérieure $(\xi_{\text{inf}}, \xi_{\text{sup}})$ de la valeur exacte I_{ex} prise par la quantité d'intérêt :

$$\xi_{\text{inf}} \leq I_{ex} \leq \xi_{\text{sup}} \quad (1.108)$$

avec

$$\xi_{\text{inf}} = I_h + I_{hh} - \frac{1}{2} e_{\text{rdc}, \Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) e_{\text{rdc}, \Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) \quad (1.109a)$$

$$\xi_{\text{sup}} = I_h + I_{hh} + \frac{1}{2} e_{\text{rdc}, \Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) e_{\text{rdc}, \Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) \quad (1.109b)$$

De par la nature indépendante des supports de résolution des problèmes de référence et adjoint, différentes techniques ont été proposées afin d'optimiser la résolution du problème adjoint.

Approche intrusive : techniques de raffinement de maillage

Une première approche simple et efficace consiste à effectuer un raffinement global ou local du maillage $\hat{\Omega}_h$ associé à la discrétisation du problème adjoint. Cette approche est intrusive dans la mesure où elle s'appuie sur des techniques de remaillage uniforme ou adaptatif ne permettant pas le réemploi des opérateurs utilisés pour la résolution du problème de référence. Elle permet de minimiser la mesure $e_{\text{rdc}, \Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ de l'erreur en relation de comportement associée au problème adjoint et conduit à l'obtention de bornes d'erreur locale pertinentes dès lors que la résolution du problème adjoint est suffisamment fine. Cette dernière peut néanmoins s'avérer coûteuse, notamment lorsque la solution du problème adjoint présente des singularités dues aux conditions de chargement définies par la nature de la quantité d'intérêt.

De par le caractère très localisé en espace (et en temps, pour les problèmes d'évolution) du chargement associé au problème adjoint, la solution de celui-ci présente généralement de forts gradients au voisinage de la zone d'intérêt, correspondant au

support local de la quantité d'intérêt étudiée. Les contributions prépondérantes à l'erreur globale estimée $e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\tilde{\sigma}}_h)$ du problème adjoint étant elles-même majoritairement situées à proximité de la zone d'intérêt, il semble plus judicieux de réaliser un raffinement local du maillage $\tilde{\Omega}_h$ afin de conserver un coût de calcul raisonnable. Une première application aux problèmes de viscoélasticité linéaire en quasi-statique peut être trouvée dans [Chamoïn et Ladevèze (2007)]. Une technique de remaillage local sera par ailleurs mise en œuvre au chapitre 4 pour le traitement de diverses quantités d'intérêt.

Approche non-intrusive : techniques « handbook »

Une seconde approche, inspirée de la méthode des éléments finis généralisés (« *Generalized Finite Element Method* » ou *GFEM*) proposée dans [Strouboulis et al. (2000a)] ou encore de la méthode des éléments finis étendus (« *eXtended Finite Element Method* » ou *XFEM*) introduite dans [Belytschko et Black (1999), Moës et al. (1999)], repose sur un enrichissement local à l'aide de fonctions d'enrichissement de type « *handbook* » introduites via la méthode de partition de l'unité.

Dans le cadre de la GFEM (resp. XFEM), ces fonctions d'enrichissement sont construites numériquement à travers la résolution fine d'une séquence de problèmes locaux appelés « *handbook* » (resp. analytiquement sous forme d'un développement asymptotique) et viennent enrichir localement la base d'approximation. À partir de cette bibliothèque de fonctions « *handbook* », il est alors possible de tenir compte de détails structuraux (trous, inclusions, etc.) dans le cas de la GFEM, ou de singularités géométriques (discontinuités, pointes de fissures, etc.) dans le cas de la XFEM, en s'affranchissant des problèmes de maillage.

Dans le cadre de l'estimation d'erreur locale, les fonctions d'enrichissement, également appelées fonctions « *handbook* » et notées $(\tilde{\underline{u}}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}^{\text{hand}})$, sont les solutions (quasi-)exactes de problèmes annexes définis sur des domaines (semi-)infinis et soumis au chargement du problème adjoint, dont la résolution est menée a priori, de manière analytique (si possible) ou numérique en utilisant un maillage très fin et un domaine suffisamment large (sinon). Elles représentent donc des solutions locales (quasi-)exactes du problème adjoint.

L'enrichissement local est appliqué au travers de la partition de l'unité sur une région Ω^{PUM} du domaine Ω , décomposée en deux sous-régions non-recouvrantes :

- une zone Ω_1^{PUM} contenant la zone d'intérêt ω , i.e. la zone d'application du chargement du problème adjoint ;
- une zone Ω_2^{PUM} complémentaire de Ω_1^{PUM} dans Ω^{PUM} ($\Omega_1^{\text{PUM}} \cup \Omega_2^{\text{PUM}} = \Omega^{\text{PUM}}$, $\Omega_1^{\text{PUM}} \cap \Omega_2^{\text{PUM}} = \emptyset$) et entourant Ω_1^{PUM} .

La solution $(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\sigma})$ du problème adjoint est alors recherchée sous la forme :

$$\tilde{\underline{u}} = \tilde{\underline{u}}_{\text{PUM}}^{\text{hand}} + \tilde{\underline{u}}^{\text{res}} \quad (1.110\text{a})$$

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_{\text{PUM}}^{\text{hand}} + \tilde{\sigma}^{\text{res}} \quad (1.110\text{b})$$

Celle-ci est constituée de deux parties distinctes :

- une partie enrichie $(\tilde{\underline{u}}_{\text{PUM}}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}_{\text{PUM}}^{\text{hand}})$ introduite a priori de manière analytique ou numérique, qui équilibre localement le chargement du problème adjoint, mais ne satisfait généralement pas les conditions aux limites sur la frontière $\partial\Omega$:

$$\tilde{\underline{u}}_{\text{PUM}}^{\text{hand}} = \sum_{i \in \mathcal{N}_{\Omega_1^{\text{PUM}}}^{\text{PUM}}} \varphi_i \tilde{\underline{u}}^{\text{hand}} \quad \text{vérifiant} \quad \tilde{\underline{u}}_{\text{PUM}}^{\text{hand}} = \tilde{\underline{u}}^{\text{hand}} \quad \text{dans } \Omega_1^{\text{PUM}} \quad (1.111a)$$

$$\tilde{\sigma}_{\text{PUM}}^{\text{hand}} = \mathbf{K} \varepsilon(\tilde{\underline{u}}_{\text{PUM}}^{\text{hand}}) \quad \text{vérifiant} \quad \tilde{\sigma}_{\text{PUM}}^{\text{hand}} = \tilde{\sigma}^{\text{hand}} \quad \text{dans } \Omega_1^{\text{PUM}} \quad (1.111b)$$

- où $\mathcal{N}_{\Omega_1^{\text{PUM}}}$ désigne l'ensemble des nœuds enrichis, contenus dans la zone Ω_1^{PUM} ;
- une partie résiduelle $(\tilde{\underline{u}}^{\text{res}}, \tilde{\sigma}^{\text{res}})$ calculée a posteriori en utilisant la méthode des éléments finis, qui peut être vue comme une correction de la partie enrichie $(\tilde{\underline{u}}_{\text{PUM}}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}_{\text{PUM}}^{\text{hand}})$ assurant la vérification des conditions aux limites du problème adjoint sur la frontière $\partial\Omega$.

Remarque 1.31 :

Contrairement aux méthodes GFEM et XFEM qui tiennent compte des singularités dues à la géométrie, les fonctions d'enrichissement $(\tilde{\underline{u}}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}^{\text{hand}})$ sont ici uniquement destinées à reproduire les singularités dues au chargement du problème adjoint. Les techniques « handbook » utilisées dans le contexte de l'estimation d'erreur locale n'introduisent pas d'inconnues supplémentaires et ne sont donc pas limitées par les problèmes de dépendances linéaires entre les fonctions d'enrichissement et les fonctions de forme éléments finis classiques, rencontrés dans les méthodes GFEM et XFEM.

Grâce à la connaissance a priori de la solution « handbook » $(\tilde{\underline{u}}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}^{\text{hand}})$, le nouveau problème adjoint, dit résiduel, défini sur Ω consiste alors à rechercher un champ de déplacement $\tilde{\underline{u}}^{\text{res}}(\underline{M})$ et un champ de contrainte $\tilde{\sigma}^{\text{res}}(\underline{M})$, en tout point $\underline{M} \in \Omega$, vérifiant :

- les équations de liaison (ou de compatibilité) :

$$\tilde{\underline{u}}^{\text{res}} \in \mathbf{U}_0^{\text{ad}} \quad (1.112a)$$

- les équations d'équilibre écrites sous forme faible :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{\text{res}} \in \mathcal{S} ; \quad \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{\text{ad}}, \\ \int_{\Omega} \text{Tr} [\tilde{\sigma}^{\text{res}} \varepsilon(\underline{u}^*)] \, d\Omega = \mathcal{L}(\underline{u}^*) - \int_{\Omega} \text{Tr} [\tilde{\sigma}_{\text{PUM}}^{\text{hand}} \varepsilon(\underline{u}^*)] \, d\Omega \\ = \int_{\Omega} \left(\text{Tr} [(\tilde{\sigma}_{\Sigma} - \tilde{\sigma}_{\text{PUM}}^{\text{hand}}) \varepsilon(\underline{u}^*)] + \tilde{f}_{\Sigma} \cdot \underline{u}^* \right) \, d\Omega \end{aligned} \quad (1.112b)$$

- la relation de comportement :

$$\tilde{\sigma}^{\text{res}} = \mathbf{K} \varepsilon(\tilde{\underline{u}}^{\text{res}}) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.112c)$$

De par les propriétés de la solution handbook $(\tilde{\underline{u}}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}^{\text{hand}})$, notamment les conditions d'équilibre vérifiées par celle-ci avec les opérateurs d'extraction dans un milieu (semi-)infini, le chargement du problème adjoint résiduel (1.112) peut se ramener uniquement à :

- une densité surfacique d'effort $-\tilde{\sigma}^{\text{hand}} \underline{n}_{12}$ sur $\partial\Omega_1^{\text{PUM}}$, où \underline{n}_{12} désigne la normale unitaire sortante à Ω_1^{PUM} et $\partial\Omega_1^{\text{PUM}}$ sa frontière ;
- une précontrainte $-\tilde{\sigma}_{\text{PUM}}^{\text{hand}}$ sur Ω_2^{PUM} .

La formulation faible des équations d'équilibre (1.112b) du problème adjoint résiduel peut alors être réécrite sous la forme :

$$\tilde{\sigma}^{\text{res}} \in \mathcal{S} ; \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0^{\text{ad}},$$

$$\int_{\Omega} \text{Tr} [\tilde{\sigma}^{\text{res}} \varepsilon(\underline{u}^*)] \, d\Omega = - \int_{\partial\Omega_1^{\text{PUM}}} \tilde{\sigma}^{\text{hand}} \underline{n}_{12} \cdot \underline{u}^* \, dS - \int_{\Omega_2^{\text{PUM}}} \text{Tr} [\tilde{\sigma}_{\text{PUM}}^{\text{hand}} \varepsilon(\underline{u}^*)] \, d\Omega$$

Notons que le chargement du problème adjoint est désormais fini et régulier en tout point du domaine Ω , contrairement à celui du problème adjoint initial ; en conséquence, le problème adjoint résiduel (1.112) peut être résolu de manière approchée à l'aide de la méthode des éléments finis en s'appuyant sur le même espace de discrétisation \mathcal{U}_h que celui utilisé pour la résolution du problème de référence (1.10), conduisant à l'obtention d'une solution approchée $(\tilde{\underline{u}}_h^{\text{res}}, \tilde{\sigma}_h^{\text{res}})$ de bonne qualité, i.e. une représentation correcte de la solution résiduelle exacte $(\tilde{\underline{u}}_{ex}^{\text{res}}, \tilde{\sigma}_{ex}^{\text{res}})$. La résolution du problème adjoint est alors *non-intrusive* et peut être menée en parallèle de celle du problème de référence. Signalons néanmoins que l'application du chargement surfacique $-\tilde{\sigma}^{\text{hand}} \underline{n}_{12}$ a priori non-linéaire sur le contour $\partial\Omega_1^{\text{PUM}}$ intérieur au maillage éléments finis nécessite une attention particulière non seulement lors de la résolution éléments finis, mais aussi lors de la procédure de construction des champs admissibles (cf. [Chamoin (2007)]).

À partir de la connaissance d'une solution approchée $(\tilde{\underline{u}}_h^{\text{res}}, \tilde{\sigma}_h^{\text{res}})$ et de la donnée du chargement du problème adjoint résiduel, une solution admissible $(\hat{\underline{u}}_h^{\text{res}}, \hat{\sigma}_h^{\text{res}})$ de ce dernier peut être obtenue en employant la même méthode de construction de champs admissibles que celle utilisée pour construire la solution admissible $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ du problème de référence. La détermination d'une solution admissible $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ du problème adjoint initial est alors elle-même non-intrusive et s'effectue directement à partir des relations suivantes analogues à (1.110) :

$$\hat{\underline{u}}_h = \tilde{\underline{u}}_{\text{PUM}}^{\text{hand}} + \hat{\underline{u}}_h^{\text{res}} \tag{1.113a}$$

$$\hat{\sigma}_h = \tilde{\sigma}_{\text{PUM}}^{\text{hand}} + \hat{\sigma}_h^{\text{res}} \tag{1.113b}$$

Enfin, en observant que la partie enrichie $(\tilde{\underline{u}}_{\text{PUM}}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}_{\text{PUM}}^{\text{hand}})$ satisfait la relation de comportement sur Ω (cf. relation (1.111b)), la mesure $e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ de l'erreur en relation de comportement du problème adjoint initial est exactement égale à celle

$e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{\underline{u}}_h^{\text{res}}, \hat{\tilde{\sigma}}_h^{\text{res}})$ du problème adjoint résiduel :

$$\begin{aligned} e_{\text{rdc},\Omega}(\tilde{\underline{u}}_{\text{PUM}}^{\text{hand}}, \tilde{\tilde{\sigma}}_{\text{PUM}}^{\text{hand}}) &= 0 \\ e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\tilde{\sigma}}_h) &= e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{\underline{u}}_h^{\text{res}}, \hat{\tilde{\sigma}}_h^{\text{res}}) \end{aligned}$$

Le calcul de la mesure de l'erreur en relation de comportement du problème adjoint porte exclusivement sur la solution admissible résiduelle $(\hat{\underline{u}}_h^{\text{res}}, \hat{\tilde{\sigma}}_h^{\text{res}})$. La partie enrichie $(\tilde{\underline{u}}_{\text{PUM}}^{\text{hand}}, \tilde{\tilde{\sigma}}_{\text{PUM}}^{\text{hand}})$ intervient quant à elle uniquement dans l'expression du terme correctif I_{hh} , dont la détermination nécessite un soin particulier et peut être effectuée par sur-intégration afin d'évaluer au mieux l'intégrale de la partie singulière de la fonction « handbook » $(\tilde{\underline{u}}^{\text{hand}}, \tilde{\tilde{\sigma}}^{\text{hand}})$ sur la zone Ω^{PUM} . En pratique, la mesure $e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{\underline{u}}_h^{\text{res}}, \hat{\tilde{\sigma}}_h^{\text{res}})$ de l'erreur en relation du problème adjoint résiduel est généralement faible et conduit à l'obtention de bornes très précises de l'erreur en quantité d'intérêt sans avoir recours à aucune procédure de remaillage adaptatif.

Remarque 1.32 :

Il serait également possible d'introduire la solution « handbook » $(\tilde{\underline{u}}^{\text{hand}}, \tilde{\tilde{\sigma}}^{\text{hand}})$ sur l'ensemble du domaine Ω et non uniquement sur une zone locale Ω^{PUM} . La solution $(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\tilde{\sigma}})$ du problème adjoint serait alors recherchée sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{u}} &= \tilde{\underline{u}}^{\text{hand}} + \tilde{\underline{u}}^{\text{res}} \\ \tilde{\tilde{\sigma}} &= \tilde{\tilde{\sigma}}^{\text{hand}} + \tilde{\tilde{\sigma}}^{\text{res}} \end{aligned}$$

Cet enrichissement global introduirait cependant des approximations supplémentaires, non seulement au niveau de la vérification des conditions aux limites de Dirichlet (1.112a) du problème adjoint résiduel (prise en compte de la fonction « handbook » $(\tilde{\underline{u}}^{\text{hand}}, \tilde{\tilde{\sigma}}^{\text{hand}})$ sur $\partial_u\Omega$), mais aussi au niveau de l'application du chargement du problème adjoint résiduel (intégration numérique de la précontrainte $-\tilde{\tilde{\sigma}}^{\text{hand}}$ sur la partie globale $\Omega \setminus \Omega_1^{\text{PUM}}$ complémentaire de Ω_1^{PUM} en lieu en place de celle $-\tilde{\tilde{\sigma}}_{\text{PUM}}^{\text{hand}}$ sur la zone locale Ω_2^{PUM}). Par ailleurs, notons qu'un tel enrichissement s'avérerait inutile dans la majorité des applications pratiques en vertu du principe de Saint-Venant.

Finalement, la technique d'enrichissement du problème adjoint dite « handbook » préserve la nature non-intrusive offerte par la résolution éléments finis du problème de référence et peut donc s'intégrer facilement dans les codes éléments finis existants. Elle conduit à l'obtention de bornes d'erreur locale véritablement précises, pourvu que les fonctions d'enrichissement appropriées au traitement de la quantité d'intérêt étudiée soient disponibles dans une bibliothèque de fonctions « handbook » connues analytiquement ou pré-calculées numériquement. Cette technique a notamment été appliquée aux problèmes d'élasticité linéaire en quasi-statique dans [Grätsch et Hartmann (2006)] et de viscoélasticité linéaire en quasi-statique dans [Chamoin et Ladevèze (2008), Chamoin et Ladevèze (2009)], puis étendue aux problèmes de (visco)dynamique transitoire linéaire dans [Waeytens et al. (2012)].

Par ailleurs, soulignons que les techniques « handbook » sont particulièrement bien adaptées au traitement de quantités d'intérêt ponctuelles en espace (et en temps, pour les problèmes d'évolution) et permettent notamment de s'affranchir des procédures de régularisation couramment employées pour ce type de quantité d'intérêt. Ces techniques seront mises en œuvre au chapitre 4 pour le traitement d'une quantité d'intérêt ponctuelle.

Enfin, signalons que les techniques « handbook » ont récemment été couplées à des procédures de projection dans [Ladevèze et Chamoin (2010)], afin de traiter des quantités d'intérêt non-linéaires ponctuelles en espace, telle que la contrainte équivalente de Von Mises ou l'énergie de déformation en un point donné de la structure, sans avoir recours à aucune procédure de linéarisation. Ces procédures reposent sur la construction de bases orthonormales ; la quantité d'intérêt non-linéaire peut alors être réécrite à partir des éléments de la base orthonormale préalablement construite, qui définissent une famille d'extracteurs correspondant au chargement du problème adjoint. Notons que les propriétés de projection utilisées assurent la prise en compte des termes de degré élevé dans l'établissement des bornes d'erreur locale et préservent ainsi le caractère garanti de l'encadrement, contrairement aux procédures classiques de linéarisation.

4 Bilan

Dans ce premier chapitre, nous avons présenté une revue non exhaustive des différents outils d'estimation d'erreur globale et locale dans le cadre des problèmes d'élasticité linéaire. Nous n'avons pas mentionné les potentielles extensions de ces méthodes à d'autres classes de problèmes, car elles ne seront pas abordées dans la suite de ce travail. Nous avons également écarté les travaux relatifs aux procédures d'adaptation de maillage visant à optimiser la discrétisation associée à un maillage initial en vue de satisfaire un objectif de précision donné, car nous n'aurons pas recours à de telles procédures par la suite.

Si quelques estimateurs sont asymptotiquement exacts sous certaines hypothèses, notons que seul un nombre restreint sont conservatifs et offrent une estimation garantie de l'erreur vraie pour une large gamme de problèmes, ce qui constitue un inconvénient majeur dans une démarche de conception robuste. Sur ce point précis, signalons que l'obtention de bornes strictes de l'erreur vraie nécessite l'élaboration de champs équilibrés. À l'exception des estimateurs basés sur le lissage des contraintes qui sont désormais implantés et couramment utilisés dans des codes de calcul éléments finis industriels tels que Cast3m¹ et Catia², les outils issus des autres familles d'estimation d'erreur sont réputés difficiles à mettre en place et engendrent un sur-

1. <http://www-cast3m.cea.fr/>

2. <http://www.3ds.com/fr/products/catia/>

coût de calcul qui peut s'avérer élevé au regard des exigences croissantes du monde industriel.

Le développement et la mise en place d'outils robustes d'estimation d'erreur à destination du monde industriel est un des enjeux de ce travail. L'objectif est d'avoir en main un outil de vérification non seulement optimisé en terme de performance de calcul pour être en mesure de traiter des applications industrielles complexes, mais aussi parfaitement maîtrisé afin de pouvoir l'appliquer à l'estimation d'erreur locale. Les estimateurs basés sur la non-vérification de la relation de comportement sont des outils de vérification particulièrement bien adaptés à cet objectif, dans la mesure où ils s'appuient sur des techniques spécifiques de construction de champs admissibles conduisant à des bornes garanties et de qualité de l'erreur vraie. Par ailleurs, les techniques d'extraction offrent un cadre privilégié pour l'estimation d'erreur locale et permettent d'utiliser les outils initialement destinés à l'estimation d'erreur globale. Nous nous appuyerons sur ces différents outils dans la suite de ce travail afin d'apporter des éléments de réponse à cette problématique qui suscite un vif intérêt dans le monde de l'ingénierie.

L'essentiel des travaux de recherche relatifs à la problématique de la vérification porte actuellement sur les procédures d'encadrement et d'estimation d'erreur locale ainsi que sur leur potentielle extension à diverses classes de problèmes et à d'autres types de mesures d'erreur. Les principaux axes de recherche s'orientent notamment vers le développement de méthodes dédiées aux problèmes non-linéaires d'évolution [Ladevèze et Moës (1998b), Ladevèze et Moës (1998a), Ladevèze et Moës (1999), Ladevèze et al. (1999a), Carstensen et al. (2006), Cecot (2007), Ladevèze et al. (2012a)], au cadre stochastique [Oden et al. (2005), Ladevèze et Florentin (2006), Chamoin et al. (2012b)], au cadre parallèle offert par les méthodes de décomposition de domaine [Otto et Lube (1999), Bernardi et al. (2009), Parret-Fréaud et al. (2010)], mais aussi au cadre des méthodes de réduction de modèle [Ammar et al. (2010), Ladevèze et Chamoin (2011), Florentin et Díez (2012)]. Outre le développement de procédures visant à améliorer l'encadrement des bornes d'erreur locale ou à l'étendre à d'autres types de problèmes, un axe de recherche particulièrement prometteur s'intéresse à l'estimation de nouvelles mesures d'erreur, telle que l'*erreur de modèle* correspondant à l'écart entre un modèle mathématique initial de référence et un autre modèle mathématique simplifié, généralement moins coûteux et plus facile à mettre en œuvre, adapté au problème considéré et aux codes de calcul actuels. L'estimation d'erreur de modèle a été le centre d'intérêt de nombreux travaux de recherche portant non seulement sur l'estimation d'erreur globale [Zohdi et al. (1996), Oden et Zohdi (1997), Moës et al. (1998), Ainsworth (1998)], mais aussi sur l'estimation d'erreur sur des quantités d'intérêt [Cho et Oden (1997), Oden et al. (1999), Oden et Vemaganti (2000), Vemaganti et Oden (2001), Oden et Prudhomme (2002), Oden et al. (2005), Oden et al. (2006), Bauman et al. (2009), Prudhomme et al. (2009)]. Enfin, dans la communauté des mathématiques appliquées, une thématique

de recherche en plein essor s'intéresse à l'estimation d'*erreur algébrique*, correspondant à l'erreur due à la non-convergence des solveurs itératifs lors de la résolution de systèmes algébriques (non-)linéaires [Becker et al. (1995), Patera et Rønquist (2001), Strakoš et Tichý (2002), Strakoš et Tichý (2005), Arioli et al. (2005), Arioli et Loghin (2008), Picasso (2009), Jiránek et al. (2010), Silvester et Simoncini (2011), Han (1994), Chaillou et Suri (2006), Chaillou et Suri (2007), Alaoui et al. (2011), Ern et Vohralík (2012a), Ern et Vohralík (2012b)] dans le cadre de l'estimation d'erreur globale, mais aussi dans celui de l'estimation d'erreur locale [Meidner et al. (2009), Rannacher et al. (2010)]. Les estimateurs d'erreur qui en découlent assurent la prise en compte de toutes les sources d'erreur, i.e. l'erreur de discrétisation (spatiale et/ou temporelle) et l'erreur algébrique. Des indicateurs spécifiques permettent d'estimer séparément les contributions apportées par ces différentes sources d'erreur, conduisant à la définition de nouveaux critères d'arrêt des solveurs itératifs (non-)linéaires basés non plus sur la prédiction du résidu du solveur, mais sur l'état de convergence de la contribution liée à l'erreur de discrétisation, en vue d'une procédure d'adaptation optimale.

Chapitre 2

Méthodes de construction de champs admissibles

Dans ce second chapitre, les différentes méthodes de construction de champs admissibles existantes sont revisitées avant d'introduire une nouvelle méthode hybride. Une étude comparative des performances des estimateurs associés à chacune de ces méthodes est menée sur des exemples numériques tirés d'applications industrielles en dimensions 2 et 3. Les critères retenus sont la pertinence de l'estimateur, le coût de calcul engendré et la facilité d'implémentation dans un code éléments finis existant.

Sommaire

1	Technique EET d'équilibrage par élément - méthode standard	70
1.1	Principe	70
1.2	Construction des densités d'effort équilibrées	71
1.3	Construction d'un champ de contrainte admissible à l'échelle de l'élément	74
1.4	Implémentation numérique	78
2	Technique SPET d'équilibrage par patch d'éléments - méthode « flux-free »	80
2.1	Définition des problèmes locaux auto-équilibrés par patch d'éléments	80
2.2	Construction d'un champ de contrainte admissible et d'un estimateur associé	83
2.3	Variantes	84
2.4	Implémentation numérique	86
3	Technique EESPT d'équilibrage par élément et patch d'éléments - méthode hybride	87
3.1	Principe	87
3.2	Définition des problèmes locaux par patch d'éléments	88
3.3	Existence et unicité des solutions associées aux problèmes locaux	90
3.4	Implémentation numérique	93
4	Illustrations numériques sur des exemples industriels	96
4.1	Capteur d'effort 2D	98
4.2	Structure fissurée 2D	103
4.3	Plaque trouée 3D	109
4.4	Tête de réacteur nucléaire 3D	113
4.5	Manchon d'hélicoptère 3D	119
5	Bilan	123

Les estimateurs d'erreur globale ou locale robustes et pertinents, offrant une estimation garantie et précise de l'erreur vraie et permettant le traitement d'une large gamme de problèmes (linéaires ou non-linéaires, statiques ou d'évolution), requièrent la construction d'une solution dite *admissible* et notée $(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h)$. Une telle solution doit satisfaire les conditions d'admissibilité cinématique (1.4) et statique (1.8) du problème de référence (1.10), i.e. $\hat{u}_h \in \mathcal{U}^{ad}$ et $\hat{\sigma}_h \in \mathcal{S}^{ad}$. La construction de celle-ci constitue l'étape clé des estimateurs basés sur la non-vérification de la relation de comportement ; sa qualité influe directement sur les performances de l'estimateur associé. Rappelons que, dans le cadre de la méthode des éléments finis en déplacement, le champ de déplacement éléments finis u_h satisfait généralement les conditions d'admissibilité cinématique (1.16) du problème de référence, excepté dans le cas d'un matériau (quasi-)incompressible (cf. remarque 1.14) ; on choisit donc par commodité $\hat{u}_h = u_h$ comme champ de déplacement cinématiquement admissible. En revanche, la détermination d'un champ de contrainte $\hat{\sigma}_h$ statiquement admissible, i.e. $\hat{\sigma}_h \in \mathcal{S}^{ad}$, est plus technique et délicate car le champ de contrainte éléments finis σ_h ne vérifie les équations d'équilibre qu'au sens des éléments finis (1.20). Cette étape constitue la principale difficulté dans la démarche de construction d'une solution admissible.

Différentes méthodes visant à élaborer des champs de contrainte admissibles ont été proposées. La première approche, appelée *approche duale en contrainte*, repose sur le concept d'analyse duale. Initialement introduite dans [de Veubeke (1965)] puis revisitée dans [Debongnie et al. (1995)], l'analyse duale s'appuie sur la résolution par la méthode des éléments finis de deux formulations complètement distinctes, d'une part une formulation faible en déplacement, et d'autre part une formulation faible en contrainte. Cette approche est la meilleure en terme de qualité de l'estimateur associé. Cependant, malgré le développement de modèles équilibres et d'éléments spéciaux dédiés aux formulations éléments finis en contrainte [Moitinho de Almeida et Almeida Pereira (1996), Kempeneers et al. (2003), Kempeneers et al. (2009)], la nécessité d'une double analyse éléments finis constitue non seulement un inconvénient sérieux en terme de coût de calcul, mais aussi un obstacle à son intégration dans les codes éléments finis existants. Les autres méthodes concurrentes et adaptées à l'estimation d'erreur reposent sur un post-traitement du champ de contrainte éléments finis σ_h à travers des techniques d'équilibrage par élément ou par patch d'éléments [Ladevèze et Leguillon (1983), Destuynder (1998), Destuynder et Métivet (1999), Luce et Wohlmuth (2004), Parés et al. (2006b), Ern et al. (2007), Ern et Vohralík (2009), Ern et al. (2010), Vohralík (2011)], à l'instar des estimateurs implicites basés sur les résidus d'équilibre décrits dans la section 2.2.2 du chapitre 1.

Dans un premier temps, nous abordons les principaux aspects de différentes méthodes de construction de champs de contrainte statiquement admissibles afin d'en dégager les avantages et les inconvénients. Puis, dans un second temps, nous présentons une nouvelle méthode permettant de pallier les principaux inconvénients des techniques existantes. Les développements relatifs à cette méthode hybride sont

détaillés de manière précise dans [Ladevèze et al. (2010), Pled et al. (2011c)]. Enfin, nous étudions les performances associées à chacune des méthodes sur des exemples complexes issus d'applications industrielles en dimensions 2 et 3.

Les travaux menés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication [Pled et al. (2011c)] et d'une communication nationale [Pled et al. (2011a)]. Par ailleurs, l'ensemble des méthodes décrites a été implémenté dans un code éléments finis orienté objet au sein d'une plateforme de développement logiciel. Cette plateforme, appelée LMT++, contient un ensemble de classes et de fonctions C++ permettant d'accélérer le développement d'applications pour la simulation numérique intensive dans le domaine du calcul de structures mécaniques. Ses principaux atouts sont la conception orientée objet et, en particulier, la conception générique (ou méta-programmation) qui lui confèrent une grande flexibilité et une forte longévité. La librairie LMT++ s'appuie sur un ensemble de conteneurs optimisés en vitesse d'exécution et en ressource mémoire, accompagnés de nombreuses fonctions ou méthodes dédiées au calcul éléments finis. Elle contient aussi des scripts écrits en Python ou en Metil permettant de générer du code C++ *à la volée* à travers l'utilisation du *calcul symbolique*.

Pour plus de clarté, on note désormais \mathcal{U}_h^p en lieu et place de \mathcal{U}_h l'espace d'approximation associé au champ de déplacement \underline{u}_h obtenu par la méthode des éléments finis en déplacement, correspondant à l'espace des fonctions continues et polynomiales de degré p sur chaque élément du maillage Ω_h . \mathcal{U}_h^p désigne l'espace unidimensionnel associé à \mathcal{U}_h .

1 Technique EET d'équilibrage par élément - méthode standard

Cette technique d'équilibrage, connue sous le nom d'« *Element Equilibration Technique* » ou *EET*, a été introduite dans [Ladevèze (1975), Ladevèze et Leguillon (1983)]. Initialement proposée pour des problèmes de thermique stationnaire, elle fut par la suite étendue au cas des problèmes d'élasticité linéaire en dimension 2 [Ladevèze et al. (1991)] et dimension 3 [Coorevits et al. (1998)]. Elle peut être appliquée aux procédures d'équilibrage relatives aux estimateurs en résidus implicites par élément introduits en section 2.2.2.

1.1 Principe

Le principe général consiste à exploiter les propriétés de la solution éléments finis $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ à travers la définition d'une *condition de prolongement forte* en contrainte, qui constitue l'ingrédient clé de la technique EET d'équilibrage. Cette relation énergétique lie le champ de contrainte admissible recherché $\hat{\sigma}_h$ et le champ de contrainte

éléments finis σ_h et s'écrit :

$$\forall E \in \mathcal{E}, \forall i \in \mathcal{N}_E^\mathcal{E}, \int_E (\hat{\sigma}_h - \sigma_h) \nabla \varphi_i \, d\Omega = \underline{0} \quad (2.1)$$

où $\mathcal{N}_E^\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des nœuds connectés à l'élément $E \in \mathcal{E}$ et $\varphi_i \in \mathcal{U}_h^p$ la fonction de forme éléments finis associée au nœud i . Le champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ est donc recherché comme un prolongement (ou une extension) du champ de contrainte éléments finis σ_h . Cette condition de prolongement a un sens physique fort, dans la mesure où elle impose au champ de contrainte admissible recherché $\hat{\sigma}_h$ de fournir, sur chaque élément $E \in \mathcal{E}$, le même travail que celui développé par le champ de contrainte éléments finis σ_h pour tout champ de déplacement associé aux fonctions de forme éléments finis.

La démarche de construction du champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ se décompose en deux étapes :

1. construction de densités ou flux d'effort \hat{F}_h en équilibre avec le chargement imposé $(\underline{F}_d, \underline{f}_d)$ aux frontières ∂E de chaque élément E du maillage éléments finis Ω_h ;
2. calcul local, à l'échelle de l'élément, d'un champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ en équilibre avec ces densités d'effort équilibrées préalablement construites \hat{F}_h et les forces volumiques données \underline{f}_d .

1.2 Construction des densités d'effort équilibrées

Les densités d'effort \hat{F}_h sont destinées à représenter le vecteur contrainte $\hat{\sigma}_{h|E} \underline{n}_E$ aux frontières ∂E des éléments $E \in \mathcal{E}$:

$$\hat{\sigma}_{h|E} \underline{n}_E = \eta_E \hat{F}_h \quad \text{sur } \partial E \quad (2.2)$$

où \underline{n}_E désigne la normale unitaire sortante à l'élément E et $\eta_E = \pm 1$ est un coefficient booléen signé assurant la continuité du vecteur contrainte $\hat{\sigma}_{h|E} \underline{n}_E$ à la traversée de la frontière commune à deux éléments adjacents E et E' , i.e. vérifiant $\eta_E + \eta_{E'} = 0$ sur $\partial E \cap \partial E'$. La définition (2.2) traduit, d'un point de vue mécanique, le principe de l'action et de la réaction entre éléments.

En outre, ces densités d'effort \hat{F}_h sont construites en équilibre avec le chargement imposé $(\underline{F}_d, \underline{f}_d)$:

$$\eta_E \hat{F}_h = \underline{F}_d \quad \text{sur } \partial E \subset \partial_f \Omega \quad (2.3a)$$

$$\int_{\partial E} \eta_E \hat{F}_h \cdot \underline{u}_s \, dS + \int_E \underline{f}_d \cdot \underline{u}_s \, d\Omega = 0 \quad \forall \underline{u}_s \in \mathcal{U}_{S|E} \quad (2.3b)$$

où $\mathcal{U}_{S|E}$ désigne l'ensemble des mouvements de solides rigides définis sur l'élément E par :

$$\mathcal{U}_{S|E} = \{ \underline{u} \in \mathcal{U}_{|E} \text{ tel que } \varepsilon(\underline{u}) = \underline{0} \text{ dans } E \} \quad (2.4)$$

La procédure de calcul des densités d'effort $\hat{\underline{F}}_h$ sur les frontières des éléments du maillage Ω_h est quasi-explicite. En premier lieu, les densités d'effort $\hat{\underline{F}}_h$ sont prises égales aux densités surfaciques d'effort imposées \underline{F}_d sur la partie $\partial_f \Omega$ de la frontière (cf. (2.3a)). Par la suite, en réalisant une intégration par parties (théorème de Green) de (2.1), puis en utilisant, d'une part la définition (2.2) des densités d'effort $\hat{\underline{F}}_h$, et d'autre part la formulation forte $\text{div}(\hat{\sigma}_{h|E}) + \underline{f}_d = \underline{0}$ dans E des équations d'équilibre satisfaites par $\hat{\sigma}_h$, la condition de prolongement (2.1) peut être réécrite sous la forme :

$$\forall E \in \mathcal{E}, \forall i \in \mathcal{N}_E^{\mathcal{E}}, \quad \int_{\partial E} \eta_E \hat{\underline{F}}_h \varphi_i \, dS = \int_E \left(\sigma_h \underline{\nabla} \varphi_i - \underline{f}_d \varphi_i \right) d\Omega = \underline{\mathcal{Q}}_E^{(i)} \quad (2.5)$$

Remarque 2.1 :

La condition de prolongement exprimée sous la forme (2.5) suppose une certaine régularité de la restriction élémentaire $\hat{\sigma}_{h|E}$ de $\hat{\sigma}_h$ sur chaque élément $E \in \mathcal{E}$: soit le champ de contrainte $\hat{\sigma}_{h|E}$ est considéré continu sur chaque élément E , soit, dans le cas où celui-ci présente une discontinuité sur un bord Γ inclus dans E , la composante normale $\hat{\sigma}_{h|E} \underline{n}_E$ le long du bord Γ est supposée continue.

Remarque 2.2 :

La condition de prolongement (2.5) impose par ailleurs la vérification de la condition d'équilibre intérieur (2.3b) des densités d'effort $\hat{\underline{F}}_h$ avec les densités volumiques d'effort imposées \underline{f}_d sur chaque élément $E \in \mathcal{E}$, car la condition (2.5) est équivalente à :

$$\forall \underline{u}_h^* \in \mathbf{U}_{h|E}^p, \quad \int_{\partial E} \eta_E \hat{\underline{F}}_h \cdot \underline{u}_h^* \, dS = \int_E \left(\text{Tr} [\sigma_h \varepsilon(\underline{u}_h^*)] - \underline{f}_d \cdot \underline{u}_h^* \right) d\Omega$$

et $\mathbf{U}_{S|E} \subset \mathbf{U}_{h|E}^p$.

L'exploitation pratique de la condition de prolongement (2.5) conduit à rechercher les projections $\hat{\underline{b}}_{|\Gamma}^{(i)}$ des densités d'effort $\hat{\underline{F}}_{h|\Gamma}$ sur la restriction aux faces $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{N}}$ des fonctions de forme éléments finis φ_i :

$$\hat{\underline{b}}_{|\Gamma}^{(i)} = \int_{\Gamma} \hat{\underline{F}}_h \varphi_i \, dS \quad (2.6)$$

comme solutions de problèmes locaux définis sur des patches d'éléments Ω_i centrés sur chaque nœud $i \in \mathcal{N}$ et coïncidant avec le support de φ_i :

$$\forall E \in \mathcal{E}_i^{\mathcal{N}}, \quad \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{N}} \cap \partial E} \eta_E \hat{\underline{b}}_{|\Gamma}^{(i)} = \underline{\mathcal{Q}}_E^{(i)} \quad (2.7)$$

où $\mathcal{E}_i^{\mathcal{N}}$ et $\mathcal{J}_i^{\mathcal{N}}$ désignent respectivement l'ensemble des éléments et des faces (resp. bords) en dimension 3 (resp. dimension 2) connectés au nœud $i \in \mathcal{N}$.

Notons que, dans le cas d'une face $\Gamma \subset \partial_f \Omega$, les projections $\hat{\underline{b}}_{|\Gamma}^{(i)}$ sont directement déterminées à partir des conditions aux limites de Neumann associées (2.3a) :

$$\hat{\underline{b}}_{|\Gamma}^{(i)} = \int_{\Gamma} \underline{F}_d \varphi_i \, dS \quad \text{sur } \Gamma \subset \partial_f \Omega \quad (2.8)$$

La solvabilité des problèmes locaux (2.7) dépend du type de nœud i considéré. En effet, l'existence d'une solution au problème (2.7) requiert généralement la vérification d'une condition de compatibilité, qui s'écrit :

– pour un nœud intérieur $i \in \Omega$:

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_i^{\mathcal{N}}} \underline{Q}_E^{(i)} = \underline{0} \quad (2.9a)$$

– pour un nœud de frontière $i \in \partial_f \Omega$:

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_i^{\mathcal{N}}} \underline{Q}_E^{(i)} = \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{N}} \cap \partial_f \Omega} \int_{\Gamma} \underline{F}_d \varphi_i \, dS \quad (2.9b)$$

En remarquant que

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_i^{\mathcal{N}}} \underline{Q}_E^{(i)} = \int_{\Omega} \left(\sigma_h \nabla \varphi_i - \underline{f}_d \varphi_i \right) \, d\Omega \quad (2.10)$$

les conditions de compatibilité (2.9a) et (2.9b) sont assurées par la formulation faible des équations d'équilibre au sens des éléments finis (1.13) satisfaites par le champ de contrainte éléments fins σ_h , étant donné que l'équation vectorielle (2.10) conduit après quelques manipulations supplémentaires aux équations d'équilibre scalaires (au sens des éléments finis) définies par (1.13).

Dans le cas où les problèmes locaux (2.7) admettent plusieurs solutions, l'unicité de la solution est assurée par minimisation au sens des moindres carrés d'une fonction-coût locale de la forme [Ladevèze et Pelle (2004)] :

$$J(\hat{\underline{b}}^{(i)}) = \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{N}}} (\hat{\underline{b}}^{(i)} - \underline{b}^{(i)})_{|\Gamma}^2 \quad (2.11)$$

où le vecteur $\underline{b}_{|\Gamma}^{(i)}$ est connu explicitement et correspond à la valeur moyenne des vecteurs contraintes éléments finis, ou flux de contraintes, sur le bord $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{N}}$ projetés sur la fonction de forme éléments finis φ_i :

– pour un bord Γ intérieur à Ω , connecté aux éléments adjacents E et E' :

$$\underline{b}_{|\Gamma}^{(i)} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{\eta_E} \sigma_{h|E} \underline{n}_E + \frac{1}{\eta_{E'}} \sigma_{h|E'} \underline{n}_{E'} \right) \varphi_i \, dS$$

– pour un bord $\Gamma \subset \partial_u \Omega$ connecté à l'élément E :

$$\underline{b}_{|\Gamma}^{(i)} = \int_{\Gamma} \frac{1}{\eta_E} \sigma_{h|E} \underline{n}_E \varphi_i \, dS$$

– pour un bord $\Gamma \subset \partial_f \Omega$ connecté à l'élément E :

$$\underline{b}_{|\Gamma}^{(i)} = \int_{\Gamma} \frac{1}{\eta_E} \underline{F}_d \varphi_i \, dS$$

D'autres fonctionnelles de minimisation seront considérées à la section 4.1.2 afin d'étudier l'influence du choix de la fonction-coût sur la qualité de l'estimateur d'erreur associé. Le choix de la fonctionnelle à minimiser reste néanmoins une question ouverte.

Remarque 2.3 :

En l'absence d'unicité des solutions associées aux problèmes locaux (2.7), ces derniers sont sous-déterminés et ne définissent qu'un espace d'admissibilité pour les projections $\hat{\underline{b}}_{|\Gamma}^{(i)}$ des densités d'effort $\hat{\underline{F}}_{h|\Gamma}$ définies sur les bords $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{N}}$.

Finalement, les densités d'effort $\hat{\underline{F}}_h$ sont reconstruites localement sur chacune des faces $\Gamma \in \mathcal{J}$ à partir des projections $\hat{\underline{b}}_{|\Gamma}^{(i)}$ par interpolation sur la restriction $\varphi_{i|\Gamma}$ des fonctions de forme éléments finis φ_i à Γ , de telle sorte que $\hat{\underline{F}}_{h|\Gamma} \in \mathcal{U}_{h|\Gamma}^p$ soit recherchée sous la forme :

$$\hat{\underline{F}}_{h|\Gamma} = \sum_{i \in \mathcal{N}_{\Gamma}^{\mathcal{J}}} \hat{\underline{F}}_{h,i}^{\Gamma} \varphi_{i|\Gamma} \quad \text{sur } \Gamma \quad (2.12)$$

où $\mathcal{N}_{\Gamma}^{\mathcal{J}}$ désigne l'ensemble des nœuds connectés à la face $\Gamma \in \mathcal{J}$.

Par conséquent, les densités d'effort $\hat{\underline{F}}_h$ sont complètement déterminées en résolvant des problèmes locaux, linéaires et indépendants, définis sur chacune des faces $\Gamma \in \mathcal{J}$, dont le chargement met en jeu les projections $\hat{\underline{b}}_{|\Gamma}^{(i)}$ associées aux nœuds $i \in \mathcal{N}_{\Gamma}^{\mathcal{J}}$. Les inconnues $\hat{\underline{F}}_{h,i}^{\Gamma}$ de ces problèmes locaux correspondent aux valeurs nodales associées à la discrétisation de $\hat{\underline{F}}_{h|\Gamma}$. Notons toutefois que la répartition des densités d'effort pourrait être choisie de manière différente, dans un espace plus riche que $\mathcal{U}_{h|\Gamma}^p$.

1.3 Construction d'un champ de contrainte admissible à l'échelle de l'élément

Une fois les densités d'effort $\hat{\underline{F}}_h$ construites, on cherche la restriction $\hat{\sigma}_{h|E}$ du champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ sur chaque élément $E \in \mathcal{E}$ à travers la résolution

d'un problème local d'équilibre en statique, dans lequel les densités d'effort $\hat{F}_{h|\partial E}$ précédemment déterminées constituent les conditions aux limites de Neumann :

$$\hat{\sigma}_{h|E} \in \mathcal{S}_{\hat{F}_h}^{ad} \quad \text{avec} \quad \mathcal{S}_{\hat{F}_h}^{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \hat{\sigma}_{h|E} \in \mathcal{S}_{|E} \text{ tel que } \operatorname{div} \hat{\sigma}_{h|E} + \underline{f}_d = \underline{0} \text{ dans } E \\ \text{et } \hat{\sigma}_{h|E} \underline{n}_E = \eta_E \hat{F}_h \text{ sur } \partial E \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

où $\mathcal{S}_{|E}$ désigne la restriction de l'espace fonctionnel \mathcal{S} à l'élément E :

$$\mathcal{S}_{|E} = \left\{ \sigma \in [\mathcal{L}^2(E)]^{d^2} \text{ tel que } \sigma = \sigma^T \right\}$$

Remarque 2.4 :

L'équation vectorielle (2.5) exprimant les projections des densités d'effort \hat{F}_h en fonction de σ_h et des données du problème de référence (1.10) découle de la formulation faible des équations d'équilibre définissant le problème local (2.13) et de la condition de prolongement (2.1).

Rappelons que la construction des densités d'efforts \hat{F}_h assure la solvabilité des problèmes locaux (2.13), dits équilibrés, sous l'hypothèse que $\hat{\sigma}_{h|E}$ ne présente pas de discontinuité au sein de chaque élément $E \in \mathcal{E}$ (cf. remarque 2.1). Différentes approches de résolution des problèmes locaux (2.13) ont été envisagées.

La première approche, introduite dans [Ladevèze et Leguillon (1983), Ladevèze et al. (1991), Ladevèze et Maunder (1996)] et mise en œuvre dans [Ladevèze et Rougeot (1997)], repose sur une *résolution analytique* des problèmes locaux (2.13) et consiste à rechercher un champ de contrainte sous une forme polynomiale, définie par morceaux sur une subdivision de chaque élément. Cette construction analytique nécessite un sous-découpage des éléments afin de respecter la symétrie du champ de contrainte $\hat{\sigma}_{h|E}$, car les densités d'effort \hat{F}_h ne vérifient pas a priori, aux nœuds sommets de l'élément E , les conditions de compatibilité résultant de la symétrie de $\hat{\sigma}_{h|E}$. Les problèmes locaux (2.13) sont alors résolus de manière exacte et le champ de contrainte obtenu $\hat{\sigma}_h$ vérifie rigoureusement les conditions d'admissibilité statique (1.6) du problème de référence (1.10), soit $\hat{\sigma}_h \in \mathcal{S}^{ad}$, à condition que les forces volumiques imposées \underline{f}_d soient également des fonctions polynomiales de degré compatible avec celui de $\hat{\sigma}_{h|E}$ sur chaque élément $E \in \mathcal{E}$. On pourra trouver plus de détails sur cette construction analytique dans [Ladevèze et Pelle (2004)].

La seconde approche s'appuie sur une *résolution numérique* des problèmes locaux (2.13) reposant sur un p -raffinement ou h -raffinement de l'espace d'approximation au niveau élémentaire afin de construire une approximation numérique de $\hat{\sigma}_{h|E}$. Les problèmes locaux (2.13) ne définissent qu'un espace d'admissibilité $\mathcal{S}_{\hat{F}_h}^{ad}$ des champs de contrainte solutions $\hat{\sigma}_{h|E}$ sur chaque élément $E \in \mathcal{E}$. Le champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}_{h|E}$ est alors déterminé par minimisation de l'erreur en relation de comportement ou, de manière équivalente, de l'énergie complémentaire sur l'élément

E :

$$\min_{\hat{\sigma}_{h|E} \in \mathcal{S}_{\hat{E}_h}^{ad}} e_{\text{rdc},E}^2(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_{h|E}) = \|\hat{\sigma}_{h|E} - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{u}_h)\|_{\sigma,E}^2 \iff \min_{\hat{\sigma}_{h|E} \in \mathcal{S}_{\hat{E}_h}^{ad}} \|\hat{\sigma}_{h|E} - \sigma_h\|_{\sigma,E}^2 \quad (2.14)$$

En pratique, le problème global de minimisation sous contraintes (2.14) est résolu par dualité à l'aide de la formulation faible en déplacement des équations d'équilibre associées au problème local (2.13) :

Trouver $\underline{u}_E \in \mathcal{U}_{|E}$ vérifiant :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{0|E}^{ad}, \quad \int_E \text{Tr} [\varepsilon(\underline{u}_E) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = \int_E \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial E} \eta_E \hat{\underline{F}}_h \cdot \underline{u}^* dS \quad (2.15)$$

où $\mathcal{U}_{0|E}^{ad}$ est défini par (1.63). Enfin, le champ de contrainte admissible est reconstruit sur chaque élément $E \in \mathcal{E}$ à travers la relation de comportement :

$$\hat{\sigma}_{h|E} = \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}_E) \quad \text{dans } E$$

Au même titre que les problèmes locaux (1.62) introduits dans le cadre des estimateurs par élément basés sur les résidus d'équilibre en section 2.2.2, les problèmes élémentaires (2.15) ne peuvent être résolus de manière exacte. Différentes méthodes d'approximation cinématique (de type éléments finis) associée à un espace de discrétisation enrichi ont été introduites afin de résoudre ces problèmes locaux de manière précise.

Une première méthode repose sur l'utilisation d'une approximation cinématique de type $p + k$ (p -raffinement du maillage éléments finis Ω_h support de la résolution du problème de référence), où p désigne le degré d'interpolation éléments finis utilisé pour la résolution globale approchée du problème de référence et k un degré additionnel. Le maillage éléments finis Ω_h est alors conservé et chaque élément E est discrétisé en un seul élément avec un degré d'interpolation élevé $p + k$.

Une seconde méthode s'appuie sur l'utilisation d'une approximation de type h/N (h -raffinement du maillage éléments finis Ω_h), où h désigne la taille caractéristique des éléments et N le paramètre de raffinement. Chaque élément E est alors discrétisé en un sous-ensemble d'éléments avec un degré d'interpolation p identique à celui utilisé lors de la résolution éléments finis du problème de référence.

Des études menées sur l'influence du choix de l'espace d'approximation des solutions locales préconisent l'utilisation d'une méthode d'approximation de type $p + 3$ afin d'obtenir un compromis optimal entre précision et coût de calcul [Babuška et al. (1994c)]. En effet, l'utilisation d'un degré supplémentaire $k = 3$ conduit à une approximation du champ de contrainte statiquement admissible de très bonne qualité [Coorevits et al. (1999)]. Les méthodes de résolution numérique reposant sur un raffinement de type p de l'espace d'approximation sont actuellement les plus

employées, car elles présentent un taux de convergence plus élevé que celles basées sur un raffinement de type h [Babuška et al. (1981)] et permettent de s'affranchir de la génération d'un nouveau maillage. Les approches par raffinement de type h et p peuvent également être combinées. Une description détaillée de ces méthodes de résolution numérique est disponible dans [Babuška et Strouboulis (2001)].

La résolution numérique des problèmes locaux conduit à un champ de contrainte $\hat{\sigma}_h$ qui ne vérifie pas rigoureusement les conditions d'admissibilité statique (1.6), mais qui constitue une bonne approximation d'un champ admissible. Des études comparatives menées dans [Florentin et al. (2002)] ont permis d'établir que le champ de contrainte (quasi-)admissible $\hat{\sigma}_h$ obtenu par une résolution numérique est de meilleure qualité que celui obtenu par une résolution analytique dans le cas d'un maillage fortement anisotrope, i.e. contenant des éléments distordus ou aplatis.

Remarque 2.5 :

Dans les exemples numériques traités à la section 4, l'ensemble des résolutions locales est réalisé à l'aide d'une méthode numérique basée sur une approximation cinématique de type $p+3$ (discrétisation à partir d'une interpolation élémentaire de degré $p+3$), conformément aux recommandations de [Babuška et al. (1994c)].

La technique EET offre l'avantage d'être quasi-explicite et modérément coûteuse, car les résolutions des problèmes locaux (2.7) et (2.13) (ou (2.15)) ont un coût de calcul raisonnable. Cependant, la procédure d'équilibrage des densités d'effort \hat{F}_h , préalable à l'imposition des conditions aux limites associées aux problèmes locaux (2.13) (ou (2.15)), rend cette technique difficile à implémenter dans les codes de calcul éléments finis existants. Elle fut néanmoins implantée dans le logiciel éléments finis industriel Samcef¹.

Remarque 2.6 :

Une version améliorée de la construction des densités d'effort équilibrées \hat{F}_h basée sur un affaiblissement de la condition de prolongement (2.1) sera présentée au chapitre 3.

Remarque 2.7 :

Une extension de la technique EET d'équilibrage au cadre parallèle des décompositions de domaine sans recouvrement est proposée dans [Parret-Fréaud et al. (2010)]. Celle-ci repose sur la construction de champs vérifiant les conditions d'admissibilité locale sur chaque sous-structure d'une part, et les conditions de raccord entre sous-structures, i.e. les conditions d'admissibilité aux interfaces, d'autre part.

1. <http://www.samtech.com>

1.4 Implémentation numérique

Les problèmes locaux (2.7) associés à chaque nœud $i \in \mathcal{N}$ se mettent sous la forme matricielle :

$$\mathbb{B}^{(i)} \underline{\hat{b}}^{(i)} = \underline{Q}^{(i)} \quad (2.16)$$

où $\underline{\hat{b}}^{(i)}$ désigne le vecteur généralisé qui regroupe l'ensemble des vecteurs $\underline{\hat{b}}_{|\Gamma}^{(i)}$ sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{N}}$, et $\underline{Q}^{(i)}$ le vecteur généralisé contenant les vecteurs $\underline{Q}_E^{(i)}$ sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_i^{\mathcal{N}}$.

Rappelons que la solvabilité des systèmes (2.16) associés à un nœud intérieur $i \in \Omega$ ou à un nœud de frontière $i \in \partial_f \Omega$ nécessite la vérification d'une condition de compatibilité résultant de l'équilibre du champ de contrainte σ_h au sens des éléments finis. Dans le cas des systèmes (2.16), il suffit de retirer l'équation vectorielle associée à un seul des éléments $E \in \mathcal{E}_i^{\mathcal{N}}$ afin de bloquer le noyau de la matrice $\mathbb{B}^{(i)}$. Le système (2.16) est alors remplacé par :

$$\tilde{\mathbb{B}}^{(i)} \underline{\hat{b}}^{(i)} = \tilde{Q}^{(i)} \quad (2.17)$$

Dans la suite, $n_{\text{ind}}^{(i)}$ désigne le nombre d'équations indépendantes issues de la condition de prolongement (2.7), i.e. le nombre de lignes de la matrice $\tilde{\mathbb{B}}^{(i)}$ intervenant dans (2.17), tandis que $n_{\text{inc}}^{(i)}$ est le nombre d'inconnues du système (2.17), i.e. la taille du vecteur $\underline{\hat{b}}^{(i)}$.

En outre, pour l'ensemble des nœuds de frontière $i \in \partial_f \Omega$, les conditions (2.8) sont imposées sur chaque bord $\Gamma \subset \partial_f \Omega$ par l'introduction de multiplicateurs de Lagrange. Ces conditions supplémentaires s'écrivent :

$$\mathbb{C}^{(i)} \underline{\hat{b}}^{(i)} = \underline{q}^{(i)} \quad \text{pour } i \in \partial_f \Omega \quad (2.18)$$

Dans la suite, $n_{\text{imp}}^{(i)}$ désigne le nombre d'équations imposées issues des conditions aux limites de Neumann (2.8), i.e. le nombre de lignes de la matrice $\mathbb{C}^{(i)}$ intervenant dans (2.18).

Par ailleurs, une étape de minimisation est réalisée si la condition de minimisation suivante est satisfaite : $n_{\text{inc}}^{(i)} > n_{\text{imp}}^{(i)} + n_{\text{ind}}^{(i)}$. La fonction-coût (2.11) intervenant dans la minimisation est alors réécrite sous la forme matricielle :

$$J(\underline{\hat{b}}^{(i)}) = \frac{1}{2} (\underline{\hat{b}}^{(i)} - \underline{b}^{(i)})^T \mathbb{M}^{(i)} (\underline{\hat{b}}^{(i)} - \underline{b}^{(i)}) \quad (2.19)$$

où le vecteur généralisé $\underline{b}^{(i)}$ regroupe l'ensemble des vecteurs connus $\underline{b}_{|\Gamma}^{(i)}$ sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{N}}$. $\mathbb{M}^{(i)}$ est une matrice diagonale unitaire dans le cas de la fonctionnelle (2.11).

Finalement, le problème local associé à chaque nœud $i \in \mathcal{N}$ dépend de la condition de minimisation :

- si $n_{\text{inc}}^{(i)} > n_{\text{imp}}^{(i)} + n_{\text{ind}}^{(i)}$, il s'agit de minimiser la fonction-coût (2.19) sous les contraintes (2.18) imposées sur $\partial_f \Omega$ et celles (2.17) provenant de la condition de prolongement (2.1). Ce problème de minimisation sous contraintes peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{M}^{(i)} & \mathbb{C}^{(i)T} & \tilde{\mathbb{B}}^{(i)T} \\ \mathbb{C}^{(i)} & 0 & 0 \\ \tilde{\mathbb{B}}^{(i)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{b}}^{(i)} \\ \underline{\Lambda}_{\mathbb{C}}^{(i)} \\ \underline{\Lambda}_{\mathbb{B}}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{M}^{(i)} \underline{b}^{(i)} \\ \underline{q}^{(i)} \\ \underline{\tilde{Q}}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

à partir du problème de point-selle associé au Lagrangien \mathcal{L} défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{\underline{b}}^{(i)}, \underline{\Lambda}_{\mathbb{C}}^{(i)}, \underline{\Lambda}_{\mathbb{B}}^{(i)}) &= \frac{1}{2} (\hat{\underline{b}}^{(i)} - \underline{b}^{(i)})^T \mathbb{M}^{(i)} (\hat{\underline{b}}^{(i)} - \underline{b}^{(i)}) + (\mathbb{C}^{(i)} \hat{\underline{b}}^{(i)} - \underline{q}^{(i)})^T \underline{\Lambda}_{\mathbb{C}}^{(i)} \\ &\quad + (\tilde{\mathbb{B}}^{(i)} \hat{\underline{b}}^{(i)} - \underline{\tilde{Q}}^{(i)})^T \underline{\Lambda}_{\mathbb{B}}^{(i)} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$\underline{\Lambda}_{\mathbb{C}}^{(i)}$ et $\underline{\Lambda}_{\mathbb{B}}^{(i)}$ correspondent aux vecteurs des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes (2.18) et (2.17), respectivement ;

- sinon, il s'agit de résoudre de manière explicite le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{C}^{(i)} \\ \tilde{\mathbb{B}}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{b}}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{q}^{(i)} \\ \underline{\tilde{Q}}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Signalons que, si $n_{\text{inc}}^{(i)} < n_{\text{imp}}^{(i)} + n_{\text{ind}}^{(i)}$, la vérification des contraintes (2.18) imposées par les conditions aux limites de Neumann \underline{F}_d sur $\partial_f \Omega$ est assurée en priorité. La matrice $\tilde{\mathbb{B}}^{(i)}$ et le vecteur $\underline{\tilde{Q}}^{(i)}$ sont alors tronqués de telle sorte que le nombre de contraintes associées au système (2.17) (i.e. résultant de la condition de prolongement) soit réduit à $n_{\text{inc}}^{(i)} - n_{\text{imp}}^{(i)}$.

Sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}$, les densités d'effort $\hat{\underline{F}}_{h|\Gamma}$ définies par (2.12) sont décrites par :

$$\hat{\underline{F}}_{h|\Gamma} = [\varphi_{|\Gamma}]^T \hat{\underline{F}}_h^\Gamma \quad (2.23)$$

où $\hat{\underline{F}}_h^\Gamma$ désigne le vecteur généralisé des inconnues nodales associées à la discrétisation de $\hat{\underline{F}}_{h|\Gamma}$ sur Γ , et $[\varphi_{|\Gamma}]^T$ la matrice des fonctions de forme éléments finis φ_i de degré p sur Γ , i.e. associées aux nœuds $i \in \mathcal{N}_\Gamma^{\mathcal{J}}$.

Finalement, une fois les projections $\hat{\underline{b}}^{(i)}$ obtenues, les valeurs nodales $\hat{\underline{F}}_h^\Gamma$ des densités d'effort $\hat{\underline{F}}_{h|\Gamma}$ sont déterminées à travers la résolution d'un système linéaire défini sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}$ de la forme :

$$\mathbb{K}^\Gamma \hat{\underline{F}}_h^\Gamma = \hat{\underline{b}}^\Gamma \quad (2.24)$$

où $\hat{\underline{b}}^\Gamma$ est le vecteur généralisé regroupant l'ensemble des vecteurs $\hat{\underline{b}}_{|\Gamma}^{(i)}$ sur chaque nœud $i \in \mathcal{N}_\Gamma^{\mathcal{J}}$, et la matrice \mathbb{K}^Γ est similaire à une matrice de masse associée au bord Γ .

2 Technique SPET d'équilibrage par patch d'éléments - méthode « flux-free »

Cette technique d'équilibrage, appelée par la suite « *Star-Patch Equilibration Technique* » ou *SPET*, a initialement été développée sur des problèmes de thermique dont l'inconnue est un champ scalaire [Carstensen et Funken (2000b), Morin et al. (2003), Prudhomme et al. (2004)], avant d'être revisitée et adaptée à la mécanique des solides sur des problèmes d'élasticité linéaire dont l'inconnue est un champ vectoriel [Parés et al. (2006b)]. Qualifiée de technique « *flux-free* », celle-ci ne nécessite pas de procédure de construction de densités d'effort en équilibre, contrairement à la technique EET d'équilibrage précédente. Le point nouveau sur lequel s'appuie cette technique est la *partition de l'unité* formée par la base des fonctions de forme éléments finis linéaires $\lambda_i \in \mathcal{U}_h^1$ (de degré 1) associées aux nœuds sommets $i \in \mathcal{I}$:

$$\lambda_i(\underline{M}_j) = \delta_{ij} \quad \forall j \in \mathcal{I} \quad (2.25a)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i(\underline{M}) = 1 \quad \forall \underline{M} \in \Omega \quad (2.25b)$$

où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker.

L'introduction de la partition de l'unité au sein d'équations d'équilibre et/ou de conditions de prolongement écrites sous forme globale (à l'échelle du domaine complet Ω) permet de se ramener à la résolution de problèmes locaux auto-équilibrés définis sur chaque patch d'éléments Ω_i support de la fonction de forme éléments finis linéaire λ_i (cf. figure 1.2).

2.1 Définition des problèmes locaux auto-équilibrés par patch d'éléments

Le point de départ est identique à celui des méthodes basées sur les résidus d'équilibre présentées en section 2.2 et consiste à exploiter l'équation des résidus (1.46), i.e. le problème global définissant l'erreur de discrétisation \underline{e}_h , qui s'écrit :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0^{ad}, \quad \langle \underline{e}_h, \underline{u}^* \rangle_{u, \Omega} = \mathcal{R}_h(\underline{u}^*) \quad (2.26)$$

En injectant la propriété de partition de l'unité (2.25b) dans le membre de droite de (2.26), puis par linéarité de l'opérateur \mathcal{R}_h , il vient :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0^{ad}, \quad \langle \underline{e}_h, \underline{u}^* \rangle_{u, \Omega} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{R}_h(\lambda_i \underline{u}^*)$$

On considère un patch Ω_i correspondant au support de la fonction de la fonction de forme éléments finis linéaire λ_i (cf. figure 1.2), i.e. au support de l'ensemble $\mathcal{E}_i^{\mathcal{I}}$ des éléments connectés au nœud sommet $i \in \mathcal{I}$. La technique SPET consiste à résoudre un ensemble de problèmes locaux définis sur chaque patch Ω_i par :

Trouver $\underline{e}_i \in \mathbf{U}_{0|\Omega_i}^{ad}$ vérifiant :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_{0|\Omega_i}^{ad}, \quad \int_{\Omega_i} \text{Tr} [\varepsilon(\underline{e}_i) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = \mathcal{R}_h(\lambda_i \underline{u}^*) \quad (2.27)$$

où $\mathbf{U}_{0|\Omega_i}^{ad}$ est défini par (1.60).

À présent, rappelons une propriété clé de l'approche par la méthode des éléments finis, à savoir la propriété d'orthogonalité de Galerkin (1.24) :

$$\forall \underline{u}_h^* \in \mathbf{U}_{0,h}^{ad,p}, \quad \mathcal{R}_h(\underline{u}_h^*) = 0 \quad (2.28)$$

où $\mathbf{U}_{0,h}^{ad,p} = \mathbf{U}_0^{ad} \cap \mathbf{U}_h^p$.

La fonctionnelle des résidus $\mathcal{R}_h(\lambda_i \bullet)$ ne permet pas d'assurer la solvabilité des problèmes locaux (2.27). En effet, l'existence d'une solution au problème local (2.27) est assurée si et seulement si la condition de compatibilité suivante est satisfaite :

$$\forall \underline{u}_s \in \mathbf{U}_{S,0|\Omega_i}^{ad}, \quad \mathcal{R}_h(\lambda_i \underline{u}_s) = 0$$

où $\mathbf{U}_{S,0|\Omega_i}^{ad}$ est l'ensemble des mouvements de solides rigides définis sur le patch Ω_i et s'annulant sur $\partial\Omega_i \cap \partial_u\Omega$:

$$\mathbf{U}_{S,0|\Omega_i}^{ad} = \{ \underline{u} \in \mathbf{U}_{0|\Omega_i}^{ad} \text{ tel que } \varepsilon(\underline{u}) = \mathbb{0} \text{ dans } \Omega_i \} \quad (2.29)$$

Cette condition n'est pas vérifiée pour un degré d'interpolation $p = 1$ dans le cadre des problèmes vectoriels, car $\lambda_i \underline{u}_s \in \mathbf{U}_{0,h}^{ad,2} \not\subset \mathbf{U}_{0,h}^{ad,1}$ et la propriété remarquable (2.28) ne peut donc pas être appliquée à $\lambda_i \underline{u}_s$.

Dans [Parés et al. (2006b)], un opérateur de projection $\Pi_h^1: \mathbf{U}_0^{ad} \rightarrow \mathbf{U}_{0,h}^{ad,1}$ est introduit afin d'assurer la solvabilité des problèmes locaux; celui-ci correspond à l'opérateur d'interpolation sur l'espace $\mathbf{U}_{0,h}^{ad,1}$ des champs définis à partir des fonctions de forme éléments finis linéaires. En utilisant la propriété d'orthogonalité de Galerkin (2.28) appliquée à $\Pi_h^1 \underline{u}^* \in \mathbf{U}_{0,h}^{ad,1}$, le membre de droite dans (2.27) peut être remplacé par $\mathcal{R}_h(\lambda_i (\underline{u}^* - \Pi_h^1 \underline{u}^*))$, ce qui conduit à un nouvel ensemble de problèmes locaux définis sur chaque patch Ω_i par :

Trouver $\underline{e}_i \in \mathbf{U}_{0|\Omega_i}^{ad}$ vérifiant :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_{0|\Omega_i}^{ad}, \quad \int_{\Omega_i} \text{Tr} [\varepsilon(\underline{e}_i) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = \mathcal{R}_h(\lambda_i (\underline{u}^* - \Pi_h^1 \underline{u}^*)) \quad (2.30)$$

En observant que

$$\forall \underline{u}_s \in \mathbf{U}_{S,0|\Omega_i}^{ad}, \quad \Pi_h^1 \underline{u}_s = \underline{u}_s \implies \mathcal{R}_h(\lambda_i (\underline{u}_s - \Pi_h^1 \underline{u}_s)) = 0$$

les problèmes locaux (2.30) sont bien posés, l'opérateur Π_h^1 étant l'ingrédient clé assurant leur solvabilité, en particulier dans le cas des problèmes vectoriels avec un degré d'interpolation $p = 1$. Signalons que, pour les problèmes scalaires d'une part

et pour les problèmes vectoriels avec un degré d'interpolation $p > 1$ élevé (au moins quadratique) d'autre part, il n'est pas nécessaire d'introduire l'opérateur Π_h^1 dans le membre de droite de (2.27) afin de garantir la solvabilité des problèmes locaux (2.27).

Finalement, les problèmes locaux (2.30) définis à l'échelle d'un patch d'éléments sont dits *auto-équilibrés* et ne requièrent pas le calcul de densités ou flux d'effort équilibrés sur les bords des patches. En pratique, la résolution des problèmes locaux (2.30) est menée de manière numérique et les solutions associées sont recherchées dans un espace d'approximation obtenu par p -raffinement ou h -raffinement de l'espace d'approximation éléments finis initial au niveau de chaque patch. Au même titre que les problèmes élémentaires (2.15) rencontrés dans la technique EET, la résolution des problèmes par patch (2.30) est réalisée à l'aide d'une méthode numérique basée sur une approximation cinématique de type $p + 3$ (discrétisation à partir d'une interpolation enrichie de degré $p + 3$ sur chaque patch) en vue d'obtenir une approximation des solutions locales \underline{e}_i de (2.30) de bonne qualité.

Remarque 2.8 :

Dans [Cottreau et al. (2009), Parés et al. (2009a), Moitinho de Almeida et Maunder (2009)], les problèmes locaux de la forme (2.27) sont résolus en utilisant une approche duale, i.e. une méthode éléments finis en contrainte, sur chacun des patches afin d'obtenir un champ de contrainte rigoureusement admissible, conduisant à une majoration garantie de l'erreur vraie. Le champ de contrainte admissible est défini comme une somme de contributions locales $\hat{\sigma}_h^i$ correspondant aux solutions recherchées sous forme polynomiale des problèmes d'équilibre posés sur chaque patch Ω_i . L'unicité des solutions locales $\hat{\sigma}_h^i$ est assurée par minimisation locale de l'énergie complémentaire sur chacun des patches Ω_i . La démarche suivie dans [Parés et al. (2009a)] s'appuie directement sur celle introduite dans [Parés et al. (2006b)] et considère uniquement des problèmes scalaires (équation de Poisson) ne nécessitant pas l'introduction de l'opérateur de projection Π_h^1 . En revanche, la démarche proposée dans [Cottreau et al. (2009)] est une extension aux problèmes vectoriels d'élasticité linéaire qui requiert l'utilisation d'un degré d'interpolation éléments finis au moins quadratique ($p \geq 2$) en l'absence de l'opérateur de projection Π_h^1 . L'approche proposée dans [Moitinho de Almeida et Maunder (2009)] est similaire à celle développée dans [Cottreau et al. (2009)] et repose également sur une méthode éléments finis en contrainte. Les conditions de stabilité et de solvabilité des problèmes locaux par patch ainsi que la détection et la suppression systématique des modes cinématiques parasites, i.e. à déformation nulle, sont étudiées et discutées à partir des résultats exposés dans [Maunder et Moitinho de Almeida (2009)].

2.2 Construction d'un champ de contrainte admissible et d'un estimateur associé

En effectuant la somme des problèmes locaux (2.30) sur l'ensemble des nœuds sommets $i \in \mathcal{I}$, on établit une relation entre l'erreur de discrétisation \underline{e}_h et les solutions locales \underline{e}_i :

$$\begin{aligned} \forall \underline{u}^* \in \mathbf{u}_0^{ad}, \quad \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_{\Omega_i} \text{Tr} [\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{e}_i) \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*)] \, d\Omega &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{R}_h(\lambda_i (\underline{u}^* - \Pi_h^1 \underline{u}^*)) \\ &= \int_{\Omega} \text{Tr} [\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{e}_h) \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*)] \, d\Omega \end{aligned}$$

La connaissance des solutions locales \underline{e}_i aux problèmes (2.30) conduit alors à la définition d'un estimateur d'erreur globale fournissant une borne garantie de l'erreur vraie :

$$\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega} \leq \theta = \left[\sum_{E \in \mathcal{E}} \theta_E^2 \right]^{1/2} \quad \text{avec} \quad \theta_E = \left\| \sum_{i \in \mathcal{I}_E^{\mathcal{E}}} \underline{e}_i|_E \right\|_{u,E} \quad (2.31)$$

En définissant la solution globale $\underline{e} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \underline{e}_i$, la mesure globale de l'erreur estimée peut se mettre sous la forme simplifiée :

$$\theta = \|\underline{e}\|_{u,\Omega} = \left\| \sum_{i \in \mathcal{I}} \underline{e}_i \right\|_{u,\Omega} \quad (2.32)$$

où la définition de la norme $\|\bullet\|_{u,\Omega}$ est étendue aux champs globaux appartenant à l'espace de Sobolev discontinu, i.e. présentant des discontinuités inter-éléments (cf. commentaires au paragraphe 2.2.2 du chapitre 1).

De manière équivalente, on peut définir un champ de contrainte admissible sur chaque élément $E \in \mathcal{E}$:

$$\hat{\sigma}_{h|E} = \sigma_{h|E} + \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon} \left(\sum_{i \in \mathcal{I}_E^{\mathcal{E}}} \underline{e}_i|_E \right) \quad \text{dans } E \quad (2.33)$$

Finalement, la technique SPET permet de pallier le principal inconvénient de la technique EET en s'affranchissant des procédures d'équilibrage à travers l'utilisation des propriétés de partition de l'unité, facilitant sa mise en œuvre. Cependant, malgré une implémentation plus aisée, la résolution fine des problèmes locaux (2.30) définis à l'échelle d'un patch d'éléments est plus coûteuse que celle de leurs homologues

(2.15) intervenant dans la technique EET et définis à l'échelle d'un élément, particulièrement dans le cadre des problèmes vectoriels en dimension 3. Ainsi, la technique SPET constitue une alternative simple à mettre en œuvre conduisant à l'obtention d'un champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ généralement de meilleure qualité que celui fourni par la technique EET, au prix d'un coût de calcul plus élevé.

2.3 Variantes

Dans les premières versions de l'approche « flux-free », exposées dans [Carstensen et Funken (2000b), Machiels et al. (2000), Morin et al. (2003), Prudhomme et al. (2004)], une forme bilinéaire pondérée est utilisée dans la définition des problèmes locaux par patch (2.27) afin de tenir compte de la propriété de partition de l'unité dans le membre de gauche des problèmes locaux. Le nouvel ensemble de problèmes locaux définis sur chaque patch Ω_i s'écrit :

Trouver $\underline{e}_i \in \mathbf{U}_{0|\Omega_i}^{ad}$ vérifiant :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_{0|\Omega_i}^{ad}, \quad \int_{\Omega_i} w_i \operatorname{Tr} [\varepsilon(\underline{e}_i) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}^*)] \, d\Omega = \mathcal{R}_h(w_i \underline{u}^*) \quad (2.34)$$

où les pondérations w_i vérifient une propriété de partition de l'unité :

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} w_i(\underline{M}) = 1 \quad \forall \underline{M} \in \Omega \quad (2.35)$$

Signalons que l'opérateur de projection Π_h^1 n'est pas introduit dans le membre de droite du problème local (2.34), car seuls des problèmes scalaires (de thermique) sont considérés dans [Carstensen et Funken (2000b), Machiels et al. (2000), Morin et al. (2003), Prudhomme et al. (2004)].

Par la suite, en définissant la norme locale $\|\bullet\|_{u,\Omega_i,w_i}$ associée à la forme bilinéaire pondérée :

$$\|\bullet\|_{u,\Omega_i,w_i} = \left[\langle \bullet, w_i \bullet \rangle_{u,\Omega_i} \right]^{1/2} = \left[\int_{\Omega_i} w_i \operatorname{Tr} [\varepsilon(\bullet) \mathbf{K} \varepsilon(\bullet)] \, d\Omega \right]^{1/2} \quad (2.36)$$

la mesure globale de l'erreur estimée θ est obtenue en sommant les normes locales pondérées des solutions \underline{e}_i sur l'ensemble des nœuds sommets $i \in \mathcal{I}$ et représente une borne supérieure de l'erreur vraie :

$$\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega} \leq \theta = \left[\sum_{i \in \mathcal{I}} \theta_i^2 \right]^{1/2} \quad \text{avec} \quad \theta_i = \|\underline{e}_i\|_{u,\Omega_i,w_i} \quad (2.37)$$

Différents choix de pondération ont été proposés. Dans [Machiels et al. (2000)], l'inverse du nombre $n_i^{\mathcal{I}_E^{\mathcal{E}}}$ de nœuds sommets appartenant à $\mathcal{I}_E^{\mathcal{E}}$ pour chaque élément

E du patch Ω_i est choisi comme pondération : $w_{i|E} = 1/n_i^{\mathcal{I}_E^{\mathcal{E}}}$ dans $E \in \mathcal{E}_i^{\mathcal{I}}$ sur Ω_i . Dans [Carstensen et Funken (2000b), Morin et al. (2003), Prudhomme et al. (2004)], le facteur de pondération correspond à la fonction forme éléments finis linéaire $\lambda_i \in \mathcal{U}_h^1$: $w_i = \lambda_i$ sur Ω_i .

Notons que les mesures globales θ de l'erreur estimée obtenues en (2.32) et (2.37) à partir de la résolution des problèmes locaux (2.30) et (2.34), respectivement, sont calculées de manière différente. La première mesure (2.32) est déterminée en prenant la norme de la somme des solutions locales, tandis que la seconde (2.37) est calculée en prenant la somme des normes locales.

Une étude comparative des performances des estimateurs associés, menée dans [Parés et al. (2006b)], a conclu à une meilleure précision de l'estimateur d'erreur globale obtenu sans pondération de la forme bilinéaire par rapport à celui obtenu avec pondération. En d'autres termes, la borne supérieure (2.31) de l'erreur vraie $\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}$ issue de la résolution des problèmes locaux (2.27) ou (2.30) sans pondération de la forme bilinéaire est plus pertinente que celle (2.37) issue de la résolution des problèmes locaux (2.34) avec pondération. En revanche, les bornes inférieures correspondantes obtenues en appliquant la propriété améliorée (1.69) aux fonctions continues (1.68) déterminées à partir des solutions locales \underline{e}_i des problèmes (2.27) ou (2.30) (sans pondération de la forme bilinéaire) et des problèmes (2.34) (avec pondération) ont une précision comparable.

Remarque 2.9 :

Dans [Morin et al. (2003)], les problèmes locaux (2.34) sont résolus en imposant des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur la frontière $\partial\Omega_i$ de chaque patch Ω_i . Les solutions locales \underline{e}_i sont alors recherchées dans l'espace $\mathcal{V}_{0|\Omega_i}^{ad}$ défini par :

$$\mathcal{V}_{0|\Omega_i}^{ad} = \{\underline{u} \in \mathcal{U}_{|\Omega_i} \text{ tel que } \underline{u} = \underline{0} \text{ sur } \partial\Omega_i\} \quad (2.38)$$

en lieu et place de $\mathcal{U}_{0|\Omega_i}^{ad}$. Une étude réalisée dans [Prudhomme et al. (2004)] a conclu à un taux de convergence plus faible de l'indice d'efficacité obtenu en considérant l'espace $\mathcal{V}_{0|\Omega_i}^{ad}$ plutôt que $\mathcal{U}_{0|\Omega_i}^{ad}$. Autrement dit, l'estimateur associé est plus précis lorsque les solutions \underline{e}_i des problèmes locaux sont recherchées dans l'espace $\mathcal{U}_{0|\Omega_i}^{ad}$ en comparaison à $\mathcal{V}_{0|\Omega_i}^{ad}$.

Enfin, dans une variante récemment introduite dans [Gallimard (2009)], une condition de prolongement établit un lien entre le champ de contrainte admissible recherché $\hat{\sigma}_h$ et le champ de contrainte éléments finis σ_h sur chaque patch Ω_i :

$$\forall i \in \mathcal{I}, \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{0|\Omega_i}^{ad}, \int_{\Omega_i} [(\hat{\sigma}_h - \sigma_h) \underline{\nabla} \lambda_i] \cdot \underline{u}^* \, d\Omega = 0 \quad (2.39)$$

En utilisant la propriété de partition de l'unité (2.25b), le champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ est recherché sous la forme d'une somme de contributions locales $\hat{\sigma}_h^i$:

$$\hat{\sigma}_h = \sum_{i \in \mathcal{I}} \hat{\sigma}_h^i \quad \text{avec} \quad \hat{\sigma}_h^i = \lambda_i \hat{\sigma}_h \quad (2.40)$$

La contribution $\hat{\sigma}_h^i$ est solution d'un problème local d'équilibre en statique, défini sur le patch Ω_i par :

$$\hat{\sigma}_h^i \in \mathcal{S}_i^{ad} \quad \text{avec} \quad \mathcal{S}_i^{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \hat{\sigma}_h^i \in \mathcal{S}_{|\Omega_i} \text{ tel que } \underline{\text{div}} \hat{\sigma}_h^i = -\lambda_i \underline{f}_d + \hat{\sigma}_h \underline{\nabla} \lambda_i \text{ dans } \Omega_i \\ \text{et} \left\{ \begin{array}{ll} \hat{\sigma}_h^i \underline{n} = \lambda_i \underline{F}_d & \text{sur } \partial\Omega_i \cap \partial_f \Omega \\ \hat{\sigma}_h^i \underline{n} = \underline{0} & \text{sur } \partial\Omega_i \setminus (\partial_u \Omega \cup \partial_f \Omega) \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (2.41)$$

où $\mathcal{S}_{|\Omega_i}$ désigne la restriction de l'espace fonctionnel \mathcal{S} au patch Ω_i :

$$\mathcal{S}_{|\Omega_i} = \left\{ \sigma \in [\mathcal{L}^2(\Omega_i)]^{d^2} \text{ tel que } \sigma = \sigma^T \right\}$$

En considérant la formulation faible des équations d'équilibre du problème (2.41) vérifiées par $\hat{\sigma}_h^i$, puis en introduisant la condition de prolongement (2.39), on montre que les contributions $\hat{\sigma}_h^i$ sont solutions des problèmes locaux définis sur chaque patch Ω_i par :

$$\begin{aligned} \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{0|\Omega_i}^{ad}, \quad \int_{\Omega_i} \text{Tr} [\hat{\sigma}_h^i \varepsilon(\underline{u}^*)] \, d\Omega &= l(\lambda_i \underline{u}^*) - \int_{\Omega_i} (\sigma_h \underline{\nabla} \lambda_i) \cdot \underline{u}^* \, d\Omega \\ &= \mathcal{R}_h(\lambda_i \underline{u}^*) + \int_{\Omega_i} \lambda_i \text{Tr} [\sigma_h \varepsilon(\underline{u}^*)] \, d\Omega \end{aligned} \quad (2.42)$$

Notons qu'au même titre que les problèmes locaux (2.27), la solvabilité des problèmes (2.42) définis sur chacun des patches n'est pas assurée dans le cas de problèmes vectoriels résolus à l'aide d'éléments linéaires ($p = 1$). Dans ce cas précis, des efforts nodaux spécifiques appliqués sur chacun des nœuds sommets du patch Ω_i sont introduits dans le chargement des problèmes locaux (2.42) afin de garantir leur solvabilité [Gallimard (2009)].

Dans la pratique, à l'instar des problèmes locaux (2.27) ou (2.30), les problèmes (2.42) sont résolus par dualité à l'aide d'une méthode éléments finis en déplacement associée à un espace d'approximation enrichi obtenu par h -ou p -raffinement de l'espace d'approximation éléments finis initial au niveau de chaque patch.

2.4 Implémentation numérique

Rappelons tout d'abord que les solutions \underline{e}_i des problèmes locaux (2.30) appartiennent à l'espace $\mathcal{U}_{0|\Omega_i}^{ad}$ et doivent donc vérifier les conditions aux limites de Dirichlet $\underline{e}_i = \underline{0}$ sur $\partial_u \Omega \cap \partial\Omega_i$. Ces conditions cinématiques sont imposées par substitution lors de la résolution des problèmes locaux (2.30).

Par ailleurs, afin de retirer simplement la partie linéaire $\Pi_h^1 \underline{u}^*$ associée au champ test \underline{u}^* intervenant dans le membre de droite des problèmes locaux (2.30), les quantités \underline{e}_i et \underline{u}^* sont discrétisées dans l'espace d'interpolation éléments finis enrichi constitué des fonctions de forme hiérarchiques [Szabó et Babuška (1991)] de degré

$p + 3$ sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_i^T$, en lieu et place des fonctions de forme éléments finis classiques de Lagrange.

Finalement, la procédure de calcul des solutions \underline{e}_i associées aux problèmes locaux (2.30) est simple à mettre en œuvre, notamment grâce à l'utilisation des fonctions de forme éléments finis hiérarchiques qui permet de retenir uniquement la partie non-linéaire $\underline{u}^* - \Pi_h^1 \underline{u}^*$ associée à \underline{u}^* , ce qui semble constituer la principale difficulté relative à la technique SPET.

3 Technique EESPT d'équilibrage par élément et patch d'éléments - méthode hybride

Cette technique d'équilibrage, récemment introduite dans [Ladevèze et al. (2010)] sous le nom d'« *Element Equilibration + Star-Patch Technique* » ou *EESPT*, est hybride dans la mesure où elle s'appuie sur les principaux ingrédients des techniques d'équilibrage par élément EET et par patch d'éléments SPET. En effet, cette nouvelle technique exploite à la fois la notion de *condition de prolongement*, base de la technique EET, et celle de *partition de l'unité*, employée dans la technique SPET.

3.1 Principe

À l'instar de la technique EET présentée en section 1, la démarche de construction du champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ se scinde en deux étapes :

1. construction d'un ensemble de densités d'effort \hat{F}_h équilibrées avec le chargement donné $(\underline{F}_d, \underline{f}_d)$ sur les bords ∂E de chaque élément E du maillage éléments finis Ω_h ;
2. calcul local, au niveau élémentaire, d'un champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ solution du problème local d'équilibre en statique (2.13) défini sur chaque élément $E \in \mathcal{E}$, où les densités d'effort \hat{F}_h préalablement construites sont appliquées comme conditions aux limites de Neumann.

La seconde étape est identique à celle de la technique EET. Les problèmes locaux (2.13) sont alors résolus en utilisant une formulation duale, i.e. une formulation faible en déplacement (2.15). La résolution des problèmes élémentaires (2.15) est menée de manière numérique à l'aide d'une méthode éléments finis en déplacement associée à un espace d'approximation enrichi obtenu par p -raffinement de celui utilisé pour la résolution initiale du problème de référence.

La première étape, qui vise à construire un ensemble de densités d'effort équilibrées, est, quant à elle, différente de celle développée dans la technique EET. Elle s'appuie d'une part sur la réécriture à l'échelle de la structure complète de la condition de prolongement (2.1) issue de la technique EET, et d'autre part sur la partition

de l'unité (2.25) inspirée de la technique SPET, afin de faciliter son implémentation tout en conservant un coût de calcul raisonnable.

3.2 Définition des problèmes locaux par patch d'éléments

La condition de prolongement (2.1) définie à partir des fonctions de forme éléments finis $\varphi_i \in \mathcal{U}_h^p$ peut être reformulée sous la forme globale :

$$\forall \underline{v}_h^* \in \mathcal{V}_h^{p,\text{disc}}, \quad \int_{\Omega} \text{Tr} [(\hat{\sigma}_h - \sigma_h) \varepsilon(\underline{v}_h^*)] \, d\Omega = \sum_{E \in \mathcal{E}} \int_E \text{Tr} [(\hat{\sigma}_h - \sigma_h) \varepsilon(\underline{v}_h^*)] \, d\Omega = 0 \quad (2.43)$$

où $\mathcal{V}_h^{p,\text{disc}}$ désigne l'espace des fonctions polynomiales de degré p continues sur chaque élément $E \in \mathcal{E}$, mais éventuellement discontinues à l'interface entre deux éléments adjacents.

L'espace vectoriel $\mathcal{V}_h^{p,\text{disc}}$ de degré p peut être astucieusement remplacé par son homologue $\mathcal{V}_h^{q,\text{disc}}$ de degré q dans (2.43) (où $1 \leq q \leq p$, p désignant le degré d'interpolation éléments finis initial), dans la mesure où toute restriction $\mathcal{V}_h^{q,\text{disc}}$ de $\mathcal{V}_h^{p,\text{disc}}$ ayant un degré d'interpolation q tel que $1 \leq q \leq p$ suffit à assurer la condition d'équilibre intérieur (2.3b). Le choix du degré q associé à l'espace $\mathcal{V}_h^{q,\text{disc}}$ confère une certaine souplesse dans la définition de la condition de prolongement globale, qui s'écrit alors :

$$\forall \underline{v}_h^* \in \mathcal{V}_h^{q,\text{disc}}, \quad \int_{\Omega} \text{Tr} [(\hat{\sigma}_h - \sigma_h) \varepsilon(\underline{v}_h^*)] \, d\Omega = \sum_{E \in \mathcal{E}} \int_E \text{Tr} [(\hat{\sigma}_h - \sigma_h) \varepsilon(\underline{v}_h^*)] \, d\Omega = 0 \quad (2.44)$$

Remarque 2.10 :

Notons que la condition de prolongement globale définie par (2.44) peut être vue comme une généralisation de (2.43) (ou (2.1)), dans le sens où (2.43) découle de (2.44) en choisissant un degré d'interpolation $q = p$ pour l'espace $\mathcal{V}_h^{q,\text{disc}}$, i.e. en exploitant la partition de l'unité définie par les fonctions de forme éléments finis $\varphi_i \in \mathcal{U}_h^p$ associées à l'espace de discrétisation complet du problème de référence. Signalons que, dans le cas d'un degré d'interpolation $q < p$, la condition de prolongement globale (2.44) n'est pas équivalente à la condition de prolongement globale (2.43) ou locale (2.1). Par ailleurs, dans le cas d'un degré d'interpolation $q > p$, la condition de prolongement globale (2.44) ne permet pas d'assurer la condition d'équilibre (2.3b) avec les forces volumiques imposées \underline{f}_d .

Afin d'alléger les notations et de conserver un temps de calcul acceptable, on se restreint au cas d'un degré d'interpolation $q = 1$, bien que la technique puisse être généralisée au cas d'un degré q vérifiant $1 \leq q \leq p$.

En considérant maintenant l'espace $\mathbf{v}_h^{1\text{disc}}$, la condition de prolongement (2.44) s'écrit :

$$\forall \underline{v}_h^* \in \mathbf{v}_h^{1\text{disc}}, \quad \int_{\Omega} \text{Tr} [(\hat{\sigma}_h - \sigma_h) \varepsilon(\underline{v}_h^*)] \, d\Omega = \sum_{E \in \mathcal{E}} \int_E \text{Tr} [(\hat{\sigma}_h - \sigma_h) \varepsilon(\underline{v}_h^*)] \, d\Omega = 0 \quad (2.45)$$

Puis, en utilisant la formulation faible des équations d'équilibre du problème (2.13) vérifiées par $\hat{\sigma}_h$, la condition de prolongement (2.45) se met sous la forme :

$$\forall \underline{v}_h^* \in \mathbf{v}_h^{1\text{disc}}, \quad \sum_{E \in \mathcal{E}} \left[\int_{\partial E} \eta_E \hat{\underline{F}}_h \cdot \underline{v}_h^* \, dS - \int_E \left(\text{Tr} [\sigma_h \varepsilon(\underline{v}_h^*)] - \underline{f}_d \cdot \underline{v}_h^* \right) \, d\Omega \right] = 0 \quad (2.46)$$

Finalement, en introduisant la propriété de partition de l'unité (2.25b) vérifiée par les fonctions de forme éléments finis linéaires $\lambda_i \in \mathcal{U}_h^1$ au sein de la condition de prolongement (2.46), les densités d'effort $\hat{\underline{F}}_h$ sont solutions des problèmes locaux définis sur chaque patch Ω_i d'éléments $E \in \mathcal{E}_i^{\mathcal{I}}$, support de la fonction de forme λ_i associée au nœud sommet $i \in \mathcal{I}$, par :

$$\forall \underline{v}_h^* \in \mathbf{v}_{h|\Omega_i}^{1\text{disc}}, \quad \sum_{E \in \mathcal{E}_i^{\mathcal{I}}} \left[\int_{\partial E} \eta_E \lambda_i \hat{\underline{F}}_h \cdot \underline{v}_h^* \, dS - \int_E \left(\text{Tr} [\sigma_h \varepsilon(\lambda_i \underline{v}_h^*)] - \underline{f}_d \cdot \lambda_i \underline{v}_h^* \right) \, d\Omega \right] = 0 \quad (2.47)$$

Afin d'ajouter de la souplesse à la technique, considérons à présent l'ensemble des problèmes locaux introduits dans [Ladevèze et al. (2010)] et définis sur chaque patch Ω_i par :

Trouver $\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)}$ vérifiant :

$$\forall \underline{v}_h^* \in \mathbf{v}_{h|\Omega_i}^{1\text{disc}}, \quad \sum_{E \in \mathcal{E}_i^{\mathcal{I}}} \left[\int_{\partial E} \eta_E \lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)} \cdot \underline{v}_h^* \, dS \right] = \mathcal{Q}_{\Omega_i}(\lambda_i \underline{v}_h^*) \quad (2.48)$$

où

$$\mathcal{Q}_{\Omega_i}(\lambda_i \underline{v}_h^*) = \int_{\Omega_i} \left(\text{Tr} [\sigma_h \varepsilon(\lambda_i \underline{v}_h^*)] - \underline{f}_d \cdot \lambda_i \underline{v}_h^* \right) \, d\Omega \quad (2.49)$$

En remarquant que les quantités $\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)}$ solutions de (2.48) sont non nulles uniquement sur les bords $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}$, i.e. les bords connectés au nœud sommet $i \in \mathcal{I}$, les problèmes locaux peuvent être réécrits sous la forme :

Trouver $\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)}$ vérifiant :

$$\forall \underline{v}_h^* \in \mathbf{v}_{h|\Omega_i}^{1\text{disc}}, \quad \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}} \int_{\Gamma} \lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)} \cdot \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_i^{\mathcal{I}}} \eta_E \underline{v}_{h|E}^* \right) \, dS = \mathcal{Q}_{\Omega_i}(\lambda_i \underline{v}_h^*) \quad (2.50)$$

où $\mathcal{E}_{\Gamma}^{\mathcal{I}}$ désigne l'ensemble des éléments connectés au bord $\Gamma \in \mathcal{J}$. Les ensembles $\mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}$ et $\mathcal{E}_i^{\mathcal{I}}$ intervenant dans les problèmes locaux (2.50) (ou (2.48)) sont illustrés sur la figure 1.3.

Enfin, les densités d'effort $\hat{\underline{F}}_h$ sont déterminées sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}$ comme :

$$\hat{\underline{F}}_{h|\Gamma} = \sum_{i \in \mathcal{I}_\Gamma^{\mathcal{J}}} (\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)})|_\Gamma \quad \text{sur } \Gamma \quad (2.51)$$

En pratique, les solutions locales $\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)}$ sont recherchées dans l'espace $\mathbf{U}_{h|\Gamma}^p$ des fonctions polynomiales de degré p sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}$, afin de reconstruire des densités d'effort $\hat{\underline{F}}_h$ de la forme (2.12) avec le même degré d'interpolation que le champ de déplacement éléments finis $\underline{u}_h \in \mathbf{U}_h^p$.

En outre, les conditions d'équilibre (2.3a) assurant la vérification des conditions aux limites de Neumann imposées sur $\partial_f \Omega$ sont prises en compte par pénalisation dans la résolution des problèmes locaux (2.50).

Remarque 2.11 :

Notons qu'en sommant l'ensemble des problèmes locaux (2.48) ou (2.47) sur l'ensemble des nœuds sommits $i \in \mathcal{I}$, on retrouve la condition de prolongement (2.46) qui assure la vérification de la condition d'équilibre intérieur (2.3b).

3.3 Existence et unicité des solutions associées aux problèmes locaux

Abordons tout d'abord la question de la solvabilité des problèmes locaux (2.50). Une étude détaillée de ces problèmes est menée dans [Ladevèze et al. (2010)]. Nous présentons ici les points fondamentaux relatifs à l'existence de solutions aux problèmes locaux (2.50).

Une propriété remarquable, inhérente à cette procédure d'équilibrage, est la connaissance *a priori* du noyau de la forme bilinéaire définissant les problèmes locaux (2.50); il s'agit de l'espace $\mathbf{U}_{0,h|\Omega_i}^{1\text{cont}}$ des fonctions polynomiales $\underline{v}_h^* \in \mathbf{V}_{h|\Omega_i}^{1\text{disc}}$ continues aux bords $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}$ et s'annulant sur $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}} \cap \partial\Omega$:

$$\mathbf{U}_{0,h|\Omega_i}^{1\text{cont}} = \left\{ \underline{v}_h^* \in \mathbf{V}_{h|\Omega_i}^{1\text{cont}} \text{ tel que } \underline{v}_h^* = \underline{0} \text{ sur } \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}} \cap \partial\Omega \right\} \quad (2.52)$$

où $\mathbf{V}_{h|\Omega_i}^{1\text{cont}}$ désigne l'ensemble des fonctions $\underline{v}_h^* \in \mathbf{V}_{h|\Omega_i}^{1\text{disc}}$ continues sur l'ensemble du patch Ω_i et a fortiori aux bords $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}$.

En considérant l'espace $\mathbf{U}_{0,h|\Omega_i}^{1\text{cont}}$, la formulation faible des équations d'équilibre au sens des éléments finis (1.13) vérifiées par σ_h assure l'existence d'une solution aux problèmes locaux (2.50) sur chaque patch Ω_i pour un degré d'interpolation éléments finis $p \geq 2$:

$$\forall \underline{v}_h^* \in \mathbf{U}_{0,h|\Omega_i}^{1\text{cont}}, \quad \lambda_i \underline{v}_h^* \in \mathbf{U}_{0,h|\Omega_i}^2 \subset \mathbf{U}_{0,h|\Omega_i}^p \implies \mathcal{Q}_{\Omega_i}(\lambda_i \underline{v}_h^*) = 0$$

En revanche, dans le cas $p = 1$, les problèmes locaux (2.50) n'admettent pas de solution :

$$\forall \underline{v}_h^* \in \mathbf{U}_{0,h|\Omega_i}^{1\text{cont}}, \quad \lambda_i \underline{v}_h^* \in \mathbf{U}_{0,h|\Omega_i}^2 \not\subset \mathbf{U}_{0,h|\Omega_i}^p \implies \mathcal{Q}_{\Omega_i}(\lambda_i \underline{v}_h^*) \neq 0$$

Un traitement spécifique est alors nécessaire afin de garantir la solvabilité des problèmes locaux (2.50). Dans [Ladevèze et al. (2010)], un opérateur régularisant $\Pi_{h,i}^1 : \mathcal{V}_h^{1\text{disc}} \rightarrow \mathcal{V}_{h,i}^{1\text{disc}}$ est introduit et correspond à l'opérateur de projection sur l'espace $\mathcal{V}_{h,i}^{1\text{disc}}$ des fonctions $\underline{v}_h^* \in \mathcal{V}_h^{1\text{disc}}$ s'annulant au nœud sommet $i \in \mathcal{I}$:

$$\forall \underline{v}_h^* \in \mathcal{V}_{h|\Omega_i}^{1\text{disc}}, \forall E \in \mathcal{E}_i^{\mathcal{I}}, \quad \Pi_{h,i}^1 \underline{v}_h^*|_E = \underline{v}_h^*|_E - \underline{v}_h^*|_E(\underline{M}_i)$$

$\underline{v}_h^*|_E(\underline{M}_i)$ désigne la valeur prise par $\underline{v}_h^*|_E$ au nœud sommet $i \in \mathcal{I}$. Les problèmes locaux (2.50) définis sur chaque patch Ω_i sont alors remplacés par :

Trouver $\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)}$ vérifiant :

$$\forall \underline{v}_h^* \in \mathcal{V}_{h|\Omega_i}^{1\text{disc}}, \quad \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}} \int_{\Gamma} \lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)} \cdot \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_{\Gamma}^{\mathcal{J}}} \eta_E \underline{v}_h^*|_E \right) dS = \mathcal{Q}_{\Omega_i}(\lambda_i (\underline{v}_h^* - \Pi_{h,i}^1 \underline{v}_h^*)) \quad (2.53)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\Omega_i}(\lambda_i (\underline{v}_h^* - \Pi_{h,i}^1 \underline{v}_h^*)) &= \mathcal{Q}_{\Omega_i}(\lambda_i \underline{v}_h^*(\underline{M}_i)) \\ &= \int_{\Omega_i} \left(\text{Tr} [\sigma_h \varepsilon(\lambda_i \underline{v}_h^*(\underline{M}_i))] - \underline{f}_d \cdot \lambda_i \underline{v}_h^*(\underline{M}_i) \right) d\Omega \end{aligned} \quad (2.54)$$

La solvabilité des problèmes locaux (2.53) est assurée en considérant l'espace $\mathcal{U}_{0,h|\Omega_i}^{1\text{cont}}$ et la formulation faible des équations d'équilibre au sens des éléments finis (1.13) satisfaites par σ_h :

$$\forall \underline{v}_h^* \in \mathcal{U}_{0,h|\Omega_i}^{1\text{cont}}, \quad \mathcal{Q}_{\Omega_i}(\lambda_i (\underline{v}_h^* - \Pi_{h,i}^1 \underline{v}_h^*)) = \mathcal{Q}_{\Omega_i}(\lambda_i \underline{v}_h^*(\underline{M}_i)) = 0$$

Signalons par ailleurs que, du fait des propriétés de partition de l'unité (2.25) satisfaites par les fonctions de forme éléments finis linéaires $\lambda_i \in \mathcal{U}_h^1$, les problèmes locaux (2.53) introduits dans le cas $p = 1$ requièrent de manière implicite la vérification des conditions suivantes [Ladevèze et al. (2010)] :

$$\sum_{\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}} \int_{\Gamma} \lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)} \lambda_j dS = \underline{0} \quad \forall j \in \mathcal{I}_E^{\mathcal{E}} \setminus \{i\} \quad (2.55)$$

Remarque 2.12 :

Les problèmes locaux (2.50) offrent une plus grande flexibilité que leurs homologues (2.53). Par conséquent, il est préférable de considérer les problèmes locaux (2.50) pour $p \geq 2$ et d'introduire les problèmes locaux (2.53) uniquement pour $p = 1$.

Remarque 2.13 :

Dans le cas d'un degré d'interpolation $q = p$, i.e. en considérant la propriété de partition de l'unité vérifiée par les fonctions de forme éléments finis $\varphi_i \in \mathcal{U}_h^p$, $\underline{v}_h^* \in \mathcal{V}_h^{p\text{disc}}$ et la solvabilité des problèmes (2.50) n'est pas assurée. Il est alors possible de considérer les problèmes locaux (2.53) afin de garantir l'existence des solutions locales $\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)}$ dans ce cas.

Enfin, notons que les problèmes locaux (2.50) (ou (2.53)) ne définissent qu'un espace d'admissibilité pour les quantités locales $\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)}$. L'unicité des solutions $\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)}$ associées aux problèmes locaux (2.50) (ou (2.53)) est assurée par minimisation au sens des moindres carrés d'une fonction-coût locale similaire à (2.11) :

$$J(\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)}) = \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}} (\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)} - \lambda_i \underline{F}_h^{(i)})_{|\Gamma}^2 \quad (2.56)$$

où le vecteur $\lambda_i \underline{F}_h^{(i)}$ est connu explicitement et met en jeu la projection $\underline{\Pi}_{\sigma_h|\Gamma}$ du champ de contrainte éléments finis σ_h sur le bord $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}$:

- pour un bord Γ intérieur à Ω , connecté aux éléments adjacents E et E' :

$$\underline{\Pi}_{\sigma_h|\Gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\eta_E} \sigma_{h|E} \underline{n}_E + \frac{1}{\eta_{E'}} \sigma_{h|E'} \underline{n}_{E'} \right)$$

- pour un bord $\Gamma \subset \partial_u \Omega$ connecté à l'élément E :

$$\underline{\Pi}_{\sigma_h|\Gamma} = \frac{1}{\eta_E} \sigma_{h|E} \underline{n}_E$$

- pour un bord $\Gamma \subset \partial_f \Omega$ connecté à l'élément E :

$$\underline{\Pi}_{\sigma_h|\Gamma} = \frac{1}{\eta_E} \underline{F}_d$$

Les quantités connues $\lambda_i \underline{F}_h^{(i)}$ sont alors définies sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}$ par :

- pour $p \geq 2$, $\lambda_i \underline{F}_h^{(i)}$ est la projection de $\lambda_i \underline{\Pi}_{\sigma_h|\Gamma}$ sur l'espace $\mathcal{U}_{h|\Gamma}^p$ des fonctions polynomiales de degré p sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}$;
- pour $p = 1$, en raison des conditions implicites (2.55), $\lambda_i \underline{F}_h^{(i)}$ est recherchée dans l'espace $\mathcal{U}_{h|\Gamma}^p$ comme solution du problème linéaire suivant :

$$\int_{\Gamma} \lambda_i \underline{F}_h^{(i)} \lambda_j \, dS = \underline{0} \quad \forall j \in \mathcal{I}_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \setminus \{i\} \quad (2.57a)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_{\Gamma}^{\mathcal{J}}} \lambda_j \underline{F}_h^{(j)} = \underline{\Pi}_{\sigma_h|\Gamma} \quad (2.57b)$$

Notons que les quantités connues $\lambda_i \underline{F}_h^{(i)}$ appartiennent au même espace que les solutions locales recherchées $\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)}$, à savoir l'espace $\mathcal{U}_{h|\Gamma}^p$ des fonctions polynomiales de degré p définies sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}$.

Tout comme pour l'étape de minimisation intervenant dans la technique EET, différentes fonctions-coût seront considérées à la section 4.1.2.

Finalement, le problème à résoudre est un problème de minimisation d'une fonctionnelle du type (2.56) sous les contraintes (2.50) (ou (2.53)) induites par la

condition de prolongement (2.44). Ce problème de minimisation est d'autant plus contraint et coûteux que le degré q choisi pour l'espace $\mathbf{V}_h^{q,\text{disc}}$ induit par la condition de prolongement (2.44) est élevé. Le choix d'un degré $q = p$ présente l'avantage d'être en phase avec la discrétisation élément finis initiale du problème de référence. Néanmoins, le choix d'un degré $q = 1$ accorde une plus grande liberté dans la minimisation et offre un coût de calcul plus faible.

3.4 Implémentation numérique

Les quantités recherchées $\lambda_i \hat{F}_h^{(i)}$ et celles connues $\lambda_i \underline{F}_h^{(i)}$ sont discrétisées sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}$ et décrites par :

$$\lambda_i \hat{F}_{h|\Gamma}^{(i)} = [\varphi_{|\Gamma}]^T \hat{\mathbf{f}}_{h,\Gamma}^{(i)} \quad (2.58a)$$

$$\lambda_i \underline{F}_{h|\Gamma}^{(i)} = [\varphi_{|\Gamma}]^T \underline{\mathbf{f}}_{h,\Gamma}^{(i)} \quad (2.58b)$$

où $\hat{\mathbf{f}}_{h,\Gamma}^{(i)}$ (resp. $\underline{\mathbf{f}}_{h,\Gamma}^{(i)}$) désigne le vecteur généralisé des inconnues nodales associées à la discrétisation de $\lambda_i \hat{F}_{h|\Gamma}^{(i)}$ (resp. $\lambda_i \underline{F}_{h|\Gamma}^{(i)}$), et $[\varphi_{|\Gamma}]$ la matrice des fonctions de forme éléments finis de degré p sur Γ .

Par ailleurs, les quantités \underline{v}_h^* sont discrétisées sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_i^{\mathcal{I}}$ et s'écrivent :

$$\underline{v}_{h|E}^* = [\lambda_{|E}]^T \underline{\Lambda}_{h,E}^{(i)} \quad (2.59)$$

où $\underline{\Lambda}_{h,E}^{(i)}$ désigne le vecteur généralisé des inconnues nodales associées à la discrétisation de $\underline{v}_{h|E}^*$, et $[\lambda_{|E}]$ la matrice des fonctions de forme éléments finis linéaires sur E .

Les problèmes locaux (2.50) (ou (2.53)) se mettent alors sous la forme matricielle :

$$\forall \underline{\Lambda}_h^{(i)}, \quad \hat{\mathbf{f}}_h^{(i)T} \mathbb{A}^{(i)} \underline{\Lambda}_h^{(i)} = \underline{R}^{(i)T} \underline{\Lambda}_h^{(i)} \quad (2.60)$$

où les vecteurs généralisés $\hat{\mathbf{f}}_h^{(i)}$ et $\underline{\Lambda}_h^{(i)}$ regroupent l'ensemble des valeurs nodales $\hat{\mathbf{f}}_{h,\Gamma}^{(i)}$ sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}$ et celles $\underline{\Lambda}_{h,E}^{(i)}$ sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_i^{\mathcal{I}}$, respectivement. $\mathbb{A}^{(i)}$ peut être vue comme une matrice généralisée résultant de l'assemblage de matrices de masse associées à chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}$.

Rappelons que les conditions $\lambda_i \hat{F}_{h|\Gamma}^{(i)} = \lambda_i \underline{F}_{h|\Gamma}^{(i)}$ sur les bords $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}} \cap \partial_f \Omega$, traduites sous forme discrétisée par $\hat{\mathbf{f}}_{h,\Gamma}^{(i)} = \underline{\mathbf{f}}_{h,\Gamma}^{(i)}$, peuvent être imposées en introduisant des termes de pénalisation au sein de la fonction-coût (2.56) intervenant dans l'étape de minimisation. La fonction-coût (2.56) peut alors être réécrite sous la forme matricielle :

$$J(\hat{\mathbf{f}}_h^{(i)}) = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{f}}_h^{(i)} - \underline{\mathbf{f}}_h^{(i)})^T \mathbb{P}^{(i)} (\hat{\mathbf{f}}_h^{(i)} - \underline{\mathbf{f}}_h^{(i)}) \quad (2.61)$$

où $\underline{f}_h^{(i)}$ désigne le vecteur généralisé contenant l'ensemble des valeurs nodales $\underline{f}_{h,\Gamma}^{(i)}$ sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}$, et $\mathbb{P}^{(i)}$ est une matrice diagonale de pénalisation.

Dans le cas $p \geq 2$, les vecteurs connus $\underline{f}_{h,\Gamma}^{(i)}$ sont déterminés de manière explicite sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}$ comme la projection de $\lambda_i \underline{\Pi}_{\sigma_h|\Gamma}$ sur l'espace $\mathcal{U}_{h|\Gamma}^p$, où $\underline{\Pi}_{\sigma_h|\Gamma}$ est un vecteur connu qui dépend du champ de contrainte éléments finis σ_h et des densités surfaciques d'effort imposées \underline{F}_d .

Dans le cas $p = 1$, les conditions (2.57a) et (2.57b) nécessaires au calcul des quantités $\underline{f}_{h,\Gamma}^{(i)}$ sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}$ s'écrivent mathématiquement sous la forme :

$$\beta_{\Gamma,j}^{(i)} \underline{f}_{h,\Gamma}^{(i)} = \underline{0} \quad \forall j \in \mathcal{I}_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \setminus \{i\} \quad (2.62a)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_{\Gamma}^{\mathcal{J}}} \underline{f}_{h,\Gamma}^{(j)} = \underline{\Pi}_{\sigma_h|\Gamma} \quad (2.62b)$$

où $\beta_{\Gamma,j}^{(i)}$ représente la projection de $[\varphi_{\Gamma}]$ sur la restriction à Γ des fonctions de forme éléments finis linéaires λ_j . En regroupant ces conditions, les quantités discrétisées $\underline{f}_{h,\Gamma}^{(i)}$ associées à l'ensemble des nœuds sommets $i \in \mathcal{I}_{\Gamma}^{\mathcal{J}}$ sont déterminées à travers la résolution d'un système linéaire défini sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}$ de la forme :

$$\mathbb{B}^{\Gamma} \underline{f}_h^{\Gamma} = \underline{Q}^{\Gamma} \quad (2.63)$$

où \underline{f}_h^{Γ} désigne le vecteur généralisé contenant les valeurs nodales $\underline{f}_{h,\Gamma}^{(i)}$ associées aux nœuds sommets $i \in \mathcal{I}_{\Gamma}^{\mathcal{J}}$. \mathbb{B}^{Γ} fait intervenir les matrices $\beta_{\Gamma,j}^{(i)} \quad \forall j \in \mathcal{I}_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \setminus \{i\}, \forall i \in \mathcal{I}_{\Gamma}^{\mathcal{J}}$ ainsi que la matrice identité \mathbb{I}_d .

À présent, rappelons que le noyau $\text{Ker}(\mathbb{A}^{(i)})$ des matrices $\mathbb{A}^{(i)}$ correspond à l'ensemble des vecteurs $\underline{\Lambda}_h^{(i)}$ issus de la discrétisation des fonctions continues sur le patch Ω_i et nulles sur $\mathcal{J}_i^{\mathcal{I}} \cap \partial\Omega$, i.e. $\underline{v}_h^* \in \mathcal{U}_{0,h|\Omega_i}^{1\text{cont}}$. En pratique, ce noyau peut être réduit à $\underline{\Lambda}_h^{(i)} = \underline{0}$ de manière automatique en bloquant certains degrés de liberté sur le patch Ω_i . Cette procédure simple à mettre en œuvre permet un traitement systématique des problèmes (2.60) et constitue un des principaux avantages de la technique EESPT. La figure 2.1 illustre les degrés de liberté libres et bloqués associés aux quantités $\underline{\Lambda}_h^{(i)}$ définies sur un patch Ω_i centré sur un nœud sommet intérieur $i \in \Omega$ ou sur un nœud sommet de frontière $i \in \partial\Omega$.

Une fois la procédure de blocage du noyau effectuée, le système discrétisé (2.60) devient :

$$\forall \underline{\tilde{\Lambda}}_h^{(i)}, \quad \hat{\underline{f}}_h^{(i)T} \tilde{\mathbb{A}}^{(i)} \underline{\tilde{\Lambda}}_h^{(i)} = \tilde{\underline{R}}^{(i)T} \underline{\tilde{\Lambda}}_h^{(i)} \quad (2.64)$$

Finalement, le problème à résoudre sur chaque patch Ω_i consiste à minimiser la fonctionnelle (2.61) sous les contraintes (2.64) résultant de la condition de prolongement. Ce problème de minimisation sous contraintes peut alors s'écrire sous la

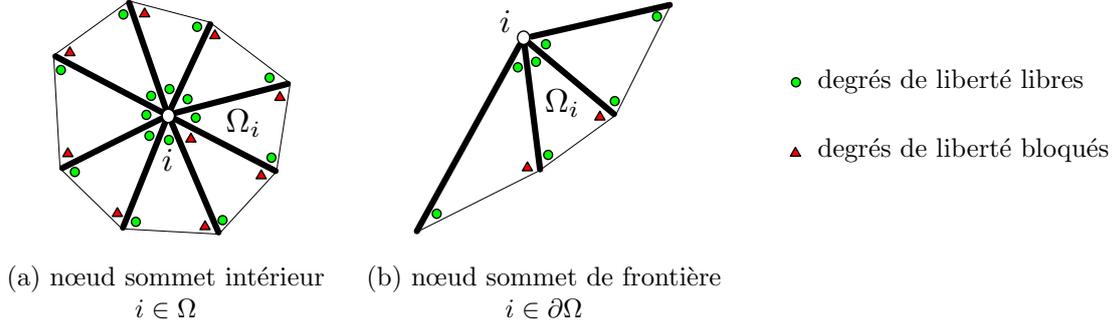


FIGURE 2.1: Représentation des degrés de liberté libres (●) et bloqués (▲) sur le patch Ω_i pour un nœud sommet intérieur $i \in \Omega$ (a) et un nœud sommet de frontière $i \in \partial\Omega$ (b).

forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}^{(i)} & \tilde{\mathbb{A}}^{(i)} \\ \tilde{\mathbb{A}}^{(i)T} & \mathbb{0} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{f}}_h^{(i)} \\ \tilde{\underline{\Lambda}}_h^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}^{(i)} \underline{f}_h^{(i)} \\ \tilde{\underline{R}}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

à partir du problème de point-selle associé au Lagrangien \mathcal{L} défini par :

$$\mathcal{L}(\hat{\underline{f}}_h^{(i)}, \tilde{\underline{\Lambda}}_h^{(i)}) = \frac{1}{2}(\hat{\underline{f}}_h^{(i)} - \underline{f}_h^{(i)})^T \mathbb{P}^{(i)} (\hat{\underline{f}}_h^{(i)} - \underline{f}_h^{(i)}) + (\tilde{\mathbb{A}}^{(i)T} \hat{\underline{f}}_h^{(i)} - \tilde{\underline{R}}^{(i)})^T \tilde{\underline{\Lambda}}_h^{(i)} \quad (2.66)$$

$\tilde{\underline{\Lambda}}_h^{(i)}$ correspond au vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes (2.64).

Enfin, les densités d'effort $\hat{\underline{F}}_h$ définies par (2.51) sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}$ sont directement reconstruites à partir des quantités discrétisées $\hat{\underline{f}}_{h,\Gamma}^{(i)}$ associées aux nœuds sommets $i \in \mathcal{I}_\Gamma^{\mathcal{J}}$:

$$\hat{\underline{F}}_{h|\Gamma} = \sum_{i \in \mathcal{I}_\Gamma^{\mathcal{J}}} [\varphi_{|\Gamma}]^T \hat{\underline{f}}_{h,\Gamma}^{(i)} \quad (2.67)$$

À l'instar de la technique EET, le procédé mise en place pour construire les densités d'effort $\hat{\underline{F}}_h$ offre l'avantage d'être explicite et non-intrusive. Néanmoins, la technique EESPT d'équilibrage ne requiert pas d'étape préliminaire de calcul des projections des densités d'effort et permet un traitement systématique des problèmes locaux, contrairement à la technique EET qui repose sur une condition de minimisation définissant la nature de la résolution des problèmes locaux (cf. section 1.4). En revanche, la technique EET présente l'avantage de traiter les conditions aux limites de Neumann sur la frontière $\partial_f \Omega$ de manière exacte à travers l'introduction de multiplicateurs de Lagrange, contrairement à la technique EESPT qui s'appuie sur une approche par pénalisation pour la vérification de ces conditions. En outre, les techniques hybride EESPT et standard EET offrent un coût de calcul relativement faible en comparaison à celui requis par la technique SPET, car cette dernière

conduit à la résolution fine de problèmes locaux à l'échelle du patch, contrairement aux deux premières qui se ramènent à la résolution fine de problèmes indépendants définis à l'échelle de l'élément.

4 Illustrations numériques sur des exemples industriels

Les performances des estimateurs d'erreur globale issus des trois techniques de construction de champs équilibrés sont illustrées sur des exemples numériques variés, dont certains sont tirés d'applications industrielles :

- un modèle 2D de capteur d'effort en flexion, dont la capacité de charge varie de 1 kg à 2.5 kg ;
- un modèle 2D de structure fissurée, déjà étudié dans la littérature [Parés et al. (2006b), Ladevèze et al. (2010)], contenant deux cavités circulaires différentes ;
- un modèle 3D de plaque trouée en traction, couramment employée pour l'étude des assemblages boulonnés ;
- un modèle 3D de tête de réacteur nucléaire sous pression ;
- un modèle 3D de manchon d'hélicoptère, appelé « Moyeu Rotor Principal » ou « MPR », constituant une partie de l'hélicoptère NH90 développé par la société Eurocopter et servant de joint d'accouplement entre les parties mobiles (rotor) et fixes (stator) de l'hélicoptère.

Les calculs sont réalisés sur une machine 64 bits sous Debian stable possédant 8 cœurs cadencés à 3.00 GHz avec 32 Go de mémoire pour les cas d'application 2D et sur une machine possédant les mêmes caractéristiques avec 64 Go de mémoire pour les cas d'application 3D.

Pour l'ensemble des structures considérées, le comportement du matériau est supposé élastique, linéaire, homogène et isotrope, de module d'Young unitaire $E = 1$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. La modélisation des exemples 2D est réalisée sous l'hypothèse des contraintes planes.

Tous les exemples s'appuient sur une méthode d'approximation numérique de type éléments finis avec des fonctions de forme de Lagrange pour les méthodes EET et EESPT, et des fonctions de forme hiérarchiques pour la méthode SPET. Les paramètres associés aux discrétisations éléments finis des différents exemples numériques sont répertoriés dans le tableau H.1 en annexe H. La résolution des problèmes locaux à l'échelle d'un élément pour les méthodes EET et EESPT, et à l'échelle d'un patch d'éléments pour la méthode SPET, est menée en utilisant un p -raffinement de type $p + k$ du maillage initial Ω_h , où p est le degré d'interpolation éléments finis et $k = 3$ un degré additionnel conforme aux recommandations de [Babuška et al. (1994c)]. La vérification des conditions aux limites de Neumann sur

la frontière $\partial_f \Omega$ est traitée par pénalisation au sein de la méthode EESPT, avec un terme de pénalisation relatif pris égal à 10^5 .

Les trois méthodes de construction de champs de contrainte admissibles sont étudiées et comparées selon différents critères : précision de l'estimateur obtenu, coût de calcul engendré et facilité d'implémentation dans un code existant.

Étant donné que la densité du maillage éléments finis Ω_h associée à chacun des exemples considérés n'est pas uniforme, les répartitions spatiales des contributions élémentaires au carré à l'erreur vraie e et à l'erreur estimée θ sont représentées, pour la plupart des structures étudiées, sous forme d'une densité d'erreur définie par :

$$\bar{e}_E^2 = \frac{e_E^2}{|E|} \quad \text{et} \quad \bar{\theta}_E^2 = \frac{\theta_E^2}{|E|}$$

où e_E^2 (resp. θ_E^2) est la contribution élémentaire au carré à l'erreur vraie e (resp. à l'erreur estimée θ), et $|E|$ la mesure correspondant à l'aire (resp. au volume) de chaque élément E en dimension 2 (resp. dimension 3).

Les cartographies du champ de déplacement éléments finis \underline{u}_h , du champ de contrainte éléments finis σ_h et des champs de contrainte admissibles $\hat{\sigma}_h$ obtenus à partir des différentes méthodes représentent les valeurs nodales de la norme $\|\underline{u}_h\|_u$ et les valeurs moyennes élémentaires des normes $\|\sigma_h\|_\sigma$ et $\|\hat{\sigma}_h\|_\sigma$, où les normes locales en déplacement $\|\bullet\|_u$ et en contrainte $\|\bullet\|_\sigma$ sont définies respectivement sur \mathcal{U} et \mathcal{S} par :

$$\|\bullet\|_u = (\bullet \cdot \bullet)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|\bullet\|_\sigma = (\text{Tr} [\bullet \bullet])^{1/2}$$

Dans un premier temps, l'étape de minimisation locale intervenant dans la méthode EET (resp. EESPT) est réalisée à l'aide de la fonction-coût J_0 définie par (2.11) (resp. (2.56)), qui ne tient pas compte de la taille de maille. Puis, dans un second temps, une étude détaillée de l'influence du choix de la fonction-coût sur la qualité de l'estimation obtenue est menée sur chacun des exemples numériques précédemment mentionnés. Les erreurs estimées associées $\theta = e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ sont comparées à une erreur de référence, correspondant à une valeur quasi-exacte de l'erreur vraie $e = \|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}$ (cf. remarque 1.7). Pour plus de clarté, la notation e est conservée pour désigner l'erreur de référence en lieu et place de l'erreur vraie. La précision des estimateurs d'erreur obtenus est mesurée à l'aide de l'indice d'efficacité η , correspondant au rapport entre l'erreur estimée θ et l'erreur vraie e (remplacée par l'erreur de référence) :

$$\eta = \frac{\theta}{e}$$

Ainsi, la valeur prise par l'indice d'efficacité η détermine la pertinence de l'estimation obtenue : $\eta > 1$ indique que l'erreur estimée θ est une sur-estimation de l'erreur vraie e , tandis que $\eta < 1$ indique que θ est une sous-estimation de e .

On introduit également une erreur vraie relative \bar{e} (resp. une erreur estimée relative $\bar{\theta}$) correspondant au rapport entre l'erreur vraie e (resp. l'erreur estimée θ) et la mesure énergétique globale $\|\underline{u}_{ex}\|_{u,\Omega}$ de la solution (quasi-)exacte en déplacement \underline{u}_{ex} :

$$\bar{e} = \frac{e}{\|\underline{u}_{ex}\|_{u,\Omega}} \quad \text{et} \quad \bar{\theta} = \frac{\theta}{\|\underline{u}_{ex}\|_{u,\Omega}}$$

4.1 Capteur d'effort 2D

Considérons un modèle 2D de capteur d'effort, représenté sur la figure 2.2, qui contient deux cavités symétriques. La structure considérée, de longueur $L = 54$ et de hauteur $H = 16$, est encastrée sur sa surface horizontale inférieure droite et soumise en flexion à une densité linéique d'effort $\underline{f} = -y$ sur sa surface horizontale supérieure gauche. Les autres parties de sa frontière sont des bords libres d'effort. Le maillage Ω_h support de la résolution éléments finis est constitué de 11 766 éléments triangulaires linéaires ($p = 1$) et 6 299 nœuds, i.e. 12 598 degrés de liberté (d.d.l.). Il a été raffiné dans les régions situées aux extrémités inférieure et supérieure des deux cavités, i.e. au voisinage des zones à fortes contraintes. La solution quasi-exacte, dite de référence, a été calculée à partir d'un maillage très fin $\Omega_{\bar{h}}$ constitué de 3 331 632 éléments triangulaires linéaires et 1 671 043 nœuds, i.e. 3 342 086 d.d.l.

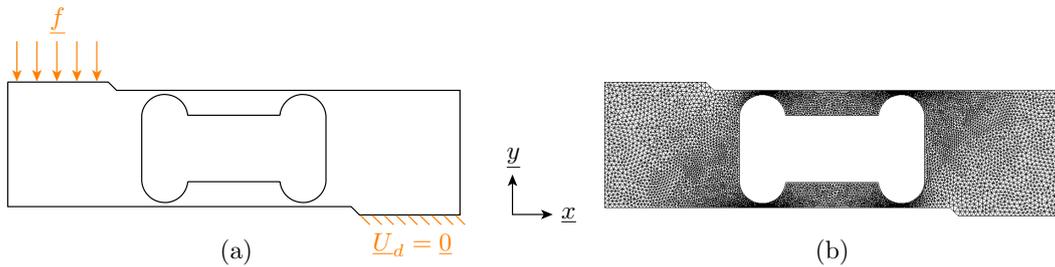


FIGURE 2.2: Modèle 2D de capteur d'effort : géométrie et conditions aux limites (a), et maillage éléments finis (b).

4.1.1 Comparaison des estimateurs

La figure 2.3 représente les cartes des champs de déplacement et de contrainte éléments finis, tandis que la figure 2.4 dépeint celle des champs de contrainte admissibles reconstruits à partir des trois méthodes. Les régions les plus sollicitées en contraintes sont situées aux extrémités inférieure et supérieure des deux cavités.

Le calcul direct de l'erreur vraie $e = \|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}$ à partir des contributions élémentaires $e_E = \|\underline{e}_h\|_{u,E}$ est très coûteux et atteint un temps de calcul d'environ 15 h, car le maillage éléments finis Ω_h et le maillage très fin de référence $\Omega_{\bar{h}}$ ne sont pas imbriqués, rendant la procédure de projection de maillages lourde et coûteuse. Néanmoins, ce calcul a été réalisé afin de déterminer la répartition spatiale

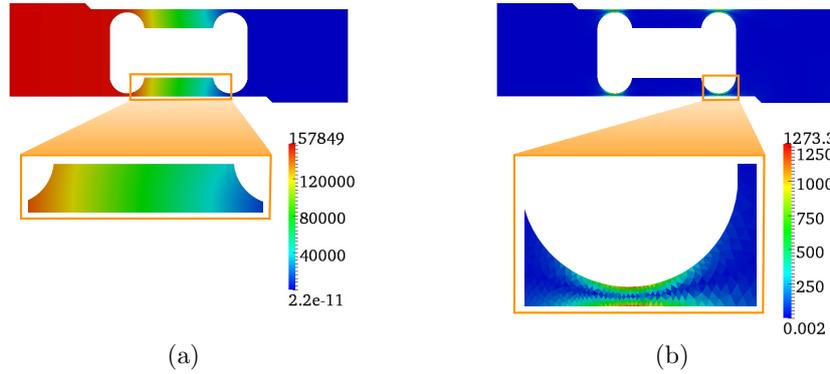


FIGURE 2.3: Cartes du champ de déplacement éléments finis \underline{u}_h (a) et du champ de contrainte éléments finis σ_h (b).

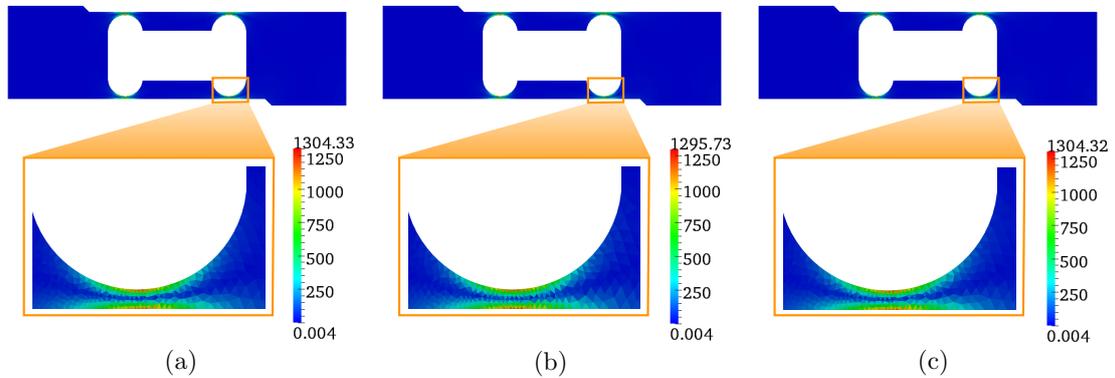


FIGURE 2.4: Cartes des champs de contrainte admissibles $\hat{\sigma}_h$ obtenus à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c), avec zoom sur la région la plus sollicitée.

des contributions élémentaires e_E à l'erreur vraie e . Par la suite, étant donné que la structure est uniquement soumise à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur sa frontière $\partial_u \Omega$, la valeur quasi-exacte de l'erreur vraie e correspondant à l'erreur de référence peut être déterminée directement à l'aide de la relation :

$$e = \|\underline{e}_h\|_{u,\Omega} = \sqrt{\|\underline{u}_{ex}\|_{u,\Omega}^2 - \|\underline{u}_h\|_{u,\Omega}^2} \simeq 335.005 \quad (2.68)$$

L'erreur vraie relative \bar{e} correspondante vaut :

$$\bar{e} = \frac{e}{\|\underline{u}_{ex}\|_{u,\Omega}} \simeq 23.70 \%$$

Le temps nécessaire au calcul (2.68) de l'erreur vraie e prend environ 2 s, ce qui constitue un gain très intéressant si l'on s'intéresse uniquement au calcul de l'erreur vraie globale e sans chercher à déterminer ses contributions locales e_E . Par ailleurs,

notons que le calcul des énergies de déformation $\|\underline{u}_{ex}\|_{u,\Omega}^2$ et $\|\underline{u}_h\|_{u,\Omega}^2$ associées respectivement aux solutions quasi-exacte \underline{u}_{ex} et éléments finis \underline{u}_h peut être mené en parallèle.

Les performances associées à chacun des estimateurs globaux considérés sont regroupées dans le tableau 2.1. En premier lieu, on constate que les indices d'efficacité globaux η sont supérieurs à 1 pour toutes les méthodes de construction de champs de contrainte admissibles considérées. Par conséquent, les trois estimateurs sont bien consistants et fournissent une borne supérieure garantie θ de l'erreur vraie e . Par la suite, la méthode SPET offre une meilleure précision sur l'erreur estimée θ que les méthodes EET et EESPT, l'indice d'efficacité η étant plus proche de 1 pour la méthode SPET. Enfin, les coûts de calcul engendrés par les méthodes EET et EESPT sont similaires, tandis que celui requis pour la méthode SPET est quatre à cinq fois plus élevé.

TABLE 2.1: Comparaison des performances des estimateurs d'erreur globale obtenus à partir des méthodes EET, SPET et EESPT.

Méthode	Erreur estimée θ	Erreur estimée relative $\bar{\theta}$ (%)	Indice d'efficacité η	Temps CPU normalisé t
EET	799.791	56.59	2.387	1.000
SPET	545.804	38.62	1.630	4.218
EESPT	802.324	56.77	2.395	1.156

La répartition spatiale des contributions locales (au carré) à l'erreur vraie e est représentée sur la figure 2.5, tandis que celles des contributions locales (au carré) à l'erreur estimée θ pour chacune des trois méthodes sont montrées sur la figure 2.6. Les contributions élémentaires θ_E à l'erreur globale estimée θ fournissent des indicateurs locaux des contributions élémentaires e_E à l'erreur vraie globale e , qui peuvent s'avérer utiles pour la mise en place d'une stratégie de remaillage adaptatif. D'un point de vue qualitatif, la répartition des contributions locales à l'erreur estimée pour chacun des estimateurs est en accord avec celle des contributions locales à l'erreur vraie. Les éléments contribuant le plus à l'erreur globale sont concentrés dans les régions inférieure et supérieure des deux cavités, i.e. les zones les plus sollicitées.

On définit un indice d'efficacité local η_E sur chaque élément E du maillage éléments finis Ω_h comme le rapport entre la contribution élémentaire θ_E à l'erreur estimée θ et celle e_E à l'erreur vraie e :

$$\eta_E = \frac{\theta_E}{e_E} \quad (2.69)$$

La répartition spatiale des indices d'efficacité locaux est représentée sur la figure 2.7. Les valeurs des indices d'efficacité locaux varient de 0.676 à 6.181 pour la méthode

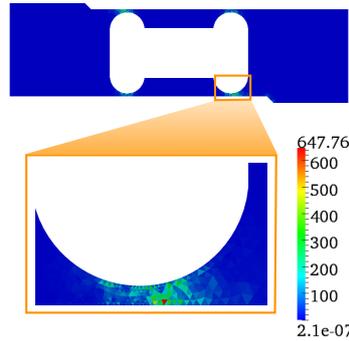


FIGURE 2.5: Cartes des contributions élémentaires (au carré) à l'erreur vraie e avec zoom sur la région la plus sollicitée.

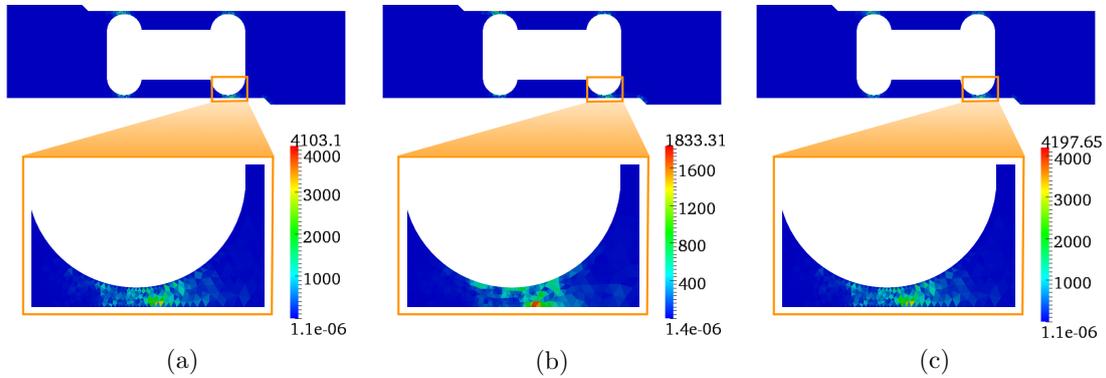


FIGURE 2.6: Cartes des contributions élémentaires (au carré) à l'erreur estimée θ obtenues à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c), avec zoom sur la région la plus sollicitée.

EET, de 0.595 à 3.288 pour la méthode SPET, et de 0.584 à 5.516 pour la méthode EESPT. On constate que beaucoup d'éléments ont un indice d'efficacité local bien inférieur à 1, même dans les régions les moins sollicitées.

4.1.2 Influence du choix de la fonctionnelle de minimisation intervenant dans les techniques EET et EESPT

Les quantités $\Delta \underline{q}^{(i)}|_{\Gamma}$ mises en jeu dans la fonctionnelle de minimisation sont $(\hat{\underline{b}}^{(i)} - \underline{b}^{(i)})|_{\Gamma}$ et $(\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)} - \lambda_i \underline{F}_h^{(i)})|_{\Gamma}$ pour les méthodes EET et EESPT, respectivement. Ces quantités sont associées à chacune des faces Γ appartenant aux ensembles $\mathcal{J}_i^{\mathcal{N}}$ et $\mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}$, respectivement, notés de manière condensée \mathcal{J}_i^{\square} (l'exposant \square désigne \mathcal{N} ou \mathcal{I}). Différentes fonctions-coût sont considérées pour l'étape de minimisation au sens des moindres carrés intervenant dans chacune des méthodes EET et EESPT :

$$0. \quad J_0(\underline{q}^{(i)}) = \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\square}} (\Delta \underline{q}^{(i)} \cdot \Delta \underline{q}^{(i)})|_{\Gamma};$$

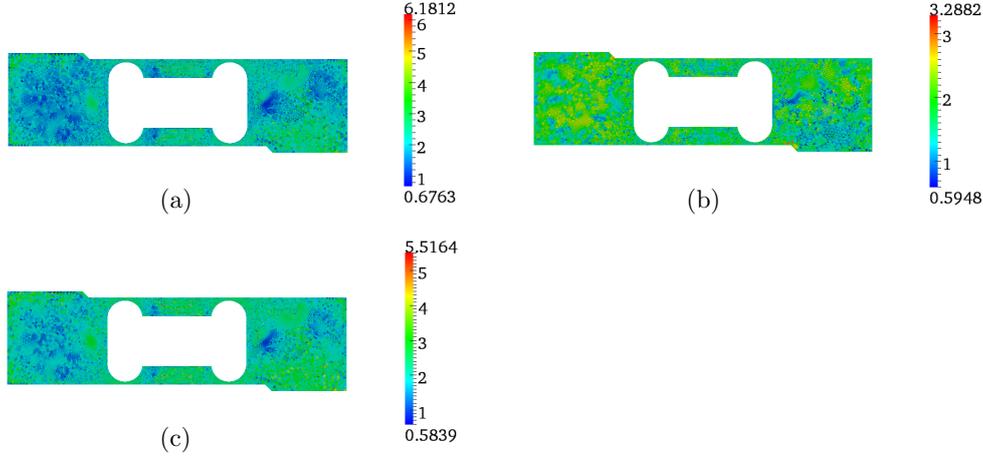


FIGURE 2.7: Carte des indices d'efficacité locaux η_E calculés à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c).

1. $J_1(\underline{q}^{(i)}) = \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}_i^\square} \frac{1}{h_\Gamma^2} (\Delta \underline{q}^{(i)} \cdot \Delta \underline{q}^{(i)})_{|\Gamma}$, qui tient compte de la taille caractéristique h_Γ de chaque face $\Gamma \in \mathcal{J}_i^\square$;
2. $J_2(\underline{q}^{(i)}) = \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}_i^\square} \frac{1}{h_\Gamma^2} \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} (\Delta \underline{q}^{(i)} \cdot \underline{n})_{|\Gamma}^2 + 2 (\Pi \Delta \underline{q}^{(i)} \cdot \Pi \Delta \underline{q}^{(i)})_{|\Gamma} \right)$, où Π

désigne l'opérateur de projection sur la partie plane. J_2 correspond à la densité d'énergie de déformation emmagasinée dans chaque face $\Gamma \in \mathcal{J}_i^\square$. Son expression est obtenue de manière explicite en supposant que la partie plane du champ de déformation associé au champ de contrainte statiquement admissible est continue à l'interface entre deux éléments. Le lecteur intéressé pourra consulter [Florentin (2002)] pour plus de détails sur l'établissement de cette fonctionnelle de minimisation.

L'influence du choix de la fonction-coût sur la qualité des estimateurs obtenus à partir des méthodes EET et EESPT est étudiée. L'ensemble des résultats est regroupé dans le tableau 2.2 et révèle que l'estimateur est d'autant plus précis que la fonction-coût contient d'informations physiques. L'indice d'efficacité global η connaît une décroissance relative d'environ 8% en choisissant la fonction-coût J_2 plutôt que J_0 .

Les bornes sur les indices d'efficacité locaux η_E calculés en utilisant chacune des fonctionnelles de minimisation considérées sont présentées dans le tableau 2.3. On constate que le choix de la fonction-coût a une faible influence sur ces bornes.

Ces résultats confirment que l'utilisation d'une fonction-coût ayant du sens physique, telle que J_2 , offre un léger gain en terme d'efficacité globale, bien que les bornes sur les indices d'efficacité locaux soient similaires pour l'ensemble des fonctionnelles de minimisation considérées.

TABLE 2.2: Influence du choix de la fonction-coût intervenant dans les méthodes EET et EESPT sur la qualité des estimateurs d'erreur globale.

Méthode	Erreur estimée			Erreur estimée relative			Indice d'efficacité		
	θ			$\bar{\theta}$ (%)			η		
	J_0	J_1	J_2	J_0	J_1	J_2	J_0	J_1	J_2
EET	799.791	802.325	737.646	56.59	56.77	52.19	2.387	2.395	2.202
EESPT	802.324	807.152	742.788	56.77	57.11	52.56	2.395	2.409	2.217

TABLE 2.3: Influence du choix de la fonction-coût intervenant dans les méthodes EET et EESPT sur les bornes des indices d'efficacité locaux.

Méthode	Bornes sur les indices d'efficacité locaux η_E		
	J_0	J_1	J_2
EET	0.676 - 6.181	0.584 - 5.516	0.641 - 5.794
EESPT	0.584 - 5.516	0.594 - 5.313	0.614 - 5.543

4.2 Structure fissurée 2D

Considérons maintenant un modèle 2D de structure fissurée, représenté sur la figure 2.8, présentant deux trous circulaires. La structure, de hauteur $H = 210$, est encadrée au niveau du trou central inférieur (de diamètre $D_i = 37.8$), soumise à un champ de pression interne constant $p_0 = 1$ au niveau du trou supérieur (de diamètre $D_s = 20$) et à une densité linéique d'effort $\underline{t} = +\underline{n}$ sur la partie supérieure gauche de sa frontière. Par ailleurs, elle présente une amorce de fissure initiée à la base du trou supérieur. Enfin, les deux lèvres de la fissure ainsi que les autres parties de la frontière sont supposées libres d'effort. La discrétisation de la structure est réalisée à l'aide d'un maillage éléments finis Ω_h constitué de 7 751 éléments triangulaires linéaires (resp. quadratiques), i.e. avec un degré d'interpolation $p = 1$ (resp. $p = 2$), et 4 122 (resp. 15 996) nœuds, i.e. 8 244 (resp. 31 992) d.d.l. (cf. figure 2.8). La densité du maillage est plus élevée au voisinage de la pointe de fissure ainsi qu'au niveau du trou supérieur, qui correspondent aux zones de fortes contraintes. La solution quasi-exacte de référence est calculée à partir d'une discrétisation très fine effectuée à l'aide d'un maillage de référence $\Omega_{\bar{h}}$ fait de 1 082 011 éléments triangulaires quadratiques et 2 170 788 nœuds, i.e. 4 341 576 d.d.l.

4.2.1 Comparaison des estimateurs

La figure 2.9 montre les cartes des champs de déplacement et de contrainte éléments finis obtenus pour une résolution du problème éléments finis menée à l'aide d'éléments linéaires et quadratiques, tandis que la figure 2.10 dépeint celle des champs de contrainte admissibles associés reconstruits à partir des trois méthodes.

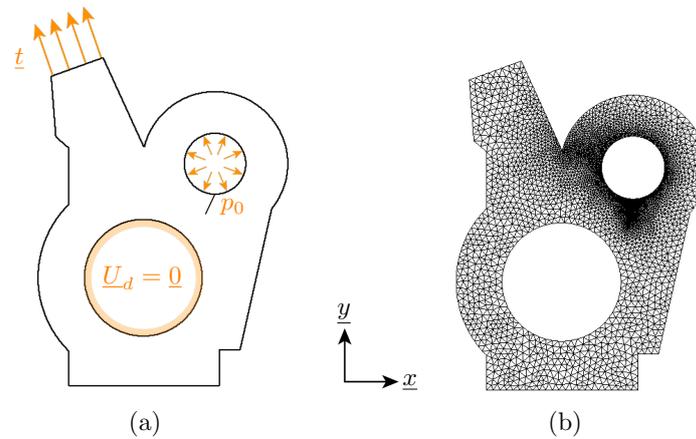


FIGURE 2.8: Modèle 2D de structure fissurée : géométrie et conditions aux limites (a), et maillage éléments finis (b).

Les zones de concentration de contraintes sont localisées au niveau des points anguleux de la structure et de la singularité située en pointe de fissure, ainsi qu'aux alentours du trou supérieur.

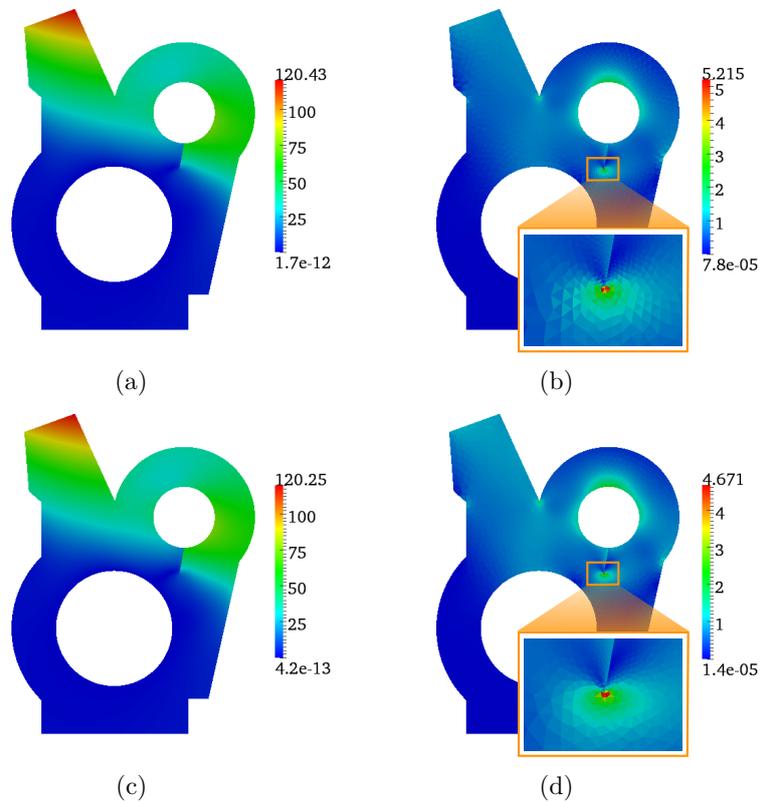


FIGURE 2.9: Cartes du champ de déplacement éléments finis \underline{u}_h (a) et (c), et du champ de contrainte éléments finis σ_h (b) et (d), pour $p = 1$ et $p = 2$, respectivement.

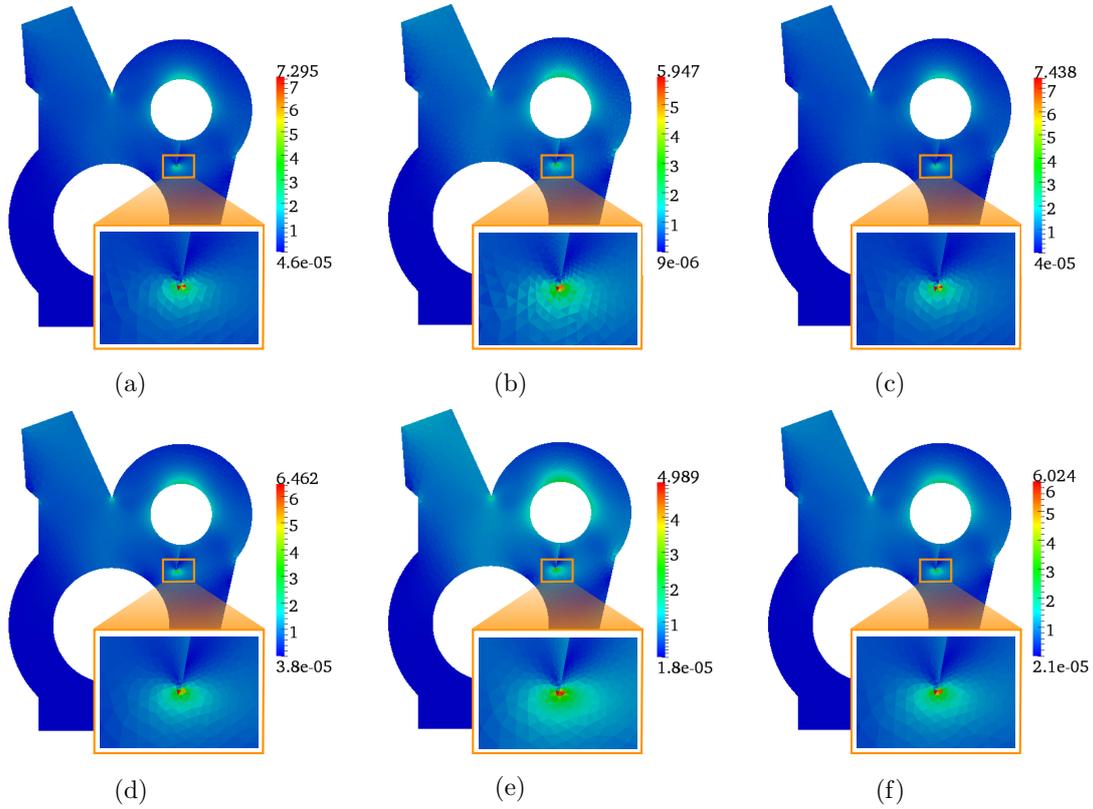


FIGURE 2.10: Cartes des champs de contrainte admissibles $\hat{\sigma}_h$ obtenus pour $p = 1$ à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c), et pour $p = 2$ à partir des méthodes EET (d), SPET (e) et EESPT (f), avec zoom sur la pointe de fissure.

La valeur quasi-exacte de l'erreur vraie $e = \|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}$ calculée à partir de la solution quasi-exacte obtenue sur le maillage de référence $\Omega_{\bar{h}}$ vaut :

$$e = \|\underline{e}_h\|_{u,\Omega} = \sqrt{\|\underline{u}_{ex}\|_{u,\Omega}^2 - \|\underline{u}_h\|_{u,\Omega}^2} \simeq \begin{cases} 6.6211 & \text{pour } p = 1 \\ 2.2350 & \text{pour } p = 2 \end{cases} \quad (2.70)$$

L'erreur vraie relative \bar{e} correspondante est égale à :

$$\bar{e} = \frac{e}{\|\underline{u}_{ex}\|_{u,\Omega}} \simeq \begin{cases} 7.31 \% & \text{pour } p = 1 \\ 2.47 \% & \text{pour } p = 2 \end{cases}$$

Le temps nécessaire au calcul (2.70) est d'environ 2 s et 4 s pour un degré d'interpolation $p = 1$ et $p = 2$, respectivement. Le coût engendré par le calcul des contributions élémentaires e_E atteint 5 h et 5 min (resp. 5 h et 30 min) pour $p = 1$ (resp. $p = 2$). On constate que l'emploi d'une base d'approximation éléments finis plus riche tend à diminuer la valeur de l'erreur de discrétisation globale e , confirmant ainsi les propriétés de convergence de la méthode des éléments finis.

Les performances associées à chacun des estimateurs globaux considérés sont données dans le tableau 2.4 pour un degré d'analyse éléments finis linéaire ($p = 1$) et quadratique ($p = 2$). Le coût de calcul engendré par chacune des méthodes est normalisé par rapport à celui requis pour la méthode EET avec $p = 1$. Tout d'abord, pour chacun des degrés d'interpolation p considérés, les estimateurs obtenus à partir des différentes méthodes conduisent à une estimation garantie θ de l'erreur vraie e , excepté dans le cas $p = 2$ avec la méthode SPET. Dans ce dernier cas, l'indice d'efficacité η obtenu est légèrement plus faible que 1 et suggère l'utilisation d'un degré additionnel k supérieur à 3 afin de conserver la propriété de borne supérieure théoriquement vérifiée par la méthode SPET. Par la suite, à degré d'interpolation p fixé, la méthode SPET offre une meilleure précision, malgré un coût de calcul supérieur, en comparaison avec les méthodes EET et EESPT. Enfin, pour chacune des méthodes prises séparément, l'utilisation d'éléments quadratiques apporte la meilleure précision sur l'erreur estimée θ , au prix d'un temps CPU plus élevé, comparée à l'emploi d'éléments linéaires.

TABLE 2.4: Comparaison des performances des estimateurs d'erreur globale obtenus à partir des méthodes EET, SPET et EESPT pour un degré d'interpolation $p = 1$ et $p = 2$.

$p = 1$	Erreur estimée	Erreur estimée relative	Indice d'efficacité	Temps CPU normalisé
Méthode	θ	$\bar{\theta}$ (%)	η	t
EET	16.1939	17.88	2.4458	1.000
SPET	11.3793	12.57	1.7187	4.022
EESPT	16.2512	17.95	2.4545	1.088

$p = 2$	Erreur estimée	Erreur estimée relative	Indice d'efficacité	Temps CPU normalisé
Méthode	θ	$\bar{\theta}$ (%)	η	t
EET	6.3037	6.96	2.8204	3.350
SPET	2.2033	2.43	0.9858	13.423
EESPT	6.9481	7.67	3.1087	3.533

La figure 2.11 montre la répartition spatiale des contributions locales (au carré) à la densité d'erreur vraie e pour $p = 1$ et $p = 2$, tandis que la figure 2.12 représente celles des contributions locales (au carré) à la densité d'erreur estimée θ obtenues à partir des différentes méthodes. En premier lieu, on constate que l'allure des cartes d'erreur est similaire dans les cas $p = 1$ et $p = 2$ et que seule l'échelle des valeurs des contributions locales varie, pour chacune des méthodes prises séparément. Ensuite, on remarque que la singularité localisée en pointe de fissure engendre une forte concentration d'erreur. Les différentes cartes relatives à l'erreur estimée θ reflètent correctement la localisation des contributions majoritaires à l'erreur vraie e .

La répartition spatiale des indices d'efficacité locaux est représentée sur la figure 2.13 dans le cas $p = 1$. Les valeurs des indices d'efficacité locaux η_E sont

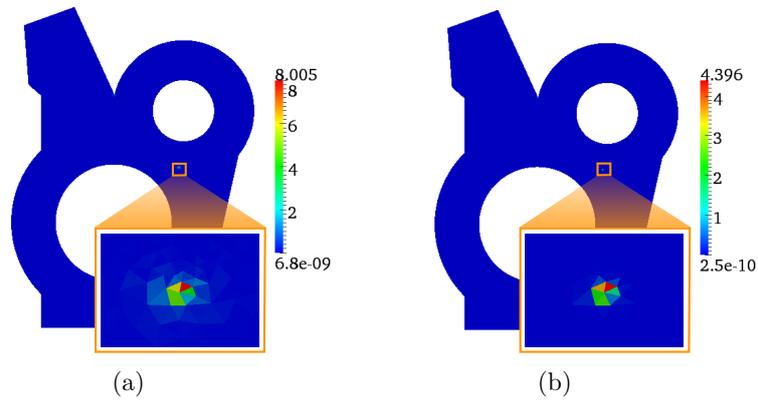


FIGURE 2.11: Cartes des contributions élémentaires (au carré) à la densité d'erreur vraie e (a) et (b) pour $p = 1$ et $p = 2$, respectivement, avec zoom sur la pointe de fissure.

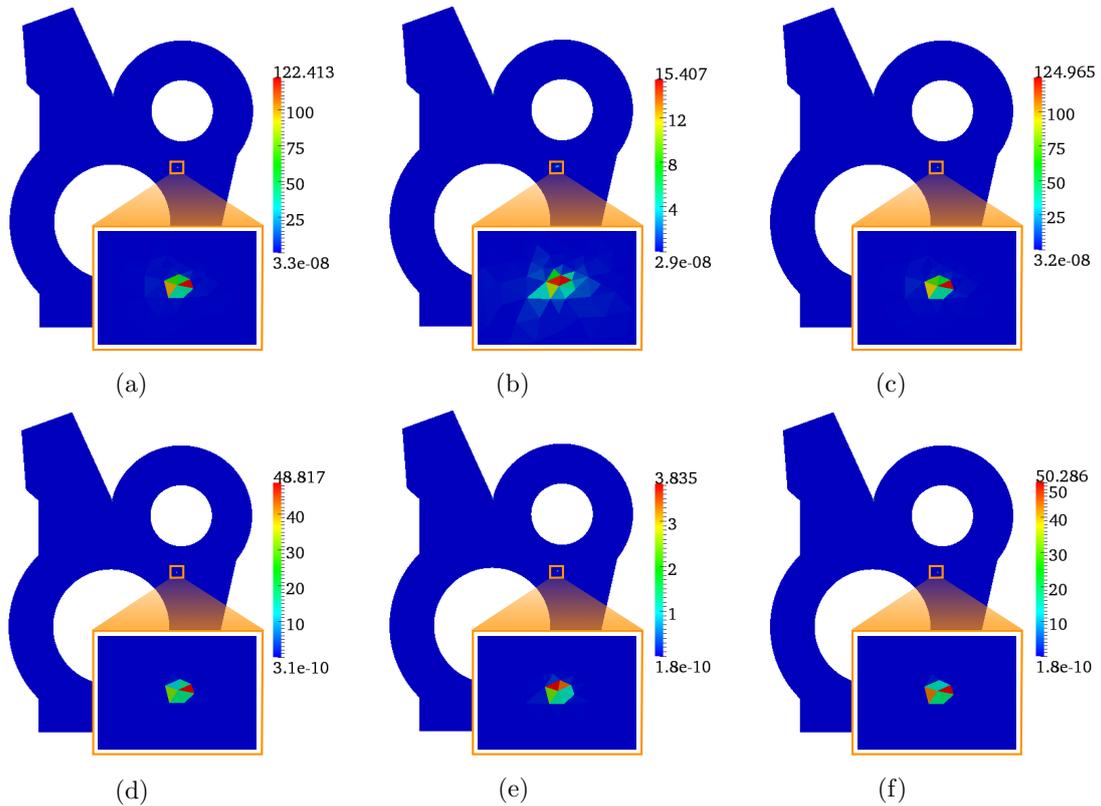


FIGURE 2.12: Cartes des contributions élémentaires (au carré) à la densité d'erreur estimée θ obtenues pour $p = 1$ à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c) et pour $p = 2$ à partir des méthodes EET (d), SPET (e) et EESPT (f), avec zoom sur la pointe de fissure.

comprises entre 0.301 et 6.446 (resp. entre 0.057 et 22.02) pour la méthode EET, entre 0.302 et 4.343 (resp. entre 0.041 et 13.93) pour la méthode SPET, et enfin entre 0.308 et 6.221 (resp. entre 0.051 et 30.78) pour la méthode EESPT dans le cas $p = 1$ (resp. $p = 2$). Les contributions élémentaires à l'erreur estimée ne constituent donc pas des mesures pertinentes et garanties des contributions élémentaires à l'erreur vraie.

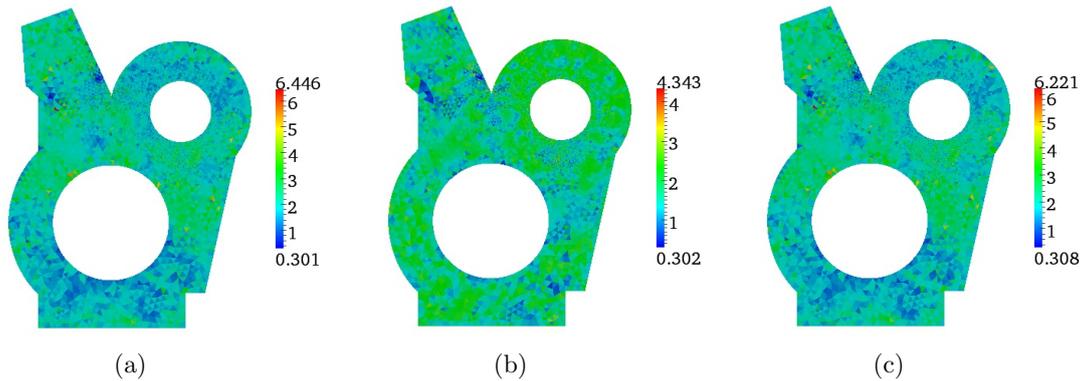


FIGURE 2.13: Carte des indices d'efficacité locaux η_E calculés à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c) dans le cas $p = 1$.

4.2.2 Influence du choix de la fonctionnelle de minimisation intervenant dans les techniques EET et EESPT

L'impact des différentes fonctionnelles de minimisation présentées dans la section 4.1.2 sur la pertinence des estimateurs associés aux méthodes EET et EESPT est étudié. Les résultats sont regroupés dans le tableau 2.5 pour les degrés d'interpolation éléments finis $p = 1$ et $p = 2$. Dans le cas $p = 1$, les indices d'efficacité obtenus avec la fonction-coût J_2 ont des valeurs légèrement plus faibles que celles calculées en utilisant les deux autres fonctionnelles, i.e. J_0 et J_1 . En revanche, dans le cas $p = 2$, les indices d'efficacité déterminés à partir de J_2 ont des valeurs très similaires, voire légèrement plus élevées, comparées à celles obtenues à partir de J_0 et J_1 . L'examen des résultats ne permet pas de tirer des conclusions précises, dans la mesure où le choix de la fonctionnelle de minimisation ne semble pas avoir une grande influence sur la précision des estimateurs d'erreur globale.

Les bornes sur les indices d'efficacité locaux η_E obtenues dans les cas $p = 1$ et $p = 2$ sont données dans le tableau 2.6. Ces résultats corroborent ceux obtenus dans l'exemple précédent, dans le sens où ces estimateurs d'erreur globale restent inutilisables en tant qu'estimateurs d'erreur locale.

TABLE 2.5: Influence du choix de la fonction-coût intervenant dans les méthodes EET et EESPT sur la qualité des estimateurs d'erreur globale pour les degrés d'interpolation $p = 1$ et $p = 2$.

$p = 1$	Erreur estimée			Erreur estimée relative			Indice d'efficacité		
	θ			$\bar{\theta}$ (%)			η		
Méthode	J_0	J_1	J_2	J_0	J_1	J_2	J_0	J_1	J_2
EET	16.1939	16.2513	15.9426	17.88	17.95	17.61	2.4458	2.4545	2.4079
EESPT	16.2512	16.3488	16.0396	17.95	18.06	17.71	2.4545	2.4692	2.4225

$p = 2$	Erreur estimée			Erreur estimée relative			Indice d'efficacité		
	θ			$\bar{\theta}$ (%)			η		
Méthode	J_0	J_1	J_2	J_0	J_1	J_2	J_0	J_1	J_2
EET	6.3037	6.3098	6.3121	6.96	6.97	6.97	2.8204	2.8231	2.8242
EESPT	6.9481	6.9447	6.9532	7.67	7.67	7.68	3.1087	3.1072	3.111

TABLE 2.6: Influence du choix de la fonction-coût intervenant dans les méthodes EET et EESPT sur les bornes des indices d'efficacité locaux pour les degrés d'interpolation $p = 1$ et $p = 2$.

$p = 1$	Bornes sur les indices d'efficacité locaux η_E		
	J_0	J_1	J_2
EET	0.301 - 6.446	0.308 - 6.221	0.363 - 6.213
EESPT	0.308 - 6.221	0.327 - 6.300	0.377 - 6.275

$p = 2$	Bornes sur les indices d'efficacité locaux η_E		
	J_0	J_1	J_2
EET	0.057 - 22.02	0.059 - 22.01	0.063 - 22.01
EESPT	0.051 - 30.78	0.052 - 30.80	0.049 - 30.80

4.3 Plaque trouée 3D

Considérons à présent un modèle 3D de plaque perforée en son centre soumise à un effort de traction sur ses extrémités droite et gauche, illustré sur la figure 2.14. La plaque a une longueur $L = 20$, une largeur $l = 15$, une épaisseur $e = 1$, et présente un trou circulaire de diamètre $d = 2.5$. De par les symétries du problème, l'étude peut être restreinte à celle d'un huitième de plaque. Des conditions de symétrie sont appliquées sur les surfaces orthogonales bleues ciel représentées sur la figure 2.14. La plaque est soumise à une densité surfacique d'effort $\underline{t} = +\underline{x}$ sur son extrémité droite. La surface délimitée par le trou ainsi que les autres parties de la frontière sont des bords libres d'effort. Le maillage éléments finis Ω_h , constitué de 23 493 éléments tétraédriques linéaires ($p = 1$) et 6 125 nœuds, i.e. 18 375 d.d.l., est représenté sur la figure 2.14. La densité du maillage augmente à proximité du trou qui est la région

la plus sollicitée en contraintes. Le maillage très fin de référence $\Omega_{\bar{h}}$ utilisé pour déterminer la solution quasi-exacte de référence est quant à lui obtenu en sous-découpant chaque tétraèdre du maillage Ω_h en 64 tétraèdres. Par conséquent, il est constitué de 1 503 552 éléments tétraédriques linéaires et 284 753 nœuds, i.e. 854 259 d.d.l.

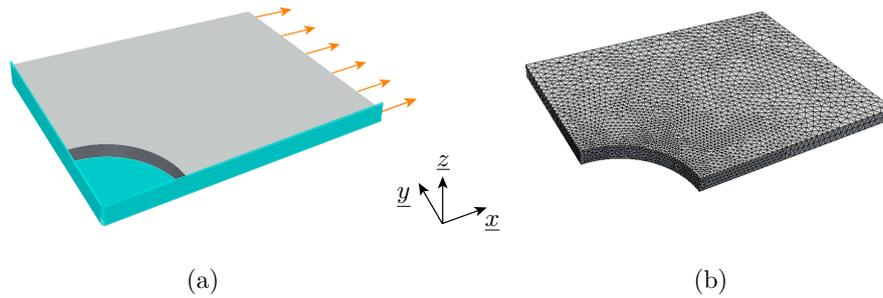


FIGURE 2.14: Modèle 3D de plaque trouée : géométrie et conditions aux limites (a), et maillage éléments finis (b). Les plans orthogonaux bleus ciel représentent des conditions de symétrie.

4.3.1 Comparaison des estimateurs

Les cartes des champs de déplacement et de contrainte éléments finis sont données sur la figure 2.15, tandis que celles des champs de contrainte admissibles calculés en utilisant les trois méthodes considérées sont représentées sur la figure 2.16. La région située à proximité du haut du trou présente une concentration de contraintes.

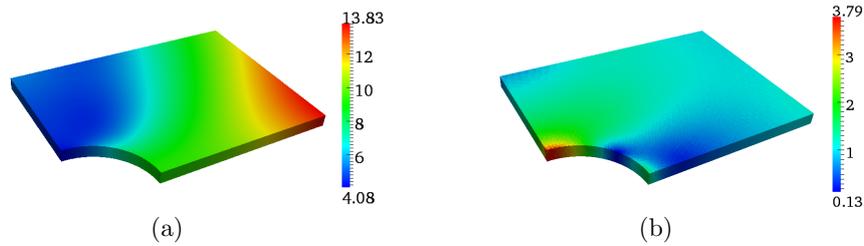


FIGURE 2.15: Cartes du champ de déplacement éléments finis \underline{u}_h (a), et du champ de contrainte éléments finis σ_h (b).

Le calcul de la valeur quasi-exacte de l'erreur vraie $e = \|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}$ correspondant à l'erreur de référence conduit à :

$$e = \|\underline{e}_h\|_{u,\Omega} = \sqrt{\|\underline{u}_{ex}\|_{u,\Omega}^2 - \|\underline{u}_h\|_{u,\Omega}^2} \simeq 0.1688 \quad (2.71)$$

L'erreur vraie relative \bar{e} correspondante vaut :

$$\bar{e} = \frac{e}{\|\underline{u}_{ex}\|_{u,\Omega}} \simeq 2.47 \%$$

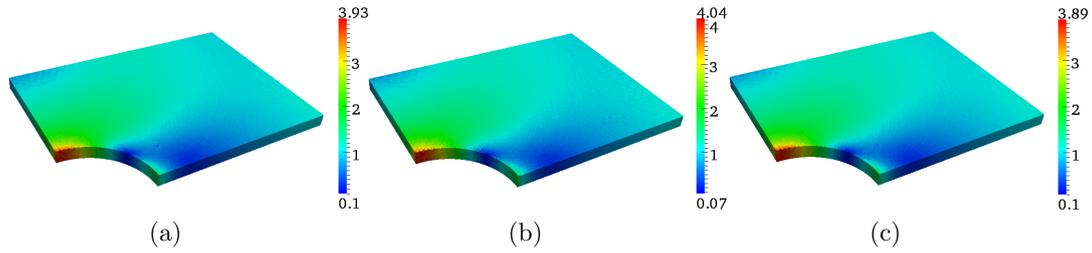


FIGURE 2.16: Cartes des champs de contrainte admissibles $\hat{\sigma}_h$ obtenus à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c).

Le temps requis pour effectuer le calcul (2.71) est d'environ 1 s, tandis que celui nécessaire au calcul des contributions élémentaires $e_E = \|\underline{e}_h\|_{u,E}$ à l'erreur vraie e atteint environ 22 h.

Pour chacune des méthodes, les valeurs de l'erreur estimée θ , de l'erreur estimée relative $\bar{\theta}$, de l'indice d'efficacité globale η ainsi que du temps de calcul normalisé t (par rapport à celui de la méthode EET) sont regroupées et comparées dans le tableau 2.7. Les résultats obtenus confirment les conclusions tirées en sections 4.1.1 et 4.2.1 sur les exemples 2D précédents. La méthode SPET apporte une meilleure précision, mais est aussi plus coûteuse que les deux autres méthodes. En effet, le temps de calcul engendré par la méthode SPET est environ cinq fois plus élevé que celui nécessaire aux méthodes EET et EESPT.

TABLE 2.7: Comparaison des performances des estimateurs d'erreur globale obtenus à partir des méthodes EET, SPET et EESPT.

Méthode	Erreur estimée θ	Erreur estimée relative $\bar{\theta}$ (%)	Indice d'efficacité η	Temps CPU normalisé t
EET	0.9227	13.53	5.467	1.000
SPET	0.5928	8.69	3.513	5.368
EESPT	0.9119	13.37	5.403	1.009

Les figures 2.17 et 2.18 présentent les répartitions spatiales des contributions élémentaires (au carré) à la densité d'erreur vraie e et d'erreur estimée θ pour les trois méthodes. Seuls les éléments contribuant le plus à ces mesures globales de l'erreur de discrétisation sont représentés. Les principales contributions à ces mesures d'erreur globale sont localisées aux alentours du trou. Bien que les cartes d'erreur obtenues à partir des différentes méthodes aient une allure similaire, on constate que la méthode SPET fournit des contributions locales à l'erreur estimée de meilleure qualité que les méthodes EET et EESPT.

Les valeurs des indices d'efficacité locaux η_E ont également été calculées à partir des contributions élémentaires e_E à l'erreur vraie e et de celles θ_E à l'erreur estimée

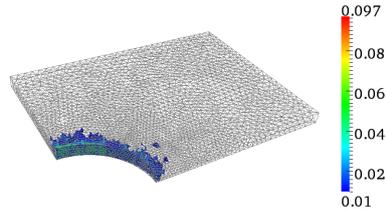


FIGURE 2.17: Cartes des contributions élémentaires pertinentes (au carré) à la densité d'erreur vraie e .

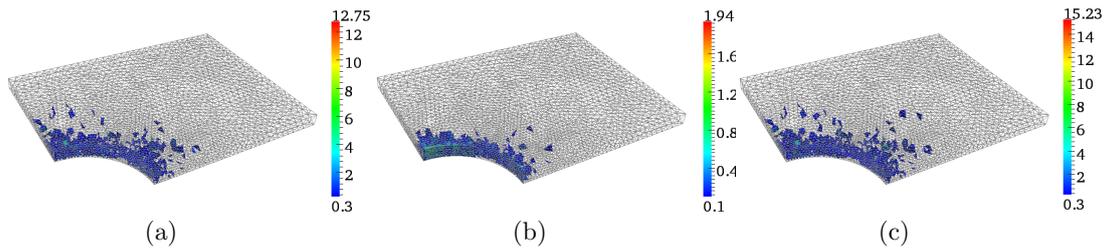


FIGURE 2.18: Cartes des contributions élémentaires pertinentes (au carré) à la densité d'erreur estimée θ obtenues à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c).

θ obtenues par les différents estimateurs d'erreur. Les valeurs des indices d'efficacité locaux varient de 1.253 à 34.930 pour la méthode EET, de 1.086 à 9.458 pour la méthode SPET, et de 0.999 à 34.377 pour la méthode EESPT. On remarque que la quasi-totalité des éléments a un indice d'efficacité local supérieur à 1 pour les trois méthodes. Néanmoins, rappelons que les estimateurs d'erreur globale étudiés ne peuvent être directement utilisés en vue d'une estimation de l'erreur de discrétisation locale, en particulier ceux fournis par les méthodes EET et EESPT, car les contributions élémentaires maximales à l'estimateur d'erreur θ sur-estiment largement les contributions associées à l'erreur vraie e .

4.3.2 Influence du choix de la fonctionnelle de minimisation intervenant dans les techniques EET et EESPT

Une étude de l'influence du choix de la fonction-coût sur les performances des estimateurs d'erreur obtenus à partir des méthodes EET et EESPT est à présent menée. Les résultats numériques sont présentés dans le tableau 2.8 et montrent que l'indice d'efficacité global η subit une décroissance relative faible d'environ 3% pour la méthode EET et une hausse légère de 1% pour la méthode EESPT en prenant la fonction-coût J_2 plutôt que J_0 . L'utilisation de la fonction-coût J_2 permet d'obtenir un léger gain en terme d'indice d'efficacité comparée à la fonction-coût J_1 pour les deux méthodes.

Les bornes sur les indices d'efficacité locaux η_E obtenues à partir des différentes

TABLE 2.8: Influence du choix de la fonction-coût intervenant dans les méthodes EET et EESPT sur la qualité des estimateurs d'erreur globale.

Méthode	Erreur estimée			Erreur estimée relative			Indice d'efficacité		
	J_0	J_1	J_2	J_0	J_1	J_2	J_0	J_1	J_2
EET	0.9227	0.9119	0.8906	13.53	13.37	13.05	5.4671	5.4031	5.2769
EESPT	0.9119	0.9404	0.9136	13.37	13.78	13.39	5.4031	5.5720	5.4134

fonctions-coût sont reportées dans le tableau 2.9. L'analyse des résultats révèle que les deux estimateurs d'erreur globale ne sont pas adaptés à l'estimation directe d'erreur locale pour l'ensemble des fonctions-coût considérées.

TABLE 2.9: Influence du choix de la fonction-coût intervenant dans les méthodes EET et EESPT sur les bornes des indices d'efficacité locaux.

Méthode	Bornes sur les indices d'efficacité locaux η_E		
	J_0	J_1	J_2
EET	1.253 - 34.930	0.999 - 34.377	1.076 - 40.694
EESPT	0.999 - 34.377	0.885 - 35.401	0.785 - 42.717

4.4 Tête de réacteur nucléaire 3D

On s'intéresse maintenant à une tête de réacteur nucléaire constituant le système de fermeture (couvercle) d'une cuve de réacteur nucléaire et assurant son étanchéité. Du fait de la symétrie de révolution, seul un quart de la structure est modélisé et représenté sur la figure 2.19. La tête de réacteur a une hauteur $H = 91.8$, un rayon intérieur $R_i = 51.5$ et une épaisseur $e = 8.25$. La partie inférieure de ce couvercle présente un épaulement radial sur sa paroi intérieure servant de surface d'appui à la cuve. La partie supérieure comporte deux conduites verticales de hauteur moyenne $h \simeq 21$, de diamètre intérieur $d_i = 12$ et de diamètre extérieur $d_e = 16$. Chaque conduite présente un léger épaulement servant de butée à un dispositif de contrôle. L'axe des conduites verticales est situé à une distance $d = 38$ de l'axe de la structure. En outre, la tête de réacteur contient une collerette d'une hauteur $h_c = 23$ servant au bridage avec la cuve et contenant un ensemble de trous de diamètre $d_t = 5.75$. Dans l'assemblage complet, la tête de réacteur est fixée à la cuve via la collerette à l'aide de 40 boulons.

Des conditions de symétrie sont appliquées sur les surfaces orthogonales bleues ciel représentées sur la figure 2.19. La paroi intérieure de la structure est soumise à un champ de pression constant $p_0 = 1$. Une densité surfacique d'effort $\underline{t} = -\underline{n}$

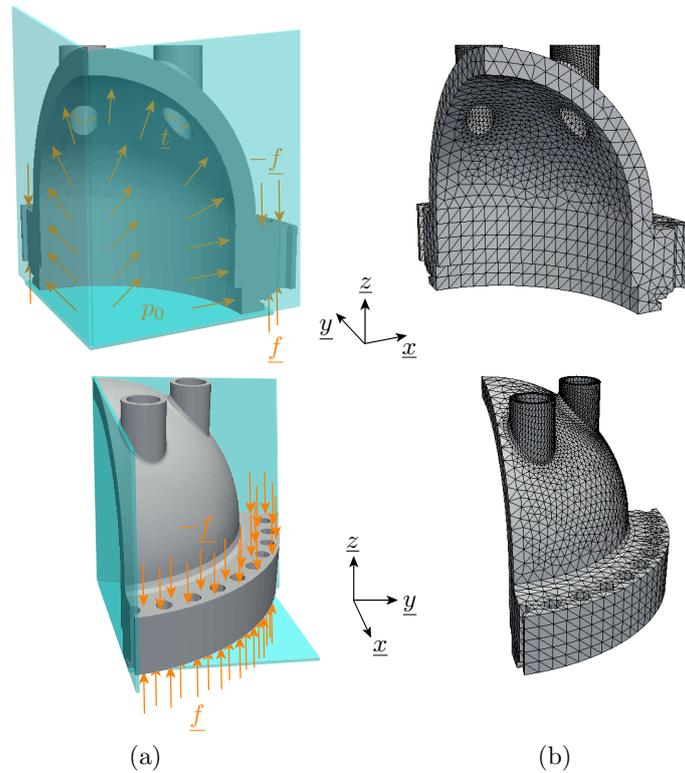


FIGURE 2.19: Modèle 3D de tête de réacteur nucléaire : géométrie et conditions aux limites (a), et maillage éléments finis (b). Les plans orthogonaux bleus ciel représentent des conditions de symétrie.

est appliquée sur la surface interne de chacune des conduites, située sous l'épaulement. Ces deux conditions de chargement modélisent l'action de l'eau sur la tête de réacteur. Par ailleurs, les deux faces de la collerette sont soumises à une densité surfacique d'effort $\underline{f} = \pm z$ représentant l'effet de la précharge appliquée sur chacun des boulons. La géométrie, le chargement ainsi que le maillage éléments finis Ω_h , constitué de 38 099 éléments tétraédriques linéaires ($p = 1$) et 8 730 nœuds, i.e. 26 190 d.d.l., sont donnés sur la figure 2.19. Le maillage fin de référence $\Omega_{\bar{h}}$ est quant à lui obtenu en subdivisant chaque tétraèdre du maillage Ω_h en 8 tétraèdres. Par conséquent, il contient 304 792 éléments tétraédriques linéaires et 60 381 nœuds, i.e. 181 143 d.d.l.

Remarque 2.14 :

En raison des limites du solveur direct utilisé, il n'a pas été possible de calculer une solution de référence plus fine à l'aide d'un maillage très fin $\Omega_{\bar{h}}$ obtenu en sous-découpant chaque tétraèdre du maillage Ω_h en 64 tétraèdres.

4.4.1 Comparaison des estimateurs

Les figures 2.20 et 2.21 représentent les cartes des champs de déplacement et de contrainte éléments finis ainsi que celles des champs de contrainte admissibles obtenus par chacune des méthodes EET, SPET et EESPT, respectivement. La répartition des différents champs de contrainte admissibles sur la structure est cohérente avec celle du champ de contrainte éléments finis. Les zones présentant les plus fortes contraintes sont situées à la base des conduites verticales.

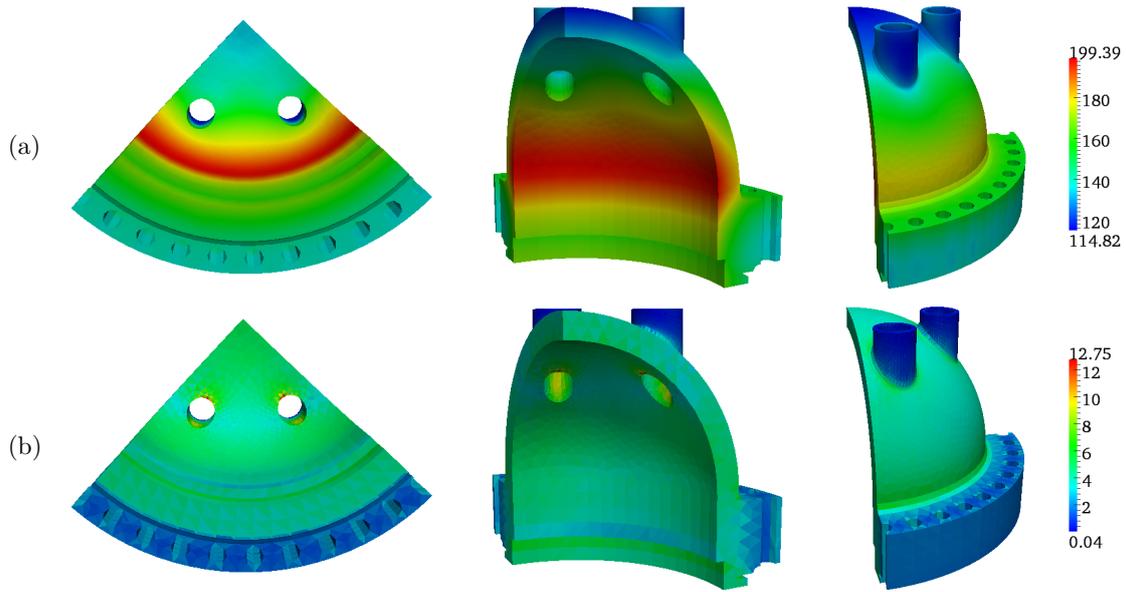


FIGURE 2.20: Cartes du champ de déplacement éléments finis \underline{u}_h (a) et du champ de contrainte éléments finis σ_h (b) sous différentes vues.

L'erreur de référence représentant une mesure fine de l'erreur vraie a été déterminée à partir d'une solution fine de référence :

$$e = \|\underline{e}_h\|_{u,\Omega} = \sqrt{\|\underline{u}_{ex}\|_{u,\Omega}^2 - \|\underline{u}_h\|_{u,\Omega}^2} \simeq 135.434 \quad (2.72)$$

L'erreur vraie relative \bar{e} correspondante vaut :

$$\bar{e} = \frac{e}{\|\underline{u}_{ex}\|_{u,\Omega}} \simeq 12.27 \%$$

Le temps nécessaire au calcul (2.72) est quasi-négligeable d'environ 0.25 s, comparé au coût engendré par le calcul des contributions élémentaires $e_E = \|\underline{e}_h\|_{u,E}$ qui atteint 7 h.

La pertinence et l'efficacité associées à chaque estimateur d'erreur sont à nouveau comparées. Le tableau 2.10 regroupe l'erreur estimée θ , l'indice d'efficacité η et le

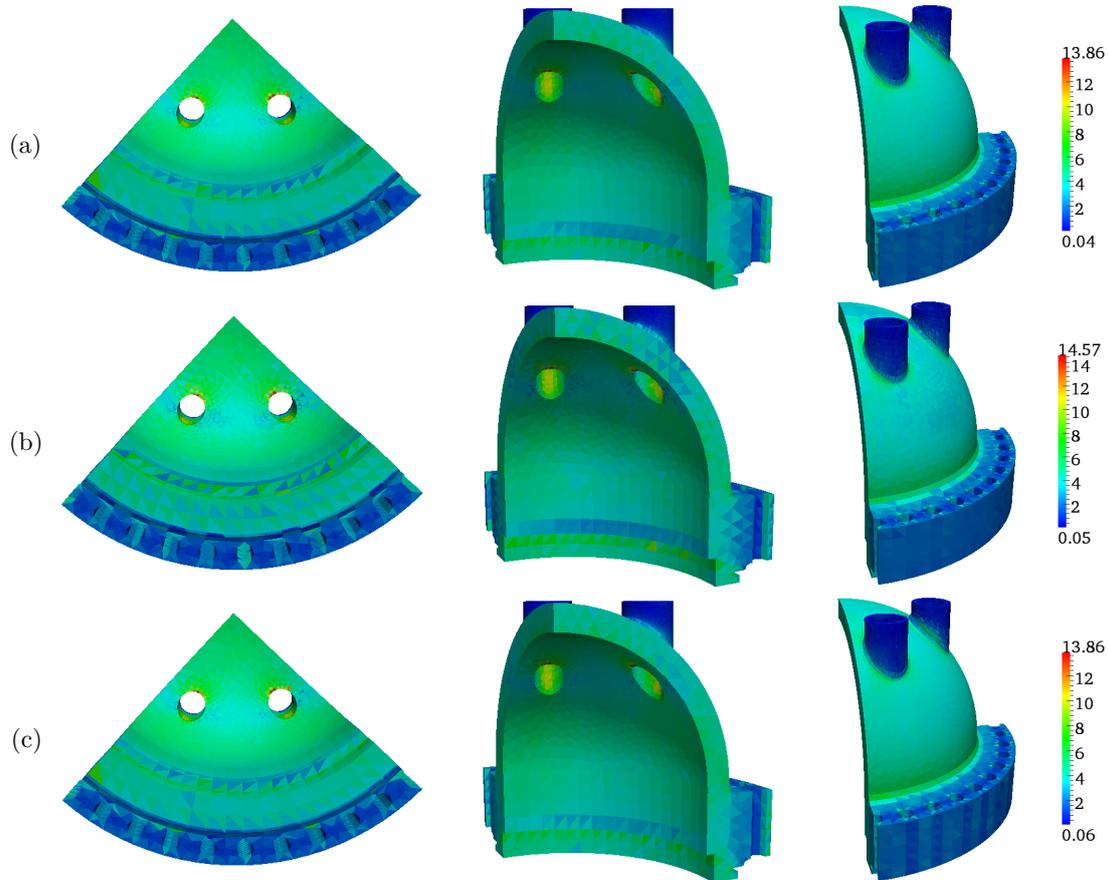


FIGURE 2.21: Cartes des champs de contrainte admissibles $\hat{\sigma}_h$ obtenus à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c) sous différentes vues.

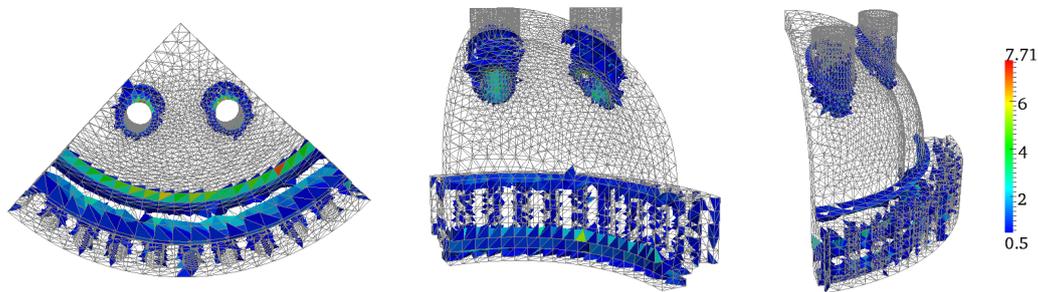
temps de calcul normalisé t pour chacun des estimateurs. Les résultats confirment la précision et la consistance des différents estimateurs proposés. Notons que les valeurs relativement élevées des indices d'efficacité sont en partie imputables au calcul de l'erreur de référence e réalisé à partir d'une solution de référence obtenue à l'aide d'un maillage $\Omega_{\bar{h}}$ trop grossier (cf. remarque 2.14). L'obtention d'une solution de référence plus fine conduirait à une meilleure approximation de l'erreur vraie et à des indices d'efficacité plus faibles.

Les distributions spatiales des contributions élémentaires (au carré) à la densité d'erreur vraie e et à celle des différentes erreurs estimées θ sont montrées sur les figures 2.22 et 2.23, respectivement. Ces dernières présentent uniquement les éléments dont la contribution est pertinente. Les contributions prépondérantes aux différentes mesures d'erreur globale sont principalement localisées au niveau de la jonction entre le dôme et les conduites verticales ainsi qu'autour de la collerette. De plus, les estimateurs obtenus à partir des méthodes EET et EESPT fournissent des contributions locales relativement élevées associées aux éléments présentant des

TABLE 2.10: Comparaison des performances des estimateurs d'erreur globale obtenus à partir des méthodes EET, SPET et EESPT.

Méthode	Erreur estimée θ	Erreur estimée relative $\bar{\theta}$ (%)	Indice d'efficacité η	Temps CPU normalisé t
EET	812.771	73.66	6.001	1.000
SPET	604.311	54.77	4.462	5.017
EESPT	787.983	71.41	5.818	1.007

distorsions géométriques localisées.

**FIGURE 2.22:** Cartes des contributions élémentaires pertinentes (au carré) à la densité d'erreur vraie e sous différentes vues.

Les valeurs des indices d'efficacité locaux η_E ont à nouveau été calculées et sont comprises entre 1.163 et 58.900 pour la méthode EET, entre 1.074 et 22.756 pour la méthode SPET, et enfin entre 1.201 et 51.274 pour la méthode EESPT. Chacune des contributions élémentaires à l'erreur estimée constitue donc une borne supérieure de l'erreur vraie au niveau élémentaire, mais le manque de pertinence de cette mesure locale de l'erreur rend inappropriée, voire inutile, son utilisation en tant que procédure d'estimation d'erreur locale.

4.4.2 Influence du choix de la fonctionnelle de minimisation intervenant dans les techniques EET et EESPT

L'influence du choix des fonctionnelles de minimisation mises en jeu dans les méthodes EET et EESPT est investiguée. Les résultats sont répertoriés dans le tableau 2.11 et comparables à ceux obtenus pour l'exemple 3D précédent. On obtient une faible diminution de 4% de l'indice d'efficacité global pour la méthode EET et une légère augmentation de 3% pour la méthode EESPT entre les fonctions-coût J_2 et J_0 . L'utilisation de la fonctionnelle J_2 apporte une meilleure précision pour chacune des méthodes en comparaison à la fonctionnelle J_1 . De manière générale, le choix de la fonction-coût a un impact relativement faible sur la pertinence des deux estimateurs d'erreur globale.



FIGURE 2.23: Cartes des contributions élémentaires pertinentes (au carré) à la densité d'erreur estimée θ obtenues à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c) sous différentes vues.

TABLE 2.11: Influence du choix de la fonction-coût intervenant dans les méthodes EET et EESPT sur la qualité des estimateurs d'erreur globale.

Méthode	Erreur estimée			Erreur estimée relative			Indice d'efficacité		
	J_0	J_1	J_2	J_0	J_1	J_2	J_0	J_1	J_2
EET	812.771	787.989	782.711	73.66	71.42	70.94	6.001	5.818	5.779
EESPT	787.983	815.111	809.267	71.41	73.87	73.34	5.818	6.019	5.975

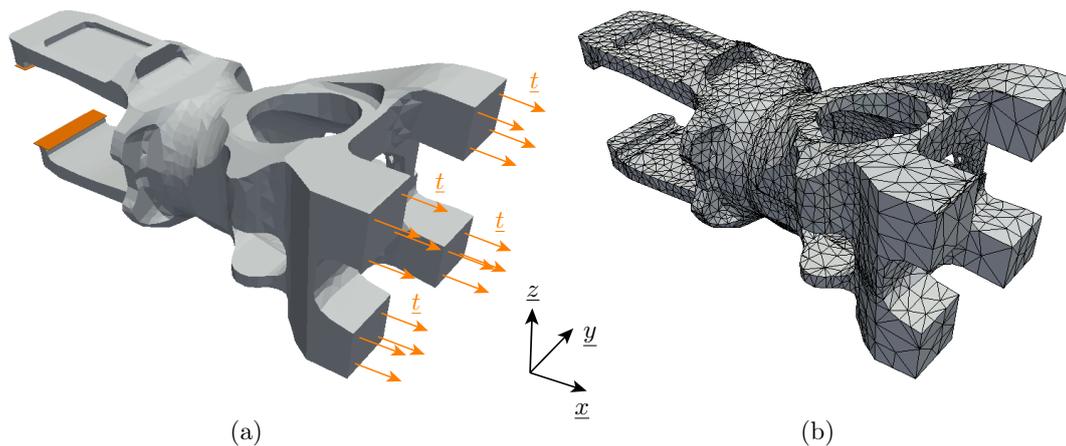
Les bornes des indices d'efficacité locaux η_E obtenus à partir de chacune des fonctions-coût sont données dans le tableau 2.12 pour les méthodes EET et EESPT. L'observation des bornes indique que les deux estimateurs d'erreur globale associés ne sont pas adaptés à une analyse locale pour l'ensemble des fonctions-coût considérées.

TABLE 2.12: Influence du choix de la fonction-coût intervenant dans les méthodes EET et EESPT sur les bornes des indices d'efficacité locaux.

Méthode	Bornes sur les indices d'efficacité locaux η_E		
	J_0	J_1	J_2
EET	1.163 - 58.900	1.201 - 51.275	1.095 - 59.823
EESPT	1.201 - 51.274	0.948 - 57.349	0.878 - 62.153

4.5 Manchon d'hélicoptère 3D

On considère un composant de l'hélicoptère militaire NH90, produit par la société Eurocopter et actuellement en service pour l'industrie aéronautique navale et celle du transport tactique de personnel notamment. Cette structure, représentée sur la figure 2.24, est un manchon du rotor principal qui sert de joint d'accouplement entre les parties fixe et mobile de l'hélicoptère. Le manchon est encastré à son extrémité gauche et soumis à une densité surfacique d'effort unitaire $\underline{t} = +\underline{n}$ à son extrémité droite. Notons que le plan de chargement n'est pas exactement orthogonal à l'axe principal \underline{x} de la structure. La géométrie, les conditions aux limites ainsi que le maillage Ω_h considéré, constitué de 19 778 éléments tétraédriques linéaires ($p = 1$) et 5 898 nœuds, i.e. 17 694 d.d.l., sont montrés sur la figure 2.24. Le maillage fin de référence $\Omega_{\bar{h}}$ est construit en subdivisant chaque tétraèdre en 64 tétraèdres. Par conséquent, celui-ci contient 1 265 792 éléments tétraédriques linéaires et 250 274 nœuds, i.e. 750 822 d.d.l. Remarquons que le maillage éléments finis présente des éléments très distordus et aplatis.

**FIGURE 2.24:** Modèle 3D de manchon d'hélicoptère : géométrie et conditions aux limites (a), et maillage éléments finis (b). Les surfaces oranges représentent des conditions en déplacement homogènes (encastrement).

4.5.1 Comparaison des estimateurs

Les régions de la structure les plus chargées en contraintes correspondent aux extrémités encastrées, mais elles ne constituent pas des zones dimensionnantes. En revanche, la région sélectionnée sur la figure 2.25 joue un rôle essentiel dans la phase de dimensionnement de ce manchon. La figure 2.25 représente les cartes du champ de déplacement et du champ de contrainte éléments finis dans la zone d'intérêt, tandis que la figure 2.26 montre celles des champs de contrainte admissibles déterminés à partir de chacune des trois méthodes considérées.

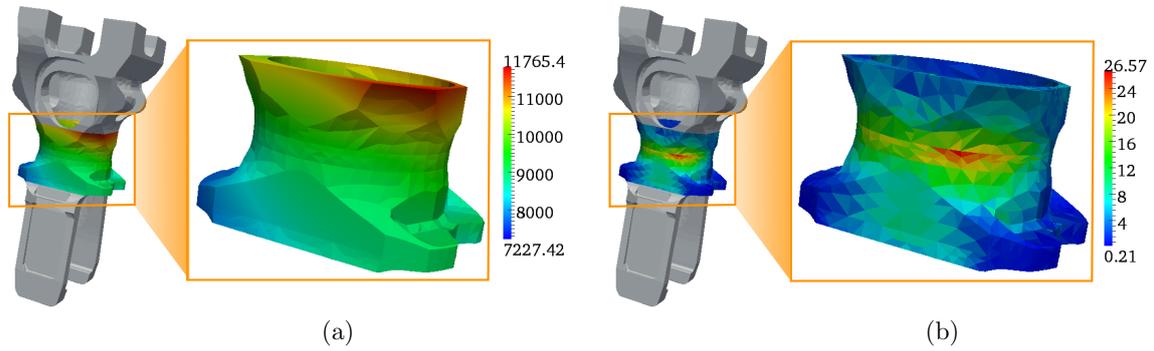


FIGURE 2.25: Cartes du champ de déplacement éléments finis \underline{u}_h (a) et du champ de contrainte éléments finis σ_h (b).

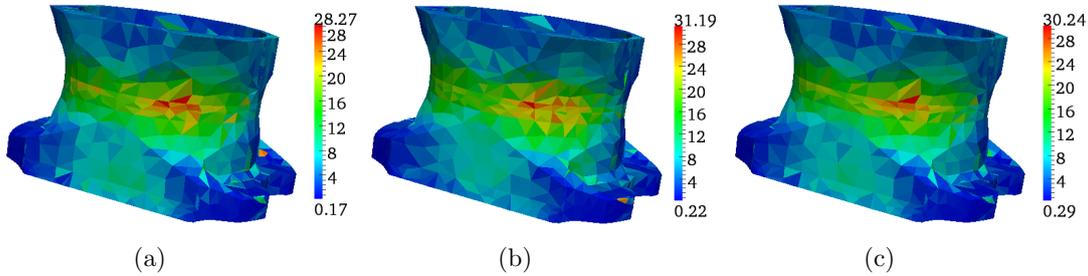


FIGURE 2.26: Cartes des champs de contrainte admissibles $\hat{\sigma}_h$ obtenus à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c).

La valeur quasi-exacte de l'erreur vraie, i.e. l'erreur de référence, est calculée directement à partir d'une solution de référence :

$$e = \|\underline{e}_h\|_{u,\Omega} = \sqrt{\|\underline{u}_{ex}\|_{u,\Omega}^2 - \|\underline{u}_h\|_{u,\Omega}^2} \simeq 3852.53 \quad (2.73)$$

L'erreur vraie relative \bar{e} correspondante vaut :

$$\bar{e} = \frac{e}{\|\underline{u}_{ex}\|_{u,\Omega}} \simeq 34.77 \%$$

Le coût nécessaire au calcul (2.73) prend environ 1 s, alors que celui nécessaire au calcul des contributions locales $e_E = \|\underline{e}_h\|_{u,E}$ atteint plus de 14 h.

L'évaluation des performances des différents estimateurs est donnée dans le tableau 2.13. Les indices d'efficacité globaux η obtenus à partir des méthodes EET et EESPT sont très élevés en raison des distorsions géométriques localisées du maillage éléments finis Ω_h . On constate la présence d'un nombre important d'éléments distordus ou aplatis qui apportent une contribution substantielle à l'erreur globale. Par conséquent, les estimateurs issus des méthodes EET et EESPT sont très sensibles à la qualité du maillage éléments finis Ω_h .

TABLE 2.13: Comparaison des performances des estimateurs d'erreur globale obtenus à partir des méthodes EET, SPET et EESPT.

Méthode	Erreur estimée θ	Erreur estimée relative $\hat{\theta}$ (%)	Indice d'efficacité η	Temps CPU normalisé t
EET	58 061	524.06	15.071	1.000
SPET	18 948	171.03	4.918	4.828
EESPT	42 078	379.80	10.922	1.007

Les cartes des contributions élémentaires (au carré) à la densité d'erreur vraie e ainsi qu'à celle d'erreur estimée θ associée à chacune des méthodes de construction de champs admissibles sont données sur les figures 2.27 et 2.28, respectivement. Les contributions locales θ_E à la densité d'erreur estimée θ sont représentées en échelle logarithmique. Seuls les éléments du maillage éléments finis Ω_h dont la contribution est suffisamment pertinente sont représentés. Ces cartes reflètent la même tendance, à savoir une contribution prépondérante des éléments les plus distordus ou de ceux situés dans la zone centrale, i.e. la zone la plus chargée de la région sélectionnée.

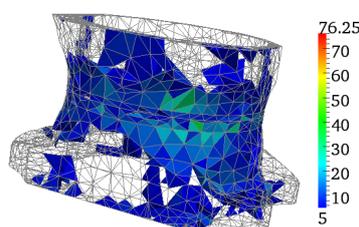


FIGURE 2.27: Cartes des contributions élémentaires pertinentes (au carré) à la densité d'erreur vraie e .

Au même titre que les cas précédents, les indices d'efficacité locaux η_E ont été calculés à partir des contributions locales e_E à l'erreur vraie e ainsi que celles θ_E aux

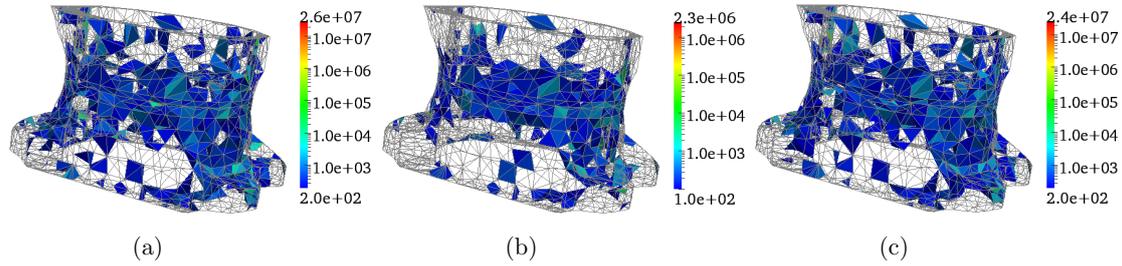


FIGURE 2.28: Cartes des contributions élémentaires pertinentes (au carré) à la densité d’erreur estimée θ obtenues à partir des méthodes EET (a), SPET (b) et EESPT (c).

différentes erreurs estimées θ . Ceux-ci pouvant atteindre des valeurs très élevées dans le cas d’éléments très distordus, on distingue les zones contenant les éléments les plus distordus du reste du maillage éléments finis Ω_h . Le critère utilisé pour déterminer la qualité des éléments est le rapport entre le rayon de la sphère circonscrite à l’élément tétraédrique considéré et le rayon de la sphère inscrite dans celui-ci. La valeur de ce critère reste inférieure à 9 pour la plupart des éléments (17 773 tétraèdres précisément). Pour ces éléments, les indices d’efficacité locaux η_E varient de 0.25 à 49.71 pour la méthode EET, de 0.51 à 27.72 pour la méthode SPET, et de 0.25 à 47.15 pour la méthode EESPT. En revanche, pour les éléments les plus distordus (2 005 tétraèdres exactement), qui ont une valeur du critère comprise entre 9 et 594.2, la valeur maximale des indices d’efficacité locaux η_E atteint 2529.25 pour la méthode EET, 405.66 pour la méthode SPET et 723.22 pour la méthode EESPT. De manière générale, ces résultats numériques indiquent que les trois estimateurs ne fournissent pas des bornes d’erreur locale pertinentes.

4.5.2 Influence du choix de la fonctionnelle de minimisation intervenant dans les techniques EET et EESPT

Les résultats sont similaires aux cas précédents. Le tableau 2.14 regroupe les erreurs estimées θ et les indices d’efficacité η obtenus en utilisant les méthodes EET et EESPT pour les trois fonctions-coût considérées. On constate que les indices d’efficacité sont quasi-comparables excepté dans le cas de la méthode EET associée à la fonctionnelle J_0 où l’indice d’efficacité global correspondant est très élevé.

TABLE 2.14: Influence du choix de la fonction-coût intervenant dans les méthodes EET et EESPT sur la qualité des estimateurs d’erreur globale.

Méthode	Erreur estimée			Erreur estimée relative			Indice d’efficacité		
	J_0	J_1	J_2	J_0	J_1	J_2	J_0	J_1	J_2
EET	58 061	42 078	42 995	524.06	379.81	388.08	15.071	10.922	11.160
EESPT	42 078	42 985	43 574	379.80	387.99	393.31	10.922	11.158	11.311

5 Bilan

Dans ce second chapitre, nous avons présenté les aspects fondamentaux des principales méthodes de construction de champs admissibles. Rappelons que, dans une démarche de vérification robuste, l'élaboration d'une solution admissible constitue le point clé de la mise en place d'un estimateur basé sur la non-vérification de la relation de comportement, dans la mesure où la qualité de la construction des champs admissibles a une forte influence sur la pertinence de l'estimateur d'erreur associé. Les méthodes de reconstruction de champs admissibles adaptées à l'estimation d'erreur se ramènent à la résolution fine de problèmes locaux indépendants définis à l'échelle d'un élément ou d'un patch d'éléments, pouvant ainsi être menée en parallèle. Les procédures EET d'équilibrage par élément, dont le principe repose sur la définition d'une condition de prolongement forte, engendrent un coût de calcul faible, au prix d'une implémentation délicate et fastidieuse, nécessitant la mise en place d'une structure de données particulière, qui constitue un réel inconvénient et un véritable obstacle à leur diffusion dans les codes éléments finis industriels. Les procédures SPET d'équilibrage par patch d'éléments bénéficient au contraire d'une implémentation aisée à travers des propriétés de partition de l'unité qui évitent le recours à une étape préliminaire de construction de densités d'effort équilibrées et conduisent naturellement à la définition de problèmes auto-équilibrés. Néanmoins, la résolution fine de ces problèmes posés sur chaque patch d'éléments peut s'avérer coûteuse, particulièrement en dimension 3, en comparaison à celle des problèmes élémentaires menée lors des procédures d'équilibrage par élément EET. Une nouvelle technique EESPT d'équilibrage a alors été proposée afin de s'affranchir des inconvénients dont souffrent les techniques d'équilibrage par élément EET et patch d'éléments SPET. Celle-ci est hybride au sens elle tire partie des avantages des techniques antérieures en exploitant, d'une part la condition de prolongement issue des techniques EET, et d'autre part la partition de l'unité issue des techniques SPET.

Une étude comparative des performances des estimateurs associés à ces trois méthodes de construction de champs admissibles a été menée sur des exemples industriels variés en dimensions 2 et 3 dans le cadre des problèmes d'élasticité linéaire en statique. Les critères de comparaison retenus lors de cette analyse sont la qualité de l'estimateur, le coût de calcul et la facilité d'implémentation. Les trois méthodes considérées fournissent des majorations garanties d'une erreur de référence, i.e. une approximation fine de l'erreur vraie, et conduisent en ce sens à des estimateurs conservatifs. En outre, l'allure de la répartition des contributions aux erreurs estimées est en bon accord avec celle associée à la répartition des contributions à l'erreur de référence. La méthode « flux-free » SPET fournit un estimateur de meilleure qualité, i.e. plus précis, que celui obtenu à partir des méthodes standard EET et hybride EESPT. Signalons sur ce point que la fonctionnelle de minimisation sous contraintes rencontrée dans les méthodes EET et EESPT n'a que très peu d'influence sur la pertinence des estimateurs obtenus. La méthode SPET est également

plus simple à mettre en œuvre que la méthode EET et, dans une moindre mesure, que la méthode EESPT. En revanche, les méthodes EET et EESPT offrent un coût de calcul similaire, bien plus faible que celui engendré par la méthode SPET. Finalement, le choix d'un estimateur est donc le plus souvent le fruit d'un compromis entre pertinence, efficacité et facilité d'implémentation.

Néanmoins, la méthode hybride, née de la synergie entre les différents outils existants, semble être un bon compromis dans la mesure où sa mise en œuvre est plus aisée que celle de la méthode EET, et son coût de calcul, comparable à celui de la méthode EET, reste bien inférieur à celui affiché par la méthode SPET. Le chapitre suivant est consacré à l'optimisation de cette nouvelle technique hybride EESPT à travers un affaiblissement de la condition de prolongement forte et une minimisation locale de l'énergie complémentaire, afin d'améliorer la pertinence de l'estimateur associé, tout en conservant un coût de calcul acceptable.

Chapitre 3

Amélioration dans la construction de champs admissibles avec minimisation locale de l'énergie complémentaire

Dans ce troisième chapitre, une optimisation de la méthode de construction des champs admissibles est proposée afin d'améliorer la pertinence de l'estimateur d'erreur associé. Cette construction améliorée conduit à la détermination de densités d'effort optimisées à travers une minimisation locale de l'énergie complémentaire. Plusieurs critères géométriques et énergétiques sont alors définis afin de sélectionner les zones locales pertinentes pour l'optimisation des densités d'effort. Les performances de l'estimateur d'erreur qui en découle, en matière de précision et de coût de calcul, sont comparées à celles de l'estimateur obtenu à partir d'une construction classique pour chacune des méthodes standard EET et hybride EESPT introduites au chapitre 2 sur des exemples numériques variés en dimensions 2 et 3.

Sommaire

1	Amélioration de la construction des densités d'effort équilibrées	128
1.1	Principe	128
1.2	Détermination des densités d'effort optimisées	129
2	Critères de sélection employés dans la procédure d'optimisation	132
2.1	Critères géométriques	133
2.2	Critère énergétique	134
3	Implémentation numérique	134
3.1	Discrétisation des densités d'effort	134
3.2	Résolution numérique	135
4	Illustrations numériques sur des exemples industriels	136
4.1	Capteur d'effort 2D	137
4.2	Structure fissurée 2D	141
4.3	Plaque trouée 3D	144
5	Bilan	151

Les méthodes de reconstruction de champs admissibles de type EET et EESPT présentées en sections 1 et 3 du chapitre 2 reposent sur une étape préliminaire de construction de densités d'effort équilibrées sur les frontières des éléments du maillage éléments finis. La qualité du champ de contrainte admissible reconstruit dépend directement de celle des densités d'effort. Il a notamment été constaté dans [Ladevèze et Rougeot (1997), Florentin et al. (2002)] que la qualité de la solution admissible pouvait être affectée, voire détériorée, dans certaines situations, notamment en présence de concentrations de contraintes ou de distorsions géométriques localisées, conduisant à une large sur-estimation de l'erreur vraie. Cette constatation a motivé le développement d'une amélioration de la procédure de construction des densités d'effort équilibrées. L'idée générale consiste à accorder plus de *souplesse*, et donc une plus grande *liberté*, dans la construction des densités d'effort équilibrées, afin d'améliorer la qualité des champs admissibles reconstruits en contrepartie d'un coût de calcul plus élevé.

La construction des densités d'effort s'appuie désormais sur une *condition de prolongement affaiblie*, obtenue en retirant de la condition de prolongement forte (2.1) les fonctions de forme associées aux nœuds sommets [Ladevèze et Rougeot (1997)]. Par conséquent, le champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ est toujours recherché comme un prolongement (ou une extension) du champ de contrainte élément finis σ_h , mais portant uniquement sur les nœuds non sommets. D'un point de vue pratique, cette construction optimisée des densités d'effort peut être appliquée uniquement dans certaines zones locales non régulières afin de conserver un temps de calcul acceptable. L'un des apports majeurs dans ce chapitre réside dans l'introduction de *critères* judicieux, permettant un choix approprié des régions à sélectionner pour l'optimisation des densités d'effort. En outre, cette amélioration a été étendue au cadre de la nouvelle technique hybride EESPT.

Dans un premier temps, nous présentons les aspects fondamentaux relatifs à l'amélioration de la construction des densités d'effort. Puis, nous définissons les différents critères retenus, fondés sur des considérations géométriques ou énergétiques. Enfin, une étude des performances affichées par l'estimateur obtenu à partir de cette construction améliorée est conduite et illustrée à partir d'exemples numériques en dimensions 2 et 3. Le comportement de cet estimateur est comparé à celui de l'estimateur basé sur une construction classique des densités d'effort, afin de dégager le critère de sélection offrant un compromis optimal entre précision et coût de calcul.

Les travaux menés dans ce chapitre ont donné lieu à une publication [Pled et al. (2012a)] et à une communication internationale [Pled et al. (2011b)].

Dans la suite, $\mathcal{E}_o \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{J}_o \subset \mathcal{J}$ désignent respectivement l'ensemble des éléments et des bords intervenant dans la procédure d'optimisation. $\Omega_o \subset \Omega$ correspond à la partie du domaine qui contient l'ensemble des éléments $E \in \mathcal{E}_o$.

1 Amélioration de la construction des densités d'effort équilibrées

1.1 Principe

La construction améliorée des densités d'effort sur les bords $\Gamma \in \mathcal{J}_o$ repose sur une *condition de prolongement faible* en contrainte, qui s'écrit :

$$\forall E \in \mathcal{E}_o, \quad \forall i \in \mathcal{N}_E^{\mathcal{E}_o} \setminus \mathcal{I}_E^{\mathcal{E}_o}, \quad \int_E (\hat{\sigma}_h - \sigma_h) \underline{\nabla} \varphi_i \, d\Omega = \underline{0} \quad (3.1)$$

où $\mathcal{N}_E^{\mathcal{E}_o} \setminus \mathcal{I}_E^{\mathcal{E}_o}$ désigne l'ensemble des nœuds non sommets connectés à l'élément $E \in \mathcal{E}_o$ et $\varphi_i \in \mathcal{U}_h^p$ la fonction de forme éléments finis associée au nœud non sommet i . Cette condition de prolongement est affaiblie dans la mesure où elle impose au champ de contrainte admissible recherché $\hat{\sigma}_h$ de fournir, sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_o$, le même travail que celui développé par le champ de contrainte éléments finis σ_h pour tout champ de déplacement défini à partir des fonctions de forme éléments finis de degré élevé associées aux nœuds non sommets.

Dans la suite, on considère les fonctions de forme éléments finis hiérarchiques de manière à séparer les parties linéaire et non-linéaire des fonctions de base, associées aux nœuds sommets et non sommets, respectivement.

Comme lors de la construction classique, les densités d'effort \hat{F}_h sont recherchées sur les bords $\Gamma \in \mathcal{J}_o$ dans un espace discrétisé ayant le même degré d'interpolation p que le champ de déplacement éléments finis \underline{u}_h , i.e. $\hat{F}_h|_{\Gamma} \in \mathcal{U}_{h|\Gamma}^p$.

La modification de la condition de prolongement conduit à un partitionnement des densités d'effort de la forme :

$$\hat{F}_h = \hat{H}_h + \hat{R}_h \quad \text{sur } \Gamma \in \mathcal{J}_o \quad (3.2)$$

où \hat{H}_h et \hat{R}_h sont les contributions associées aux nœuds non sommets $i \in \mathcal{N}_{\Gamma}^{\mathcal{J}_o} \setminus \mathcal{I}_{\Gamma}^{\mathcal{J}_o}$ et aux nœuds sommets $i \in \mathcal{I}_{\Gamma}^{\mathcal{J}_o}$ sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}_o$, respectivement :

$$\int_{\Gamma} \hat{H}_h \varphi_i \, dS = \underline{0} \quad \forall i \in \mathcal{I}_{\Gamma}^{\mathcal{J}_o} \quad (3.3a)$$

$$\int_{\Gamma} \hat{R}_h \varphi_i \, dS = \underline{0} \quad \forall i \in \mathcal{N}_{\Gamma}^{\mathcal{J}_o} \setminus \mathcal{I}_{\Gamma}^{\mathcal{J}_o} \quad (3.3b)$$

Remarque 3.1 :

Notons que la décomposition (3.2) vérifiant les relations (3.3a) et (3.3b) est unique [Florentin et al. (2002), Ladevèze et Pelle (2004)]. Par ailleurs, du fait de l'emploi des fonctions de forme éléments finis hiérarchiques, la partie \hat{H}_h est à résultante et moment nuls sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}_o$.

1.2 Détermination des densités d'effort optimisées

La partie non-linéaire \hat{H}_h est entièrement déterminée sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}_o$ par la condition de prolongement faible (3.1) et la relation (3.3a). En conséquence, cette partie, dite de haut degré, dépend uniquement des données du problème de référence (1.10) et du champ de contrainte éléments finis σ_h . La construction de la partie \hat{H}_h est similaire à celle des densités d'effort \hat{F}_h dans les procédures de construction classiques relatives aux techniques standard EET et hybride EESPT, décrites aux sections 1.2 et 3.2 du chapitre 2, respectivement ; celle-ci est donc explicite et se ramène à la résolution de problèmes locaux peu coûteux.

La partie linéaire \hat{R}_h est, quant à elle, déterminée par minimisation locale de l'énergie complémentaire ou, de manière équivalente, de l'erreur en relation de comportement sur la partie $\Omega_o \subset \Omega$ contenant les éléments $E \in \mathcal{E}_o$ sous les contraintes correspondant aux conditions d'admissibilité statique des densités d'effort \hat{F}_h :

- conditions aux limites de Neumann sur les bords $\Gamma \in \partial_f \Omega \cap \mathcal{J}_o$;
- conditions d'équilibre intérieur des densités d'effort $\hat{H}_h + \hat{R}_h$ avec les forces volumiques données \underline{f}_d sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_o$;
- conditions d'équilibre intérieur des densités d'effort $\hat{H}_h + \hat{R}_h$ avec les forces volumiques imposées \underline{f}_d et les densités d'effort standard \hat{F}_h^{std} sur chaque élément $E \in \bar{\mathcal{E}}_o \setminus \mathcal{E}_o$

$\bar{\mathcal{E}}_o \subset \mathcal{E}$ désigne l'ensemble des éléments connectés à au moins un bord $\Gamma \in \mathcal{J}_o$; par conséquent, $\bar{\mathcal{E}}_o \setminus \mathcal{E}_o$ contient l'ensemble des éléments connectés à un et un seul bord $\Gamma \in \mathcal{J}_o$. Les densités d'effort \hat{F}_h^{std} sont pré-calculées sur les bords $\Gamma \in \partial E \setminus \mathcal{J}_o$ à partir de la procédure de construction classique appliquée aux éléments $E \in \bar{\mathcal{E}}_o \setminus \mathcal{E}_o$. Rappelons que ces densités d'effort standard sont construites en équilibre avec le chargement extérieur $(\underline{F}_d, \underline{f}_d)$ sur les bords $\Gamma \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_o$. En effet, les conditions d'équilibre (2.3a) et (2.3b) sont naturellement imposées sur les éléments $E \in \mathcal{E} \setminus \bar{\mathcal{E}}_o$ et les bords $\Gamma \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_o$ dans la procédure de construction classique des densités d'effort équilibrées.

Le coût de calcul engendré par la résolution du problème global de minimisation sous contraintes à l'échelle de la zone Ω_o peut être réduit en introduisant deux problèmes locaux définis sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_o$ et associés aux parties \hat{H}_h et \hat{R}_h , respectivement. De manière analogue, un problème local associé à \hat{H}_h et \hat{F}_h^{std} est introduit sur chaque élément $E \in \bar{\mathcal{E}}_o \setminus \mathcal{E}_o$.

Le champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ est alors recherché sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_o$ comme la somme de deux contributions $\hat{\sigma}_h^H$ et $\hat{\sigma}_h^R$:

$$\hat{\sigma}_h = \hat{\sigma}_h^H + \hat{\sigma}_h^R \quad \text{sur } E \in \mathcal{E}_o \quad (3.4)$$

avec

$$\hat{\sigma}_{h|E}^H \underline{n}_E = \eta_E \hat{H}_h \quad \text{sur } \partial E \quad (3.5a)$$

$$\hat{\sigma}_{h|E}^R \underline{n}_E = \eta_E \hat{R}_h \quad \text{sur } \partial E \quad (3.5b)$$

La restriction $\hat{\sigma}_{h|E}^H$ de la partie $\hat{\sigma}_h^H$ est solution d'un problème local d'équilibre en statique, défini sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_o$ par :

$$\hat{\sigma}_{h|E}^H \in \mathcal{S}_{\hat{H}_h}^{ad} \quad \text{avec } \mathcal{S}_{\hat{H}_h}^{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \hat{\sigma}_{h|E}^H \in \mathcal{S}_{|E} \text{ tel que } \operatorname{div} \hat{\sigma}_{h|E}^H + \underline{f}_E^H = \underline{0} \text{ dans } E \\ \text{et } \hat{\sigma}_{h|E}^H \underline{n}_E = \eta_E \hat{H}_h \text{ sur } \partial E \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

avec

$$\underline{f}_E^H = -\frac{1}{|E|} \int_{\partial E} \eta_E \hat{H}_h \, dS - \begin{cases} \left(I_G^{-1} \int_{\partial E} (\underline{GM} \wedge \eta_E \hat{H}_h) \, dS \cdot \underline{N} \right) \underline{N} \wedge \underline{GM} & \text{en 2D} \\ \left(\mathbf{I}_G^{-1} \int_{\partial E} (\underline{GM} \wedge \eta_E \hat{H}_h) \, dS \right) \wedge \underline{GM} & \text{en 3D} \end{cases}$$

où $|E|$ représente la mesure de l'élément E et \underline{N} le vecteur unitaire normal au plan considéré en dimension 2. I_G correspond au moment quadratique, ou moment d'inertie associé à la géométrie de l'élément E , par rapport au centre de gravité \underline{G} en dimension 2, tandis que \mathbf{I}_G désigne l'opérateur d'inertie, ou matrice d'inertie, au point \underline{G} associé à la géométrie de E en dimension 3.

La force volumique \underline{f}_E^H ainsi construite est en équilibre avec la partie \hat{H}_h des densités d'effort. La formulation faible des équations d'équilibre du problème (3.6) s'écrit :

Trouver $\hat{\sigma}_{h|E}^H \in \mathcal{S}_{|E}$ vérifiant :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{0|E}^{ad}, \quad \int_E \operatorname{Tr} [\hat{\sigma}_{h|E}^H \varepsilon(\underline{u}^*)] \, d\Omega = \int_E \underline{f}_E^H \cdot \underline{u}^* \, d\Omega + \int_{\partial E} \eta_E \hat{H}_h \cdot \underline{u}^* \, dS \quad (3.7)$$

La résolution des problèmes locaux (3.7) sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_o$ permet de déterminer le champ de contrainte $\hat{\sigma}_{h|E}^H$ de manière explicite à partir de la connaissance de $\hat{H}_{h|\partial E}$.

De manière similaire, la restriction $\hat{\sigma}_{h|E}^R$ de la partie $\hat{\sigma}_h^R$ est solution d'un problème local d'équilibre en statique, défini sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_o$ par :

$$\hat{\sigma}_{h|E}^R \in \mathcal{S}_{\hat{R}_h}^{ad} \quad \text{avec } \mathcal{S}_{\hat{R}_h}^{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \hat{\sigma}_{h|E}^R \in \mathcal{S}_{|E} \text{ tel que } \operatorname{div} \hat{\sigma}_{h|E}^R + \underline{f}_E^R = \underline{0} \text{ dans } E \\ \text{et } \hat{\sigma}_{h|E}^R \underline{n}_E = \eta_E \hat{R}_h \text{ sur } \partial E \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

avec

$$\underline{f}_E^R = -\frac{1}{|E|} \int_{\partial E} \eta_E \hat{R}_h \, dS - \begin{cases} \left(I_G^{-1} \int_{\partial E} (\underline{GM} \wedge \eta_E \hat{R}_h) \, dS \cdot \underline{N} \right) \underline{N} \wedge \underline{GM} & \text{en 2D} \\ \left(\mathbf{I}_G^{-1} \int_{\partial E} (\underline{GM} \wedge \eta_E \hat{R}_h) \, dS \right) \wedge \underline{GM} & \text{en 3D} \end{cases}$$

La force volumique \underline{f}_E^R ainsi définie est en équilibre avec la partie $\hat{\underline{R}}_h$ des densités d'effort. La formulation faible des équations d'équilibre du problème (3.8) s'écrit :

Trouver $\hat{\sigma}_{h|E}^R \in \mathcal{S}_{|E}$ vérifiant :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{0|E}^{ad}, \quad \int_E \text{Tr} [\hat{\sigma}_{h|E}^R \varepsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = \int_E \underline{f}_E^R \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial E} \eta_E \hat{\underline{R}}_h \cdot \underline{u}^* dS \quad (3.9)$$

La résolution des problèmes locaux (3.9) sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_o$ conduit à une relation linéaire $\hat{\sigma}_{h|E}^R(\hat{\underline{R}}_{h|\partial E})$, la force volumique \underline{f}_E^R étant une fonction linéaire de la partie $\hat{\underline{R}}_{h|\partial E}$ des densités d'effort.

Par la suite, le problème global de minimisation sous contraintes défini sur Ω_o consiste à minimiser l'énergie complémentaire sur la partie Ω_o :

$$\min_{\hat{\sigma}_{h|E}^R \in \mathcal{S}_{\hat{\underline{R}}_h}^{ad}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \text{Tr} [\hat{\sigma}_h^R(\hat{\underline{R}}_h) \mathbf{K}^{-1} \hat{\sigma}_h^R(\hat{\underline{R}}_h)] d\Omega \\ + \int_{\Omega_o} \text{Tr} [\hat{\sigma}_h^R(\hat{\underline{R}}_h) \mathbf{K}^{-1} \hat{\sigma}_h^H] d\Omega - \int_{\partial_u \Omega \cap \mathcal{J}_o} \hat{\sigma}_h^R(\hat{\underline{R}}_h) \underline{n} \cdot \underline{U}_d dS \end{array} \right\} \quad (3.10)$$

ou, de manière équivalente, l'erreur en relation de comportement :

$$\min_{\hat{\sigma}_{h|E}^R \in \mathcal{S}_{\hat{\underline{R}}_h}^{ad}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \text{Tr} [\hat{\sigma}_h^R(\hat{\underline{R}}_h) \mathbf{K}^{-1} \hat{\sigma}_h^R(\hat{\underline{R}}_h)] d\Omega \\ + \int_{\Omega_o} \text{Tr} [\hat{\sigma}_h^R(\hat{\underline{R}}_h) \mathbf{K}^{-1} (\hat{\sigma}_h^H - \sigma_h)] d\Omega \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

sous les contraintes suivantes :

- conditions d'équilibre des densités d'effort $\hat{\underline{H}}_h + \hat{\underline{R}}_h$ avec les forces surfaciques imposées \underline{F}_d sur les bords $\Gamma \in \mathcal{J}_o \cap \partial_f \Omega$:

$$\eta_E \hat{\underline{R}}_h = \underline{F}_d - \eta_E \hat{\underline{H}}_h \quad \text{sur } \Gamma \in \mathcal{J}_o \cap \partial_f \Omega \quad (3.12a)$$

- conditions d'équilibre intérieur des densités d'effort $\hat{\underline{H}}_h + \hat{\underline{R}}_h$ avec les forces volumiques imposées \underline{f}_d sur les éléments $E \in \mathcal{E}_o$:

$$\forall E \in \mathcal{E}_o, \quad \forall \underline{u}_s \in \mathcal{U}_{S|E}, \quad \int_{\partial E} \eta_E \hat{\underline{R}}_h \cdot \underline{u}_s dS = - \int_{\partial E} \eta_E \hat{\underline{H}}_h \cdot \underline{u}_s dS - \int_E \underline{f}_d \cdot \underline{u}_s d\Omega \quad (3.12b)$$

- conditions d'équilibre intérieur des densités d'effort $\hat{\underline{H}}_h + \hat{\underline{R}}_h$ avec les forces volumiques données \underline{f}_d et les densités d'effort standard $\hat{\underline{F}}_h^{\text{std}}$ sur les éléments $E \in \bar{\mathcal{E}}_o \setminus \mathcal{E}_o$:

$$\forall E \in \bar{\mathcal{E}}_o \setminus \mathcal{E}_o, \quad \forall \underline{u}_s \in \mathcal{U}_{S|E}, \quad \int_{\partial E \cap \mathcal{J}_o} \eta_E \hat{\underline{R}}_h \cdot \underline{u}_s dS = - \int_{\partial E \setminus \mathcal{J}_o} \eta_E \hat{\underline{F}}_h^{\text{std}} \cdot \underline{u}_s dS - \int_{\partial E \cap \mathcal{J}_o} \eta_E \hat{\underline{H}}_h \cdot \underline{u}_s dS - \int_E \underline{f}_d \cdot \underline{u}_s d\Omega \quad (3.12c)$$

Le champ de contrainte résultant $\hat{\sigma}_{h|E} = \hat{\sigma}_{h|E}^H + \hat{\sigma}_{h|E}^R(\hat{R}_{h|\partial E})$ défini sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_o$ est statiquement admissible dès lors que les contraintes (3.12a), (3.12b) et (3.12c) sont vérifiées. Les forces volumiques \underline{f}_{-E}^H et \underline{f}_{-E}^R étant construites en équilibre avec les parties $\hat{H}_{h|\partial E}$ et $\hat{R}_{h|\partial E}$, respectivement, les conditions d'équilibre (3.12b) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\int_E \underline{f}_{-E}^R d\Omega = \int_E (\underline{f}_{-d} - \underline{f}_{-E}^H) d\Omega \quad \forall E \in \mathcal{E}_o \quad (3.13a)$$

$$\int_E \underline{GM} \wedge \underline{f}_{-E}^R d\Omega = \int_E \underline{GM} \wedge (\underline{f}_{-d} - \underline{f}_{-E}^H) d\Omega \quad \forall E \in \mathcal{E}_o \quad (3.13b)$$

En effet, les relations (3.13a) et (3.13b) traduisent l'équilibre intérieur des densités d'effort $\hat{H}_h + \hat{R}_h$ (ou, de manière équivalente, des forces volumiques $\underline{f}_{-E}^H + \underline{f}_{-E}^R$) avec les densités volumiques d'effort imposées \underline{f}_{-d} sur les éléments $E \in \mathcal{E}_o$. Les conditions d'équilibre (3.12c) sur les éléments $E \in \mathcal{E}_o \setminus \mathcal{E}_o$ peuvent également s'exprimer sous une forme similaire à (3.13).

Finalement, la partie linéaire \hat{R}_h sur les bords $\Gamma \in \mathcal{J}_o$ est déterminée à travers la résolution des problèmes locaux (3.7) et (3.9) définis à l'échelle d'un élément E et du problème global de minimisation sous contraintes défini à l'échelle de la zone Ω_o .

Remarque 3.2 :

Dans le cas d'un degré d'interpolation $p = 1$, la condition de prolongement faible (3.1) disparaît et la détermination des densités d'effort optimisées se ramène à celle de la partie linéaire \hat{R}_h uniquement. En outre, lorsque cette construction améliorée est appliquée sur l'ensemble du domaine Ω , i.e. en choisissant $\Omega_o = \Omega$, le champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ est déterminé par minimisation globale de l'énergie complémentaire à l'échelle du domaine complet Ω et est donc équivalente à une approche duale classique en contrainte.

Remarque 3.3 :

Lorsque la zone Ω_o couvre une grande partie du domaine Ω , le problème global de minimisation peut être traité à l'aide d'un algorithme de résolution itératif (généralement de type gradient conjugué) initialisé à partir des densités d'effort standard \hat{F}_h^{std} préalablement déterminées en utilisant la procédure de construction classique.

2 Critères de sélection employés dans la procédure d'optimisation

Plusieurs critères ont été considérés afin de sélectionner la partie $\Omega_o \subset \Omega$, support de la résolution du problème global de minimisation. Ces critères reposent sur des considérations géométriques ou énergétiques et visent à prédire les régions pertinentes pour l'optimisation des densités d'effort.

2.1 Critères géométriques

Les critères géométriques considérés sont :

- le rapport entre le rayon $r_E^{C_i}$ du cercle inscrit dans un élément triangulaire E et le rayon $r_E^{C_c}$ du cercle circonscrit à E dans le cas d'un maillage éléments finis Ω_h constitué d'éléments triangulaires linéaires en dimension 2 ; de manière similaire, il s'agit du rapport entre le rayon $r_E^{C_i}$ de la sphère inscrite dans un élément tétraédrique E et le rayon $r_E^{C_c}$ de la sphère circonscrite à E dans le cas d'un maillage éléments finis Ω_h constitué d'éléments tétraédriques linéaires en dimension 3 ; la zone locale Ω_o est alors définie par l'ensemble des éléments $E \in \mathcal{E}_o$ vérifiant :

$$\frac{r_E^{C_i}}{r_E^{C_c}} \leq \varepsilon_d^r$$

où ε_d^r est une valeur donnée a priori.

- le rapport entre les longueurs minimale h_Γ^{\min} et maximale h_Γ^{\max} des bords Γ associés à un élément E en dimension 2 ; de manière analogue, il s'agit du rapport entre les aires minimale h_Γ^{\min} et maximale h_Γ^{\max} des faces Γ associées à un élément E en dimension 3 ; la zone locale Ω_o contient l'ensemble des éléments $E \in \mathcal{E}_o$ vérifiant :

$$\frac{h_\Gamma^{\min}}{h_\Gamma^{\max}} \leq \varepsilon_d^h$$

où ε_d^h est une valeur prescrite a priori.

Le nombre d'éléments N_e^{opt} intervenant dans la procédure d'optimisation est d'autant plus important que la valeur choisie pour ε_d^r ou ε_d^h est élevée. Ces deux critères géométriques sont destinés à prendre en compte dans la procédure d'optimisation uniquement les éléments les plus distordus. La figure 3.1 illustre ces critères géométriques sur un élément triangulaire linéaire en dimension 2.

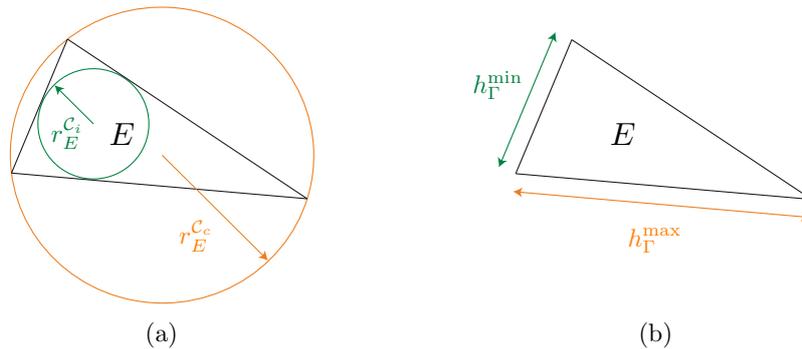


FIGURE 3.1: Représentation des critères géométriques intervenant dans la procédure d'optimisation : (a) rapport entre les rayons des cercles inscrit $r_E^{C_i}$ et circonscrit $r_E^{C_c}$ associés à l'élément E et (b) rapport entre les longueurs minimale h_Γ^{\min} et maximale h_Γ^{\max} des bords Γ associées à l'élément E .

2.2 Critère énergétique

Le critère énergétique considéré correspond au rapport entre la contribution au carré θ_E^2 à l'erreur estimée θ d'un élément E et la contribution élémentaire maximale au carré $\theta_E^{\max 2}$; la zone locale Ω_o regroupe l'ensemble des éléments $E \in \mathcal{E}_o$ vérifiant :

$$\left(\frac{\theta_E}{\theta_E^{\max}} \right)^2 \geq \varepsilon_d^\theta$$

où ε_d^θ est une valeur fixée a priori comprise entre 0 et 1.

Le nombre d'éléments N_e^{opt} intervenant dans la procédure d'optimisation est d'autant plus grand que la valeur choisie pour ε_d^θ est faible. $\varepsilon_d^\theta = 1$ revient à prendre en compte dans la procédure d'optimisation uniquement l'élément ayant la plus grande contribution à l'erreur estimée, tandis que $\varepsilon_d^\theta = 0$ correspond à la prise en compte de tous les éléments du maillage éléments finis Ω_h . Ce critère énergétique est destiné à prendre en compte dans la procédure d'optimisation uniquement les éléments présentant les plus fortes contributions à l'erreur estimée θ .

Notons que l'utilisation de ce critère nécessite une étape préliminaire de localisation des contributions prépondérantes à l'erreur estimée; celle-ci est réalisée à l'aide d'une procédure d'estimation d'erreur classique, basée sur une technique d'équilibrage standard EET ou hybride EESPT, dont le coût de calcul est relativement faible.

Remarque 3.4 :

Si d'autres critères de sélection peuvent être envisagés, nous nous limiterons aux trois critères susmentionnés dans les exemples numériques traités à la section 4.

3 Implémentation numérique

3.1 Discrétisation des densités d'effort

Les quantités recherchées \hat{H}_h et \hat{R}_h sont discrétisées sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}_o$ et décrites par :

$$\hat{H}_{h|\Gamma} = [\varphi_\Gamma]^T \hat{\mathbf{h}}_{h,\Gamma} \quad (3.14a)$$

$$\hat{R}_{h|\Gamma} = [\varphi_\Gamma]^T \hat{\mathbf{r}}_{h,\Gamma} \quad (3.14b)$$

où $\hat{\mathbf{h}}_{h,\Gamma}$ (resp. $\hat{\mathbf{r}}_{h,\Gamma}$) désigne le vecteur généralisé des inconnues nodales associées à la discrétisation de $\hat{H}_{h|\Gamma}$ (resp. $\hat{R}_{h|\Gamma}$), et $[\varphi_\Gamma]$ la matrice des fonctions de forme éléments finis de degré p sur Γ . Dans la suite, on note $\hat{\mathbf{r}}_h$ (resp. $\hat{\mathbf{h}}_h$) le vecteur généralisé regroupant l'ensemble des vecteurs inconnus $\hat{\mathbf{r}}_{h,\Gamma}$ (resp. $\hat{\mathbf{h}}_{h,\Gamma}$) sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}_o$.

Comme précédemment mentionné en section 1, le vecteur $\hat{\mathbf{h}}_h$ est déterminé de manière explicite à partir de la condition de prolongement faible (3.1) et de la relation (3.3a). Celui-ci est dans la suite supposé connu.

3.2 Résolution numérique

En pratique, les problèmes locaux (3.7) et (3.9) sont résolus de manière similaire aux problèmes locaux (2.15), i.e. par dualité à l'aide d'une approche en déplacement sur chaque élément E combinée à une méthode d'approximation numérique de type $p + 3$ sur chaque élément E du maillage éléments finis Ω_h .

La fonctionnelle de minimisation (3.11) (ou (3.10)) se met sous la forme matricielle suivante :

$$J(\hat{\mathbf{r}}_h) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{r}}_h^T \mathbb{A} \hat{\mathbf{r}}_h - \hat{\mathbf{r}}_h^T \underline{B} \quad (3.15)$$

où \mathbb{A} est une matrice carrée symétrique.

Les contraintes (3.12a), (3.13a), (3.13b) et (3.3b) sont traitées à l'aide de multiplicateurs de Lagrange. En premier lieu, les conditions d'équilibre (3.12a) sur les bords $\Gamma \in \mathcal{J}_o \cap \partial_f \Omega$ s'écrivent :

$$\mathbb{C} \hat{\mathbf{r}}_h = \underline{q} \quad (3.16)$$

En second lieu, les conditions d'équilibre (3.13a) et (3.13b) imposées sur les éléments $E \in \mathcal{E}_o$ ainsi que celles analogues définies sur les éléments $E \in \bar{\mathcal{E}}_o \setminus \mathcal{E}_o$ s'écrivent mathématiquement sous la forme :

$$\mathbb{L} \hat{\mathbf{r}}_h = \underline{b} \quad (3.17)$$

Notons que la solvabilité du système discrétisé (3.17) nécessite la vérification de conditions de comptabilité résultant de l'équilibre du champ de contrainte σ_h au sens des éléments finis. Une procédure de détection des pivots nuls est alors utilisée afin de contourner cette difficulté et permet de supprimer les équations redondantes dans le système (3.17). Ce dernier est alors remplacé par le système réduit suivant :

$$\tilde{\mathbb{L}} \hat{\mathbf{r}}_h = \tilde{\underline{b}} \quad (3.18)$$

Enfin, les relations (3.3b) définies sur chaque bord $\Gamma \in \mathcal{J}_o$ peuvent s'écrire sous la forme matricielle :

$$\mathbb{P} \hat{\mathbf{r}}_h = \underline{0} \quad (3.19)$$

Remarquons que les conditions (3.3b) (ou les équations du système (3.19)) disparaissent dans le cas d'un degré d'interpolation éléments finis $p = 1$.

Finalement, le problème discrétisé à résoudre sur la partie Ω_o du domaine Ω consiste à minimiser la fonctionnelle (3.15) sous les contraintes (3.16), (3.19) et (3.18). Ce problème de minimisation sous contraintes peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{C}^T & \mathbb{P}^T & \tilde{\mathbb{L}}^T \\ \mathbb{C} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{P} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\mathbb{L}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_h \\ \underline{\Lambda}_{\mathbb{C}} \\ \underline{\Lambda}_{\mathbb{P}} \\ \underline{\Lambda}_{\tilde{\mathbb{L}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{q} \\ \underline{0} \\ \tilde{\underline{b}} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

à partir du problème de point-selle associé au Lagrangien \mathcal{L} défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{\mathbf{r}}_h, \underline{\Lambda}_{\mathbb{C}}, \underline{\Lambda}_{\mathbb{P}}, \underline{\Lambda}_{\mathbb{L}}) = & \frac{1}{2} \hat{\mathbf{r}}_h^T \mathbb{A} \hat{\mathbf{r}}_h - \hat{\mathbf{r}}_h^T \underline{\mathbf{B}} + (\mathbb{C} \hat{\mathbf{r}}_h - \underline{\mathbf{q}})^T \underline{\Lambda}_{\mathbb{C}} \\ & + (\mathbb{P} \hat{\mathbf{r}}_h)^T \underline{\Lambda}_{\mathbb{P}} + (\tilde{\mathbb{L}} \hat{\mathbf{r}}_h - \tilde{\underline{\mathbf{b}}})^T \underline{\Lambda}_{\mathbb{L}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$\underline{\Lambda}_{\mathbb{C}}$, $\underline{\Lambda}_{\mathbb{P}}$ et $\underline{\Lambda}_{\mathbb{L}}$ représentent les vecteurs des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes (3.16), (3.19) et (3.18), respectivement.

4 Illustrations numériques sur des exemples industriels

Les performances de l'estimateur d'erreur basé sur une construction améliorée sont comparées à celles de l'estimateur d'erreur obtenu à partir d'une construction classique pour chacune des méthodes standard EET et hybride EESPT. La pertinence et l'efficacité de cet estimateur optimisé sont illustrées pour chacun des critères géométriques et énergétiques proposés sur trois exemples numériques précédemment étudiés en section 4 du chapitre 2 :

- un modèle 2D de capteur d'effort en flexion ;
- un modèle 2D de structure fissurée présentant deux trous circulaires ;
- un modèle 3D de plaque trouée en traction.

Dans toutes les applications numériques, le comportement matériau est choisi élastique, linéaire, homogène et isotrope ; ses caractéristiques sont identiques à celles des exemples traités à la section 4 du chapitre 2, i.e. un module d'Young unitaire $E = 1$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. La modélisation des cas d'application 2D est effectuée comme précédemment sous l'hypothèse des contraintes planes.

Les discrétisations éléments finis sont réalisées en utilisant des éléments linéaires ($p = 1$) pour l'ensemble des structures considérées. Rappelons que, dans ce cas, les estimateurs issus des méthodes de construction standard EET et hybride EESPT fournissent des résultats similaires et ne diffèrent que par leur implémentation numérique. Par ailleurs, l'étape de minimisation locale intervenant dans la procédure de construction classique des densités d'effort des méthodes EET et EESPT est effectuée en utilisant la fonction-coût J_0 définie par (2.11) et (2.56), respectivement. Enfin, la résolution des problèmes locaux à l'échelle d'un élément est réalisée à l'aide d'une interpolation élémentaire de degré $p + 3$ (p -raffinement du maillage éléments finis initial Ω_h).

Enfin, rappelons que les valeurs seuils ε_d^r , ε_d^h et ε_d^θ intervenant dans les différents critères de sélection sont spécifiées a priori par l'utilisateur.

4.1 Capteur d'effort 2D

Reprenons dans un premier temps l'exemple du modèle 2D de capteur d'effort présenté en section 4.1 du chapitre 2. La figure 3.2 représente les cartes du champ de contrainte éléments finis et des champs de contrainte admissibles reconstruits à partir des procédures de construction classiques associées aux méthodes EET et EESPT, ainsi que de celui obtenu à partir de la procédure de construction améliorée dans le cas où $\Omega_o = \Omega$, i.e. lorsque la procédure d'optimisation est appliquée à l'ensemble du domaine Ω . Rappelons que, dans ce cas précis, la procédure de construction améliorée est similaire à l'approche duale en contrainte et fournit un champ de contrainte admissible de très bonne qualité (cf. remarque 3.2).

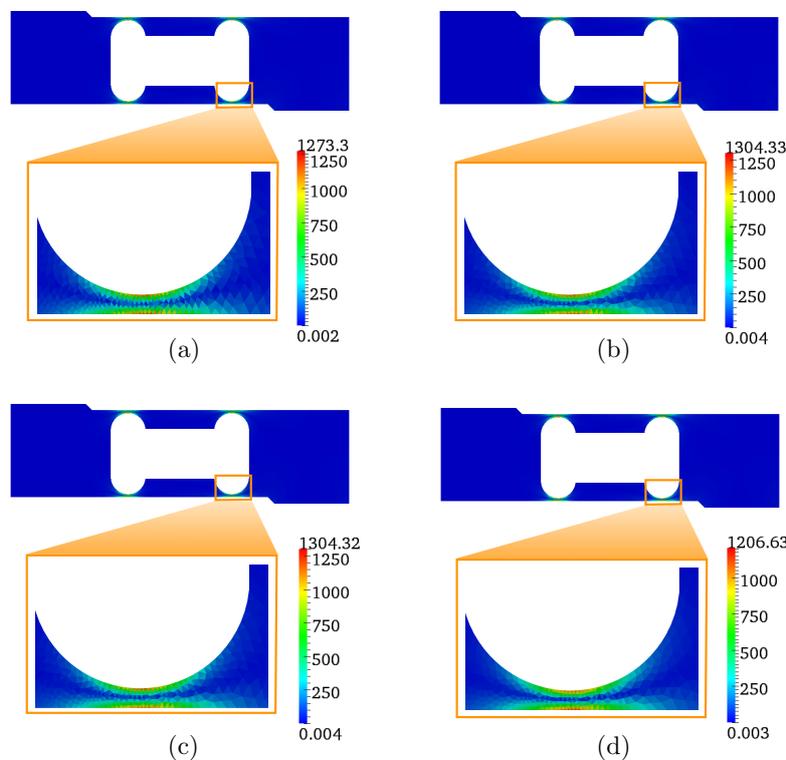


FIGURE 3.2: Cartes du champ de contrainte éléments finis σ_h (a) et des champs de contrainte admissibles $\hat{\sigma}_h$ obtenus à partir des procédures de construction classiques associées aux méthodes EET (b) et EESPT (c), et de la procédure de construction améliorée avec $\Omega_o = \Omega$ (d).

La répartition spatiale des contributions élémentaires (au carré) à l'erreur vraie e ainsi que celles des contributions élémentaires (au carré) à l'erreur estimée θ pour chacune des méthodes classiques et améliorée avec $\Omega_o = \Omega$ sont montrées sur la figure 3.3. Les cartographies (a) et (d) associées respectivement à l'erreur vraie e et à l'erreur estimée θ calculée en utilisant la méthode de construction améliorée avec $\Omega_o = \Omega$ sont très proches. La nouvelle méthode de construction permet donc

d'améliorer la précision de l'estimateur associé, dans la mesure où les valeurs des contributions élémentaires θ_E à l'erreur estimée θ ne sur-évaluent pas celles des contributions e_E à l'erreur vraie e , contrairement aux versions classiques des méthodes EET et EESPT.

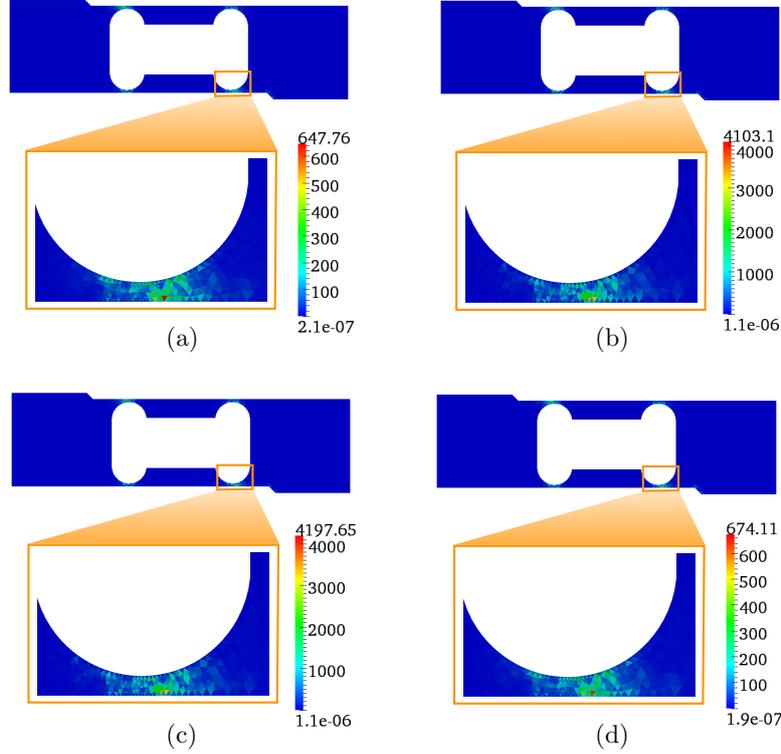


FIGURE 3.3: Cartes des contributions élémentaires (au carré) à l'erreur vraie e (a) et à l'erreur estimée θ obtenues à partir des procédures de construction classiques associées aux méthodes EET (b) et EESPT (c), et de la procédure de construction améliorée avec $\Omega_o = \Omega$ (d).

Les évolutions de l'indice d'efficacité η et du temps CPU normalisé t en fonction des critères géométriques ε_d^r , ε_d^h et énergétique ε_d^θ d'une part, et du nombre d'éléments N_e^{opt} intervenant dans la procédure d'optimisation d'autre part, sont représentées sur la figure 3.4 pour les estimateurs associés aux méthodes standard EET et hybride EESPT. Les temps de calcul engendrés par cette construction améliorée appliquée à chacune des méthodes EET et EESPT sont normalisés par rapport à ceux requis pour la construction classique correspondante. Les valeurs des rapports $r_E^{C_i}/r_E^{C_c}$, $h_\Gamma^{\text{min}}/h_\Gamma^{\text{max}}$ et $(\theta_E/\theta_E^{\text{max}})^2$ sont comprises entre 0.2863 et 0.5000, 0.4909 et 0.9989, et 3×10^{-10} et 1.0, respectivement. Par ailleurs, les valeurs des indices d'efficacité et des temps CPU normalisés associées à $\varepsilon_d^r = 0.28$, $\varepsilon_d^h = 0.48$ et $\varepsilon_d^\theta = 1.1$, pour chacun des critères proposés, correspondent à celles obtenues à partir de la procédure de construction classique appliquée aux méthodes EET et EESPT.

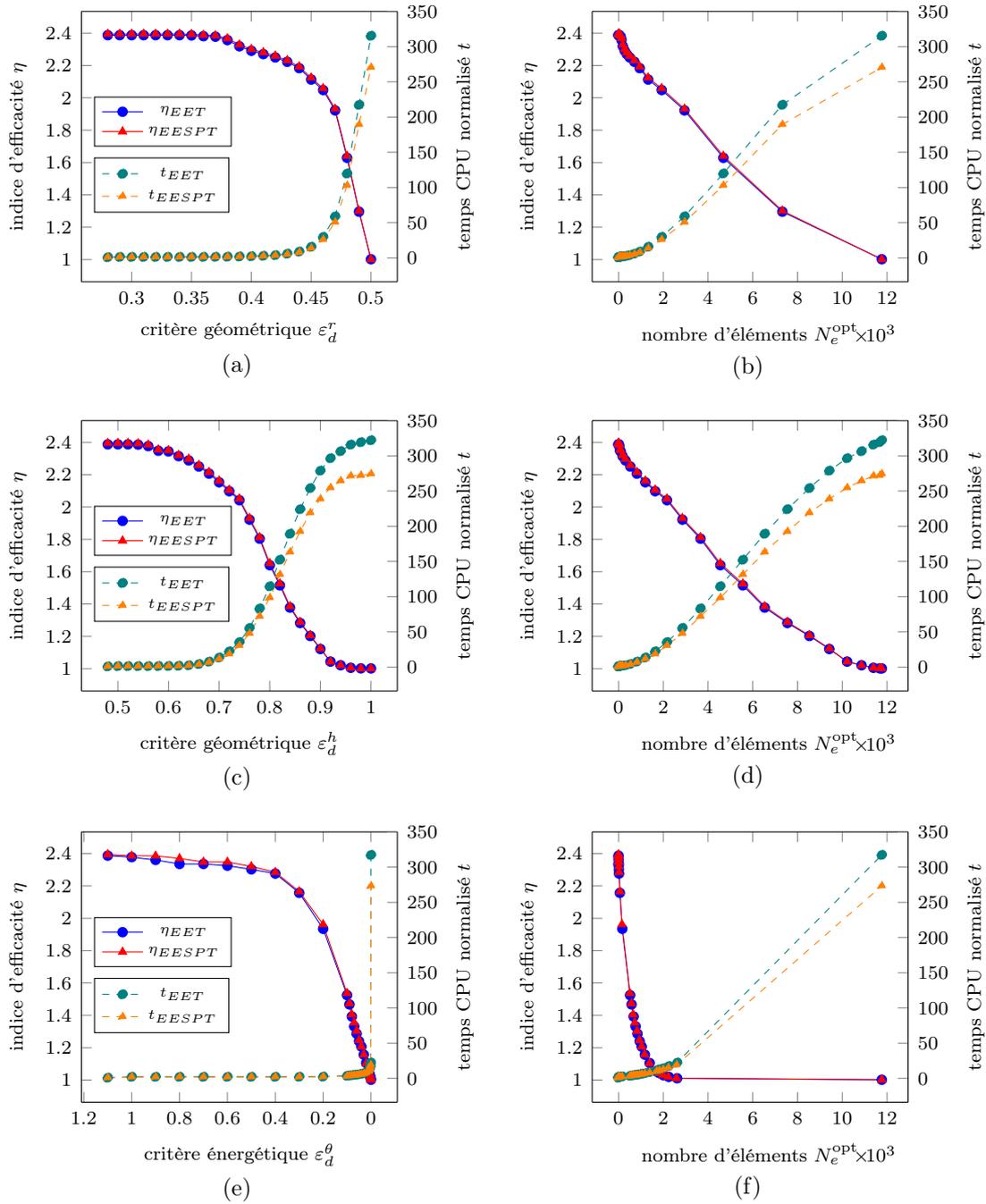


FIGURE 3.4: Évolution de l'indice d'efficacité η et du temps CPU normalisé t obtenus à partir des méthodes EET et EESPT en fonction des critères géométriques ε_d^r (a), ε_d^h (c) et du critère énergétique ε_d^θ (e), et en fonction du nombre d'éléments N_e^{opt} correspondant (b), (d) et (f) intervenant dans la procédure d'optimisation.

L'observation de ces courbes amène à plusieurs remarques. Tout d'abord, on constate que le coût de calcul normalisé t croît de façon quasi-linéaire avec le nombre d'éléments N_e^{opt} mis en jeu dans la procédure d'optimisation, pour chacun des critères considérés. D'autre part, on remarque que les indices d'efficacité η diminuent avec le nombre d'éléments N_e^{opt} pour l'ensemble des critères envisagés. Cette première constatation confirme que la qualité de la construction des densités d'effort a une forte influence sur la précision de l'estimateur associé. Plus précisément, l'examen des courbes indique que les indices d'efficacité obtenus en utilisant le critère énergétique chutent fortement jusqu'à atteindre une valeur très proche de 1 pour un nombre d'éléments N_e^{opt} relativement faible, de l'ordre d'un sixième du nombre d'éléments total N_e du maillage éléments finis Ω_h . En revanche, les indices d'efficacité obtenus à partir des deux critères géométriques diminuent de manière quasi-linéaire avec le nombre d'éléments N_e^{opt} . L'utilisation d'autres critères visant à sélectionner les zones présentant de fortes distorsions géométriques conduirait probablement à des résultats similaires à ceux obtenus avec les deux critères géométriques considérés. Cette seconde constatation révèle que l'utilisation du critère énergétique offre une meilleure précision à moindre coût en comparaison avec l'emploi de critères géométriques. Le choix du critère de sélection joue donc un rôle fondamental dans la méthode de construction améliorée, et le critère énergétique proposé semble être un choix adapté et pertinent pour assurer de bonnes performances à l'estimateur d'erreur associé.

On introduit à présent un facteur d'efficacité défini comme le rapport entre le gain en indice d'efficacité g_η et la perte en coût de calcul p_t par rapport à la méthode de construction classique, le gain g_η et la perte p_t s'exprimant comme :

$$g_\eta = \left| \frac{\eta - \eta^{\text{std}}}{\eta^{\text{std}}} \right| \quad (3.22a)$$

$$p_t = \left| \frac{t - t^{\text{std}}}{t^{\text{std}}} \right| \quad (3.22b)$$

où η et η^{std} désignent les indices d'efficacité obtenus en utilisant les méthodes de construction améliorée et classique, respectivement, tandis que t et t^{std} représentent les temps de calcul normalisés correspondants. Le facteur d'efficacité g_η/p_t constitue un nouvel indicateur des performances affichées par l'estimateur amélioré comparées à celles de l'estimateur classique.

La figure 3.5 montre l'évolution du facteur d'efficacité g_η/p_t en fonction des différents critères de sélection et du nombre d'éléments N_e^{opt} correspondant pour les estimateurs associés à chacune des méthodes EET et EESPT. On constate que le surcoût de calcul engendré par la méthode de construction améliorée demeure prépondérant face à la diminution de l'indice d'efficacité. On observe cependant que le facteur d'efficacité g_η/p_t prend des valeurs significatives lorsque la procédure d'optimisation met en jeu un nombre très restreint d'éléments du maillage éléments

finis initial Ω_h , quel que soit le critère utilisé. Néanmoins, le facteur d'efficacité obtenu à partir du critère énergétique atteint une valeur maximale au moins trois fois plus élevée que celle fournie par les deux critères géométriques.

4.2 Structure fissurée 2D

Considérons à présent l'exemple du modèle 2D de structure fissurée décrit à la section 4.2 du chapitre 2. La figure 3.6 représente les cartes du champ de contrainte éléments finis et des champs de contrainte admissibles reconstruits à partir des procédures de construction classiques associées aux méthodes EET et EESPT, ainsi que de celui obtenu à partir de la procédure de construction améliorée dans le cas où $\Omega_o = \Omega$, i.e. lorsque $\mathcal{E}_o = \mathcal{E}$.

La figure 3.7 montre les répartitions spatiales des contributions élémentaires (au carré) à la densité d'erreur vraie e et à celle des erreurs estimées θ obtenues à partir des méthodes classiques et améliorée avec $\Omega_o = \Omega$. On observe une forte similarité entre les cartes associées à l'erreur vraie e et à l'erreur estimée θ obtenue à partir de la construction améliorée avec $\Omega_o = \Omega$. Cette dernière fournit des indicateurs locaux des contributions élémentaires à l'erreur vraie de meilleure qualité que ceux obtenus en utilisant les versions classiques des méthodes de construction EET et EESPT.

Les courbes de l'indice d'efficacité η et du temps CPU normalisé t obtenues en utilisant les deux critères géométriques et le critère énergétique sont reproduites sur la figure 3.8 pour les estimateurs associés à chacune des méthodes EET et EESPT. Les courbes de gauche représentent les évolutions de η et t en fonction des valeurs prises par ε_d^r , ε_d^h et ε_d^θ , tandis que celles de droite décrivent leurs évolutions en fonction du nombre d'éléments associé N_e^{opt} intervenant dans la procédure d'optimisation. Les rapports $r_E^{C_i}/r_E^{C_c}$, $h_\Gamma^{\min}/h_\Gamma^{\max}$ et $(\theta_E/\theta_E^{\max})^2$ varient de 0.2923 à 0.5000, de 0.4885 à 0.9981, et de 9.5×10^{-9} à 1.0, respectivement. En outre, les valeurs des indices d'efficacité et des temps de calcul normalisés correspondant à $\varepsilon_d^r = 0.29$, $\varepsilon_d^h = 0.48$ et $\varepsilon_d^\theta = 1.1$, pour chacun des critères proposés, sont celles calculées en utilisant les procédures de construction classiques des méthodes EET et EESPT.

En premier lieu, on remarque, comme sur l'exemple précédent, que le coût de calcul normalisé t engendré par la procédure de construction améliorée augmente de façon quasi-linéaire avec le nombre d'éléments N_e^{opt} intervenant dans la procédure d'optimisation. En second lieu, on constate que la borne supérieure θ de l'erreur vraie e est d'autant plus précise que le nombre d'éléments N_e^{opt} est élevé, pour les trois critères de sélection considérés. Néanmoins, la diminution de l'indice d'efficacité η avec N_e^{opt} est bien plus forte dans le cas du critère énergétique que dans le cas des critères géométriques, pour lesquels on observe une décroissance quasi-linéaire de η avec N_e^{opt} . Ces observations confirment les résultats obtenus sur l'exemple précédent et montrent à nouveau que l'utilisation du critère énergétique apporte

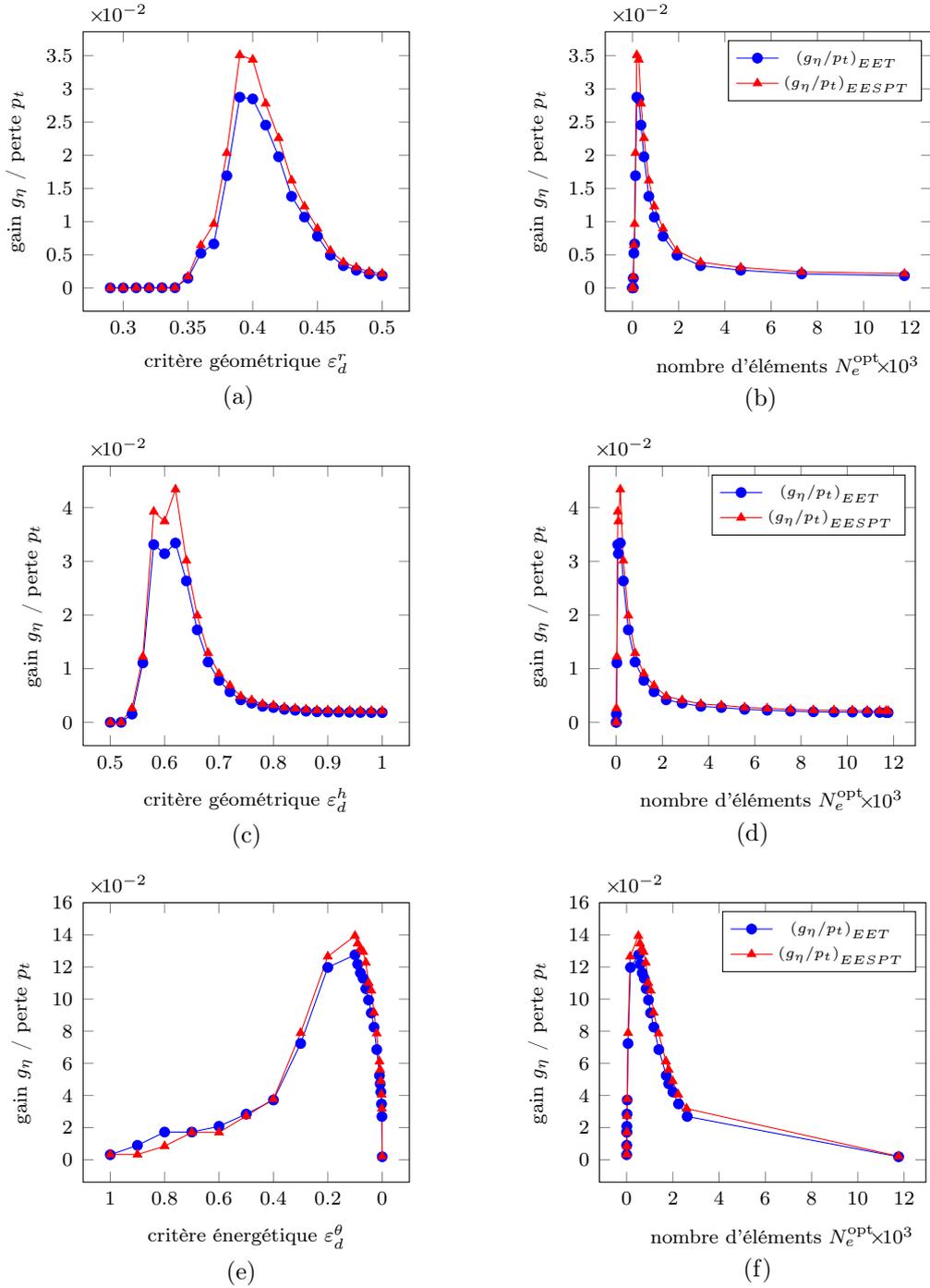


FIGURE 3.5: Évolution du rapport entre le gain en indice d'efficacité g_η et la perte en temps CPU normalisé p_t pour les méthodes EET et EESPT en fonction des critères géométriques ε_d^r (a), ε_d^h (c) et du critère énergétique ε_d^θ (e), et en fonction du nombre d'éléments N_e^{opt} correspondant (b), (d) et (f) intervenant dans la procédure d'optimisation.

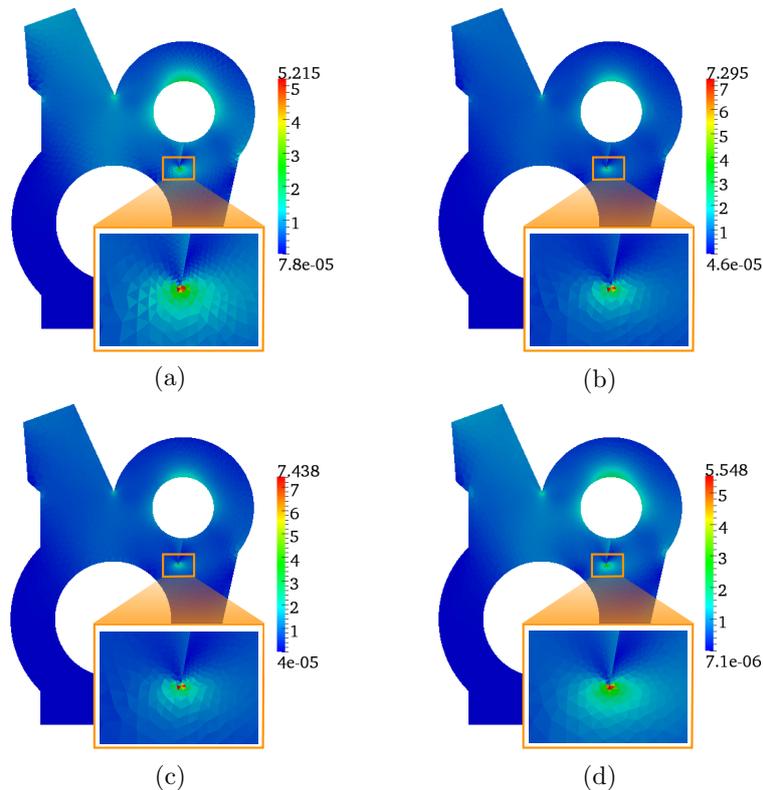


FIGURE 3.6: Cartes du champ de contrainte éléments finis σ_h (a) et des champs de contrainte admissibles $\hat{\sigma}_h$ obtenus à partir des procédures de construction classiques associées aux méthodes EET (b) et EESPT (c), et de la procédure de construction améliorée avec $\Omega_o = \Omega$ (d).

une meilleure précision pour un coût de calcul plus faible comparée à l'emploi des critères géométriques.

Les courbes représentées sur la figure 3.9 montrent l'évolution du facteur d'efficacité g_η/p_t défini par les relations (3.22) en fonction des valeurs prises par les différents critères géométriques ε_d^r , ε_d^h et énergétique ε_d^θ d'une part, et en fonction du nombre d'éléments N_e^{opt} associé d'autre part. Les résultats obtenus sont similaires au cas d'application 2D précédent et montrent que la méthode de construction améliorée conduit au meilleur compromis entre précision et surcoût de calcul lorsque celle-ci est appliquée localement dans les zones de singularité du champ de contrainte. En effet, on observe une nouvelle fois que la valeur maximale atteinte par le facteur d'efficacité est plus élevée dans le cas du critère énergétique en comparaison avec les deux critères géométriques.

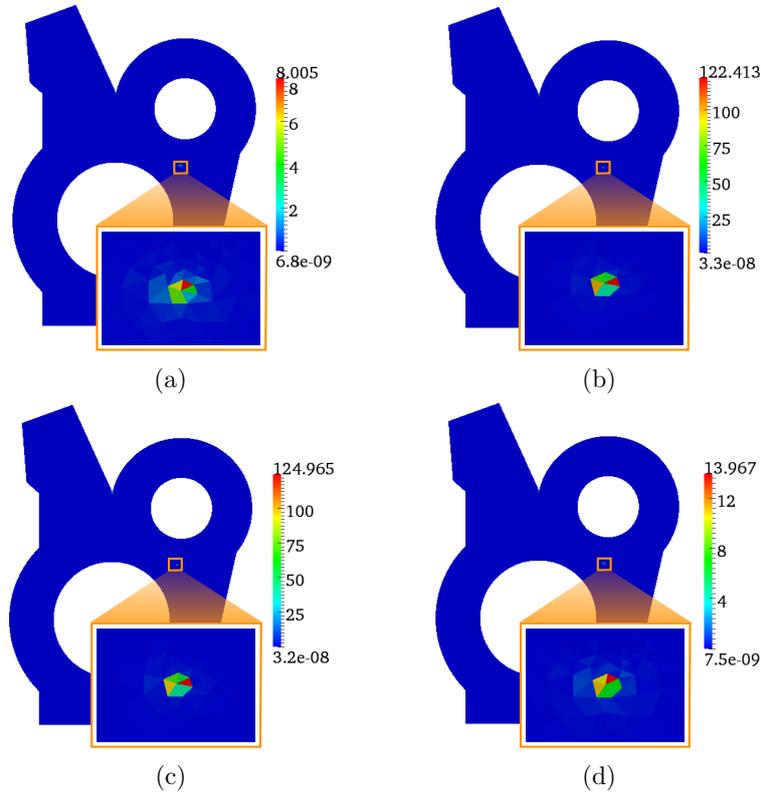


FIGURE 3.7: Cartes des contributions élémentaires (au carré) à la densité d'erreur vraie e (a) et à celle d'erreur estimée θ obtenues à partir des procédures de construction classiques associées aux méthodes EET (b) et EESPT (c), et de la procédure de construction améliorée avec $\Omega_o = \Omega$ (d).

4.3 Plaque trouée 3D

On s'intéresse maintenant à l'exemple du modèle 3D de plaque perforée en traction traité à la section 4.3 du chapitre 2. Afin de conserver un coût de calcul acceptable, on considère un maillage éléments finis Ω_h plus grossier que celui utilisé au chapitre précédent. La géométrie, les conditions de chargement et le maillage Ω_h , constitué à présent de 2075 éléments tétraédriques linéaires ($p = 1$) et 724 nœuds, i.e. 2 172 d.d.l., sont représentés sur la figure 3.10. Le maillage très fin de référence $\Omega_{\bar{h}}$ utilisé pour déterminer la solution quasi-exacte de référence est quant à lui obtenu en sous-découpant chaque tétraèdre du maillage Ω_h en 512 tétraèdres, et contient par conséquent 1 062 400 éléments tétraédriques linéaires et 199 293 nœuds, i.e. 597 879 d.d.l.

La figure 3.11 montre les cartes du champ de contrainte éléments finis et des champs de contrainte admissibles calculés en utilisant les procédures de construction classiques associées aux méthodes EET et EESPT, ainsi que de celui déterminé à l'aide de la procédure de construction améliorée avec $\Omega_o = \Omega$, i.e. en appliquant la

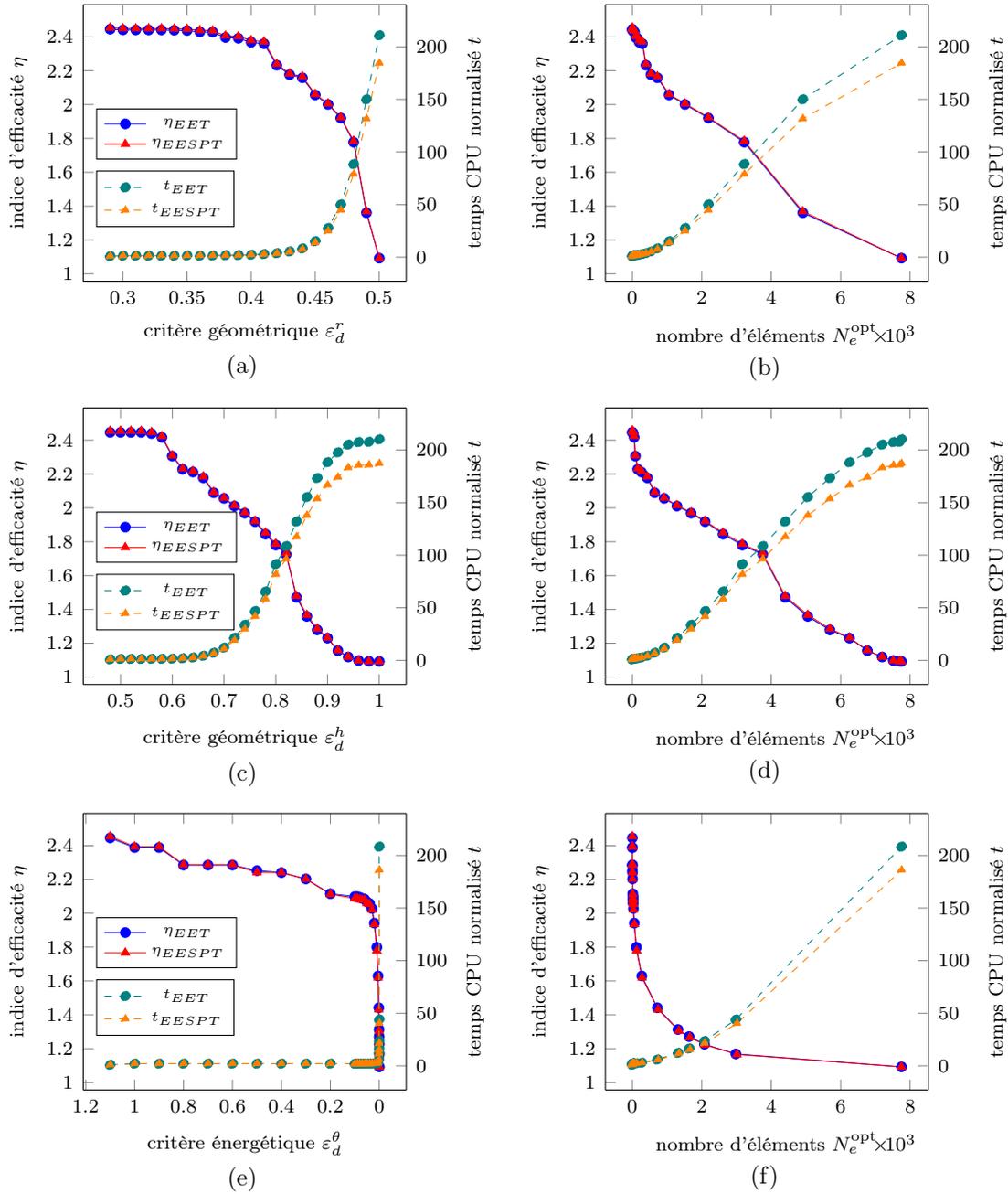


FIGURE 3.8: Évolution de l'indice d'efficacité η et du temps CPU normalisé t obtenus à partir des méthodes EET et EESPT en fonction des critères géométriques ε_d^r (a), ε_d^h (c) et du critère énergétique ε_d^θ (e), et en fonction du nombre d'éléments N_e^{opt} correspondant (b), (d) et (f) intervenant dans la procédure d'optimisation.

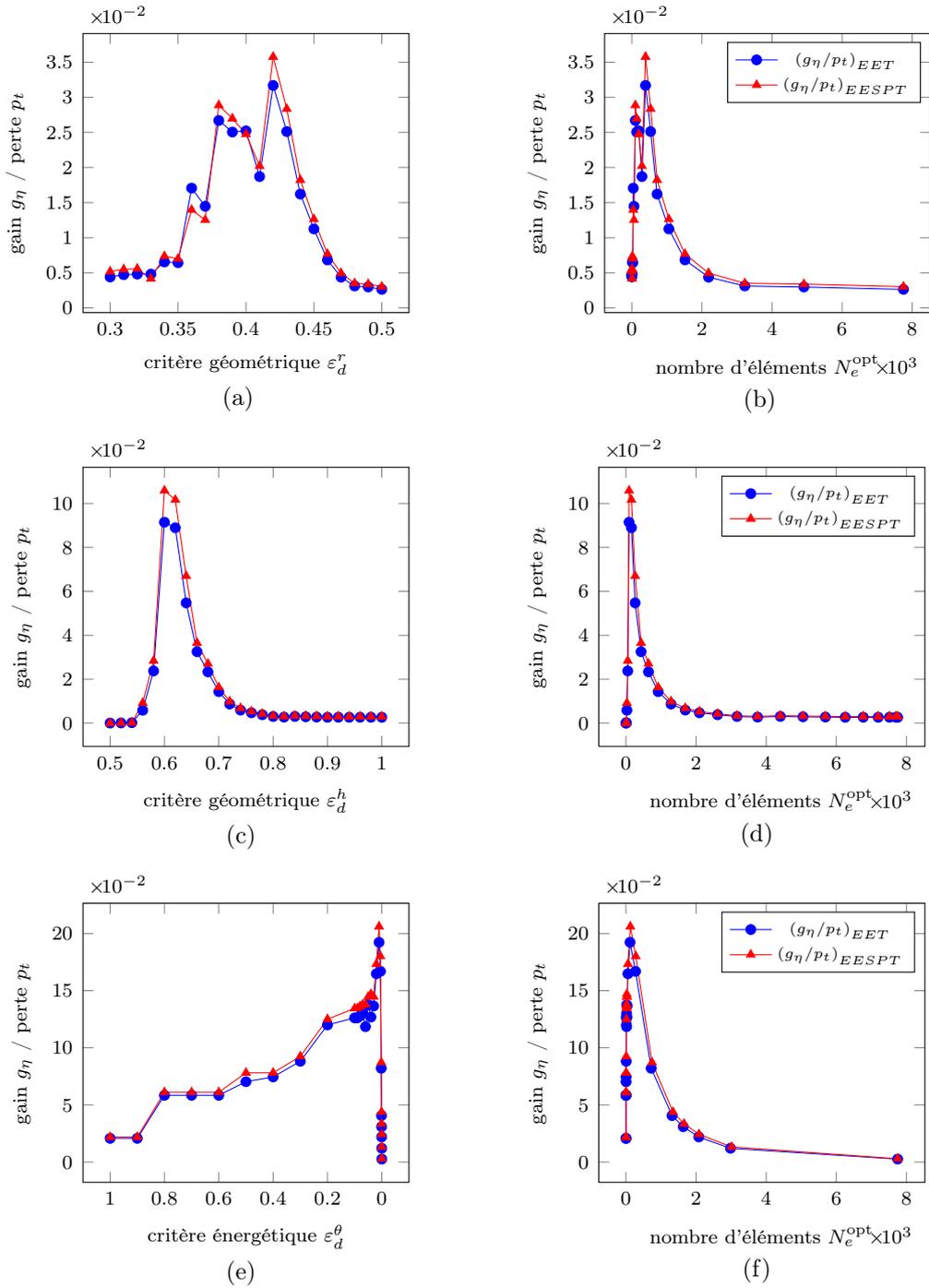


FIGURE 3.9: Évolution du rapport entre le gain en indice d'efficacité g_η et la perte en temps CPU normalisé p_t pour les méthodes EET et EESPT en fonction des critères géométriques ε_d^r (a), ε_d^h (c) et du critère énergétique ε_d^θ (e), et en fonction du nombre d'éléments N_e^{opt} correspondant (b), (d) et (f) intervenant dans la procédure d'optimisation.

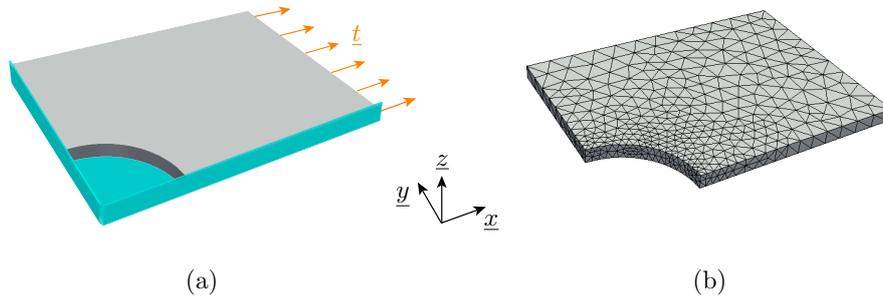


FIGURE 3.10: Modèle 3D de plaque trouée : géométrie et conditions aux limites (a), et maillage éléments finis (b). Les plans orthogonaux bleus ciel représentent des conditions de symétrie.

procédure d'optimisation à l'ensemble des éléments du maillage éléments finis Ω_h .

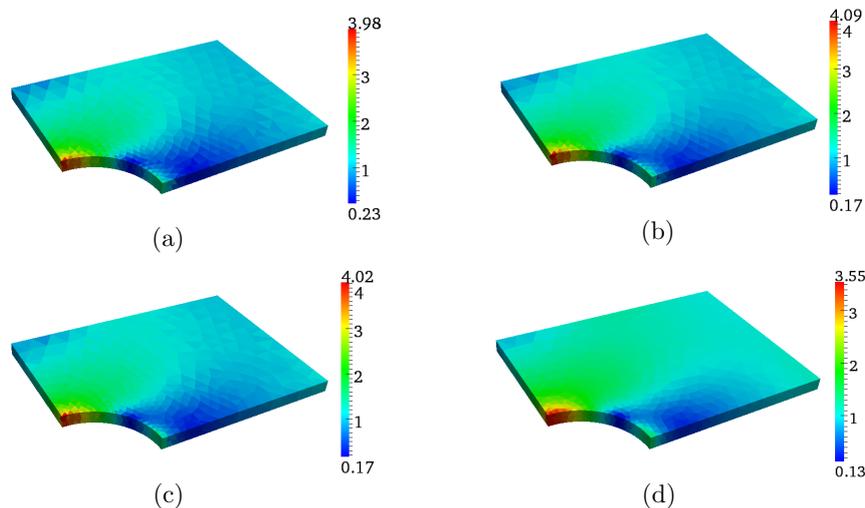


FIGURE 3.11: Cartes du champ de contrainte éléments finis σ_h (a) et des champs de contrainte admissibles $\hat{\sigma}_h$ obtenus à partir des procédures de construction classiques associées aux méthodes EET (b) et EESPT (c), et de la procédure de construction améliorée avec $\Omega_o = \Omega$ (d).

La figure 3.12 présente les répartitions spatiales des contributions élémentaires (au carré) à la densité d'erreur vraie e et d'erreur estimée θ pour chacune des méthodes classiques et améliorée avec $\Omega_o = \Omega$. Seuls les éléments dont la contribution locale est significative sont représentés afin de permettre la visualisation des composantes les plus élevées. Ces cartes d'erreur indiquent que la procédure de construction améliorée est moins sensible aux distorsions géométriques du maillage éléments finis que les procédures de construction classiques des méthodes EET et EESPT. On constate en effet que certains éléments aplatis ou déformés apportent une contribution substantielle à l'erreur estimée globale calculée à partir des procédures de

construction classiques, tandis que ceux-ci ne font pas partie des principales contributions à l'erreur vraie globale et à l'erreur estimée globale obtenue à partir de la procédure de construction améliorée avec $\Omega_o = \Omega$.

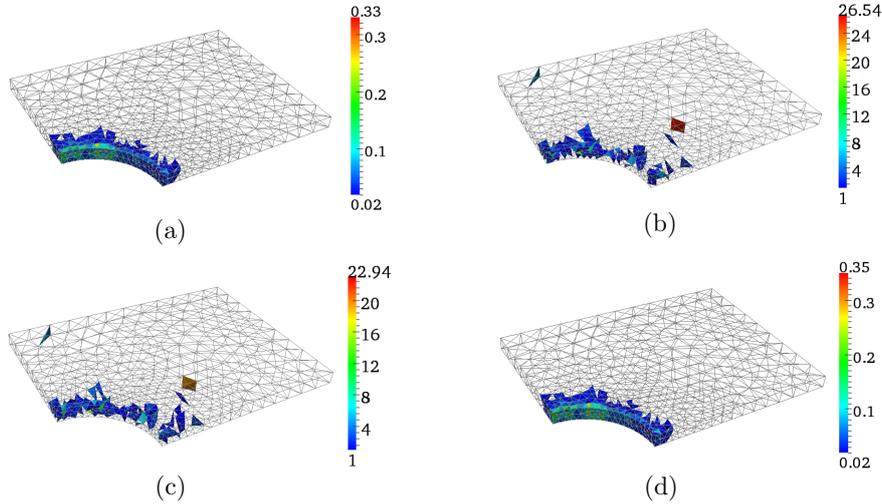


FIGURE 3.12: Cartes des contributions élémentaires (au carré) à la densité d'erreur vraie e (a) et à celle d'erreur estimée θ obtenues à partir des procédures de construction classiques associées aux méthodes EET (b) et EESPT (c), et de la procédure de construction améliorée avec $\Omega_o = \Omega$ (d).

La figure 3.13 montre à nouveau les évolutions de l'indice d'efficacité η et du coût de calcul normalisé t en fonction des différents critères considérés, à savoir ε_d^r , ε_d^h et ε_d^θ , et en fonction du nombre d'éléments correspondant N_e^{opt} impliqué dans la procédure d'optimisation, pour les estimateurs associés à chacune des méthodes EET et EESPT. Les rapports $r_E^{C_i}/r_E^{C_c}$, $h_\Gamma^{\text{min}}/h_\Gamma^{\text{max}}$ et $(\theta_E/\theta_E^{\text{max}})^2$ varient de 0.06689 à 0.3298, de 0.2564 à 0.9900, et de 1.77×10^{-4} à 1.0, respectivement. Les valeurs des indices d'efficacité et des temps de calcul normalisés associés à $\varepsilon_d^r = 0.06$, $\varepsilon_d^h = 0.24$ et $\varepsilon_d^\theta = 1.1$ correspondent à celles calculées à partir des procédures de construction classiques des méthodes EET et EESPT.

Les résultats obtenus à partir des critères géométriques sont comparables à ceux fournis par les exemples 2D précédents. On observe une évolution décroissante quasi-linéaire des indices d'efficacité η avec le nombre d'éléments N_e^{opt} pris en compte dans la procédure d'optimisation. En revanche, les résultats affichés par le critère énergétique sont légèrement différents, dans la mesure où les valeurs des indices d'efficacité η ne diminuent pas aussi rapidement que pour les cas d'application 2D précédents. On constate cependant une décroissance plus marquée de η en fonction de N_e^{opt} à travers l'utilisation du critère énergétique en comparaison à celle des critères géométriques.

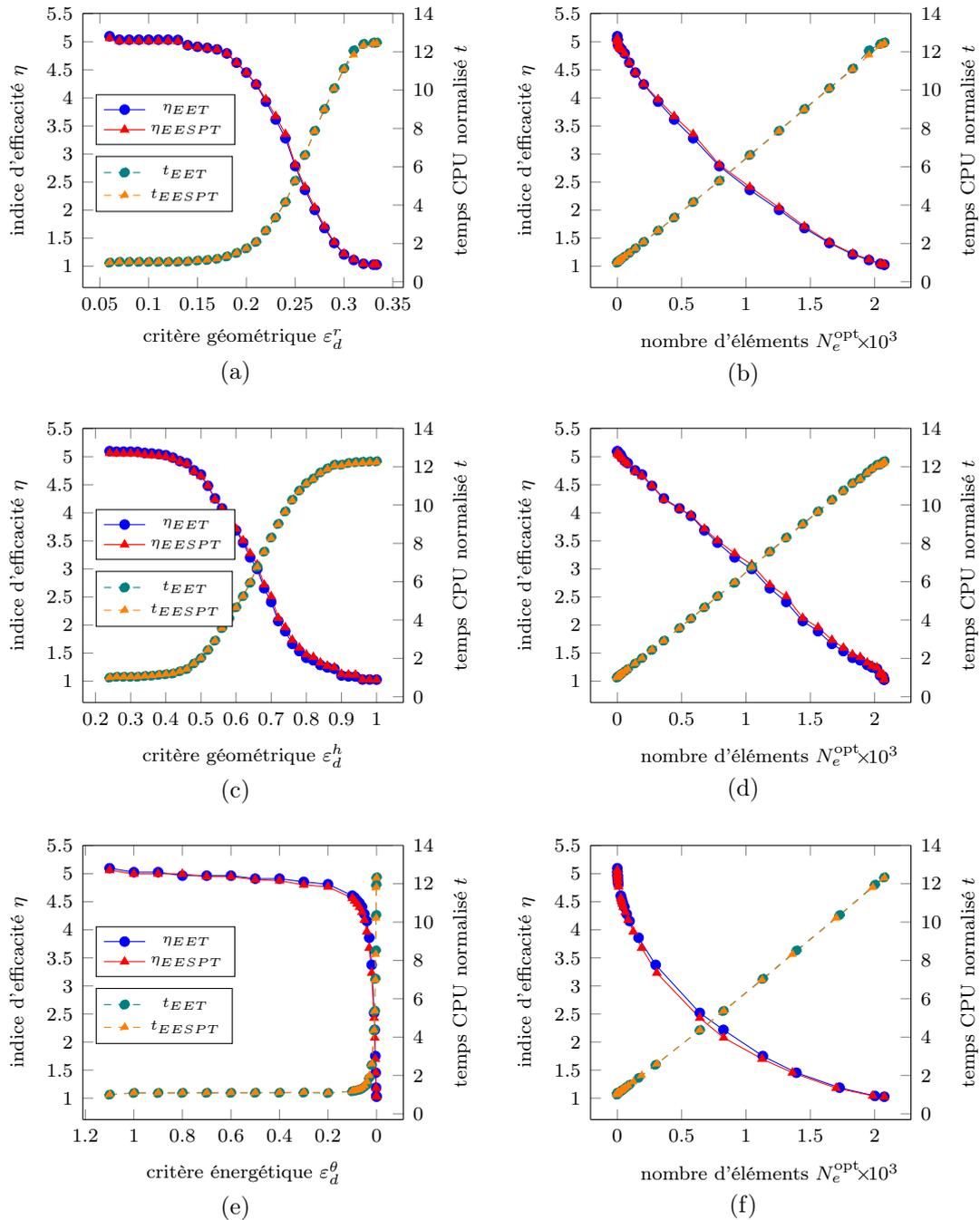


FIGURE 3.13: Évolution de l'indice d'efficacité η et du temps CPU normalisé t obtenus à partir des méthodes EET et EESPT en fonction des critères géométriques ε_d^r (a), ε_d^h (c) et du critère énergétique ε_d^θ (e), et en fonction du nombre d'éléments N_e^{opt} correspondant (b), (d) et (f) intervenant dans la procédure d'optimisation.

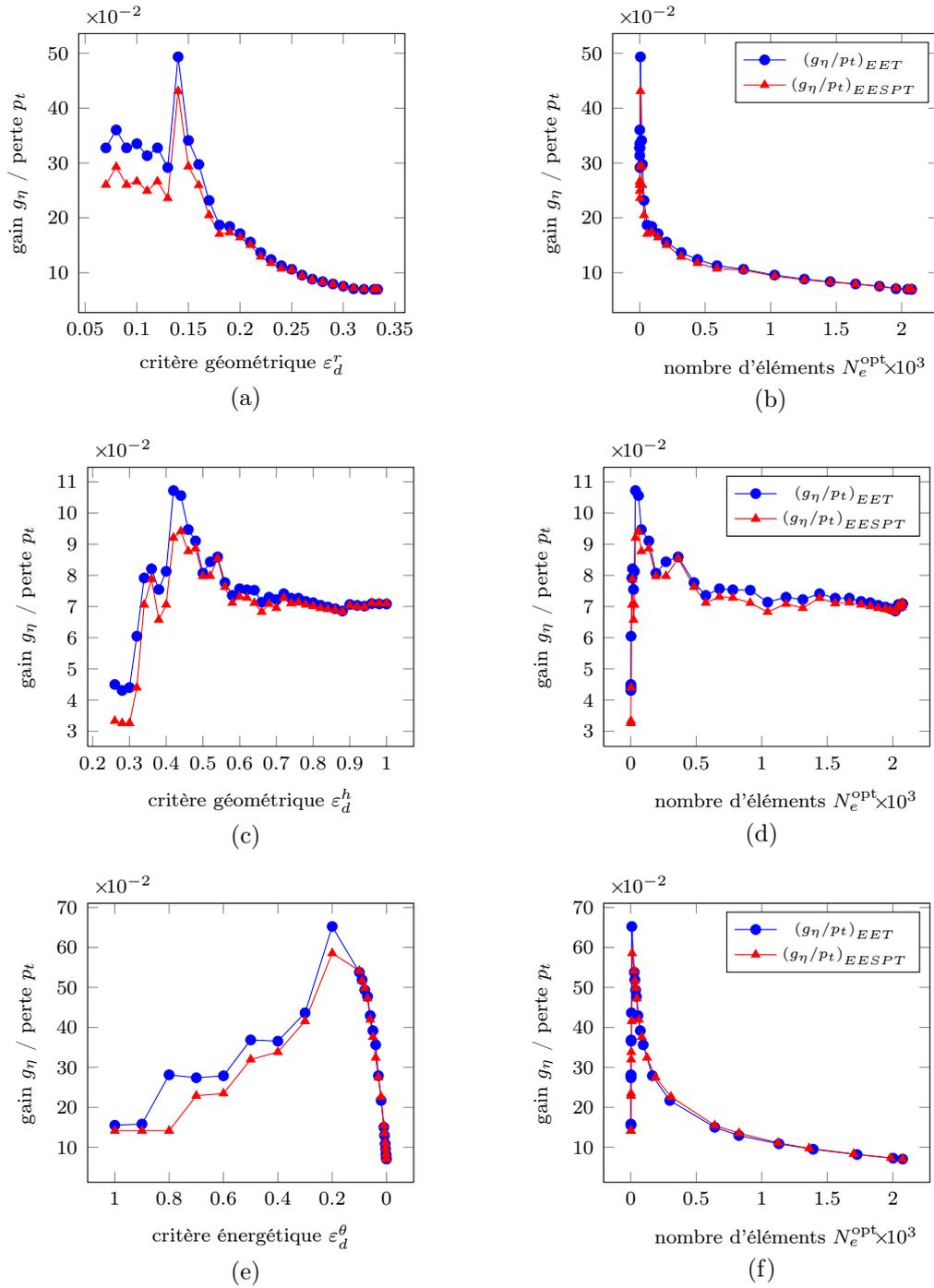


FIGURE 3.14: Évolution du rapport entre le gain en indice d'efficacité g_η et la perte en temps CPU normalisé p_t pour les méthodes EET et EESPT en fonction des critères géométriques ε_d^r (a), ε_d^h (c) et du critère énergétique ε_d^θ (e), et en fonction du nombre d'éléments N_e^{opt} correspondant (b), (d) et (f) intervenant dans la procédure d'optimisation.

L'évolution du facteur d'efficacité g_η/p_t , calculé pour chacune des méthodes EET et EESPT, est à nouveau tracée sur la figure 3.14 en fonction des différents critères géométriques ε_d^r , ε_d^h et énergétique ε_d^θ (courbes de gauche) et en fonction du nombre d'éléments N_e^{opt} intervenant dans la procédure d'optimisation (courbes de droite). On observe également que la procédure de construction améliorée offre un gain non négligeable en terme de précision de l'estimateur associé sans trop affecter le coût de calcul et sans avoir recours à la mise en œuvre de stratégies de remaillage adaptatif lorsque la procédure d'optimisation est appliquée aux zones locales présentant les plus fortes contributions à l'erreur estimée θ . L'utilisation du critère énergétique au sein de la procédure d'optimisation conduit en effet à une borne supérieure θ de l'erreur vraie e de meilleure qualité à moindre coût en comparaison à celle des critères géométriques.

5 Bilan

Ce chapitre a présenté une amélioration de la procédure de construction des densités d'effort équilibrées inhérente aux méthodes de construction de champs admissibles standard EET et hybride EESPT. Cette procédure d'optimisation offre une plus grande flexibilité dans la construction des densités d'effort à travers une minimisation locale de l'énergie complémentaire et permet de pallier le manque de pertinence des estimateurs basés sur une procédure classique des densités d'effort, telle que celle rencontrée dans les méthodes de construction de champs admissibles EET et EESPT.

Le point clé de la procédure de construction améliorée réside dans un choix approprié du critère de sélection des régions à optimiser de manière à obtenir une estimation précise de l'erreur vraie tout en conservant un coût de calcul raisonnable. Différents critères géométriques et énergétiques ont été proposés afin d'améliorer localement la qualité des champs de contrainte admissibles reconstruits dans les zones présentant de fortes distorsions géométriques et des contributions élevées à l'erreur estimée, respectivement. Une étude systématique portant sur l'influence de ces critères vis-à-vis de la pertinence et de l'efficacité en matière de coût de calcul de l'estimateur associé aux méthodes EET et EESPT a été menée sur divers exemples industriels en dimensions 2 et 3. La méthode de construction optimisée s'avère particulièrement efficace lorsque son utilisation est restreinte aux zones locales présentant des singularités de contraintes ou aux régions concentrant les plus fortes contributions à l'erreur estimée. Enfin, cette amélioration constitue une alternative aux traditionnelles stratégies de remaillage adaptatif et conduit à une estimation d'erreur plus précise mais aussi plus coûteuse que celle offerte par une construction classique des densités d'effort.

Finalement, les différentes études comparatives menées aux chapitres 2 et 3 ont conduit au développement de nouveaux outils d'estimation d'erreur robustes

et fiables offrant une mesure garantie et précise de l'erreur de discrétisation globale. Les procédures mises en place constituent des bases solides pour aborder l'estimation d'erreur locale sur des quantités d'intérêt. Le chapitre suivant est consacré à la mise en œuvre de nouvelles techniques d'encadrement appliquées à cette estimation d'erreur locale.

Chapitre 4

Nouvelles techniques d'encadrement pour l'estimation d'erreur locale

Ce quatrième chapitre s'attache au développement et à la mise en place de nouvelles techniques d'encadrement permettant d'améliorer la qualité des bornes d'erreur locale dans le cadre des problèmes linéaires. Après avoir rappelé les grandes lignes de la technique d'encadrement classique introduite au chapitre 1 et basée sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz, une description détaillée des deux nouvelles techniques d'encadrement est présentée. Ces techniques sont basées sur le principe de Saint-Venant à travers l'utilisation de propriétés d'homothétie. La pertinence des bornes d'erreur locale offertes par ces techniques améliorées est comparée à celle des bornes fournies par la technique classique sur différentes quantités d'intérêt locales en dimension 2.

Sommaire

1	Technique d'encadrement classique	157
1.1	Résultat fondamental	157
1.2	Bornes d'erreur locale	157
2	Première amélioration de la technique d'encadrement . . .	158
2.1	Définitions et préliminaires	158
2.2	Principe général	162
2.3	Inégalité fondamentale	164
2.4	Obtention des nouvelles bornes d'erreur locale	165
3	Seconde amélioration de la technique d'encadrement	168
3.1	Principe général	168
3.2	Inégalité fondamentale	171
3.3	Obtention des nouvelles bornes d'erreur locale	172
4	Illustrations numériques	177
4.1	Présentation de la structure fissurée 2D et des quantités d'intérêt étudiées	178
4.2	Quantité d'intérêt I_1 : valeur moyenne d'un champ défini sur une zone locale	184
4.3	Quantité d'intérêt I_2 : valeur ponctuelle d'un champ	188
4.4	Quantité d'intérêt I_3 : valeur extraite d'un champ	192
5	Bilan	196

Dans le contexte de la vérification des modèles éléments finis, les travaux de recherche se tournent actuellement vers le développement d'outils permettant d'évaluer la qualité d'une solution approchée sur des quantités d'intérêt locales. Les méthodes d'estimation d'erreur locale sont apparues il y a maintenant plus d'une vingtaine d'années et furent l'objet d'extensions diverses et variées. Une brève description des principales approches d'estimation d'erreur locale a été présentée dans le cadre des problèmes linéaires en section 3 du chapitre 1. Parmi l'ensemble de ces méthodes, seule une partie restreinte offre une estimation garantie et précise de l'erreur locale assurant l'obtention de bornes strictes et de qualité pour une large gamme de problèmes.

Dans le cadre de l'estimation robuste d'erreur locale, une méthode générale, initialement introduite dans [Ladevèze (2006)] et décrite à la section 3.3.7 du chapitre 1, a fait l'objet de nombreux développements visant non seulement à améliorer la précision des bornes d'encadrement de l'erreur locale, mais aussi à étendre son cadre d'application. Celle-ci s'appuie sur les techniques d'extraction couplées aux estimateurs d'erreur globale basés sur la non-vérification de la relation de comportement, et, plus récemment, sur des techniques « handbook » [Chamoin et Ladevèze (2008), Chamoin et Ladevèze (2009), Waeytens et al. (2012)] et des procédures de projection [Ladevèze et Chamoin (2010)]. En premier lieu, rappelons que les estimateurs fondés sur le concept d'erreur en relation de comportement offrent une estimation garantie et fiable de l'erreur de discrétisation globale à travers la construction d'une solution admissible. En second lieu, les techniques d'extraction permettent d'exprimer une quantité d'intérêt locale sous forme globale, conduisant à la résolution globale d'un problème dual, dénommé problème adjoint ou miroir selon la nature linéaire ou non-linéaire du problème de référence. Une résolution précise de ce problème auxiliaire est alors nécessaire afin d'obtenir un encadrement précis de l'erreur en quantité d'intérêt.

Rappelons à ce stade que la méthode d'estimation d'erreur locale présentée à la section 3.3.7 du chapitre 1 permet d'envisager la résolution du problème auxiliaire indépendamment de celle du problème de référence.

Une première méthode simple et efficace exploite cette propriété intéressante par le biais d'un raffinement local (autour de la zone d'intérêt) en espace (et en temps, dans le cas des problèmes d'évolution) du maillage $\tilde{\Omega}_h$ associé à la discrétisation du problème auxiliaire. Cette technique conduit à une résolution précise du problème auxiliaire, mais peut s'avérer coûteuse et reste intrusive, dans la mesure où elle ne permet pas de conserver les paramètres de discrétisation et les opérateurs intervenant dans la résolution du problème de référence.

Une méthode alternative et non-intrusive consiste à introduire la partie à forts gradients de la solution du problème auxiliaire à l'aide d'un enrichissement local de l'espace d'approximation éléments finis. Cet enrichissement est réalisé à l'aide

de fonctions « handbook » introduites localement par une méthode de partition de l'unité et correspondant aux solutions locales (quasi-)exactes du problème auxiliaire déterminées de manière analytique ou numérique dans des domaines (semi-)infinis. Cette technique se révèle particulièrement efficace et conduit à un encadrement très précis de l'erreur locale.

En l'absence de méthodes de résolution spécifiques (telles que les techniques « handbook »), la technique d'encadrement classique peut fournir des bornes d'erreur garanties de piètre qualité, même en utilisant un maillage adjoint $\tilde{\Omega}_h$ très fin. La raison principale réside dans l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui se révèle pertinente uniquement lorsque les quantités intervenant dans celle-ci sont colinéaires au sens du produit scalaire considéré, i.e. dans le cas où les principales contributions associées à l'erreur de discrétisation des problèmes de référence et auxiliaire sont situées dans des régions voisines. En d'autres termes, lorsque la zone d'intérêt ne coïncide pas avec les régions concentrant les plus fortes contributions à l'erreur globale du problème de référence, la technique d'encadrement classique fournit généralement des bornes d'erreur locale imprécises, voire inexploitable.

Dans un premier temps, nous revenons sur les aspects fondamentaux de la technique de majoration classique basée sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz afin d'en dégager les principaux inconvénients. Dans un second temps, nous introduisons deux nouvelles techniques d'encadrement visant à améliorer la pertinence des bornes d'erreur locale. Ces techniques s'appuient sur des outils à la fois classiques et innovants ; ces derniers reposent sur le principe de Saint-Venant et leur utilisation est par conséquent restreinte aux problèmes linéaires. Des techniques classiques d'extraction ainsi que des propriétés spécifiques d'homothétie sont employées afin d'obtenir des bornes garanties et précises, de meilleure qualité que celles fournies par la technique d'encadrement classique. L'idée générale consiste à traiter séparément la zone d'intérêt ω du reste du domaine Ω . Les deux techniques améliorées s'appuient alors sur des propriétés de domaines homothétiques afin d'élaborer de façon astucieuse des bornes précises sur une région locale entourant la zone d'intérêt. Dans ce travail, nous considérons uniquement des quantités d'intérêt linéaires vis-à-vis du champ de déplacement solution de problèmes d'élasticité linéaire. Ces nouvelles techniques d'encadrement sont par ailleurs combinées aux techniques « handbook » afin de résoudre le problème adjoint de manière très fine et aboutir ainsi à un encadrement précis. La qualité des bornes obtenues par les deux techniques d'encadrement améliorées est comparée à celle des bornes fournies par la technique classique sur diverses quantités d'intérêt issues d'une application numérique en dimension 2.

Les travaux menés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication [Ladevèze et al. (2012b)] et de communications internationales [Pled et al. (2012b), Chamoin et al. (2012a)].

1 Technique d'encadrement classique

1.1 Résultat fondamental

Rappelons tout d'abord qu'à partir de l'expression de la quantité d'intérêt I , réécrite sous une forme globale du type (1.83), et des propriétés des solutions admissibles reconstruites $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ et $(\hat{\hat{\underline{u}}}_h, \hat{\hat{\sigma}}_h)$, on obtient le résultat fondamental (1.105), qui s'écrit :

$$I_{ex} - I_h - I_{hh} = \left\langle \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m, \hat{\hat{\sigma}}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\hat{\underline{u}}}_h) \right\rangle_{\sigma, \Omega} \quad (4.1)$$

où $\hat{\sigma}_h^m = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_h + \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h))$ et I_{hh} est un terme correctif entièrement calculable, dont l'expression (1.106) fait intervenir des quantités parfaitement connues issues des problèmes de référence et adjoint ; $\langle \bullet, \circ \rangle_{\sigma, \Omega}$ désigne le produit scalaire, défini par (1.3b), sur l'espace des champs de contrainte appartenant à \mathcal{S} . Une démonstration complète et détaillée de ce résultat fondamental est fournie en section 3.3.7 du chapitre 1. Le lecteur intéressé pourra en outre se référer à [Ladevèze (2008), Ladevèze et Chamoin (2010)] pour plus d'informations.

L'égalité fondamentale (4.1) constitue le point départ de la technique d'encadrement classique et des techniques améliorées proposées en sections 2 et 3. Rappelons que l'établissement de (4.1) ne requiert pas l'utilisation de la propriété d'orthogonalité de Galerkin (1.24) (cf. remarque 1.29 du chapitre 1), contrairement aux techniques pionnières développées dans [Paraschivoiu et al. (1997), Peraire et Patera (1998), Prudhomme et Oden (1999), Becker et Rannacher (2001)]; cela permet de découpler les discrétisations associées aux problèmes de référence et adjoint. Cette propriété intéressante offre donc la possibilité de (dé-)raffiner localement le maillage Ω_h du problème adjoint. En outre, il paraît alors envisageable d'étendre la validité du cadre d'application du résultat fondamental (4.1) à des problèmes résolus à l'aide d'une méthode d'approximation numérique différente de la méthode des éléments finis (méthode des volumes finis, méthodes sans maillage, etc.).

1.2 Bornes d'erreur locale

À ce stade, la procédure d'encadrement classique consiste simplement à appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au résultat fondamental (4.1) au sens du produit scalaire $\langle \bullet, \circ \rangle_{\sigma, \Omega}$, puis à utiliser l'égalité de Prager-Synge (1.76). Il en découle une majoration garantie (1.107) de l'erreur locale, dont on rappelle ici l'expression :

$$|I_{ex} - I_h - I_{hh}| \leq \frac{1}{2} e_{\text{rdc}, \Omega} \tilde{e}_{\text{rdc}, \Omega} \quad (4.2)$$

où les notations simplifiées $e_{\text{rdc},\Omega}$ et $\tilde{e}_{\text{rdc},\Omega}$ désignent les mesures globales $e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h)$ et $e_{\text{rdc},\Omega}(\hat{\tilde{u}}_h, \hat{\tilde{\sigma}}_h)$ de l'erreur en relation de comportement associées aux problèmes de référence et adjoint, respectivement. Notons que la majoration obtenue nécessite uniquement la mise en place d'une procédure d'estimation d'erreur globale.

Par la suite, des bornes inférieure et supérieure $(\xi_{\text{inf}}, \xi_{\text{sup}})$ de la valeur exacte I_{ex} prise par la quantité d'intérêt (ou, de manière équivalente, de l'erreur locale $I_{ex} - I_h$) se déduisent directement de l'encadrement (4.2) :

$$\xi_{\text{inf}} \leq I_{ex} \leq \xi_{\text{sup}} \tag{4.3}$$

avec

$$\xi_{\text{inf}} = I_h + I_{hh} - \frac{1}{2} e_{\text{rdc},\Omega} \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega} \tag{4.4a}$$

$$\xi_{\text{sup}} = I_h + I_{hh} + \frac{1}{2} e_{\text{rdc},\Omega} \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega} \tag{4.4b}$$

Dans la plupart des applications pratiques, l'erreur de discrétisation globale relative au problème adjoint est majoritairement concentrée aux alentours de la zone d'intérêt, tandis que celle associée au problème de référence est généralement répartie sur des zones présentant des singularités géométriques ou matériaux, ou d'autres sources d'erreur. En conséquence, lorsque l'erreur de discrétisation globale relative au problème de référence est principalement localisée dans une région située en dehors de la zone d'intérêt et éloignée de celle-ci, la technique d'encadrement classique conduit à l'obtention de bornes d'erreur locale (4.4) qui peuvent s'avérer grossières, i.e. de mauvaise qualité. Ce point précis constitue l'inconvénient majeur de la technique d'encadrement classique. La figure 4.1 fournit une illustration des configurations où la technique d'encadrement classique conduit à l'obtention de bornes grossières ou pertinentes.

Les nouvelles techniques introduites dans la suite de ce chapitre sont destinées à pallier le manque de pertinence inhérent à la technique classique et donc à affiner les bornes d'encadrement de l'erreur locale.

2 Première amélioration de la technique d'encadrement

2.1 Définitions et préliminaires

Considérons un sous-domaine, noté ω_1 , inclus dans Ω , défini par un point \underline{Q} et une forme géométrique. L'ensemble des domaines homothétiques ω_λ associés à ω_1 est défini par :

$\omega_\lambda = \mathcal{H}_{[\underline{Q}, \lambda]}(\omega_1) \tag{4.5}$

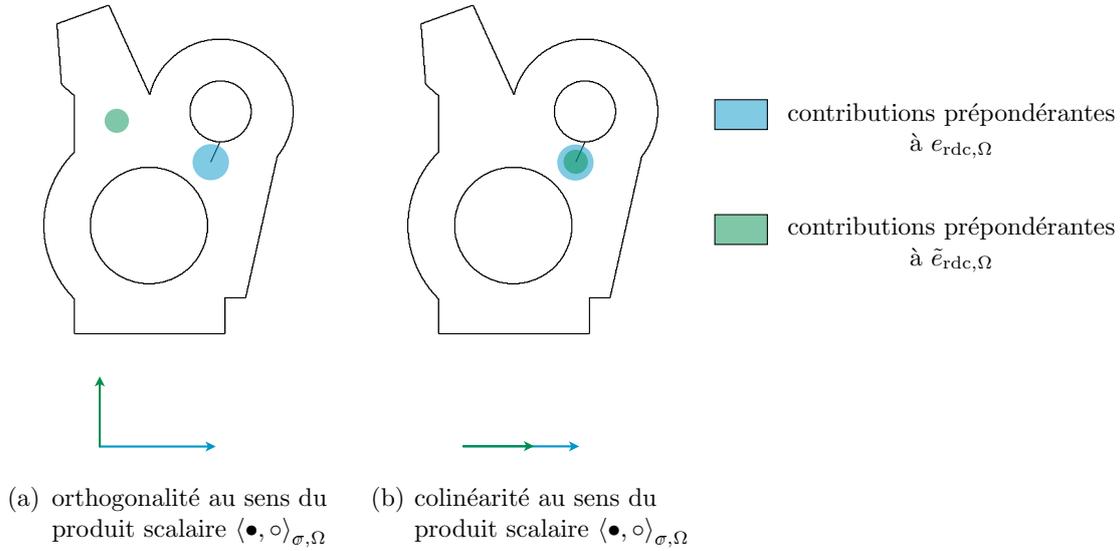


FIGURE 4.1: Représentation schématique des configurations où la technique d'encadrement classique fournit des bornes grossières (a) et pertinentes (b).

où $\mathcal{H}_{[\underline{Q}, \lambda]}$ désigne l'opérateur de transformation homothétique de centre \underline{Q} , appelé centre d'homothétie, et paramétré par un scalaire positif non nul $\lambda \in]0, \lambda_{\max}]$, appelé rapport d'homothétie, tel que $\omega_\lambda \subset \Omega$ (cf. figure 4.2). La forme géométrique définissant l'ensemble des domaines homothétiques ω_λ peut être choisie de manière arbitraire. Néanmoins, on considérera en pratique un ensemble de domaines dont la géométrie est supposée simple, telle qu'un cercle ou un rectangle en dimension 2, et une sphère ou un parallélépipède en dimension 3, par exemple.

En considérant un paramétrage (λ, s) (resp. (λ, s_1, s_2)) du domaine $\omega_\lambda \subset \Omega$ en 2D (resp. 3D), où s désigne l'abscisse curviligne le long de la frontière $\partial\omega_\lambda$ (cf. figure 4.2), on peut montrer les égalités suivantes :

$$\int_{\omega_\lambda} \bullet \, d\Omega = \int_{\lambda'=0}^{\lambda} \left[\int_{\partial\omega_{\lambda'}} \bullet \, dS \right] d\lambda' \quad (4.6a)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\int_{\omega_\lambda} \bullet \, d\Omega \right] = \int_{\partial\omega_\lambda} \bullet \, dS \quad (4.6b)$$

où dS désigne de manière générique l'élément de surface défini par :

$$dS = \begin{cases} ds & \text{en 2D} \\ a(s_1, s_2) \, ds_1 \, ds_2 & \text{en 3D} \end{cases}$$

dS dépend intrinsèquement de la forme géométrique choisie pour l'ensemble des domaines homothétiques.

Pour un couple donné de domaines homothétiques $(\omega_\lambda, \omega_{\bar{\lambda}})$ inclus dans Ω , représenté sur la figure 4.2 et paramétré par $(\lambda, \bar{\lambda})$ tel que $\omega_\lambda \subset \omega_{\bar{\lambda}} \subset \Omega$, i.e. $\lambda \in]0, \bar{\lambda}]$,

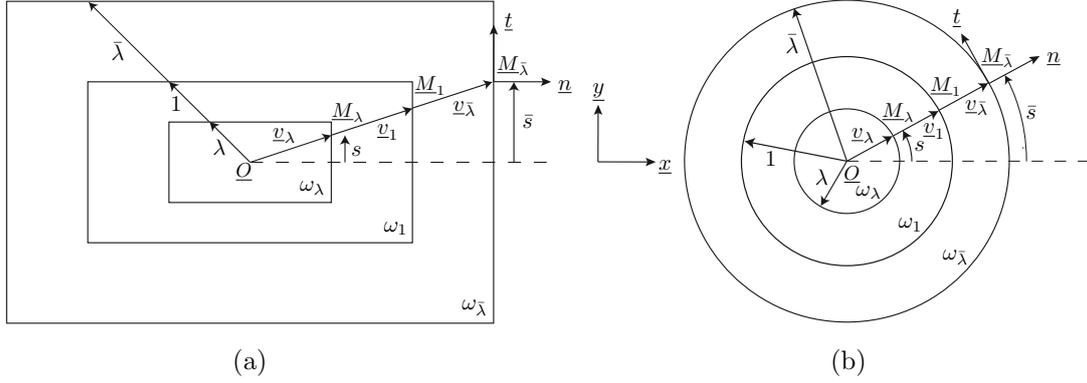


FIGURE 4.2: Exemples de domaines homothétiques rectangulaires (a) et circulaires (b) en dimension 2.

la position \underline{v}_λ dans le repère $(\underline{O}, \underline{x}, \underline{y})$ en 2D (resp. $(\underline{O}, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ en 3D) d'un point \underline{M}_λ situé sur la frontière $\partial\omega_\lambda$ peut être définie à partir de la position $\underline{v}_{\bar{\lambda}}$ du point correspondant $\underline{M}_{\bar{\lambda}}$ situé sur la frontière $\partial\omega_{\bar{\lambda}}$ par la relation suivante :

$$\underline{v}_\lambda = \begin{cases} \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \underline{v}_{\bar{\lambda}}(\bar{s}) & \text{paramétré par } (\lambda, \bar{s}) \text{ en 2D} \\ \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \underline{v}_{\bar{\lambda}}(\bar{s}_1, \bar{s}_2) & \text{paramétré par } (\lambda, \bar{s}_1, \bar{s}_2) \text{ en 3D} \end{cases}$$

où \bar{s} (resp. \bar{s}_1 et \bar{s}_2) représente l'abscisse curviligne le long de la frontière $\partial\omega_{\bar{\lambda}}$ en 2D (resp. 3D).

Un tel paramétrage conduit aux relations suivantes :

$$\int_{\omega_\lambda} \bullet \, d\Omega = \int_{\lambda'=0}^{\lambda} \left[\int_{\partial\omega_{\lambda'}} \bullet \underline{v}_{\bar{\lambda}} \cdot \underline{n} \, dS \right] \left(\frac{\lambda'}{\bar{\lambda}} \right)^n \frac{1}{\bar{\lambda}} \, d\lambda' \quad (4.7a)$$

$$\int_{\partial\omega_\lambda} \bullet \, dS = \int_{\partial\omega_{\bar{\lambda}}} \bullet \, dS \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^n \quad (4.7b)$$

où n est un entier positif défini comme :

$$n = \begin{cases} 1 & \text{en 2D} \\ 2 & \text{en 3D} \end{cases} \quad (4.8)$$

Introduisons à présent les produits scalaires $\langle \bullet, \circ \rangle_{u, \omega_\lambda}$ et $\langle \bullet, \circ \rangle_{\sigma, \omega_\lambda}$ définis sur $\mathbf{U}|_{\omega_\lambda}$ et $\mathbf{S}|_{\omega_\lambda}$, respectivement, ainsi que leurs normes énergétiques associées en déplacement $\|\bullet\|_{u, \omega_\lambda}$ et en contrainte $\|\bullet\|_{\sigma, \omega_\lambda}$ sur un domaine homothétique donné $\omega_\lambda \subset \Omega$:

$$\langle \bullet, \circ \rangle_{u, \omega_\lambda} = \int_{\omega_\lambda} \text{Tr} [\mathcal{E}(\bullet) \mathbf{K} \mathcal{E}(\circ)] \, d\Omega \quad \text{et} \quad \|\bullet\|_{u, \omega_\lambda} = \left[\langle \bullet, \bullet \rangle_{u, \omega_\lambda} \right]^{1/2} \quad (4.9a)$$

$$\langle \bullet, \circ \rangle_{\sigma, \omega_\lambda} = \int_{\omega_\lambda} \text{Tr} [\bullet \mathbf{K}^{-1} \circ] \, d\Omega \quad \text{et} \quad \|\bullet\|_{\sigma, \omega_\lambda} = \left[\langle \bullet, \bullet \rangle_{\sigma, \omega_\lambda} \right]^{1/2} \quad (4.9b)$$

De manière similaire, on définit les produits scalaires $(\bullet, \circ)_{u, \partial\omega_\lambda}$ et $(\bullet, \circ)_{\sigma, \partial\omega_\lambda}$ définis sur $\mathcal{U}_{|\partial\omega_\lambda}$ et $\mathcal{S}_{|\partial\omega_\lambda}$, respectivement, ainsi que leurs normes énergétiques associées en déplacement $|\bullet|_{u, \partial\omega_\lambda}$ et en contrainte $|\bullet|_{\sigma, \partial\omega_\lambda}$ sur la frontière $\partial\omega_\lambda$ d'un domaine homothétique donné ω_λ , tel que $\omega_\lambda \subset \omega_{\bar{\lambda}} \subset \Omega$:

$$(\bullet, \circ)_{u, \partial\omega_\lambda} = \int_{\partial\omega_\lambda} \text{Tr} [\varepsilon(\bullet) \mathbf{K} \varepsilon(\circ)] \underline{v}_{\bar{\lambda}} \cdot \underline{n} \, dS \quad \text{et} \quad |\bullet|_{u, \partial\omega_\lambda} = [(\bullet, \bullet)_{u, \partial\omega_\lambda}]^{1/2} \quad (4.10a)$$

$$(\bullet, \circ)_{\sigma, \partial\omega_\lambda} = \int_{\partial\omega_\lambda} \text{Tr} [\bullet \mathbf{K}^{-1} \circ] \underline{v}_{\bar{\lambda}} \cdot \underline{n} \, dS \quad \text{et} \quad |\bullet|_{\sigma, \partial\omega_\lambda} = [(\bullet, \bullet)_{\sigma, \partial\omega_\lambda}]^{1/2} \quad (4.10b)$$

Il en découle les égalités suivantes, permettant d'établir un lien entre les différentes normes présentées ci-dessus :

$$\frac{d}{d\lambda} [\|\bullet\|_{u, \omega_\lambda}^2] = \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)^n \frac{1}{\bar{\lambda}} |\bullet|_{u, \partial\omega_{\bar{\lambda}}}^2 \quad (4.11a)$$

$$\frac{d}{d\lambda} [\|\bullet\|_{\sigma, \omega_\lambda}^2] = \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)^n \frac{1}{\bar{\lambda}} |\bullet|_{\sigma, \partial\omega_{\bar{\lambda}}}^2 \quad (4.11b)$$

où l'entier n est défini par (4.8).

Démonstration 4.1. À partir de la définition (4.9a) de la norme $\|\bullet\|_{u, \omega_\lambda}$, puis en utilisant la relation (4.7a) et en introduisant la définition (4.10a) de la norme $|\bullet|_{u, \partial\omega_{\bar{\lambda}}}$, il vient successivement :

$$\begin{aligned} \|\bullet\|_{u, \omega_\lambda}^2 &= \int_{\omega_\lambda} \text{Tr} [\varepsilon(\bullet) \mathbf{K} \varepsilon(\bullet)] \, d\Omega \\ &= \int_{\lambda'=0}^{\lambda} \left[\left(\frac{\lambda'}{\bar{\lambda}}\right)^n \frac{1}{\bar{\lambda}} \int_{\partial\omega_{\bar{\lambda}}} \text{Tr} [\varepsilon(\bullet) \mathbf{K} \varepsilon(\bullet)] \underline{v}_{\bar{\lambda}} \cdot \underline{n} \, dS \right] d\lambda' \\ &= \int_{\lambda'=0}^{\lambda} \left[\left(\frac{\lambda'}{\bar{\lambda}}\right)^n \frac{1}{\bar{\lambda}} |\bullet|_{u, \partial\omega_{\bar{\lambda}}}^2 \right] d\lambda' \end{aligned} \quad (4.12)$$

Finalemnt, en dérivant (4.12) par rapport à la variable λ , on obtient la relation recherchée (4.11a). En suivant une démarche analogue, on démontre aisément la relation (4.11b).

Les mesures $e_{\text{rdc}, \omega_\lambda}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ et $e_{\text{rdc}, \omega_\lambda}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\hat{\sigma}}_h)$ de la non-vérification des relations de comportement associées aux problèmes de référence et adjoint sur une partie $\omega_\lambda \subset \Omega$ sont respectivement définies par :

$$e_{\text{rdc}, \omega_\lambda} \equiv e_{\text{rdc}, \omega_\lambda}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) = \|\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)\|_{\sigma, \omega_\lambda} \quad (4.13a)$$

$$\tilde{e}_{\text{rdc}, \omega_\lambda} \equiv e_{\text{rdc}, \omega_\lambda}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\hat{\sigma}}_h) = \left\| \hat{\hat{\sigma}}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right\|_{\sigma, \omega_\lambda} \quad (4.13b)$$

De manière similaire, les mesures $e_{\text{rdc},\Omega\setminus\omega_\lambda}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ et $e_{\text{rdc},\Omega\setminus\omega_\lambda}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ de la non-vérification des relations de comportement relatives aux problèmes de référence et adjoint sur la partie complémentaire $\Omega\setminus\omega_\lambda$ de ω_λ sont respectivement définies par :

$$e_{\text{rdc},\Omega\setminus\omega_\lambda} \equiv e_{\text{rdc},\Omega\setminus\omega_\lambda}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) = \|\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)\|_{\sigma,\Omega\setminus\omega_\lambda} \quad (4.14a)$$

$$\tilde{e}_{\text{rdc},\Omega\setminus\omega_\lambda} \equiv e_{\text{rdc},\Omega\setminus\omega_\lambda}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) = \left\| \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right\|_{\sigma,\Omega\setminus\omega_\lambda} \quad (4.14b)$$

2.2 Principe général

En premier lieu, rappelons l'expression de la quantité q intervenant dans le résultat fondamental (4.1) et constituant le point de départ des différentes techniques d'encadrement :

$$q = \left\langle \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m, \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right\rangle_{\sigma,\Omega} \quad (4.15)$$

où les champs $\hat{\sigma}_h^m$ et $\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)$ sont des quantités connues issues des problèmes de référence et adjoint, respectivement, et σ_{ex} est le champ de contrainte exact inconnu du problème de référence.

En considérant un sous-domaine ω_λ du domaine d'étude Ω et en notant $\Omega\setminus\omega_\lambda$ sa partie complémentaire, le principe général consiste à séparer la quantité q en deux contributions distinctes q_{ω_λ} et $q_{\Omega\setminus\omega_\lambda}$:

$$q = q_{\omega_\lambda} + q_{\Omega\setminus\omega_\lambda}$$

où q_{ω_λ} et $q_{\Omega\setminus\omega_\lambda}$ sont les contributions associées à la partie ω_λ et à sa partie complémentaire $\Omega\setminus\omega_\lambda$, respectivement :

$$q_{\omega_\lambda} = \left\langle \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m, \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right\rangle_{\sigma,\omega_\lambda} \quad (4.16a)$$

$$q_{\Omega\setminus\omega_\lambda} = \left\langle \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m, \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right\rangle_{\sigma,\Omega\setminus\omega_\lambda} \quad (4.16b)$$

Lorsque la quantité $\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)$, intervenant dans la mesure de l'erreur en relation de comportement du problème adjoint, est majoritairement concentrée dans la partie ω_λ , i.e. en choisissant un sous-domaine ω_λ qui entoure la zone d'intérêt ω , la partie $q_{\Omega\setminus\omega_\lambda}$ peut être majorée directement (sans forte sur-estimation) en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au sens du produit scalaire $\langle \bullet, \circ \rangle_{u,\Omega\setminus\omega_\lambda}$:

$$|q_{\Omega\setminus\omega_\lambda}| \leq \|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m\|_{\sigma,\Omega\setminus\omega_\lambda} \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega\setminus\omega_\lambda} \quad (4.17)$$

$\tilde{e}_{\text{rdc},\Omega\setminus\omega_\lambda}$ est un terme calculable dont la valeur est généralement faible, car l'erreur de discrétisation associée au problème adjoint est principalement localisée autour de la zone d'intérêt $\omega \subset \omega_\lambda$. Cette dernière observation a pour conséquence directe que

la principale contribution à l'erreur locale provient de la partie q_{ω_λ} . La majoration de cette dernière doit donc être menée avec un soin particulier, afin d'évaluer avec précision l'erreur locale tout en préservant le caractère garanti de l'estimation.

Afin d'obtenir un encadrement précis de la partie q_{ω_λ} , la démarche suivie reprend par certains aspects le concept de pollution introduit en section 3.1.1 du chapitre 1. On décompose alors l'erreur de discrétisation du problème de référence $\underline{e}_h = \underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h$ sur la partie ω_λ en une somme de deux contributions :

- une contribution \underline{u}_l , qualifiée d'*erreur locale* sur ω_λ , correspondant à la solution exacte d'un problème défini sur ω_λ soumis à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur sa frontière $\partial\omega_\lambda$ et à une densité volumique d'effort égale à $\underline{\text{div}}(\mathbf{K} \varepsilon(\underline{e}_h))$ dans ω_λ ;
- une contribution \underline{u}_p , qualifiée d'*erreur de pollution* dans ω_λ , correspondant à la solution exacte d'un problème défini sur ω_λ soumise uniquement à des conditions aux limites de Dirichlet égales aux valeurs prises par l'erreur de discrétisation \underline{e}_h associée au problème de référence.

Le problème local définissant l'erreur locale sur le sous-domaine ω_λ consiste à rechercher un couple $(\underline{u}_l, \sigma_l)$, défini sur ω_λ , vérifiant :

- les équations de liaison (ou de compatibilité) :

$$\underline{u}_l \in \mathbf{U}_{|\omega_\lambda} ; \quad \underline{u}_l = \underline{0} \quad \text{sur } \partial\omega_\lambda ; \quad \varepsilon(\underline{u}_l) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u}_l + \nabla^T \underline{u}_l) \quad \text{dans } \omega_\lambda \quad (4.18a)$$

- les équations d'équilibre :

$$\sigma_l \in \mathbf{S}_{|\omega_\lambda} ; \quad \underline{\text{div}}(\sigma_l) = \underline{\text{div}}(\mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h)) \quad \text{dans } \omega_\lambda \quad (4.18b)$$

- la relation de comportement :

$$\sigma_l = \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}_l) \quad \text{dans } \omega_\lambda \quad (4.18c)$$

Le problème local définissant l'erreur de pollution dans le sous-domaine ω_λ consiste, quant à lui, à rechercher un couple $(\underline{u}_p, \sigma_p)$, défini sur ω_λ , vérifiant :

- les équations de liaison (ou de compatibilité) :

$$\underline{u}_p \in \mathbf{U}_{|\omega_\lambda} ; \quad \underline{u}_p = \underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h \quad \text{sur } \partial\omega_\lambda ; \quad \varepsilon(\underline{u}_p) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u}_p + \nabla^T \underline{u}_p) \quad \text{dans } \omega_\lambda \quad (4.19a)$$

- les équations d'équilibre :

$$\sigma_p \in \mathbf{S}_{|\omega_\lambda} ; \quad \underline{\text{div}}(\sigma_p) = \underline{0} \quad \text{dans } \omega_\lambda \quad (4.19b)$$

- la relation de comportement :

$$\sigma_p = \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}_p) \quad \text{dans } \omega_\lambda \quad (4.19c)$$

La restriction de l'erreur de discrétisation locale $\underline{e}_h = \underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h$ à ω_λ est donc égale à la somme des solutions \underline{u}_l et \underline{u}_p associées respectivement aux problèmes locaux (4.18) et (4.19) définis sur ω_λ :

$$\underline{e}_{h|\omega_\lambda} = \underline{u}_l + \underline{u}_p \quad (4.20)$$

La décomposition (4.20) constitue le point de départ de la démonstration de l'inégalité fondamentale (4.26) présentée en section 2.3. Notons par ailleurs que cette inégalité (4.26) ainsi que le nouvel encadrement de l'erreur locale (4.35) obtenu en section 2.4 ne font pas appel à la résolution supplémentaire des problèmes locaux (4.18) et (4.19). Ce point précis est abordé et discuté dans la section 1 de l'annexe B, qui s'attache à la démonstration de l'inégalité fondamentale (4.26) exposée dans la section suivante.

2.3 Inégalité fondamentale

Considérons l'espace \mathcal{V} des champs vérifiant des conditions d'équilibre homogènes :

$$\mathcal{V} = \{\underline{v} \in \mathcal{U} \text{ tel que } \underline{\text{div}}(\mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{v})) = \underline{0} \text{ dans } \Omega\} \quad (4.21)$$

La définition (4.21) permet d'introduire la constante de Steklov h , correspondant à la première valeur propre d'un problème de Steklov, définie dans [Steklov (1902)] comme :

$$h = \max_{\underline{v} \in \mathcal{V}_{|\omega_1}} \mathcal{S}_1(\underline{v}) \quad (4.22)$$

avec

$$\mathcal{S}_1(\underline{v}) = \frac{\left\| \mathbf{K} (\underline{v} \otimes \underline{n})_{\text{sym}} \right\|_{\sigma, \partial\omega_1}^2}{\|\underline{v}\|_{u, \omega_1}^2} \quad (4.23)$$

Le sous-domaine ω_1 désigne le domaine homothétique ω_λ associé au paramètre constant $\lambda = 1$ et $(\bullet)_{\text{sym}}$ correspond à la partie symétrique du tenseur d'ordre 2 (ou matrice) \bullet .

Par la suite, pour tout domaine $\omega_\lambda \subset \Omega$ paramétré par $\lambda > 0$, on peut établir la relation suivante, faisant intervenir le produit de la constante h et du paramètre λ :

$$h\lambda = \max_{\underline{v} \in \mathcal{V}_{|\omega_\lambda}} \mathcal{S}_\lambda(\underline{v}) \quad (4.24)$$

avec

$$\mathcal{S}_\lambda(\underline{v}) = \frac{\left\| \mathbf{K} (\underline{v} \otimes \underline{n})_{\text{sym}} \right\|_{\sigma, \partial\omega_\lambda}^2}{\|\underline{v}\|_{u, \omega_\lambda}^2} \quad (4.25)$$

Considérons à présent un couple de domaines homothétiques $(\omega_\lambda, \omega_{\bar{\lambda}})$ inclus dans Ω tel que $\lambda \in]0, \bar{\lambda}]$, i.e. $\omega_\lambda \subset \omega_{\bar{\lambda}} \subset \Omega$. L'inégalité fondamentale à l'origine de

l'établissement des nouvelles bornes d'erreur locale s'écrit :

$$\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma, \omega_\lambda}^2 \leq \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)^{1/h} \|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}}^2 + \gamma_{\lambda, \bar{\lambda}} \quad (4.26)$$

où

$$\gamma_{\lambda, \bar{\lambda}} \equiv \gamma_{\lambda, \bar{\lambda}}(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h) = \int_{\lambda'=\lambda}^{\bar{\lambda}} \left[\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^{-1/h} \frac{1}{h\lambda'} e_{\text{rdc}, \omega_{\lambda'}}^2 \right] d\lambda' \quad (4.27)$$

L'inégalité fondamentale (4.26) établit un lien entre les mesures locales $\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma, \omega_\lambda}$ et $\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}}$ définies sur les domaines homothétiques ω_λ et $\omega_{\bar{\lambda}}$, respectivement. La démonstration de cette inégalité est donnée en section 1 de l'annexe B.

Par la suite, en utilisant l'égalité de Prager-Synge (1.76), le terme inconnu $\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}}$ intervenant dans le membre de droite de (4.26) peut être aisément majoré comme suit :

$$\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}}^2 \leq \left(\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m\|_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}} + \|\hat{\sigma}_h^m - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}} \right)^2 \leq \frac{1}{4} (e_{\text{rdc}, \Omega} + e_{\text{rdc}, \omega_{\bar{\lambda}}})^2 \quad (4.28)$$

Finalement, en injectant le résultat (4.28) dans l'inégalité fondamentale (4.26), cette dernière met en jeu uniquement des quantités connues, entièrement calculables, et s'écrit alors sous la forme :

$$\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma, \omega_\lambda}^2 \leq \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)^{1/h} \frac{1}{4} (e_{\text{rdc}, \Omega} + e_{\text{rdc}, \omega_{\bar{\lambda}}})^2 + \gamma_{\lambda, \bar{\lambda}} \quad (4.29)$$

Remarque 4.1 :

Il est possible de majorer directement le terme $\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}}^2$, sans introduire le champ de contrainte $\hat{\sigma}_h^m$, à partir du théorème de Prager-Synge (1.73), conduisant à l'inégalité suivante :

$$\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}}^2 \leq \|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma, \Omega}^2 \leq e_{\text{rdc}, \Omega}^2$$

Néanmoins, la borne supérieure obtenue, à savoir $e_{\text{rdc}, \Omega}^2$, est moins précise que celle fournie par l'inégalité (4.28), à savoir $1/4 (e_{\text{rdc}, \Omega} + e_{\text{rdc}, \omega_{\bar{\lambda}}})^2$.

2.4 Obtention des nouvelles bornes d'erreur locale

Dans un premier temps, abordons la question de l'encadrement de la partie $q_{\Omega \setminus \omega_\lambda}$. En reprenant l'inéquation (4.17), puis en utilisant l'égalité de Prager-Synge (1.76), la quantité $q_{\Omega \setminus \omega_\lambda}$ peut être majorée comme suit :

$$|q_{\Omega \setminus \omega_\lambda}| \leq \frac{1}{2} e_{\text{rdc}, \Omega} \tilde{e}_{\text{rdc}, \Omega \setminus \omega_\lambda} \quad (4.30)$$

Dans un second temps, examinons la question de l'encadrement de la partie q_{ω_λ} en repartant de sa définition (4.16a), qui peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} q_{\omega_\lambda} &= \left\langle \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h, \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right\rangle_{\sigma, \omega_\lambda} + \left\langle \hat{\sigma}_h - \hat{\sigma}_h^m, \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right\rangle_{\sigma, \omega_\lambda} \\ &= \left\langle \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h, \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right\rangle_{\sigma, \omega_\lambda} + I_{hhh, \lambda} \end{aligned} \quad (4.31)$$

où $I_{hhh, \lambda}$ est un terme parfaitement connu défini par :

$$I_{hhh, \lambda} = \frac{1}{2} \left\langle \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h), \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right\rangle_{\sigma, \omega_\lambda} \quad (4.32)$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à (4.31) au sens du produit scalaire $\langle \bullet, \circ \rangle_{\sigma, \omega_\lambda}$, il vient :

$$|q_{\omega_\lambda} - I_{hhh, \lambda}| \leq \| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h \|_{\sigma, \omega_\lambda} \tilde{e}_{\text{rdc}, \omega_\lambda} \quad (4.33)$$

Puis, en introduisant l'inégalité fondamentale (4.29) dans (4.33), on obtient le résultat de majoration suivant :

$$|q_{\omega_\lambda} - I_{hhh, \lambda}| \leq \left[\left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^{1/h} \frac{1}{4} (e_{\text{rdc}, \Omega} + e_{\text{rdc}, \omega_{\bar{\lambda}}})^2 + \gamma_{\lambda, \bar{\lambda}} \right]^{1/2} \tilde{e}_{\text{rdc}, \omega_\lambda} \quad (4.34)$$

Enfin, à partir des inégalités (4.30) et (4.34) obtenues précédemment, relatives aux deux contributions $q_{\Omega \setminus \omega_\lambda}$ et q_{ω_λ} , respectivement, on aboutit à l'inégalité suivante :

$$|q - I_{hhh, \lambda}| \leq \left[\left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^{1/h} \frac{1}{4} (e_{\text{rdc}, \Omega} + e_{\text{rdc}, \omega_{\bar{\lambda}}})^2 + \gamma_{\lambda, \bar{\lambda}} \right]^{1/2} \tilde{e}_{\text{rdc}, \omega_\lambda} + \frac{1}{2} e_{\text{rdc}, \Omega} \tilde{e}_{\text{rdc}, \Omega \setminus \omega_\lambda}$$

Finalement, le nouvel encadrement offre une majoration garantie de l'erreur locale et s'écrit :

$$|I_{ex} - I_h - I_{hh} - I_{hhh, \lambda}| \leq \tilde{e}_{\text{rdc}, \omega_\lambda} \delta_{\lambda, \bar{\lambda}} + \frac{1}{2} e_{\text{rdc}, \Omega} \tilde{e}_{\text{rdc}, \Omega \setminus \omega_\lambda} \quad (4.35)$$

où

$$\delta_{\lambda, \bar{\lambda}} \equiv \delta_{\lambda, \bar{\lambda}}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) = \left[\left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^{1/h} \frac{1}{4} (e_{\text{rdc}, \Omega} + e_{\text{rdc}, \omega_{\bar{\lambda}}})^2 + \gamma_{\lambda, \bar{\lambda}} \right]^{1/2} \quad (4.36)$$

Les quantités $\delta_{\lambda, \bar{\lambda}}$ et $I_{hhh, \lambda}$ définies en (4.36) et (4.32), respectivement, peuvent être déterminées à partir des solutions approchées éléments finis et admissibles associées aux problèmes de référence et adjoint.

Remarque 4.2 :

D'une part, lorsque la solution approchée $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ du problème référence correspond à la solution exacte $(\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex})$, les termes correctifs I_{hh} et $I_{hhh,\lambda}$ sont nuls et on retrouve que $I_{ex} = I_h$ (cf. remarque 1.30 du chapitre 1). D'autre part, lorsque la solution approchée $(\tilde{u}_h, \tilde{\sigma}_h)$ du problème adjoint correspond à la solution exacte $(\tilde{u}_{ex}, \tilde{\sigma}_{ex})$, le terme correctif $I_{hhh,\lambda}$ est également nul, tandis que I_{hh} est non nul en vertu de la remarque 1.30, et on a alors $I_{ex} = I_h + I_{hh}$. $I_{hhh,\lambda}$ correspond donc à un terme de correction et la quantité $I_h + I_{hh} + I_{hhh,\lambda}$ peut être interprétée comme une nouvelle approximation de I_{ex} .

Enfin, des bornes inférieure et supérieure $(\chi_{\text{inf}}, \chi_{\text{sup}})$ de la valeur exacte I_{ex} prise par la quantité d'intérêt découlent directement du nouvel encadrement (4.35) :

$$\chi_{\text{inf}} \leq I_{ex} \leq \chi_{\text{sup}} \quad (4.37)$$

avec

$$\chi_{\text{inf}} = I_h + I_{hh} + I_{hhh,\lambda} - \left| \tilde{e}_{\text{rdc},\omega_\lambda} \delta_{\lambda,\bar{\lambda}} + \frac{1}{2} e_{\text{rdc},\Omega} \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega \setminus \omega_\lambda} \right| \quad (4.38a)$$

$$\chi_{\text{sup}} = I_h + I_{hh} + I_{hhh,\lambda} + \left| \tilde{e}_{\text{rdc},\omega_\lambda} \delta_{\lambda,\bar{\lambda}} + \frac{1}{2} e_{\text{rdc},\Omega} \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega \setminus \omega_\lambda} \right| \quad (4.38b)$$

Les nouvelles bornes $(\chi_{\text{inf}}, \chi_{\text{sup}})$ définies en (4.38) dépendent des paramètres λ et $\bar{\lambda}$ associés aux sous-domaines ω_λ et $\omega_{\bar{\lambda}}$, respectivement. Dès lors, il apparaît qu'un point clé de la nouvelle procédure d'encadrement réside dans un choix approprié de ces paramètres, de manière à obtenir la meilleure précision sur les bornes d'erreur locale. Pour se faire, on cherche à diminuer autant que possible le rapport $\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}$ intervenant dans $\delta_{\lambda,\bar{\lambda}}$ en choisissant :

- un paramètre λ le plus petit possible, tel que le sous-domaine ω_λ englobe la zone d'intérêt ω ;
- un paramètre $\bar{\lambda}$ le plus grand possible, tel que le sous-domaine $\omega_{\bar{\lambda}}$ soit toujours inclus dans Ω et reste homothétique à ω_λ , i.e. conserve la forme géométrique de ce dernier.

Notons que le choix de la forme géométrique définissant l'ensemble des domaines homothétiques dépend naturellement de la zone d'intérêt ω , support de la quantité d'intérêt considérée, mais demeure à ce stade une question ouverte. Dans les exemples numériques traités à la section 4, nous considérerons uniquement des sous-domaines de forme circulaire en dimension 2.

Remarque 4.3 :

La constante de Steklov h peut être déterminée de manière analytique ou numérique suivant la forme géométrique choisie. \mathcal{S}_1 peut s'interpréter comme le quotient de Rayleigh d'un problème aux valeurs propres associé à un opérateur symétrique. En considérant le cas d'un matériau à comportement linéaire, élastique, homogène et isotrope, la valeur maximale atteinte par l'opérateur \mathcal{S}_1 a été

déterminée dans ce travail de manière numérique en résolvant le problème aux valeurs propres associé à \mathcal{S}_1 sous les contraintes induites par l'espace $\mathcal{V}_{|\omega_1}$ sur le sous-domaine ω_1 . Dans le cas d'un sous-domaine ω_1 correspondant au cercle unité (resp. à la sphère unité) en dimension 2 (resp. dimension 3), le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre correspond au champ $\underline{v} = \underline{OM}$, vérifiant $\varepsilon(\underline{v}) = \mathbb{I}_d$, où \underline{O} désigne le centre d'homothétie et $\underline{M} \in \partial\omega_1$. Signalons que le même vecteur propre a été obtenu numériquement dans le cas du cercle unité fissuré ou entaillé et du carré de demi-côté unité en dimension 2, ainsi que dans le cas du cube de demi-arête unité en dimension 3.

Les expressions analytiques de la constante h obtenues pour différentes formes géométriques sont reportées dans le tableau C.1 en annexe C. On constate que la constante h dépend uniquement du coefficient de Poisson ν pour l'ensemble des formes géométriques considérées. Par ailleurs, des bornes inférieures de cette constante pour le cercle unité sont données dans [Ladevèze et Ladevèze (1978)].

3 Seconde amélioration de la technique d'encadrement

3.1 Principe général

À l'instar de la première amélioration présentée en section 2, considérons un sous-domaine $\omega_{\bar{\lambda}} \subset \Omega$ et sa partie complémentaire $\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}$. La quantité q précédemment définie en (4.15) peut alors être décomposée en une somme de deux contributions $q_{\omega_{\bar{\lambda}}}$ et $q_{\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}}$:

$$q = q_{\omega_{\bar{\lambda}}} + q_{\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}}$$

où

$$q_{\omega_{\bar{\lambda}}} = \left\langle \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m, \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right\rangle_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}} \quad (4.39a)$$

$$q_{\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}} = \left\langle \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m, \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right\rangle_{\sigma, \Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}} \quad (4.39b)$$

En choisissant un sous-domaine $\omega_{\bar{\lambda}}$ qui entoure la zone d'intérêt ω , la partie $q_{\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}}$ peut être directement majorée comme précédemment (sans forte sur-estimation) à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz au sens du produit scalaire $\langle \bullet, \circ \rangle_{u, \Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}}$:

$$|q_{\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}}| \leq \| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m \|_{\sigma, \Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}} \tilde{e}_{\text{rdc}, \Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}} \quad (4.40)$$

En revanche, la démarche d'encadrement de la partie $q_{\omega_{\bar{\lambda}}}$ est différente de celle présentée dans la section précédente. Rappelons que celle-ci joue un rôle fondamental dans la pertinence des bornes d'erreur locale, dans la mesure où l'erreur locale est dominée par la contribution provenant de la partie $q_{\omega_{\bar{\lambda}}}$.

Dans le but d'encadrer finement la partie $q_{\omega_{\bar{\lambda}}}$, introduisons à présent un nouveau problème local sur le sous-domaine $\omega_{\bar{\lambda}}$ qui consiste à rechercher un couple $(\underline{u}_{ex,\bar{\lambda}}, \sigma_{ex,\bar{\lambda}})$, défini sur $\omega_{\bar{\lambda}}$, vérifiant :

– les équations de liaison (ou de compatibilité) :

$$\underline{u}_{ex,\bar{\lambda}} \in \mathbf{U}_{|\omega_{\bar{\lambda}}}; \quad \underline{u}_{ex,\bar{\lambda}} = \hat{\underline{u}}_h \quad \text{sur } \partial\omega_{\bar{\lambda}}; \quad \varepsilon(\underline{u}_{ex,\bar{\lambda}}) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u}_{ex,\bar{\lambda}} + \nabla^T \underline{u}_{ex,\bar{\lambda}}) \quad \text{dans } \omega_{\bar{\lambda}} \quad (4.41a)$$

– les équations d'équilibre :

$$\sigma_{ex,\bar{\lambda}} \in \mathbf{S}_{|\omega_{\bar{\lambda}}}; \quad \text{div}(\sigma_{ex,\bar{\lambda}}) + \underline{f}_d = \underline{0} \quad \text{dans } \omega_{\bar{\lambda}} \quad (4.41b)$$

– la relation de comportement :

$$\sigma_{ex,\bar{\lambda}} = \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}_{ex,\bar{\lambda}}) \quad \text{dans } \omega_{\bar{\lambda}} \quad (4.41c)$$

En observant que la restriction de la solution admissible $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ du problème de référence à $\omega_{\bar{\lambda}}$ constitue également une solution admissible du problème local (4.41) défini sur $\omega_{\bar{\lambda}}$, la solution exacte $(\underline{u}_{ex,\bar{\lambda}}, \sigma_{ex,\bar{\lambda}})$ de ce dernier vérifie plusieurs propriétés fondamentales.

En adoptant une vision locale du théorème de Prager-Syngé sur le sous-domaine $\omega_{\bar{\lambda}}$, une première relation établit un lien entre l'erreur vraie $\|\underline{u}_{ex,\bar{\lambda}} - \hat{\underline{u}}_h\|_{u,\omega_{\bar{\lambda}}}$ du problème (4.41) défini sur $\omega_{\bar{\lambda}}$ et la mesure locale $e_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ de l'erreur en relation de comportement :

$$e_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}}^2(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) = \|\underline{u}_{ex,\bar{\lambda}} - \hat{\underline{u}}_h\|_{u,\omega_{\bar{\lambda}}}^2 + \|\sigma_{ex,\bar{\lambda}} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}}^2 \quad (4.42)$$

conduisant aux inégalités suivantes :

$$\|\underline{u}_{ex,\bar{\lambda}} - \hat{\underline{u}}_h\|_{u,\omega_{\bar{\lambda}}} \leq e_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) \quad (4.43a)$$

$$\|\sigma_{ex,\bar{\lambda}} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}} \leq e_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) \quad (4.43b)$$

Celles-ci traduisent l'aspect garanti de la mesure locale $e_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ de l'erreur en relation de comportement sur $\omega_{\bar{\lambda}}$ associée au problème local (4.41).

En introduisant le champ de contrainte $\hat{\sigma}_h^m$ défini par (1.75), on obtient une seconde relation similaire à l'égalité de Prager-Syngé au niveau local :

$$\|\sigma_{ex,\bar{\lambda}} - \hat{\sigma}_h^m\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}} = \frac{1}{2} e_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) \quad (4.44)$$

Enfin, une troisième relation découle directement de la précédente et s'écrit :

$$\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}} = \left\| \sigma_{ex} - \sigma_{ex,\bar{\lambda}} - \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)) \right\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}} \quad (4.45)$$

Démonstration 4.2. En faisant apparaître le champ de contrainte $\sigma_{ex,\bar{\lambda}}$, puis en utilisant la seconde relation fondamentale (4.44), on obtient directement :

$$\begin{aligned}
\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}}^2 &= \|\sigma_{ex} - \sigma_{ex,\bar{\lambda}}\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}}^2 + \|\sigma_{ex,\bar{\lambda}} - \hat{\sigma}_h^m\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}}^2 + 2 \langle \sigma_{ex} - \sigma_{ex,\bar{\lambda}}, \sigma_{ex,\bar{\lambda}} - \hat{\sigma}_h^m \rangle_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}} \\
&= \|\sigma_{ex} - \sigma_{ex,\bar{\lambda}}\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}}^2 + \frac{1}{4} \|\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}}^2 + 2 \langle \sigma_{ex} - \sigma_{ex,\bar{\lambda}}, \sigma_{ex,\bar{\lambda}} - \hat{\sigma}_h^m \rangle_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}} \\
&= \|\sigma_{ex} - \sigma_{ex,\bar{\lambda}}\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}}^2 + \left\| \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)) \right\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}}^2 \\
&\quad - 2 \left\langle \sigma_{ex} - \sigma_{ex,\bar{\lambda}}, \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)) \right\rangle_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}} \\
&\quad + 2 \langle \sigma_{ex} - \sigma_{ex,\bar{\lambda}}, \sigma_{ex,\bar{\lambda}} - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \rangle_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}} \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Puis, l'exploitation des conditions aux limites de Dirichlet satisfaites par $\underline{u}_{ex,\bar{\lambda}}$ sur $\partial\omega_{\bar{\lambda}}$ et l'écriture des équations d'équilibre sous forme forte vérifiées par σ_{ex} et $\sigma_{ex,\bar{\lambda}}$ dans $\omega_{\bar{\lambda}}$ permettent de montrer que :

$$\langle \sigma_{ex} - \sigma_{ex,\bar{\lambda}}, \sigma_{ex,\bar{\lambda}} - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \rangle_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}} = \int_{\omega_{\bar{\lambda}}} \text{Tr} [(\sigma_{ex} - \sigma_{ex,\bar{\lambda}}) \varepsilon(\underline{u}_{ex,\bar{\lambda}} - \hat{\underline{u}}_h)] \, d\Omega = 0$$

Finalement, en regroupant les termes restants dans (4.46), on aboutit à l'égalité recherchée (4.45).

Remarque 4.4 :

Notons que la solution exacte $(\underline{u}_{ex}, \sigma_{ex})$ du problème global de référence (1.2) ne satisfait pas les propriétés locales (4.42), (4.44) et (4.45) vérifiées par la solution exacte $(\underline{u}_{ex,\bar{\lambda}}, \sigma_{ex,\bar{\lambda}})$ du problème local (4.41). En revanche, elle vérifie certaines propriétés analogues à l'échelle du domaine complet Ω (cf. propriétés (1.73) et (1.76)).

À l'instar des problèmes locaux (4.18) et (4.19) définis en section 2.2 dans le cadre de la première amélioration, signalons d'ores et déjà que l'établissement du nouvel encadrement (4.72) et donc des nouvelles bornes d'erreur locale (4.74) obtenues en section 3.2 ne nécessitent pas la connaissance de la solution $(\underline{u}_{ex,\bar{\lambda}}, \sigma_{ex,\bar{\lambda}})$ du problème local (4.41). Nous reviendrons sur ce point lors de la démonstration conduisant à la détermination des bornes d'erreur locale.

Par la suite, en suivant une démarche similaire à la première amélioration, on décompose l'erreur du problème de référence $\hat{\underline{u}}_h = \underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h$ (resp. $\hat{\sigma}_h = \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h$) sur $\omega_{\bar{\lambda}}$ en introduisant la solution en déplacement $\underline{u}_{ex,\bar{\lambda}}$ (resp. en contrainte $\sigma_{ex,\bar{\lambda}}$) du problème local (4.41) :

$$\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h = (\underline{u}_{ex} - \underline{u}_{ex,\bar{\lambda}}) + (\underline{u}_{ex,\bar{\lambda}} - \hat{\underline{u}}_h) \quad \text{dans } \omega_{\bar{\lambda}} \tag{4.47a}$$

$$\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h = (\sigma_{ex} - \sigma_{ex,\bar{\lambda}}) + (\sigma_{ex,\bar{\lambda}} - \hat{\sigma}_h) \quad \text{dans } \omega_{\bar{\lambda}} \tag{4.47b}$$

La quantité $q_{\omega_{\bar{\lambda}}}$ est alors scindée en deux parties $q_{\omega_{\bar{\lambda}},1}$ et $q_{\omega_{\bar{\lambda}},2}$:

$$q_{\omega_{\bar{\lambda}}} = q_{\omega_{\bar{\lambda}},1} + q_{\omega_{\bar{\lambda}},2}$$

où

$$q_{\omega_{\bar{\lambda}},1} = \left\langle \sigma_{ex} - \sigma_{ex,\bar{\lambda}}, \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right\rangle_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}} \quad (4.48a)$$

$$q_{\omega_{\bar{\lambda}},2} = \left\langle \sigma_{ex,\bar{\lambda}} - \hat{\sigma}_h^m, \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right\rangle_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}} \quad (4.48b)$$

Nous verrons que l'encadrement de la seconde partie $q_{\omega_{\bar{\lambda}},2}$ s'effectue à travers l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz au sens du produit scalaire $\langle \bullet, \circ \rangle_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}}$ et de la propriété locale (4.44), tandis que celui relatif à la partie $q_{\omega_{\bar{\lambda}},1}$ s'appuie sur le principe de Saint-Venant à travers l'emploi de propriétés des domaines homothétiques.

Intéressons nous dans un premier temps à l'encadrement de la seconde partie $q_{\omega_{\bar{\lambda}},2}$. Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz à (4.48b) au sens du produit scalaire $\langle \bullet, \circ \rangle_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}}$, il vient :

$$|q_{\omega_{\bar{\lambda}},2}| \leq \left\| \sigma_{ex,\bar{\lambda}} - \hat{\sigma}_h^m \right\|_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}} \tilde{e}_{\text{rdc}, \omega_{\bar{\lambda}}} \quad (4.49)$$

Finalement, en injectant l'égalité (4.44) dans (4.49), on obtient la majoration suivante :

$$|q_{\omega_{\bar{\lambda}},2}| \leq \frac{1}{2} e_{\text{rdc}, \omega_{\bar{\lambda}}} \tilde{e}_{\text{rdc}, \omega_{\bar{\lambda}}} \quad (4.50)$$

Dans un second temps, l'encadrement de la partie $q_{\omega_{\bar{\lambda}},1}$ repose sur l'inégalité fondamentale (4.55) présentée à la section suivante et démontrée dans la section 2 de l'annexe B.

3.2 Inégalité fondamentale

Considérons à nouveau l'espace \mathbf{V} introduit en (4.21) et introduisons une nouvelle constante adimensionnée k définie par :

$$k = \min_{\underline{v} \in \mathbf{V}_{|\omega_{\bar{\lambda}}}} \mathcal{R}_{\bar{\lambda}}(\underline{v}) \quad (4.51)$$

avec

$$\mathcal{R}_{\bar{\lambda}}(\underline{v}) = \frac{|\underline{v}|_{u, \partial \omega_{\bar{\lambda}}}^2}{\|\underline{v}\|_{u, \omega_{\bar{\lambda}}}^2} \quad (4.52)$$

pour un sous-domaine donné $\omega_{\bar{\lambda}} \subset \Omega$ associé au paramètre $\bar{\lambda} > 0$.

Par la suite, pour tout domaine ω_λ homothétique à $\omega_{\bar{\lambda}}$ tel que $\omega_\lambda \subset \omega_{\bar{\lambda}} \subset \Omega$, i.e. associé au paramètre $\lambda \in]0, \bar{\lambda}]$, on peut établir la relation suivante, faisant intervenir le produit de la constante k et du rapport $\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}$:

$$k \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} = \min_{\underline{v} \in \mathbf{V}_{|\omega_\lambda}} \mathcal{R}_\lambda(\underline{v}) \quad (4.53)$$

avec

$$\mathcal{R}_\lambda(\underline{v}) = \frac{|\underline{v}|_{u, \partial\omega_\lambda}^2}{\|\underline{v}\|_{u, \omega_\lambda}^2} \quad (4.54)$$

Considérons à présent un couple de domaines homothétiques $(\omega_\lambda, \omega_{\bar{\lambda}})$ inclus dans Ω tel que $\lambda \in]0, \bar{\lambda}]$, i.e. $\omega_\lambda \subset \omega_{\bar{\lambda}} \subset \Omega$. L'inégalité fondamentale sur laquelle repose l'établissement des nouvelles bornes d'erreur locale s'écrit :

$$\forall \underline{v} \in \mathbf{V}_{|\omega_{\bar{\lambda}}}, \quad \|\underline{v}\|_{u, \omega_\lambda}^2 \leq \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)^k \|\underline{v}\|_{u, \omega_{\bar{\lambda}}}^2 \quad (4.55)$$

L'inégalité fondamentale (4.55) établit un lien entre les mesures locales $\|\underline{v}\|_{u, \omega_\lambda}$ et $\|\underline{v}\|_{u, \omega_{\bar{\lambda}}}$ définies sur les domaines homothétiques ω_λ et $\omega_{\bar{\lambda}}$, respectivement, associées à un champ $\underline{v} \in \mathbf{V}_{|\omega_{\bar{\lambda}}}$. La démonstration de cette inégalité est fournie en section 2 de l'annexe B.

La partie $q_{\omega_{\bar{\lambda}}, 1}$ définie en (4.48a) fait intervenir la quantité $\underline{u}_{ex} - \underline{u}_{ex, \bar{\lambda}}$ (ou, de manière équivalente, $\sigma_{ex} - \sigma_{ex, \bar{\lambda}}$) de la décomposition (4.47a) (ou (4.47b), respectivement) de l'erreur du problème de référence sur $\omega_{\bar{\lambda}}$. En observant que $\underline{u}_{ex} - \underline{u}_{ex, \bar{\lambda}} \in \mathbf{V}_{|\omega_{\bar{\lambda}}}$, l'application de l'inégalité fondamentale (4.55) à $\underline{v} = \underline{u}_{ex} - \underline{u}_{ex, \bar{\lambda}}$ conduit à :

$$\|\underline{u}_{ex} - \underline{u}_{ex, \bar{\lambda}}\|_{u, \omega_\lambda}^2 \leq \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)^k \|\underline{u}_{ex} - \underline{u}_{ex, \bar{\lambda}}\|_{u, \omega_{\bar{\lambda}}}^2 \quad (4.56a)$$

ou, de manière équivalente :

$$\|\sigma_{ex} - \sigma_{ex, \bar{\lambda}}\|_{\sigma, \omega_\lambda}^2 \leq \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)^k \|\sigma_{ex} - \sigma_{ex, \bar{\lambda}}\|_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}}^2 \quad (4.56b)$$

L'inégalité (4.56a) (ou (4.56b)) est l'ingrédient clé permettant d'encadrer finement la partie $q_{\omega_{\bar{\lambda}}, 1}$ et ainsi obtenir des bornes précises de l'erreur locale.

3.3 Obtention des nouvelles bornes d'erreur locale

Traisons à présent la question de l'encadrement de la partie $q_{\omega_{\bar{\lambda}}, 1}$ définie en (4.48a). En utilisant la relation (4.7a) sur le sous-domaine $\omega_{\bar{\lambda}}$ lui-même, on a :

$$q_{\omega_{\bar{\lambda}}, 1} = \int_{\lambda=0}^{\bar{\lambda}} \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)^n \frac{1}{\lambda} \left(\sigma_{ex} - \sigma_{ex, \bar{\lambda}}, \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)\right)_{\sigma, \partial\omega_{\bar{\lambda}}} d\lambda \quad (4.57)$$

Puis, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à (4.57) au sens du produit scalaire $(\bullet, \circ)_{\sigma, \partial\omega_{\bar{\lambda}}}$, il vient :

$$|q_{\omega_{\bar{\lambda}}, 1}| \leq \int_{\lambda=0}^{\bar{\lambda}} \left[\left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^n \frac{1}{\bar{\lambda}} |\sigma_{ex} - \sigma_{ex, \bar{\lambda}}|_{\sigma, \partial\omega_{\bar{\lambda}}} \left| \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right|_{\sigma, \partial\omega_{\bar{\lambda}}} \right] d\lambda \quad (4.58)$$

Afin d'obtenir une majoration fine de (4.58), introduisons à présent une fonction scalaire $\mu(\lambda) > 0$:

$$\begin{aligned} |q_{\omega_{\bar{\lambda}}, 1}| &\leq \int_{\lambda=0}^{\bar{\lambda}} \left[\left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^n \frac{1}{\bar{\lambda}} \sqrt{\mu(\lambda)} |\sigma_{ex} - \sigma_{ex, \bar{\lambda}}|_{\sigma, \partial\omega_{\bar{\lambda}}} \frac{1}{\sqrt{\mu(\lambda)}} \left| \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right|_{\sigma, \partial\omega_{\bar{\lambda}}} \right] d\lambda \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\lambda=0}^{\bar{\lambda}} \left[\mu(\lambda) \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^n \frac{1}{\bar{\lambda}} |\sigma_{ex} - \sigma_{ex, \bar{\lambda}}|_{\sigma, \partial\omega_{\bar{\lambda}}}^2 \right] d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\lambda=0}^{\bar{\lambda}} \left[\frac{1}{\mu(\lambda)} \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^n \frac{1}{\bar{\lambda}} \left| \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right|_{\sigma, \partial\omega_{\bar{\lambda}}}^2 \right] d\lambda \end{aligned} \quad (4.59)$$

Par la suite, en injectant le résultat (4.11b) appliqué à $\sigma_{ex} - \sigma_{ex, \bar{\lambda}}$ dans le premier terme du membre de droite de (4.59), il vient :

$$\begin{aligned} |q_{\omega_{\bar{\lambda}}, 1}| &\leq \frac{1}{2} \int_{\lambda=0}^{\bar{\lambda}} \left[\mu(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \left[\|\sigma_{ex} - \sigma_{ex, \bar{\lambda}}\|_{\sigma, \omega_{\lambda}}^2 \right] \right] d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\lambda=0}^{\bar{\lambda}} \left[\frac{1}{\mu(\lambda)} \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^n \frac{1}{\bar{\lambda}} \left| \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right|_{\sigma, \partial\omega_{\bar{\lambda}}}^2 \right] d\lambda \end{aligned} \quad (4.60)$$

En réalisant ensuite une intégration par parties du premier terme dans le membre de droite de (4.60), on obtient :

$$\begin{aligned} |q_{\omega_{\bar{\lambda}}, 1}| &\leq \frac{1}{2} \mu(\bar{\lambda}) \|\sigma_{ex} - \sigma_{ex, \bar{\lambda}}\|_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}}^2 - \frac{1}{2} \int_{\lambda=0}^{\bar{\lambda}} \left[\frac{d\mu}{d\lambda}(\lambda) \|\sigma_{ex} - \sigma_{ex, \bar{\lambda}}\|_{\sigma, \omega_{\lambda}}^2 \right] d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\lambda=0}^{\bar{\lambda}} \left[\frac{1}{\mu(\lambda)} \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^n \frac{1}{\bar{\lambda}} \left| \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right|_{\sigma, \partial\omega_{\bar{\lambda}}}^2 \right] d\lambda \end{aligned} \quad (4.61)$$

En supposant maintenant que $\frac{d\mu}{d\lambda}(\lambda) \leq 0 \quad \forall \lambda \in]0, \bar{\lambda}]$, l'introduction de l'inégalité fondamentale (4.56b) dans (4.61) conduit à :

$$\begin{aligned} |q_{\omega_{\bar{\lambda}}, 1}| &\leq \frac{1}{2} \mu(\bar{\lambda}) \|\sigma_{ex} - \sigma_{ex, \bar{\lambda}}\|_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}}^2 - \frac{1}{2} \|\sigma_{ex} - \sigma_{ex, \bar{\lambda}}\|_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}}^2 \int_{\lambda=0}^{\bar{\lambda}} \left[\frac{d\mu}{d\lambda}(\lambda) \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^k \right] d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\lambda=0}^{\bar{\lambda}} \left[\frac{1}{\mu(\lambda)} \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^n \frac{1}{\bar{\lambda}} \left| \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right|_{\sigma, \partial\omega_{\bar{\lambda}}}^2 \right] d\lambda \end{aligned} \quad (4.62)$$

En effectuant à nouveau une intégration par parties du second terme dans le membre de droite de (4.62), on a alors :

$$\int_{\lambda=0}^{\bar{\lambda}} \left[\frac{d\mu}{d\lambda}(\lambda) \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^k \right] d\lambda = \mu(\bar{\lambda}) - \int_{\lambda=0}^{\bar{\lambda}} \left[\mu(\lambda) \frac{k}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^k \right] d\lambda \quad (4.63)$$

conduisant à l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} |q_{\omega_{\bar{\lambda}},1}| \leq & \frac{1}{2} \int_{\lambda=0}^{\bar{\lambda}} \left[\mu(\lambda) \frac{k}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^k \left\| \sigma_{ex} - \sigma_{ex,\bar{\lambda}} \right\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}}^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{\mu(\lambda)} \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^n \frac{1}{\lambda} \left| \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right|_{\sigma,\partial\omega_{\bar{\lambda}}}^2 \right] d\lambda \end{aligned} \quad (4.64)$$

La fonction μ optimale est celle qui minimise le membre de droite de (4.64) :

$$\begin{aligned} \mu(\lambda) = \arg \min_{\substack{\mu^*(\lambda) > 0 \\ \frac{d\mu^*}{d\lambda}(\lambda) \leq 0}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\lambda=0}^{\bar{\lambda}} \left[\mu^*(\lambda) \frac{k}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^k \left\| \sigma_{ex} - \sigma_{ex,\bar{\lambda}} \right\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\mu^*(\lambda)} \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^n \frac{1}{\lambda} \left| \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right|_{\sigma,\partial\omega_{\bar{\lambda}}}^2 \right] d\lambda \right\} \end{aligned}$$

Celle-ci s'écrit alors :

$$\mu(\lambda) = \frac{\left| \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right|_{\sigma,\partial\omega_{\bar{\lambda}}} \frac{1}{k^{1/2}} \left(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \right)^{(k-n-1)/2}}{\left\| \sigma_{ex} - \sigma_{ex,\bar{\lambda}} \right\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}}} \quad (4.65)$$

sous l'hypothèse que la fonction μ est strictement positive, monotone et reste décroissante sur l'intervalle $]0, \bar{\lambda}]$, i.e. vérifiant la condition :

$$k \geq n + 1 \quad (4.66)$$

Remarque 4.5 :

Notons que, dans le cas de domaines de forme circulaire et sphérique, cette condition est bien vérifiée (cf. remarque 4.6).

Par la suite, en remplaçant la fonction $\mu(\lambda)$ par son expression (4.65) dans (4.64), le calcul explicite de l'intégrale sur le paramètre λ conduit à l'inégalité suivante :

$$|q_{\omega_{\bar{\lambda}},1}| \leq \left\| \sigma_{ex} - \sigma_{ex,\bar{\lambda}} \right\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}} \tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}} \quad (4.67)$$

où

$$\tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}} \equiv \tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) = \left| \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right|_{\sigma,\partial\omega_{\bar{\lambda}}} \frac{2 k^{1/2}}{k + n + 1}$$

Finalement, en regroupant les résultats de majoration (4.67) et (4.50) relatifs aux parties $q_{\omega_{\bar{\lambda}},1}$ et $q_{\omega_{\bar{\lambda}},2}$, respectivement, la quantité $q_{\omega_{\bar{\lambda}}}$ peut être majorée comme suit :

$$\begin{aligned} |q_{\omega_{\bar{\lambda}}}| &\leq \left\| \sigma_{ex} - \sigma_{ex,\bar{\lambda}} \right\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}} \tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}} + \frac{1}{2} e_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}} \tilde{e}_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}} \\ &\leq \left[\left\| \sigma_{ex} - \sigma_{ex,\bar{\lambda}} - \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{u}_h)) \right\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}} + \frac{1}{2} e_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}} \right] \tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}} + \frac{1}{2} e_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}} \tilde{e}_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}} \end{aligned}$$

L'exploitation de la propriété locale (4.45) permet alors de s'affranchir de la résolution annexe du problème local (4.41) et conduit à l'inégalité suivante :

$$|q_{\omega_{\bar{\lambda}}}| \leq \left[\left\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m \right\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}} + \frac{1}{2} e_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}} \right] \tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}} + \frac{1}{2} e_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}} \tilde{e}_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}} \quad (4.68)$$

Enfin, à partir des encadrements (4.68) et (4.40) des contributions $q_{\omega_{\bar{\lambda}}}$ et $q_{\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}}$, respectivement, la majoration de la quantité q s'écrit :

$$|q| \leq \left\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m \right\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}} \tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}} + \frac{1}{2} e_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}} \left[\tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}} + \tilde{e}_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}} \right] + \left\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m \right\|_{\sigma,\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}} \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}} \quad (4.69)$$

Introduisons à présent un scalaire $\nu > 0$ afin de regrouper habilement les termes $\left\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m \right\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}}$ et $\left\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m \right\|_{\sigma,\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}}$, qui vérifient la relation suivante :

$$\left\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m \right\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}}^2 + \left\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m \right\|_{\sigma,\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}}^2 = \left\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m \right\|_{\sigma,\Omega}^2 = \frac{1}{4} e_{\text{rdc},\Omega}^2$$

par application de l'égalité de Prager-Synge (1.76).

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} &\left\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m \right\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}} \tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}} + \left\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m \right\|_{\sigma,\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}} \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m \right\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}} \tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}} \sqrt{\nu} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m \right\|_{\sigma,\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}} \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}} \sqrt{\nu} \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\nu} \left\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m \right\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}}}^2 + \nu \tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}}^2 + \frac{1}{\nu} \left\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m \right\|_{\sigma,\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}}^2 + \nu \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}}^2 \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\nu} \left\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m \right\|_{\sigma,\Omega}^2 + \nu \left(\tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}}^2 + \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}}^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.70)$$

Le scalaire ν optimal est celui qui minimise le membre de droite de (4.70) :

$$\nu = \arg \min_{\nu^* > 0} \left\{ \frac{1}{\nu^*} \left\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m \right\|_{\sigma,\Omega}^2 + \nu^* \left(\tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}}^2 + \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}}^2 \right) \right\}$$

Celui-ci s'écrit alors :

$$\nu = \frac{\left\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h^m \right\|_{\sigma,\Omega}^2}{\sqrt{\tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}}^2 + \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}}^2}} = \frac{1}{2} \frac{e_{\text{rdc},\Omega}^2}{\sqrt{\tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}}^2 + \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}}^2}} \quad (4.71)$$

et sa valeur est bien strictement positive.

Par la suite, en remplaçant le scalaire ν par sa valeur (4.71) dans (4.70), on aboutit à l'inégalité suivante :

$$|q| \leq \frac{1}{2} e_{\text{rdc},\Omega} \left[\tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}}^2 + \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}}^2 \right]^{1/2} + \frac{1}{2} e_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}} \left[\tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}} + \tilde{e}_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}} \right]$$

Finalement, le nouvel encadrement offre une majoration garantie de l'erreur locale et se met sous la forme :

$$|I_{ex} - I_h - I_{hh}| \leq \frac{1}{2} \left[e_{\text{rdc},\Omega} \left[\tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}}^2 + \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}}^2 \right]^{1/2} + e_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}} \left[\tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}} + \tilde{e}_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}} \right] \right] \quad (4.72)$$

où

$$\tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}} \equiv \tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) = \left| \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right|_{\sigma, \partial \omega_{\bar{\lambda}}} \frac{2k^{1/2}}{k+n+1} \quad (4.73)$$

La quantité $\tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}}$ définie en (4.73) est entièrement calculable à partir d'une solution admissible associée au problème adjoint.

Ainsi, cette seconde amélioration fournit des bornes inférieure et supérieure $(\zeta_{\text{inf}}, \zeta_{\text{sup}})$ de la valeur exacte I_{ex} prise par la quantité d'intérêt :

$$\zeta_{\text{inf}} \leq I_{ex} \leq \zeta_{\text{sup}} \quad (4.74)$$

avec

$$\zeta_{\text{inf}} = I_h + I_{hh} - \frac{1}{2} \left| e_{\text{rdc},\Omega} \left[\tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}}^2 + \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}}^2 \right]^{1/2} + e_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}} \left[\tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}} + \tilde{e}_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}} \right] \right| \quad (4.75a)$$

$$\zeta_{\text{sup}} = I_h + I_{hh} + \frac{1}{2} \left| e_{\text{rdc},\Omega} \left[\tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}}^2 + \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega \setminus \omega_{\bar{\lambda}}}^2 \right]^{1/2} + e_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}} \left[\tilde{\vartheta}_{\bar{\lambda}} + \tilde{e}_{\text{rdc},\omega_{\bar{\lambda}}} \right] \right| \quad (4.75b)$$

Les nouvelles bornes $(\zeta_{\text{inf}}, \zeta_{\text{sup}})$ définies en (4.75) dépendent d'un unique paramètre $\bar{\lambda}$, tandis que celles $(\chi_{\text{inf}}, \chi_{\text{sup}})$ obtenues en (4.38) dépendent de deux paramètres $(\lambda, \bar{\lambda})$. En pratique, on peut chercher à déterminer une valeur optimale $\bar{\lambda}_{\text{opt}}$ du paramètre $\bar{\lambda}$ afin d'affiner au mieux l'encadrement de l'erreur locale. Si le calcul explicite d'une telle valeur ne semble pas envisageable aux vues de l'expression (4.75) des bornes, notons toutefois que le choix du paramètre $\bar{\lambda}$ n'a qu'une faible influence sur ces bornes dans les applications numériques considérées en section 4. Rappelons que le sous-domaine $\omega_{\bar{\lambda}}$ choisi doit néanmoins englober la zone d'intérêt ω , qui concentre les principales contributions à l'erreur de discrétisation du problème adjoint, afin d'obtenir un encadrement fin de l'erreur locale.

Remarque 4.6 :

Au même titre que la constante de Steklov h intervenant dans la première amélioration, la constante k peut être déterminée numériquement, l'opérateur $\mathcal{R}_{\bar{\lambda}}$

correspondant au quotient de Rayleigh d'un problème aux valeurs propres associé à un opérateur symétrique. En considérant le cas d'un matériau à comportement linéaire, élastique, homogène et isotrope, la valeur minimale atteinte par l'opérateur $\mathcal{R}_{\bar{\lambda}}$ a été déterminée dans ce travail de manière numérique en résolvant le problème aux valeurs propres associé à $\mathcal{R}_{\bar{\lambda}}$ sous les contraintes induites par l'espace $\mathcal{V}_{|\omega_{\bar{\lambda}}}$ sur le sous-domaine $\omega_{\bar{\lambda}}$. Dans le cas d'un sous-domaine $\omega_{\bar{\lambda}}$ correspondant à un cercle (resp. à une sphère) de rayon $\bar{\lambda}$ en dimension 2 (resp. dimension 3), le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre correspond au champ $\underline{v} = \underline{OM}$, vérifiant $\varepsilon(\underline{v}) = \mathbb{I}_d$, où \underline{O} désigne le centre d'homothétie et $\underline{M} \in \partial\omega_{\bar{\lambda}}$. Signalons que le même vecteur propre a été obtenu numériquement dans le cas d'un cercle fissuré ou entaillé et d'un carré de côté $2\bar{\lambda}$ en dimension 2, ainsi que dans le cas d'un cube d'arête $2\bar{\lambda}$ en dimension 3. En outre, dans le cas d'un domaine $\omega_{\bar{\lambda}}$ de forme circulaire ou sphérique, la valeur minimale atteinte par $\mathcal{R}_{\bar{\lambda}}$ a par ailleurs été démontrée de manière analytique dans [Hochard et Proslie (1992)]; cette démonstration est reproduite en annexe D.

Pour l'ensemble des formes géométriques susmentionnées en dimension 2 (resp. dimension 3), on constate que la constante k a une valeur constante égale à 2 (resp. 3). En conséquence, pour ces domaines de forme particulière, la constante k ne dépend d'aucun paramètre matériau, contrairement à la constante de Steklov h intervenant dans la première amélioration.

Remarque 4.7 :

Dans ce travail, nous nous limiterons au cas d'un seul sous-domaine $\omega_{\bar{\lambda}}$, bien que la technique améliorée puisse être aisément appliquée et étendue à plusieurs sous-domaines, notamment lorsque la mesure de l'erreur en relation de comportement associée au problème adjoint présente des contributions prépondérantes dans des zones multiples.

4 Illustrations numériques

Les performances des deux nouvelles techniques d'encadrement proposées en sections 2 et 3 sont comparées à celle de la technique d'encadrement classique décrite en section 1, sur le modèle 2D de structure fissurée déjà étudié en section 4.2 des chapitres 2 et 3.

Pour l'ensemble des exemples numériques, le comportement matériau est supposé linéaire, élastique, homogène et isotrope avec des caractéristiques identiques à celles des applications traitées en section 4 des chapitres 2 et 3, i.e. en prenant un module d'Young unitaire $E = 1$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, et en se plaçant sous l'hypothèse des contraintes planes.

La méthode de reconstruction de champs admissibles choisie pour élaborer les solutions admissibles $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ et $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$ associées aux problèmes de référence et

adjoint, respectivement, est la technique EET d'équilibrage par élément présentée en section 1 du chapitre 2; la résolution des problèmes locaux sous-jacents est réalisée comme précédemment à l'aide d'un p -raffinement de type $p + 3$. Signalons sur ce point qu'il aurait parfaitement été envisageable d'utiliser une autre méthode de construction de champs admissibles parmi celles exposées aux chapitres 2 et 3.

Les résultats obtenus avec la technique d'encadrement classique ainsi que ceux fournis par les deux variantes améliorées sont présentées en introduisant des bornes inférieure et supérieure normalisées par I_{ex} (ou adimensionnées) $(\bar{\xi}_{\text{inf}}, \bar{\xi}_{\text{sup}})$, $(\bar{\chi}_{\text{inf}}, \bar{\chi}_{\text{sup}})$, $(\bar{\zeta}_{\text{inf}}, \bar{\zeta}_{\text{sup}})$, respectivement, définies par :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{\text{inf}} &= \frac{\xi_{\text{inf}}}{I_{ex}} & \text{et} & & \bar{\xi}_{\text{sup}} &= \frac{\xi_{\text{sup}}}{I_{ex}} \\ \bar{\chi}_{\text{inf}} &= \frac{\chi_{\text{inf}}}{I_{ex}} & \text{et} & & \bar{\chi}_{\text{sup}} &= \frac{\chi_{\text{sup}}}{I_{ex}} \\ \bar{\zeta}_{\text{inf}} &= \frac{\zeta_{\text{inf}}}{I_{ex}} & \text{et} & & \bar{\zeta}_{\text{sup}} &= \frac{\zeta_{\text{sup}}}{I_{ex}} \end{aligned}$$

4.1 Présentation de la structure fissurée 2D et des quantités d'intérêt étudiées

Reprenons l'exemple du modèle 2D de structure fissurée contenant deux trous circulaires, présenté en section 4.2 du chapitre 2. La discrétisation éléments finis du problème de référence est effectuée à l'aide d'éléments triangulaires linéaires ($p = 1$). La géométrie, les conditions de chargement ainsi que le maillage Ω_h du problème de référence restent inchangés (cf. figure 2.8). Le maillage très fin $\Omega_{\bar{h}}$ utilisé pour déterminer une solution de référence et calculer la valeur quasi-exacte prise par la quantité d'intérêt, également notée I_{ex} par commodité, est construit en subdivisant chaque élément triangulaire du maillage Ω_h en 256 éléments triangulaires; il contient par conséquent 1 984 256 éléments triangulaires linéaires et 996 080 nœuds, i.e. 1 992 160 d.d.l.

Les quantités d'intérêt étudiées dans ce travail sont :

- la valeur moyenne de la composante σ_{xx} du champ de contrainte σ sur une zone locale $\omega \subset \Omega$:

$$I_1 = \langle \sigma_{xx} \rangle_{\omega} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \sigma_{xx} \, d\Omega \tag{4.76}$$

où la zone d'intérêt ω correspond à un élément E du maillage éléments finis Ω_h (cf. figure 4.3), $|\omega|$ représentant sa mesure;

- la valeur ponctuelle de la composante u_x du champ de déplacement \underline{u} en un point \underline{P} du domaine Ω :

$$I_2 = u_x(\underline{P}) \tag{4.77}$$

où le point \underline{P} coïncide avec un nœud du maillage éléments finis Ω_h (cf. figure 4.3), la zone d'intérêt correspondante étant ponctuelle;

- le facteur d'intensité de contraintes en mode I (ou mode d'ouverture) K_I intervenant dans l'expression analytique de la solution asymptotique à énergie finie au voisinage de la pointe de fissure [Stern et al. (1976), Gallimard et Panetier (2006), Panetier et al. (2010)] et couramment employé dans les critères de propagation de fissure en mécanique linéaire élastique de la rupture (ou mécanique de la rupture fragile) :

$$I_3 = K_I \quad (4.78)$$

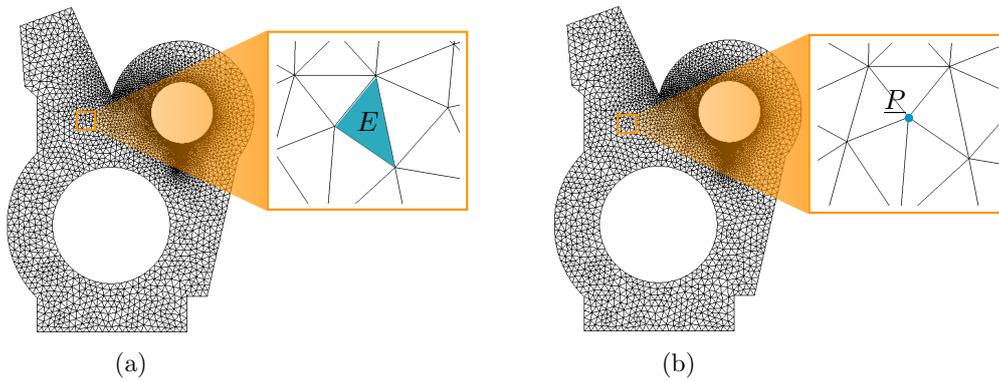


FIGURE 4.3: Position de l'élément E (a) et du point P (b) dans le maillage élément finis Ω_h définissant les zones d'intérêt des quantités locales I_1 et I_2 , respectivement.

Toutes les quantités locales considérées sont des fonctions linéaires du champ de déplacement \underline{u} associé au problème de référence. Les valeurs quasi-exacte I_{ex} et approchée I_h obtenues à partir du maillage très fin de référence $\Omega_{\bar{h}}$ et du maillage éléments finis initial Ω_h , respectivement, pour chacune des trois quantités d'intérêt sont reportées dans le tableau 4.1.

TABLE 4.1: Valeurs quasi-exacte I_{ex} et approchée I_h calculées pour chacune des quantités d'intérêt I_1 , I_2 et I_3 .

Quantité d'intérêt	Valeur quasi-exacte I_{ex}	Valeur approchée I_h
I_1	0.0347069	0.0303747
I_2	-16.2939	-16.1596
I_3	2.8974	2.86161

4.1.1 Traitement de la quantité d'intérêt ponctuelle I_2

Dans le cas de quantités d'intérêt ponctuelles (telle que la quantité d'intérêt I_2) en 2D ou 3D (ou encore linéiques en 3D), le chargement du problème adjoint est

également ponctuel (resp. linéique), de type Dirac appliqué sur un point \underline{P} (resp. de type Heaviside appliqué le long d'un bord Γ) du domaine Ω . La solution associée $(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\sigma})$ du problème adjoint n'appartient pas à l'espace des distributions à énergie finie en dimension $d \geq 2$ en vertu du théorème de plongement de Sobolev (« *Sobolev embedding theorem* ») [Grätsch et Hartmann (2006)]. Différentes approches visant à régulariser la quantité d'intérêt ont alors été proposées, de manière à assurer l'existence d'une solution à énergie finie au problème adjoint.

Application d'un effort nodal

Dans le cas particulier d'une quantité d'intérêt véritablement ponctuelle en 2D ou 3D, une première technique consiste simplement à traiter l'effort ponctuel appliqué au point \underline{P} comme une force nodale $\tilde{f}_{\Sigma} = \delta(\underline{P})\tilde{F}_{\Sigma}$, où $\tilde{F}_{\Sigma} = \underline{x}$ dans le cas de la quantité d'intérêt I_2 par exemple. Notons cependant que son utilisation est restreinte au cas où la quantité d'intérêt étudiée est une valeur ponctuelle d'une composante du champ de déplacement \underline{u} en un point \underline{P} coïncidant avec un nœud du maillage élément finis Ω_h . En outre, cette technique conduit à l'obtention d'une solution approchée éléments finis du problème adjoint de très mauvaise qualité localement (autour du point d'intérêt \underline{P}), car celle-ci ne peut pas être correctement représentée par la méthode des éléments finis du fait de la singularité du chargement.

Technique de mollification

Une seconde technique, introduite dans [Prudhomme et Oden (1999), Oden et Prudhomme (2001)] et couramment employée pour traiter diverses quantités d'intérêt ponctuelles [Prudhomme et al. (2003)], s'appuie sur l'utilisation du concept de *mollification* (ou d'*adoucissement*), qui consiste à remplacer la quantité d'intérêt initialement ponctuelle par une valeur moyenne pondérée sur une zone locale ω_{ϵ} , à travers l'introduction d'une fonction de pondération (ou de mollification) régulière k_{ϵ} . À titre d'exemple, dans le cas de la quantité d'intérêt I_2 , cette dernière est alors approximée de telle sorte qu'on ait :

$$I_2 = u_x(\underline{P}) \simeq \langle u_x \rangle_{\omega_{\epsilon}}(\underline{P}) = \int_{\Omega} u_x(\underline{M})k_{\epsilon}(\underline{M} - \underline{P}) d\Omega$$

où la fonction de pondération k_{ϵ} est choisie de sorte que :

$$\int_{\Omega} k_{\epsilon}(\underline{M} - \underline{P}) d\Omega = 1$$

et définie à partir d'un paramètre ϵ correspondant à la taille de son support ω_{ϵ} , généralement choisi de l'ordre de la taille caractéristique h des éléments avoisinant le point d'intérêt \underline{P} , de sorte que l'évaluation numérique de cette quantité d'intérêt approximée ne soit pas trop coûteuse tout en conservant une précision acceptable. Le chargement du problème adjoint est désormais régulier et réparti sur une zone locale ω_{ϵ} entourant le point d'intérêt \underline{P} . Une technique similaire a été employée

dans [Bangerth et Rannacher (2003)] et repose sur une approximation de la quantité d'intérêt ponctuelle de la forme :

$$I_2 = u_x(\underline{P}) \simeq \langle u_x \rangle_{\omega_\epsilon}(\underline{P}) = \frac{1}{|\omega_\epsilon|} \int_{\omega_\epsilon} u_x(\underline{M} - \underline{P}) \, d\Omega$$

Remarque 4.8 :

La technique de mollification peut s'avérer particulièrement utile dans le cas où la quantité d'intérêt ponctuelle I n'est pas définie, i.e. lorsque la fonctionnelle \mathcal{L} représentant I n'est pas bornée. À titre d'exemple, si on s'intéresse à la valeur d'une composante d'une grandeur dérivée du champ de déplacement \underline{u} , telle que le champ de contrainte σ , en un point \underline{P} situé à l'interface entre deux éléments du maillage éléments finis Ω_h , la valeur approchée I_h prise par la quantité d'intérêt n'est pas définie. De manière plus générale, si on s'intéresse à la valeur du champ de déplacement \underline{u} dans une direction donnée en un point \underline{P} où la solution en déplacement du problème de référence n'est pas continue (en dimension $d \geq 2$), les valeurs exacte I_{ex} et approchée I_h prises par la quantité d'intérêt ne sont pas définies.

Techniques « handbook »

Enfin, une troisième approche, désormais connue sous le nom de techniques « *handbook* » [Chamoin et Ladevèze (2008), Chamoin et Ladevèze (2009), Ladevèze et Chamoin (2010)], consiste à introduire un enrichissement local de la solution $(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\sigma})$ du problème adjoint. Cet enrichissement est particulièrement bien adapté à l'estimation d'erreur locale sur des quantités d'intérêt ponctuelles, dans la mesure où il évite le recours aux procédures classiques de régularisation de la quantité d'intérêt exposées précédemment. C'est par conséquent cette approche qui a été retenue pour le traitement de la quantité d'intérêt I_2 . Une description détaillée des techniques « *handbook* » est fournie au paragraphe 3.3.7 du chapitre 1. Nous en rappelons ici les grandes lignes dans le cadre des quantités d'intérêt ponctuelles.

Les singularités provenant du chargement du problème adjoint sont captées de manière explicite et non-intrusive en introduisant des fonctions d'enrichissement adaptées, dites « *handbook* », $(\tilde{\underline{u}}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}^{\text{hand}})$ à l'aide de la partition de l'unité (satisfaite par les fonctions de forme éléments finis) assurant la compatibilité du champ de déplacement associé au problème adjoint.

Dans le contexte de l'estimation d'erreur sur des quantités d'intérêt ponctuelles, les fonctions « *handbook* » correspondent aux *fonctions de Green* [Greenberg (1948), Washizu (1953)], également appelées *noyaux de Green* et généralement à énergie infinie ; celles-ci sont les solutions, dites élémentaires, du problème considéré soumis à un chargement élémentaire, i.e. une distribution de Dirac. Elles sont entièrement définies par l'équation aux dérivées ordinaires ou partielles gouvernant le problème et les conditions aux limites associées. Ces solutions sont généralement

recherchées sous la forme d'une somme d'une fonction singulière prenant en compte la singularité due au second membre (ou chargement) de type Dirac d'une part, et d'une fonction régulière solution de l'équation différentielle homogène et assurant la vérification des conditions aux limites d'autre part. Différentes méthodes ont été proposées pour le calcul analytique des fonctions de Green. Celles-ci sont répertoriées pour diverses classes de problèmes dans la section 1 de l'annexe E. À titre d'exemple, les expressions analytiques de quelques fonctions de Green en élasticité linéaire associées à un chargement ponctuel dans un milieu infini en 2D et 3D sont données dans la section 2 de l'annexe E. Dans le cas de la quantité d'intérêt I_2 , les fonctions « handbook » utilisées correspondent aux fonctions de Green associées à un effort ponctuel dans un milieu infini en 2D et sont représentées sur la figure E.1 en section 2 de l'annexe E.

Les fonctions de Green sont introduites localement via la méthode de partition de l'unité sur une région Ω^{PUM} centrée autour du point d'intérêt \underline{P} . La région enrichie Ω^{PUM} est décomposée en une sous-région Ω_1^{PUM} contenant le point d'intérêt \underline{P} et une sous-région Ω_2^{PUM} complémentaire de Ω_1^{PUM} dans Ω^{PUM} . Dans le cas de la quantité d'intérêt I_2 , un enrichissement mettant en jeu uniquement une ou deux rangées de nœuds suffit à capter les forts gradients locaux de la solution exacte $(\tilde{u}_{ex}, \tilde{\sigma}_{ex})$ du problème adjoint ; la définition des sous-régions Ω_1^{PUM} (contenant 6 (resp. 24) éléments et 7 (resp. 19) nœuds enrichis) et Ω_2^{PUM} (contenant 18 (resp. 30) éléments) dans la région enrichie Ω^{PUM} est représentée sur la figure 4.4 en considérant une seule rangée (resp. deux rangées) de nœuds enrichis.

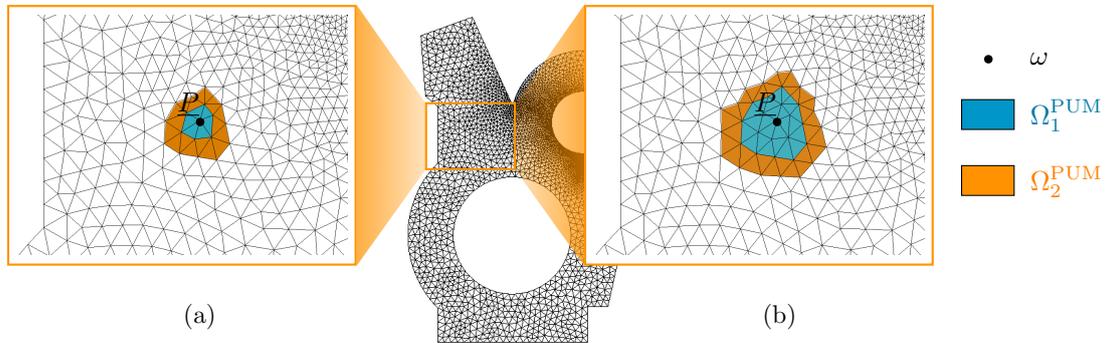


FIGURE 4.4: Définition de la zone d'intérêt ponctuelle ω , des sous-régions Ω_1^{PUM} et Ω_2^{PUM} dans la région enrichie Ω^{PUM} pour la quantité d'intérêt I_2 , avec une rangée (a) ou deux rangées (b) de nœuds enrichis autour du point d'intérêt \underline{P} .

La solution globale $(\tilde{u}, \tilde{\sigma})$ du problème adjoint est décomposée en une partie enrichie $(\tilde{u}_{\text{PUM}}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}_{\text{PUM}}^{\text{hand}})$ connue analytiquement faisant intervenir la solution de Green $(\tilde{u}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}^{\text{hand}})$ et une partie résiduelle $(\tilde{u}^{\text{res}}, \tilde{\sigma}^{\text{res}})$ déterminée numériquement à l'aide de la méthode des éléments finis. Cette dernière correspond à la solution d'un nouveau problème adjoint qualifié de résiduel et dont le chargement met en jeu une

densité surfacique d'effort $-\tilde{\sigma}^{\text{hand}} \underline{n}_{12}$ sur $\partial\Omega_1^{\text{PUM}}$, où \underline{n}_{12} désigne la normale sortante unitaire à Ω_1^{PUM} , et une précontrainte $-\tilde{\sigma}_{\text{PUM}}^{\text{hand}}$ dans Ω_2^{PUM} . Le chargement du problème adjoint étant désormais fini et régulier, la résolution approchée du problème adjoint conduit à l'obtention d'une solution approchée $(\tilde{\underline{u}}_h^{\text{res}}, \tilde{\sigma}_h^{\text{res}})$

4.1.2 Traitement de la quantité d'intérêt extraite I_3

Dans le cas des facteurs d'intensité de contraintes (telle que la quantité d'intérêt I_3), différentes méthodes permettent d'extraire leur valeur. Une brève description des principales techniques d'extraction est fournie en annexe F. La technique d'extraction retenue pour définir la quantité d'intérêt I_3 correspondant au facteur d'intensité de contraintes K_I s'appuie sur une extension de la méthode proposée dans [Stern et al. (1976)], puis revisitée dans [Gallimard et Panetier (2006), Panetier et al. (2009), Panetier et al. (2010)]. Celle-ci est décrite au paragraphe 2.2 de l'annexe F. Une validation de cette technique d'extraction est par ailleurs fournie dans l'annexe G. Le facteur d'intensité de contraintes K_I se ramène à l'évaluation d'une intégrale surfacique (F.9) sur un domaine quelconque Ω_c entourant la pointe de fissure, dont on rappelle ici l'expression :

$$K_I = \int_{\Omega_c} \text{Tr} [(\mathbf{K} \varepsilon(\phi \underline{v}_I) - \phi \sigma_I^v) \varepsilon(\underline{u})] d\Omega - \int_{\Omega_c} (\sigma_I^v \nabla \phi) \cdot \underline{u} d\Omega \quad (4.79)$$

où $(\underline{v}_I, \sigma_I^v)$ correspond à une solution analytique singulière (à énergie infinie) du problème d'élasticité défini au voisinage de la pointe de fissure. ϕ est une fonction scalaire a priori arbitraire, continûment dérivable sur Ω_c et égale à 0 (resp. 1) sur le contour extérieur Γ_e (resp. contour intérieur Γ_i) du domaine Ω_c .

Dans ce travail, on considère une couronne Ω_c , représentée sur la figure 4.5, délimitée par deux cercles Γ_i et Γ_e centrés autour de la pointe de fissure de rayons $R_i = 6$ et $R_e = 8$, respectivement. La fissure ayant une longueur $a = \sqrt{298} \simeq 17.26$, on a :

$$\frac{R_i}{a} \simeq 0.3476 \quad \text{et} \quad \frac{R_e}{a} \simeq 0.4634$$

En considérant un système de coordonnées polaires (r, θ) centré autour de la pointe de fissure, on choisit une fonction ϕ continue et décroissante avec le rayon r , définie par l'expression (F.10), i.e. :

$$\phi(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r \leq R_i \\ \frac{R_e - r}{R_e - R_i} & \text{si } R_i \leq r \leq R_e \\ 0 & \text{si } r \geq R_e \end{cases}$$

Celle-ci peut être correctement décrite par les fonctions de forme éléments finis linéaires.

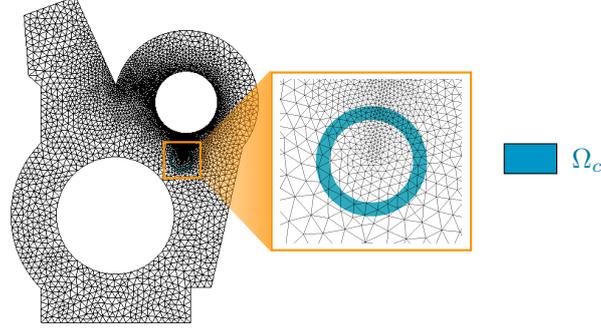


FIGURE 4.5: Définition de la couronne d'extraction Ω_c pour la quantité d'intérêt I_3 .

4.1.3 Caractéristiques associées aux différentes quantités d'intérêt

Le chargement du problème adjoint est défini à partir des extracteurs suivants :

- pour la quantité d'intérêt I_1 : une précontrainte uniforme $\tilde{\sigma}_\Sigma = \mathbf{K} \tilde{\varepsilon}_\Sigma$ dans l'élément E , où $\tilde{\varepsilon}_\Sigma = \frac{1}{|E|} \underline{x} \otimes \underline{x}$ avec $|E|$ la mesure de l'élément E ;
- pour la quantité d'intérêt I_2 : une densité surfacique d'effort $\tilde{F}_\Sigma = -\tilde{\sigma}_{\text{PUM}}^{\text{hand}} \underline{n}_{12}$ sur le bord $\partial\Omega_1^{\text{PUM}}$ et une précontrainte $\tilde{\sigma}_\Sigma = -\tilde{\sigma}_{\text{PUM}}^{\text{hand}}$ dans la zone Ω_2^{PUM} ;
- pour la quantité d'intérêt I_3 : une précontrainte $\tilde{\sigma}_\Sigma = \mathbf{K} \varepsilon(\phi \underline{v}_1) - \phi \sigma_1^v$ et une densité volumique d'effort $\tilde{f}_\Sigma = -\sigma_1^v \nabla \phi$ dans la couronne Ω_c .

Dans ce travail, les domaines homothétiques considérés sont des cercles pour les quantités d'intérêt I_1 et I_2 , et des cercles fissurés pour la quantité d'intérêt I_3 . D'autres formes géométriques auraient pu être utilisées, la principale difficulté technique étant le calcul de la constante h (resp. k) définie par (4.22) (resp. (4.51)) intervenant dans la première (resp. seconde) amélioration.

Les valeurs des constantes h et k ont été déterminées analytiquement et calculées numériquement pour différentes formes géométriques dans le cas d'un comportement matériau élastique, linéaire, homogène et isotrope caractérisé par un module d'Young $E = 1$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Celles-ci sont reportées dans le tableau 4.2.

4.2 Quantité d'intérêt I_1 : valeur moyenne d'un champ défini sur une zone locale

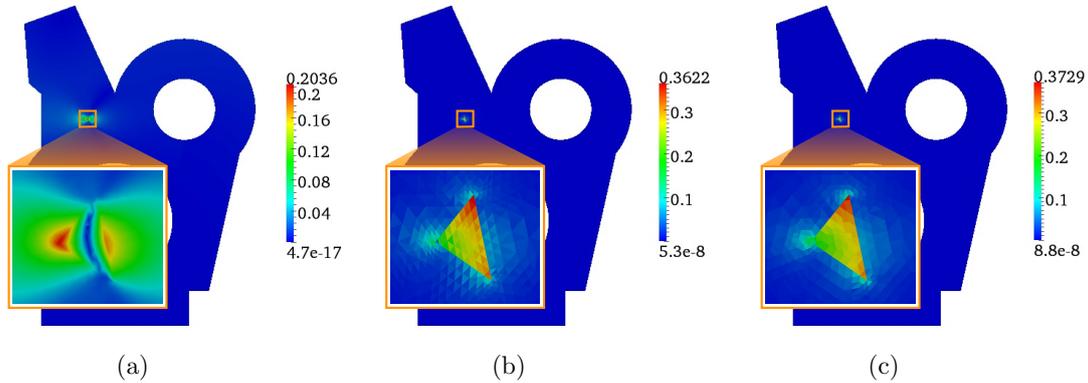
Considérons dans un premier temps la quantité d'intérêt I_1 , correspondant à la valeur moyenne de la composante σ_{xx} du champ de contrainte σ sur l'élément E représenté sur la figure 4.3.

1. θ désigne l'angle formé par les deux lèvres de la fissure ou de l'entaille.

TABLE 4.2: Valeurs des constantes h et k intervenant dans les deux améliorations pour différentes formes géométriques

Forme géométrique	Constante h		Constante k
	contraintes planes	déformations planes	
Dimension 2			
cercle	0.76923	0.7	2
cercle fissuré ($\theta = 0$) ¹	0.79780	0.72122	2
cercle entaillé ($\theta = \pi/6$)	0.80039	0.72315	2
cercle entaillé ($\theta = \pi/3$)	0.80351	0.72546	2
cercle entaillé ($\theta = \pi/2$)	0.80732	0.72829	2
carré	0.85897	0.76667	2
Dimension 3			
sphère	0.53846		3
cube	0.64103		3

La figure 4.6 représente les cartes du champ de déplacement et de contrainte éléments finis ainsi que celle du champ de contrainte admissible du problème adjoint. Le maillage $\Omega_{\tilde{h}}$ support de la résolution éléments finis du problème adjoint est légèrement raffiné autour de la zone d'intérêt ω (correspondant à l'élément E) ; celui-ci contient 8 973 éléments triangulaires linéaires ($p = 1$) et 4 733 nœuds, i.e. 9 466 d.d.l. Les zones de fortes contraintes sont principalement localisées au voisinage de la zone d'intérêt.

**FIGURE 4.6:** Cartes du champ de déplacement éléments finis \tilde{u}_h (a), du champ de contrainte éléments finis $\tilde{\sigma}_h$ (b) et du champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ (c) associés au problème adjoint pour la quantité d'intérêt I_1 .

La figure 4.7 montre la répartition spatiale des contributions locales (au carré) aux erreurs estimées $\theta = e_{\text{rdc},\Omega}$ et $\hat{\theta} = \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega}$ associées respectivement aux problèmes de référence et adjoint. Les principales contributions à l'erreur estimée θ associée au problème de référence sont concentrées au voisinage de la pointe de fissure, tandis que

celles à l'erreur estimée $\tilde{\theta}$ associée au problème adjoint sont situées aux alentours de la zone d'intérêt ω . Par conséquent, celles-ci sont localisées dans des régions disjointes et éloignées.

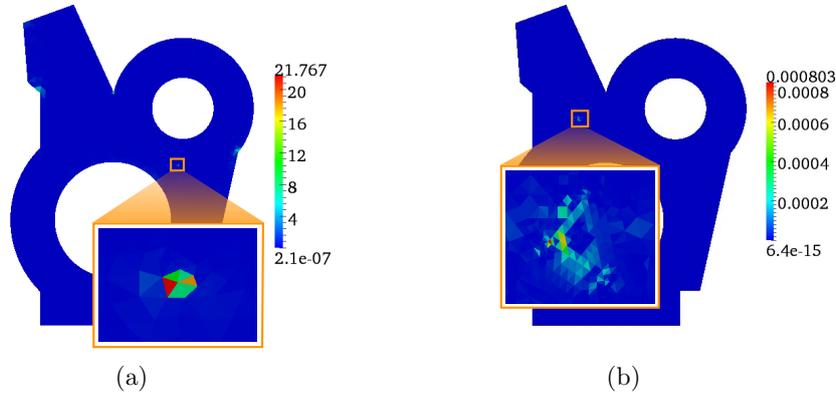


FIGURE 4.7: Cartes des contributions élémentaires (au carré) à l'erreur estimée $\theta = e_{\text{rdc},\Omega}$ associée au problème de référence (a) et à celle $\tilde{\theta} = \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega}$ associée au problème adjoint (b) pour la quantité d'intérêt I_1 , avec zooms sur la pointe de fissure pour le problème de référence (a) et sur la zone d'intérêt pour le problème adjoint (b).

Le centre d'homothétie Q des domaines circulaires coïncide avec le centre du cercle circonscrit à l'élément E . Les valeurs des paramètres λ et $\bar{\lambda}$ intervenant dans la première amélioration sont fixées à $2 r_E^{C_c}$ et $14 r_E^{C_c}$, respectivement, où $r_E^{C_c}$ désigne le rayon du cercle circonscrit à l'élément E . La valeur optimale $\bar{\lambda}_{\text{opt}}$ prise par le paramètre intervenant dans la seconde amélioration est quant à elle égale à $9 r_E^{C_c}$, permettant ainsi d'obtenir l'encadrement le plus précis de l'erreur locale sur la quantité d'intérêt I_1 . Les sous-domaines correspondants ω_λ , $\omega_{\bar{\lambda}}$ et $\omega_{\bar{\lambda}_{\text{opt}}}$ sont illustrés sur la figure 4.8.

La figure 4.9 présente l'évolution des bornes inférieure et supérieure normalisées de I_{ex} pour la quantité d'intérêt I_1 en fonction du nombre d'éléments \tilde{N}_e contenus dans le maillage associé au problème adjoint pour les techniques d'encadrement classique et améliorées. Le maillage $\Omega_{\tilde{h}}$ associé à la discrétisation du problème adjoint est raffiné localement autour de la zone d'intérêt ω , car le chargement ainsi que les contributions élémentaires à l'erreur estimée globale $\tilde{\theta}$ du problème adjoint sont principalement localisées dans cette région. On constate une légère amélioration quant à la précision de l'encadrement offert par la première technique améliorée en comparaison à la technique classique. Concernant la seconde technique améliorée, on observe une très nette amélioration conduisant à des bornes d'erreur locale précises sans trop raffiner le maillage $\Omega_{\tilde{h}}$ du problème adjoint, donc sans trop affecter le coût de calcul. Des résultats similaires peuvent être obtenus en prenant comme quantité d'intérêt la valeur moyenne sur l'élément E d'une autre composante σ_{xy} ou σ_{yy} .

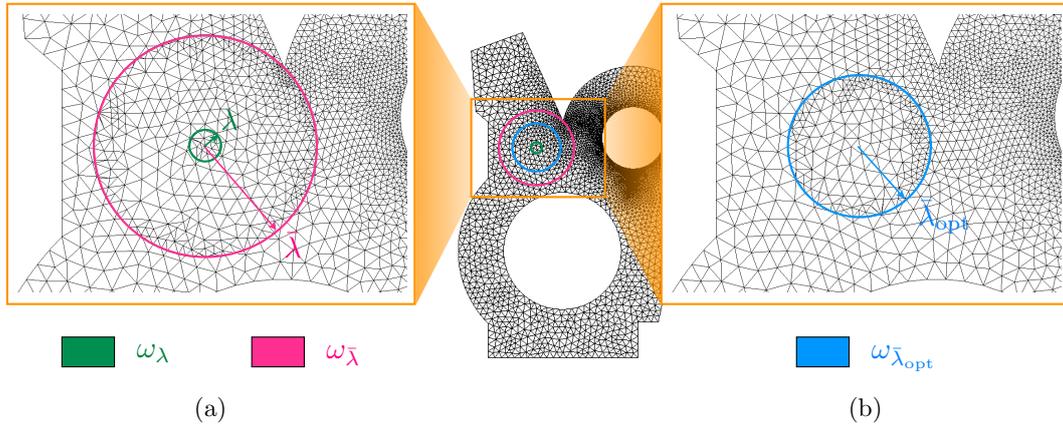


FIGURE 4.8: Définition des sous-domaines ω_λ et $\omega_{\bar{\lambda}}$ intervenant dans la première amélioration (a) et du sous-domaine $\omega_{\bar{\lambda}_{opt}}$ intervenant dans la seconde amélioration (b) pour la quantité d'intérêt I_1 .

du champ de contrainte σ , ou encore celle d'une des composantes du champ de déformation ε .

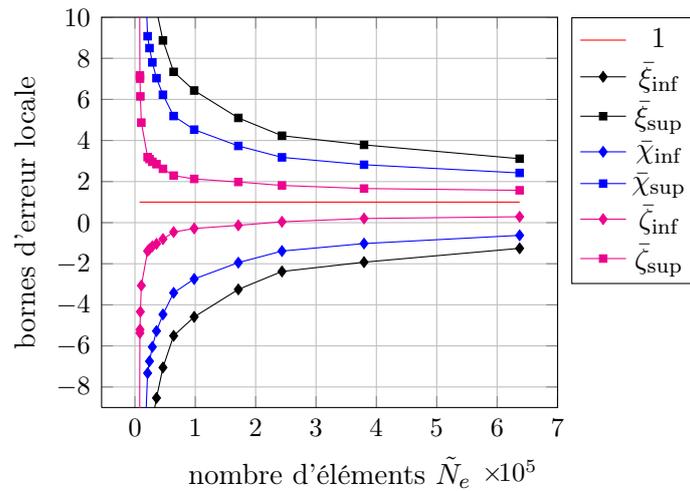


FIGURE 4.9: Évolution des bornes inférieure et supérieure normalisées de I_{ex} pour la quantité locale I_1 , obtenues à partir des techniques d'encadrement classique et améliorées, en fonction du nombre d'éléments \tilde{N}_e associé à la discrétisation du problème adjoint.

Enfin, la figure 4.10 montre l'évolution des nouvelles valeurs approchées normalisées $(I_h + I_{hh})/I_{ex}$ et $(I_h + I_{hh} + I_{hhh,\lambda})/I_{ex}$ de la quantité locale I_1 en fonction du nombre d'éléments \tilde{N}_e contenus dans le maillage associé au problème adjoint. Ces valeurs sont comparées à la valeur exacte normalisée 1 et à la valeur approchée normalisée I_h/I_{ex} obtenue à partir de la solution éléments finis $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ du problème de

référence. La quantité $I_h + I_{hh}$ correspond à une approximation de I_{ex} de meilleure qualité que I_h et $I_h + I_{hh} + I_{hhh,\lambda}$. Notons sur ce point que la convergence de $I_h + I_{hh}$ vers I_{ex} en fonction du nombre d'éléments \tilde{N}_e est très lente en pratique et n'est atteinte que pour la solution exacte $(\tilde{u}_{ex}, \tilde{\sigma}_{ex})$ du problème adjoint en théorie (cf. remarque 1.30 du chapitre 1).

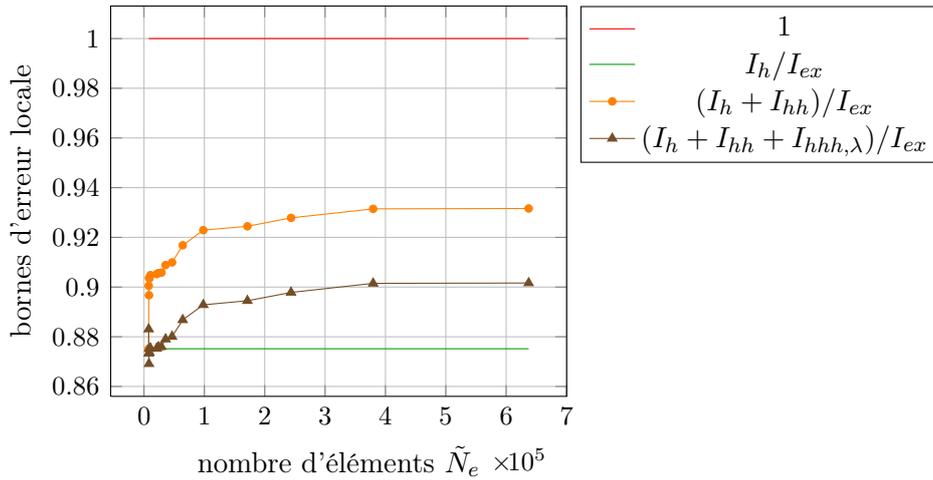


FIGURE 4.10: Évolution des nouvelles valeurs approchées normalisées $(I_h + I_{hh})/I_{ex}$ et $(I_h + I_{hh} + I_{hhh,\lambda})/I_{ex}$ de la quantité locale I_1 en fonction du nombre d'éléments \tilde{N}_e associé à la discrétisation du problème adjoint, et comparaison à ses valeurs normalisées exacte 1 et approchée I_h/I_{ex} .

4.3 Quantité d'intérêt I_2 : valeur ponctuelle d'un champ

Intéressons nous dans un second temps à la quantité d'intérêt I_2 , correspondant à la valeur ponctuelle de la composante u_x du champ de déplacement \underline{u} au point P représenté sur la figure 4.3. Afin de résoudre finement le problème adjoint et de décrire correctement les singularités de la solution $(\tilde{u}, \tilde{\sigma})$ induites par le chargement du problème adjoint, des fonctions « handbook » spécifiques, connues analytiquement, sont introduites localement au voisinage de la zone d'application de ce dernier, i.e. aux alentours du point d'intérêt P . Rappelons que les techniques « handbook » conduisent à l'obtention de bornes d'erreur locale en utilisant un maillage $\Omega_{\tilde{h}}$ (associé au problème adjoint) identique au maillage initial Ω_h (associé au problème de référence).

Les courbes présentées sur la figure 4.11 montrent l'évolution des bornes normalisées $(\bar{\xi}_{sup}, \bar{\xi}_{inf})$ de I_{ex} , obtenues à partir de la technique d'encadrement classique couplée aux techniques « handbook », en fonction du nombre de nœuds enrichis. Le nombre correspondant de rangées de nœuds enrichis autour du point d'intérêt P varie de 1 à 7. On constate qu'en utilisant le même espace de discrétisation pour les

problèmes de référence et adjoint, des bornes garanties et précises peuvent être obtenues à l'aide d'un enrichissement (via la partition de l'unité) appliqué sur seulement quelques nœuds situés dans la zone d'application du chargement singulier du problème adjoint. Dans la suite, on considère un maillage $\Omega_{\tilde{h}}$ associé à la discrétisation du problème adjoint résiduel (1.112) identique à celui Ω_h associé à la discrétisation du problème de référence (1.2) et on se restreint à une ou deux rangées de nœuds enrichis.

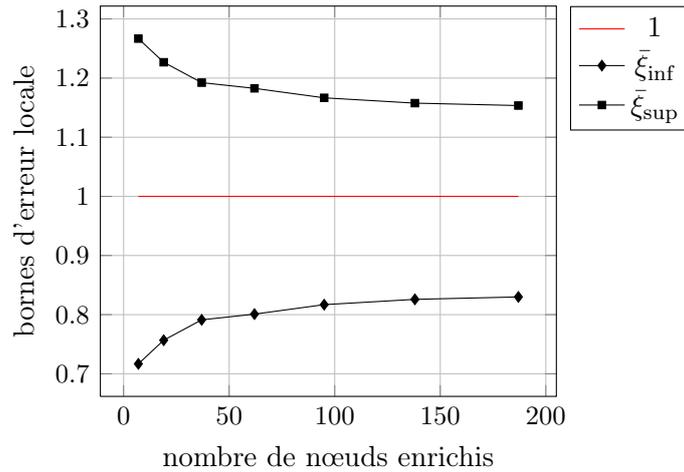


FIGURE 4.11: Évolution des bornes inférieure et supérieure normalisées ($\bar{\xi}_{\text{inf}}$, $\bar{\xi}_{\text{sup}}$) de I_{ex} pour la quantité locale I_2 , obtenues à partir de la technique d'encadrement classique couplée aux techniques « handbook », en fonction du nombre de nœuds enrichis.

Les cartes du champ de déplacement et de contrainte élément finis ainsi que celle du champ de contrainte admissible du problème adjoint résiduel sont représentées sur la figure 4.12 pour une et deux rangées de nœuds enrichis. Les champs de contrainte éléments finis et admissibles résiduels sont très localisés et majoritairement concentrés dans la zone locale Ω_2^{PUM} , correspondant à la zone d'application du chargement du problème adjoint résiduel.

Les cartes des contributions élémentaires (au carré) à l'erreur estimée $\tilde{\theta} = \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega}$ du problème adjoint (résiduel) pour les deux enrichissements considérés sont données sur la figure 4.13. Les contributions prépondérantes à l'erreur estimée sont très majoritairement concentrées dans la zone locale Ω_2^{PUM} support du chargement du problème adjoint résiduel. Comme dans le cas de la quantité d'intérêt I_1 étudié précédemment, les erreurs estimées associées aux problèmes de référence et adjoint sont localisées dans des régions relativement distantes l'une de l'autre.

Le centre d'homothétie \underline{Q} des domaines circulaires coïncide avec le point d'intérêt \underline{P} pour chacun des enrichissements considérés.

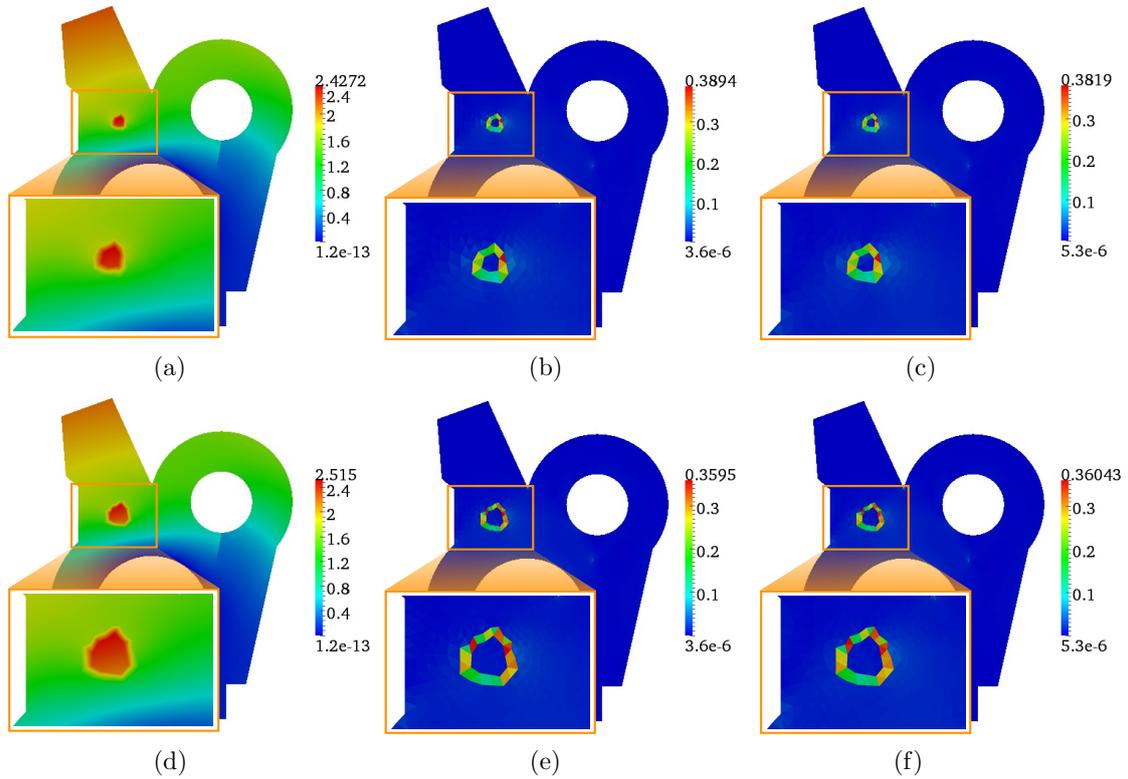


FIGURE 4.12: Cartes du champ de déplacement éléments finis résiduel \tilde{u}_h^{res} (a) et (d), du champ de contrainte éléments finis résiduel $\tilde{\sigma}_h^{\text{res}}$ (b) et (e), et du champ de contrainte admissible résiduel $\hat{\tilde{\sigma}}_h^{\text{res}}$ (c) et (f) associés au problème adjoint résiduel pour la quantité d'intérêt I_2 , avec une rangée et deux rangées de nœuds enrichis, respectivement.

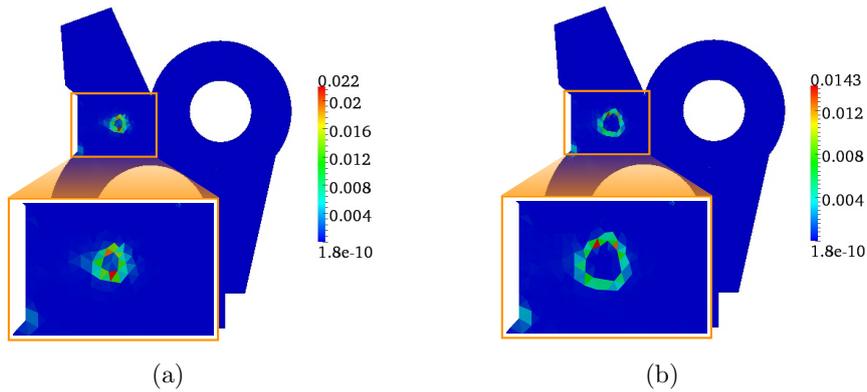


FIGURE 4.13: Cartes des contributions élémentaires (au carré) à l'erreur estimée $\tilde{\theta} = \tilde{e}_{\text{rdc},\Omega}$ associée au problème adjoint (résiduel) pour la quantité d'intérêt I_2 , avec une rangée (a) et deux rangées (b) de nœuds enrichis, avec zoom sur la région enrichie Ω^{PUM} .

Dans le cas de l'enrichissement appliqué à une seule rangée de nœuds, les valeurs des paramètres λ et $\bar{\lambda}$ intervenant dans la première amélioration sont fixées à $1.7r_P$ et $7r_P$, respectivement, où r_P désigne la distance entre le point d'intérêt \underline{P} et son nœud voisin le plus éloigné. La valeur optimale $\bar{\lambda}_{\text{opt}}$ du paramètre intervenant dans la seconde amélioration est quant à elle choisie égale à $4.4r_P$, de manière à obtenir les bornes d'erreur locale les plus précises sur la quantité d'intérêt I_2 . Les sous-domaines correspondants ω_λ , $\omega_{\bar{\lambda}}$ et $\omega_{\bar{\lambda}_{\text{opt}}}$ sont représentés sur la figure 4.14.

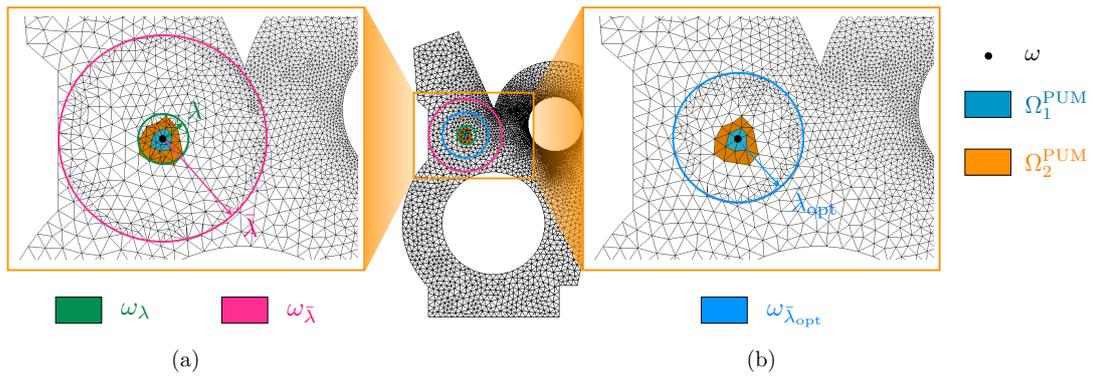


FIGURE 4.14: Définition des sous-domaines ω_λ et $\omega_{\bar{\lambda}}$ intervenant dans la première amélioration (a) et du sous-domaine $\omega_{\bar{\lambda}_{\text{opt}}}$ intervenant dans la seconde amélioration (b) pour la quantité d'intérêt I_2 , avec une seule rangée de nœuds enrichis.

Dans le cas de l'enrichissement appliqué à deux rangées de nœuds, les valeurs des paramètres λ et $\bar{\lambda}$ intervenant dans la première amélioration sont fixées à $2.5r_P$ et $7r_P$, tandis que celle optimale $\bar{\lambda}_{\text{opt}}$ attribuée au paramètre intervenant dans la seconde amélioration est $4.4r_P$. Les sous-domaines correspondants ω_λ , $\omega_{\bar{\lambda}}$ et $\omega_{\bar{\lambda}_{\text{opt}}}$ sont illustrés sur la figure 4.15.

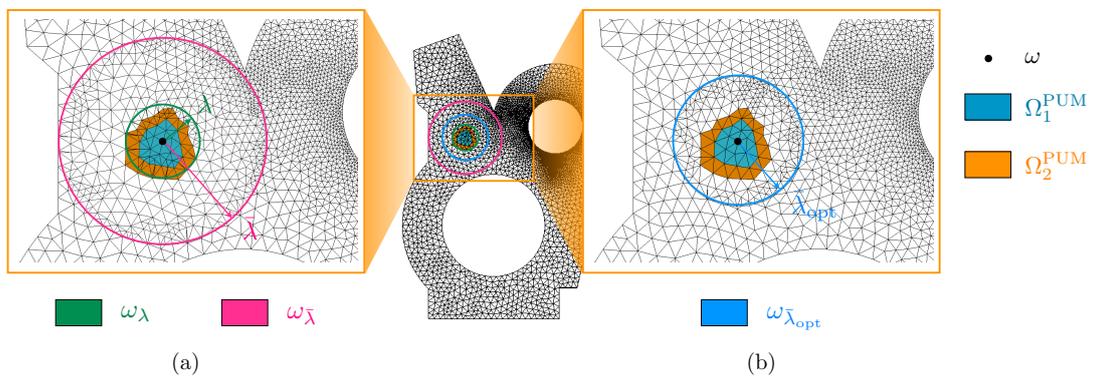


FIGURE 4.15: Définition des sous-domaines ω_λ et $\omega_{\bar{\lambda}}$ intervenant dans la première amélioration (a) et du sous-domaine $\omega_{\bar{\lambda}_{\text{opt}}}$ intervenant dans la seconde amélioration (b) pour la quantité d'intérêt I_2 , avec deux rangées de nœuds enrichis.

Les bornes normalisées calculées en utilisant les techniques d'encadrement classique et améliorées combinées aux techniques « handbook » sont regroupées dans le tableau 4.3 pour un enrichissement faisant intervenir une ou deux rangées de nœuds autour du point d'intérêt \underline{P} . L'analyse des résultats révèle que les bornes normalisées $(\bar{\zeta}_{\text{inf}}, \bar{\zeta}_{\text{sup}})$ obtenues à l'aide de la seconde technique améliorée sont plus précises que celles $(\bar{\xi}_{\text{inf}}, \bar{\xi}_{\text{sup}})$ déterminées à partir de la technique classique d'une part, et que celles $(\bar{\chi}_{\text{inf}}, \bar{\chi}_{\text{sup}})$ calculées à partir de la première technique améliorée d'autre part, pour les deux enrichissements considérés. Notons que ces dernières $(\bar{\chi}_{\text{inf}}, \bar{\chi}_{\text{sup}})$ sont plus grossières, i.e. moins précises, que celles $(\bar{\xi}_{\text{inf}}, \bar{\xi}_{\text{sup}})$ obtenues à l'aide de la technique d'encadrement classique dans le cas du second enrichissement. Les performances de la première technique améliorée dépendent fortement du rapport $\frac{\lambda}{\lambda}$; la précision des bornes est d'autant plus élevée que ce rapport est faible, i.e. que la zone enrichie est petite. Enfin, signalons que des résultats équivalents peuvent être obtenus en prenant comme quantité d'intérêt la valeur ponctuelle au point \underline{P} de la composante u_y du champ de déplacement \underline{u} .

TABLE 4.3: Bornes normalisées obtenues à partir des techniques d'encadrement classique et améliorées pour la quantité d'intérêt I_2

Nombre de rangées de nœuds enrichis	Bornes classiques		Bornes améliorées 1		Bornes améliorées 2	
	$\bar{\xi}_{\text{inf}}$	$\bar{\xi}_{\text{sup}}$	$\bar{\chi}_{\text{inf}}$	$\bar{\chi}_{\text{sup}}$	$\bar{\zeta}_{\text{inf}}$	$\bar{\zeta}_{\text{sup}}$
1	0.7168	1.2668	0.7291	1.2545	0.8512	1.1323
2	0.7567	1.2268	0.7387	1.2451	0.8543	1.1292

4.4 Quantité d'intérêt I_3 : valeur extraite d'un champ

Considérons enfin le cas de la quantité d'intérêt I_3 , correspondant au facteur d'intensité de contrainte K_I en mode I déterminé à partir de l'intégrale de domaine (4.79) sur la couronne Ω_c représentée en figure 4.5.

Les cartes du champ de déplacement et de contrainte éléments finis ainsi que celle du champ de contrainte admissible du problème adjoint sont représentées sur la figure 4.16. La densité du maillage $\Omega_{\tilde{h}}$ associé à la discrétisation du problème adjoint est légèrement plus élevée à proximité de la couronne Ω_c en comparaison à celle du maillage Ω_h associé à la discrétisation du problème de référence; il contient 10 699 éléments triangulaires linéaires ($p = 1$) et 5 597 nœuds, i.e. 11 194 d.d.l. La région la plus sollicitée en contraintes correspond une nouvelle fois à la zone d'application du chargement du problème adjoint, définie par la couronne Ω_c .

La distribution spatiale des contributions locales (au carré) à l'erreur estimée $\tilde{\theta} = \tilde{\epsilon}_{\text{rdc},\Omega}$ du problème adjoint est donnée sur la figure 4.17. Les régions présentant

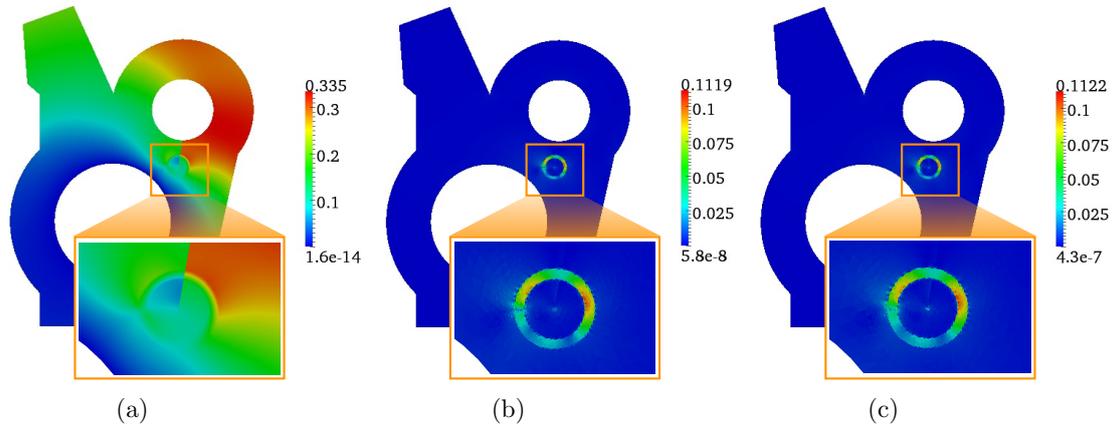


FIGURE 4.16: Cartes du champ de déplacement éléments finis \tilde{u}_h (a), du champ de contrainte éléments finis $\tilde{\sigma}_h$ (b) et du champ de contrainte admissible $\hat{\sigma}_h$ (c) associés au problème adjoint pour la quantité d'intérêt I_3 .

les plus fortes contributions à l'erreur estimée du problème adjoint sont situées le long de la frontière de la couronne d'extraction. Par conséquent, les erreurs estimées associées aux problèmes de référence et adjoint sont concentrées dans des régions voisines, contrairement aux cas des deux quantités I_1 et I_2 présentés respectivement en sections 4.2 et 4.3.

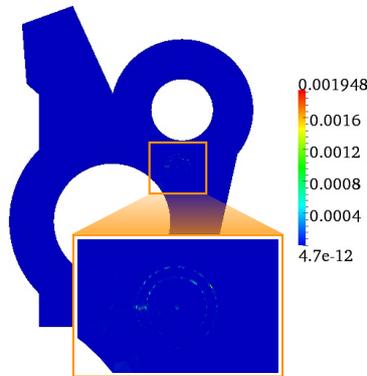


FIGURE 4.17: Cartes des contributions élémentaires (au carré) à l'erreur estimée $\tilde{\theta} = \tilde{\epsilon}_{\text{rdc},\Omega}$ associée au problème adjoint pour la quantité d'intérêt I_3 , avec zoom sur la couronne d'extraction Ω_c .

Le centre d'homothétie \underline{Q} des domaines circulaires fissurés coïncide avec la pointe de fissure et le centre de la couronne d'extraction Ω_c . Les valeurs prises par les paramètres λ et $\bar{\lambda}$ intervenant dans la première amélioration sont égales à $1.2 R_e$ et $2.1 R_e$, respectivement, où R_e correspond au rayon du contour circulaire extérieur Γ_e de la couronne Ω_c . La valeur optimale $\bar{\lambda}_{\text{opt}}$ attribuée au paramètre intervenant dans la seconde amélioration est quant à elle égale à $1.6 r_E^c$, conduisant à l'encadrement

le plus fin de l'erreur locale sur la quantité d'intérêt I_3 . La figure 4.18 représente les différents sous-domaines correspondants ω_λ , $\omega_{\bar{\lambda}}$ et $\omega_{\bar{\lambda}_{\text{opt}}}$.

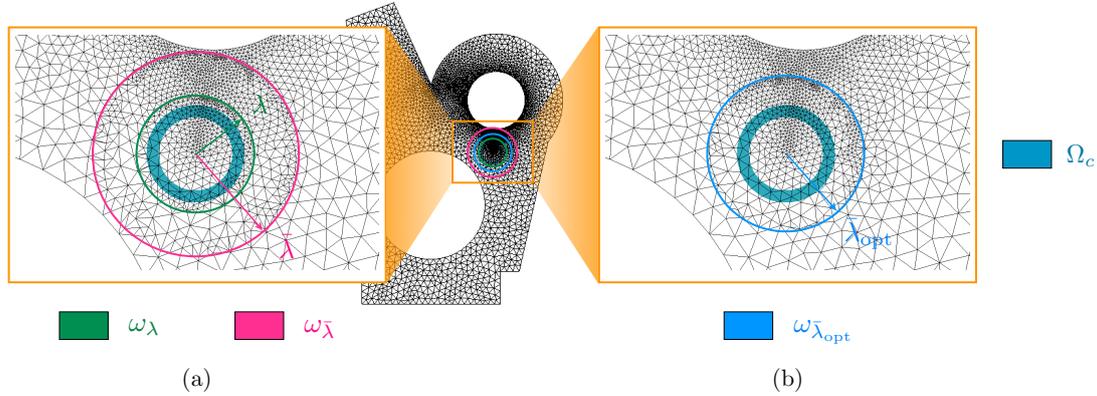


FIGURE 4.18: Définition des sous-domaines ω_λ et $\omega_{\bar{\lambda}}$ intervenant dans la première amélioration (a) et du sous-domaine $\omega_{\bar{\lambda}_{\text{opt}}}$ intervenant dans la seconde amélioration (b) pour la quantité d'intérêt I_3 .

L'évolution des bornes inférieure et supérieure normalisées de I_{ex} pour la quantité d'intérêt I_3 en fonction du nombre d'éléments \tilde{N}_e contenus dans le maillage associé au problème adjoint est représentée sur la figure 4.19 pour les techniques d'encadrement classique et améliorées. Un raffinement local du maillage $\Omega_{\tilde{h}}$ associé au problème adjoint est effectué à proximité du domaine d'extraction Ω_c , en particulier le long de ses frontières intérieure Γ_i et extérieure Γ_e , car les contributions élémentaires à l'erreur estimée globale $\tilde{\theta}$ du problème adjoint sont majoritairement concentrées dans cette région. La seconde technique améliorée affiche des performances comparables, voire très légèrement supérieures, à la technique classique, tandis que la première technique améliorée conduit à une dégradation de la précision des bornes en comparaison à la technique d'encadrement classique. Par conséquent, les améliorations proposées en sections 2 et 3 ne semblent pas en mesure d'affiner l'encadrement d'erreur locale fourni par la technique classique dans les cas où les erreurs estimées des problèmes de référence et adjoint sont situées dans des régions relativement proches l'une de l'autre.

Enfin, les courbes représentant l'évolution des nouvelles valeurs approchées normalisées $(I_h + I_{hh})/I_{ex}$ et $(I_h + I_{hh} + I_{hh,\lambda})/I_{ex}$ de la quantité locale I_3 sont données sur la figure 4.20 et tracées en fonction du nombre d'éléments \tilde{N}_e contenus dans le maillage associé au problème adjoint. Les différentes valeurs sont comparées à la valeur exacte normalisée 1 et à la valeur approchée normalisée I_h/I_{ex} déterminée à partir de la solution éléments finis $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ du problème de référence. La quantité $I_h + I_{hh}$ correspond à nouveau à une approximation de I_{ex} de meilleure qualité que I_h et $I_h + I_{hh} + I_{hh,\lambda}$. Contrairement au cas de la quantité d'intérêt I_1 , la conver-

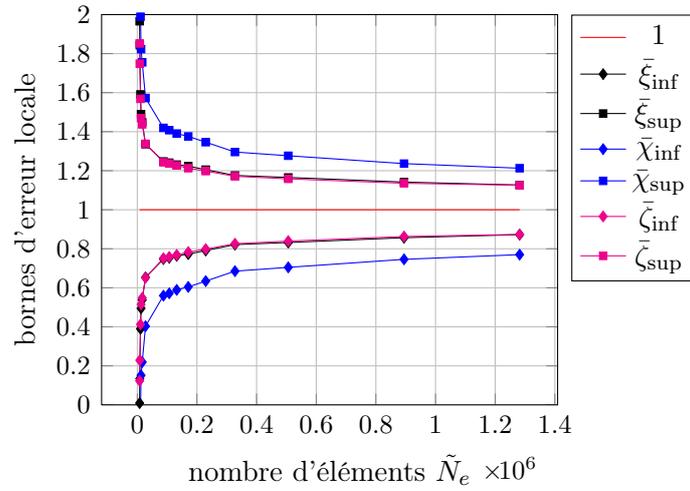


FIGURE 4.19: Évolution des bornes inférieure et supérieure normalisées de I_{ex} pour la quantité locale I_3 , obtenues à partir des techniques d’encadrement classique et améliorées, en fonction du nombre d’éléments \tilde{N}_e associé à la discrétisation du problème adjoint.

gence de $I_h + I_{hh}$ vers I_{ex} en fonction du nombre d’éléments \tilde{N}_e peut être considérée comme atteinte.

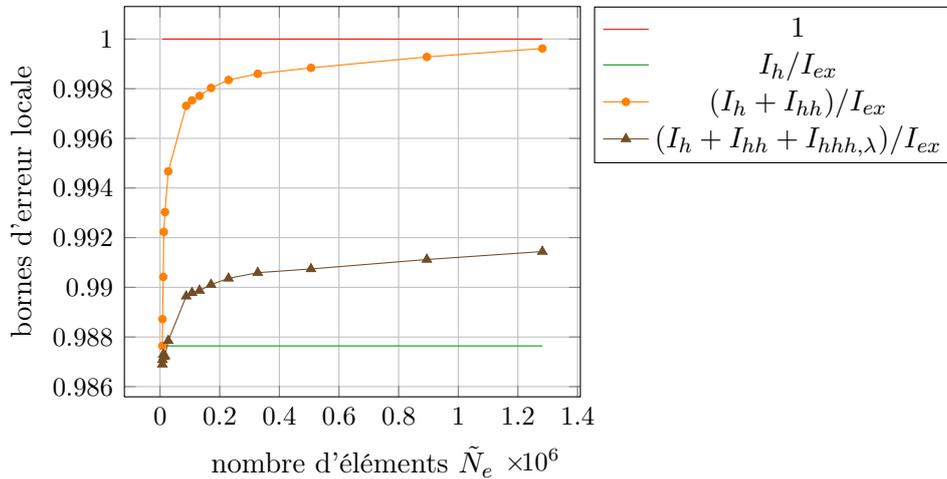


FIGURE 4.20: Évolution des nouvelles valeurs approchées normalisées $(I_h + I_{hh})/I_{ex}$ et $(I_h + I_{hh} + I_{hhh,\lambda})/I_{ex}$ de la quantité locale I_3 en fonction du nombre d’éléments \tilde{N}_e associé à la discrétisation du problème adjoint, et comparaison à ses valeurs normalisées exacte 1 et approchée I_h/I_{ex} .

5 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons proposé deux nouvelles techniques d'encadrement de l'erreur locale dans le cadre des estimateurs robustes basées sur les techniques d'extraction. Celles-ci s'appuient sur des outils mathématiques spécifiques tels que des propriétés d'homothétie. Ces nouvelles techniques d'encadrement ont été couplées à l'utilisation, d'une part d'une procédure intrusive de résolution du problème adjoint à travers des techniques de raffinement de maillage, et d'autre part d'une approche non-intrusive à travers des techniques d'enrichissement local dites « handbook ».

Une étude des performances des estimateurs d'erreur locale issus des deux techniques améliorées a été menée sur diverses quantités d'intérêt linéaires en dimension 2 et comparée à celles de l'estimateur issu d'une technique d'encadrement classique. Dans le cas où la zone d'intérêt est située à proximité des régions où l'erreur globale estimée du problème de référence est prépondérante, la première technique améliorée conduit à une détérioration de la précision de l'encadrement d'erreur locale, en comparaison à la technique classique ; la seconde technique améliorée fournit quant à elle des bornes d'une précision comparable, voire très légèrement supérieure, à celle obtenue à partir de la technique classique. Les deux techniques améliorées ne permettent donc pas d'affiner l'encadrement d'erreur locale issu de la technique classique dans ce cas précis. En revanche, dans le cas où la zone d'intérêt est localisée dans une région suffisamment éloignée des zones contribuant le plus à l'erreur globale estimée du problème de référence, les deux nouvelles techniques d'encadrement s'avèrent très efficaces et permettent d'améliorer la précision des bornes d'erreur locale obtenues par la procédure d'encadrement classique. La seconde technique améliorée conduit à des bornes d'erreur locale de très bonne qualité, notamment lorsque celle-ci est combinée avec l'utilisation des techniques d'enrichissement « handbook ».

Finalement, le choix de la technique d'encadrement utilisée dépend fortement de la quantité d'intérêt et notamment de la zone d'intérêt. Les deux nouvelles techniques d'encadrement pourraient être aisément appliquées à d'autres quantités d'intérêt, mais leur utilisation semble néanmoins restreinte aux problèmes linéaires, i.e. au cadre des problèmes où le principe de Saint-Venant est bien établi.

Conclusion

Ce travail de thèse a porté sur le développement de nouveaux outils d'estimation d'erreur globale et locale, exploitables dans un contexte industriel, dans le cadre des problèmes d'élasticité linéaire en statique. Les différentes méthodes d'estimation d'erreur mises en place se sont appuyées sur l'utilisation conjointe des estimateurs d'erreur basés sur la non-vérification de la relation de comportement, à travers des techniques dédiées à la construction de champs équilibrés, et des outils d'extraction permettant le traitement de quantités d'intérêt spécifiques. Dans une démarche de vérification robuste et fiable, les estimateurs exploitant le concept d'erreur en relation de comportement offrent des estimations garanties et pertinentes de l'erreur de discrétisation globale. Profitant de la maîtrise des estimateurs d'erreur globale, les techniques d'extraction permettent aux méthodes d'estimation d'erreur locale d'hériter des propriétés des estimateurs d'erreur globale, non seulement de leur aspect conservatif ou garanti, mais aussi de leur pertinence et de leur facilité de mise en œuvre. Ces techniques font appel à la résolution fine d'un problème dual ou auxiliaire, dit adjoint, conduisant à l'obtention de bornes strictes sur des quantités d'intérêt. Les différentes études menées dans ce travail constituent des éléments de réponse à la problématique de l'estimation d'erreur en ingénierie mécanique. Les contributions développées dans ce document visent non seulement à élaborer des outils d'estimation d'erreur fiables et performants sur le plan de la recherche, mais aussi à promouvoir leur utilisation dans le secteur industriel. À cette fin, les exemples numériques traités sont motivés par des cas d'applications pratiques ou des problèmes physiques réels de mécanique.

En premier lieu, nous avons étudié une nouvelle méthode de construction de champs admissibles dans le cadre des estimateurs d'erreur globale fondés sur le concept d'erreur en relation de comportement. Cette technique d'équilibrage est hybride dans le sens où elle exploite les principaux fondements des techniques d'équilibrage existantes par élément et patch d'éléments. Celle-ci tend à pallier les difficultés d'implémentation rencontrées dans les techniques d'équilibrage par élément et constitue une alternative aux résolutions potentiellement coûteuses inhérentes aux techniques d'équilibrage par patch d'éléments. Une description détaillée des aspects liés à l'implémentation des différentes méthodes est fournie. Les performances des estimateurs associés à chacune des méthodes de construction de champs admissibles ont été comparées sur des exemples numériques variés issus d'applications

industrielles. Les critères retenus pour l'étude du comportement des différents estimateurs incluent la précision attendue, le coût de calcul engendré et la simplicité de mise en œuvre dans un code de calcul éléments fins. La technique proposée semble conduire au meilleur compromis entre ces différents critères.

En second lieu, nous avons mis en œuvre une amélioration de la nouvelle méthode de construction de champs admissibles. Celle-ci s'appuie sur une minimisation locale de l'énergie complémentaire permettant d'améliorer la pertinence de l'estimateur associé en optimisant localement la qualité des champs admissibles reconstruits. Différents critères géométriques et énergétiques ont été proposés en vue de sélectionner des régions appropriées pour l'optimisation locale des champs admissibles. Les critères géométriques introduits assurent la prise en compte des zones présentant des distorsions géométriques localisées, tandis que le critère énergétique assure celle des zones présentant des contributions élevées à l'erreur estimée. L'utilisation d'un critère énergétique apporte un gain considérable en terme de précision tout en conservant une faisabilité numérique acceptable, i.e. un coût de calcul raisonnable, en comparaison à l'emploi de critères géométriques.

Enfin, nous avons introduit deux nouvelles techniques d'encadrement afin d'affiner les bornes d'erreur locale offertes par la technique d'encadrement classique. Ces différentes procédures d'encadrement ont été combinées à deux méthodes de résolution fine du problème adjoint : d'une part une approche intrusive, à travers l'utilisation de techniques de remaillage local, et d'autre part une approche non-intrusive, à travers l'introduction de fonctions d'enrichissement « handbook ». Les techniques « handbook » offrent un cadre naturellement adapté au traitement de quantités d'intérêt fortement localisées ; celles-ci ont été mises en œuvre et couplées aux procédures d'encadrement classique et améliorées afin d'obtenir des bornes très précises de l'erreur sur une quantité d'intérêt ponctuelle linéaire. Par ailleurs, une technique d'extraction dédiée à l'évaluation numérique des facteurs d'intensité de contraintes a été mise en place afin d'obtenir des bornes garanties sur une quantité d'intérêt linéaire définie dans le cadre de la mécanique linéaire élastique de la rupture et intervenant dans les critères de propagation de fissure.

La technique d'encadrement classique repose sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz et peut conduire à des bornes d'erreur locale de piètre qualité, notamment lorsque les principales contributions à l'erreur estimée du problème de référence sont localisées dans une région située hors de la zone d'intérêt et relativement éloignée de celle-ci. Les nouvelles techniques d'encadrement s'appuient quant à elles sur le principe de Saint-Venant, à travers l'utilisation de propriétés spécifiques d'homothétie. La seconde technique d'encadrement s'avère particulièrement efficace et permet d'améliorer considérablement la précision des bornes d'erreur locale dans le cas où les erreurs estimées des problèmes de référence et adjoint sont concentrées dans des régions distantes l'une de l'autre. La première conduit également, mais dans une moindre mesure, à une amélioration de la pertinence des bornes dans ce cas. En revanche, dans les cas où le support de la quantité d'intérêt coïncide avec une zone

de concentration de l'erreur estimée associée au problème de référence, les deux nouvelles procédures d'encadrement ne semblent pas en mesure d'affiner les bornes obtenues à partir de la technique d'encadrement classique.

L'ensemble des méthodes développées dans ce travail a été implémenté dans un code éléments finis orienté objet en C++ au sein de la plateforme de développement logiciel LMT++. Les développements numériques sous-jacents s'inscrivent dans une démarche de programmation générique garante de flexibilité et de pérennité.

Dans le prolongement de ce travail, différentes perspectives peuvent être envisagées à court ou moyen terme :

- l'extension du cadre d'application des différentes méthodes de construction de champs admissibles étudiées aux chapitres 2 et 3 à d'autres types de problèmes (hétérogènes ou anisotropes, d'évolution en temps, non-linéaires, de type coques ou plaques, etc.) ;
- la proposition de nouveaux « benchmarks » pour l'étude du comportement des estimateurs robustes d'erreur globale ;
- la validation des techniques d'encadrement d'erreur locale proposées au chapitre 4 sur des exemples numériques complexes en dimension 3 ;
- l'étude approfondie de l'influence des caractéristiques géométriques des domaines homothétiques et des paramètres associés sur la pertinence des bornes d'erreur locale affichées par les nouvelles procédures d'encadrement ;
- l'application des techniques « handbook » à des quantités d'intérêt non-ponctuelles, à travers la détermination numérique de fonctions de Green généralisées ;
- la mise en place de procédures de remaillage adaptatif permettant d'optimiser la discrétisation du problème de référence (resp. du problème adjoint) en vue d'atteindre un objectif de précision initial donné (reps. en vue d'améliorer les bornes sur des quantités d'intérêt) dans le cadre de l'estimation d'erreur globale (resp. de l'estimation d'erreur locale).

Dans le cadre de la thématique relative à l'estimation et au contrôle de la qualité d'un calcul par éléments finis, différentes pistes de recherche pourraient être explorées à plus long terme, notamment :

- le développement de nouvelles méthodes d'estimation d'erreur locale pour le traitement de quantités d'intérêt non-linéaires (énergie de déformation ou contrainte équivalente de Von Mises dans une zone locale, taux de restitution d'énergie, etc.), l'enjeu étant de préserver le caractère garanti et pertinent de l'estimation ;
- l'implémentation des procédures robustes d'estimation d'erreur globale et locale au sein des codes éléments finis industriels, afin de profiter des moyens de calcul numérique (calculateurs performants) disponibles dans le secteur industriel et en particulier d'exploiter les architectures parallèles (cluster de stations

- constitué d'un ensemble de machines en réseau, appelées noeuds de calcul) en vue d'une utilisation intensive dans le milieu industriel ;
- le développement de procédures de vérification pour l'analyse modale.

Ces diverses axes de recherche constitueront des avancées significatives dans le domaine de la vérification tant au niveau de la recherche que de l'industrie.

Annexe A

Écriture du problème adjoint associé à un problème d'élasticité linéaire

Dans cette annexe, on s'attache à définir le problème adjoint associé au problème d'élasticité linéaire en statique (1.10) pris comme référence. Différentes approches ont été proposées afin d'obtenir ce problème adjoint. On présente ici la méthode générale, dite « *Optimal Control* », proposée dans [Becker et Rannacher (2001)].

La formulation faible (ou variationnelle) en déplacement du problème de référence (1.10) s'écrit de manière classique :

Trouver $\underline{u} \in \mathbf{U}^{ad}$ vérifiant :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \langle \underline{u}, \underline{u}^* \rangle_{u,\Omega} = l(\underline{u}^*) \quad (\text{A.1})$$

où la forme bilinéaire $\langle \bullet, \circ \rangle_{u,\Omega}$ et la forme linéaire $l(\bullet)$ sont définis respectivement par :

$$\langle \bullet, \circ \rangle_{u,\Omega} = \int_{\Omega} \text{Tr} [\varepsilon(\bullet) \mathbf{K} \varepsilon(\circ)] \, d\Omega \quad \text{et} \quad l(\bullet) = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \bullet \, d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \bullet \, dS$$

On considère une quantité d'intérêt I représentée par une fonctionnelle \mathcal{L} du champ de déplacement \underline{u} sous forme globale :

$$I = \mathcal{L}(\underline{u}) = \int_{\Omega} \left(\text{Tr} [\tilde{\sigma}_{\Sigma} \varepsilon(\underline{u})] + \tilde{f}_{\Sigma} \cdot \underline{u} \right) \, d\Omega$$

La démarche adoptée consiste alors à écrire la quantité d'intérêt I comme la solution d'un problème de minimisation sous contraintes :

$$I = \mathcal{L}(\underline{u}) = \inf_{\underline{u}^* \in \mathbf{c}} \mathcal{L}(\underline{u}^*) \quad \text{avec} \quad \mathbf{c} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{u}^* \in \mathbf{U}^{ad} \text{ tel que} \\ \forall \underline{v}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \langle \underline{u}^*, \underline{v}^* \rangle_{u,\Omega} = l(\underline{u}^*) \end{array} \right\} \quad (\text{A.2})$$

Le problème de minimisation sous contraintes (A.2) associé à la définition de la quantité d'intérêt correspond à un problème de point-selle associé au Lagrangien \mathcal{L} défini par :

$$\forall (\underline{u}^*, \underline{v}^*) \in \mathbf{U}^{ad} \times \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \mathcal{L}(\underline{u}^*, \underline{v}^*) = \mathcal{L}(\underline{u}^*) - \left[\langle \underline{u}^*, \underline{v}^* \rangle_{u,\Omega} - l(\underline{u}^*) \right]$$

Par la suite, on écrit la stationnarité du Lagrangien \mathcal{L} par rapport à chacune des variables :

– stationnarité par rapport à la variable \underline{v}^* :

$$\forall \underline{v}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \nabla_{\underline{v}^*} \mathcal{L} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}(\underline{u}, \alpha \underline{v}^*) \right]_{\alpha=0} = 0 \iff \forall \underline{v}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \langle \underline{u}, \underline{v}^* \rangle_{u,\Omega} = l(\underline{v}^*)$$

correspondant à la formulation faible du problème de référence (ou problème primal) ;

– stationnarité par rapport à la variable \underline{u}^* :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \nabla_{\underline{u}^*} \mathcal{L} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}(\alpha \underline{u}^*, \underline{v}) \right]_{\alpha=0} = 0 \iff \forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \langle \underline{u}^*, \underline{v} \rangle_{u,\Omega} = \mathcal{L}(\underline{u}^*)$$

définissant la formulation faible du problème adjoint (ou problème dual).

Finalement, la formulation faible du problème adjoint s'écrit sous la forme :
Trouver $\underline{v} \in \mathbf{U}_0^{ad}$ vérifiant :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathbf{U}_0^{ad}, \quad \langle \underline{u}^*, \underline{v} \rangle_{u,\Omega} = \mathcal{L}(\underline{u}^*) \tag{A.3}$$

et on retrouve l'expression du problème adjoint (1.91) donnée en section 3.3.3 du chapitre 1.

Remarque A.1 :

Cette méthode peut également s'appliquer dans le cadre plus général des problèmes d'évolution en temps ou non-linéaires.

Annexe B

Démonstration des inégalités fondamentales

Dans cette annexe, on s'attache à démontrer les inégalités fondamentales (4.26) et (4.55) introduites respectivement en sections 2.3 et 3.2 du chapitre 4. Celles-ci constituent les principaux résultats techniques permettant d'établir l'expression des nouvelles bornes d'erreur locale dans les deux améliorations proposées.

1 Première inégalité fondamentale

Repartons tout d'abord de la définition (4.13a) de la mesure locale de l'erreur en relation de comportement sur le sous-domaine ω_λ . En développant celle-ci, puis en utilisant la formulation forte des équations d'équilibre satisfaites par σ_{ex} et $\hat{\sigma}_h$, on obtient :

$$\begin{aligned} e_{\text{rdc},\omega_\lambda}^2 &= \|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma,\omega_\lambda}^2 + \|\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h\|_{u,\omega_\lambda}^2 - 2 \int_{\omega_\lambda} \text{Tr} [(\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \varepsilon(\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h)] \, d\Omega \\ &= \|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma,\omega_\lambda}^2 + \|\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h\|_{u,\omega_\lambda}^2 - 2 \int_{\partial\omega_\lambda} (\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \underline{n} \cdot (\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h) \, dS \end{aligned}$$

Considérons maintenant la décomposition (4.20) de l'erreur de discrétisation $\underline{e}_h = \underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h$ sur ω_λ , dont on rappelle ici l'expression :

$$\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h = \underline{u}_l + \underline{u}_p \quad \text{sur } \omega_\lambda$$

Les parties locale \underline{u}_l et de pollution \underline{u}_p sont solutions des problèmes locaux (4.18) et (4.19), respectivement, définis sur ω_λ et introduits en section 2.2 du chapitre 4. Cette décomposition vérifie les propriétés suivantes :

$$\|\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h\|_{u,\omega_\lambda}^2 = \|\underline{u}_l\|_{u,\omega_\lambda}^2 + \|\underline{u}_p\|_{u,\omega_\lambda}^2 \quad (\text{B.1})$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\omega_\lambda} (\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \underline{n} \cdot (\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h) dS &= \int_{\partial\omega_\lambda} (\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \underline{n} \cdot \underline{u}_p dS \\
&= \int_{\partial\omega_\lambda} \text{Tr} [(\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) (\underline{u}_p \otimes \underline{n})] dS \\
&= \left\langle \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h, \mathbf{K} (\underline{u}_p \otimes \underline{n})_{\text{sym}} \right\rangle_{\sigma, \partial\omega_\lambda} \quad (\text{B.2a})
\end{aligned}$$

où $(\bullet)_{\text{sym}}$ désigne la partie symétrique du tenseur d'ordre 2 (ou matrice) \bullet . Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz à (B.2a) au sens du produit scalaire $\langle \bullet, \circ \rangle_{\sigma, \partial\omega_\lambda}$, la seconde propriété (B.2a) devient :

$$\int_{\partial\omega_\lambda} (\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h) \underline{n} \cdot (\underline{u}_{ex} - \hat{\underline{u}}_h) dS \leq \| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h \|_{\sigma, \partial\omega_\lambda} \left\| \mathbf{K} (\underline{u}_p \otimes \underline{n})_{\text{sym}} \right\|_{\sigma, \partial\omega_\lambda} \quad (\text{B.2b})$$

L'exploitation des propriétés (B.1) et (B.2b) conduit à l'inégalité suivante :

$$e_{\text{rdc}, \omega_\lambda}^2 \geq \| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h \|_{\sigma, \omega_\lambda}^2 + \| \underline{u}_l \|_{u, \omega_\lambda}^2 + \| \underline{u}_p \|_{u, \omega_\lambda}^2 - 2 \| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h \|_{\sigma, \partial\omega_\lambda} \left\| \mathbf{K} (\underline{u}_p \otimes \underline{n})_{\text{sym}} \right\|_{\sigma, \partial\omega_\lambda}$$

Par la suite, en appliquant la relation (4.24) à $\underline{u}_p \in \mathbf{V}_{|\omega_\lambda}$, où l'espace \mathbf{V} est défini par (4.21), on a :

$$\left\| \mathbf{K} (\underline{u}_p \otimes \underline{n})_{\text{sym}} \right\|_{\sigma, \partial\omega_\lambda} \leq \sqrt{h\lambda} \| \underline{u}_p \|_{u, \omega_\lambda}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
e_{\text{rdc}, \omega_\lambda}^2 &\geq \| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h \|_{\sigma, \omega_\lambda}^2 + \| \underline{u}_l \|_{u, \omega_\lambda}^2 \\
&\quad + \left[\| \underline{u}_p \|_{u, \omega_\lambda} - \sqrt{h\lambda} \| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h \|_{\sigma, \partial\omega_\lambda} \right]^2 - h\lambda \| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h \|_{\sigma, \partial\omega_\lambda}^2 \quad (\text{B.3})
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant l'égalité (4.6b), on a :

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h \|_{\sigma, \omega_\lambda}^2 \right] = \| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h \|_{\sigma, \partial\omega_\lambda}^2 \quad (\text{B.4})$$

En injectant ensuite (B.4) dans (B.3), on obtient une inéquation différentielle ordinaire du premier ordre en λ vérifiée par $\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h \|_{\sigma, \omega_\lambda}^2$:

$$\alpha_\lambda \geq \| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h \|_{\sigma, \omega_\lambda}^2 - h\lambda \frac{d}{d\lambda} \left[\| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h \|_{\sigma, \omega_\lambda}^2 \right] \quad (\text{B.5})$$

où

$$\alpha_\lambda \equiv \alpha_\lambda(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h, \underline{u}_l, \underline{u}_p) = e_{\text{rdc}, \omega_\lambda}^2 - \| \underline{u}_l \|_{u, \omega_\lambda}^2 - \left[\| \underline{u}_p \|_{u, \omega_\lambda} - \sqrt{h\lambda} \| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h \|_{\sigma, \partial\omega_\lambda} \right]^2$$

Après quelques manipulations supplémentaires, l'inéquation (B.5) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma, \omega_\lambda}^2 f(\lambda) \right] \frac{1}{f(\lambda)} \geq -\frac{1}{h\lambda} \alpha_\lambda \quad (\text{B.6})$$

où $f: \lambda \mapsto \lambda^{-1/h}$ est une fonction strictement positive pour toute valeur $\lambda > 0$.

Finalement, en intégrant (B.6) sur l'intervalle $[\lambda, \bar{\lambda}]$, on obtient une inégalité reliant les mesures locales $\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma, \omega_\lambda}^2$ et $\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}}^2$ associées respectivement aux sous-domaines ω_λ et $\omega_{\bar{\lambda}}$:

$$\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma, \omega_\lambda}^2 \leq \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^{1/h} \|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}}^2 + \beta_{\lambda, \bar{\lambda}} \quad (\text{B.7})$$

où

$$\beta_{\lambda, \bar{\lambda}} \equiv \beta_{\lambda, \bar{\lambda}}(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h, \underline{u}_l, \underline{u}_p) = \int_{\lambda'=\lambda}^{\bar{\lambda}} \left[\left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^{-1/h} \frac{1}{h\lambda'} \alpha_{\lambda'} \right] d\lambda'$$

est une quantité qui dépend des solutions en déplacement \underline{u}_l et \underline{u}_p des problèmes locaux (4.18) et (4.19), respectivement.

En pratique, l'inégalité $\alpha_{\lambda'} \leq e_{\text{rdc}, \omega_{\lambda'}}^2, \forall \lambda' \in [\lambda, \bar{\lambda}]$ permet de s'affranchir de la résolution annexe des problèmes (4.18) et (4.19) et conduit au résultat fondamental recherché :

$$\|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma, \omega_\lambda}^2 \leq \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^{1/h} \|\sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h\|_{\sigma, \omega_{\bar{\lambda}}}^2 + \gamma_{\lambda, \bar{\lambda}} \quad (\text{B.8})$$

où $\gamma_{\lambda, \bar{\lambda}}$ est défini par :

$$\gamma_{\lambda, \bar{\lambda}} \equiv \gamma_{\lambda, \bar{\lambda}}(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h) = \int_{\lambda'=\lambda}^{\bar{\lambda}} \left[\left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^{-1/h} \frac{1}{h\lambda'} e_{\text{rdc}, \omega_{\lambda'}}^2 \right] d\lambda' \quad (\text{B.9})$$

La quantité $\gamma_{\lambda, \bar{\lambda}}$ dépend de quantités connues, calculables à partir de la solution admissible du problème de référence. Sa détermination pratique est effectuée à l'aide d'une méthode d'intégration numérique 1D, telle qu'une formule de quadrature de type Gauss-Legendre ou une formule de Newton-Cotes de type trapézoïdale par exemple. Il est alors possible d'évaluer avec précision la valeur de $\gamma_{\lambda, \bar{\lambda}}$ en utilisant un nombre suffisant de points de Gauss ou en subdivisant finement l'intervalle d'intégration selon la méthode employée.

Remarque B.1 :

En réalisant une intégration par parties, il est possible d'exprimer la quantité $\gamma_{\lambda, \bar{\lambda}}$ sous la forme :

$$\gamma_{\lambda, \bar{\lambda}} = e_{\text{rdc}, \omega_\lambda}^2 - \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^{1/h} e_{\text{rdc}, \omega_{\bar{\lambda}}}^2 + \int_{\lambda'=\lambda}^{\bar{\lambda}} \left[\left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^{-1/h} \frac{d}{d\lambda'} \left[e_{\text{rdc}, \omega_{\lambda'}}^2 \right] \right] d\lambda' \quad (\text{B.10})$$

Cependant, l'implémentation de l'expression (B.10) est plus fastidieuse que celle de la précédente (B.9), car elle requiert l'intégration d'une fonction mettant en jeu la dérivée première de la mesure locale $e_{rdc,\omega_{\lambda'}}^2$ en lieu et place de $e_{rdc,\omega_{\lambda}}^2$ elle-même. Néanmoins, on peut contourner cette difficulté en appliquant la relation (4.11b) au champ $\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)$ pour tout domaine homothétique $\omega_{\lambda'}$ tel que $\lambda' \in [\lambda, \bar{\lambda}]$:

$$\frac{d}{d\lambda'} \left[e_{rdc,\omega_{\lambda'}}^2 \right] = \frac{d}{d\lambda'} \left[\|\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)\|_{\sigma,\omega_{\lambda'}}^2 \right] = \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^n \frac{1}{\lambda} |\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)|_{\sigma,\partial\omega_{\lambda'}}^2$$

L'expression (B.10) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \gamma_{\lambda,\bar{\lambda}} &= e_{rdc,\omega_{\lambda}}^2 - \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^{1/h} e_{rdc,\omega_{\bar{\lambda}}}^2 + \int_{\lambda'=\lambda}^{\bar{\lambda}} \left[\left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^{-1/h} \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^n \frac{1}{\lambda} |\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)|_{\sigma,\partial\omega_{\lambda'}}^2 \right] d\lambda' \\ &= e_{rdc,\omega_{\lambda}}^2 - \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^{1/h} e_{rdc,\omega_{\bar{\lambda}}}^2 + \int_{\lambda'=\lambda}^{\bar{\lambda}} \left| \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^{-1/2h} (\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)) \right|_{\sigma,\partial\omega_{\lambda'}}^2 \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^n \frac{1}{\lambda} d\lambda' \end{aligned}$$

Par la suite, en utilisant la relation (4.7a) sur les deux sous-domaines ω_{λ} et $\omega_{\bar{\lambda}}$, on aboutit à :

$$\gamma_{\lambda,\bar{\lambda}} = e_{rdc,\omega_{\lambda}}^2 - \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \right)^{1/h} e_{rdc,\omega_{\bar{\lambda}}}^2 + e_{rdcp,\omega_{\bar{\lambda}} \setminus \omega_{\lambda}}^2 \quad (\text{B.11})$$

où le dernier terme $e_{rdcp,\omega_{\bar{\lambda}} \setminus \omega_{\lambda}}^2$ est défini par :

$$\begin{aligned} e_{rdcp,\omega_{\bar{\lambda}} \setminus \omega_{\lambda}}^2 &\equiv e_{rdcp,\omega_{\bar{\lambda}} \setminus \omega_{\lambda}}^2(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\sigma}_h) = \left\| \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^{-1/2h} (\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)) \right\|_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}} \setminus \omega_{\lambda}}^2 \\ &= \left\langle \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^{-1/h} (\hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h)), \hat{\sigma}_h - \mathbf{K} \varepsilon(\hat{\underline{u}}_h) \right\rangle_{\sigma,\omega_{\bar{\lambda}} \setminus \omega_{\lambda}} \end{aligned}$$

et peut être vu comme une mesure locale pondérée de l'erreur en relation de comportement sur $\omega_{\bar{\lambda}} \setminus \omega_{\lambda}$. Si l'évaluation de $\gamma_{\lambda,\bar{\lambda}}$ à partir de cette dernière expression (B.11) ne nécessite pas l'emploi d'une méthode d'intégration numérique 1D, contrairement aux deux précédentes (B.9) et (B.10), elle requiert en revanche le calcul numérique de l'intégrale d'une fraction rationnelle définie sur $\omega_{\bar{\lambda}} \setminus \omega_{\lambda}$.

Finalement, afin d'évaluer avec une grande précision la quantité $\gamma_{\lambda,\bar{\lambda}}$, on considérera l'expression (B.9) et on aura recours à une méthode d'intégration de type « trapèze » associée à un nombre important de points d'évaluation ; en pratique, à partir de 50 ou 100 points d'intégration, on obtient une valeur quasi-exacte de $\gamma_{\lambda,\bar{\lambda}}$.

2 Seconde inégalité fondamentale

Considérons un champ $\underline{v} \in \mathcal{V}_{|\omega_{\bar{\lambda}}}$, où l'espace \mathcal{V} est défini par (4.21). À partir de la relation (4.53), on déduit directement l'inégalité suivante :

$$\forall \lambda \in]0, \bar{\lambda}], \quad \frac{k}{\lambda} \|\underline{v}\|_{u, \omega_\lambda}^2 \leq \frac{1}{\bar{\lambda}} |\underline{v}|_{u, \partial\omega_\lambda}^2$$

Puis, en utilisant la relation (4.7b), on a :

$$|\underline{v}|_{u, \partial\omega_\lambda}^2 = \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)^n |\underline{v}|_{u, \partial\omega_{\bar{\lambda}}}^2$$

Il vient alors :

$$\frac{k}{\lambda} \|\underline{v}\|_{u, \omega_\lambda}^2 \leq \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)^n \frac{1}{\bar{\lambda}} |\underline{v}|_{u, \partial\omega_{\bar{\lambda}}}^2$$

Par la suite, d'après l'égalité (4.11a), on a :

$$\left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)^n \frac{1}{\bar{\lambda}} |\underline{v}|_{u, \partial\omega_{\bar{\lambda}}}^2 = \frac{d}{d\lambda} \left[\|\underline{v}\|_{u, \omega_\lambda}^2 \right]$$

Il en résulte une inéquation différentielle ordinaire du premier ordre en λ vérifiée par $\|\underline{v}\|_{u, \omega_\lambda}^2$:

$$\frac{k}{\lambda} \|\underline{v}\|_{u, \omega_\lambda}^2 \leq \frac{d}{d\lambda} \left[\|\underline{v}\|_{u, \omega_\lambda}^2 \right]$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\|\underline{v}\|_{u, \omega_\lambda}^2 g(\lambda) \right] \frac{1}{g(\lambda)} \geq 0$$

où $g: \lambda \mapsto \lambda^{-k}$ est une fonction strictement positive pour toute valeur $\lambda > 0$; en conséquence, on obtient :

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\|\underline{v}\|_{u, \omega_\lambda}^2 g(\lambda) \right] \geq 0 \tag{B.12}$$

Finalement, en intégrant (B.12) sur l'intervalle $[\lambda, \bar{\lambda}]$, on aboutit à l'inégalité fondamentale recherchée reliant les mesures locales $\|\underline{v}\|_{u, \omega_\lambda}^2$ et $\|\underline{v}\|_{u, \omega_{\bar{\lambda}}}^2$ associées respectivement aux sous-domaines ω_λ et $\omega_{\bar{\lambda}}$:

$$\|\underline{v}\|_{u, \omega_\lambda}^2 \leq \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)^k \|\underline{v}\|_{u, \omega_{\bar{\lambda}}}^2 \tag{B.13}$$

Annexe C

Expression de la constante de Steklov h pour différents domaines de forme géométrique simple

Cette annexe fournit les expressions analytiques de la constante de Steklov h intervenant dans la première inégalité fondamentale introduite en section 2.3 du chapitre 4 pour quelques domaines de forme géométrique simple. On considère un comportement matériau élastique, linéaire, homogène et isotrope. Les différentes expressions de la constante h sont exprimées en fonction des coefficients de Lamé λ et μ d'une part, et du coefficient de Poisson ν (sous l'hypothèse des contraintes planes et des déformations planes en dimension 2) d'autre part. Celles-ci sont répertoriées et synthétisées dans le tableau C.1.

TABLE C.1: Expressions analytiques de la constante h pour différentes formes géométriques

Forme géométrique	Constante h		
	contraintes planes		déformations planes
Dimension 2			
cercle unité	$\frac{2\mu + \lambda}{2(\mu + \lambda)}$	$\frac{1}{1 + \nu}$	$1 - \nu$
cercle unité fissuré ou entaillé ¹	$\frac{2\mu + \lambda}{2(\mu + \lambda)} + \frac{1}{3(2\pi - \theta)}$	$\frac{\mu}{\mu + \lambda} \frac{1}{1 + \nu} + \frac{1}{3(2\pi - \theta)} \frac{1 - \nu}{1 + \nu}$	$1 - \nu + \frac{1}{3(2\pi - \theta)} \frac{1}{7 - 8\nu} (1 - 2\nu)$
carré de demi-côté unité	$\frac{7\mu + 3\lambda}{6(\mu + \lambda)}$	$\frac{1}{6(1 + \nu)}$	$\frac{1}{6}$
Dimension 3			
sphère unité	$\frac{2\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda}$		$\frac{1 - \nu}{1 + \nu}$
cube de demi-arête unité	$\frac{8\mu + 3\lambda}{6\mu + 9\lambda}$		$\frac{4 - 5\nu}{3(1 + \nu)}$

¹ θ désigne l'angle formé par les deux lèvres de la fissure ou de l'entaille.

Annexe D

Détermination analytique de la constante k pour des domaines de formes circulaire et sphérique

Dans cette annexe, on s'intéresse à la détermination analytique de la constante k intervenant dans la seconde inégalité fondamentale introduite en section 3.2 du chapitre 4 dans le cas de domaines de forme circulaire (resp. sphérique) en dimension 2 (resp. dimension 3). La démonstration proposée s'appuie sur l'utilisation des *fonctions de Trefftz*, aussi appelées *T-fonctions*. Une description succincte des approches de type Trefftz est présentée avant d'aborder la démonstration conduisant à l'obtention de la constante k .

Considérons l'espace \mathcal{V} , défini par (4.21), des champs satisfaisant les équations d'équilibre homogènes exprimées en déplacement, plus connues sous le nom d'équations de Lamé-Navier. Les fonctions de Trefftz, ou T-fonctions, sont les solutions des équations aux dérivées partielles qui régissent le problème considéré au sein du domaine d'étude Ω (correspondant ici aux équations de Lamé-Navier). Initialement introduites par Trefftz dans [Trefftz (1926)], les approches de type Trefftz s'appuient sur un ensemble de solutions linéairement indépendantes qui vérifient a priori les équations différentielles homogènes (définies à l'intérieur du domaine Ω) d'un problème linéaire. Ces T-fonctions ont tout d'abord été utilisées comme fonctions de base dans les méthodes de Trefftz [Kita et Kamiya (1995)]. Celles-ci sont désormais couramment employées comme fonctions d'interpolation définissant des éléments finis spéciaux de type Trefftz, dits T-éléments, dans la méthode des éléments finis hybrides (« *Hybrid Finite Element Method* » ou *Hybrid FEM*) ou dans la méthode des éléments frontières (« *Boundary Element Method* » ou *BEM*, encore appelée « *Boundary Integral Equation Method* » ou *BIEM*); elles peuvent être définies sous forme polynomiale, harmonique, exponentielle, ou encore exprimées à l'aide des fonctions de Legendre, Bessel, Hankel, Kelvin (aussi appelées fonctions singulières de Kupradze), ou Boussinesq selon le type d'équations différentielles gouvernant le

problème considéré [Zieliński (1995), Kompiš et al. (2004), Kompiš et al. (2005)]. En outre, certaines T-fonctions spécifiques vérifient a priori non seulement les équations définies à l'intérieur du domaine, mais aussi des conditions aux limites particulières. Le lecteur intéressé pourra notamment se référer à [Kita et Kamiya (1995)] pour une revue détaillée des approches de type Trefftz et à [Zieliński et Zienkiewicz (1985), Zieliński (1995)] pour une description complète des ensembles classiques de T-fonctions associées aux équations de Laplace, Helmholtz et aux équations biharmoniques en dimensions 2 et 3 pour des domaines d'étude borné et non borné. En combinant ces T-fonctions classiques, il est possible de construire les T-fonctions associées à une large classe de problèmes, telles que les problèmes d'élasticité en 2D et 3D ou les problèmes de plaques minces de type (Reissner-)Mindlin.

Considérons un domaine $\omega_{\bar{\lambda}}$ de forme circulaire (resp. sphérique) en 2D (resp. 3D) et de rayon $\bar{\lambda}$. L'ensemble des T-fonctions relatives aux équations de Lamé-Navier définies sur $\omega_{\bar{\lambda}}$ constitue une base des champs appartenant à la restriction $\mathcal{V}_{|\omega_{\bar{\lambda}}}$ de l'espace \mathcal{V} à $\omega_{\bar{\lambda}}$ [Hochard et Proslie (1992)]. Ainsi, toute solution homogène $\underline{v} \in \mathcal{V}_{|\omega_{\bar{\lambda}}}$ peut être définie comme combinaison linéaire d'un ensemble de T-fonctions. Les fonctions de Trefftz appropriées correspondant aux solutions des équations de Lamé-Navier sont données dans un système de coordonnées cartésiennes dans [Sladek et al. (2000)] et dans un système de coordonnées polaires dans [Sladek et Sladek (2002)]. À partir de leurs expressions polynomiales en coordonnées cartésiennes (x, y) en 2D (resp. (x, y, z) en 3D), les T-fonctions associées aux équations de Lamé-Navier peuvent être réécrites en coordonnées polaires (r, θ) en 2D (resp. coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) en 3D) à l'aide de polynômes harmoniques de la forme :

$$\begin{cases} T_x = r^i f_2(\theta), & T_y = r^j g_2(\theta), & i, j = 0, 1, 2, \dots & \text{en 2D} \\ T_x = r^i f_3(\theta, \phi), & T_y = r^j g_3(\theta, \phi), & T_z = r^l h_3(\theta, \phi), & i, j, l = 0, 1, 2, \dots & \text{en 3D} \end{cases}$$

où les fonctions f_2 et g_2 (resp. f_3, g_3 et h_3) dépendent uniquement des paramètres matériaux ν et E , ainsi que de la coordonnée angulaire θ en 2D (resp. des coordonnées angulaires θ et ϕ en 3D).

On note $\underline{T}^{(m)}$ la T-fonction en déplacement de degré maximal m suivant la coordonnée radiale r dans un système de coordonnées polaires en 2D (resp. coordonnées sphériques en 3D), avec $m \geq 1$ (i.e. en supprimant les mouvements de corps rigides). La T-fonction correspondante en contrainte $\mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{T}^{(m)})$ est alors exprimée sous la forme d'un polynôme en r de degré maximal $m - 1$; il s'en suit que l'énergie de déformation locale $e^{(m)} \equiv \text{Tr} [\underline{\varepsilon}(\underline{T}^{(m)}) \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{T}^{(m)})]$ peut se mettre sous la forme polynomiale suivante :

$$\begin{cases} e^{(m)}(r, \theta) = r^{2(m-1)} \Psi_2(\theta) & \text{en 2D} \\ e^{(m)}(r, \theta, \phi) = r^{2(m-1)} \Psi_3(\theta, \phi) & \text{en 3D} \end{cases}$$

où la fonction Ψ_2 (resp. Ψ_3) dépend uniquement des paramètres matériaux ν et E , ainsi que de la coordonnée angulaire θ en 2D (resp. des coordonnées angulaires θ

et ϕ en 3D). Par la suite, après quelques manipulations supplémentaires, la valeur $\mathcal{R}_{\bar{\lambda}}(\underline{T}^{(m)})$ du quotient de Rayleigh $\mathcal{R}_{\bar{\lambda}}$ prise en $\underline{T}^{(m)}$ s'écrit comme :

$$\mathcal{R}_{\bar{\lambda}}(\underline{T}^{(m)}) = \frac{\left| \underline{T}^{(m)} \right|_{u, \partial\omega_{\bar{\lambda}}}^2}{\left\| \underline{T}^{(m)} \right\|_{u, \omega_{\bar{\lambda}}}^2} = \begin{cases} 2m & \text{en 2D} \\ 2m + 1 & \text{en 3D} \end{cases}$$

En conséquence, toute T-fonction en déplacement \underline{T} associée à un champ de déformation non nul satisfait $\mathcal{R}_{\bar{\lambda}}(\underline{T}) \geq 2$ en 2D et $\mathcal{R}_{\bar{\lambda}}(\underline{T}) \geq 3$ en 3D. Par ailleurs, notons que les T-fonctions sont également orthogonales au sens des produits scalaires $(\bullet, \circ)_{u, \partial\omega_{\bar{\lambda}}}$ et $\langle \bullet, \circ \rangle_{u, \omega_{\bar{\lambda}}}$ intervenant dans l'expression (4.52) du quotient de Rayleigh $\mathcal{R}_{\bar{\lambda}}$.

Finalement, en rappelant que tout champ $\underline{v} \in \mathcal{V}_{|\omega_{\bar{\lambda}}}$ (i.e. toute solution homogène vérifiant les équations de Lamé-Navier sur $\omega_{\bar{\lambda}}$) peut être écrit sous forme d'une combinaison linéaire des T-fonctions, on en déduit directement l'expression de la constante k recherchée :

$$k = \min_{\underline{v} \in \mathcal{V}_{|\omega_{\bar{\lambda}}}} \mathcal{R}_{\bar{\lambda}}(\underline{v}) = \begin{cases} 2 & \text{pour un domaine de forme circulaire en dimension 2} \\ 3 & \text{pour un domaine de forme sphérique en dimension 3} \end{cases}$$

Annexe E

Détermination des fonctions de Green et illustration dans le cadre de l'élasticité linéaire en 2D et 3D

Cette annexe s'attache, dans un premier temps, à présenter les différentes méthodes conduisant à l'obtention des fonctions de Green pour diverses classes de problèmes. Nous n'aborderons ici que le principe général des méthodes existantes en mentionnant les références utiles à tout lecteur désireux d'approfondir le sujet. Puis, dans un second temps, les expressions analytiques de quelques fonctions de Green en milieu infini sont données et illustrées dans le cadre de l'élasticité linéaire en 2D et 3D.

1 Détermination des fonctions de Green

Dans le cadre des problèmes simples en 2D définis à partir d'équations aux dérivées partielles scalaires, telle que l'équation de Laplace (définie par l'opérateur laplacien Δ) ou l'équation biharmonique (définie par l'opérateur double laplacien $\Delta\Delta$), les expressions analytiques des fonctions de Green peuvent être obtenues explicitement pour des conditions aux limites particulières et sont données dans [[Courant et Hilbert \(1953\)](#)].

Dans le cadre des problèmes d'élasticité linéaire (en quasi-statique) en 2D, les solutions de Green peuvent être déterminées à partir de la *méthode des potentiels complexes de Kolosov-Muskhelishvili* décrite dans [[Muskhelishvili \(1953\)](#), [Sneddon et Lowengrub \(1969\)](#)]. Celle-ci s'appuie sur la construction de deux potentiels Φ et Ψ holomorphes (i.e. définis dans le plan complexe \mathbb{C} et dérivables en tout point d'un sous-ensemble ouvert de \mathbb{C}), appelés potentiels de Kolosov-Muskhelishvili. Par la suite, les équations de Kolosov-Muskhelishvili, établies dans le cadre général de l'élasticité linéaire plane dans [[Solomon \(1968\)](#)], permettent d'exprimer les solutions

de Green en déplacement et en contrainte en fonction des potentiels de Kolosov-Muskhelishvili Φ et Ψ préalablement déterminés.

Dans le cadre plus général des problèmes d'élasticité linéaire (en quasi-statique) en 2D et 3D, les fonctions de Green, correspondant aux solutions des équations d'équilibre vérifiées par le champ de déplacement (également appelées équations de Lamé-Navier) ayant pour second membre un chargement de type Dirac, peuvent être calculées analytiquement à partir de la *méthode de Mindlin* introduite dans [Love (1944), Mindlin et Cheng (1950)]. Cette dernière repose sur l'introduction d'un champ vectoriel \underline{B} , appelé vecteur de Galerkin, permettant de découpler les équations de Lamé-Navier et de se ramener à la résolution d'une équation vectorielle biharmonique (définie par l'opérateur double laplacien vectoriel $\underline{\Delta}\underline{\Delta}$). La fonction de Green $(\tilde{\underline{u}}^{\text{hand}}, \tilde{\underline{\sigma}}^{\text{hand}})$ est alors entièrement définie par le vecteur de Galerkin \underline{B} solution de l'équation vectorielle biharmonique à travers les relations :

$$\tilde{\underline{u}}^{\text{hand}} = \underline{\Delta}(\underline{B}) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \nabla(\text{div}(\underline{B})) \quad (\text{E.1a})$$

$$\tilde{\underline{\sigma}}^{\text{hand}} = \mathbf{K}_{\varepsilon}(\tilde{\underline{u}}^{\text{hand}}) \quad (\text{E.1b})$$

Le vecteur de Galerkin \underline{B} est recherché sous la forme d'une somme de deux contributions :

- d'une part, une solution particulière $\underline{B}^{\text{part}}$ de l'équation vectorielle biharmonique dans un domaine infini, connue analytiquement ;
- et d'autre part, une solution homogène $\underline{B}^{\text{hom}}$ assurant la vérification des conditions aux limites.

Dans le cas d'un domaine infini, la solution homogène $\underline{B}^{\text{hom}}$ correspond au vecteur nul. Dans le cas d'un domaine semi-infini, celle-ci peut être déterminée par la *méthode des images* [Mindlin (1936)] qui assure la vérification des conditions de bords libres d'effort sur la frontière. Cette méthode consiste à superposer les contributions, appelées *noyaux de déformation*, de plusieurs fonctions de Green calculées dans un domaine infini et associées à des chargements singuliers appliqués de part et d'autre de la frontière. On pourra notamment se reporter à [Mindlin et Cheng (1950)] pour plus de détails sur cette méthode.

Dans le cas d'un domaine de forme géométrique plus complexe, la solution homogène $\underline{B}^{\text{hom}}$ peut être obtenue à partir de la *méthode des transformations conformes* (i.e. conservant les angles), issue de la théorie des fonctions à variables complexes et valable en 2D. Celle-ci repose sur la détermination d'une fonction holomorphe f dépendant de la variable complexe z permettant de transformer un domaine de forme complexe en un domaine de forme simple possédant des symétries, tel qu'un domaine semi-infini, dont la fonction de Green est connue analytiquement.

Enfin, dans le cas général d'un domaine de forme arbitraire, la solution homogène $\underline{B}^{\text{hom}}$ peut être déterminée de manière approchée à partir de méthodes d'approximation numérique. Signalons que la méthode de Mindlin a par la suite été étendue à divers types de chargement et à certains comportements matériaux

anisotropes [Sneddon et Hill (1963), Dahan et Predeleanu (1980), Vijayakumar et Cormack (1987)], conduisant à l'obtention de fonctions de Green généralisées.

Dans le cadre des problèmes simples de dynamique définis par l'équation d'onde (ou équation de d'Alembert) en 1D, 2D et 3D, les fonctions de Green peuvent être déterminées aisément dans le domaine de Fourier à travers l'utilisation de la transformée de Fourier en espace et en temps. Par la suite, on en déduit l'expression des fonctions de Green dans le domaine spatio-temporel à l'aide de la transformée de Fourier inverse qui nécessite l'emploi de propriétés spécifiques d'intégrales de fonctions complexes (Lemme de Jordan, Théorème des résidus) [Waeytens (2010)].

Dans le cadre des problèmes d'élastodynamique en 2D et 3D, deux approches classiques conduisent à l'établissement des fonctions de Green. La première, exposée dans [Eason et al. (1956), Graff (1975)], est similaire à celle utilisée pour l'équation d'onde classique et exploite la transformée de Fourier spatio-temporelle en dimension 3 (resp. 4) pour les problèmes d'élastodynamique en 2D (resp. 3D). La seconde approche, décrite dans [Aki et Richards (2002), Eringen et Suhubi (1975), Mindlin (1963)], s'appuie sur l'utilisation de deux potentiels ϕ et ψ solutions d'équations d'onde scalaire et vectorielle, respectivement. La détermination de ces potentiels conduit alors à l'obtention de la fonction de Green recherchée. Notons que l'expression des fonctions de Green en 2D peut être directement déduite de celle obtenue en 3D à partir de la *méthode de descente* proposée dans [Hadamard (1932)]. Une revue complète des fonctions de Green en élastodynamique peut être trouvée dans [Kausel (2006)].

Dans le cadre des problèmes définis par l'équation d'onde avec amortissement en 2D et 3D, l'utilisation de la transformée de Laplace en temps, de la transformée de Fourier en espace et de leurs inverses respectives permet d'aboutir à l'expression des fonctions de Green [Hanyga (2002)].

Dans le cadre des problèmes de visco-élastodynamique transitoire linéaire en 2D, les fonctions de Green se déduisent directement de celles obtenues en élastodynamique en exploitant l'analogie, établie dans [Alfrey (1944)] sous le nom de *principe de correspondance* (« *Correspondence Principle* »), entre les relations de comportement en élasticité et viscoélasticité dans le domaine de Laplace. L'utilisation de la transformée de Laplace en temps et de son inverse permet alors d'établir l'expression des fonctions de Green [Carini et Donato (1992), González et Abascal (2004), Waeytens et al. (2012)].

Enfin, dans le cadre plus général des problèmes non-linéaires d'évolution, l'élaboration des fonctions de Green demeure à l'heure actuelle un sujet de recherche actif dans le domaine de la physique et des mathématiques appliquées.

Des détails complets sur l'utilisation des fonctions de Green au sein des techniques « handbook » décrites au paragraphe 3.3.7 du chapitre 4 ainsi que divers

exemples de fonctions de Green dans des milieux (semi-)infinis en 2D peuvent être trouvés dans [Grätsch et Hartmann (2006), Chamoin (2007), Chamoin et Ladevèze (2008), Chamoin et Ladevèze (2009), Ladevèze et Chamoin (2010), Waeytens et al. (2012)].

2 Expression de quelques fonctions de Green dans le cadre des problèmes d'élasticité linéaire en 2D et 3D

Les expressions analytiques des fonctions de Green ($\tilde{u}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}^{\text{hand}}$) fournies dans cette section sont issues de la méthode de Mindlin exposée dans [Mindlin et Cheng (1950)]. On se place dans le cadre des problèmes d'élasticité linéaire en 2D et 3D sous l'hypothèse des petites perturbations et d'un comportement matériau homogène et isotrope caractérisé par un module d'Young E et un coefficient de Poisson ν ou, de manière équivalente, par les coefficients de Lamé λ et μ définis par :

$$\lambda = \begin{cases} \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \text{en 2D sous l'hypothèse des déformations planes et en 3D} \\ \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} & \text{en 2D sous l'hypothèse des contraintes planes} \end{cases}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{correspondant au module de cisaillement}$$

2.1 Élasticité linéaire en 2D

On introduit les coordonnées polaires (r, θ) dans le repère $(\underline{O}, \underline{x}, \underline{y})$, où \underline{O} désigne le point d'application du chargement ponctuel :

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2.1.1 Fonction de Green associée à un effort ponctuel selon \underline{x} dans un domaine infini

Le chargement est un effort ponctuel dans la direction \underline{x} appliqué en un point \underline{O} d'un domaine infini :

$$\underline{\tilde{f}}_{\Sigma} = \delta(\underline{O})\underline{x}$$

Le vecteur de Galerkin \underline{B} associé est :

$$\underline{B} = -\frac{r^2 \ln(r)}{8\pi\mu} \underline{x}$$

La fonction de Green $(\underline{\tilde{u}}^{\text{hand}}, \underline{\tilde{\sigma}}^{\text{hand}})$ correspondante est déterminée par les relations (E.1) et s'écrit :

– sous l'hypothèse des contraintes planes :

$$\begin{cases} u_x^{\text{hand}} = \frac{1}{8\pi\mu} \left[-(3 - \nu) \ln(r) + (1 + \nu) \cos^2(\theta) - \frac{7 - \nu}{2} \right] \\ u_y^{\text{hand}} = \frac{1}{8\pi\mu} (1 + \nu) \cos(\theta) \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^{\text{hand}} = \frac{\cos(\theta)}{4\pi r} \underbrace{[-(1 - \nu) - 2(1 + \nu) \cos^2(\theta)]}_{[-2 - (1 + \nu) \cos(2\theta)]} \\ \sigma_{yy}^{\text{hand}} = \frac{\cos(\theta)}{4\pi r} \underbrace{[(1 - \nu) - 2(1 + \nu) \sin^2(\theta)]}_{[-2\nu + (1 + \nu) \cos(2\theta)]} \\ \sigma_{xy}^{\text{hand}} = \frac{\sin(\theta)}{4\pi r} \underbrace{[-(1 - \nu) - 2(1 + \nu) \cos^2(\theta)]}_{[-2 - (1 + \nu) \cos(2\theta)]} \end{cases}$$

– sous l'hypothèse des déformations planes :

$$\begin{cases} u_x^{\text{hand}} = \frac{1}{8\pi\mu(1 - \nu)} \left[-(3 - 4\nu) \ln(r) + \cos^2(\theta) - \frac{7 - 8\nu}{2} \right] \\ u_y^{\text{hand}} = \frac{1}{8\pi\mu(1 - \nu)} \cos(\theta) \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}^{\text{hand}} = \frac{\cos(\theta)}{4\pi r(1-\nu)} \underbrace{[-(1-2\nu) - 2\cos^2(\theta)]}_{[-2(1-\nu) - \cos(2\theta)]} \\ \sigma_{yy}^{\text{hand}} = \frac{\cos(\theta)}{4\pi r(1-\nu)} \underbrace{[-(1+2\nu) + 2\cos^2(\theta)]}_{[-2\nu + \cos(2\theta)]} \\ \sigma_{xy}^{\text{hand}} = \frac{\sin(\theta)}{4\pi r(1-\nu)} \underbrace{[-(1-2\nu) - 2\cos^2(\theta)]}_{[-2(1-\nu) - \cos(2\theta)]} \end{array} \right.$$

Les fonctions de Green sont représentées sur la figure E.1 en se plaçant sous l'hypothèse des contraintes planes avec un module d'Young $E = 1$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Toutes les composantes de la solution de Green ($\tilde{u}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}^{\text{hand}}$) divergent au point \underline{Q} (en $r = 0$), excepté la composante u_y^{hand} qui dépend uniquement de la variable angulaire θ . Les échelles de valeurs sont donc tronquées pour la plupart des composantes de manière à visualiser clairement leur allure.

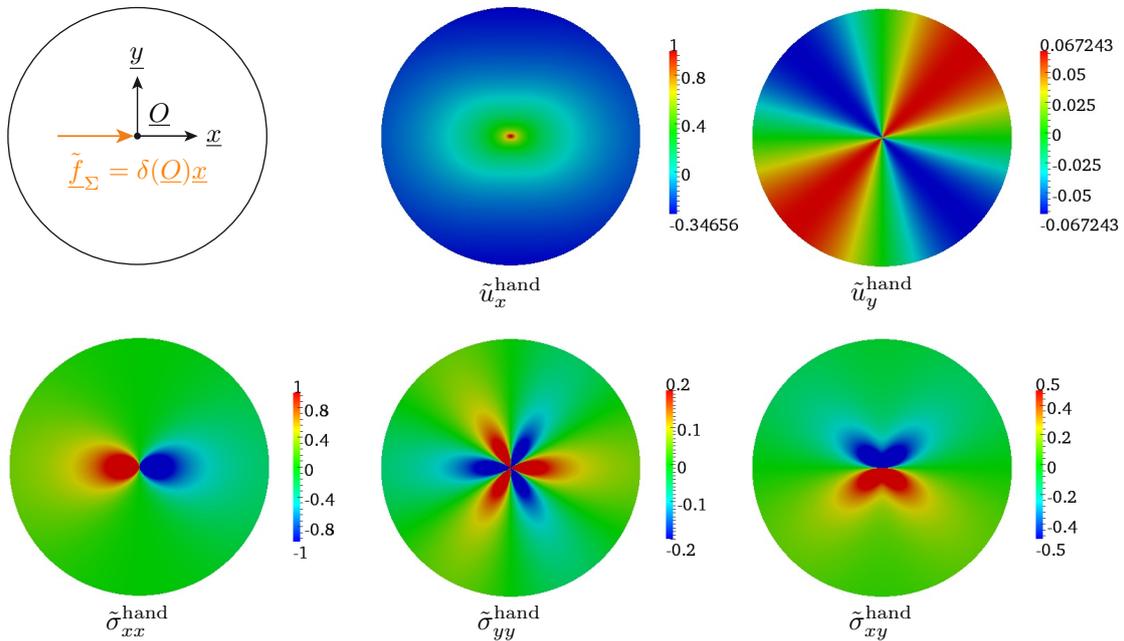


FIGURE E.1: Répartition spatiale des composantes de la fonction de Green correspondant à la solution handbook ($\tilde{u}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}^{\text{hand}}$) associée à un effort ponctuel $\tilde{f}_{\Sigma} = \delta(\underline{Q})\underline{x}$ appliqué au point \underline{Q} dans un milieu infini en dimension 2, sous l'hypothèse des contraintes planes.

2.1.2 Fonction de Green associée à une précontrainte ponctuelle selon \underline{x} dans un domaine infini

Le chargement est une précontrainte ponctuelle dans la direction \underline{x} appliquée en un point \underline{Q} d'un domaine infini :

$$\tilde{\sigma}_\Sigma = \delta(\underline{Q})\underline{x} \otimes \underline{x}$$

Le vecteur de Galerkin \underline{B} associé est :

$$\underline{B} = -\frac{x}{8\pi\mu} [1 + 2 \ln(r)] \underline{x}$$

Celui-ci peut être obtenu en sommant le vecteur de Galerkin \underline{B}_1 associé à un effort ponctuel $\tilde{f}_{\Sigma,1} = \delta(\underline{Q}_1)\underline{x}$ appliqué au point $\underline{Q}_1 = \underline{Q} - \frac{d}{2}\underline{x}$ et celui \underline{B}_2 associé à un effort ponctuel $\tilde{f}_{\Sigma,2} = -\delta(\underline{Q}_2)\underline{x}$ appliqué au point $\underline{Q}_2 = \underline{Q} + \frac{d}{2}\underline{x}$, puis en faisant tendre la distance d vers 0.

La fonction de Green $(\tilde{u}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}^{\text{hand}})$ correspondante est déterminée par les relations (E.1) et s'écrit :

– sous l'hypothèse des contraintes planes :

$$\begin{cases} u_x^{\text{hand}} = -\frac{\cos(\theta)}{8\pi r\mu} \underbrace{[(3-\nu)\cos^2(\theta) + (1-3\nu)\sin^2(\theta)]}_{[2(1-\nu) + (1+\nu)\cos(2\theta)]} \\ u_y^{\text{hand}} = -\frac{\sin(\theta)}{8\pi r\mu} (1+\nu) \underbrace{[\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)]}_{\cos(2\theta)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^{\text{hand}} = \frac{1}{4\pi r^2} [(3+\nu)\cos^4(\theta) - 6(1+\nu)\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - (1-\nu)\sin^4(\theta)] \\ \sigma_{yy}^{\text{hand}} = \frac{1}{4\pi r^2} [-(1-\nu)\cos^4(\theta) + 6(1+\nu)\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - (1+3\nu)\sin^4(\theta)] \\ \sigma_{xy}^{\text{hand}} = \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{2\pi r^2} \underbrace{[(3+\nu)\cos^2(\theta) - (1+3\nu)\sin^2(\theta)]}_{[(1-\nu) + 2(1+\nu)\cos(2\theta)]} \end{cases}$$

– sous l'hypothèse des déformations planes :

$$\begin{cases} u_x^{\text{hand}} = -\frac{\cos(\theta)}{8\pi r\mu(1-\nu)} \underbrace{[(3-4\nu)\cos^2(\theta) + (1-4\nu)\sin^2(\theta)]}_{[2(1-2\nu) + \cos(2\theta)]} \\ u_y^{\text{hand}} = -\frac{\sin(\theta)}{8\pi r\mu(1-\nu)} \underbrace{[\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)]}_{\cos(2\theta)} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}^{\text{hand}} = \frac{1}{4\pi r^2(1-\nu)} [(3-2\nu)\cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - (1-2\nu)\sin^4(\theta)] \\ \sigma_{yy}^{\text{hand}} = \frac{1}{4\pi r^2(1-\nu)} [-(1-2\nu)\cos^4(\theta) + 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - (1+2\nu)\sin^4(\theta)] \\ \sigma_{xy}^{\text{hand}} = \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{2\pi r^2(1-\nu)} \underbrace{[(3-2\nu)\cos^2(\theta) - (1+2\nu)\sin^2(\theta)]}_{[(1-2\nu) + 2\cos(2\theta)]} \end{array} \right.$$

Les fonctions de Green sont représentées sur la figure E.2 en se plaçant sous l'hypothèse des contraintes planes avec un module d'Young $E = 1$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Toutes les composantes de la solution de Green ($\tilde{\underline{u}}^{\text{hand}}, \tilde{\underline{\sigma}}^{\text{hand}}$) divergent au point \underline{O} (en $r = 0$) et sont donc illustrées avec un choix d'échelle approprié tronquant les valeurs élevées.

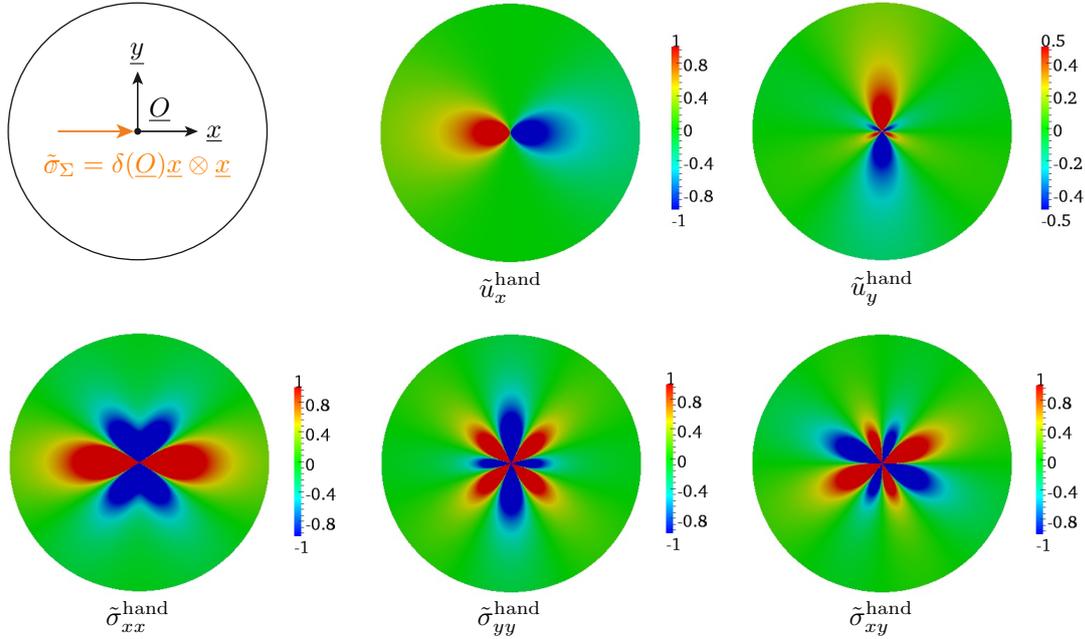


FIGURE E.2: Répartition spatiale des composantes de la fonction de Green correspondant à la solution handbook ($\tilde{\underline{u}}^{\text{hand}}, \tilde{\underline{\sigma}}^{\text{hand}}$) associée à une précontrainte ponctuelle $\tilde{\sigma}_{\Sigma} = \delta(\underline{O})\underline{x} \otimes \underline{x}$ appliquée au point \underline{O} dans un milieu infini en dimension 2, sous l'hypothèse des contraintes planes.

2.2 Élasticité linéaire en 3D

On introduit la coordonnée radiale R dans le repère $(\underline{O}, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$, où \underline{O} désigne le point d'application du chargement ponctuel :

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2.2.1 Fonction de Green associée à un effort ponctuel selon \underline{z} dans un domaine infini

Le chargement est un effort ponctuel dans la direction \underline{z} appliqué en un point \underline{Q} d'un domaine infini :

$$\underline{f}_{\Sigma} = \delta(\underline{Q})\underline{z}$$

Le vecteur de Galerkin \underline{B} associé est :

$$\underline{B} = \frac{R}{8\pi\mu}\underline{z}$$

La fonction de Green $(\underline{\tilde{u}}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}^{\text{hand}})$ correspondante est déterminée par les relations (E.1) et s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x^{\text{hand}} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{xz}{R^3} \\ u_y^{\text{hand}} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{yz}{R^3} \\ u_z^{\text{hand}} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{1}{R} \left[(3-4\nu) + \left(\frac{z}{R}\right)^2 \right] \\ \sigma_{xx}^{\text{hand}} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{z}{R^3} \left[(1-2\nu) - 3\left(\frac{x}{R}\right)^2 \right] \\ \sigma_{yy}^{\text{hand}} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{z}{R^3} \left[(1-2\nu) - 3\left(\frac{y}{R}\right)^2 \right] \\ \sigma_{zz}^{\text{hand}} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{z}{R^3} \left[(1-2\nu) + 3\left(\frac{z}{R}\right)^2 \right] \\ \sigma_{xy}^{\text{hand}} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{3xyz}{R^5} \\ \sigma_{xz}^{\text{hand}} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{x}{R^3} \left[(1-2\nu) + 3\left(\frac{z}{R}\right)^2 \right] \\ \sigma_{yz}^{\text{hand}} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{y}{R^3} \left[(1-2\nu) + 3\left(\frac{z}{R}\right)^2 \right] \end{array} \right.$$

Les fonctions de Green sont représentées sur la figure E.3 avec un module d'Young $E = 1$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Les différentes composantes sont illustrées sur chacun des plans (\underline{Q}, x, y) , (\underline{Q}, x, z) et (\underline{Q}, y, z) . Pour des raisons de lisibilité, seuls les plans présentant des valeurs non nulles sont affichés. En particulier, la composante $\sigma_{xy}^{\text{hand}}$ n'est pas représentée, car celle-ci prend des valeurs nulles sur chacun des plans de visualisation. Par ailleurs, comme pour les exemples 2D précédents, toutes les composantes de la solution de Green $(\underline{\tilde{u}}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}^{\text{hand}})$ divergent au point \underline{Q} (en $R = 0$). Les échelles de valeurs sont par conséquent tronquées afin d'observer le comportement des différentes fonctions.

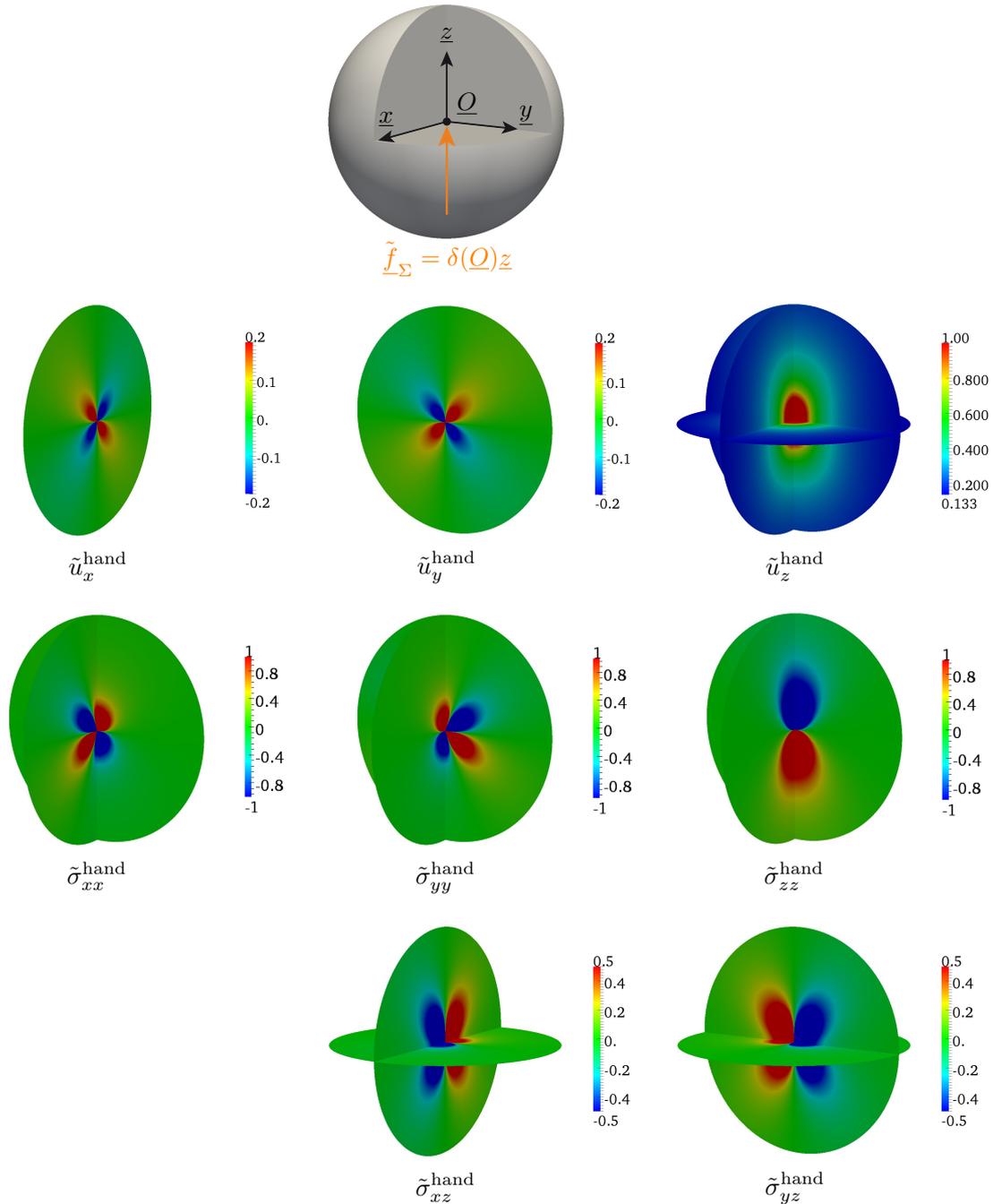


FIGURE E.3: Répartition spatiale des composantes de la fonction de Green correspondant à la solution handbook $(\underline{\tilde{u}}^{\text{hand}}, \underline{\tilde{\sigma}}^{\text{hand}})$ associée à un effort ponctuel $\underline{\tilde{f}}_{\Sigma} = \delta(\underline{O})\underline{z}$ appliqué au point \underline{O} dans un milieu infini en dimension 3.

2.2.2 Fonction de Green associée à une précontrainte ponctuelle selon \underline{z} dans un domaine infini

Le chargement est une précontrainte ponctuelle dans la direction \underline{z} appliquée en un point \underline{Q} d'un domaine infini :

$$\tilde{\sigma}_\Sigma = \delta(\underline{Q})\underline{z} \otimes \underline{z}$$

Le vecteur de Galerkin \underline{B} associé est :

$$\underline{B} = \frac{\underline{z}}{8\pi\mu R}$$

Celui-ci peut être obtenu en sommant le vecteur de Galerkin \underline{B}_1 associé à un effort ponctuel $\tilde{f}_{\Sigma,1} = \delta(\underline{Q}_1)\underline{z}$ appliqué au point $\underline{Q}_1 = \underline{Q} - \frac{d}{2}\underline{z}$ et celui \underline{B}_2 associé à un effort ponctuel $\tilde{f}_{\Sigma,2} = -\delta(\underline{Q}_2)\underline{z}$ appliqué au point $\underline{Q}_2 = \underline{Q} + \frac{d}{2}\underline{z}$, puis en faisant tendre la distance d vers 0.

La fonction de Green $(\tilde{u}^{\text{hand}}, \tilde{\sigma}^{\text{hand}})$ correspondante est déterminée par les relations (E.1) et s'écrit :

$$\begin{cases} u_x^{\text{hand}} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{x}{R^3} \left[1 - 3 \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right] \\ u_y^{\text{hand}} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{y}{R^3} \left[1 - 3 \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right] \\ u_z^{\text{hand}} = -\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{z}{R^3} \left[(1-4\nu) + 3 \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^{\text{hand}} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left[(1-2\nu) \left[1 - 3 \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right] - 3 \left(\frac{x}{R} \right)^2 \left[1 - 5 \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right] \right] \\ \sigma_{yy}^{\text{hand}} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left[(1-2\nu) \left[1 - 3 \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right] - 3 \left(\frac{y}{R} \right)^2 \left[1 - 5 \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right] \right] \\ \sigma_{zz}^{\text{hand}} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3} \left[(1-2\nu) \left[1 - 3 \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right] + 3 \left(\frac{z}{R} \right)^2 \left[3 - 5 \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right] \right] \\ \sigma_{xy}^{\text{hand}} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{3xy}{R^5} \left[1 - 5 \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right] \\ \sigma_{xz}^{\text{hand}} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{3xz}{R^5} \left[(1+2\nu) - 5 \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right] \\ \sigma_{yz}^{\text{hand}} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{3yz}{R^5} \left[(1+2\nu) - 5 \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right] \end{cases}$$

Les fonctions de Green sont représentées sur la figure E.4 avec un module d'Young $E = 1$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Comme dans le cas d'un effort ponctuel en

milieu infini, toutes les composantes de la solution de Green $(\tilde{\underline{u}}^{\text{hand}}, \tilde{\underline{\sigma}}^{\text{hand}})$ associée à une précontrainte ponctuelle divergent au point \underline{Q} (en $R = 0$). Chacune d'entre elles est donc représentée sur une échelle de valeurs tronquée.

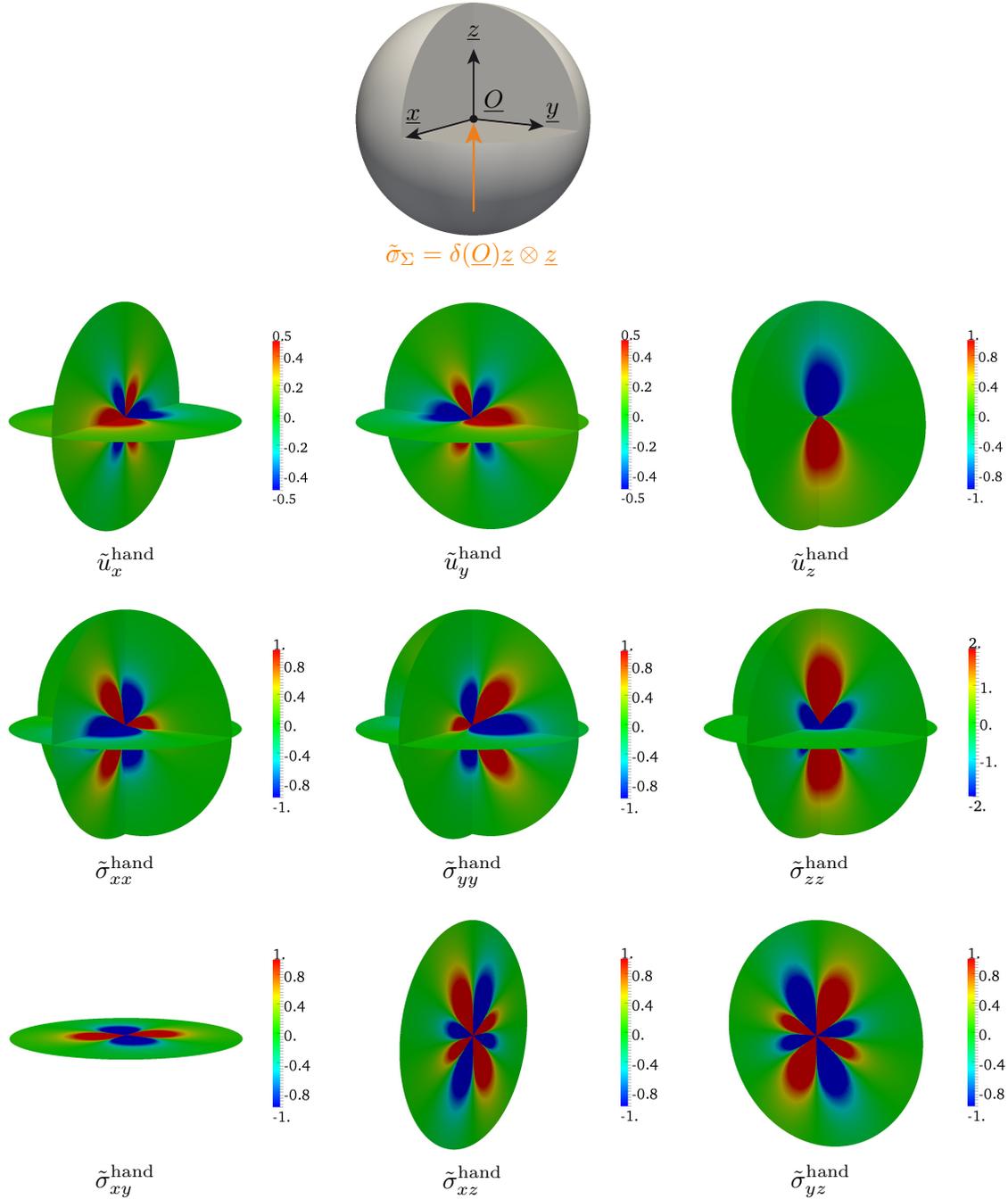


FIGURE E.4: Répartition spatiale des composantes de la fonction de Green correspondant à la solution handbook $(\tilde{\underline{u}}^{\text{hand}}, \tilde{\underline{\sigma}}^{\text{hand}})$ associée à une précontrainte ponctuelle $\tilde{\sigma}_{\Sigma} = \delta(\underline{Q})\underline{z} \otimes \underline{z}$ appliquée au point \underline{Q} dans un milieu infini en dimension 3.

Annexe F

Détermination des facteurs d'intensité de contraintes

Dans cette annexe, on rappelle dans un premier temps la notion de facteur d'intensité de contraintes dans le contexte de la mécanique linéaire élastique de la rupture. Puis, dans un second temps, on dresse un rapide aperçu des différentes méthodes permettant d'extraire la valeur des facteurs d'intensité de contrainte, tout en abordant plus spécifiquement la technique d'extraction basée sur des solutions duales et utilisée au chapitre 4.

1 Notion de facteur d'intensité de contraintes

La notion de *facteur d'intensité de contraintes*, introduite dans [Irwin (1957)], permet de modéliser la présence d'une fissure à travers la description locale du comportement singulier de la solution asymptotique au voisinage de la pointe de fissure, mis en évidence dans [Williams (1957)], dans le cadre exclusif de la mécanique linéaire élastique de la rupture (« *Linear Elastic Fracture Mechanics* » ou *LEFM*). Au contraire, la description globale de l'évolution d'une fissure, introduite dans [Griffith (1921)], s'appuie sur un bilan énergétique associé à la propagation de la fissure et conduit à la définition d'une quantité globale, appelée taux de restitution d'énergie, valable hors du cadre de la mécanique linéaire élastique de la rupture.

Une fissure est une entaille de forme quelconque dans un matériau, représentée par deux surfaces Γ^+ et Γ^- , appelées lèvres de la fissure, géométriquement confondues en l'absence de chargement. En outre, les lèvres Γ^+ et Γ^- sont supposées libres de contraintes. La discontinuité vectorielle du champ de déplacement \underline{u} à la traversée de la fissure est caractérisée par le saut de déplacement, noté $[[\underline{u}]]$ et défini par :

$$[[\underline{u}]] = \underline{u}|_{\Gamma^+} - \underline{u}|_{\Gamma^-}$$

On définit alors les modes d'ouverture d'une fissure, correspondant aux trois modes

de sollicitation distincts représentés sur la figure F.1, selon la nature du saut de déplacement $[[u]]$:

- le mode I, appelé *mode d'ouverture*, correspondant à un saut de déplacement dans le plan de la fissure $(\underline{P}, \underline{t}_f, \underline{n}_f)$ selon la direction normale à la fissure \underline{n}_f ;
- le mode II, appelé *mode de cisaillement plan* ou *de glissement droit*, correspondant à un saut de déplacement dans le plan de la fissure $(\underline{P}, \underline{t}_f, \underline{n}_f)$ selon la direction tangente à la fissure \underline{t}_f ;
- le mode III, appelé *mode de cisaillement antiplan* ou *de glissement vis* ou encore *de déchirure*, correspondant à un saut de déplacement normal au plan de la fissure $(\underline{P}, \underline{t}_f, \underline{n}_f)$ selon la direction tangente à la fissure \underline{e}_z .

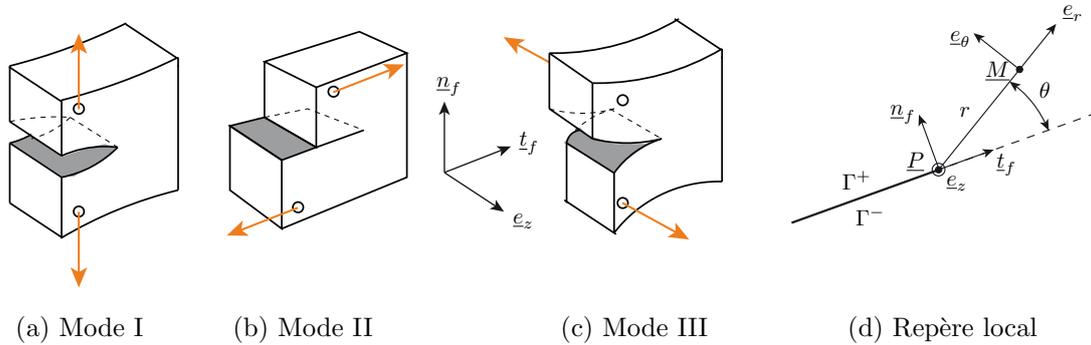


FIGURE F.1: Représentation des modes d'ouverture I (a), II (b) et III (c) [Bonnet et Frangi (2006)], et définition du repère local associé à la pointe de fissure (d).

La valeur des facteurs d'intensité de contraintes K_\bullet associée à chaque mode \bullet dépend non seulement de la géométrie de la structure considérée et des dimensions de la fissure, mais aussi du chargement mécanique appliqué. Cette valeur est généralement comparée a posteriori à une valeur critique caractéristique du matériau $K_{\bullet C}$ appelée ténacité (accessible expérimentalement), afin d'évaluer la propension d'une fissure à se propager.

2 Détermination des facteurs d'intensité de contraintes

Différentes méthodes (semi-)analytiques ou numériques permettent de déterminer directement ou d'extraire la valeur des facteurs d'intensité de contraintes.

En premier lieu, l'utilisation des méthodes (semi-)analytiques est restreinte aux cas de géométries particulières et de chargements simples. Celles-ci sont peu couramment utilisées, car elles ne fournissent que des approximations grossières, i.e. trop peu précises, dans le cas de géométries ou de chargements plus complexes. Les valeurs (semi-)analytiques des facteurs d'intensité de contraintes obtenues à l'aide

de ces méthodes sont regroupées dans de nombreux recueils tels que [Tada et al. (1973), Murakami (1987)].

En second lieu, l'emploi de méthodes numériques apporte une meilleure précision et s'appuie généralement sur la méthode des éléments finis. Les facteurs d'intensité de contraintes sont alors déterminés à partir de la solution approchée éléments finis à l'aide d'une *technique d'extraction*. Il existe différentes techniques d'extraction qui permettent d'évaluer plus ou moins finement la valeur des facteurs d'intensité de contraintes. On distingue les méthodes locales et celles globales ou énergétiques.

2.1 Méthodes locales

Une première classe de méthodes, dites *locales* et connues sous le nom de « *Crack (Tip) Opening Displacement Methods* » ou *C(T)OD Methods*, s'appuie sur la connaissance de la solution asymptotique à énergie finie (\underline{u}, σ^u) au voisinage de la pointe de fissure. L'expression analytique de cette dernière en coordonnées polaires (r, θ) dans le repère local associé à la pointe de fissure peut être trouvée dans [Stern et al. (1976), Gallimard et Panetier (2006), Panetier et al. (2010)] sous la forme :

$$\begin{aligned}\underline{u}(r, \theta) &\propto r^{1/2} \\ \sigma^u(r, \theta) &\propto r^{-1/2}\end{aligned}$$

Les facteurs d'intensité de contraintes sont directement déterminées par extrapolation des valeurs nodales du champ de déplacement éléments finis au voisinage de la pointe de fissure et par identification avec l'expression analytique du saut de déplacement de la solution asymptotique le long des lèvres de la fissure :

$$\llbracket \underline{u} \rrbracket = \frac{8(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [(1-\nu)(K_I \underline{n}_f + K_{II} \underline{t}_f) + K_{III} \underline{e}_z] + O(r) \quad (\text{F.2})$$

où $(\underline{P}, \underline{t}_f, \underline{n}_f, \underline{e}_z)$ désigne le repère local associé à la pointe de fissure \underline{P} , représenté sur la figure F.1.

Ces méthodes reposent sur un simple post-traitement de la solution éléments finis et sont donc très simples à mettre en œuvre. Elles s'avèrent néanmoins peu précises, dans la mesure où la qualité de l'extrapolation dépend non seulement du choix des nœuds utilisés pour le calcul du saut de déplacement de la solution éléments finis, mais aussi de la qualité du maillage en pointe de fissure. En pratique, ces méthodes nécessitent l'utilisation d'un maillage fortement raffiné au voisinage de la pointe de fissure combinée à l'emploi d'éléments finis spéciaux [Barsoum (1974), Henshell et Shaw (1975), Stern et Becker (1978)] (tels que l'*élément avec nœud au quart* ou *élément de Barsoum* [Barsoum (1974), Freese et Tracey (1976), Barlow (1976)]) dédiés à la représentation de la singularité en pointe de fissure, afin d'évaluer avec une précision convenable la valeur des facteurs d'intensité de contraintes [Bonnet et Frangi (2006)].

2.2 Méthodes globales

Une seconde classe de méthodes, dites *globales*, s'appuie sur l'utilisation d'*intégrales de contour* ou de *domaine*. Elles reposent généralement sur des expressions intégrales du taux de restitution d'énergie G et sur la *formule d'Irwin* [Irwin (1957)], qui établit un lien entre l'expression du taux de restitution d'énergie G (intervenant dans l'approche globale ou énergétique) et celle des facteurs d'intensité de contraintes K (intervenant dans l'approche locale) dans le cadre exclusif de l'élasticité linéaire sous l'hypothèse des petites perturbations et d'une évolution quasi-statique :

$$G = \begin{cases} \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 & \text{en 2D (déformations planes) et en 3D} \\ \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 & \text{en 2D (contraintes planes)} \end{cases} \quad (\text{F.3})$$

Le taux de restitution d'énergie G peut s'exprimer à l'aide de l'intégrale de contour de Rice J introduite dans [Rice (1968), Cherepanov (1967)], de l'intégrale de domaine G_θ exposée dans [Destuynder et al. (1983)] ou encore des intégrales M , T et A développées dans [Chen et Shield (1977), Bui et Proix (1985)]. Nous présentons ici brièvement la technique d'extraction basée sur une intégrale d'interaction avant d'aborder plus en détail celle basée sur des solutions duales qui a été employée au chapitre 4.

Méthode basée sur une intégrale d'interaction

Une première méthode développée dans [Shih et Asaro (1988)] s'appuie sur l'utilisation d'une *intégrale d'interaction* entre deux états : l'état réel (noté avec l'exposant u) d'une part, et l'état auxiliaire ou virtuel (noté avec l'exposant v) correspondant à la solution asymptotique en fond de fissure pour un mode de sollicitation pur. La démarche consiste à exprimer l'intégrale de contour de Rice $J^{(u+v)}$ pour la superposition des deux états u et v , conduisant à la définition de l'intégrale de contour, dite d'interaction, $I^{(u,v)}$ entre ces deux états. La formule d'Irwin (F.3) permet alors d'exprimer cette dernière en fonction des produits $K_\bullet^u K_\bullet^v$ des facteurs d'intensité de contraintes K_\bullet^u et K_\bullet^v associés respectivement à l'état réel u et à l'état auxiliaire v (l'indice \bullet désigne de manière condensée le mode de sollicitation I ou II). Par la suite, en choisissant successivement chacun des modes purs I et II pour l'état auxiliaire v , i.e. en prenant $(K_I^v = 1, K_{II}^v = 0)$ puis $(K_I^v = 0, K_{II}^v = 1)$, le facteur d'intensité de contraintes K_\bullet^u associé à l'état réel u pour le mode pur \bullet s'exprime simplement en fonction de l'intégrale d'interaction $I^{(u, \text{mode } \bullet)}$ entre l'état réel et l'état auxiliaire correspondant au mode pur \bullet considéré. Une variante de cette méthode consiste à transformer l'intégrale de contour $I^{(u, \text{mode } \bullet)}$ en une intégrale de domaine équivalente, plus adaptée au calcul par éléments finis. Nous reviendrons sur ce point précis dans le paragraphe suivant consacré à une seconde méthode globale. Soulignons par ailleurs que cette méthode est couramment employée pour le calcul des

facteurs d'intensité de contraintes dans le cadre de la XFEM [Belytschko et Black (1999), Moës et al. (1999)]. Une description détaillée de cette méthode d'extraction par intégrale d'interaction peut être trouvée dans [Shih et Asaro (1988)].

Méthode basée sur des solutions duales

Une seconde méthode s'appuie quant à elle sur la connaissance de *solutions duales* ou *auxiliaires* (à énergie infinie) associées à la solution asymptotique (à énergie finie) au voisinage de la pointe de fissure. Initialement introduite dans [Stern et al. (1976)] dans le cadre des problèmes de fissuration, elle a par la suite été étendue à d'autres types de singularités géométriques (entailles, coins rentrants) dans [Babuška et Miller (1984), Leguillon et Sanchez-Palencia (1987)]. Nous présentons ici les principales étapes conduisant à la définition des facteurs d'intensité de contraintes sous la forme d'une intégrale de domaine. Le lecteur pourra trouver les détails associés en consultant [Gallimard et Panetier (2006)].

Le principe général de cette méthode consiste à appliquer le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti (introduit dans [Betti (1872)] et connu sous le nom de « *Maxwell-Betti reciprocal work theorem* ») sur un contour fermé $\Gamma_\rho \cup \Gamma \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ (cf. figure F.2) constitué d'un contour ouvert circulaire Γ_ρ de rayon ρ supposé infiniment petit, d'un contour ouvert quelconque Γ et des deux lèvres de la fissure Γ^+ et Γ^- supposées libres de contraintes :

$$\int_{\Gamma_\rho \cup \Gamma \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-} (\underline{v} \cdot \sigma^u \underline{n} - \underline{u} \cdot \sigma^v \underline{n}) dS = \int_{\Gamma_\rho \cup \Gamma} (\underline{v} \cdot \sigma^u \underline{n} - \underline{u} \cdot \sigma^v \underline{n}) dS = 0 \quad (\text{F.4})$$

où $(\underline{u}, \sigma^u)$ désigne la solution asymptotique (à énergie finie) du problème d'élasticité défini sur une zone locale ω_s au voisinage de la singularité et $(\underline{v}, \sigma^v)$ une solution auxiliaire a priori quelconque.

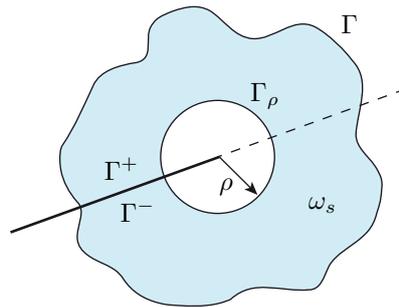


FIGURE F.2: Représentation d'un contour fermé $\Gamma_\rho \cup \Gamma \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ au voisinage de la pointe de fissure.

À partir de l'expression (F.4), on montre que l'intégrale I_ρ définie sur le contour Γ_ρ par :

$$I_\rho(\underline{v}, \sigma^v) = - \int_{\Gamma_\rho} (\underline{v} \cdot \sigma^u \underline{n} - \underline{u} \cdot \sigma^v \underline{n}) dS \quad (\text{F.5})$$

est indépendante du rayon ρ et peut être réécrite comme :

$$I_\rho(\underline{v}, \sigma^v) = \int_\Gamma (\underline{v} \cdot \sigma^u \underline{n} - \underline{u} \cdot \sigma^v \underline{n}) dS \quad (\text{F.6})$$

La démarche consiste alors à évaluer l'intégrale I_ρ définie en (F.5) pour un rayon ρ arbitrairement petit et un choix judicieux de solution $(\underline{v}, \sigma^v)$. Dans le cas d'une singularité de type fissure, deux solutions duales (à énergie infinie) $(\underline{v}_I, \sigma_I^v)$ et $(\underline{v}_{II}, \sigma_{II}^v)$ associées à la solution (à énergie finie) $(\underline{u}, \sigma^u)$ sont proposées dans [Stern et al. (1976)] et choisies comme solutions auxiliaires. L'expression analytique de ces solutions duales $(\underline{v}_\bullet, \sigma_\bullet^v)$ en coordonnées polaires (r, θ) dans le repère local associé à la pointe de fissure peut être trouvée dans [Stern et al. (1976), Gallimard et Panetier (2006)] sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{v}_\bullet(r, \theta) &\propto r^{-1/2} \\ \sigma_\bullet^v(r, \theta) &\propto r^{-3/2} \end{aligned}$$

où l'indice \bullet correspond à I ou II. Dans le cas d'autres types de singularités, les solutions duales $(\underline{v}_\bullet, \sigma_\bullet^v)$ peuvent être déterminées de manière approchée à l'aide de méthodes d'évaluation numérique [Leguillon et Sanchez-Palencia (1987)].

Par la suite, en injectant les solutions à énergie infinie $(\underline{v}_\bullet, \sigma_\bullet^v)$ ainsi que la solution à énergie finie $(\underline{u}, \sigma^u)$ dans l'expression (F.5) de l'intégrale I_ρ , on aboutit à une relation de la forme :

$$I_\rho(\underline{v}_\bullet, \sigma_\bullet^v) = K_\bullet + o(\rho)$$

où l'indice \bullet désigne le mode de sollicitation I ou II.

Finalement, en considérant un rayon ρ arbitrairement petit, l'expression (F.6) de I_ρ conduit à une représentation des facteurs d'intensité de contraintes K_\bullet sous la forme d'une intégrale définie sur un contour Γ quelconque entourant la pointe de fissure :

$$K_\bullet = \int_\Gamma (\underline{v}_\bullet \cdot \sigma^u \underline{n} - \underline{u} \cdot \sigma_\bullet^v \underline{n}) dS \quad (\text{F.8})$$

Comme pour l'ensemble des approches globales basées sur une intégrale invariante de contour, l'indépendance du choix du contour Γ dans la représentation (F.8) permet d'envisager la détermination des facteurs d'intensité de contraintes K_\bullet à partir d'une solution éléments finis $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ de bonne qualité sur un contour suffisamment éloigné de la singularité. Néanmoins, étant donné que le champ de contrainte élément finis σ_h présente des discontinuités à l'interface entre deux éléments adjacents, la représentation sous la forme d'une intégrale de contour ne peut être utilisée directement pour l'évaluation numérique des facteurs d'intensité de contraintes. Une première possibilité consiste à effectuer une moyenne du vecteur contrainte aux interfaces des éléments définissant le contour Γ . Une seconde possibilité consiste à appliquer une procédure de lissage des contraintes localement autour du contour Γ

encerclant la pointe de fissure. Ces différentes possibilités introduisent cependant de nouvelles approximations qui peuvent s'avérer difficile à évaluer.

Il est toutefois possible de contourner les difficultés liées à cette représentation en transformant l'intégrale de contour en une *intégrale de domaine équivalente* [Babuška et Miller (1984)], plus appropriée à la méthode des éléments finis. L'intégrale (F.8) définie sur un contour quelconque Γ peut en effet être astucieusement remplacée par une intégrale définie sur un domaine quelconque Ω_c (telle qu'une couronne autour de la pointe de fissure par exemple) en introduisant une fonction scalaire ϕ continûment dérivable sur Ω_c qui est égale à 0 (resp. 1) sur le contour extérieur Γ_e (resp. contour intérieur Γ_i) du domaine Ω_c . Un exemple de domaine Ω_c correspondant à une couronne centrée sur la pointe de fissure est représenté sur la figure F.3.

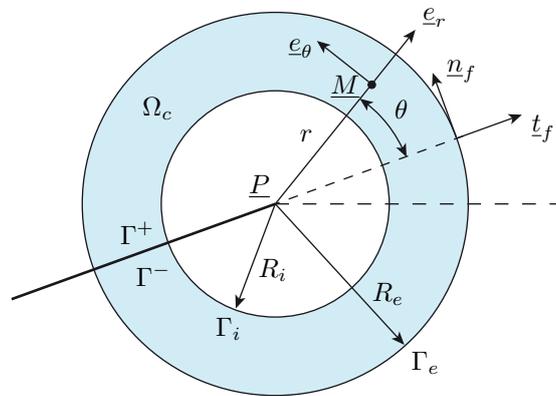


FIGURE F.3: Représentation d'une couronne d'extraction Ω_c centrée autour de la pointe de fissure et délimitée par les contours circulaires intérieur Γ_i et extérieur Γ_e .

En introduisant la fonction ϕ dans l'expression (F.8) (où le contour Γ correspond au contour intérieur Γ_i), puis en appliquant le théorème de la divergence sur le contour fermé $\Gamma_e \cup \Gamma_i \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, il vient après quelques manipulations tensorielles :

$$K_{\bullet} = \int_{\Omega_c} \text{Tr} [(\mathbf{K} \varepsilon(\phi \underline{v}_{\bullet}) - \phi \sigma_{\bullet}^v) \varepsilon(\underline{u})] d\Omega - \int_{\Omega_c} (\sigma_{\bullet}^v \nabla \phi) \cdot \underline{u} d\Omega \quad (\text{F.9})$$

Si le choix du domaine d'extraction Ω_c et de la fonction ϕ , continument dérivable sur Ω_c et nulle sur son contour extérieur Γ_e , est a priori arbitraire, il convient d'utiliser un domaine Ω_c suffisamment éloigné de la zone de singularité et une fonction ϕ polynomiale de degré compatible avec le degré d'interpolation utilisé lors de la résolution éléments finis, afin de s'affranchir des problèmes d'intégration numérique.

Dans [Gallimard et Panetier (2006), Panetier et al. (2009), Panetier et al. (2010)], le domaine Ω_c correspond à une couronne délimitée par deux contours circulaires Γ_i et Γ_e de rayons R_i et R_e , respectivement. La fonction ϕ , définie dans un système

de coordonnées polaires (r, θ) centré autour de la pointe de fissure, est continue et décroît de façon linéaire en fonction du rayon r :

$$\phi(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r \leq R_i \\ \frac{R_e - r}{R_e - R_i} & \text{si } R_i \leq r \leq R_e \\ 0 & \text{si } r \geq R_e \end{cases} \quad (\text{F.10})$$

Dans [Babuška et Miller (1984)], le domaine Ω_c correspond à une couronne délimitée par deux contours circulaires Γ_i et Γ_e de rayons $\frac{R}{2}$ et R , respectivement. La fonction ϕ est également continue, mais évolue cette fois de façon quadratique en fonction du rayon r :

$$\phi(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{R}{2} \\ 1 - 4 \left(r - \frac{R}{2} \right)^2 & \text{si } \frac{R}{2} \leq r \leq R \\ 0 & \text{si } r \geq R \end{cases} \quad (\text{F.11})$$

Finalement, cette méthode conduit à une évaluation des facteurs d'intensité de contraintes non seulement directe (sans avoir recours au taux de restitution d'énergie G et à la formule d'Irwin), mais aussi exacte dès lors que les solutions auxiliaires sont connues. Elle offre donc un cadre adapté à l'estimation d'erreur sans introduire d'autres sources d'erreur que celle liée à la discrétisation. C'est par conséquent cette approche que nous avons retenu au chapitre 4 pour la détermination du facteur d'intensité de contraintes K_I .

Une validation numérique de cette technique d'extraction est proposée en annexe G. Les performances de celle-ci sont illustrées sur deux exemples numériques en dimension 2 couramment utilisés comme « benchmarks » dans la littérature. Les valeurs numériques des facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} déterminées à l'aide de la relation (F.9) sont comparées à des valeurs analytiques ainsi qu'à des valeurs de référence issues de la littérature.

Enfin, dans le contexte de l'estimation d'erreur locale basée sur la technique d'encadrement classique décrite en section 1, signalons que cette technique d'extraction a été mise en œuvre dans [Gallimard et Panetier (2006)] (resp. [Panetier et al. (2009), Panetier et al. (2010)]) sur les deux « benchmarks » étudiés en annexe G, résolus à l'aide de la méthode des éléments finis classiques, dite FEM (resp. méthode des éléments finis étendus, dite XFEM), pour obtenir des bornes inférieure et supérieure de l'erreur commise sur les facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} .

Annexe G

Validation numérique de la technique d'extraction des facteurs d'intensité de contraintes

Cette annexe présente une validation numérique de la technique d'extraction décrite au paragraphe 2.2 de l'annexe F et mise en œuvre au chapitre 4 sur deux « benchmarks » en 2D. Les valeurs numériques des facteurs d'intensité de contraintes K_I (en mode I) et K_{II} (en mode II) sont comparées à des valeurs théoriques analytiques et à des valeurs de référence trouvées dans la littérature. Une étude de l'influence de la taille et de la position du domaine d'extraction Ω_c est menée sur chacun des exemples numériques.

1 Modèle 2D de plaque fissurée

Considérons un modèle 2D de plaque fissurée, représenté sur la figure G.1, en mode I pur ou en mode mixte I et II. La structure considérée, de longueur $L = 16$ et de largeur $w = 7$, comporte une fissure rectiligne débouchante de longueur $a = \frac{w}{2} = 3.5$ et dont les lèvres sont supposées libres d'effort. Dans un premier temps, la structure est soumise à une contrainte de traction uniforme $\sigma = 1$ Pa sur ses extrémités inférieure et supérieure; ce chargement correspond à un mode de sollicitation I pur. Dans un second temps, la structure est encastrée sur son extrémité inférieure et soumise à une contrainte de cisaillement uniforme $\tau = 1$ Pa sur son extrémité supérieure; ce chargement correspond quant à lui à un mode de sollicitation mixte I et II. Le matériau considéré a un comportement supposé élastique, linéaire, homogène et isotrope caractérisé par un module d'Young $E = 210$ GPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. La modélisation est effectuée sous l'hypothèse des déformations planes.

Ces deux cas d'applications pratiques constituent des « benchmarks » couramment utilisés dans l'étude des problèmes de fissuration en dimension 2.

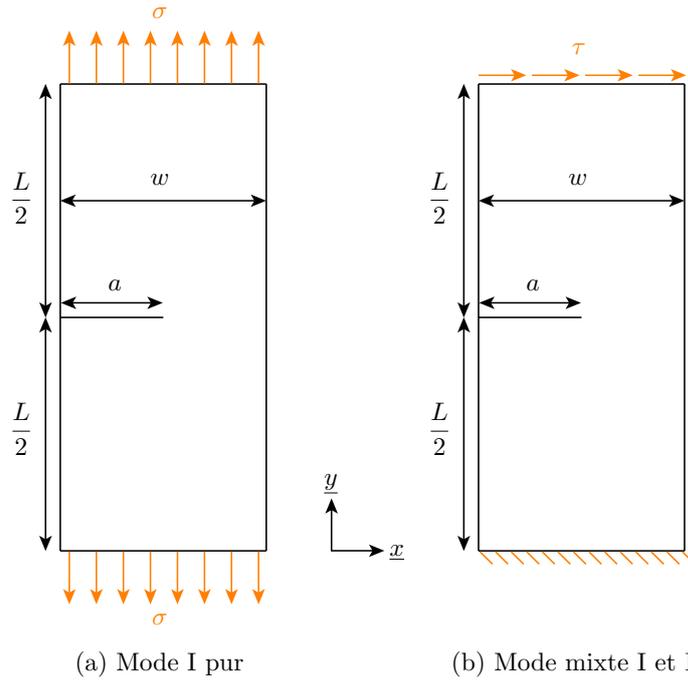


FIGURE G.1: Modèle 2D de plaque fissurée : géométrie et conditions aux limites associées à un mode de sollicitation I pur (a) et à un mode de sollicitation mixte I et II (b).

Dans le cas du mode de sollicitation I pur, des expressions analytiques sont disponibles dans la littérature et fournissent des valeurs théoriquement exactes $K_{I\text{th}}$ du facteur d'intensité de contraintes K_I . Ces expressions proviennent généralement des formules analytiques connues en milieu infini dans lesquelles sont introduites des termes correctifs destinés à prendre en compte les dimensions géométriques finies de la structure considérée.

Dans [Ewalds et Wanhill (1989)], la valeur théorique $K_{I\text{th}}$ du facteur d'intensité de contraintes K_I est déterminée à l'aide de la formule analytique suivante :

$$K_{I\text{th}} = C \sigma \sqrt{\pi a} \quad (\text{G.1a})$$

où C est un facteur de correction géométrique qui dépend uniquement du rapport entre la longueur de la fissure a et la largeur de la structure w :

$$C = 1.12 - 0.231 \left(\frac{a}{w}\right) + 10.55 \left(\frac{a}{w}\right)^2 - 21.72 \left(\frac{a}{w}\right)^3 + 30.39 \left(\frac{a}{w}\right)^4$$

Cette expression analytique conduit à la valeur théorique suivante :

$$K_{I\text{th}} \simeq 9.3721$$

Dans [Panetier (2009)], la valeur théorique $K_{I\text{th}}$ du facteur d'intensité de contraintes K_I est calculée à partir d'une formule analytique analogue à (G.1a) :

$$K_{I\text{th}} = \bar{C} \sigma \sqrt{a} \quad (\text{G.1b})$$

où \bar{C} est un terme de correction géométrique analogue à C et défini par :

$$\bar{C} = 1.99 - 0.41 \left(\frac{a}{w}\right) + 18.7 \left(\frac{a}{w}\right)^2 - 38.48 \left(\frac{a}{w}\right)^3 + 53.85 \left(\frac{a}{w}\right)^4$$

Cette expression analytique conduit à une valeur théorique très proche de la précédente :

$$K_{I\text{th}} \simeq 9.3834$$

Des valeurs de référence $K_{I\text{ref}}$ calculées analytiquement ou numériquement sur des maillages fortement raffinés peuvent également être trouvées dans la littérature. Celles-ci sont reportées dans le tableau G.1.

TABLE G.1: Valeurs de référence $K_{I\text{ref}}$ du facteur d'intensité de contraintes K_I associé au problème en mode I pur.

Publication	Valeur de référence	
	$K_{I\text{ref}}$	
[Stern et al. (1976)]	9.3	
[Murakami (1987)]	9.37	
[Gallimard et Panetier (2006), Panetier et al. (2010)]	9.335	

Dans le cas du mode de sollicitation mixte I et II, des valeurs de référence $K_{I\text{ref}}$ et $K_{II\text{ref}}$ associées à chacun des modes I et II sont également disponibles dans la littérature. Celles-ci sont répertoriées dans le tableau G.2.

TABLE G.2: Valeurs de référence $K_{I\text{ref}}$ et $K_{II\text{ref}}$ des facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} associés au problème en mode mixte I et II.

Publication	Valeur de référence	
	$K_{I\text{ref}}$	$K_{II\text{ref}}$
[Stern et al. (1976), Yau et al. (1980)]	34.0	4.55
[Murakami (1987)]		4.49
[Gallimard et Panetier (2006), Panetier et al. (2010)]	33.93	4.53

La détermination numérique du facteur d'intensité de contraintes K_I associé au problème en mode I pur d'une part, et de ceux K_I et K_{II} associés au problème en mode mixte I et II d'autre part, est réalisée à l'aide de trois maillages éléments finis différents, représentés sur la figure G.2, afin d'étudier la précision des valeurs obtenues à l'aide de la technique d'extraction vis-à-vis du maillage associé à la discrétisation éléments finis. Chacun des maillages éléments finis considérés est raffiné à proximité de la singularité engendrée par la pointe de fissure.

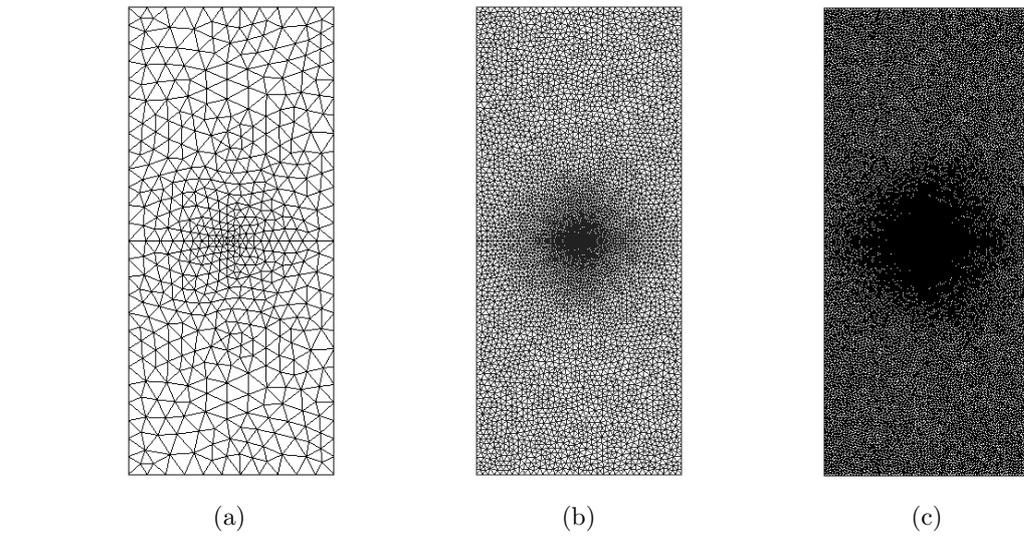


FIGURE G.2: Modèle 2D de plaque fissurée : maillages éléments finis grossier (a), fin (b) et très fin (c).

Les discrétisations éléments finis sont réalisées en utilisant des éléments triangulaires linéaires ($p = 1$) et les caractéristiques associées à chacun des maillages sont répertoriées dans le tableau G.3.

TABLE G.3: Caractéristiques associées aux maillages grossier, fin et très fin.

	Nombre d'éléments	Nombre de nœuds	Nombre de degrés de liberté
Maillage	N_e	N_n	N_{ddl}
Grossier	986	543	1 086
Fin	11 020	5 661	11 322
Très fin	447 156	224 555	449 110

Les valeurs numériques $K_{\bullet,h}$ des facteurs d'intensité de contraintes associés à chaque mode distinct \bullet (correspondant à I ou II) sont déterminées à partir de la solution éléments finis $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ à l'aide de la représentation (F.9) sous la forme d'une intégrale sur un domaine quelconque Ω_c encerclant la pointe de fissure :

$$K_{\bullet,h} = \int_{\Omega_c} \text{Tr} [(\mathbf{K} \varepsilon(\phi \underline{v}_{\bullet}) - \phi \sigma_{\bullet}^v) \varepsilon(\underline{u}_h)] \, d\Omega - \int_{\Omega_c} (\sigma_{\bullet}^v \nabla \phi) \cdot \underline{u}_h \, d\Omega \quad (\text{G.2})$$

$(\underline{v}_{\bullet}, \sigma_{\bullet}^v)$ correspondent à des solutions singulières (à énergie infinie) du problème d'élasticité défini au voisinage de la pointe de fissure, qui sont connues analytiquement dans le repère local associé à la fissure ; la fonction scalaire ϕ est supposée

continûment dérivable sur Ω_c , nulle sur le contour extérieur Γ_e de Ω_c , et a priori quelconque à l'intérieur du domaine Ω_c et sur son contour intérieur Γ_i .

Dans cette étude, on considère un domaine d'extraction Ω_c correspondant à une couronne centrée autour de la pointe de fissure et délimitée par les deux cercles intérieur Γ_i et extérieur Γ_e de rayons respectifs R_i et R_e (cf. figure F.3). La couronne d'extraction Ω_c est alors caractérisée par :

- son épaisseur $\Delta R = R_e - R_i$ définissant sa taille ;
- son rayon moyen $R_{\text{moy}} = \frac{R_e + R_i}{2}$ définissant sa position par rapport à la pointe de fissure.

On choisit une fonction ϕ continue, valant 1 (resp. 0) sur le contour intérieur Γ_i (resp. contour extérieur Γ_e) et évoluant linéairement avec le rayon r ; celle-ci est définie en (F.10).

On cherche non seulement à déterminer l'influence du maillage associée à la discrétisation éléments finis sur la valeur numérique approchée des facteurs d'intensité de contraintes, mais aussi à vérifier l'indépendance du support de la couronne d'extraction Ω_c pour chacun des maillages pris séparément.

2 Influence de la discrétisation éléments finis, de la taille et de la position du domaine d'extraction

Une étude de l'influence de la taille et de la position de la couronne d'extraction Ω_c sur la valeur approchée des facteurs d'intensité de contraintes obtenue en utilisant la solution éléments finis $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ est menée conjointement sur les trois maillages considérés pour les problèmes en mode I pur et en mode mixte I et II.

Les résultats sont présentés en introduisant des grandeurs normalisées par la longueur de la fissure a (ou adimensionnées) :

$$\frac{\Delta R}{a} = \frac{R_e - R_i}{a} \quad \text{et} \quad \frac{R_{\text{moy}}}{a} = \frac{R_e + R_i}{2a}$$

2.1 Facteur d'intensité de contraintes K_I pour le problème en mode I pur

La figure G.3 représente l'évolution de la valeur approchée K_{Ih} du facteur d'intensité de contraintes en mode I en fonction de la taille normalisée $\Delta R/a$ de la couronne d'extraction Ω_c à position fixée ($R_{\text{moy}} = 2.5$, soit $R_{\text{moy}}/a = 5/7 \simeq 0.714$) d'une part, et de sa position normalisée R_{moy}/a à taille fixée ($\Delta R = 1$, soit $\Delta R/a = 2/7 \simeq 0.286$) d'autre part, pour chacun des trois maillages éléments finis. Les valeurs numériques obtenues sont comparées à des valeurs théoriques analytiques et de référence.

Pour chacun des maillages pris séparément, on constate que les valeurs numériques K_{Ih} obtenues à l'aide de la technique d'extraction couplée à la méthode des éléments finis sont quasi-indépendantes du domaine d'extraction Ω_c . Dans le cas du maillage grossier, la valeur maximale de l'écart relatif entre les différentes valeurs approchées K_{Ih} est inférieure à 0.2%. Dans le cas des maillages fin et très fin, celle-ci est inférieure à 0.001% et 0.0001%, respectivement.

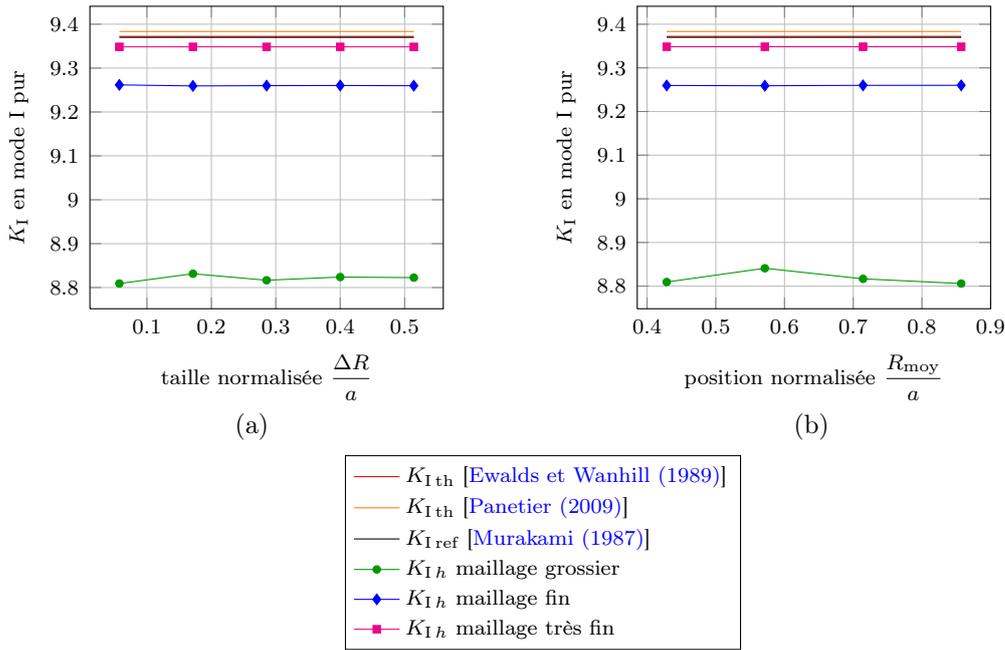


FIGURE G.3: Évolution du facteur d'intensité de contraintes K_I en fonction de la taille normalisée $\Delta R/a$ (a) et de la position normalisée R_{moy}/a (b) de la couronne d'extraction Ω_c pour le problème en mode I pur.

La valeur moyenne $\langle K_{Ih} \rangle$ des différentes quantités approchées K_{Ih} ainsi que l'erreur relative correspondante ε_I par rapport à la valeur théorique la plus élevée $K_{Ith} = 9.3834$ sont déterminées et reportées dans le tableau G.4 pour chacun des maillages considérés. On observe que la valeur numérique moyenne $\langle K_{Ih} \rangle$ est d'autant plus faible que le maillage est raffiné. Rappelons que la technique d'extraction utilisée n'introduit pas d'autres sources d'approximation que celle inhérente à la résolution par la méthode des éléments finis. La solution éléments finis $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ calculée en utilisant le maillage très fin conduit à une valeur quasi-exacte du facteur d'intensité de contraintes K_I .

TABLE G.4: Valeur approchée moyenne $\langle K_{Ih} \rangle$ associée au mode I et erreur relative ε_I par rapport à la valeur théorique $K_{I\text{th}} = 9.3834$ pour les maillages grossier, fin et très fin.

Maillage	Valeur approchée moyenne	Erreur relative (%)
	$\langle K_{Ih} \rangle$	ε_I
Grossier	8.8200	6.2
Fin	9.2600	1.3
Très fin	9.3484	0.37

2.2 Facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} pour le problème en mode mixte I et II

De manière analogue au problème précédent en mode I pur, les figures G.4 et G.5 représentent l'évolution des valeurs approchées K_{Ih} et K_{IIh} des facteurs d'intensité de contraintes associés respectivement aux modes de sollicitation I et II en fonction de la taille normalisée $\Delta R/a$ de la couronne d'extraction Ω_c à position fixée ($R_{\text{moy}} = 2.5$, soit $R_{\text{moy}}/a = 5/7 \simeq 0.714$) d'une part, et de sa position normalisée R_{moy}/a à taille fixée ($\Delta R = 1$, soit $\Delta R/a = 2/7 \simeq 0.286$) d'autre part, pour chacun des trois maillages considérés.

Dans le cas du mode I, les résultats sont similaires à ceux obtenus pour le problème en mode I pur. Les valeurs approchées K_{Ih} du facteur d'intensité de contraintes K_I ne dépendent quasiment pas des caractéristiques géométriques de la couronne d'extraction Ω_c . Dans le cas du maillage grossier, la valeur maximale de l'écart relatif entre les différentes valeurs numériques K_{Ih} est inférieure à 0.6%. Dans les deux autres cas de maillages (fin et très fin), celle-ci est inférieure à 0.003%.

En revanche, dans le cas du mode II, les résultats affichés par la technique d'extraction sont légèrement moins précis que ceux obtenus pour le mode I dans le cas du maillage grossier. Dans ce dernier cas, la valeur maximale de l'écart relatif entre les différentes valeurs approchées K_{IIh} est de l'ordre de 1.8%. En outre, à taille de couronne fixée, on constate que la valeur numérique K_{IIh} est d'autant plus proche des valeurs de référence $K_{II\text{ref}}$ que la position de la couronne Ω_c est éloignée de la pointe de fissure. Dans le cas des maillages fin et très fin, l'écart relatif maximal est inférieur à 0.5% et 0.05%, respectivement.

Les valeurs moyennes $\langle K_{Ih} \rangle$ et $\langle K_{IIh} \rangle$ des quantités approchées K_{Ih} et K_{IIh} sont reportées dans le tableau G.5 pour les maillages grossier, fin et très fin. Ces valeurs moyennes sont comparées aux valeurs de référence les plus élevées $K_{I\text{ref}} = 34.0$ et $K_{II\text{ref}} = 4.55$ associées aux mode I et II, respectivement. Les erreurs relatives correspondantes ε_I et ε_{II} sont d'autant plus faibles que le maillage est raffiné. Notons que la solution éléments finis $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ obtenue à l'aide du maillage très fin est

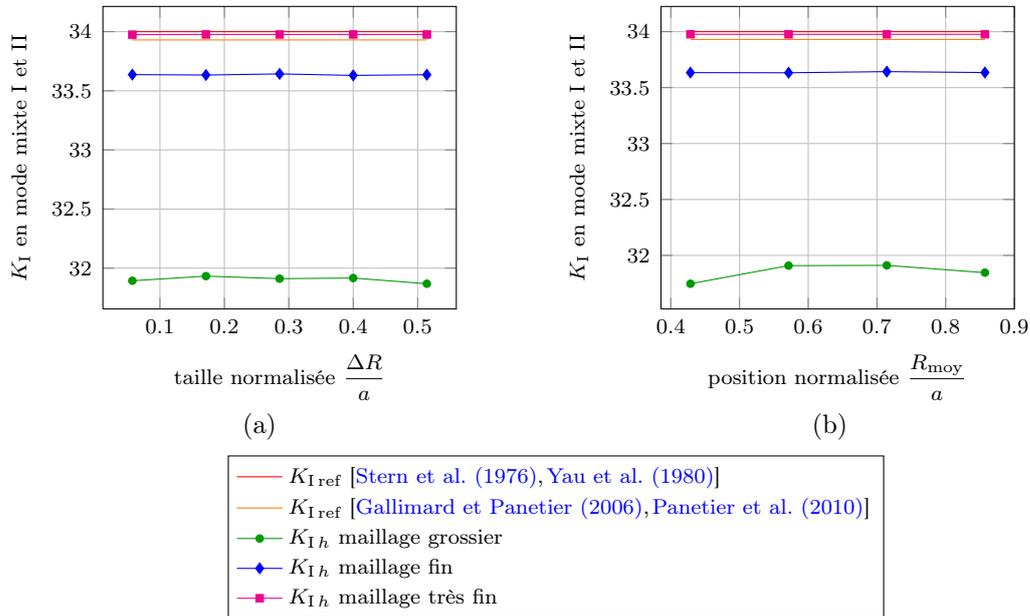


FIGURE G.4: Évolution du facteur d'intensité de contraintes K_I en fonction de la taille normalisée $\Delta R/a$ (a) et de la position normalisée R_{moy}/a (b) de la couronne d'extraction Ω_c pour le problème en mode mixte I et II.

quasi-convergente et permet une évaluation quasi-exacte des facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} .

TABLE G.5: Valeurs approchées moyennes $\langle K_{Ih} \rangle$ et $\langle K_{IIh} \rangle$ associées aux modes I et II et erreurs relatives correspondantes ε_I et ε_{II} par rapport aux valeurs de référence $K_{Iref} = 34.0$ et $K_{IIref} = 4.55$, respectivement, pour les maillages grossier, fin et très fin.

Maillage	Valeur approchée moyenne		Erreur relative (%)	
	$\langle K_{Ih} \rangle$	$\langle K_{IIh} \rangle$	ε_I	ε_{II}
Grossier	31.8777	4.4418	6.4	2.4
Fin	33.6351	4.5128	1.1	0.82
Très fin	33.9761	4.5337	0.07	0.36

Finalement, les valeurs numériques K_{Ih} et K_{IIh} obtenues à l'aide de la technique d'extraction décrite au paragraphe 2.2 de l'annexe F et mise en œuvre dans le chapitre 4 constituent des approximations de bonne qualité des facteurs d'intensité de contraintes en modes I et II. Les résultats affichés par la technique d'extraction sont d'autant plus précis que la qualité de la solution éléments finis $(\underline{u}_h, \sigma_h)$ est élevée. En outre, ils sont quasi-indépendants des caractéristiques géométriques de

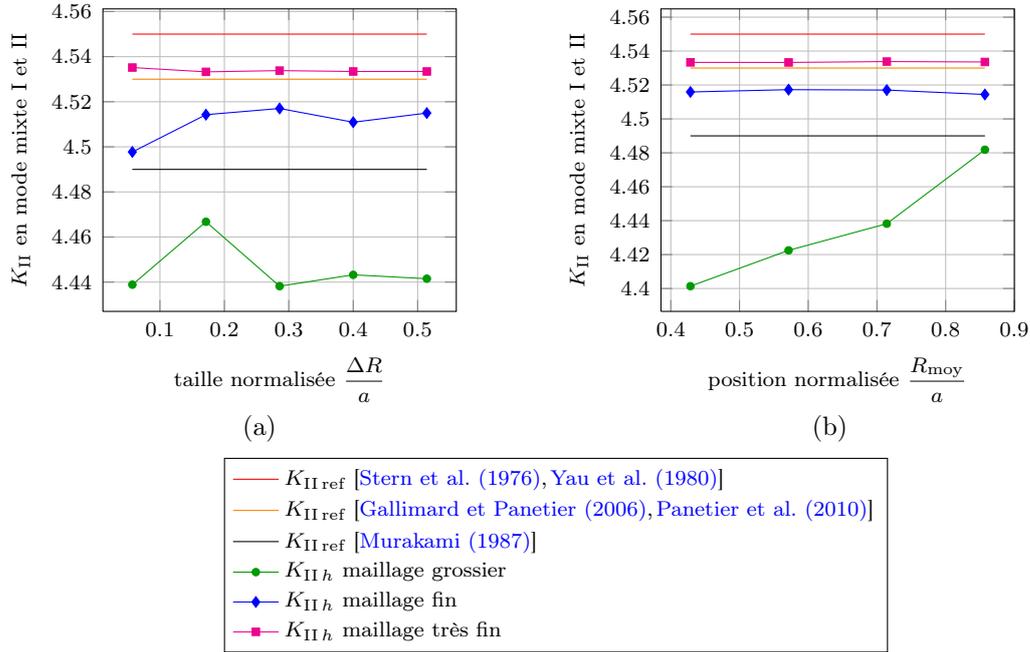


FIGURE G.5: Évolution du facteur d'intensité de contraintes K_{II} en fonction de la taille normalisée $\Delta R/a$ (a) et de la position normalisée R_{moy}/a (b) de la couronne d'extraction Ω_c pour le problème en mode mixte I et II.

la couronne d'extraction Ω_c dès lors que cette dernière est choisie suffisamment éloignée de la singularité située en pointe de fissure. Enfin, signalons que ces résultats corroborent ceux établis dans une étude similaire menée dans [Panetier (2009)].

Annexe H

Paramètres de discrétisation éléments finis utilisés dans les exemples numériques

Cette annexe fournit un tableau récapitulatif des paramètres de discrétisation associés aux maillages éléments finis Ω_h et de référence $\Omega_{\bar{h}}$ pour l'ensemble des applications numériques traitées dans ce document. Le tableau [H.1](#) regroupe le degré d'interpolation p , le nombre d'éléments N_e , le nombre de nœuds N_n et le nombre de degrés de liberté N_{ddl} associés aux discrétisations éléments finis.

TABLE H.1: Caractéristiques associées aux maillages éléments finis Ω_h et de référence $\Omega_{\bar{h}}$ pour les différents exemples numériques.

Structure	Maillage éléments finis Ω_h				Maillage de référence $\Omega_{\bar{h}}$			
	Degré d'interpolation p	Nombre d'éléments N_e	Nombre de nœuds N_n	Nombre de degrés de liberté N_{dof}	Degré d'interpolation p	Nombre d'éléments N_e	Nombre de nœuds N_n	Nombre de degrés de liberté N_{dof}
Chapitre 2								
capteur d'effort 2D	1	11 766	6 299	12 598	1	3 331 632	1 671 043	3 342 086
structure fissurée 2D	1	7 751	4 122	8 244	2	1 082 011	2 170 788	4 341 576
-	2	7 751	15 996	31 992	2	1 082 011	2 170 788	4 341 576
plaque trouée 3D	1	23 493	6 125	18 375	1	1 503 552	284 753	854 259
tête de réacteur nucléaire 3D	1	38 099	8 730	26 190	1	304 792	60 381	181 143
manchon d'hélicoptère 3D	1	19 778	5 898	17 694	1	1 265 792	250 274	750 822
Chapitre 3								
capteur d'effort 2D	1	11 766	6 299	12 598	1	3 331 632	1 671 043	3 342 086
structure fissurée 2D	1	7 751	4 122	8 244	2	1 082 011	2 170 788	4 341 576
plaque trouée 3D	1	2 075	724	2 172	1	1 062 400	199 293	597 879
Chapitre 4								
structure fissurée 2D	1	7 751	4 122	8 244				
Annexe G								
plaque fissurée 2D	1	986	543	1 086				
maillage grossier	1	11 020	5 661	11 322				
maillage fin	1	447 156	224 555	449 110				
maillage très fin	1							

Bibliographie

- [Adams (1975)] R. A. ADAMS : *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975. (Cité en page 9.)
- [Ainsworth et Oden (1993a)] M. AINSWORTH et J. T. ODEN : A posteriori error estimators for second order elliptic systems : Part 2. An optimal order process for calculating self-equilibrating fluxes. *Computers & Mathematics with Applications*, 26(9):75–87, 1993a. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0898-1221\(93\)90007-I](http://dx.doi.org/10.1016/0898-1221(93)90007-I). (Cité en page 36.)
- [Ainsworth et Oden (1993b)] M. AINSWORTH et J. T. ODEN : A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods. *Numerische Mathematik*, 65(1):23–50, 1993b. ISSN 0029-599X. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01385738>. (Cité en page 36.)
- [Ainsworth et Oden (1997)] M. AINSWORTH et J. T. ODEN : A posteriori error estimation in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142(1):1–88, 1997. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01107-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01107-3). (Cité en pages 2, 23, 30, 33, 35 et 36.)
- [Ainsworth et Oden (2000)] M. AINSWORTH et J. T. ODEN : *A posteriori error estimation in finite element analysis*, vol. 37. Wiley-Interscience, New York, 2000. (Cité en pages 2 et 17.)
- [Ainsworth (1994)] M. AINSWORTH : The performance of Bank-Weiser’s error estimator for quadrilateral finite elements. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 10(5):609–623, 1994. ISSN 1098-2426. URL <http://dx.doi.org/10.1002/num.1690100508>. (Cité en page 35.)
- [Ainsworth (1996)] M. AINSWORTH : The influence and selection of subspaces for a posteriori error estimators. *Numerische Mathematik*, 73:399–418, 1996. ISSN 0029-599X. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s002110050198>. (Cité en pages 35 et 36.)
- [Ainsworth (1998)] M. AINSWORTH : A posteriori error estimation for fully discrete hierarchic models of elliptic boundary value problems on thin domains. *Numerische Mathematik*, 80(3):325–362, 1998. ISSN 0029-599X. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s002110050370>. 10.1007/s002110050370. (Cité en page 65.)

- [Ainsworth et Craig (1991)] M. AINSWORTH et A. CRAIG : A posteriori error estimators in the finite element method. *Numerische Mathematik*, 60:429–463, 1991. ISSN 0029-599X. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01385730>. 10.1007/BF01385730. (Cité en page 22.)
- [Aki et Richards (2002)] K. AKI et P. G. RICHARDS : *Quantitative Seismology, 2nd Ed.* University Science Books, 2002. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2002quse.book.....A>. (Cité en page 217.)
- [Alaoui et al. (2011)] L. E. ALAOUI, A. ERN et M. VOHRALÍK : Guaranteed and robust a posteriori error estimates and balancing discretization and linearization errors for monotone nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(37–40):2782–2795, 2011. ISSN 0045-7825. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2010.03.024>. Special Issue on Modeling Error Estimation and Adaptive Modeling. (Cité en page 66.)
- [Alfrey (1944)] T. ALFREY : Non-homogeneous stresses in viscoelastic media. *Quart. Appl. Math.*, 2(2):113–119, 1944. (Cité en page 217.)
- [Almeida et Oden (2010)] R. C. ALMEIDA et J. T. ODEN : Solution verification, goal-oriented adaptive methods for stochastic advection–diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(37-40):2472–2486, 2010. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2010.04.001>. (Cité en page 56.)
- [Ammar et al. (2010)] A. AMMAR, F. CHINESTA, P. DÍEZ et A. HUERTA : An error estimator for separated representations of highly multidimensional models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(25-28):1872–1880, 2010. ISSN 0045-7825. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2010.02.012>. (Cité en page 65.)
- [Arioli et Loghin (2008)] M. ARIOLI et D. LOGHIN : Stopping criteria for mixed finite element problems. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 29: 178–192, 2008. (Cité en page 66.)
- [Arioli et al. (2005)] M. ARIOLI, D. LOGHIN et A. J. WATHEN : Stopping criteria for iterations in finite element methods. *Numerische Mathematik*, 99:381–410, 2005. ISSN 0029-599X. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00211-004-0568-z>. 10.1007/s00211-004-0568-z. (Cité en page 66.)
- [Aziz et Babuška (1972)] A. AZIZ et I. BABUŠKA : *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations.* Academic Press, New York, 1972. (Cité en page 17.)
- [Babuška et Melenk (1997)] I. BABUŠKA et J. M. MELENK : THE PARTITION OF UNITY METHOD. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(4):727–758, 1997. ISSN 1097-0207. URL [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970228\)40:4%3C727::AID-NME86%3E3.0.CO;2-N](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970228)40:4%3C727::AID-NME86%3E3.0.CO;2-N). (Cité en page 33.)

- [Babuška et Miller (1984)] I. BABUŠKA et A. MILLER : The post-processing approach in the finite element method - Part 2 : The calculation of stress intensity factors. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(6):1111–1129, 1984. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620200611>. (Cité en pages 48, 231, 233 et 234.)
- [Babuška et Miller (1987)] I. BABUŠKA et A. MILLER : A feedback finite element method with a posteriori error estimation. part 1 : The finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimator. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61:1–40, 1987. (Cité en pages 27 et 30.)
- [Babuška et Rheinboldt (1978a)] I. BABUŠKA et W. C. RHEINBOLDT : A-posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(10):1597–1615, 1978a. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620121010>. (Cité en pages 27, 31 et 33.)
- [Babuška et Rheinboldt (1978b)] I. BABUŠKA et W. C. RHEINBOLDT : Error estimates for adaptative finite element computation. *SIAM, Journal of Numerical Analysis*, 15(4):736–754, 1978b. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620121010>. (Cité en pages 2 et 27.)
- [Babuška et Rheinboldt (1979)] I. BABUŠKA et W. C. RHEINBOLDT : Analysis of optimal finite-element meshes in R^1 . *Math. Comp.*, 33(146):435–463, 1979. ISSN 0025-5718. URL <http://dx.doi.org/10.2307/2006290>. (Cité en pages 27 et 30.)
- [Babuška et Strouboulis (2001)] I. BABUŠKA et T. STROUBOULIS : *The finite element method and its reliability*. Oxford University Press, Oxford, 2001. (Cité en pages 2, 17 et 77.)
- [Babuška et al. (1999)] I. BABUŠKA, T. STROUBOULIS et S. K. GANGARAJ : Guaranteed computable bounds for the exact error in the finite element solution Part I : One-dimensional model problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4):51–79, 1999. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00330-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00330-8). (Cité en page 37.)
- [Babuška et al. (1997a)] I. BABUŠKA, T. STROUBOULIS, S. K. GANGARAJ et C. S. UPADHYAY : Pollution error in the h-version of the finite element method and the local quality of the recovered derivatives. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 140(1-2):1–37, 1997a. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01013-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01013-4). (Cité en pages 44 et 46.)
- [Babuška et al. (1994a)] I. BABUŠKA, T. STROUBOULIS, A. MATHUR et C. S. UPADHYAY : Pollution error in the h-version of the finite element method and the local quality of a-posteriori estimators. *Finite Elements in Analysis and Design*, 17(4):273–321, 1994a. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0168-874X\(94\)90003-5](http://dx.doi.org/10.1016/0168-874X(94)90003-5). (Cité en pages 3, 44, 46 et 47.)

- [Babuška et al. (1994b)] I. BABUŠKA, T. STROUBOULIS et C. S. UPADHYAY : A model study of the quality of a posteriori error estimators for linear elliptic problems. Error estimation in the interior of patchwise uniform grids of triangles. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 114(3-4):307–378, 1994b. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(94\)90177-5](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(94)90177-5). (Cité en page 19.)
- [Babuška et al. (1997b)] I. BABUŠKA, T. STROUBOULIS et C. S. UPADHYAY : A model study of the quality of a posteriori error estimators for finite element solutions of linear elliptic problems, with particular reference to the behavior near the boundary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(14):2521–2577, 1997b. URL [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970730\)40:14%3C2521::AID-NME181%3E3.0.CO;2-A](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970730)40:14%3C2521::AID-NME181%3E3.0.CO;2-A). (Cité en page 19.)
- [Babuška et al. (1995)] I. BABUŠKA, T. STROUBOULIS, C. S. UPADHYAY et S. K. GANGARAJ : A posteriori estimation and adaptive control of the pollution error in the h-version of the finite element method. *International journal for numerical methods in engineering*, 38(24):4207–4235, 1995. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620382408>. (Cité en pages 44 et 46.)
- [Babuška et al. (1994c)] I. BABUŠKA, T. STROUBOULIS, C. S. UPADHYAY, S. K. GANGARAJ et K. COPPS : Validation of a posteriori error estimators by numerical approach. *International journal for numerical methods in engineering*, 37(7):1073–1123, 1994c. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620370702>. (Cité en pages 19, 36, 76, 77 et 96.)
- [Babuška et al. (1981)] I. BABUŠKA, B. SZABÓ et I. KATZ : The p-Version of the Finite Element Method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 18(3):515–545, 1981. URL <http://dx.doi.org/10.1137/0718033>. (Cité en page 77.)
- [Bangerth et Rannacher (2003)] W. BANGERTH et R. RANNACHER : *Adaptive finite element methods for differential equations*. Birkhäuser, 2003. URL <http://www.springer.com/birkhauser/mathematics/book/978-3-7643-7009-1>. (Cité en page 181.)
- [Bank et Weiser (1985)] R. E. BANK et A. WEISER : Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Mathematics of Computation*, 44(170):283–301, 1985. ISSN 0025-5718. URL <http://www.jstor.org/stable/2007953>. (Cité en pages 33, 35 et 36.)
- [Barlow (1976)] J. BARLOW : Optimal stress locations in finite element models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10(2):243–251, 1976. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620100202>. (Cité en pages 22 et 229.)
- [Barsoum (1974)] R. S. BARSOUM : Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal of Fracture*, 10:603–605, 1974. ISSN 0376-9429. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF00155266>. 10.1007/BF00155266. (Cité en page 229.)

- [Bathe (1996)] K. BATHE : *Finite element procedure in engineering analysis*. Prentice-Hall, 1996. (Cité en page 11.)
- [Bauman et al. (2009)] P. T. BAUMAN, J. T. ODEN et S. PRUDHOMME : Adaptive multiscale modeling of polymeric materials with Arlequin coupling and Goals algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(5-8):799–818, 2009. ISSN 0045-7825. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2008.10.014>. (Cité en page 65.)
- [Becker et al. (1995)] R. BECKER, C. JOHNSON et R. RANNACHER : Adaptive error control for multigrid finite element. *Computing*, 55:271–288, 1995. ISSN 0010-485X. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02238483>. (Cité en page 66.)
- [Becker et Rannacher (1996)] R. BECKER et R. RANNACHER : A feed-back approach to error control in finite element methods : Basic analysis and examples. *Journal of Numerical Mathematics*, 4:237–264, 1996. URL <http://hal.inria.fr/inria-00343044/en/>. (Cité en pages 3, 48, 51, 55 et 56.)
- [Becker et Rannacher (2001)] R. BECKER et R. RANNACHER : An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. *Acta Numerica, A. Iserles (ed.), Cambridge University Press*, 10:1–120, 2001. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0962492901000010>. (Cité en pages 3, 52, 56, 157 et 201.)
- [Belytschko et Black (1999)] T. BELYTSCHKO et T. BLACK : Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5):601–620, 1999. ISSN 1097-0207. URL [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990620\)45:5%3C601::AID-NME598%3E3.0.CO;2-S](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990620)45:5%3C601::AID-NME598%3E3.0.CO;2-S). (Cité en pages 60 et 231.)
- [Bernardi et al. (2009)] C. BERNARDI, T. CHACÓN REBOLLO, E. CHACÓN VERA et D. FRANCO CORONIL : A posteriori error analysis for two non-overlapping domain decomposition techniques. *Applied Numerical Mathematics*, 59(6):1214–1236, 2009. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.apnum.2008.06.004>. (Cité en page 65.)
- [Betti (1872)] E. BETTI : Teoria della elasticita. *Il Nuovo Cimento (1869-1876)*, 7(1):69–97, 1872. (Cité en page 231.)
- [Blacker et Belytschko (1994)] T. BLACKER et T. BELYTSCHKO : Superconvergent patch recovery with equilibrium and conjoint interpolant enhancements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(3):517–536, 1994. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620370309>. (Cité en page 24.)
- [Bonnet et Frangi (2006)] M. BONNET et A. FRANGI : *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*. Editions Ecole Polytechnique, 2006. ISBN 273021349X. (Cité en pages x, 228 et 229.)

- [Boroomand et Zienkiewicz (1997a)] B. BOROOMAND et O. C. ZIENKIEWICZ : An improved REP recovery and the effectivity robustness test. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(17):3247–3277, 1997a. URL [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970915\)40:17%3C3247::AID-NME211%3E3.0.CO;2-Z](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970915)40:17%3C3247::AID-NME211%3E3.0.CO;2-Z). (Cité en page 24.)
- [Boroomand et Zienkiewicz (1997b)] B. BOROOMAND et O. C. ZIENKIEWICZ : RECOVERY BY EQUILIBRIUM IN PATCHES (REP). *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(1):137–164, 1997b. ISSN 1097-0207. URL [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970115\)40:1%3C137::AID-NME57%3E3.0.CO;2-5](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970115)40:1%3C137::AID-NME57%3E3.0.CO;2-5). (Cité en page 24.)
- [Brenner et Scott (2008)] S. C. BRENNER et L. R. SCOTT : *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, vol. 15. Springer-Verlag, New York, 2008. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-75934-0>. (Cité en page 10.)
- [Bui et Proix (1985)] H. D. BUI et J. M. PROIX : Découplage des modes mixtes de rupture en thermo-élasticité par des intégrales indépendantes du contour. *Dans Actes du Troisième Colloque Tendances Actuelles en Calcul de Structures*, p. 631–643, Bastia, 1985. (Cité en page 230.)
- [Carini et Donato (1992)] A. CARINI et O. D. DONATO : Fundamental solutions for linear viscoelastic continua. *International Journal of Solids and Structures*, 29(23):2989–3009, 1992. ISSN 0020-7683. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(92\)90154-L](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(92)90154-L). (Cité en page 217.)
- [Carstensen et Funken (2000a)] C. CARSTENSEN et S. FUNKEN : Constants in Clément-interpolation error and residual based a posteriori error estimates in finite element methods. *East-West Journal of Numerical Analysis*, 8(3):153–176, 2000a. (Cité en page 30.)
- [Carstensen et al. (2006)] C. CARSTENSEN, R. KLOSE et A. ORLANDO : Reliable and efficient equilibrated a posteriori finite element error control in elastoplasticity and elastoviscoplasticity with hardening. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(19-22):2574–2598, 2006. ISSN 0045-7825. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2005.05.016>. (Cité en page 65.)
- [Carstensen et Funken (2000b)] C. CARSTENSEN et S. A. FUNKEN : Fully Reliable Localized Error Control in the FEM. *SIAM J. Sci. Comput.*, 21(4):1465–1484, 2000b. ISSN 1064-8275. URL <http://dx.doi.org/10.1137/S1064827597327486>. (Cité en pages 33, 80, 84 et 85.)
- [Carstensen et Funken (2001)] C. CARSTENSEN et S. A. FUNKEN : Averaging technique for FE – a posteriori error control in elasticity. Part I : Conforming FEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(18-19):2483–2498, 2001. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(00\)00248-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00248-6). (Cité en page 21.)
- [Cecot (2007)] W. CECOT : Adaptive FEM analysis of selected elastic–visco-plastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(37-40):3859–3870, 2007. ISSN 0045-7825. URL <http://dx.doi.org/10.1016/>

- [j.cma.2006.10.054](#). Special Issue Honoring the 80th Birthday of Professor Ivo Babuška. (Cité en page 65.)
- [Chaillou et Suri (2007)] A. CHAILLOU et M. SURI : A posteriori estimation of the linearization error for strongly monotone nonlinear operators. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 205(1):72–87, 2007. ISSN 0377-0427. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2006.04.041>. (Cité en page 66.)
- [Chaillou et Suri (2006)] A. L. CHAILLOU et M. SURI : Computable error estimators for the approximation of nonlinear problems by linearized models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(1–3):210–224, 2006. ISSN 0045-7825. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2006.03.008>. (Cité en page 66.)
- [Chamoin (2007)] L. CHAMOIN : *Encadrement a posteriori de quantités locales dans les problèmes de viscoélasticité linéaire résolus par la Méthode des Éléments Finis*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2007. (Cité en pages 62 et 218.)
- [Chamoin et Ladevèze (2007)] L. CHAMOIN et P. LADEVÈZE : Bounds on history-dependent or independent local quantities in viscoelasticity problems solved by approximate methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71(12):1387–1411, 2007. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1978>. (Cité en pages 56 et 60.)
- [Chamoin et Ladevèze (2008)] L. CHAMOIN et P. LADEVÈZE : A non-intrusive method for the calculation of strict and efficient bounds of calculated outputs of interest in linear viscoelasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(9-12):994–1014, 2008. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2007.09.021>. (Cité en pages 56, 63, 155, 181 et 218.)
- [Chamoin et Ladevèze (2009)] L. CHAMOIN et P. LADEVÈZE : Strict and practical bounds through a non-intrusive and goal-oriented error estimation method for linear viscoelasticity problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 45(4):251–262, 2009. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.finel.2008.10.003>. (Cité en pages 63, 155, 181 et 218.)
- [Chamoin et al. (2012a)] L. CHAMOIN, P. LADEVÈZE et F. PLED : Goal-oriented control of finite element models : recent advances and performances on 3D industrial applications. *Dans ASME 2012 - 11th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis (ESDA)*, Nantes, France, 2012a. URL <http://www.asmeconferences.org/esda2012>. (Cité en page 156.)
- [Chamoin et al. (2012b)] L. CHAMOIN, E. FLORENTIN, S. PAVOT et V. VISSEQ : Robust goal-oriented error estimation based on the constitutive relation error for stochastic problems. *Computers & Structures*, 106–107(0):189–195, 2012b. ISSN 0045-7949. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.05.002>. (Cité en page 65.)

- [Cheddadi et al. (2008)] I. CHEDDADI, R. FUCÍK, M. I. PRIETO et M. VOHRALÍK : Computable a posteriori error estimates in the finite element method based on its local conservativity : improvements using local minimization. *ESAIM : Proc.*, 24:77–96, 2008. URL <http://dx.doi.org/10.1051/proc:2008031>. (Cité en page 30.)
- [Chen et Shield (1977)] F. H. K. CHEN et R. T. SHIELD : Conservation laws in elasticity of the J-integral type. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 28:1–22, 1977. ISSN 0044-2275. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01590704>. 10.1007/BF01590704. (Cité en page 230.)
- [Cherepanov (1967)] G. CHEREPANOV : Crack propagation in continuous media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 31(3):503–512, 1967. ISSN 0021-8928. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0021-8928\(67\)90034-2](http://dx.doi.org/10.1016/0021-8928(67)90034-2). (Cité en page 230.)
- [Cho et Oden (1997)] J.-R. CHO et J. ODEN : Locking and boundary layer in hierarchical models for thin elastic structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149(1-4):33–48, 1997. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00057-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00057-1). (Cité en page 65.)
- [Choi et Paraschivoiu (2004)] H. W. CHOI et M. PARASCHIVOIU : Adaptive computations of a posteriori finite element output bounds : a comparison of the "hybrid-flux" approach and the "flux-free" approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(36-38):4001–4033, 2004. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2004.02.012>. (Cité en page 39.)
- [Ciarlet (1978)] P. G. CIARLET : *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, 1978. (Cité en pages 11 et 17.)
- [Cirak et Ramm (1998)] F. CIRAK et E. RAMM : A posteriori error estimation and adaptivity for linear elasticity using the reciprocal theorem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 156:351–362, 1998. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00220-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00220-X). (Cité en pages 3 et 51.)
- [Clément (1975)] P. CLÉMENT : Approximation by finite element functions using local regularization. *RAIRO Anal. Numer.*, 9:77–84, 1975. (Cité en page 29.)
- [Coorevits et al. (1998)] P. COOREVITS, J. P. DUMEAU et J. P. PELLE : Error estimator and adaptivity for three-dimensional finite element analyses. Dans P. LADEVÈZE et J. T. ODEN, édés : *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, vol. 47 de *Studies in Applied Mechanics*, p. 443–457. Elsevier, 1998. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0922-5382\(98\)80025-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0922-5382(98)80025-1). (Cité en pages 39 et 70.)
- [Coorevits et al. (1999)] P. COOREVITS, J. P. DUMEAU et J. P. PELLE : Control of analyses with isoparametric elements in both 2D and 3D. *International journal for numerical methods in engineering*, 46(2):157–176, 1999. (Cité en page 76.)

- [Cotttereau et al. (2009)] R. COTTEREAU, P. DÍEZ et A. HUERTA : Strict error bounds for linear solid mechanics problems using a subdomain-based flux-free method. *Computational Mechanics*, 44(4):533–547, 2009. ISSN 0178-7675. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00466-009-0388-1>. (Cité en pages 33, 37 et 82.)
- [Courant et Hilbert (1953)] R. COURANT et D. HILBERT : *Methods of Mathematical Physics*. Interscience publishers, New York, 1953. (Cité en page 215.)
- [Dahan et Predeleanu (1980)] M. DAHAN et M. PREDELEANU : Solutions fondamentales pour un milieu élastique   isotropie transverse. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 31(3):413–424, 1980. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01590666>. (Cité en page 217.)
- [de Almeida et Pereira (2006)] J. P. M. de ALMEIDA et O. J. B. A. PEREIRA : Upper bounds of the error in local quantities using equilibrated and compatible finite element solutions for linear elastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(4-6):279–296, 2006. ISSN 0045-7825. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2004.09.012>. Adaptive Modeling and Simulation. (Cité en page 56.)
- [de Veubeke (1965)] B. F. de VEUBEKE : Displacement and equilibrium models in the finite element method by B. Fraeijs de Veubeke, Chapter 9, Pages 145–197 of Stress Analysis, Edited by O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, Published by John Wiley & Sons, 1965. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(3):287–342, 1965. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.339>. (Cité en pages 33, 37 et 69.)
- [Debongnie et al. (1995)] J. F. DEBONGNIE, H. G. ZHONG et P. BECKERS : Dual analysis with general boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 122(1-2):183–192, 1995. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(94\)00726-4](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(94)00726-4). (Cité en page 69.)
- [Demkowicz et al. (1984)] L. DEMKOWICZ, J. T. ODEN et T. STROUBOULIS : Adaptive finite elements for flow problems with moving boundaries. part I : Variational principles and a posteriori estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 46(2):217–251, 1984. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(84\)90063-X](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(84)90063-X). (Cité en pages 34 et 35.)
- [Demkowicz et al. (1985)] L. DEMKOWICZ, J. T. ODEN et T. STROUBOULIS : An adaptive p-version finite element method for transient flow problems with moving boundaries. Dans R. H. GALLAGHER, G. F. CAREY, J. T. ODEN et O. C. ZIENKIEWICZ,  ds : *Finite Elements in Fluids*, p. 291–305, 1985. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1985fef..conf..291D>. (Cité en page 34.)
- [Destuynder et al. (1983)] P. DESTUYNDER, M. DJAOUA et S. LESCURE : Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique. *Journal de mécanique théorique et appliquée*, 2(1):113–135, 1983. (Cité en page 230.)

- [Destuynder et Métivet (1999)] P. DESTUYNDER et B. MÉTIVET : Explicit error bounds in a conforming finite element method. *Mathematics of Computation*, 68:1379–1396, 1999. URL <http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-99-01093-5>. (Cité en page 69.)
- [Destuynder (1998)] P. DESTUYNDER : Une nouvelle estimation d'erreur en éléments finis. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 327(4):409–414, 1998. ISSN 0764-4442. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0764-4442\(99\)80058-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0764-4442(99)80058-5). (Cité en page 69.)
- [Díez et al. (1998)] P. DÍEZ, J. J. EGOZCUE et A. HUERTA : A posteriori error estimation for standard finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 163(1-4):141–157, 1998. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00009-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00009-7). (Cité en page 36.)
- [Díez et al. (2003)] P. DÍEZ, N. PARÉS et A. HUERTA : Recovering lower bounds of the error by postprocessing implicit residual a posteriori error estimates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(10):1465–1488, 2003. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.620>. (Cité en page 38.)
- [Díez et al. (2007)] P. DÍEZ, J. JOSÉ RÓDENAS et O. C. ZIENKIEWICZ : Equilibrated patch recovery error estimates : simple and accurate upper bounds of the error. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(10):2075–2098, 2007. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1837>. (Cité en pages 25 et 26.)
- [Duvaut et Lions (1972 - 1976)] G. DUVAUT et J. LIONS : *Les Inéquations en Mécanique et en Physique - Inequalities in Mechanics and Physics*. Dunod - Springer-Verlag, Paris - Berlin, 1972 - 1976. (Cité en page 29.)
- [Eason et al. (1956)] G. EASON, J. FULTON et I. N. SNEDDON : The Generation of Waves in an Infinite Elastic Solid by Variable Body Forces. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 248:575–607, 1956. URL <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.1956.0010>. (Cité en page 217.)
- [Eringen et Suhubi (1975)] A. C. ERINGEN et E. S. SUHUBI : *Elastodynamics, Vol. II*. Academic Press, London, 1975. (Cité en page 217.)
- [Ern et al. (2007)] A. ERN, S. NICAISE et M. VOHRALÍK : An accurate flux reconstruction for discontinuous Galerkin approximations of elliptic problems. *Comptes Rendus Mathématique*, 345(12):709–712, 2007. ISSN 1631-073X. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2007.10.036>. (Cité en page 69.)
- [Ern et al. (2010)] A. ERN, A. F. STEPHANSEN et M. VOHRALÍK : Guaranteed and robust discontinuous Galerkin a posteriori error estimates for convection–diffusion–reaction problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(1):114–130, 2010. ISSN 0377-0427. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2009.12.009>. (Cité en page 69.)
- [Ern et Vohralík (2009)] A. ERN et M. VOHRALÍK : Flux reconstruction and a posteriori error estimation for discontinuous Galerkin methods on general nonmat-

- ching grids. *Comptes Rendus Mathématique*, 347(7–8):441–444, 2009. ISSN 1631-073X. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2009.01.017>. (Cité en page 69.)
- [Ern et Vohralík (2012a)] A. ERN et M. VOHRALÍK : Adaptive inexact Newton methods for discretizations of nonlinear diffusion PDEs. I. General theory and a posteriori stopping criteria. Rap. tech., 2012a. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00681422>. (Cité en page 66.)
- [Ern et Vohralík (2012b)] A. ERN et M. VOHRALÍK : Adaptive inexact Newton methods for discretizations of nonlinear diffusion PDEs. II. Applications. Rap. tech., 2012b. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00681426>. (Cité en page 66.)
- [Ewalds et Wanhill (1989)] H. L. EWALDS et R. J. H. WANHILL : *Fracture Mechanics*. Edward Arnold, New York, 1989. (Cité en pages 236 et 240.)
- [Fierro et Veese (2006)] F. FIERRO et A. VEESER : A posteriori error estimators, gradient recovery by averaging, and superconvergence. *Numerische Mathematik*, 103:267–298, 2006. ISSN 0029-599X. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00211-005-0671-9>. 10.1007/s00211-005-0671-9. (Cité en page 26.)
- [Florentin (2002)] E. FLORENTIN : *Sur l'évaluation de la qualité locale des contraintes éléments finis en élasticité tridimensionnelle*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2002. (Cité en page 102.)
- [Florentin et al. (2002)] E. FLORENTIN, L. GALLIMARD et J. P. PELLE : Evaluation of the local quality of stresses in 3D finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(39-40):4441–4457, 2002. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(02\)00389-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00389-4). (Cité en pages 47, 77, 127 et 128.)
- [Florentin et Díez (2012)] E. FLORENTIN et P. DÍEZ : Adaptive reduced basis strategy based on goal oriented error assessment for stochastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 225–228(0):116–127, 2012. ISSN 0045-7825. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2012.03.016>. (Cité en page 65.)
- [Freese et Tracey (1976)] C. E. FREESE et D. M. TRACEY : The natural isoparametric triangle versus collapsed quadrilateral for elastic crack analysis. *International Journal of Fracture*, 12:767–770, 1976. ISSN 0376-9429. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF00037924>. 10.1007/BF00037924. (Cité en page 229.)
- [Gallimard (2009)] L. GALLIMARD : A constitutive relation error estimator based on traction-free recovery of the equilibrated stress. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78(4):460–482, 2009. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.2496>. (Cité en pages 43, 55, 85 et 86.)
- [Gallimard et Panetier (2006)] L. GALLIMARD et J. PANETIER : Error estimation of stress intensity factors for mixed-mode cracks. *International Journal for*

- Numerical Methods in Engineering*, 68(3):299–316, 2006. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1705>. (Cité en pages 179, 183, 229, 231, 232, 233, 234, 237, 242 et 243.)
- [Gerasimov et al. (2012)] T. GERASIMOV, M. R TER et E. STEIN : An explicit residual-type error estimator for Q1-quadrilateral extended finite element method in two-dimensional linear elastic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90(9):1118–1155, 2012. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.3363>. (Cité en pages 29 et 30.)
- [Giles et S li (2002)] M. B. GILES et E. S LI : Adjoint methods for PDEs : a posteriori error analysis and postprocessing by duality. *Acta Numerica*, 11:145–236, 2002. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S096249290200003X>. (Cité en page 52.)
- [González et Abascal (2004)] J. A. GONZÁLEZ et R. ABASCAL : Linear viscoelastic boundary element formulation for steady state moving loads. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28(7):815–823, 2004. ISSN 0955-7997. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.enganabound.2003.10.005>. (Cité en page 217.)
- [Graff (1975)] K. GRAFF : *Wave Motion in Elastic Solids*. Dover, New York, 1975. (Cité en page 217.)
- [Grätsch et Hartmann (2006)] T. GRÄTSCH et F. HARTMANN : Pointwise error estimation and adaptivity for the finite element method using fundamental solutions. *Computational Mechanics*, 37:394–407, 2006. ISSN 0178-7675. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00466-005-0711-4>. 10.1007/s00466-005-0711-4. (Cité en pages 63, 180 et 218.)
- [Greenberg (1948)] H. J. GREENBERG : The determination of upper and lower bounds for the solution of the Dirichlet problem. *Journal of mathematics and physics*, 27:161–182, 1948. (Cité en pages 48 et 181.)
- [Griffith (1921)] A. A. GRIFFITH : The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 221(582-593):163–198, 1921. URL <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.1921.0006>. (Cité en page 227.)
- [Hadamard (1932)] J. HADAMARD : *Le Problème de Cauchy et les équations aux D riv es Partielles Linéaires Hyperboliques*. Hermann, Paris, 1932. (Cité en page 217.)
- [Han (1994)] W. HAN : A posteriori error analysis for linearization of nonlinear elliptic problems and their discretizations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 17(7):487–508, 1994. ISSN 1099-1476. URL <http://dx.doi.org/10.1002/mma.1670170702>. (Cité en page 66.)
- [Hanyga (2002)] A. HANYGA : Propagation of Pulses in Viscoelastic Media. Dans I. P EN C K et V.  ERVEN Y,  ds : *Seismic Waves in Laterally Inho-*

- mogeneous Media*, Pageoph Topical Volumes, p. 1749–1769. Birkhäuser Basel, 2002. ISBN 978-3-0348-8146-3. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-8146-3_19. (Cité en page 217.)
- [Heintz et Samuelsson (2004)] P. HEINTZ et K. SAMUELSSON : On adaptive strategies and error control in fracture mechanics. *Computers & Structures*, 82(6):485–497, 2004. ISSN 0045-7949. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2003.10.013>. (Cité en page 50.)
- [Henshell et Shaw (1975)] R. D. HENSHELL et K. G. SHAW : Crack tip finite elements are unnecessary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9(3):495–507, 1975. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620090302>. (Cité en page 229.)
- [Hochard et Proslie (1992)] C. HOCHARD et L. PROSLIER : A simplified analysis of plate structures using Trefftz-functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 34(1):179–195, 1992. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620340111>. (Cité en pages 177 et 212.)
- [Huerta et Díez (2000)] A. HUERTA et P. DÍEZ : Error estimation including pollution assessment for nonlinear finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1-3):21–41, 2000. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00071-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00071-7). (Cité en pages 36, 37, 38, 46 et 47.)
- [Hughes (1987)] T. J. R. HUGHES : *The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1987. (Cité en pages 11 et 17.)
- [Irwin (1957)] G. R. IRWIN : Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24:361–364, 1957. (Cité en pages 227 et 230.)
- [Jiránek et al. (2010)] P. JIRÁNEK, Z. STRAKOŠ et M. VOHRALÍK : A Posteriori Error Estimates Including Algebraic Error and Stopping Criteria for Iterative Solvers. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(3):1567–1590, 2010. URL <http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/08073706X>. (Cité en page 66.)
- [Johnson et Hansbo (1992)] C. JOHNSON et P. HANSBO : Adaptive finite element methods in computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 101(1-3):143–181, 1992. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(92\)90020-K](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(92)90020-K). (Cité en pages 49 et 50.)
- [Kausel (2006)] E. KAUSEL : *Fundamental Solutions in Elastodynamics*. Cambridge University Press, 2006. URL <http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511546112>. (Cité en page 217.)
- [Kelly (1984)] D. W. KELLY : The self-equilibration of residuals and complementary a posteriori error estimates in the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(8):1491–1506, 1984. ISSN

- 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620200811>. (Cité en pages 33 et 36.)
- [Kelly et al. (1983)] D. W. KELLY, J. P. D. S. R. GAGO, O. C. ZIENKIEWICZ et I. BABUŐKA : A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method : Part I - error analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19(11):1593–1619, 1983. (Cité en page 30.)
- [Kempeneers et al. (2003)] M. KEMPENEERS, P. BECKERS, J. P. M. de ALMEIDA et O. J. B. A. PEREIRA : Modèles équilibre pour l’analyse duale. *Revue Européenne des  l ments Finis*, 12(6):737–760, 2003. (Cité en page 69.)
- [Kempeneers et al. (2009)] M. KEMPENEERS, J.-F. DEBONGNIE et P. BECKERS : Pure equilibrium tetrahedral finite elements for global error estimation by dual analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(4):513–536, 2009. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.2703>. (Cité en page 69.)
- [Kita et Kamiya (1995)] E. KITA et N. KAMIYA : Trefftz method : an overview. *Advances in Engineering Software*, 24(1–3):3–12, 1995. ISSN 0965-9978. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0965-9978\(95\)00067-4](http://dx.doi.org/10.1016/0965-9978(95)00067-4). (Cité en pages 211 et 212.)
- [Komp iŐ et al. (2005)] V. KOMPIŐ, M. ŐTIAVNICKÝ, M. KOMPIŐ et M. ŐMINDÁK : Trefftz interpolation based multi-domain boundary point method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(4):391–396, 2005. ISSN 0955-7997. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.enganabound.2004.06.007>. (Cité en page 212.)
- [Komp iŐ et al. (2004)] V. KOMPIŐ, M. TOMA, M. ŐMINDÁK et M. HANDRIK : Use of Trefftz functions in non-linear BEM/FEM. *Computers & Structures*, 82(27):2351–2360, 2004. ISSN 0045-7949. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.04.006>. (Cité en page 212.)
- [Krzizek et Neitaanmaki (1987)] M. KRIZEK et P. NEITAANMAKI : On superconvergence techniques. *Acta. Appl. Math.*, 9:175–198, 1987. (Cité en page 22.)
- [Kvamsdal et Okstad (1998)] T. KVAMSDAL et K. M. OKSTAD : Error estimation based on Superconvergent Patch Recovery using statically admissible stress fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42(3):443–472, 1998. ISSN 1097-0207. URL [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19980615\)42:3%3C443::AID-NME366%3E3.0.CO;2-G](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19980615)42:3%3C443::AID-NME366%3E3.0.CO;2-G). (Cité en page 24.)
- [Kř izek (1983)] M. KŘ IZEK : Conforming equilibrium finite element methods for some elliptic plane problems. *RAIRO Anal. Numer*, 17(1):35–65, 1983. URL <http://eudml.org/doc/193408>. (Cité en page 33.)
- [Ladevèze et Ladevèze (1978)] J. LADEVÈZE et P. LADEVÈZE : Upper bounds of the Poincaré constant in elasticity (in french). *Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei, Serie VIII*, 64:548–556, 1978. (Cité en page 168.)

- [Ladevèze (1975)] P. LADEVÈZE : *Comparaison de modèles de milieux continus*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1975. (Cité en pages 2, 36, 39 et 70.)
- [Ladevèze (2006)] P. LADEVÈZE : Upper error bounds on calculated outputs of interest for linear and nonlinear structural problems. *Comptes Rendus Académie des Sciences - Mécanique, Paris*, 334(7):399–407, 2006. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.crme.2006.04.004>. (Cité en pages 51, 56, 59 et 155.)
- [Ladevèze (2008)] P. LADEVÈZE : Strict upper error bounds on computed outputs of interest in computational structural mechanics. *Computational Mechanics*, 42(2):271–286, 2008. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00466-007-0201-y>. (Cité en pages 3, 51 et 157.)
- [Ladevèze et al. (2012a)] P. LADEVÈZE, B. BLAYSAT et E. FLORENTIN : Strict upper bounds of the error in calculated outputs of interest for plasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 245–246(0):194–205, 2012a. ISSN 0045-7825. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2012.07.009>. (Cité en pages 57 et 65.)
- [Ladevèze et Chamoin (2010)] P. LADEVÈZE et L. CHAMOIN : Calculation of strict error bounds for finite element approximations of non-linear pointwise quantities of interest. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(13):1638–1664, 2010. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.2957>. (Cité en pages 49, 59, 64, 155, 157, 181 et 218.)
- [Ladevèze et Chamoin (2011)] P. LADEVÈZE et L. CHAMOIN : On the verification of model reduction methods based on the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(23-24):2032–2047, 2011. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2011.02.019>. (Cité en page 65.)
- [Ladevèze et al. (2010)] P. LADEVÈZE, L. CHAMOIN et E. FLORENTIN : A new non-intrusive technique for the construction of admissible stress fields in model verification. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:766–777, 2010. ISSN 0045-7825. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2009.11.007>. (Cité en pages 70, 87, 89, 90, 91 et 96.)
- [Ladevèze et Florentin (2006)] P. LADEVÈZE et E. FLORENTIN : Verification of stochastic models in uncertain environments using the constitutive relation error method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(1-3):225–234, 2006. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2006.03.006>. (Cité en page 65.)
- [Ladevèze et Leguillon (1983)] P. LADEVÈZE et D. LEGUILLON : Error estimate procedure in the finite element method and application. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 20(3):485–509, 1983. URL <http://www.jstor.org/stable/2157268>. (Cité en pages 2, 33, 36, 39, 69, 70 et 75.)

- [Ladevèze et al. (1992)] P. LADEVÈZE, P. MARIN, J. P. PELLE et J. L. GASTINE : Accuracy and optimal meshes in finite element computation for nearly incompressible materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 94(3):303–315, 1992. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(92\)90057-Q](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(92)90057-Q). (Cité en page 41.)
- [Ladevèze et Maunder (1996)] P. LADEVÈZE et E. A. W. MAUNDER : A general method for recovering equilibrating element tractions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 137(2):111–151, 1996. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01067-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01067-5). (Cité en page 75.)
- [Ladevèze et Moës (1998a)] P. LADEVÈZE et N. MOËS : A new a posteriori error estimation for nonlinear time-dependent finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157(1-2):45–68, 1998a. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00212-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00212-0). (Cité en page 65.)
- [Ladevèze et Moës (1998b)] P. LADEVÈZE et N. MOËS : A posteriori constitutive relation error estimators for nonlinear finite element analysis and adaptive control. Dans P. LADEVÈZE et J. ODEN, édés : *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, vol. 47 de *Studies in Applied Mechanics*, p. 231–256. Elsevier, 1998b. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0922-5382\(98\)80013-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0922-5382(98)80013-5). (Cité en page 65.)
- [Ladevèze et Moës (1999)] P. LADEVÈZE et N. MOËS : Adaptive control for finite element analysis in plasticity. *Computers & Structures*, 73(1-5):45–60, 1999. ISSN 0045-7949. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00284-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00284-3). (Cité en page 65.)
- [Ladevèze et al. (1999a)] P. LADEVÈZE, N. MOËS et B. DOUCHIN : Constitutive relation error estimators for (visco)plastic finite element analysis with softening. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176:247–264, 1999a. (Cité en page 65.)
- [Ladevèze et Pelle (2004)] P. LADEVÈZE et J. P. PELLE : *Mastering Calculations in Linear and Nonlinear Mechanics*. Springer, New York, 2004. (Cité en pages 2, 17, 43, 73, 75 et 128.)
- [Ladevèze et al. (1991)] P. LADEVÈZE, J. P. PELLE et P. ROUGEOT : Error estimation and mesh optimization for classical finite elements. *Engineering Computations*, 8(1):69–80, 1991. URL <http://dx.doi.org/10.1108/eb023827>. (Cité en pages 39, 70 et 75.)
- [Ladevèze et al. (2012b)] P. LADEVÈZE, F. PLED et L. CHAMOIN : New bounding techniques for goal-oriented error estimation applied to linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2012b. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.4423>. (Cité en pages 4 et 156.)
- [Ladevèze et Rougeot (1997)] P. LADEVÈZE et P. ROUGEOT : New advances on a posteriori error on constitutive relation in finite element analysis. *Computer*

- Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 150(1-4):239–249, 1997. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00089-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00089-3). (Cité en pages 48, 75 et 127.)
- [Ladevèze et al. (1999b)] P. LADEVÈZE, P. ROUGEOT, P. BLANCHARD et J. P. MOREAU : Local error estimators for finite element linear analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4):231–246, 1999b. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00339-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00339-9). (Cité en pages 3 et 47.)
- [Ladevèze et Waeytens (2009)] P. LADEVÈZE et J. WAEYTENS : Model verification in dynamics through strict upper error bounds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(21-26):1775–1784, 2009. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2008.12.020>. (Cité en page 57.)
- [Ladevèze et Oden (1998)] P. LADEVÈZE et J. T. ODEN,  ds. *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*. Studies in applied mechanics. Elsevier, Amsterdam, New York, Oxford, 1998. ISBN 0-08-043327-8. URL <http://opac.inria.fr/record=b1101681>. (Cité en page 2.)
- [Larsson et al. (2002)] F. LARSSON, P. HANSBO et K. RUNESSON : Strategies for computing goal-oriented a posteriori error measures in non-linear elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(8):879–894, 2002. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.513>. (Cité en page 50.)
- [Leguillon et Sanchez-Palencia (1987)] D. LEGUILLON et E. SANCHEZ-PALENCIA : *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*. Masson - John Wiley & Sons, Inc., Paris - New York, 1987. ISBN 2-225-81217-9. URL <http://opac.inria.fr/record=b1075989>. (Cité en pages 231 et 232.)
- [Love (1944)] A. LOVE : *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 186-213. Dover, New York, 1944. (Cité en page 216.)
- [Luce et Wohlmuth (2004)] R. LUCE et B. WOHLMUTH : A Local A Posteriori Error Estimator Based on Equilibrated Fluxes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(4):1394–1414, 2004. URL <http://dx.doi.org/10.1137/S0036142903433790>. (Cité en page 69.)
- [Machiels et al. (2000)] L. MACHIELS, Y. MADAY et A. T. PATERA : A flux-free nodal Neumann subproblem approach to output bounds for partial differential equations. *Comptes Rendus Académie des Sciences - Mécanique, Paris 2000*, 330(1):249–254, 2000. (Cité en pages 33, 38 et 84.)
- [Mackinnon et Carey (1989)] R. J. MACKINNON et G. F. CAREY : Superconvergent derivatives : A Taylor series analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(3):489–509, 1989. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620280302>. (Cité en page 22.)
- [Maday et al. (1999)] Y. MADAY, A. T. PATERA et J. PERAIRE : A general formulation for a posteriori bounds for output functionals of partial differential

- equations ; application to the eigenvalue problem. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 328(9):823–828, 1999. ISSN 0764-4442. (Cité en pages 49 et 50.)
- [Maunder et Moitinho de Almeida (2009)] E. A. W. MAUNDER et J. P. Moitinho de ALMEIDA : The stability of stars of triangular equilibrium plate elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(7):922–968, 2009. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.2441>. (Cité en page 82.)
- [Meidner et al. (2009)] D. MEIDNER, R. RANNACHER et J. VIHAREV : Goal-oriented error control of the iterative solution of finite element equations. *Journal of Numerical Mathematics*, 17:143–172, 2009. URL <http://dx.doi.org/10.1515/JNUM.2009.009>. (Cité en page 66.)
- [Melenk et Babuška (1996)] J. MELENK et I. BABUŠKA : The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):289–314, 1996. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01087-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01087-0). (Cité en page 33.)
- [Mindlin (1963)] I. A. MINDLIN : Free elastic waves on the surface of a tube of infinite thickness. *J. Appl. Math. Mech.*, 27:823–828, 1963. (Cité en page 217.)
- [Mindlin (1936)] R. D. MINDLIN : Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. *Journal of Physics*, 7(5):195–202, 1936. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.1745385>. (Cité en page 216.)
- [Mindlin et Cheng (1950)] R. D. MINDLIN et D. H. CHENG : Nuclei of strain in the semi-infinite solid. *Journal of Applied Physics*, 21(9):926–930, 1950. (Cité en pages 216 et 218.)
- [Moës et al. (1999)] N. MOËS, J. DOLBOW et T. BELYTSCHKO : A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1):131–150, 1999. ISSN 1097-0207. URL [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990910\)46:1%3C131::AID-NME726%3E3.0.CO;2-J](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:1%3C131::AID-NME726%3E3.0.CO;2-J). (Cité en pages 60 et 231.)
- [Moës et al. (1998)] N. MOËS, J. T. ODEN et T. I. ZOHDI : Investigation of the interactions between the numerical and the modeling errors in the Homogenized Dirichlet Projection Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 159(1-2):79–101, 1998. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)80104-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(98)80104-7). (Cité en page 65.)
- [Moitinho de Almeida et Almeida Pereira (1996)] J. P. Moitinho de ALMEIDA et O. J. B. ALMEIDA PEREIRA : A set of hybrid equilibrium finite element models for the analysis of three-dimensional solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(16):2789–2802, 1996. URL [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19960830\)39:16%3C2789::AID-NME976%3E3.0.CO;2-J](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19960830)39:16%3C2789::AID-NME976%3E3.0.CO;2-J). (Cité en page 69.)

- [Moitinho de Almeida et Maunder (2009)] J. P. Moitinho de ALMEIDA et E. A. W. MAUNDER : Recovery of equilibrium on star patches using a partition of unity technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79 (12):1493–1516, 2009. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.2623>. (Cité en pages 37 et 82.)
- [Morin et al. (2003)] P. MORIN, R. H. NOCHETTO et K. G. SIEBERT : Local problems on stars : a posteriori error estimators, convergence, and performance. *Mathematics of Computation*, 72(243):1067–1097, 2003. ISSN 0025-5718. URL <http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-02-01463-1>. (Cité en pages 33, 80, 84 et 85.)
- [Murakami (1987)] Y. MURAKAMI : *Handbook of stress intensity factors*. Pergamon Press, Oxford, 1987. (Cité en pages 229, 237, 240 et 243.)
- [Muskhelishvili (1953)] N. MUSKHELISHVILI : *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Noordhoff, Groningen, Holland, 1953. (Cité en page 215.)
- [Oden et al. (2005)] J. T. ODEN, I. BABUŠKA, F. NOBILE, Y. FENG et R. TEMPONE : Theory and methodology for estimation and control of errors due to modeling, approximation, and uncertainty. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(2-5):195–204, 2005. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2003.06.003>. (Cité en pages 17 et 65.)
- [Oden et al. (1989)] J. T. ODEN, L. DEMKOWICZ, W. RACHOWICZ et T. A. WESTERMANN : Toward a universal h-p adaptive finite element strategy, part 2. A posteriori error estimation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 77(1-2):113–180, 1989. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(89\)90130-8](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(89)90130-8). (Cité en page 35.)
- [Oden et Prudhomme (2001)] J. T. ODEN et S. PRUDHOMME : Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method. *Computers & Mathematics with Applications*, 41(5-6):735–756, 2001. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221\(00\)00317-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221(00)00317-5). (Cité en pages 55 et 180.)
- [Oden et Zohdi (1997)] J. T. ODEN et T. I. ZOHDI : Analysis and adaptive modeling of highly heterogeneous elastic structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148(3-4):367–391, 1997. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00032-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00032-7). (Cité en page 65.)
- [Oden et al. (2006)] J. T. ODEN, S. PRUDHOMME, A. ROMKES et P. T. BAUMAN : MultiScale Modeling of Physical Phenomena : Adaptive Control of Models. *SIAM J. Sci. Comput.*, 28(6):2359–2389, 2006. ISSN 1064-8275. URL <http://dx.doi.org/10.1137/050632488>. (Cité en page 65.)
- [Oden et al. (1999)] J. T. ODEN, K. VEMAGANTI et N. MOËS : Hierarchical modeling of heterogeneous solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172(1-4):3–25, 1999. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00224-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00224-2). (Cité en page 65.)

- [Oden et Prudhomme (2002)] J. ODEN et S. PRUDHOMME : Estimation of Modeling Error in Computational Mechanics. *Journal of Computational Physics*, 182(2): 496–515, 2002. ISSN 0021-9991. URL <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.2002.7183>. (Cité en page 65.)
- [Oden et Vemaganti (2000)] J. ODEN et K. S. VEMAGANTI : Estimation of Local Modeling Error and Goal-Oriented Adaptive Modeling of Heterogeneous Materials : I. Error Estimates and Adaptive Algorithms. *Journal of Computational Physics*, 164(1):22–47, 2000. ISSN 0021-9991. URL <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.2000.6585>. (Cité en page 65.)
- [Ohnibus et al. (2001)] S. OHNIMUS, E. STEIN et E. WALHORN : Local error estimates of FEM for displacements and stresses in linear elasticity by solving local Neumann problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(7):727–746, 2001. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.228>. (Cité en pages 48 et 55.)
- [Otto et Lube (1999)] F.-C. OTTO et G. LUBE : A Posteriori Estimates for a Non-Overlapping Domain Decomposition Method. *Computing*, 62:27–43, 1999. ISSN 0010-485X. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s006070050011>. (Cité en page 65.)
- [Panetier (2009)] J. PANETIER : *Vérification des facteurs d'intensité de contrainte calculés par XFEM*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2009. (Cité en pages 236, 240 et 243.)
- [Panetier et al. (2010)] J. PANETIER, P. LADEVÈZE et L. CHAMOIN : Strict and effective bounds in goal-oriented error estimation applied to fracture mechanics problems solved with XFEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(6):671–700, 2010. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.2705>. (Cité en pages 179, 183, 229, 233, 234, 237, 242 et 243.)
- [Panetier et al. (2009)] J. PANETIER, P. LADEVÈZE et F. LOUF : Strict bounds for computed stress intensity factors. *Computers & Structures*, 87(15-16): 1015–1021, 2009. ISSN 0045-7949. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2008.11.014>. (Cité en pages 183, 233 et 234.)
- [Paraschivoiu et Patera (1998)] M. PARASCHIVOIU et A. T. PATERA : A hierarchical duality approach to bounds for the outputs of partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 158(3-4):389–407, 1998. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00270-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00270-4). (Cité en page 36.)
- [Paraschivoiu et al. (1997)] M. PARASCHIVOIU, J. PERAIRE et A. T. PATERA : A posteriori finite element bounds for linear-functional outputs of elliptic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 150(1-4):289–312, 1997. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00086-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00086-8). (Cité en pages 3, 36, 38, 39, 48 et 157.)

- [Parés et al. (2006a)] N. PARÉS, J. BONET, A. HUERTA et J. PERAIRE : The computation of bounds for linear-functional outputs of weak solutions to the two-dimensional elasticity equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(4-6):406–429, 2006a. ISSN 0045-7825. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2004.10.013>. (Cité en pages 33 et 37.)
- [Parés et al. (2006b)] N. PARÉS, P. DÍEZ et A. HUERTA : Subdomain-based flux-free a posteriori error estimators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(4-6):297–323, 2006b. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2004.06.047>. (Cité en pages 33, 38, 39, 55, 69, 80, 81, 82, 85 et 96.)
- [Parés et al. (2008a)] N. PARÉS, P. DÍEZ et A. HUERTA : Bounds of functional outputs for parabolic problems. Part I : Exact bounds of the discontinuous Galerkin time discretization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(19-20):1641–1660, 2008a. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2007.08.025>. (Cité en page 56.)
- [Parés et al. (2008b)] N. PARÉS, P. DÍEZ et A. HUERTA : Bounds of functional outputs for parabolic problems. Part II : Bounds of the exact solution. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(19-20):1661–1679, 2008b. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2007.08.024>. (Cité en page 56.)
- [Parés et al. (2009a)] N. PARÉS, H. SANTOS et P. DÍEZ : Guaranteed energy error bounds for the Poisson equation using a flux-free approach : Solving the local problems in subdomains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(10):1203–1244, 2009a. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.2593>. (Cité en pages 33, 37, 39 et 82.)
- [Parés et al. (2009b)] N. PARÉS, P. DÍEZ et A. HUERTA : Exact Bounds for Linear Outputs of the Advection-Diffusion-Reaction Equation Using Flux-Free Error Estimates. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(4):3064–3089, 2009b. ISSN 1064-8275. URL <http://dx.doi.org/10.1137/080724356>. (Cité en page 56.)
- [Parret-Fréaud et al. (2010)] A. PARRET-FRÉAUD, C. REY, P. GOSSELET et F. FEYEL : Fast estimation of discretization error for FE problems solved by domain decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(49-52):3315–3323, 2010. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2010.07.002>. (Cité en pages 65 et 77.)
- [Patera et Rønquist (2001)] A. T. PATERA et E. M. RØNQUIST : A general output bound result : application to discretization and iteration error estimation and control. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 11(04):685–712, 2001. URL <http://dx.doi.org/10.1142/S0218202501001057>. (Cité en page 66.)
- [Peraire et Patera (1998)] J. PERAIRE et A. T. PATERA : Bounds for linear-functional outputs of coercive partial differential equations : Local indicators and adaptive refinement. Dans P. LADEVÈZE et J. ODEN, édés : *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, vol. 47 de *Studies in Applied*

- Mechanics*, p. 199–216. Elsevier, 1998. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0922-5382\(98\)80011-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0922-5382(98)80011-1). (Cité en pages 3 et 157.)
- [Picasso (2009)] M. PICASSO : A stopping criterion for the conjugate gradient algorithm in the framework of anisotropic adaptive finite elements. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 25(4):339–355, 2009. ISSN 1099-0887. URL <http://dx.doi.org/10.1002/cnm.1120>. (Cité en page 66.)
- [Pled et al. (2011a)] F. PLED, L. CHAMOIN et P. LADEVÈZE : Construction de champs admissibles pour le calcul d’erreur locale : application sur des exemples industriels. *Dans CFM 2011 - 20e Congrès Français de Mécanique*, Besançon, France, 2011a. URL <http://www.cfm2011.fr>. (Cité en page 70.)
- [Pled et al. (2011b)] F. PLED, L. CHAMOIN et P. LADEVÈZE : Construction of admissible fields and goal-oriented error estimation : performances on engineering examples. *Dans D. AUBRY et P. DÍEZ,  ds : ADMOS 2011 - 5th International Conference on Adaptive Modeling and Simulation*, Paris, France, 2011b. URL <http://congress.cimne.com/admos2011>. (Cité en page 127.)
- [Pled et al. (2011c)] F. PLED, L. CHAMOIN et P. LADEVÈZE : On the techniques for constructing admissible stress fields in model verification : Performances on engineering examples. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 88(5):409–441, 2011c. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.3180>. (Cité en pages 4 et 70.)
- [Pled et al. (2012a)] F. PLED, L. CHAMOIN et P. LADEVÈZE : An enhanced method with local energy minimization for the robust a posteriori construction of equilibrated stress fields in finite element analyses. *Computational Mechanics*, 49(3):357–378, 2012a. ISSN 0178-7675. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00466-011-0645-y>. (Cité en pages 4 et 127.)
- [Pled et al. (2012b)] F. PLED, L. CHAMOIN et P. LADEVÈZE : New advances in robust goal-oriented error estimation for FE simulations. *Dans WCCM 2012 - 10th World Congress on Computational Mechanics*, S o Paulo, Brazil, 2012b. URL <http://www.wccm2012.com>. (Cité en page 156.)
- [Prager et Synge (1947)] W. PRAGER et J. L. SYNGE : Approximations in elasticity based on the concept of functions spaces. *Quarterly of Applied Mathematics*, 5:261–269, 1947. (Cité en pages 33 et 41.)
- [Prathap (1996)] G. PRATHAP : Barlow points and Gauss points and the aliasing and best fit paradigms. *Computers & Structures*, 58(2):321–325, 1996. ISSN 0045-7949. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949\(95\)00133-2](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949(95)00133-2). (Cité en page 22.)
- [Prudhomme et al. (2004)] S. PRUDHOMME, F. NOBILE, L. CHAMOIN et J. T. ODEN : Analysis of a subdomain-based error estimator for finite element approximations of elliptic problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 20(2):165–192, 2004. ISSN 1098-2426. URL <http://dx.doi.org/10.1002/num.10082>. (Cité en pages 33, 38, 80, 84 et 85.)

- [Prudhomme et Oden (1999)] S. PRUDHOMME et J. T. ODEN : On goal-oriented error estimation for elliptic problems : application to the control of point-wise errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176 (1-4):313–331, 1999. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00343-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00343-0). (Cité en pages 3, 37, 52, 55, 157 et 180.)
- [Prudhomme et al. (2009)] S. PRUDHOMME, L. CHAMOIN, H. B. DHIA et P. T. BAUMAN : An adaptive strategy for the control of modeling error in two-dimensional atomic-to-continuum coupling simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(21-26):1887–1901, 2009. ISSN 0045-7825. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2008.12.026>. (Cité en page 65.)
- [Prudhomme et al. (2003)] S. PRUDHOMME, J. T. ODEN, T. WESTERMANN, J. BASS et M. E. BOTKIN : Practical methods for a posteriori error estimation in engineering applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(8):1193–1224, 2003. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.609>. (Cité en pages 35, 55 et 180.)
- [Rajendran et Liew (2003)] S. RAJENDRAN et K. M. LIEW : Optimal stress sampling points of plane triangular elements for patch recovery of nodal stresses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(4):579–607, 2003. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.790>. (Cité en page 22.)
- [Rannacher et Suttmeier (1997)] R. RANNACHER et F.-T. SUTTMEIER : A feed-back approach to error control in finite element methods : application to linear elasticity. *Computational Mechanics*, 19:434–446, 1997. ISSN 0178-7675. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s004660050191>. 10.1007/s004660050191. (Cité en pages 3, 51 et 56.)
- [Rannacher et al. (2010)] R. RANNACHER, A. WESTENBERGER et W. WOLLNER : Adaptive finite element solution of eigenvalue problems : Balancing of discretization and iteration error. *Journal of Numerical Mathematics*, 18(4):235–327, 2010. URL <http://dx.doi.org/10.1515/jnum.2010.015>. (Cité en page 66.)
- [Rice (1968)] J. R. RICE : A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35(2):379–386, 1968. URL <http://dx.doi.org/10.1115/1.3601206>. (Cité en page 230.)
- [Ródenas et al. (2003)] J. J. RÓDENAS, F. J. FUENMAYOR, A. RODA et A. PEDROSA : Modification of the SPR technique to ensure the fulfillment of imposed tractions in boundary nodes. *Adaptive Modeling and Simulation*, 1, 2003. (Cité en page 25.)
- [Ródenas et al. (2007)] J. J. RÓDENAS, M. TUR, F. J. FUENMAYOR et A. VERCHER : Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations : the SPR-C technique. *International Journal*

- for *Numerical Methods in Engineering*, 70(6):705–727, 2007. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1903>. (Cité en page 25.)
- [R ter et Stein (2006)] M. R TER et E. STEIN : Goal-oriented a posteriori error estimates in linear elastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(4-6):251–278, 2006. ISSN 0045-7825. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2004.05.032>. Adaptive Modeling and Simulation. (Cité en page 50.)
- [Sauer-Budge et al. (2004)] A. M. SAUER-BUDGE, J. BONET, A. HUERTA et J. PERAIRE : Computing Bounds for Linear Functionals of Exact Weak Solutions to Poisson’s Equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(4):1610–1630, 2004. ISSN 0036-1429. URL <http://dx.doi.org/10.1137/S0036142903425045>. (Cité en pages 33, 37 et 39.)
- [Shih et Asaro (1988)] C. F. SHIH et R. J. ASARO : Elastic-Plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces : Part I -Small Scale Yielding. *Journal of Applied Mechanics*, 55(2):299–316, 1988. ISSN 0021-8936. URL <http://dx.doi.org/10.1115/1.3173676>. (Cité en pages 230 et 231.)
- [Silvester et Simoncini (2011)] D. J. SILVESTER et V. SIMONCINI : An Optimal Iterative Solver for Symmetric Indefinite Systems Stemming from Mixed Approximation. *ACM Trans. Math. Softw.*, 37(4):42 :1–42 :22, 2011. ISSN 0098-3500. URL <http://doi.acm.org/10.1145/1916461.1916466>. (Cité en page 66.)
- [Sladek et Sladek (2002)] J. SLADEK et V. SLADEK : A Trefftz function approximation in local boundary integral equations. *Computational Mechanics*, 28(3):212–219, 2002. ISSN 0178-7675. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00466-001-0282-y>. (Cité en page 212.)
- [Sladek et al. (2000)] J. SLADEK, V. SLADEK, V. KOMPIŠ et R. VAN KEER : Application of multi-region Trefftz method in elasticity. *CMES- Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 1(4):1–8, 2000. ISSN 1526-1492. URL <http://dx.doi.org/10.3970/cmes.2000.001.453>. (Cité en page 212.)
- [Sneddon et Hill (1963)] I. N. SNEDDON et R. HILL : *Progress in Solid Mechanics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1963. (Cité en page 217.)
- [Sneddon et Lowengrub (1969)] I. N. SNEDDON et M. LOWENGRUB : *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*. Wiley, New York, 1969. (Cité en page 215.)
- [Solomon (1968)] L. SOLOMON : * lasticit  linéaire*. Masson et Cie, 1968. (Cité en page 215.)
- [Stein et al. (2003)] E. STEIN, E. RAMM, E. RANK, R. RANNACHER, K. SCHWEIZERHOF, E. STEIN, W. WENDLAND, G. WITTUM, P. WRIGGERS et W. WUNDERLICH : *Error-controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics*. J. Wiley, New York, 2003. (Cité en pages 2 et 17.)

- [Stein et Ahmad (1977)] E. STEIN et R. AHMAD : An equilibrium method for stress calculation using finite element displacement models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 10(2):175–198, 1977. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(77\)90005-6](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(77)90005-6). (Cité en page 36.)
- [Stein et al. (2004)] E. STEIN, M. R TER et S. OHNIMUS : Adaptive finite element analysis and modelling of solids and structures. Findings, problems and trends. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(1):103–138, 2004. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.956>. (Cité en page 50.)
- [Steklov (1902)] M. W. STEKLOV : Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. *Annales Scientifiques de l' cole Normale Supérieure*, 19:455–490, 1902. (Cité en page 164.)
- [Stern et al. (1976)] M. STERN, E. B. BECKER et R. S. DUNHAM : A contour integral computation of mixed-mode stress intensity factors. *International Journal of Fracture*, 12:359–368, 1976. ISSN 0376-9429. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF00032831>. 10.1007/BF00032831. (Cité en pages 179, 183, 229, 231, 232, 237, 242 et 243.)
- [Stern et Becker (1978)] M. STERN et E. B. BECKER : A conforming crack tip element with quadratic variation in the singular fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(2):279–288, 1978. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620120209>. (Cité en page 229.)
- [Strakoř et Tich y (2002)] Z. STRAKOř et P. TICH Y : On error estimation in the conjugate gradient method and why it works in finite precision computations. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 13:56–80, 2002. ISSN 1068-9613. (Cité en page 66.)
- [Strakoř et Tich y (2005)] Z. STRAKOř et P. TICH Y : Error Estimation in Preconditioned Conjugate Gradients. *BIT Numerical Mathematics*, 45:789–817, 2005. ISSN 0006-3835. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10543-005-0032-1>. 10.1007/s10543-005-0032-1. (Cité en page 66.)
- [Strouboulis et al. (2000a)] T. STROUBOULIS, I. BABUřKA et K. COPPS : The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1-3):43–69, 2000a. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00072-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00072-9). (Cité en pages 3 et 60.)
- [Strouboulis et al. (2000b)] T. STROUBOULIS, I. BABUřKA, D. K. DATTA, K. COPPS et S. K. GANGARAJ : A posteriori estimation and adaptive control of the error in the quantity of interest. Part I : A posteriori estimation of the error in the von Mises stress and the stress intensity factor. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1–3):261–294, 2000b. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00077-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00077-8). (Cité en pages 3, 46 et 48.)

- [Strouboulis et al. (2000c)] T. STROUBOULIS, I. BABUŠKA et S. K. GANGARAJ : Guaranteed computable bounds for the exact error in the finite element solution - Part II : bounds for the energy norm of the error in two dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3):427–475, 2000c. URL [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(20000110/30\)47:1/3%3C427::AID-NME779%3E3.0.CO;2-1](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000110/30)47:1/3%3C427::AID-NME779%3E3.0.CO;2-1). (Cité en page 37.)
- [Szabó et Babuška (1991)] B. SZABÓ et I. BABUŠKA : *Finite element analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1991. (Cité en page 86.)
- [Tada et al. (1973)] H. TADA, P. C. PARIS et G. R. IRWIN : *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Del. Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania, 1973. (Cité en page 229.)
- [Treffitz (1926)] E. TREFFTZ : Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. *Proceedings of the 2nd International Congress of Applied Mechanics*, p. 131–137, 1926. (Cité en page 211.)
- [Vejchodský (2006)] T. VEJCHODSKÝ : Guaranteed and locally computable a posteriori error estimate. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 26(3):525–540, 2006. URL <http://dx.doi.org/10.1093/imanum/dri043>. (Cité en page 33.)
- [Vemaganti et Oden (2001)] K. S. VEMAGANTI et J. ODEN : Estimation of local modeling error and goal-oriented adaptive modeling of heterogeneous materials : Part II : a computational environment for adaptive modeling of heterogeneous elastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(46-47):6089–6124, 2001. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(01\)00217-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00217-1). (Cité en page 65.)
- [Verfürth (1989)] R. VERFÜRTH : A posteriori error estimators for the Stokes equations. *Numerische Mathematik*, 55:309–325, 1989. ISSN 0029-599X. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01390056>. 10.1007/BF01390056. (Cité en page 35.)
- [Verfürth (1994)] R. VERFÜRTH : A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 50(1-3):67–83, 1994. ISSN 0377-0427. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0377-0427\(94\)90290-9](http://dx.doi.org/10.1016/0377-0427(94)90290-9). (Cité en page 30.)
- [Verfürth (1996)] R. VERFÜRTH : *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-refinement Techniques*. Wiley-Teubner, Stuttgart, 1996. (Cité en page 30.)
- [Vijayakumar et Cormack (1987)] S. VIJAYAKUMAR et D. E. CORMACK : Green's functions for the biharmonic equation : bonded elastic media. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 47(5):982–997, 1987. ISSN 1095712X. URL <http://dx.doi.org/10.1137/0147065>. (Cité en page 217.)
- [Vohralík (2005)] M. VOHRALÍK : On the Discrete Poincaré–Friedrichs Inequalities for Nonconforming Approximations of the Sobolev Space H^1 . *Nume-*

- rical Functional Analysis and Optimization*, 26(7-8):925–952, 2005. URL <http://dx.doi.org/10.1080/01630560500444533>. (Cité en page 30.)
- [Vohralík (2011)] M. VOHRALÍK : Guaranteed and Fully Robust a posteriori Error Estimates for Conforming Discretizations of Diffusion Problems with Discontinuous Coefficients. *Journal of Scientific Computing*, 46:397–438, 2011. ISSN 0885-7474. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10915-010-9410-1>. (Cité en page 69.)
- [Waeytens (2010)] J. WAEYTENS : *Contrôle des calculs en dynamique : bornes strictes et pertinentes sur une quantité d'intérêt*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2010. (Cité en page 217.)
- [Waeytens et al. (2012)] J. WAEYTENS, L. CHAMOIN et P. LADEVÈZE : Guaranteed error bounds on pointwise quantities of interest for transient viscodynamics problems. *Comput. Mech.*, 49(3):291–307, 2012. ISSN 0178-7675. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00466-011-0642-1>. (Cité en pages 57, 63, 155, 217 et 218.)
- [Washizu (1953)] K. WASHIZU : Bounds for solutions of boundary value problems in elasticity. *Journal of mathematics and physics*, 32:117–128, 1953. (Cité en pages 48 et 181.)
- [Wheeler et Whiteman (1987)] M. F. WHEELER et J. R. WHITEMAN : Superconvergent recovery of gradients on subdomains from piecewise linear finite element approximations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 3(4):357–374, 1987. ISSN 1098-2426. URL <http://dx.doi.org/10.1002/num.1690030407>. (Cité en page 22.)
- [Wiberg et al. (1994)] N. E. WIBERG, F. ABDULWAHAB et S. ZIUKAS : Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(20):3417–3440, 1994. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620372003>. (Cité en page 23.)
- [Wiberg et Díez (2006)] N. E. WIBERG et P. DÍEZ : Special Issue. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:4–6, 2006. (Cité en page 2.)
- [Wiberg et Abdulwahab (1993)] N.-E. WIBERG et F. ABDULWAHAB : Patch recovery based on superconvergent derivatives and equilibrium. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(16):2703–2724, 1993. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620361603>. (Cité en page 23.)
- [Williams (1957)] M. L. WILLIAMS : On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 24:109–114, 1957. (Cité en page 227.)
- [Xiao et Karihaloo (2004)] Q. Z. XIAO et B. L. KARIHALOO : Statically admissible stress recovery using the moving least squares technique. *Progress in Compu-*

- tational Structures Technology*, 5:111–138, 2004. URL <http://dx.doi.org/10.4203/csets.11.5>. (Cité en page 26.)
- [Yau et al. (1980)] J. F. YAU, S. S. WANG et H. T. CORTEN : A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 47:335–341, 1980. URL <http://dx.doi.org/10.1115/1.3153665>. (Cité en pages 237, 242 et 243.)
- [Zhang et Naga (2005)] Z. ZHANG et A. NAGA : A new finite element gradient recovery method : Superconvergence property. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(4):1192–1213, 2005. (Cité en page 25.)
- [Zieliński (1995)] A. P. ZIELIŃSKI : On trial functions applied in the generalized Trefftz method. *Advances in Engineering Software*, 24(1-3):147–155, 1995. ISSN 0965-9978. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0965-9978\(95\)00066-6](http://dx.doi.org/10.1016/0965-9978(95)00066-6). (Cité en page 212.)
- [Zieliński et Zienkiewicz (1985)] A. P. ZIELIŃSKI et O. C. ZIENKIEWICZ : Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(3):509–528, 1985. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620210310>. (Cité en page 212.)
- [Zienkiewicz et Taylor (1988)] O. C. ZIENKIEWICZ et R. L. TAYLOR : *The finite element method : basic formulation and linear problems*. Mc Graw-Hill, Londres, 1988. (Cité en page 11.)
- [Zienkiewicz et Zhu (1987)] O. C. ZIENKIEWICZ et J. Z. ZHU : A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2):337–357, 1987. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620240206>. (Cité en pages 2 et 20.)
- [Zienkiewicz et Zhu (1992a)] O. C. ZIENKIEWICZ et J. Z. ZHU : The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1 : the recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1331–1364, 1992a. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620330702>. (Cité en pages 20 et 21.)
- [Zienkiewicz et Zhu (1992b)] O. C. ZIENKIEWICZ et J. Z. ZHU : The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1365–1382, 1992b. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620330703>. (Cité en pages 20, 21 et 22.)
- [Zienkiewicz et Zhu (1992c)] O. C. ZIENKIEWICZ et J. Z. ZHU : The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 101(1-3):207–224, 1992c. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(92\)90023-D](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(92)90023-D). (Cité en pages 21 et 23.)

- [Zlámal (1978)] M. ZLÁMAL : Superconvergence and reduced integration in the finite element method. *Mathematics of Computation*, 32(143):663–685, 1978. URL <http://www.jstor.org/stable/2006479>. (Cité en page 22.)
- [Zohdi et al. (1996)] T. I. ZOHDİ, J. ODEN et G. J. RODIN : Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 138(1-4):273–298, 1996. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01106-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01106-1). (Cité en page 65.)