



HAL
open science

Estimation robuste pour les systèmes incertains

Benoît Bayon

► **To cite this version:**

Benoît Bayon. Estimation robuste pour les systèmes incertains. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2012. Français. NNT : 2012ECDL0057 . tel-00780094

HAL Id: tel-00780094

<https://theses.hal.science/tel-00780094>

Submitted on 23 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE CENTRALE DE LYON

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : “Automatique”

préparée dans le laboratoire Ampère

dans le cadre de l'École Doctorale “Électronique, Électrotechnique et
Automatique”

par Benoit Bayon

ESTIMATION ROBUSTE POUR LES SYSTEMES INCERTAINS

| | | |
|--------------------|-----------------------|---|
| Rapporteur | M. Jean-Pierre BARBOT | Professeur des Universités, ENSEA - Université Cergy-Pontoise-CNRS |
| Rapporteur | M. Michel ZASADZINSKI | Professeur des Universités, IUT Longwy |
| Examineur | M. Joao Manoel GOMES | Professeur des Universités, Universidade Federal do Rio Grande do Sul |
| Examineur | M. Dimitri PEAUCELLE | Chargé de recherche, LAAS-CNRS |
| Président | M. Daniel THOMASSET | Professeur des Universités, Laboratoire Ampère |
| Encadrant | M. Eric BLANCO | Maître de Conférences, École Centrale de Lyon |
| Directeur de thèse | M. Gérard SCORLETTI | Professeur des Universités, École Centrale de Lyon |

Remerciements

Les premières personnes à remercier pour le déroulement de cette thèse sont bien sûr mes encadrants, Gérard Scorletti et Eric Blanco, dont le suivi a été exemplaire tout au long de la thèse. Leur complémentarité m'a été précieuse tout au long de ces trois années. Le fait qu'ils considèrent la thèse comme une formation à la recherche m'a permis de compléter mon cursus universitaire de la plus parfaite des manières.

Je remercie également l'ensemble des membres du laboratoire Ampère, qui m'ont offert un cadre de travail agréable et stimulant. Plus particulièrement, je remercie les membres du personnel administratif qui m'ont rendu faciles les tâches administratives, ces choses obscures et aux ramifications sans limites. Parmi toutes ces personnes, je remercie Alice pour son travail au sein du laboratoire et pour sa conversation des plus agréables.

Les membres de mon bureau ont été fantastiques durant ces 3 années en m'offrant une ambiance de travail agréable. Je remercie Roberto, Olivier, Amel et Marouane. Je remercie tout particulièrement Nicolas Degrenne qui a été mon voisin de bureau pendant l'ensemble des trois années. Le partage de nos sujets de thèse pourtant éloignés a été d'une grande richesse scientifique. Il est important également de souligner ses qualités de brasseur, que je n'oublierais pas de sitôt !

Je remercie également les doctorants du laboratoire Ampère, pour les échanges qui se sont déroulés la plupart du temps autour d'un café. Plus particulièrement, un grand merci à Alois, Moises, Sylvain, Mathieu (A.K.A Bobby69), Yoan (A.K.A WizardLord), Jérémy, Laurine.

Je remercie également Xavier Bombois et Amol Khalate, qui m'ont accueilli à Delft au DCSC pendant un mois, me permettant de vivre un mois en dessous du niveau de la mer, et de découvrir la météo magnifique des Pays-Bas au mois de novembre. Plus sérieusement, un grand merci pour leur accueil, et pour la collaboration très enrichissante.

Mais la thèse est le résultat d'une formation longue, commencée tôt (très tôt). Je remercie donc ma famille, tout particulièrement mes parents, qui ont toujours été là pour discuter de tous les sujets possibles. L'éducation qu'ils m'ont donné reste le plus beau cadeau qu'il m'ait été fait.

Un grand bonjour à tous les amis de la vallée de la Blanche : Couscous, Benjamin, Ivan, Sylvie, Valérie qui m'ont offert des moments pour souffler, notamment pendant la rédaction du manuscrit.

Un gros bisou aux Catalans, Marie et Sylvain, que la distance m'empêche de voir régulièrement même si l'envie est là.

Un grand merci à ma belle famille, Carel, Joelle, Misha et Imre qui sont venus à la soutenance pour le soutien moral. Merci pour les accueils toujours chaleureux, à Genève ou à Seyne.

Un très grand merci à Marco Rispoli, entraîneur du Pôle Espoir de Font-Romeu, pour les outils de développement personnel donnés au Lycée, qui me servent toujours. Également un grand merci à Dominique Cizeau, le directeur de Niviuk, pour les parapentes qui m'ont permis de m'évader durant des années.

Par dessus tout, une personne mérite des remerciements tout particuliers : ma fantastique compagne, Aline. Il est dit qu'on ne peut discuter de la rédaction de thèse qu'avec quelqu'un qui en a écrit une. Il faut rajouter qu'on peut en discuter avec leurs conjoints. Aline a toujours été présente pour me soutenir, m'aider, surtout durant la dernière année de rédaction qui a été un parcours du combattant. Sans elle, je n'aurais peut-être pas mené ce projet à bien.

Pour finir sur une bonne note, nous avons été rejoints ces dernières années par de nouveaux arrivants. Bienvenue à Louis, Lola, Nora, Cali et Cali, Mathilde, Ulysse, Gabin (Babin ?) et Owen.

J'entends et j'oublie, Je vois et je me souviens, Je fais et je comprends.
Confucius

Résumé

Sujet : Estimation Robuste pour les systèmes incertains

Un système est dit robuste s'il est possible de garantir son bon comportement dynamique malgré les dispersions de ses caractéristiques lors de sa fabrication, les variations de l'environnement ou encore son vieillissement. Au delà du fait que la dispersion des caractéristiques est inéluctable, une plus grande dispersion permet notamment de diminuer fortement les coûts de production. La prise en compte explicite de la robustesse par les ingénieurs est donc un enjeu crucial lors de la conception d'un système. Des propriétés robustes peuvent être garanties lors de la synthèse d'un correcteur en boucle fermée. Il est en revanche beaucoup plus difficile de garantir ces propriétés en boucle ouverte, ce qui concerne par exemple des cas comme la synthèse d'estimateur.

Prendre en compte la robustesse lors de la synthèse est une problématique importante de la communauté du contrôle robuste. Un certain nombre d'outils ont été développés pour analyser la robustesse d'un système vis-à-vis d'un ensemble d'incertitudes (μ -analyse par exemple). Bien que le problème soit intrinsèquement complexe au sens algorithmique, des relaxations ont permis de formuler des conditions suffisantes pour tester la stabilité d'un système vis-à-vis d'un ensemble d'incertitudes. L'émergence de l'Optimisation sous contrainte Inégalité Matricielle Linéaire (LMI) a permis de tester ces conditions suffisantes au moyen d'un algorithme efficace, c'est-à-dire convergeant vers une solution en un temps raisonnable grâce au développement des méthodes des points intérieurs.

En se basant sur ces résultats d'analyse, le problème de synthèse de correcteurs en boucle fermée ne peut pas être formulé sous la forme d'un problème d'optimisation pour lequel un algorithme efficace existe. En revanche, pour certains cas comme la synthèse de filtres robustes, le problème de synthèse peut être formulé sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI pour lequel un algorithme efficace existe. Ceci laisse entrevoir un certain potentiel de l'approche robuste pour la synthèse d'estimateurs.

Exploitant ce fait, cette thèse propose une approche complète du problème de synthèse d'estimateurs robustes par l'intermédiaire des outils d'analyse de la commande robuste en conservant le caractère efficace de la synthèse lié aux outils classiques. Cette approche passe par une ré-interprétation de l'estimation nominale (sans incertitude) par l'optimisation sous contrainte LMI, puis par une extension systématique des outils de synthèse et d'analyse développés pour l'estimation nominale à l'estimation robuste.

Cette thèse présente des outils de synthèse d'estimateurs, mais également des outils d'analyse qui permettront de tester les performances robustes atteintes par les estimateurs. Les résultats présentés dans ce document sont exprimés sous la forme de théorèmes présentant des contraintes LMI. Ces théorèmes peuvent se mettre de façon systématique sous la forme d'un problème d'optimisation pour lequel un algorithme efficace existe.

Pour finir, les problèmes de synthèse d'estimateurs robustes appartiennent à une classe plus générale de problèmes de synthèse robuste : les problèmes de synthèse robuste en boucle ouverte. Ces problèmes de synthèse ont un potentiel très intéressant. Des résultats de base sont formulés pour la synthèse en boucle ouverte, permettant de proposer des méthodes de synthèse robustes dans des cas pour lesquels la mise en place d'une boucle de rétroaction est impossible. Une extension aux systèmes LPV avec une application à la commande de position sans capteur de position est également proposée.

Mots-clés : Estimation, robustesse, optimisation convexe, synthèse robuste

Résumé

Robust estimation for uncertain systems

A system is said to be robust if it is possible to guarantee his dynamic behavior despite dispersion of his features due to production, environmental changes or aging. beyond the fact that a dispersion is ineluctable, a greater one allows to reduce production costs. Thus, considering robustness is a crucial stake during the conception of a system. Robustness can be achieved using feedback, but is more difficult in Open-Loop, which concerns estimator synthesis for instance.

Robustness is a major concern of the Robust Control Community. Many tools have been developed to analyse robustness of a system towards a set of uncertainties (μ -analysis for instance). And even if the problem is known to be difficult (speaking of complexity), sufficient conditions allow to formulate results to test the robust stability of a system. Thanks to the development of interior point methods, the emergence of optimization under Linear Matrix Inequalities Constraints allows to test these results using an efficient algorithm.

Based on these analysis results, the robust controller synthesis problem cannot be recast as a convex optimization problem involving LMI. But for some cases such as filter synthesis, the synthesis problem can recast as a convex optimization problem. This fact let sense that robust control tools have some potential for estimators synthesis.

Exploiting this fact, this thesis offers a complete approach of robust estimator synthesis, using robust control tools, while keeping what made the nominal approaches successful : efficient computation tools. this approach goes through reinterpretation of nominal estimation using LMI optimization, then propose a systematic extension of these tools to robust estimation.

This thesis presents not only synthesis tools, but also analysis tools, allowing to test the robust performance reached by estimators All the results are proposed as convex optimization problems involving LMI.

As a conclusion, robust estimator synthesis problems belong to a wider class of problems : robust open-loop synthesis problems, which have a great potential in many applications. Basic results are formulated for open-loop synthesis, providing results for cases where feedback cannot be used. An extension to LPV systems with an application to sensorless control is given.

Keywords : Estimation, robustness, convex optimization, robust synthesis

Table des matières

| | |
|--|-------------|
| Introduction générale | xiii |
| Description des chapitres | xv |
| Publications | xvii |
| Notations | xviii |
| 1 Problématique | 1 |
| 1.1 Le problème de synthèse d'estimateur basé sur un modèle | 1 |
| 1.2 Formalisme du problème d'estimation | 3 |
| 1.2.1 La forme standard du problème d'estimation | 3 |
| 1.2.2 Modéliser les signaux | 4 |
| 1.2.3 Modéliser le système | 5 |
| 1.2.4 Caractériser l'erreur d'estimation | 10 |
| 1.2.5 Le problème d'estimation nominale | 15 |
| 1.3 Le problème d'estimation robuste | 16 |
| 1.3.1 L'approche robuste | 16 |
| 1.3.2 Le problème d'estimation robuste | 17 |
| 1.3.3 De la complexité du problème | 17 |
| 1.4 L'optimisation LMI | 18 |
| 2 L'estimation dans le cas nominal | 21 |
| 2.1 Revue des méthodes classiques pour l'estimation nominale | 22 |
| 2.1.1 Les méthodes classiques de synthèse d'estimateur | 22 |
| 2.1.2 Synthèse de la littérature | 26 |
| 2.2 Synthèse d'estimateurs nominaux par Optimisation LMI | 28 |
| 2.2.1 Introduction | 28 |
| 2.2.2 Philosophie Analyse-Synthèse | 29 |
| 2.2.3 Synthèse de filtre | 30 |
| 2.2.4 Synthèse d'observateur à gain statique | 38 |
| 2.2.5 Comparaison des structures classiques | 43 |
| 2.2.6 Synthèse d'observateur à gain dynamique (OGD) | 46 |
| 2.2.7 Comparaison de l'OGD avec les structures classiques | 50 |
| 2.3 L'estimateur Généralisé Nominal | 51 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.3.1 | Présentation de la structure | 52 |
| 2.3.2 | Synthèse d'estimateur généralisé | 56 |
| 2.3.3 | Equivalence avec les structures classiques | 61 |
| 2.3.4 | Conclusions sur l'EGN | 62 |
| 2.4 | Choix des pondérations | 62 |
| 2.4.1 | Un gabarit inférieur sur l'erreur d'estimation | 62 |
| 2.4.2 | Pourquoi pondérer la norme H_∞ ? | 66 |
| 2.4.3 | Une méthode systématique pour choisir les pondérations | 71 |
| 2.4.4 | Conclusions sur le choix des pondérations | 76 |
| 2.5 | Exemple d'application | 76 |
| 2.6 | Conclusions sur le cas certain | 80 |
| 3 | Représentation et analyse des modèles incertains pour l'estimation | 85 |
| 3.1 | Le problème d'estimation robuste | 85 |
| 3.1.1 | Introduction à l'estimation robuste | 85 |
| 3.1.2 | Sources d'incertitudes | 86 |
| 3.1.3 | Approche proposée : l'estimation pire-cas | 90 |
| 3.1.4 | Forme standard du problème d'estimation robuste | 90 |
| 3.1.5 | Caractériser l'erreur d'estimation | 92 |
| 3.1.6 | Le problème de synthèse d'estimateur robuste | 93 |
| 3.2 | Représentation et analyse des systèmes incertains pour l'estimation | 94 |
| 3.2.1 | La représentation non structurée | 94 |
| 3.2.2 | La représentation polytopique | 96 |
| 3.2.3 | La représentation LFT | 99 |
| 3.3 | Analyse des modèles incertains sous forme LFT | 102 |
| 3.3.1 | Définition des ensembles d'incertitudes et des ensembles de multi- plieurs | 103 |
| 3.3.2 | Analyse du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas | 106 |
| 3.3.3 | Analyse de la norme H_2 pire-cas | 113 |
| 3.3.4 | Conclusion | 114 |
| 3.4 | Autres résultats d'analyse pour les modèles incertains LTI | 114 |
| 3.4.1 | Analyse à une fréquence donnée | 115 |
| 3.4.2 | Analyse de la valeur singulière maximale pire-cas pour une bande de fréquences | 118 |
| 3.4.3 | Conclusion | 119 |
| 3.5 | Exemples d'applications | 120 |
| 3.5.1 | Analyse de la réponse fréquentielle d'une fonction de transfert incertaine | 120 |
| 3.5.2 | Dégradation de la performance | 126 |
| 3.6 | Conclusions sur l'analyse des modèles incertains | 129 |

| | |
|--|------------|
| 4 Synthèse d'estimateurs robustes | 131 |
| 4.1 Introduction | 131 |
| 4.1.1 Organisation du chapitre | 131 |
| 4.2 Approche LFT/IQCs de l'estimation robuste | 133 |
| 4.3 Un problème particulier de synthèse | 137 |
| 4.3.1 Philosophie Analyse-synthèse | 139 |
| 4.3.2 Synthèse \mathcal{L}_2 -gain | 140 |
| 4.3.3 Synthèse H_2 | 148 |
| 4.4 Synthèse de filtres robustes | 151 |
| 4.4.1 Synthèse de filtres robustes | 152 |
| 4.4.2 Synthèse de filtres robustes : exemple | 155 |
| 4.4.3 Synthèse de filtres robustes : conclusion | 158 |
| 4.5 Synthèse d'observateurs robustes | 158 |
| 4.5.1 Extension des observateurs aux systèmes incertains | 159 |
| 4.5.2 Synthèse d'OGA | 168 |
| 4.5.3 Synthèse d'observateurs robustes : exemple | 171 |
| 4.5.4 Synthèse d'observateurs robustes : conclusions | 173 |
| 4.6 Autres résultats de synthèse pour l'estimation | 177 |
| 4.6.1 Synthèse mono-fréquence | 177 |
| 4.6.2 Synthèse de filtre à pôles fixés | 183 |
| 4.6.3 Conclusions | 191 |
| 4.7 Conclusions sur la synthèse robuste utilisant l'approche LFT | 193 |
| | |
| 5 Résultats liés à l'estimation robuste | 197 |
| 5.1 Synthèse robuste en boucle ouverte | 198 |
| 5.1.1 Le problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie | 199 |
| 5.1.2 Synthèse de pré-compensateurs robustes | 205 |
| 5.1.3 Synthèse en boucle ouverte | 209 |
| 5.1.4 Conclusions sur la synthèse en boucle ouverte | 211 |
| 5.2 Une extension aux systèmes LPV | 212 |
| 5.2.1 Synthèse d'observateurs pour les systèmes polytopiques. | 212 |
| 5.2.2 Synthèse LPV dans le cadre LFT | 215 |
| 5.3 Extensions : conclusions | 217 |
| | |
| A A la recherche de la LMI cachée | 223 |
| | |
| B Chapitre 2 : démonstrations | 225 |
| B.1 Démonstration du théorème 2 page 36 | 225 |
| B.2 Démonstration du théorème 3 page 37 | 228 |
| B.3 Démonstration du théorème 4 page 40 | 229 |

| | | |
|----------|--|------------|
| B.4 | Démonstration du théorème 5 page 41 | 230 |
| B.5 | Démonstration du théorème 6 page 42 | 231 |
| B.6 | Démonstration du théorème 7 page 48 | 232 |
| B.7 | Démonstration du théorème 8 page 49 | 233 |
| B.8 | Démonstration du théorème 12 page 58 | 235 |
| B.9 | Démonstration du corollaire 2 page 59 | 236 |
| B.10 | Démonstration du théorème 13 page 60 | 236 |
| B.11 | Démonstration du corollaire 3 page 60 | 236 |
| C | Chapitre 3 : démonstration du théorème 18 page 113 (Analyse de la norme H_2 pire-cas) | 239 |
| D | Chapitre 4 : démonstrations | 243 |
| D.1 | Démonstration du théorème 22 page 148 | 243 |
| D.2 | Synthèse à pôles fixés : démonstrations | 247 |
| E | Chapitre 5 : démonstrations | 251 |
| E.1 | Démonstration du théorème 27 | 251 |
| E.2 | Démonstration du théorème 28 | 257 |
| E.3 | Démonstration du théorème 29 | 258 |
| F | Annexes sur les espaces de signaux [Kor11] | 259 |
| G | Analyse et synthèse : Cas discret | 261 |
| G.1 | Analyse Robuste de la performance discrète | 261 |
| G.1.1 | Analyse de la performance \mathcal{L}_2 -gain | 261 |
| G.1.2 | Analyse de la performance H_2 | 262 |
| G.1.3 | Analyse par bandes de fréquences : cas discret | 262 |
| G.2 | Synthèse : Cas discret | 263 |
| H | Le lemme KYP | 267 |
| | LPV observer for PMSM with systematic gain design via convex optimization, and its extension for standstill estimation of the position without saliency | 285 |
| | Drop-on-Demand Inkjet Printhead Performance Improvement Using Robust Feedforward Control | 291 |
| | Liste des HDR de l'Ecole Centrale de Lyon | 298 |
| | Autorisation de soutenance | 301 |

Introduction générale

Dans un grand nombre de systèmes, la connaissance de grandeurs internes caractérisées par des signaux est intéressante d'un point de vue supervision, contrôle ou encore diagnostic. Dans un certain nombre de cas, ces signaux ne peuvent pas être mesurés directement par des capteurs pour des raisons diverses (coût, encombrement, existence de la technologie, ...). Une solution couramment adoptée pour obtenir les signaux est l'utilisation d'un estimateur (plus couramment appelé *capteur logiciel*). Dans ce document, nous nous intéresserons à la synthèse de l'estimateur.

Les estimateurs sont synthétisés à partir d'un modèle du système. La plupart du temps, le modèle choisi pour le système est un modèle basé sur des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants (modèle LTI). Ces modèles offrent des possibilités de représentation raisonnables mais ont surtout une grande qualité : il existe un grand nombre d'outils efficaces au sens de la complexité algorithmique. Ces outils efficaces permettent de synthétiser les estimateurs en un temps raisonnable, qui n'explose pas lorsque les dimensions du modèle augmentent.

Ces méthodes de synthèse s'appuient sur une hypothèse forte : le modèle LTI représente parfaitement le système (cas nominal). En réalité, cette hypothèse n'est jamais vérifiée. L'approche proposée pour résoudre ce problème consiste à considérer non pas un modèle unique, mais un ensemble de modèles appelé modèle incertain, et synthétiser un estimateur garantissant un certain niveau de performance (estimateur robuste, performance pire-cas). Si le système réel est inclus dans l'ensemble de modèles, alors la performance pire-cas garantie par la méthode de synthèse sera atteinte lors de l'application de l'estimateur au système réel.

Il existe deux grandes approches de la synthèse d'estimateur robuste. Ces approches diffèrent par la représentation du modèle incertain et le type d'approche utilisé pour synthétiser l'estimateur. La première catégorie d'approches contient des approches de type Lyapunov et a été largement étudiée. Le modèle incertain est représenté par une représentation d'état dont les matrices sont incluses dans un polytope défini par ces sommets [Ger99, GdO01]. Ce type de représentation ne permet toutefois que la description d'incertitudes sur les paramètres du modèle. La représentation d'état du modèle incertain dépend de façon linéaire de ces incertitudes.

Analyser le comportement d'un système vis-à-vis d'un ensemble d'incertitude est au cœur des préoccupations de la communauté du contrôle robuste, qui a développé un certain nombre d'outils au fil des années pour analyser ce comportement. La seconde catégorie d'approches de la synthèse d'estimateurs robustes se base sur ces outils d'analyse ayant des racines profondes dans les approches entrées-sorties. Le modèle incertain est représenté comme l'interconnexion d'un modèle nominal, et d'un bloc d'incertitude, appelée forme LFT (Transformation Linéaire Fractionnelle). Cette représentation permet de représenter des incertitudes de nature diverses et autorise une dépendance rationnelle du modèle envers l'ensemble d'incertitudes. Bien que ces approches aient été très peu

étudiées, quelques résultats prometteurs [SF06, SK06] laissent entrevoir un potentiel certain pour la synthèse d'estimateurs robustes. Ces approches ont été choisies dans cette thèse pour la généralité de la représentation du modèle incertain, ainsi que la maturité des outils qui y sont associés.

L'objectif de cette thèse est de proposer une extension des outils classiques de l'estimation nominale à l'estimation robuste, en utilisant les outils de la commande robuste. Du point de vue des méthodes développées, cette thèse poursuit deux objectifs principaux :

- Les outils développés pour l'estimation robuste doivent être une extension des outils de l'estimation nominale : proposer une extension des outils de l'estimation nominale permet de conserver le savoir-faire acquis sur ces outils pour le transcrire à l'estimation robuste, ce qui est très intéressant en raison de la large diffusion des outils de l'estimation nominale.
- Les extensions du cas nominal doivent conserver une des principales qualités des outils de l'estimation nominale : leur caractère efficace. Les outils de la commande robuste proposent un cadre unifié et élégant qui va permettre de proposer une extension des outils classiques tout en conservant cette qualité.

Cette thèse propose donc une ré-interprétation de l'estimation nominale au moyen des outils de la commande robuste, en utilisant tout particulièrement l'optimisation sous contrainte LMI. La revisite de l'estimation nominale permet de proposer un certain nombre de résultats originaux de synthèse et d'analyse permettant de proposer une approche complète pour la synthèse d'un estimateur nominal.

La principale contribution de la thèse est l'extension systématique de l'approche proposée pour l'estimation nominale à l'estimation robuste. Les résultats d'analyse et de synthèse nominale sont étendus, permettant de proposer une approche complète de l'estimation robuste au moyen des outils de la commande robuste tout en conservant le caractère efficace inhérent à l'estimation nominale. Les résultats de synthèse présentés dans ce document bénéficient donc du caractère général et efficace des approches entrées-sorties. Les résultats présentés dans ce document complètent la littérature existante pour la synthèse d'estimateur utilisant les approches de type entrées-sorties et proposent un certain nombre de résultats originaux comme une extension des observateurs pour l'estimation robuste et des outils de calcul d'une limite de performance. Ces résultats sont par la suite étendus à d'autres problèmes de synthèse.

La production de cette thèse a eu lieu au sein du laboratoire Ampère, dans le département Méthodes pour l'Ingénierie des Systèmes, équipe Automatique et Mécatronique. Elle s'est réalisée sous les tutelles de Gérard Scorletti (Prf) et Eric Blanco (MdC) et s'est principalement déroulée sur le site de l'École Centrale de Lyon. Une visite d'un mois chez Xavier Bombois au Delft Center for Systems and Control à l'Université TU-Delft a été effectuée au mois d'octobre 2011.

Description des chapitres

Chapitre 1 : Problématique

Le chapitre 1 présente la problématique et la mise en forme du problème d'estimation. Ce chapitre présente l'estimation dans le cadre des systèmes et la manière de modéliser les systèmes et les signaux par des modèles LTI. Le formalisme de base du problème de synthèse d'estimateurs appelé forme standard dans cette thèse est également développé. Par la suite, ce chapitre montre comment qualifier l'estimation par un critère de performance sur l'erreur d'estimation, en l'occurrence la norme H_∞ (pondérée ou non) ou la norme H_2 dans cette thèse. Ceci permet de poser le problème de synthèse d'estimateurs nominaux dans le cas où le modèle est supposé décrire parfaitement le système. Ce chapitre introduit également l'outil utilisé pour résoudre les problèmes de synthèse d'estimateurs : l'optimisation sous contrainte LMI.

Chapitre 2 : L'estimation dans le cas nominal

Suite à un état de l'art de la synthèse d'estimateurs nominaux, le chapitre 2 page 21 présente une ré-interprétation complète du cas nominal.

Ce chapitre introduit les structures classiques d'estimateurs : le filtre et l'observateur. Par la suite, la démarche permettant de ramener un problème de synthèse à un problème d'optimisation sous contrainte LMI est développée. L'application de cette démarche pour résoudre le problème de synthèse d'estimateurs nominaux permet de présenter des résultats de synthèse pour les structures classiques sous une forme unifiée. Ceci permet leur comparaison puis leur unification en une structure unique, ce qui constitue une première contribution de cette thèse. Enfin, ce chapitre présente une borne inférieure de la performance donnée par le filtre de Wiener non-causal et montre comment s'articulent les solutions obtenues avec les normes H_2 et H_∞ autour de cette limite de performance. Ceci permet de développer une méthode systématique de choix des pondérations de l'erreur d'estimation pour la norme H_∞ pondérée, ce qui est une seconde contribution de la thèse. Un exemple d'application clôt le chapitre.

Chapitre 3 : Représentation et analyse des systèmes incertains pour l'estimation

Ce chapitre introduit les types d'incertitudes rencontrées lorsque l'on modélise un système réel par un modèle LTI. Ce chapitre présente une revue des méthodes pour modéliser et analyser la performance pire-cas des modèles incertains, ce qui permet de mettre en valeur la représentation des systèmes incertains sous la forme d'une transformation linéaire fractionnelle (LFT) et les outils d'analyse qui y sont associés. Pour finir, une série de résultats d'analyse seront présentés, permettant de tester une borne supérieure sur la performance pire-cas d'un opérateur incertain de différentes façons.

Deux exemples clôturent le chapitre : le premier exemple consiste à tester une borne supérieure du module d'une fonction de transfert SISO ; le second exemple caractérise la dégradation de la performance d'un estimateur nominal en présence d'incertitudes.

Chapitre 4 : Synthèse d'estimateurs robustes

Les résultats de synthèse d'estimateurs nominaux sont dérivés de résultats d'analyse par la démarche systématique présentée dans le chapitre 2. Le chapitre 4 montrera que l'application de la même démarche dans le cas robuste permet de proposer une extension complète de l'estimation nominale à l'estimation robuste, à partir des résultats d'analyse des modèles incertains sous forme LFT présentés dans le chapitre 3.

Ce chapitre propose donc une extension systématique des structures classiques d'estimateurs à l'estimation robuste. Les solutions pour la synthèse de ces structures sont présentées sous la forme de théorèmes formulables comme des problèmes d'optimisation sous contrainte LMI.

Ce chapitre propose également des résultats d'analyse permettant d'étendre à l'estimation robuste la limite de performance présentée en chapitre 2. Cet outil permet de comparer les performances atteintes par les estimateurs H_2 et H_∞ , et de proposer des méthodes de synthèse de pondérations pour l'estimation H_∞ robuste. Les résultats présentés dans ce chapitre constituent les principales contributions de la thèse.

Chapitre 5 : Résultats liés à l'estimation robuste

Ce chapitre présente des résultats développés en collaboration avec d'autres doctorants sur des problèmes proches des problèmes de synthèse d'estimateurs présentés dans cette thèse.

Dans un premier temps, les problèmes de synthèse de filtres robustes sont reliés aux problèmes de synthèse de pré-compensateurs. La première section du chapitre 5 présente une solution très générale pour une classe de problèmes de synthèse de correcteurs, donnant des solutions aux problèmes de synthèse de pré-compensateurs ou de correcteurs en boucle ouverte. La première section prouve l'approche présentée dans cette thèse permet de proposer des méthodes de synthèse robuste pour un certain nombre de modèles particuliers présentant un potentiel certain.

Dans un second temps, les modèles LPV sont une extension naturelle des modèles LTI. La seconde section du chapitre montre comment synthétiser de façon simple un observateur LPV contenant le modèle temps variant du système en utilisant un modèle polytopique. Une description succincte des extensions possibles aux résultats de cette thèse est ensuite réalisée.

Publications

– **Articles de conférences avec comité de lecture :**

- B. Bayon, E. Blanco, and G. Scorletti. Robust \mathcal{L}_2 -gain Observation for structured uncertainties : an LMI approach. In *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, Orlando, 2011.
- A. Khalate, B. Bayon, X. Bombois, G. Scorletti, and R. Babuska. Drop-on-Demand Inkjet Printhead Performance Improvement Using Robust Feedforward Control. In *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, Orlando, 2011.
- Benoit Bayon, G. Scorletti, and Eric Blanco. An LMI solution for a class of robust open-loop problems. In *Proceedings of the 2012 American Control Conference*, Montréal, 2012.
- Benoit Bayon, G. Scorletti, and Eric Blanco. Contrôle Discret Robuste en boucle ouverte : une approche LMI. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Grenoble, 2012.

– **Article de conférence sans comité de lecture :**

- A. Zgorski, B. Bayon, G. Scorletti, and X. Lin-Shi. LPV observer for PMSM with systematic gain design via convex optimization, and its extension for standstill estimation of the position without saliency. In *3rd IEEE International Symposium on Sensorless Control for Electrical Drives*, Milwaukee, 2012.

– **Article de revue en cours d'écriture :**

- B. Bayon, G. Scorletti, and E. Blanco. H_2 and \mathcal{L}_2 -gain Robust Observation for LTI structured uncertainties : an LMI approach.

Notations

Acronymes

| | | |
|------|---|---|
| LTI | : | Linéaire Temps-Invariant |
| TI | : | Temps-Invariant |
| TV | : | Temps-Variant |
| DSP | : | Densité Spectrale de Puissance |
| SISO | : | Single-Input Single-Output |
| MIMO | : | Multi-Input Multi-Output |
| LMI | : | (Contrainte) Inégalité Matricielle Linéaire |
| BMI | : | (Contrainte) Inégalité Matricielle Bilinéaire |
| IQC | : | Contrainte Intégrale Quadratique |
| LFT | : | Transformation Linéaire Fractionnelle |
| OGS | : | Observateur à Gain Statique (structure standard pour l'observateur) |
| OGD | : | Observateur à Gain Dynamique (structure augmentée pour l'observateur) |
| EGN | : | Estimateur Généralisé Nominal (section 2.3 page 51) |

Signaux et Systèmes

| | | |
|---|---|--|
| x | : | Vecteur d'état d'un système. x_i est une partie du vecteur d'état |
| z | : | Vecteur des signaux à estimer |
| y | : | Vecteur des signaux mesurés |
| w | : | Vecteur des perturbations non mesurées et des signaux normalisés en entrée d'un système ; contient également les bruits de mesures |
| S_i | : | Densité Spectrale de Puissance du signal i |
| Γ_w | : | Ensemble des signaux w tels que $S_w(j\omega) \leq 1$ (DSP inférieure ou égale à 1) |
| W_i | : | Pondération fréquentielle du signal i |
| $T_{(z_1, z_2) \rightarrow (z_3, z_4)}$ | : | Opérateur depuis les entrées z_1 et z_2 vers les sorties z_3 et z_4 |
| $\ T_{(z_1, z_2) \rightarrow (z_3, z_4)}\ _i$ | : | Norme H_i sur l'opérateur correspondant |

| | |
|---|---|
| $\left[\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ | : Représentation d'état d'un modèle linéaire ; peut s'interpréter comme une matrice de fonctions de transfert $C(sI - A)^{-1}B + D$ (domaine fréquentiel) ou bien $\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$ pour un opérateur LTI $T_{(w) \rightarrow (e)}$ |
| $T_{(z_1, z_2) \rightarrow (z_3, z_4)}(j\omega_0)$ | : Réponse fréquentielle de l'opérateur à la fréquence ω_0 |
| $T_{(z_1, z_2) \rightarrow (z_3, z_4)}^{Re}(j\omega_0)$ | : Partie réelle de la réponse fréquentielle de l'opérateur à la fréquence ω_0 |
| $T_{(z_1, z_2) \rightarrow (z_3, z_4)}^{Im}(j\omega_0)$ | : Partie imaginaire de la réponse fréquentielle de l'opérateur à la fréquence ω_0 |

Algèbre Linéaire

| | |
|---|---|
| $\lambda(M)$ | : Valeurs propres de la matrice carrée M |
| $\sigma(M)$ | : Valeurs singulières de la matrice M |
| $\bar{\sigma}(M)$ | : Valeur singulière maximale de la matrice M |
| A_{\perp} | : Matrice génératrice du complémentaire orthogonal de la matrice A ; les conditions suivantes sont vérifiées : $A^T A_{\perp} = 0$, avec la matrice $[AA_{\perp}]$ étant carrée de rang plein |
| $A + (\diamond)^T$ | : $A + A^T$, utilisée pour des raisons de mise en page. |
| $[\diamond]^T X A$ | : $A^T X A$; forme quadratique |
| A^{Re} (resp. A^{Im}) | : Partie réelle (resp. imaginaire) de la matrice A |
| $\begin{bmatrix} A & B \\ \diamond^T & C \end{bmatrix}$ | : $\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$ |
| \otimes | : Produit de Kronecker |
| $H \star G$ | : $\begin{bmatrix} H_{11} + H_{12}G_{11}(I - H_{22}G_{11})^{-1}H_{21} & H_{12}(I - G_{11}H_{22})^{-1}G_{12} \\ G_{21}(I - H_{22}G_{11})^{-1}H_{22} & G_{22} + G_{21}H_{22}(I - G_{11}H_{22})^{-1}G_{12} \end{bmatrix}$, produit de Redheffer |
| $A > 0$ | : $\forall x \in \mathbb{R}^n, x^T A x > 0$ |

Autres notations

| | |
|-------------------|--|
| δ | : Incertitude paramétrique |
| Δ | : Incertitude dynamique |
| Γ_{Δ} | : Ensemble des incertitudes considéré dans cette thèse, défini section 3.3, sous-section 3.3.1 |
| Π | : Multiplieur pour les incertitudes de l'ensemble Γ_{Δ} |
| Γ_{Π} | : Ensemble des multiplieurs pour les incertitudes de l'ensemble Γ_{Δ} , défini section 3.3, sous-section 3.3.1 |

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} : \text{Matrice génératrice du sous-ensemble affine des multi-} \\ \text{plieurs de l'ensemble } \Gamma_{\Pi}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right] : \text{Une représentation d'état de la base permettant de gé-} \\ \text{nérer les multipliers}$$

$$\Gamma_{\Lambda} : \text{simplexe unité : } \Gamma_{\lambda} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \lambda_i \geq 0 \\ \sum_i \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

Chapitre 1

Problématique

1.1 Le problème de synthèse d'estimateur basé sur un modèle

Dans le cadre des systèmes, il est souvent nécessaire de disposer d'informations caractérisées par des signaux internes à un système pour des besoins de commande, de supervision ou de contrôle. La mesure directe de chaque signal par un capteur n'est pas toujours possible pour des raisons physiques (environnement, poids, encombrement, etc...) ou techniques (coût, existence d'un capteur pour une grandeur donnée, etc...). La solution est alors d'estimer ces signaux internes (appelés signaux à estimer) à partir d'autres signaux accessibles du système (appelés signaux mesurés), si cela est possible.

Par définition, l'estimation est la recherche d'une ou plusieurs valeurs à partir d'observations ou de sondages. L'estimation pour les systèmes peut être définie comme la reconstitution d'un ou plusieurs signaux non mesurables ou non mesurés d'un système à partir des mesures disponibles de signaux de ce système. La relation entre les signaux à estimer et les signaux mesurés est donnée par un modèle du système. L'estimateur qui va reconstituer les signaux à estimer à partir des signaux mesurés va donc être synthétisé sur la base du modèle du système. On parlera donc d'estimation basée sur un modèle, dont le principe est résumé figure 1.1 page 2.

La problématique de cette thèse est la synthèse de l'estimateur :

Comment synthétiser un estimateur qui va estimer les signaux non-mesurés à partir des signaux disponibles sur le système et de la connaissance a priori d'un modèle donnant une relation entre les signaux à estimer et les signaux mesurés ?

Deux exemples

Pour illustrer le problème d'estimation basée sur un modèle, deux exemples classiques pour l'estimation sont présentés.

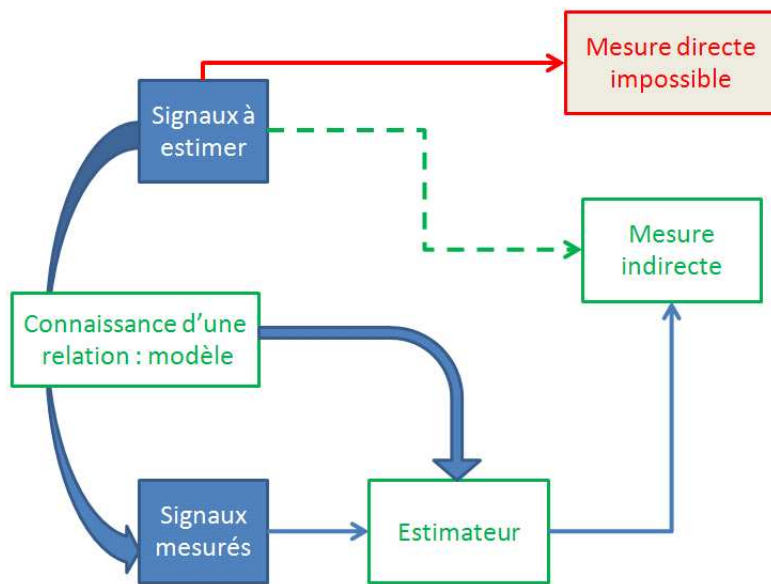


Figure 1.1 – Principe de l’estimation basée sur un modèle

Le premier exemple est un système mécanique masses-ressorts [GdO01, SK06] présenté figure 1.2. Pour diverses raisons, sur ce système qui est soumis à des perturbations, seule la position de la masse M1, x_1 , est mesurée. L’estimation permettra de reconstituer le signal caractérisant la position de la masse M2, x_2 , et même de reconstituer l’ensemble des signaux internes caractérisant le système, appelés états du système. L’estimateur sera synthétisé en utilisant un modèle physique du système obtenu par application de la mécanique des solides indéformables.

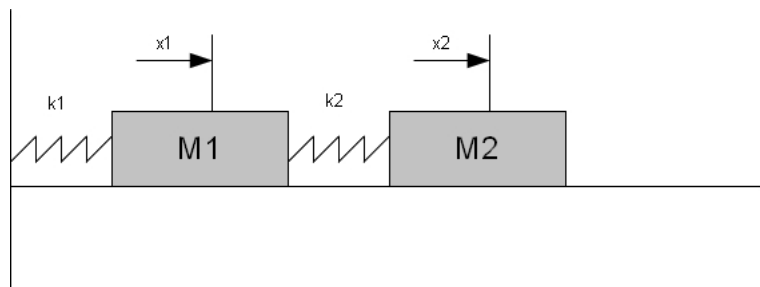


Figure 1.2 – Système d’ordre 4 : masses-ressorts

Le second exemple correspond au problème du filtrage de Wiener [Wie50], décrit figure 1.3. Un signal z de densité spectrale de puissance connue $S_z(j\omega)$ doit être estimé à partir d’un signal y constitué de la somme de 2 signaux w (un signal relié au signal z par un système de convolution) et v un bruit de densité spectrale de puissance $S_v(j\omega)$. L’objectif est de trouver l’estimateur qui permettra de reconstruire le signal z à partir du signal y . L’estimateur sera synthétisé en utilisant les modèles des signaux.

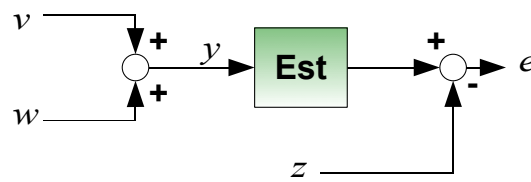


Figure 1.3 – Problème du filtrage de Wiener

1.2 Formalisme du problème d'estimation

1.2.1 La forme standard du problème d'estimation

La forme générale du problème de synthèse d'estimateur est présentée figure 1.4. Cette forme standard contient 3 blocs principaux : le modèle du système, l'estimateur et pour finir le bloc faisant apparaître la différence entre les signaux à estimer et les signaux estimés.

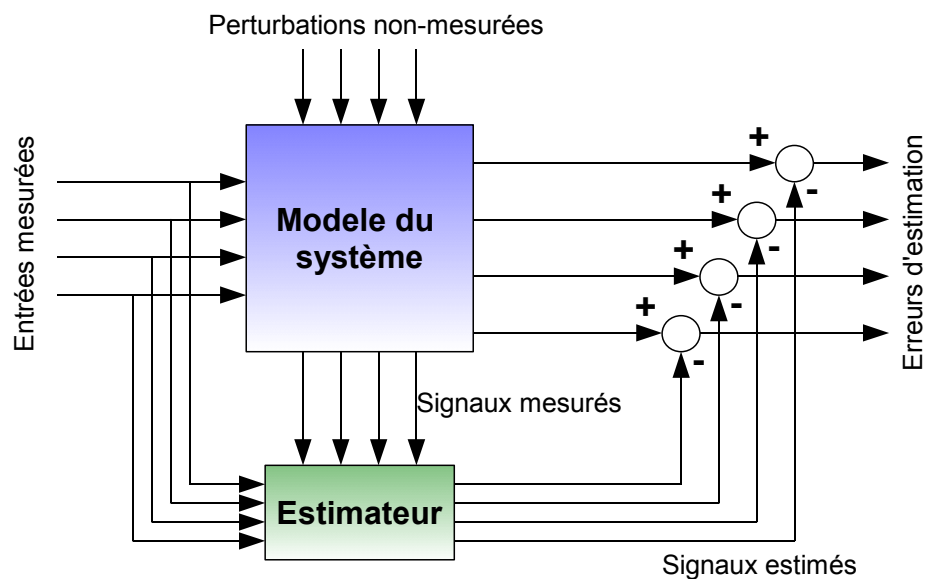


Figure 1.4 – Système pour l'estimation

Le modèle du système présenté est un modèle qui reçoit en entrées des entrées mesurées u (perturbations mesurées, signaux de commande). Il est également soumis à des entrées non mesurées v (signaux de perturbations inconnus, bruits sur les mesures). Le modèle admet deux types de sorties : les signaux internes au système à estimer z , et les signaux mesurés connus de l'utilisateur à partir des capteurs y . Nous verrons par la suite que le modèle général du système est composé des modèles de signaux qui sont admis en entrée du système, ainsi que d'un modèle du système qui va assurer le lien entre ces signaux.

L'objectif est d'estimer les signaux à estimer à partir des signaux mesurés. L'estimateur admet en entrée les signaux mesurés y et a pour signaux de sortie les estimations \hat{z} des signaux z .

L'erreur d'estimation $e = (z - \hat{z})$ permet de caractériser l'estimation. Si cette erreur est "faible", alors l'estimation sera de bonne qualité. Cette erreur d'estimation doit être caractérisée. Il est proposé dans cette thèse de minimiser un critère de performance quantitatif sur l'erreur d'estimation correspondant à une bonne estimation d'un point de vue qualitatif.

Par conséquent les 3 éléments composant la forme standard doivent être décrits : les signaux, le modèle reliant ces signaux, et l'erreur d'estimation. Nous présentons ici le cas nominal : les signaux et les systèmes vont être représentés par des modèles d'équations linéaires temps invariants (modèle LTI).

1.2.2 Modéliser les signaux

Il existe deux types importants de modélisation des signaux. Le premier type de modélisation correspond à la modélisation stochastique des signaux stationnaires, le second à la modélisation déterministe. Le point commun de ces deux méthodes est de représenter un signal comme la réponse d'un système de convolution W à une entrée canonique w , sous certaines hypothèses. W est généralement appelée filtre générateur dans le cas stochastique ou pondération fréquentielle dans le cas déterministe. Cet objet va servir à décrire entre autres la densité spectrale de puissance (DSP) du signal de sortie, mais servira également pour pondérer des normes sur les fonctions de transfert. Le signal canonique w dépend du type de modélisation utilisée. Ces deux types de modélisation permettent de décrire des ensembles de signaux soit par leur densité spectrale de puissance soit par un gabarit sur leur densité spectrale de puissance.

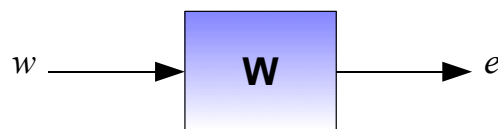


Figure 1.5 – Fonction de transfert

La DSP $S_e(j\omega)$ de la sortie e , en réponse à une entrée w de densité spectrale de puissance $S_w(j\omega)$, est donnée par la relation suivante :

$$S_e(j\omega) = W(j\omega)S_w(j\omega)W^*(j\omega). \quad (1.1)$$

Cette relation est valable pour des signaux scalaires (le filtre générateur est un opérateur SISO) et vectoriels (le filtre générateur est un opérateur MIMO). Les termes diagonaux

de cette matrice représentent les densités spectrales de puissance des signaux de sortie. Les termes non diagonaux représentent les densités spectrales de puissance inter-spectre.

Dans le cadre stochastique, le signal canonique w est décrit comme une réalisation temporelle d'un signal aléatoire [Gel74]. Dans le cas d'un signal stationnaire de variance unitaire, sa densité spectrale de puissance peut s'écrire $S_w(j\omega) = I$. Le signal e est également une réalisation temporelle d'un signal aléatoire, dont la densité spectrale de puissance est donnée par $S_e(j\omega) = W(j\omega)W(j\omega)^*$. Cette modélisation décrit l'ensemble des réalisations temporelles des signaux e aléatoires stationnaires de densité spectrale de puissance $S_e(j\omega)$.

Le second type de modélisation correspond à la modélisation déterministe des signaux. Une modélisation communément utilisée consiste à définir un gabarit sur leur spectre. Dans ce cadre, le signal d'entrée w appartient à un ensemble Γ_w décrit par une borne sur sa DSP (cas d'un signal scalaire) :

$$\Gamma_w = \{w \mid \forall \omega, S_w(j\omega) \leq 1\}.$$

Le signal e appartient à l'ensemble des signaux de sortie d'un système de convolution SISO W pour des signaux d'entrée appartenant à l'ensemble Γ_w . Pour $w \in \Gamma_w$, le signal e peut être caractérisé comme un signal de DSP bornée :

$$\forall \omega S_e(j\omega) \leq |W(j\omega)|^2.$$

Ce type de modélisation définit des ensembles de signaux dont la densité spectrale de puissance est bornée à partir de signaux normalisés. Un gabarit sur la densité spectrale de puissance du signal e est donc spécifié par la pondération W . Un signal est décrit en l'englobant dans un ensemble décrit par un système de convolution et un signal canonique.

Pour citer Georges Zames [Zam81], ce type de modélisation permet d'encapsuler des ensembles de signaux.

« There are many engineering problems in which the a priori informations about disturbances is in the form of an upper bound to magnitudes of their possible frequency responses. The semi-norm description is natural for such problems, and occurs in inverse problems. »

1.2.3 Modéliser le système

Le système relie les signaux à estimer et les signaux mesurés. Selon le problème considéré, ce système prend différentes formes. Par exemple, dans le cas du débruitage, un signal z doit être estimé à partir de la mesure du signal $y = z + v$ où v est un bruit de mesure. Le modèle du système reliant les signaux peut se modéliser sous la forme présentée figure 1.6.

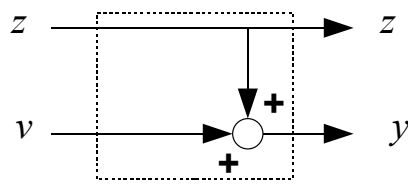


Figure 1.6 – Modèle pour le débruitage

Ce schéma doit être complété par l'ajout des modèles des signaux W_z (modèle de la DSP de z) et W_v (modèle de la DSP de v), pour permettre d'exploiter les informations a priori sur les signaux. Le modèle total prend la forme présentée figure 1.7 où z_n et v_n sont des signaux normalisés tels que $z_n \in \Gamma_w$ et $v_n \in \Gamma_w$ (modélisation déterministe). Cette modélisation signaux+ systèmes permet de décrire les signaux et les relations entre eux.

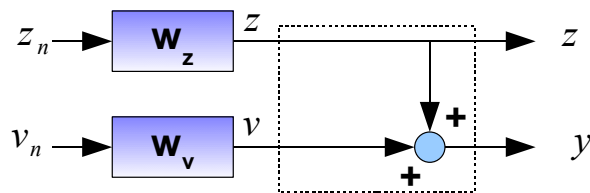


Figure 1.7 – Modèle complet pour le débruitage

Un second exemple correspond au système masses-ressorts présenté figure 1.2 page 2. Dans cet exemple, le lien entre le signal mesuré et le signal à estimer est donné par un modèle obtenu par application des équations de la mécanique des solides indéformables. On considère que la première masse est soumise à une force non mesurée décrite par le signal u .

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) = -k_1 x_1(t) + k_2(x_2(t) - x_1(t)) - c\dot{x}_1(t) + u(t) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) = k_2 x_1(t) - k_2 x_2(t) - c\dot{x}_2(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

On souhaite estimer le signal x_1 (position de la masse M_1) à partir de la mesure du signal x_2 (position de la masse M_2). Le signal à estimer est $z = x_1$. Comme cette mesure est probablement soumise à un bruit de mesure v , on peut écrire $y = x_2 + v$. Ce modèle peut être mis sous la forme d'une représentation d'état de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1-k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{c}{m_1} & 0 & \frac{1}{m_1} & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{c}{m_2} & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Ce système peut donc se mettre sous la forme suivante où $w = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ représente le vecteur des entrées du système.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B & 0 \\ \hline C_z & 0 & 0 \\ C_y & 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Par conséquent, le système exprimant la relation entre le signal à estimer et le signal mesuré peut se mettre sous la forme d'une matrice de fonctions de transfert de la forme présentée équation (1.5) page 7, dont le schéma bloc est représenté figure 1.8. Cette formalisation permet d'avoir une formulation homogène avec les modèles de signaux tout en permettant de représenter un certain nombre de systèmes réels, comme les systèmes mécaniques type masses-ressorts, les circuits électriques passifs, mais également des systèmes non-linéaires linéarisés autour d'un point de fonctionnement.

$$\begin{bmatrix} C_z \\ C_y \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} [B \ 0] + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

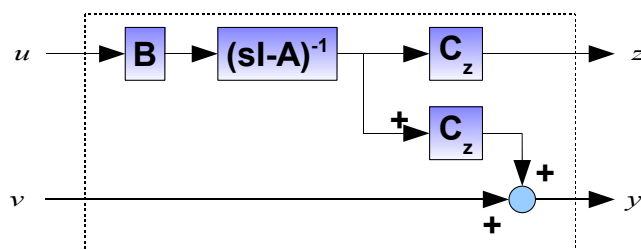


Figure 1.8 – Modèle pour l'estimation (système masses-ressorts)

Les modèles de signaux ne sont pas encore inclus dans cette représentation, et seule la représentation du système donnant la relation entre les signaux mesurés et les signaux à estimer est considérée. Divers cas particuliers d'estimation sont présentés dans le tableau 1.1 page 8.

Le modèle général du système pour l'estimation est obtenu en concaténant les modèles des signaux au modèle du système, comme présenté figure 1.9. Ce modèle général

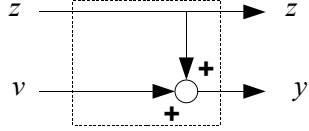
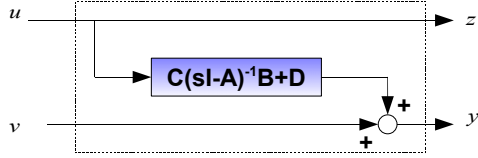
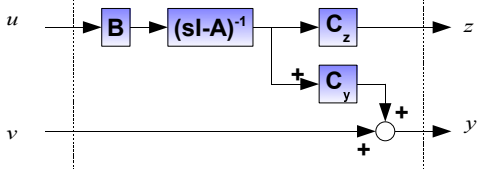
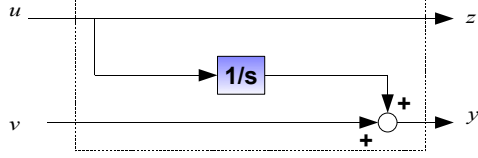
| | |
|---|---|
| <p>Débruitage</p> | <p>Retrouver un signal auquel un bruit de mesure est ajouté.</p> |
| $\begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \end{bmatrix}$ |  |
| <p>Déconvolution</p> | <p>Reconstituer l'entrée d'un système à partir de la mesure de sa sortie [BHS10]</p> |
| $\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & I & 0 \\ C & D & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$ |  |
| <p>Observation</p> | <p>Reconstituer tous les états d'un système à partir de la mesure d'un état ou d'une combinaison linéaire des états [Lue71]</p> |
| $\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ I & 0 & 0 \\ C_y & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$ |  |
| <p>Dérivation</p> | <p>Dériver un signal bruité (cas particulier de déconvolution) [Dri10]</p> |
| $\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 \\ I & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$ |  |

Tableau 1.1 – Modèles pour différents problèmes d'estimation

admet en entrées des signaux normalisés permettant grâce aux pondérations fréquentielles de générer les signaux modélisés. Ces signaux générés sont les entrées du modèle général assurant la relation entre les signaux à estimer et les signaux mesurés. Ce modèle général est décrit par une matrice de fonctions de transfert dans le cadre de l'estimation nominale :

$$T_{w \rightarrow (z,y)} = \begin{bmatrix} C_z \\ C_y \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} B_w + \begin{bmatrix} D_{zw} \\ D_{yw} \end{bmatrix}.$$

Cette forme également présentée figure 1.9 est la forme la plus générale du problème d'estimation (dans le cas nominal¹) et englobe la plupart des problèmes particuliers d'estimation présentés dans la table 1.1. Cette forme sera utilisée pour poser la forme standard du problème d'estimation nominale.

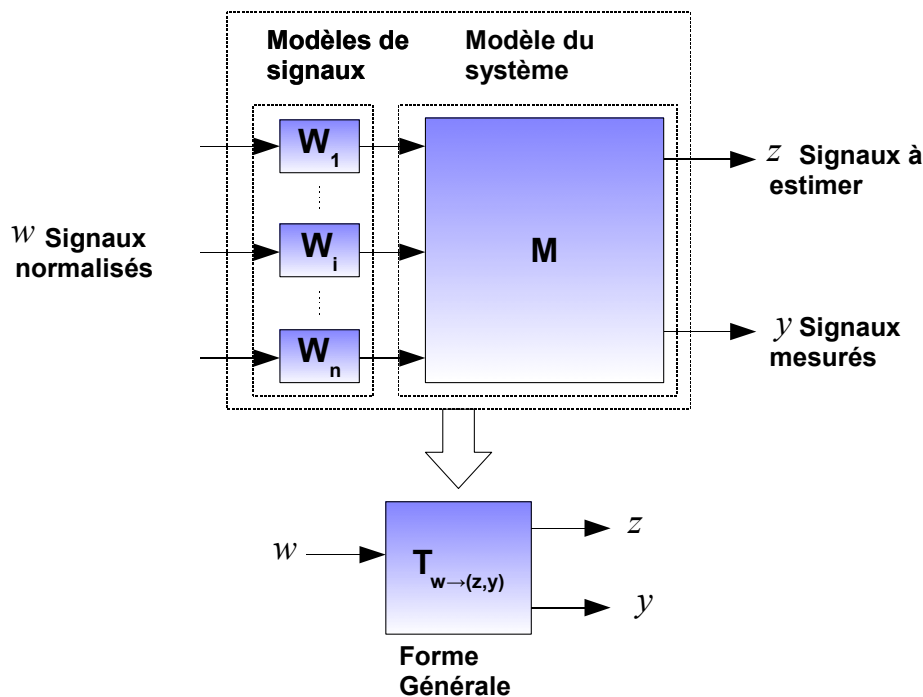


Figure 1.9 – Modèle pour l'estimation

1. Quelques remarques :

- Le cas continu a été présenté. Les mêmes modélisations peuvent être faites pour le cas discret.
- Les entrées mesurées et non-mesurées ont été regroupées dans le vecteur w . Pour les différencier, il suffit que le vecteur des sorties mesurées contiennent les entrées mesurées. Cette opération ne change pas la forme générale décrite figure 1.9.

1.2.4 Caractériser l'erreur d'estimation

Dans les sections précédentes (sections 1.2.2 et 1.2.3), la modélisation des signaux et du système les reliant pour l'estimation a été décrite. La forme standard du problème d'estimation nominale est présentée figure 1.10, faisant apparaître l'estimateur et l'erreur d'estimation.

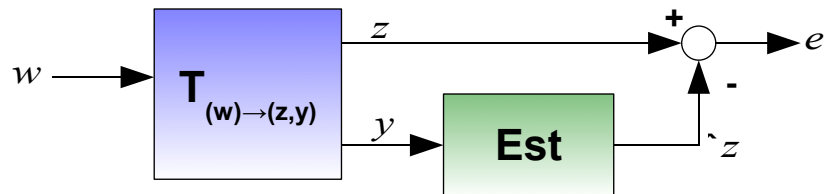


Figure 1.10 – Forme standard du problème d'estimation

Pour rappel, w est un vecteur de signaux normalisés qui contient tous les signaux d'entrée du système $T_{(w) \rightarrow (z,y)}$. $T_{(w) \rightarrow (z,y)}$ est un système qui contient les modèles de signaux, ainsi que le système qui relie les signaux à estimer aux signaux mesurés (voir tableau 1.1 page 8 pour des cas particuliers). Pour finir, les sorties de l'estimateur constituent \hat{z} le vecteur des signaux estimés. La comparaison de ce vecteur avec le vecteur des signaux à estimer z constitue e le vecteur des erreurs d'estimation.

La sous-section 1.2.2 a présenté succinctement la modélisation des signaux. Si on suppose que l'estimateur est connu et décrit par une matrice de fonctions de transfert, alors l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$ est une matrice de fonctions de transfert et l'erreur d'estimation est caractérisée par la quantité suivante :

$$S_e(j\omega) = T_{(w) \rightarrow (e)}(j\omega)T_{(w) \rightarrow (e)}^*(j\omega)$$

$S_e(j\omega)$ est la DSP de e pour des signaux d'entrée de DSP unitaire (cas stochastique). Cette quantité peut être interprétée comme un gabarit supérieur sur la DSP de l'erreur d'estimation (cas déterministe). Par abus, dans la suite de cette thèse, on parlera systématiquement de DSP de l'erreur pour décrire cette quantité.

L'erreur d'estimation est donc entièrement caractérisée par l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$ dans le cas où les signaux d'entrée sont des signaux normalisés. Pour caractériser l'erreur d'estimation, il suffit de caractériser l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$. Cet opérateur est une matrice de fonctions de transfert qui peut être caractérisée par une norme.

Definition 1. Norme H_2 d'une matrice de fonctions de transfert [SW00]

Soit $T_{(w) \rightarrow (e)}$ une matrice de fonctions de transfert stable de réponse impulsionnelle $h(t)$, et de réponse fréquentielle $T_{(w) \rightarrow (e)}(j\omega)$. La norme H_2 de cette matrice de fonctions de transfert est définie par :

$$\|T_{(w) \rightarrow (e)}\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Trace} (T_{(w) \rightarrow (e)}(j\omega) T_{(w) \rightarrow (e)}^*(j\omega)) d\omega \right)^{1/2}. \quad (1.6)$$

Ceci peut s'écrire en temporel en utilisant le théorème de Parseval :

$$\|T_{(w) \rightarrow (e)}\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} \text{Trace}(h^T(t)h(t)) dt \right)^{1/2}. \quad (1.7)$$

Interprétation : La norme H_2 correspond à la racine carrée de l'énergie de la réponse impulsionnelle d'un système. Elle correspond également à la racine carrée de la puissance totale des signaux de sortie du système en réponse à une entrée de densité spectrale de puissance unitaire. Elle admet également une interprétation stochastique : si le signal d'entrée est un bruit blanc de variance unitaire, alors elle correspond à la variance de l'erreur d'estimation [HSK99].

Definition 2. Norme H_∞ d'une matrice de fonctions de transfert [SW00]

Soit $T_{(w) \rightarrow (e)}$ une matrice de fonctions de transfert stable. La norme H_∞ de cette matrice de fonctions de transfert est définie par :

$$\|T_{(w) \rightarrow (e)}\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(T_{(w) \rightarrow (e)}(j\omega)) \quad (1.8)$$

où $\bar{\sigma}$ représente la valeur singulière maximale de la réponse fréquentielle $T_{(w) \rightarrow (e)}(j\omega)$ de $T_{(w) \rightarrow (e)}$.

Interprétation :

- Cas SISO : la valeur singulière maximale le long des fréquences correspond à la valeur maximale du module de la fonction de transfert.

$$\sup_{\omega} \bar{\sigma}(T_{(w) \rightarrow (e)}(j\omega)) = \sup_{\omega} (|T_{(w) \rightarrow (e)}(j\omega)|)$$

En termes de signaux, si $\|T_{(w) \rightarrow (e)}\|_\infty \leq \gamma$, alors pour tout signal d'entrée $w \in \Gamma_w$, le signal e vérifie $\forall \omega \in \mathbb{R}, S_e(j\omega) \leq \gamma^2$. La norme H_∞ décrit un gabarit supérieur constant défini par γ^2 sur la densité spectrale de puissance de la sortie pour un signal d'entrée dont la densité spectrale de puissance est inférieur à 1.

- Cas MISO : on note w_i la i^{ieme} composante du vecteur w . Le signal e est un signal scalaire. La valeur singulière correspond à la norme euclidienne du vecteur correspondant à la réponse fréquentielle.

$$\sup_{\omega} \bar{\sigma}(T_{(w) \rightarrow (e)}(j\omega)) = \sup_{\omega} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n |T_{(w_i) \rightarrow (e)}(j\omega)|^2} \right).$$

Cette quantité décrit un gabarit supérieur sur $S_e(j\omega)$ la DSP du signal de sortie.

- Cas SIMO : on note e_i la i^{ieme} composante du vecteur e . Le signal w est un signal scalaire. Nous avons la relation suivante :

$$\sup_{\omega} \bar{\sigma}(T_{(w) \rightarrow (e)}(j\omega)) = \sup_{\omega} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n |T_{(w) \rightarrow (e_i)}(j\omega)|^2} \right).$$

Ici la norme caractérise la pire amplification énergétique du signal d'entrée le long des fréquences, c'est-à-dire la pire amplification énergétique pour une entrée harmonique [Doy96].

- Cas MIMO : l'interprétation de cette norme comme une pire amplification harmonique reste valable. L'interprétation la plus intéressante peut se faire en terme de densité spectrale de puissance.

$$\sup_{\omega} \bar{\sigma}(T_{(w) \rightarrow (e)}(j\omega)) \leq \gamma \Leftrightarrow \sup_{\omega} \lambda \left(\sqrt{T_{(w) \rightarrow (e)}(j\omega) T_{(w) \rightarrow (e)}^*(j\omega)} \right) \leq \gamma$$

$$\sup_{\omega} \lambda \left(\sqrt{T_{(w) \rightarrow (e)}(j\omega) T_{(w) \rightarrow (e)}^*(j\omega)} \right) \leq \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}, T_{(w) \rightarrow (e)}(j\omega) T_{(w) \rightarrow (e)}^*(j\omega) \leq \gamma^2 I$$

Les densités spectrales de puissance des signaux e_i sont données par $S_{e_i}(j\omega) = \sum_{j=1}^n |T_{(w_j) \rightarrow (e_i)}(j\omega)|^2$. L'implication suivante est valable :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, T_{(w) \rightarrow (e)}(j\omega) T_{(w) \rightarrow (e)}^*(j\omega) \leq \gamma^2 I \Rightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}, S_{e_i}(j\omega) \leq \gamma^2$$

Il est important de noter que la relation est suffisante, mais cette norme permettra de garantir un gabarit supérieur sur les densité spectrales de puissance des signaux de sortie d'un système MIMO.

Tester une norme H_{∞} sur une matrice de fonctions de transfert permet de tester un gabarit supérieur constant sur les densités spectrales de puissance des signaux de sortie. Il est possible cependant de tester un gabarit supérieur d'une forme choisie, en utilisant une pondération fréquentielle W_e sur le signal de sortie.

En présence de pondération dans le cas SISO, on a l'équivalence suivante :

$$\|W_e T_{(w) \rightarrow (e)}\|_{\infty} \leq \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}, |T_{(w) \rightarrow (e)}(j\omega)| \leq \gamma |W_e^{-1}(j\omega)|$$

Pour le cas MIMO, pour une pondération bloc-diagonale $W_e(j\omega) = \text{diag}(W_{e_i}(j\omega))$ (avec $W_{e_i}(j\omega)$ une pondération fréquentielle SISO), on a l'implication suivante :

$$\|W_e T_{(w) \rightarrow (e)}\|_{\infty} \leq \gamma \Rightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}, S_{e_i}(j\omega) \leq |W_{e_i}^{-1}(j\omega)|^2 \gamma^2.$$

Les pondérations fréquentielles permettent de décrire une densité spectrale de puissance. Utilisées conjointement avec la norme H_{∞} , ces pondérations permettent également

de décrire des gabarits sur les densités spectrales de puissances des signaux de sortie d'un système en réponse à des entrées normalisées.

Interprétation des normes à travers un exemple

Pour faciliter l'interprétation des normes présentées, on présente la matrice de fonction de transfert stable suivante :

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) & G_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+s+1} & \frac{s}{s^2+s+1} \end{bmatrix}.$$

A une fréquence donnée, le carré de la valeur singulière de cette matrice de fonctions de transfert est donnée par $G_1^*(j\omega)G_1(j\omega) + G_2^*(j\omega)G_2(j\omega) = |G_1(j\omega)|^2 + |G_2(j\omega)|^2$. Pour une entrée normalisée de densité spectrale de puissance unitaire (approche stochastique), ces valeurs singulières représentent la densité spectrale de puissance de la sortie.

La norme H_2 de cette fonction de transfert est donnée par

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (G_1^*(j\omega)G_1(j\omega) + G_2^*(j\omega)G_2(j\omega)) d\omega \right)^{1/2} \quad (1.9)$$

La norme H_2 correspond à la racine carrée de l'aire sous la courbe donnée par la valeur singulière de $G(j\omega)$ comme présenté figure 1.11 page 14, à un facteur près.

La norme H_∞ de cette fonction de transfert est donnée par :

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(T_{(w) \rightarrow (e)}(j\omega)) = 1.47$$

Cette norme correspond à la plus grande des valeurs singulières le long des fréquences de la fonction $G(j\omega)$. Ecrire que les valeurs singulières de cette fonction de transfert sont inférieures à 1.47 revient à garantir un gabarit supérieur sur la densité spectrale de puissance du signal de sortie pour une entrée normalisée. Si on considère un signal d'entrée de DSP inférieure à 1 alors la densité spectrale de puissance du signal de sortie sera inférieure à 1.47^2 . La figure 1.11 montre le gabarit supérieur ainsi décrit.

La description de la réponse du système par sa norme H_∞ est insatisfaisante. On ne considère que la valeur singulière maximale de cette fonction de transfert, c'est-à-dire un gabarit supérieur constant. La description du gabarit peut être enrichie en pondérant fréquemment le signal de sortie. On considère la fonction de transfert $W(s)G(s)$, avec $W(s) = \frac{s^2+4s+4}{0.2s^2+2.53s+8}$. On a le résultat suivant : $\|WG\|_\infty = 0.8653$. Ce résultat nous assure que les valeurs singulières au carré de la fonction de transfert G sont inférieures à un certain gabarit donné par $0.8653^2 \times |W^{-1}j\omega|^2$, comme la figure 1.12 le montre.

Nous avons présenté dans cette partie deux normes sur les modèles LTI, qui vont permettre de caractériser l'erreur d'estimation. Dans le cas où l'estimateur n'est pas connu, l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$ est une fonction de l'estimateur et l'erreur d'estimation également. L'objectif de l'estimation est de synthétiser un estimateur qui minimise un critère de

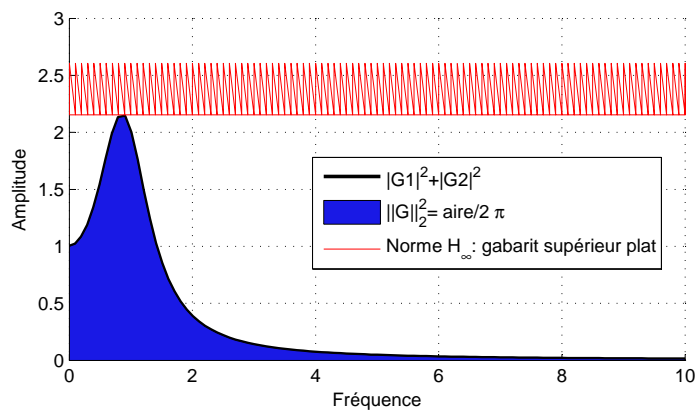


Figure 1.11 – Interprétation des normes sur les systèmes

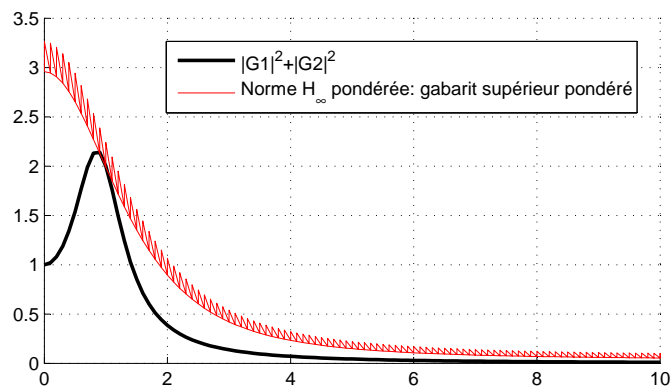


Figure 1.12 – Interprétation de la norme H_∞ pondérée

performance sur cette erreur d'estimation. Les approches historiques sont des approches stochastiques (par exemple les approches de Wiener [Wie50] et Kalman [Kal60] du problème d'estimation), et proposent de minimiser la variance de l'erreur d'estimation. La variance de l'erreur d'estimation a une interprétation en terme de puissance : ces approches minimisent la puissance du signal correspondant à l'erreur d'estimation, caractérisée la norme H_2 dans le cas linéaire. Les approches proposées plus tardivement [NK91, Sha90] proposent de minimiser une norme H_∞ sur la matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}$. Ceci correspond à proposer un gabarit supérieur pour la densité spectrale de puissance de l'erreur d'estimation.

En reprenant le formalisme général du problème présenté dans la figure 1.4, l'estimateur va être synthétisé sur la base d'un modèle du système et des signaux, dans l'objectif de garantir ou minimiser une norme sur l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$, qui est dans le cas nominal une matrice de fonctions de transfert.

1.2.5 Le problème d'estimation nominale

Les premières approches du problème d'estimation considèrent que le système réel est parfaitement décrit par un modèle LTI. Si cette hypothèse est vérifiée, la performance assurée sur l'erreur d'estimation par l'estimateur synthétisé sur le modèle LTI va être atteinte lors de l'application de l'estimateur sur le système réel.

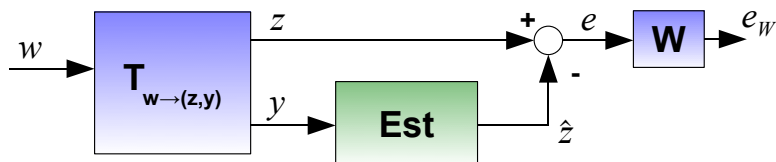


Figure 1.13 – Forme standard du problème d'estimation pondérée

La forme standard du problème d'estimation nominale est présentée dans la figure 1.13. Le modèle $T_{(w) \rightarrow (z,y)}$ présenté dans la figure 1.13 contient les modèles des signaux, comme présenté sous-section 1.2.2, et le modèle du système comme présenté sous-section 1.2.3. Dans le cadre de l'estimation nominale, ce modèle est supposé représenter parfaitement le système réel.

Les normes sur les fonctions de transfert ont été définies section 1.2.4. Le problème d'estimation nominale peut être formulé relativement à un critère de performance caractérisé par la norme H_2 ou la norme H_∞ de la fonction de transfert suivante :

$$T_{w \rightarrow e} = W \begin{bmatrix} I & -Est \end{bmatrix} T_{(w) \rightarrow (z,y)}.$$

Le problème de synthèse d'estimateur est de trouver un estimateur garantissant une norme sur la matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}$ correspondant à la forme standard présentée figure 1.13. En minimisant cette norme, soit la puissance de l'erreur d'estimation est minimisée dans le cas H_2 , soit un gabarit supérieur sur la DSP de l'erreur d'estimation est garanti dans le cas H_∞ .

Problème 1. Problème d'estimation nominale.

Pour $\gamma > 0$, trouver s'il existe un estimateur (et le calculer) tel que :

$$\|W \begin{bmatrix} I & -Est \end{bmatrix} T_{(w) \rightarrow (z,y)}\|_i < \gamma.$$

Ce problème a été largement étudié et les méthodes pour le résoudre ont été largement diffusées et utilisées [Sim06]. Dans le chapitre 2, nous proposons une revisite de l'estimation nominale au moyen d'outils récents d'optimisation convexe. Ceci nous permettra de poser les bases de la synthèse d'estimateur dans l'objectif d'étendre les résultats de l'estimation nominale à l'estimation robuste. Cependant, cette revisite a également permis de dégager des résultats pour prendre en compte de façon optimale

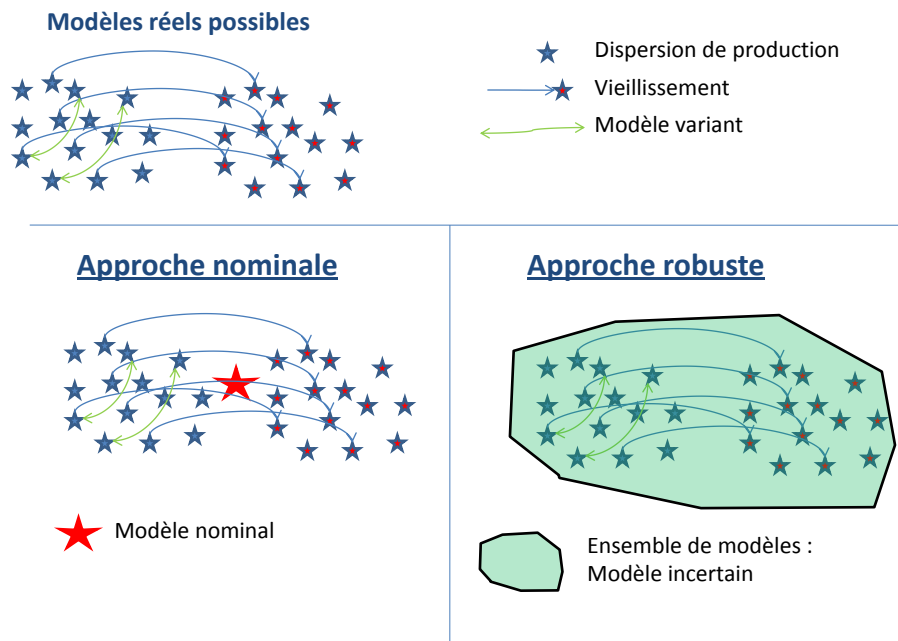


Figure 1.14 – Approche nominale - Approche robuste

les pondérations sur l'erreur d'estimation et les choisir. Ces résultats sont présentés dans le chapitre 2.

1.3 Le problème d'estimation robuste

1.3.1 L'approche robuste

Les solutions proposées pour résoudre le problème d'estimation nominale sont basées sur une hypothèse forte : le système réel est parfaitement représenté par un modèle LTI. Or tout modèle n'est qu'une représentation imparfaite de la réalité. Par conséquent, la performance garantie par la méthode de synthèse de l'estimateur ne sera pas atteinte lorsque l'estimateur synthétisé sur le modèle nominal sera appliqué au système réel. Par exemple, dans le cas d'un système produit industriellement, l'estimateur sera synthétisé sur un modèle central sans prendre en compte la dispersion de production qui introduit toujours une erreur de modèle. Un modèle valable pourra devenir faux en cas de vieillissement ou de changement des conditions d'utilisation. Résoudre le problème d'estimation nominale ne sera donc pas suffisant dans certains cas, où de petites erreurs de modèle peuvent avoir un impact fort sur la performance réelle de l'estimateur [Bha76].

On propose dans cette thèse de prendre en compte cette différence entre le modèle et le système dès l'étape de synthèse de l'estimateur. Une approche proposée pour résoudre

ce problème consiste à modéliser le système non pas par un modèle unique, mais par un ensemble de modèles appelé modèle incertain.

Par la suite un estimateur minimisant la performance moyenne pour tous les modèles du modèle incertain peut être recherché. Mais une approche de ce type ne permettra pas d'éviter des comportements marginaux de l'erreur d'estimation. Une autre approche est l'approche pire-cas consistant à chercher un estimateur garantissant une performance minimale pour tous les modèles inclus dans le modèle incertain. Si le système réel est inclus dans ce modèle, alors la performance garantie par la synthèse robuste sera atteinte lors de l'application de l'estimateur au système réel.

1.3.2 Le problème d'estimation robuste

On peut donc formuler le problème d'estimation robuste pour une performance pire-cas. Le formalisme final du problème d'estimation peut se mettre sous la forme présentée figure 1.15. Dans le cas robuste, un ensemble de modèles noté Γ_G est considéré. Le problème est donc la recherche d'un estimateur garantissant une borne supérieure sur le pire-cas d'une norme (qui sera décrite plus tard)² pour l'ensemble des modèles contenus dans le modèle incertain.

Problème 2. Problème d'estimation robuste.

Pour $\gamma > 0$, trouver s'il existe un estimateur *Est* (et le calculer) tel que pour tout $G \in \Gamma_G$:

$$\|W [I - Est] G\|_i < \gamma.$$

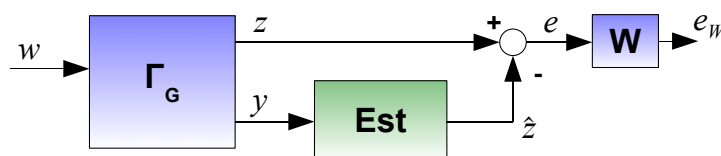


Figure 1.15 – Forme standard du problème d'estimation robuste pondérée

Ce problème constitue la problématique principale de la thèse. Nous proposons dans ce document de résoudre ce problème comme une extension naturelle de l'estimation nominale.

1.3.3 De la complexité du problème

Les modèles LTI ont une capacité intéressante de représentation des systèmes réels mais ne permettent pas de représenter tous les systèmes possibles (la plupart des systèmes réels sont non linéaires, temps variants, etc...). Ces modèles ont pourtant été

2. Si on décrit un ensemble de modèles LTI, on pourra par exemple prendre la norme H_∞ .

largement utilisés [Kai74, FPEN84] par les ingénieurs pour une raison simple. En se ramenant à des fonctions de la variable complexe, ou à des systèmes d'équations différentielles linéaires pour les problèmes de contrôle ou d'estimation, il existe un certain nombre d'outils de calcul qui vont permettre d'obtenir rapidement des résultats d'analyse ou de synthèse, par des méthodes analytiques ou numériques.

La théorie de la complexité propose de classer les problèmes en fonction de la vitesse de convergence des algorithmes pour trouver une solution. Il existe principalement 2 grandes classes de problèmes (conjecturées séparées) : les problèmes de type P (polynomiaux) et les problèmes de type NP. Pour les problèmes de type P, il existe des algorithmes capables de donner une solution à ces problèmes, dont le temps de calcul est raisonnable, et n'explose pas lorsque le nombre de variables du problème d'optimisation augmente. En revanche, pour les algorithmes de type NP, le temps de calcul peut exploser, pouvant dépasser l'échelle humaine. Voilà pourquoi les problèmes de type P sont les problèmes intéressants d'un point de vue ingénierie [NN87].

La complexité justifie l'utilisation des modèles LTI. Dotés d'outils efficaces (solutions analytiques ou numériques efficaces), ils permettent d'obtenir rapidement des solutions aux problèmes d'analyse ou de synthèse. Pour étendre les méthodes de synthèse d'estimateurs nominaux à l'estimation robuste, il est nécessaire de conserver le caractère efficace des outils de calculs. Un algorithme efficace est un algorithme de type P. On parlera de solution efficace pour un problème donné lorsqu'on s'est ramené à un problème d'optimisation pour lequel il existe un algorithme efficace.

1.4 L'optimisation LMI

Definition 3. - Soit ζ un vecteur de décision de taille m . On définit l'ensemble de contraintes C :

$$C = \{ \zeta \in \mathfrak{R}^m; \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus 0, \quad x^T F(\zeta) x > 0 \} \quad (1.10)$$

où F est une matrice dépendante de façon affine du vecteur de décision ζ .

$$F(\zeta) = F_0 + \sum_{i=1}^m \zeta_i F_i \quad (1.11)$$

C est un ensemble convexe. C est appelée une contrainte Inégalité Matricielle Linéaire (LMI).

Il existe plusieurs problèmes d'optimisation sous contrainte LMI [BEFB94] :

- le problème de faisabilité, présenté en introduction de cette partie :
Trouver $\zeta \in \mathfrak{R}^m$ tel que $F(\zeta) > 0$ (où $>$ signifie que $F(\zeta)$ est définie positive);
- le problème de minimisation d'une fonction de coût linéaire :
Minimiser $c^T \zeta$ pour $\zeta \in \mathfrak{R}^m$ vérifiant $F(\zeta) > 0$;

- le problème de minimisation de la valeur propre généralisée maximale : minimiser $\lambda \in \mathfrak{R}$ tel que pour $\zeta \in \mathfrak{R}^m$, $\lambda F(\zeta) - H(\zeta) > 0$ avec $F(\zeta) > 0$, $H(\zeta) > 0$;

Dans les années 1990, l'optimisation sous contrainte inégalité matricielle linéaire a émergé comme un outil de résolution des problèmes de synthèse et d'analyse pour le contrôle et l'estimation. Les contraintes inégalités matricielles sont naturellement présentes dans les problèmes de contrôle. A la fin du 19e siècle, Lyapunov a montré que l'équation $\dot{x} = Ax$ est stable si et seulement si il existe une matrice $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ définie positive telle que $A^T \mathbf{P} + \mathbf{P}A < 0$ [BV]. Ce problème est un problème de faisabilité sous contrainte LMI :

Trouver une matrice $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ telle que :

$$\mathbf{P} > 0 \quad A^T \mathbf{P} + \mathbf{P}A < 0$$

Les variables de décisions sont les coefficients de la matrice \mathbf{P} . Ces variables de décision apparaissent de façon linéaire dans les contraintes.

Suite à l'extension des méthodes de points intérieurs à l'optimisation sous contrainte LMI [NN87], les problèmes d'optimisation sous contrainte LMI peuvent être résolus par un algorithme efficace. Cela a permis de développer une approche élégante et unifiée d'une majorité de problèmes d'analyse et de contrôle [PZPB91, BEFB94, Sco97]. Pour en montrer toutes les potentialités dans le cadre du contrôle classique, on peut par exemple citer les exemples suivants : solution du problème de contrôle H_∞ : [GA94], synthèse de correcteurs à séquençements de gain [AG95], analyse de la robustesse des systèmes : [GS95], synthèse de correcteurs H_2 [Sch96], synthèse multi-objectif de correcteurs [SGC97], synthèse de lois de commande décentralisée [Kor11], etc..

Dans le problème présenté précédemment, le vecteur des variables de décision sera par exemple un vecteur contenant les paramètres de la matrice \mathbf{P} , qui est l'inconnue du problème. On prendra une base des matrices symétriques pour créer la forme dépendante de façon affine du vecteur de décision présentée précédemment, et ainsi définir l'ensemble de contraintes.

L'optimisation LMI est un outil de calcul qui permet de tester certains résultats d'analyse de la performance des systèmes. Elle a ouvert un certain nombre de voies pour résoudre le problème d'estimation nominale [PK97, WG98], ainsi que le problème d'optimisation robuste [GB99]. Nous verrons en chapitre 2 qu'elle permet de proposer un cadre élégant et simple pour résoudre les problèmes d'estimation nominale, mais qu'elle permet également d'étendre naturellement ces résultats aux problèmes de synthèse d'estimateurs robustes.

Dans cette thèse, les solutions aux différents problèmes d'estimation sont présentées sous la forme de théorèmes pouvant être mis sous la forme de problèmes d'optimisation convexe sous contrainte LMI. L'existence d'un algorithme efficace pour résoudre ce type de problèmes garantira de trouver une solution aux problèmes de synthèse considérés.

Chapitre 2

L'estimation dans le cas nominal

Dans l'objectif d'étendre les méthodes nominales de synthèse d'estimateurs à l'estimation robuste, nous revisitons dans ce chapitre la synthèse d'estimateurs dans le cas nominal en utilisant l'optimisation sous contrainte LMI.

Le chapitre 1 a présenté la modélisation des signaux (sous-section 1.2.2 page 4), la modélisation des systèmes pour l'estimation (sous-section 1.2.3 page 5), et enfin la caractérisation de l'erreur d'estimation au moyen des normes H_2 ou H_∞ . Le problème de synthèse d'estimateur dans le cas nominal posé dans le chapitre 1 est considéré dans cette section :

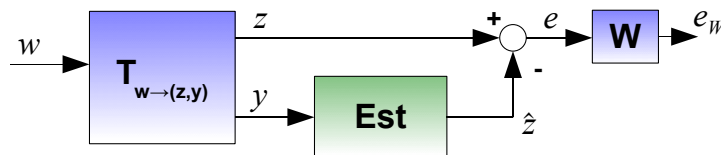


Figure 2.1 – Forme standard du problème d'estimation nominale

Problème 3. Problème de synthèse d'estimateur nominal.

La forme standard du problème de synthèse d'estimateur nominal est la matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}$ présentée figure 2.1 page 21.

Etant donné $\gamma > 0$, $i = 2$ (norme H_2) ou $i = \infty$ (norme H_∞), trouver s'il existe un estimateur Est (et le calculer) tel que :

$$\|W [I - Est] T_{(w) \rightarrow (y,z)}\|_i < \gamma.$$

Organisation du chapitre

Dans une première section (2.1), nous proposons une revue des méthodes classiques pour résoudre le problème d'estimation. Cette revue permettra de faire un certain nombre de remarques :

- Les méthodes classiques utilisent 2 structures : le filtre et l’observateur (qui seront introduites dans les sections concernées). La question se pose alors de la différence entre ces deux structures d’un point de vue performance.
- Pour finir, nous dégagerons un manque sur les méthodes de synthèse pour l’estimation nominale utilisant un critère H_∞ . Alors que la synthèse H_∞ est issue d’un problème de contrôle, et que le cahier des charges est spécifié par des pondérations sur les sorties, les pondérations sur l’erreur d’estimation sont très peu abordées dans la littérature. La question de l’importance de ces pondérations se pose. Puisque leur importance est prouvée, comment les choisir pour spécifier un cahier des charges ?

Dans une seconde section, nous introduisons la démarche LMI permettant de ramener le problème de synthèse d’estimateur sous la forme d’un problème d’optimisation convexe. En appliquant cette démarche, il est possible d’extraire des critères de comparaison pour les structures classiques pour répondre à la question posée par la section 2.1. Il est ensuite possible de les unifier en une seule et même structure appelée Estimateur Généralisé Nominal (EGN), présentée section 2.3, ce qui constitue la première contribution de la thèse. Cette structure permet de prendre en compte de façon élégante les pondérations.

Pour finir, nous présentons une méthode permettant de choisir les pondérations de l’erreur d’estimation. Ceci est réalisé par la création d’outils d’analyse de la limite de performance pour l’estimation. Nous répondons ainsi au manque détecté dans la littérature dans la section 2.1. Les outils développés dans ce chapitre sont ensuite appliqués sur un exemple académique.

2.1 Revue des méthodes classiques pour l’estimation nominale

2.1.1 Les méthodes classiques de synthèse d’estimateur

Nous présentons ici une liste non-exhaustive des méthodes classiques utilisées pour l’estimation basée sur un modèle. Nous présentons le nom de la méthode, le critère de performance, ainsi que l’outil de résolution.

Les approches stochastiques

Historiquement, les premières approches du problème d’estimation sont les approches stochastiques. La méthode de Wiener [Wie50] propose de synthétiser un filtre qui va minimiser la variance de l’erreur d’estimation. La structure filtre est présentée à la figure 2.2 page 23. La méthode de Wiener se place dans le cas SISO pour le système et dans le cas stationnaire pour les signaux. Il est proposé de synthétiser soit un filtre non-

causal soit un filtre causal, les deux découlant de l'analyse de l'équation de Wiener-Hopf. D'un point de vue calcul de l'estimateur, la fonction de transfert du filtre non causal est calculée par une approche algébrique. Le filtre causal est calculé par factorisation spectrale.

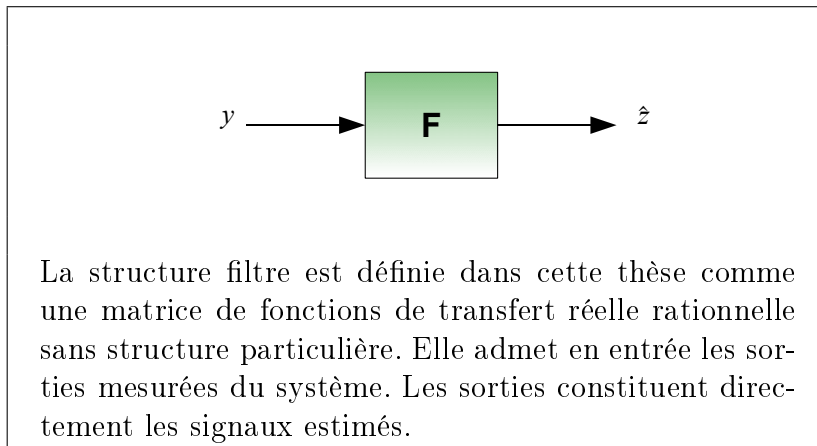


Figure 2.2 – Structure filtre

Par la suite, l'approche de Kalman [Kal60, cas discret], [KB61, cas continu] est l'approche qui a connu le plus grand succès. Cette approche a introduit une nouvelle structure pour l'estimateur : la structure d'observateur présentée dans la figure 2.3. Nous verrons section 2.2 que cette structure permet de synthétiser des estimateurs sur des systèmes instables, contrairement à la structure filtre. Cette approche propose de minimiser la variance de l'erreur d'estimation en réponse à des signaux aléatoires de variances connues possiblement inter-corrélés dont les caractéristiques statistiques peuvent varier dans le temps. La résolution se fait en résolvant une équation de Riccati, possiblement temps-variante. Dans le cas stationnaire, cette solution est connue pour donner une solution équivalente à l'approche de Wiener [Sim06]. Cette approche est à l'origine des approches LQG pour la synthèse de correcteurs [Doy96].

Les approches déterministes

Parallèlement, les observateurs par placement de pôles se sont développés [Lue66, Lue71], dans l'objectif de faire de la commande par retour d'état [FPEN84]. Le critère de performance spécifié pour ces approches consiste à choisir la réponse temporelle de l'erreur d'estimation pour des conditions initiales différentes pour le modèle du système et le modèle de l'observateur. La résolution est faite par une méthode algébrique (placement de pôles). Quoique largement utilisées, ces approches sont assez pauvres dans la description du problème relativement au problème d'estimation, puisque le bruit de mesure n'est pas pris en compte. La simplicité de cette approche lui a assuré un large succès dans la communauté du contrôle. Ces observateurs ont également permis de proposer des correcteurs par retour de sortie [FPEN84].

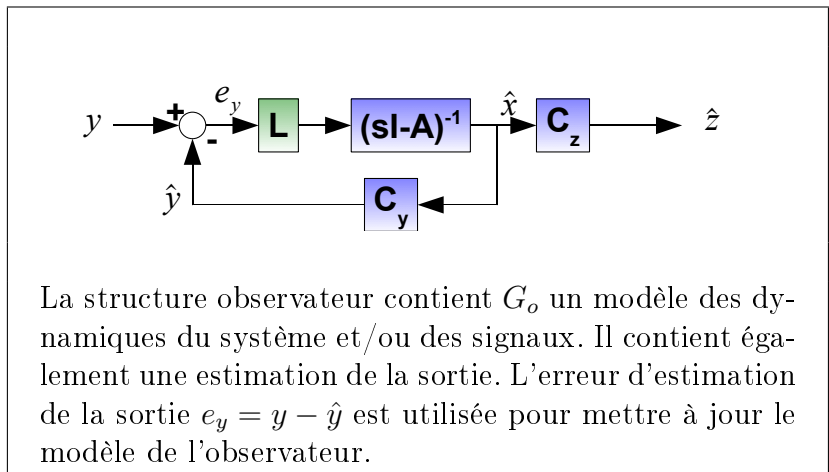


Figure 2.3 – Structure Observateur

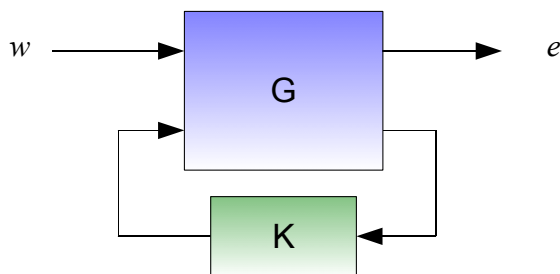


Figure 2.4 – Forme standard du problème de synthèse de correcteur

Finalement, dans le cadre du contrôle, le problème de synthèse H_∞ a été proposé dans [Zam81] pour pouvoir spécifier un cahier des charges fréquentiel pour la synthèse d'un correcteur, ce qui est difficile à faire avec la commande LQG ([Zam81, Doy96]).

Problème 4. Problème de synthèse de correcteur H_∞ .

La forme standard du problème de synthèse de correcteur H_∞ est la matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}$ présentée figure 2.4 page 24.

Etant donné γ , trouver s'il existe une matrice de fonctions de transfert K telle que $T_{w \rightarrow e}$ soit stable et que :

$$\|T_{w \rightarrow e}\|_\infty < \gamma.$$

Le problème de synthèse de filtre est un cas particulier du problème de synthèse de correcteur (figure 2.5). Les solutions du problème de synthèse de correcteur sont également des solutions du problème de synthèse de filtre.

Les solutions proposées pour résoudre le problème de contrôle par factorisation spectrale [Kwa86] ont été transposées à la synthèse de filtre pour la norme H_∞ dans [EGH88, GE90, Gri96], et pour la norme H_2 dans [AS91]. Plus tard, la célèbre solution des problèmes de contrôles H_2 et H_∞ par équation de Ricatti [DGKF89] a permis d'ame-

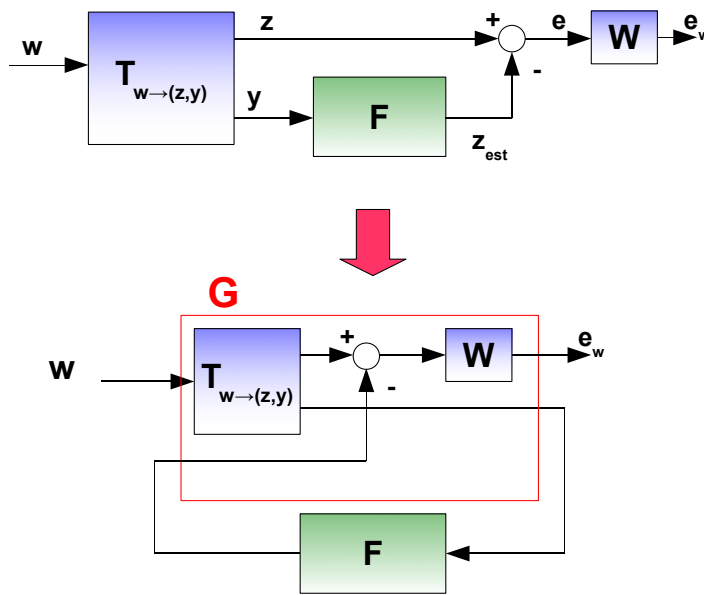


Figure 2.5 – Mise du problème d’estimation sous la forme d’un problème de contrôle

ner les solutions pour la synthèse de filtre donnée dans [NK89, NK91, Sha90, ST92]. La structure observateur est présentée comme un outil de paramétrisation de la structure filtre [ST92].

Les solutions pour la norme H_∞ ne spécifient pas la présence d’un gabarit de sortie pour l’erreur d’estimation ([ST92] par exemple). Dans le cadre du contrôle, les pondérations servent à spécifier un cahier des charges. Par conséquent, en l’absence de pondérations, les résultats peuvent être qualitativement inintéressants (voir section 2.4). Pour pallier à ce problème, la solution de [BH89] propose un aspect multi-objectif associant minimisation de la norme H_2 sous une contrainte H_∞ . De manière générale, en se ramenant à des solutions sous-optimales au moyen des équations de Ricatti, des solutions qualitativement intéressantes peuvent être obtenues. Le critère H_∞ devient alors un critère de réglage [ST92], alors que sa motivation première est de spécifier un cahier des charges au moyen de gabarits fréquentiels.

Finalement l’émergence de l’optimisation LMI [PZPB91, BEFB94, Iwa94] a permis de proposer une solution alternative au problème de contrôle à la solution par équation de Ricatti de [DGKF89]. Les solutions ont été présentées en utilisant le lemme d’élimination pour la norme H_∞ dans [GA94, Iwa94], et la solution par changement de variable présentée dans [SGC97] a permis de proposer des solutions pour d’autres spécifications sur le système. Ces solutions ont été transposées à la synthèse de filtre dans [PK97] pour la synthèse de filtres H_∞ . Plus tard, des solutions utilisant le lemme d’élimination ont été proposées dans [Gri97, WG98]. L’optimisation LMI est donc l’outil le plus récent pour la synthèse d’estimateur dans le cas nominal.

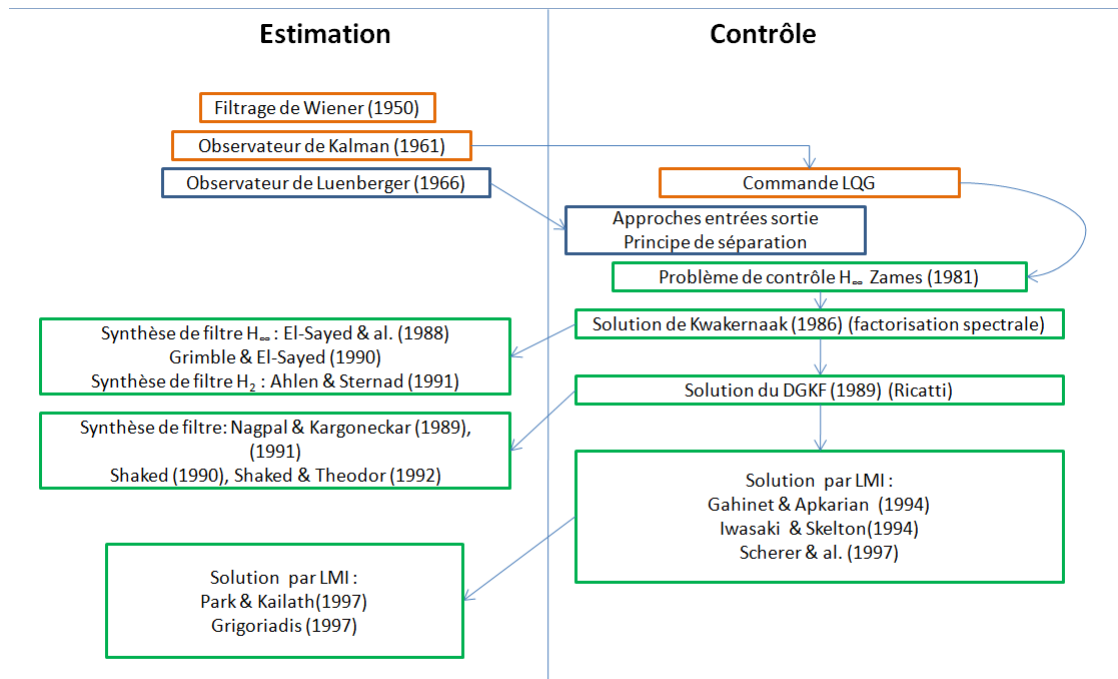


Figure 2.6 – Lien entre l’estimation et le contrôle

L’estimation basée sur un modèle et le contrôle sont intimement reliés. La figure 2.6 donne un aperçu de ces liens dans le cas nominal. Ce lien est encore plus fort dans le cadre de l’estimation robuste.

2.1.2 Synthèse de la littérature

Classification structure-critère de performance

Dans le tableau 2.1, une synthèse des méthodes classiques de synthèse est réalisée en classant celles-ci par structure d’estimateur et par critère de performance considéré.

Le critère H_2 s’interprétant comme la variance de l’erreur d’estimation est largement considéré. De par son interprétation statistique, le filtre de Kalman a connu un succès indéniable dans un grand nombre d’applications [Sim06]. La norme H_2 sera donc naturellement considérée dans cette thèse.

Quant à la norme H_∞ , elle est également largement considérée dans les méthodes classiques. En revanche, la norme H_∞ pondérée n’est quasiment pas considérée, et si elle l’est, aucune précision sur le choix des pondérations fréquentielles de l’erreur d’estimation n’est faite [AS91]. Il est donc nécessaire de considérer le problème du choix des pondérations pour l’estimation H_∞ pondérée. Nous proposons des outils d’analyse permettant de choisir les pondérations dans la section 2.4.

| Structure | Structure Filtre | Structure Observateur |
|--|--|--|
| Variance de l'erreur d'estimation (Norme H_2) | [Wie50] | [Kal60], [KB61] |
| Norme H_∞ | [EGH88], [GE90], [AS91], [Gri96], [NK89], [NK91], [Sha90], [ST92], [ST92], [PK97], [Gri97], [WG98] | [ST92] (L'observateur est présenté comme une manière de paramétrer les filtres), [LF97]. |
| Réponse à des conditions initiales | | [Lue66], [Lue71] |

Tableau 2.1 – Estimation classique : structures et critères de performance

Ce tableau montre que les deux structures classiques sont également utilisées dans l'estimation classique. Le lien peut être fait entre ces structures : par exemple [Sim06] montre l'équivalence de performance entre l'observateur de Kalman et le filtre de Wiener. [ST92] présente l'observateur comme une manière de paramétrer les filtres. Pour finir, [LF97] présente la structure observateur comme une manière de synthétiser les filtres H_∞ nominaux. Dans le cas de l'estimation robuste, la structure choisie pour l'estimateur est le filtre dans la plupart des cas. La question se pose de savoir si ces deux structures sont équivalentes, et quels sont les avantages de l'une par rapport à l'autre. Nous répondons à cette question section 2.2, puis nous montrons section 2.3 que les structures classiques peuvent être unifiées.

Les méthodes de résolution

Toutes les méthodes présentées ici pour la synthèse d'estimateurs dans le cas certain sont dotées d'outils efficaces listés ci-dessous :

1. La factorisation spectrale [Wie50, AS91];
2. Les approches algébriques [Lue71];
3. Les équations de Ricatti [Kal60, KB61, NK91, ST92];
4. L'optimisation LMI [PK97, LF97].

La principale qualité de ces outils de calcul est leur efficacité. Le problème peut avoir une solution analytique, ou bien peut être mis sous la forme d'un problème d'optimisation pour lequel un algorithme efficace existe. Il faut simplement retenir que l'efficacité des outils est certainement une des principales raisons du succès des méthodes nominales. Il sera donc nécessaire de conserver cette qualité lors de l'extension des outils de l'estimation nominale à l'estimation robuste.

2.2 Synthèse d'estimateurs nominaux par Optimisation LMI

2.2.1 Introduction

Si le sujet de la thèse est l'estimation robuste, le premier travail a été une remise à plat du cas certain. Dans cette section, on considère un système LTI¹ G présenté figure 2.7.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w \\ C_z & D_{zw} \\ C_y & D_{yw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

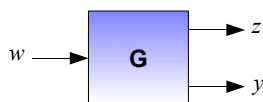


Figure 2.7 – Système LTI considéré

On rappelle que w est un vecteur contenant l'ensemble des perturbations non mesurées, bruits de mesure, etc.. Le signal interne à estimer à partir de la sortie mesurée y est z .

Dans un premier temps, nous expliquons la démarche LMI utilisée tout au long de cette thèse pour transformer les problèmes de synthèse en problèmes d'optimisation sous contrainte LMI dans la sous-section 2.2.2. Cette démarche permet de se ramener à des conditions d'existence ou de synthèse d'un estimateur à partir d'un résultat d'analyse. Des solutions au problème de synthèse d'estimateur nominal sont présentées en utilisant les structures filtres (sous-section 2.2.3) et observateur (sous-section 2.2.4). Des conditions d'existence sont formulées pour ces deux structures pour les critères H_∞ et H_2 , H_∞ pondéré. La norme H_2 pondérée n'est pas abordée car elle n'a pas d'interprétation comme la norme H_∞ pondérée². A partir des conditions d'existence présentées dans les sous-sections 2.2.3 et 2.2.4, les structures filtre et observateurs sont comparées au sens des problèmes d'optimisations correspondants dans la sous-section 2.2.5.

Nous présentons de façon systématique la forme standard du problème de synthèse, puis un théorème permettant de tester l'existence d'un estimateur d'une structure donnée pour un niveau de performance donné. La synthèse avec et sans pondération est

1. Seul le cas continu est abordé dans cette partie. Le cas discret est très facilement dérivable à partir des résultats présentés dans cette partie et des résultats présentés dans l'annexe G page 261 présentant l'analyse et la synthèse d'estimateurs robustes pour le cas discret.

2. Les résultats pour la norme H_2 pondérée sont facilement dérivables à partir des résultats présentés dans cette section

différenciée, puisque l'ajout de pondération de sortie change la structure du problème, tout particulièrement dans le cas de l'observateur.

Les estimateurs peuvent être reconstruits à partir des variables solutions (si elles existent) des problèmes d'optimisation [Iwa94]. La reconstruction des structures classiques n'est cependant pas abordée pour une raison simple : la section 2.3 présente une nouvelle structure qui assure la même performance que toutes ces structures. Cependant, ces problèmes d'optimisation permettent de dégager des points de comparaison pour les structures classiques pour la synthèse.

2.2.2 Philosophie Analyse-Synthèse

La démarche permettant de transformer des résultats d'analyse en résultats de synthèse est présentée ici.

Les résultats de cette section sont basés sur deux résultats d'analyse. Les lemmes 1 et 2 permettent de tester une norme sur une matrice de fonctions de transfert.

Lemme 1. *Lemme Réel Borné [BEFB94, page 26]*

Soit une matrice de fonctions de transfert stable $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.

$\|H\|_\infty < \gamma$ si et seulement s'il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ telle que la contrainte (2.2) soit vérifiée.

$$\begin{bmatrix} A^T\mathbf{P} + \mathbf{P}A & \mathbf{P}B \\ B^T\mathbf{P} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ D^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.2)$$

Une forme alternative peut être obtenue en utilisant le lemme de Schur (lemme 4).

$$\begin{bmatrix} A^T\mathbf{P} + \mathbf{P}A & \mathbf{P}B & C^T \\ B^T\mathbf{P} & -\gamma^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.3)$$

Lemme 2. *Performance H_2 d'une matrice de fonctions de transfert [SW00]*

Soit une matrice de fonctions de transfert stable $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.

$\|H\|_2 < \gamma$ si et seulement si $D = 0$ et il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T > 0$ telles que les contraintes (2.4) et (2.5) soient vérifiées.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & B \\ B^T & \mathbf{M} \end{bmatrix} > 0 \quad \begin{bmatrix} A\mathbf{P} + \mathbf{P}A^T & \mathbf{P}C^T \\ C\mathbf{P} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.4)$$

$$\text{Trace}(\mathbf{M}) < \gamma^2 \quad D = 0 \quad (2.5)$$

Une forme alternative est également possible. Soit une fonction de transfert stable $H = C(sI - A)^{-1}B + D$. $\|H\|_2 < \gamma$ si et seulement si $D = 0$ et s'il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T > 0$ telle que les contraintes (2.6) et (2.7) soient vérifiées.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & C^T \\ C & \mathbf{M} \end{bmatrix} > 0 \quad \begin{bmatrix} A^T \mathbf{P} + \mathbf{P}A & \mathbf{P}B \\ B^T \mathbf{P} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.6)$$

$$\text{Trace}(\mathbf{M}) < \gamma^2 \quad D = 0 \quad (2.7)$$

Les lemmes 1 (norme H_∞) et 2 (norme H_2) présentent des contraintes qui peuvent se mettre sous la forme d'un problème de faisabilité sous contrainte LMI, pour un système donné et pour un γ donné. Ces lemmes peuvent également se mettre sous la forme d'un problème de minimisation d'une fonction de coût sous contrainte LMI, pour trouver la norme H_2 ou la norme H_∞ d'une matrice de fonctions de transfert en minimisant γ . Ces deux lemmes permettent de tester efficacement une norme donnée sur une matrice de fonctions de transfert connue.

Pour dériver des résultats de synthèse à partir de ces résultats d'analyse, la première étape consiste à appliquer ces résultats d'analyse aux formes standards des problèmes de synthèse.

Lors de la synthèse, les matrices caractéristiques de la représentation d'état de l'estimateur sont également des variables de décision du problème d'optimisation. Par conséquent, la représentation d'état de la forme standard n'est pas connue et dépend des variables de décisions du problème d'optimisation. Les contraintes obtenues ne sont alors plus des contraintes LMI, mais des contraintes Inégalités Matricielles Bilinéaires (BMI) puisque des produits vont apparaître entre les variables de décision définissant la représentation d'état de l'estimateur et la matrice \mathbf{P} . Les problèmes sous contrainte BMI sont connus pour englober des problèmes de type NP . Il n'existe pas d'algorithme efficace³ donnant une solution à ces problèmes d'optimisation.

Ces problèmes d'optimisation sous contrainte BMI peuvent parfois être transformés en problèmes d'optimisation sous contrainte LMI à partir de certains résultats d'algèbre linéaire, présentés dans l'annexe A page 223. On parlera de linéarisation des contraintes BMI. Par exemple, dans la solution présentée dans [Iwa94] au problème de synthèse de correcteurs H_∞ , les contraintes BMI sont linéarisées en utilisant le lemme d'élimination (lemme 5 page 223). Dans la solution présentée pour la synthèse multi-objectif dans [SGC97], la linéarisation est faite par un changement de variables linéarisant.

Les étapes de synthèse ne seront développées que dans la démonstration du théorème 1 page 32 (premier par ordre d'apparition). Les démonstrations des autres théorèmes sont disponibles en annexe B page 225.

2.2.3 Synthèse de filtre

La structure filtre est définie comme une matrice de fonctions de transfert exprimée sous la forme d'une représentation d'état. Cette matrice de fonctions de transfert admet

3. ...à ce jour, si $P \neq NP$

en entrée la mesure y , et en sortie l'estimée \hat{z} du signal z . La structure filtre est présentée figure 2.2 page 23.

Le filtre est défini par une représentation d'état, donnée par :

$$F = \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_F \\ \hline C_F & D_F \end{array} \right].$$

La forme standard du problème de synthèse de filtre est obtenue en remplaçant dans la forme standard du problème d'estimation l'estimateur par la structure filtre. La forme standard du problème de synthèse de filtre sans pondération est présentée figure 2.8.

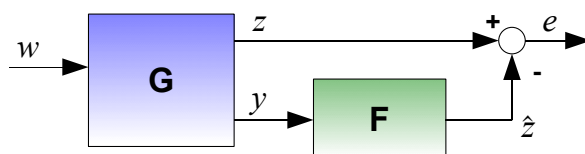


Figure 2.8 – Forme standard du problème de synthèse de filtres sans pondération

La représentation d'état de la fonction de transfert $T_{w \rightarrow e}$ est la suivante :

$$\left[\begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{B} \\ \hline \bar{C} & \bar{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B_w \\ B_F C_y & A_F & B_F D_{yw} \\ \hline C_z - D_F C_y & -C_F & D_{zw} - D_F D_{yw} \end{array} \right] \quad (2.8)$$

La forme standard du problème de synthèse de filtre avec pondération de l'erreur d'estimation est présentée figure 2.9.

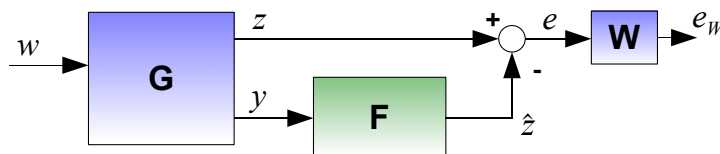


Figure 2.9 – Forme standard du problème de synthèse de filtres avec pondération

La pondération W est définie par une représentation d'état :

$$W = T_{e \rightarrow e_w} = \left[\begin{array}{c|c} A_W & B_W \\ \hline C_W & D_W \end{array} \right].$$

La représentation d'état de la fonction de transfert $T_{w \rightarrow e_W}$ est la suivante :

$$\left[\begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{B} \\ \hline \bar{C} & \bar{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} A & 0 & 0 & B_w \\ B_W(C_z - D_F C_y) & A_W & -B_W C_F & B_W(D_{zw} - D_F D_{yw}) \\ B_F C_y & 0 & A_F & B_F D_{yw} \\ \hline D_W(C_z - D_F C_y) & C_W & -D_W C_F & D_W(D_{zw} - D_F D_{yw}) \end{array} \right] \quad (2.9)$$

Comme le présentera la démonstration du théorème 1, le filtre doit être de l'ordre du modèle G pour se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte LMI en l'absence de pondération. Les dimensions de la matrice A_F sont donc égales aux dimensions de A .

Le filtre doit être de l'ordre du système G plus l'ordre de la pondération W pour se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte LMI en présence de pondération. Les dimensions de la matrice A_F sont donc égales aux dimensions de la matrice $\text{diag}(A, A_W)$.

Synthèse sans pondération : cas H_∞

Problème 5. Synthèse de filtre H_∞ sans pondération.

La forme standard du problème de synthèse de filtre H_∞ est la matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}$ présentée figure 2.8 page 31. $T_{(w) \rightarrow (e)}$ admet la représentation d'état présentée équation (2.8) page 31.

Etant donné γ , trouver s'il existe une matrice de fonctions de transfert F (et la calculer) tel que $T_{w \rightarrow e}$ soit stable et que :

$$\|T_{w \rightarrow e}\|_\infty < \gamma.$$

Théorème 1. Synthèse de filtre H_∞ sans pondération.

Il existe une solution au problème de filtrage H_∞ sans pondération (Problème 5) si et seulement si :

- G est stable ;
- Il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ telle que la contrainte (2.10) soit vérifiée.

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}A + A^T \mathbf{P} & \mathbf{P}B_w & C_z^T \\ B_w^T \mathbf{P} & -\gamma^2 I & D_z^T \\ C_z & D_z & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.10)$$

$$\text{avec } \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_y^T \\ D_{yw}^T \end{bmatrix}_\perp$$

■

Ce théorème peut se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI. Il existe par conséquent un algorithme permettant de tester efficacement l'existence d'un filtre pour un γ donné (problème de faisabilité). Ces contraintes peuvent également se mettre sous la forme de minimisation d'une fonction de coût sous contrainte LMI. Il existe par conséquent un algorithme permettant de minimiser γ , ce qui permettra de connaître la performance atteignable avec un filtre. Si ces contraintes sont vérifiées, il est possible de reconstruire la représentation d'état du filtre à partir des variables solutions du problème d'optimisation [Iwa94, SGC97]. Ceci sera abordé dans le chapitre 4.

La démarche appliquée pour dériver ces conditions d'existence, expliquée section 2.2.2 page 29, est détaillée dans la démonstration du théorème 1 page 32, présentée ci-dessous.

Démonstration. Théorème 1 page 32 (Synthèse de filtre H_∞ sans pondération)

Par application du lemme réel borné (lemme 1 page 29), il existe une solution au problème 5 (synthèse de filtre H_∞ sans pondération) si et seulement s'il existe $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T > 0$ telle que la contrainte suivante soit vérifiée.

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{P} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_F C_y & A_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_F C_y & A_F \end{bmatrix}^T \mathcal{P} & \mathcal{P} \begin{bmatrix} B_w \\ B_F D_{yw} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_z^T - C_y^T D_F^T \\ -C_F^T \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} B_w^T & D_{yw}^T B_F^T \end{bmatrix} \mathcal{P} & -\gamma^2 I & D_{zw}^T - D_{yw}^T D_F^T \\ \hline \begin{bmatrix} C_z - D_F C_y & -C_F \end{bmatrix} & D_{zw} - D_F D_{yw} & -I \end{array} \right] < 0 \quad (2.11)$$

Dans le cas de l'analyse, la représentation d'état du filtre est connue. La contrainte (2.11) est alors une contrainte LMI. Dans le cas de la synthèse, les paramètres de la représentation d'état du filtre sont également des variables du problème : la contrainte n'est plus une contrainte LMI mais une contrainte BMI. Les étapes suivantes vont servir à linéariser cette contrainte, en utilisant le lemme d'élimination (lemme 5 page 223). La contrainte (2.11) peut s'écrire sous une forme sur laquelle on pourra appliquer le lemme d'élimination :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{P} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \mathcal{P} & \mathcal{P} \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_z^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} B_w^T & 0 \end{bmatrix} \mathcal{P} & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ \hline \begin{bmatrix} C_z & 0 \end{bmatrix} & D_{zw} & -I \end{array} \right] + \dots \\ & \dots + \left(\left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{P} & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline I & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} A_F & B_F \\ C_F & D_F \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & I & 0 & 0 \\ \hline C_y & 0 & D_{yw} & 0 \end{array} \right] \right) + (\diamond)^T < 0 \end{aligned}$$

Cette contrainte est de la forme $G + UKV^T + VK^T U^T$ avec les matrices suivantes :

$$G = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{P} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \mathcal{P} & \mathcal{P} \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_z^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} B_w^T & 0 \end{bmatrix} \mathcal{P} & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ \hline \begin{bmatrix} C_z & 0 \end{bmatrix} & D_{zw} & -I \end{array} \right] \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} A_F & B_F \\ C_F & D_F \end{bmatrix}$$

$$U = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{P} & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & C_y^T \\ I & 0 \\ 0 & D_{yw}^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le lemme d'élimination peut-être appliqué sur cette expression. On a

$$U_{\perp} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{P}^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad V_{\perp} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

On introduit alors les partitions de \mathcal{P} et $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{Q}$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix}$$

Ces partitions dépendent de l'ordre du filtre. La matrice P_3 doit être de même dimensions que la matrice \mathbf{P} pour que le problème soit linéarisable, ce qui signifie que le filtre doit être du même ordre que le modèle du système. L'application du lemme d'élimination donne la contrainte $V_{\perp}^T G V_{\perp} < 0$ dont le développement donne la contrainte (2.10) du théorème. Elle donne également la contrainte $U_{\perp}^T G U_{\perp} < 0$ dont le développement donne la contrainte (2.12).

$$\begin{bmatrix} A\mathbf{Q} + \mathbf{Q}A^T & B_w \\ B_w^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.12)$$

La condition sur la matrice $\mathcal{P} > 0$ permet d'obtenir la contrainte (2.13) en réalisant l'opération congruente suivante.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathbf{Q} & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \mathbf{Q} \\ 0 & Q_2^T \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & I \\ I & \mathbf{Q} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.13)$$

Les conditions (2.13) et (2.12) impliquent la stabilité du système et, si le système est stable, pour $\mathbf{P} > 0$ vérifiant (2.10) alors il est toujours possible de trouver \mathbf{Q} telle que ces contraintes (2.13) et (2.12) soient vérifiées. Ceci va permettre de simplifier les conditions du théorème. On va donc prouver l'équivalence suivante :

1. $\exists \mathbf{P}, \mathbf{Q}$ vérifiant (2.10) ,(2.12) et (2.13)
 2. – $\exists \mathbf{P}$ vérifiant (2.10)
 - G est stable
 - $\mathbf{P} > 0$
- (1) \Rightarrow (2) (2.13) implique $\mathbf{P} > 0$ et $\mathbf{Q} > 0$. (2.13) $A\mathbf{Q} + \mathbf{Q}A^T < 0$. C'est-à-dire que toutes les valeurs propres de la matrice A sont à partie réelle négative. Par conséquent G est stable.
- (2) \Rightarrow (1) Si G est stable, alors $\forall \mathbf{P} > 0$ vérifiant (2.10), il existe $Q_l > 0$ tel que $A^T Q_l + Q_l A + \mathbf{P} = 0$. D'autre part, il existe toujours $\alpha > 0$ tel que $-\alpha \mathbf{P} < -\gamma^{-2} B_w B_w^T$. Par conséquent, il existe $\alpha > 0$ tel que la condition suivante soit vérifiée.

$$(A^T \alpha Q_l + \alpha Q_l A) < -\gamma^{-2} B_w B_w^T$$

Par application du lemme de Schur, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\begin{bmatrix} A\alpha Q_l + \alpha Q_l A^T & B_w \\ B_w^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.14)$$

Pour tout $\mathbf{P} > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathbf{P} > \epsilon I$. $\forall \epsilon > 0$, il existe α suffisamment grand tel que $\epsilon I > \alpha^{-1} Q_l^{-1}$. Par conséquent, il existe α suffisamment grand tel que $P - \alpha^{-1} Q_l^{-1} > 0$. Par application du lemme de Schur, cette condition est équivalente à la condition suivante :

$$\exists \alpha \quad \text{tel que} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{P} & I \\ I & \alpha Q_l \end{bmatrix} > 0 \quad (2.15)$$

Pour finir la démonstration, il existe α suffisamment grand tel que $\mathbf{Q} = \alpha Q_l$ soit une candidate pour vérifier les conditions (2.14) et (2.15), ce qui conclut la démonstration. □

La démarche appliquée pour la linéarisation des contraintes est appliquée systématiquement dans cette thèse. Cette démarche permet de développer des résultats de synthèse à partir des résultats d'analyse. Dans le cas où toutes les opérations faites pour linéariser les contraintes sont des bijections, alors aucun conservatisme n'est introduit.

Synthèse sans pondération : cas H_2

Problème 6. Synthèse de filtre H_2 .

La forme standard du problème de synthèse de filtre H_2 est la matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}$ présentée figure 2.8 page 31. $T_{(w) \rightarrow (e)}$ admet la représentation d'état présentée équation (2.8) page 31.

Etant donné γ , trouver s'il existe une matrice de fonctions de transfert F (et la calculer) tel que $T_{w \rightarrow e}$ soit stable et que :

$$\|T_{w \rightarrow e}\|_2 < \gamma.$$

Théorème 2. Synthèse de filtre H_2 .

Il existe une solution au problème de synthèse de filtre H_2 sans pondération (Problème 6) si et seulement si :

- G est stable
- Il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T > 0$, \mathbf{D}_F telles que les contraintes (2.16), (2.17), (2.18) soient vérifiées.

$$D_{zw} - \mathbf{D}_F D_{yw} = 0 \quad \text{Trace}(\mathbf{M}) < \gamma^2 \quad (2.16)$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}A + A^T \mathbf{P} & \mathbf{P}B_w \\ B_w^T \mathbf{P} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (2.17)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \diamond \\ (C_z - \mathbf{D}_F C_y) & \mathbf{M} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.18)$$

■

Ce théorème présente également un problème d'optimisation sous contrainte LMI. Il est donc possible de tester efficacement l'existence d'un filtre pour un niveau de performance donné. Comme dans le cas H_∞ , le filtre sera de l'ordre du système. La démonstration de ce théorème est très proche de la démonstration du théorème 1 ; elle est disponible en annexe B page 225.

Synthèse avec pondération : cas H_∞

Problème 7. Synthèse de filtre H_∞ pondéré.

La forme standard du problème de synthèse de filtre H_∞ pondéré est la matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e_W)}$ présentée figure 2.9 page 31. $T_{(w) \rightarrow (e_W)}$ admet la représentation d'état présentée équation (2.9) page 32.

Etant donné γ , trouver s'il existe une matrice de fonctions de transfert F (et la calculer) tel que $T_{w \rightarrow e_W}$ soit stable et que :

$$\|T_{w \rightarrow e_W}\|_2 < \gamma$$

Théorème 3. *Synthèse de filtre H_∞ pondéré.*

Il existe une solution au problème de synthèse de filtre H_∞ pondéré (Problème 7) si et seulement s'il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ telles que les contraintes (2.19), (2.20) et (2.21) soient vérifiées.

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{B}_w & \mathbf{C}_z^T \\ \mathbf{B}_w^T\mathbf{P} & -\gamma^2 I & \mathbf{D}_z^T \\ \mathbf{C}_z & \mathbf{D}_z & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.19)$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & M_2 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T & \mathbf{B}_w & \mathbf{Q}\mathbf{C}_z^T \\ \mathbf{B}_w^T & -\gamma^2 I & \mathbf{D}_z^T \\ \mathbf{C}_z\mathbf{Q} & \mathbf{D}_z & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & M_2 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (2.20)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & I \\ I & \mathbf{Q} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.21)$$

avec les matrices suivantes

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_w \\ \hline \mathbf{C}_z & \mathbf{D}_{zw} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B_w \\ B_W C_z & A_W & B_W D_{zw} \\ \hline D_W C_z & C_W & D_W D_{zw} \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_y^T \\ D_{yw}^T \end{bmatrix}_\perp \quad \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_W \\ D_W \end{bmatrix}_\perp$$

■

Ce théorème peut également se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation LMI. La démonstration de ce théorème est disponible en annexe B page 225.

Conclusions

Nous avons présenté dans cette sous section des théorèmes de synthèse pour la structure filtre. Le théorème 1 présente des conditions d'existence d'un filtre pour une norme H_∞ donnée. Le théorème 2 présente des conditions d'existence d'un filtre pour une

norme H_2 donnée. Le théorème 3 présente des conditions d'existence d'un filtre pour une norme H_∞ pondérée donnée.

Il est important de noter qu'avec cette structure, la stabilité du système nominal est nécessaire, ce qui pourra être problématique pour certaines applications (marche aléatoire par exemple [Sin70], voir exemple page 171). Cette structure ne permet donc pas une approche générale des problèmes d'estimation nominale.

D'autre part, ces trois théorèmes sont basés sur une démonstration analogue à celle présentée dans [Iwa94] pour la synthèse de correcteur. Cependant, en raison de la structure particulière du problème, les conditions présentées sont simplifiées. Les simplifications dues à la structure particulière sont d'une extrême importance pour la synthèse robuste.

2.2.4 Synthèse d'observateur à gain statique

La structure observateur à gain statique (OGS)

La structure est décrite figure 2.3 page 24. L'observateur est une structure qui contient un modèle dynamique du système dont le vecteur d'état \hat{x} est une estimation du vecteur d'état x du modèle du système et \hat{y} une estimation de la mesure y . L'erreur d'estimation de la mesure $y - \hat{y}$ remet à jour le vecteur d'état du modèle interne \hat{x} via un gain statique L . Dans le domaine temporel les équations d'état de l'observateur sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) - L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_y\hat{x}(t) \\ \hat{z}(t) = C_z\hat{x}(t) \end{cases}$$

La fonction de transfert de l'observateur $T_{y \rightarrow \hat{z}}$ admet la représentation d'état suivante :

$$T_{y \rightarrow \hat{z}} = \left[\begin{array}{c|c} A - LC_y & L \\ \hline C_z & 0 \end{array} \right].$$

La forme standard du problème de synthèse d'observateur à gain statique sans pondération donnée figure 2.10 page 39, est obtenue en remplaçant l'estimateur par l'observateur dans la forme standard du problème d'estimation présentée figure 2.1 page 21.

Le principal intérêt de la structure observateur est le suivant : il est possible de se ramener à un modèle équivalent dans lequel les modes du modèle du système sont inobservables depuis la sortie e . On considère $T_{w \rightarrow e}$. Le système présenté figure 2.10 admet la représentation d'état suivante.

$$\left[\begin{array}{c} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \\ e(t) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B_w \\ LC_y & A - LC_y & LD_{yw} \\ \hline C_z & -C_z & D_{zw} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x(t) \\ \hat{x}(t) \\ w(t) \end{array} \right].$$

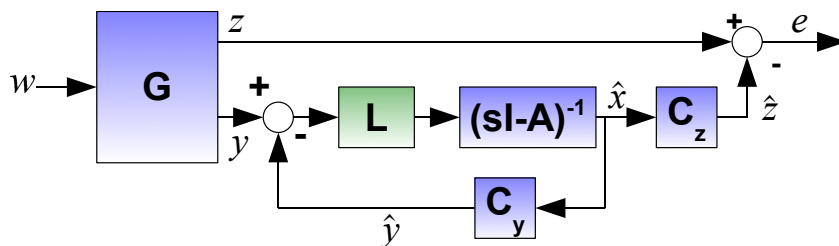


Figure 2.10 – Forme standard du problème de synthèse d'OGS sans pondération

Nous allons à présent montrer que seule l'erreur $e_x = x - \hat{x}$ est observable depuis e . On pose la transformation suivante dans l'espace d'état [FPEN84] :

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

La nouvelle représentation est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}_x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 & B_w \\ LC_y & A - LC_y & LD_{yw} \\ C_z & -C_z & D_{zw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e_x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}_x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B_w \\ 0 & A - LC_y & B_w - LD_{yw} \\ 0 & C_z & D_{zw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e_x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

Cette forme est une forme de Kalman d'observabilité, qui peut être réduite du point de vue de la sortie e . $T_{w \rightarrow e}$ admet une représentation d'état minimale de la forme suivante.

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - LC_y & B_w - LD_{yw} \\ C_z & D_{zw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Dans cette représentation, les états du système ont été simplifiés. C'est sur ce système équivalent que les résultats d'analyse vont être appliqués pour dériver des critères de synthèse en l'absence de pondération.

La même opération est possible en présence de pondération de l'erreur d'estimation. La forme standard du problème de synthèse d'observateur avec pondération de l'erreur d'estimation est présentée figure 2.11.

La représentation d'état de la fonction de transfert $T_{w \rightarrow e_W}$ est la suivante :

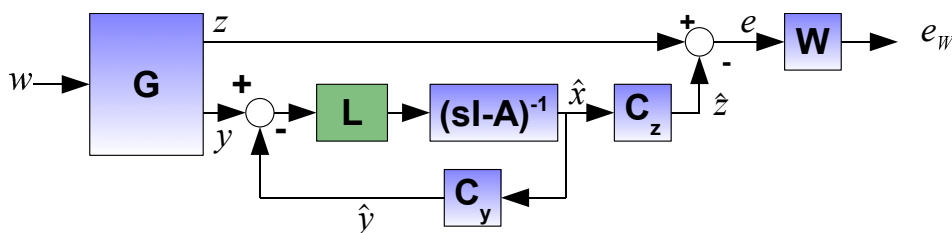


Figure 2.11 – Forme standard du problème de synthèse d'OGS avec pondération

$$T_{w \rightarrow e_w} = \left[\begin{array}{ccc|c} A & 0 & 0 & B_w \\ B_W C_z & A_W & -B_W C_z & B_W D_{zw} \\ LC_y & 0 & A - LC_y & LD_{yw} \\ \hline D_W C_z & C_W & -D_W C_z & D_W D_{zw} \end{array} \right]$$

Par analogie avec le cas sans pondération, il est possible de se ramener à un système équivalent admettant la représentation d'état donnée équation (2.23).

$$T_{w \rightarrow e_w} = \left[\begin{array}{cc|c} A_W & B_W C_z & B_W D_{zw} \\ 0 & A - LC_y & B_w - LD_{yw} \\ \hline C_W & D_W C_z & D_W D_{zw} \end{array} \right] \quad (2.23)$$

Les résultats d'analyse vont être appliqués sur cette représentation d'état pour dériver un résultat de synthèse en présence de pondération sur la sortie. Cependant l'ajout de pondération sur la sortie change la structure du problème ce qui empêchera de se ramener à un problème d'optimisation convexe (voir théorème 6 page 42).

Synthèse d'OGS H_∞

Problème 8. Synthèse d'OGS H_∞ sans pondération.

La forme standard du problème de synthèse d'OGS H_∞ est la matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}$ présentée figure 2.10 page 39. $T_{(w) \rightarrow (e)}$ admet la représentation d'état équivalente présentée équation (2.22) page 39. Etant donné γ , trouver s'il existe un gain statique L tel que $T_{w \rightarrow e}$ soit stable et que :

$$\|T_{w \rightarrow e}\|_\infty < \gamma.$$

Théorème 4. Synthèse d'OGS H_∞ sans pondération.

Il existe une solution au problème de synthèse d'OGS H_∞ (Problème 8) si et seulement s'il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ telle que les contraintes (2.24) et (2.25) soient vérifiées.

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}A + A^T\mathbf{P} & \mathbf{P}B_w & C_z^T \\ B_w^T\mathbf{P} & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_z & D_{zw} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.24)$$

$$D_{zw}^T D_{zw} < \gamma^2 I \quad (2.25)$$

$$\text{avec } \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_y^T \\ D_{yw}^T \end{bmatrix}_\perp \quad \blacksquare$$

Le calcul de γ peut se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI. La démonstration de ce théorème est présentée en annexe B page 225.

Synthèse d'OGS H_2

Problème 9. Problème de synthèse d'OGS H_2 sans pondération.

La forme standard du problème de synthèse d'OGS H_2 est la matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}$ présentée figure 2.10 page 39. $T_{(w) \rightarrow (e)}$ admet la représentation d'état équivalente présentée équation (2.22) page 39.

Etant donné γ , trouver s'il existe un gain statique L tel que $T_{w \rightarrow e}$ soit stable et que :

$$\|T_{w \rightarrow e}\|_2 < \gamma.$$

Théorème 5. *Synthèse d'OGS H_2 sans pondération.*

Il existe une solution au problème de synthèse d'OGS H_2 (Problème 9) si et seulement s'il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ telles que les contraintes (2.26), (2.27), (2.28) soient vérifiées.

$$D_{zw} = 0 \quad \text{Trace}(\mathbf{M}) < \gamma^2 \quad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}A + A^T\mathbf{P} & \mathbf{P}B_w \\ B_w^T\mathbf{P} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (2.27)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \diamond \\ C_z & \mathbf{M} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.28)$$

Tester ou minimiser γ peut se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI pour lequel on dispose d'un algorithme efficace. La démonstration de ce théorème est présentée en annexe B.

Synthèse d'OGS H_∞ avec pondération

Problème 10. Problème de synthèse d'OGS H_∞ pondéré.

La forme standard du problème de synthèse d'OGS H_∞ pondéré est la matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e_W)}$ présentée figure 2.11 page 40. $T_{(w) \rightarrow (e_W)}$ admet la représentation d'état équivalente présentée équation (2.23) page 40.

Etant donné γ , trouver s'il existe un gain statique L tel que $T_{(w) \rightarrow (e_w)}$ soit stable et que :

$$\|T_{(w) \rightarrow (e_w)}\|_\infty < \gamma.$$

Théorème 6. *Synthèse d'OGS H_∞ avec pondération.*

Il existe une solution au problème de synthèse d'observateur H_∞ pondéré (Problème 10) si et seulement s'il existe $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T > 0$ et \mathbf{Q}, \mathbf{Q}_2 telles que $\mathcal{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q}_2^T \\ \mathbf{Q}_2 & \bullet \end{bmatrix}$ et telles que les contraintes (2.29) et (2.30) soient vérifiées.

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T \left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{P}\mathcal{A} + \mathcal{A}^T\mathcal{P} & \mathcal{P}\mathcal{B}_w & \mathcal{C}_z^T \\ \hline \mathcal{B}_w^T\mathcal{P} & -\gamma^2 I & \mathcal{D}_{zw}^T \\ \hline \mathcal{C}_z & \mathcal{D}_{zw} & -I \end{array} \right] \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.29)$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A_W\mathbf{Q} + \mathbf{Q}A_W^T + \mathbf{Q}_2^T C_z^T B_W^T + B_W C_z \mathbf{Q}_2 & B_W D_{zw} & \mathbf{Q}C_W^T + \mathbf{Q}_2 C_z^T D_W^T \\ \hline (B_W D_{zw})^T & -\gamma^2 I & \mathcal{D}_{zw}^T \\ \hline C_W \mathbf{Q} + D_W C_z \mathbf{Q}_2^T & \mathcal{D}_{zw} & -I \end{array} \right] < 0 \quad (2.30)$$

Avec les matrices suivantes

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B}_w \\ \hline \mathcal{C}_z & \mathcal{D}_{zw} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_W & B_W C_z & B_W D_{zw} \\ 0 & A & B_w \\ \hline C_W & D_W C_z & D_W D_{zw} \end{array} \right] \quad \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} C_y^T \\ D_{yw}^T \end{array} \right]_\perp$$

■

Ce théorème ne présente pas des contraintes LMI. En effet, les variables du problème d'optimisation sont reliées entre elles par la relation suivante :

$$\mathcal{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q}_2^T \\ \mathbf{Q}_2 & \bullet \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, on ne dispose pas d'un algorithme efficace pour résoudre ce problème. La structure observateur à gain statique ne permet pas de prendre en compte de pondération de l'erreur d'estimation en conservant un caractère efficace pour la synthèse.

Conclusions sur la synthèse d'OGS

Nous avons présenté dans cette sous-section des théorèmes de synthèse pour la structure observateur à gain statique (OGS). Le théorème 4 page 40 présente des conditions d'existence d'un OGS pour une norme H_∞ donnée. Le théorème 5 page 41 présente des conditions d'existence d'un OGS pour une norme H_2 donnée. Ces deux théorèmes

| Filtre | OGS |
|---|--|
| Etant donné γ , il existe un filtre tel que $\ T_{w \rightarrow e}\ _\infty < \gamma$ si – $\exists \mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ telle que (2.31) soit vérifiée – G est stable | Etant donné γ , il existe un observateur tel que $\ T_{w \rightarrow e}\ _\infty < \gamma$ si – $\exists \mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ telle que (2.31) soit vérifiée – $D_{zw}^T D_{zw} < \gamma^2 I$ |

 Tableau 2.2 – Conditions d’existence pour les structures classiques (norme H_∞)

peuvent se mettre sous la forme de problèmes de faisabilité sous contrainte LMI. Ils peuvent également se mettre sous la forme d’un problème de minimisation d’une fonction de coût, et minimiser γ^2 permettra de trouver la meilleure performance atteignable.

Il est important de noter qu’avec la structure OGS, le problème de synthèse pour la norme H_∞ pondérée ne permet pas de se ramener à un problème d’optimisation pour lequel on dispose d’un algorithme efficace. De plus, cette structure implique systématiquement une condition sur le terme D_{zw} indépendante des variables de décision qui pourra parfois ne pas être vérifiée. Cette structure ne permet donc pas une approche générale du problème d’estimation nominale.

2.2.5 Comparaison des structures classiques

Dans cette section, les problèmes d’optimisation permettant de tester les conditions d’existence d’un filtre classique ou d’un observateur à gain statique pour une norme H_∞ sont comparées dans l’objectif de dégager des points de comparaisons entre les structures.

Les théorèmes 1 page 32 (Existence d’un filtre H_∞) et 4 page 40 (Existence d’un OGS H_∞) sont rappelés tableau 2.2 et ont une condition commune :

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}A + A^T \mathbf{P} & \mathbf{P}B_w & C_z^T \\ B_w^T \mathbf{P} & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_z & D_{zw} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.31)$$

Le tableau 2.2 permet de comparer de façon très simple les deux structures au sens de la norme H_∞ .

1. On suppose que G est stable.
 - Dans ce cas-là, s’il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ telle que (2.31) soit vérifiée, alors il existe un filtre pour cette norme H_∞ .
 - Si la condition $D_{zw}^T D_{zw} < \gamma^2 I$ est vérifiée alors il existe un observateur. Dans le cas où $D_{zw} = 0$, cette condition est toujours vérifiée. Le filtre et l’observateur permettent d’atteindre la même performance si le système est stable et si $D_{zw} = 0$.

- $D_{zw}^T D_{zw} < \gamma^2 I$ est une limite de performance pour l'observateur. Le terme D_{zw} est un terme de transmission des hautes fréquences. La représentation d'état de l'observateur est la suivante :

$$T_{y \rightarrow \hat{z}} = \left[\begin{array}{c|c} A - LC_y & L \\ \hline C_z & \mathbf{0} \end{array} \right].$$

Le terme direct de l'observateur est égal à 0 : l'observateur à gain statique est structurellement un filtre passe-bas. Il ne pourra par conséquent pas transmettre les hautes fréquences, ce qui pourra dans certains cas d'estimation être un handicap (notamment dans le cas discret).

- Si les conditions d'existence sont vérifiées, les deux structures sont des structures de même ordre : l'ordre du système.
2. On suppose à présent que G est instable.
- Il n'existe pas de filtre sous ces conditions : le système ne peut pas être stabilisé.
 - L'observateur va permettre la synthèse d'un estimateur sur des systèmes instables. Ceci peut s'interpréter relativement facilement en regardant la forme obtenue pour le système équivalent (équation 2.22). La figure 2.12 présente un schéma-bloc de cette forme équivalente. Cette forme fait apparaître une boucle de rétroaction marquée en rouge pointillé.

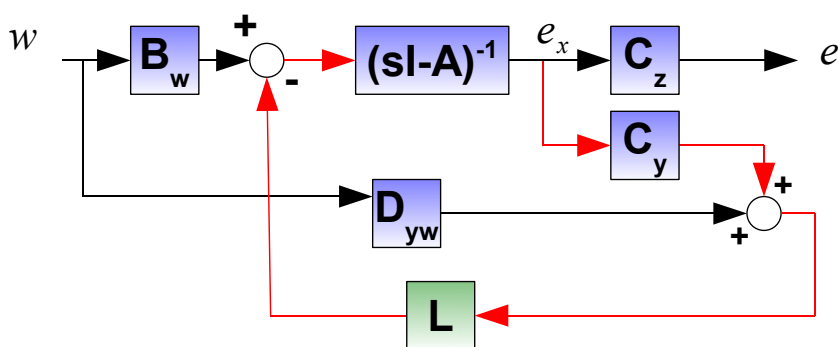


Figure 2.12 – Boucle de rétroaction créée par la structure observateur

Pour la synthèse d'observateur, la condition (2.24 page 40) contient une condition de détectabilité. Si les modes instables sont observables, alors un gain statique L existe tel que toutes les valeurs propres de la matrice $A - LC_y$ soient à parties réelles négatives. Par analogie, chaque théorème contient une condition de détectabilité avec la condition (2.24 page 40). Il est important de noter que cette condition est moins forte qu'une condition d'observabilité : on peut avoir une erreur d'estimation stable si les modes instables sont observables.

La même comparaison peut être faite pour la norme H_2 de façon équivalente à partir du théorème 2 page 36 (existence d'un filtre H_2) et du théorème 5 (existence d'un OGS

H_2). La transposition de la comparaison présentée pour le cas H_∞ vers les cas H_2 est triviale et n'est pas présentée ici. Les contraintes du filtre et de l'observateur étant des contraintes structurelles, la comparaison aboutit aux mêmes conclusions que pour le cas H_∞ .

Dans le cas de la synthèse avec pondération, l'ajout de pondérations change la structure du problème. La synthèse de filtre reste un cas particulier de synthèse de correcteur (figure 2.5 page 25). Le problème de synthèse de correcteur étant un problème d'optimisation convexe [Iwa94], [SGC97], le problème de synthèse de filtre pour la norme H_∞ pondérée en est un autre (voir théorème 3). Pour l'observateur en revanche, le changement de structure du problème sur le système d'erreur ne permet pas de ramener le problème de synthèse à un problème d'optimisation convexe. En l'absence de pondération le problème peut s'interpréter comme le dual d'un problème de retour d'état. Avec des pondérations, ce problème de synthèse peut s'interpréter comme un problème de retour statique de sortie (figure 2.13) qui est conjecturé comme étant dans le cas le plus général un problème de type NP [SADG97].

Ceci pose un problème dans certains cas : la synthèse de filtre pour un système instable n'est pas possible, et la synthèse d'observateur à gain statique ne peut pas être faite de façon efficace.

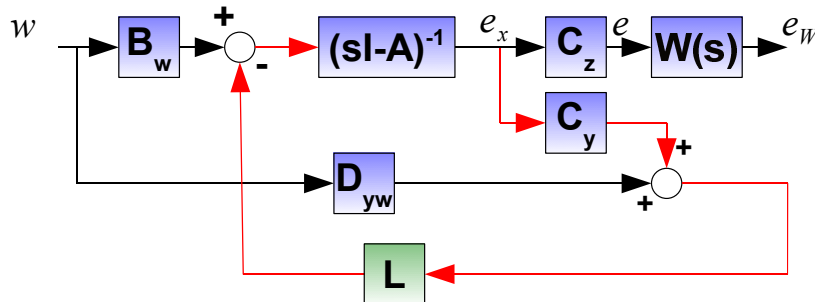


Figure 2.13 – Interprétation du problème de synthèse d'OGS comme un retour statique de sortie

Pour résumer la comparaison des structures classiques :

- L'absence de choix particulier pour la structure filtre permet de prendre en compte les problèmes d'estimation dans leur forme la plus générale, avec ou sans pondération. En revanche, cette structure ne permet pas la synthèse pour des systèmes instables.
- La structure observateur permet la synthèse d'estimateurs pour des systèmes instables : le choix d'une paramétrisation particulière permet de se ramener à un système équivalent stabilisable. Cette structure est cependant limitée en présence de termes directs vers les signaux à estimer (terme D_{zw}) et ne peut pas être synthétisée efficacement en présence de pondération.

2.2.6 Synthèse d'observateur à gain dynamique (OGD)

Nous avons vu qu'avec la structure observateur à gain statique, le problème de synthèse pour la norme H_∞ pondérée ne peut pas être ramené à un problème d'optimisation pour lequel existe un algorithme efficace (voir théorème 6). Le problème est analogue à un problème de retour statique de sortie (conjecturé NP [SADG97]). Une solution proposée dans [Dri10] est de transformer le gain statique de l'observateur en gain dynamique. Ainsi le problème de synthèse est transformé en un problème de retour dynamique de sortie, soit un cas particulier d'un problème de synthèse de correcteur qui peut être mis sous la forme d'un problème d'optimisation convexe [Iwa94].

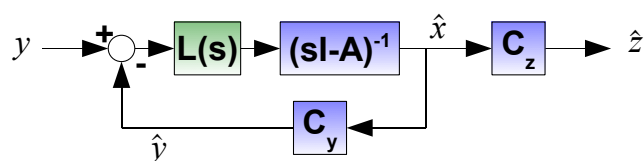


Figure 2.14 – Observateur à gain dynamique

La structure Observateur à Gain Dynamique (OGD) est introduite figure 2.14. Cette structure est une structure observateur où le gain de l'observateur est une matrice de fonctions de transfert $L(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_L & D_L \end{array} \right]$. La forme standard du problème de synthèse d'observateur à gain dynamique est présentée figure 2.15.

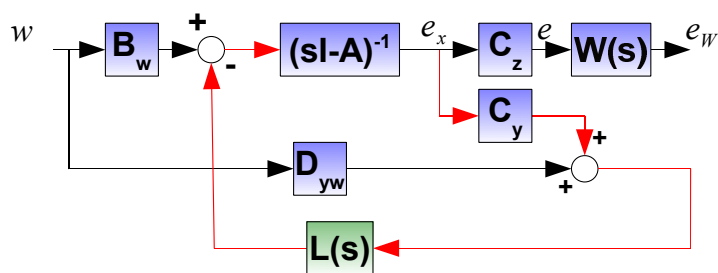


Figure 2.15 – Forme standard du problème de synthèse d'OGD sans pondération

La représentation d'état associée à la forme standard sans pondération est la suivante :

$$T_{(w) \rightarrow (e)} = \left[\begin{array}{ccc|c} A & 0 & 0 & B_w \\ D_L C_y & A - D_L C_y & C_L & D_L D_{yw} \\ B_L C_y & -B_L C_y & A_L & B_L D_{yw} \\ \hline C_z & -C_z & 0 & D_{zw} \end{array} \right] \quad (2.32)$$

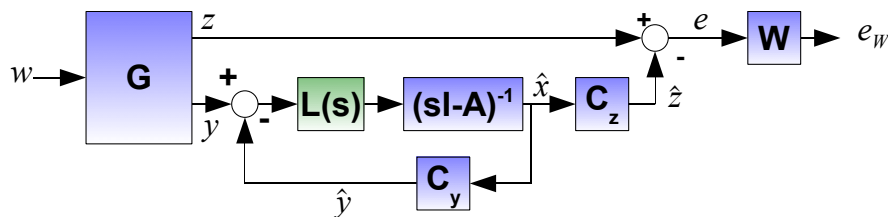


Figure 2.16 – Forme standard du problème de synthèse d’OGD avec pondération

De la même manière que pour l’OGS, l’OGD permet de rendre inobservable les modes du système. Une représentation d’état équivalente à la représentation d’état présentée équation (2.32) est donc donnée équation (2.33).

$$T_{(w) \rightarrow (e)} = \left[\begin{array}{cc|cc} A - D_L C_y & C_L & B_w - D_L D_{yw} & \\ B_L C_y & A_L & B_L D_{yw} & \\ \hline C_z & 0 & D_{zw} & \end{array} \right] \quad (2.33)$$

Les résultats d’analyse seront appliqués sur cette représentation d’état pour dériver des résultats de synthèse.

Il est également possible de se ramener à un système d’erreur pour le cas avec pondération, présenté figure 2.16 et dont la représentation d’état de la forme standard est donnée en équation (2.34).

$$T_{w \rightarrow e_w} = \left[\begin{array}{cccc|cc} A & 0 & 0 & 0 & B_w & \\ D_L C_y & A - D_L C_y & 0 & C_L & D_L D_{yw} & \\ B_W C_z & -B_W C_z & A_W & 0 & B_W D_{zw} & \\ B_L C_y & -B_L C_y & 0 & A_L & B_L D_{yw} & \\ \hline D_W C_z & -D_W C_z & C_W & 0 & D_W D_{zw} & \end{array} \right] \quad (2.34)$$

Du point de vue de la sortie e_w , la matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e_w)}$ admet la représentation d’état équivalente donnée équation (2.35).

$$T_{w \rightarrow e_w} = \left[\begin{array}{ccc|cc} A - D_L C_y & 0 & C_L & B_w - D_L D_{yw} & \\ B_W C_z & A_W & 0 & B_W D_{zw} & \\ B_L C_y & 0 & A_L & B_L D_{yw} & \\ \hline D_W C_z & C_W & & D_W D_{zw} & \end{array} \right] \quad (2.35)$$

Par opposition au cas de l’OGS où le problème peut se formuler comme un problème de retour statique de sortie (figure 2.13 page 45), ce problème est un cas particulier de synthèse de correcteur (figure 2.17). Le problème de synthèse de cette structure peut donc être vu comme un cas particulier du problème de synthèse de correcteurs pour lequel existent des solutions efficaces [GA94, SGC97]. En revanche, pour se ramener à un problème d’optimisation convexe, l’ordre de la matrice de la fonction de transfert devra être d’ordre n_L , où $n_L = n_G + n_W$ (n_G est l’ordre du système G et n_W est l’ordre de

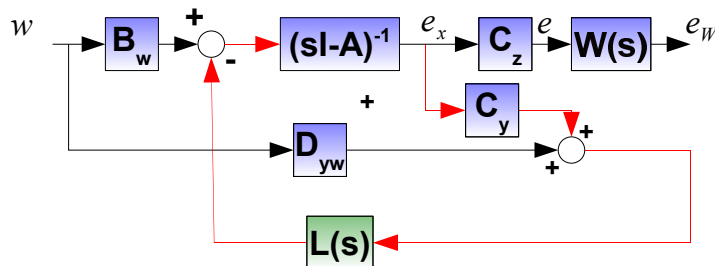


Figure 2.17 – Interprétation du problème de synthèse d’OGD comme un retour dynamique de sortie

la pondération). Par conséquent, l’estimateur synthétisé sera d’ordre $n_{OGD} = 2n_G + n_W$. Il est à présent possible de présenter les problèmes de synthèse pour les normes H_∞ , H_2 et H_∞ pondérée, ainsi que les théorèmes donnant des conditions d’existence pouvant être mis sous la forme de problèmes d’optimisation convexe.

Synthèse d’OGD H_∞

Problème 11. Problème de synthèse d’OGD H_∞ .

La forme standard du problème de synthèse d’OGD est la matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}$ présentée figure 2.15 page 46. $T_{(w) \rightarrow (e)}$ admet la représentation d’état équivalente présentée équation (2.33) page 47.

Etant donné γ , trouver s’il existe un gain dynamique $L(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_L & D_L \end{array} \right]$ tel que $T_{(w) \rightarrow (e)}$ soit stable et que :

$$\|T_{(w) \rightarrow (e)}\|_\infty < \gamma.$$

Théorème 7. Synthèse d’observateur augmenté H_∞ .

Il existe une solution au problème de synthèse d’OGD H_∞ (problème 11) si et seulement s’il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ telles que les contraintes (2.36) et (2.37) soient vérifiées.

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}A + A^T\mathbf{P} & \mathbf{P}B_w & C_z^T \\ B_w^T\mathbf{P} & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_z & D_{zw} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.36)$$

$$D_{zw}^T D_{zw} < \gamma^2 I \quad (2.37)$$

$$\text{avec } \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_y^T \\ D_{yw}^T \end{bmatrix}_\perp \quad \blacksquare$$

Ce théorème peut être mis sous la forme d’un problème d’optimisation sous contrainte LMI. La démonstration de ce théorème est disponible en annexe B page 225.

Synthèse d'OGD H_2

Problème 12. Problème de synthèse d'OGD H_2 .

La forme standard du problème de synthèse d'OGD est la matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}$ présentée figure 2.15 page 46. $T_{(w) \rightarrow (e)}$ admet la représentation d'état équivalente présentée équation (2.33) page 47.

Etant donné γ , trouver s'il existe un gain dynamique $L(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_L & D_L \end{array} \right]$ tel que $T_{(w) \rightarrow (e)}$ soit stable et que :

$$\|T_{(w) \rightarrow (e)}\|_2 < \gamma.$$

Théorème 8. *Synthèse d'OGD H_2 .*

Il existe une solution au problème de synthèse d'OGD (problème 12) si et seulement si il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ telles que les conditions (2.38), (2.39), (2.40) soient vérifiées.

$$D_{zw} = 0 \quad \text{Trace}(\mathbf{M}) < \gamma^2 \quad (2.38)$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}A + A^T\mathbf{P} & \mathbf{P}B_w \\ B_w^T\mathbf{P} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (2.39)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \diamond \\ C_z & \mathbf{M} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.40)$$

■

Ce théorème peut être mis sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI. La démonstration de ce théorème est disponible en annexe B.

Synthèse d'OGD H_∞ pondéré

Problème 13. Problème de synthèse d'OGD H_∞ pondéré.

La forme standard du problème de synthèse d'OGD est la matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e_w)}$ présentée figure 2.16 page 47. $T_{(w) \rightarrow (e_w)}$ admet la représentation d'état équivalente présentée équation (2.33) page 47.

Etant donné γ , trouver s'il existe $L(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_L & D_L \end{array} \right]$ tel que $T_{(w) \rightarrow (e_w)}$ soit stable et que :

$$\|T_{(w) \rightarrow (e_w)}\|_\infty < \gamma.$$

Théorème 9. *Synthèse d'OGD H_∞ pondéré.*

Il existe une solution au problème d'OGD H_∞ pondéré (Problème 13) si et seulement si il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ telles que les contraintes (2.41), (2.42) et (2.43) soient vérifiées.

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \hline N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{B}_w & \mathbf{C}_z^T \\ \mathbf{B}_w^T\mathbf{P} & -\gamma^2 I & \mathbf{D}_z^T \\ \mathbf{C}_z & \mathbf{D}_z & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \hline N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.41)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{Q} & \mathbf{B}_w & \mathbf{Q}\mathbf{C}_z^T \\ \mathbf{B}_w^T & -\gamma^2 I & \mathbf{D}_{zw}^T \\ \mathbf{C}_z\mathbf{Q} & \mathbf{D}_{zw} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.42)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & I \\ I & \mathbf{Q} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.43)$$

Avec les matrices suivantes

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_w \\ \hline \mathbf{C}_z & \mathbf{D}_{zw} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B_w \\ B_W C_z & A_W & B_W D_{zw} \\ \hline D_W C_z & C_W & D_W D_{zw} \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_y^T \\ D_{yw}^T \end{bmatrix}_\perp \quad \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_W \\ D_W \end{bmatrix}_\perp$$

■

Dans le cas de la synthèse H_∞ pondérée, le théorème 9 présente des conditions qui peuvent se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI. Ce théorème présente donc un résultat pour l'estimation H_∞ pondérée avec une structure de type observateur.

Si la synthèse sans pondération de filtre ou d'OGS peut se mettre sous la forme de problèmes d'optimisation sous contrainte LMI, le problème de synthèse d'OGS garantissant une norme H_∞ pondérée ne peut pas être linéarisé : c'est un problème d'optimisation sous contrainte BMI (voir théorème 6). Ce problème de synthèse peut être interprété comme un problème de retour statique de sortie (voir figure 2.13). En se ramenant à un problème de retour dynamique de sortie en choisissant pour le gain de l'observateur une matrice de fonctions de transfert, le problème peut alors être mis sous la forme d'un problème d'optimisation convexe. Ce faisant la structure d'observateur créée est la structure d'observateur à gain dynamique.

2.2.7 Comparaison de l'OGD avec les structures classiques

Dans cette sous-section, L'OGD est comparé avec les autres structures au sens des conditions d'existence présentées dans les théorèmes de la section 2.2.6.

Dans un premier temps, nous considérons la synthèse H_∞ sans pondération. Les conditions d'existence pour un ODG garantissant une norme H_∞ sur $T_{(w)\rightarrow(e)}$ sont les suivantes (théorème 7) :

Il existe une solution au problème de synthèse d'observateur à gain dynamique H_∞ si et seulement s'il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ telles que les contraintes (2.44) et (2.45) soient vérifiées.

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}A + A^T\mathbf{P} & \mathbf{P}B_w & C_z^T \\ B_w^T\mathbf{P} & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_z & D_{zw} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.44)$$

$$D_{zw}^T D_{zw} < \gamma^2 I \quad (2.45)$$

- Si le système G est stable, alors ces conditions impliquent également l'existence d'un filtre (théorème 1 page 32) et d'un observateur à gain statique (théorème 4 page 40) assurant la même performance. Dans ce cas là, l'ODG est obsolète puisque le filtre et l'observateur assurent la même performance pour un ordre moindre.
- L'ODG présente la même limite structurelle que l'OGS : c'est un filtre passe-bas (voir sous-section 2.2.5). Dans le cas où le terme D_{zw} n'est pas nul, cela peut avoir un impact sur la performance atteignable.

L'ODG est donc une structure inutile pour les cas sans pondération : son ordre est supérieur à celui des structures classiques pour la même performance.

En revanche, cette structure permet de prendre en compte des systèmes instables lors de la synthèse garantissant une norme H_∞ pondérée. Nous conjecturons qu'il est possible de prouver que l'ODG permet ceci alors que la structure filtre ne le permet pas (comparaison des conditions des théorèmes 3 et 9) et que l'observateur à gain statique ne permet pas de le faire de façon efficace (voir théorème 4). Ceci n'est pas prouvé dans la thèse pour une raison simple : la section 2.3 présente l'estimateur généralisé nominal, une structure rendant les autres obsolètes.

2.3 L'estimateur Généralisé Nominal

Pour un problème donné, selon sa nature (système stable ou instable, pondération ou non, terme direct D_{zw} ou non), il est nécessaire de choisir la structure la plus adaptée. Par exemple, pour un système instable, pour une norme H_∞ ou H_2 sans pondération, l'OGS est la structure la mieux adaptée. Pour un cas stable, avec pondération, le filtre sera la structure qui assurera la meilleure performance pour un ordre faible.

Suite à l'étude des structures classiques et de l'Observateur à Gain Dynamique, nous proposons dans cette section une nouvelle structure d'estimateur pouvant être synthétisée pour toutes les configurations (système instable, terme direct D_{zw} , etc...),

et assurant la même performance que les structures classiques et l'OGD pour toutes les normes considérées. Cette structure est appelée Estimateur Généralisé Nominal (EGN).

2.3.1 Présentation de la structure

La structure de l'Estimateur Généralisé Nominal (EGN) se base sur la structure observateur. Un terme direct est ajouté permettant la prise en compte d'un terme direct D_{zw} (handicapant pour l'OGS et l'OGD pour la performance H_∞ et H_2 sans pondération). Dans le cas H_∞ avec pondération, cette structure contient un modèle particulier de la pondération permettant de se ramener à un problème de synthèse d'un observateur standard sans pondération.

La structure de l'EGN sans pondération est présentée figure 2.18. Cette structure est analogue à la structure de l'observateur avec simplement l'ajout d'un terme direct depuis l'erreur d'estimation de la sortie vers l'estimation. Ce terme direct n'est pas utile si $D_{zw} = 0$ est nul mais est nécessaire pour résoudre le problème d'estimation dans sa forme la plus générale.

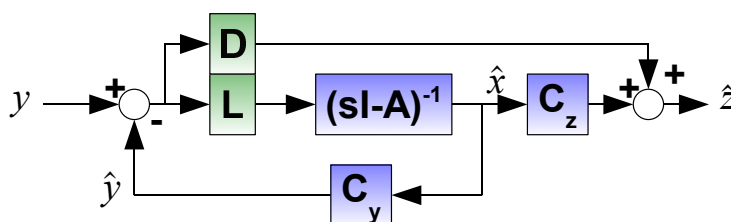


Figure 2.18 – Estimateur généralisé nominal

La représentation d'état de l'estimateur généralisé en l'absence de pondération est donnée par :

$$T_{y \rightarrow \hat{z}} = \left[\begin{array}{c|c} A - LC_y & L \\ \hline C_z - DC_y & D \end{array} \right]$$

La forme standard du problème de synthèse d'estimateur généralisé nominal sans pondération est présentée figure 2.19.

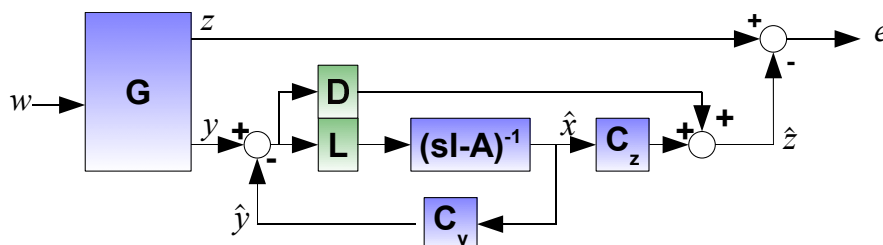


Figure 2.19 – Forme standard du problème de synthèse d'EGN sans pondération

La représentation d'état du système étendu (modèle + estimateur) est la suivante :

$$T_{w \rightarrow e} = \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B_w \\ LC_y & A - LC_y & LD_{yw} \\ \hline C_z - DC_y & -C_z + DC_y & D_{zw} - DD_{yw} \end{array} \right]$$

Avec cette forme, la fonction de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}$ admet une représentation d'état équivalente présentée équation (2.46). Le changement dans l'espace d'état pour arriver à cette forme est analogue à celui employé pour l'observateur à gain statique.

$$T_{w \rightarrow e} = \left[\begin{array}{c|c} A - LC_y & B_w - LD_{yw} \\ \hline C_z - DC_y & D_{zw} - DD_{yw} \end{array} \right] \quad (2.46)$$

Contrairement au système d'erreur pour l'observateur standard présenté équation (2.22), le terme D_{zw} peut être compensé permettant dans tous les cas sans pondération d'obtenir une performance équivalente à la performance atteinte avec un filtre. Les résultats d'analyse vont être appliqués sur ce système pour dériver des résultats de synthèse pour les normes H_∞ et H_2 sans pondération.

Le problème du terme direct étant résolu, la prise en compte de pondération est à présent considérée. La démarche est relativement simple : la fonction de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$T_{(w) \rightarrow (e)} = W \left[\begin{array}{cc} I & -Est \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} T_{(w) \rightarrow (z)} \\ T_{(w) \rightarrow (y)} \end{array} \right]$$

En déplaçant la pondération, cette fonction de transfert peut également s'écrire sous la forme suivante

$$T_{(w) \rightarrow (e)} = \left[\begin{array}{cc} I & -WEst \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} WT_{(w) \rightarrow (z)} \\ T_{(w) \rightarrow (y)} \end{array} \right]$$

La matrice de fonctions de transfert $\left[\begin{array}{c} WT_{(w) \rightarrow (z)} \\ T_{(w) \rightarrow (y)} \end{array} \right]$ admet la représentation d'état suivante :

$$\left[\begin{array}{c} WT_{(w) \rightarrow (z)} \\ T_{(w) \rightarrow (y)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B_w \\ B_W C_z & A_W & B_W D_{zw} \\ \hline D_W C_z & C_W & D_W D_{zw} \\ C_y & 0 & D_{yw} \end{array} \right] \quad (2.47)$$

On va donc rechercher un estimateur de telle sorte que la matrice de fonctions de transfert $WEst$ corresponde à la matrice de fonctions de transfert d'un EGN sans pondération pour le système $\left[\begin{array}{c} WT_{(w) \rightarrow (z)} \\ T_{(w) \rightarrow (y)} \end{array} \right]$. Cela revient à chercher un EGN qui va estimer

le signal Wz , c'est-à-dire le signal à estimer pondéré. L'estimateur doit être tel que $WT_{(y) \rightarrow (\hat{z})}$ admette une représentation d'état équivalente de la forme.

$$WT_{y \rightarrow \hat{z}} = \left[\begin{array}{cc|c} A - L_1 C_y & 0 & L_1 \\ \hline B_W C_z - L_2 C_y & A_W & L_2 \\ \hline D_W C_z - D C_y & C_W & D \end{array} \right] \quad (2.48)$$

La représentation d'état de l'EGN en présence de pondération permettant ceci est présentée équation (2.49)⁴. La structure contient donc un modèle de la pondération, plus exactement de son inverse. Cette structure recoupe en l'absence de pondération la structure présentée figure 2.19 page 52.

Théorème 10. *Forme pondérée de l'EGN.*

Une matrice de fonctions de transfert $T_{(y) \rightarrow (\hat{z})}$ telle que $WT_{(y) \rightarrow (\hat{z})}$ soit un EGN pour le système $G = \begin{bmatrix} WT_{(w) \rightarrow (z)} \\ T_{(w) \rightarrow (y)} \end{bmatrix}$ est donnée par :

$$T_{y \rightarrow \hat{z}} = \left[\begin{array}{cc|c} A - L_1 C_y & 0 & L_1 \\ \hline L_2 C_y - B_W D_W^{-1} D C_y & A_W - B_W D_W^{-1} C_W & B_W D_W^{-1} D - L_2 \\ \hline C_z - D_W^{-1} D C_y & -D_W^{-1} C_W & D_W^{-1} D \end{array} \right] \quad (2.49)$$

■

Démonstration. Théorème 10 (Forme pondérée de l'EGN)

La représentation d'état de $WT_{y \rightarrow \hat{z}}$ peut s'écrire

$$WT_{y \rightarrow \hat{z}} = \left[\begin{array}{ccc|c} A - L_1 C_y & 0 & 0 & L_1 \\ \hline L_2 C_y - B_W D_W^{-1} D C_y & A_W - B_W D_W^{-1} C_W & 0 & B_W D_W^{-1} D - L_2 \\ \hline B_W (C_z - D_W^{-1} D C_y) & -B_W D_W^{-1} C_W & A_W & B_W D_W^{-1} D \\ \hline D_W (C_z - D_W^{-1} D C_y) & -D_W D_W^{-1} C_W & C_W & D_W D_W^{-1} D \end{array} \right] \quad (2.50)$$

En utilisant la transformation dans l'espace d'état donnée par

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & I & I \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -I & I \end{bmatrix}$$

La nouvelle représentation d'état est donnée par

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{B} & \tilde{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{-1} A T & T^{-1} B \\ C T & D \end{bmatrix}$$

4. Nous n'avons pas représenté la forme de l'estimateur sous la forme d'un schéma-bloc pour la simple raison que le schéma correspondant serait trop compliqué pour ne rien apporter en terme d'interprétation.

Cette représentation d'état équivalente peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{B} & \tilde{D} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} A - L_1 C_y & 0 & 0 & L_1 \\ L_2 C_y - B_W D_W^{-1} D C_y & A_W - B_W D_W^{-1} C_W & 0 & B_W D_W^{-1} D - L_2 \\ \hline B_W C_z - L_2 C_y & 0 & A_W & L_2 \\ \hline D_W (C_z - D_W^{-1} D C_y) & 0 & C_W & D_W D_W^{-1} D \end{array} \right] \quad (2.51)$$

Cette représentation d'état est une forme de Kalman d'observabilité et peut être réduite sous la forme suivante :

$$WT_{y \rightarrow \hat{z}} = \left[\begin{array}{cc|c} A - L_1 C_y & 0 & L_1 \\ B_W C_z - L_2 C_y & A_W & L_2 \\ \hline D_W C_z - D C_y & C_W & D \end{array} \right] \quad (2.52)$$

Cette matrice de fonctions de transfert est un EGN pour $G = \begin{bmatrix} WT_{(w) \rightarrow (z)} \\ T_{(w) \rightarrow (y)} \end{bmatrix}$ \square

Par conséquent, le choix fait équation (2.49) pour la représentation d'état de l'EGN en présence de pondération permet de se ramener à un problème de synthèse d'EGN sans pondération pour estimer Wz le signal à estimer pondéré.

- Cette forme permet de transformer un problème d'observation pondérée en problème d'observation non pondérée. Par conséquent, si on dispose d'une solution pour le problème d'EGN sans pondération, on dispose d'une solution pour le problème d'EGN avec pondération.
- L'ordre de l'estimateur est $n_{EGN} = n_G + n_W$; par conséquent un ordre moindre qu'un OGD. Nous verrons par la suite que l'EGN assure dans tous les cas la même performance que l'OGD.
- D'un point de vue variables du problème d'optimisation, la synthèse de l'EGN se fait via la synthèse d'un gain statique. On aura par conséquent un nombre de variables moindre par comparaison avec la synthèse d'un filtre où toutes les matrices de la représentation d'état doivent être synthétisées. De plus, la transformation du problème d'optimisation sous contrainte BMI en problème d'optimisation sous contrainte LMI est triviale.

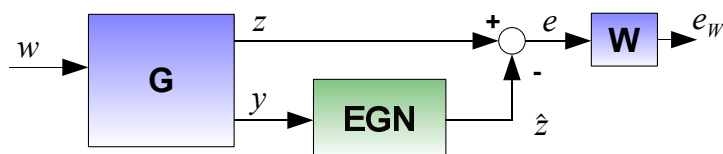


Figure 2.20 – Estimateur généralisé nominal

La forme standard du problème de synthèse d'estimateur généralisé avec pondération est présentée figure 2.20. En faisant le choix de l'estimateur présenté équation (2.49) la matrice de fonction de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}$ admet la représentation d'état équivalente suivante :

$$T_{w \rightarrow e_W} = \left[\begin{array}{cc|c} A - L_1 C_y & 0 & B_w - L_1 D_{yw} \\ B_W C_z - L_2 C_y & A_W & B_W D_{zw} - L_2 D_{yw} \\ \hline D_W C_z - D C_y & C_W & D_W D_{zw} - D D_{yw} \end{array} \right] \quad (2.53)$$

Les résultats d'analyse seront appliqués sur la forme donnée équation (2.53) pour dériver des résultats de synthèse. Malgré la complexité de la structure présentée, le système équivalent pour $T_{(w) \rightarrow (e)}$ est simple.

2.3.2 Synthèse d'estimateur généralisé

Dans cette section, trois théorèmes sont présentés permettant de tester l'existence d'un EGN garantissant un niveau sur une norme H_∞ , H_2 , ou H_∞ pondéré. La linéarisation est faite ici en utilisant un changement de variables linéarisant, contrairement aux autres théorèmes de la section 2.2 où la linéarisation est faite en utilisant le lemme d'élimination (lemme 5 page 223). Ceci permet une reconstruction simple de l'estimateur. Un corollaire à chaque théorème de synthèse est formulé de manière systématique (consistant à l'application du lemme d'élimination sur les conditions d'un théorème donné) présentant des résultats homogènes aux autres théorèmes de la section, et permettant la comparaison de l'EGN aux autres structures.

Synthèse d'estimateur généralisé H_∞

Problème 14. Problème de synthèse d'EGN H_∞ .

La forme standard du problème de synthèse d'EGN H_∞ pondéré est la matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}$ présentée figure 2.19 page 52. $T_{(w) \rightarrow (e)}$ admet la représentation d'état présentée équation (2.46) page 53.

Etant donné γ , trouver s'il existe des matrices $L = [L]$, D (et les calculer) telles que $T_{w \rightarrow e}$ soit stable et que :

$$\|T_{w \rightarrow e}\|_\infty < \gamma.$$

Théorème 11. *Synthèse d'EGN H_∞ .*

Il existe une solution au problème de synthèse d'EGN H_∞ (Problème 14) si et seulement si il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, \mathbf{L} , \mathbf{D} telles que la contrainte suivante soit vérifiée.

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{P}A - \mathbf{L}C_y + A^T\mathbf{P} - C_y^T\mathbf{L}^T & \mathbf{P}B_w - \mathbf{L}D_{yw} & (C_z - \mathbf{D}C_y)^T \\ \hline B_w^T\mathbf{P} - D_{yw}^T\mathbf{L} & -\gamma^2 I & (D_{zw} - \mathbf{D}D_{yw})^T \\ \hline C_z - \mathbf{D}C_y & D_{zw} - \mathbf{D}D_{yw} & -I \end{array} \right] < 0 \quad (2.54)$$



Les contraintes du théorème 11 sont des contraintes LMI. Pour un niveau de performance donné, trouver \mathbf{L} et \mathbf{D} est un problème de faisabilité sous contrainte LMI. Si les conditions sont vérifiées, un EGN assurant un niveau de performance γ sur la norme H_∞ de $T_{(w) \rightarrow (e)}$ est donné par la représentation d'état suivante construite à partir de l'inversion du changement de variable linéarisant présenté dans la démonstration du théorème.

$$T_{y \rightarrow \hat{z}} = \left[\frac{A - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{L} C_y \parallel \mathbf{P}^{-1} \mathbf{L}}{C_z - \mathbf{D} C_y \parallel \mathbf{D}} \right]$$

Démonstration. Théorème 11 (Synthèse d'EGN H_∞ sans pondération)

Le lemme 1 page 29 est appliqué sur le système présenté figure 2.19 page 52 admettant la représentation d'état donnée équation (2.46) page 53. Il existe une solution au problème de synthèse d'EGN si et seulement s'il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, L , \mathbf{D} telles que la contrainte suivante soit vérifiée.

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{P}(A - LC_y) + (A - LC_y)^T \mathbf{P} & \mathbf{P}(B - LD_{yw}) & (C_z - \mathbf{D}C_y)^T \\ \hline (B - LD_{yw})^T \mathbf{P} & -\gamma^2 I & (D_{zw} - \mathbf{D}D_{yw})^T \\ \hline C_z - \mathbf{D}C_y & D_{zw} - \mathbf{D}D_{yw} & -I \end{array} \right] < 0$$

En posant le changement de variable linéarisant $\mathbf{L} = \mathbf{P}L$, les conditions du théorème sont directement obtenues. \square

Le corollaire suivant présente des conditions d'existence qui permettront la comparaison de l'EGN aux autres structures. Ce corollaire est obtenu par application du lemme d'élimination sur les conditions du théorème 11 page 56.

Corollaire 1. *Existence d'un EGN H_∞*

Il existe une solution au problème de synthèse d'EGN H_∞ (Problème 14) si et seulement s'il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ telle que la contrainte (2.55) soit vérifiée.

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}A + A^T \mathbf{P} & \mathbf{P}B_w & C_z^T \\ B_w^T \mathbf{P} & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_z & D_{zw} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.55)$$

$$\text{avec } \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_y^T \\ D_{yw}^T \end{bmatrix}_\perp$$

Démonstration. Corollaire 1 (Existence d'un EGN H_∞)

La condition (2.54) du théorème 11 peut s'écrire sous la forme suivante.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{B} & C_z^T \\ B^T\mathbf{P} & -\gamma^2 I & D_z^T \\ C_z & D_z & -I \end{bmatrix} + He \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} \right) < 0$$

On peut alors définir les matrices suivantes :

$$U = \begin{bmatrix} C_y^T \\ D_{yw}^T \\ 0 \end{bmatrix} \quad U_\perp = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad V_\perp = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par application du lemme d'élimination, la première contrainte obtenue est la condition du corollaire. La seconde condition est $-\gamma^2 < 0$ qui est toujours vérifiée. \square

Synthèse d'estimateur généralisé H_2

Le cas H_2 est présenté ici. Les démonstrations du théorème 12, ainsi que la démonstration du corollaire 2 sont disponibles en annexe B page 225.

Problème 15. Problème de synthèse d'EGN H_2 .

La forme standard du problème de synthèse d'EGN H_∞ pondéré est la matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}$ présentée figure 2.19 page 52. $T_{(w) \rightarrow (e)}$ admet la représentation d'état présentée équation (2.46) page 53.

Etant donné γ , trouver s'il existe des matrices $L = [L]$, D (et les calculer) telles que $T_{w \rightarrow e}$ soit stable et que :

$$\|T_{w \rightarrow e}\|_2 < \gamma.$$

Théorème 12. Synthèse d'EGN H_2 .

Il existe une solution au problème de synthèse d'EGN H_2 (problème 15) si et seulement s'il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$, \mathbf{L} , \mathbf{D} de dimensions appropriées telles que les contraintes (2.56), (2.57) et (2.58) soient vérifiées.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & (C_z - \mathbf{D}C_y)^T \\ C_z - \mathbf{D}C_y & \mathbf{M} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.56)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{P} - C_y^T \mathbf{L}^T + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{L}C_y & \mathbf{P}\mathbf{B}_w - \mathbf{L}D_{yw} \\ B_w^T \mathbf{P} - D_{yw}^T \mathbf{L}^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.57)$$

$$\text{Trace}(\mathbf{M}) < \gamma^2 \quad D_{zw} - \mathbf{D}D_{yw} = 0 \quad (2.58)$$

■

La variable \mathbf{D} est en partie déterminée par l'équation (2.58)⁵. Pour le reste des variables, ces contraintes sont des contraintes LMI. qui peuvent être mises sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI. On remarquera que si $D_{zw} = 0$, alors $\mathbf{D} = 0$. Dans ce cas l'EGN est équivalent à l'observateur à gain statique.

Si les conditions sont vérifiées, alors un EGN assurant un niveau de performance γ sur l'erreur d'estimation est donné par la représentation d'état suivante, construite à partir de l'inversion du changement de variable linéarisant présenté dans la démonstration du théorème :

$$T_{y \rightarrow \hat{z}} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{A - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{L}C_y}{C_z - \mathbf{D}C_y} & \frac{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{L}}{\mathbf{P}} \end{array} \right].$$

Corollaire 2. *Existence d'un EGN H_2*

Il existe une solution au problème de synthèse d'EGN H_2 (Problème 15) si et seulement s'il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P} > 0$, $\mathbf{M} = \mathbf{M} > 0$, \mathbf{D} telles que les contraintes (2.59), (2.60), (2.61) soient vérifiées.

$$D_{zw} - \mathbf{D}D_{yw} = 0 \quad \text{Trace}(\mathbf{M}) < \gamma^2 \quad (2.59)$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}A + A^T\mathbf{P} & \mathbf{P}B_w \\ B_w^T\mathbf{P} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (2.60)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \diamond \\ (C_z - \mathbf{D}C_y) & \mathbf{M} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.61)$$

Synthèse d'estimateur généralisé nominal H_∞ pondéré.

Le cas H_∞ pondéré est présenté ici. Les démonstrations du théorème 13, ainsi que la démonstration du corollaire 3 sont disponibles en annexe B page 225.

Problème 16. Problème de synthèse d'EGN H_∞ pondéré.

La forme standard du problème de synthèse d'EGN H_∞ pondéré est la matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e_W)}$ présentée figure 2.20 page 55. $T_{(w) \rightarrow (e_W)}$ admet la représentation d'état présentée équation (2.53) page 56.

Etant donné γ , trouver s'il existe des matrices $L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$, D (et les calculer) telles que $T_{w \rightarrow e_W}$ soit stable et que :

$$\|T_{w \rightarrow e_W}\|_\infty < \gamma.$$

5. Selon les cas possibles, l'équation $D_{zw} - \mathbf{D}D_{yw} = 0$ n'a pas de solution, une seule solution, ou une infinité de solutions dépendant linéairement d'un ou plusieurs paramètres. Ces paramètres deviennent alors des variables du problème d'optimisation sous contrainte LMI.

Théorème 13. *Synthèse d'EGN H_∞ pondéré*

Il existe une solution au problème de synthèse d'EGN H_∞ pondérée (problème 16) si et seulement s'il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, \mathbf{L} telles que la contrainte (2.62) soit vérifiée.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}_y + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{C}_y^T\mathbf{L}^T & \mathbf{P}\mathbf{B}_w - \mathbf{L}\mathbf{D}_{yw} & \mathbf{C}_z^T - \mathbf{C}_y^T\mathbf{D}^T \\ \mathbf{B}_w^T\mathbf{P} - \mathbf{D}_{yw}^T\mathbf{L}^T & -\gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{D}_z^T - \mathbf{D}_{yw}^T\mathbf{D}^T \\ \mathbf{C}_z - \mathbf{D}\mathbf{C}_y & \mathbf{D}_z - \mathbf{D}\mathbf{D}_{yw} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.62)$$

avec

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_w \\ \hline \mathbf{C}_z & \mathbf{D}_{zw} \\ \mathbf{C}_y & \mathbf{D}_{yw} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{A} & 0 & \mathbf{B}_w \\ \hline \mathbf{B}_w\mathbf{C}_z & \mathbf{A}_w & \mathbf{B}_w\mathbf{D}_{zw} \\ \hline \mathbf{D}_w\mathbf{C}_z & \mathbf{C}_w & \mathbf{D}_w\mathbf{D}_{zw} \\ \hline \mathbf{C}_y & 0 & \mathbf{D}_{yw} \end{array} \right].$$

■

Ce théorème présente des contraintes qui peuvent se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI.

Si les conditions sont vérifiées pour un niveau de performance donné, un EGN assurant un niveau de performance γ sur l'erreur d'estimation pondérée est donné par la représentation d'état suivante (construite à partir de l'inversion du changement de variable linéarisant présenté dans la démonstration du théorème).

$$T_{y \rightarrow \hat{z}} = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{A} - \mathbf{L}_1\mathbf{C}_y & 0 & \mathbf{L}_1 \\ \hline \mathbf{L}_2\mathbf{C}_y - \mathbf{B}_w\mathbf{C}_z & \mathbf{A}_w - \mathbf{B}_w\mathbf{D}_w^{-1}\mathbf{C}_w & \mathbf{B}_w\mathbf{D}_w^{-1}\mathbf{D} - \mathbf{L}_2 \\ \hline \mathbf{C}_z - \mathbf{D}_w^{-1}\mathbf{D}\mathbf{C}_y & -\mathbf{D}_w^{-1}\mathbf{C}_w & \mathbf{D}_w^{-1}\mathbf{D} \end{array} \right] \quad \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{L}$$

Corollaire 3 (Existence d'un EGN H_∞ pondéré).

Il existe une solution au problème de synthèse d'EGN H_∞ pondéré (Problème 16) si et seulement s'il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ telle que la contrainte (2.63) soit vérifiée.

$$\left[\begin{array}{ccc} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \hline N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{array} \right]^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{B}_w & \mathbf{C}_z^T \\ \mathbf{B}_w^T\mathbf{P} & -\gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{D}_{zw}^T \\ \mathbf{C}_z & \mathbf{D}_{zw} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \hline N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.63)$$

$$\text{avec} \quad \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_y^T \\ \mathbf{D}_{yw}^T \end{bmatrix}_\perp$$

| Filtre | OGS |
|--|--|
| Etant donné γ , il existe un filtre tel que $\ T_{w \rightarrow e}\ _\infty < \gamma$ si - $\exists \mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ telle que (2.64) soit vérifiée - G est stable | Etant donné γ , il existe un observateur tel que $\ T_{w \rightarrow e}\ _\infty < \gamma$ si - $\exists \mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ telle que (2.64) soit vérifiée - $D_{zw}^T D_{zw} < \gamma^2 I$ |
| OGD | EGN |
| Etant donné γ , il existe un OGD tel que $\ T_{w \rightarrow e}\ _\infty < \gamma$ si - $\exists \mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ telle que (2.64) soit vérifiée - $D_{zw}^T D_{zw} < \gamma^2 I$ | Etant donné γ , il existe un EGN tel que $\ T_{w \rightarrow e}\ _\infty < \gamma$ si - $\exists \mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ telle que (2.64) soit vérifiée |

 Tableau 2.3 – Conditions d’existence pour les structures classique (norme H_∞)

2.3.3 Equivalence avec les structures classiques

Cette partie conclut sur l’estimateur généralisé nominal, en présentant l’équivalence de cette structure avec les autres structures. La comparaison n’est faite que pour le cas H_∞ sans pondération, les comparaisons pour les autres normes étant analogues.

Les théorèmes 1 page 32 (Existence d’un filtre H_∞), 4 page 40 (Existence d’un OGS H_∞), 7 page 48 (Existence d’un OGD H_∞) et le corollaire 1 page 57 (Existence d’un EGN H_∞) sont rappelés tableau 2.3 et ont pour condition commune la condition (2.64) :

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}A + A^T \mathbf{P} & \mathbf{P}B_w & C_z^T \\ B_w^T \mathbf{P} & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_z & D_{zw} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.64)$$

Le tableau 2.3 page 61 permet de comparer de façon très simple l’EGN à toutes les structures présentées dans ce chapitre au sens de la norme H_∞ . Quelle que soit la structure considérée, l’existence de cette structure implique l’existence de $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ telle que la condition (2.64) soit vérifiée. Or cette condition suffit à impliquer l’existence d’un EGN pour ce niveau de performance. S’il existe un filtre, un OGS ou un OGD pour une norme H_∞ donnée sur l’erreur d’estimation, alors il existe un EGN assurant le même niveau de performance.

La même comparaison est possible pour la norme H_2 par comparaison des théorèmes 2 page 36 (Existence d’un filtre H_2), 5 page 41 (Existence d’un OGS H_2), 8 page 49 (Existence d’un OGD H_2) et du corollaire 2 page 59 (Existence d’un EGN H_2). La même conclusion peut être formulée : s’il existe un filtre, un OGS ou un OGD pour une norme H_2 donnée sur l’erreur d’estimation alors il existe un EGN assurant le même niveau de performance.

Et la même comparaison est possible pour la norme H_∞ pondérée par comparaison des théorèmes 3 page 37 (Existence d'un filtre H_∞ pondéré), 9 page 49 (Existence d'un OGD H_∞ pondéré) et du corollaire 3 page 60 (Existence d'un EGN H_∞). La même conclusion peut être formulée : s'il existe un filtre ou un OGD pour une norme H_∞ pondérée donnée sur l'erreur d'estimation alors il existe un EGN assurant le même niveau de performance.

L'EGN s'affranchit des contraintes structurelles des structures classiques, permet la prise en compte de systèmes instables et n'est pas limité à un filtre passe-bas. Il permet de plus de prendre en compte les pondérations sans compromis en terme d'ordre (par rapport à l'OGD).

2.3.4 Conclusions sur l'EGN

Dans cette section, nous avons présenté une nouvelle structure, qui permet d'assurer dans tous les cas la même performance que les trois structures classiques (filtre, observateur à gain statique, observateur à gain dynamique). De plus, cette structure possède tous les avantages de chacune des structures classiques : elle permet de résoudre sans limites de performance les problèmes d'estimation nominale dans leur forme la plus générale. Elle permet en outre de se ramener à un système équivalent qui pourra être stabilisé dans le cas d'un système instable. Pour finir, la synthèse de cette structure se fait par le calcul d'un gain statique, ce qui présentera un avantage en terme de nombre de variables du problème d'optimisation correspondant. Cette structure d'estimateur est la première contribution de la thèse.

2.4 Choix des pondérations

Dans cette section, nous discutons du choix des pondérations pour l'estimation nominale. Dans un premier temps, nous présentons par une approche fonction de transfert un filtre idéal qui va permettre de donner une limite de performance pour les estimateurs nominaux.

Il est ensuite montré sur un exemple simple comment les solutions données par la norme H_∞ et la norme H_2 s'articulent autour de cette limite de performance. Ceci permet de justifier l'utilisation des pondérations pour l'estimation H_∞ .

Pour finir, nous proposons une méthode de synthèse systématique de pondérations qui permettra d'obtenir des résultats qualitatifs intéressants avec l'utilisation de la norme H_∞ , en l'absence de cahier des charges fréquentiel précis.

2.4.1 Un gabarit inférieur sur l'erreur d'estimation

Pour pouvoir analyser les EGN synthétisés par les théorèmes présentés dans la section 2.3, il est nécessaire de se poser la question de la limite de performance. Nous avons

considéré systématiquement le cas du filtrage multi-variable dans les problèmes de synthèse présentés dans ce chapitre. Nous proposons ici une méthode pour analyser ce qu'il est possible d'atteindre pour l'estimation d'un signal donné (par opposition à un vecteur de signaux).

La forme standard du problème d'estimation (figure 2.1 page 21) est présentée comme une matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}$ (possiblement pondérée par W), où w est le vecteur des entrées non mesurées, e le vecteur contenant les erreurs d'estimation pour chaque signal à estimer.

On s'intéresse ici aux erreurs d'estimation, considérées dans un cadre MISO (Multi Input Single Output). Si on considère l'erreur d'estimation e_i liée au i^{eme} signal à estimer z_i , sa densité spectrale de puissance est donnée par $S_{e_i}(j\omega) = T_{(w) \rightarrow (e_i)}^*(j\omega)T_{(w) \rightarrow (e_i)}(j\omega)$, où $T_{(w) \rightarrow (e_i)}$ représente la i^{eme} ligne de la matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}$.

$$S_{e_i}(j\omega) = T_{(w) \rightarrow (e_i)}^* T_{(w) \rightarrow (e_i)}(j\omega)$$

Le modèle pour l'estimation est donné par $T_{(w) \rightarrow (z,y)} = \begin{bmatrix} T_{(w) \rightarrow (z)}(j\omega) \\ T_{(w) \rightarrow (y)}(j\omega) \end{bmatrix}$.

$T_{(w) \rightarrow (z)}(j\omega)$ représente la matrice de fonctions de transfert depuis les entrées non mesurées vers les signaux à estimer. $T_{(w) \rightarrow (z_i)}(j\omega)$ représente la matrice de fonctions de transfert depuis les entrées non mesurées vers le i^{eme} signal à estimer. $T_{(w) \rightarrow (y)}(j\omega)$ représente la matrice de fonctions de transfert depuis les entrées non mesurées vers les signaux mesurés. La fonction de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}(j\omega)$ peut s'écrire sous la forme présentée équation (2.65), présentée figure (2.21).

$$T_{w \rightarrow e} = \left[\begin{array}{c|c} I & - \begin{bmatrix} F_1(j\omega) \\ \vdots \\ F_i(j\omega) \\ \vdots \\ F_m(j\omega) \end{bmatrix} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} T_{(w) \rightarrow (z_1)}(j\omega_0)(j\omega) \\ \vdots \\ T_{(w) \rightarrow (z_i)}(j\omega_0)(j\omega) \\ \vdots \\ T_{(w) \rightarrow (z_m)}(j\omega_0)(j\omega) \\ \hline T_{(w) \rightarrow (y)}(j\omega_0)(j\omega) \end{array} \right] \quad (2.65)$$

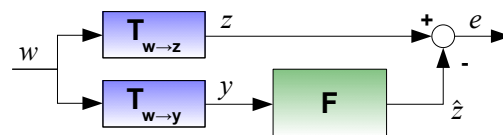


Figure 2.21 – Problème d'estimation : forme éclatée

Le vecteur de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (e_i)}$ est donc le suivant :

$$T_{w \rightarrow e_i}(j\omega) = \left[1 \mid -F_i(j\omega) \right] \begin{bmatrix} T_{(w) \rightarrow (z_i)}(j\omega) \\ T_{(w) \rightarrow (y)}(j\omega) \end{bmatrix} = T_{(w) \rightarrow (z_i)}(j\omega) - F_i(j\omega)T_{(w) \rightarrow (y)}(j\omega)$$

On considère ici le problème de synthèse de la réponse fréquentielle du filtre dans le cas nominal, pour une pulsation ω_0 donnée :

Trouver $F_i(j\omega_0)$ qui minimise $S_{e_i}(j\omega_0)$

Résoudre ce problème va permettre de savoir ce qu'il est possible d'atteindre pour la densité spectrale de puissance de l'erreur d'estimation du signal e_i à une pulsation donnée. La solution donnera également une réponse fréquentielle de référence pour l'estimateur.

Le théorème 14 présente l'expression de la réponse fréquentielle du filtre $F_i(j\omega_0)$ qui minimise la densité spectrale de puissance de l'erreur d'estimation e_i à la pulsation (ω_0).

Théorème 14. *Filtre Optimal Nominal (Filtre non-causal de Wiener).*

Un filtre $F_i(j\omega_0)$ minimisant $S_{e_i}(j\omega_0)$ est donné par

$$F_i(j\omega_0) = T_{(w) \rightarrow (z_i)}(j\omega_0)T_{(w) \rightarrow (y)}^*(j\omega_0) \left(T_{(w) \rightarrow (y)}(j\omega_0)T_{(w) \rightarrow (y)}^*(j\omega_0) \right)^{-1}$$

Avec cette réponse fréquentielle, la densité spectrale de puissance atteinte $S_{e_i}(j\omega_0)$ est la suivante :

$$S_{e_i}(j\omega_0) = \left(T_{(w) \rightarrow (z_i)} \left(I - T_{(w) \rightarrow (y)}^* \left(T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right)^{-1} T_{(w) \rightarrow (y)} \right) T_{(w) \rightarrow (z_i)}^* \right) (j\omega_0). \quad (2.66)$$

■

Démonstration. Théorème 14 (Filtre Optimal Nominal) On peut réécrire S_{e_i} sous la forme développée suivante

$$S_{e_i}(j\omega_0) = \left(T_{(w) \rightarrow (z_i)} T_{(w) \rightarrow (z_i)}^* - T_{(w) \rightarrow (z_i)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* F_i^* - \dots \right. \\ \left. - F_i T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (z_i)}^* - F_i T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* F_i^* \right) (j\omega_0)$$

Ou encore, par ajout du terme $\left(T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right)^{-1}$

$$S_{e_i}(j\omega_0) = \left(T_{(w) \rightarrow (z_i)} T_{(w) \rightarrow (z_i)}^* - T_{(w) \rightarrow (z_i)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \left(T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right)^{-1} \left(T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right) F_i^* \dots \right. \\ \left. - F_i \left(T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right) \left(T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right)^{-1} T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (z_i)}^* \dots \right. \\ \left. - F_i \left(T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right) \left(T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right)^{-1} \left(T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right) F_i^* \right) (j\omega_0)$$

Par complétion des carrés, ceci peut se réécrire

$$S_{e_i}(j\omega_0) = \left(T_{(w) \rightarrow (z_i)} T_{(w) \rightarrow (z_i)}^* - T_{(w) \rightarrow (z_i)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \left(T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right)^{-1} T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (z_i)}^* + \dots \right. \\ \left. + \Phi \left(T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right)^{-1} \Phi^* \right) (j\omega_0)$$

avec

$$\Phi = \left(T_{(w) \rightarrow (z_i)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* - F T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right)$$

La forme obtenue par complétion des carrés est une forme quadratique, dont le minimum est atteint pour :

$$F_i(j\omega_0) = \left(T_{(w) \rightarrow (z_i)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \left(T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right)^{-1} \right) (j\omega_0).$$

De plus, cette équation nous permet de donner la DSP atteignable :

$$S_{e_i}(j\omega_0) = \left(T_{(w) \rightarrow (z_i)} \left(I - T_{(w) \rightarrow (y)}^* \left(T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right)^{-1} T_{(w) \rightarrow (y)} \right) T_{(w) \rightarrow (z_i)}^* \right) (j\omega_0).$$

□

Ce résultat nous donne un résultat d'analyse pour l'estimation.

1. Ce résultat nous donne d'abord une matrice de réponse fréquentielle de référence, donnée par :

$$F_{ideal} = \left(\begin{bmatrix} T_{(w) \rightarrow (z_1)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \left[T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right]^{-1} \\ \vdots \\ T_{(w) \rightarrow (z_i)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \left[T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right]^{-1} \\ \vdots \\ T_{(w) \rightarrow (z_m)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \left[T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right]^{-1} \end{bmatrix} \right) (j\omega_0)$$

$$F_{ideal} = \left(T_{(w) \rightarrow (z)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \left[T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right]^{-1} \right) (j\omega_0)$$

Cette réponse fréquentielle minimise la densité spectrale de puissance de l'erreur d'estimation pour toutes les pulsations. Il est possible de considérer la mise en œuvre d'un filtre ayant cette réponse fréquentielle. Ce filtre serait optimal au sens H_2 , puisque minimisant la densité spectrale de puissance pour toutes les erreurs d'estimation à toutes les fréquences, il minimise donc la somme des puissances des signaux correspondant aux erreurs d'estimation. On peut également penser que cet estimateur est optimal au sens H_∞ , puisqu'il minimise le pire-cas des densités spectrales de puissance des erreurs d'estimation en minimisant leur DSP pour toutes les fréquences

Ce n'est pas possible : l'estimateur ayant cette réponse fréquentielle n'est pas causal. Il ne pourra donc par conséquent pas être appliqué sur le système réel dans le domaine temporel. Dans le cas SISO, ce filtre est connu comme le filtre de Wiener non causal [Wie50]. Ce filtre n'a donc d'un point de vue pratique que peu d'intérêt, mais en revanche il va nous fournir une solution de référence et une limite de performance en nous donnant la densité spectrale de puissance minimale atteignable pour l'erreur d'estimation. Ceci va nous donner des outils pour analyser et comparer la performance des estimateurs H_2 et H_∞ . Ce résultat est présenté pour le cas SISO-discret dans [HSK99] et utilisé comme élément de comparaison. La forme que nous avons présentée est la forme la plus générale de ce résultat pour l'estimation nominale. Ce résultat nous donne donc un gabarit inférieur atteignable pour la DSP de l'erreur d'estimation.

2.4.2 Pourquoi pondérer la norme H_∞ ?

Un exemple simple

Dans la section précédente, le théorème 14 a montré l'existence d'une borne inférieure pour la densité spectrale de puissance de l'erreur d'estimation. La norme H_∞ permet de spécifier et tester un gabarit supérieur sur une fonction de transfert. Ces gabarits sont choisis en fonction d'un cahier des charges donné [Zam81]. Dans le cas de la synthèse de correcteur H_∞ , les gabarits exprimés sur le système par des pondérations fréquentielles sur les sorties du système traduisent un cahier des charges. Si on transcrit cet objectif vers l'estimation, l'objectif va être de spécifier un gabarit supérieur sur les DSP des erreurs d'estimation. En raison de l'existence d'un gabarit inférieur faisant office de limite de performance, il est nécessaire de pondérer l'erreur d'estimation. Ceci va être montré par l'application des méthodes de synthèse d'estimateur H_∞ sans pondération sur un exemple simple.

Exemple 1. Nous présentons figure 2.22 le schéma du système de débruitage. L'objectif est de retrouver le signal z , qui est la sortie du procédé G . On mesure le signal $y = z + \tilde{v}$, où \tilde{v} est la sortie du modèle de bruit.

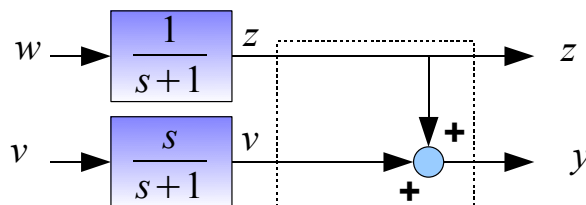


Figure 2.22 – Exemple de débruitage

Le signal à estimer z est un signal basses fréquences, tandis que le bruit de mesure \tilde{v} est un signal hautes fréquences. L'intérêt de cet exemple est d'avoir une idée intuitive de la réponse fréquentielle de l'estimateur. En basses fréquences, $y \equiv z$. Par conséquent, on peut s'attendre que la fonction de transfert de l'estimateur soit égale à 1 en basses fréquences. En hautes fréquences, on a $y \equiv v$. On s'attend donc à ce que l'estimateur coupe les hautes fréquences. De manière intuitive, le filtre doit laisser passer les fréquences où le rapport signal/bruit est favorable.

Pour cet exemple simple, il est possible de calculer la réponse fréquentielle idéale F_{id} de façon analytique.

$$T_{(w) \rightarrow (z)}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \end{bmatrix} \quad T_{(w) \rightarrow (y)}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$F_{id}(j\omega) = T_{(w) \rightarrow (z)}(j\omega)T_{(w) \rightarrow (y)}(j\omega)^* [T_{(w) \rightarrow (y)}(j\omega)T_{(w) \rightarrow (y)}(j\omega)^*]^{-1} = \frac{1}{(1+j\omega)(1-j\omega)}.$$

La réponse fréquentielle du filtre idéal correspond bien à notre intuition : ≈ 1 en basses fréquences, et ≈ 0 en hautes fréquences.

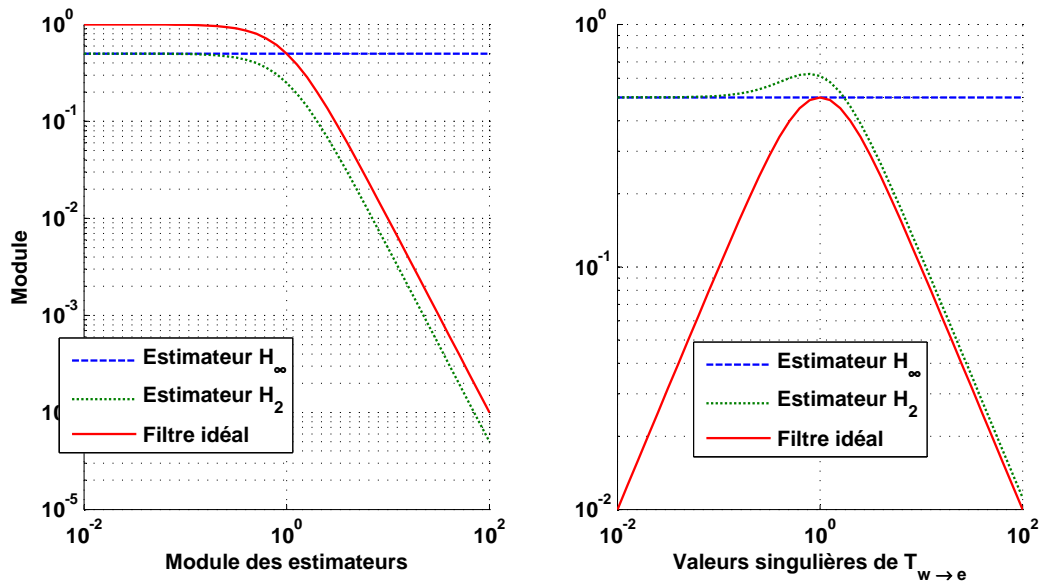


Figure 2.23 – Résultats de synthèse

Pour le modèle présenté figure 2.22, on applique les méthodes de synthèse d'estimateurs correspondant au théorème 11 pour la synthèse d'un EGN H_∞ et au théorème 12 pour la synthèse d'un EGN H_2 . Les modules des réponses fréquentielles de ces deux estimateurs sont présentés figure 2.23 à gauche. L'EGN H_2 correspond à la solution intuitive (filtre passe-bas), les valeurs ne correspondent pas en basses-fréquences. On aura donc une estimation biaisée. L'EGN H_∞ est lui un passe-tout quasiment assimilable à

un gain. Pour avoir une interprétation en hautes fréquences pour l'estimateur H_∞ , il est nécessaire de regarder l'ensemble de la fonction de transfert $T_{(w,v)\rightarrow(e)}$ via ses valeurs singulières (qui sont égales à la racine carrée de la densité spectrale de puissance de l'erreur). Les valeurs singulières de $T_{(w,v)\rightarrow(e)}$ sont présentées figure 2.23 à droite. Ces valeurs singulières sont présentées pour 3 estimateurs :

- Le filtre idéal : les valeurs singulières obtenues avec ce filtre sont une limite inférieure de la performance.
- L'estimateur H_2 qui minimise l'aire sous ces valeurs singulières (en étant stable)
- L'estimateur H_∞ qui minimise le pire-cas sur ces valeurs singulières.

L'estimateur H_∞ va garantir que toutes les valeurs singulières sont inférieures à un certain γ ($\gamma = 0.5$ ici). La limite inférieure pour ce pire-cas est donnée par le gabarit inférieur donné par le théorème 14. Si le pire-cas des valeurs singulières est considéré, alors l'estimateur H_∞ minimise ce pire-cas. A la fréquence du pire-cas ($\omega = 1$), la réponse fréquentielle du filtre H_∞ est égale à la réponse fréquentielle du filtre idéal.

D'un point de vue qualitatif, la qualité des résultats peut être évaluée à partir de la figure 2.23. Le filtre H_2 va correspondre à une version causale du filtre idéal. Le filtre H_2 est un filtre passe-bas.

L'estimateur H_∞ ne considère finalement qu'une seule fréquence : celle du maximum le long des fréquences donné par l'expression (2.66) pour laquelle il est optimal. Le filtre H_∞ est un *passer-tout* : il transmet de façon égale toutes les fréquences dont les hautes fréquences : une partie du bruit de mesure va donc être transmise vers l'estimation du signal z alors que l'objectif du débruitage est de couper ce bruit de mesure. D'un point de vue qualitatif sur le rejet du signal \tilde{v} , le filtre H_2 présentera donc des résultats plus intéressants que le filtre H_∞ non-pondéré.

Interprétation des pondérations sur l'erreur d'estimation

On se place toujours dans le cadre d'un problème d'estimation où le signal à estimer est un scalaire. Dans ce cadre-là, $T_{(w)\rightarrow(e)}(j\omega_0)$ a une valeur singulière qui correspond à la racine carrée de la DSP de l'erreur $S_e(j\omega_0)$.

Le filtre H_∞ synthétisé sur l'exemple 1 page 66 garantit pour toutes les fréquences que pour tous les signaux d'entrée de densité spectrale de puissance inférieure à 1, la densité spectrale de puissance de l'erreur est inférieure à un certain γ^2 . Le théorème 14 nous garantit que le pire-cas pour la densité spectrale de puissance de l'erreur (pour des signaux d'entrée de densité spectrale de puissance unitaire) ne peut pas être inférieur à un certain gabarit.

Par conséquent, on teste une zone d'existence pour la DSP $S_e(j\omega)$ comme le présente la figure 2.24 à gauche. Ce théorème peut également se mettre sous la forme de minimisation d'une fonction de coût. Minimiser γ correspond alors à tester un gabarit de plus en plus bas sur $S_e(j\omega)$, celle-ci étant bornée par le bas comme décrit dans la figure 2.24.

L'estimateur H_∞ synthétisé sans pondération ne considère donc qu'une seule pulsation : la pulsation correspondant à la valeur maximale du gabarit inférieur⁶.

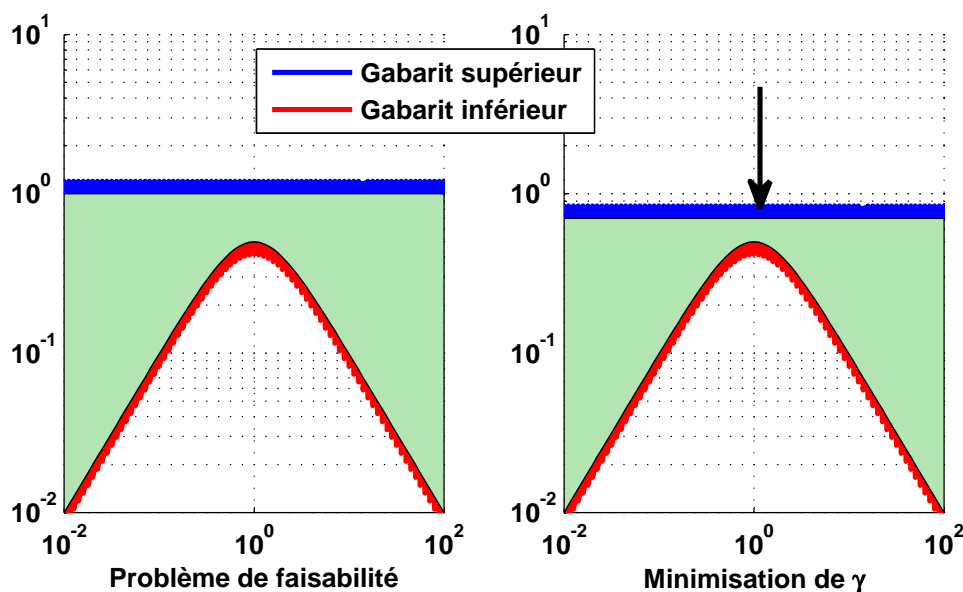


Figure 2.24 – Différence faisabilité-minimisation d'une fonction de coût

L'utilisation de pondérations fréquentielles va permettre de modifier la forme des gabarits (supérieur sur l'erreur d'estimation OU⁷ inférieur sur l'erreur d'estimation pondérée) ce qui est à présent expliqué.

La relation suivante est garantie sur la DSP de l'erreur d'estimation e_i (réponse de la matrice de fonctions de transfert $T_{w \rightarrow e_i}$ à des signaux d'entrée normalisés) par la synthèse H_∞ non pondérée.

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(T_{(w) \rightarrow (z_i)} \left(I - T_{(w) \rightarrow (y)}^* \left(T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right)^{-1} T_{(w) \rightarrow (y)} \right) T_{(w) \rightarrow (z_i)}^* \right) (j\omega) < S_e(j\omega) \\ S_e(j\omega) < \gamma_{opt}^2 \end{array} \right.$$

Le gabarit supérieur sur la DSP S_{e_i} est donné par γ^2 : c'est un gabarit constant pour toutes les fréquences. La description proposée par la norme H_∞ sans pondération est donc relativement pauvre. L'utilisation de pondérations fréquentielles sur la sortie permet de rendre ce gabarit dépendant de la fréquence.

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(W T_{(w) \rightarrow (z_i)} \left(I - T_{(w) \rightarrow (y)}^* \left(T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right)^{-1} T_{(w) \rightarrow (y)} \right) T_{(w) \rightarrow (z_i)}^* W^* \right) (j\omega) < (W S_e W^*) (j\omega) \\ (W S_e W^*) (j\omega) < \gamma_{opt}^2 \end{array} \right.$$

La seconde expression $(W S_e W^*) (j\omega) < \gamma_{opt}^2$ montre que l'utilisation de pondérations fréquentielles permet de modifier le gabarit inférieur sur la DSP de l'erreur d'estimation

6. proverbe chinois : Quand on a atteint l'objectif, on a raté tout le reste.

7. OU exclusif

pondérée. Le gabarit supérieur sur l'erreur d'estimation pondéré est toujours donné par γ_{opt}^2 . Cette relation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(T_{(w) \rightarrow (z_i)} \left(I - T_{(w) \rightarrow (y)}^* \left(T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right)^{-1} T_{(w) \rightarrow (y)} \right) T_{(w) \rightarrow (z_i)}^* \right) (j\omega) < S_e(j\omega) \\ S_e(j\omega) < \gamma_{opt}^2 (W^{-1} W^{-*}) (j\omega) \end{array} \right.$$

On retrouve avec cette formulation le même gabarit inférieur sur l'erreur d'estimation. En revanche, le gabarit supérieur sur l'erreur d'estimation a une forme définie par le module de W^{-1} , et une hauteur définie par γ_{opt}^2 .

La figure 2.25 présente le lien entre l'estimation H_∞ avec et sans pondération. Le schéma de gauche montre que le problème de faisabilité sans pondération consiste à trouver un estimateur qui va garantir pour la densité spectrale de puissance de l'erreur un gabarit supérieur constant. Le schéma de droite montre que le problème de faisabilité avec pondération consiste à trouver un estimateur qui garantit pour la densité spectrale de puissance de l'erreur un gabarit supérieur d'une forme définie par l'inverse du carré du module de la pondération de sortie. La minimisation de γ consiste à trouver le gabarit supérieur le plus bas d'une forme choisie.

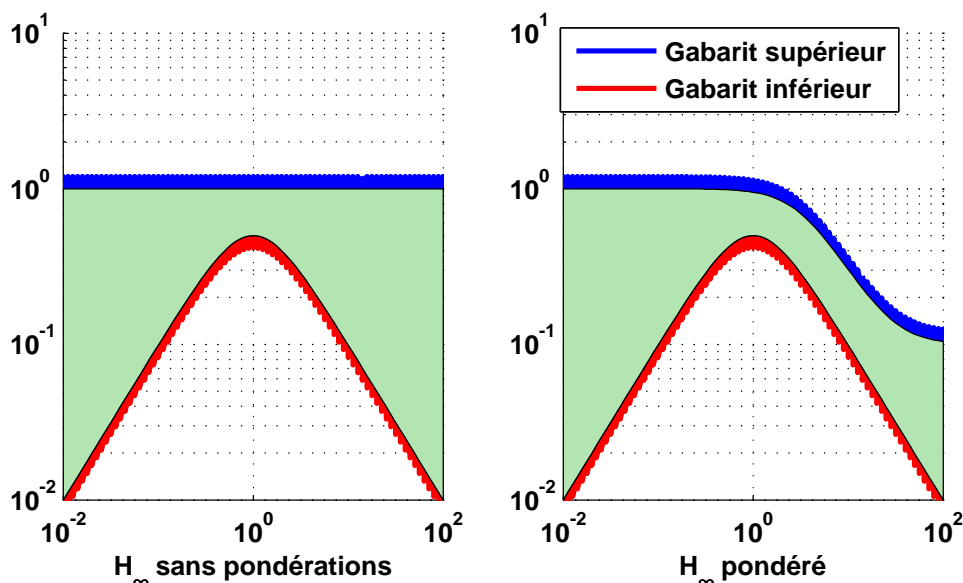


Figure 2.25 – Différence H_∞ - H_∞ pondéré

Retour à l'exemple 1 page 66

Les pondérations permettent donc d'exprimer les zones d'intérêt pour l'estimation. Par exemple un choix de pondération simple pour améliorer la DSP de l'erreur d'estimation en hautes fréquences est $W(s) = \frac{s+3}{0.1s+3}$. Cette pondération est stable et inversement stable. Le module de cette pondération est décrit figure 2.26

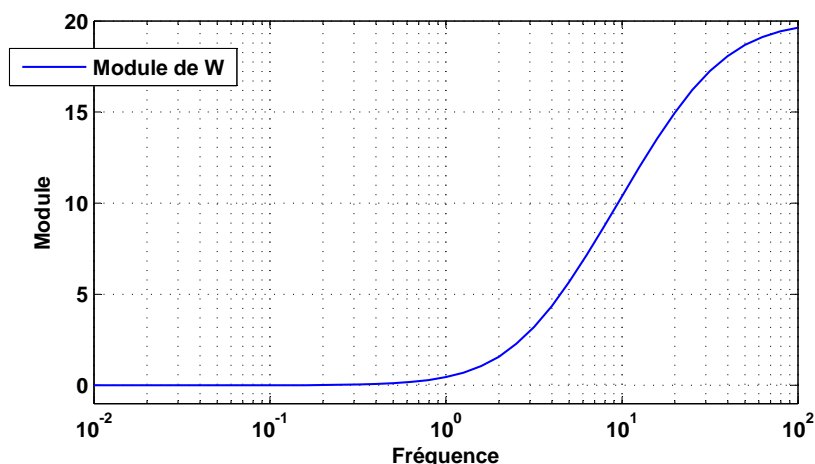


Figure 2.26 – Module de la pondération

Un EGN est synthétisé (théorème 13 page 60) minimisant une norme H_∞ pondérée par W sur l'erreur d'estimation. La figure 2.27 page 72 montre les valeurs singulières de la matrice de fonction de transfert $T_{(w,v) \rightarrow (e)}$, le gabarit inférieur, ainsi que le gabarit supérieur donné par $\gamma_{opt} |W^{-1}|$, où γ_{opt} est le résultat de la minimisation de γ sous les contraintes du théorème 13. Cette pondération permet d'améliorer l'estimation en hautes fréquences par comparaison avec le filtre H_∞ synthétisé sans pondération. La figure de droite montre le module de la fonction de transfert de l'estimateur. Le gabarit pour la norme H_∞ sans pondération est donné par γ_{opt} , où γ_{opt} est la solution du problème de minimisation de γ sous les contraintes du théorème 11 page 56. L'amélioration de l'estimation en hautes fréquences par l'utilisation de la pondération choisie est notable ici.

De manière générale, l'estimation sera bonne si la densité spectrale de puissance de l'erreur est au plus près de la borne inférieure. L'utilisation de la norme H_2 permet de le faire de manière naturelle, bien qu'elle donne une estimation biaisée. La norme H_∞ sans pondération ne permet pas de considérer l'ensemble des fréquences. Pour cette raison, les articles considérant l'estimation H_∞ nominale sans considération de pondération sur la sortie ont eu recours à certains artifices, comme la minimisation d'une norme H_2 sous une contrainte H_∞ [BH89]. Une autre possibilité est de se ramener à une solution sous-optimale en terme de norme H_∞ [ST92, HSK99].

2.4.3 Une méthode systématique pour choisir les pondérations

En reprenant l'exemple 1, trois choix de gabarits pour l'erreur d'estimation sont présentés.

$$W_1(s) = \frac{s+3}{0.1s+3} \quad W_2(s) = \frac{0.1s+3}{s+3} \quad W_3(s) = \frac{6s+1}{6s+0.1}$$

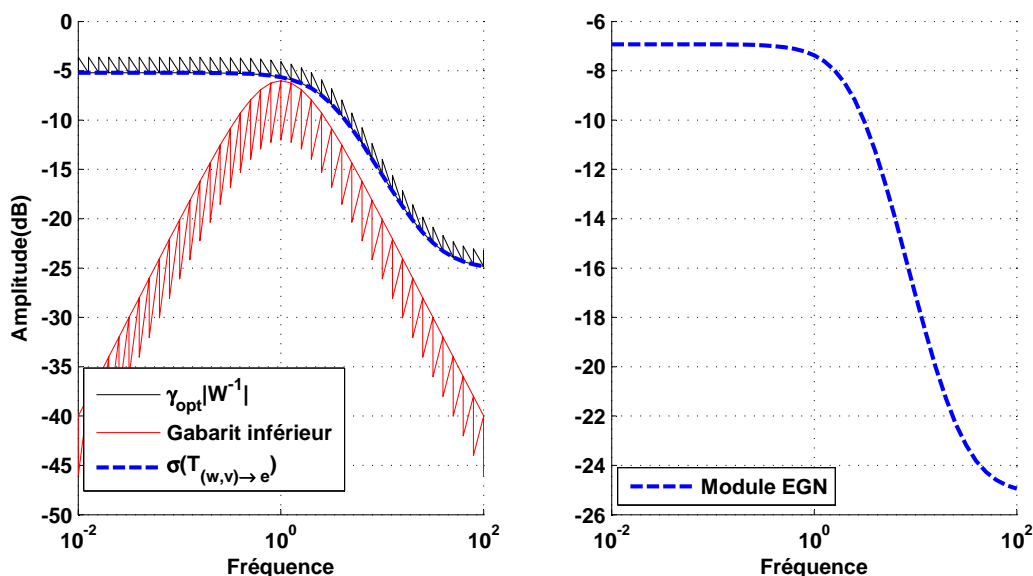


Figure 2.27 – Module de la pondération

La figure 2.28 page 73 présente les gabarits définis par le module de ces pondérations et l'importance du choix de la pondération. Les gabarits sont représentés pour γ_{opt} , où γ_{opt} est le résultat de la minimisation d'une fonction de coût sous les contraintes du théorème 13 page 60. Le gabarit inférieur obtenu avec la réponse fréquentielle idéale est également représenté.

La pondération W_1 exprime une amélioration de l'erreur d'estimation en hautes fréquences (rejet du bruit de mesure). La pondération W_2 exprime le même cahier des charges mais la bande passante spécifiée est trop faible et, dans ce cas, la performance est limitée par le gabarit inférieur : cette pondération est un très mauvais choix. La pondération W_3 exprime une amélioration de l'erreur d'estimation en basses fréquences, ce qui peut se traduire par une amélioration de l'erreur statique sur l'erreur d'estimation. Le choix de la pondération W_2 montre qu'un mauvais choix de pondération peut dégrader la performance.

Il apparaît comme naturel au vu de cette figure de choisir un gabarit supérieur sur la densité spectrale de puissance de l'erreur d'estimation e_i coïncidant avec le gabarit inférieur, ce qui est présenté par la suite.

Le gabarit inférieur sur la DSP est donné par le théorème 14 page 64 :

$$\underline{S}_{e_i}(j\omega) = \left(T_{(w) \rightarrow (z_i)} [I - T_{(w) \rightarrow (y)}^* (T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^*)^{-1} T_{(w) \rightarrow (y)}] T_{(w) \rightarrow (e_i)}^* \right) (j\omega)$$

Une pondération idéale W_i pour l'erreur d'estimation e_i est donc une pondération dont le carré du module de la réponse fréquentielle est égal au gabarit inférieur sur la

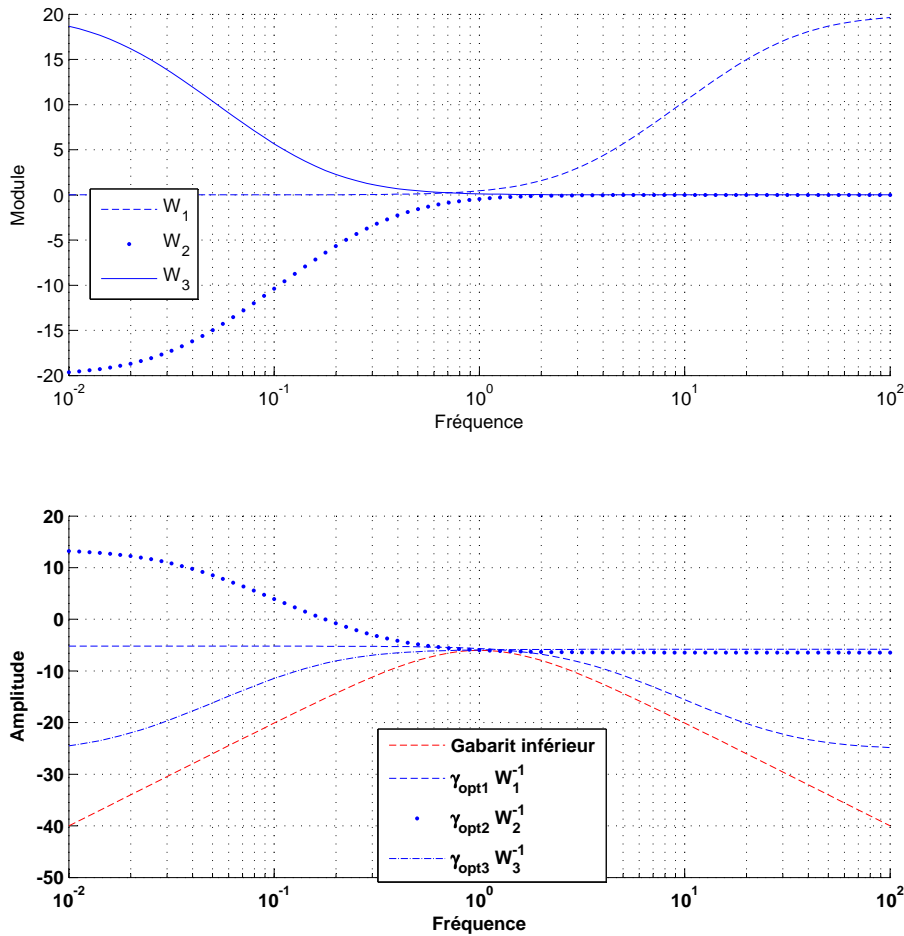


Figure 2.28 – Gabarits supérieurs pour différentes pondérations et gabarit inférieur

DSP :

$$(W_i^{-1}W_i^{-*})(j\omega) = \underline{S}_{e_i}(j\omega)$$

$$(W_i^{-1}W_i^{-*})(j\omega) = \left(T_{(w) \rightarrow (z_i)} \left(I - T_{(w) \rightarrow (y)}^* \left(T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^* \right)^{-1} T_{(w) \rightarrow (y)} \right) T_{(w) \rightarrow (e_i)}^* \right) (j\omega)$$

Cette pondération définit un gabarit supérieur par son module, qui va coïncider parfaitement avec le gabarit inférieur atteignable pour la densité spectrale de puissance de l'erreur d'estimation. La minimisation de la norme H_∞ pondérée correspond à faire descendre ce gabarit supérieur au plus près du gabarit inférieur. Cette pondération va permettre de garantir un écart par rapport à la meilleure DSP atteignable pour l'erreur d'estimation. Pour le cas multi-variable, la pondération idéale est constituée des pondérations idéales pour une erreur d'estimation mise sous la forme d'une matrice bloc-diagonale.

$$W = \text{diag}_i(W_i)$$

$$W_i^{-*}W_i^{-1} = \left(T_{(w) \rightarrow (z_i)} [I - T_{(w) \rightarrow (y)}^* (T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^*)]^{-1} T_{(w) \rightarrow (y)}\right) T_{(w) \rightarrow (z_i)}^*$$

Il est important de préciser que les pondérations W_i sont définies par le module de leur réponse fréquentielle. Pour pouvoir les mettre en œuvre, il sera nécessaire de trouver une fonction de transfert stable et inversement stable admettant la réponse fréquentielle idéale. De manière générale, il sera nécessaire de prendre une approximation de cette pondération, comme présenté dans l'exemple suivant.

Mise en œuvre sur l'exemple 1

Les fonctions de transfert de l'exemple sont les suivantes :

$$T_{(w) \rightarrow (z)}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \end{bmatrix} \quad T_{(w) \rightarrow (y)}(j\omega_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s}{s+1} \end{bmatrix}$$

Par conséquent, la réponse fréquentielle de la pondération idéale est définie par

$$\begin{aligned} W^{-1}W^{-*}(j\omega) &= \left(T_{(w) \rightarrow (z_i)} \left(I - T_{(w) \rightarrow (y)}^* (T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^*)\right)^{-1} T_{(w) \rightarrow (y)}\right) T_{(w) \rightarrow (z_i)}^*(j\omega) \\ W^{-1}W^{-*}(j\omega) &= \frac{\omega^2}{(1-j\omega)^2(1+j\omega)^2} \end{aligned}$$

la pondération idéale est donc $W_{id}^{-1}(j\omega) = \frac{j\omega}{(1+j\omega)^2}$, qui peut se mettre sous la forme d'une fonction de transfert stable de la forme $W_{id}^{-1}(s) = \frac{s}{(1+s)^2}$

Dans ce cas particulier, le calcul de la pondération peut se faire de façon analytique. Sur des cas plus compliqués comme nous le verrons à la fin de ce chapitre, cette pondération peut être calculée soit par factorisation spectrale [ZDG95] sous l'hypothèse qu'il n'y a pas de pôles sur l'axe imaginaire, soit en prenant une approximation à partir des pôles et des zéros stables de la fonction de transfert

$$\left(T_{(w) \rightarrow (z_i)} \left(I - T_{(w) \rightarrow (y)}^* (T_{(w) \rightarrow (y)} T_{(w) \rightarrow (y)}^*)\right)^{-1} T_{(w) \rightarrow (y)}\right) T_{(w) \rightarrow (z_i)}^*(s)$$

qui est une fonction de transfert SISO (cas d'un signal scalaire).

La pondération doit être stable et inversement stable, ce qui n'est pas le cas ici : W_{id} est instable. Une approximation de cette fonction de transfert doit être choisie. Par ajout d'un zéro (-100) en dehors de l'intervalle de fréquences d'intérêt, et perturbation du zéro existant (zéro en 0 déplacé en -0.01), la pondération W^{-1} qui va être mise en œuvre est la suivante :

$$W^{-1} = \frac{s^2 + 100s + 1}{100s^2 + 200s + 100}. \quad (2.67)$$

Pour bien illustrer le fait que cette pondération définit un gabarit supérieur qui est l'image du gabarit inférieur, la figure 2.29 page 75 montre le gabarit supérieur défini par $W^{-1}W^{-*}$, et le gabarit inférieur atteignable sur cet exemple. La différence de forme entre le gabarit inférieur et le gabarit supérieur est due à l'ajout de zéros pour rendre la pondération stable et inversement stable.

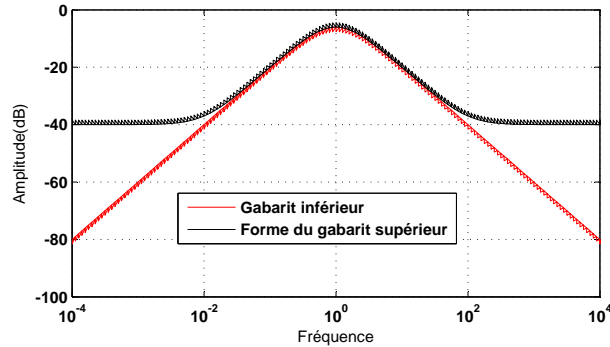


Figure 2.29 – Gabarit supérieur défini par la pondération idéale et gabarit inférieur atteignable

Un EGN est synthétisé en utilisant le théorème 13 page 60 (Synthèse d'EGN H_∞ avec pondération), avec la pondération de sortie présentée équation (2.67). On obtient comme valeur optimale pour la norme H_∞ pondérée $\gamma_{opt} = 1.4$.

La figure 2.30 montre le gabarit supérieur sur les valeurs singulières défini par $\gamma_{opt}W^{-1}$, le gabarit inférieur sur les valeurs singulières, et les valeurs singulières de la fonction de transfert $T_{(w,v)\rightarrow e}$. Le gabarit supérieur vient au plus près du gabarit inférieur, et les valeurs singulières de la matrice de fonction de transfert $T_{(w)\rightarrow(e)}$ sont comprises entre ces deux gabarits.

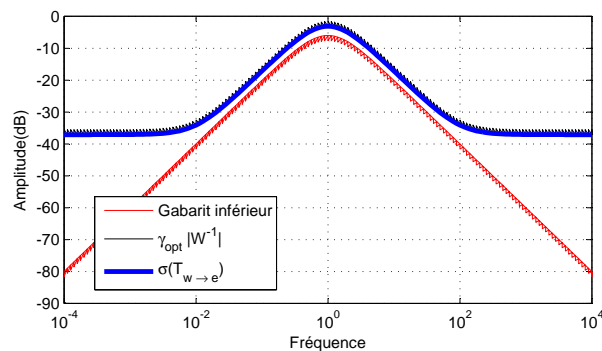


Figure 2.30 – Valeurs singulières de $T_{(w,v)\rightarrow e}$ (Estimateur H_∞ pondéré)

Le module de la fonction de transfert de l'EGN correspondant est présentée figure 2.31. Cette figure montre également les modules des fonctions de transfert correspondant aux estimateurs présentés dans cette partie (H_∞ , H_2 , Filtre idéal). La fonction

de transfert de l'EGN synthétisé avec la pondération idéale correspond bien à ce qu'on attendait de l'estimateur de façon intuitive, ce qui valide notre approche.

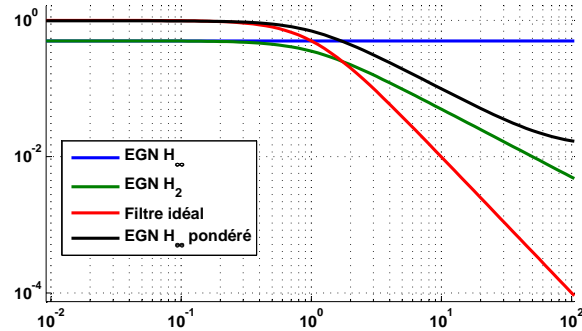


Figure 2.31 – Module des estimateurs

2.4.4 Conclusions sur le choix des pondérations

Cette section présente un ensemble d'éléments pour aborder de façon simple l'estimation H_∞ pondérée dans le cas nominal. Dans un premier temps, nous avons montré qu'il existe une limite de performance atteignable pour la densité spectrale de puissance de l'erreur d'estimation. Le théorème 14 page 64 présente cette limite de performance, ainsi que la réponse fréquentielle idéale qui permet d'atteindre cette limite.

Dans une seconde partie, sur un exemple simple de débruitage, nous avons présenté la manière dont les solutions obtenues en minimisant une norme H_2 ou une norme H_∞ s'articulent autour de cette limite de performance. Cela a également permis de montrer la nécessité d'utiliser des pondérations sur l'erreur d'estimation, et comment ces pondérations permettent de spécifier un cahier des charges fréquentiel sur l'erreur d'estimation.

Pour finir, nous avons présenté une manière systématique pour choisir les pondérations sur l'erreur d'estimation en l'absence d'autres cahiers des charges. Cette pondération permet de garantir une borne supérieure sur l'écart maximal entre la performance atteinte par l'estimateur et la limite de performance.

2.5 Exemple d'application

Exemple 2. Nous présentons le modèle suivant, tiré de l'exemple de [ST92]. Ce modèle peut décrire un système physique, comme un système masses-ressorts ou un circuit RLC.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & w_n & 0 & 0 \\ -w_n & -2ew_n & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}$$

On souhaite estimer les états x_1 et x_2 à partir de $y = x_2 + w_2$, la mesure bruitée de l'état x_2 . Les entrées de ce système sont la perturbation non mesurée w_1 et le bruit de mesure w_2 .

Dans le cadre présenté dans la figure 2.21 page 63, la matrice de fonctions de transfert $T_{(w) \rightarrow (z)}$ admet la représentation d'état suivante :

$$T_{(w) \rightarrow (z)} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & w_n & 0 & 0 \\ -w_n & -2ew_n & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

La fonction de transfert $T_{(w) \rightarrow (y)}$ est donnée par

$$T_{(w) \rightarrow (y)} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & w_n & 0 & 0 \\ -w_n & -2ew_n & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Il est possible pour ce système de calculer la réponse fréquentielle minimisant la densité spectrale de puissance de l'erreur en utilisant le théorème 14 page 64. Ce théorème donne également une limite inférieure de la performance.

Un EGN minimisant la norme H_2 est synthétisé en utilisant le théorème 12 page 58. Un EGN minimisant la norme H_∞ sans pondération est également synthétisé en utilisant le théorème 11 page 56. Ces estimateurs sont des matrices de fonctions de transfert de dimensions 2×1 .

La figure 2.32 montre les valeurs singulières des vecteurs $T_{(w) \rightarrow (e_1)}$ dans la figure du haut et $T_{(w) \rightarrow (e_2)}$ dans la figure du bas pour l'estimateur H_2 et l'estimateur idéal. Ces valeurs singulières correspondent à la racine carrée de la DSP d'une erreur d'estimation donnée. La limite de performance donnée par le théorème 14 page 64 est également affichée. L'estimateur H_2 considère toutes les bandes de fréquences idéalement, pour les deux signaux à estimer.

La figure 2.33 montre les valeurs singulières des vecteurs $T_{(w) \rightarrow (e_1)}$ dans la figure du haut et $T_{(w) \rightarrow (e_2)}$ dans la figure du bas pour l'estimateur H_∞ synthétisé sans pondération et l'estimateur idéal. Nous affichons également le gabarit garanti par la méthode de synthèse pour les densités spectrales de puissance des erreurs d'estimation. Ce gabarit est donné par γ_{opt} qui est le résultat de la minimisation de γ sous les conditions du théorème 11 page 56.

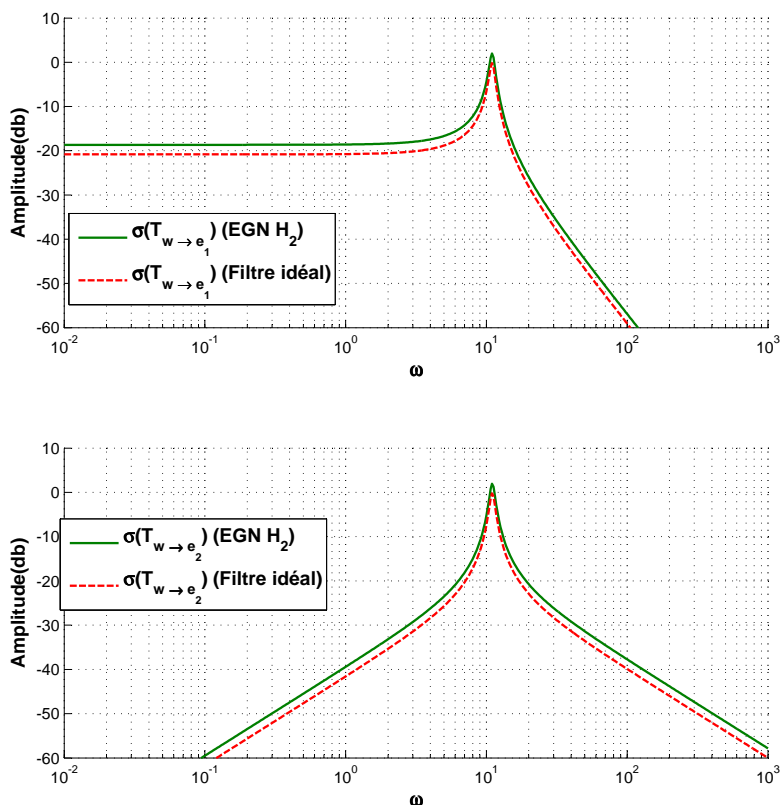


Figure 2.32 – Densités spectrales de puissance (EGN H_2)

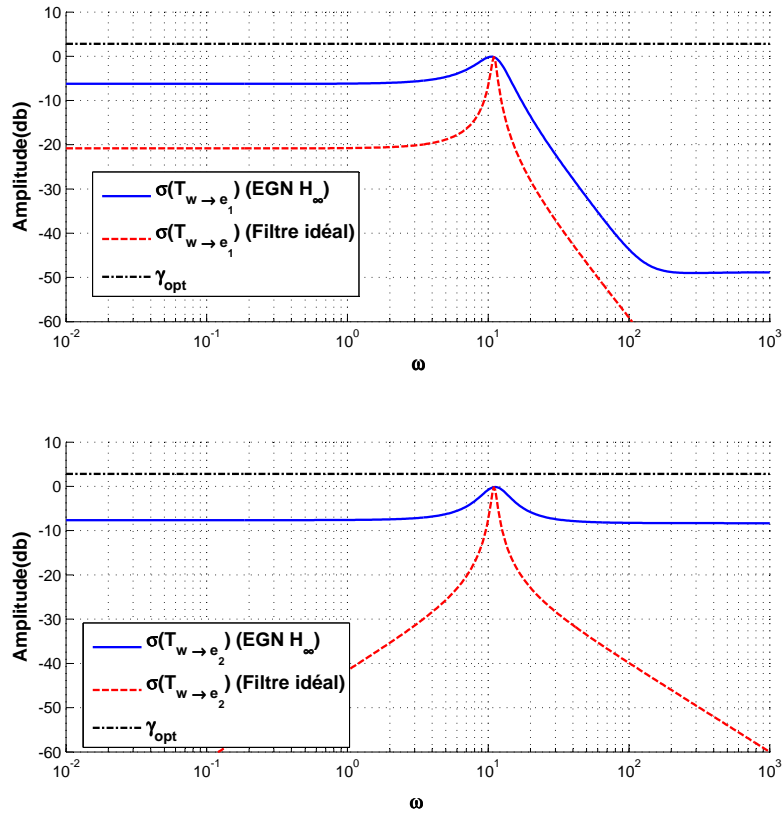
Dans le cas H_∞ , le gabarit supérieur est garanti sur les valeurs singulières de la matrice $T_{(w,v)\rightarrow(e)}$. Si les valeurs singulières de cette matrice sont inférieures à γ alors cela implique que les valeurs singulières des vecteurs la composant sont également inférieures à γ .

$$\bar{\sigma}(T_{(w)\rightarrow(e)}) < \gamma \Rightarrow \begin{cases} \bar{\sigma}(T_{(w)\rightarrow(e_1)}) < \gamma \\ \bar{\sigma}(T_{(w)\rightarrow(e_2)}) < \gamma \end{cases}$$

La figure 2.34 montre les valeurs singulières atteintes avec l'estimateur H_∞ . Au sens des valeurs singulières, l'estimateur est optimal, mais il est sous-optimal *au sens des densités spectrales de puissance*. Dans le cas de cet exemple, le pire-cas pour les valeurs singulières est placé sur la résonance du système G .

Pour illustrer une fois de plus l'intérêt des pondérations, un estimateur H_∞ pondéré est synthétisé (théorème 13 page 60). La pondération appliquée sur l'erreur d'estimation est la pondération idéale définie dans la section 2.4.

$$W = \text{diag}(W_i)$$


 Figure 2.33 – Densités spectrales de puissance (EGN H_∞)

$$W_i^{-1}W_i^{-*}(j\omega) = \left(T_{(w)\rightarrow(z_i)} \left(I - T_{(w)\rightarrow(y)}^* \left(T_{(w)\rightarrow(y)} T_{(w)\rightarrow(y)} \right)^* \right)^{-1} T_{(w)\rightarrow(y)} \right) T_{(w)\rightarrow(z_i)}^* (j\omega)$$

Cette pondération ne peut pas être appliquée directement : ce n'est pas une fonction de transfert inversement stable. Elle doit être rendue propre et non strictement propre pour chaque terme W_i . Ceci est fait par l'ajout de zéros ou la perturbation des zéros existants. La figure 2.35 montre les gabarits supérieurs (correspondant à l'inverse du module de la pondération) définis par la pondération idéale pour chaque erreur d'estimation. Cette figure montre également la meilleure estimation possible atteignable pour la densité spectrale de puissance, qui constitue le gabarit inférieur sur l'erreur d'estimation. La pondération idéale définit des gabarits supérieurs adaptés aux gabarits inférieurs.

On synthétise un EGN avec cette pondération par application du théorème 13 page 60. La figure 2.36 montre les densités spectrales de puissance atteintes pour les erreurs d'estimation. Le graphe du haut montre la densité spectrale de l'erreur d'estimation e_1 atteinte avec l'estimateur, avec son gabarit inférieur atteignable en rouge, et son gabarit supérieur garanti par la synthèse $\gamma_{opt} |W_1^{-1}(j\omega)|$. Le graphe du bas montre

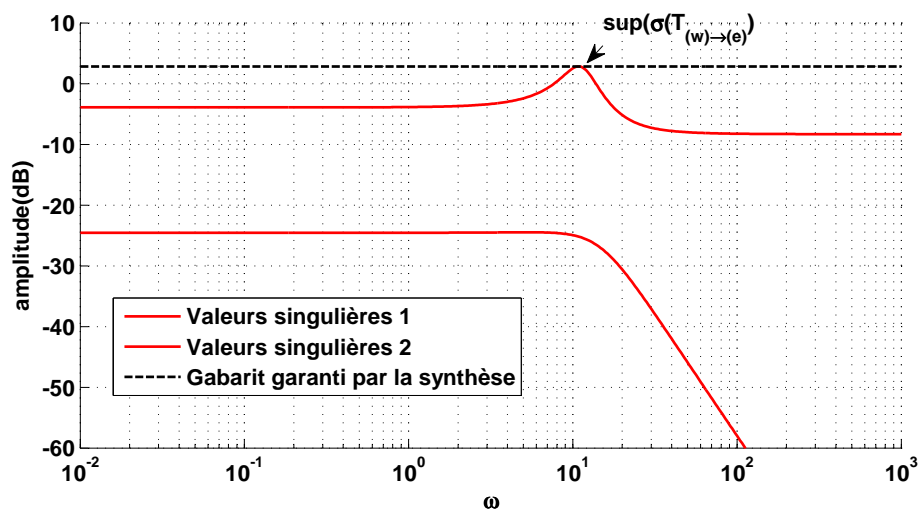


Figure 2.34 – Valeurs singulières et gabarit supérieur : l’estimateur H_∞

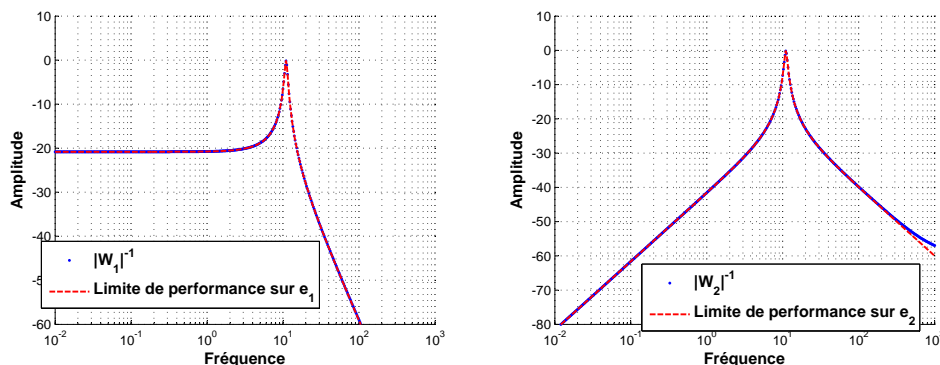


Figure 2.35 – Gabarits supérieurs définis par la pondération idéale

la densité spectrale de l’erreur d’estimation e_2 , avec son gabarit inférieur atteignable en rouge, et son gabarit supérieur garanti $\gamma_{opt} |W_2^{-1}(j\omega)|$.

Même dans ce cas multi-variable, le choix systématique de la pondération idéale présentée section 2.4 page 62 permet d’obtenir une erreur d’estimation au plus proche de la densité spectrale de puissance atteignable. En comparaison au H_2 (figure 2.32 page 78) les densités spectrales de puissance sont de même qualité au sens de l’estimation avec l’estimateur H_∞ pondéré idéalement.

2.6 Conclusions sur le cas certain

Nous avons présenté dans ce chapitre une approche LMI de l’estimation nominale. Un état de l’art succinct a été présenté section 2.1. Dans cette section, les structures principales utilisées pour l’estimation nominale ont été présentées. Les critères de per-

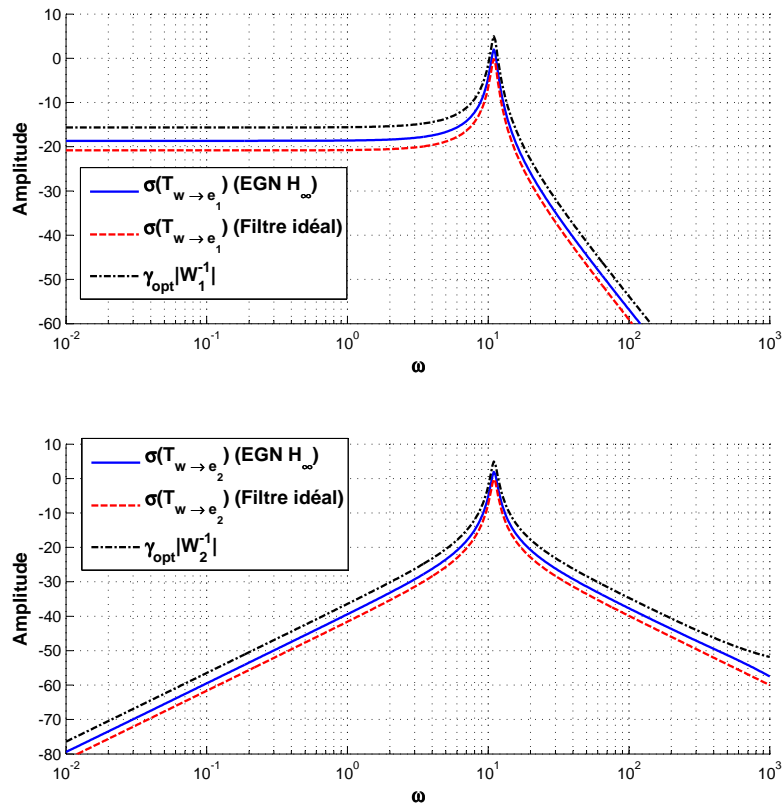


Figure 2.36 – Gabarits supérieurs définis par la pondération idéale

formance pour l'erreur d'estimation, ainsi que les outils de calcul pour la synthèse de l'estimateur ont été présentés.

Par la suite, la section 2.2 propose une approche LMI de l'estimation nominale. Les conditions d'existence pour les structures d'estimateur classiques ont été présentées sous la forme de théorèmes permettant de tester l'existence d'un estimateur d'une structure donnée, pour un niveau de performance donné.

La comparaison des problèmes d'optimisation a permis de dégager des critères comparatifs. Les structures classiques ont été systématiquement comparées, ce qui a permis de dégager leurs avantages et leurs inconvénients. A partir de ces points de comparaison, on est en mesure de choisir quelle structure est la plus adaptée pour un problème donné. Nous avons présenté une nouvelle structure dans la section 2.3 : l'Estimateur Nominal Généralisé (EGN). Nous avons montré que cette structure permet de prendre en compte de façon élégante les pondérations sur l'erreur d'estimation, mais également qu'elle garantit la même performance que toutes les autres structures quel que soit le critère de performance considéré.

Pour finir, la nécessité d'utiliser les pondérations pour spécifier un cahier des charges pour l'estimation a été développée section 2.4. Sur un exemple simple (exemple 1), il a été montré comment les pondérations permettent de spécifier des zones d'intérêt sur l'erreur d'estimation. Nous avons également montré que pour l'estimation nominale, il existe une limite de performance donnée par le théorème 14. Cette limite de performance a permis de comparer les estimateurs minimisant une norme H_2 ou H_∞ sur l'erreur d'estimation. Nous avons également prouvé que cette limite de performance permet de choisir systématiquement des pondérations qui vont permettre de se rapprocher de l'estimation idéale. Ces méthodes ont été mises en œuvre sur un exemple de la littérature.

Une approche générale de l'estimation nominale a été présentée :

- La formalisation du problème a été présentée : comment modéliser les signaux, comment modéliser le modèle assurant la relation entre ces signaux et comment mettre en forme le problème de synthèse d'estimateur.
- Finalement, les critères de performance considérés classiquement (norme H_2 et norme H_∞) ont été présentés. Des résultats d'analyse permettant de tester efficacement ces normes d'une matrice de fonctions de transfert ont été présentés.
- Le filtre et l'observateur introduits dans ce chapitre sont les structures classiques. La méthode pour dériver des résultats de synthèse à partir des résultats d'analyse a été développée, permettant de formuler des conditions de synthèse pour ces deux structures sous la forme de problème d'optimisation sous contrainte LMI. La comparaison des problèmes d'optimisation ainsi obtenus a permis d'étendre ces structures classiques. Deux extensions ont été présentées : l'observateur à gain dynamique et l'estimateur généralisé nominal.

Le bilan des outils présentés pour l'estimation nominale est fait table 2.4. Les chapitres suivants vont étendre de façon systématique les points présentés dans ce tableau.

| | Estimation nominale |
|---|---|
| Mise en forme et analyse | |
| Modéliser le système et les signaux | Modèle LTI (section 1.2.2 et 1.2.3 page 5) |
| Caractériser l'erreur d'estimation | Normes H_2 et H_∞ (pondérée ou non) (section 1.2.4 page 10) |
| Outils d'analyse efficaces | Lemme 1 page 29 (norme H_∞), Lemme 2 page 29 (norme H_2). |
| Synthèse d'estimateur | |
| Capacité à transformer ces outils d'analyse en outils de synthèse | Section 2.2 page 28, avec les outils de l'annexe A |
| Synthèse de la structure filtre | Synthèse garantissant une norme $H_2, H_\infty,$ H_∞ pondérée |
| Synthèse de la structure observateur à gain statique | Synthèse garantissant une norme H_2, H_∞ |
| Synthèse de la structure observateur à gain dynamique | Synthèse garantissant une norme H_2, H_∞ |
| Synthèse d'estimateur généralisé nominal | Synthèse garantissant une norme $H_2, H_\infty,$ H_∞ pondérée |
| Analyse de la performance de l'estimation | |
| Synthèse de la réponse fréquentielle optimale (analyse de la performance des estimateurs) | Théorème 14 page 64 |
| Choix des pondérations pour l'estimation H_∞ | Section 2.4 page 62 |

Tableau 2.4 – Bilan de l'estimation nominale

Chapitre 3

Représentation et analyse des modèles incertains pour l'estimation

Dans ce chapitre, une présentation de la problématique de l'estimation robuste est effectuée, puis une extension systématique de la mise en forme et de l'analyse des systèmes LTI (pour la synthèse d'estimateurs) aux systèmes incertains est présentée. Relativement au tableau 2.4 page 83, les points qui vont être étendus sont présentés dans le tableau 3.1.

| | Estimation nominale | Estimation robuste |
|-------------------------------------|--|---|
| Mise en forme et analyse | | |
| Modéliser le système et les signaux | Modèle LTI (section 1.2.2 et 1.2.3 page 5) | Quel type de modélisation pour le modèle incertain ? |
| Caractériser l'erreur d'estimation | Normes H_2 et H_∞ (pondérée ou non) (section 1.2.4 page 10) | Quel type de norme pour caractériser l'erreur d'estimation ? |
| Outils d'analyse efficaces | Lemme 1 page 29 (norme H_∞), Lemme 2 page 29 (norme H_2). | Pour le modèle et la norme choisie, est-il possible de tester cette norme de façon efficace ? |

Tableau 3.1 – Objectifs du chapitre 3

3.1 Le problème d'estimation robuste

3.1.1 Introduction à l'estimation robuste

Les méthodes présentées dans le chapitre 2 sont basées sur une hypothèse très forte : le modèle utilisé pour synthétiser l'estimateur représente parfaitement la réalité. Si cette

hypothèse est vérifiée, alors le niveau de performance garanti par la méthode de synthèse (comme par exemple le théorème 12) sera atteint lors de l'application de l'estimateur sur le système réel.

Tout modèle n'est qu'une représentation imparfaite de la réalité. Les propriétés garanties par la synthèse de l'estimateur sur le modèle nominal ne seront pas vérifiées lors de l'application de l'estimateur synthétisé sur le système réel. Dans certains cas, si le modèle nominal décrit "suffisamment" bien le système réel, la performance atteinte par l'estimateur sera satisfaisante. Dans de nombreux autres cas, de petites erreurs sur le modèle pourront dégrader de façon significative la performance [Bha76]. Il est donc nécessaire dans de nombreux cas de prendre en compte cette erreur de modélisation dès la synthèse de l'estimateur.

3.1.2 Sources d'incertitudes

Quelles peuvent être les erreurs de modélisation faites lors de la représentation d'un système réel par un modèle LTI ? Par analogie avec le formalisme présenté pour la modélisation du système présenté dans la figure 1.8 page 7, les erreurs de modélisation peuvent être faites sur les modèles de signaux ou sur le modèle explicitant la relation entre les signaux mesurés et les signaux à estimer.

Incertitudes sur les modèles de signaux

Dans le cadre de l'estimation nominale, les signaux sont modélisés comme la sortie d'un processus générateur en réponse à une entrée normalisée. Le processus générateur caractérisant le signal est souvent formulé à partir d'*a priori*. Dans le cas stochastique, ces signaux sont modélisés comme étant la sortie d'un processus générateur en réponse à un signal de densité spectrale de puissance unitaire. Les densités spectrales de puissance des signaux de sortie ainsi que leurs densités spectrales de puissance inter-spectres sont complètement caractérisées.

Dans le cas déterministe, le signal normalisé d'entrée est caractérisé comme un signal de densité spectrale de puissance inférieure ou égale à 1 : le signal d'entrée englobe tous les signaux de DSP inférieure à 1, et la synthèse garantit un niveau de performance pour tous ces signaux. Par conséquent, la représentation déterministe peut être conçue comme une approche robuste à un niveau de signal en entrée par rapport à la modélisation stochastique. Si le signal d'entrée est de densité spectrale de puissance inférieure ou égale à 1, la norme H_∞ donnera un gabarit supérieur pour les signaux de sortie possibles. La norme H_2 correspondra à une borne supérieure de la puissance pour tous les signaux de sortie. En réalité, dans le cas stochastique, les propriétés des modèles LTI font que ces propriétés sont également vérifiées. La robustesse relativement à un niveau de signal d'entrée est donc naturellement prise en compte.

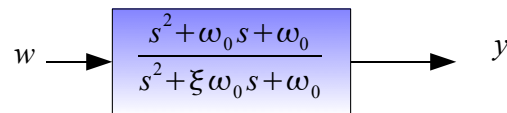


Figure 3.1 – Processus générateur quasi-sinusoïdal

Une source d'erreur plus intéressante est l'erreur sur le processus générateur déduit de l'analyse des densités spectrales de puissance et des densités spectrales de puissance inter-spectre qu'il peut être nécessaire de décrire. La description du processus générateur est homogène à la description du modèle explicitant la relation entre les signaux mesurés et les signaux à estimer : c'est un modèle LTI.

Incertitudes sur le modèle du système

Les sources d'incertitudes sur le modèle explicitant la relation entre les signaux d'entrée, les signaux à estimer et les signaux mesurés doivent être prises en compte. Les incertitudes sur les signaux d'entrée peuvent être en partie encapsulées par un modèle de densité spectrale de puissance. En revanche, si le modèle du système reliant les signaux est faux, alors le signal estimé lors de l'application de l'estimateur sur le système réel ne correspondra pas à l'estimation du signal interne souhaitée. De petites incertitudes sur ce modèle peuvent fortement dégrader la performance de l'estimateur. Ce sont les incertitudes sur le modèle du système qui sont critiques [Bha76]. Dans le cas nominal, ce système est modélisé par un modèle LTI. Nous allons donc nous intéresser aux incertitudes sur les modèles LTI.

Incertitudes paramétriques sur les modèles LTI

Le processus générateur décrivant les signaux ainsi que le modèle explicitant les relations entre eux sont décrits de façon homogène par un modèle LTI comme présenté dans le chapitre 1.

Une première source d'incertitudes est l'incertitude sur les paramètres du modèle LTI. Dans le cas d'un processus générateur présenté figure 3.1, associé à un signal quasi-sinusoïdal, la fréquence de résonance ω_0 peut être mal connue. Le modèle LTI correspondant à ce processus générateur est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$\frac{s^2 + \omega_0 s + \omega_0^2}{s^2 + \xi \omega_0 s + \omega_0^2} \quad 0 > \xi > 1$$

Le paramètre ω_0 décrivant la fréquence de résonance de ce modèle LTI peut être incertain. Dans ce cas particulier, les densités spectrales de puissance possibles pour le signal y sont décrites figure 3.2. Le coefficient ω_0 peut également évoluer dans le temps.

Le coefficient d'amortissement ξ peut également ne pas être connu parfaitement, voire évoluer dans le temps.

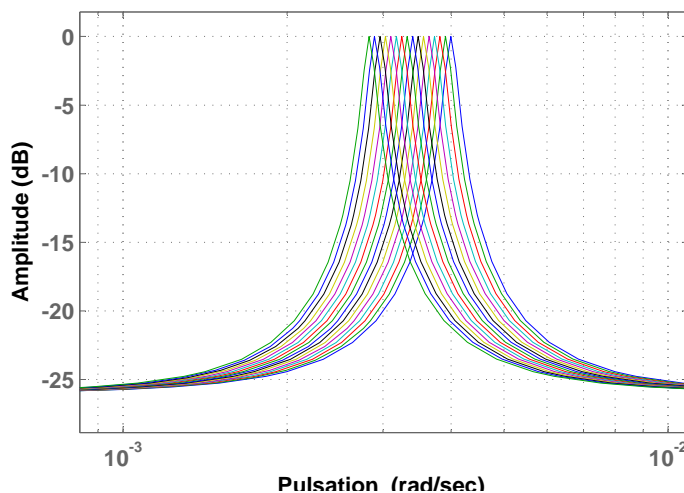


Figure 3.2 – DSP quasi sinusoïdale

Dans le cadre du modèle explicitant la relation entre les signaux, les paramètres physiques ne sont jamais parfaitement connus. Pour un système masse-ressort, le modèle d'état correspondant à ce système est le suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ \frac{-k_1-k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{c}{m_1} & 0 & | & \frac{1}{m_1} & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} & 0 & -\frac{c}{m_2} & | & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

De manière générale, les valeurs exactes des raideurs k_i , des masses m_i ou du coefficient d'amortissement c ne sont pas parfaitement connues. Ces paramètres peuvent avoir des valeurs constantes inconnues mais bornées dans un intervalle (comme par exemple dans le cas d'une dispersion de production). Ils peuvent également varier dans le temps si le système vieillit ou si les conditions d'utilisation changent.

Un autre exemple simple d'incertitudes paramétriques est celui de l'incertitude sur les composants d'un système électronique (capacités, inductances, résistances). Les composants sont vendus avec un intervalle de confiance autour de la valeur nominale.

Les incertitudes paramétriques sont naturellement présentes dans les systèmes [Pea00]. Pour citer quelques exemples, ces incertitudes peuvent permettre de décrire des modes de flexions pour le contrôle d'un disque dur [CFH07] et sont naturellement présentes dans les modèles décrivant un composant piézo-électrique [AFA10].

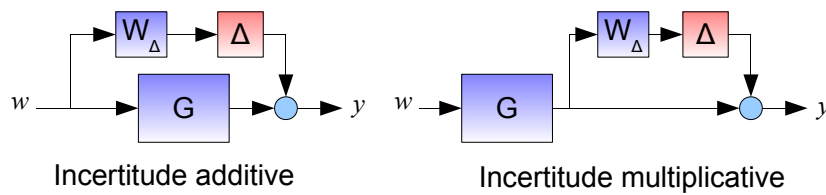


Figure 3.3 – Incertitude additive et multiplicative

Incertitudes dynamiques

En dehors des incertitudes paramétriques, les dynamiques du modèle LTI décrivant le processus générateur ou le modèle reliant les signaux peuvent être mal modélisées.

Par exemple, le modèle masse-ressort peut être un modèle d'ordre réduit pour un système de dimension infinie d'une structure flexible. Les modes de flexion hautes fréquences peuvent être décrits par une incertitude additive [BD94] ou une incertitude multiplicative en sortie (exemple du contrôle de microscope [KS11]) (figure 3.3). Les dynamiques correspondant à ce modèle peuvent correspondre donc aux principaux modes de vibrations. On peut également citer l'exemple des canaux d'irrigation pour les systèmes de dimension infinie [Din05]. Ces dynamiques non modélisées peuvent également décrire des couplages dans les circuits électriques en hautes fréquences [HN04].

Pour illustrer le concept d'incertitude dynamique, la figure 3.3 montre une incertitude additive Δ telle que $\|\Delta\| < 1$ pouvant modéliser un ou plusieurs des modes de vibrations ignorés. La figure 3.4 à gauche décrit le module des fonctions de transfert W_Δ explicitant le gabarit sur l'incertitude additive ainsi que le module de la fonction de transfert $T_{(w) \rightarrow (u)}$. Des exemples de modèles possibles sont présentés dans la figure de droite.

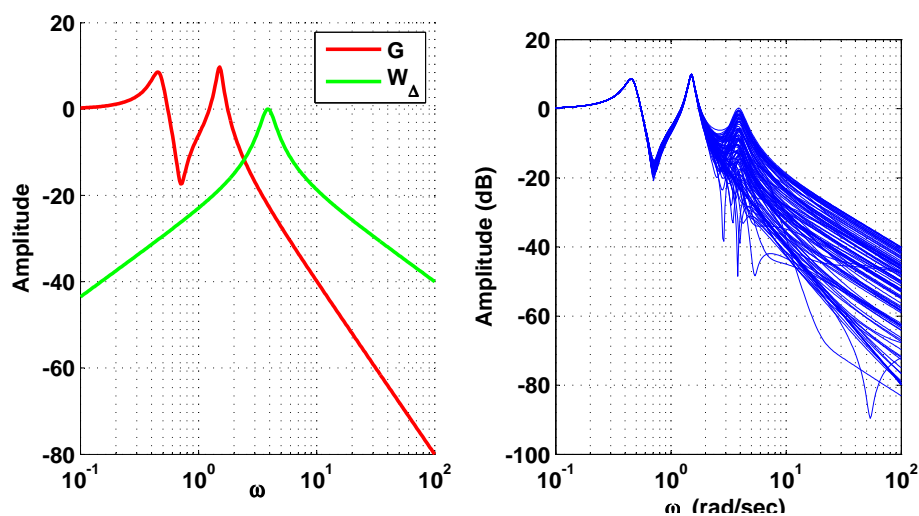


Figure 3.4 – Module de la fonction de transfert du système incertain

Les descriptions proposées par les incertitudes paramétriques et dynamiques sont complémentaires. Ces incertitudes peuvent être composées de nombreuses façons [FS05], permettant la description précise de modèles incertains de nature très variée.

Des ensembles de modèles sont décrits en utilisant ces incertitudes. Dans le cas où les incertitudes paramétriques et dynamiques sont temps-invariantes, le modèle incertain décrit un ensemble de modèles LTI. Si ces incertitudes sont temps-variantes, un ensemble d'opérateurs correspondant à toutes les trajectoires possibles de l'incertitude dans son intervalle de variation est décrit.

Dans cette thèse, les incertitudes paramétriques et dynamiques TI/TV sont considérées. Ces incertitudes permettent de décrire des ensembles de modèles. Pour répondre au problème de l'erreur de modélisation, cette thèse propose d'étendre les méthodes de l'estimation nominale. Le modèle du système ne sera pas un modèle unique mais un ensemble de modèles. Dans le cas de l'estimation nominale, l'estimateur est synthétisé sur un modèle proche de tous les systèmes possibles. Pour l'approche robuste, le modèle appelé modèle incertain décrit un ensemble de systèmes possibles contenant à priori le système réel.

D'un point de vue représentation, la représentation du modèle incertain doit être la plus générale possible. Cette représentation doit permettre de décrire des incertitudes de natures très variées dans l'objectif de résoudre le problème d'estimation robuste dans sa forme la plus générale possible.

3.1.3 Approche proposée : l'estimation pire-cas

Dans cette thèse, nous proposons une approche pire-cas illustrée figure 3.5. La méthode de synthèse doit permettre de trouver un estimateur garantissant un niveau de performance pour tous les modèles inclus dans le modèle incertain. Si le système réel est inclus dans le modèle incertain, alors la propriété garantie lors de la synthèse sera vérifiée lors de l'application de l'estimateur robuste sur le système réel.

Il existe bien sûr d'autres approches de ce problème, notamment les approches qui garantissent une performance moyenne pour tous les modèles compris dans le modèle incertain. D'un point de vue ingénieur, l'approche pire-cas nous paraît plus intéressante pour une raison simple : garantir une propriété pour tous les modèles inclus dans le modèle incertain évite les comportements particuliers. Ceci ne peut pas être garanti par une performance moyenne.

3.1.4 Forme standard du problème d'estimation robuste

Les modèles incertains définissent un ensemble de modèles noté Γ_G dans cette thèse. La forme standard du problème d'estimation robuste est présentée dans la figure 3.6.

L'objectif de cette thèse est d'étendre les méthodes du cas nominal à l'estimation robuste. Dans le cadre de l'estimation nominale, le modèle des signaux et du système les

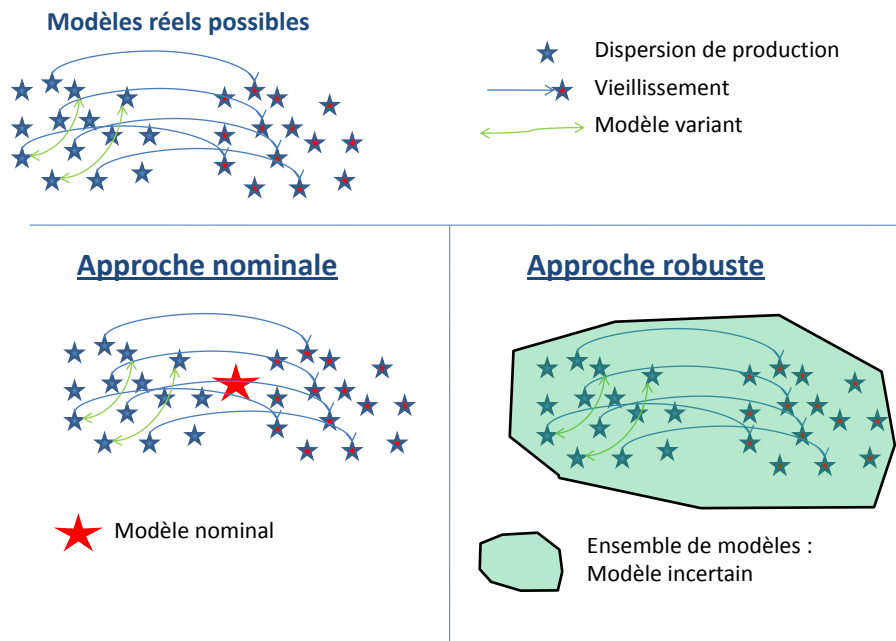


Figure 3.5 – Approche nominale / Approche robuste

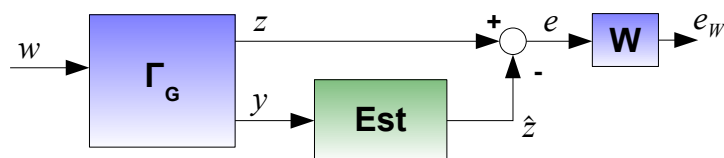


Figure 3.6 – Forme standard du problème d'estimation robuste

reliant est donné par un modèle LTI. L'erreur d'estimation est caractérisée par une norme sur la fonction de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}$ (norme H_2 , H_∞ ou H_∞ pondérée). L'estimateur est également un modèle LTI, synthétisé via 2 structures, la structure filtre ou la structure observateur. La synthèse de cet estimateur est faite par application sur la forme standard du problème de synthèse d'un résultat d'analyse transformé par la suite en résultat de synthèse. L'objectif est donc de reproduire la même démarche pour l'estimation robuste.

Le problème d'estimation robuste étudié dans cette thèse consiste à trouver un estimateur décrit par un modèle LTI garantissant un critère de performance sur l'erreur d'estimation pour tous les systèmes $G \in \Gamma_G$.

3.1.5 Caractériser l'erreur d'estimation

Extension des normes

Les espaces de signaux permettent d'étendre les outils des modèles LTI aux modèles LTV. Les incertitudes considérées dans cette thèse étant possiblement des incertitudes temps-variantes, le modèle considéré pour l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$ ne sera plus une matrice de fonctions de transfert. Par conséquent, les normes H_∞ et H_2 ne peuvent plus être utilisées que dans les cas où les incertitudes ne dépendent pas du temps.

Une extension naturelle de ces normes est fournie par les espaces de signaux. L'annexe F page 259 présente les bases de la modélisation des signaux et des normes induites.

Une extension naturelle de la norme H_∞ est la norme induite par l'espace \mathcal{L}_2 des signaux : le \mathcal{L}_2 -gain [Jon01, SF06].

Definition 4. \mathcal{L}_2 -gain d'un opérateur

Soit un opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$ de $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$, le \mathcal{L}_2 -gain de l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$ est noté $\|T_{(w) \rightarrow (e)}\|_{i2}$

$$\|T_{(w) \rightarrow (e)}\|_{i2} = \min \gamma \quad \text{tel que} \quad \forall w \in \mathcal{L}_2, \int_{-\infty}^{+\infty} (e(t)e^T(t) - \gamma^2 w(t)w^T(t)) dt < 0$$

- Le \mathcal{L}_2 -gain caractérise la pire amplification énergétique de l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$. Si l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$ est un modèle LTI, le \mathcal{L}_2 -gain est égal à la norme H_∞ [Jon01].
- L'espace des signaux est relativement limité : très peu de signaux réels appartiennent à cet espace. Un point intéressant est que le \mathcal{L}_2 -gain est également valable pour l'espace \mathcal{L}_{2e} , l'espace des signaux \mathcal{L}_2 étendu. Le \mathcal{L}_2 -gain est donc le critère retenu pour l'extension de la norme H_∞ pour les modèles incertains.

La norme H_2 pour un système linéaire est également caractérisée comme l'énergie de la réponse impulsionnelle. Cette définition est choisie pour étendre la norme H_2 pour les modèles incertains [SK06]. La notation de la norme H_2 des systèmes LTI est conservée.

Definition 5. Norme H_2 d'un opérateur [SK06]

Soit un opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$ de $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$, de réponse impulsionnelle $h(t)$. La norme H_2 de l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$ est noté $\|T_{(w) \rightarrow (e)}\|_2$

$$\|T_{(w) \rightarrow (e)}\|_2 = \min \gamma \quad \text{tel que} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Trace} (h(t)h^T(t)) dt < \gamma^2$$

Performance pire-cas

Les modèles incertains considérés sont des ensembles de modèles Γ_G . Pour chaque modèle de Γ_G , les normes H_2 ou \mathcal{L}_2 -gain prennent des valeurs distinctes. Le choix fait dans cette thèse est de considérer le pire cas d'une norme donnée pour tous les systèmes de l'ensemble.

Definition 6. Soit Γ_G un modèle incertain définissant un ensemble d'opérateurs G . Le \mathcal{L}_2 -gain pire-cas du modèle incertain est noté $\bar{\gamma}$ et est défini par :

$$\bar{\gamma} = \min(\gamma) \quad \text{tel que} \quad \forall G \in \Gamma_G \quad \|G\|_{i_2} \leq \gamma$$

Nous verrons plus tard qu'en raison de la complexité du problème [ZDG95], seule une borne supérieure sur ce pire-cas peut être considérée. γ est une borne supérieure sur la performance pire-cas si la condition suivante est vérifiée.

$$\forall G \in \Gamma_G \quad \|G\|_{i_2} \leq \gamma$$

Cette borne supérieure est le critère de performance caractérisant la performance robuste dans cette thèse. La norme H_2 pour les systèmes incertains sera caractérisée de la même manière.

3.1.6 Le problème de synthèse d'estimateur robuste

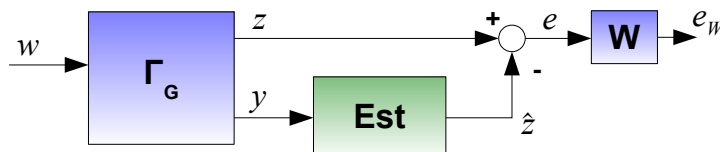


Figure 3.7 – Forme standard du problème d'estimation robuste

La forme standard du problème de synthèse d'estimateur robuste est présentée figure 3.7. Le problème de synthèse \mathcal{L}_2 -gain d'estimateur robuste est le suivant :

Problème 17. Problème de synthèse \mathcal{L}_2 -gain d'estimateur robuste. Etant donné γ , trouver s'il existe un estimateur (et le calculer) tel que

$$\forall G \in \Gamma_G, \quad \|T_{(w) \rightarrow (e_w)}\|_{i_2} < \gamma.$$

Le problème de synthèse H_2 est défini de la même manière :

Problème 18. Problème de synthèse H_2 d'estimateur robuste. Etant donné γ , trouver s'il existe un estimateur (et le calculer) tel que

$$\forall G \in \Gamma_G, \quad \|T_{(w) \rightarrow (e_w)}\|_2 < \gamma.$$

Le tableau 3.2 présente le tableau des objectifs complété par les définitions présentées dans cette section.

| | Estimation nominale | Estimation robuste |
|-------------------------------------|---|--|
| Mise en forme et analyse | | |
| Modéliser le système et les signaux | Modèle LTI (section 1.2.2 et 1.2.3 page 5) | Modèle incertain avec des incertitudes paramétriques, incertitudes dynamiques. |
| Caractériser l'erreur d'estimation | Normes H_2 et \mathcal{L}_2 -gain (pondéré ou non, section 1.2.4 page 10) | Normes H_2 et H_∞ (pondérée ou non) pire-cas |
| Outils d'analyse efficaces | Lemme 1 page 29 (norme H_∞), Lemme 2 page 29 (norme H_2). | ? |

Tableau 3.2 – Objectifs du chapitre 3

3.2 Représentation et analyse des systèmes incertains pour l'estimation

Pour résoudre le problème d'estimation robuste, il est nécessaire de disposer des éléments suivants :

- Un mode de représentation d'un ensemble de modèles permettant de décrire des incertitudes de différents types ;
- Des outils d'analyse efficaces pour les modèles incertains représentés sous une forme choisie ;
- La capacité à transformer ces outils d'analyse en outils de synthèse d'estimateurs robustes.

Dans cette section, les principales méthodes pour la synthèse d'estimateur robuste sont présentées.

3.2.1 La représentation non structurée

Représentation

Les premières approches de l'estimation robuste représentent le modèle incertain au moyen d'une incertitude dite non-structurée dans l'objectif de décrire des incertitudes paramétriques sur la représentation d'état du modèle du système. Cette représentation d'état est fonction d'un bloc incertain Δ sans structure spécifique. Ce bloc est de norme bornée¹.

La représentation d'état est donnée par

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} = \left(\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \Delta \left[\begin{array}{c|c} D_1 & D_2 \end{array} \right] \right) \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad \Delta^T \Delta < I$$

1. *norm-bounded uncertainty* en anglais

Il est possible de représenter des incertitudes sur plusieurs paramètres du système. Mais l'absence de structure dans le bloc d'incertitudes Δ ne permet pas de différencier des incertitudes sur des paramètres différents. De plus, la représentation d'état ne dépend que de façon linéaire du bloc d'incertitudes. Les premiers résultats sur l'estimation robuste ont été obtenus en utilisant ce type de représentation pour des incertitudes paramétriques [FDX92, dSSF95], en se basant sur des résultats de stabilité de type petit-gain [ZK88].

Résultats pour l'estimation

Plus tard, des approches proposant de considérer un unique bloc incertain de paramètres variant dans le temps vérifiant $\Delta^T \Delta < I$ ont été proposées pour synthétiser des filtres optimisant la norme H_2 dans le cas continu [PM94], pour la prédiction dans le cas discret [BCD95].

D'un point de vue technique, une approche probabiliste a également été proposée dans [WU99], via une approche matricielle par inéquation de Riccati matricielle bilinéaire pour minimiser la variance de l'erreur d'estimation en réponse à des signaux aléatoires. Des solutions ont également été proposées pour le filtrage et le contrôle en boucle ouverte par factorisation spectrale [OAS93, OAS95, Gri96]. Des approches pour la synthèse d'observateur via une approche de Lyapunov est également proposée dans [Lie04, test par équation de Riccati] ou dans [PPY11, Test par LMI] en utilisant des fonctions de Lyapunov-Krasovski.

On peut bien sûr discuter de l'intérêt de cette représentation. Elle a permis d'obtenir les premiers résultats pour la synthèse d'estimateur robuste. Cette représentation possède une capacité d'encapsulation forte pour définir le modèle incertain. Cependant, la dépendance linéaire du système envers l'incertitude est une des faiblesses de cette représentation. De plus, un système est souvent soumis à plusieurs incertitudes paramétriques. Encapsuler ces incertitudes dans un bloc unique et non structuré est une hypothèse très forte qui pourra amener un conservatisme fort lorsque l'on décide de décrire des incertitudes de différents types. Au vu de la simplicité de la représentation, on pourra disposer de conditions d'analyse nécessaires et suffisantes, mais le faible pouvoir de la représentation pourra dans un grand nombre de cas être conservatif.

On peut faire un bilan rapide de ces méthodes, en les classant selon le type d'approche utilisé :

1. Factorisation spectrale : [OAS93, OAS95, Gri96] ;
2. Approche par équation de Riccati : [FDX92, dSSF95, PM94, BCD95, Approche matricielle], [SP97, Lie04, PPY11, Approche par fonctions de Lyapunov] ;
3. Approche entrées-sorties : [RSP96].

3.2.2 La représentation polytopique

Représentation

Pour étendre les résultats précédents, l'attention s'est spécialement portée sur la façon de prendre en compte plusieurs paramètres incertains sans les englober dans un unique bloc Δ de norme bornée. Un type de représentation des systèmes linéaires incertains a été proposé où la représentation d'état du modèle du système dépend linéairement de paramètres incertains appartenant à un polytope. Cette représentation permet de décrire plusieurs incertitudes paramétriques. On définit d'abord l'ensemble Γ_λ (simplexe unité).

$$\Gamma_\lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \lambda_i \geq 0 \\ \sum_i \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

La représentation du système est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}(\lambda) & \tilde{B}(\lambda) \\ \hline \tilde{C}(\lambda) & \tilde{D}(\lambda) \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

avec

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}(\lambda) & \tilde{B}(\lambda) \\ \hline \tilde{C}(\lambda) & \tilde{D}(\lambda) \end{array} \right] = \sum_i \lambda_i \left[\begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_i & D_i \end{array} \right], \quad \lambda \in \Gamma_\lambda$$

Résultats pour l'estimation

Cette approche a été largement utilisée pour approcher le problème de l'estimation robuste. Les résultats sont basés sur des approches de type Lyapunov.

Tester l'existence de ces fonctions de Lyapunov peut se faire sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI en testant l'existence de la fonction au sommet du polytope [GdO01], si la fonction de Lyapunov est de type $V(t) = x^T(t)Px(t)$, avec P indépendante de λ .

La démarche suivie est la suivante. Par application du lemme 1 page 29 sur le modèle incertain présenté équation (3.2) (dans le cas où λ ne dépend pas du temps), les conditions suivantes sont obtenues.

Soit une matrice de fonctions de transfert incertaines $H(s) = \tilde{C}(\lambda)(sI - \tilde{A}(\lambda))^{-1}\tilde{B}(\lambda) + \tilde{D}(\lambda)$. $\|H\|_\infty < \gamma$ si et seulement s'il existe $\mathbf{P}(\lambda) = \mathbf{P}(\lambda)^T > 0$ telle que la contrainte (3.3) soit vérifiée.

$$\forall \lambda \in \Gamma_\lambda, \quad \left[\begin{array}{ccc|c} \tilde{A}(\lambda)^T \mathbf{P}(\lambda) + \mathbf{P}(\lambda) \tilde{A}(\lambda) & \mathbf{P}(\lambda) \tilde{B}(\lambda) & \tilde{C}(\lambda)^T & \\ \tilde{B}(\lambda)^T \mathbf{P}(\lambda) & -\gamma^2 I & \tilde{D}(\lambda)^T & \\ \tilde{C}(\lambda) & \tilde{D}(\lambda) & -I & \end{array} \right] < 0 \quad (3.3)$$

Comme le système dépend du paramètre λ , la matrice $\mathbf{P}(\lambda)$ dépend également de ce paramètre. On ne connaît pas le type de dépendance. Cette dépendance ne permet pas de se ramener simplement à un problème d'optimisation sous contrainte LMI. Le problème peut être relâché (ajout de conservatisme) en choisissant $P(\lambda) = \mathbf{P}$. La condition (3.3) prend la forme suivante :

$$\forall \lambda \in \Gamma_\lambda, \quad \begin{bmatrix} \tilde{A}(\lambda)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \tilde{A}(\lambda) & \mathbf{P} \tilde{B}(\lambda) & \tilde{C}(\lambda)^T \\ \tilde{B}(\lambda)^T \mathbf{P} & -\gamma^2 I & \tilde{D}(\lambda)^T \\ \tilde{C}(\lambda) & \tilde{D}(\lambda) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.4)$$

Les matrices de la représentation d'état du modèle incertain apparaissent de manière linéaire dans cette équation. Par conséquent, ceci peut s'écrire sous la forme d'un polytope de matrices.

$$\forall \lambda \in \Gamma_\lambda, \quad \sum_i \lambda_i \left(\begin{bmatrix} A_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} A_i & \mathbf{P} B_i & C_i^T \\ B_i^T \mathbf{P} & -\gamma^2 I & D_i^T \\ C_i & D_i & -I \end{bmatrix} \right) < 0 \quad (3.5)$$

Il est possible de tester cette condition en la testant pour chaque sommet du polytope.

Lemme 3. *Condition au sommet d'un polytope*

$$\forall \lambda \in \Gamma_\lambda, \quad \sum_i \lambda_i \Omega_i \geq 0 \Leftrightarrow \forall i, \Omega_i \geq 0$$

Par conséquent, le résultat d'analyse suivant peut-être formulé :

Soit une matrice de fonctions de transfert incertaines $H(s) = \tilde{C}(\lambda)(sI - \tilde{A}(\lambda))^{-1} \tilde{B}(\lambda) + \tilde{D}(\lambda)$. $\|H\|_\infty < \gamma$ s'il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ telle que la contrainte (3.6) soit vérifiée.

$$\forall i, \quad \begin{bmatrix} A_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} A_i & \mathbf{P} B_i & C_i^T \\ B_i^T \mathbf{P} & -\gamma^2 I & D_i^T \\ C_i & D_i & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.6)$$

Cette condition est une contrainte LMI et peut être testée de façon efficace. En minimisant γ sous ces contraintes, il est possible de calculer une *borne supérieure* sur la norme H_∞ pire-cas de l'ensemble de modèles définis par le modèle incertain présenté équation (3.2). Cependant, comme le problème a été relâché en choisissant \mathbf{P} indépendante de λ , cette borne supérieure sera dans la majeure partie des cas différente de la norme H_∞ pire-cas. Ce résultat peut être vu comme une extension du lemme réel borné (lemme 1 page 29) pour les systèmes incertains polytopiques.

Des résultats de synthèse peuvent être dérivés de ce résultat d'analyse en appliquant la démarche présentée dans le chapitre 2. La linéarisation des contraintes BMI est analogue à la linéarisation pour le cas certain, ce qui permet de dériver des résultats de synthèse de manière assez simple. Avec des fonctions de Lyapunov indépendantes

des paramètres la synthèse de filtres robuste a été largement étudiée : [Ger99, H_2 , cas continu], [GB99, H_2 , cas continu], [PP99, placement de pole, H_∞], [GdO01, H_2, H_∞ , cas continu]. Ces résultats sont issus du résultat d'analyse [PGB93].

Plus tard, des fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres du type $V(t) = x^T(t)P(\lambda)x(t)$ ont été développées pour l'analyse de la stabilité des systèmes incertains polytopiques [GA96, Pea00]. Des résultats de synthèse ont été obtenus pour la synthèse de filtres [TAN01b] continus, ou discrets [XLZZ04] ce qui a permis de réduire le conservatisme en comparaison des résultats obtenus avec des fonctions de Lyapunov indépendantes des paramètres. Comme la dépendance de la fonction de Lyapunov, un grand nombre d'articles ont été publiés sur le sujet (par exemple [XLZZ04, GMC08] présentent des paramétrisations différentes). On peut également citer l'ajout d'un algorithme Min-max pour la recherche des meilleurs paramètres [KG08], l'introduction d'une matrice variable [DZZM06, H_2 , H_∞ , cas continu], la recherche linéaire sur des paramètres [BTD01, BDT05, H_2 , cas continu], le choix structurel d'une matrice dépendante de deux paramètres [XLZZ04, H_2 , H_∞ , cas discret]. Avec ce type d'approche, des degrés de liberté [LOP11] peuvent être ajoutés pour réduire le conservatisme.

L'estimation robuste a été largement étudiée pour ce type de représentation du modèle incertain. Les résultats obtenus via ces raffinements ont permis de réduire le conservatisme, voire de prendre en compte des retards au moyen de fonctions de Lyapunov-Krasovski [Mah11, YY11, LG11], pour la synthèse de filtres robustes dépendant du même retard que le système. Cela permet également de prendre en compte des mesures intermittentes dans des réseaux de capteurs [ZS11].

On peut de la même manière faire le bilan de ces méthodes, en sachant que l'outil numérique utilisé pour tester les problèmes d'optimisation est systématiquement l'optimisation sous contrainte LMI.

1. Approche par fonctions de Lyapunov indépendantes des paramètres, basée sur le résultat d'analyse présenté dans [PGB93] : [Ger99, H_2 , discret], [GB99, H_2 , continu], [PP99, placement de pôles], [GdO01, H_2, H_∞ , continu].
2. Approche par fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres, basée sur le résultat de [PABB00, Pea00] : [TAN01b, H_2 , continu], [XLZZ04, GMC08, H_2, H_∞ , discret], [DZZM06, H_2 , H_∞ , cas continu], [BTD01, BDT05, H_2 , cas continu], [LOP11]
3. Approche par fonctions de Lyapunov-Krasovski : [Mah11, YY11, LG11, ZS11].

Ces méthodes permettent de spécifier dans la formulation du problème la présence de plusieurs incertitudes paramétriques. Le fait de ne prendre en compte que des incertitudes paramétriques est restrictif, et l'ajout d'incertitudes de natures différentes change le résultat d'analyse comme en témoignent les tentatives récentes d'ajouter des retards dans la formulation du problème avec des fonctions de Lyapunov-Krasovski. On peut également noter que dans le cadre des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres, le fait d'ajouter une recherche des paramètres dont dépend la fonction

peut transformer le problème de synthèse en problème d'optimisation non-convexe. Par conséquent l'objectif de conserver des outils efficaces qui ont été la raison du succès des approches classiques a été mis de côté. Cette représentation reste assez limitée puisque la représentation d'état du modèle dépend de façon affine des paramètres incertains. Dans [TAN01a], l'intérêt des approches de type Transformation Linéaire Fractionnelle (présentées ci-après) est mis en valeur pour permettre d'avoir une dépendance rationnelle de la représentation d'état envers les paramètres incertains.

La représentation polytopique est donc relativement limitée en terme de capacité de représentation, et ne sera pas retenue pour cette raison. En revanche, cette représentation permet de se ramener à des résultats de synthèse de façon assez simple en réutilisant les résultats du cas nominal. Nous verrons en chapitre 5 que ces méthodes permettent de dériver relativement des résultats pour la synthèse d'observateur pour des systèmes Linéaires à Paramètres Variants (LPV).

3.2.3 La représentation LFT

Représentation

De manière générale, un système complet est souvent sujet à plusieurs incertitudes, de différents types. Des incertitudes paramétriques et dynamiques sur le système, les capteurs, ainsi que des incertitudes sur les modèles des signaux peuvent être présentes en même temps. Assez souvent, le système dépend de façon rationnelle des paramètres (système masses-ressorts par exemple). Les représentations des incertitudes par une incertitude non-structurée ou par une représentation polytopique ne permettent pas dans le cas le plus général de représenter toutes les incertitudes qui peuvent être présentes sur un système.

Le cadre le plus général pour représenter les incertitudes consiste à représenter le système sous la forme d'une transformation linéaire fractionnelle (LFT). La représentation LFT propose de représenter le modèle incertain comme l'interconnexion d'un modèle certain et d'un bloc incertain. La figure 3.8 présente la philosophie : l'ensemble des incertitudes est décrit puis extrait du modèle pour créer un bloc nominal et un bloc incertain.

Le modèle général prend la forme présentée figure 3.9.

L'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$ est décrit par le bloc incertain, qui peut être structuré comme présenté dans la figure 3.8, et le modèle nominal G décrit comme une matrice de fonctions de transfert. L'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$ est donné par $T_{(w) \rightarrow (e)} = \Delta \star G$, où \star définit le produit-étoile de Redheffer.

Definition 7. Produit-étoile de Redheffer

Soit deux matrices $H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$ et $G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$ de partitions compatibles.

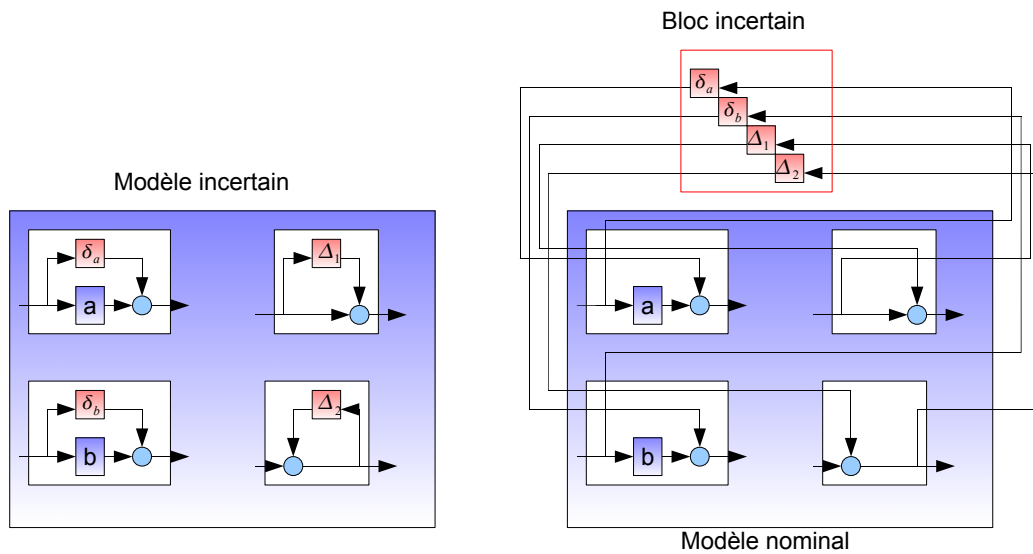


Figure 3.8 – Philosophie de la représentation LFT

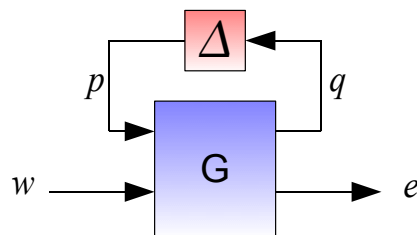


Figure 3.9 – Représentation LFT générale

Le produit-étoile de Redheffer est défini par :

$$H \star G = \begin{bmatrix} H_{11} + H_{12}G_{11}(I - H_{22}G_{11})^{-1}H_{21} & H_{12}(I - G_{11}H_{22})^{-1}G_{12} \\ G_{21}(I - H_{22}G_{11})^{-1}H_{22} & G_{22} + G_{21}H_{22}(I - G_{11}H_{22})^{-1}G_{12} \end{bmatrix}$$

Ce produit permet de décrire des interconnexions de systèmes [ZDG95], comme décrit figure 3.10.

Un exemple d'application simple est la description d'une matrice de fonctions de transfert sous la forme d'un bloc d'intégrateurs et d'une matrice d'interconnexion. Les matrices de fonctions de transfert peuvent être décrites sous la forme décrite figure 3.11 :

L'opérateur $T_{w \rightarrow e}$ est alors donné par

$$T_{w \rightarrow e}(s) = \frac{1}{s} \star \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = D + C \frac{1}{s} \left(I - A \frac{1}{s} \right)^{-1} B = D + C (sI - A)^{-1} B$$

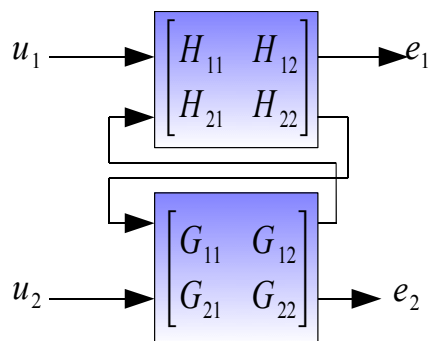


Figure 3.10 – Interprétation du produit de Redheffer

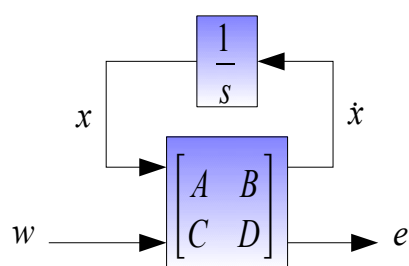


Figure 3.11 – Représentation d'état sous la forme d'une interconnexion de sous-systèmes

Cette représentation est la manière la plus générale pour représenter les incertitudes [ZDG95], pour deux raisons.

- Contrairement aux incertitudes non-structurées, qui permettent de représenter les incertitudes sous la forme d'un unique bloc incertain, cette représentation structurée des incertitudes permet de représenter plusieurs incertitudes de différentes natures.
- La représentation polytopique permet également de représenter plusieurs incertitudes uniquement paramétriques, mais la représentation LFT autorise une dépendance rationnelle du modèle envers l'incertitude [TAN03]. Les autres représentations ne permettent qu'une dépendance linéaire.

Outils d'analyse

Dans le cadre de la représentation LFT, le bloc incertain est un opérateur de \mathcal{L}_{2e} dans \mathcal{L}_{2e} , et est représenté par ses entrées-sorties, qui satisfont à une Contrainte Intégrale Quadratique (IQC) [MR97], de la forme suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} p(j\omega) \\ q(j\omega) \end{bmatrix}^T \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} p(j\omega) \\ q(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \geq 0$$

$\Pi(j\omega)$ est une matrice dépendante de ω dont la forme et les propriétés dépendent de l'opérateur considéré. Elle est appelée multiplicateur caractérisant l'opérateur.

L'analyse de la robustesse est un problème important d'Automatique. Un certain nombre de théories pour analyser la robustesse d'un système bouclé ont été développées. Historiquement, pour les systèmes LTI, les critères graphiques de robustesse tels que le critère de Nyquist et les marges de robustesse (phase, gain) permettent d'avoir certaines garanties sur la stabilité du système bouclé [FPEN84].

Pour étendre ces critères à des systèmes complexes, la μ/k_m -analyse [Doy82, Saf81] propose une extension de ces critères. L'objectif est de trouver μ la taille de la plus petite incertitude déstabilisant le système. Le problème du calcul exact de cette borne est de nature NP-difficile [ZDG95]. En revanche, en relâchant le problème, le calcul d'une borne supérieure est possible par optimisation convexe [FTD91]. La stabilité est alors testée fréquence par fréquence. Tester toutes les fréquences en une fois a été rendu possible grâce à l'utilisation de multiplicateurs [LCG95]. Des solutions pour le calcul exact d'une borne inférieure ou supérieure existent [Fer99], mais ne sont pas abordées ici.

L'approche par IQCs est une généralisation des approches entrées-sorties/multiplicateurs (années 60-70), de la μ -analyse qui permet de se ramener à des outils de calcul efficaces (cheval de bataille de la commande robuste) [Jon01, GS95]. Principalement, la théorie des multiplicateurs et son interprétation en termes de séparation des graphes/secteurs [Saf80] a atteint un verrou au début des années 80 en raison de l'absence d'outils efficaces pour tester les résultats existants. Ce verrou a sauté avec le développement des méthodes des points intérieurs [NN87] qui ont permis de résoudre efficacement les problèmes d'optimisation sous contrainte LMI [BEFB94]. Si ces outils ne sont pas l'objectif principal de la thèse, ils permettent d'avoir un contexte théorique fort avec des bases solides et fournissent des outils de calcul efficaces pour tester la stabilité ou calculer une borne supérieure sur une performance pire-cas d'un système incertain [Jon01, MR97].

Cette approche est issue de la communauté du contrôle robuste, mais a permis d'obtenir un certain nombre de résultats de synthèse pour l'estimation ([LF97, Sun04]). Une littérature plus complète pour la synthèse d'estimateurs basée sur ces outils est présentée en chapitre 4.

L'approche LFT/IQC est retenue dans cette thèse, pour la généralité de la représentation, et pour la flexibilité et la maturité des outils d'analyse qui y sont associés. Nous verrons chapitre 4 que ce cadre de travail permet d'étendre systématiquement les outils présentés pour l'estimation nominale à l'estimation robuste.

3.3 Analyse des modèles incertains sous forme LFT

Cette section présente des théorèmes d'analyse pour tester une borne supérieure sur la norme H_2 ou le \mathcal{L}_2 -gain d'un modèle incertain. Ces théorèmes sont des extensions

des résultats d'analyse présentés pour l'analyse des systèmes LTI dans le chapitre 2, section 2.2 page 28. Les théorèmes présentés dans cette partie permettent de tester une borne supérieure sur les normes H_2 ou le \mathcal{L}_2 -gain d'un système. Le cas continu est présenté dans cette partie. Les théorèmes de synthèse peuvent tous être formulés pour le cas discret, qui est reporté en annexe G page 261. Les théorèmes présentés dans cette section peuvent se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI.

Dans cette section, nous considérons le modèle présenté figure 3.12.

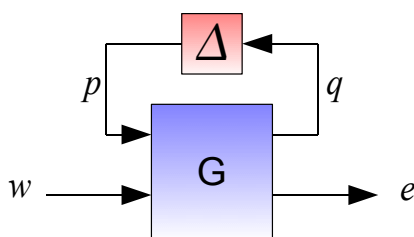


Figure 3.12 – Modèle incertain pour l'analyse

$G = T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ est une matrice de fonctions de transfert stable et définie par :

$$T_{(p,w) \rightarrow (q,e)} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_p & B_w \\ \hline C_q & D_{qp} & D_{qw} \\ C_e & D_{ep} & D_{ew} \end{array} \right] \quad (3.7)$$

En utilisant ce type de représentation, la matrice de fonctions de transfert incertaines de w vers e peut s'écrire $T_{(w) \rightarrow (e)} = \Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$.

L'incertitude est une incertitude appartenant à l'ensemble Γ_Δ , décrit par la suite dans la sous-section 3.3.1 page 103. L'ensemble d'incertitudes peut contenir des incertitudes paramétriques, dynamiques, Temps-Invariantes (TI) ou Temps-Variantes (TV).

3.3.1 Définition des ensembles d'incertitudes et des ensembles de multipliers

Les définitions des ensembles d'incertitudes considérés dans cette thèse sont présentées. Seules des incertitudes paramétriques TV/TI et dynamiques de norme bornée (\mathcal{L}_2 -gain pour le temps variant/non-linéarité, H_∞ pour des incertitudes dynamiques TI) sont considérées. Cette section définit le type d'incertitudes considérées dans cette thèse, et les multipliers qui y sont associés.

Définition des ensembles d'incertitudes

L'incertitude générale contient des incertitudes paramétriques et dynamiques, TI/TV.

– $\Gamma_{\Delta TV}$ représente l'ensemble des incertitudes TV :

$$\Gamma_{\Delta TV} = \left\{ \Delta^{TV} \mid \Delta^{TV} = \text{diag}(\text{diag}_i(\delta_i^{TV} I_{n_{\delta_i^{TV}}}), \text{diag}_j(\Delta_j^{TV})), \|\Delta^{TV}\|_{i2} < 1 \right\}$$

– $\delta_i^{TV} I_{n_{\delta_i}}$ est une incertitude paramétrique temps variante. Le paramètre incertain δ_i est répété $n_{\delta_i^{TV}}$ fois dans le bloc incertain.

– Δ_j^{TV} est un opérateur sans structure particulière de \mathcal{L}_2 -gain inférieur à 1, de dimensions $n_{\Delta_j^{TV}} \times n_{\Delta_j^{TV}}$

– $\Gamma_{\Delta TI}$ représente l'ensemble des incertitudes LTI :

$$\Gamma_{\Delta TI} = \left\{ \Delta^{TI} \mid \Delta^{TI} = \text{diag}(\text{diag}_k(\delta_k^{TI} I_{n_{\delta_k^{TI}}}), \text{diag}_l(\Delta_l^{TI})), \|\Delta^{TI}\|_{\infty} < 1 \right\}$$

– $\delta_k^{TI} I_{n_{\delta_k}}$ est une incertitude paramétrique temps invariante. Le paramètre incertain δ_k est répété $n_{\delta_k^{TI}}$ fois dans le bloc incertain.

– Δ_l^{TI} est une incertitude dynamique temps invariante de norme H_{∞} inférieure à 1, de dimensions $n_{\Delta_l^{TI}} \times n_{\Delta_l^{TI}}$;

– L'ensemble Γ_{Δ} regroupe les ensembles des incertitudes TV et TI. Cet ensemble regroupe des incertitudes paramétriques et dynamiques, temps variantes et temps invariants.

$$\Gamma_{\Delta} = \left\{ \Delta \mid \begin{array}{l} \Delta \mid \Delta = \text{diag}(\Delta_{TV}, \Delta_{TI}) \\ \Delta_{TV} \in \Gamma_{\Delta TV} \\ \Delta_{TI} \in \Gamma_{\Delta TI} \end{array} \right\}$$

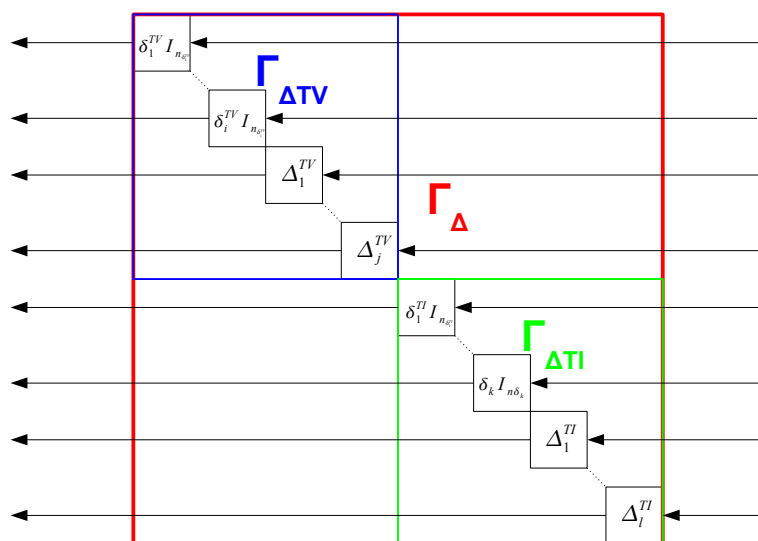
La figure 3.13 illustre les incertitudes considérées dans cette thèse.

Définition des multipliers pour les incertitudes considérées

Comme il a été précisé précédemment, les entrées-sorties du bloc incertain vérifient une contrainte intégrale quadratique, qui va permettre par la suite de formuler des résultats d'analyse de la performance. Cette contrainte quadratique est de la forme suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} p(j\omega) \\ q(j\omega) \end{bmatrix}^T \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} p(j\omega) \\ q(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \geq 0 \quad p = \Delta(q).$$

La matrice $\Pi(j\omega)$ permet de caractériser le type d'incertitude considérée, et est appelée multiplier. Dans cette sous-section, les multipliers caractérisant les contraintes quadratiques pour l'ensemble d'incertitudes Γ_{Δ} sont définis. Ces multipliers sont des combinaisons de multipliers de base pour les incertitudes paramétriques et dynamiques [MR97].


 Figure 3.13 – Ensemble d'incertitudes Γ_{Δ}

L'ensemble de multipliers statiques $\Gamma_{\Pi TV}$ est associé à l'ensemble d'incertitudes temps variantes $\Gamma_{\Delta TV}$.

$$\Gamma_{\Pi TV} = \left\{ \Pi_{TV} \left| \begin{array}{l} \Pi_{TV} = \begin{bmatrix} \Pi_{sTV} & \Pi_{asTV} \\ \Pi_{asTV}^T & -\Pi_{sTV} \end{bmatrix} \\ \Pi_{sTV} = \text{diag}(\text{diag}_i(R_i), \text{diag}_j(r_j I_{n_{\Delta_j^{TV}}})) \\ R_i = R_i^T > 0, R_i \in \mathbb{R}^{n_{\delta_i^{TV}} \times n_{\delta_i^{TV}}}, r_j > 0 \\ \Pi_{asTV} = \text{diag}(\text{diag}_i(S_i), \text{diag}_j(0_{n_{\Delta_j^{TV}}})) \\ S_i = -S_i^T, S_i \in \mathbb{R}^{n_{\delta_i^{TV}} \times n_{\delta_i^{TV}}} \end{array} \right. \right\}$$

L'ensemble de multipliers dynamiques $\Gamma_{\Pi TI}$ est associé à l'ensemble d'incertitudes temps invariantes $\Gamma_{\Delta TI}$.

$$\Gamma_{\Pi TI} = \left\{ \Pi_{TI}(\omega) \left| \begin{array}{l} \Pi_{TI}(\omega) = \begin{bmatrix} \Pi_{sTI}(\omega) & \Pi_{asTI}(\omega) \\ \Pi_{asTI}^T(\omega) & -\Pi_{sTI}(\omega) \end{bmatrix} \\ \Pi_{sTI}(\omega) = \text{diag}(\text{diag}_k(U_k(\omega)), \text{diag}_l(u_l(\omega) I_{n_{\Delta_l^{TI}}})) \\ U_k(\omega) = U_k^*(\omega) > 0, U_k(\omega) \in \mathbb{C}^{n_{\delta_k^{TI}} \times n_{\delta_k^{TI}}}, u_l(\omega) > 0 \\ \Pi_{asTI}(\omega) = \text{diag}(\text{diag}_k(V_k(\omega)), \text{diag}_l(0_{n_{\Delta_l^{TI}}})) \\ V_k(\omega) = -V_k^*(\omega), V_k(\omega) \in \mathbb{C}^{n_{\delta_k^{TI}} \times n_{\delta_k^{TI}}} \end{array} \right. \right\}$$

L'ensemble de multipliers statiques Γ_{Π} est associé à l'ensemble d'incertitudes Γ_{Δ} .

$$\Gamma_{\Pi} = \left\{ \Pi(\omega) \left| \begin{array}{l} \Pi(\omega) = \left[\begin{array}{cc|cc} \Pi_{sTV} & 0 & \Pi_{asTV} & 0 \\ 0 & \Pi_{sTI}(\omega) & 0 & \Pi_{asTI}(\omega) \\ \hline \Pi_{asTV}^T & 0 & -\Pi_{sTV} & 0 \\ 0 & \Pi_{asTI}(\omega)^* & 0 & -\Pi_{sTI}(\omega) \end{array} \right] \\ \Pi_{TV} = \left[\begin{array}{cc} \Pi_{sTV} & \Pi_{asTV} \\ \Pi_{asTV}^T & -\Pi_{sTV} \end{array} \right] \in \Gamma_{\Pi TV} \\ \Pi_{TI}(\omega) = \left[\begin{array}{cc} \Pi_{sTI}(\omega) & \Pi_{asTI}(\omega) \\ \Pi_{asTI}^T(j\omega) & -\Pi_{sTI}(\omega) \end{array} \right] \in \Gamma_{\Pi TI} \end{array} \right\}$$

Ces définitions vont être utilisées dans les résultats d'analyse présentés ci-après.

3.3.2 Analyse du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas

Dans cette section, le problème d'analyse du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas d'un modèle incertain mis sous forme LFT est considéré.

Problème 19. Analyse du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas.

Etant donné γ , tester si pour tout $\Delta \in \Gamma_{\Delta}$, $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ est stable et si :

$$\|\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}\|_{i_2} < \gamma.$$

Par [MR97], nous avons le résultat suivant.

Théorème 15. *Analyse du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas (cas continu).*

Il existe une solution au problème 19 (analyse du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas) s'il existe $\epsilon > 0$,

$\Pi(j\omega) = \left[\begin{array}{cc} \Pi_s(j\omega) & \Pi_{as}(j\omega) \\ \Pi_{as}(j\omega)^* & -\Pi_s(j\omega) \end{array} \right] \in \Gamma_{\Pi}$ tels que $\forall \omega \in \mathbb{R}$, la contrainte (3.8) soit vérifiée.

$$[\diamond]^* \left[\begin{array}{cc|cc} \Pi_s(j\omega) & 0 & \Pi_{as}(j\omega) & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \hline \Pi_{as}(j\omega)^* & 0 & -\Pi_s(j\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}(j\omega) \\ I \end{array} \right] \leq -\epsilon I \quad (3.8)$$

■

Pour un γ donné, ce théorème peut se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation. Le problème d'optimisation est de trouver une matrice de fonctions de transfert $\Pi(j\omega)$ telle que la condition (3.8) soit vérifiée.

Pour prouver la stabilité et vérifier une borne supérieure du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas sur l'opérateur $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$, il est possible de tester chaque fréquence si l'incertitude est temps-invariante (ce qui est possible par optimisation sous contrainte LMI (voir section 3.4.1 page 115)). Si en pratique un échantillonnage assez fin sur l'axe des fréquences peut être suffisant, il est nécessaire de tester toutes les fréquences simultanément pour

garantir une borne supérieure du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas notamment en présence d'incertitudes temps-variantes. Ceci n'est pas possible en pratique.

Si ce théorème est théoriquement intéressant, la question de la faisabilité du test de ses contraintes se pose. Dans un premier temps, la contrainte (3.8) représente en réalité une infinité de contraintes, puisque toutes les fréquences doivent être testées. Dans un second temps, la matrice $\Pi(\omega)$ n'a pas de structure. Si elle est restreinte à un ensemble de matrices de fonctions de transfert rationnelles, toutes les matrices de fonctions de transfert de tout ordre sont candidates. Le problème d'optimisation est donc un problème d'optimisation de dimension infinie.

Pour se ramener à un problème d'optimisation convexe de dimension finie, le multiplicateur est d'abord restreint à un sous-ensemble affine des matrices de fonctions rationnelles d'un ordre donné, dont les pôles sont connus [SF06, Bal02, KS08]. Le problème est alors un problème de dimension semi-infinie avec un nombre infini des contraintes. Le lemme Kalman-Yakubovitch-Popov (KYP) [Ran96] (lemme 7 page 267) permet de se ramener à un problème avec un nombre fini de contraintes et de dimension finie.

Restriction affine du multiplicateur

Le multiplicateur pour les incertitudes de type temps-variant (ensemble $\Gamma_{\Delta TV}$) est de dimension finie : il est composé de matrices dont les dimensions sont connues. En revanche, le multiplicateur pour les incertitudes temps-invariantes (ensemble $\Gamma_{\Delta TI}$) est une matrice fonction de ω . Si cette matrice est une matrice de fonctions de transfert, toutes les matrices de fonctions de transfert de tout ordre sont candidates, ce qui rend le problème de dimension infinie. Pour pallier à ce problème et pouvoir se ramener à un problème d'optimisation pour lequel on dispose d'un algorithme efficace, le multiplicateur pour les incertitudes temps variantes est restreint à un sous-ensemble affine, de la forme $\Pi_r(j\omega) = K(j\omega)^* X K(j\omega)$ où $K(j\omega)$ est une base et où la matrice X appartient à l'ensemble Γ_{XTI} . Ces éléments sont à présent définis ci-après :

Pour les incertitudes TI, l'ensemble Γ_{XTI} va permettre de générer un sous-ensemble de $\Pi_{TI}(\omega)$. Pour générer cet ensemble, la matrice de fonctions de transfert $K_{n_K}(j\omega)$ appelée base du multiplicateur va permettre de générer le sous-ensemble de multiplicateurs.

| | Cas continu | Cas discret |
|------|---|---|
| Base | $K_{n_K}(j\omega) = \frac{\begin{bmatrix} j\omega^n & \dots & j\omega & 1 \end{bmatrix}^T}{f_c(j\omega)} \otimes I$ | $K_{n_K}(e^{j\omega}) = \frac{\begin{bmatrix} e^{j\omega n} & \dots & e^{j\omega} & 1 \end{bmatrix}^T}{f_d(e^{j\omega})} \otimes I$ |

Tableau 3.3 – Base des multiplicateurs

$f_c(j\omega)$ est un polynôme Hurwitz d'ordre n choisi arbitrairement de telle sorte que $K(j\omega)$ soit stable et propre. Dans le cas discret, $f_d(j\omega)$ est un polynôme en $e^{j\omega}$ d'ordre n dont les racines sont à l'intérieur du cercle unité choisi arbitrairement. L'ensemble $\Gamma_{XLT I}$ est défini par :

$$\Gamma_{X_{LTI}} = \left\{ X_{LTI} \left| \begin{array}{l} X_{LTI} = \begin{bmatrix} X_{sLTI} & X_{asLTI} \\ X_{asLTI}^T & -X_{sLTI} \end{bmatrix} \\ X_{sLTI} = \text{diag} \left(\text{diag}_k(X_{sk}), \text{diag}_l(x_l \otimes I_{n_{\Delta_l^{TI}}}) \right) \\ X_{sk} = X_{sk}^T, X_{sk} \in \mathbb{R}^{(n_K+1)n_{\delta_k^{TI}}}, x_l = x_l^T, x_l \in \mathbb{R}^{(n_K+1)} \\ X_{as} = \text{diag} \left(\text{diag}_k(Y_{sk}), \text{diag}_l(0_l) \right) \\ Y_{sk} = -Y_{sk}^T, Y_{sk} \in \mathbb{R}^{(n_K+1)n_{\delta_k^{TI}}} \end{array} \right. \right\}$$

L'ensemble ainsi généré doit être inclus dans l'ensemble des multiplieurs Γ_{TI} . Ceci doit être assuré par l'ajout d'une condition supplémentaire :

$$\forall X \in \Gamma_{X_{TI}}, \begin{bmatrix} K(j\omega) & 0 \\ 0 & K(j\omega) \end{bmatrix}^* X \begin{bmatrix} K(j\omega) & 0 \\ 0 & K(j\omega) \end{bmatrix} \in \Gamma_{\Pi_{LTI}} \Leftrightarrow \overbrace{K(j\omega)X_{sLTI}K(j\omega)}^{\Pi_{sTI}(j\omega)} > 0$$

Pour les incertitudes TV , c'est-à-dire l'ensemble $\Gamma_{\Delta_{TV}}$, le multiplieur est dans l'ensemble $\Gamma_{\Pi_{TV}}$. L'ensemble $\Gamma_{\Pi_{TV}}$ est un ensemble affine de Π_{TV} . L'ensemble $\Gamma_{X_{TV}}$ est introduit :

$$\Gamma_{X_{TV}} = \left\{ X_{TV} \left| \begin{array}{l} X_{TV} = \begin{bmatrix} X_{sTV} & X_{asTV} \\ X_{asTV}^T & -X_{sTV} \end{bmatrix} \\ X_{sTV} = \text{diag} \left(\text{diag}_i(X_{Ri}), \text{diag}_j(x_{rj} I_{n_{\Delta_j^{TV}}}) \right) \\ X_{Ri} = X_{Ri}^T, X_{Ri} \in \mathbb{R}^{n_{\delta_i^{TV}}}, x_{rj} = x_{rj}^T \\ X_{asTV} = \text{diag} \left(\text{diag}_i(Y_{Ri}), \text{diag}_l(0_l) \right) \\ Y_{Ri} = -Y_{Ri}^T, Y_{Ri} \in \mathbb{R}^{n_{\delta_i^{TV}}} \end{array} \right. \right\}$$

$$\forall X_{TV} \in \Gamma_{X_{TV}}, X_{sTV} > 0 \Leftrightarrow X_{LTV} \in \Gamma_{\Pi_{LTV}}$$

L'ensemble Γ_X va permettre de générer l'ensemble Γ_{Π} .

$$\Gamma_X = \left\{ X \left| \begin{array}{l} X = \begin{bmatrix} X_s & X_{as} \\ X_{as}^T & -X_s \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} X_{sTV} & 0 & X_{asTV} & 0 \\ 0 & X_{sTI} & 0 & X_{asTI} \\ \hline X_{asTV}^T & 0 & -X_{sTV} & 0 \\ 0 & X_{asTI}^T & 0 & -X_{sTI} \end{array} \right] \\ X_{TV} = \begin{bmatrix} X_{sTV} & X_{asTV} \\ X_{asTV}^T & -X_{sTV} \end{bmatrix} \in \Gamma_{\Pi_{TV}} \\ X_{TI} = \begin{bmatrix} X_{sTI} & X_{asTI} \\ X_{asTI}^T & -X_{sTI} \end{bmatrix} \in \Gamma_{\Pi_{TI}} \end{array} \right. \right\}$$

Pour que le multiplieur ainsi généré appartienne à l'ensemble Γ_{Π} , la condition suivante doit être vérifiée :

$$\forall X \in \Gamma_X, \quad \overbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & K(j\omega) \end{bmatrix}^* X_s \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & K(j\omega) \end{bmatrix}}^{\Pi_s(j\omega)} > 0 \Leftrightarrow [\diamond]^* X \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K(j\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K(j\omega) \end{bmatrix} \in \Gamma_\Pi$$

Dans la suite de la thèse, la représentation d'état de la matrice de fonctions de transfert $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & K(j\omega) \end{bmatrix}$ sera notée $\left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right]$.

Exemple 3. Exemple d'ensemble Γ_X

Soit une incertitude LTI comprenant un paramètre incertain δ_1 répété deux fois et une incertitude dynamique Δ_1 de taille 2×2 . L'incertitude est la suivante.

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_1 \end{bmatrix}$$

Le multiplicateur dynamique associé à l'incertitude est le suivant :

$$\Pi(j\omega) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} U_{11}(\omega) & U_{12}(\omega) & 0 & 0 & 0 & V_{12}(\omega) & 0 & 0 \\ U_{12}^*(\omega) & U_{22}(\omega) & 0 & 0 & -V_{12}^*(\omega) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u(\omega) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u(\omega) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -V_{12}(\omega) & 0 & 0 & -U_{11}(\omega) & -U_{12}(\omega) & 0 & 0 \\ V_{12}^*(\omega) & 0 & 0 & 0 & -U_{12}^*(\omega) & -U_{22}(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u(\omega) \end{array} \right]$$

Les fonctions de transfert $U_{ij}(j\omega)$ et $u(j\omega)$ sont restreintes à un sous-ensemble affine de fonctions de transfert d'ordre 2 de la forme suivante :

$$\frac{\begin{bmatrix} -j\omega & 1 \end{bmatrix} X_{ii} \begin{bmatrix} j\omega \\ 1 \end{bmatrix}}{f^*(j\omega)f(j\omega)}$$

$$\Pi(j\omega) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\begin{bmatrix} -j\omega & 1 \end{bmatrix} \otimes I_4}{f^*(j\omega)} & 0 \\ \hline 0 & \frac{\begin{bmatrix} -j\omega & 1 \end{bmatrix} \otimes I_4}{f^*(j\omega)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} X_s & X_{as} \\ \hline X_{as}^T & -X_s \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \frac{\begin{bmatrix} j\omega \\ 1 \end{bmatrix}}{f(j\omega)} \otimes I_4 & 0 \\ \hline 0 & \frac{\begin{bmatrix} j\omega \\ 1 \end{bmatrix}}{f(j\omega)} \otimes I_4 \end{array} \right]$$

avec X_s et X_{as} définis de la façon suivante :

$$X_s = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} & x_{56} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{56} & x_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} & x_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{56} & x_{66} \end{bmatrix} \quad X_{as} = \begin{bmatrix} 0 & y_{12} & y_{13} & y_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_{12} & 0 & y_{23} & y_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_{13} & -y_{23} & 0 & y_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_{14} & -y_{24} & -y_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

En utilisant cette restriction, les conditions du théorème 15 deviennent les conditions suivantes :

Théorème 16. *Analyse du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas (forme semi-infinie).*

Il existe une solution au problème 19 page 106 (analyse du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas) s'il existe $\epsilon > 0$, $X \in \Gamma_X$ tels que les contraintes (3.9) et (3.10) soient vérifiées.

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad [\diamond]^* \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & X_s & 0 & 0 & X_{as} & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_{as}^T & 0 & 0 & -X_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{array} \right] \left[\frac{\left[\begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ 0 & K(j\omega) & 0 \end{array} \right] T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}(j\omega)}{\left[\begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ 0 & K(j\omega) & I \end{array} \right]} \right] \leq -\epsilon I \quad (3.9)$$

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & K(j\omega) \end{array} \right]^* X_s \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & K(j\omega) \end{array} \right] > 0 \quad (3.10)$$

■

Le problème d'optimisation présenté par ces deux conditions est un problème d'optimisation de dimension semi-infinie : les variables de décision sont les coefficients de la matrice X . Cette restriction du multiplieur à un sous ensemble affine de matrices de fonctions de transfert permet de se ramener à un nombre fini de variables. Cette restriction introduit du conservatisme qui est réduit si un ordre assez grand est choisi pour la base du multiplieur. Pour un ordre infini, le conservatisme est nul. En pratique, des ordres faibles pour le multiplieur dynamique suffisent pour avoir une réduction du conservatisme conséquente par comparaison à l'utilisation de multiplieurs statiques.

Le problème d'optimisation a toujours un nombre infini de contraintes. Le lemme KYP (lemme 7 page 267) permet de se ramener à un problème d'optimisation de dimension finie. Le résultat est présenté dans le théorème 17.

Théorème 17. *Analyse du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas.*

Il existe une solution au problème 19 page 106 (analyse du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas) s'il existe $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T > 0$ telles que les conditions (3.12) et (3.11) soient vérifiées.

$$[\diamond] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_K & 0 \\ \mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (3.11)$$

$$[\diamond]^T \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \mathbf{P} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{X} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{array} \right] \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C}_q & \tilde{D}_q \\ \tilde{C}_e & \tilde{D}_e \\ 0 & [0 \ I] \end{bmatrix} < 0 \quad (3.12)$$

Avec :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & | & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C}_q & | & \tilde{D}_q \\ \tilde{C}_e & | & \tilde{D}_e \\ \hline 0 & | & [0 \ I] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & 0 & 0 & | & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C_q & | & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A & | & B_p & B_w \\ \hline 0 & C_K & D_K C_q & | & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} \\ C_K & 0 & 0 & | & D_K & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_e & | & D_{ep} & D_{ew} \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & I \end{bmatrix}$$

■

Démonstration. Théorème 17 (Analyse du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas)

La représentation d'état de la matrice de fonctions de transfert présente dans l'équation (3.9) est la suivante :

$$\left[\frac{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & K(j\omega) \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}(j\omega)}{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & K(j\omega) \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}} \right] = \begin{bmatrix} A_K & 0 & 0 & | & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C_q & | & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A & | & B_p & B_w \\ \hline 0 & C_K & D_K C_q & | & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} \\ 0 & 0 & C_e & | & D_{ep} & D_{ew} \\ C_K & 0 & 0 & | & D_K & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & I \end{bmatrix}$$

La contrainte (3.12) est obtenue par application du lemme KYP (lemme 7 page 267) sur la contrainte (3.9). La contrainte (3.11) est obtenue par application du lemme KYP sur la contrainte (3.10), ce qui complète la démonstration. \square

Le théorème 17 présente des contraintes LMI. Tester ces contraintes peut se faire sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI et peut se faire efficacement.

On dispose donc d'un outil d'analyse efficace pour tester une borne supérieure sur le pire-cas du \mathcal{L}_2 -gain d'une matrice de fonctions de transfert incertaines.

- Dans le cas nominal, en l'absence d'incertitudes, ce théorème donne les conditions du lemme réel borné (lemme 1). Dans le cas de l'analyse, les conditions du lemme réel borné sont des contraintes LMI. Le chapitre 2 a montré qu'à partir de ces résultats d'analyse, le problème de synthèse d'estimateur donnait des contraintes BMI, que l'on pouvait linéariser dans le cas nominal. Le problème de synthèse de correcteur donne également des contraintes BMI, que l'on peut linéariser dans le cas nominal [GA94, SGC97]. Dans le cas robuste, les problèmes de synthèse se posent comme des problèmes d'optimisation sous contrainte BMI. Il sera alors nécessaire de se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte LMI si cela est possible pour disposer de conditions de synthèse testables efficacement. Par exemple, ce théorème est un point de départ pour des résultats de synthèse de filtres robustes [SF06].
- La seconde remarque que l'on peut faire sur ce théorème est qu'il donne une condition suffisante de stabilité relativement à un ensemble d'incertitudes en l'absence de considérations de performance. Le résultat est formulé dans le corollaire 4.

Corollaire 4. *Stabilité robuste*

Pour tout $\Delta \in \Gamma_\Delta$, $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ est stable s'il existe $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T > 0$ telles que les conditions (3.14) et (3.13) soient vérifiées.

$$[\diamond] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_K & 0 \\ \mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (3.13)$$

$$[\diamond]^T \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \mathbf{P} & 0 \\ \mathbf{P} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{X} \end{array} \right] \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C}_q & \tilde{D}_q \end{bmatrix} < 0 \quad (3.14)$$

Avec :

$$\left[\begin{array}{cc|c} \tilde{A} & \tilde{B} & \\ \tilde{C}_q & \tilde{D}_q & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} A_K & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C_q & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A & B_p & B_w \\ \hline 0 & C_K & D_K C_q & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} \\ C_K & 0 & 0 & D_K & 0 \end{array} \right]$$

□

Un théorème d'analyse discret peut être dérivé de la même manière que le théorème présenté dans le cas continu. Ce théorème et sa démonstration sont disponibles en annexe G page 261.

3.3.3 Analyse de la norme H_2 pire-cas

Dans cette section, le problème de l'analyse de la performance H_2 d'un opérateur incertain est considéré.

Problème 20. Analyse de la norme H_2 pire-cas.

Etant donné γ , tester si pour tout $\Delta \in \Gamma_\Delta$, $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ est stable et si :

$$\|\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}\|_2 < \gamma.$$

En se basant sur [Bal02, SK06, KS08], le résultat d'analyse suivant peut être formulé :

Théorème 18. Analyse de la norme H_2 pire-cas [SK08].

Il existe une solution au problème 20 (Analyse de la norme H_2 pire-cas) s'il existe

$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T$ telles que les contraintes (3.16), (3.17), (3.18), (3.15) soient vérifiées.

$$D_{qw} = 0 \quad D_{ew} = 0 \quad \text{Trace}(\mathbf{S}) < \gamma^2 \quad (3.15)$$

$$[\diamond]^T \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P} & 0 & 0 \\ \mathbf{P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C}_q & \tilde{D}_q \\ \tilde{C}_e & \tilde{D}_e \end{bmatrix} < 0 \quad (3.16)$$

$$[\diamond] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_K & 0 \\ \mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (3.17)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_w \end{bmatrix} \\ [0 \ 0 \ B_w^T] \mathbf{P} & \mathbf{S} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.18)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C}_q & \tilde{D}_q \\ \tilde{C}_e & \tilde{D}_e \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} A_K & 0 & 0 & B_K \\ 0 & A_K & B_K C_q & B_K D_{qp} \\ 0 & 0 & A & B_p \\ \hline 0 & C_K & D_K C_q & D_K D_{qp} \\ C_K & 0 & 0 & D_K \\ \hline 0 & 0 & C_e & D_{ep} \end{array} \right]$$



La démonstration de ce théorème est disponible en annexe C page 239. Dans cette sous-section, un théorème permettant de tester une borne supérieure sur le pire-cas d'une norme H_2 d'un opérateur incertain a été présenté. Le théorème 18 permet de tester une borne supérieure sur la performance pire-cas H_2 d'un opérateur incertain continu. Le théorème 34 permet de tester une borne supérieure sur la performance pire-cas H_2 d'un opérateur incertain discret et est disponible en annexe G.

- Ce théorème a été présenté dans [Bal02] (article servant de base à la démonstration donnée en annexe C page 239).
- Ce théorème sert également de point de départ pour la synthèse de filtres robustes dans [SK06, SK08].
- En l'absence de considérations de performance, ce théorème donne également une condition suffisante de stabilité.

3.3.4 Conclusion

Dans cette section, deux théorèmes d'analyse ont été présentés.

- Le théorème 17 permet de tester efficacement une borne supérieure sur le pire-cas du \mathcal{L}_2 -gain d'un opérateur incertain continu. Ce théorème recoupe le lemme 1 page 29 en l'absence d'incertitude.
- Le théorème 17 permet de tester efficacement une borne supérieure sur le pire-cas de la norme H_2 d'un opérateur incertain continu. Ce théorème recoupe le lemme 2 page 29 en l'absence d'incertitude.

La table 3.4 présente le tableau des objectifs complété par les résultats présentés dans cette section.

Cette section a présenté une extension des résultats d'analyse des modèles LTI présentés dans la section 2.2 permettant l'analyse de la norme H_∞ (lemme 1 page 29) et de la norme H_2 (lemme 2). Les résultats présentés dans cette section vont permettre d'obtenir des résultats de synthèse dans le cas robustes comme les résultats d'analyse dans le cas nominal ont permis d'obtenir une approche unifiée de l'estimation nominale.

Les résultats pour l'analyse des systèmes incertains discrets sont également donnés dans cette thèse dans l'annexe G page 261.

3.4 Autres résultats d'analyse pour les modèles incertains LTI

Dans cette section, seules des incertitudes de type TI sont considérées. Par conséquent ($\Delta \in \Gamma_{\Delta TI}$), l'opérateur $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ est une matrice de fonctions de transfert incertaines et admet une réponse fréquentielle.

| | Estimation nominale | Estimation robuste |
|-------------------------------------|--|--|
| Mise en forme et analyse | | |
| Modéliser le système et les signaux | Modèle LTI (section 1.2.2 et 1.2.3 page 5) | Modèle incertain avec des incertitudes paramétriques et des incertitudes dynamiques mis sous la forme d'une représentation LFT |
| Caractériser l'erreur d'estimation | Normes H_2 et H_∞ (pondérée ou non) (section 1.2.4 page 10) | Normes H_2 et H_∞ (pondérée ou non) pire-cas |
| Outils d'analyse efficaces | Lemme 1 page 29 (norme H_∞), Lemme 2 page 29 (norme H_2). | Théorème 17 page 110 (\mathcal{L}_2 -gain), théorème 18 page 113 (norme H_2) |

Tableau 3.4 – Objectifs du chapitre 3

Cette section présente plusieurs théorèmes d'analyse permettant de compléter les résultats d'analyse pour les systèmes incertains et ouvrir de larges perspectives pour la synthèse robuste (voir chapitre 4). Dans le chapitre 2, une analyse fréquence par fréquence a permis de dégager une limite inférieure de la performance. Cette limite de performance a permis de comparer les estimateurs H_∞ et H_2 , puis de dégager des méthodes de synthèse de pondérations de l'erreur d'estimation.

3.4.1 Analyse à une fréquence donnée

La contrainte (3.8) page 106 donnée par le théorème 15 page 106 peut être testée efficacement à une pulsation ω_0 donnée. Ceci permet de connaître pour cette pulsation une borne supérieure de la valeur singulière pire-cas du modèle. Par analogie avec ce qui a été présenté pour l'estimation dans le cas nominal, cela va permettre de tester une borne supérieure sur le pire cas de la densité spectrale de puissance des signaux de sortie.

Le multiplicateur dynamique $\Pi_{TI}(j\omega)$ est pour une seule pulsation une matrice complexe $\Pi_{TI}(j\omega_0)$ qui peut s'écrire sous la forme $\Pi(j\omega_0) = \Pi^{Re} + i\Pi^{Im}$. Π^{Re} appartient à l'ensemble $\Gamma_{\Pi^{Re}}$, défini équation (3.19).

$$\Gamma_{\Pi^{Re}} = \left\{ \Pi^{Re} \left| \begin{array}{l} \Pi^{Re} = \begin{bmatrix} X^{Re} & Y^{Re} \\ Y^{ReT} & -X^{Re} \end{bmatrix} \\ X^{Re} = \text{diag}(\text{diag}_k(X_k^{Re}), \text{diag}_l(x_k^{Re} I_{n_{\Delta_l^{TI}}})) \\ X^{Re} = X^{ReT} > 0, X^{Re} \in \mathbb{R}^{n_{\delta_l^{TI}} \times n_{\delta_l^{TI}}}, x_k^{Re} > 0 \\ Y^{Re} = \text{diag}(\text{diag}_k(Y_k^{Re}(\omega_0)), \text{diag}_l(0_{n_{\Delta_l^{TI}}})) \\ Y_k^{Re} = -Y_k^{ReT}, Y_k^{Re}(\omega_0) \in \mathbb{R}^{n_{\delta_l^{TI}} \times n_{\delta_l^{TI}}} \end{array} \right. \right\} \quad (3.19)$$

Π^{Im} appartient à l'ensemble $\Gamma_{\Pi^{Im}}$, défini équation 3.20.

$$\Gamma_{\Pi^{Im}} = \left\{ \Pi^{Im} \left| \begin{array}{l} \Pi^{Im} = \begin{bmatrix} Y^{Im} & X^{Im} \\ X^{Im} & -Y^{Im} \end{bmatrix} \\ Y^{Im} = \text{diag}(\text{diag}_k(Y_k^{Im}), \text{diag}_l(0_{n_{\Delta_l^{TI}}})) \\ Y_k^{Im} = -Y_k^{ImT}, Y_k^{Im} \in \mathbb{R}^{n_{\delta_l^{TI}} \times n_{\delta_l^{TI}}} \\ X^{Im} = \text{diag}(\text{diag}_k(X_k^{Im}), \text{diag}_l(0_{n_{\Delta_l^{TI}}})) \\ X_k^{Im} = X_k^{ImT}, X_k^{Im} \in \mathbb{R}^{n_{\delta_l^{TI}} \times n_{\delta_l^{TI}}} \end{array} \right. \right\} \quad (3.20)$$

Un exemple de matrice Π est donné pour un bloc d'incertitude composée de 2 incertitudes paramétriques et une incertitude dynamique :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_1 \end{bmatrix}$$

Pour cette incertitude, la matrice Π est définie de la façon suivante :

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_s & \Pi_{as} \\ -\Pi_{as} & -\Pi_s \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \Pi_s &= \Pi_s^* > 0, & \Pi_s &= \Pi_s^{Re} + i\Pi_s^{Im} \\ \Pi_{as} &= -\Pi_{as}^*, & \Pi_{as} &= \Pi_{as}^{Re} + i\Pi_{as}^{Im}. \end{aligned}$$

La structure des matrices pour ce type d'incertitudes est la suivante :

$$\Pi_s^{Re} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \quad \Pi_s^{Im} = \begin{bmatrix} 0 & -b_{12} & 0 & 0 \\ b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{as}^{Re} = \begin{bmatrix} 0 & -c_{12} & 0 & 0 \\ c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Pi_{as}^{Im} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ces matrices seront les variables du problème d'optimisation.

A une pulsation donnée, le théorème 15 peut être réécrit sous la forme suivante :

Etant donné γ , ω_0 , pour tout $\Delta \in \Gamma_\Delta$, $\bar{\sigma}(\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}(j\omega_0)) < \gamma$ s'il existe $\epsilon > 0$, $\Pi^{Re} \in \Gamma_{\Pi^{Re}}$, $\Pi^{Im} \in \Gamma_{\Pi^{Im}}$ telles que la contrainte (3.21) soit vérifiée.

$$[\diamond]^* \left[\begin{array}{c|cc} \Pi^{Re} + i\Pi^{Im} & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} T_{(p,w) \rightarrow (q)}(j\omega_0) \\ [I \ 0] \\ \hline T_{(p,w) \rightarrow (e)}(j\omega_0) \\ [0 \ I] \end{array} \right] \leq -\epsilon I \quad (3.21)$$

Cette contrainte est une contrainte LMI complexe, qui peut être transformée en une contrainte LMI réelle en utilisant le théorème 30 page 223. Le résultat est formulé théorème 19. Dans ce théorème la partie réelle de la réponse fréquentielle de la matrice de fonctions de transfert $T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ est noté de la façon suivante (dans une version décomposée)

$$T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}(j\omega_0) = \left[\begin{array}{c} T_{(p,w) \rightarrow (q)}^{Re}(j\omega_0) \\ \hline T_{(p,w) \rightarrow (e)}^{Re}(j\omega_0) \end{array} \right] + i \left[\begin{array}{c} T_{(p,w) \rightarrow (q)}^{Im}(j\omega_0) \\ \hline T_{(p,w) \rightarrow (e)}^{Im}(j\omega_0) \end{array} \right]$$

Théorème 19. *Analyse de la valeur singulière maximale pire-cas fréquence par fréquence.*

Donné γ , ω_0 , pour tout $\Delta \in \Gamma_\Delta$, $\bar{\sigma}(\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}(j\omega_0)) < \gamma$ s'il existe $\Pi^{Re} \in \Gamma_{\Pi^{Re}}$, $\Pi^{Im} \in \Gamma_{\Pi^{Im}}$ telles que la contrainte suivante soit vérifiée.

$$[\diamond]^T \left[\begin{array}{c|cc|c|cc} \Pi^{Re} & 0 & 0 & \Pi^{Im} & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\Pi^{Im} & 0 & 0 & \Pi^{Re} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{c} T_{(p,w) \rightarrow (q)}^{Re}(j\omega_0) \\ [I \ 0] \\ \hline T_{(p,w) \rightarrow (e)}^{Re}(j\omega_0) \\ [0 \ I] \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} T_{(p,w) \rightarrow (q)}^{Im}(j\omega_0) \\ 0 \\ \hline T_{(p,w) \rightarrow (e)}^{Im}(j\omega_0) \\ 0 \end{array} \right] \\ \hline - \left[\begin{array}{c} T_{(p,w) \rightarrow (q)}^{Im}(j\omega_0) \\ 0 \\ \hline T_{(p,w) \rightarrow (e)}^{Im}(j\omega_0) \\ 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} T_{(p,w) \rightarrow (q)}^{Re}(j\omega_0) \\ [I \ 0] \\ \hline T_{(p,w) \rightarrow (e)}^{Re}(j\omega_0) \\ [0 \ I] \end{array} \right] \end{array} \right] < 0$$

■

Ce résultat permet de tester une borne supérieure sur les valeurs singulières d'une matrice de fonctions de transfert incertaines. Ce théorème permettra de calculer efficacement une borne sur la densité spectrale de puissance des signaux de sortie.

Ce théorème peut être appliqué sur un système continu ou discret. Nous verrons que pour la synthèse, ce théorème sera le point de départ d'une extension du filtre non-causal présenté pour le cas nominal théorème 14 page 64.

3.4.2 Analyse de la valeur singulière maximale pire-cas pour une bande de fréquences

La solution formulée fréquence par fréquence dans la sous-section précédente nécessite d'être testée en faisant un échantillonnage sur les fréquences. Il est donc nécessaire de tester une infinité de fréquences pour avoir une garantie de performance. Ceci étant impossible en pratique, il est possible d'omettre des fréquences pour lesquelles le système a un comportement particulier. Pour pallier à ceci, nous proposons une solution qui va permettre de tester toutes les fréquences, en divisant l'espace des fréquences en un nombre fini d'intervalles. Le résultat est présenté pour le cas continu dans le théorème 20

Théorème 20. *Analyse de la valeur singulière maximale pire-cas pour une bande de fréquences.*

Soit un intervalle de fréquence $[\omega_1; \omega_2]$. Etant donné γ , ω_0 , pour tout $\Delta \in \Gamma_\Delta, \forall \omega \in [\omega_1; \omega_2]$, $\bar{\sigma}(\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}(j\omega)) < \gamma$ s'il existe

$$\begin{aligned}
 - \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X \\
 - \mathbf{P}^{\text{Re}} &= \mathbf{P}^{\text{Re}T}, \mathbf{P}^{\text{Im}} = -\mathbf{P}^{\text{Im}T} \quad \mathbf{Q}^{\text{Re}} = \mathbf{Q}^{\text{Re}T} > 0, \mathbf{Q}^{\text{Im}} = -\mathbf{Q}^{\text{Im}T}, \mathbf{Q}^{\text{Re}} + i\mathbf{Q}^{\text{Im}} > 0 \\
 - \mathbf{P}_K^{\text{Re}} &= \mathbf{P}_K^{\text{Re}T}, \mathbf{P}_K^{\text{Im}} = -\mathbf{P}_K^{\text{Im}T} \quad \mathbf{Q}_K^{\text{Re}} = \mathbf{Q}_K^{\text{Re}T} > 0, \mathbf{Q}_K^{\text{Im}} = -\mathbf{Q}_K^{\text{Im}T}
 \end{aligned}$$

telles que les conditions (3.22) et (3.23) soient vérifiées

| Bande de fréquences | Toutes fréquences | basses fréquences | hautes fréquences |
|---|---------------------------------------|--|--|
| $[\omega_1; \omega_2] = [\omega_b; \omega_l]$ | $[\omega_1; \omega_2] = [0; +\infty]$ | $[\omega_1; \omega_2] = [0; \omega_l]$ | $[\omega_1; \omega_2] = [\omega_h; +\infty]$ |
| $\alpha = -1, \beta = -\omega_b\omega_l$ | $\alpha = 0, \beta = 0$ | $\alpha = -1, \beta = \omega_l^2$ | $\alpha = 1, \beta = -\omega_h^2$ |
| $\chi = \frac{\omega_b + \omega_l}{2}$ | $\chi = 0$ | $\chi = 0$ | $\chi = 0$ |

$$\begin{bmatrix} \Phi^{\text{Re}} & \Phi^{\text{Im}} \\ -\Phi^{\text{Im}} & \Phi^{\text{Re}} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.22)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \Phi^{\text{Re}} &= [\circ] \begin{bmatrix} \beta \mathbf{Q}^{\text{Re}} & \chi \mathbf{Q}^{\text{Im}} + \mathbf{P}^{\text{Re}} & 0 & 0 & 0 \\ -\chi \mathbf{Q}^{\text{Im}} + \mathbf{P}^{\text{Re}} & \alpha \mathbf{Q}^{\text{Re}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C}_q & \tilde{D}_q \\ \tilde{C}_e & \tilde{D}_e \\ 0 & [0 \quad I] \end{bmatrix} < 0 \\
 \Phi^{\text{Im}} &= [\circ] \begin{bmatrix} \beta \mathbf{Q}^{\text{Im}} & -\chi \mathbf{Q}^{\text{Re}} + \mathbf{P}^{\text{Im}} \\ \chi \mathbf{Q}^{\text{Re}} + \mathbf{P}^{\text{Im}} & \alpha \mathbf{Q}^{\text{Im}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{B} \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} \Phi_K^{\text{Re}} & \Phi_K^{\text{Im}} \\ -\Phi_K^{\text{Im}} & \Phi_K^{\text{Re}} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

Avec :

$$\Phi_K^{Re} = [\diamond]^T \begin{bmatrix} \beta \mathbf{Q}_K^{Re} & \chi \mathbf{Q}_K^{Im} + \mathbf{P}_K^{Re} & 0 \\ -\chi \mathbf{Q}_K^{Im} + \mathbf{P}_K^{Re} & \alpha \mathbf{Q}_K^{Re} & 0 \\ 0 & 0 & X_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} < 0$$

$$\Phi_K^{Im} = [\diamond]^T \begin{bmatrix} \beta \mathbf{Q}_K^{Im} & -\chi \mathbf{Q}_K^{Re} + \mathbf{P}_K^{Im} \\ \chi \mathbf{Q}_K^{Re} + \mathbf{P}_K^{Im} & \alpha \mathbf{Q}_K^{Im} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \end{bmatrix} < 0$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C}_q & \tilde{D}_q \\ \hline \tilde{C}_e & \tilde{D}_e \\ 0 & [0 \ I] \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} A_K & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C_q & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A & B_p & B_w \\ \hline 0 & C_K & D_K C_q & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} \\ C_K & 0 & 0 & D_K & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_e & D_{ep} & D_{ew} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right]$$

■

Ce théorème permet de tester une borne supérieure sur les valeurs singulières d'une matrice de fonctions de transfert sur des intervalles de fréquences. Contrairement au théorème 19 qui nécessite de tester une infinité de fréquences, le théorème 20 va permettre de tester l'ensemble des fréquences en un nombre fini d'opérations.

Démonstration. Théorème 20 (Analyse de la valeur singulière maximale pire-cas pour une bande de fréquences)

Le KYP généralisé (théorème 38 page 268) peut être appliqué sur les contraintes du théorème 16 page 110. Les contraintes (3.9) page 110 et (3.10) page 110 sont alors transformées en contraintes LMI complexes. Ces dernières peuvent être transformées en contraintes LMI réelles en appliquant le théorème 30 page 223. Par application de ces deux résultats, la contrainte (3.9) page 110 devient la contrainte (3.22). La contrainte (3.10) page 110 devient la contrainte (3.23), ce qui complète la démonstration. □

Ce théorème peut facilement s'obtenir pour le cas discret. Il est présenté dans l'annexe G page 261.

3.4.3 Conclusion

Dans cette sous-section, deux théorèmes d'analyse ont été présentés.

Le théorème 19 permet de tester la condition (3.8) page 106 à une fréquence donnée. Ce théorème permet donc de tester une borne supérieure de la valeur singulière maximale pire-cas d'un opérateur incertain.

Le résultat donné par le théorème 19 peut pour certaines applications être insuffisant. Aussi fin soit l'échantillonnage choisi, il est impossible de garantir un résultat global [Hel95]. Pour remédier à ceci, le théorème 20 permet de tester les mêmes bornes mais pour des bandes de fréquences. Ceci va permettre de détecter des effets de l'incertitude que le résultat du théorème 19 peut manquer. Tester une bande de fréquences avec le théorème 20 est plus coûteux en temps de calcul que tester une fréquence avec le théorème 19. Tester plusieurs bandes de fréquences, voire des bandes de fréquences

assez fines peut rendre le temps de calcul assez conséquent. Toutefois, en testant une seule fréquence, un grand nombre de fréquences doivent potentiellement être testées, ce qui peut également être coûteux. Selon l'application, les théorèmes 19 et 20 sont donc complémentaires. Choisir l'un ou l'autre est une affaire de compromis. Les combinaisons des deux ont un potentiel certain.

D'un point de vue synthèse, l'analyse fréquence par fréquence ou par bandes de fréquences, va permettre d'étendre les résultats présentés dans la section 2.4, pour la synthèse de la réponse fréquentielle optimale du filtre (théorème 14). Ces théorèmes sont formulés dans la thèse puisqu'ils permettent l'analyse précise d'une matrice de fonctions de transfert incertain comme l'exemple le montrera.

3.5 Exemples d'applications

3.5.1 Analyse de la réponse fréquentielle d'une fonction de transfert incertaine

Nous présentons ici un exemple académique de modèle incertain. Le modèle incertain étudié dans cet exemple est une fonction de transfert du second ordre à laquelle s'ajoute une incertitude multiplicative en sortie. Le modèle incertain considéré est une fonction de transfert incertain $T_{(w) \rightarrow (y)}$ présentée figure 3.14.

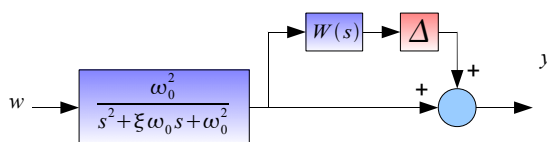


Figure 3.14 – Exemple pour l'analyse

Les paramètres ω et ξ de la fonction de transfert du second ordre sont incertains. Ce sont des paramètres incertains TI. Leur intervalle de variation est connu.

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega_c + \omega_{gab} \delta_\omega, & \omega_c &= 1, & \omega_{gab} &= 0.2, & \delta_\omega &\in [-1; 1] \\ \xi &= \xi_c + \xi_{gab} \delta_\xi, & \xi_c &= 0.3, & \xi_{gab} &= 0.1, & \delta_\xi &\in [-1; 1] \end{aligned}$$

La figure 3.15 présente les modules des fonctions de transfert du second ordre obtenues lorsqu'on réalise un échantillonnage sur l'intervalle de variation des paramètres incertains ω_0 et ξ . Les paramètres incertains ont naturellement un impact sur la position de la fréquence de résonance et son amortissement.

La fonction de transfert incertaine du second ordre dépend des paramètres incertains δ_ω et δ_ξ . Elle est notée $G_1(\delta_\omega, \delta_\xi, s)$ et peut se mettre sous une forme LFT de la forme

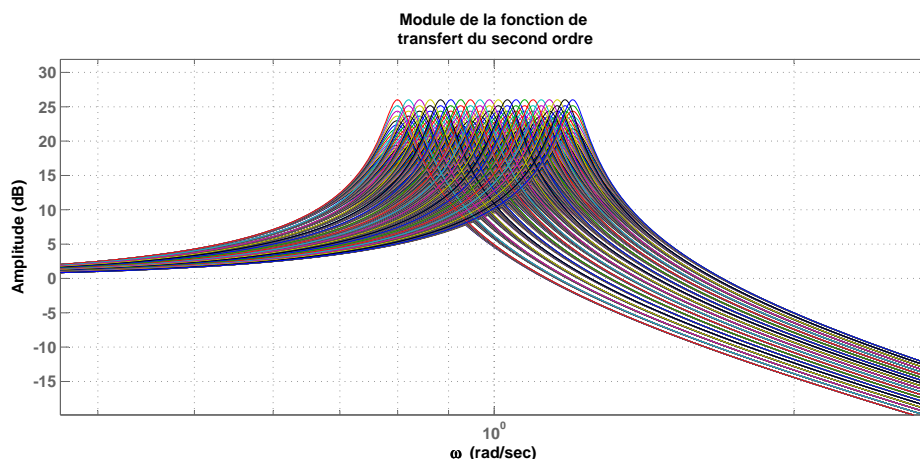


Figure 3.15 – Impact des incertitudes paramétriques

suivante :

$$\begin{bmatrix} \delta\omega & 0 & 0 \\ 0 & \delta\omega & 0 \\ 0 & 0 & \delta\xi \end{bmatrix} \star G_t(s).$$

La matrice de fonctions de transfert $G_t(s)$ admet la représentation d'état suivante :

$$G_t(s) = \left[\begin{array}{cc|ccc} -\xi\omega_c & -1 & -\xi & 0 & 1 & 1 \\ \omega_c^2 & 0 & \omega_c & 1 & 0 & 0 \\ \hline \omega_{gab} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{gab}\omega_c & 0 & \omega_{gab} & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{gab}\omega_c & 0 & \xi_{gab} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} A_G & B_{Gp} & B_{Gw} \\ \hline C_{Gq} & D_{Gqp} & D_{Gqw} \\ \hline C_{Gy} & D_{Gyp} & D_{Gyw} \end{array} \right].$$

La pondération $W(s)$ pour l'incertitude admet la fonction de transfert suivante :

$$W(s) = \frac{0.1s^2}{0.1s^2 + 0.03s + 1}.$$

Le module de cette pondération est présenté figure 3.16, dans l'affichage de gauche. Cette pondération permet de modéliser un mode de flexion d'ordre supérieur ignoré dans la modélisation. La pondération admet une représentation d'état de la forme suivante :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_W & B_W \\ \hline C_W & D_W \end{array} \right].$$

Δ est une incertitude dynamique TI de norme H_∞ inférieure à 1. L'impact de l'incertitude dynamique est présenté figure 3.16. L'incertitude est composée de fonctions de transfert d'ordre 4 générées aléatoirement.

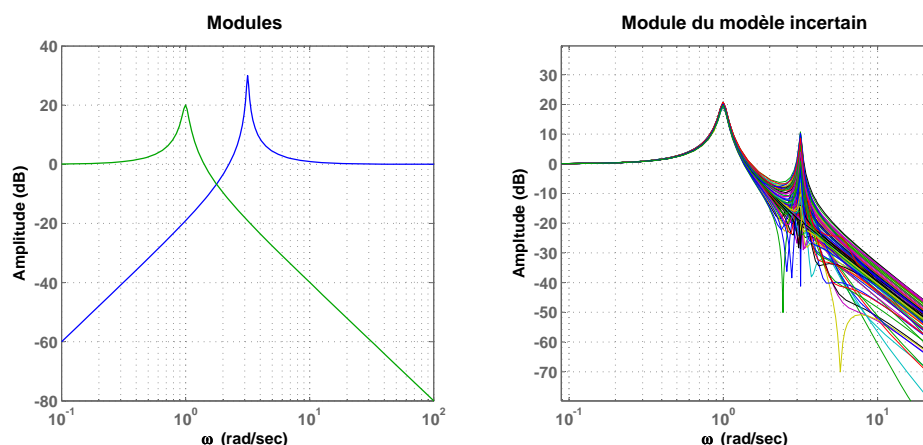


Figure 3.16 – Impact des incertitudes dynamiques

La fonction de transfert incertaine peut se mettre sous la forme d'une LFT d'un bloc incertain et d'un bloc nominal $T_{(p,w) \rightarrow (q,y)}$. La forme LFT est présentée équation (3.24) :

$$T_{(w) \rightarrow (y)}(\delta_\omega, \delta_\xi, \Delta, s) = \begin{bmatrix} \delta_\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix} \star T_{(p,w) \rightarrow (q,y)}(s) \quad (3.24)$$

Le modèle nominal $T_{(p,w) \rightarrow (q,y)}(s)$ admet la représentation d'état suivante :

$$T_{(p,w) \rightarrow (q,y)}(s) = \left[\begin{array}{c|c|c} A & B_p & B_w \\ \hline C_q & D_{qp} & D_{qw} \\ \hline C_y & D_{yp} & D_{yw} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc|c} A_G & 0 & B_{Gp} & 0 & B_{Gw} \\ B_W C_{Gy} & A_W & B_W D_{Gyp} & 0 & B_W D_{Gyw} \\ \hline C_{Gq} & 0 & D_{Gqp} & 0 & D_{Gqw} \\ D_W C_{Gy} & C_W & D_W D_{Gyp} & 0 & D_W D_{Gyw} \\ \hline C_{Gy} & 0 & D_{Gyp} & 1 & D_{Gyw} \end{array} \right]$$

La figure 3.17 présente le module de modèles choisis aléatoirement dans l'ensemble de modèles défini par le modèle incertain. Cette figure illustre l'impact de toutes les incertitudes. Cela permet également de montrer que des systèmes complexes peuvent être décrits en combinant divers types d'incertitudes.

Les théorèmes présentés dans cette section permettent de tester une borne supérieure sur la valeur singulière pire-cas qui correspond au pire-cas du module dans ce cas. Les sous-sections suivantes présentent l'application des résultats d'analyse présentés dans cette section pour tester le module de la fonction de transfert incertaine présentée équation (3.24).

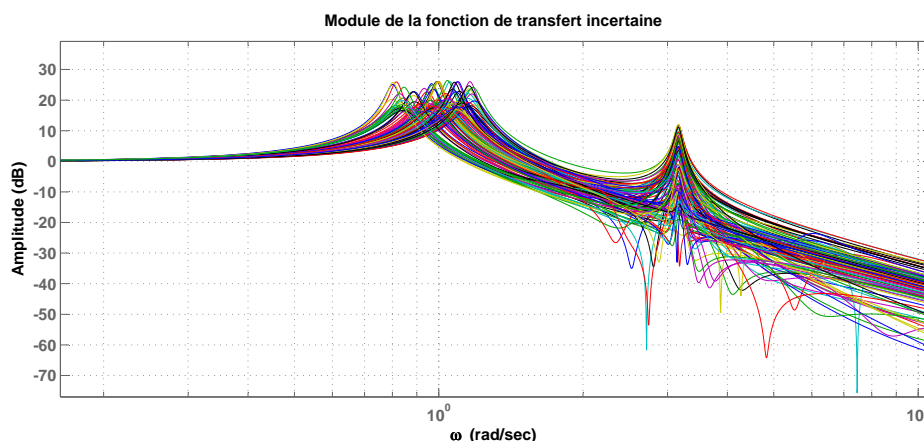


Figure 3.17 – Impact de toutes les incertitudes sur la fonction de transfert

Application du théorème 17 (Analyse du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas)

Le théorème 17 page 110 permet de calculer un gabarit supérieur sur le module d'une fonction de transfert incertaine (Cas LTI/SISO). Ce théorème est appliqué sur le modèle incertain présenté équation (3.24) page 122.

Par la suite, γ est minimisé sous les contraintes du théorème, ce qui va permettre de calculer un gabarit supérieur sur le module de la fonction de transfert incertaine. Le calcul d'une borne supérieure sur la norme H_∞ pire-cas (gabarit supérieur constant) d'une fonction de transfert est présenté. Il est également possible de tester une norme pondérée, par ajout de pondération sur la sortie.

La norme H_∞ pire-cas de la fonction de transfert incertaine est testée en minimisant γ sous les contraintes du théorème 17 page 110.

Pour le choix de la base des multipliers dynamiques, la base est choisie sous la forme suivante :

$$K(j\omega) \otimes I_4 \quad K(j\omega) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^n} \\ \vdots \\ \frac{1}{(s+1)} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Le choix des pôles est arbitraire : il est possible de choisir des bases de natures différentes (par exemple [Bal02, KS08, SF06] utilisent des bases différentes). Cependant, si on choisit un ordre suffisamment grand, le choix de ces pôles n'a plus d'importance. De manière générale, placer un pôle dans une zone de fréquences où l'incertitude est influente donnera de bons résultats. Ici, pour des raisons de simplicité, le pôle choisi est -1 , avec une multiplicité n .

Pour tester la validité de ce résultat, et le conservatisme associé, une borne supérieure de la norme H_∞ pire-cas est calculée au moyen du théorème 17 page 110 en utilisant différents ordres de multipliers (différentes valeurs de n). Le tableau 3.5 donne les

| n | 1 | 2 | 3 | 5 | Borne inférieure |
|----------|------|------|------|------|------------------|
| γ | 79.4 | 23.4 | 23.4 | 23.4 | 21.3 |

Tableau 3.5 – Résultats d’optimisation : borne supérieure de la valeur singulière pire-cas pour un ordre de multiplieur donné

bornes supérieures sur le module données par le résultat du problème d’optimisation en fonction de l’ordre n du multiplieur. Une borne inférieure est également calculée en prenant un très grand nombre de modèles choisis aléatoirement dans l’ensemble de modèles.

Pour illustrer la borne supérieure sur le module donnée par ce résultat d’optimisation, la figure 3.18 montre le module de modèles particuliers choisis dans l’ensemble décrit par le modèle incertain, ainsi que la borne garantie sur ce module.

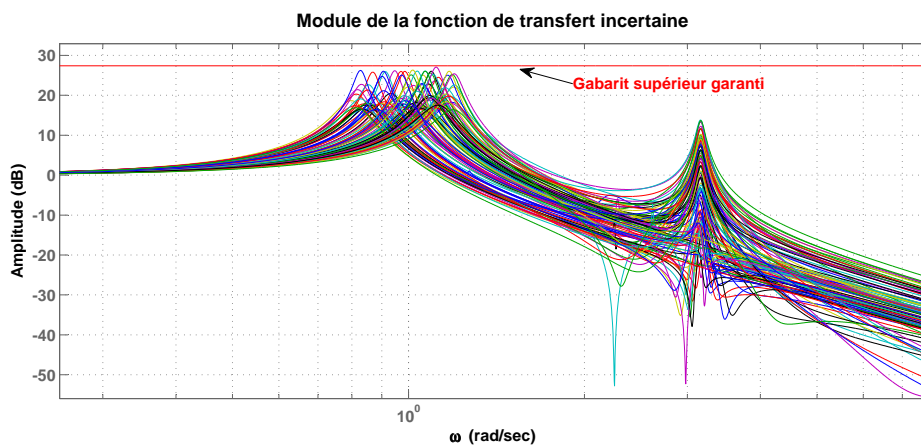


Figure 3.18 – Gabarit supérieur garanti par le théorème 17

Application du théorème 19 (Analyse de la valeur singulière maximale pire-cas fréquence par fréquence)

Le théorème 19 page 117 permet de tester une borne supérieure sur le module d’une fonction de transfert incertaine à une pulsation donnée. Ce théorème est appliqué sur le modèle incertain, avec un échantillonnage en fréquence (linéaire en échelle logarithmique). Les résultats d’optimisation sont présentés dans la figure 3.19.

Les résultats donnés par le calcul ici montrent que la borne supérieure calculée est très peu conservatrice à une pulsation donnée. En revanche il est nécessaire de tester un grand nombre de fréquences pour avoir une idée précise. Il sera impossible de garantir une propriété générale du modèle en raison de la discrétisation de l’espace des fréquences pour le test. Cet outil reste cependant un très bon outil pour l’analyse.

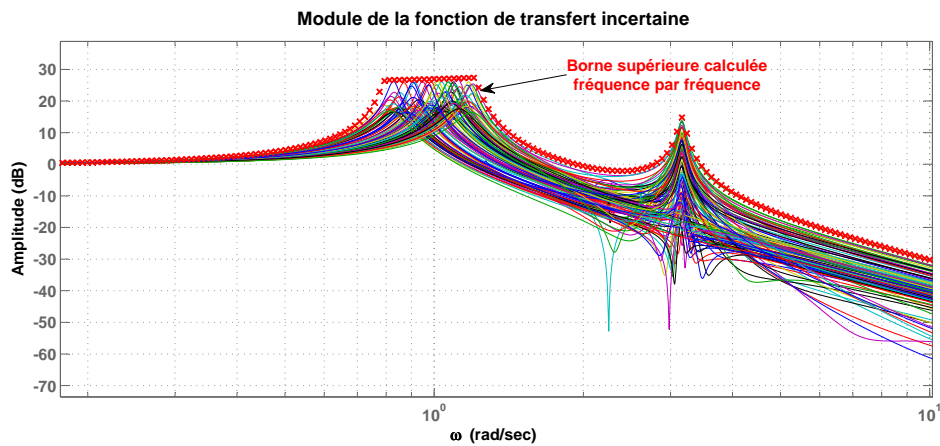


Figure 3.19 – Gabarit supérieur garanti par le théorème 19 (Analyse fréquence par fréquence)

Application du théorème 20 (Analyse de la valeur singulière maximale pire-cas pour une bande de fréquences)

Pour finir sur l'analyse des systèmes, l'analyse par bandes de fréquences permet de pallier aux problèmes du théorème 19 (analyse fréquence par fréquence). Le coût algorithmique est toutefois plus élevé en raison du plus grand nombre de variables du problème d'optimisation. Le théorème 20 page 118 (Analyse de la valeur singulière maximale pire-cas pour une bande de fréquences) est appliqué sur la fonction de transfert incertaine de l'exemple. Les bandes de fréquences sont des bandes de largeur constante sur une échelle logarithmique. Les gabarits garantis sur le module sont représentés figure 3.20.

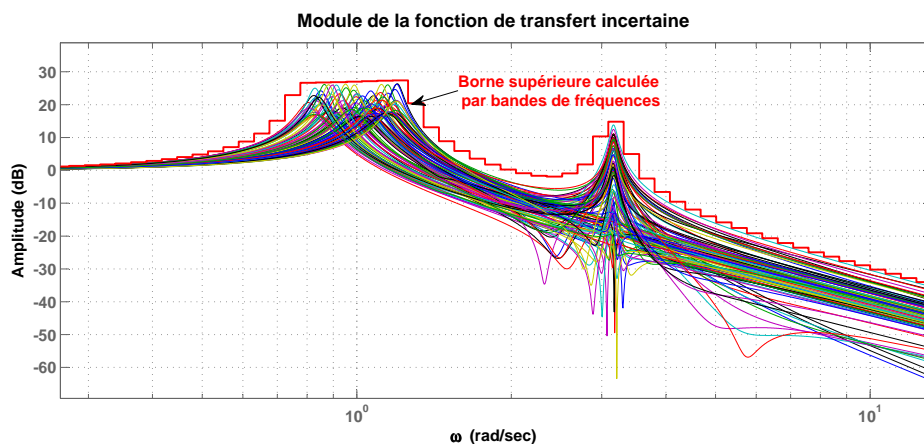


Figure 3.20 – Gabarit supérieur garanti par le théorème 20 (Analyse de la valeur singulière maximale pire-cas pour une bande de fréquences)

Si les bandes de fréquences ont été choisies arbitrairement, le choix par des méthodes algorithmiques peut faire l'objet d'une étude. Ce résultat peut être relié au résultat présenté dans [Hel95] pour le calcul de la borne supérieure de μ par bandes de fréquences.

3.5.2 Dégradation de la performance

Cette sous-section présente l'analyse de la dégradation de la performance atteinte par les estimateurs nominaux en présence d'incertitudes.

Le modèle pour l'estimation est défini par :

$$\begin{bmatrix} \delta_\omega & 0 & 0 \\ 0 & \delta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & \delta_\xi \end{bmatrix} \star G_t(s).$$

La matrice de fonctions de transfert $G_t(s)$ admet la représentation d'état suivante :

$$G_t(s) = \left[\begin{array}{c|c|c} A & B_p & B_w \\ \hline C_q & D_{qp} & D_{qw} \\ \hline C_z & D_{zp} & D_{zw} \\ \hline C_y & D_{yp} & D_{yw} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|ccc|cc} -\xi\omega_c & -1 & -\xi & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \omega_c^2 & 0 & \omega_c & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \omega_{gab} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{gab}\omega_c & 0 & \omega_{gab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{gab}\omega_c & 0 & \xi_{gab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Dans le cas nominal ($\omega_{gab} = \xi_{gab} = 0$), ce modèle est équivalent au modèle présenté dans l'exemple figurant en fin de chapitre 2. La sortie z doit être estimée à partir de la sortie y .

Un EGN est synthétisé avec la pondération idéale (section 2.4). Les valeurs singulières de $T_{(w) \rightarrow (e)}$ atteintes avec cet estimateur sont représentées figure 2.36 page 81, graphique du bas.

En présence d'incertitudes, les valeurs singulières de $T_{(w) \rightarrow (e)}$ sont dégradées. La figure 3.21 montre le gabarit garanti par la synthèse nominale, et les valeurs singulières atteintes en présence d'incertitudes pour des modèles sélectionnés par un échantillonnage sur les deux paramètres incertains. La dégradation due à l'incertitude est notable.

Au moyen du théorème 17 (Analyse du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas), une borne supérieure sur la norme H_∞ pire-cas est testée, correspondant dans ce cas à un gabarit supérieur constant sur les valeurs singulières de $T_{(w) \rightarrow (e)}$. La borne supérieure garantie pour le modèle incertain par le théorème 17 est tracée en bleu figure 3.22.

En complément, le calcul d'une borne supérieure des valeurs singulières est réalisé fréquence par fréquence au moyen du théorème 19 (Analyse de la valeur singulière maximale pire-cas fréquence par fréquence). Le gabarit supérieur vert montre le gabarit supérieur garanti fréquence par fréquence par le théorème 19 page 117. Il est également

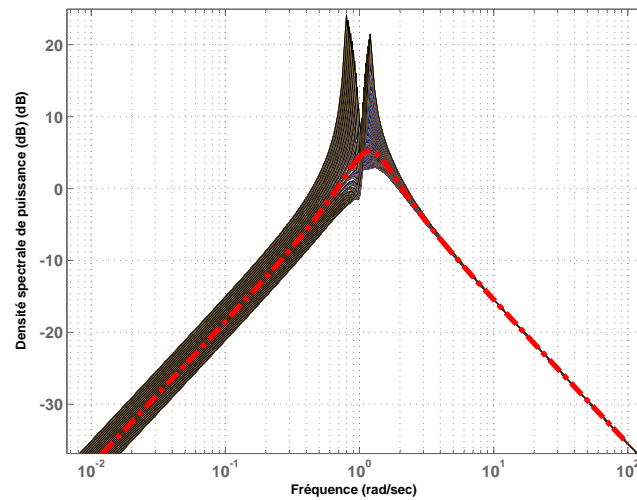


Figure 3.21 – Dégradation de la DSP dûe aux incertitudes

possible de tester un gabarit supérieur pondéré, ou bien la densité spectrale par bandes de fréquences. Les outils présentés dans cette section permettent donc d’analyser la performance robuste atteinte par la synthèse nominale.

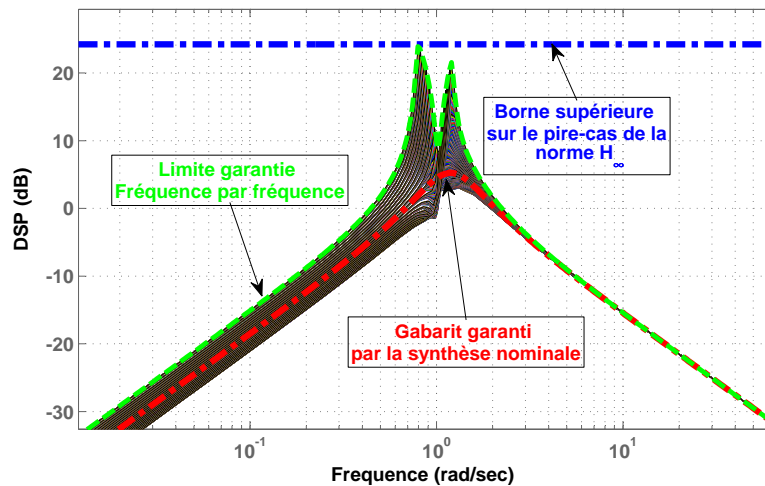


Figure 3.22 – Dégradation de la DSP dûe aux incertitudes

Pour compléter cet exemple, l’étude de la dégradation de la norme H_2 atteinte par l’estimateur nominal en fonction de la taille de l’incertitude est présentée.

En utilisant le théorème 18, la performance robuste atteinte par l’estimateur H_2 nominal est testée pour différentes valeurs de ω_{gab} et de ξ_{gab} (correspondant à la taille de l’incertitude). Une borne inférieure de la performance est également testée par un échantillonnage sur les paramètres incertains δ_ω et δ_ξ . Les résultats sont présentés dans

la figure 3.23 pour un seul paramètre incertain (soit δ_ω soit δ_ξ). La figure 3.24 montre la dégradation de la performance en fonction de la taille des incertitudes. Pour rappel, la norme H_2 garantie par la synthèse nominale est 1.06.

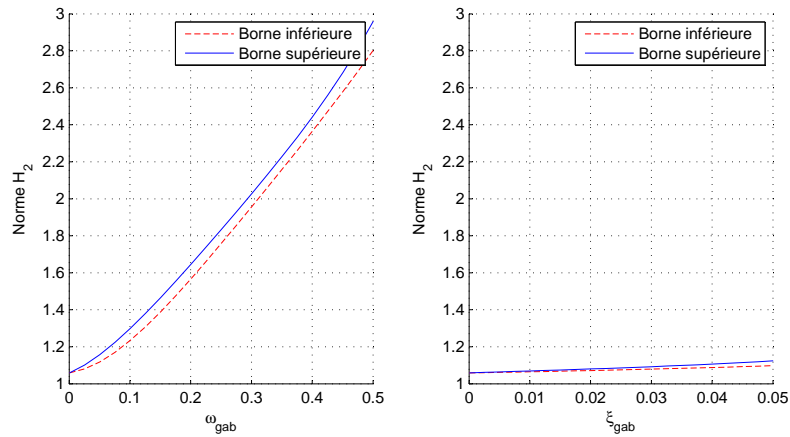


Figure 3.23 – Dégradation de la norme H_2 pour un paramètre incertain

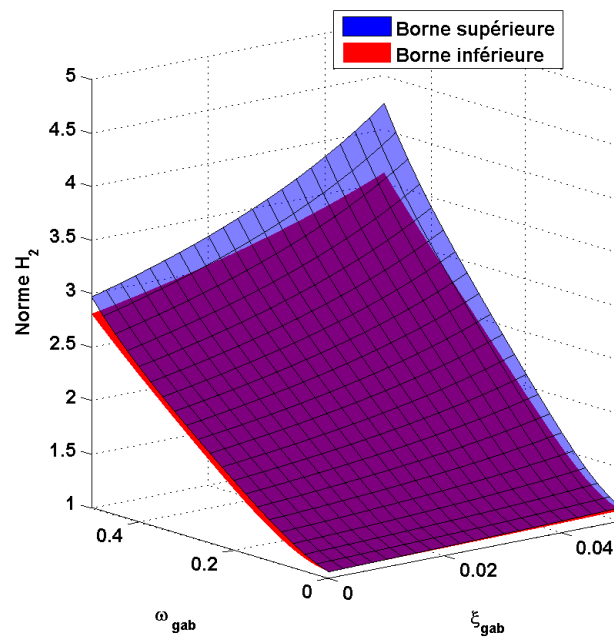


Figure 3.24 – Dégradation de la norme H_2 pour deux paramètres incertains

Au vu de ces deux figures, l'incertitude sur la fréquence ω_0 est beaucoup plus handicapante que l'incertitude sur le coefficient ξ . La combinaison des deux incertitudes est naturellement problématique, dégradant rapidement la performance.

Pour conclure, les outils d'analyse présentés dans cette section permettent d'analyser la performance robuste des estimateurs nominaux. Par exemple, ces outils peuvent être

combinés avec les méthodes de synthèse nominale présentées en chapitre 2, pour mettre au point des méthodes itératives de synthèse d'estimateurs robustes.

3.6 Conclusions sur l'analyse des modèles incertains

Ce chapitre présente la représentation et l'analyse des systèmes incertains pour l'estimation.

Par analogie avec le cas certain, la problématique de l'estimation robuste a été présentée, en montrant comment les incertitudes sur les modèles LTI permettent de décrire un ensemble de systèmes.

Dans le cas nominal, l'erreur d'estimation est caractérisée par une norme sur une matrice de fonctions de transfert. Dans le cas robuste, les normes H_∞ et H_2 sont étendues par le \mathcal{L}_2 -gain pour la norme H_∞ et par un critère \mathcal{L}_2 sur la réponse impulsionnelle du modèle incertain pour la norme H_2 .

Par la suite, les principales approches pour la synthèse d'estimateurs ont été présentées. Ces trois approches (approche par incertitudes non-structurées, approche polytopique, approche LFT) peuvent être comparées en confrontant leur capacité de description de modèles incertains, ainsi que les outils d'analyse qui y sont associés.

La représentation LFT associée aux approches entrées-sorties est le mode de représentation le plus général, et des outils d'analyse efficaces existent pour ce type de représentation. C'est donc ce mode de représentation et les outils d'analyse associés qui sont choisis dans la thèse. Cadrant parfaitement avec notre objectif d'étendre de manière systématique les outils du cas certain, les outils d'analyse présentés dans ce chapitre sont des extensions des outils pour l'analyse des matrices de fonctions de transfert présentés dans le chapitre 2.

Les théorèmes présents dans ce chapitre qui vont permettre l'extension des méthodes nominales à l'estimation robuste sont les suivants :

- Théorème 17 (Calcul d'une borne supérieure du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas)
Ce théorème présente des conditions LMI qui peuvent se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation convexe. Ce théorème permet d'étendre le lemme réel borné (lemme 1 page 29) qui permet d'analyser la norme H_∞ d'une matrice de fonctions de transfert.
- Théorème 18 (Calcul d'une borne supérieure de la norme H_2 pire-cas)
Ce théorème présente des conditions LMI qui peuvent se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation convexe. Ce théorème permet d'étendre le lemme 2 page 29 qui permet d'analyser la norme H_2 d'une matrice de fonctions de transfert.
- Théorème 19 (Calcul d'une borne supérieure des valeurs singulières)
Ce théorème présente des conditions LMI qui peuvent se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation convexe. Ce théorème propose un problème d'optimisation convexe qui permet de tester une borne supérieure sur les valeurs singulières

d'une matrice de fonctions de transfert. Par exemple, dans le cas d'un modèle MISO, ce théorème permet de tester une borne supérieure sur la densité spectrale de puissance du signal de sortie à une fréquence donnée. L'analyse fréquence par fréquence a permis de dégager des méthodes de synthèse de pondération de l'erreur d'estimation pour l'estimation H_∞ . Nous verrons dans le chapitre 4 que ce théorème permet d'étendre ce résultat pour l'estimation robuste.

- Théorème 20 (Calcul d'une borne supérieure des valeurs singulières sur une bande de fréquences)

Ce théorème permet de tester une borne supérieure sur les valeurs singulières d'une matrice de fonctions de transfert, pour des intervalles de fréquences choisis. Ce théorème propose une alternative au théorème 19, permettant de tester toutes les fréquences pour un coût plus élevé en terme de calculs.

Tous les théorèmes présentés dans cette partie sont des théorèmes permettant d'analyser des modèles incertains continus. Leurs pendants discrets sont présentés en annexes G page 261.

Ces théorèmes ont été appliqués sur un exemple pour illustrer leur potentiel. En les combinant aux outils du cas certain, ces outils peuvent permettre par exemple de créer des méthodes itératives de synthèse d'estimateurs : ils permettent d'analyser la performance atteinte avec un estimateur nominal sur un modèle incertain, comme nous le verrons dans l'exemple du chapitre 4. Mais principalement, ces résultats d'analyse peuvent être transformés en résultats de synthèse.

Pour conclure sur ce chapitre, le tableau 3.6 présente les objectifs complétés par cette partie.

| | Estimation nominale | Estimation robuste |
|-------------------------------------|--|--|
| Mise en forme et analyse | | |
| Modéliser le système et les signaux | Modèle LTI (section 1.2.2 et 1.2.3 page 5) | Modèle incertain avec des incertitudes paramétriques et des incertitudes dynamiques mis sous la forme d'une représentation LFT |
| Caractériser l'erreur d'estimation | Normes H_2 et H_∞ (pondérée ou non) (section 1.2.4 page 10) | Normes H_2 et H_∞ (pondérée ou non) pire-cas |
| Outils d'analyse efficaces | Lemme 1 page 29 (norme H_∞), Lemme 2 page 29 (norme H_2). | Théorème 17 page 110 (\mathcal{L}_2 -gain), théorème 18 page 113 (norme H_2) |

Tableau 3.6 – Bilan de l'analyse des systèmes incertains

Chapitre 4

Synthèse d'estimateurs robustes

4.1 Introduction

Dans cette section, l'extension des méthodes de synthèse d'estimateurs du cas certain au cas robuste est traitée. Les extensions décrites dans ce chapitre sont détaillées tableau 4.1.

En se basant sur les résultats d'analyse présentés dans la sous-section 2.2.2 page 29, le chapitre 2 page 21 a présenté la synthèse des structures classiques : le filtre et l'observateur à gain statique. En raison des limitations de ces deux structures, des extensions ont été proposées : l'Observateur à Gain Dynamique et l'Estimateur Généralisé Nominal. Ces extensions peuvent également être synthétisées par optimisation sous contrainte LMI.

Par la suite, le calcul d'une réponse fréquentielle idéale pour l'estimateur dans le cas nominal a été décrit dans la section 2.4 page 62. Cette réponse fréquentielle idéale est calculée de manière analytique et minimise pour toutes les fréquences la densité spectrale de puissance de l'erreur. Ce résultat donne une limite de performance pour l'estimation, des outils de synthèse de pondération de l'erreur d'estimation et une réponse fréquentielle de référence pour l'estimateur.

Les résultats pour l'estimation nominale sont basés sur les résultats d'analyse des modèles LTI, présentés dans la sous-section 2.2.2 page 29. En se basant sur les résultats exposés dans le chapitre 3, section 3.3 page 102, Ces résultats obtenus pour l'estimation nominale vont être étendus à l'estimation robuste.

4.1.1 Organisation du chapitre

Le chapitre est organisé en 6 sections.

| | Estimation nominale | Estimation robuste |
|---|--|--|
| Synthèse d'estimateur | | |
| Capacité à transformer ces outils d'analyse en outils de synthèse | Section 2.2 page 28, avec les outils de l'annexe A | Possibilité de transformer les outils d'analyse du chapitre 3 en outils efficaces de synthèse ? |
| Synthèse de la structure filtre | Synthèse H_2 , H_∞ , H_∞ pondérée | Synthèse efficace de filtres pour le \mathcal{L}_2 -gain pire cas ? Pour la norme H_2 pire-cas ? |
| Synthèse de la structure observateur à gain statique | Synthèse H_2 , H_∞ | Synthèse efficace d'OGS pour le \mathcal{L}_2 -gain pire cas ? Pour la norme H_2 pire-cas ? |
| Synthèse de la structure observateur à gain dynamique | Synthèse H_2 , H_∞ | Synthèse efficace d'OGD pour le \mathcal{L}_2 -gain pire cas ? Pour la norme H_2 pire-cas ? |
| Synthèse d'estimateur généralisé nominal | Synthèse H_2 , H_∞ , H_∞ pondérée | Synthèse efficace d'EGN pour le \mathcal{L}_2 -gain pire cas ? Pour la norme H_2 pire-cas ? |
| Analyse de la performance de l'estimation | | |
| Synthèse de la réponse fréquentielle optimale (analyse de la performance des estimateurs) | Théorème 14 page 64 | Synthèse efficace de la réponse fréquentielle optimale ? |
| Choix des pondérations pour l'estimation H_∞ | Section 2.4 page 62 | Calcul d'une limite de performance permettant le choix des pondérations possible ? |

Tableau 4.1 – Bilan de l'estimation nominale

- Dans la première section (section 4.2), un état de l’art de l’estimation utilisant l’approche LFT/IQCs est proposé. Cette partie présente également les contributions de ce chapitre pour l’estimation robuste.
- Dans une seconde partie (section 4.3), un problème de synthèse particulier est proposé. Des solutions à ce problème sont présentées sous la forme de problèmes d’optimisation sous contrainte LMI. Ces solutions permettent l’extension systématique des résultats de l’estimation nominale à l’estimation robuste.
- En se basant sur les solutions du problème traité section 4.3, les sections 4.4 (synthèse de filtres robustes) et 4.5 (synthèse d’observateurs robustes) étendent les structures classiques à l’estimation robuste en conservant le caractère efficace de la synthèse.
- Pour finir, la section 4.6 page 177 propose une extension des résultats présentés pour l’estimation nominale dans la section 2.4 page 62 (filtre optimal, limite de performance et choix des pondérations).

4.2 Approche LFT/IQCs de l’estimation robuste

Dans le cas nominal, le problème de synthèse de filtres est un cas particulier du problème de synthèse de correcteurs pour lequel des solutions efficaces existent [DGKF89, Iwa94, GA94]. Des estimateurs utilisant la structure observateur peuvent également être synthétisés par optimisation sous contrainte LMI [LF97].

Le problème de synthèse d’estimateurs robustes peut être vu comme un cas particulier d’un problème de synthèse général, dont la forme standard est présentée figure 4.1. Ce problème recouvre énormément de problèmes de synthèse, comme celui de correcteur robuste par exemple. Dans la suite de cette thèse, ce problème est appelé problème général de synthèse robuste.

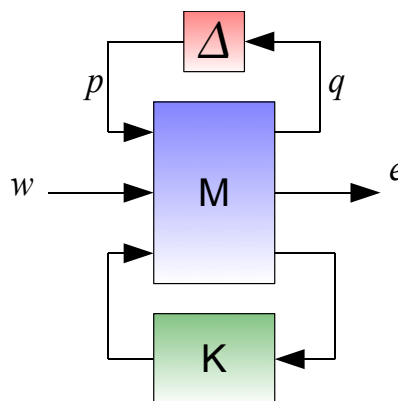


Figure 4.1 – Forme standard d’un problème général de synthèse robuste

En se basant sur le cadre permettant l'analyse des modèles incertains utilisant des multiplieurs [LCG95], le problème général de synthèse robuste peut être formulé comme un problème d'optimisation sous contrainte BMI. Dans le cas nominal, ce problème peut être ramené à un problème d'optimisation sous contrainte LMI. Ce n'est malheureusement plus possible dans le cadre robuste [Sch09b] dans le cas le plus général.

Cette impossibilité explique le développement de méthodes itératives pour la synthèse de correcteurs robustes (μ -synthèse [LB94], D-K itérations) ou de relaxations [Sch06] pour se ramener à un problème d'optimisation pour lequel un algorithme efficace existe. La seconde conséquence est la recherche de cas particuliers de ce problème général de synthèse robuste pour lesquels des solutions efficaces existent.

Pour certains cas particuliers de la forme standard du problème général de synthèse robuste, la transformation du problème d'optimisation sous contrainte BMI en problème d'optimisation sous contrainte LMI est possible. Un certain nombre de résultats existent notamment pour la synthèse de filtres robustes.

Les premiers résultats pour la synthèse de filtres robustes ne prennent pas en compte de pondération sur l'erreur d'estimation. La forme standard du problème de synthèse de filtres robustes (sans pondération) est présentée figure 4.2.

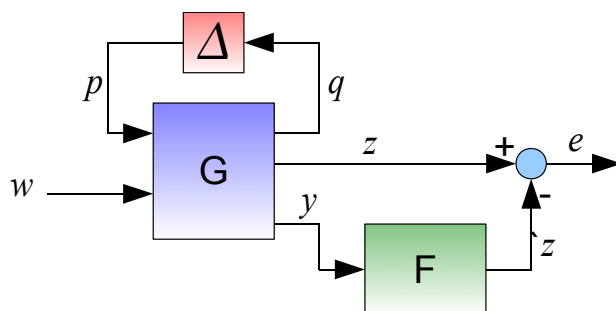


Figure 4.2 – Forme standard du problème de synthèse de filtres robustes

Dans [LF97], une méthode de synthèse de filtres garantissant une norme H_∞ est proposée pour une incertitude structurée satisfaisant une IQC statique¹. Dans cet article, la représentation d'état du modèle incertain dépend de l'incertitude de façon linéaire. Dans [SP05, Sun04], la synthèse de filtres robustes garantissant une borne supérieure sur une norme H_2 ou une norme H_∞ est considérée. Ces résultats peuvent être interprétés en termes d'IQC statique pour des incertitudes dynamiques et paramétriques de type TV. La représentation est une représentation LFT permettant d'avoir une dépendance rationnelle de la représentation d'état envers l'incertitude. Toutefois, en raison de l'utilisation d'IQCs statiques, ces résultats sont potentiellement conservatifs pour des incertitudes de type TI.

1. Une IQC où la matrice Π ne dépend pas de ω

La prise en compte d'IQCs dynamiques pour la synthèse de filtres robustes est proposée en parallèle dans [SK06] (synthèse de filtres robustes H_2) et dans [SF06] (synthèse de filtres robustes \mathcal{L}_2 -gain). Ces méthodes proposent de prendre en compte les IQCs dynamiques en les factorisant sous la forme présentée dans le chapitre 3, section 3.3 page 102. La solution de [SK06] considère une IQC générale. La solution proposée dans [SF06] propose une factorisation particulière pour des incertitudes paramétriques/dynamiques TI/TV identiques à celles considérées dans cette thèse. Une méthode pour prendre en compte des pondérations des erreurs d'estimation est proposée dans [SF06], permettant de se ramener à un problème sans pondération. Toutefois, la solution proposée est non-optimale en terme d'ordre. Ces résultats pour la synthèse de filtres ont été complétés dans [SK08], proposant une solution avec des IQCs générales, pour la synthèse de filtres robustes garantissant une borne supérieure sur la norme H_2 pire-cas ou le \mathcal{L}_2 -gain pire-cas de l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$. La pondération de l'erreur d'estimation est traitée de manière optimale en terme d'ordre dans [VKS08].

Tous ces résultats concernent la synthèse de filtres dans le cas continu. Le cas discret est abordé dans [LF97] où une méthode de synthèse de filtres robustes est proposée (IQCs statiques et dépendance linéaire). Il est également abordé dans [BHS10] pour la synthèse de filtres à pôles fixés recouvrant par exemple la synthèse de filtres FIR. Le cas discret est donc très peu abordé.

Dans ces méthodes, les incertitudes considérées sont de différentes natures. Dans [SK06, SK08], le bloc incertain est décrit par une IQC très générale. Dans [SF06], l'incertitude est uniquement composée d'incertitudes paramétriques/dynamiques TV/TI. Une IQC est décrite pour des incertitudes paramétriques avec des variations bornées dans [VKS08]. Pour finir, l'incertitude considérée dans [BHS10] est une incertitude paramétrique liée à l'identification du procédé, décrite par une ellipse. Du point de vue de la méthode de synthèse de l'estimateur, la paramétrisation de l'IQC ne change pas les opérations permettant de transformer le problème d'optimisation sous contrainte BMI en un problème d'optimisation sous contrainte LMI.

Cette transformation du problème sous contrainte BMI en un problème d'optimisation sous contrainte LMI est faite au moyen d'une multiplication congruente puis par un changement de variables dans [SK06, SK08, VKS08]. Dans [SF06], une paramétrisation particulière de la matrice \mathbf{P} (voir théorème 17 page 110) permet d'utiliser directement un changement de variables simple pour aboutir à un problème d'optimisation sous contraintes LMI. Une solution par lemme d'élimination (lemme 5 page 223) est également proposée dans cet article. La principale difficulté technique de la synthèse d'estimateurs robustes est de trouver la séquence des multiplications congruentes, des paramétrisations des variables, des changements de variables et des autres opérations permettant de se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte LMI.

Toutes ces approches proposent des méthodes de synthèse de filtres (largement étudiées), et laissent entrevoir le potentiel de l'approche LFT/IQC pour la synthèse d'es-

timateurs. Les cas \mathcal{L}_2 -gain [SF06], H_2 [SK06] ont été résolus dans le cas continu avec des IQCs dynamiques (les plus générales) et une prise en compte optimale des pondérations [VKS08]. Nous rappelons ces résultats dans la section 4.4 page 151. En revanche, les résultats restent à formuler dans le cas discret où seule la synthèse à pôles fixés a été formulée. Ce chapitre présente des résultats exhaustifs pour la synthèse de filtres robustes, en présentant les cas continus, H_∞ , H_2 , avec des pôles libres ou des pôles fixés. Les théorèmes analogues au cas continu pour le cas discret sont formulés dans l'annexe G page 261, permettant de compléter l'approche LFT/IQC de la synthèse de filtres robustes, ce qui constitue une autre contribution de cette thèse.

Un point important est que la structure proposée pour la synthèse de l'estimateur est systématiquement une structure filtre. Dans le cas nominal, cette structure ne permet pas la synthèse pour des systèmes instables, contrairement aux structures de type observateur. Nous avons présenté dans [BBS11] une nouvelle structure étendant les observateurs. La synthèse de cette structure est un autre cas particulier de la forme standard du problème de contrôle robuste pour lequel il est possible de se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte LMI. La synthèse proposée dans [BBS11] est faite au moyen du lemme d'élimination et garantit une norme \mathcal{L}_2 -gain sur l'erreur d'estimation. Ce chapitre propose une approche complète pour la synthèse de cette structure, pour les cas continu et discret, pour le \mathcal{L}_2 -gain et la norme H_2 .

D'autres cas particuliers du problème général de synthèse robuste mènent à des problèmes d'optimisation sous contrainte LMI. Un cas particulier intéressant est proposé dans [DS10], dont la forme standard est présentée dans la figure 4.3. Dans cette thèse, ce problème est appelé problème général de synthèse d'estimateurs robustes.

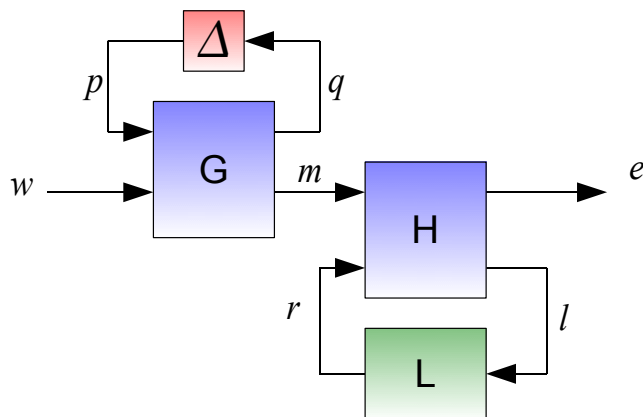


Figure 4.3 – Forme standard du problème général de synthèse d'estimateurs robustes

Ce problème de synthèse consiste à trouver la matrice de fonctions de transfert L garantissant une norme pire-cas sur l'opérateur incertain $T_{(w) \rightarrow (e)}$. Pour cette forme standard, il est possible de se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte LMI. Originellement proposé pour synthétiser un correcteur permettant de rejeter des

perturbations incertaines ([DS10]), cette forme standard recouvre les formes standards de la plupart des problèmes de synthèse d'estimateurs robustes, comme par exemple la synthèse de filtres sans pondération de l'erreur d'estimation [SF06, SK08], la synthèse de filtres avec pondération [VKS08], la synthèse d'observateurs robustes [BBS11]. La solution proposée dans [DS10] est une solution pour la synthèse garantissant un \mathcal{L}_2 -gain pire-cas.

La principale contribution de cette thèse est de formuler des solutions pour ce problème de synthèse, pour le \mathcal{L}_2 -gain, la norme H_2 , dans les cas continu et discret (voir section 4.3). Par la suite, les formes standards des problèmes de synthèse d'estimateurs pour les différentes structures étant des cas particuliers, les solutions formulées pour ce problème sont également des solutions pour la synthèse de filtres et d'observateurs robustes. La résolution de ce problème de synthèse permet donc de proposer une approche complète de la synthèse d'estimateurs robustes.

4.3 Un problème particulier de synthèse

Dans cette section, un problème de synthèse appelé problème de synthèse général d'estimateurs robustes est considéré. La forme standard de ce problème de synthèse est présentée figure 4.4 et est définie par :

$$T_{w \rightarrow e} = (H \star L)(\Delta \star G)$$

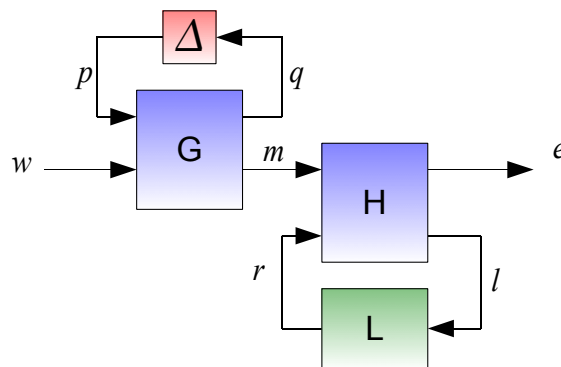


Figure 4.4 – Forme standard du problème de synthèse général d'estimateur robuste

L'objectif est de synthétiser la matrice de fonctions de transfert L de telle sorte qu'une norme donnée soit garantie (ou minimisée) sur l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$. Les éléments de la forme standard (figure 4.4) sont définis de la façon suivante :

- $G = T_{(p,w) \rightarrow (q,m)}$ et $H = T_{(m,r) \rightarrow (e,l)}$ sont définies comme des matrices de fonctions de transfert sans structure particulière. Leurs représentations d'état sont données par :

$$G = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_p & B_w \\ \hline C_q & D_{qp} & D_{qw} \\ C_m & D_{mp} & D_{mw} \end{array} \right], \quad H = \left[\begin{array}{c|cc} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ \hline H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{array} \right].$$

- Δ est un bloc incertain structuré, qui appartient à l'ensemble d'incertitudes Γ_Δ , défini dans le chapitre 3, section 3.3 page 102. Ce bloc incertain peut contenir des incertitudes paramétriques et dynamiques TI/TV.
- La matrice de fonctions de transfert L est à synthétiser. C'est une matrice de fonctions de transfert sans structure particulière. Une représentation d'état est donnée par :

$$L = \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_L & D_L \end{array} \right].$$

- L'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$ est donné par $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ où $T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ admet la représentation d'état suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} A & 0 & 0 & [B_p & B_w] \\ (H_{12} + H_{13}D_L H_{32})C_m & H_{11} + H_{13}D_L H_{31} & H_{13}C_L & (H_{12} + H_{13}D_L H_{32}) [D_{mp} & D_{mw}] \\ B_L H_{32} C_m & B_L H_{31} & A_L & B_L H_{32} [D_{mp} & D_{mw}] \\ \hline C_q & 0 & 0 & [D_{qp} & D_{qw}] \\ (H_{22} + H_{23}D_L H_{32})C_m & H_{21} + H_{23}D_L H_{31} & H_{23}C_L & (H_{22} + H_{23}D_L H_{32}) [D_{mp} & D_{mw}] \end{array} \right] \quad (4.1)$$

En l'absence d'incertitudes (cas nominal), cette forme standard recouvre un certain nombre d'autres formes standards. En voici quelques exemples :

- En choisissant $\Delta \star G = I$, cette forme standard recouvre la forme standard du problème de synthèse de correcteur nominal.
- La forme standard du problème de synthèse de filtres peut être retrouvée de deux manières. La première consiste à dire que c'est un cas particulier du contrôle :

$$\Delta \star G = I \quad \left[\begin{array}{c|cc} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ \hline H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc|c} A & 0 & B_w & 0 \\ \hline B_W C_z & A_W & B_W D_z & -B_W \\ \hline D_W C_z & C_W & D_W D_z & -C_W \\ C_y & 0 & D_y & 0 \end{array} \right]$$

Cette forme standard peut également être retrouvée en l'absence d'incertitudes et en choisissant G et H de la façon suivante.

$$G = \left[\begin{array}{c|cc} A & [] & B_w \\ \hline [] & [] & [] \\ C_z & [] & D_z \\ C_y & [] & D_y \end{array} \right] \quad H = \left[\begin{array}{c|cc|c} A_W & B_W & 0 & -B_W \\ \hline C_W & D_W & 0 & -D_W \\ 0 & 0 & I & 0 \end{array} \right]$$

- En tant que cas particulier du contrôle, la synthèse d’OGD est également recouverte par ce problème de synthèse. Nous verrons par la suite que ce problème recouvre également l’extension des observateurs aux systèmes incertains proposée dans ce chapitre.

Problème 21. Problème général de synthèse d’estimateur robuste.

La forme standard du problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie est l’opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)} = \Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ présenté figure 4.4. $T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ admet la représentation d’état équivalente présentée équation (4.1) page 138

Etant donné γ , trouver s’il existe une matrice de fonctions de transfert L (et la calculer) telle que $\forall \Delta \in \Gamma_\Delta$, $\Delta \star T_{(w,p) \rightarrow (q,e)}$ soit stable et :

$$\forall \Delta \in \Gamma_\Delta, \quad \|\Delta \star T_{(w,p) \rightarrow (q,e)}\|_i < \gamma.$$

Ce problème de synthèse recouvre l’ensemble des problèmes de synthèse d’estimateurs robustes qui seront présentés par la suite. Ses solution vont permettre une extension systématique des résultats de synthèse d’estimateurs obtenus pour l’estimation nominale à l’estimation robuste.

4.3.1 Philosophie Analyse-synthèse

Les théorèmes de synthèse pour l’estimation nominale sont obtenus à partir des résultats d’analyse donnés par le lemme réel borné 1 page 29 ou le lemme 2 page 29. Par application de ces résultats de synthèse sur les formes standards des problèmes de synthèse, ces résultats d’analyse permettent de formuler des problèmes d’optimisation sous contrainte BMI. Les contraintes sont possiblement linéarisables dans certains cas permettant de se ramener à des conditions de synthèse efficaces. Cette démarche présentée dans la démonstration du théorème 1 page 32 (synthèse de filtre H_∞ nominal) a permis d’obtenir un grand nombre de résultats comme la synthèse de correcteurs H_∞ [GA94, SGC97] ou la synthèse de filtres H_∞ [PK97].

Le chapitre 3 présente une extension des résultats d’analyse du cas certain au cas robuste. Le théorème 17 page 110 (Analyse du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas) est une extension du lemme réel borné (lemme 1 page 29). De la même manière, le théorème 18 page 113 (Analyse de la norme H_2 pire-cas) étend au cas incertain le lemme 2 page 29 (Analyse de la norme H_2). Ces résultats permettent de tester efficacement une borne supérieure sur une norme pire-cas (\mathcal{L}_2 -gain ou norme H_2) d’un opérateur.

Par application de ces résultats d’analyse sur la forme standard présentée figure 4.4, le problème général de synthèse d’estimateurs robustes peut se mettre sous la forme d’un problème d’optimisation sous contrainte BMI. La principale contribution de la thèse est de prouver que ce problème d’optimisation sous contrainte BMI peut se transformer sous la forme d’un problème d’optimisation sous contrainte LMI en utilisant les transformations présentées dans l’annexe A page 223.

Dans un premier temps, des solutions pour les problèmes de synthèse correspondant à cette forme standard pour les normes H_2 et \mathcal{L}_2 -gain sont formulées. Les formes standards des problèmes de synthèse d'estimateurs robustes peuvent être vues comme des cas particuliers de la forme standard présentée figure 4.4. Par conséquent, les solutions formulées pour la synthèse dans cette section seront également des solutions aux problèmes de synthèse d'estimateurs robustes.

4.3.2 Synthèse \mathcal{L}_2 -gain

Théorème 21. *Synthèse générale d'estimateur robuste \mathcal{L}_2 -gain (cas continu).*

Il existe une solution au problème général de synthèse d'estimateurs robustes (problème 21 page 139, cas \mathcal{L}_2 -gain) s'il existe des matrices $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_1^T$, \mathbf{Z}_2 , $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_3^T$, $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \\ \mathbf{P}_{12} \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{21} \\ \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{bmatrix}$ de dimensions appropriées telles que les conditions (4.2), (4.3), (4.4) soient vérifiées.

$$[\diamond] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_K & 0 \\ \mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (4.2)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & \mathbf{Z}_1 & 0 \\ \diamond & \mathbf{Z}_3 & -\mathbf{Z}_2^T & I \\ \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \diamond & \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.3)$$

$$(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3) + (\bullet)^T + \mathcal{L}_X < 0 \quad (4.4)$$

$$\mathcal{L}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I & 0 \\ \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 & \tilde{B} \\ H_{12}\tilde{C}_m & H_{11} & H_{12}\tilde{D}_m \\ H_{22}\tilde{C}_m & H_{21} & H_{22}\tilde{D}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_2^T & \mathbf{Z}_3 \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{13} \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & H_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{32}\tilde{C}_m & H_{31} & H_{32}\tilde{D}_m & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_X = [\diamond]^T \begin{bmatrix} \mathbf{X} & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_q \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} & \tilde{C}_q & 0 & \tilde{D}_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C}_q & \tilde{D}_q \\ \hline \tilde{C}_m & \tilde{D}_m \\ \hline 0 & \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C_q & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A & B_p & B_w \\ \hline 0 & C_K & D_K C_q & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} \\ C_K & 0 & 0 & D_K & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_m & D_{mp} & D_{mw} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

■

Démonstration. Théorème 21 (Synthèse générale d'estimateur robuste \mathcal{L}_2 -gain)

Le théorème 17 page 110 (Analyse du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas) est appliqué à l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)} = \Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ définissant la forme standard du problème de synthèse présenté figure 4.4 page 137. La représentation d'état de $T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ est donnée équation (4.1 page 138). Il existe une solution au problème général de synthèse d'estimateurs robustes (problème 21 page 139, cas \mathcal{L}_2 -gain) s'il existe $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T > 0$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T > 0$, A_L, B_L, C_L, D_L , telles que les conditions (4.5) et (4.6) soient vérifiées.

$$[\diamond] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_K & 0 \\ \mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (4.5)$$

$$[\diamond]^T \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{P} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{P} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}_q & \mathcal{D}_q \\ \mathcal{C}_e & \mathcal{D}_e \\ 0 & [0 \ I] \end{bmatrix} < 0 \quad (4.6)$$

Avec :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}_q & \mathcal{D}_q \\ \mathcal{C}_e & \mathcal{D}_e \\ 0 & [0 \ I] \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \tilde{A} & 0 & 0 & \tilde{B} & & \\ (H_{12} + H_{13}D_LH_{32})\tilde{C}_m & H_{11} + H_{13}D_LH_{31} & H_{13}C_L & (H_{12} + H_{13}D_LH_{32})\tilde{D}_m & & \\ B_LH_{32}\tilde{C}_m & B_LH_{31} & A_L & B_LH_{32}\tilde{D}_m & & \\ \tilde{C}_q & 0 & 0 & \tilde{D}_q & & \\ (H_{22} + H_{23}D_LH_{32})\tilde{C}_m & H_{21} + H_{23}D_LH_{31} & H_{23}C_L & (H_{22} + H_{23}D_LH_{32})\tilde{D}_m & & \\ 0 & 0 & 0 & [0 \ I] & & \end{array} \right]$$

où :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C}_q & \tilde{D}_q \\ \tilde{C}_m & \tilde{D}_m \\ 0 & [0 \ I] \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} A_K & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C_q & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A & B_p & B_w \\ 0 & C_K & D_K C_q & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} \\ C_K & 0 & 0 & D_K & 0 \\ 0 & 0 & C_m & D_{mp} & D_{mw} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right]$$

La condition (4.5) est une contrainte LMI et correspond à la condition (4.2) du théorème. La condition (4.6) est une contrainte BMI : elle contient des produits entre les variables de décision. Les étapes décrites par la suite servent à linéariser cette contrainte. En utilisant le lemme de Schur (lemme 4 page 223), la condition (4.6) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \overbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{P} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}^{\Psi_1} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & 0 \\ \mathcal{C}_e & \mathcal{D}_e & 0 \end{bmatrix} + \overbrace{(\bullet)^T}^{\Psi_1^T} + \dots \\ & \dots [\diamond]^T \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X} & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}}^{\Psi_2} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_q & \mathcal{D}_q & 0 \\ 0 & [0 \ I] & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

La linéarisation est faite en deux temps. Dans un premier temps, une multiplication congruente est réalisée sur la contrainte (4.7), puis un changement de base permet de linéariser les conditions. Les partitions suivantes de \mathcal{P} et de son inverse $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{Q}$ sont introduites :

$$\mathcal{P} = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & P_{13} \\ \diamond & \mathbf{P}_{22} & P_{23} \\ \hline \diamond & \diamond & P_{33} \end{array} \right] \quad t.q \quad \mathcal{PA} = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & P_{13} \\ \hline \diamond & \mathbf{P}_{22} & P_{23} \\ \hline \diamond & \diamond & P_{33} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|cc} \tilde{A} & \dots & \dots \\ \hline \dots & H_{11} & \dots \\ \hline \dots & \dots & A_L \end{array} \right]$$

$$\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{Q} = \left[\begin{array}{cc|c} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ \diamond & Q_{22} & Q_{23} \\ \hline \diamond & \diamond & Q_{33} \end{array} \right]$$

Pour pouvoir se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte LMI, il est nécessaire de choisir P_{33} et Q_{33} de mêmes dimensions que $\left[\begin{array}{cc} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \diamond & \mathbf{P}_{22} \end{array} \right]$. Cela signifie que la matrice de fonctions de transfert L est d'ordre $n_L = n_H + n_G + 2n_K$, c'est-à-dire de l'ordre de la somme des ordres des systèmes G et H auxquels s'ajoutent deux fois l'ordre de la base des multiplieurs K .

En posant $\mathbf{Z}_1 = Q_{11}^{-1}$, $\mathbf{Z}_2 = Q_{11}^{-1}Q_{12}$, $\mathbf{Z}_3 = Q_{22} - Q_{12}^T Q_{11}^{-1}Q_{12}$, les matrices V et J qui vont être utilisées pour réaliser une multiplication congruente sur la contrainte BMI sont définies :

$$J = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & Q_{23} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\text{On note } R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{13} \\ Q_{23} \end{bmatrix}.$$

Les relations suivantes sont remarquables :

$$VJ = \begin{bmatrix} I & \mathbf{Z}_2 & R_1 \\ 0 & \mathbf{Z}_3 & R_2 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \quad VJP = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I & 0 \\ \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & P_{13} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} & P_{23} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Une multiplication congruente sur l'équation (4.7) est réalisée avec $\text{diag}(VJ, I, I)$.

Cette multiplication donne :

$$\text{diag}(VJ, I, I) (\Psi_1 + \Psi_1^T + \Psi_2) \text{diag}(VJ, I, I) > 0$$

Le terme Ψ_2 de la contrainte (4.7) donne le terme \mathcal{L}_X de la contrainte (4.4) :

$$\mathcal{L}_X = \text{diag}(VJ, I, I) (\Psi_2) \text{diag}(VJ, I, I)$$

Le résultat de cette multiplication sur le terme Ψ_1 est le suivant :

$$[\diamond]^T (\Psi_1) \text{diag}(VJ, I, I) = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \overbrace{\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{22} \end{array} \right] \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]}^{\Psi_3} H_{11} \left[\left[\begin{array}{cc} \mathbf{Z}_2^T & \mathbf{Z}_3 \end{array} \right] \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right] + V \left[\begin{array}{cc} A_L & B_L \\ C_L & D_L \end{array} \right] U$$

Avec :

$$V = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & H_{13} \\ \left[\begin{array}{c} P_{13} \\ P_{23} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{22} \end{array} \right] H_{13} \\ 0 & 0 \\ 0 & H_{23} \end{array} \right]$$

et :

$$U = \left[\begin{array}{cccccc} R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{31} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{Z}_2^T & \mathbf{Z}_3 \end{array} \right] + H_{32} \tilde{C}_m \left[\begin{array}{cc} I & 0 \end{array} \right] & H_{32} \tilde{C}_m & H_{31} & H_{32} \tilde{D}_m & 0 & 0 \end{array} \right]$$

On peut réécrire Ψ_3 sous la forme suivante :

$$\Psi_3 = \tilde{U} \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} P_{13} \\ P_{23} \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{22} \\ I \end{array} \right] H_{13} \left[\begin{array}{cc} A_L & B_L \\ C_L & D_L \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} H_{31} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{Z}_2^T & \mathbf{Z}_3 \end{array} \right] + H_{32} \tilde{C}_m \left[\begin{array}{cc} I & 0 \end{array} \right] \\ I \end{array} \right] \\ \dots + \left[\begin{array}{c} P_2 \\ 0 \end{array} \right] H_{11} \left[\left[\begin{array}{cc} \mathbf{Z}_2^T & \mathbf{Z}_3 \end{array} \right] \ 0 \right] \end{array} \right] \tilde{V}^T$$

$$\tilde{U} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & H_{13} \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & H_{23} \end{array} \right] \quad \tilde{V}^T = \left[\begin{array}{ccccc} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{32} \tilde{C}_m & H_{31} & H_{32} \tilde{D}_m & 0 \end{array} \right]$$

On introduit alors le changement de variables linéarisant suivant :

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} P_{13} \\ P_{23} \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{22} \\ I \end{array} \right] H_{13} \left[\begin{array}{cc} A_L & B_L \\ C_L & D_L \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} H_{31} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{Z}_2^T & \mathbf{Z}_3 \end{array} \right] + H_{32} \tilde{C}_m \left[\begin{array}{cc} I & 0 \end{array} \right] \\ I \end{array} \right] \\ \dots + \left[\begin{array}{c} P_2 \\ 0 \end{array} \right] A_H \left[\left[\begin{array}{cc} \mathbf{Z}_2^T & \mathbf{Z}_3 \end{array} \right] \ 0 \right] \end{array} \right] \quad (4.10)$$

La condition peut donc s'écrire :

$$\left(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \overbrace{\tilde{U} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{bmatrix} \tilde{V}^T}^{\mathcal{L}_3} \right) + (\diamond)^T + \mathcal{L}_X < 0$$

Cette condition correspond donc à la condition (4.4) du théorème. La condition $\mathcal{P} > 0$ doit également être linéarisée : les matrices \mathbf{Z} dépendent de partitions de son inverse \mathcal{Q} . Ceci est aisément réalisé en effectuant une multiplication congruente sur cette matrice avec VJ . La condition $VJPJ^TV^T > 0$ est obtenue qui, développée, correspond à l'équation (4.3), ce qui complète la démonstration du théorème. \square

Le théorème 21 peut se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI. Tester ces conditions pour un niveau de performance donné peut se faire efficacement. Le théorème pour le cas discret est le théorème 36 page 263.

Reconstruction de la représentation d'état de la matrice de fonctions de transfert L

La linéarisation des contraintes BMI est faite en utilisant un changement de variables linéarisant. Il est possible de reconstruire les matrices de la représentation d'état de la matrice de fonctions de transfert L à partir du changement de variables si les conditions du théorème sont vérifiées. Les étapes pour la reconstruction sont les suivantes :

1. Construire $Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & \mathbf{Z}_2 \\ 0 & \mathbf{Z}_3 \end{bmatrix}$. Ceci permet de disposer de la partition $P_1 = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}$ de la matrice \mathcal{P} et de la partition $Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}$ de son inverse.
2. Il est possible de reconstruire les matrices \mathcal{P} et \mathcal{Q} à partir de ces deux partitions par application du lemme de complétion de Packard [PZPB91]. Une matrice P_2 de rang plein peut être choisie arbitrairement. Les matrices \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont alors données par les relations suivantes :

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & I \\ I & (P_1^{-1} - Q_1^{-1})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2^T \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & I \\ I & (Q_1^{-1} - P_1^{-1})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_2^T \end{bmatrix} \quad Q_2 = P_2^{-T}(I - P_1 Q_1)$$

3. Il reste à calculer R :

$$R = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{13} \\ Q_{23} \end{bmatrix}$$

4. L'inverse du changement de base linéarisant est donné par :

$$\begin{bmatrix} A_L & B_L \\ C_L & D_L \end{bmatrix} = \Psi_1 \left(\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \hline \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{array} \right] - \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2 \\ 0 \end{bmatrix} H_{11} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_2^T & \mathbf{Z}_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \Psi_2 \quad (4.11)$$

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{22} \\ I \end{bmatrix} H_{13} \end{bmatrix}^{-1} \quad \Psi_2 = \begin{bmatrix} R^T & 0 \\ H_{31} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_2^T & \mathbf{Z}_3 \end{bmatrix} + H_{32} \tilde{C}_m \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} & I \end{bmatrix}^{-1}$$

Comme ce problème de synthèse est très général, il recoupe un certain nombre de résultats de la littérature, pour des structures particulières de la matrice de fonctions de transfert H . Ce résultat est également un cas particulier de la solution générale pour la synthèse robuste lorsque l'incertitude n'est pas dans la boucle de rétroaction présentée dans [Sch09b]. Cependant, l'ordre de la matrice de fonctions de transfert L est moindre lorsqu'on considère ce cas particulier.

Il peut être intéressant de tester l'existence de L sans la calculer explicitement. Pour compléter ce résultat, l'application du lemme d'élimination (5 page 223) permet d'éliminer les variables correspondant à la représentation d'état de la matrice de fonction L . Pour ceci le lemme d'élimination est appliqué sur la condition (4.4 page 140) du théorème. Le résultat est présenté dans le corollaire suivant.

Corollaire 5. *Corollaire au théorème 21*

Il existe une solution au problème général de synthèse d'estimateurs robustes (problème 21 page 139, cas \mathcal{L}_2 -gain) s'il existe des matrices $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_1^T$, \mathbf{Z}_2 , $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_3^T$, $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \\ \mathbf{P}_{12} \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{21} \\ \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$ de dimensions appropriées telles que les conditions (4.12), (4.13), (4.14), (4.15) soient vérifiées

$$[\diamond] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_K & 0 \\ \mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (4.12)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & \mathbf{Z}_1 & 0 \\ \diamond & \mathbf{Z}_3 & -\mathbf{Z}_2^T & I \\ \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \diamond & \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.13)$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ M_2 & 0 \\ M_3 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T (He(\mathcal{M}_1) + \mathcal{M}_X) \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ M_2 & 0 \\ M_3 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.14)$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & N_2 & 0 \end{bmatrix}^T (He(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2) + \mathcal{S}_X) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & N_2 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.15)$$

Avec les matrices suivantes :

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} -\mathbf{Z}_2^T & I & 0 \\ \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 & \tilde{B} \\ H_{12}\tilde{C}_m & H_{11} & H_{12}\tilde{D}_m \\ H_{22}\tilde{C}_m & H_{21} & H_{22}\tilde{D}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}_X = [\diamond]^T \begin{bmatrix} \mathbf{X} & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_X & 0 & D_X & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{S}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ H_{12}\tilde{C}_m & H_{12}\tilde{D}_m \\ H_{22}\tilde{C}_m & H_{22}\tilde{D}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_2^T & \mathbf{Z}_3 \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{S}_X = [\diamond]^T \begin{bmatrix} \mathbf{X} & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_q \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} & C_q & D_q & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{13} \\ H_{23} \end{bmatrix}_\perp \quad \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (H_{32}\tilde{C}_m)^T \\ H_{31}^T \\ (H_{32}\tilde{D}_m)^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline C_q & D_q \\ \hline \tilde{C}_m & \tilde{D}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A & B_p & B_w \\ \hline 0 & C_K & D_K C_q & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} \\ C_K & 0 & 0 & D_K & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_m & D_{mp} & D_{mw} \end{bmatrix}$$

□

Démonstration. corollaire 5 (Synthèse générale d'estimateurs robustes)

La démonstration est faite par application du lemme d'élimination sur la contrainte (4.4) du théorème 21. Cette contrainte peut s'écrire sous la forme

$$(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) + (\bullet)^T + \mathcal{L}_X + \tilde{U}\mathbf{L}\tilde{V}^T + \tilde{V}\mathbf{L}^T\tilde{U}^T < 0$$

avec

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{bmatrix} \quad \tilde{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{13} \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & H_{23} \end{bmatrix} \quad \tilde{V}^T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{32}\tilde{C}_m & H_{31} & H_{32}\tilde{D}_m & 0 \end{bmatrix}$$

On définit alors

$$\tilde{U}_\perp = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & N_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{V}_\perp = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_1 & 0 \\ M_2 & 0 \\ M_3 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Par application du lemme d'élimination (lemme 5 page 223), les contraintes du corollaire sont obtenues. Le développement de la première contrainte permet d'obtenir la contrainte (4.14). Le développement de la seconde contrainte permet d'obtenir la contrainte (4.15) du corollaire. Les contraintes (4.2) et (4.3) du théorème donnent directement les contraintes (4.12) et (4.13) du corollaire. □

Ce corollaire présente des contraintes LMI pour tester l'existence d'une solution pour le problème 21 page 139 (Problème général de synthèse d'estimateurs robustes, cas \mathcal{L}_2 -gain) dans le cas continu. L'avantage d'utiliser cette solution par rapport à la solution présentée dans le théorème est que le nombre de variables du problème d'optimisation associé au théorème est largement inférieur du fait de la disparition des variables correspondant à la représentation d'état de L .

Dans cette sous section, une solution du problème de synthèse général d'estimateur robuste a été présentée dans le cas continu, pour une borne supérieure sur le \mathcal{L}_2 -gain pire-cas. Le cas discret est présenté dans l'annexe G, théorème 36 page 263.

4.3.3 Synthèse H_2

Théorème 22. *Synthèse générale d'estimateur robuste H_2 (cas continu).*

Il existe une solution au problème général de synthèse d'estimateurs robustes (problème

21 page 139, cas H_2) s'il existe des matrices $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_1^T$, \mathbf{Z}_2 , $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_3^T$, $\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \\ \mathbf{P}_{12} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{21} \\ \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{array} \right]$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ de dimensions appropriées telles que les conditions (4.16), (4.17), (4.18), (4.19) soient vérifiées.

$$\text{Trace}(\mathbf{S}) < \gamma^2 \quad D_{qw} = 0 \quad (H_{22} + H_{23}\mathbf{D}_L H_{32})D_{mw} = 0 \quad (4.16)$$

$$[\diamond]^T \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_K & 0 \\ \mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (4.17)$$

$$(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3) + (\bullet)^T + \mathcal{L}_X < 0 \quad (4.18)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{Z}_1 & 0 & \mathbf{Z}_1 & 0 & \\ \diamond & \mathbf{Z}_3 & -\mathbf{Z}_2^T & I & \\ \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \\ \diamond & \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{22} & \\ \hline & & \diamond & & \mathbf{S} \end{array} \right] \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5 > 0 \quad (4.19)$$

$$\mathcal{L}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I & 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \\ \mathbf{P}_{12} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{21} \\ \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 & \tilde{B}_p \\ H_{12}\tilde{C}_m & H_{11} & H_{12}\tilde{D}_{mp} \\ H_{22}\tilde{C}_m & H_{21} & H_{22}\tilde{D}_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_2^T & \mathbf{Z}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{13} \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & H_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{32}\tilde{C}_m & H_{31} & H_{32}\tilde{D}_{mp} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I \\ \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_{11} \\ \mathbf{P}_{12} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_{21} \\ \mathbf{P}_{22} \end{array} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_w \\ H_{12}\tilde{D}_{mw} \end{bmatrix} \quad \mathcal{L}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{13} \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_L \\ \mathbf{D}_L \end{bmatrix} H_{32}\tilde{D}_{mw}$$

$$\mathcal{L}_X = [\diamond]^T \begin{bmatrix} \mathbf{X} & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_q \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} & \tilde{C}_q & 0 & \tilde{D}_{qp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

avec les matrices suivantes

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \tilde{A} & \tilde{B}_p & \tilde{B}_w \\ \hline \tilde{C}_q & \tilde{D}_{qp} & \tilde{D}_{qw} \\ \hline \tilde{C}_m & \tilde{D}_{mp} & \tilde{D}_{mw} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} A_K & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A & B_p & B_w \\ \hline 0 & C_K & D_K C_q & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} \\ C_K & 0 & 0 & D_K & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_m & D_{mp} & D_{mw} \end{array} \right]$$

■

Ce théorème présente des contraintes LMI et une égalité matricielle linéaire. L'égalité matricielle linéaire peut être résolue. Elle peut ne pas avoir de solution, une solution unique ou une infinité de solutions dépendantes linéairement de paramètres. Une fois cette égalité résolue, le problème d'optimisation est un problème d'optimisation sous contrainte LMI et peut donc être testé efficacement. S'il existe des matrices vérifiant ces contraintes, alors les matrices de la représentation d'état de la matrice de fonctions de transfert L peuvent être reconstruites à partir des variables solutions du problème d'optimisation comme pour le cas \mathcal{L}_2 -gain, (page 145). Le cas discret est présenté dans le théorème 37 page 265 dans l'annexe G page 261.

En conclusion, cette section présente deux théorèmes présentant des contraintes LMI pour tester l'existence d'une matrice de fonctions de transfert L assurant une norme donnée (\mathcal{L}_2 -gain ou H_2) pour l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$ et la calculer. Ces contraintes peuvent se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation pour lequel un algorithme efficace existe.

La section suivante va montrer que la plupart des problèmes d'optimisation robuste sont des cas particuliers de ce problème de synthèse. Une solution efficace est formulée dans cette section, qui va également être une solution aux problèmes de synthèse d'estimateurs robustes. Les résultats présentés dans cette section prouvent la possibilité de transformer les outils d'analyse décrits chapitre 3 en outils de synthèse dans le cas robuste. Ceci permet de compléter le tableau des objectifs du chapitre (tableau 4.2).

| | Estimation nominale | Estimation robuste |
|---|--|--|
| Synthèse d'estimateur | | |
| Capacité à transformer ces outils d'analyse en outils de synthèse | Section 2.2 page 28, avec les outils de l'annexe A | Possible pour le problème général de synthèse d'estimateur robuste : section 4.3 |

Tableau 4.2 – Complétion des objectifs du chapitre par la section 4.3

4.4 Synthèse de filtres robustes

La première structure pour l'estimation dans le cas nominal est la structure filtre. La structure filtre est définie comme une matrice de fonctions de transfert, sans structure particulière. La synthèse de cette structure dans le cas robuste est présentée dans cette section.

Problème de synthèse de filtres robustes

La forme standard du problème de synthèse de filtres robustes est présentée figure 4.5.

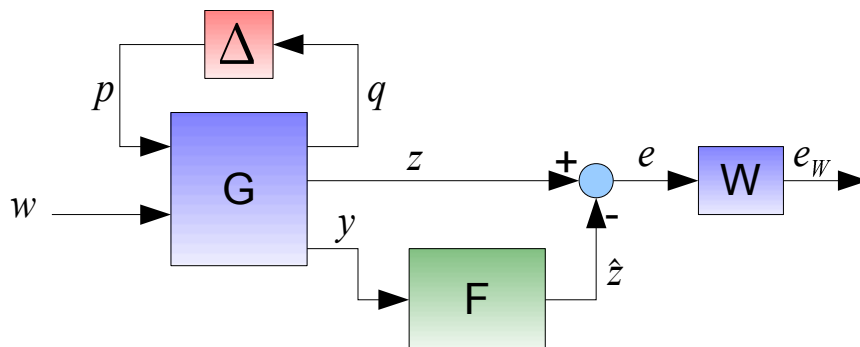


Figure 4.5 – Forme standard du problème de synthèse de filtres robustes

L'opérateur incertain $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e_W)} = W [I \quad -F] (\Delta \star G)$ est considéré. W est une pondération stable et son inverse est stable. $\Delta \star G$ représente le système incertain mis sous une forme LFT. On considère pour l'erreur d'estimation une borne supérieure sur une norme pire-cas de l'opérateur incertain $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e_W)}$ (\mathcal{L}_2 -gain, H_2). L'objectif est de synthétiser la matrice de fonctions de transfert F de telle sorte qu'une borne supérieure d'une norme pire-cas soit garantie (ou minimisée) sur l'opérateur $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e_W)}$ pour tout $\Delta \in \Gamma_\Delta$.

Les représentations d'état des divers blocs de la forme standard sont les suivantes :

$$G = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_p & B_w \\ \hline C_q & D_{qp} & D_{qw} \\ C_z & D_{zp} & D_{zw} \\ C_y & D_{yp} & D_{yw} \end{array} \right] \quad W = \left[\begin{array}{c|c} A_W & B_W \\ \hline C_W & D_W \end{array} \right] \quad F = \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_F \\ \hline C_F & D_F \end{array} \right]$$

La représentation d'état de la matrice de fonctions de transfert $T_{(p,w) \rightarrow (q,e_W)}$ est la suivante.

$$T_{(p,w) \rightarrow (q,e_W)} = \left[\begin{array}{ccc|cc} A & 0 & 0 & B_p & B_w \\ B_W(C_z - D_F C_y) & A_W & -B_W C_F & B_W(D_{zp} - D_F D_{yp}) & B_W(D_{zw} - D_F D_{yw}) \\ B_F C_y & 0 & A_F & B_F D_{yp} & B_F D_{yw} \\ \hline C_q & 0 & 0 & D_{qp} & D_{qw} \\ D_W(C_z - D_F C_y) & C_W & -D_W C_F & D_W(D_{zp} - D_F D_{yp}) & D_W(D_{zw} - D_F D_{yw}) \end{array} \right] \quad (4.20)$$

Problème 22. Problème de synthèse de filtres robustes.

La forme standard du problème de synthèse de filtres robustes est l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)} = \Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ présenté figure 4.5 page 151. $T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ admet la représentation d'état équivalente présentée équation (4.20) page 152

Etant donné γ , trouver s'il existe une matrice de fonctions de transfert F (et la calculer) telle que $\forall \Delta \in \Gamma_\Delta$, $\Delta \star T_{(w,p) \rightarrow (q,e)}$ soit stable et que :

$$\forall \Delta \in \Gamma_\Delta, \quad \|\Delta \star T_{(w,p) \rightarrow (q,e)}\|_i < \gamma.$$

4.4.1 Synthèse de filtres robustes

Le problème de synthèse de filtres robustes est un cas particulier du problème général de synthèse d'estimateurs robustes (problème 21 page 139). La forme standard du problème de synthèse de filtres (figure 4.5), peut être mise sous la forme d'un cas particulier de la forme standard du problème générale de synthèse d'estimateurs robustes comme le montre la figure 4.6.

$$\text{La matrice de fonctions de transfert } H \text{ est donnée par } H = \left[\begin{array}{ccc} W & 0 & -W \\ 0 & I & 0 \end{array} \right].$$

Dans ce cas particulier du problème général de synthèse d'estimateurs robustes, les représentations d'état sont les suivantes :

$$L = \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_F \\ \hline C_F & D_F \end{array} \right] \quad G = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_p & B_w \\ \hline C_q & D_{qp} & D_{qw} \\ C_m & D_{mp} & D_{mw} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_p & B_w \\ \hline C_q & D_{qp} & D_{qw} \\ C_z & D_{zp} & D_{zw} \\ C_y & D_{yp} & D_{yw} \end{array} \right]$$

$$H = \left[\begin{array}{ccc|ccc} H_{11} & H_{12} & H_{13} & & & \\ \hline H_{21} & H_{22} & H_{23} & & & \\ \hline H_{31} & H_{32} & H_{33} & & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_W & B_W & 0 & -B_W & & \\ \hline C_W & D_W & 0 & -D_W & & \\ 0 & 0 & I & 0 & & \end{array} \right]$$

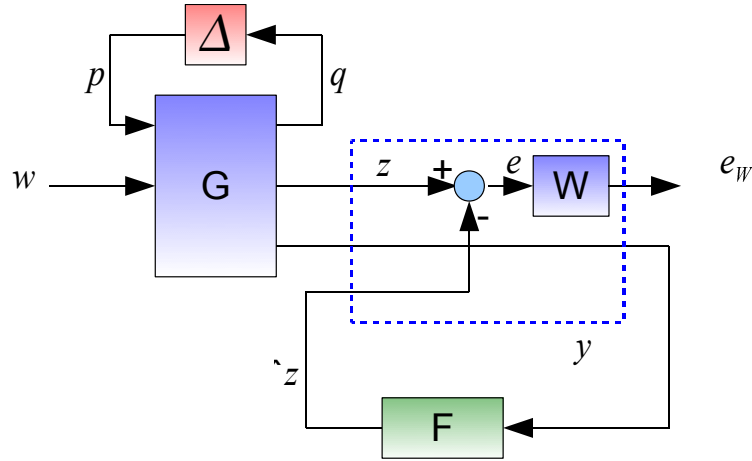


Figure 4.6 – Un cas particulier du problème de synthèse d'estimateurs robustes

Les théorèmes 21 page 140 et 22 page 148 présentent des solutions au problème général de synthèse d'estimateurs robustes. Le problème de synthèse de filtres robustes est un cas particulier de ce problème. Les solutions formulées pour le problème de synthèse d'estimateur généralisé sont donc également des solutions de ce problème de synthèse. Par conséquent, il est possible de formuler un corollaire au théorème 21 donnant des conditions pour tester l'existence d'un filtre robuste pour une borne supérieure sur le \mathcal{L}_2 -gain pire-cas de $T_{(w) \rightarrow (e_W)}$.

Corollaire 6. *Corollaire au théorème 21 page 140 : Synthèse de filtres robustes \mathcal{L}_2 -gain (cas continu)*

Il existe une solution au problème de synthèse de filtres robustes (problème 22 page 152, cas \mathcal{L}_2 -gain) s'il existe des matrices $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_1^T$, \mathbf{Z}_2 , $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_3^T$, $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \\ \mathbf{P}_{12} \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}_2 =$

$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{21} \\ \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}$, \mathbf{P}_K , $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{bmatrix}$ de dimensions appropriées telles que les conditions (4.21), (4.22), (4.23) soient vérifiées.

$$[\diamond] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_K & 0 \\ \mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (4.21)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & \mathbf{Z}_1 & 0 \\ \diamond & \mathbf{Z}_3 & -\mathbf{Z}_2^T & I \\ \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \diamond & \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.22)$$

$$(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3) + (\bullet)^T + \mathcal{L}_X < 0 \quad (4.23)$$

$$\mathcal{L}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I & 0 \\ \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 & \tilde{B} \\ B_W \tilde{C}_z & A_W & B_W \tilde{D}_z \\ D_W \tilde{C}_z & C_W & D_W \tilde{D}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_W \\ C_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_2^T & \mathbf{Z}_3 \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -B_W \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -D_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_y & 0 & \tilde{D}_y & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_X = [\diamond]^T \begin{bmatrix} \mathbf{X} & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_q \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} & \tilde{C}_q & 0 & \tilde{D}_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C}_q & \tilde{D}_q \\ \hline \tilde{C}_z & \tilde{D}_z \\ \hline \tilde{C}_y & \tilde{D}_y \\ \hline 0 & \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} A_K & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C_q & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A & B_p & B_w \\ \hline 0 & C_K & D_K C_q & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} \\ C_K & 0 & 0 & D_K & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_z & D_{zp} & D_{zw} \\ 0 & 0 & C_y & D_{yp} & D_{yw} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right].$$

□

Ce corollaire recouvre les théorèmes pour la synthèse de filtres robustes H_∞ utilisant l'approche LFT ne considérant pas de pondération de l'erreur d'estimation.

- Ce corollaire recouvre les solutions formulées dans [LF97] pour la synthèse de filtres robustes H_∞ sans pondération (IQC's statiques). Il recouvre également les résultats de synthèse de filtre présentés dans [SP05, Sun04] pouvant être interprétés en termes d'IQC's statiques.

- Pour les résultats considérant une IQC dynamique, ce corollaire permet de formuler une solution plus générale que la solution présentée dans [SF06], où la pondération est absorbée dans le filtre en utilisant un changement de variable bijectif. Ce corollaire est également une solution plus générale pour le \mathcal{L}_2 -gain que la solution formulée dans [SK08].

Dans le cas discret, un corollaire analogue peut être formulé à partir de la solution du problème général présenté théorème 36 page 263 en annexe G page 261. Ceci permet de proposer une solution plus générale que la solution présentée dans [BHS10], où les pôles du filtre sont fixés. La solution ainsi formulée offre une alternative aux approches polytopiques pour la synthèse de filtres H_∞ ([Pea00, XLZZ04] par exemple) utilisant des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres. La solution formulée est plus générale : elle permet de considérer des incertitudes TI/TV, paramétriques et dynamiques. De plus, l'utilisation des IQCs dynamiques permettra de réduire le conservatisme pour des incertitudes TI.

Une solution utilisant le lemme d'élimination permettant de tester l'existence d'un filtre sans le calculer peut être formulée à partir du corollaire 5 page 146.

Il est possible de formuler un corollaire au théorème 22 donnant des conditions pour tester l'existence d'un filtre robuste pour une borne supérieure sur la norme H_2 pire-cas de $T_{(w) \rightarrow (e_w)}$. En l'absence de pondérations, le corollaire ainsi formulable est une solution équivalente aux solutions présentées dans [SK06, SK08].

4.4.2 Synthèse de filtres robustes : exemple

Un exemple académique de synthèse de filtre robuste est considéré ici. Le système pour l'estimation est défini par sa représentation LFT :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ q(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|ccc} -\xi\omega_c & -1 & -\xi & 0 & 1 & 0 \\ \omega_c^2 & 0 & \omega_c & 1 & 0 & 0 \\ \hline \omega_{gab} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{gab}\omega_c & 0 & \omega_{gab} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

$$p(t) = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} q(t) \quad |\delta| < 1$$

Les valeurs nominales des paramètres sont les suivantes :

$$\omega_c = 1, \quad \omega_{gab} = 0.3, \quad \xi = 0.1.$$

| Ordre n du multiplieur | n=1 | n=2 | n=3 | n=4 | n=5 | n=6 | n=7 |
|--------------------------------|------|------|-----|-----|------|------|-------|
| Borne supérieure | 705 | 250 | 164 | 115 | 83 | 63 | 47 |
| Temps de calcul | 0.9s | 3.8s | 12s | 57s | 190s | 140s | 20min |
| Ordre du filtre | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 |

Tableau 4.3 – Résultats d’optimisation en fonction de l’ordre du multiplieur

L’incertitude affecte seulement le paramètre ω_0 dans ce cas. La sous-section 3.5.2 page 126 a montré que l’incertitude sur le paramètre ξ dégradait très peu la performance atteinte par l’estimateur.

Synthèse H_∞

Nous allons comparer dans cette section l’EGN synthétisé avec la pondération nominale et le filtre robuste synthétisé avec la même pondération sur l’erreur d’estimation au moyen du corollaire 6 page 153 (Synthèse de filtres robustes \mathcal{L}_2 -gain (cas continu)). Pour rappel, la dégradation de la performance de l’estimateur nominal a été présentée dans le chapitre 3, figure 3.21 page 127.

Dans un premier temps, le choix arbitraire fait sur les pôles de la base des multiplieurs fréquentiels est crucial. On choisit ici un pôle en -1 , de multiplicité n . Le tableau 4.3 présente la borne supérieure du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas garantie pour l’opérateur $T_{(w) \rightarrow (e_W)}$ en fonction de l’ordre n des multiplieurs. D’un point de vue pratique, ce tableau montre également le temps de calcul du programme (avec le solveur standard de la Robust Control Toolbox de Matlab [Mat])², ainsi que l’ordre du filtre synthétisé.

Le filtre synthétisé avec un ordre de multiplieurs de 7 est mis en œuvre. La figure 4.7 présente les valeurs singulières atteintes par l’estimateur robuste pour des modèles choisis dans le modèle incertain, ainsi que le gabarit supérieur garanti par la synthèse robuste.

Dans ce cas-là, il est visible que vis-à-vis du gabarit choisi pour l’erreur d’estimation, le filtre robuste assure une meilleure performance que l’estimateur nominal. De plus, la dégradation de l’erreur d’estimation est dû au déplacement de la résonance. La performance assurée par le filtre robuste se dégrade moins que la performance assurée par l’estimateur nominal lorsque la fréquence de résonance s’éloigne de sa valeur nominale. En revanche, le gabarit choisi pour la synthèse robuste est le gabarit idéal pour la

2. Le temps de calcul dépend également de la configuration (dans notre cas une configuration de bureautique standard). L’intérêt ici est de montrer l’évolution du temps de calcul en fonction de l’ordre des multiplieurs.

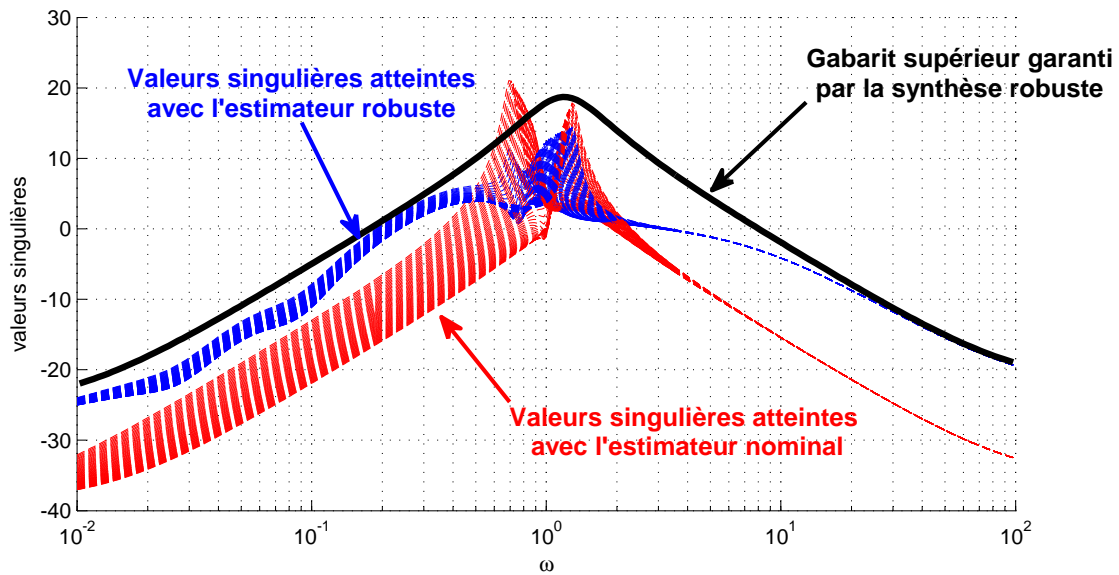


Figure 4.7 – Valeurs singulières de $T_{(w) \rightarrow (e)}$ atteintes par l'estimateur nominal (rouge) et le filtre H_∞ robuste (bleu), pour un échantillonnage de δ

synthèse nominale. Bien que les résultats sur la densité spectrale de puissance soient de bonne qualité, on ne sait pas si ce gabarit est adapté.

Synthèse H_2

Un filtre H_2 est synthétisé (cas particulier du théorème 22 page 148 (Synthèse générale d'estimateurs robustes H_2)). La borne supérieure garantie pour la norme H_2 pire-cas par la méthode est de 1,64. Une borne inférieure du pire cas calculée au moyen d'une grille sur le paramètre incertain donne une borne inférieure sur ce pire cas de 1,52. La borne inférieure de la norme H_2 pire-cas atteinte avec l'estimateur nominal est de 1,95. La performance garantie pour l'erreur d'estimation est donc améliorée de 16%. Par conséquent, la méthode proposée permet de garantir la performance pour tous les modèles contenus dans le modèle incertain et améliore la performance atteinte.

Pour illustrer ceci, la figure 4.8 présente une comparaison des valeurs singulières atteintes avec l'estimateur synthétisé sur le système nominal au moyen du théorème 12 page 58 (Synthèse d'EGN H_2), et le filtre robuste. Les courbes bleues continues montrent les valeurs singulières de $T_{(w) \rightarrow (e)}$ atteintes avec l'estimateur robuste pour l'erreur d'estimation pour des modèles choisis dans le modèle incertain par un échantillonnage sur le paramètre δ , les courbes rouges montrent les valeurs singulières atteintes avec l'estimateur nominal pour l'erreur d'estimation. Pour valider la synthèse de l'estimateur, une borne supérieure par bandes de pulsations est calculée pour les valeurs singulières atteintes pour l'estimateur robuste en appliquant le théorème 20 page 118 (Analyse de la valeur singulière maximale pire-cas pour une bande de fréquences). Il est visible que

l'estimateur robuste garantit une meilleure performance que l'estimateur robuste dans la zone critique (zone de la résonance incertaine) : la performance est moins dégradée (gain de 6dB sur les pics). La performance en hautes fréquences est équivalente. En basses fréquences, l'estimateur robuste est moins bon, mais cette zone des fréquences n'est pas représentative pour la norme H_2 : la différence d'aire dans cette zone est très faible.

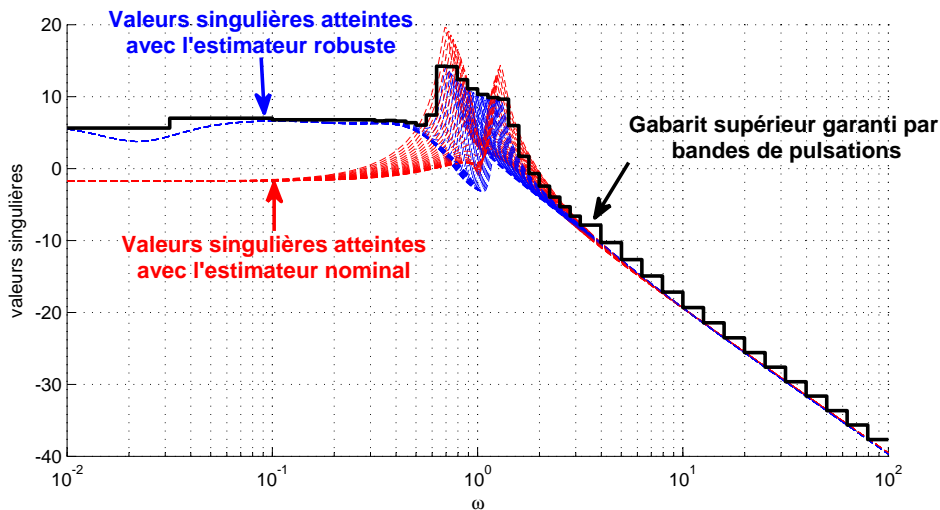


Figure 4.8 – Valeurs singulières de $T_{(w) \rightarrow (e)}$ atteintes par l'estimateur nominal (rouge) et le filtre H_2 robuste (bleu), pour un échantillonnage de δ

4.4.3 Synthèse de filtres robustes : conclusion

Cette section a présenté l'extension de la structure filtre à l'estimation robuste, avec des solutions pour synthétiser cette structure de façon efficace. Les solutions proposées pour le problème général de synthèse d'estimateurs robustes permettent de formuler des solutions pour la synthèse de filtres robustes, complétant ainsi la littérature pour le cas discret et proposant des solutions homogènes pour le cas continu. Cette section permet de compléter le tableau des objectifs du chapitre (tableau 4.4).

4.5 Synthèse d'observateurs robustes

La majorité des résultats concernant l'estimation robuste utilisent une structure filtre pour résoudre le problème d'estimation robuste [GdO01, SK08]. Le chapitre 2 a prouvé que les structures de type observateur³ permettent la synthèse d'estimateur pour des systèmes instables. La structure la plus générale présentée en chapitre 2 pour l'estimation nominale est l'Estimateur Généralisé Nominal. Cette section présente une extension de

3. Observateur à gain statique, Observateur à gain dynamique, Estimateur généralisé nominal.

| | Estimation nominale | Estimation robuste |
|---|--|---|
| Synthèse d'estimateur | | |
| Capacité à transformer ces outils d'analyse en outils de synthèse | Section 2.2 page 28, avec les outils de l'annexe A | Possible pour le problème général de synthèse d'estimateur robuste : section 4.3 |
| Synthèse de la structure filtre | Synthèse H_2 , H_∞ , H_∞ pondérée | Synthèse H_2 , \mathcal{L}_2 -gain : Cas particulier des théorèmes 21 page 140 et 22 page 148 |

Tableau 4.4 – Complétion des objectifs du chapitre par la section 4.4

cette structure pour l'estimation robuste. Cette extension est appelée Observateur à gain augmenté.

L'objectif de cette section est de présenter l'extension des structures de type observateurs à l'estimation robuste.

4.5.1 Extension des observateurs aux systèmes incertains

Modèle interne à l'observateur

La structure observateur (figure 2.3 page 24) ou la structure estimateur généralisé nominal (présentée dans la section 2.3 page 51) contiennent un modèle du système. La présence de ce modèle au sein de l'observateur permet de se ramener à une forme équivalente pour le modèle LTI reliant les entrées non-mesurées et l'erreur d'estimation dans laquelle les modes du modèle ont été rendus inobservables (équation (2.22) page 39). Ce dernier modèle appelé modèle d'erreur contient une boucle de rétroaction qui va permettre de se ramener à une erreur d'estimation stable même dans le cas où les modes du modèle sont instables (figure 2.12 page 44).

Dans le cas de l'estimation robuste, le modèle n'est pas constitué d'un modèle nominal, mais d'un ensemble de modèles. Quel modèle choisir pour l'observateur, pour conserver la capacité à synthétiser des estimateurs sur des modèles instables ?

Pour répondre à cette question, l'approche proposée dans cette thèse est de faire apparaître un modèle nominal à partir du modèle incertain sous forme LFT en séparant la partie nominale et la partie incertaine. Ce modèle nominal va être choisi pour le modèle interne de l'observateur. Il est ensuite possible de se ramener à un modèle d'erreur comme dans le cas nominal.

Le modèle incertain $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,z,y)}$ est représenté figure 4.9 à gauche.

$$T_{(p,w) \rightarrow (q,z,y)} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_p & B_w \\ \hline C_q & D_{qp} & D_{qw} \\ C_z & D_{zp} & D_{zw} \\ C_y & D_{yp} & D_{yw} \end{array} \right]$$

Il existe systématiquement une représentation d'état équivalente pour $T_{(p,w) \rightarrow (q,z,y)}$ de la forme présentée équation (4.24). Le schéma bloc correspondant à cette représentation d'état est montré dans la figure 4.9, à droite.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_i & 0 & B_{ip} & B_{iw} \\ 0 & A_n & B_{np} & B_{nw} \\ \hline C_i & 0 & D_{qp} & D_{qw} \\ 0 & C_{nz} & D_{zp} & D_{zw} \\ 0 & C_{ny} & D_{yp} & D_{yw} \end{array} \right] \quad (4.24)$$

$$G_i = T_{(w,p) \rightarrow (q)} = \left[\begin{array}{c|cc} A_i & B_{ip} & B_{iw} \\ \hline C_i & D_{qp} & D_{qw} \end{array} \right] \quad G_n = T_{(w,p) \rightarrow (z,y)} = \left[\begin{array}{cc|c} A_n & B_{np} & B_{nw} \\ \hline C_{nz} & D_{zp} & D_{zw} \\ C_{ny} & D_{yp} & D_{yw} \end{array} \right]$$

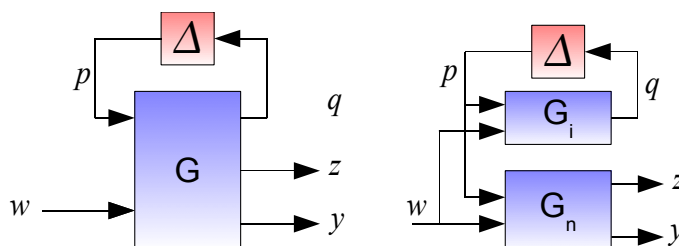


Figure 4.9 – Séparation nominale-incertaine

Cette représentation permet de faire apparaître un système nominal G_n donnant un modèle nominal pour les structures de type observateur. L'exemple suivant permet de bien illustrer cette séparation.

Exemple 4. Séparation du système

Un exemple de marche aléatoire est présenté dans la figure 4.10.

Dans cet exemple, la sortie de l'intégrateur à laquelle s'ajoute un bruit v est mesurée. L'ensemble des états de ce modèle doivent être estimés à partir de cette mesure. Le modèle admet la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c|c} -\xi\omega_0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

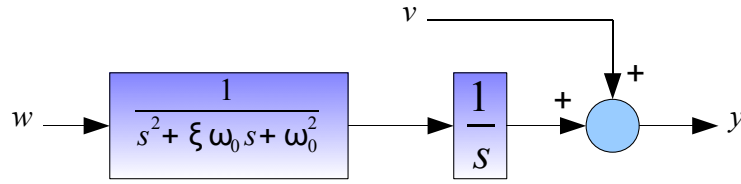


Figure 4.10 – Un exemple de marche aléatoire

La fréquence de résonance est incertaine : $\omega_0 = \omega_c + \omega_{gab}\delta$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\xi(\omega_c + \omega_{gab}\delta) & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (\omega_c + \omega_{gab}\delta)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

Ce système incertain peut être mis sous une forme LFT, présentée ci-dessous.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ q(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\xi\omega_c & -1 & 0 & -\xi & 0 & 1 & 0 \\ \omega_c^2 & 0 & 0 & \omega_c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \omega_{gab} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{gab}\omega_c & 0 & 0 & \omega_{gab} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \\ w(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

$$p(t) = \begin{bmatrix} \delta_\omega & 0 \\ 0 & \delta_\omega \end{bmatrix} q(t)$$

La partie certaine et la partie incertaine peuvent être séparées sous la forme présentée figure 4.9. Le modèle admet la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_u(t) \\ \dot{x}_n(t) \\ q(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -\xi_c\omega_c & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\xi_c & 0 & 1 & 0 \\ \omega_c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\xi_c\omega_c & -1 & 0 & -\xi_c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_c^2 & 0 & 0 & \omega_c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \omega_{gab} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{gab}\omega_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{gab} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_u(t) \\ x_n(t) \\ p(t) \\ w(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

$$p(t) = \begin{bmatrix} \delta_\omega & 0 \\ 0 & \delta_\omega \end{bmatrix} q(t)$$

Cette forme peut être obtenue systématiquement. L'intérêt est cependant de pouvoir faire disparaître des modes dans la partie nominale ou la partie incertaine. Des modes instables peuvent notamment disparaître de la partie incertaine : dans cet exemple, l'intégrateur disparaît de la partie incertaine, et le système admet la représentation d'état équivalente suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{\dot{x}_u(t)}{x_u(t)} \\ \frac{\dot{x}_n(t)}{x_n(t)} \\ \frac{q(t)}{p(t)} \\ \frac{y(t)}{v(t)} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|ccc|cc|c|c} -\xi_c \omega_c & -1 & 0 & 0 & 0 & -\xi_c & 0 & 1 & 0 \\ \omega_c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_c & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\xi_c \omega_c & -1 & 0 & -\xi_c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_c^2 & 0 & 0 & \omega_c & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \omega_{gab} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{gab} \omega_c & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{gab} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_u(t) \\ x_n(t) \\ p(t) \\ w(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

$$p(t) = \begin{bmatrix} \delta_\omega & 0 \\ 0 & \delta_\omega \end{bmatrix} q(t)$$

Synthèse d'estimateur généralisé

La séparation nominale-incertaine présentée dans la section précédente fait apparaître un modèle nominal permettant l'utilisation des structures de type observateur.

La synthèse d'EGN va être considérée dans un premier temps. Pour rappel, cette structure est présentée dans la section 2.2 page 28. En l'absence de pondération de l'erreur d'estimation, cette structure est un observateur à gain statique auquel est ajouté un terme direct (figure 2.18 page 52). En présence de pondération, cette structure permet de se ramener à un problème de synthèse d'EGN sans pondération. Par conséquent, si le problème de synthèse sans pondération est résolu, le problème de synthèse avec pondération le sera également.

La forme standard du problème de synthèse d'estimateur généralisé est présentée figure 4.11.

La représentation d'état de la forme standard du problème de synthèse d'estimateur généralisé est la suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} A_i & 0 & 0 & B_{ip} & B_{iw} \\ 0 & A_n & 0 & B_{np} & B_{nw} \\ 0 & LC_{ny} & A_n - LC_{ny} & LD_{yp} & LD_{yw} \\ \hline C_i & 0 & 0 & D_{qp} & D_{qw} \\ 0 & C_{nz} - DC_{ny} & -(C_{nz} - DC_{ny}) & D_{zp} - DD_{yp} & D_{zw} - DD_{yw} \end{array} \right] \quad (4.25)$$

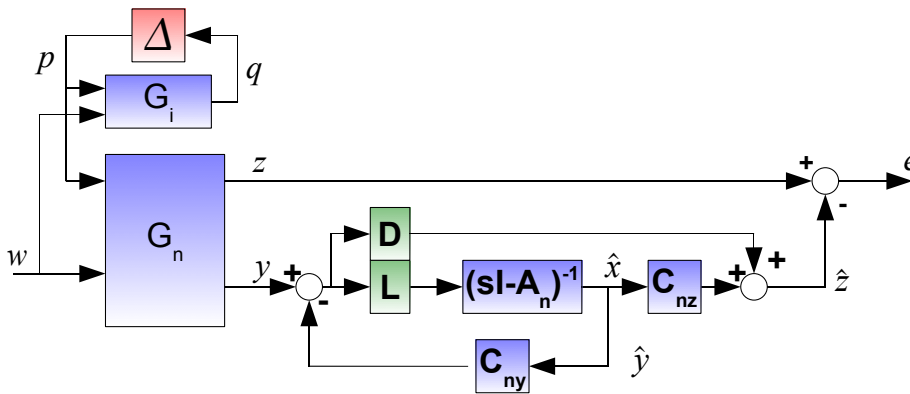


Figure 4.11 – Forme standard du problème de synthèse d’estimateur généralisé

Comme dans le cas nominal (section 2.2), il est possible de se ramener à une forme équivalente, dans laquelle les modes du modèle nominal ont été rendus inobservables. La forme standard admet une représentation d’état équivalente de la forme suivante :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_i & 0 & B_{ip} & B_{iw} \\ 0 & A_n - LC_{ny} & B_{np} - LD_{yp} & B_{nw} - LD_{yw} \\ \hline C_i & 0 & D_{qp} & D_{qw} \\ 0 & C_{nz} - DC_{ny} & D_{zp} - DD_{yp} & D_{zw} - DD_{yw} \end{array} \right] \quad (4.26)$$

Il est possible de formuler le problème de synthèse d’EGN robuste.

Problème 23. Problème de synthèse d’EGN robuste.

La forme standard du problème de synthèse d’EGN robuste est l’opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)} = \Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ présenté figure 4.11 page 163. $T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ admet la représentation d’état équivalente présentée équation (4.26) page 163

Etant donné γ , trouver s’il existe une matrice $\begin{bmatrix} D \\ L \end{bmatrix}$ (et la calculer) telle que $\forall \Delta \in \Gamma_\Delta$, $\Delta \star T_{(w,p) \rightarrow (q,e)}$ soit stable et :

$$\forall \Delta \in \Gamma_\Delta, \quad \|\Delta \star T_{(w,p) \rightarrow (q,e)}\|_i < \gamma.$$

Le problème de synthèse d’estimateur généralisé dans le cas robuste ne va pas mener à un problème d’optimisation convexe. Dans un premier temps, la représentation d’état équivalente de la forme standard du problème de synthèse peut se mettre sous la forme présentée figure 4.12.

Dans le cas robuste, le problème de synthèse d’estimateur généralisé peut se formuler comme cas particulier du problème de retour statique de sortie conjecturé NP-difficile dans le cas certain [SADG97] et donc a fortiori dans le cas robuste. L’illustration de ce point est aisée. Dans le cas nominal, le problème d’optimisation sous contrainte BMI ob-

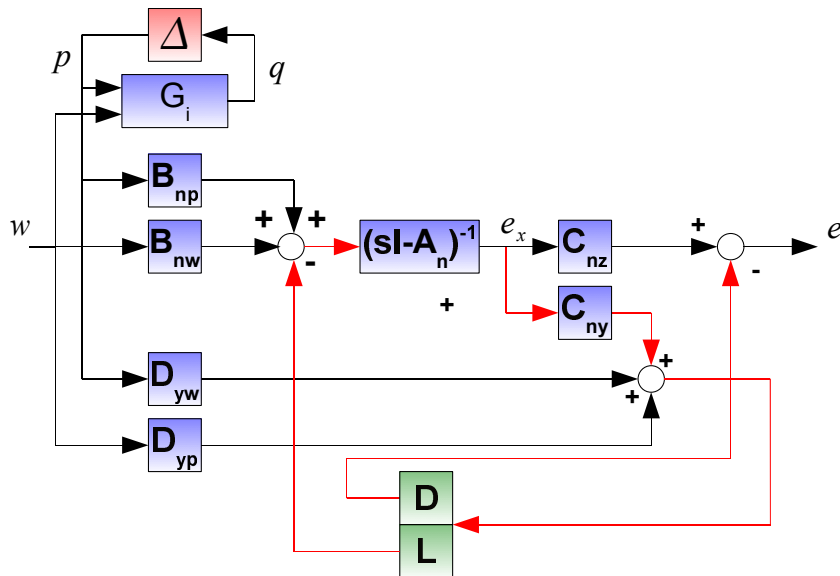


Figure 4.12 – Un cas particulier de retour statique de sortie robuste

tenu par application du lemme 1 page 29 sur la forme standard du problème de synthèse d'estimateur généralisé nominal pouvait être linéarisé en appliquant un changement de base $\mathbf{L} = \mathbf{P}\mathbf{L}$. Dans le cas robuste, par application du théorème 17 sur la forme standard du problème de synthèse d'estimateur généralisé présentée figure 4.12 et admettant la représentation d'état équivalente présentée équation (4.26), un problème d'optimisation sous contrainte BMI est obtenu. Ce problème d'optimisation ne peut pas être ramené à un problème d'optimisation sous contrainte LMI par le même changement de base en raison de la présence de la partie incertaine (bloc $\Delta \star G_i$). Il est donc nécessaire d'étendre cette structure.

Extension de l'EGN au cas robuste

Dans le cas nominal, la synthèse d'observateur à gain statique en présence de pondération de la sortie mène à un problème d'optimisation BMI qui ne peut pas être linéarisé. Deux solutions pour résoudre ce problème ont été proposées dans le chapitre 2 : la première est l'observateur à gain dynamique, la seconde est l'EGN. Pour l'observateur à gain dynamique, l'idée est de se ramener à un problème pour lequel on dispose d'une solution efficace, en l'occurrence le problème de synthèse de correcteur nominal.

En suivant la même démarche, la forme standard du problème de synthèse d'estimateur généralisé dans le cas robuste peut être modifiée en choisissant pour les gains L et D comme des matrices de fonctions de transfert. La forme standard du problème de synthèse devient alors un cas particulier de la forme standard du problème général

de synthèse d'estimateurs robustes présentée figure 4.4 page 137, comme le montre la figure 4.13.

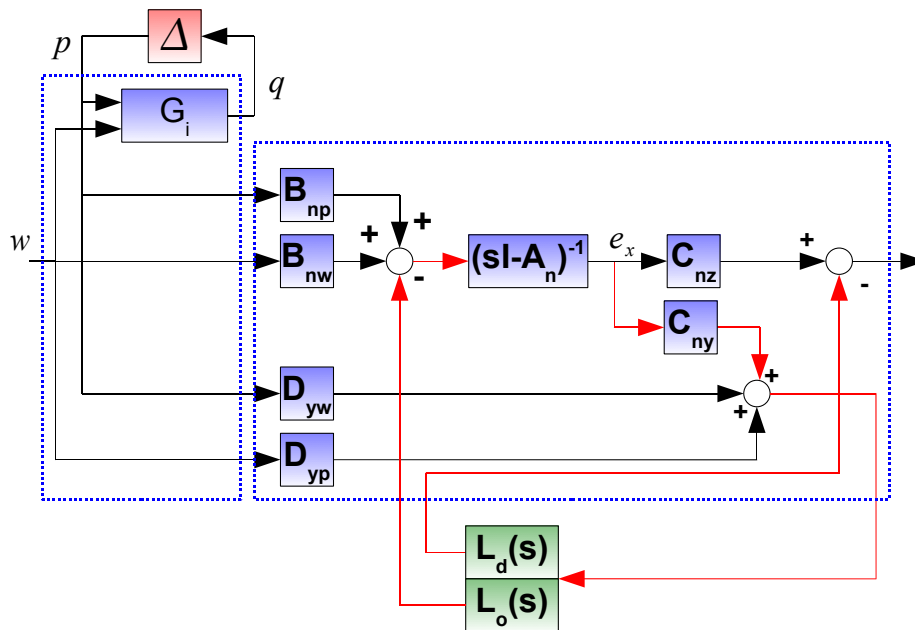


Figure 4.13 – Ajout d'un gain dynamique : cas particulier du problème général de synthèse d'estimateurs robustes

L'extension de l'EGN pour les modèles incertains est un EGN dont les gains sont des fonctions de transfert.

Présentation de la structure

La transformation des gains en matrice de fonctions de transfert permet d'obtenir une extension de l'estimateur généralisé nominal, appelée dans cette thèse l'observateur à gain augmenté⁴.

Cette structure est présentée figure 4.14.

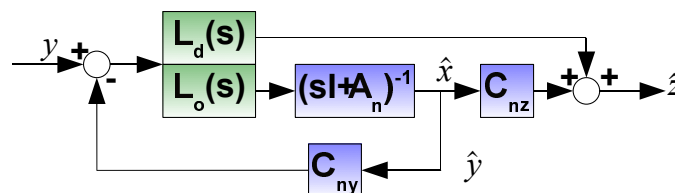


Figure 4.14 – Structure de l'observateur à gain augmenté

4. Augmenté pour deux raisons : l'ajout du terme direct et la transformation des gains statiques en matrices de fonctions de transfert

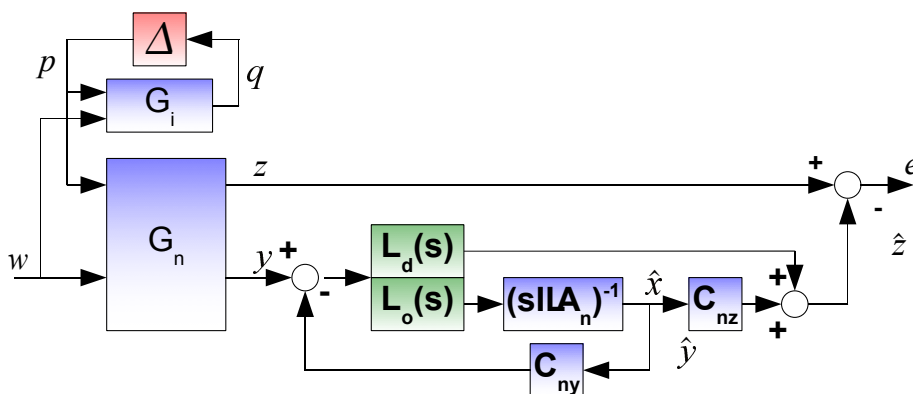


Figure 4.15 – Forme standard du problème de synthèse d’observateur à gain augmenté

Une représentation d’état du gain augmenté $\begin{bmatrix} L_d(s) \\ L_o(s) \end{bmatrix}$ est la suivante :

$$\begin{bmatrix} L_d(s) \\ L_o(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C & D \\ \hline C_L & D_L \end{array} \right]$$

Une représentation d’état de l’OGA complet est donnée par :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_n - D_L C_{ny} & C_L \\ -B_L C_{ny} & A_L \\ \hline C_{nz} - D C_{ny} & C \end{array} \middle| \begin{array}{c} D_L \\ B_L \\ \hline D \end{array} \right] \quad (4.27)$$

Cette structure est analogue à la structure de l’estimateur généralisé nominal, à la différence que le gain statique est remplacé par un gain dynamique. Elle correspond également à un observateur à gain dynamique auquel a été ajouté un terme direct (figure 2.14 page 46).

La forme standard du problème de synthèse d’observateur à gain augmenté est présentée figure 4.15 page 166. La synthèse sans pondération de l’erreur d’estimation est considérée : la section 2.3 page 51 a montré comment se ramener à un problème de synthèse sans pondération à partir d’un problème de synthèse pour une norme pondérée.

La représentation d’état de la forme standard du problème de synthèse est donnée par :

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} A_i & 0 & 0 & 0 & B_{ip} & B_{iw} \\ 0 & A_n & 0 & 0 & B_{np} & B_{nw} \\ 0 & D_L C_{ny} & A_n - D_L C_{ny} & C_L & D_L D_{yp} & D_L D_{yw} \\ 0 & B_L C_{ny} & -B_L C_{ny} & A_L & B_L D_{yp} & B_L D_{yw} \\ \hline C_i & 0 & 0 & D_{qp} & D_{qw} & \\ 0 & C_{nz} - DC_{ny} & -(C_{nz} - DC_{ny}) & C & D_{zp} - DD_{yp} & D_{zw} - DD_{yw} \end{array} \right] \quad (4.28)$$

Il est possible de se ramener à un modèle d'erreur comme présenté pour le cas nominal dans le cas de l'OGS, de l'OGD et de l'EGN. La représentation d'état de $T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ donnée équation (4.28) admet une représentation équivalente de la forme suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} A_i & 0 & 0 & B_{ip} & B_{iw} \\ 0 & A_n - D_L C_{ny} & C_L & B_{np} - D_L D_{yp} & B_{nw} - D_L D_{yw} \\ 0 & B_L C_{ny} & A_L & B_L D_{yp} & B_L D_{yw} \\ \hline C_i & 0 & D_{qp} & D_{qw} & \\ 0 & (C_{nz} - DC_{ny}) & C & D_{zp} - DD_{yp} & D_{zw} - DD_{yw} \end{array} \right] \quad (4.29)$$

La démonstration se fait en utilisant la transformation dans l'espace d'état suivante :

$$T = T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & -I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Dans le cas nominal, la représentation du modèle équivalent fait apparaître une boucle de rétroaction (figure 2.12 page 44). La figure 4.13 présente un schéma bloc de la représentation d'état équivalente obtenue avec l'observateur à gain augmenté. Comme dans le cas nominal, cette boucle de rétroaction apparaît. L'opérateur $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ avec cette représentation pourra être stabilisé si le système $\Delta \star G_i$ est stable pour tout $\Delta \in \Gamma_\Delta$, et si la paire (A_n, C_{ny}) est détectable. Le gain dynamique va être calculé en utilisant cette représentation de l'opérateur.

Problème de synthèse d'observateur à gain augmenté

Problème 24. Problème de synthèse d'observateur à gain augmenté.

La forme standard du problème de synthèse d'OGA est l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)} = \Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ présenté figure 4.15 page 166. $T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ admet la représentation d'état équivalente présentée équation (4.29) page 167

Etant donné γ , trouver s'il existe une matrice de fonctions de transfert $\begin{bmatrix} L_d(s) \\ L_o(s) \end{bmatrix}$ (et la calculer) telle que $\forall \Delta \in \Gamma_\Delta$, $\Delta \star T_{(w,p) \rightarrow (q,e)}$ soit stable et :

$$\forall \Delta \in \Gamma_\Delta, \quad \|\Delta \star T_{(w,p) \rightarrow (q,e)}\|_i < \gamma.$$

4.5.2 Synthèse d'OGA

Le problème de synthèse d'OGA est un cas particulier du problème de synthèse d'estimateur généralisé (problème 21). La représentation équivalente de la forme standard du problème de synthèse d'OGA (figure 4.15) est un cas particulier de la forme standard du problème de synthèse d'estimateur généralisé comme le montre la figure 4.16.

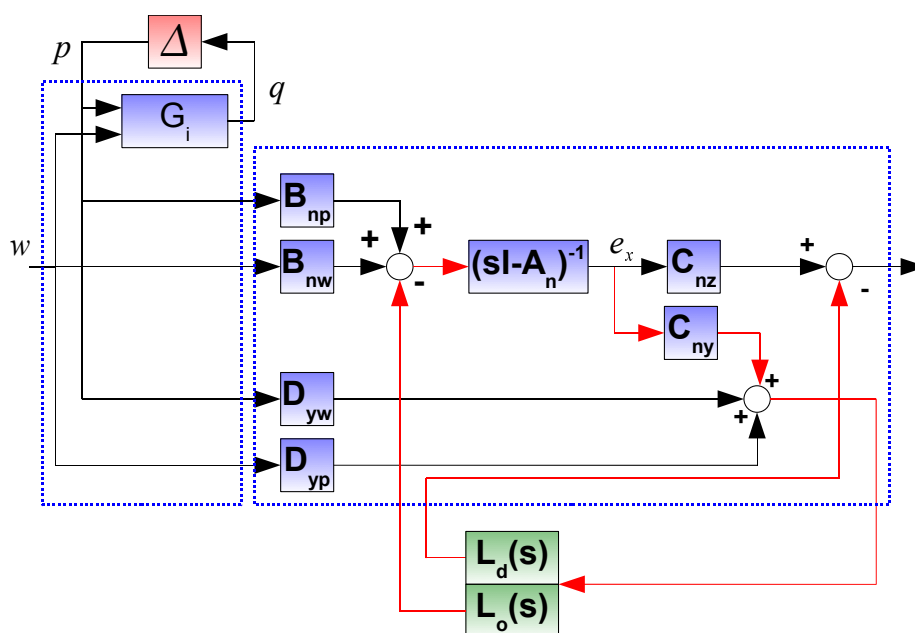


Figure 4.16 – Un cas particulier du problème général de synthèse d'estimateurs robustes

$$\begin{bmatrix} L_d(s) \\ L_o(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_L & B_L \\ C & D \\ C_L & D_L \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} A & B_p & B_w \\ C_q & D_{qp} & D_{qp} \\ C_m & D_{mp} & D_{mp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n & B_p & B_w & 0 & -I \\ C_{nz} & D_{zp} & D_{zw} & -I & 0 \\ C_{ny} & D_{yp} & D_{yw} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les théorèmes 21 (cas \mathcal{L}_2 -gain) et 22 (cas H_2) présentent des solutions au problème de synthèse d'estimateur généralisé. Le problème de synthèse d'observateur à gain augmenté est un cas particulier de ce problème. Les solutions formulées pour le problème

de synthèse d'estimateur généralisé sont donc également des solutions de ce problème de synthèse.

Le théorème pour le \mathcal{L}_2 -gain est formulé à titre d'exemple.

Corollaire 7. *Corollaire au théorème 21 : Synthèse d'observateur à gain augmenté \mathcal{L}_2 -gain (cas continu)*

Il existe une solution au problème de synthèse d'OGA (problème 24 page 167, cas \mathcal{L}_2 -gain) s'il existe des matrices $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_1^T$, \mathbf{Z}_2 , $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_3^T$, $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \\ \mathbf{P}_{12} \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{21} \\ \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}$,

$\mathbf{P}_K, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{bmatrix}$ de dimensions appropriés telles que les conditions (4.30), (4.31), (4.32) soient vérifiées.

$$\diamond \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_K & 0 \\ \mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (4.30)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & \mathbf{Z}_1 & 0 \\ \diamond & \mathbf{Z}_3 & -\mathbf{Z}_2^T & I \\ \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \diamond & \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.31)$$

$$(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3) + (\bullet)^T + \mathcal{L}_X < 0 \quad (4.32)$$

$$\mathcal{L}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I & 0 \\ \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 & \tilde{B} \\ 0 & A_n & B_n \\ 0 & C_{nz} & D_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I \ 0] & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ C_{nz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{Z}_2^T \ \mathbf{Z}_3] & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{ny} & D_y & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_X = [\diamond]^T \begin{bmatrix} \mathbf{X} & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_q \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} & \tilde{C}_q & 0 & \tilde{D}_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C}_q & \tilde{D}_q \\ \tilde{C}_m & \tilde{D}_m \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \\ 0 & B_n \\ 0 & D_z \\ 0 & D_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C_q & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A_i & B_p & B_w \\ 0 & C_K & D_K C_i & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} \\ C_K & 0 & 0 & D_K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & B_{np} & B_{nw} \\ 0 & 0 & 0 & D_{zp} & D_{zw} \\ 0 & 0 & 0 & D_{yp} & D_{yw} \end{bmatrix}$$

□

Ce théorème présente des conditions qui peuvent se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI. Si les conditions du théorème sont vérifiées, alors il est possible de reconstruire les matrices de la représentation d'état du gain augmenté à partir des variables solutions du problème d'optimisation, comme présenté pour le problème général de synthèse dans la sous-section 4.3.2 page 145.

Un point important de cette structure est son ordre après la synthèse : pour que le problème de synthèse soit convexe, le gain dynamique doit être d'ordre plein, c'est-à-dire que les dimensions de la matrice \mathbf{A} doivent être celles de la matrice $\text{diag}(\tilde{A}, A_n)$. Cette dernière matrice est de dimensions $(2n_K + n_{G_i} + n_{G_n}) \times (2n_K + n_{G_i} + n_{G_n})$ où n_{G_i} (resp. n_{G_n}) est l'ordre du système G_i (resp. G_n). Par conséquent, l'estimateur synthétisé avec cette méthode est d'ordre $2n_k + n_{G_i} + 2n_{G_n}$. Cet ordre peut exploser rapidement : la séparation nominale-incertaine peut dans le pire des cas doubler l'ordre du système, et la considération de plusieurs incertitudes peut faire exploser l'ordre de la base des multiplicateurs n_K . Le recours à des techniques de réduction de modèles [PG03] combinées aux théorèmes d'analyse présentés chapitre 3 pour valider la réduction est à explorer pour remédier à ce problème. La solution proposée ici donne donc une solution de référence, qui devra toutefois être affinée pour être applicable dans certains cas.

Une solution à ce problème peut également être obtenue en utilisant le corollaire 5 page 146. La linéarisation du problème BMI se fait par application du lemme d'élimination. Nous avons présenté une solution de ce type à CDC-ECC 2011 ([BBS11]).

De la même manière que pour le cas \mathcal{L}_2 -gain continu, la solution au problème H_2 peut être obtenue à partir du théorème 22. Les solutions aux problèmes de synthèse discrets sont directement dérivables des théorèmes 36 page 263 (synthèse générale d'estimateur

robuste \mathcal{L}_2 -gain discrète) et 37 page 265 (synthèse générale d'estimateur robuste \mathcal{L}_2 -gain discrète).

4.5.3 Synthèse d'observateurs robustes : exemple

Le modèle incertain dépendant du paramètre ω_0 présenté figure 4.17 et dont la représentation d'état est donnée équation (4.33) est considéré dans cette sous-section.

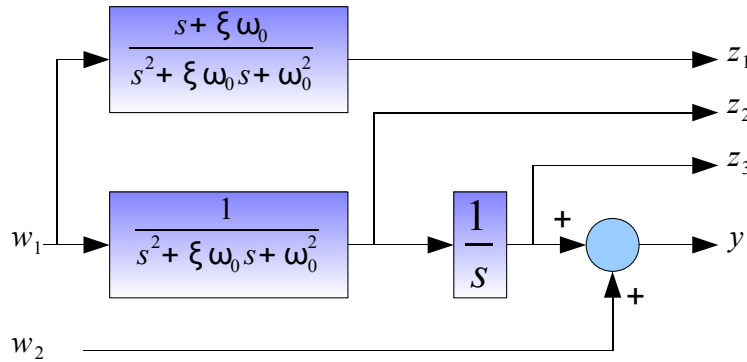


Figure 4.17 – Un exemple de problème d'observation robuste

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\xi\omega_0 & -1 & 0 & | & 1 & 0 \\ \omega_0^2 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & | & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Dans cet exemple d'estimation, l'ensemble des états du système doit être estimé à partir de la mesure de la sortie de l'intégrateur. La mesure est bruitée, et peut s'écrire $y = z_3 + dw_2$. Ce modèle dépend du paramètre ω_0 , qui est incertain mais borné, dans un intervalle $[\omega_c - \omega_{gab}; \omega_c + \omega_{gab}]$. Les valeurs numériques choisies pour cet exemple sont les suivantes :

$$\omega_c = 1, \quad \omega_{gab} = 0.3, \quad \xi = 0.1, \quad d = 0.1.$$

Cet exemple est un exemple de marche aléatoire, qui peut être utilisé pour décrire des comportements de systèmes physiques [Sin70]. Comme le modèle contient un intégrateur, il n'est pas strictement stable. Par conséquent, les méthodes pour la synthèse d'estimateurs utilisant des structures de type filtre [SF06, SK08] ne peuvent pas être utilisées. En revanche, il est possible de synthétiser un estimateur via la structure d'observateur à gain augmenté.

Le modèle incertain peut être mis sous une forme LFT de la forme suivante.

$$\begin{bmatrix} \frac{\dot{x}(t)}{\omega_c} \\ \frac{q(t)}{\omega_c} \\ \frac{z(t)}{\omega_c} \\ \frac{y(t)}{\omega_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\xi\omega_c & -1 & 0 & \bigg| & -\xi & 0 & 1 & 0 \\ \omega_c^2 & 0 & 0 & \bigg| & \omega_c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \bigg| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \omega_{gab} & 0 & 0 & \bigg| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{gab}\omega_c & 0 & 0 & \bigg| & \omega_{gab} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \bigg| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \bigg| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \bigg| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \bigg| & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\dot{x}(t)}{\omega_c} \\ \frac{p(t)}{\omega_c} \\ \frac{w(t)}{\omega_c} \end{bmatrix}$$

$$p(t) = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \quad |\delta| \leq 1$$

où δ est un paramètre incertain LTI.

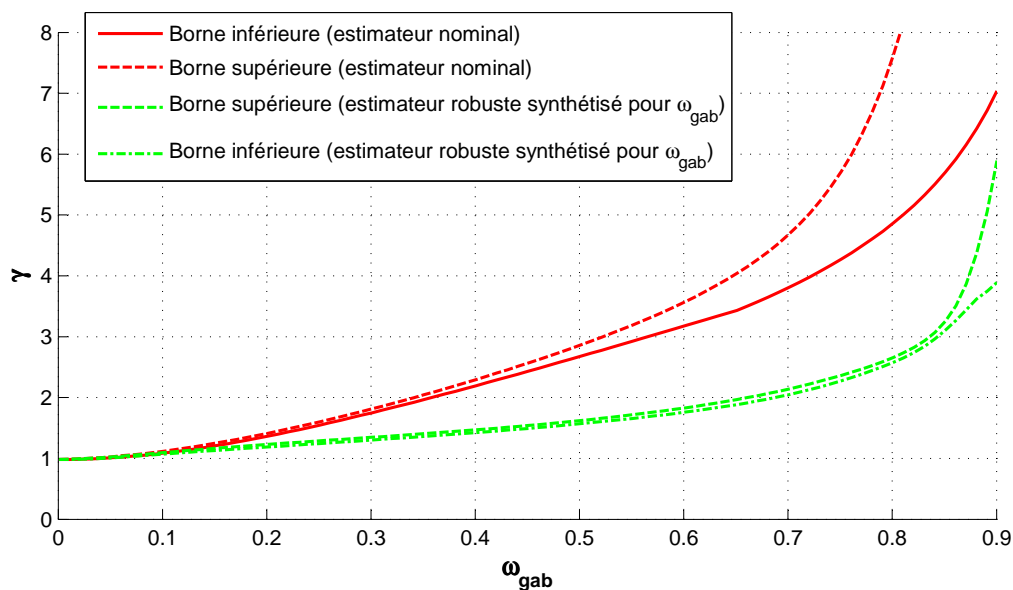
Dans un premier temps, la dégradation de la performance atteinte par l'estimateur nominal est comparée à la performance atteinte par l'estimateur robuste en fonction d'une taille donnée d'incertitude.

Pour l'estimateur nominal, une borne supérieure de la norme H_2 pire-cas atteinte par l'estimateur nominal en fonction de la taille de l'incertitude ω_{gab} est calculée au moyen du théorème 18 page 113 (Analyse de la norme H_2 pire-cas). Une borne inférieure pour cette taille d'incertitude est également calculée par un échantillonnage sur le paramètre incertain δ . Les bornes supérieures et inférieures en fonction de ω_{gab} sont présentées figure 4.18.

Pour chaque taille d'incertitude ω_{gab} , un estimateur robuste est synthétisé au moyen du théorème 22 page 148. Une borne supérieure sur la norme H_2 pire-cas garantie par la méthode de synthèse pour cette taille d'incertitude est obtenue. Une borne inférieure de la performance atteinte pour l'estimateur synthétisé avec cette taille d'incertitude est calculée par un échantillonnage sur le paramètre δ . Les résultats de synthèse sont présentés figure 4.18.

Cette figure montre l'intérêt d'utiliser la synthèse robuste : dans le cas nominal, les résultats sont les mêmes. Avec 10% d'incertitude, la dégradation de la performance est équivalente. Il ne sera pas nécessaire d'utiliser un estimateur robuste pour des incertitudes de cette taille. Pour 30% d'incertitudes, la dégradation de la performance est de 75% (au mieux) pour l'estimateur nominal, et de 35% (au pire) pour l'estimateur robuste. Pour 30% d'incertitudes, la dégradation de la performance est de 180% (au mieux) pour l'estimateur nominal, et de 60% (au pire) pour l'estimateur robuste.

Pour montrer la qualité de l'estimation obtenue, des réalisations temporelles sont présentées pour une taille d'incertitudes de 30%, cas pour lequel l'utilisation d'un estimateur robuste est intéressante. Les figures 4.19 page 174 à 4.21 page 176 montrent des réalisations temporelles obtenues pour $\delta = -1$ ($\omega_0 = \omega_c - \omega_{gab}$, figure 4.19 page 174), $\delta = 1$ ($\omega_0 = \omega_c + \omega_{gab}$, figure 4.20 page 175) et $\delta = 0$ ($\omega_0 = \omega_c$, figure 4.21 page 176).

Figure 4.18 – Dégradation de la norme H_2 pour un paramètre incertain

Il est très intéressant de regarder le gain dynamique de l'observateur pour cet exemple d'application. Dans ce cas où la mesure d'un seul signal est disponible, le gain dynamique est un vecteur de fonctions de transfert. La figure 4.22 montre les valeurs singulières du gain dynamique. Pour faciliter l'interprétation, le module de la fonction de transfert incertaine $\frac{\omega_0^2}{s^2 + \xi\omega_0 + \omega_0^2}$ est présenté pour divers ω_0 compris dans l'intervalle de variations. Il est évident que le gain augmenté prend en compte l'incertitude, ce qui justifie le choix d'un gain dynamique.

4.5.4 Synthèse d'observateurs robustes : conclusions

La structure observateur à gain augmenté et les résultats de synthèse efficace qui y sont associés sont une contribution majeure de cette thèse. Cette structure étend les observateurs aux systèmes incertains. Elle permettra la synthèse d'estimateurs pour des systèmes instables, dans le cas où l'instabilité n'apparaît que dans le système nominal.

De plus, cette structure rejoint les travaux publiés dans [NB08] dans lesquels l'intérêt de l'utilisation de nouvelles structures d'observateur a été mis en valeur. Dans certains cas (incertitudes+modes instables dans le modèle nominal), cette structure est la seule permettant la synthèse d'un estimateur. Pour revenir aux objectifs de ce chapitre, les résultats présentés dans cette section permettent la synthèse d'estimateurs avec une structure observateur. Les objectifs du chapitre complétés par cette section sont présentés tableau 4.5.

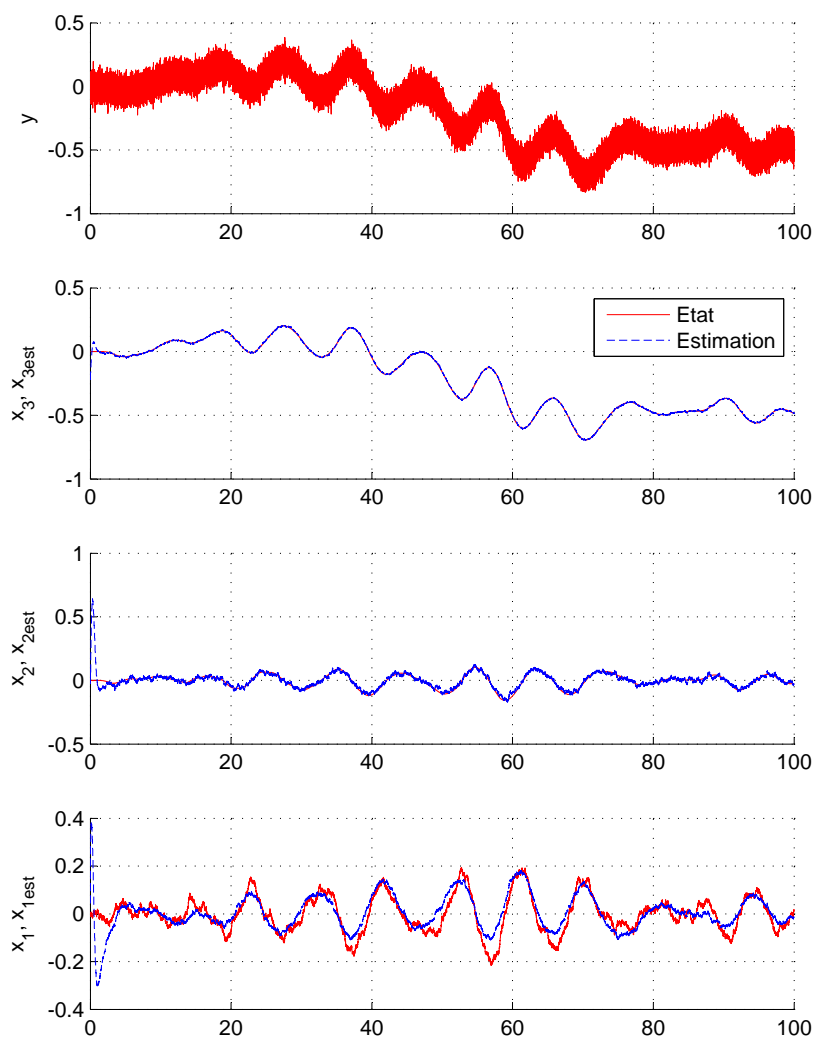
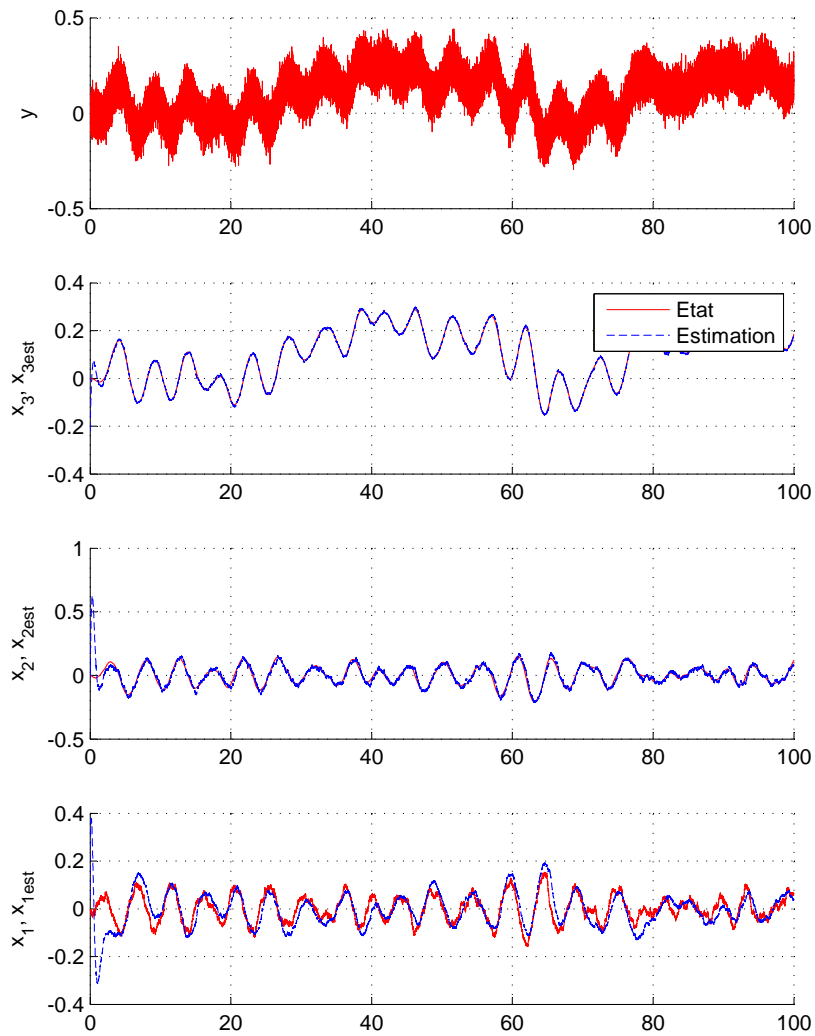


Figure 4.19 – Réalisation temporelles de l'estimateur robuste pour $\omega_{gab} = 0.3$ ($\delta = -1$)

Figure 4.20 – Réalisation temporelles de l'estimateur robuste pour $\omega_{gab} = 0.3$ ($\delta = 1$)

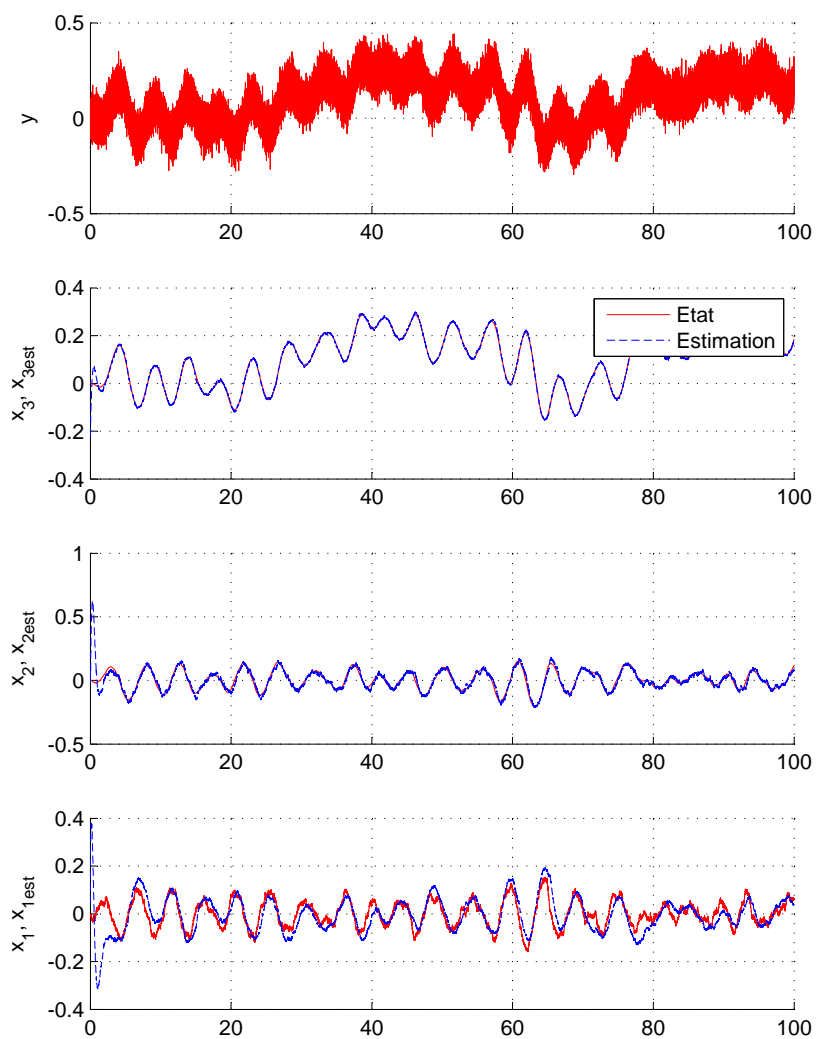


Figure 4.21 – Réalisation temporelles de l'estimateur robuste pour $\omega_{gab} = 0.3$ ($\delta = 0$)

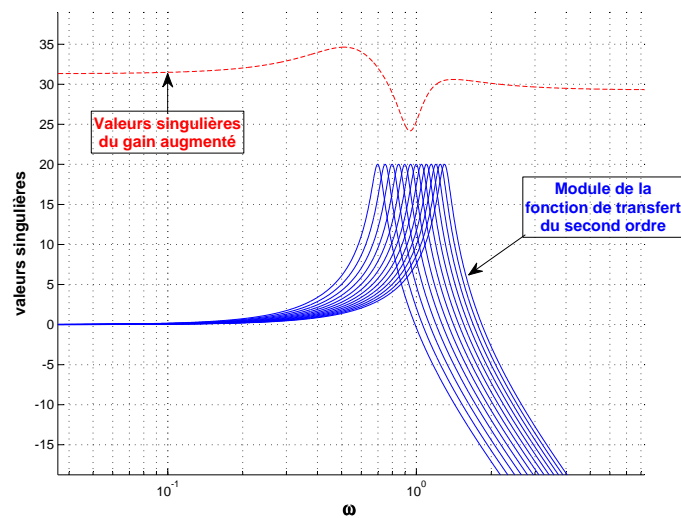


Figure 4.22 – Valeurs singulières du gain augmenté

4.6 Autres résultats de synthèse pour l'estimation

Dans le chapitre 2 (Estimation nominale), les résultats de synthèse d'estimateurs ont été complétés par la section 2.4 page 62 qui présente une méthode de calcul d'une limite de performance ainsi que d'une réponse fréquentielle optimale. Ceci a offert un certain nombre d'outils pour analyser et affiner les résultats obtenus par les méthodes de synthèse d'estimateurs nominaux. En se basant sur le théorème 15 (Analyse du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas, [MR97]), la sous-section 4.6.1 présente une méthode pour étendre cette limite de performance à l'estimation robuste.

Les résultats présentés dans la section 4.6.1 page 177 permettent de calculer à une fréquence donnée une limite de performance (pour une norme pire-cas) ainsi qu'une réponse fréquentielle optimale pour l'estimateur. Pour étendre ce résultat, la sous-section 4.6.2 présente une extension permettant le calcul de cette borne inférieure pour des bandes de fréquences, au moyen de filtres dont les pôles sont fixés. Ceci permet également de proposer une approche exhaustive de la synthèse robuste d'estimateurs à pôles fixés pour les cas H_2 et \mathcal{L}_2 -gain.

4.6.1 Synthèse mono-fréquence

Il a été démontré chapitre 2, section 2.4 qu'il est possible de calculer la réponse fréquentielle optimale pour l'estimateur à une pulsation donnée. Cette solution a donné les outils suivants pour l'analyse et la synthèse d'un estimateur (dans le cas nominal) :

1. Une limite de performance sur la densité spectrale de puissance de l'erreur d'estimation ;
2. Une réponse fréquentielle de référence pour l'estimateur ;

| | Estimation nominale | Estimation robuste |
|---|---|---|
| Synthèse d'estimateur | | |
| Synthèse de la structure observateur à gain statique | Synthèse H_2, H_∞ | Impossibilité de se ramener à un problème sous contrainte LMI |
| Synthèse de la structure observateur à gain dynamique | Synthèse H_2, H_∞ | Cas particulier du théorème 21 (cas \mathcal{L}_2 -gain) et du théorème 22 (cas H_2). |
| Synthèse d'estimateur généralisé nominal | Synthèse H_2, H_∞, H_∞ pondérée | Extension de l'EGN : L'observateur à gain augmenté. Synthèse H_2, \mathcal{L}_2 -gain : cas particulier des théorèmes 21 (cas \mathcal{L}_2 -gain) et 22 (cas H_2) |

Tableau 4.5 – Objectifs du chapitre complétés par la section 4.5

3. Des outils de comparaison qualitatifs pour comparer les estimateurs synthétisés pour les normes H_2 et H_∞ ;
4. Des pondérations idéales pour la synthèse d'estimateurs H_∞ .

Ces résultats ont été obtenus en ne considérant qu'une seule pulsation et en recherchant la réponse fréquentielle de l'estimateur minimisant la densité spectrale de puissance de la sortie à cette pulsation donnée.

En se basant sur le théorème 15 page 106 (Analyse du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas, [MR97]), cette sous-section montre que ce résultat peut être étendu de façon très simple à l'estimation robuste. Seules des incertitudes LTI ($\Gamma_\Delta = \Gamma_{\Delta_{TI}}$) sont considérées. $T_{(w) \rightarrow (e)}$ est alors une matrice de fonctions de transfert incertaines. Le problème de synthèse de la réponse fréquentielle de l'estimateur minimisant le pire cas des valeurs singulières de $T_{(w) \rightarrow (e)}$ à une fréquence donnée est considéré dans cette section.

On définit la limite de performance robuste de la façon suivante :

$$\min \gamma_{\omega_0} \quad \text{tel que} \quad \exists F(j\omega_0), \forall \Delta \in \Gamma_\Delta, \bar{\sigma}(\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}(j\omega_0)) \leq \gamma$$

Cette limite de performance correspond à la valeur singulière minimale atteignable pour l'erreur d'estimation. On va chercher à calculer une borne supérieure de cette limite de performance.

Problème 25. Calcul d'une borne supérieure de la limite de performance à une fréquence donnée.

Etant donné γ_{ω_0} , trouver $F(j\omega_0)$ telle que pour tout $\Delta \in \Gamma_\Delta$:

$$\bar{\sigma}(\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}(j\omega_0)) < \gamma_{\omega_0}.$$

Dans le cas nominal, une solution analytique à ce problème existe (théorème 14 page 64, synthèse du filtre optimal). Dans le cas robuste, pour une pulsation donnée, nous proposons une solution sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI. On rappelle qu'à une pulsation donnée, le multiplicateur $\Pi(j\omega_0)$ peut s'écrire sous la forme $\Pi(j\omega_0) = \Pi^{Re} + i\Pi^{Im}$, avec $\Pi^{Re} \in \Gamma_{\Pi^{Re}}$, $\Pi^{Im} \in \Gamma_{\Pi^{Im}}$. L'ensemble $\Gamma_{\Pi^{Re}}$ est défini par l'équation (3.19) page 116. L'ensemble $\Gamma_{\Pi^{Im}}$ est défini par l'équation (3.20) page 116.

Théorème 23. *Calcul d'une borne supérieure de la limite de performance à une fréquence donnée.*

Il existe une solution au problème 25 s'il existe \mathbf{F}^{Re} , \mathbf{F}^{Im} , $\Pi^{Re} \in \Gamma_{\Pi^{Re}}$, $\Pi^{Im} \in \Gamma_{\Pi^{Im}}$ telles que la condition (4.34) soit vérifiée.

$$\begin{bmatrix} \Psi^{Re} & \Psi^{Im} \\ -\Psi^{Im} & \Psi^{Re} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.34)$$

Avec :

$$\Psi^{Re} = \left[\begin{array}{c|c} [\diamond]^T \begin{bmatrix} \Pi^{Re} & \Pi^{Im} & 0 \\ -\Pi^{Im} & \Pi^{Re} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_{\omega_0}^2 I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{(p,w) \rightarrow (q)}^{Re}(j\omega_0) \\ [I \ 0] \\ -T_{(p,w) \rightarrow (q)}^{Im}(j\omega_0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} [I \ -\mathbf{F}^{Re}] & \mathbf{F}^{Im} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{(p,w) \rightarrow (z,y)}^{Re}(j\omega_0) \\ T_{(p,w) \rightarrow (y)}^{Im}(j\omega_0) \end{bmatrix} \end{array} \right] \begin{array}{c} \diamond \\ -I \end{array}$$

$$\Psi^{Im} = \left[\begin{array}{c|c} [\diamond]^T \begin{bmatrix} \Pi^{Im} & -\Pi^{Re} \\ \Pi^{Re} & \Pi^{Im} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{(p,w) \rightarrow (q)}^{Re}(j\omega_0) \\ [I \ 0] \\ -T_{(p,w) \rightarrow (q)}^{Im}(j\omega_0) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} [I \ -\mathbf{F}^{Re}] & -\mathbf{F}^{Im} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} T_{(p,w) \rightarrow (z,y)}^{Im}(j\omega_0) \\ T_{(p,w) \rightarrow (y)}^{Re}(j\omega_0) \end{bmatrix} \end{array} \right] \begin{array}{c} \diamond \\ -I \end{array}$$

■

Démonstration. Théorème 23 (Calcul d'une borne supérieure de la limite de performance)

Les conditions du théorème 15 page 106 appliquées sur la forme standard du problème de synthèse de filtre robuste (sans pondération de l'erreur d'estimation, figure 4.5 page 151) sont les suivantes pour une pulsation donnée : Etant donné γ_{ω_0} , il existe une solution au problème 25 s'il existe $\epsilon > 0$, $F(j\omega_0) = \mathbf{F}^{Re} + i\mathbf{F}^{Im}$, $\Pi(j\omega) \in \Gamma_{\Pi}$ tels que la contrainte (4.35) soit vérifiée.

$$[\diamond]^* \left[\begin{array}{cc|cc} \Pi_s(j\omega) & 0 & \Pi_{as}(j\omega_0) & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \hline \Pi_{as}(j\omega)^* & 0 & -\Pi_s(j\omega_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_{\omega_0}^2 I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}(j\omega_0) \\ I \end{array} \right] \leq -\epsilon I \quad (4.35)$$

$$\text{Avec } T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}(j\omega_0) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -F(j\omega_0) \end{bmatrix} T_{(p,w) \rightarrow (q,z,y)}(j\omega_0).$$

En utilisant le lemme de Schur, la condition (4.35) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\overbrace{\left[\begin{array}{c|c} [\diamond]^* \Pi(j\omega_0) \begin{bmatrix} T_{(p,w) \rightarrow (q)}(j\omega_0) \\ [I \ 0] \end{bmatrix} - [\diamond]^T \gamma_{\omega_0}^2 I [0 \ I] & \diamond \\ \hline [I \ -F(j\omega_0)] \begin{bmatrix} T_{(p,w) \rightarrow (z)}(j\omega_0) \\ T_{(p,w) \rightarrow (y)}(j\omega_0) \end{bmatrix} & -I \end{array} \right]}^{\Psi} < 0 \quad (4.36)$$

Trouver $F(j\omega_0)$ telle que la condition (4.36) soit vérifiée est un problème d'optimisation. C'est un problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI complexe. La partie réelle de la matrice Ψ est la matrice Ψ^{Re} du théorème et sa partie imaginaire, la matrice Ψ^{Im} . Les conditions du théorème sont obtenues par application du théorème 30 page 223, ce qui complète la démonstration. \square

Ce résultat est une extension du théorème 14 page 64 (Filtre Optimal Nominal). La différence est que dans le cas robuste et en raison de la complexité du problème, la solution peut être calculée pulsation par pulsation. En l'absence d'incertitude, le résultat de la minimisation de γ_{ω_0} sous les contraintes du théorème 23, permettra de retrouver la même réponse fréquentielle pour l'estimateur que le théorème 14. Dans le cas robuste, ce théorème va permettre de donner une borne supérieure sur la limite de performance robuste ainsi que la réponse fréquentielle de l'estimateur correspondant, donnée par $F(j\omega_0) = \mathbf{F}^{Re} + i\mathbf{F}^{Im}$.

Cette sous-section présente donc un théorème permettant d'étendre au cas robuste le théorème 14 page 64 (Filtre Optimal Nominal) permettant de calculer une réponse fréquentielle optimale dans le cas nominal.

Cependant, ce théorème ne permet de tester qu'une seule fréquence. Le coût en terme de puissance de calcul est faible (en raison du faible nombre de variables), ce qui permet de tester rapidement un grand nombre de fréquences.

Ce résultat va cependant permettre de synthétiser des pondérations pour l'estimation H_∞ robuste, ainsi que de comparer dans le domaine fréquentiel les résultats obtenus avec divers estimateurs. Ceci est montré dans l'exemple suivant.

Synthèse à une fréquence : exemple d'application

L'exemple présenté pour la synthèse de filtres robustes est considéré (sous-section 4.4.2 page 155)

On s'intéresse dans un premier temps à la validation de la limite de performance robuste. Pour ceci, on compare les limites de performance nominales pour des modèles choisis par un échantillonnage du paramètre incertain. Les limites de performance nominales sont calculées pour ces modèles certains au moyen du théorème 14 page 64.

On compare ceci avec la borne supérieure de la limite de performance robuste calculée pour le modèle incertain avec le théorème 23. Les résultats sont présentés figure 4.23. Cette figure valide la borne supérieure de la limite de performance robuste pour l'estimation calculée par le théorème 23 page 179. On remarque également qu'un échantillonnage sur les paramètres incertains permet de calculer une borne inférieure de cette performance robuste.

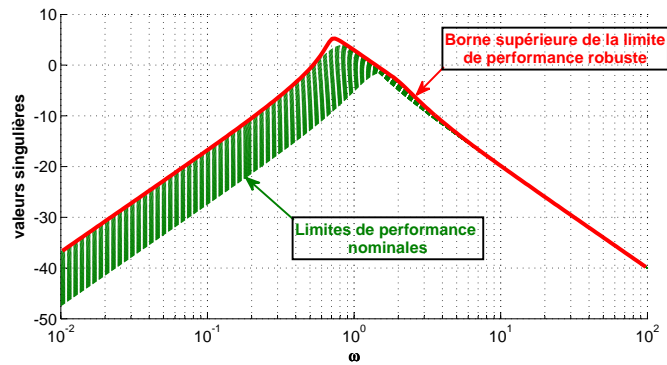


Figure 4.23 – Comparaison des bornes inférieures nominales et robustes

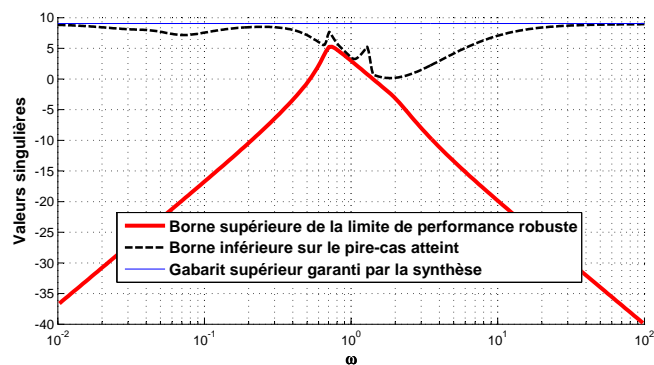


Figure 4.24 – Bornes supérieures et inférieures des valeurs singulières pire-cas atteintes par l'estimateur robuste H_∞ synthétisé sans pondération

Dans le chapitre 2, la figure 2.23 a présenté comment les valeurs singulières de $T_{(w) \rightarrow (e)}$ atteintes avec les estimateurs H_∞ sans pondération et H_2 s'articulaient autour de cette

limite de performance. La figure 4.24 montre le pire-cas des valeurs singulières atteintes avec l'estimateur H_∞ . Une borne inférieure de ce pire-cas est calculée par force brute⁵ (tirets noirs). Le gabarit supérieur garanti par la synthèse est également présenté (trait continu bleu). Le gabarit inférieur sur le pire-cas est donné en rouge. En l'absence de pondération de l'erreur d'estimation la méthode de synthèse garantit un gabarit supérieur constant sur le pire-cas des valeurs singulières dont la hauteur est limitée par le bas par la limite de performance robuste. Cette figure confirme que la démarche présentée dans le cas robuste pour la synthèse H_∞ peut être étendue au cas robuste au moyen des outils présentés dans cette section. La synthèse H_2 confirme également ce résultat, présentant des résultats analogues à ceux présentés pour le cas nominal. Ces résultats ne sont pas présentés.

Choix de pondération robuste de l'erreur d'estimation : exemple

Pour montrer que la synthèse pondérée peut être étendue à l'estimation robuste, la pondération idéale nominale présentée dans la section 2.4 page 62 est comparée avec la borne inférieure dans la figure 4.25. L'objectif de la pondération idéale est de proposer un gabarit supérieur cohérent au gabarit inférieur pour la synthèse H_∞ . Il est notable ici que le gabarit défini par cette pondération nominale n'est pas cohérent avec la limite de performance robuste.

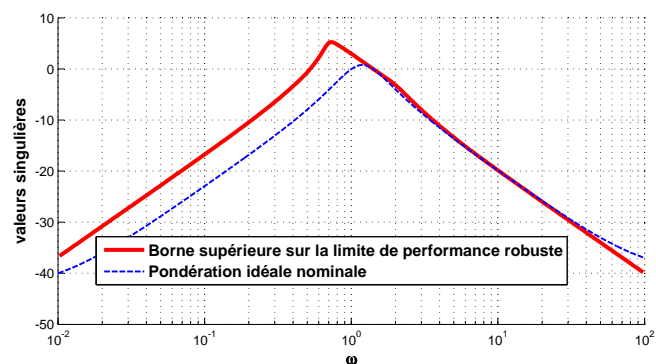


Figure 4.25 – Pondération nominale VS borne inférieure robuste

Ceci peut être amélioré approximativement par un simple décalage en fréquence de la pondération idéale. La figure 4.26 illustre le décalage et montre la nouvelle pondération choisie pour la synthèse du filtre robuste.

On compare à présent les résultats des synthèses réalisées avec la pondération nominale et la nouvelle pondération obtenue par décalage fréquentiel de la pondération nominale. La figure 4.27 montre les gabarits supérieurs garantis par le corollaire 6 pour les valeurs singulières pire-cas de $T_{(w) \rightarrow (e)}$. Cette figure montre aussi une borne inférieure calculée avec un échantillonnage sur le paramètre incertain, et la borne supérieure de la

5. Cela correspond au test d'un grand nombre de modèles dans le modèle incertain

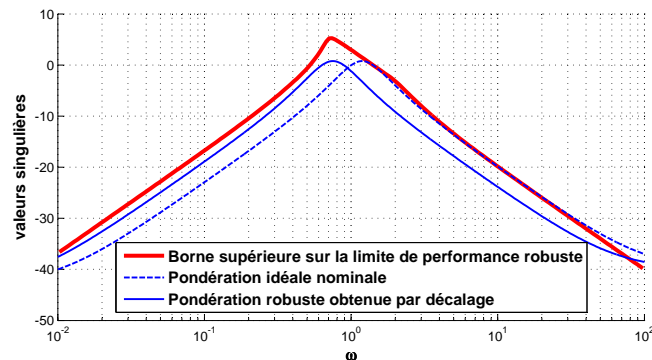


Figure 4.26 – Recalage fréquentiel pour la synthèse d'une pondération robuste

limite de performance robuste. Cette figure illustre bien le fait que la borne supérieure de la limite de performance calculée au moyen du théorème 23 offre des perspectives intéressantes pour choisir les pondérations des erreurs d'estimation.

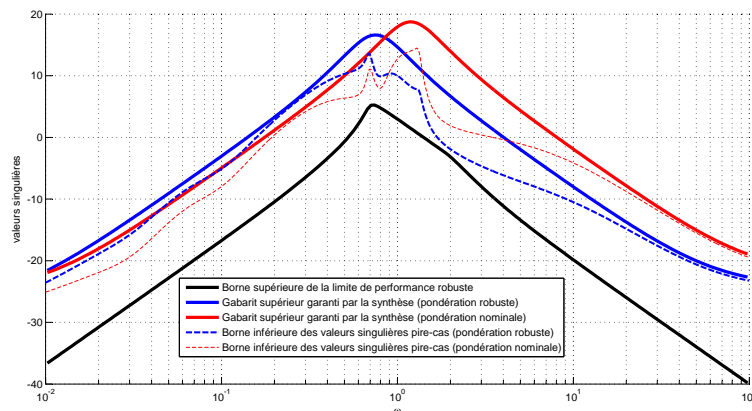


Figure 4.27 – Comparaison des résultats de synthèse avec l'estimateur robuste pour différentes pondérations

Pour finir, les valeurs singulières atteintes avec l'estimateur robuste synthétisé avec la pondération robuste et l'estimateur nominal synthétisé avec la pondération nominale sont comparées figure 4.28 avec le gabarit garanti par la synthèse robuste. Vis-à-vis du gabarit, la synthèse robuste offre un gain de performance conséquent. Cette figure illustre bien l'intérêt de la synthèse robuste et des outils présentés dans cette section.

4.6.2 Synthèse de filtre à pôles fixés

Les résultats présentés pour la synthèse de filtre dans la section 4.4, page 151 utilisent une structure filtre définie comme une matrice de fonctions de transfert dont les pôles et les zéros ne sont pas fixés. Cette partie va montrer que fixer les pôles du filtre présente un certain potentiel.

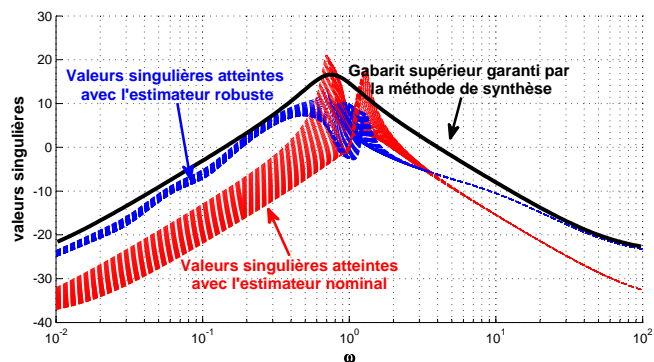


Figure 4.28 – Valeurs singulières atteintes par l’estimateur robuste et l’estimateur nominal

Pour la synthèse à pôles fixés, il est nécessaire de définir une base pour le filtre, comme il est présenté section 3.3 page 102 pour les multiplieurs dynamiques.

Cette base est de la forme $\begin{bmatrix} (sI - A_b)^{-1}B_b \\ D_b \end{bmatrix}$, où A_b est une matrice Hurwitz. Cette base est ensuite multipliée par une matrice à coefficients réels de la forme $[C \ D]$, pour obtenir la forme finale du filtre :

$$F(s) = [C \ D] \begin{bmatrix} (sI - A_b)^{-1}B_b \\ D_b \end{bmatrix}.$$

Le problème de synthèse de filtres à pôles fixés est considéré dans cette section. La forme standard du problème de synthèse de filtres robustes à pôles fixés est présentée figure 4.29.

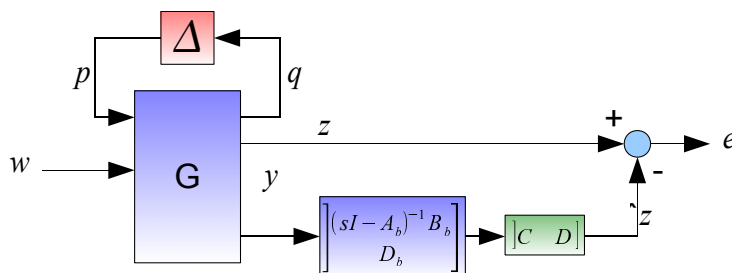


Figure 4.29 – Problème de synthèse de filtres à pôles fixés

Les représentations d’état des divers blocs de la forme standard sont les suivantes :

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_p & B_w \\ \hline C_q & D_{qp} & D_{qw} \\ C_z & D_{zp} & D_{zw} \\ C_y & D_{yp} & D_{yw} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} (sI - A_b)^{-1}B_b \\ D_b \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_b & B_b \\ \hline I & 0 \\ 0 & D_b \end{array} \right]$$

La forme standard est définie par $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$. La représentation d'état de la matrice de fonctions de transfert $T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ est la suivante :

$$T_{(p,w) \rightarrow (q,e)} = \left[\begin{array}{cc|cc} A & 0 & B_p & B_w \\ B_b C_y & A_b & B_b D_{yp} & B_b D_{yw} \\ \hline C_q & 0 & D_{qp} & D_{qw} \\ C_z - \mathbf{D} D_b C_y & -\mathbf{C} & D_{zp} - \mathbf{D} D_b D_{yp} & D_{zw} - \mathbf{D} D_b D_{yw} \end{array} \right] \quad (4.37)$$

Le problème de synthèse à pôles fixés est le suivant :

Problème 26. Problème de synthèse de filtre robuste à pôles fixés.

La forme standard du problème général de synthèse de filtres à pôles fixés est présentée figure 4.29. Cette forme standard s'écrit $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$, où $T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ admet la représentation d'état présentée équation (4.37).

Etant donné γ , trouver une matrice $\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ (et la calculer) telle que pour tout $\Delta \in \Gamma_\Delta$,

$$\|\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}\|_i < \gamma.$$

Les normes considérées dans cette section sont le \mathcal{L}_2 -gain et la norme H_2 .

Résultats de synthèse à pôles fixés

La démarche pour dériver un résultat de synthèse dans le cas de la synthèse à pôles fixés est identique à la démarche appliquée pour dériver les théorèmes 21 à 37. Par application des résultats d'analyse présentés en chapitre 3 sur la forme standard du problème de synthèse de filtre à pôles fixés, on obtient un problème d'optimisation sous contrainte BMI. Dans le cas de la synthèse à pôles fixés, il est trivial de se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte LMI. Deux théorèmes sont présentés, présentant la synthèse garantissant un \mathcal{L}_2 -gain pire-cas, ou une norme H_2 pire-cas dans le cas continu⁶. Un troisième théorème présente la synthèse par bandes de fréquences, dont les potentialités restent à explorer.

Théorème 24. *Synthèse \mathcal{L}_2 -gain à pôles fixés (cas continu).*

Il existe une solution au problème de synthèse de filtres à pôles fixés (problème 26 page 185, cas \mathcal{L}_2 -gain) s'il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T > 0$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, \mathbf{C} , \mathbf{D} , telles que les conditions (4.38) et (4.39) soient vérifiées.

6. Les cas discrets sont triviaux à partir de ces deux résultats et de leurs démonstrations, présentée dans l'annexe D, sous-section D.2 page 247

$$\left[\begin{array}{c|c} [\diamond]^T \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P} & 0 & 0 \\ \mathbf{P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}_q & \mathcal{D}_q \\ 0 & [0 \ I] \end{bmatrix} \\ \hline & \begin{bmatrix} \mathcal{C}_e & \mathcal{D}_e \end{bmatrix} \\ \hline & -I \end{array} \right] < 0 \quad (4.38)$$

$$[\diamond] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_K & 0 \\ \mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (4.39)$$

avec

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C}_q & \mathcal{D}_q \\ \hline \mathcal{C}_e & \mathcal{D}_e \\ \hline 0 & [0 \ I] \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|cc} A_K & 0 & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C_q & 0 & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A & 0 & B_p & B_w \\ 0 & 0 & B_b C_y & A_b & B_b D_{yp} & B_b D_{yw} \\ \hline 0 & C_K & D_K C_q & 0 & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} \\ C_K & 0 & 0 & 0 & D_K & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_z - \mathbf{D} D_b C_y & -\mathbf{C} & D_{zp} - \mathbf{D} D_b D_{yp} & D_{zw} - \mathbf{D} D_b D_{yw} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right]$$

■

Ce théorème peut se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI. On dispose donc d'une solution efficace pour tester l'existence d'un filtre à pôles fixés garantissant le \mathcal{L}_2 -gain de $T_{(w) \rightarrow (e)}$. La démonstration de ce théorème est présentée dans l'annexe D, sous-section D.2 page 247. Le théorème permettant la synthèse d'un filtre à pôles fixés garantissant une borne supérieure sur la norme H_2 pire-cas est à présent formulé. La démonstration est analogue à la démonstration du théorème 24 pour la synthèse \mathcal{L}_2 -gain robuste.

Théorème 25. *Synthèse H_2 à pôles fixés.*

Il existe une solution au problème de synthèse de filtres à pôles fixés (problème 26 page 185, cas H_2) s'il existe $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T > 0$ telles que les contraintes (4.40), (4.41), (4.42), (4.43) soient vérifiées.

$$\mathcal{D}_{qw} = 0 \quad \mathcal{D}_{ew} = 0 \quad \text{Trace}(\mathbf{S}) < \gamma^2 \quad (4.40)$$

$$[\diamond] \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P} & 0 \\ \mathbf{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B}_p \\ \mathcal{C}_q & \mathcal{D}_{qp} \end{bmatrix} & \diamond \\ & & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.41)$$

$$[\diamond] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_K & 0 \\ \mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (4.42)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P}\mathcal{B}_w \\ \mathcal{B}_w^T \mathbf{P} & \mathbf{S} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.43)$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B}_p & \mathcal{B}_w \\ \hline \mathcal{C}_q & \mathcal{D}_{qp} & \mathcal{D}_{qw} \\ \hline \mathcal{C}_e & \mathcal{D}_{ep} & \mathcal{D}_{ew} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} A_K & 0 & 0 & 0 & B_K & & 0 \\ 0 & A_K & B_K C_q & 0 & B_K D_{qp} & & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A & 0 & B_p & & B_w \\ \hline 0 & 0 & B_b C_y & A_b & B_b D_{yp} & & B_b D_{yw} \\ 0 & C_K & D_K C_q & 0 & D_K D_{qp} & & D_K D_{qw} \\ C_K & 0 & 0 & 0 & D_K & & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_z - \mathbf{D}D_b C_y & -\mathbf{C} & D_{zp} - \mathbf{D}D_b D_{yp} & & D_{zw} - \mathbf{D}D_b D_{yw} \end{array} \right]$$

■

La démonstration de ce théorème est présentée dans l'annexe D, sous-section D.2 page 247.

Les deux théorèmes présentés dans cette section permettent de synthétiser un filtre dont les pôles ont été choisis arbitrairement. Le filtre ainsi synthétisé va minimiser une borne supérieure sur le \mathcal{L}_2 -gain pire-cas (théorème 24) ou sur la norme H_2 pire-cas (théorème 25) de l'opérateur incertain $T_{(w) \rightarrow (e)}$. On dispose donc d'une solution pour la synthèse à pôles fixés.

Les résultats pour le cas discret peuvent être dérivés de façon triviale, et ne sont pas formulés dans cette thèse pour cette raison. Toutefois, la formulation de ces résultats permet par exemple la synthèse de filtres FIR, et permet de recouvrir le théorème présenté dans [BHS10] pour les incertitudes paramétriques et dynamiques.

Le choix des pôles est bien évidemment le problème ouvert pour l'application de ces méthodes. Une des perspectives post-thèse est d'utiliser les théorèmes donnant des solutions au problème général de synthèse d'estimateur robuste pour synthétiser des filtres robustes pour obtenir des pôles de référence et une performance de référence. La combinaison des méthodes de synthèse de filtre à pôles fixés avec les méthodes de synthèse de filtres robustes présentées section 4.4 page 151 et des algorithmes d'optimisation globale permettra par exemple de créer des méthodes de synthèse de filtres d'ordre réduit.

Synthèse par bandes de fréquences

Dans cette section, la synthèse à pôles fixés est considérée, seulement dans le cas d'incertitudes LTI. Dans ce cas, la forme standard du problème de synthèse à pôles fixés présentée figure 4.29 est une matrice de fonctions de transfert, et admet une réponse fréquentielle. Dans le chapitre 3, le théorème 19 page 117 présente des conditions convexes pour tester une borne supérieure sur les valeurs singulières maximales d'une matrice de fonctions de transfert incertaines. Le théorème 23 permet de synthétiser une réponse fréquentielle optimale pour l'estimateur à une fréquence donnée.

Devant la nécessité de tester un grand nombre de fréquences, le théorème 20 présente des conditions permettant de tester une borne supérieure sur les valeurs singulières d'une matrice de fonctions de transfert incertaines sur un intervalle de pulsations. Pour compléter notre approche de la synthèse du filtre idéal dans le cas robuste, réalisée pour l'instant à une fréquence donnée, cette section présente la synthèse du filtre idéal pour une bande de pulsations. La forme retenue pour le filtre est un filtre à pôles fixés. Il est également possible de choisir une matrice complexe, ce qui n'est pas développé ici.

La forme standard du problème de synthèse par bandes de fréquences est équivalente à la forme standard du problème de synthèse à pôles fixés, présentée figure 4.29. L'ensemble d'incertitudes Γ_Δ est l'ensemble $\Gamma_{\Delta TI}$ des incertitudes LTI.

Le problème de synthèse à pôles fixés par bandes de fréquences est le suivant :

Problème 27. Synthèse à pôles fixés pour une bande de pulsations.

La forme standard du problème général de synthèse de filtres à pôles fixés est présentée figure 4.29. Cette forme standard s'écrit $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$, où $T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ admet la représentation d'état présentée équation (4.37). Etant donné γ , $\Omega = [\omega_{min}; \omega_{max}]$ un intervalle de pulsations, trouver une matrice $\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ (et la calculer) telle que :

$$\forall \omega \in \Omega, \forall \Delta \in \Gamma_{\Delta TI}, \bar{\sigma}(\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}(j\omega)) < \gamma.$$

Théorème 26. Synthèse à pôles fixés pour une bande de pulsations.

Il existe une solution au problème de synthèse de filtres à pôles fixés pour une bande de pulsations (problème 27) s'il existe

$$\begin{aligned} & - \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X \\ & - \mathbf{P}^{\text{Re}} = \mathbf{P}^{\text{Re}T}, \mathbf{P}^{\text{Im}} = -\mathbf{P}^{\text{Im}T}, \mathbf{Q}^{\text{Re}} = \mathbf{Q}^{\text{Re}T}, \mathbf{Q}^{\text{Im}} = -\mathbf{Q}^{\text{Im}T}, \mathbf{Q}^{\text{Re}} + i\mathbf{Q}^{\text{Im}} > 0 \\ & - \mathbf{P}_K^{\text{Re}} = \mathbf{P}_K^{\text{Re}T}, \mathbf{P}_K^{\text{Im}} = -\mathbf{P}_K^{\text{Im}T}, \mathbf{Q}_K^{\text{Re}} = \mathbf{Q}_K^{\text{Re}T} > 0, \mathbf{Q}_K^{\text{Im}} = -\mathbf{Q}_K^{\text{Im}T} \\ & - \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

telles que les conditions (D.15) et (D.16) soient vérifiées

| Bande de pulsations | Toutes pulsations | basses pulsations | hautes pulsations |
|---|---------------------------------------|--|--|
| $[\omega_1; \omega_2] = [\omega_b; \omega_l]$ | $[\omega_1; \omega_2] = [0; +\infty]$ | $[\omega_1; \omega_2] = [0; \omega_l]$ | $[\omega_1; \omega_2] = [\omega_h; +\infty]$ |
| $\alpha = -1, \beta = \omega_b \omega_l$ | $\alpha = 0, \beta = 0$ | $\alpha = -1, \beta = \omega_l^2$ | $\alpha = 1, \beta = -\omega_h^2$ |
| $\chi = \frac{\omega_b + \omega_l}{2}$ | $\chi = 0$ | $\chi = 0$ | $\chi = 0$ |

$$\begin{bmatrix} \Phi_K^{Re} & \Phi_K^{Im} \\ -\Phi_K^{Im} & \Phi_K^{Re} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.44)$$

$$\Phi_K^{Re} = [\diamond]^T \begin{bmatrix} \beta \mathbf{Q}_K^{Re} & \chi \mathbf{Q}_K^{Im} + \mathbf{P}_K^{Re} & 0 \\ -\chi \mathbf{Q}_K^{Im} + \mathbf{P}_K^{Re} & \alpha \mathbf{Q}_K^{Re} & 0 \\ 0 & 0 & X_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} < 0$$

$$\Phi_K^{Im} = [\diamond]^T \begin{bmatrix} \beta \mathbf{Q}_K^{Im} & -\chi \mathbf{Q}_K^{Re} + \mathbf{P}_K^{Im} \\ \chi \mathbf{Q}_K^{Re} + \mathbf{P}_K^{Im} & \alpha \mathbf{Q}_K^{Im} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \Phi^{Re} & \Phi^{Im} & \Phi_e^T & 0 \\ -\Phi^{Im} & \Phi^{Re} & 0 & \Phi_e^T \\ \Phi_e & 0 & -I & 0 \\ 0 & \Phi_e & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.45)$$

$$\Phi^{Re} = [\diamond] \begin{bmatrix} \beta \mathbf{Q}^{Re} & \chi \mathbf{Q}^{Im} + \mathbf{P}^{Re} & 0 & 0 \\ -\chi \mathbf{Q}^{Im} + \mathbf{P}^{Re} & \alpha \mathbf{Q}^{Re} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}_q & \mathcal{D}_q \\ 0 & [0 \ I] \end{bmatrix}$$

$$\Phi^{Im} = [\diamond] \begin{bmatrix} \beta \mathbf{Q}^{Im} & -\chi \mathbf{Q}^{Re} + \mathbf{P}^{Im} \\ \chi \mathbf{Q}^{Re} + \mathbf{P}^{Im} & \alpha \mathbf{Q}^{Im} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{bmatrix} \quad \Phi_e = [\mathcal{C}_e \ \mathcal{D}_e]$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}_q & \mathcal{D}_q \\ \mathcal{C}_e & \mathcal{D}_e \\ 0 & [0 \ I] \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cc} A_K & 0 & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C_q & 0 & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A & 0 & B_p & B_w \\ 0 & 0 & B_b C_y & A_b & B_b D_{yp} & B_b D_{yw} \\ \hline 0 & C_K & D_K C_q & 0 & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} \\ C_K & 0 & 0 & 0 & D_K & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_z - \mathbf{D} D_b C_y & -\mathbf{C} & D_{zp} - \mathbf{D} D_b D_{yp} & D_{zw} - \mathbf{D} D_b D_{yw} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right]$$

■

Ce théorème présente des contraintes LMI. Le filtre à pôles fixés peut donc être synthétisé en utilisant un algorithme efficace. Ce théorème, pour une bande de pulsations $[0; +\infty]$ recouvre le théorème 24 dans le cas d'incertitudes LTI. Pour un intervalle très petit, ce théorème permettra d'obtenir une réponse fréquentielle optimale pour l'estimateur, ainsi qu'une référence de performance pour un intervalle de pulsations donné. Ce théorème est donc également une alternative au théorème 23 page 179 permettant de calculer la réponse fréquentielle optimale à une fréquence donnée. Ce théorème per-

mettra de tester toutes les fréquences en un nombre fini d'opérations. En revanche, le coût algorithmique est plus élevé en raison du plus grand nombre de variables.

Ce théorème permet également de formuler des résultats de synthèse pour plusieurs bandes de pulsations : la formulation d'un résultat pour plusieurs bandes de fréquences est triviale en combinant les contraintes données par le théorème 26. Le résultat est formulé dans le corollaire suivant :

Corollaire 8. *Synthèse multi-objectif par bandes de fréquences* Soit $\Omega_l = [\omega_{lmin}; \omega_{lmax}]$ l intervalles de pulsations et γ_l , l scalaire positifs donnés. La forme standard du problème général de synthèse de filtres à pôles fixés est présentée figure 4.29 et s'écrit $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$. $T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ admet la représentation d'état présentée équation (4.37).

il existe une matrice $\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ telle que :

$$\forall l, \forall \omega \in \Omega_l, \forall \Delta \in \Gamma_{\Delta LTI}, \bar{\sigma}(\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}(j\omega)) < \gamma_l$$

s'il existe $\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ et si pour $\forall n = 1..l$ il existe

$$\begin{aligned} - \mathbf{X}_n &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{ns} & \mathbf{X}_{nas} \\ \mathbf{X}_{nas}^T & -\mathbf{X}_{ns} \end{bmatrix} \in \Gamma_X \\ - \mathbf{P}_n^{\text{Re}} &= \mathbf{P}_n^{\text{Re}T}, \mathbf{P}_n^{\text{Im}} = -\mathbf{P}_n^{\text{Im}T}, \mathbf{Q}_n^{\text{Re}} = \mathbf{Q}_n^{\text{Re}T} > 0, \mathbf{Q}_n^{\text{Im}} = -\mathbf{Q}_n^{\text{Im}T} \\ - \mathbf{P}_{Kn}^{\text{Re}} &= \mathbf{P}_{Kn}^{\text{Re}T}, \mathbf{P}_{Kn}^{\text{Im}} = -\mathbf{P}_{Kn}^{\text{Im}T}, \mathbf{Q}_{Kn}^{\text{Re}} = \mathbf{Q}_{Kn}^{\text{Re}T} > 0, \mathbf{Q}_{Kn}^{\text{Im}} = -\mathbf{Q}_{Kn}^{\text{Im}T} \end{aligned}$$

telles que les conditions (4.46) et (4.47) soient vérifiées

| Bande de pulsations | Toutes pulsations | basses pulsations | hautes pulsations |
|---|---------------------------------------|--|--|
| $[\omega_1; \omega_2] = [\omega_b; \omega_l]$ | $[\omega_1; \omega_2] = [0; +\infty]$ | $[\omega_1; \omega_2] = [0; \omega_l]$ | $[\omega_1; \omega_2] = [\omega_h; +\infty]$ |
| $\alpha = -1, \beta = \omega_b \omega_l$ | $\alpha = 0, \beta = 0$ | $\alpha = -1, \beta = \omega_l^2$ | $\alpha = 1, \beta = -\omega_h^2$ |
| $\chi = \frac{\omega_b + \omega_l}{2}$ | $\chi = 0$ | $\chi = 0$ | $\chi = 0$ |

$$\forall n = 1..l, \begin{bmatrix} \Phi_{Kn}^{\text{Re}} & \Phi_{Kn}^{\text{Im}} \\ -\Phi_{Kn}^{\text{Im}} & \Phi_{Kn}^{\text{Re}} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.46)$$

$$\Phi_{Kn}^{\text{Re}} = [\diamond]^T \begin{bmatrix} \beta \mathbf{Q}_{Kn}^{\text{Re}} & \chi \mathbf{Q}_{Kn}^{\text{Im}} + \mathbf{P}_{Kn}^{\text{Re}} & 0 \\ -\chi \mathbf{Q}_{Kn}^{\text{Im}} + \mathbf{P}_{Kn}^{\text{Re}} & \alpha \mathbf{Q}_{Kn}^{\text{Re}} & 0 \\ 0 & 0 & X_{ns} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} < 0$$

$$\Phi_{Kn}^{\text{Im}} = [\diamond]^T \begin{bmatrix} \beta \mathbf{Q}_{Kn}^{\text{Im}} & -\chi \mathbf{Q}_{Kn}^{\text{Re}} + \mathbf{P}_{Kn}^{\text{Im}} \\ \chi \mathbf{Q}_{Kn}^{\text{Re}} + \mathbf{P}_{Kn}^{\text{Im}} & \alpha \mathbf{Q}_{Kn}^{\text{Im}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \end{bmatrix} < 0$$

$$\forall n = 1..l, \begin{bmatrix} \Phi_n^{\text{Re}} & \Phi_n^{\text{Im}} & \Phi_e^T & 0 \\ -\Phi_n^{\text{Im}} & \Phi_n^{\text{Re}} & 0 & \Phi_e^T \\ \Phi_e & 0 & -I & 0 \\ 0 & \Phi_e & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.47)$$

$$\Phi_n^{Re} = [\diamond] \begin{bmatrix} \beta \mathbf{Q}_n^{Re} & \chi \mathbf{Q}_n^{Im} + \mathbf{P}_n^{Re} & 0 & 0 \\ -\chi \mathbf{Q}_n^{Im} + \mathbf{P}_n^{Re} & \alpha \mathbf{Q}_n^{Re} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_n^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}_q & \mathcal{D}_q \\ 0 & [0 \ I] \end{bmatrix}$$

$$\Phi_n^{Im} = [\diamond] \begin{bmatrix} \beta \mathbf{Q}_n^{Im} & -\chi \mathbf{Q}_n^{Re} + \mathbf{P}_n^{Im} \\ \chi \mathbf{Q}_n^{Re} + \mathbf{P}_n^{Im} & \alpha \mathbf{Q}_n^{Im} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{bmatrix} \quad \Phi_e = [\mathcal{C}_e \ \mathcal{D}_e]$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}_q & \mathcal{D}_q \\ \mathcal{C}_e & \mathcal{D}_e \\ 0 & [0 \ I] \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cc} A_K & 0 & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C_q & 0 & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A & 0 & B_p & B_w \\ 0 & 0 & B_b C_y & A_b & B_b D_{yp} & B_b D_{yw} \\ \hline 0 & C_K & D_K C_q & 0 & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} \\ C_K & 0 & 0 & 0 & D_K & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_z - \mathbf{D} D_b C_y & -\mathbf{C} & D_{zp} - \mathbf{D} D_b D_{yp} & D_{zw} - \mathbf{D} D_b D_{yw} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right]$$

Ce résultat peut également être combiné avec les résultats de synthèse garantissant une norme H_2 pire-cas. Ceci permet de rechercher un filtre vérifiant un nombre donné de gabarits supérieurs spécifiés pour diverses bandes de fréquences, ouvrant de larges possibilités en terme de synthèse multi-objectifs. Ce résultat est un résultat de nature théorique, et son potentiel en terme d'application n'a pas été exploré encore. C'est pourquoi aucune application numérique n'est présentée. L'exploration de ces résultats fait partie des perspectives de la thèse.

4.6.3 Conclusions

Cette section a complété l'approche proposée dans cette thèse pour l'estimation robuste comme une extension du cas certain.

Dans le cas nominal, l'analyse de la limite de performance réalisée dans le théorème 14 page 64 a permis de donner une réponse fréquentielle de référence pour l'estimateur, ainsi qu'une limite de performance. Le théorème 23 étend ce résultat pour le cas robuste. Ce théorème peut se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI. Il est ainsi possible de donner pour une fréquence donnée une réponse fréquentielle de référence pour l'estimateur, ainsi qu'une borne supérieure de la limite de performance robuste.

A la différence du cas nominal où il est possible de synthétiser une pondération idéale pour la synthèse H_∞ de manière analytique, la solution donnée par le théorème 23 page 179 permet d'obtenir un certain nombre de points calculés pour une pulsation

donnée. La synthèse des pondérations pourra donc se faire par des méthodes graphiques, ou bien par des méthodes d'interpolation ou d'approximation.

Le fait de tester une fréquence à la fois est le défaut majeur du théorème 23. Une infinité de tests serait nécessaire pour parcourir l'ensemble des fréquences. Si ce défaut n'est pas limitatif pour la plupart des applications, il peut être utile d'avoir des garanties sur l'ensemble des fréquences dans certains cas. La synthèse à pôles fixés par bandes de pulsations (théorème 26 page 188) propose une solution alternative à ce théorème pour tester toutes les fréquences en un nombre fini d'opérations.

Pour finir, cette section propose des résultats pour la synthèse de filtres à pôles fixés. Si le choix des pôles a énormément d'influence, le fait de pouvoir choisir les pôles permet de fixer l'ordre de l'estimateur. Combinés aux résultats de synthèse de filtres présentés dans la section 4.4 qui peuvent donner des pôles de référence, ces résultats de synthèse à pôles fixés présentent un certain potentiel à explorer pour la synthèse de filtres d'ordres réduits ou la synthèse multi-objectifs.

Cette section permet de compléter l'extension des méthodes nominales présentées dans le chapitre 2 à l'estimation robuste, comme le présente le tableau 4.6.

| | Estimation nominale | Estimation robuste |
|---|---------------------|---|
| Analyse de la performance de l'estimation | | |
| Synthèse de la réponse fréquentielle optimale (analyse de la performance des estimateurs) | Théorème 14 page 64 | Théorème 23 (synthèse robuste pour une fréquence) et théorème 26 (synthèse par bandes de fréquences) |
| Choix des pondérations pour l'estimation H_∞ | Section 2.4 page 62 | Faisable à partir des résultats du théorème 23 (synthèse robuste pour une fréquence) et du théorème 26 (synthèse par bandes de fréquences) par des méthodes graphiques ou des méthodes d'approximation. |

Tableau 4.6 – Complétion des objectifs du chapitre par la section 4.6

4.7 Conclusions sur la synthèse robuste utilisant l'approche LFT

Ce chapitre complète l'extension des méthodes nominales à l'estimation robuste en utilisant l'approche LFT. Le chapitre 3 a étendu au cas robuste les résultats d'analyse des modèles LTI présentés section 2.2.2 page 29. Dans le cas nominal, l'application de ces résultats d'analyse sur les formes standard de problèmes de synthèse de correcteurs ou d'estimateurs donnent des problèmes d'optimisation sous contrainte BMI, qui peuvent être transformés en problèmes d'optimisation sous contrainte LMI, donnant ainsi une solution efficace à ces problèmes de synthèse.

Dans le cas robuste, l'application des résultats d'analyse sur les formes standard des problèmes de synthèse donne également des problèmes sous contrainte BMI. Dans le cas de la synthèse de correcteurs, il n'est pas possible de se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte LMI. Ceci devient possible pour certains problèmes de synthèse particuliers.

Dans ce chapitre, la solution à un problème particulier de synthèse, appelé problème général de synthèse d'estimateurs robustes et dont la forme standard est présentée dans la figure 4.4 page 137 a été formulée pour le cas robuste. La synthèse minimisant une borne supérieure sur le \mathcal{L}_2 -gain pire-cas est présentée théorème 21 page 140. La synthèse minimisant une borne supérieure sur la norme H_2 pire-cas est présentée dans le théorème 22 page 148. Ces deux théorèmes peuvent se mettre sous la forme de problèmes d'optimisation sous contrainte LMI. La succession d'étapes permettant de se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte LMI, notamment le changement de variables présenté dans la démonstration du théorème 21, est une contribution majeure de cette thèse.

Un premier cas particulier du problème général de synthèse d'estimateurs robustes est le problème de synthèse de filtres robustes, présenté dans la section 4.4 page 151. La structure filtre pour le cas robuste ne change pas par rapport à l'estimation nominale. Les solutions formulées pour le problème général de synthèse d'estimateurs robustes sont également des solutions pour le problème de synthèse de filtres robustes.

L'extension des observateurs à l'estimation robuste est plus problématique. La section 4.5 page 158 présente une extension des observateurs pour l'estimation nominale. La représentation LFT permet de faire apparaître un modèle nominal choisi pour être le modèle de la structure observateur. Par la suite, les structures synthétisées via un gain statique (l'OGS et l'EGN) ne pourront pas être synthétisées de façon efficace. Pour se ramener à des conditions de synthèse testables efficacement, il est nécessaire de prendre pour ces structures des gains dynamiques. L'observateur à gain statique devient l'observateur à gain dynamique. L'estimateur généralisé nominal devient une nouvelle structure appelée Observateur à Gain Augmenté. Les problèmes de synthèse de ces deux struc-

tures sont des cas particuliers du problème général de synthèse d'estimateurs robustes. L'OGA, une structure nouvelle, est une des contributions de cette thèse.

D'un point de vue structure, ce chapitre présente des extensions systématiques des structures utilisées pour l'estimation nominale à l'estimation robuste, en conservant le caractère systématique et efficace pour la synthèse. Ce chapitre complète l'approche LFT pour la synthèse d'estimateurs robustes en complétant les résultats pour la synthèse de filtres présents dans la littérature, et en introduisant l'extension des observateurs pour l'estimation robuste.

Ces résultats de synthèse ne peuvent pas être utilisés brutalement sans être couplés à des outils d'analyse. Dans le cas nominal, l'analyse de la limite de performance a permis de donner des outils pour analyser la performance et synthétiser des pondérations. Ce chapitre a étendu ces outils à l'estimation robuste, en donnant dans le cas robuste la possibilité de synthétiser une réponse fréquentielle idéale à une fréquence donnée (théorème 23 page 179) ou pour une bande de pulsations (théorème 26 page 188).

Pour finir, une approche de la synthèse de filtres à pôles fixés (comprenant dans le cas discret la synthèse de filtres FIR) a été proposée dans ce chapitre. Si le choix des pôles est déterminant pour assurer une bonne performance, la combinaison des méthodes à pôles fixés avec les méthodes générales de synthèse présentées dans ce chapitre ouvrent un grand nombre de possibilités en termes de méthodes itératives de synthèse d'estimateurs, de synthèse d'estimateurs d'ordre réduits ou de synthèse d'estimateurs multi-objectifs. Le tableau récapitulatif de l'extension des méthodes nominales à l'estimation robuste est présenté dans le tableau 4.7.

| | Estimation nominale | Estimation robuste |
|---|--|---|
| Synthèse d'estimateur | | |
| Capacité à transformer ces outils d'analyse en outils de synthèse | Section 2.2 page 28, avec les outils de l'annexe A | Possible pour le problème général de synthèse d'estimateur robuste : section 4.3 |
| Synthèse de la structure filtre | Synthèse H_2 , H_∞ , H_∞ pondérée | Synthèse H_2 , \mathcal{L}_2 -gain : Cas particulier des théorèmes 21 page 140 et 22 page 148 |
| Synthèse de la structure observateur à gain statique | Synthèse H_2 , H_∞ | Impossibilité de se ramener à un problème sous contrainte LMI |
| Synthèse de la structure observateur à gain dynamique | Synthèse H_2 , H_∞ | Cas particulier du théorème 21(cas \mathcal{L}_2 -gain) et du théorème 22 (cas H_2). |
| Synthèse d'estimateur générale nominal | Synthèse H_2 , H_∞ , H_∞ pondérée | Extension de l'EGN : L'observateur à gain augmenté. Synthèse H_2 , \mathcal{L}_2 -gain : cas particulier des théorèmes 21(cas \mathcal{L}_2 -gain) et 22 (cas H_2) |
| Analyse de la performance de l'estimation | | |
| Synthèse de la réponse fréquentielle optimale (analyse de la performance des estimateurs) | Théorème 14 page 64 | Théorème 23 (synthèse robuste pour une fréquence) et théorème 26 (synthèse par bandes de fréquences) |
| Choix des pondérations pour l'estimation H_∞ | Section 2.4 page 62 | Faisable à partir des résultats du théorème 23 (synthèse robuste pour une fréquence) et du théorème 26 (synthèse par bandes de fréquences) par des méthodes graphiques ou des méthodes d'approximation. |

Tableau 4.7 – Bilan de l'extension des méthodes nominales à l'estimation robuste

Chapitre 5

Résultats liés à l'estimation robuste

La forme standard du problème général de synthèse d'estimateurs robustes est une forme particulière du problème général de synthèse pour laquelle il est possible de disposer de conditions efficaces pour la synthèse, ce qui permet de formuler une approche complète du problème de synthèse d'estimateurs.

Cette forme particulière dépasse le cadre des problèmes d'estimation, et couvre par exemple d'autres problèmes de synthèse, dont certains cas particuliers de contrôle robuste [DS10]. D'autres cas particuliers de la forme standard du problème général de synthèse robuste permettent également de se ramener pour la synthèse à un problème d'optimisation sous contrainte LMI. Par exemple, le problème de synthèse de pré-compensateurs dont la forme standard est présentée figure 5.1 peut être vu comme le cas dual du problème de synthèse de filtres, permettant de formuler des solutions pour la synthèse [SF06] (cas H_∞), [SK08] (cas H_2).

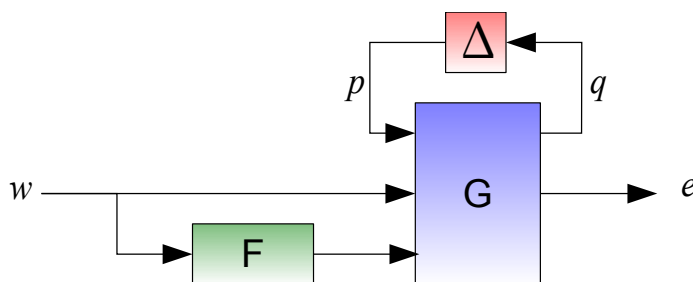


Figure 5.1 – Forme standard du problème de synthèse de pré-compensateurs

L'approche utilisée pour aborder le problème d'estimation robuste permet donc de résoudre d'autres problèmes de synthèse que les problèmes de synthèse d'estimateurs. Ce chapitre montre que la même démarche permet de dégager des résultats ouvrant de larges perspectives en ce qui concerne la synthèse robuste de correcteurs en boucle ouverte ou de pré-compensateurs dans la section 5.1.

La même démarche permet également de créer des résultats pour la synthèse LPV, ce qui ouvre de grandes perspectives. La section 5.2 présente un résultat de synthèse LPV utilisant une approche polytopique/Lyapunov, et présente les extensions possibles des travaux de cette thèse à la synthèse d'estimateurs LPV.

5.1 Synthèse robuste en boucle ouverte

Les structures utilisant des boucles de rétro-action sont largement utilisées pour leurs propriétés de désensibilisation et de robustesse. Il n'est malheureusement pas possible de mettre en place une configuration de contrôle avec une rétro-action dans tous les cas. Par exemple, pour les imprimantes DoD (Drop-on-Demand), le dépôt d'une goutte d'encre se fait en contrôlant le déplacement d'une interface encre/air. Une certaine trajectoire pour ce déplacement doit être suivie pour permettre un dépôt. Le suivi de cette trajectoire ne peut pas se faire avec une boucle de rétroaction [KBS⁺10] en raison de l'absence de capteurs sur le système. Les problèmes de synthèse d'estimateurs robustes ne comprennent pas de rétro-action en raison de leur configuration naturelle.

Au moyen des approches LFT/IQC, la synthèse robuste est possible en l'absence d'incertitudes dans la boucle de rétroaction [Sch09b]. Cette particularité nous a permis de présenter une approche complète de la synthèse d'estimateurs robustes dans le chapitre 4. Mais le problème général de synthèse d'estimateurs robustes résolu dans la section 4.3 page 137 dépasse le cadre de l'estimation, et permet de proposer des solutions de problèmes où il n'est pas possible de mettre en place un schéma de rétroaction sur l'ensemble du système à contrôler, comme dans le cas du problème de rejet d'une perturbation incertaine [DS10]. L'approche proposée dans ce document permet d'obtenir des méthodes de synthèse garantissant une performance robuste en l'absence de structure de rétroaction.

L'absence d'incertitudes dans la boucle de rétroaction est une particularité inhérente à un certain nombre d'autres problèmes, comme par exemple le problème de synthèse de pré-compensateurs [SF06].

Nous présentons dans cette section un autre cas particulier du problème général de synthèse pour lequel il est possible de se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte LMI. Ce problème est appelé problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie. Les solutions apportées permettent de compléter l'approche pour la synthèse de correcteurs en l'absence d'incertitudes dans la boucle de rétroaction. Ces solutions permettent également de proposer des résultats pour la synthèse de pré-compensateurs. Les solutions formulées dans cette section, couplées aux solutions proposées dans le chapitre 4 permettent de proposer des méthodes pour garantir la performance robuste quand il n'est pas possible de mettre en place de rétroaction sur la partie incertaine. Nous proposons ensuite des cas particuliers de ce problème et du problème général de synthèse d'estimateurs robustes qui nous semblent intéressants.

La synthèse de pré-compensateurs robustes est tout particulièrement détaillée avec un exemple d'application.

5.1.1 Le problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie

Les solutions pour la synthèse de filtres robustes sont étroitement liées avec celles pour la synthèse de pré-compensateurs robustes [SF06, KS08]. Dans cette section, la démarche permettant d'aboutir aux résultats de synthèse pour le problème général de synthèse d'estimateur robuste est reproduite pour formuler la solution d'un problème particulier appelé problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie. Nous montrerons par la suite que ce problème recouvre un certain nombre d'autres problèmes de synthèse comme la synthèse de pré-compensateurs. Le problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie est considéré. La forme standard du problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie est présentée figure 5.2 et est définie par :

$$T_{w \rightarrow e} = (\Delta \star G)(H \star L)$$

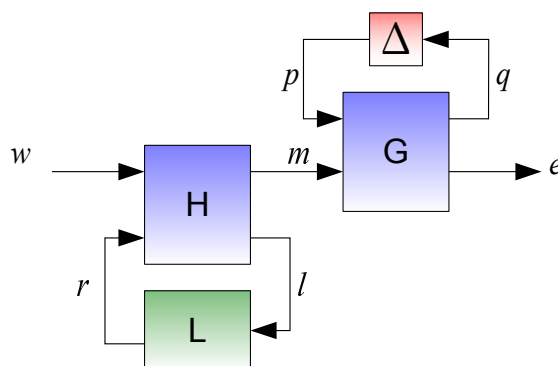


Figure 5.2 – Forme standard du problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie

L'objectif est de synthétiser la matrice de fonctions de transfert L de telle sorte qu'une norme donnée soit garantie (ou minimisée) sur l'opérateur incertain $T_{(w) \rightarrow (e)}$. Les éléments de la forme standard (figure 5.2) sont définis de la façon suivante :

- $G = T_{(p,m) \rightarrow (q,e)}$ et $H = T_{(w,r) \rightarrow (m,l)}$ sont des matrices de fonctions de transfert connues sans structure particulière. Leurs représentations d'état sont données par :

$$G = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_p & B_m \\ \hline C_q & D_{qp} & D_{qm} \\ C_e & D_{ep} & D_{em} \end{array} \right], \quad H = \left[\begin{array}{c|cc} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ \hline H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & 0 \end{array} \right]$$

- Δ est un bloc incertain structuré, qui appartient à l'ensemble d'incertitudes Γ_Δ , défini dans le chapitre 3, section 3.3 page 102. Ce bloc incertain peut contenir des incertitudes paramétriques et dynamiques TI/TV.
- La matrice de fonctions de transfert L est à synthétiser. C'est une matrice de fonctions de transfert sans structure particulière. Une représentation d'état est donnée par :

$$L = \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_L & D_L \end{array} \right].$$

- L'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$ est donné par $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ où $T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ admet la représentation d'état suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} A & B_m(H_{21} + H_{23}D_LH_{31}) & B_mH_{23}C_L & B_p & B_m(H_{22} + H_{23}D_LH_{32}) \\ 0 & H_{11} + H_{13}D_LH_{31} & H_{13}C_L & 0 & H_{12} + H_{13}D_LH_{32} \\ 0 & B_LH_{31} & A_L & 0 & B_LH_{32} \\ \hline C_q & D_{qm}(H_{21} + H_{23}D_LH_{31}) & D_{qm}H_{23}C_L & D_{qp} & D_{qm}(H_{22} + H_{23}D_LH_{32}) \\ C_e & D_{em}(H_{21} + H_{23}D_LH_{31}) & D_{em}H_{23}C_L & D_{ep} & D_{em}(H_{22} + H_{23}D_LH_{32}) \end{array} \right] \quad (5.1)$$

Le problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie est le suivant :

Problème 28. Problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie.

La forme standard du problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie est l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)} = \Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ présenté figure 5.2. $T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ admet la représentation d'état équivalente présentée équation (5.1).

Etant donné γ , trouver s'il existe une matrice de fonctions de transfert L (et la calculer) telle que $\forall \Delta \in \Gamma_\Delta$, $\Delta \star T_{(w,p) \rightarrow (q,e)}$ soit stable et :

$$\forall \Delta \in \Gamma_\Delta, \quad \|\Delta \star T_{(w,p) \rightarrow (q,e)}\|_i < \gamma.$$

Résultats de synthèse

Les solutions pour le \mathcal{L}_2 -gain pire-cas (théorème 27) et la norme H_2 pire-cas (théorème 28) sont à présent formulées. Les démonstrations de ces théorèmes sont disponibles annexe E page 251.

Théorème 27. *Synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie \mathcal{L}_2 -gain (cas continu).*

Etant donné γ , il existe une solution au problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie (problème 28, cas \mathcal{L}_2 -gain) s'il existe des matrices $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_1^T$, \mathbf{Z}_2 ,

$$\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_3^T, \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \\ \mathbf{P}_{12} \end{bmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{21} \\ \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X,$$

$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{bmatrix}$ de dimensions appropriées telles que les conditions (5.2), (5.3), (5.4) soient vérifiées.

$$[\diamond] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_K & 0 \\ \mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (5.2)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & \mathbf{Z}_1 & 0 \\ \diamond & \mathbf{Z}_3 & -\mathbf{Z}_2^T & I \\ \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \diamond & \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.3)$$

$$(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3) + (\bullet)^T + \mathcal{L}_X < 0 \quad (5.4)$$

$$\mathcal{L}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I & 0 \\ \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 & \tilde{C} \\ H_{21}^T \tilde{B}_m & H_{11}^T & H_{21}^T \tilde{D}_m \\ H_{22}^T \tilde{B}_m & H_{12}^T & H_{22}^T \tilde{D}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I \ 0] & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11}^T \\ H_{12}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{Z}_2^T \ \mathbf{Z}_3] & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{31}^T \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & H_{32}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{23}^T \tilde{B}_m & H_{13}^T & H_{23}^T \tilde{D}_m & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_X = [\diamond]^T \begin{bmatrix} \mathbf{X} & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_p [I \ 0] & \tilde{B}_p & 0 & \tilde{D}_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [0 \ I] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{C} \\ \hline \tilde{B}_p & \tilde{D}_p \\ \hline \tilde{B}_m & \tilde{D}_m \\ \hline 0 & [0 \ I] \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} A_K & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K B_p^T & B_K D_{qp}^T & B_K D_{ep}^T \\ 0 & 0 & A^T & C_q^T & C_e^T \\ \hline 0 & C_K & D_K B_p^T & D_K D_{qp}^T & D_K D_{ep}^T \\ C_K & 0 & 0 & D_K & 0 \\ \hline 0 & 0 & B_m^T & D_{qm}^T & D_{em}^T \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right]$$

■

Ce théorème présente des contraintes qui peuvent se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI. Ce théorème recouvre les solutions de la littérature pour la synthèse de pré-compensateurs données dans [SF06, KS08] pour la synthèse de pré-compensateurs garantissant un \mathcal{L}_2 -gain sur l'opérateur concerné. La démonstration de ce théorème est présentée en annexe E page 251.

Théorème 28. *Synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie H_2 (cas continu).*

Etant donné γ , il existe une solution au problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie (problème 28 page 200, cas H_2) s'il existe des matrices $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_1^T$, \mathbf{Z}_2 , $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_3^T$, $\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \\ \mathbf{P}_{12} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{21} \\ \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \hline \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{array} \right]$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ de dimensions appropriées telles que les conditions (5.5), (5.6), (5.7), (5.8) soient vérifiées.

$$\text{Trace}(\mathbf{S}) < \gamma^2 \quad D_{ep} = 0 \quad (H_{22}^T + H_{32}^T \mathbf{D}_L H_{23}^T) D_{em}^T = 0 \quad (5.5)$$

$$[\diamond]^T \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_K & 0 \\ \mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (5.6)$$

$$(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3) + (\bullet)^T + \mathcal{L}_X < 0 \quad (5.7)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{Z}_1 & 0 & \mathbf{Z}_1 & 0 \\ \diamond & \mathbf{Z}_3 & -\mathbf{Z}_2^T & I \\ \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \diamond & \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{22} \end{array} \right] & \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5 \\ \hline & \mathbf{S} \end{array} \right] > 0 \quad (5.8)$$

$$\mathcal{L}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I & 0 \\ \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_{11} \\ \mathbf{P}_{12} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_{21} \\ \mathbf{P}_{22} \end{array} \right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 & \tilde{C}_q \\ H_{21}^T \tilde{B}_m & H_{11}^T & H_{21}^T \tilde{D}_{qm} \\ H_{22}^T \tilde{B}_m & H_{12}^T & H_{22}^T \tilde{D}_{qm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} I & 0 \end{array} \right] & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11}^T \\ H_{21}^T \end{bmatrix} \left[\left[\mathbf{Z}_2^T \quad \mathbf{Z}_3 \right] \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]$$

$$\mathcal{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{31}^T \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & H_{32}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{23}^T \tilde{B}_m & H_{13}^T & H_{23}^T \tilde{D}_{qm} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I \\ \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_{11} \\ \mathbf{P}_{12} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_{21} \\ \mathbf{P}_{22} \end{array} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_e \\ H_{21}^T \tilde{D}_{em} \end{bmatrix} \quad \mathcal{L}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{31}^T \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_L \\ \mathbf{D}_L \end{bmatrix} H_{23}^T \tilde{D}_{em}$$

$$\mathcal{L}_X = [\diamond]^T \begin{bmatrix} \mathbf{X} & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_p \left[\begin{array}{cc} I & 0 \end{array} \right] & \tilde{B}_p & 0 & \tilde{D}_{qp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

avec les matrices suivantes

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \tilde{A} & \tilde{C}_q & \tilde{C}_e \\ \hline \tilde{B}_p & \tilde{D}_{qp} & \tilde{D}_{ep} \\ \hline \tilde{B}_m & \tilde{D}_{qm} & \tilde{D}_{em} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} A_K & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K B_p^T & B_K D_{qp}^T & B_K D_{ep}^T \\ 0 & 0 & A^T & C_q^T & C_e^T \\ \hline 0 & C_K & D_K B_p^T & D_K D_{qp}^T & D_K D_{ep}^T \\ C_K & 0 & 0 & D_K & 0 \\ \hline 0 & 0 & B_m^T & D_{qm}^T & D_{em}^T \end{array} \right]$$

■

La démonstration de ce théorème peut être facilement effectuée à partir des démonstrations du théorème 22 page 148 et du théorème 27. Les étapes sont présentées dans l'annexe E page 251.

Reconstruction de la matrice de fonctions de transfert L

Si les conditions du théorème 27 ou du théorème 28 sont vérifiées, la représentation d'état de la matrice de fonctions de transfert L peut être reconstruite à partir des variables solutions du problème d'optimisation. On rappelle que la linéarisation des contraintes BMI est faite en utilisant un changement de variables linéarisant.

Si les conditions du théorème sont vérifiées, alors il est possible de reconstruire les matrices de la représentation d'état de la matrice de fonctions de transfert L à partir du changement de variables. Les étapes pour la reconstruction sont les suivantes :

1. Construire $Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & \mathbf{Z}_2 \\ 0 & \mathbf{Z}_3 \end{bmatrix}$. Ceci permet de disposer de la partition $P_1 = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}$ de la matrice \mathcal{P} et de la partition $Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}$ de son inverse.
2. Il est possible de reconstruire les matrices \mathcal{P} et \mathcal{Q} à partir de ces deux partitions par application du lemme de complétion de Packard [PZPB91]. Une matrice P_2 de rang plein peut être choisie arbitrairement. Les matrices \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont alors données par les relations suivantes :

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & I \\ I & (P_1^{-1} - Q_1^{-1})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2^T \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & I \\ I & (Q_1^{-1} - P_1^{-1})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_2^T \end{bmatrix} \quad Q_2 = P_2^{-T}(I - P_1 Q_1)$$

3. Il reste à calculer R :

$$R = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{13} \\ Q_{23} \end{bmatrix}$$

4. L'inverse du changement de base linéarisant est donné par :

$$\begin{bmatrix} A_L^T & C_L^T \\ C_L^T & D_L^T \end{bmatrix} = \Psi_2^T \left(\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \hline \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{array} \right) - \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2 \\ 0 \end{bmatrix} H_{11}^T [\mathbf{Z}_2^T \quad \mathbf{Z}_3 \quad 0] \right)^T \Psi_1^T \quad (5.9)$$

$$\Psi_1 = \left[\begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{22} \\ I \end{bmatrix} H_{31}^T \right]^{-1} \quad \Psi_2 = \left[H_{13}^T [\mathbf{Z}_2^T \quad \mathbf{Z}_3] + H_{23}^T \tilde{B}_m [I \quad 0] \quad 0 \right]^{-1}$$

Conclusion sur le problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie

En conclusion, des solutions au problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie (cas \mathcal{L}_2 -gain pire-cas et norme H_2 pire-cas) ont été proposées dans cette section, permettant de synthétiser une matrice de fonction de transfert L garantissant une borne supérieure sur le \mathcal{L}_2 -gain pire-cas (théorème 27) ou sur la norme H_2 pire-cas (théorème 28) de l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)} = (\Delta \star G)(H \star L)$. De la même manière que les résultats de synthèse pour le problème général de synthèse d'estimateur robuste ont permis de formuler des solutions générales pour la synthèse d'estimateurs robustes, les solutions formulées dans cette section permettent la synthèse de correcteurs pour un certain nombre de cas particuliers.

5.1.2 Synthèse de pré-compensateurs robustes

Un premier cas particulier intéressant est la synthèse de pré-compensateurs robustes. La forme standard du problème de synthèse de pré-compensateurs robustes est présentée figure 5.3.

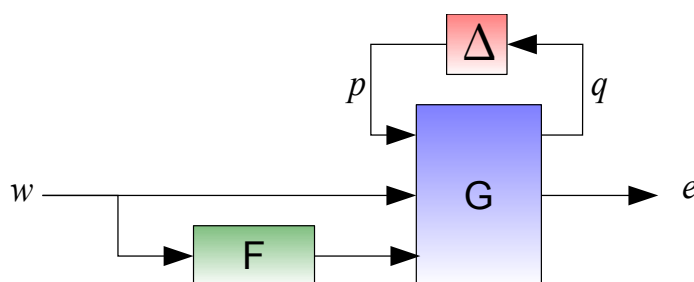


Figure 5.3 – Forme standard du problème de synthèse de pré-compensateurs robustes

Cette forme standard est un cas particulier de la forme standard du problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie. Pour recouvrer la forme du problème de synthèse de pré-compensateurs robustes à partir de la forme du problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie, il suffit de choisir pour la matrice de fonctions de transfert H la forme suivante :

$$H = T_{(w,e) \rightarrow (m,l)} = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \\ \hline I & 0 \end{array} \right]$$

Par conséquent, les solutions proposées pour le problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie sont également des solutions aux problèmes de synthèse

de pré-compensateurs. Ces solutions recouvrent un certain nombre de résultats de la littérature.

- Pour la synthèse de pré-compensateurs garantissant un \mathcal{L}_2 -gain pire-cas sur l'opérateur $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$, la solution formulable à partir du théorème 27 page 200 présenté dans la section 5.1.1 recouvre les résultats de [SF06, KS08, KS07]. Cette solution permet également de formuler aisément des solutions alternatives dans le cas discret à la solution que nous avons présentée dans [KBB⁺11].
- Pour la synthèse de pré-compensateurs garantissant une norme H_2 pire-cas sur l'opérateur $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$, la solution formulable à partir du théorème 28 page 202 présenté dans la section 5.1.1 recouvre les résultats de [KS08, KS07].

Les résultats de synthèse présentés dans cette thèse permettent donc également de synthétiser des pré-compensateurs robustes garantissant certaines propriétés sur le modèle complet. Si le sujet de la thèse est l'estimation robuste, les techniques utilisées pour résoudre le problème de pré-compensation sont analogues à celles utilisées pour proposer une approche complète de l'estimation robuste.

Ces résultats de nature théorique ont été développés pour répondre à une application réelle sur la commande des imprimantes DoD (Drop-on-Demand) [KBBW10, KBB⁺11, KBS⁺10] en partenariat avec Amol Khalate et le Delft Center for Systems and Control. La référence [KBB⁺11] est disponible à la fin de ce document. Cet article illustre l'intérêt des approches robustes.

Pour illustrer le type de résultats qui peuvent être obtenus, nous présentons un exemple de pré-compensation académique.

Pré-compensation : Exemple

Modèle incertain du système

On considère un système modélisé par une fonction de transfert incertaine du second ordre $G(s) = \frac{2}{s^2 + \xi s + 4}$ dont l'amortissement est incertain ($\xi = 0.1 + 0.08\delta, |\delta| \leq 1$), mais dont les bornes de variations sont connues, et qui est sujet à une incertitude multiplicative Δ de norme H_∞ inférieure à 1 en sortie. Le modèle incertain prend la forme présentée figure 5.4, et peut s'écrire :

$$G(\delta, \Delta, s) = (1 + 0.2\Delta) \frac{2}{s^2 + (0.1 + 0.08\delta)s + 4}.$$

Ce modèle peut s'écrire sous une forme LFT de la façon suivante :

$$G(\delta, \Delta, s) = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \star G_n(s).$$

$G_n(s)$ admet la représentation d'état suivante :

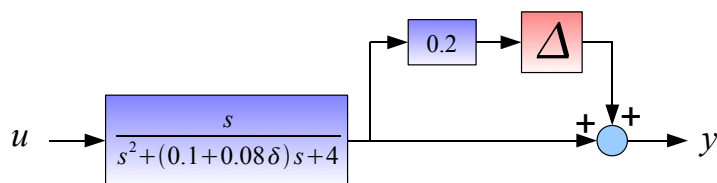


Figure 5.4 – Modèle incertain considéré

$$G_n = \left[\begin{array}{cc|ccc} -0.1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0.08 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

L'objectif est de calculer le signal u de telle sorte que le signal y soit au plus près d'un signal de référence y_{ref} . Le signal de référence y_{ref} est modélisé comme la réponse impulsionnelle d'une fonction de transfert $R(s)$ qui admet la représentation d'état suivante :

$$R = \left[\begin{array}{cc|c} -1.5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad (5.10)$$

La figure 5.5 montre la réponse impulsionnelle de référence et des réponses impulsionnelles de modèles choisis dans le modèle incertain. On recherche donc un pré-compensateur qui va compenser des oscillations dont l'amortissement est mal connu.

Cet exemple peut être considéré comme analogue aux exemples présentés pour la synthèse d'impulsion pour les imprimantes DoD [KBBW10, KBB⁺11]. Dans ce cas-là, le signal y_{ref} décrit le déplacement de l'interface air-encre nécessaire pour avoir un dépôt d'encre.

Mise en forme du problème

Pour se ramener à un problème de synthèse de pré-compensateur, le signal u n'est pas recherché explicitement, mais est recherché comme la réponse impulsionnelle d'un processus générateur F . C'est donc le processus générateur qui est recherché. Le problème peut se mettre sous la forme présentée dans la figure 5.6. La synthèse du processus générateur F est donc un problème de synthèse de pré-compensateur.

On cherche à minimiser une norme H_2 sur la fonction de transfert $T_{(w) \rightarrow (e)}$. La synthèse de F minimisant cette norme peut se faire au moyen du théorème 28 page 202.

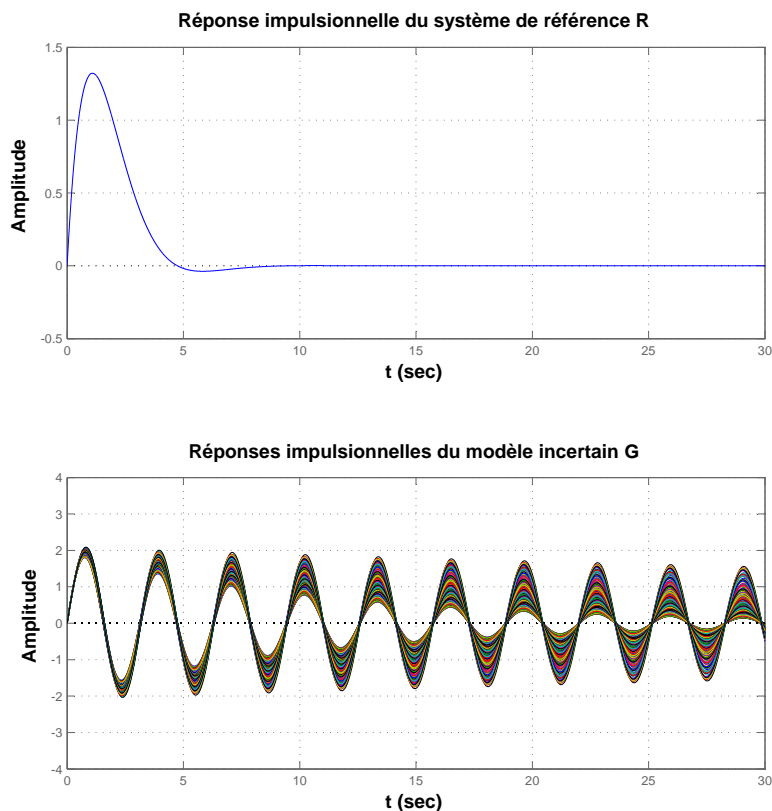


Figure 5.5 – Réponses impulsionnelles du modèle de référence et du modèle incertain

Pour le choix de la base des multiplieurs dynamiques, la base est choisie sous la forme suivante :

$$K(s) \otimes I_2, \text{ avec } K(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pour des raisons de simplicité, le pôle choisi est -1 , avec une multiplicité 1, ce qui est suffisant pour cet exemple. La borne supérieure garantie sur la norme H_2 pire-cas de $T_{(w) \rightarrow (e)}$ est 0.33. Qualitativement, c'est dans le domaine temporel que le résultat doit être analysé. La figure 5.7 montre des réponses impulsionnelles de modèles choisis aléatoirement parmi les modèles possibles de $\left(\begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \star G_n \right) F$, donc du modèle incertain corrigé par le pré-compensateur en rouge (trait continu). La réponse impulsionnelle de référence est en bleu (tirets).

Cette figure illustre la qualité des résultats obtenus. La structure de pré-compensateur est une structure boucle ouverte ne possédant pas de propriété de désensibilisation. Cependant, l'approche proposée dans cette thèse permet de la synthétiser de telle sorte que cette structure gère l'incertitude sur un modèle.

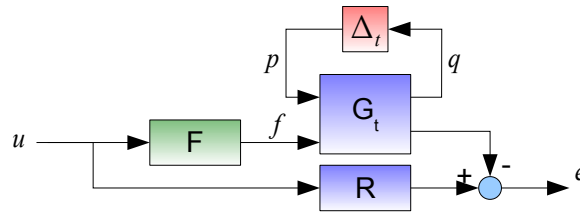


Figure 5.6 – Mise en forme du problème de synthèse

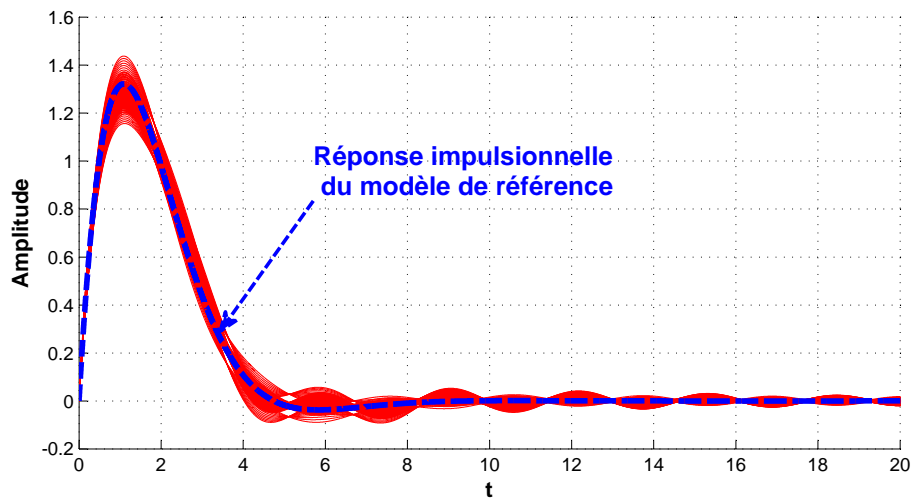


Figure 5.7 – Réponses impulsionnelles du système pré-compensé

Conclusion sur la synthèse de pré-compensateurs

En conclusion, l'approche LFT/IQCs permet également de créer des méthodes de synthèse systématiques pour la synthèse de pré-compensateurs garantissant une performance robuste. Ceci est d'autant plus intéressant que la synthèse en boucle ouverte nominale ne garantit en général que peu de robustesse par rapport à la boucle fermée. Ces outils ont donné de bons résultats lors de l'application sur un système réel, en l'occurrence les imprimantes DoD, ce qui permet de valider l'approche utilisée.

5.1.3 Synthèse en boucle ouverte

Un second cas particulier intéressant est le cas de la synthèse de contrôleur en boucle ouverte, dont les formes standards sont présentées figure 5.8 (cas système d'entrée incertain (SEI)) et figure 5.9 (cas système de sortie incertain (SSI)).

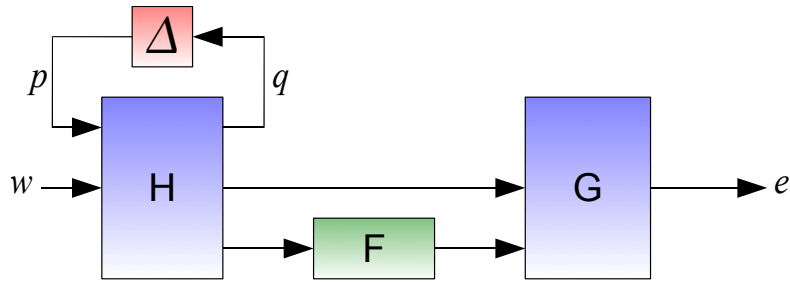


Figure 5.8 – Forme standard du problème de contrôle en boucle-ouverte (cas SEI)

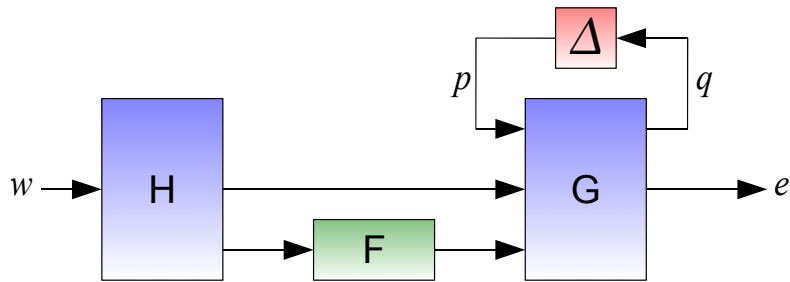


Figure 5.9 – Forme standard du problème de contrôle en boucle-ouverte (cas SSI)

Cas Système d’Entrée Incertain (SEI) (resp. Système de Sortie Incertain (SSI))

La forme standard du cas SEI (resp. SSI) est présenté figure 5.8 (resp. 5.9). Dans ce cas, un filtre F à synthétiser relie deux systèmes $\Delta \star H$ et G (resp. H et $\Delta \star G$). Le système complet est donné par :

$$\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)} = G \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} (\Delta \star H) \quad \left(\text{resp. } (\Delta \star G) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} H \right)$$

Le problème de synthèse de correcteurs en boucle ouverte pour le cas SEI (resp. SSI) est un cas particulier du problème général de synthèse d’estimateur robuste présenté dans la section 4.3 page 137 (resp. un cas particulier du problème de synthèse de correcteurs avec système de sortie incertain¹). Pour recouvrer la forme standard du problème de synthèse de correcteurs en boucle ouverte dans le cas SEI (resp. (SSI)) à partir de la forme standard du problème général de synthèse d’estimateurs robustes (figure 4.4 page 137) (resp. problème de synthèse de correcteurs avec système de sortie incertain (figure 5.2 page 199)), il suffit de choisir $T_{(m,r) \rightarrow (e,l)}$ (resp. $T_{(w,r) \rightarrow (m,l)}$) de la façon suivante :

1. présenté dans la section 5.1

$$T_{(m,r) \rightarrow (e,l)} = \left[\begin{array}{c|c} H & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ \hline 0 & I & 0 \end{array} \right] \left(\text{resp. } T_{(w,r) \rightarrow (m,l)} = \left[\begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ \hline 0 & I & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} H & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \right)$$

Par conséquent, les solutions du problème général de synthèse d'estimateurs robustes proposées dans la section 4.3 page 137 sont également des solutions au problème de synthèse de correcteurs en boucle ouverte. (resp. les solutions du problème général de synthèse de correcteurs avec système de sortie incertain présentées dans la section 5.1.1 page 199 sont également des solutions au problème de synthèse de correcteurs en boucle ouverte pour le cas système de sortie incertain.)

Sur la boucle ouverte

Les résultats sur la synthèse en boucle ouverte sont des extensions directes du problème général de synthèse d'estimateurs robustes et du problème de synthèse de correcteurs avec système de sortie incertain. Ces résultats nous semblent dignes d'intérêt pour plusieurs raisons.

- Ces résultats permettent de prendre en compte des modèles plus généraux en entrée ou en sortie du système. Par conséquent, ils vont permettre d'affiner les résultats pour la synthèse de filtres ou de pré-compensateurs en ajoutant des éléments comme des pondérations fréquentielles permettant d'exprimer un cahier des charges plus complet. Dans le cas de la synthèse de filtres, on peut aisément imaginer pondérer le signal estimé pour spécifier des cahiers des charges plus précis. Concernant la pré-compensation dans le cas discret, il peut être possible d'ajouter n'importe quel système avant le filtre à synthétiser, pour ajouter par exemple de façon aisée des modèles de signaux ou d'autres spécifications.
- Un second point intéressant est qu'au delà d'affiner des résultats de pré-compensation ou d'estimation, la synthèse en boucle ouverte peut permettre de répondre à certaines applications comme la synthèse d'éléments passifs dans une chaîne de transmission d'énergie (comme par exemple dans le transfert d'énergie sans contact [KMD⁺11]).

Le potentiel de la synthèse robuste en boucle ouverte reste donc encore à explorer.

5.1.4 Conclusions sur la synthèse en boucle ouverte

Les résultats présentés dans cette section concernent la synthèse robuste en boucle ouverte. En l'absence d'incertitudes dans la boucle de rétroaction, la synthèse robuste devient convexe [Sch09a], ouvrant un grand nombre de possibilités en termes de synthèse. Dans cette section, les résultats possibles les plus proches de la synthèse d'esti-

mateurs ont été mis en valeur, comme la synthèse de pré-compensateurs robustes ou de correcteurs robustes en boucle ouverte.

Il est bien connu que des propriétés robustes peuvent être atteintes pour le système en mettant en place des correcteurs en boucle fermée. Si l'approche LFT/IQC ne permet pas de synthétiser de façon efficace des correcteurs en boucle fermée dans leur forme la plus générale, le fait que la synthèse robuste deviennent convexe fait de l'approche LFT/IQCs une approche intéressante pour garantir des propriétés robustes sur un système partiellement non-bouclé. Cette approche permettra donc de proposer une approche robuste dans les cas où mettre en place un schéma de rétroaction sur l'ensemble du système n'est pas possible pour des raisons techniques ou physiques. Les solutions proposées pour le problème général de synthèse d'estimateurs robustes et le problème de synthèse de correcteurs avec système de sortie incertain ouvrent de larges possibilités à explorer en terme d'applications.

5.2 Une extension aux systèmes LPV

Si le ou les paramètres incertains sont connus ou mesurés, on parle alors de modèle Linéaire à Paramètres Variants (LPV). Dans ce cas, il est très simple de synthétiser un observateur contenant le modèle dépendant des paramètres du système en utilisant le cadre de travail des modèles polytopiques [GdO01]. La sous-section 5.2.1 présente le résultat théorique pour la synthèse d'un observateur dépendant de paramètres. Ces résultats ont été appliqués au contrôle de position sans capteur d'une machine tournante, ce qui est présenté dans la référence [ZBSLS12], disponible à la fin de ce document. Cette section présente également les extensions possibles aux résultats de cette thèse pour la synthèse LPV-robuste dans le cadre LFT.

5.2.1 Synthèse d'observateurs pour les systèmes polytopiques.

L'approche polytopique n'a pas été retenue pour résoudre les problèmes d'estimation sous leur forme la plus générale. En revanche, cette approche permet de proposer des méthodes de synthèse d'estimateurs dans le cas où la représentation d'état dépend linéairement d'un ou plusieurs paramètres connus². Cette sous-section présente une manière simple de synthétiser efficacement des observateurs dont la représentation d'état présente la même dépendance que le modèle envers les paramètres connus.

Dans cette section, le modèle considéré est un modèle polytopique dont la représentation d'état est comprise dans un polytope défini par ses sommets, comme présenté équation (3.2) page 96. Relativement à l'application considérée dans [ZBSLS12], seule la matrice dynamique $\tilde{A}(\lambda)$ dépend du vecteur $\lambda \in \Gamma_\Lambda$.

2. Par opposition au cas robuste où les paramètres sont incertains.

$$\begin{bmatrix} \frac{\dot{x}(t)}{z(t)} \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}(\lambda) & \| & B_w & B_u \\ C_z & \| & 0 & 0 \\ C_y & \| & D_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

avec

$$\tilde{A}(\lambda) = \sum_i \lambda_i A_i, \quad \Lambda = \Gamma_\Lambda$$

Si un seul sommet est défini, cette forme recouvre la forme du cas nominal. Par analogie avec le cas nominal présenté dans le chapitre 2 (Estimation nominale), le signal z est à estimer à partir de la mesure du signal y .

Dans le cas nominal, la structure observateur est présentée figure 2.3 et sa représentation d'état est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{\dot{\hat{x}}(t)}{\hat{z}(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - LC_y & \| & L & B_u \\ C_z & \| & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Dans le cas LPV, si le paramètre λ est connu, la structure d'observateur LPV proposée dans cette section est présentée figure 5.10, et sa représentation d'état est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{\dot{\hat{x}}(t)}{\hat{z}(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}(\lambda) - LC_y & \| & L & B_u \\ C_z & \| & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

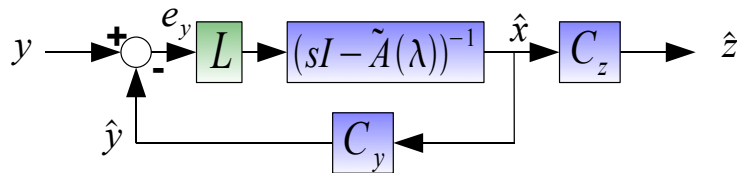


Figure 5.10 – Observateur LPV proposé dans cette section

La forme standard du problème d'observation LPV (dans le cadre polytopique) est présentée figure 5.11.

Cette forme standard admet la représentation d'état suivante :

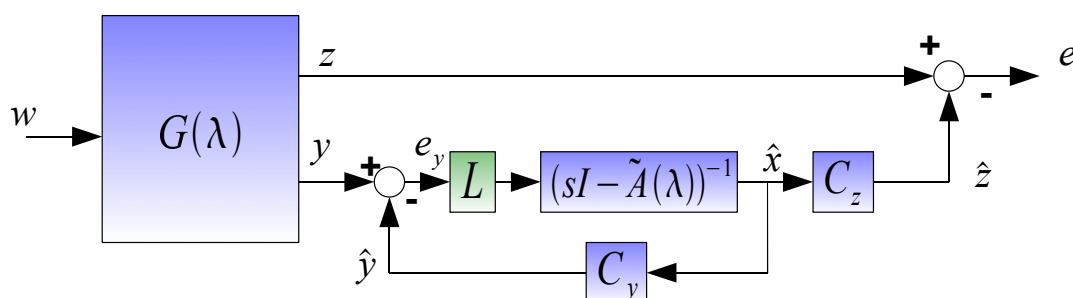


Figure 5.11 – Observateur LPV proposé dans cette section

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \\ z(t) - \hat{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}(\lambda) & 0 & \parallel & B_w & B_u \\ LC_y & \tilde{A}(\lambda) - LC_y & \parallel & LD_y & B_u \\ C_z & -C_z & \parallel & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Avec cette structure d'observateur, il est possible de rendre les modes dynamiques du modèle du système inobservables depuis la sortie e de la même manière que pour le cas certain. Les entrées mesurées u s'annulent. L'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$ admet donc la représentation d'état équivalente présentée équation (5.15) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ z(t) - \hat{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}(\lambda) - LC_y & \parallel & B_w - LD_y \\ C_z & \parallel & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - \hat{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

C'est sur cette forme standard que vont être appliqués les résultats d'analyse dans l'objectif de dériver des méthodes de synthèse. Le problème de synthèse d'observateur LPV est le suivant.

Problème 29. Problème de synthèse d'observateur LPV.

La forme standard du problème de synthèse d'observateur LPV est l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$ présenté figure 5.11 page 214. $T_{(w) \rightarrow (e)}$ admet la représentation d'état équivalente présentée équation (5.15) page 214.

Etant donné γ , trouver s'il existe un gain L (et le calculer) tel que $T_{(w) \rightarrow (e)}$ soit stable et que :

$$\|T_{(w) \rightarrow (e)}\|_i < \gamma.$$

Nous présentons à présent un résultat de synthèse pouvant se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI. Ceci permet de synthétiser efficacement le gain L d'un observateur garantissant une borne supérieure de la norme H_2 pire-cas. Le résultat est présenté dans le théorème 29.

Théorème 29. Synthèse H_2 d'observateur LPV H_2 .

Il existe une solution au problème de synthèse d'observateur LPV (problème 29, cas H_2)

s'il existe des matrices $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}^T$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ de dimensions appropriées telles que les conditions (5.16), (5.17), (5.18) soient vérifiées.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & C_z^T \\ C_z & \mathbf{M} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.16)$$

$$\forall i, \quad \begin{bmatrix} A_i \mathbf{P} - C_y^T \mathbf{F}^T + \mathbf{P} A_i - \mathbf{F} C_y & \mathbf{P} B - \mathbf{F} D_{yw} \\ B \mathbf{P} - D_{yw}^T \mathbf{F}^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.17)$$

$$\text{Trace}(\mathbf{M}) < \gamma^2 \quad (5.18)$$

■

La démonstration de ce théorème est présentée en annexe E page 251. Il est important de préciser que les conditions du théorème sont uniquement suffisantes. La matrice P dépend normalement également de λ . La nature de la dépendance n'étant pas connue, la choisir constante permet de se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte LMI en rendant possible le changement de base linéarisant. Ceci a une interprétation en terme de fonction de Lyapunov indépendante des paramètres [GB99]. Les mêmes résultats de synthèse peuvent être obtenus pour le \mathcal{L}_2 -gain dans le cas continu ou pour la norme H_2 et le \mathcal{L}_2 -gain dans le cas discret. De manière générale, tous les résultats présentés dans le chapitre 2 peuvent être étendus à l'estimation LPV dans ce cadre.

Les conditions sont certes suffisantes mais la simplicité du résultat proposé permet de synthétiser de façon simple et efficace un observateur pour certaines classes de systèmes. Cette approche a été appliquée pour l'estimation de la position angulaire d'une machine synchrone à aimants permanents sans capteur de position. Les modèles et les résultats sont publiés dans la référence [ZBSLS12], disponible à la fin de ce document.

Pour conclure sur cette approche polytopique de la synthèse d'observateur LPV, cette approche est très simple, et permet de synthétiser de façon simple un observateur présentant la même dépendance que le modèle envers un ou plusieurs paramètres. Cependant, cette approche est limitée par la description des modèles LPV au moyen d'un modèle polytopiques.

5.2.2 Synthèse LPV dans le cadre LFT

Dans le chapitre 3, nous avons précisé que l'approche polytopique ne permet de prendre en compte que des systèmes dont la représentation d'état dépend linéairement de paramètres. C'est pourquoi l'approche LFT/IQC a été préférée. L'approche LFT/IQC offre un cadre très général pour les problèmes de synthèse pour les systèmes Linéaires à Paramètres Variants.

La forme standard du problème générale de synthèse robuste est présentée figure 4.1 page 133. On cherche donc à synthétiser une matrice de fonctions de transfert K telle que

l'opérateur $\Delta \star G \star K$ vérifie certaines propriétés. En se basant sur les résultats d'analyse, ce problème peut être formulé comme un problème d'optimisation sous contrainte BMI, qui n'a pas été transformé en problème d'optimisation sous contrainte LMI dans le cas général à ce jour.

Un point intéressant est que dans le cas où le bloc incertain Δ est connu, il est possible de synthétiser un correcteur dépendant de ce même bloc. Dans le cas où le bloc incertain est connu, il est noté θ . On parle alors de correcteur LPV. La forme standard du problème de synthèse de correcteurs LPV est présenté figure 5.12 et est définie par :

$$T_{(w) \rightarrow (e)} = (\theta \star G) \star (\theta \star K)$$

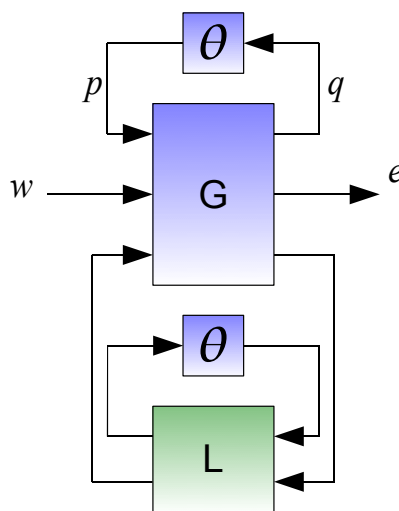


Figure 5.12 – Forme standard du problème de synthèse de correcteurs LPV

Le problème de synthèse de la matrice de fonctions de transfert K garantissant une borne supérieure sur le \mathcal{L}_2 -gain de l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$, peut être mis sous la forme d'un problème d'optimisation LMI [SE98] si le bloc θ est décrit par une IQC statique³. Le même résultat peut être formulé pour la norme H_2 . Le problème de synthèse de filtre LPV étant un cas particulier du problème de correcteur LPV, la synthèse de filtre peut également être formulée sous la forme d'un problème d'optimisation LMI.

Dans le cas où les paramètres sont des paramètres temps invariants et donc décrits par une IQC dynamique, nous conjecturons qu'il est possible de se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte LMI en utilisant une IQC dynamique. La recherche de cette solution est une des pistes de travail à explorer pour la continuité de la thèse. Il est possible de le faire en utilisant une IQC statique, mais les résultats seront potentiellement conservatifs. Des tentatives de résolution ont été faites par des méthodes itératives pour la synthèse de correcteurs [VS10].

3. ex : $\theta = \delta I$, où δ est un paramètre TV connu.

Le problème de synthèse d'estimateurs robustes-LPV est également à explorer. Par exemple, la forme standard du problème de synthèse de filtres robustes-LPV est présenté figure 5.13

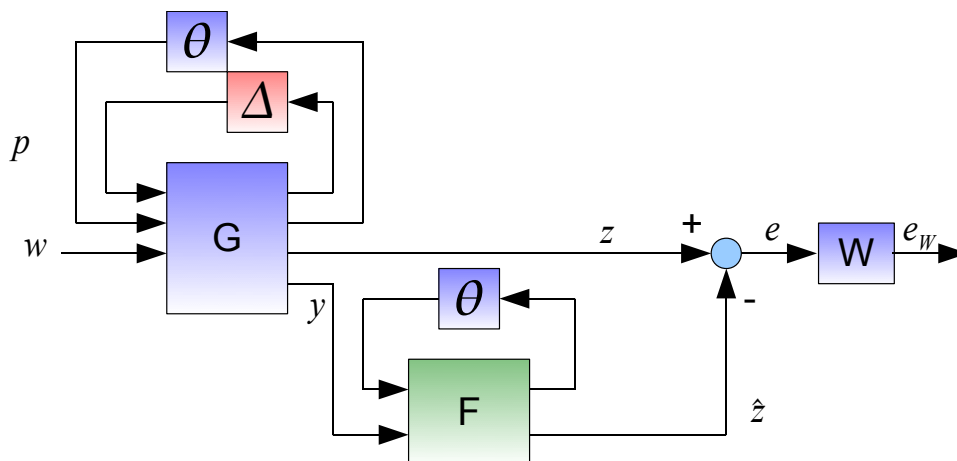


Figure 5.13 – Forme standard du problème de synthèse de filtres robustes-LPV

Une solution est proposée à ce problème dans [VS11]. Le bloc Θ est caractérisé par une IQC statique et le bloc Δ par une IQC dynamique. Cette approche permet par exemple de décrire une incertitude sur le bloc Θ . Une des extensions possibles des travaux de cette thèse est la synthèse d'observateurs robustes-LPV, pour pouvoir par exemple considérer des systèmes instables. Les combinaisons des approches LFT et polytopiques peuvent également permettre d'obtenir ce type de résultats. L'extension de l'ensemble des outils proposés pour l'estimation nominale, puis pour l'estimation robuste, à l'estimation LPV, puis à l'estimation robuste-LPV est une des principales perspectives de cette thèse.

5.3 Extensions : conclusions

Les résultats de synthèse d'estimateurs sont basés sur des résultats de nature très générale sur l'analyse des systèmes inter-connectés. Dans un premier temps, les résultats présentés pour la synthèse d'estimateurs sont basés sur les solutions d'un problème très général appelé dans ce document problème général de synthèse d'estimateurs robustes (problème 21 page 139). Dans ce chapitre, la solution du problème de synthèse de correcteurs avec système de sortie incertain (problème 28 page 200) a été formulée. Les solutions de ces deux problèmes, pour une norme donnée permettent de proposer une approche générale aux problèmes de synthèse de correcteurs en l'absence d'incertitudes dans la boucle de rétroaction. Ces problèmes recourent par exemple la synthèse d'estimateurs robustes, ou encore d'autres problèmes de synthèse tels que la synthèse de correcteur assurant le rejet d'une perturbation incertaine.

Dans un second temps, des collaborations ont permis de montrer que les approches proposées pour la synthèse robuste permettaient également la synthèse d'observateurs LPV. Il semble que les résultats proposés pour l'estimation robuste soient extensibles à l'estimation LPV, puis à l'estimation robuste-LPV, ce qui peut faire l'objet de travaux dans la continuité des travaux présentés dans cette thèse. En combinaison avec la synthèse en boucle ouverte, la perspective principale de la thèse est de proposer une approche complète de la synthèse lorsque l'incertitude est en dehors de la boucle de rétro-action. La figure 5.14 résume les perspectives des travaux de cette thèse.

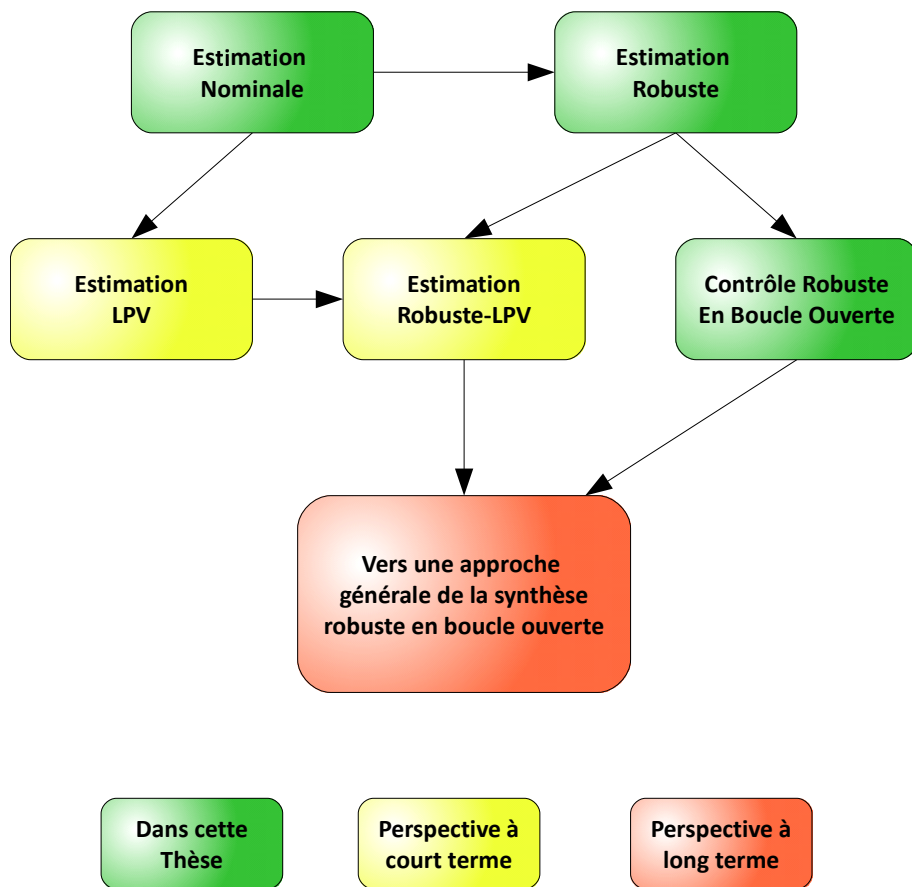


Figure 5.14 – Perspectives des travaux de la thèse

Conclusions et perspectives

Cette thèse propose une approche de la synthèse d'estimateurs robustes garantissant une performance pire-cas pour un ensemble de modèles appelé modèle incertain au moyen des outils de la commande robuste. Cette approche est réalisée en se basant sur des résultats d'analyse robuste obtenus par des approches de type entrées-sorties, et les résultats sont formulés sous la forme de problèmes d'optimisation sous contrainte LMI.

Les résultats présentés sont obtenus en deux temps. Dans un premier temps, une revisite du cas certain a permis de proposer une approche homogène de la synthèse d'estimateurs, en proposant des résultats de synthèse (dont certains originaux) d'estimateurs classiques (Filtre et Observateur à Gain Statique) et de structures d'estimateurs alternatives (Observateur à Gain Dynamique). L'étude de ces structures a permis de créer une nouvelle structure de type observateur assurant la même performance que toutes les autres : l'Estimateur Généralisé Nominal. Par la suite, l'étude de la limite de performance pour l'erreur d'estimation a permis de proposer un certain nombre d'outils permettant d'analyser les performances atteintes avec divers critères de performance. Cette étude a également permis de dégager des outils nouveaux comme un choix de pondération de l'erreur d'estimation systématique pour les estimateurs H_∞ .

Dans un second temps, la contribution de cette thèse est l'extension systématique des outils proposés pour l'estimation nominale à l'estimation robuste en se basant sur des résultats d'analyse robuste originaires des approches entrées-sorties. Ainsi, des méthodes de synthèse d'estimateurs de type filtre ont été proposées, permettant de compléter la littérature existante. Ensuite, l'extension des observateurs est faite par l'utilisation d'une structure nouvelle : l'Observateur à Gain Augmenté, une contribution majeure de cette thèse. Cette structure permet la synthèse d'estimateurs robustes pour certaines classes de systèmes instables. Pour finir, les résultats d'analyse de la limite de performance ont été étendus, permettant d'analyser les performances atteintes, et de proposer des méthodes de synthèse de pondération de l'erreur d'estimation pour la synthèse \mathcal{L}_2 -gain.

Relativement aux objectifs de la thèse, l'approche proposée étend bien les outils de l'estimation nominale, permettant de conserver le savoir-faire acquis sur ces outils. Le caractère efficace des outils de l'estimation nominale a également été conservé : les résultats de synthèse ont été obtenus sans ajout de conservatisme par rapport aux résultats d'analyse et sont proposés sous la forme de problèmes d'optimisation LMI, pour lesquels existe un algorithme efficace. Si les conditions sont suffisantes, l'approche

LFT/IQC utilisée est connue pour avoir un excellent rapport conservatisme/temps de calcul. Les résultats proposés répondent donc correctement au cahier des charges posé pour les méthodes en adoptant un point de vue d'ingénieur.

Les résultats proposés dans cette thèse ne considèrent que des incertitudes paramétriques et dynamiques, et le modèle dépend de façon rationnelle de l'ensemble d'incertitudes. Par comparaison avec les approches polytopiques/Lyapunov, ces résultats permettent de considérer des incertitudes plus complexes et de différentes natures. Des résultats pour d'autres types d'incertitudes peuvent être obtenus de façon triviale pour des incertitudes de nature différentes. L'incertitude est caractérisée par une IQC dont la structure ne change pas les démonstrations des résultats de synthèse [SK08]. Un catalogue d'IQC est disponible dans [MR97].

Les résultats proposés dans cette thèse permettent de proposer une approche très générale de l'estimation robuste. Un paradoxe intéressant est que la majorité des résultats utilisés dans cette thèse viennent de la commande robuste. En se basant sur ces outils, le problème de synthèse de correcteurs robustes ne peut pas être formulé comme un problème d'optimisation sous contrainte LMI. En revanche, ces résultats permettent de proposer des résultats intéressants pour un grand nombre d'autres problèmes de synthèse robuste, comme la synthèse d'estimateurs.

Si l'approche proposée est très générale, le défaut majeur des résultats de synthèse proposés est l'ordre des estimateurs synthétisés, qui explose lorsque plusieurs incertitudes sont considérées et/ou que l'ordre de la base des multiplieurs est trop élevé. Si le résultat théorique n'est pas impacté, l'utilisateur devra faire face aux limites de l'optimisation LMI. L'algorithme n'est pas assez efficace pour considérer un grand nombre de variables en conservant un temps raisonnable de calcul.

C'est pourquoi dans cette thèse, nous avons proposé des résultats de synthèse à pôles fixés, ainsi que des résultats d'analyse de la performance, qui ouvrent un certain nombre de perspectives. Par exemple, les combinaisons des méthodes de synthèse nominales et des outils d'analyse robustes peuvent permettre d'observer quelles sont les incertitudes critiques pour la performance, comme cela a été présenté dans le chapitre 3. Ceci peut permettre de synthétiser un estimateur robuste ne prenant en compte que les incertitudes critiques, et de valider la performance atteinte pour l'ensemble des incertitudes. Un second exemple peut être la combinaison des méthodes de synthèse générale avec les méthodes de synthèse à pôles fixés pour la synthèse d'estimateurs robustes d'ordre réduit. Les méthodes de synthèse générales peuvent par exemple permettre de choisir les pôles de l'estimateur à pôles fixés, et une étape de validation peut être faite au moyen des outils d'analyse. La combinaison des outils proposés dans cette thèse permet de synthétiser un estimateur garantissant une performance robuste de façon très flexible. Les combinaisons des outils sont à explorer pour permettre d'atteindre différents objectifs de synthèse.

Les perspectives de ces travaux dépassent le cadre de l'estimation. Le chapitre 5 présente des problèmes de synthèse étroitement reliés aux problèmes de synthèse d'estimateurs. La démarche appliquée pour résoudre les problèmes de synthèse d'estimateurs robustes peut être directement transcrite pour résoudre ces problèmes de synthèse, permettant de proposer des solutions à un certain nombre de problèmes de synthèse où l'incertitude n'est pas dans la boucle de rétro-action. Parmi ces problèmes, la synthèse pré-compensateurs a été étudiée et a été appliquée à la synthèse d'impulsion pour une imprimante DoD. Un autre type de problème particulièrement intéressant est la synthèse robuste en boucle ouverte qui semble avoir un grand potentiel en termes d'application dans les domaines du génie électrique ou des communications. L'exploration de ces méthodes et de leur mise en œuvre est une des perspectives de la thèse.

Pour finir, dans le cadre de l'interconnexion des systèmes, le problème de synthèse de filtres robustes-LPV peut se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI. Il convient de rappeler que les résultats de synthèse de filtres robustes sont à l'origine de cette thèse. Dans un premier temps, les outils (analyse, synthèse) proposés pour la synthèse nominale et robuste peuvent probablement être étendus à l'estimation LPV, puis à l'estimation robuste-LPV. L'extension des observateurs et de la limite de performance à l'estimation robuste-LPV permettra de proposer une approche complète de la synthèse d'estimateurs dans le cadre des systèmes inter-connectés, ce qui constitue la perspective principale de cette thèse.

Annexe A

A la recherche de la LMI cachée

Lemme 4. *Lemme de Schur.*

Soit A, C les matrices carrés avec A inversible et B quelconque, alors :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ C - B^*A^{-1}B > 0 \end{cases}$$

Une version plus utilisée dans la thèse est

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A < 0 \\ C - B^*A^{-1}B < 0 \end{cases}$$

Lemme 5. *Lemme d'élimination [GA94].*

Soit $G = G^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U \in \mathbb{R}^{r \times n}$ avec $\text{rang}(U) = r < n$ et $V \in \mathbb{R}^{s \times n}$ avec $\text{rang}(V) = s < n$. Alors, il existe une matrice $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r \times s}$ telle que

$$G + U^T \mathbf{K} V + V^T \mathbf{K}^T U < 0 \tag{A.1}$$

si et seulement si :

$$U_{\perp}^T G U_{\perp} < 0 \quad \text{et} \quad V_{\perp}^T G V_{\perp} < 0 \tag{A.2}$$

Théorème 30. *LMI Complexe [BEFB94].*

Soit $A \in \mathbb{C}$ donnée telle que $A = A^*$ et $A = A^{Re} + iA^{Im}$ avec $A^{Re} \in \mathbb{R}$ et $A^{Im} \in \mathbb{R}$. Nous avons la propriété suivante :

$$A > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A^{Re} & A^{Im} \\ -A^{Im} & A^{Re} \end{bmatrix} > 0$$

■

Annexe B

Chapitre 2 : démonstrations

B.1 Démonstration du théorème 2 page 36

Démonstration. Théorème 2 page 36 (Synthèse de filtre H_2 sans pondération)

La représentation d'état de la forme standard présentée figure 2.8 page 31 est donnée équation (2.8 page 31). Par application du lemme 2 page 29, il existe une solution au problème de synthèse de filtre H_2 (Problème 6) si et seulement s'il existe $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T > 0$ telle que les contraintes suivantes soient vérifiées.

$$D_{zw} - D_F D_{yw} = 0 \quad \text{Trace}(\mathbf{M}) < \gamma^2$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{P} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_F C_y & A_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_F C_y & A_F \end{bmatrix}^T \mathcal{P} & \mathcal{P} \begin{bmatrix} B_w \\ B_F D_{yw} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} B_w^T & D_{yw}^T B_F^T \end{bmatrix} \mathcal{P} & -I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{P} & \begin{bmatrix} C_z^T - C_y^T D_F^T \\ -C_F^T \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} C_z - D_F C_y & -C_F \end{bmatrix} & \mathbf{M} \end{array} \right] > 0 \quad (\text{B.2})$$

La démonstration est analogue à la démonstration du théorème 1, à la différence qu'ici on va éliminer qu'une partie des variables du problème d'optimisation, qui correspondent aux matrices A_F et B_F de la représentation d'état. Dans le cas de la synthèse, les paramètres de la représentation d'état du filtre sont également des variables du problème. Les contraintes (B.1) et (B.2) sont des contraintes BMI. La contrainte (B.1) peut être mise sous la forme suivante dans l'objectif d'appliquer le lemme d'élimination.

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{P} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \mathcal{P} & \mathcal{P} \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} B_w^T & 0 \end{bmatrix} \mathcal{P} & -I \end{array} \right] + \dots \\
 \dots + & \left(\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{P} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_F & B_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ C_y & 0 & D_{yw} \end{bmatrix} \right) + (\diamond)^T < 0
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

On peut appliquer le lemme d'élimination sur cette expression.

$$\begin{aligned}
 U &= \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{P} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} & U_{\perp} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{P}^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\
 V &= \begin{bmatrix} 0 & C_y^T \\ I & 0 \\ \hline 0 & D_{yw}^T \end{bmatrix} & V_{\perp} &= \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \\ N_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Les partitions de \mathcal{P} et $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{Q}$ suivantes sont introduites.

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix}$$

La taille de la partition est définie par

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \dots \\ \dots & A_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T & \dots \\ \dots & A_F^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix}$$

Comme dans le cas H_{∞} la matrice P_3 doit être de la taille de la matrice \mathbf{P} pour se ramener à des contraintes LMI, c'est à dire que le filtre est de l'ordre du modèle. La matrice A_F a les mêmes dimensions que la matrice A .

L'application du lemme d'élimination sur l'inégalité (B.3) donne la contrainte (2.16) du théorème. Elle donne également la contrainte (B.4).

$$\begin{bmatrix} A\mathbf{Q} + \mathbf{Q}A^T & B_w \\ B_w^T & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{B.4}$$

Les conditions (2.16) et (B.4) ne sont pas des LMI puisque la matrice \mathcal{P} apparait encore dans la seconde contrainte. D_F est définie par l'égalité apparaissant après avoir appliqué le lemme 2. Pour cette égalité, soit il n'existe aucune solution, soit une solution,

soit une solution dépendant linéairement d'un ou de plusieurs paramètres. On doit donc linéariser pour faire disparaître les blocs P_2, P_2^T, P_3 de la contrainte (B.2). On effectue pour cela la multiplication congruente suivante :

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \mathbf{Q} & Q_2 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \\ [C_z - D_F C_y \quad -C_F] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_z^T - C_y^T D_F^T \\ -C_F^T \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & Q_2^T & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0$$

On obtient alors le résultat suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & I & \diamond \\ I & \mathbf{Q} & \diamond \\ (C_z - D_F C_y) & (C_z - D_F C_y)\mathbf{Q} - C_F Q_2^T & \mathbf{M} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{B.5})$$

Une première façon d'aboutir à des conditions linéaires est de réaliser le changement de variables bijectif suivant : $\mathbf{C}_F \rightarrow (C_z - D_F C_y)\mathbf{Q} - C_F Q_2^T$, pour aboutir à la condition suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & I & \diamond \\ I & \mathbf{Q} & \diamond \\ (C_z - D_F C_y) & \mathbf{C}_F & \mathbf{M} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{B.6})$$

Avec les autres contraintes présentées, les contraintes obtenues sont alors des contraintes LMI. Mais nous allons voir que les conditions (B.4) et (B.6) impliquent la stabilité du système et la condition (2.18 page 36). La démonstration est analogue à la démonstration présentée dans la démonstration du théorème 1.

On va donc prouver l'équivalence suivante :

1. $\exists \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{M}$ vérifiant (2.17) et (B.7).

$$\begin{bmatrix} A\mathbf{Q} + \mathbf{Q}A^T & B_w \\ B_w^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad \begin{bmatrix} \mathbf{P} & I & \diamond \\ I & \mathbf{Q} & \diamond \\ (C_z - D_F C_y) & \mathbf{C}_F & \mathbf{M} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{B.7})$$

2. G est stable

$$\exists \mathbf{P}, \mathbf{M} \text{ tel que } \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \diamond \\ (C_z - D_F C_y) & \mathbf{M} \end{bmatrix} > 0$$

– (1) \Rightarrow (2) :

Les conditions impliquent naturellement que $\mathbf{Q} > 0$ et $A\mathbf{Q} + \mathbf{Q}A^T < 0$, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de la matrice A sont à partie réelle strictement négative. Par conséquent G est stable. De plus avec une matrice de permutation, la seconde condition est équivalente à la condition suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & I & \diamond \\ I & \mathbf{P} & \diamond \\ \mathbf{C}_F & (C_z - D_F C_y) & \mathbf{M} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{B.8})$$

Cette condition implique que $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \diamond \\ (C_z - D_F C_y) & \mathbf{M} \end{bmatrix} > 0$

– (2) \Rightarrow (1) :

Si G est stable, alors $\forall P_l > 0$, il existe $Q_l > 0$ telle que $A^T Q_l + Q_l A + P_l = 0$. On choisit $P_l = \alpha^{-1} I$ avec $\alpha > 0$. Par conséquent, il existe $\alpha > 0$ tel que la condition suivante soit vérifiée.

$$\alpha(A^T Q_l + Q_l A) < 0$$

Et donc il existe $\alpha > 0$ suffisamment grand pour que la condition suivante soit vérifiée.

$$\alpha(A^T Q_l + Q_l A) < -B_w B_w^T$$

Par application du lemme de Schur, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\begin{bmatrix} A\alpha Q_l + \alpha Q_l A^T & B_w \\ B_w^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{B.9})$$

Pour conclure la démonstration, comme $Q_l > 0$, il existe α suffisamment grand tel que :

$$\alpha Q_l - \begin{bmatrix} I & \mathbf{C}_F^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \diamond \\ (C_z - D_F C_y) & \mathbf{M} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{C}_F \end{bmatrix} > 0$$

Ensuite, comme $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \diamond \\ (C_z - D_F C_y) & \mathbf{M} \end{bmatrix} > 0$, on peut appliquer le lemme de Schur, pour obtenir à une permutation près une condition équivalente à la condition (B.7) page 227. αQ_l est donc une candidate pour vérifier la condition (B.7) page 227, ce qui conclut la démonstration. □

B.2 Démonstration du théorème 3 page 37

Démonstration. Théorème 3 page 37 (Synthèse de filtre H_∞ pondéré)

La démonstration de ce théorème suit les mêmes étapes que la démonstration du théorème 1. Par conséquent, les étapes de la démonstration sont moins détaillées. De plus,

la présence de la pondération ne permet pas de faire disparaître les conditions comme nous l'avons fait dans la démonstration du théorème 1. La démonstration consiste donc à appliquer le lemme d'élimination qui donne directement des conditions convexes.

L'application du lemme réel borné sur le système présenté figure 2.9 page 31, dont la représentation d'état est donnée en équation (2.9) page 32 donne des conditions qui peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]^T \mathcal{P} + \mathcal{P} \left[\begin{array}{cc} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] & \mathcal{P} \left[\begin{array}{c} \mathcal{B} \\ 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \mathcal{C}_z^T \\ 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc} \mathcal{B}^T & 0 \end{array} \right] \mathcal{P} & -\gamma^2 I & \mathcal{D}_{zw}^T \\ \left[\begin{array}{cc} \mathcal{C}_z & 0 \end{array} \right] & \mathcal{D}_{zw} & -I \end{array} \right] + \dots \\ \dots + & \left(\text{diag}(\mathcal{P}, I, I) \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & B_W \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & D_W \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} A_F & B_F \\ C_F & D_F \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ C_y & 0 & 0 & D_{yw} & 0 \end{array} \right] \right) + (\diamond)^T < 0 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

On introduit les partitions de \mathcal{P} et de son inverse $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{-1}$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix}$$

Comme pour les démonstrations précédentes, pour pouvoir se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte LMI, les matrices \mathbf{P} , P_2 et P_3 sont de mêmes dimensions. Le filtre est donc de l'ordre du modèle plus l'ordre de la pondération. Par application du lemme d'élimination (lemme 5 page 223) on obtient les conditions (2.19) et (2.20) du théorème.

La dernière condition est obtenue de façon analogue au théorème précédent au moyen d'une multiplication congruente.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathbf{Q} & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \mathbf{Q} \\ 0 & Q_2^T \end{bmatrix} > 0$$

□

B.3 Démonstration du théorème 4 page 40

Démonstration. Théorème 4 page 40 (Synthèse d'OGS H_∞)

La forme standard du problème de synthèse d'OGS est présentée figure 2.10 page 39, et admet la représentation équivalente présentée équation (2.22 page 39). On applique donc le lemme 1 page 29 sur ce système. Il existe une solution au problème 8 si et seulement

si il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ telle que la condition suivante soit vérifiée.

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{P}(A - LC_y) + (A - LC_y)^T \mathbf{P} & \mathbf{P}(B - LD_{yw}) & C_z^T \\ \hline (B - LD_{yw})^T \mathbf{P} & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ \hline C_z & D_{zw} & -I \end{array} \right] < 0$$

Dans l'objectif d'appliquer le lemme d'élimination, on peut réécrire cette équation sous la forme suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{P}A + A^T \mathbf{P} & \mathbf{P}B & C_z^T \\ B^T \mathbf{P} & -\gamma^2 I & D_z^T \\ C_z & D_z & -I \end{array} \right] + \left(\left[\begin{array}{c} \mathbf{P} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] L [C_y \ D_{yw} \ 0] \right) + (\diamond)^T < 0$$

On peut alors définir les matrices suivantes :

$$U = \begin{bmatrix} C_y^T \\ D_{yw}^T \\ 0 \end{bmatrix} \quad U_\perp = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad V_\perp = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

L'application du lemme d'élimination donne directement la condition (2.24). La seconde condition obtenue peut se mettre sous la forme (2.25). \square

B.4 Démonstration du théorème 5 page 41

Démonstration. Démonstration du théorème 5 page 41 (Synthèse d'OGS H_2)

La forme standard du problème de synthèse d'OGS est présentée figure 2.10 page 39, et admet la représentation équivalente présentée équation (2.22 page 39). Par application du lemme 2 page 29 sur ce système, on a le résultat suivant. Il existe une solution au problème de synthèse d'observateur si et seulement s'il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T > 0$, L de dimensions appropriées telles que les contraintes (B.11), (B.12) et (B.13) soient vérifiées.

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{P} & C_z^T \\ C_z & \mathbf{M} \end{array} \right] > 0 \tag{B.11}$$

$$\left[\begin{array}{cc} (A - \mathbf{L}C_y)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(A - \mathbf{L}C_y) & \mathbf{P}(B_w - \mathbf{L}D_{yw}) \\ (B_w - \mathbf{L}D_{yw})^T \mathbf{P} & -I \end{array} \right] < 0 \tag{B.12}$$

$$\text{Trace}(\mathbf{M}) < \gamma^2 \quad D_{zw} = 0 \tag{B.13}$$

La contrainte (B.11) est déjà une contrainte LMI. La contrainte (B.13) est faite d'une contrainte LMI sur la trace de la matrice \mathbf{M} , et la contrainte D_{zw} impose que la puissance du signal soit bornée. On doit donc linéariser la contrainte B.12 page 230 en appliquant le lemme d'élimination 5 page 223. Cette contrainte peut se mettre sous la forme suivante, dans l'objectif d'appliquer le lemme d'élimination :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T\mathbf{P} & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ 0 \end{bmatrix} L \begin{bmatrix} C_y & D_{yw} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_y^T \\ D_{yw}^T \end{bmatrix} L^T \begin{bmatrix} \mathbf{P} & 0 \end{bmatrix} < 0$$

On peut alors définir les matrices suivantes

$$U = \begin{bmatrix} C_y^T \\ D_{yw}^T \end{bmatrix} \quad U_{\perp} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ 0 \end{bmatrix} \quad V_{\perp} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

L'application du lemme d'élimination donne directement la condition (2.27) du théorème. La deuxième condition s'écrit $-I < 0$ et est toujours vérifiée. \square

B.5 Démonstration du théorème 6 page 42

Démonstration. Démonstration du théorème 6 page 42 (Synthèse d'OGS H_{∞} pondéré) On applique le lemme 1 page 29 sur le système donné par la forme standard du problème de synthèse d'OGS pondéré présentée figure 2.11 page 40 admettant la représentation d'état donné équation (2.23) page 40. Dans le cas de la synthèse, les conditions sont des conditions BMI. En partant du lemme 1 page 29 appliqué sur la forme standard, il existe un observateur assurant une norme H_{∞} sur l'erreur d'estimation pondéré si et seulement s'il existe $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T > 0$, L telles que la contrainte suivante soit vérifiée :

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{P} \begin{bmatrix} A_W & B_W C_z \\ 0 & A - L C_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_W & B_W C_z \\ 0 & A - L C_y \end{bmatrix}^T \mathcal{P} & \mathcal{P} \begin{bmatrix} B_W D_{zw} \\ B_w - L D_{yw} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_W^T \\ C_z^T D_W^T \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} [B_W D_{zw}]^T & (B_w - L D_{yw})^T \end{bmatrix} \mathcal{P} & -\gamma^2 I & (D_W D_{zw})^T \\ \hline \begin{bmatrix} C_W & D_W C_z \end{bmatrix} & D_W D_{zw} & -I \end{array} \right] < 0$$

On peut récrire cette contrainte sous la forme suivante.

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{P} \begin{bmatrix} A_W & B_W C_z \\ 0 & A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_W & B_W C_z \\ 0 & A \end{bmatrix}^T & \mathcal{P} \begin{bmatrix} B_W D_{zw} \\ B_w \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_W^T \\ C_z^T D_W^T \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} [B_W D_{zw}]^T & (B_w)^T \end{bmatrix} \mathcal{P} & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ \hline \begin{bmatrix} C_W & D_W C_z \end{bmatrix} & D_W D_{zw} & -I \end{array} \right] + \dots$$

$$\dots + \left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{P} & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} L \left[0 \quad C_y \mid D_{yw} \mid 0 \right] + (\diamond)^T < 0$$

On peut appliquer le lemme d'élimination sur cette expression.

$$U = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{P} & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad U_{\perp} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{P}^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ C_y^T \\ D_{yw}^T \\ 0 \end{bmatrix} \quad V_{\perp} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

On introduit alors les partitions de \mathcal{P} et $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{Q}$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix}$$

Par application du lemme d'élimination, la première condition obtenue est la condition (2.29). Cette condition n'est pas simplifiable. La seconde condition donne après développement la condition (2.30) du théorème. On notera qu'on ne peut pas simplifier les expressions pour se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte LMI \square

B.6 Démonstration du théorème 7 page 48

Démonstration. Théorème 7 page 48 (synthèse d'OGD H_{∞})

Par application du lemme 1 page 29 sur la forme standard du problème de synthèse d'OGD qui admet la représentation d'état équivalent présentée équation (2.33) page 47, il existe une solution au problème de synthèse d'observateur à gain dynamique si et seulement s'il existe $\left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_L & D_L \end{array} \right]$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T > 0$ telles que la contrainte suivante soit vérifiée. Cette contrainte est mise en forme dans l'objectif d'appliquer le lemme d'élimination.

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{P} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \mathcal{P} & \mathcal{P} \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_z^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} B_w^T & 0 \end{bmatrix} \mathcal{P} & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ \hline \begin{bmatrix} C_z & 0 \end{bmatrix} & D_{zw} & -I \end{array} \right] + \dots \\
+ \left(\left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{P} & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & -I \\ \hline I & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} A_L & B_L \\ C_L & D_L \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & I & 0 & 0 \\ \hline C_y & 0 & D_{yw} & 0 \end{array} \right] \right) + (\diamond)^T < 0
\end{aligned}$$

On peut appliquer le lemme d'élimination sur cette expression.

$$\begin{aligned}
U &= \left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{P} & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & -I \\ \hline I & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] & U_{\perp} &= \left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{P}^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \\
V &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & C_y^T \\ \hline I & 0 \\ \hline 0 & D_{yw}^T \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] & V_{\perp} &= \left[\begin{array}{c|c} N_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline N_2 & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]
\end{aligned}$$

On introduit alors les partitions de \mathcal{P} et $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{Q}$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix}$$

L'application du lemme d'élimination donne les contraintes (2.36) et (2.37) du théorème. Pour finir, on a la contrainte

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} > 0$$

Cette condition implique $\mathbf{P} > 0$. Si cette condition est vérifiée alors on peut toujours trouver P_2, P_3 telles que $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} > 0$ soit vérifiée ce qui complète la démonstration du théorème. \square

B.7 Démonstration du théorème 8 page 49

Démonstration. Théorème 8 page 49 (Synthèse d'OGD H_2)

La représentation d'état de la forme standard présentée figure 2.15 page 46 est donnée

équation (2.33 page 47). Par application du lemme 2 page 29, il existe une solution au problème de synthèse de filtre H_2 (Problème 6 page 36) si et seulement si il existe $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T > 0$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ telles que les contraintes suivantes soient vérifiées.

$$D_{zw} = 0 \quad \text{Trace}(\mathbf{M}) < \gamma^2$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{P} \begin{bmatrix} A - D_L C_y & C_L \\ B_L C_y & A_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A - D_L C_y & C_L \\ B_L C_y & A_L \end{bmatrix}^T \mathcal{P} & \mathcal{P} \begin{bmatrix} B_w - D_L D_{yw} \\ B_L D_{yw} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} (B_w - D_L D_{yw})^T & (B_L D_{yw})^T \end{bmatrix} \mathcal{P} & -I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{B.14})$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{P} & \begin{bmatrix} C_z^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} C_z & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{M} \end{array} \right] > 0 \quad (\text{B.15})$$

La démonstration est analogue à la démonstration du théorème 7. On va éliminer dans un premier temps les variables correspondant à la représentation d'état du gain dynamique dans l'équation (B.14). Par la suite, on simplifiera l'expression (B.15) pour arriver aux conditions du théorème. On peut réécrire la contrainte (B.14) sous la forme suivante, dans l'objectif d'appliquer le lemme d'élimination.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{P} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \mathcal{P} & \mathcal{P} \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} B_w^T & 0 \end{bmatrix} \mathcal{P} & -I \end{array} \right] + \dots \\ & + \left(\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{P} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & -I \\ \hline I & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} A_L & B_L \\ C_L & D_L \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline C_y & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ D_{yw} \end{array} \right] \right) + (\diamond)^T < 0 \end{aligned}$$

On peut appliquer le lemme d'élimination sur cette expression.

$$U = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{P} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & -I \\ \hline I & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \quad U_{\perp} = \left[\begin{array}{c|c} P^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ I \end{array} \right]$$

$$V = \left[\begin{array}{c|c} 0 & C_y^T \\ \hline I & 0 \\ 0 & D_{yw}^T \end{array} \right] \quad V_{\perp} = \left[\begin{array}{c} N_1 \\ 0 \\ N_2 \end{array} \right]$$

On introduit alors les partitions de \mathcal{P} et $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{Q}$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix}$$

L'application du lemme d'élimination donne la contrainte (2.39) du théorème. La seconde contrainte est donnée par $-I < 0$ qui est toujours vérifiée. On considère à présent la contrainte (B.15). Cette contrainte s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_z^T \\ 0 \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} C_z & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{M} \end{bmatrix} > 0$$

On remarque que la variable P_3 n'apparaît plus que dans cette expression, elle va pouvoir être éliminée. Comme $P_3 > 0$, il existe \bar{P}_3 telle que $\bar{P}_3 + \bar{P}_3^T = P_3$. Par conséquent, on peut réécrire la contrainte (B.15) sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} & P_2 \\ P_2^T & 0 \\ C_z & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_z^T \\ 0 \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \bar{P}_3 \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \end{bmatrix} \right) + (\diamond)^T$$

L'application du lemme d'élimination sur cette expression donne la condition (2.40) du théorème. \square

B.8 Démonstration du théorème 12 page 58

Démonstration. Théorème 12 page 58 (Synthèse d'EGN H_2)

On applique le lemme 2 page 29 sur le système présenté figure 2.19 page 52, qui admet la représentation d'état donnée équation (2.46 page 53). Il existe une solution au problème de synthèse d'estimateur général nominal si et seulement s'il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T > 0$, L , \mathbf{D} de dimensions appropriées telles que les contraintes (B.16), (B.17) et (B.18) soient vérifiées.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & (C_z - \mathbf{D}C_y)^T \\ C_z - \mathbf{D}C_y & \mathbf{M} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{bmatrix} (A - LC_y)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(A - LC_y) & \mathbf{P}(B_w - LD_{yw}) \\ (B_w - LD_{yw})^T \mathbf{P} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{B.17})$$

$$\text{Trace}(\mathbf{M}) < \gamma^2 \quad D_{zw} - \mathbf{D}D_{yw} = 0 \quad (\text{B.18})$$

En posant le changement de variable linéarisant $\mathbf{L} = \mathbf{P}L$, on obtient les conditions du théorème ; \square

B.9 Démonstration du corollaire 2 page 59

Démonstration. Corollaire 2 page 59 (Existence d'un EGN H_2)

La condition (2.54) page 56 du théorème 12 peut s'écrire sous la forme suivante.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T\mathbf{P} & -I \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{L} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_y & \mathcal{D}_{yw} \end{bmatrix} \right) + (\diamond)^T < 0$$

On peut alors définir les matrices suivantes :

$$U = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_y^T \\ \mathcal{D}_{yw}^T \end{bmatrix} \quad U_\perp = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad V_\perp = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Par application du lemme d'élimination, on obtient la condition (2.60) du corollaire et $-I < 0$, qui est toujours vérifiée ; les autres conditions sont directement issues du théorème (12). \square

B.10 Démonstration du théorème 13 page 60

Démonstration. Théorème 13 page 60 (Synthèse d'EGN H_∞ pondéré)

On applique le lemme 1 page 29 que le système présenté figure 2.20 page 55 qui admet la représentation d'état équivalente donnée en équation (2.53 page 56). Il existe une solution au problème 16 page 59 si et seulement si il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$, \mathbf{D} telles que la contrainte suivante soit vérifiée.

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{P}(\mathcal{A} - L\mathcal{C}_y) + (\mathcal{A} - L\mathcal{C}_y)^T\mathbf{P} & \mathbf{P}(\mathcal{B}_w - L\mathcal{D}_{yw}) & (\mathcal{C}_z - \mathbf{D}\mathcal{C}_y)^T \\ \hline (\mathcal{B} - L\mathcal{D}_{yw})^T\mathbf{P} & -\gamma^2 I & (\mathcal{D}_{zw} - \mathbf{D}\mathcal{D}_{yw})^T \\ \hline \mathcal{C}_z - \mathbf{D}\mathcal{C}_y & \mathcal{D}_{zw} - \mathbf{D}\mathcal{D}_{yw} & -I \end{array} \right] < 0$$

On obtient la condition du théorème en effectuant le changement de variables bijectif suivant : $\mathbf{L} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$ \square

B.11 Démonstration du corollaire 3 page 60

Démonstration. Corollaire 3 page 60 (Existence d'un EGN H_∞ pondéré)

La condition (2.54) page 56 du théorème 11 page 56 peut s'écrire sous la forme suivante.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{PA} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} & \mathbf{PB}_w & \mathbf{C}_z^T \\ \mathbf{B}_w^T \mathbf{P} & -\gamma^2 I & \mathbf{D}_z^T \\ \mathbf{C}_z & \mathbf{D}_z & -I \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_y & \mathbf{D}_{yw} & 0 \end{bmatrix} \right) + (\diamond)^T < 0$$

On peut alors définir les matrices suivantes :

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_y^T \\ \mathbf{D}_{yw}^T \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_y^T \\ 0 \\ \mathbf{D}_{yw}^T \\ 0 \end{bmatrix} \quad U_{\perp} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad V_{\perp} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par application du lemme d'élimination, on obtient la condition (2.63) du corollaire et $-\gamma^2 < 0$ qui est toujours vérifiée. \square

Annexe C

Chapitre 3 : démonstration du théorème 18 page 113 (Analyse de la norme H_2 pire-cas)

La démonstration faite ici est largement inspirée des démonstrations faites dans [Bal02] pour le cas continu, ainsi que de la démonstration faite dans [BHS10] pour le cas discret.

Norme H_2 : définition [SK08]

La norme H_2 est définie comme l'énergie de la réponse impulsionnelle de l'opérateur $T_{(w) \rightarrow (e)}$, admettant la réponse impulsionnelle $e_{imp}(t)$. La norme H_2 peut être caractérisée de la façon suivante.

$$\int_0^{+\infty} \text{Trace}(e_{imp}(t)e_{imp}(t)dt) \leq \gamma^2$$

La norme H_2 peut également être caractérisée comme la réponse à des conditions initiales $x(0) = B_w w$. Dans ce cas-là, $e(t) = C e^{At} B_w w$. La norme H_2 peut être caractérisée de la façon suivante par l'ajout d'une variable supplémentaire [Sch06].

$$\forall w \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} e(t)e(t)dt - w^T \mathbf{S} w < 0 \quad \text{Trace}(\mathbf{S}) < \gamma^2$$

C'est cette caractérisation qui est conservée pour la démonstration dans le cas robuste. Nous allons prouver que les conditions du théorème 18 impliquent que le pire-cas de la norme H_2 est inférieur à γ .

Dans un premier temps, les conditions (3.16) et (3.17) impliquent que $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ est stable pour tout $\Delta \in \Gamma_\Delta$. Ceci se démontre facilement, puisque ces deux conditions impliquent qu'il existe des matrices $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T \in \Gamma_X$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T > 0$ telles que les conditions du corollaire 4 page 112 soient vérifiées.

La condition (3.16) du théorème peut s'interpréter en termes de signaux sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ p(t) \end{bmatrix}^T \left(\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P} & 0 & 0 \\ \mathbf{P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ [\diamond]^T \end{array} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C}_q & \tilde{D}_q \\ \tilde{C}_e & \tilde{D}_e \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ p(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{C.1})$$

On rappelle que les signaux du système sont reliés par les relations suivantes

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \tilde{q}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C}_q & \tilde{D}_q \\ \tilde{C}_e & \tilde{D}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ p(t) \end{bmatrix}$$

On introduit la fonction

$$V(t) = \dot{\tilde{x}}^T(t)\mathbf{P}\tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t)\mathbf{P}\dot{\tilde{x}}(t) + \tilde{q}^T(t)X\tilde{q}(t) + e^T(t)e(t)$$

S'il existe $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T \in \Gamma_X$ telles que la contrainte (3.16) soit vérifiée, alors ceci implique que $V(t) < 0$

Soit $F(t)$ la primitive de $V(t)$, il est possible d'écrire la contrainte suivante :

$$F(t) - F(0) = \int_0^t V(\tau) d\tau = \tilde{x}^T(t)\mathbf{P}\tilde{x}(t) - \tilde{x}^T(0)\mathbf{P}\tilde{x}(0) + \int_0^t \tilde{q}^T(\tau)X\tilde{q}(\tau) d\tau + \int_0^t e^T(\tau)e(\tau) d\tau$$

Si la condition ((3.16) page 113) du théorème est vérifiée, alors

$$\tilde{x}^T(t)\mathbf{P}\tilde{x}(t) - \tilde{x}^T(0)\mathbf{P}\tilde{x}(0) + \int_0^t \tilde{q}^T(\tau)X\tilde{q}(\tau) d\tau + \int_0^t e^T(\tau)e(\tau) d\tau$$

On aboutit alors à l'inégalité suivante :

$$\forall(t), \quad \tilde{x}^T(t)\mathbf{P}\tilde{x}(t) + \int_0^t \tilde{q}^T(\tau)X\tilde{q}(\tau) d\tau + \int_0^t e^T(\tau)e(\tau) d\tau < \tilde{x}^T(0)\mathbf{P}\tilde{x}(0)$$

La contrainte (3.18) du théorème peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{S} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_w \end{bmatrix}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_w \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{C.2})$$

Pour tout vecteur w , cette condition implique :

$$w^T \mathbf{S} w > w^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_w \end{bmatrix}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_w \end{bmatrix} w > 0 \quad (\text{C.3})$$

On rappelle que les conditions initiales du système sont $\tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_w \end{bmatrix} w$. Les états initialisés à 0 sont les états permettant de décrire la base permettant de générer le multiplieur. Par conséquent, cette condition implique

$$\tilde{x}(0)^T \mathbf{P} \tilde{x}(0) < w^T \mathbf{S} w \quad (\text{C.4})$$

Nous avons donc la relation suivante :

On aboutit alors à l'inégalité suivante :

$$\forall(t), \quad \tilde{x}^T(t) \mathbf{P} \tilde{x}(t) + \int_0^t \tilde{q}^T(\tau) X \tilde{q}(\tau) d\tau + \int_0^t e^T(\tau) e(\tau) d\tau < w^T \mathbf{S} w$$

Comme $\mathbf{P} > 0$, $\tilde{x}^T(t) \mathbf{P} \tilde{x}(t) > 0$. Comme le système est stable, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$

$$\int_0^{+\infty} \tilde{q}^T(\tau) X \tilde{q}(\tau) d\tau + \int_0^{+\infty} e^T(\tau) e(\tau) d\tau < w^T \mathbf{S} w \quad (\text{C.5})$$

Ce qu'on réécrit avec la variable t sous la forme suivante :

$$\int_0^{+\infty} \tilde{q}^T(t) X \tilde{q}(t) dt + \int_0^{+\infty} e^T(t) e(t) dt < w^T \mathbf{S} w \quad (\text{C.6})$$

Nous allons à présent montrer que le terme $\int_0^{+\infty} \tilde{q}^T(t) X \tilde{q}(t) dt$ est positif, si la condition (3.16) du théorème est vérifiée.

$$\tilde{q}(t) = \begin{bmatrix} \hat{q}(t) \\ \hat{p}(t) \end{bmatrix}$$

Par application du théorème de Parseval, nous avons la relation suivante :

$$\int_0^{+\infty} \begin{bmatrix} \hat{q}(t) \\ \hat{p}(t) \end{bmatrix}^T \mathbf{X} \begin{bmatrix} \hat{q}(t) \\ \hat{p}(t) \end{bmatrix} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} \hat{q}(j\omega) \\ \hat{p}(j\omega) \end{bmatrix}^T \mathbf{X} \begin{bmatrix} \hat{q}(j\omega) \\ \hat{p}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \quad (\text{C.7})$$

Dans le domaine fréquentiel : $\begin{bmatrix} \hat{q}(j\omega) \\ \hat{p}(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K(j\omega) & 0 \\ 0 & K(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(j\omega) \\ p(j\omega) \end{bmatrix}$

$$\int_0^{+\infty} \begin{bmatrix} \hat{q}(t) \\ \hat{p}(t) \end{bmatrix}^T \mathbf{X} \begin{bmatrix} \hat{q}(t) \\ \hat{p}(t) \end{bmatrix} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left([\diamond]^* \mathbf{X} \begin{bmatrix} K(j\omega) & 0 \\ 0 & K(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(j\omega) \\ p(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \right) \quad (\text{C.8})$$

Si la condition (3.16) du théorème est vérifiée, ceci implique que

$$\begin{bmatrix} K(j\omega) & 0 \\ 0 & K(j\omega) \end{bmatrix}^* \mathbf{X} \begin{bmatrix} K(j\omega) & 0 \\ 0 & K(j\omega) \end{bmatrix} \in \Gamma_{\Pi}$$

Si cette condition est vérifiée, alors

$$\int_0^{+\infty} \begin{bmatrix} \hat{q}(t) \\ \hat{p}(t) \end{bmatrix}^T \mathbf{X} \begin{bmatrix} \hat{q}(t) \\ \hat{p}(t) \end{bmatrix} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left([\diamond]^{ast} \mathbf{X} \begin{bmatrix} K(j\omega) & 0 \\ 0 & K(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(j\omega) \\ p(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \right) > 0 \quad (\text{C.9})$$

Par conséquent, comme $\int_0^{+\infty} \tilde{q}^T(t) X \tilde{q}(t) dt > 0$, la condition (C.6) implique par le passage à la limite :

$$\int_0^{+\infty} e^T(t) e(t) dt < w^T \mathbf{S} w$$

Par conséquent, s'il existe des matrices telles que les conditions du théorème soient vérifiées, alors pour tout $\Delta \in \Gamma_{\Delta}$:

$$\forall w \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} e(t) e(t) dt - w^T \mathbf{S} w < 0 \quad \text{Trace}(\mathbf{S}) < \gamma^2.$$

Annexe D

Chapitre 4 : démonstrations

D.1 Démonstration du théorème 22 page 148

Démonstration. Théorème 22 (Synthèse générale d'estimateurs robustes) La preuve se fait par application du théorème 18, page 113 sur la forme standard présentée figure 4.4, qui admet la représentation d'état présentée équation (4.1), page 4.1.

Il existe L tel que pour tout $\Delta \in \Gamma_\Delta$, $\|T_{(w,p) \rightarrow (q,e)} \star \Delta\|_2 < \gamma^2$ s'il existe $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T > 0$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T > 0$, $L = \begin{bmatrix} A_L & B_L \\ C_L & D_L \end{bmatrix}$ telles que les conditions (D.1), (D.2), (D.3), (D.1) soient vérifiées.

$$\text{Trace}(\mathbf{S}) < \gamma^2 \quad (H_{22} + H_{23}D_L H_{32})\tilde{D}_{mw} = 0 \quad D_{qw} = 0 \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{bmatrix} C_K^T \\ D_K^T \end{bmatrix} X_s \begin{bmatrix} C_K & D_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & P_K \\ P_K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ I & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{C}^T \\ \mathcal{D}^T \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} & 0 \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}_p \\ I & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{P} \\ \mathcal{P} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}_p \\ I & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{D.3})$$

$$\left[\begin{array}{cc} \mathcal{P} & \mathcal{P} \begin{bmatrix} \tilde{B}_w \\ (H_{12} + H_{13}D_L H_{32})\tilde{D}_{mw} \\ B_L H_{32} \tilde{D}_{mw} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{B}_w \\ (H_{12} + H_{13}D_L H_{32})\tilde{D}_{mw} \\ B_L H_{32} \tilde{D}_{mw} \end{bmatrix}^T \mathcal{P} & \mathbf{S} \end{array} \right] > 0 \quad (\text{D.4})$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B}_p \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D}_p \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} \tilde{A} & 0 & 0 & \tilde{B}_p \\ (H_{12} + H_{13}D_L H_{32})\tilde{C}_m & H_{11} + H_{13}D_L H_{31} & H_{13}C_L & (H_{12} + H_{13}D_L H_{32})\tilde{D}_{mp} \\ \hline B_L H_{32}\tilde{C}_m & B_L H_{31} & A_L & B_L H_{32}\tilde{D}_{mp} \\ \hline C_X & 0 & 0 & D_{Xp} \\ (H_{22} + H_{23}D_L H_{32})\tilde{C}_m & H_{21} + H_{23}D_L H_{31} & H_{23}C_L & (H_{22} + H_{23}D_L H_{32})\tilde{D}_{mp} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \tilde{A} & \tilde{B}_p & \tilde{B}_w \\ \hline C_X & D_{Xp} & D_{Xw} \\ \hline \tilde{C}_y & \tilde{D}_{mp} & \tilde{D}_{mw} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c|c} A_K & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C & B_K D_{qp} & 0 \\ 0 & 0 & A & B_p & B_w \\ \hline 0 & C_K & D_K C_q & D_K D_{qp} & 0 \\ \hline C_K & 0 & 0 & D_K & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_y & D_{mp} & 0 \end{array} \right]$$

Les conditions (D.1) et (D.2) correspondent aux contraintes (4.16) et (4.17) du théorème. Ces contraintes sont soit des contraintes égalités, soit des contraintes LMI. Les contraintes (D.3) et (D.4) présentées ici ne sont pas des contraintes LMI : elles contiennent des produits entre les variables de décision. Les contraintes sont donc des contraintes BMI. Les étapes suivantes vont servir à se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte LMI. On pose la notation suivante.

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{C}_q & \mathcal{D}_{qp} \\ \hline \mathcal{C}_e & \mathcal{D}_{ep} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} C_X & 0 & 0 & D_{Xp} \\ \hline (H_{22} + H_{23}D_L H_{32})\tilde{C}_m & H_{21} + H_{23}D_L H_{31} & H_{23}C_L & (H_{22} + H_{23}D_L H_{32})\tilde{D}_{mp} \end{array} \right]$$

En utilisant un lemme de Schur, la condition (D.3) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{P} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}^{\Psi_1} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}_p & 0 \\ \mathcal{C}_e & \mathcal{D}_{ep} & 0 \end{bmatrix} + \overbrace{(\diamond)^T}^{\Psi_1^T} + \dots \quad (D.5)$$

$$\dots [\diamond]^T \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X} & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}}^{\Psi_2} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_q & \mathcal{D}_{qp} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

La transformation de cette contrainte BMI en une contrainte LMI est faite en deux temps. Dans un premier temps une multiplication congruente est réalisée sur la contrainte (D.5). La contrainte obtenue est ensuite transformée en contrainte LMI en utilisant un changement de base. On introduit les partitions de \mathcal{P} et de son inverse $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{Q}$ suivantes :

$$\mathcal{P} = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & P_{13} \\ \diamond & \mathbf{P}_{22} & P_{23} \\ \hline \diamond & \diamond & P_{33} \end{array} \right] \quad t.q \quad \mathcal{P}\mathcal{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & P_{13} \\ \hline \diamond & \mathbf{P}_{22} & P_{23} \\ \hline \diamond & \diamond & P_{33} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c} \tilde{A} & \dots & \dots \\ \hline \dots & H_{11} & \dots \\ \hline \dots & \dots & A_L \end{array} \right]$$

$$\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{Q} = \left[\begin{array}{cc|c} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ \diamond & Q_{22} & Q_{23} \\ \hline \diamond & \diamond & Q_{33} \end{array} \right]$$

Pour que le problème soit convexe, c'est à dire que les conditions soient linéarisables, il est nécessaire de choisir P_{33} et Q_{33} de même dimensions que $\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \diamond & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}$. cela signifie que la matrice de fonctions de transfert L est d'ordre plein. L est donc d'ordre $n_L = n_H + n_G + 2n_K$, c'est à dire la somme des ordre des systèmes G et H auxquels s'ajoutent deux fois l'ordre de la base des multipliers K .

En posant $\mathbf{Z}_1 = Q_{11}^{-1}$, $\mathbf{Z}_2 = Q_{11}^{-1}Q_{12}$, $\mathbf{Z}_3 = Q_{22} - Q_{12}^T Q_{11}^{-1}Q_{12}$, on définit alors les matrices V et J qui vont être utilisées pour réaliser une multiplication congruente sur la contrainte (D.5).

$$J = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & Q_{23} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{D.6})$$

On remarque que

$$VJ = \begin{bmatrix} I & \mathbf{Z}_2 & R_1 \\ 0 & \mathbf{Z}_3 & R_2 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \quad VJP = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I & 0 \\ \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & P_{13} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} & P_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

On réalise une multiplication congruente sur l'équation (D.5). avec $\text{diag}(VJ, I, I)$. Cette multiplication donne :

$$\text{diag}(VJ, I, I) (\Psi_1 + \Psi_1^T + \Psi_2) \text{diag}(VJ, I, I) > 0$$

Le terme Ψ_2 de l'équation (D.5) donne le terme \mathcal{L}_X de l'équation (4.18) :

$$\text{diag}(VJ, I, I) (\Psi_2) \text{diag}(VJ, I, I) = \mathcal{L}_X$$

Le résultat de cette multiplication sur le terme Ψ_1 est le suivant :

$$[\diamond]^T (\Psi_1) \text{diag}(VJ, I, I) = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{P}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} H_{11} [[\mathbf{Z}_2^T \quad \mathbf{Z}_3] \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] + V \begin{bmatrix} A_L & B_L \\ C_L & D_L \end{bmatrix} U}^{\Psi_3}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{13} \\ \begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \end{bmatrix} & \mathbf{P}_2 H_{13} \\ 0 & 0 \\ 0 & H_{23} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{31} [\mathbf{Z}_2^T \quad \mathbf{Z}_3] + H_{32} \tilde{C}_m [I \quad 0] & H_{32} \tilde{C}_y & H_{31} & H_{32} \tilde{D}_{mp} & 0 \end{bmatrix}$$

On peut réécrire Ψ_3 sous la forme suivante :

$$\Psi_3 = \tilde{U} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{P}_2 H_{13} \\ & I \\ & \dots + \begin{bmatrix} P_2 \\ 0 \end{bmatrix} A_H [[\mathbf{Z}_2^T \quad \mathbf{Z}_3] \quad 0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & 0 \\ H_{31} [\mathbf{Z}_2^T \quad \mathbf{Z}_3] + H_{32} \tilde{C}_y [I \quad 0] & I \end{bmatrix} \tilde{V}^T$$

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{13} \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & H_{23} \end{bmatrix} \quad \tilde{V}^T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{32} \tilde{C}_y & H_{31} & H_{32} \tilde{D}_{mp} & 0 \end{bmatrix}$$

On introduit alors le changement de variables linéarisant suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{P}_2 H_{13} \\ & I \\ & \dots + \begin{bmatrix} P_2 \\ 0 \end{bmatrix} A_H [[\mathbf{Z}_2^T \quad \mathbf{Z}_3] \quad 0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & 0 \\ H_{31} [\mathbf{Z}_2^T \quad \mathbf{Z}_3] + H_{32} \tilde{C}_y [I \quad 0] & I \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

La condition peut donc s'écrire :

$$\left(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \overbrace{\tilde{U} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{bmatrix} \tilde{V}^T}^{\mathcal{L}_3} \right) + (\bullet)^T + \mathcal{L}_X < 0$$

Ce qui donne la condition (4.18) du théorème.

La condition (D.4) est encore à linéariser. Pour linéariser cette condition, on effectue une multiplication congruente sur la contrainte avec $\text{diag}(VJ, I)$. Le développement de l'expression, puis l'application du changement de base permet de retrouver la condition 4.19 du théorème, ce qui complète la démonstrations. \square

D.2 Synthèse à pôles fixés : démonstrations

Démonstration. Théorème 24 (Synthèse \mathcal{L}_2 -gain à pôles fixés)

La démonstration se fait par application du théorème 17 page 110 sur la forme standard du problème général de synthèse de filtres à pôles fixés présentée figure 4.29. Cette forme standard s'écrit $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$, où $T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ admet la représentation d'état présentée équation (4.37).

Etant donné γ , il existe $\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ telle que $\forall \Delta \in \Gamma_\Delta$, $\|\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}\|_2 < \gamma$, s'il existe $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T > 0$, telles que les conditions (D.9) et (D.10) soient vérifiées.

$$[\diamond]^T \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{P} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}_q & \mathcal{D}_q \\ \mathcal{C}_e & \mathcal{D}_e \\ 0 & [0 \ I] \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{D.9})$$

$$[\diamond] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_K & 0 \\ \mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{D.10})$$

La condition (D.10) est une contrainte LMI et correspond à la contrainte (4.39) du théorème. La contrainte (D.9) n'est pas une contrainte LMI puisqu'elle contient des produits entre les variables de décisions. Cette contrainte peut-être transformée en contrainte LMI en appliquant le lemme de Schur donnant la contrainte (4.38) du théorème. \square

Démonstration. Théorème 25 (Synthèse H_2 à pôles fixés)

La démonstration se fait par application du théorème 18 page 113 sur la forme standard du problème général de synthèse de filtres à pôles fixés présentée figure 4.29. Cette forme standard s'écrit $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$, où $T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ admet la représentation d'état présentée équation (4.37).

Etant donné γ , il existe $\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ telle que $\forall \Delta \in \Gamma_\Delta$, $\|\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}\|_2 < \gamma$, s'il existe $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T > 0$ telles que les contraintes (D.11), (D.12), (D.13), (D.14) soient vérifiées.

$$\mathcal{D}_{qw} = 0 \quad \mathcal{D}_{ew} = 0 \quad \text{Trace}(\mathbf{S}) < \gamma^2 \quad (\text{D.11})$$

$$[\diamond] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P} & 0 & 0 \\ \mathbf{P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B}_p \\ \mathcal{C}_q & \mathcal{D}_{qp} \\ \mathcal{C}_e & \mathcal{D}_{ep} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{D.12})$$

$$[\diamond] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_K & 0 \\ \mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{D.13})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P}\mathcal{B}_w \\ \mathcal{B}_w^T \mathbf{P} & \mathbf{S} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{D.14})$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}_p & \mathcal{B}_w \\ \mathcal{C}_q & \mathcal{D}_{qp} & \mathcal{D}_{qw} \\ \mathcal{C}_e & \mathcal{D}_{ep} & \mathcal{D}_{ew} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} A_K & 0 & 0 & 0 & B_K & 0 & 0 \\ 0 & A_K & B_K C_q & 0 & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & B_p & B_w & 0 \\ 0 & 0 & B_b C_y & A_b & B_b D_{yp} & B_b D_{yw} & 0 \\ \hline 0 & C_K & D_K C_q & 0 & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} & 0 \\ C_K & 0 & 0 & 0 & D_K & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_z - \mathbf{D}D_b C_y & -\mathbf{C} & D_{zp} - \mathbf{D}D_b D_{yp} & D_{zw} - \mathbf{D}D_b D_{yw} & 0 \end{array} \right]$$

Les contraintes (D.11), (D.13), (D.14) sont des contraintes LMI et correspondent aux contraintes (4.41), (4.42), (4.43) du théorème.

La contrainte (D.13) du théorème est une contrainte BMI. Cette contrainte peut être transformée en contrainte LMI en appliquant le lemme de Schur (lemme 4 page 223) pour retrouver la condition (4.42). \square

Démonstration. Théorème 26 (Synthèse à pôles fixés pour une bande de pulsations)
La solution de ce problème s'obtient par application du théorème 20 sur la forme standard du problème de synthèse. Le théorème 20 est appliqué sur la forme standard du problème de synthèse à pôles fixés. Il existe une solution au problème de synthèse de filtres à pôles fixés pour une bande de pulsations (problème 27) s'il existe s'il existe

$$\begin{aligned} - \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X \\ - \mathbf{P}\text{Re} &= \mathbf{P}\text{Re}^T, \mathbf{P}\text{Im} = -\mathbf{P}\text{Im}^T, \mathbf{Q}\text{Re} = \mathbf{Q}\text{Re}^T > 0, \mathbf{Q}\text{Im} = -\mathbf{Q}\text{Im}^T \\ - \mathbf{P}_K^{\text{Re}} &= \mathbf{P}_K^{\text{Re}^T}, \mathbf{P}_K^{\text{Im}} = -\mathbf{P}_K^{\text{Im}^T}, \mathbf{Q}_K^{\text{Re}} = \mathbf{Q}_K^{\text{Re}^T} > 0, \mathbf{Q}_K^{\text{Im}} = -\mathbf{Q}_K^{\text{Im}^T} \\ - [\mathbf{C} \quad \mathbf{D}] & \end{aligned}$$

telles que les conditions (3.22) et (3.23) soient vérifiées

| Bande de pulsations | Toutes pulsations | basses pulsations | hautes pulsations |
|---|---------------------------------------|--|--|
| $[\omega_1; \omega_2] = [\omega_b; \omega_l]$ | $[\omega_1; \omega_2] = [0; +\infty]$ | $[\omega_1; \omega_2] = [0; \omega_l]$ | $[\omega_1; \omega_2] = [\omega_h; +\infty]$ |
| $\alpha = -1, \beta = \omega_b \omega_l$ | $\alpha = 0, \beta = 0$ | $\alpha = -1, \beta = \omega_l^2$ | $\alpha = 1, \beta = -\omega_h^2$ |
| $\chi = \frac{\omega_b + \omega_l}{2}$ | $\chi = 0$ | $\chi = 0$ | $\chi = 0$ |

$$\begin{bmatrix} \Phi^{Re} & \Phi^{Im} \\ -\Phi^{Im} & \Phi^{Re} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{D.15})$$

$$\Phi^{Re} = [\diamond] \begin{bmatrix} \beta \mathbf{Q}^{Re} & \chi \mathbf{Q}^{Im} + \mathbf{P}^{Re} & 0 & 0 & 0 \\ -\chi \mathbf{Q}^{Im} + \mathbf{P}^{Re} & \alpha \mathbf{Q}^{Re} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}_q & \mathcal{D}_q \\ \mathcal{C}_e & \mathcal{D}_e \\ 0 & [0 \ I] \end{bmatrix} < 0$$

$$\Phi^{Im} = [\diamond] \begin{bmatrix} \beta \mathbf{Q}^{Im} & -\chi \mathbf{Q}^{Re} + \mathbf{P}^{Im} \\ \chi \mathbf{Q}^{Re} + \mathbf{P}^{Im} & \alpha \mathbf{Q}^{Im} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_K^{Re} & \Phi_K^{Im} \\ -\Phi_K^{Im} & \Phi_K^{Re} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{D.16})$$

$$\Phi_K^{Re} = [\diamond]^T \begin{bmatrix} \beta \mathbf{Q}_K^{Re} & \chi \mathbf{Q}_K^{Im} + \mathbf{P}_K^{Re} & 0 \\ -\chi \mathbf{Q}_K^{Im} + \mathbf{P}_K^{Re} & \alpha \mathbf{Q}_K^{Re} & 0 \\ 0 & 0 & X_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} < 0$$

$$\Phi_K^{Im} = [\diamond]^T \begin{bmatrix} \beta \mathbf{Q}_K^{Im} & -\chi \mathbf{Q}_K^{Re} + \mathbf{P}_K^{Im} \\ \chi \mathbf{Q}_K^{Re} + \mathbf{P}_K^{Im} & \alpha \mathbf{Q}_K^{Im} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \end{bmatrix} < 0$$

La condition (D.16) est équivalente à la condition (4.44) du théorème. La condition (D.15) est une contrainte BMI et doit être linéarisée. L'application du lemme de Schur (lemme 4 page 223) sur cette contrainte donne la contrainte (4.45) du théorème, ce qui complète la démonstration. \square

Annexe E

Chapitre 5 : démonstrations

E.1 Démonstration du théorème 27

La démonstration est faite en deux temps. Dans un premier temps, une formulation alternative du théorème 15 page 106 pour l'analyse du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas est formulée. A partir de cette formulation, la solution du problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie peut être obtenue directement à partir de la solution du problème général de synthèse d'estimateurs robustes.

Le problème dual d'analyse

Les conditions pour tester une borne supérieure sur le \mathcal{L}_2 -gain-gain d'un système sont les suivantes :

Etant donné γ , pour tout $\Delta \in \Gamma_\Delta$, $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ est stable et $\|\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}\|_{i_2} < \gamma$ s'il existe $\epsilon > 0$, $\Pi(j\omega) = \begin{bmatrix} \Pi_s(j\omega) & \Pi_{as}(j\omega) \\ \Pi_{as}(j\omega)^* & -\Pi_s(j\omega) \end{bmatrix} \in \Gamma_\Pi$ telles que $\forall \omega \in \mathbb{R}$, la contrainte (E.1) soit vérifiée.

$$[\diamond]^* \left[\begin{array}{cc|cc} \Pi_s(j\omega) & 0 & \Pi_{as}(j\omega) & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \hline \Pi_{as}(j\omega)^* & 0 & -\Pi_s(j\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}(j\omega) \\ I \end{array} \right] \leq -\epsilon I \quad (\text{E.1})$$

Par application du lemme 7 dans ([KS08]), la condition (E.1) est équivalente à la condition (E.2).

Etant donné γ , pour tout $\Delta \in \Gamma_\Delta$, $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ est stable et $\|\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}\|_{i_2} < \gamma$ s'il existe $\epsilon > 0$, $\Phi(j\omega) = \begin{bmatrix} \Phi_s(j\omega) & \Phi_{as}(j\omega) \\ \Phi_{as}^*(j\omega) & -\Phi_s(j\omega) \end{bmatrix}$ telles que $\forall \omega \in \mathbb{R}$, la contrainte (E.2) soit vérifiée.

$$[\diamond]^* \left[\begin{array}{cc|cc} \Phi_s(j\omega) & 0 & \Phi_{as}(j\omega) & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \hline \Phi_{as}^*(j\omega) & 0 & -\Phi_s(j\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^{-2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} I \\ -T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}^*(j\omega) \end{array} \right] \geq \epsilon I \quad (\text{E.2})$$

avec

$$\left[\begin{array}{cc} \Phi_s(j\omega) & \Phi_{as}(j\omega) \\ \Phi_{as}^*(j\omega) & -\Phi_s(j\omega) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \Pi_s(j\omega) & \Pi_{as}(j\omega) \\ \Pi_{as}(j\omega)^* & -\Pi_s(j\omega) \end{array} \right]^{-1}, \quad \left[\begin{array}{cc} \Pi_s(j\omega) & \Pi_{as}(j\omega) \\ \Pi_{as}(j\omega)^* & -\Pi_s(j\omega) \end{array} \right] \in \Gamma_{\Pi}$$

Avec une permutation et un changement de signe, la condition (E.2) est équivalente à la condition (E.3).

$$[\diamond]^* \left[\begin{array}{cc|cc} \gamma^2 \Phi_s(j\omega) & 0 & \gamma^2 \Phi_{as}^*(j\omega) & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \hline \gamma^2 \Phi_{as}(j\omega) & 0 & -\gamma^2 \Phi_s(j\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}^*(j\omega) \\ I \end{array} \right] \leq \epsilon I \quad (\text{E.3})$$

Dans un premier temps, la réponse fréquentielle de la matrice de fonctions de transfert $T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}(j\omega)$ est définie par :

$$T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}(s) = \begin{bmatrix} C_q \\ C_e \end{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_p & B_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{qp} & D_{qw} \\ D_{ep} & D_{ew} \end{bmatrix}$$

Par conséquent :

$$T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}^*(s) = \begin{bmatrix} B_p^T \\ B_w^T \end{bmatrix} (-j\omega I - A^T)^{-1} \begin{bmatrix} C_q^T & C_e^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{qp}^T & D_{ep}^T \\ D_{qw}^T & D_{ew}^T \end{bmatrix}$$

Dans un second temps, La matrice $\gamma^2 \begin{bmatrix} \Phi_s(j\omega) & \Phi_{as}^*(j\omega) \\ \Phi_{as}(j\omega) & -\Phi_s(j\omega) \end{bmatrix}$ est considérée.

Lemme 6. *Lemme d'inversion*

Soit une matrice X inversible partitionnée sous la forme

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

où les dimensions des partitions X_{11} , X_{12} , X_{21} , X_{22} sont égales. On a alors le résultat suivant :

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{21})^{-1} & -(X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{21})^{-1}X_{12}X_{22}^{-1} \\ -X_{22}^{-1}X_{21}(X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{21})^{-1} & X_{22}^{-1} + X_{22}^{-1}X_{21}(X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{21})^{-1}X_{12}X_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} X_{11}^{-1} + X_{11}^{-1}X_{12}(X_{22} - X_{21}X_{11}^{-1}X_{12})^{-1}X_{21}X_{11}^{-1} & -X_{11}^{-1}X_{12}(X_{22} - X_{21}X_{11}^{-1}X_{12})^{-1} \\ -(X_{22} - X_{21}X_{11}^{-1}X_{12})^{-1}X_{21}X_{11}^{-1} & (X_{22} - X_{21}X_{11}^{-1}X_{12})^{-1} \end{bmatrix}$$

□

En utilisant le lemme d'inversion (lemme 6) L'inverse de $\Pi(j\omega)$, son inverse est définie :

$$\Phi(j\omega) = \left[\begin{array}{cc|cc} \Phi_{sTV} & 0 & \Phi_{asTV} & 0 \\ 0 & \Phi_{sTI}(j\omega) & 0 & \Phi_{asTI}(j\omega) \\ \hline \Phi_{asTV}^T & 0 & -\Phi_{sTV} & 0 \\ 0 & \Phi_{asTI}(j\omega)^* & 0 & -\Phi_{sTI}(j\omega) \end{array} \right]$$

Avec

$$\begin{aligned} \Phi_{TV} &= \begin{bmatrix} \Phi_{sTV} & \Phi_{asTV} \\ \Phi_{asTV}^T & -\Phi_{sTV} \end{bmatrix} \\ \Phi_{sTV} &= \text{diag}(\text{diag}_i((R_i - S_i(-R_i)^{-1}S_i^T)^{-1}), \text{diag}_j((r_j)^{-1}I_{n_{\Delta_j^{TV}}})) \\ \Phi_{asTV} &= \text{diag}(\text{diag}_i(\tilde{S}_i), \text{diag}_j(0_{n_{\Delta_j^{TV}}})) \\ \tilde{S}_i &= -(R_i - S_i(-R_i)^{-1}S_i^T)^{-1}S_i(-R_i)^{-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi_{TI}(j\omega) &= \begin{bmatrix} \Phi_{sTI}(j\omega) & \Phi_{asTI}(j\omega) \\ \Phi_{sTI}^T(j\omega) & -\Phi_{sTI}(j\omega) \end{bmatrix} \\ \Pi_{sTI}(\omega) &= \text{diag}(\text{diag}_k((U_k(j\omega) - V_k(j\omega)(-U_k(j\omega))^{-1}V_k^*(j\omega))^{-1}), \text{diag}_l(u_l^{-1}(j\omega)I_{n_{\Delta_l^{TI}}})) \\ \Pi_{asTI}(\omega) &= \text{diag}(\text{diag}_k(\tilde{V}_k(j\omega)), \text{diag}_l(0_{n_{\Delta_l^{TI}}})) \\ \tilde{V}_k(j\omega) &= -(U_k(j\omega) - V_k(j\omega)(-U_k(j\omega))^{-1}V_k^*(j\omega))^{-1}V_k(j\omega)(-U_k(j\omega))^{-1} \end{aligned}$$

Si $\Pi \in \Gamma_\Pi$ alors $\Phi \in \Gamma_\Pi$ ce qui peut se vérifier aisément avec le lemme d'inversion. Et si $\Phi \in \Gamma_\Pi$ alors $\gamma^2 \begin{bmatrix} \Phi_s(j\omega) & \Phi_{as}^*(j\omega) \\ \Phi_{as}(j\omega) & -\Phi_s(j\omega) \end{bmatrix} \in \Gamma_\Pi$.

Par conséquent, un changement de variables dans l'espace des fréquences $\tilde{\omega} = -\omega$ et un changement de variables pour le multiplieur permettent de se ramener aux conditions suivantes :

$$\tilde{\Pi}(j\tilde{\omega}) = \begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_s(j\tilde{\omega}) & \tilde{\Pi}_{as}(j\tilde{\omega}) \\ \tilde{\Pi}_{as}^*(j\tilde{\omega}) & -\tilde{\Pi}_s(j\tilde{\omega}) \end{bmatrix} = \gamma^2 \begin{bmatrix} \Phi_s(j\omega) & \Phi_{as}^*(j\omega) \\ \Phi_{as}(j\omega) & -\Phi_s(j\omega) \end{bmatrix}$$

Les conditions du théorème 15 peuvent donc s'écrire sous la forme suivante :

Etant donné γ , pour tout $\Delta \in \Gamma_\Delta$, $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ est stable et $\|\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}\|_{i_2} < \gamma$ s'il existe $\epsilon > 0$, $\tilde{\Pi}(j\tilde{\omega}) = \begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_s(j\tilde{\omega}) & \tilde{\Pi}_{as}(j\tilde{\omega}) \\ \tilde{\Pi}_{as}^*(j\tilde{\omega}) & -\tilde{\Pi}_s(j\tilde{\omega}) \end{bmatrix} \in \Gamma_\Pi$ tels que $\forall \tilde{\omega} \in \mathbb{R}$, la contrainte (E.4) soit vérifiée.

$$[\diamond]^* \left[\begin{array}{cc|cc} \tilde{\Pi}_s(j\tilde{\omega}) & 0 & \tilde{\Pi}_{as}(j\tilde{\omega}) & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \hline \tilde{\Pi}_{as}(j\tilde{\omega})^* & 0 & -\tilde{\Pi}_s(j\tilde{\omega}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \tilde{T}_{(p,w) \rightarrow (q,e)}(j\tilde{\omega}) \\ I \end{array} \right] \leq -\epsilon I \quad (\text{E.4})$$

avec

$$\tilde{T}_{(p,w) \rightarrow (q,e)}(j\tilde{\omega}) = \begin{bmatrix} B_p^T \\ B_w^T \end{bmatrix} (j\tilde{\omega}I - A^T)^{-1} \begin{bmatrix} C_q^T & C_e^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{qp}^T & D_{ep}^T \\ D_{qw}^T & D_{ew}^T \end{bmatrix}$$

Il est ensuite possible pour tester ces conditions de se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte LMI, en appliquant la démarche qui a permis de créer le théorème 17 page 110 à partir du théorème 15 page 106. Cette démarche est détaillée sous-section 3.3.2 page 106. Cette démarche permet de formuler le résultat suivant.

Théorème 31. *Analyse du \mathcal{L}_2 -gain pire-cas (forme duale).*

Etant donné γ , pour tout $\Delta \in \Gamma_\Delta$, $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ est stable et $\|\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}\|_{i_2} < \gamma$ s'il existe $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T > 0$ telles que les conditions (E.6) et (E.5) soient vérifiées.

$$[\diamond] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_K & 0 \\ \mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{E.5})$$

$$[\diamond]^T \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & \mathbf{P} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{P} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C}_q & \tilde{D}_q \\ \tilde{C}_e & \tilde{D}_e \\ 0 & [0 \ I] \end{array} \right] < 0 \quad (\text{E.6})$$

Avec :

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C}_q & \tilde{D}_q \\ \hline \tilde{C}_e & \tilde{D}_e \\ \hline 0 & [0 \ I] \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} A_K & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K B_p^T & B_K D_{qp}^T & B_K D_{ep}^T \\ 0 & 0 & A^T & C_q^T & C_e^T \\ \hline 0 & C_K & D_K B_p^T & D_K D_{qp}^T & D_K D_{ep}^T \\ C_K & 0 & 0 & D_K & 0 \\ \hline 0 & 0 & B_w & D_{qw}^T & D_{ew}^T \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right]$$

■

On remarque que ce théorème présente la même forme que le théorème 15, mais que les matrices de la représentation d'état ont été transposées et/ou permutées. Par conséquent, analyser une borne supérieure de la performance robuste d'un système défini par $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$, où $T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ admet la représentation définie équation E.7 est équivalent à analyser la même borne sur le système défini par $\Delta \star \tilde{T}_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$, où $\tilde{T}_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ admet la représentation d'état présentée équation E.8. Ceci permet de formuler la solution du problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie.

$$T_{(p,w) \rightarrow (q,e)} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_p & B_w \\ \hline C_q & D_{qp} & D_{qw} \\ \hline C_e & D_{ep} & D_{ew} \end{array} \right] \quad (\text{E.7})$$

$$\tilde{T}_{(p,w) \rightarrow (q,e)} = \left[\begin{array}{c|cc} A^T & C_q^T & C_e^T \\ \hline B_p^T & D_{qp}^T & D_{ep}^T \\ \hline B_w^T & D_{qw}^T & D_{ew}^T \end{array} \right] \quad (\text{E.8})$$

Ceci permet de formuler la solution du problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie.

Résultat de synthèse

De la même manière que la démonstration du théorème 21 commence par l'application du théorème 17 sur la forme standard du problème général de synthèse d'estimateurs robustes (figure 4.4 page 137), le théorème 31 est appliqué sur la forme standard du problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie, présentée figure 5.2 page 199.

La forme standard du problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie s'écrit $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$, où $T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ admet la représentation d'état présentée équation (5.1).

Etant donné γ , il existe une matrice de fonctions de transfert L telle que $\forall \Delta \in \Gamma_\Delta$, $\Delta \star T_{(w,p) \rightarrow (q,e)}$ soit stable $\forall \Delta \in \Gamma_\Delta$, $\|\Delta \star T_{(w,p) \rightarrow (q,e)}\|_{i_2} < \gamma$ s'il existe $\mathbf{X} =$

$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T > 0$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T > 0$, $\begin{bmatrix} A_L & B_L \\ C_L & D_L \end{bmatrix}$ telles que les conditions (E.9) et (E.10) soient vérifiées.

$$[\diamond] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_K & 0 \\ \mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{E.9})$$

$$[\diamond]^T \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{P} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{P} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}_q & \mathcal{D}_q \\ \mathcal{C}_e & \mathcal{D}_e \\ 0 & [0 \ I] \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{E.10})$$

Avec :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}_q & \mathcal{D}_q \\ \mathcal{C}_e & \mathcal{D}_e \\ 0 & [0 \ I] \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \tilde{A} & & & 0 & & 0 & \tilde{C} \\ (H_{21}^T + H_{31}^T D_L^T H_{23}^T) \tilde{B}_m & H_{11}^T + H_{31}^T D_L^T H_{13} & H_{31}^T B_L^T & (H_{21}^T + H_{31}^T D_L^T H_{23}^T) \tilde{D}_m & & & \\ C_L^T H_{23}^T \tilde{B}_m^T & C_L^T H_{13}^T & A_L^T & C_L^T H_{23}^T \tilde{D}_m & & & \\ \tilde{B}_p & & & \tilde{D}_p & & & \\ (H_{22}^T + H_{32}^T D_L^T H_{23}^T) \tilde{B}_m & H_{12}^T + H_{32}^T D_L^T H_{13} & H_{32}^T B_L^T & (H_{22}^T + H_{32}^T D_L^T H_{23}^T) \tilde{D}_m & & & \\ 0 & & & [0 \ I] & & & \end{array} \right]$$

où :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{C} \\ \tilde{B}_p & \tilde{D}_p \\ \tilde{B}_m & \tilde{D}_m \\ 0 & [0 \ I] \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} A_K & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K B_p^T & B_K D_{qp}^T & B_K D_{ep}^T \\ 0 & 0 & A^T & C_q^T & C_e^T \\ \hline 0 & C_K & D_K B_p^T & D_K D_{qp}^T & D_K D_{ep}^T \\ C_K & 0 & 0 & D_K & 0 \\ \hline 0 & 0 & B_m^T & D_{qm}^T & D_{em}^T \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right]$$

On pose les changements de variables suivants :

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_p & \hat{B}_w \\ \hat{C}_q & \hat{D}_{qp} & \hat{D}_{qw} \\ \hat{C}_m & \hat{D}_{mp} & \hat{D}_{mw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T & C_q^T & C_e^T \\ B_p^T & D_{qp}^T & D_{ep}^T \\ B_m^T & D_{qm}^T & D_{em}^T \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & \hat{H}_{12} & \hat{H}_{13} \\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_{22} & \hat{H}_{23} \\ \hat{H}_{31} & \hat{H}_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}^T & H_{21}^T & H_{31}^T \\ H_{12}^T & H_{22}^T & H_{32}^T \\ H_{13}^T & H_{23}^T & 0 \end{bmatrix}$$

Avec les nouvelles variables, on est ramené aux conditions obtenues par application du théorème 17 sur la forme standard du problème général de synthèse d'estimateurs robustes. Par conséquent, les contraintes BMI peuvent être transformées en contraintes LMI avec les mêmes opérations que celles présentées dans la démonstration du théorème 22 page 148, ce qui permet d'aboutir aux conditions du théorème.

E.2 Démonstration du théorème 28

Résultat dual d'analyse pour la norme

Comme pour le cas du \mathcal{L}_2 -gain, le théorème d'analyse dual peut être formulé pour la norme H_2 .

Théorème 32. *Analyse de la norme H_2 pire-cas [SK08].*

Etant donné γ , pour tout $\Delta \in \Gamma_\Delta$, $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ est stable et $\|\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}\|_2 < \gamma$ s'il existe $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T > 0$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T > 0$ telles que les contraintes (E.12), (E.13), (E.14), (E.11)

$$D_{ep} = 0 \quad D_{ew} = 0 \quad \text{Trace}(\mathbf{S}) < \gamma^2 \quad (\text{E.11})$$

$$[\diamond]^T \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P} & 0 & 0 \\ \mathbf{P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{C} \\ \hline \tilde{B}_p & \tilde{D}_p \\ \hline \tilde{B}_w & \tilde{D}_w \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{E.12})$$

$$[\diamond] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_K & 0 \\ \mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{E.13})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_e^T \end{bmatrix} \\ [0 \ 0 \ C_e^T]^T \mathbf{P} & \mathbf{S} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{E.14})$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{C} \\ \hline \tilde{B}_p & \tilde{D}_p \\ \hline \tilde{B}_w & \tilde{D}_w \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} A_K & 0 & 0 & B_K \\ 0 & A_K & B_K B_p^T & B_K D_{qp}^T \\ 0 & 0 & A^T & C_q^T \\ \hline 0 & C_K & D_K B_p^T & D_K D_{qp}^T \\ C_K & 0 & 0 & D_K \\ \hline 0 & 0 & B_w & D_{qw}^T \end{array} \right]$$

■

La démonstration du théorème 28 commence par l'application de ce théorème sur la forme standard du problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie. Comme pour le cas du \mathcal{L}_2 -gain, les étapes de la démonstration du théorème 22 page 148 peuvent alors être suivies pour arriver aux conditions du théorème.

E.3 Démonstration du théorème 29

Par application du théorème 22 page 148 sur la forme standard du problème de synthèse d'observateur LPV présentée figure 5.11, où $T_{(w) \rightarrow (e)}$ admet la représentation d'état équivalente présentée équation (5.15) page 214, le problème de synthèse d'observateur LPV admet une solution s'il existe des matrices \mathbf{P} , \mathbf{M} , L telles que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & C_z^T \\ C_z & \mathbf{M} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{E.15})$$

$$\begin{bmatrix} (\tilde{A}(\lambda) - \mathbf{L}C_y)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\tilde{A}(\lambda) - \mathbf{L}C_y) & \mathbf{P}(B_w - \mathbf{L}D_{yw}) \\ (B_w - \mathbf{L}D_{yw})^T \mathbf{P} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{E.16})$$

$$\text{Trace}(\mathbf{M}) < \gamma^2 \quad (\text{E.17})$$

La contrainte (E.15) correspond à la contrainte (5.16) page 215 du théorème. La contrainte (E.17) correspond à la contrainte (5.18) page 215 du théorème. Le changement de variable linéarisant $\mathbf{L} = \mathbf{P}L$ permet d'obtenir la contrainte (5.17) page 215 à partir de la contrainte (E.16), ce qui complète la démonstration.

Annexe F

Annexes sur les espaces de signaux [Kor11]

Dans ce qui suit, on adopte les notations et les définitions présentées dans [Jon01] et [Sco97].

Un signal est modélisé par une fonction dépendante du temps. Il est donc nécessaire de définir les espaces fonctionnels et les opérateurs. Soit \mathcal{U} un espace fonctionnel dont les éléments sont de fonctions réelles $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et sur lequel on peut définir le *produit scalaire* de deux éléments f et g comme :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t) dt \quad (\text{F.1})$$

On définit aussi un espace \mathcal{U}^n , l'espace de fonctions réelles $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dont les images sont des vecteurs réels de dimension n , possédant le produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^n \langle f_i, g_i \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t) g_i(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f^T(t) g(t) dt \quad (\text{F.2})$$

Voici quelques propriétés utiles du produit scalaire qui vont être utilisées par la suite (où $f \in \mathcal{U}^n$, $g \in \mathcal{U}^m$, $f_1 \in \mathcal{U}^n$, $f_2 \in \mathcal{U}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$) :

1. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
2. $\langle \alpha f, g \rangle = \langle f, \alpha g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$
3. $\langle f, Yg \rangle = \langle Y^T f, g \rangle$
4. $\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$

La *norme* de l'espace \mathcal{U}^n est définie selon son produit scalaire de la manière suivante :

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (\text{F.3})$$

Pour tout $f \in \mathcal{U}^n$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$ on peut définir l'opérateur de troncature f_τ comme :

$$f_\tau(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pour } t < \tau \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{F.4})$$

On définit ainsi le *produit scalaire tronqué* comme $\langle f, g \rangle_\tau = \langle f_\tau, g_\tau \rangle$, la *norme tronquée* associée comme $\|f\|_\tau = \sqrt{\langle f, f \rangle_\tau}$ ainsi que l'*espace étendu* comme $\mathcal{U}_e^n = \{u \mid u_\tau \in \mathcal{U}^n, \text{ pour } \forall \tau \in \mathbb{R}\}$.

Un *système* ou un *opérateur* G avec m entrées et p sorties suivant ces nouvelles notations est alors formellement défini comme une relation sur $\mathcal{U}_e^m \times \mathcal{U}_e^p$ qui associe à un signal d'entrée $u \in \mathcal{U}_e^m$ un signal de sortie $y \in \mathcal{U}_e^p$. Un système est causal si pour $\forall \tau \in \mathbb{R}$ l'équation suivante est respectée :

$$(G(u_\tau))_\tau = (G(u))_\tau \quad (\text{F.5})$$

La fonction $f \in \mathcal{U}_e^n$ ou signal qu'il représente est à énergie finie si l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\|f\|_\tau^2 = \int_{-\infty}^{\tau} f^T(t) f(t) dt < \infty \quad (\text{F.6})$$

L'espace de toutes les fonctions ayant une énergie finie définit dans le sens de (F.6) pour $\tau = +\infty$ est appelé l'espace \mathcal{L}_2 et pour $\forall \tau : \tau \in \mathbb{R}$ et $\tau < +\infty$ est appelée \mathcal{L}_{2e} .

La norme définie équation (F.3) est en réalité la norme \mathcal{L}_2 du signal. A partir de cette norme, on peut définir une norme pour un opérateur dite la *norme induite* \mathcal{L}_2 d'un système (ou d'un opérateur) G qui est définie de la manière suivante :

$$\|G\|_{\mathcal{L}_2} = \sup_{\substack{f \in \mathcal{L}_{2e} \\ f \neq 0}} \frac{\|G(f)\|}{\|f\|} \quad (\text{F.7})$$

Néanmoins, il existe d'autres types de norme de signaux et norme induite d'opérateur tels que \mathcal{L}_p où $p \in \{\mathbb{N}, \infty\}$ [Sco97, Jon01].

Annexe G

Analyse et synthèse : Cas discret

G.1 Analyse Robuste de la performance discrète

G.1.1 Analyse de la performance \mathcal{L}_2 -gain

Théorème 33. *Analyse robuste du pire-cas L_2 -gain (cas discret).*

Etant donné γ , pour tout $\Delta \in \Gamma_\Delta$, $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ est stable et $\|\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}\|_{i_2} < \gamma$ s'il existe $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T > 0$ telles que les conditions (G.1) et (G.2) soient vérifiées.

$$[\diamond] \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_K & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{G.1})$$

$$[\diamond]^T \left[\begin{array}{cc|ccc} -\mathbf{P} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{array} \right] \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C}_q & \tilde{D}_q \\ \tilde{C}_e & \tilde{D}_e \\ 0 & [0 \ I] \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{G.2})$$

Avec :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C}_q & \tilde{D}_q \\ \tilde{C}_e & \tilde{D}_e \\ 0 & [0 \ I] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C_q & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A & B_p & B_w \\ \hline 0 & C_K & D_K C_q & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} \\ C_K & 0 & 0 & D_K & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_e & D_{ep} & D_{ew} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

■

La démonstration de ce théorème est analogue à la preuve du théorème pour le cas continu.

G.1.2 Analyse de la performance H_2

Théorème 34. *Analyse robuste du pire-cas H_2 (cas discret) [BHS10].*

Etant donné γ , pour tout $\Delta \in \Gamma_\Delta$, $\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}$ est stable et $\|\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}\|_2 < \gamma$ s'il existe $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T > 0$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T > 0$ tels que les conditions (G.3), (G.4) et (G.5) soient vérifiées.

$$\text{Trace}(\mathbf{S}) < \gamma^2 \quad (\text{G.3})$$

$$[\diamond] \begin{bmatrix} -\mathbf{P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{B}_p \\ \tilde{C}_q & \tilde{D}_{qp} \\ \tilde{C}_e & \tilde{D}_{ep} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{G.4})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} - \tilde{D}_{qw}^T \mathbf{X} \tilde{D}_{qw} & \tilde{B}_w^T \mathbf{P} & \tilde{D}_{ew}^T \\ \mathbf{P} \tilde{B}_w & \mathbf{P} & 0 \\ \tilde{D}_{ew} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{G.5})$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \tilde{A} & \tilde{B}_p & \tilde{B}_w \\ \hline \tilde{C}_q & \tilde{D}_{qp} & \tilde{D}_{qw} \\ \hline \tilde{C}_e & \tilde{D}_{ep} & \tilde{D}_{ew} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} A_K & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C_q & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A & B_p & B_w \\ \hline 0 & C_K & D_K C_q & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} \\ C_K & 0 & 0 & D_K & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_e & D_{ep} & D_{ew} \end{array} \right]$$

■

La démonstration de ce théorème est analogue à la démonstration du théorème 18 page 113, disponible section C page 239. Pour plus de détails, la démonstration est présentée dans [BHS10].

G.1.3 Analyse par bandes de fréquences : cas discret

Théorème 35. *Analyse robuste Bandes de fréquences (cas discret).*

Soit un intervalle de fréquence $[\omega_1; \omega_2]$. Etant donné γ , ω_0 , pour tout $\Delta \in \Gamma_\Delta, \forall \omega \in [\omega_1; \omega_2]$, $\bar{\sigma}(\Delta \star T_{(p,w) \rightarrow (q,e)}(e^{j\omega})) < \gamma$ s'il existe $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T > 0$, $\mathbf{Q}_K = \mathbf{Q}_K^T > 0$ telles que les conditions (G.6) et (G.7) soient vérifiées

| <i>Bande de fréquences</i> | <i>basses fréquences</i> | <i>hautes fréquences</i> |
|--|--|--|
| $[\omega_1; \omega_2] = [\omega_b; \omega_l]$ | $[\omega_1; \omega_2] = [0; \omega_l]$ | $[\omega_1; \omega_2] = [\omega_h; +\infty]$ |
| $\alpha = \cos \frac{\omega_l + \omega_b}{2}, \beta = -2 \cos \frac{\omega_l - \omega_b}{2}$ | $\alpha = 1, \beta = -2 \cos \omega_l$ | $\alpha = -1, \beta = -2 \cos \omega_h$ |
| $\chi = \sin \frac{\omega_l + \omega_b}{2}$ | $\chi = 0$ | $\chi = 0$ |

$$\begin{bmatrix} \Phi_R & \Phi_I \\ -\Phi_I & \Phi_R \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{G.6})$$

$$\Phi_R = [\diamond] \begin{bmatrix} -\mathbf{P} + \beta \mathbf{Q} & \alpha \mathbf{Q} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha \mathbf{Q} & \mathbf{P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C}_q & \tilde{D}_q \\ \tilde{C}_e & \tilde{D}_e \\ 0 & [0 \ I] \end{bmatrix} < 0$$

$$\Phi_I = [\diamond] \begin{bmatrix} 0 & -\chi \mathbf{Q} & 0 & 0 & 0 \\ \chi \mathbf{Q} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{B} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{KR} & \Phi_{KI} \\ -\Phi_{KI} & \Phi_{KR} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{G.7})$$

$$\Phi_{KR} = [\diamond]^T \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_K + \beta \mathbf{Q}_K & \alpha \mathbf{Q}_K & 0 \\ \alpha \mathbf{Q}_K & \mathbf{P}_K & 0 \\ 0 & 0 & X_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} < 0$$

$$\Phi_{KI} = [\diamond]^T \begin{bmatrix} 0 & -\chi \mathbf{Q}_K \\ \chi \mathbf{Q}_K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C}_q & \tilde{D}_q \\ \tilde{C}_e & \tilde{D}_e \\ 0 & [0 \ I] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C_q & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A & B_p & B_w \\ 0 & C_K & D_K C_q & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} \\ C_K & 0 & 0 & D_K & 0 \\ 0 & 0 & C_e & D_{ep} & D_{ew} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

■

G.2 Synthèse : Cas discret

Par analogie avec la solution présentée pour le cas continu, nous présentons une solution au problème de synthèse général d'estimateur dans le cas discret.

Théorème 36. *Synthèse générale d'estimateur robuste \mathcal{L}_2 -gain (cas discret).*

Il existe une solution au problème général de synthèse d'estimateurs robustes (problème

21 page 139, cas \mathcal{L}_2 -gain, discret) s'il existe des matrices $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_1^T$, \mathbf{Z}_2 , $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_3^T$
 $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \\ \mathbf{P}_{12} \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{21} \\ \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}$, \mathbf{P}_K , $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{bmatrix}$ de
 dimensions appropriés telles que les conditions (G.8), (G.9) soient vérifiées

$$[\diamond]^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}_K & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{P}_K & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{G.8})$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) + (\bullet)^T + \mathcal{M}_X < 0 \quad (\text{G.9})$$

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I & 0 \\ \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 & \tilde{B} \\ H_{12}\tilde{C}_m & H_{11} & H_{12}\tilde{D}_m \\ H_{22}\tilde{C}_m & H_{21} & H_{22}\tilde{D}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I \ 0] & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{Z}_2^T \ \mathbf{Z}_3] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{13} \\ I & 0 \\ 0 & H_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{32}\tilde{C}_m & H_{31} & H_{32}\tilde{D}_m \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}_X = [\diamond]^T \begin{bmatrix} -\Phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{X} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_X & \mathcal{D}_X & 0 & 0 \\ 0 & [0 \ I] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & \mathbf{Z}_1 & 0 \\ \diamond & \mathbf{Z}_3 & -\mathbf{Z}_2^T & I \\ \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \diamond & \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} \quad \tilde{C}_X = [C_X [I \ 0] \ C_X \ 0]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline C_X & D_X \\ \tilde{C}_m & \tilde{D}_m \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} A_K & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A & B_p & B_w \\ \hline 0 & C_K & D_K C_q & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} \\ C_K & 0 & 0 & D_K & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_m & D_{mp} & D_{mw} \end{array} \right]$$

□

■

Ce théorème présente également des contraintes LMI, et permet de tester l'existence d'un estimateur généralisé pour un niveau de performance donné. La preuve du théorème détaillée ci-après est analogue à la preuve présentée dans le cas continu. On peut également appliquer le lemme d'élimination sur ce théorème pour se ramener à des conditions indépendantes de la représentation d'état de L , et ainsi réduire le nombre de variables. Le résultat est trivial à partir du résultat présenté pour le cas continu et n'est pas détaillé ici.

Théorème 37. *Synthèse générale d'estimateur robuste H_2 (cas discret).*

Il existe une solution au problème général de synthèse d'estimateurs robustes (problème 21 page 139, cas H_2 , discret) s'il existe des matrices $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_1^T$, \mathbf{Z}_2 , $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_3^T$, $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \\ \mathbf{P}_{12} \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{21} \\ \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{X}_{as} \\ \mathbf{X}_{as}^T & -\mathbf{X}_s \end{bmatrix} \in \Gamma_X$, $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{bmatrix}$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ de dimensions appropriées telles que les conditions (G.10), (G.11), (G.12), (G.13) soient vérifiées.

$$\text{Trace}(\mathbf{S}) < \gamma^2 \quad (\text{G.10})$$

$$\begin{bmatrix} C_K^T \\ D_K^T \end{bmatrix} \mathbf{X}_s \begin{bmatrix} C_K & D_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}_K & 0 \\ 0 & -\mathbf{P}_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ I & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{G.11})$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) + (\bullet)^T + \mathcal{M}_X < 0 \quad (\text{G.12})$$

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I & 0 \\ \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 & \tilde{B} \\ H_{12}\tilde{C}_m & H_{11} & H_{12}\tilde{D}_{mp} \\ H_{22}\tilde{C}_m & H_{21} & H_{22}\tilde{D}_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I \ 0] & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{Z}_2^T \ \mathbf{Z}_3] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathcal{M}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{13} \\ I & 0 \\ 0 & H_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{D}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{32}\tilde{C}_m & H_{31} & H_{32}\tilde{D}_{mp} \end{bmatrix} \\
\mathcal{M}_X &= [\diamond]^T \begin{bmatrix} -\Phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_X & \mathcal{D}_X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} \mathbf{S} - \mathcal{D}_{qw}^T \mathbf{X} \mathcal{D}_{qw} & \mathcal{M}_4^T + \mathcal{M}_5^T & \mathcal{D}_{ew}^T \\ \mathcal{M}_4 + \mathcal{M}_5 & \Phi & 0 \\ \mathcal{D}_{ew} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \tag{G.13} \\
\Phi &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & \mathbf{Z}_1 & 0 \\ \diamond & \mathbf{Z}_3 & -\mathbf{Z}_2^T & I \\ \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \diamond & \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} \quad \tilde{C}_X = \begin{bmatrix} C_X [I \ 0] & C_X \ 0 \end{bmatrix} \\
\mathcal{M}_4 &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I \\ \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_w \\ H_{12}\tilde{D}_{mw} \end{bmatrix} \quad \mathcal{M}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{13} \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_L \\ \mathbf{D}_L \end{bmatrix} H_{32}\tilde{D}_{mw}
\end{aligned}$$

■

Annexe H

Le lemme KYP

Lemme 7. *Lemme Kalman-Yakubovitch-Popov continu [Ran96] Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $M = M^T \in \mathbb{R}^{n+m \times n+m}$, avec $\det(j\omega I - A) \neq 0$ pour $\omega \in \mathbb{R}$, et (A, B) commandable, les contraintes suivantes sont équivalentes*

1.

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \leq 0$$

2. *Il existe $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tel que*

$$M + \begin{bmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \leq 0$$

Les conditions suivantes sont valables pour des inégalités strictes même si (A, B) n'est pas commandable. \square

Lemme 8. *Lemme Kalman-Yakubovitch-Popov discret [Ran96] Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $M = M^T \in \mathbb{R}^{n+m \times n+m}$, avec $\det(j\omega I - A) \neq 0$ pour $\omega \in \mathbb{R}$, et (A, B) commandable, les contraintes suivantes sont équivalentes*

1.

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \begin{bmatrix} (e^{j\omega} I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} (e^{j\omega} I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \leq 0$$

2. *Il existe $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tel que*

$$M + \begin{bmatrix} A^T P A - P & A^T P B \\ B^T P A & B^T P B \end{bmatrix} \leq 0$$

Les conditions suivantes sont valables pour des inégalités strictes même si (A, B) n'est pas commandable. \square

Le lemme KYP 7 page 267 permet de se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte LMI, permettant de tester les condition du théorème 16 sous la forme

d'un problème d'optimisation de dimension finie. Ce lemme correspond à tester une condition pour une matrice sur l'axe imaginaire. Ce résultat a été généralisé dans [IH05] pour prendre en compte non plus tous l'axe imaginaire, mais simplement un segment sur cette axe. Il est montré dans [IH05] que n'importe quelle courbe du plan complexe est testable. Ici seuls des intervalles de fréquences sont considérés.

Théorème 38. *KYP Généralisé (version espace d'état, inégalités non strictes [IH05, théorème 4]).*

\mathbb{H} est l'ensemble des matrices complexes telles que $H \in \mathbb{H} \Rightarrow H = H^*$ Soit des matrices matrice $A \in \mathbb{C}$, $B \in \mathbb{C}$, $\Theta \in \mathbb{H}$, et $\Phi, \Psi \in \mathbb{H}$ données de dimensions appropriées.

Soit Λ une courbe du plan complexe telle que :

$$\Lambda(\Phi, \Psi) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \left| \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \lambda \\ I \end{bmatrix}^* \Phi \begin{bmatrix} \lambda \\ I \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} \lambda \\ I \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} \lambda \\ I \end{bmatrix} \leq 0 \end{array} \right. \right\}$$

On suppose que que la paire (A, B) est contrôlable. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

1. Pour tout $\lambda \in \Lambda \setminus \Omega$

$$\begin{bmatrix} (\lambda I - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} (\lambda I - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix} < 0$$

2. Il existe $P, Q \in \mathbb{H}$ tel que $Q > 0$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \Theta < 0$$

Définir des bandes de fréquences est un cas particulier

| | <i>continu</i> | <i>discret</i> |
|--------|--|---|
| Φ | $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |

| | $[0; \omega_1]$ | $[\omega_1; \omega_2]$ | $[\omega_1; +\infty]$ |
|---------------------------|---|---|---|
| Ψ (<i>Continu</i>) | $\begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & \omega_1^2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -I & j\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \\ -j\frac{\omega_1+\omega_2}{2} & -\omega_1\omega_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\omega_1^2 \end{bmatrix}$ |
| Ψ (<i>Discret</i>) | $\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & -2\cos(\omega_1) \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 & e^{j\frac{\omega_1+\omega_2}{2}} \\ e^{-j\frac{\omega_1+\omega_2}{2}} & -2\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}) \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 & -I \\ -I & -2\cos(\omega_1) \end{bmatrix}$ |

■

Bibliographie

- [AFA10] S. Ali, M. Friswell, and S. Adhikari. Piezoelectric energy harvesting with parametric uncertainty. *Smart Materials and Structures*, 19(10) :105010, October 2010.
- [AG95] P. Apkarian and P. Gahinet. A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(5) :853–864, May 1995.
- [AS91] A. Ahlen and M. Sternad. Wiener filter design using polynomial equations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(11) :2387–2399, November 1991.
- [Bal02] V. Balakrishnan. Lyapunov functionals in complex μ -analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(9) :1466–1479, September 2002.
- [BBS11] B. Bayon, E. Blanco, and G. Scorletti. Robust L_2 -Gain Observation for structured uncertainties : an LMI approach. In *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, Orlando, 2011.
- [BCD95] P. Bolzern, P. Colaneri, and G. De Nicolao. Optimal design of robust predictors for linear discrete-time systems. *Systems and Control Letters*, 26(1) :25–31, September 1995.
- [BD94] G. Balas and J. Doyle. Robustness and performance trade-offs in control design for flexible structures. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2(4) :352–361, 1994.
- [BDT05] K. Barbosa, C. De Souza, and A. Trofino. Robust H_2 filtering for uncertain linear systems : LMI based methods with parametric Lyapunov functions. *Systems and Control Letters*, 54(3) :251–262, 2005.
- [BEFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Society for Industrial Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- [BH89] D. Bernstein and W. Haddad. Steady-state Kalman filtering with an H_∞ error bound. *Systems and Control Letters*, 9(12) :9–16, 1989.

- [Bha76] S. Bhattacharyya. The structure of robust observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(4) :581–588, 1976.
- [BHS10] X. Bombois, H. Hjalmarsson, and G. Scorletti. Identification for robust H_2 deconvolution filtering. *Automatica*, 46(3) :577–584, 2010.
- [BTD01] K. Barbosa, A. Trofino, and C. De Souza. Robust H_2 Filtering for Linear Systems with Uncertain Time-Varying Parameters. In *Proceedings of the 41th IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, 2001.
- [BV] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge University Press.
- [CFH07] R. Conway, S. Felix, and R. Horowitz. Parametric Uncertainty Identification and Model Reduction for Robust H_2 Synthesis for Track-Following in Dual-Stage Hard Disk Drives. In *American Control Conference*, New York City, July 2007. Ieee.
- [DGKF89] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic control*, 34(8) :831–847, 1989.
- [Din05] M. Dinh. *Synthèse Dépendant De Paramètres Par Optimisation LMI De Dimension Finie Application À La Synthèse De Correcteurs*No Title. PhD thesis, Université de Caen Basse-Normandie, 2005.
- [Doy82] J. Doyle. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D*, 126(6) :242–250, 1982.
- [Doy96] J. Doyle. Robust and optimal control. In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, 1996.
- [Dri10] Mehdi Dridi. *Dérivation numérique : synthèse, application et intégration*. PhD thesis, Université de Lyon, 2010.
- [DS10] S. Dietz and C. Scherer. Robust output feedback control against disturbance filter uncertainty described by dynamic integral quadratic constraints. *International Journal of Robust and Non-Linear Control*, 20(2009) :1903–1919, 2010.
- [dSSF95] C. de Souza, U. Shaked, and M. Fu. Robust H_∞ filtering for continuous time varying uncertain systems with deterministic input signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(3) :709–719, 1995.
- [DZZM06] Zhisheng Duan, Jingxin Zhang, Cishen Zhang, and Edoardo Mosca. Robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain linear systems. *Automatica*, 42(11) :1919–1926, 2006.
- [EGH88] A. El Sayed, M.J. Grimble, and D. Ho. On H_∞ filtering in multivariable discrete-time systems. In *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 1988.

-
- [FDX92] M. Fu, C. De Souza, and L. Xie. H_∞ estimation for uncertain systems. *International Journal of Robust and Non-Linear Control*, 2(2) :87–105, 1992.
- [Fer99] G Ferreres. *A practical approach to robustness analysis with aeronautical applications*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [FPEN84] G. Franklin, J. Powell, and A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems (5th Edition)*. Addison Wesley, 1984.
- [FS05] V Fromion and G. Scorletti. *Introduction à la commande multivariable des systèmes : méthodes de synthèse fréquentielle H_∞* . 2005.
- [FTD91] M. Fan, A. Tits, and J. Doyle. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(1) :25–38, 1991.
- [GA94] P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *International Journal of Robust and Non-Linear Control*, 4(4) :421–448, 1994.
- [GA96] P. Gahinet and P. Apkarian. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3) :436–442, 1996.
- [GB99] J.C. Geromel and J. Bernussou. Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent Lyapunov functions. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, 1999.
- [GdO01] J.C. Geromel and M.C. de Oliveira. H_2 and H_∞ robust filtering for convex bounded uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(1) :100–107, 2001.
- [GE90] M.J. Grimble and A. El Sayed. Solution of the H_∞ optimal linear filtering problem for discrete-time systems. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 38(7) :1092–1104, 1990.
- [Gel74] A. Gelb. *Applied optimal estimation*. Wiley New York, 1974.
- [Ger99] J.C. Geromel. Optimal linear filtering under parameter uncertainty. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(1) :168–175, 1999.
- [GMC08] H. Gao, X. Meng, and T. Chen. A new design of robust H_2 filters for uncertain systems. *Systems and Control Letters*, 57(7) :585–593, 2008.
- [Gri96] M.J. Grimble. Robust filter design for uncertain systems defined by both hard and soft bounds. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(5) :1063–1071, 1996.
- [Gri97] K.M. Grigoriadis. Reduced-Order H_∞ and $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_\infty$ Filtering via Linear Matrix Inequalities. *IEEE Transactions On Aerospace And Electronic Systems*, 33(4) :1326–1338, 1997.

- [GS95] K.C. Goh and M.G. Safonov. Robust analysis, sectors, and quadratic functionals. In *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, 1995.
- [Hel95] Anders Helmersson. A Finite Frequency Method for μ -analysis. In *Proceedings of 1995 European Control Conference*, 1995.
- [HN04] M. Heldwein and T. Nussbaumer. Differential mode EMC input filter design for three-phase AC-DC-AC sparse matrix PWM converters. In *Postsecondary Electronics Standard Council*, 2004.
- [HSK99] B. Hassibi, A.H. Sayed, and T. Kailath. *Indefinite-quadratic estimation and control : a unified approach to H_2 and H_∞ theories*. Studies in Applied and Numerical Mathematics, 1999.
- [IH05] T. Iwasaki and S. Hara. Generalized KYP lemma : unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1) :41–59, 2005.
- [Iwa94] T Iwasaki. All controllers for the general control problem : LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica*, 30(8) :1307–1317, 1994.
- [Jon01] U. Jonsson. *Lectures Notes on Integral Quadratic Constraints*. Royal Institute of Technology, Stockholm, 2001.
- [Kai74] T. Kailath. A view of three decades of linear filtering theory. *IEEE Transactions on Information Theory*, 20(2) :146–181, 1974.
- [Kal60] R. Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 82 :35–45, 1960.
- [KB61] R. Kalman and R. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 83 :95–107, 1961.
- [KBB⁺11] A. Khalate, B. Bayon, X. Bombois, G. Scorletti, and R. Babuska. Drop-on-Demand Inkjet Printhead Performance Improvement Using Robust Feedforward Control. In *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, Orlando, 2011.
- [KBBW10] A. Khalate, X. Bombois, R. Babuska, and H. Wijshoff. Optimization-based feedforward control for a Drop-on-Demand inkjet printhead. In *American Control Conference*, Baltimore, 2010.
- [KBS⁺10] Amol A Khalate, Xavier Bombois, G. Scorletti, R. Babuska, R. Waarsing, and W. de Zeuw. Robust Feedforward Control for a Drop-on-Demand Inkjet Printhead. In *IFAC World Congress*, 2010.
- [KG08] R. Korogui and J. Geromel. H_2 robust filter design with performance certificate via convex programming. *Automatica*, 44(4) :937–948, 2008.
- [KMD⁺11] M. Kazmerkovski, A. Moradewicz, J. Duarte, E. Lomonowa, and C. Sonntag. Contactless Energy Transfer. In Wilamowski and Irwin, editors, *Power*

-
- Electronics and Motor Drives*, chapter 35. Boca Radon, crc press edition, 2011.
- [Kor11] Anton Korniienko. *Réseau de PLLs distribuées pour synthèse automatique d'horloge de MPSOCs synchrones*. PhD thesis, Université de Lyon, 2011.
- [KS07] I. Kose and C. Scherer. Robust feedforward control of uncertain systems using dynamic IQCs. In *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, 2007.
- [KS08] I. Kose and C. Scherer. Robust L_2 -gain feedforward control of uncertain systems using dynamic IQCs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19(11) :1224–1247, 2008.
- [KS11] S. Kuiper and G. Schitter. Improving the Imaging Speed of AFM with Modern Control Techniques. *Control Technologies for Emerging Micro and Nanoscale Systems*, 413 :83–100, 2011.
- [Kwa86] H. Kwakernaak. A polynomial approach to minimax frequency domain optimization of multivariable feedback systems. *International Journal of Control*, 44(1) :117–156, 1986.
- [LB94] R. Lind and G. Balas. Evaluating DK iteration for control design. *American Control Conference*,, 1994.
- [LCG95] J. Ly, R. Chiang, and K. Goh. Multiplier K_m/μ -analysis-LMI approach. In *American Control Conference*, pages 431–436, Seattle, 1995.
- [LF97] H. Li and M. Fu. A Linear Matrix Inequality Approach to Robust H_∞ Filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(9) :2338–2350, 1997.
- [LG11] X. Li and H. Gao. A delay-dependent approach to robust generalized H_2 filtering for uncertain continuous-time systems with interval delay. *Signal Processing*, 91(10) :2371–2378, 2011.
- [Lie04] C. Lien. Robust observer-based control of systems with state perturbations via LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(8) :1365–1370, 2004.
- [LOP11] M. Lacerda, R. Oliveira, and P. Peres. Robust and filter design for uncertain linear systems via LMIs and polynomial matrices. *Signal Processing*, 91(5) :1115–1122, 2011.
- [Lue66] D. Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, MIL-8 :74–84, 1966.
- [Lue71] D. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Transactions on automatic control*, 16(6) :596–602, 1971.
- [Mah11] M. Mahmoud. New filter design for linear time-delay systems. *Linear Algebra and its Applications*, 434(4) :1080–1093, 2011.

- [Mat] The Mathworks. Robust Control Toolbox.
- [MR97] A. Megretski and A. Rantzer. System analysis via integral quadratic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(6) :819–830, 1997.
- [NB08] P. Neveux and E. Blanco. Robust H_∞ filtering by means of lead-lag controller. In *IFAC World Congress*, Seoul, 2008.
- [NK89] K. Nagpal and P. Khargonekar. Filtering and smoothing in an H_∞ setting. In *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, 1989.
- [NK91] K. Nagpal and P. Khargonekar. Filtering and smoothing in an H_∞ setting. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(2) :152–166, 1991.
- [NN87] Y. Nesterov and A. Nemirovskii. *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*. Studies in Applied and Numerical Mathematics, 1987.
- [OAS93] K. Ohrn, A. Ahlen, and M. Sternad. A probabilistic approach to multivariable robust filtering prediction and smoothing. *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1227–1232, 1993.
- [OAS95] K. Ohrn, A. Ahlen, and M. Sternad. A Probabilistic Approach to Multivariable Robust Filtering and Open-loop Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3) :405–417, 1995.
- [PABB00] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou. A new robust D -stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems and Control Letters*, 40 :21–30, 2000.
- [Pea00] D. Peaucelle. *Formulation generique de problemes en analyse et commande robuste par les fonctions de Lyapunov dependantes des paramètres*. PhD thesis, Université de Toulouse III-Paul Sabatier, 2000.
- [PG03] P. Pognant-Gros. *De la réduction de modèles vers la commande robuste. Application à la commande de canaux d'irrigation*. PhD thesis, Université de Caen/Basse-normandie, 2003.
- [PGB93] P. Peres, J. Geromel, and J. Bernussou. Quadratic stabilizability of linear uncertain systems in convex-bounded domains. *Automatica*, 29(2) :491–493, 1993.
- [PK97] P. Park and T. Kailath. H_∞ filtering via convex optimization. *International Journal of Control*, 66(1) :15–22, 1997.
- [PM94] I. Petersen and D. McFarlane. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(9) :1971–1977, 1994.
- [PP99] R. Palhares and P. Peres. Robust Hinfinity-Filtering Design with Pole Placement Constraint via Linear Matrix Inequalities. *Journal of Optimisation Theory and Applications*, 102(2) :239–261, 1999.

-
- [PPY11] C. Peng, L. Pei, and J. Yang. Delay-dependent robust H_∞ filtering for uncertain linear systems with time-varying interval delay. *Journal of Control Theory and Applications*, 9(2) :177–182, June 2011.
- [PZPB91] A. Packard, K. Zhou, P. Pandey, and G. Becker. A collection of robust control problems leading to LMIs. In *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, Brighton, January 1991.
- [Ran96] A. Rantzer. On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma. *Systems and Control Letters*, 28(1) :7–10, 1996.
- [RSP96] S. Reza Moheimani, A. Savkin, and I. Petersen. Robust filtering, prediction, smoothing and observability of uncertain systems. In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, Kobe, 1996.
- [SADG97] V. Syrmos, C. Abdallah, P. Dorato, and K. Grigoriadis. Static output feedback—A survey. *Automatica*, 33(2) :125–137, February 1997.
- [Saf80] M. Safonov. *Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems*. MIT Press, 1980.
- [Saf81] M Safonov. A multiloop generalization of the circle criterion for stability margin analysis. *IEEE Transactions on automatic control*, 26(2) :416–422, 1981.
- [Sch96] C.W. Scherer. Robust generalized H_2 control for uncertain and LPV systems with general scalings. In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, Kobe, 1996. IEEE.
- [Sch06] C. Scherer. LMI relaxations in robust control. *European Journal of Control*, 12(1) :3–29, 2006.
- [Sch09a] C. Scherer. Robust Controller Synthesis is Convex for Systems without Control Channel Uncertainties. In Paul M.J. Hof, Carsten Scherer, and Peter S.C. Heuberger, editors, *Model-Based Control : Bridging Rigorous Theory and Advanced Technology*, chapter 1, pages 13–31. Springer-Verlag, New-York, 2009.
- [Sch09b] C. Scherer. Robust Controller Synthesis is Convex for Systems without Control Channel Uncertainties Channel Uncertainties. In P. Van den Hof, C. Scherer, and P. Heuberger, editors, *Model-Based Control : Bridging Rigorous Theory and Advanced Technology*. 2009.
- [Sco97] G. Scorletti. *Approche unifiée de l'analyse et de la commande des systèmes par formulation LMI*. PhD thesis, Supelec, 1997.
- [SE98] G Scorletti and L. El Ghaoui. Improved LMI conditions for gain scheduling and related control problems. *International Journal of Robust and Non-Linear Control*, 8 :845–877, 1998.

- [SF06] G. Scorletti and V. Fromion. Further results on the design of robust H_∞ feedforward controllers and filters. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, 2006.
- [SGC97] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multi-objective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7) :896–911, 1997.
- [Sha90] U. Shaked. Hinfini-minimum error state estimation of linear stationary processes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(5) :554–558, 1990.
- [Sim06] D. Simon. *Optimal state estimation : Kalman, H_∞ and nonlinear approaches*. John Wiley & Sons, 2006.
- [Sin70] R. Singer. Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets. *IEEE Transactions On Aerospace And Electronic Systems*, 6(4) :473–483, 1970.
- [SK06] C. Scherer and I. Kose. Robust H_2 Estimation with Dynamic IQCs : A Convex Solution. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, 2006.
- [SK08] C. Scherer and I. Kose. Robustness with dynamic IQCs : An exact state-space characterization of nominal stability with applications to robust estimation. *Automatica*, 44(7) :1666–1675, 2008.
- [SP97] A. Savkin and I. Petersen. Fixed-order robust filtering for linear uncertain systems. *Automatica*, 44(3) :792–798, 1997.
- [SP05] K. Sun and A. Packard. Robust H_2 and H_∞ filters for uncertain LFT systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(5) :715–720, 2005.
- [ST92] U. Shaked and Y. Theodor. H_∞ -optimal estimation : A tutorial. *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, 1992.
- [Sun04] K. Sun. *Robust linear filter design via LMIs and controller design with actuator saturation via SOS programming*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 2004.
- [SW00] C. Scherer and S. Weiland. *Linear matrix inequalities in control*. DCSC lectures notes, 2000.
- [TAN01a] H. Tuan, P. Apkarian, and T. Nguyen. Robust filtering for uncertain nonlinearly parameterized plants. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, 51(7) :1806–1815, 2001.
- [TAN01b] H.D. Tuan, P. Apkarian, and T.Q. Nguyen. Robust and reduced-order filtering : new LMI-based characterizations and methods. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(12) :2975–2984, 2001.

-
- [TAN03] H. Tuan, P. Apkarian, and T. Nguyen. Robust filtering for uncertain nonlinearly parameterized plants. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51(7) :1806–1815, July 2003.
- [VKS08] J. Veenman, H. Koroglu, and C. Scherer. An IQC approach to robust estimation against perturbations of smoothly time-varying parameters. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, Cancun, 2008. IEEE.
- [VS10] J. Veenman and C. Scherer. On robust LPV controller synthesis : A dynamic Integral Quadratic Constraint based approach. *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*, 2010.
- [VS11] J. Veenman and C. Scherer. Robust gain-scheduled estimation : A convex solution. In *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, Orlando, 2011. Ieee.
- [WG98] J. Watson and K. Grigoriadis. Optimal unbiased filtering via linear matrix inequalities. *Systems and Control Letters*, 35(2) :111–118, 1998.
- [Wie50] N. Wiener. *Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series*. Wiley New York, 1950.
- [WU99] Z. Wang and H. Unbehauen. Robust H_2/H_∞ -state estimation for systems with error variance constraints : the continuous time case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5) :1061–1065, 1999.
- [XLZZ04] L. Xie, L. Lu, L. Zhang, and H. Zhang. Improved robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems. *Automatica*, 40(5) :873–880, 2004.
- [YY11] D. Ye and G. Yang. Robust switching-type H_∞ filter design for linear uncertain systems with time-varying delay. *Information Sciences*, 181(9) :1686–1699, May 2011.
- [Zam81] G. Zames. Feedback and optimal sensitivity : Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2) :301–320, April 1981.
- [ZBSLS12] A. Zgorski, B. Bayon, G. Scorletti, and X. Lin-Shi. LPV observer for PMSM with systematic gain design via convex optimization, and its extension for standstill estimation of the position without saliency. In *3rd IEEE International Symposium on Sensorless Control for Electrical Drives*, 2012.
- [ZDG95] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1995.
- [ZK88] Kemin Zhou and Pramod P. Khargonekar. Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *Systems and Control Letters*, 10(1) :17–20, January 1988.

- [ZS11] Hui Zhang and Yang Shi. Robust weighted H_∞ filtering for networked systems with intermittent measurements of multiple sensors. *International Journal of Adaptive*, (2010) :313–330, 2011.

Table des figures

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Principe de l'estimation basée sur un modèle | 2 |
| 1.2 | Système d'ordre 4 : masses-ressorts | 2 |
| 1.3 | Problème du filtrage de Wiener | 3 |
| 1.4 | Système pour l'estimation | 3 |
| 1.5 | Fonction de transfert | 4 |
| 1.6 | Modèle pour le débruitage | 6 |
| 1.7 | Modèle complet pour le débruitage | 6 |
| 1.8 | Modèle pour l'estimation (système masses-ressorts) | 7 |
| 1.9 | Modèle pour l'estimation | 9 |
| 1.10 | Forme standard du problème d'estimation | 10 |
| 1.11 | Interprétation des normes sur les systèmes | 14 |
| 1.12 | Interprétation de la norme H_∞ pondérée | 14 |
| 1.13 | Forme standard du problème d'estimation pondérée | 15 |
| 1.14 | Approche nominale - Approche robuste | 16 |
| 1.15 | Forme standard du problème d'estimation robuste pondérée | 17 |
| | | |
| 2.1 | Forme standard du problème d'estimation nominale | 21 |
| 2.2 | Structure filtre | 23 |
| 2.3 | Structure Observateur | 24 |
| 2.4 | Forme standard du problème de synthèse de correcteur | 24 |
| 2.5 | Mise du problème d'estimation sous la forme d'un problème de contrôle . | 25 |
| 2.6 | Lien entre l'estimation et le contrôle | 26 |
| 2.7 | Système LTI considéré | 28 |
| 2.8 | Forme standard du problème de synthèse de filtres sans pondération . . . | 31 |
| 2.9 | Forme standard du problème de synthèse de filtres avec pondération . . . | 31 |
| 2.10 | Forme standard du problème de synthèse d'OGS sans pondération | 39 |
| 2.11 | Forme standard du problème de synthèse d'OGS avec pondération | 40 |
| 2.12 | Boucle de rétroaction créée par la structure observateur | 44 |
| 2.13 | Interprétation du problème de synthèse d'OGS comme un retour statique de sortie | 45 |
| 2.14 | Observateur à gain dynamique | 46 |

| | | |
|------|--|-----|
| 2.15 | Forme standard du problème de synthèse d'OGD sans pondération | 46 |
| 2.16 | Forme standard du problème de synthèse d'OGD avec pondération | 47 |
| 2.17 | Interprétation du problème de synthèse d'OGD comme un retour dyna- mique de sortie | 48 |
| 2.18 | Estimateur généralisé nominal | 52 |
| 2.19 | Forme standard du problème de synthèse d'EGN sans pondération | 52 |
| 2.20 | Estimateur généralisé nominal | 55 |
| 2.21 | Problème d'estimation : forme éclatée | 63 |
| 2.22 | Exemple de débruitage | 66 |
| 2.23 | Résultats de synthèse | 67 |
| 2.24 | Différence faisabilité-minimisation d'une fonction de coût | 69 |
| 2.25 | Différence H_∞ - H_∞ pondéré | 70 |
| 2.26 | Module de la pondération | 71 |
| 2.27 | Module de la pondération | 72 |
| 2.28 | Gabarits supérieurs pour différentes pondérations et gabarit inférieur . . | 73 |
| 2.29 | Gabarit supérieur défini par la pondération idéale et gabarit inférieur atteignable | 75 |
| 2.30 | Valeurs singulières de $T_{(w,v) \rightarrow e}$ (Estimateur H_∞ pondéré) | 75 |
| 2.31 | Module des estimateurs | 76 |
| 2.32 | Densités spectrales de puissance (EGN H_2) | 78 |
| 2.33 | Densités spectrales de puissance (EGN H_∞) | 79 |
| 2.34 | Valeurs singulières et gabarit supérieur : l'estimateur H_∞ | 80 |
| 2.35 | Gabarits supérieurs définis par la pondération idéale | 80 |
| 2.36 | Gabarits supérieurs définis par la pondération idéale | 81 |
| | | |
| 3.1 | Processus générateur quasi-sinusoidal | 87 |
| 3.2 | DSP quasi sinusoidale | 88 |
| 3.3 | Incertitude additive et multiplicative | 89 |
| 3.4 | Module de la fonction de transfert du système incertain | 89 |
| 3.5 | Approche nominale / Approche robuste | 91 |
| 3.6 | Forme standard du problème d'estimation robuste | 91 |
| 3.7 | Forme standard du problème d'estimation robuste | 93 |
| 3.8 | Philosophie de la représentation LFT | 100 |
| 3.9 | Représentation LFT générale | 100 |
| 3.10 | Interprétation du produit de Redheffer | 101 |
| 3.11 | Représentation d'état sous la forme d'une interconnexion de sous-systèmes | 101 |
| 3.12 | Modèle incertain pour l'analyse | 103 |
| 3.13 | Ensemble d'incertitudes Γ_Δ | 105 |
| 3.14 | Exemple pour l'analyse | 120 |
| 3.15 | Impact des incertitudes paramétriques | 121 |
| 3.16 | Impact des incertitudes dynamiques | 122 |

| | | |
|------|---|-----|
| 3.17 | Impact de toutes les incertitudes sur la fonction de transfert | 123 |
| 3.18 | Gabarit supérieur garanti par le théorème 17 | 124 |
| 3.19 | Gabarit supérieur garanti par le théorème 19 (Analyse fréquence par fréquence) | 125 |
| 3.20 | Gabarit supérieur garanti par le théorème 20 (Analyse de la valeur singulière maximale pire-cas pour une bande de fréquences) | 125 |
| 3.21 | Dégradation de la DSP due aux incertitudes | 127 |
| 3.22 | Dégradation de la DSP due aux incertitudes | 127 |
| 3.23 | Dégradation de la norme H_2 pour un paramètre incertain | 128 |
| 3.24 | Dégradation de la norme H_2 pour deux paramètres incertains | 128 |
| | | |
| 4.1 | Forme standard d'un problème général de synthèse robuste | 133 |
| 4.2 | Forme standard du problème de synthèse de filtres robustes | 134 |
| 4.3 | Forme standard du problème général de synthèse d'estimateurs robustes | 136 |
| 4.4 | Forme standard du problème de synthèse général d'estimateur robuste | 137 |
| 4.5 | Forme standard du problème de synthèse de filtres robustes | 151 |
| 4.6 | Un cas particulier du problème de synthèse d'estimateurs robustes | 153 |
| 4.7 | Valeurs singulières de $T_{(w) \rightarrow (e)}$ atteintes par l'estimateur nominal (rouge) et le filtre H_∞ robuste (bleu), pour un échantillonnage de δ | 157 |
| 4.8 | Valeurs singulières de $T_{(w) \rightarrow (e)}$ atteintes par l'estimateur nominal (rouge) et le filtre H_2 robuste (bleu), pour un échantillonnage de δ | 158 |
| 4.9 | Séparation nominale-incertaine | 160 |
| 4.10 | Un exemple de marche aléatoire | 161 |
| 4.11 | Forme standard du problème de synthèse d'estimateur généralisé | 163 |
| 4.12 | Un cas particulier de retour statique de sortie robuste | 164 |
| 4.13 | Ajout d'un gain dynamique : cas particulier du problème général de synthèse d'estimateurs robustes | 165 |
| 4.14 | Structure de l'observateur à gain augmenté | 165 |
| 4.15 | Forme standard du problème de synthèse d'observateur à gain augmenté | 166 |
| 4.16 | Un cas particulier du problème général de synthèse d'estimateurs robustes | 168 |
| 4.17 | Un exemple de problème d'observation robuste | 171 |
| 4.18 | Dégradation de la norme H_2 pour un paramètre incertain | 173 |
| 4.19 | Réalisation temporelles de l'estimateur robuste pour $\omega_{gab} = 0.3$ ($\delta = -1$) | 174 |
| 4.20 | Réalisation temporelles de l'estimateur robuste pour $\omega_{gab} = 0.3$ ($\delta = 1$) | 175 |
| 4.21 | Réalisation temporelles de l'estimateur robuste pour $\omega_{gab} = 0.3$ ($\delta = 0$) | 176 |
| 4.22 | Valeurs singulières du gain augmenté | 177 |
| 4.23 | Comparaison des bornes inférieures nominales et robustes | 181 |
| 4.24 | Bornes supérieures et inférieures des valeurs singulières pire-cas atteintes par l'estimateur robuste H_∞ synthétisé sans pondération | 181 |
| 4.25 | Pondération nominale VS borne inférieure robuste | 182 |
| 4.26 | Recalage fréquentiel pour la synthèse d'une pondération robuste | 183 |

| | | |
|------|---|-----|
| 4.27 | Comparaison des résultats de synthèse avec l'estimateur robuste pour différentes pondérations | 183 |
| 4.28 | Valeurs singulières atteintes par l'estimateur robuste et l'estimateur nominal | 184 |
| 4.29 | Problème de synthèse de filtres à pôles fixés | 184 |
| 5.1 | Forme standard du problème de synthèse de pré-compensateurs | 197 |
| 5.2 | Forme standard du problème de synthèse de correcteurs avec système incertain en sortie | 199 |
| 5.3 | Forme standard du problème de synthèse de pré-compensateurs robustes | 205 |
| 5.4 | Modèle incertain considéré | 207 |
| 5.5 | Réponses impulsionnelles du modèle de référence et du modèle incertain . | 208 |
| 5.6 | Mise en forme du problème de synthèse | 209 |
| 5.7 | Réponses impulsionnelles du système pré-compensé | 209 |
| 5.8 | Forme standard du problème de contrôle en boucle-ouverte (cas SEI) . . | 210 |
| 5.9 | Forme standard du problème de contrôle en boucle-ouverte (cas SSI) . . | 210 |
| 5.10 | Observateur LPV proposé dans cette section | 213 |
| 5.11 | Observateur LPV proposé dans cette section | 214 |
| 5.12 | Forme standard du problème de synthèse de correcteurs LPV | 216 |
| 5.13 | Forme standard du problème de synthèse de filtres robustes-LPV | 217 |
| 5.14 | Perspectives des travaux de la thèse | 218 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|--|-----|
| 1.1 | Modèles pour différents problèmes d'estimation | 8 |
| 2.1 | Estimation classique : structures et critères de performance | 27 |
| 2.2 | Conditions d'existence pour les structures classiques (norme H_∞) | 43 |
| 2.3 | Conditions d'existence pour les structures classique (norme H_∞) | 61 |
| 2.4 | Bilan de l'estimation nominale | 83 |
| 3.1 | Objectifs du chapitre 3 | 85 |
| 3.2 | Objectifs du chapitre 3 | 94 |
| 3.3 | Base des multiplieurs | 107 |
| 3.4 | Objectifs du chapitre 3 | 115 |
| 3.5 | Résultats d'optimisation : borne supérieure de la valeur singulière pire-cas pour un ordre de multiplieur donné | 124 |
| 3.6 | Bilan de l'analyse des systèmes incertains | 130 |
| 4.1 | Bilan de l'estimation nominale | 132 |
| 4.2 | Complétion des objectifs du chapitre par la section 4.3 | 151 |
| 4.3 | Résultats d'optimisation en fonction de l'ordre du multiplieur | 156 |
| 4.4 | Complétion des objectifs du chapitre par la section 4.4 | 159 |
| 4.5 | Objectifs du chapitre complétés par la section 4.5 | 178 |
| 4.6 | Complétion des objectifs du chapitre par la section 4.6 | 192 |
| 4.7 | Bilan de l'extension des méthodes nominales à l'estimation robuste | 195 |

LPV observer for PMSM with systematic gain design via convex optimization, and its extension for standstill estimation of the position without saliency

Avec Aloïs Zgorski¹, Benoît Bayon², Gerard Scorletti²,
Xuefang Lin-Shi²

Abstract : This paper presents a new efficient and systematic method to optimize the gain of the Linear Parameter-Varying (LPV) observer for a surface-mounted Permanent Magnet Synchronous Motor (PMSM). The said gain will be calculated by convex optimization to induce a convergence of the observer in a predetermined speed range. An extension of the observer to zerospeed estimation of position is also proposed, using a new model of the machine taking an injection signal into account, and without the use of saliency.

1. Sagem Défense Sécurité, Valence, France

2. Laboratoire Ampère, Ecole Centrale de Lyon, 36 avenue Guy de Collongue - 69134 Ecully Cedex, France.

LPV observer for PMSM with systematic gain design via convex optimization, and its extension for standstill estimation of the position without saliency

Aloïs Zgorski
Sagem Défense Sécurité
Valence, France
alois.zgorski@sagem.com

Benoît Bayon, Gerard Scorletti, Xuefang Lin-Shi
Laboratoire Ampère, UMR CNRS 5005
Université de Lyon, INSA Lyon, Ecole Centrale de Lyon
Lyon, France
benoit.bayon@ec-lyon.fr, xuefang.shi@insa-lyon.fr

Abstract— This paper presents a new efficient and systematic method to optimize the gain of the Linear Parameter-Varying (LPV) observer for a surface-mounted Permanent Magnet Synchronous Motor (PMSM). The said gain will be calculated by convex optimization to induce a convergence of the observer in a predetermined speed range. An extension of the observer to zero-speed estimation of position is also proposed, using a new model of the machine taking an injection signal into account, and without the use of saliency.

Index Terms— Model-based sensorless control, PMSM, LPV observer, Linear Matrix Inequalities (LMI), Zero-speed Observer, Position Control

I. INTRODUCTION (HEADING 1)

LPV (Linear Parameter Varying) observers for PMSM (speed-dependant linear observers) have already been proposed in the past years [1][2]. The determination of the gain has always been a topic of interest, since the performance of the observer depends of the speed of the machine. As a result, speed-dependant gains have been devised [2]. However linear observers are often considered less robust than other nonlinear methods, and those are preferred in industrial applications. Recent results in the field of robust estimation have highlighted new possibilities: LPV observer gains can be designed to minimize a L2 criterion (energy) on the estimation error. This can also be interpreted in a stochastic framework as minimizing the variance of the estimation error, meaning result comparable with a Kalman filter [3]. Compared to the extended or unscented Kalman filtering, the observer gains are computed offline.

This paper presents two main results. The first one is a systematic method to design off-line the gain of the observer considering a given range of speed. This gain is computed by convex optimization and guarantees the convergence of the observer for all the speed in the defined range. Experimental results will be presented to confirm the applicability of this solution in sensorless control. The second result is an extension of the designed observer to the low-speed and zero-speed region. A periodic injection is introduced to generate a little

vibration in the machine. Those vibrations are sufficient to guarantee the observability of the machine and the speed and the position can be obtained without the use of saliency. The gain of the observer can again be designed to match a region of speed and a range of signal injection. Simulation results will be shown to highlight the performances of this new observer.

II. NON-ZERO SPEED LPV OBSERVER FOR PMSM

A. Flux-based Model of the PMSM

A permanent-flux model can be derived from the equation of the machine in the stationary reference frame:

$$\begin{cases} V_\alpha = R_s \cdot I_\alpha + L_s \cdot \dot{I}_\alpha - \omega_e \cdot \phi_{f\beta} \\ V_\beta = R_s \cdot I_\beta + L_s \cdot \dot{I}_\beta + \omega_e \cdot \phi_{f\alpha} \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{with } \begin{cases} \phi_{f\alpha} = \phi_f \cos(\theta) \\ \phi_{f\beta} = \phi_f \sin(\theta) \end{cases}$$

V_α and V_β are the stator voltages, I_α and I_β the stator currents, ω_e and θ the rotor electrical speed and position respectively, R_s the resistance, L_s the inductance and ϕ_f the permanent flux of the magnets.

The state model of the machine is then given by:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\omega_e) + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (2)$$

with

$$A(\omega_e) = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & 0 & 0 & \frac{\omega_e}{L_s} \\ 0 & -\frac{R_s}{L_s} & -\frac{\omega_e}{L_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_e \\ 0 & 0 & \omega_e & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

and

$$x = \begin{bmatrix} I_\alpha & I_\beta & \phi_{f\alpha} & \phi_{f\beta} \end{bmatrix}^T, \quad u = \begin{bmatrix} V_\alpha & V_\beta \end{bmatrix}^T, \\ y = \begin{bmatrix} I_\alpha & I_\beta \end{bmatrix}^T.$$

The Kalman criteria can be used to evaluate the observability of this system. The observability matrix is then given by:

$$O(\omega_e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{R_s}{L_s} & 0 & 0 & \frac{\omega_e}{L_s} \\ 0 & -\frac{R_s}{L_s} & -\frac{\omega_e}{L_s} & 0 \end{bmatrix}$$

Its determinant is given by:

$$\Delta = \frac{\omega_e^2}{L_s^2} \quad (4)$$

The determinant is non-zero when the speed is non-zero, thus this model is observable, except when the speed is zero. A classical LPV observer (Eq. 5) can then be designed, with its output the permanent magnet flux components, from which position (via an arctangent) and then speed (via the derivation of the position) can be deduced.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}_\omega \hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C \hat{x} \end{cases} \quad (5)$$

The problem studied in the next section is the design of the gain L for this observer.

B. Systematic Gain Design Method

The proposed method is a direct application of the results in robust filter design using convex optimization involving Linear Matrix Inequalities (LMI) presented in [3]. The PMSM can be described using a LPV state-space representation as described in the following sections. In this framework, the state-space representation of the system depends linearly in a vector of time-varying parameters. The time-varying vector Ψ belongs to a polytopic convex domain described by its vertices Ψ_i . The general model is as follows:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\psi)x + Bu + Fw \\ y = Cx + Dw \quad z = Ex \\ \psi = \sum_i \lambda_i \psi_i \quad \forall i, \lambda_i > 0 \quad \sum_i \lambda_i = 1 \end{cases} \quad (6)$$

The inputs of the system are: u the measured inputs and w the unmeasured inputs (perturbations, measurement noises). The measured signal vector is y while z is the internal state vector to be estimated.

For this class of systems it is possible to design an extension of standard observers that contains the model of the system. The LPV observer is described as follows (Eq. 7 and Fig. 1).

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A(\psi)\hat{x} + L(y - \hat{y}) + Bu \\ \hat{y} = C\hat{x} \quad \hat{z} = E\hat{x} \end{cases} \quad (7)$$

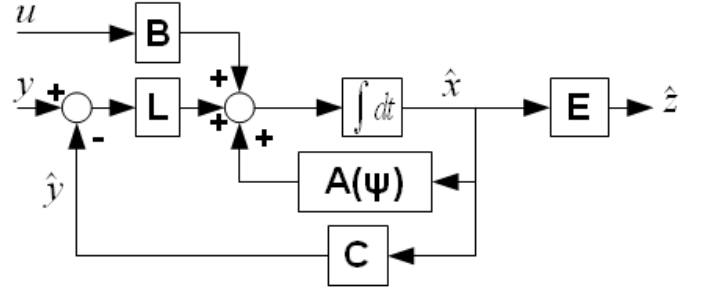


Fig. 1 LPV observer structure

The dynamic of the estimation error is then as follows:

$$\begin{cases} (\dot{x} - \dot{\hat{x}}) = (A(\psi) - LC)(x - \hat{x}) + (F - LD)w \\ e_z = E(x - \hat{x}) \end{cases} \quad (8)$$

The design of the gain L has to ensure specifications on the estimation error, such as noise rejection, convergence with unknown initial conditions, etc... A criterion on the estimation error can be considered. Minimizing this criterion ensures all the required properties for our application. The gain L minimizing the norm on the estimation error can be designed by solving the following optimization problem:

$$\begin{cases} \min_{P=P^T, W=W^T, \bar{L}} \gamma \\ \gamma > \text{Trace}(W) \\ \begin{bmatrix} W & F^T P - D^T \bar{L} \\ PF - \bar{L} D & P \end{bmatrix} < 0 \\ \forall i, \begin{bmatrix} A(\psi_i)^T P - C^T \bar{L} + PA(\psi_i) - \bar{L} C & E \\ E & -I \end{bmatrix} < 0 \end{cases}$$

This is a convex optimization problem involving LMI constraints [5]. For this class of systems, an efficient (in terms of complexity) algorithm exists meaning that it converges to the optimal solution in a reasonable time. For large scale systems, the computation time do not explode. The gain L can be computed from the decision variable solution of the optimization problem and is given by $L = P^{-1} \bar{L}$. This method allows systematic and efficient design of the observer. It also provides a detectability test: the conditions presented for the optimization problem will not be feasible if some instable states are not observable.

As a result, given a known range of speed $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$, the optimization problem can be solved, giving a gain that will minimize the estimation error of the observer for all ω_e values in the speed range. For negative values of speed, a second gain can also be determined.

C. Experimental Results

The designed observer was tested on a 1.6kW-machine (Fig. 2), piloted with a dSpace 1104 processor board and the related software. Three LEM current sensors are used. A 4096-pulse incremental encoder is used for the sole purpose of

comparison with the estimation. The parameters of the machine are the following:

TABLE I
MACHINE PARAMETERS

| | |
|-----------------------|---------------------------|
| Nominal Power | 1.6 kW |
| Number of pole pairs | 3 |
| Stator Resistance | 2.06 Ω |
| Stator Inductance | 9.15 mH |
| Rotor Inertia | 0.00747 kg.m ² |
| Permanent Magnet Flux | 0.29 Wb |
| Nominal Torque | 5.09 Nm |
| Nominal Speed | 3000 min ⁻¹ |

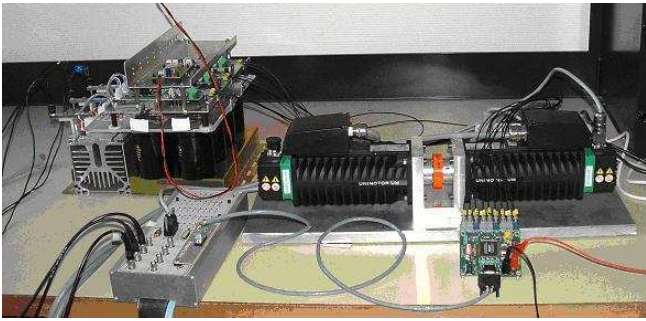


Fig. 2. Test Bench

The considered range of speed in the following results is from 1 electrical rad/s up to 60 electrical rad/s. The gain determined from the result of the systematic method is:

$$L = \begin{bmatrix} 72 & 0 & -0.5 & 0.8 \\ 0 & 72 & -0.8 & -0.5 \end{bmatrix}^T$$

The proposed observer uses the measured currents as input and delivers estimated state $\hat{x} = [\hat{I}_\alpha \quad \hat{I}_\beta \quad \hat{\phi}_{f\alpha} \quad \hat{\phi}_{f\beta}]^T$.

The position is obtained via an arctangent calculation of the flux and the speed can be deduced by the derivation of the position.

A speed profile was applied and the results are given by the following figures. Figure 3 shows the speed reference (green), the real speed (blue) and the estimated speed (red). The observer estimates correctly the speed of the machine and can follow the reference in a range of speed included in the considered one.

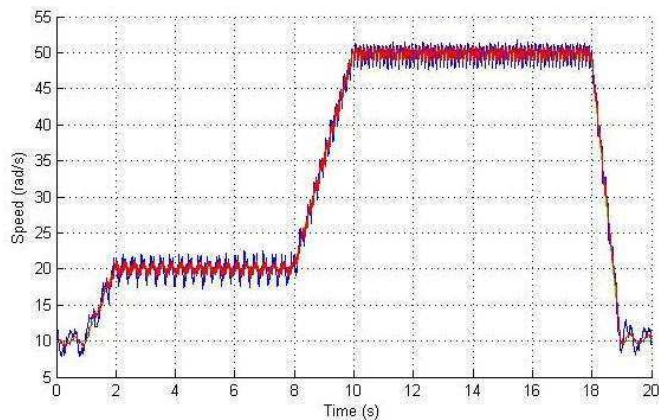


Fig. 3. Speed reference (green), real speed (blue) And estimated speed (red)

Figures 4 and 4b show the estimation (red) and the real value (blue) of the permanent magnets flux components on the α - and β -axis (the time range is zoomed to match the variations). As those are correctly estimated, the position can be also correctly estimated, as shown in Fig. 5. However, the position estimation error is bigger when the speed is lower, as a result of the observability loss.

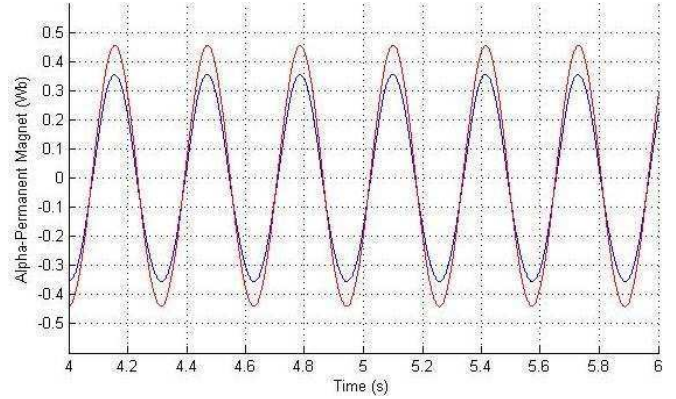


Fig. 4a. Alpha Component of the Permanent Magnet Flux

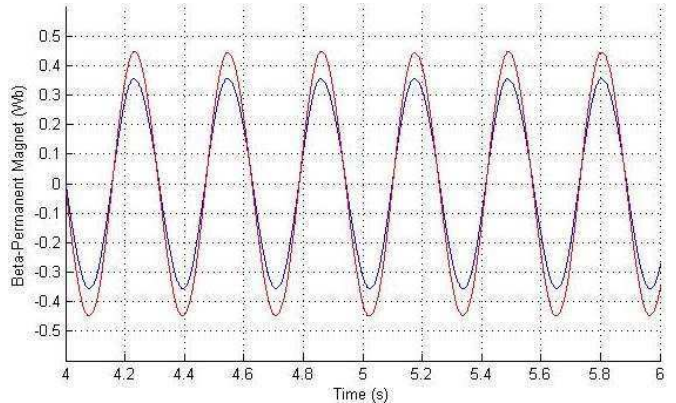


Fig. 4b. Beta Component of the Permanent Magnet Flux

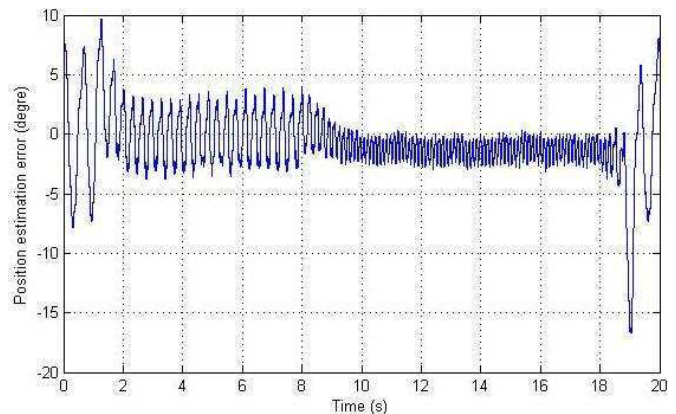


Fig. 5. Position estimation error

III. ZERO-SPEED LPV OBSERVER FOR PMSM

A. Modified model of the machine

As said earlier, most of the PMSM models are unobservable at zero-speed, which lead to false estimation of the position at low speed in most model-based application. A

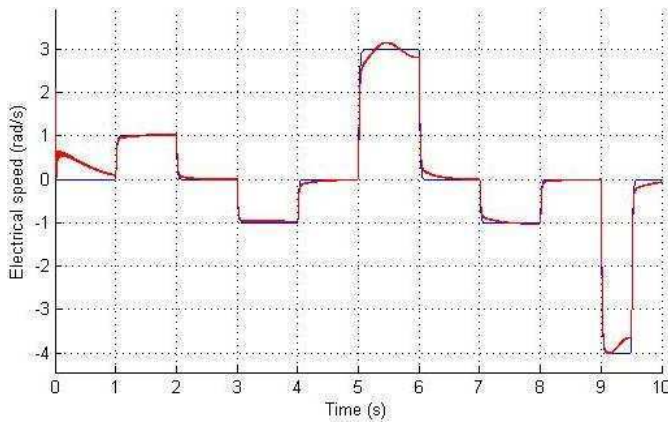


Fig. 8. Real (blue) and estimated (red) speed

Those good performances are the result of a good estimation of unknown states: the alpha- and beta-components of the permanent magnet flux (respectively Fig. 9a et Fig. 9b).

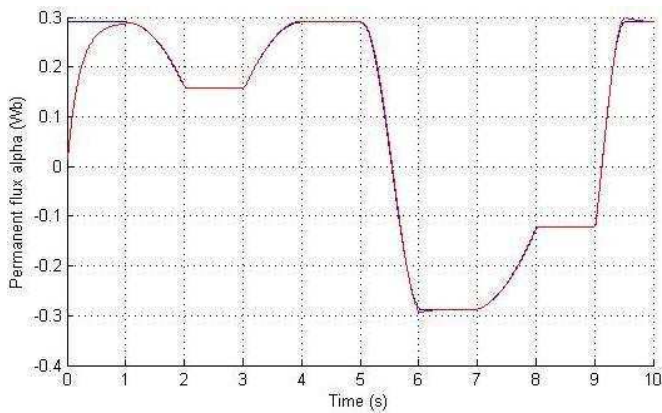


Fig. 9a. Alpha Component of the Permanent Magnet Flux

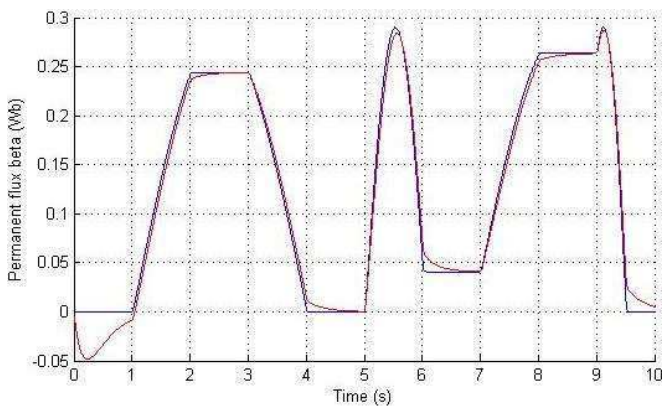


Fig. 9b. Beta Component of the Permanent Magnet Flux

Those simulation results confirm the validity of the methodology. Further work will include full sensorless control at low speed.

IV. CONCLUSION

As a conclusion, the solution provided here allows to synthesize a LPV observer whose gain is computed offline. Compared to the Extended Kalman Filter, the convergence of the observer is guaranteed. For this class of LPV systems, this observer is designed in a systematic fashion, using efficient computation tools.

This observer has been applied on the surface-mounted PMSM. Experimental results confirm the validity of the method for a given range of speed.

In order to overcome the loss of observability at low speed, the proposed method is extended to a model taking into account the signal injection which guaranties observability without the use of saliency. Simulation results also confirm the validity of this method.

REFERENCES

- [1] T.D. Batzel and K. Y. Lee, " Electric Propulsion With Sensorless Permanent Magnet Synchronous Motor: Implementation and Performance," *IEEE Trans. Energy Conversion*, vol. 20(3), pp. 575-583, Sept. 2005.
- [2] J. S. Kim and S. K. Sul, " High performance PMSM drives without rotational position sensors using reduced order observer," in *Proc. 1995 IEEE Industry Applications Conf.*, pp. 75-82.
- [3] J. C. Geromel and M. C. de Oliveira, " H2 and H ∞ Robust Filtering for convex bounded uncertain system," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 46(1), pp. 100-107, Jan. 2001.
- [4] F. Abry, A. Zgorski, X. Lin-Shi and J.-M. Rétif, " Sensorless position control for SPMSM at zero speed and acceleration," in *Proc. 2011 European Conference on Power Electronics and Applications.*, pp. 1-9.
- [5] C. Sherer and S. Weiland, "Linear Matrix inequalities in Control," 2001J. Clerk Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 3rd ed., vol. 2. Oxford: Clarendon, 1892, pp.68-73.

Drop-on-Demand Inkjet Printhead Performance Improvement Using Robust Feedforward Control

Avec Amol A. Khalate¹, Benoit Bayon², Xavier Bombois¹, Gérard Scorletti², Robert Babùska¹

Abstract : The printing quality delivered by a Drop-on- Demand (DoD) inkjet printhead is mainly limited due to the residual oscillations in the ink channel. The maximal jetting frequency of a DoD inkjet printhead can be increased by quickly damping the residual oscillations and by bringing in this way the ink-channel to rest after jetting the ink drop. The inkjet channel model obtained is generally subjected to parametric uncertainty. This paper proposes a robust optimization-based method to design the input actuation waveform for the piezo actuator in order to improve the damping of the residual oscillations in the presence of parametric uncertainties in the ink-channel model. Simulation results are presented to show the efficacy of the proposed method.

1. Delft Center for Systems and Control, Delft University of Technology, Mekelweg 2, 2628 CD, Delft, The Netherlands

2. Laboratoire Ampère, Ecole Centrale de Lyon, 36 avenue Guy de Collongue - 69134 Ecully Cedex, France.

Drop-on-Demand Inkjet Printhead Performance Improvement Using Robust Feedforward Control

Amol A. Khalate, Benoît Bayon, Xavier Bombois, Gérard Scorletti, Robert Babuška

Abstract—The printing quality delivered by a Drop-on-Demand (DoD) inkjet printhead is mainly limited due to the residual oscillations in the ink channel. The maximal jetting frequency of a DoD inkjet printhead can be increased by quickly damping the residual oscillations and by bringing in this way the ink-channel to rest after jetting the ink drop. The inkjet channel model obtained is generally subjected to parametric uncertainty. This paper proposes a robust optimization-based method to design the input actuation waveform for the piezo actuator in order to improve the damping of the residual oscillations in the presence of parametric uncertainties in the ink-channel model. Simulation results are presented to show the efficacy of the proposed method.

I. INTRODUCTION

The ability of inkjet technology to deposit materials with diverse chemical and physical properties has made it an important technology for both industry and home use. Apart from conventional document printing, the inkjet technology has been successfully applied in the areas of electronics, mechanical engineering and life sciences [1]. This is mainly thanks to the low operational costs of the technology. Typically, a drop-on-demand (DoD) inkjet printhead consists of several ink channels in parallel. Each channel is provided with a piezo-actuator, which on application of a voltage pulse can generate pressure oscillations inside the ink channel. These pressure oscillations push the ink drop out of the nozzle [2]. The print quality delivered by an inkjet printhead depends on the properties of the jetted drop, i.e., the drop velocity, the jetting direction and the drop volume. To meet the challenging performance requirements posed by new applications, these drop properties have to be tightly controlled.

The performance of the inkjet printhead is mainly limited due to the *residual pressure oscillations*. The actuation pulses are designed to provide an ink drop of a specified volume and velocity under the assumption that the ink channel is in steady state. Once the ink drop is jetted, the pressure oscillations inside the ink channel take several micro-seconds to decay. If the next ink drop is jetted before the residual

pressure oscillations settle, the resulting drop properties will be different from the ones of the previous drop. Therefore, at a high jetting frequency (which is also called the DoD frequency), drops will be jetted before the oscillations in the ink channel have completely disappeared and these residual oscillations will influence the drop velocity. This can degrade the printhead performance, since a printhead has to jet drops with a constant velocity at different frequencies.

In the literature, we can find various methods [3], [4], [5], [6] to design the piezo actuation pulse. In [7] we have proposed an optimization-based method to design the actuation pulse using a discrete-time model $H(q)$ relating the piezo input voltage (i.e., the input u) to the velocity of the meniscus (i.e., the output y). The meniscus is an interface between the ink and air. We consider this particular model since it is well known that the velocity of the meniscus is a good measure of the pressure in the ink channel. Consequently, reducing the residual oscillations of the meniscus velocity is equivalent to reducing the residual pressure oscillations in the ink channel. In our latest work [8] we have shown that the dynamical model $H(q)$ from the piezo input to the meniscus velocity changes considerably while jetting at various operating DoD frequencies. A compact polytopic uncertainty $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ on the coefficients of the nominal inkjet system is presented such that the uncertain model $H(q, \Delta)$, encompasses the set of dynamics at various operating DoD frequencies. The actuation pulse is parameterized as a pulse response of a to-be-designed filter $F(q)$. Thus, the robust pulse is determined as the one minimizing the worst-case H_2 norm of the tracking error given as follows

$$\mathcal{J}(F) = \max_{\Delta \in \mathbf{\Delta}} \left\| H_{\text{ref}}(q) - H(q, \Delta)F(q) \right\|_2^2. \quad (1)$$

where the pulse response of $H_{\text{ref}}(q)$ is the reference meniscus velocity trajectory $y_{\text{ref}}(k)$ (i.e., a meniscus velocity profile with fast decaying residual oscillations). The experimental results show that the robust pulse designed with the proposed approach in [8] improve the printhead performance substantially.

The robust pulse design proposed in [8] use a FIR model structure for a to-be-designed filter $F(q, \beta)$ with β the filter coefficient vector. Thus, the dimension of the filter coefficient vector β is equal to the number of samples in the actuation pulse $u(k)$. The dimension of the to-be-designed β will become larger when the actuation pulse is longer and/or when the sampling time T_s is shorter. This may pose numerical problems since the size of the LMI problem, required to obtain the robust filter $F(q, \beta)$,

This work has been carried out as part of the Octopus project with Océ Technologies B.V. under the responsibility of the Embedded Systems Institute. This project is partially supported by the Netherlands Ministry of Economic Affairs under the Bsik program.

Amol A. Khalate, Xavier Bombois, Robert Babuška are with the Delft Center for Systems and Control, Delft University of Technology, Mekelweg 2, 2628 CD, Delft, The Netherlands, email: {a.a.khalate, x.j.a.bombois, r.babuska}@tudelft.nl.

Benoît Bayon and Gérard Scorletti are with Laboratoire Ampère, Ecole Centrale de Lyon, 36 avenue Guy de Collongue - 69134 Ecully Cedex, France. email: {Benoit.Bayon, Gerard.Scorletti}@ec-lyon.fr.

is directly proportional to the dimension of vector β . One can tackle this problem by choosing an appropriate set of orthogonal basis functions (OBFs) and weighting them in order to reduce the performance index (1). However, a more general approach is to let $F(q)$ be a rational function.

In the literature, the problem of designing a robust H_2 filter is considered by many authors. Since, a class of feedforward control problems turns out to be dual to the filtering problem, we can utilize these classical results to design the robust actuation pulse. We are dealing with a discrete-time system with a polytopic uncertainty. For this type of uncertainty we can extend the results of [9] to design the robust H_2 feedforward control. One of the drawback of this design method is that it uses a constant Lyapunov function at the vertices of the polytope, which may introduce conservatism. In this paper, we propose new conditions to design the robust filter $F(q)$ by introducing parameter-dependent Lyapunov functions, which improve the results in many cases. We provide simulation results for the inkjet system to show the performance improvement using the proposed method.

II. SYSTEM DESCRIPTION AND MODELING

Consider the discrete-time model $H(q)$, similar to [8]¹, which describes the dynamics from the piezo input voltage u to the meniscus velocity y is given as follows

$$H(q) = g \left(\frac{q^2 + b_1q + b_2}{q^2 + a_1q + a_2} \right) \left(\frac{q + b_3}{q^2 + a_3q + a_4} \right) \quad (2)$$

where q is the forward shift operator and the nominal values of the coefficients are

$$\begin{aligned} b_1 &= -3.4465, b_2 = 2.4575, b_3 = -5.7462 \times 10^{-1}, \\ a_1 &= -1.9538, a_2 = 9.6960 \times 10^{-1}, a_3 = -1.9102, \\ a_4 &= 9.7322 \times 10^{-1}, g = 1.1820 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

The sampling time T_s is chosen equal to $0.25\mu\text{s}$. This inkjet system can be represented in the state-space form as follows

$$\begin{aligned} x_S(k+1) &= A_S x_S(k) + B_S u(k) \\ y(k) &= C_S x_S(k) \end{aligned} \quad (3)$$

where

$$\begin{aligned} A_S &= \begin{bmatrix} 0 & -a_2 & 0 & 0 \\ 1 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & -a_4 \\ 0 & 1 & 1 & -a_3 \end{bmatrix}, B_S = \begin{bmatrix} g(b_2 - a_2) \\ g(b_1 - a_1) \\ gb_3 \\ g \end{bmatrix}, \\ C_S &= [0 \ 0 \ 0 \ 1]. \end{aligned} \quad (4)$$

As discussed in [8], at different DoD frequencies, the dynamics from the piezo input to the meniscus velocity $H(q)$ will not be the same. It is observed that the first resonant mode of the inkjet system varies a lot compared to the second resonant mode. It is possible to represent these multiple models obtained at different operating DoD frequencies by

¹The difference is that [8] uses a proper transfer function and that the transfer function considered in this paper is strictly proper. It does not change the frequency response in the dominant low frequency range. However, having a strictly proper function will simplify the pulse design.

the nominal plant (2) with uncertainty on its coefficients. An uncertainty Δ on the coefficients a_1 and a_2 of (2) is chosen such that the uncertain system $H(q, \Delta)$ encompasses the set of models obtained at different operating DoD frequencies. The uncertainty $\Delta = [\Delta^{(1)} \ \Delta^{(2)}]^T$ perturbs the coefficients a_1 and a_2 in the following manner:

$$a_1(\Delta) = a_{1,\text{nom}}(1 + \Delta^{(1)}) \quad (5)$$

$$a_2(\Delta) = a_{2,\text{nom}}(1 + \Delta^{(2)}), \quad (6)$$

where $a_{1,\text{nom}} = -1.954$ and $a_{2,\text{nom}} = 0.9696$ are the nominal values of the coefficients a_1 and a_2 . The uncertainty Δ on the coefficients lie inside the polytope $\mathbf{\Delta}$ which is formed by convex combination of the four vertices Δ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, i.e. $\Delta \in \mathbf{\Delta} = \text{conv}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4)$. The values of these four vertices computed via system identification results (for details see [8]) are $\Delta_1 = [0.8103/100 \ 1.3928/100]^T$, $\Delta_2 = [0.4031/100 \ 1.0927/100]^T$, $\Delta_3 = [-0.0342/100 \ -0.3206/100]^T$, $\Delta_4 = [-0.5813/100 \ -0.9097/100]^T$.

It can be seen that the uncertainty Δ enters affinely in the matrices A_S and B_S (3). Thus, the state-space matrices of the inkjet system $H(q, \Delta)$ for the admissible uncertainty $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ belong to the polytope

$$[A_S(\Delta), B_S(\Delta)] = \sum_{i=1}^4 \alpha_i [A_{S_i}, B_{S_i}], \quad (7)$$

where the matrices $A_{S_i} = A_S(\Delta_i)$, $B_{S_i} = B_S(\Delta_i)$, $i = 1, \dots, 4$, are the system matrices of a fixed inkjet system at the i -th vertex of the polytope and α_i are positive scalars such that $\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1$. The matrix C_S is independent of Δ . In the next section, we use this uncertain model of the inkjet system $H(q, \Delta)$ in order to design a robust actuation pulse.

III. ROBUST FEEDFORWARD CONTROL

Generally, commercial inkjet printheads use actuation pulses with shape constraints (for details, see [7]) which are mainly due to electronic hardware limitations. However, for future high-end inkjet printheads this shape constraint on the actuation pulse may restrict the printhead performance. Rapid developments in the electronics field will enable printhead manufacturers to use more sophisticated electronic hardware which can generate an unconstrained actuation pulse. Therefore, it is essential to investigate the possibility of an unconstrained actuation pulse which will damp the residual oscillations when the inkjet channel model is subjected to parametric uncertainty. In this section, we first review the robust actuation pulse design using the H_2 feedforward formulation presented in [8]. Further, we provide an extension of [9] to design a robust pulse using a constant Lyapunov function and finally, we give improved conditions using parameter-dependent Lyapunov functions.

A. Robust actuation pulse using H_2 feedforward control

In [7], we have designed a meniscus velocity profile $y_{\text{ref}}(k)$ with fast decaying residual oscillations. As shown in Fig. 1, the reference trajectory $y_{\text{ref}}(k)$ is modeled as the pulse response of a rational function $H_{\text{ref}}(q)$. The state-space

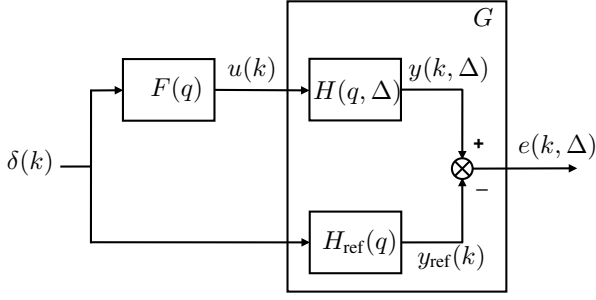


Fig. 1. Filtering problem for the inkjet printhead.

representation of the reference model $H_{\text{ref}}(q)$ is given as follows

$$\begin{aligned} x_R(k+1) &= A_R x_R(k) + B_R \delta(k) \\ y_{\text{ref}}(k) &= C_R x_R(k) \end{aligned} \quad (8)$$

where $\delta(k)$ is the unit pulse. If the actuation pulse $u(k)$ is designed in such a way that the meniscus velocity $y(k)$ follows the reference trajectory $y_{\text{ref}}(k)$, then the channel will come to rest very quickly after jetting the ink drop. This will create a condition to jet the ink drops at higher jetting frequencies.

In the previous section, we have presented a compact polytopic uncertainty $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ on the coefficients of the inkjet system such that uncertain system $H(q, \Delta)$ represents the set of multiple models obtained at various operating DoD frequencies. The state-space representation of the system $G(q)$ (see Fig. 1) with two inputs and the tracking error e as the output is given as follows:

$$\left[\begin{array}{c|cc} \tilde{A}(\Delta) & \tilde{B}_S(\Delta) & \tilde{B}_R \\ \hline \tilde{C} & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} A_S(\Delta) & 0 & B_S(\Delta) & 0 \\ 0 & A_R & 0 & B_R \\ \hline C_S & -C_R & 0 & 0 \end{array} \right].$$

The uncertainty in the inkjet channel model can now be handled owing to the H_2 filtering formulation. For this purpose, we parameterize the actuation pulse as the pulse response of a filter $F(q)$:

$$u(k) = F(q)\delta(k) \quad (9)$$

where $\delta(k)$ the unit pulse and the state-space representation of the filter $F(q)$ is given as follows

$$\begin{aligned} x_F(k+1) &= A_F x_F(k) + B_F \delta(k) \\ u(k) &= C_F x_F(k) + D_F \delta(k). \end{aligned} \quad (10)$$

The state-space representation of the uncertain error dynamics (from the input $\delta(k)$ to the tracking error $e(k, \Delta)$), $\nu(q, F, \Delta) = (H_{\text{ref}}(q) - H(q, \Delta)F(q))$ is given as follows:

$$\left[\begin{array}{c|c} A(\Delta) & B(\Delta) \\ \hline C & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} A_F & 0 & B_F & \\ \tilde{B}_s(\Delta)C_F & \tilde{A}(\Delta) & \tilde{B}_s(\Delta)D_F + \tilde{B}_R & \\ \hline 0 & \tilde{C} & 0 & \end{array} \right] \quad (11)$$

In the sequel, we impose the dimension of A_F to be equal to the one of $\tilde{A}(\Delta)$. It is indeed shown in [10] that the optimal filter has this dimension. As we assume the uncertainty Δ to

be of a polytopic nature ($\Delta \in \mathbf{\Delta}$), the state-space matrices of the error system $\nu(q, F, \Delta)$ belong to the following polytope

$$[A(\Delta), B(\Delta)] = \sum_{i=1}^4 \alpha_i [A_i, B_i], \quad (12)$$

where the matrices (A_i, B_i) are the state-space matrices of the fixed error dynamics $\nu_i(q, F)$ at the i -th vertex of the polytope and α_i are positive scalars such that $\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1$. The matrix C is independent of Δ . Clearly, the uncertain system error dynamics is a convex combination of the fixed systems at the vertices of the polytope $\mathbf{\Delta}$.

For a nominal system, the performance of the filter $F(q)$ can be defined as the H_2 norm of the tracking error. Here, we have an uncertain inkjet system $H(q, \Delta)$ which is perturbed by the uncertainty $\Delta \in \mathbf{\Delta}$. Therefore, we must obtain a robust actuation pulse whose performance is good over the polytopic uncertainty, rather than obtaining an optimal actuation pulse whose performance is only good for the nominal inkjet system. Thus, it is a good choice to define the performance index $\mathcal{J}(\beta)$ as the square of the worst-case H_2 norm of the tracking error transfer function $\nu(q, \beta, \Delta)$:

$$\mathcal{J}(F) = \max_{\Delta \in \mathbf{\Delta}} \|\nu(q, F, \Delta)\|_2^2 = \max_{\Delta \in \mathbf{\Delta}} \|H_{\text{ref}}(q) - H(q, \Delta)F(q)\|_2^2. \quad (13)$$

The robust filter F_{robust} , describing the unconstrained robust actuation pulse is, thus, the solution F_{robust} of the following optimization problem

$$[\gamma_{\text{opt}}, F_{\text{robust}}] = \arg \min_{\gamma, F} \gamma, \quad \text{subject to} \quad \mathcal{J}(F) < \gamma, \quad (14)$$

where the solution γ_{opt} is the minimal worst-case H_2 norm that can be achieved by a filter $F(q)$ (see Fig. 1) and F_{robust} is the filter achieving this minimal worst-case H_2 norm.

It is difficult to obtain the solution of the above problem as it is not a convex finite dimensional optimization problem. However, it is possible to compute an upper bound on γ_{opt} and a suboptimal filter using convex optimization. In [8], the upper bound on γ_{opt} is obtained using LMIs conditions with a filter $F(q, \beta)$ restricted to an FIR model structure with β the filter coefficient vector. As explained in the introduction, the dimension of the to-be-designed vector β will become larger when the actuation pulse is longer and/or when the sampling time T_s is smaller. This may pose numerical problems since the size of the LMI problem, required to obtain the robust filter $F(q, \beta)$, is directly proportional to the dimension of vector β . A general approach to overcome this problem is to chose $F(q)$ as a rational function.

The results for the design of the robust filter F_{robust} are based on the results for the design of a filter F_{opt} for the nominal plant $H(q)$ in (2) (i.e. the plant $H(q, \Delta)$ with $\Delta = [0 \ 0]^T$). For simplicity, we first present a methodology to design this nominal filter F_{opt} i.e. the filter solving the following problem

$$\begin{aligned} [\gamma_{\text{opt}}^{\text{nom}}, F_{\text{opt}}] &= \arg \min_{\gamma^{\text{nom}}, F} \gamma^{\text{nom}}, \\ \text{subject to} \quad \mathcal{J}_{\text{nom}}(F) &< \gamma^{\text{nom}}, \end{aligned} \quad (15)$$

with $\mathcal{J}_{\text{nom}}(F) = \|H_{\text{ref}}(q) - H(q)F(q)\|_2^2$.

We will see in the following lemma, as opposed to the robust case, the solution of the problem (15) can be computed exactly.

Note that we use $*$ as an ellipsis for terms that can be induced by symmetry.

Lemma 1: Consider the optimization problem (15). The solution $\gamma_{\text{opt}}^{\text{nom}}$ of (15) can be exactly computed as the solution of the following LMI optimization problem

$$\gamma_{\text{opt}}^{\text{nom}}, W=W^T, Q=Q^T, Z=Z^T, \tilde{A}_F, B_F, \tilde{C}_F, D_F \quad \min \quad \gamma^{\text{nom}}$$

such that $\text{trace}[W] < \gamma^{\text{nom}}$

$$\begin{bmatrix} P & S_1 & S_2 \\ * & P & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} W & S_3 \\ * & P \end{bmatrix} > 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{where } P &= \begin{bmatrix} (Q-Z) & (Q-Z) \\ * & Q \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} B_F \\ \tilde{B}_S D_F + \tilde{B}_R \end{bmatrix} \\ S_1 &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_F & \tilde{A}_F \\ \tilde{B}_S \tilde{C}_F + \tilde{A}(Q-Z) & \tilde{B}_S \tilde{C}_F + \tilde{A}Q \end{bmatrix} \\ S_3 &= \begin{bmatrix} \tilde{C}(Q-Z) & \tilde{C}Q \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

The state-space matrices in the above LMIs corresponds to the state-space matrices (11) of $\nu(q, F, \Delta)$ with $\Delta = [0 \ 0]^T$, i.e. the error dynamics with the nominal system $H(q)$.

The optimal filter $F_{\text{opt}}(q)$ achieving $\mathcal{J}_{\text{nom}}(F) = \gamma_{\text{opt}}^{\text{nom}}$ can then be computed as follows using the decision variables $Q_{\text{opt}}, Z_{\text{opt}}, \tilde{A}_{F_{\text{opt}}}, B_{F_{\text{opt}}}, \tilde{C}_{F_{\text{opt}}}$ and $D_{F_{\text{opt}}}$ solving the above LMI problem

$$F_{\text{opt}} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{F_{\text{opt}}} & B_{F_{\text{opt}}} \\ \hline \tilde{C}_{F_{\text{opt}}} & D_{F_{\text{opt}}} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{F_{\text{opt}}}(Q_{\text{opt}} - Z_{\text{opt}})^{-1} & B_{F_{\text{opt}}} \\ \hline \tilde{C}_{F_{\text{opt}}}(Q_{\text{opt}} - Z_{\text{opt}})^{-1} & D_{F_{\text{opt}}} \end{array} \right].$$

Proof: Consider the error dynamics system (11) (i.e. the system G augmented with the filter F) without the uncertainty Δ and for one particular $F(q)$. Then, it is well known [9] that for $\gamma^{\text{nom}} > 0$ the inequality $\|\nu(q)\|_2^2 < \gamma^{\text{nom}}$ holds if and only if there exist symmetric matrices P and W such that

$$\text{trace}[W] < \gamma^{\text{nom}}, \quad \begin{bmatrix} P & AP & B \\ * & P & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} W & CP \\ * & P \end{bmatrix} > 0, \quad (18)$$

where the matrices A, B, C correspond to the state-space matrices (11) of $\nu(q, F, \Delta)$ with $\Delta = [0 \ 0]^T$, i.e. the error dynamics with the nominal system $H(q)$. By using the partition of the Lyapunov function P given in (17) and by using the following change of variables $\tilde{A}_F = A_F(Q-Z)$ and $\tilde{C}_F = C_F(Q-Z)$ we can rewrite (18) as (16). The expression of the optimal filter F_{opt} follows then directly from the definition of \tilde{A}_F and \tilde{C}_F . ■

Remark: Lemma 1 is close to the result in [9]. However, we use here another partition of P (see (17)) which simplifies the derivation of the filter.

B. Robust actuation pulse design using a rational filter

We have seen that Lemma 1 can be used to design an optimal pulse using a rational filter $F(q)$. By extending these results, an upper bound $\gamma_{\text{opt}}^{\text{UB}}$ on the solution γ_{opt} of the problem (14) can be obtained using the following theorem.

Theorem 1: Consider the error dynamics given by (11) with the polytopic uncertainty (12) then, $\gamma_{\text{opt}}^{\text{UB}}$, the solution of the following LMI optimization problem, is guaranteed to be an upper bound of the solution γ_{opt} of the problem(14)

$$\gamma^{\text{UB}}, W=W^T, Q=Q^T, Z=Z^T, \tilde{A}_F, B_F, \tilde{C}_F, D_F \quad \min \quad \gamma^{\text{UB}}$$

such that following LMIs hold for $i = 1, 2, 3, 4$

$$\text{trace}[W] < \gamma^{\text{UB}} \quad \begin{bmatrix} P & S_1(\Delta_i) & S_2(\Delta_i) \\ * & P & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} W & S_3 \\ * & P \end{bmatrix} > 0 \quad (19)$$

where

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} (Q-Z) & (Q-Z) \\ * & Q \end{bmatrix}, S_2(\Delta_i) = \begin{bmatrix} B_F \\ \tilde{B}_S(\Delta_i)D_F + \tilde{B}_R \end{bmatrix} \\ S_1(\Delta_i) &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_F & \tilde{A}_F \\ \tilde{B}_S(\Delta_i)\tilde{C}_F + \tilde{A}(\Delta_i)(Q-Z) & \tilde{B}_S(\Delta_i)\tilde{C}_F + \tilde{A}(\Delta_i)Q \end{bmatrix} \\ S_3 &= \begin{bmatrix} \tilde{C}(Q-Z) & \tilde{C}Q \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (20)$$

and the robust filter $F_{\text{robust}}(q)$ which is guaranteed to achieve (at most) a worst-case norm of $\gamma_{\text{opt}}^{\text{UB}}$ is

$$F_{\text{robust}} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_F & B_F \\ \hline \tilde{C}_F & D_F \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_F(Q-Z)^{-1} & B_F \\ \hline \tilde{C}_F(Q-Z)^{-1} & D_F \end{array} \right].$$

Proof: The LMI (19) for a given i is equivalent to the LMI (16) for the error dynamics system $\nu(q, F, \Delta_i)$. Verifying that the LMI (19) holds for $i = 1, 2, 3, 4$, is thus equivalent to verify that $\|\nu(q, F, \Delta_i)\|_2^2 < \gamma^{\text{UB}}$ for the systems $\nu(q, F, \Delta_i)$ at the vertices of the polytopic uncertainty Δ . Since the uncertainty Δ enters linearly in the LMI's ($S_1(\Delta)$ and $S_2(\Delta)$ are indeed affine in Δ), the above fact implies that $\|\nu(q, F, \Delta)\|_2^2 < \gamma^{\text{UB}}$ for all $\Delta \in \Delta$ (see e.g. [11]). The construction of the filter is then similar as in Lemma 1. ■

Remark: We observe that the LMI conditions (19) proposed to obtain the robust filter F_{robust} should be valid at all vertices $\Delta_i, i = 1, \dots, 4$ of the polytope Δ with a constant Lyapunov function P . This stringent restriction may lead to conservative results, i.e. $\gamma_{\text{opt}}^{\text{UB}} \gg \gamma_{\text{opt}}$. If we allow the Lyapunov function P to be parameter dependent, i.e. $P(\Delta)$, the condition (19) will no longer be an LMI because the Lyapunov function P and the state-space variables of the filter $F(q)$ are closely interconnected. Similar to [10], to overcome this difficulty we will utilize a reciprocal variant of the projection lemma to alleviate the interrelation between P and the filter variables. This result is presented in Theorem 2.

Theorem 2: Consider the error dynamics given by (11) with the polytopic uncertainty (12). If the following LMI optimization problem is feasible

$$\gamma^{\text{UB}}, W=W^T, P=P^T, Z, L \quad \min \quad \gamma^{\text{UB}}$$

such that following LMIs hold for $i = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} & \text{trace}[W] < \gamma^{\text{UB}} \\ & \begin{bmatrix} P(\Delta_i) & & & \\ S_4(\Delta_i) & S_5 - P(\Delta_i) & & \\ S_6(\Delta_i) & S_7 & & \\ & & L_{33} + L_{33}^T - I & \end{bmatrix} > 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} W & \\ S_8(\Delta_i) & P(\Delta_i) \end{bmatrix} > 0 \quad (22)$$

where

$$\begin{aligned} P(\Delta_i) &= \begin{bmatrix} P_1(\Delta_i) & \\ P_3(\Delta_i) & P_2(\Delta_i) \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{11} & L_{22} & L_{13} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \\ S_4(\Delta_i) &= \begin{bmatrix} -Z_{11}^T & -(Z_{21}^T \tilde{B}_S(\Delta_i)^T + L_{12}A(\Delta_i)^T + L_{13}\tilde{B}_R^T) \\ -Z_{11}^T & -(Z_{21}^T \tilde{B}_S(\Delta_i)^T + L_{22}A(\Delta_i)^T + L_{13}\tilde{B}_R^T) \end{bmatrix} \\ S_6(\Delta_i) &= \begin{bmatrix} -Z_{12}^T & -(Z_{22}^T \tilde{B}_S(\Delta_i)^T + L_{32}A(\Delta_i)^T + L_{33}\tilde{B}_R^T) \end{bmatrix} \\ S_8(\Delta_i) &= \begin{bmatrix} \tilde{C}P_3(\Delta_i) & \tilde{C}P_2(\Delta_i) \end{bmatrix}^T \\ S_5 &= \begin{bmatrix} L_{11} + L_{11}^T & & \\ L_{11} + L_{12}^T & & \\ & L_{22} + L_{22}^T & \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \\ S_7 &= \begin{bmatrix} L_{31} + L_{13}^T & \\ L_{32} + L_{13}^T & \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (23)$$

then $\gamma_{\text{opt}}^{\text{UB}}$, the solution of the above LMI optimization problem is guaranteed to be an upper bound on the solution γ_{opt} of the problem(14). Moreover, the robust filter $F_{\text{robust}}(q)$ which is guaranteed to achieve (at most) a worst-case norm of $\gamma_{\text{opt}}^{\text{UB}}$ is

$$F = \begin{bmatrix} A_F & B_F \\ C_F & D_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}^T & L_{31}^T \\ L_{13}^T & L_{33}^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Proof: Consider the error dynamics system (11) (i.e. the system G augmented with the filter F) for one particular Δ and for one particular $F(q)$, then the inequality $\|\nu(q, F, \Delta)\|_2^2 < \gamma^{\text{UB}}$ holds if and only if we can find γ^{UB} such that $\text{trace}[W] < \gamma^{\text{UB}}$ and the following inequalities hold

$$\begin{bmatrix} I & A(\Delta) & B(\Delta) \end{bmatrix} \Psi(\Delta) [*]^T > 0, \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} W & \\ S_8(\Delta) & P(\Delta) \end{bmatrix} > 0 \quad (26)$$

where $\Psi(\Delta) = \text{diag}(P(\Delta), -P(\Delta), -I)$. The above conditions are equivalent with those in (18). We use the notation $P(\Delta)$ because the Lyapunov matrices P can be different for different values of Δ . Note that the condition (26) is an LMI, but the condition (25) is not.

In order to obtain a convex robust optimization problem, we need to rewrite (25) as a matrix inequality where $P(\Delta)$ does not multiply with any Δ -dependent term. The condition (25) can be rewritten using the projection lemma (see Appendix A.1). This projection lemma state that (25) holds if and only if there exists a matrix $L(\Delta)$ of appropriate dimension satisfying the following inequality

$$\Psi(\Delta) + U(\Delta)^T L^T(\Delta) V + V^T L(\Delta) U(\Delta) > 0 \quad (27)$$

$$\text{with } V = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, U(\Delta) = \begin{bmatrix} -A^T(\Delta) & I & 0 \\ -B^T(\Delta) & 0 & I \end{bmatrix},$$

Note that $L(\Delta)$ in (27) is also function of Δ . However, in sequel we will consider a constant L in order to obtain an LMI formulation. In (27), L has no special structure. However, in Theorem 2, we impose the special structure on L given by (23). If we can find a matrix having

this structure, then (25) holds. Otherwise, we cannot say anything about (25).

Supposing first that a matrix L exists, with $S_4(\Delta), S_5, S_6(\Delta), S_7$ as defined in (23) and with the following change of variables

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_F & B_F \\ C_F & D_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11}^T & L_{31}^T \\ L_{13}^T & L_{33}^T \end{bmatrix} \quad (28)$$

we can rewrite (27) as follows:

$$\begin{bmatrix} P(\Delta) & & & \\ S_4(\Delta) & S_5 - P(\Delta) & & \\ S_6(\Delta) & S_7 & & \\ & & L_{33} + L_{33}^T - I & \end{bmatrix} > 0. \quad (29)$$

In (29), we observe that $P(\Delta)$ does not multiply terms which are functions of Δ . Moreover, the uncertainty Δ appears linearly in $S_4(\Delta)$ and $S_7(\Delta)$. Finally, (29) is affine in the variables $P(\Delta)$, Z and L .

Summarizing, if there exists a matrix L having the special structure given in (23), such that $\text{trace}[W] < \gamma^{\text{UB}}$, (26) and (29) holds then $\|\nu(q, F, \Delta)\|_2^2 < \gamma^{\text{UB}}$ for a given Δ and F . Using the convex combination property [11], we can also say that if there exists L and Z such that $\text{trace}[W] < \gamma^{\text{UB}}$, (26) and (29) holds for $\Delta = \Delta_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, then $\|\nu(q, F, \Delta)\|_2^2 < \gamma^{\text{UB}}$ for all $\Delta \in \mathbf{\Delta}$. Moreover, because of (28), the corresponding filter is given as in (23). ■

Remark: We know that the solution of Theorem 1 is an upper bound on the solution γ_{opt} of the problem (14), but this does not hold for Theorem 2. If the new conditions in Theorem 2 with the parameter dependent Lyapunov functions are feasible then, indeed, it delivers an upper bound on the solution γ_{opt} of the problem (14). However, when the conditions in Theorem 2 are not feasible we cannot say anything about the upper bound. The reason for this is that it is not always possible to obtain L in (27) with the proposed special structure to ensure (25). Nevertheless, when the LMI problem (21)-(22) is feasible, in many cases, it will provide a less conservative result (see e.g. [10]).

In the next section, we present simulation results for the inkjet system with the robust actuation pulses designed with the above two theorems.

IV. SIMULATION RESULTS

Generally, in the printhead industry the actuation pulses are designed with the nominal model $H(q)$ (see [7]). It is possible to design an unconstrained optimal actuation pulse $u_{\text{opt}}(k)$ for the nominal model $H(q)$ using Lemma 1 (i.e., without considering the polytopic uncertainty). For this purpose, we use the desired meniscus velocity $y_{\text{ref}}(k)$ designed in [7], i.e., a template for the meniscus velocity with fast decaying residual oscillations. The black dash-dot line in Fig. 2 shows the unconstrained optimal pulse $u_{\text{opt}}(k) = F_{\text{opt}}(q)\delta(k)$ obtained after solving the optimization problem of Lemma 1 using the LMI Control Toolbox of MATLAB . The H_2 norm of the error dynamics $\nu(q, F_{\text{opt}})$ is found to be $\gamma_{\text{opt}}^{\text{nom}} = 0.1172$.

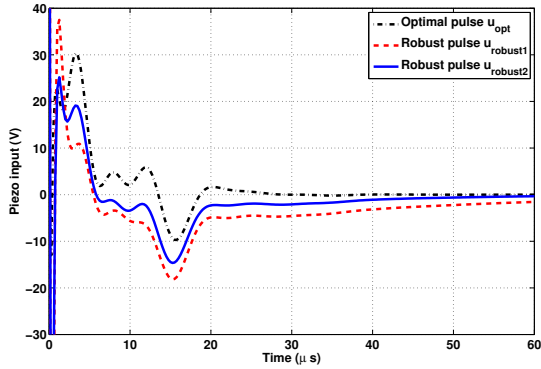


Fig. 2. Comparison of the actuation pulses obtained using Lemma 1, Theorem 1 and Theorem 2.

As discussed in the introduction, this optimal pulse may not perform satisfactorily in practice because the inkjet dynamics changes considerably while jetting at different DoD frequencies. Therefore, it is interesting to compute the worst-case H_2 norm of the error dynamics $\nu(q, F_{\text{opt}}, \Delta)$ for the polytopic uncertainty $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ with the optimal filter $F_{\text{opt}}(q)$ to analyze the performance degradation. For the given filter $F_{\text{opt}}(q)$, we can compute a lower bound γ^{LB} on the worst-case H_2 norm by evaluating H_2 norm of $\nu(q, F_{\text{opt}}, \Delta)$ at fine grid points on the parametric uncertainty $\mathbf{\Delta}$. We found that the lower bound γ^{LB} on the worst-case H_2 norm with the optimal filter F_{opt} is 189.53.

We have solved the LMI optimization problem in Theorem 1 and Theorem 2 and the resulting robust pulses, $u_{\text{robust1}}(k)$ and $u_{\text{robust2}}(k)$ respectively are shown in Fig. 2. A numerical comparison of the worst-case H_2 norm of the error dynamics $\nu(q, \Delta)$ with these robust actuation pulses is presented in Table I. In Table I, we give also corresponding lower bound on γ_{opt} computed with a fine grid on the polytopic uncertainty $\mathbf{\Delta}$. Compared to the nominal filter F_{opt} achieving a worst-case norm of at least 189.53, the robust filters F_{robust1} and F_{robust2} achieve a much smaller worst-case norm. This is especially true with the pulse u_{robust2} obtained with Theorem 2 (our improvement to Theorem 1). We also observe that the upper bound given by Theorem 2 is very close to the lower bound, which shows its efficacy for conservatism reduction.

TABLE I

COMPARISON OF THE WORST-CASE H_2 NORM OF THE ERROR DYNAMICS $\nu(q, \Delta)$

| | γ^{LB} | $\gamma_{\text{opt}}^{\text{UB}}$ |
|---|----------------------|-----------------------------------|
| Robust pulse $u_{\text{robust1}}(k)$ with Theorem 1 | 104.27 | 143.68 |
| Robust pulse $u_{\text{robust2}}(k)$ with Theorem 2 | 52.21 | 70.82 |

V. CONCLUSION

In this paper, we have proposed a robust actuation pulse design method based on robust H_2 feedforward control to tackle the change in the inkjet system dynamics while

jetting at different DoD frequencies. We have relaxed the constraint of the FIR model structure on the to-be-designed robust filter presented in [8]. Further, we have provided improved conditions to compute the robust filter by allowing parameter dependent Lyapunov functions. Simulation results have demonstrated that a considerable improvement in the inkjet system performance can be achieved with the proposed robust robust pulses. Applications of the proposed method to multi-channel control and experimental testing will be investigated in the future. Even though the proposed robust feedforward control is demonstrated on the inkjet system it can be used for a wide range of industrial applications.

REFERENCES

- [1] C. Williams, “Ink-jet printers go beyond paper,” *Physics World*, vol. 19, pp. 24–29, 2006.
- [2] M. Wassink, “Inkjet printhead performance enhancement by feedforward input design based on two-port modeling,” Ph.D. dissertation, Delft University of Technology, 2007.
- [3] D. Bogy and F. Talke, “Experimental and theoretical study of wave propagation phenomena in drop-on-demand ink jet devices,” *IBM J. Res. Dev.*, vol. 28, no. 3, pp. 314–321, 1984.
- [4] J. Chung, S. Ko, C. Grigoropoulos, N. Bieri, C. Dockendorf, and D. Poulikakos, “Damage-free low temperature pulsed laser printing of gold nanoinks on polymers,” *Journal of Heat Transfer*, vol. 127, no. 7, pp. 724–732, Jul. 2005.
- [5] K. Kwon and W. Kim, “A waveform design method for high-speed inkjet printing based on self-sensing measurement,” *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 140, no. 1, pp. 75–83, 2007.
- [6] K. Kwon, “Waveform design methods for piezo inkjet dispensers based on measured meniscus motion,” *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 18 (5), pp. 1118–1125, 2009.
- [7] A. A. Khalate, X. Bombois, R. Babuška, H. Wijshoff, and R. Waarsing, “Optimization-based feedforward control for a drop-on-demand inkjet printhead,” in *American Control Conference, Baltimore, MD, USA*, 2010.
- [8] A. A. Khalate, X. Bombois, G. Scorletti, R. Babuška, R. Waarsing, and W. de Zeeuw, “Robust feedforward control for a drop-on-demand inkjet printhead,” in *accepted for 18th IFAC World Congress*, 2011.
- [9] J. Geromel, J. Bernussou, G. Garcia, and M. de Oliveira, “ H_2 and H_∞ robust filtering for discrete-time linear systems,” *SIAM J. Control Optim.*, vol. 38, pp. 1353–1368, 2000.
- [10] H. Tuan, P. Apkarian, and T. Nguyen, “Robust and reduced-order filtering: new lmi-based characterizations and methods,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 12, pp. 2975–2984, Dec. 2001.
- [11] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, ser. Studies in Applied Mathematics. Philadelphia, PA: SIAM, Jun. 1994, vol. 15.

APPENDIX

A.1: Projection Lemma

Lemma:[10] Given a symmetric matrix $\Psi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ and two matrices U, V of column dimension m , the following problem

$$\Psi + U^T L^T V + V^T L U > 0 \quad (30)$$

is solvable in a matrix L of compatible dimension if and only if

$$\mathcal{N}_U^T \Psi \mathcal{N}_U > 0, \quad \mathcal{N}_V^T \Psi \mathcal{N}_V > 0 \quad (31)$$

where \mathcal{N}_U and \mathcal{N}_V are any basis of the nullspace of U and V , respectively.



Liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches en poste à l'Ecole Centrale de Lyon

| Nom-Prénom | Corps grade | Laboratoire ou à défaut département ECL | Etablissement |
|--------------------------|------------------------|---|---------------|
| BEROUAL Abderrahmane | professeur | AMPERE | ECL |
| BURET François | professeur | AMPERE | ECL |
| JAFFREZIC-RENAULT Nicole | directeur de recherche | AMPERE | CNRS/ECL |
| KRÄHENBÜHL Laurent | directeur de recherche | AMPERE | CNRS/ECL |
| NICOLAS Alain | professeur | AMPERE | ECL |
| NICOLAS Laurent | directeur de recherche | AMPERE | CNRS/ECL |
| SCORLETTI Gérard | professeur | AMPERE | ECL |
| SIMONET Pascal | directeur de recherche | AMPERE | CNRS/ECL |
| VOLLAIRE Christian | professeur | AMPERE | ECL |

Nbre Ampère 9

| | | | |
|---------------|-----------------------|---------|-----|
| HELLOUIN Yves | maître de conférences | DER EEA | ECL |
|---------------|-----------------------|---------|-----|

Nbre DER EEA 1

| | | | |
|-------------------|--------------------|----------|-----|
| GUIRALDENQ Pierre | professeur émérite | DER STMS | ECL |
| VINCENT Léo | professeur | DER STMS | ECL |

Nbre DER STMS 2

| | | | |
|----------------------|-----------------------|-----|-----|
| LOHEAC Jean-Pierre | maître de conférences | ICJ | ECL |
| MAITRE Jean-François | professeur émérite | ICJ | ECL |
| MARION Martine | professeur | ICJ | ECL |
| MIRONESCU Elisabeth | professeur | ICJ | ECL |
| MOUSSAOUI Mohand | professeur | ICJ | ECL |
| MUSY François | maître de conférences | ICJ | ECL |
| ZINE Abdel-Malek | maître de conférences | ICJ | ECL |

Nbre ICJ 7

| | | | |
|------------------------|------------------------|-----|----------|
| CALLARD Anne-Ségolène | professeur | INL | ECL |
| CLOAREC Jean-Pierre | maître de conférences | INL | ECL |
| GAFFIOT Frédéric | professeur | INL | ECL |
| GAGNAIRE Alain | maître de conférences | INL | ECL |
| GARRIGUES Michel | directeur de recherche | INL | CNRS/ECL |
| GENDRY Michel | directeur de recherche | INL | CNRS/ECL |
| GRENET Geneviève | directeur de recherche | INL | CNRS/ECL |
| HOLLINGER Guy | directeur de recherche | INL | CNRS/ECL |
| KRAWCZYK Stanislas | directeur de recherche | INL | CNRS/ECL |
| LETARTRE Xavier | chargé de recherche | INL | CNRS/ECL |
| O'CONNOR Ian | professeur | INL | ECL |
| PHANER-GOUTORBE Magali | professeur | INL | ECL |
| ROBACH Yves | professeur | INL | ECL |
| SAINT-GIRONS Guillaume | chargé de recherche | INL | CNRS/ECL |
| SEASSAL Christian | directeur de recherche | INL | CNRS/ECL |

| | | | |
|---------------------|------------------------|-----|----------|
| SOUTEYRAND Eliane | directeur de recherche | INL | CNRS/ECL |
| TARDY Jacques | directeur de recherche | INL | CNRS/ECL |
| VIKTOROVITCH Pierre | directeur de recherche | INL | CNRS/ECL |

Nbre INL 18

| | | | |
|----------------|------------|-------|-----|
| CHEN Liming | professeur | LIRIS | ECL |
| DAVID Bertrand | professeur | LIRIS | ECL |

Nbre LIRIS 2

| | | | |
|-------------------------|------------------------|------|----------|
| BAILLY Christophe | professeur | LMFA | ECL |
| BERTOGLIO Jean-Pierre | directeur de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| BLANC-BENON Philippe | directeur de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| BOGEY Christophe | chargé de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| CAMBON Claude | directeur de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| CARRIERE Philippe | directeur de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| CHAMPOUSSIN J-Claude | professeur émérite | LMFA | ECL |
| COMTE-BELLOT genevièvre | professeur émérite | LMFA | ECL |
| FERRAND Pascal | directeur de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| GALLAND Marie-Annick | professeur | LMFA | ECL |
| GODEFERD Fabien | directeur de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| GOROKHOVSKI Mikhail | professeur | LMFA | ECL |
| HENRY Daniel | directeur de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| JEANDEL Denis | professeur | LMFA | ECL |
| JUVE Daniel | professeur | LMFA | ECL |
| LE RIBAUT Catherine | chargée de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| LEBOEUF Francis | professeur | LMFA | ECL |
| PERKINS Richard | professeur | LMFA | ECL |
| ROGER Michel | professeur | LMFA | ECL |
| SCOTT Julian | professeur | LMFA | ECL |
| SHAO Liang | directeur de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| SIMOENS Serge | chargé de recherche | LMFA | CNRS/ECL |
| TREBINJAC Isabelle | maître de conférences | LMFA | ECL |

Nbre LMFA 23

| | | | |
|---------------------|------------------------|------|----------|
| BENAYOUN Stéphane | professeur | LTDS | ECL |
| CAMBOU Bernard | professeur | LTDS | ECL |
| COQUILLET Bernard | maître de conférences | LTDS | ECL |
| DANESCU Alexandre | maître de conférences | LTDS | ECL |
| FOUVRY Siegfried | chargé de recherche | LTDS | CNRS/ECL |
| GEORGES Jean-Marie | professeur émérite | LTDS | ECL |
| GUERRET Chrystelle | chargé de recherche | LTDS | CNRS/ECL |
| HERTZ Dominique | past | LTDS | ECL |
| ICHCHOU Mohamed | professeur | LTDS | ECL |
| JEZEQUEL Louis | professeur | LTDS | ECL |
| JUVE Denyse | ingénieur de recherche | LTDS | ECL |
| KAPSA Philippe | directeur de recherche | LTDS | CNRS/ECL |
| LE BOT Alain | directeur de recherche | LTDS | CNRS/ECL |
| LOUBET Jean-Luc | directeur de recherche | LTDS | CNRS/ECL |
| MARTIN Jean-Michel | professeur | LTDS | ECL |
| MATHIA Thomas | directeur de recherche | LTDS | CNRS/ECL |
| MAZUYER Denis | professeur | LTDS | ECL |
| PERRET-LIAUDET Joël | maître de conférences | LTDS | ECL |
| SALVIA Michelle | maître de conférences | LTDS | ECL |
| SIDOROFF François | professeur | LTDS | ECL |
| SINOUE Jean-Jacques | professeur | LTDS | ECL |
| STREMSDOERFER Guy | professeur | LTDS | ECL |

| | | | |
|--------------------------|------------------------------|------|-----|
| <i>THOUVEREZ Fabrice</i> | <i>professeur</i> | LTDS | ECL |
| <i>TREHEUX Daniel</i> | <i>professeur</i> | LTDS | ECL |
| <i>VINCENS Eric</i> | <i>maître de conférences</i> | LTDS | ECL |

Nbre LTDS 25

Total HdR ECL

91

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur G. SCORLETTI

et les rapports de

Monsieur M. ZASADZINSKI
Professeur - CRAN - Campus Science - BP 70239 - 54500 VANDOEUVRE cedex

Et de

Monsieur J-P. BARBOT
Professeur - EA 3649 - 6 avenue du Ponceau - 95014 CERGY-PONTOISE cedex

Monsieur BAYON Benoît

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale **ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE**

Fait à Ecully, le 29 novembre 2012

P/Le directeur de l'E.C.L.
La directrice des Etudes

