



**HAL**  
open science

## Description par mobilités énergétiques des échanges vibratoires dans les systèmes couplés

Giovanni Orefice

► **To cite this version:**

Giovanni Orefice. Description par mobilités énergétiques des échanges vibratoires dans les systèmes couplés. Acoustique [physics.class-ph]. INSA de Lyon, 1997. Français. NNT : . tel-00778515

**HAL Id: tel-00778515**

**<https://theses.hal.science/tel-00778515>**

Submitted on 21 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée

DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON  
pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR

Formation doctorale: Acoustique  
Ecole Doctorale des Sciences pour l'Ingénieur de Lyon:  
Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)  
ECL - INSA - UCBL

par

**Giovanni OREFICE**

Ingénieur diplômé de l'INSA de Lyon

## Description par Mobilités Énergétiques des échanges vibratoires dans les systèmes couplés

Soutenue le 28 novembre 1997 devant la Commission d'Examen

Jury: M. T. LOYAU  
M. N. LALOR Rapporteur  
M. L. JEZEQUEL Président du Jury  
M. J.-L. GUYADER  
M. M. FAYET  
M. A. CARCATERRA Rapporteur  
M. C. CACCIOLATI

Cette thèse a été préparée au Laboratoire Vibrations Acoustique de l'INSA de LYON





**ECOLES DOCTORALES****Septembre 1997**

- **Ecole Doctorale Matériaux de Lyon;**  
**INSA - ECL - UCBL - U. Chambéry - ENS**

Responsable: Pr. A. HOAREAU

Formations doctorales:

- Génie des matériaux (Pr. FOUGERES)
- Matière condensée, surfaces et interfaces (Pr. BARRAT)
- Matériaux polymères et composites (Pr. SAUTEREAU)

- **Ecole Doctorale des Sciences pour l'Ingénieur de Lyon:**  
**Mécanique, Energétique, Génie civil, Acoustique (MEGA);**  
**ECL - INSA - UCBL**

Responsable: Pr. J.BATAILLE

Formations doctorales:

- Acoustique (Pr. GUYADER)
- Génie civil: Sols, Matériaux, Structures, Physique du bâtiment (Pr. LAREAL)
- Mécanique (Pr. BATAILLE)
- Thermique et Energétique (Pr. LANCE)

- **Ecole Doctorale des Sciences pour l'Ingénieur de Lyon:**  
**Electronique, Electrotechnique, Automatique (EEA);**  
**INSA - ECL - UCBL - U. Chambéry - U. St Etienne**

Responsable: Pr. G. GIMENEZ

Formations doctorales:

- Acoustique (Pr. GUYADER)
- Automatique industrielle (Pr. BOLON)
- Dispositif de l'électronique intégrée (Pr. PINARD)
- Génie biologique et médical (Pr. COLLOMBEL)
- Génie Electrique (Pr. AURIOL)
- Signal, image, parole (Pr. LACOUME)

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

Directeur: J. ROCHAT

Professeurs:

S.	AUDISIO	PHYSIOCHIMIE INDUSTRIELLE
J.C.	BABOUX	GEMPPM*
J.	BAHAUD	MECANIQUE DES SOLIDES
B.	BALLAND	PHYSIQUE DE LA MATIERE
D.	BARBIER	PHYSIQUE DE LA MATIERE
G.	BAYADA	EQUIPE MOD. MATH. CALC. SC.
C.	BERGER (Melle)	PHYSIQUE DE LA MATIERE
M.	BETEMPS	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
J.M.	BLANCHARD	LAEPSI***
C.	BOISSON	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
M.	BOIVIN	MECANIQUE DES SOLIDES
H.	BOTTA	EQUIPE DEVELOPPEMENT URBAIN
G.	BOULAYE	INFORMATIQUE
J.	BRAU	CENTRE DE THERMIQUE
M.	BRISSAUD	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
M.	BRUNET	MECANIQUE DES SOLIDES
J.C.	BUREAU	THERMODYNAMIQUE APPLIQUEE
J.Y.	CAVAILLE	GEMPPM*
J.P.	CHANTE	COMPOSANTS DE PUISSANCE ET APPLICATIONS
B.	CHOCAT	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
B.	CLAUDEL	LAEPSI***
M.	COUSIN	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
M.	DIOT	THERMODYNAMIQUE APPLIQUEE
A.	DOUTHEAU	CHIMIE ORGANIQUE
R.	DUFOUR	MECANIQUE DES CONTACTS
J.C.	DUPUY	PHYSIQUE DE LA MATIERE
H.	EMPTOZ	REC. DES FORMES ET VISION
C.	ESNOUF	GEMPPM*
L.	EYRAUD	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
G.	FANTOZZI	GEMPPM*
M.	FAYET	MECANIQUE DES SOLIDES
J.	FAVREL	GRPISM*.*
G.	FERRARIS-BESSO	MECANIQUE DES STRUCTURES
Y.	FETIVEAU	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
L.	FLAMAND	MECANIQUE DES CONTACTS
P.	FLEISCHMAN	GEMPPM*
A.	FLORY	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
R.	FOUGERES	GEMPPM*
F.	FOUQUET	GEMPPM*
L.	FRECON	INFORMATIQUE
R.	GAUTHIER	PHYSIQUE DE LA MATIERE
M.	GERY	CENTRE DE THERMIQUE
G.	GIMENEZ	CREATIS**
P.	GOBIN	GEMPPM*
P.	GONNARD	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
M.	GONTRAND	COMPOSANTS DE PUISSANCE
R.	GOUTTE	CREATIS**
G.	GRANGE	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
G.	GUENIN	GEMPPM*
M.	GUICHARDANT	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
G.	GUILLOT	PHYSIQUE DE LA MATIERE
A.	GUINET	GRPISM*.*
J.L.	GUYADER	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
J.P.	GUYOMAR	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
J.M.	JOLION	RECONNAISSANCEDES FORMES ET VISION
J.	JOUBERT	GENIE MECANIQUE
J.F.	JULLIEN	BETONS ET STRUCTURES
A.	JUTARD	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
R.	KASTNER	GEOTECHNIQUE
H.	KLEIMANN	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
J.	KOULOUMDJIAN	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
M.	LAGARDE	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
M.	LALANNE	MECANIQUE DES STRUCTURES
A.	LALLEMAND	CENTRE DE THERMIQUE
M.	LALLEMAND (Mme)	CENTRE DE THERMIQUE

P.	LAREAL	UNITE DE RECGERCHE EN GENIE CIVIL
A.	LAUGIER	PHYSIQUE DE LA MATIERE
CH.	LAUGIER	PHYSIOLOGIE ET PHARMACOLOGIE
P.	LEJEUNE	G. M. M. O.
C.	LESUEUR	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
A.	LUBRECHT	MECANIQUE DES CONTACTS
Y.	MARTINEZ	INGENIERIE INFORMATIQUE INDUSTRIELLE
H.	MAZILLE	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
P.	MERLE	GEMPPM*
J.	MERLIN	GEMPPM*
J.P.	MILLET	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
M.	MIRAMOND	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
N.	MONGEREAU	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
R.	MOREL	MECANIQUE DES FLUIDES
P.	MOSZKOWICZ	LAEPSI***
P.	NARDON	BIOLOGIE APPLIQUEE
A.	NAVARRO	LAEPSI***
A.	NOURI (Mme)	MOD. MATH. CAL. SCIEN.
M.	OTTERBEIN	LAEPSI***
J.P.	PASCAULT	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
G.	PAVIC	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
J.	PERA	MATERIAUX MINERAUX
G.	PERACHON	THERMOCHIMIE MINERALE
J.	PEREZ	GEMPPM*
P.	PINARD	PHYSIQUE DE LA MATIERE
J.M.	PINON	IINGENIERIE SYSTEMES D'INFORMATION
D.	PLAY	C. A. S. M.
J.	POUSIN	EQUIPE MOD. MATH. ET CALCUL SCIEN.
P.	PREVOT	G.R.A.C.I.M.
R.	PROST	CREATIS**
M.	REYNAUD	CENTRE DE THERMIQUE
J.M.	REYNOUARD	UN. RECH. GENIE CIVIL
J.	ROBERT-BADOUY (Mme)	G. M. M. O.
D.	ROUBY	GEMPPM*
P.	RUBEL	ING. SYST. D'INFORMATION
C.	RUMELHART	MECANIQUE DES SOLIDES
J.F.	SACADURA	CENTRE DE THERMIQUE
H.	SAUTEREAU	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
S.	SCAVARDA	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
D.	THOMASSET	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
M.	TROCCAZ	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
R.	UNTERREINER	TRAITEMENT DU SIGNAL ET ULTRASONS
J.	VERON	CHIMIE PHYSIQUE APPLIQUEE ET ENVIRONNEMENT
A.	VINCENT	GEMPPM*
G.	VIGIER	GEMPPM*
P.	VUILLERMOZ	PHYSIQUE DE LA MATIERE
Directeurs de recherche C. N. R. S. :		
D.	ANKER	CHIMIE ORGANIQUE
Y.	BERTHIER	MECANIQUE DES CONTACTS
P.	CLAUDY	THERMOCHIMIE MINERALE
M.	FRANCIOSI	GEMPPM*
M.	MURAT	GEMPPM*
A.	NOUAILHAT	PHYSIQUE DE LA MATIERE
M.A.	MANDRAND (Mme)	GENET.MOLEC. DES MICROORGANISMES
J.F.	QUINSON	GEMPPM*
H.	ROCHE	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
Directeurs de recherche I. N. R. A. :		
G.	BONNOT	BIOLOGIE APPLIQUEE
G.	FEBVAY	BIOLOGIE APPLIQUEE
S.	GRENIER	BIOLOGIE APPLIQUEE
Y.	MENEZO	BIOLOGIE APPLIQUEE
Directeurs de recherche I. N. S. E. R. M. :		
A-F.	PRIGENT (Mme)	BIOLOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
N.	MAGNIN (Mme)	CREATIS**

\* GROUPE D'ETUDE METALLURGIE PHYSIQUE ET PHYSIQUE DES MATERIAUX

\* CENTRE DE RECHERCHE ET D'APPLICATIONS ENTRAITEMENT DE L'IMAGE ET DU SIGNAL

\*\* LABORATOIRE D'ANALYSE ENVIRONNEMENTALE DES PROCEDES ET SYSTEMES INDUSTRIELS

\* GROUPEMENT DE RECHERCHE EN PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS

## AVANT-PROPOS

Ce texte comporte deux grandes parties: le corps principal de la thèse et les annexes.

La première partie est indépendante et doit suffire à présenter l'approche par mobilités moyennes énergétiques et les applications traitées jusqu'à présent (chapitres 3 à 6).

La deuxième partie (les annexes) n'est pas indispensable à la compréhension globale de l'approche; elle regroupe tous les développements analytiques et les compléments aux simulations numériques et aux applications expérimentales, qui auraient alourdi la rédaction et entravé la lecture de la première partie. Ces annexes n'en sont pas moins importantes pour ceux qui voudront approfondir le sujet et entreprendre des développements ultérieurs.

Le chapitre 3, coeur du sujet, est le minimum conseillé au lecteur pressé.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier, en premier lieu, mon directeur de thèse Jean-Louis Guyader pour le bon suivi du travail et le soutien qu'il m'a apporté durant les trois dernières années. Je tiens aussi à remercier Christian Cacciolati pour l'intérêt qu'il a porté sur ce sujet.

Je remercie vivement Emile Luzzato de la Direction Études et Recherche de Clamart de EDF, pour le suivi exemplaire du projet et pour ses suggestions lors des réunions. Je remercie aussi André Adobes d'avoir participé à la définition du sujet et m'avoir permis de me familiariser avec les outils de calcul SEA.

Je tiens à remercier Monsieur Lovat pour avoir mis à ma disposition les infrastructures et le matériel de mesure de l'INRS, Thierry Loyau pour l'accueil, le suivi scientifique et technique, ainsi que Jean-Louis Barbry pour son soutien informatique et moral, Michel Cafaxe pour l'aide technique aux mesures, et tous les membres du service MAV pour leur bonne humeur, pendant les trois mois que j'ai passés à l'INRS de Vandoeuvre. Je remercie aussi Robert Aquilina, Conseiller technique du Centre Technique des Systèmes Navals à Toulon, pour la supervision scientifique finale.

D'autre part, je suis reconnaissant à Électricité de France et à l'Institut National de Recherche et Sécurité (INRS) pour leur soutien logistique et financier.

Je remercie MM. Nick Lalor de l'ISVR de Southampton (UK) et Antonio Carcaterra de l'INSEAN de Rome, d'avoir accepté de rapporter ce mémoire et pour leurs suggestions intéressantes.

Mes remerciements vont également aux Professeurs Louis Jézéquel, de l'Ecole Centrale de Lyon et Michel Fayet de l'INSA, pour avoir accepté de faire partie du jury.

Un grand merci aux doctorants, en particulier Jean-Jacques Laissus, Dominique Trentin, Charles Pézerat et Gérald Poumérol, sans lesquels les calculs et la rédaction de ce travail auraient été hasardeux, aux secrétaires du laboratoire et aux permanents du laboratoire, qui m'ont permis de me concentrer sur mon travail.

Merci aussi à Myriam Djimadoum, Didier Boiteux et Hugues Nelisse, ainsi qu'aux personnes de passage et aux personnes extérieures au laboratoire pour les nombreuses discussions, qui m'ont permis de prendre du recul et de poursuivre ce travail avec discernement.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>CONTEXTE SCIENTIFIQUE ET BUTS DE L'ÉTUDE</b>	<b>13</b>
1.1	Importance des quantités énergétiques et moyennes . . . . .	13
1.1.1	Dispersion des mesures sur séries de systèmes . . . . .	13
1.1.2	Stabilisation par quantités énergétiques . . . . .	14
1.1.3	Stabilisation par quantités moyennées . . . . .	14
1.2	Contexte scientifique: analyse bibliographique . . . . .	16
1.2.1	Mobilités classiques . . . . .	16
1.2.2	Mobilités moyennes . . . . .	16
1.2.3	La Statistical Energy Analysis (SEA) . . . . .	17
1.2.4	Autres approches énergétiques des années "70 - "80 . . . . .	19
1.2.5	Mobilités Effectives et Coefficients d'Influence . . . . .	19
1.2.6	Les PFRF et la Méthode des Réceptances de Puissance . . . . .	20
1.2.7	Écoulement d'énergie . . . . .	20
1.3	Récapitulatif des buts de l'étude . . . . .	21
1.3.1	Une formulation énergétique locale . . . . .	21
1.3.2	Des véritables mobilités moyennes pour assemblages . . . . .	21
1.3.3	Utilisation d'un formalisme simple et général . . . . .	21
<b>2</b>	<b>LES MOBILITES CLASSIQUES : UN OUTIL PREDICTIF</b>	<b>23</b>
2.1	La mobilité classique: une fonction de transfert . . . . .	23
2.1.1	Définition . . . . .	23
2.1.2	Propriétés . . . . .	24
2.2	Utilisation pour une structure isolée . . . . .	25
2.2.1	Additivité des excitations . . . . .	25
2.2.2	Définition des types de source . . . . .	25
2.3	La connectivité par mobilités classiques . . . . .	26
2.3.1	Calcul de quantités après couplage rigide en plusieurs points . . . . .	26
2.3.2	Définition des types de source . . . . .	27
2.3.3	Mobilités après couplage en fonction de celles avant couplage . . . . .	28
2.4	Complément à la connectivité: les Couplages Internes . . . . .	29
2.5	Conclusions . . . . .	30
<b>3</b>	<b>LE CONCEPT DE MOBILITE ENERGETIQUE</b>	<b>31</b>
3.1	Exposition succincte . . . . .	31
3.2	Mobilités énergétiques sur une structure isolée . . . . .	34
3.2.1	Définition . . . . .	34
3.2.2	Non réciprocity . . . . .	35
3.2.3	Additivité énergétique . . . . .	36
3.3	Connectivité énergétique . . . . .	40

3.3.1	Tentative simpliste . . . . .	40
3.3.2	Les problèmes d'un raccordement énergétique . . . . .	41
3.3.3	Mobilités énergétiques "de connexion" . . . . .	43
3.3.4	Compléments . . . . .	44
3.3.5	Cas non couverts par la méthode . . . . .	45
3.4	Le concept de Source de Puissance Active Moyenne . . . . .	48
3.4.1	Points non couplés excités et Types de source . . . . .	48
3.4.2	Points de couplage excités et Types de source . . . . .	49
3.5	Conclusions de l'étude analytique . . . . .	51
<b>4</b>	<b>ANALYSE NUMERIQUE SYSTÉMATIQUE SUR DES PLAQUES HO-</b>	
	<b>MOGÈNES</b>	<b>53</b>
4.1	Erreurs de méthode sur une Structure isolée . . . . .	54
4.1.1	Erreurs de définition . . . . .	54
4.1.2	Erreurs sur les sources de puissance en multi-excitation . . . . .	58
4.1.3	Étude des erreurs d'additivité . . . . .	59
4.2	Erreurs de méthode sur les assemblages . . . . .	63
4.2.1	Présentation des structures . . . . .	63
4.2.2	Analyse des résultats . . . . .	64
4.2.3	Conclusions pour le couplage de structures homogènes . . . . .	67
4.3	Étude de quelques paramètres . . . . .	69
4.3.1	Étude d'un assemblage plus amorti . . . . .	69
4.3.2	Étude du recouvrement modal et de la densité modale . . . . .	71
4.4	Conclusions pour l'étude numérique des erreurs . . . . .	73
<b>5</b>	<b>ÉTUDE NUMÉRIQUE DE CAS PLUS COMPLEXES</b>	<b>75</b>
5.1	Assemblage de plaques avec des discontinuités massiques . . . . .	75
5.1.1	Effets des discontinuités de masse sur la structure . . . . .	76
5.1.2	Puissances échangées et "Miels" après couplage . . . . .	78
5.1.3	Conclusions pour l'assemblage de structures hétérogènes . . . . .	78
5.2	Couplages élastiques dissipatifs . . . . .	80
5.2.1	Étude d'un système de couplage de faible raideur . . . . .	81
5.2.2	Étude d'un système de couplage de forte raideur . . . . .	82
5.2.3	Conclusions pour les couplages élastiques et dissipatifs . . . . .	83
5.3	Conclusions pour les compléments numériques . . . . .	84
<b>6</b>	<b>APPLICATION A DES DONNÉES ISSUES DE MESURES</b>	<b>85</b>
6.1	Étude d'assemblages de structures simples . . . . .	85
6.2	Assemblage de deux cylindres fortement amortis . . . . .	86
6.3	Assemblage d'un cylindre et d'un couvercle de climatiseur . . . . .	93
6.4	Conclusions sur l'application expérimentale de la méthode . . . . .	96
<b>7</b>	<b>CONCLUSIONS</b>	<b>97</b>
7.1	Conclusions . . . . .	97
7.1.1	Principaux résultats de l'étude . . . . .	98
7.1.2	Autres aspects traités . . . . .	100
7.2	Autres applications et développements possibles . . . . .	100
7.2.1	Établissement de critères énergétiques . . . . .	101
7.2.2	Apports et compléments à la SEA . . . . .	101

7.2.3	Approfondissements possibles . . . . .	102
<b>ANNEXES ET CONNEXES</b>		<b>104</b>
<b>A</b>	<b>Rappels concis de probabilités</b>	<b>105</b>
<b>B</b>	<b>Exercice de style: couplage en deux points</b>	<b>107</b>
<b>C</b>	<b>Compléments analytiques</b>	<b>111</b>
C.1	Expressions énergétiques des couplages internes . . . . .	111
C.2	Étude énergétique du couplage en deux points . . . . .	113
C.3	Étude du couplage avec une masse ponctuelle . . . . .	117
C.4	Expressions très approchées, sans inversion . . . . .	118
C.5	Calcul des CLF pour des couplages ponctuels . . . . .	119
<b>D</b>	<b>Compléments aux simulations de plaques homogènes</b>	<b>121</b>
D.1	Calculs sur un système isolé . . . . .	121
D.2	Assemblage de plaques de mobilités très différentes . . . . .	124
D.2.1	Erreurs de couplage . . . . .	124
D.2.2	Calcul des plaques amorties . . . . .	128
D.3	Assemblage de plaques plus petites . . . . .	130
D.3.1	Étude des sources de puissance . . . . .	132
D.3.2	Étude d'autres bandes de fréquence . . . . .	132
D.4	Cas particulier: assemblage de deux plaques identiques . . . . .	134
D.4.1	Couplage en un seul point . . . . .	134
D.4.2	Couplage en trois points . . . . .	137
<b>E</b>	<b>Compléments aux simulations de cas plus complexes</b>	<b>143</b>
E.1	Assemblage de plaques hétérogènes . . . . .	143
E.1.1	Variation des sources pour deux systèmes excités . . . . .	145
E.2	Couplages élastiques et dissipatifs . . . . .	146
E.2.1	Étude d'un système de couplage de faible raideur . . . . .	146
E.2.2	Faible raideur, dissipation augmentée . . . . .	146
E.2.3	Raideur augmentée . . . . .	147
E.2.4	Étude d'un système de couplage de forte raideur . . . . .	150
E.2.5	Forte raideur, dissipation augmentée . . . . .	151
E.2.6	Excitation de part et d'autre, variation des sources . . . . .	153
E.3	Pistes pour un indicateur d'erreur . . . . .	154
<b>F</b>	<b>Compléments aux applications expérimentales</b>	<b>157</b>
F.1	Méthodologie de mesure des mobilités classiques . . . . .	157
F.1.1	Principe des Montages . . . . .	157
F.1.2	Capteurs et Correction de masse . . . . .	159
F.1.3	Autres problèmes . . . . .	160
F.2	Mesures sur un assemblage de structures simples . . . . .	163
<b>G</b>	<b>Surprise finale</b>	<b>165</b>
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b>		<b>173</b>



# Chapitre 1

## CONTEXTE SCIENTIFIQUE ET BUTS DE L'ÉTUDE

La dernière décennie a encore vu croître la puissance et la vitesse informatiques, donc les possibilités et la convivialité des méthodes de calcul, comme les éléments finis et les éléments de frontière, qui résolvent par discrétisation les équations exactes.

C'est paradoxalement dans ce contexte qu'on a assisté en vibro-acoustique à un regain d'intérêt pour des méthodes de calcul approché, plus simples et rapides, qui réduisent l'information nécessaire au calcul et proposent des résultats plus globaux et simples à interpréter.

Ces méthodes, qui vont être brièvement abordées et référencées au 1.2, constituent le cadre scientifique dans lequel s'est développée la méthode des mobilités énergétiques.

Toutefois il nous semble utile de mieux expliquer tout d'abord les motivations qui ont animé ces recherches sur des quantités moyennes ou énergétiques, de souligner leurs avantages et leurs significations.

### 1.1 Importance des quantités énergétiques et moyennes

À l'origine de ces travaux il y a sans doute la demande croissante d'études vibratoires et acoustiques dans d'autres domaines industriels que ceux classiques de l'aérospatiale et de la marine militaire, qui pouvaient se permettre des moyens de calcul et des temps de recherche énormes : désormais le bruit est un facteur concurrentiel pour les transports, l'électroménager, etc. ... On a donc besoin d'appliquer des méthodes rapides, et si possible simples, autres que les abaques et les tables empiriques, dès la phase du bureau d'études, pour des produits de série.

On peut constater aussi la volonté de mieux prendre en compte des séries de structures réelles, dont les propriétés, difficiles à modéliser, varient fortement d'une réalisation à l'autre et doivent donc être décrites, avec des critères statistiques, par des données issues de la mesure.

#### 1.1.1 Dispersion des mesures sur séries de systèmes

Lorsqu'on mesure une fonction de transfert, aux mêmes endroits, sur une série de structures industrielles, apparemment "identiques", on obtient une forte dispersion des résultats,

à cause des petites variations des caractéristiques des structures utilisées : propriétés des matériaux, géométrie, conditions d'assemblage de différents éléments (voir [2] et ses références).

Des études visent à mieux connaître les causes possibles de cette dispersion (voir [48], [116] et les références de [105]), d'autres ont proposé des critères théoriques pour définir des bornes pour ces variations de comportement (voir [20], [45], [70]). Une troisième approche, (voir [102]) consiste à trouver des quantités qui, mesurées sur un système, soient caractéristiques pour toute une "classe" de systèmes, ou varient peu d'un système à l'autre. La présente étude peut être replacée dans cette dernière optique.

### 1.1.2 Stabilisation par quantités énergétiques

Lorsque le recouvrement modal est fort (supérieur à un), le comportement vibratoire d'une structure n'est plus dominé par des modes isolés, mais par les contributions de plusieurs modes à la fois et tend asymptotiquement (vers les hautes fréquences) vers celui d'une structure infinie de mêmes caractéristiques (matériau et épaisseur) (voir [7], [20], [117]). Ceci se produit au dessus d'une certaine fréquence, analogue à la fréquence limite d'un champ diffus en acoustique, inversement proportionnelle à la densité modale et à l'amortissement (voir [45] pp.74-76).

Alors le niveau de vitesse  $|V|$  varie peu d'un point à l'autre, s'ils sont distants de quelques longueurs d'onde des limites et des discontinuités structurales (inhomogénéités de masse, de raideur, d'amortissement) et des excitations extérieures ([118]). L'énergie cinétique ponctuelle en haute fréquence  $\rho/2|V|^2$ , indépendante de la phase, est donc un paramètre plus stable que la simple vitesse, pour des structures ayant des amortissements comparables, même en présence de variations géométriques, ou de raideur, ou de masse locale, en des points distants de celui considéré.

De même il a été observé que la puissance active injectée dans une structure localement homogène, avec un fort recouvrement modal, est peu sensible à l'endroit d'injection ([7], [54]), (sauf près des limites ou des discontinuités). Cette puissance ne dépend en effet que de la partie réelle de la mobilité d'entrée (au point d'injection), qui, en haute fréquence, tend vers celle de la structure infinie de même épaisseur et matériau.

On peut donc déjà considérer le rapport entre énergie cinétique locale et puissance active injectée, à fréquence pure, comme étant une quantité intéressante, car assez stable en haute fréquence.

### 1.1.3 Stabilisation par quantités moyennées

Il a été observé (en calculant les énergies globales, pour une classe de structures, voir encore [111], [102] et [45]) que l'utilisation de quantités moyennées en fréquence, ou spatialement, ou des deux façons à la fois, permet aussi d'obtenir des variations beaucoup moins importantes. Cette propriété est largement exploitée dans la SEA, qui applique les deux types de moyenne à la fois.

Par exemple, Bourgine ([7]) montre que la moyenne fréquentielle et spatiale des admittances d'entrée d'une structure, égale au rapport de sa densité modale et de sa masse totale, est égale aussi à l'admittance d'entrée de la structure infinie associée. Donc il s'agit bien d'une quantité commune à des structures industriellement identiques.

## Moyennes spatiales

L'effet de moyenne spatiale sur une partie ou sur la globalité de la structure est transparent: on excite et on mesure la vitesse à tous les points d'un maillage (défini en fonction de la fréquence maximale à analyser); les variations des caractéristiques locales (masse surfacique, raideur, amortissement, géométrie...) se répercutent sur les valeurs globales (masse totale, surface totale), ou moyennes (épaisseur, raideur, amortissement...), et sur leurs écarts type.

On remarquera cependant que les mesures que cette moyenne implique sont lourdes, surtout pour des systèmes complexes, non homogènes, et que pour ces derniers on n'obtient aucune information sur le comportement local.

## Moyennes fréquentielles

La signification physique d'une moyenne fréquentielle est moins évidente.

Pour des structures à comportement linéaire, par le théorème de Parseval on peut aussi interpréter la moyenne d'une énergie cinétique locale sur une bande de fréquences, comme la moyenne temporelle de cette énergie due à la part d'excitation, s'exerçant uniquement dans cette bande de fréquences:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho/2 |V(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho/2 V(f)V^*(f)df \quad (1.1)$$

Cependant la réponse en un point d'une structure, à une fréquence d'excitation, dépend de tous les modes à la fois, donc non seulement des caractéristiques locales aux points mesuré et excité, mais aussi de celles aux autres points de la structure. La variation des caractéristiques, locales, par exemple à l'endroit mesuré, change les contributions de certains modes, donc elle peut beaucoup jouer sur certaines bandes de fréquences mais presque pas sur d'autres.

On ne peut donc pas mettre en relation une variation moyenne des caractéristiques de la structure et son écart type, (qui peuvent s'obtenir avec les mêmes variations à des endroits différents), avec une moyenne et un écart type de la réponse sur une bande de fréquences donnée (arbitrairement choisie). (Voir aussi dans cette optique [111], [21]).

## Moyennes fréquentielles et moyennes d'ensemble

Keane et Mace ([52], [81]) montrent, sur des systèmes de poutres couplées, que la moyenne par bandes fréquentielles ne peut pas être considérée comme l'équivalent d'une moyenne d'ensemble (sur une classe de systèmes de caractéristiques semblables). De Jong ([26]) soutient, au contraire, que pour des systèmes suffisamment complexes la distribution des réponses en fréquence et celle sur l'espace ont la même variance normalisée, ce qui indique que ces structures sont "ergodiques dans leur variation en fréquence" (une moyenne d'ensemble, avec une variation aléatoire des modes est représentative d'une moyenne fréquentielle pour une structure déterminée). Si cette thèse se confirme, à partir des mesures sur un système complexe, moyennées en fréquence on obtiendra une estimation correcte du comportement d'une classe de systèmes semblables (voir aussi [83]).

Il semble alors important de développer des méthodes qui utilisent des quantités moyennées en fréquence, mesurées sur des systèmes isolés, pour prédire le comportement (par bandes de fréquences) d'assemblages de ces systèmes ou la réponse à des sollicitations différentes.

Comme la méthode des mobilités énergétiques qu'on va présenter ici est basée sur la moyenne en fréquence, on essaiera de définir des paramètres, mesurables, qui a priori influencent cette moyenne.

## 1.2 Contexte scientifique: analyse bibliographique

Après avoir présenté les motivations de ce travail, on va maintenant rappeler plus précisément dans quel contexte scientifique il se situe.

On citera ici des méthodes qui, par leur objet, par leur démarche, ou par leur formalisme permettent d'établir des analogies et d'envisager les mobilités énergétiques, qu'on présentera par la suite, sous des angles différents.

### 1.2.1 Mobilités classiques

L'utilisation des mobilités (ou "admittances"), pour le calcul des vitesses des assemblages et des efforts de couplage, date de la première moitié de ce siècle.

Leur mise en oeuvre, comparée à celle des impédances, a fait l'objet de nombreuses publications (voir [109], [94], [20], [84], [10]...) et colloques (par exemple le "Colloque sur l'impédance mécanique" de mai 1972 à l'ECL).

La méthode sera détaillée ici au chapitre 2, mais on peut déjà dire que sa simplicité théorique et son côté semi-expérimental ont fait en sorte qu'elle a été utilisée dans beaucoup de travaux de recherche, de la détermination des puissances échangées entre structures ([38], [101], [32]), ou injectées ([17], [69]), à l'intensimétrie structurale ([21], [22], [108], [124]...) au calcul des ingrédients de la SEA (voir au 1.2.3 et [7], [14]), au diagnostic vibratoire ([75]).

Les développements les plus récents concernent l'étude des mobilités de moment et les techniques de mesure associées ([34], [44], [97], [68], [128], [90], [71], [124]), l'étude des mobilités linéiques et surfaciques ([91], [23], [66], [93]), l'étude de concepts dérivés, tels la "mobilité effective" (rapport complexe de la vitesse en un point et de la somme de toutes les forces excitatrices: [98], [99], [40]), la caractérisation de sources à l'aide du "descripteur de source" ([88], [66], [49], [126]), la caractérisation de jonctions ([107]), ou l'utilisation des mobilités de chaque sous-structure assemblée, avec les autres sous-structures bloquées, pour mieux définir les couplages ([84], [4])...

On peut aussi remonter des sensibilités sur les mobilités à celles sur les valeurs et vecteurs propres d'une structure ([70]).

### 1.2.2 Mobilités moyennes

Pour les raisons énoncées au 1.1, dans la dernière décennie, on a aussi vu resurgir (après Cremer et Heckl [20]), des études sur des mobilités moyennées.

Langley ([63]) a proposé le calcul des enveloppes des mobilités moyennées spatialement. Skudrzyck ([117], [118] ...) a élaboré la Méthode de la Valeur Moyenne (en fréquence) afin d'évaluer les mobilités moyennes d'entrée, le module moyen des mobilités de transfert et leurs enveloppes, pour des structures simples, en moyennes et hautes fréquences. Il a aussi proposé d'utiliser les moyennes géométriques fréquentielles des amplitudes des résonances

et des antirésonances des premiers modes pour des structures complexes, afin de retrouver les caractéristiques de la "structure infinie associée".

Par la suite d'autres études ont repris l'idée de Skudrzyk de lissage fréquentiel des mobilités et l'ont appliquée au calcul d'assemblages de poutres, avec des techniques de lissage différentes. Girard et Defosse [43] utilisent une sélection de chemins structuraux directs entre deux points (les plus courts, sans boucles) qui fournissent la contribution moyenne de l'effort appliqué en un point sur le niveau de la vitesse à l'autre point. Delattre [28] propose dans ce même but l'utilisation de l'analyse cepstrale, qui permet de sélectionner les premières contributions dans un signal temporel (contributions qui correspondent au cepstre d'énergie), en éliminant les "échos" (contributions indirectes dues aux réflexions aux limites). Moorhouse et Gibbs ont aussi proposé un calcul de la mobilité moyenne et maximale (en fréquence) dans [89]. Le calcul de la mobilité de transfert moyenne aux hautes fréquences, par une formulations énergétique simplifiée a été effectué par Y. Lasé et al. ([65], [64]). Ce qui souligne encore le fait que l'utilisation de la moyenne fréquentielle est liée à celle de quantités énergétiques.

Notre étude peut être lue comme un nouveau développement de l'idée de mobilité moyennée en fréquence, mais avec des moyennes arithmétiques, qui permettent d'opérer des simplifications sur des quantités énergétiques, même si ces dernières ne sont pas directement identifiables à celles d'une "structure infinie associée". Elle comporte aussi une mise en oeuvre de ces mobilités moyennes dans une méthode énergétique d'assemblage de structures, sous une forme quasi-identique à celle des mobilités classiques.

### 1.2.3 La Statistical Energy Analysis (SEA)

La SEA est née dans les années "60 avec les travaux de Lyon, Smith, Maidanik, Eichler, Sharton, Newland, Gersch, Pope ...([78], [120], [77], [79], [80], [92], [42], [103],...) et fait l'objet encore actuellement de très nombreuses études et propositions de remaniement.

#### Théorie de base

La théorie de base est simple : il y a une relation de proportionnalité entre la différence des énergies globales et la puissance échangée par deux oscillateurs couplés en déplacement vitesse et accélération.

En assimilant les modes d'une structure à des oscillateurs, en considérant que la réponse de la structure dans une bande de fréquences excitée est due surtout aux modes résonnants, en considérant de plus que les modes d'une classe de structures semblables sont distribués régulièrement en fréquence et ont la même énergie (excités par une excitation large bande), on établit la proportionnalité entre la différence des énergies modales  $E_A$  et  $E_B$  des sous-structures A et B et la puissance échangée  $P_{AB}$  (de A vers B) dans une bande de fréquences:

$$P_{AB} = \eta_{AB}\omega(E_A - E_B) \quad (1.2)$$

Les termes  $\eta_{AB}$  sont appelés "facteurs de pertes par couplage" ou CLF (coupling loss factors).

Cette méthode permet d'analyser le comportement énergétique statistique d'une classe (=ensemble de réalisations) d'assemblages, par bandes de fréquences, à partir de la connaissance des puissances injectées, des facteurs de pertes internes des sous-structures et des facteurs de perte par couplage, entre les couples de sous-structures directement liées, avec une hypothèse de couplage faible (cf.[74]).

### Autres caractéristiques et remarques

La SEA s'applique à des structures "linéaires, passives et bilatérales" (cf. [76] p.69). Elle utilise le premier principe de la thermodynamique : la puissance injectée dans un système est égale à la puissance dissipée dans ce système ("pertes internes", plus la puissance qui sort éventuellement de ce système):

$$P_{ext} + P_{diss} = 0 \quad (1.3)$$

Ce qui permet de calculer le facteur de pertes internes  $\eta_A$  par la puissance injectée  $P_A$  et l'énergie cinétique moyenne de la structure  $E_A$  :

$$P_A = \eta_A \omega E_A \quad (1.4)$$

Il ne s'agit pas d'une méthode prédictive, car la relations 1.2 porte sur les énergies modales après couplage. Dans certains cas on peut considérer qu'elle est valable aussi avec les énergies modales avant couplage (par exemple si on n'assemble que deux systèmes, par couplage faible), mais dans le cas général on ne pourra pas exprimer la puissance échangée entre deux systèmes A et B indépendamment de l'énergie modale avant couplage des autres systèmes couplés (C, D ...).

La relation de base est toutefois robuste: une erreur sur les CLF, sur les amortissements ou sur les énergies modales des sous-systèmes n'est pas amplifiée dans les puissances obtenues, c'est pour cette raison que dans beaucoup de cas, on peut l'utiliser abusivement pour des couplages non faibles, avec des faibles densités modales, pour des démarches prédictives ou avec des maillages grossiers des structures.

La "relation inverse", c'est à dire la reconstitution des CLF, est beaucoup plus problématique et son utilisation "abusive", ou avec des données fortement entachées d'erreur, donne souvent des résultats aberrants.

### Variantes et approfondissements

Une variante apparue très tôt ([125], [114], [132], [27]...) consiste à utiliser les énergies des sous-structures "isolées bloquées", en considérant, après couplage, tour à tour, chaque sous-structure excitée, reliée aux autres pendant qu'elles sont maintenues immobiles.

Une autre proposait d'utiliser une formulation duale sur la relation de base du couplage faible entre oscillateurs ([50]), mais n'a pas eu de suites.

Une variante actuellement répandue, préconise l'utilisation de "CLF indirects", définis entre les sous-systèmes non directement couplés, afin d'améliorer les résultats, par des relations du genre:

$$P_{AB} = \omega[\eta_{AB}(E_A - E_B) + \sum_C \eta_{AC}(E_A - E_C) + \eta_{CB}(E_C - E_B)] \quad (1.5)$$

Dans ces approches les relations inverses restent tout autant problématiques et l'application au couplage fort, l'application prédictive et les autres applications "abusives" ne semblent toujours pas généralisables (voir [39], [123], [60], [61], [62], [113],...).

La SEA a été étudiée analytiquement et numériquement par des approches de superposition modale ou d'ondes, pour des systèmes simples (poutres, plaques minces sur appuis...), ou par des simulations numériques avec les éléments finis.

Les différents travaux ont étudié le rôle de la densité modale et du recouvrement modal ([20], [25], [53], [37], [52], [87],...), le rôle du niveau d'énergie ([123]), de l'excitation ([131]) la façon de calculer et mesurer les CLF ([119], [5], [15], [127], [16], [61], [115], [11], [85],

[23], [110], [59]...), l'incertitude et la variance des résultats ([76]).

Un autre souci permanent a été celui de mieux définir la "force" du couplage ([104], [18], [24], [106], [13], [119], [35], [82], [83], [36]...), d'étendre la validité des formules SEA au cas du "couplage fort" et aux moyennes fréquences (voir par exemple [130], [53], [29]), avec un développement lié à une notion de "flou structural" (Soize et al. [122], [121]) ou l'utilisation de l'énergie thermodynamique des sous-systèmes plutôt que l'énergie stockée (Bernstein et Kishimoto [55]).

D'autres auteurs ([86], [100]...), ont défini une SEA dans le domaine temporel ("transient SEA") pour traiter des excitations par chocs ou des systèmes non linéaires.

C'est en tout cas la méthode en hautes fréquences la plus utilisée et celle autour de laquelle il y a eu le plus d'études dans les dernières années. Dans le dernier chapitre on expliquera comment la SEA peut aussi tirer profit de la méthode des mobilités énergétiques.

### 1.2.4 Autres approches énergétiques des années "70 - "80

Au début des années "70 ([7]) A. Bourguine, L. Cremer et M. Heckl ([20] pp.293-305) ont contribué à mieux comprendre les bases théoriques des approches statistiques et globales en dynamique vibratoire, en reliant certaines quantités comme la densité modale d'une structure, la masse totale et la partie réelle de l'admittance de la structure infinie associée. J. L. Guyader dans ([45]) a calculé des bornes pour l'énergie et la puissance dissipée par un milieu excité par des forces harmoniques ou aléatoires large bande, en montrant que pour ces dernières l'écart en énergie (lorsque les conditions aux limites et la loi de comportement varient) est plus faible.

Pour l'analyse des énergies globales des structures aux hautes fréquences, Kubota et Dowell ([33], [58]) ont proposé une technique d'approximation asymptotique, basée sur une décomposition modale, limitée à des structures analytiquement connues (poutres et plaques appuyées): l'AMA (Asymptotic Modal Analysis). Leur démarche a le mérite d'analyser clairement certaines approximations sur des quantités moyennées, et de retrouver certains résultats de la SEA.

### 1.2.5 Mobilités Effectives et Coefficients d'Influence

Il s'agit de deux méthodes énergétiques apparues au début des années "80.

La mobilité effective répartie (voir [98], [99]) est le rapport de l'énergie cinétique globale sur la puissance totale (complexe) injectée. Elle peut s'exprimer en fonction des mobilités classiques, avec certaines hypothèses sur les modules des forces et leurs phases relatives. Son utilisation est cependant purement formelle: la mobilité effective décrit seulement une certaine configuration: elle dépend de la distribution des efforts extérieurs et ne peut donc pas caractériser une structure en soi.

Les coefficients d'influence relient les énergies globales des sous-systèmes aux densités spectrales de puissance des forces excitatrices, permettant d'analyser séparément le couplage "spatial, spectral et par excitation" (voir [46]).

L'idée d'une mobilité entre quantités énergétiques moyennées (spatialement) est déjà en germe dans ces deux études.

### 1.2.6 Les PFRF et la Méthode des Réceptances de Puissance

Les Fonctions de Réponse en Fréquence pour les Puissances (PFRF) proposées par Koss sont des rapports de l'énergie cinétique ponctuelle et de la puissance injectée ([56], [57]). Elles peuvent s'exprimer à partir des mobilités des systèmes assemblés ou isolés. Les expressions des PFRF, moyennées en fréquence et spatialement, en fonction des mobilités moyennes après couplage ont aussi été proposées, pour le calcul des facteurs de pertes par couplage de la SEA.

Dans la méthode de Keane et al. ([51], [113], [3]), (à situer à la suite de celle des Coefficients d'Influence) on utilise les réceptances de puissance"  $H_{ee}$  définies, en entrée, au point  $e$  par le rapport de la puissance  $P_e$  et de la densité spectrale de puissance  $S_{F_e F_e}$  de la force  $F_e$ :  $P_e = H_{ee} S_{F_e F_e}$  pour calculer les énergies des système couplés et les puissances échangées.

Ces quantités sont à l'évidence dépendantes du type de force utilisé, leur expression a été détaillée pour des forces ponctuelles et des forces réparties décorréées (type "pluie sur le toit").

Lundberg a proposé dans [72], [73] d'utiliser les fonctions complexes de transfert par modulation, définies par Shroeder ([112]), pour relier des énergies et des puissances.

Ces trois méthodes utilisent des mobilités classiques (qui sont des DSP de fonctions de transfert en fréquence) pour prédire les puissances échangées et les énergies des assemblages, en faisant des hypothèses simplificatrices sur le type des excitations extérieures. Des moyennes spatiales et fréquentielles effectuées sur les quantités après assemblage, permettent le calcul des facteurs de pertes par couplage de la SEA, avec des hypothèses supplémentaires concernant le type d'excitation.

Elles présentent donc des fortes analogies avec l'étude actuelle; cependant les quantités de base (les mobilités) ne sont pas des quantités moyennées par bandes (larges) de fréquence et les simplifications que cette moyenne introduit n'ont pas été perçues.

### 1.2.7 Écoulement d'énergie

La dernière décennie a aussi vu la naissance de formulations visant à connaître l'énergie en tout point d'une structure à fréquence pure, à partir des travaux de Belov et al. ([1]) et des descriptions de la distribution de l'énergie de Bernhard, Bouthier et Wohlever ([8], [9]), suivant une analogie avec l'écoulement de la chaleur. Une approche simplifiée néglige les champs proches ([30],[31]), d'autres, plus élaborées, utilisent les densités d'énergie totale et lagrangienne ([64], [67]), ou des formulations intégrales approchées pour obtenir des calculs plus exacts.

Dernière approche, souvent classée (à tort) parmi celles énergétiques, car elle travaille aussi sur une représentation par enveloppe plus que sur la solution vibratoire exacte (vitesse complexe et oscillante) est celle de Carcaterra et Sestieri ([12]), qui utilisent la transformée de Hilbert pour analyser le déplacement pour des nombres d'onde élevés, avec un maillage faible.

Ces approches sont toutes dépendantes de l'opérateur caractéristique de la structure considérée, donc leur application semble limitée aux structures minces et homogènes.

## 1.3 Récapitulatif des buts de l'étude

On a vu que la méthode des mobilités énergétiques se situe au carrefour de plusieurs tendances actuelles: des formulations donnant une information énergétique locale, la volonté d'utiliser des quantités moyennées en fréquence et le besoin de méthodes approchées mais simples et rapides. Dans ce contexte on va maintenant préciser les buts de ce travail, qui ont pu transparaître dans les sections précédentes, et annoncer les choix méthodologiques effectués.

### 1.3.1 Une formulation énergétique locale

On a annoncé au 1.2 que notre méthode s'inscrit parmi celles qui visent à donner une information énergétique locale sur une structure qui peut présenter de fortes discontinuités, donc de fortes variations de l'énergie cinétique d'un point à un autre.

Cette information énergétique locale fait défaut à la SEA et à d'autres méthodes citées (mobilités effectives, coefficients d'influence...) qui utilisent des moyennes spatiales. On gardera tous les avantages d'une technique de mobilités classiques qui nécessite des données calculées ou des mesurées seulement aux points intéressants, (optimisation spatiale de l'information).

### 1.3.2 Des véritables mobilités moyennes pour assemblages

D'un certain point de vue, au delà de son aspect de méthode énergétique locale, la principale idée de cette étude est de proposer des véritables mobilités moyennes.

On va utiliser exclusivement des quantités moyennées par bandes de fréquence (donc moins sensibles aux petites variations de la structure), avec des temps de calcul extrêmement réduits (optimisation fréquentielle de l'information) et sans information venant de la phase: cette information n'est donc pas nécessaire lorsqu'on veut reconstituer des quantités énergétiques par bandes de fréquence. On effectuera avec ces quantités l'équivalent énergétique des calculs réalisés avec les mobilités classiques (addition des contributions de plusieurs excitations simultanées, calcul d'assemblages à partir des caractéristiques, mesurées ou calculées, des sous-structures isolées...).

Elles vont nous permettre enfin de définir des sources par bandes de fréquence.

La nouvelle définition de mobilités moyennées en fréquence nous semble être le maillon manquant, entre les méthodes du 1.2.2 et les approches énergétiques.

### 1.3.3 Utilisation d'un formalisme simple et général

Par le choix des mobilités mesurées, comme ingrédients de base, notre méthode évite les difficultés d'une description complète de l'énergie des systèmes vibrants et veut être une formulation indépendante de l'opérateur et de la complexité de la structure.

On a tâché de ne pas introduire d'hypothèses qui restreignent l'applicabilité à des structures particulières (pourvu qu'elles soient linéaires), la seule restriction, à l'état actuel de la méthode, concerne le type de couplage entre structures, qui doit être ponctuel, du fait même de l'utilisation des mobilités classiques. Ceci ne nous a pas dispensés d'étudier des limites d'utilisation, par des simulations numériques.

Enfin on a conservé le formalisme des mobilités classiques (rappelé au chapitre 2), à la fois simple (basé sur la règle de trois) et assez familier au monde scientifique et industriel.



# Chapitre 2

## LES MOBILITES CLASSIQUES : UN OUTIL PREDICTIF

Il faut avoir clairement à l'esprit la technique des mobilités classiques avant d'aborder celle des mobilités énergétiques, qui en empruntera le formalisme et les démarches. Cette technique étant simple, on va la décrire ici in extenso.

### Généralités

Les mobilités permettent d'établir des relations algébriques simples, indépendantes du type de structure et de la méthode de calcul (ondes, contributions modales, EF...) entre les efforts et les vitesses.

Lorsqu'on les mesure, elles prennent en compte les éventuels couplages vibro-acoustiques (avec des cavités internes à la structure, ou avec le milieu environnant), les conditions aux limites réelles et les défauts locaux ou globaux de la structure, (qu'on aurait du mal à caractériser et à introduire dans d'autres méthodes numériques): on n'a donc pas les problèmes du recalage du modèle.

Les références bibliographiques détaillées ont été données au 1.2.1.

## 2.1 La mobilité classique: une fonction de transfert

La théorie des mobilités s'applique à des structures qui ont un comportement linéaire (le déplacement est proportionnel à l'excitation), et sont passives (sans sources d'énergie internes) (voir [91]).

Ces structures sont considérées pour des mouvements à fréquence pure et dans une configuration ou un montage donné.

La notion de fonction de transfert en fréquence est utilisée au sens classique du traitement du signal (voir par exemple [41]).

### 2.1.1 Définition

La mobilité  $Y_{me}(f)$ , est définie comme l'amplitude complexe de la vitesse obtenue au point  $m$  en appliquant au point  $e$  une excitation harmonique d'amplitude complexe unitaire (à la fréquence  $f$ ), en l'absence d'autres excitations.

Compte tenu de la linéarité, pour un effort  $F_e(f)$  au point  $e$  on a donc une vitesse  $V_m(f)$

telle que  $V_m(f) = Y_{me}(f) F_e(f)$ , ou encore

$$Y_{me}(f) = \frac{V_m(f)}{F_e(f)} \quad (2.1)$$

Cette quantité complexe caractérise le chemin physique entre les deux points de la structure: on dira donc qu'elle est **intrinsèque**.

La relation 2.1 est en fait écrite pour l'une des 6 composantes du vecteur vitesse au point m  $\vec{V}_m(f)$ , qui comporte 3 rotations et 3 translations, et pour l'une des 6 composantes du vecteur des efforts au point e,  $\vec{F}_e(f)$ , composé de 3 forces et de 3 moments.

Il est donc clair que ce qu'on appelle "mobilité entre les deux points m et e", n'est autre qu'une matrice de 36 éléments  $\bar{Y}_{me}(f)$ . Chacun de ces éléments est une fonction de transfert en fréquence entre une composante du vecteur des vitesses obtenues au point m et une composante du vecteur des forces et des moments appliqués au point e. On aura donc la relation générale

$$\vec{V}_m(f) = \bar{Y}_{me}(f) \vec{F}_e(f) \quad (2.2)$$

### 2.1.2 Propriétés

Deux propriétés principales dérivent du théorème de l'énergie mutuelle de Heaviside ([47]).

**P. 1** La matrice  $[Y_{me}](f)$  est symétrique: la vitesse  $V_{mx}$  obtenue en appliquant le moment  $M_{ez}$  est, par exemple, égale à la vitesse  $V_{mz}$  obtenue en appliquant le moment  $M_{ex}$ .

Application: une excitation par moments purs étant difficile à obtenir expérimentalement, on utilise souvent les composantes de rotation des vitesses dues à des forces au lieu de celles de translation dues aux moments.

**P. 2** La mobilité (chaque composante)  $Y_{me}(f)$  est aussi symétrique par rapport aux indices des points de mesure m et d'excitation e:  $Y_{me}(f) = Y_{em}(f)$ .

C'est ce qu'on appelle couramment "réciprocité entre les efforts et les vitesses" (voir [129], [19], [68]...).

Application: on peut limiter le nombre d'expériences à mener pour construire la matrice des mobilités, en particulier on a un fort gain de temps sur le montage du système d'excitation.

## Simplification des notations

Souvent, sur les structures minces, on ne considère que les mobilités entre les composantes de translation des vitesses et les forces, voir même la seule mobilité entre la vitesse normale à la structure et la force normale, qui excite la structure en flexion.

Ceci est valable généralement en basse fréquence, lorsque l'effet des excitations par moment est négligeable devant celui des forces ([20]), cependant, dans beaucoup de cas réels, on ne peut pas négliger les contributions des moments.

Dans ce travail on ne va pas considérer ce type d'excitation: pour des raisons de simplicité de présentation, la matrice  $[Y_{me}](f)$  précédente, reliant les deux points m et e, se réduit alors à la seule composante  $Y_{me}(f)$ .

Si l'on considère plusieurs points m et e de la structure, on peut maintenant former la matrice (symétrique en vertu de P.2) des mobilités entre ces points: quand on parlera de matrice des mobilités  $[Y_{me}](f)$  c'est à cette dernière matrice qu'on fera référence.

De plus on omettra souvent l'argument (f), car tous les termes des équations seront considérées à une même fréquence pure.

On notera  $Z_{ee}$  (ou  $Z_e$ ) l'impédance de la structure au point e, inverse de la mobilité d'entrée  $Y_{ee}$  (ou  $Y_e$ ) et on aura une matrice des impédances  $[Z_{me}]$  telle que  $[Z_{me}]^{-1} = [Y_{me}]$ .

## Remarques Physiques

Au niveau expérimental, dans la technique des mobilités, par "point d'une structure" on désigne un disque, dont le rayon est inférieur ou égal à un dixième de la longueur d'onde (de flexion ou de traction-compression) à la fréquence considérée (voir [20]), à l'intérieur duquel la vitesse varie très peu.

En plus des difficultés pour les mesures des moments et des rotations, il faut rappeler que les mobilités mesurées sur une structure présentent une dynamique d'autant plus grande que la structure est peu amortie et qu'une incertitude sur le point de mesure, sur les conditions aux limites, sur le système de mesure ou d'excitation, peut entraîner un changement de phase important et une variation importante de la valeur complexe de ces mobilités.

## 2.2 Utilisation pour une structure isolée

### 2.2.1 Additivité des excitations

On utilise les mobilités classiques pour additionner les contributions de Ne efforts  $F_e$ , appliqués en différents points e afin de calculer la vitesse obtenue en un point m, par:

$$V_m = \sum_{e=1}^{N_e} Y_{me} F_e \quad (2.3)$$

avec une notation matricielle on aura donc

$$\{V_m\} = [Y_{me}]\{F_e\} \quad (2.4)$$

### Reconstitution des forces par relation inverse

Dans la relation précédente les forces  $F_e$  sont celles injectées simultanément.

En pratique il est onéreux de mesurer plusieurs forces en même temps, il est donc conseillé de mesurer les vitesses obtenues, en au moins Ne points i et de reconstituer les forces par une relation inverse:

$$\{F_e\} = [Y_{ie}]^{-1}\{V_i\} \quad (2.5)$$

ensuite on pourra prévoir les vitesses aux autres points m par:

$$\{V_m\} = [Y_{me}][Y_{ie}]^{-1}\{V_i\} \quad (2.6)$$

### 2.2.2 Définition des types de source

Si on ne veut pas mesurer les vitesses dues à plusieurs excitations, on peut utiliser les forces isolée en faisant l'une des hypothèses suivantes.

### Sources de force

En supposant que chaque force n'est pas affectée par la présence des autres (ce qu'on appelle une "source de force"), on identifie le produit  $Y_{me} F_e$  avec la vitesse qu'on aurait obtenue au point m si cette force avait agi seule. On écrit donc 2.3 ou 2.4, par superposition, en considérant que les forces  $F_e$  sont celles mesurées lorsqu'elles sont appliquées seules.

On s'approche de ce cas pour des systèmes d'excitation qui ont une mobilité grande devant celle de la structure excitée (c'est un type de système d'excitation à rechercher expérimentalement, car il perturbe peu le comportement de la structure observée).

### Sources de vitesse

Si l'on suppose au contraire que chaque système exciteur impose une vitesse constante au point e, indépendamment de la présence des autres excitations ("sources de vitesse"), on reconstitue les forces injectées par 2.5, (avec ici les vitesses  $V_i$  mesurées pour chaque excitation isolée), et on calcule la vitesse au point m par 2.6.

C'est le cas pour des systèmes excitateurs de mobilité d'entrée faible devant celle du système excité (par exemple un gros moteur sur un support mince), avec en même temps des mobilités de transfert très faibles entre les points du système excité: il faut que la vitesse imposée (pour chaque exciteur!) reste la même quel que soit le nombre d'autres systèmes excitateurs.

### Autres sources

On peut définir de même d'autres types de sources théoriques, (ou les réaliser par des techniques de contrôle actif), comme une source qui annulerait une vitesse en un point donné, etc .... La plupart des sources vibratoires réelles se situe cependant entre celles de force (mobilité d'entrée très grande) et celles de vitesse (mobilité très faible).

## 2.3 La connectivité par mobilités classiques

Connaissant les mobilités respectives  $Y_{em}^I$  et  $Y_{em}^{II}$  de deux sous-structures  $S^I$  et  $S^{II}$ , les efforts qui les excitent et/ou leurs réponses, on souhaite à présent déterminer les caractéristiques (mobilités, vitesses, forces) de la structure résultant de leur assemblage rigide en quelque points.

### 2.3.1 Calcul de quantités après couplage rigide en plusieurs points

On "coiffera" ici les quantités après couplage par un tilde. On considère que les deux structures  $S^I$  et  $S^{II}$ , sont rigidement couplées en  $N_c$  points c, ce qui signifie qu'après couplage les vitesses en ces points c sont égales sur les deux structures et les efforts de couplage qui rentrent dans l'une sont opposés à ceux qui rentrent dans l'autre:

$$\widetilde{V}_c^I = \widetilde{V}_c^{II} \text{ et } \widetilde{F}_c^I = -\widetilde{F}_c^{II} \quad (2.7)$$

Les vitesses aux points de couplage c (ou k), sont obtenues avec 2.3, en sommant les contributions des efforts extérieurs  $F_e$  et de ceux de couplage  $F_c$ :

$$\widetilde{V}_k^I = \sum_{e=1}^{N_e^I} Y_{ke}^I \widetilde{F}_e^I + \sum_{c=1}^{N_c} Y_{kc}^I \widetilde{F}_c^I \quad (2.8)$$

et

$$\widetilde{V}_k^{II} = \sum_{e=1}^{N_e^{II}} Y_{ke}^{II} \widetilde{F}_e^{II} + \sum_{c=1}^{N_c} Y_{kc}^{II} \widetilde{F}_c^{II} \quad (2.9)$$

On peut alors appliquer les relations de couplage 2.7 pour obtenir les efforts de couplage aux différents points c :

$$\{\widetilde{F}_c^I\} = [Y_{ck}^I + Y_{ck}^{II}]^{-1} \{[Y_{ke}^{II}]\{\widetilde{F}_e^{II}\} - [Y_{ke}^I]\{\widetilde{F}_e^I\}\} \quad (2.10)$$

et obtenir les vitesses aux points m, quelconques, de  $S^I$  après couplage :

$$\{\widetilde{V}_m^I\} = [Y_{me}^I]\{\widetilde{F}_e^I\} + [Y_{mc}^I]\{\widetilde{F}_c^I\} \quad (2.11)$$

L'expression pour les points m de  $S^{II}$  s'obtient en permutant les indices I et II :

$$\{\widetilde{V}_m^{II}\} = [Y_{me}^{II}]\{\widetilde{F}_e^{II}\} - [Y_{mc}^{II}]\{\widetilde{F}_c^I\} \quad (2.12)$$

Ces deux dernières expressions sont fonction des efforts  $\widetilde{F}_e^I$  et  $\widetilde{F}_e^{II}$  après couplage, qu'on pourrait reconstituer, à partir des vitesses après couplage, par des expressions inverses, analogues à 2.5.

### 2.3.2 Définition des types de source

Pour que la méthode devienne prédictive, c'est à dire pour pouvoir calculer les quantités après couplage, uniquement en fonction de celles avant couplage, il faut, ici encore, formuler des hypothèses sur les sources.

#### Sources de force

En supposant que les efforts extérieurs appliqués respectivement à  $S^I$  et à  $S^{II}$ , avant couplage, sont inchangés après couplage, soit  $\{\widetilde{F}_e^I\} = \{F_e^I\}$ , on obtient les formules simplifiées suivantes (usuelles, car cette hypothèse est souvent utilisée implicitement, par commodité) :

$$\{\widetilde{V}_m^I\} = [Y_{me}^I]\{F_e^I\} + [Y_{mc}^I] [Y_{ck}^I + Y_{ck}^{II}]^{-1} \{[Y_{ke}^{II}]\{F_e^{II}\} - [Y_{ke}^I]\{F_e^I\}\} \quad (2.13)$$

et

$$\{\widetilde{V}_m^{II}\} = [Y_{me}^{II}]\{F_e^{II}\} - [Y_{mc}^{II}] [Y_{ck}^I + Y_{ck}^{II}]^{-1} \{[Y_{ke}^{II}]\{F_e^{II}\} - [Y_{ke}^I]\{F_e^I\}\} \quad (2.14)$$

#### Sources de vitesse

Pour des sources qui, aux points f excités, conservent les vitesses avant et après couplage on a :

$$\{\widetilde{V}_f^I\} = \{V_f^I\} \text{ et } \{\widetilde{V}_f^{II}\} = \{V_f^{II}\} \quad (2.15)$$

donc les forces appliquées après couplage s'obtiennent en résolvant les équations suivantes, avec les points f désignant des points excités (ainsi que e) sur  $S^I$  et sur  $S^{II}$ , en fonction des vitesses imposées aux points f (mesurées avant couplage) :

$$\{V_f^I\} = [Y_{fe}^I]\{\widetilde{F}_e^I\} + [Y_{fc}^I] [Y_{ck}^I + Y_{ck}^{II}]^{-1} \{[Y_{ke}^{II}]\{\widetilde{F}_e^{II}\} - [Y_{ke}^I]\{\widetilde{F}_e^I\}\} \quad (2.16)$$

et

$$\{V_f^{II}\} = [Y_{fe}^{II}]\{\widetilde{F}_e^{II}\} - [Y_{fc}^{II}] [Y_{ck}^I + Y_{ck}^{II}]^{-1} \{[Y_{ke}^{II}]\{\widetilde{F}_e^{II}\} - [Y_{ke}^I]\{\widetilde{F}_e^I\}\} \quad (2.17)$$

### Autre sources

Comme précédemment, les autres types de sources se situent entre ces deux cas extrêmes. Dans le cas général (sources quelconques) *il sera impossible de prévoir les vitesses après couplage et les efforts de couplage si on ne connaît pas les excitations extérieures après couplage.*

Il est toutefois possible de trouver une formulation prédictive par mobilités classiques sans faire d'hypothèse sur le type d'excitation. Cette prédiction concernera évidemment des quantités qui sont indépendantes de l'excitation: les mobilités qui sont intrinsèques.

### 2.3.3 Mobilités après couplage en fonction de celles avant couplage

En empruntant la démarche suivie entre autres par Koss ([57]), nous allons exprimer de façon générale les mobilités de l'assemblage, après couplage, en fonction de celles des sous-structures isolées, (avant couplage).

Elles se déduisent simplement des expressions (2.11) et (2.12), en considérant un seul point d'excitation à la fois, sur  $S^I$  ou sur  $S^{II}$  et en divisant le tout par cette excitation.

Entre deux points m et e de l'ex sous-structure  $S^I$ , on aura :

$$[\widetilde{Y}_{me}^I] = [Y_{me}^I] - [Y_{mc}^I] [Y_{ck}^I + Y_{ck}^{II}]^{-1} [Y_{ke}^I] \quad (2.18)$$

Entre deux points m et e de l'ex sous-structure  $S^{II}$ , on aura :

$$[\widetilde{Y}_{me}^{II}] = [Y_{me}^{II}] - [Y_{mc}^{II}] [Y_{ck}^I + Y_{ck}^{II}]^{-1} [Y_{ke}^{II}] \quad (2.19)$$

En un point m de l'ex sous-structure  $S^I$ , lorsque le point e de  $S^{II}$  est excité, on aura :

$$[\widetilde{Y}_{me}^I] = [Y_{mc}^I] [Y_{ck}^I + Y_{ck}^{II}]^{-1} [Y_{ke}^{II}] \quad (2.20)$$

De même, en un point m de l'ex sous-structure  $S^{II}$ , lorsque le point e de  $S^I$  est excité, on aura :

$$[\widetilde{Y}_{me}^{II}] = [Y_{mc}^{II}] [Y_{ck}^I + Y_{ck}^{II}]^{-1} [Y_{ke}^I] \quad (2.21)$$

On remarquera que la matrice  $[Y_{ck}^I + Y_{ck}^{II}]^{-1}$  caractérise le couplage: chacune de ses colonnes quantifie les contributions de chaque effort de couplage sur les autres points de couplage.

L'importance relative de chaque point de couplage doit cependant être évaluée pour chaque point de calcul, en tenant compte des mobilités de transfert entre ce point de calcul et les différents points de couplage.

### Sous-structures isolées et isolées bloquées

Les "sous-structures isolées" précédentes étaient considérées avec les futurs points de couplage libres (contraintes nulles). La variante qui consiste à considérer les mobilités de chaque sous-structure assemblée, pendant que les autres sous-structures sont maintenues bloquées, proposée par [84], dérive d'une formulation utilisant les impédances (voir [94] ou [109]). Elle permet une caractérisation simple et globale de la "force du couplage" par les valeurs propres de la matrice de couplage et la localisation des couplages principaux pour chaque fréquence [4]. Elle s'applique si on peut bloquer en pratique les sous-systèmes lorsqu'ils sont assemblés, ou les liaisons d'un sous-système isolé.

## 2.4 Complément à la connectivité: les Couplages Internes

Dans beaucoup de cas pratiques il ne s'agit pas d'assembler des sous-système distincts, mais d'ajouter des liaisons entre certains points  $c$  et  $c'$  d'un même système.

Dans le cadre de cette étude cette démarche a été redéveloppée pour traiter les couplages internes d'une étude expérimentale sur un climatiseur.

### Cas Général: $N_c$ couplages internes

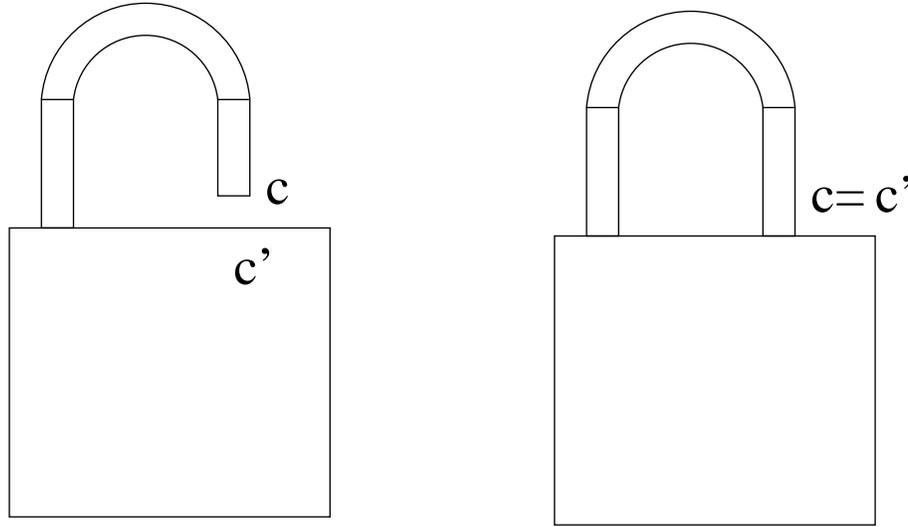


FIG. 2.1 - Exemple connu de Couplage Interne (en un point)

On va suivre la même démarche que pour les couplages externes.

Les relations du couplage rigide restent les mêmes pour chaque paire ( $c;c'$ ) de points couplés:

$$\{\widetilde{V}_c\} = \{\widetilde{V}_{c'}\} \text{ et } \{\widetilde{F}_c\} = -\{\widetilde{F}_{c'}\} \quad (2.22)$$

Ici les vitesses après couplage aux  $N_c$  points couplés  $c=c'$  (ou  $k=k'$ ) s'écrivent:

$$\widetilde{V}_k = \sum_{e=1}^{N_e} Y_{ke} \widetilde{F}_e + \sum_{c=1}^{N_c} Y_{kc} \widetilde{F}_c + \sum_{c'=1}^{N_c} Y_{kc'} \widetilde{F}'_c \quad (2.23)$$

et

$$\widetilde{V}_{k'} = \sum_{e=1}^{N_e} Y_{k'e} \widetilde{F}_e + \sum_{c=1}^{N_c} Y_{k'c} \widetilde{F}_c + \sum_{c'=1}^{N_c} Y_{k'c'} \widetilde{F}'_c \quad (2.24)$$

d'où les efforts de couplage:

$$\{\widetilde{F}_c\} = [Y_{kc} + Y_{k'c'} - Y_{kc'} - Y_{k'c}]^{-1} [Y_{k'e} - Y_{ke}] \{\widetilde{F}_e\} \quad (2.25)$$

et les vitesses aux points  $m$ , quelconques, de  $S^I$  après couplage:

$$\{\widetilde{V}_m\} = [Y_{me}] + [Y_{mc} - Y_{mc'}] [Y_{kc} + Y_{k'c'} - Y_{kc'} - Y_{k'c}]^{-1} [Y_{k'e} - Y_{ke}] \{\widetilde{F}_e\} \quad (2.26)$$

toujours en fonction des efforts extérieurs après couplage.

La discussion sur les types de source reste la même que pour les couplages externes. On peut ici encore utiliser les mobilités mesurées avant d'effectuer ces couplages internes, pour prévoir celles après couplage par la formule générale suivante :

$$\{\widetilde{Y}_{me}\} = [Y_{me}] + [Y_{mc} - Y_{m'c'}] [Y_{kc} + Y_{k'c'} - Y_{kc'} - Y_{k'c}]^{-1} [Y_{k'e} - Y_{ke}] \quad (2.27)$$

## Remarques

1) Il est équivalent de traiter les couplages internes tous à la fois comme ci-dessus (gros système matriciel) ou l'un après l'autre, de façon récursive (une seule équation à traiter à la fois, sans inversions, ce qui permet d'éviter les problèmes de mauvais conditionnement des matrices).

2) Le couplage (externe) entre deux structures en  $N_c$  points, traité précédemment, peut être écrit analytiquement, de façon récursive, comme un premier couplage (externe) en un point, entre les deux structures, suivi de  $N_c - 1$  couplages internes sur l'assemblage. Cette deuxième démarche évite la formation de systèmes mal conditionnés car on ne résout qu'une équation à la fois, et permet ainsi de traiter des couplages multiples analytiquement, sans inversion de matrices.

C'est ce qu'on peut voir dans l'exercice de style de l'annexe B.

Cependant le calcul des forces de couplage ou des puissances échangées et l'hierarchisations des couplages n'est pas possible par cette deuxième approche.

## 2.5 Conclusions

Les mobilités classiques sont un outil exceptionnel analytique et de calcul. Elles permettent de définir simplement différents types de sources, de quantifier l'importance des chemins vibratoires dans un assemblage et d'effectuer des prévisions sur le comportement d'un assemblage à partir des caractéristiques des sousstructures isolées.

Pour prévoir les efforts de couplage et les vitesses après couplage, il est nécessaire d'effectuer des hypothèses sur le type de source, alors qu'on peut prévoir les mobilités après couplage sans faire d'hypothèses.

Il nous a semblé intéressant de compléter les expressions classiques du couplage ponctuel rigide externe entre deux structures, par celles des couplages ponctuels internes à une même structure, ces dernières, qui sont récursives, vont nous permettre d'étendre les démonstrations du chapitre suivant, établies dans le cas d'un seul point de couplage, externe et interne, au couplage en  $N$  points.

La mesure des mobilités et ses problèmes spécifiques seront traités brièvement dans la partie F.1.

On rappelle enfin que l'inversion des systèmes matriciels, pour les calculs du couplage, peut présenter des difficultés numériques (fréquences singulières) liées au mauvais conditionnement, surtout pour des données issues de mesures, le bruit de mesure pouvant introduire des fréquences singulières qui n'appartiennent pas à la physique des structures couplées. Dans ce cas il est conseillé d'adopter des résolutions avec des techniques du type SVD (décomposition en valeurs singulières).

# Chapitre 3

## LE CONCEPT DE MOBILITE ENERGETIQUE

### 3.1 Exposition succincte

#### Une fonction de transfert énergétique

La mobilité classique permet d'établir un lien entre une excitation en un point d'une structure et la vitesse obtenue en un autre point.

Notre premier but est de voir s'il existe, de même, une quantité qui relie une puissance active injectée dans la structure en un point au module carré de la vitesse obtenue en un autre point ("énergie cinétique massique"), une quantité qui qualifie donc un transfert énergétique sur la structure.

Si l'on connaît la force excitatrice, via les mobilités classiques il est clair qu'on connaît aussi la vitesse, donc l'énergie cinétique massique en tout point. A fréquence pure il est donc évident que le rapport entre le module carré de la vitesse  $V$  au point  $m$  et la puissance active  $\Pi_e$  injectée au point  $e$  s'écrit:

$$\frac{|V_m|^2}{\Pi_e} = \frac{|V_m|^2}{Re\{F_e V_e^*\}} \quad (3.1)$$

ou encore

$$\frac{|V_m|^2}{\Pi_e} = \frac{|Y_{me} F_e|^2}{Re\{F_e Y_{ee}^* F_e^*\}} \quad (3.2)$$

soit

$$\frac{|V_m|^2}{\Pi_e} = \frac{|Y_{me}|^2}{Re\{Y_{ee}\}} \quad (3.3)$$

Cette expression, indépendante de l'excitation, a été utilisée par Koss ([57]). Elle montre que pour déterminer l'énergie cinétique massique en un point donné d'une structure due à une excitation en un autre point  $e$  de cette structure, on n'a pas besoin de savoir quelle est la valeur de cette énergie en des points intermédiaires, ou de connaître l'équation de l'énergie propre à la structure, seule la connaissance des mobilités d'entrée et de transfert est nécessaire.

La mobilité énergétique précédente, définie à fréquence pure, n'est cependant pas celle qui nous intéresse, car elle ne permet pas d'additionner les effets de plusieurs excitations simultanées et elle n'apporte rien de vraiment nouveau, par rapport aux mobilités classiques.

## Une fonction de transfert moyennée en fréquence

On remarquera tout d'abord qu'il n'est pas sensé de relier une vitesse moyennée par bandes de fréquence à une force moyennée aussi, car ce sont des fonctions complexes de la fréquence, dont les parties réelles et imaginaires fluctuent autour de zéro; leur moyenne sur une bande de fréquences, tend vers zéro lorsqu'on augmente la largeur de la bande et n'est pas une valeur exploitable. Passons donc à des quantités énergétiques, qui seules ont un sens, lorsqu'on effectue des moyennes fréquentielles ("**m.f.**").

Les moyennes sur une bande de fréquences de la puissance active ponctuelle et du module carré de la vitesse locale  $\langle |V_m|^2 \rangle$ , qu'on appellera "**miel**" ("mass-independent energetic level"), sont indépendantes de la phase et ne tendent pas vers zéro. De plus, elles varient moins que celles définies à fréquence pure, lorsque les caractéristiques de la structure sont sujettes à incertitude (voir au 1.1.3) et ce d'autant plus que la structure est complexe (voir [26]). Elles sont donc a priori beaucoup plus intéressantes à utiliser que les précédentes. Cremer et Heckl ont relié la puissance et le "**miel**" au point d'injection (c.f. [20] p.295), par une analyse modale.

Notre démarche déterminera, indépendamment des quantités modales, le lien entre la puissance active injectée en un point, par bande de fréquences, et le "**miel**" en tout point d'une structure.

**Remarque** C'est parce que  $\rho_s$ , la masse surfacique locale de la structure, ne dépend pas de la fréquence et parce qu'il est difficile à évaluer localement sur une structure complexe, qu'on a choisi de s'intéresser au "**miel**" plutôt qu'à la densité d'énergie cinétique ponctuelle.

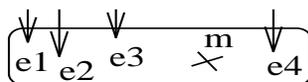
On évitera même d'introduire  $\rho_s$  dans les expressions, car on veut formuler une méthode simple de mise en oeuvre expérimentale. Ceci implique qu'on ne pourra pas utiliser les bilans d'énergie cinétique ou totale, qu'on trouve dans les autres travaux sur des quantités énergétiques.

## Un outil additif pour une Connectivité Énergétique

Notre quantité H, pour fonctionner de façon analogue aux mobilités classiques, doit permettre d'effectuer deux calculs:

- **sur une structure isolée**, on doit pouvoir additionner les contributions de plusieurs puissances actives  $P_e$  injectées aux points e d'une structure, par bande de fréquences, pour trouver les "**miels**" en tout point m, en écrivant:

$$\langle |V_m|^2 \rangle = \sum_{e=1}^{N_e} H_{me} P_e \quad (3.4)$$



- **sur un assemblage de deux structures**, on doit pouvoir calculer les puissances échangées et les énergies cinétiques ponctuelles après couplage (coiffées par un tilde) en fonction des quantités énergétiques (puissances injectées ou énergies) avant couplage, sur

les sous-structures isolées. On réalise cela en trois étapes.

Première étape, on écrit les équations énergétiques de couplage (exactes) suivantes, à chaque point  $c$  rigidement couplé:

égalité des "miels" après couplage

$$\langle |\widetilde{V}_c^I|^2 \rangle = \langle |\widetilde{V}_c^{II}|^2 \rangle \quad (3.5)$$

et puissances actives moyennes échangées opposées

$$\widetilde{P}_c^I = -\widetilde{P}_c^{II} \quad (3.6)$$

Deuxième étape, on additionne les contributions des puissances extérieures (injectées après couplage) et des puissances échangées, pour obtenir le "miel" en  $c$  sur  $S^I$ :

$$\langle |\widetilde{V}_c^I|^2 \rangle \approx \sum_{e=1}^{N_e^I} H_{ce}^I \widetilde{P}_e^I + \sum_{k=1}^{N_c} H_{ck}^I \widetilde{P}_k^I \quad (3.7)$$

et sur  $S^{II}$ :

$$\langle |\widetilde{V}_c^{II}|^2 \rangle \approx \sum_{e=1}^{N_e^{II}} H_{ce}^{II} \widetilde{P}_e^{II} + \sum_{k=1}^{N_c} H_{ck}^{II} \widetilde{P}_k^{II} \quad (3.8)$$

Troisième étape, on résout le système d'équations ci-dessus, et on trouve les m.f. des puissances actives échangées en fonction de celles extérieures:

$$\{\widetilde{P}_c^I\} \approx [H_{ck}^I + H_{ck}^{II}]^{-1} \{[H_{ke}^{II}]\{\widetilde{P}_e^{II}\} - [H_{ke}^I]\{P_e^I\}\} \quad (3.9)$$

Comme les m.f. des puissances extérieures injectées, avant couplage, en des points non couplés, sont quasiment inchangées après couplage (ce qu'on verra au 3.4), on peut alors obtenir les m.f. des "miels" après couplage, en tout point  $m$ , en fonction des m.f. des puissances injectées avant couplage, en écrivant (par exemple sur  $S^I$ ):

$$\langle |\widetilde{V}_m^I|^2 \rangle \approx \sum_{e=1}^{N_e^I} H_{me}^I \widetilde{P}_e^I + \sum_{c=1}^{N_c} H_{mc}^I \widetilde{P}_c^I \quad (3.10)$$



On appellera cette approche par mobilités moyennes énergétiques "EMMA" (energetic mean mobility approach). Le lecteur remarquera qu'on a suivi un formalisme identique à celui des mobilités classiques, exposé au chapitre 2.

On va détailler tout ceci dans les paragraphes suivants.

## 3.2 Mobilités énergétiques sur une structure isolée

### 3.2.1 Définition

Sur une structure linéaire, passive, réciproque (voir au 2.1.1), on définit la **mobilité énergétique** entre le point excité  $e$  et celui de réception  $m$ , par le rapport suivant :

$$H_{me} = \frac{\langle |Y_{me}|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{Y_{ee}\} \rangle} \quad (3.11)$$

où les crochets désignent la moyenne sur une bande de fréquences de largeur  $\Delta f$ . Ce rapport est intrinsèque à la structure, car indépendant de l'excitation.

#### Signification physique de $H_{me}$

On va montrer maintenant que *la mobilité énergétique relie la puissance active injectée au point  $e$ , moyennée en fréquence, au "miel" au point  $m$ .*

Développons encore le rapport  $\frac{\langle |V_m|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{F_e V_e^*\} \rangle}$  avec les mobilités classiques :

$$\frac{\langle |V_m|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{F_e V_e^*\} \rangle} = \frac{\langle |Y_{me}|^2 |F_e|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{Y_{ee}\} |F_e|^2 \rangle} \quad (3.12)$$

On fait alors la double hypothèse suivante:

$$\text{Hyp. 1a)} \quad \langle |Y_{me}|^2 |F_e|^2 \rangle \approx \langle |Y_{me}|^2 \rangle \langle |F_e|^2 \rangle$$

et

$$\text{Hyp. 1b)} \quad \langle \text{Re}\{Y_{ee}\} |F_e|^2 \rangle \approx \langle \text{Re}\{Y_{ee}\} \rangle \langle |F_e|^2 \rangle$$

Ces deux relations peuvent être vérifiées pour plusieurs raisons:

- si les fonctions de la fréquence  $|Y_{me}|^2$  et  $\text{Re}\{Y_{ee}\}$ , ou  $|F_e|^2$ , varient peu sur la bande considérée (c'est le cas des hautes fréquences, avec des mobilités d'entrée et de transfert assez lissées, ou le cas d'une excitation par bruit blanc, d'amplitude constante)
- si  $|F_e|^2$  et  $|Y_{me}|^2$ , respectivement  $|F_e|^2$  et  $\text{Re}\{Y_{ee}\}$  sont des fonctions statistiquement indépendantes par rapport à la variable fréquence sur la bande  $\Delta f$ ; on peut alors remplacer la moyenne de leur produit par le produit de leurs moyennes (cf. [6] et explications à l'annexe A).

On peut alors écrire:

$$\frac{\langle |V_m|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{F_e V_e^*\} \rangle} \approx \frac{\langle |Y_{me}|^2 \rangle \langle |F_e|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{Y_{ee}\} \rangle \langle |F_e|^2 \rangle} \quad (3.13)$$

et simplifier le rapport par  $\langle |F_e|^2 \rangle$  pour obtenir la relation approchée suivante

$$\frac{\langle |V_m|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{F_e V_e^*\} \rangle} \approx H_{me} \quad (3.14)$$

Cette relation donne un sens physique à notre mobilité énergétique. Au 4.1.1 on la testera sur des cas numériques: c'est ce qu'on appellera aussi "erreur de définition" et qui traduit le respect de la double hypothèse Hyp.1.

### Discussion des hypothèses de la définition

On peut se demander si l'expression 3.14, est réellement assez indépendante du type de source utilisé.

Quel que soit le système excitateur  $S^{II}$ , la force injectée dans une structure  $S^I$  au point e, est aussi l'effort de couplage, pour le seul point de couplage e (cf. 2.10):

$$F_e^I = \frac{\sum_{f=1}^{N_e} Y_e^{II} F_f^I}{Y_e^I + Y_e^{II}}$$

Pour tout point m distinct de e,  $|F_e^I|^2$  ne va donc pas dépendre explicitement du terme de transfert  $|Y_{me}^I|^2$  et Hyp.1a) est généralement vérifiée.

Le fait d'ajouter la mobilité  $Y_e^{II}$  de l'excitateur à  $Y_e^I$ , en général, décorrèle en fréquence la force  $F_e$  de  $Y_e^I$ , donc Hyp.1b) est aussi vérifiée).

Même dans le cas où  $Y_e^I \gg Y_e^{II}$ , ("source de force") le module carré  $|F_e|^2$  va être inversement proportionnel à la somme  $Re^2\{Y_e^I\} + Im^2\{Y_e^I\}$ .

Or, en basse fréquence,  $Im^2\{Y_e^I\}$  n'est pas négligeable, en général, devant  $Re^2\{Y_e^I\}$ , donc  $|F_e|^2$  et  $Re\{Y_e^I\}$  vont être statistiquement indépendantes et Hyp.1b) sera vérifiée.

En haute fréquence on a certes (asymptotiquement)  $Re^2\{Y_e^I\} \gg Im^2\{Y_e^I\}$ , mais  $Re^2\{Y_e^I\}$  est lissée et son écart type est faible, donc

$$\frac{\langle |V_m|^2 \rangle}{\langle Re\{F_e V_e^*\} \rangle} \approx \frac{\langle |Y_{me}|^2 \rangle}{\langle Re^2\{Y_e^I\} \rangle \langle Re\{Y_e^I\} \rangle} \approx \frac{\langle |Y_{me}|^2 \rangle}{\langle Re\{Y_e^I\} \rangle}$$

et 3.14 est vérifiée même si les hypothèses Hyp.1 ne le sont pas.

Comme l'a fait remarquer A. CARCATERRA, l' "erreur de définition" peut s'étudier en écrivant que

$$\langle |Y_{me}|^2 |F_e|^2 \rangle = \langle |Y_{me}|^2 \rangle \langle |F_e|^2 \rangle + \epsilon_1$$

et

$$\langle Re\{Y_{ee}\} |F_e|^2 \rangle = \langle Re\{Y_{ee}\} \rangle \langle |F_e|^2 \rangle + \epsilon_2$$

donc

$$\frac{\langle |V_m|^2 \rangle}{\langle Re\{F_e V_e^*\} \rangle} = \frac{\langle |Y_{me}|^2 |F_e|^2 \rangle}{\langle Re\{Y_{ee}\} |F_e|^2 \rangle} = \frac{H_{me} + \frac{\epsilon_1}{\langle Re\{Y_{ee}\} \rangle \langle |F_e|^2 \rangle}}{1 + \frac{\epsilon_2}{\langle Re\{Y_{ee}\} \rangle \langle |F_e|^2 \rangle}} \quad (3.15)$$

Pour une force donnée, l'erreur de définition dépend donc seulement du terme  $\langle Re\{Y_{ee}\} \rangle$ . C'est ce qu'on constatera dans les simulations numériques du chapitre suivant.

### 3.2.2 Non réciprocity

Contrairement aux mobilités classiques, les mobilités énergétiques ne vérifient pas la réciprocity:

$$H_{me} \neq H_{em} \quad (3.16)$$

car les mobilités aux dénominateurs respectifs,  $Y_{ee}$  au point e et  $Y_{mm}$  au point m, peuvent être très différentes sur des structures quelconques.

Ceci signifie que le "miel"  $\langle |V_m|^2 \rangle$ , obtenu au point m en injectant  $\langle Re\{F_e V_e^*\} \rangle$  au point e, et le "miel"  $\langle |V_e|^2 \rangle$ , obtenu au point e en injectant  $\langle Re\{F_m V_m^*\} \rangle$  au point m, sont a priori différents. Sur des structures homogènes cependant la réciprocity sera vérifiée asymptotiquement en haute fréquence, car le terme  $Re\{Y_{ee}\}$  en tout point e tend vers celui de la structure infinie associée (de mêmes matériau et épaisseur).

### 3.2.3 Additivité énergétique

#### Position du problème à fréquence pure

Est-il possible d'additionner les contributions de plusieurs puissances actives injectées simultanément dans la structure pour calculer l'énergie cinétique qui en résulte en un point ?

Pour répondre à cette question on va d'abord écrire le module carré de la vitesse obtenue au point  $m$  en excitant la structure par  $N_e$  forces aux points  $e$ , à l'aide des mobilités classiques:

$$|V_m|^2 = \left| \sum_{e=1}^{N_e} Y_{me} F_e \right|^2 \quad (3.17)$$

ce qu'on développe encore en

$$|V_m|^2 = \sum_{e=1}^{N_e} (|Y_{me}|^2 |F_e|^2 + \sum_{f \neq e=1}^{N_e} Re\{Y_{me} F_e Y_{mf}^* F_f^*\}) \quad (3.18)$$

Par ailleurs les puissances actives injectées simultanément aux points  $e$  s'écrivent

$$Re\{F_e V_e^*\} = Re\{F_e (F_e^* Y_{ee}^* + \sum_{f \neq e=1}^{N_e} Y_{ef}^* F_f^*)\} \quad (3.19)$$

soit

$$Re\{F_e V_e^*\} = |F_e|^2 Re\{Y_{ee}\} + \sum_{f \neq e=1}^{N_e} Re\{F_e F_f^* Y_{ef}^*\} \quad (3.20)$$

On remarquera que les deuxièmes termes de 3.18 et 3.20 peuvent être négatifs.

À fréquence pure, les puissances actives simultanées peuvent donc être négatives, alors que celles injectées isolément (une à la fois) sont toujours positives et égales à:

$$Re\{F_e V_e^*\} = |F_e|^2 Re\{Y_{ee}\} \quad (3.21)$$

Le terme  $|V_m|^2$  peut s'annuler en fonction du déphasage entre les forces injectées, donc il dépend aussi fortement des puissances réactives. Malgré les analogies évidentes des deux expressions 3.18 et 3.20, il n'est donc pas possible, à fréquence pure, de trouver une relation linéaire entre le  $|V_m|^2$  et uniquement les puissances actives (simultanées ou isolées).

#### Solution par moyennes fréquentielles

Considérons des quantités moyennées par bandes de fréquence; comme pour la définition des mobilités énergétiques, le "miel" est égal à:

$$\langle |V_m|^2 \rangle = \sum_{e=1}^{N_e} (\langle |Y_{me}|^2 |F_e|^2 \rangle + \sum_{f \neq e=1}^{N_e} \langle Re\{Y_{me} F_e Y_{mf}^* F_f^*\} \rangle) \quad (3.22)$$

et la puissance active moyenne est:

$$P_e = \langle Re\{F_e V_e^*\} \rangle = \langle |F_e|^2 Re\{Y_{ee}\} \rangle + \sum_{f \neq e=1}^{N_e} \langle Re\{F_e F_f^* Y_{ef}^*\} \rangle \quad (3.23)$$

On suppose que

$$\begin{aligned} & \textbf{Hyp.2 a)} \\ & \text{on peut négliger le terme } \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{f \neq e=1}^{N_e} \langle \text{Re}\{Y_{me} F_e Y_{mf}^* F_f^*\} \rangle \text{ devant} \\ & \sum_{e=1}^{N_e} \langle |Y_{me}|^2 |F_e|^2 \rangle \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \textbf{Hyp.2 b)} \\ & \text{on peut négliger le terme } \sum_{f \neq e=1}^{N_e} \langle \text{Re}\{F_e F_f^* Y_{ef}^*\} \rangle \text{ devant } \langle |F_e|^2 \text{Re}\{Y_{ee}\} \rangle \end{aligned}$$

alors le "miel" peut s'approcher par

$$\langle |V_m|^2 \rangle \approx \sum_{e=1}^{N_e} \langle |Y_{me}|^2 |F_e|^2 \rangle \quad (3.24)$$

et les puissances actives moyennes injectées par

$$\langle \text{Re}\{F_e V_e^*\} \rangle \approx \langle |F_e|^2 \text{Re}\{Y_{ee}\} \rangle \quad (3.25)$$

Avec la double hypothèse Hyp.1 on va pouvoir développer la moyenne du produit en produit des moyennes:

$$\langle |V_m|^2 \rangle \approx \sum_{e=1}^{N_e} \langle |Y_{me}|^2 \rangle \langle |F_e|^2 \rangle \quad (3.26)$$

et

$$\langle \text{Re}\{F_e V_e^*\} \rangle \approx \langle |F_e|^2 \rangle \langle \text{Re}\{Y_{ee}\} \rangle \quad (3.27)$$

Enfin en écrivant

$$\langle |V_m|^2 \rangle \approx \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\langle |Y_{me}|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{Y_{ee}\} \rangle} \langle |F_e|^2 \rangle \langle \text{Re}\{Y_{ee}\} \rangle \quad (3.28)$$

on voit apparaître une relation linéaire entre le "miel"  $\langle |V_m|^2 \rangle$  et les puissances actives isolées, ne faisant intervenir que des mobilités énergétiques, de façon formellement identique à celle des mobilités classiques :

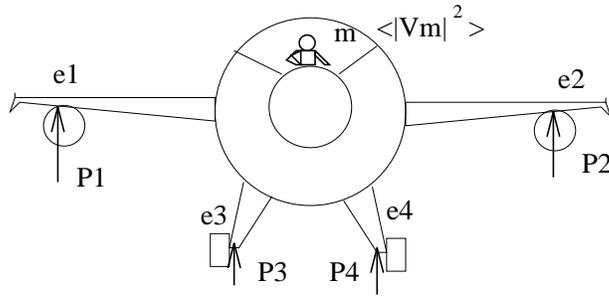
$$\langle |V_m|^2 \rangle \approx \sum_{e=1}^{N_e} H_{me} P_e \quad (3.29)$$

ou, sous forme matricielle,

$$\{ \langle |V_m|^2 \rangle \} \approx [H_{me}] \{ P_e \} \quad (3.30)$$

Cette relation, fondamentale pour toute la méthode, est ce qu'on appelle l'**additivité énergétique** (des contributions des puissances actives moyennées en fréquence).

L'étude numérique du 4.1.3 illustrera et approfondira cette relation pour différents types de source.

FIG. 3.1 - Additivité des excitations aux points  $e$ 

## Remarques

1) Les erreurs de définition se répercutent sur les termes carrés de l'expression 3.18, donc, en théorie, sur l'additivité énergétique aussi. Cependant les simulations numériques ont montré que, lorsqu'on utilise les rapports exacts  $\frac{\langle |V_m|^2 \rangle}{\langle Re\{F_e V_e^*\} \rangle}$  au lieu des mobilités énergétiques  $H_{me}$  dans la relation d'additivité énergétique, on obtient des résultats de la même qualité. De même, lorsqu'on utilise les puissances exactes injectées au lieu de celles injectées séparément, le résultat de l'additivité ne s'améliore pas. Donc l'erreur de définition et celle sur les puissances comptent globalement peu dans l'erreur d'additivité énergétique (sauf peut-être dans les premières bandes).

2) La double hypothèse Hyp.2 revient à supposer que les termes dont on prend les moyennes,  $Re\{Y_{me} F_e Y_{mf}^* F_f^*\}$  de 3.22 et  $Re\{F_e F_f^* Y_{ef}^*\}$  de 3.23, oscillent autour de zéro dans la bande de fréquences, à cause des mobilités de transfert  $Y_{me}$ ,  $Y_{ef}$  et  $Y_{mf}$ . Ceci se produit lorsque pour tout couple de points distincts (e;f) ou (e;m),  $F_e$  et  $Y_{me}$  sont des fonctions de la fréquence statistiquement indépendantes. On peut alors négliger leurs moyennes devant celles des premiers termes (toujours positifs). On n'a donc pas besoin de supposer que les efforts  $F_e$  et  $F_f$  sont décorrelés (comme le font d'autres méthodes énergétiques), l'oscillation des mobilités de transfert  $Y_{me}$ ,  $Y_{ef}$  et  $Y_{mf}$  suffit à la besogne.

3) Les limites de l'additivité énergétique sont liées à l'hypothèse fondamentale que les termes  $Re\{Y_{me} F_e Y_{mf}^* F_f^*\}$  et  $Re\{F_e F_f^* Y_{ef}^*\}$  oscillent autour de zéro. Si les deux efforts s'appliquent "au même point"  $e=f$  et sont en phase, ceci est manifestement faux.

Pour définir que "deux points  $e$  et  $f$  sont distincts" au sens de l'additivité énergétique on supposera donc que, sur chacune des bandes de fréquences, pour tout point  $m$ ,  $Y_{me} \neq Y_{mf}$ .

En général il faut donc souligner que l'erreur d'additivité dépend fortement de la distance entre les différents points d'excitation (comparée bien entendu à la longueur d'onde): il s'agit de vérifier si une distance de  $\lambda/4$  (à partir de laquelle on a un transfert pour les mobilités classiques, d'après [91]) est suffisante ici.

Des cas particuliers peuvent se présenter, malgré cela, sur des systèmes symétriques, s'il existe des points  $e$ ,  $f$  et  $m$ , tels que  $Y_{me} = Y_{mf}$  et  $Y_{ee} \neq Y_{ef}$ , sur certaines bandes de fréquence.

4) Pour la relation 3.26, on a négligé la moyenne de certains termes de transfert "oscillants", au profit d'autres, toujours positifs. Lorsqu'on augmente le recouvrement modal,

les oscillations diminuent et cette relation est de moins en moins vérifiée, sauf en  $m = e$  (voir remarque précédente). Le **choix des bandes pour les moyennes fréquentielles** devra donc se faire en fonction du nombre d'oscillations et du niveau des oscillations, pour qu'on ait un bon respect de l'additivité énergétique. D'autres suggestions au sujet d'un indicateur pour choisir les bandes de fréquence seront données au E.3.

5) Lorsqu'on monte en fréquence, ou lorsqu'on augmente l'amortissement, pour deux points  $e$  et  $f$  distincts,  $|Y_{ef}|$  devient petit devant  $|Y_e|$ , donc la relation 3.25 est vérifiée asymptotiquement, même si l'hypothèse Hyp.2 ne l'est pas. En effet on néglige une contribution d'un transfert devant celle directe d'une entrée.

La relation 3.25 signifie que, lorsqu'on les moyenne en fréquence, les puissances actives injectées simultanément peuvent être approchées par celles injectées séparément.

Toutes les sources qui vérifient Hyp.1 et Hyp.2 peuvent donc être considérées comme des **sources de puissance active moyenne** par bande de fréquences et on peut les mesurer séparément, sans référence de phase commune.

6) La relation 3.30 peut être inversée en 3.31 et devrait ainsi permettre de reconstituer les puissances actives moyennes injectées aux différents points connaissant uniquement les "miels" en au moins autant de points: Les "miels" peuvent être *mesurés sans référence de phase commune et l'un après l'autre*. Ceci traduit une extrême simplicité expérimentale.

$$\{P_e\} \approx [H_{me}]^{-1} \{ \langle |V_m|^2 \rangle \} \quad (3.31)$$

Comme il a été remarqué lors de la soutenance, cette "application inverse" de la méthode pose cependant des problèmes.

Ce ne sont pas a priori des problèmes de mauvais conditionnement, comme ceux rencontrés pour les mobilités classiques, correspondant à des résonances du système ou à la présence d'un bruit dans la mesure (incertitude sur les quantités). Ils viennent plutôt du fait que le problème inverse, posé sur des quantités moyennées par bandes de fréquences, n'a pas une solution unique. On peut obtenir un même miel à plusieurs endroits par différentes combinaisons d'injections de puissance.

Une étude spécifique de ces relations inverses est nécessaire, afin de trouver des solutions qui consentent cette unicité: par exemple il faut bien choisir les endroits de mesure des "miels", avec des mobilités énergétiques de transfert très différentes entre ces points de mesure et les différents points potentiellement excités.

7) Les mobilités moyennes de Skudrzyk utilisent des moyennes géométriques en fréquence; les quantités précédentes utilisent des moyennes arithmétiques. Ces deux moyennes sont voisines lorsque l'écart type de chaque mobilité, sur la bande de fréquences est faible (fort recouvrement modal). On serait donc tenté de tester la méthode avec des moyennes géométriques; cependant on verra au chapitre suivant que c'est dans le cas du fort recouvrement modal que l'additivité énergétique présente les erreurs les plus importantes.

### 3.3 Connectivité énergétique

On a vu au chapitre 2 que les mobilités classiques permettent, à fréquence pure, de prévoir des quantités locales après couplage, en fonction de quantités locales avant couplage.

On a vu aussi que pour prévoir les vitesses après couplage et les efforts de couplage il faut faire des hypothèses sur les sources qui excitent les sous-systèmes assemblés.

On va voir à présent que l'on peut prévoir des quantités moyennées par bandes de fréquence après couplage en fonction uniquement de quantités moyennées en fréquence avant couplage et ce sans faire d'hypothèses sur les sources.

#### 3.3.1 Tentative simpliste

Ayant défini une mobilité énergétique et vérifié qu'elle s'applique de façon formellement identique aux mobilités classiques pour additionner les contributions de plusieurs excitations simultanées sur une structure, on est tenté de l'appliquer au couplage ponctuel de deux structures, toujours en copiant le formalisme classique, rappelé au 2.3, (dans la suite de ce document on appellera cette démarche "simpliste").

Soient deux structures (comme celles définies au 2.1.1),  $\{S^I\}$  et  $\{S^{II}\}$  rigidement couplées aux points  $c$ . En chaque point de couplage  $c$ , la continuité des vitesses implique que les "miels" après couplage sont égaux aussi:

$$\langle |\widetilde{V}_c^I|^2 \rangle = \langle |\widetilde{V}_c^{II}|^2 \rangle \quad (3.32)$$

Le couplage rigide étant non dissipatif, les puissances actives moyennes échangées rentrant respectivement dans  $\{S^I\}$  et dans  $\{S^{II}\}$ , en chaque point  $c$ , sont opposées (comme les efforts de couplage):

$$\widetilde{P}_c^I = \langle \text{Re} \{ \widetilde{F}_c^I \widetilde{V}_c^{I*} \} \rangle = -\widetilde{P}_c^{II} \quad (3.33)$$

Ces deux relations de raccordement étant exactes elles ne vont introduire aucune erreur dans le calcul.

On développe alors chacun des  $\langle |\widetilde{V}_c^I|^2 \rangle$  en fonction des puissances injectées extérieures et de celles échangées aux points de couplage  $c$  ou  $k$ , en appliquant l'additivité énergétique définie pour une structure isolée (3.30):

$$\langle |\widetilde{V}_c^I|^2 \rangle \approx [H_{ce}^I] \{ \widetilde{P}_e^I \} + [H_{ck}^I] \{ \widetilde{P}_k^I \} \quad (3.34)$$

on fait de même sur la structure  $\{S^{II}\}$ :

$$\langle |\widetilde{V}_c^{II}|^2 \rangle \approx [H_{ce}^{II}] \{ \widetilde{P}_e^{II} \} + [H_{ck}^{II}] \{ \widetilde{P}_k^{II} \} \quad (3.35)$$

et en utilisant 3.33, on obtient les puissances actives moyennes échangées en fonction de celles extérieures:

$$\{ \widetilde{P}_k^I \} \approx [H_{ck}^I + H_{ck}^{II}]^{-1} ([H_{ce}^{II}] \{ \widetilde{P}_e^{II} \} - [H_{ce}^I] \{ \widetilde{P}_e^I \}) \quad (3.36)$$

puis les "miels" en tout point  $m$  non couplé, aussi en fonction des puissances injectées extérieures uniquement:

$$\langle |\widetilde{V}_m^I|^2 \rangle \approx [H_{me}^I] \{ \widetilde{P}_e^I \} + [H_{mk}^I] [H_{ck}^I + H_{ck}^{II}]^{-1} ([H_{ce}^{II}] \{ \widetilde{P}_e^{II} \} - [H_{ce}^I] \{ \widetilde{P}_e^I \}) \quad (3.37)$$

Si l'on ne veut pas formuler d'hypothèse sur le type d'excitation extérieure utilisée, on peut ici encore prévoir les mobilités énergétiques après couplage  $\widetilde{H}_{me}$  (couronnées par un

tilde), uniquement en fonction de celles des structures isolées, avant couplage.

Par définition la mobilité énergétique  $H_{me}$  est égale au "miel" obtenu au point m quand on injecte une puissance active moyenne unitaire au point e. De l'expression 3.37 on tire donc directement les mobilités énergétiques après couplage: par exemple, si les points m et e sont sur la structure  $\{S^I\}$ ,

$$[\widetilde{H}_{me}^I] \approx [H_{me}^I] - [H_{mk}^I][H_{ck}^I + H_{ck}^{II}]^{-1}[H_{ce}^I] \quad (3.38)$$

et si m est sur  $\{S^I\}$  et e sur  $\{S^{II}\}$ ,

$$[\widetilde{H}_{me}^I] \approx [H_{mk}^I][H_{ck}^I + H_{ck}^{II}]^{-1}[H_{ce}^{II}] \quad (3.39)$$

Pour des points m de  $\{S^{II}\}$  il suffit de permuter les exposants  $I$  et  $II$ .

Ces relations ont été testées numériquement dans le cas d'un couplage rigide en trois points de deux plaques identiques (cf.[95]); les résultats étaient très satisfaisants (on verra pourquoi à l'annexe D.4).

### 3.3.2 Les problèmes d'un raccordement énergétique

#### Considérations générales

Lorsqu'on a testé numériquement les relations précédentes sur un assemblage de deux plaques très différentes ([96]) de fortes erreurs sont apparues sur certaines quantités.

En fait on a appliqué l'additivité énergétique sans savoir si ses hypothèses Hyp.2 a) et Hyp.2 b) sont bien vérifiées sur des structures après couplage.

Dans le cas général elles ne le sont pas car les forces de couplage  $F_c$ , dues aux forces extérieures  $F_e$ , sont proportionnelles aux mobilités de transfert  $Y_{ce}$  entre les points de couplage c et les points excités de l'extérieur e (voir leur expression au 2.10), donc *la double hypothèse Hyp.2 de l'additivité énergétique n'est pas vérifiée pour les contributions des efforts de couplage.*

De plus on veut exprimer les puissances échangées en fonction de celles extérieures, alors que sur une structure isolée, d'après l'additivité énergétique, on ne peut pas exprimer certaines puissances injectées en fonction des autres.

Les puissances échangées ne sont pas les mêmes en l'absence ou en présence des puissances extérieures (en leur absence elles deviennent nulles).

L'additivité énergétique ne peut donc pas s'appliquer aux contributions des puissances actives moyennes échangées, avec les mobilités énergétiques définies jusqu'à présent.

Si on veut continuer à appliquer le formalisme simple analogue à celui des mobilités classiques, une redéfinition des mobilités énergétiques mêmes s'avère nécessaire.

#### Étude analytique du couplage rigide en un point

Soient deux structures (comme celles définies au 2.1.1),  $\{S^I\}$  et  $\{S^{II}\}$ , rigidement couplées au point c. On va s'intéresser au transfert d'une structure à l'autre, qui a posé des problèmes pour la démarche simpliste.

La mobilité énergétique ("exacte") après couplage entre un point m de  $\{S^I\}$  et un point n de  $\{S^{II}\}$  s'obtient à partir de sa définition, par

$$\widetilde{H}_{mn} = \frac{\langle |\widetilde{Y}_{mn}|^2 \rangle}{\langle Re\{\widetilde{Y}_n\} \rangle} \quad (3.40)$$

avec les mobilités classiques après couplage données au 2.3.3

$$\widetilde{Y}_{mn} = \frac{Y_{mc}^I Y_{cn}^{II}}{Y_c^I + Y_c^{II}} \quad (3.41)$$

Les parties réelles de  $Y_c^I$  et de  $Y_c^{II}$  sont toujours positives; si on suppose que leurs parties imaginaires fluctuent sur la bande de fréquences, ou que leur niveau baisse en montant en fréquence, alors que le niveau des parties réelles tend vers une constante, la moyenne fréquentielle du produit des parties imaginaires est (au moins asymptotiquement) négligeable devant celle des parties réelles et on peut écrire:

$$\mathbf{Hyp.3 a)} \quad \langle Re\{Y_c^I Y_c^{II*}\} \rangle \approx \langle Re\{Y_c^I\} Re\{Y_c^{II}\} \rangle$$

De plus on considère que, en général, les mobilités classiques d'entrée avant couplage, au(x) futur point(s) couplé(s) c des deux structures, ont des distributions en fréquence statistiquement indépendantes:

$$\mathbf{Hyp.3 b)} \quad \langle Re\{Y_c^I\} Re\{Y_c^{II}\} \rangle \approx \langle Re\{Y_c^I\} \rangle \langle Re\{Y_c^{II}\} \rangle$$

Le dénominateur carré  $\langle |Y_c^I + Y_c^{II}|^2 \rangle$  de 3.41 peut alors s'approcher par:

$$\langle |Y_c^I|^2 \rangle + \langle |Y_c^{II}|^2 \rangle + 2 \langle Re\{Y_c^I\} \rangle \langle Re\{Y_c^{II}\} \rangle$$

en divisant le tout par  $\langle Re\{Y_c^{II}\} \rangle$  on obtient donc:

$$\frac{\langle |Y_c^I + Y_c^{II}|^2 \rangle}{\langle Re\{Y_c^{II}\} \rangle} \approx H_c^I \frac{\langle Re\{Y_c^I\} \rangle}{\langle Re\{Y_c^{II}\} \rangle} + H_c^{II} + 2 \langle Re\{Y_c^I\} \rangle \quad (3.42)$$

On considère, de même, que les mobilités classiques de transfert des deux structures avant couplage, entre le point couplé et tout autre point ont des distributions en fréquence statistiquement indépendantes:

$$\mathbf{Hyp.3 c)} \quad \langle |Y_{mc}^I Y_{cn}^{II}|^2 \rangle \approx \langle |Y_{mc}^I|^2 \rangle \langle |Y_{cn}^{II}|^2 \rangle$$

Le numérateur carré  $\langle |Y_{mc}^I Y_{cn}^{II}|^2 \rangle$  peut aussi se développer en

$$H_{mc}^I \langle Re\{Y_c^I\} \rangle H_{cn}^{II} \langle Re\{Y_n^{II}\} \rangle$$

Finalement, en supposant que pour un point n non couplé de  $\{S^{II}\}$ , on a  $\langle Re\{Y_n^{II}\} \rangle \approx \langle Re\{\widetilde{Y}_n^{II}\} \rangle$ , on peut approcher la mobilité énergétique interstructure par:

$$\widetilde{H}_{mn} \approx \frac{H_{mc}^I H_{cn}^{II}}{H_c^I + H_c^{II} \frac{\langle Re\{Y_c^{II}\} \rangle}{\langle Re\{Y_c^I\} \rangle} + 2 \langle Re\{Y_c^{II}\} \rangle} \quad (3.43)$$

Tandis que celle obtenue par la tentative simpliste serait:

$$\widetilde{H}_{mn} \approx \frac{H_{mc}^I H_{cn}^{II}}{H_c^I + H_c^{II}} \quad (3.44)$$

On rappelle que la différence entre 3.43 et 3.44 reflète le fait que les efforts de couplage dépendent des efforts extérieurs.

### 3.3.3 Mobilités énergétiques "de connexion"

#### Définition

En rapprochant les deux expressions précédentes, on propose de définir les **mobilités énergétiques "de connexion"** pour des sous-structures qui vont être couplées au point(s) c comme ci-suit:

- sur  $S^I$ , si le point excité e est différent de c

$$H_{ce}^I = H_{ce}^{I\text{isolée}} \alpha_c^I = \frac{\langle |Y_{ce}^I|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{Y_e^I\} \rangle} \alpha_c^I \quad (3.45)$$

- sur  $S^{II}$ , si le point excité e est différent de c:

$$H_{ce}^{II} = H_{ce}^{II\text{isolée}} \alpha_c^{II} \quad (3.46)$$

dans tous les autres cas, pour tout point m et e (y compris pour e=c), les mobilités énergétiques sont inchangées:

$$H_{me}^I = \frac{\langle |Y_{me}^I|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{Y_e^I\} \rangle} \quad \text{et} \quad H_{me}^{II} = \frac{\langle |Y_{me}^{II}|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{Y_e^{II}\} \rangle} \quad (3.47)$$

Avec, pour chaque point c, les **facteurs de connexion** suivants:

$$\alpha_c^I = \frac{H_c^I + H_c^{II}}{H_c^I \frac{\langle \text{Re}\{Y_c^I\} \rangle}{\langle \text{Re}\{Y_c^{II}\} \rangle} + H_c^{II} + 2 \langle \text{Re}\{Y_c^I\} \rangle} \quad (3.48)$$

et

$$\alpha_c^{II} = \frac{H_c^I + H_c^{II}}{H_c^I + H_c^{II} \frac{\langle \text{Re}\{Y_c^I\} \rangle}{\langle \text{Re}\{Y_c^{II}\} \rangle} + 2 \langle \text{Re}\{Y_c^{II}\} \rangle} \quad (3.49)$$

Ces mobilités énergétiques vont permettre d'effectuer des calculs énergétiques sur les sous-structures couplées, avec le même formalisme que pour les mobilités classiques (on utilisera alors les mêmes formules que pour la "tentative simpliste", avec les nouvelles mobilités énergétiques de connexion).

Comme la deuxième quantité utilisée,  $\langle \text{Re}\{Y_c\} \rangle$ , est déjà disponible quand on forme les  $H_{mn}$ , aucun calcul supplémentaire de moyenne n'est nécessaire.

#### Puissance échangée

La définition des mobilités énergétiques de connexion a été proposée sans faire intervenir directement les puissances et les "miels".

Comme les relations de couplage (3.32 et 3.33) n'introduisent pas d'erreur, il est équivalent de dire que, avec les mobilités énergétiques de connexion, on trouve des puissances actives moyennes échangées et des "miels" après couplage correctes ou encore que l'additivité énergétique fonctionne aussi pour les contributions des puissances échangées.

C'est ce qu'on va vérifier, toujours pour un seul point de couplage.

Un calcul exact des vitesses après couplage (2.13) au point c, et de l'effort de couplage permet de trouver la puissance active moyenne échangée suivante:

$$\widetilde{P}_c^I = - \langle |\widetilde{F}_e^I|^2 \text{Re}\{Y_e^I\} \frac{|Y_{ce}^I|^2}{\text{Re}\{Y_e^I\}} \frac{\text{Re}\{Y_c^{II}\}}{|Y_c^I|^2 + |Y_c^{II}|^2 + 2\text{Re}\{Y_c^I Y_c^{II*}\}} \rangle \quad (3.50)$$

Avec l'hypothèse Hyp.3 a) on peut d'abord négliger le second terme du produit moyen suivant:

$$\langle Re\{Y_c^I Y_c^{II*}\} \rangle = \langle Re\{Y_c^I\} Re\{Y_c^{II}\} \rangle - \langle Im\{Y_c^I\} Im\{Y_c^{II*}\} \rangle$$

Avec l'hypothèse Hyp.3 b) on peut ensuite remplacer la moyenne du produit restant par le produit des moyennes:

$$\langle Re\{Y_c^I\} Re\{Y_c^{II}\} \rangle \approx \langle Re\{Y_c^I\} \rangle \langle Re\{Y_c^{II}\} \rangle$$

En utilisant aussi les hypothèses Hyp.3 c), Hyp.2 et Hyp.1, on obtient la puissance active moyenne échangée:

$$\widetilde{P}_c^I \approx -\widetilde{P}_e \frac{\langle |Y_{ce}^I|^2 \rangle}{\langle Re\{Y_e^I\} \rangle} \frac{1}{\frac{\langle |Y_c^I|^2 \rangle \langle Re\{Y_c^I\} \rangle}{\langle Re\{Y_c^I\} \rangle \langle Re\{Y_c^{II}\} \rangle} + \frac{\langle |Y_c^{II}|^2 \rangle}{\langle Re\{Y_c^{II}\} \rangle} + 2 \langle Re\{Y_c^I\} \rangle} \quad (3.51)$$

dans laquelle on peut faire apparaître des mobilités énergétiques:

$$\widetilde{P}_c^I \approx -\widetilde{P}_e \frac{\langle |Y_{ce}^I|^2 \rangle}{\langle Re\{Y_e^I\} \rangle} \frac{1}{H_c^I \frac{\langle Re\{Y_c^I\} \rangle}{\langle Re\{Y_c^{II}\} \rangle} + H_c^{II} + 2 \langle Re\{Y_c^I\} \rangle} \quad (3.52)$$

on introduit alors le facteur de connexion  $\alpha_c^I$  et on écrit

$$\widetilde{P}_c^I \approx -\widetilde{P}_e \frac{\langle |Y_{ce}^I|^2 \rangle}{\langle Re\{Y_e^I\} \rangle} \frac{\alpha_c^I}{H_c^I + H_c^{II}} \quad (3.53)$$

soit

$$\widetilde{P}_c^I \approx -\widetilde{P}_e \frac{H_{ce}^I}{H_c^I + H_c^{II}} \quad (3.54)$$

La dernière expression est identique à celle obtenue par la méthode des mobilités énergétiques (3.36), donc la nouvelle définition est efficace pour un point de couplage.

### 3.3.4 Compléments

#### Remarques

- 1) On a bien exprimé les quantités après couplage uniquement en fonction de quantités moyennées avant couplage.
- 2) La présentation ci-dessus est quelque peu insatisfaisante, car on pourrait penser qu'on définit les mobilités énergétiques d'une sous-structure en fonction de données appartenant aux autres sous-structures qui lui seront attachées, un peu comme les facteurs de pertes par couplage (CLF) de la SEA. Cependant il faut remarquer que, contrairement aux CLF, le couplage à une troisième structure n'affecte en rien les calculs précédents: le procédé décrit ci-dessus est récursif et on ne fait pas d'hypothèses de couplage faible. De plus ce n'est que lors du couplage qu'on introduit les facteurs de connexion qui lui correspondent: en pratique il suffit de disposer pour chaque sous-structure, avant couplage, des  $H_{me}$  pour tous les couples de points m et e et des  $\langle Re\{Y_m\} \rangle$  en tout point m susceptible d'être couplé.
- 3) Des tests analytiques analogues ont été effectués sur les mobilités énergétiques après couplage pour d'autres points (entre points de couplage, entre points non couplés etc.).

- 4) Pour deux points de couplage le même calcul analytique a été mené et les mêmes facteurs de connexion semblent convenir (cf. Annexe C.2), même en présence de transferts entre les points couplés.
- 5) Les vérifications numériques du chapitre suivant montreront que la correction marche bien aussi pour trois points de couplage.
- 6) Les mêmes corrections s'appliquent aussi au couplage interne par mobilités énergétiques. Ceci est très important, car les couplages internes sont récursifs, donc, en utilisant la remarque 2) du 2.4, on généralise la validité des facteurs de connexion pour N points de couplage.
- 7) On appellera la méthode définie précédemment EMMA (Energetic Mean Mobility Approach), ou méthode des mobilités énergétiques.

### Signification physique des facteurs de connection

La correction apportée par les facteurs de connection est proportionnelle à la disparité des sous-structures assemblées, exprimée par le rapport  $\frac{\langle Re\{Y_c^I\} \rangle}{\langle Re\{Y_c^{II}\} \rangle}$ . Plus ce rapport s'écarte de 1, plus une structure (la moins mobile au départ) est susceptible de bloquer l'autre et de créer un fort changement de sa mobilité énergétique au point de couplage.

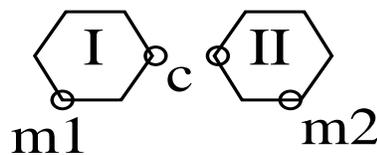
Comme en fin de compte seules les mobilités  $H_{ce}$  entre les points de couplage c et les points excités e de la sous-structure la plus mobile au départ subissent une forte correction, ceci signifie bien que, après couplage, l'effet au point c de l'excitation au point e n'est plus le même que celui sur le point c non couplé et que le changement est d'autant plus important que la structure a été bloquée par l'autre.

Les sous-structures assemblées seront comparées et considérées plus ou moins "mobiles énergiquement", "semblables" ou "différentes", en étudiant les rapports des moyennes des parties réelles de leurs mobilités d'entrée aux différents points de couplage.

Le fait que la correction des quantités après couplage s'exprime uniquement en fonction des caractéristiques des sous-structures aux points couplés, donc indépendamment de la position et de la nature de l'excitation, est indicatif de sa pertinence et de sa robustesse.

#### 3.3.5 Cas non couverts par la méthode

##### Couplage symétrique de structures identiques



Lorsqu'on couple deux structures identiques, de façon symétrique, on a les relations particulières suivantes (pour tous les points c):

$$Y_c^I = Y_c^{II} \quad (3.55)$$

donc on n'a plus le droit d'écrire l'hypothèse Hyp.3 a)

$$\langle Re\{Y_c^I\} Re\{Y_c^{II}\} \rangle \approx \langle Re\{Y_c^I\} \rangle \langle Re\{Y_c^{II}\} \rangle$$

(on fait une erreur d'autant plus forte que l'écart type de  $Re\{Y_c\}$  est grand), ce qui compromet déjà les expressions des puissances échangées.

De plus, pour deux points symétriques m1 et m2 on a, par réciprocity,

$$Y_{m1c}^I = Y_{cm2}^{II}$$

donc pour un point de couplage c, le calcul exact donne un "miel" en m1 dû à une force en m2 égal à

$$\langle |\widetilde{V}_{m1}^I|^2 \rangle = \langle |\widetilde{F}_{m2}|^2 \frac{|Y_{cm2}^{II}|^2 |Y_{m1c}^I|^2}{|Y_c^I|^2 + |Y_c^{II}|^2 + 2Re\{Y_c^I Y_c^{II*}\}} \rangle \quad (3.56)$$

ou encore

$$\langle |\widetilde{V}_{m1}^I|^2 \rangle = \langle |\widetilde{F}_{m2}|^2 Re\{Y_{m2}^{II}\} \frac{|Y_{cm2}^{II}|^2}{Re\{Y_{m2}^{II}\}} \frac{|Y_{m1c}^I|^2}{|Y_c^I|^2 + |Y_c^{II}|^2 + 2Re\{Y_c^I Y_c^{II*}\}} \rangle \quad (3.57)$$

ce "miel"  $\langle |\widetilde{V}_{m1}^I|^2 \rangle$  ne peut plus s'approcher par

$$\langle |\widetilde{F}_{m2}|^2 \rangle \langle Re\{Y_{m2}^{II}\} \rangle \frac{\langle |Y_{cm2}^{II}|^2 \rangle}{\langle Re\{Y_{m2}^{II}\} \rangle} \frac{\langle |Y_{m1c}^I|^2 \rangle}{\langle |Y_c^I|^2 + |Y_c^{II}|^2 + 2Re\{Y_c^I Y_c^{II*}\} \rangle} \quad (3.58)$$

ce qui serait équivalent au résultat énergétique:

$$\langle |\widetilde{V}_{m1}^I|^2 \rangle \approx \widetilde{P}_{m2} \frac{H_{cm2}^{II} H_{m1c}^I \alpha_c^{II}}{H_c^I + H_c^{II}} \quad (3.59)$$

en effet on ne peut plus écrire

$$\langle |Y_{cm2}^{II}|^2 |Y_{m1c}^I|^2 \rangle \approx \langle |Y_{cm2}^{II}|^2 \rangle \langle |Y_{m1c}^I|^2 \rangle$$

car les quantités moyennées sont égales (et on fait encore une erreur d'autant plus forte que l'écart type de  $|Y_{m1c}^I|^2$  est grand). La simulation numérique du D.4.1 illustre ces deux erreurs. Elle montre aussi que la tentative simpliste (sans le facteur de connexion  $\alpha_c^{II}$ ) paradoxalement "marche mieux" pour ces deux cas.

Pour des plaques identiques le facteur de connexion est systématiquement inférieur à 1 et tend vers 0.5 en haute fréquence: c'est bien l'écart qu'on retrouve entre le calcul "approché" de l'EMMA et celui "simpliste". Pour le cas traité, avec un amortissement  $\eta = 0.01$ , le rapport entre le calcul exact et celui de l'EMMA, pour les deux raisons indiquées ci-dessus, se trouve être aussi proche 0.5. Le calcul simpliste, pour le cas traité numériquement, coïncide très bien (par hasard) avec le calcul exact. Pour des faibles amortissements il va de toute façon dans le bon sens par rapport au calcul "approché" de l'EMMA; avec un fort amortissement par exemple il risque de s'écarter aussi du calcul exact, qui sera "borné" par les deux calculs "approché" et "simpliste".

Tous ces cas sont cependant plus théoriques que réels, car il est difficile de mesurer des mobilités égales sur deux structures, donc d'avoir un couplage aussi parfaitement symétrique.

## Vitesses avant couplage égales ou opposées

On a dit que les relations énergétiques de couplages sont exactes et c'est vrai. Cependant elles ne sont pas équivalentes à celles exactes sur les vitesses et sur les efforts.

Le cas de deux structures ayant des vitesses opposées avant couplage, aux points de couplage, est un cas particulier pour lequel la prévision énergétique peut être mise à mal.

Pour deux structures, excitées par des sources de force, en effet le "miel" après couplage, au point de couplage  $c$ , est exactement égal à

$$\langle |\widetilde{V}_c|^2 \rangle = \langle |V_c^I + Y_c^I \frac{V_c^{II} - V_c^I}{Y_c^I + Y_c^{II}}|^2 \rangle \quad (3.60)$$

avec  $V_c^{II} = -V_c^I$  on a donc

$$\langle |\widetilde{V}_c|^2 \rangle = \langle |V_c^I - \frac{2Y_c^I V_c^I}{Y_c^I + Y_c^{II}}|^2 \rangle \quad (3.61)$$

soit

$$\langle |\widetilde{V}_c|^2 \rangle = \langle |\frac{(Y_c^{II} - Y_c^I)V_c^I}{Y_c^I + Y_c^{II}}|^2 \rangle \quad (3.62)$$

ou encore

$$\langle |\widetilde{V}_c|^2 \rangle \approx \langle |V_c^I|^2 \rangle \frac{\langle |Y_c^{II}|^2 + |Y_c^I|^2 \rangle - 2 \langle \text{Re}\{Y_c^I Y_c^{II*}\} \rangle}{\langle |Y_c^I|^2 + |Y_c^{II}|^2 \rangle + 2 \langle \text{Re}\{Y_c^I Y_c^{II*}\} \rangle} \quad (3.63)$$

Dans tous les cas le "miel" est inférieur à celui avant couplage, car

$$\langle \text{Re}\{Y_c^I Y_c^{II*}\} \rangle \approx \langle \text{Re}\{Y_c^I\} \rangle \langle \text{Re}\{Y_c^{II}\} \rangle$$

donc on retranche au numérateur et on ajoute au dénominateur une même quantité positive. Si les structures ont la même mobilité au point de couplage, alors le "miel" après couplage est nul.

La méthode énergétique quant à elle donne

$$\langle |\widetilde{V}_c|^2 \rangle \approx \langle |V_c^I|^2 \rangle + \frac{H_c^I (\langle |V_c^{II}|^2 \rangle \alpha_c^{II} - \langle |V_c^I|^2 \rangle \alpha_c^I)}{H_c^I + H_c^{II}} \quad (3.64)$$

soit

$$\langle |\widetilde{V}_c|^2 \rangle \approx \langle |V_c^I|^2 \rangle \frac{H_c^I + H_c^{II} + H_c^I (\alpha_c^{II} - \alpha_c^I)}{H_c^I + H_c^{II}} \quad (3.65)$$

Ce "miel" peut être supérieur ou inférieur à celui avant couplage, suivant les mobilités moyennes des structures au point de couplage. L'erreur en dB peut être très importante (voire infinie) pour ce cas de figure.

Dans le cas où les vitesses avant couplage sont identiques sur les deux structures au point de couplage, l'expression énergétique du "miel" après couplage est inchangée (et il peut donc être supérieur ou inférieur à celui avant couplage), alors que le "miel" exact est toujours égal à celui avant couplage. Dans ce cas cependant l'erreur ne dépasse pas 3 dB.

## 3.4 Le concept de Source de Puissance Active Moyenne

### 3.4.1 Points non couplés excités et Types de source

On va voir à présent que l'utilisation de quantités moyennées en fréquence met en évidence une propriété remarquable: *les puissances actives moyennes injectées en des points e non couplés, peuvent être considérées comme inchangées après couplage* quel que soit le type de source, dès que le recouvrement modal est supérieur à 1:

$$\widetilde{P}_e \approx P_e \quad (3.66)$$

En effet  $P_e = \langle \text{Re}\{F_e V_e^*\} \rangle$  peut aussi s'écrire:  $P_e \approx \langle \text{Re}\{Y_{ee}\} \rangle \langle |F_e|^2 \rangle$

et la mobilité d'entrée moyenne en e (non couplé) est à peu près inchangée par le couplage en un point c (différent de e): analytiquement, d'après 2.18, on a en effet

$$\langle \text{Re}\{\widetilde{Y}_{ee}^I\} \rangle = \langle \text{Re}\{Y_{ee}^I - \frac{Y_{ec}^I Y_{ce}^I}{Y_c^I + Y_c^{II}}\} \rangle \quad (3.67)$$

soit

$$\langle \text{Re}\{\widetilde{Y}_{ee}^I\} \rangle \approx \langle \text{Re}\{Y_{ee}^I\} \rangle - \frac{\langle \text{Re}\{(Y_{ec}^I)^2 (Y_c^I + Y_c^{II})^*\} \rangle}{\langle |Y_c^I + Y_c^{II}|^2 \rangle} \quad (3.68)$$

et, comme  $\langle |Y_c^I + Y_c^{II}|^2 \rangle \gg \langle \text{Re}\{(Y_{ec}^I)^2 (Y_c^I + Y_c^{II})^*\} \rangle$  (car pour le deuxième terme on moyenne des quantités qui oscillent autour de zéro), on a bien

$$\langle \text{Re}\{\widetilde{Y}_{ee}^I\} \rangle \approx \langle \text{Re}\{Y_{ee}^I\} \rangle \quad (3.69)$$

On peut écrire la même relation pour un couplage interne en un point, donc elle est généralisable au couplage en N points c distincts (d'autant plus que les termes qu'on a négligés ne jouent pas tous dans le même sens (ils sont tantôt positifs, tantôt négatifs)). Le couplage ponctuel affecte peu la valeur moyenne de la mobilité en e, même pour un recouvrement modal inférieur à 1.

### Sources de force

La relation 3.69 implique que **les sources de force sont aussi des "sources de puissance active moyenne"**; en effet si la mobilité moyenne d'entrée ne change pas après couplage, on peut écrire

$$\langle |F_e|^2 \rangle = \langle |\widetilde{F}_e|^2 \rangle \text{ implique } \widetilde{P}_e \approx P_e$$

Même si la variation de la vitesse au point excité est maximale, la puissance active moyenne injectée est quasiment inchangée.

C'est ce qu'on vérifie dans les simulations numériques du chapitre suivant.

### Sources de vitesse

De la même manière  $P_e = \langle \text{Re}\{F_e V_e^*\} \rangle$  peut s'écrire  $P_e \approx \langle \text{Re}\{Z_{ee}\} \rangle \langle |V_e|^2 \rangle$

En "haute fréquence", pour un recouvrement modal supérieur à 1, les mobilités d'entrée ont un écart type faible et de plus on a  $\langle \text{Re}^2\{Y_{ee}\} \rangle \gg \langle \text{Im}^2\{Y_{ee}\} \rangle$ ; donc on peut écrire

$$\langle \text{Re}\{\frac{1}{Y_{ee}}\} \rangle = \langle \frac{\text{Re}\{Y_{ee}\}}{|Y_{ee}|^2} \rangle$$

$$\begin{aligned} &\approx \langle \frac{1}{\text{Re}\{Y_{ee}\}} \rangle \approx \frac{1}{\langle \text{Re}\{Y_{ee}\} \rangle} \\ &\approx \frac{1}{\langle \text{Re}\{Y_{ee}\} \rangle} \approx \langle \frac{1}{\text{Re}\{Y_{ee}\}} \rangle \approx \langle \text{Re}\{\frac{1}{Y_{ee}}\} \rangle \end{aligned}$$

soit

$$\langle \text{Re}\{Z_{ee}\} \rangle \approx \langle \text{Re}\{\widetilde{Z}_{ee}\} \rangle.$$

Donc, l'impédance d'entrée moyenne ayant peu changé,

$$\langle |V_e|^2 \rangle = \langle |\widetilde{V}_e|^2 \rangle \text{ implique aussi } \widetilde{P}_e \approx P_e$$

On peut affirmer que, en haute fréquence, **des sources de vitesse sont aussi des "sources de puissance active moyenne"**.

### Autres sources

Les **autres types d'excitation** se situant entre les sources de force et celles de vitesse, on déclare que, pour un couplage en N points distincts, en haute fréquence **"nous sommes tous des sources de puissance active moyenne!"**. Ceci peut contribuer à expliquer pourquoi la "SEA prédictive", qui utilise implicitement le fait que la puissance moyenne totale injectée dans un sous-système est inchangée après couplage, a le droit de le faire, en haute fréquence.

### Prédictivité

Le corollaire le plus important ici est la prédictivité: *on peut écrire les "miels" après couplage uniquement en fonction de ceux avant couplage aux futurs points de couplage et en fonction de quantités des sous-structures isolées, avant couplage, moyennées en fréquence:*

$$\{\langle |\widetilde{V}_m^I|^2 \rangle\} \approx \{\langle |V_m^I|^2 \rangle\} + [H_{mk}^I][H_{ck}^I + H_{ck}^{II}]^{-1}(\{\langle |V_c^{II}|^2 \rangle\} - \{\langle |V_c^I|^2 \rangle\}) \quad (3.70)$$



FIG. 3.2 - "Miels" avant couplage pour prévoir les "miels" après couplage

### 3.4.2 Points de couplage excités et Types de source

En toute rigueur il faut mettre un bémol à l'enthousiasme précédent au sujet des sources de puissance active moyenne: comme on l'a précisé, il faut que le point excité ne soit pas un futur point de couplage.

En effet, si l'on excite un futur point de couplage, les hypothèses sur les sources deviennent très importantes: si l'on suppose par exemple que la force extérieure n'a pas changé

après couplage (source de force), comme la vitesse au point de couplage sera elle fortement changée, la puissance active moyenne injectée au point de couplage ne peut que changer fortement. Il en est de même pour des sources de vitesse appliquées aux points de couplage, pour lesquelles les forces injectées varient fortement, ainsi que la puissance active moyenne injectée.

Pour les deux cas extrêmes précédents on peut évidemment trouver des expressions pour les puissances actives moyennes injectées après couplage, en fonction de celles avant couplage, et utiliser la méthode énergétique de façon prédictive (par exemple pour un point de couplage unique).

1) Pour une source de force en  $e=c$  sur  $S^I$  on a

$$\widetilde{P}_e = \left\langle |F_e|^2 \frac{\operatorname{Re}\{Y_c^I\} |Y_c^I|^2 \operatorname{Re}\{Y_c^{II}\}}{\operatorname{Re}\{Y_c^I\} |Y_c^I + Y_c^{II}|^2} \right\rangle \quad (3.71)$$

soit

$$\widetilde{P}_e \approx P_e \frac{H_c^I \alpha_c^I}{H_c^I + H_c^{II}} \quad (3.72)$$

(la puissance active moyenne injectée après couplage est inférieure à celle avant couplage).

2) Pour une source de vitesse en  $e=c$  sur  $S^I$  on a

$$\widetilde{F}_e = V_c \frac{Y_c^I + Y_c^{II}}{Y_c^I Y_c^{II}} \quad (3.73)$$

soit

$$\widetilde{P}_e \approx \left\langle |V_c|^2 \right\rangle > \frac{H_c^I + H_c^{II}}{H_c^I H_c^{II}} \quad (3.74)$$

ou encore

$$\widetilde{P}_e \approx P_e \frac{H_c^I + H_c^{II}}{H_c^{II}} \quad (3.75)$$

(la puissance active moyenne injectée après couplage est donc supérieure à celle avant couplage).

3) Pour une source de puissances active moyenne on a bien quelque chose d'intermédiaire entre les deux types de source précédents, donc elle devrait correspondre au mieux aux autres types de source réelles.

Théoriquement pour toute autre source on retombe dans l'impossibilité d'effectuer de véritables prévisions, sur les vitesses ou les forces après couplage, qui caractérise les mobilités classiques. La source de puissance active moyenne représente cependant le meilleur compromis prédictif, même pour des excitations aux points de couplage par des sources quelconques.

### 3.5 Conclusions de l'étude analytique

On a montré qu'il est possible de définir des quantités moyennées par bandes de fréquence, appelées *mobilités énergétiques*, qui relient la puissance active injectée localement aux niveaux locaux carrés de vitesse ("miels") sur toute structure.

On a vu que ces quantités permettent de calculer les "miels" dus à plusieurs excitations simultanées, par une relation d'"*additivité énergétique*" utilisant les puissances actives par bande fréquentielle, injectées séparément, en des points distincts, sans référence de phase en commun.

On a montré qu'à l'aide de ces quantités on peut effectuer des *prédictions énergétiques locales* sur les assemblages rigides en  $N_c$  points séparés, uniquement à partir des mobilités énergétiques de connexion et des "miels" des sous-structures isolées, avant couplage.

On a enfin observé que pour des sources de force comme pour des sources de vitesse, la puissance active injectée par bande de fréquence dans un sous-système varie peu lorsqu'on couple celui-ci en  $N_c$  points, suffisamment loin du point d'injection; on en a alors conclu que les systèmes excitateurs peuvent être considérés comme des "*sources de puissance active moyenne*" et qu'on peut vraiment prévoir les "miels" après couplage à partir de ceux avant couplage.

On a utilisé des hypothèses simples sur les distributions en fréquence des mobilités classiques et des efforts extérieurs appliqués, qui peuvent être testées facilement lors des mesures ou des calculs sur les sous-structures isolées.

Ces hypothèses vont être étudiées numériquement et les limites de la méthode, liées à ces distributions en fréquence (nombre de modes dans la bande considérée, recouvrement modal ...), vont être mieux définies dans le chapitre suivant.

Des compléments analytiques ont été reportés à l'Annexe C, ils concernent

- les couplages internes,
- l'étude énergétique du couplage en deux points,
- l'étude énergétique du couplage avec une masse ponctuelle,
- des expressions simplifiées qui ne nécessitent pas d'inversion,
- le calcul des facteurs de pertes par couplage pour des couplages ponctuels.

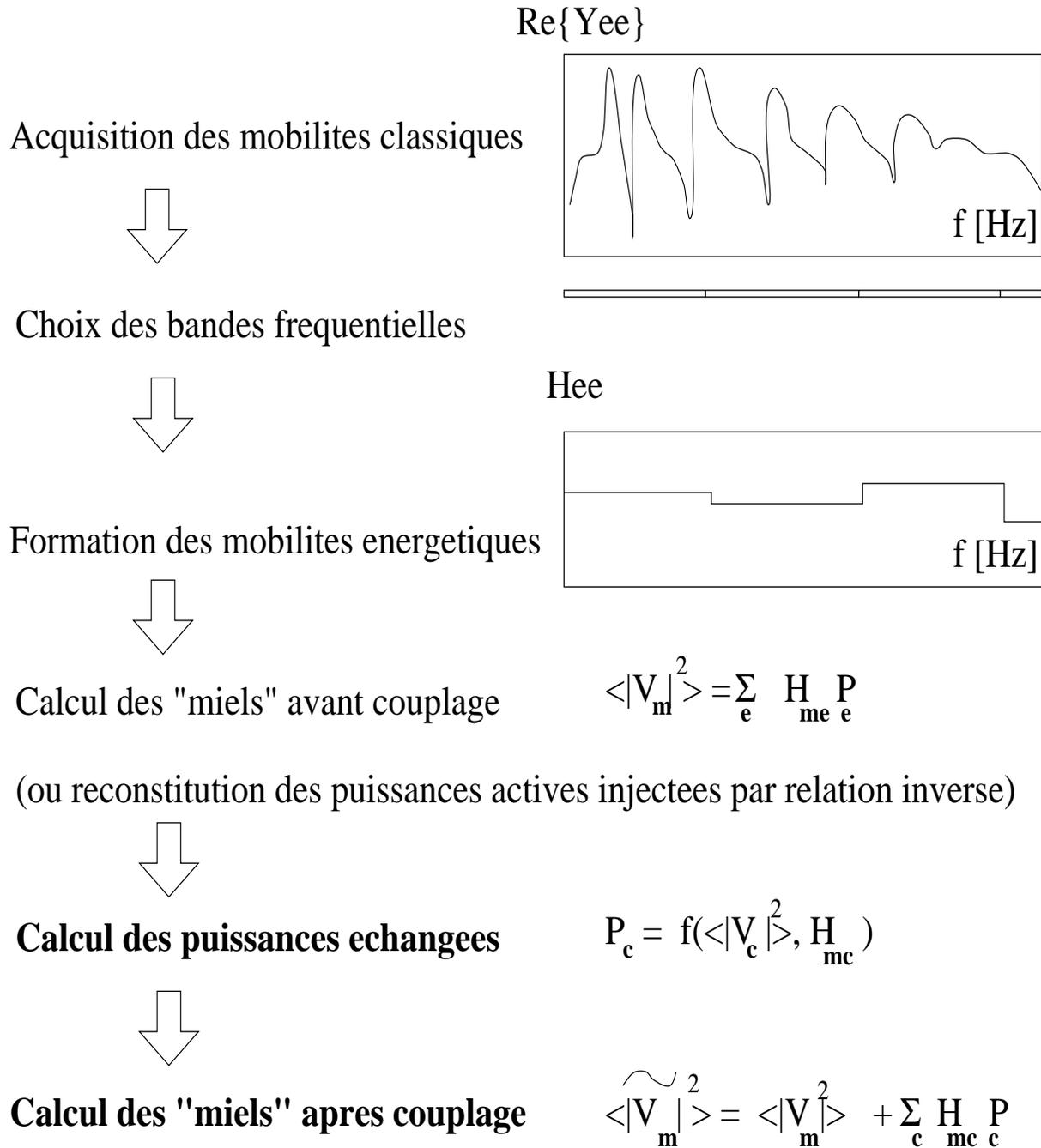


FIG. 3.3 - Schéma Récapitulatif de l'Application de l'EMMA

# Chapitre 4

## ANALYSE NUMÉRIQUE SYSTÉMATIQUE SUR DES PLAQUES HOMOGÈNES

### Organisation du chapitre

Dans ce chapitre on met en oeuvre l'approche par mobilités moyennes énergétiques (EMMA) sur des cas de plaques minces homogènes couplées.

Nous allons d'abord traiter les erreurs de méthode sur une structure isolée. Nous allons ensuite présenter différents cas de couplage rigide de façon à analyser des situations variées. Nous allons aussi tester l'influence de certains paramètres globaux des structures (comme l'amortissement et la densité modale), ou du calcul (comme le nombre de modes dans les bandes de fréquence utilisées).

On se comparera toujours par rapport au calcul exact issu des mobilités classiques.

### Analyse des erreurs de méthode

On peut classer les erreurs en quatre groupes:

- celles sur la définition des  $H_{mn}$  (dues aux hypothèses 1 et 2),
- celles sur l'hypothèse de sources de puissance active moyenne,
- celles sur l'additivité énergétique (hypothèse 3),
- celles sur les simplifications des relations de couplage (hypothèses 4 et 5).

Les hypothèses 1 à 3 portent sur les excitations, alors que celles relatives au couplage ne portent que sur les mobilités classiques des sous-systèmes isolés.

Nous soulignons le fait que les erreurs qu'on fait quand on veut reconstituer des mobilités énergétiques sur l'assemblage, à partir de celles des structures isolées, avant couplage, englobent les erreurs dues aux hypothèses de la définition, celles sur les sources de puissance, celles sur l'additivité énergétique et celles sur les relations de couplage.

### Choix des structures à étudier

Les plaques minces rectangulaires appuyées aux quatre bords, permettent des calculs assez "exactes" (par sommation modale) et rapides sur un large spectre de fréquences et elles permettent aussi d'analyser des bandes de fréquence qui contiennent beaucoup de modes, (ce que n'auraient pas permis des poutres).

De plus elles ont une densité modale asymptotiquement constante en fréquence, donc une

analyse par bandes de largeur constante, permet d'avoir à peu près le même nombre de modes par bande; seul le recouvrement modal augmente en fréquence. Ceci simplifie les interprétations.

Afin d'étendre la portée des analyses à des structures moins "parfaites", on va aussi considérer des plaques avec des discontinuités massiques concentrées, obtenues en assemblant en quelques points les plaques homogènes précédentes avec des masses indéformables ponctuelles, par la méthode (exacte) des mobilités classiques. Ces plaques "hétérogènes" peuvent mettre à mal certaines méthodes comme l'Asymptotic Modal Analysis (qui exploite les propriétés des bases de sinus), surtout à proximité des discontinuités.

Les applications expérimentales du chapitre suivant, sur des cylindres multicouche, montreront que notre méthode n'est pas liée au choix d'une base fonctionnelle particulière.

## Modèle choisi pour les plaques

Les plaques qu'on va étudier, vibrent en flexion pure et sont minces, homogènes, rectangulaires de dimensions  $(L_x * L_y * h)$ , appuyées aux quatre bords. Leurs mobilités respectives sont obtenues par les expressions modales classiques: (voir les références de [33])

$$Y_{me} = \frac{j\omega}{M} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n(m)\phi_n(e)}{(\omega^2 - \omega_n^2 + j\eta\omega\omega_n)} \quad (4.1)$$

où,  $M = \frac{L_x L_y \rho h}{4}$  est la masse généralisée, et, pour le  $n$ ème mode, d'indices  $(p; q)$ ,  $\phi_n(m) = \sin(\frac{p\pi x_m}{L_x}) \sin(\frac{q\pi y_m}{L_y})$  est la fonction propre du mode et  $\omega_n = [(\frac{p\pi}{L_x})^2 + (\frac{q\pi}{L_y})^2] \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}$  la pulsation propre du mode;  $E$  est le module d'Young,  $\nu$  est le coefficient de Poisson,  $\rho$  est la masse volumique du matériau et  $\eta$  est l'amortissement hystérique.

La plage de fréquences va de 100 à 5000 Hz, le calcul est effectué avec les modes contenus dans un "rectangle" modal de côtés dix fois plus grands que ceux du rectangle des modes résonnants; une erreur inférieure à 5% est tolérée sur les parties réelles ou imaginaires des mobilités classiques.

## 4.1 Erreurs de méthode sur une Structure isolée

On considère une plaque mince rectangulaire appuyée aux quatre bords, ayant environ 44 modes dans chacune des bandes de 200 Hz utilisées (ses caractéristiques sont données dans l'Annexe D.1).

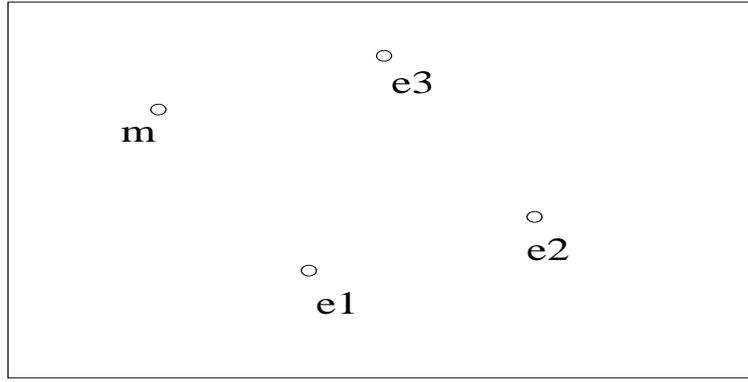
### 4.1.1 Erreurs de définition

Comme annoncé au 3.2.1 on va étudier ici, sur une plaque, dans quelle mesure les mobilités énergétiques, définies par  $\frac{\langle |Y_{me}|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{Y_e\} \rangle}$ , (3.11), peuvent représenter le rapport  $\frac{\langle |V_m|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{F_e V_e^*\} \rangle}$  entre le "miel" et la puissance active moyenne injectée (3.14).

### Choix de l'excitation

Pour des forces de spectres constants sur la bande de fréquences, les deux quantités précédentes sont égales, l'erreur est nulle.

Afin d'illustrer proprement la propriété utilisée (cf.A.15) on va considérer le cas (purement numérique) d'une force aléatoire, de module compris entre 0 et 1 [N] et de phase variant de  $-2\pi$  à  $+2\pi$  [rad]. Cette force est donc statistiquement indépendante de toute mobilité,

FIG. 4.1 - *Plaque simplement appuyée aux quatre bords*

d'entrée et de transfert.

Comme on veut montrer que la définition représente le rapport "miel"/puissance indépendamment du type d'excitation utilisé, on va aussi considérer une force due à un couplage avec un système exciteur beaucoup moins mobile que la structure, ayant une vitesse unitaire sur toute la bande; cette force est approchée par:  $F_e = \frac{1}{Y_{ee}}$ .

Ce cas particulier est très défavorable: pour  $m = e$  la force est corrélée en fréquence à la mobilité d'entrée, voire à certaines mobilités de transfert en basse fréquence.

Voir dans l'Annexe D.1 l'allure des forces utilisées et les commentaires ultérieurs.

### Mobilités énergétiques d'entrée

Pour une excitation en e1 on compare les expressions 3.11 et 3.14, pour les amortissements  $\eta = 0.01$  et  $\eta = 0.1$ .

Sur les Figures 4.2 et 4.3 on constate que l'erreur de définition est très faible pour une force décorrélée de la mobilité d'entrée (Force aléatoire).

Pour  $F_e = 1/Y_e$ , l'erreur est quasi nulle en haute fréquence, mais peut devenir importante (facteur quatre) en basse fréquence.

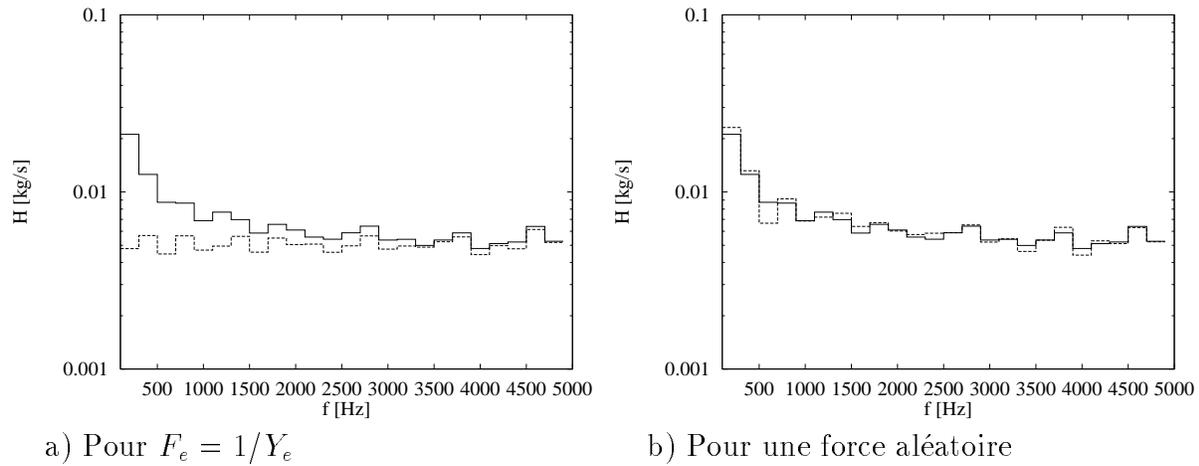
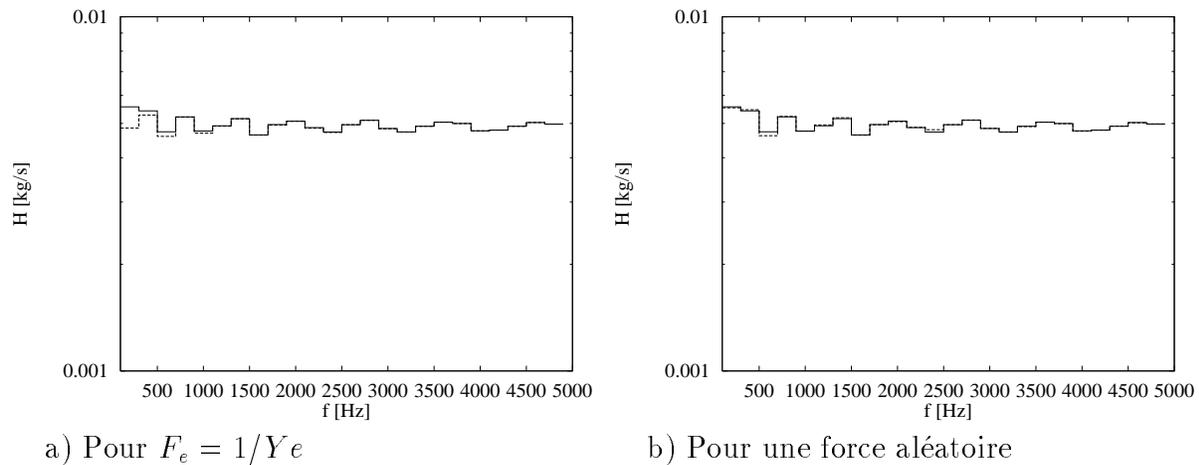
Pour des bandes de largeur constante, l'erreur décroît globalement en montant en fréquence et aussi quand on augmente l'amortissement; elle est donc d'autant plus faible que le recouvrement modal est fort et qu'il lisse la force excitatrice, qui se rapproche d'un spectre constant.

Dans l'Annexe D.1 on donne quelques explications à ce sujet.

### Mobilités énergétiques de transfert

Sur les Figures 4.4 et 4.5 on compare les expressions 3.11 et 3.14 entre le point m et le point e1, respectivement pour un amortissement  $\eta = 0.01$  et  $\eta = 0.1$ .

Les erreurs de définition sont faibles en transfert; elles ne diminuent pas lorsque le recouvrement modal augmente (en montant en fréquence, ou lorsqu'on augmente l'amortissement). Elles fluctuent d'une bande à l'autre, de façon irrégulière et ne sont pas les mêmes pour les deux types d'excitation testés.

FIG. 4.2 - Mobilités énergétiques d'entrée en  $e1$  pour  $\eta = 0.01$ FIG. 4.3 - Mobilités énergétiques d'entrée en  $e1$  pour  $\eta = 0.1$ 

$$\text{---} H_{ee} \quad \text{---} \frac{\langle |V_e|^2 \rangle}{P_e}$$

### Conclusions sur les erreurs de définition

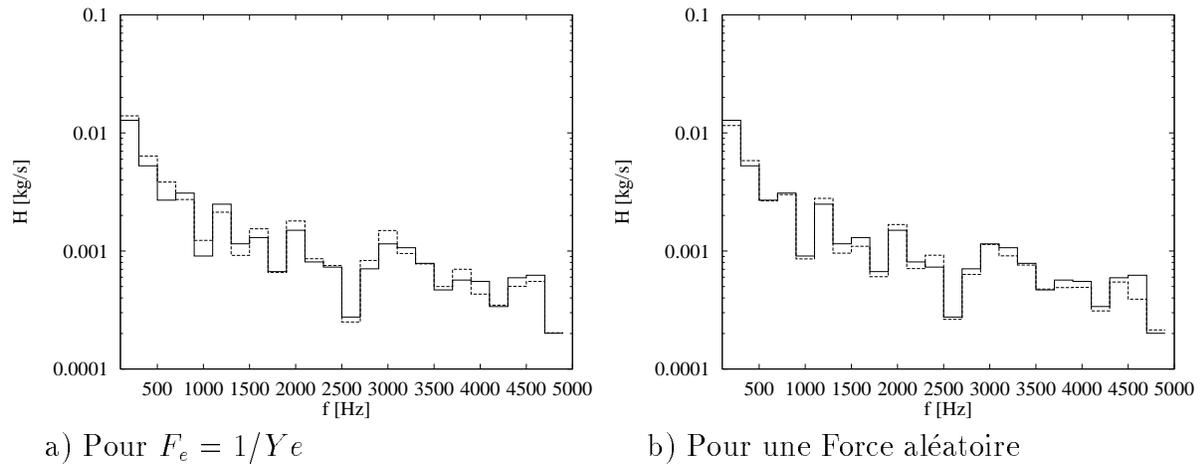
Les erreurs de définition sont liées au type d'excitation et varient donc d'une bande à l'autre de façon irrégulière et "imprévisible" à partir des seules mobilités (liées uniquement à la structure).

Sur les mobilités énergétiques d'entrée les erreurs peuvent être importantes en basse fréquence, mais diminuent asymptotiquement vers zéro lorsque le recouvrement modal augmente (ici elles sont inférieures à 3 dB si le recouvrement modal est supérieur à 1, à partir de la troisième bande).

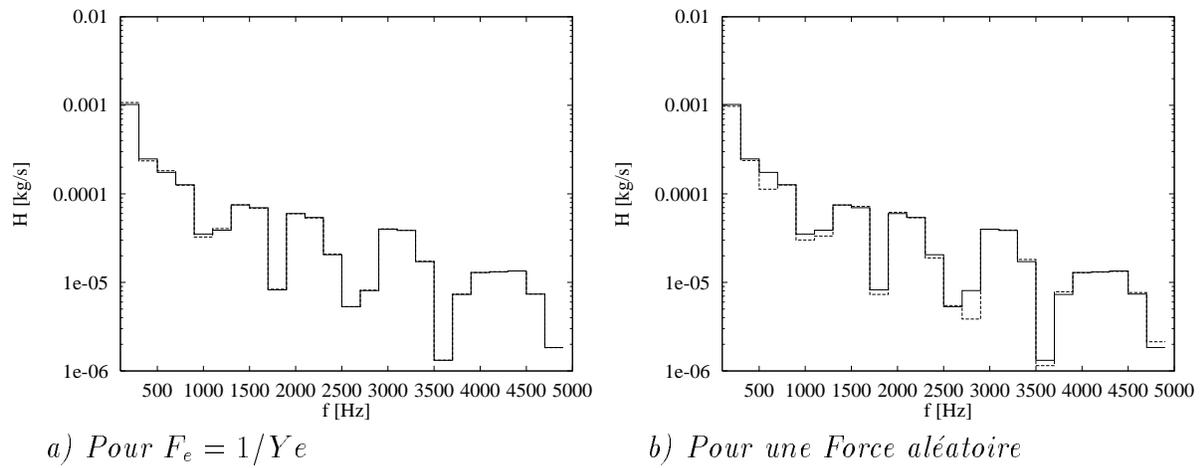
Sur les transferts les erreurs sont plus faibles qu'en entrée, mais ne diminuent pas lorsque le recouvrement modal augmente.

D'après d'autres simulations analogues, toutes les erreurs diminuent asymptotiquement vers zéro lorsque le nombre de modes dans la bande considérée (ou le nombre d'oscillations de la partie imaginaire des mobilités) augmente, ce qui s'obtient en augmentant la largeur des bandes d'analyse).

La dépendance de l'erreur de définition du terme  $\langle Re\{Y_{ee}\} \rangle$  se traduit par la dépendance

FIG. 4.4 - Transfert  $m-e1$  pour  $\eta = 0.01$ 

$$\text{--- } H_{me1} \quad \text{- - - } \frac{\langle |V_m|^2 \rangle}{P_{e1}}$$

FIG. 4.5 - Transfert  $m-e1$  pour  $\eta = 0.1$ 

$$\text{--- } H_{me1} \quad \text{- - - } \frac{\langle |V_m|^2 \rangle}{P_{e1}}$$

de l'amortissement (car le niveau moyen de la partie réelle de la mobilité d'entrée d'une structure augmente avec l'amortissement) et de la densité modale. Cette dépendance théorique est très visible en entrée, mais elle est moins nette sur les transferts.

Une étude plus approfondie de l'erreur de définition semblerait ici nécessaire, mais on va voir que cette erreur n'est pas l'erreur principale dans la méthode proposée.

### 4.1.2 Erreurs sur les sources de puissance en multi-excitation

Il s'agit ici de voir dans quelle mesure la puissance active injectée en un point, par bande de fréquence, ne change pas lorsqu'on excite simultanément la structure en d'autres points (cf. 3.4). On trouvera des compléments au E.1.1 et au D.3.

Sur une structure isolée, on considère trois excitations simultanées, pour différents types de source et pour deux amortissements différents (figures 4.6 et 4.7).

Trois types d'excitation sont envisagés, en chaque point  $e$  :

- $F_e = \frac{1}{Y_{ee}}$ , inchangée en présence d'autres forces ("sources de force")
- $V_e = 1$  en présence d'autres forces ("sources de vitesse" unitaire)
- $F_e$  aléatoire, inchangée en présence d'autres forces.

Globalement on constate que l'hypothèse de source de puissance active moyenne est

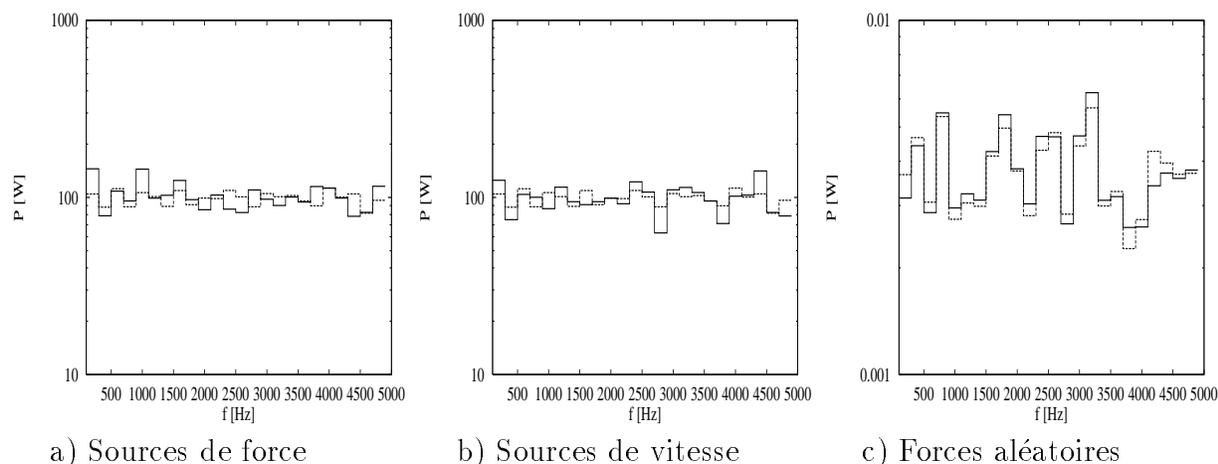


FIG. 4.6 - Comparaison des  $P_{e1}$  pour plusieurs types d'excitation pour  $\eta = 0.01$   
 — injection simultanée - - - injection isolée

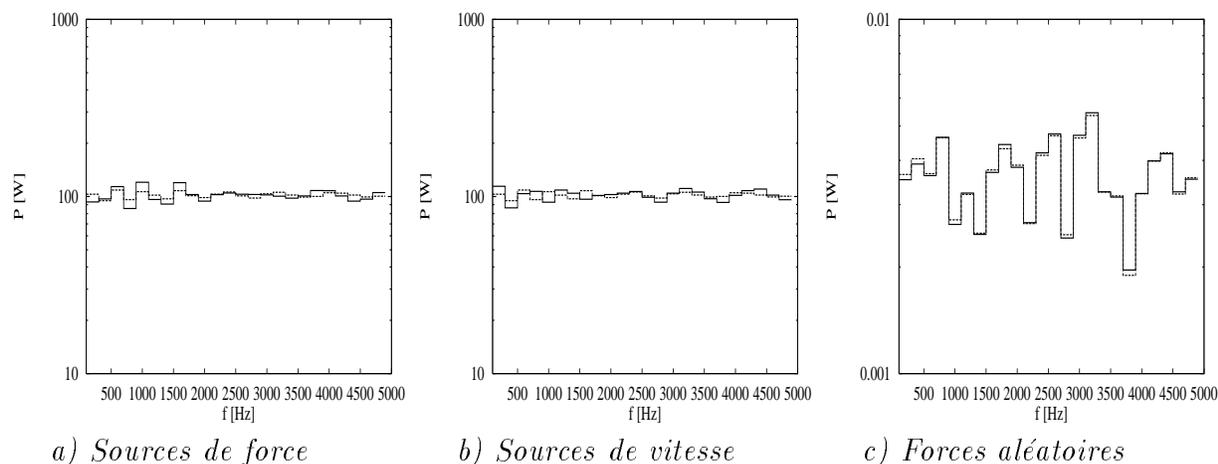


FIG. 4.7 - Comparaison des  $P_{e1}$  pour plusieurs types d'excitation pour  $\eta = 0.1$   
 — injection simultanée - - - injection isolée

robuste par rapport aux variations introduites par l'excitation simultanée de la structure par d'autres sources. Sa robustesse augmente avec le recouvrement modal.

### 4.1.3 Étude des erreurs d'additivité

On compare ici le "miel"  $\langle |V_m|^2 \rangle$ , issu d'un calcul exact de la vitesse obtenue en excitant la plaque en trois points simultanément, avec le "miel" obtenu par addition énergétique des contributions des puissances actives moyennes (injectées "une à la fois").

On considère les mêmes excitations que précédemment:

- des sources de force avec  $F_e = \frac{1}{Y_{ee}}$
- des sources de vitesse unitaire
- des sources de force avec  $F_e$  aléatoire.

#### Calcul uniquement en transfert

Sur les Figures 4.9 on compare les expressions au point m, non excité directement, pour les deux amortissements 0.01 et 0.1 et pour trois types d'excitation.

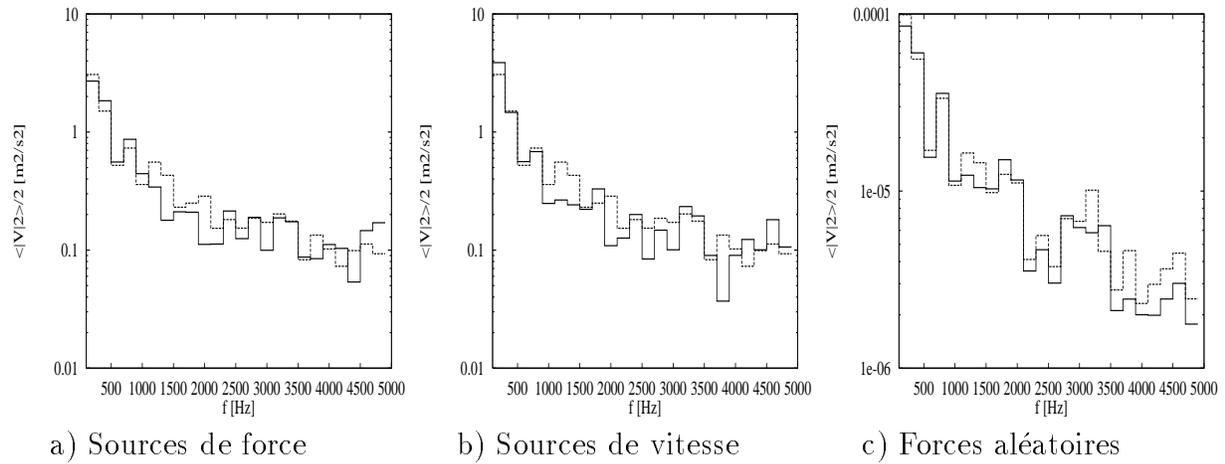


FIG. 4.8 - *Comparaison des  $\langle |V_m|^2 \rangle$  pour  $\eta = 0.01$   
 — calcul exact - - - résultat additivité*

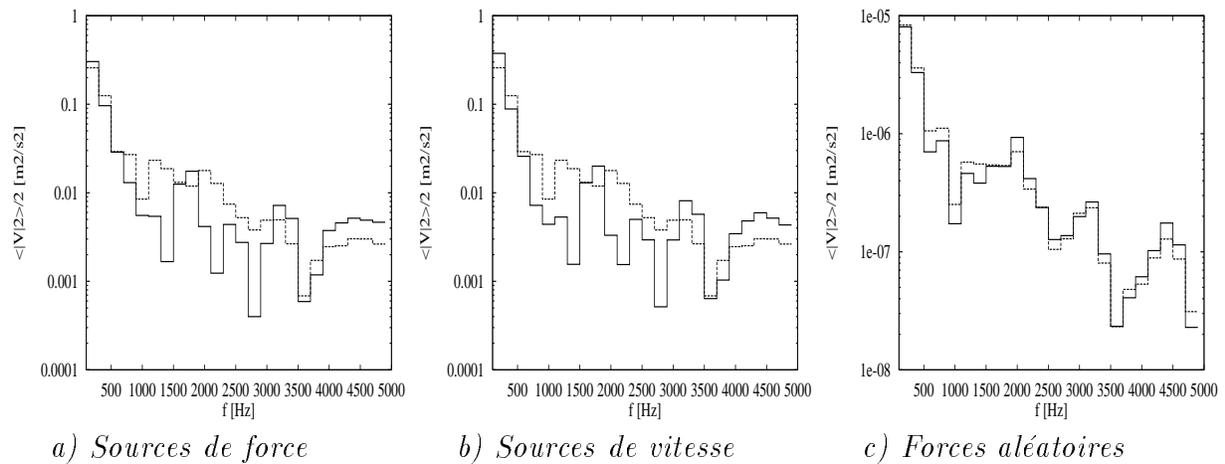


FIG. 4.9 - *Comparaison des  $\langle |V_m|^2 \rangle$  pour  $\eta = 0.1$   
 — calcul exact - - - résultat additivité*

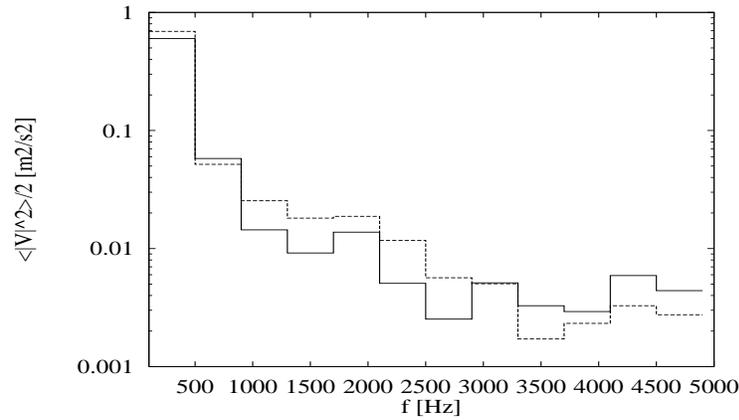


FIG. 4.10 - *Comparaison des  $\langle |V_m|^2 \rangle$  pour  $\eta = 0.1$  Sources de force  
— calcul exact - - - résultat additivité.*

### Analyse des résultats

Ici il n'y a que des contributions de transfert.

L'erreur est faible en basse fréquence, puis peut devenir grande (elle est donc indépendante du recouvrement modal, qui lui augmente en fréquence).

Les sources de force ou de vitesse donnent des erreurs semblables, alors que les sources aléatoires (pour lesquelles les forces sont décorréelées entre elles et oscillent fortement autour de zéro) donnent des erreurs beaucoup plus faibles. Différente suivant le type d'excitation employée, l'erreur est donc imprévisible avec les seules données de la structure.

On constate que pour la plaque la plus amortie, (pour le même nombre de modes), les erreurs sont plus importantes, mais elles sont tout aussi irrégulières et ce ne sont pas les mêmes bandes qui sont affectées (l'augmentation de l'erreur n'est pas systématique pour chaque bande).

Si l'on considère des bandes plus larges (400 Hz) l'erreur maximale décroît à environ 3 dB (cf. Figure 4.10).

### Interprétation

Le seul paramètre qui explique les résultats précédents est le comportement du produit croisé dans 3.22, qui doit fluctuer suffisamment autour de zéro avec la fréquence pour que le cumul de ces termes dans la bande soit faible. Cette fluctuation peut être due aux forces (corrélées ou non) ou aux mobilités de transfert (donc à l'éloignement des points). Ce paramètre est assez imprévisible si on ne fait pas le calcul exact.

En effet le nombre d'oscillations des parties réelles ou imaginaires de chaque mobilité de transfert, que l'on a reporté en annexe (D.1), ne peut que donner une indication, peu fiable, sur le nombre d'oscillations du produit complexe de deux mobilités différentes.

C'est le coeur du problème de l'additivité énergétique.

Sur la plaque la plus amortie il y a moins d'oscillations des mobilités, pour les mêmes bandes de fréquence, et l'erreur globalement augmente: il faut choisir la largeur des bandes d'analyse par rapport au nombre d'oscillations des mobilités dans ces bandes (il faut avoir au moins une oscillation par bande).

### Autres remarques importantes

1) Le produit des forces intervient aussi dans les produits croisés de 3.22, donc les forces

aléatoires, qui rendent ces produits oscillants autour de zéro, donnent des résultats bien meilleurs.

2) Pour les trois types de sources l'hypothèse Hyp.3 est assez vérifiée (voir l'erreur de définition sur les mobilités de transfert).

3) Les erreurs de définition sur les mobilités énergétiques de transfert sont faibles (cf. figures 4.4 et 4.5) ainsi que les différences sur les puissances isolées ou injectées simultanément (cf. figures 4.6 et 4.7), donc elles ne peuvent pas expliquer les fortes erreurs observées pour l'additivité énergétique.

Pour en être sûrs on a passé les mêmes calculs d'additivité:

$$\langle |V_m|^2 \rangle \approx \sum H_{me} P_e,$$

- avec les puissances exactes simultanées  $\langle Re\{F_e V_e^*\} \rangle$  (au lieu des  $P_e$ , injectées "une à la fois"), ou

- avec les rapports  $\frac{\langle |V_m|^2 \rangle}{\langle Re\{F_e V_e^*\} \rangle}$  au lieu des mobilités énergétiques  $H_{me}$ .

C'est à dire, qu'on a utilisé des "ingrédients" plus exacts: les résultats obtenus n'étaient pas meilleurs que les précédents.

### Entrée plus transfert

Sur les Figures 4.11 et 4.12 on compare les expressions au point e1, excité aussi directement.

La contribution de l'excitation au point e1 devient prépondérante lorsque le recouvrement modal augmente; on va donc retrouver essentiellement l'erreur de définition de la mobilité énergétique au point d'entrée, qui diminue en augmentant l'amortissement (c'est transparent dans le cas de la source de vitesse). À cette erreur de définition se superposent (c'est bien visible pour les sources de force) des fluctuations plus petites ("imprévisibles"), qui diminuent si l'amortissement augmente, mais sont indépendantes du recouvrement modal (elles ne diminuent pas en fréquence).

Ces fluctuations ont donc les mêmes caractéristiques que les erreurs de définition sur les mobilités de transfert. Elles sont donc dues aux transferts, qui sont ici du deuxième ordre par rapport à la contribution de l'excitation directe (en entrée).

### Conclusions sur les erreurs d'additivité

Les erreurs sur l'additivité énergétique peuvent être importantes, surtout pour les calculs en des points non directement excités ("transfert pur").

Un amortissement plus fort, pour les mêmes bandes, augmente les erreurs d'additivité en transfert (sauf pour nos excitations aléatoires, qui sont les mêmes pour tous les amortissements).

Les erreurs sur les "miels" aux points excités sont comparables (et sont dues) aux erreurs de définition des mobilités énergétiques et aux erreurs sur la puissance active moyenne injectée en ces points.

Des excitations par des sources de force, aléatoires, d'ecorrélées entre elles en fréquence, donnent des erreurs beaucoup plus faibles (les erreurs qui restent sont celles sur les puissances et celles de définition).

Tous ces résultats sont conformes aux remarques théoriques du 3.2.3.

En général les erreurs diminuent si le nombre d'oscillations du produit croisé des mobilités de transfert et des différentes forces dans la bande de fréquence augmente. Ce paramètre est imprévisible si l'on ne fait pas le calcul exact. On propose donc d'utiliser le nombre moyen d'oscillations des mobilités de transfert, (ici pour une moyenne d'au moins 2 oscil-

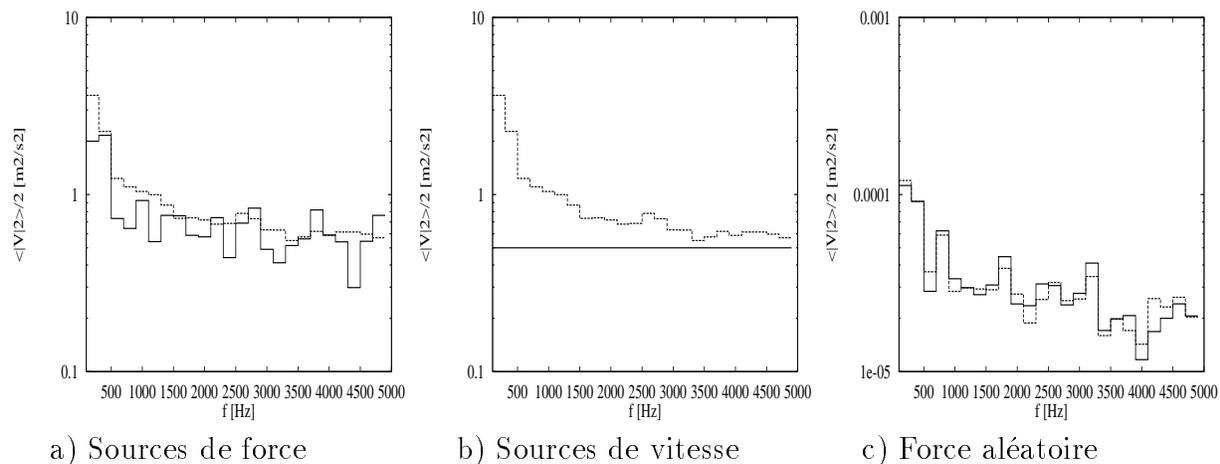


FIG. 4.11 - *Comparaison des  $\langle |V_{e1}|^2 \rangle$  pour  $\eta = 0.01$   
 — calcul exact - - - résultat additivité*

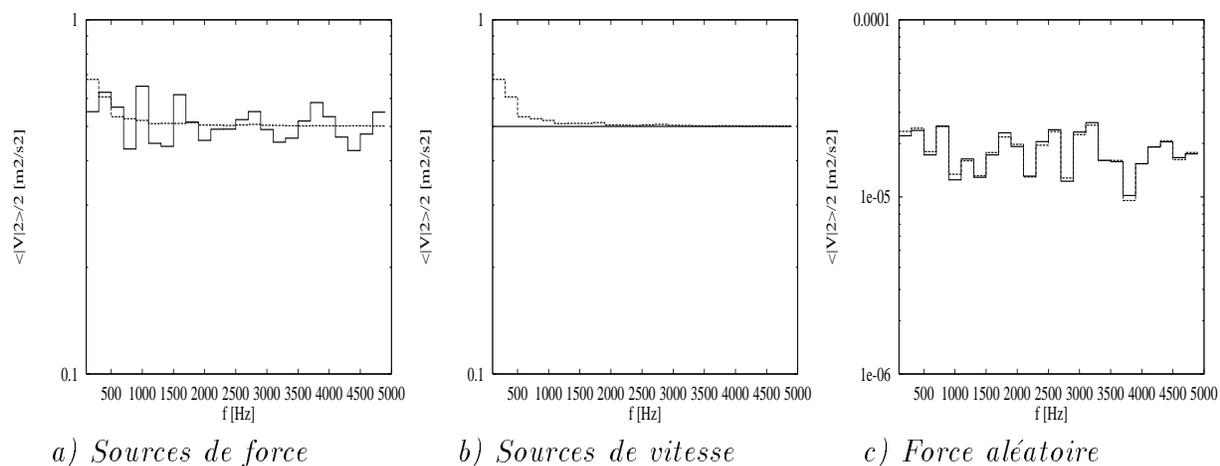


FIG. 4.12 - *Comparaison des  $\langle |V_{e1}|^2 \rangle$  pour  $\eta = 0.1$   
 — calcul exact - - - résultat additivité*

lations par bande on a obtenu des erreurs inférieures à 3 dB).

Remarque

Les fortes erreurs d'additivité montrées ici pour des plaques amorties ne se retrouveront pas dans les exemples suivants, car on utilisera par la suite des plaques peu amorties (avec  $\eta = 0.01$ ). Une alternative serait de considérer des bandes d'analyse plus larges, avec les plaques amorties, mais, comme le nombre d'oscillations est alors très faible sur toutes les bandes, il est plus difficile de dégager des tendances claires.

## 4.2 Erreurs de méthode sur les assemblages

Globalement on s'attend à retrouver dans le calcul d'assemblages les mêmes erreurs de méthode que sur une structure isolée, car les conditions de couplage n'introduisent pas d'erreur supplémentaire.

Cependant il est intéressant de voir si le fait d'utiliser les contributions des puissances échangées (corrélées entre elles) introduit des erreurs supplémentaires dans l'additivité énergétique, ou si le fait d'utiliser les facteurs de connexion, suffit à prendre en compte les interactions entre les puissances échangées et les puissances extérieures.

### 4.2.1 Présentation des structures

On simule d'abord l'assemblage de deux plaques de mobilités très différentes: une plaque mince, définie au D.4, couplée rigidement en trois points avec une plaque plus petite et quatre fois plus épaisse.

Sur la figure 4.13 on peut visualiser la différence sur les parties réelles des mobilités

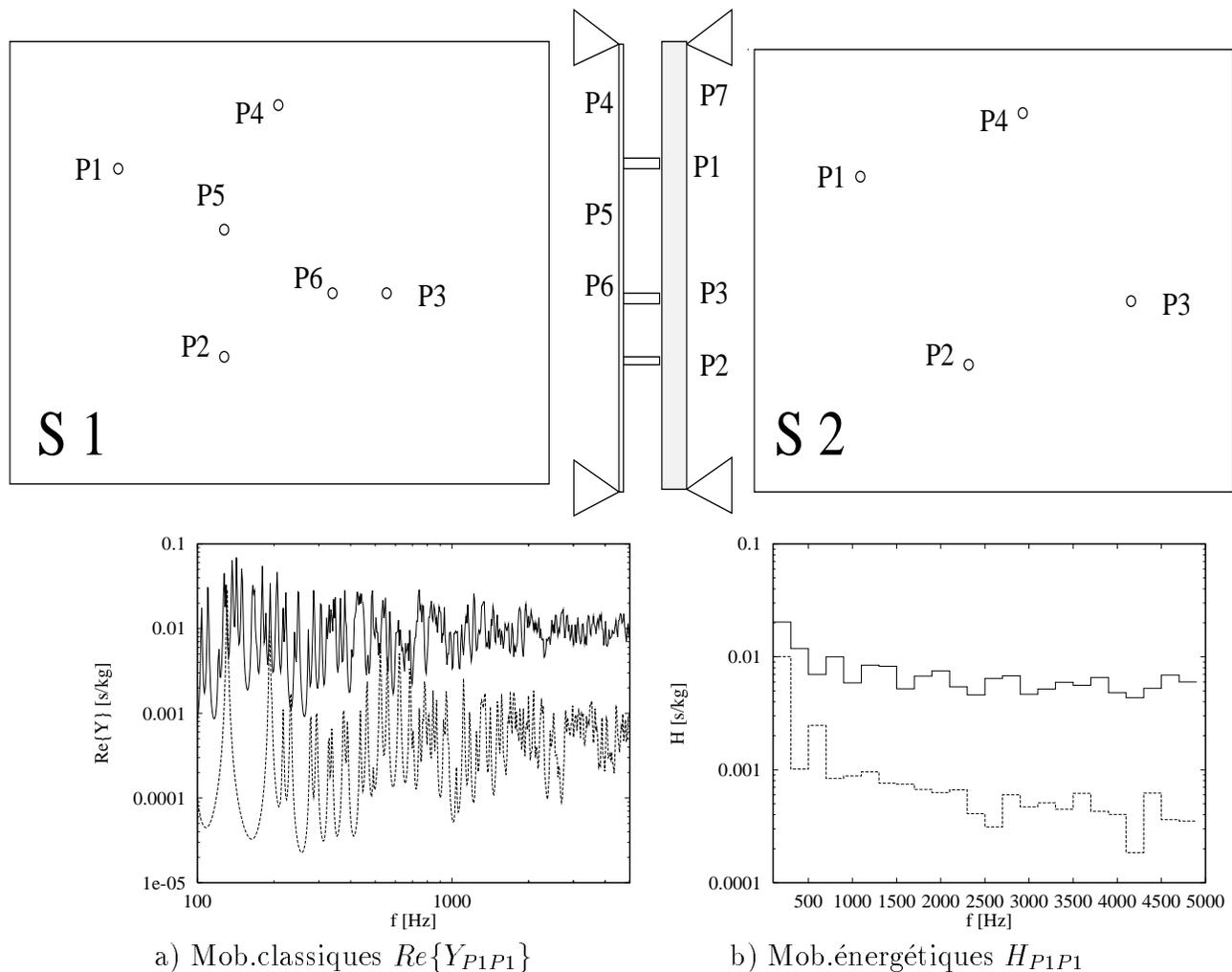


FIG. 4.13 - Mobilités classiques et énergétiques des deux plaques différentes  
 — plaque mince - - - plaque épaisse

classiques et sur les mobilités énergétiques des deux plaques.

Pour la deuxième plaque, pour les bandes de 200 Hz, on a rapporté dans le tableau suivant les valeurs de Densité modale effective, Recouvrement modal, Nombre de modes dans la bande, Longueur d'onde [m], Nombre d'Oscillations de la partie imaginaire de  $Y_{12}$  (indicatif):

Finf.[Hz]	Fsup	Fcentr	modes/Hz	Rec.mod.	Nb.Modes	$\lambda[m]$	Nb.Osc.
100.0	300.0	200.0	.040	.084	8	.447	8
300.0	500.0	400.0	.040	.160	8	.316	10
500.0	700.0	600.0	.045	.266	9	.258	5
700.0	900.0	800.0	.045	.356	9	.223	9
900.0	1100.0	1000.0	.045	.449	9	.200	2
1100.0	1300.0	1200.0	.040	.472	8	.182	5
1300.0	1500.0	1400.0	.050	.685	10	.169	2
1500.0	1700.0	1600.0	.050	.795	10	.158	4
1700.0	1900.0	1800.0	.045	.803	9	.149	4
1900.0	2100.0	2000.0	.055	1.109	11	.141	3
2100.0	2300.0	2200.0	.050	1.109	10	.135	4
2300.0	2500.0	2400.0	.040	.977	8	.129	3
2500.0	2700.0	2600.0	.045	1.162	9	.124	1
2700.0	2900.0	2800.0	.045	1.261	9	.119	3
2900.0	3100.0	3000.0	.055	1.654	11	.115	2
3100.0	3300.0	3200.0	.045	1.442	9	.112	0
3300.0	3500.0	3400.0	.045	1.540	9	.108	3
3500.0	3700.0	3600.0	.045	1.616	9	.105	4
3700.0	3900.0	3800.0	.050	1.893	10	.102	3
3900.0	4100.0	4000.0	.055	2.217	11	.100	1
4100.0	4300.0	4200.0	.045	1.891	9	.097	2
4300.0	4500.0	4400.0	.045	1.994	9	.095	2
4500.0	4700.0	4600.0	.045	2.071	9	.093	0
4700.0	4900.0	4800.0	.050	2.398	10	.091	3

## 4.2.2 Analyse des résultats

### Reconstitution des mobilités énergétiques après couplage

Pour étudier l'erreur de couplage, indépendamment de l'excitation, on compare ici les mobilités énergétiques de l'assemblage, après couplage:

- celles "exactes", définies par 3.11, obtenues à partir des mobilités classiques (exactes) après couplage

- celles "simplistes" (obtenues par la tentative du 3.3.1, sans facteurs de connexion)

- celles "approchées", obtenues par la méthode des mobilités énergétiques (EMMA), avec facteurs de connexion, cf. 3.3.3.

Les deux derniers calculs sont effectués à partir des mobilités énergétiques des plaques isolées, avant couplage, obtenues par la définition 3.11.

*N.B. Pour les mobilités énergétiques d'entrée  $H_{mm}$  et de transfert  $H_{mn}$ , entre points non couplés, on prendra directement celles avant couplage, sans autres calculs, car on a vérifié (cf.D.4.1) qu'elles changent peu lors du couplage.*

Des compléments aux résultats se trouvent dans l'annexe D.2.

Sur la Figure 4.14 on visualise quelques transferts, pour des bandes de fréquence de largeur

200 Hz.

Globalement on constate que EMMA est intéressante dans tous les transferts traités.

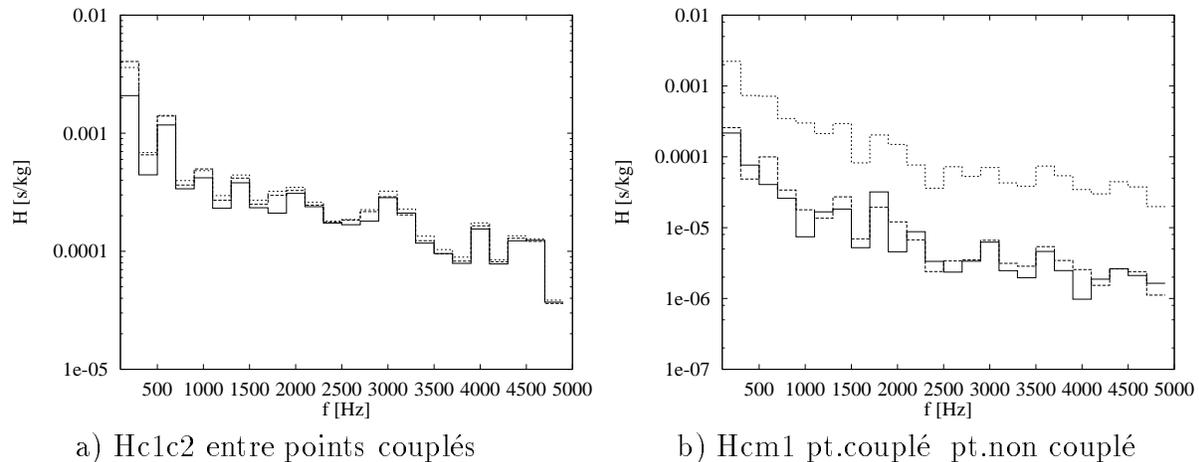


FIG. 4.14 - *Assemblage de plaques différentes: mobilités énergétiques de transfert*  
 — calcul exact — — calcul EMMA - - - calcul simpliste

La tentative Simpliste est inadaptée lorsqu'on veut calculer le mouvement du système le moins mobile, (ou d'un point de couplage) alors qu'on excite le système le plus mobile (par exemple les mobilités  $H_{m2m1}$  et  $H_{cm1}$  seront très mal calculées); elle reste valable dans les autres transferts.

### Reconstitution des puissances échangées

Il est aussi intéressant de savoir si, à partir des puissances injectées avant couplage, on est en mesure de prévoir correctement les puissances actives moyennes échangées.

Pour deux points excités P4 et P5 de la plaque la plus mobile, on compare les résultats du calcul exact et EMMA, pour les trois points c couplés sur la Figure 4.15 (pour plus de détails voir aussi la Figure D.6).

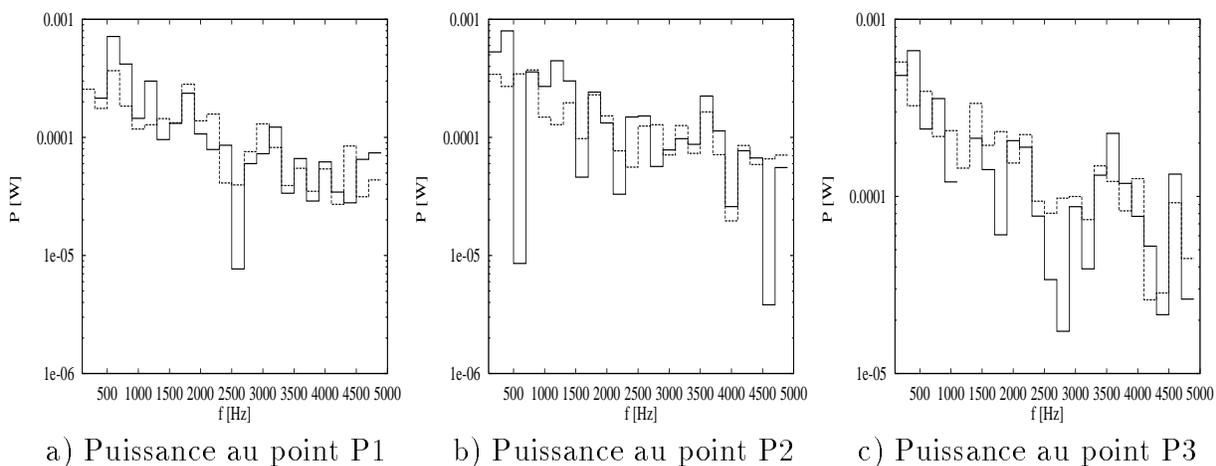
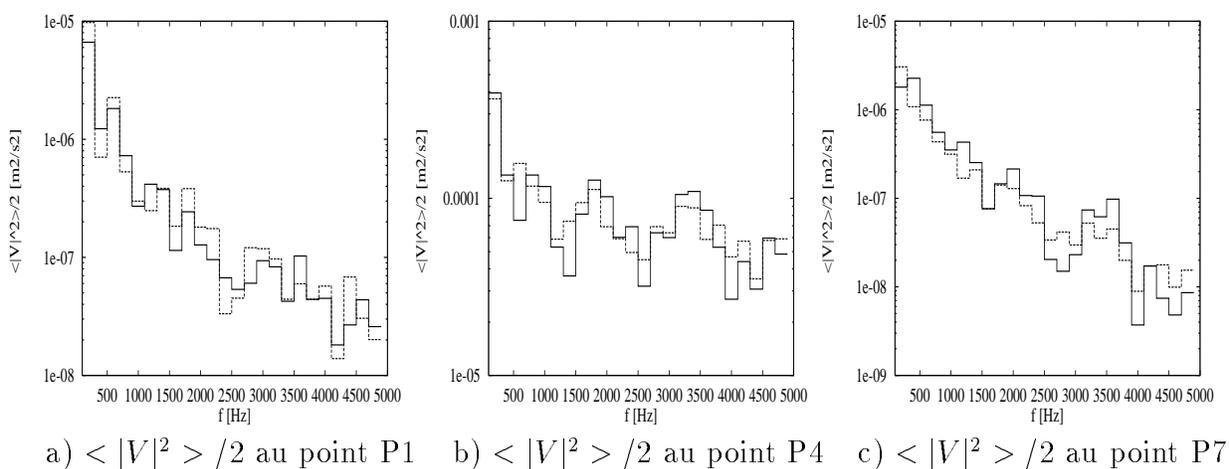
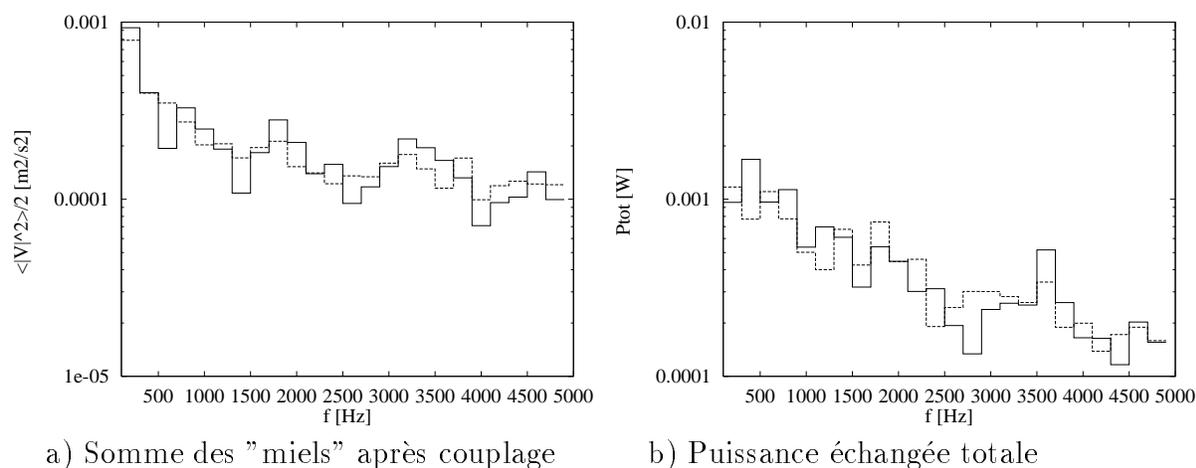
On constate que le calcul EMMA des puissances échangées est globalement correct, sauf sur quelques bandes isolées, et qu'il permet d'obtenir une valeur moyenne sur le spectre. Il ne s'améliore pas lorsque la fréquence augmente. Il ne permet pas ici de prévoir avec précision les fluctuations de la puissance échangée sur les différentes bandes de fréquence et peut présenter de très fortes erreurs.

### Reconstitution des "miels" après couplage

Après les résultats sur les puissances échangées, on pourrait s'attendre à des fortes erreurs aussi pour les "miels" (donc pour les énergies)... Il n'en est rien !

On va voir que la EMMA permet de bien prévoir les "miels"  $\langle |V|^2 \rangle / 2$  après couplage en fonction des puissances actives moyennes injectées avant couplage et des mobilités énergétiques des deux plaques isolées.

Sur la Figure 4.16 on visualise la comparaison pour un point couplé (P1), pour un point non couplé de la plaque plus mobile (P4) et pour un point non couplé de la plaque moins mobile (P7).

FIG. 4.15 - *Puissances actives échangées* — calcul exact - - - EMMAFIG. 4.16 - *"Miels" après couplage* — calcul exact - - - EMMAFIG. 4.17 - *Assemblage de plaques différentes,  $\eta = 0.01$ .*  
— calcul exact - - - calcul EMMA

L'erreur sur les "miels" est comparable à celle sur les mobilités énergétiques après couplage (cf. 4.2.2).

Enfin la somme (donc la moyenne) des "miels" après couplage (Figure 4.17) est meilleure que chaque "miel" pris séparément, car leurs erreurs n'interviennent pas sur les mêmes bandes; l'erreur oscille, mais ne diminue pas en montant en fréquence (cf. aussi la Figure D.8b). Globalement elle suit assez bien le nombre moyen d'oscillations des parties imaginaires des mobilités (elle reste inférieure à 3 dB lorsque ce nombre moyen d'oscillations est supérieur à 2 ou 3).

Les "miels"  $\langle |V|^2 \rangle / 2$ , sont bien reconstitués même aux points de couplage, lorsque les puissances échangées sont mauvaises.

Sur le système excité ceci n'a rien d'extraordinaire, car les contributions des puissances extérieures sont prépondérantes par rapport à celles des puissances échangées, mais sur le système récepteur (qui de plus, ici, est le moins mobile), ce sont uniquement les contributions des "mauvaises" puissances échangées sur certaines bandes qui ont permis de reconstituer des "miels" tout à fait satisfaisants.

Cela signifie que:

- la puissance échangée totale obtenue doit être assez bonne, (la figure 4.17 b) le confirme)
- les puissances échangées obtenues sont celles compatibles avec les mobilités énergétiques de transfert et d'entrée aux points de couplage et contiennent donc l'information énergétique locale souhaitée.

### Étude des Puissances actives injectées

Sur la structure isolée, on a déjà vu au 4.1.2, que des sources appliquées seules ou simultanément fournissent à peu près la même puissance active par bande de fréquence. On va voir maintenant que, *même après des couplages en des points différents de celui excité, la puissance active injectée moyenne (par bande) ne change pas sensiblement.*

Dans le cas de l'assemblage de deux plaques différentes le couplage introduit un fort changement sur la structure qui était la plus mobile avant couplage (ici la plaque la plus mince), c'est donc un cas défavorable.

Pour analyser les changements de la puissance active moyenne injectée il suffit de comparer les parties réelles moyennes des mobilités classiques d'entrée aux points d'injection, avant et après couplage (cf. Figure 4.18a); la variation obtenue sera proportionnelle à celle obtenue sur les puissances actives moyennes injectées par des sources de force (cf. Figure 4.18b).

On constate que la partie réelle de la mobilité d'entrée, moyennée sur une bande de fréquence, varie peu après couplage et que cette variation représente bien celle de la puissance active moyenne injectée par une source de force unitaire. L'hypothèse de "Sources de Puissance Active Moyenne" est donc vérifiée ici pour des sources de force.

### 4.2.3 Conclusions pour le couplage de structures homogènes

On a confirmé par des simulations numériques que, **pour des assemblages de structures qui ont des mobilités d'entrée très différentes aux points de couplage, les facteurs de connexion de la EMMA sont nécessaires.**

Le calcul énergétique "Simpliste" présente de fortes erreurs lorsqu'on excite des points non couplés du système le plus mobile et on calcule les transferts sur des points de couplage (dont la mobilité a baissé après couplage) ou sur des points du système le moins mobile.

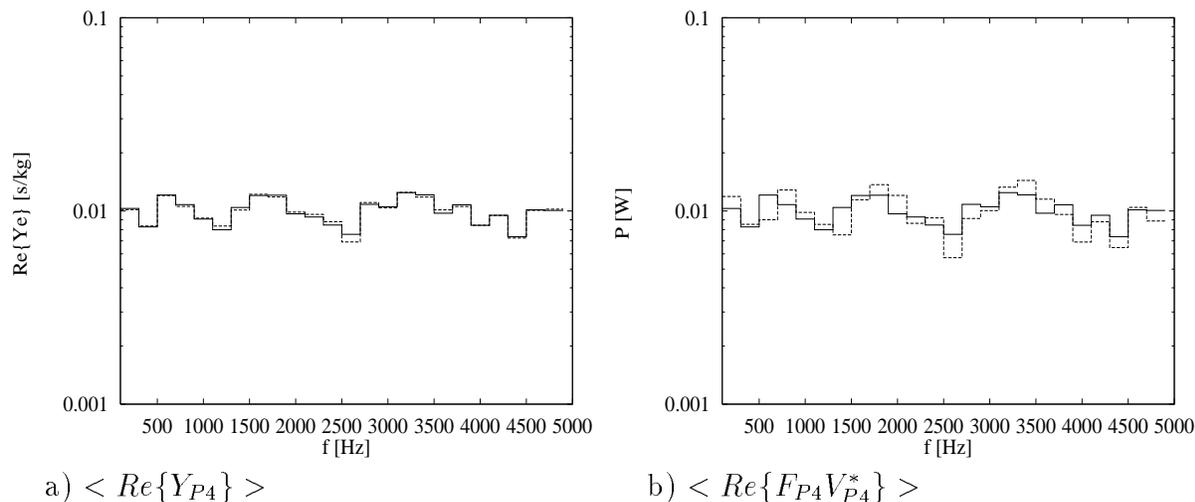


FIG. 4.18 - Variation de la Puissance active moyenne injectée au point  $P_4$   
 — avant couplage - - - après couplage

Les puissances échangées sont assez bien reconstituées globalement, en augmentant la largeur des bandes (donc en augmentant le nombre de modes par bande), elles ne s'améliorent pas en montant en fréquence (donc en augmentant le recouvrement modal).

Les Puissances Actives Moyennes injectées par des sources de force changent très peu après couplage.

Les "miels"  $\langle |V|^2 \rangle / 2$ , donc les densités d'énergie cinétique moyennes, sont bien reconstitués sur presque toutes les bandes.

Le calcul EMMA donne des résultats très satisfaisants, pour un nombre moyen d'oscillations des parties imaginaires des mobilités supérieur à 5.

Dans l'annexe D.2.1 on voit que l'erreur devient inférieure à 3 dB lorsqu'il y a plus de deux ou trois oscillations par bande. Sans oscillations dans les bandes de fréquence, l'erreur peut devenir énorme (erreurs de signe sur les puissances échangées).

Enfin l'étude des erreurs sur les mobilités énergétiques après couplage permet d'estimer les erreurs sur les "miels" après couplage, indépendamment de l'excitation.

## 4.3 Étude de quelques paramètres

Afin de mieux comprendre quels paramètres influencent le plus les différentes erreurs, on a fait varier l'amortissement des plaques, leurs dimensions (densité modale) et la largeur des bandes de fréquences.

### 4.3.1 Étude d'un assemblage plus amorti

On a vu que en augmentant l'amortissement hystérétique des plaques précédemment décrites, couplées et calculées aux mêmes points, donc en conservant les mêmes densités modales, l'erreur de définition sur les mobilités énergétiques diminuait (cf.4.1.1) et l'erreur sur l'additivité augmentait (cf.4.1.3). Qu'en est-il de l'erreur sur les puissances échangées? Pour voir cela on a refait les mêmes calculs que précédemment, avec  $\eta = 0.1$  pour les deux plaques homogènes différentes, couplées aux trois mêmes points, pour des bandes de 200 Hz (et par bandes de tiers d'octave, dans l'annexe D.2.2).

Sur la figure 4.19 on peut visualiser les mobilités des deux plaques.

La puissance active totale échangée (Figure 4.21a) est toujours mieux reconstituée que

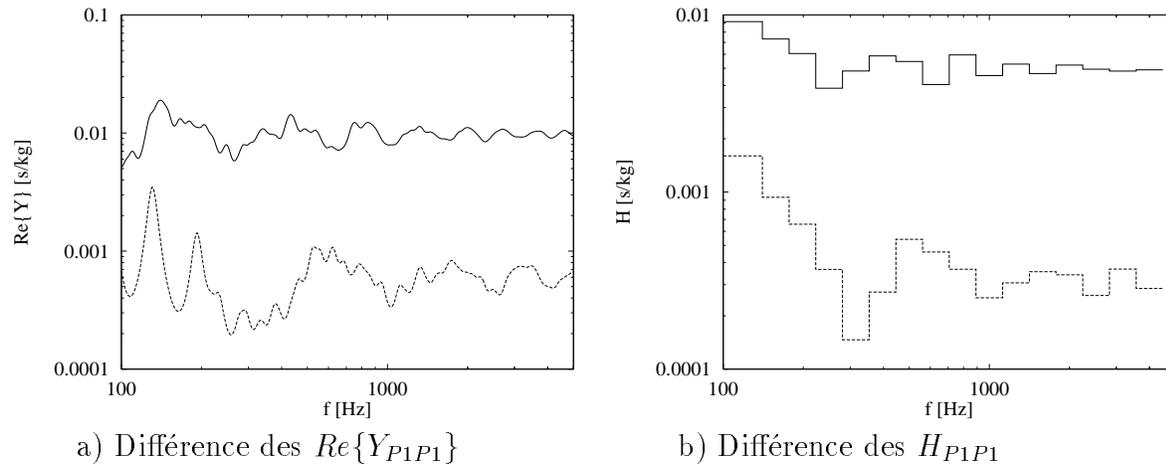


FIG. 4.19 - Mobilités classiques et énergétiques: — plaque mince - - - plaque épaisse

celles relatives à chaque point de couplage (Figure 4.20).

Toutes les puissances sont aussi bien reconstituées que celles des plaques peu amorties (Figures 4.15 et 4.17b) et ne s'améliorent pas en montant en fréquence.

L'hypothèse de source de puissance active moyenne ici est encore mieux vérifiée (Figure 4.21b).

Les "miels" après couplage ne sont pas mieux reconstitués, que ceux des plaques peu amorties, sauf au point P4 qui est directement excité. En effet, à distance égale entre le point excité et les points couplés, l'amortissement plus fort fait baisser le niveau des mobilités énergétiques de transfert, donc réduit aussi les contributions des puissances échangées aux points couplés sur le "miel" au point excité.

Sur la plaque épaisse (le récepteur), le nombre d'oscillations des  $Im\{Y_{mn}\}$  s'annule sur certaines bandes et l'erreur peut devenir très grande (facteur six, au point P7, Figure 4.22 c).

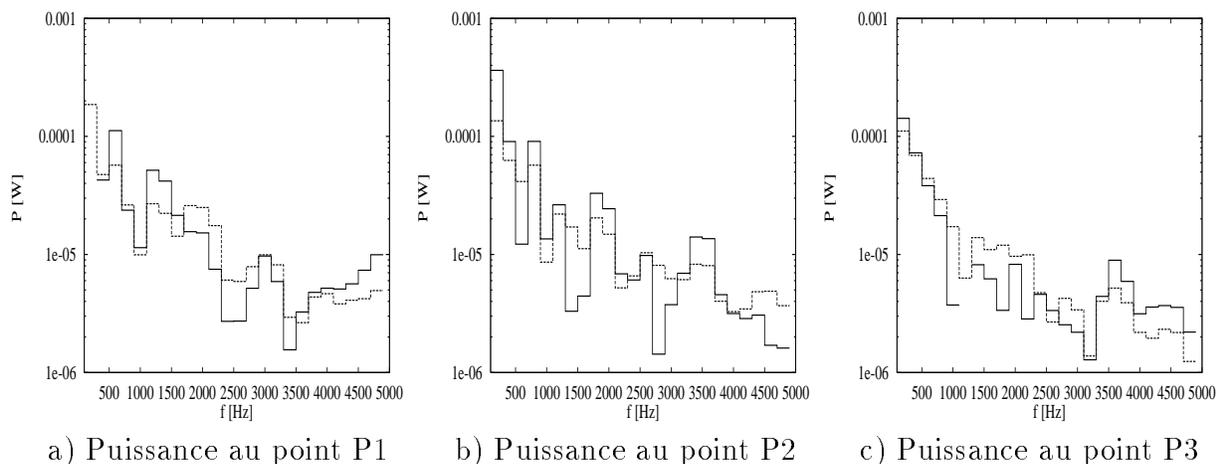


FIG. 4.20 - Reconstitution de la puissance active moyenne échangée,  $\eta = 0.1$   
 — calcul exact - - - calcul EMMA

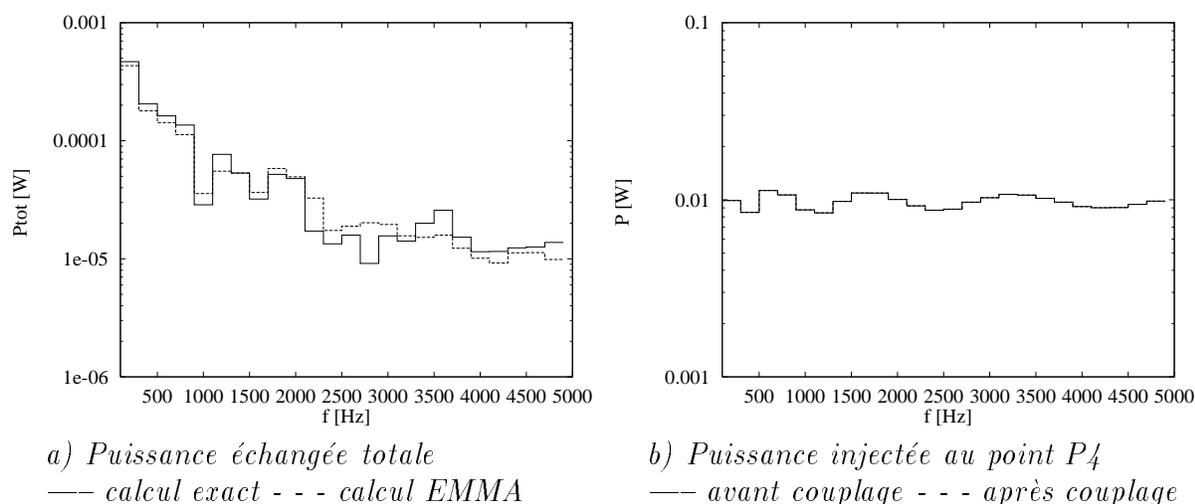


FIG. 4.21 - Assemblage de structures différentes,  $\eta = 0.1$

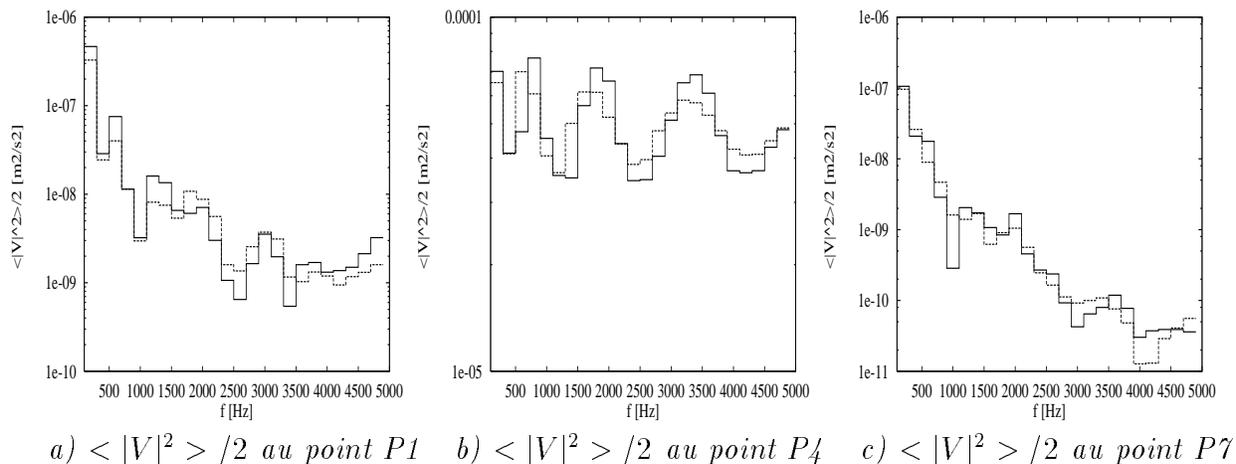


FIG. 4.22 - Reconstitution des "miels",  $\eta = 0.1$   
 — calcul exact - - - calcul EMMA

### 4.3.2 Étude du recouvrement modal et de la densité modale

#### Rôle du recouvrement modal

En augmentant l'amortissement, sur les mêmes bandes de fréquence le recouvrement modal augmente aussi, l'erreur sur les puissances échangées et celle sur les "miels" après couplage ne diminuent pas, conformément aux résultats de l'additivité énergétique.

De même, pour un amortissement donné, pour des largeurs de bande constantes, en montant en fréquence le recouvrement modal augmente, mais l'erreur sur les puissances échangées moyennes et celle sur les "miels" ne décroissent pas.

Ceci indique que l'erreur sur les puissances échangées ainsi que celle sur les "miels" ne dépend pas d'un seul paramètre simple.

#### Nombre de modes et nombre d'oscillations

Pour des plaques, la densité modale est constante en fréquence, donc le nombre de modes par bande est bien un paramètre qui augmente pour des bandes logarithmiques et qui reste constant pour des bandes de largeur constante.

Pour analyser un cas avec une plus faible densité modale, (et un plus faible nombre de modes ou d'oscillations des mobilités par bande) on a passé le cas d'un **assemblage de deux plaques plus petites** (voir l'annexe D.3).

Globalement, pour les mêmes bandes, les résultats sont moins bons.

Pour les tiers d'octave, le fait de monter en fréquence, améliore la qualité des résultats: seules les quatre bandes plus larges que 400 Hz donnent des erreurs maximales autour de 3 dB pour les "miels" après couplage; elles contiennent alors au moins 2 modes et la partie imaginaire des mobilités oscille environ 3 fois autour de zéro.

Pour les bandes constantes l'erreur ne diminue pas sensiblement en montant en fréquence. Dans toutes les bandes de 200 Hz on a moins de 3 modes et de 0 à 2 oscillations de la partie imaginaire des mobilités: on constate que l'erreur peut atteindre 10 dB. Pour des bandes de 800 Hz l'erreur est inférieure à 3 dB: le nombre de modes va de 3 à 5 et celui des oscillations va de 1 à 7.

#### Largeur des bandes de fréquence

Pour les grandes plaques, dans les premières bandes de 200 Hz, l'erreur sur les "miels" n'atteint plus les grandes valeurs des premières bandes de tiers d'octave (qui étaient moins larges).

De plus le fait que la EMMA donne des "miels" tantôt plus grands, tantôt plus petits que ceux exacts, suivant la bande considérée, laisse penser que si l'on élargit les bandes d'analyse, sur la même plage de fréquences, les résultats deviennent meilleurs. On l'a vérifié en prenant des bandes de 400 Hz (comparer Figures 4.16 et 4.23): l'erreur sur les "miels" diminue (inférieure à 2 ou 3 dB).

En résumé, si on augmente la densité modale, les résultats s'améliorent globalement. De même si on augmente la largeur des bandes.

Ceci semble indiquer que l'erreur maximale sur le calcul des "miels" après couplage dépend globalement du nombre de modes par bande (ou du nombre d'oscillations des mobilités).

Trois constatations viennent cependant nuancer cette conclusion.

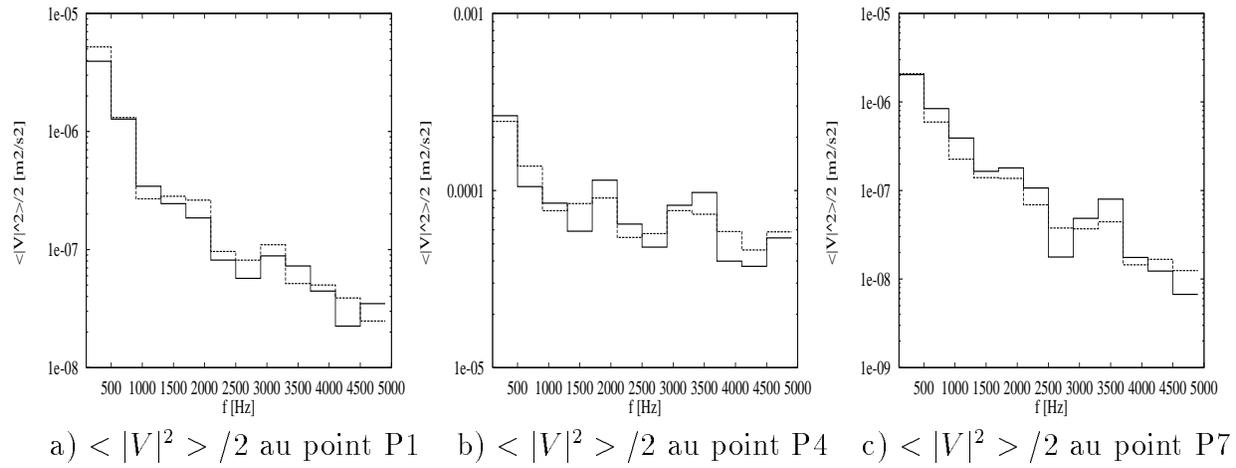


FIG. 4.23 - *Reconstitution des "miels",  $\eta = 0.01$*   
 — calcul exact - - - calcul EMMA

Pour les bandes de tiers d'octave (voir annexe D.2) l'erreur sur les "miels" ne diminue pas beaucoup en montant en fréquence, alors que la largeur des bandes et le nombre de modes par bande augmentent.

Pour des bandes constantes l'erreur varie d'une bande à l'autre (ainsi que le nombre d'oscillations des mobilités), alors que le nombre de modes est le même.

En augmentant l'amortissement, avec le même nombre de modes par bande, l'erreur maximale augmente.

Ceci induit à conclure que le nombre de modes par bande n'est pas suffisant pour décrire l'évolution de l'erreur.

On a vu avec l'additivité énergétique que la valeur de l'erreur dépend du choix des sources et que les sources de force et celles de vitesses (toute deux défavorables) donnaient des erreurs maximales comparables.

C'est pour cette raison qu'on peut considérer les études précédentes, effectuées avec des sources de force, comme représentatives d'une erreur maximale, pessimiste mais possible. Le fait que l'erreur sur les "miels" et celle sur les mobilités énergétiques après couplage soient comparables, indique par ailleurs que cette erreur dépend faiblement du type de source utilisé (même si elle va fortement diminuer pour des sources aléatoires et indépendantes).

Enfin on remarquera que l'erreur n'évolue pas de la même façon suivant le point de calcul, les points couplés et les points excités qu'on considère: l'erreur est locale et liée aux différents transferts.

Dans l'annexe E.3 on donne des pistes pour un indicateur d'erreur.

## 4.4 Conclusions pour l'étude numérique des erreurs

Par des simulations numériques sur des assemblages de plaques homogènes, qui permettent d'étudier facilement des systèmes à faible ou forte densité modale et de séparer les effets de la densité modale, du recouvrement modal et de l'amortissement, on a d'abord mis en évidence la part relative des erreurs introduites par les différentes hypothèses.

Les *erreurs de définition* sont faibles; sur les mobilités énergétiques d'entrée elles diminuent lorsque le recouvrement modal augmente (lorsqu'on augmente l'amortissement ou lorsqu'on monte en fréquence); pour les transferts elles diminuent lorsque la largeur de la bande de fréquences considérée augmente.

Les *erreurs sur les sources* sont faibles (Hyp.2b) et diminuent lorsque le recouvrement modal augmente. Tout au long des simulations on a bien observé un comportement de source de puissance active moyenne, sauf dans le cas où l'une des sources est très supérieure aux autres en niveau (cf. Annexe E.1): dans ce cas les puissances actives moyennes injectées par les sources (de force) "secondaires" changent considérablement, mais la méthode approchée EMMA marche car les sources secondaires sont alors négligeables devant la source principale.

Les *erreurs propres à l'additivité énergétique* peuvent être importantes. Elles diminuent lorsqu'on augmente la largeur des bandes, mais augmentent lorsqu'on augmente l'amortissement (et lorsqu'on rapproche les points d'excitation).

Sur les assemblages, les erreurs principales proviennent de l'additivité énergétique.

Le *calcul des puissances échangées* en chaque point de couplage, qui utilise la relation d'additivité énergétique inversée, peut être complètement faux sur certaines bandes (mauvais signe ou niveau) si le nombre d'oscillations des mobilités dans la bande est inférieur à deux (à peu près). La puissance totale échangée est beaucoup mieux reconstituée. Les deux calculs s'améliorent lorsque le nombre de modes par bande ou la largeur des bandes augmentent.

Le *calcul des "miels" après couplage* est meilleur que celui des puissances, même lorsqu'il utilise des puissances mal reconstituées; il s'améliore lorsque la largeur des bandes augmente, mais ne s'améliore pas, voire il se détériore, lorsqu'on augmente l'amortissement.

Globalement la méthode testée a donné pleine satisfaction, dans le cas d'assemblages multipoint rigides, de plaques homogènes.

Les erreurs dépendent globalement des points de calcul et d'excitation et leurs fluctuations dépendent plus en détail des types de source utilisés. Il semble souhaitable de prévoir l'erreur moyenne locale en utilisant des indicateurs locaux.

On préconise d'utiliser le nombre de passages à zéro de la partie imaginaire des mobilités de transfert et le rapport de la mobilité énergétique d'entrée sur la partie réelle moyenne de la mobilité d'entrée, pour fabriquer un indicateur de la qualité du calcul (cf. E.3).



## Chapitre 5

# ÉTUDE NUMÉRIQUE DE CAS PLUS COMPLEXES

Dans ce court chapitre, on sonde encore deux aspects importants pour la méthode des mobilités énergétiques:

- l'application au calcul de structures hétérogènes,
- les couplages ponctuels élastiques et dissipatifs, qui peuvent modéliser beaucoup de liaisons ponctuelles réelles.

### 5.1 Assemblage de plaques avec des discontinuités massiques

On considère les deux mêmes plaques que au 4.2. Sur la première plaque, S1, aux points P1(0.2;0.5), P4(0.5;0.6) et P6(0.6;0.3), on a attaché des masses ponctuelles, respectivement de 0.1kg, 0.2kg et 0.5kg et on l'a couplée toujours aux points P1(0.2;0.5), P2(0.4;0.2), P3(0.7;0.3), à la deuxième plaque, S2.

Ce cas est assez complet car il présente une discontinuité massique sur un point de couplage, une discontinuité massique en un point excité et une discontinuité massique en un point non couplé, sur laquelle on pourra calculer le "miel" après couplage.

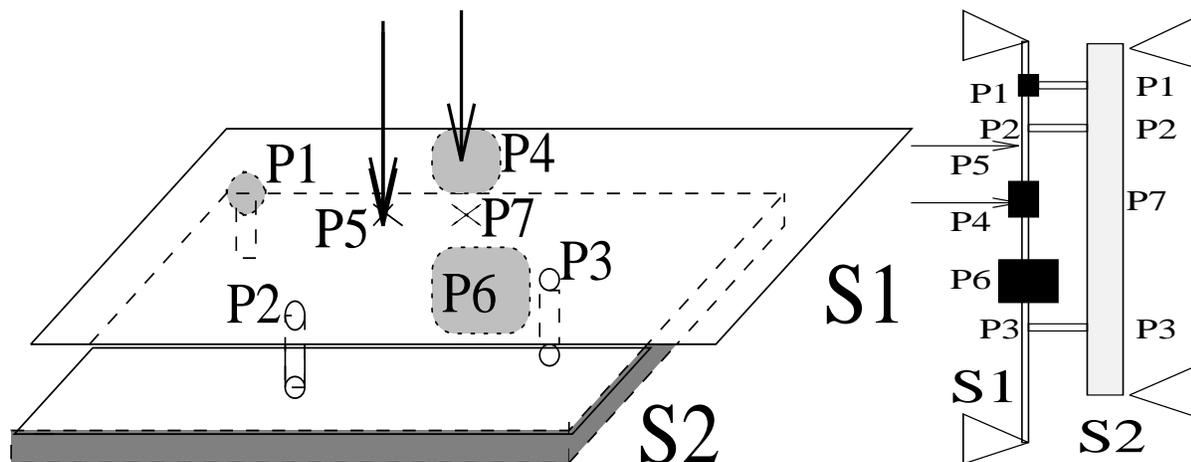


FIG. 5.1 - *Plaque S1 hétérogène couplée rigidement à S2*

### 5.1.1 Effets des discontinuités de masse sur la structure

#### Mobilités classiques

Localement, par exemple au point P6, l'ajout d'une forte discontinuité massive entraîne des changements sur les mobilités d'entrée.

Les mobilités de transfert gardent les mêmes tendances que celles de la structure homogène (cf. Figure 5.2): leurs parties réelle et imaginaire même si elles baissent en niveau en montant en fréquence, continuent notamment à osciller autour de zéro (cf. Figure 5.3) et c'est ce qui fait que l'additivité énergétique est vérifiée.

En comparant les Figures 5.4, et 5.5, on voit que la partie réelle de la mobilité d'entrée

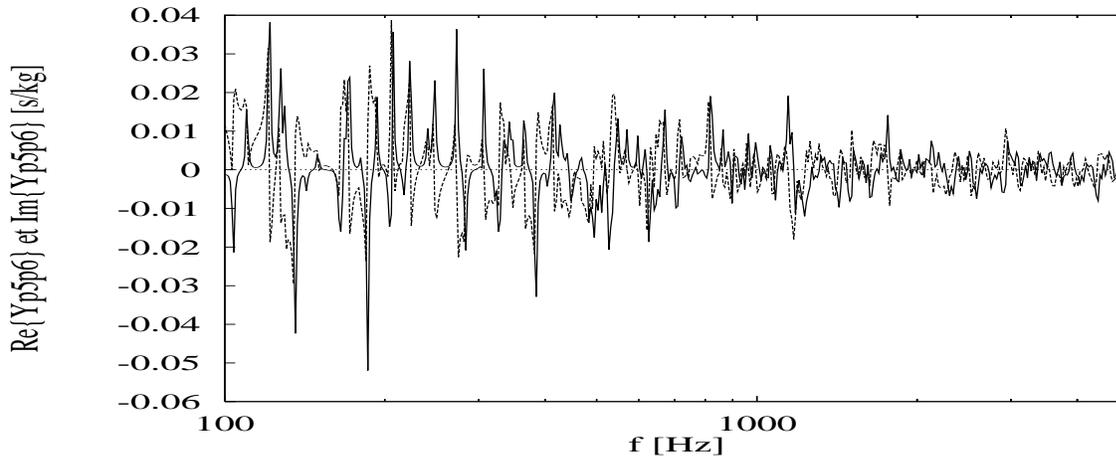


FIG. 5.2 - Oscillations de la mobilité de transfert  
Plaque homogène: —  $Re\{Y_{me}\}$  - - -  $Im\{Y_{me}\}$

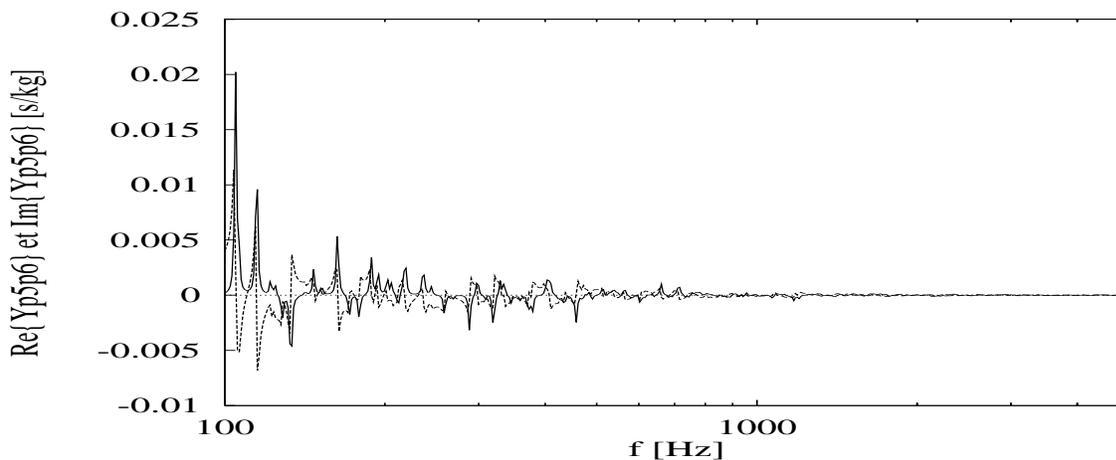


FIG. 5.3 - Oscillations de la mobilité de transfert, après ajout de masses  
Plaque hétérogène: —  $Re\{Y_{me}\}$  - - -  $Im\{Y_{me}\}$

sur la discontinuité massive diminue fortement en niveau en montant en fréquence. La partie imaginaire est presque toujours négative (elle n'oscille plus autour de zéro); son niveau général est plus important que celui de la partie réelle.

Le fait que  $Im\{Y_{p6p6}\} \gg Re\{Y_{p6p6}\}$  explique que la mobilité énergétique d'entrée en moyenne et haute fréquence peut s'écrire  $H_e = \frac{\langle Re^2\{Y_e\} \rangle + \langle Im^2\{Y_e\} \rangle}{\langle Re\{Y_e\} \rangle} \approx \frac{\langle Im^2\{Y_e\} \rangle}{\langle Re\{Y_e\} \rangle}$

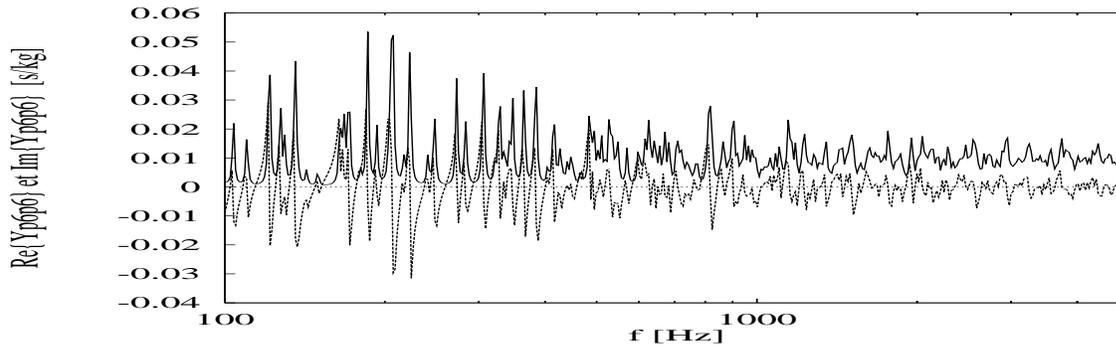


FIG. 5.4 - *Mobilité d'entrée de la Plaque homogène S1 en P6*  
 —  $Re\{Y_{p6p6}\}$  - - -  $Im\{Y_{p6p6}\}$

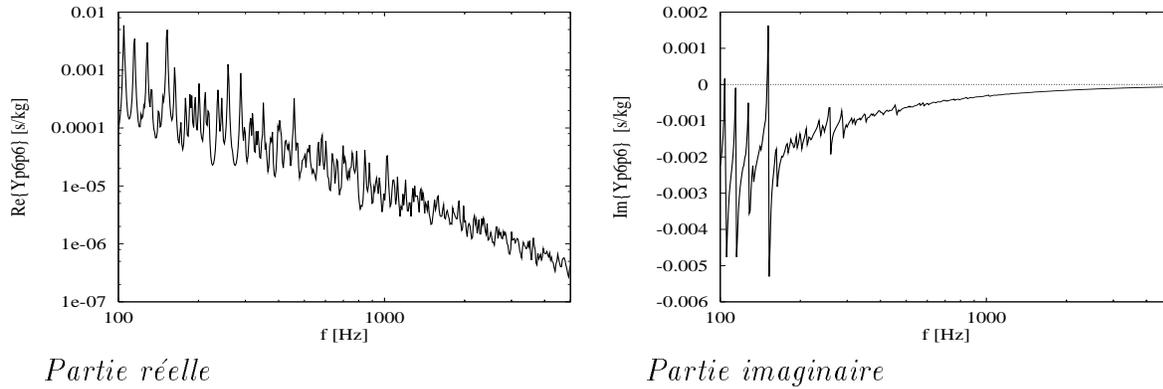


FIG. 5.5 - *Mobilité d'entrée de la Plaque hétérogène S1 en P6*

L'ajout de masses entraîne un certain lissage asymptotique des courbes: la mobilité de masse s'impose en haute fréquence.

### Mobilités énergétiques

*Les mobilités énergétiques d'entrée sur une discontinuité massique restent asymptotiquement du même niveau que celles de la plaque homogène (sauf en basse fréquence, où le niveau baisse, cf. Figure 5.6 a), et ce niveau est presque constant en fréquence (car les niveaux de  $\langle Im^2\{Ye\} \rangle$  et  $\langle Re\{Ye\} \rangle$  ont à peu près la même décroissance en fréquence).*

Les mobilités énergétiques de transfert, entre un point excité quelconque et un point de masse concentrée, diminuent fortement par rapport à celles de la plaque homogène (cf. Figure 5.6 b). Elles sont fortement dissymétriques: si on excite la structure directement sur la masse concentrée, les transferts avec d'autres points (sans masse) de la plaque restent comparables à ceux d'une structure homogène (cf. Figure 5.7).

*La présence d'une discontinuité massique au point d'excitation affecte peu les mobilités énergétiques d'entrée et de transfert. C'est un résultat important, qui peut se démontrer (cf. Annexe C.3). On visualise par la même occasion que sur un système homogène (Figure 5.7a) on a une très bonne réciprocity des mobilités énergétiques de transfert aussi pour les premières bandes choisies.*

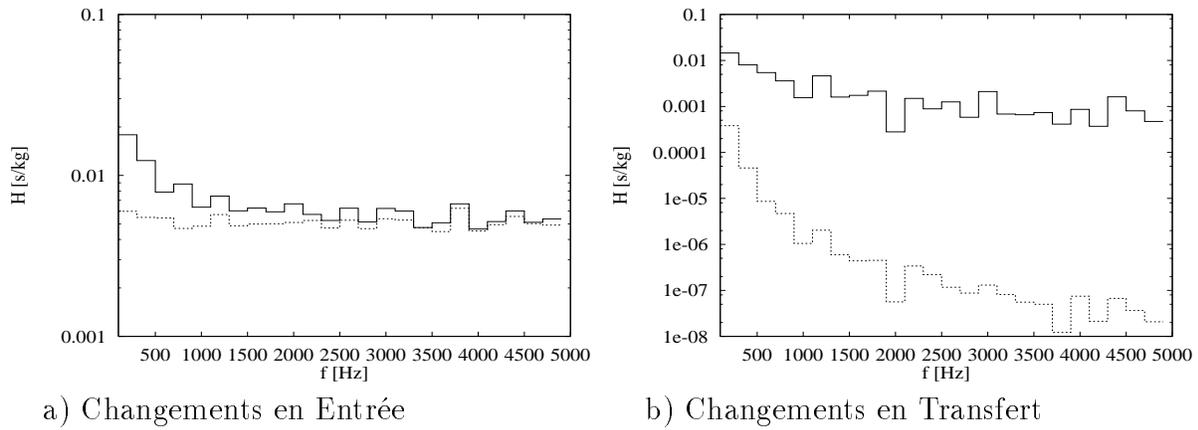


FIG. 5.6 - *Changements sur les mobilités énergétiques, par ajout de masse*  
 — plaque homogène - - - plaque hétérogène

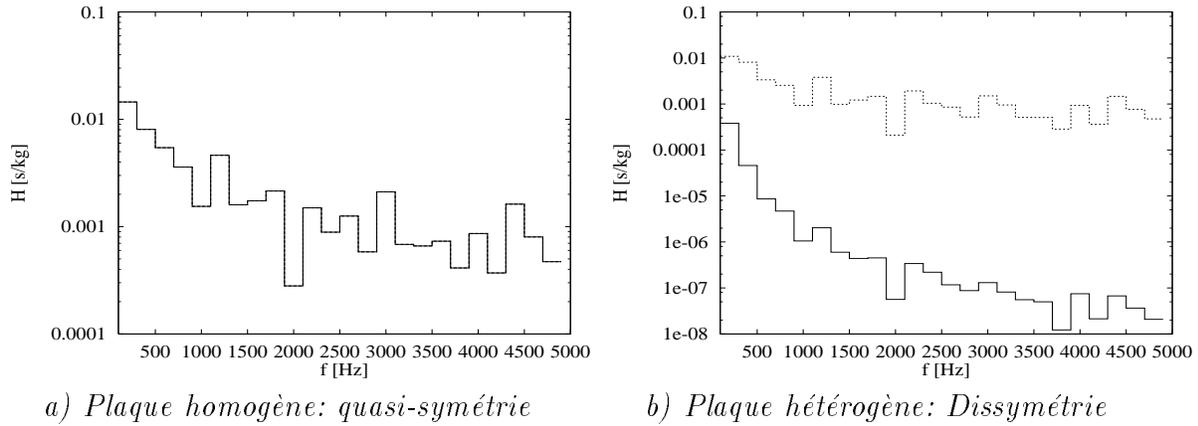


FIG. 5.7 - *Mobilités énergétiques de transfert entre P5 et P6*  
 ---  $H_{P6-P5}$  - - -  $H_{P5-P6}$

### 5.1.2 Puissances échangées et "Miels" après couplage

En comparant les calculs exact et EMMA des puissances actives moyennes échangées, aux trois points de couplage rigide, on peut voir si la discontinuité en P1 induit plus d'erreur dans le calcul en ce point (Figure 5.8). Ce n'est pas le cas. La puissance échangée en ce point est inférieure aux autres, surtout en haute fréquence, mais l'erreur est comparable et tout à fait admissible.

Les points de calcul les plus sensibles sont le point P6 (sur la plus grosse discontinuité massique) le point P7 (non couplé, sur la plaque épaisse) et le point P1; c'est pourquoi on calcule le "miel" après couplage en ces points (Figure 5.9).

Les résultats sont très satisfaisants, même en ces points "critiques".  
 (aux autres points ils sont équivalents, voire meilleurs).

### 5.1.3 Conclusions pour l'assemblage de structures hétérogènes

Même pour des sous-structures homogènes, un point de couplage constitue une discontinuité sur leur assemblage. On avait déjà vu que l'additivité énergétique marchait bien après couplage, donc *sur une structure hétérogène*.

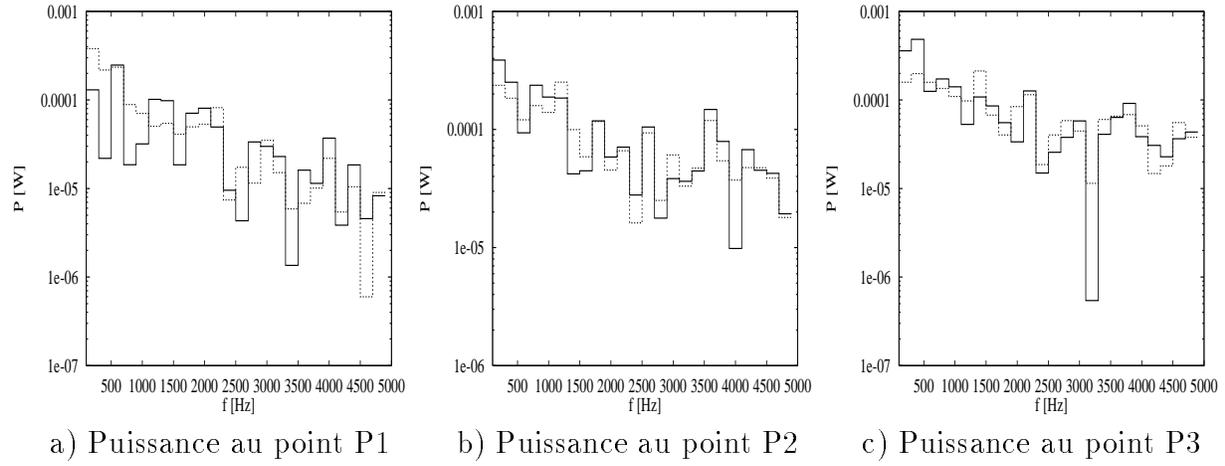
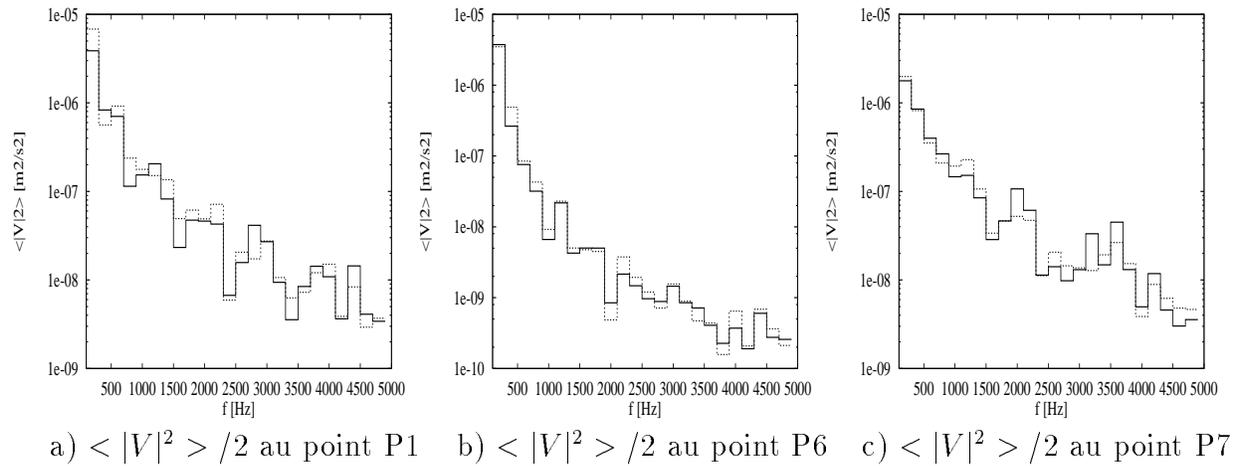


FIG. 5.8 - Puissances actives moyennes échangées

FIG. 5.9 - Reconstitution des "miels" aux points "critiques":  
— calcul exact - - calcul EMMA

La simulation de cette section ne fait que confirmer que la méthode des mobilités énergétiques doit fonctionner indépendamment du type de structure.

Même si la dynamique des "miels" aux points de masse concentrée est beaucoup plus grande que pour des points quelconques, les prévisions du calcul EMMA sont très satisfaisantes sur toute la gamme des fréquences, en entrée et en transfert.

Globalement les résultats pour l'assemblage hétérogène traité sont presque meilleurs que dans le cas des plaques homogènes.

Le nombre d'oscillations par bande baisse très peu mais devient plus "irrégulier" que pour les plaques homogènes (l'écart type de ce nombre augmente et il change beaucoup d'un transfert à l'autre).

On peut donc se demander si la complexité croissante des structures ne tend pas à améliorer les résultats (de façon analogue à la SEA).

## 5.2 Couplages élastiques dissipatifs

Dans les simulations numériques qui suivent on prend de nouveau les deux plaques du 4.2, couplées aux mêmes points, avec trois systèmes intermédiaires identiques et symétriques, constitués, chacun, de deux petites masses  $M_1 = M_2 = M$ , avec un ressort et un amortisseur, dont on fait varier la masse  $M$ , la raideur  $K$  du ressort et l'amortissement  $C$  (voir Figure 5.10).

On compare alors les puissances échangées et les "miels" après couplage, obtenus par le

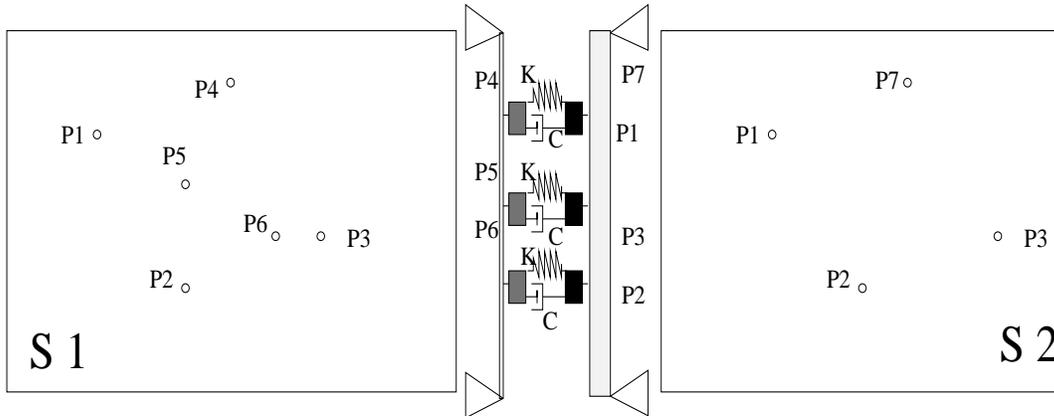


FIG. 5.10 - Plaque  $S1$  couplée à  $S2$  par systèmes intermédiaires

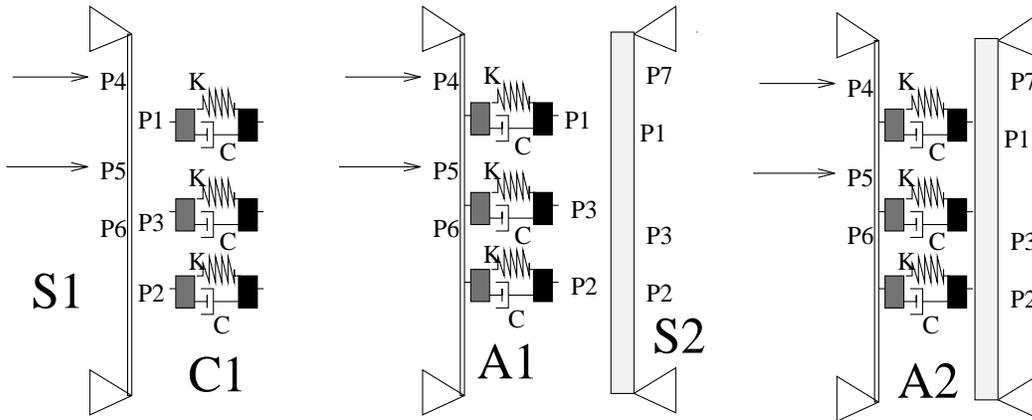


FIG. 5.11 - Démarche d'assemblage de  $S1$  et  $S2$  par le système intermédiaire  $C1$

calcul exact (par mobilités classiques), ceux obtenus par le calcul EMMA de l'assemblage de  $A1$  (exact) avec la plaque  $S2$  (voir Figure 5.11). On considère donc les systèmes intermédiaires  $C1$  comme étant rattachés à une sous-structure (ici à  $S1$ ), le calcul EMMA est alors "partiel" (seulement sur le couplage de  $A1$  avec  $S2$ ).

Cette approche, bien que plus longue du point de vue d'une éventuelle optimisation des systèmes intermédiaires (qui doit être effectuée en partie par la méthode des mobilités classiques), est simple dans sa mise en oeuvre expérimentale: il est plus simple (et réaliste) de caractériser les systèmes de couplage lorsqu'ils sont reliés à une sous-structure que lorsqu'ils sont isolés.

### 5.2.1 Étude d'un système de couplage de faible raideur

Considérons d'abord un système de couplage de "faible" raideur ( $M=0.0005$  [kg],  $K=100$  [N/m],  $C=0.1$  [N.s/m]); sa fréquence de résonance est autour de 70 Hz, et sa mobilité d'entrée est visualisée sur la Figure 5.12.

Les puissances échangées sont globalement assez bien prévues; (cf. Figure 5.13) l'erreur

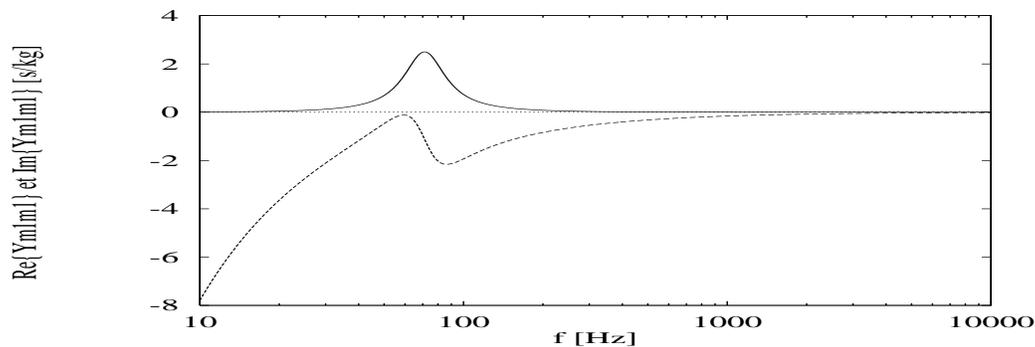


FIG. 5.12 - Mobilité d'entrée du système intermédiaire

peut cependant atteindre 10 dB sur certaines bandes.

Les "miels" après couplage sont bien reconstitués (Figure 5.14), même au point non

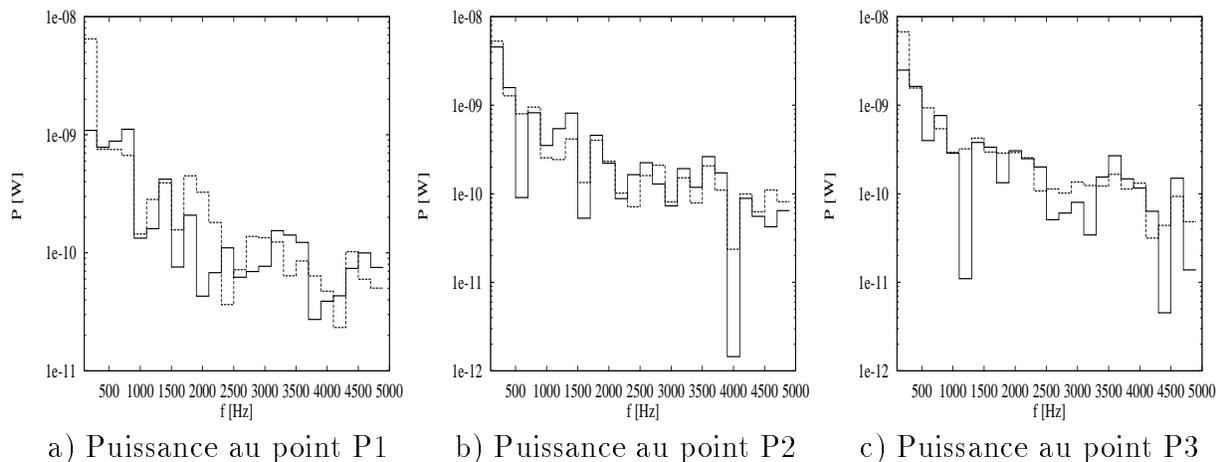


FIG. 5.13 - Puissances actives moyennes échangées (reçues par  $S_2$ )  
— calcul exact - - - calcul EMMA

couplé P7 de la structure réceptrice, c'est à dire en utilisant uniquement les contributions des puissances échangées, par additivité énergétique.

### Couplage plus dissipatif

Lorsqu'on augmente l'amortissement d'un facteur dix:  $C=1$ , avec les autres données inchangées, les erreurs sur les puissances et sur les "miels" après couplage sont globalement les mêmes, ou baissent légèrement (voir annexe E.2.2).

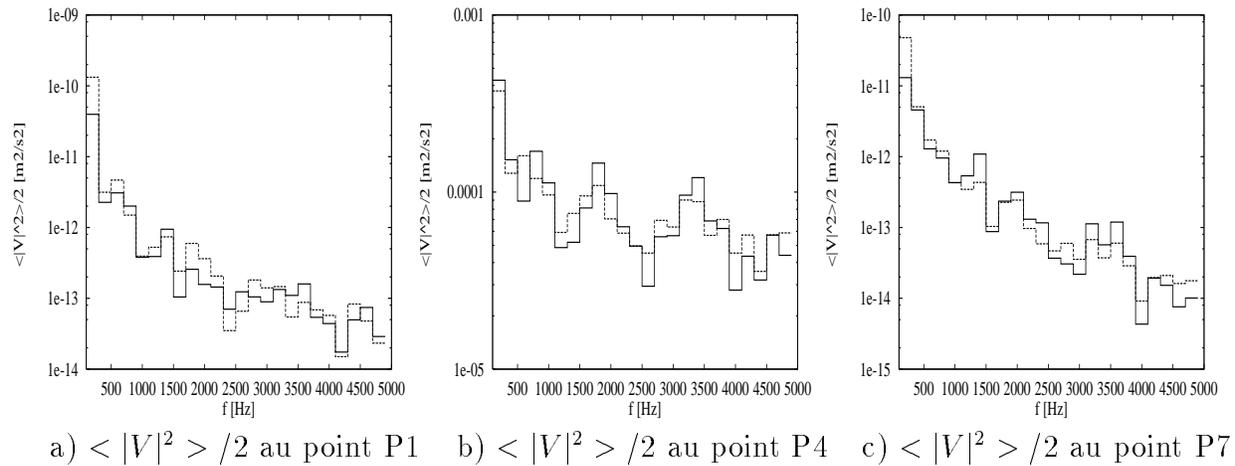


FIG. 5.14 - Reconstitution des "miels" (P1 est sur S2)  
 — calcul exact - - calcul EMMA

## 5.2.2 Étude d'un système de couplage de forte raideur

On considère maintenant un système de couplage de raideur  $K=100000$ ; dans la plage d'analyse 100 - 5000 Hz on a maintenant une zone en dessous de la résonance des systèmes intermédiaires (environ 3100 Hz) et une zone au dessus (Figure 5.15).

Le calcul EMMA est généralement satisfaisant, avec des erreurs allant jusqu'à un facteur

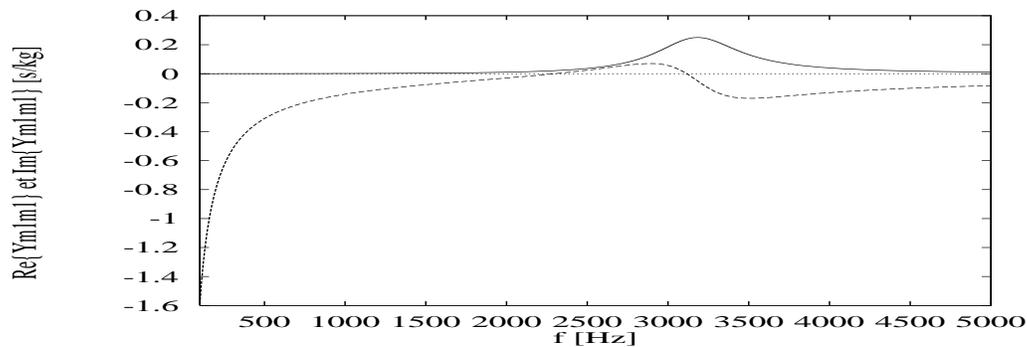


FIG. 5.15 - Mobilité d'entrée du système intermédiaire  
 — partie réelle - - partie imaginaire

cinq sur les puissances et à un facteur trois sur les "miels". (cf. Figures 5.16 et 5.17)

### Couplage plus dissipatif

Lorsqu'on augmente encore l'amortissement d'un facteur dix:  $C=10$ , avec les autres données inchangées, les erreurs du calcul EMMA sur les puissances et sur les "miels" après couplage sont globalement les mêmes, (voir annexe E.2.5).

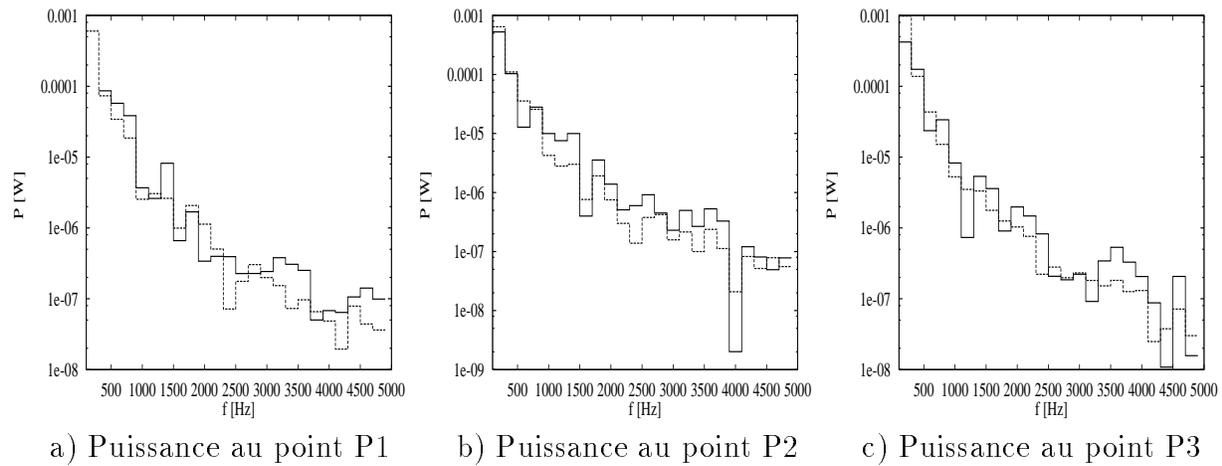
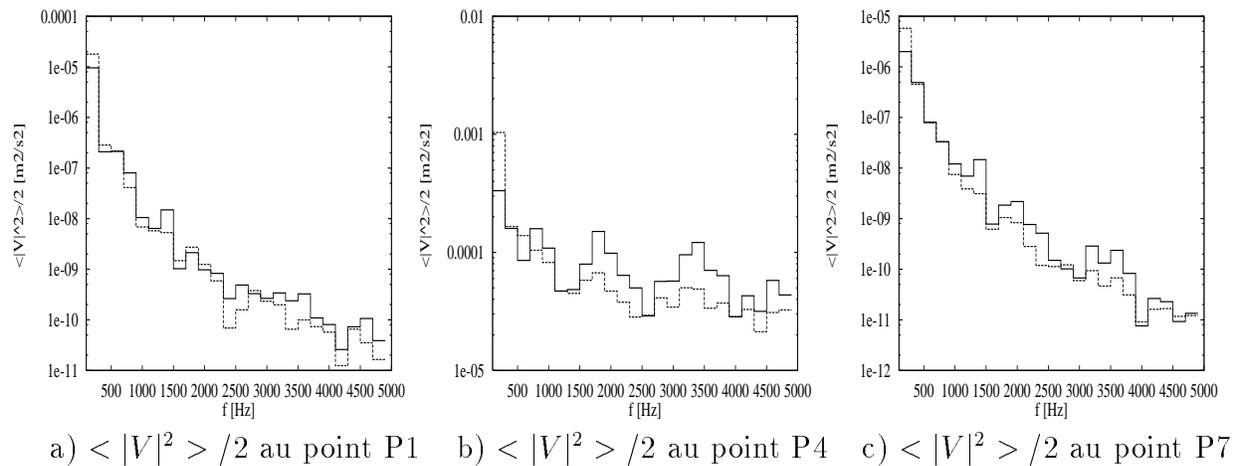


FIG. 5.16 - Puissances actives moyennes échangées (reçues par S2)

FIG. 5.17 - Reconstitution des "miels" (P1 est sur S2)  
— calcul exact - - - calcul EMMA

### 5.2.3 Conclusions pour les couplages élastiques et dissipatifs

La méthode des mobilités énergétiques fonctionne de façon satisfaisante pour les couplages multipoint élastiques et dissipatifs, en suivant la démarche suivante.

Si l'on considère les liaisons comme un sous-système à part C1 (masses-ressorts-amortisseurs) intermédiaire, les calcul approché ("total") de l'assemblage des trois sous-systèmes S1, C1 et S2, ne converge vers un calcul correct qu'au dessus de la fréquence de résonance des systèmes intermédiaires, et d'autant plus lentement que la dissipation est forte.

Pour les calculs autour et en dessous de cette fréquence on préconise de rattacher les systèmes de liaison à l'une des sous-structures et de mesurer les mobilités de cet ensemble. Le calcul approché ("partiel") devient alors tout à fait satisfaisant, avec les mêmes niveaux d'erreur que pour les couplages rigides.

### 5.3 Conclusions pour les compléments numériques

Globalement la EMMA est applicable dans le cas de couplages multipoint rigides ou élastiques, de plaques homogènes ou hétérogènes.

La présence de discontinuités massiques sur les plaques ne perturbe aucunement la qualité des résultats de l'EMMA, voire les améliore, contrairement à des méthodes comme l'AMA.

Les liaisons élastiques et dissipatives peuvent être prises en compte en tant que sous-systèmes à part (formés de masses, ressorts et amortisseurs) seulement asymptotiquement, au dessus de leur fréquence de résonance. Autour et en dessous de cette résonance on préconise de les intégrer à l'une des sous-structures avant couplage. Le calcul est alors aussi satisfaisant que celui des couplages rigides, mais une forte dissipation aux liaisons joue comme un fort amortissement et détériore la prévision des "miels" après couplage.

## Chapitre 6

# APPLICATION A DES DONNÉES ISSUES DE MESURES

Lorsqu'on utilise des données issues de mesures, des nouvelles difficultés apparaissent par rapport aux simulations numériques, mais aussi de nouveaux avantages de la méthode des mobilités énergétiques.

Les difficultés concernent les mobilités classiques mesurées sur des systèmes réels, et, comme ce sont les ingrédients de base pour les mobilités énergétiques, elles se répercutent sur ces dernières.

On trouvera à l'Annexe F un rappel de la méthodologie de mesure des mobilités classiques et des difficultés rencontrées habituellement.

Dans ce chapitre on relate brièvement la mise en oeuvre et les principaux résultats des mesures menées sur des assemblages de structures simples (cylindres et plaque suspendus).

### 6.1 Étude d'assemblages de structures simples

Il s'agit d'étudier si le calcul d'assemblage par mobilités énergétiques s'applique bien aux données issues de mesures sur des structures simples, avec des amortissements importants ou faibles, et de mettre au point les techniques d'excitation et montage qui seront utilisées pour les mesures sur le climatiseur.

Les expériences ont été effectuées à l'Institut National de Recherche et Sécurité (INRS), site de Vandoeuvre, au service Métrologie Vibrations Acoustique, dans la période octobre-décembre 1996.

#### Choix des systèmes simples à étudier

L'hypothèse de contact ponctuel par force normale, utilisée dans le logiciel à l'état actuel, implique le choix de sous-systèmes avec ce type de liaison.

On souhaitait en outre que les systèmes étudiés soient plus complexes que les simples assemblages de plaques étudiés numériquement, qu'ils aient une densité modale suffisante et qu'ils soient mesurables sur une plage de fréquences la plus étendue possible (peu amortis et suffisamment épais et rigides pour que les capteurs utilisés ne déterminent pas, par leur masse, une fréquence maximale trop basse).

Enfin il fallait que ces structures soient disponibles rapidement, avec un travail supplémentaire minimum.

Pour cet ensemble de raisons on a choisi deux cylindres en PVC (bien amortis) et le couvercle du climatiseur (peu amorti, forte densité modale).

## Mesures effectuées

Dans l'annexe F.2 on trouvera le détail des mesures préliminaires effectuées, du matériel utilisé etc...

### Mesure des mobilités "à vide"

Sur les sous-systèmes isolés choisis précédemment on a mesuré les mobilités d'entrée au futur point de couplage  $c$  et les mobilités de transfert entre ce point  $c$  et un autre point  $m$  (ou  $n$ ) quelconque, non bloqué.

### Mesures sur l'assemblage

On a réalisé un assemblage ponctuel des deux systèmes précédents par un petit bout de vis collé, au point  $c$ .

On a mesuré les mobilités du système assemblé entre les trois points  $m$ ,  $n$  et  $c$ .

## 6.2 Assemblage de deux cylindres fortement amortis

Le système  $S^1$  ("gros cylindre"), est un tricouche de PVC - Fibres de verre - PVC de diamètre extérieur 250 mm, longueur 1367mm et épaisseurs 1.5 + 7 + 1.5 mm.

Le système  $S^2$  ("petit cylindre") en PVC a un diamètre extérieur de 100mm, une longueur de 407mm (environ) et une épaisseur de 3 mm; sa densité modale peut a priori s'avérer insuffisante: il faudra considérer des bandes de fréquence assez larges pour que la méthode des mobilités énergétiques marche.

### Description du montage et tests

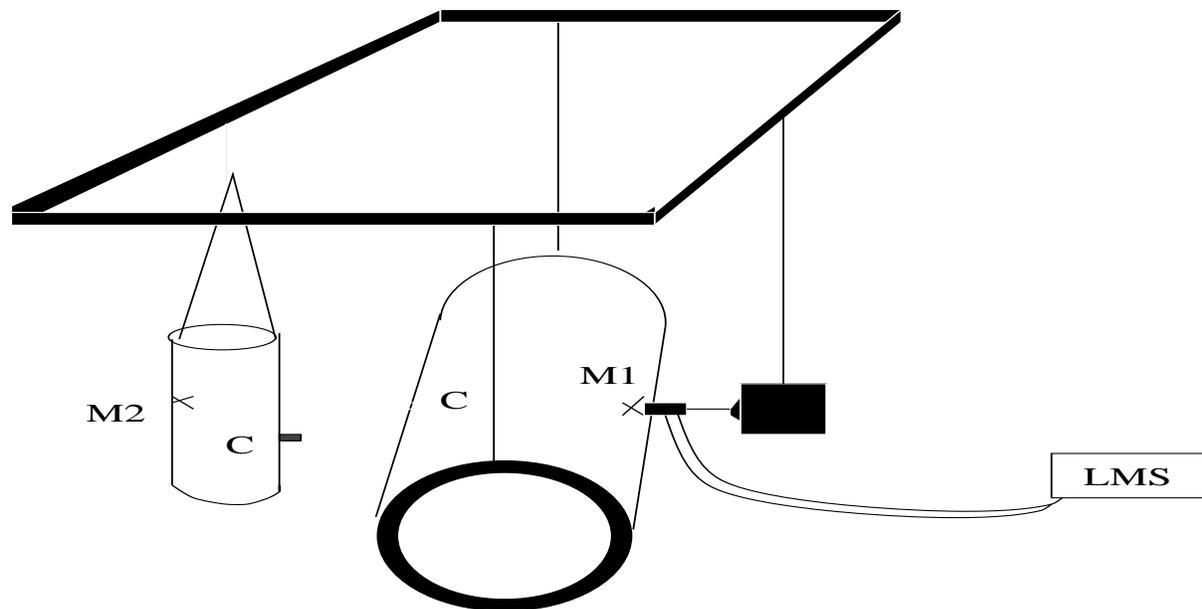


FIG. 6.1 - *Mesure des mobilités des deux cylindres isolés*

Le gros cylindre a été suspendu horizontalement par un fil (en Nylon tressé, isolé du support par des sandows) passant par une génératrice (pour éviter de percer le matériau composite).

Le petit cylindre percé diamétralement près du sommet a été suspendu verticalement par un fil mince en Nylon (découplé du support par des élastiques en caoutchouc) et muni d'un bout de vis collé au futur point de couplage c (avec de la colle biphasique, très dure, peu amortissante).

Le pot vibrant a été suspendu horizontalement par son cerceau, piloté par LMS, avec excitation type bruit blanc, et relié à la tête d'impédance par une tige mince ("stinger", utilisée pour éviter d'exciter par moments).

Au bout de la tête d'impédance on a fixé un bout de vis (1.1g) qui a été collé aux structures.

On a excité successivement au point m et au point c et mesuré la la force injectée et la vitesse en c et en m par des accéléromètres légers (Kiestler 0,4g avec électronique intégrée): ceci a permis d'obtenir les mobilités d'entrée et de transfert sur les deux sous-structures isolées.

En comparant les mobilités de transfert  $Y_{mc}$  et  $Y_{cm}$ , qui doivent être égales, on a testé la **réciprocité** des mesures de mobilité (bon montage, linéarité, bruit de fond...) (cf. Figure 6.2).

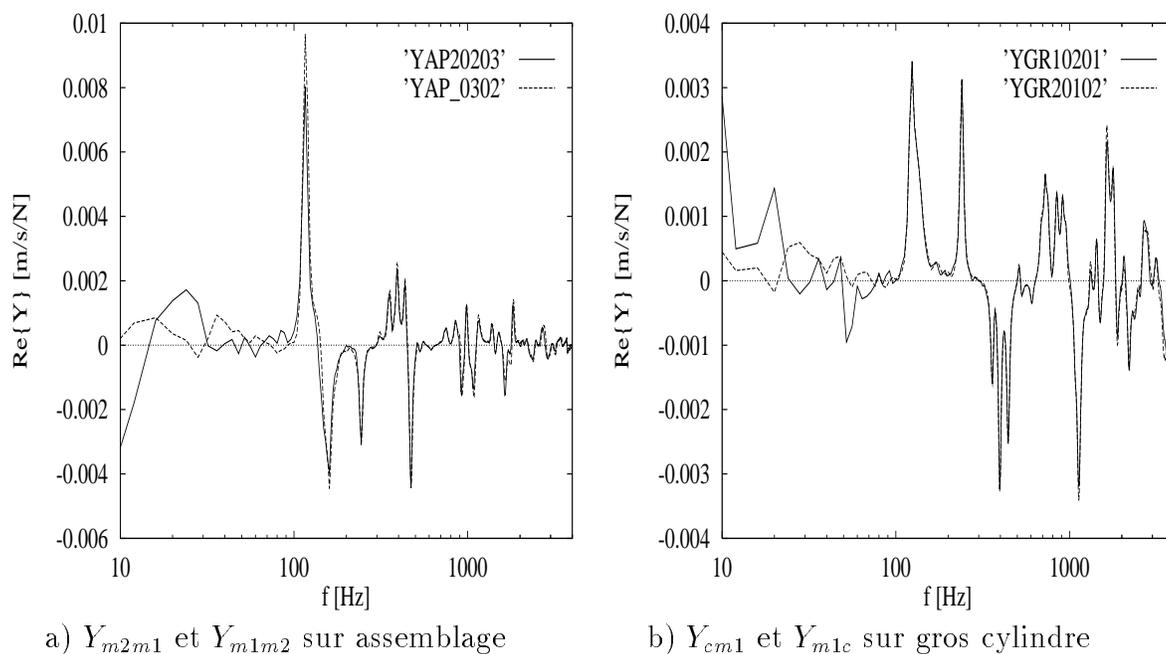


FIG. 6.2 - Tests de Réciprocité (permutation excitation / accéléro.)

On a ensuite couplé les deux structures au point c, en collant au gros cylindre l'extrémité libre de la vis du petit cylindre (cf. Figure 6.3). On a vérifié (cf. Figure F.5) par deux accéléromètres placés à l'intérieur de chaque cylindre, en correspondance avec la vis), que le couplage était bien rigide et peu dissipatif et, accessoirement, qu'il n'y avait pas d'effet de "pompage" dans l'épaisseur du gros cylindre (même vitesse dedans et dehors). On a fait de même au point excité (pour que la force mesurée par la tête d'impédance soit correcte, il faut que la vitesse donnée par la tête d'impédance soit la même que celle obtenue sur

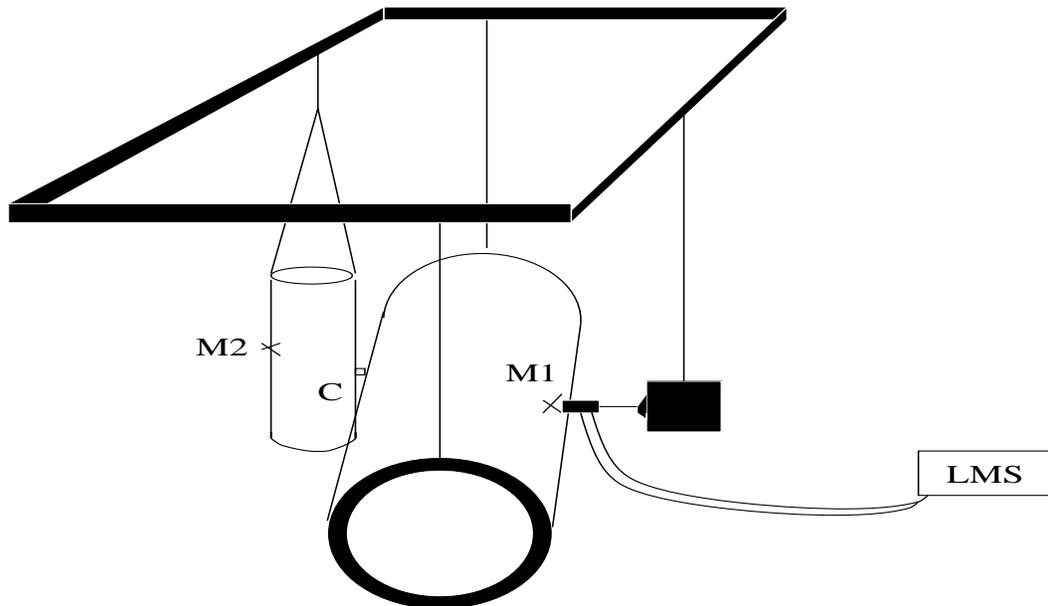


FIG. 6.3 - Couplage au point  $c$  des deux cylindres très différents

la structure au point d'excitation). On a alors mesuré les mobilités après couplages qui serviront à valider les prévisions de la méthode des mobilités classiques et de la méthode des mobilités énergétiques.

On a désassemblé et reassemblé les systèmes, pour vérifier la **réproductibilité des mesures** effectuées: pour des couplages suffisamment rigides (colle dure) elle est bonne.

## Résultats du calcul par mobilités classiques

On remarquera ici que les mobilités classiques oscillent peu sur les bandes de 200 Hz choisies et que les mobilités des deux cylindres sont très différentes (cf. Figure 6.4). C'est donc un cas de figure qui va permettre de voir si les mobilités énergétiques de connexion ont été bien définies.

À partir des mobilités mesurées avant couplage sur les sous-structures isolées, on calcule les mobilités après couplage, suivant les formules du chapitre 2.

Les résultats sont bons (cf. Figures 6.5 à 6.7), car sur des systèmes fortement amortis les mobilités des points non couplés varient peu si les conditions aux limites changent un peu. Ces petits changements sont cependant bien prévus par le calcul: les faibles différences de niveau entre calcul et mesure après couplage confirment que les montages étaient soignés, les couplages peu dissipatifs, le bruit de fond faible et les contributions des forces normales très supérieures à celles d'éventuels moments transmis par le couplage. On a bien effectué une expérience de laboratoire.

En comparant la figure 6.5 et la figure 6.8 on s'aperçoit cependant que la visualisation en bande fine est trompeuse, car les différences sur les pics sont mal appréciables et il ne faut pas oublier de comparer aussi les parties imaginaires (Figure 6.6), car les erreurs des prévisions approchées cumulent celles sur les parties réelles et celles sur les parties imaginaires, par bandes de fréquences.

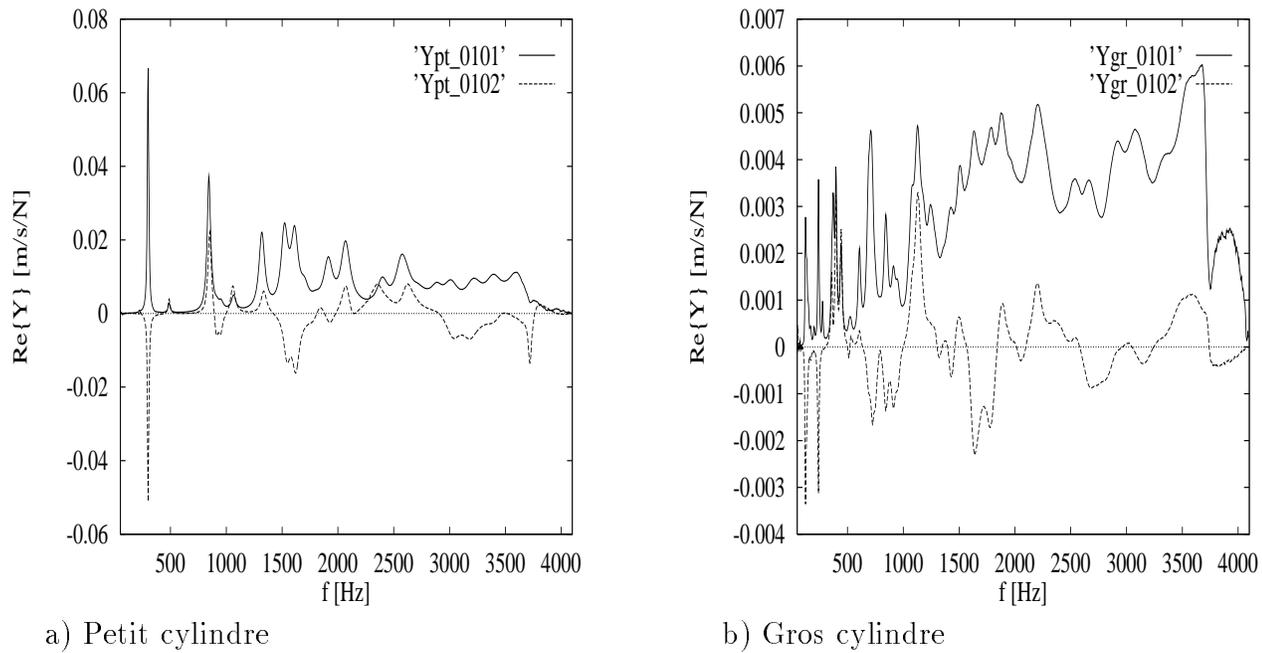
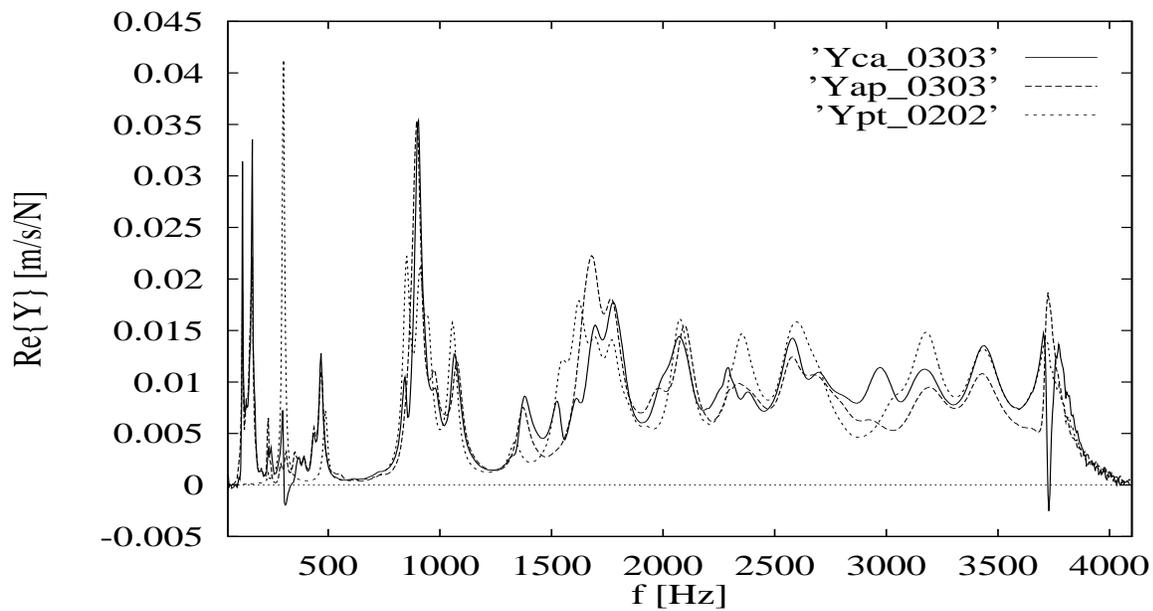


FIG. 6.4 - Mobilités d'entrée et de transfert des deux sous-structures isolées

FIG. 6.5 -  $Re\{Y_{m2m2}\}$  après couplage: ( $Yca_{-}$ ) calculé; ( $Yap_{-}$ ) mesuré et ( $Ypt_{-}$ ) mesuré avant couplage, pour l'Assemblage de deux cylindres

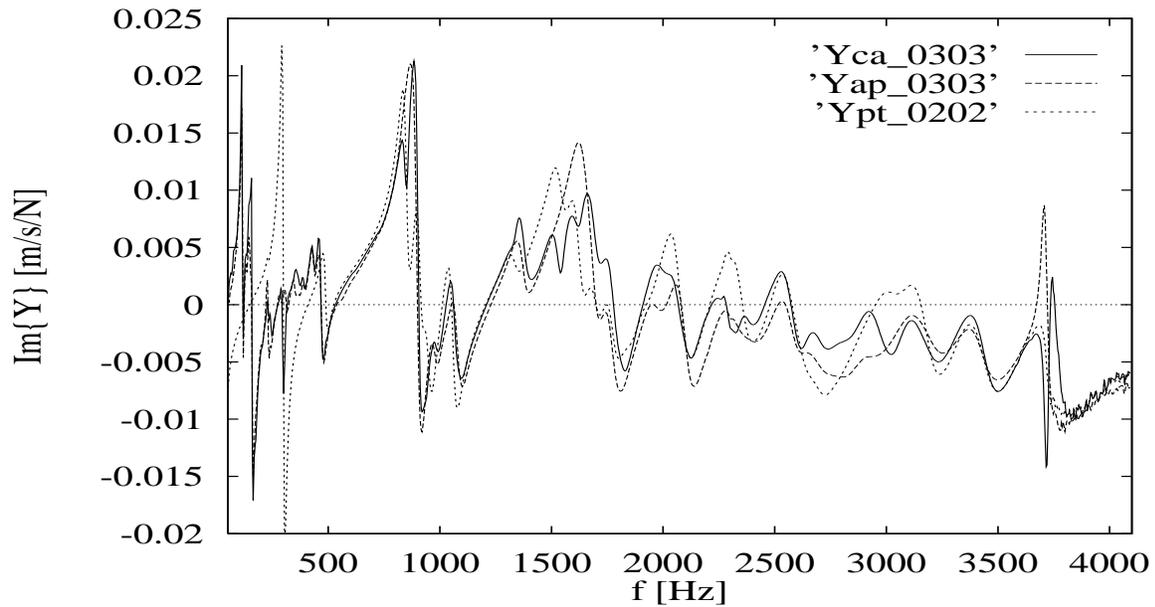


FIG. 6.6 -  $Im\{Y_{m2m2}\}$  après couplage: ( $Yca_-$ ) calculé; ( $Yap_-$ ) mesuré et ( $Ypt_-$ ) mesuré avant couplage, pour l'Assemblage de deux cylindres

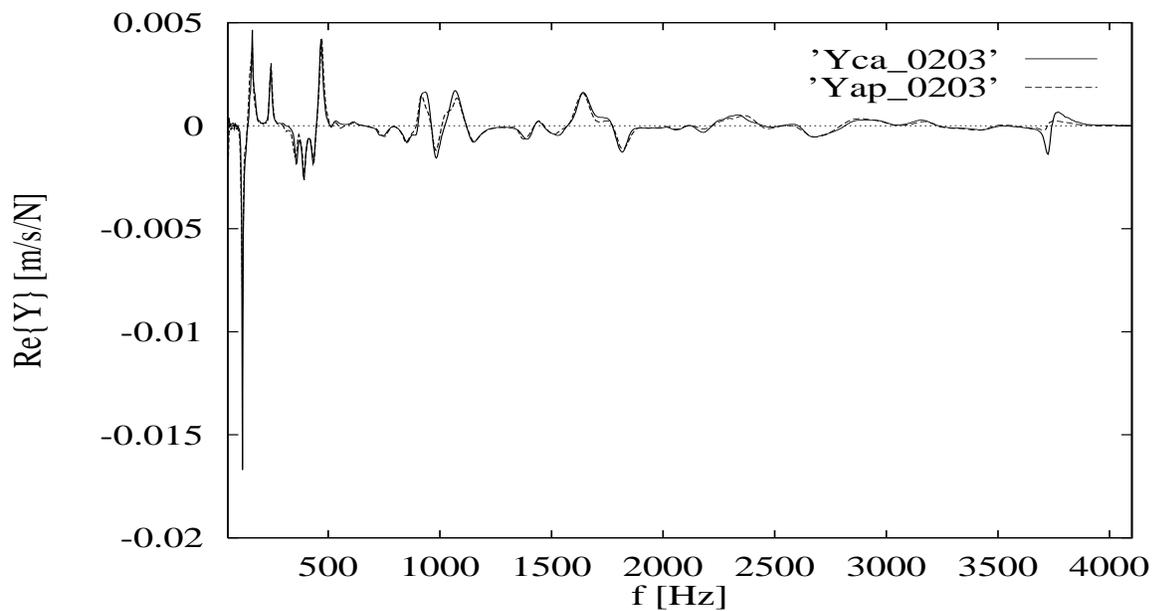


FIG. 6.7 -  $Re\{Y_{m1m2}\}$  par Calcul classique ( $Yca_-$ ) et par mesure après couplage ( $Yap_-$ ) Transfert entre deux cylindres couplés en un point  $c$

## Résultats du calcul par mobilités énergétiques

À partir des mobilités mesurées avant couplage sur les sous-structures isolées, on forme leurs mobilités énergétiques et on calcule les mobilités énergétiques après couplage, suivant les formules EMMA (cf. chapitre 3) avec des bandes de largeur constante 200 Hz.

On obtient ainsi les mobilités énergétiques après couplage en entrée au point m2 du petit cylindre (cf. Figure 6.8) et en transfert, entre le point m1 du gros cylindre et le point m2 du petit (cf. Figure 6.9) et entre le point m1 et le point c couplé (cf. Figure 6.10).

On remarquera aussi que les résultats obtenus par la EMMA (courbes HNRJ ou Hnrj) sont aussi précis que ceux obtenus par la méthode classique (courbes "HEX\_" ou "Hex\_"), sauf pour les trois premières bandes de 200 Hz.

Contrairement aux attentes, les autres bandes de 200 Hz n'étaient pas trop étroites, pourtant les nombres d'oscillations des parties imaginaires des mobilités des deux cylindres étaient souvent nuls, comme le montre le tableau suivant.

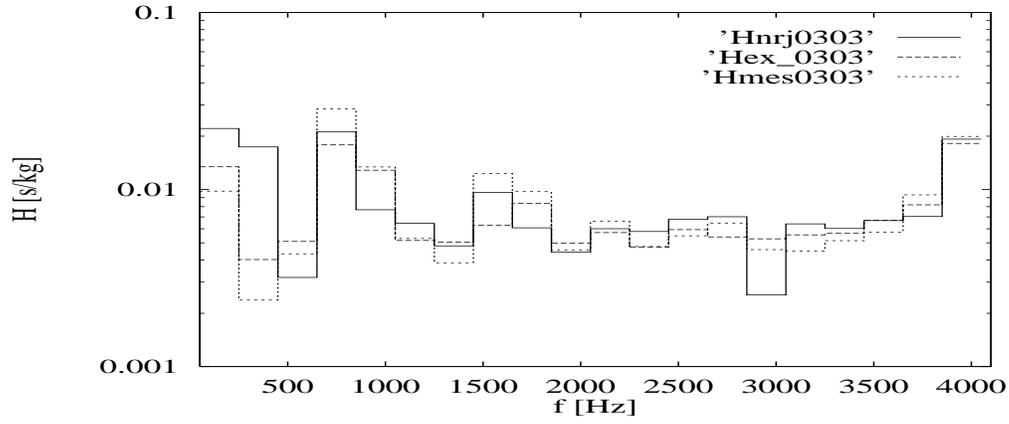
Nombres d'oscillations des parties imaginaires des mobilités  $Y_{mc}$

Fcentr [Hz]	Gros Cyl.	Petit Cyl.	Fcentr [Hz]	Gros Cyl.	Petit Cyl.
150.0	3	0	2150.0	1	2
350.5	3	1	2350.0	0	1
550.4	0	2	2550.0	0	2
750.0	3	0	2750.0	1	0
950.0	0	1	2950.0	0	0
1150.0	1	1	3150.0	0	1
1350.0	1	0	3350.0	0	0
1550.0	1	1	3550.0	1	1
1750.0	1	0	3750.0	0	1
1950.0	0	0	3950.0	0	0

On peut remarquer que les transferts sur une structure fortement amortie (gros cylindre) sont négligeables par rapport aux contributions directes, même si les mobilités n'oscillent pas beaucoup: on n'a pas besoin de l'effet de moyenne.

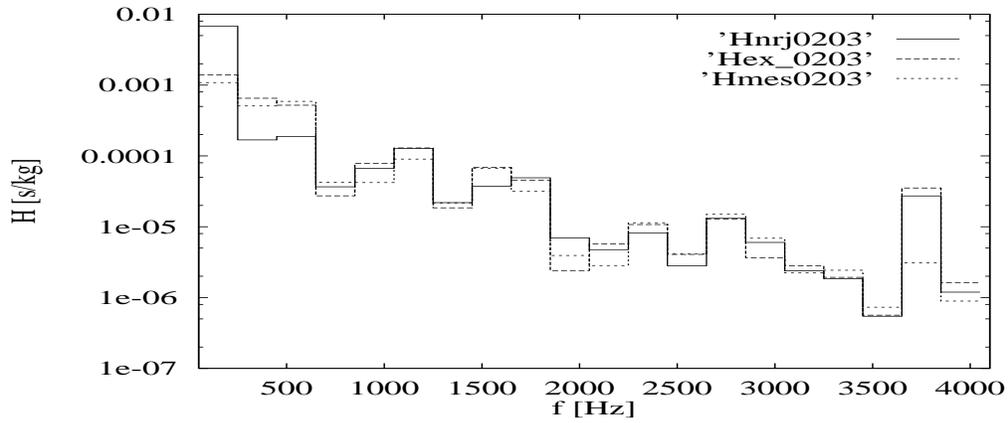
L'erreur maximale sur les autres bandes est autour des 3 dB qu'on s'était préfixés comme "erreur admissible" pour notre méthode approchée.

Enfin on constate sur un transfert entre le point couplé et le point excité (qui serait mauvais sans facteurs de connexion), que la définition des mobilités énergétiques proposée pour les systèmes couplés, fonctionne bien, conformément aux résultats des simulations numériques (cf. Figure 6.10).



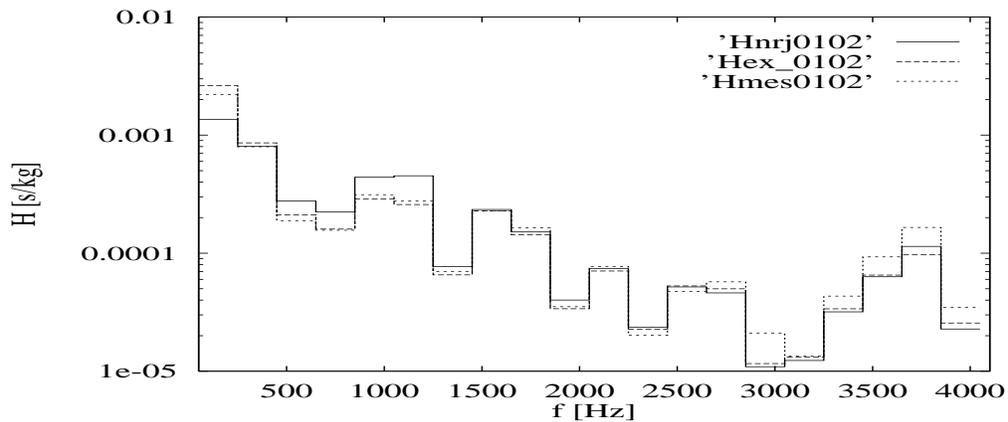
Mobilité énergétique d'entrée  $H_{m2m2}$  après couplage

FIG. 6.8 - EMMA (*Hnrj*) - Calcul classique (*Hex\_*) - Mesure (*Hmes*)



Mobilité énergétique de transfert  $H_{m1m2}$  après couplage

FIG. 6.9 - EMMA (*Hnrj*) - Calcul classique (*Hex\_*) - Mesure (*Hmes*)



Mobilité énergétique de transfert  $H_{cm1}$  après couplage

FIG. 6.10 - EMMA (*Hnrj*) - Calcul classique (*Hex\_*) - Mesure (*Hmes*)

### 6.3 Assemblage d'un cylindre et d'un couvercle de climatiseur

Le couvercle du climatiseur est un rectangle en acier  $885 * 275 * 1$  mm, ayant des bords repliés, de 20 mm.

Suspendu verticalement, il a été couplé au petit cylindre, toujours en collant le bout de vis qui dépasse du petit cylindre à un point quelconque de la plaque.

On mesure donc les mobilités d'entrée et de transfert du couvercle seul et de l'ensemble couvercle-cylindre, comme précédemment.

On a vérifié là aussi que la vitesse au point de couplage est la même de part et d'autre du couplage, sur les deux structures.

Les mobilités classiques du couvercle sont beaucoup plus "piquées": on a une densité

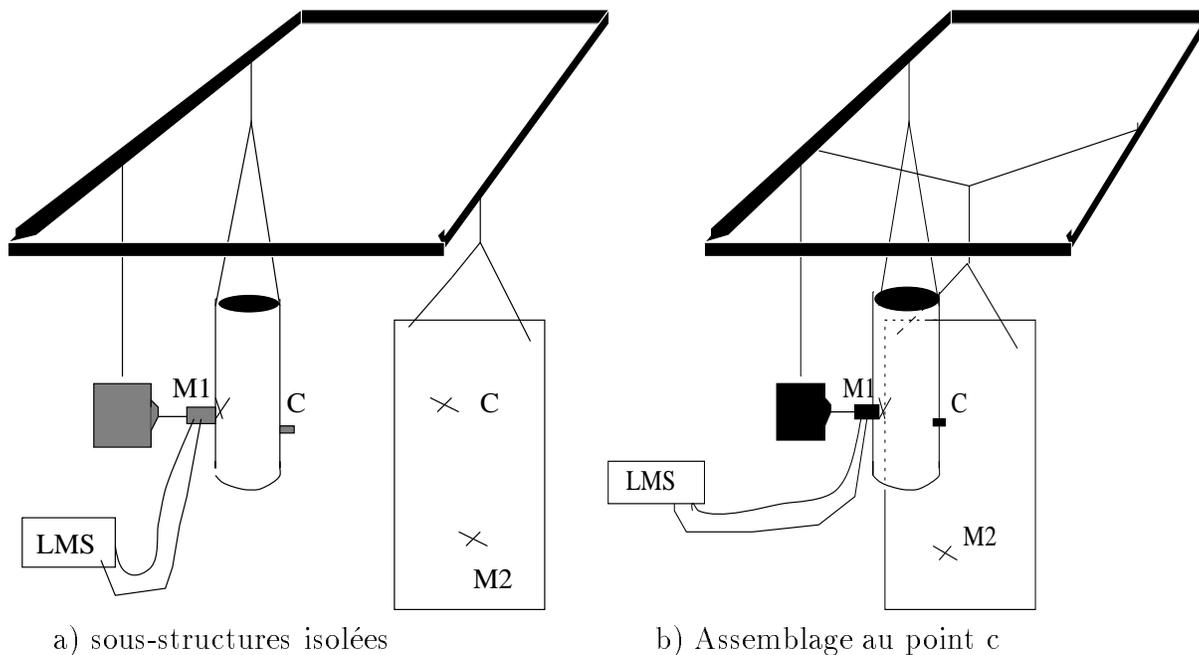


FIG. 6.11 - Couplage au point c du couvercle et du petit cylindre

modale beaucoup plus forte et un amortissement beaucoup plus faible que pour les cylindres(cf. Figure 6.12).

Avant de faire les calculs il a été nécessaire de "nettoyer" les données (cf. F.1.2) car les parties réelles des mobilités d'entrée présentaient des valeurs négatives (qu'on a mis à zéro); on n'a cependant pas "nettoyé" les pics anormaux (dont la largeur n'est pas compatible avec l'amortissement), ce qui peut expliquer les différences entre calcul et mesure. Comme pour les simulations numériques, on constate que les différences entre résultats classiques ("exacts") et approchés (EMMA) sont imprévisibles et ne diminuent pas en montant en fréquence.

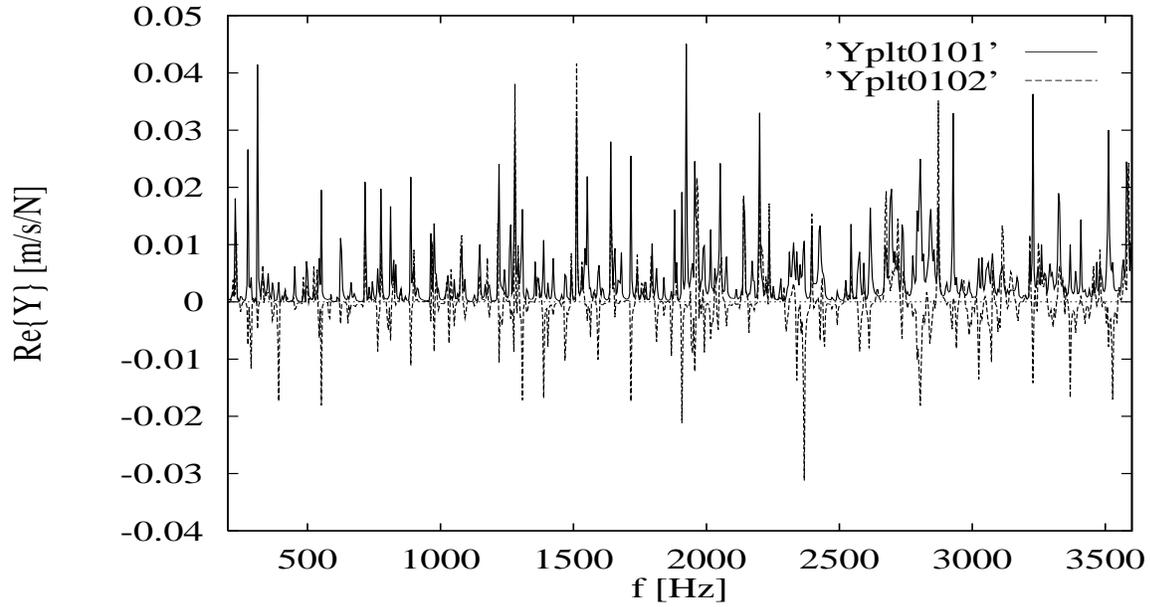


FIG. 6.12 - Mobilités  $Y_{cc}$  et  $Y_{cm2}$  du couvercle seul, suspendu

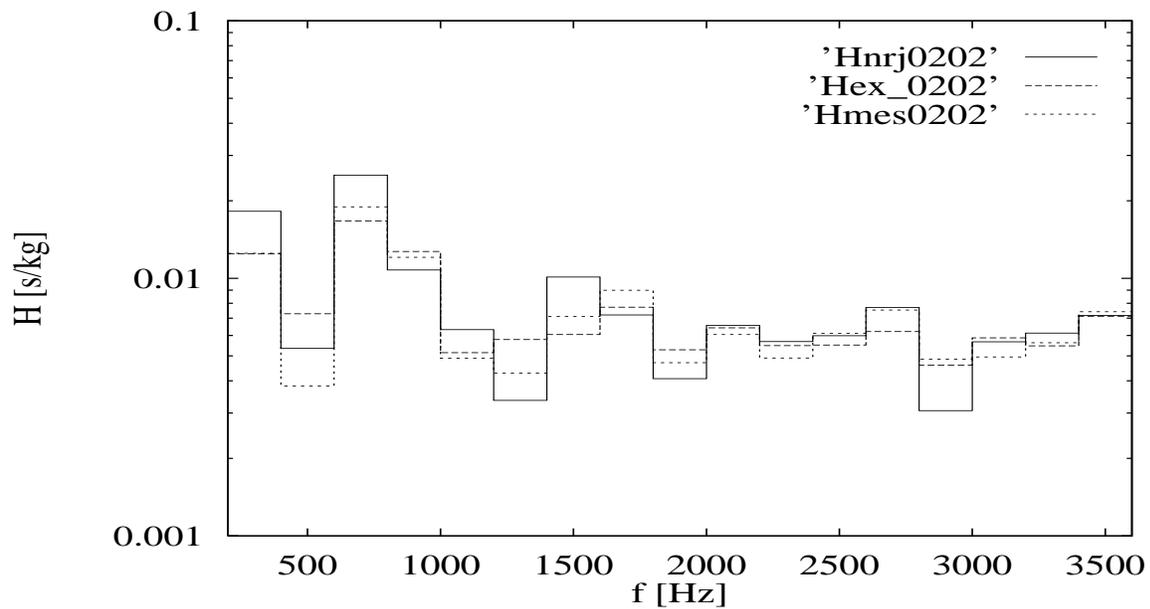


FIG. 6.13 - Comparaison des mobilités énergétiques après couplage  $H_{m1m1}$  EMMA ( $H_{nrj}$ ) - Calcul classique ( $H_{ex}$ ) - Mesure ( $H_{mes}$ ). Bandes de 200 Hz. Assemblage du couvercle et du petit cylindre.

Dans ce cas aussi les résultats de la méthode EMMA sont tout aussi bons que ceux de la méthode des mobilités classiques, sauf pour les premières bandes.

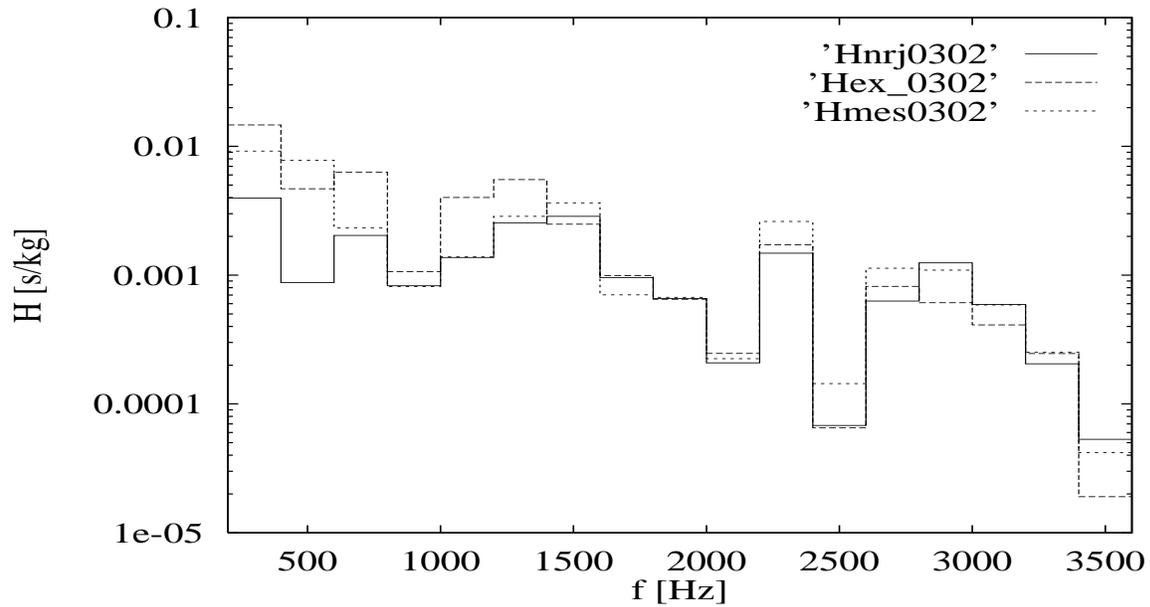


FIG. 6.14 - Comparaison des mobilités énergétiques après couplage  $H_{m1m2}$   
 Calcul énerg. approché ( $H_{nrj}$ ) - classique ( $H_{ex}$ ) - mesuré ( $H_{mes}$ ). Bandes de 200 Hz.  
 Assemblage du couvercle et du petit cylindre.

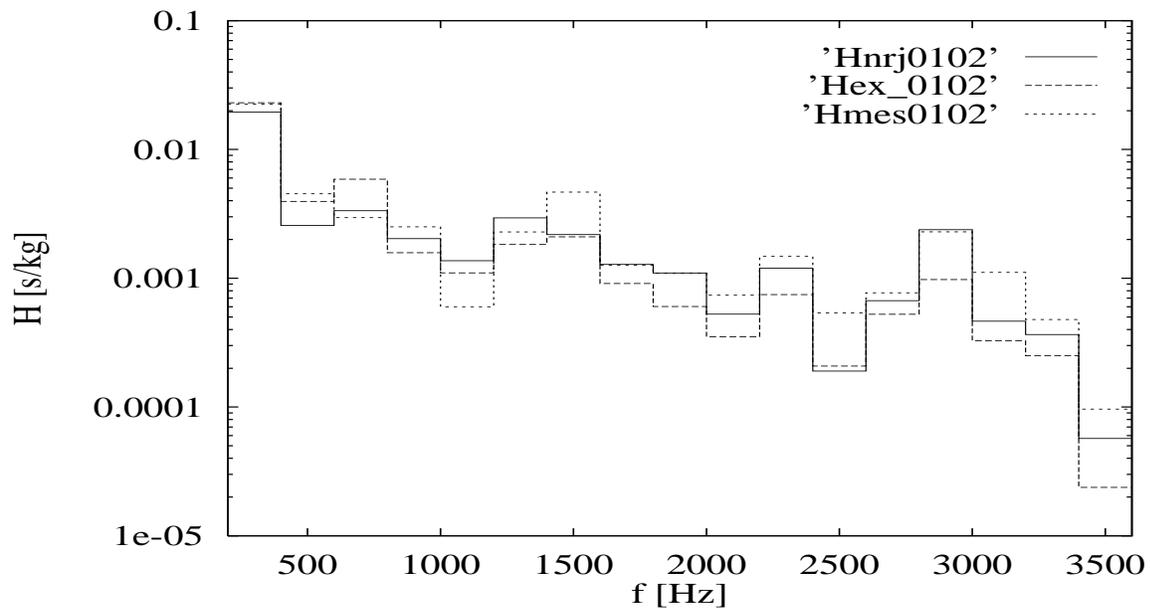


FIG. 6.15 - Comparaison des mobilités énergétiques après couplage  $H_{cm1}$   
 EMMA ( $H_{nrj}$ ) - Calcul classique ( $H_{ex}$ ) - Mesure ( $H_{mes}$ ). Bandes de 200 Hz.  
 Assemblage du couvercle et du petit cylindre.

## 6.4 Conclusions sur l'application expérimentale de la méthode

Les deux expériences effectuées, avec des couplages rigides contrôlés et des montages propres (bonne réciprocité) valident la méthode des mobilités énergétiques, lorsqu'elle est appliquée dans des bonnes conditions expérimentales (proches de celles théoriques).

Ses résultats sont aussi bons que ceux obtenus par les mobilités classiques si on choisit convenablement les bandes de fréquence (avec quelques oscillations des mobilités classiques (parties réelles ou parties imaginaires) des deux sous-structures isolées, dans chaque bande, ou, pour un fort recouvrement modal, avec la partie réelle des mobilités d'entrée bien plus grande que celle des mobilités de transfert).

Les avantages de la méthode approchée par rapport aux mobilités classiques sont les suivants:

- meilleure lisibilité des résultats
- utilisation de quantités moyennées en fréquence, plus stables
- insensibilité aux erreurs de signe (gain de temps considérable sur la conception et l'exploitation des mesures, sécurité supplémentaire, robustesse)
- temps de calcul et bases de données extrêmement réduites
- insensibilité aux bruits de fond aléatoires (non traitée dans l'exemple présenté ici).

Une tentative d'application à une structure complexe (un climatiseur) n'a pas été concluante car la mise en oeuvre de la méthode des mobilités classiques était elle même trop approximative et les résultats des "calculs exacts" étaient eux mêmes très différents de ceux des mesures.

On a cependant obtenu des résultats EMMA de la même qualité que ceux "exacts" des mobilités classiques. *La méthode des mobilités énergétiques suppose donc qu'on fasse des mesures sensées de mobilités classiques.*

Aux vues de ces premières expériences, la méthode des mobilités énergétiques semble un outil prometteur, pour donner une information énergétique locale.

Le fait de considérer des quantités moyennées par bande de fréquence, rend la méthode un peu plus robuste que celle des mobilités classiques, tant du point de vue expérimental (la position exacte des pics dans une bande compte peu, un bruit aléatoire électrique, donne une contribution petite en moyenne devant celle du signal, pas de corrections de signe nécessaires), que du point de vue calculatoire (moins de problèmes de bon conditionnement et d'inversion des matrices).

Des problèmes typiques de la méthode des mobilités classiques demeurent: problèmes de non linéarité, présence de sources internes variables (chocs, frottements), difficultés de mesure pour les couplages élastiques dissipatifs, bruit électronique et niveau d'excitation (en transfert), erreurs de mesure en entrée (accessibilité, voisinage de discontinuités, positionnement du système excitateur, nécessité de parties réelles effectivement positives), couplages mal définis, ou variables (non rigides, points de contact mal localisés), couplages surfaciques à discrétiser, contribution des moments...

# Chapitre 7

## CONCLUSIONS

Dans ce chapitre on va rappeler les principaux résultats de l'étude et faire quelques suggestions sur les applications possibles et sur les voies de recherche ouvertes.

### 7.1 Conclusions

#### Récapitulatif

Après une analyse bibliographique des principales tendances concernant les méthodes énergétiques et un rappel du formalisme des mobilités classiques, cette étude s'est structurée en trois parties:

- la mise en forme analytique de l'Approche par Mobilités Moyennes Énergétiques ("EMMA"),
- l'application numérique à quelques assemblages de plaques homogènes et hétérogènes par couplages ponctuels rigides ou élastiques,
- l'étude expérimentale de deux assemblages de structures simples.

#### Démarche suivie

Notre but étant d'élaborer une méthode approchée de prévision de quantités énergétiques locales sur les assemblages, à partir des quantités énergétiques locales des sous-structures séparées, il nous a semblé judicieux d'utiliser comme ingrédients des quantités locales, mesurables et exactes: les mobilités classiques.

Ce choix a limité l'application de notre démarche à des structures dont le comportement est linéaire, passif et réciproque.

On a utilisé l'effet simplificateur des moyennes fréquentielles pour obtenir des expressions énergétiques approchées entre puissances injectées et niveaux vibratoires par bandes de fréquence.

Par des simulations numériques d'assemblages de plaques on a étudié les différentes erreurs de méthode et dégagé l'influence qualitative de certains paramètres.

Par des applications expérimentales à des assemblages de plaques et cylindres, on a comparé les prévisions de la EMMA à celles des mobilités classiques (méthode "exacte") et aux mesures effectuées après couplage.

### 7.1.1 Principaux résultats de l'étude

#### Analyse bibliographique

L'analyse bibliographique a permis de constater l'intérêt croissant pour des méthodes énergétiques locales, applicable à des structures hétérogènes, complémentaires à la SEA. Des méthodes basées sur les mobilités, comme celle des Réceptances de puissance ou des PFRF, travaillent à fréquence pure et utilisent des hypothèses contraignantes sur les excitations ("rain on the roof", sources de force).

Les méthodes utilisant les densités d'énergie Lagrangienne et totale sont prometteuses, mais nécessitent un partage des structures en sous-systèmes simples couplés (poutres, plaques, coques).

Les méthodes avec des mobilités moyennées par bandes de fréquences (Valeur moyenne, Lissage par Cepstre...) utilisent des moyennes géométriques et ne peuvent pas se rattacher à des véritables quantités énergétiques; de plus elles ont des problèmes avec les structures hétérogènes.

#### Choix d'un formalisme simple

Le rappel de la méthode des mobilités classiques a permis de mettre en place un formalisme cohérent, pour l'analyse exacte des assemblages par couplages ponctuels externes de deux sous-structures ou par couplages internes sur une seule structure, en détaillant les hypothèses, habituellement implicites, effectuées sur les sources excitatrices.

#### Définition et Additivité énergétique

On a défini la mobilité énergétique, en fonction uniquement des mobilités classiques, moyennées par bandes de fréquences. On a montré qu'elle approche, sur une bande de fréquences, le rapport de la moyenne fréquentielle du module carré de la vitesse en un point (appelée "miel") et de la moyenne fréquentielle de la puissance active injectée en un autre point, de façon assez indépendante du type de source utilisé (surtout en haute fréquence).

On a ensuite montré que, sur une structure excitée en plusieurs points, s'ils sont suffisamment éloignés les uns des autres, on peut approcher le "miel" obtenu en tout point, en additionnant les produits des mobilités énergétiques et des puissances actives injectées par bande, considérées séparément, sans utiliser une référence de phase commune.

#### Connectivité énergétique

Après un couplage rigide en  $N$  points, on a obtenu des expressions approchées des puissances actives échangées par bande et des "miels" de l'assemblage en utilisant les mobilités énergétiques et les "miels" avant couplage des sous-structures séparées aux futurs points de couplage:

- on a défini des mobilités énergétiques de connexion,
- on a écrit la continuité des "miels" et le bilan des puissances échangées,
- on a appliqué l'additivité énergétique des puissances échangées et extérieures après couplage.

## Invariants et Préviation énergétique

La préviation (approchées) des mobilités énergétiques et des "miels" après couplage en fonction des "miels" avant couplage, sur les sous-structures séparées, peut se faire, indépendamment du type des sources extérieures, en vertu de la propriété suivante: *on peut négliger les changements des puissances actives injectées par bande de fréquence en des points non couplés* (i.e. suffisamment éloignés des points de couplage).

Contrairement aux mobilités classiques, qui sont affectées par tout changement de la structure (couplage, conditions aux limites, ajout de masse), les mobilités énergétiques sont moins sensibles dans certains cas. Une première propriété importante a été découverte et utilisée tout au long de l'étude: *lors du couplage d'une sous-structure, on peut négliger les changements induits sur la mobilité énergétique de transfert entre deux points non couplés*. Une autre propriété remarquable est la suivante: si on ajoute une masse concentrée sur une structure, en montant en fréquence on peut négliger de plus en plus les changements induits sur les mobilités énergétiques d'entrée et de transfert, pour un point excité qui coïncide avec le point massique.

## Simulations numériques

Les études numériques ont montré que la méthode peut s'employer de façon satisfaisante, sur des assemblages de plaques minces homogènes et hétérogènes et sur des assemblages d'oscillateurs.

Les puissances échangées aux différents points de couplage sont prévues de mieux en mieux lorsque le recouvrement modal augmente; la puissance échangée totale est toujours plus fiable.

Les "miels" et les mobilités énergétiques après couplage sont satisfaisants si les mobilités classiques oscillent au moins deux ou trois fois dans chaque bande; ils ne s'améliorent pas en augmentant le recouvrement modal.

Toutes les prévisions s'améliorent en augmentant la largeur des bandes d'analyse.

Les couplages élastiques et dissipatifs peuvent être pris en compte soit en utilisant un système intermédiaire à part (solution valable seulement au dessus de sa fréquence de résonance interne), soit en rattachant ce système de liaison à l'une des sous-structures, avant d'effectuer le couplage (solution valable sur tout le spectre).

L'erreur exacte du calcul EMMA ne peut pas être prévue à partir des seules caractéristiques de la structure, car elle dépend des efforts appliqués. Elle est liée de plus à des quantités locales.

Comme piste de recherche on propose d'utiliser deux quantités (disponibles), pour former un indicateur de l'erreur de méthode, en chaque point, dans chaque bande de fréquences:

- le nombre moyen de passages à zéro des parties imaginaires des mobilités classiques de transfert entre le point de calcul et les points excités (et entre les différents points excités),
- le rapport de la mobilité énergétique d'entrée et de la partie réelle moyenne de la mobilité classique d'entrée aux points excités.

## Premières études expérimentales

Par des expériences sur des structures simples (deux cylindres, et une plaque) couplées en un point, avec des mobilités classiques bien mesurées, on a constaté que, par rapport aux mesures après couplage, la qualité des prévisions par mobilités énergétiques est comparable à celle des mobilités classiques. De plus l'utilisation de quantités positives, moyennées par bande de fréquence, permet de s'affranchir des erreurs de signe sur les mobilités de

transfert et élimine les effets d'un éventuel bruit aléatoire.

## 7.1.2 Autres aspects traités

### Couplages internes

Les couplages internes à une même structure ont été traités, en utilisant la même démarche que pour les couplages externes. Des expressions énergétiques pour les couplages internes ont alors été proposées.

### Couplage en deux points

Il a été montré, sur un cas simple, qu'il est équivalent d'effectuer deux couplages externes ou un couplage externe suivi d'un couplage interne. La deuxième approche permet de traiter récursivement (analytiquement ou numériquement) le couplage en  $N$  points, sans effectuer d'inversion matricielle, qui pose parfois problème pour les mobilités classiques.

### Couplage à une masse ponctuelle

L'insensibilité en haute fréquence de la mobilité énergétique d'entrée lorsqu'on ajoute une masse ponctuelle a été montrée analytiquement (et constatée numériquement dans le cas des plaques avec discontinuités massiques).

### Expression des CLF, prédictivité

On a donné au C.5 une expression intrinsèque des facteurs de perte par couplage (CLF) de la SEA, dans le cas du couplage rigide par points de structures hétérogènes.

De plus, la propriété de quasi-invariance des puissances actives moyennées en fréquence, injectées en des points non couplés, peut expliquer, dans certains cas, pourquoi on peut appliquer une méthode comme la SEA de façon prédictive, alors que ses hypothèses sur les sources (considérées des sources de force) sont violées.

### Assemblages d'oscillateurs

L'étude des assemblages d'oscillateurs amortis de l'annexe G, a permis de mieux comprendre les assemblages par liaisons élastiques, mais constitue un élément étonnant, car on aurait pu penser que la EMMA ne peut pas s'appliquer dans ces conditions (trop peu de modes et d'oscillations des mobilités de transfert dans les bandes choisies).

## 7.2 Autres applications et développements possibles

Ce travail est une exploration rapide, avec des outils formels simples, d'une nouvelle méthode prédictives sur des quantités énergétiques locales des assemblages multipoint.

Chacune de ses étapes peut être approfondie, par d'autres études analytiques (par la méthode modale ou la décomposition en ondes).

Des applications numériques et expérimentales à d'autres types de structure sont nécessaires afin de mieux évaluer la portée pratique de la méthode proposée.

Des extensions à d'autres types de couplage (linéique et surfacique) et à l'excitation par moments seront les bien venues, ainsi qu'une extension au couplage vibro-acoustique.

## 7.2.1 Établissement de critères énergétiques

L'analyse par mobilités énergétiques des sous-structures permet d'effectuer des choix sur le dimensionnement des structures, par rapport à des critères énergétiques locaux.

### Variation du niveau vibratoire local

Sur des systèmes complexes et hétérogènes, il est important de pouvoir prévoir localement les variations du niveau vibratoire, car le niveau global ne suffit plus à dimensionner la structure aux endroits sensibles.

La prévision des "miels" après couplage seulement aux points voulus, est l'un des résultats principaux de l'EMMA, avec une grande économie sur l'information nécessaire et sur le temps de calcul.

### Diminution des puissances injectées ou échangées

La diminution de la puissance active totale échangée ou injectée est aussi un critère utile au dimensionnement des structures et des liaisons ([69]).

Les mobilités énergétiques donnent là aussi plus de détails sur la puissance échangée en chaque point de couplage et sur la puissance injectée et dissipée en chaque point, par bandes de fréquence, à partir des "miels" avant couplage.

En effet, dans le domaine d'application de la SEA (hautes fréquences, recouvrement modal supérieur à 1) les calculs des puissances locales de la EMMA sont satisfaisants.

### Augmentation d'une dissipation intermédiaire

Au E.2 on a vu qu'on ne peut optimiser un système de liaison élastique amortissant, exclusivement par mobilités énergétiques, que si sa résonance interne est inférieure à celles de la bande de fréquences analysée. Sinon il faut utiliser les mobilités classiques.

Cette limite étant fixée, on peut faire varier l'amortissement ou les autres caractéristiques d'un système intermédiaire et étudier rapidement efficacité de l'isolation vibratoire obtenue, en termes de puissances échangées ou dissipée dans ce sous-système, ou en termes de niveau vibratoire des autres sous-systèmes.

On peut donc analyser et optimiser chacune des liaisons ponctuelles séparément.

## 7.2.2 Apports et compléments à la SEA

La Statistical Energy Analysis fait des analyses globales, sans devoir se soucier des réalisations du couplage ou des endroits couplés ou excités. Les mesures des énergies cinétiques moyennes impliquent un maillage des sous-systèmes. Sa démarche n'est généralement pas prédictive et devrait se borner aux moyennes et hautes fréquences.

La EMMA nécessite au contraire des informations locales précises, sur les éléments de couplage et sur les niveaux vibratoires. Elle ne s'applique actuellement qu'aux couplages ponctuels, mais permet de prévoir les puissances échangées et l'énergie cinétique d'un sous-système après couplage, sans mailler les sous-systèmes: seule la connaissance des "miels" aux points de couplage, avant couplage, (et des points d'injection extérieure) est nécessaire. On peut ainsi connaître

- les points qui vibrent le plus lorsqu'on injecte des puissances dans la structure à des endroits donnés (sans avoir des relations de phase entre elles),
- les points de couplage ou d'injection extérieure les plus importants pour les vibrations

d'autres points (analyse des chemins vibratoires).

Les deux approches sont complémentaires et peuvent apporter des éléments précieux l'une à l'autre. La SEA peut étendre les prévisions des mobilités énergétiques au domaine du rayonnement acoustique, aider à établir des modèles pour les couplages non ponctuels et apporter la robustesse liée à la conservation de l'énergie totale.

Les mobilités énergétiques apportent à la SEA une détermination semi-expérimentale des CLF (cf.C.5) pour des structures complexes ou pour des assemblages successifs, d'où une aide possible pour la caractérisation des couplages "forts".

Elles apportent aussi leur coté prédictif, avec les puissances totales échangées, et la connaissance des niveaux vibratoires locaux pour des structures hétérogènes.

### 7.2.3 Approfondissements possibles

#### Étude énergétique des chemins de transmission

Les mobilités classiques ont été utilisées par plusieurs auteurs afin de mieux définir les "chemins" de transmission vibratoire.

Dans ce travail nous avons utilisé les mobilités des structures isolées (libres) pour effectuer des couplages internes et externes.

Nous n'avons pas souligné le fait que la valeur des différents termes de la matrice de couplage (surtout celle des termes diagonaux) est indicative de l'importance des points de contact correspondants pour les transferts vibratoires d'une structure à l'autre.

On pourrait aussi considérer les mobilités énergétiques des structures isolées bloquées, d'une façon analogue à celle présentée par Bessac, Gagliardini et Guyader ([4]), pour montrer l'importance ou la "force" relative de certains couplages. Ce cas d'analyse serait complémentaire à ceux exposés ici, car, pour certains assemblages, il est plus simple de bloquer des sous-systèmes que de les découpler.

#### Application aux mobilités de moment

Les mobilités de moment constituent un problème en soi car la mesure des moments appliqués (et la réalisation d'une excitation par moment pur) est difficile à ce jour pour des structures minces.

De plus la prise en compte des rotations et des moments alourdit les calculs matriciels, la gestion des données et complique l'analyse des résultats.

Cependant les contributions des moments deviennent importantes aux hautes fréquences, là où les théories énergétiques sont les plus indispensables. C'est pourquoi une étude des contributions des moments, moyennées par bande de fréquence, semble nécessaire, afin de voir si les mêmes relations que celles établies s'appliquent bien à des mobilités énergétiques de moment et aux mobilités mixtes vitesse/moment et rotation/force.

#### Extension aux couplages linéiques et surfaciques

Le couplage ponctuel souvent ne suffit pas à modéliser une jonction réelle entre sous-structures, dès que celle-ci a des dimensions telles qu'on peut définir des mobilités de transfert entre les points de sa surface.

Afin de rendre la méthode des mobilités énergétiques un outil performant d'analyse expérimentale, il semble aussi nécessaire d'étudier des expressions approchées pour des

mobilités linéiques et surfaciques, par bande de fréquences. Une comparaison avec les nombreuses "recettes" (bibliothèque de couplages) de la SEA ne peut être qu'utile.

### Application à l'étude de systèmes vibro-acoustiques

Les mobilités classiques mesurées "in situ" prennent en compte les couplages fluide-structure, donc les mobilités énergétiques aussi.

Cependant lorsqu'on applique la méthode des mobilités aux assemblages, on néglige systématiquement les contributions acoustiques, car on suppose que les mesures sur les pièces séparées et sur l'assemblage se font avec le même champ acoustique et que les facteurs de rayonnement respectifs ont peu changé après couplage.

La EMMA permet de prévoir quels points des sous-structures seront les plus affectés par le couplage et par les changements des autres sous-structures. À partir de là, il faut essayer d'estimer les répercussions sur le bruit rayonné après couplage. En effet, ayant calculé avec les mobilités énergétiques les puissances totales échangées par les différents sous-systèmes, on peut ensuite appliquer des relations globales comme celles de la SEA pour prévoir la puissance acoustique émise par la totalité ou par une partie de l'assemblage. Cependant une diminution globale du niveau vibratoire ne correspond pas forcément à une diminution du bruit rayonné, car les changements de niveau peuvent affecter surtout les parties les plus massives ou les moins rayonnantes de la structure.

Il serait donc intéressant d'avoir des relations entre des quantités locales vibratoires et des quantités locales acoustiques, moyennées en fréquence, surtout lorsque les structures sont fortement hétérogènes et les milieux acoustiques ne sont pas des champs diffus ou des champs libres.

Autrement dit, il faut étudier si la moyenne spatiale est indispensable pour avoir des relations vibro-acoustiques par bandes de fréquence. On suggère d'appliquer la démarche exposée dans ce travail à d'autres fonctions de transfert entre un signal A au point e et un signal B au point m, du type suivant:

$$H_{me} = \frac{\langle |\frac{\text{Interspectre}_{Bm Ae}}{\text{Autospectre}_{Ae Ae}}|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{\frac{\text{Interspectre}_{Be Ae}}{\text{Autospectre}_{Ae Ae}}\} \rangle}$$

### Études numériques et expérimentales

On a vu que les liaisons élastiques et dissipatives demandent une application particulière de l'EMMA. L'étude numérique d'autres types de liaisons permettra d'enrichir le savoir faire spécifique pour cette nouvelle méthode.

Des études paramétriques sur des structures plus complexes sont aussi souhaitables. Un indicateur de fiabilité de la méthode peut notamment être recalé et perfectionné, par des simulations sur différents systèmes.

Des études expérimentales, sur des structures complexes, ou en milieu bruité, sont enfin nécessaires pour mettre au point des démarches simplifiées de mise en oeuvre, différentes de celles des mobilités classiques.



# Annexe A

## Rappels concis de probabilités

On rappelle ici quelques notions de la théorie des probabilités, afin de définir plus proprement la notion d'indépendance, utilisée à plusieurs reprises dans le texte.

Un "évènement"  $E$ , observé  $n(E)$  fois au cours de  $N$  "épreuves"  $\xi$  (ou "réalisations") a une **probabilité**  $P(E)$  (réel positif) définie par:

$$P(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(E)}{N} = \sum_{k=1}^{n(E)} P(\xi_k) \quad (\text{A.1})$$

où  $P(\xi_k)$  est la probabilité élémentaire de la  $k$ -ième épreuve qui réalise  $E$ .

Soient deux évènements  $E1$  et  $E2$ , on note  $P(E1/E2)$  la "probabilité conditionnelle" de réaliser  $E1$  alors que  $E2$  est réalisé.

Deux évènements sont dits "**indépendants**"

si et seulement si  $P(E1/E2) = P(E1)$  et  $P(E2/E1) = P(E2)$

ou encore si et seulement si  $P(E1 \text{ et } E2) = P(E1)P(E2)$

L'application qui à une épreuve  $\xi$  associe un réel  $X(\xi)$ , est appelée *variable scalaire aléatoire* ("V.A."). Au réel  $X(\xi)$  on fait correspondre, un point  $A(\xi)$  de l'espace image  $D$  de celui des épreuves. Le point  $A(\xi)$  a donc une probabilité  $P(\xi)$  de représenter la V.A.

La fonction de répartition  $F$  (déterministe, positive) d'une V.A. est la probabilité de retrouver le point  $A(\xi)$  dans un sous-espace  $\Delta$  de  $D$ :

$$F(\Delta) = P\{A(\xi) \in \Delta\} \quad (\text{A.2})$$

si  $\Delta \rightarrow D$ , alors  $F(\Delta) \rightarrow 1$  La *densité de probabilité d'une V.A.* est la dérivée de sa fonction de répartition par rapport à ses arguments  $x_1, \dots, x_n$ :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \quad (\text{A.3})$$

telle que, pour deux réels  $a$  et  $b$ ,

$$P\{a \leq X(\xi) \leq b\} = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{A.4})$$

et normée par

$$P\{-\infty \leq X(\xi) \leq \infty\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (\text{A.5})$$

Pour une distribution gaussienne (ou "normale"), on a:

$$f(x) = \frac{\exp \frac{-x^2}{2\Sigma^2}}{\Sigma \sqrt{2\pi}} \quad (\text{A.6})$$

où  $\Sigma$  est l'écart type. On appelle *moment d'ordre q* la valeur moyenne de  $x^q$  pondéré par la densité de probabilité  $f(x)$ :

$$E[X^q(\xi)] = m_q = \int_{-\infty}^{\infty} x^q f(x) dx \quad (\text{A.7})$$

pour  $q=1$  on a l' "espérance mathématique" ou moyenne

pour  $q=2$  on a la moyenne quadratique.

De même on définit des moments centrés sur la moyenne:

$$E[(X(\xi) - m_1)^q] = \mu_q = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^q f(x) dx \quad (\text{A.8})$$

pour  $q=1$  c'est nul, pour  $q=2$  on a la "variance".

On appelle "moyennes mixtes" pour un couple aléatoire (de deux V.A.)

$$E[X^{q_1}(\xi)Y^{q_2}(\xi)] = m_q = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{q_1} y^{q_2} f(x, y) dx dy \quad (\text{A.9})$$

et "moments centrés"

$$E[(X(\xi) - m_x)^{q_1}(Y(\xi) - m_y)^{q_2}] = \mu_{xyq_1q_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^{q_1}(y - m_y)^{q_2} f(x, y) dx dy \quad (\text{A.10})$$

pour  $q_1 = q_2 = 1$  on a la "covariance" de  $x$  et  $y$ .

Deux V.A.  $X(\xi)$  et  $Y(\xi)$  sont indépendantes si les évènements associés à ces V.A. sont indépendants

$$P\{X(\xi) \leq x \text{ et } Y(\xi) \leq y\} = P\{X(\xi) \leq x\}P\{Y(\xi) \leq y\} \quad (\text{A.11})$$

ce qu'on écrit encore

$$F(x, y) = F(x)F(y) \quad (\text{A.12})$$

ou

$$f(x, y) = f(x)f(y) \quad (\text{A.13})$$

ou

$$m_{xy} = m_x m_y \quad (\text{A.14})$$

La covariance est alors nulle (la covariance nulle n'implique pas l'indépendance).

Si deux variables aléatoires réelles  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, et si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions quelconques, respectivement de  $x$  et de  $y$ , alors  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes et l'on a (voir [6], page 59):

$$E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)] \quad (\text{A.15})$$

Pour une combinaison linéaire de V.A. indépendantes  $Z(\xi) = aX(\xi) + bY(\xi)$ , on a des moyennes telles que:

$$m_z = am_x + bm_y \quad (\text{A.16})$$

et des variances telles que:

$$\mu_z = a\mu_x + b\mu_y \quad (\text{A.17})$$

Soit une réponse temporelle  $y(t, \xi)$  à une entrée  $x(t, \xi)$  sur un système de réponse impulsionnelle  $h(t)$ , on a la relation suivante entre les moyennes (où  $*$  désigne le produit de convolution):

$$m_y(t) = h(t) * m_x(t) \quad (\text{A.18})$$

## Annexe B

### Exercice de style: couplage en deux points

On va traiter ici analytiquement le couplage rigide de deux structures  $S^I$  et  $S^{II}$  en deux points  $c1$  et  $c2$ , de deux façons équivalentes:

- le couplage externe en deux points (classique)
- le couplage externe en un point, suivi du couplage interne en un point.

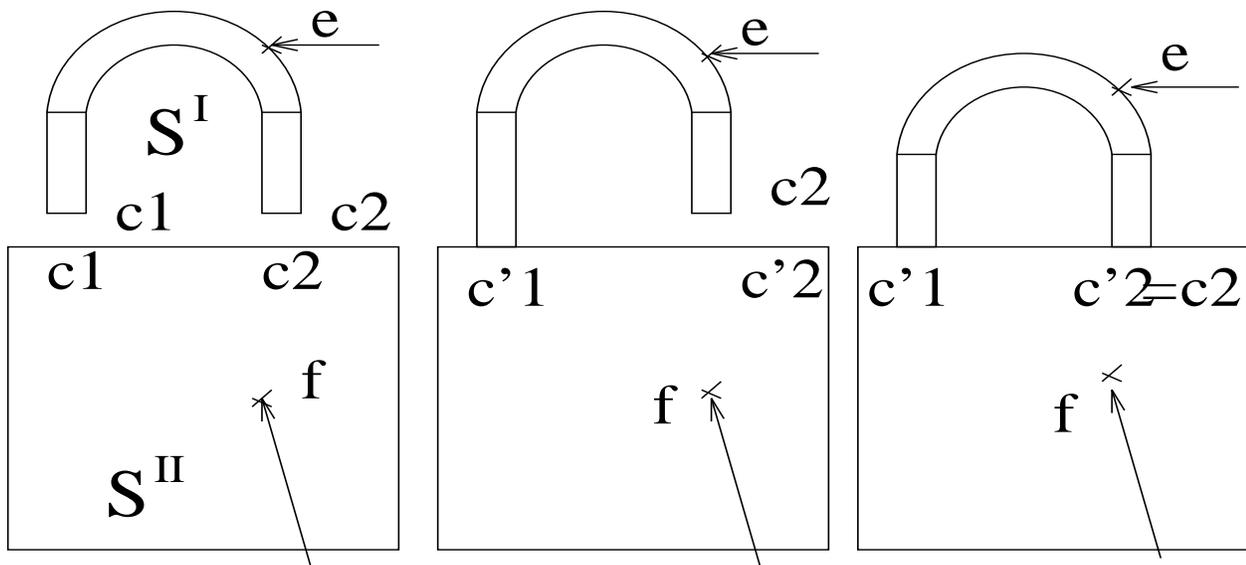


FIG. B.1 - Couplage en deux points, ou en un point à la fois

#### Couplage externe en un point + Couplage interne en un point

Commençons par les couplage externe classique en un point  $c1$ :

conformément à 2.3, on applique  $\widehat{V}_{c1}^I = \widehat{V}_{c1}^{II}$  et  $\widehat{F}_{c1}^I = -\widehat{F}_{c1}^{II}$  aux vitesses après couplage (coiffées d'un *circonflexe*), sur  $S^I$

$$\widehat{V}_{c1}^I = Y_{c1e}^I \widehat{F}_e + Y_{c1}^I \widehat{F}_{c1}^I \quad (B.1)$$

et sur  $S^{II}$

$$\widehat{V}_{c1}^{II} = Y_{c1f}^{II} \widehat{F}_f^{II} + Y_{c1e}^{II} \widehat{F}_e^{II} \quad (\text{B.2})$$

on obtient directement l'effort de couplage:

$$\widehat{F}_{c1}^I = \frac{(Y_{c1f}^{II} \widehat{F}_f^{II} - Y_{c1e}^I \widehat{F}_e^I)}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})} \quad (\text{B.3})$$

et la vitesse en tout point m après couplage:

$$\widehat{V}_m^I = Y_{me}^I \widehat{F}_e^I + Y_{mc1}^I \frac{(Y_{c1f}^{II} \widehat{F}_f^{II} - Y_{c1e}^I \widehat{F}_e^I)}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})} \quad (\text{B.4})$$

ainsi que les mobilités après ce premier couplage:

$$\widehat{Y}_{me}^I = Y_{me}^I - \frac{Y_{mc1}^I Y_{c1e}^I}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})} \quad (\text{B.5})$$

sur  $S^I$ , de même pour les points de  $S^{II}$  et pour les croisements.

Aux points  $c2$  et  $c'2$  on obtient par exemple

$$\widehat{Y}_{c2}^I = Y_{c2}^I - \frac{Y_{c2c1}^I Y_{c1c2}^I}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})} \quad (\text{B.6})$$

$$\widehat{Y}_{c'2}^{II} = Y_{c'2}^{II} - \frac{Y_{c2c1}^{II} Y_{c1c'2}^{II}}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})} \quad (\text{B.7})$$

et

$$Y_{c2c'2} = \frac{Y_{c2c1}^I Y_{c1c'2}^{II}}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})} \quad (\text{B.8})$$

Couplons ensuite rigidement les points  $c2$  et  $c'2$  du premier assemblage; après couplage les vitesses en ces points (coiffées d'un *tilde*) sont égales et données par:

$$\widetilde{V}_{c2} = \widehat{Y}_{c2e} \widetilde{F}_e + \widehat{Y}_{c2f} \widetilde{F}_f + \widehat{Y}_{c2} \widetilde{F}_{c2} + \widehat{Y}_{c'2} \widetilde{F}_{c'2} \quad (\text{B.9})$$

et

$$\widetilde{V}_{c'2} = \widehat{Y}_{c'2e} \widetilde{F}_e + \widehat{Y}_{c'2f} \widetilde{F}_f + \widehat{Y}_{c'2c2} \widetilde{F}_{c2} + \widehat{Y}_{c'2} \widetilde{F}_{c'2} \quad (\text{B.10})$$

Avec  $\widetilde{F}_{c'2} = -\widetilde{F}_{c2}$  on obtient donc

$$\widetilde{F}_{c2} = \frac{(\widehat{Y}_{c'2e} \widetilde{F}_e + \widehat{Y}_{c'2f} \widetilde{F}_f) - (\widehat{Y}_{c2e} \widetilde{F}_e + \widehat{Y}_{c2f} \widetilde{F}_f)}{\widehat{Y}_{c'2} + \widehat{Y}_{c2} - 2\widehat{Y}_{c'2c2}} \quad (\text{B.11})$$

et des vitesses après couplage en tout point m sont données par

$$\widetilde{V}_m = \widehat{Y}_{me} \widetilde{F}_e + \widehat{Y}_{mf} \widetilde{F}_f + (\widehat{Y}_{mc2} - \widehat{Y}_{mc'2}) \frac{(\widehat{Y}_{c'2e} \widetilde{F}_e + \widehat{Y}_{c'2f} \widetilde{F}_f) - (\widehat{Y}_{c2e} \widetilde{F}_e + \widehat{Y}_{c2f} \widetilde{F}_f)}{\widehat{Y}_{c'2} + \widehat{Y}_{c2} - 2\widehat{Y}_{c'2c2}} \quad (\text{B.12})$$

ce qui, après développement des termes  $\widehat{X}$ , donne:

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_m^I &= Y_{me}^I \widetilde{F}_e^I + \\ &+ Y_{mc1}^I \frac{(Y_{c2}^{II} + Y_{c2}^I)(Y_{c1f}^{II} \widetilde{F}_f^{II} - Y_{c1e}^I \widetilde{F}_e^I) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})(Y_{c2f}^{II} \widetilde{F}_f^{II} - Y_{c2e}^I \widetilde{F}_e^I)}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})(Y_{c2}^I + Y_{c2}^{II}) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})^2} \\ &+ Y_{mc2}^I \frac{(Y_{c1}^{II} + Y_{c1}^I)(Y_{c2f}^{II} \widetilde{F}_f^{II} - Y_{c2e}^I \widetilde{F}_e^I) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})(Y_{c1f}^{II} \widetilde{F}_f^{II} - Y_{c1e}^I \widetilde{F}_e^I)}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})(Y_{c2}^I + Y_{c2}^{II}) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})^2} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

## Couplage externe en deux points

Les vitesses après couplage aux deux points couplés sont données par:

$$\widetilde{V}_{c1} = Y_{c1e}^I \widetilde{F}_e^I + Y_{c1c2}^I \widetilde{F}_{c2}^I + Y_{c1}^I \widetilde{F}_{c1}^I \quad (\text{B.14})$$

et

$$\widetilde{V}_{c2} = Y_{c2e}^I \widetilde{F}_e^I + Y_{c2c1}^I \widetilde{F}_{c1}^I + Y_{c2}^I \widetilde{F}_{c2}^I \quad (\text{B.15})$$

sur  $S^I$ , et elles sont égales à celles sur  $S^{II}$ , données par:

$$\widetilde{V}_{c'1} = Y_{c1f}^{II} \widetilde{F}_f^{II} + Y_{c1c2}^{II} \widetilde{F}_{c2}^{II} + Y_{c1}^{II} \widetilde{F}_{c1}^{II} \quad (\text{B.16})$$

et

$$\widetilde{V}_{c'2} = Y_{c2f}^{II} \widetilde{F}_f^{II} + Y_{c2c1}^{II} \widetilde{F}_{c1}^{II} + Y_{c2}^{II} \widetilde{F}_{c2}^{II} \quad (\text{B.17})$$

Avec les relations de couplage rigide

$$\widetilde{F}_{c2}^I = -\widetilde{F}_{c2}^{II} \text{ et } \widetilde{F}_{c1}^I = -\widetilde{F}_{c1}^{II} \text{ on tire}$$

$$\widetilde{F}_{c1}^I = \frac{(Y_{c2}^{II} + Y_{c2}^I)(Y_{c1f}^{II} \widetilde{F}_f^{II} - Y_{c1e}^I \widetilde{F}_e^I) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})(Y_{c2f}^{II} \widetilde{F}_f^{II} - Y_{c2e}^I \widetilde{F}_e^I)}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})(Y_{c2}^I + Y_{c2}^{II}) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})^2} \quad (\text{B.18})$$

et

$$\widetilde{F}_{c2}^I = \frac{(Y_{c1}^{II} + Y_{c1}^I)(Y_{c2f}^{II} \widetilde{F}_f^{II} - Y_{c2e}^I \widetilde{F}_e^I) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})(Y_{c1f}^{II} \widetilde{F}_f^{II} - Y_{c1e}^I \widetilde{F}_e^I)}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})(Y_{c2}^I + Y_{c2}^{II}) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})^2} \quad (\text{B.19})$$

d'où les vitesses en tout point m après couplage:

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_m^I &= Y_{me}^I \widetilde{F}_e^I + \\ &+ Y_{mc1}^I \frac{(Y_{c2}^{II} + Y_{c2}^I)(Y_{c1f}^{II} \widetilde{F}_f^{II} - Y_{c1e}^I \widetilde{F}_e^I) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})(Y_{c2f}^{II} \widetilde{F}_f^{II} - Y_{c2e}^I \widetilde{F}_e^I)}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})(Y_{c2}^I + Y_{c2}^{II}) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})^2} \\ &+ Y_{mc2}^I \frac{(Y_{c1}^{II} + Y_{c1}^I)(Y_{c2f}^{II} \widetilde{F}_f^{II} - Y_{c2e}^I \widetilde{F}_e^I) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})(Y_{c1f}^{II} \widetilde{F}_f^{II} - Y_{c1e}^I \widetilde{F}_e^I)}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})(Y_{c2}^I + Y_{c2}^{II}) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})^2} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

On retrouve donc bien la même expression qu'au paragraphe précédent.

On pourrait aussi comparer les mobilités après couplage obtenues par les deux voies, en fonction des mobilités des sous-systèmes isolés, avant couplage; elles s'obtiennent simplement en considérant une seule excitation à la fois et en divisant les deux membres de l'équation B.20 par cette excitation; par exemple pour deux points m et e (même confondus) non couplés de  $S^I$  on obtient:

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_{me}^I &= Y_{me}^I + \\ &+ Y_{mc1}^I \frac{-(Y_{c2}^{II} + Y_{c2}^I)Y_{c1e}^I + (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})Y_{c2e}^I}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})(Y_{c2}^I + Y_{c2}^{II}) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})^2} \\ &+ Y_{mc2}^I \frac{-(Y_{c1}^{II} + Y_{c1}^I)Y_{c2e}^I + (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})Y_{c1e}^I}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})(Y_{c2}^I + Y_{c2}^{II}) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})^2} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Cette expression est prédictive puisqu'elle ne dépend pas des sources utilisées.



# Annexe C

## Compléments analytiques

On a reporté ici en annexe des développements analytiques qui auraient trop alourdi l'exposition et embrouillé son cours. Ils n'en sont pas moins importants et d'un intérêt pratique pour la mise en oeuvre des mobilités énergétiques.

Ils concernent

- les couplages internes par mobilités énergétiques,
- l'étude énergétique du couplage en deux points
- l'étude du couplage d'une structure avec une masse ponctuelle
- des expressions simplifiées qui ne nécessitent pas d'inversion,
- des expressions des facteurs de perte par couplage de la SEA en fonction de quantités intrinsèques, moyennées par bandes de fréquences.

### C.1 Expressions énergétiques des couplages internes

Les relations de couplage sont les mêmes que pour des couplages externes: pour chaque paire de points couplés rigidement (c;c'), on écrit que les "miels" après couplage sont égaux et que les puissances rentrant de part et d'autre sont opposées:

$$\langle |\widetilde{V}_c|^2 \rangle = \langle |\widetilde{V}_{c'}|^2 \rangle \quad (\text{C.1})$$

et

$$\widetilde{P}_c = \langle \text{Re}\{\widetilde{F}_c \widetilde{V}_c^*\} \rangle = -\widetilde{P}_{c'} \quad (\text{C.2})$$

en utilisant l'additivité énergétique on exprime les "miels" aux points c et c':

$$\langle |\widetilde{V}_c|^2 \rangle \approx \sum_{e=1}^{N_e} H_{ce} \widetilde{P}_e + \sum_{k=1}^{N_c} (H_{ck} \widetilde{P}_k + H_{c'k'} \widetilde{P}_{k'}) \quad (\text{C.3})$$

et

$$\langle |\widetilde{V}_{c'}|^2 \rangle \approx \sum_{e=1}^{N_e} H_{c'e} \widetilde{P}_e + \sum_{k=1}^{N_c} (H_{c'k} \widetilde{P}_k + H_{c'k'} \widetilde{P}_{k'}) \quad (\text{C.4})$$

d'où les puissances actives moyennes échangées (sous leur forme matricielle):

$$\{\widetilde{P}_k\} \approx [H_{ck} + H_{c'k'} - H_{c'k} - H_{ck'}]^{-1} \{ [H_{c'e} - H_{ce}] \{ \widetilde{P}_e \} \} \quad (\text{C.5})$$

et les "miels" après couplage:

$$\langle |\widetilde{V}_m|^2 \rangle \approx \sum_{e=1}^{N_e} H_{me} \widetilde{P}_e + \sum_{k=1}^{N_c} (H_{mk} - H_{mk'}) \widetilde{P}_k \quad (\text{C.6})$$

Ici encore, on va se comparer aux puissances actives moyennes échangées calculées exactement, pour une seule paire de points couplés (c,c') et un seul point d'excitation e :

$$\widetilde{P}_c = \langle \text{Re} \left\{ \left| \frac{Y_{c'e} - Y_{ce}}{Y_c + Y_{c'} - 2Y_{c'c}} \widetilde{F}_e \right|^2 (Y_c - Y_{c'c})^* + Y_{ce}^* \frac{Y_{c'e} - Y_{ce}}{Y_c + Y_{c'} - 2Y_{c'c}} |\widetilde{F}_e|^2 \right\} \rangle \quad (\text{C.7})$$

en négligeant les moyennes des termes oscillants devant celles des termes toujours positifs on obtient (pour e différent de c ou de c')

$$\widetilde{P}_c \approx \frac{\langle |Y_{c'e}|^2 \rangle + \langle |Y_{ce}|^2 \rangle}{\langle |Y_c + Y_{c'} - 2Y_{c'c}|^2 \rangle} \langle |\widetilde{F}_e|^2 \rangle \langle \text{Re}\{Y_c\} \rangle - \langle |Y_{ce}|^2 \rangle \frac{\langle \text{Re}\{Y_c + Y_{c'}\} \rangle}{\langle |Y_c + Y_{c'} - 2Y_{c'c}|^2 \rangle} \langle |\widetilde{F}_e|^2 \rangle \quad (\text{C.8})$$

soit

$$\widetilde{P}_c \approx \frac{\langle |Y_{c'e}|^2 \rangle \langle \text{Re}\{Y_c\} \rangle - \langle |Y_{ce}|^2 \rangle \langle \text{Re}\{Y_{c'}\} \rangle}{\langle |Y_c + Y_{c'} - 2Y_{c'c}|^2 \rangle} \langle |\widetilde{F}_e|^2 \rangle \quad (\text{C.9})$$

soit encore, en mettant  $\langle \text{Re}\{Y_e\} \rangle$  en facteur, de façon à faire apparaître les mobilités énergétiques et la puissance active moyenne  $P_e$  injectée au point e,

$$\widetilde{P}_c \approx \frac{H_{c'e} \langle \text{Re}\{Y_c\} \rangle - H_{ce} \langle \text{Re}\{Y_{c'}\} \rangle}{\langle |Y_c|^2 \rangle + \langle |Y_{c'}|^2 \rangle + 2 \langle \text{Re}\{Y_c\} \rangle \langle \text{Re}\{Y_{c'}\} \rangle + 4 \langle |Y_{c'c}|^2 \rangle} \widetilde{P}_e \quad (\text{C.10})$$

enfin, comme  $4 \langle |Y_{c'c}|^2 \rangle \ll \langle |Y_{c'}|^2 \rangle$  et  $4 \langle |Y_{c'c}|^2 \rangle \ll \langle |Y_c|^2 \rangle$  le calcul exact (après les approximations annoncées) donne:

$$\widetilde{P}_c \approx \frac{H_{c'e} \frac{\langle \text{Re}\{Y_c\} \rangle}{\langle \text{Re}\{Y_{c'}\} \rangle} - H_{ce}}{H_c \frac{\langle \text{Re}\{Y_c\} \rangle}{\langle \text{Re}\{Y_{c'}\} \rangle} + H_{c'} + 2 \langle \text{Re}\{Y_c\} \rangle} \widetilde{P}_e \quad (\text{C.11})$$

ce qu'il faut identifier à:

$$\widetilde{P}_k \approx \frac{H_{c'e} \alpha_{c'} - H_{ce} \alpha_c}{H_c + H_{c'} - H_{c'c} - H_{cc'}} \widetilde{P}_e \quad (\text{C.12})$$

ou plus simplement à

$$\widetilde{P}_k \approx \frac{H_{c'e} \alpha_{c'} - H_{ce} \alpha_c}{H_c + H_{c'}} \widetilde{P}_e \quad (\text{C.13})$$

on retrouve donc des facteurs de connexion identiques à ceux dérivés pour les couplages externes:

$$\alpha_c = \frac{H_c + H_{c'}}{H_c \frac{\langle \text{Re}\{Y_c\} \rangle}{\langle \text{Re}\{Y_{c'}\} \rangle} + H_{c'} + 2 \langle \text{Re}\{Y_c\} \rangle} \quad (\text{C.14})$$

et

$$\alpha_{c'} = \frac{\langle \text{Re}\{Y_c\} \rangle}{\langle \text{Re}\{Y_{c'}\} \rangle} \frac{H_c + H_{c'}}{H_c \frac{\langle \text{Re}\{Y_c\} \rangle}{\langle \text{Re}\{Y_{c'}\} \rangle} + H_{c'} + 2 \langle \text{Re}\{Y_c\} \rangle} \quad (\text{C.15})$$

De même, on trouverait des mobilités énergétiques après couplage sous la forme approchée suivante:

$$\widetilde{H}_{me} \approx H_{me} + \frac{(H_{mc} - H_{mc'})(H_{c'e} \alpha_{c'} - H_{ce} \alpha_c)}{H_c + H_{c'}} \quad (\text{C.16})$$

Ce qui, pour la mobilité d'entrée au point couplé (m=e=c) donne

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_c &\approx H_c + \frac{(H_c - H_{cc'})(H_{c'c} \alpha_{c'} - H_c)}{H_c + H_{c'}} \\ &\approx \frac{H_c H_{c'}}{H_c + H_{c'}} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

(donc, énergétiquement, le couplage interne est équivalent au couplage externe en ce qui concerne ses effets au point couplé).

Les "facteurs de connexion" étant valables pour le couplage interne et pour le couplage externe, leur usage doit être généralisable aux couplages en N points (puisque ceux-ci peuvent se mettre toujours sous la forme d'un premier couplage externe en un point suivi de N-1 couplages internes successifs, en un point).

On va tester cette démarche dans le paragraphe suivant.

## C.2 Étude énergétique du couplage en deux points

Considérons deux sous-structures qu'on va coupler rigidement en deux points, appelés b et c sur  $S^I$  et b' et c' sur  $S^{II}$ .

On a vu au B qu'il est équivalent d'écrire le couplage externe simultané aux deux points b et c de deux sous-structures, ou d'écrire d'abord le couplage externe en un point, disons en b1=b2, puis le couplage, interne à ce premier assemblage, aux points c1 et c2.

Les deux types de couplage (interne et externe) doivent donner des termes symétriques pour les deux points de couplage, puisqu'on peut coupler indifféremment d'abord un point ou l'autre (c'est bien le cas pour les mobilités classiques).

Afin de résoudre le problème de façon indépendante de l'excitation, on va toujours exprimer les mobilités énergétiques après couplage, en fonction des mobilités des sous-structures avant couplage.

Pour le couplage externe en deux points, écrit exactement en termes de mobilités classiques, on va essayer d'approcher le résultat uniquement en fonction de quantités moyennées en fréquence (mobilités énergétiques et parties réelles des mobilités).

Pour la deuxième façon de procéder on va utiliser les formules énergétiques approchées du couplage externe, puis celle établie au C.1 pour un point de couplage interne, ce qui revient à reprendre les expressions classiques, en substituant des H aux Y.

Si par les deux voies on obtient la même expression énergétique, on pourra penser que les mêmes "facteurs de connexion" sont utilisables pour les couplages en N points.

### Expressions exactes

On va reprendre l'expression des mobilités classiques entre un point m et un point e de  $S^I$ , après un couplage rigide en deux points c1 et c2.

Entre un point m et un point e sur  $S^I$ , on a la mobilité après couplage suivante:

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_{me}^I &= Y_{me}^I + & (C.18) \\ &+ Y_{mc1}^I \frac{-(Y_{c2}^{II} + Y_{c2}^I)Y_{c1e}^I + (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})Y_{c2e}^I}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})(Y_{c2}^I + Y_{c2}^{II}) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})^2} \\ &+ Y_{mc2}^I \frac{-(Y_{c1}^{II} + Y_{c1}^I)Y_{c2e}^I + (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})Y_{c1e}^I}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})(Y_{c2}^I + Y_{c2}^{II}) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})^2} \end{aligned}$$

Entre un point m sur  $S^I$  et un point e sur  $S^{II}$ , on a:

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_{me} &= & (C.19) \\ &+ Y_{mc1}^I \frac{(Y_{c2}^{II} + Y_{c2}^I)Y_{c1e}^{II} - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})Y_{c2e}^{II}}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})(Y_{c2}^I + Y_{c2}^{II}) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})^2} \\ &+ Y_{mc2}^I \frac{(Y_{c1}^{II} + Y_{c1}^I)Y_{c2e}^{II} - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})Y_{c1e}^{II}}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})(Y_{c2}^I + Y_{c2}^{II}) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})^2} \end{aligned}$$

On peut alors former pour ce deuxième cas, par exemple, l'expression exacte de la mobilité énergétique correspondante

$$\widetilde{H}_{me} = \frac{\langle |\widetilde{Y}_{me}|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{\widetilde{Y}_e\} \rangle}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{me} = \frac{1}{\langle \text{Re}\{\widetilde{Y}_e\} \rangle} & \langle |Y_{mc1}^I \frac{(Y_{c2}^{II} + Y_{c2}^I)Y_{c1e}^{II} - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})Y_{c2e}^{II}}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})(Y_{c2}^I + Y_{c2}^{II}) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})^2} \\ & + Y_{mc2}^I \frac{(Y_{c1}^{II} + Y_{c1}^I)Y_{c2e}^{II} - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})Y_{c1e}^{II}}{(Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II})(Y_{c2}^I + Y_{c2}^{II}) - (Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II})^2} |^2 \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

et on va essayer de la simplifier.

### Approximation des expressions exactes

On considère que le point e n'est pas le point de couplage, et on remplace  $\langle \text{Re}\{\widetilde{Y}_e\} \rangle$  par  $\langle \text{Re}\{Y_e\} \rangle$ .

On développe alors le module carré du numérateur en somme de modules carrés et de termes croisés. On remplace la moyenne fréquentielle de la somme de rapports par la somme des moyennes de ces rapports et on néglige les moyennes des rapports dont le numérateur comporte des termes oscillants comme  $\text{Re}\{Y_{c2e}Y_{c1e}^*\}$  devant les moyennes des rapports de termes carrés comme  $|Y_{c1e}|^2$ . On néglige aussi au dénominateur  $\langle |Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II}|^4 \rangle$  devant  $\langle |Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II}|^2 \rangle \langle |Y_{c2}^I + Y_{c2}^{II}|^2 \rangle$ .

Ces simplifications supposent que les points de couplage sont assez éloignés entre eux et qu'il n'y a pas de symétrie dans le système telle que  $Y_{c2e} = Y_{c1e}$ .

Il reste alors l'expression:

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{me} \approx & \frac{1}{\langle \text{Re}\{\widetilde{Y}_e\} \rangle} \left\langle \frac{|Y_{mc1}^I|^2[|Y_{c2}^{II} + Y_{c2}^I|^2|Y_{c1e}^{II}|^2 + |Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II}|^2|Y_{c2e}^{II}|^2]}{|Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II}|^2|Y_{c2}^I + Y_{c2}^{II}|^2} \right\rangle \\ & + \frac{1}{\langle \text{Re}\{\widetilde{Y}_e\} \rangle} \left\langle \frac{|Y_{mc2}^I|^2[|Y_{c1}^{II} + Y_{c1}^I|^2|Y_{c2e}^{II}|^2 + |Y_{c1c2}^I + Y_{c1c2}^{II}|^2|Y_{c1e}^{II}|^2]}{|Y_{c1}^I + Y_{c1}^{II}|^2|Y_{c2}^I + Y_{c2}^{II}|^2} \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

En supposant que les numérateurs et les dénominateurs sont statistiquement indépendants, on fait les remplacements suivants:

$$\langle \frac{a}{b} \rangle \approx \langle a \rangle \langle \frac{1}{b} \rangle.$$

Il faut alors supposer qu'on est en haute fréquences, avec des mobilités d'entrée lissées, on remplace alors la moyenne des inverses par l'inverse de la moyenne et on obtient:

$$\langle \frac{a}{b} \rangle \approx \frac{\langle a \rangle}{\langle b \rangle}.$$

Entre un point m sur  $S^I$  et un point e sur  $S^{II}$ , on obtient alors des mobilités énergétiques de la forme suivante:

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{me} \approx & \frac{H_{mc1}^I k_{c1} [DEN_{c2} H_{c1e}^{II} + (H_{c1c2}^I k_{c2} + H_{c1c2}^{II}) H_{c2e}^{II}]}{DEN_{c1} DEN_{c2}} \\ & + \frac{H_{mc2}^I k_{c2} [DEN_{c1} H_{c2e}^{II} + (H_{c2c1}^I k_{c1} + H_{c2c1}^{II}) H_{c1e}^{II}]}{DEN_{c1} DEN_{c2}} \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

ou encore

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{me} &\approx \frac{H_{mc1}^I H_{c1e}^{II} k_{c1}}{DEN_{c1}} + \frac{H_{mc2}^I H_{c2e}^{II} k_{c2}}{DEN_{c2}} \\ &+ \frac{(H_{c1c2}^I k_{c2} + H_{c1c2}^{II}) H_{mc1}^I H_{c2e}^{II} k_{c1}}{DEN_{c1} DEN_{c2}} + \frac{(H_{c2c1}^I k_{c1} + H_{c2c1}^{II}) H_{mc2}^I H_{c1e}^{II} k_{c2}}{DEN_{c1} DEN_{c2}} \end{aligned} \quad (C.23)$$

$$\text{où } DEN_c = H_c^I k_c + H_c^{II} + 2 \langle Re\{Y_c^I\} \rangle \text{ et } k_c = \frac{\langle Re\{Y_c^I\} \rangle}{\langle Re\{Y_c^{II}\} \rangle}$$

en utilisant les facteurs de connexion

$$\alpha_c^I = \frac{H_c^I + H_c^{II}}{DEN_c} \text{ et } \alpha_c^{II} = \frac{k_c(H_c^I + H_c^{II})}{DEN_c}$$

on peut enfin écrire les mobilités énergétiques après couplage sous la forme:

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{me} &\approx \frac{H_{mc1}^I H_{c1e}^{II} \alpha_{c1}^{II}}{H_{c1}^I + H_{c1}^{II}} + \frac{H_{mc2}^I H_{c2e}^{II} \alpha_{c2}^{II}}{H_{c2}^I + H_{c2}^{II}} \\ &+ \frac{H_{c1c2}^I \alpha_{c1}^I H_{mc1}^I H_{c2e}^{II} \alpha_{c2}^{II}}{(H_{c1}^I + H_{c1}^{II})(H_{c2}^I + H_{c2}^{II})} + \frac{H_{c1c2}^{II} \alpha_{c1}^{II} H_{mc1}^I H_{c2e}^{II} \alpha_{c2}^{II}}{(H_{c1}^I + H_{c1}^{II})k_{c2}(H_{c2}^I + H_{c2}^{II})} \\ &+ \frac{H_{c2c1}^I \alpha_{c2}^I H_{mc2}^I H_{c1e}^{II} \alpha_{c1}^{II}}{(H_{c1}^I + H_{c1}^{II})(H_{c2}^I + H_{c2}^{II})} + \frac{H_{c2c1}^{II} \alpha_{c2}^{II} H_{mc2}^I H_{c1e}^{II} \alpha_{c1}^{II}}{k_{c1}(H_{c1}^I + H_{c1}^{II})(H_{c2}^I + H_{c2}^{II})} \end{aligned} \quad (C.24)$$

avec deux premiers termes d'autant plus grands devant les autres que les différents points considérés sont éloignés.

Ces mobilités énergétiques ont aussi des termes symétriques en c1 et c2.

## Deux couplages externes par mobilités énergétiques

Si on applique la méthode des mobilités énergétiques au couplage externe en deux points, on trouve une expression formellement identique à celle des mobilités classiques (C.19):

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{me} &\approx \\ &H_{mc1}^I \frac{(H_{c2}^{II} + H_{c2}^I) H_{c1e}^{II} \alpha_{c1}^{II} - (H_{c1c2}^I \alpha_{c1}^I + H_{c1c2}^{II} \alpha_{c1}^{II}) H_{c2e}^{II} \alpha_{c2}^{II}}{(H_{c1}^I + H_{c1}^{II})(H_{c2}^I + H_{c2}^{II}) - (H_{c1c2}^I \alpha_{c1}^I + H_{c1c2}^{II} \alpha_{c1}^{II})^2} \\ &+ H_{mc2}^I \frac{(H_{c1}^{II} + H_{c1}^I) H_{c2e}^{II} \alpha_{c2}^{II} - (H_{c2c1}^I + H_{c2c1}^{II} k_{c2}) \alpha_{c2}^I H_{c1e}^{II} \alpha_{c1}^{II}}{(H_{c1}^I + H_{c1}^{II})(H_{c2}^I + H_{c2}^{II}) - (H_{c2c1}^I \alpha_{c2}^I + H_{c2c1}^{II} \alpha_{c2}^{II})^2} \end{aligned} \quad (C.25)$$

ce qui peut encore se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{me} &\approx \frac{H_{mc1}^I H_{c1e}^{II} \alpha_{c1}^{II}}{H_{c1}^I + H_{c1}^{II}} + \frac{H_{mc2}^I H_{c2e}^{II} \alpha_{c2}^{II}}{H_{c2}^I + H_{c2}^{II}} \\ &- H_{mc1}^I \frac{H_{mc1}^I (H_{c1c2}^I \alpha_{c1}^I + H_{c1c2}^{II} \alpha_{c1}^{II}) H_{c2e}^{II} \alpha_{c2}^{II}}{(H_{c1}^I + H_{c1}^{II})(H_{c2}^I + H_{c2}^{II})} - \frac{H_{mc2}^I (H_{c2c1}^I + H_{c2c1}^{II} k_{c2}) \alpha_{c2}^I H_{c1e}^{II} \alpha_{c1}^{II}}{(H_{c1}^I + H_{c1}^{II})(H_{c2}^I + H_{c2}^{II})} \end{aligned} \quad (C.26)$$

où les deux premiers termes sont d'autant plus grands devant les autres, que les points considérés sont éloignés entre eux.

### Un couplages externe suivi d'un couplage interne

Si on applique la méthode des mobilités énergétiques d'abord au couplage externe au point c1 de  $S^I$  et c1' de  $S^{II}$ , on trouve (cf.3.43):

$$\widetilde{H}_{me} \approx \frac{H_{mc1}^I H_{c1e}^{II} \alpha_{c1}^{II}}{H_{c1}^I + H_{c1}^{II}} \quad (C.27)$$

Si on l'applique ensuite au couplage interne en c2=c2', on trouve (cf C.16):

$$\widetilde{\widetilde{H}}_{me} \approx \widetilde{H}_{me} + \frac{(\widetilde{H}_{mc2}^I - \widetilde{H}_{mc2'}^I)(\widetilde{H}_{c2'e}^{II} \alpha_{c2'}^{II} - \widetilde{H}_{c2e}^{II} \alpha_{c2}^{II})}{\widetilde{H}_{c2} + \widetilde{H}_{c2'}} \quad (C.28)$$

Dans cette dernière expression on va négliger les termes de transfert interstructure devant ceux sur une même sous-structure  $\widetilde{H}_{mc2'}$  devant  $\widetilde{H}_{mc2}^I$  et  $\widetilde{H}_{c2e}^{II} \alpha_{c2}^{II}$  devant  $\widetilde{H}_{c2'e}^{II} \alpha_{c2'}^{II}$  il reste donc:

$$\widetilde{\widetilde{H}}_{me} \approx \widetilde{H}_{me} + \frac{\widetilde{H}_{mc2}^I \widetilde{H}_{c2'e}^{II} \alpha_{c2'}^{II}}{\widetilde{H}_{c2} + \widetilde{H}_{c2'}} \quad (C.29)$$

en supposant que le couplage interne a peu affecté les mobilités d'entrées des points non couplés, on a  $\widetilde{H}_{c2} \approx H_{c2}^I$  et  $\widetilde{H}_{c2'} \approx H_{c2}^{II}$ , on peut alors écrire (sans les '~'):

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{H}}_{me} &\approx \frac{H_{mc1}^I H_{c1e}^{II} \alpha_{c1}^{II}}{H_{c1}^I + H_{c1}^{II}} \\ &+ \left( \frac{H_{mc2}^I}{H_{c2}^I + H_{c2}^{II}} - \frac{H_{mc1}^I H_{c1c2}^I \alpha_{c1}^I}{(H_{c2}^I + H_{c2}^{II})(H_{c1}^I + H_{c1}^{II})} \right) (H_{c2e}^{II} - \frac{H_{c2c1}^{II} H_{c1e}^{II} \alpha_{c1}^{II}}{H_{c1}^I + H_{c1}^{II}}) \alpha_{c2}^{II} \end{aligned} \quad (C.30)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{H}}_{me} &\approx \frac{H_{mc1}^I H_{c1e}^{II} \alpha_{c1}^{II}}{H_{c1}^I + H_{c1}^{II}} + \frac{H_{mc2}^I H_{c2e}^{II} \alpha_{c2}^{II}}{H_{c2}^I + H_{c2}^{II}} \\ &- \frac{H_{c2e}^{II} \alpha_{c2}^{II} H_{mc1}^I H_{c1c2}^I \alpha_{c1}^I}{(H_{c2}^I + H_{c2}^{II})(H_{c1}^I + H_{c1}^{II})^2} + \frac{H_{mc1}^I H_{c1c2}^I \alpha_{c1}^I H_{c2c1}^{II} \alpha_{c2}^{II} H_{c1e}^{II} \alpha_{c1}^{II}}{(H_{c2}^I + H_{c2}^{II})(H_{c1}^I + H_{c1}^{II})^2} - \frac{H_{mc2}^I H_{c2c1}^{II} \alpha_{c2}^{II} H_{c1e}^{II} \alpha_{c1}^{II}}{(H_{c2}^I + H_{c2}^{II})(H_{c1}^I + H_{c1}^{II})} \end{aligned} \quad (C.31)$$

dans cette dernière expression les deux premiers termes sont aussi d'autant plus grands devant les autres que les différents points sont éloignés les uns des autres.

Pour que les trois expressions C.24, C.26 et C.31 donnent des résultats voisins il suffit de les considérer réduites à leurs deux premiers termes:

$$\widetilde{\widetilde{H}}_{me} \approx \frac{H_{mc1}^I H_{c1e}^{II} \alpha_{c1}^{II}}{H_{c1}^I + H_{c1}^{II}} + \frac{H_{mc2}^I H_{c2e}^{II} \alpha_{c2}^{II}}{H_{c2}^I + H_{c2}^{II}} \quad (C.32)$$

où tous les termes en c1 sont dans un quotient et les termes en c2 dans l'autre.

### Remarque importante

Chacun de ces deux quotients représente le résultat d'un couplage externe au point c correspondant.

Contrairement aux mobilité classiques, pour calculer les mobilités énergétiques après couplage, on peut donc considérer les points de couplage un par un et sommer simplement leurs effets. Ceci revient à négliger les contributions croisées des puissances échangées aux autres points de couplage.

### C.3 Etude du couplage avec une masse ponctuelle

On s'intéresse ici au couplage rigide non dissipatif au point c d'une structure quelconque, de mobilité  $Y_c$ , avec une masse ponctuelle de mobilité  $Y_m$ .

La mobilité après couplage s'écrit :

$$\widetilde{Y}_c = \frac{Y_c Y_m}{Y_c + Y_m} = \frac{Y_m}{1 + \frac{Y_m}{Y_c}}$$

Pour une structure mince, à partir d'une certaine fréquence on pourra écrire

$$\widetilde{Y}_c \approx Y_m \left(1 - \frac{Y_m}{Y_c}\right)$$

La mobilité énergétique d'entrée au point c après couplage est

$$\widetilde{H}_c = \frac{\langle \text{Re}^2\{\widetilde{Y}_c\} \rangle + \langle \text{Im}^2\{\widetilde{Y}_c\} \rangle}{\langle \text{Re}\{\widetilde{Y}_c\} \rangle}$$

Sachant que  $\text{Re}\{Y_m\} = 0$  on peut écrire

$$\widetilde{H}_c \approx \frac{\langle \text{Re}^2\{\frac{Y_m^2}{Y_c}\} \rangle + \langle \text{Im}^2\{Y_m - \frac{Y_m^2}{Y_c}\} \rangle}{-\langle \text{Re}\{\frac{Y_m^2}{Y_c}\} \rangle}$$

ou encore

$$\widetilde{H}_c \approx \frac{\langle \frac{\text{Re}^2\{Y_m^2 Y_c^*\}}{|Y_c|^4} \rangle + \langle \text{Im}^2\{Y_m\} \rangle + \langle \frac{\text{Im}^2\{Y_m^2 Y_c^*\}}{|Y_c|^4} \rangle - 2\langle \text{Im}\{Y_m\} \frac{\text{Im}\{Y_m^2 Y_c^*\}}{|Y_c|^2} \rangle}{-\langle \frac{\text{Re}\{Y_m^2 Y_c^*\}}{|Y_c|^2} \rangle}$$

avec

$$\text{Re}\{Y_m^2 Y_c^*\} = -\text{Im}^2\{Y_m\} \text{Re}\{Y_c\}$$

et

$$\text{Im}\{Y_m^2 Y_c^*\} = \text{Im}^2\{Y_m\} \text{Im}\{Y_c\}$$

on obtient

$$\widetilde{H}_c \approx \frac{\langle \frac{\text{Im}^4\{Y_m\} \text{Re}^2\{Y_c\}}{|Y_c|^4} \rangle + \langle \text{Im}^2\{Y_m\} \rangle + \langle \frac{\text{Im}^4\{Y_m\} \text{Im}^2\{Y_c\}}{|Y_c|^4} \rangle - 2\langle \frac{\text{Im}^3\{Y_m\} \text{Im}\{Y_c\}}{|Y_c|^2} \rangle}{\langle \frac{\text{Im}^2\{Y_m\} \text{Re}\{Y_c\}}{|Y_c|^2} \rangle}$$

et encore

$$\widetilde{H}_c \approx \frac{\langle \frac{\text{Im}^4\{Y_m\}}{|Y_c|^2} \rangle + \langle \text{Im}^2\{Y_m\} \rangle - 2\langle \frac{\text{Im}^3\{Y_m\} \text{Im}\{Y_c\}}{|Y_c|^2} \rangle}{\langle \frac{\text{Im}^2\{Y_m\} \text{Re}\{Y_c\}}{|Y_c|^2} \rangle}$$

On fait alors des hypothèses d'indépendance statistique des différentes quantités dans les bandes de fréquence et on remplace les moyennes des produits par les produits des moyennes :

$$\widetilde{H}_c \approx \frac{\langle \frac{\text{Im}^4\{Y_m\}}{|Y_c|^2} \rangle + \langle \text{Im}^2\{Y_m\} \rangle - 2\langle \frac{\text{Im}^3\{Y_m\}}{|Y_c|^2} \rangle \langle \text{Im}\{Y_c\} \rangle}{\langle \frac{\text{Im}^2\{Y_m\}}{|Y_c|^2} \rangle \langle \text{Re}\{Y_c\} \rangle}$$

soit

$$\widetilde{H}_c \approx \frac{\langle \text{Im}^4\{Y_m\} \rangle}{\langle \text{Im}^2\{Y_m\} \rangle \langle \text{Re}\{Y_c\} \rangle} + \frac{\langle |Y_c|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{Y_c\} \rangle} - 2\frac{\langle \text{Im}^3\{Y_m\} \rangle \langle \text{Im}\{Y_c\} \rangle}{\langle \text{Im}^2\{Y_m\} \rangle \langle \text{Re}\{Y_c\} \rangle}$$

Pour une plaque, en haute fréquence, on a asymptotiquement

$$\text{Re}^2\{Y_c\} \gg \text{Im}^2\{Y_c\}$$

alors que pour une masse le niveau de  $Im\{Y_m\}$  baisse en montant en fréquence, donc on peut effectivement écrire

$$\widetilde{H}_c \approx \frac{\langle |Y_c|^2 \rangle}{\langle Re\{Y_c\} \rangle}$$

ce qui traduit bien le fait que l'ajout d'une masse ne change pas la mobilité énergétique d'entrée (asymptotiquement, en haute fréquence).

On peut dériver de même une relation d'invariance pour la mobilité énergétique de transfert

$$\widetilde{H}_p c \approx \frac{\langle |Y_p c|^2 \rangle}{\langle Re\{Y_c\} \rangle}$$

## C.4 Expressions très approchées, sans inversion

En égalisant les expressions approchées des mobilités énergétiques après couplage, obtenues pour le couplage externe en deux points et pour le couplage externe en un point, suivi du couplage interne à l'autre point, on obtient des expressions "très approchées", qu'on peut appliquer aux couplages en N points et qui présentent l'avantage de ne nécessiter d'aucune inversion matricielle.

La mobilité énergétique d'entrée en un point couplé c de l'assemblage s'écrit:

$$\widetilde{H}_c \approx \frac{H_c^I H_c^{II}}{H_c^I + H_c^{II}} \quad (C.33)$$

Entre deux points couplés c et g on a:

$$\widetilde{H}_{cg} \approx \frac{H_c^{II} H_g^{II} H_{cg}^I + H_c^I H_g^I H_{cg}^{II} \alpha_c^{II}}{(H_g^I + H_g^{II})(H_c^I + H_c^{II})} \quad (C.34)$$

(ils sont ainsi "indépendants des autres points de couplage). Entre un point couplé c et un point non couplé m on a:

$$\widetilde{H}_{cm}^I \approx \frac{H_{cm}^I H_c^{II} \alpha_c^I}{H_c^I + H_c^{II}} - \sum_{g \neq c}^{N_c} \frac{H_{gm}^I \alpha_g^I}{H_g^I + H_g^{II}} \frac{H_{cg}^I H_c^{II} \alpha_c^I - H_{cg}^{II} H_c^I \alpha_c^{II}}{H_c^I + H_c^{II}} \quad (C.35)$$

(pour les points de  $S^{II}$  inverser les indices I et II) et

$$\widetilde{H}_{mc}^I \approx \frac{H_{cm}^I H_c^{II}}{H_c^I + H_c^{II}} - \sum_{g \neq c}^{N_c} \frac{H_{mg}^I}{H_g^I + H_g^{II}} \frac{H_{gc}^I H_c^{II} \alpha_g^I - H_{gc}^{II} H_c^I \alpha_g^{II}}{H_g^I + H_g^{II}} \quad (C.36)$$

Entre un point m non couplé de  $\{I\}$  et un point n non couplé de  $\{II\}$  on a:

$$\widetilde{H}_{m\epsilon} \approx \frac{H_{m\epsilon 1}^I H_{\epsilon 1}^{II} \alpha_{\epsilon 1}^{II}}{H_{\epsilon 1}^I + H_{\epsilon 1}^{II}} + \frac{H_{m\epsilon 2}^I H_{\epsilon 2}^{II} \alpha_{\epsilon 2}^{II}}{H_{\epsilon 2}^I + H_{\epsilon 2}^{II}} \quad (C.37)$$

Entre deux points non couplés de la même sous-structure après couplage la mobilité énergétique est considérée inchangée:

$$\widetilde{H}_{mn} \approx H_{mn} \quad (C.38)$$

## C.5 Calcul des CLF pour des couplages ponctuels

Les facteurs de perte par couplage (CLF: Coupling Loss Factors) de la SEA, pour des assemblages par couplages ponctuels rigides ont été calculés en fonction des mobilités des sous-systèmes isolés, par Cacciolati et Guyader et par Manning ([11], [85]).

On va voir à présent qu'on peut établir des relations semblables avec les mobilités énergétiques, c'est à dire avec uniquement des quantités moyennées en fréquence, sans utiliser des relations de phase.

Reprenons simplement l'expression des CLF donnée par [11], pour le cas de deux structures homogènes couplées rigidement ("loin des bords") aux points  $c$ :

$$\eta_{II.I} = \frac{1}{m^{II}\omega} \frac{1}{\Delta\omega} \sum_{c=1}^{N_c} \left\langle \frac{Re\{Y_c^I\}}{|Y_c^I + Y_c^{II}|^2} \right\rangle \quad (C.39)$$

et

$$\eta_{I.II} = \frac{1}{m^I\omega} \frac{1}{\Delta\omega} \sum_{c=1}^{N_c} \left\langle \frac{Re\{Y_c^{II}\}}{|Y_c^I + Y_c^{II}|^2} \right\rangle \quad (C.40)$$

où  $\langle \rangle$  désigne une moyenne fréquentielle. En utilisant le fait que les fonctions de la fréquence  $Re\{Y_c^{II}\}$  et  $|Y_c^I + Y_c^{II}|^2$  sont statistiquement indépendantes en basse fréquence et lissées en haute fréquence, on suppose que:

$$\mathbf{Hyp.4} \quad \left\langle \frac{Re\{Y_c^I\}}{|Y_c^I + Y_c^{II}|^2} \right\rangle \approx \frac{\langle Re\{Y_c^I\} \rangle}{\langle |Y_c^I + Y_c^{II}|^2 \rangle}$$

on exprime alors les CLF en fonction uniquement des termes moyennés en fréquence de chaque sous-structure:

$$\eta_{II.I} = \frac{1}{m^{II}\omega} \frac{1}{\Delta\omega} \sum_{c=1}^{N_c} \frac{\langle Re\{Y_c^I\} \rangle}{\langle Re\{Y_c^{II}\} \rangle} \frac{\alpha_c^I}{H_c^I + H_c^{II}} \quad (C.41)$$

et

$$\eta_{I.II} = \frac{1}{m^I\omega} \frac{1}{\Delta\omega} \sum_{c=1}^{N_c} \frac{\alpha_c^I}{H_c^I + H_c^{II}} \quad (C.42)$$

Dans le cas des structures non homogènes, contrairement à ([11]), il semble important d'introduire des facteurs d'hétérogénéité  $g_c$  indépendants des excitations externes:

$$g_c^I = \frac{H_c^I}{\langle\langle H_m^I \rangle\rangle} \approx \frac{H_c^I N_m}{\sum_{m=1}^{N_m} H_m^I} \quad (C.43)$$

où « $\langle\langle \rangle\rangle$ » indique une moyenne spatiale et les  $N_m$  points  $m$  de  $S^I$  sont équirepartis ( $g_c^{II}$  a une expression "intrinsèque" identique, avec des exposants  $II$ ). Alors les CLF s'écrivent:

$$\eta_{II.I} = \frac{1}{m^{II}\omega} \frac{1}{\Delta\omega} \sum_{c=1}^{N_c} g_c^{II} \frac{\langle Re\{Y_c^I\} \rangle}{\langle Re\{Y_c^{II}\} \rangle} \frac{\alpha_c^I}{H_c^I + H_c^{II}} \quad (C.44)$$

et

$$\eta_{I.II} = \frac{1}{m^I\omega} \frac{1}{\Delta\omega} \sum_{c=1}^{N_c} g_c^I \frac{\alpha_c^I}{H_c^I + H_c^{II}} \quad (C.45)$$

Remarque: on utilise toujours seulement des quantités moyennées en fréquence, mesurées sur les sous-systèmes avant couplage, donc dans une démarche prédictive (qui ne doit pas dépendre des excitations après couplage).



## Annexe D

# Compléments aux simulations de plaques homogènes

### D.1 Calculs sur un système isolé

On considère une plaque mince appuyée (cf. Figure 4.1). Dimensions:  $L_x = 1.0[m]$ ,  $L_y = 0.7[m]$ ,  $h = 0.001[m]$ . Matériau:  $\rho = 7800[kg/m^3]$ ,  $E = 2.110^{11}[Pa]$ ,  $\nu = 0.33$ ,  $\eta = 0.01$ , puis  $\eta = 0.1$ .

La densité modale théorique est d'environ 0.2 modes par Hz. Recouvrement modal: 0.4 à 10.8; nombre de modes: 40 à 47; longueur d'onde moyenne  $\lambda = 0.22$  à  $0.046$  [m], pour des bandes de 200 Hz.

Points excités: e1(0.4;0.2), e2(0.7;0.3), e3(0.5;0.6). Point de mesure m(0.2;0.5).

Trois types d'excitation: source de force (unitaire ou aléatoire),  $F_e = 1/Y_e$  (pour deux amortissements).

#### Explication de l'erreur de définition en entrée

Pour  $F_e = 1/Y_{ee}$  le rapport  $\frac{\langle |V_e|^2 \rangle}{\langle Re\{F_e V_e^*\} \rangle}$  vaut exactement  $\frac{\langle |F_e|^2 |Y_e|^2 \rangle}{\langle |F_e|^2 Re\{Y_e\} \rangle}$  ou encore  $\frac{1}{\langle \frac{Re\{Y_e\}}{|Y_e|^2} \rangle}$ .

Pour recouvrement modal supérieur à 1, *en haute fréquence*,  $Im^2\{Y_e\}$  est négligeable devant  $Re^2\{Y_e\}$ , on a  $|Y_e|^2 \approx Re^2\{Y_e\}$ , donc le rapport se réduit à  $\frac{1}{\langle \frac{1}{Re\{Y_e\}} \rangle}$ . Or sur une bande de fréquences la différence entre  $\frac{1}{\langle x \rangle}$  et  $\langle \frac{1}{x} \rangle$  est d'autant plus faible que la variance de x est faible. Donc asymptotiquement, en montant en fréquence, on a

$$\frac{\langle |V_e|^2 \rangle}{\langle Re\{F_e V_e^*\} \rangle} \approx \langle Re\{Y_e\} \rangle$$

De même la mobilité énergétique s'approche par  $\frac{\langle Re^2\{Y_e\} \rangle}{\langle Re\{Y_e\} \rangle}$  ou encore par  $\frac{\langle Re\{Y_e\} \rangle \langle Re\{Y_e\} \rangle}{\langle Re\{Y_e\} \rangle} = \langle Re\{Y_e\} \rangle$ .

Donc les deux quantités convergent en haute fréquence.

Au contraire, *en basse fréquence*,  $\langle Im^2\{Y_e\} \rangle \approx \langle Re^2\{Y_e\} \rangle$ ,

donc  $\langle |Y_e|^2 \rangle \approx 2 \langle Re^2\{Y_e\} \rangle$ , mais l'écart type de  $Re\{Y_e\}$  (en fréquence) est fort, donc la mobilité énergétique est très sousestimée en écrivant

$$H_e \approx \frac{2 \langle Re\{Y_e\} \rangle \langle Re\{Y_e\} \rangle}{\langle Re\{Y_e\} \rangle} \approx 2 \langle Re\{Y_e\} \rangle$$

alors que

$$\frac{\langle |V_e|^2 \rangle}{\langle Re\{F_e V_e^*\} \rangle} = \frac{1}{\langle \frac{Re\{Y_e\}}{Im^2\{Y_e\} + Re^2\{Y_e\}} \rangle} = \langle \frac{1}{\frac{Im^2\{Y_e\}}{Re\{Y_e\}} + Re\{Y_e\}} \rangle$$

Or  $\langle \frac{1}{x} \rangle \gg \frac{1}{\langle x \rangle}$ , donc le rapport est inférieur à  $\langle \frac{Im^2\{Y_e\}}{Re\{Y_e\}} \rangle + \langle Re\{Y_e\} \rangle$  ce qui est compris entre  $\langle Re\{Y_e\} \rangle$  et, à peu près,  $2 \langle Re\{Y_e\} \rangle$ .

L'écart type de  $Re\{Y_e\}$  diminue lorsque le recouvrement modal augmente. *Le recouvrement modal est donc le paramètre important pour l'erreur de définition des mobilités énergétiques d'entrée.*

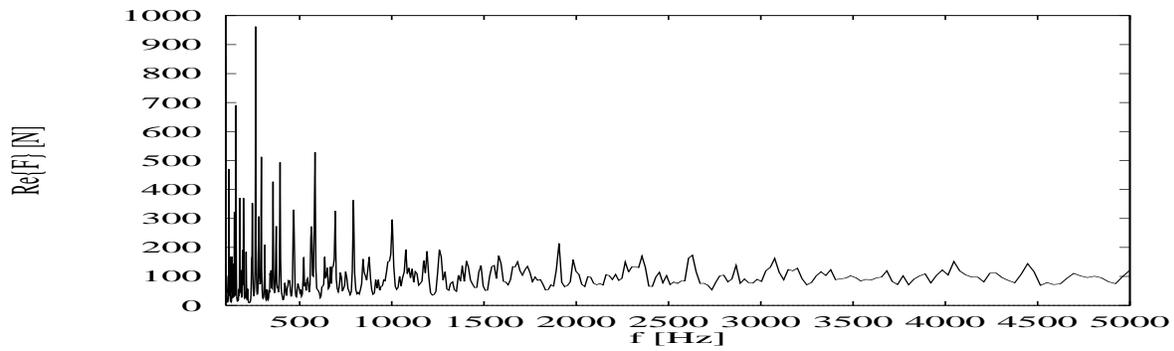
### Étude de l'erreur de définition en transfert

On considère le nombre de passages à zéro de la partie Imaginaire de chaque mobilité de transfert dans chaque bande:

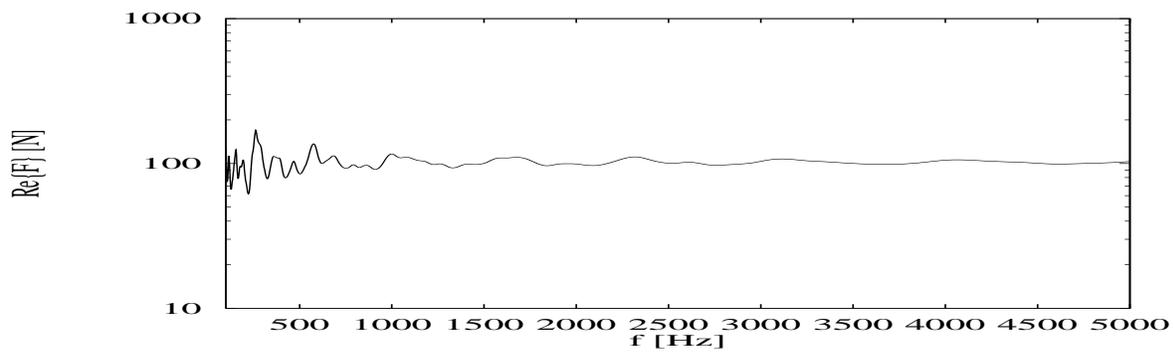
Pour $\eta = 0.01$				Pour $\eta = 0.1$			
Fcentr	$H_{me1}$	$H_{me2}$	$H_{me3}$	Fcentr	$H_{me1}$	$H_{me2}$	$H_{me3}$
200.0	30	23	15	200.0	7	8	2
400.0	13	15	10	400.0	4	2	1
600.0	10	16	7	600.0	1	3	4
800.0	10	6	6	800.0	1	1	2
1000.0	12	6	7	1000.0	3	0	1
1200.0	6	6	3	1200.0	0	2	1
1400.0	3	3	5	1400.0	1	1	1
1600.0	3	5	0	1600.0	1	0	0
1800.0	6	4	3	1800.0	2	1	1
2000.0	3	1	6	2000.0	1	1	1
2200.0	2	7	2	2200.0	0	1	0
2400.0	4	3	2	2400.0	1	0	0
2600.0	5	3	3	2600.0	0	1	1
2800.0	5	3	2	2800.0	0	1	0
3000.0	3	3	4	3000.0	1	0	1
3200.0	2	1	2	3200.0	0	1	0
3400.0	1	1	4	3400.0	0	0	0
3600.0	1	3	2	3600.0	0	0	0
3800.0	4	1	1	3800.0	0	1	1
4000.0	1	3	3	4000.0	1	0	0
4200.0	2	2	2	4200.0	0	0	0
4400.0	2	3	2	4400.0	1	0	0
4600.0	1	2	2	4600.0	0	0	0
4800.0	1	2	0	4800.0	0	0	0

Ces variations irrégulières, propres à chaque couple de points considéré, correspondent bien à celles de l'erreur qu'on a remarquée sur les mobilités de transfert et sur l'additivité, d'abord faible, sur les toutes premières bandes de 200 Hz, où les mobilités oscillent beaucoup, puis irrégulière sur les autres bandes, pour lesquelles il y a peu d'oscillations (voire pas du tout, pour  $\eta = 0.1$ ). Ici on constate que pour une moyenne supérieure ou égale à 2 ou 3 passages à zéro par bande l'erreur est inférieure à 3 dB.

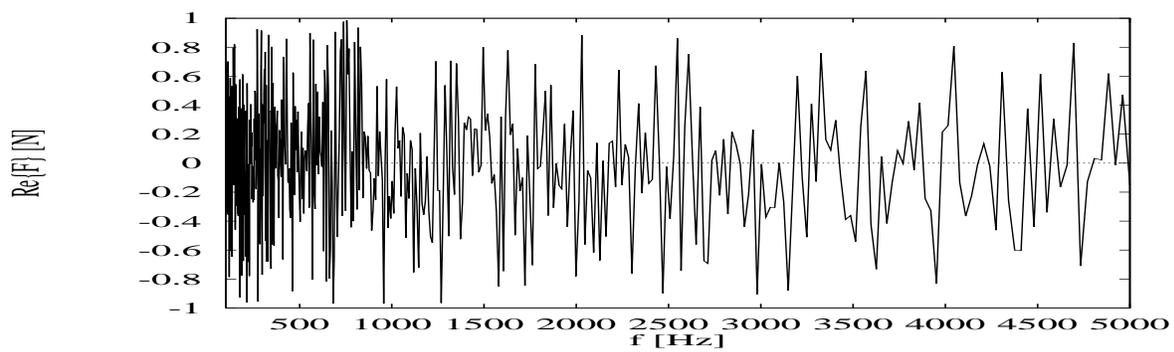
Si on repasse le cas de la plaque amortie, avec des bandes de 400 Hz, on a à nouveau au moins une oscillation par bande et c'est suffisant pour éviter les erreurs supérieures à 3 dB (cf. Figure 4.10).



a)  $F_e = 1/Y_e$  ;  $\eta = 0.01$



b)  $F_e = 1/Y_e$  ;  $\eta = 0.1$



c) Force aléatoire

FIG. D.1 - Modèles de force utilisés

## D.2 Assemblage de plaques de mobilités très différentes

On simule maintenant le couplage rigide d'une plaque de caractéristiques identiques aux plaques du D.4, calculée aux points P1(0.2;0.5), P2(0.4;0.2), P3(0.7;0.3), P4(0.5;0.6), P5(0.4;0.4), P6(0.6;0.3), couplée aux points P1, P2, P3, avec les trois points P1(0.2;0.5), P2 (0.4;0.2), P3 (0.7;0.3), d'une plaque plus petite et quatre fois plus épaisse, calculée aussi en P7(0.5;0.6) et ayant les dimensions suivantes:  $L_x = 0.9[m]$ ,  $L_y = 0.7[m]$ ,  $h = 0.004[m]$ ,  $\rho = 7800[kg/m^3]$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^{11}[Pa]$ ,  $\nu = 0.33$ ,  $\eta = 0.01$ .

Une analyse par bandes de tiers d'octave, permet de voir si il y a un nombre de modes par bande (ou une largeur de bande) en dessous duquel la méthode EMMA n'est plus applicable.

Pour la deuxième plaque, la densité modale théorique est d'environ 0.05 modes par Hz et, pour les bandes de tiers d'octave, spécifiées par leurs fréquences centrales Fcentr. et leurs bornes Finf et Fsup, on a les valeurs suivantes de Densité modale effective, Recouvrement modal, Nombre de modes dans la bande, Longueur d'onde, Nombre d'oscillations de la partie imaginaire de  $Y_{12}$  (indicatif):

Finf	Fsup	Fcentr	Dens.mod.	Rec.mod.	Nb.Modes	$\lambda[m]$	Nb.Osc.
111.4	140.3	125.0	.069	.090	2	.563	0
140.3	176.8	157.5	.000	.000	0	.502	1
176.8	222.7	198.4	.065	.132	3	.447	1
222.7	280.6	250.0	.035	.088	2	.398	1
280.6	353.6	315.0	.041	.132	3	.355	1
353.6	445.4	396.9	.044	.172	4	.316	1
445.4	561.2	500.0	.052	.266	6	.281	1
561.2	707.1	630.0	.041	.267	6	.251	1
707.1	890.9	793.7	.044	.349	8	.223	6
890.9	1122.5	1000.0	.052	.531	12	.199	5
1122.5	1414.2	1259.9	.045	.578	13	.177	2
1414.2	1781.8	1587.4	.044	.702	16	.158	3
1781.8	2244.9	2000.0	.048	.958	22	.141	6
2244.9	2828.4	2519.8	.048	1.223	28	.125	6
2828.4	3563.6	3174.8	.048	1.531	35	.112	7
3563.6	4489.8	4000.0	.046	1.874	43	.100	7

La longueur d'onde sert à évaluer si les points doivent être considérés comme différents ou confondus (distance inférieure à  $\lambda/4$ ). Le recouvrement modal Rm est égal à la somme des largeurs des bandes passantes à -3 dB des modes dans la bande, divisée par la largeur de la bande:  $Rm(\omega) = \frac{\sum_{n=1}^{Nb.Modes(\omega)} \eta \omega_n}{\omega_{sup} - \omega_{inf}}$

### D.2.1 Erreurs de couplage

#### Inadaptation du Calcul Simpliste

Comme annoncé dans la partie analytique, c'est lorsque les mobilités d'entrée (classiques ou énergétiques) respectives des deux structures aux points de couplage sont très différentes, que les facteurs de connexion introduits dans le Calcul EMMA prennent tout leur sens: le Calcul Simpliste devient complètement erroné pour certains transferts.

C'est ce qu'on peut observer sur les mobilités énergétiques de transfert entre un point de couplage et un point non couplé de chaque plaque et entre deux points non couplés de chaque plaque. (voir Figure D.2 et Figure D.3).

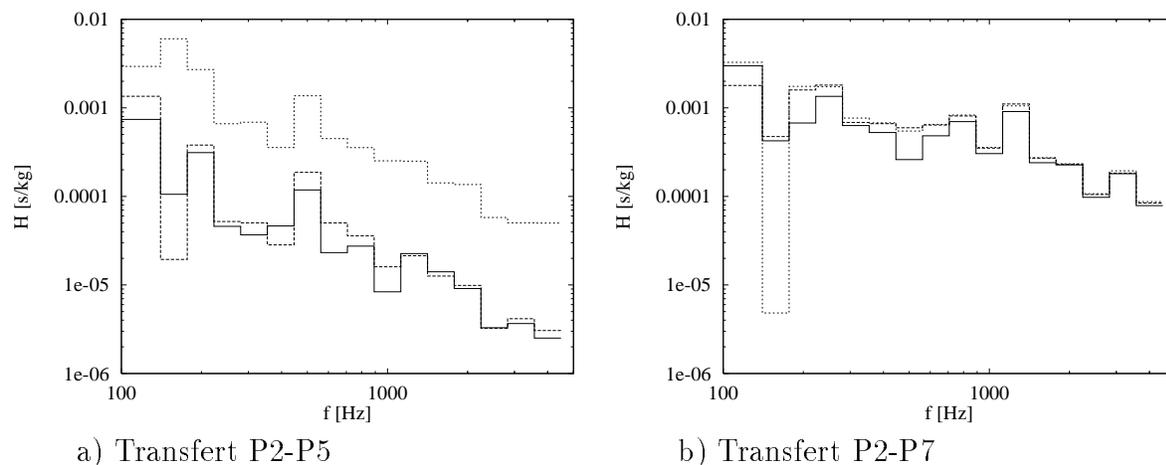


FIG. D.2 - *Assemblage rigide en trois points de deux plaques différentes*  
 — calcul exact — — calcul EMMA - - - calcul simpliste  
 mauvais Calcul Simpliste pour le transfert  $H_{cm}$ , entre un point couplé et un point non couplé

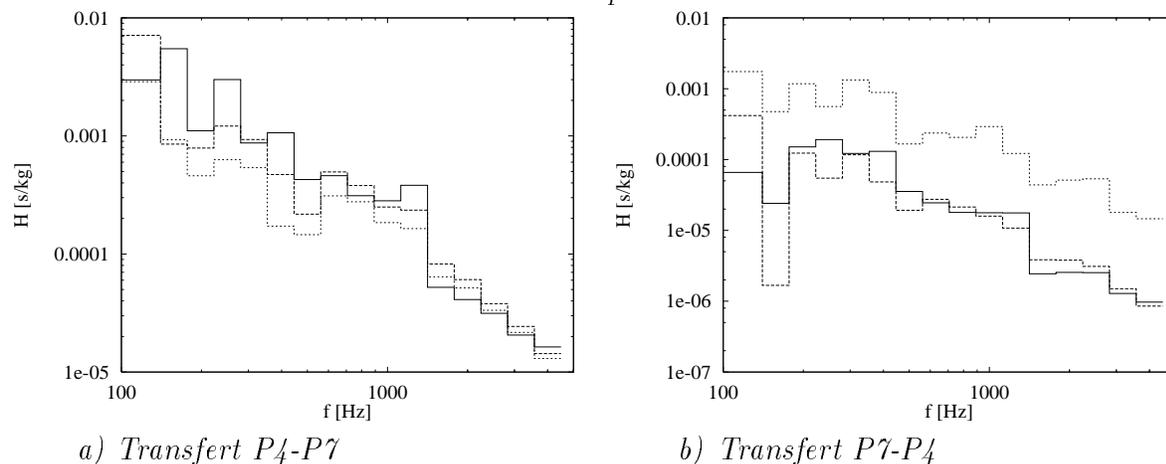


FIG. D.3 - *Assemblage rigide en trois points de deux plaques différentes*  
 — calcul exact — — calcul EMMA - - - calcul simpliste  
 mauvais Calcul Simpliste pour le transfert interplaque  $H_{m1n2}$

### Bonne prévision par la EMMA

Le Calcul EMMA, mis au point analytiquement pour le cas d'un ou deux points de couplage, marche ici (avec trois points de couplage), dans tous les transferts (voir Figure D.4, Figure D.2 et Figure D.3), même pour le transfert entre deux points de couplage (voir Figure D.5). Les deux calculs, Simpliste et EMMA, peuvent présenter de fortes erreurs, si la bande analysée est trop étroite: pour les six premières bandes de tiers d'octave le nombre de modes dans la bande est inférieur à 5 et le nombre moyen d'oscillations des parties imaginaires des mobilités classiques inférieur à 2.

Ces deux critères peuvent servir d'indicateurs grossiers.

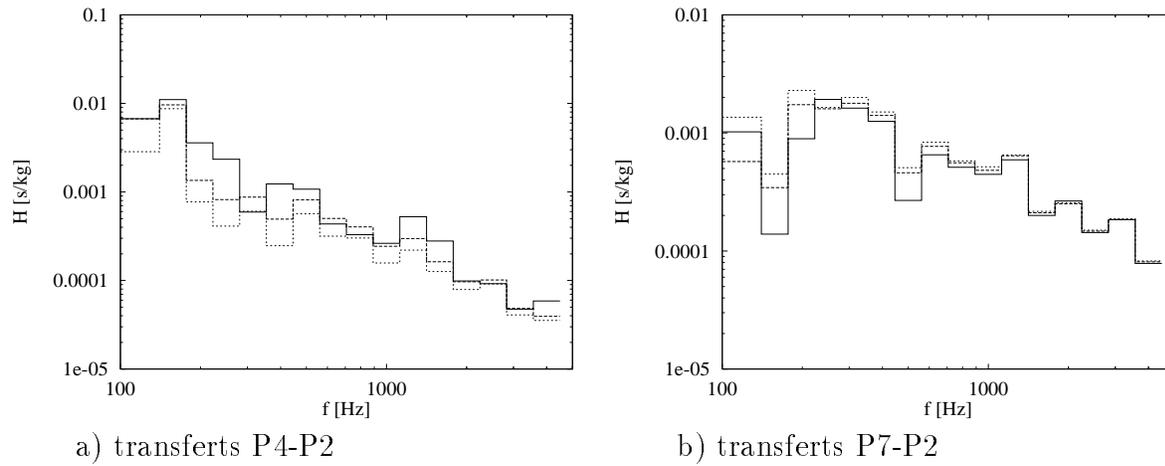


FIG. D.4 - *Assemblage rigide en trois points de deux plaques différentes*  
 — calcul exact - - calcul EMMA

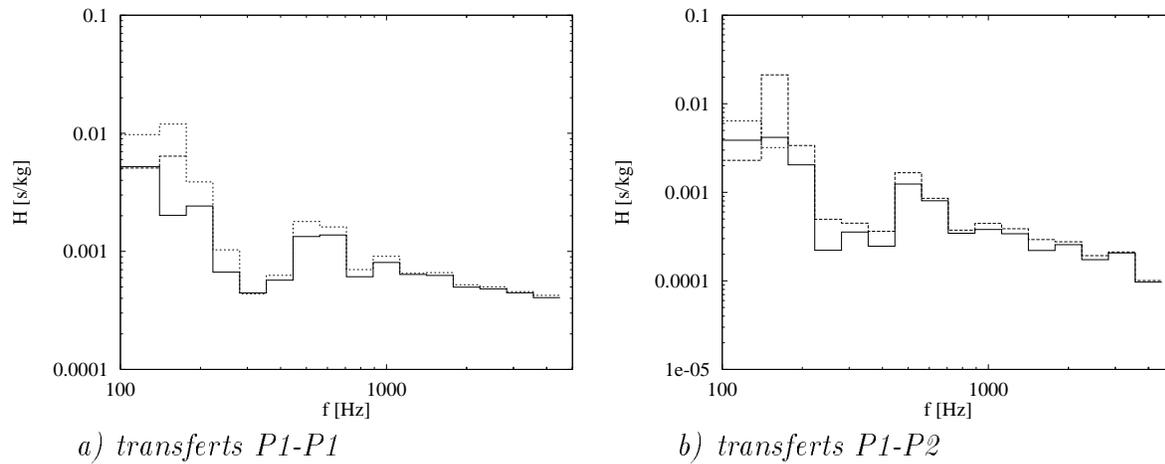


FIG. D.5 - *Assemblage rigide en trois points de deux plaques différentes*  
 — calcul exact - - calcul EMMA Bonne prévision du transfert entre points de couplage

### Calcul des Puissances et des "miels"

On présente ici le calcul des puissances échangées (Figure D.6) et des "miels" après couplage (Figure D.7), par bandes de tiers d'octave.

La puissance active totale échangée (Figure D.8a) est toujours mieux reconstituée que celle relative à chaque point de couplage.

La somme (donc la moyenne) des "miels" après couplage (Figure D.8b) aux points non couplés, est meilleure que chaque "miel" pris séparément, car les erreurs n'interviennent pas sur les mêmes bandes; elle a une erreur qui oscille, mais diminue globalement en montant en fréquence: les bandes s'élargissent et le nombre d'oscillations par bande des parties réelles des mobilités augmente. (cf. aussi Figure 4.17).

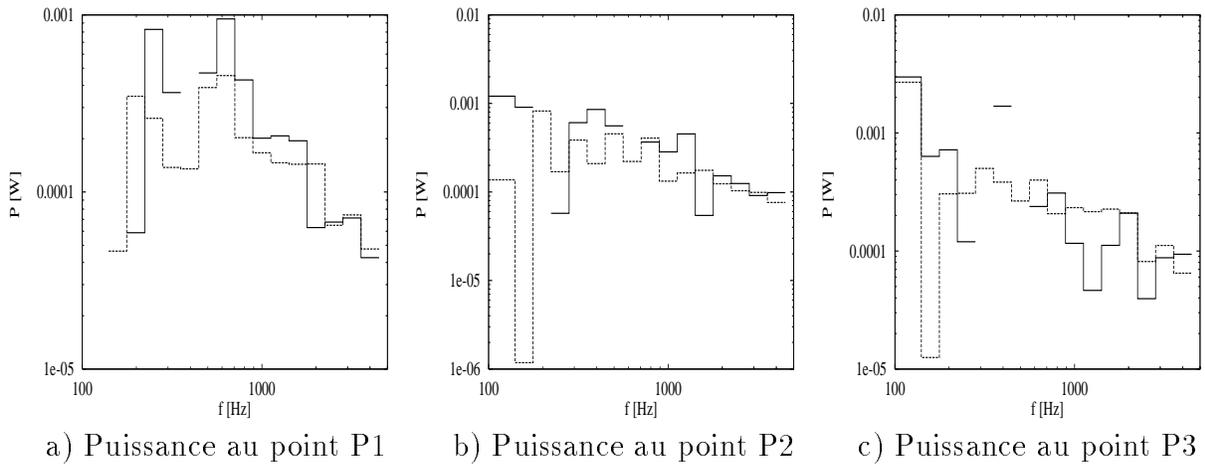


FIG. D.6 - Assemblage de plaques différentes: Puissances actives moyennes échangées  
 — calcul exact - - - calcul EMMA

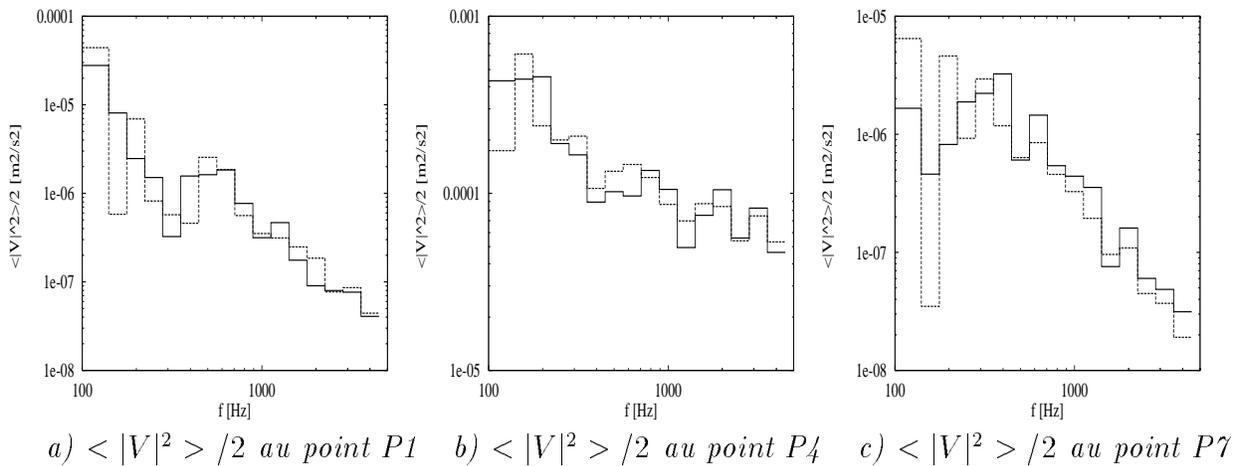


FIG. D.7 - Assemblage de plaques différentes: "miels" après couplage  
 — calcul exact - - - calcul EMMA

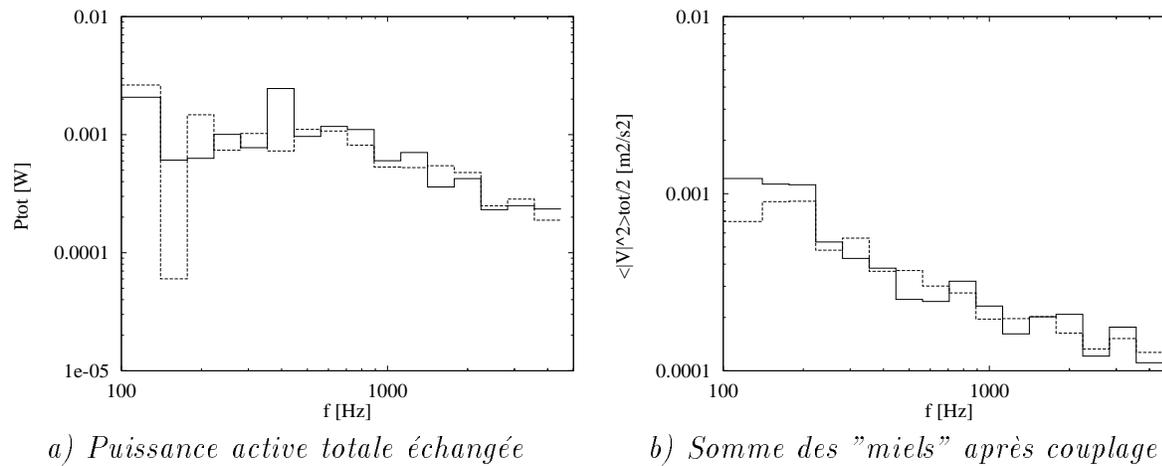


FIG. D.8 - Assemblage de plaques différentes.  $\eta = 0.01$   
 — calcul exact - - - calcul EMMA

## D.2.2 Calcul des plaques amorties

On considère les mêmes géométries que précédemment, mais avec un amortissement  $\eta = 0.1$ , on effectue les mêmes calculs qu'en 4.3.1. Pour des bandes de tiers d'octave on a les valeurs suivantes de Densité modale effective, Recouvrement modal, Nombre de modes dans la bande, Longueur d'onde, Nombre d'oscillations de la partie imaginaire de  $Y_{12}$  (indicatif):

F <sub>inf</sub>	F <sub>sup</sub>	F <sub>centr</sub>	Dens.mod.	Rec.mod.	Nb.Modes	$\lambda[m]$	Nb.Osc.
111.4	140.3	125.0	.069	.904	2	.563	1
140.3	176.8	157.5	.000	.000	0	.502	0
176.8	222.7	198.4	.065	1.316	3	.447	1
222.7	280.6	250.0	.035	.882	2	.398	0
280.6	353.6	315.0	.041	1.316	3	.355	1
353.6	445.4	396.9	.044	1.720	4	.316	1
445.4	561.2	500.0	.052	2.660	6	.281	2
561.2	707.1	630.0	.041	2.668	6	.251	0
707.1	890.9	793.7	.044	3.492	8	.223	2
890.9	1122.5	1000.0	.052	5.314	12	.199	0
1122.5	1414.2	1259.9	.045	5.781	13	.177	2
1414.2	1781.8	1587.4	.044	7.023	16	.158	3
1781.8	2244.9	2000.0	.048	9.579	22	.141	1
2244.9	2828.4	2519.8	.048	12.234	28	.125	2
2828.4	3563.6	3174.8	.048	15.311	35	.112	1
3563.6	4489.8	4000.0	.046	18.743	43	.100	3

### Analyse des résultats

Les puissances échangées négatives ne sont pas représentées. Par rapport au 4.3.1, on constate l'apparition de grandes erreurs sur les puissances échangées, sur les six premières bandes de tiers d'octave: trop étroites.

Les puissances échangées ne sont pas mieux reconstituées que celles des plaques peu amorties (comparer Figure D.9 et Figure D.6), mais la puissance totale est très satisfaisante (comparer Figure D.10 et Figure D.8).

Les "miels" après couplage ne sont pas mieux reconstitués, que ceux des plaques peu amorties, (sauf au point P4 qui est directement excité): cela correspond aux résultats de l'additivité énergétique, qui fonctionne moins bien pour un amortissement plus important. Pour les bandes de tiers d'octave le nombre d'oscillations de  $Im\{Y_{mn}\}$  n'a pas diminué de beaucoup, mais il s'annule maintenant sur certaines bandes; l'erreur peut ainsi devenir très grande (facteur six sur la cinquième bande, au point P7, Figure D.11 c).

L'hypothèse de source de puissance active moyenne ici est très bien vérifiée (Figure D.10b). On peut constater que le calcul par bandes constantes est préférable pour les plaques, car le nombre d'oscillations des  $Im\{Y\}$  est plus stable.

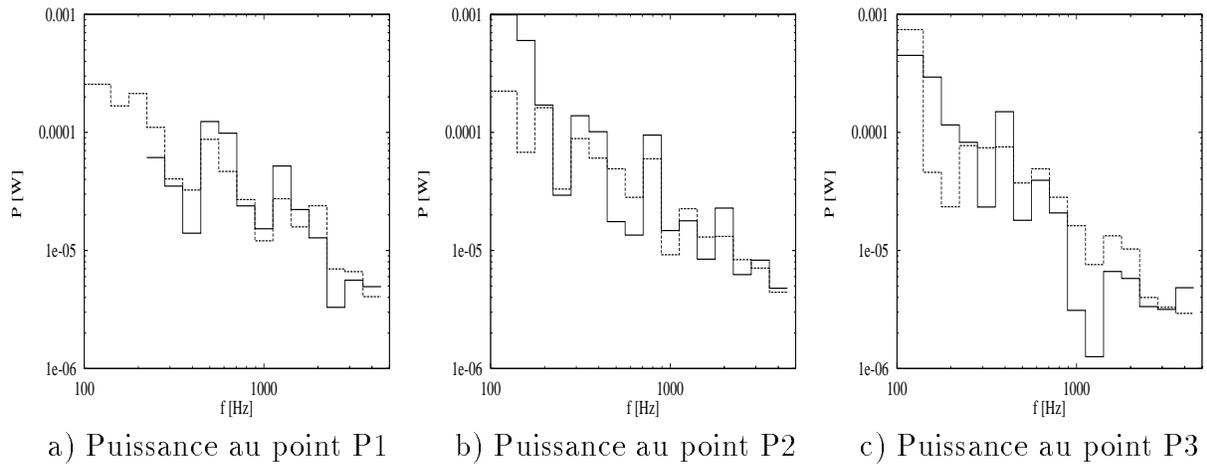


FIG. D.9 - Reconstitution de la puissance active moyenne échangée  $\eta = 0.1$   
 — calcul exact - - calcul EMMA

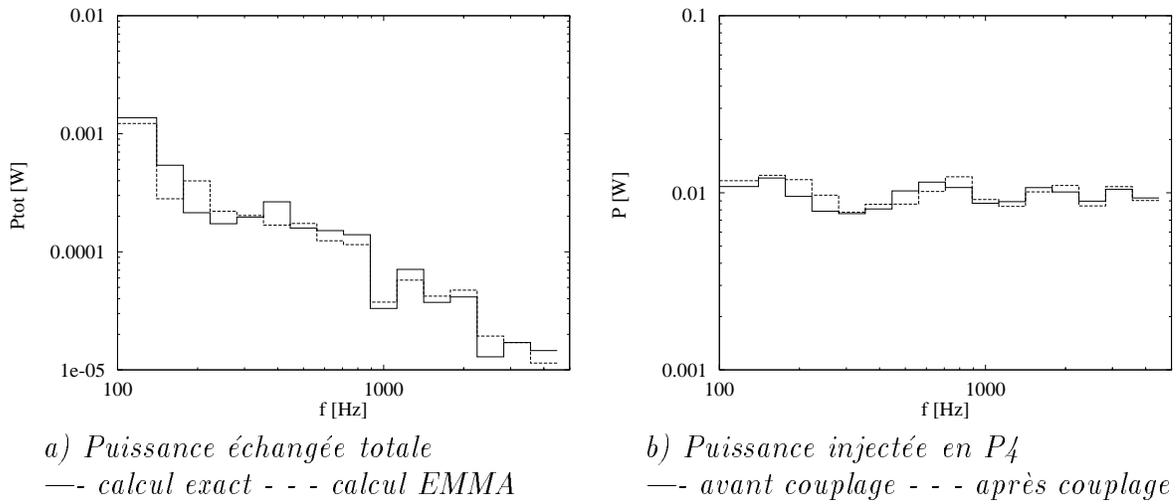


FIG. D.10 - Assemblage de plaques différentes amorties,  $\eta = 0.1$

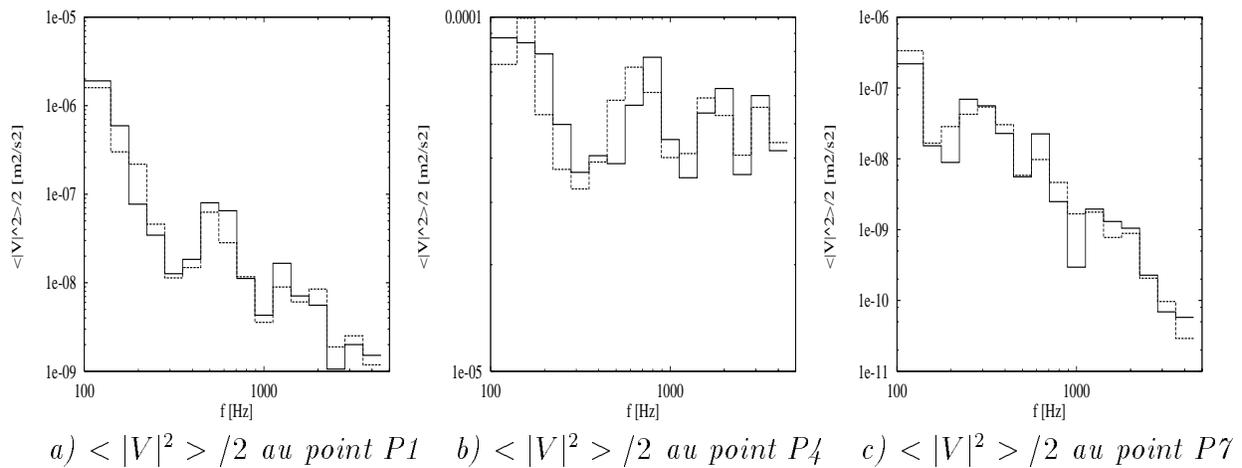


FIG. D.11 - Reconstitution des "miels"  $\eta = 0.1$   
 — calcul exact - - calcul EMMA

### D.3 Assemblage de plaques plus petites

Afin de vérifier si c'est bien le nombre de modes par bande qui détermine l'erreur sur les prévisions après couplage on calcule un assemblage de deux plaques différentes entre elles, plus petites que les précédentes.

Les données du matériau sont les suivantes:  $\rho = 7800[kg/m^3]$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^{11}[Pa]$ ,  $\nu = 0.33$ ,  $\eta = 0.01$ . La première plaque, de dimensions  $L_x = 0.43[m]$ ,  $L_y = 0.37[m]$  et  $h = 1[mm]$ , est calculée aux points P1(0.1;0.15), P2(0.2;0.3), P3(0.15;0.2), P4(0.3;0.1), P5(0.25;0.25), P6(0.06;0.1), couplée aux points P1, P2, P3, avec les trois points P1(0.1;0.05), P2 (0.2;0.2), P3 (0.15;0.1), de la deuxième plaque ( $L_x = 0.32[m]$ ,  $L_y = 0.23[m]$ ,  $h = 4[mm]$ , même matériau), calculée aussi en P7(0.05;0.15).

Pour la deuxième plaque, la densité modale théorique est d'environ 0.006 modes par Hz et pour les bandes de tiers d'octave, on a les valeurs suivantes de Densité modale effective, Recouvrement modal, Nombre de modes dans la bande, Longueur d'onde, Nombre d'oscillations de Y\_c1c3 (indicatif):

Finf[Hz]	Fsup[Hz]	Fc[Hz]	Dens.mod.	Rec.mod.	Nb.Modes	$\lambda[m]$	Nb.Osc.
111.4	140.3	125.0	.000	.000	0	.563	0
140.3	176.8	157.5	.000	.000	0	.502	0
176.8	222.7	198.4	.000	.000	0	.447	0
222.7	280.6	250.0	.000	.000	0	.398	0
280.6	353.6	315.0	.014	.039	1	.355	1
353.6	445.4	396.9	.000	.000	0	.316	0
445.4	561.2	500.0	.000	.000	0	.281	1
561.2	707.1	630.0	.007	.040	1	.251	1
707.1	890.9	793.7	.005	.046	1	.223	2
890.9	1122.5	1000.0	.004	.046	1	.199	1
1122.5	1414.2	1259.9	.003	.039	1	.177	1
1414.2	1781.8	1587.4	.005	.092	2	.158	0
1781.8	2244.9	2000.0	.004	.084	2	.141	3
2244.9	2828.4	2519.8	.005	.129	3	.125	2
2828.4	3563.6	3174.8	.005	.176	4	.112	3
3563.6	4489.8	4000.0	.004	.172	4	.100	1

Pour les quatre premières bandes le critère d'éloignement minimum entre deux points supérieur à  $\lambda/4$  n'est pas respecté.

Les puissances échangées sont souvent très mal reconstituées (Figure D.12).

Ici encore la puissance active totale échangée est mieux reconstituée que celles relatives à chaque point (Figure D.13).

Le calcul des "miels" et celui de la puissance totale échangée n'est acceptable que sur les quatre dernières bandes de tiers d'octave: le nombre d'oscillations est alors supérieur à 1 ou 2 et le nombre de modes est supérieur à 2 ou 3. Les premières bandes d'analyse utilisées ici sont donc trop étroites.

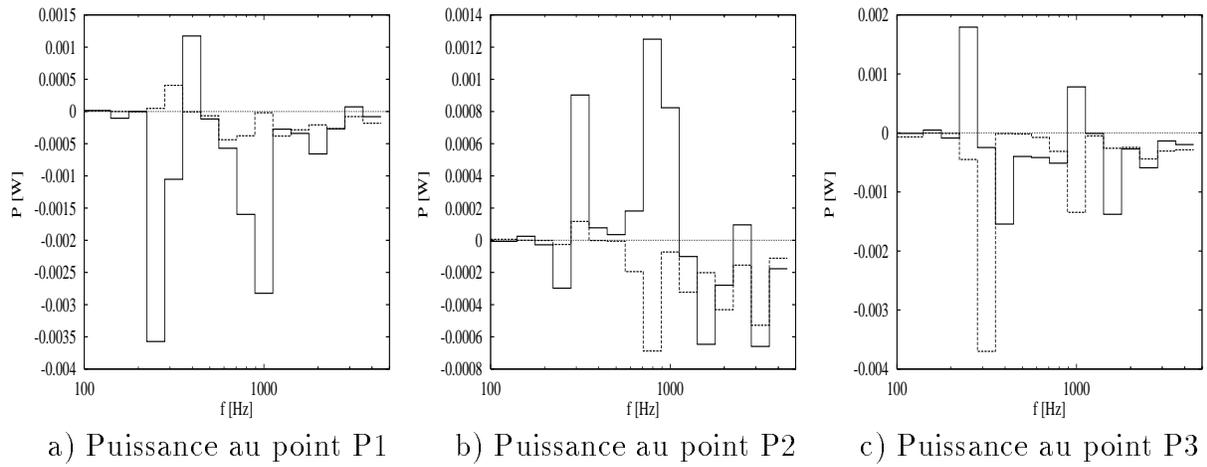


FIG. D.12 - Reconstitution des puissances actives échangées, petites plaques  
 — calcul exact - - - calcul EMMA

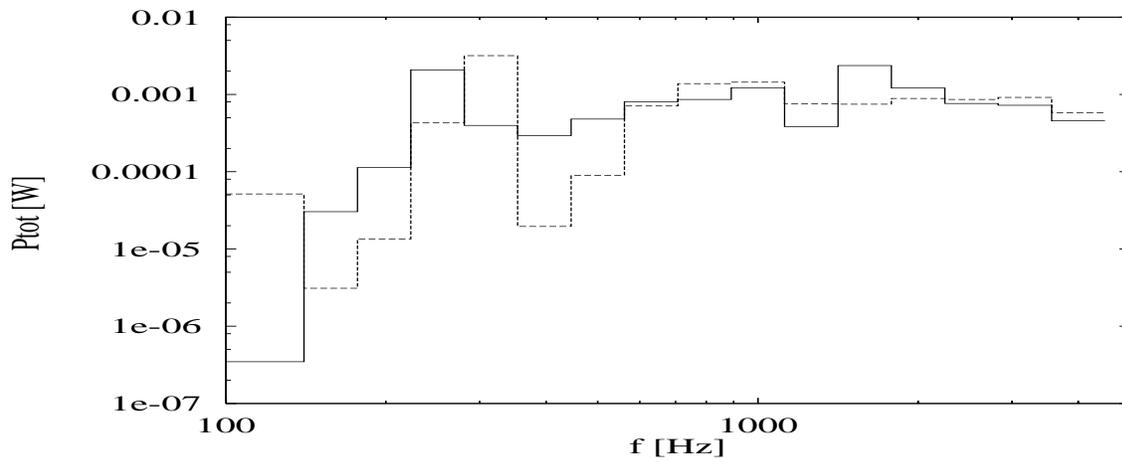


FIG. D.13 - Reconstitution de la Puissance échangée totale, petites plaques  
 — calcul exact - - - calcul EMMA

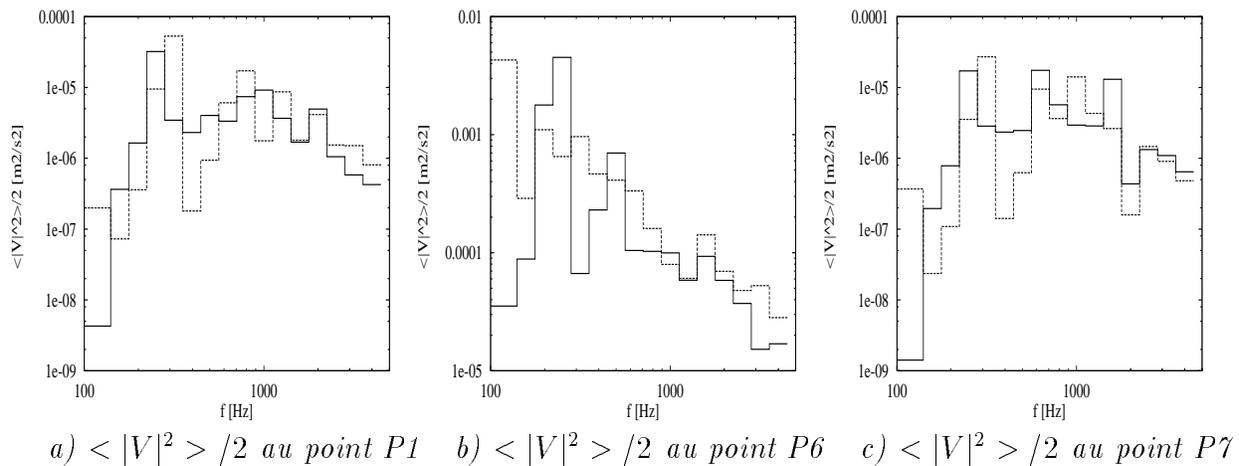


FIG. D.14 - Reconstitution des "miels", petites plaques  
 — calcul exact - - - calcul EMMA

### D.3.1 Étude des sources de puissance

L'hypothèse de source de puissance active moyenne ici est toujours assez bien vérifiée par rapport aux sources de force (cf. Figure D.15a).

On considère aussi deux excitations, toujours aux points P4 et P5, telles que la vitesse en ces points est inchangée et égale à un, avant et après couplage (ce cas est très pénalisant et ne correspond pas à des sources réelles).

On compare les puissances actives moyennes (exactes) injectées avant et après couplage, afin de voir si l'hypothèse de source de puissance est valable dans ce cas (Figure D.15b).

On constate que, dans les quatre dernières bandes pour lesquelles le calcul a été jugé correct, l'hypothèse de source de puissance active moyenne est très bien vérifiée, ainsi que sur la plupart des bandes, à partir d'un recouvrement modal de 0.17 pour la première plaque (ou à partir de 4 modes dans la bande).

### D.3.2 Étude d'autres bandes de fréquence

Les calculs des Figures D.16 et D.17 montrent que le choix de bandes adaptées peut se faire à partir du nombre d'oscillations des mobilités.

Globalement on constate une détérioration des résultats, par rapport au cas des grandes plaques (avec des structures qui avaient à peu près dix fois plus de modes et aussi plus d'oscillations des parties imaginaires des mobilités dans les mêmes bandes). Pour des bandes de 200 Hz et de 800 Hz, pour la plaque la plus petite et épaisse, on a en effet les nombres de modes et d'oscillations de  $Im\{Y_{m4c3}\}$  (indicatifs) du tableau ci-dessous.

Bandes de 200 Hz			Bandes de 200 Hz			Bandes de 800 Hz		
Fcentr	Modes	Osc.	Fcentr	Modes	Osc.	Fcentr	Modes	Osc.
200.0	1	1	2600.0	2	1	500.0	3	5.0
400.0	0	0	2800.0	0	0	1300.0	3	2.0
600.0	1	2	3000.0	0	0	2100.0	4	3.0
800.0	1	2	3200.0	3	2	2900.0	5	4.0
1000.0	1	1	3400.0	1	0	3700.0	3	1.0
1200.0	1	0	3600.0	1	0	4500.0	4	3.0
1400.0	0	0	3800.0	1	0			
1600.0	1	1	4000.0	0	0			
1800.0	2	1	4200.0	2	0			
2000.0	1	0	4400.0	0	1			
2200.0	0	0	4600.0	1	1			
2400.0	1	2	4800.0	1	1			

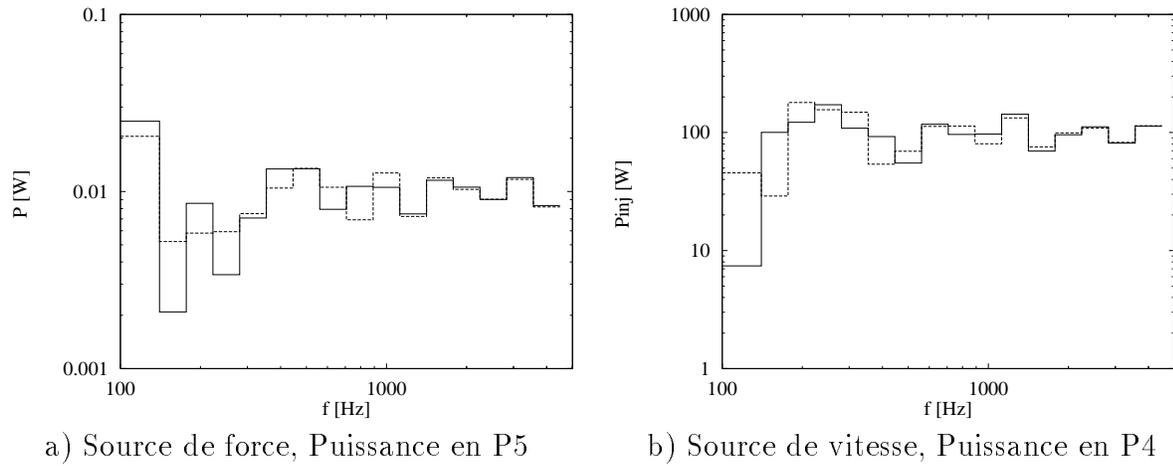


FIG. D.15 - Variation des Puissances actives moyennes injectées  
Cas des petites plaques; — avant couplage - - - après couplage

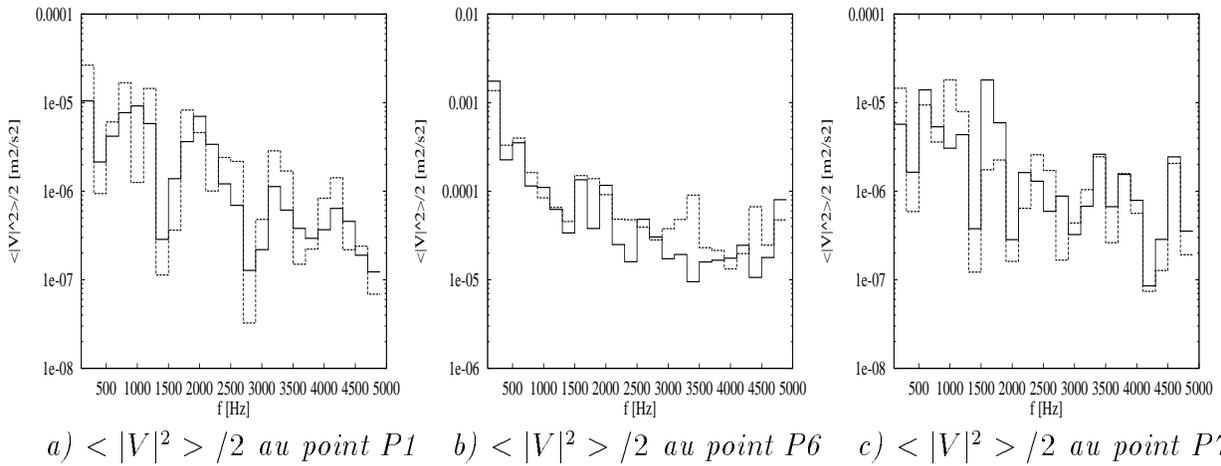


FIG. D.16 - Reconstitution des "miels", petites plaques  $\Delta f = 200$  Hz  
— calcul exact - - - calcul EMMA

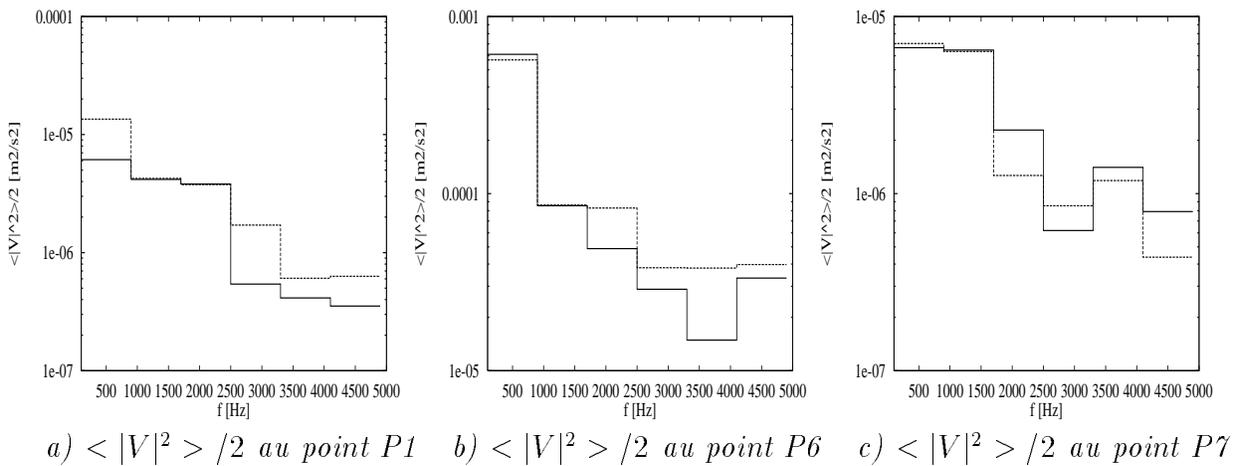


FIG. D.17 - Reconstitution des "miels", petites plaques  $\Delta f = 800$  Hz  
— calcul exact - - - calcul EMMA

## D.4 Cas particulier: assemblage de deux plaques identiques

Les deux plaques identiques sont les mêmes que celles utilisées au D.1. Pour les bandes de tiers d'octave, on a les valeurs suivantes de Densité modale effective (nombre de modes sur la largeur de la bande), Recouvrement modal, Nombre de modes dans la bande, Longueur d'onde:

Finf[Hz]	Fsup[Hz]	Fc[Hz]	Dens.mod.	Rec.mod.	Nb.Modes	$\lambda$ [m]
111.4	140.3	125.0	.173	.225	5	.281
140.3	176.8	157.5	.192	.303	7	.251
176.8	222.7	198.4	.218	.437	10	.223
222.7	280.6	250.0	.190	.481	11	.199
280.6	353.6	315.0	.219	.699	16	.177
353.6	445.4	396.9	.207	.836	19	.158
445.4	561.2	500.0	.199	1.002	23	.141
561.2	707.1	630.0	.206	1.298	30	.125
707.1	890.9	793.7	.218	1.738	40	.112
890.9	1122.5	1000.0	.207	2.084	48	.100
1122.5	1414.2	1259.9	.213	2.686	62	.089
1414.2	1781.8	1587.4	.215	3.426	79	.079
1781.8	2244.9	2000.0	.212	4.250	98	.070
2244.9	2828.4	2519.8	.218	5.509	127	.063
2828.4	3563.6	3174.8	.219	7.007	161	.056
3563.6	4489.8	4000.0	.214	8.614	198	.050

Si deux structures sont couplées en des points de mobilités d'entrée (classiques) identiques, on a vu qu'on a des erreurs supplémentaires (cf 3.3.5) il s'agit ici de les évaluer par rapport aux autres erreurs de méthode, analysées précédemment.

Le cas de deux plaques identiques permet entre autre de vérifier par symétrie les calculs exact et approché des quantités de transfert. On remarquera que ce cas de figure "particulier" peut se retrouver sur des assemblages réels, mais semble peu probable, à cause des variations des caractéristiques (et des mobilités) d'une structure à l'autre, rappelées au premier chapitre.

### D.4.1 Couplage en un seul point

Considérons le couplage des deux plaques en un point  $P_1(0.2;0.4)$ . On calcule les mobilités énergétiques après couplage, en entrée et en transfert, pour les points  $P_1(0.2;0.5)$ ,  $P_2(0.4;0.2)$ ,  $P_3(0.7;0.3)$  et  $P_4(0.5;0.6)[m]$ .

#### Mobilités énergétiques très bien reconstituées

Les mobilités énergétiques d'entrée  $H_{cc}$  au point de couplage c et celles de transfert  $H_{mc}$  entre un point quelconque m et le point c sont calculées quasi exactement par la méthode approchée et même par celle simpliste (voir Figure D.19).

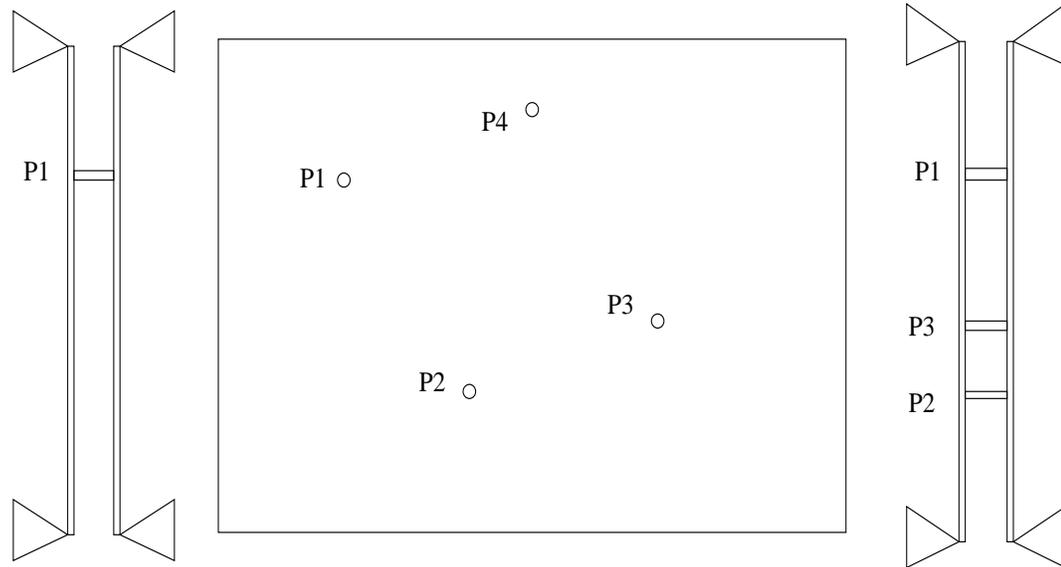


FIG. D.18 - Couplage en un point et en trois points de deux plaques identiques

### Mobilités énergétiques peu modifiées par le couplage

Les mobilités énergétiques d'entrée  $H_{mm}$  et de transfert  $H_{mn}$ , pour les points m et n non couplés (sur chacune des deux plaques), sont quasiment inchangées après couplage, par rapport à celles avant couplage (Figure D.20).

Ces mêmes mobilités sont bien reconstituées, sauf en basse fréquence, où de fortes erreurs peuvent se produire dans les deux calculs énergétiques (cf. Figure D.21). C'est pourquoi, en pratique, **pour les mobilités énergétiques d'entrée et de transfert entre points non couplés on prendra directement celles avant couplage**, sans autres calculs.

### Mobilités énergétiques bien corrigées

Les mobilités énergétiques de transfert exactes  $H_{m1n2}$ , entre un point quelconque m1 sur {S1} et un point quelconque n2 (différent de c) sur {S2}, sont mal calculées par le Calcul Simpliste: sur la Figure D.22 a) on constate un décalage constant d'un facteur deux.

(le point P6 correspond, sur l'assemblage, au point P3 de la deuxième plaque avant couplage) La prise en compte de la symétrie permet de rattraper ce décalage (les  $H_{CORm1n2}$  obtenues sont très voisines de celles exactes) et le calcul EMMA ( $H_{APPM1n2}$ ) converge asymptotiquement vers le bon résultat en haute fréquence.

Cette convergence s'explique car en haute fréquence

$$H_c = \frac{\langle Re^2\{Y_c\} \rangle + \langle Im^2\{Y_c\} \rangle}{2\langle Re^2\{Y_c\} \rangle} \text{ tend vers } \frac{\langle Re\{Y_c\} \rangle}{2},$$

donc le dénominateur approché

$$H_{cc}^I k_c + H_{cc}^{II} + \langle Re\{Y_{cc}^I\} \rangle = 2H_c + \langle Re\{Y_c\} \rangle \text{ tend vers celui exact (ici } = 4H_c).$$

La Figure D.22 b) compare les différents calculs.

On pourrait donc en conclure que le calcul EMMA constitue bien une amélioration par rapport au calcul simpliste, et que la correction du dénominateur suffit à prendre en compte la symétrie. Cependant un dernier cas reste à analyser et il réserve bien de surprises...

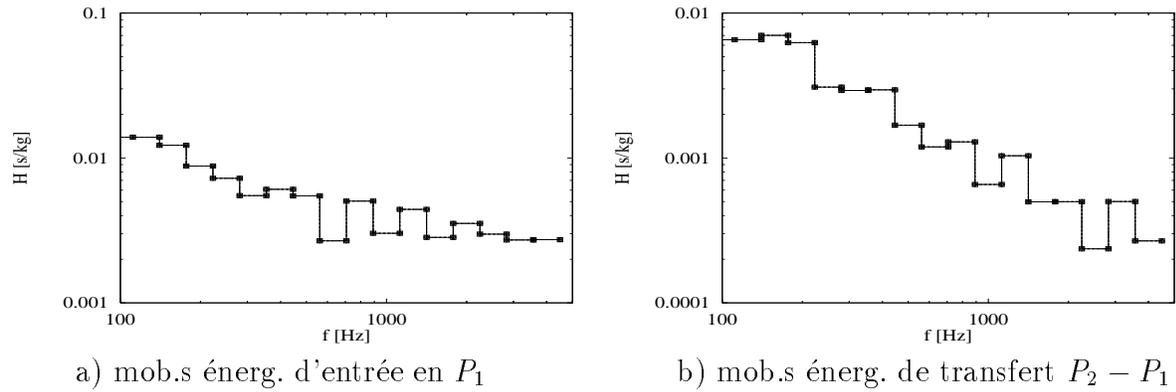


FIG. D.19 - *Assemblage de deux plaques identiques couplées en un point unique c*  
 — calcul exact — — calcul EMMA - - - calcul simpliste  
 Entrée  $H_{cc}$  et transferts  $H_{mc}$  avec une erreur nulle

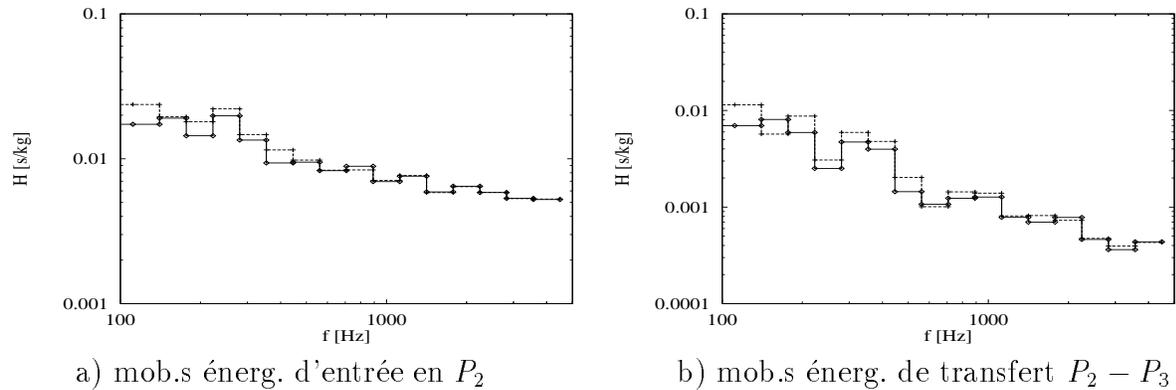


FIG. D.20 - *Assemblage de deux plaques identiques couplées en un point unique c*  
 — avant couplage - - - après couplage  
 Mobilités énergétiques peu modifiées par le couplage

### Cas particulier du transfert symétrique

Pour les mobilités énergétiques de transfert  $H_{m_1m_2}$ , entre un point quelconque  $m_1$  de  $\{S1\}$  et le point symétrique  $m_2$  sur  $\{S2\}$ , le calcul EMMA est mauvais et converge vers celui (mauvais aussi) obtenu avec la simple correction du dénominateur, qui n'est pas suffisante ici.

Plus surprenant encore: le calcul simpliste, pour des raisons qui restent à éclaircir, donne un résultat très correct. Les figures D.23 illustrent ce cas particulier.

**Explication du "mystère"** L'erreur est due essentiellement au fait qu'on considère la moyenne d'un produit de deux quantités comme égale au produit des moyennes alors que les quantités ne sont pas statistiquement indépendantes.

En effet on n'a plus le droit d'écrire que

$$\langle |Y_{m_1c} Y_{cm_2}|^2 \rangle \approx \langle |Y_{m_1c}|^2 \rangle \langle |Y_{cm_2}|^2 \rangle$$

car (en vertu de la réciprocité et de la symétrie)  $Y_{m_1c} = Y_{cm_2}$ , et  $\langle x^2 \rangle \neq \langle x \rangle \langle x \rangle$ , surtout si les données dans la bande analysée présentent un fort écart type (ce qui est

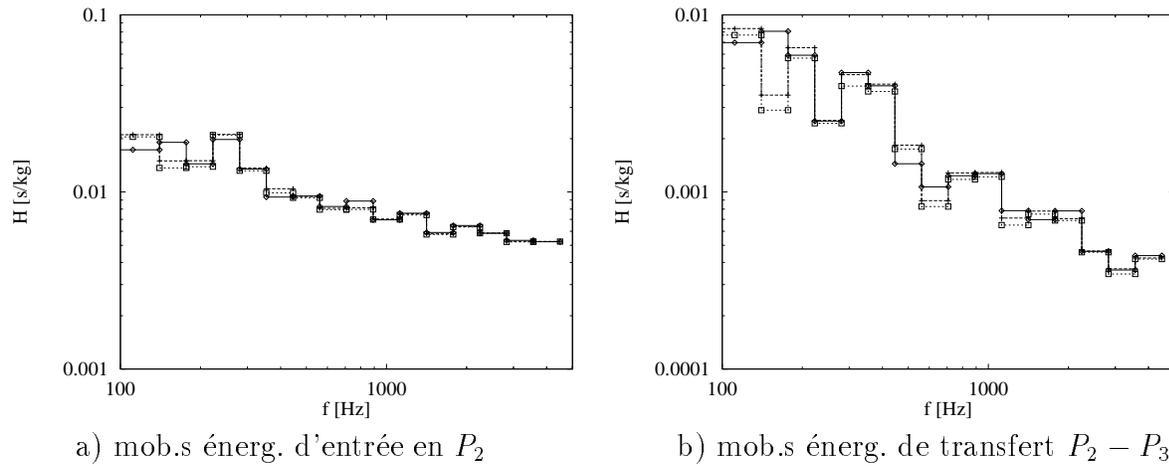


FIG. D.21 - *Assemblage de deux plaques identiques couplées en un point unique c*  
 — calcul exact — calcul EMMA - - - calcul simpliste  
*Mobilités énergétiques à ne pas calculer*

réalisé ici, sur toutes les bandes analysées): voir la Figure D.24.

L'erreur introduite, dans le cas analysé (tout dépend de la mobilité de transfert), est aussi voisine d'un facteur deux; elle rattrape ainsi (à cause de l'amortissement, choisi au hasard) l'erreur (constante) du calcul simpliste et rend la méthode EMMA inadaptée, ainsi que la seule correction du dénominateur.

### Conclusions pour le Couplage en un seul point

Le Calcul EMMA et celui Simpliste (comparés au Calcul Exact) donnent globalement des bons résultats (erreur inférieure à 3 dB) sur les mobilités énergétiques après couplage.

Les mobilités énergétiques d'entrée  $H_{cc}$  au point de couplage  $c$  et celles de transfert  $H_{mc}$  entre un point quelconque  $m$  et le point  $c$  sont calculées quasi exactement (erreur très inférieure à 1 dB).

Le Calcul Simpliste est meilleur pour les transferts interplaque entre deux points symétriques  $H_{m_1m_2}$ . Dans tous les autres cas, le Calcul EMMA est plus performant.

Les erreurs de la tentative Simpliste s'expliquent par l'application abusive de l'additivité énergétique; celles de la EMMA s'expliquent par l'application abusive des hypothèses Hyp.3 a), b) et c).

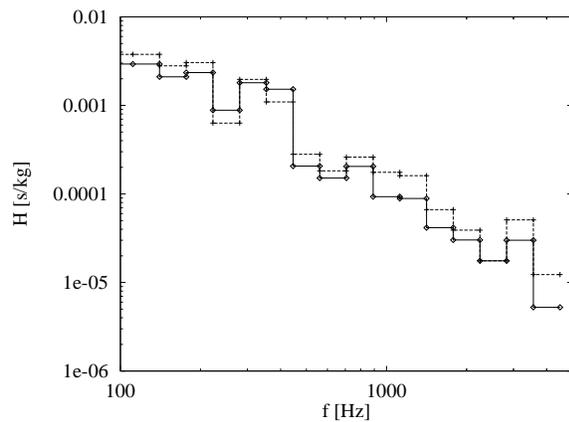
### D.4.2 Couplage en trois points

On considère à présent un couplage rigide (sans dissipation) des mêmes plaques aux trois points  $P_1(0.2;0.4)$ ,  $P_2(0.5;0.1)$ ,  $P_3(0.8;0.6)$  et on calcule aussi au point  $P_4(0.5;0.4)[m]$ .

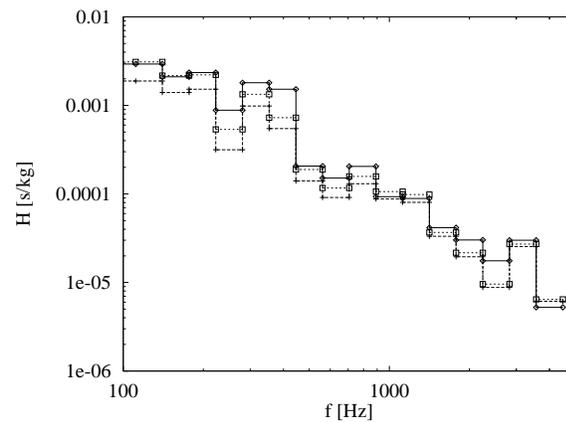
L'intérêt de ce calcul est de pouvoir analyser les interférences entre les différents points de couplage.

#### Mobilités énergétiques quasi exactes

Comme pour le couplage en un seul point, les mobilités énergétiques d'entrée  $H_{cc}$  aux points de couplage  $c$  et celles de transfert  $H_{mc}$ , entre des points non couplés  $m$  et les points de couplage  $c$ , sont très bien calculées par le calcul EMMA et par celui simpliste:



a) Calcul Simpliste inadapté



b) Calculs Exact, Corrigé et Approché (EMMA)

FIG. D.22 - *Mobilités énergétiques de transfert interplaque  $P_2 - P_6$*   
 — calcul exact — — calcul EMMA - - - calcul simpliste  
*Bonne correction par le Calcul Approché (EMMA)*

l'erreur est très inférieure à un dB (Figure D.25). Si deux structures sont couplées en des points de mobilités d'entrée (classiques) identiques, on a vu (cf 3.3.5) qu'on peut faire des corrections a priori, les mobilités ainsi obtenues seront appelées "*corrigées*".

### Mobilités énergétiques bien corrigées

Les mobilités de transfert  $H_{cm}$ , entre les points de couplage  $c$  et ceux non couplés  $m$ , et celles de transfert interplaque  $H_{m1n2}$ , entre deux points non couplés et non symétriques  $m1$  et  $m2$ , sont mal calculées par le calcul simpliste (facteur deux). La correction du dénominateur suffit à expliquer ce décalage (puisque le calcul "corrigé" est très voisin de celui exact), et le calcul EMMA converge asymptotiquement vers le calcul exact.

La figure D.26 synthétise ces résultats (le point P5 correspond, sur la deuxième plaque l'assemblage, au point P4 de la première).

### Cas particulier

Comme pour le couplage en un seul point, on retrouve le "cas particulier" du transfert interplaque  $H_{m1m2}$ , entre deux points symétriques non couplés, et on constate qu'il y a les mêmes erreurs sur le transfert  $H_{c1c2}$  entre deux points de couplage (c'est la seule nouveauté ici). L'explication est la même que dans le cas d'un seul point de couplage. La Figure D.27 illustre ces "dysfonctionnements".

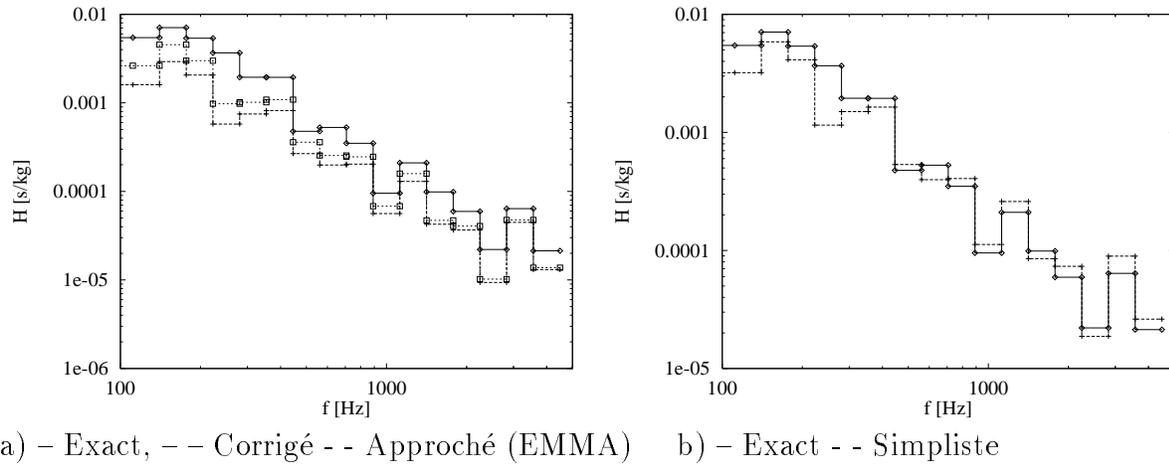


FIG. D.23 - *Mob.s éner. de transfert interplaque entre deux points symétriques. Cas particulier de mauvaise correction.*

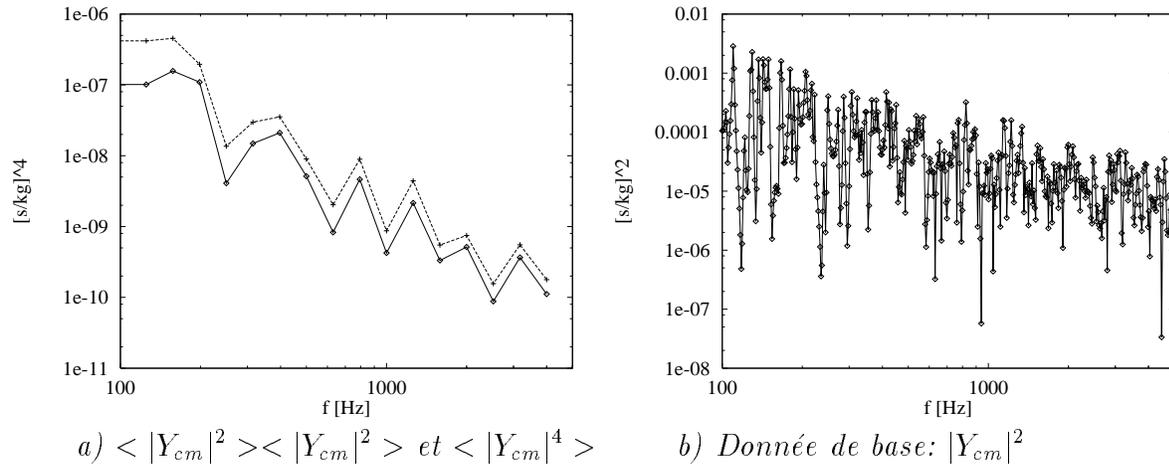


FIG. D.24 - *Analyse de l'erreur du cas particulier — produit des moyennes - - moyenne du produit Visualisation du module carré de la mobilité de transfert.*

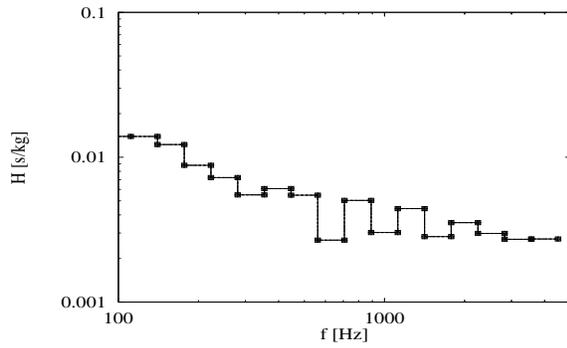
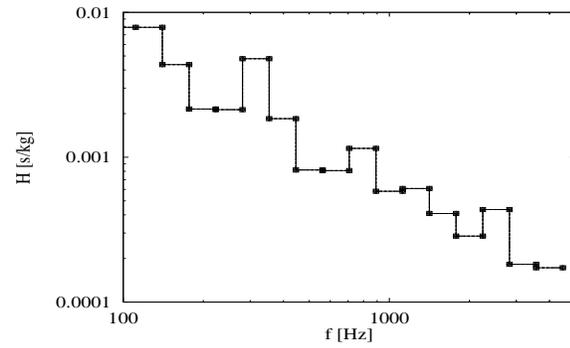
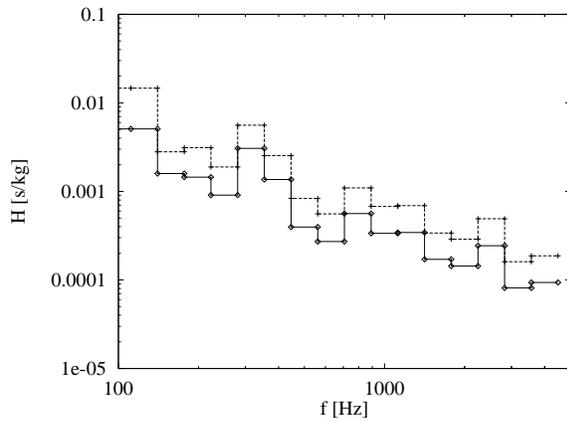
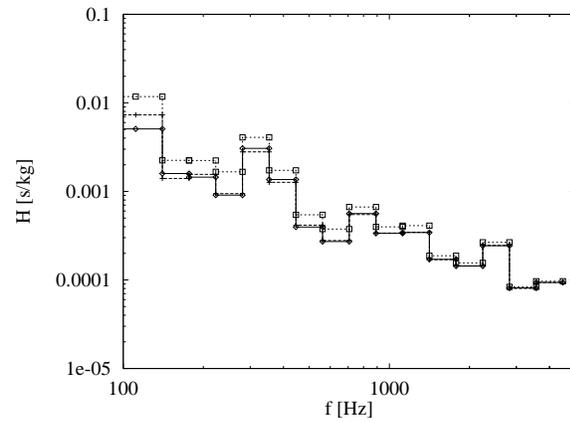
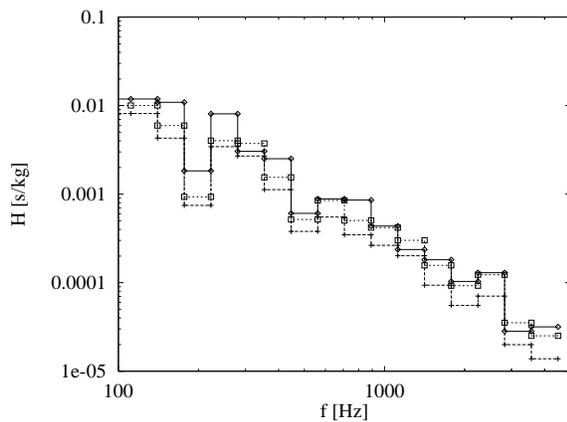
a) mob.s énerg. d'entrée en  $P_1$ b) mob.s énerg. de transfert  $P_2 - P_1$ 

FIG. D.25 - *Assemblage de deux plaques identiques couplées en un point unique c*  
 — calcul exact — — calcul EMMA - - - calcul simpliste  
 Entrée  $H_{cc}$  et transferts  $H_{mc}$  avec une erreur nulle

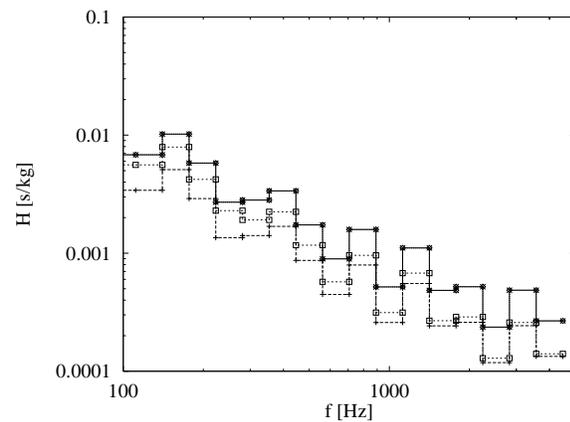
a)  $H_{cm}$ : — exact - - simpliste

b) — exact — — corrigé - - EMMA

FIG. D.26 - *Mobilités énergétiques de transfert  $P_2 - P_5$*   
 Mauvais Calcul Simpliste, bon Calcul EMMA



a) Transfert symétrique interplaque



b) Transfert entre points couplés

FIG. D.27 - *Cas particuliers, avec mauvais Calcul EMMA et bon Calcul Simpliste*  
 — calcul exact — — calcul EMMA - - - calcul simpliste

## Calcul par bandes de 200 Hz

Les plaques identiques ont maintenant une quarantaine de modes par bande.

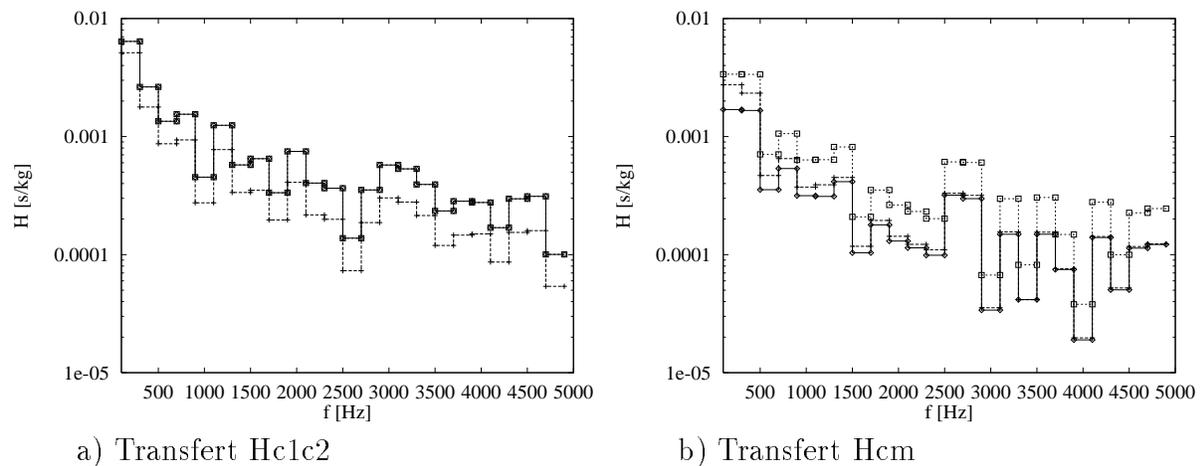


FIG. D.28 - *Mobilités énergétiques de transfert; plaques identiques couplées en 3 points*  
 — calcul exact — — calcul EMMA - - - calcul simpliste

## Conclusions pour le Couplage en trois points

Globalement on retrouve les mêmes résultats que dans le cas du couplage en un seul point:

- l'erreur maximale est d'environ 3dB,
- l'erreur est quasi nulle pour les quantités  $H_{cc}$  et  $H_{mc}$ ,
- le calcul Simpliste est meilleur sur le transfert  $H_{c1c2}$  entre deux points de couplage et sur le transfert interplaque  $H_{m1m2}$ , entre deux points symétriques non couplés,
- le Calcul EMMA est meilleur dans les autres cas.

## Conclusions pour les assemblages symétriques

On a vu par les deux cas précédents, de deux plaques identiques, couplées en un ou en trois points, que la méthode des mobilités énergétiques EMMA s'applique, de façon satisfaisante et que des erreurs (inférieures à 3 dB) subsistent pour les transferts interplaque, entre deux points symétriques et pour les transferts entre deux points de couplage.

Dans ce cas *particulier* d'un assemblage symétrique (de deux structures identiques), le formalisme des mobilités classiques s'applique aussi aux quantités énergétiques ("Calcul Simpliste") avec une erreur d'environ 3dB. Cette erreur peut augmenter, en théorie, si les structures couplées sont très peu amorties.

De plus, sur les transferts, lorsque un calcul présente l'erreur maximale, l'autre est très performant (et vice versa).

Donc ce n'est pas sur ce cas qu'on peut montrer le bien fondé de la Méthode EMMA. On préconise cependant d'appliquer la EMMA ici aussi, en tenant compte du fait que les transferts entre points de couplage et ceux interplaque entre points symétriques, seront sousestimés: ceux exacts sont ici jusqu'à deux fois plus forts que ceux prévus par les  $H_{APP}$ , et si on diminuait l'amortissement des structures, ce décalage pourrait encore s'accroître.



## Annexe E

# Compléments aux simulations de cas plus complexes

### E.1 Assemblage de plaques hétérogènes

#### Définition des structures et compléments

Sur la première plaque,  $S1$ , aux points  $P1(0.2;0.5)$ ,  $P4(0.5;0.6)$  et  $P6(0.6;0.3)$ , on a attaché des masses ponctuelles, respectivement de  $0.1\text{kg}$ ,  $0.2\text{kg}$  et  $0.5\text{kg}$  et on l'a couplée toujours aux points  $P1(0.2;0.5)$ ,  $P2(0.4;0.2)$ ,  $P3(0.7;0.3)$ , à la deuxième plaque,  $S2$ .

Ici on complète l'illustration de ce cas par la comparaison du calcul exact et approché

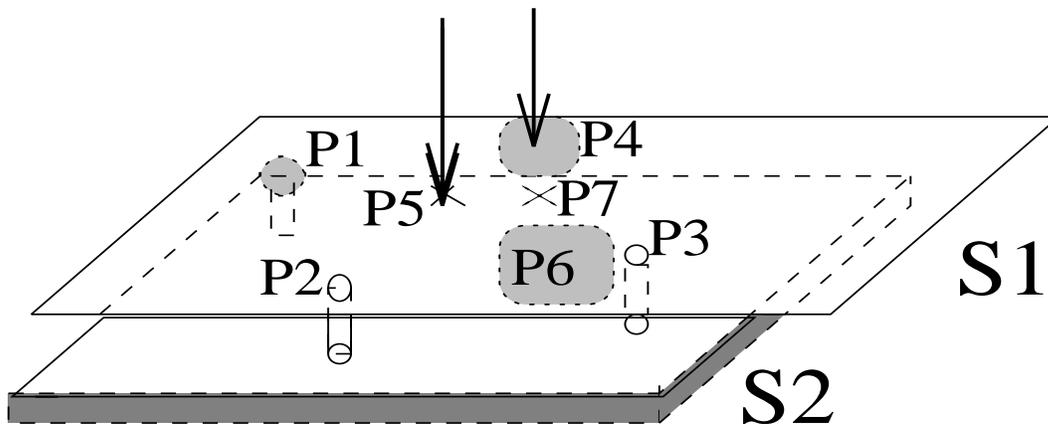


FIG. E.1 - *Plaque  $S1$  hétérogène couplée rigidement à  $S2$*

des "miels" après couplage en des points moins "critiques" que ceux montrés au chapitre 4 (Figure E.3) et par la vérification de l'hypothèse des sources de puissance active moyenne, en comparant les puissances actives moyennes exactes injectées dans la plaque mince avant et après couplage (Figure E.2).

Enfin on trace encore la puissance active moyenne totale échangé obtenue par le calcul exact et par le calcul approché (Figure E.4). On constate que tous ces calculs sont pleinement satisfaisants.

Les différences de niveau sur les puissances injectées au point  $P4$  et au point  $P5$ , traduisent bien la présence de la masse concentrée (au point  $P4$ ).

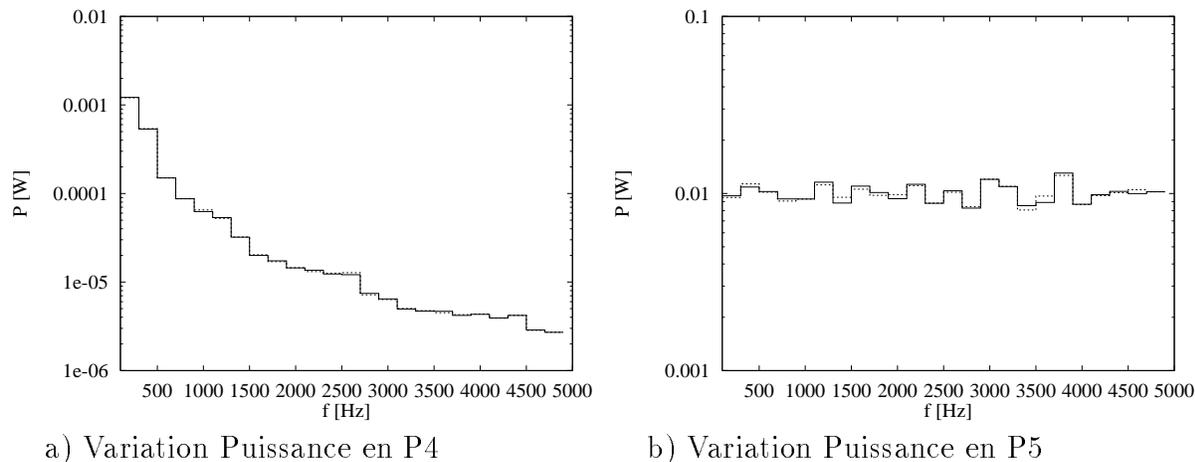


FIG. E.2 - Puissances actives moyennes extérieures injectées  
 — avant couplage - - - après couplage

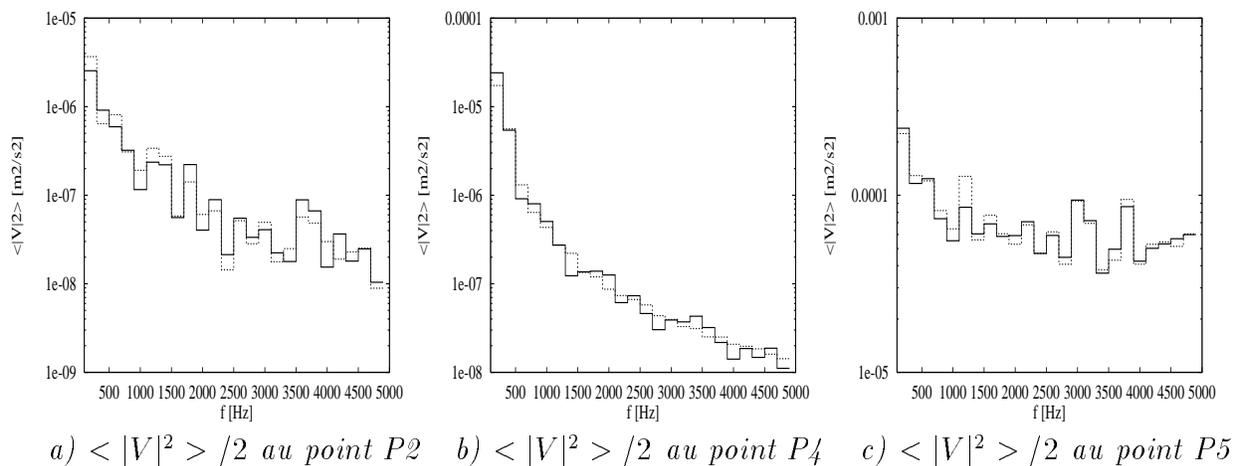


FIG. E.3 - Reconstitution des "miels" après couplage:  
 — calcul exact - - - calcul EMMA

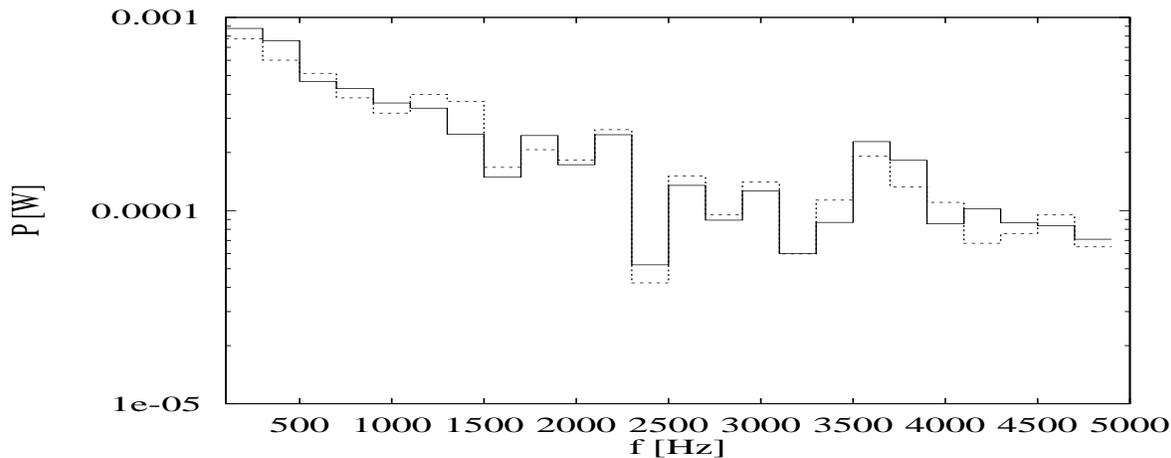


FIG. E.4 - Reconstitution de la puissance active totale échangée:  
 — calcul exact - - - calcul EMMA

### E.1.1 Variation des sources pour deux systèmes excités

On a aussi considéré le cas d'une source de force ( $|F| = 100[\text{N}]$ ), qui excite la deuxième plaque et étudié la variation de la puissance active moyenne injectée par les deux premières sources ( $|F| = 1[\text{N}]$ ): elle est très forte (Figure E.5), les puissances actives moyennes injectées peuvent même devenir négatives. L'hypothèse de sources de puissance active moyenne est alors complètement fautive. Cependant dans ce cas la contribution des puissances qui ont changé est négligeable devant celle des puissances "principales" qui les ont faites changer: même aux deux points d'injection directe de ces "fausses puissances" on arrive à bien reconstituer les "miels" après couplage par la méthode EMMA, qui utilise l'hypothèse de sources de puissance (voir Figure E.6).

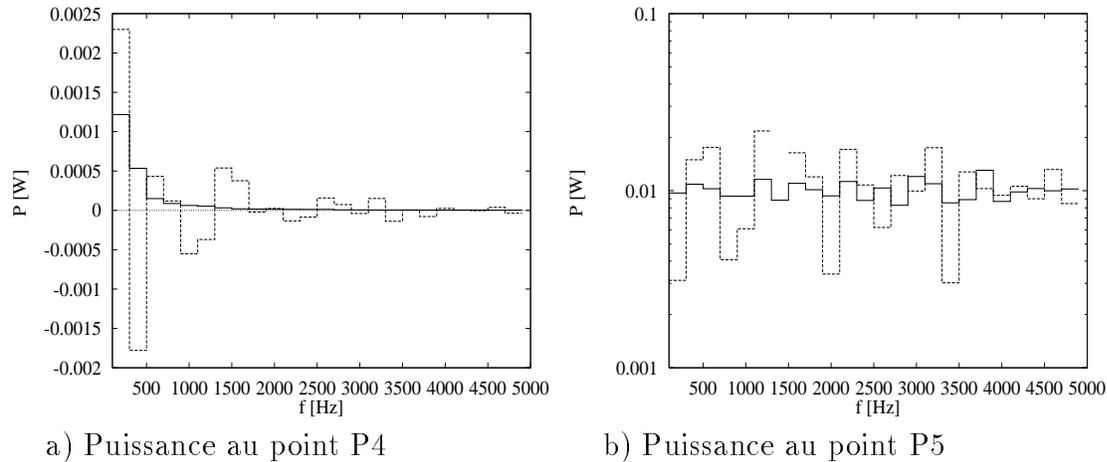


FIG. E.5 - Puissances actives moyennes injectées dans  $S1$   
 — avant couplage - - - après couplage, avec forte excitation sur  $S2$

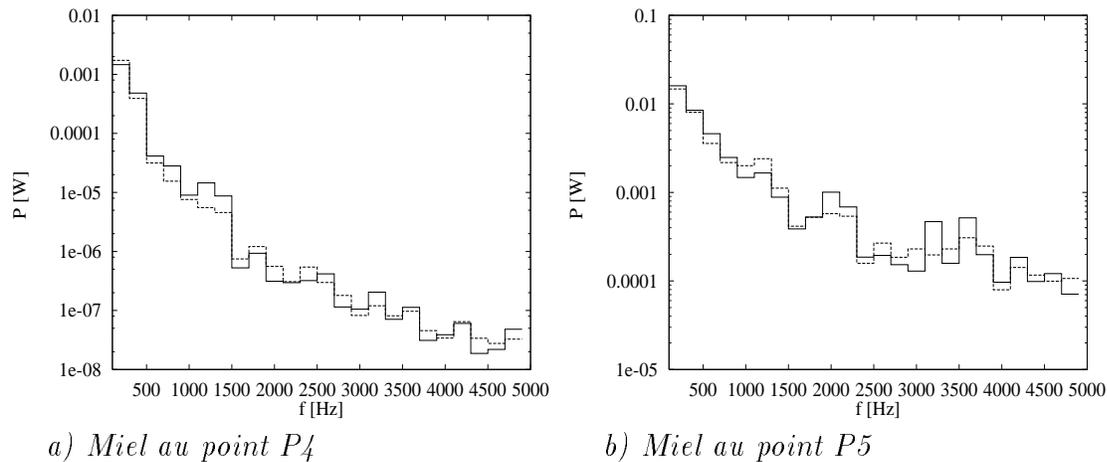


FIG. E.6 - Miels aux points excités de  $S1$ , avec forte excitation sur  $S2$   
 — calcul exact - - calcul EMMA

## E.2 Couplages élastiques et dissipatifs

On compare ici les puissances échangées et les "miels" après couplage, obtenus par le calcul exact (par mobilités classiques), ceux obtenus par le calcul approché "total" (qui considère les systèmes intermédiaires comme un système énergétique C1 et opère d'abord l'assemblage "A1 approché" de S1 avec C1, puis celui de "A1 approché" avec S2) et ceux obtenus par le calcul approché "partiel" de l'assemblage de A1 (exact) avec la plaque S2 (voir Figure 5.11).

Le couplage élastique et dissipatif pose en effet un problème de principe: les systèmes intermédiaires n'ont pas de modes dans la plupart des bandes, même pour un faible recouvrement modal, donc le calcul énergétique "total" ne se justifie pas, même si les mobilités énergétiques définies pour ces systèmes intermédiaires représentent bien des rapports entre la puissance injectée et le miel obtenu ("faible erreur de définition").

Si l'on considère cependant les systèmes intermédiaires C1 comme étant rattachés à une sous-structure ou à l'autre, le calcul des quantités énergétiques "partiel" après couplage devient sensé.

### E.2.1 Étude d'un système de couplage de faible raideur

Considérons d'abord un système de couplage de "faible" raideur ( $M= 0.0005$  [kg],  $K= 100$  [N/m],  $C=0.1$  [N.s/m]); sa fréquence de résonance est autour de 70 Hz, et sa mobilité d'entrée est visualisée sur la Figure E.7.

Les puissances échangées sont globalement assez bien prévues, tant par le calcul ap-

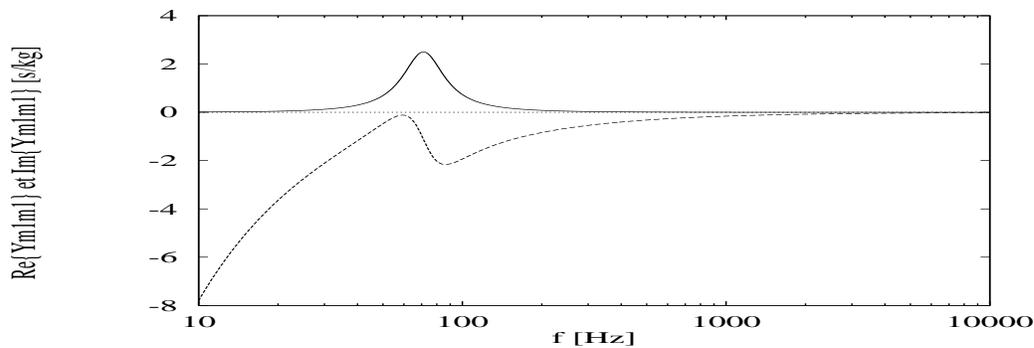


FIG. E.7 - Mobilité d'entrée du système intermédiaire

proché total que par celui partiel. L'erreur peut atteindre 10 dB sur certaines bandes (cf. Figure E.8). Les "miels" après couplage sont cependant bien reconstitués (Figure E.9), même au point non couplé P7 de la structure réceptrice, c'est à dire en utilisant uniquement les contributions des puissances échangées, par additivité énergétique.

### E.2.2 Faible raideur, dissipation augmentée

Par rapport au calcul présenté en 5.2.1, on augmente maintenant l'amortissement d'un facteur dix: ( $M= 0.0005$  [kg],  $K= 100$  [N/m],  $C=1$  [N.s/m]); les autres données sont inchangées.

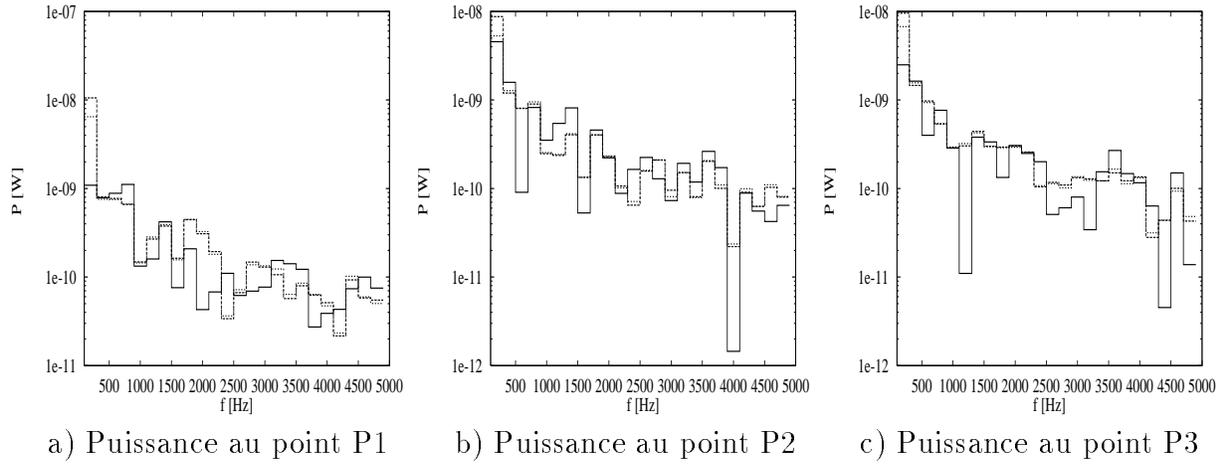


FIG. E.8 - *Puissances actives moyennes échangées (reçues par S2)*  
 — calcul exact — — calcul approché total - - - calcul approché partiel

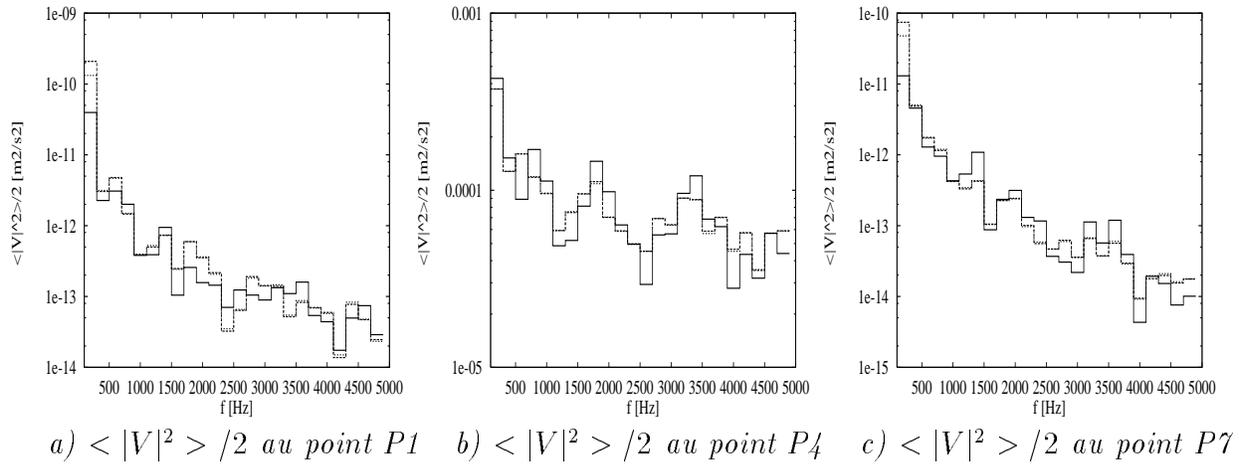


FIG. E.9 - *Reconstitution des "miels" (P1 est sur S2)*  
 — calcul exact — — calcul approché total - - - calcul approché partiel

Les puissances échangées sont encore assez bien prévues (cf. Figure E.11), par le "calcul approché total", comme par le "calcul approché partiel", sauf sur quelques bandes, avec de fortes erreurs.

Les "miels" après couplage sont cependant bien reconstitués (Figure E.12), même au point non couplé P7 de la plaque réceptrice (obtenu avec les seules puissances échangées).

### E.2.3 Raideur augmentée

On augmente maintenant la raideur  $K$  des ressorts d'un facteur 10: ( $M=0.0005$  [kg],  $K=1000$  [N/m],  $C=1$  [N.s/m]) La résonance des systèmes intermédiaires est à environ 318 Hz, (voir Figure E.13) donc dans la plage d'analyse (de 100 à 5000 Hz).

Dans les puissances échangées (cf. Figure E.14) et dans les "miels" (Figure E.15) on commence à voir un décalage entre le calcul approché "total" et celui "partiel", surtout en dessous de la résonance des systèmes intermédiaires, pour les deux premières bandes.

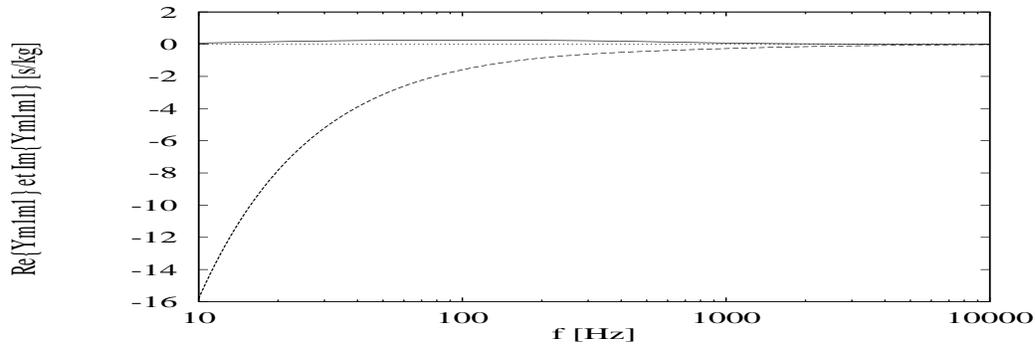


FIG. E.10 - Mobilité d'entrée du système intermédiaire

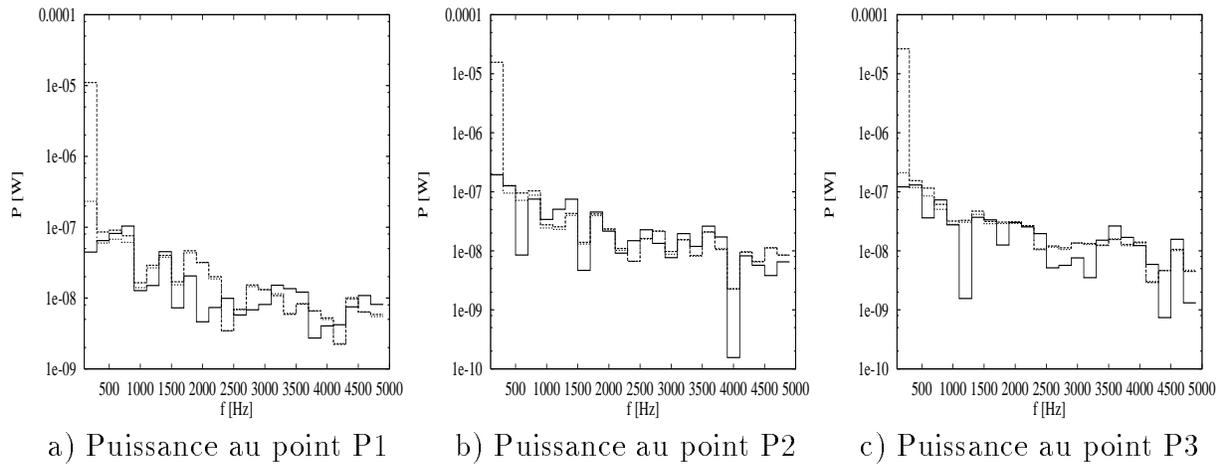


FIG. E.11 - Puissances actives moyennes échangées (reçues par S2)  
 — calcul exact    - - calcul approché total    - - - calcul approché partiel

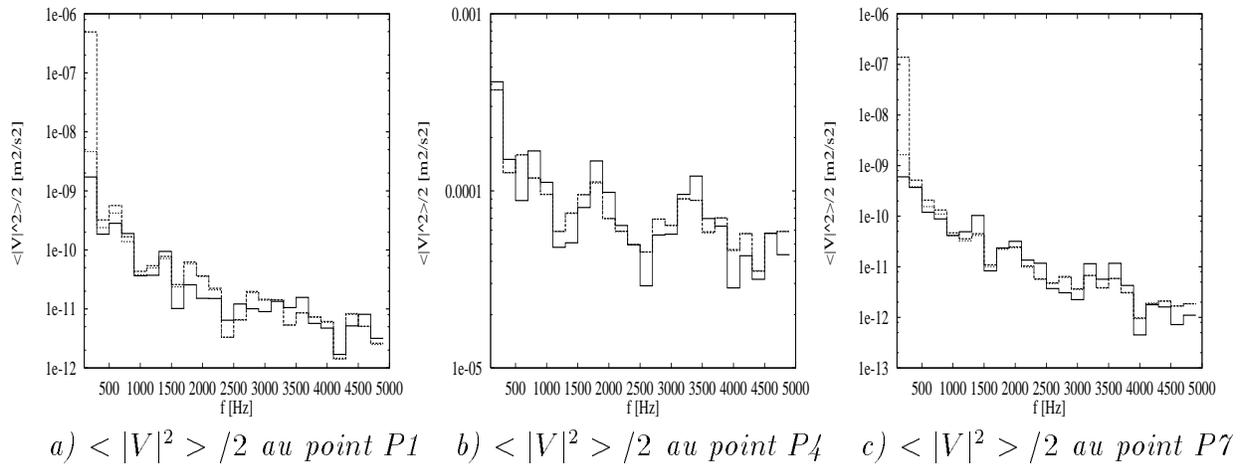
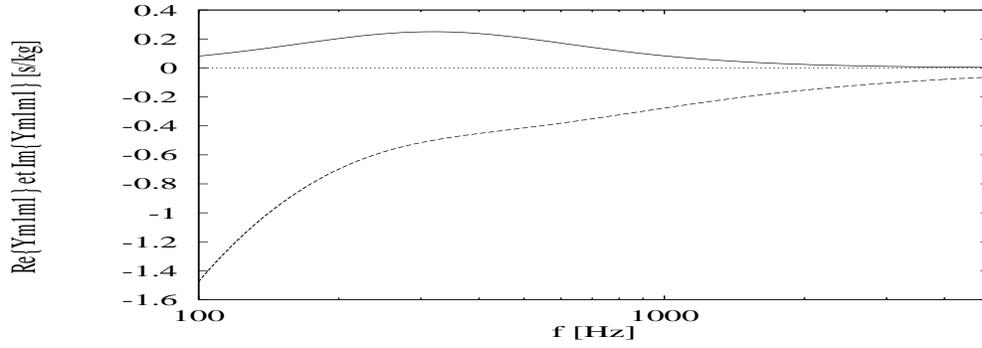
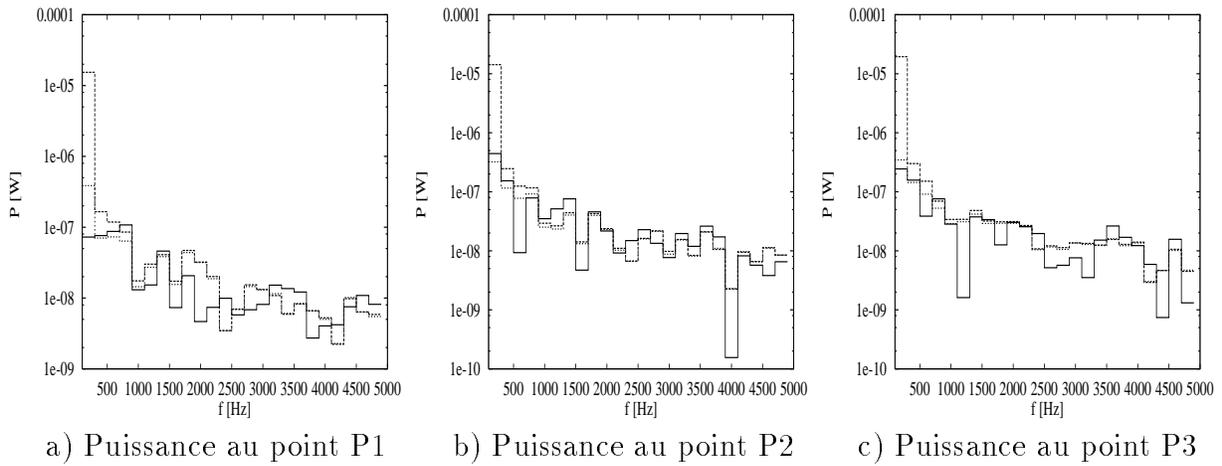
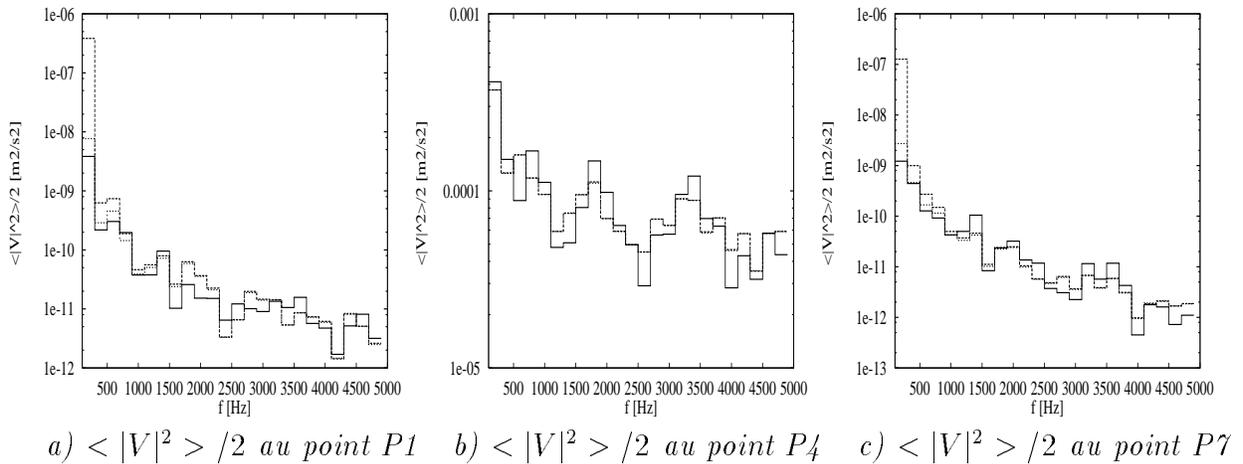


FIG. E.12 - Reconstitution des "miels" (P1 est sur S2)  
 — calcul exact    - - calcul approché total    - - - calcul approché partiel

FIG. E.13 - *Mobilité d'entrée du système intermédiaire*FIG. E.14 - *Puissances actives moyennes échangées (reçues par S2)*  
— calcul exact — — calcul approché total - - - calcul approché partielFIG. E.15 - *Reconstitution des "miels" (P1 est sur S2)*  
— calcul exact — — calcul approché total - - - calcul approché partiel

### E.2.4 Étude d'un système de couplage de forte raideur

On considère maintenant un système de couplage de raideur  $K=100000$ ; dans la plage d'analyse 100 - 5000 Hz on a maintenant une zone en dessous de la résonance des systèmes intermédiaires (environ 3100 Hz) et une zone au dessus (Figure 5.15).

Les puissances échangées du calcul "approché total" sont complètement fausses (cf. Figure E.16), jusqu'à la bande pour laquelle la partie imaginaire de la mobilité des systèmes intermédiaires passe par zéro pour la première fois (autour de 2300Hz); autour de la résonance elles sont encore mauvaises, puis se rapprochent asymptotiquement du calcul approché partiel. Sur les "miels" on retrouve ces erreurs (cf. Figure E.17).

Le point P4 de la première structure, excité directement, est évidemment bien calculé par les deux méthodes approchées.

Le calcul approché partiel est généralement satisfaisant, avec des erreurs allant jusqu'à un facteur cinq sur les puissances et à un facteur trois sur les "miels".

(cf. Figure E.17)

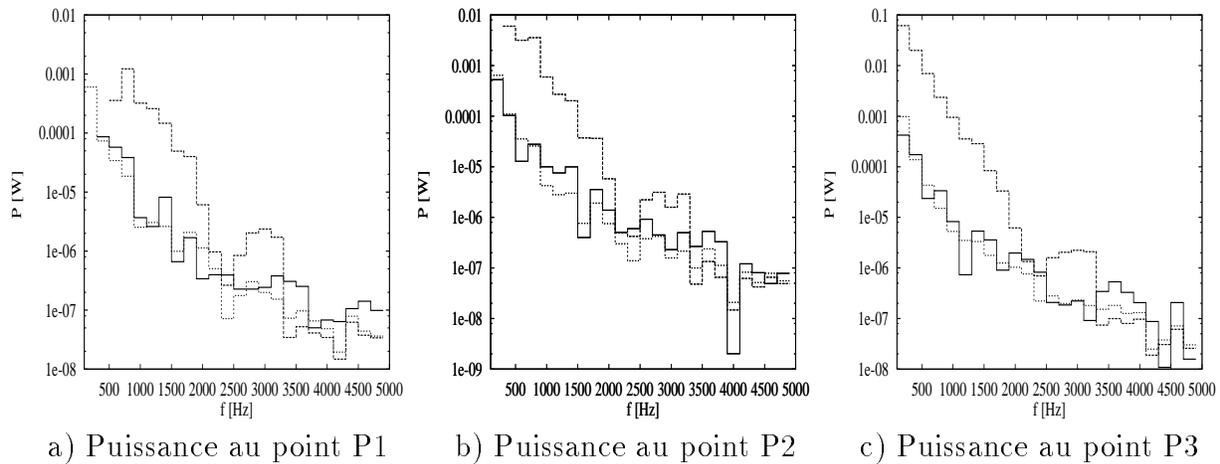


FIG. E.16 - Puissances actives moyennes échangées (reçues par  $S_2$ )

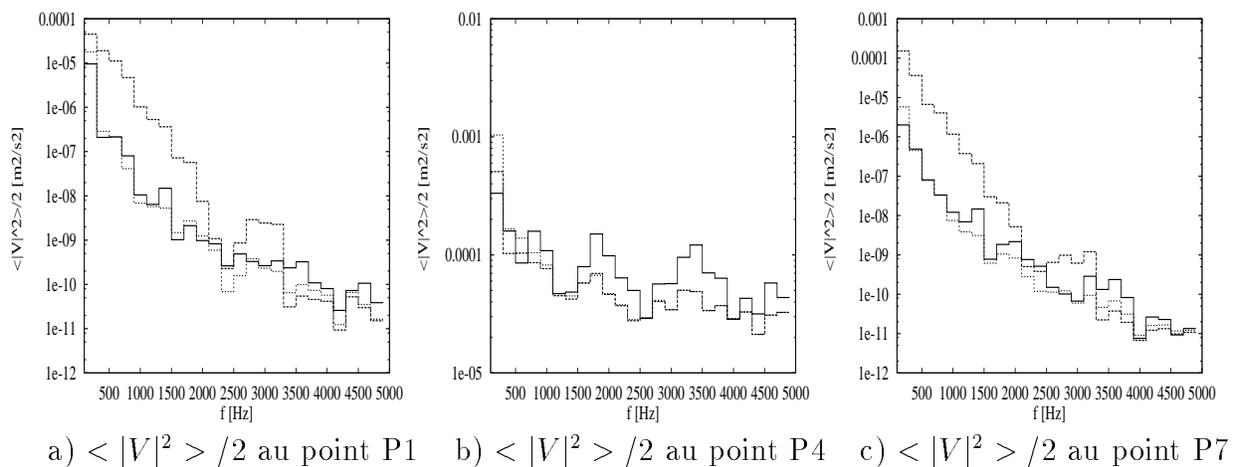


FIG. E.17 - Reconstitution des "miels" (P1 est sur  $S_2$ )  
 — calcul exact — calcul approché total - - - calcul approché partiel

### E.2.5 Forte raideur, dissipation augmentée

Par rapport au calcul précédent, on augmente maintenant l'amortissement d'un facteur dix: ( $M= 0.0005$  [kg],  $K= 100000$  [N/m],  $C=10$  [N.s/m]); les autres données sont inchangées. Les puissances échangées sont encore mal prévues (cf.Figure E.19), par le "calcul approché

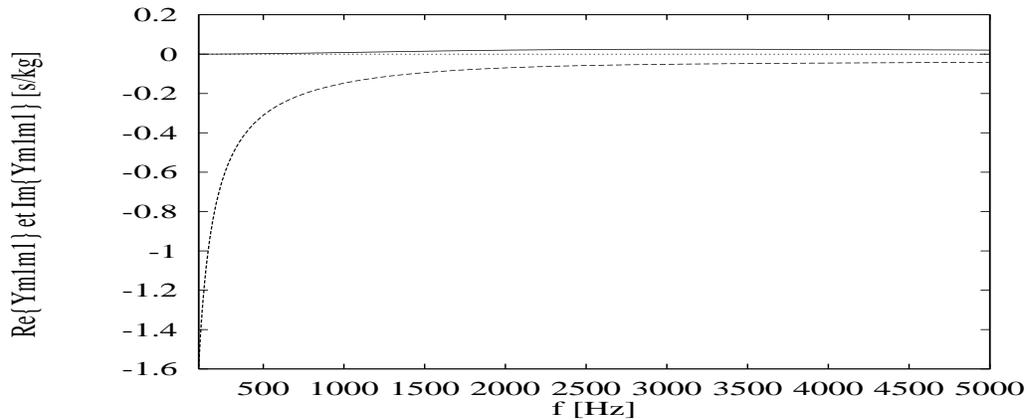


FIG. E.18 - *Mobilité d'entrée du système intermédiaire*

total", en dessous et autour de la fréquence de résonance des systèmes intermédiaires (quelques valeurs négatives sur les premières bandes ne sont pas représentables en échelle log.).

Comme la partie imaginaire de la mobilité d'entrée de ces derniers ne s'annule plus, à cause de la forte dissipation, on n'a plus les deux plages de fréquences avec un très bon calcul, qu'on avait au 5.2.2.

Le calcul approché total, converge encore vers le calcul approché partiel au dessus de la fréquence de résonance. Cependant il converge plus lentement que dans le cas d'une dissipation plus faible.

Sur la première plaque (voir le "miel" au point P4), les résultats des deux calculs approchés sont presque identiques.

Le "calcul approché partiel" est satisfaisant, sauf pour les toutes premières bandes.

Les "miels" après couplage sont toujours mieux reconstitués que les puissances échangées (Figure E.12), même au point non couplé P7 de la structure réceptrice, c'est à dire en utilisant uniquement les contributions des puissances échangées, par additivité énergétique.

Pour compléter cette étude il faudrait considérer le cas de trois systèmes intermédiaires différents entre eux et observer le "miel" après couplage sur un point de S2 équidistant des trois points de couplage.

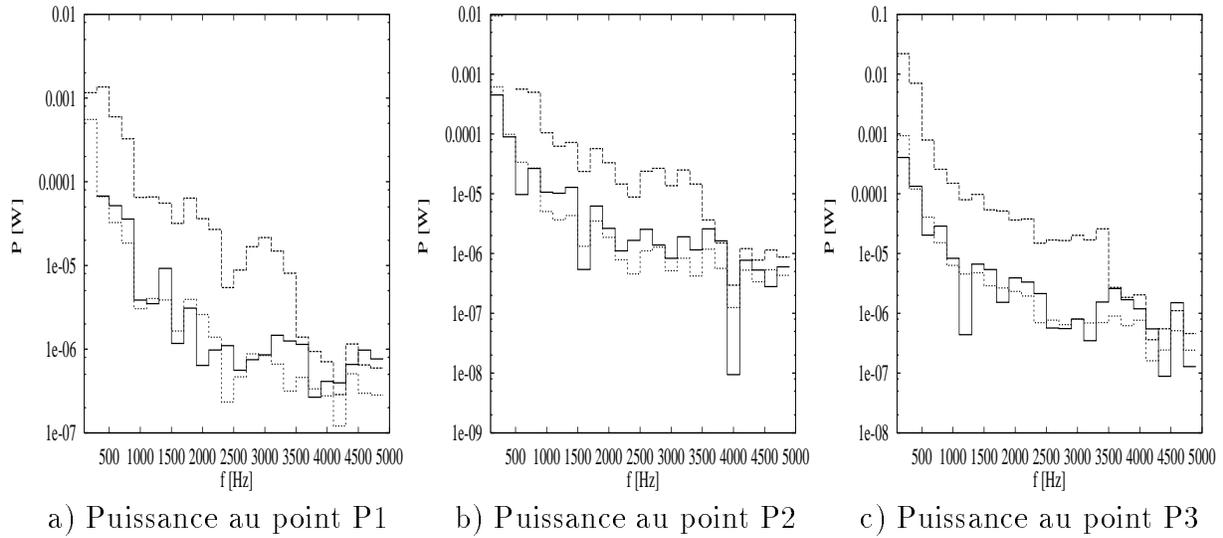


FIG. E.19 - *Puissances actives moyennes échangées (reçues par S2)*  
 — calcul exact — — calcul approché total - - - calcul approché partiel

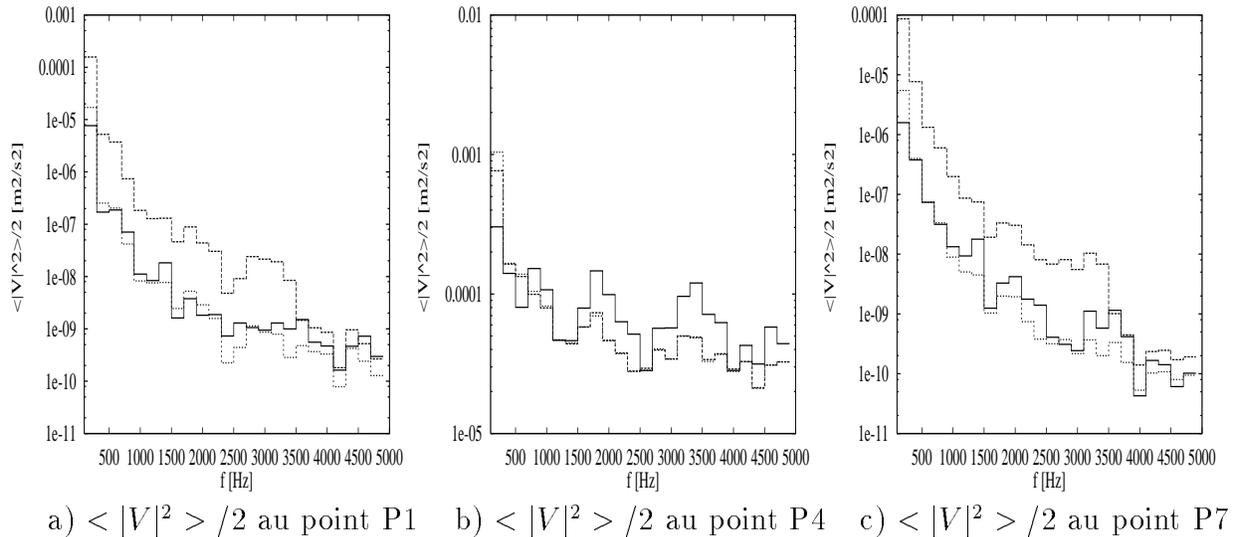


FIG. E.20 - *Reconstitution des "miels" (P1 est sur S2)*  
 — calcul exact — — calcul approché total - - - calcul approché partiel

### E.2.6 Excitation de part et d'autre, variation des sources

Dans l'assemblage du 5.2.2, avec des liaisons de forte raideur ( $M=0.0005$  [kg],  $K=100000$  [N/m],  $C=1$  [N.s/m]), on excite à présent aussi le deuxième système par une force constante de module 100 [N] au point P7, les points P4 et P5 de S1 étant toujours excités par des forces unitaires. La variation de la puissance active moyenne injectée par ces forces avant et après couplage, représentée dans la Figure E.21, reste faible (car le couplage est faible), mais, contrairement aux attentes, elle ne diminue pas en montant en fréquence.

Le calcul approché des "miels" après couplage en ces mêmes points P4 et P5, excités directement, qui utilise les puissances injectées avant couplage au lieu de celles injectées après couplage, reflète ces variations mais est toujours très satisfaisant (cf. Figure E.22).

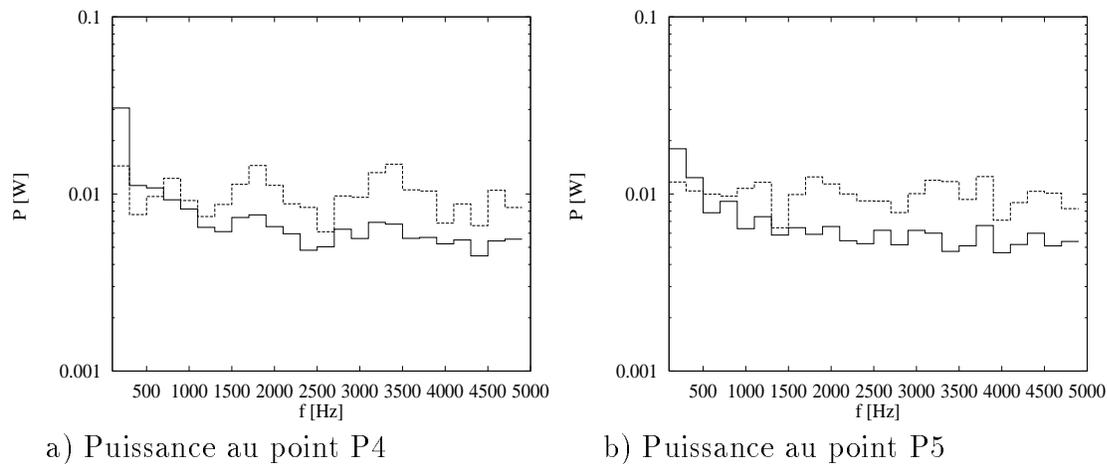


FIG. E.21 - *Puissances actives moyennes injectées dans S1*  
 — avant couplages - - - après couplages

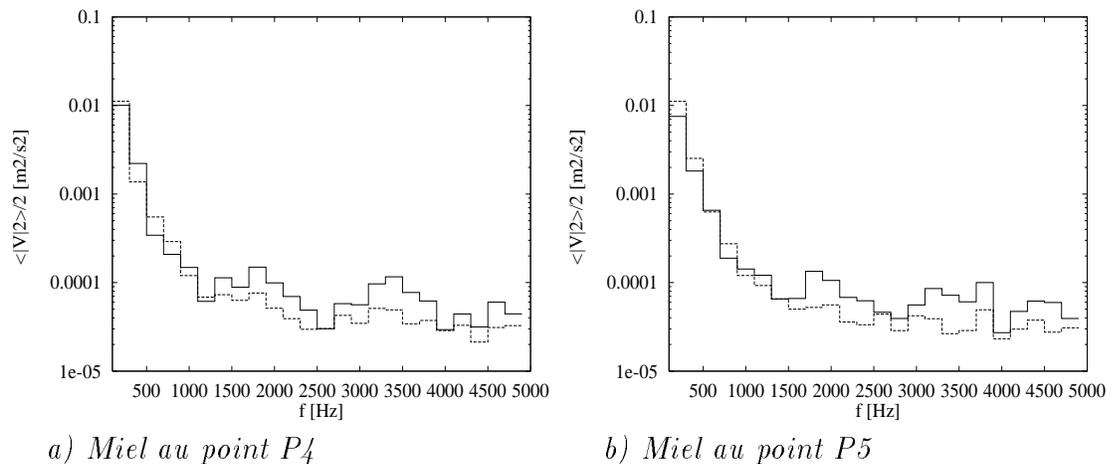


FIG. E.22 - *"Miels" aux points excités*  
 — calcul exact - - - calcul EMMA

### E.3 Pistes pour un indicateur d'erreur

Etant donné que les forces extérieures et les efforts de couplage ne sont pas indépendants les uns des autres, on peut exprimer l'erreur (pessimiste) du calcul des "miels" en termes des seules mobilités classiques. On peut donc obtenir des expressions qui comportent des moyennes fréquentielles de produits et de rapports de mobilités classiques; des expressions analogues à celles des termes "croisés" qui conditionnent l'additivité énergétique.

Qualitativement la moyenne de ces produits, ou rapports, sera d'autant plus petite qu'ils changent de signe à l'intérieur de la bande considérée.

Ici encore l'erreur sera liée à la distance entre les points d'excitation, qui déterminera la décorrélation effective des différentes mobilités et l'efficacité de leurs oscillations.

Il semble alors impossible de prévoir l'erreur de calcul sur chaque bande de fréquences sans effectuer le calcul exact.

Cependant plus il y a de changements de signe pour chacune des mobilités (pour sa partie réelle ou sa partie imaginaire), plus on a des chances d'avoir des changements de signe pour leurs produits et rapports. C'est dans ce sens qu'on propose d'utiliser *le nombre d'oscillations par bande des parties imaginaires des mobilités classiques*, comme indicateur approximatif de la qualité du calcul.

Ce paramètre peut facilement se mesurer par le nombre de passages à zéro de la partie imaginaire des mobilités. Il augmente avec la largeur de la bande et avec la densité modale et semble mieux correspondre qualitativement aux variations de l'erreur, dans les différentes simulations effectuées (sans qu'on puisse pour autant établir une relation simple entre l'erreur et le nombre d'oscillations dans chacune des bandes). D'après les simulations numériques effectuées (cf. 4.3.1, D.2.2, et D.3) il semblerait aussi que pour obtenir le même niveau d'erreur, il suffit de moins d'oscillations en haute fréquence, lorsque l'amplitude de celles-ci est plus petite (et le recouvrement modal est plus fort). Donc cette amplitude des oscillations peut constituer un deuxième indicateur.

#### Signification physique

En basse fréquence, le nombre de modes dans une bande est directement lié au nombre de passages à zéro de la partie imaginaire de la mobilité d'entrée  $Im\{Y_e\}$ , mais dès que le recouvrement modal est supérieur à 1, on ne peut plus séparer les modes sur  $Re\{Y_e\}$  et  $Im\{Y_e\}$ , qui ne passe plus par zéro à chaque mode, oscille de moins en moins dans la bande de fréquences.

*Le nombre d'oscillations dans une bande dépend donc du nombre de modes (ou de la densité modale), mais aussi du recouvrement modal.*

Pour une structure homogène, Bourguine ([7]), ou Cremer et Heckl ([20]) ont établi le lien entre la densité modale  $n(f)$ , la masse totale  $M_T$  et la moyenne spatiale de la mobilité d'entrée  $\langle Y_{ee} \rangle_S$ :

$$n(f) = 4M_T \langle Re\{Y_{ee}(f)\} \rangle_S \quad (E.1)$$

Pour des structures complexes on peut se demander comment accéder à la densité modale ou au nombre de modes et si elle est encore utile pour des calculs locaux. De plus elle n'intervient pas explicitement dans la méthode des mobilités énergétiques.

Ici toute la méthode se base sur des quantités locales mesurables et bien définies: les mobilités classiques. On va donc essayer de dégager des critères lié aux mobilités d'entrée qu'on a déjà mesurées.

On dispose de  $\langle Re^2\{Y_e\} \rangle + \langle Im^2\{Y_e\} \rangle$ , de  $\langle Re\{Y_e\} \rangle$  et de leur rapport  $H_e = \frac{\langle Re^2\{Y_e\} \rangle + \langle Im^2\{Y_e\} \rangle}{\langle Re\{Y_e\} \rangle}$ .

En basse fréquence on a  $\langle Re^2\{Y_e\} \rangle \approx \langle Im^2\{Y_e\} \rangle$  et  $\langle Re^2\{Y_e\} \rangle$  est supérieur à  $\langle Re\{Y_e\} \rangle \langle Re\{Y_e\} \rangle$  (d'autant plus que l'écart type de  $Re\{Y_e\}$  est grand), donc  $H_e$  est d'autant supérieur à  $2 \langle Re\{Y_e\} \rangle$  que l'amortissement est faible (et l'amplitude des oscillations est forte).

En haute fréquence l'amplitude des oscillations est plus faible et on a  $\langle Re^2\{Y_e\} \rangle \gg \langle Im^2\{Y_e\} \rangle$  et  $\langle Re^2\{Y_e\} \rangle \approx \langle Re\{Y_e\} \rangle \langle Re\{Y_e\} \rangle$ , donc  $H_e \approx \langle Re\{Y_e\} \rangle$ .

Le rapport  $\frac{H_e}{\langle Re\{Y_e\} \rangle}$  est donc un indicateur du recouvrement modal et de l'amplitude des oscillations .

On propose d'utiliser ce rapport  $\frac{H_e}{\langle Re\{Y_e\} \rangle}$ , pour compléter (pondérer) le nombre  $N_0(Y_{me})$  de passages à zéro de  $Im\{Y_{me}\}$ .

Ces deux ingrédients,  $N_0(Y_{me})$  et  $\frac{H_e}{\langle Re\{Y_e\} \rangle}$ , sont mesurables, exprimés par bande de fréquence et sont locaux. Il faut les pondérer et fabriquer un indicateur unique à relier à l'erreur sur les "miels" après couplage, en traitant beaucoup de cas d'assemblages.



# Annexe F

## Compléments aux applications expérimentales

### F.1 Méthodologie de mesure des mobilités classiques

#### F.1.1 Principe des Montages

Pour mesurer les mobilités des sous-structures isolées il faut soit les suspendre, soit (par exemple s'il s'agit de la structure principale), il faut les placer dans la position réelle (configuration d'utilisation) qu'elles auraient après assemblage.

Dans tous les cas les structures périphériques (câbles, plots de suspension, supports etc.) greffées à ces systèmes doivent être isolées de toute source extérieure et elles ne doivent subir aucune modification extérieure lors du couplage (autre que celles propres au couplage).

#### Suspensions et Excitations

Lorsqu'on suspend les sous-structures isolées il vaut mieux que les ventuels efforts dus aux suspensions (traction ou compression) s'exercent dans une direction orthogonale à celle dans laquelle on va exercer l'excitation extérieure (direction de mesure) (cf. Figure F.1). De même on évitera de bloquer la structure en rotation suivant les axes d'une excitation extérieure par moments.

Les efforts et moments restants doivent être négligeables par rapport à l'excitation principale, ou s'exercer sur des parties peu mobiles de la structure.

#### Signe des mobilités

Si en théorie la correction du signe des mobilités ne pose pas de problèmes, dans la pratique elle peut tourner au casse tête pour des structures minces compliquées, qui ont des points de couplage inaccessibles, ou mesurables "du mauvais côté".

La cause principale des doutes est le signe du signal de sortie des différents capteurs (le "sens de mesure" fixé par le constructeur des appareils), surtout s'il n'est pas indiqué par la documentation.

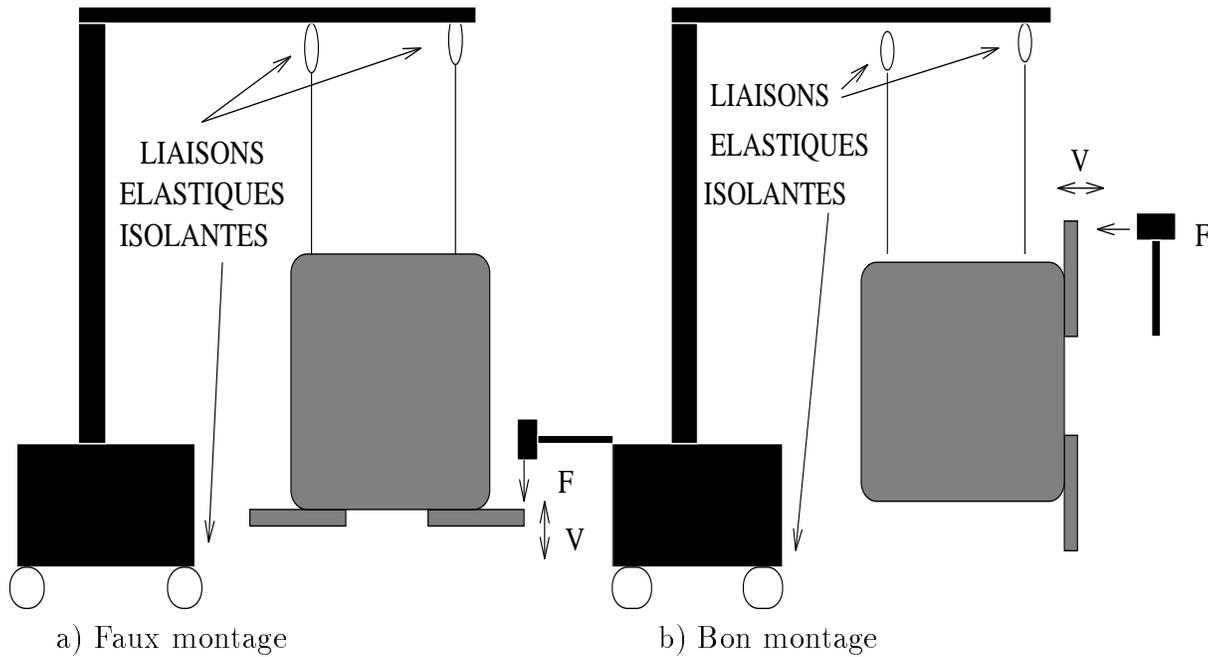


FIG. F.1 - Montage pour mesure de mobilités de force

### Signe des mobilités d'entrée

La correction des mobilités d'entrée ne pose pas de problèmes: quelle que soit la direction de mesure ou d'excitation, il faut qu'au bout du compte la mobilité ait une partie réelle positive.

On peut aussi fixer une convention par rapport aux signes des signaux (de force et vitesse) issus d'une tête d'impédance. L'ayant obtenue, on peut se fixer une convention pour le sens positif d'excitation et de mesure (voir par exemple sur les Figures F.2 et F.3)

### Correction des mobilités de transfert

Ayant fixé le sens positif des capteurs d'accélération, tous les problèmes ne sont pas résolus pour autant: considérons un transfert entre deux futurs points de couplage  $c$  et  $k$ , (cf. Figure F.3 b), il ne s'agit pas de faire coïncider les sens de l'excitation en  $c$  et de la vitesse en  $k$ , mais de faire coïncider les sens de l'excitation actuelle en  $c$  et de celle qu'il faut exercer en  $k$  pour mesurer la mobilité d'entrée en  $k$ .

### Réciprocité

La réciprocité permet de vérifier que le système d'excitation et de mesure de la vitesse sont adaptés et que le montage est assez stable entre deux mesures différentes (par exemple on vérifie que les moments injectés ont un effet négligeable par rapport aux forces normales). Le principe est simple: on intervertit les endroits d'excitation et de mesure et les sens d'excitation et de mesure (cf. Figure F.4). Si l'on dispose de plusieurs chaînes de mesure, on peut aussi opérer une correction de l'interspectre, par permutation des chaînes de mesure (cf. [124]).

## F.1.2 Capteurs et Correction de masse

### Précision, Dispersion, Calibration

La précision des capteurs est donnée par le constructeur, cependant il faut déterminer la dispersion des mesures obtenues par différents capteurs aux mêmes points et au même moment. C'est ce qu'on fait pendant une calibration correcte utilisant la loi  $F = M\gamma$  (calibration absolue) et en ajustant la sensibilité des capteurs pour qu'ils donnent le même résultat (affinage relatif).

### Correction de masse

À chaque masse  $M$  de capteur correspond une "fréquence de coupure" à partir de laquelle il va masquer les vibrations du point mesuré. La mobilité mesurée  $Y_{mes}$  est en effet fonction de la mobilité de la structure  $Y_{str}$  et de celle du capteur  $Y_{cap} = \frac{1}{j\omega M}$ :

$$Y_{mes} = \frac{Y_{cap}Y_{str}}{Y_{str} + Y_{cap}} \quad (F.1)$$

Tant que  $Y_{cap}$  est grande (basse fréquence) devant  $Y_{str}$ , on a  $Y_{mes} \approx Y_{str}$  et tout va bien. Dès que  $Y_{cap}$  et  $Y_{str}$  sont du même ordre de grandeur il faut corriger la mesure pour obtenir:

$$Y_{str} = \frac{Y_{mes}Y_{cap}}{Y_{cap} - Y_{mes}} \quad (F.2)$$

La fréquence de coupure au delà de laquelle la mesure n'est plus possible correspond à:

$$Y_{str} \approx Y_{cap} \quad (F.3)$$

On ne fait pas de correction sur la masse de la tête d'impédance ou du capteur de force, car on mesure bien la force qui est injectée dans la structure seule et non celle qui est injectée par le pot vibrant dans la tête d'impédance.

Toutefois si l'on rajoute une masse après ce capteur, alors il faudra corriger la valeur de l'excitation par la relation fondamentale de la dynamique  $F = M\gamma$ .

Ceci n'est valable que si le système d'excitation E (pot vibrant + capteur + stinger et visses) a une mobilité d'entrée beaucoup plus grande que celle du système récepteur R; en effet c'est la mobilité après couplage au point de couplage qu'on est en train de mesurer et elle s'écrit:

$$\widetilde{Y}_c = \frac{Y_c^R Y_c^E}{Y_c^R + Y_c^E} \quad (F.4)$$

pour avoir  $\widetilde{Y}_c \approx Y_c^R$  il suffit que  $Y_c^E \gg Y_c^R$ .

Sinon il faudra d'abord mesurer la mobilité du système d'excitation (avec un marteau de choc).

### Erreurs de mesure

En sus de la précision, des erreurs de mesure sont dues au mauvais contact du capteur avec la structure (fixation par cire ou colle dissipative) et au mésalignement avec la direction théorique de mesure.

L'analyse des parties réelles des mobilités d'entrée permet aussi d'estimer la "propreté" des mesures: si elles sont négatives ou trop petites par rapport à un seuil (dû à l'amortissement), on a soit un problème de montage (excitation trop loin du capteur: on mesure en

réalité une mobilité de transfert), soit un problème de bruit ou d'adhérence des capteurs. On peut donc "nettoyer" les mobilités d'entrée en leur imposant la valeur minimale d'un certain seuil.

De même, pour des structures dont l'amortissement est homogène, on peut éliminer les pics trop étroits dont la largeur n'a pas une bande passante compatible avec l'amortissement de la structure, sur les mobilités d'entrée comme sur celles de transfert.

### **F.1.3 Autres problèmes**

#### **Bruit de fond**

Mis à part le bruit de fond acoustique, qui est généralement négligeable pour des mesures vibratoires (sauf éventuellement sur des transferts très faibles), les vibrations parasites extérieures étant coupées par un bon montage, il reste le bruit de fond de l'électronique des capteurs et du système d'acquisition, qui est généralement considéré décorrélé des signaux mesurés. Des fonctions comme la cohérence et le rapport signal sur bruit permettent de l'évaluer.

#### **Non linéarités**

Des parties du montage ou des parties de la structure étudiée peuvent introduire des chocs ou des frottements qui ne varient pas linéairement avec l'excitation extérieure. Tant que le niveau de ces contributions est négligeable, par rapport aux contributions de l'excitation extérieure, la mesure est correcte. Sinon elle devient délicate, car ces signaux, véhiculés par la même structure, peuvent dépendre de l'excitation principale.

Il se peut aussi que des parties dissipatives non linéaires de la structure (en caoutchouc par exemple) n'interviennent (en "ouvrant" ou en coupant de nouveaux chemins) qu'à partir d'un certain niveau vibratoire.

En général on veillera à trouver un niveau d'excitation qui n'engendre pas ces phénomènes.

#### **Couplages dissipatifs**

Le couplage rigide est difficilement réalisable. Quels que soient les éléments utilisés, le couplage est toujours un peu élastique et dissipatif. Pour certaines configurations on peut le vérifier en mesurant les vitesses de part et d'autre (cf. Figure F.5). Pour d'autres on peut le caractériser à partir des mobilités avant et après couplage en identifiant alors la masse ajoutée, la raideur et l'amortissement introduits.

#### **Mesure des mobilités de moment**

On a déjà cité les problèmes dus à la masse apportée par les capteurs et à leur sensibilité transversale pour les mesures en translation. Pour les mesures des rotations et des moments injectés, d'autres problèmes viennent s'ajouter. La rotation est mesurée par différences finies ou par des capteurs spéciaux. Dans la première technique la bonne mesure de la phase entre les deux capteurs devient très importante, donc pour les deux méthodes des capteurs d'une grande qualité sont requis.

La mesure du moment exercé est tout aussi problématique car on exerce toujours en même temps un effort transversal et les systèmes actuellement disponibles sont encombrants et ne permettent pas d'effectuer des mesures sur des structures minces.

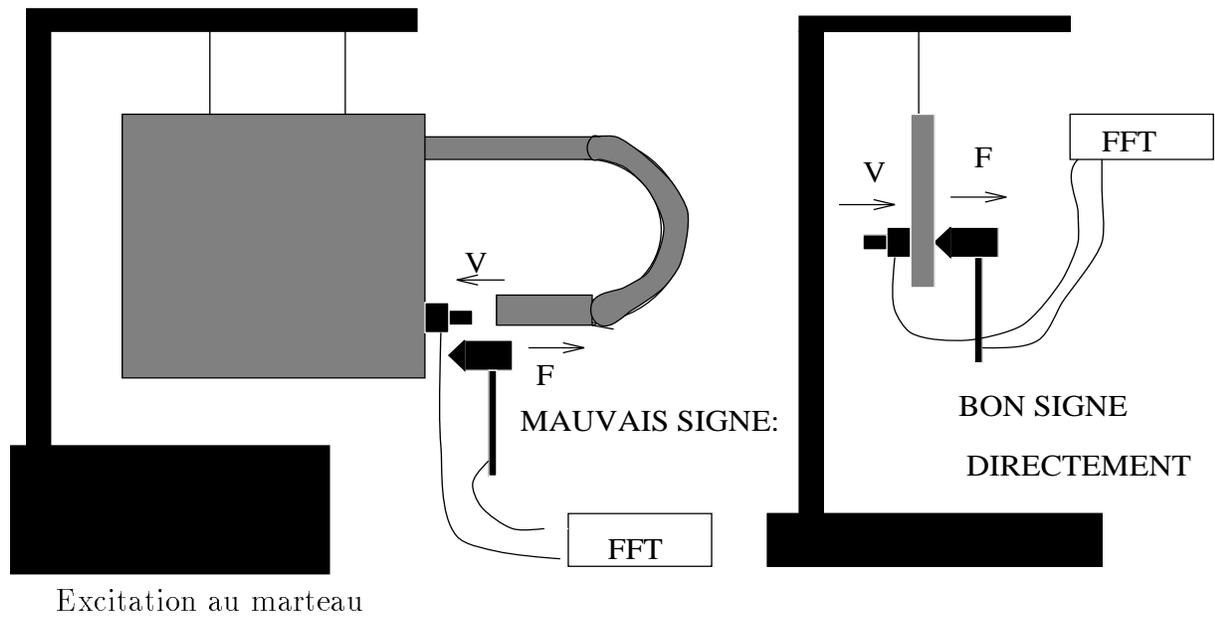


FIG. F.2 - Exemple de convention de signe en entrée

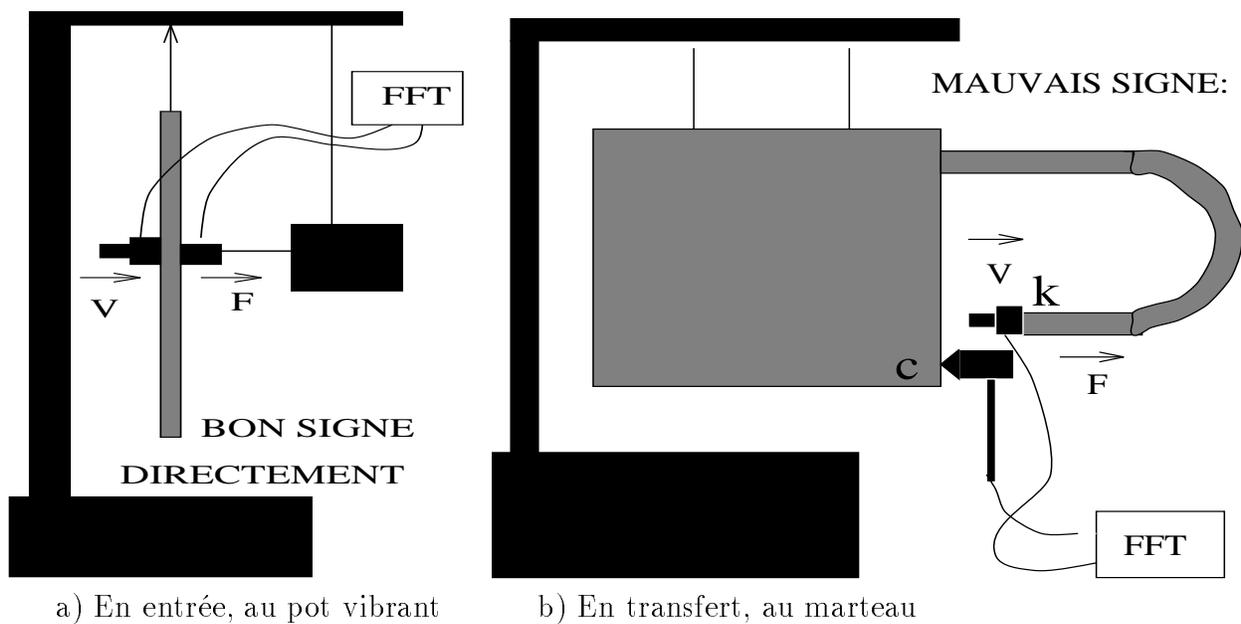


FIG. F.3 - Exemples de Convention de signe

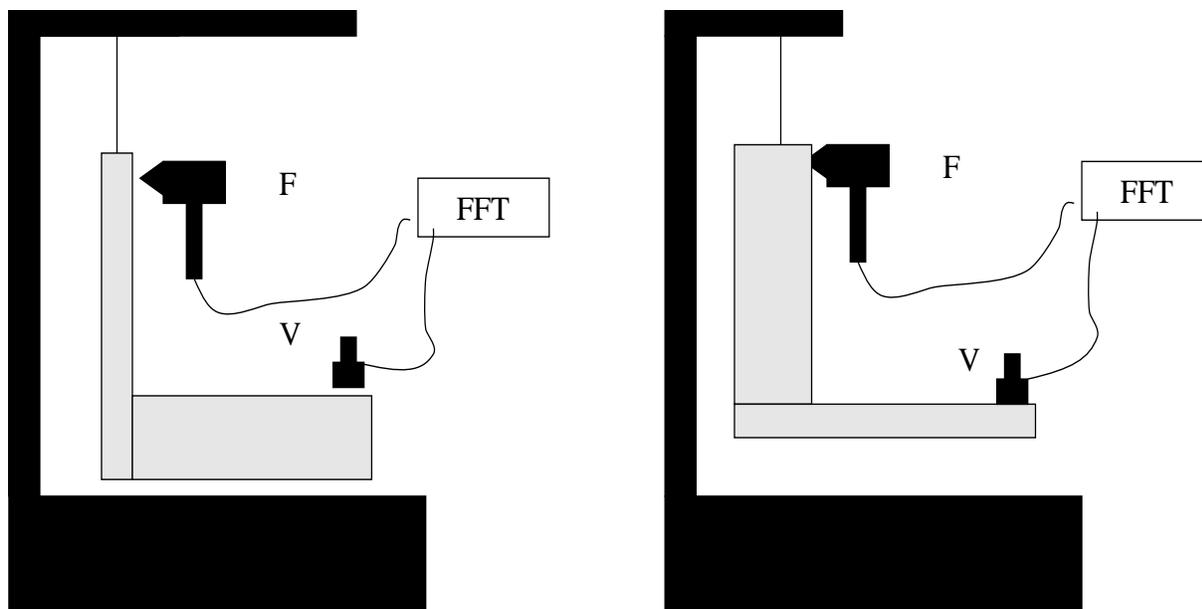


FIG. F.4 - Mesures par réciprocité

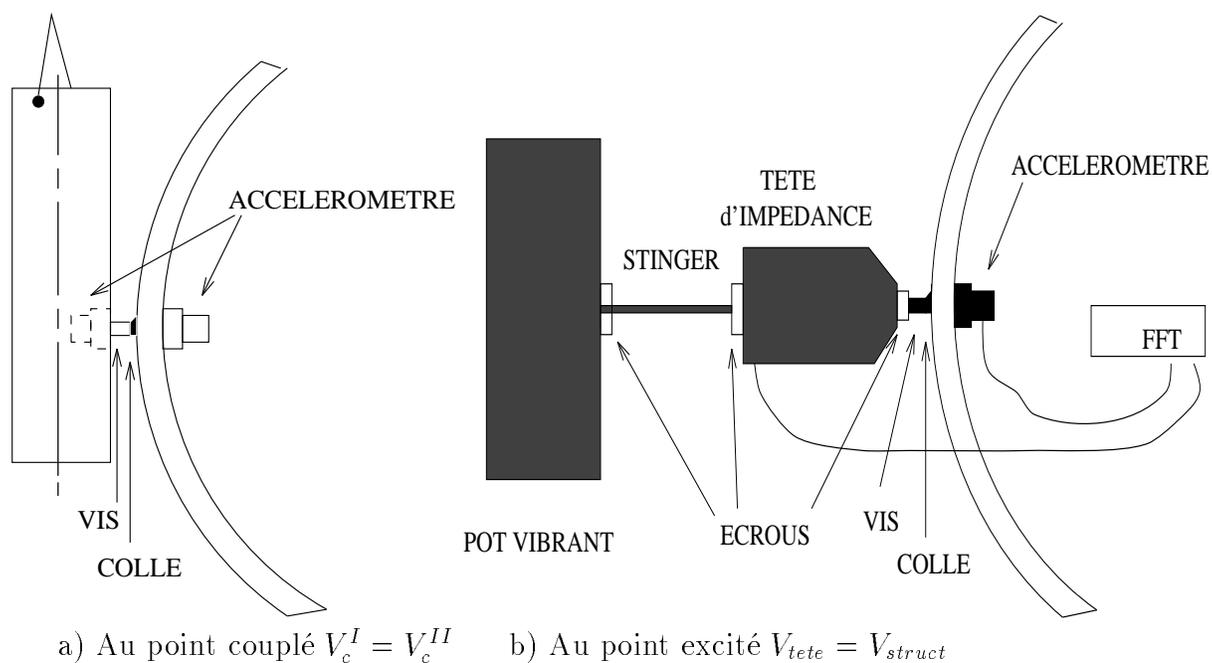


FIG. F.5 - Vérification du couplage rigide par continuité des vitesses

## F.2 Mesures sur un assemblage de structures simples

### Mesures effectuées

#### Mesure des mobilités "à vide"

Sur les sous-systèmes isolés choisis précédemment on a mesuré les mobilités d'entrée au futur point de couplage c et les mobilités de transfert entre ce point c et d'autres points m (ou n) quelconque, non bloqué.

#### Mesures sur l'assemblage

On a réalisé un assemblage ponctuel des deux systèmes précédents par un petit bout de vis collé, au point c.

On a mesuré les mobilités du système assemblé entre les trois points m, n et c.

#### Matériel nécessaire

Système d'acquisition LMS 8 voies avec générateur de signaux interne.

Marteau de chocs avec câble.

Pot vibrant avec cerceau circonférenciel pour suspension.

Tête d'impédance avec câbles et vis à coller (1.1g)

2 Accéléromètres 0,4 g avec électronique intégrée et fils (0,7 g au total)

1 Amplificateur 4 voies pour les accéléromètres

2 Amplificateurs de charge pour la tête d'impédance

2 alimentations pour les amplificateurs de charge

10 m de fil de Nylon, élastiques de gomme, colle biphasique (dure).

tige ("stinger") avec embouts vissables.

Vis de diamètre 5mm, différentes longueurs,

écrous pour fixer les différents éléments,

Vis (3 g avec colle) sur petit cylindre, pour couplage ponctuel robuste.

### Mesures et calculs préalables

#### Correction de masse inutile

On a mesuré au préalable, le plus précisément possible, la masse des différents éléments du montage:

- celle des capteurs de vitesse, vis, colle et câbles
- celle de la vis et de la colle pour la tête d'impédance

on a relevé les caractéristiques de la tête d'impédance (masse interne) d'après la notice constructeur.

Avec ces données a fait un calcul de correction de masse pour les mobilités mesurées, comme indiqué au F.1.2; on a constaté que la correction apportée est négligeable et on s'est assuré que la "fréquence de coupure" est plus haute que celles mesurées.

#### Autres vérifications par la masse

On a vérifié les capteurs en faisant une mesure de mobilité "à vide" avec le pot vibrant avec stinger, tête d'impédance et câbles: il faut vérifier le principe fondamental de la dynamique pour la masse interne calculée: la mobilité d'entrée obtenue doit être  $Y_e = \frac{1}{j\omega M}$

On vérifie ainsi aussi le bon fonctionnement du pot vibrant et de la tête d'impédance, ainsi que le montage en général avec le système d'excitation et d'acquisition.

En collant un accéléromètre sur une masse vissée à la tête d'impédance, on a eu une deuxième vérification par la masse (masses internes + masse des pastilles + masse de la colle) et on a vérifié la bonne corrélation des signaux et le rapport signal sur bruit.

### Choix du système d'excitation

En comparant les performances de l'excitation par marteau de choc et par pot vibrant (bruit blanc injecté par bande), on a choisi cette dernière, qui permettait d'injecter plus de puissances et d'obtenir des résultats plus propres en transfert, car le gros cylindre choisi était très amorti.

### Autres vérifications des capteurs

On a visualisé, sur les mobilités d'entrée, les premiers modes des systèmes étudiés dans la bande fréquentielle excitée et constaté qu'elles ne comportent pas beaucoup d'oscillations pour les deux cylindres très amortis (cf. Figure 6.4).

On a aussi calibré les accéléromètres par un système d'étalonnage (table vibrante BK), puis en ajustant leur sensibilité sur le système LMS ou sur les amplificateurs de charge, en plaçant plusieurs accéléromètres les uns à côté des autres sur une masselotte ou sur une plaque et en excitant en ce même point: les mobilités d'entrée (ou de transfert) obtenues, qui doivent être les mêmes jusqu'à une certaine fréquence (pour laquelle la longueur d'onde est huit à dix fois plus grande que le rayon du disque contenant les capteurs), présentent une dispersion qui définit l'erreur de mesure de base.

Sur le système fortement amorti (gros cylindre) on constate (cf. Figure F.6) que ces différences restent petites entre les deux accéléromètres utilisés (sur une mobilité de transfert) et entre l'un d'entre eux et la tête d'impédance (sur la mobilité d'entrée), sauf en dessous de 100 Hz et au dessus de 3500 Hz.

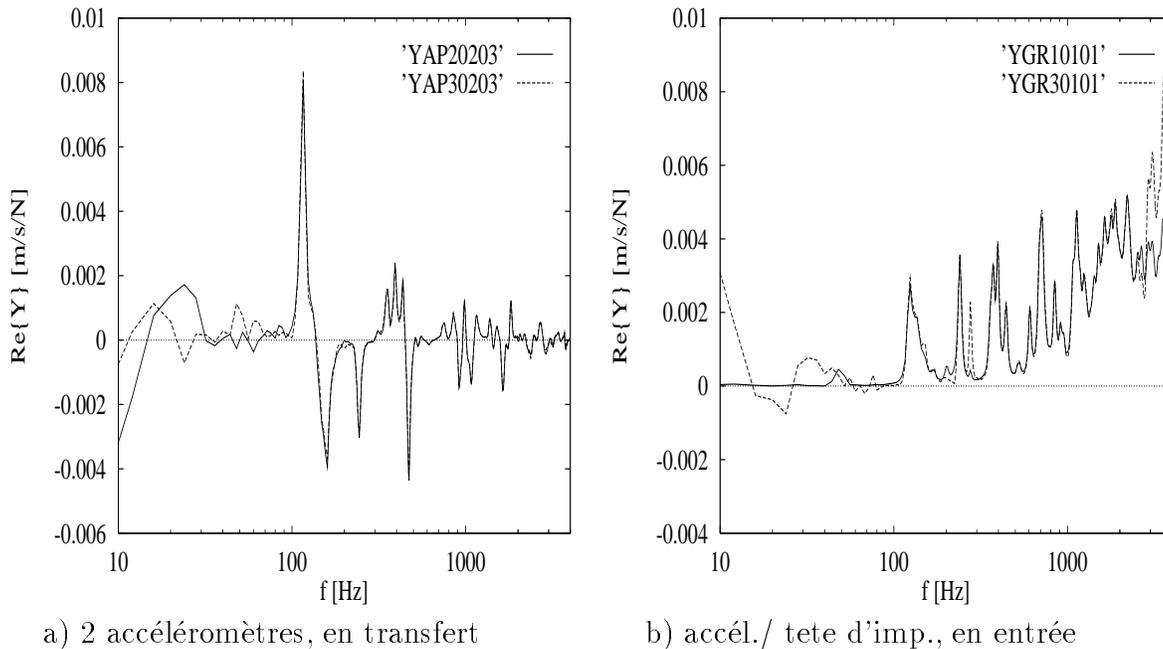


FIG. F.6 - *Comparaison de capteurs par mesures aux mêmes points*

# Annexe G

## Surprise finale

### Dérivation de la théorie à partir de systèmes simples

Au cours de l'étude analytique, une autre approche a aussi été ébauchée: la dérivation de la théorie des mobilités énergétiques à partir de l'analyse de systèmes simples.

On suit le cheminement historique de la SEA: à partir de formules s'appliquant à des systèmes élémentaires (les oscillateurs, qui représentent les modes de toute structure), on dérive avec moult hypothèses, des expressions énergétiques de portée plus générale.

Cependant la Statistical Energy Analysis néglige l'observation spatiale des systèmes (et c'est aussi son avantage): peu important l'endroit d'injection des puissances ou l'endroit et la réalisation du couplage, pourvu que l'analyse des choses soit statistique.

Or un oscillateur, n'est pas seulement une unité énergétique de base (un mode) ou un événement statistique (au sens de la SEA), c'est aussi un élément simple spatial. C'est sous cet aspect spatial (différent de [20]) qu'on va l'envisager ici.

### Expressions pour un oscillateur amorti

Un oscillateur définit les propriétés dynamiques d'un point e, en fonction des caractéristiques mécaniques classiques nécessaires aux théories linéaires: la masse M, la raideur K et l'amortissement C.

Il a une mobilité (classique) d'entrée qui relie la force F injectée et la vitesse obtenue en ce point e:

$$Y_e = \frac{\omega^2 C + j\omega(K - \omega^2 M)}{(K - \omega^2 M)^2 + \omega^2 C^2} \quad (\text{G.1})$$

La puissance active moyennée par bandes de fréquence ("pam") injectée en e s'écrit:

$$P_e = \langle |F_e|^2 \text{Re}\{Y_e\} \rangle = \langle \frac{|V_e|^2}{|Y_e|^2} \text{Re}\{Y_e\} \rangle \quad (\text{G.2})$$

ou encore

$$P_e = \langle |V_e|^2 \frac{(K - \omega^2 M)^2 + \omega^2 C^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 C}{(K - \omega^2 M)^2 + \omega^2 C^2} \rangle \quad (\text{G.3})$$

si l'amortissement C est constant en fréquence, on a donc simplement

$$\frac{\langle |V_e|^2 \rangle}{P_e} = \frac{1}{C} \quad (\text{G.4})$$

*Il existe donc une relation entre la puissance active moyennée injectée dans un oscillateur par bandes de fréquence et le "miel" obtenu.*

Pour introduire la notion de transfert entre deux points distincts, nous allons introduire maintenant une deuxième masse.

## Expressions pour un système de deux masses - ressort - amortisseur

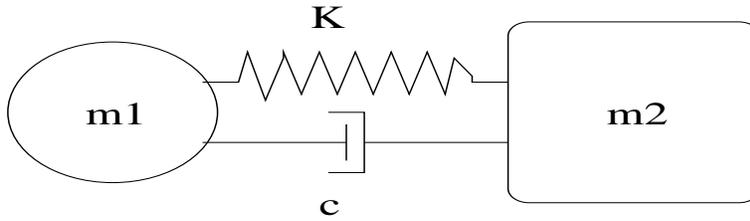


FIG. G.1 - *Système bimasse-ressort-amortisseur*

Soit un système élastique composé de deux masses (ponctuelles, ou indéformables)  $m_1$  et  $m_2$ , avec un ressort de raideur  $K$  et un amortisseur  $C$  intermédiaires. À partir des mobilités classiques d'entrée sur  $m_1$ :

$$Y_{m1} = \frac{1 + jK^*\omega m_2}{j\omega(m_1 + m_2) - K^*\omega^2 m_1 m_2} \quad (\text{G.5})$$

et de transfert entre  $m_1$  et  $m_2$ :

$$Y_{m1m2} = \frac{V_{m1}}{F_{m2}} = \frac{1}{j\omega(m_1 + m_2) - K^*\omega^2 m_1 m_2} \quad (\text{G.6})$$

avec

$$K^* = \frac{1}{\frac{K}{j\omega} + c}$$

en appliquant 3.11, on tire les mobilités énergétiques suivantes en entrée sur  $m_1$ :

$$H_{m1} = \frac{\langle |Y_{m1}|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{Y_{m1}\} \rangle} \approx \frac{\langle (\frac{K}{\omega} - \omega m_2)^2 + c^2 \rangle}{\langle \omega^2 m_2^2 c \rangle} \quad (\text{G.7})$$

et de transfert entre  $m_1$  et  $m_2$ :

$$H_{e2e1} = \frac{\langle |Y_{m1m2}|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{Y_{m1}\} \rangle} \approx \frac{c^2 + \frac{K^2}{\omega^2}}{\langle \omega^2 m_2^2 c \rangle} \quad (\text{G.8})$$

Par ailleurs en formant le rapport du "miel" exact et de la puissance active exacte moyennée en fréquence, on obtient

$$\frac{\langle |V_{m1}|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{F_{m1}V_{m1}^*\} \rangle} = \frac{\langle |V_{m1}|^2 \rangle}{\langle |V_{m1}|^2 \frac{\omega^2 m_2^2 c}{(\frac{K}{\omega} - \omega m_2)^2 + c^2} \rangle} \quad (\text{G.9})$$

en supposant que les deux quantités  $|V_{m1}|^2$  et  $\frac{\omega^2 m_2^2 c}{(\frac{K}{\omega} - \omega m_2)^2 + c^2}$  sont lissées sur une bande de fréquences, (leur variance est faible, sur chaque bande), on remplace la moyenne de leur

produit par le produit de leurs moyennes.

On simplifie alors par  $\langle |V_{m1}|^2 \rangle$  et on obtient

$$\frac{\langle |V_{m1}|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{F_{m1}V_{m1}^*\} \rangle} \approx \frac{1}{\langle \frac{\omega^2 m_2^2 c}{(\frac{K}{\omega} - \omega m_2)^2 + c^2} \rangle} \quad (\text{G.10})$$

et en transfert

$$\frac{\langle |V_{m2}|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{F_{m1}V_{m1}^*\} \rangle} = \frac{\langle |V_{m1}|^2 \frac{|c + \frac{K}{j\omega}|^2}{|c + \frac{K}{j\omega} + j\omega^2 m_2|^2} \rangle}{\langle |V_{m1}|^2 \frac{\omega^2 m_2^2 c}{(\frac{K}{\omega} - \omega m_2)^2 + c^2} \rangle} \quad (\text{G.11})$$

qu'on simplifie de même en

$$\frac{\langle |V_{m2}|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{F_{m1}V_{m1}^*\} \rangle} \approx \frac{\langle \frac{|c + \frac{K}{j\omega}|^2}{|c + \frac{K}{j\omega} + j\omega^2 m_2|^2} \rangle}{\langle \frac{\omega^2 m_2^2 c}{(\frac{K}{\omega} - \omega m_2)^2 + c^2} \rangle} \quad (\text{G.12})$$

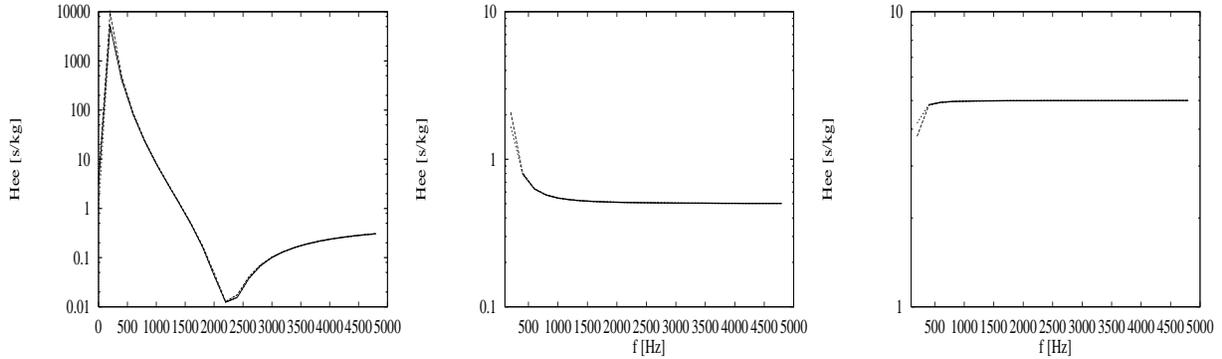
ou encore en

$$\frac{\langle |V_{m2}|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{F_{m1}V_{m1}^*\} \rangle} \approx \frac{\langle \frac{c^2 + K^2/\omega^2}{c^2 + K^2/\omega^2 - 2*K*\omega*m_2 + \omega^4*m_2^2} \rangle}{\langle \frac{\omega^2 m_2^2 c}{(\frac{K}{\omega} - \omega m_2)^2 + c^2} \rangle} \quad (\text{G.13})$$

Les expressions G.10 et G.13 ressemblent beaucoup respectivement aux expressions G.7 et G.8 issues de la définition. Les termes moyennés ont des variations lentes sur chaque bande de fréquences, donc on opère l'approximation suivante:

$$\langle \frac{1}{a} \rangle \approx \frac{1}{\langle a \rangle}$$

Pour les simulations numériques effectuées, en faisant varier K et c, les formules G.7 et G.10 donnent des résultats très voisins (cf. Figure G.2).



a) Ressort raide conservatif    b) Ressort mou dissipatif    c) Ressort mou conservatif

FIG. G.2 - Mobilités énergétiques d'entrée du système masse-ressort-amortisseur

— Calcul par  $\frac{1}{\langle \frac{\text{Re}\{Y\}}{|Y|^2} \rangle}$     - - Définition:  $\frac{\langle |Y|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{Y\} \rangle}$     - - - Calcul par G.7

Même pour des systèmes très simples, avec une seule fréquence de résonance, la définition de mobilité énergétique a bien un sens physique (c'est le rapport du "miel" et de la

puissance active injectée par bande).

Si le ressort  $K$  est très raide on tend vers le cas d'une masse unique, (sans dissipation interne) et la mobilité classique est purement imaginaire, donc la mobilité énergétique devient infinie.

## Couplage de deux oscillateurs bimasse amortis

Les oscillateurs à deux masses précédents, peuvent être considérés comme les éléments les plus simples possédant une mobilité d'entrée et une mobilité de transfert distinctes. Nous nous proposons donc d'étudier le couplage de deux de ces oscillateurs, ayant des fréquences de résonance différentes (cf. Figure G.3).

Le but est de trouver des relations simples (approchées) entre les mobilités énergétiques de l'assemblage après couplage et celles des sous-systèmes isolés, avant couplage.

L'approche analytique, quoique plus complète, conduit rapidement à des expressions compliquées, à cause des intégrations en fréquence.

Au lieu de poursuivre la dérivation analytique, nous proposons donc de tester directement numériquement les relations approchées proposées au chapitre 3, pour ce type d'assemblage simple.

Les oscillateurs isolés avant couplage ont les mobilités d'entrée au point 2 de couplage

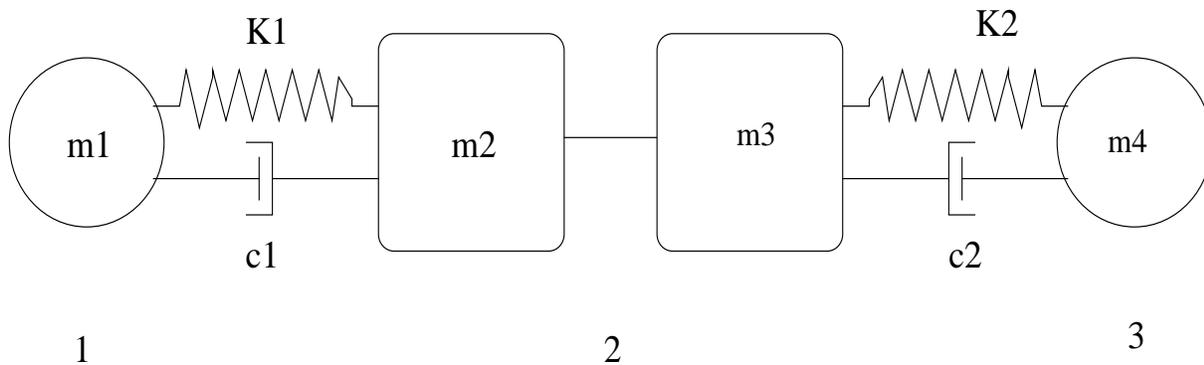


FIG. G.3 - Couplage de deux systèmes masse-ressort-amortisseur

illustrées par la Figure G.4. Ce sont des systèmes à assez fort amortissement. Le premier, entre les points 1 et 2, est défini par ( $M1=0.0004[\text{kg}]$ ,  $M2=0.0006[\text{kg}]$ ,  $K1=100000.0[\text{N/m}]$ ,  $C1=1.0 [\text{N.s/m}]$ ). Le deuxième, entre les points 2 et 3, est défini par ( $M3=0.0003[\text{kg}]$ ,  $M4=0.0007[\text{kg}]$ ,  $K2=10000.0[\text{N/m}]$ ,  $C2=1.0[\text{N.s/m}]$ ).

On compare encore une fois les mobilités énergétiques de transfert entre 1 et 3, après couplage  $\widetilde{H}_{13}$  obtenues par un calcul exact (avec les mobilités classiques après couplage):

$$\widetilde{H}_{13} = \frac{\langle |\widetilde{Y}_{13}|^2 \rangle}{\langle \text{Re}\{Y_{33}\} \rangle}$$

et celles obtenues par un calcul approché, avec les mobilités énergétiques avant couplage:

$$\widetilde{H}_{13} = \frac{H_{12}^I H_{23}^{II} \alpha_2^{II}}{H_{22}^I + H_{22}^{II}}$$

Les résultats sont représentés sur la Figure G.5. Ils sont très satisfaisants sur tout le spectre de fréquences. Pour des oscillateurs 100 fois moins amortis, dont les mobilités d'entrée sont représentées sur les figures G.7, on repasse le même calcul (cf. Figure G.8).

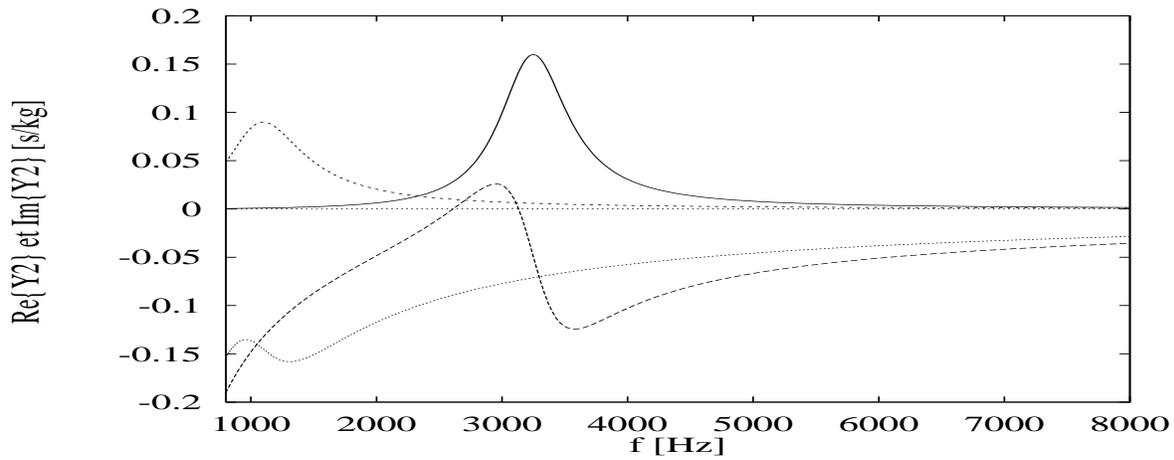


FIG. G.4 -  $Re\{Y_2\}$  et  $Im\{Y_2\}$  des deux systèmes bimasse-ressort-amortisseur avant couplage

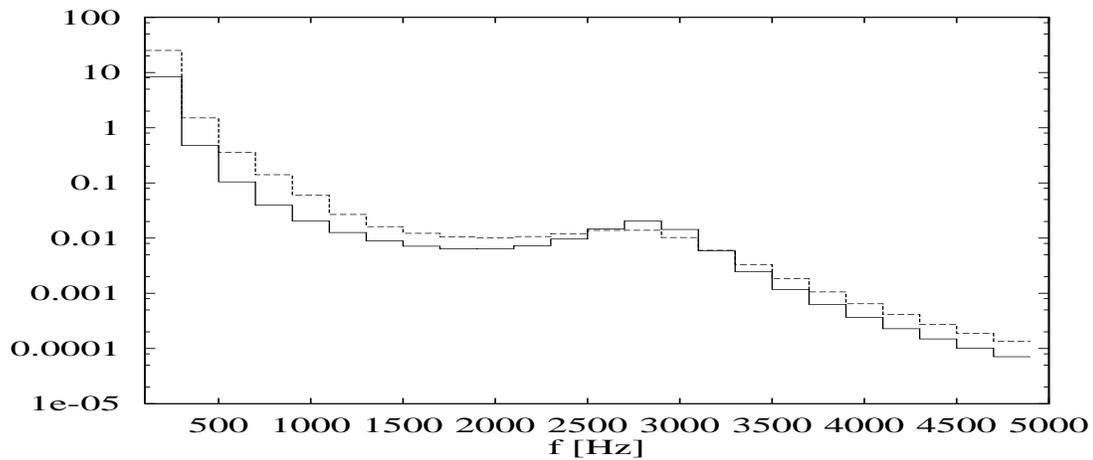


FIG. G.5 -  $\widetilde{H}_{13}$  après couplage: — calcul exact - - - calcul approché

L'erreur devient forte aux fréquences de résonance de l'assemblage des deux oscillateurs. Ici encore on constate que sur la plupart des bandes, (qui ne contiennent pas de résonances) le calcul est très satisfaisant. Ceci est vrai notamment au dessus de la dernière fréquence de résonance de l'assemblage. À partir de ce cas simple il aurait donc été possible de dériver analytiquement les expressions approchées du chapitre 3.

Les "fortes erreurs" aux résonances deviennent beaucoup plus faibles si l'on considère des moyennes fréquentielles sur des bandes plus larges, car on sous-estime la mobilité énergétique après couplage à chaque résonance, mais on la sur-estime par ailleurs.

L'analyse du couplage de systèmes multimodaux, avec plusieurs modes dans une bande, conduit aussi à moyennner des quantités sous-estimées et des quantités surestimées, donc à réduire les erreurs autour des résonances.

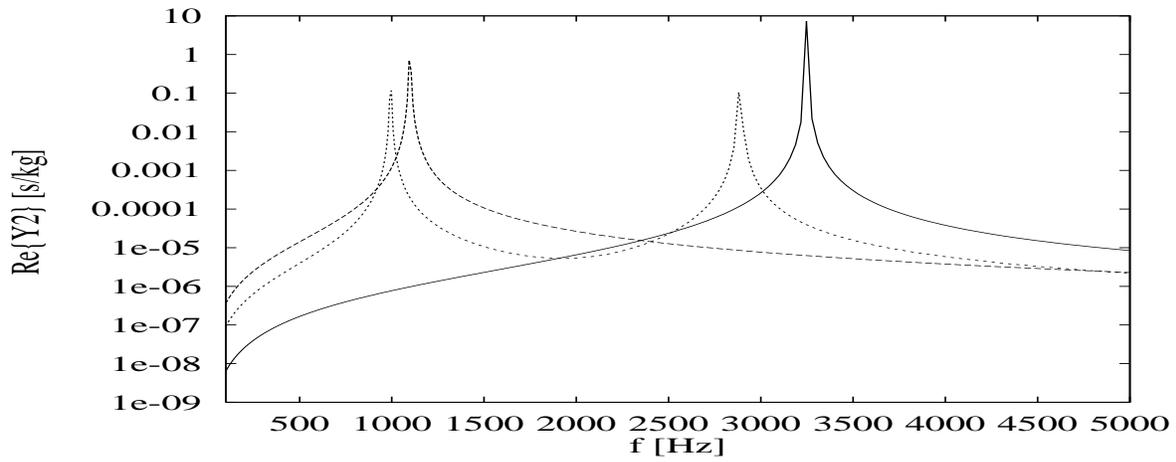


FIG. G.6 -  $Re\{Y_2\}$  des deux systèmes masse-ressort-amortisseur avant et après couplage

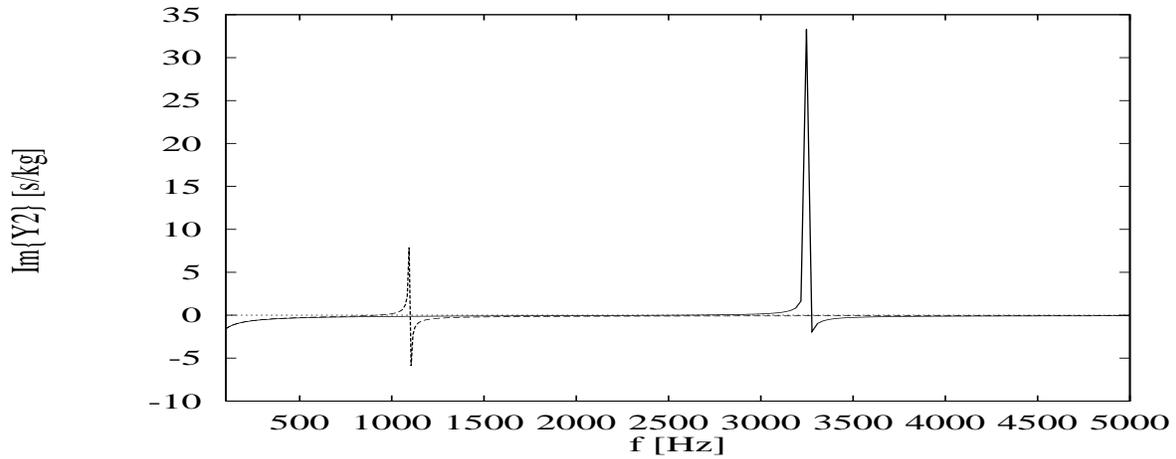


FIG. G.7 -  $Im\{Y_2\}$  des deux systèmes masse-ressort-amortisseur avant couplage

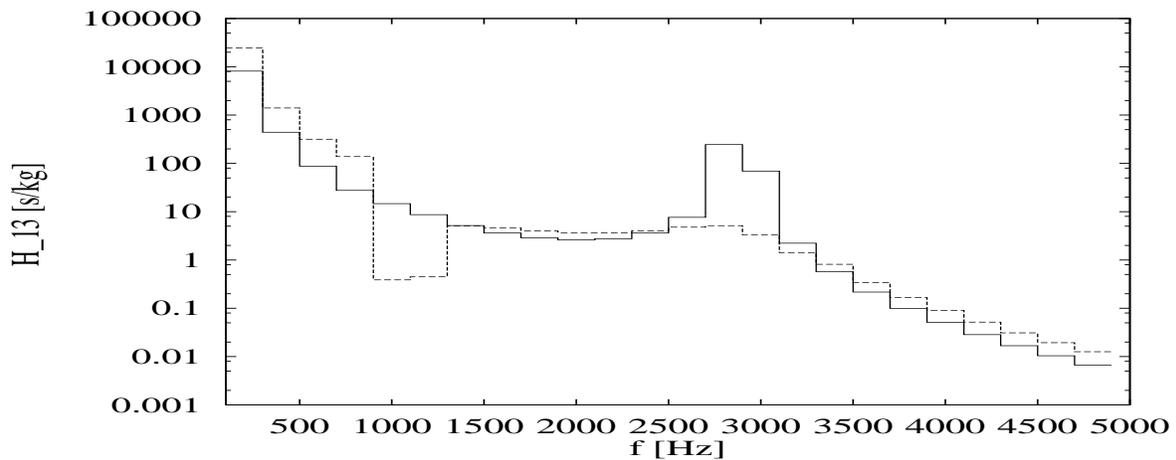


FIG. G.8 -  $\widetilde{H}_{13}$  après couplage: — calcul exact - - - calcul approché  
oscillateurs peu amortis

## Couplage de quatre oscillateurs bimasse amortis

Le cas suivant consiste à coupler entre eux deux assemblages comme le précédent (voir Figure G.9) avec le deuxième système donné par ( $M5=0.4[g]$ ,  $M6=0.6[g]$ ,  $M7=0.3[g]$ ,  $M8=0.7[g]$ ,  $K3=200000.0[N/m]$ ,  $c3=0.001[N.s/m]$ ,  $K4=20000.0[N/m]$ ,  $c4=0.001[N.s/m]$ ). Deux calculs approchés sont menés ici. Le premier ("approché total"), se fait en deux

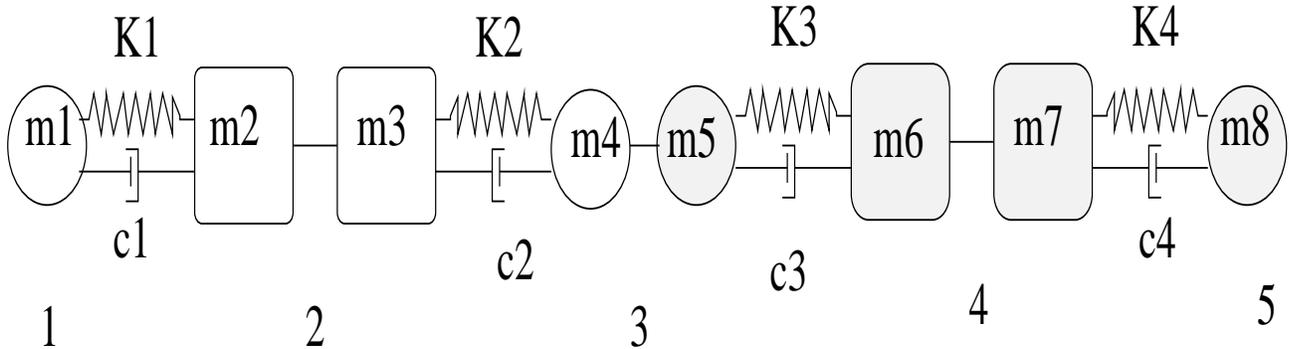


FIG. G.9 - Couplage de quatre systèmes bimasse-ressort-amortisseur

étapes: à partir des mobilités énergétiques de chaque oscillateur séparé, on prévoit d'abord les mobilités énergétiques des sous-systèmes de deux oscillateurs (comme au paragraphe précédent), puis celles de l'assemblage total. Le deuxième calcul ("approché partiel") utilise les mobilités énergétiques exactes des sous-systèmes de deux oscillateurs et prévoit aussi celles de l'assemblage global. Le "calcul exact" est toujours mené à partir des mobilités classiques prévues pour l'assemblage.

Ici encore le nombre de modes par bande de 200 Hz est inférieur ou égal à un (cf. Figure G.10).

Les résultats sont donc tout à fait comparables à ceux du cas précédent, sauf en basse

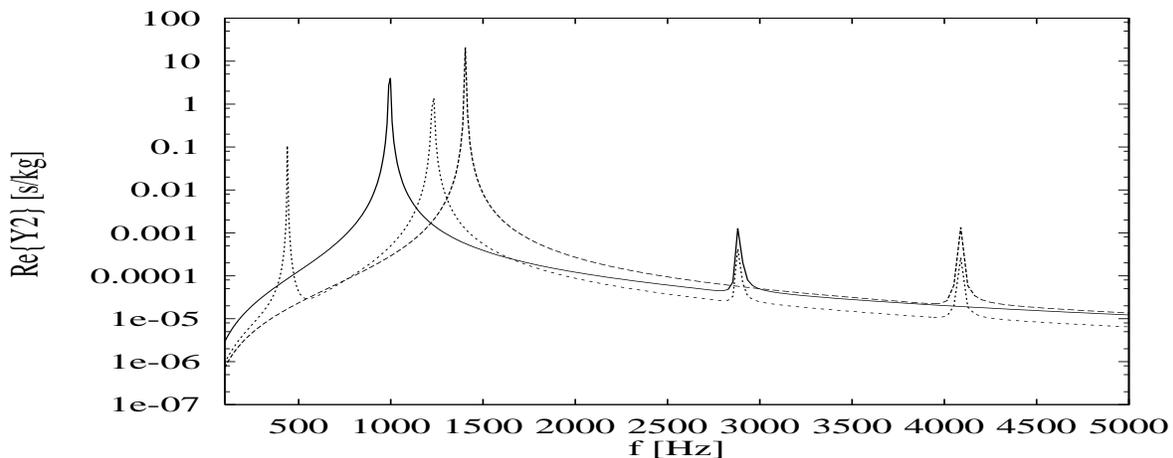


FIG. G.10 -  $Re\{Y_3\}$  des deux sous-systèmes avant et après couplage

fréquence où ils sont nettement moins bons (car la première résonance est plus basse maintenant), avec des erreurs supérieures à 10 dB en dessous et autour des résonances

de l'assemblage global pour le calcul "approché partiel" et des erreurs supérieures à 10 dB en dessous et autour des résonnances des sous-systèmes pour le calcul "approché total" (cf. Figure G.11).

Les deux calculs approchés donnent des résultats de qualité comparable: la méthode approchée, appliquée de façon itérative, ne se dégrade pas trop, car ses erreurs ne vont pas toujours dans le même sens.

En haute fréquence (au dessus de la dernière résonance) les résultats sont meilleurs.

Lorsqu'on augmente l'amortissement, la dynamique globale et les erreurs diminuent.

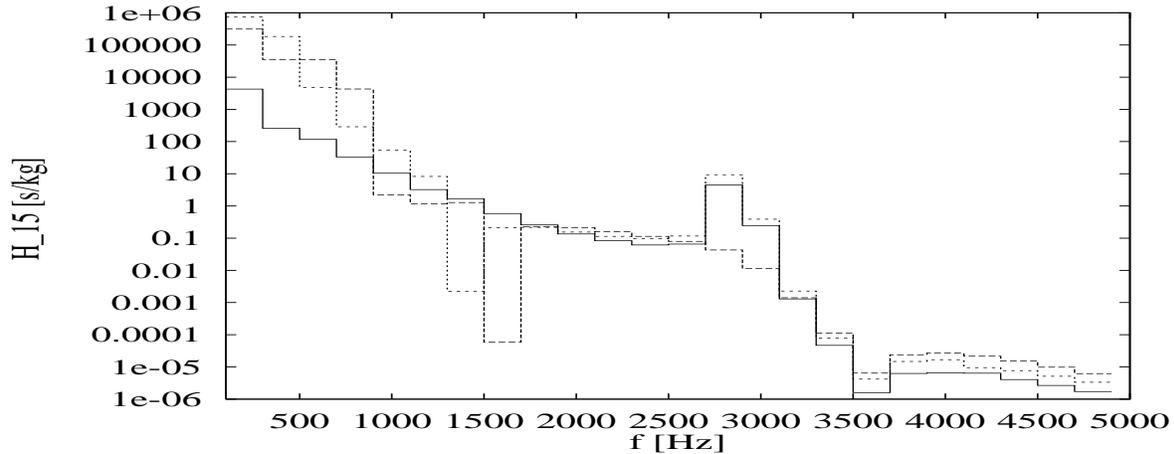


FIG. G.11 - *Mobilité énergétique  $\widetilde{H}_{15}$  après couplage:*  
 — calcul exact, - - calcul approché total, - . - calcul approché partiel

Avec ces assemblages de masses, ressorts et amortisseurs on retrouve qualitativement les résultats des simulations numériques sur les assemblages de plaques par liaisons élastiques.

## Conclusions

À cause des moyennes fréquentielles il aurait été trop long d'exposer ici la dérivation analytique des formules de base de la EMMA à partir de l'étude du couplage ponctuel de systèmes simples masse-ressort-amortisseur. Cependant des simulations numériques ont montré qu'ils vérifient les équations de l'EMMA, sauf autour des résonnances des sous-systèmes couplés.

Ces résultats sur les oscillateurs représentent une (bonne) surprise, car d'après le nombre d'oscillations par bande (nul presque partout), ils auraient dû être mauvais et se détériorer lorsqu'on augmente l'amortissement, ce qui ne se produit pas.

Il est possible qu'on puisse mieux définir des critères d'application de la EMMA par une étude analytique de ces cas simples, en fonction des différents paramètres globaux (largeur de bande, nombre de modes, amortissement) ou locaux (amplitude et nombre d'oscillations de la mobilité...), mais la démarche suivie dans ce travail, avec des mobilités quelconques, nous semble donner une vision moins réductive de la méthode que si on s'était limité à l'étude d'oscillateurs couplés.

## Références bibliographiques

- [1] **BELOV, V.D., RIBAK, S.A., et TARTAKOVSKII, B.D.** – Propagation of vibrational energy in absorbing structures. *Soviet Physics Acoustics*, 1977, Vol. 23, N° 2, p. 115-119.
- [2] **BERNHARD, R.J.** – The limits of predictability due to manufacturing and environmentally induced uncertainty. In: *internoise '96*. – St Albans, UK : Institute of Acoustics, July 1996. p. 2867-2871.
- [3] **BESHARA, M. et KEANE, A.J.** – Vibrational energy flows in beam networks with compliant and dissipative joints. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol. 203, N° 2, p. 321-339.
- [4] **BESSAC, F, GAGLIARDINI, L., et GUYADER, J.L.** – Coupling eigenvalues and eigenvectors: a tool for investigating the vibroacoustic behaviour of coupled vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, Vol. 191, N° 5, p. 881-899.
- [5] **BIES, D.A. et HAMID, S.** – In situ determination of coupling loss factors by the power injection method. *Journal of Sound and Vibration*, 1980, Vol. 70, N° 2, p. 187-204.
- [6] **BLANC-LAPIERRE, A. et FORTET, R.** – *Théorie des fonctions aléatoires*, 1ere édition. – Paris : Masson & Cie, aout 1953. 693p.
- [7] **BOURGINE, A.** – *Sur une approche statistique de la dynamique vibratoire des structures*. – Thèse Sci. : Université. Paris-sud, Centre d'Orsay, CNRS AO 8443 No Ordre 1134, mai 1973. 131p.
- [8] **BOUTHIER, O.M. et BERNHARD, R.J.** – Models of space-averaged energetics of plates. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 1992, Vol. 30, N° 3, p. 616-623.
- [9] **BOUTHIER, O.M. et BERNHARD, R.J.** – Simple models of the energetics of transversely vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, Vol. 182, N° 1, p. 149-164.
- [10] **BUSCH-VISHNIAC, I. J.** – A fundamental problem with mobility analysis of vibration isolation systems. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1987, Vol. 81, N° 6, p. 1801-1804.
- [11] **CACCIOLATI, C. et GUYADER, J.L.** – Measurement of sea coupling loss factors using point mobilities. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 1994, Vol. 346, p. 465-475.

- [12] **CARCATERRA, A. et SESTIERI, A.** – Complex envelope displacement analysis: a quasi-static approach to vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol. 201, N° 2, p. 205-233.
- [13] **CHANDIRAMANI, K.L.** – Some simple models describing the transition from weak to strong coupling in statistical energy analysis. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1978, Vol. 63, N° 3, p. 1081-1083.
- [14] **CLARKSON, B.L.** – The derivation of modal densities from point impedances. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, Vol. 77, N° 4, p. 583-584.
- [15] **CLARKSON, B.L. et POPE, R.J.** – Experimental determination of modal densities and loss factors of flat plates and cylinders. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, Vol. 77, N° 4, p. 535-549.
- [16] **CLARKSON, B.L. et RANKY, M.F.** – On the measurement of the coupling loss factor of structural connections. *Journal of Sound and Vibration*, 1984, Vol. 94, N° 2, p. 249-261.
- [17] **CRAIK, R.J.M., STEEL, J.A., et EVANS, D.I.** – Statistical energy analysis of structure-borne sound transmission at low frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, Vol. 144, N° 1, p. 95-107.
- [18] **CRANDALL, S.H. et LOTZ, R.** – On the coupling loss factor in statistical energy analysis. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1971, Vol. 49, N° 1, p. 352-356.
- [19] **CREMER, L.** – Der satz der wechselseitigen energie und seine anwendung auf die wellen theoretische raumakustik. *Acustica*, 1982, Vol. 52, N° 1, p. 51-67.
- [20] **CREMER, L. et HECKL, M.** – *Structure-borne sound.* – Berlin: Springer-Verlag, 1973. 528p. – traduction anglaise de l'édition allemande.
- [21] **CUSCHIERI, J. M.** – Structural power flow analysis using a mobility approach of an L-shaped plate. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1990, Vol. 87, N° 3, p. 1159-1165.
- [22] **CUSCHIERI, J.M.** – Vibration transmission through periodic structures using a mobility power flow approach. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, Vol. 143, N° 1, p. 65-74.
- [23] **CUSCHIERI, J.M. et SUN, J.C.** – Use of statistical energy analysis for rotating machinery. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, Vol. 170, N° 2, p. 181-214.
- [24] **DAVIES, H.G.** – Random vibration of distributed systems strongly coupled at discrete points. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1973, Vol. 54, N° 2, p. 507-515.
- [25] **DAVIES, H.G. et WAHAB, M.A.** – Ensemble averages of power flow in randomly excited coupled beams. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, Vol. 77, N° 3, p. 311-321.

- [26] **DEJONG, R.G.** – Statistical measures of the response functions of simple and complex structures. In: *internoise '96*. – St Albans, UK: Institute of Acoustics, July 1996. p.2885-2890.
- [27] **DEJONG, R.J.** – An approach to the statistical energy analysis of strongly coupled systems. In: *IUTAM Symposium on SEA*. ISVR, University of Southampton. – Dordrecht, (The Netherlands): Kluwer Academic Publishers, Juillet 1997. – à paraître.
- [28] **DELATTRE, F.** – *Analyse des fonctions de transfert en moyenne et haute fréquence par lissage fréquentiel*. – Thèse Sci.: Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et Univ. Lyon I, 93 ISAL 0042, mai 1993. 176p.
- [29] **DIMITRIADIS, E.K. et PIERCE, A.D.** – Analytical solution for the power exchange between strongly coupled plates under random excitation: a test of statistical energy analysis concepts. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, Vol. 123, N° 3, p. 397-412.
- [30] **DJIMADOUM, M.** – *Prévision des vibrations stationnaires et instationnaires aux moyennes fréquences: approche en énergie moyenne et approche par admittances impulsionnelles*. – Thèse Sci.: Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et Univ. Lyon I, 93 ISAL 0111, dec. 1993. 196p.
- [31] **DJIMADOUM, M. et GUYADER, J.L.** – Vibratory prediction with an equation of diffusion. *acta acustica*, 1995, Vol. 3, p. 11-24.
- [32] **DOWELL, E. H.** – Comment on energy flow predictions in a structure of rigidly joined beams using receptance theory. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, Vol. 194, N° 3, p. 445-447. – letter to the editor.
- [33] **DOWELL, E.H. et KUBOTA, Y.** – Asymptotic modal analysis and statistical energy analysis of dynamical systems. *Journal of Applied Mechanics*, 1985, Vol. 52, p. 949-957.
- [34] **EICHLER, E.** – Plate-edge admittances. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1964, Vol. 36, N° 2, p. 344-348.
- [35] **FAHY, F.J. et JAMES, P.P.** – Impulse energy response as an indicator of sea coupling strength. In: *15th International Congress on Acoustics*. – Trondheim, Norway: , Juin 1995. p. 29-32.
- [36] **FAHY, F.J. et JAMES, P.P.** – An indicator of coupling strength between sea subsystems. In: *IUTAM Symposium on SEA*. ISVR, University of Southampton. – Dordrecht, (The Netherlands): Kluwer Academic Publishers, Juillet 1997. – à paraître.
- [37] **FAHY, F.J. et MOHAMMED, A.D.** – A study of uncertainty in applications of sea to coupled beam and plate systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, Vol. 158, N° 1, p. 45-67.
- [38] **FAHY, F.J. et PIERRI, R.** – Application of cross spectral density to the measurement of vibration power flow between connected structures. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1977, Vol. 62, N° 5, p. 1297-1298.

- [39] **FREDÖ, C.R.** – *Statistical energy analysis and the individual case.* – Doctoral thesis: Chalmers University of Technology Göteborg Sweden, ISBN 91-7197-157-2 ISSN 0283-832X REPORT F95-02, june 1995. 157p.
- [40] **FULFORD, R.A. et GIBBS, B.M.** – Structure-borne sound power and source characterisation in multi-point connected systems, part 1: case studies for assumed force distributions. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol. 204, N° 4, p. 659-677.
- [41] **GASQUET, C. ET WITOMSKI, P.** – *Analyse de fourier et applications.* – Paris: Masson, 1990. 354p.
- [42] **GERSCH, W.** – Average power and power exchange in oscillators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1969, Vol. 46, N° 5, p. 1180-1185.
- [43] **GIRARD, A. et DEFOSSE, H.** – Frequency response smoothing, matrix assembly and structural paths: a new approach for structural dynamics up to high frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, Vol. 137, N° 1, p. 53-68.
- [44] **GOYDER, H.G.D. et WHITE, R.G.** – Vibrational power flow from machines into built-up structures. *Journal of Sound and Vibration*, 1980, Vol. 68, N° 1, p. 59-117.
- [45] **GUYADER, J.L.** – *Méthode d'étude des vibrations des milieux continus imparfaitement caractérisés.* – Thèse Sci.: Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et Univ. Lyon I, I.DE.8409, juillet 1984. 195p.
- [46] **GUYADER, J.L., BOISSON, C., et LESUEUR, C.** – Energy transmission in finite coupled plates. theory (I) and application (II) to an l-shaped structure. *Journal of Sound and Vibration*, 1982, Vol. 81, N° 1, p. 81-92 et p.93-105.
- [47] **HECKL, M.** – Anwendungen des satzes der wechselseitigen energie. *Acustica*, 1985, Vol. 58, N° 3, p. 111-117.
- [48] **HODGES, C.H. et WOODHOUSE, J.** – Confinement of vibration by one-dimensional disorder. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, Vol. 130, N° 2, p. 237-251 et p.253-268. – deux parties.
- [49] **JAINXIN, SU., MOORHOUSE, A.T., et GIBBS, B.M.** – Towards a practical characterisation for structure-borne sound sources based on mobility techniques. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, Vol. 185, N° 4, p. 737-741.
- [50] **KARNOPP, D.** – Coupled vibratory-system analysis, using the dual formulation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1966, Vol. 40, N° 2, p. 380-384.
- [51] **KEANE, A.J.** – Energy flows between arbitrary configurations of conservatively coupled multi-modal elastic systems. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1992, Vol. A436, p. 537-568.
- [52] **KEANE, A.J.** – A note on modal summations and averaging methods as applied to statistical energy analysis (s.e.a.). *Journal of Sound and Vibration*, 1993, Vol. 164, N° 1, p. 143-156.
- [53] **KEANE, A.J. et PRICE, W.G.** – Statistical energy analysis of strongly coupled systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1987, Vol. 117, N° 2, p. 363-386.

- [54] **KEMPER, G.** – Eingangleistung punktfoermig erregter plattenschwingungen. *Acustica*, 1974, Vol. 28, p.173-179.
- [55] **KISHIMOTO, Y. et BERNSTEIN, D.S.** – Thermodynamic modelling of inter-connected systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, Vol. 182, N° 1, p.23-76.
- [56] **KOSS, L.L.** – correlation of power variables-frequency domain. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, Vol. 125, N° 3, p.511-522.
- [57] **KOSS, L.L.** – Frequency response functions for power and connectivity. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, Vol. 181, N° 4, p.709-725.
- [58] **KUBOTA, Y. et DOWELL, E.H.** – Experimental investigation of asymptotic modal analysis for a rectangular plate. *Journal of Sound and Vibration*, 1986, Vol. 106, N° 2, p.203-216.
- [59] **LALOR, N.** – The practical implementation of sea. In: *IUTAM Symposium on SEA*. ISVR, University of Southampton. – Dordrecht, (The Netherlands): Kluwer Academic Publishers, Juillet 1997. – à paraitre.
- [60] **LANGLEY, R.S.** – A general derivation of statistical energy analysis equations for coupled dynamic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, Vol. 135, N° 3, p.499-508.
- [61] **LANGLEY, R.S.** – A derivation of the coupling loss factors used in sea. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, Vol. 141, N° 2, p.207-219.
- [62] **LANGLEY, R.S.** – A wave intensity technique for the analysis of high frequency vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, Vol. 159, N° 3, p.483-502.
- [63] **LANGLEY, R.S.** – Spatially averaged frequency response envelopes for one- and two-dimensional structural components. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, Vol. 178, N° 4, p.483-500.
- [64] **LASE, Y.** – *Description des réponses structurales dans le domaine des moyennes fréquences à l'aide d'une formulation énergétique.* – Thèse Sci.: Ecole Centrale de Lyon, avril 1992. 204p.
- [65] **LASE, Y., ICHCHOU, M.N., JEZEQUEL, L., et AQUILINA, R.** – Calculating transfer functions using a new energetic method. In: *Intensité vibratoire dans les structures, 4ème Congrès international sur l'intensimétrie*. Cetim. – Senlis, France: , septembre 1993. p.387-390.
- [66] **LAUGESSEN, S. et OHLRICH, M.** – The vibrational source strength descriptor using power input from equivalent forces: a simulation study. *acta acustica*, 1994, Vol. 2, p.449-459.
- [67] **LE BOT, A.** – *Equations énergétiques en mécanique vibratoire. application au domaine des moyennes et hautes fréquences.* – Thèse Sci.: Ecole Centrale de Lyon, 94-20, avril 1994. 217p.
- [68] **LEWIT, M.** – *Inverse messung von kräften und leistungen in gekoppelten, schwingenden strukturen.* – Dissertation: Technische Universität Berlin, mars 1994. 177p.

- [69] **LI, T.Y., ZHANG, X.M., Y.T., ZUO, et XU, M.B.** – Structural power flow analysis for a floating raft isolation system consisting of constrained damped beams. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol. 201, N° 1, p. 47-54.
- [70] **LIN, R.M. et LIM, M.K.** – Derivation of structural design sensitivities from vibration test data. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol. 201, N° 5, p. 613-631.
- [71] **LJUNGGREN, S.** – Transmission of structure-borne sound from a beam into an infinite plate. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, Vol. 100, N° 3, p. 309-320.
- [72] **LUNDBERG, K.O.** – The modulation transfer function method for estimation of sea loss factors applied on two coupled plates. In: *internoise '96*. – St Albans, UK: Institute of Acoustics, July 1996. p. 2915-2919.
- [73] **LUNDBERG, K.O.** – A method for estimating sea loss factors. *Acustica - Acta Acustica*, 1997, Vol. 83, p. 605-614.
- [74] **LYON, R.H.** – *Statistical energy analysis of dynamical systems: theory and applications*. – Cambridge, England: MIT Press, 1975. 388p.
- [75] **LYON, R.H.** – *Machinery noise and diagnostics*. – Stoneham, USA: Butterworth, 1987. 299p.
- [76] **LYON, R.H. et DEJONG, R.G.** – *Theory and application of statistical energy analysis*, deuxième édition. – Cambridge, Massachusetts, and London, England: Butterworth-Heinemann, 1995. 277p.
- [77] **LYON, R.H. et EICHLER, E.** – Random vibration of connected structures. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1964, Vol. 36, N° 7, p. 1344-1354.
- [78] **LYON, R.H. et MAIDANIK, G.** – Power flow between linearly coupled oscillators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1962, Vol. 34, N° 5, p. 623-639.
- [79] **LYON, R.H. et MAIDANIK, G.** – Statistical methods in vibration analysis. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 1964, Vol. 2, N° 6, p. 1015-1024.
- [80] **LYON, R.H. et SHARTON, T.D.** – Vibrational energy transmission in a three element structure. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1965, Vol. 38, N° 1, p. 253-261.
- [81] **MACE, B.R.** – finite frequency band averaging effects in the statistical energy analysis of two continuous one-dimensional subsystems. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, Vol. 189, N° 4, p. 443-476.
- [82] **MACE, B.R.** – Wave coherence, coupling power and statistical energy analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol. 199, N° 3, p. 369-380.
- [83] **MACE, B.R. et SHORTER, P.J.** – Irregularity, damping and coupling strength in s.e.a. In: *IUTAM Symposium on SEA*. ISVR, University of Southampton. – Dordrecht, (The Netherlands): Kluwer Academic Publishers, Juillet 1997. – à paraître.

- [84] **MAIDANIK, G.** – Response of coupled dynamic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1976, Vol. 46, N° 4, p. 561-589.
- [85] **MANNING, J.E.** – Formulation of sea parameters using mobility functions. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 1994, Vol. 346, p. 477-488.
- [86] **MANNING, J.E. et LEE, K.** – Predicting mechanical shock transmission. *The Shock and Vibration Bulletin*, 1968, Vol. 37, N° 4, p. 65-70.
- [87] **MANOHAR, C.S. et KEANE, A.J.** – Statistic of energy flows in spring-coupled one-dimensional subsystems. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 1994, Vol. 346, p. 525-542.
- [88] **MONDOT, J.M. et PETERSSON, B.** – Characterisation of structure-borne sound sources: the source descriptor and the coupling function. *Journal of Sound and Vibration*, 1987, Vol. 114, N° 3, p. 507-518.
- [89] **MOORHOUSE, A.T. et GIBBS, B.M.** – Calculation of the mean and maximum mobility for concrete floors. *Applied Acoustics*, 1995, Vol. 45, p. 227-245.
- [90] **MOORHOUSE, A.T. et GIBBS, B.M.** – Structure-borne sound power emission from resiliently mounted fans: case studies and diagnosis. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, Vol. 186, N° 5, p. 781-803.
- [91] **NAJI, S.** – *Etude des transmissions vibratoires par une méthode de mobilité mixte dans les assemblages par surface.* – Thèse Sci.: Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et Univ. Lyon I, 93 ISAL 0105, dec. 1993. 98p.
- [92] **NEWLAND, D.E.** – Power flow between a class of coupled oscillators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1968, Vol. 43, N° 3, p. 553-559.
- [93] **NORWOOD, C., WILLIAMSON, H.M., et ZHAO, J.Y.** – Surface mobility of a circular contact area on an infinite plate. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol. 201, N° 1, p. 95-108.
- [94] **O'HARA, J.** – Mechanical impedance and mobility concepts. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1967, Vol. 41, N° 5, p. 1180-1184.
- [95] **OREFICE, G., CACCIOLATI, C., et GUYADER, J.L.** – An energetic mobility for structures assembling. In: *internoise '96.* – St Albans, UK: Institute of Acoustics, July 1996. p. 2881-2884.
- [96] **OREFICE, G., GUYADER, J.L., et CACCIOLATI, C.** – Assemblage de structures vibrantes par mobilités énergétiques. In: *Actes du 4eme Congres Français d'Acoustique.* Société Française d'Acoustique. – Marseille: , avril 1997. p. 241-244.
- [97] **PETERSSON, B.** – A thin-plate model for the moment mobility at the intersection of two perpendicular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 1986, Vol. 108, N° 3, p. 417-485.
- [98] **PETERSSON, B. et PLUNT, J.** – On effective mobilities in the prediction of structure-borne sound transmission between a source and a receiving structure. part I: the background and basic experimental studies; part 2: procedures for the estimation of mobilities. *Journal of Sound and Vibration*, 1982, Vol. 82, N° 4, p. 517-529 et p. 530-540.

- [99] **PETERSSON, B.A.T.** – Geometrical and spatial effects on effective mobilities of annular interfaces. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol. 202, N° 4, p. 511-537.
- [100] **PINNINGTON, R.J. et LEDNIK, D.** – Transient statistical energy analysis of an impulsively excited two oscillators system. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, Vol. 189, N° 2, p. 249-264.
- [101] **PINNINGTON, R.J. et WHITE, R.G.** – Power flow through machine isolators to resonant and non-resonant beams. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, Vol. 75, N° 2, p. 179-197.
- [102] **PLUNT, J.** – Generic limitations of vibro-acoustic prediction methods for product noise. In: *internoise '96*. – St Albans, UK: Institute of Acoustics, July 1996. p. 3047-3051.
- [103] **POPE, L.D.** – On the transmission of sound through finite closed shells: S.e.a., modal coupling and non-resonant transmission. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1971, Vol. 50, N° 3, p. 1004-1018.
- [104] **PRICE, A.J. et M.J., CROCKER.** – Sound transmission through double panels using sea. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1970, Vol. 47, N° 3, p. 683-693.
- [105] **REBILLARD, E.** – *Vibro-acoustique des réseaux de plaques: modélisation hypersensibilité et populations de structures*. – Thèse Sci.: Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et Univ. Lyon I, 95 ISAL 0085, décembre 1995. 184p.
- [106] **REMINGTON, P.J. et MANNING, J.E.** – Comparaison of statistical energy analysis power flow predictions with an “exact” calculation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1975, Vol. 57, N° 2, p. 374-379.
- [107] **REN, Y. et BEARDS, C.F.** – Identification of joint properties of a structure using frf data. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, Vol. 186, N° 4, p. 567-587.
- [108] **ROOK, T.E. et SINGH, R.** – Power flow through multidimensional compliant joints using mobility and modal approaches. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1995, Vol. 97, N° 5, p. 2882-2891.
- [109] **RUBIN, S.** – Mechanical immittance and transmission-matrix concepts. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1967, Vol. 41, N° 5, p. 1171-1179.
- [110] **SCHLESINGER, A.** – Transmission of elastic waves from a cylinder to an attached flat plate. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, Vol. 186, N° 5, p. 761-780.
- [111] **SCHROEDER, M.R.** – Effect of frequency and space averaging on the transmission responses of multimode media. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1969, Vol. 46, N° 2, p. 277-283.
- [112] **SCHROEDER, M.R.** – Modulation transfer functions: definition and measurement. *Acustica*, 1981, Vol. 49, N° 2, p. 179-182.
- [113] **SHANKAR, K. et KEANE, A.J.** – A study of the vibrational energies of two coupled beams by finite element and green function (receptance) methods. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, Vol. 181, N° 5, p. 801-838.

- [114] **SHARTON, T.D. et LYON, R.H.** – Power flow and energy sharing in random vibration. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1968, Vol. 43, N° 6, p. 1332-1343.
- [115] **SIMMONS, C.** – Structure-borne sound transmission through plate junctions and estimates of sea coupling loss factors using the finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, Vol. 144, N° 2, p. 215-227.
- [116] **SINHA, A. et CHEN, S.** – A higher order technique to compute the statistics of forced response of a mistuned blade disk assembly. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, Vol. 130, N° 2, p. 207-221.
- [117] **SKUDRZYK, E.** – The mean-value method of predicting the dynamic response of complex vibrators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1980, Vol. 67, N° 4, p. 1105-1135. – tutorial.
- [118] **SKUDRZYK, E.J.** – Understanding the dynamic behavior of complex vibrators. *Acustica*, 1987, Vol. 64, N° 3, p. 130-147.
- [119] **SMITH, J.P.W.** – Statistical models of coupled dynamical systems and the transition from weak to strong coupling. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1979, Vol. 65, N° 3, p. 695-698.
- [120] **SMITH, P.W.** – Response radiation of structural modes excited by sound. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1962, Vol. 34, N° 5, p. 640-647.
- [121] **SOIZE, C.** – Numerical method in elastoacoustic in the non-modal domain. In: *Prediction of the noise emitted by vibrating structures. International Symposium. CETIM.* – Senlis, France : , mars 1991. p. 412-437.
- [122] **SOIZE, C., HUTIN, P.M., DESANTI, A., DAVID, J.M., et CHABAS, F.** – Linear dynamic analysis of mechanical systems in the medium frequency range. *Journal Computer and structures*, 1986, Vol. 23, N° 5, p. 605-637.
- [123] **SUN, J.C., LALOR, N., et RICHARDS, E.J.** – Power flow and energy balance of non-conservatively coupled structures. *Journal of Sound and Vibration*, 1987, Vol. 112, N° 2, p. 321-343.
- [124] **TROSHIN, A.G. et SANDERSON, M.A.** – Structural energy propagation in a t-shaped beam: an evaluation of an intensity and component mobility approach. *Acustica - Acta Acustica*, 1997, Vol. 83, p. 489-505.
- [125] **UNGAR, E.E.** – Statistical energy analysis of vibrating systems. *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, 1967, Vol. 89, p. 626-632.
- [126] **VERHEIJ, J.W.** – Inverse and reciprocity methods for machinery noise source characterization and sound path quantification. part 1. *International Journal of Acoustics and Vibration*, 1997, Vol. 2, N° 1, p. 11-20.
- [127] **WOEHLE, W., BECKMANN, T., et SCHRECKENBACH, H.** – Coupling loss factors for sea of sound transmission at rectangular structural slab joints. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, Vol. 77, N° 3, p. 323-344.

- [128] **WOEHLE, W. et MARX, B.** – Koerperschalluebertragung in gebaeuden-  
vergelich von messwerten mit rechenergebnissen des statistischen energieanalyse.  
*Acustica*, 1990, Vol. 72, p.258-268.
- [129] **WOLDE, T.T.** – On the validity and application of reciprocity in acoustical,  
mechano-acustical and other dynamical systems. *Acustica*, 1973, Vol. 28, p.23-32.
- [130] **WOODHOUSE, J.** – An approach to the theoretical background of sea applied  
to structural vibration. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1981, Vol. 69,  
N° 6, p. 1695-1709.
- [131] **WU, L., AGREN, A., et SUNDBAECK, U.** – Determination of loss factors  
for statistical energy analysis of a diesel engine with geometric average approach.  
*acta acustica*, 1994, Vol. 2, p.127-142.
- [132] **ZEMAN, J.L. et BOGDANOFF, J.L.** – A comment on complex structural  
response to random vibration. *American Institute of Aeronautics and Astronautics  
Journal*, 1969, Vol. 7, N° 7, p.1225-1231.

# Principales Notations

## Abréviations

DSP	Densité Spectrale de Puissance
EMMA	Energetic Mean Mobility Approach
m.f.	moyenne fréquentielle
miel	mass independent energetic level $\langle  V ^2 \rangle$
SEA	Statistical Energy Analysis

## Conventions

[ ]	matrice ou unité, suivant le contexte
{ }	vecteur
x	module de x
$Re\{x\}$	partie réelle de x
$\langle \rangle$	moyenne sur une bande de fréquences
$\sum_{i=1}^N$	sommation sur l'indice i de 1 à N (entier)
$\overline{x}$	valeur de la quantité x <b>après</b> couplage

## Symboles

$\eta$	amortissement structural
h	épaisseur [m]
$\lambda$	longueur d'onde [m]
$\nu$	coefficient de Poisson
$\Pi_e$	puissance active injectée au point e
$\rho_s$	masse surfacique [kg/m <sup>2</sup> ]
$\rho$	masse volumique [kg/m <sup>3</sup> ]
$\omega$	pulsation [rad/s]
C	amortissement [N.s/m]
E	Module d'Young [Pa]
F	force [N]
H	Mobilité énergétique [s/kg]
K	raideur [N/m]
$L_x$	longueur sur l'axe des x [m]
$L_y$	longueur sur l'axe des y [m]
M	masse [kg]
P	puissance active par bande de fréquences [W]
V	vitesse [m/s]
Y	Mobilité classique (ou réceptance) [s/kg]
Z	Impédance [m/s.N]