



**HAL**  
open science

# Méthode d'identification des efforts appliqués sur une structure vibrante, par résolution et régularisation du problème inverse

Charles Pezerat

► **To cite this version:**

Charles Pezerat. Méthode d'identification des efforts appliqués sur une structure vibrante, par résolution et régularisation du problème inverse. Acoustique [physics.class-ph]. INSA de Lyon, 1996. Français. NNT: . tel-00778516

**HAL Id: tel-00778516**

**<https://theses.hal.science/tel-00778516>**

Submitted on 21 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée devant

L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR

Formation doctorale: Acoustique  
Ecole Doctorale des Sciences pour l'Ingénieur de Lyon:  
Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)  
ECL - INSA - UCBL

par

**PEZERAT Charles**

Ingénieur E.C.A.M.

**METHODE D'IDENTIFICATION DES EFFORTS  
APPLIQUES SUR UNE STRUCTURE VIBRANTE,  
PAR RESOLUTION ET REGULARISATION DU PROBLEME INVERSE**

Soutenue le 13 décembre 1996 devant la Commission d'Examen

Jury: Mr. R. AQUILINA  
Mr. Y. CHAMPOUX            rapporteur  
Mr. B. FAVRE  
Mr. J.-L. GUYADER  
Mr. B. LAULAGNET  
Mr. A. NILSSON            rapporteur  
Mr. G. PAVIC  
Mr. R. SABOT            président



## ECOLES DOCTORALES, MAI 1996

- Ecole Doctorale Matériaux de Lyon;  
INSA - ECL - UCBL - U. Chambéry - ENS

Responsable: Pr. A. HOAREAU

Formations doctorales:

- Génie des matériaux (Pr. GUENIN)
- Sciences des matériaux (Pr. BARRAT)
- Matériaux macromoléculaires et composites (Pr. SAUTEREAU)

- Ecole Doctorale des Sciences pour l'Ingénieur de Lyon:  
Mécanique, Energétique, Génie civil, Acoustique (MEGA);  
ECL - INSA - UCBL

Responsable: Pr. J. BATAILLE

Formations doctorales:

- Acoustique (Pr. GUYADER)
- Génie civil: Sols, Matériaux, Structures, Physique du bâtiment (Pr. LA-  
REAL)
- Mécanique (Pr. BATAILLE)
- Thermique et Energétique (Pr. LANCE)

- Ecole Doctorale des Sciences pour l'Ingénieur de Lyon:  
Electronique, Electrotechnique, Automatique (EEA);  
INSA - ECL - UCBL - U. Chambéry - U. St Etienne

Responsable: Pr. G. GIMENEZ

Formations doctorales:

- Acoustique (Pr. GUYADER)
- Automatique industrielle (Pr. BOLON)
- Dispositif de l'électronique intégrée (Pr. PINARD)
- Génie biologique et médical (Pr. COLLOMBEL)
- Génie Electrique (Pr. AURIOL)
- Signal, image, parole (Pr. LACOUME)

LISTE DES DEA ou FORMATIONS DOCTORALES

FORMATIONS DOCTORALES	RESPONSABLES INSA	ADRESSES INSA
Acoustique	<u>GUYADER Jean Louis</u>	Bât 303 Tél 80 80
Analyse et modélisation de systèmes biologiques	NARDON Paul	Bât 406 Tél 80 86
Automatique industrielle	SCAVARDA Serge	Bât 303 Tél 83 41
Biochimie	LAGARDE Michel	Bât 406 Tél 82 40
Chimie Inorganique	GONNARD Paul	Bât 504 Tél 81 58
Conception en bâtiment et techniques urbaines	<u>MIRAMOND Marcel</u>	Bât 304 Tél 85 56
DEA Informatique de Lyon	KOULOUMDJIAN Jacques	Bât 501 Tél 80 99
Dispositifs de l'électronique intégrée	<u>PINARD Pierre</u>	Bât 502 Tél 82 47
Génie biologique et médical	MAGNIN Isabelle	Bât 502 Tél 85 63
Génie civil : sols, matériaux, structures, physique du bâtiment	<u>LAREAL Pierre</u>	Bât 304 Tél 82 16
Génie électrique	CHANTE Jean-Pierre	Bât 401 Tél 87 26
Matériaux polymères et composites	<u>SAUTEREAU Henri</u>	Bât 403 Tél 81 78
Mécanique	DALMAZ Gérard	Bât 113 Tél 83 03
Microstructure et comportement mécanique et macroscopique des matériaux - génie des matériaux	<u>GUENIN Gérard</u>	Bât 502 Tél 82 45
Productique : organisation et conduite des systèmes de production	<u>FAVREL Joël</u>	Bât 502 Tél 83 63
Sciences des matériaux et des surfaces	LAUGIER André	Bât 502 Tél 82 33
Sciences et techniques du déchet	<u>NAVARRO Alain</u>	Bât 404 Tél 84 30
Signal, Image, Parole	GIMENEZ Gérard	Bât 502 Tél 83 32
Thermique et énergétique	LALLEMAND Monique	Bât 404 Tél 81 54

*Les responsables soulignés sont également responsables généraux*

NOVEMBRE 1995

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

Directeur : J. ROCHAT

Professeurs :

S.	AUDISIO	PHYSIOCHIMIE INDUSTRIELLE
J.C.	BABOUX	GEMPPM*
J.	BAHAUD	MECANIQUE DES SOLIDES
B.	BALLAND	PHYSIQUE DE LA MATIERE
D.	BARBIER	MECANIQUE DES SOLIDES
G.	BAYADA	EQUIPE MOD. MATH. CALC. SC.
C.	BERGER (Melle)	CETHIL/EQ. PHYSIQUE INDUST.
M.	BETEMPS	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
J.M.	BLANCHARD	CHIMIE PHYSIQUE APPLIQUEE ET ENVIRONNEMENT
C.	BOISSON	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
M.	BOIVIN	MECANIQUE DES SOLIDES
H.	BOTTA	EQUIPE DEVELOPPEMENT URBAIN
G.	BOULAYE	L. I. S. I.
J.	BRAU	CETHIL/EQ. EQUIPEMENT DE L'HABITAT
M.	BRUNET	MECANIQUE DES SOLIDES
J.C.	BUREAU	THERMOCHIMIE MINERALE
J.P.	CHANTE	COMPOSANTS DE PUISSANCE ET APPLICATIONS
B.	CHOCAT	METHODES
B.	CLAUDEL	CHIMIE PHYSIQUE APPLIQUEE ET ENVIRONNEMENT
M.	COUSIN	BETONS ET STRUCTURES
L.	CRONENBERGER	CHIMIE BIOLOGIQUE
M.	DIOT	THERMOCHIMIE MINERALE
A.	DOUTHEAU	CHIMIE ORGANIQUE
J.C.	DUPUY	PHYSIQUE DE LA MATIERE
H.	EMPTOZ	MOD. SYST. ET REC. DES FORMES
C.	ESNOUF	GEMPPM*
G.	FANTOZZI	GEMPPM*
J.	FAUCHON	C. A. S. M.
J.	FAVREL	L. I. S. P. I.
G.	FERRARIS-BESSO	MECANIQUE DES STRUCTURES
Y.	FETIVEAU	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
L.	FLAMAND	MECANIQUE DES CONTACTS
P.	FLEISCHMAN	GEMPPM*
A.	FLORY	L. I. S. I.
R.	FOUGERES	GEMPPM*
L.	FRECON	D. E. L. I. A.
R.	GAUTHIER	PHYSIQUE DE LA MATIERE
M.	GERY	CETHIL/EQ. EQUIPEMENT DE L'HABITAT
G.	GIMENEZ	TRAITEMENT DU SIGNAL ET ULTRASONS
P.	GOBIN	GEMPPM*
P.	GONNARD	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
R.	GOUTTE	TRAITEMENT DU SIGNAL ET ULTRASONS
G.	GRANGE	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
G.	GUENIN	GEMPPM*
G.	GUILLOT	PHYSIQUE DE LA MATIERE
A.	GUINET	L. I. S. P. I.
C.	GUITTARD	D. E. L. I. A.
J.L.	GUYADER	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
J.P.	GUYOMAR	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
J.M.	JOLION	L. I. S. P. I.
J.	JOUBERT	GENIE MECANIQUE
J.F.	JULLIEN	BETONS ET STRUCTURES
A.	JUTARD	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
R.	KASTNER	GEOTECHNIQUE
H.	KLEIMANN	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
J.	KOULOUMDJIAN	L. I. S. I.
M.	LAGARDE	CHIMIE BIOLOGIQUE

M.	LALANNE	MECANIQUE DES STRUCTURES
A.	LALLEMAND	CETHIL/EQ. ENERGETIQUE ET THERMIQUE
M.	LALLEMAND (Mme)	CETHIL/EQ. ENERGETIQUE ET THERMIQUE
P.	LAREAL	GEOTECHNIQUE
A.	LAUGIER	PHYSIQUE DE LA MATIERE
CH.	LAUGIER	PHYSIOLOGIE ET PHARMACODYNAMIE
P.	LEJEUNE	G. M. M. O.
C.	LESUEUR	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
A.	LUBRECHT	L. I. S. P. I.
Y.	MARTINEZ	L. I. S. P. I.
H.	MAZILLE	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
P.	MERLE	GEMPPM*
J.	MERLIN	GEMPPM*
J.P.	MILLET	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
M.	MIRAMOND	METHODES
N.	MONGEREAU	GEOTECHNIQUE
R.	MOREL	MECANIQUE DES FLUIDES
P.	NARDON	BIOLOGIE APPLIQUEE
A.	NAVARRO	CHIMIE PHYSIQUE APPLIQUEE ET ENVIRONNEMENT
M.	OTTERBEIN	CHIMIE PHYSIQUE APPLIQUEE ET ENVIRONNEMENT
J.P.	PASCAULT	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
J.	PERA	MATERIAUX MINERAUX
G.	PERACHON	THERMOCHIMIE MINERALE
M.	PERDRIX	TRAITEMENT DU SIGNAL ET ULTRASONS
J.	PEREZ	GEMPPM*
Q.	PHAM	L. M. M.
P.	PINARD	PHYSIQUE DE LA MATIERE
J.M.	PINON	L. I. S. I.
D.	PLAY	C. A. S. M.
J.	POUSIN	EQUIPE MOD. MATH. ET CALCUL SCIEN.
P.	PREVOST	L. I. S. P. I.
R.	PROST	TRAITEMENT DU SIGNAL ET ULTRASONS
R.	REYNAUD	CETHIL/EQUIPE GMC
J.M.	REYNOUARD	BETONS ET STRUCTURES
J.	ROBERT-BADOUY (Mme)	G. M. M. O.
A.	ROCHE	L. M. M.
D.	ROUBY	GEMPPM*
J.F.	SACADURA	CETHIL/EQUIPE GMC
H.	SAUTEREAU	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
S.	SCAVARDA	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
D.	THOMASSET	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
M.	TROCCAZ	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
R.	UNTERREINER	TRAITEMENT DU SIGNAL ET ULTRASONS
J.	VERON	CHIMIE PHYSIQUE APPLIQUEE ET ENVIRONNEMENT
A.	VINCENT	GEMPPM*
G.	VIGIER	GEMPPM*
P.	VUILLERMOZ	PHYSIQUE DE LA MATIERE

#### Directeurs de recherche C. N. R. S. :

Y.	BERTHIER	MECANIQUE DES CONTACTS
P.	CLAUDY	THERMOCHIMIE MINERALE
M.	MURAT	GEMPPM*
A.	NOUAILHAT	PHYSIQUE DE LA MATIERE
M.A.	MANDRAND (Mme)	GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES

#### Directeurs de recherche I. N. R. A. :

G.	BONNOT	BIOLOGIE
S.	GRENIER	BIOLOGIE
Y.	MENEZO	BIOLOGIE

#### Directeurs de recherche I. N. S. E. R. M. :

A-F.	PRIGENT (Mme)	CHIMIE BIOLOGIQUE
N.	SARDA (Mme)	CHIMIE BIOLOGIQUE

\* GROUPE D'ETUDE METALLURGIE PHYSIQUE ET PHYSIQUE DES MATERIAUX

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au Laboratoire Vibrations Acoustique de l'INSA de Lyon, dans des conditions très agréables et je tiens à remercier, en premier lieu, mon directeur de thèse Jean-Louis Guyader pour l'intérêt qu'il a porté sur ce sujet, les idées qu'il a émises et pour le soutien qu'il m'a apporté ces trois années.

D'autre part, je suis reconnaissant à Robert Aquilina, Conseiller technique du Centre Technique des Systèmes Navals à Toulon, pour avoir participé à la définition des axes de recherche de cette thèse et de l'avoir soutenu financièrement par le biais d'une bourse DRET-CNRS et d'un contrat d'accompagnement avec le laboratoire pour le bon déroulement de l'étude.

Je remercie Yvan Champoux, Professeur au Groupe Acoustique de l'Université de Sherbrooke et Anders Nilsson, Professeur au Royal Institute of Technology de Stockholm d'avoir accepté de rapporter ce mémoire et d'avoir initié les discussions qui en ont découlé.

Mes remerciements vont également à Bernard Favre, Chef du Département de Recherche et Calcul de Renault Véhicules Industriels, à Bernard Laulagnet, Maître de Conférence au laboratoire, à Goran Pavic, Chef du Groupe Acoustique Fluide et Structure du CETIM à Senlis, à Robert Sabot, Professeur au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'Ecole Centrale de Lyon, pour avoir accepté de faire partie du jury.

Un grand merci aux doctorants, aux permanents du laboratoire, ainsi qu'aux personnes de passage et aux personnes extérieures au laboratoire avec qui les discussions m'ont permis de prendre du recul et de poursuivre ce travail avec motivations.





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>13</b>
Nature du problème . . . . .	14
Les localisations de sources en vibroacoustique . . . . .	15
Position du sujet . . . . .	17
Structure du document . . . . .	18
<b>1 Principe de la méthode: Application au cas d'une structure monodi- mensionnelle</b>	<b>19</b>
1.1 Buts du chapitre . . . . .	19
1.2 Equations de base du problème . . . . .	19
1.3 Méthode globale . . . . .	20
1.4 Méthode locale . . . . .	22
1.5 Méthode de la transformée de Fourier . . . . .	24
1.6 Simulations numériques . . . . .	25
1.6.1 Principe . . . . .	25
1.6.2 Exemples . . . . .	26
1.6.2.1 Barre excitée par une force ponctuelle longitudinale . . . . .	26
1.6.2.2 Poutre excitée par une force ponctuelle . . . . .	27
1.6.2.3 Poutre excitée par un moment ponctuel . . . . .	28
1.6.2.4 Poutre excitée par une force répartie . . . . .	29
1.7 Influence des hétérogénéités de structure . . . . .	31
1.7.1 Le problème . . . . .	31
1.7.2 Exemple . . . . .	31
1.8 Conclusion . . . . .	32
<b>2 Instabilités aux incertitudes: Régularisation</b>	<b>35</b>
2.1 Buts du chapitre . . . . .	35
2.2 Simulations numériques . . . . .	35
2.2.1 Principe . . . . .	35
2.2.2 Observations . . . . .	36
2.2.3 Analyse du problème . . . . .	38
2.3 Régularisations . . . . .	40
2.3.1 Méthode globale . . . . .	40
2.3.1.1 Troncature de la série . . . . .	40
2.3.1.2 Choix de la troncature . . . . .	40
2.3.1.3 Domaine de validité . . . . .	44
2.3.2 Méthode locale . . . . .	45
2.3.2.1 Filtrage . . . . .	45

2.3.2.2	Problèmes aux limites : Fenêtrage . . . . .	48
2.3.2.3	Optimisation de la régularisation . . . . .	49
2.3.2.4	Choix du nombre d'onde de coupure . . . . .	56
2.3.2.5	Domaine de validité . . . . .	57
2.4	Conclusion . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Extension de la méthode locale aux structures 2D planes</b>	<b>59</b>
3.1	Buts du chapitre . . . . .	59
3.2	Equations de base du problème . . . . .	59
3.3	Simulation numérique : Exemple de référence . . . . .	60
3.4	Méthode locale . . . . .	61
3.4.1	Schéma aux différences finies . . . . .	61
3.4.2	Fenêtrage . . . . .	63
3.4.3	Filtrage . . . . .	63
3.4.3.1	Coupures du filtre . . . . .	63
3.4.3.2	Choix du nombre d'onde de coupure . . . . .	64
3.4.3.3	Facteurs de forme . . . . .	65
3.4.3.4	Directions du filtrage - Multifiltrage . . . . .	66
3.4.4	Domaine de validité . . . . .	69
3.5	Exemples - Applications . . . . .	69
3.5.1	Plaque excitée par une force ponctuelle et couplée à un amortisseur et un ressort . . . . .	69
3.5.2	Membrane excitée par une onde plane . . . . .	71
3.5.3	Plaque excitée par une force ponctuelle et couplée à un fluide lourd . . . . .	72
3.6	Conclusion . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Identification des conditions aux limites</b>	<b>77</b>
4.1	Buts du chapitre . . . . .	77
4.2	Calculs des dérivées du déplacement . . . . .	77
4.2.1	Schémas aux différences finies . . . . .	78
4.2.2	Etude de la convergence . . . . .	79
4.3	Influence des incertitudes de mesure . . . . .	81
4.4	Régularisation . . . . .	82
4.5	Identification . . . . .	83
4.5.1	Principe . . . . .	83
4.5.2	Exemples . . . . .	84
4.5.2.1	Poutre sur ressorts de translation . . . . .	84
4.5.2.2	Poutre sur ressorts de rotation . . . . .	85
4.5.2.3	Poutre sur appuis . . . . .	86
4.5.2.4	Poutre encastree . . . . .	87
4.5.2.5	Poutre guidée . . . . .	87
4.5.2.6	Poutre libre . . . . .	89
4.6	Conclusion . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Identification de l'opérateur d'une structure</b>	<b>91</b>
5.1	Buts du chapitre . . . . .	91
5.2	Principe de l'identification . . . . .	91
5.2.1	Identification de l'ordre de l'équation différentielle . . . . .	93

5.2.2	Choix de l'excitation de calibration . . . . .	94
5.2.2.1	Effort ponctuel . . . . .	95
5.2.2.2	Distribution répartie et continue . . . . .	96
5.2.2.3	Distribution répartie et discontinue . . . . .	97
5.3	Problème de réalisation . . . . .	99
5.3.1	Effet des incertitudes de mesure . . . . .	99
5.3.2	Régularisation . . . . .	101
5.4	Conclusion . . . . .	106
<b>6</b>	<b>Validations expérimentales</b>	<b>107</b>
6.1	Buts du chapitre . . . . .	107
6.2	Dispositif expérimental . . . . .	107
6.3	Validation sur poutre . . . . .	108
6.3.1	Montage et caractéristiques de la poutre . . . . .	108
6.3.2	Résultats . . . . .	109
6.3.2.1	Méthode globale . . . . .	112
6.3.2.2	Méthode locale . . . . .	116
6.4	Validation sur plaques . . . . .	121
6.4.1	Montage et caractéristiques des plaques . . . . .	121
6.4.2	Résultats . . . . .	121
6.4.2.1	Plaque simple . . . . .	122
6.4.2.2	Plaque raidie . . . . .	126
6.5	Conclusion . . . . .	127
	<b>Conclusion</b>	<b>129</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>131</b>



# Introduction

L'objectif de cette étude est de développer une méthode de localisation et de détermination des sources d'excitation d'une structure vibrante, rayonnant éventuellement acoustiquement (cf [24]). De façon schématique, l'effet d'une sollicitation en vibroacoustique résulte d'un processus comprenant trois étapes principales :

- L'excitation d'une structure par une ou plusieurs sources,
- La propagation solidienne des ondes mécaniques engendrées,
- Le rayonnement des structures mécaniques ainsi excitées.

Bien entendu, ces trois étapes interfèrent les unes avec les autres. L'excitation d'une structure peut être vue comme un effort extérieur appliqué mécaniquement, acoustiquement, ou d'une autre façon, mais elle peut être aussi issue du rayonnement acoustique propre de la structure elle-même (effet du couplage fluide-structure [7]), ou du couplage entre plusieurs propagations solidiennes d'ondes mécaniques (couplage avec d'autres types d'ondes).

L'objectif pratique visé ici, est de pouvoir obtenir une évaluation de ces différentes causes à partir de la connaissance d'un minimum d'informations sur la nature des solutions (modèle) et sur l'état vibratoire de la structure (mesures) que l'on voudrait, par la suite, étendre à la connaissance de son champ acoustique rayonné.

Les intérêts sont multiples :

- En premier lieu, l'application type est de pouvoir localiser la, ou les causes d'un effet indésirable (bruit sonore, vibrations gênantes,...), afin de les identifier et y remédier.
- Comme deuxième application importante, l'approche présentée peut être vue comme un moyen de mesure. Par exemple, il peut être intéressant de mesurer une ou plusieurs forces (forces d'excitation ou de jonction) en fonction de la fréquence où la présence d'un capteur de force n'est pas possible, ou de mesurer le saut de pression acoustique pariétale participant à la vibration de la structure.
- On peut également voir cette approche comme un moyen d'analyse de structure. En effet, une structure complexe peut être décomposée en une structure simple (modèle connu) excitée par des efforts de couplage internes modélisant les éléments qui la rendent compliquée. Par exemple, la vibration d'une plaque raidie peut être analysée comme celle d'une plaque simple avec des efforts supplémentaires créés par les raidisseurs. Ces efforts peuvent ainsi être localisés et identifiés.

Ces trois applications fournissent le principal intérêt de ce développement, nous verrons que d'autres peuvent s'y rajouter.

Dans la suite de cette introduction, le lecteur trouvera 4 paragraphes :

- Le premier concerne la nature du sujet, c'est-à-dire une situation par rapport aux divers problèmes de même type que l'on rencontre généralement dans la littérature scientifique.
- Le second s'intéresse plus particulièrement aux aspects de la localisation de sources en vibroacoustique, afin de mieux situer l'approche proposée dans ce travail.
- Le troisième positionne le sujet par rapport aux études précédemment citées et met en évidence les différents objectifs ainsi que la contribution apportée par la méthode proposée.
- Le quatrième décrit l'articulation du document autour de 6 chapitres qui constituent son ensemble.

## Nature du problème

En général, les problèmes vibroacoustiques consistent, en connaissant le milieu et les efforts appliqués, à décrire les signaux mesurables en un formalisme mathématique suffisamment précis pour décrire correctement les phénomènes, et assez simples pour se prêter à un traitement numérique ultérieur. Ce type de modélisation peut être définie comme un problème direct, puisqu'il calcule l'effet d'une cause donnée. En outre, notre problème d'identification des efforts constitue un problème inverse étant donné qu'il détermine les causes d'un phénomène grâce à la connaissance de leurs effets (données fournies par l'instrumentation) et du modèle fourni par l'étude du problème direct.

Il arrive souvent que cette notion de problème inverse rejoigne le concept du problème mal posé, défini par Tikhonov [42] comme un problème ne vérifiant pas les exigences suivantes :

1. l'existence d'une solution,
2. l'unicité de la solution,
3. la stabilité du problème.

Si ces trois conditions sont respectées, alors le problème est dit "bien posé". En ce qui concerne notre approche, la formulation mathématique choisie permet de respecter les deux premières exigences. En revanche, comme dans la plupart des problèmes inverses, la stabilité n'est pas assurée. Ainsi, lorsque les données ne sont connues qu'avec un certain degré d'approximation, le problème devient instable et la solution calculée diverge par rapport à la solution exacte.

Aujourd'hui, on connaît bon nombre de problèmes mal posés, appartenant tant aux mathématiques classiques qu'à un panel de branches appliquées dont l'importance pratique est incontestable. De plus en plus, des revues scientifiques publient des travaux consacrés aux formalismes généraux de ces problèmes. Etant donné leur grand nombre, nous n'avons pas cherché à faire le point pour toute la littérature consacrée à ce domaine. Néanmoins, le lecteur trouvera une bibliographie complète dans les références citées ci-dessous.

Parmi tous ces formalismes, on peut retenir deux grandes tendances : le principe probabiliste et le principe déterministe. Même si ces deux concepts diffèrent dans leurs formes, on retrouve toujours la même idée de base : pour pallier aux problèmes d'instabilité d'une inversion, il faut régulariser le problème par une information *à priori* sur le résultat.

Dans l'approche probabiliste, Tarantola [39] montre qu'une information *à priori* représentée par des données statistiques (moyenne *à priori*, covariance *à priori*) sur les résultats peut permettre de régulariser le problème. Il est ainsi possible de diminuer considérablement l'effet néfaste de l'inversion et d'obtenir une information *à posteriori* précise.

Dans le concept déterministe, basé essentiellement sur la minimisation de la fonctionnelle d'écart entre les quantités mesurées et les quantités calculées par le problème direct, Tikhonov [42] introduit la notion d'opérateur régularisant, permettant de calculer une solution approchée (quasi solution) et rendant le problème mal posé, stable. L'introduction de cet opérateur se fait généralement par l'apport d'une ou de plusieurs informations supplémentaires dans la fonctionnelle d'écart (ou fonction coût). Ces informations *à priori* sont représentées par des contraintes limitant une quantité voulue (valeurs calculées, variations, etc...).

Toutes ces notions de régularisation posent évidemment le problème du choix de l'information *à priori*. Si celle-ci est faussée ou exagérée, la solution approchée, qui doit être la plus proche de la solution exacte, peut s'en écarter de façon conséquente. Le risque est de ne plus accéder à l'information recherchée.

Dans notre domaine, les problèmes inverses sont nombreux. Mis à part tout ce qui concerne les localisations de sources, dont fait l'objet le paragraphe suivant, on trouve d'autres applications comme l'identification de paramètres de modélisation, très utilisée dans le recalage calculs-essais initialement introduit par Berman & al [3], Baruch [1], Collins & al [10]. Dans ces techniques, on cherche à corriger par problème inverse les paramètres du modèle éléments finis [50] [51] par la connaissance de valeurs expérimentales. Dans le domaine purement acoustique, on peut par exemple, citer les travaux de Bonnet [6] qui identifie la forme d'un objet par inversion du problème de la diffusion. D'autres exemples existent mais nous nous bornerons à notre objectif qui consiste à localiser et identifier les sources.

## Les localisations de sources en vibroacoustique

Les différentes techniques de localisation de sources peuvent se regrouper dans deux groupes : le domaine purement acoustique et le domaine purement vibratoire. Toutefois, certaines études utilisent les deux. Tous ces travaux sont intéressants parce qu'ils vont permettre non seulement, de situer l'approche présentée, mais aussi de faire le lien entre les diverses techniques utilisées, notamment en ce qui concerne les difficultés de stabilisation et donc, de régularisation.

En acoustique, les localisations de sources caractérisent le champ vibratoire d'une structure vibrante, à partir de la connaissance du champ acoustique rayonné. Ce type d'étude ressemble à ce que nous visons, en ce sens qu'elles cherchent à identifier la cause de l'effet mesuré.

La plus connue est certainement l'holographie acoustique introduite par Williams & al [47] et par Maynard & al [28] sous le nom de *Nearfield Acoustic Holography (NAH)*. Son principe est de rétropropager le champ acoustique mesuré sur une surface (hologramme) par une déconvolution spatiale. La technique utilisée est basée sur la transformée de Fourier spatiale bidimensionnelle, permettant de rétropropager le champ acoustique, à l'aide



d'une simple division par la fonction de transfert dans le domaine des nombres d'onde (connue par l'équation d'Helmoltz [7]). Le champ étant rétropropagé, la vitesse vibratoire peut se calculer en amont et en particulier sur la surface coïncidente avec la structure, par l'équation d'Euler (cf [7]) reliant vitesse et gradient de pression. Beaucoup de développements en ont découlé, et montrent de toute évidence une méthode de plus en plus efficace, même dans des cas difficiles comme le milieu sous marin [46], les géométries cylindriques [8] [45], etc... Par ailleurs, on peut citer également la méthode BAHIM [25] (Broadband Acoustic Holography reconstruction from acoustic Intensity Measurements) qui permet d'accéder à la pression complexe et à la vitesse particulaire par mesures d'intensités acoustiques [13]. La connaissance d'un signal de référence de phase n'est plus nécessaire puisque la phase est définie quel que soit le point de mesure. En plus de son originalité par rapport à l'holographie NAH, cette technique est facile à utiliser tout en nécessitant un appareillage très simple.

Comme le soulignent Der Mathéossian & al [11], l'holographie acoustique constitue un problème inverse puisqu'il s'agit de reconstruire un champ de déplacement, cause du champ de pression ou de l'intensité acoustique mesuré. Ceci pose évidemment le problème de la stabilité. Dans les premiers travaux sur l'holographie NAH, Veronesi & al [43] montrent que la rétropropagation du champ de pression mesuré, amplifie considérablement le bruit inhérent à toute mesure. Physiquement, cette amplification provient de la fonction de transfert directe qui prend des valeurs petites pour les hauts nombres d'onde (atténuation exponentielle des ondes évanescentes). Le processus inverse tend donc à amplifier ce domaine. Pour remédier à cette instabilité, ils introduisent un filtrage limitant la transformée de Fourier spatiale obtenue, dans le domaine stable. Les paramètres du filtre (coupure, forme,...) sont déterminés empiriquement par l'expérience et nécessitent une information *à priori* sur le champ situé en amont. D'autres auteurs ont aussi défini des filtres d'ondes évanescentes (cf par exemples [19], [12] [15]). Ils mettent également en évidence le caractère intuitif du choix des paramètres de filtrage. Der Mathéossian propose en [11] une nouvelle formulation de l'holographie, basée sur l'approche des problèmes mal posés de Tikhonov [42]. L'intérêt recherché est d'optimiser les paramètres du filtre de manière automatique.

Tous ces travaux montrent la possibilité de régulariser le problème inverse du rayonnement d'une structure. Les difficultés résident dans le choix de l'information *à priori* qui se traduit, dans cette technique, par la détermination des paramètres du filtrage spatial. Proches de l'holographie, d'autres études se sont penchées sur la reconstruction du champ vibratoire d'une structure. Quelle que soit l'approche choisie, les difficultés de stabilité du problème inverse interviennent et conduisent aux diverses techniques de régularisation. Bonnet [5] propose la formulation probabiliste de Tarantola [39] en utilisant une inversion dite Gaussienne qui élimine l'effet des mesures perturbées par la connaissance d'informations *à priori* statistiques (moyennes, covariances). Tekatlian [40] [41] tente d'inverser le problème de rayonnement de façon déterministe par la minimisation d'une fonctionnelle d'écart. L'instabilité y est mise en évidence. La réalisation expérimentale paraît alors difficile, à moins d'être très proche de la source où l'instabilité est moins forte.

En vibration, dès que l'on parle de localisation de source, l'idée est d'utiliser l'intensimétrie de structure. Historiquement, l'intensité de structure a été définie, par analogie à l'intensité acoustique, par Noiseux [31] et Pavic [32]. Dans le cas de structures homogènes d'épaisseur constante, l'intensité exprimée en  $W/m$  correspond à l'énergie par unité de temps qui traverse l'unité de largeur, le flux de puissance se propageant dans le sens de

la longueur. Il est ainsi possible d'analyser le chemin parcouru par l'énergie vibratoire. On peut également, en intégrant cette quantité par éléments de surface, déterminer la puissance injectée ou dissipée sur chaque élément (cf [36]). L'expression de l'intensité vibratoire proposé par Noiseux [31] et Pavic [32] a la particularité d'être une combinaison du déplacement transverse, de ses dérivées temporelles et de ses dérivées spatiales. La connaissance seule du déplacement transverse suffit. Ses dérivées temporelles peuvent se calculer par passage dans le domaine de Fourier, ses dérivées spatiales peuvent être déduites suivant 3 méthodes que l'on rencontre dans la littérature :

- par différences finies [32],
- par projection dans la base modale [17],
- par transformée de Fourier spatiale [38].

Dans toutes ces formulations, aucun auteur parle vraiment de problème inverse. Pourtant, on retrouve toujours les obstacles dûs à la sensibilité aux incertitudes de mesure. En ce qui concerne les techniques des différences finies, Hayek & al [20] se sont particulièrement penchés sur ce problème et montrent que l'ordre d'approximation du schéma a une importance primordiale. Si l'ordre est élevé (utilisation d'un plus grand nombre de points de mesure), l'erreur d'approximation est réduite mais l'instabilité de la technique est plus grande. Par contre, si l'ordre est faible, la méthode est plus stable vis-à-vis des erreurs de mesure, mais on s'écarte de la solution exacte. Il existe donc un compromis sur le choix de l'ordre. Les approximations utilisées, allant du second au sixième ordre, montrent que l'optimum est obtenu au second ordre avec 5 capteurs. Dans l'approche modale, Gavric & al [17] mettent en évidence que les ordres modaux élevés sont très sensibles et difficiles à calculer. Les négliger, permet le calcul d'une solution plus stable mais approchée, ce qui coïncide avec la notion du filtrage utilisée en holographie. Enfin, par transformée de Fourier spatiale, Spalding & al [38] utilisent un filtrage numérique idéal 2D pour supprimer l'effet d'instabilité. Le paramètre de filtrage (coupure) est déterminé empiriquement par un procédé algorithmique cherchant les frontières où le bruit couvre la transformée de Fourier du déplacement. Les tendances que suivent ce paramètre ne sont pas encore définies.

Les études menées en acoustique comme en vibration et plus particulièrement l'holographie acoustique et l'intensimétrie structurale commencent à être connues et mises au point. C'est dans ce sens qu'elles nous intéressent, et que nous ne les perdrons pas de vue.

## Position du sujet

Le but principal de la méthode exposée ici et en [35], [34], [33], est de déterminer toutes les causes participant à la vibration d'une structure. Ces causes, exprimées sous forme d'efforts, peuvent avoir des caractéristiques bien différentes. Jusque là, l'intensimétrie structurale, dont le but est d'analyser le cheminement de l'énergie vibratoire, ne permet d'accéder qu'à une quantité énergétique. De ce fait, son utilisation se restreint à la localisation d'efforts qui injectent (forces extérieures) ou qui dissipent (amortisseurs) de la puissance mécanique. D'ailleurs, son application à des structures réverbérantes pose problème.

La particularité de l'approche proposée est de rechercher directement les efforts de tous

types (ponctuels, surfaciques, avec ou sans transferts d'énergie,...) sous forme d'une distribution sur le domaine spatial de la structure. La formulation mathématique choisie est déterministe pour raison de simplicité et parce qu'elle a donné rapidement des résultats encourageants. Le développement n'est pas typique d'un problème inverse au sens des mathématiques (inversions de matrices, minimisations de fonctionnelles d'écart, etc...); la régularisation est nécessaire toutefois, mais intervient par une voie différente: filtrage et fenêtrage. La méthode proposée est locale, elle utilise une information *à priori*: l'équation du mouvement de la structure et nécessite les données sur une partie du système vibrant, pour calculer les efforts qui y sont éventuellement appliqués.

Sur un plan pratique, nous serons en mesure, à partir de données de vibration sur une structure mince, de localiser les efforts internes appliqués. C'est en quelque sorte une "radiographie" de l'intérieur d'une machine que nous avons développé.

Par ailleurs, on pourra remarquer que les travaux publiés récemment par Yong Zhang et J. Adin Mann III en [49] et [48], sont particulièrement proches de notre étude. Même si ces travaux ont été menés parallèlement, nous en ferons souvent référence, pour mettre en évidence les différences qu'ils présentent.

## Structure du document

L'ensemble du document s'articule en 6 chapitres :

- Le premier introduit le formalisme choisi pour déterminer la distribution des efforts sur une structure. Des simulations numériques sont réalisées sur des structures monodimensionnelles, pour qualifier et quantifier les possibilités dans ce type de cas simples.
- Le deuxième est consacré aux difficultés engendrées par le problème inverse. On y étudie, dans la même configuration, une technique de régularisation permettant sa réalisation.
- Le troisième étend la méthode aux structures 2D planes. Certains paramètres y sont réétudiés. Des simulations numériques montrent des applications particulièrement intéressantes.
- Le quatrième propose une approche sur l'identification des conditions aux limites, avec une technique proche de celle proposée dans les chapitres précédents.
- Le cinquième présente un autre objectif développé par la même formulation. Il s'agit de l'identification de l'opérateur d'une structure, à partir de la connaissance du champ vibratoire mesuré et de la force d'entrée appliquée.
- Enfin, le dernier présente les expérimentations réalisées au laboratoire, permettant la validation de la méthode de localisation des efforts, sur poutres et plaques.

# Chapitre 1

## Principe de la méthode : Application au cas d'une structure monodimensionnelle

### 1.1 Buts du chapitre

L'objectif de ce chapitre est de donner le cheminement de la méthode d'identification des efforts appliqués à une structure, à partir de son champ vibratoire. Pour simplifier le développement, on traite le cas d'une structure monodimensionnelle. Après un bref rappel des équations de base du problème vibratoire, on définit différentes approches, permettant le calcul des forces sur la structure. Des exemples, tirés de simulations numériques, sont présentés, afin de mettre en évidence les limites de deux techniques que nous avons retenus. En conclusion, on donnera une comparaison de ces deux méthodes, ce qui permettra de retenir celle qui nous offre le plus de satisfaction.

### 1.2 Equations de base du problème

Dans le problème vibratoire des structures minces, on trouve plusieurs types de mouvement mécaniques. En régime harmonique  $e^{+j\omega t}$ , ces mouvements sont solutions d'équations différentielles du second ou du quatrième ordre. Dans la suite, nous avons pris comme exemples :

- le mouvement de traction-compression dans les barres, régi par l'équation :

$$- E(1 + j\eta)S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho S \omega^2 u = F_u(x, \omega) \quad (1.1)$$

où  $u(x, \omega)$  désigne le champ de déplacement longitudinal,  $F_u(x, \omega)$  la distribution de force longitudinale,  $S$  la section de la barre,  $E$  et  $\rho$  le module d'Young et la masse volumique du matériau,  $\eta$  l'amortissement structural propre au matériau.

- Le mouvement de flexion des poutres, régi par l'équation :

$$E(1 + j\eta)I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho S \omega^2 w = F_w(x, \omega) \quad (1.2)$$

où  $w(x, \omega)$  désigne le champ de déplacement transverse,  $F_w(x, \omega)$  la distribution de force transverse.

Les autres types de mouvement, comme le mouvement de torsion ou le mouvement des cordes, correspondent à des équations différentielles du second ordre. Elles ont exactement les mêmes expressions que 1.1.

Les équations 1.1 et 1.2 fournissent donc les équations de base de notre problème. L'inconnue est la distribution de force  $F_u(x,\omega)$  ou  $F_w(x,\omega)$ , exprimée en  $N/m$ . Les caractéristiques du matériau et la géométrie de la structure sont supposées connues. Le déplacement  $u(x,\omega)$  ou  $w(x,\omega)$  est mesuré en plusieurs points uniformément répartis sur la structure. Pour une distribution de force non harmonique, la reconstitution se traduit par le calcul de ses composantes fréquentielles (spectre), grâce à la connaissance des transformées de Fourier des déplacements mesurés.

Le problème réside dans le calcul des dérivées spatiales du déplacement, du second ou du quatrième ordre, selon la nature du mouvement considéré. Les trois paragraphes suivants proposent différentes techniques. La première utilise une décomposition du mouvement dans une base de fonctions, cinématiquement admissibles aux limites, et analytiquement dérivables. La deuxième calcule ces dérivées par un schéma aux différences finies. La troisième est basée sur le passage dans le domaine des nombres d'onde par transformée de Fourier spatiale. Dans ce cas, le calcul des dérivées spatiales se traduit par une simple multiplication.

### 1.3 Méthode globale

L'idée est d'utiliser la méthode de Ritz (cf [14] ou [18]) qui décompose le déplacement  $w(x,\omega)$  dans une base cinématiquement admissible. Nous utilisons dans la suite les déformées propres de la structure, qui fournissent une base idéale, compte tenu de leurs orthogonalités :

$$w(x,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\omega) \cdot \phi_n(x) \quad (1.3)$$

où les  $a_n(\omega)$  sont les coefficients modaux, correspondants à la projection du mouvement dans la base modale :

$$a_n(\omega) = \frac{2}{L} \int_0^L w(x,\omega) \cdot \phi_n(x) dx \quad (1.4)$$

et les  $\phi_n(x)$  sont les déformées propres de la structure, solutions de l'équation du mouvement sans second membre :

$$ES \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} = -\rho S \omega_n^2 \phi_n(x) \quad (1.5)$$

pour les vibrations longitudinales, et

$$EI \frac{\partial^4 \phi_n}{\partial x^4} = \rho S \omega_n^2 \phi_n(x) \quad (1.6)$$

pour les vibrations de flexion.

En multipliant les équations du mouvement 1.1 ou 1.2 par une déformée quelconque  $\phi_p(x)$ , et en intégrant dans le domaine spatiale, les relations d'orthogonalités entre les modes ( $\int_0^L \phi_p(x)\phi_n(x)dx = N_n\delta(n-p)$ ), permettent d'obtenir les équations du mouvement projetées dans la base modale :

$$a_n(\omega) \cdot \left(\frac{\rho}{E}\omega_n^2 - k^2\right) N_n E (1 + j\eta) S = F_n(\omega) \quad (1.7)$$

$$a_n(\omega) \cdot \left(\frac{\rho S}{EI}\omega_n^2 - k^4\right) N_n E (1 + j\eta) I = F_n(\omega) \quad (1.8)$$

où  $F_n(\omega)$  représentent les forces généralisées,  $N_n$  la norme du mode de rang  $n$  :

$$N_n = \int_0^L \phi_n^2(x) dx \quad (1.9)$$

et  $k$ , le nombre d'onde naturel, relié à la pulsation d'excitation par l'équation de dispersion :

$$k = \sqrt{\frac{\rho}{E(1+j\eta)}} \omega \quad (1.10)$$

pour les vibrations de longitudinales, et

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho S}{E(1+j\eta)I}} \sqrt{\omega} \quad (1.11)$$

pour les vibrations de flexion.

On reconstitue alors la distribution de force  $F(x,\omega)$ , appliquée sur la structure, à partir des forces généralisées, calculées par 1.7 ou 1.8 :

$$F(x,\omega) = \sum_{n=0}^N F_n(\omega) \cdot \phi_n(x) \quad (1.12)$$

avec  $N$  l'ordre de la troncature modale et  $F$  la distribution de force  $F_u$  ou  $F_w$  selon le mouvement considéré.

Jusque-là, nous n'avons pas parlé des conditions aux limites. Or, celles-ci doivent être connues, pour obtenir la base des fonctions  $\phi_n(x)$ , solutions des équations différentielles 1.5 ou 1.6. Cette connaissance, au préalable, avec celle de l'opérateur constitut donc les informations "à priori" nécessaires à la détermination de l'excitation.

En résumé, les étapes de la méthode sont les suivantes :

- Choix des modes suivant les conditions aux limites,
- Calcul des coordonnées généralisées du déplacement (à partir du champ discrétisé) :

$$a_n(\omega) = \frac{2}{(M-1)} \sum_{i=0}^{M-2} w_i \phi_n(i\Delta) \quad (1.13)$$

où  $M$  est le nombre de points constituant le maillage,  $\Delta$  l'écart entre deux points consécutifs,  $w_i$  le déplacement au point indicé  $i$  ( $w_i = w(i\Delta,\omega)$ ),

- Calcul des forces généralisées (équations 1.7 ou 1.8),
- Calcul de la distribution de force (sur un nouveau maillage) par l'équation 1.12

Etant donné que le champ de déplacement est échantillonné spatialement, on est amené à discrétiser l'expression 1.4 qui calcule les coordonnées généralisées (cf 1.13). Cette discrétisation fait que le calcul des amplitudes des modes, dont la longueur d'onde propre est inférieure à  $\Delta$ , est physiquement faux. Le nombre d'amplitudes modales maximum  $N_{max}$  que l'on peut calculer se déduit du critère de Shannon (cf [16]), qui conduit à l'égalité entre le nombre d'onde du mode de rang  $N_{max}$  et le nombre d'onde d'échantillonnage  $k_e = \frac{2\pi}{\Delta}$ . Par exemple, dans le cas d'une poutre sur appuis, où  $\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L}x$ , le critère de Shannon s'écrit :

$$\frac{N_{max}\pi}{L} = \frac{2\pi}{\Delta} \Rightarrow N_{max} = 2(M - 1) \quad (1.14)$$

Sauf indication contraire, on choisira ce nombre comme troncature de la série 1.12.

## 1.4 Méthode locale

On décide de calculer les dérivées spatiales du champ de déplacement discrétisé, par un schéma aux différences finies (cf [14]). Afin d'obtenir une convergence rapide des dérivées paires, on utilise un schéma centré déterminé à partir des séries de Taylor suivantes :

$$\begin{cases} w((i+1)\Delta, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Delta^k}{k!} \frac{\partial^k w}{\partial x^k} \\ w((i-1)\Delta, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\Delta)^k}{k!} \frac{\partial^k w}{\partial x^k} \end{cases} \quad (1.15)$$

On pose, comme schéma de base :

$$\delta_i^2 = \frac{w((i+1)\Delta, \omega) - 2w(i\Delta, \omega) + w((i-1)\Delta, \omega)}{\Delta^2} \quad (1.16)$$

et

$$\delta_i^{2k} = \frac{\delta_{i+1}^{2k-2} - 2\delta_i^{2k-2} + \delta_{i-1}^{2k-2}}{\Delta^2} \quad (1.17)$$

pour  $k > 1$ .

Ces schémas peuvent alors s'exprimer comme une combinaison des dérivées paires du champ de déplacement :

$$\delta_i^2 = 2 \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{\Delta^{2l-2}}{(2l)!} \frac{\partial^{2l} w}{\partial x^{2l}} \quad (1.18)$$

$$\delta_i^4 = 4 \sum_{(l_1, l_2) \in \mathbb{N}^{2*}} \frac{\Delta^{2l_1-2}}{(2l_1)!} \frac{\Delta^{2l_2-2}}{(2l_2)!} \frac{\partial^{2(l_1+l_2)} w}{\partial x^{2(l_1+l_2)}} \quad (1.19)$$

et, de façon générale :

$$\delta_i^{2k} = 2^k \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathbb{N}^{k*}} \left[ \prod_{j=1}^k \frac{\Delta^{2l_j-2}}{(2l_j)!} \right] \frac{\partial^{2(\sum_{\alpha=1}^k l_\alpha)} w}{\partial x^{2(\sum_{\alpha=1}^k l_\alpha)}} \quad (1.20)$$

De 1.18, on peut tirer l'expression de la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \delta_i^2 - 2 \sum_{l=2}^{+\infty} \frac{\Delta^{2l-2}}{(2l)!} \frac{\partial^{2l} w}{\partial x^{2l}} \\ &= \delta_i^2 - \frac{\Delta^2}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2 \sum_{l=3}^{+\infty} \frac{\Delta^{2l-2}}{(2l)!} \frac{\partial^{2l} w}{\partial x^{2l}} \end{aligned} \quad (1.21)$$

De même, la dérivée quatrième s'exprime :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \delta_i^4 - 2 \sum_{(l_1, l_2) \in \mathbb{N}^{2*} - (1,1)} \frac{\Delta^{2l_1-2}}{(2l_1)!} \frac{\Delta^{2l_2-2}}{(2l_2)!} \frac{\partial^{2(l_1+l_2)} w}{\partial x^{2(l_1+l_2)}} \quad (1.22)$$

De façon itérative, les dérivées paires du champ de déplacement peuvent prendre la forme d'une combinaison linéaire des schémas ainsi définis :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \delta_i^2 - \frac{\Delta^2}{12} \delta_i^4 + \frac{\Delta^4}{90} \delta_i^6 + \dots \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \delta_i^4 - \frac{\Delta^2}{6} \delta_i^6 + \frac{7\Delta^4}{240} \delta_i^8 + \dots \quad (1.24)$$

L'ordre de troncature de ces deux dernières séries fixe l'approximation du calcul des dérivées et le nombre de points nécessaires.

Pour un minimum de points, les équations du mouvement 1.1 et 1.2 s'écrivent :

$$\frac{-E(1+j\eta)S}{\Delta^2} (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) - \rho S \omega^2 w_i = F_i \quad (1.25)$$

$$\frac{E(1+j\eta)I}{\Delta^4} (w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}) - \rho S \omega^2 w_i = F_i \quad (1.26)$$

où  $w_i$  est le déplacement mesuré au point  $i$ ,  $F_i$  la valeur de la distribution de force en ce point. Les simulations numériques du paragraphe suivant donneront une appréciation de l'ordre de troncature.

Remarquons enfin, que cette technique présente l'atout majeur de n'utiliser que des informations locales. Il n'est plus nécessaire de connaître :

- le champ de déplacement dans son ensemble,
- les conditions aux limites.

Les seules informations nécessaires sont l'équation du mouvement et une partie du champ de déplacement.



## 1.5 Méthode de la transformée de Fourier

Le calcul des dérivées spatiales est réalisé indirectement en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier comme le préconise l'holographie acoustique (cf [28]). Le passage dans le domaine des nombres d'onde correspond à la transformée de Fourier spatiale des équations 1.1 et 1.2 :

$$[E(1 + j\eta)Sk'^2 - \rho S\omega^2]\hat{u}(k',\omega) = \hat{F}_u(k',\omega) \quad (1.27)$$

ou

$$[E(1 + j\eta)Ik'^4 - \rho S\omega^2]\hat{w}(k',\omega) = \hat{F}_w(k',\omega) \quad (1.28)$$

où le caractère  $\hat{\phantom{x}}$  indique la transformée de Fourier spatiale de la distribution considérée :

$$\hat{u}(k',\omega) = \int_0^L u(x,\omega)e^{-jk'x} dx \quad (1.29)$$

Une fois le champ de déplacement discrétisé, les transformées obtenues sont périodiques et toute l'information est contenue dans la première période qui est comprise entre  $k' = -\frac{k_e}{2}$  et  $k' = \frac{k_e}{2}$ , en rappelant que  $k_e$  est le nombre d'onde d'échantillonnage ( $k_e = \frac{2\pi}{\Delta}$ ). Le calcul de la distribution de force correspond alors à celui de la transformée de Fourier inverse de  $\hat{F}_u(k',\omega)$  ou de  $\hat{F}_w(k',\omega)$  :

$$F(x,\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-k_e/2}^{+k_e/2} \hat{F}(k',\omega)e^{+jk'x} dk' \quad (1.30)$$

avec  $F = F_u$  ou  $F = F_w$ .

Un algorithme de  $FFT$  (Fast Fourier Transform) et de  $FFT^{-1}$  (cf [2]), permet de faire facilement et rapidement les calculs des transformées discrètes.

En fait, cette approche ressemble à la méthode globale décrite en 1.3. Dans les deux cas, le principe consiste à décomposer le champ de déplacement dans une base de fonctions analytiquement dérivables. La méthode globale utilise les déformées propres de la structure  $\phi_n(x)$  ; la méthode de la transformée de Fourier utilise des fonctions en  $e^{-jk_n x}$ , où  $k_n$  est une discrétisation du domaine des nombres d'onde, correspondant à une périodisation du domaine spatial ( $k_n = \frac{2n\pi}{L}$ ). L'utilisation des modes est une approche plus physique, mais nécessite une connaissance de toute la structure (opérateur, champ de déplacement, conditions aux limites). La deuxième solution présente les mêmes atouts que la méthode locale puisqu'elle a l'avantage de pouvoir s'affranchir des conditions aux limites et peut être réduite à un domaine spatial plus restreint (calcul des  $FFT$  sur une fenêtre locale). Toutefois, le temps de calcul des  $FFT$  et  $FFT^{-1}$  est plus long que celui d'un schéma aux différences finies.

Par ailleurs, la méthode de la transformée de Fourier fait l'objet des travaux [49] et [48], où les structures étudiées sont des plaques. Elle n'a pas été développées ici. On pourra, par la suite, comparer ces travaux à ceux du chapitre 3, où la méthode locale est appliquée sur des plaques.

## 1.6 Simulations numériques

### 1.6.1 Principe

Pour étudier la possibilité de reconstruire  $F(x, \omega)$ , et notamment sa convergence, des simulations numériques ont été effectuées. Chaque simulation est constituée de deux étapes :

1. Le calcul direct : calcul des déplacements en  $M$  points de la structure pour une fréquence donnée, en connaissant l'opérateur, les conditions aux limites et la force appliquée.
2. Le calcul inverse : calcul de l'effort par les techniques décrites aux paragraphes 1.3 et 1.4, avec les résultats issus du calcul direct (déplacements).

Deux structures de référence ont été choisies :

- La première est une barre en traction-compression, de longueur  $L = 1 \text{ m}$ , de section carrée de largeur  $l = 2 \text{ cm}$ , en aluminium ( $E = 2.7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ , facteur de perte  $\eta = 10^{-4}$ ), immobile à ses extrémités. Les déplacements longitudinaux sont solution de :

$$\begin{cases} E(1 + j\eta)S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho S \omega^2 u(x, \omega) = -F_u(x, \omega) \\ u(0, \omega) = u(L, \omega) = 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

- La deuxième est une poutre de longueur  $L = 1 \text{ m}$ , de section carrée, de largeur  $l = 2 \text{ cm}$ , en acier ( $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ , facteur de perte  $\eta = 4 \cdot 10^{-3}$ ), sur appuis. Les déplacements sont solution de :

$$\begin{cases} E(1 + j\eta)I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho S \omega^2 w(x, \omega) = F(x, \omega) \\ w(x, \omega) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ en } x = 0 \text{ et } x = L. \end{cases} \quad (1.32)$$

Dans les deux cas, les conditions aux limites permettent d'utiliser, pour le calcul direct, la méthode de Ritz. Les déformées propres  $\phi_n(x)$ , associées aux modes propres de la barre immobile à ses extrémités et de la poutre sur appuis, fournissent une base fonctionnelle :

$$\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (1.33)$$

Le calcul du déplacement consiste donc à déterminer les amplitudes modales  $a_n(\omega)$ , par inversion des équations du mouvement projetées dans cette base :

$$a_n(\omega)[k_n^2 - k^2] \frac{E(1 + j\eta)SL}{2} = F_n(\omega) \quad (1.34)$$

ou

$$a_n(\omega)[k_n^4 - k^4] \frac{E(1 + j\eta)IL}{2} = F_n(\omega) \quad (1.35)$$

avec  $k_n = \frac{n\pi}{L}$ ,  $k$  le nombre d'onde naturel (cf équations 1.10 et 1.11),  $F_n$  les forces généralisées, déduites, dans chaque exemple, par la projection :

$$F_n = \int_0^L F(x, \omega) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (1.36)$$

Le calcul des déplacements, en chaque point, se résume alors par :

$$w_i = w(i\Delta, \omega) = \sum_{n=1}^N a_n(\omega) \sin\left(\frac{n\pi}{L} i\Delta\right) \quad (1.37)$$

avec  $N = 2(M - 1)$  pour satisfaire le critère de Shannon :

$$\frac{N\pi}{L} = k_{\text{échantillonnage}} = \frac{2\pi}{\Delta} \quad (1.38)$$

## 1.6.2 Exemples

### 1.6.2.1 Barre excitée par une force ponctuelle longitudinale

La distribution de force a pour expression :

$$F_u(x, \omega) = F_0 \delta(x - x_F) \quad (1.39)$$

où  $F_0$  est l'amplitude de l'effort,  $x_F$  l'abscisse de son point d'application.

Le calcul direct se déduit de 1.36, 1.34 et 1.37, par :

$$w_i = \sum_{n=1}^{2(M-1)} \frac{2F_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_F\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} i\Delta\right)}{(k_n^2 - k^2)E(1 + j\eta)SL} \quad (1.40)$$

avec  $F_0 = 1 \text{ N}$  et  $x_F = 0.6 \text{ m}$ .

La figure 1.1 montre, pour les deux techniques (globale et locale avec un minimum de point), le module des forces reconstruites, obtenues avec ce champ de déplacement, calculé pour 26 points, 51 points, et 201 points, pour une fréquence fixée à 800 Hz.

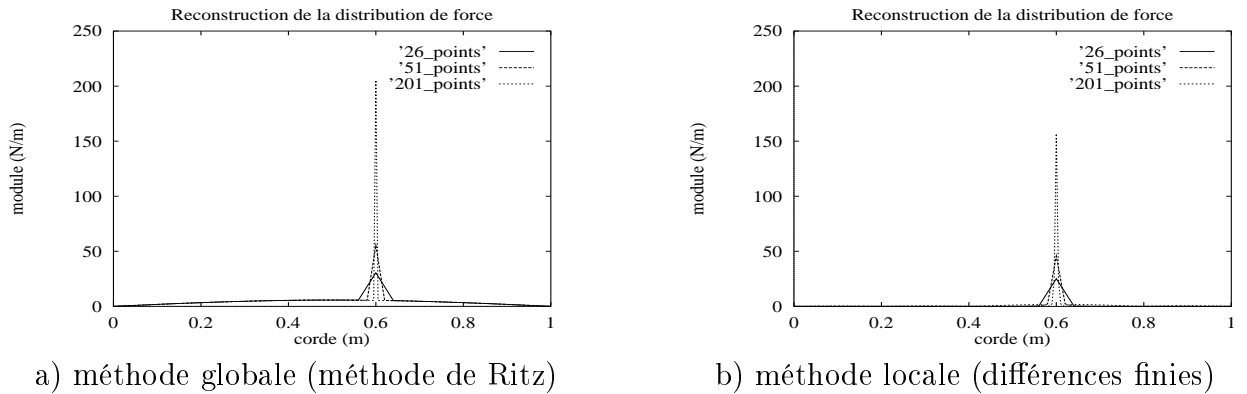


FIG. 1.1 – *Distribution de force reconstruite sur une barre excitée ponctuellement et longitudinalement en  $x_F = 0.6 \text{ m}$  à la fréquence 800 Hz (avant le premier mode).*

La localisation du point d'excitation est flagrante dans les deux cas. Le module de la distribution calculée correspond à la valeur d'une force par unité de longueur ( $N/m$ ). Pour connaître le module de l'effort exciteur, comme  $|F| = F_0 = \int_0^L F(x)dx$ , il faut intégrer cette distribution dans le domaine spatial. Quel que soit le nombre de points utilisé,

les deux approches donnent des résultats excellents. L'erreur apportée sur le module de l'effort est négligeable ( $\leq 0.002\%$ ). Par ailleurs, on peut remarquer sur cette figure, en particulier pour 201 points, que les amplitudes des pics obtenus par les deux méthodes n'ont pas les mêmes valeurs et que la méthode globale présente une meilleure précision (le pic correspondant est légèrement plus fin). La différence s'explique par le fait que la méthode locale calcule la dérivée quatrième du déplacement par un schéma aux différences finies et donc introduit, à ce niveau, une erreur d'approximation due à la troncature des séries de Taylor 1.15, ce qui n'est pas le cas de la méthode globale, où la dérivée est obtenue analytiquement (équation 1.7).

### 1.6.2.2 Poutre excitée par une force ponctuelle

L'expression de la force est identique à 1.39 en remplaçant  $F_u$  par  $F_w$ . Le calcul direct est aussi immédiat :

$$w_i = \sum_{n=1}^{2(M-1)} \frac{2F_0 \sin(\frac{n\pi}{L}x_F) \sin(\frac{n\pi}{L}i\Delta)}{(k_n^4 - k^4)E(1 + j\eta)IL} \quad (1.41)$$

avec  $F_0 = 1\text{ N}$  et  $x_F = 0.6\text{ m}$ .

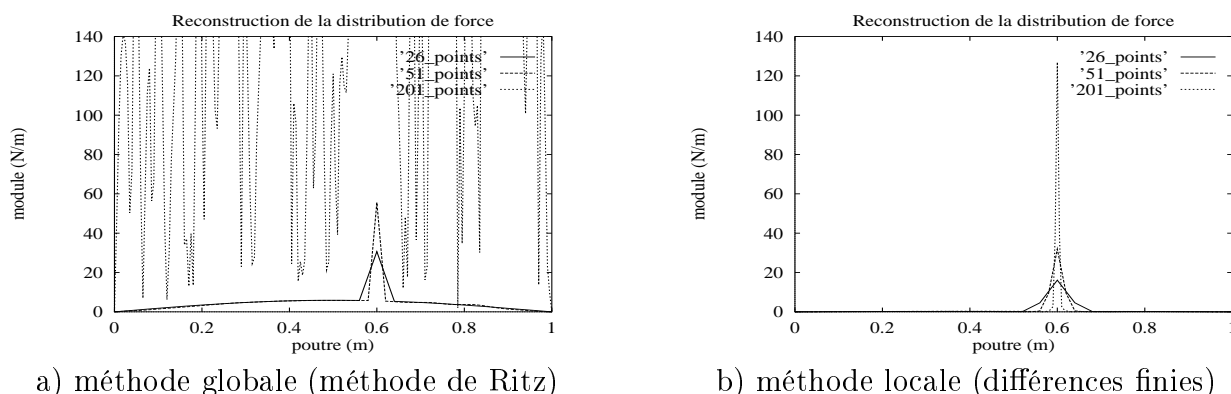


FIG. 1.2 – *Distribution de force reconstruite sur une poutre excitée ponctuellement en  $x_F = 0.6\text{ m}$  à la fréquence 326 Hz (entre le deuxième et le troisième mode).*

Par la technique des différences finies, on obtient les mêmes conclusions que précédemment. Par contre, la méthode globale donne des résultats très surprenants (cf figure 1.2). Pour 26 et 51 points, on voit apparaître un bruit de fond. Pour 201 points, la distribution n'a plus de sens. En fait, nous avons là une instabilité numérique. Dans le problème direct, le critère de Shannon nous indique que le nombre d'amplitudes modales à considérer est  $N = 2(M - 1)$ . Ainsi, pour 201 points, nous obtenons 400 amplitudes modales, ce qui est bien trop élevé. Théoriquement, les amplitudes de rangs très élevés sont quasiment nulles. Or, le calcul numérique introduit forcément une petite erreur. En pourcentage, cette erreur est énorme. Dans le problème inverse, le calcul des forces généralisées 1.8 comprend ici le terme multiplicatif  $n^4$ . Pour les rangs élevés, les erreurs numériques sont alors amplifiées considérablement ( $N_{max}^4 = 2.56 \cdot 10^{10}$ ). Le critère de Shannon est bien trop optimiste. On montre en figure 1.3 qu'en réduisant le nombre de modes considéré  $N$ ,

la distribution obtenue a du sens. Le choix de  $N$  dépend de l'erreur introduite dans les déplacements et nous verrons plus en détail sa détermination au chapitre 2.

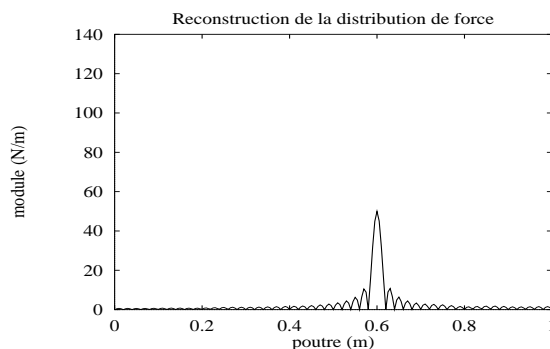


FIG. 1.3 – *Distribution de force reconstruite sur une poutre excitée ponctuellement en  $x_F = 0.6 m$  à la fréquence 326 Hz (entre le deuxième et le troisième mode), obtenue avec la méthode globale avec 201 points et 100 modes.*

### 1.6.2.3 Poutre excitée par un moment ponctuel

La distribution de force a pour expression :

$$F_w(x, \omega) = M_0 \frac{\partial \delta}{\partial x}(x - x_M) \quad (1.42)$$

où  $M_0$  est l'amplitude du moment,  $x_M$  l'abscisse de son point d'application.

Le calcul direct se déduit de 1.36, 1.35 et 1.37, par :

$$w_i = \sum_{n=1}^{M-1} \frac{-2M_0 n \pi \cos(\frac{n\pi}{L} x_M) \sin(\frac{n\pi}{L} i \Delta)}{(k_n^4 - k^4) E (1 + j\eta) I L^2} \quad (1.43)$$

avec  $M_0 = 1 Nm$  et  $x_M = 0.4 m$ .

La figure 1.4 qui montre les parties réelles des reconstructions d'efforts obtenues (les parties imaginaires sont nulles) correspond à deux efforts ponctuels opposés de part et d'autre du point d'application. L'intégration de cette distribution donne une valeur nulle, ce qui traduit qu'il n'y a pas de force appliquée. Par contre, ces deux efforts correspondent à l'application d'un moment dont le module vaut :

$$M = 2\Delta_F F \quad (1.44)$$

où  $\Delta_F$  est la distance entre le point d'application d'une des force et celui du moment,  $F$  l'amplitude de la force considérée obtenue par intégration sur la partie gauche ou droite du point d'application du moment.

L'intérêt de cet exemple est de voir la convergence des deux méthodes pour une distribution ayant une forte discontinuité. Il est clair que la méthode des différences finies donne des résultats bien meilleurs puisque la reconstruction d'une forte discontinuité, avec une

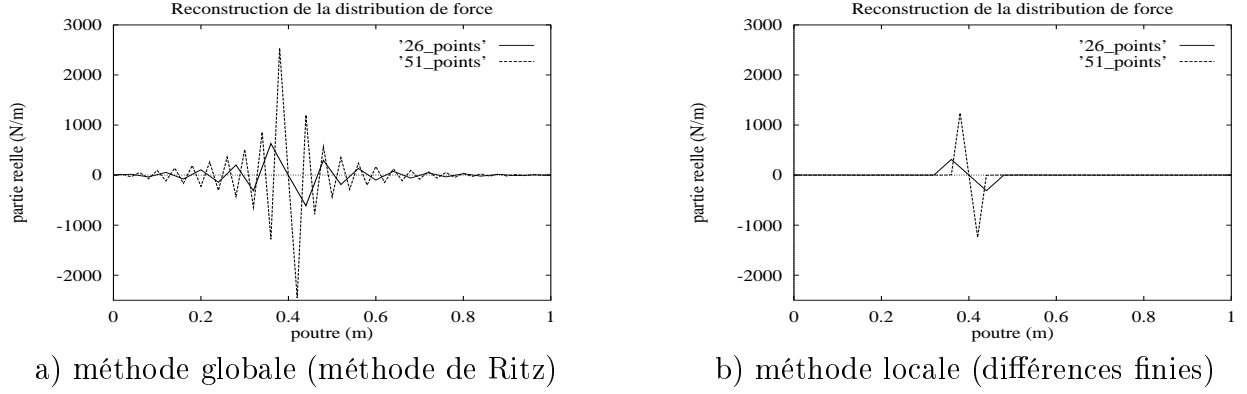


FIG. 1.4 – *Distribution de force reconstruite sur une poutre excitée ponctuellement par un moment en  $x_M = 0,4 m$  à la fréquence 326 Hz (entre le deuxième et le troisième mode).*

série de fonctions continues, est difficile. Les oscillations que l'on observe, avec la méthode globale, traduisent le lissage de la distribution 1.42.

#### 1.6.2.4 Poutre excitée par une force répartie

La distribution de force a pour expression :

$$\begin{cases} F_w(x,\omega) = F \text{ pour } x \in [x_1; x_2] \\ F_w(x,\omega) = 0 \text{ pour } x \in [0; x_1] \cup [x_2; L] \end{cases} \quad (1.45)$$

où  $F$  est l'amplitude, en  $N/m$ , de la distribution de force.

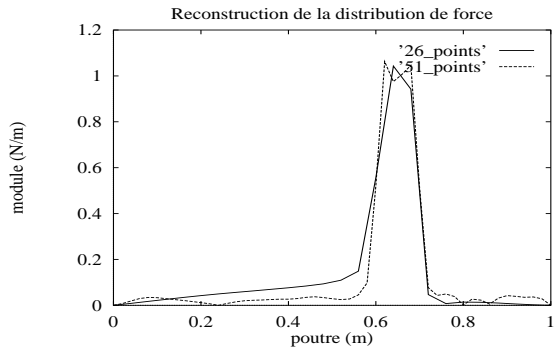
Le calcul direct se déduit de 1.36, 1.35 et 1.37, par :

$$w_i = \sum_{n=1}^{M-1} \frac{2F(\cos(\frac{n\pi}{L}x_1) - \cos(\frac{n\pi}{L}x_2)) \sin(\frac{n\pi}{L}i\Delta)}{(k_n^4 - k^4)E(1 + j\eta)In\pi} \quad (1.46)$$

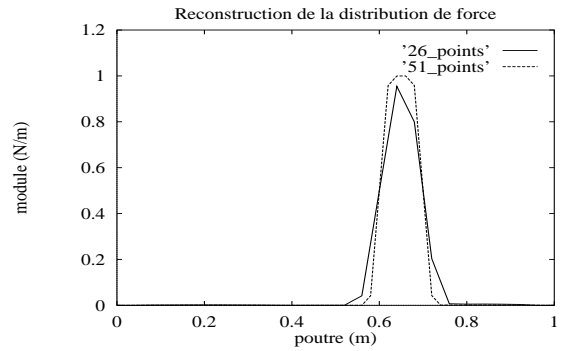
avec  $F = 1 N/m$ ,  $x_1 = 0.6 m$  et  $x_2 = 0.7 m$ .

La figure 1.5 montre, comme dans les exemples précédents, l'allure de la distribution obtenue par les deux méthodes, en fonction du nombre de points. Là aussi, l'approche des différences finies est plus séduisante.

En figure 1.6, on présente, pour cette approche, la reconstruction obtenue pour différentes troncatures du schéma 1.24. L'ordre indique le nombre de termes pris dans cette série. L'addition des termes supplémentaires améliore la convergence locale aux discontinuités de la distribution. Par contre, ils n'apporte pas de contributions notables en dehors. Leur emploi n'a donc pas une grande importance et nécessite l'utilisation de plus de points. Dorénavant, on utilisera, comme schéma de référence, celui de l'ordre 1.



a) méthode globale (méthode de Ritz)



b) méthode locale (différences finies)

FIG. 1.5 – *Distribution de force reconstruite sur une poutre excitée par une force répartie entre  $x_1 = 0.6$  m et  $x_2 = 0.7$  m à la fréquence 326 Hz (entre le deuxième et le troisième mode).*

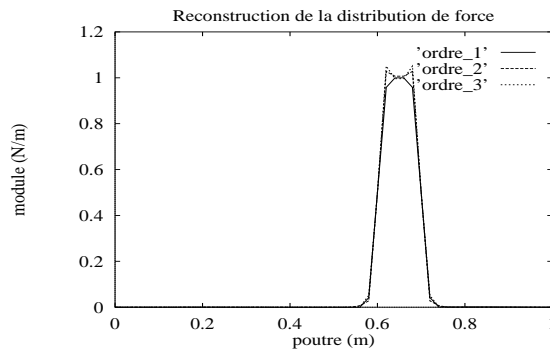


FIG. 1.6 – *Distribution de force reconstruite sur une poutre excitée par une force répartie entre  $x_1 = 0.6$  m et  $x_2 = 0.7$  m à la fréquence 326 Hz (entre le deuxième et le troisième mode) par la méthode locale selon trois schémas.*

## 1.7 Influence des hétérogénéités de structure

### 1.7.1 Le problème

En considérant maintenant une structure munie d'hétérogénéités, l'équation du mouvement ne correspond plus à l'expression 1.1 ou 1.2. Dans le cas d'une poutre, elle s'écrit :

$$E(1 + j\eta)I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho S \omega^2 w(x, \omega) + \sum_{k=1}^{N_h} A_k w(x, \omega) \delta(x - x_k) = F_w(x, \omega) \quad (1.47)$$

avec  $N_h$  le nombre d'hétérogénéités,  $x_k$  la position de l'hétérogénéité  $k$ ,  $A_k = K_k$  pour une raideur,  $A_K = -\omega^2 M_k$  pour une masse,  $A_K = j\omega \alpha_k$  pour un amortisseur.

Dans le processus de reconstruction, nous n'utilisons pas cette équation, mais celle de la poutre sans hétérogénéité. La distribution calculée correspond donc à l'addition de celle des efforts excitateurs et de celle des efforts appliqués sur la structure homogène (structure maîtresse) par les hétérogénéités (structures annexes) :

$$F_w(x, \omega) - \sum_{k=1}^{N_h} A_k w(x, \omega) \delta(x - x_k) \quad (1.48)$$

Il est alors possible de localiser et d'identifier les hétérogénéités d'une structure. Bien entendu, dans le cas où la structure hétérogène est parfaitement connue et que l'on ne veut pas l'effet des hétérogénéités, on peut toujours ajouter le terme associé dans l'opérateur du problème inverse, afin d'isoler la distribution des efforts excitateurs.

### 1.7.2 Exemple

Reprenons l'exemple de la poutre excitée par une force répartie (paragraphe 1.6.2.4), où l'on a fixé un ressort de raideur  $K$  au point d'abscisse  $x_R$ .

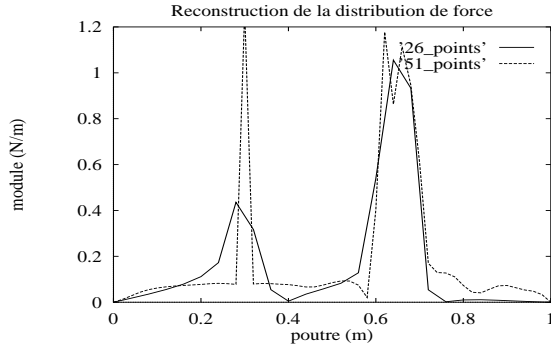
Le calcul direct se déduit de l'inversion du système d'équation correspondant à la projection de l'équation du mouvement dans la base des modes propres de la structure maîtresse (poutre seule) :

$$a_n(\omega) [k_n^4 - k^4] \frac{E(1 + j\eta)IL}{2} + \sum_{p=1}^N K a_p \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_R\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L} x_R\right) = \frac{2FL}{n\pi} (\cos\left(\frac{n\pi}{L} x_1\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{L} x_2\right)) \quad (1.49)$$

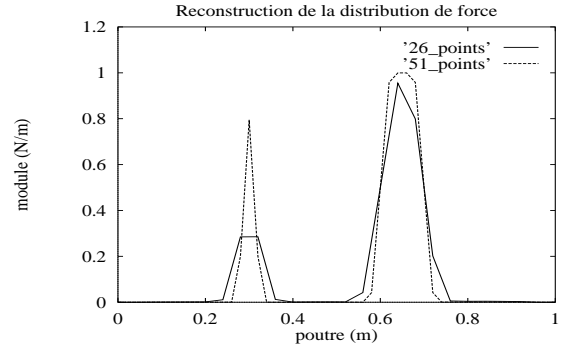
L'inversion de ce système est réalisé par la méthode de Gauss. Le déplacement est ensuite déduit de 1.37.

la reconstruction de la distribution de force, illustrée par la figure 1.7, est réalisée avec l'opérateur de la poutre simple si bien que le terme associé au ressort n'est pas présent dans l'équation. Ce terme se retrouve ainsi au second membre, et traduit la présence d'une force, celle du ressort exercée sur la poutre au point de jonction. Même si cet effort n'injecte pas ou ne dissipe pas d'énergie (raideur réelle), il participe à la déformée de la poutre, et peut être localisé et identifié à chaque fréquence.





a) méthode globale (méthode de Ritz)



b) méthode locale (différences finies)

FIG. 1.7 – *Distribution de force reconstruite sur une poutre couplée à un ressort de raideur  $K = 1.10^7 \text{ N/m}$  en  $x_R = 0.3 \text{ m}$  et excitée par une force répartie entre  $x_1 = 0.6 \text{ m}$  et  $x_2 = 0.7 \text{ m}$  à la fréquence  $326 \text{ Hz}$  (entre le deuxième et le troisième mode).*

## 1.8 Conclusion

Ce chapitre a introduit, pour des structures monodimensionnelles, le formalisme de reconstruction de la distribution de force, à partir des données discrètes du champ de déplacement. L'approche proposée est basée sur le calcul du second membre de l'équation du mouvement, pour une fréquence fixée. Selon la nature de l'onde mécanique considérée (information nécessaire), la dérivée spatiale du second, ou du quatrième ordre, doit être calculée. Pour cela, deux techniques sont retenues :

- La méthode globale : on décompose les champs dans une base de fonctions globales analytiquement dérivables. Elle nécessite la connaissance de l'opérateur, du champ de déplacement complet et des conditions cinématiques aux limites.
- La méthode locale : on construit un schéma aux différences finies qui n'utilise que les informations locales. Elle nécessite la connaissance de l'opérateur et d'une partie du champ de déplacement. La signification du qualificatif "locale" correspond au fait que la méthode utilise peu de points de mesure pour le calcul d'une valeur de la distribution de force.

L'utilisation des différences finies paraît plus séduisante, parce qu'elle réduit l'espace des connaissances nécessaires. Les simulations numériques présentées dans plusieurs exemples, accentuent aussi cette préférence. En effet, la convergence obtenue par cette dernière est nettement meilleure.

En plus de ces simulations, nous avons vu un cas particulièrement intéressant qui concerne une poutre couplée avec un ressort. Son équation du mouvement (équation 1.47) n'est pas celle utilisée dans le processus de reconstruction (équation 1.2), puisque celle-ci ne comprend pas le terme supplémentaire dû au ressort. L'application de l'opérateur d'une poutre simple permet, dans ce cas, de retrouver, non seulement, l'effort introduit, mais aussi ce terme qui caractérise l'effort du ressort appliqué sur la poutre. Il est donc possible d'identifier n'importe quel effort, même si celui-ci n'injecte pas ou ne dissipe pas d'énergie. Ce point donne un intérêt séduisant à cette approche, car c'est un atout supplémentaire par rapport aux techniques d'identification de sources, issues de l'intensité structurale. Evidemment, tous ces résultats proviennent de simulations numériques où les données

sont connues presque exactement. Dans la réalité, les déplacements sont supposés être mesurés et n'auront pas la précision que peut donner un ordinateur. Or, nous avons vu un exemple mettant en évidence que la moindre erreur peut être un problème majeur d'une telle méthode. L'effet d'incertitudes provoquées par la mesure doit être étudiée. C'est l'objet du chapitre suivant.



# Chapitre 2

## Instabilités aux incertitudes : Régularisation

### 2.1 Buts du chapitre

L'objectif final de l'étude est de déterminer la distribution de force appliquée à une structure, à partir de la connaissance des déplacements mesurés en  $M$  points. Bien entendu, ces données (résultats de mesures) ne peuvent être connues exactement et sont entachées d'incertitudes. Le but de ce chapitre est de répondre à la question de la robustesse de la méthode présentée au chapitre précédent. Dans un premier temps, nous proposons d'observer et d'analyser l'application des deux méthodes décrites au premier chapitre, avec des données faussées. Nous verrons alors que le problème de reconstitution des efforts appliqués est mal posé, en ce sens qu'il présente une forte instabilité à la moindre erreur sur les données. Dans un deuxième temps, nous définissons, pour les deux méthodes, une approche régularisatrice, permettant de réduire cette instabilité. Cette régularisation constitue l'objectif principal du chapitre et nous amène à conclure sur la possibilité de localiser les efforts sur une structure monodimensionnelle, et d'en définir le domaine de validité.

### 2.2 Simulations numériques

#### 2.2.1 Principe

Afin d'étudier l'influence des incertitudes de mesure sur les résultats, nous proposons de brouter les déplacements "exacts", calculés par les simulations numériques définies au paragraphe 1.6, où l'on définit chaque déplacement, à chaque fréquence, par une quantité complexe. Le principe du bruitage est d'utiliser deux variables aléatoires Gaussiennes indépendantes, simulant les erreurs appliquées sur le module et sur la phase du déplacement :

$$w_i^{bruité} = w_i^{exact} \cdot \Delta w \cdot e^{j\Delta\varphi} \quad (2.1)$$

où  $\Delta w$  est une variable aléatoire Gaussienne réelle, définie par sa moyenne  $m_{\Delta w} = 1$ , et son écart type  $\sigma_{\Delta w}$ ,  $\Delta\varphi$  une deuxième variable aléatoire Gaussienne réelle, indépendante de la première et définie par sa moyenne  $m_{\Delta\varphi} = 0$ , et son écart type  $\sigma_{\Delta\varphi}$ .

Le niveau d'incertitude est alors défini par les valeurs que prennent les deux écarts types  $\sigma_{\Delta w}$  et  $\sigma_{\Delta\varphi}$ . Sauf indication contraire, nous utilisons dans la suite un pourcentage  $p$  fixant ce niveau :

$$\sigma_{\Delta w} = \frac{p}{100} |w_i^{exact}| \quad (2.2)$$

$$\sigma_{\Delta\varphi} = \arctan \frac{p}{100} \quad (2.3)$$

De cette façon, l'erreur de mesure est définie par un cercle dans le plan complexe.

## 2.2.2 Observations

Reprenons l'exemple de la poutre excitée par une force répartie, identique à celle du paragraphe 1.6.2.4. On applique le bruitage 2.1 au champ de déplacement issu de 1.46, avec un niveau d'incertitude  $p = 1$ , correspondant à un "bon" système de mesure (1 % d'erreur, c'est-à-dire à 0.086 dB près).

Les figures 2.1, 2.2 et 2.3 présentent les résultats obtenus pour une erreur appliquée uniquement sur le module ( $\sigma_{\Delta w} = \frac{p}{100} |w_i^{exact}|$ ,  $\sigma_{\Delta\varphi} = 0$ ), uniquement sur la phase ( $\sigma_{\Delta w} = 0$ ,  $\sigma_{\Delta\varphi} = \arctan \frac{p}{100}$ ) et sur les deux (équations 2.2 et 2.3). Ces résultats sont à comparer avec la figure 1.5. Il est clair que le bruit ajouté aux déplacements, que ce soit sur le module ou sur la phase, ne permet pas d'utiliser directement les approches décrites au premier chapitre. Des efforts aberrants de grandes amplitudes apparaissent et noient complètement la véritable distribution recherchée. La méthode globale est, sur ce cas, nettement plus sensible que la méthode locale, qui, même à ce niveau, est plus intéressante.

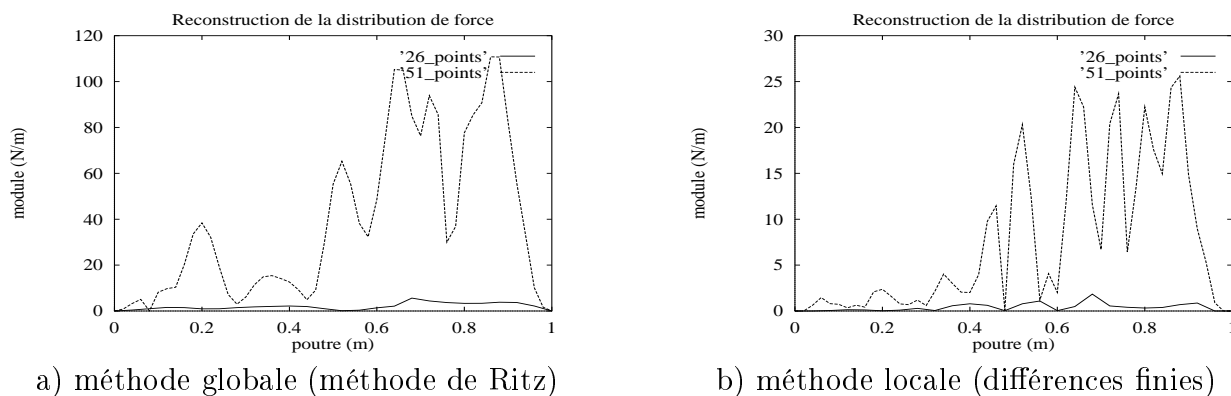
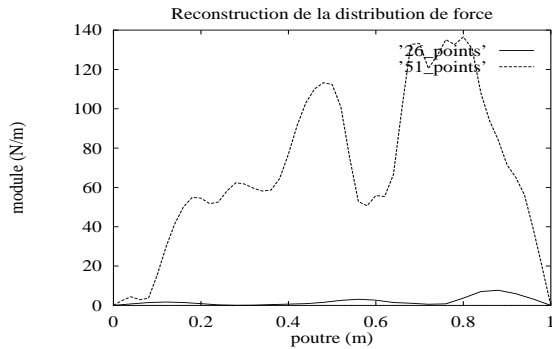
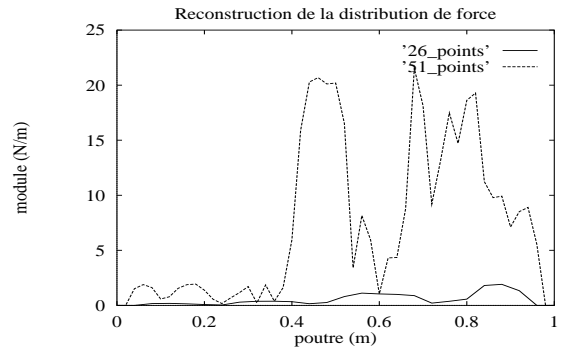


FIG. 2.1 – *Distribution de force reconstruite sur une poutre excitée par une force répartie entre  $x_1 = 0.6$  m et  $x_2 = 0.7$  m, à la fréquence 326 Hz (entre le deuxième et le troisième mode). Le champ de déplacement est bruité en module, avec une erreur de 1 %*

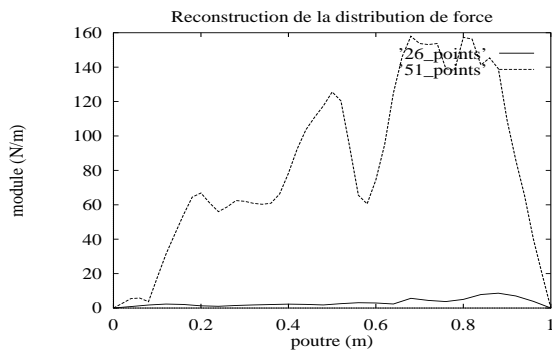


a) méthode globale (méthode de Ritz)

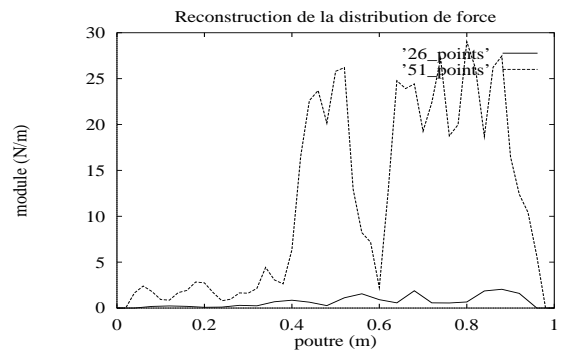


b) méthode locale (différences finies)

FIG. 2.2 – *Distribution de force reconstruite sur une poutre excitée par une force répartie entre  $x_1 = 0.6$  m et  $x_2 = 0.7$  m, à la fréquence 326 Hz (entre le deuxième et le troisième mode). Le champ de déplacement est bruité en phase, avec une erreur de 1 %*



a) méthode globale (méthode de Ritz)



b) méthode locale (différences finies)

FIG. 2.3 – *Distribution de force reconstruite sur une poutre excitée par une force répartie entre  $x_1 = 0.6$  m et  $x_2 = 0.7$  m, à la fréquence 326 Hz (entre le deuxième et le troisième mode). Le champ de déplacement est bruité en module et phase, avec une erreur de 1 %*

### 2.2.3 Analyse du problème

L'explication des précédents résultats peut se comprendre de plusieurs manières.

Physiquement, les erreurs de mesure introduisent un bruit lié au maillage choisi. Ce bruit produit des déplacements de faibles longueurs d'onde devant la longueur d'onde naturelle. Pour générer de telles vibrations non naturelles à la fréquence d'étude, des efforts d'amplitudes considérables doivent être appliqués (cf figure 2.4). On comprend donc bien que cette amplification est liée directement au nombre de points utilisés.

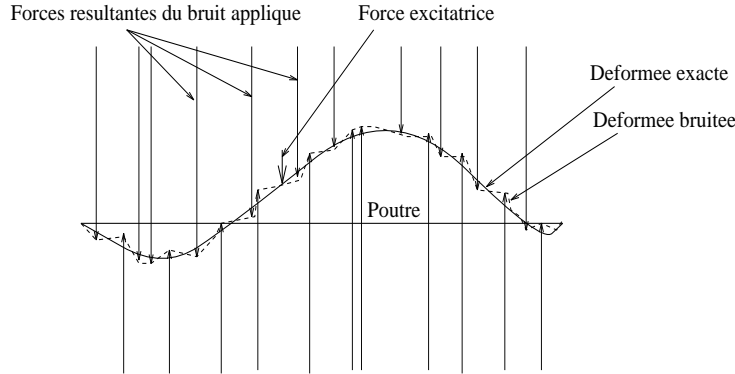


FIG. 2.4 – Forces reconstruites à partir d'un champ de déplacement bruité.

Mathématiquement, le bruit est amplifié par la dérivée spatiale d'ordre 4, utilisée dans l'équation du mouvement 1.2. Comme on peut le constater en figures 2.1, 2.2 et 2.3, cette dérivée introduit une amplification d'autant plus grande que le maillage est fin. La distribution des efforts aberrants qui résulte de l'amplification du bruit appliqué au déplacement, est une distribution très chahutée. Pour mettre ceci en évidence, la figure 2.5 montre les forces généralisées calculées par la méthode globale (équation 1.8), avec les champs de déplacement exact et bruité. Le bruit observé se situe dans les rangs  $n$  d'ordres élevés. En figure 2.6, on illustre le même phénomène, en calculant la transformée de Fourier discrète spatiale de la distribution de force (cf [2]), obtenue par la méthode locale :

$$\hat{F}(k_n) = \Delta \sum_{i=0}^{M-2} F_i e^{-j \frac{2\pi n i}{M}} \quad (2.4)$$

avec  $k_n = \frac{2n\pi}{L}$ .

Le bruit se situe aussi dans un domaine de nombres d'onde élevés.

Les deux approches conduisent à la même conclusion. C'est l'équation du mouvement 1.2 qui pose problème, et notamment le terme associé à la dérivée quatrième du déplacement. Son application à des déplacements bruités affecte le domaine des nombres d'onde élevés, ce qui se traduit par une distribution spatialement très chahutée. Dans le problème des vibrations longitudinales, ce phénomène existe aussi, avec cependant moins de sensibilité, grâce à la présence d'une dérivée seconde du déplacement, beaucoup plus régulière qu'une dérivée quatrième. Dans la suite du chapitre, on étudie une méthode de régularisation

appliquée sur les poutres en flexion qui, néanmoins, reste tout aussi valable pour les barres en traction-compression.

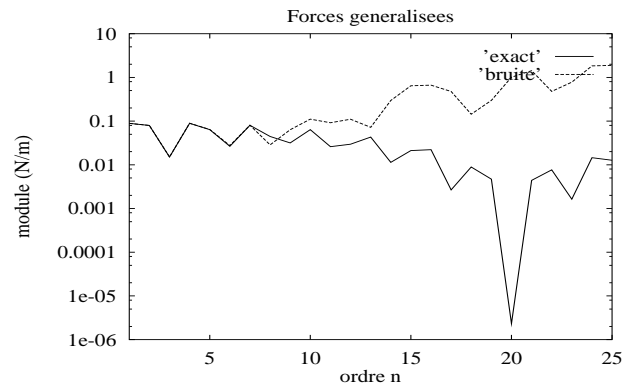


FIG. 2.5 – *Forces généralisées des distributions de force exacte et bruitée calculées par la méthode globale. Mêmes exemples que les figures 1.5 et 2.3 avec 51 points.*

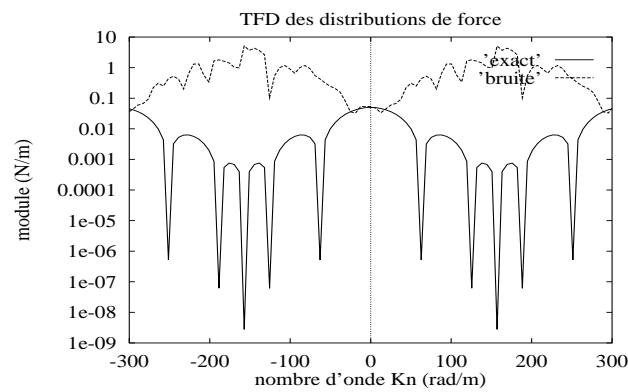


FIG. 2.6 – *Transformées de Fourier discrètes spatiales des distributions de force exacte et bruitée, calculées par la méthode locale. Mêmes exemples que les figures 1.5 et 2.3 avec 51 points.*



## 2.3 Régularisations

### 2.3.1 Méthode globale

#### 2.3.1.1 Troncature de la série

A partir de la figure 2.5, illustrant les forces généralisées exactes et bruitées, on détermine la troncature  $N$  de la série 1.12, afin de ne garder que les composantes peu affectées par le bruit. La figure 2.7 montre les distributions de force obtenues. L'influence du bruit est bien réduite et on retrouve l'information de la force d'entrée. Par contre, l'effet de troncature introduit évidemment un lissage. Ce lissage dégrade les discontinuités de la distribution, ce qui explique les oscillations observées (phénomène de Gibbs).

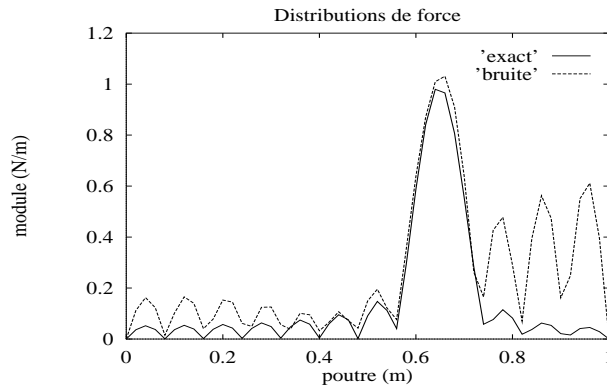


FIG. 2.7 – *Distributions de force exacte et bruitée obtenues après troncature de la série modale (méthode globale). Mêmes exemples que les figures 1.5 et 2.3 avec 51 points.*

La qualité du résultat n'est pas aussi excellente que dans la chapitre 1, mais satisfait aux exigences de localisation. C'est une première étape qui amène à penser qu'il est possible de régulariser le problème, en supprimant les composantes élevées affectées par les erreurs introduites sur le champ de déplacement.

#### 2.3.1.2 Choix de la troncature

Le problème est de choisir le bon nombre de termes de la série 1.12, sachant que les données ne sont connues qu'à partir d'un champ bruité. Il faut donc pouvoir déterminer des règles, fonctions des paramètres essentiels du problème, afin de les appliquer à une régularisation de ce type. Pour cela, nous avons défini un nombre de terme optimum  $N_{opt}$ , égal au nombre de forces généralisées dont la différence, entre les résultats bruité et non bruité, ne dépasse pas un seuil prédéfini. Dans le cas de la figure 2.5, ce nombre correspond à  $N_{opt} = 10$  pour un seuil égal à 0.05.

Pour comprendre la dépendance de ce nombre, des calculs ont été réalisés pour différentes fréquences. Un tirage des variables aléatoires  $\Delta_w$  et  $\Delta_\varphi$  est appliqué à chaque fréquence. La figure 2.8 montre la dépendance de  $N_{opt}$  en fonction du nombre d'onde naturel  $k = \frac{\omega}{c}$ . Mis à part la disparité obtenue par les différents tirages réalisés, on observe une tendance générale suivant une loi linéaire  $N_{opt} = ak$ , en dehors des fréquences propres de la poutre. Aux résonances, l'amplitude du mode excité est forte, celles des autres étant faible. Une

incertitude de 1 % sur cette forte vibration produit de grandes amplitudes modales des modes non excités. Les forces généralisées qui leur sont reliées, ont pour expression :

$$F_n = a_n[(k_n^4 - k^4)N_n E(1 + j\eta)I] \quad (2.5)$$

Ces forces généralisées sont donc fortement amplifiées quand le facteur  $(k_n^4 - k^4)$  est différent de zéro, c'est-à-dire pour tous les modes non résonants. On constate aussi que l'amplification croît fortement avec  $k_n$ , dès que  $k_n > k$ . Ces tendances sont confirmées numériquement en figure 2.9. D'un point de vue physique, la seule information réellement accessible est la participation d'un seul mode, ce qui ne suffit pas pour l'obtention de l'information locale traduisant la présence d'une force.

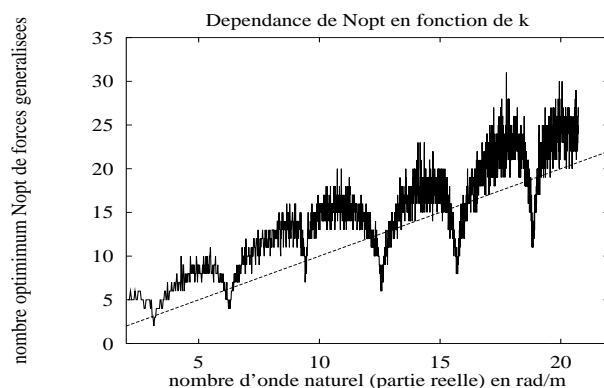


FIG. 2.8 – *Dépendance du nombre optimum de forces généralisées en fonction du nombre d'onde naturel. Le niveau d'incertitude est fixé à 1 %, l'amortissement structural est  $\eta = 0.004$*

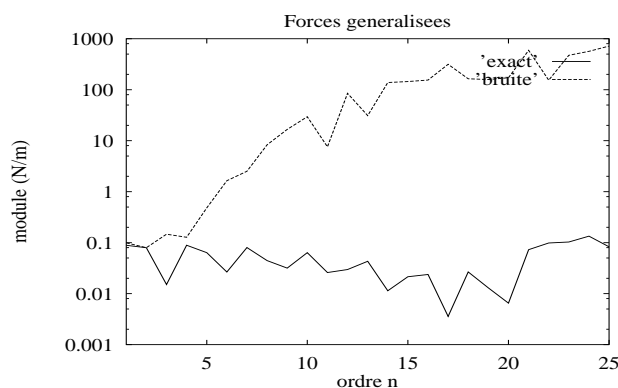


FIG. 2.9 – *Forces généralisées des distributions de force exacte et bruitée calculées par la méthode globale sur la deuxième résonance (183.7 Hz).*

En figures 2.10 et 2.11, on montre les résultats obtenus pour un niveau d'incertitude moins élevé et un amortissement structural plus important. La pente  $a$ , définissant la loi linéaire, ne dépend que du niveau d'incertitude. Elle devient plus importante lorsque le pourcentage  $p$  diminue, et n'est pas affectée par l'élévation de l'amortissement structural. Par contre, ce dernier paramètre agit sur les singularités observées à chaque résonance.

Pour une structure très amortie, l'effet de résonance est atténué et le mode résonant domine moins les autres. L'information du champ de déplacement est donc mieux répartie sur les différents ordres modaux. Il est ainsi possible d'utiliser plus de termes de forces généralisées (cf 2.5), et en conséquence de localiser l'effort.

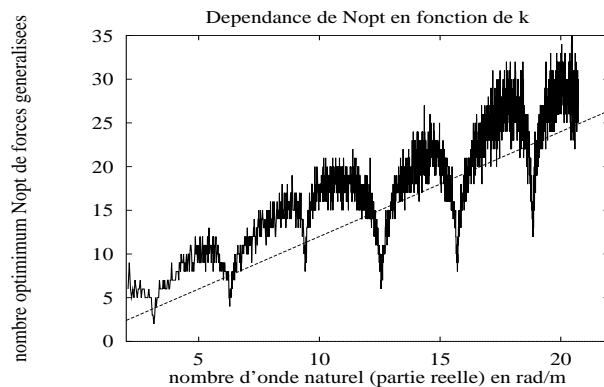


FIG. 2.10 – *Dépendance du nombre optimum de forces généralisées en fonction du nombre d'onde naturel. le niveau d'incertitude est fixé à 0.5 %, l'amortissement structural est  $\eta = 0.004$*

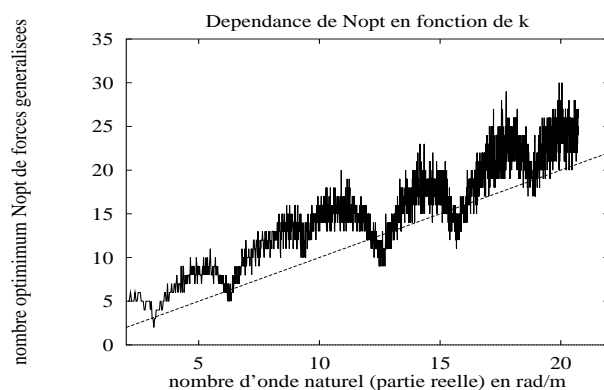


FIG. 2.11 – *Dépendance du nombre optimum de forces généralisées en fonction du nombre d'onde naturel. le niveau d'incertitude est fixé à 1 %, l'amortissement structural est  $\eta = 0.05$*

Par ailleurs, l'expression de la densité de force, en un point, s'exprime par une combinaison linéaire des valeurs de déplacement mesurées :

$$F_j = f(w_i) = \frac{E(1 + j\eta)IL}{(M - 1)} \sum_{n=0}^N \sum_{i=0}^{M-2} \left( \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 - k^4 \right) \sin\left( \frac{n\pi}{L} i\Delta \right) \sin\left( \frac{n\pi}{L} j\Delta \right) w_i \quad (2.6)$$

En supposant que chaque mesure possède une erreur indépendante des autres (ce qui n'est pas forcément le cas), on peut estimer l'erreur appliquée à la densité de force au point  $j$ , par :

$$(\sigma_{F_j})^2 = \sum_{k=0}^{M-2} \left( \frac{\partial f}{\partial w_k} \right)^2 (\sigma_{w_k})^2 \quad (2.7)$$

où  $\sigma_{F_j}$  et  $\sigma_{w_k}$  sont les écarts types des erreurs appliquées sur  $F_j$  et  $w_k$ .

On peut donc calculer l'écart type de l'erreur sur la densité de force au point  $j$ , qui est aussi une variable aléatoire Gaussienne :

$$(\sigma_{F_j})^2 = \left( \frac{E(1+j\eta)IL}{(M-1)} \right)^2 \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{M-2} \left[ \left( \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 - k^4 \right) \sin\left( \frac{n\pi}{L} k \Delta \right) \sin\left( \frac{n\pi}{L} j \Delta \right) \right]^2 (\sigma_{w_k})^2 \quad (2.8)$$

Cette expression nous montre l'importance primordiale des paramètres cités précédemment. Tout d'abord, on voit que l'incertitude de la force peut être diminuée si le nombre  $N$  est réduit, ce qui confirme les observations faite en 2.3.1.1. On voit ensuite que chaque terme de cette dernière série possède un coefficient amplificateur, strictement positif, directement lié à l'ordre  $n$  et au nombre d'onde naturel complexe  $k$ , lui même dépendant de la fréquence d'excitation et de l'amortissement structural (équation 1.11). La figure 2.12 montre la dépendance du nombre de terme  $N$  à prendre en compte pour satisfaire l'inéquation :

$$\sigma_{F_j} \leq A \quad (2.9)$$

où  $A$  est un majorant de l'erreur sur la distribution de force. Le calcul est effectué pour  $x = 0.65 \text{ m}$ ,  $M = 51$  points,  $A = 0.01$ .

Cette approche, plus déterministe que la précédente, conduit aux mêmes observations : le nombre optimum  $N_{opt}$  de forces généralisées dépend linéairement du nombre d'onde naturel  $k$  et chute plus ou moins à chaque résonance, selon la valeur de l'amortissement structural. Les pics observés dépendent du point d'observation. On ne les retrouve pas sur les figures 2.8, 2.10 et 2.11, puisque l'algorithme associé compare des forces généralisées, c'est-à-dire l'influence du bruit en tout point de la structure.

Un autre paramètre important à étudier est le nombre de points constituant le maillage de la poutre. De façon analogue au premier algorithme exposé ci-dessus, le calcul de  $N_{opt}$  a été réalisé pour une fréquence fixée et pour un nombre de points variant de 20 à 200. Le résultat surprenant illustré en figure 2.13, montre la non dépendance de  $N_{opt}$  en fonction de  $M$ . Les disparités observées sont issues des différents tirages réalisés. En fait, cette non dépendance est issue de l'opposition de deux tendances :

- La première est que le nombre de points agit sur l'amplification du bruit, comme le montre le paragraphe 2.2.2, ce qui tend à diminuer le nombre  $N_{opt}$ .
- La deuxième est issue de la nature du bruit. Plus le maillage est fin, plus le bruit associé est de nature à affecter les ordres modaux plus élevés, ce qui tend à augmenter  $N_{opt}$ .

Le deuxième algorithme (calcul d'erreur) associé aux équations 2.8 et 2.9, donne le résultat illustré en figure 2.14. On y observe une légère croissance de  $N_{opt}$ , mais négligeable par rapport à celle du nombre d'onde naturel.  $M$  définit le nombre de terme de la série 2.8. Son augmentation tend à diminuer  $N$ , mais l'amplitude de chaque terme est alors diminué par le rapport  $\frac{E(1+j\eta)IL}{(M-1)}$  ce qui permet d'augmenter  $N$ . Les deux tendances se compensent.

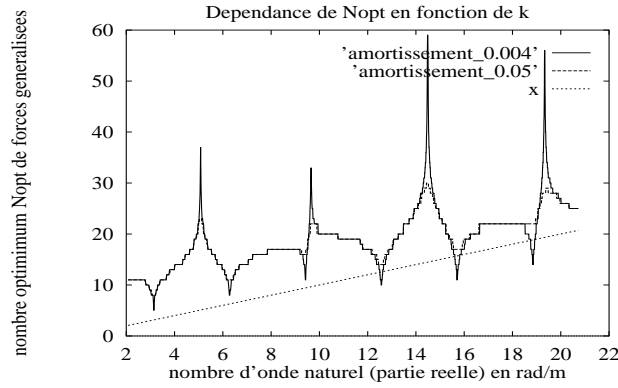


FIG. 2.12 – *Dépendance du nombre optimum de forces généralisées en fonction du nombre d'onde naturel, déterminée par majoration de l'erreur calculée en  $x = 0.65m$  :*

$$\sigma_{F_j} \leq 1\%$$

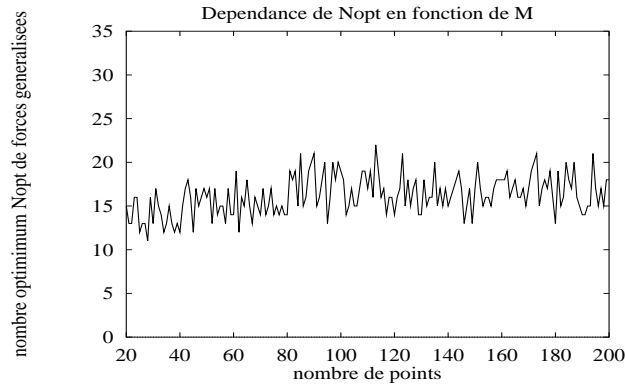


FIG. 2.13 – *Dépendance du nombre optimum de forces généralisées en fonction du nombre de points. Le niveau d'incertitude est fixé à 1 %, l'amortissement structural est  $\eta = 0.004$*

### 2.3.1.3 Domaine de validité

Nous synthétisons ici les différents résultats obtenus, afin de donner le domaine où cette approche globale peut être appliquée.

Compte tenu des remarques faites au premier chapitre (cf paragraphe 1.8), il ne faut pas oublier qu'il est nécessaire ici de connaître les conditions cinématiques aux limites ainsi que l'opérateur de la structure.

Des résultats et observations faites en 2.3.1.2, on peut tirer deux conclusions :

1. Il n'est pas possible de régulariser le problème lorsque la structure monodimensionnelle est excitée à sa résonance, en particulier si elle est peu amortie (acier, aluminium, etc...).
2. On peut définir un lien entre le nombre optimum de termes à prendre en considération  $N_{opt}$ , le nombre de points  $M$  et la fréquence d'excitation.  $M$  pouvant être déterminé indépendamment de  $N_{opt}$ , on peut prendre autant de terme que l'on veut, à condition de respecter le critère de Shannon (cf 1.38) :

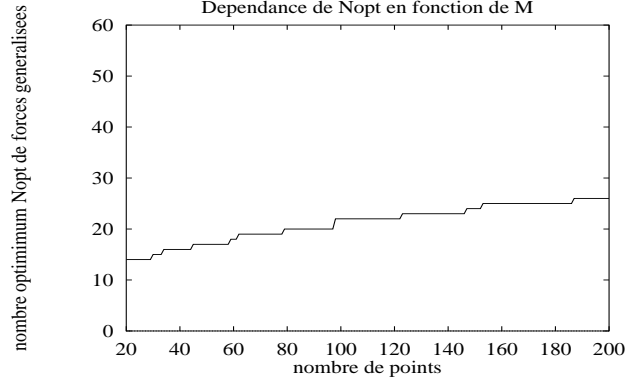


FIG. 2.14 – *Dépendance du nombre optimum de forces généralisées en fonction du nombre de points, déterminée par majoration de l'erreur calculée en  $x = 0.65m$  :*  
 $\sigma_{F_j} \leq 1\%$

$$M \geq \frac{N_{opt} + 2}{2} \quad (2.10)$$

Nous avons vu aussi que  $N_{opt}$  dépend linéairement de  $k$  :

$$N_{opt} = ak \quad (2.11)$$

où  $a$  est un facteur dépendant du niveau d'incertitude des données que l'on peut déterminer par simulations en connaissant le niveau d'incertitude des mesures ou par observation de la transformée de Fourier spatiale de la distribution de force bruitée obtenue à une fréquence (la limite est relativement franche).

Les relations 2.10 et 2.11 permettent ainsi de connaître le nombre de points minimum, le nombre de termes optimum en fonction de la fréquence étudiée ou de déterminer la fréquence maximum d'étude pour un nombre de points  $M$  fixé.

## 2.3.2 Méthode locale

### 2.3.2.1 Filtrage

Nous avons vu au paragraphe 2.2.3 le calcul des transformées de Fourier discrètes spatiales des distributions de force bruitée et non bruitée. Le résultat présenté en figure 2.6 montre que le bruit se situe dans un domaine des nombres d'onde élevés. Comme dans la méthode globale, nous proposons de régulariser le problème, en supprimant le domaine instable. Dans un premier temps, nous utilisons un filtre passe-bas idéal (cf [22]), permettant de ne garder que les composantes peu affectées par le bruit. Sa fonction de transfert  $\hat{h}(k)$  correspond à une fonction porte, centrée à l'origine, et limitée par son nombre d'onde de coupure  $k_c$  :

$$\begin{cases} \hat{h}(k) = 1 \text{ pour } k \in [-k_c; k_c] \\ \hat{h}(k) = 0 \text{ pour } k \in ]-\infty; -k_c[ \cup ]k_c; +\infty[ \end{cases} \quad (2.12)$$

Le nombre d'onde de coupure  $k_c$  est alors défini de manière à ne garder que l'information où les distributions de force bruitée et non bruitée coïncident.

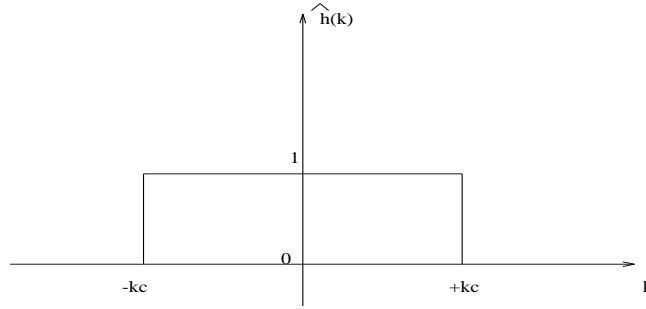


FIG. 2.15 – *Fonction de transfert du filtre idéal.*

L'opération de filtrage consiste à faire le produit de convolution avec la réponse du filtre correspondant à la transformée de Fourier inverse de  $\hat{h}(k)$  :

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(k) e^{+jkx} dk = \frac{\sin(k_c x)}{\pi x} \quad (2.13)$$

A priori, le filtrage peut se faire sur le champ de déplacement :

$$w_i^{\text{filtré}} = \sum_{j=0}^{M-2} w_j \frac{\sin(k_c(i-j)\Delta)}{\pi(i-j)} \quad (2.14)$$

ou sur la force :

$$F_i^{\text{filtré}} = \sum_{j=0}^{M-2} F_j \frac{\sin(k_c(i-j)\Delta)}{\pi(i-j)} \quad (2.15)$$

Les figures 2.16 et 2.17 montrent les deux résultats obtenus.

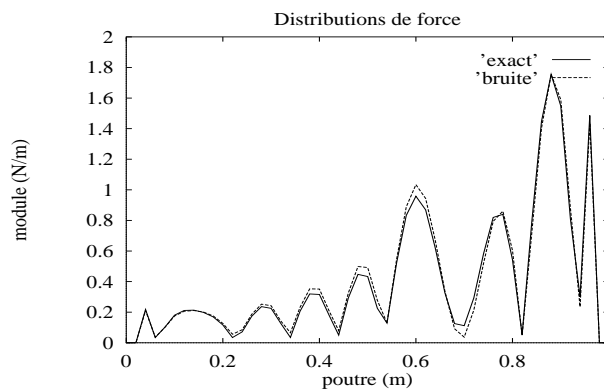


FIG. 2.16 – *Distributions de force exacte et bruitée reconstruites par la méthode locale, après filtrage du déplacement. Mêmes exemples que les figures 1.5 et 2.3 avec 51 points.*

Contrairement à la méthode globale, filtrer le champ de déplacement avant le calcul de la distribution de force ne correspond pas au filtrage de la distribution obtenue par le schéma aux différences finies. Dans le premier cas, l'opération consiste à calculer la distribution avec les données filtrées :

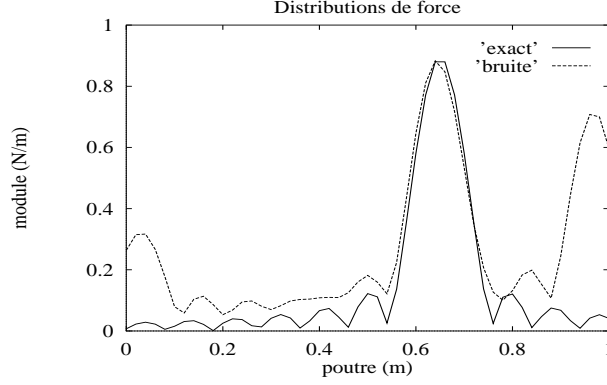


FIG. 2.17 – Filtrage des distributions de force exacte et bruitée reconstruites par la méthode locale. Mêmes exemples que les figures 1.5 et 2.3 avec 51 points.

$$F_i^1 = \sum_{l=-s}^{+s} A_l w_{i-l}^{filtré} = \sum_{l=-s}^{+s} \sum_{j=0}^{M-2} A_l w_j \frac{\sin(k_c(i-l-j)\Delta)}{\pi(i-l-j)} \quad (2.16)$$

où  $A_l$  indique les coefficients du schéma,  $s$  la limite du schéma défini par l'ordre de son développement ( $s \geq 4$ ).

Sur la figure 2.16, on voit que les distributions bruitée et non bruitée sont presque confondues. L'influence du bruit est bien réduite. Le problème est rendu stable. Par contre, le filtrage dégrade trop le résultat. L'information propre à la force d'excitation n'est pas accessible.

Dans le deuxième cas, on filtre la distribution de force obtenue par le schéma :

$$F_i^2 = F_i^{filtré} = \sum_{j=0}^{M-2} \sum_{l=-s}^{+s} A_l w_{j-l} \frac{\sin(k_c(i-j)\Delta)}{\pi(i-j)} \quad (2.17)$$

En posant  $j' = j - l$ , on obtient :

$$F_i^2 = \sum_{l=-s}^{+s} \sum_{j'=-l}^{M-2-l} A_l w_{j'} \frac{\sin(k_c(i-l-j')\Delta)}{\pi(i-l-j')} \quad (2.18)$$

Le terme générique de la somme est identique à celui de l'expression 2.16. Cependant, les deux densités de force reconstruites par 2.16 et 2.18 sont différentes car les bornes des indices de sommation ne sont pas identiques. Les deux opérations ne sont pas commutatives. La figure 2.17 montre la possibilité, à partir de ce deuxième traitement, de réduire aussi l'influence du bruit engendré par les incertitudes de mesure. La localisation de la force est bien meilleure. Par contre, des efforts (dépendant du bruit) résident aux limites de la structure. En effet, la limitation du domaine spatial implique des discontinuités sur le résultat. Ces discontinuités (phénomène local) couvrent forcément tout le domaine des nombres d'onde. Il n'est donc pas possible, par simple filtrage, de les éliminer. Par ailleurs, on observe, comme pour la méthode globale, l'effet du phénomène de Gibbs, responsable du lissage des discontinuités de la distribution. Les oscillations dépendent de la nature du filtre utilisé. Nous verrons, par la suite, comment les réduire de façon significative.



Le filtrage de la distribution de force est une voie de régularisation, mais il est important de remarquer que le produit de convolution 2.15 avec la réponse  $h(x)$  du filtre idéal (exprimée en 2.13) qui est infinie, détruit l'aspect local de la méthode, en ce sens qu'il devient nécessaire d'utiliser toutes les données mesurées pour obtenir une bonne régularisation et que si la limitation spatiale du champ de déplacement mesuré est trop petite, les bords du domaine impliquent une troncature de la réponse du filtre et dégradent la régularisation. L'objet des deux paragraphes suivants est de réduire les efforts aberrants résiduels aux limites, de limiter l'effet du phénomène de Gibbs et de définir un filtre plus approprié afin que la méthode garde l'attrait d'une approche locale qui utilise le moins de données mesurées possibles.

### 2.3.2.2 Problèmes aux limites: Fenêtrage

Aux limites de la structure, la distribution de force bruitée présente de fortes discontinuités. L'information de ces discontinuités est répandue dans tout le spectre de la distribution de force. Non seulement le filtrage ne permet pas de les supprimer, mais son utilisation répand l'information par le phénomène de Gibbs.

Le fait d'utiliser une distribution définie pour  $x \in [0; L]$  revient à limiter le domaine spatial par la multiplication de la fenêtre rectangulaire :

$$\begin{cases} \psi(x) = 1 \text{ pour } x \in [0; L] \\ \psi(x) = 0 \text{ pour } x \in ]-\infty; 0[ \cup ]L; +\infty[ \end{cases} \quad (2.19)$$

Cette fenêtre présente deux discontinuités en  $x = 0$  et  $x = L$ . Comme en traitement du signal (cf [16]), nous proposons d'utiliser une fenêtre moins abrupte. Parmi celles que l'on trouve dans ce domaine, on s'est intéressé plus particulièrement à la fenêtre de Hanning, parce qu'elle s'annule à ses bords, ce qui la rend continue dans tout le domaine. Son expression est de la forme :

$$\begin{cases} \psi(x) = 0.5(1 - \cos(\frac{2\pi x}{L})) \text{ pour } x \in [0; L] \\ \psi(x) = 0 \text{ pour } x \in ]-\infty; 0[ \cup ]L; +\infty[ \end{cases} \quad (2.20)$$

L'inconvénient d'une telle fenêtre est de pondérer, donc de transformer le résultat. Nous utiliserons en fait une combinaison, définie par la fenêtre rectangulaire adoucie aux limites par une demi fenêtre de Hanning sur la longueur  $\alpha$  :

$$\begin{cases} \psi(x) = 0.5(1 - \cos(\frac{\pi x}{\alpha})) \text{ pour } x \in [0; \alpha] \\ \psi(x) = 1 \text{ pour } x \in ]\alpha; L - \alpha[ \\ \psi(x) = 0.5(1 - \cos(\frac{\pi(x-L+2\alpha)}{\alpha})) \text{ pour } x \in [L - \alpha; L] \\ \psi(x) = 0 \text{ pour } x \in ]-\infty; 0[ \cup ]L; +\infty[ \end{cases} \quad (2.21)$$

Sa forme est présentée en figure 2.18.

Pour éviter les effets néfastes du filtre (phénomène de Gibbs) sur les bords, le fenêtrage est réalisé avant le filtrage. Le résultat est illustré en figure 2.19, où  $\alpha$  a été fixé à la demi-longueur d'onde de coupure du filtre. Le bruit n'influe plus. La méthode est rendue stable sur tout le domaine. Par contre, il est évident que le fenêtrage ne permet pas la détermination des efforts aux limites. La méthode est restreinte au domaine ouvert. Le choix de  $\alpha$  est issu de plusieurs simulations. Sa valeur, qui est la demi-longueur d'onde de coupure du filtre, correspond à la largeur des efforts résiduels observés précédemment.

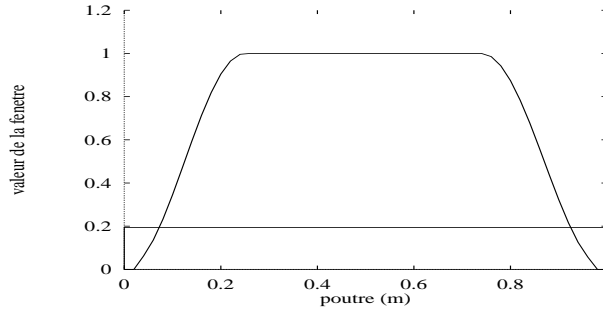


FIG. 2.18 – Fenêtre utilisée pour adoucir les discontinuités aux limites

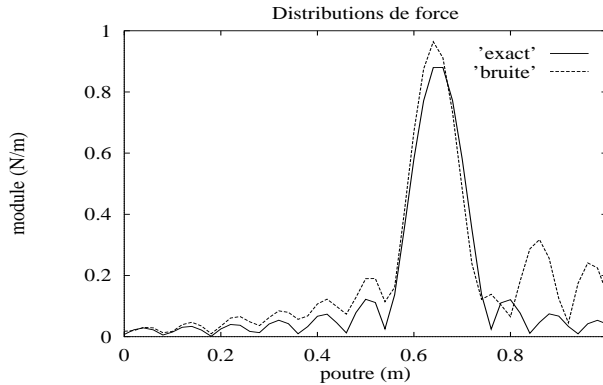


FIG. 2.19 – Distributions de force exacte et bruitée reconstruites par la méthode locale, puis fenêtrées et filtrées. Mêmes exemples que les figures 1.5 et 2.3 avec 51 points.

### 2.3.2.3 Optimisation de la régularisation

Jusque-là, le filtre utilisé est de type idéal. L'opération consistait à exécuter le produit de convolution 2.15. Cela présente deux inconvénients :

- la méthode n'est plus locale, le produit de convolution implique l'utilisation de tout les points,
- ce type de filtre possède une fonction de transfert fortement discontinue, ce qui implique une réponse constituée de lobes latéraux d'amplitudes élevées. Ces lobes sont responsables du phénomène de Gibbs, donc des oscillations observées en figure 2.19. Lorsque la distribution recherchée est très discontinue, le risque est d'obtenir des oscillations trop réparties sur le domaine. Par exemple, l'utilisation des étapes de régularisation décrites précédemment, au cas de la poutre excitée par un moment ponctuel (exemple du paragraphe 1.6.2.3), ne donne pas vraiment un résultat concluant (cf figure 2.20).

Ces deux inconvénients peuvent être réduits si on utilise localement l'information. On se propose maintenant d'utiliser, pour chaque calcul en un point  $x_i = i\Delta$ , une fenêtre de Hanning locale centrée sur ce point :

$$\psi(x - x_i) = 0.5\left(1 + \cos \frac{\pi(x - x_i)}{\beta}\right) \Pi_{\beta}(x - x_i) \quad (2.22)$$

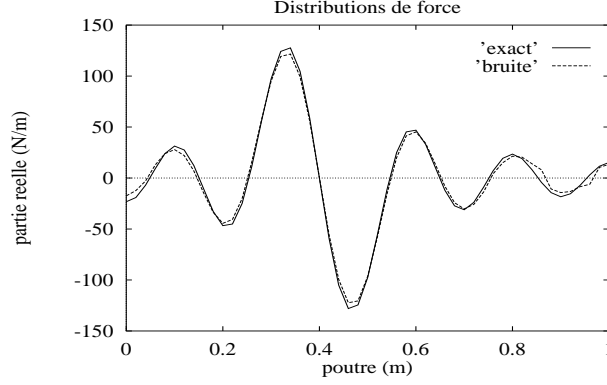


FIG. 2.20 – *Reconstruction de la partie réelle de la distribution de force après fenêtrage et filtrage idéal.*  
*Cas de la poutre excitée par un moment ponctuel en  $x_M = 0.4$  m.*

où  $\beta$  est la demi-longueur de la fenêtre,  $\Pi_\beta(x)$  la fonction porte entre  $-\beta$  et  $\beta$ .

Les étapes de la régularisation sont donc :

1. Un fenêtrage local utilisé pour chaque point  $x_i$  et de largeur  $2\beta$  :

$$F_{fen}(x) = 0.5F(x)\left(1 + \cos\frac{\pi(x-x_i)}{\beta}\right)\Pi_\beta(x-x_i) \quad (2.23)$$

2. Un filtrage idéal sur la distribution ainsi pondérée, pour chaque point  $x_i$  :

$$F_{filtré}(x_i) = \int_{x_i-\beta}^{x_i+\beta} F_{fen}(x) \frac{\sin(k_c(x_i-x))}{\pi(x_i-x)} dx \quad (2.24)$$

Ces deux étapes peuvent se développer sous la forme :

$$F_{filtré}(x_i) = \frac{1}{\lambda_c} \int_{x_i-\beta}^{x_i+\beta} F(x) H\left(\frac{x-x_i}{\lambda_c}\right) dx \quad (2.25)$$

où  $\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$  est la longueur d'onde de coupure du filtre,  $H(x)$  la fonction mère correspondant à la réponse totale du filtre muni du fenêtrage local :

$$H(x) = \frac{1}{2\pi x} \left(1 + \cos\frac{\pi x}{f}\right) \sin(2\pi x) \quad (2.26)$$

avec  $f$  le rapport  $\frac{\beta}{\lambda_c}$ , que l'on appellera *facteur de forme* de la réponse du filtre. La figure 2.21 montre la forme de cette fonction pour  $f = 1$  et  $f = 4$ .

Le filtre ainsi utilisé a une réponse finie. L'opération de filtrage 2.25 n'utilise que des informations locales. La méthode peut donc être appliquée sur une partie limitée de la structure, et ne nécessite pas la connaissance de la globalité du champ de déplacement. En figure 2.22, on montre, lorsque la distribution recherchée présente une forte discontinuité (effort ponctuel,...), que le filtre introduit forcément un lissage, responsable des oscillations que nous avons observées. Avec une réponse finie, l'information utilisée par le filtre est locale, si bien qu'il ne tiendra compte de la discontinuité qu'à l'endroit où elle s'applique. Ceci a pour conséquence de réduire nettement l'effet du phénomène de Gibbs.

Les figures 2.23 et 2.24 montrent les résultats obtenus dans le cas du filtrage optimisé,

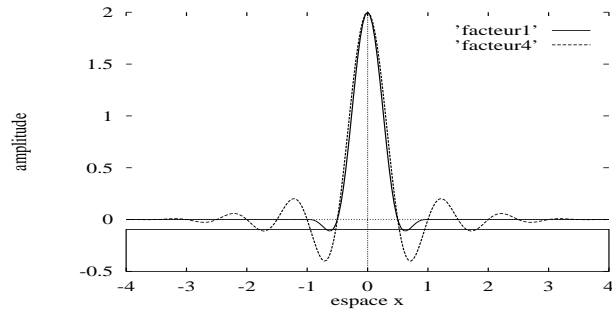


FIG. 2.21 – Fonctions mères correspondant au filtrage optimisé.

avec le paramètre  $f = 1$ . On constate une réelle amélioration par rapport aux courbes précédentes (figures 2.19 et 2.20).

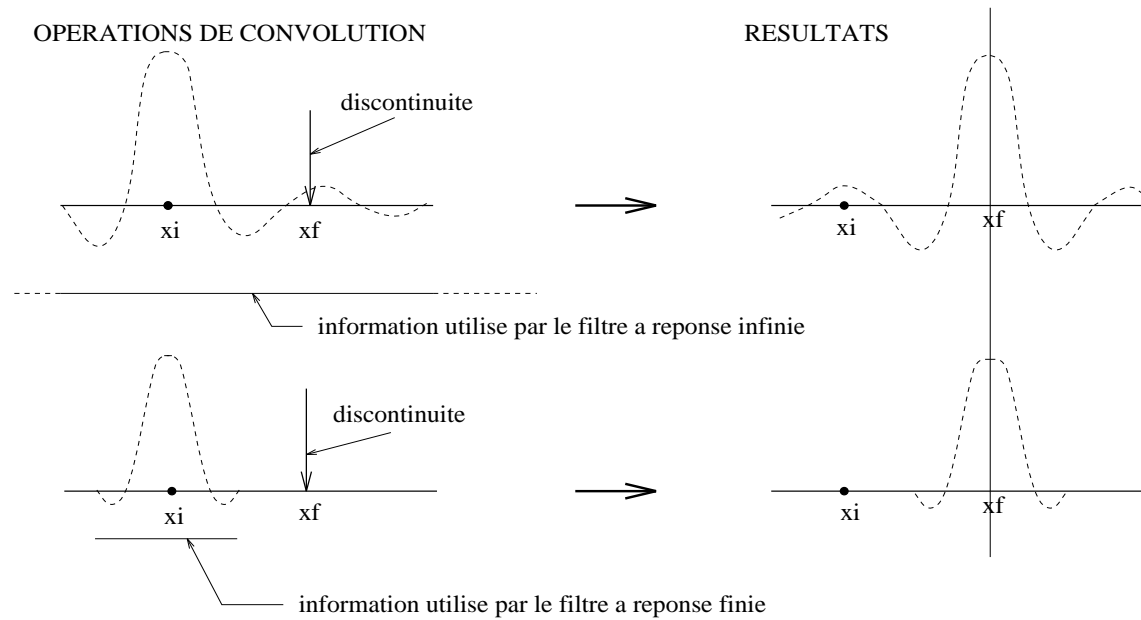


FIG. 2.22 – Principe de l'opération de convolution, dans le cas d'un filtre à réponse infinie et d'un filtre à réponse finie.

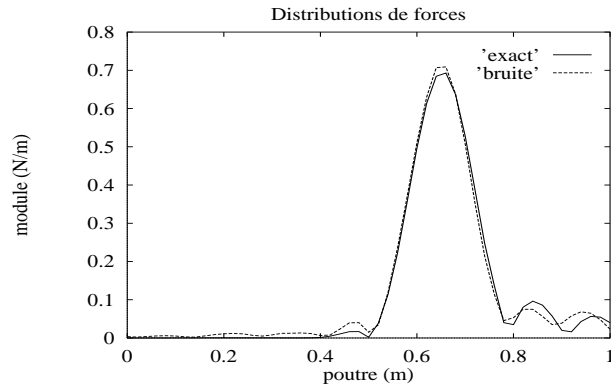


FIG. 2.23 – *Distributions de force exacte et bruitée reconstruites par la méthode locale, avec le filtrage optimisé, pour  $f = 1$ . Mêmes exemples que les figures 1.5 et 2.3 avec 51 points.*

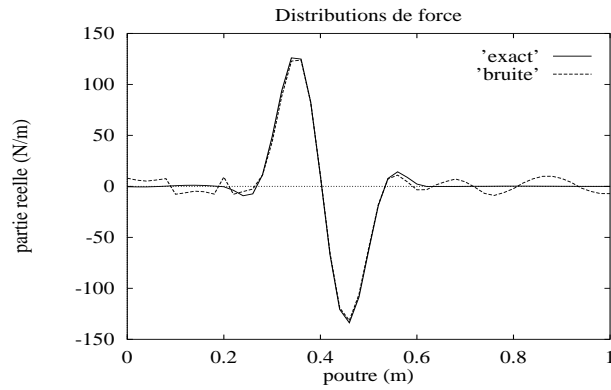


FIG. 2.24 – *Reconstruction de la partie réelle de la distribution de force après filtrage optimisé, pour  $f = 1$ . Cas de la poutre excitée par un moment ponctuel en  $x_M = 0.4$  m.*

Par ailleurs, les expressions 2.25 et 2.26 font penser à la définition de la transformée en ondelettes (cf [29]). L'expression est de la forme :

$$S(b,a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} s(x) \xi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad (2.27)$$

où  $S$  est la transformée du signal  $s$  par l'ondelette  $\xi$ , qui doit vérifier 2.28 pour que la transformée inverse ait un sens :

$$C_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\xi}(k)|^2}{k} dk < \infty \quad (2.28)$$

Cette condition implique que  $\xi$  corresponde à la réponse d'un filtre passe-bande, ce qui n'est pas le cas de  $H(x)$ . Nous proposons tout de même de faire le lien avec l'analyse en ondelettes, qui n'exige pas le calcul inverse.

Pour  $\beta$  fixé, la fonction  $F_{filtré}(x_0, k_c)$  rejoint la notion d'analyse "temps-fréquence", qu'il conviendrait mieux d'appeler "espace-nombre d'onde", dans notre cas. La fonction mère correspond alors à la restriction d'un sinus cardinal de nombre d'onde  $k_c$  à une fenêtre fixe. Quel que soit le nombre d'onde  $k_c$ , le nombre d'échantillons de la réponse est le même (cf figure 2.25).

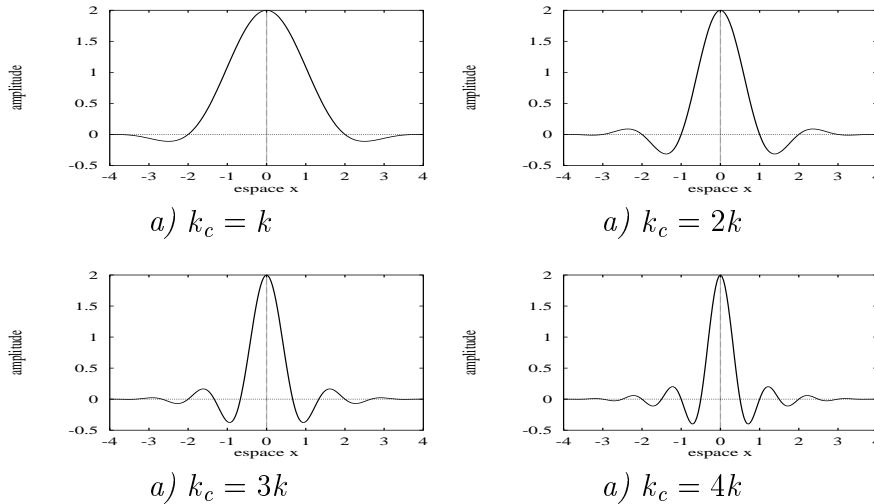


FIG. 2.25 – Evolution de la réponse du filtre optimisé, en fonction du nombre d'onde de coupure pour  $\beta$  fixé.

Pour  $f$  fixé, la largeur de la fenêtre locale est liée à la longueur d'onde de coupure du filtre. On retrouve là, la notion d'analyse "temps-échelle", ou plutôt "espace-échelle", communément appelée *analyse multirésolution*. Cette notion d'échelle signifie que la réponse ne change pas de forme (cf figure 2.26). En "voyageant" des échelles grossières vers des échelles fines, on pratique un "zoom" et l'on accède à des représentations de plus en plus précises du signal (ou de l'image) donné.

Nous avons vu au paragraphe 2.3.2.2, que la largeur  $\alpha$  de la fenêtre 2.21 est optimisée pour  $\alpha = \lambda_c$ . Cette dépendance nous amène naturellement à faire le lien avec *l'analyse multirésolution*.

Pour un facteur de forme égal à 1, on montre en figure 2.27, le résultat obtenu sur la

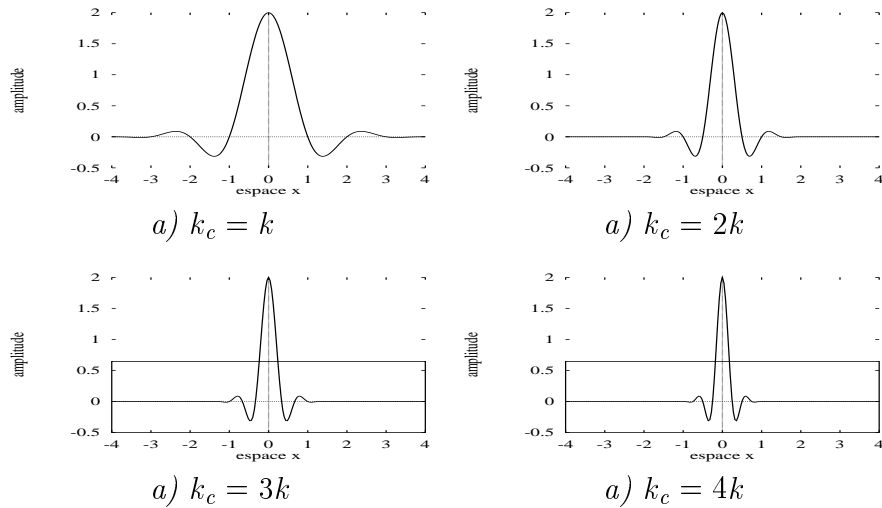


FIG. 2.26 – Evolution de la réponse du filtre optimisé, en fonction du nombre d'onde de coupure pour  $f$  fixé.

poutre, pour différentes valeurs de  $k_c$ . A gauche, les courbes sont en 3 dimensions : l'espace (poutre) en  $x$ , le coefficient  $a = \frac{k_c}{k}$  en  $y$ , et la valeur du module de la densité de force en  $z$ . A droite, on représente ces mêmes courbes sous forme de contours (comme en topographie). On observe donc directement les distributions obtenues pour différentes valeurs de  $k_c$ . Pour les premières valeurs de  $a$  ( $a < 2$ ), c'est-à-dire pour un nombre d'onde de coupure faible, la distribution est très lissée, la localisation est ambiguë. Pour  $3 < a < 4$ , la source est identifiée (force répartie entre  $0.6 m$  et  $0.7 m$ ). Au delà, le nombre d'onde de coupure est trop grand, et on observe la présence et la domination des forces aberrantes. En figure 2.28, le même résultat est illustré pour  $f = 4$ . La limite du domaine bruité est légèrement repoussée, jusqu'à  $a = 4.5$ , mais pas de façon significative. Les deux résultats sont proches. La première valeur de  $f$  ( $f = 1$ ) suffit pour ce genre d'application.

Cependant, le facteur de forme peut être un paramètre important. Sa valeur permet de "régler" la qualité du filtre. Pour  $f$  petit, la réponse comporte peu d'échantillons. Les éventuelles discontinuités de la distribution sont mieux localisées. Par contre, la fonction de transfert est plus étalée. La coupure est moins franche. Il peut y avoir dépassement sur le domaine des nombres d'onde instable. Pour  $f$  grand, le filtre est plus restrictif. Il se rapproche du filtre idéal. La régularisation est plus sévère. Ce cas convient mieux pour les distributions continues et réparties (excitation par ondes, etc...). Selon la nature de la distribution recherchée (information a priori), le facteur de forme  $f$  pourra être ajusté en fonction du degré d'acceptabilité recherché pour le résultat.

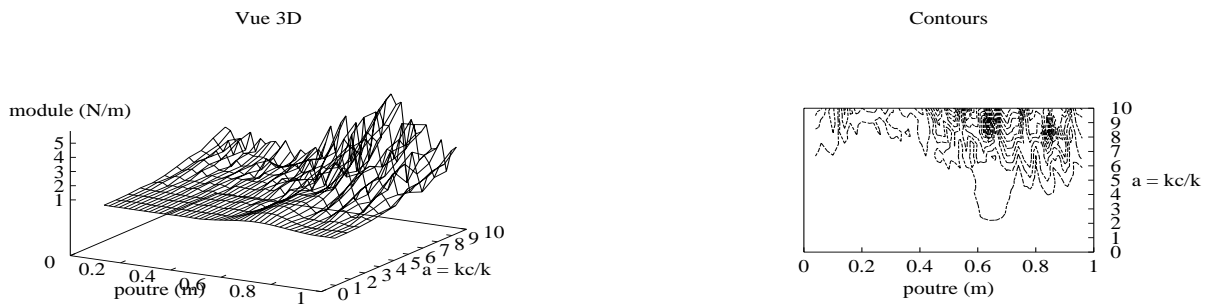


FIG. 2.27 – *Analyse 3D du filtrage optimisé avec un facteur de forme  $f = 1$ ,  
Même exemple que la figure 2.3 avec 51 points.*

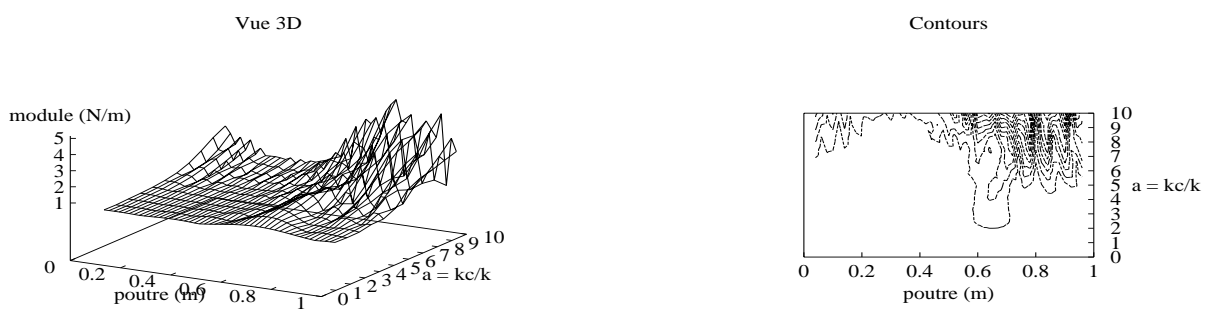
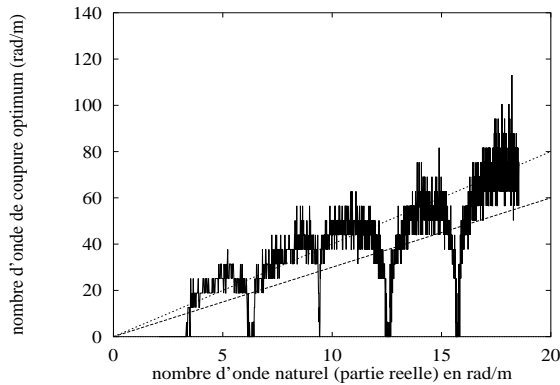


FIG. 2.28 – *Analyse 3D du filtrage optimisé avec un facteur de forme  $f = 4$ ,  
Même exemple que la figure 2.3 avec 51 points.*

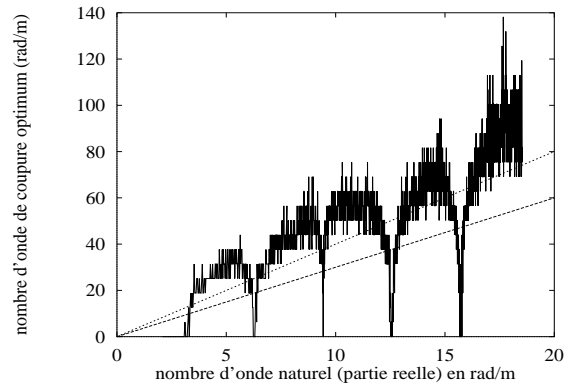


### 2.3.2.4 Choix du nombre d'onde de coupure

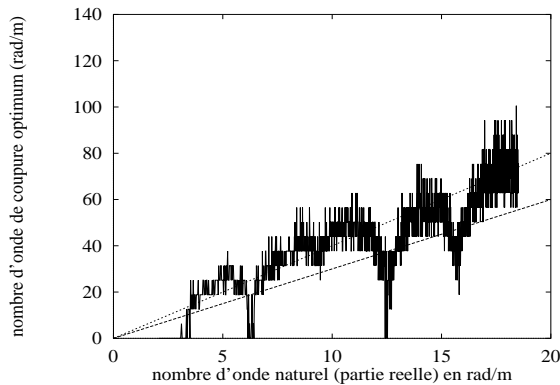
Nous proposons dans ce paragraphe, de faire le cheminement identique au paragraphe 2.3.1.2 vis à vis du choix de la troncature utilisée dans la méthode globale. Le problème est de déterminer le nombre d'onde de coupure optimum  $k_{opt}$ , le plus grand possible, pour éviter de perdre trop d'information. Le calcul des transformées de Fourier discrètes spatiales des distributions de force exacte et bruitée (cf figure 2.6) permet de déterminer ce nombre d'onde, en imposant un seuil que ne doit pas dépasser la différence entre ces deux fonctions. La figure 2.29 compare les différents cas de dépendance de  $k_{opt}$  en fonction du nombre d'onde naturel  $k = \frac{\omega}{c}$ . On retrouve exactement les mêmes lois que suit la troncature optimum  $N_{opt}$  de la méthode globale (au paragraphe 2.3.1.2). En dehors des résonances,  $k_{opt}$  dépend linéairement de  $k$ . La pente  $a = \frac{k_{opt}}{k}$  est définie par le niveau d'incertitude des données. Aux résonances, le bruit domine et  $k_{opt}$  chute de façon significative, en particulier si la structure est peu amortie.



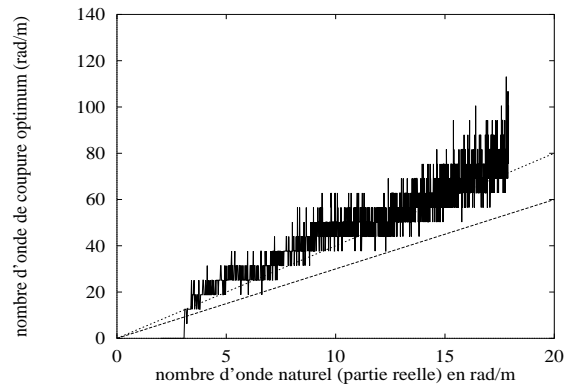
a) Bruit Gaussien de 1 %, amortissement structural  $\eta = 0.004$



b) Bruit Gaussien de 0.5 %, amortissement structural  $\eta = 0.004$



b) Bruit Gaussien de 1 %, amortissement structural  $\eta = 0.05$



b) Bruit Gaussien de 1 %, amortissement structural  $\eta = 0.004$ , poutre infinie (pas de mode)

FIG. 2.29 – Dépendance du nombre d'onde de coupure optimum en fonction du nombre d'onde naturel.

En figure 2.30, on met en évidence l'indépendance de  $k_{opt}$  par rapport au nombre de points  $M$ . Discrétiser plus finement la structure tend à augmenter l'amplification du bruit (diminution de  $k_{opt}$ ), mais cette tendance est compensée par le fait que la périodisation

du spectre, due à la discrétisation, est plus grande. Entre 20 et 200 points,  $k_{opt}$  ne dépasse pas la disparité des différents tirages aléatoires.

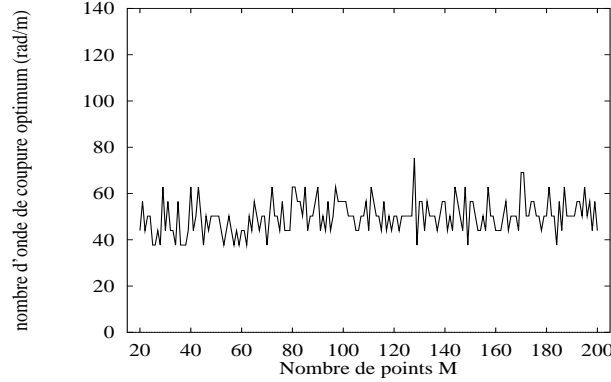


FIG. 2.30 – *Dépendance du nombre d'onde de coupure optimum en fonction du nombre de points  $M$ .*

### 2.3.2.5 Domaine de validité

La méthode locale n'utilise que les données d'une partie du champ de déplacement. Cette partie constitue la fenêtre d'étude. Sa largeur ne peut être inférieure à  $(2\lambda_c + 4\Delta)$ , car elle est imposée par la fenêtre de Hanning 2.21 et par le schéma centré 1.26. Compte tenu des lois qui régissent le nombre d'onde de coupure optimum ( $k_{opt} = ak$ ), nous obtenons l'inéquation :

$$L_{fen\hat{e}tre} \geq \frac{4\pi}{ak} + 4\Delta \quad (2.29)$$

qui permet de fixer la fréquence minimum d'étude pour une fenêtre fixée :

$$f_{mini} = \frac{8\pi}{a^2 \sqrt{\frac{\rho S}{E(1+j\eta)I}} (L_{fen\hat{e}tre} - 4\Delta)^2} \quad (2.30)$$

Par ailleurs, l'échantillonnage du champ de déplacement constitue lui aussi un filtrage passe-bas. Il est souhaitable qu'il ne coupe pas l'information peu bruitée. Le nombre d'onde de coupure optimum doit être inférieur au nombre d'onde de Shannon ( $\frac{k_{\text{échantillonnage}}}{2}$ ) :

$$k_{opt} \leq \frac{\pi}{\Delta} \quad (2.31)$$

Cette condition fixe la fréquence maximum d'étude, pour un nombre de points  $M$  donné :

$$f_{maxi} = \frac{\pi(M-5)^2}{2a^2 \sqrt{\frac{\rho S}{E(1+j\eta)I}} (L_{fen\hat{e}tre} - 4\Delta)^2} \quad (2.32)$$

soit :

$$f_{maxi} = f_{mini} \frac{(M-5)^2}{16} \quad (2.33)$$

## 2.4 Conclusion

Les simulations faites au début de ce chapitre montrent que les formalismes introduits dans le premier chapitre ne peuvent être appliqués directement dans la pratique. Dès que les données du champ de déplacement ne sont connues qu'avec un certain degré d'approximation, ce qui est le cas de grandeurs mesurées, les résultats divergent. Cette instabilité est typique des problèmes inverses. Nous avons développé une approche régularisatrice, pour rendre le problème stable. Elle est basée sur le constat que la partie des forces aberrantes est due à des composantes de faibles longueurs d'onde. Il s'agit donc de limiter les trop grandes variations spatiales de la distribution par l'utilisation de filtres passe-bas sur les nombres d'onde.

Pour la méthode globale, cette opération se résume à tronquer la série modale. Un nombre de terme optimum a été défini où l'influence du bruit parasite est considérablement réduit. La solution approchée permet de localiser les sources, mais le lissage introduit une dégradation importante de la solution exacte, quand celle-ci comporte des discontinuités marquées (phénomène de Gibbs).

Pour la méthode locale, l'opération consiste à calculer le produit de convolution de la réponse d'un filtre passe-bas avec la distribution de force obtenue par le schéma aux différences finies. L'utilisation d'un filtre à réponse finie donne à cette méthode un avantage certain. Elle permet non seulement d'utiliser peu d'information mais aussi de réduire la difficulté de localisation des discontinuités d'une distribution. Cette méthode est donc plus encourageante. Son utilisation est simple et peut être appliquée avec des opérateurs locaux, sans connaître les conditions aux limites. On imagine donc la possibilité de l'étendre à des structures complexes qui peuvent être décomposées en éléments d'opérateur simples (on rejoint l'idée des éléments finis [50], [51]). Dans la suite, nous l'avons baptisée méthode R.I.F.F. (Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée). Compte tenu de ses atouts incontestables, nous nous sommes intéressés plus particulièrement à son extension. Les trois chapitres suivants sont basés sur son développement.

# Chapitre 3

## Extension de la méthode locale aux structures 2D planes

### 3.1 Buts du chapitre

Dans les travaux [49] et [48], on retrouve l'idée d'utiliser un filtrage pour régulariser la reconstruction d'une distribution de force sur une plaque. Leur approche est basée sur le calcul de la transformée de Fourier bidimensionnelle spatiale de la distribution de force. Le filtre utilisé correspond à celui de l'holographie acoustique, c'est-à-dire avec une fonction de transfert exponentiellement décroissante. Cette méthode paraît simple car elle évite le calcul des dérivées spatiales, par transformée de Fourier, mais présente l'inconvénient de ne pas être locale (intégration spatiale et filtre à réponse infinie). L'avantage d'une méthode locale est d'être utilisable avec peu d'information quand on s'intéresse à quelques points particuliers (évaluer un effort de couplage,...) et de l'étendre facilement à des structures complexes.

Nous proposons dans ce chapitre l'extension de la méthode R.I.F.F. (Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée), correspondant à la méthode locale du chapitre 2, au cas des structures bidimensionnelles planes. Dans un premier temps, on rappelle les nouvelles équations de base considérées comme information a priori de la méthode. On propose, ensuite, de reprendre les trois étapes de la méthode : Le schéma aux différences finies, le fenêtrage et le filtrage. Tous les paramètres des deux chapitres précédents sont réétudiés et adaptés pour ce type de structure. Plusieurs exemples, issus de simulations numériques, sont regroupés dans un paragraphe pour préciser le cadre d'application de la méthode. En synthèse, on dégagera les applications intéressantes que l'on peut obtenir avec une telle approche.

### 3.2 Equations de base du problème

Pour les structures 2D minces planes, nous considérons, sauf indication contraire, l'opérateur différentiel classique décrivant le mouvement transversal des plaques. C'est le mouvement de flexion régi par l'équation du quatrième ordre :

$$\frac{E(1+j\eta)h^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - \rho h \omega^2 w = F(x,y,\omega) \quad (3.1)$$

où  $h$  est l'épaisseur de la plaque,  $w$  le déplacement transverse,  $F$  la distribution des efforts transversaux.

Cette expression fournit l'équations de base de ce chapitre. L'inconnue est la distribution  $F(x,y,\omega)$ , exprimée cette fois ci par unité de surface ( $N/m^2$ ).

### 3.3 Simulation numérique : Exemple de référence

Avant de commencer la description et le développement de l'approche en deux dimensions, nous choisissons un exemple de référence, pour montrer, au fur et à mesure, les résultats de chaque étape.

La structure choisie est une plaque carrée sur appuis, de cotés  $L_x = L_y = 1 m$ , d'épaisseur  $h = 5 mm$ , en acier ( $E = 2.10^{11} N/m^2$ ,  $\rho = 7800 kg/m^3$ , facteur de perte  $\eta = 4.10^{-3}$ ).

L'excitation est définie par la distribution :

$$\begin{cases} F(x,y,\omega) = F \text{ pour } x \in [x_1; x_2] \text{ et } y \in [y_1; y_2] \\ F(x,y,\omega) = 0 \text{ ailleurs} \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $F$  est l'amplitude (en  $N/m^2$ ) de la distribution de force excitant la structure à 110 Hz.

Le calcul direct consiste à déterminer la valeur  $w_{i,j}$  du déplacement vibratoire au point indicé  $(i,j)$ . Il est réalisé par la méthode modale, identique au paragraphe 1.6.1 et étendue en deux dimensions. L'expression du champ de déplacement discrétisé se résume par :

$$w_{i,j} = \sum_{n=1}^{2(M_x-1)} \sum_{m=1}^{2(M_y-1)} \frac{4F(\cos(\frac{n\pi}{L_x}x_1) - \cos(\frac{n\pi}{L_x}x_2))(\cos(\frac{m\pi}{L_y}y_1) - \cos(\frac{m\pi}{L_y}y_2))}{[k_{nm}^4 - k^4]Dnm\pi^2} \sin(\frac{n\pi}{L_x}i\Delta_x) \sin(\frac{m\pi}{L_y}j\Delta_y) \quad (3.3)$$

avec  $D = \frac{E(1+j\eta)h^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $k_{nm}^4 = (\frac{n^4\pi^4}{L_x^4} + \frac{m^4\pi^4}{L_y^4} + 2\frac{n^2m^2\pi^4}{L_x^2L_y^2})$  et  $k$  le nombre d'onde naturel régi par l'équation de dispersion de la plaque :

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho h}{D}} \sqrt{\omega} \quad (3.4)$$

Pour l'exploitation qui suit, nous avons choisi les données :  $M_x = M_y = 51$  points,  $F = 1 N/m^2$ ,  $x_1 = 0.6 m$ ,  $x_2 = 0.7 m$ ,  $y_1 = 0.4 m$ ,  $y_2 = 0.5 m$ .

Le champ de déplacement ainsi calculé constitue les données dites "exactes". L'influence du bruit associé aux incertitudes de mesure est étudiée par la comparaison des résultats obtenus avec les données "bruitées" :

$$w_{i,j}^{bruité} = w_{i,j}^{exact} \cdot \Delta w \cdot e^{j\Delta\phi} \quad (3.5)$$

où  $\Delta w$  et  $\Delta\phi$  sont les deux variables aléatoires Gaussiennes définies dans la section 2.2.

## 3.4 Méthode locale

### 3.4.1 Schéma aux différences finies

La méthode des différences finies étendue aux structures bidimensionnelles utilise les schémas centrés, correspondant à chaque dérivée spatiale, développés au premier ordre. Pour un maillage cartésien, les expressions sont de la forme :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Rightarrow \delta_{i,j}^{2x} = \frac{1}{\Delta_x^2} (w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Rightarrow \delta_{i,j}^{2y} = \frac{1}{\Delta_y^2} (w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \Rightarrow \delta_{i,j}^{4x} = \frac{1}{\Delta_x^4} (w_{i+2,j} - 4w_{i+1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i-1,j} + w_{i-2,j}) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \Rightarrow \delta_{i,j}^{4y} = \frac{1}{\Delta_y^4} (w_{i,j+2} - 4w_{i,j+1} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j-1} + w_{i,j-2}) \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \Rightarrow \delta_{i,j}^{2x2y} = & \frac{1}{\Delta_x^2 \Delta_y^2} (w_{i+1,j+1} - 2w_{i+1,j} + w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j+1} + 4w_{i,j} \\ & - 2w_{i,j-1} + w_{i-1,j+1} - 2w_{i-1,j} + w_{i-1,j-1}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

où  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  correspondent aux écarts entre deux points consécutifs selon les directions  $x$  et  $y$ ;  $i$  et  $j$  sont les indices d'un point courant du maillage de la structure,  $w_{i,j}$  est la valeur du déplacement transverse au point indicé  $i$  et  $j$ .

Pour la plaque en flexion, nous avons :

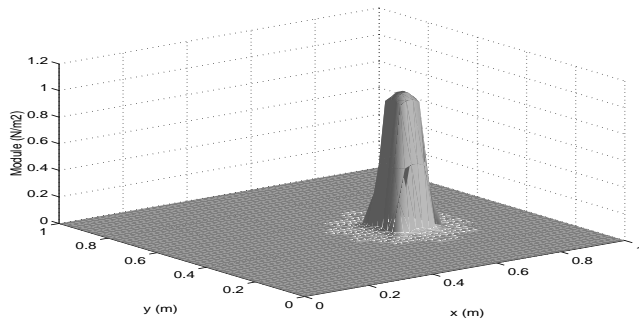
$$D(\delta_{i,j}^{4x} + \delta_{i,j}^{4y} + 2\delta_{i,j}^{2x2y}) - \rho h \omega^2 w_{i,j} = F_{i,j} \quad (3.11)$$

On constate avec 3.8, 3.9 et 3.10 que le calcul de l'effort au point  $i,j$  nécessite la mesure du déplacement vibratoire en 13 points.

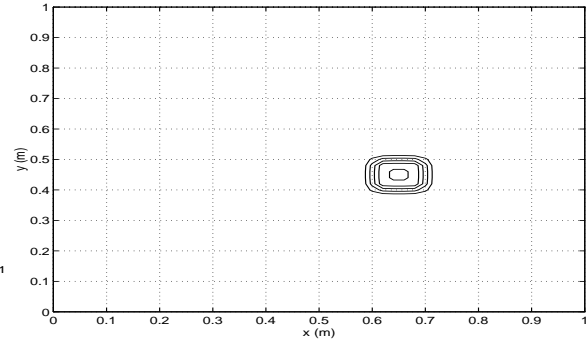
Un premier calcul d'identification de l'effort a été mené avec 3.11. La figure 3.1 montre la distribution reconstruite, à partir des données exactes de l'exemple de référence. L'approximation du calcul des dérivées spatiales, par les schémas  $\delta_{i,j}^{4x}$ ,  $\delta_{i,j}^{4y}$  et  $\delta_{i,j}^{2x2y}$  suffit.

Par contre, en appliquant cette même démarche avec les données bruitées (voir figure 3.2), on observe, comme précédemment pour les poutres, l'apparition d'efforts aberrants, résultant de l'amplification des erreurs appliquées sur le champ de déplacement.

Les deux sections suivantes proposent l'extension 2D des approches régularisatrices de la méthode locale (paragraphe 2.3.2) pour remédier à cette instabilité.

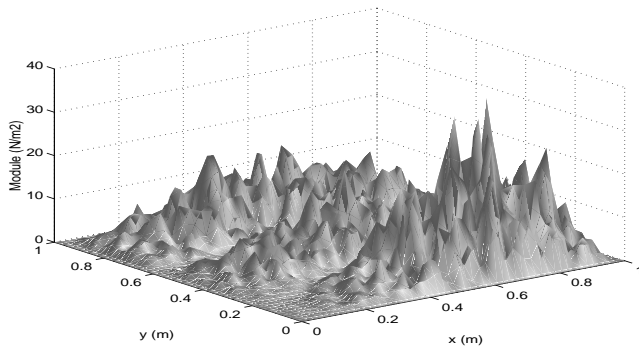


Vue 3D

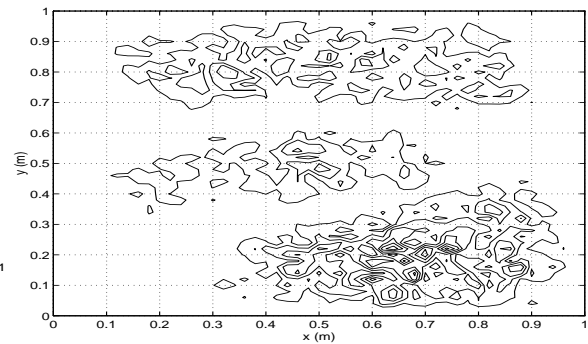


Contours

FIG. 3.1 – *Distribution de force reconstruite par le schéma aux différences finies 2D sur la plaque de référence, à partir des données exactes.*



Vue 3D



Contours

FIG. 3.2 – *Distribution de force reconstruite par le schéma aux différences finies 2D sur la plaque de référence, à partir des données bruitées.*

### 3.4.2 Fenêtrage

Il s'agit d'adoucir les discontinuités aux limites par une demi fenêtrage de Hanning. Pour une structure rectangulaire, on utilise la fenêtrage globale monodimensionnelle étendue en deux dimensions :

$$\psi_{2D}(x,y) = \psi(x)\psi(y) \quad (3.12)$$

avec  $\psi(x)$  la fenêtrage définie par l'expression 2.21.

### 3.4.3 Filtrage

Le filtrage constitue l'opération essentielle de la régularisation. Il permet d'éliminer l'effet amplificateur des erreurs associées aux mesures qui caractérisent le problème inverse. En deux dimensions, on pense naturellement à filtrer l'information selon deux axes orthogonaux. L'utilisation de la combinaison de deux filtres pose plusieurs questions :

- Y a-t-il un lien entre les deux nombres d'onde de coupure dans les deux directions et comment les optimiser?
- Comment choisir la forme de la réponse de chaque filtre?
- Peut-on optimiser le filtrage, en choisissant deux directions particulières?

Ces questions font l'objet des quatre sous-sections suivantes. Comme point de départ, nous proposons d'aborder le problème avec deux filtres idéaux dans les directions principales du repère :  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . Sa réponse correspond au produit de deux sinus cardinaux (cf [22]) :

$$h(x,y) = \frac{1}{\pi^2 xy} \sin(k_{cx}x) \sin(k_{cy}y) \quad (3.13)$$

où  $k_{cx}$  et  $k_{cy}$  sont les nombres d'onde de coupure du filtre selon les axes  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ .

#### 3.4.3.1 Coupures du filtre

Nous avons vu au paragraphe 2.3.2.4 que le nombre d'onde de coupure optimum du filtre régularisant dépend uniquement de la physique du problème (structure, fréquence d'excitation) et que le maillage n'intervient pas sur le choix de  $k_c$ . Dans le cas d'une structure bidimensionnelle rectangulaire, constituée d'un maillage cartésien, nous avons constaté le même phénomène ; le nombre  $M_x$  de points suivant  $\vec{x}$  et  $M_y$  suivant  $\vec{y}$  n'influent pas sur le choix des deux nombres d'onde de coupure.

D'autre part, la répartition dans le plan d'onde de l'énergie vibratoire d'une plaque est régie par les deux règles suivantes :

- le phénomène de *coïncidence fréquentielle* (cf [30]) impose une répartition sur un cercle du plan d'onde, fixé par la relation de dispersion,
- le phénomène de *coïncidence spatiale* (cf [27], [21]) impose un transfert d'énergie entre l'excitation et la vibration par égalité des nombres d'onde.

Le premier phénomène ne privilégie pas de directions particulières. Dans le plan d'onde, l'information vibratoire se répartie sur un cercle de rayon  $k = \frac{\omega}{c}$ . Le deuxième phénomène



dépend de la nature de la distribution de la force excitatrice que nous cherchons à identifier. Nous ne pouvons donc pas en tenir compte.

Sans informations supplémentaires sur la nature de l'excitation, on ne peut définir un lien entre  $k_{cx}$  et  $k_{cy}$ , quelle que soit la géométrie de la structure étudiée. Dans ce cas, nous prenons autant d'information selon les directions de filtrage :

$$k_{cx} = k_{cy} = k_c \quad (3.14)$$

La fonction de transfert du filtre idéal est définie par un carré centré à l'origine et limité par la valeur de  $k_c$ .

### 3.4.3.2 Choix du nombre d'onde de coupure

Les deux nombres d'onde de coupure sont considérés égaux. Le problème est de déterminer le nombre d'onde de coupure optimum  $k_{opt}$ , suffisamment grand pour ne pas dégrader le résultat et suffisamment petit pour supprimer les efforts aberrants résultant des erreurs de mesure. Comme dans le cas des poutres, nous l'avons déterminé par comparaison des transformées de Fourier spatiales de la distribution de force exacte avec celle bruitée. Il correspond au plus grand nombre d'onde, pour lequel l'écart entre les deux transformées ne dépasse pas un seuil acceptable sur les deux axes  $k_x$  et  $k_y$ .

La figure 3.3 met en évidence la même loi linéaire  $k_c = ak$  en basses fréquences et en dehors des résonances. Pour des fréquences plus élevées, où le recouvrement modal est plus important, on constate que  $k_{opt}$  ne chute plus systématiquement sur chaque résonance. Cela s'explique par la présence d'un plus grand nombre de modes excités. L'information est mieux répartie dans le plan d'onde, ce qui permet d'accéder à l'information locale du point d'application de l'effort. Le recouvrement modal pour lequel on assiste au changement de comportement du nombre d'onde de coupure est de 10 *modes* (pour  $k = 48 \text{ rad/m}$ ). C'est bien sur une valeur indicative, obtenue dans un cas particulier.

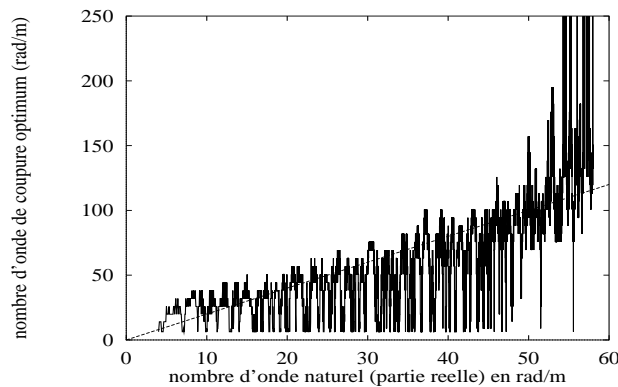


FIG. 3.3 – *Dépendance du nombre d'onde de coupure optimum en fonction du nombre d'onde naturel  $k$ . (Cas de l'exemple de référence).*

Enfin, à partir d'une certaine limite, on s'aperçoit que le nombre d'onde de coupure optimum diverge à l'infini. Ce phénomène résulte de l'échantillonnage spatial. En effet, la

discrétisation implique une périodisation des transformées de Fourier de nos distributions avec une période de  $k_{ex} = \frac{2\pi}{\Delta_x}$  selon l'axe  $k_x$ , et  $k_{ey} = \frac{2\pi}{\Delta_y}$  selon l'axe  $k_y$  (critère de Shannon). L'échantillonnage constitue donc un filtrage passe-bas qui implique que l'information est vérifiée pour :

$$\begin{cases} -\frac{k_{ex}}{2} < k_x \leq \frac{k_{ex}}{2} \\ -\frac{k_{ey}}{2} < k_y \leq \frac{k_{ey}}{2} \end{cases} \quad (3.15)$$

En figure 3.4, on montre comment l'échantillonnage spatial joue le rôle de filtre régularisant, à partir du moment où  $ak \geq \frac{k_{ex}}{2}$ . Dans ce cas, les deux transformées de Fourier coïncident pour toute valeur de  $k_x$ . Lorsque  $ak \geq \frac{k_{ex}}{2}$  et  $ak \geq \frac{k_{ey}}{2}$ , l'algorithme du calcul de  $k_{opt}$  tend alors vers une valeur infinie.

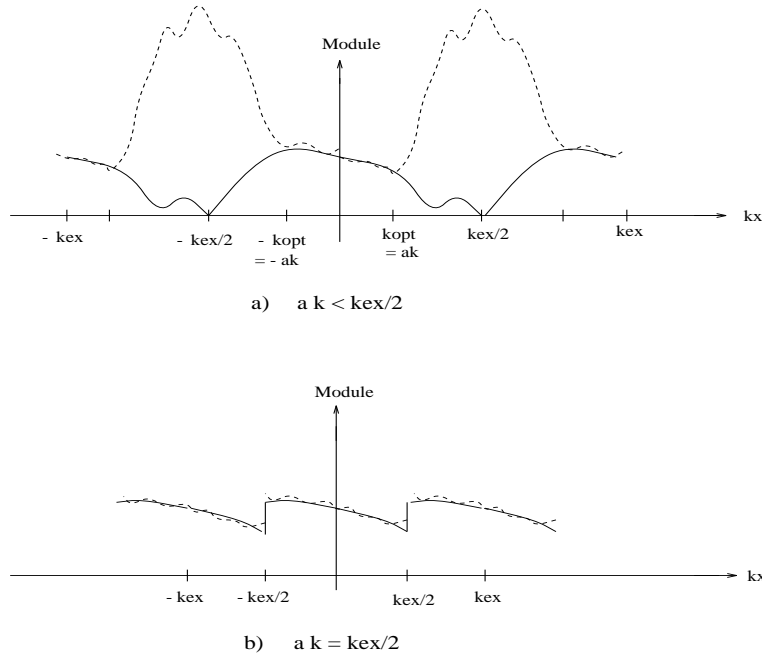


FIG. 3.4 – Influence de la discrétisation spatiale dans le domaine des nombres d'onde en a) la discrétisation est plus fine. Elle ne suffit pas à régulariser le bruit. en b) la discrétisation est plus grossière. Elle filtre le bruit.

### 3.4.3.3 Facteurs de forme

L'application du filtrage optimisé (à réponse finie), définie en 2.3.2.3, s'accommode aussi facilement aux cas des structures bidimensionnelles. L'opération consiste à faire le double produit de convolution :

$$F_{filtré}(x_i, y_j) = \frac{1}{\lambda_c^2} \int_{x_i-\beta}^{x_i+\beta} \int_{y_j-\gamma}^{y_j+\gamma} F(x, y) H\left(\frac{x-x_i}{\lambda_c}, \frac{y-y_i}{\lambda_c}\right) dy dx \quad (3.16)$$

où  $\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$  la longueur d'onde de coupure du filtre,  $\beta$  et  $\gamma$  les demi largeurs de la fenêtre locale selon les axes  $x$  et  $y$ ;  $H(x, y)$  la fonction mère bidimensionnelle définie par :

$$H(x, y) = \frac{1}{4\pi^2 xy} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{f_x}\right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{f_y}\right) \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \quad (3.17)$$

où  $f_x = \frac{\beta}{\lambda_c}$  et  $f_y = \frac{\gamma}{\lambda_c}$  définissent deux *facteurs de forme* de la réponse du filtre selon les axes  $x$  et  $y$ .

Ces facteurs fournissent deux paramètres d'ajustement du filtre. Dans le cas où l'on désire localiser des discontinuités de la distribution (localisation d'efforts mécaniques,...), il est préférable de choisir un facteur petit. Au contraire, si l'on veut déterminer une distribution répartie (excitation par onde,...), un facteur plus élevé donne une meilleure mesure.

Les figures 3.5 et 3.6 donnent, pour deux facteurs différents, une appréciation de la distribution reconstruite à partir des données bruitées de l'exemple de référence. Dans cet exemple (distribution discontinue), le choix de facteurs de forme petits ( $f_x = 1$  ;  $f_y = 1$ ) est préférable.

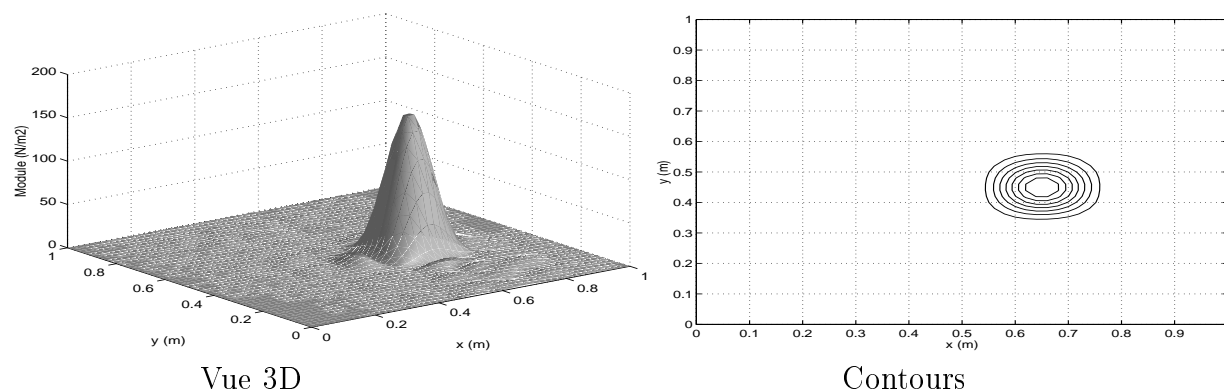


FIG. 3.5 – *Distribution de force reconstruite après filtrage optimisé ( $f_x = 1$  ;  $f_y = 1$ ), sur la plaque de référence, à partir des données bruitées.*

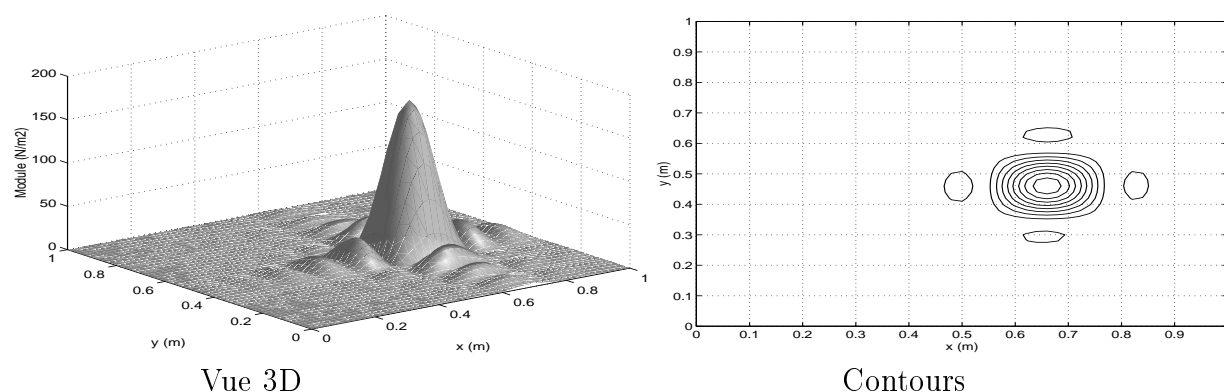


FIG. 3.6 – *Distribution de force reconstruite après filtrage optimisé ( $f_x = 4$  ;  $f_y = 4$ ), sur la plaque de référence, à partir des données bruitées.*

### 3.4.3.4 Directions du filtrage - Multifiltrage

En figures 3.5 et 3.6, et surtout pour un facteur élevé, on observe les oscillations du phénomène de Gibbs dans les directions  $x$  et  $y$ , c'est-à-dire dans les directions du filtrage.

Au regard de la transformée de Fourier bidimensionnelle spatiale de la distribution de force bruitée en figure 3.7, on s'aperçoit que le bruit associé à un maillage cartésien se situe à l'extérieur d'un losange. Pour ce type de maillage, il paraît préférable d'utiliser les directions diagonales pour ajuster au mieux la fonction de transfert du filtre. L'expression de la réponse du filtre idéal correspondant s'écrit :

$$h(x,y) = \frac{1}{\pi^2(x+y)(x-y)} \sin\left(\frac{k_c}{\sqrt{2}}(x+y)\right) \sin\left(\frac{k_c}{\sqrt{2}}(x-y)\right) \quad (3.18)$$

La division de  $k_c$  par  $\sqrt{2}$  est réalisé pour obtenir une coupure à  $k_c$  dans les directions  $x$  et  $y$ .

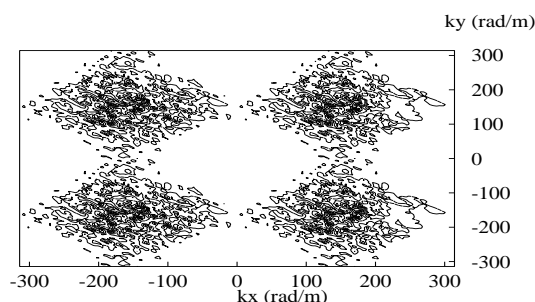


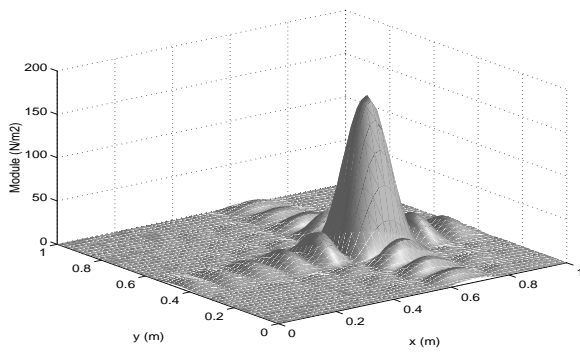
FIG. 3.7 – *Transformée de Fourier bidimensionnelle spatiale de la distribution de force bruitée, illustrée sous forme de contours. (La distribution est celle de la figure 3.2).*

La comparaison des effets des filtre idéaux "carré" et "losange" est mise en évidence en figure 3.8. Le filtre losange n'apporte pas vraiment une amélioration sur la régularisation. Les oscillations causées par le phénomène de Gibbs résident et se situent sur les axes du filtrage. Par contre, l'aspect bidimensionnel du problème présente l'intérêt de pouvoir orienter ces oscillations dans différentes directions. Pour les réduire, nous proposons d'utiliser plusieurs résultats obtenus par des filtres différents, et d'en faire une moyenne géométrique. La figure 3.9 montre la moyenne obtenue, à partir des deux filtres utilisés ci-dessus :

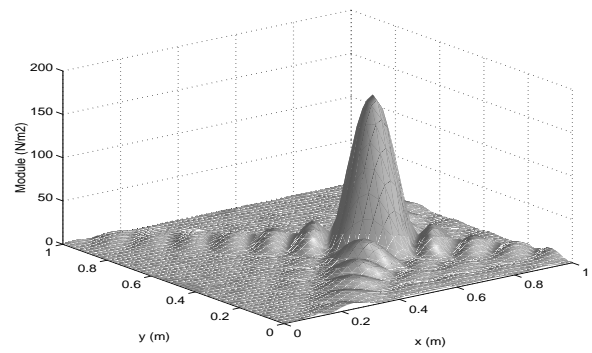
$$F^{filtré}(x,y) = \sqrt{F^{carré}(x,y).F^{losange}(x,y)} \quad (3.19)$$

où  $F^{carré}(x,y)$  et  $F^{losange}(x,y)$  sont les distributions obtenue après filtrage "carré" et "losange".

Cette procédure est aussi une possibilité d'amélioration. Elle permet de réduire le phénomène de Gibbs en jouant sur plusieurs filtres géométriquement différents. La régularisation est évidemment meilleure avec l'utilisation de deux filtres à réponse finie (cf figure 3.10).



Filtre carré



Filtre losange

FIG. 3.8 – Distributions de forces obtenus par les filtres idéaux "carré" et "losange".  
(même exemple que la figure 3.2).

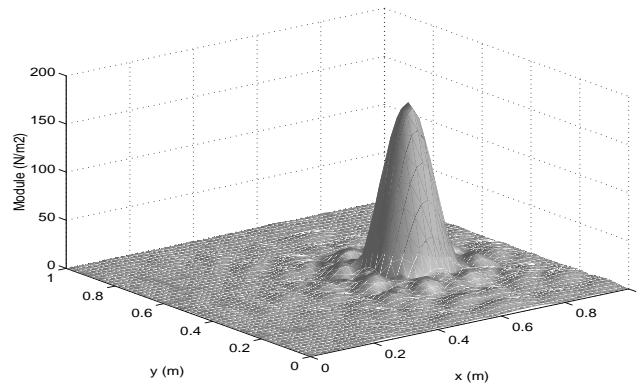


FIG. 3.9 – Moyenne géométrique des résultats obtenus  
après filtrages idéaux "carré" et "losange".

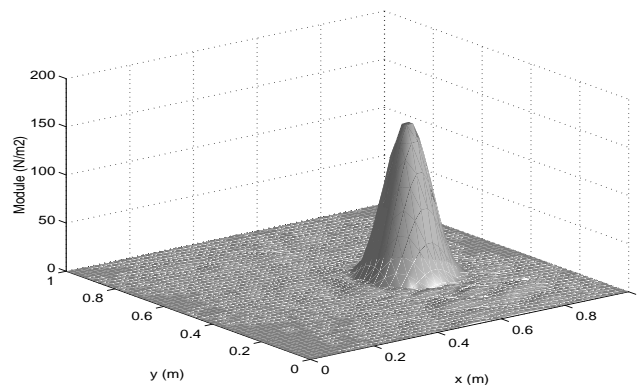


FIG. 3.10 – Moyenne géométrique des résultats obtenus  
après filtrages "carré" et "losange" munis de réponses finies.  
(Les facteurs de forme sont fixés à 1).

### 3.4.4 Domaine de validité

La méthode locale étendue aux plaques peut s'appliquer à partir de la connaissance d'une partie du champ de déplacement, définissant la fenêtre d'étude. Ses dimensions  $L_{fx}$  et  $L_{fy}$  doivent être assez grandes pour pouvoir appliquer la fenêtre définie au paragraphe 3.4.2 :

$$\begin{cases} L_{fx} \geq \alpha + 4\Delta_x \\ L_{fy} \geq \alpha + 4\Delta_y \end{cases} \quad (3.20)$$

Par ailleurs, nous avons vu, pour le cas monodimensionnel, que l'égalité  $\alpha = \lambda_c$  était un bon compromis. Etant donné que les nombres d'onde de coupure selon les axes orthogonaux sont considérés égaux, les dimensions de la fenêtre d'étude doivent vérifier :

$$\begin{cases} L_{fx} \geq \frac{4\pi}{k_c} + 4\Delta_x \\ L_{fy} \geq \frac{4\pi}{k_c} + 4\Delta_y \end{cases} \quad (3.21)$$

Compte tenu des lois qui régissent le nombre d'onde de coupure optimum ( $k_{opt} = ak$ ), nous pouvons exprimer la relation entre la fréquence et les dimensions de la fenêtre, et de déterminer la fréquence minimum par :

$$f_{mini} = \frac{8\pi}{a^2 \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}} L_{mini}^2} \quad (3.22)$$

où  $L_{mini} = \frac{1}{2}[(L_{fx} + L_{fy} - 4\Delta_x - 4\Delta_y) - |L_{fx} - L_{fy} - 4\Delta_x + 4\Delta_y|]$ .

Par ailleurs, l'échantillonnage du champ de déplacement doit être réalisé de façon à ce que le plus petit nombre d'onde de Shannon soit supérieur au nombre d'onde de coupure optimum :

$$k_{opt} \leq \frac{\pi}{\Delta_{maxi}} \quad (3.23)$$

avec  $\Delta_{maxi} = \frac{1}{2}[(\Delta_x + \Delta_y) - |\Delta_x - \Delta_y|]$ .

Cette condition fixe la fréquence maximum d'étude :

$$f_{maxi} = \frac{\pi}{2a^2 \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}} \Delta_{maxi}^2} \quad (3.24)$$

## 3.5 Exemples - Applications

Cette section a pour but de montrer l'application de la méthode locale d'identification des efforts, à différents cas représentatifs. Les trois exemples proposés sont issus de simulations numériques dont on rappellera le principe de calcul. Les champs de déplacement ont été bruités, en considérant que l'on a 1 % d'erreur de mesure (1 % en module et 0.57 degrés en phase).

### 3.5.1 Plaque excitée par une force ponctuelle et couplée à un amortisseur et un ressort

L'objectif est de retrouver les trois efforts ponctuels appliqués à la plaque, qui sont de natures différentes : La première est l'effort extérieur appliqué à la plaque alors que les

deux autres résultent d'actions de couplage avec des éléments mécaniques. Il faut aussi distinguer ces deux derniers efforts car l'amortisseur introduit une intensité vibratoire due à la dissipation dans l'amortisseur, alors que l'intensité est nulle dans le cas du ressort. La plaque est identique au cas de référence. Elle est excitée par un effort  $F = 1N$  au point d'abscisses  $x_F = 0.3 m$  et  $y_F = 0.6 m$ . L'amortisseur et le ressort sont fixés respectivement en  $x_a = 0.6 m$  et  $y_a = 0.4 m$ ;  $x_r = 0.7 m$  et  $y_r = 0.7 m$ .

Le calcul direct est réalisé par la méthode modale. Le déplacement est décomposé dans la base des modes propres de la plaque découplée :

$$w_{i,j} = \sum_{n=1}^{2(M_x-1)} \sum_{m=1}^{2(M_y-1)} a_{nm} \sin \frac{n\pi}{L_x}(i\Delta_x) \sin \frac{m\pi}{L_y}(j\Delta_y) \quad (3.25)$$

Les amplitudes modales  $a_{nm}$  sont déterminées par l'inversion du système linéaire 3.26, représentatif de l'équation du mouvement de la plaque et des éléments mécaniques couplés, projetée dans cette base :

$$\begin{aligned} a_{nm} [k_{nm}^4 - k^4] D \frac{L_x L_y}{4} \\ + \sum_{p=1}^{2(M_x-1)} \sum_{q=1}^{2(M_y-1)} a_{pq} [K_a \sin \frac{n\pi}{L_x} x_a \sin \frac{m\pi}{L_y} y_a \sin \frac{p\pi}{L_x} x_a \sin \frac{q\pi}{L_y} y_a \\ + K_r \sin \frac{n\pi}{L_x} x_r \sin \frac{m\pi}{L_y} y_r \sin \frac{p\pi}{L_x} x_r \sin \frac{q\pi}{L_y} y_r] = F \sin \frac{n\pi}{L_x} x_F \sin \frac{m\pi}{L_y} y_F \end{aligned} \quad (3.26)$$

avec  $K_a = 3000j N/m$  et  $K_r = 1.10^8 N/m$ .

La figure 3.11 représente la distribution de force obtenue par la résolution du problème inverse avec le multifiltrage à réponses finies, à partir de ce champ de déplacement, que l'on a bruité. Les trois efforts sont bien localisés. L'identification de la valeur de chaque effort peut être réalisé par intégration spatiale de chaque pic. Les caractéristiques du ressort et de l'amortisseur peuvent être déterminés par le calcul des impédances mécaniques (rapport force sur vitesse) aux points de couplage.

Bien sur, cette analyse peut être menée en fonction de la fréquence, permettant ainsi de visualiser l'effet des éléments mécaniques couplés à la plaque. La méthode d'identification des efforts est donc adaptée au diagnostic des transmissions dans les assemblages, aussi bien qu'à la détermination des sources dominantes en cas de multiexcitation.

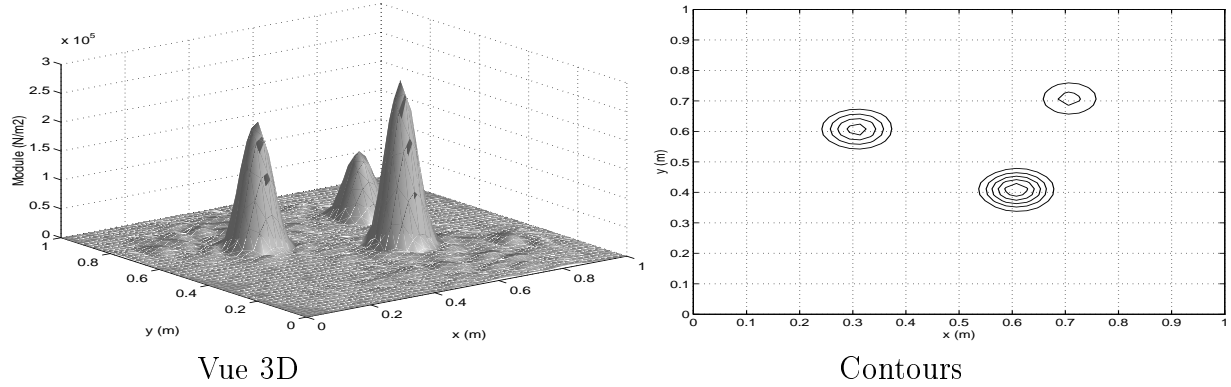


FIG. 3.11 – *Distribution de force reconstruite sur une plaque couplée à un amortisseur et un ressort (à 110 Hz).*

*L'excitation est appliquée en  $x_F = 0.3\text{ m}$  et  $y_F = 0.6\text{ m}$ ,  
le ressort est fixé en  $x_r = 0.7\text{ m}$  et  $y_r = 0.7\text{ m}$ ,  
l'amortisseur est fixé en  $x_a = 0.6\text{ m}$  et  $y_a = 0.4\text{ m}$ .*

### 3.5.2 Membrane excitée par une onde plane

Les objectifs sont d'une part de montrer l'application de notre méthode sur une membrane et d'autre part de mettre en évidence la possibilité de déterminer une distribution de force répartie.

Dans le cas des membranes, l'équation du mouvement est du second ordre. Le déplacement transverse est régi par :

$$T(1 + j\eta)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \rho h \omega^2 w = -F(x, y, \omega) \quad (3.27)$$

où  $T$  est la tension statique dans la membrane.

Dans l'exemple considéré ici, la membrane est immobile à ses extrémités. Elle est excitée par une onde plane acoustique harmonique d'incidence  $\theta = 45^\circ$ :

$$P(x, y, \omega) = P_0 e^{+jk_{ac}x \cos \theta} \quad (3.28)$$

avec  $P_0$  l'amplitude de l'onde :  $P_0 = 0.631\text{ N/m}^2$  (90dB) ;  $k_{ac}$  le nombre d'onde acoustique :  $k_{ac} = \frac{\omega}{c}$  où  $c = 340\text{ m/s}$ .

Les effets de rayonnement acoustique de la membrane sont négligés, ce qui est licite en première approximation. La pression pariétale 3.28 est donc caractéristique de la pression bloquée, c'est-à-dire membrane immobile.

Le calcul direct se déduit de la décomposition modale de l'équation du mouvement de la membrane 3.27 :



$$w_{i,j} = \sum_{n=1}^{2(M_x-1)} \sum_{m=1}^{2(M_y-1)} \frac{-4P_0 n [1 - (-1)^m] [e^{jk_{ac}L_x \cos \theta} (-1)^n - 1]}{m [k_{ac}^2 \cos^2 \theta - \frac{n^2 \pi^2}{L_x^2}] [k_{nm}^2 - k^2] T(1 + j\eta) L_x^2} \sin \frac{n\pi}{L_x} (i\Delta_x) \sin \frac{m\pi}{L_y} (j\Delta_y) \quad (3.29)$$

Le maillage est réalisé avec  $M_x = M_y = 26$  *points*.

La méthode R.I.F.F. appliquée aux membranes utilise les schémas aux différences finies centrés correspondant aux dérivées secondes. L'équation du mouvement discrétisée est donc :

$$T(1 + j\eta)(\delta_{i,j}^{2x} + \delta_{i,j}^{2y}) - \rho h \omega^2 w_{i,j} = -F_{i,j} \quad (3.30)$$

où  $\delta_{i,j}^{2x}$  et  $\delta_{i,j}^{2y}$  sont les schémas exprimés en 3.6 et 3.7.

La reconstruction de la distribution de force sur la membrane en utilisant le schéma 3.30 muni du fenêtrage 3.12 et du multifiltrage à réponses finies est illustrée en figure 3.12, où les données du déplacement 3.29 ont été bruitées avec 1 % d'erreur (1 % en module et 0.57 ° en phase). On constate bien un module constant, mis à part aux limites où on observe une décroissance due à la nécessité d'utiliser le fenêtrage global. En phase, on observe une croissance linéaire selon  $x$ , ce qui indique la propagation de l'onde excitatrice sur cet axe. Sa pente correspond à la valeur du nombre d'onde acoustique projeté dans le plan de la structure ( $k_{ac} \cos \theta$ ).

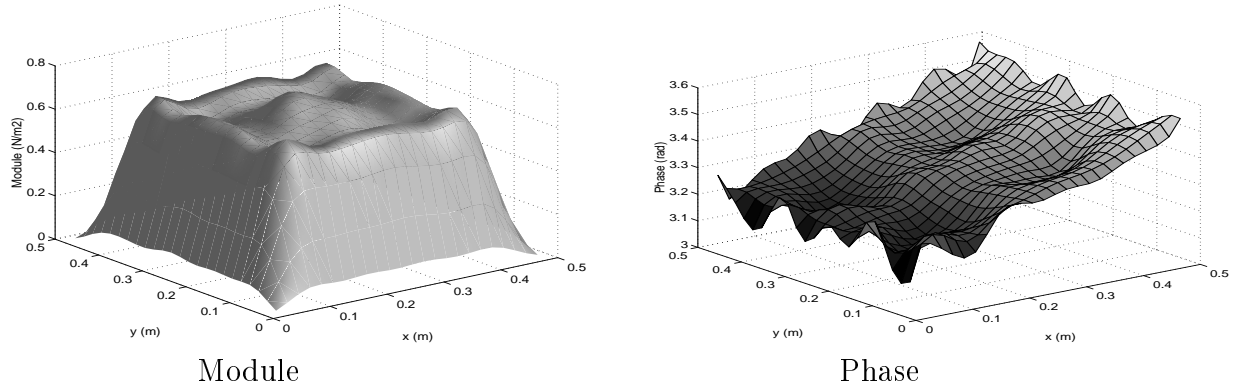


FIG. 3.12 – Distributions de forces reconstruite sur une membrane excitée à 55 Hz par une onde plane acoustique d'incidence  $\theta = 45^\circ$ .

### 3.5.3 Plaque excitée par une force ponctuelle et couplée à un fluide lourd

La plaque considérée est de même caractéristique que celle de l'exemple de référence. Elle est bafflée et sépare un milieu composé d'un fluide lourd (eau) à un fluide léger, dont nous négligerons l'effet de couplage avec la plaque.

L'excitation est une force ponctuelle  $F = 1$  N au point d'abscisses  $x_F = 0.7$  m et  $y_F = 0.6$  m.

Dans ce cas, l'équation du mouvement de la plaque comprend un terme supplémentaire  $P(x,y,\omega)$  au second membre, correspondant à la pression acoustique pariétale :

$$\frac{E(1+j\eta)h^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - \rho h \omega^2 w = F(x,y,\omega) + P(x,y,\omega) \quad (3.31)$$

La pression acoustique engendrée par la vibration de la plaque est solution de l'équation d'Helmholtz en demi espace infini :

$$\Delta P(M) + \frac{\omega^2}{c^2} P(M) = 0 \text{ pour } M \in (V) \quad (3.32)$$

avec  $(V)$  le volume du fluide lourd,  $\Delta$  l'opérateur Laplacien,  $c$  la célérité du son dans le fluide.

Les conditions aux limites acoustiques sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial z}(Q) = \rho_0 \omega^2 w(Q) \text{ pour } Q \in (S_p) \\ \frac{\partial P}{\partial z}(Q) = 0 \text{ pour } Q \in (S_b) \\ \text{Condition de Sommerfeld à l'infini} \end{cases} \quad (3.33)$$

avec  $S_p$  la surface de la plaque et  $S_b$  celle du baffle.

Le calcul direct est réalisé par un logiciel du laboratoire (VITAFOR). La méthode est basée sur la résolution de l'équation d'Helmholtz 3.32 par transformée de Fourier bidimensionnelle spatiale et sur la projection de l'équation du mouvement 3.31 dans la base des modes propres de la plaque "in vacuo" :

$$a_{nm} [k_{nm}^4 - k^4] D \frac{L_x L_y}{4} + j\omega \frac{L_x L_y}{4} \sum_{p=1}^{2(M_x-1)} \sum_{q=1}^{2(M_y-1)} Z_{pqnm} a_{pq} = F \sin \frac{n\pi}{L_x} x_F \sin \frac{m\pi}{L_y} y_F \quad (3.34)$$

avec  $Z_{pqnm}$  les impédances intermodales de rayonnement complexes, qui proviennent de la projection de la pression pariétale  $P(x,y,\omega)$  dans la base modale. Leurs expressions viennent de la résolution par la transformée de Fourier d'espace :

$$Z_{pqnm} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho \omega^2 \hat{\phi}_{nm}(k_x, k_y) \hat{\phi}_{pq}^*(k_x, k_y)}{4\pi \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - (k_x^2 + k_y^2)}} dk_x dk_y \quad (3.35)$$

où  $\hat{\phi}_{nm}(k_x, k_y)$  est la transformée de Fourier d'espace de la déformée propre  $\phi_{nm}(x,y) = \sin(\frac{n\pi}{L_x}x) \sin(\frac{m\pi}{L_y}y)$ .

On trouvera en [44], [26], [27] et [37], une bibliographie des pionniers ayant développé ces méthodes modales et le calcul des impédance de rayonnement, et plus récemment en [4], [23], des publications où l'exploitation numérique des modélisations est plus poussée.

Les déplacements  $w_{i,j}$  sont ainsi déterminés à partir des valeurs des amplitudes modales, calculées par inversion du système 3.34.

La méthode R.I.F.F. appliquée à ce champ de déplacement donne le résultat illustré en figure 3.13, où on a utilisé les déplacements bruités (1 % d'erreur) et où on régularise

avec le multifiltrage à réponses finies. L'effort mécanique est parfaitement localisé, et nous observons en plus, une distribution répartie sur la plaque. Cette distribution résulte du couplage fluide-structure qui, dans ce cas, n'est pas négligeable. Elle correspond à la pression acoustique pariétale du fluide lourd, créée par la vibration de la plaque et qui interagit avec cette dernière. On pourra comparer cette distribution avec celle de la figure 3.14, identifiée par la méthode modale :

$$P(x,y,\omega) = -j\omega \frac{L_x L_y}{4} \sum_{n=1}^{M_x-1} \sum_{m=1}^{M_y-1} \sum_{p=1}^{M_x-1} \sum_{q=1}^{M_y-1} Z_{pqnm} a_{pq} \sin \frac{n\pi}{L_x} x \sin \frac{m\pi}{L_y} y \quad (3.36)$$

La ressemblance est frappante, montrant que la méthode ouvre des possibilités pour une mesure indirecte des interactions fluide-structure.

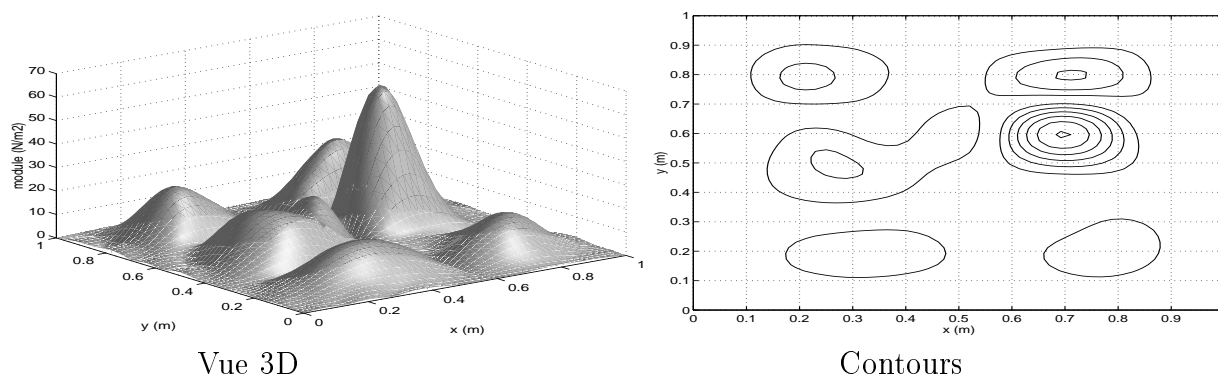


FIG. 3.13 – *Distribution de force reconstruite sur une plaque couplée à un fluide lourd (eau).  
L'excitation mécanique est située en  $x_F = 0.7\text{ m}$  et  $y_F = 0.6\text{ m}$ .*

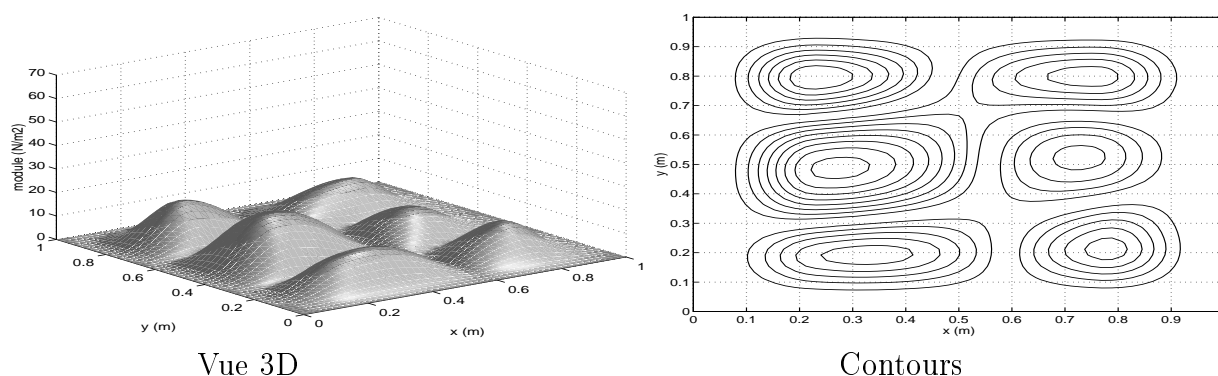


FIG. 3.14 – *Pression acoustique pariétale calculée par la méthode modale.  
(Pour comparaison avec la figure 3.13).*

## 3.6 Conclusion

L'extension de la méthode locale aux structures bidimensionnelles ne pose pas de problème particulier. Seule l'opération de filtrage demande réflexion. Par son aspect bidimensionnel, le filtre régularisant doit être défini par deux nombres d'onde de coupure. Nous avons vu comment les choisir pour un champ de déplacement discrétisé par un maillage cartésien. Dans ce cas, les directions du filtrage peuvent être prises quelconques. Le phénomène vibratoire de *coïncidence fréquentielle* n'indique aucune relation entre les nombres d'onde de coupure optimum, associés aux différentes directions. Les deux nombres d'onde de coupure sont donc pris égaux et suivent les mêmes lois que dans le cas des poutres.

En fait, l'aspect bidimensionnel apporte deux avantages. D'une part, le recouvrement modal est plus élevé, ce qui permet de reconstruire la distribution de force sur une résonance, car le mode excité n'est plus complètement isolé. D'autre part, nous avons pu définir une deuxième amélioration possible, basée sur un moyennage géométrique, entre les résultats que l'on obtient avec des filtres de directions différentes. Cette optimisation permet de réduire les effets néfastes induits par le phénomène de Gibbs.

Les exemples développés donnent des résultats excellents. Ils fournissent une idée des applications que l'on peut obtenir avec une telle méthode : localisation de forces mécaniques ponctuelles, identification de sources réparties (excitation par onde), identification d'efforts de couplage mécaniques, détermination des interactions fluide-structure. On peut aussi imaginer d'autres applications comme l'identification de défauts, comme un moyen de surveillance et de diagnostic, ou encore comme un outil original de recalage de modèle.



# Chapitre 4

## Identification des conditions aux limites

### 4.1 Buts du chapitre

Dans la modélisation des problèmes vibratoires, les conditions aux limites sont très souvent les éléments les moins connus, car ils résultent de l'interaction avec le milieu extérieur, non modélisé. On utilise souvent une approche simplificatrice reposant sur des conditions idéales de blocage. Cette vue est cependant insuffisante dans de nombreux cas où, par exemple, le côté absorbant des limites est important. On voit donc tout l'intérêt d'identifier les conditions aux limites, en vue d'établir un modèle pour l'étude d'une sous-structure. Jusque-là, la méthode exposée est basée sur le calcul du second membre de l'équation du mouvement. La localisation des efforts est possible, mais se restreint au domaine intérieur de la structure. Aux limites, les équations à considérer sont celles qui relient les différents efforts internes aux quantités cinématiques (conditions aux limites). Pour cela, nous revenons aux cas des poutres, où nous cherchons à identifier, aux limites, l'effort tranchant, le moment fléchissant et la pente, en fonction du champ de déplacement, supposé connu par la mesure. Ces quantités sont directement liées aux différentes dérivées spatiales du mouvement. Dans un premier temps, nous exprimons les schémas aux différences finies décentrés, qui permettent le calcul de ses dérivées spatiales aux limites. Ensuite, nous étudions le problème associé aux incertitudes de mesure et la possibilité d'utiliser une approche régularisatrice du même type qu'au chapitre 2. Quelques exemples, tirés de simulations numériques, sont présentés, afin de mettre en évidence les limites d'une telle technique. En conclusion, nous verrons dans quels cas, ce type d'approche peut être appliquée et quels sont les extensions que l'on peut envisager.

Ce chapitre constitue en fait une introduction à l'emploi de la méthode R.I.F.F. pour identifier les conditions aux limites. Il faut y voir une ouverture à un approfondissement, plutôt qu'à une approche terminée.

### 4.2 Calculs des dérivées du déplacement

Identifier les conditions aux limites d'une poutre en flexion, c'est connaître, aux extrémités de la structure, le déplacement  $w$ , la pente  $\frac{\partial w}{\partial x}$ , le moment fléchissant  $E(1 + j\eta)I\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ , et l'effort tranchant  $E(1 + j\eta)I\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$ . A partir de la connaissance du champ de déplacement, il s'agit donc de calculer les dérivées spatiales jusqu'au troisième ordre. Comme pour l'identification des efforts, nous proposons de développer des schémas aux différences finies associés à ces dérivées

### 4.2.1 Schémas aux différences finies

Pour pouvoir calculer les dérivées spatiales du déplacement aux limites de la structure, nous développons des schémas décentrés, n'utilisant que les données à gauche ou à droite du point considéré. Les schémas "à droite" sont déterminés à partir de la série de Taylor suivante (cf [14]) :

$$w((i+1)\Delta, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Delta^k}{k!} \frac{\partial^k w}{\partial x^k} \quad (4.1)$$

On pose comme schéma de base :

$$\delta_i = \frac{w((i+1)\Delta, \omega) - w(i\Delta, \omega)}{\Delta} \quad (4.2)$$

et

$$\delta_i^k = \frac{\delta_{i+1}^k - \delta_i^k}{\Delta} \quad (4.3)$$

pour  $k > 1$ .

Ces schémas peuvent alors s'exprimer comme une combinaison des dérivées successives du champ de déplacement :

$$\delta_i = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{\Delta^{l-1}}{l!} \frac{\partial^l w}{\partial x^l} \quad (4.4)$$

$$\delta_i^2 = \sum_{(l_1, l_2) \in \mathbb{N}^{2*}} \frac{\Delta^{l_1-1}}{l_1!} \frac{\Delta^{l_2-1}}{l_2!} \frac{\partial^{(l_1+l_2)} w}{\partial x^{(l_1+l_2)}} \quad (4.5)$$

et, de façon générale :

$$\delta_i^k = \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathbb{N}^{k*}} \left[ \prod_{j=1}^k \frac{\Delta^{l_j-1}}{l_j!} \right] \frac{\partial^{(\sum_{\alpha=1}^k l_\alpha)} w}{\partial x^{(\sum_{\alpha=1}^k l_\alpha)}} \quad (4.6)$$

De 4.4, on peut tirer l'expression de la dérivée première :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \delta_i - \sum_{l=2}^{+\infty} \frac{\Delta^{l-1}}{l!} \frac{\partial^l w}{\partial x^l} \quad (4.7)$$

De même, les dérivées suivantes peuvent s'exprimer par :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \delta_i^2 - \sum_{(l_1, l_2) \in \mathbb{N}^{2*} - (1,1)} \frac{\Delta^{l_1-1}}{l_1!} \frac{\Delta^{l_2-1}}{l_2!} \frac{\partial^{(l_1+l_2)} w}{\partial x^{(l_1+l_2)}} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial^k w}{\partial x^k} = \delta_i^k - \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathbb{N}^{k*} - (1, \dots, 1)} \left[ \prod_{j=1}^k \frac{\Delta^{l_j-1}}{l_j!} \right] \frac{\partial^{(\sum_{\alpha=1}^k l_\alpha)} w}{\partial x^{(\sum_{\alpha=1}^k l_\alpha)}} \quad (4.9)$$

De façon itérative, les dérivées à l'ordre 1, 2 et 3 du champ de déplacement peuvent prendre la forme d'une combinaison linéaire des schémas décentrés ainsi définis :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \delta_i - \frac{\Delta}{2}\delta_i^2 + \frac{\Delta^2}{3}\delta_i^3 - \frac{\Delta^3}{24}\delta_i^4 + \dots \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \delta_i^2 - \Delta\delta_i^3 + \frac{11\Delta^2}{12}\delta_i^4 - \frac{\Delta^3}{4}\delta_i^5 + \dots \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \delta_i^3 - \frac{3\Delta}{2}\delta_i^4 + \frac{21\Delta^2}{12}\delta_i^5 - \frac{34\Delta^3}{24}\delta_i^6 + \dots \quad (4.12)$$

L'ordre de troncature de ces trois dernières séries fixe l'approximation du calcul des dérivées et le nombre de points nécessaires.

Le développement des schémas "à gauche" est rigoureusement identique en posant  $\Delta' = -\Delta$ . Dans la suite, On présente uniquement l'étude de l'identification des conditions à la limite gauche d'une poutre qui utilise le schéma "à droite". L'obtention des conditions à la limite droite est identique en prenant les schémas "à gauche".

## 4.2.2 Etude de la convergence

Le type de schémas définis au paragraphe précédent présente l'inconvénient de ne pas aussi bien converger que ceux utilisés au chapitre 1 (schémas centrés). Nous proposons donc de regarder cette convergence en comparant les résultats obtenus par les différentes troncatures des séries 4.10, 4.11 et 4.12. Pour simplifier les calculs, nous avons choisi de prendre l'exemple de la poutre sur appuis. Dans ce cas, nous pouvons calculer aisément les différentes dérivées dans la base modale :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{n=1}^N \frac{n\pi}{L} a_n(\omega) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^N -\frac{n^2\pi^2}{L^2} a_n(\omega) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (4.14)$$

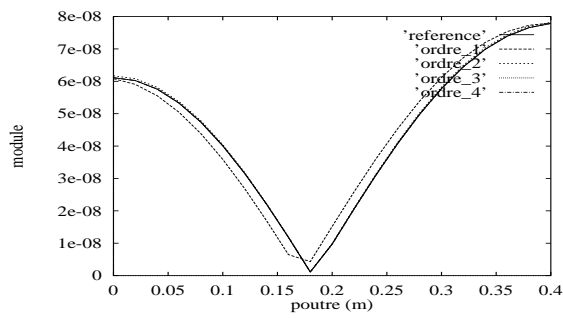
$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \sum_{n=1}^N -\frac{n^3\pi^3}{L^3} a_n(\omega) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (4.15)$$

Ce calcul permet de fournir une référence, à partir du moment où il a été réalisé avec le maximum de modes (critère de Shannon). La figure 4.1 montre ces résultats pour la pente (dérivée première), le moment fléchissant (dérivée seconde), et l'effort tranchant (dérivée troisième).

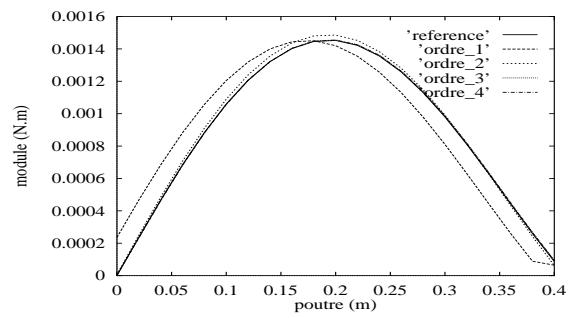
Sur cette figure, on constate, pour chaque dérivée, l'ordre d'approximation à prendre afin de converger correctement. Pour la pente, le moment fléchissant et l'effort tranchant, les courbes d'ordres 3 et 4 sont confondues avec celle de référence. On peut donc prendre comme approximation l'ordre 3, c'est-à-dire que l'on considèrera trois termes dans les séries 4.10, 4.11 et 4.12. Le schéma nécessitant le plus de points est  $\delta_i^5$ . On aura donc besoins de 6 points de mesure.

Bien entendu, ces résultats sont issus d'un exemple. Avec un maillage plus fin, l'écart obtenu avec la solution exacte se réduit. Il ne sera pas forcément nécessaire de tenir compte d'autant de termes. A l'inverse, l'utilisation d'un maillage plus grossier demandera de prendre en compte plus de termes, donc plus de points.

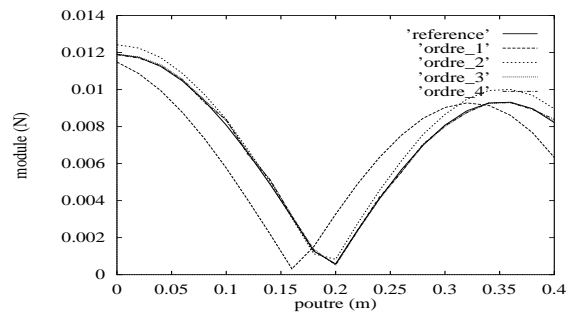




a) Pente



b) Moment fléchissant



c) Effort tranchant

FIG. 4.1 – Convergence des différentes dérivées en fonction des ordres de troncature des schémas aux différences finies décentrés à droite. On représente les résultats obtenus sur un tronçon gauche d'une poutre sur appuis.

### 4.3 Influence des incertitudes de mesure

Comme nous avons pu le remarquer au chapitre 2, le calcul des dérivées du déplacement pose problème lorsque les données sont entâchées d'une incertitude. En figure 4.2, on constate exactement le même phénomène si on applique le bruitage 2.1 aux déplacements. C'est en particulier le moment fléchissant (dérivée seconde) et l'effort tranchant (dérivée troisième) qui présentent le plus d'instabilité.

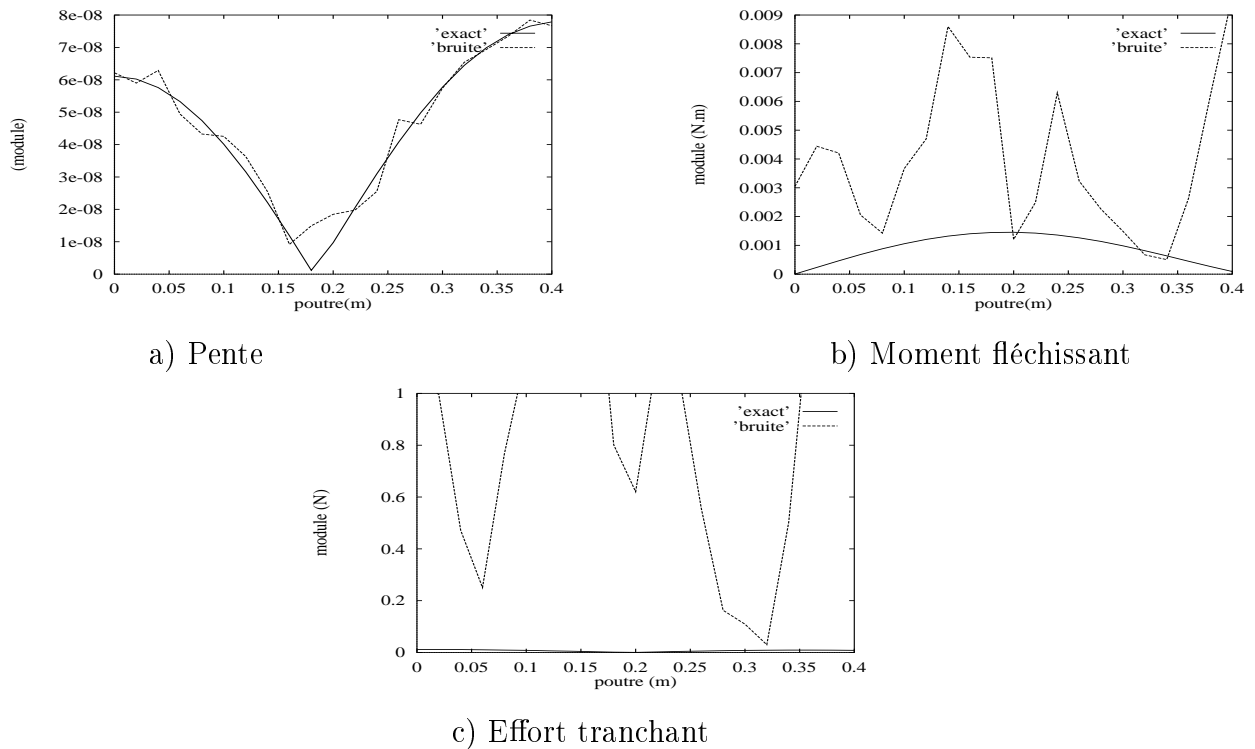


FIG. 4.2 – Distributions obtenues sur un tronçon gauche d'une poutre sur appuis, à partir d'un champ de déplacement exact et bruité (1 % d'erreur).

On ne peut donc pas appliquer directement cette technique. Les dérivées seconde et troisième introduisent une amplification trop importante du bruit. Nous proposons donc de faire le même cheminement qu'au chapitre 2, c'est-à-dire, d'utiliser un moyen de régularisation, basé sur le calcul d'une solution approchée (lissée) qui rend la méthode stable.

## 4.4 Régularisation

L'idée est d'utiliser un filtre passe-bas sur les distributions de pente, de moment fléchissant, et d'effort tranchant. Le problème est qu'à la limite de la structure, chaque distribution n'est définie qu'à gauche ou à droite. Par conséquent, il y a une discontinuité inévitable qui introduit, après filtrage, une erreur non négligeable associée au phénomène de Gibbs. Pour limiter ce phénomène, nous choisissons d'utiliser le filtre à réponse finie défini au chapitre 2, dont la réponse, pour un facteur de forme  $f = 1$ , a pour expression :

$$h(x) = \frac{1}{2\pi x} \left(1 + \cos \frac{k_c x}{2}\right) \sin(k_c x) \quad (4.16)$$

avec  $k_c$  le nombre d'onde de coupure défini de la même façon qu'au chapitre 2.

La figure 4.3 montre l'application de ce filtrage sur les distributions exactes et bruitées de l'exemple précédent (figure 4.2).

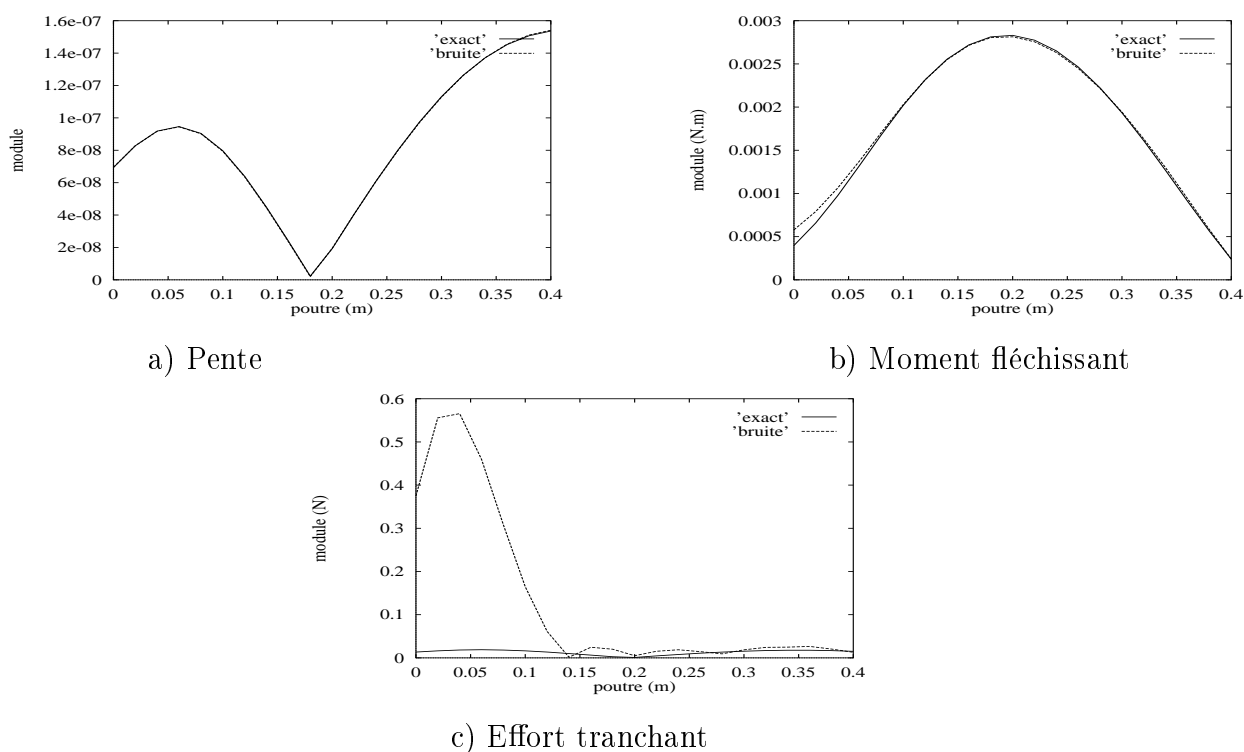


FIG. 4.3 – Distributions obtenues sur un tronçon gauche d'une poutre sur appuis, après filtrage à réponse finie, à partir d'un champ de déplacement exact et bruité (1 % d'erreur).

La longueur d'onde de coupure est égale à  $\lambda_c = 0.13$  m.

Comme on peut le constater, l'effet du filtrage ne dégrade pas trop les distributions exactes. Les discontinuités sont bien conservées. Par contre, lorsque les distributions sont issues de données bruitées, les discontinuités associées aux dérivées d'ordres élevées (effort tranchant dans notre exemple) sont trop importantes. Le filtrage ne permet pas d'obtenir une valeur correcte à la limite. Le problème devient régulier pour  $x > \lambda_c$ , c'est-à-dire lorsque le filtre ne "voit" plus la discontinuité. Il est donc possible de connaître la valeur des dérivées du déplacement au voisinage de la limite, et donc, d'accéder aux conditions à

la limite apparente à la distance  $\lambda_c$  de l'extrémité de la poutre. Dans le cas où la structure n'est pas excitée dans ce voisinage, les distributions de pente, de moment fléchissant, et d'effort tranchant sont continues et on peut penser que la vision des conditions aux limites à la distance  $\lambda_c$  sont alors représentatives de celles des extrémités. Il faut noter que la distance  $\lambda_c$  diminue avec la fréquence (comme nous l'avons montré au chapitre 2), ce qui est en cohérence avec la physique du problème ; plus la fréquence est élevée, plus l'observation des limites doit être effectuée à proximité de l'extrémité.

## 4.5 Identification

### 4.5.1 Principe

Dans cette section, nous allons montrer, pour des conditions aux limites connues à priori, comment fonctionne la technique d'identification que nous proposons, et en particulier déterminer si l'observation à la distance  $\lambda_c$  de l'extrémité est suffisante pour identifier les conditions aux limites.

Pour mettre en évidence à quel type de conditions aux limites est soumise la poutre, nous proposons d'exprimer les relations qui existent entre les quatre quantités : le déplacement, la pente, le moment fléchissant et l'effort tranchant. Le modèle que nous avons choisi consiste à exprimer les deux impédances mécaniques suivantes :

$$I_T = \frac{\text{effort tranchant}}{\text{déplacement}} = E(1 + j\eta)I \frac{\partial^3 w / \partial x^3}{w} \quad (4.17)$$

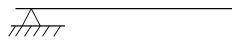
$$I_R = \frac{\text{moment fléchissant}}{\text{pente}} = E(1 + j\eta)I \frac{\partial^2 w / \partial x^2}{\partial w / \partial x} \quad (4.18)$$

$I_T$  constitue l'impédance de translation. Sa partie réelle correspond à une raideur, sa partie imaginaire à un amortissement.

$I_R$  constitue l'impédance de rotation. Sa partie réelle correspond à une raideur en rotation, sa partie imaginaire à un amortissement.

Les conditions extrêmes, utilisées comme conditions aux limites standards, sont les suivantes :

$$\text{appuis} \iff I_T \rightarrow \infty, I_R \rightarrow 0$$



$$\text{encastrement} \iff I_T \rightarrow \infty, I_R \rightarrow \infty$$



guidage  $\iff I_T \rightarrow 0, I_R \rightarrow \infty$



libre  $\iff I_T \rightarrow 0, I_R \rightarrow 0$

## 4.5.2 Exemples

Dans cette section, on présente les calculs des impédances mécaniques de translation et de rotation sur un tronçon gauche d'une poutre, pour divers types de conditions aux limites. La poutre considérée est de longueur  $L = 1\text{ m}$ , de section carrée et de largeur  $l = 2\text{ cm}$ , en acier ( $E = 2 \cdot 10^{11}\text{ N/m}^2$ ,  $\rho = 7800\text{ kg/m}^3$ , facteur de perte  $\eta = 4 \cdot 10^{-3}$ ). Elle est excitée par une force ponctuelle  $F = 1\text{ N}$  en  $x_F = 0.6\text{ m}$ .

Les données du déplacement sont issues d'un calcul direct par décomposition en ondes forcées<sup>1</sup>. Les solutions à gauche  $w_G(x)$ , et à droite  $w_D(x)$ , de l'excitation en  $x_F$ , sont formées par :

$$\begin{cases} w_G(x) = G_1 e^{jkx} + G_2 e^{-jkx} + G_3 e^{kx} + G_4 e^{-kx} \\ w_D(x) = D_1 e^{jkx} + D_2 e^{-jkx} + D_3 e^{kx} + D_4 e^{-kx} \end{cases} \quad (4.19)$$

où  $k$  est le nombre d'onde naturel :

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI}} \sqrt{\omega} \quad (4.20)$$

Le calcul des 8 constantes  $G_i$  et  $D_i$  est réalisé en résolvant le système de 8 équations issus des conditions aux limites, des conditions de continuité du déplacement et du moment fléchissant et de discontinuité de l'effort tranchant en  $x_F$ . Comme pour les études précédentes, nous utilisons ce déplacement comme données exactes, que nous bruitons ensuite avec l'expression 2.1, afin d'étudier l'influence des incertitudes de mesure. Dans la suite, nous utilisons une discrétisation spatiale composée de 51 points le long de la poutre. L'écart entre deux points consécutifs est donc  $0.02\text{ m}$ .

### 4.5.2.1 Poutre sur ressorts de translation

La poutre est montée sur des ressorts de translation à ses extrémités. Dans ce cas, le calcul direct se déduit de 4.19 et des conditions suivantes :

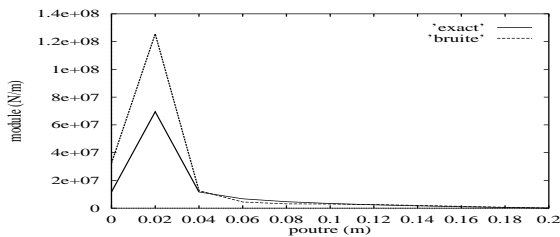
<sup>1</sup>. tiré du cours *Vibrations en milieux continus* de J.L. Guyader à l'INSA de Lyon

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w_G}{\partial x^2} = 0 \text{ en } x = 0 \\ E(1 + j\eta)I \frac{\partial^3 w_G}{\partial x^3} = K w_G \text{ en } x = 0 \\ \frac{\partial^2 w_D}{\partial x^2} = 0 \text{ en } x = L \\ E(1 + j\eta)I \frac{\partial^3 w_D}{\partial x^3} = K w_D \text{ en } x = L \\ w_G = w_D \text{ en } x = x_F \\ \frac{\partial^2 w_G}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_D}{\partial x^2} \text{ en } x = x_F \\ E(1 + j\eta)I \frac{\partial^3 w_D}{\partial x^3} - E(1 + j\eta)I \frac{\partial^3 w_G}{\partial x^3} = F \text{ en } x = x_F \end{array} \right. \quad (4.21)$$

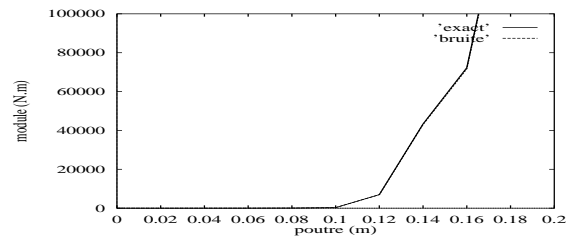
où  $K$  est la raideur de translation des deux ressorts, que nous avons fixé à  $K = 10^{+7} \text{ N/m}$ .

On présente en figure 4.4, les impédances de translation et de rotation calculées à partir des données exactes et bruitées, sur le tronçon gauche de la poutre ( $0 \leq x \leq 0.2$ ). Les dérivées nécessaires au calcul de chaque impédance ont été lissées avec l'application du filtre de réponse 4.16. Les courbes sont représentatives des impédances de translation et de rotation obtenues en chaque point du maillage. Elle peuvent prendre une large gamme de valeurs. Le pic observé est représentatif d'un noeud de vibration en  $x = 0.02 \text{ m}$ . Par ailleurs, la comparaison des courbes obtenues à partir des champs de déplacement exact et bruité aboutit à la constatation que, dans cet exemple, l'impédance de rotation est bien régularisée sur tout le tronçon, alors que l'impédance de translation n'est valable que pour  $x > 0.1 \text{ m}$ . Cela provient du fait que l'effort tranchant n'est pas régularisé pour  $0 \leq x \leq \lambda_c$  (constation faite au paragraphe 4.4). Il faut aussi remarquer que la valeur de l'impédance de translation exacte, obtenue pour  $x = 0.13 \text{ m}$  ne peut être comparée à la valeur théorique à la limite ( $K = 10^{+7} \text{ N/m}$ ), car la courbe évolue beaucoup dans cette partie de la poutre.

Cet exemple montre qu'il est difficile de déterminer la valeur de l'impédance de translation (raideur du ressort). Par contre, la nullité de l'impédance de rotation qui ne dépend pas de l'effort tranchant, a été obtenue. Le paragraphe suivant traite l'exemple d'une poutre sur appuis et couplée à ses extrémités avec des ressorts de rotation. Le but est de voir si il est possible de déterminer de façon précise la valeur de la raideur de ce type de ressort.



a) Impédance de translation



b) Impédance de rotation

FIG. 4.4 – Impédances calculées sur le tronçon gauche d'une poutre sur ressorts de translation.

La longueur d'onde de coupure est égale à  $\lambda_c = 0.13 \text{ m}$ .

#### 4.5.2.2 Poutre sur ressorts de rotation

La poutre est sur appuis (déplacements nuls aux extrémités) et couplée à des ressorts de rotation. Dans ce cas, le calcul direct se déduit de 4.19 et des conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_G = 0 \text{ en } x = 0 \\ E(1 + j\eta)I \frac{\partial^2 w_G}{\partial x^2} = C \frac{\partial w_G}{\partial x} \text{ en } x = 0 \\ w_D = 0 \text{ en } x = L \\ E(1 + j\eta)I \frac{\partial^2 w_D}{\partial x^2} = C \frac{\partial w_D}{\partial x} \text{ en } x = L \\ w_G = w_D \text{ en } x = x_F \\ \frac{\partial^2 w_G}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_D}{\partial x^2} \text{ en } x = x_F \\ E(1 + j\eta)I \frac{\partial^3 w_D}{\partial x^3} - E(1 + j\eta)I \frac{\partial^3 w_G}{\partial x^3} = F \text{ en } x = x_F \end{array} \right. \quad (4.22)$$

où  $C$  est la raideur de rotation des deux ressorts, que nous avons fixé à  $C = 1000 N.m$ .

On présente en figure 4.5, les impédances de translation et de rotation calculées à partir des données exactes et bruitées, sur un tronçon voisin de la limite gauche. A la limite, on constate que les impédances de translation exacte et bruitée sont très grandes ( $I_T > 9.10^{+22} N/m$ ). Même si il existe un écart important entre l'impédance exacte et l'impédance bruitée, les deux valeurs sont à rapprocher de la valeur théorique infinie. On retrouve donc bien la condition de nullité du déplacement. Dans ce cas, l'erreur sur l'effort tranchant (cf paragraphe 4.4) n'est pas gênante, puisque  $I_T$  ne dépend plus directement de sa valeur ( $I_T \rightarrow +\infty$ ). Comme précédemment, on observe aussi que l'impédance de rotation est bien régularisée par le filtrage (les courbes exacte et bruitée sont presque confondues). La valeur obtenue à la limite est d'environ  $5000 N.m$ . Elle ne correspond pas à celle de la raideur du ressort de rotation ( $C = 1000 N.m$ ) placé en  $x = 0$ . Les erreurs apportées par le filtrage, sur la pente et sur le moment fléchissant, ne permettent pas d'obtenir une valeur d'impédance de rotation précise. Le résultat obtenu donne un ordre de grandeur. Nous proposons de voir, dans la suite, les valeurs que l'on obtient, pour les quatre conditions extrêmes que nous avons citées en 4.5.1.

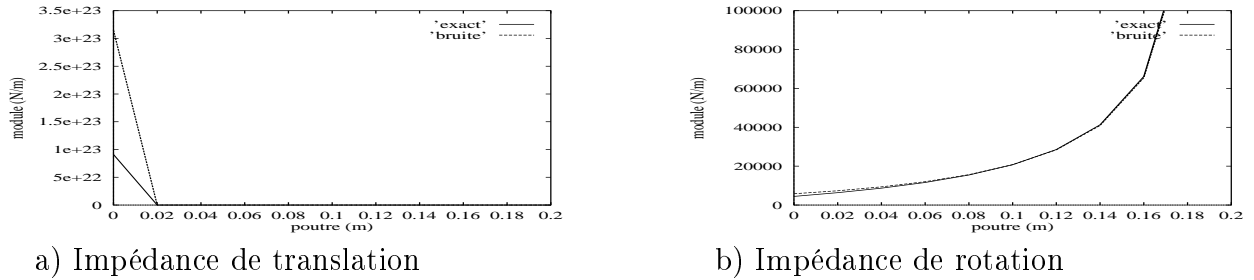


FIG. 4.5 – Impédances calculées sur le tronçon gauche d'une poutre sur ressorts de rotation.

La longueur d'onde de coupure est égale à  $\lambda_c = 0.13 m$ .

#### 4.5.2.3 Poutre sur appuis

Le calcul direct est issu de 4.19, où les constantes  $G_i$  et  $D_i$  sont solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_G = \frac{\partial^2 w_G}{\partial x^2} = 0 \text{ en } x = 0 \\ w_D = \frac{\partial^2 w_D}{\partial x^2} = 0 \text{ en } x = L \\ w_G = w_D \text{ en } x = x_F \\ \frac{\partial^2 w_G}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_D}{\partial x^2} \text{ en } x = x_F \\ E(1 + j\eta)I \frac{\partial^3 w_D}{\partial x^3} - E(1 + j\eta)I \frac{\partial^3 w_G}{\partial x^3} = F \text{ en } x = x_F \end{array} \right. \quad (4.23)$$

On présente en figure 4.6, les impédances de translation et de rotation calculées à partir des données exactes et bruitées, sur un tronçon gauche de la poutre. De la même façon qu'en 4.5.2.1 et 4.5.2.2, Les dérivées nécessaires au calcul de chaque impédance ont été lissées avec l'application du filtre de réponse 4.16. Le pic observé pour l'impédance de rotation est représentatif d'un ventre de vibration où la pente est nulle. Les impédances exactes et bruitées sont quasiment identiques. La régularisation est donc efficace. Elle réduit complètement l'effet d'instabilité propre au problème inverse. A la limite, on constate alors une impédance de translation très grande ( $I_T > 2.5 \cdot 10^{+11} N/m$ ), qui peut être considérée infinie, et une impédance de rotation quasiment nulle. Les conditions à la limite correspondent bien à la signature de l'appuis.

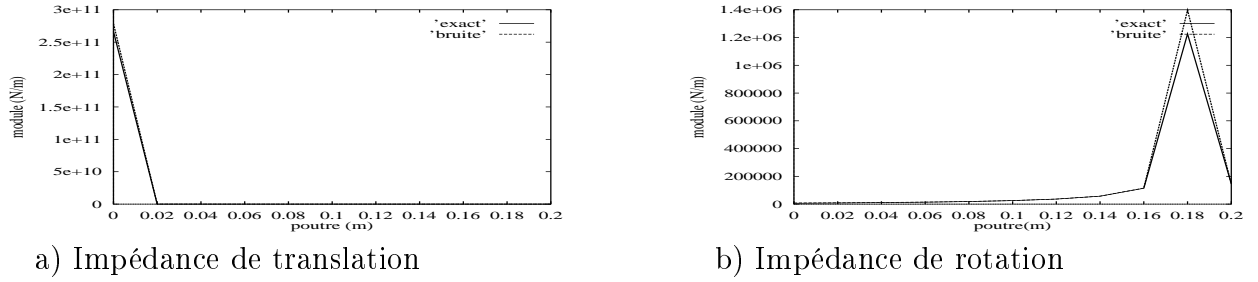


FIG. 4.6 – Impédances calculées sur le tronçon gauche d'une poutre sur appuis. La longueur d'onde de coupure est égale à  $\lambda_c = 0.13 m$ .

#### 4.5.2.4 Poutre encastree

Le calcul direct est issu de 4.19, où les constantes  $G_i$  et  $D_i$  sont solutions de :

$$\begin{cases} w_G = \frac{\partial w_G}{\partial x} = 0 \text{ en } x = 0 \\ w_D = \frac{\partial w_D}{\partial x} = 0 \text{ en } x = L \\ w_G = w_D \text{ en } x = x_F \\ \frac{\partial^2 w_G}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_D}{\partial x^2} \text{ en } x = x_F \\ E(1 + j\eta)I \frac{\partial^3 w_D}{\partial x^3} - E(1 + j\eta)I \frac{\partial^3 w_G}{\partial x^3} = F \text{ en } x = x_F \end{cases} \quad (4.24)$$

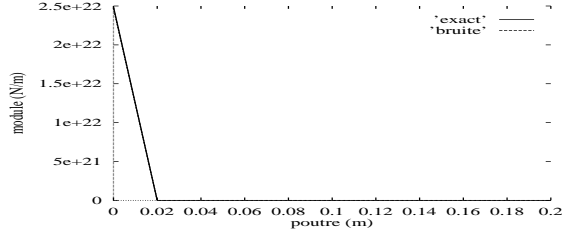
La figure 4.7 montre les impédances mécaniques de translation et de rotation. L'impédance de translation présente comme précédemment une discontinuité en  $x = 0$  où  $I_T \rightarrow \infty$ . Cela traduit le fait qu'il n'y a pas de déplacement en  $x = 0$ . Pour l'impédance de rotation, on observe une croissance continue atteignant une valeur de l'ordre de  $10^{+5} N.m$ . Devant l'ordre de grandeur du moment fléchissant dans ce genre de système (de l'ordre de  $1 N.m$ ), on constate que l'impédance de rotation est particulièrement grande, ce qui exprime le fait que la pente est bloquée en  $x = 0$ . Contrairement à l'impédance de translation, on n'observe pas ici une discontinuité marquée car la pente calculée n'est pas exactement nulle.

Les deux impédances obtenues sont très élevées. On reconnaît le profil de l'encastrement.

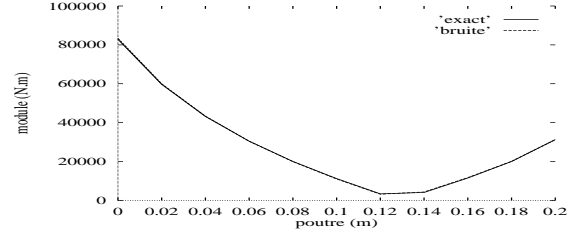
#### 4.5.2.5 Poutre guidée

Le calcul direct est issu de 4.19, où les constantes  $G_i$  et  $D_i$  vérifient le système d'équations :





a) Impédance de translation



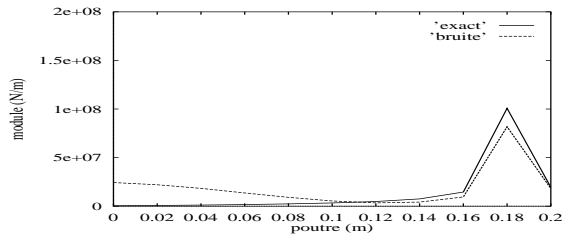
b) Impédance de rotation

FIG. 4.7 – Impédances calculées sur le tronçon gauche d'une poutre encastrée.  
La longueur d'onde de coupure est égale à  $\lambda_c = 0.13$  m.

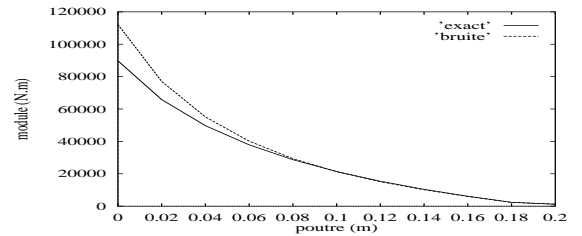
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_G}{\partial x} = \frac{\partial^3 w_G}{\partial x^3} = 0 \text{ en } x = 0 \\ \frac{\partial w_D}{\partial x} = \frac{\partial^3 w_D}{\partial x^3} = 0 \text{ en } x = L \\ w_G = w_D \text{ en } x = x_F \\ \frac{\partial^2 w_G}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_D}{\partial x^2} \text{ en } x = x_F \\ E(1 + j\eta)I \frac{\partial^3 w_D}{\partial x^3} - E(1 + j\eta)I \frac{\partial^3 w_G}{\partial x^3} = F \text{ en } x = x_F \end{array} \right. \quad (4.25)$$

La figure 4.8 montre, sur ce cas, les résultats obtenus. On constate cette fois-ci que l'influence du bruit n'est pas négligeable à la limite. Pour l'impédance de rotation, l'écart n'est pas gênant car la valeur obtenue est très grande (du même ordre que dans le cas précédent), et correspond au fait que la pente est négligeable. Par contre, l'effet du bruit sur le calcul l'impédance de translation pose problème. On observe une raideur, alors que l'impédance exacte est nulle. Ce problème est lié à la difficulté de régularisation de l'effort tranchant que nous avons mis en évidence au paragraphe 4.4 (figure 4.3). L'amplification du bruit par la dérivée troisième du déplacement est trop importante. A la limite, il en résulte une discontinuité associée au bruit qui ne peut être régularisée par filtrage. Dans les deux exemples précédents, ce problème n'intervient pas car les deux conditions aux limites associées comprennent la condition de nullité du déplacement. La valeur de  $I_T$  est alors infinie quelle que soit celle de l'effort tranchant.

On s'aperçoit donc qu'il est difficile de retrouver une condition d'effort tranchant nul. C'est le cas du guidage, mais aussi de la poutre libre que nous présentons dans le paragraphe suivant.



a) Impédance de translation



b) Impédance de rotation

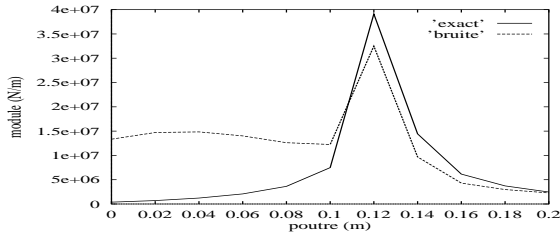
FIG. 4.8 – Impédances calculées sur le tronçon gauche d'une poutre guidée.

### 4.5.2.6 Poutre libre

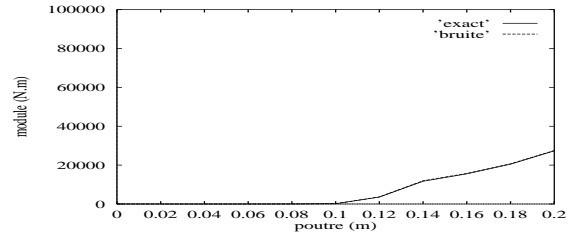
Le calcul direct est issu de 4.19, où les constantes  $G_i$  et  $D_i$  vérifient le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_G}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w_G}{\partial x^3} = 0 \text{ en } x = 0 \\ \frac{\partial^2 w_D}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w_D}{\partial x^3} = 0 \text{ en } x = L \\ w_G = w_D \text{ en } x = x_F \\ \frac{\partial^2 w_G}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_D}{\partial x^2} \text{ en } x = x_F \\ E(1 + j\eta)I \frac{\partial^3 w_D}{\partial x^3} - E(1 + j\eta)I \frac{\partial^3 w_G}{\partial x^3} = F \text{ en } x = x_F \end{cases} \quad (4.26)$$

On constate bien en figure 4.9 une impédance de rotation nulle. Pour l'impédance de translation, la raideur observée sur la courbe bruitée est fautive. Nous avons le même problème qu'avec la poutre guidée. L'approche ne permet pas d'obtenir une valeur correcte à la limite, car l'effort tranchant présente une trop forte instabilité aux incertitudes des données.



a) Impédance de translation



b) Impédance de rotation

FIG. 4.9 – Impédances calculées sur le tronçon gauche d'une poutre libre.

## 4.6 Conclusion

Le calcul des dérivées spatiales du déplacement jusqu'à l'ordre 3 est un moyen de connaître la pente, le moment fléchissant et l'effort tranchant le long de la structure. L'utilisation de schémas aux différences finies décentrés est possible et permet théoriquement d'atteindre ces quantités aux bords. Comme pour l'identification des efforts, cette approche présente une forte sensibilité aux incertitudes de mesure. Une régularisation par filtrage passe-bas dans le domaine des nombres d'onde est une voie, mais pose encore problème sur la détermination de l'effort tranchant à la limite. Celui-ci est en effet lié avec la dérivée troisième du déplacement qui présente une instabilité trop importante. La conséquence est que le bruit amplifié par cette dérivée possède une discontinuité marquée par la troncature spatiale qui peut être difficilement éliminée par un simple filtrage. Les exemples présentés montrent que l'erreur apportée sur l'effort tranchant est pénalisante. La valeur de l'impédance de translation est erronée et ne permet pas à cette technique d'être un moyen d'identification d'une raideur de translation. On montre aussi que la régularisation ne permet pas l'obtention d'une impédance de rotation exacte. Sa valeur est obtenue de façon qualitative (ordre de grandeur). A son stade de développement, l'identification des conditions aux limites par la méthode R.I.F.F. est une approche qui peut situer les conditions aux limites entre les quatre conditions extrêmes : appuis, encastrement, guidage, libre. Ces résultats ne suffisent pas. On sait que les difficultés sont liées à la discontinuité de la troncature spatiale. Comme extension, il faut envisager un remède à ce problème,

en cherchant à ne pas dégrader les valeurs des dérivées du déplacement aux limites, par le filtrage. Il est donc nécessaire d'utiliser soit un autre type de régularisation qui ne lisse pas la discontinuité (en adaptant peut être le concept de "Denoising" (cf [9]), développé dans ces dernières années), soit en extrapolant judicieusement la distribution du déplacement à l'extérieur du domaine étudié (utilisation de fonctions d'interpolation de signaux échantillonnés), pour supprimer la présence inévitable de la troncature spatiale.

# Chapitre 5

## Identification de l'opérateur d'une structure

### 5.1 Buts du chapitre

La méthode R.I.F.F., développée dans les chapitres précédents, résoud un problème inverse, qui utilise l'opérateur de la structure comme information à priori, pour déterminer les efforts externes. Il s'agit donc de connaître les caractéristiques du matériau et la physique du problème. Dans ce chapitre, nous tentons d'introduire une approche pour réduire cet espace de connaissance. Le but est de pouvoir identifier l'opérateur avec des moyens expérimentaux. Le principe est de reconstruire l'équation du mouvement de la structure, en connaissant le champ de déplacement vibratoire pour une force excitatrice connue. Bien sur, ce genre d'étude constitue lui aussi un problème inverse. Sa résolution n'est certainement pas chose évidente et demande à être étudiée de façon plus approfondie. Cependant, quelques aspects ont été éclaircis, et nous proposons ici de montrer les premières conclusions que l'on peut en tirer.

Dans un premier temps, nous présentons le principe de l'approche tel qu'il a été développé, et nous montrons des résultats de simulations qui permettent de conclure sur les conditions de sa mise en oeuvre. Dans un deuxième temps, nous verrons que le problème est mal posé, en ce sens qu'il n'est pas réalisable, lorsque les données ne sont connues qu'avec un certain degré d'approximation. Comme ces données sont issues de mesures, il est nécessaire, là aussi, de développer une régularisation. Une tentative est présentée. Elle est basée sur le même principe que celle de la méthode R.I.F.F., où l'utilisation d'un filtrage passe-bas, dans le domaine des nombres d'onde donne des résultats satisfaisants. En conclusion, nous verrons que l'enjeu d'une telle approche est considérable, en ce sens qu'elle permet d'étendre la reconstitution des efforts sur une structure complètement inconnue et qu'elle s'ouvre à un vaste champ d'applications.

### 5.2 Principe de l'identification

Nous prenons comme hypothèse, un opérateur correspondant à une équation différentielle quelconque, pour un problème monodimensionnel, en régime harmonique. Son expression est de la forme :

$$\sum_{k=0}^{N_{ordre}} a_k(x, \omega) \frac{\partial^k w}{\partial x^k} = F(x) \quad (5.1)$$

où les  $a_k(x, \omega)$  sont les coefficients inconnus qui caractérisent l'opérateur,  $N_{ordre}$  est l'ordre de l'équation qui est également inconnu.

Il s'agit donc de déterminer, en tout point, les  $(N_{ordre} + 1)$  inconnues  $a_k(x, \omega)$ . En supposant que l'opérateur est identique en  $(N_{ordre} + 1)$  points, on peut construire un système de  $(N_{ordre} + 1)$  équations, correspondant au calcul de  $F(x)$  en ces points. Nous avons alors :

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N_{ordre}} a_k \frac{\partial^k w}{\partial x^k}(x_0) = F(x_0) \\ \sum_{k=0}^{N_{ordre}} a_k \frac{\partial^k w}{\partial x^k}(x_1) = F(x_1) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N_{ordre}} a_k \frac{\partial^k w}{\partial x^k}(x_{ordre}) = F(x_{ordre}) \end{cases} \quad (5.2)$$

où  $F(x)$  est une distribution de force connue et  $w$  le champs de déplacement résultant de cette excitation.

De façon analogue à la détermination des efforts par la méthode locale décrite au chapitre 1, les dérivées spatiales du déplacement sont calculées par des schémas aux différences finies centrés  $\delta_i^k$ , dont les expressions sont déduites de la même manière qu'au chapitre 1 (paragraphe 1.4), où on pose comme schémas de base pour les dérivées impaires :

$$\delta_i^1 = \frac{w((i+1)\Delta, \omega) - w((i-1)\Delta, \omega)}{2\Delta} \quad (5.3)$$

et

$$\delta_i^{2k+1} = \frac{\delta_{i+1}^{2k-1} - 2\delta_i^{2k-1} + \delta_{i-1}^{2k-1}}{4\Delta^2} \quad (5.4)$$

pour  $k > 1$ .

Ceux des dérivées paires sont données en 1.16 et 1.17.

En utilisant  $(N_{ordre} + 1)$  points consécutifs, le système 5.2 peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} w_i & \delta_i^1 & \dots & \delta_i^{N_{ordre}} \\ w_{i+1} & \delta_{i+1}^1 & \dots & \delta_{i+1}^{N_{ordre}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ w_{i+N_{ordre}} & \delta_{i+N_{ordre}}^1 & \dots & \delta_{i+N_{ordre}}^{N_{ordre}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N_{ordre}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_i \\ F_{i+1} \\ \vdots \\ F_{i+N_{ordre}} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

L'inversion de ce système permet de déterminer les coefficients de l'opérateur pour les  $(N_{ordre} + 1)$  points considérés. Cette approche est donc locale et peut s'appliquer sur des structures complexes, à homogénéité locale.

Le problème est que la dimension du système 5.5 est inconnue. Il faut donc s'appliquer à la déterminer dans un premier temps. C'est ensuite que l'on va s'intéresser à la détermination même des  $a_k$ , qui constituent l'opérateur. Ces deux étapes font l'objet des deux paragraphes suivants.

## 5.2.1 Identification de l'ordre de l'équation différentielle

Le cas considéré est celui d'une poutre excitée par une distribution uniformément répartie. Les données nécessaires au calcul sont obtenues pour une poutre homogène en flexion pure. Ainsi, l'ordre de l'opérateur est 4 et les valeurs des coefficients sont :

$$\begin{cases} a_0 = \rho S \omega^2 = 1.31 \cdot 10^{+7} \text{ N/m}^2 \\ a_1 = 0 \text{ N/m} \\ a_2 = 0 \text{ N} \\ a_3 = 0 \text{ N.m} \\ a_4 = E(1 + j\eta)I = 2.66 \cdot 10^{+3}(1 + j 4 \cdot 10^{-3}) \text{ N.m}^2 \end{cases} \quad (5.6)$$

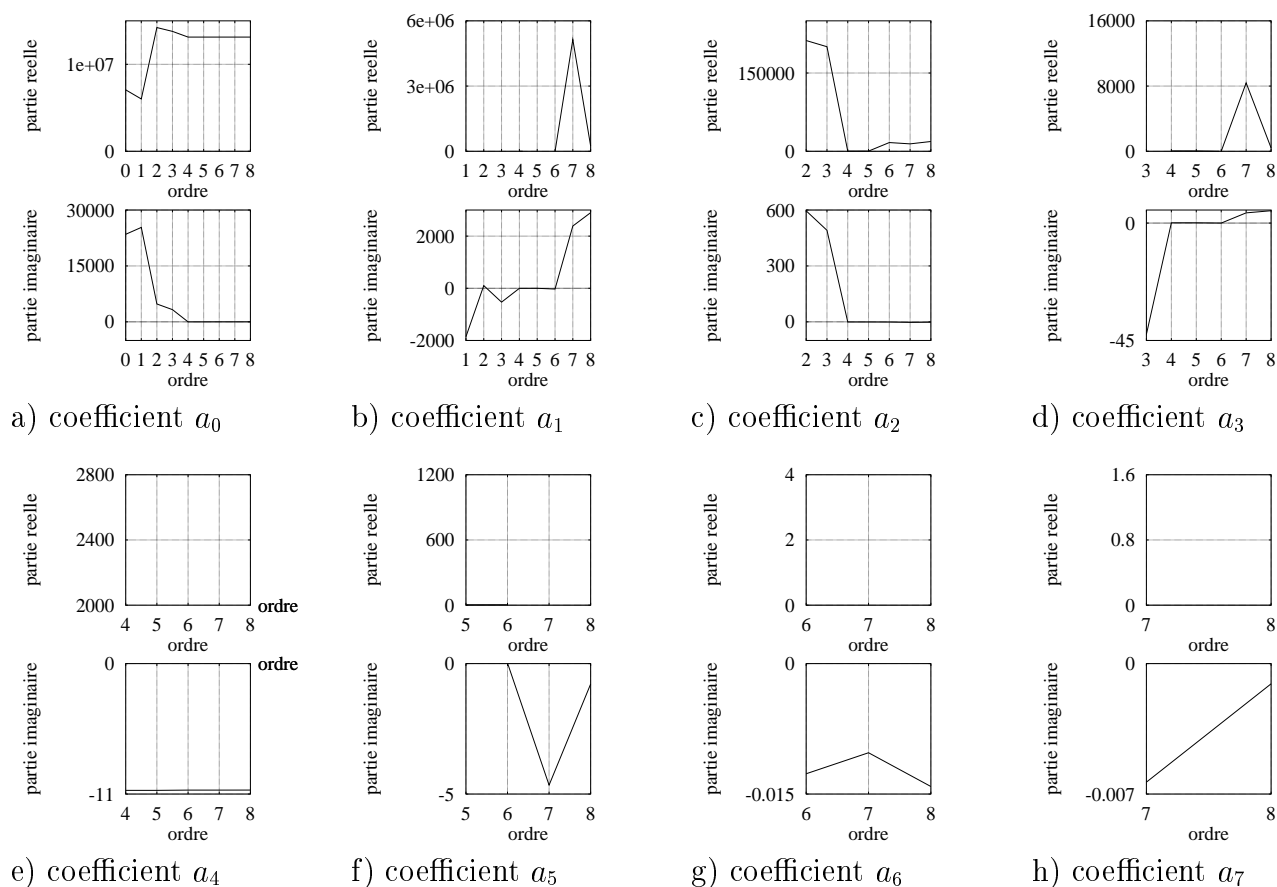


FIG. 5.1 – Calcul des coefficients de l'opérateur d'une poutre, en fonction de l'ordre considéré.

Le point d'observation est  $x = 0.6 \text{ m}$ .

La figure 5.1 donne la valeur des différents coefficients calculés grâce à 5.5, pour des ordres de dérivation à priori depuis 0 jusqu'à 8. On constate que si l'ordre considéré à priori est inférieur à celui de l'équation différentielle réelle (= 4 dans notre exemple), les coefficients calculés sont erronés. Si l'ordre est égal ou immédiatement supérieur, les valeurs des coefficients sont correctes. Enfin, pour un ordre trop élevé, on constate que les valeurs des coefficients théoriquement nulles, sont fausses. Par contre, les coefficients  $a_0$  et  $a_4$  ne varient plus quand l'ordre dépasse la valeur exacte de 4.

On retiendra comme critère d'identification le fait que le premier coefficient qui converge indique l'ordre de l'opérateur. En figure 5.2, on met en évidence ce critère pour deux autres solutions d'équations différentielles (ordre 1 et ordre 2) :

$$\begin{cases} w_1 = A(1 - e^{-kx}) \\ w_2 = A(1 + e^{-kx} \cos(Bx)) \end{cases} \quad (5.7)$$

On observe bien la convergence de  $a_0$ , à partir de l'ordre 1 pour  $w_1$  et de l'ordre 2 pour  $w_2$ .

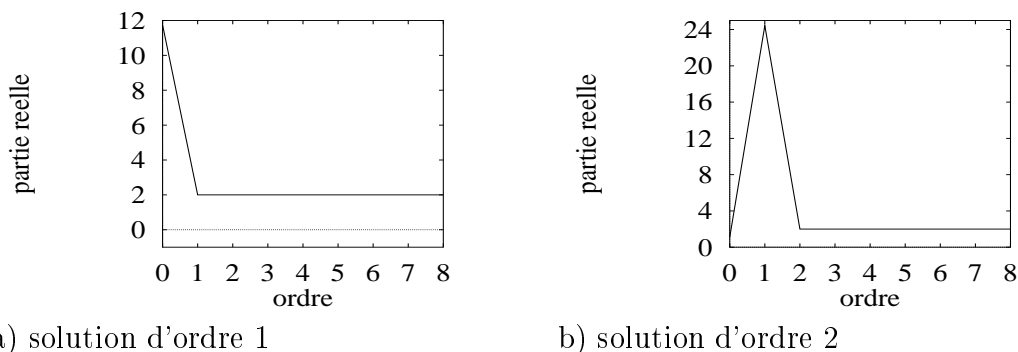


FIG. 5.2 – Convergence du coefficient  $a_0$  de l'opérateur de solutions d'équations différentielles d'ordre 1 et 2.

## 5.2.2 Choix de l'excitation de calibration

Dans cette section, on étudie le principe de la méthode d'identification. On ne se pose pas les problèmes liés aux incertitudes de mesure qui seront étudiés dans la section 5.3.

A partir du moment où l'ordre de l'opérateur est connu ou identifié, le calcul des  $a_k(x, \omega)$  peut se faire avec la connaissance d'un champ de déplacement d'une structure vibrante pour une excitation connue. Il reste à savoir si on peut utiliser n'importe quel type d'excitation.

La démarche suivante est basée sur des simulations numériques, constituées de trois étapes :

1. Le calcul direct : calcul du champ de déplacement pour une excitation dite de calibration (méthode modale).
2. Détermination des opérateurs locaux, en utilisant les données de déplacement (exactes) et de celles de l'excitation de calibration.
3. La reconstruction d'une distribution de force quelconque en utilisant les opérateurs identifiés par l'étape 2 (schéma aux différences finies).

On propose de montrer les résultats des étapes 2 et 3 que l'on obtient pour plusieurs types de distributions de force de calibration sur une poutre, où l'on sait que l'opérateur est d'ordre 4. Pour l'étape 3, la reconstruction est réalisée sur l'exemple de la poutre excitée par une force répartie entre  $x_1 = 0.6 L$  et  $x_2 = 0.7 L$ , que l'on a déjà décrit au chapitre 1 (paragraphe 1.6.2.4). Les types d'excitation de calibration étudiés sont : un effort ponctuel,

une distribution répartie et continue, une distribution répartie et discontinue. Chaque sous-section suivante traite un de ces trois cas particuliers.

### 5.2.2.1 Effort ponctuel

La figure 5.3 montre les modules des coefficients identifiés le long de la poutre par l'étape 2, lorsque celle-ci est excitée par une force ponctuelle en  $0.4 L$ .

Il est clair que les tronçons où la distribution de force est nulle donne des valeurs de coefficients aberrantes. En effet, à ces endroits, le système 5.5 possède un second membre nul, et une matrice mal conditionnée. Il n'admet donc pas forcément une solution unique. Au point d'excitation, on n'obtient pas non plus les vraies valeurs des coefficients qui sont indiquées en 5.6. En figure 5.4, on voit que l'utilisation de ces coefficients n'est pas valide pour la reconstruction des efforts.

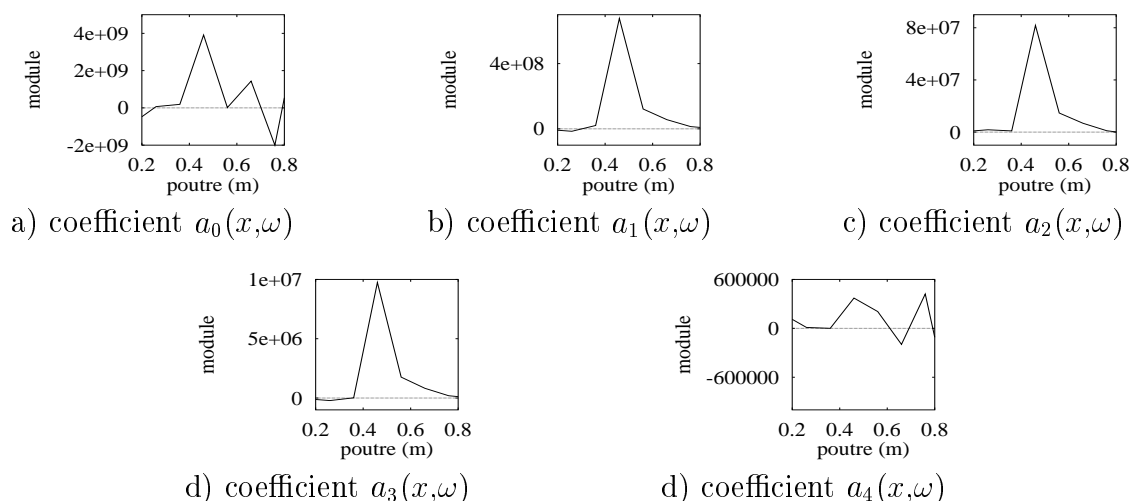


FIG. 5.3 – Calcul des coefficients de l'opérateur le long d'une poutre, excitée ponctuellement en  $x_F = 0.4 m$ .

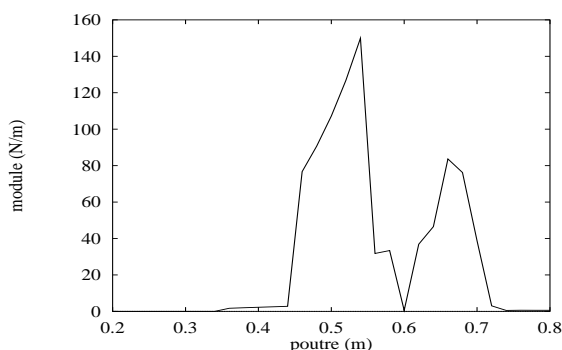


FIG. 5.4 – Distribution de force reconstruite sur une poutre excitée par une distribution  $F = 1 N/m$  entre  $0.6 m$  et  $0.7 m$ , avec les coefficients déterminés en figure 5.3.



### 5.2.2.2 Distribution répartie et continue

Les modules des coefficients identifiés par l'étape 2 sont montrés en figure 5.5, où on a utilisé, comme excitation de calibration, une distribution continue d'expression :

$$F(x) = \cos \frac{\pi}{2L}x \quad (5.8)$$

Les valeurs obtenues sont constantes le long de la poutre (nous avons bien une structure homogène) et correspondent aux valeurs théoriques exprimées en 5.6. La figure 5.6 montre bien la possibilité d'utiliser cet opérateur, pour reconstruire la distribution de force avec la méthode R.I.F.F.

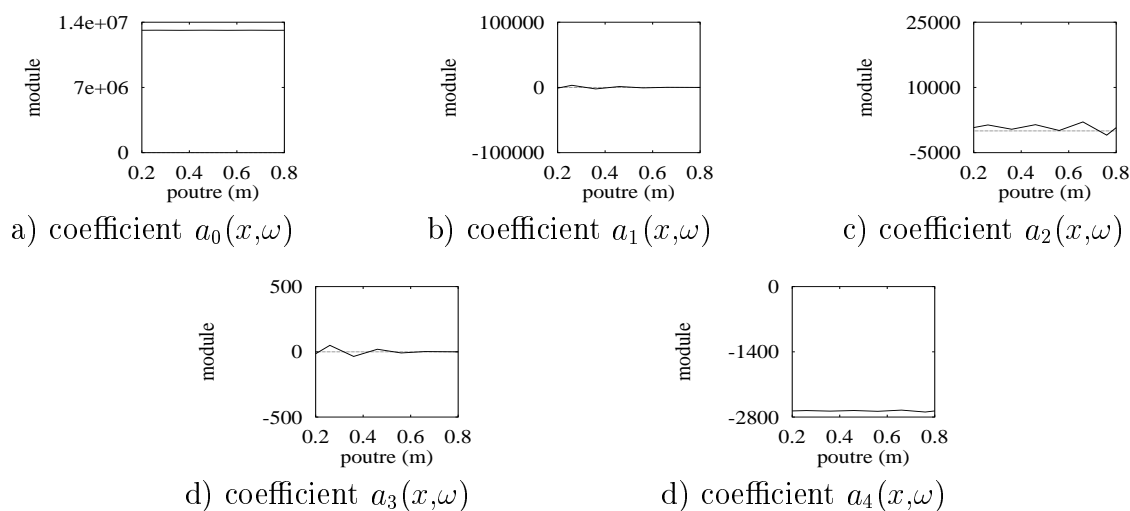


FIG. 5.5 – Calcul des coefficients de l'opérateur le long d'une poutre, excitée par une distribution répartie et continue sur toute sa longueur :

$$F(x) = \cos \frac{\pi}{2L}x.$$

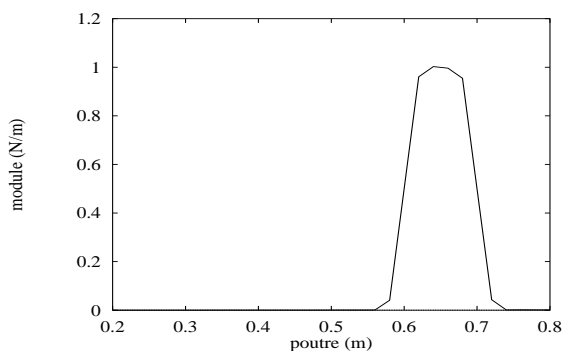


FIG. 5.6 – Distribution de force reconstruite sur une poutre excitée par une distribution  $F = 1 \text{ N/m}$  entre 0.6 m et 0.7 m, avec les coefficients déterminés en figure 5.5.

### 5.2.2.3 Distribution répartie et discontinue

L'expression de la distribution de force de calibration est :

$$\begin{cases} F(x) = 1 \text{ N/m pour } x \leq 0.5L \\ F(x) = 2 \text{ N/m pour } x > 0.5L \end{cases} \quad (5.9)$$

Elle possède donc une discontinuité en  $x = 0.5L$ .

De la même façon que précédemment, on trace en figure 5.7, la valeur du module de chaque coefficient le long de la structure. On s'aperçoit que l'opérateur identifié sur le tronçon comportant la discontinuité, ne possède pas les même valeurs de coefficient. La reconstruction de l'effort appliqué, par la méthode R.I.F.F. est montré en figure 5.8. On s'aperçoit alors que des efforts aberrants se situent sur la partie de la poutre où il y avait la discontinuité de l'effort de calibration. Les coefficients identifiés sur ce tronçon sont donc faux.

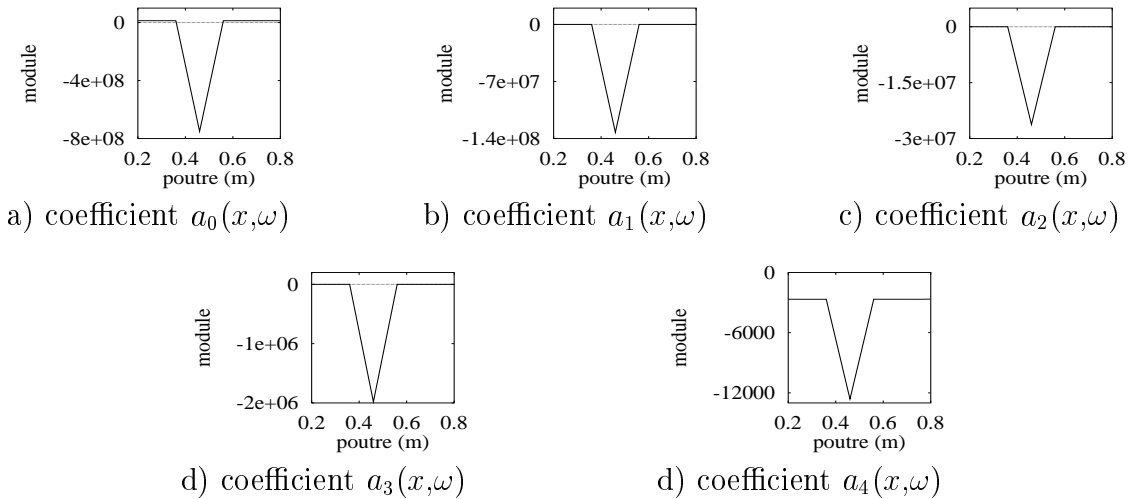


FIG. 5.7 – Calcul des coefficients de l'opérateur le long d'une poutre, excitée par une distribution discontinue ( $F = 1 \text{ N/m}$ ) pour  $x < 0.5L$ , et ( $F = 2 \text{ N/m}$ ) pour  $x > 0.5L$ .

En conclusion, pour avoir un système d'identification bien posé, il est nécessaire d'utiliser une distribution de force de calibration répartie et continue. En pratique, on pense naturellement à utiliser une excitation acoustique. Les deux étapes de la méthode se résument donc par :

- Identification des opérateurs locaux d'une structure, en l'excitant par une onde plane acoustique et en mesurant le champ de déplacement vibratoire.
- Reconstitution des efforts appliqués à la structure en utilisant les données du champ de déplacement vibratoire "in situ" et les coefficients déterminés précédemment.

La méthode utilise donc deux séries de mesure. Les données ne peuvent être connues exactement et sont entâchées d'incertitudes. On propose d'étudier, dans la suite, l'effet

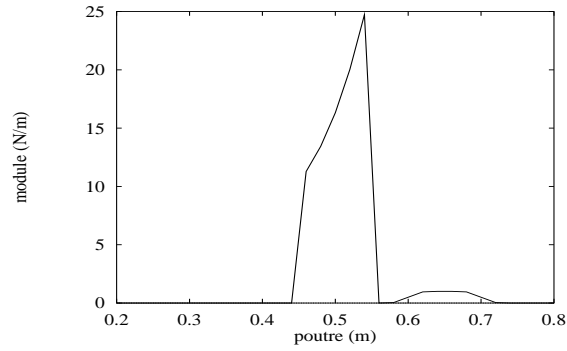


FIG. 5.8 – *Distribution de force reconstruite sur une poutre excitée par une distribution  $F = 1 \text{ N/m}$  entre 0.6 m et 0.7 m, avec les coefficients déterminés en figure 5.7.*

des incertitudes sur la reconstruction de l'opérateur différentiel de structure. Pour l'identification de l'effort appliqué, la technique de régularisation de la méthode R.I.F.F. a été précisément décrite au chapitre 2. Cependant, dans la démarche envisagée ici, il y a un double niveau d'incertitude puisque l'identification de l'effort utilise un opérateur lui-même entâché d'incertitudes.

## 5.3 Problème de réalisation

### 5.3.1 Effet des incertitudes de mesure

Les données de calibration sont celles qui permettent l'identification de l'opérateur. Elles sont composées

- de la distribution de force que l'on applique sur la structure et qui doit être répartie et continue,
- des déplacements résultant de cette excitation obtenus par la mesure.

Dans un premier temps, On supposera que l'effort appliqué est connu théoriquement et constitue des données exactes. Dans la suite du chapitre, on se consacre principalement à l'influence des incertitudes de mesure du champ de déplacement. L'étude est basée sur l'utilisation de données obtenues par simulations numériques, où les déplacements résultent du calcul direct (étape 1) et sont bruités, en module et phase par l'expression 2.1, avec  $\sigma_{\Delta w} = 1\%$  et  $\sigma_{\Delta \phi} = 0.57^\circ$ . C'est seulement en fin du paragraphe suivant que nous nous intéresserons au bruitage de toutes les données susceptibles d'être mesurées.

L'exemple de référence que nous considérons ici, est celui d'une poutre (mêmes caractéristiques qu'en 5.6), où l'opérateur est identifié à partir d'une distribution de calibration constante :

$$F(x) = 1 \text{ N/m pour } x \in [0, L] \quad (5.10)$$

En figure 5.9, on juxtapose les valeurs des modules des coefficients obtenues avec des données de déplacements exactes et bruitées. Les deux courbes sont complètement différentes. De plus, on voit en figure 5.10 que les coefficients "bruités" ne donnent aucun résultat sur la reconstitution de l'effort. Le problème est bien instable et il est nécessaire d'aborder une régularisation pour y remédier.

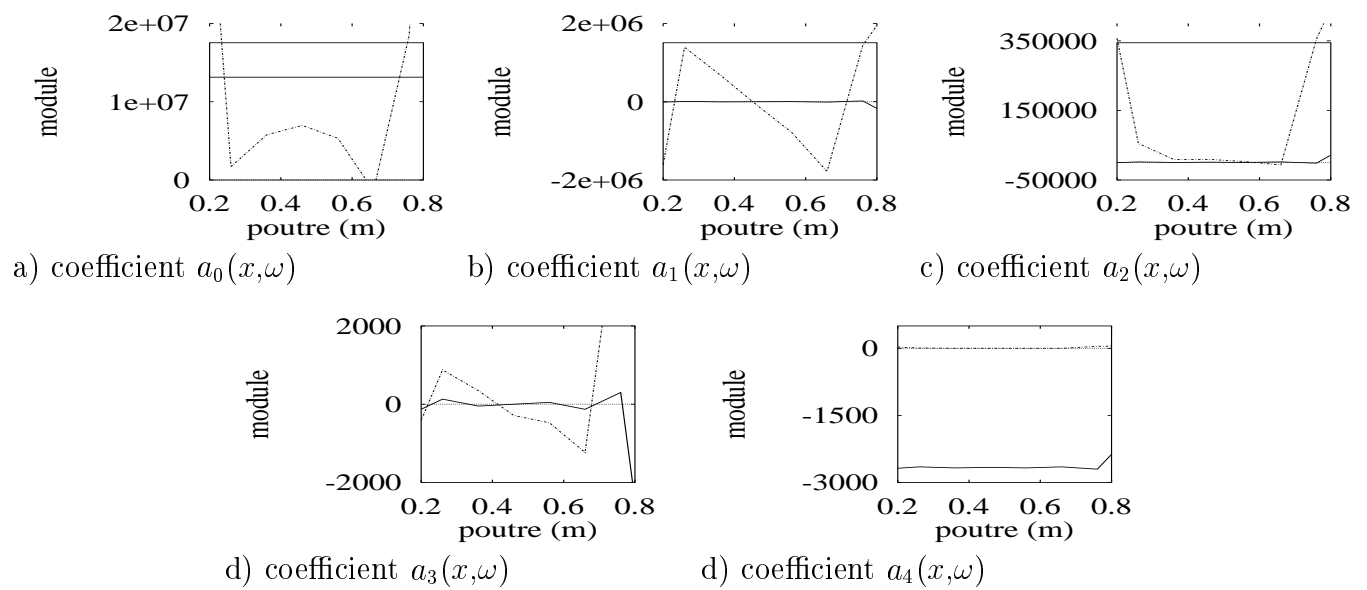


FIG. 5.9 – Calcul des coefficients de l'opérateur le long d'une poutre, excitée par une distribution constante ( $F = 1 \text{ N/m}$ ) en tout point.  
 En trait continu : à partir d'un déplacement exact.  
 En trait pointillé : à partir d'un déplacement bruité (1 % d'erreur).

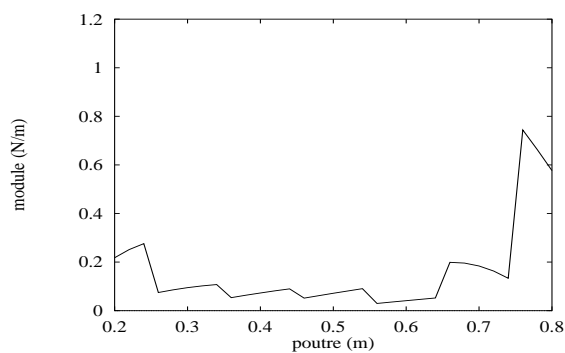


FIG. 5.10 – Distribution de force reconstruite sur une poutre excitée par une distribution  $F = 1 \text{ N/m}$  entre 0.6 m et 0.7 m, avec les coefficients bruités de la figure 5.9.

### 5.3.2 Régularisation

Nous avons vu dans les chapitres 2 et 4, que l'utilisation de données incertaines du déplacement a pour conséquences de bruiteur considérablement les différentes dérivées spatiales, en particulier celles des ordres élevés et d'affecter ces fonctions dans le domaine des nombres d'onde élevés. Les schémas aux différences finies  $\delta_i^k$  sont donc des distributions discrètes très affectées par les incertitudes. Ces distributions correspondent aux  $(N_{ordre} + 1)$  vecteurs colonnes de la matrice 5.5. Pour régulariser le problème, on propose de lisser ces vecteurs afin d'obtenir une matrice la plus proche possible du cas exact. De la même façon qu'au chapitre 2, nous effectuons cette régularisation en deux étapes :

- Un fenêtrage : On multiplie chaque vecteur par la fenêtre 2.21 pour éviter les conséquences du phénomène de Gibbs aux limites après filtrage.
- Un filtrage idéal : On convolue chaque vecteur avec la réponse du filtre idéal 2.13.

Par ailleurs, le second membre du système 5.5, correspondant à la distribution de force de calibration discrète, doit être aussi fenêtré et filtré. Le fenêtrage est nécessaire pour éviter d'obtenir une augmentation de la raideur de l'opérateur au voisinage des limites (diminution du déplacement pour le même effort). Le filtrage permet d'éviter des effets néfastes, car le phénomène de coïncidence spatiale dû au transfert d'énergie entre l'excitation et la vibration par égalité des nombres d'onde, ne peut plus correspondre puisque les composantes du champ de déplacement dans le domaine des hauts nombres d'onde sont nulles et ne correspondent plus à celles de la distribution de force.

La comparaison entre les coefficients "exact" et les coefficients obtenus après filtrage du système 5.5 bruité, est mise en évidence en figure 5.11. On constate une amélioration des valeurs obtenues par rapport aux valeurs purement bruitées (figure 5.9). Par contre, la régularisation ne permet pas de connaître précisément les coefficients  $a_i(x, \omega)$ . On voit qu'ils ne sont pas constant spatialement et que leurs valeurs sont encore bien éloignées de celles de référence.

Pour savoir si l'opérateur régularisé, obtenus à partir de données bruitées, est utilisable, nous effectuons en figures 5.12, 5.13 et 5.14, des reconstitutions de plusieurs types de distributions sur la même structure, où les conditions aux limites peuvent être différentes. Les nouvelles données de déplacement sont exactes. On s'aperçoit alors que l'on retrouve facilement les discontinuités de la densité de force. L'exemple du moment ponctuel (discontinuité très forte) est tout à fait remarquable. Ces résultats sont encourageants, car on voit qu'il est possible, sans rien connaître de la structure, de localiser de fortes discontinuités de la distribution excitatrice. C'est un des objectifs principal de la méthode R.I.F.F., lorsque l'on veut localiser des forces.

Cependant, on voit apparaître un bruit de fond associé à l'inexactitude des coefficients. Dans le cas où la distribution recherchée est répartie (figure 5.12), la forme obtenue peut être dégradée, si bien que l'identification devient moins évidente.

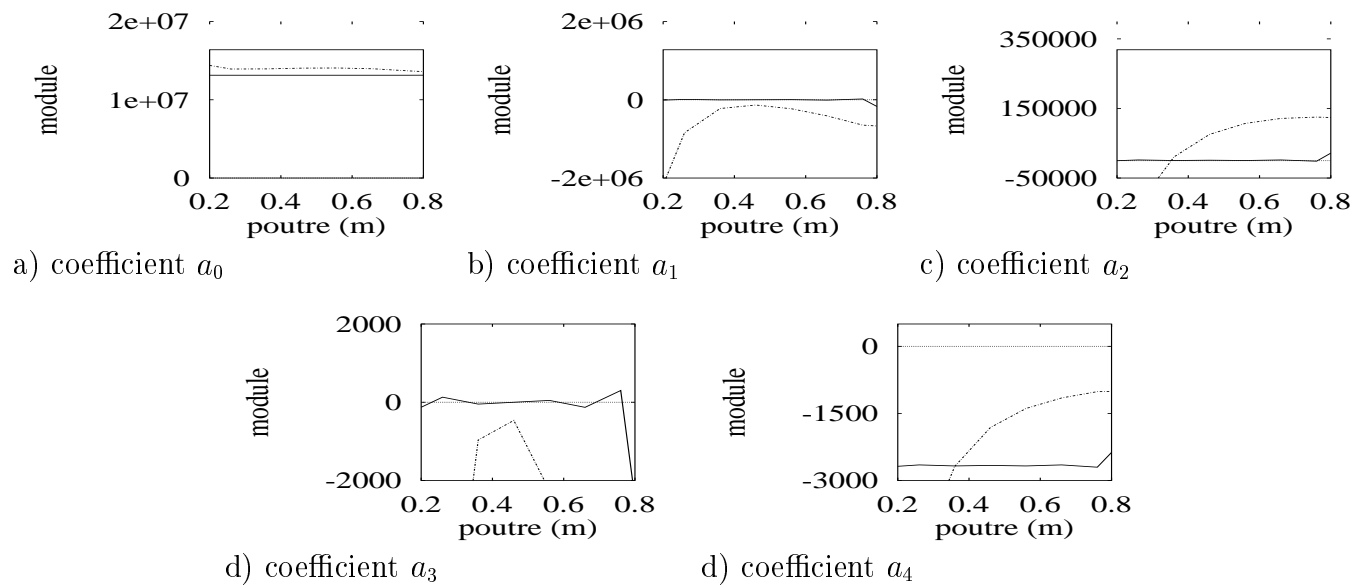


FIG. 5.11 – Calcul des coefficients de l'opérateur le long d'une poutre, excitée par une distribution constante ( $F = 1 \text{ N/m}$ ) en tout point.  
 En trait continu : à partir d'un déplacement exact.  
 En trait pointillé : à partir d'un déplacement bruité (1 % d'erreur).  
 Les vecteurs du système 5.5 ont été fenêtrés et filtrés.

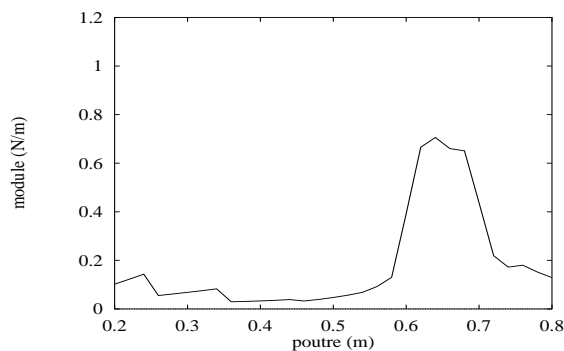


FIG. 5.12 – Distribution de force reconstruite sur une poutre sur appuis excitée par une distribution  $F = 1 \text{ N/m}$  entre 0.6 m et 0.7 m, avec les coefficients bruités de la figure 5.11.

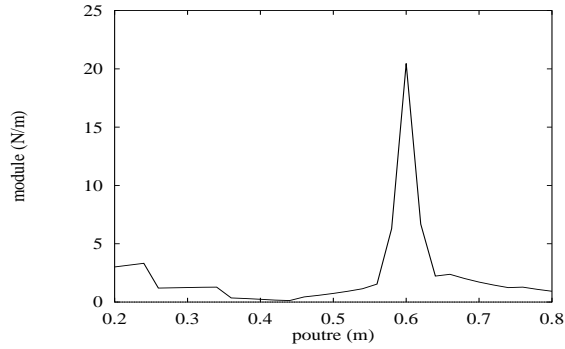


FIG. 5.13 – *Distribution de force reconstruite sur un tronçon de poutre infinie excitée par une force ponctuelle en  $x_F = 0.6$  m, avec les coefficients bruités de la figure 5.11.*

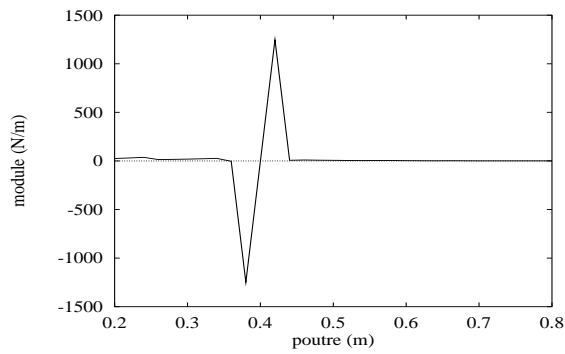


FIG. 5.14 – *Distribution de force reconstruite sur une poutre sur appuis excitée par un moment ponctuel en  $x_M = 0.4$  m, avec les coefficients bruités de la figure 5.11.*



En fait, sur les parties homogènes de la structure, l'opérateur ne devrait pas varier. Si on prend un seul des opérateurs identifié localement, et qu'on l'utilise sur toute la structure, on évite inévitablement les erreurs dues aux variations des coefficients. En figure 5.15, on montre que l'utilisation d'un seul opérateur parmi ceux qui ont été identifiés (n'importe lequel!), donne des résultats tout à fait excellents. Le bruit de fond est presque inexistant. La résolution est aussi bonne qu'au premier chapitre (figure 1.6). La valeur de la densité est inférieure, mais l'intégration de la distribution donne l'amplitude de l'effort total appliqué (0.1  $N$  dans notre exemple).

L'inversion du système 5.5 est donc un moyen de connaître l'ordre de grandeur des coefficients. Cet ordre de grandeur suffit largement à l'identification des sources sur des parties de structures, à condition qu'elles soient homogènes.

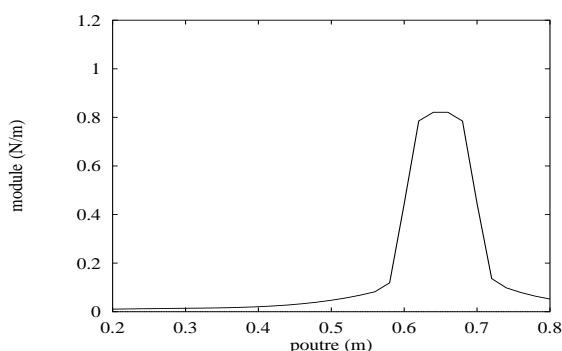


FIG. 5.15 – *Distribution de force reconstruite sur une poutre sur appuis excitée par une distribution  $F = 1 N/m$  entre 0.6 m et 0.7 m, avec les coefficients de la figure 5.11 pour  $x = 0.4 m$ .*

Maintenant, si on applique le bruitage sur toutes les données de calibration (forces et déplacements), on s'aperçoit en figure 5.16 que le résultat est moins bon, mais suffit à la localisation. Ceci est intéressant car il n'est pas évident de pouvoir régulariser l'étape de calibration en imposant une distribution de force connue théoriquement.

Enfin, si on considère l'ensemble des données comme étant issu de mesures (densité de force de calibration, déplacements résultant de la calibration, déplacements de la structure in situ), on doit prendre en compte, non seulement la régularisation de l'identification de l'opérateur, mais aussi celle de la méthode R.I.F.F., que l'on a développé au chapitre 2. La distribution obtenue pour notre exemple de référence est illustré en figure 5.17, où toutes les données ont été bruitées avec 1 % d'erreur (1% en module et 1 ° en phase). Ce résultat montre aussi que la localisation est possible.

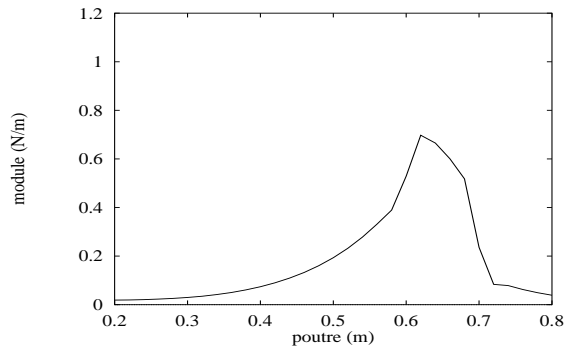


FIG. 5.16 – *Distribution de force reconstruite sur une poutre sur appuis excitée par une distribution  $F = 1 \text{ N/m}$  entre 0.6 m et 0.7 m, avec les coefficients obtenus, pour  $x = 0.4 \text{ m}$ , à partir de données de calibration bruitées (déplacements et forces).*

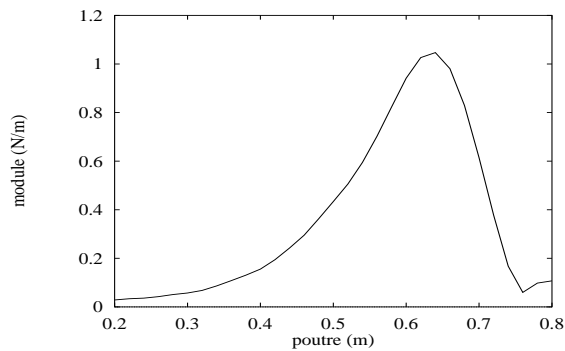


FIG. 5.17 – *Distribution de force reconstruite sur une poutre sur appuis excitée par une distribution  $F = 1 \text{ N/m}$  entre 0.6 m et 0.7 m, avec les coefficients obtenus, pour  $x = 0.4 \text{ m}$ , à partir de données de calibration bruitées (déplacements et forces) et des données de déplacement in situ bruitées (déplacements et forces). (La méthode R.I.F.F. utilise le filtrage optimisé)*

## 5.4 Conclusion

Ce chapitre a introduit une approche originale, où l'objectif est d'étendre la méthode R.I.F.F. aux cas de structures où aucune information à priori n'est disponible. Il s'agit d'identifier un opérateur local de cette structure, en n'utilisant que des données mesurées. Le principe est basé sur le calcul des coefficients de l'équation différentielle correspondant à l'équation du mouvement en régime harmonique, où l'on mesure localement le champ de déplacement vibratoire et l'effort excitateur. L'étude montre qu'il est nécessaire, pour réaliser ce problème inverse, d'utiliser une distribution excitatrice répartie et continue. L'identification se fait en deux étapes : la première est un procédé itératif où l'on cherche à identifier l'ordre de l'équation en observant la convergence des coefficients ; la deuxième consiste à déterminer les coefficients en inversant un système d'équation du mouvement discrétisé. Comme on pouvait s'y attendre, cette technique présente une instabilité importante aux erreurs de mesure. Une régularisation basée sur un filtrage passe-bas dans le domaine des nombres d'onde a été développée. On montre que c'est une technique qui aboutit à la possibilité d'identifier un opérateur utilisable par la méthode R.I.F.F. si l'on cherche à localiser des efforts ponctuels. En faisant l'hypothèse que la structure est homogène et que la distribution de force de calibration est connue théoriquement, on arrive même à un opérateur presque parfait qui peut être utilisé pour l'identification de la distribution de force.

Pour le moment, le but était de trouver un opérateur susceptible d'être utilisé par la méthode R.I.F.F.. Les coefficients identifiés suffisent à cette application. Par contre, leurs valeurs ne sont pas encore très précises. Une technique de recalage, comme on le fait sur les modèles éléments finis, permettrait certainement d'affiner le problème et d'obtenir une méthode d'identification d'opérateurs expérimentaux. Cette perspective a un enjeu considérable.

# Chapitre 6

## Validations expérimentales

### 6.1 Buts du chapitre

La méthode de localisation des efforts (cf trois premiers chapitres) a été développée sur des exemples dont les données sont issues de simulations numériques. Même si ces données ont été bruitées de façon à tenir compte des incertitudes de mesure, il est nécessaire de valider notre approche sur des cas concrets. Ce chapitre s'articule en trois parties. La première décrit le dispositif expérimental général qui a été mis en place pour mesurer le champ de déplacement vibratoire d'une structure. La deuxième est consacrée aux différents cas étudiés sur une poutre, où on montre les résultats issus des étapes qui constituent les deux premiers chapitres du mémoire. La troisième partie valide la méthode R.I.F.F. dans le cas des plaques simples et raidies, où les données ont été mesurées sur une partie de chaque plaque. Ces expériences permettent de valider la technique de reconstruction d'efforts excitateurs et de couplage entre des éléments mécaniques, et montrent une méthode d'identification robuste. Nous concluerons sur les éventuelles validations qu'il serait encore nécessaire de réaliser, afin de montrer tous les types de distributions que l'on peut réellement déterminer, et toutes les structures que l'on peut envisager.

### 6.2 Dispositif expérimental

L'expérience consiste à mesurer le champ de déplacement vibratoire sur une structure en fonction de la fréquence. Il s'agit donc de déterminer des quantités complexes, en module et phase, associées à chaque point du maillage effectué (discrétisation spatiale). Le matériel utilisé et le schéma de principe sont présentés en figure 6.1.

Pour mesurer ces quantités, nous utilisons deux accéléromètres. Le premier délivre un signal  $A$  proportionnel à l'accélération du point considéré (accéléromètre mobile); le deuxième un signal  $B$  proportionnel à l'accélération d'un point de référence sur la structure (accéléromètre fixe). L'analyseur de spectre permet l'obtention, en fonction de la fréquence  $f$ , de la densité spectrale de puissance  $S_{AA}(f)$  du signal  $A$  et de la densité spectrale d'interaction  $S_{BA}(f)$  entre les signaux  $A$  et  $B$  qui sont supposés être stationnaires et conjointement stationnaires, ce qui est très réaliste compte tenu de l'excitation utilisée. Les composantes fréquentielles du module du signal  $A$  sont obtenues à partir de la densité spectrale de puissance :

$$|A(f)| = \sqrt{S_{AA}(f)} \quad (6.1)$$

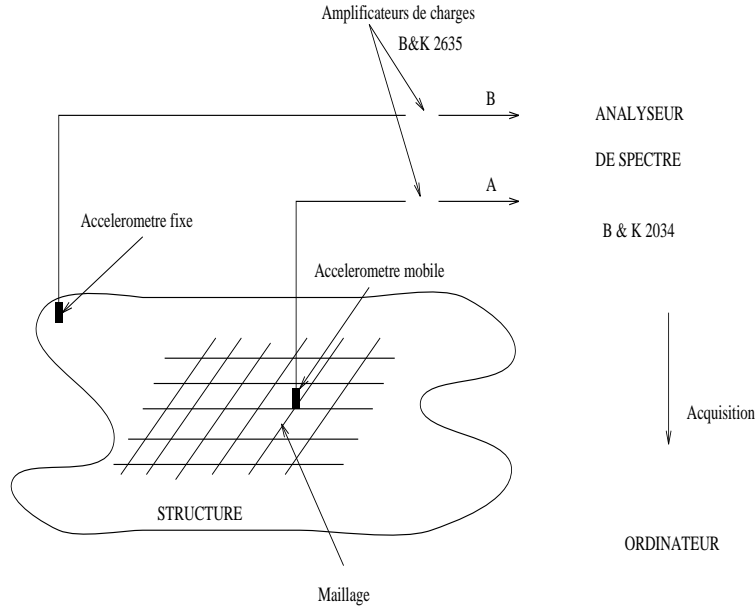


FIG. 6.1 – *Dispositif expérimental*

La phase  $\varphi_A(f)$  du signal  $A$  est mesurée par rapport à celle du signal  $B$ . Elle correspond à celle de la fonction de transfert entre les deux signaux, donc à celle de la densité spectrale d'interaction :

$$\varphi_A(f) = \varphi_{S_{BA}}(f) \quad (6.2)$$

La valeur  $|A(f)|e^{j\varphi_A(f)}$  correspond donc aux composantes fréquentielles de l'accélération mesurée au point considéré. Celles des déplacements sont obtenues par doubles intégrations numériques ultérieures, en divisant cette quantité par  $(-4\pi^2 f^2)$ .

Le signal  $B$  est nécessaire pour l'obtention d'une référence de phase. Le capteur "fixe" doit donc toujours délivrer un signal suffisant afin de pouvoir "accrocher" la phase. Pour éviter d'être trop souvent sur un noeud de vibration, ce capteur est placé au voisinage des limites.

Enfin, pour s'assurer que les valeurs mesurées sont correctes, on relève en plus la cohérence entre les deux signaux, définie par la fonction :

$$\gamma_{AB}^2(f) = \frac{S_{BA}(f)S_{BA}^*(f)}{S_{AA}(f)S_{BB}(f)} \quad (6.3)$$

La mesure est considérée correcte pour  $\gamma_{AB}^2(f) > 0.75$ .

## 6.3 Validation sur poutre

### 6.3.1 Montage et caractéristiques de la poutre

L'expérience a consisté à mesurer les signaux accélérations en 51 points également répartis le long d'une poutre en acier, de longueur  $L = 1.5 m$ , de largeur  $l = 6 cm$  et d'épaisseur

$h = 1 \text{ cm}$ . Elle est fixée à ses extrémités par un système de serrage entre deux cylindres de diamètres  $1 \text{ cm}$  (cf figure 6.2).

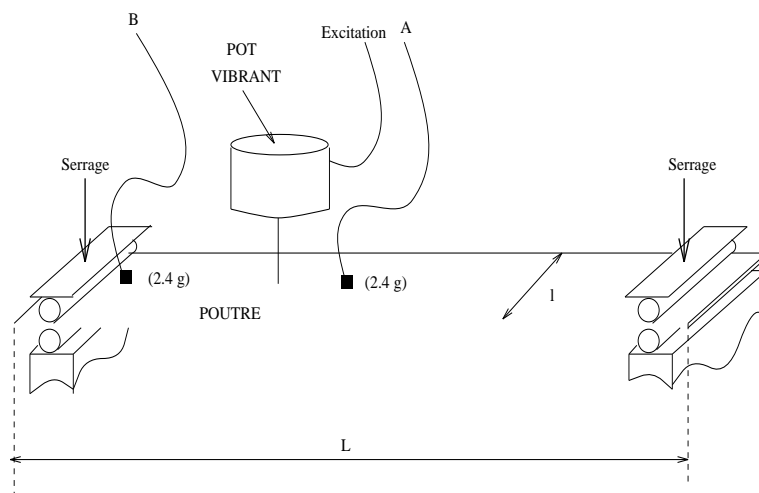


FIG. 6.2 – Montage expérimental dans le cas de la poutre

L'excitation a été réalisée avec un pot vibrant fixé au point d'abscisse  $x_F = 0.615 \text{ m}$ . L'effort recherché est donc une force ponctuelle appliquée en ce point dont on a mesuré son module à l'aide d'un capteur de force pour vérifier la précision des méthodes de reconstitution.

Deux signaux excitateurs ont été utilisés : un bruit blanc ( $S_{bb}(f) = 1$ ) qui permet d'avoir un résultat sur une large bande de fréquence, et un signal sinusoïdal à la fréquence  $f_0 = 304 \text{ Hz}$  ( $S_{ss}(f) = \delta(f - f_0)$ ).

En bruit blanc (pseudo random noise), le niveau excitateur a été réglé faiblement de façon à ce que les mesures effectuées soient proches du bruit de fond. Les valeurs mesurées correspondent à des moyennes effectuées sur 100 acquisitions (convergence assez lente).

En excitation harmonique, le niveau a été réglé fortement afin d'obtenir des résultats de mesure précis et on a moyenné les valeurs sur 20 acquisitions (convergence très rapide).

Les précisions obtenues par ces deux excitations ont été différentes et permettent, dans la suite, d'apprécier la qualité des résultats correspondants.

A titre indicatif, on montre en figure 6.3, la vitesse quadratique moyenne obtenue avec le bruit blanc, pour que le lecteur puisse situer les fréquences étudiées par rapport aux fréquences propres de la structure.

### 6.3.2 Résultats

Les données de mesure que l'on se propose d'utiliser dans la suite sont illustrées en figures 6.4, 6.5 et 6.7. Les deux premières figures montrent les accélérations mesurées le long de la poutre à  $304 \text{ Hz}$  (entre le cinquième et le sixième mode), à partir de l'excitation harmonique et de l'excitation en bruit blanc. En figure 6.6, on indique la cohérence obtenue à  $304 \text{ Hz}$  entre les signaux  $A$  et  $B$  avec l'excitation en bruit blanc. On remarquera qu'elle chute systématiquement là où la valeur mesurée est petite, ce qui traduit bien que

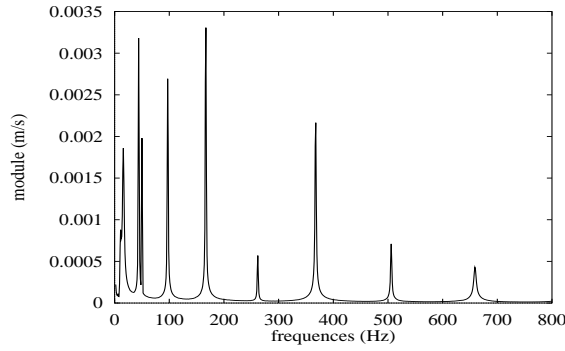


FIG. 6.3 – *Vitesse quadratique moyenne mesurée sur la poutre en fonction de la fréquence.*

le rapport signal/bruit est faible.

Il est clair que l'excitation harmonique donne des valeurs plus précises et que les erreurs de mesure y sont moins importantes. On peut constater, qu'il n'est pas possible de localiser la source, à partir d'une information d'accélération à fréquence pure, le long de la poutre, car aucune singularité n'apparaît au niveau de la position du point d'excitation.

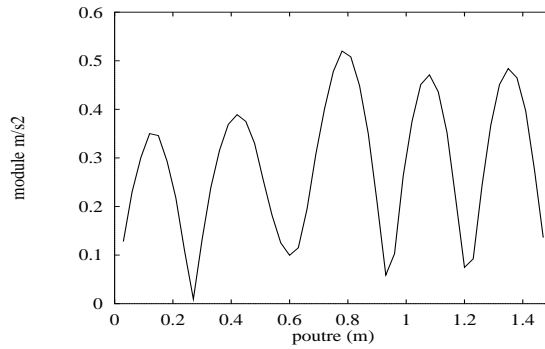


FIG. 6.4 – *Accélérations mesurées le long de la poutre à 304 Hz avec une excitation harmonique.*

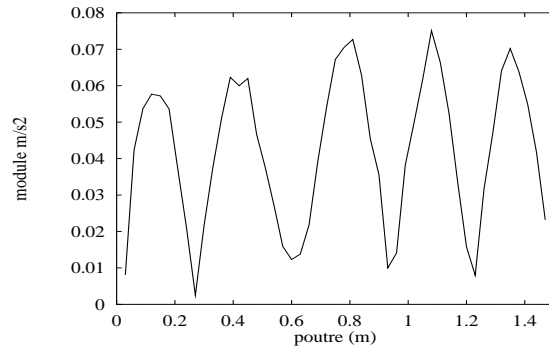


FIG. 6.5 – Accélérations mesurées le long de la poutre à 304 Hz avec une excitation en bruit blanc.

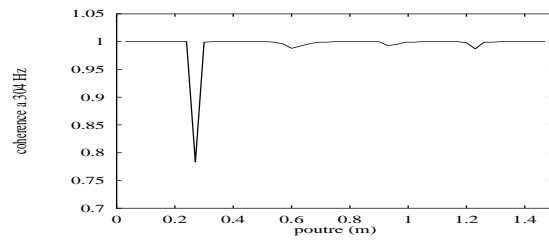


FIG. 6.6 – Cohérences obtenues le long de la poutre à 304 Hz avec une excitation en bruit blanc.



La figure 6.7 montre les accélérations obtenues à  $167\text{ Hz}$ , c'est-à-dire à la quatrième fréquence propre du système, correspondant à un mode très isolé. Là aussi, la localisation n'est pas possible par simple observation. Cette difficulté de localiser les sources n'est pas nouvelle et justifie les études entreprises à ce sujet, en particulier l'intensimétrie de structure.

On propose donc d'appliquer dans les deux sous-sections suivantes, les deux méthodes de reconstitution des efforts que l'on a développées dans les chapitres 1 et 2 (méthode globale et locale), aux champs de déplacement précédents, ce qui donnera une bonne validation expérimentale de la technique proposée.

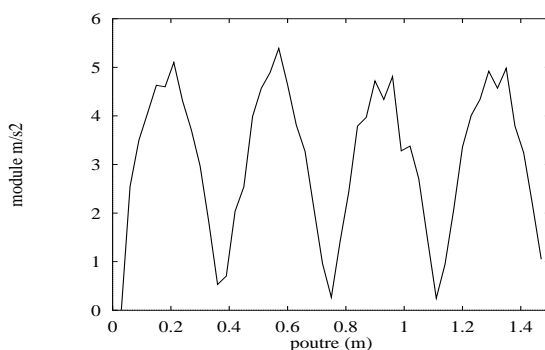


FIG. 6.7 – Accélérations mesurées le long de la poutre à  $167\text{ Hz}$  (quatrième résonance) avec une excitation en bruit blanc.

### 6.3.2.1 Méthode globale

Pour cette méthode, on doit connaître les conditions limites pour pouvoir utiliser les déformées propres de la structure, comme fonctions de base. Le montage réalisé (voir paragraphe 6.3.1) est proche de celui d'une poutre sur appuis. Cependant, le serrage des systèmes de fixation, qui est nécessaire pour éviter le décollement de la poutre, a pour conséquence de limiter le mouvement de rotation aux extrémités de la structure. Le moment fléchissant n'est donc pas parfaitement nul, mais on utilisera tout de même les déformées propres d'une poutre sur appuis ( $\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L}x$ ), qui forment une base de fonctions cinématiquement admissibles (les déplacements sont nuls en  $x = 0$  et  $x = L$ ).

En figures 6.8, 6.9 et 6.10, on applique, sur les trois cas étudiés, la méthode globale en utilisant le maximum de forces généralisées ( $N = 100$ ), comme nous l'avons fait au chapitre 1. Le nombre de forces généralisées  $N$  est bien trop grand et les ordres de rangs élevés amplifient les erreurs de mesure. Il en résulte une distribution de force aberrante.

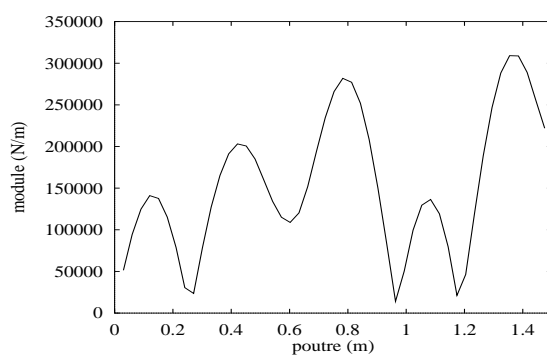


FIG. 6.8 – *Distribution de force reconstruite par la méthode globale, à partir des données mesurées à 304 Hz avec une excitation harmonique.*

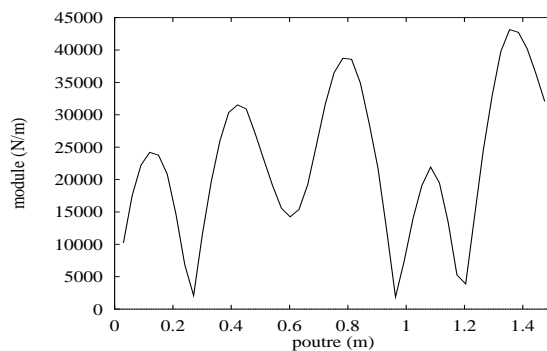


FIG. 6.9 – *Distribution de force reconstruite par la méthode globale, à partir des données mesurées à 304 Hz avec une excitation en bruit blanc.*

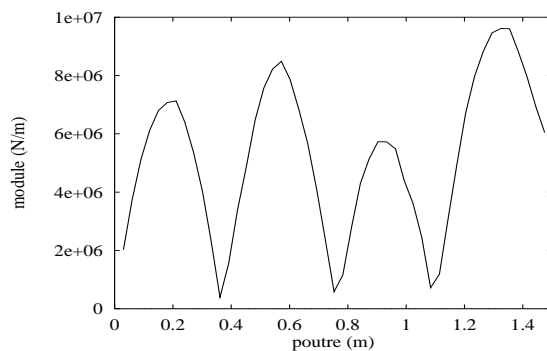


FIG. 6.10 – *Distribution de force reconstruite par la méthode globale, à partir des données mesurées à 167 Hz (quatrième mode) avec une excitation en bruit blanc.*

En figures 6.11, 6.12 et 6.13, les distributions sont issues de séries tronquées ( $N = \frac{2kL}{\pi}$  en trait continu et  $N = \frac{4kL}{\pi}$  en trait pointillé).

Pour la fréquence  $304 \text{ Hz}$ , on constate la possibilité de localiser et d'identifier le module l'effort pour  $N = 10 \text{ modes}$ . On voit aussi que prendre plus de termes ( $N = 20 \text{ modes}$ ) est valable uniquement dans le cas où les données ont été mesurées avec l'excitation harmonique. En bruit blanc, on obtient alors un résultat aberrant. Cela confirme bien le fait que la troncature modale dépend du niveau d'incertitude des mesures et que les mesures en bruit blanc peuvent s'avérer insuffisantes pour notre méthode.

Pour la fréquence d'excitation  $167 \text{ Hz}$ , on n'arrive pas à régulariser le problème. C'est en effet le cas où la poutre est excitée sur une résonance très marquée. Nous avons vu au chapitre 2 que dans ce cas, la méthode n'est pas valide. L'information est concentrée sur une seule amplitude modale. Elle ne suffit pas pour localiser la force.

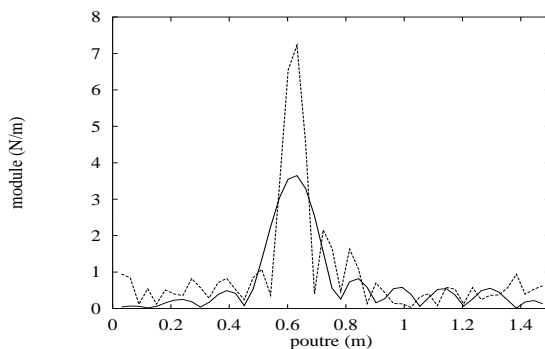


FIG. 6.11 – *Distribution de force reconstruite par la méthode globale, à partir des données mesurées à 304 Hz avec une excitation harmonique ( $|F| = 0.59N$ ). En trait continu :  $N = 10 \text{ modes}$ ,  $|F| = 0.61N$ . En trait pointillé :  $N = 20 \text{ modes}$ ,  $|F| = 0.64N$ .*

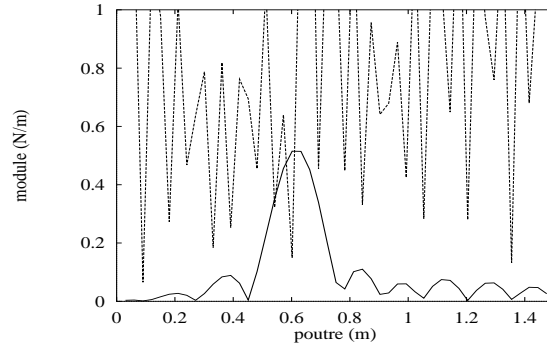


FIG. 6.12 – *Distribution de force reconstruite par la méthode globale, à partir des données mesurées à 304 Hz avec une excitation en bruit blanc ( $|F| = 0.09N$ ).  
En trait continu :  $N = 10$  modes,  $|F| = 0.08N$ .  
En trait pointillé :  $N = 20$  modes.*

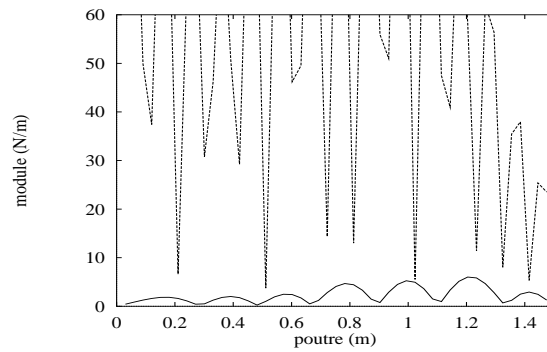


FIG. 6.13 – *Distribution de force reconstruite par la méthode globale, à partir des données mesurées à 167 Hz (quatrième mode) avec une excitation en bruit blanc.  
En trait continu :  $N = 8$  modes.  
En trait pointillé :  $N = 16$  modes.*

### 6.3.2.2 Méthode locale

Nous utilisons, cette fois-ci, la méthode locale (méthode R.I.F.F.), qui consiste à calculer la distribution de force par un schéma aux différences finies et de régulariser le problème par filtrage et fenêtrage.

Le résultat du schéma aux différences finies est illustré, pour les trois cas étudiés, en figures 6.14, 6.15 et 6.16. On constate aussi que les erreurs de mesure entraînent des effets indésirables sur la distribution obtenue.

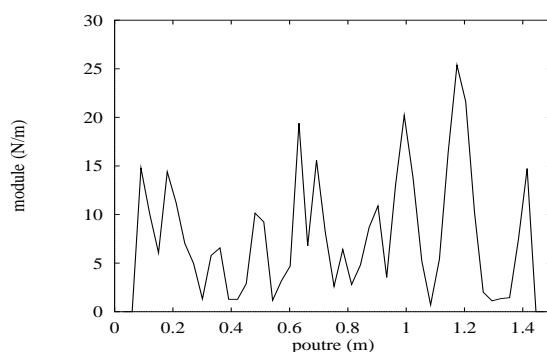


FIG. 6.14 – *Distribution de force reconstruite par la méthode locale, à partir des données mesurées à 304 Hz avec une excitation harmonique.*

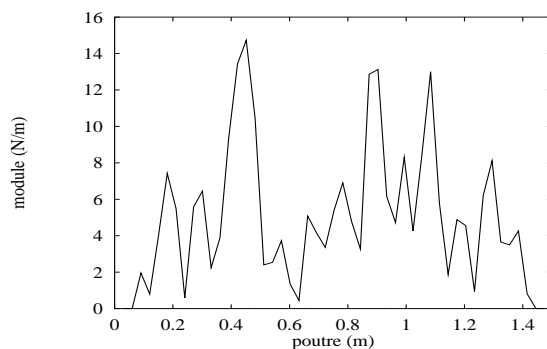


FIG. 6.15 – *Distribution de force reconstruite par la méthode locale, à partir des données mesurées à 304 Hz avec une excitation en bruit blanc.*

La première régularisation (fenêtrage et filtrage idéal) a été appliquée sur ces résultats et sont montrés en figures 6.17, 6.18 et 6.19. Deux nombres d'onde de coupure ont été utilisés :  $k_c = 2k$  (en trait continu) et  $k_c = 4k$  (en trait pointillé). Ces courbes sont tout à fait analogues aux résultats de la méthode globale. Leurs interprétations sont identiques.

Toutefois, la distribution recherchée est discontinue (effort ponctuel). Le filtrage idéal a tendance à trop lisser le résultat. On observe donc des oscillations causées par le phénomène de Gibbs. En figures 6.20, 6.21 et 6.22, on applique la deuxième régularisation

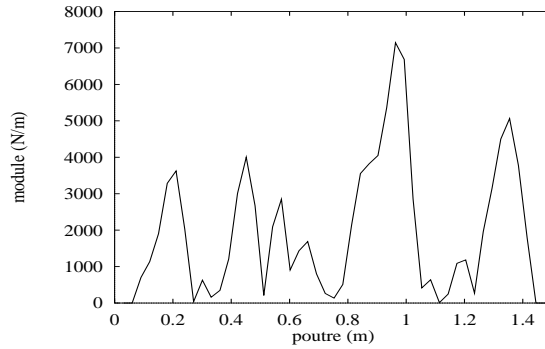


FIG. 6.16 – *Distribution de force reconstruite par la méthode locale, à partir des données mesurées à 167 Hz (quatrième mode) avec une excitation en bruit blanc.*

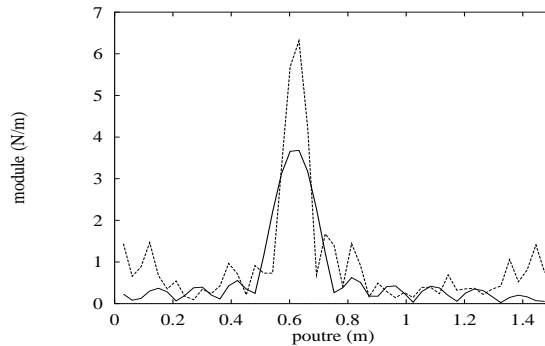


FIG. 6.17 – *Distribution de force reconstruite par la méthode locale, à partir des données mesurées à 304 Hz avec une excitation harmonique ( $|F| = 0.59 N$ ).*

*Le filtrage est idéal.*

*En trait continu :  $k_c = 2k$ ,  $|F| = 0.53 N$ .*

*En trait pointillé :  $k_c = 4k$ ,  $|F| = 0.56 N$ .*

(filtrage à réponse finie) que nous avons développée au paragraphe 2.3.2.3. Cette régularisation permet à la méthode, de garder son aspect local (on utilise 9 points de mesure à 304 Hz), tout en constatant une réduction des oscillations précédemment observées. Cependant, on observe toujours l'impossibilité de régulariser le problème lorsque la structure est excitée sur une de ses résonances (figure 6.22).

L'application des deux méthodes de reconstruction des efforts, à partir de données mesurées, est validée. Les résultats obtenus sont conformes aux interprétations que nous avons formulé, à partir de simulations numériques.

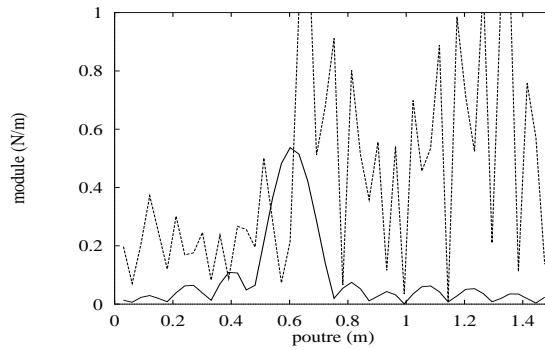


FIG. 6.18 – *Distribution de force reconstruite par la méthode locale, à partir des données mesurées à 304 Hz avec une excitation en bruit blanc ( $|F| = 0.09N$ ). Le filtrage est idéal.*  
*En trait continu :  $k_c = 2k$ ,  $|F| = 0.08N$ .*  
*En trait pointillé :  $k_c = 4k$ .*

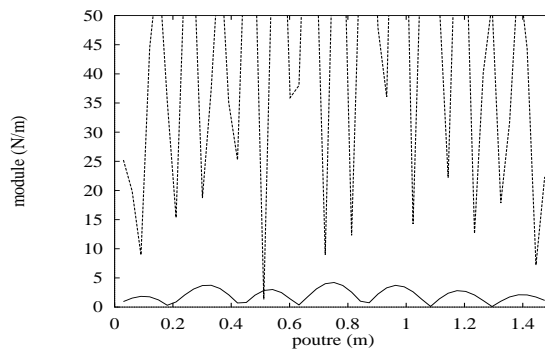


FIG. 6.19 – *Distribution de force reconstruite par la méthode locale, à partir des données mesurées à 167 Hz (quatrième mode) avec une excitation en bruit blanc.*  
*Le filtrage est idéal.*  
*En trait continu :  $k_c = 2k$ .*  
*En trait pointillé :  $k_c = 4k$ .*

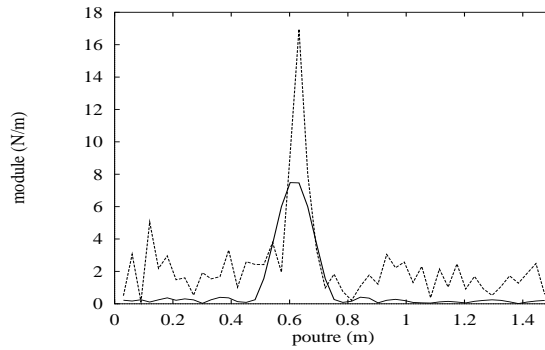


FIG. 6.20 – *Distribution de force reconstruite par la méthode locale, à partir des données mesurées à 304 Hz avec une excitation harmonique ( $|F| = 0.59N$ ). Le filtrage est optimisé avec un facteur de forme  $f = 1$ .  
 En trait continu :  $k_c = 2k$ ,  $|F| = 0.57N$ .  
 En trait pointillé :  $k_c = 4k$ ,  $|F| = 0.52N$ .*

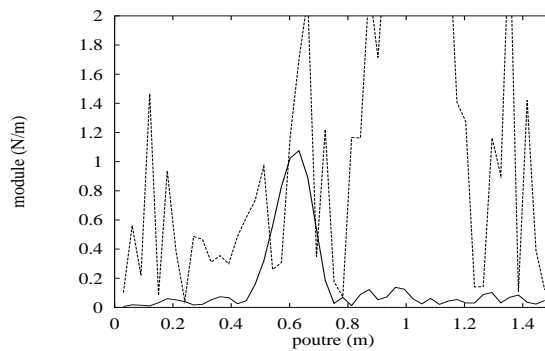


FIG. 6.21 – *Distribution de force reconstruite par la méthode locale, à partir des données mesurées à 304 Hz avec une excitation en bruit blanc ( $|F| = 0.59N$ ). Le filtrage est optimisé avec un facteur de forme  $f = 1$ .  
 En trait continu :  $k_c = 2k$ ,  $|F| = 0.08N$ .  
 En trait pointillé :  $k_c = 4k$ .*



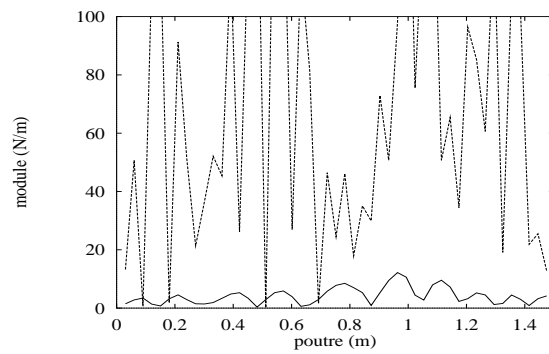


FIG. 6.22 – *Distribution de force reconstruite par la méthode locale, à partir des données mesurées à 167 Hz (quatrième mode) avec une excitation en bruit blanc.*

*Le filtrage est optimisé avec un facteur de forme  $f = 1$ .*

*En trait continu :  $k_c = 2k$ .*

*En trait pointillé :  $k_c = 4k$ .*

## 6.4 Validation sur plaques

### 6.4.1 Montage et caractéristiques des plaques

Dans cette partie du chapitre, nous proposons de montrer l'application de la méthode R.I.F.F. sur des plaques en aluminium ( $E = 7.2 \cdot 10^{10} N/m^2$ ,  $\rho = 2700 kg/m^3$ , facteur de perte  $\eta = 10^{-4}$ ), d'épaisseur  $h = 1.5 mm$ , de cotés  $L_x = L_y = 1 m$ , suspendues à un portique. Les accélérations vibratoires sont mesurées sur une partie de la plaque (carré de  $26 cm$  de cotés). Le maillage est constitué de  $14 \times 14$  points. L'excitation est fournie par un pot vibrant alimenté par un bruit blanc, où l'on a mesuré, par capteur de force, le module de l'effort appliqué. Les valeurs mesurées correspondent à la moyenne obtenue sur 100 acquisitions. La figure 6.23 présente le montage tel qu'il a été réalisé.

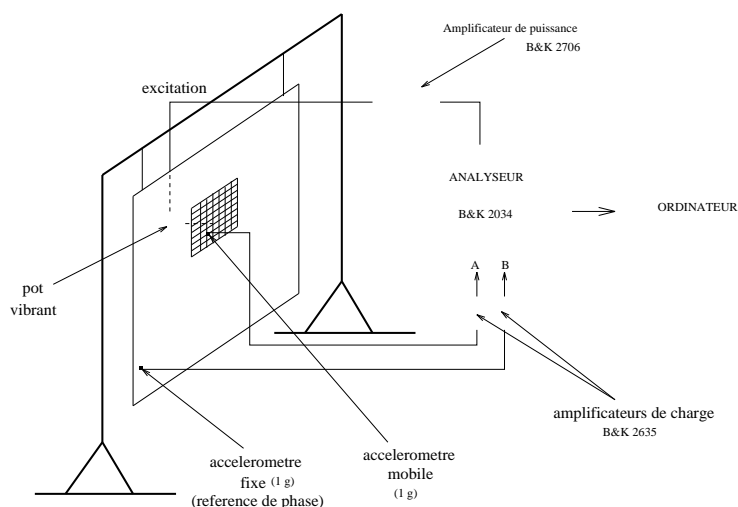


FIG. 6.23 – Montage expérimental dans le cas de la plaque

Deux plaques ont été étudiées :

- La première est simple. Le point d'excitation se trouve dans la fenêtre de mesure ( $x_F = 14 cm$  et  $y_F = 12 cm$ ). On propose de le localiser.
- La deuxième est une plaque où on a collé cinq raidisseurs en L horizontaux et équidistants (cf figure 6.24). La surface collée du raidisseur est située entre  $y_1 = 0.13 m$  et  $y_2 = 0.15 m$  dans le repère associé à la fenêtre de mesure. Le point d'excitation est placé en dehors de la fenêtre de mesure.

En figure 6.25, on montre, à titre d'indication, les vitesses quadratiques moyennes obtenues, par intégration sur la fenêtre spatiale de mesure. Les pics observés correspondent aux résonances des plaques. On constate bien sur, que les densités modales des plaques de cette expérience sont bien plus fortes que celles de la poutre de l'expérience précédente.

### 6.4.2 Résultats

Les distributions que nous présentons dans les deux sous-sections suivantes sont obtenues avec la méthode R.I.F.F.. Le schéma aux différences finies correspond à la discrétisation de l'équation du mouvement de la plaque (cf équation 3.11). La régularisation est réalisée avec le principe du multifiltrage que l'on a présenté en 3.4.3.4, où les filtres "carré" et

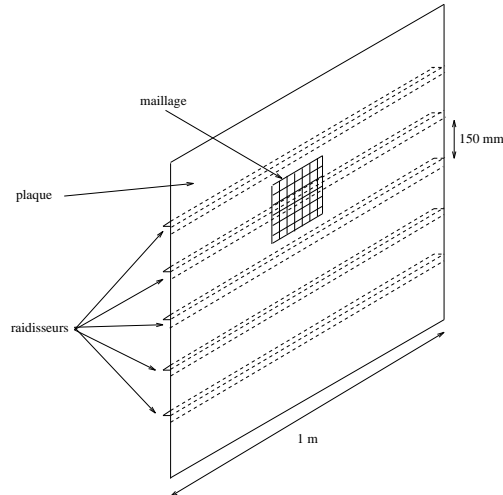


FIG. 6.24 – *Plaque raidie*

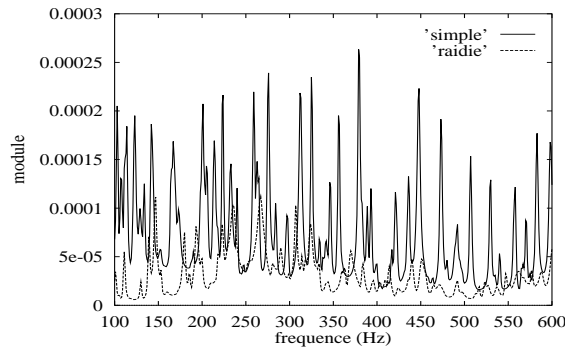


FIG. 6.25 – *Vitesse quadratique moyenne mesurée sur la fenêtre de mesure, en fonction de la fréquence.*

"losange" sont munis de réponses finies, avec des facteurs de forme fixés à 1. On propose de montrer, pour chaque cas étudié, le champ vibratoire, la distribution de force obtenue par les différences finies, et la distribution régularisée.

#### 6.4.2.1 Plaque simple

Les figures 6.26, 6.27 et 6.28 montrent les trois résultats (déplacement, différences finies, régularisation) réalisés pour la fréquence 520 Hz. Cette fréquence se situe à la limite supérieure de la gamme fixée par l'étude. En effet, l'échantillonnage spatial fixe le nombre d'onde de Shannon :

$$\frac{k_{ex}}{2} = \frac{\pi}{\Delta_x} = 157 \text{ rad/m} \quad (6.4)$$

Le rapport entre ce nombre et le nombre d'onde naturel  $k$  est :

$$a = \frac{k_{ex}}{2k} = \frac{\pi}{\Delta_x \sqrt{\omega}} \sqrt[4]{\frac{D}{\rho h}} = 4.2 \quad (6.5)$$

En figure 6.27, on constate que l'échantillonnage joue déjà le rôle de filtre régularisant et

supprime presque l'effet néfaste du bruit associé aux incertitudes de mesure. En prenant  $k_c = 2k$ , on voit en figure 6.28 que la régularisation permet d'obtenir une bonne localisation de l'effort.

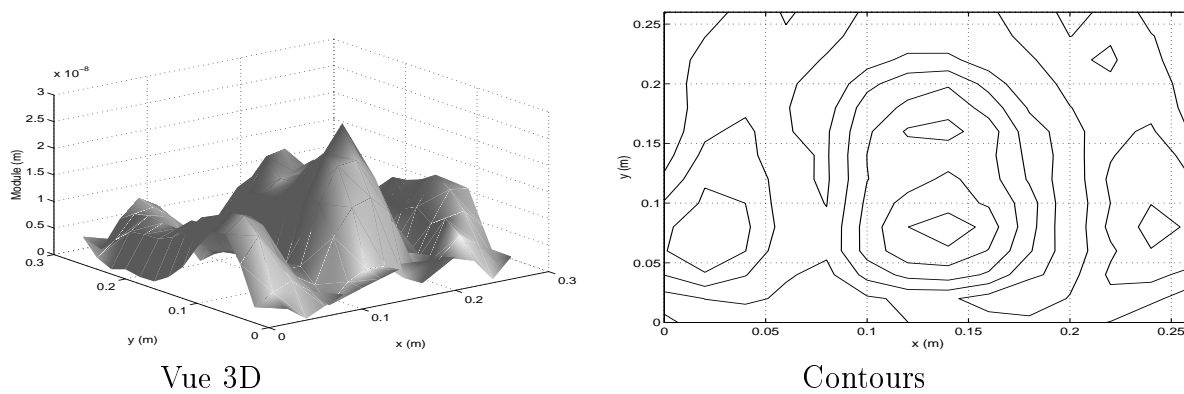


FIG. 6.26 – *Champ de déplacement obtenu sur la fenêtre de mesure à la fréquence 520 Hz, sur la plaque simple. Le module de la force mesuré est  $|F| = 0.008N$ .*

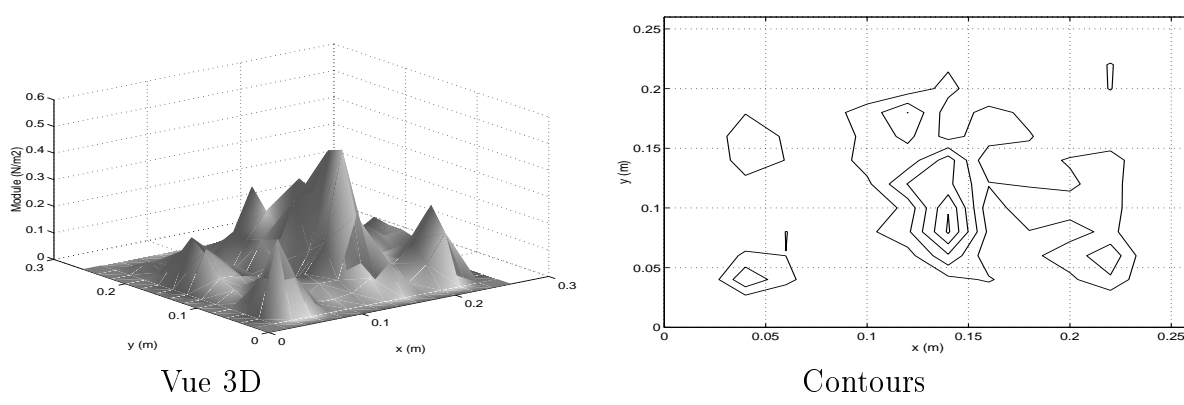
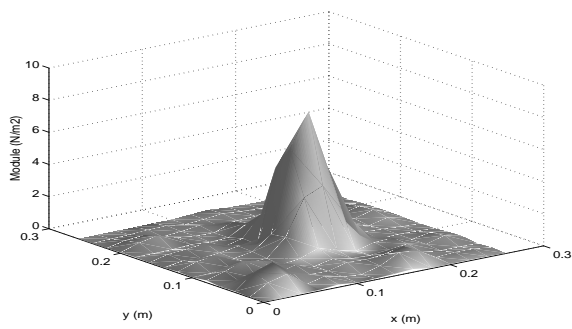
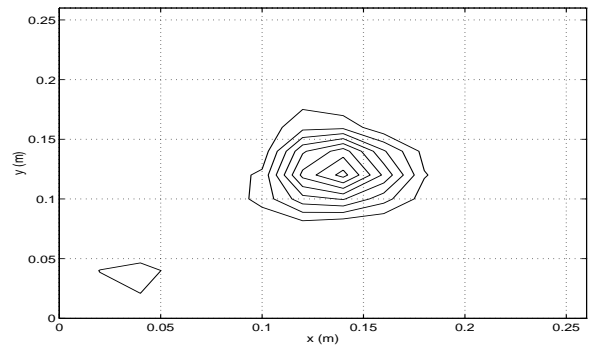


FIG. 6.27 – *Distribution de force obtenue après schéma aux différences finies à la fréquence 520 Hz, sur la plaque simple.*

Les distribution de déplacement, de force non régularisée, et de force régularisée, illustrées en figures 6.29,6.30 et 6.31, correspondent aux résultats obtenus à la fréquence 448 Hz qui est une fréquence de résonance (cf relevé de la vitesse quadratique en figure 6.25). On s'aperçoit que la méthode R.I.F.F. est tout à fait applicable sur une résonance de plaque. Contrairement à l'exemple de la poutre que nous avons vu précédemment, le mode résonant n'est pas le seul excité. Le recouvrement modal est assez élevé pour que plusieurs modes répondent de façon significative, ce qui rend possible la localisation de l'effort. En généralisant ce résultat, on peut dire que la localisation du point d'excitation est possible sur les fréquences propres des systèmes vibrants à densités modales suffisamment fortes.



Vue 3D

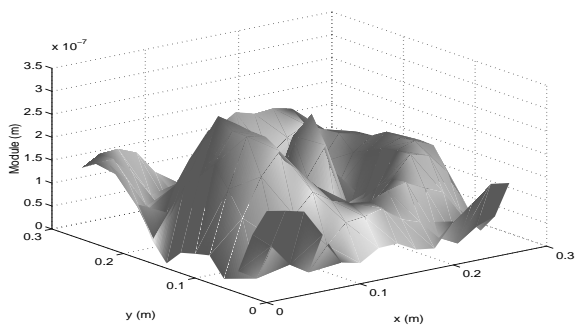


Contours

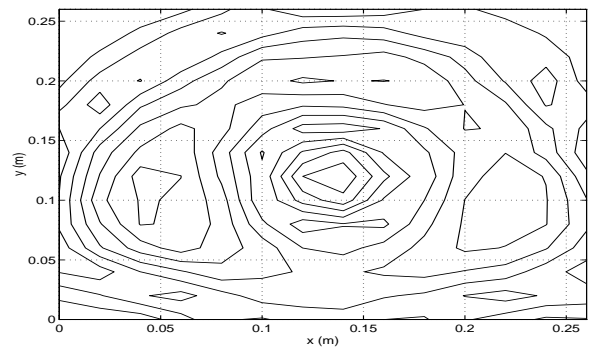
FIG. 6.28 – *Distribution de force obtenue après régularisation à la fréquence 520 Hz, sur la plaque simple.*

*Le filtrage est réalisé pour  $k_c = 2k$ .*

*Le module de la force identifié est  $|F| = 0.002N$ .*



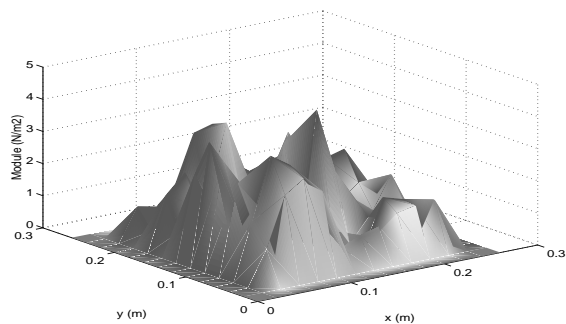
Vue 3D



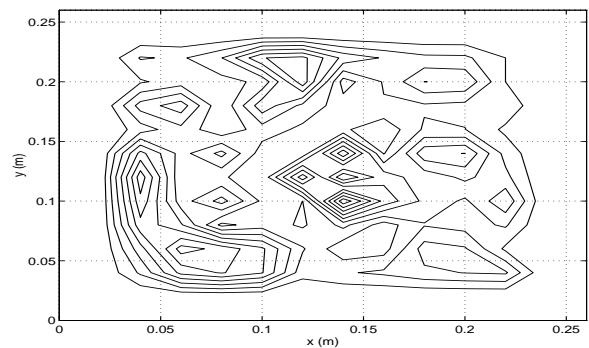
Contours

FIG. 6.29 – *Champ de déplacement obtenu sur la fenêtre de mesure à la fréquence 448 Hz (fréquence de résonance), sur la plaque simple.*

*Le module de la force mesuré est  $|F| = 0.03N$ .*

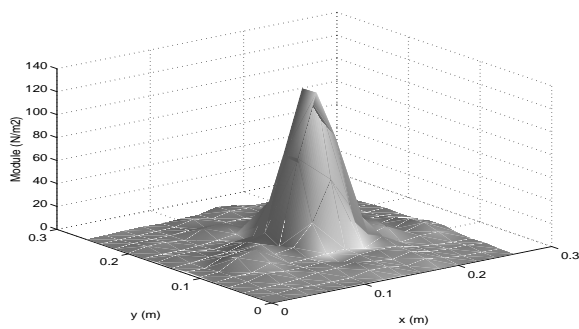


Vue 3D

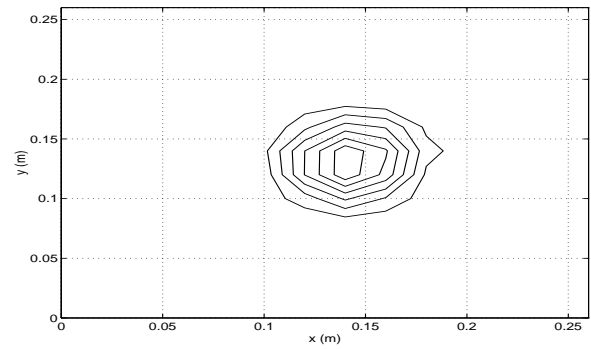


Contours

FIG. 6.30 – *Distribution de force obtenue après schéma aux différences finies à la fréquence 448 Hz (fréquence de résonance).*



Vue 3D



Contours

FIG. 6.31 – *Distribution de force obtenue après régularisation à la fréquence 448 Hz (fréquence de résonance), sur la plaque simple.*

*Le filtrage est réalisé pour  $k_c = 2k$ .*

*Le module de la force identifié est  $|F| = 0.03N$ .*

### 6.4.2.2 Plaque raidie

La figure 6.32, illustre le champ de déplacement à la fréquence  $580 \text{ Hz}$ . On constate bien que le raidisseur tend à réduire la vibration à son emplacement ( $y = 13 \text{ cm}$ ). Les efforts de contact qu'il applique sur la plaque sont d'autant plus forts que les vibrations de la plaque sans raidisseur sont grandes. L'application du schéma aux différences finies est montrée en figure 6.33. La distribution de force appliquée à la plaque est composée essentiellement de bruit, en particulier là où le déplacement est important. L'utilisation du multifiltrage à réponses finies (en figure 6.34) sur cette distribution bruitée régularise le problème et fait apparaître une densité de force composée de deux pics situés en  $x_{F1} \simeq 8 \text{ cm}$  et  $y_{F1} \simeq 14 \text{ cm}$ ;  $x_{F2} \simeq 17 \text{ cm}$  et  $y_{F2} \simeq 13 \text{ cm}$ .

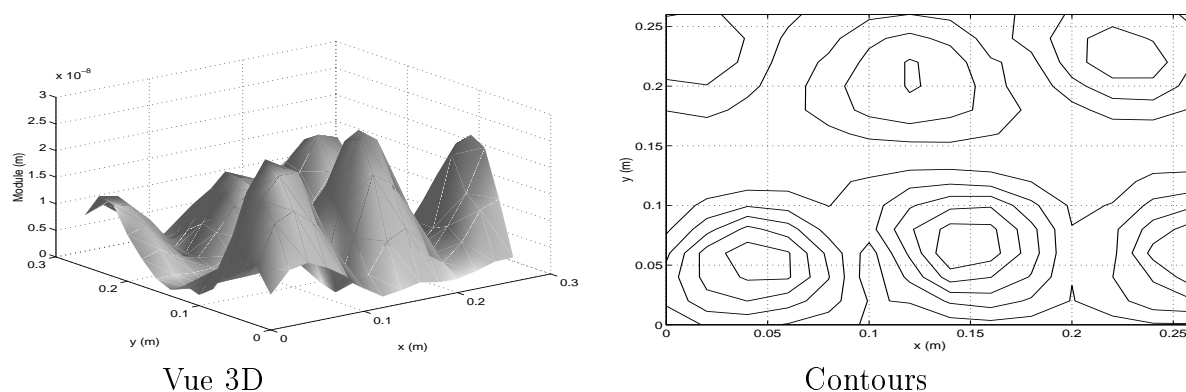


FIG. 6.32 – *Champ de déplacement obtenu sur la fenêtre de mesure à la fréquence 580 Hz, sur la plaque raidie.*

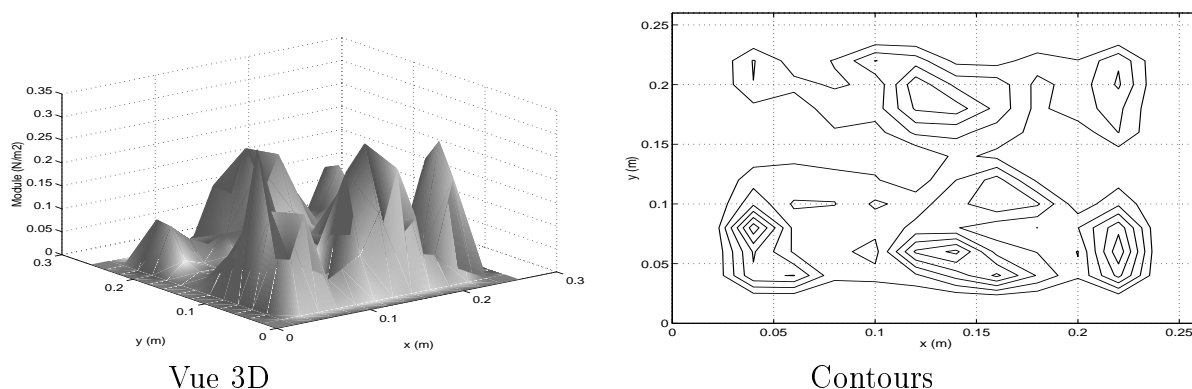


FIG. 6.33 – *Distribution de force obtenue après schéma aux différences finies à la fréquence 580 Hz, sur la plaque raidie.*

Bien entendu, la densité de force obtenue correspond à l'action du raidisseur sur la plaque pour la fréquence  $580 \text{ Hz}$ . L'application de la méthode R.I.F.F. sur les données obtenues à une autre fréquence d'analyse (voir figures 6.35 et 6.36) donne une distribution différente où l'action du raidisseur est principalement une seule force répartie entre  $x_1 = 2.5 \text{ m}$  et  $x_2 = 19.5 \text{ m}$ .

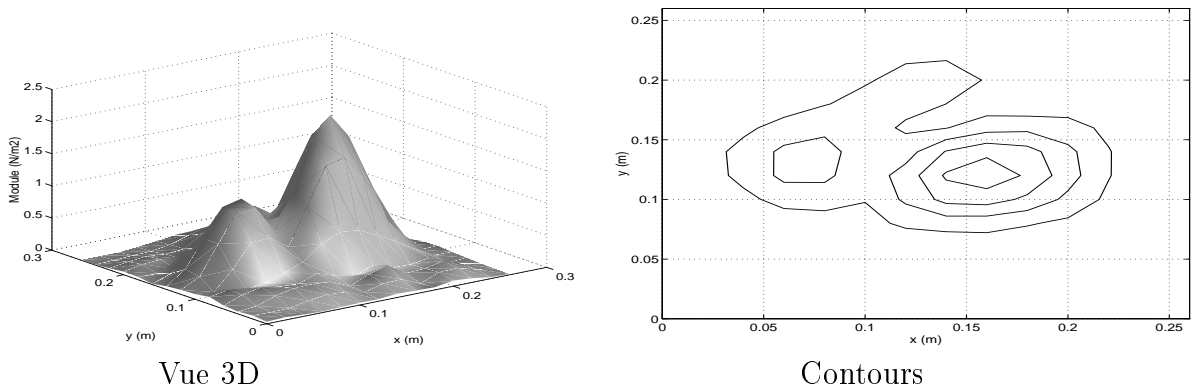


FIG. 6.34 – *Distribution de force obtenue après régularisation à la fréquence 580 Hz, sur la plaque raidie. Le filtrage est réalisé pour  $k_c = 1.5k$ .*

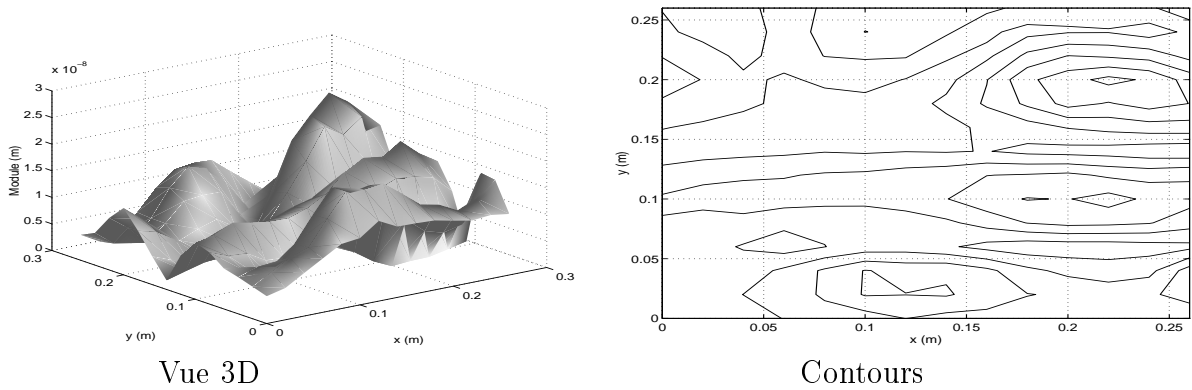


FIG. 6.35 – *Champ de déplacement obtenu sur la fenêtre de mesure à la fréquence 550 Hz, sur la plaque raidie.*

## 6.5 Conclusion

Ce chapitre a permis de valider expérimentalement plusieurs aspects quand à la localisation et la détermination des efforts. Le principe de mesure est très simple. Il s'agit de mesurer l'autospectre des accélérations en chaque point du maillage (pour obtenir le module des déplacements) et l'interspectre de ces mêmes accélérations avec celle d'un point fixe sur la structure (pour obtenir la phase du déplacement). Les expérimentations présentées ici utilisent deux accéléromètres. On peut, bien sur, imaginer d'autres types d'acquisition (laser, antenne holographique, etc...) qui présentent des avantages de manipulation.

Deux types de structures ont été utilisées : une poutre et deux plaques. Pour la poutre, on montre les différentes étapes développées dans les chapitres 1 et 2, en particulier l'application de la méthode globale et de la méthode locale. Ces deux approches donnent des résultats similaires, mais l'utilisation des différences finies régularisée par la méthode R.I.F.F. est préférable car elle permet d'obtenir des résultats plus précis si on utilise un filtre à réponse fini.

Pour les plaques, on utilise la méthode R.I.F.F. afin de localiser une source d'excitation sur une plaque simple et d'analyser les efforts appliqués sur une plaque raidie. Les résul-



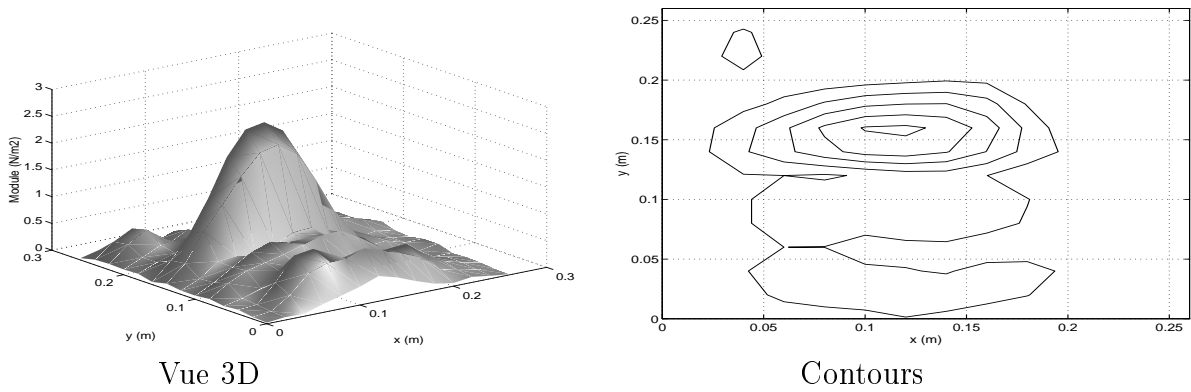


FIG. 6.36 – *Distribution de force obtenue après régularisation à la fréquence 550 Hz, sur la plaque raidie. Le filtrage est réalisé pour  $k_c = 1.5k$ .*

tats et les interprétations du chapitre 3, que l'on avait obtenus à partir de simulations, sont confirmés. On montre bien qu'il est possible de localiser une source, non seulement pour des fréquences quelconques, mais aussi pour des fréquences de résonance (résultats obtenus sur la plaque simple), et que la méthode d'identification peut s'étendre facilement à une méthode d'analyse qui décompose une structure complexe en une structure simple soumise à des efforts de couplage (résultats obtenus sur la plaque raidie).

Ces premières expérimentations mettent en évidence que la méthode d'identification est simple et robuste. Son application sur des cas d'école n'a posé aucun problème particulier. On peut envisager d'étendre une telle technique sur des cas industriels, représentatifs des problèmes évoqués par les industriels eux-mêmes, et aussi de valider les identifications des conditions limites et de l'opérateur d'une structure quelconque.

# Conclusion

Cette étude avait pour objectif de développer une méthode, la plus simple possible, pour localiser et identifier les différents efforts qui participent à la vibration d'une structure, avec un minimum de connaissance au préalable. Deux méthodes ont été développées dans le cas de structures monodimensionnelles. Elles sont basées sur le calcul du second membre de l'équation du mouvement. Elles se différencient sur l'approche du calcul des dérivées spatiales du déplacement vibratoire. La première (méthode globale) calcule ces dérivées en utilisant le concept de décomposition modal du mouvement. La deuxième est une méthode de dérivation numérique qui utilise un schéma aux différences finies (méthode locale). Trois raisons font que la méthode locale est préférée :

- Elle n'utilise que des données locales (non nécessité de connaître tout le champ de déplacement).
- Elle n'utilise pas les conditions aux limites (réduction des informations à priori).
- Elle donne des résultats plus précis.

La difficulté de ces méthodes qui calculent les dérivées spatiales du déplacement est qu'elles présentent une forte instabilité aux erreurs de mesure. C'est la difficulté des problèmes inverses qui nécessitent un traitement ultérieur (régularisation) pour les rendre stables. La régularisation proposée ici est une méthode de filtrage. Que ce soit la méthode globale ou la méthode locale, on montre bien que ce sont les composantes associées aux hauts nombres d'onde qui sont affectées par le bruit des incertitudes de mesure. Pour la méthode globale, il s'agit de réduire convenablement le nombre de modes utilisés. Pour la méthode locale, on a développé la méthode R.I.F.F. (Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée) qui est basée sur l'utilisation d'une fenêtre spatiale et d'un filtre passe-bas dans le domaine des nombres d'onde. On montre en particulier qu'un filtre à réponse finie donne des résultats très satisfaisants, et que son application sur des structures monodimensionnelles et bidimensionnelles est tout à fait réalisable.

La méthode R.I.F.F. est une approche régularisatrice très intéressante car elle est simple et son utilisation pour la reconstruction des efforts donne des résultats excellents. En plus de cet objectif, nous nous sommes intéressés à son application pour l'identification des conditions limites et de celle de l'opérateur (équation du mouvement) d'une structure inconnue, en utilisant des schémas aux différences finies. On montre que l'identification des conditions limites n'est pas facile. Une telle technique ne permet pas d'obtenir une mesure précise de la condition limite. Dans ce cas, la méthode R.I.F.F. est une approche plutôt qualitative qui peut permettre de situer la condition limite entre les quatre conditions extrêmes qu'on utilise en général dans les modélisations vibratoires (appuis, encastrement, guidage, libre). Enfin, la reconstruction de l'opérateur est une voie encourageante. En effet, on montre qu'en connaissant, par la mesure, le champ de déplacement et l'effort in-

jecté (qui doit être réparti), il est possible de reconstruire l'opérateur qui décrit le modèle vibratoire de la structure. Dans ce travail, on constate que l'utilisation de cet opérateur est applicable pour la reconstruction des efforts. On arrive donc à une approche qui est capable de localiser des forces sur une structure complètement inconnue (aucune information à priori).

Les expérimentations réalisées au laboratoire valide la reconstruction des distributions des forces sur poutre et plaques. Les expériences à prévoir, pour la suite, sont les validations de l'identification des conditions limites et de l'opérateur, toujours sur des cas d'école. Quand à la reconstruction des efforts, il est prévu d'utiliser des données de mesure sur des structures industrielles, c'est-à-dire sur des structures beaucoup plus réalistes que des poutres et des plaques.

Comme extensions, plusieurs voies s'ouvrent à cette étude. On peut déjà envisager d'étendre la méthode d'identification de forces à d'autres types d'opérateurs, en particulier d'utiliser une discrétisation par éléments finis (cf [50],[51]). Les codes de calcul qui existent aujourd'hui sur le marché peuvent fournir un modèle éléments finis (matrice de masse et de raideur), directement utilisable comme opérateur de base sur des structures plus complexes (on remplace la discrétisation par différences finies). On conçoit alors la possibilité de régulariser ensuite le problème inverse avec la méthode R.I.F.F.. Pour les industriels, cette voie est forcément intéressante, car leurs simulations sont, en général, fournies par des modèles éléments finis, mais les efforts qui excitent les structures ne sont pas toujours bien connus.

En plus d'une telle extension, on peut aussi voir la détermination de forces comme un moyen de recalage calcul-essais. En effet, il arrive bien souvent qu'un modèle éléments finis soit trop éloigné de la réalité pour être prédictif. Pour cela, on utilise de plus en plus des méthodes de recalage (cf [3], [1] et [10]), dont le principe est de corriger les paramètres du modèle afin que les résultats de la simulation coïncident, au mieux, avec les données de mesure. Ici, on peut concevoir de ne pas corriger le modèle, mais d'utiliser les efforts résultants des erreurs de modélisation et issus des mesures. Dans ce cas, la correction ne se fait qu'en "post-processing", en ajoutant les forces "fictives" identifiées, au second membre du système à résoudre.

En tous cas, le plus bel enjeu que l'on peut voir pour la méthode R.I.F.F. est certainement l'identification de l'opérateur, à partir de données de mesure. Dans ce travail, les simulations ont montré que l'on peut très bien utiliser un opérateur ainsi identifié (opérateur expérimental), pour reconstruire les efforts, donc de résoudre le problème inverse. La première question qui vient à l'esprit est de savoir, s'il est possible, d'utiliser cet opérateur pour le problème direct (calcul du champ vibratoire), c'est-à-dire d'avoir un modèle prédictif, avec ou sans recalage.

On voit donc que la méthode R.I.F.F. est ouverte à un vaste champ d'application. Elle est simple à mettre en oeuvre, elle est efficace et robuste. L'idée d'utiliser un filtrage comme moyen de régularisation a fait ses preuves, non seulement dans ce travail, mais aussi dans d'autres disciplines qui nécessitent le besoin de résoudre un problème inverse (cf introduction). Aujourd'hui, ce genre d'approche doit devenir un des premiers réflexes de régularisation.

# Références bibliographiques

- [1] **BARUCH, M.** – Optimization correction of mass and stiffness using measured modes. *AIAA Journal*, 1982, Vol. 20, N°1, p. 1623-1626.
- [2] **BELLANGER, M.** – *Traitement numérique du signal. théorie et pratique*, 4ième édition. – Paris: Masson, 1990. 463p.
- [3] **BERMAN, A. et FLAMMELY, G.W.** – Theory of incomplete models of dynamic structures. *AIAA Journal*, 1971, Vol. 9, N°8, p. 1481-1487.
- [4] **BERRY, A. GUYADER, J-L et NICOLAS, J.** – A general formulation for the sound radiation from rectangular, baffled plates with arbitrary boundary conditions. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1990, Vol. 88, N°6, p. 2792-2802.
- [5] **BONNET, M.** – A numerical investigation for a source inverse problem in linear acoustics. *Journal Acoustique*, 1991, Vol. 4, N°3, p. 307-334.
- [6] **BONNET, M.** – Equations intégrales et dérivations par rapport au domaine: Application à l'identification de domaines en acoustique linéaire. In: *Colloque National en Calcul des Structures, Giens Var, 11-14 mars 1993.* – Paris, France: Hermès, 1993. p. 745-754.
- [7] **BRUNEAU, M.** – *Introduction aux théories de l'acoustique.* – Le Mans, France: Université du Maine, 1983. 634p.
- [8] **CANDEL, S.M. et CHASSAIGNON, C.** – Radial extrapolation of wave field by spectral methods. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1984, Vol. 76, N°6, p. 1823-1828.
- [9] **COIFMAN, R.R. et MAJID, F.** – Adaped waveform analysis and denoising. In: *Progress in Wavelet Analysis and Applications.* – Gif-sur-Yvette, France: Frontière, 1993. p. 63-76.
- [10] **COLLINS, J.D., HART, G.C., HASSELMAN, T.K., et KENNEDY, B.** – Statistical identification of structures. *AIAA Journal*, 1974, Vol. 12, N°2, p. 185-190.
- [11] **DER MATHÉOSSIAN, J.Y., GARCIA, A., et CARLES, C.** – Application of regularization methods to an inverse problem: nearfield acoustical holography in a reflective medium. In: *Journées Imagerie Acoustique: de la théorie à la pratique, Lyon, 1-2 mars 1994.* – Paris, France: Société Française d'Acoustique, 1994. p. 44-49.
- [12] **DER MATHÉOSSIAN, J.Y., GARCIA, A., CARLES, C., et PAS-CAL, J.C.** – Comparaison d'application de fenêtres spatiales au rayonnement acoustique de sources en holographie cylindrique. In: *Journal de Physique III - Vol. 2 - Colloque C1 supplément au Journal de Physique III - 2ème Congrès Français d'Acoustique.* – Les Ulis, France: Les Editions de Physique, avril 1992. p. 1129-1132.
- [13] **FAHY, F.J.** – *Sound intensity.* – London: Elsevier, 1989. 274p.
- [14] **FLETCHER, C.A.J.** – *Computational techniques for fluid dynamics.* – Berlin: Springer-Verlag, 1988. 1 Vol. , 409p.

- [15] **GARCIA, A., DER MATHÉOSSIAN, J.Y., PASCAL, J.C., et CARLES, C.** – Wavenumber filtering with double-layer cylindrical antenna in acoustical holography. *In: Proceedings of Internoise-93, Leuven Belgium, 24-26 august 1993.* – St Albans, UK: Institute of Acoustics, 1993. p.1327-1330.
- [16] **GASQUET, C. et WITOMSKI, P.** – *Analyse de fourier et application.* – Paris: Masson, 1990. 354p.
- [17] **GAVRIC, L. et PAVIC, G.** – A finite element method for computation of structural intensity by the normal mode approach. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, Vol. 164, N1, p.29-43.
- [18] **GOTTLIEB, D. et ORSZAG, S. A.** – *Numerical analysis of spectral methods: theory and applications*, 4th edition. – Philadelphia, Pennsylvania: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1986. 170p.
- [19] **HAYEK, S.I. et LUCE, T.W.** – Digital processing effects in cylindrical nearfield acoustical holography. *In: Journées Imagerie Acoustique: de la théorie à la pratique, Lyon, 1-2 mars 1994.* – Paris, France: Société Française d'Acoustique, 1994. p.7-14.
- [20] **HAYEK, S.I., PERCHESKY, M.J., et SUEN, B.C.** – Measurement and analysis of near and far field structural intensity by scanning laser vibrometry. *In: Intensité vibratoire dans les structures, 3ième congrès international sur l'intensimétrie, Senlis, 27-29 août 1990.* – Senlis, France: CETIM, 1990. p.281-288.
- [21] **JUNGER, M. et FEIT, D.** – *Sound, structures, and their interaction.* – Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1972. 448p.
- [22] **KUNT, M.** – *Traitement numérique des signaux*, 3ième édition. – Paris: Dunod, 1981. 402p.
- [23] **LAULAGNET, B. et GUYADER, J.L.** – Modal analysis of a shell's acoustic radiation in light and heavy fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, Vol. 131, N3, p.397-415.
- [24] **LESUEUR, C.** – *Rayonnement acoustique des structures.* – Paris: Editions Eyrolles, 1988. 591p.
- [25] **LOYAU, T. et PASCAL, J.C.** – Broadband acoustic holography reconstruction from acoustic intensity measurements. I: Principle of the method. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1988, Vol. 84, N5, p.1744-1750.
- [26] **MAIDANIK, G.** – The influence of fluid loading on the radiation from orthotropic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 1966, Vol. 3, N3, p.288-299.
- [27] **MAIDANIK, G.** – Vibrational and radiative classifications of modes of a baffled finite panel. *Journal of Sound and Vibration*, 1974, Vol. 34, N4, p.447-455.
- [28] **MAYNARD, J.D., WILLIAMS, E.G., et LEE, Y.** – Nearfield acoustic holography: I. Theory of generalized holography and the development of NAH. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1985, Vol. 78, N4, p.1395-1413.
- [29] **MEYER, Y.** – *Les ondelettes, algorithmes et applications.* – Paris: Armand Colin, 1992. 172p.
- [30] **MORSE, P. M.** – *Vibration and sound*, 2nd edition. – New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1948. 468p.
- [31] **NOISEUX, D.U.** – Measurement of power flow in uniform beams and plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1970, Vol. 47, N1, p.238-247.
- [32] **PAVIC, G.** – Measurement of structure borne wave intensity, part I: Formulation of the methods. *Journal of Sound and Vibration*, 1976, Vol. 49, N2, p.221-230.

- [33] PEZERAT, C. et GUYADER, J.L. – Localisation d'efforts appliqués sur des structures minces : régularisation du problème inverse. *In*: *Méthodes de surveillance et techniques de diagnostic acoustiques et vibratoires*, 2ième conférence internationale, Senlis, 10-12 octobre 1995. – Courbevoie, France : Société Française des Mécaniciens, 1995. p.147-158.
- [34] PEZERAT, C. et GUYADER, J.L. – Localization of mechanical sources exciting a beam using an inverse method. *In*: *Proceeding of Vibration and Noise'95, Venice Italy, 25-27 april 1995*. edited by J.G. GOODWIN. – Stafford, UK : Staffordshire University, 1995. p.190-202.
- [35] PEZERAT, C. et GUYADER, J.L. – Two inverse methods for localization of external sources exciting a beam. *Acta Acustica*, 1995, Vol. 3, N1, p.1-10.
- [36] ROMANO, A.J., ABRAHAM, P.B., et WILLIAMS, E.G. – A poynting vector formulation for thin shells and plates, and its application to structural intensity analysis and source localization. Part I: Theory. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1990, Vol. 87, N3, p.1166-1175.
- [37] SANDMAN, B.E. – Fluid loaded vibration of an elastic plate carrying a concentrated mass. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1977, Vol. 61, N6, p.163-1509.
- [38] SPALDING, A.B. et MANN III, J.A. – Placing small constrained layer damping patches on a plate to attain global or local velocity changes. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1995, Vol. 97, N6, p.3617-3624.
- [39] TARANTOLA, A. – *Inverse problem theory*. – Amsterdam, New-York : Elsevier, 1987. 613p.
- [40] TEKATLIAN, A. – *Détermination des caractéristiques vibratoires de sources de bruit par résolution d'un problème inverse de rayonnement*. – Thèse Sci. : Université d'Aix Marseille II, Institut de Mécanique de Marseille, 1992. 198p.
- [41] TEKATLIAN, A., FILIPPI, P., et HABAULT, D. – Détermination des caractéristiques vibratoires de sources de bruit par résolution d'un problème inverse de rayonnement. *Acustica united with Acta Acustica*, 1996, Vol. 1, N1, p.91-101.
- [42] TIKHONOV, A. et ARSENINE, V. – *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*. – Moscou : Edition Mir, 1976. 202p.
- [43] VERONESI, W.A. et MAYNARD, J.D. – Nearfield acoustic holography (NAH): II. Holographic reconstruction algorithms and computer implementation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1985, Vol. 81, N5, p.1307-1322.
- [44] WALLACE, C.E. – Radiation resistance of a rectangular panel. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1972, Vol. 53, N3, p.946-952.
- [45] WILLIAMS, E.G. et DARDY, D.D. – Generalized nearfield acoustical holography for cylindrical geometry: Theory and experiment. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1987, Vol. 81, N2, p.389-407.
- [46] WILLIAMS, E.G. et DARDY, H.D. – Nearfield acoustic holography using an underwater automated scanner. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1985, Vol. 78, N2, p.789-798.
- [47] WILLIAMS, E.G., MAYNARD, J.D., et SKUDRZYK, E. – Source sound reconstruction using a microphone array. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1980, Vol. 68, N1, p.340-344.

- [48] **ZHANG, Y. et MANN III, J.A.** – Examples using structural intensity and the force distribution to study vibrating plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1996, Vol. 99, N1, p. 354-361.
- [49] **ZHANG, Y. et MANN III, J.A.** – Measuring the structural intensity and force distribution in plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1996, Vol. 99, N1, p. 345-353.
- [50] **ZIENKIEWICZ, O.C.** – *La méthode des éléments finis.* – Paris : Ediscience, 1973. 533p.
- [51] **ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., et al.** – *The finite element method*, 2nd edition. – London : Mac-Graw Hill Book Company, 1989. 2 Vol. , 648p. et 807p.